Une étude modèle-théorique du formalisme tannakien

Simon Iosti

Thèse de doctorat

Spécialité : Mathématiques

présentée à
l'Université Claude Bernard Lyon 1

le 25 juin 2014

Une étude modèle-théorique du formalisme tannakien

Simon Iosti
sous la direction de Tuna Altinel

École doctorale Infomaths, ED 512

Rapporteurs :
Françoise Delon
Moshe Kamensky
Thomas Scanlon

Membres du jury :
Tuna Altinel
Zoé Chatzidakis
Françoise Delon
Françoise Point
Thomas Scanlon
Frank Wagner

Table des matières

Introduction

Le formalisme tannakien trouve son origine dans ce que l'on connaît aujourd'hui comme la dualité de Pontryagin et la dualité de Tannaka-Krein. La dualité de Pontryagin établit une correspondance entre un groupe commutatif localement compact et son groupe de caractères, c'est-à-dire le groupe de ses représentations de dimension 1 sur $\mathbb{C}$. La dualité de Tannaka-Krein peut être vue comme la version non-commutative de la dualité de Pontryagin. Elle considère un groupe compact G, et remplace la notion de groupe de caractères — qui n'est plus suffisante pour caractériser le groupe de départ — par la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de G sur $\mathbb{C}$.

Cette idée d'« objet dual » d'un groupe (le groupe des caractères dans le cas de la dualité de Pontryagin, et la catégorie des représentations dans le cas de la dualité de Tannaka-Krein) a été plus tard réutilisée par Alexandre Grothendieck pour construire une théorie de Galois abstraite, et par son étudiant Neantro Saavedra-Rivano, dont le livre [23] développe la notion de catégorie tannakienne. Le formalisme tannakien dont nous parlerons dans cette thèse est celui inspiré par ces catégories tannakiennes. Dans ce formalisme, l'objet dual d'un groupe algébrique G défini sur un corps k est la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de G sur k, munie du produit tensoriel de représentations. Le groupe G peut alors, sous certaines hypothèses, être reconstruit à partir de cette catégorie : c'est le groupe des automorphismes du foncteur « oubli de l'action de G », qui associe à une représentation l'espace vectoriel sous-jacent, et à un morphisme de représentations l'application linéaire sous-jacente.

Le formalisme tannakien a depuis été étudié, développé et utilisé dans de nombreuses branches des mathématiques. Dans cette thèse, nous allons nous concentrer sur une version modèle-théorique réminiscente de celle qui est présentée dans [23], mais qui concerne des groupes définis sur des corps ou des anneaux non nécessairement purs. Les anneaux en question sont ce que nous appellerons les *anneaux différentiels généralisés*, qui permettent en particulier de parler, dans un même langage, d'anneaux différentiels ou d'anneaux aux différences. Le choix de ces anneaux pour développer notre formalisme a été motivé essentiellement par l'article [2] par Yves André, dans lequel ils sont définis et étudiés, et dans lequel est introduite la notion de *module à connexion* sur un tel anneau, qui semblait être le bon objet à considérer pour construire la catégorie des représentations d'un groupe « algébrique » sur cet anneau.

Pour développer le formalisme, nous allons faire usage de diverses notions modèle-théoriques ; l'une d'entre elles est celle de groupe de liaison. Les groupes de liaison ont été introduits par Boris Zil'ber pour étudier les théories totalement catégoriques dans [24]. Bruno Poizat, dans [19], a mis en évidence et étudié le fait que les groupes de Galois usuels et les groupes de Galois différentiels sont des cas particuliers de groupes de liaison ; il insiste en particulier sur le fait que les groupes de liaison peuvent être vus comme des groupes de Galois abstraits. Par la suite, Ehud Hrushovski a démontré dans [9] un théorème général donnant des conditions sur une structure du premier ordre pour qu'un groupe de liaison soit type-définissable ; c'est dans ces conditions que nous allons présenter les groupes de liaison. L'idée du formalisme tannakien que nous allons développer dans cette thèse est de réaliser un groupe G définissable dans une structure algébrique $\mathscr{A}$ (en l'occurrence, un anneau différentiel généralisé) comme un groupe de liaison de son objet dual, qui se trouve être définissable dans $\mathscr{A}$. Comme nous le mentionnerons plus loin, cette idée n'a malheureusement pas pu aboutir à un résultat tannakien satisfaisant, mais le formalisme développé dans la thèse semble malgré tout être le bon cadre de raisonnement pour permettre un tel résultat dans des travaux futurs.

L'idée d'utiliser la théorie des modèles et les groupes de liaison pour traiter du formalisme tannakien provient de l'article [11] par Moshe Kamensky. Dans cet article, il utilise une démonstration modèle-théorique pour retrouver la dualité tannakienne classique sur les corps purs de caractéristique nulle ; il associe à un groupe algébrique défini sur un tel corps sa catégorie « tannakienne » de représentations linéaires de dimension finie sur ce corps, puis reconstruit le groupe comme un groupe de liaison de cette catégorie vue comme une structure du premier ordre. Il adapte ensuite sa démonstration pour obtenir un théorème similaire dans le cas d'un groupe algébrique différentiel défini sur un corps différentiel de caractéristique nulle.

Dans cette thèse, l'objectif est d'utiliser la démonstration de Kamensky et son adaptation au cas différentiel dans des situations moins favorables (modèle-théoriquement parlant). Les corps différentiels étant des cas particuliers d'anneaux différentiels généralisés, il semble naturel de chercher à généraliser les idées de Kamensky dans cette direction. Une autre motivation pour considérer ces anneaux est le fait que les corps de différence en sont aussi un cas particulier, ainsi que les corps mixtes différentiels-aux différences. L'un des problèmes qui se pose rapidement est le fait que la démonstration de Kamensky utilise fortement certaines propriétés modèle-théoriques des corps algébriquement clos et des corps différentiellement clos, en particulier leur stabilité et l'élimination des quantificateurs. Ne disposant a priori pas de telles propriétés pour les anneaux différentiels généralisés, ni de bon candidat pour jouer le rôle d'une hypothétique « clôture différentielle généralisée » d'un tel anneau, il a fallu contourner ce problème en analysant plus précisément les propriétés modèle-théoriques d'une catégorie tannakienne. Il est apparu qu'une telle catégorie semble modèle-théoriquement assez simple à comprendre, pour peu que l'on oublie toute la complexité modèle-théorique de l'anneau sous-jacent. Ce constat permet de contourner une partie des problèmes qui se posent lors d'une tentative d'adaptation directe de la démonstration de Kamensky.

En revanche, plusieurs autres obstacles plus fondamentaux sont apparus au cours de notre investigation d'une version du formalisme tannakien pour les anneaux différentiels généralisés. L'un d'entre eux est que le passage aux anneaux différentiels généralisés ne nous permet pas de retrouver une version « algébrique » du formalisme tannakien, mais seulement une version « définissable » : les groupes considérés ne sont pas des groupes algébriques, ni même une adaptation directe de la notion de groupe algébrique à un cas différentiel, mais seulement des groupes définissables sans quantificateurs dans un anneau différentiel généralisé ; autrement dit, ils sont plutôt l'équivalent de ce que les géomètres appelleraient « groupes constructibles » dans l'anneau différentiel généralisé. L'absence d'une identification entre les groupes constructibles et les groupes algébriques (qui existe dans le cas des corps algébriquement ou différentiellement clos, voir le théorème 4.13 dans [21], et le corollaire 4.2.(i) dans [17]), qui est utilisée par Kamensky pour retrouver le formalisme tannakien classique, est l'un des obstacles à ce que notre formalisation permette de démontrer une version plus algébrique du formalisme tannakien sur les anneaux différentiels généralisés.

Un autre obstacle de taille à à notre entreprise a été découvert par Moshe Kamensky, en tant que rapporteur de cette thèse dans une première version soumise. Cet obstacle provient de la définition que nous avons choisie de représentation d'un groupe défini sur un anneau différentiel généralisé. Suivant cette définition, une représentation d'un tel groupe est une action de ce groupe sur un module à connexion (dont un cas particulier dans le cas différentiel usuel est celui de module différentiel) qui préserve la connexion. Mais cette hypothèse de préservation est en fait une hypothèse très restrictive, qui implique en particulier que la représentation en question ne peut être très éloignée d'un groupe défini sur les constantes de la différentielle généralisée. Ceci ne rend pas les résultats énoncés dans la thèse inintéressants, puisque le cas des groupes algébriques définis sur les constantes d'un corps différentiel, par exemple, est utile pour traiter de la théorie de Galois des équations différentielles linéaires. Cependant, ceci limite la portée des résultats de la thèse en ce sens que la théorie de Galois des équations différentielles et aux différences linéaires est déjà bien étudiée, y compris dans une perspective tannakienne, et les résultats énoncés ici, bien que l'étant dans une plus grande généralité que dans les travaux déjà existants, ne permettent pas d'étudier la théorie de Galois des équations non-linéaires dont le groupe de Galois pertinent serait défini sur l'anneau différentiel généralisé tout entier plutôt que sur ses seules constantes.

Une autre conséquence de ces divers obstacles rencontrés a été l'incapacité de l'auteur de la thèse à obtenir une dualité tannakienne dans le contexte des anneaux différentiels généralisés. Précisément, un point technique fondamental dans la démonstration modèle-théorique de la dualité tannakienne par Moshe Kamensky montre que les imaginaires dans la structure du premier ordre associée à une catégorie tannakienne sont éliminés par la théorie modulo l'ajout dans le langage de sortes codant les espaces projectifs associés aux objets de la catégorie ; notre formalisme, au niveau de généralité dans lequel nous espérions pourvoir mener le raisonnement, ne permet pas d'avoir une propriété similaire pour notre version des catégories tannakiennes, et ceci nous empêche de mettre les constructions du chapitre 4 à profit pour obtenir des résultats tannakiens, qui reposent largement sur la présence de ces « imaginaires projectifs ». Si il est envisageable de contourner ce problème en faisant de fortes hypothèses sur l'anneau différentiel généralisé sous-jacent, de telles hypothèses ramèneraient essentiellement les résultats dans les cas « classiques » (c'est-à-dire les cas différentiels et aux différences usuels) aux résultat tannakiens déjà connus sur les groupes algébriques définis sur les constantes d'un corps différentiel ou d'un corps de différence. Notre formalisme ayant de plus pour objectif initial de traiter des groupes algébriques « différentiels », c'est-à-dire définis sur l'anneau différentiel généralisé tout entier, nous nous sommes restreints dans la thèse à ne présenter que le formalisme lui-même et son étude modèle-théorique, et de reporter l'énoncé de résultats tannakiens satisfaisants à des travaux futurs.

Passons en revue les différentes parties de ce travail. Le premier chapitre contient divers rappels modèle-théoriques, dont la majorité est très classique. Quelques notions moins standard seront tout de même évoquées. D'une part, le plongement stable, qui est une condition, portant sur un ensemble, permettant de contrôler les paramètres que l'on utilise pour parler de cet ensemble. D'autre part, la notion de modèle spécial, qui est une approximation d'un modèle saturé, mais qui a l'avantage d'exister sans recours à l'hypothèse du continu. On rappellera également plusieurs exemples de théories de corps, qui sont celles qui s'imposent le plus rapidement à l'esprit pour appliquer le formalisme tannakien que l'on va développer.

Le second chapitre s'intéresse aux groupes de liaison. On y présente la notion d'internité d'un ensemble A dans un ensemble B, qui est une condition affirmant intuitivement que A est « connu » par B grâce à une bijection définissable dans le modèle ambiant. Si cette bijection est définie avec un paramètre c, alors l'étude du groupe des automorphismes de A fixant B point par point se ramène essentiellement à l'étude de l'orbite du paramètre c par ce groupe. Avec une condition supplémentaire sur B pour contrôler les paramètres intervenant dans la définition (le plongement stable, pour ne pas le nommer), et une certaine hypothèse de saturation du modèle ambiant (sa spécialité), on en déduit, suivant les traces de Hrushovski dans [10], la type-définissabilité de ce groupe d'automorphismes, que l'on appellera *groupe de liaison* de l'internité.

Le troisième chapitre s'intéresse aux anneaux différentiels généralisés, en s'appuyant sur la présentation qui en a été faite par Yves André dans [2]. On définit donc les anneaux différentiels généralisés, ainsi que les connexions (qui sont le pendant des différentielles sur un module dans le cas des anneaux différentiels). On construit ensuite, sous certaines hypothèses, la catégorie des modules à connexion, en démontrant que les connexions sont « préservées » dans un certain sens par quelques opérations algébriques usuelles, comme le produit tensoriel ou le passage au dual. On vérifie en fait que la catégorie des modules à connexion est tannakienne, pour employer le vocabulaire du chapitre suivant. On introduit enfin un langage qui nous permet de faire des anneaux différentiels généralisés une structure du premier ordre (à condition que quelques hypothèses soient vérifiées par l'anneau), et on discute de la notion de polynôme différentiel généralisé vu comme terme dans ce langage, et de diverses notions associées.

Le quatrième chapitre contient le coeur de cette thèse. On y introduit tout d'abord les notions catégoriques nécessaires à la définition des catégories tannakiennes, en s'efforçant de garder à l'esprit l'exemple de la catégorie des modules à connexion. Ceci nous permet de définir les catégories tannakiennes différentielles, qui sont définies en suivant de près la définition que Kamensky a donné dans [11]. On introduit ensuite un langage permettant de faire d'une catégorie tannakienne tannakienne quelconque sur un anneau différentiel généralisé une structure du premier ordre, et on étudie les propriétés modèle-théoriques de ces catégories, sous certaines hypothèses algébriques étendant celles déjà faites au chapitre précédent. En particulier, comme on l'a déjà signifié ci-dessus, on observe que l'essentiel de la complexité modèle-théorique d'une telle catégorie provient de l'anneau différentiel généralisé sous-jacent, et ceci permet d'en étudier les propriétés « modulo la théorie de l'anneau ». On décrit l'internité et le plongement stable dans ce contexte, on lie la saturation d'une catégorie tannakienne différentielle à celle de son anneau différentiel généralisé sous-jacent, et on montre que le groupe de liaison associé à l'internité ainsi décrite est exactement le groupe des automorphismes du foncteur fibre de la catégorie tannakienne différentielle. Cette étude modèle-théorique nous semble aller dans la bonne direction pour espérer, avec de plus amples travaux, démontrer une dualité tannakienne pour les groupes algébriques différentiels au sens des anneaux différentiels généralisés.

Le cinquième chapitre est relativement indépendant du reste de la thèse. La motivation initiale provient de l'étude de la correspondance démontrée par Ehud Hrushovski dans [10] entre les groupoïdes définissables dans une structure du premier ordre et les sortes imaginaires internes à sa théorie, qui jouent le rôle d'imaginaires « généralisés ». Cette correspondance se fait modulo une relation d'équivalence entre groupoïdes et une relation d'équivalence entre sortes imaginaires internes. Informellement, deux sortes imaginaires internes sont équivalentes si elles se correspondent via une bijection préservant les ensembles définissables sans paramètres. Une bijection entre deux structures préservant la famille des ensembles définissables (avec paramètres) est ce que Bruno Poizat a appelé « transformation » dans l'article [22], et a formalisé comme étant un isomorphisme entre les « univers » associés aux structures, c'est-à-dire leurs familles d'ensembles définissables. Le cinquième chapitre décrit donc la notion abstraite d'univers telle qu'elle a été développée par Poizat dans cet article, en expliquant les notions correspondant, au niveau des univers, à certaines notions modèle-théoriques usuelles. En particulier, nous y étudions en détail la notion de « similarité », qui joue le rôle de l'équivalence élémentaire pour les univers, et définissons une topologie sur l'ensemble des classes de similarité des sous-univers d'un univers donné, et étudions certaines de ses propriétés topologiques, répondant ainsi à une question de l'article [22] sur l'existence d'une telle topologie significative ; en particulier, la topologie ainsi définie semble être une notion assez robuste, en ce sens qu'elle ne dépend que de la classe de similarité de l'univers ambiant. Nous revenons ensuite à la motivation initiale des groupoïdes, en décrivant une notion d'univers plus restrictive permettant de garder une trace des ensembles définissables sans paramètres dans les structures associées aux univers, et en reformulant la correspondance groupoïdes-sortes imaginaires internes dans le langage des univers, remarquant en particulier que l'équivalence entre sortes imaginaires internes peut être vue comme une similarité entre les univers associés à ces sortes.

Enfin, le sixième et dernier chapitre recense quelques questions ouvertes et réflexions sur des pistes de recherche futures, en lien avec les sujets abordés dans la thèse.

Remerciements

Je remercie mon maître de thèse, Tuna Altınel, pour m'avoir permis de réaliser cette thèse sous sa direction, et pour la grande quantité de temps qu'il a passé à discuter, guider, et améliorer non seulement mon travail de thèse, mais également ma découverte du travail de chercheur. Sa présence et son encadrement constants m'ont permis d'aboutir à cette réalisation qu'est la présente thèse, et je lui suis extrêmement reconnaissant d'avoir permis ceci.

J'aimerais également remercier les rapporteurs de ma thèse, Françoise Delon, Moshe Kamenksy, et Thomas Scanlon, dont la lecture attentive m'a permis de corriger les erreurs et imprécisions que les versions précédentes de ce manuscrit contenaient. La lecture d'un manuscrit de thèse étant une tâche hautement non-triviale, je leur suis très reconnaissant de l'avoir réalisée de cette manière constructive et encourageante. Ce travail ne serait pas ce qu'il est sans elle et eux.

In particular, I would like to thank Moshe Kamensky and Thomas Scanlon for accepting to read this manuscript in French. I am very grateful for their acceptation of this trouble in addition to the already nontrivial task of reading such a manuscript.

Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'être présents pour ma soutenance.

Enfin, je remercie toutes les personnes et institutions avec lesquelles j'ai eu le plaisir d'interagir durant ma thèse ; en particulier, l'équipe de Logique de Lyon, celle de Bogotá, et les nombreuses personnes rencontrées au cours des diverses conférences et séminaires auxquels j'ai eu l'occasion d'assister ou de participer.

Chapitre 1

Préliminaires modèle-théoriques

1.1 Langages, théories et modèles

Dans tout ce travail, on se placera dans le contexte de la logique du premier ordre. Cette section est destinée à rappeler ce contexte et certaines notions et résultats classiques, et à définir certaines notations qui seront utilisées dans la suite. On peut se référer aux livres de Bruno Poizat [20] ou Wilfrid Hodges [8] pour une grande partie de ce que contient ce chapitre. On ne donnera pas d'autres références ici pour les notions les plus classiques.

Langages et formules

Une *signature* est un ensemble $\mathscr{S}$ constitué de la réunion d'un ensemble C de *symboles de constante*, et, pour tout entier $n \geq 1$, d'un ensemble R_n de *symboles de relation d'arité* n, et d'un ensemble F_n de *symboles de fonction d'arité* n. On suppose toujours que R_2 contient un symbole $=$.

En plus de ces symboles, nous allons considérer un ensemble $\mathscr{X}$ contenant deux symboles de parenthèse (ouvrante et fermante) et un symbole de virgule, des symboles de connecteurs logiques ($\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), des symboles de quantificateurs ($\forall$, $\exists$), et un nombre dénombrable de symboles de variables $(x_0, x_1, \dots)$; cet ensemble $\mathscr{X}$ va nous servir à construire l'ensemble des éléments du *langage associé à la signature* $\mathscr{S}$.

On fixe une signature $\mathscr{S}$. Un *terme* est une suite de symboles de $\mathscr{S} \cup \mathscr{X}$, définis par induction comme suit : un symbole de variable ou de constante est un terme ; si $f \in F_n$ est un symbole de fonction d'arité n et $t_1, \dots, t_n$ sont n termes, alors la suite de symboles $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme ; l'ensemble des termes est obtenu inductivement de cette manière.

Une *formule atomique* est une suite de symboles de $\mathscr{S} \cup \mathscr{X}$ définie comme suit : si $R \in R_n$ est un symbole de relation d'arité n, et que $t_1, \dots, t_n$ sont des termes, alors la suite de symboles $R(t_1, \dots, t_n)$ est une formule atomique, et l'ensemble des formules atomiques est obtenu de cette manière.

Enfin, une *formule* est une suite de symboles de $\mathscr{S} \cup \mathscr{X}$ définie par induction comme suit : une formule atomique est une formule ; si ϕ et ψ sont des formules, alors les suites de symboles $\neg(\phi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$, et $(\phi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules ; si ϕ est une formule et x est un symbole de variable, alors les suites de symboles $(\forall x, \phi)$ et $(\exists x, \phi)$ sont des formules ; l'ensemble des formules est obtenu inductivement de cette manière. Si ϕ est une formule, on appelle *sous-formule* de ϕ l'une des formules apparaissant dans la construction de ϕ par itération des opérations ci-dessus. L'ensemble des sous-formules d'une formule donnée est bien défini : l'utilisation des parenthèses dans la construction des formules assure que l'on ne peut pas avoir deux constructions de ϕ produisant des sous-formules différentes.

On définit le *langage* L de signature $\mathscr{S}$ comme étant l'ensemble des formules ainsi construites. En pratique, nous ferons en général l'amalgame entre un langage et sa signature ; on parlera des *éléments du langage* pour parler des éléments de sa signature, et des *formules du langage* pour parler des formules construites avec les éléments de la signature. Nous ferons également parfois un abus de notation en omettant certaines parenthèses dans certaines formules lorsque cela ne prêtera pas à confusion. Si on étend la signature $\mathscr{S}$ par un ensemble A de symboles de constante, on notera le nouveau langage $L \cup A$, ou parfois $L(A)$.

Soit ϕ une formule contenant une instance du symbole de variable x. On dit que cette instance est une *variable liée* si il existe une sous-formule ψ de ϕ contenant cette instance de x et telle que $(\exists x, \psi)$ soit une sous-formule de ϕ. On dit que c'est une *variable libre* si elle n'est pas liée. On notera en général la formule par $\phi(x)$ si l'on souhaite préciser que x est une variable libre dans ϕ (y compris si une autre instance de x est liée dans ϕ). Un *énoncé* est une formule sans variable libre.

Structures, paramètres, et isomorphismes

Étant donné un langage L, on appelle *L-structure* un ensemble M dont on a nommé un élément pour chaque élément de l'ensemble des symboles de constante C, et muni d'une relation d'arité n pour chaque élément de R_n et d'une fonction d'arité n pour chaque élément de F_n. Ces éléments, relations, et fonctions de M sont appelés des *interprétations* du langage dans M. Si deux structures M et N sont telles que $M \subset N$ et que les interprétations des éléments du langage dans M sont les restrictions des interprétations correspondantes dans N, alors M est appelé une *sous-structure* de N, et N une *extension* de M. Si M est une L-structure et que N est une L'-structure telles que les ensembles sous-jacents de M et N sont égaux, et que $L \subseteq L'$, alors on appelle N une *expansion* de M, et M un *réduit* de N.

Lorsque l'on écrit un énoncé du langage L, on peut alors *interpréter* cet énoncé comme un énoncé *à propos de la structure* M. De même, une formule du langage L peut être *interprétée* comme une formule dans la structure M. On dit alors qu'une L-structure M est un *modèle* d'un ensemble Σ d'énoncés de L si l'interprétation dans M de chaque énoncé dans Σ est un énoncé vrai pour M. Pour une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ de variables libres $x_1, \ldots, x_n$ et $a_1, \ldots, a_n \in M$, on note $M \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$ si l'énoncé $\phi(a_1, \ldots, a_n)$ dans le langage $L \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$ a pour modèle M' qui consiste en le modèle M avec les interprétations naturelles de $a_1, \ldots, a_n$, et on dit que « $(a_1, \ldots, a_n)$ réalise $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ dans M ». Un ensemble de formules dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n$ est dit réalisé par $(a_1, \ldots, a_n)$ si chaque formule est réalisée par ce n-uplet.

Un ensemble d'énoncés ayant un modèle est dit *consistant*, et un ensemble de formules ayant une réalisation dans un modèle d'un ensemble d'énoncés Σ est dit *consistant avec* Σ (on sous-entend ici que les énoncés et les formules sont dans le même langage).

Un *isomorphisme* entre deux L-structures M et N est une bijection $\sigma : M \to N$ qui préserve la satisfaction des formules ; autrement dit, telle que $M \models \phi(a)$ si et seulement si $N \models \phi(a)$ pour toute formule ϕ.

Un ensemble B dans une L-structure M (ou dans M^n) est dit A-*invariant* pour un ensemble $A \subset M$ si tout automorphisme de M fixant A point par point stabilise B.

Si $A \subseteq M$, on peut ajouter au langage un symbole de constante c_a pour chaque élément $a \in A$. Ces symboles de constante seront appelés *paramètres*, et les formules de ce nouveau langage seront appelées *formules à paramètres dans* A. Lorsque l'on utilise un ensemble de paramètres A dans les formules, on suppose implicitement que tous les modèles de la théorie considérés contiennent l'ensemble A. En pratique, on ne fera pas la distinction entre les éléments de A et les symboles de constante associés, et un symbole c_a sera désigné par a. Si M est une L-structure et $A \subseteq M$, on notera M_A la $L(A)$-structure canoniquement associée à M en interprétant chaque symbole c_a comme l'élément a de M.

On appelle *théorie élémentaire de* M l'ensemble des énoncés sans paramètres qui sont vrais dans M, et on la note $Th(M)$. C'est un ensemble consistant d'énoncés. Étant donné un uplet $\bar{a}$ d'éléments de M et un ensemble $A \subseteq M$, on appelle *type de* $\bar{a}$ *sur* A, et on note $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$, l'ensemble des formules à paramètres dans A satisfaites par $\bar{a}$ dans M.

Sortes

On travaille parfois dans des structures contenant plusieurs *sortes* ; ceci consiste à associer à chaque élément de la structure une information indiquant à quelle partie de la structure appartient cet élément. On considère une structure M avec une partition $M = \bigsqcup M_i$ de son ensemble sous-jacent. Les *sortes* sont les éléments M_i de cette partition, et le langage est légèrement modifié pour décrire cette partition : chaque symbole de constante et de variable est associé à une sorte, et chaque quantificateur ne porte que sur une seule sorte ; si f est un symbole de relation n-aire, alors chacun de ses n arguments ainsi que son domaine d'arrivée est associé à une sorte ; de même pour les symboles de relation.

Lorsque l'on ne considère qu'un nombre fini de sortes (S_i), ce point de vue est équivalent à prendre une structure à une seule sorte en remplaçant les sortes S_i par des prédicats (symboles de relation unaire). Si le nombre de sortes est infini, les remplacer par des prédicats implique qu'il existe des extensions de la structure ayant la même théorie élémentaire, mais contenant des éléments en dehors de chacun de ces prédicats (d'après le théorème de compacité 1.1.2) . Le point de vue des sortes évite ce petit écueil, ce qui le rend parfois plus aisé à manipuler.

Un exemple de structure avec sortes est donné par la structure d'un espace vectoriel V sur un corps k, décrit par deux sortes : une sorte V munie d'un symbole de fonction binaire $+_V$ de $V \times V$ dans V, et une sorte k munie de deux fonctions binaires $+_k$ et $\times_k$ de $k \times k$ dans k, ainsi qu'un symbole de fonction binaire $\cdot$ de $k \times V$ dans V, tous ces symboles étant interprétés comme la structure naturelle d'espace vectoriel. On verra plus loin, dans la construction de M^{eq}, un usage systématique des structures à une infinité de sortes.

Théories et types

Un ensemble d'énoncés Σ est dit être *conséquence* d'un ensemble d'énoncés Φ si tout modèle de Φ est un modèle de Σ. Une *théorie* T est un ensemble consistant d'énoncés qui est clos par conséquences (tout énoncé qui est conséquence de T est dans T). On dit que T est *complète* si elle est maximale pour l'inclusion dans l'ensemble des théories dans le même langage. La théorie élémentaire $Th(M)$ d'une structure M est toujours une théorie complète.

Soient $x_1, \dots, x_n$ des symboles de variables et A un ensemble de paramètres. Un *type* à paramètres dans A sur ces variables dans une théorie T est un ensemble p de formules à paramètres dans A ayant leurs variables libres parmi $x_1, \dots, x_n$ et tel que p est consistant avec T. Un type est dit *complet* si il est maximal pour l'inclusion. L'ensemble des types complets à paramètres dans A est noté $S(A)$. L'ensemble des types complets à n variables $x_1, \dots, x_n$ et à paramètres dans A est noté $S_n(A)$ (le choix des symboles de variables $x_1, \dots, x_n$ ne changeant pas l'interprétation des types, nous faisons un abus de langage en ne précisant pas dans la notation $S_n(A)$ quels symboles de variables nous utilisons). Le type $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ d'un n-uplet $\bar{a}$ sur un ensemble A de paramètres est un élément de $S_n(A)$.

Deux L-structures sont dites *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes énoncés sans paramètres, autrement dit si $Th(M) = Th(N)$. Une extension $M \subset N$ de structures est dite *extension élémentaire* si M et N satisfont les mêmes énoncés à paramètres dans M, autrement dit si $Th(M_M) = Th(N_M)$. On note alors $M \preccurlyeq N$.

Modèles saturés

Un type complet dans une théorie T n'est pas forcément réalisé dans tous les modèles de cette théorie. Il peut être intéressant de se placer dans un modèle qui contient « beaucoup » de réalisations de types. La notion de modèle saturé permet de donner une définition précise à ceci :

Définition 1.1.1 (Modèle saturé)
Soit T une théorie, et κ un cardinal infini. On dit qu'un modèle M est κ-saturé *si tout type sur un ensemble de paramètres $A \subset M$ de cardinal strictement inférieur à κ est réalisé par un élément de M.*
Si de plus M est de cardinal κ, ou si M est fini, on dit que M est saturé.

On peut démontrer, grâce au théorème de compacité 1.1.2, que tout modèle d'une théorie T a des extensions élémentaires κ-saturées pour tout cardinal infini κ. En revanche, l'existence de modèles saturés pour toute théorie n'est pas assurée (il est impossible de démontrer l'existence de tels modèles dans ZFC). On remplacera donc plus loin la notion de modèle saturé par une notion légèrement plus faible, mais qui ne pose pas ce problème.

Définissabilité

On appelle ensemble *définissable* par une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ dans un modèle M d'une théorie T l'ensemble X des éléments de M^n qui satisfont la formule ϕ. Selon que la formule ϕ contient ou non des paramètres, on dit de X qu'il est définissable avec ou sans paramètres.

On peut voir un ensemble définissable de deux points de vue différents : soit comme ensemble défini par une formule dans un modèle, soit comme la famille des ensembles définis par cette formule dans tous les modèles de la théorie. En pratique, avec les notations ci-dessus, on notera $X = \phi(M)$ pour parler de l'ensemble défini par ϕ dans M, et on ne fera pas la distinction entre la formule ϕ et la famille des ensembles définis par ϕ dans tous les modèles de T.

Dans toute cette thèse, lorsque nous parlerons d'ensembles définissables sans préciser les paramètres utilisés, cela signifiera toujours que l'on parle d'une définissabilité sans paramètres.

Un ensemble dans un modèle $|T|^+$-saturé de T est dit *type-définissable* si il est égal à l'ensemble des réalisations d'un type sur un nombre fini de variables (ou de manière équivalente, si il est une intersection d'ensembles définissables). Il est dit $\star$-définissable si il est défini par un type sur une infinité de variables. On peut évidemment définir ces notions au dessus d'un ensemble de paramètres A.

On définit également une notion de type-définissabilité particulière pour les groupes : un groupe G est dit ω-définissable si il est égal à une intersection de groupes définissables, c'est-à-dire dont l'ensemble sous-jacent et le graphe de la loi de groupe sont définissables.

Deux formules $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont dites *équivalentes modulo T* si $T \models \forall x, \phi(x) \leftrightarrow \psi(x)$. Ceci signifie que tous les ensembles définis par ϕ et ψ sont égaux dans chaque modèle de T.

On dit qu'un type à paramètres sur A est *définissable sur B* si pour toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ sans paramètres, il existe une formule $d_\phi(\bar{y})$ à paramètres dans B telle que $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$ pour $\bar{a} \in A$ si et seulement si $d_\phi(\bar{a})$ est vraie dans tout modèle de T contenant A. Autrement dit, un type est définissable si l'ensemble des paramètres $\bar{a}$ tels que $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$ est un ensemble définissable pour chaque formule ϕ sans paramètres.

Lorsqu'un singleton $\{a\}$ est définissable sur un ensemble A de paramètres, on dira que a est définissable sur A. L'ensemble des éléments définissables sur A est appelé la *clôture définissable* de A, et est noté $dcl(A)$.

Compacité

Un résultat fondamental de la Théorie des Modèles du premier ordre est le « théorème de compacité » :

Théorème 1.1.2 (Compacité)

Un ensemble d'énoncés Σ est consistant si et seulement si toute partie finie de Σ est consistante (on dit aussi : Σ est finiment consistant).
De manière équivalente, un ensemble de formules Σ est consistant avec une théorie T si et seulement si toute partie finie de Σ est consistante avec T.

Le théorème de compacité a une conséquence importante sur la taille des modèles d'une théorie :

Théorème 1.1.3 (Löwenheim-Skolem)

Ascendant : *Si une théorie T a un modèle M de cardinal infini κ, alors pour tout cardinal $\lambda \geq \kappa + |T|$, il existe une extension élémentaire N de M de cardinal λ.*
Descendant : *Si une théorie T a un modèle M de cardinal infini κ, alors pour tout cardinal $|T| \leq \lambda < \kappa$ il existe une sous-structure élémentaire N de M de cardinal λ.*

Le théorème de compacité est utilisé dans la démonstration de la partie ascendante du théorème, et non dans sa partie descendante.

1.2 Élimination des quantificateurs

Définition 1.2.1 (Élimination des quantificateurs)

Une théorie T élimine les quantificateurs *(ou* a l'élimination des quantificateurs*) si toute formule $\phi(x)$ avec au moins une variable libre est équivalente modulo T à une formule $\psi(x)$ sans quantificateur.*

Remarque 1.2.2
On pourrait imposer à cette condition d'être satisfaite également pour les énoncés, mais on ne le fera pas, car cette condition est strictement plus restrictive, et n'est pas celle qui nous servira par la suite.

Toute théorie T peut être « transformée » en une théorie éliminant les quantificateurs. En effet, ajoutons au langage L un symbole de prédicat P_ϕ pour chaque formule $\phi(x)$ du langage, et notons L^+ ce nouveau langage, et T^+ la théorie engendrée par T et les énoncés disant pour toute formule $\phi(x)$ dans L, « $\forall x, \phi(x) \leftrightarrow P_\phi(x)$ ». Alors toute formule du langage L est équivalente modulo T^+ à un prédicat (donc sans quantificateur) dans le nouveau langage. De plus, une formule dans L^+ est équivalente modulo T^+ à une formule de L, et cette nouvelle formule est alors équivalente modulo T^+ à un prédicat dans L^+. Ceci démontre que dans le langage L^+, la théorie T^+ a l'élimination des quantificateurs. De plus, il est facile de voir que tout modèle de T a une expansion (dont les éléments du langage sont définissables) qui est un modèle de T^+, et que tout modèle de T^+ a un réduit qui est un modèle de T, et que ces deux opérations de passage à l'expansion et au réduit sont inverses l'une de l'autre. On appelle T^+ la *Morleyïsée* de T.

Cependant, lorsque l'on cherche à étudier et à comprendre une théorie T en particulier (ainsi que ses ensembles définissables), il est utile de savoir si T élimine les quantificateurs sans augmenter le langage. Et même si ce n'est pas le cas, il peut être utile de déterminer un langage « simple » dans lequel elle les élimine, sans avoir à ajouter beaucoup de prédicats qui rendront la compréhension difficile. C'est pour cela que nous aurons besoin de conditions assurant qu'une théorie donnée élimine les quantificateurs dans un langage donné. La condition suivante est utile parce que c'est une condition portant sur les modèles de la théorie, et non sur la théorie elle-même :

Lemme 1.2.3

Soit T une théorie. Alors T élimine les quantificateurs si et seulement si il existe un modèle $|T|^+$-saturé M de T tel que pour toutes sous-structures A et B de M, de cardinal au plus $|T|$, et tout isomorphisme σ de A vers B, si $a \in M$, il existe $b \in M$ tel qu'il existe une extension de σ en un isomorphisme entre la sous-structure de M engendrée par A et a, et la sous-structure de M engendrée par B et b, de manière à ce que $\sigma(a) = b$.

1.3 Élimination des imaginaires

Définition 1.3.1 (Paramètre canonique)

Soient T une théorie, M un modèle de T, $A \subseteq M$ un ensemble définissable avec paramètres, et $\bar{c}$ un uplet dans un modèle de T. On dit que $\bar{c}$ est un paramètre canonique *si pour tout modèle $N \models T$ contenant A et $\bar{c}$ et tout automorphisme σ de N, σ stabilise A en tant qu'ensemble si et seulement si il fixe $\bar{c}$.*

Définition 1.3.2 (Imaginaires)

On appelle élément imaginaire *d'une théorie T toute classe d'équivalence, dans un modèle de T, d'une relation d'équivalence définissable (éventuellement avec paramètres) dans T.*

Un imaginaire A est dit éliminable *dans T s'il existe un uplet $\bar{c}$ dans un modèle de T tel que $\bar{c}$ soit un paramètre canonique de A.*

La théorie T élimine les imaginaires *si tout imaginaire est éliminable dans T.*

À toute théorie T, on peut associer « canoniquement » une théorie T^{eq} qui élimine les imaginaires. Elle s'obtient en ajoutant une sorte S_E à T pour chaque relation d'équivalence définissable E (la sorte $S_=$ étant la sorte décrite par la théorie T), et en ajoutant des symboles de fonction π_E de $S_=$ vers S_E. Chaque sorte S_E est interprétée comme l'ensemble des classes d'équivalence de E, le symbole de fonction π_E étant interpété comme la projection canonique associée à E.

Lemme 1.3.3 ([18], remarque 1.7)
La théorie T^{eq} élimine les imaginaires.

La théorie T^{eq} a essentiellement les mêmes propriétés modèle-théoriques que T, à l'élimination des imaginaires près. Tout modèle M de T peut être étendu en un modèle M^{eq} de T^{eq}, et réciproquement, tout modèle de T^{eq} est de la forme M^{eq} pour un modèle M de T, et la L-structure M est définissable dans M^{eq}, son ensemble sous-jacent étant l'ensemble des éléments de la sorte $S_=$. Si A est un ensemble de paramètres de M, on notera $dcl^{eq}(A)$ la clôture définissable dans M^{eq} de A vu comme un ensemble de paramètres de M^{eq} (via l'identification précédente entre M et $S_=$).

Comme pour l'élimination des quantificateurs, il peut être intéressant, étant donné une théorie T, de déterminer un langage simple dans lequel T élimine les imaginaires, plutôt que de passer directement à T^{eq}. Nous verrons plus loin des exemples de telles situations.

1.4 Quelques théories utilisées plus loin

Exemple 1.4.1 (ACF_p)
On définit ACF comme la théorie des corps algébriquement clos dans le langage des corps $L_{\text{corps}} = (0, 1, +, -, ., ^{-1})$. La théorie dit « je suis un corps » (ce qui implique un nombre fini d'axiomes), et pour tout entier non-nul n, ACF contient un énoncé disant « tout polynôme de degré n a au moins une solution ».

La théorie ACF ainsi obtenue a pour modèles les corps algébriquement clos, mais elle n'est pas complète : en effet, un corps de caractéristique p non-nulle satisfait l'énoncé « $1+\cdots+1 = 0$ », la somme contenant p termes. Cet énoncé n'est satisfait par aucun autre corps de caractéristique différente, ce qui implique que plusieurs modèles de ACF ne sont pas élémentairement équivalents. Pour compléter la théorie, on précise la caractéristique :

On fixe un entier p nul ou premier, et on définit ACF_p comme étant la théorie engendrée par ACF et l'énoncé « $1 + \cdots + 1 = 0$ » (la somme contenant p termes) si p est non-nul, et ACF_0 comme étant la théorie engendrée par ACF et pour tout n, l'énoncé « $1 + \cdots + 1 \neq 0$ », la somme contenant n termes. La théorie obtenue a pour modèles l'ensemble des corps algébriquement clos de caractéristique p. Cette théorie est complète et élimine les quantificateurs et les imaginaires.

Exemple 1.4.2 (DCF_0)
Pour plus de détails sur les corps différentiellement clos en caractéristique nulle, on pourra se référer à l'article [14].

La théorie DCF_0 est la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique nulle (on pourrait définir de même la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique non-nulle, mais leur théorie des modèles est assez différente, et ils ne nous seront pas utiles par la suite ; on ne parlera donc pas de ceux-ci ici). Pour la définir, on se place dans le langage $L_{\text{diff}} = L_{\text{corps}} \cup \{d\}$, d étant un symbole de fonction unaire. On note D l'énoncé « $\forall x, y, d(x + y) = d(x) + d(y) \wedge d(x.y) = x.d(y) + d(x).y$ ». Cet énoncé dit que d est une dérivation. On note $DACF_0$ la théorie des corps différentiels algébriquement clos de caractéristique nulle, engendrée par ACF_0 et l'énoncé D.

On appelle *polynôme différentiel* en la variable x un polynôme en les variables $x, dx, d^2x, \ldots$. L'*ordre* d'un tel polynôme différentiel P est l'entier n maximal tel que P fait apparaître la variable $d^n x$, ou -1 si P est un polynôme constant. Pour tous entiers non-nuls k, d, d', on note $D_{k,d,d'}$ l'énoncé disant « pour tout polynôme différentiel en une seule variable P d'ordre k et de degré au plus d et tout polynôme différentiel à une seule variable non-nul Q d'ordre strictement inférieur à k et de degré au plus d', il existe un élément x tel que $P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$ ». La théorie DCF_0 est définie comme la théorie engendrée par $DACF_0$ et l'ensemble des énoncés $D_{k,d,d'}$. Les modèles de cette théorie sont appelés les corps différentiellement clos de caractéristique nulle. La théorie DCF_0 est complète, et élimine les quantificateurs et les imaginaires.

Exemple 1.4.3 ($ACFA_0$)
Pour un exposé détaillé sur les corps de différence, on renvoie à l'article [4].

La théorie $ACFA$ est la théorie des corps de différence génériques. Elle est définie dans le langage $L_\sigma = L_{\text{corps}} \cup \{\sigma\}$, σ étant un symbole de fonction unaire. On la définit comme la théorie engendrée par ACF et l'ensemble d'énoncés disant « σ est un automorphisme de corps » et « pour toutes variétés absolument irréductibles U et V avec $V \subset U \times \sigma(U)$ et telles que V se projette génériquement sur U et $\sigma(U)$, il existe $\bar{x}$ tel que $(\bar{x}, \sigma(\bar{x})) \in V$ ». La théorie $ACFA$ est incomplète. On la complète en ajoutant à la théorie des énoncés décrivant la caractéristique (ce qui donne la théorie $ACFA_p$), et le type d'isomorphisme de la clôture algébrique du corps premier.

La théorie $ACFA$ élimine les imaginaires, mais pas les quantificateurs. En revanche, toute formule est équivalente modulo $ACFA$ à une formule existentielle (c'est-à-dire de la forme « $\exists \bar{x}, \phi(\bar{x}, \bar{y})$ », avec ϕ une formule sans quantificateurs).

1.5 Modèles spéciaux

Les modèles spéciaux sont étudiés de manière détaillée dans le livre [8], chapitre 10.4. Tout ce qui se trouve dans cette section provient de cette source. On s'intéresse à ces modèles afin de pouvoir utiliser certaines propriétés de saturation, mais en évitant les modèles saturés dont l'existence n'est pas assurée dans une théorie quelconque ; les modèles spéciaux existent pour toute théorie, et certains raisonnements se déroulant dans un modèle saturé peuvent être adaptés à ces modèles.

Définition 1.5.1 (Modèle spécial)

Un modèle M de cardinal κ d'une théorie T est dit spécial *s'il est fini, ou s'il existe une chaîne élémentaire $(M_\beta)_{\aleph_0 \leq \beta < \kappa}$ de sous-structures élémentaires de M telles que $M = \bigcup_\beta M_\beta$ et que chaque M_β soit β^+-saturée.*

Lemme 1.5.2

Tout modèle saturé M d'une théorie T est un modèle spécial.

Lemme 1.5.3
Soit M un modèle spécial infini de T. Si M a pour cardinal un cardinal régulier κ, alors M est saturé.

Lemme 1.5.4 (Existence des modèles spéciaux)
Pour tout cardinal κ, il existe un modèle spécial M de cardinal plus grand que κ.

Démonstration :
Rappelons tout d'abord la définition des cardinaux $\beth_\alpha$, indexés par les ordinaux : ils sont construits par induction sur α en posant

$$\beth_0 = \aleph_0 \text{ et } \beth_{i+1} = 2^{\beth_i} \text{ et } \beth_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} \beth_i \text{ pour } \lambda \text{ limite.}$$

L'idée de la construction du modèle M (que l'on ne détaillera pas) est de construire M par induction, en utilisant le fait que tout modèle de T de cardinal λ peut se plonger dans un modèle λ^+-saturé de cardinal 2^λ. Si l'on s'arrête à $\beth_\alpha$ pour un ordinal limite α, on obtient un modèle M qui est effectivement spécial. □

Remarque 1.5.5
On peut déduire du lemme 1.5.4 le fait que tout modèle d'une théorie T se plonge élémentairement dans un modèle spécial.

Exemple 1.5.6
L'exemple suivant montre qu'un modèle spécial n'est pas nécessairement saturé.

On considère la théorie $T = ODLSE$ des ordres denses linéaires sans extrémités. Si λ est un cardinal singulier, alors un modèle de cardinal λ ne peut pas être saturé : la singularité de λ permet de construire un type, sur moins de λ paramètres, qui ne peut pas être réalisé. Or, le lemme 1.5.4 indique qu'il existe un modèle spécial de cardinal $\beth_\alpha$ pour α ordinal limite, pour n'importe quelle théorie. Or, un tel cardinal est nécessairement singulier ; il existe donc des modèles de $ODLSE$ spéciaux et non saturés.

1.6 Plongement stable

On renvoie à l'annexe de l'article [4] pour trouver un traitement du plongement stable. Le plongement stable consiste en un certain contrôle des paramètres dans la définition de certains ensembles ; en particulier, il nous sera utile pour étudier l'existence de groupes définissables d'automorphismes, qui doivent leur définissabilité en partie au fait que les paramètres utilisés pour décrire les automorphismes en question sont peu nombreux.

Dans cette section, lorsque l'on parlera de paramètres provenant d'un ensemble $A \subset M^m$, cela signifiera que les paramètres sont parmi les composantes des uplets de A.

Définition 1.6.1 (Plongement stable)

Soit A un ensemble définissable sans paramètres dans M^m, M étant un modèle d'une théorie T. On dit que A est stablement plongé *si pour tout ensemble $X \subset M^{mn}$ définissable avec paramètres dans M, il existe un ensemble Y définissable avec paramètres dans A tel que $X \cap A^n = Y \cap A^n$.*

Lemme 1.6.2

Soit A un ensemble définissable sans paramètres dans un modèle M d'une théorie T. Alors A est stablement plongé si et seulement si tout ensemble définissable dans A^n avec des paramètres provenant de M est définissable avec des paramètres provenant de A.

L'hypothèse de définissabilité de A dans la définition 1.6.1 n'est pas indispensable pour définir le plongement stable ; cependant, lorsque A n'est pas définissable, il faut prendre soin de définir le comportement du plongement stable dans les extensions élémentaires du modèle considéré. Lorsque A est définissable, le plongement stable dans un modèle implique le plongement stable dans toute extension élémentaire, comme l'indique le lemme suivant :

Lemme 1.6.3

Soit A un ensemble définissable sans paramètres dans M^m par une formule $\theta_A(\bar{x})$, M étant un modèle d'une théorie T. Alors A est stablement plongé si et seulement si pour toute extension élémentaire $M \preccurlyeq N$ et tout ensemble $X \subseteq N^{mn}$ définissable dans N, il existe un ensemble Y définissable avec paramètres dans $\theta_A(N)$ tel que $X \cap \theta_A(N)^n = Y \cap \theta_A(N)^n$.

Démonstration :

Dans toute cette démonstration, si $\bar{x}$ est un uplet de variables ou de constantes, on notera A pour parler de l'ensemble des réalisations de θ_A dans le modèle ambiant, et non de l'ensemble des réalisations de cette formule dans M. Ceci nous permet d'alléger les notations ; dans les cas où cette notation risquerait de porter à confusion, nous noterons $A(M)$ pour parler de l'ensemble des réalisations de θ_A dans M.

Il est clair que la condition est suffisante, il nous faut donc démontrer qu'elle est nécessaire. Nous allons en fait démontrer que pour toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, il existe une formule $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ telle que :

$$Th(M) \vdash \forall y, \exists \bar{z} \in A, \forall \bar{x}, \phi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{z})$$

En effet, si cette propriété est vraie, alors soit N une extension élémentaire de M, et $X \subseteq N^{mn}$ défini dans N par une formule $\phi(\bar{x}, \bar{n})$ avec $\bar{n} \in N$. D'après la propriété en question, il existe $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ telle que $Th(M)$ satisfait la formule ci-dessus. En particulier, N satisfait également cette formule, et il existe donc $\bar{a} \in A$ tel que $Th(N) \vdash \forall x, \phi(\bar{x}, \bar{n}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{a})$. Finalement, l'ensemble défini par la formule $\psi(\bar{x}, \bar{a})$ dans N est l'ensemble Y recherché.

Démontrons donc la propriété annoncée par compacité. Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule ; d'après le plongement stable de $A(M)$, pour tout $\bar{m} \in M$, il existe une formule $\psi_{\bar{m}}(\bar{x}, \bar{z})$

et un uplet $\bar{a} \in A(M)$ tels que $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ et $\psi_{\bar{m}}(\bar{x}, \bar{a})$ sont équivalentes modulo $T = Th(M)$. Considérons la formule $\theta(\bar{y}) =$ « $\exists \bar{x} \in A, \phi(\bar{x}, \bar{y})$ ». Elle définit un fermé, donc compact, de $S_n(A(M))$, et ce fermé est recouvert par l'ensemble des ouverts définis par les formules « $\exists \bar{z} \in A, \forall \bar{x} \in A, \phi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_{\bar{m}}(\bar{x}, \bar{z})$ » pour $\bar{m}$ parcourant M. Par compacité, il existe un sous-recouvrement fini, et la théorie T contient donc l'énoncé :

$$\forall \bar{y}, \bigvee_i \exists \bar{z}_i \in A, \forall \bar{x} \in A, \phi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_{\bar{m}_i}(\bar{x}, \bar{z}_i)$$

et donc également l'énoncé :

$$\forall \bar{y}, \exists \bar{z} \in A, \bigvee_i \forall \bar{x} \in A, \phi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_{\bar{m}_i}(\bar{x}, \bar{z}_i)$$

d'où l'on peut déduire, en réécrivant ce dernier énoncé, une formule $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ telle que T contienne l'énoncé :

$$\forall \bar{y}, \exists \bar{z} \in A, \forall \bar{x} \in A, \phi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{z})$$

ce qui conclut la démonstration de la propriété annoncée, et donc du lemme. □

Exemple 1.6.4
Une théorie pour laquelle, pour tout modèle, tout ensemble définissable est stablement plongé est appelée une *théorie stable*. Ce n'est pas la définition standard d'une théorie stable, mais la stabilité n'étant pas traitée dans cette thèse, nous ne nous attarderons pas dessus. Signalons simplement que le théorème de séparation des paramètres (corollaire 12.31 de [20]) implique que dans une théorie stable, tout ensemble définissable est stablement plongé. On renvoie à [18] pour en savoir plus au sujet de la stabilité.

Un exemple d'ensemble stablement plongé dans une théorie instable est donné par le corps des constantes dans un modèle de la théorie $ACFA$, défini par $\sigma(x) = x$; on trouvera une démonstration de ceci dans [4], proposition 1.11.

1.6.1 Caractérisations du plongement stable

Ces deux caractérisations du plongement stable proviennent de l'annexe de l'article [4]. On en redonne ici une démonstration, l'objectif étant essentiellement de clarifier le rôle tenu par la saturation (afin de parvenir à la remplacer par la spécialité du modèle, lorsqu'elle est nécessaire) ; pour le lemme suivant, il n'y a qu'une hypothèse faible de saturation du modèle ambiant.

Lemme 1.6.5

Soient M un modèle $|T|^+$-saturé d'une théorie complète T, et A un ensemble définissable sans paramètres dans M^m. On pose $\kappa = |T|$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *A est stablement plongé ;*
2. *tout type $p = \mathrm{tp}(\bar{a}/A) \in S_n(A)$ pour $\bar{a} \in M^n$ est définissable sur un ensemble de paramètres $A_0 \subset A$ de taille au plus κ ;*
3. *pour tout type $p = \mathrm{tp}(\bar{a}/A) \in S_n(A)$ pour $\bar{a} \in M^n$, il existe un ensemble $A_0 \subset A$ de taille au plus κ tel que p ait les mêmes réalisations que sa restriction à A_0.*

Démonstration :

$1 \Rightarrow 2$: Soit $p \in S_n(A)$, et $\bar{a}$ une réalisation de p dans M^n. Considérons une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, et l'ensemble $D = \{\bar{m} \in A / \phi(\bar{a}, \bar{m})\}$, qui est définissable avec les paramètres $\bar{a}$, puisque défini par « $\bar{m} \in A \wedge \phi(\bar{a}, \bar{m})$ ». Le plongement stable de A implique qu'il est définissable par une formule $\psi(\bar{a}', \bar{y})$ avec paramètres $\bar{a}' \in A$. La formule $\psi(\bar{a}', \bar{y})$ est satisfaite par l'ensemble des uplets $\bar{y}$ dans A tels que $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ est satisfaite par $\bar{a}$. Autrement dit, la formule $\psi(\bar{a}', \bar{y})$ est une ϕ-définition de p ; comme il n'y a pas plus de κ formules dans le langage, ceci donne une définition de p sur au plus κ paramètres dans A.

$2 \Rightarrow 3$: Soit $p \in S_n(A)$ et $\bar{a}$ une réalisation de p dans M^n ; le type p est définissable sur un ensemble de paramètres $A_0 \subset A$ de taille au plus κ. Notons $p_0 = \mathrm{tp}(\bar{a}/A_0)$ la restriction de p à A_0, et soit $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ une formule dans p avec paramètres $\bar{m}$. La définissabilité de p donne une formule $d_\phi(\bar{y}, \bar{a}_0)$ avec paramètres $\bar{a}_0 \in A_0$ satisfaite par l'ensemble des $\bar{m} \in A$ tels que $\phi(\bar{x}, \bar{m}) \in p$. Un uplet $\bar{x}$ satisfait alors toutes les formules de p de la forme $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ si et seulement si il satisfait la formule « $\forall \bar{y}, d_\phi(\bar{y}, \bar{a}_0) \rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{y})$ », qui est dans p_0. Ceci implique que toute réalisation de p_0 est également une réalisation de p.

$3 \Rightarrow 2$: Soit $p = \mathrm{tp}(\bar{m}/A)$, et $A_0 \subset A$ de taille au plus κ tel que p et $p_0 = \mathrm{tp}(\bar{m}/A_0)$ aient les mêmes réalisations. Soit $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule, et $\bar{a} \in A$. L'égalité des réalisations des types p et p_0 implique qu'il existe une formule $\theta_{\bar{a}}(\bar{x}, \bar{a}_0(\bar{y})) \in p_0$, $\bar{a}_0(\bar{y})$ étant un paramètre dans A_0 dépendant de $\bar{y}$, telle que $M \models \forall \bar{x}, \theta_{\bar{a}}(\bar{x}, \bar{a}_0) \rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{a})$. Considérons la formule $\phi(\bar{m}, \bar{y}) \in S_n(\{\bar{m}\})$. Elle définit un fermé (donc compact) dans $S(\{\bar{m}\})$, qui est recouvert par les formules de la forme $\forall \bar{x}, \theta_{\bar{a}}(\bar{x}, \bar{a}_0) \rightarrow \phi(\bar{x}, \bar{y})$ pour $\bar{a}_0 \in A_0$ et $\theta \in p_0$. Par compacité, il existe un nombre fini de telles formules qui le recouvrent, et la disjonction de ces formules est une formule $\psi(\bar{y})$ à paramètres dans A_0 telle que $M \models \psi(\bar{a})$ si et seulement si $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$; autrement dit, $\psi(\bar{y})$ est une définition de ϕ sur A_0.

$2 \Rightarrow 1$: On considère un ensemble $D \subseteq A^n$ défini par une formule $\phi(\bar{x}, \bar{m})$ avec paramètres $\bar{m} \in M^n$. Le type $p = \mathrm{tp}(\bar{m}/A)$ est définissable sur $A_0 \subseteq A$; il existe donc une formule $d_\phi(\bar{x})$ à paramètres dans A_0 telle que $M \models d_\phi(\bar{a})$ si et seulement si $M \models \phi(\bar{a}, \bar{m})$. Autrement dit, $d_\phi(\bar{x})$ définit l'ensemble D avec paramètres dans A, donc A est stablement plongé. □

Le lemme suivant provient également, dans l'idée, de l'annexe de l'article [4]. Cependant, la condition obtenue n'est plus que nécessaire, et l'on remplace l'hypothèse de saturation par une hypothèse de spécialité du modèle ambiant, ce qui nous permet de contourner les problèmes d'éventuelle absence d'un modèle saturé.

Lemme 1.6.6

Soit M un modèle spécial de cardinal κ d'une théorie T, et soit A un ensemble définissable dans M stablement plongé. Alors pour tous $a, b \in M$ tels que $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(b/A)$*, il existe $\sigma \in Aut(M/A)$ tel que $\sigma(a) = b$.*

Démonstration :

On considère une chaîne $(M_\beta)_{\aleph_0 \leq \beta < \kappa}$ témoignant de la spécialité du modèle M. On choisit une énumération $(m_i)_{i<\kappa}$ de $M \backslash A$ telle que $m_0 = a$. Remarquons qu'en appliquant le lemme 1.6.5 à la théorie $T((m_i)_{i<\lambda})$, on obtient l'existence d'un ensemble

A_λ de taille au plus $|T|.\lambda$ tel que tout type $\mathrm{tp}(m/(m_i)_{i<\lambda}, A)$ ait les mêmes réalisations que $\mathrm{tp}(m/(m_i)_{i<\lambda}, A_\lambda)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que pour tout λ, $A_\lambda \subseteq A_{\lambda^+}$. On va construire une nouvelle chaîne élémentaire $(N_\beta)_{\aleph_0 \leq \beta < \kappa}$ témoignant de la spécialité de M, et telle que chaque N_λ contienne les $(m_i)_{i<\lambda}$ et A_λ.

On procède par induction sur β. On pose $N_{\aleph_0}$ une extension $\aleph_0$-saturée de la sous-structure de M engendrée par $M_{\aleph_0}$, $A_{\aleph_0}$, et $(m_i)_{i<\aleph_0}$. Fixons un cardinal infini $\beta < \kappa$, et supposons que l'on a déjà défini N_β. On considère la sous-structure de M engendrée par N_β, M_β, A_{β^+}, $(m_i)_{i<\beta^+}$, puis on en construit une extension β^+-saturée de cardinal $|M|$. Pour construire N_β lorsque β est un cardinal limite, on prend l'union des étapes précédentes. La chaîne obtenue satisfait bel et bien les propriétés voulues.

On va à présent construire l'isomorphisme σ par va-et-vient en utilisant cette nouvelle chaîne N_β. On pose tout d'abord $\sigma|_A = id_A$, et $\sigma(a) = b$, puis on suppose avoir déjà défini σ sur l'ensemble des $(m_i)_{i<\lambda}$ pour un certain cardinal λ. D'après le lemme 1.6.5, le type $\mathrm{tp}(m_\lambda/(m_i)_{i<\lambda}, A_\lambda)$ a les mêmes réalisations que $\mathrm{tp}(m_\lambda/(m_i)_{i<\lambda}, A)$, et est un type sur au plus $|T|.|\lambda|$ paramètres, et ces paramètres appartiennent au modèle N_{λ^+} par construction ; par saturation de ce modèle, il contient une réalisation n_λ de ce type, et l'on peut définir $\sigma(m_\lambda) = n_\lambda$. Ceci conclut le « va », et le « vient » se déroule de la même manière. $\square$

Chapitre 2

Groupes de liaison

Les groupes de liaison sont des groupes d'automorphismes d'une structure fixant point par point une partie de la structure. On peut définir les groupes de liaison dans une structure quelconque, comme nous le faisons dans la première section de ce chapitre, mais le cas qui nous intéressera le plus sera celui des groupes de liaison fixant une partie définissable de la structure ; sous certaines conditions (en particulier, le plongement stable évoqué dans le chapitre précédent), ces groupes sont type-définissables, et l'on peut les voir comme des analogues des groupes de Galois dans des structures quelconques.

Les groupes de liaison — et certaines conditions assurant leur définissabilité ou leur type-définissabilité — sont connus depuis longtemps (voir par exemple [21]). On pourra se référer à [18] pour une démonstration de leur type-définissabilité dans le cadre d'une théorie stable.

2.1 Groupes de liaison

Définition 2.1.1 (Groupe de liaison)

Soit A un ensemble quelconque dans M, et soit B un ensemble dans M tel que tout automorphisme de M fixant A point par point stabilise B. On définit alors le groupe de liaison de B dans A *comme étant le groupe $\mathbf{GL}(B/A)$ des bijections de $A \cup B$ dans lui-même induites par un automorphisme de M fixant A point par point.*

Lemme 2.1.2

On a $\mathbf{GL}(B/A) \simeq Aut(M/A) \diagup Aut(M/A, B)$.

Démonstration :

Tout d'abord, remarquons que $Aut(M/A, B) \trianglelefteq Aut(M/A)$ puisque B est stabilisé par les A-automorphismes. Définissons l'application suivante :

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} Aut(M/A) & \to & \mathbf{GL}(B/A) \\ \sigma & \mapsto & \sigma|_{A\cup B} \end{array} \right.$$

C'est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est $Aut(M/A, B)$; elle se factorise donc en l'isomorphisme recherché. □

Exemples

Groupes linéaires :
On considère la structure M constituée de deux sortes k et V, k étant un corps (dans le langage des corps) et V un k-espace vectoriel de dimension n finie (dans le langage constitué de l'addition, de 0, et d'une fonction binaire $k \times V \to V$ décrivant la multiplication par un scalaire). Il est clair que V est $\emptyset$-invariant, donc k-invariant. On peut réaliser certains groupes linéaires (en particulier, les groupes algébriques linéaires) comme des groupes de liaison de V dans k en ajoutant de la structure.

Groupe linéaire général : Dans M elle-même, le groupe de liaison de V dans k est $\mathbf{GL}(V/k) = GL(V)$.

Groupe spécial linéaire : On choisit une base de V, et on ajoute à M un prédicat n-aire B sur V (rappelons que $n = dim(V)$) décrivant l'ensemble de toutes les bases de V de déterminant 1 dans cette base. Dans cette nouvelle structure, un automorphisme fixant k point par point est un automorphisme de k-espace vectoriel sur V qui « préserve le volume et l'orientation » puisqu'il doit stabiliser l'ensemble B. Par conséquent, dans cette structure, $\mathbf{GL}(V/k) = SL(V)$.

Groupe orthogonal : On choisit une forme bilinéaire symétrique q sur V, et on ajoute à M un symbole de fonction binaire sur V la décrivant. Dans cette structure, $\mathbf{GL}(V/k) = O(q)$.

Groupe algébrique linéaire quelconque : Les exemples précédents sont tous trois des groupes algébriques linéaires. En général, si G est un groupe algébrique linéaire quelconque défini par un système d'équations polynômiales (E), et avec une représentation fidèle sur un espace vectoriel V, alors on peut démontrer que le groupe G est, comme dans les exemples précédents, le groupe de liaison sur k de la structure V à laquelle on a ajouté sous forme de prédicats les ensembles de solutions des équations dans (E). Ceci est essentiellement le contenu du théorème dit de "reconstruction tannakienne", dont on peut trouver une formulation algébrique dans [6], et une formulation modèle-théorique dans [11].

Groupes de Galois :
On considère un corps K (dans le langage des corps) et un sous-corps k de K tels que K soit une extension galoisienne de k. Alors les automorphismes de corps de K fixant k point par point forment un groupe de liaison qui est le groupe de Galois de l'extension de corps, $Gal(K/k)$.

2.2 Internité

L'internité d'un ensemble dans un autre est une condition naturelle pour la définissabilité des groupes de liaison. On peut justifier son apparition de la manière suivante : puisque le plongement stable d'un ensemble A définissable dans un modèle spécial M, d'après la proposition 1.6.6, assure une certaine A-homogénéité du modèle, alors on sait que pour tout $p \in S(A)$, tout couple (a,b) de réalisations de p est de la forme $(a,\sigma(a))$ pour un certain $\sigma \in Aut(M/A)$; on pourrait alors définir le groupe des automorphismes comme l'ensemble des couples $(a,\sigma(a))$, σ parcourant l'ensemble $Aut(M/A)$, à condition d'écarter l'obstacle donné par la possible existence de plusieurs automorphismes σ envoyant a sur b. L'internité est une condition permettant d'assurer l'unicité de σ, et donc la définissabilité du groupe de liaison.

La définition suivante est la plus courante de l'internité :

Définition 2.2.1 (Internité)

Soient A et B deux ensembles quelconques dans M^{eq} pour un modèle $|T|^+$-saturé M d'une théorie T. On dit que B est interne à A, *ou* A-interne, *s'il existe un uplet fini $\bar{c} \in M^{eq}$ tel que $B \subset dcl^{eq}(A,\bar{c})$.*

On utilisera plus volontiers la caractérisation suivante de l'internité, valable lorsque les ensembles considérés sont définissables :

Lemme 2.2.2 (Internité définissable, théorème 2.19 (ii) de [21])

Si A et B sont des ensembles définissables dans un modèle $|T|^+$-saturé M d'une théorie T, alors B est interne à A si et seulement si il existe une fonction injective définissable dans M^{eq} (éventuellement avec paramètres) $f : B \to A^{eq}$. Une telle fonction est appelée témoin d'internité.

Démonstration :

Il est clair que la condition est suffisante. Démontrons sa nécessité. On considère un uplet $\bar{c}$ tel que $B \subset dcl^{eq}(A,\bar{c})$. Soit $b \in B$; il existe une formule $\varphi_b(x,\bar{y}_b,\bar{c})$ à paramètres $\bar{c}$ et $\bar{a}_b \in A$ tels que b soit l'unique réalisation de $\varphi_b(x,\bar{a}_b,\bar{c})$. Considérons le type défini par la formule « $x \in B$ ». Il est recouvert par les ouverts définis par les formules de la forme $\theta_b =$ « $\exists \bar{a} \in A, \phi_b(x,\bar{a},\bar{c})$ », et, par compacité, il est également recouvert par un nombre fini d'entre elles, disons $\theta_{b_1},\ldots,\theta_{b_n}$.

On définit alors les deux formules ϕ et ψ suivantes :

$$\phi(x,\bar{c}) = \theta_{b_1} \vee (\neg\theta_{b_1} \wedge \theta_{b_2}) \vee (\neg(\theta_{b_1} \vee \theta_{b_2}) \wedge \theta_{b_3}) \vee \ldots (\neg(\theta_{b_1} \vee \cdots \vee \theta_{b_{n-1}}) \wedge \theta_{b_n})$$

$$\psi(x,\bar{y}_{b_1},\ldots,\bar{y}_{b_n},\bar{c}) = \varphi_{b_1}(x,\bar{y}_{b_1},\bar{c}) \vee (\neg\varphi_{b_1}(x,\bar{y}_{b_1},\bar{c}) \wedge \varphi_{b_2}(x,\bar{y}_{b_2},\bar{c})) \vee \ldots$$
$$\cdots \vee (\neg(\varphi_{b_1}(x,\bar{y}_{b_1},\bar{c}) \vee \cdots \vee \varphi_{b_{n-1}}(x,\bar{y}_{b_{n-1}},\bar{c})) \wedge \varphi_{b_n}(x,\bar{y}_{b_n},\bar{c}))$$

La formule ϕ est satisfaite par tous les éléments de B. On appelle m la somme des tailles des uplets de variables $\bar{y}_{b_i}$ apparaissant dans la formule ψ. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur les m-uplets de A par $\bar{a} \sim \bar{b}$ si et seulement si

$$M \models \forall x, \psi(x,\bar{a},\bar{c}) \leftrightarrow \psi(x,\bar{b},\bar{c})$$

Puisque tout élément $b \in B$ satisfait ϕ, on sait que pour tout $b \in B$, il existe un uplet $\bar{a}$ satisfaisant la formule $\psi(b,\bar{y},\bar{c})$. L'application qui envoie un élément $b \in B$ sur l'imaginaire $\bar{a}/\sim$ est donc définissable dans M^{eq} avec les paramètres $\bar{c}$, et est injective ; c'est donc la fonction f recherchée. □

Exemples

Groupes linéaires :
L'internité d'un espace vectoriel à son corps sous-jacent est le prototype de l'internité telle qu'elle est présentée dans le lemme 2.2.2. Dans la structure à deux sortes utilisée dans la section précédente pour décrire la structure d'un espace vectoriel (exemples 2.1 sur les groupes linéaires), l'internité du V à k est témoignée par la fonction coordonnées, qui, étant donnée une base B de V, à un vecteur $v \in V$ associe le uplet $(v_1, \ldots, v_n) \in k^n$ de ses coordonnées dans la base B.

Groupes de Galois :
Dans la situation d'une extension galoisienne finie de corps $k \subset K$, la structure d'espace vectoriel de dimension finie de K sur k donne clairement une internité de K dans k, les paramètres c devant simplement être choisis de manière à contenir une base de K sur k. Lorsque l'on ajoute un prédicat pour décrire le corps k dans le langage, k devient définissable, et l'internité en question devient alors également définissable (et elle est témoignée par la fonction qui à un élément de K associe ses coordonnées dans la base choisie).

2.3 Définissabilité des groupes de liaison

Comme annoncé précédemment, nous allons à présent démontrer que les groupes de liaison, sous certaines des hypothèses discutées auparavant, sont type-définissables.

Théorème 2.3.1 (Définissabilité des groupes de liaison, proposition 2.5 de [10])

On se place dans la situation suivante :
- *M est un modèle spécial d'une théorie du premier ordre T ;*
- *A et B sont deux ensembles définissables dans T ;*
- *A est stablement plongé ;*
- *B est interne à A.*

Alors, le groupe de liaison $GL(B/A)$ et son action sur B sont type-définissables dans la théorie T^{eq}, au dessus d'un ensemble de paramètres $A_0 \subset A$ de taille au plus $|T|$.

Démonstration :

D'après le lemme 2.1.2, le groupe de liaison $GL(B/A)$ est isomorphe au groupe $Aut(M/A)/Aut(M/A, B)$. Puisque B est interne à A, d'après le lemme 2.2.2, il existe une fonction $f_{\bar{c}} : B \to A^{eq}$ injective et définissable dans T^{eq} avec comme paramètres un uplet $\bar{c} \in M$. On considère le type $p = tp(\bar{c}/A)$. D'après le lemme 1.6.5, il existe un ensemble de paramètres $A_0 \subset A$ de taille au plus $|T|$ tel que p a les mêmes réalisations que sa restriction à A_0.

On définit une relation d'équivalence sur les uplets de même taille que $\bar{c}$ en posant $\bar{a} \sim \bar{b}$ si et seulement si $f_{\bar{a}} = f_{\bar{b}}$ (c'est-à-dire que les ensembles définis par les formules $f_{\bar{a}}$ et $f_{\bar{b}}$ sont égaux). On quotiente l'ensemble des réalisations de p par cette relation d'équivalence ; dans la théorie T^{eq}, l'ensemble obtenu est toujours type-définissable sur l'ensemble de paramètres A_0. On appelle P cet ensemble ; par élimination des imaginaires dans T^{eq}, on sait qu'il existe une formule $\phi(x, y)$ telle que pour tout élément $[a] \in P$, $\phi(x, [a])$ définit une fonction injective définissable égale à $f_{\bar{a}}$ pour tout représentant $\bar{a}$ de la classe d'équivalence $[a]$, et telle que $\phi(x,[a])$ est égale à $\phi(x,[b])$ si et seulement si $[a]=[b]$ (en d'autres termes, $[a]$ est le paramètre canonique du graphe de $f_{\bar{a}}$). Par abus de langage, on appellera encore cette fonction $f_{[a]}$.

Définissons une action du groupe de liaison $GL(B/A)$ sur P (on se contentera en fait d'une action de $Aut(M/A)/Aut(M/A\cup B)$, que l'on identifiera à l'action de $GL(B/A)$ par l'isomorphisme φ). On considère donc un élément du groupe de liaison $\sigma \in Aut(M/A)/Aut(M/A,B)$ et un élément $x\in P$. On définit $\sigma.x=g(x)$ pour tout représentant g de la classe de σ dans $Aut(M/A)$ ($g(x)$ est bien un élément de P puisque g fixe A point par point et que P est type-définissable sur A). Cette action est bien définie : si g et g' sont deux représentants de σ, alors g et g' ont la même action sur $A\cup B$; par conséquent, si g et g' n'envoient pas x sur le même élément de P, alors les applications $f_{g(x)}$ et $f_{g'(x)}$ sont distinctes ; or, $f_{g(x)}=f_x\circ g$, et $f_{g'(x)}=f_x\circ g'$, et g et g' ont donc des actions différentes sur $A\cup B$, ce qui est absurde. De plus, cette action est libre : si $\sigma.x=x$, alors pour tout b dans B, on a $\sigma.(f_x(b))=f_x(g(b))$ pour un représentant g de σ, et de plus, $\sigma.(f_x(b))=f_x(b)$ puisque σ fixe A point par point ; par injectivité de f_x, on obtient bien que $\sigma(b)=b$, et donc que σ est la classe de l'identité (donc l'identité dans $GL(B/A)$).

Remarquons que la liberté de l'action signifie qu'un élément $\sigma\in GL(B/A)$ est entièrement déterminé par la donnée de $\sigma(\bar{c})$. De plus, si c et c' sont dans P, alors d'après le lemme 1.6.6, et puisque le modèle M est spécial, il existe $\sigma\in Aut(M/A)$ tel que $\sigma(c)=c'$. Par conséquent, l'action de $GL(B/A)$ sur P est libre et transitive. On peut donc définir le groupe de liaison comme étant égal au quotient $P\times P/E$, E étant la relation d'équivalence définie par $(x,x')E(y,y')$ si et seulement si $f_x\circ f_{x'}^{-1}=f_y\circ f_{y'}^{-1}$ (ce qui est équivalent à dire : si et seulement si $x'=\sigma(x)$ et $y'=\sigma(y)$ pour un certain $\sigma\in GL(B/A)$). La relation E étant définissable sans paramètres, on obtient par élimination des imaginaires que l'ensemble $GL(B/A)$ est type-définissable par un type à paramètres dans A_0. On définit de même modulo E la loi de groupe comme suit : $(x,x').(y,y')=(z,z')$ si et seulement si $\sigma(x)=x'$, $\sigma'(y)=y'$, et $\sigma\circ\sigma'(z)=z'$ pour un certain $\sigma\in GL(B/A)$; la loi de groupe est donc type-définissable sur A_0. Enfin, l'action de $GL(B/A)$ sur B est définie par $\sigma.b=f_x^{-1}\circ f_{x'}(b)$ pour $x\in P$ tel que $\sigma(x)=x'$, ce qui donne modulo E la type-définissabilité sur A_0 de l'action en question. □

Remarque 2.3.2
Dans la démonstration ci-dessus, on a défini l'ensemble $GL(B/A)$ comme $P\times P/E$. En fixant comme paramètre le uplet c, on aurait pu le définir de la même manière comme étant l'ensemble P (en considérant qu'un élément $x\in P$ code l'élément du groupe de liaison envoyant c sur x). Si l'on ne l'a pas fait, c'est que la méthode ci-dessus permet d'éviter d'utiliser des paramètres en dehors de l'ensemble A.

Chapitre 3

Anneaux différentiels généralisés

Ce chapitre consiste en quelques rappels d'algèbre commutative, suivis de la définition et d'une étude sommaire des anneaux différentiels généralisés et des modules différentiels généralisés tels qu'ils ont été introduits par Yves André dans [2]. Pour tout ce qui concerne l'algèbre commutative, on pourra se reporter à [3] ou [15]. Les dernières sections du chapitre concernent la définition d'un langage des anneaux différentiels généralisés, ainsi qu'une étude des polynômes différentiels généralisés sur ces anneaux, accompagnée de l'introduction de diverses notions liées aux polynômes ; en particulier, on introduira les notions de groupe différentiel généralisé et de représentation rationnelle généralisée, qui sont informellement les groupes et représentations de groupes sur des modules à connexion qui sont définies par des équations polynômiales différentielles généralisées.

3.1 Rappels d'algèbre commutative

Dans tout ce chapitre (et d'ailleurs tout le reste de cette thèse), lorsque l'on parlera d'anneaux, on désignera toujours des anneaux commutatifs unitaires, sauf mention contraire explicite ; les modules sur un anneau A seront toujours des groupes commutatifs M munis d'une action linéaire de A. L'objectif de cette sous-section est de présenter certaines notions d'algèbre commutative, conditions sur les anneaux et modules, qui nous seront utiles par la suite pour nous placer dans un contexte modèle-théorique favorable au formalisme tannakien.

Jusqu'à la fin de cette section de rappels, A est un anneau et M est un A-module.

Définition 3.1.1 (Fidélité)
Un A-module M est dit fidèle *si pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, il existe $m \in M$ tel que $a.m \neq 0$ (ou autrement dit si l'annulateur de M est trivial).*

Définition 3.1.2 (Fidèle platitude)
Un A-module M est dit fidèlement plat *sur A si il satisfait la propriété suivante : toute suite de A-modules de la forme*

$$N \xrightarrow{f} N' \xrightarrow{g} N''$$

est exacte si et seulement si la suite

$$M \otimes_A N \xrightarrow{1 \otimes f} M \otimes_A N' \xrightarrow{1 \otimes g} M \otimes N''$$

est exacte.

Définition 3.1.3 (Anneau fidèlement plat)
Un anneau A est dit fidèlement plat si il est fidèlement plat en tant que A-module lorsqu'il est muni de sa structure de A-module naturelle.

Définition 3.1.4 (Projectivité)
Un A-module P est dit projectif *si toute suite exacte de A-modules*

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

est scindée.

On rappelle la caractérisation suivante de la projectivité d'un module de type fini, dite « de la base duale » ; elle est valide même lorsque l'anneau A est non-commutatif ; l'appellation « base duale » est standard, mais il faut garder à l'esprit qu'elle ne signifie pas que les familles d'éléments d'un module ou de son dual que nous considérons sont des bases :

Proposition 3.1.5 (Caractérisation de la projectivité par la base duale)
Pour un A-module P, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *le module P est projectif de type fini ;*
2. *il existe une famille génératrice finie $(p_i)_{i \in I}$ d'éléments de P, et une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments du dual $P^\vee = Hom(P, A)$ telles que pour tout élément $p \in P$, on ait $p = \sum_i f_i(p).p_i$;*
3. *pour toute famille génératrice finie $(p_i)_{i \in I}$ d'éléments de P, il existe une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments du dual $P^\vee = Hom(P, A)$ telle que pour tout élément $p \in P$, on ait $p = \sum_i f_i(p).p_i$.*

Dans les conditions 2. et 3., les familles $(f_i)_{i \in I}$ sont nécessairement génératrices de $P^\vee$; de plus, on peut choisir $(p_i)_i$ et $(f_i)_i$ de manière à ce que la famille duale de $(f_i)_i$ soit $(p_i)_i$ (rappelons qu'un module projectif de type fini est toujours réflexif) ; dans ce cas, on appellera $((p_i)_i, (f_i)_i)$ une famille autoduale *de P.*

Une caractérisation presque identique de la projectivité existe pour les modules quelconques (pas forcément de type fini) ; elle s'obtient en oubliant la finitude des familles considérées, et en ajoutant la condition que pour tout $b \in P$, les $f_i(b)$ doivent être nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. Comme la caractérisation ne nous sera utile plus tard que pour des modules de type fini, nous conservons cette forme plus simple à énoncer.

Proposition 3.1.6 (Corollaire du théorème 7.12 de [15])
On suppose que A est noethérien. Un A-module M est fidèle et projectif de type fini si et seulement si il est fidèlement plat et finiment présenté.

La définition suivante d'anneau héréditaire nous sera utile par la suite pour des raisons techniques :

Définition 3.1.7 (Anneau héréditaire)
Un anneau A est dit héréditaire *si pour tout A-module projectif P, les sous-modules de P sont également projectifs.*

Définition 3.1.8 (Bimodule)
Étant donné un anneau A, on appelle A-A-bimodule un groupe commutatif $(M, +)$ muni d'une multiplication à gauche ${}_M\cdot$ et à droite $\cdot_M$ telles que pour tous éléments $a, b \in A$ et $m \in M$, on ait $(a\,{}_M\!\cdot m) \cdot_M b = a\,{}_M\!\cdot (m \cdot_M b)$.

On dit que M est commutatif *si la multiplication à gauche et à droite sont les mêmes, autrement dit si, pour tous $a \in A$ et $m \in M$, on a $a\,{}_M\!\cdot m = m \cdot_M a$.*

Nous aurons à considérer dans la suite des produits tensoriels de bimodules non nécessairement commutatifs. Rappelons que dans ce cas, le produit tensoriel est défini de la manière suivante : si M et N sont des bimodules, alors leur produit tensoriel $M \otimes_A N$ est défini de la manière habituelle en considérant la structure de module à gauche pour M, et celle de module à droite pour N ; précisément, de manière à ce que $a\,{}_{M\otimes_A N}\!\cdot (m \otimes n) = (a\,{}_M\!\cdot m) \otimes n$, et $(m \otimes n) \cdot_{M\otimes_A N} a = m \otimes (n \cdot_N a)$. En particulier, l'égalité $a\,{}_{M\otimes_A N}\!\cdot (m \otimes n) = m \otimes (a\,{}_N\!\cdot n)$ est fausse en général.

Cependant, si M et N sont des bimodules commutatifs, alors on a clairement $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$ (en tant que A-modules) grâce à l'isomorphisme canonique d'échange des facteurs, et ce genre de problème ne se pose pas. Si M est un A-module à gauche, alors on le verra naturellement comme un bimodule (commutatif) en définissant sa multiplication à droite comme étant égale à sa multiplication à gauche.

3.2 Différentielles généralisées et connexions

On rappelle que tous les anneaux que nous considérons sont des anneaux commutatifs unitaires.

Les anneaux différentiels généralisés et les modules à connexion tels que nous les présentons ici ont été introduits dans [2], entre autre pour unifier le traitement des extensions de Picard-Vessiot et des groupes de Galois associés dans différents contextes, en particulier dans le cadre des anneaux différentiels et des anneaux à différence.

Définition 3.2.1 (Anneau différentiel généralisé)

Un anneau différentiel généralisé *est la donnée d'un anneau A, d'un A-A-bimodule Ω, et d'une application $d : A \to \Omega$ telle que pour tous $a, b \in A$:*

— $d(a + b) = d(a) + d(b)$;

— $d(ab) = a.d(b) + d(a).b$.

On appellera d la dérivation *de A, et, lorsque la situation est claire, on appellera A lui-même un anneau différentiel généralisé.*

On appellera anneau des constantes *le sous-anneau k de A défini par $d(x) = 0$.*

Remarque 3.2.2

À la fin de ce chapitre, ainsi que dans le chapitre suivant, nous aurons systématiquement besoin de quelques hypothèses supplémentaires sur les anneaux différentiels généralisés. Comme ce chapitre ne fait pas usage de ces hypothèses, nous les omettons pour le moment, et nous renvoyons leur énoncé à la section 3.4.

Nous aurons besoin plus loin de la notion suivante sur les anneaux différentiels généralisés ; intuitivement, elle dit que Ω est essentiellement l'image de d.

Définition 3.2.3 (Anneau différentiel généralisé réduit)

Un anneau différentiel généralisé (A, Ω, d) est dit réduit *si $\Omega = d(A).A$.*

Exemple 3.2.4

Un anneau pur A peut être muni d'une structure d'anneau différentiel généralisé en posant $\Omega = A$ (la multiplication à gauche et à droite étant la multiplication de l'anneau), et d l'application nulle ; les conditions sont alors trivialement satisfaites. Cet anneau n'est cependant pas réduit, puisque $d(A).A = \{0_\Omega\}$.

Exemple 3.2.5

Un anneau différentiel usuel peut être muni d'une structure d'anneau différentiel généralisé en posant $\Omega = A$ (muni de la multiplication de A à gauche comme à droite), et d étant la dérivation usuelle ; les conditions sur d sont exactement la condition d'additivité habituelle et la formule de Leibniz sur les dérivations.

Exemple 3.2.6

Un anneau à différence (A, σ) peut également être muni d'une structure d'anneau différentiel généralisé. Pour ce faire, on pose $\Omega = A$, la multiplication à gauche étant la multiplication de A, et la multiplication à droite étant la multiplication tordue par l'automorphisme σ, définie par $a \cdot b = \sigma(b)a$. On définit, pour $a \in A$, $d(a) = \sigma(a) - a$. Vérifions que les conditions sont effectivement satisfaites :

L'additivité de d est claire. Choisissons $a, b \in A$. Alors $d(ab) = \sigma(ab) - ab$, $a.d(b) = a\sigma(b) - ab$, et $d(a).b = (\sigma(a) - a).b = \sigma(b)(\sigma(a) - a) = \sigma(ab) - a\sigma(b)$, et finalement, $d(ab) = a.d(b) + d(a).b$.

Exemple 3.2.7

Si A est un anneau muni de deux dérivations d_1 et d_2 (qui ne commutent pas nécessairement), on peut définir sur A une structure d'anneau différentiel généralisé en posant $\Omega = A \oplus A$ muni de la multiplication terme à terme à gauche et à droite, et $d(a) = (d_1(a), d_2(a))$. L'additivité et la formule de Leibniz pour d_1 et d_2 impliquent alors trivialement l'additivité et la formule de Leibniz pour d.

Les anneaux différentiels généralisés permettent donc de traiter des anneaux différentiels usuels et des anneaux à différence dans un même langage. La notion de module à connexion, elle, est une généralisation de la notion de module différentiel dans le contexte des anneaux différentiels généralisés.

Définition 3.2.8 (Connexion)
On fixe un anneau différentiel généralisé (A, Ω, d), et un A-module M. Une connexion *sur M est une application $\nabla : M \to \Omega \otimes_A M$ qui satisfait :*
- $\nabla(m + n) = \nabla(m) + \nabla(n)$;
- $\nabla(a.m) = a.\nabla(m) + d(a) \otimes m$.

Exemple 3.2.9
Il est clair que lorsque A est un anneau pur (respectivement un anneau différentiel usuel), la notion de module à connexion correspond à la notion de module muni d'une application linéaire, la connexion n'étant alors rien d'autre que l'application linéaire en question (respectivement à la notion de module différentiel, la connexion étant alors la dérivation sur M).

Exemple 3.2.10 (Connexion triviale)
Si M est un k-module, l'application $\nabla : \left| \begin{array}{ccc} A \otimes_k M & \to & \Omega \otimes_A (A \otimes_k M) \\ a \otimes m & \mapsto & d(a) \otimes m \end{array} \right.$ définit une connexion sur $A \otimes_k M$. Un cas particulier de cette situation est donné par l'anneau A, sur lequel d définit une connexion. Ces connexions seront dites *triviales*.

Définition 3.2.11
Une connexion triviale *est une connexion de la forme*

$$\nabla : \left| \begin{array}{ccc} A \otimes_k M & \to & \Omega \otimes_A (A \otimes_k M) \\ a \otimes m & \mapsto & d(a) \otimes m \end{array} \right.$$

pour un k-module M.

3.3 Opérations algébriques sur les connexions

Nous allons dans la suite présenter quelques résultats de « stabilité » d'une certaine classe de modules à connexion sous certaines opérations algébriques (la raison d'être de cette présentation sera expliquée au prochain chapitre). Pour ce faire, nous allons utiliser plusieurs hypothèses algébriques sur les anneaux et modules considérés, tirées de l'article [2] ; en particulier, certaines de ces hypothèses impliquent la définissabilité du module Ω dans l'anneau pur A. Affirmer cette définissabilité revient à dire qu'il existe une partie X de A^n, définissable dans la structure d'anneau de A, et des fonctions sur X définissables dans la structure d'anneau de A, et munissant X d'une structure de bimodule isomorphe à celle de Ω. On rappelle que les anneaux que l'on considère sont toujours commutatifs et unitaires.

La première opération algébrique que nous allons considérer est le produit tensoriel. La question qui se pose est la suivante : étant donnés deux A-modules à connexion (M, ∇_M) et (N, ∇_N), est-il possible de munir leur produit tensoriel $M \otimes_A N$ d'une connexion, de manière canonique ?

Pour répondre à cette question, commencons par supposer que le bimodule Ω est commutatif. Alors le produit tensoriel $\Omega \otimes_A M$ est un produit tensoriel de bimodules commutatifs, et l'isomorphisme d'échange des facteurs permet de construire un isomorphisme $\phi : M \otimes_A \Omega \otimes_A N \simeq \Omega \otimes_A M \otimes_A N$ (simplement par échange des facteurs), et donc de définir une connexion sur $M \otimes_A N$ de la manière suivante :

$$\nabla_{M \otimes_A N}(m \otimes n) = \nabla_M(m) \otimes n + \phi(m \otimes \nabla_N(n))$$

On vérifie facilement que cette application est bien une connexion, et le problème dans le cas où Ω est commutatif est réglé.

Dans le cas où Ω n'est pas commutatif, l'isomorphisme d'échange n'existe plus, et l'on n'est même plus assuré de trouver un isomorphisme entre $M \otimes_A \Omega$ et $\Omega \otimes_A M$. Pour régler ce problème, on introduit — suivant le vocabulaire de [2] — la notion de biconnexion.

Signalons que la volte d'une biconnexion, définie dans la définition ci-après comme un morphisme $\phi_{\nabla_M} : M \otimes_A \Omega \simeq \Omega \otimes_A M$, sera souvent appliquée à un élément de $M \otimes_A \Omega \otimes_A N$; c'est un abus de notation que nous ferons plusieurs fois jusqu'à la fin du chapitre : à chaque fois, c'est l'application $\phi_{\nabla_M} \otimes id_N$ que l'on sous-entendra, sans le rappeler, afin de simplifier les notations. Nous ferons des abus de notation similaires en appliquant par exemple ϕ_{∇_N} au lieu de $id_M \otimes \phi_{\nabla_N}$ à un élément de $M \otimes N \otimes \Omega$; dans tous les cas, ces abus seront faits lorsque le contexte ne prête pas à confusion.

Définition 3.3.1 (Biconnexion et volte)

Soient (A, Ω, d) un anneau différentiel généralisé, et (M, ∇_M) un module à connexion sur A. On dit que ∇_M est une biconnexion *si il existe un isomorphisme $\phi_{\nabla_M} : M \otimes_A \Omega \simeq \Omega \otimes_A M$, que l'on appellera la* volte *de la biconnexion, tel que pour tout A-module à connexion (N, ∇_N), l'application définie par*

$$\nabla_{M \otimes_A N}(m \otimes n) = \nabla_M(m) \otimes n + \phi_{\nabla_M}(m \otimes \nabla_N(n))$$

est une connexion sur $M \otimes_A N$.

Il est à noter que cette définition n'est pas tout-à-fait la même que celle donnée dans [2] ; en effet, l'application ϕ_{∇_M} est dans cet article seulement un homomorphisme, mais diverses hypothèses algébriques dont nous parlerons plus loin assurent son inversibilité. Comme cette inversibilité nous sera nécessaire dans la suite, nous définissons donc les biconnexions de manière plus restrictive que dans [2].

Vérifions qu'une biconnexion n'a qu'une volte possible :

Lemme 3.3.2
Si (M, ∇_M) est un module à biconnexion sur un anneau différentiel généralisé (A, Ω, d) réduit, alors la volte $\phi_{\nabla_M} : M \otimes_A \Omega \to \Omega \otimes_A M$ associée à ∇_M est unique.

Démonstration :

En applicant la définition 3.3.1 à deux voltes ϕ_{∇_M} et ϕ'_{∇_M}, on obtient, pour tout module à connexion (N, ∇_N) et tous $m \in M$ et $n \in N$:

$$\nabla_{M \otimes_A N}(m \otimes n) = \nabla_M(m) \otimes n + \phi_{\nabla_M}(m \otimes \nabla_N(n)) = \nabla_M(m) \otimes n + \phi'_{\nabla_M}(m \otimes \nabla_N(n))$$

On en déduit :

$$\phi_{\nabla_M}(m \otimes \nabla_N(n)) = \phi'_{\nabla_M}(m \otimes \nabla_N(n))$$

En prenant pour (N, ∇_N) le module A muni de sa connexion triviale d, ceci donne

$$\phi_{\nabla_M}(m \otimes d(a)) = \phi'_{\nabla_M}(m \otimes d(a))$$

La condition $d(A).A = \Omega$ (qui dit que l'anneau différentiel généralisé est réduit) implique alors l'égalité des deux voltes par linéarité de celles-ci. □

Exemple 3.3.3
La connexion triviale d sur A est une biconnexion, dont la volte est définie par $\phi_d(a \otimes \omega) = \omega \otimes a$. Plus généralement, toute connexion triviale ∇ sur un module M est une biconnexion dont la volte est définie par $\phi_\nabla(m \otimes \omega) = \omega \otimes m$.

Peut-on assurer l'existence de biconnexions (non-triviales) ? Nous nous référerons encore une fois à l'article [2] pour la réponse. L'existence des biconnexions y est assurée pour peu que l'on soit en *situation semi-classique* (section II.4.1 de [2]) ; dans notre contexte (plus restreint que celui de [2]), ceci revient à supposer que l'anneau différentiel généralisé A est réduit.

Lemme 3.3.4 (Existence des biconnexions, proposition II.4.1.1 de [2])
Si l'anneau différentiel généralisé (A, Ω, d) est réduit, alors toute connexion ∇ sur un A-module M est une biconnexion.

Lemme 3.3.5 (Stabilité des biconnexions par produit tensoriel)
Si (M, ∇_M) et (M, ∇_N) sont deux modules à biconnexion, alors la connexion définie sur $M \otimes_A N$ par la formule dans la définition 3.3.1 est également une biconnexion.

Démonstration :

Commençons par définir la volte $\phi_{\nabla_{M \otimes_A N}}$ par la formule suivante :

$$\phi_{\nabla_{M \otimes_A N}} : \left| \begin{array}{rcl} (M \otimes_A N) \otimes_A \Omega & \to & \Omega \otimes_A (M \otimes_A N) \\ (m \otimes n) \otimes \omega & \mapsto & \phi_{\nabla_M}(\phi_{\nabla_N}(m \otimes n \otimes \omega) \end{array} \right.$$

Cette application est bien un isomorphisme, et il nous faut vérifier qu'étant donné un module à connexion (P, ∇_P), l'application définie dans la définition 3.3.1 est bien une connexion. Ceci résulte du calcul suivant (on note ∇_{MNP} pour $\nabla_{(M \otimes_A N) \otimes_A P)}$ afin de simplifier les notations, et de même pour ∇_{MN} et $\phi_{\nabla_{MN}}$) :

$$\begin{array}{rl} & \nabla_{MNP}(a.(m \otimes n) \otimes p) \\ = & \nabla_{MN}(a.(m \otimes n)) \otimes p + \phi_{\nabla_{MN}}(a.(m \otimes n) \otimes \nabla_P(p)) \\ = & d(a) \otimes (m \otimes n) \otimes p + a.\nabla_{MN}(m \otimes n) \otimes p + a.\phi_{\nabla_{MN}}((m \otimes n) \otimes \nabla_P(p)) \\ = & d(a) \otimes (m \otimes n)) \otimes p + a.(\nabla_{MN}(m \otimes n) \otimes p + \phi_{\nabla_{MN}}((m \otimes n) \otimes \nabla_P(p)) \\ = & d(a) \otimes ((m \otimes n) \otimes p) + a.\nabla_{MNP}((m \otimes n) \otimes p) \end{array}$$

□

Étudions maintenant le passage au dual. Nous allons utiliser le fait qu'il existe un isomorphisme ψ entre $\Omega \otimes_A M^\vee$ et $Hom_A(M, \Omega)$, défini par :

$$\psi : \left| \begin{array}{rcl} \Omega \otimes_A M^\vee & \to & Hom_A(M, \Omega) \\ \omega \otimes f & \mapsto & (m \mapsto \omega.f(m)) \end{array} \right.$$

Nous ne rappellerons pas cette identification dans ce qui va suivre ; les éléments de $\Omega \otimes_A M^\vee$ seront considérés sans mention supplémentaire comme des éléments de $Hom_A(M, \Omega)$.

Lemme 3.3.6 (Stabilité des biconnexions par passage au dual)

Soit (M, ∇_M) un module à biconnexion. Alors l'application $\nabla_{M^\vee} : M^\vee \to \Omega \otimes_A M^\vee$ définie par $\nabla_{M^\vee}(f)(m) = d(f(m)) - f(\phi^{-1}_{\nabla_M} \nabla_M(m))$ est une biconnexion sur $M^\vee$.

Démonstration :

Vérifions tout d'abord que c'est une connexion. L'additivité est claire (puisque d elle-même est additive). Soit $a \in A$, et $f \in M^\vee$. On a, pour tout $m \in M$:

$$\nabla_{M^\vee}(a.f)(m) = d(a.f(m)) - a.f(\phi^{-1}_{\nabla_M} \nabla_M(m))$$

On en déduit :

$$\nabla_{M^\vee}(a.f)(m) = d(a).f(m) + a.d(f(m)) - a.f(\phi^{-1}_{\nabla_M} \nabla_M(m))$$

Et donc :

$$\nabla_{M^\vee}(a.f) = d(a) \otimes f + a.\nabla_{M^\vee}(f)$$

L'application $\nabla_{M^\vee}$ est donc bien une connexion.

Définissons la volte de $\nabla_{\mathcal{M}^\vee}$ par la formule suivante :

$$\phi_{\nabla_{M^\vee}}(f \otimes \omega)(m) = f(\phi^{-1}_{\nabla_M}(\omega \otimes m))$$

On fixe un module à connexion (N, ∇_N), et on cherche à démontrer que l'application $\nabla_{M^\vee \otimes_A N}$ définie dans la définition 3.3.1 est une connexion. Encore une fois, l'additivité est claire, et avec les mêmes notations que ci-dessus, on a :

$$\nabla_{M^\vee \otimes_A N}(a.(f \otimes n)) = \nabla_{M^\vee}(a.f) \otimes n + \phi_{\nabla_{M^\vee}}(a.f \otimes \nabla_N(n))$$

Et donc :

$$\nabla_{M^\vee \otimes_A N}(a.(f \otimes n)) = d(a).f \otimes n - a\nabla_{M^\vee}(f) \otimes n + a.\phi_{\nabla_{M^\vee}}(f \otimes \nabla_N(n))$$

D'où :

$$\nabla_{M^\vee \otimes_A N}(a.(f \otimes n)) = d(a).f \otimes n + a.\nabla_{M^\vee \otimes_A N}(f \otimes n)$$

L'application $\phi_{\nabla_{M^\vee}}$ définit donc bien une volte pour $\nabla_{M^\vee}$, ce qui conclut la démonstration. □

Définition 3.3.7 (Connexion duale)
La connexion $\nabla_{M^\vee}$ définie dans le lemme 3.3.6 est dite duale *de ∇_M si les applications d'évaluation $\epsilon : M^\vee \otimes_A M \to A$ et de coévaluation $\eta : A \to M^\vee \otimes_A M$ induisent des isomorphismes de connexions entre $\nabla_{M^\vee \otimes_A M}$ et d.*

Le module à biconnexion (M, ∇_M) sera dit rigide *si il a une telle connexion duale.*

Dans l'article [5], proposition 2.6, il est démontré que si un module M sur un anneau commutatif a un dual respectant les morphismes d'évaluation et de coévaluation, alors M est nécessairement projectif et de type fini. En combinant ceci avec le lemme II.3.3.4 de [2], on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.3.8
Un module à biconnexion (M, ∇_M) est rigide si et seulement si M est projectif et de type fini sur A.

Enfin, il nous reste à étudier le passage aux sous-modules et aux quotients :

Lemme 3.3.9 (Stabilité des biconnexions par passage au sous-module)
Soit (M, ∇_M) un module à biconnexion. Alors tout sous-module N de M tel que $\nabla_M(N) \subset \Omega \otimes_A N$ et $\phi_{\nabla_M}(N \otimes_A \Omega) \subset \Omega \otimes_A N$ est un module à biconnexion si on le munit de la connexion induite $\nabla_M|_N$.

Démonstration :

Il est clair que la condition $\nabla_M(N) \subset \Omega \otimes_A N$ impose à $\nabla_M|_N$ d'être une connexion sur N. Le fait que c'est une biconnexion vient de ce que la volte induite $\phi_{\nabla_N} : \left| \begin{array}{ccc} N \otimes_A \Omega & \to & \Omega \otimes_A N \\ n \otimes \omega & \mapsto & \phi_{\nabla_M}(n \otimes \omega) \end{array} \right.$ est une volte pour ∇_N. □

Lemme 3.3.10 (Stabilité des biconnexions par passage au quotient)
Soit (M, ∇_M) un module à biconnexion. Alors tout quotient de M par un sous-module N tel que $\nabla_M(N) \subset \Omega \otimes_A N$ et $\phi_{\nabla_M}(N \otimes_A \Omega) \subset \Omega \otimes_A N$ est un module à biconnexion si on le munit de la connexion définie par $\nabla_{M/N}(m + N) = \nabla_M(m) + \Omega \otimes_A N$.

Démonstration :

Vérifions tout d'abord que l'application $\nabla_{M/N}$ est bien définie. Considérons $m \in M$ et $n \in N$; alors, $\nabla_{M/N}((m+n)+N) = \nabla_M(m) + \nabla_M(n) + \Omega \otimes_A N$. Puisque $\nabla_M(N) \subset \Omega \otimes_A N$, on obtient bien que $\nabla_M(n) \in \Omega \otimes_A N$, donc $\nabla_{M/N}((m+n)+N) = \nabla_{M/N}(m + N)$, et $\nabla_{M/N}$ est bien défini.

Le fait que $\nabla_{M/N}$ est une connexion se vérifie immédiatement ; l'additivité est vérifiée de la même manière que la bonne définition, et

$$\nabla_{M/N}(a.(m + N)) = d(a) \otimes m + a.\nabla_M(m) + \Omega \otimes_A N$$

d'où on déduit que

$$\nabla_{M/N}(a.(m+N)) = d(a) \otimes (m+N) + a.\nabla_{M/N}(m+N)$$

Enfin, définissons $\phi_{\nabla_{M/N}}((m+N)\otimes\omega) = \phi_{\nabla_M}(m\otimes\omega) + \Omega\otimes_A N$. Cette application est bien définie pour la même raison que ci-dessus (en utilisant la condition $\phi_{\nabla_M}(N\otimes_A\Omega) \subset \Omega\otimes_A N$)), et le fait que c'est une volte pour $\nabla_{M/N}$ provient du fait que ϕ_{∇_M} est une volte pour ∇_M. □

Dans le prochain chapitre, nous allons avoir besoin de conditions assurant que les sous-modules et les quotients ainsi définis sont des modules à biconnexion rigides lorsque (M, ∇_M) est rigide ; ceci nous permettra en particulier d'affirmer l'existence de sous-objets et de quotients dans certaines catégories de modules à connexion. De telles conditions ont été étudiées dans [2], et nous renvoyons donc à cet article pour trouver le détail des raisonnements. Les conditions obtenues sont réunies dans le théorème II.5.3.2 de [2], que nous énonçons ici avec notre vocabulaire :

Théorème 3.3.11 ([2], théorème II.5.3.2)

Soit (M, ∇_M) un module à biconnexion sur l'anneau différentiel généralisé (A, Ω, d). On suppose que :

- *l'anneau A est noethérien ;*
- *l'anneau total des fractions $Q(A)$ est un produit fini de corps ;*
- *l'anneau différentiel généralisé A est réduit ;*
- *le bimodule Ω est fidèle et projectif de type fini comme A-module à gauche et à droite ;*
- *$\Omega\otimes_A Q(A) \simeq Q(A)\otimes_A\Omega$ en tant que A-modules ;*
- *l'anneau différentiel généralisé A est simple : il n'a pas d'idéal propre dont l'image par d dans Ω est un sous-module propre de Ω.*

Alors, si M est rigide, et si N est un sous-module de M tel que $\nabla_M(N) \subset \Omega\otimes_A N$ et $\phi_{\nabla_M}(N\otimes_A\Omega) \subset \Omega\otimes_A N$, alors le sous-module N et le module quotient M/N munis des biconnexions définies dans les lemmes 3.3.9 et 3.3.10 sont tous deux rigides.

3.4 Le langage des anneaux différentiels généralisés et des connexions

On rappelle que les anneaux considérés sont toujours commutatifs et unitaires.

Définition 3.4.1 (Langage des anneaux différentiels généralisés)

Le langage des anneaux différentiels généralisés *est le langage L_{adg} contenant :*

- *un prédicat A ;*
- *un prédicat $\tilde{\Omega}$;*
- *un prédicat k ;*
- *deux symboles de fonction binaire $+$ et $\times$;*
- *un symbole de fonction unaire $-$;*
- *un symbole de constante 0 ;*
- *un symbole de fonction unaire $d : A \to \tilde{\Omega}$, et un symbole de fonction unaire $\tilde{\nabla} : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}$;*

Avant d'expliquer comment interpréter les symboles du langage, nous allons faire quelques hypothèses supplémentaires sur les anneaux différentiels généralisés, qui nous seront utiles par la suite. Le choix du langage L_{adg} vient de ce que nous allons avoir besoin, dans le prochain chapitre, de pouvoir parler d'équations différentielles généralisées, autrement dit de polynômes différentiels généralisés, comme des termes dans le langage des anneaux différentiels généralisés, en gardant à l'esprit que nous voudrions pouvoir appliquer nos résultats à des situations plus classiques, comme par exemple le cas où l'anneau différentiel généralisé est un corps différentiel ou de différence. En particulier, nous voudrions pouvoir multiplier entre eux deux éléments de la forme $d(a)$ et $d(b)$ (ce qui, en l'état, n'est pas possible tant que Ω n'est qu'un A-module), et pouvoir itérer la dérivation, autrement dit pouvoir appliquer une connexion aux éléments de Ω. C'est la raison pour laquelle nous allons redéfinir un anneau différentiel généralisé en ajoutant les hypothèses dont nous aurons besoin, et n'utiliser dans le chapitre suivant que cette définition. Remarquons en particulier l'hypothèse d'hérédité de l'anneau sous-jacent, qui nous sera utile dans le chapitre suivant pour démontrer que la catégorie des modules projectifs de type fini à connexion est une catégorie abélienne.

Définition 3.4.2 (Anneaux différentiels généralisés)

Un anneau différentiel généralisé (A, Ω, d) *sera désormais supposé être un anneau différentiel généralisé au sens de la définition 3.2.1, satisfaisant en plus les hypothèses du théorème 3.3.11, à laquelle on ajoute l'hypothèse que A est héréditaire :*

- *l'anneau A est noethérien et héréditaire ;*
- *l'anneau total des fractions $Q(A)$ est un produit fini de corps ;*
- *l'anneau différentiel généralisé A est réduit ;*
- *le bimodule Ω est fidèle et projectif de type fini comme A-module à gauche et à droite ;*
- *$\Omega \otimes_A Q(A) \simeq Q(A) \otimes_A \Omega$ en tant que A-modules ;*
- *l'anneau différentiel généralisé A est simple : il n'a pas d'idéal propre dont l'image par d dans Ω est un sous-bimodule propre de Ω ;*

et tel que Ω soit muni d'une biconnexion $\nabla_\Omega : \Omega \to \Omega \otimes_A \Omega$ dont la volte ϕ_{∇_Ω} est égale à l'identité sur $\Omega \otimes_A \Omega$.

Remarque 3.4.3

Les nombreuses hypothèses du théorème 3.3.11 sont toutes satisfaites lorsque A est un corps différentiel généralisé réduit (muni d'une dérivation non triviale). En particulier, si c'est un corps différentiel ou un corps de différence usuel, alors toutes les hypothèses de la définition précédente sont satisfaites (puisque $\Omega = A$ dans ce cas, l'anneau est nécessairement réduit, et la dérivation d définit une connexion sur Ω). Dans la situation de l'exemple 3.2.7 où l'anneau A est un corps muni de deux dérivations d_1 et d_2, les hypothèses ci-dessus sont encore toutes satisfaites (si d_1 et d_2 ne sont pas toutes les deux triviales). La connexion sur $\Omega = A \oplus A$ est donnée par $\nabla(a_1, a_2) = (d_1(a_1), d_1(a_2), d_2(a_1), d_2(a_2))$, et sa volte est l'identité.

Supposons donc que (A, Ω, d) est un anneau différentiel généralisé (au sens, rappelons-le, de la nouvelle définition 3.4.2). On note $\mathscr{A}$ l'algèbre tensorielle engendrée par Ω, autrement dit $\mathscr{A} = A \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \Omega^{\otimes n}$. La structure $\mathscr{A}$ peut être vue comme une L_{adg}-structure de la manière suivante :

Le prédicat A est interprété comme l'anneau A, et le prédicat k comme le sous-anneau des constantes k. Le prédicat $\tilde{\Omega}$ est interprété comme la somme directe $\bigoplus_{n\geq 1} \Omega^{\otimes n}$. On interprète le symbole $+$ comme l'addition usuelle dans la somme directe, le symbole $-$ comme l'opposé dans la somme directe, et le symbole 0 comme l'élément neutre pour l'addition dans la somme directe. Le symbole $\times$ est interprété comme le produit dans l'algèbre tensorielle, autrement dit comme le produit tensoriel, de manière à ce que les $\Omega^{\otimes n}$ forment une graduation de l'algèbre $\mathscr{A}$ définie avec ce produit. Enfin, on interprète le symbole de fonction d comme la dérivation $d : A \to \Omega$, et le symbole de fonction $\tilde{\nabla}$ comme l'application sur $\bigoplus_{n\geq 1} \Omega^{\otimes n}$ définie par la somme directe des connexions induites sur $\Omega^{\otimes n}$, autrement dit $\tilde{\nabla} = \bigoplus_{n\geq 1} \nabla_{\Omega^{\otimes n}}$.

3.5 Polynômes différentiels généralisés

Maintenant que nous avons vu comment interpréter le langage L_{adg} pour un anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}$, nous allons terminer ce chapitre sur une discussion autour des polynômes différentiels généralisés. L'un des intérêts de la construction formelle des polynômes qui va suivre vient de ce qu'elle se spécialise, dans le cas où $\mathscr{A}$ est un anneau différentiel ou un anneau à différence classique, en la notion de polynôme différentiel ou de différence.

Définition 3.5.1 (Indéterminées et ordre)
Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ un uplet de variables. Les indéterminées sur $(x_i)_i$ *sont définies inductivement par :*

- *une variable x_i est une indéterminée d'ordre 0 ;*
- *un terme de la forme $d(x_i)$ est une indéterminée d'ordre 1 ;*
- *si t est une indéterminée d'ordre $k \geq 1$, alors $\tilde{\nabla}(t)$ est une indéterminée d'ordre $k+1$;*
- *toutes les indéterminées s'obtiennent de cette manière.*

Définition 3.5.2 (Termes monômiaux, ordre et degré)
Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ *un uplet de variables. Les* termes monômiaux sur $(x_i)_i$ *sont définis inductivement par :*

- *un symbole de constante d'un élément* a *de* A *est un terme monômial d'ordre* 0 *et de degré* 0*, et* $d(a)$ *est un terme monômial d'ordre* 1 *et de degré* 0 *;*
- *un symbole de constante d'un élément* ω *de* $\Omega^{\otimes n}$ *est un terme monômial d'ordre* n *et de degré* 0 *;*
- *si* t *est un terme monômial d'ordre* $k \geq 1$ *et de degré* 0*, alors* $\tilde{\nabla}(t)$ *est un terme monômial d'ordre* $k+1$ *et de degré* 0 *;*
- *une indéterminée d'ordre* k *est un terme monômial d'ordre* k *et de degré* 1 *;*
- *si* t *et* t' *sont des termes monômiaux respectivement d'ordres* k *et* k' *et de degrés* d *et* d'*, alors le terme* $(t \times t')$ *est un terme monômial d'ordre* $max(k, k')$ *et de degré* $d + d'$ *;*
- *tous les termes monômiaux s'obtiennent de cette manière.*

Le lemme suivant indique que dans un anneau différentiel généralisé, l'ordre dans lequel sont réalisées les multiplications n'importe pas pour définir un terme monômial :

Lemme 3.5.3

Soit $\mathscr{A}$ *un anneau différentiel généralisé. Si* t*,* t' *et* t'' *sont trois termes monômiaux sur le uplet de variables* $\bar{x}$*, alors* $Th(\mathscr{A}, a)_{a \in A} \models \forall \bar{x}, ((t \times t') \times t'') = (t \times (t' \times t''))$.

Démonstration :

L'interprétation du produit étant dans $\mathscr{A}$ associative l'affirmation du lemme est clairement vérifiée. □

Nous pouvons alors définir la notion de polynôme différentiel généralisé, de la même manière que sont habituellement définis les polynômes formels à partir des monômes :

Définition 3.5.4 (Polynômes différentiels généralisés, ordre et degré)
Un monôme différentiel généralisé *est une classe d'équivalence de termes monômiaux sous la relation d'équivalence "changer l'ordre des parenthèses".*

Un polynôme différentiel généralisé *est une combinaison linéaire sur* A *de monômes différentiels généralisés. L'*ordre *et le* degré *d'un polynôme différentiel généralisé* P *sont respectivement le maximum des ordres et des degrés des termes monômiaux intervenant dans la combinaison linéaire définissant* P.

Nous pouvons donc définir de la manière usuelle l'algèbre des polynômes différentiels généralisés sur un uplet de variables (nous omettons la démonstration du lemme suivant, qui est essentiellement la même que dans le cas des polynômes usuels) :

Lemme 3.5.5 (Algèbre des polynômes différentiels généralisés)
Soit $\mathscr{A}$ un anneau différentiel généralisé. On note $A\langle\bar{x}\rangle$ l'ensemble des polynômes différentiels généralisés. On munit $A\langle\bar{x}\rangle$ de l'addition et de la multiplication des polynômes usuels, et de deux applications $\cdot_g : A \times A\langle\bar{x}\rangle \to A\langle\bar{x}\rangle$ et $\cdot_d : A\langle\bar{x}\rangle \times A \to A\langle\bar{x}\rangle$ définies comme les restrictions respectives de la multiplication à $A \times A\langle\bar{x}\rangle$ et $A\langle\bar{x}\rangle \times A$.

Alors, $(A\langle\bar{x}\rangle, +, \times)$ est un anneau (non-commutatif), $(A\langle\bar{x}\rangle, +, \cdot_g, \cdot_d)$ est un A-bimodule (non-commutatif), et $(A\langle\bar{x}\rangle, +, \times, \cdot_g)$ et $(A\langle\bar{x}\rangle, +, \times, \cdot_d)$ sont des A-algèbres (non-commutatives).

Définition 3.5.6
*On appellera $A\langle\bar{x}\rangle$ munie de ces opérations l'*algèbre des polynômes différentiels généralisés.

Remarquons que tous les termes du langage L_{adg} sur un uplet de variables $(x_i)_i$ sont en fait essentiellement des polynômes différentiels généralisés dans le contexte des anneaux différentiels généralisés :

Lemme 3.5.7
Soit $\mathscr{A}$ un anneau différentiel généralisé, et t un terme du langage $L_{adg}(A)$ sur les variables $(x_i)_i$. Alors il existe un polynôme différentiel généralisé P_t sur ces mêmes variables tel que $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A} \models \forall x_1, \dots x_n, t(x_1, \dots, x_n) = P_t(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration :

On procède par récurrence sur la complexité des termes. Si t et P_t satisfont le lemme, on dira que t et P_t sont *égaux modulo* $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$.

Si t est un symbole de constante a de A ou une variable x_i, alors t est un terme monômial, et le polynôme différentiel généralisé P_t défini par $P_t = t$ convient.

Si t et s sont deux termes tels qu'il existe deux polynômes différentiels généralisés P_t et P_s égaux à t et s modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$, alors le terme $t + s$ est égal modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$ au polynôme différentiel généralisé $P_t + P_s$.

Si t, s, P_t et P_s sont comme au paragraphe précédent, alors écrivons $P_t = \sum_{i\in I} a_i M_i^t$ et $P_s = \sum_{j\in J} b_j M_j^s$, I et J étant finis, $(a_i)_i$ et $(b_j)_j$ étant des éléments de A, et les M_i^t et M_j^s étant des termes monômiaux. Puisque $\mathscr{A}$ est un anneau différentiel généralisé, le produit est en particulier distributif sur la somme, et le terme $P_t \times P_s$ est donc égal modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$ au terme $P_{t\times s} = \sum_{(i,j)\in I\times J}(a_i M_i^t \times b_j M_j^s)$, qui est un polynôme différentiel généralisé puisqu'il est écrit comme somme finie des termes monômiaux $a_i M_i^t \times b_j M_j^s$. Puisque $P_t \times P_s$ est égal modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$ au terme $t \times s$, on voit que $P_{t\times s}$ est égal modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$ à $t \times s$, et satisfait donc le lemme.

Si t est un terme égal modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$ au terme polynômial P_t, alors écrivons $P_t = \sum_{i\in I} a_i M_i^t$ comme au paragraphe précédent. Si $d(P_t)$ est un terme, alors

P_t est d'ordre 0, et par additivité de d, il est égal modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$ au terme $\sum_{i\in I} d(a_i M_i^t)$, qui est égal par la règle de Leibniz à $\sum_{i\in I}(a_i d(M_i^t) + d(a_i) \times M_i^t)$, et il suffit donc de considérer le cas où P_t est un terme monômial que l'on notera M, et de chercher un terme polynômial $P_{d(M)}$ qui soit égal à $d(M)$ modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$. Procédons par récurrence sur la complexité de M. Puisque $d(M)$ est un terme, on sait que M est nécessairement d'ordre 0. Si M est un symbole de constante a de A, alors $d(a)$ est un terme monômial, et donc un polynôme différentiel généralisé, égal à $d(M)$, et est donc le terme $P_{d(M)}$ cherché ; si M est un symbole de variable x_i, alors $d(x_i)$ est également le polynôme différentiel généralisé cherché. Supposons maintenant que $M = (N \times N')$, N et N' étant des termes monômiaux tels qu'il existe $P_{d(N)}$ et $P_{d(N')}$ égaux respectivement à $d(N)$ et $d(N')$ modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$. Alors, d'après la règle de Leibniz pour la dérivation, on sait que $d(M)$ est égal modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$ au terme $(N \times d(N')) + (d(N) \times N')$, lui-même égal modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$ au terme $(N \times P_{d(N')}) + (P_{d(N)} \times N')$, qui est un polynôme différentiel généralisé, et est donc le terme $P_{d(M)}$ cherché. Ceci conclut la récurrence ; le terme $d(t)$ est donc égal modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$ à un polynôme différentiel généralisé $P_{d(t)}$.

Enfin, un raisonnement similaire à celui pour le symbole d permet de démontrer le lemme pour les termes de la forme $\tilde{\nabla}(t)$ lorsque t satisfait le lemme. En effet, comme précédemment, on peut se ramener par additivité de $\tilde{\nabla}$ au cas où t est un produit de termes monômiaux $N \times N'$ pour lesquels il existe $P_{\tilde{\nabla}(N)}$ et $P_{\tilde{\nabla}(N')}$ égaux à $\tilde{\nabla}(N)$ et $\tilde{\nabla}(N')$ modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$. Le polynôme différentiel généralisé $P_{\tilde{\nabla}(t)}$ recherché peut alors être pris égal au polynôme différentiel généralisé $P_{\tilde{\nabla}(N)} \times N' + N \times P_{\tilde{\nabla}(N')}$. Puisque nous avons à présent considéré tous les symboles du langage, on obtient le résultat par induction. □

Puisque nous avons une notion de polynômes, nous pouvons définir une notion de groupe « constructible » dans ce contexte.

Définition 3.5.8 (Équation polynômiale généralisée)
On appelle équation polynômiale généralisée une formule atomique de la forme $P(\bar{x}) = 0$, P étant un polynôme différentiel généralisé de $L_{adg}(A)$. On appellera également équation polynômiale généralisée une formule atomique quelconque de $L_{adg}(A)$ équivalente à une équation polynômiale généralisée modulo $Th(\mathscr{A}, a)_{a\in A}$.

Définition 3.5.9 (Groupe différentiel généralisé)
Soit $\mathscr{A} = (A, \Omega, d)$ un anneau différentiel généralisé. Un groupe différentiel généralisé *défini sur A est un groupe dont l'ensemble sous-jacent et le graphe de la multiplication sont tous deux définis par une combinaison booléenne d'équations polynômiales généralisées, c'est-à-dire par une formule sans quantificateurs dans L_{adg}.*

Définition 3.5.10 (Représentation rationnelle généralisée, première définition)

Soient $\mathscr{A} = (A, \Omega, d)$ un anneau différentiel généralisé, G un groupe différentiel généralisé défini sur A, et (M, ∇_M) un module projectif de type fini à connexion sur A. On appelle représentation de G sur M *une action $\rho : G \times M \to M$ telle que pour tout $g \in G$, l'application $\rho(g, \cdot) : m \mapsto \rho(g, m)$ est une application linéaire préservant la connexion, c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho(g,\cdot)"] \arrow[d, "\nabla_M"'] & M \arrow[d, "\nabla_M"] \\ \Omega \otimes_A M \arrow[r, "id_\Omega \otimes \rho(g,\cdot)"'] & \Omega \otimes_A M \end{tikzcd}$$

La représentation ρ est dite rationnelle généralisée *si, pour un certain module libre A^n de rang n sur A, il existe une application linéaire surjective $u : A^n \to M$ envoyant la base canonique de A^n sur un système générateur de M et une représentation ρ_A de G sur A^n telles que le graphe de ρ_A soit défini par une combinaison booléenne d'équations polynômiales généralisées , et telles que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} G \times A^n \arrow[r, "id_G \times u"] \arrow[d, "\rho_A"'] & G \times M \arrow[d, "\rho"] \\ A^n \arrow[r, "u"'] & M \end{tikzcd}$$

Remarque 3.5.11
L'un des objectifs initiaux de cette thèse était de démontrer une dualité tannakienne pour les groupes différentiels généralisés, de manière à ce que cette dualité se spécialise en particulier en une dualité tannakienne pour les groupes algébriques différentiels sur des corps différentiels, proche de la dualité tannakienne développée par Alexey Ovchinnikov dans [16], ou de celle développée par Moshe Kamensky dans [12] dans un contexte plus général incluant le cas des corps différentiels et les corps aux différences. Le formalisme que nous avons développé ici semblait être un contexte prometteur pour un tel objectif, puisque les corps différentiels et les corps à différence sont deux cas particuliers d'anneaux différentiels généralisés. Malheureusement, la définition choisie ci-dessus d'une représentation rationnelle généralisée, qui semble être la définition naturelle dans le contexte que nous avons développé, implique en particulier que les groupes dont nous parlons ne sont essentiellement que des groupes constructibles sur le pur corps des constantes de la dérivation. Pour voir ceci, plaçons-nous dans le cas où G est un groupe différentiel généralisé de matrices, autrement dit un sous-groupe du groupe des matrices inversibles sur A. Dans ce cas, la définition d'une représentation rationnelle généralisée implique en particulier que pour tout $g \in G$ et tout élément $m \in M$ d'une représentation rationnelle généralisée, on a la relation $id_\Omega \otimes \rho(\nabla_M(m)) = \nabla_M(\rho(g,m))$. On peut alors voir facilement que, dans le cas différentiel, cette condition impose aux coefficients de la matrice g d'être constants pour la dérivation d sur A. Il semble que ce phénomène ne puisse être évité sans changer substantiellement notre formalisme.

Avant de conclure ce chapitre par quelques exemples, nous donnons une autre définition d'une représentation d'un groupe différentiel généralisé qui semble plus appropriée au vu de notre formalisme. Nous reviendrons sur cette définition au chapitre suivant :

Définition 3.5.12 (Représentation d'un groupe différentiel généralisé)

Soit G un groupe différentiel généralisé, et M un A-module projectif de type fini. On appelle représentation de G sur M *une action $\rho : G \times M \to M$ telle qu'il existe une représentation $\rho_A : G \times A^n \to A^n$ faisant commuter le second diagramme de la définition de représentation rationnelle généralisée 3.5.10. On appelle* morphisme de représentations *une application linéaire $M \to M'$ entre A-modules qui préserve l'action de G.*

Exemple 3.5.13
Considérons le cas d'un anneau différentiel usuel (A, d), vu comme un anneau différentiel généralisé avec $\Omega = A$. Notons $A\{\bar{x}\}$ l'algèbre des polynômes différentiels usuels sur les variables $\bar{x}$; tout polynôme différentiel généralisé $P \in A\langle\bar{x}\rangle$ peut être vu comme un polynôme différentiel usuel $\bar{P} \in A\{\bar{x}\}$, en notant $\bar{P}$ le polynôme différentiel usuel défini par n'importe quel terme polynômial généralisé représentant P (en interprétant les sommes, produits, et dérivations de la manière évidente). L'application $P \to \bar{P}$ est donc bien définie, et est clairement un morphisme d'algèbres de $A\langle\bar{x}\rangle \to A\{\bar{x}\}$. De plus, elle est surjective, puisque tout polynôme différentiel usuel peut être écrit sous la forme d'un terme polynômial généralisé, quitte à choisir un parenthésage adapté. Par conséquent, il existe un idéal bilatère $I \subseteq A\langle\bar{x}\rangle$ tel que $A\langle\bar{x}\rangle/I$ est isomorphe à $A\{\bar{x}\}$; on retrouve donc ainsi la situation différentielle usuelle.

Exemple 3.5.14
On peut faire un raisonnement similaire pour un anneau à différence (A, σ), vu comme un anneau différentiel généralisé en posant $d_\sigma(a) = \sigma(a) - a$. Dans ce cas, on a $\Omega = A$, la structure de module à gauche étant la multiplication de A et la structure de module à droite étant définie par $a.b = \sigma(b)a$. La connexion $\nabla = \nabla_\Omega$ sur Ω est alors définie par $\nabla_\Omega = d$, et le raisonnement de l'exemple 3.5.13 précédent nous permet de voir que l'algèbre des polynômes à différence sur les variables $\bar{x}$ est isomorphe à un quotient de $A\langle\bar{x}\rangle$ par un idéal bilatère.

Exemple 3.5.15
Ce même type de raisonnement donne encore un résultat similaire par exemple dans l'exemple d'un anneau différentiel-à différence, c'est-à-dire un anneau A muni d'une dérivation δ, et d'un automorphisme σ, auquel on assigne encore la dérivation d_σ définie par $d_\sigma(a) = \sigma(a) - a$. Le bimodule Ω est alors défini comme étant $A \oplus A$, et la différentielle généralisée d sur A est définie par $d = (\delta, d_\sigma)$, la structure de bimodule de Ω étant définie comme étant la somme directe des structures de bimodules de A dans le cas différentiel (exemple 3.5.13) et de A dans le cas à différence (exemple 3.5.14). Encore une fois, l'algèbre des polynômes différentiels-aux différences est isomorphe à un quotient de $A\langle\bar{x}\rangle$ par un idéal bilatère.

Chapitre 4

Le formalisme tannakien

Ce chapitre est consacré à la présentation d'un formalisme permettant de formuler les idées tannakiennes dans le contexte des anneaux différentiels généralisés. Un théorème de reconstruction tannakien affirmerait que l'on peut reconstruire un groupe différentiel généralisé à partir de la catégorie de ses représentations dans laquelle on a oublié l'action du groupe ; la dualité tannakienne usuelle consiste en un théorème de reconstruction de ce type accompagné d'un théorème de caractérisation des catégories de représentations d'un tel groupe. Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, le formalisme développé dans cette thèse n'a pas permis à son auteur d'obtenir de tels résultats tannakiens. Cependant, le formalisme présenté dans ce chapitre et l'étude modèle-théorique des catégories tannakiennes différentielles qui en découle, semblent quoi qu'il en soit prometteurs pour permettre d'obtenir par la suite de tels résultats tannakiens.

La première section est consacrée à des rappels catégoriques nécessaires au traitement du formalisme tannakien. La seconde section a pour objectif de définir notre notion de catégorie tannakienne différentielle. Dans la troisième section, on étudie modèle-théoriquement les catégories tannakiennes différentielles, en définissant un langage approprié, en déterminant des propriétés d'élimination des quantificateurs et des imaginaires dans ce langage et en mettant en évidence une internité et un plongement stable de l'anneau différentiel généralisé afin de pouvoir utiliser la construction du groupe de liaison du théorème 2.3.1.

Rappelons qu'à partir de maintenant, les anneaux différentiels généralisés satisferont toujours les hypothèses de la définition 3.4.2, et seront toujours vus comme des L_{adg}-structures.

4.1 Rappels catégoriques

Les catégories tannakiennes sont des catégories imitant le comportement des catégories de représentation de groupes algébriques affines. Elles sont munies d'une structure « monoïdale », c'est-à-dire d'un bifoncteur $\otimes$ réminiscent du produit tensoriel, qui doit être compatible avec une certaine linéarité des ensembles de morphismes de la catégorie.

4.1.1 Catégories abéliennes

Dans une catégorie $\mathbf{C}$, un morphisme $f : A \to B$ est un *monomorphisme* si pour tout objet C et tous morphismes $g, g' : C \to A$, si $fg = fg'$, alors $g = g'$. Le morphisme f est un *épimorphisme* si pour tout objet C et tous morphismes $g, g' : B \to C$, si $gf = g'f$, alors $g = g'$.

Un objet $O \in \mathbf{C}$ est appelé *objet nul* de $\mathbf{C}$ si pour tout objet $A \in \mathbf{C}$, il existe un unique morphisme $O \to A$ et un unique morphisme $A \to O$ dans $\mathbf{C}$. En particulier, les objets nuls d'une catégorie sont canoniquement isomorphes, et pour tous objets $A, B \in \mathbf{C}$, il existe un unique morphisme se factorisant à travers O, le *morphisme nul* $A \to O \to B$, qui ne dépend pas du choix de l'objet nul O ; on notera ce morphisme $0 : A \to B$ (sans préciser les objets entre lesquels il est défini).

Si $\mathbf{C}$ a un objet nul, un morphisme $k : A \to B$ dans $\mathbf{C}$ est appelé un *noyau* de $g : B \to C$ si $gk = 0$, et si pour tout morphisme $h : A' \to B$ tel que $gh = 0$, il existe un unique morphisme $h' : A' \to A$ tel que $h = kh'$. Un conoyau est défini par la propriété duale : $c : B \to C$ est un *conoyau* de $g : A \to B$ si $cg = 0$, et si pour tout $h : B \to C'$ tel que $hg = 0$, il existe un unique $h' : C \to C'$ tel que $h = h'c$.

Si A et B sont deux objets de $\mathbf{C}$, alors un objet C est un *produit* de A et B, que l'on notera $C = A \times B$, si il existe $\pi_A : A \times B \to A$ et $\pi_B : A \times B \to B$ dans $\mathbf{C}$ tels que pour tous morphismes $f_A : X \to A$ et $f_B : X \to B$ dans $\mathbf{C}$, il existe un unique morphisme $f : X \to A \times B$ tel que $\pi_A f = f_A$ et $\pi_B f = f_B$. Les morphismes π_A et π_B sont appelés les *projections*, et f est le *produit* de f_A et f_B. On définit dualement la notion de coproduit : un *coproduit* de A et B est un objet $A \oplus B$ tel qu'il existe deux morphismes $i_A : A \to A \oplus B$ et $i_B : B \to A \oplus B$ tels que pour tous morphismes $f_A : A \to X$ et $f_B : B \to X$, il existe un unique morphisme $f : A \oplus B \to X$ tel que $fi_A = f_A$ et $fi_B = f_B$. Les morphismes i_A et i_B sont appelés les *injections*, et f le *coproduit* de f_A et f_B.

Si A, B et C sont des objets de $\mathbf{C}$, et $f : A \to C$ et $g : B \to C$ des morphismes de $\mathbf{C}$, alors un objet D est un *produit fibré* de f et g, noté $D = A \times_C B$ lorsque cela ne porte pas à confusion, si il existe $\bar{f} : D \to B$ et $\bar{g} : D \to A$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

et tel que pour tous $\tilde{f} : E \to B$ et $\tilde{g} : E \to A$ tels que $f\tilde{g} = g\tilde{f}$, il existe un unique $e : E \to D$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{g}"] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{f}"'] & & \\ & D \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

On définit dualement la notion de *somme amalgamée* : pour $f : C \to A$ et $g : C \to B$, une somme amalgamée de f et g est un objet $D = A \amalg_C B$ et deux morphismes $\bar{f} : B \to D$ et $\bar{g} : A \to D$ tels que $\bar{g}f = \bar{f}g$, et tels que pour tous morphismes $\tilde{f} : B \to E$ et $\tilde{g} : A \to E$, il existe un unique morphisme $e : D \to E$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "\bar{f}"] \arrow[ddr, bend left, "\tilde{f}"] & \\
B \arrow[r, "\bar{g}"'] \arrow[drr, bend right, "\tilde{g}"'] & D \arrow[dr, "e"] & \\
& & E
\end{tikzcd}$$

Dans une catégorie quelconque, les diverses notions décrites ci-dessus peuvent ne pas exister, ou se comporter de manière peu intuitive (par exemple, les projections et injections dans la définition d'un produit ou d'un coproduit ne sont pas nécessairement des épimorphismes et monomorphismes). Nous allons nous placer dans la suite dans des catégories où ceci ne se produit pas, aussi ne nous attarderons-nous pas sur des contre-exemples. Une catégorie abélienne est définie essentiellement comme une catégorie dans laquelle toutes les notions définies précédemment existent et se comportent bien :

Définition 4.1.1 (Catégorie abélienne)
Une catégorie $\mathbf{C}$ *est dite* abélienne *si elle satisfait les conditions suivantes :*
- *il existe un objet nul dans* $\mathbf{C}$ *;*
- *toute paire d'objets de* $\mathbf{C}$ *a un produit et un coproduit dans* $\mathbf{C}$ *;*
- *tout morphisme de* $\mathbf{C}$ *a un noyau et un conoyau ;*
- *tout monomorphisme est un noyau d'un morphisme de* $\mathbf{C}$*, et tout épimorphisme est un conoyau d'un morphisme de* $\mathbf{C}$.

L'exemple archétypal de catégorie abélienne est la catégorie des groupes abéliens avec les morphismes de groupes. Dans ce cas, l'objet nul est le groupe trivial, les produits et coproduits sont respectivement les produits directs et sommes directes, les noyaux et conoyaux sont les notions usuelles de noyau et de conoyau, et un monomorphisme (qui est nécessairement injectif) de A dans B a pour image un sous-groupe distingué de B, et est donc le noyau d'un morphisme s'annulant exactement sur ce sous-groupe, la propriété duale pour les épimorphismes étant vérifiée de la même manière.

Un autre exemple de catégorie abélienne qui nous intéressera plus dans la suite est la catégorie R-**Mod** des R-modules à gauche sur un anneau R, avec les applications linéaires entre eux. L'objet nul est le module trivial, les produits et coproduits sont respectivement les produits directs et les sommes directes, et les noyaux et conoyaux sont les noyaux et conoyaux habituels d'applications linéaires. De même, étant donné deux anneaux R et S, la catégorie R-**Mod**-S des R-S-bimodules est également abélienne.

Nous décrirons un exemple moins standard de catégorie abélienne dans la sous-section 4.1.4 : la catégorie des modules à connexion.

Remarque 4.1.2
Une catégorie abélienne est parfois présentée comme une catégorie ayant une structure de groupe commutatif définie sur chacun de ses ensembles de morphismes. Dans notre cas, ceci est une conséquence des axiomes d'une catégorie abélienne. Pour le voir, considérons deux morphismes $f, f' : A \to B$ dans $\mathbf{C}$. On appelle *diagonale* de A le morphisme produit $d : A \to A \times A$ de id_A par id_A, et *codiagonale* de B le morphisme coproduit $d' : B \oplus B \to B$ de id_B par id_B ; d'autre part, $A \times A$ est naturellement isomorphe à $A \oplus A$, et on peut définir $f + f' = d'(f \oplus f')d$ (le $\oplus$ étant ici ce que Mac Lane appelle dans [13], section 2 du chapitre VIII, le « biproduit » de f et f', dont nous ne parlerons pas ici), ce qui définit une loi de groupe commutatif sur $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$. Le neutre est le morphisme nul entre A et B ; de plus, la composition des morphismes est distributive sur cette somme. On renvoie à [13], chapitre VIII, pour plus de détails sur les catégories abéliennes.

Dans la suite, nous ne considérerons que des foncteurs respectant cette structure additive sur les ensembles de morphismes :

Définition 4.1.3 (Foncteur additif)
Un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre deux catégories abéliennes est dit additif *si pour tous morphismes $f, g : A \to B$ dans $\mathbf{C}$, on a $F(f + g) = F(f) + F(g)$.*

Dans une catégorie abélienne, pour tous morphismes $f : A \to C$ et $g : B \to C$, il existe un produit fibré de f et g ; on peut se référer par exemple au théorème 12.4 de [1], qui dit entre autres qu'une catégorie a les produits fibrés si elle a les produits finis et les égaliseurs. Nous ne définirons pas la notion d'égaliseur en toute généralité, mais dans une catégorie abélienne, les égaliseurs sont exactement les noyaux de morphismes de la forme $f - g$ pour $f, g : A \to B$, avec la soustraction $-$ provenant de la structure de groupe définie dans la remarque 4.1.2. Pour une raison similaire, toute catégorie abélienne admet une somme amalgamée pour tous morphismes $f : C \to A$ et $g : C \to B$.

4.1.2 Catégories tensorielles

Une catégorie tensorielle est une catégorie munie d'un bifoncteur imitant le comportement du produit tensoriel de modules ou de groupes.

Définition 4.1.4 (Catégorie tensorielle)
Soit $\mathbf{C}$ une catégorie munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Elle est dite tensorielle *si $\otimes$ est associatif, commutatif, et a une unité. Autrement dit, il existe deux isomorphismes naturels $\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C$ et $\beta_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ pour tous objets $A, B, C \in \mathbf{C}$, un objet $\mathbf{1} \in \mathbf{C}$, et deux isomorphismes naturels $\gamma_A : \mathbf{1} \otimes A \to A$ et $\delta_A : A \otimes \mathbf{1} \to A$, tels que $\beta_{A,B} \circ \beta_{B,A} = id_{B \otimes A}$, et tels que les diagrammes (que nous qualifierons respectivement de triangulaire, pentagonal et hexagonal) suivants commutent pour tous objets $A, B, C, D \in \mathbf{C}$:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (\mathbf{1} \otimes B) \arrow[rr, "\alpha_{A,\mathbf{1},B}"] \arrow[dr, "id_A \otimes \gamma_B"'] & & (A \otimes \mathbf{1}) \otimes B \arrow[dl, "\delta_A \otimes id_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] \arrow[d, "id_A \otimes \alpha_{B,C,D}"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"'] & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
& (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C} \otimes id_D"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}"] \arrow[d, "id_A \otimes \beta_{B,C}"'] & (A \otimes B) \otimes C \arrow[d, "\beta_{A\otimes B,C}"] \\
A \otimes (C \otimes B) \arrow[d, "\alpha_{A,C,B}"'] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "\alpha_{C,A,B}"] \\
(A \otimes C) \otimes B \arrow[r, "\beta_{A,C} \otimes id_B"'] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd}$$

Définition 4.1.5 (Rigidité)

Soit $\mathbf{C}$ *une catégorie tensorielle, et* A *un objet de* $\mathbf{C}$*. L'objet* A *est dit* rigide *si il existe un objet dual* $A^\vee$ *muni d'un morphisme d'évaluation* $\epsilon_A : A^\vee \otimes A \to \mathbf{1}$ *et d'un morphisme de coévaluation* $\eta_A : \mathbf{1} \to A \otimes A^\vee$ *tels que les composées suivantes soient les morphismes identité sur* A *et* $A^\vee$ *:*

$$A \xrightarrow{\gamma_A^{-1}} \mathbf{1} \otimes A \xrightarrow{\eta_A \otimes id_A} (A \otimes A^\vee) \otimes A \xrightarrow{\alpha^{-1}_{A,A^\vee,A}} A \otimes (A^\vee \otimes A) \xrightarrow{id_A \otimes \epsilon_A} A \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\delta_A} A$$

$$A^\vee \xrightarrow{\delta^{-1}_{A^\vee}} A^\vee \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{id_{A^\vee} \otimes \eta_A} A^\vee \otimes (A \otimes A^\vee) \xrightarrow{\alpha_{A^\vee,A,A^\vee}} (A^\vee \otimes A) \otimes A^\vee \xrightarrow{\epsilon_A \otimes id_{A^\vee}} \mathbf{1} \otimes A \xrightarrow{\gamma_{A^\vee}} A^\vee$$

La catégorie $\mathbf{C}$ *est dite* rigide *si tout objet est rigide.*

Remarque 4.1.6

Les catégories que nous appelons « tensorielles » ici sont appelées de diverses manières dans la littérature. Dans la terminologie de [23], ce sont les « $\otimes$-catégories ACU » ; dans la terminologie de [13], ce sont les « catégories monoïdales symétriques ». Toutes les catégories munies d'un bifoncteur $\otimes$ que nous considérerons par la suite seront des catégories tensorielles rigides au sens de notre définition, aussi nous en tiendrons-nous à cette terminologie.

Étant donné un anneau commutatif R, la catégorie R-**Mod** est tensorielle si elle est munie du produit tensoriel usuel $\otimes_R$: l'objet unité est $\mathbf{1} = R$, et les isomorphismes α, β, γ et δ sont les isomorphismes canoniques associés au produit tensoriel de modules.

Encore une fois, certains foncteurs préservant la structure tensorielle nous seront plus utiles que les foncteurs habituels, aussi introduisons-nous la définition suivante :

Définition 4.1.7 (Foncteur tensoriel)
Un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre catégories tensorielles est dit tensoriel *si il existe un isomorphisme $\phi_{\mathbf{1}} : \mathbf{1}_{\mathbf{D}} \to F(\mathbf{1}_{\mathbf{C}})$, et un isomorphisme naturel $\phi_{A,B} : F(A) \otimes_{\mathbf{D}} F(B) \to F(A \otimes_{\mathbf{C}} B)$ tel que les diagrammes suivants commutent pour tous objets $A, B, C \in \mathbf{C}$ (en notant les isomorphismes α, β, γ et δ de la même manière dans les deux catégories) :*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes_{\mathbf{D}} (F(B) \otimes_{\mathbf{D}} F(C)) \arrow[r, "\alpha_{F(A),F(B),F(C)}"] \arrow[d, "id_{F(A)} \otimes \phi_{B,C}"'] & (F(A) \otimes_{\mathbf{D}} F(B)) \otimes_{\mathbf{D}} F(C) \arrow[d, "\phi_{A,B} \otimes id_{F(C)}"] \\
F(A) \otimes_{\mathbf{D}} F(B \otimes_{\mathbf{C}} C) \arrow[d, "\phi_{A,B \otimes_{\mathbf{C}} C}"'] & F(A \otimes_{\mathbf{C}} B) \otimes_{\mathbf{D}} F(C) \arrow[d, "\phi_{A \otimes_{\mathbf{C}} B, C}"] \\
F(A \otimes_{\mathbf{C}} (B \otimes_{\mathbf{C}} C)) \arrow[r, "F(\alpha_{A,B,C})"'] & F((A \otimes_{\mathbf{C}} B) \otimes_{\mathbf{C}} C)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes_{\mathbf{D}} F(B) \arrow[r, "\beta_{A,B}"] \arrow[d, "\phi_{A,B}"'] & F(B) \otimes_{\mathbf{D}} F(A) \arrow[d, "\phi_{B,A}"] \\
F(A \otimes_{\mathbf{C}} B) \arrow[r, "F(\beta_{A,B})"'] & F(B \otimes_{\mathbf{C}} A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{1}_{\mathbf{D}} \arrow[r, "\delta_{F(A)}"] \arrow[d, "id_{F(A)} \otimes \phi_{\mathbf{1}}"'] & F(A) \\
F(A) \otimes_{\mathbf{D}} F(\mathbf{1}_{\mathbf{C}}) \arrow[r, "\phi_{A,\mathbf{1}_{\mathbf{C}}}"'] & F(A \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{1}_{\mathbf{C}}) \arrow[u, "F(\delta_A)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}_{\mathbf{D}} \otimes_{\mathbf{D}} F(A) \arrow[r, "\gamma_{F(A)}"] \arrow[d, "\phi_{\mathbf{1}} \otimes id_{F(B)}"'] & F(A) \\
F(\mathbf{1}_{\mathbf{C}}) \otimes_{\mathbf{D}} F(A) \arrow[r, "\phi_{\mathbf{1}_{\mathbf{C}},A}"'] & F(\mathbf{1}_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} A) \arrow[u, "F(\gamma_A)"']
\end{tikzcd}$$

4.1.3 Catégories A-linéaires

On fixe un anneau (commutatif) A. Les catégories A-linéaires sont les catégories dont les ensembles de morphismes sont munis d'une structure de A-module compatible avec la structure catégorique. Précisément :

Définition 4.1.8 (Catégorie A-linéaire)
Une catégorie $\mathbf{C}$ *est dite* A-linéaire *si pour tous objets* $M, N \in \mathbf{C}$*, l'ensemble* $Hom_{\mathbf{C}}(M, N)$ *est muni d'une structure de* A*-module dont l'addition est celle induite par les axiomes d'une catégorie abélienne, et telle que la composition dans* $\mathbf{C}$ *définisse pour tous objets* $M, N, P \in \mathbf{C}$ *un morphisme de* A*-modules :*

$$\circ_{M,N,P} : Hom_{\mathbf{C}}(N, P) \otimes_A Hom_{\mathbf{C}}(M, N) \to Hom_{\mathbf{C}}(M, P)$$

La catégorie A-**Mod** est clairement A-linéaire. Remarquons que si k est un sous-anneau de A (comme l'anneau des constantes d'un anneau différentiel généralisé), alors toute catégorie A-linéaire peut être munie d'une structure k-linéaire.

Les catégories abéliennes et tensorielles sont naturellement munies d'une structure A-linéaire pour $Hom_{\mathbf{C}}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = A$ (voir par exemple [6], après la définition 1.15) :

Proposition 4.1.9

Si $\mathbf{C}$ *est une catégorie abélienne tensorielle pour un bifoncteur* $\otimes$*, alors l'ensemble* $Hom_{\mathbf{C}}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$*, que nous noterons* $End(\mathbf{1})$*, est un anneau commutatif pour la somme définie dans la remarque 4.1.2 et la composition des morphismes, et* $\mathbf{C}$ *est alors une catégorie* $End(\mathbf{1})$*-linéaire.*

Démonstration :

La remarque 4.1.2 nous apprend que $End(\mathbf{1})$ est un groupe commutatif dont le neutre est le morphisme nul $\mathbf{1} \to \mathbf{1}$, et la composition des morphismes est distributive sur l'addition. Le morphisme $id_{\mathbf{1}}$ est le neutre pour la composition. Pour la commutativité, rappelons que le fait que γ est un isomorphisme naturel implique la commutativité du diagramme suivant pour tout morphisme $g : \mathbf{1} \to \mathbf{1}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{1}}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}} \otimes g"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{1}}"'] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

De plus, pour tout morphisme $f : \mathbf{1} \to \mathbf{1}$, l'action de f sur $\mathbf{1}$ peut se décrire par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \arrow[d, "f \otimes id_{\mathbf{1}}"'] & \mathbf{1} \arrow[l, "\gamma_{\mathbf{1}}^{-1}"'] \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "\gamma_{\mathbf{1}}"'] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

Par conséquent, puisque $\gamma_{\mathbf{1}}$ est un isomorphisme, tous les carrés du diagramme suivant commutent sauf éventuellement le carré central :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \arrow[rrr, "id_{\mathbf{1}}\otimes g"] \arrow[dr, "\gamma_{\mathbf{1}}"] \arrow[ddd, "f\otimes id_{\mathbf{1}}"'] & & & \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \arrow[dl, "\gamma_{\mathbf{1}}"'] \arrow[ddd, "f\otimes id_{\mathbf{1}}"] \\
& \mathbf{1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "f"] & \\
& \mathbf{1} \arrow[r, "g"'] & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \arrow[rrr, "id_{\mathbf{1}}\otimes g"'] \arrow[ur, "\gamma_{\mathbf{1}}"] & & & \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \arrow[ul, "\gamma_{\mathbf{1}}"']
\end{tikzcd}$$

On en déduit, par une chasse au diagramme aisée utilisant le fait que $\gamma_{\mathbf{1}}$ est un isomorphisme, que le carré central commute, et donc que $f \circ g = g \circ f$, ce qui implique la commutativité de l'anneau $(End(\mathbf{1}), +, \circ)$.

Pour la linéarité, on définit une action de $End(\mathbf{1})$ sur $Hom(A, B)$ pour tous objets $A, B \in \mathbf{C}$: pour $f \in End(\mathbf{1})$ et $g \in Hom(A, B)$, on définit $f.g$ comme le morphisme composé

$$A \xrightarrow{\gamma_A^{-1}} \mathbf{1} \otimes A \xrightarrow{f \otimes g} \mathbf{1} \otimes B \xrightarrow{\gamma_B} B$$

Ceci définit clairement une structure de $End(\mathbf{1})$-module sur $Hom(A, B)$, et la composition $Hom(B, C) \times Hom(A, B) \to Hom(A, C)$ est clairement $End(\mathbf{1})$-bilinéaire. Par conséquent, elle se factorise à travers le produit tensoriel

$$Hom(B, C) \otimes_{End(\mathbf{1})} Hom(A, B) \to Hom(A, C)$$

et la catégorie $\mathbf{C}$ est donc bel et bien $End(\mathbf{1})$-linéaire. □

On peut encore définir une notion de foncteur préservant la linéarité d'une catégorie :

Définition 4.1.10 (Foncteur A-linéaire)

Un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre deux catégories A-linéaires est dit A-linéaire *si il préserve la structure A-linéaire des ensembles de morphismes, autrement dit si $F(a.f + g) = a.F(f) + F(g)$ pour tous $a \in A$ et $f, g : B \to B'$ dans $\mathbf{C}$.*

Remarquons que si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est un foncteur tensoriel et additif entre deux catégories abéliennes et tensorielles telles que $End(\mathbf{1_C}) = End(\mathbf{1_D})$, alors on peut comme dans la proposition 4.1.9 voir que F est $End(\mathbf{1})$-linéaire.

4.1.4 La catégorie des modules à connexion

Soit (A, Ω, d) un anneau différentiel généralisé (on rappelle que les anneaux différentiels généralisés sont supposés satisfaire la définition 3.4.2). On appelle $\nabla\mathbf{MOD}$ la catégorie dont les objets sont les A-modules M munis d'une connexion, et dont les morphismes sont les applications linéaires préservant la connexion, c'est-à-dire les applications linéaires $f : M \to N$ telles que $id_\Omega \otimes f(\nabla_M(m)) = \nabla_N(f(m))$ (les « morphismes horizontaux », selon la terminologie de [2]). Autrement dit, f est un tel morphisme si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nabla_M"] \arrow[d, "f"'] & \Omega \otimes_A M \arrow[d, "id_\Omega \otimes f"] \\ N \arrow[r, "\nabla_N"'] & \Omega \otimes_A N \end{tikzcd}$$

On appelle ∇**Mod** la sous-catégorie pleine des A-module projectifs de type fini à connexion. Nous allons étudier les propriétés de ces deux catégories sous certaines hypothèses sur l'anneau différentiel généralisé.

Tout d'abord, démontrons que ∇**MOD** et ∇**Mod** sont des catégories abéliennes. Le module trivial muni de la connexion nulle est clairement un objet nul pour ces deux catégories. Si (M, ∇_M) et (N, ∇_N) sont deux modules à connexion, leur produit direct est égal à leur somme directe, et il peut être muni de la connexion définie par $\nabla_{M\oplus N} = \nabla_M \oplus \nabla_N$ (en identifiant $(\Omega \otimes_A M) \oplus (\Omega \otimes_A N)$ et $\Omega \otimes_A (M \oplus N)$ par l'isomorphisme canonique) ; l'objet ainsi défini est alors un module à connexion, et est le produit et le coproduit de (M, ∇_M) et (N, ∇_N) dans ∇**MOD**. Pour ∇**Mod**, le produit direct et la somme directe de modules projectifs de type fini est encore un module projectif de type fini, et le produit et le coproduit existent également dans cette catégorie.

Considérons à présent les noyaux et conoyaux. Si $f : M \to M'$ est un morphisme dans ∇**MOD**, alors $ker(f)$ est un sous-module de M. L'application d'inclusion $ker(f) \to M$ n'est pas nécessairement un noyau de f, puisqu'il faut pour cela que $ker(f)$ soit un sous-objet de M, autrement dit que $\nabla_M(ker(f)) \subseteq \Omega \otimes_A ker(f)$. Si cette inclusion est vérifiée, alors l'inclusion est un noyau de f ; si ce n'est pas le cas, il faut se restreindre à un sous-module N de $ker(f)$ tel que $\nabla_M(N) \subseteq \Omega \otimes_A N$ et qui soit maximal relativement à cette propriété. Nous allons démontrer qu'un tel noyau existe dans la catégorie ∇**Mod** ; le raisonnement pour la catégorie ∇**MOD** est sensiblement le même, à ceci près que l'on oublie l'hypothèse de projectivité des objets considérés, aussi ne détaillerons-nous que le raisonnement pour ∇**Mod**.

Pour ce faire, considérons l'ensemble Σ défini comme l'ensemble des sous-modules projectifs $N \subseteq ker(f)$ tels que $\nabla_M|_N(N) \subseteq \Omega \otimes_A N$. C'est un ensemble non-vide puisque le module trivial muni de la connexion nulle en est un élément. Remarquons que chacun des éléments de Σ est un objet dans la catégorie ∇**Mod** : en effet, puisque l'anneau est noethérien, tous les sous-modules de M, et donc de $ker(f)$, sont de type fini, et il sont donc dans ∇**Mod** puisque l'on a supposé qu'ils étaient projectifs. Considérons le module $N = \bigcup \Sigma$, et vérifions que c'est un objet de ∇**Mod**. Il est de type fini pour la même raison de noethérianité de l'anneau, et $\nabla_M|_N(N) \subseteq \Omega \otimes_A N$ puisque tout élément de N est dans un élément de Σ qui satisfait cette inclusion. Pour finir, on voit que N est nécessairement projectif : c'est un sous-module de M, qui est projectif, et l'hypothèse d'hérédité de A (voir la définition 3.4.2) implique alors que N est également projectif.

Considérons donc l'application d'inclusion $k : N \to M$; nous venons de démontrer que c'est un morphisme dans ∇**Mod**, et nous allons démontrer que c'est un noyau de f dans cette catégorie. Clairement, puisque $N \subseteq ker(f)$, on sait que $fk = 0$. Considérons donc $h : N' \to M$ dans ∇**MOD** tel que $fh = 0$. On sait donc que $im(h) \subseteq ker(f)$, et la condition $(id_\Omega \otimes h)(\nabla_{N'}(n')) = \nabla_M(h(n'))$ pour tout $n' \in N'$ implique en particulier que $\nabla_M(im(h)) \subseteq \Omega \otimes_A im(h)$, autrement dit que $im(h)$ muni de $\nabla_M|_{im(h)}$ est un élément de Σ et est donc un sous-module à connexion de N. Soient $i : im(h) \to N$ l'application d'inclusion, et $h' = ih : N' \to N$; on a $h = kh'$, ce qui achève de démontrer que k est un noyau pour f.

On construit les conoyaux de manière similaire. Soit $f : M \to M'$ un morphisme de modules à connexion ; pour la même raison que précédemment, l'image de f n'est pas nécessairement un module à connexion. On considère donc l'ensemble Σ des sous-modules à connexion de M' contenant $im(f)$, qui est non-vide puisqu'il contient au moins M' lui-même. Soit $N = \bigcap \Sigma$; si $n \in N$, alors pour tout $P \in \Sigma$, $n \in P$. Par conséquent, $\nabla_P(n) \in \Omega \otimes_A P$, et on a donc $\nabla_N(n) \in \Omega \otimes_A N$. Le module N est de type fini (encore par noethérianité de A), et projectif (par hérédité de A). Un raisonnement similaire à celui sur les noyaux montre alors que M'/N est un conoyau pour f.

Il reste donc à démontrer que tout monomorphisme est un noyau, et que tout épimorphisme est un conoyau. On peut voir ceci en démontrant que tout épimorphisme est le conoyau de son noyau. Les catégories ∇**MOD** et ∇**Mod** sont donc bel et bien abéliennes.

Dans le chapitre 3, ou dans le théorème 3.3.11, nous avons en fait démontré que si (A, Ω, d) est un anneau différentiel généralisé réduit, alors la catégorie ∇**Mod** des modules projectifs de type fini à biconnexion, munie du produit tensoriel qui a été défini dans la définition 3.3.1, est une catégorie tensorielle. L'identité est $\mathbf{1} = A$ muni de la connexion triviale d, et les isomorphismes α, β, γ et δ sont définis facilement de manière à ce que la volte soit préservée.

Il est clair que la catégorie ∇**Mod** est A-linéaire ; de plus, on peut voir que $End(\mathbf{1})$ est l'anneau des constantes de A, et on retrouve grâce à la proposition 4.1.9 la structure k-linéaire de ∇**Mod**.

4.2 Catégories tannakiennes différentielles

Dans toute cette sous-section 4.2, on fixe un anneau différentiel généralisé $\mathscr{A} = (A, \Omega, d)$, on suppose que Ω est un bimodule commutatif, et on appelle $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne, A-linéaire, et tensorielle rigide, et $T_\Omega : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ un foncteur additif et exact, satisfaisant la *propriété d'associativité* : pour tous objets X et X' de $\mathbf{C}$, il existe un isomorphisme $t_g : T_\Omega(X \otimes X') \to X \otimes T_\Omega(X')$ et un isomorphisme $t_d : T_\Omega(X \otimes X') \to T_\Omega(X) \otimes X'$.

Dans [11], Kamensky définit une *structure différentielle* sur une catégorie $\mathbf{C}$ tensorielle abélienne rigide k-linéaire sur un corps k comme étant un foncteur D associant à un objet X de $\mathbf{C}$ une suite exacte dans $\mathbf{C}$ de la forme :

$$0 \to X \to Y \to X \to 0$$

En particulier, il munit la catégorie $\mathbf{Vect}_k$ des k-espaces vectoriels de dimension finie d'une structure différentielle que nous décrirons plus loin, et qui lui permet de définir un foncteur fibre sur une catégorie munie d'une structure différentielle comme un foncteur de cette catégorie dans la catégorie $\mathbf{Vect}_k$ qui préserve cette structure différentielle. Nous allons décrire ici une construction légèrement différente de la sienne, mais qui s'y avérera équivalente dans son contexte.

4.2.1 Catégorie des prolongations

On décrit ici la catégorie des prolongations d'une catégorie abélienne A-linéaire et tensorielle rigide $\mathbf{C}$ munie d'un foncteur additif et exact T_Ω satisfaisant la propriété d'associativité. C'est une sous-catégorie de la catégorie des suites exactes dans $\mathbf{C}$, et nous allons définir, toujours suivant [11] (paragraphe 4.1.4), une structure tensorielle sur cette catégorie.

On note $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ la catégorie dont les objets sont les suites exactes courtes de $\mathbf{C}$ de la forme

$$0 \to T_\Omega(X) \to Y \to X \to 0$$

et dont les morphismes sont les morphismes de suites exactes dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire les paires de morphismes (f,g) dans $\mathbf{C}$, avec $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$, et telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_\Omega(X) \arrow[r] \arrow[d, "T_\Omega(f)"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_\Omega(X') \arrow[r] & Y' \arrow[r] & X' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On définit deux foncteurs Π_0 et Π_1 de $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ de la manière suivante : à une suite exacte courte

$$0 \to T_\Omega(X) \to Y \to X \to 0$$

le foncteur Π_0 associe X, et le foncteur Π_1 associe Y. À un morphisme $(f,g) \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$, le foncteur Π_0 associe f, et Π_1 associe g. On note $T_\Omega(\Pi_0)$ le foncteur qui à une telle suite exacte associe $T_\Omega(X)$, et à un morphisme (f,g) associe $T_\Omega(f)$.

Si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ est un foncteur exact, et $\mathbf{X}$ est un objet de $\mathcal{P}(\mathbf{C})$, alors la suite obtenue en appliquant F à chaque composante de $\mathbf{X}$ est une suite exacte dans $\mathbf{C}'$, et est donc un objet de $\mathcal{P}(\mathbf{C}')$. On note $\mathcal{P}(F) : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \to \mathcal{P}(\mathbf{C}')$ le foncteur obtenu de cette manière.

La catégorie $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ est tensorielle rigide pour le produit tensoriel $\otimes$ que nous définissons ci-après. La construction de ce produit tensoriel est donnée dans le paragraphe 4.1.4 de [11], mais nous en donnons ici un exposé plus détaillé (en utilisant le terme « somme de Baer » pour ce que Kamensky appelle « somme de Yoneda », ce premier terme semblant plus standard).

Nous commençons par définir la *somme de Baer* des deux suites exactes suivantes :

$$\mathbf{X} = 0 \to T_\Omega(X) \to Y \to X \to 0$$

$$\mathbf{X}' = 0 \to T_\Omega(X) \to Y' \to X \to 0$$

On note $d : X \to X \times X$ le morphisme diagonal, et on considère le diagramme suivant construit sur le produit de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}'$ (en notant f et g les morphismes produit) :

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \arrow[d, "d"] & \\
0 \arrow[r] & T_\Omega(X) \times T_\Omega(X) \arrow[r, "f"] & Y \times Y' \arrow[r, "g"] & X \times X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On construit le produit fibré $(Y \times Y') \times_{X \times X} X$ des morphismes g et d. Puisque $g \circ f = 0$ par exactitude de $\mathbf{X} \times \mathbf{X}'$, la propriété universelle du produit fibré donne l'existence d'un unique morphisme $u : T_\Omega(X) \times T_\Omega(X) \to (Y \times Y') \times_{X \times X} X$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
T_\Omega(X) \times T_\Omega(X) \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& (Y \times Y') \times_{X \times X} X \arrow[r, "v"'] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "d"] \\
& Y \times Y' \arrow[r, "g"'] & X \times X
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, on obtient la suite suivante :

$$0 \longrightarrow T_\Omega(X) \times T_\Omega(X) \xrightarrow{u} (Y \times Y') \times_{X \times X} X \xrightarrow{v} X \longrightarrow 0$$

Cette suite est exacte. En effet, le fait que f est un monomorphisme implique que u en est un également, et le fait que g est un épimorphisme implique que v en est un également ; l'exactitude au milieu provient de l'exactitude de la suite $\mathbf{X} \times \mathbf{X}'$, ce que l'on peut voir en faisant une chasse au diagramme sur le diagramme suivant (où p est le morphisme obtenu en construisant le produit fibré) :

$$\begin{tikzcd}
& & (Y \times Y') \times_{X \times X} X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_\Omega(X) \times T_\Omega(X) \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "f"'] & Y \times Y' \arrow[r, "g"'] & X \times X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pour simplifier, faisons cette chasse au diagramme en supposant que $\mathbf{C}$ est une catégorie de modules sur un anneau R, ce que l'on peut toujours faire d'après le théorème de plongement de Freyd-Mitchell (théorème 7.34 dans [7]), mais qui est un théorème difficile que l'on pourrait contourner en réalisant la chasse au diagramme en ne raisonnant que sur les morphismes.

Par définition de u, il est clair que $im(u) \subseteq ker(v)$. Soit donc $x \in ker(v)$. On a donc $d(v(x)) = 0$, et par commutativité du diagramme ci-dessus, $g(p(x)) = 0$. Puisque la ligne du bas du diagramme est exacte, on a $p(x) \in ker(g) = im(f)$, et il existe donc un élément $y \in T_\Omega(X) \times T_\Omega(X)$ tel que $f(y) = p(x)$. Encore par commutativité du diagramme, on a $f = pu$, et donc $p(u(y)) = p(x)$. Mais p est un monomorphisme (parce que d en est un), et on obtient donc $x = u(y)$, d'où $x \in im(u)$, ce qui conclut pour l'exactitude de la suite.

Considérons à présent la somme amalgamée $Z = X \amalg_{T_\Omega(X) \times T_\Omega(X)} ((Y \times Y') \times_{X \times X} X)$ du morphisme codiagonal $d' : T_\Omega(X) \times T_\Omega(X) \to T_\Omega(X)$ avec u, ce qui nous donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_\Omega(X) \times T_\Omega(X) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"'] & (Y \times Y') \times_{X \times X} X \arrow[r, "v"] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
& T_\Omega(X) \arrow[r, "u'"'] & Z & &
\end{tikzcd}$$

En faisant un raisonnement dual de celui déjà réalisé, on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_\Omega(X) \xrightarrow{u'} Z \xrightarrow{v'} X \longrightarrow 0$$

On appelle cette suite exacte la *somme de Baer* de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}'$, et on la note $\mathbf{X} +_B \mathbf{X}'$.

On définit à présent le produit tensoriel sur $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ en utilisant cette somme de Baer. Soient

$$\mathbf{X} = 0 \to T_\Omega(X) \to Y \to X \to 0$$

$$\mathbf{X}' = 0 \to T_\Omega(X') \to Y' \to X' \to 0$$

deux objets de $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. Considérons le produit tensoriel à gauche $X \otimes \mathbf{X}'$ (en prenant le produit tensoriel de X par chaque composante de $\mathbf{X}'$), et le produit tensoriel $\mathbf{X} \otimes X'$. En utilisant la propriété d'associativité du foncteur T_Ω, on obtient deux suites exactes :

$$0 \to T_\Omega(X \otimes X') \to X \otimes Y' \to X \otimes X' \to 0$$

$$0 \to T_\Omega(X \otimes X') \to Y \otimes X' \to X \otimes X' \to 0$$

Le produit tensoriel $\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}'$ est défini comme étant la somme de Baer $(\mathbf{X} \otimes X') +_B (X \otimes \mathbf{X}')$ de ces deux suites exactes. L'intérêt de cette définition du produit tensoriel est qu'il fait de $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ une catégorie tensorielle rigide :

Proposition 4.2.1

Supposons que $\mathbf{C}$ est abélienne, A-linéaire, et tensorielle rigide. Supposons de plus que toute suite exacte courte est scindée dans $\mathbf{C}$. La catégorie $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ est alors tensorielle rigide, et le foncteur $\Pi_0 : \mathcal{P}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ est un foncteur tensoriel.

Démonstration :

Nous devons vérifier que le produit tensoriel défini précédemment satisfait les hypothèses nécessaires pour faire de $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ une catégorie tensorielle rigide.

Par commutativité et associativité du produit tensoriel dans $\mathbf{C}$, on voit immédiatement que le produit tensoriel sur $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ est associatif et commutatif. De plus, si on a un objet unité $\mathbf{1_C}$ dans $\mathbf{C}$, alors la suite exacte

$$0 \to T_\Omega(\mathbf{1_C}) \to \mathbf{1_C} \oplus (T_\Omega(\mathbf{1_C})) \to \mathbf{1_C} \to 0$$

est un objet unité dans $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. Par conséquent, la catégorie $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ est tensorielle, et il reste à vérifier qu'elle est rigide.

Soit $\mathbf{A} = 0 \to T_\Omega(X) \to Y \to X \to 0$ un élément de $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. Cette suite exacte est scindée par hypothèse ; puisque $\mathbf{C}$ est une catégorie abélienne, l'existence d'une telle section implique que l'objet Y est isomorphe dans $\mathbf{C}$ au coproduit $X \oplus (T_\Omega(X))$. Nous identifions Y avec $X \oplus (T_\Omega(X))$ grâce à cet isomorphisme, et donc $\mathbf{A}$ avec la suite exacte $0 \to T_\Omega(X) \to X \oplus (T_\Omega(X)) \to X \to 0$.

Notons $\mathbf{A}^\vee$ la suite exacte duale de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{C}$. On note $T_\Omega(\mathbf{A}^\vee)$ la suite exacte obtenue en appliquant le foncteur T_Ω à $\mathbf{A}^\vee$ (c'est une suite exacte puisque l'on a supposé T_Ω exact). On appelle $\psi : T_\Omega(T_\Omega(X)^\vee) \to X^\vee$ la composée des morphismes suivants (on omet les indices lorsque l'on applique un morphisme de foncteurs pour alléger les notations) :

$$T_\Omega(T_\Omega(X)^\vee) \xrightarrow{T_\Omega(\delta)} T_\Omega(T_\Omega(X)^\vee \otimes \mathbf{1}) \xrightarrow{T_\Omega(id\otimes\eta)} T_\Omega\left(T_\Omega(X)^\vee \otimes X \otimes X^\vee\right) \xrightarrow{t^g}$$
$$T_\Omega(X)^\vee \otimes T_\Omega(X\otimes X^\vee) \xrightarrow{id\otimes t^d} T_\Omega(X)^\vee \otimes T_\Omega(X)\otimes X^\vee \xrightarrow{\epsilon\otimes id} \mathbf{1}\otimes X^\vee \xrightarrow{\gamma} X^\vee$$

Puisque $\mathbf{A}^\vee$ est scindée par hypothèse, il existe un isomorphisme $\lambda : Y^\vee \to T_\Omega(X)^\vee \oplus X^\vee$. On appelle alors ϕ la composée des morphismes suivants (nous utilisons implicitement l'additivité de T_Ω ci-dessous en identifiant $T_\Omega(X\oplus Y)$ et $T_\Omega(X)\oplus T_\Omega(Y)$) :

$$T_\Omega(Y^\vee) \xrightarrow{T_\Omega(\lambda)} (T_\Omega(T_\Omega(X)^\vee)) \oplus (T_\Omega(X^\vee)) \xrightarrow{\psi\oplus id} X^\vee \oplus T_\Omega(X^\vee)$$

Enfin, on note ev le morphisme de suites exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_\Omega(X^\vee) \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_\Omega(Y^\vee) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & T_\Omega(T_\Omega(X)^\vee) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_\Omega(X^\vee) \arrow[r] & X^\vee \oplus (T_\Omega(X^\vee)) \arrow[r] & X^\vee \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On appelle $\mathbf{A}^*$ la suite exacte du bas dans le diagramme précédent, Y^* l'objet $X^\vee \oplus (T_\Omega(X^\vee))$. Nous allons démontrer que cette suite $\mathbf{A}^*$ est l'objet dual de $\mathbf{A}$ dans la catégorie $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. Définissons tout d'abord le morphisme d'évaluation $\mathcal{P}(\epsilon)_\mathbf{A}$ comme suit. Considérons le produit tensoriel $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}^*$:

$$0 \to T_\Omega(X)\otimes X^\vee \to Z \to X\otimes X^\vee \to 0$$

Dans la suite précédente, par définition de la somme de Baer, l'objet Z est l'objet de $\mathbf{C}$ défini par :

$$Z = (X\otimes X^\vee) \amalg_{T_\Omega(X\otimes X^\vee)\times T_\Omega(X\otimes X^\vee)} \left(((Y\otimes X^\vee)\times(X\otimes Y*)) \times_{(X\otimes X^\vee)\times(X\otimes X^\vee)} (X\otimes X^\vee)\right)$$

Par hypothèse sur la catégorie $\mathbf{C}$, la suite exacte $\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}^*$ est scindée, et l'objet Z est donc isomorphe à l'objet $(X\otimes X^\vee)\oplus(T_\Omega(X)\otimes X^\vee)$. On identifie Z à cet objet, et on définit $\theta = \epsilon_X \oplus T_\Omega(\epsilon_X)$. Finalement, le morphisme d'évaluation $\mathcal{P}(\epsilon)_\mathbf{A}$ est défini comme étant le morphisme de suites exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_\Omega(X)\otimes X^\vee \arrow[r] \arrow[d, "T_\Omega(\epsilon_X)"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & X\otimes X^\vee \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_X"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_\Omega(\mathbf{1_C}) \arrow[r] & \mathbf{1_C} \oplus (T_\Omega(\mathbf{1_C})) \arrow[r] & \mathbf{1_C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On définit alors $\mathcal{P}(\eta)_\mathbf{A}$ de manière similaire dans $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. La rigidité de $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ découle alors de la rigidité de $\mathbf{C}$; en effet, les morphismes composés suivants sont l'identité dans $\mathbf{C}$:

$$X \xrightarrow{\eta_X\otimes id_X} (X\otimes X^\vee)\otimes X \longrightarrow X\otimes(X^\vee\otimes X) \xrightarrow{id_X\otimes\epsilon_X} X$$

$$X^\vee \xrightarrow{id_{X^\vee}\otimes\eta_X} X^\vee\otimes(X\otimes X^\vee) \longrightarrow (X^\vee\otimes X)\otimes X^\vee \xrightarrow{\epsilon_X\otimes id_{X^\vee}} X^\vee$$

On déduit de ceci que les morphismes correspondants dans $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ sont également l'identité dans $\mathcal{P}(\mathbf{C})$, ce qui implique que la catégorie $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ est rigide. □

4.2.2 Structures différentielles

On rappelle que l'on considère une catégorie $\mathbf{C}$ abélienne, A-linéaire, et tensorielle rigide, avec T_Ω un foncteur additif, exact et associatif sur $\mathbf{C}$. Nous définissons ici la notion de structure différentielle sur $\mathbf{C}$, puis décrivons une structure différentielle « canonique » sur la catégorie des modules à connexion sur $\mathscr{A}$. Tout ceci provient encore essentiellement de [11], section 4.2.

Définition 4.2.2 (Structure différentielle)
Une structure différentielle *sur* $\mathbf{C}$ *est un foncteur tensoriel* $D : \mathbf{C} \to \mathcal{P}(\mathbf{C})$ *qui est une section de* Π_0*, c'est-à-dire tel* $\Pi_0 \circ D = Id_{\mathbf{C}}$*. On appelle* catégorie différentielle *la paire* $(\mathbf{C}, D)$*. Pour tout objet* $X \in \mathbf{C}$ *et tout morphisme* $f : X \to Y$ *de* $\mathbf{C}$*, on note* $X^D = \Pi_1(D(X))$*, et* $f^D = \Pi_1(D(f))$*.*

Définition 4.2.3 (Morphisme de catégories différentielles)
Si $(\mathbf{C}, D)$ *et* $(\mathbf{C}', D')$ *sont deux catégories différentielles (munies respectivement de foncteurs* T_Ω *et* T'_Ω*), on appelle* morphisme de catégories différentielles *une paire* (F, s)*, avec* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ *un foncteur additif, tensoriel, et* A*-linéaire tel que* $F \circ T_\Omega = T'_\Omega \circ F$*, et* $s : \mathcal{P}(F) \circ D \to D' \circ F$ *un isomorphisme de foncteurs tel que pour tout objet* $X \in \mathbf{C}$*, on ait* $\Pi_0(s_X) = id_{F(X)}$*. Autrement dit, le diagramme suivant doit commuter :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(T_\Omega(X)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & F(X^D) \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_1(s_X)"'] & F(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T'_\Omega(F(X)) \arrow[r] & (F(X))^{D'} \arrow[r] & F(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Exemple 4.2.4 (Structure différentielle sur A-**Mod**)
Supposons que $\mathscr{A} = (A, \Omega, d)$ est un anneau différentiel généralisé, avec Ω un bimodule commutatif. Nous allons munir la catégorie A-**Mod** des A-modules fidèles et projectifs de type fini sur A d'une structure différentielle. Nous appelons tout d'abord T_Ω le foncteur défini par $T_\Omega(M) = \Omega \otimes_A M$, et $T_\Omega(f) = id_\Omega \otimes f$; d'après les propriétés du produit tensoriel, on a immédiatement que T_Ω est additif et associatif, et l'hypothèse que Ω est plat dans un anneau différentiel généralisé implique que T_Ω est exact.

Pour tout A-module fidèle et projectif de type fini M, on définit le module M^D en prenant comme groupe additif sous-jacent $M \oplus (\Omega \otimes_A M)$, et en définissant, pour $(m, \omega \otimes m') \in M \oplus (\Omega \otimes_A M)$, la multiplication scalaire comme étant $a.(m, \omega \otimes m') = (a.m, d(a) \otimes m + a.(\omega \otimes m'))$. On note $i_2 : (\Omega \otimes_A M) \to M \oplus (\Omega \otimes_A M)$ l'injection canonique sur la deuxième coordonnée, et $p_1 : M \oplus (\Omega \otimes_A M) \to M$ la projection canonique de la première coordonnée. Ceci définit une suite exacte notée $D_A(M)$:

$$0 \longrightarrow \Omega \otimes_A M \xrightarrow{i_2} M \oplus (\Omega \otimes_A M) \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0$$

Si $f : M \to N$ est un morphisme de A-modules, alors on définit $D_A(f)$ par :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "id_\Omega \otimes f"'] & M \oplus (\Omega \otimes_A M) \arrow[r] \arrow[d, "f \oplus (id_\Omega \otimes f)"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega \otimes_A N \arrow[r] & N \oplus (\Omega \otimes_A N) \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ceci définit un foncteur tensoriel $D_A : A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{P}(A\text{-}\mathbf{Mod})$, et $(A\text{-}\mathbf{Mod}, D_A)$ est donc une catégorie différentielle.

Exemple 4.2.5 (Structure différentielle sur les représentations d'un groupe différentiel généralisé)
Soit G un groupe différentiel généralisé défini sur un anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}$ tel que Ω est commutatif. On définit la catégorie des représentations de G comme étant la catégorie $\mathbf{Repr}_{\mathscr{A}}(G)$ dont les objets sont les représentations de G, et les morphismes les morphismes de représentation, comme définis dans la définition 3.5.12.

Nous munissons cette catégorie d'une structure différentielle de la même manière que dans l'exemple 4.2.4 : à un module M muni d'une action $(g, m) \mapsto gm$ de G par automorphismes, on associe le module M^D défini dans l'exemple 4.2.4 muni de l'action de G définie par $(g, (m, \omega \otimes m')) \mapsto (gm, \omega \otimes gm')$. Ceci définit clairement une représentation de G sur M^D, et munit donc $\mathbf{Repr}_{\mathscr{A}}(G)$ d'une structure différentielle de la même manière que dans l'exemple précédent.

Remarque 4.2.6
Dans [11], exemple 4.2.4, Kamensky définit la structure différentielle de la catégorie $\mathbf{Vect}_k$ des espaces vectoriels de dimension finie sur k, k étant un corps différentiel, de manière un peu différente de ci-dessus. Précisément, et en généralisant sa définition au cas d'un anneau différentiel généralisé $\mathscr{A} = (A, \Omega, d)$ et des modules à connexion, on note $\mathscr{D}$ le module libre engendré par les deux symboles 1 et ∂, et muni de la multiplication scalaire à droite définie par $1.a = a.1$ et $\partial.a = a.\partial + d(a).1$. Si M est un A-module, on pose alors $M^{D_A} = \mathscr{D} \otimes_A M$, le produit tensoriel se rapportant à la multiplication à droite sur $\mathscr{D}$ définie ci-dessus. On définit alors la structure différentielle D_A sur A-**Mod** avec les applications $M \to M^{D_A}$ définie par $m \mapsto 1 \otimes m$ et $M^{D_A} \to M$ définie par $1 \otimes m \to 0$, et $\partial \otimes m \to m$. Nous allons voir plus loin que de notre point de vue, et sous certaines hypotèses, cette structure différentielle est similaire à celle que nous avons définie précédemment.

4.2.3 Foncteurs fibres différentiels

Soit $(\mathbf{C}, D)$ une catégorie différentielle. Nous définissons à présent un foncteur fibre différentiel suivant [11], paragraphe 4.2.8, ainsi que la notion de catégorie tannakienne différentielle et de groupe des automorphismes d'un foncteur fibre différentiel.

Définition 4.2.7 (Foncteur fibre différentiel)
Un foncteur fibre différentiel *sur* $(\mathbf{C}, D)$ *est un morphisme de catégories différentielles* $(\omega, r) : (\mathbf{C}, D) \to (A\text{-}\mathbf{Mod}, D_A)$.

Définition 4.2.8 (Morphisme de foncteurs fibres différentiels)
Soient (ω, r) *et* (ω', r') *deux foncteurs fibres différentiels sur* $(\mathbf{C}, D)$. *Un* morphisme de foncteurs fibres différentiels *est un morphisme* $t : \omega \to \omega'$ *de foncteurs tel que, en définissant pour tout objet* $X \in \mathbf{C}$ *le morphisme* $\phi_X : \mathcal{P}(\omega)(D(X)) \to \mathcal{P}(\omega')(D(X))$ *par* $\phi_X = \mathcal{P}(t)_{D(X)}$ *et le morphisme* $\psi_X : D_A(\omega(X)) \to D_A(\omega'(X))$ *par* $\psi_X = D_A \circ t_X$, *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(\omega) \circ D \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\phi"'] & D_A \circ \omega \arrow[d, "\psi"] \\ \mathcal{P}(\omega') \circ D \arrow[r, "r"'] & D_A \circ \omega' \end{tikzcd}$$

Définition 4.2.9 (Catégorie tannakienne différentielle)

On appelle catégorie tannakienne différentielle *une catégorie différentielle* $(\mathbf{C}, D)$ *munie d'un foncteur fibre différentiel* (ω, r). *On note* $Aut^D(\omega)$ *le groupe des automorphismes de* (ω, r).

Exemple 4.2.10

Dans les exemples 4.2.4 et 4.2.5, nous avons décrit deux structures différentielles sur A-**Mod** et sur $\mathbf{Repr}_{\mathscr{A}}(G)$ pour un anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}$ avec Ω commutatif, et un groupe différentiel généralisé G défini sur $\mathscr{A}$. Il est aisé de voir que ces deux catégories différentielles deviennent tannakiennes différentielles si on les munit respectivement du foncteur identité pour A-**Mod**, et du foncteur d'oubli de la représentation $\omega : \mathbf{Repr}_{\mathscr{A}}(G) \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ pour $\mathbf{Repr}_{\mathscr{A}}(G)$.

4.2.4 Structures différentielles et connexions

Si S est une section de la suite exacte $D(X)$ dans $\mathbf{C}$, alors $\omega(S)$ est une section de $\mathcal{P}(\omega)(D(X))$, et en notant encore r_X le morphisme $\Pi_1(r_X) : \omega(X^D) \to (\omega(X))^{D_A}$, on voit que $r_X \circ \omega(S) : \omega(X) \to D_A(\omega(X))$ est une section de $D_A(\omega(X))$. Ceci définit une connexion sur $\omega(X)$, et si on note $\mathbf{Sect}_{A-Mod}(D_A)$ la catégorie des sections de la structure différentielle D_A sur A-**Mod**, les morphismes étant donnés par les carrés commutatifs, on a le résultat suivant :

Lemme 4.2.11

La catégorie $\mathbf{Sect}_{A-Mod}(D_A)$ *des sections de la structure différentielle sur* A-**Mod** *est isomorphe à la catégorie* $\nabla\mathbf{Mod}$ *des* A*-modules à connexion.*

Démonstration :

Construisons un foncteur $F : \mathbf{Sect}_{A-Mod}(D_A) \to \nabla\mathbf{Mod}$. À une section $S : M \to M^{D_A}$, on associe l'application $F(S) = \nabla_S : M \to \Omega \otimes_A M$ définie par $\nabla_S(m) = p_2(S(M))$, p_2 étant la projection sur la deuxième coordonnée. C'est une connexion : en effet, si $a \in A$ et $m \in M$, la linéarité de S implique que

$$S(a.m) = a.S(m) = a.(m, \nabla_S(m)) = (a.m, d(a).m + a.\nabla_S(m)$$

D'autre part, $S(a.m) = (a.m, \nabla_S(a.m))$, ce qui implique donc que $\nabla_S(a.m) = d(a).m + a.\nabla_S(m)$, et donc que ∇_S est une connexion. L'application F définie sur les objets de $\mathbf{Sect}_{A-Mod}(D_A)$ est injective, puisque $\nabla_S = \nabla_{S'}$ implique que $S = S'$, et elle est également surjective, puisqu'une connexion ∇ sur un module M est l'image de la section S_∇ définie par $S_\nabla(m) = (m, \nabla(m))$. Il reste donc à définir F sur les morphismes et à vérifier que l'on obtient alors un isomorphisme de catégories.

À un morphisme de section $f : S \to S'$, S et S' étant des sections de $D_A(M)$ et $D_A(N)$, on associe le morphisme $F(f) : (M, \nabla_S) \to (N, \nabla_{S'})$ qui est égal à f sur

M. Le fait que c'est un morphisme de modules à connexion vient de la commutativité du diagramme définissant un morphisme de section :

$$\nabla_{S'}(f(m)) = p_2(S'(f(m))) = p_2(f^{D_A}(S(m))) = f(p_2(S(m))) = f(\nabla_S(m))$$

Pour la même raison que pour les objets, F est bijectif sur les morphismes. De plus, il préserve la composition des morphismes, puisque $F(f \circ g)$ est, au niveau de la structure de module, égal à $f \circ g$, et donc égal à $F(f) \circ F(g)$. Nous avons donc bel et bien construit un foncteur F qui est un isomorphisme de catégories. □

Dans la remarque 4.2.6, nous avons décrit une autre manière de définir une structure différentielle D_k sur $\mathbf{Vect}_k$ lorsque k est un corps différentiel, suivant [11], exemple 4.2.4. L'application $\bar{d} : V \to \mathscr{D} \otimes V$ définie par $v \to \partial \otimes v$ est alors une dérivation universelle sur V, en ce sens que les dérivations $d : V \to V$ sont en bijection avec les applications linéaires $\phi : \mathscr{D} \otimes V \to V$ satisfaisant $\phi(1 \otimes v) = v$, cette bijection étant définie par $\phi \mapsto \phi \circ \bar{d}$. On démontre dans le lemme suivant que ce point de vue est équivalent à notre point de vue sur les sections développé précédemment.

Lemme 4.2.12

Soit M un A-module. Il y a des isomorphismes de catégories entre la catégorie des connexions sur M, la catégorie des rétractions de la suite exacte $D_A(M)$, et la catégorie des sections de cette suite exacte.

Démonstration :

Dans le contexte que nous avons décrit précédemment, on peut identifier $\mathscr{D} \otimes M$ avec l'espace vectoriel $M \oplus (\Omega \otimes_A M)$ muni de la multiplication « tordue » $a.(m, \omega \otimes m') = (a.m, d(a) \otimes m + a.(\omega \otimes m))$, en définissant un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels par $1 \otimes m \mapsto (0, m)$ et $\partial \otimes m \mapsto (m, 0)$. Cette identification montre que les connexions ∇ sur M sont en bijection avec les rétractions de i_2 dans la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Omega \otimes_A M \xrightarrow{i_2} M \oplus (\Omega \otimes_A M) \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0$$

En effet, si ϕ est une application linéaire $\phi : \mathscr{D} \otimes M \to M$ satisfaisant $\phi(1 \otimes m) = m$, alors l'identification ci-dessus donne une application linéaire $\phi' : M \oplus (\Omega \otimes_A M) \to \Omega \otimes_A M$ satisfaisant $\phi' \circ i_2 = id_{\Omega \otimes_A M}$, autrement dit une rétraction de la suite exacte. On voit alors facilement que $\phi \circ i_1$ est une connexion sur M, et ceci définit une bijection entre les rétractions de la suite exacte et les connexions sur M puisque les rétractions sont en bijection avec les applications ϕ comme décrites ci-dessus. On note ∇_R la dérivation sur M associée de cette manière à la rétraction R de $D_A(M)$.

Si $f : R \to R'$ est un morphisme de rétractions, R et R' étant des rétractions respectivement de $D_A(M)$ et $D_A(N)$, alors on associe à f l'application $\bar{f}$, on lui associe le morphisme $\bar{f} : (M, \nabla_R) \to (N, \nabla_{R'})$ qui est égal à f sur M. On vérifie immédiatement que c'est effectivement un morphisme de modules à connexion. De plus, ceci définit également une bijection sur les morphismes qui préserve la composition, autrement dit un isomorphisme de catégories.

Enfin, pour les sections, nous avons déjà vu dans le lemme 4.2.11 que la catégorie des sections de la suite exacte $D_A(M)$ est isomorphe à la catégorie des connexions sur M. □

4.2.5 Le cas $\Omega \simeq A$

Dans cette sous-section, on suppose que l'anneau différentiel généralisé $\mathscr{A} = (A, \Omega, d)$ est tel qu'il existe un isomorphisme $\Omega \simeq A$ en tant que A-modules à gauche. Nous allons définir, toujours suivant [11], une connexion universelle associée à tout module projectif de type fini M. Cette connexion sera utilisée dans la prochaine section pour étudier les propriétés modèle-théoriques des catégories tannakiennes différentielles. La construction que nous allons présenter est parallèle à celle réalisée par Kamensky dans [11], et que nous avons brièvement rappelée dans la remarque 4.2.6.

On fixe un A-module fidèle et projectif de type fini M, et on rappelle que la structure différentielle sur A-**Mod** définit en particulier $M^{D_A} = M \oplus M$, la structure de module étant définie par $a.(m, n) = (am, d(a)m + an)$. On définit alors $\bar{\nabla} : M \to M^{D_A}$ par $\bar{\nabla}(m) = (m, m)$. On voit que $\bar{\nabla}$ satisfait alors la règle de Leibniz. De plus, $\bar{\nabla}$ peut être vue comme une connexion universelle sur M dans le sens suivant : si $\nabla : M \to M$ est une connexion sur M, alors $\nabla = \bar{\nabla} \circ f_\nabla$ où $f_\nabla : M^{D_A} \to M$ est l'application linéaire définie par $f_\nabla(m, n) = \nabla(n)$.

4.3 Étude modèle-théorique des catégories tannakiennes

Dans cette section, on fixe une catégorie $\mathbf{C}$ munie d'un bifoncteur $\otimes$. Nous allons définir un langage dans lequel parler des catégories tannakiennes différentielles sur un anneau différentiel généralisé (A, Ω, d) avec Ω commutatif, puis étudier les propriétés modèle-théoriques de la théorie de $\mathbf{C}$ dans ce langage. En particulier, toutes les propriétés que nous mettrons en évidence sont basées sur l'idée que la complexité modèle-théorique d'une catégorie tannakienne différentielle provient essentiellement de la complexité modèle-théorique de l'anneau différentiel généralisé sous-jacent ; autrement dit, quitte à ne pas mentionner le langage de (A, Ω, d), les propriétés modèle-théoriques de $\mathbf{C}$ sont très agréables à manipuler.

4.3.1 Le langage des catégories tannakiennes

On fixe un anneau différentiel généralisé (A, Ω, d) avec Ω commutatif, que l'on voit comme une L_{adg}-structure dans le langage L_{adg} de la définition 3.4.1 ; nous appellerons $\mathscr{A}$ cette structure. On suppose que $\mathscr{A}$ satisfait que $\Omega \simeq A$ en tant que A-module à gauche. On fixe une petite catégorie tannakienne différentielle $\mathbf{C}$ sur A (c'est-à-dire une catégorie tannakienne différentielle dont les objets forment un ensemble), munie d'un foncteur fibre différentiel ω, et on définit le langage suivant :

Définition 4.3.1 (Langage des catégories tannakiennes)

Le langage $L_{\mathbf{C}}$ est le langage contenant :

- *une sorte S_{adg}, munie du langage L_{adg}, et d'un symbole de constante pour chaque élément de A ;*
- *pour chaque objet M de $\mathbf{C}$, une sorte S_M ;*
- *pour chaque morphisme $f : M \to N$ dans $\mathbf{C}$, un symbole de fonction $v_f : S_M \to S_N$;*
- *pour chaque sorte S_M, un symbole de fonction binaire $\cdot_M : A \times S_M \to S_M$, un symbole de fonction binaire $+_M : S_M \times S_M \to S_M$, et un symbole de constante 0_M ;*
- *pour chaque paire de sortes S_M et S_N, un symbole de fonction binaire $b_{M,N} : S_M \times S_N \to S_{M\otimes N}$;*
- *pour chaque sorte S_M, un symbole de fonction unaire $\nabla_M : S_M \to S_{M^D}$.*

La catégorie tannakienne différentielle $(\mathbf{C}, \omega)$ est alors vue comme une $L_{\mathbf{C}}$-structure en interprétant les symboles du langage de la manière suivante : L_{adg} est interprété comme dans la définition 3.4.1 sur la sorte S_{adg} ; chaque sorte S_M est interprétée comme le module $\omega(M)$ dans le langage $(\cdot_M, +_M, 0_M)$, et chaque symbole de fonction v_f est interprété comme la fonction $\omega(f)$; $b_{M,N}$ est interprété comme le morphisme produit $(m, n) \mapsto m \otimes n$ de $\omega(M) \times \omega(N)$ dans $\omega(M \otimes N)$. Enfin, on interprète chaque symbole ∇_M comme la connexion universelle $\bar{\nabla}$ sur $\omega(M)$, décrite dans la sous-section 4.2.5.

On appelle alors $T_{\mathbf{C}}$ la théorie élémentaire de $\mathbf{C}$ dans ce langage. On se place dorénavant dans un modèle spécial de cette théorie.

Définition 4.3.2 (Générateurs d'un catégorie tannakienne différentielle)

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie tannakienne différentielle, et $(M_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathbf{C}$. La catégorie $\langle M_i, i \in I\rangle$ est la plus petite sous-catégorie de $\mathbf{C}$ contenant les objets $(M_i)_{i\in I}$, et close par $\otimes$, $\oplus$, dualisation, et passage au sous-quotient. La catégorie $\mathbf{C}$ est dite engendrée *par $(M_i)_{i\in I}$ si tout objet de $\mathbf{C}$ est isomorphe à un objet de $\langle M_i, i \in I\rangle$.*

Nous allons, dans la proposition suivante, démontrer l'internité d'une catégorie tannakienne différentielle dans son anneau différentiel généralisé sous-jacent, avec l'hypothèse qu'elle est engendrée par un nombre fini d'éléments.

Proposition 4.3.3 (Internité de $T_{\mathbf{C}}$ dans $\mathscr{A}$)

Supposons que le foncteur fibre ω prenne ses valeurs parmi les modules projectifs de type fini à connexion sur $\mathscr{A}$, et que $\mathbf{C}$ soit engendrée par un nombre fini d'objets $M_1, \ldots, M_n$. Alors $\mathbf{C}$ est interne à l'anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}$.

Démonstration :

Choisissons un système fini de générateurs $(b_{i,j})_{1\le j\le n_i}$ de S_{M_i} pour tout i. Puisque S_M est projectif de type fini pour tout objet M de $\mathbf{C}$, d'après la proposition 3.1.5, il existe une famille $(f_{i,j})_{1\le j\le n_i}$ génératrice du dual $M_i^\vee$ de M_i, telle que pour tout $b \in M_i$, on ait $b = \sum_j f_{i,j}(b).b_{i,j}$, et pour tout i, $(b_{i,j})_{1\leq j\leq n_i}$ vu comme famille génératrice de $M_i^{\vee\vee}$ satisfait la même propriété relativement à $M_i^{\vee}$ et $(f_{i,j})_{1\leq j\leq n_i}$; nous appellerons une telle paire de familles génératrices une « paire autoduale » dans la suite de cette démonstration. Par conséquent, le choix d'une telle paire autoduale permet de définir une fonction injective de M_i dans A^n et de $M_i^{\vee}$ dans A^n, en utilisant comme paramètres ces familles génératrices.

Pour démontrer l'internité de $\mathbf{C}$ dans $\mathscr{A}$, nous allons construire, en partant des familles génératrices des M_i, une paire de famille génératrice de chaque objet M et de son dual $M^{\vee}$ satisfaisant les mêmes propriétés ; de telles familles existent (puisque toutes les sortes de $T_{\mathbf{C}}$ sont des modules projectifs de type fini), mais il faut qu'elles soient dans la clôture définissable des $(b_{i,j})_{i,j}$ et $(f_{i,j})_{i,j}$ pour que nous obtenions une internité telle qu'elle a été définie dans la définition 2.2.1.

Puisque la catégorie $\mathbf{C}$ est engendrée par les M_i, on peut raisonner par récurrence pour trouver une base autoduale de chaque module dans la catégorie, la récurrence portant sur la complexité de la construction du module M en partant des modules M_i et en utilisant les opérations de produit tensoriel, dualisation, somme directe et passage au sous-quotient. Nous avons déjà choisi une base autoduale de chaque M_i. Supposons que l'on ait construit une base autoduale de M et N. Clairement, la somme directe de ces bases donne une base autoduale pour $M \oplus N$, et leur produit tensoriel une base autoduale pour $M \otimes N$. Le fait que $(\bar{b}, \bar{f})$ est une base autoduale de M implique que $(\bar{f}, \bar{b})$ est une base autoduale de $M^{\vee}$. Si N est le quotient de M par un sous-module M', alors l'image dans le quotient de la base autoduale de M par M' donne une base autoduale de N. Enfin, si N est un sous-module de M, alors on peut l'identifier avec un quotient de $M^{\vee}$, et donc en construire une base autoduale.

Puisque les M_i engendrent $\mathbf{C}$, ceci donne, par récurrence, une base autoduale de chaque objet de $\mathbf{C}$ qui est dans la clôture définissable des bases autoduales choisies pour les M_i, et donc une fonction injective de chaque M dans un A^n pour un entier n ; autrement dit, $\mathbf{C}$ est interne à l'anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}$. □

Pour pouvoir appliquer le théorème 2.3.1 de construction du groupe de liaison de $\mathbf{C}$ dans $\mathscr{A}$, il reste à démontrer que $\mathscr{A}$ est stablement plongé dans $\mathbf{C}$. Pour ceci, nous allons avoir besoin d'étudier les ensembles définissables de $T_{\mathbf{C}}$; sous l'hypothèse que tous les objets de $\mathbf{C}$ sont des modules de présentation finie, il s'avère que les formules sont facilement descriptibles en fonction des formules du langage de $\mathscr{A}$, ce qui permet de démontrer le plongement stable de $\mathscr{A}$.

Tout d'abord, nous introduisons un peu de vocabulaire pour décrire le fait qu'un A-module de présentation finie peut être vu comme un A-module définissable (avec paramètres) dans $\mathscr{A}^{eq}$.

Définition 4.3.4 (Présentateur d'un module de présentation finie)
Soit M un A-module de présentation finie. On appelle présentateur *de M un isomorphisme $u : M \to A^n/P$, tel qu'il existe une présentation $M = \langle m_1, \ldots, m_n | p_1, \ldots, p_k \rangle$ de M telle que u envoie $\bar{m}$ sur la base canonique de A^n, et $\bar{p}$ sur une famille génératrice de P.*

Un présentateur u de M (qui existe toujours puisque M est supposé de présentation finie) identifie donc M avec un module définissable dans $\mathscr{A}^{eq}$, à savoir le module A^n/P, qui est définissable dans $\mathscr{A}^{eq}$ avec paramètres $(u(p_1), \ldots, u(p_n))$ puisque P est de type fini.

Les présentateurs vont nous permettre de décrire les ensembles définissables de $T_{\mathbf{C}}$. Nous commençons par les termes :

Lemme 4.3.5 (Description des termes dans $T_{\mathbf{C}}$)

Supposons que le foncteur fibre ω prenne ses valeurs parmi les modules de présentation finie, et choisissons un présentateur $u_M : M \to A^{n_M}/P_M$ pour chaque sorte de $T_{\mathbf{C}}$. Si $t(x_1, \ldots, x_n)$ est un terme du langage de $T_{\mathbf{C}}$, chaque variable x_i appartenant à la sorte M_i, alors on peut voir t comme une fonction $t : M_1 \times \cdots \times M_n \to M$, et l'application $u_{M_1} \times \cdots \times u_{M_n} \times u_M$ envoie (bijectivement) le graphe de t sur un ensemble définissable dans $\mathscr{A}^{eq}$ avec paramètres par une formule t_A dans le langage de $\mathscr{A}^{eq}$.

Démonstration :

Nous allons procéder par récurrence sur la complexité des termes. Si t est un symbole de constante c dans la sorte M, alors $u_M(c)$ est un élément de $\mathscr{A}^{eq}$, et on peut choisir $t_A =$« $x = u_M(c)$ ». Si t est un symbole de variable x dans la sorte M, alors le graphe de t est le graphe de l'identité sur M, et on peut donc choisir $t_A =$« $x \in A^{n_M} \wedge x = y$ ».

Supposons à présent que l'on a démontré le lemme pour un terme $t : M_1 \times \cdots \times M_n \to M$, associé à une formule t_A, et considérons les composées de t avec les symboles de fonction unaire du langage.

Si $t' = v_f(t)$ pour un morphisme $f : M \to N$ dans $\mathbf{C}$, alors on cherche à définir une fonction f_A de manière à ce que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u_M"'] & N \arrow[d, "u_N"] \\ A^{n_M}/P_M \arrow[r, "f_A"'] & A^{n_N}/P_N \end{tikzcd}$$

On définit donc la formule f_A dans $\mathscr{A}^{eq}$ de la manière suivante : puisque f est A-linéaire, elle est entièrement déterminée par les images des éléments d'une famille génératrice de M ; choisissons une telle famille génératrice finie $(m_i)_{i \in I}$, et considérons une fonction f_A définie comme l'unique application linéaire envoyant la famille $(u_M(m_i))_{i \in I}$ sur $(u_N(f(m_i)))_{i \in I}$ (cette application est définissable avec paramètres, puisque les $u_M(m_i)$ forment une famille génératrice finie de A^{n_M}/P_M). Définissons alors la formule t'_A comme étant égale à « $\exists z, t_A(x, z) \wedge f_A(z) = y$ ». Cette formule satisfait alors clairement le lemme.

Si $t' = \nabla_M(t)$, on procède de manière similaire : le fait que les connexions ∇_M sont additives et satisfont la règle de Leibniz implique que ∇_M est entièrement déterminé par l'image des éléments d'une famille génératrice de M, puisque si $m =$

$\sum_i a_i m_i$, alors

$$\nabla_M(m) = \sum_i (\nabla_M(a_i m_i)) = \sum_i (d(a_i)m_i + a_i \nabla_M(m_i))$$

On considère donc la fonction $(\nabla_M)_A$ définie comme l'unique application additive satisfaisant la règle de Leibniz envoyant la famille $(u_M(m_i))_{i\in I}$ sur $(u_N(f(m_i)))_{i\in I}$; cette application est encore définissable avec paramètres (pour la même raison que précédemment), et on définit finalement la formule t'_A comme étant égale à « $\exists z, t_A(x,z) \wedge \nabla_A(z) = y$ ». Cette formule satisfait le lemme.

Reste enfin à considérer les symboles de fonction binaire ; après quoi, nous aurons traité l'ensemble des symboles de fonction du langage des catégories tannakiennes différentielles, et le lemme suivra par récurrence. Supposons donc que le lemme est démontré pour deux termes $t : M_1 \times \cdots \times M_n \to M$ et $t' : M'_1 \times \cdots \times M'_n \to M'$, associés respectivement à t_A et t'_A.

Si $M = M'$, considérons le terme défini par $t+t'$ (la somme s'entendant ici comme la somme de M). La formule $(t+t')_A$ définie par « $\exists x', y', t_A(x,x') \wedge t'_A(y,y') \wedge x' + y' = z$ (la somme étant ici celle de A^{n_M}/P_M) est clairement celle demandée par le lemme. De même, si $M = A$, alors le terme $t \cdot_M t'$ est représenté par $(t \cdot_M t')_A =$« $\exists x', y', t'_A(x,x') \wedge t'_A(y,y') \wedge x'.y' = z$ ».

Enfin, si M et N sont quelconques, considérons le terme défini par $b_{M,N}(t,t')$. Puisque $b_{M,N}$ est bilinéaire, elle est entièrement déterminée par l'image d'une famille génératrice de $M \times N$; comme précédemment, grâce au choix de familles génératrices $(m_i)_{i\in I}$ et $(n_j)_{j\in J}$ de M et N respectivement, on voit qu'il existe une fonction $(b_{M,N})_A$ définissable avec paramètres dans le langage de $\mathscr{A}^{eq}$ qui est l'unique application bilinéaire envoyant $(u_M \times u_N)(m_i, n_j)_{(i,j)\in I\times J}$ sur $u_{M\otimes N}(b_{M,N}(m_i,n_j))_{(i,j)\in I\times J}$. Le terme $b_{M,N}(t,t')$ est alors représenté par la formule « $\exists x', y', t_A(x,x') \wedge t'_A(y,y') \wedge (b_{M,N})_A(x',y') = z$ », ce qui conclut la démonstration. □

Nous pouvons maintenant nous occuper des formules :

Lemme 4.3.6 (Description des formules dans $T_{\mathbf{C}}$)

Supposons que le foncteur fibre ω prenne ses valeurs parmi les modules de présentation finie, et choisissons un présentateur $u_M : M \to A^{n_M}/P_M$ pour chaque sorte de $T_{\mathbf{C}}$. Soit $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ une formule dans le langage de $T_{\mathbf{C}}$, chaque variable x_i appartenant à la sorte M_i, et soit X_ϕ l'ensemble défini par cette formule dans $\mathbf{C}$. Il existe une formule $\psi_\phi(y_1,\ldots,y_n)$ dans le langage de $\mathscr{A}^{eq}$ telle que l'application $u_{M_1} \times \cdots \times u_{M_n}$ envoie bijectivement l'ensemble X_ϕ sur l'ensemble X_{ψ_ϕ} défini par ψ_ϕ dans $\mathscr{A}^{eq}$.

Démonstration :

Comme précédemment, nous allons procéder par récurrence sur la complexité des formules.

Au vu du langage des catégories tannakiennes, il est clair qu'une formule atomique est nécessairement de la forme $t = t'$ pour deux termes t et t', et une telle formule définit le même ensemble que $t - t' = 0$. Par conséquent, le lemme 4.3.5 appliqué à

$t - t'$ implique que la formule définie par $\psi_\phi =$« $(y_1, \ldots, y_n, 0) \in (t - t')_A$ » satisfait le lemme.

Si le lemme est démontré pour une formule $\theta(x_1, \ldots, x_n)$, considérons la formule ϕ définie par $\exists x_1, \theta(x_1, \ldots, x_n)$. On définit alors ψ_ϕ comme étant la formule définie par « $\exists y_1 \in A^{n_{M_1}}/I_{M_1}, \psi_\theta(y_1, \ldots, y_n)$ ». La formule ψ_ϕ est bien celle annoncée par le lemme. De même, si $\phi = \theta_1 \wedge \theta_2$, alors on peut prendre $\psi_\phi = \psi_{\theta_1} \wedge \psi_{\theta_2}$, et si $\phi = \neg\theta$, on peut prendre $\psi_\phi = \neg\psi_\theta$.

Par récurrence sur la taille des formules, le lemme est donc vrai pour toute formule du langage de $T_{\mathbf{C}}$. □

Nous pouvons finalement nous attaquer au plongement stable ; remarquons dans la proposition suivante que l'on profite de la description des formules pour non seulement restreindre les paramètres à $\mathscr{A}$, mais également le langage.

Proposition 4.3.7 (Plongement stable de $\mathscr{A}$ dans $\mathbf{C}$)

Supposons que le foncteur fibre ω prenne ses valeurs parmi les modules de présentation finie. L'anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}$ est alors stablement plongé dans $\mathbf{C}$, et la structure induite par $T_{\mathbf{C}}$ sur $\mathscr{A}$ est exactement $\mathscr{A}$.

Démonstration :

Considérons une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ dans le langage de $T_{\mathbf{C}}$ et dont les variables libres sont dans $\mathscr{A}$. Choisissons un présentateur u_M pour chaque sorte M de $T_{\mathbf{C}}$, de manière à ce que u_A soit l'identité. D'après le lemme 4.3.6, il existe une formule ψ_ϕ dans le langage de $\mathscr{A}^{eq}$ telle que $u_A \times \cdots \times u_A$ envoie bijectivement l'ensemble défini par ϕ sur l'ensemble défini par ψ_ϕ. Mais u_A étant l'identité, on voit donc que ϕ est équivalente à la formule ψ_ϕ modulo $T_{\mathbf{C}} \cup Th(\mathscr{A})^{eq}$.

Reste à se ramener à une formule dans le langage de $\mathscr{A}$, mais ceci provient de la construction de $\mathscr{A}^{eq}$: il existe une formule θ dans le langage de $\mathscr{A}$ qui est équivalente modulo $Th(\mathscr{A})^{eq}$ à ψ_ϕ. Par conséquent, θ définit le même ensemble que ϕ dans $\mathscr{A}$, et on conclut donc que toute partie de $\mathscr{A}^n$ définissable (avec paramètres) dans $T_{\mathbf{C}}$ est définissable dans le langage de $\mathscr{A}$, avec des paramètres dans $\mathscr{A}$. □

Remarque 4.3.8

La description des termes et des formules donnée par les lemmes 4.3.5 et 4.3.6 ne fait à vrai dire usage que du fait que les symboles de fonction du langage sont tous interprétés par des applications multilinéaires ou satisfaisant la règle de Leibniz. Par conséquent, nous aurions pu aboutir au même résultat pour n'importe quelle catégorie dont les objets sont des modules de présentation finie dans un langage dont tous les symboles de fonction sont interprétés par des applications multilinéaires (et, bien sûr, sans symbole de relation), ou même des applications entièrement déterminées (de manière définissable, comme dans le cas de la règle de Leibniz) par la donnée d'un nombre fini de valeurs prises par ces applications.

Nous allons à présent démontrer une proposition au sujet de la saturation (et, plus largement, de la spécialité) des catégories tannakiennes : celle-ci est équivalente à la saturation de l'anneau différentiel généralisé sous-jacent. Tout d'abord, voici un lemme élémentaire qui nous sera utile dans la démonstration :

Lemme 4.3.9

Si $f : A \to B$ est une fonction injective définissable qui témoigne de l'internité de A dans B dans un modèle $M \models T$, et que $p \in S_1(A)$, alors l'ensemble de formules $\Sigma = \{\exists y, (\phi(y) \wedge f(y) = x)/\phi \in p\}$ est consistant.

Démonstration :

Si p est satisfait par un élément c dans une extension élémentaire N de M, alors c satisfait chaque formule $\phi \in p$. Par conséquent, $f(c)$ satisfait chaque formule dans Σ, ce qui montre que Σ est consistant. □

Proposition 4.3.10 (Spécialité des catégories tannakiennes)

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie tannakienne différentielle sur un anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}$, et soit $T_{\mathbf{C}}$ sa théorie du premier ordre. Si $\mathbf{C}'$ est un modèle de $T_{\mathbf{C}}$ dont la restriction à S_{adg} est l'anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}'$, alors $\mathbf{C}'$ est spécial si et seulement si $\mathscr{A}'$ est spécial.

Démonstration :

Dans toute cette démonstration, on note κ le cardinal de $\mathbf{C}'$. Étant donné un anneau différentiel généralisé noté $\mathscr{A}'$, on notera $\mathscr{A}' = (A', \Omega', d')$, et de même, pour tout cardinal β, $\mathscr{A}_\beta = (A_\beta, \Omega_\beta, d_\beta)$, sans rappeler systématiquement la notation. Enfin, pour une sorte S d'une théorie T et un modèle $M \models T$, on notera $S(M)$ l'ensemble des points de M de sorte S.

Supposons tout d'abord que $\mathbf{C}'$ est spécial. Alors il existe une chaîne élémentaire de modèles $(\mathbf{C}_\beta)_{\aleph_0 \leq \beta < \kappa}$ telle que $\mathbf{C}_\beta$ est β^+-saturé et $\mathbf{C}' = \bigcup_\beta \mathbf{C}_\beta$. Notons $\mathscr{A}_\beta$ la restriction de $\mathbf{C}_\beta$ à S_{adg}, et remarquons que $\mathscr{A}' = \bigcup_\beta \mathscr{A}_\beta$. La chaîne $(\mathscr{A}_\beta)_{\aleph_0 \leq \beta < \kappa}$ est une chaîne élémentaire : si $\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ est une formule dans le langage des anneaux différentiels généralisés, avec paramètres dans $\mathscr{A}_\beta$ et satisfaite dans $A_{\beta'}$ avec $\beta' \geq \beta$, alors cette même formule vue comme une formule dans le langage des catégories tannakiennes différentielles est satisfaite dans $\mathbf{C}_{\beta'}$, et il existe donc un élément $a \in \mathbf{C}_\beta$ la satisfaisant d'après le critère de Tarski-Vaught. Or, la variable x étant de sorte S_{adg}, on en déduit que $\mathscr{A}_\beta$ et $\mathscr{A}_{\beta'}$ satisfont ce même critère, et donc que $\mathscr{A}_\beta$ est une sous-structure élémentaire de $\mathscr{A}_{\beta'}$. Enfin, pour $\aleph_0 \leq \beta < \kappa$, l'anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}_\beta$ est β^+-saturé : en effet, si $X \subset \mathscr{A}_\beta$ est un ensemble de paramètres de taille au plus β et $p \in S_1(X)$, alors le type p vu comme un type dans la théorie $T_{\mathbf{C}}$ est réalisé dans $\mathbf{C}_\beta$ par saturation, et puisque les variables de p sont de sorte S_{adg}, on en déduit que p est réalisé dans $\mathscr{A}_\beta$.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{A}'$ est un modèle spécial de $Th(\mathscr{A})$, et que la chaîne élémentaire $(\mathscr{A}_\beta)_{\aleph_0 \leq \beta < \kappa}$ témoigne de la spécialité de $\mathscr{A}'$. Nous allons construire une chaîne élémentaire $\mathbf{C}_\beta$ témoignant de la spécialité de $\mathbf{C}'$ en utilisant le fait que $\mathbf{C}'$ est interne à $\mathscr{A}'$. Soit S_X une sorte de $T_{\mathbf{C}}$ associée à l'objet X. Par définition d'une catégorie tannakienne différentielle, $S_X(\mathbf{C})$ est un module à connexion avec une famille génératrice finie $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_n)$. La propriété d'être une famille génératrice étant du premier ordre, il existe une famille génératrice $\bar{m}' = (m'_1, \ldots, m'_n)$ de $S_X(\mathbf{C}')$ comme module à connexion sur $\mathscr{A}'$. Fixons donc un cardinal $\aleph_0 \leq \beta < \kappa$, une famille génératrice de chaque sorte dans $\mathbf{C}'$, et définissons $\mathbf{C}_\beta$ comme étant la sous-structure de $\mathbf{C}'$ engendrée par ces familles génératrices et l'anneau différentiel généralisé $\mathscr{A}_\beta$. Il nous faut vérifier que les $\mathbf{C}_\beta$ ainsi construits témoignent de la spécialité de $\mathbf{C}'$.

Vérifions tout d'abord que pour tout $\beta < \beta'$, on a $\mathbf{C}_\beta \preccurlyeq \mathbf{C}_{\beta'}$. Par internité de chaque sorte dans S_{adg}^{eq}, il existe pour toute sorte S de $T_\mathbf{C}$ une fonction injective $f_S : S \to S_{adg}^{eq}$ qui est définissable avec paramètres dans $\mathbf{C}_\beta$ (en choisissant comme paramètres les éléments d'une base autoduale de $S(\mathbf{C}_\beta)$). Soit $\phi(x, c_1, \ldots, c_k)$ une formule dans le langage des catégories tannakiennes différentielles, avec des paramètres dans $\mathbf{C}_\beta$, et satisfaite par un élément $c_{\beta'} \in S(\mathbf{C}_{\beta'})$. D'après la proposition 4.3.7, il existe une formule $\phi'(y, a_1, \ldots, a_n)$ dans le langage des anneaux différentiels généralisés et à paramètres dans $\mathscr{A}_\beta$ qui est équivalente modulo $T_\mathbf{C}$ à la formule « $\exists x, \phi(x, \bar{c}) \wedge f_S(x) = y$. On en déduit que l'élément $f_S(c_{\beta'})$ satisfait la formule ϕ' dans $\mathscr{A}_{\beta'}$, et d'après le critère de Tarski-Vaught appliqué à l'extension élémentaire $\mathscr{A}_\beta \preccurlyeq \mathscr{A}_{\beta'}$, il existe un élément $a_\beta \in \mathscr{A}_\beta$ satisfaisant ϕ' dans $\mathscr{A}_\beta$. L'image réciproque $c_\beta = f_S^{-1}(a_\beta)$ de cet élément est donc un élément de $\mathbf{C}_\beta$ qui satisfait la formule ϕ dans $\mathbf{C}_\beta$, ce qui, d'après le critère de Tarski-Vaught, implique que $\mathbf{C}_\beta \preccurlyeq \mathbf{C}_{\beta'}$.

Il est clair par construction que $\bigcup_\beta \mathbf{C}_\beta = \mathbf{C}'$ puisque $\bigcup_\beta \mathscr{A}_\beta = \mathscr{A}'$. Il reste donc à démontrer que pour tout β, le modèle $\mathbf{C}_\beta$ est β^+-saturé. Considérons donc un type $p \in S_1(X)$ sur un ensemble de paramètres $X \subset \mathbf{C}_\beta$ de taille au plus β, dont la variable libre est de sorte S_X. Considérons l'image de l'ensemble défini par p par la fonction f_S, et appliquons comme précédemment la proposition 4.3.7 aux formules de p. On obtient un ensemble de formules $f_S(p)$ dans $Th(\mathscr{A})$. Cet ensemble est consistant d'après le lemme 4.3.9. Il n'y a pas plus de paramètres utilisés dans $f_S(p)$ que dans p, donc par β^+-saturation de $\mathscr{A}_\beta$, il existe un élément $a_\beta \in \mathscr{A}_\beta$ qui réalise $f_S(p)$. Son image réciproque $c_\beta = f_S^{-1}(a_\beta)$ est un élément de $\mathbf{C}_\beta$ qui réalise p, d'où l'on déduit que $\mathbf{C}_\beta$ est β^+-saturé, et donc que $\mathbf{C}'$ est spécial. □

Nous terminons ce chapitre avec un énoncé qui montre l'intérêt des groupes de liaison dans le contexte des catégories tannakiennes : précisément, puisque nous avons décrit l'internité et le plongement stable dans l'anneau différentiel généralisé sous-jacent à la catégorie $\mathbf{C}$, nous pouvons appliquer le théorème 2.3.1 pour construire le groupe de liaison de $\mathbf{C}$. Ce groupe s'avère être isomorphe au groupe des automorphismes du foncteur fibre différentiel ω :

Proposition 4.3.11

Soient $\mathscr{A}$ un anneau différentiel généralisé tel que $\Omega \simeq A$ en tant que A-module à gauche, $\mathbf{C}$ une catégorie tannakienne différentielle sur $\mathscr{A}$, et GL le groupe de liaison associé à $\mathbf{C}$ par le théorème 2.3.1. Alors on a un isomorphisme de groupes abstraits $GL \simeq Aut^D(\omega)$.

Démonstration :

Par construction de la théorie $T_\mathbf{C}$, on voit qu'un automorphisme σ d'un modèle fixant point par point l'anneau différentiel généralisé sous-jacent est la donnée d'un automorphisme linéaire σ_X de chaque sorte S_X tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathbf{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\omega(Y) \arrow[rrr, "\sigma_Y"] \arrow[ddd, "\nabla_Y"'] & & & \omega(Y) \arrow[ddd, "\nabla_Y"] \\
& \omega(X) \arrow[ul, "\omega(f)"'] \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\nabla_X"'] & \omega(X) \arrow[ur, "\omega(f)"] \arrow[d, "\nabla_X"] & \\
& \omega(X)^{D_A} \arrow[r, "\sigma_X^{D_A}"'] \arrow[dl, "\omega(f)^{D_A}"] & \omega(X)^{D_A} \arrow[dr, "\omega(f)^{D_A}"'] & \\
\omega(Y)^{D_A} \arrow[rrr, "\sigma_Y^{D_A}"'] & & & \omega(Y)^{D_A}
\end{tikzcd}$$

En particulier, l'application σ_X est un isomorphisme dans la catégorie A-$\mathbf{Mod}$; de plus, un argument similaire montre que σ préserve la structure tensorielle de ω (puisque $b_{X,Y}$ est un symbole du langage, et est donc préservé par σ). En particulier, σ est un automorphisme de foncteur fibre généralisé, et ceci montre que GL est un sous-groupe de $Aut^D(\omega)$.

Réciproquement, considérons un automorphisme $\sigma \in Aut^D(\omega)$ de foncteur fibre généralisé. D'une part, pour tout objet $X \in \mathbf{C}$, σ_X est un automorphisme du module $\omega(X)$ préservant ∇_X. De plus, comme précédemment, le fait que σ préserve la structure tensorielle implique que le symbole de fonction $b_{X,Y}$ du langage de $T_{\mathbf{C}}$ est préservé par σ. Le fait que σ est linéaire implique qu'il préserve les symboles de fonction codant la structure linéaire des sortes S_X, et le fait que ce soit un morphisme de foncteur implique qu'il préserve les symboles de fonction v_f pour tout morphisme f de $\mathbf{C}$. Finalement, on voit que σ s'identifie à un automorphisme du modèle de $T_{\mathbf{C}}$ considéré, et donc finalement que $GL \simeq Aut^D(\omega)$. $\square$

Chapitre 5

Univers de Poizat

Ce chapitre est consacré à l'étude des *univers* associés à des structures du premier ordre, dans le sens de l'article [22] de Bruno Poizat. L'univers d'une structure du premier ordre est la famille de ses ensembles définissables. Dans [22], il n'est considéré que la famille des ensembles définissables avec paramètres, sans moyen de déterminer la sous-famille des ensembles définissables sans paramètres. Les deux premières sections de ce chapitre concernent les univers tels qu'ils ont été définis par Poizat, mais la troisième et dernière en utilise une version différente, dans laquelle l'univers d'une structure garde une trace des ensembles définissables sans paramètres ; nous décrirons au début de cette section les changements que cette définition alternative impliquent au niveau des résultats présentés dans les deux premières sections.

La première section de ce chapitre rappelle la notion d'univers et plusieurs notions associées telles qu'elles ont été décrites dans [22]. Dans la deuxième section, nous définissons l'extension élémentaire d'univers, ainsi que la similarité entre univers, qui joue un rôle semblable à l'équivalence élémentaire dans le cas des structures du premier ordre. Ces deux notions sont les mêmes que celles introduites dans [22] ; nous répondons ensuite à une question posée dans ce même article, concernant la possibilité de définir une topologie sur les classes de similarité d'univers. Nous introduisons une telle topologie sur la famille des sous-univers d'un univers « ambiant », démontrons une certaine propriété de compacité de celle-ci, ainsi que le fait que la topologie ne dépend que de la classe de similarité de l'univers ambiant. Enfin, la troisième section est consacrée à un traitement des groupoïdes de liaison tels qu'ils ont été introduits dans [10], et d'une correspondance démontrée dans cet article entre les groupoïdes définissables dans une structure du premier ordre et les sortes imaginaires internes de cette structure.

Nous commençons par décrire les univers « algébriquement », avant de donner un langage nous permettant de voir les univers comme des structures du premier ordre. Dans tout ce chapitre, pour tout ensemble M et $X \subseteq M^n$, on notera $p_i : M^n \to M^{n-1}$ l'application de projection suivant la i^{me} coordonnée. On notera encore p_i la restriction de cette application à $X \subseteq M^n$ lorsque cela ne prêtera pas à confusion.

5.1 Les univers

Définition 5.1.1 (Ensemble u-clos)
Soit M un ensemble, et $\mathcal{R} \subseteq \sqcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}(M^n)$. On dit que $\mathcal{R}$ est u-clos *(pour* univers-clos*) si il contient l'ensemble $\Delta(M^n) = \{(m,\dots,m) \in M^n/m \in M\}$ de chaque M^n et est clos par combinaisons booléennes, produits cartésiens, et sous les projections p_i. Si $\mathcal{R}$ est u-clos, on notera $\mathcal{R}_n = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}(M^n)$.*

Remarque 5.1.2
Si $\mathcal{R}$ est un ensemble u-clos sur M, alors $\mathcal{R}$ contient nécessairement M, puisque $M = \Delta(M)$, et donc également $\emptyset = M^c$ et M^n pour tout $n \in M$.

Définition 5.1.3
Si $S \subseteq \sqcup_{n\in\mathcal{N}}\mathcal{P}(M^n)$, on appellera ensemble u-clos engendré par S*, et on notera $\mathcal{R}(S)$, le plus petit ensemble u-clos contenant S, et si $A \subset M$, on notera $S^A = \mathcal{R}(S \cup \{m/m \in A\})$.*
Si $\mathcal{M}$ est une structure du premier ordre dans un langage quelconque, on note $\mathbf{Déf}^0(\mathcal{M})$ l'ensemble des ensembles définissables sans paramètres dans $\mathcal{M}$, et $\mathbf{Déf}(\mathcal{M})$ l'ensemble des ensembles définissables avec paramètres dans $\mathcal{M}$. Ce sont tous deux des ensembles u-clos, et on a de plus $\mathbf{Déf}(\mathcal{M}) = \left(\mathbf{Déf}^0(\mathcal{M})\right)^M$.

Définition 5.1.4 (Univers,[22], p.16)
Un univers *est un ensemble $\mathcal{B}(U)$ appelé la* base de l'univers *muni d'un ensemble u-clos $\mathcal{R}(U)$ tel que $\mathcal{R}(U)^{\mathcal{B}(U)} = \mathcal{R}(U)$.*

Remarque 5.1.5
La condition $\mathcal{R}(U)^{\mathcal{B}(U)} = \mathcal{R}(U)$ signifie que $\mathcal{R}(U)$ est un ensemble u-clos contenant tous les singletons d'éléments de la base $\mathcal{B}(U)$.

Exemple 5.1.6
Si $\mathcal{M} = (M,\dots)$ est une structure du premier ordre, alors on appelle *univers de $\mathcal{M}$* l'univers défini par $U_M = (M, \mathbf{Déf}(\mathcal{M}))$.

Réciproquement, si U est un univers, alors on définit un langage $\mathcal{L}_U$ comme étant constitué d'un symbole de relation n-aire R pour chaque élément $R \in \mathcal{R}_n(U)$, et une $\mathcal{L}_U$-structure $\mathcal{M}_U$ de base $\mathcal{B}(U)$ et dans laquelle on interprète chaque symbole de relation n-aire R par l'ensemble $R \subset \mathcal{B}(U)^n$.

On voit que si U est un univers quelconque, alors $U_{\mathcal{M}_U} = U$; en effet, la base ne change pas, et $\mathcal{R}(U)$ formant une famille u-close, on a exactement $\mathcal{R}(U) = \mathbf{Déf}(\mathcal{M}_U)$. Réciproquement, si $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure sur un langage $\mathcal{L}$ relationnel quelconque, alors $\mathcal{M}_{U_\mathcal{M}}$ est une expansion de $\mathcal{M}$ obtenue en ajoutant un symbole de constante à $\mathcal{L}$ pour chaque élément de la base de $\mathcal{M}$, et en Morleyisant le résultat ; en effet, la base reste encore la même, et on ajoute au langage un symbole de relation pour chaque ensemble définissable avec paramètres dans la base de $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{L}$ n'est pas un langage relationnel, alors on obtient le même résultat à ceci près que les symboles de fonction ne sont plus présents dans le langage de $\mathcal{M}_{U_\mathcal{M}}$.

Nous introduisons une notation pour désigner l'utilisation de paramètres dans les univers :

Définition 5.1.7 (Paramètres)
Si U est un univers, $R \subseteq \mathcal{R}_{m+n}(U)$ et $\bar{a} \in \mathcal{B}(U)^n$, alors on note $R(\bar{x}, \bar{a}) \subseteq \mathcal{R}_m(U)$ l'ensemble défini comme étant égal à $\{\bar{x} \in \mathcal{B}(U)^m / (\bar{x}, \bar{a}) \in R\}$.

Remarque 5.1.8
Le fait que $R(\bar{x}, \bar{a}) \in \mathcal{R}_m(U)$ dans la définition précédente provient du fait que, en notant $p_n : \mathcal{B}(U)^{m+n} \to \mathcal{B}(U)^n$ et $p_m : \mathcal{B}(U)^{m+n} \to \mathcal{B}(U)^m$ les projections canoniques, on a $R(\bar{x}, \bar{a}) = p_m(p_n^{-1}(\bar{a}) \cap R)$.

Définition 5.1.9 (Largeur, [22], p.16)

Si U est un univers et $\mathcal{M}$ une structure quelconque, alors on dit que U est engendré par *$\mathcal{M}$ si $U_{\mathcal{M}} = U$. La* largeur *de U est le cardinal minimal d'une signature $\mathcal{L}$ telle qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure engendrant U.*

Remarque 5.1.10
Si un univers est de largeur finie, alors il est de largeur 1 puisque si l'on peut engendrer U avec une famille finie de relations $(R_i)_{i \in I}$, alors on peut l'engendrer avec la relation $R = \Pi_{i \in I} R_i$, le produit étant le produit cartésien, puisque l'on peut construire chaque relation R_i à partir de R par projection.

Lemme 5.1.11 ([22], p.16)

Si U est de largeur κ, alors de tout ensemble de relations génératrices on peut extraire une sous-ensemble de cardinal κ si κ est infini, et de cardinal fini si $\kappa = 1$.

Démonstration :

Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de relations génératrices de U de cardinal κ. Si $(S_j)_{j \in J}$ est une famille de relations génératrices de cardinal quelconque, alors on peut construire chaque relation R_i pour $i \in I$ en un nombre fini d'étapes à partir d'un nombre fini de relations $(S_j)_{j \in J_i}$ avec $J_i \subseteq J$ une partie finie de J. Si on note $K = \cup_{i \in I} J_i$, K est une union de κ ensembles finis. Par conséquent, la famille $(S_j)_{j \in K}$ est une famille génératrice de U de cardinal κ si κ est infini, et de cardinal fini si $\kappa = 1$. □

Définition 5.1.12 (Extension, [22], p.18)

Soient U et V deux univers. Une extension $\phi : U \to V$ *est une paire d'applications $(\phi_{\mathcal{B}}, \phi_{\mathcal{R}})$ avec $\phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}(U) \to \mathcal{B}(V)$ et $\phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{R}(U) \to \mathcal{R}(V)$ telles que pour tout n, tous $R, S \in \mathcal{R}(U)$, et tout $x \in \mathcal{B}(U)^n$, on ait :*
- $\phi_{\mathcal{R}}(\Delta(\mathcal{B}(U)^n) = \Delta(\mathcal{B}(V)^n)$;
- $\phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}(U)_n) \subseteq \mathcal{R}(V)_n$;
- $\phi_{\mathcal{R}}(R^c) = \phi_{\mathcal{R}}(R)^c$;
- $\phi_{\mathcal{R}}(R \cup S) = \phi_{\mathcal{R}}(R) \cup \phi_{\mathcal{R}}(S)$;
- $\phi_{\mathcal{R}}(p_i(R)) = p_i(\phi_{\mathcal{R}}(R))$;
- $\phi_{\mathcal{R}}(R \times S) = \phi_{\mathcal{R}}(R) \times \phi_{\mathcal{R}}(S)$;
- *si* $x \in R$, *alors* $\phi_{\mathcal{B}}(x) \in \phi_{\mathcal{R}}(R)$.

Remarque 5.1.13
Si $\phi : U \to V$ est une extension, alors $\phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}(U) \cup \emptyset) = \phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}(U)) = \phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}(U)) \cup \phi_{\mathcal{R}}(\emptyset)$; or, $\phi_{\mathcal{R}}(\emptyset) = \phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}(U))^c$, ce qui donne que $\phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{B}(U)) = \mathcal{B}(V)$ et $\phi_{\mathcal{R}}(\emptyset) = \emptyset$. De plus, la préservation des diagonales implique que $\phi_{\mathcal{B}}$ est injective.

Exemple 5.1.14
Si $\mathcal{M}$ est un réduit de $\mathcal{N}$, alors en posant $\phi_{\mathcal{B}}$ l'identité sur leurs bases, et en définissant $\phi_{\mathcal{R}}$ comme associant à tout ensemble définissable dans $\mathcal{M}$ le même ensemble dans $\mathcal{N}$, on obtient une extension d'univers $\phi : U_{\mathcal{M}} \to U_{\mathcal{N}}$.

Si $\mathcal{N}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$, alors en prenant $\phi_{\mathcal{B}}$ l'inclusion de leurs bases, et $\phi_{\mathcal{R}}$ associant à tout ensemble définissable dans $\mathcal{M}$ l'ensemble dans $\mathcal{N}$ définissable par la même formule, on obtient encore une extension d'univers $\phi : U_{\mathcal{M}} \to U_{\mathcal{N}}$.

Définition 5.1.15 (Transformation, [22], p.5)

Si U et V sont deux univers, une transformation $F : U \to V$ *est une paire $F_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}(U) \to \mathcal{B}(V)$ et $F_{\mathcal{R}} : \mathcal{R}(U) \to \mathcal{R}(V)$ telle que $F_{\mathcal{B}}$ est une bijection, et telle que $F_{\mathcal{R}}$ est une bijection induite par $F_{\mathcal{B}}$.*

Remarque 5.1.16
De manière équivalente, une transformation est une extension bijective dont la réciproque est une extension.

Exemple 5.1.17
Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux $\mathcal{L}$-structures, alors tout isomorphisme $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ induit une transformation entre $U_{\mathcal{M}}$ et $U_{\mathcal{N}}$. Si $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est une permutation définissable dans $\mathcal{M}$, alors ϕ induit également une transformation de $U_{\mathcal{M}}$ dans lui-même. Un exemple de transformation n'étant induite ni par un automorphisme, ni par une permutation définissable, est l'application $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ qui envoie x sur $-x$, en voyant $\mathbb{Q}$ comme la structure dans le langage $\{<\}$ interprété de la manière usuelle.

Nous allons à présent voir les univers comme des structures du premier ordre dans un langage particulier :

Définition 5.1.18 (Langage des univers, [22], p.17)

On définit le langage $\mathcal{L}_{univ}$ suivant :
- *pour tout $n \geq 0$, le langage contient une sorte $\mathcal{R}_n$ et ne contient que ces sortes ;*
- *pour tout $n \geq 1$, le langage contient un symbole de relation $(n+1)$-aire $\in_n$ dont un argument est dans $\mathcal{R}_n$, et les n autres sont dans $\mathcal{R}_0$.*

Si U est un univers, on fait de U une structure du premier ordre en interprétant les sortes $\mathcal{R}_n$ de manière éponyme, et en interprétant $\in_n$ comme la relation de satisfaction des relations n-aires par les éléments de $\mathcal{B}(U)$.

En pratique, nous allons faire en sorte de pouvoir distinguer les formules portant sur les individus dans la sorte $\mathcal{R}_0$ (interprétée par la base $\mathcal{B}(U)$) des autres formules ; pour cette raison, nous introduisons une définition pour faire la distinction en question, en suivant le vocabulaire introduit dans [22]. Remarquons que dans la définition qui suit, l'utilisation des mots « second ordre » est un abus de langage : tout se que nous faisons se situe dans un contexte du premier ordre ; en revanche, nous allons penser aux sortes $\mathcal{R}_n$ comme étant au second ordre relativement à la structure $\mathcal{M}_U$, puisque nous pourrons quantifier sur ces sortes.

Définition 5.1.19 (Formules et types)

Dans le langage des univers, une formule est dite du premier ordre *si les seuls quantificateurs y apparaissant portent sur les individus (la sorte $\mathcal{R}_0$). Elle est dite* du second ordre *sinon.*

Un type est du premier ordre *s'il ne contient que des formules du premier ordre, et* du second ordre *sinon.*

Étant donné un uplet $\bar{x}$ d'un univers U ($\bar{x}$ pouvant être constitué de relations et d'individus) et un ensemble $A \subset \mathcal{R}(U)$, on définit le type à paramètres dans A du premier ordre de $\bar{x}$ dans U comme l'ensemble des formules du premier ordre, prenant des paramètres (individus ou relations) dans A, et satisfaits par $\bar{x}$; on le note $tp_U(x/A)$.

Définition 5.1.20

*Si θ est une formule du langage des univers (éventuellement au second ordre) et $\phi : U \to V$ une extension d'univers, on définit l'*image de θ par ϕ*, et on note $\phi(\theta)$, la formule obtenue de la manière usuelle en remplaçant chaque instance dans θ d'une constante $a \in \mathcal{B}(U)$ par $\phi_{\mathcal{B}}(a)$, et chaque instance d'une relation $R \in \mathcal{R}(U)$ par $\phi_{\mathcal{R}}(R)$.*

Remarque 5.1.21
Il est clair que par définition d'une extension d'univers, la satisfaction des formules du premier ordre est préservée par extension : avec les notations de la définition 5.1.20, si θ a pour variables libres d'individus $\bar{x}$ et pour variables libres de relations $\bar{X}$, alors le fait que θ est du premier ordre implique que les seules quantifications y apparaissant

portent sur des variables d'individus ; la préservation de la satisfaction de ces formules est donc assurée par la condition « si $a \in R$, alors $\phi_{\mathcal{B}}(a) \in \phi_{\mathcal{R}}(R)$ », et le fait que la construction de formules du premier ordre ne fait pas intervenir d'autres quantificateurs que ceux portant sur les individus.

On peut étudier l'effet des extensions sur les types et les formules existentielles au second ordre :

Lemme 5.1.22

Soit $\phi = (\phi_{\mathcal{B}}, \phi_{\mathcal{R}})$ une paire d'applications respectivement de $\mathcal{B}(U)$ dans $\mathcal{B}(V)$ et de $\mathcal{R}(U)$ dans $\mathcal{R}(V)$. Sont alors équivalents :

1. *la paire d'applications ϕ est une extension ;*
2. *pour tous uplets $\bar{R} \in \mathcal{R}_n(U)$ et $\bar{m} \in \mathcal{B}(U)$, l'image par ϕ du type $tp_U(\bar{R}, \bar{m}/\emptyset)$ est contenue dans le type $tp_V(\phi(\bar{R}), \phi(\bar{m})/\emptyset)$;*
3. *toute formule existentielle au second ordre (c'est-à-dire toute formule de la forme $\exists \bar{Y}, f(\bar{x}, \bar{X}, \bar{Y})$, avec $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ deux uplets de variables de relations, $\bar{x}$ un uplet de variables d'éléments, et f une formule du premier ordre) qui est satisfaite par des éléments de U est satisfaite par l'image de ces éléments dans V.*

Démonstration :

Si ϕ est une extension, considérons un uplet de relations $\bar{R}$ et un uplet d'individus $\bar{m}$ dans U. Considérons une formule sans paramètres du premier ordre $\theta(\bar{x}, \bar{X})$ dont les variables sont $\bar{x}$ et $\bar{X}$, et supposons-la satisfaite par $\bar{m}$ et $\bar{R}$. Par définition d'une extension, $\phi(\bar{m}, \bar{R})$ satisfait $\phi(\theta)$, ce qui implique que $\phi(tp_U(\bar{R}, \bar{m}/\emptyset)) \subseteq tp_V(\phi(\bar{R}), \phi(\bar{m})/\emptyset)$.

Si la condition 2 est satisfaite, considérons une formule existentielle au second ordre $\exists \bar{Y}, f(\bar{x}, \bar{X}, \bar{Y})$. Si elle est satisfaite par des éléments $\bar{m}$ et $\bar{R}$ de U, alors il existe $\bar{S} \in U$ tel que $f(\bar{m}, \bar{R}, \bar{S})$ est vraie dans U. D'après la condition 2, $f(\phi(\bar{m}), \phi(\bar{R}), \phi(\bar{S}))$ est vraie dans V, ce qui implique que la formule $\exists \bar{Y}, f(\bar{x}, \bar{X}, \bar{Y})$ est satisfaite par $\phi(\bar{m})$ et $\phi(\bar{R})$ dans V.

Si la condition 3 est satisfaite, il est clair que l'appartenance d'un élément à une relation, ou d'une relation à $\mathcal{R}(U)$, s'exprime par une formule du premier ordre. Pour voir que ϕ est une extension, considérons une relation $R \in \mathcal{R}(U)$, et démontrons que $\phi_{\mathcal{R}}(R^c) = \phi_{\mathcal{R}}(R)^c$ (la vérification pour les autres symboles booléens et les projections se fait de la même manière). On considère la formule $f(X, Y) = \forall x, x \in X \leftrightarrow x \notin Y$. Cette formule est satisfaite dans U par le couple (R, R^c), et donc dans V par le couple $(\phi_{\mathcal{R}}(R), \phi_{\mathcal{R}}(R^c))$, ce qui implique que $\phi_{\mathcal{R}}(R^c) = \phi_{\mathcal{R}}(R)^c$. □

5.2 Similarité

Définition 5.2.1 (Extension élémentaire, [22], p.31)

Soient U et V des univers, et $\phi : U \to V$ une extension. Alors ϕ est appelée extension élémentaire *si la structure de base $\mathcal{B}(V)$ munie des ensembles dans $\phi(\mathcal{R}(U))$ (dans un langage contenant un symbole pour chacun de ces ensembles) engendre l'univers V. On notera alors $\phi : U \overset{\preceq}{\to} V$, ou $U \preceq V$ si on ne souhaite pas préciser l'extension ϕ.*

Lemme 5.2.2

Soient $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ une extension de $\mathcal{L}$-structures. Alors $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ si et seulement si l'inclusion d'univers est une extension élémentaire $U_{\mathcal{M}} \preceq U_{\mathcal{N}}$.

Démonstration :

Nous avons déjà remarqué que si $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$, alors l'inclusion de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ induit une extension $i : U_{\mathcal{M}} \to U_{\mathcal{N}}$. Cette extension est élémentaire. En effet, soit $R \in \mathcal{R}(U_{\mathcal{N}})$. Cette relation est définissable dans le langage $\mathcal{L}$ en utilisant des paramètres provenant de $\mathcal{N}$, et les interprétations des éléments du langage $\mathcal{L}$ dans $U_{\mathcal{N}}$ sont les images de leurs interprétations dans $U_{\mathcal{M}}$ par définition de i. En particulier, la relation R peut être définie en utilisant uniquement les images par i de relations dans $U_{\mathcal{M}}$, et des paramètres de $\mathcal{B}(U_{\mathcal{N}})$; en particulier, i est bien une extension élémentaire.

Réciproquement, supposons que $i : U_{\mathcal{M}} \to U_{\mathcal{N}}$ est une extension élémentaire d'univers. Nous allons utiliser le critère de Tarski-Vaught. Soit $\phi(x, \bar{y}) \in \mathcal{L}$ et $\bar{b} \in M$. Soit $n \in N$ tel que $\mathcal{N} \models \phi(n, \bar{b})$. Alors $\phi(x, \bar{y})$ définit un ensemble $R_{\phi(x,\bar{y})}(M) \subset M$ tel que $i(R_{\phi(x,\bar{b})}(M)) = R_{\phi(x,\bar{b})}(N)$. Or, $R_{\phi(x,\bar{b})}(N)$ est non-vide puisqu'il contient n. Si $R_{\phi(x,\bar{b})}(M)$ était vide, alors son image par i serait vide, ce qui est absurde ; par conséquent, il existe $m \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(m, \bar{b})$, et d'après le critère de Tarski-Vaught, $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. □

Corollaire 5.2.3

Supposons que $U \preceq V$ est une extension élémentaire d'univers. Alors pour toute structure génératrice $\mathcal{M}$ de U, l'univers V est engendré par une extension élémentaire de $\mathcal{M}$.

Démonstration :

Soient ϕ l'extension élémentaire en question, et $\mathcal{M}$ une structure génératrice de U dans le langage $\mathcal{L}$. On considère la $\mathcal{L}_V$-structure $\mathcal{M}_V$, et on considère le réduit $\mathcal{N} = \mathcal{M}_V|_{\phi(\mathcal{L})}$, en notant $\phi(\mathcal{L})$ le sous-langage de $\mathcal{L}_V$ image de $\mathcal{L}$ par ϕ. Cette structure $\mathcal{N}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et engendre V ; pour le démontrer, il suffit d'après le lemme 5.2.2 de démontrer que $\mathcal{N}$ engendre V. Soit donc $R \in \mathcal{R}(V)$; comme V est une extension élémentaire de U, il existe $\bar{a} \in \mathcal{B}(V)$ et $S \in \mathcal{R}(U)$ tels que $R = \phi(S)(\bar{x}, \bar{a})$. Puisque $\mathcal{M}$ engendre U, il existe une $\mathcal{L}$-formule $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ et $\bar{b} \in \mathcal{B}(U)$ tels que S est l'ensemble défini par $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{b})$. L'application ϕ étant une extension, la relation R est alors définie par la formule $f(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b})$ dans $\mathcal{N}$, ce qui implique que V est engendré par $\mathcal{N}$, et conclut donc la démonstration. □

Lemme 5.2.4

> *Toute extension d'univers $\phi : U \to V$ se décompose en une extension élémentaire $\phi_{\preceq} : U \to U'$ dans un univers U' de même base que V, suivie d'une inclusion d'univers $\phi_+ : U' \to V$.*

Démonstration :

Le sous-univers U' de V défini sur la même base, et engendré par la structure $\phi(\mathcal{M}_U)$ est une extension élémentaire de U, ce qui définit $\phi_{\preceq}$. L'inclusion $\phi_+ : U' \to V$ est définie comme étant égale à l'identité sur $\mathcal{B}(U') = \mathcal{B}(V)$, et l'inclusion sur $\mathcal{R}(U') \subseteq \mathcal{R}(V)$. $\square$

Lemme 5.2.5 ([22], proposition 3.1)

> *Si $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$, et si $\phi : U_{\mathcal{M}} \to U_{\mathcal{N}}$ est l'extension élémentaire d'univers induite, alors $U_{\mathcal{M}}$ et $V_{\mathcal{M}}$ satisfont les mêmes formules existentielles au second ordre.*

Démonstration :

Il suffit de démontrer qu'une formule $\exists \bar{Y}, f(\bar{x}, \bar{X}, \bar{Y})$ satisfaite dans $U_{\mathcal{N}}$ est aussi satisfaite dans $U_{\mathcal{M}}$. Si la formule est satisfaite dans $U_{\mathcal{N}}$ par $\bar{m}$ et $\bar{R}$, alors il existe $\bar{S} \in U_{\mathcal{N}}$ tel que $f(\bar{m}, \bar{R}, \bar{S})$ soit vraie dans $U_{\mathcal{N}}$. Puisque $U_{\mathcal{N}}$ est une extension élémentaire de $U_{\mathcal{M}}$, on sait par définition d'une extension élémentaire que $U_{\mathcal{N}}$ est engendré par les relations dans $\phi(\mathcal{R}(U_{\mathcal{M}}))$, autrement dit qu'il existe des uplets de relations $\bar{R}', \bar{S}' \in U_{\mathcal{M}}$ tels que $\bar{R} = \phi(\bar{R}')$ et $\bar{S} = \phi(\bar{S}')$. La relation $f(\bar{x}, \bar{R}, \bar{S})$ étant satisfaite dans $\mathcal{N}$ par $\bar{m}$, et puisque que $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$, alors il existe $\bar{m}' \in \mathcal{M}$ satisfaisant la formule $f(\bar{x}, \bar{R}, \bar{S})$, et on voit donc que la formule $\exists \bar{Y}, f(\bar{x}, \bar{X}, \bar{Y})$ est satisfaite dans $U_{\mathcal{M}}$ par $\bar{m}'$ et $\bar{R}'$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Définition 5.2.6 (Similarité, [22], p.31)

> *Deux univers U et V sont dits* semblables *si ils ont une extension élémentaire commune. On note alors $U \equiv V$.*

Le prochain lemme va nous permettre de démontrer que la relation de similarité est une relation d'équivalence, et d'étudier plus loin certaines propriétés topologiques sur un espace des classes de similarité :

Lemme 5.2.7 (Amalgamation élémentaire)

> *Soient U un univers et U' et U'' deux extensions élémentaires de U. Alors il existe une extension élémentaire V de U' et U'' telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\preceq"] \arrow[d, "\preceq"'] & U' \arrow[d, "\preceq"] \\ U'' \arrow[r, "\preceq"'] & V \end{tikzcd}$$

Démonstration :

Soit $\mathcal{L}_U$ le langage de la structure $\mathcal{M}_U$, et considérons les réduits des structures

$\mathcal{M}_{U'}$ et $\mathcal{M}_{U''}$ dans le langage $\mathcal{L}_U$. Ces deux structures sont des extensions élémentaires de $\mathcal{M}_U$, et il existe donc une structure $\mathcal{N}$ extension élémentaire commune faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_U \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_{U'} \arrow[d] \\
\mathcal{M}_{U''} \arrow[r] & \mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

En posant $V = U_{\mathcal{N}}$, on obtient le lemme. □

On en déduit donc :

Proposition 5.2.8 ([22], proposition 7.2)

La relation de similarité est une relation d'équivalence.

Démonstration :

Il est clair qu'elle est réflexive et symétrique. Pour la transitivité, considérons $U \equiv V$ avec $\mathbb{U}$ une extension élémentaire commune à U et V, et $V \equiv W$ avec $\mathbb{V}$ une extension élémentaire commune à V et W. D'après le lemme d'amalgamation élémentaire 5.2.7 appliqué à V, $\mathbb{U}$, et $\mathbb{V}$, il existe une extension élémentaire $\mathbb{W}$ commune à $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$, qui est donc une extension élémentaire commune à U et W, ce qui conclut la démontration. □

D'après les lemmes précédents et le fait que deux structures élémentairement équivalentes ont une extension élementaire commune, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 5.2.9 ([22], p.33)

Deux structures élémentairement équivalentes engendrent des univers semblables qui satisfont les mêmes formules existentielles au second ordre.

Nous énonçons à présent un lemme qui nous sera utile, avec le lemme 5.2.7, pour définir et étudier une topologie sur les classes de similarité d'univers.

Lemme 5.2.10 (Lemme du pentagone)

Supposons que U est un sous-univers de $\mathbb{U}$ sur la même base, et que $\mathbb{V}$ est une extension élémentaire de U. Alors il existe une extension élémentaire $\mathbb{U}'$ de $\mathbb{U}$ et un sous-univers $\mathbb{V}'$ de $\mathbb{U}'$ sur la même base que $\mathbb{U}'$ qui est une extension élémentaire de $\mathbb{V}'$.

Le nom « lemme du pentagone » vient du diagramme commutatif « pentagonal » suivant pour décrire la situation :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\preceq"] \arrow[dr, "+"'] & \mathbb{V} \arrow[r, "\preceq"] & \mathbb{V}' \arrow[d, "+"] \\
& \mathbb{U} \arrow[r, "\preceq"] & \mathbb{U}'
\end{tikzcd}$$

Démonstration :

On appelle $\mathcal{L}_U$ le langage associé à l'univers U, et $\mathcal{M}_U$ la structure génératrice de U dans ce langage. On considère également la structure $\mathcal{M}_{\mathbb{V}}$ associée à l'univers $\mathbb{V}$ vue comme une $\mathcal{L}_U$-structure via l'extension élémentaire de U dans $\mathbb{V}$. Enfin, on appelle $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$ le langage associé à l'univers $\mathbb{U}$, et $\mathcal{M}_{\mathbb{U}}$ la structure correspondante. Appelons T_U la théorie de $\mathcal{M}_U$ dans le langage $\mathcal{L}_U$, et $T_{\mathbb{V}}$ la théorie de $\mathcal{M}_{\mathbb{V}}$ dans le langage $\mathcal{L}_U$ augmenté d'un symbole de constante pour tout élément de la base de $\mathbb{V}$ (autrement dit, $T_{\mathbb{V}}$ est le diagramme élémentaire de $\mathcal{M}_{\mathbb{V}}$ dans $\mathcal{L}_U$). Enfin, appelons $T_{\mathbb{U}}$ la théorie de $\mathcal{M}_{\mathbb{U}}$ dans le langage $\mathcal{L}_{\mathbb{U}}$. Il est clair que $\mathcal{L}_U = \mathcal{L}_{\mathbb{U}} \cap (\mathcal{L}_U \cup \{c_v / v \in \mathcal{B}(\mathbb{V})\})$. De plus, $T_U = T_{\mathbb{V}} \cap T_{\mathbb{U}}$, et le lemme de consistance disjointe de Robinson implique que $T_{\mathbb{U}} \cup T_{\mathbb{V}}$ a un modèle $\mathcal{M}'$, dont nous allons noter $\mathbb{U}'$ l'univers associé. La structure $\mathcal{M}'$ étant un modèle du diagramme élémentaire de $\mathcal{M}_{\mathbb{V}}$, sa restriction à $\mathcal{L}_U$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}_{\mathbb{V}}$, et la restriction $\mathbb{V}'$ de $\mathbb{U}'$ à $\mathcal{L}_U$ est donc une extension élémentaire de $\mathbb{V}$; d'autre part, comme $\mathcal{M}'$ est un modèle de $T_{\mathbb{U}}$, c'est une extension élémentaire de $\mathcal{M}_{\mathbb{U}}$, et $\mathbb{U}'$ est une extension élémentaire de $\mathbb{U}$, ce qui conclut la démonstration du lemme. $\square$

Définition 5.2.11 (Propriété d'amalgamation)

Soit $\mathbb{U}$ un univers. On dit que $\mathbb{U}$ a la propriété d'amalgamation *si pour toutes extensions élémentaires U et U' de $\mathbb{U}$, et tout sous-univers V commun à U et U' via $\phi : V \to U$ et $\phi' : V \to U'$, il existe une extension élémentaire U_0 commune à U et U' telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi'"'] & U \arrow[d] \\ U' \arrow[r] & U_0 \end{tikzcd}$$

Lemme 5.2.12

La propriété d'amalgamation de $\mathbb{U}$ ne dépend que de sa classe de similarité.

Démonstration :

Il est clair que si $\mathbb{U}$ a la propriété d'amalgamation, alors toute extension élémentaire l'a également. Il suffit donc de considérer un sous-univers élémentaire $\phi : U \xrightarrow{\preceq} \mathbb{U}$ et de démontrer que U a la propriété d'amalgamation si $\mathbb{U}$ l'a. Soient donc $\psi : V \to U_0$ et $\psi' : V \to U_0'$ deux extensions d'univers dans deux extensions élémentaires U_0 et U_0' de U. On applique le lemme d'amalgamation élémentaire 5.2.7 à U, ϕ, et U_0 et U_0' respectivement. On obtient un diagramme du type suivant, dans lequel les deux carrés contenant ϕ commutent :

$$\begin{tikzcd} & U_0 \arrow[r, "\preceq"] & \mathbb{U}_0 \arrow[dr, "\preceq"] & \\ V \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & U \arrow[u, "\preceq"] \arrow[d, "\preceq"] \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{U} \arrow[u, "\preceq"'] \arrow[d, "\preceq"'] & \bar{\mathbb{U}} \\ & U_0' \arrow[r, "\preceq"'] & \mathbb{U}_0' \arrow[ur, "\preceq"'] & \end{tikzcd}$$

D'après la propriété d'amalgamation de $\mathbb{U}$, il existe $\bar{\mathbb{U}}$ une extension élémentaire commune à $\mathbb{U}_0$ et $\mathbb{U}'_0$ faisant commuter le bord extérieur du diagramme. Il est alors clair que $\bar{\mathbb{U}}$ est une extension élémentaire de U, et ceci donne la propriété d'amalgamation pour U. □

Exemple 5.2.13
Soit U l'univers de l'égalité sur un ensemble infini. Alors U a la propriété d'amalgamation. En effet, tout sous-univers de U est l'univers de l'égalité sur sa base ; par conséquent, c'est un sous-univers élémentaire de U. Puisque les extensions élémentaires de U sont exactement les univers de l'égalité sur leurs bases également, un sous-univers commun à deux extensions élémentaires de U en est un sous-univers élémentaire commun, et le lemme 5.2.7 implique alors que U a la propriété d'amalgamation.

Lemme 5.2.14
Soit U un univers ayant la propriété d'amalgamation. Alors pour toute structure $\mathcal{M}$ telle que $U_{\mathcal{M}} = U$, $\mathcal{M}$ est fortement minimale.

Démonstration :
Supposons que $\mathcal{M}$ n'est pas fortement minimale. Il existe donc une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, et deux types distincts non-algébriques $p, q \in S_1(\mathcal{N})$. Appelons P et Q l'ensemble des réalisations de p et q respectivement. Les ensembles P et Q sont donc infinis et disjoints. Notons V l'univers de l'égalité sur un ensemble dénombrable $\mathcal{B}(V)$. Choisissons une partition de $\mathcal{B}(V)$ en quatre ensembles infinis $A_1 \sqcup A_2 \sqcup B_1 \sqcup B_2$, et considérons les extensions d'univers $\phi, \phi' : V \to U$ définies comme suit : $\phi_{\mathcal{B}}$ envoie A_1 et A_2 dans P et B_1 et B_2 dans Q ; $\phi'_{\mathcal{B}}$ envoie A_1 et B_1 dans P et A_2 et B_2 dans Q. Les applications $\phi_{\mathcal{R}}$ et $\phi'_{\mathcal{R}}$ sont celles induites par $\phi_{\mathcal{B}}$ et $\phi'_{\mathcal{B}}$. L'univers V est donc réalisé comme un sous univers de U via ϕ et ϕ', et nous allons démontrer que la propriété d'amalgamation ne peut être satisfaite pour ces deux extensions.

Supposons qu'il existe deux extensions élémentaires $\psi, \psi' : U \to \mathbb{U}$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi'"'] & U \arrow[d, "\psi"] \\ U \arrow[r, "\psi'"'] & \mathbb{U} \end{tikzcd}$$

Les applications $\psi_{\mathcal{R}}$ et $\psi'_{\mathcal{R}}$ doivent toutes deux envoyer P et Q sur des ensembles types-définissables disjoints $\bar{P}$ et $\bar{Q}$; par conséquent, $\psi \circ \phi$ doit envoyer A_2 dans $\bar{P}$, et $\psi' \circ \phi'$ doit envoyer A_2 dans $\bar{Q}$. Le diagramme ci-dessus ne peut donc pas commuter, et l'on en déduit que $\mathcal{M}$ devait être fortement minimale. □

Question 5.2.15
Existe-t-il des univers autres que l'univers de l'égalité ayant la propriété d'amalgamation ? Existe-t-il des univers fortement minimaux n'ayant pas la propriété d'amalgamation ?

Nous allons à présent définir une topologie sur les classes de similarité des sous-univers d'un univers donné, cherchant ainsi à répondre à la question 6 dans [22], qui demandait si il existait une topologie significative sur les classes de similarité. Dans toute la suite de cette section, on considère un univers $\mathbb{U}$, et on note $X = \{(U, \phi_U)/\phi_U$ est une extension et U n'est pas semblable à $\mathbb{U}\}$ l'ensemble de ses sous-univers. On appelle $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ le quotient de X par la relation d'équivalence $\equiv$. Nous allons définir une topologie sur cet ensemble, puis démontrer que cette topologie satisfait à l'axiome de séparation T_0 et est quasi-compacte. La topologie que nous définissons est réminiscente de la topologie sur les théories complètes dans un langage fixé en logique positive.

Si $R \in \mathcal{R}(\mathbb{U})$, on pose :

$$< R >= \{(U, \phi_U) \in X / \exists \phi, \phi' : \mathbb{U} \xrightarrow{\preceq} \mathbb{U}', \exists \bar{a} \in \mathcal{B}(\mathbb{U}'), \exists S \in \mathcal{R}(U), \phi(\phi_U(S))(x, \bar{a}) = \phi'(R)\}$$

Les ensembles $< R >$ forment une prébase de fermés de X ; nous voyons dorénavant X comme un espace topologique muni de la topologie engendrée par cette prébase.

Remarque 5.2.16
Nous avons défini l'ensemble X, et donc l'ensemble $SU^{\equiv}$, de manière à exclure la classe de similarité de l'univers $\mathbb{U}$ ambiant. Ce choix s'explique par la définition de la topologie que nous allons donner sur ces ensembles : en incluant la classe de similarité de $\mathbb{U}$, les résultats de compacité que nous allons étudier dans la suite deviennent triviaux. En effet, cette classe de similarité serait, suivant notre définition de la topologie, un point dont le seul voisinage est l'espace tout entier ; autrement dit, tout recouvrement ouvert de l'espace a trivialement l'espace entier comme sous-recouvrement, et est donc compact pour des raisons assez inintéressantes. Nous avons donc choisi d'exclure cette classe de similarité pour étudier les propriétés topologiques de l'espace privé de ce point, qui s'avèrent être nettement moins triviales.

Définition 5.2.17 (Espace $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$)

On appelle $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ l'espace topologique obtenu en quotientant X par la relation d'équivalence « appartenir aux mêmes ensembles de la forme $< R >$ ».

Théorème 5.2.18

Soit $\theta : \mathbb{U} \to \mathbb{U}'$ une extension élémentaire d'univers. L'application $\bar{\theta}$ définie par

$$\bar{\theta} : \left| \begin{array}{ccc} SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U}) & \to & SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U}') \\ (U, \phi_U) & \mapsto & (U, \theta \circ \phi_U) \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

<u>Démonstration :</u>

Dans toute la démonstration, on notera $SU(\mathbb{U})$ pour $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$, et $< R >_{\mathbb{U}}$ pour l'ensemble $< R >$ dans $SU(\mathbb{U})$. Nous omettons les paramètres $\bar{a}$ apparaissant dans la définition des ensembles de la forme $< R >$ afin d'alléger les notations, mais tout peut se faire en tenant compte de ces paramètres. Nous omettons également le symbole $\circ$ dans les compositions de fonctions, de sorte que $fg = f \circ g$. Après chaque étape de la démonstration, nous dessinons un diagramme résumant ce qui a été fait pendant l'étape en question. Nous démontrons dans l'ordre la bonne définition de $\bar{\theta}$, son injectivité, sa surjectivité, sa continuité, et le fait qu'elle est fermée, ce qui impliquera bien que c'est un homéomorphisme.

Bonne définition : Supposons que (U, ϕ_U) et (V, ϕ_V) appartiennent aux mêmes ensembles de la forme $< R >_{\mathbb{U}}$. Soit $R' \in \mathbb{U}'$ et supposons que $(U, \theta\phi_U) \in < R' >_{\mathbb{U}'}$; nous voulons démontrer que $(V, \theta\phi_U) \in < R' >_{\mathbb{U}'}$ également. Il existe $\phi, \phi' : \mathbb{U}' \overset{\preceq}{\longrightarrow} \mathbb{U}''$ et $S_U \in U$ telles que $\phi\theta\phi_U(S_U) = \phi'(R)$. Comme $\mathbb{U}'$ est une extension élémentaire de $\mathbb{U}$, il existe une relation $R \in \mathbb{U}$ telle que $R' = \theta(R)$, d'où $\phi\theta\phi_U(S_U) = \phi'\theta(R)$, et $(U, \phi_U) \in < R >_{\mathbb{U}}$. Donc, $(V, \phi_V) \in < R >_{\mathbb{U}}$, et il existe $\psi, \psi' : \mathbb{U} \overset{\preceq}{\longrightarrow} \mathbb{U}'''$ et $S_V \in V$ telles que $\psi\phi_V(S_V) = \psi'(R)$. On applique le lemme d'amalgamation élémentaire 5.2.7 aux extensions élémentaires ψ et θ pour obtenir deux extensions élémentaires α et α' dans un univers $\mathbb{U}''''$ telles que $\alpha'\theta = \alpha\psi$, puis aux extensions élémentaire $\alpha\psi'$ et θ pour obtenir deux extensions élémentaires β et β' dans un univers $\bar{\mathbb{U}}$ telles que $\beta\alpha\psi' = \lambda\theta$. On a alors

$$\beta\alpha'\theta\phi_V(S_V) = \beta\alpha\psi\phi_V(S_V) = \beta\alpha\psi'(R) = \beta'\theta(R) = \beta'(R')$$

ce qui implique que $(V, \theta\phi_V) \in < R' >_{\mathbb{U}'}$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "\phi_V"] & & \mathbb{U}''' \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{U}'''' \arrow[dd, bend left, "\beta"] \\
& \mathbb{U} \arrow[ur, "\psi,\psi'"] \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{U}' \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[r, "\phi,\phi'"] \arrow[dr, "\beta'"] & \mathbb{U}'' \\
U \arrow[ur, "\phi_U"] & & & \bar{\mathbb{U}}
\end{tikzcd}$$

Injectivité : Supposons que $(U, \theta\phi_U)$ et $(V, \theta\phi_V)$ appartiennent aux mêmes ensembles de la forme $< R' >_{\mathbb{U}'}$, et que $(U, \phi_U) \in < R >_{\mathbb{U}}$. Alors il existe $\phi, \phi' : \mathbb{U} \overset{\preceq}{\longrightarrow} \mathbb{U}''$ et $S_U \in U$ telles que $\phi\phi_U(S_U) = \phi'(R)$. On applique le lemme d'amalgamation élémentaire 5.2.7 aux extensions élémentaires θ et ϕ pour obtenir α et α' dans $\mathbb{U}'''$ tels que $\alpha'\theta = \alpha\phi$. On l'applique à nouveau à $\alpha\phi'$ et θ pour obtenir β et β' dans $\mathbb{U}''''$ tels que $\beta\alpha\phi' = \beta'\theta$. On a alors

$$\beta\alpha\phi\phi_U(S_U) = \beta\alpha'\theta\phi_U(S_U) = \beta\alpha\phi'(R) = \beta'\theta(R)$$

ce qui implique que $(U, \theta\phi_U) \in < \theta(R) >_{\mathbb{U}'}$ et donc que $(V, \theta\phi_V) \in < \theta(R) >_{\mathbb{U}'}$. Il existe donc $\psi, \psi' : \mathbb{U}' \overset{\preceq}{\longrightarrow} \bar{U}$ et $S_V \in V$ tels que $\psi\theta\phi_V(S_V) = \psi'\theta(R)$, et donc que $(V, \phi_V) \in < R >_{\mathbb{U}}$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "\phi_V"] & & \mathbb{U}'' \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{U}''' \arrow[d, "\beta"] \\
& \mathbb{U} \arrow[ur, "\phi,\phi'"] \arrow[r, "\theta"'] & \mathbb{U}' \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[d, "\psi,\psi'"'] & \mathbb{U}'''' \\
U \arrow[ur, "\phi_U"] & & \bar{\mathbb{U}} &
\end{tikzcd}$$

Surjectivité : Soit $(U', \phi_{U'}) \in SU(\mathbb{U}')$. On définit l'univers U en posant $\mathcal{B}(U) = \mathcal{B}(\mathbb{U})$ et $\mathcal{R}(U) = \theta^{-1}(\phi_{U'}(\mathcal{R}(U')))$, et l'extension d'univers $\phi_U : U \to \mathbb{U}$ comme étant l'identité sur $\mathcal{B}(U)$ et l'inclusion de $\mathcal{R}(U)$ dans $\mathcal{R}(\mathbb{U})$. Il est alors clair que θ induit une extension élémentaire $U \preceq \phi_{U'}(U')$. Nous allons démontrer que $\bar{\theta}(U, \phi_U) = (U', \phi_{U'})$. Supposons d'abord que $(U, \theta\phi_U) \in < R' >_{\mathbb{U}'}$. Alors il existe $\phi, \phi' : \mathbb{U}' \overset{\preceq}{\longrightarrow} \mathbb{U}''$ et $S_U \in U$ tels que $\phi\theta\phi_U(S_U) = \phi'(R)$. Mais $\theta\phi_U(S_U) = \phi_{U'}(S_{U'})$ pour un

$S_{U'} \in U'$ puisque $\phi_{U'}(U')$ est une extension élémentaire de U'. Donc $\phi\phi_{U'}(S_{U'}) = \phi'(R')$, et $(U', \phi_{U'}) \in < R' >_{\mathbb{U}'}$. Réciproquement, supposons que $(U', \phi_{U'}) \in < R' >_{\mathbb{U}'}$. Alors il existe $\phi, \phi' : \mathbb{U}' \overset{\preceq}{\Longrightarrow} \mathbb{U}''$ et $S_{U'} \in U'$ tels que $\phi\phi_{U'}(S_{U'}) = \phi'(R)$. Mais $\phi_{U'}(S_{U'}) = \theta\phi_U(S_U)$ pour un $S_U \in U$ puisque θ est une extension élémentaire de U dans $\phi_{U'}(U)$. Par conséquent, $(U, \theta\phi_U) \in < R' >_{\mathbb{U}'}$, ce qui implique que $(U, \theta\phi)$ et $(U', \phi_{U'})$ appartiennent aux mêmes ensembles de la forme $< R' >_{\mathbb{U}'}$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "\phi_U"'] & U' \arrow[d, "\phi_{U'}"] & \\
\mathbb{U} \arrow[r, "\theta"'] & \mathbb{U}' \arrow[r, "{\phi,\phi'}"'] & \mathbb{U}''
\end{tikzcd}$$

<u>Continuité :</u> Soit $R' \in \mathbb{U}'$, et $R \in \mathbb{U}$ tel que $\theta(R) = R'$. Nous allons démontrer que $\bar{\theta}^{-1}(< R' >_{\mathbb{U}'}) =< R >_{\mathbb{U}}$. Supposons tout d'abord que $(U, \theta\phi_U) \in < R' >_{\mathbb{U}'}$. Alors il existe $\psi, \psi' : \mathbb{U}' \overset{\preceq}{\Longrightarrow} \mathbb{U}_0$ et $S_U \in U$ tels que $\phi\theta\phi_U(S_U) = \phi'(R') = \phi\theta(R)$, donc $(U, \phi_U) \in < R >_{\mathbb{U}}$, ce qui implique la première inclusion. Réciproquement, soit $(U, \phi_U) \in < R >_{\mathbb{U}}$. Alors il existe $\phi, \phi : \mathbb{U} \overset{\preceq}{\Longrightarrow} \mathbb{U}''$ et $S_U \in U$ tels que $\phi\phi_U(S_U) = \phi'(R)$. On applique le lemme d'amalgamation élémentaire 5.2.7 à θ et ϕ' pour obtenir α et β dans $\mathbb{U}'''$ tels que $\alpha\theta = \beta\phi'$, puis on le réapplique à $\beta\phi$ et θ pour obtenir λ et μ dans $\bar{\mathbb{U}}$ tels que $\mu\beta\phi = \lambda\theta$. On a alors

$$\mu\alpha(R') = \mu\alpha\theta(R) = \mu\beta\phi'(R) = \mu\beta\phi\phi_U(S_U) = \lambda\theta\phi_U(S_U)$$

ce qui implique que $(U, \theta\phi_U) \in < R' >_{\mathbb{U}'}$, et donc l'égalité $\bar{\theta}^{-1}(< R' >_{\mathbb{U}'}) = < R >_{\mathbb{U}}$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\phi_U"] & \mathbb{U} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "{\phi,\phi'}"'] & \mathbb{U}' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & \bar{\mathbb{U}} \\
& \mathbb{U}'' \arrow[r, "\beta"'] & \mathbb{U}''' \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Fermeture :</u> Soit $R \in \mathbb{U}$. Nous allons démontrer que $\bar{\theta}(< R >_{\mathbb{U}}) =< \theta(R) >_{\mathbb{U}'}$. D'après l'étape précédente (continuité de $\bar{\theta}$), on sait déjà que $< \theta(R) >_{\mathbb{U}'} \subseteq \bar{\theta}(< R >_{\mathbb{U}}$). Soit donc $(U, \phi_U) \in < R >_{\mathbb{U}}$. On construit le même diagramme que ci-dessus (encore dans la partie continuité de $\bar{\theta}$), et le même calcul implique l'inclusion manquante. Ceci conclut la démonstration. □

Corollaire 5.2.19

Pour tout univers $\mathbb{U}$, l'espace topologique $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ ne dépend que de la classe de similarité de $\mathbb{U}$.

Lemme 5.2.20

Deux univers appartenant aux mêmes ensembles de la forme $< R >$ pour $R \in \mathcal{R}(U)$ sont semblables.

<u>Démonstration :</u>

Considérons l'univers de base $\mathcal{B}(\mathbb{U})$ engendré par les relations dans l'ensemble $\phi_U(\mathcal{R}(U))$. C'est clairement une extension élémentaire de U, et nous allons démontrer que c'est aussi une extension élémentaire de V. Soit R dans cet univers ; par définition, $U \in < R >$, et donc également $V \in < R >$, et il existe $S \in \mathcal{R}(V)$ et $\bar{a} \in \mathcal{B}(\mathbb{U})$

tel que $\phi_V(S)(x, \bar{a}) = R$). Par conséquent, l'univers engendré par les ensembles dans $\phi_V(\mathcal{R}(V))$ contient l'univers engendré par $\phi_U(\mathcal{R}(U))$. Par un raisonnement symétrique, on obtient que $\phi_V(\mathcal{R}(V)) = \phi_U(\mathcal{R}(U))$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Le lemme 5.2.20 implique que l'ensemble $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ est un quotient de l'ensemble $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$, puisque la relation d'équivalence $\equiv$ est plus fine que celle définie sur $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$. Ceci nous définit donc une topologie sur $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$:

Définition 5.2.21 (Espace $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$)

On définit sur $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ une topologie en quotientant l'espace $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ par la relation d'équivalence $\equiv$.

Nous pouvons maintenant étudier la séparation de l'espace $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$:

Lemme 5.2.22

L'espace $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ satisfait à l'axiome de séparation T_0 : pour tous points distincts U et V, il existe un ouvert contenant l'un des points et pas l'autre.

<u>Démonstration :</u>

Il est clair que c'est un espace T_0 puisque c'est le quotient de l'ensemble X par la relation d'équivalence imposant à deux ensembles d'être égaux s'ils appartiennent aux mêmes fermés, et donc aux même ouverts. $\square$

L'espace $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ ne satisfait en revanche en général pas la propriété de séparation T_1, qui dit que pour tous points distincts U et V de $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$, il existe un ouvert contenant U et pas V, et un ouvert contenant V et pas U. Voici un contre-exemple à cette propriété T_1 :

Exemple 5.2.23
Soit $\mathcal{M}$ la structure dans le langage $\mathcal{L} = \{P, Q\}$, P et Q étant des prédicats deux à deux disjoints, infinis, co-infinis, et tels que $P \cap Q$ est co-infini. Appelons $\mathbb{U}$ l'univers de $\mathcal{M}$, et considérons les sous-univers U et V de $\mathbb{U}$ engendrés respectivement par P et par P et Q, munis des inclusions d'univers ϕ_U et ϕ_V. On appelle $\psi : U \to V$ l'inclusion d'univers de U dans V, de manière à ce que $\phi_U = \psi \circ \phi_V$.

Vérifions tout d'abord que U et V ne sont pas semblables. En effet, s'ils l'étaient, il existerait un univers W extension élémentaire commune à U et V ; on note ϕ_U et ϕ_V les extensions élémentaires en question. Puisque W est une extension élémentaire de U et que P engendre U, on sait que $\phi_U(P)$ engendre W. En particulier, les seuls ensembles infinis et co-infinis dans W ne peuvent être que $\phi_U(P)$ et $\phi_U(P^c)$ à un nombre fini de points près. Or, ϕ_V étant une extension élémentaire, elle doit en particulier envoyer P et Q sur deux ensembles dans W qui sont infinis, co-infinis, et disjoints. Par conséquent, $\phi_V(P)$ et $\phi_V(Q)$ doivent être égaux à $\phi_U(P)$ et $\phi_U(P^c)$, à un nombre fini de points près. Mais en particulier, puisque $\phi_U(P^c) = \phi_U(P)^c$, l'ensemble des points de $\mathcal{B}(W)$ qui ne sont ni dans $\phi_V(P)$, ni dans $\phi_V(Q)$ sont en nombre fini ; or, il existe une infinité de points de $\mathcal{B}(V)$ qui ne sont pas dans P ni dans Q, et doivent donc être envoyés hors de leurs images dans W. Ceci empêche ϕ_V d'être une extension, donc une extension élémentaire, et montre que U et V ne sont pas semblables. Ils définissent donc deux points distincts dans $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$, ainsi que dans $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ d'après le lemme 5.2.22.

Soit alors $R \in \mathcal{R}(\mathbb{U})$ et supposons que $V \in < R >^c$. Nous allons démontrer que $U \in < R >^c$ également, ce qui impliquera que tout ouvert contenant V contient également U, contredisant la propriété T_1. Supposons donc que $U \in < R >$; il existe donc $\phi, \phi' : \mathbb{U} \to \mathbb{U}'$ deux extensions élémentaires, $R_U \in U$ et $\bar{a} \in \mathbb{U}$ tels que $\phi(\phi_U(R_U))(\bar{x}, \bar{a}) = \phi'(R)$. Mais en particulier, puisque $\phi_U = \phi_V \circ \psi$, et en posant $\psi(R_U) = R_V$, on a $\phi(\phi_V(R_V)) = \phi'(R)$, et donc $V \in < R >$, ce qui est absurde. Par conséquent, $U \in < R >^c$, et les espaces $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ et $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ ne satisfont pas la propriété T_1.

Nous pouvons à présent nous tourner vers les propriétés de compacité (ou plutôt de quasi-compacité) de $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ et $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$. Tout d'abord, nous introduisons une notion topologique qui est celle que satisfera la topologie de $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$.

Définition 5.2.24 (Espaces κ-Lindelöf)

Soit X un espace topologique quelconque. Le degré de Lindelöf $L(X)$ de X est défini comme étant égal à 1 si X est quasi-compact, et comme étant le plus petit cardinal infini κ tel que tout recouvrement ouvert de X admette un sous-recouvrement de taille au plus κ si X n'est pas quasi-compact.

Un espace topologique est dit κ-Lindelöf si son degré de Lindelöf est κ.

Théorème 5.2.25

L'espace $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ est κ-Lindelöf si et seulement si $\mathbb{U}$ est de largeur κ.

<u>Démonstration :</u>

Supposons que $\mathbb{U}$ est de largeur $\lambda > \kappa$, avec λ infini et κ quelconque, et démontrons qu'il existe un recouvrement ouvert de $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ n'ayant aucun sous-recouvrement de cardinal κ, ce qui impliquera que $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ n'est pas κ-Lindelöf. Soit $(R_i)_{i\in\lambda}$ une famille de relations génératrices de $\mathbb{U}$ dont aucune sous-famille n'est génératrice. Considérons la réunion $\bigcup_{i\in\lambda} < R_i >^c$. C'est un recouvrement : en effet, si U n'appartient pas à cette union, alors il appartient aux mêmes ensembles de la forme $< R >$ que $\mathbb{U}$, et lui est donc semblable. Mais un ensemble de la forme $\bigcup_{i\in I} < R_i >^c$, avec $I \subsetneq \lambda$ ne contient pas l'univers engendré par les $(R_i)_{i\in I}$, et ne peut donc pas être un sous-recouvrement ; en particulier, le recouvrement donné n'admet pas de sous-recouvrement de taille κ.

Réciproquement, si $\mathbb{U}$ est de largeur κ, alors considérons un recouvrement ouvert $\bigcup_{i\in I} < R_i >^c$. La famille des relations $(R_i)_{i\in I}$ engendre $\mathbb{U}$: en effet, si ce n'était pas le cas, l'univers U engendré par cette famille serait un sous-univers de $\mathbb{U}$ qui ne lui est pas semblable, et qui d'après le lemme 5.2.20 n'appartiendrait donc pas aux mêmes ensembles de la forme $< R >$ que $\mathbb{U}$; il serait donc hors du recouvrement, ce qui contredit le fait que c'est un recouvrement. D'après le lemme 5.1.11, on peut extraire de $(R_i)_{i\in I}$ une sous-famille génératrice $(R_j)_{j\in J}$ de taille κ. On obtient alors un sous-recouvrement $\bigcup_{j\in J} < R_j >^c$; en effet, si $U \in SU(\mathbb{U})$ et $R \in \mathcal{R}(\mathbb{U})$, alors on peut définir R à partir de la famille $(R_j)_{j\in J}$, et si $U \notin \bigcup_{j\in J} < R_j >^c$, alors il représente toutes les relations $(R_j)_{j\in J}$, et donc également R. Par conséquent, U est semblable à $\mathbb{U}$, et $SU(\mathbb{U})$ est donc bien recouvert par $\bigcup_{i\in J} < R_j >^c$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Corollaire 5.2.26

Si $\mathbb{U}$ est de largeur κ, alors $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ est λ-Lindelöf pour un cardinal $\lambda \leq \kappa$.

Démonstration :

La préimage d'un recouvrement ouvert de $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ est un recouvrement ouvert de $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$, qui est κ-Lindelöf. On peut donc en trouver un sous-recouvrement de taille κ qui est alors projeté sur un sous-recouvrement de taille au plus κ. La borne supérieure des cardinaux des sous-recouvrements ainsi obtenus est le cardinal λ minimal tel que tout recouvrement ouvert de $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ admet un sous-recouvrement de taille au plus λ ; autrement dit, $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ est λ-Lindelöf, et on a clairement $\lambda \leq \kappa$. $\square$

Nous allons conclure la section avec la question suivante : à quelle condition les deux espaces topologiques $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ et $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ sont-ils égaux ? Autrement dit, à quelle condition la réciproque du lemme 5.2.20 est-elle vraie ? C'est ici que nous allons faire intervenir la propriété d'amalgamation de l'univers $\mathbb{U}$ afin de répondre partiellement à cette question.

Proposition 5.2.27

Si $\mathbb{U}$ a la propriété d'amalgamation, alors $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U}) = SU^{\equiv}(\mathbb{U})$.

Démonstration :

Considérons deux sous-univers U et V de $\mathbb{U}$, avec ϕ_U et ϕ_V les extensions correspondantes. Si U et V sont semblables, il existe deux extensions élémentaires $\theta_U : U \to \mathbb{V}$ et $\theta_V : V \to \mathbb{V}$. On applique le lemme du pentagone 5.2.10 à U, ϕ_U et θ_U. Il existe donc une extension élémentaire $\alpha : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, une extension élémentaire $\psi_{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \to \mathbb{U}'$, et une extension $\tau : \mathbb{V}' \to \mathbb{U}'$ telles que $\tau \circ \alpha \circ \theta_U = \psi_{\mathbb{U}} \circ \phi_U$. Dessinons un diagramme de la situation :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{V}' \arrow[dr, "\tau"] & \\
V \arrow[ur, "\alpha\theta_V"] \arrow[dr, "\phi_V"'] & U \arrow[u, "\alpha\theta_U"'] \arrow[d, "\phi_U"] & \mathbb{U}' \\
 & \mathbb{U} \arrow[ur, "\psi_U"'] &
\end{tikzcd}$$

On applique à nouveau le lemme du pentagone 5.2.10 à V, ϕ_V et $\alpha\theta_V$. Il existe donc une extension élémentaire $\beta : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$, une extension élémentaire $\psi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}''$, et une extension $\tau' : \mathbb{V}'' \to \mathbb{U}''$ telles que $\tau'\beta\alpha\theta_U = \psi\phi_V$. L'univers $\mathbb{V}'$ est alors un sous-univers de $\mathbb{U}'$ et $\mathbb{U}''$ qui sont des extensions élémentaires de $\mathbb{U}$, et la propriété d'amalgamation de $\mathbb{U}$ implique qu'il existe deux extensions élémentaires $\chi' : \mathbb{U}' \to \bar{\mathbb{U}}$ et $\chi'' : \mathbb{U}'' \to \bar{\mathbb{U}}$ telles que $\chi''\tau'\beta = \chi'\tau$. Voici un diagramme de la situation :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{V}' \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\tau"] & & \mathbb{V}'' \arrow[dd, bend left, "\tau'"] \\
V \arrow[ur, "\alpha\theta_V"] \arrow[dr, "\phi_V"'] & U \arrow[u, "\alpha\theta_U"'] \arrow[d, "\phi_U"'] & \mathbb{U}' \arrow[r, "\chi'"] & \bar{\mathbb{U}} \\
& \mathbb{U} \arrow[ur, "\psi_U"] \arrow[rr, "\psi"'] & & \mathbb{U}'' \arrow[u, "\chi''"']
\end{tikzcd}$$

Supposons à présent que $U \in \langle R \rangle$, et démontrons que $V \in \langle R \rangle$ également. On sait qu'il existe $\psi_U, \psi'_U : U \xrightarrow{\preceq} \mathbb{U}'$, $R_U \in \mathcal{R}(U)$ et $\bar{a} \in \mathcal{B}(\mathbb{U}')$ tels que $\psi_U(\phi_U(R_U)(x, \bar{a}) = \psi'_U(R)$, donc $\tau\alpha\theta_U(R_U)(x, \bar{a}) = \psi'_U(R)$. Pour simplifier les notations, on ommetra $\bar{a}$ dans la suite de la démonstration. Comme $\mathbb{V}'$ est une extension élémentaire de $\mathbb{V}$, il existe $R_V \in \mathcal{R}(V)$ tel que $\alpha\theta_V(R_V) = \alpha\theta_U(R_U)$. Par conséquent, $\chi'\psi'_U(R) = \chi'\tau\alpha\theta_V(R_V)$, et donc $\chi'\psi'_U(R) = \chi''\psi\phi_V(R_V)$. En posant $\psi_V = \chi''\psi$ et $\psi'_V = \chi'\psi'_U$, on obtient bien l'existence de deux extensions élémentaires $\psi_V, \psi'_V : \mathbb{U} \to \bar{\mathbb{U}}$ telles que $\psi_V(\phi_V(R_V)) = \psi'_V(R)$, ce qui implique que $V \in \langle R \rangle$ et conclut la démonstration. $\square$

Exemple 5.2.28
Nous donnons un exemple d'univers pour lequel les deux espaces $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ et $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ sont distincts. Soit $\mathcal{M}$ la structure sur le langage $\mathcal{L} = \{P, Q, R\}$, P, Q et R étant des symboles de prédicat, interprétés comme des ensembles infinis et co-infinis, et tels que $P \cap Q$, $P \cap Q^c$, $P^c \cap Q$ et $P^c \cap Q^c$ sont infinis, $R \subset P^c$, et $R \cap Q$, $R \cap Q^c$, $R^c \cap Q$ et $R^c \cap Q^c$ sont infinis. On appelle $\mathbb{U}$ l'univers de $\mathcal{M}$, U le sous-univers engendré par P et V le sous-univers engendré par Q, ϕ_U et ϕ_V étant les inclusions associées. Il est clair que U et V sont semblables (ils sont même transformables l'un en l'autre). D'autre part, on a évidemment que $U \in < P >$ (en considérant $\phi = \phi' = id_{\mathbb{U}}$ les extensions élémentaires dans la définition de $< P >$).

Nous allons démontrer que $V \notin < P >$. En effet, soient $\phi, \phi' : \mathbb{U} \to \mathbb{U}'$ deux extensions élémentaires. On peut supposer que $\mathbb{U}'$ est l'univers d'une extension élémentaire $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$, et que ϕ' est l'extension élémentaire associée à cette extension élémentaire $\mathcal{M} \preceq \mathcal{M}'$ (comme dans le lemme 5.2.3) ; en particulier, on a $\phi'_{\mathcal{R}}(P^{\mathcal{M}}) = P^{\mathcal{M}'}$, ce que l'on abrégera en $\phi'(P) = P$ (cet abus de notations ne devrait pas prêter à confusion). Pour démontrer que $V \notin < P >$, il nous faut donc démontrer que pour toute relation $S \in \mathcal{R}(V)$ et toute extension élémentaire $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}'$, on a $\phi(\phi_V(S)) \neq P$. Puisque ϕ_V est l'inclusion de V dans $\mathbb{U}$, on a $\mathcal{R}(V) \subset \mathcal{R}(\mathbb{U})$, et nous devons donc démontrer que $\phi(S) \neq P$. Mais les seules relations de $\mathbb{V}$ sont Q, Q^c, et les ensembles obtenus en ajoutant et en retirant un nombre fini d'éléments à Q ou Q^c. Nous allons donc traiter le cas $S = Q$, le raisonnement étant similaire pour les autres possibilités. Supposons donc que $\phi(Q) = P$. Puisque $P \cap Q$, $R \cap Q$ et $R^c \cap Q$ sont inclus dans Q, leurs images par ϕ doivent être incluses dans $\phi(Q)$. Finalement, puisque $P \cap Q$, $R \cap Q$ et $R^c \cap Q$ sont infinis et disjoints, il doit en être de même de $\phi(P) \cap \phi(Q)$, $\phi(R) \cap \phi(Q)$ et $\phi(R^c) \cap \phi(Q)$, c'est-à-dire de $\phi(P) \cap P$, $\phi(R) \cap P$, et $\phi(R^c) \cap P$. Mais les seuls parties définissables de P dans $\mathbb{U}'$ sont $P \cap Q$, $P \cap Q^c$, et les ensembles obtenus en ajoutant et enlevant un nombre fini de points à ceux-ci ; par conséquent, il n'existe dans P aucun triplet d'ensembles définissables pouvant jouer le rôle de $\phi(P) \cap P$, $\phi(R) \cap P$, et $\phi(R^c) \cap P$. C'est une contradiction, et il est donc impossible que $\phi(Q) = P$. Nous avons donc démontré qu'il existe deux sous-univers U et V de $\mathbb{U}$, semblables, mais tels que $U \in < P >$ et $V \notin < P >$, ce qui montre que $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ est un quotient non-trivial de $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$.

5.3 Traitement univers-théorique des groupoïdes de liaison

Nous allons dans cette section étudier la notion de groupoïde de liaison dans les univers, et en particulier une correspondance obtenue par Hrushovski entre les groupoïdes définissables dans une théorie du premier ordre et les « sortes imaginaires internes » de cette théorie. Cette correspondance peut se formuler dans le langage des univers, mais nous aurons en fait besoin d'une version un peu plus restrictive de la définition d'un univers, que nous allons décrire maintenant.

Un univers a été défini comme étant un ensemble muni d'un ensemble u-clos contenant tous les singletons, cet ensemble jouant le rôle de l'ensemble des ensembles définissables avec paramètres dans une certaine structure $\mathcal{M}$. Si l'on part d'une structure $\mathcal{M}$, on peut vouloir garder une trace dans son univers de l'ensemble des ensembles définissables sans paramètres ; pour ce faire, on ajoute à la définition d'un univers un second ensemble u-clos $\mathcal{R}^0$, contenu dans $\mathcal{R}$, et tel que $(\mathcal{R}^0)^M = \mathcal{R}$. On définit alors une extension et une transformation d'univers de la même manière que dans les définitions 5.1.12 et 5.1.15, en ajoutant comme condition que les éléments de $\mathcal{R}^0(U)$ doivent être envoyés sur des éléments de $\mathcal{R}^0(V)$.

Passons en revue ce que deviennent les résultats énoncés dans les deux premières sections avec cette définition alternative d'univers. Étant donnée une structure $\mathcal{M}$, on note $U_{\mathcal{M}} = (M, \mathbf{Déf}^0(\mathcal{M}), \mathbf{Déf}(\mathcal{M}))$ l'univers de cette structure, et on définit la largeur d'un univers comme dans la définition 5.1.9. Remarquons que la largeur avec cette définition dépend largement des paramètres inclus dans $\mathcal{R}^0$; par exemple, si $\mathcal{M}$ est une structure infinie dans un langage dénombrable, la largeur de l'univers induit sera au plus dénombrable ; mais si on considère $\mathcal{M}$ comme une structure dans le même langage auquel on ajoute un symbole de constante pour chaque élément de $\mathcal{M}$, alors la largeur de l'univers induit sera le cardinal de $\mathcal{M}$. D'autre part, on définit le langage des univers comme le langage L_U de la définition 5.1.18 auquel on ajoute un symbole de prédicat $\mathcal{R}^0$ qui est interprété comme l'ensemble $\mathcal{R}^0(U)$ dans un univers U. Avec cette définition, le lemme 5.1.22 reste valable avec la même formulation.

Une extension élémentaire est encore définie de la même manière (avec la nouvelle définition d'extension), ainsi que la similarité entre structures. Les lemmes 5.2.2 et 5.2.5 restent encore valides avec ces définitions, ainsi que la proposition 5.2.9. Dans la construction de la topologie sur les classes de similarité, on peut se restreindre à définir $< R >$ pour $R \in \mathcal{R}^0(\mathbb{U})$, en prenant une définition un peu différente :

$$< R >= \{U \in SU(\mathbb{U}) / \exists S \in \mathcal{R}(U), \phi_U(S) = R\}$$

La topologie sur $SU(\mathbb{U})$ est alors définie comme la topologie engendrée par les ensembles de la forme $< R >^c$ pour $R \in \mathcal{R}^0(\mathbb{U})$, et en suivant la même démonstration, on obtient encore le lemme 5.2.20 (en prenant soin de remplacer $\mathcal{R}(\mathbb{U})$ par $\mathcal{R}^0(\mathbb{U})$, ce qui implique encore que $SU(\mathbb{U})$ est un espace T_0 (lemme 5.2.22). Enfin, une démonstration similaire à celle du théorème 5.2.25 permet de démontrer que $SU(\mathbb{U})$ est un espace κ-Lindelöf si et seulement si $\mathbb{U}$ est de largeur κ.

Dans toute cette section, on appellera $\mathbf{Déf}^A(U)$ pour un univers U et un ensemble de paramètres A la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathcal{R}^A(U)$, et dont les morphismes sont les applications entre ces ensembles dont les graphes sont dans $\mathcal{R}^A(U)$. Une catégorie sera dite *définissable sur A dans U* si c'est une petite catégorie dont l'ensemble des objets, l'ensemble des morphismes, et le graphe de la composition sont tous trois des objets de $\mathbf{Déf}^A(U)$.

Définition 5.3.1 (Plongement stable et internité dans les univers)
Un ensemble $B \in U$ est dit stablement plongé *si l'ensemble $B \cap U = \{B \cap R / R \in U\}$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{R}^B$.*

Une internité *dans U entre deux ensembles définissables $A \in \mathcal{R}_n$ et $B \in \mathcal{R}_m$ est une relation $R \in \mathcal{R}_{m+n}$ qui est le graphe d'une application injective entre A et B.*

Définition 5.3.2 (Catégories concrètes)
Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Elle est dite concrète sur A dans U *si elle est définissable sur A dans U et qu'elle est munie d'un foncteur fidèle (appelé* foncteur de concrétisation*) $\delta : \mathbf{C} \to \mathbf{Déf}^A(U)$ tel qu'il existe deux relations $R_{Ob}(x, y), R_{Mor}(x', y') \in \mathcal{R}^A(U)$ (x, x', y, et y' étant des uplets de variables) telles que pour tout $b \in Ob\mathbf{C}$, $\delta(b) = R_{Ob}(x, b)$, et pour tout $d \in Mor\mathbf{C}$, $\delta(d) = R_{Mor}(x, d)$. Elle est dite* type-concrète *si elle est type-définissable, et* $\star$-concrète *si elle est $\star$-définissable.*

Définition 5.3.3 (Groupoïde)
Un groupoïde *est une catégorie $\mathscr{G}$ dans laquelle toutes les flèches sont inversibles, et telle que pour tous $b, b' \in Ob\mathscr{G}$, il existe $c \in Mor\mathscr{G}(b, b')$. Les* groupes d'isomorphismes de $\mathscr{G}$ *sont les groupes $G_b = Mor\mathscr{G}(b, b)$ pour $b \in Ob\mathscr{G}$.*

Remarque 5.3.4
Les groupoïdes que nous définissons ici sont appelés dans [10] des groupoïdes connexes, puisque deux objets sont toujours liés par une flèche. Nous n'aurons pas besoin de considérer de groupoïdes non connexes dans la suite, et c'est pourquoi nous incluons leur connexité dans la définition.

Définition 5.3.5 (Groupoïde de liaison)

Si U est un univers, et $A, B \in \mathcal{R}(U)$, un groupoïde $(\mathscr{G}, \delta)$ concret sur B est un groupoïde de liaison *de A dans B si il existe un ensemble $C \in \mathcal{R}(U)$ et une relation $f(x, y, z) \in \mathcal{R}^0(U)$ tels que :*

- *pour tout $c \in C$, $f(x, y, c)$ définisse le graphe d'une fonction injective $f_c : A \to B$;*
- *pour tout $b \in Ob\mathscr{G}$, il existe $c \in C$ tel que $f_c(A) = \delta(b)$;*
- *pour tout $d \in Mor\mathscr{G}$, il existe $c, c' \in C$ tels que $f_{c'} \circ f_c^{-1} = \delta(d)$;*
- *pour tout $c \in C$, il existe $b \in Ob\mathscr{G}$ tel que $f_c(A) = \delta(b)$;*
- *pour tous $c, c' \in C$, il existe $d \in Mor\mathscr{G}$ tel que $f_{c'} \circ f_c^{-1} = \delta(d)$.*

Si le groupoïde $\mathscr{G}$ est type-concret ou $\star$-concret, on dira encore que c'est un groupoïde de liaison si les conditions ci-dessus sont satisfaites avec C respectivement type-définissable ou $\star$-définissable.

Exemple 5.3.6
La donnée d'un groupoïde concret $(\mathscr{G}, \delta)$ dont les groupes d'isomorphismes G_b sont triviaux est équivalente à la donnée d'une famille uniformément définissable d'ensembles $(\delta(b))_{b\in Ob\mathscr{G}}$, et d'une famille uniformément définissable de bijections $(\delta(b, b') : \delta(b) \to \delta(b'))_{b,b'\in Ob\mathscr{G}}$ telles que $\delta(b, b) = id_{\delta(b)}$ et $\delta(b', b'') \circ \delta(b, b') = \delta(b, b'')$.

Exemple 5.3.7
Un groupoïde concret $(\mathscr{G}, \delta)$ avec un seul objet b est une action de groupe définissable : le groupe définissable G_b agit définissablement sur l'ensemble définissable $\delta(b)$.

Dans [10], il est construit, pour tout groupoïde concret $\mathscr{G}$ dans un modèle M d'une théorie T, une *sorte imaginaire interne à* T, qui est une expansion de T par une sorte S qui est interne à T, et telle que $\mathscr{G}$ est un groupoïde de liaison de S dans M. Nous réalisons ici une construction similaire, en la formulant encore une fois dans le langage des univers.

Proposition 5.3.8

Soit $(\mathscr{G}, \delta)$ un groupoïde concret dans un univers U. Alors il existe une extension d'univers $\phi : U \to V$ telle que :

1. *$\phi(U)$ soit stablement plongé dans V ;*
2. *l'univers induit par V sur $\phi(M_U)$ soit égal à $\phi(U)$;*
3. *$\phi|_{M_U}$ réalise une bijection entre $(\mathscr{G}, \delta)$ et $\phi((\mathscr{G}, \delta))$;*
4. *$\phi((\mathscr{G}, \delta))$ soit un groupoïde de liaison d'une relation $S_\mathscr{G} \in \mathcal{R}^0(V)$ dans U ;*
5. *pour tout univers W ayant ces propriétés (1 à 4), il existe une extension d'univers $\psi : V \to W$ induisant une transformation entre V et $\psi(V)$ fixant l'univers U point par point.*

On peut choisir V de manière à ce que ϕ soit une inclusion. On appellera V la sorte imaginaire interne canonique *de $\mathscr{G}$.*

Démonstration :

Pour construire l'univers V, on considère la structure M_U. L'idée de la construction est d'ajouter une sorte qui sera interprétée comme une copie de l'un des ensembles $\delta(b)$, et à laquelle on ajoutera une relation permettant de décrire une internité entre $S_\mathscr{G}$ et M_U reposant sur les bijections $\delta(Mor\mathscr{G})$.

On ajoute donc une sorte $S_\mathscr{G}$ à M_U, ainsi qu'une relation $R \in S_\mathscr{G} \times M_U^n \times Mor\mathscr{G}$, n étant égal à l'arité des ensembles $\delta(b)$. Pour construire la sorte $S_\mathscr{G}$, on considère une copie de l'un des ensembles $\delta(b_0)$ pour $b_0 \in Ob\mathscr{G}$ (obtenue par exemple en prenant le produit cartésien de $\delta(b_0)$ par un ensemble à un élément n'appartenant pas à M_U) ; on note s_a l'élément de $S_\mathscr{G}$ qui correspond de cette manière à l'élément a de $\delta(b_0)$. On procède de même pour définir C comme une copie de l'ensemble $\bigcup_{b\in Ob\mathscr{G}} Mor\mathscr{G}(b_0, b)$, en notant c_d pour $d \in \bigcup_{b\in Ob\mathscr{G}} Mor\mathscr{G}(b_0, b)$ ses éléments. On définit alors la relation R de la manière suivante : $R(s_x, y, c_z)$ si et seulement si $z \in Mor\mathscr{G}(b_0, b)$ pour un $b \in Ob\mathscr{G}$, et $y = \delta(c_z)(s_x)$. En particulier, pour un $z \in Mor\mathscr{G}(b_0, b)$ fixé, la relation $R(s_x, y, c_z)$ définit le graphe de la bijection $\delta(c_z) : \delta(b_0) \to \delta(b)$ pour laquelle on a remplacé chaque élément a de l'ensemble source par l'élément $s_a \in S_\mathscr{G}$ correspondant.

L'univers V est alors l'univers engendré par cette nouvelle structure $M_U \cup S_{\mathscr{G}}$, muni de l'inclusion témoignant du fait que c'est une extension d'univers. Il est clair que l'on n'a rajouté aucun ensemble définissable sur M_U en faisant cette construction, et donc que l'univers induit par V sur M_U est exactement U. Pour la même raison, U est stablement plongé dans V, et comme le groupoïde concret $(\mathscr{G}, \delta)$ n'a pas de nouveaux points dans V, l'inclusion réalise une bijection entre les points de $(\mathscr{G}, \delta)$ dans dans U et les points de $(\mathscr{G}, \delta)$ dans V.

Le groupoïde concret $(\mathscr{G}, \delta)$ est un groupoïde de liaison de $S_{\mathscr{G}}$ dans U. En effet, pour tout $c_z \in C$, $R(x, y, c_z)$ définit le graphe d'une fonction injective $f_{c_z} : S_{\mathscr{G}} \to U$; si $b \in Ob\mathscr{G}$ et $z \in Mor\mathscr{G}(b_0, b)$, alors $f_{c_z}(S_{\mathscr{G}}) = \delta(b)$; si $d \in Mor\mathscr{G}(b, b')$, il existe $z \in Mor\mathscr{G}(b_0, b)$ et $z' \in Mor\mathscr{G}(b_0, b')$ tels que $c_{z'} \circ c_z^{-1} = d$, et donc $f_{c_{z'}} \circ f_{c_z}^{-1} = \delta(d)$; enfin, pour tous $z \in Mor\mathscr{G}(b_0, b)$ et $z' \in Mor\mathscr{G}(b_0, b')$, $d = c_{z'} \circ c_z^{-1} \in Mor\mathscr{G}(b, b')$, et donc $f_{c_{z'}} \circ f_{c_z}^{-1} = \delta(d)$.

Il nous reste à démontrer la minimalité de V relativement à ces propriétés (c'est-à-dire la minimalité au sens de 5.). Soit W un univers satisfaisant les propriétés 1 à 4. L'univers W admet U comme sous-univers, et contient une relation $S'_{\mathscr{G}}$ dont $(\mathscr{G}, \delta)$ est un groupoïde de liaison ; en particulier, il existe C' et $R'(x, y, z)$ tels que pour tout $b \in Ob\mathscr{G}$, il existe $c' \in C'$ tels que $f'_{c'} = R'(x, y, c')$ soit une bijection entre $S'_{\mathscr{G}}$ et $\delta(b)$. Définissons l'application $\psi : V \to W$ telle que $\psi|_U = id_U$, et $\psi|S_{\mathscr{G}}$ est égale à ${f'_{c'_0}}^{-1} \circ f_{c_0}$ (où $c_0 \in C$ et $c'_0 \in C'$ sont tels que $f_{c_0}(S_{\mathscr{G}}) = f'_{c'_0}(S'_{\mathscr{G}}) = \delta(b_0)$) ; $\psi(S_{\mathscr{G}}) = S'_{\mathscr{G}}$ et $\psi(R) = R'$; enfin, $\psi(c_z)$ pour $z \in Mor\mathscr{G}(b_0, b)$ est égal à $c' \in C'$ tel que $f_{c'} = f_{c_z} \circ f_{c_0}^{-1} \circ f'_{c'_0}$.

On cherche à démontrer que ψ est une transformation entre V et $\psi(V)$. L'application ψ est l'identité sur U, et elle préserve clairement les ensembles 0-définissables, puisque $S'_{\mathscr{G}}$, R' et C' sont 0-définissables. De plus, l'image de $S_{\mathscr{G}}$ est clairement égale à $S'_{\mathscr{G}}$ (puisque nous ne traitons qu'avec des bijections pour définir ψ sur $S_{\mathscr{G}}$). L'image de C est aussi égale à C' : en effet, par définition de $\psi(c)$ pour $c \in C$, il est clair que ψ est injective de C dans C', et étant donné un élément $c' \in C'$, l'application $f'_{c'} \circ {f'_{c_0}}^{-1}$ est égale à $\delta(d)$ pour un certain $d \in Mor\mathscr{G}$, $\delta(d) = f_c \circ f_{c_0}^{-1}$; par conséquent, $f'_{c'} = f_c \circ f_{c_0}^{-1} \circ f'_{c_0}$, d'où $c' = \psi(c)$, et ψ est surjective. La relation R étant définie à partir de $S_{\mathscr{G}}$ et C, les éléments la satisfaisant sont envoyés exactement sur les éléments satisfaisant R' dans W. Finalement, ψ induit bien une transformation entre V et $\psi(V)$, ce qui achève de démontrer le point 5. □

Définition 5.3.9

On appelle sorte imaginaire interne de U (associée à un groupoïde concret $\mathscr{G}$) une extension $\phi : U \to V$ telle que $\phi|_U$ soit une transformation de U dans $\phi(U)$ et V soit semblable à la sorte imaginaire interne canonique associée à $\mathscr{G}$.

Nous allons à présent démontrer une correspondance entre les groupoïdes concrets dans un univers U et les sortes imaginaires internes. Cette correspondance a une forme un peu différente de celle démontrée par Hrushovski dans [10], mais nous discuterons de leurs liens par la suite. Tout d'abord, il nous faut définir une notion d'équivalence entre groupoïdes, provenant encore de [10], qui dit intuitivement que deux groupoïdes sont équivalents si ils sont associés à la « même » sorte imaginaire interne.

Définition 5.3.10
Soient $(\mathscr{G}, \delta)$ et $(\mathscr{G}', \delta')$ deux groupoïdes concrets dans un univers U. On dit qu'ils sont équivalents, *et on note $(\mathscr{G}, \delta) \sim (\mathscr{G}', \delta')$ (ou $\mathscr{G} \sim \mathscr{G}'$ si le contexte est clair) si il existe un groupoïde concret $(\mathscr{G}'', \delta'')$ dans U, tel que $Ob\mathscr{G}'' = Ob\mathscr{G} \cup Ob\mathscr{G}'$, $(\mathscr{G}'', \delta'')|_{Ob\mathscr{G}} = (\mathscr{G}, \delta)$ et $(\mathscr{G}'', \delta'')|_{Ob\mathscr{G}'} = (\mathscr{G}', \delta')$.*

Remarque 5.3.11
L'équivalence entre groupoïdes concrets est une relation d'équivalence. En effet, elle est clairement réflexive et symétrique. Supposons que $\mathscr{G}_1 \sim \mathscr{G}_2$ et $\mathscr{G}_2 \sim \mathscr{G}_3$, ceci étant témoigné respectivement par les groupoïdes $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$. On définit alors le groupoïde $\mathscr{G} \cup \mathscr{H}$ dont les objets sont $Ob\mathscr{G}_1 \sqcup Ob\mathscr{G}_2 \sqcup Ob\mathscr{G}_3$ et les morphismes sont les paires $(g, h) \in Mor\mathscr{G}(b, c) \times Mor\mathscr{H}(a, b)$, les paires $(h, g) \in Mor\mathscr{H}(b, a) \times Mor\mathscr{G}(c, b)$, et les morphismes $g \in Mor\mathscr{G}(c, c')$ et $h \in Mor\mathscr{H}(a, a')$ pour tous objets $a, a' \in Ob\mathscr{G}_1$, $b \in Ob\mathscr{G}_2$ et $c, c' \in Ob\mathscr{G}_3$. La composition des morphismes est définie de la manière suivante : si $g, g' \in Mor\mathscr{G}$, leur composée est la composée de g et g' dans $\mathscr{G}$ si elle existe ; de même si $h, h' \in Mor\mathscr{H}$; si $(g, h) \in Mor\mathscr{G}(b, c) \times Mor\mathscr{H}(a, b)$ et $g' \in Mor\mathscr{G}(c, c')$, la composée $g' \circ (g, h)$ est égale à (gg', h) ; si $(g, h) \in Mor\mathscr{G}(b, c) \times Mor\mathscr{H}(a, b)$ et $(h', g') \in Mor\mathscr{H}(b', a') \times Mor\mathscr{G}(c, b')$, alors $(h', g') \circ (g, h)$ est défini par $(h'g'g, h)$ (ceci est bien défini puisque $g'g \in Mor\mathscr{G}_2(b, b') = Mor\mathscr{G}(b, b') = Mor\mathscr{H}(b, b')$ par définition de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$) ; les autres cas sont définis de la même manière. Le foncteur de concrétisation $\delta_{\mathscr{G} \cup \mathscr{H}}$ est défini sur les objets de la même manière que les foncteurs de concrétisation $\delta_{\mathscr{G}_1}$, $\delta_{\mathscr{G}_2}$ et $\delta_{\mathscr{G}_3}$, et sur les morphismes par $\delta_{\mathscr{G} \cup \mathscr{H}}(g) = \delta_{\mathscr{G}}(g)$, $\delta_{\mathscr{G} \cup \mathscr{H}}((g, h)) = \delta_{\mathscr{G}}(g) \circ \delta_{\mathscr{H}}(h)$, et de manière similaire pour les autres cas. Finalement, considérons le sous-groupoïde plein de $\mathscr{G} \cup \mathscr{H}$ sur les objets $Ob\mathscr{G}_1 \sqcup Ob\mathscr{G}_3$, en restreignant le foncteur de concrétisation aux objets et morphismes concernés ; on obtient un groupoïde concret qui témoigne de l'équivalence entre $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_3$, c'est-à-dire la transitivité de $\sim$.

Lemme 5.3.12
Soient U un univers, et $(\mathscr{G}, \delta)$ et $(\mathscr{G}', \delta')$ deux groupoïdes concrets et équivalents dans U, dont les sortes imaginaires internes canoniques sont respectivement notées V et V'. Si $(\mathscr{G}'', \delta'')$ témoigne de leur équivalence, alors c'est un groupoïde de liaison de V dans U et de V' dans U.

Démonstration :

Par symétrie, il est suffisant de démontrer que $\mathscr{G}''$ est un groupoïde de liaison de V dans U. Puisque $\mathscr{G}$ est un groupoïde de liaison de V dans U, il existe $C \in \mathcal{R}(U)$ et $R(x, y, z) \in \mathcal{R}^0(U)$ satisfaisant les hypothèses de la définition 5.3.5. De même, on note C' et R' les relations obtenues sachant que $\mathscr{G}'$ est un groupoïde de liaison de V' dans U. Dans toute la démonstration, nous noterons $f_z : V \to U$ et $f'_z : V' \to U$ les fonctions injectives définies respectivement par $R(x, y, z)$ et $R'(x, y, z)$. Fixons $c_0 \in C$, $c'_0 \in C'$, et b_0 et b'_0 des objets de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ respectivement correspondant à ces deux éléments. En particulier, b_0 et b'_0 sont des objets de $\mathscr{G}''$, et on fixe également un morphisme $d_0 : b_0 \to b'_0$ dans $\mathscr{G}''$. Enfin, on note ϕ la composée $f'^{-1}_{c'_0} \circ \delta''(d_0) \circ f_{c_0}$, qui est une bijection de V dans V'.

Nous allons définir deux relations $D \in \mathcal{R}(U)$ et $R''(x, y, z) \in \mathcal{R}^0(U)$, puis vérifier que ces relations témoignent du fait que $\mathscr{G}''$ est un groupoïde de liaison de V dans U. Tout d'abord, on pose $D = C \sqcup \{(c_0, c'_0, d_0)\} \times C'$. Pour simplifier les notations, nous ne rappellerons pas la présence de c_0, c'_0 et d_0 dans D, et considérerons désormais que $D = C \sqcup C'$ (mais les trois paramètres en question seront tout de même utilisés pour définir ϕ). On définit alors $R''(x,y,z)$ comme étant la relation définie par $R''(x,y,c) = f_c$ si $c \in Ob\mathscr{G}$, et $R''(x,y,c') = f_{c'} \circ \phi$ si $c' \in Ob\mathscr{G}'$; on note f''_z la fonction dont le graphe est défini par $R''(x,y,z)$.

Vérifions à présent que D et R'' témoignent du fait que $\mathscr{G}''$ est un groupoïde de liaison de V dans U. Par définition, pour tout objet $b \in Ob\mathscr{G}''$, la relation $R(x,y,b)$ est le graphe d'une fonction injective définissable de V dans U.

Si $b \in Ob\mathscr{G}''$, alors $b \in Ob\mathscr{G}$ ou $b \in Ob\mathscr{G}'$. Si $b \in Ob\mathscr{G}$, puisque $\mathscr{G}$ est un groupoïde de liaison de V dans U, il existe $c \in C \subset D$ tel que $f''_c(V) = f_c(V) = \delta(c) = \delta''(c)$. Si $b \in Ob\mathscr{G}'$, alors il existe de même un élément $c' \in C' \subset D$ tel que $f''_{c'}(V) = f'_{c'} \circ \phi(V) = \delta'(c') = \delta''(c')$.

Si $(d : b \to b') \in Mor\mathscr{G}$, alors si $b, b' \in Ob\mathscr{G}$ ou $b, b' \in Ob\mathscr{G}'$, alors $d \in Mor\mathscr{G}$ ou $Mor\mathscr{G}'$, et on procède comme précédemment en utilisant le fait que $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont des groupoïdes de liaison de leurs sortes imaginaires internes respectives. Si $b \in Ob\mathscr{G}$ et $b' \in Ob\mathscr{G}'$, alors, puisque $\mathscr{G}''$ est un groupoïde, il existe un morphisme $d_1 : b \to b_0$ dans $\mathscr{G}$ et un morphisme $d_2 : b'_0 \to b'$ dans G' tels que $\delta''(d) = \delta''(d_2) \circ \delta''(d_0) \circ \delta''(d_1)$. Il existe donc $c \in Ob\mathscr{G}$ et $c' \in Ob\mathscr{G}'$ tels que $\delta(d_1) = f_{c_0} \circ f_c^{-1}$ et $\delta(d_2) = f'_{c'} \circ {f'}_{c'_0}^{-1}$. On obtient donc que $\delta''(d) = f''_{c'} \circ {f''}_c^{-1}$.

Si $d \in D$, alors $d \in C$ ou $d \in C'$, et on peut encore utiliser le fait que $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont des groupoïdes de liaison pour démontrer qu'il existe $b \in Ob\mathscr{G}''$ tel que $f''_d(V) = \delta''(b)$.

Enfin, si $d, d' \in D$, alors on se ramène comme précédemment au cas ou $d \in C$ et $d' \in C'$. Dans ce cas, $f''_{d'} \circ {f''}_d^{-1}$ est de la forme :

$$f'_{d'} \circ \phi \circ f_d^{-1} = f'_{d'} \circ {f'}_{c'_0}^{-1} \circ \delta''(d_0) \circ f_{c_0} \circ f_d^{-1}$$

D'après ce qui précède, $f'_{d'} \circ {f'}_{c'_0}^{-1}$ et $f_{c_0} \circ f_d^{-1}$ sont de la forme $\delta(d_1)$ et $\delta(d_2)$ pour deux morphismes d_1 et d_2 dans $\mathscr{G}''$. Par conséquent, il existe un morphisme $\bar{d}$ de $\mathscr{G}''$ tel que $f'_{d'} \circ \phi \circ f_d^{-1} = \delta''(\bar{d})$, ce qui conclut la démonstration. □

Lemme 5.3.13

Si deux groupoïdes concrets $(\mathscr{G}, \delta)$ et $(\mathscr{G}', \delta')$ dans U sont équivalents, alors la sorte imaginaire interne canonique de $\mathscr{G}'$ est une sorte imaginaire interne de $\mathscr{G}$ (et, bien sûr, de même en échangeant $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$).

Démonstration :

Les sortes imaginaires internes canoniques V et V' de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ contiennent toutes deux l'univers U ; il suffit donc de démontrer qu'elles sont semblables en exhibant une extension élémentaire commune.

L'équivalence entre $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ donne l'existence d'une structure de groupoïde concret $\mathscr{G}''$ sur $Ob\mathscr{G} \cup Ob\mathscr{G}'$ contenant $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ comme sous-groupoïdes pleins. Considérons la sorte imaginaire interne canonique V'' de $\mathscr{G}''$, et démontrons que c'est une extension élémentaire de V et de V'. Les rôles de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ étant symétriques, il suffit de le vérifier pour l'un des deux, disons V. On définit une extension $\phi : V \to V''$ en posant $\phi|_U = id_U$, et en définissant $\phi|_{S_{\mathscr{G}}}$ de la manière suivante (en reprenant les notations de la démonstration de la proposition 5.3.8) : on choisit $c \in Mor\mathscr{G}(b_0, b) = Mor\mathscr{G}''(b_0, b)$, et $\psi|_{S_{\mathscr{G}}} = f_c''^{-1} \circ f_c$; on envoie chaque relation de $V \setminus U$ sur la relation lui correspondant canoniquement de cette manière dans $V'' \setminus U$. L'application ϕ ainsi définie est alors une extension élémentaire, puisque V et V'' ont les mêmes relations définissables sans paramètres (par construction de la sorte imaginaire interne canonique). □

Nous savons donc associer à une classe d'équivalence de groupoïdes concrets une classe de similarité de sortes imaginaires internes. Est-il possible de faire l'inverse ? La réponse est oui, mais elle demande un peu plus d'efforts :

Lemme 5.3.14

Si deux sortes imaginaires internes associées à deux groupoïdes concrets $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont semblables, alors $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont équivalents.

Démonstration :

Soient V et V' les sortes imaginaires internes concernées, et considérons V'' leur extension élémentaire commune, ϕ et ϕ' étant les applications d'extensions respectives. La propriété d'être un groupoïde de liaison associé à $S_{\mathscr{G}}$ s'exprime par une formule existentielle au second ordre, dont la satisfaction est préservée par similarité d'après le lemme 5.2.5 ; par conséquent, toute sorte imaginaire interne associée à un groupoïde $\mathscr{G}$ est la sorte imaginaire interne canonique d'un groupoïde concret. Nous supposerons donc dans la suite de cette démonstration que V et V' sont les sortes imaginaires internes canoniques des groupoïdes concrets $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$.

Le fait que $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont des groupoïdes concrets s'exprime par une formule du premier ordre, et est donc préservé par l'extension d'après le lemme 5.1.22 ; $\phi(G)$ et $\phi'(\mathscr{G}')$ sont donc des groupoïdes concrets dans V''. De plus, pour la même raison que précédemment, V'' est la sorte imaginaire interne canonique d'un groupoïde concret $\mathscr{H}$ dans une extension élémentaire U'' de U, $\mathscr{H}$ étant l'image des relations $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ par les extension ϕ et ϕ'. La restriction de $\mathscr{H}$ à U est donc un groupoïde concret $\mathscr{G}''$ dont les objets sont $Ob\mathscr{G} \cup Ob\mathscr{G}'$ et dont $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont des sous-groupoïdes pleins, puisque l'extension préserve les formules du premier ordre. Le groupoïde concret $\mathscr{G}''$ témoigne donc de l'équivalence de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$. □

Finalement, les deux lemmes 5.3.13 et 5.3.14 permettent de déduire immédiatement la correspondance suivante :

Proposition 5.3.15

Soit U un univers. Il existe une correspondance bijective entre les groupoïdes concrets dans U à équivalence près et les sortes imaginaires internes de U à similarité près. Cette correspondance associe à une classe d'équivalence de groupoïdes la classe de similarité des sortes imaginaires internes canoniques de ses représentants.

La correspondance entre groupoïdes concrets et sortes imaginaires internes donnée dans le théorème 2.8 de [10] se fait modulo équivalence pour les groupoïdes, et modulo transformation fixant U point par point pour les sortes imaginaires internes ; précisément, cela signifie qu'il existe une transformation entre les sortes imaginaires internes dans lesquelles on a « oublié » la relation d'internité R. Nous pouvons déduire cette version de la correspondance en utilisant la condition de minimalité des sortes imaginaires internes canoniques donnée dans le point 6. de notre proposition 5.3.8.

Définition 5.3.16 (Équivalence entre sortes imaginaires internes)
Deux sortes imaginaires internes V et V' associées à deux groupoïdes concrets $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ d'un univers U sont dites équivalentes *si il existe une application entre univers induits $\psi : S_{\mathscr{G}} \to S'_{\mathscr{G}}$ telle que $\psi \cup id_U$ soit une transformation entre les univers $U \cup S_{\mathscr{G}}$ et $U \cup S'_{\mathscr{G}}$.*

Remarque 5.3.17
On ne pourrait pas obtenir de correspondance modulo transformation entre les sortes imaginaires internes ; il faut restreindre l'univers de manière à oublier l'internité R, et ne garder que sa trace sur $S_{\mathscr{G}}$. En effet, si un groupoïde concret avec un nombre infini d'objets $\mathscr{G}$ est équivalent à un groupoïde $\mathscr{G}'$ avec un seul objet b' (ce qui, avec le vocabulaire de [10], signifie « si la sorte imaginaire interne associée à $\mathscr{G}$ est éliminable »), alors il est clair que les sortes imaginaires internes canoniques associées à $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ ne peuvent être transformables l'une en l'autre, puisque l'ensemble C est alors une copie de $\bigcup_{b \in Ob\mathscr{G}} Mor\mathscr{G}(b_0, b)$, alors que l'ensemble C' est une copie de $Mor\mathscr{G}'(b, b)$.

Théorème 5.3.18 (Théorème 2.8 de [10])

Soit U un univers. Il existe une correspondance bijective entre les groupoïdes concrets dans U à équivalence près et imaginaires internes de U à équivalence près. Cette correspondance associe à une classe d'équivalence de groupoïdes la classe de similarité des sortes imaginaires internes canoniques de ses représentants.

Démonstration :

Si deux sortes imaginaires internes V et V' sont semblables, alors elles sont équivalentes. En effet, si elles sont associées à deux groupoïdes concrets $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ de U, alors le lemme 5.3.14 dit que $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont équivalents. Si $\mathscr{G}''$ témoigne de cette équivalence, alors c'est un groupoïde de liaison pour V et V' d'après le lemme 5.3.12, et la sorte imaginaire interne canonique V'' associée à $\mathscr{G}''$ satisfait les hypothèses du point 5. de la proposition 5.3.8 ; en particulier, il existe une transformation de l'univers induit sur $S_{\mathscr{G}}$ (respectivement, de l'univers induit sur $S_{\mathscr{G}'}$) dans l'univers induit sur $S_{\mathscr{G}''}$, et la composée de ces deux transformations est une transformation témoignant de l'équivalence entre V et V'.

Réciproquement, si deux sortes imaginaires internes V et V' sont équivalentes, alors elles sont semblables. En effet, si V et V' sont associées aux groupoïdes $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$, et que leur équivalence est témoignée par $\psi : S_{\mathscr{G}} \to S_{\mathscr{G}'}$, considérons le groupoïde concret $\mathscr{G}''$ tel que $Ob\mathscr{G}'' = Ob\mathscr{G} \cup Ob\mathscr{G}'$ et tel que $Mor\mathscr{G}''$ est défini de manière à ce que sa restriction aux objets de $\mathscr{G}$ ou de $\mathscr{G}'$ soit exactement les morphismes de $\mathscr{G}$ ou de $\mathscr{G}'$, et tel que les morphismes entre un objet b de $\mathscr{G}$ et un objet b' de $\mathscr{G}'$ soient l'ensemble des bijections de la forme $f'_{c'} \circ \psi \circ f_c^{-1}$ avec $c \in C$ et $c' \in C'$ tels que $f_c(S_{\mathscr{G}}) = \delta(b)$ et $f'_{c'}(S'_{\mathscr{G}}) = \delta'(b')$. Le groupoïde $\mathscr{G}''$ témoigne alors clairement de l'équivalence entre $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$, et les sortes imaginaires internes V et V' sont donc semblables d'après le lemme 5.3.13.

Finalement, la correspondance annoncée provient de la correspondance de la proposition 5.3.15 : l'équivalence entre sortes imaginaires internes est équivalente à leur similarité, et ceci conclut la démonstration. □

La correspondance 2.8 de [10] est introduite différemment. Dans cet article, il est d'abord construit un groupoïde $\mathscr{G}$ associé à deux ensembles définissables A et B, A étant interne à B, et B étant stablement plongé. Ce groupoïde est un groupoïde concret, à ceci près que ses ensembles d'objets et de morphismes sont type-définissables sur B. De plus, lorsque le modèle ambiant est saturé, les groupes d'automorphismes $\mathscr{G}_b = Mor\mathscr{G}(b, b)$ d'un objet de $\mathscr{G}$ sont isomorphes au groupe de liaison de A dans B. Une sorte imaginaire interne d'une structure est alors définie comme une sorte supplémentaire qui soit interne à la structure, et telle que la structure elle-même soit stablement plongée ; une telle sorte imaginaire interne peut alors être vue comme une sorte imaginaire interne au sens de notre définition 5.3.9, associée à son groupoïde de liaison (en généralisant la définition aux groupoïdes type-définissables).

Voici comment associer à une situation d'internité un groupoïde de liaison (on note U^{eq} l'univers de la structure M_U^{eq}) ; on peut en trouver une démonstration dans la proposition 1.6 de [10] :

Proposition 5.3.19

Soit U un univers tel que M_U est spécial. Soient $A, B \in \mathcal{R}(U)$ tels que A est interne à B et B est stablement plongé. Alors il existe un groupoïde $\mathscr{G}$ $\star$-concret sans paramètres dans U^{eq} qui est un groupoïde de liaison de A dans B, et tel que chaque groupe d'automorphismes $\mathscr{G}_b$ soit isomorphe au groupe de liaison $GL(A/B)$.

Cette construction permet de définir une sorte imaginaire interne d'un univers U comme une sorte supplémentaire de U qui soit interne à U, et telle que U soit stablement plongé dans l'univers obtenu. Lorsque M_U est spécial, une telle sorte imaginaire interne est alors une sorte imaginaire interne au sens de la définition 5.3.9, associée au groupoïde donné par la proposition 5.3.19. Finalement, on retrouve la correspondance 2.8 de [10], qui se fait sous l'hypothèse où M_U est spécial, grâce à notre correspondance 5.3.18 et à la proposition 5.3.19.

Chapitre 6

Quelques questions

Nous discutons dans ce dernier chapitre de diverses questions concernant les sujets abordés dans cette thèse. Ces questions pourront être abordées dans des travaux de recherche futurs par l'auteur. Les discussions de ce chapitre sont relativement informelles, et feront appel à des notions modèle-théoriques qui n'ont pas été définies dans la thèse ; nous ne les définirons pas non plus ici, mais on pourra consulter par exemple [8] pour plus de détails ; les noms des notions sont quoi qu'il en soit standard.

6.1 La dualité tannakienne pour les anneaux différentiels généralisés

L'un des objectifs initiaux de cette thèse était de démontrer une version de la dualité tannakienne pour les groupes différentiels généralisés. Cependant, comme nous l'avons déjà indiqué au cours de la thèse, plusieurs obstacles ont empêché l'aboutissement de ce projet. Dans cette section, nous décrivons plus en détail les raisons de cet échec, et proposons quelques pistes pour contourner ces problèmes qui pourraient s'avérer utiles pour démontrer une telle dualité.

Tout d'abord, commençons par donner un énoncé qu'il semblerait envisageable d'obtenir étant donnés les résultats similaires déjà obtenus dans le cas, par exemple, des corps différentiels :

Conjecture 6.1.1 (Dualité tannakienne pour les anneaux différentiels généralisés)
Soient $\mathscr{A} = (A, \Omega, d)$ un anneau différentiel généralisé, G un groupe différentiel généralisé défini sur $\mathscr{A}$, et $\mathbf{C}$ une catégorie tannakienne différentielle sur $\mathscr{A}$ munie d'un foncteur fibre $\omega_{\mathbf{C}}$.

Alors, la catégorie $\mathbf{Repr}_{\mathscr{A}}(G)$ des représentations de G sur des modules projectifs de type fini est équivalente à $\mathbf{C}$ si et seulement si $Aut^D(\omega_{\mathbf{C}}) \simeq G$; réciproquement, il existe un groupe différentiel généralisé H tel que $\mathbf{Repr}_{\mathscr{A}}(H)$ est équivalente à $\mathbf{C}$.

Dans cet énoncé, un « anneau différentiel généralisé » peut être entendu au sens de la définition 3.4.2, mais il n'est pas exclu que certaines hypothèses sur les anneaux différentiels généralisés puissent être omises sans pour autant remettre la formulation de la conjecture en question ; inversement, il n'est pas impossible que d'autres hypothèses que celles faites dans cette thèse puissent être nécessaires pour obtenir une démonstration générale de cette conjecture. En particulier, comme nous l'expliquons ci-dessous, certaines hypothèses modèle-théoriques semblent inévitables pour adapter la démonstration de Moshe Kamensky dans [11].

Nous avons déjà signalé que des résultats de ce type existent déjà pour certaines classes d'anneaux différentiels généralisés. En particulier, dans le cas où $\mathscr{A}$ est un corps muni de la dérivation triviale (autrement dit, un corps quelconque sans structure supplémentaire), la conjecture prend la forme de ce que nous avons appelé tout au long de cette thèse le « formalisme tannakien classique », démontré initialement par Neantro Saavedra-Rivano dans [23], et dont une version moins générale mais employant un langage plus proche de celui que nous avons utilisé ici est présentée par Pierre Deligne et James S. Milne dans [6].

Les cas des corps différentiels et aux différences ont été traités en adoptant une approche algébrique par Alexey Ovchinnikov ; nous renvoyons par exemple à [16] pour une construction des catégories tannakiennes différentielles très proche de celle développée ici. Moshe Kamensky a proposé dans [11], section 4, une approche du cas différentiel inspirée de celle d'Ovchinnikov, mais faisant usage de la théorie des modèles, et c'est cette approche qui nous a inspiré pour tenter d'obtenir un résultat semblable à celui proposé précédemment dans le cas des anneaux différentiels généralisés.

L'un des points centraux de la démonstration modèle-théorique de la dualité tannakienne dans le cas différentiel est un résultat d'élimination partielle des imaginaires dans les catégories tannakiennes différentielles :

Proposition 6.1.2 ([11], proposition 4.5.6)
Supposons que $\mathscr{A}$ est un corps différentiellement clos, et $\mathbf{C}$ est une catégorie tannakienne différentielle sur $\mathscr{A}$. Soit $\mathcal{L}_P$ le langage des catégories tannakiennes auquel on a ajouté une sorte P_V et un symbole de fonction $\pi_V : S_V \to P_V$ pour chaque objet $V \in \mathbf{C}$. On voit $\mathbf{C}$ comme une $\mathcal{L}_P$-structure en interprétant P_V comme l'espace projectif associé à S_V et π_V comme la projection canonique. Alors la théorie de $\mathbf{C}$ sur $\mathcal{L}_P$ élimine les imaginaires.

L'auteur de cette thèse a échoué à obtenir une version de cette proposition dans le cas général des anneaux différentiels généralisés. Ceci vient en grande partie de ce que cette proposition repose sur l'élimination des quantificateurs pour les corps différentiellement clos (tout comme la version « classique » de l'argument repose sur l'élimination des quantificateurs dans les corps algébriquement clos) ; l'absence d'une bonne notion de clôture existentielle en général dans les anneaux différentiels généralisés constitue donc le principal obstacle à une généralisation de cette proposition dans notre contexte, et semble être l'une des raisons fondamentales de l'échec de l'auteur à obtenir une dualité tannakienne satisfaisante.

Cependant, il semble probable qu'une étude plus systématique de la théorie des modèles des anneaux différentiels généralisés puisse permettre dans des travaux futurs de contourner cette difficulté ; un angle d'attaque raisonnable se trouve être dans l'étude et la compréhension de la situation pour les anneaux de différence, puisque la théorie $ACFA$ des corps algébriquement clos avec un automorphisme générique admet une élimination des quantificateurs partielle, résumée par la modèle-complétude de cette théorie : toute formule est équivalente modulo $ACFA$ à une formule existentielle (il est même possible d'améliorer cet énoncé en restreignant la forme des quantifications existentielles, mais nous ne retrerons pas dans les détails ici).

La théorie des modèles des anneaux différentiels généralisés pourrait quoi qu'il en soit être intéressante en elle-même, puisque ces anneaux permettent entre autres choses un traitement uniforme des cas différentiels et aux différences. La théorie des polynômes différentiels généralisés effleurée au chapitre 3 devrait être un bon point de départ à une telle étude.

6.2 Étude de l'espace des classes de similarité pour les univers

Dans la seconde section du chapitre 5 de la présente thèse, nous avons introduit deux espaces topologiques destinés à comprendre les classes de similarité des sous-univers d'un univers $\mathbb{U}$ donné. Nous avons observé que l'espace des classes de similarité proprement dites, $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$, était un quotient de l'espace $SU^{\langle\rangle}$, et que ce quotient était en général non-trivial.

On peut remarquer que l'espace des classes de similarité n'a été vu que comme ce quotient quelconque dans le chapitre 5, dans le sens où les propriétés topologiques de $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ n'ont été vues que comme les propriétés de $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ passées au quotient. Il serait donc intéressant pour comprendre cet espace de trouver d'autres moyens qui permettraient de comprendre la topologie de $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$. La seule notion qui semble pour le moment satisfaire à cette idée est celle de propriété d'amalgamation pour $\mathbb{U}$, qui, comme nous l'avons vu, implique en particulier que $\mathbb{U}$ est l'univers d'une structure fortement minimale. La propriété d'amalgamation implique que le quotient ci-dessus est trivial, autrement dit que $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U}) = SU^{\equiv}(\mathbb{U})$.

Il serait donc intéressant de parvenir à répondre aux questions suivantes :

Question 6.2.1
La propriété d'amalgamation de $\mathbb{U}$ est-elle équivalente au fait que $\mathbb{U}$ est l'univers d'une structure fortement minimale ?

Une manière naturelle d'aborder cette question est la notion de dimension usuelle dans les structures fortement minimales. Pour illustrer le type d'arguments qui pourraient être utiles dans cette situation, remarquons que si $T : U_{\mathcal{M}} \to U_{\mathcal{N}}$ est une transformation entre univers de structures fortement minimales, alors T préserve la dimension. En effet, puisque T est inversible, il suffit de démontrer que T ne peut pas faire diminuer la dimension. Ceci peut se voir par récurrence sur la dimension des ensembles définissables considérés. Clairement, l'image d'un ensemble fini est un ensemble fini, et reste donc de dimension nulle. De même, un ensemble de dimension 1 est un ensemble infini, et a donc pour image un ensemble infini, donc de dimension au moins 1. Pour illustrer la récurrence, supposons que X est un ensemble définissable de dimension 2 ; alors il existe une famille de parties définissables infinies disjointes $(X_i)_i$ de X. La famille $(T(X_i))_i$ est une famille de parties définissables infinies disjointes de

$T(X)$; par conséquent, $T(X)$ doit être de dimension au moins 2. Les étapes suivantes de la récurrence sont alors claires à partir de ces premières étapes. Ce raisonnement élémentaire pourrait-il être adapté dans le cas où T est une extension d'univers ? Autrement dit, si $T : U \to V$ est une extension élémentaire d'univers, que peut-on dire de la dimension de $T(X)$ en fonction de celle de X ?

Bien entendu, ces réflexions au sujet de la propriété d'amalgamation mènent également à s'interroger sur des versions plus faibles, dont la présence n'implique pas forcément la trivialité du quotient, mais permet tout de même d'accéder à des informations que nous n'aurions pas dans le cas général :

Question 6.2.2

Existe-t-il des notions plus faibles que la propriété d'amalgamation qui permettent de comprendre plus finement la topologie sur $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$? Si oui, sont-elles liées d'une quelconque manière à la place des structures génératrices dans la hiérarchie de la stabilité ?

Enfin, une dernière question à se poser autour de ces notions concerne la recherche d'exemples instructifs :

Question 6.2.3

Est-il possible de calculer explicitement l'espace $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ pour certains univers $\mathbb{U}$, sans avoir recours directement au quotient de $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$?

Cette dernière question est en fait assez vague. Pour la préciser quelque peu, voici un problème dont il serait intéressant d'avoir la réponse : on sait que l'espace $SU^{\langle\rangle}(\mathbb{U})$ satisfait la propriété de séparation T_0, mais cette propriété ne passe en général pas au quotient topologique sans information supplémentaire (par exemple sur la relation d'équivalence). Par conséquent, nous ne savons pas si l'espace $SU^{\equiv}(\mathbb{U})$ est T_0 ; la question ci-dessus pourrait donc être reformulée de la manière suivante : peut-on construire des exemples « typiques » d'univers qui permettraient de comprendre si le quotient est encore T_0, ou bien un contre-exemple à la propriété T_0 ?

Bibliographie

[1] Jiřì ADÀMEK, Horst HERRLICH et George E. STRECKER : *Abstract and Concrete Categories - The Joy of Cats.* 2004.

[2] Yves ANDRÉ : Différentielles non-commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 34:685–739, 2001.

[3] N. BOURBAKI : *Algèbre commutative*, volume 1290. Herman, 1961.

[4] Zoé CHATZIDAKIS et Ehud HRUSHOVSKI : Model Theory of Difference Fields. *Transactions of the American Mathematical Society*, 351(8):2997–3071, 1999.

[5] Pierre DELIGNE : Catégories tannakiennes. *In The Grothendieck Festschrift*, pages pp. 111–195, 2007.

[6] Pierre DELIGNE et James S. MILNE : Tannakian Categories. *In Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, volume 900 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 101–228, 1981.

[7] Peter FREYD : *Abelian Categories.* Harper and Row, 1964.

[8] Wilfrid HODGES : *Model Theory.* Cambridge University Press, 1993.

[9] Ehud HRUSHOVSKI : Computing the Galois Group of a Differential Equation. *In Differential Galois Theory*, volume 58 de *Banach Center Publications*, 2002.

[10] Ehud HRUSHOVSKI : Groupoids, Imaginaries and Internal Covers. http ://arxiv.org/pdf/math/0603413, 2009.

[11] Moshe KAMENSKY : Model Theory and the Tannakian Formalism. http ://arxiv.org/abs/0908.0604, 2009.

[12] Moshe KAMENSKY : Tannakian Formalism over Fields with Operators. 24:5571–5622, 2013.

[13] Saunders MAC LANE : *Categories for the Working Mathematician*, volume 5. Springer, 1979.

[14] David MARKER : Model Theory of Differential Fields. *Model Theory, Algebra, and Geometry*, 39:53–63, 2000.

[15] Hideyuki MATSUMURA : *Commutative Ring Theory*, volume 8. Cambridge University Press, 1989.

[16] Alexey OVCHINNIKOV : Differential Tannakian Categories. *Journal of Algebra*, 321:3043–3062, 2009.

[17] Anand PILLAY : Some Foundational Questions Concerning Differential Algebraic Groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 179.

[18] Anand PILLAY : *Geometric Stability Theory*, volume 32. Oxford Science Publications, 1996.

[19] Bruno Poizat : Une théorie de Galois imaginaire. *The Journal of Symbolic Logic*, 48(4):1151–1170, 1983.

[20] Bruno Poizat : *Cours de théorie des modèles*. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985.

[21] Bruno Poizat : *Groupes stables*. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1987.

[22] Bruno Poizat : À la recherche de la structure intrinsèque de l'univers. *Teoriia modelei v Kazaxstane*, pages 339–388, 2006.

[23] Neantro Saavedra-Rivano : *Catégories tannakiennes*, volume 265. Springer, 1972.

[24] Boris Zil'ber : Totally Categorical Theories : Structural Properties and the Non-Finite Axiomatizability. *In Model Theory of Algebra and Arithmetic*, volume 834 de *Lecture Notes in Mathematics*, pages 381–410. Springer, 1980.

Une étude modèle-théorique du formalisme tannakien

Nous définissons et étudions dans cette thèse un formalisme permettant de traiter de questions tannakiennes pour des groupes définis sur des anneaux différentiels généralisés, qui généralisent à la fois les anneaux différentiels et les anneaux de différence. Nous définissons une notion de catégorie tannakienne différentielle de manière similaire au formalisme tannakien usuel, en ajoutant une structure supplémentaire permettant de décrire la structure induite par la différentielle généralisée. Nous étudions ensuite les propriétés modèle-théoriques des catégories qui en résultent, réalisant le groupe tannakien associé à la catégorie comme un groupe de liaison modèle-théorique. Dans le dernier chapitre, nous étudions la notion d'univers d'une structure du premier ordre, et introduisons une topologie dans ce contexte qui est réminiscente de la topologie des espaces de types en Théorie des Modèles du premier ordre. Nous étudions également la notion de groupoïde de liaison du point de vue des univers.

A model-theoretical study of the Tannakian formalism

In this thesis, we define and study a formalism which allows one to work on Tannakian questions for groups defined over generalized differential rings, which generalize both differential rings and difference rings. We define a notion of differential Tannakian category which is similar to the usual Tannakian formalism, adding a structure which permits to describe the differential structure induced by the generalized differential. We then study the model-theoretical properties of the resulting categories, realizing the Tannakian group associated to a category as a model-theoretical binding group. In the last chapter, we study the notion of universe associated to a first-order structure, and we introduce a topology in this context, which is reminiscent of the topology on the spaces of types in first-order Model Theory. We also study the notion of binding groupoid from the point of view of universes.