Unités de Stark et théorie d'Iwasawa

Youness Mazigh

THÈSE

Présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

spécialité mathématiques et applications

par

Youness MAZIGH

UNITÉS DE STARK ET THÉORIE D'IWASAWA

Soutenue à Besançon le 26 janvier 2017 devant le jury composé de :

Président :	*Abbas Movahhedi*,	Professeur à l'université de Limoges.
Directeurs de thèse :	*Jilali Assim*,	Professeur à l'université Moulay-Ismail.
	Hassan Oukhaba,	Maître de conférences à l'université de Franche-comté.
Examinateurs :	*Jean-Robert Belliard*,	Maître de conférences à l'université de Franche-comté.
	Christophe Delaunay,	Professeur à l'université de Franche-comté.
Rapporteurs :	*Denis Benois*,	Professeur à l'université de Bordeaux (Absent excusé).
	Werner Bley,	Professeur à l'université de München.

Unités de Stark et théorie d'Iwasawa

Youness Mazigh

Remerciements

Je tiens à remercier à travers ces quelques lignes toutes les personnes qui ont rendu possible la réalisation de ces travaux.

En premier lieu, mes remerciements vont tout d'abord à Jilali Assim et Hassan Oukhaba. Leurs conseils m'ont fait découvrir le monde de la recherche et beaucoup aidé pour atteindre mon objectif.

Je voudrais remercier les professeurs Denis Benois et Werner Bley, qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

Je tiens à remercier aussi les professeurs Jean-Robert Belliard, Abbas Chazad Movahhedi et Christophe Delaunay qui me font l'honneur de participer au jury de ma thèse.

Plus généralement, je voudrais exprimer toute ma gratitude à tout les membres du laboratoire de mathématiques de Besançon et du département de mathématiques de Meknès, qui m'ont accueilli pendant ces années ; en particulier à mes collègues et amis Elhabibi, El Madani, Hassan, Saad, Zakariae, Zouheir, ...

Enfin, j'ai une pensée émue pour mes parents qui dans ma jeunesse m'ont donné suffisamment de force et de confiance en moi pour parvenir à ce que je désirais entreprendre...

Table des matières

Introduction

L'introduction des systèmes d'Euler par Kolyvagin en 1988 ([18]) a eu des conséquences extrêmement importantes en arithmétique, en particulier en théorie d'Iwasawa, et a donné lieu à de nouvelles perspectives de démonstration. En général, les systèmes d'Euler peuvent être regardés comme collections de classes de cohomologie compatibles dans une tour d'extensions abéliennes d'un corps de nombres K, en établissant un pont entre des objets d'intérêt arithmétique (groupe des classes, groupe de Shafarevich-Tate, ...) et des valeurs spéciales de fonction L. À partir du système d'Euler cyclotomique (il s'agit simplement des $1-\zeta_m$ pour m entier, où ζ_m est une racine de l'unité d'ordre m et $\zeta_{mn}^n = \zeta_m$) et du système d'Euler elliptique, Rubin ([29]) a ainsi pu redémontrer de manière élémentaire la conjecture principale d'Iwasawa sur $\mathbb{Q}$ (démontrée par Mazur et Wiles [23]) et de prouver la conjecture principale sur un corps quadratique imaginaire [30]. Inspiré des idées de Rubin et Kolyvagin, de nombreux auteurs ont apporté des améliorations notables à ces résultats (Greither, Bley, Huber-Kings,...).

Soient p un nombre premier impair et K un corps de nombres. Soient K_∞ une $\mathbb{Z}_p$-extension de K et L_∞ une extension finie de K_∞, abélienne sur K. Fixons une décomposition de

$$\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(L_\infty/K) = \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty) \times \Gamma,\ \Gamma \simeq \mathbb{Z}_p.$$

Alors les corps $L := L_\infty^\Gamma$ et K_∞ sont linéairement disjoints sur K. De plus $L_\infty = LK_\infty$ et $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ est le sous-groupe de torsion de $\mathcal{G}$. L'algèbre d'Iwasawa de $\mathcal{G}$ est par définition

$$\Lambda(\mathcal{G}) := \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}]] = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F/K)],$$

où F parcourt l'ensemble des extensions finies de K contenues dans L_∞.
Pour tout corps de nombres F, notons $A(F)$ la partie p-primaire du groupe des classes de F et $\mathcal{E}(F)$ le groupe des unités de F. Si F est une extension abélienne finie de K contenue dans L_∞, on notera $St(F)$ le sous-groupe de $\mathcal{E}(F)$ engendré par les unités de Stark de F. Pour tout $\mathbb{Z}$-module M, on pose $\widehat{M} = \varprojlim_n M/p^nM$ le pro-p-complété de M. Notons

$$A_\infty = \varprojlim A(F), \qquad \widehat{\mathcal{E}_\infty} = \varprojlim \widehat{\mathcal{E}(F)}, \qquad \widehat{St_\infty} = \varprojlim \widehat{St(F)},$$

où F parcourt l'ensemble des extensions finies de K contenues dans L_∞. Les morphismes de transition sont les homomorphismes induits par la norme. Tous ces $\mathbb{Z}_p$-modules sont de manière naturelle des $\Lambda(\mathcal{G})$-modules. Posons $\Delta := \mathrm{Gal}(L/K)$ et fixons une fois pour toutes un caractère non trivial $\overline{\mathbb{Q}}_p$-irréductible

$$\chi \ : \Delta \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times .$$

Soit $\mathcal{O} := \mathbb{Z}_p[\chi]$ l'anneau des valeurs de χ et notons $\mathcal{O}(\chi)$ l'anneau $\mathcal{O}$ sur lequel Δ opère par multiplication par χ. Pour tout $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module M, le produit tensoriel

$$M_\chi := M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} \mathcal{O}(\chi)$$

est naturellement un $\mathcal{O}[\Delta]$-module. L'action de Δ sur M_χ se fait via multiplication par χ. On appelle M_χ le χ-quotient de M. Il est isomorphe comme $\mathcal{O}[\Delta]$-module au plus grand quotient de $M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ sur lequel Δ opère via multiplication par χ. L'anneau $\Lambda(\mathcal{G})_\chi$ s'identifie à $\Lambda := \mathcal{O}[[\Gamma]]$ qui est isomorphe à l'algèbre des séries formelles $\mathcal{O}[[S]]$. On sait que Λ est un anneau local régulier complet de dimension 2 et de corps résiduel fini de caractéristique p. Le théorème de structure des Λ-modules affirme que pour tout Λ-module M de type fini et de Λ-torsion, il existe des éléments non nuls $f_1, ..., f_r$ de Λ et un homomorphisme injectif

$$\oplus_{1 \leq i \leq r} \Lambda/(f_i) \hookrightarrow M$$

dont le conoyau est fini. L'idéal de Λ engendré par le produit $f_1 ... f_r$ ne dépend que de M; c'est l'idéal caractéristique de M qu'on note $\mathrm{char}(M)$.
Le premier but de ce travail est de comparer l'idéal caractéristique du Λ-module $(A_\infty)_\chi$ et celui du Λ-module $(\widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{St_\infty})_\chi$ pour certains caractères. Cela fait l'objet d'une publication en collaboration avec J. Assim et H. Oukhaba [1]. Soient Σ_∞ l'ensemble des places infinies de K, Σ_p l'ensemble des places p-adiques de K et $\mathrm{Ram}(L_\infty/K)$ l'ensemble des places de K ramifiées dans L_∞/K. Pour toute place v de K et toute paire d'extensions abéliennes $F \subset F'$ de K, on note $D_v(F'/F)$ le groupe de décomposition de v dans F'/F. Pour toute place $v \in \Sigma_p$, on note $\mathcal{A}_v$ l'idéal de Λ engendré par les éléments $\sigma - 1$, où $\sigma \in \Gamma^{d_v}$ et d_v est égal à l'indice du groupe de décomposition $D_v(K_\infty/K)$ dans $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Soit L_χ le corps de nombres fixé par le noyau de χ et soit κ le caractère cyclotomique. Dans ce travail on fait les hypothèses suivantes

- $(\mathcal{H}_0)$ $\Sigma_\infty \cup \mathrm{Ram}(L_\infty/K)$ contient au moins trois places ;
- $(\mathcal{H}_1)$ Σ_∞ *contient une seule place* v_0 *totalement décomposée dans* L_χ/K, *et* v_0 *est totalement décomposée dans* L/K ;

($\mathcal{H}_2$) *aucune place finie de K ne se décompose totalement dans K_∞ ;*

($\mathcal{H}_3$) *le caractère $\chi\kappa^{-1}$ est non trivial ;*

($\mathcal{H}_4$) *pour toute place p-adique v de K, $\chi(D_v(L_\infty/K_\infty)) \neq 1$ ou $\mathrm{char}((A_\infty)_\chi)$ est premier à $\mathcal{A}_v$;*

($\mathcal{H}_5$) *si $p \mid [L : K]$ alors p ne divise pas $[L : L_\chi]$ et la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour toute extension finie F de L_χ contenue dans $K_\infty L_\chi$.*

Théorème 0.1. *([1, Théorème 1.1]) Supposons satisfaites les hypothèses $(\mathcal{H}_0), \cdots, (\mathcal{H}_5)$. Alors*

$$\mathrm{char}((A_\infty)_\chi) \quad \textit{divise} \quad \mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{St_\infty})_\chi).$$

La démonstration du théorème 0.1 repose essentiellement sur la théorie des systèmes d'Euler exposée dans [33]. En effet, les unités de Stark, quand elles existent pour la famille d'extensions abéliennes de K définie au paragraphe 4.1.1, donnent des systèmes d'Euler pour la représentation $T = \mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1})$. Cela nous permet d'utiliser le théorème 4.6, qui résume [33, Theorem 2.3.2 et Theorem 2.3.3], pour démontrer que la série caractéristique d'un certain groupe de Selmer $H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty, T^*)^\vee$ divise la série caractéristique des p-unités modulo les unités de Stark. Le lemme 4.8 ci-dessous donne la formulation exacte de ce résultat. Nous passons du lemme 4.8 au théorème 0.1 d'une part en contrôlant l'écart entre le groupe de Selmer $H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty, T^*)^\vee$ et notre groupe de classes d'idéaux, et d'autre part en montrant un résultat de pseudo-nullité du Λ-module $\widehat{H}^0(\Delta, \widehat{\mathcal{E}_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))$, objet du théorème 4.16.

Disons quelques mots sur nos hypothèses. L'hypothèse ($\mathcal{H}_1$) est nécessaire pour l'existence (conjecturale) des p-unités de Stark. L'hypothèse ($\mathcal{H}_0$) entraîne que les p-unités de Stark sont des unités et nous permet ainsi d'éviter des complications techniques nuisibles à la compréhension du texte. Elle est vérifiée par exemple si $\#\Sigma_\infty \geq 2$. L'hypothèse ($\mathcal{H}_2$) est partie intégrante de la définition d'un système d'Euler. Grâce à ($\mathcal{H}_3$) nous pouvons appliquer efficacement les théorèmes de Rubin. L'hypothèse ($\mathcal{H}_5$) est automatiquement vérifiée dans le cas semi-simple. Si p divise $[L : K]$, elle devient superflue dès que l'invariant mu d'Iwasawa de $(A_\infty)_\chi$ est nul. Si L_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de L, une conjecture d'Iwasawa (vraie d'après Ferrero-Washington si $L/\mathbb{Q}$ est abélienne, e.g.[40, Chapter 16]) affirme que $\mu(A_\infty) = 0$. Il en est de même si K est un corps quadratique imaginaire et K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension de Coates-Wiles considérée dans [4], d'après un résultat classique de Gillard [14]. Notons que dans l'énoncé du théorème 0.1, on ne fait aucune hypothèse sur la nullité de l'invariant mu d'Iwasawa. Le théorème 4.16 ci-dessous est un ingrédient indispensable permettant de se passer de cette hypothèse dans la preuve du théorème 0.1. Rappelons que dans les deux cas classiques cités ci-dessus ([30, 15, 4]) l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ est vérifiée puisqu'on sait que la série caractéristique de A_∞ est première à l'idéal d'augmentation de $\Lambda(\mathcal{G})$.

Une variante des conjectures de Stark, permettant de relâcher $(\mathcal{H}_1)$, prédit l'existence d'éléments dits de Rubin-Stark, voir [32]. C'est le deuxième objectif de ce travail. Nous utilisons les éléments de Rubin-Stark pour démontrer un résultat de divisibilité analogue au théorème 0.1 ci-dessus, généralisant ainsi au cas non semi-simple les résultats de Büyükboduk obtenus dans [8, Theorem A]. Cela a fait l'objet d'une publication [20]. Commençons par préciser le contexte. Ici K est un corps de nombres totalement réel de degré $[K:\mathbb{Q}] = r$ et K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K. Le corps L est une extension abélienne de K et $L_\infty = LK_\infty$ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de L. Dans ce cas nous allons remplacer $\widehat{St}_\infty$ par $\widehat{RS}_\infty$ obtenu comme la limite projective des pro-p-complétés $\widehat{RS_F}$, où RS_F est un groupe construit à l'aide d'éléments de Rubin-Stark de F, voir définition 5.5. Soit $K(1)$ la p-extension maximale de K contenue dans le corps de classes de Hilbert de K. Dans la suite supposons (pour simplifier) que

$$L = L_\chi \quad \text{et} \quad K = L \cap K(1)$$

Considérons les hypothèses suivantes

- $(\mathcal{H}'_0)$ *Le corps L est totalement réel ;*
- $(\mathcal{H}'_1)$ *L'extension $L/\mathbb{Q}$ est non ramifiée en p ;*
- $(\mathcal{H}'_2)$ $\chi(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}) \neq 1$ *pour toute place p-adique de K ;*
- $(\mathcal{H}'_3)$ *La conjecture de Leopoldt est vérifiée pour toute extension finie F de L continue dans L_∞.*

Dans le cas semi-simple Büyükboduk a montré

Théorème 0.2. *(Büyükboduk [8, Theorem A]) Sous les hypothèses $(\mathcal{H}'_0) - (\mathcal{H}'_3)$, si $p \nmid [L:K]$ alors*

$$\mathrm{char}((A_\infty)_\chi) = \mathrm{char}\left(\left((\bigwedge^r \widehat{\mathcal{E}_\infty}) / \widehat{\mathrm{RS}_\infty} \right)_\chi \right)$$

La démonstration de théorème 0.2 se base au moins sur deux idées. La construction d'un système d'Euler pour la représentation p-adique $T = \mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1})$ à l'aide des éléments de Rubin-Stark et, la détermination de la structure de certains groupes de Selmer. En effet, le travail entrepris par Mazur et Rubin sur la théorie des systèmes de Kolyvagin [21], permet la détermination de la structure de certains groupes de Selmer, dans le cas où un certain invariant cohomologique, appelé "*core rank*" (voir [21, Definition 4.1.8 et 4.1.8]), est égal à 1. Comme application à la théorie d'Iwasawa, Büyükboduk obtient une relation de divisibilité entre les idéaux caractéristiques de la limite projective de ces groupes de Selmer, qui devient une égalité si le système de Kolyvagin correspondant au groupe de Selmer est primitif au sens de [21]. Pour plus de détail voir [6]. Il a ensuite appliqué cette théorie à la démonstration du théorème 0.2 en construisant un système de Kolyvagin primitif d'éléments de Rubin-Stark et une structure de Selmer de "*core rank*" un.

Il faut signaler ici que Mazur et Rubin introduisent dans [22] la notion de système de Stark\ système de Kolyvagin de rang r, qui leur permet de déterminer la structure de groupes de Selmer, lorsque le "*core rank*" est supérieur à 1.

Dans ce travail nous démontrons

Théorème 0.3. *([20, Theorem 1.3]) Supposons que les hypothèses* $(\mathcal{H}_0') - (\mathcal{H}_3')$ *sont vérifiées. Alors*

$$\mathrm{char}((A_\infty)_\chi) \quad \textit{divise} \quad \varpi.\mathrm{char}\left(((\bigwedge^r \widehat{\mathcal{E}_\infty})/\widehat{\mathrm{RS}_\infty})_\chi\right)$$

où ϖ *est le ppcm des entiers* p*-adiques* $1-\chi(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})$.

La démonstration de théorème 0.3 a été inspirée par le résultat de [8]. Remarquons tout d'abord que, si $p \mid [L:K]$ les résultats de [21] et [22] ne s'appliquent pas, car la notion de "*core rank*" n'est pas définie. Par conséquent, nous sommes a menés à utiliser la théorie des systèmes d'Euler exposée dans [33]. En particulier, nous construisons une structure de Selmer dans la direction d'avoir un résultat semblable à celui de Rubin [33, Theorem 2.3.2 et Theorem 2.3.3], cf. théorème 5.20, en se basant sur la connaissance de la structure des unités semi-locales, cf. théorème 5.8. Cette structure a été déterminée par Greither [17], en utilisant la théorie de Coleman. Dans le cas semi-simple Büyükboduk a utilisé un théorème de structure faible dû à Colmez-Cherbonnier [10], obtenu par la théorie de (φ,Γ)-modules.

Notations

Sauf indication contraire, on adoptera les notations suivantes

p	:	un nombre premier fixé
μ_{p^n}	:	le groupe des racines $p^{n,iems}$ de l'unité
$\overline{\mathbb{Q}}$	:	une clôture algébrique fixée de $\mathbb{Q}$
F	:	un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$, de degré fini sur $\mathbb{Q}$
G_F	:	le groupe de Galois absolu de F ; $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$
Σ	:	un ensemble fini de places de F
F_Σ/F	:	l'éxtension algébrique maximale de F non ramifée en dehors de Σ
$G_\Sigma(F)$	:	le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F)$
w	:	une place de F
		on fixe une place $\overline{w}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de w ;
Frob_w	:	un Frobenius de w dans G_F
D_w	:	le groupe de décomposition de $\overline{w}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}/F$
I_w	:	le groupe d'inertie de $\overline{w}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}/F$
F_w	:	le complété de F en w
$M^\vee$	:	le dual de Pontryagin du $\mathbb{Z}_p$-module M ; $M^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$
$\widehat{M}$	:	le pro-p-complété du $\mathbb{Z}$-module M ; $\widehat{M} := \varprojlim_n M/p^nM$
M_{div}	:	le sous-groupe divisible maximal du $\mathbb{Z}$-module M
N_G	:	l'élément norme du groupe abélien fini G, $N_G := \sum_{\sigma\in G} \sigma$.

Chapitre 1

Représentations p-adiques et conditions locales

1.1 Cohomologie continue.

Dans [37], Tate introduit pour un groupe topologique G et un G-module topologique M les groupes de cohomologie continues $H^k_{cont}(G, M)$. Il introduit les cochaines continues pour définir un foncteur cohomologique de la catégorie des G-modules topologiques dans la catégorie des G-modules. Si G est un groupe de Galois et M est un G-module discret, les groupes $H^k_{cont}(G, M)$ coïncident avec les groupes de cohomologie galoisienne au sens de Serre [35]. On note $H^i(G, M)$ les groupes de cohomologie continue. Pour les définitions et les faits de base de la cohomologie continue, voir [37, 25, 24, 33]. Dans la suite, G sera le groupe de Galois d'une extension d'un corps local ou global. En particulier, G est un groupe profini. Si H est un sous-groupe de G, nous avons une application de restriction

$$\mathrm{res} : H^i(G, M) \longrightarrow H^i(H, M) \ ;$$

si de plus H est un sous-groupe ouvert d'indice fini dans G, alors nous avons une application de corestriction

$$\mathrm{cor} : H^i(H, M) \longrightarrow H^i(G, M) \ .$$

Si H est un sous-groupe fermé normal de G, alors nous avons une application d'inflation

$$\inf : H^i(G/H, M^H) \longrightarrow H^i(H, M) \ .$$

Soient maintenant p un nombre premier, Φ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de Φ. Si M est un $\mathcal{O}$-module muni d'une action $\mathcal{O}$-linéaire continue de G alors les groupes $H^i(G, M)$ sont naturellement munis d'une structure de $\mathcal{O}$-module.

Si k est un corps et $\overline{k}$ est une clôture algébrique séparable fixée de k de groupe de Galois $\mathrm{G}_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, on note $H^i(k, M) := H^i(\mathrm{G}_k, M)$. Pour toute extension galoisienne k' de k contenue dans $\overline{k}$, on adopte les notations

$$H^i(k'/k, \cdot) := H^i(\mathrm{Gal}(k'/k), \cdot)$$

et

$$\mathrm{cor}_{k',k} \; : H^i(k', M) \longrightarrow H^i(k, M) \; , \qquad \mathrm{res}_{k,k'} \; : H^i(k, M) \longrightarrow H^i(k', M)$$

les applications naturelles de corestriction et de restriction.

Définition 1.1. *Une représentation p-adique de G_k à coefficients dans $\mathcal{O}$ est un $\mathcal{O}$-module libre de rang fini muni d'une action $\mathcal{O}$-linéaire continue de G_k.*

1.2 Conditions locales

Dans tout le reste de cette section, le corps k désigne $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ contenue dans une clôture algébrique fixée $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ de $\mathbb{Q}_\ell$, où ℓ est un nombre premier. Suivant [21], nous rappelons la notion des conditions locales.

Définition 1.2. *Soit T un $\mathcal{O}[[G_k]]$-module. Une condition locale sur T est un choix d'un sous $\mathcal{O}$-module de $H^1(k, T)$. Si nous faisons référence à la condition locale par un symbole $\mathcal{F}$, nous notons $H^1_{\mathcal{F}}(k, T)$ le sous $\mathcal{O}$-module correspondant :*

$$H^1_{\mathcal{F}}(k, T) \subset H^1(k, T).$$

Une condition locale est dite fonctorielle pour une certaine sous-catégorie $\mathcal{C}$ de la catégorie des $\mathcal{O}[[G_k]]$-modules si

$$T \longmapsto H^1_{\mathcal{F}}(k, T)$$

est un sous-foncteur de cette catégorie dans la catégorie des $\mathcal{O}$-modules. Dans ce cas, nous notons aussi $\mathcal{F}$ ce foncteur.

Une condition locale $\mathcal{F}$ sur T détermine une condition locale sur tous les sous-modules T_1 et sur tous les modules quotients T_2 de T, en prenant respectivement $H^1_{\mathcal{F}}(k, T_1)$ comme l'image inverse de $H^1_{\mathcal{F}}(k, T)$ par l'application induite par l'injection de T_1 dans T et $H^1_{\mathcal{F}}(k, T_2)$ l'image de $H^1_{\mathcal{F}}(k, T)$ par l'application induite par la surjection de T sur T_2. Nous appelons propagation d'une condition locale son extension par ce procédé aux sous-modules et aux quotients de T.

Exemple 1.3. *Soit $\mathrm{Quot}_{\mathcal{O}}(T)$ la catégorie dont les objets sont les quotients T/IT pour tout idéal I de $\mathcal{O}$, et dont les morphismes de T/IT dans T/JT sont les multiplications par un scalaire $a \in \mathcal{O}$, tel que $aI \subset J$. Alors la propagation d'une condition locale $\mathcal{F}$ sur T est fonctorielle pour $\mathrm{Quot}_{\mathcal{O}}(T)$.*

Remarque 1.4. *Si* $0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T \longrightarrow T_2 \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de* $\mathcal{O}[[G_k]]$*-modules et* $\mathcal{F}$ *est une condition locale sur* T*, alors la propagation de* $\mathcal{F}$ *induit une suite exacte de* $\mathcal{O}[[G_k]]$*-modules*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(k,T_1) & \longrightarrow & H^0(k,T) & \longrightarrow & H^0(k,T_2) & \longrightarrow & \\ & & H^1_{\mathcal{F}}(k,T_1) & \longrightarrow & H^1_{\mathcal{F}}(k,T) & \longrightarrow & H^1_{\mathcal{F}}(k,T_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En effet, d'une part la G_k*-cohomologie donne*

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(k,T_1) & \longrightarrow & H^0(k,T) & \longrightarrow & H^0(k,T_2) & \longrightarrow \\ & & H^1(k,T_1) & \longrightarrow & H^1(k,T) & \longrightarrow & H^1(k,T_2). & \end{array}$$

D'autre part la propagation de $\mathcal{F}$ *assure l'exactitude de la suite*

$$H^1_{\mathcal{F}}(k,T_1) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}}(k,T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}}(k,T_2) \longrightarrow 0\ .$$

D'où le fait que $H^1_{\mathcal{F}}(k,T_1)$ *contient l'image inverse de* $0 \in H^1(k,T)$ *permet de conclure.* $\square$

On peut faire propager de la même façon la condition locale $\mathcal{F}$ à tous les sous-quotients arbitraires de T. En effet, si $T_1 \subset T_2 \subset T$, alors on peut définir une condition locale sur T_2/T_1 en le regardant comme un quotient du sous-module T_2 de T, ou comme un sous-module du quotient T/T_1 de T. La remarque 1.4 assure que les deux choix définissent la même condition locale sur le sous-quotient T_2/T_1 de T.

Par contre rien ne garantit qu'une condition locale fonctorielle coïncide avec sa propagation. En effet, si une condition locale $\mathcal{F}$ est fonctorielle pour une catégorie $\mathcal{C}$, si T_1 et T_2 sont deux objets de $\mathcal{C}$ et si par exemple α est un $\mathcal{C}$-morphisme injectif

$$\alpha : T_1 \longrightarrow T_2$$

nous disposons de deux choix possibles de $H^1_{\mathcal{F}}(k,T_1)$: ou bien nous prenons pour $H^1_{\mathcal{F}}(k,T_1)$ l'image de T_1 par $\mathcal{F}$ ou bien nous prenons pour $H^1_{\mathcal{F}}(k,T_1)$ l'image inverse de $H^1_{\mathcal{F}}(k,T_2)$ par α. Nous disons que la condition locale $\mathcal{F}$ est cartésienne si ces deux choix coïncident. Cela signifie également que $\mathcal{F}$ coïncide avec sa propagation aux sous-modules.

Dans la suite, supposons que T est une représentation p-adique de G_k à coefficients dans $\mathcal{O}$.

Lemme 1.5. *Soit* $\mathcal{F}$ *une condition locale sur* T*. Si le* $\mathcal{O}$*-module* $H^1(k,T)/H^1_{\mathcal{F}}(k,T)$ *est sans-torsion alors* $\mathcal{F}$ *est cartésienne dans* $\mathrm{Quot}_{\mathcal{O}}(T)$.

Démonstration. La preuve suivante est celle de [21] lemme 3.7.1. Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}$ et soient i et j deux entiers, tels que $0 < i \leq j$. Par définition des morphismes de $\mathrm{Quot}_{\mathcal{O}}(T)$, l'injection $T/\mathfrak{m}^iT \hookrightarrow T/\mathfrak{m}^jT$ n'est autre que la multiplication par π^{j-i}. Par cohomologie, le diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r, "\pi^i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & T \arrow[r] \arrow[d, "\pi^{j-i}"] & T/\mathfrak{m}^iT \arrow[r] \arrow[d, hook, "\pi^{j-i}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T \arrow[r, "\pi^j"] & T \arrow[r] & T/\mathfrak{m}^jT \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induit le diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
H^1(k,T) \arrow[r, "\pi^i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & H^1(k,T) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^{j-i}"] & H^1(k,T/\mathfrak{m}^iT) \arrow[r] \arrow[d, "{[\pi^{j-i}]}"] & H^2(k,T)[\mathfrak{m}^i] \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0\,. \\
H^1(k,T) \arrow[r, "\pi^j"] & H^1(k,T) \arrow[r] & H^1(k,T/\mathfrak{m}^jT) \arrow[r] & H^2(k,T)[\mathfrak{m}^j] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'où il suffit de montrer que

$$[\pi^{j-i}]^{-1}(H^1_{\mathcal{F}}(k,T/\mathfrak{m}^jT)) \subset H^1_{\mathcal{F}}(k,T/\mathfrak{m}^iT).$$

En effet, soit $c \in [\pi^{j-i}]^{-1}(H^1_{\mathcal{F}}(k,T/\mathfrak{m}^jT))$. La définition de $H^1_{\mathcal{F}}(k,T/\mathfrak{m}^jT)$ et le fait que $[\pi^{j-i}]c \in H^1_{\mathcal{F}}(k,T/\mathfrak{m}^jT)$ assurent l'existence d'un élément $d' \in H^1_{\mathcal{F}}(k,T)$ dont l'image dans $H^1(k,T/\mathfrak{m}^jT)$ est $[\pi^{j-i}]c$. Une simple chasse dans le diagramme ci-dessus montre l'existence d'un élément $d \in H^1(k,T)$ dont l'image dans $H^1(k,T/\mathfrak{m}^iT)$ est c. Or $H^1(k,T)/H^1_{\mathcal{F}}(k,T)$ est un $\mathcal{O}$-module sans torsion et $\pi^{j-i}d - d' \in \pi^jH^1(k,T)$, on en déduit que $c \in H^1_{\mathcal{F}}(k,T/\mathfrak{m}^iT)$, ce qui achève de démontrer le lemme. $\square$

Posons

$$D := \Phi/\mathcal{O}, \quad D(1) := D \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1) \quad \text{et} \quad T^* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(T, D(1)),$$

où $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim \mu_{p^n}$ est le module de Tate.
Rappelons le théorème de dualité locale (voir *e.g.* [19, Corollaire I.2.3], [25, Theorem 5.2.6]) : Pour $i = 0, 1, 2$, on a un accouplement

$$\begin{array}{lllll} H^{2-i}(k,T) & \times & H^i(k,T^*) & \longrightarrow & H^2(k,D(1)) \cong D, \text{ si } k \text{ est non archimédien}, \\ \widehat{H}^{2-i}(k,T) & \times & \widehat{H}^i(k,T^*) & \longrightarrow & \widehat{H}^2(k,D(1)), \text{ si } k \text{ est archimédien} \end{array} \tag{1.1}$$

où, comme d'habitude, $\widehat{H}^*(\ ,\ )$ désignent les groupes de cohomologie modifiés de Tate.

La donnée d'une condition locale $\mathcal{F}$ sur T détermine une condition locale $\mathcal{F}^*$ sur T^*, en prenant

$$H^1_{\mathcal{F}^*}(k,T^*) := H^1_{\mathcal{F}}(k,T)^{\perp}$$

pour la dualité (1.1).

Nous allons maintenant donner une description unifiée de la condition locale non-ramifiée fréquemment utilisée dans la littérature. Dans la suite ,si k est un corps non-archimédien, on note k^{ur} l'extension maximale non ramifiée de k, $\mathrm{Frob} \in \mathrm{Gal}(k^{ur}/k)$ l'automorphisme de Frobenius et $I = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k^{ur})$ le groupe d'inertie. Si k est archimédien, on pose $I = G_k$ et $k^{ur} = k$.

Soit $H^1(k,T)^u$ le sous-module des normes universelles de $H^1(k,T)$ défini par :

$$H^1(k,T)^u = \bigcap_{k\subset F\subset k^{ur}} \mathrm{cor}_{F,k}(H^1(F,T)),$$

l'intersection est prise sur toutes les extensions finies non ramifiées F de k, contenues dans k^{ur}. La continuité des applications $\mathrm{cor}_{F,k}$ montre que $H^1(k,T)^u$ est un sous-groupe fermé du groupe compact $H^1(k,T)$. On définit la condition locale *non-ramifiée* [22, Definition 5.1]

$$H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T) \subseteq H^1(k,T)$$

de la façon suivante

$$H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T) := H^1(k,T)^{u,sat} \tag{1.2}$$

où $H^1(k,T)^{u,sat}$ est le saturé de $H^1(k,T)^u$ dans $H^1(k,T)$ *i.e.* $H^1(k,T)/H^1(k,T)^{u,sat}$ est un $\mathcal{O}$-module libre tel que $H^1(k,T)^{u,sat}/H^1(k,T)^u$ est de longueur finie. En particulier, la condition locale $\mathcal{F}_{ur}$ est cartésienne. Pour un sous-module N d'un $\mathcal{O}$-module de type fini M, le saturé N^{sat} de N dans M est l'image réciproque de la torsion de M/N par la projection canonique de M dans M/N. On peut aussi montrer que N^{sat} est l'image réciproque de $N \otimes_{\mathcal{O}} \Phi$ par l'application canonique de M dans $M \otimes_{\mathcal{O}} \Phi$.

Pour tout G_k-module topologique M, soit

$$H^1_{ur}(k,M) = \ker(\ H^1(k,M) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(I,M)\ ),$$

le sous-groupe de cohomologie non ramifié de $H^1(k,M)$. On dit que M est non ramifié si I agit trivialement sur M.

Pour calculer l'orthogonal, pour la dualité de Tate (1.1), des groupes $H^1(k,T)^u$, $H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)$ et $H^1_{ur}(k,T)$, on considère l'accouplement (1.1) pour toutes les extensions finies F de k contenues dans k^{ur}, puis on passe à la limite. Le passage à la limite dans la dualité (1.1) induit une forme bilinéaire non-dégénérée

$$\varprojlim_{k\subset_f F\subset k^{ur}} H^1(F,T) \ \times \ \varinjlim_{k\subset_f F\subset k^{ur}} H^1(F,T^*) \ \xrightarrow{<,>_\infty} \ \varprojlim_{k\subset_f F\subset k^{ur}} H^2(F,D(1))$$

où les morphismes de transition dans la limite projective (resp. inductive) sont induits par la corestriction (resp. la restriction) et la notation $k \subset_f F$ signifie que F est une extension finie de k. Nous notons

$$\mathrm{cor}_F^{(i)} : \varprojlim_{k \subset_f F' \subset k^{ur}} H^i(F', T) \longrightarrow H^i(F, T), \quad \mathrm{res}_F^{(i)} : H^i(F, T^*) \longrightarrow \varinjlim_{k \subset_f F' \subset k^{ur}} H^i(F, T^*)$$

les applications obtenues par passage à la limite sur les applications $\mathrm{cor}_{F',F}$ et $\mathrm{res}_{F,F'}$, pour toute extension finie $F \subset_f F'$.

Proposition 1.6. *Soit k un corps local non-archimédien. Alors l'orthogonal de $H^1(k, T)^u$ pour la dualité* (1.1) *est $H^1_{ur}(k, T^*)$:*

$$(H^1(k, T)^u)^{\perp} = H^1_{ur}(k, T^*).$$

Démonstration. Notons d'abord que pour toute extension finie $k \subset_f F \subset_f F'$ de k, on a le diagramme commutatif ([24, Proposition 1.5.3]) :

$$\begin{tikzcd} H^1(F', T) \arrow[d, "\mathrm{cor}_{F',F}"'] & \times & H^1(F', T^*) \arrow[r, "\cup"] & H^2(F', D(1)) \arrow[d, "\mathrm{cor}_{F',F}"', "\wr"] \\ H^1(F, T) & \times & H^1(F, T^*) \arrow[u, "\mathrm{res}_{F,F'}"] \arrow[r, "\cup"] & H^2(F, D(1)). \end{tikzcd}$$

Nous en déduisons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \varprojlim_{k \subset_f F \subset k^{ur}} H^1(F, T) \arrow[d, "\mathrm{cor}_k^{(1)}"] & \times & \varinjlim_{k \subset_f F \subset k^{ur}} H^1(F, T^*) \arrow[r, "<,>_\infty"] & \varprojlim_{k \subset_f F \subset k^{ur}} H^2(F, D(1)) \arrow[d, "\mathrm{cor}_k^{(2)}", "\wr"'] \\ H^1(k, T) & \times & H^1(k, T^*) \arrow[u, "\mathrm{res}_k^{(1)}"'] \arrow[r, "\cup"] & H^2(k, D(1)). \end{tikzcd}$$

Puisque les groupes $H^1(F, T)$ sont compacts, $\mathrm{Im}(\mathrm{cor}_k^{(1)}) = H^1(k, T)^u$ (cf. [41, Proposition 1.1.6]). La commutativité du diagramme ci-dessus permet de conclure. $\square$

Dans la suite, nous noterons A_{div} le sous-groupe divisible maximal de A, pour tout groupe abélien A. Pour tout $\mathcal{O}$-module M, soit

$$M^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

le dual de Pontryagin de M. Rappelons que D est un $\mathcal{O}$-module injectif. En particulier $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, D)$ est un foncteur exact de la catégorie des $\mathcal{O}$-modules dans elle même, et l'application

$$M \longrightarrow (M^\vee)^\vee$$

est un isomorphisme si M est un $\mathcal{O}$-module de type fini ou discret de torsion.

Proposition 1.7. *Soit k un corps local non-archimédien. Alors*

$$H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(k, T^*) = H^1_{ur}(k, T^*)_{div}.$$

Démonstration. Soit $M := H^1(k,T)/H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)$. La dualité (1.1) montre que le $\mathcal{O}$-module $H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)^\perp$ est isomorphe à $M^\vee$. Comme D est divisible et M est libre (par définition), on en déduit que le $\mathcal{O}$-module $H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)^\perp$ est divisible. Pour conclure, il suffit de montrer que $H^1_{ur}(k,T^*)/H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)^\perp$ est fini. Par définition $H^1(k,T)^u \subset H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)/H^1(k,T)^u \longrightarrow H^1(k,T)/H^1(k,T)^u \twoheadrightarrow H^1(k,T)/H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)\ .$$

Par passage au dual et en tenant compte de la proposition 1.6, on en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)^\perp \longrightarrow H^1_{ur}(k,T^*) \longrightarrow (H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)/H^1(k,T)^u)^\vee \longrightarrow 0\ .$$

La finitude de $H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T)/H^1(k,T)^u$ permet de conclure. □

Proposition 1.8. *Soit k un corps non-archimédien. Alors*

$$H^1_{ur}(k,T) \subset H^1(k,T)^u.$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif ([24, Proposition 1.5.3])

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(k^{ur}/k, T^I) & \times & H^1(k^{ur}/k, (T^*)^I) & \xrightarrow{\cup} & H^2(k^{ur}/k, T^I \otimes (T^*)^I) = 0 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{inf}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{inf}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{inf}} \\
H^1(k,T) & \times & H^1(k,T^*) & \xrightarrow{\cup} & H^2(k, T \otimes T^*)
\end{array}$$

La nullité de $H^1(k^{ur}/k, T^I \otimes (T^*)^I)$ est une conséquence du fait que le groupe $\mathrm{Gal}(k^{ur}/k)$ est de p-dimension cohomologique égale à 1. Soient $x \in H^1_{ur}(k,T)$ et $y \in H^1_{ur}(k,T^*)$. Écrivons

$$x = \inf(x_1) \quad \text{et} \quad y = \inf(y_1).$$

La commutativité du diagramme ci-dessus montre que

$$x \cup y = \inf(x_1) \cup \inf(y_1) = \inf(x_1 \cup y_1) = 0$$

et donc

$$H^1_{ur}(k, T) \subset H^1_{ur}(k, T^*)^{\perp}.$$

D'après la proposition 1.6, on sait que

$$H^1(k, T)^u = H^1_{ur}(k, T^*)^{\perp}.$$

Ainsi

$$H^1_{ur}(k, T) \subset (H^1(k, T)^u)^{\perp\perp}.$$

Puisque $H^1(k, T)^u$ est un sous-groupe fermé du groupe compact $H^1(k, T)$,

$$(H^1(k, T)^u)^{\perp\perp} = H^1(k, T)^u,$$

cf. [28, Theorem 2.9.6 et Proposition 2.9.9]. D'où

$$H^1_{ur}(k, T) \subset H^1(k, T)^u.$$

□

Corollaire 1.9. *Soit k un corps non-archimédien de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$. Alors*

$$H^1_{ur}(k, T) = H^1(k, T)^u.$$

Démonstration. Soit $k \subset_f F \subset k^{ur}$ une extension de k. Comme $\ell \neq p$, la suite exacte d'inflation-restriction (voir *e.g.* [33, Appendix B, Proposition 2.5 et 2.7]) donne

$$0 \longrightarrow H^1(k^{ur}/F, T^I) \longrightarrow H^1(F, T) \longrightarrow H^1(I, T)^{\mathrm{Frob}=1} \longrightarrow H^2(k^{ur}/F, T^I) = 0\ .$$

où la nullité de $H^2(k^{ur}/F, T^I)$ découle du fait que la p-dimension cohomologique de $\mathrm{Gal}(F^{ur}/F)$ est égale à 1. Ainsi par passage à la limite, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \varprojlim_F H^1(k^{ur}/F, T^I) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_k"'] & \varprojlim_F H^1(F, T) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{cor}_k^{(1)}"'] & \varprojlim_F H^1(I, T)^{\mathrm{G}_F} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^1(k^{ur}/k, T^I) \arrow[r, "\inf"] & H^1(k, T) & & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

où F parcourt l'ensemble des extensions finies de k contenues dans k^{ur}, les morphismes de transition sont induits par la corestriction et ρ_k est l'application induite par passage à la limite sur les applications de transition. Comme $\ell \neq p$, le $\mathcal{O}$-module $H^1(I,T)$ est de type fini, donc $\varprojlim_F H^1(I,T)^{G_F} = 0$, cf. [33, Appendix B, Lemme 3.2]. D'où

$$\mathrm{Im}(\rho_k) \cong \mathrm{Im}(\mathrm{cor}_k^{(1)})$$

et donc

$$H^1(k,T)^u = \mathrm{Im}(\mathrm{cor}_k^{(1)}) \cong \mathrm{Im}(\rho_k) \subset H^1_{ur}(k,T).$$

L'inclusion inverse est la proposition 1.8. $\square$

Remarque 1.10. *Dans le cas où k est un corps non-archimédien de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$, $H^1_{ur}(k,T)^\perp = H^1_{ur}(k,T^*)$. C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.9 et de la proposition 1.6.*

On en déduit le résultat bien connu (voir e.g. [33, Lemma I.3.5]) suivant

Corollaire 1.11. *Soit k un corps non-archimédien de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$. Si T est non ramifiée, alors*

$$H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(k,T) = H^1_{ur}(k,T) \quad \text{et} \quad H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(k,T^*) = H^1_{ur}(k,T^*).$$

Démonstration. Comme $\ell \neq p$ et T est non ramifiée, la suite exacte d'inflation-restriction

$$0 \longrightarrow H^1(k^{ur}/k,T) \longrightarrow H^1(k,T) \longrightarrow H^1(I,T)^{\mathrm{Frob}=1} \longrightarrow H^2(k^{ur}/k,T) = 0$$

montre que

$$H^1(k,T)/H^1_{ur}(k,T) \simeq H^1(I,T)^{\mathrm{Frob}=1}.$$

Or la représentation T est non ramifiée et sans torsion, alors $H^1(I,T) = \mathrm{Hom}_c(I,T)$ est sans torsion. D'où

$$H^1_{ur}(k,T)^{sat} = H^1_{ur}(k,T).$$

Le corollaire 1.9 permet de conclure. La deuxième assertion se déduit directement de la remarque 1.10. $\square$

Chapitre 2

Structures de Selmer et théorie d'Iwasawa

Ce chapitre est consacré à l'étude de certains groupes de Selmer associés à la représentation p-adique $\mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1})$.

Dans la suite, K est un corps de nombres et L est une extension abélienne finie de K de groupe de Galois Δ. Soit $K_\infty := \bigcup_{n \geq 0} K_n$ une $\mathbb{Z}_p$-extension de K de groupe de Galois Γ et soit Λ l'algèbre de groupe complétée $\mathcal{O}[[\Gamma]]$. On suppose pour simplifier que L et K_∞ sont linéairement disjointes sur K. On adopte les notations suivantes :

L_n	:	le composé des corps L et K_n ;
Δ_n	:	le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L_n/K_n)$;
G_n	:	le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L_n/L) \simeq \mathrm{Gal}(K_n/K)$.

On suppose que toutes les extensions algébriques de K sont contenues dans une clôture algébrique séparable fixée $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$. Pour tout ensemble Σ de places de K, l'ensemble des extensions des places de Σ à une extension galoisienne finie F de K sera encore noté Σ. On utilise les notations usuelles :

F_Σ	:	l'extension algébrique maximale de F non ramifiée en dehors de Σ ;
$\mathrm{G}_\Sigma(F)$	:	le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_\Sigma/F)$.

Pour toute place w de F, on fixe une place $\overline{w}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de w. On note

D_w	:	le groupe de décomposition de $\overline{w}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}/F$;
I_w	:	le groupe d'inertie de $\overline{w}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}/F$;
F_w	:	le complété de F en w.

2.1 Structures de Selmer

Soit T une représentation p-adique de G_K. Pour une place v de K, on dit que T est non ramifiée en v si le sous-groupe d'inertie I_v de v agit trivialement sur T. Dans le cas où v est une place réelle de K, dire que T est non ramifiée en v est équivalent à dire que la conjugaison complexe opère trivialement sur T. Dans toute la suite, T est une représentation p-adique de G_K non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places de K et $\mathrm{Ram}(T)$ est l'ensemble des places en lesquelles T est ramifiée. Nous notons Σ_p l'ensemble des places p-adiques et Σ_∞ l'ensemble des places infinies de K. Posons

$$\Sigma_0 := \Sigma_p \cup \Sigma_\infty \cup \mathrm{Ram}(T).$$

Définition 2.1. *La donnée d'une structure de Selmer $(\mathcal{F}, \Sigma)$ est la donnée d'un ensemble fini Σ de places contenant Σ_0, ainsi que d'une condition locale $H^1_{\mathcal{F}}(K_v, T)$ en chaque $v \in \Sigma$. Si $v \notin \Sigma$, nous écrirons aussi $H^1_{\mathcal{F}}(K_v, T) := H^1_{ur}(K_v, T)$.*

Le groupe de Selmer $H^1_{\mathcal{F},\Sigma}(K, T)$ associé à la structure de Selmer $(\mathcal{F}, \Sigma)$ est le noyau de l'homomorphisme de localisation

$$H^1(G_\Sigma(K), T) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1(K_v, T)/H^1_{\mathcal{F}}(K_v, T) .$$

La donnée d'une structure de Selmer sur T induit une structure de Selmer sur tous les sous-quotients de T par propagation de chaque condition locale. Elle induit également une structure de Selmer $(\mathcal{F}^*, \Sigma)$ pour T^* en prenant pour chaque condition locale la condition locale induite par dualité locale de Tate. Lorsque le contexte le permet, nous omettons de mentionner l'ensemble Σ dans nos notations.

Rappelons, cf. chap.I, (1.2), que $\mathcal{F}_{ur}$ est la condition locale non ramifiée.

Remarque 2.2. *Les groupes de Selmer $H^1_{\mathcal{F}_{ur},\Sigma}(K, T)$ et $H^1_{\mathcal{F}^*_{ur},\Sigma}(K, T)$ sont indépendant du choix de Σ contenant Σ_0. C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.11. En effet, d'après le corollaire 1.11, on sait que si $v \in \Sigma - \Sigma_0$ alors*

$$H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(K_v, T) = H^1_{ur}(K_v, T) \quad et \quad H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(K_v, T^*) = H^1_{ur}(K_v, T^*).$$

D'où les deux suites exactes

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_{ur},\Sigma_0}(K, T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_{ur},\Sigma}(K, T) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Sigma-\Sigma_0} H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(K_v, T)/H^1_{ur}(K_v, T)$$

et

$$H^1_{\mathcal{F}^*_{ur},\Sigma_0}(K, T^*) \hookrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{ur},\Sigma}(K, T^*) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Sigma-\Sigma_0} H^1_{ur}(K_v, T^*)/H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(K_v, T^*) ,$$

permettent de conlure.

Exemple 2.3. *Soit $T = \mathcal{O}(1)$ et $Cl(K)$ le groupe des classes d'idéaux de K. Alors les $\mathcal{O}$-modules $H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(K, T^*)$ et $\mathrm{Hom}(Cl(K), T^*)$ sont isomorphes ;*

$$H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(K, T^*) \cong \mathrm{Hom}(Cl(K), T^*).$$

En effet, comme D_v opère trivialement sur $T^* \cong D$, on a l'isomorphisme

$$H^1_{ur}(K_v, T^*) \cong \mathrm{Hom}_c(D_v/I_v, T^*).$$

Or T^* est divisible et D_v/I_v est sans torsion, par conséquent $H^1_{ur}(K_v, T^*)$ est divisible. On déduit alors de la proposition 1.7 que

$$H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(K_v, T^*) = H^1_{ur}(K_v, T^*).$$

En particulier $H^1(K_v, T^*)/H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(K_v, T^*)$ s'injecte naturellement dans $\mathrm{Hom}_c(I_v, T^*)$. D'où

$$\begin{aligned} H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(K, T^*) &\cong \ker\big(H^1(K, T^*) \longrightarrow \prod_v H^1(K_v, T^*)/H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(K_v, T^*)\big) \\ &= \ker\big(\mathrm{Hom}_c(G_K, T^*) \longrightarrow \prod_v \mathrm{Hom}_c(I_v^{ab}, T^*)\big) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(H_K/K), T^*) \\ &\cong \mathrm{Hom}(Cl(K), T^*), \end{aligned}$$

où H_K est le corps de classes de Hilbert de K. □

La généralisation suivante du théorème de dualité globale de Poitou-Tate est essentiellement dûe à Nekovář :

Théorème 2.4 (Poitou-Tate)**.** *Soit T une représentation p-adique de G_K à coefficients dans $\mathcal{O}$. Pour $i \in \{1, 2\}$ et $Z = T$ ou T^*, posons*

$$\ker^i_\Sigma(F, Z) := \ker(\ H^i(\mathrm{G}_\Sigma(F), Z) \longrightarrow \oplus_{w\in\Sigma} H^i(F_w, Z)\ ).$$

Alors

(i) Nous avons une suite exacte de $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(F/K)]$-modules (de Poitou-Tate)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(\mathrm{G}_\Sigma(F), T) \arrow[r] & \oplus_{w\in\Sigma} H^0(F_w, T) \arrow[r] & H^2(\mathrm{G}_\Sigma(F), T^*)^\vee \arrow[d] \\ & H^1(\mathrm{G}_\Sigma(F), T^*)^\vee \arrow[d] & \oplus_{w\in\Sigma} H^1(F_w, T) \arrow[l] & H^1(\mathrm{G}_\Sigma(F), T) \arrow[l] \\ & H^2(\mathrm{G}_\Sigma(F), T) \arrow[r] & \oplus_{w\in\Sigma} H^2(F_w, T) \arrow[r] & H^0(F, T^*))^\vee \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

(ii) Nous avons une dualité parfaite de $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(F/K)]$-modules

$$\ker^i_\Sigma(F,T) \quad \times \quad \ker^{3-i}_\Sigma(F,T^*) \quad \longrightarrow \quad D. \tag{2.2}$$

Démonstration. Voir [25, Chap.V, §3 et §4]. □

Définition 2.5. *Soient $(\mathcal{F}_1,\Sigma_1)$ et $(\mathcal{F}_2,\Sigma_2)$ deux structures de Selmer sur T. Suivant [21, §2.1], on dit que*

$$\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \quad si \quad H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T) \subset H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T),\ \forall v.$$

Remarque 2.6.

- *Si $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ alors $\mathcal{F}_2^* \leq \mathcal{F}_1^*$.*
- *Soit $(\mathcal{F},\Sigma)$ une structure de Selmer et soit $\Sigma' \supset \Sigma$ un ensemble fini. Posons*

$$H^1_{\mathcal{F}'}(K_v,T) = \begin{cases} H^1_{\mathcal{F}}(K_v,T), & si\ v \in \Sigma\,; \\ H^1_{ur}(K_v,T), & si\ v \in \Sigma' - \Sigma. \end{cases}$$

Alors

$$H^1_{\mathcal{F},\Sigma}(K,T) = H^1_{\mathcal{F}',\Sigma'}(K,T) \quad et \quad H^1_{\mathcal{F}^*,\Sigma}(K,T^*) = H^1_{(\mathcal{F}')^*,\Sigma'}(K,T^*).$$

Théorème 2.7. *Soient $(\mathcal{F}_1,\Sigma_1)$ et $(\mathcal{F}_2,\Sigma_2)$ deux structures de Selmer sur T. Si $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ alors nous avons une suite exacte*

$$H^1_{\mathcal{F}_1}(K,T) \hookrightarrow H^1_{\mathcal{F}_2}(K,T) \to \bigoplus_{v\in\Sigma_1\cup\Sigma_2} H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T) \to H^1_{\mathcal{F}_1^*}(K,T^*)^\vee \twoheadrightarrow H^1_{\mathcal{F}_2^*}(K,T^*)^\vee$$

Démonstration. D'après la remarque 2.6, on peut supposer que $\Sigma_1 = \Sigma_2$. Considérons les deux structures de Selmer $(\mathcal{F}_0,\Sigma)$ et $(\mathcal{F}_\infty,\Sigma)$ suivantes

$$H^1_{\mathcal{F}_\infty}(K_v,T) := H^1(K_v,T), \quad H^1_{\mathcal{F}_0}(K_v,T) := 0 \quad \text{pour tout } v \in \Sigma.$$

Alors la suite exacte associée aux $(\mathcal{F}_0,\Sigma)$ et $(\mathcal{F}_\infty,\Sigma)$ est une conséquence immédiate de la suite exacte de Poitou-Tate. Ainsi, le diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\mathcal{F}_0}(K,T) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & H^1_{\mathcal{F}}(K,T) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}}(K_v,T) \arrow[d, hook] & \\
H^1_{\mathcal{F}_0}(K,T) \arrow[r, hook] & H^1(G_\Sigma(K),T) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1(K_v,T) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(G_\Sigma(K),T^*)^\vee \\
& \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}}(K_v,T) \arrow[r, equal] & \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}}(K_v,T) &
\end{tikzcd}$$

et le fait que le morphisme

$$\bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}}(K_v,T) \longrightarrow H^1(G_\Sigma(K),T^*)^\vee$$

n'est que le composé

$$\bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}}(K_v,T) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1(K_v,T) \longrightarrow H^1(G_\Sigma(K),T^*)^\vee$$

montrent le théorème pour toute structure de Selmer $(\mathcal{F},\Sigma)$; $\mathcal{F}_0 \leq \mathcal{F}$. Revenant maintenu au cas général. Par définition, on dispose de deux suites exactes

$$H^1_{\mathcal{F}_1}(K,T) \hookrightarrow H^1_{\mathcal{F}_2}(K,T) \rightarrow \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T)$$

et

$$H^1_{\mathcal{F}_2^*}(K,T^*) \hookrightarrow H^1_{\mathcal{F}_1^*}(K,T^*) \rightarrow \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}_1^*}(K_v,T^*)/H^1_{\mathcal{F}_2^*}(K_v,T^*)\ .$$

Comme $(H^1_{\mathcal{F}_1^*}(K_v,T^*)/H^1_{\mathcal{F}_2^*}(K_v,T^*))^\vee = H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T)$, il suffit donc de prouver l'exactitude au milieu ;

$$H^1_{\mathcal{F}_2}(K,T) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_1^*}(K,T^*)^\vee\ .$$

Du fait que le morphisme

$$\textstyle\bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_1^*}(K,T^*)^\vee$$

n'est que le composé

$$\textstyle\bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_1^*}(K,T^*)^\vee$$

et que le théorème est vraie pour $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_\infty$; c'est une conséquence de la validité du théorème pour $\mathcal{F}_0 \leq \mathcal{F}$. Le diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\mathcal{F}_2}(K,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K,T) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & H^1_{\mathcal{F}_\infty}(K,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K,T) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & H^1_{\mathcal{F}_\infty}(K,T)/H^1_{\mathcal{F}_2}(K,T) \arrow[d, hook] \\
\bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T) \arrow[r, hook] & \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T) \arrow[d] \\
 & H^1_{\mathcal{F}_1^*}(K,T^*)^\vee \arrow[r, two heads] & H^1_{\mathcal{F}_2^*}(K,T^*)^\vee
\end{tikzcd}$$

montre que la suite

$$H^1_{\mathcal{F}_2}(K,T) \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Sigma} H^1_{\mathcal{F}_2}(K_v,T)/H^1_{\mathcal{F}_1}(K_v,T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_1^*}(K,T^*)^\vee .$$

est exacte. D'où le résultat. $\square$

2.2 Théorie d'Iwasawa

Soit $(\mathcal{F},\Sigma)$ une structure de Selmer sur T telle que pour toute extension abélienne finie F/K et toute place $v\in\Sigma$ de K, les homomorphismes de transition induits par la corestriction sont définies pour $H^1_{\mathcal{F}}(K_v,T)$, *i.e*, si $K\subset F\subset F'$ et $w' \mid w \mid v$

$$\mathrm{cor}_{F'_{w'},F_w}(H^1_{\mathcal{F}}(F'_{w'},T)) \subset H^1_{\mathcal{F}}(F_w,T).$$

Remarquons que la dualité locale et la définition de $(\mathcal{F}^*,\Sigma)$ assurent que

$$\mathrm{res}_{F_w,F'_{w'}}(H^1_{\mathcal{F}^*}(F_w,T^*)) \subset H^1_{\mathcal{F}^*}(F'_{w'},T^*).$$

Ainsi, pour une telle structure de Selmer nous avons des homomorphismes

$$\mathrm{cor}_{F',F} : H^1_{\mathcal{F},\Sigma}(F',T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F},\Sigma}(F,T), \quad \mathrm{res}_{F,F'} : H^1_{\mathcal{F}^*,\Sigma}(F,T^*) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*,\Sigma}(F^*,T^*).$$

Un exemple de telle structure de Selmer est la structure non-ramifiée $(\mathcal{F}_{ur},\Sigma)$ (pour la définition de la condition locale $\mathcal{F}_{ur}$ voir chap.I, (1.2)).

Définition 2.8. *Pour toute extension galoisienne finie K'/K, on définit*

$$H^1_{\mathcal{F},\Sigma}(K'K_\infty,T) := \varprojlim_{K'\subset F\subset K'K_\infty} H^1_{\mathcal{F},\Sigma}(F,T)$$

et

$$H^1_{\mathcal{F}^*,\Sigma}(K'K_\infty,T^*) := \varinjlim_{K'\subset_f F\subset K'K_\infty} H^1_{\mathcal{F}^*,\Sigma}(F,T^*).$$

On rappelle que

$$\chi : \mathrm{G}_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$$

est un caractère non trivial $\overline{\mathbb{Q}_p}$-irréductible de G_K, qui se factorise à travers une extension finie L de K. Dans la suite nous étudions quelques groupes de Selmer associés à la représentation p-adique $T=\mathbb{Z}_p(1)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1})$. Précisément on s'intéresse aux groupes de Selmer

$$H^1_{\mathcal{F}_{str}}(K_\infty,T), \quad H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T) \quad \text{et} \quad H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)$$

où

$$H^1_{\mathcal{F}_{str}}(F_w,T) := \begin{cases} H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(F_w,T), & \text{si } w\in\Sigma-\Sigma_p\,; \\ 0, & \text{si } w\in\Sigma_p. \end{cases}$$

et

$$H^1_{\mathcal{F}_{can}}(F_w,T) := \begin{cases} H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(F_w,T), & \text{si } w\in\Sigma-\Sigma_p\,; \\ H^1(F_w,T), & \text{si } w\in\Sigma_p. \end{cases}$$

Dans la suite, sauf mention du contraire T sera la représentation $\mathbb{Z}_p(1)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1})$;

$$T=\mathbb{Z}_p(1)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}).$$

Lemme 2.9. *Soit F une extension galoisienne de K. Alors pour toute extension galoisienne F' de K contenue dans F, le morphisme de restriction*

$$\mathrm{res}\,:\,H^1(F',T)\xrightarrow{\ \sim\ }H^1(F,T)^{\mathrm{Gal}(F/F')}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Puisque χ est d'ordre fini, on peut supposer que $\chi(\mathrm{G}_F)=1$. La suite exacte d'inflation-restriction donne

$$0\longrightarrow H^1(F/F',T^{\mathrm{G}_F})\longrightarrow H^1(F',T)\xrightarrow{\mathrm{res}}H^1(F,T)^{\mathrm{Gal}(F/F')}\longrightarrow H^2(F/F',T^{\mathrm{G}_F})\,.$$

Le lemme découle du fait que

$$(\mathbb{Z}_p(1)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\mathrm{G}_F}=\mathbb{Z}_p(1)^{\mathrm{G}_F}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1})=0.$$

□

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la conjecture faible de Leopoldt pour L_∞/L

Proposition 2.10. *Sous la conjecture faible de Leopoldt pour L_∞/L, on a*

$$H^1_{\mathcal{F}_{str}}(K_\infty,T)=0.$$

Démonstration. Le lemme 2.9 assure que

$$\varprojlim_n H^1(G_\Sigma(K_n),T)\cong(\varprojlim_n H^1(G_\Sigma(L_n),T))^{\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)}$$

donc

$$H^1_{\mathcal{F}_{str}}(K_\infty,T)\hookrightarrow H^1_{\mathcal{F}_{str}}(L_\infty,T)^{\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)}\,.$$

Par suite, il suffit de montrer que $H^1_{\mathcal{F}_{str}}(L_\infty,T)=0$. En effet, la proposition $B.3.2$ de [33] et le corollaire 1.11 montrent que

$$\varprojlim_n H^1(L_{n,w},T)\cong\varprojlim_n H^1_{ur}(L_{n,w},T)\quad\text{et}\quad H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(L_{n,w},T)=H^1_{ur}(L_{n,w},T).$$

D'où par définition de $H^1_{\mathcal{F}_{str}}(L_\infty, T)$, nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_{str}}(L_\infty, T) \longrightarrow \varprojlim_n H^1(G_\Sigma(L_n), T) \longrightarrow \varprojlim_n H^1(L_{n,p}, T)$$

où $H^1(L_{n,p}, T) := \bigoplus_{w|p} H^1(L_{n,w}, T)$. La conjecture faible de Leopoldt pour L_∞/L et le fait que $\chi(G_L) = 1$ montrent alors que $H^1_{\mathcal{F}_{str}}(K_\infty, T) = 0$. $\square$

Dans toute la suite, sauf mention express du contraire, on suppose vérifiée l'hypothèse

($\mathcal{H}_2$) *aucune place finie de K ne se décompose totalement dans K_∞.*

Théorème 2.11. *Soit κ le caractère cyclotomique. Si le caractère $\chi\kappa^{-1}$ est non trivial, alors le Λ-module $H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty, T)$ est libre de rang $s = \#\{v \in \Sigma_\infty, \chi(D_v) = 1\}$.*

Avant de donner la démonstration du théorème 2.11, remarquons d'abord que

$$H^1(G_{\Sigma_{p\infty}}(L_n), \mathbb{Z}_p(1)) \cong \widehat{\mathcal{E}'_n},$$

où $\mathcal{E}'_n$ est le groupe des p-unités de L_n. En effet, il est facile de conclure à partir de [24, Proposition 8.3.3 et 8.3.10] que le connecteur de la suite exacte de cohomologie de la suite exacte [24, Proposition 8.3.3], induit un isomorphisme canonique de $\widehat{\mathcal{E}'_n}$ dans $H^1(\mathrm{G}_{\Sigma_{p\infty}}(L_n), \mathbb{Z}_p(1))$.

Démonstration du théorème 2.11. Par définition, on a

$$H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty, T) = \varprojlim_n H^1(G_\Sigma(K_n), T).$$

Grâce au lemme 2.9, on sait que la restriction induit un isomorphisme qu'on note encore res

$$\mathrm{res} : \varprojlim_n H^1(G_\Sigma(K_n), T) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H^1(G_\Sigma(L_n), T)^{\Delta_n} .$$

Comme $\chi(\mathrm{G}_L) = 1$, la représentation $T = \mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1})$ est non ramifiée en dehors de $\Sigma_{p\infty}$ en tant que représentation p-adique de G_L. Donc sous l'hypothèse ($\mathcal{H}_2$), nous avons

$$\varprojlim_n H^1(G_\Sigma(L_n), T) \cong \varprojlim_n H^1(G_{\Sigma_{p\infty}}(L_n), T)$$

par suite

$$\varprojlim_n (\widehat{\mathcal{E}'_n} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\Delta_n} \cong H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty, T). \tag{2.3}$$

Le lemme suivant, permet de conclure.

Lemme 2.12. *Posons* $\widehat{\mathcal{E}'_\infty} = \varprojlim_n \widehat{\mathcal{E}'_n}$. *Si le caractère* $\chi\kappa^{-1}$ *est non trivial, alors le* Λ*-module* $(\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\Delta}$ *est libre de rang* $s = \#\{v \in \Sigma_\infty, \chi(v) = 1\}$.

Démonstration. Posons $B_n := (\widehat{\mathcal{E}'_n} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\Delta_n}$. Si le caractère $\chi\kappa^{-1}$ est non trivial, le $\mathcal{O}$-module B_n est sans torsion. Grâce au théorème de Dirichlet, on a

$$\mathrm{rang}_{\mathcal{O}}(B_n) = sp^n + t \tag{2.4}$$

pour n assez grand, où t est un entier indépendant de n. Il suffit maintenant de suivre la même démarche que Greither a appliquée pour démontrer [16, Théorème page 207]. Le point essentiel ici est que les conditions notées (**P1**), (**P2**), (**P3**) et (**P4**) dans [16] sont toutes satisfaites. Il s'agit de

- (**P1**) Il existe un homomorphisme normique $N_{m,n} : B_m \longrightarrow B_n$ pour $m \geq n$, tel que les composées $i_{n,m} \circ N_{m,n}$ coïcident avec la trace algébrique $\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K_m/K_n)} \sigma$, où $i_{n,m} : B_n \longrightarrow B_m$ est l'homomorphisme d'extension.
- (**P2**) La suite B_n vérifie la descente galoisienne.
- (**P3**) Pour n assez grand, le $\mathcal{O}$-rang de B_n peut être écrit sous la forme $sp^n + t$, avec des entiers s et t indépendants de n.
- (**P4**) Les ordres des groupes de cohomologie $H^1(\Gamma_n, B_\infty)$ sont bornés, et les groupes de cohomologie $H^1(\Gamma_n, (B_\infty)_{tor})$ sont tous réduits à zéro, où $B_\infty = \bigcup_{n \geq 0} B_n$.

Il est évident que (**P1**) et (**P2**) sont vérifiées. L'égalité (2.4) implique que (**P3**) est également vérifiée. Pour la première partie de (**P4**), puisque $H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty, T) \cong \varprojlim B_n$, il suffit de montrer que les groupes

$$H^1(\Gamma_n, \varinjlim H^1(G_\Sigma(K_n), T))$$

sont bornés. En effet, la suite spectrale (cf. [39, Équation (12)])

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma, \mathcal{H}^q(K_\infty, T)) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q}(K, T) = E^{p+q}$$

donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(\Gamma_n, \mathcal{H}^1(K_\infty, T)) \longrightarrow \mathcal{H}^2(K_n, T) \longrightarrow \mathcal{H}^2(K_\infty, T)^{\Gamma_n}$$

où $\mathcal{H}^i(F, T) := \varinjlim H^i(G_\Sigma(F'), T)$, F'/K parcourt les sous-extensions finies de F/K. Comme la p-dimension cohomologique de $G_\Sigma(K_n)$ est égale à 2 ($p \neq 2$), la corestriction

$$\mathrm{cor} : \; H^2(G_\Sigma(L_n), T)_{\Delta_n} \longrightarrow H^2(G_\Sigma(K_n), T)$$

est un isomorphisme. Par suite le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} H^2(G_\Sigma(L_n),T) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\mathrm{cor}"'] & H^2(G_\Sigma(L_m),T) \arrow[d, "\mathrm{cor}"] \\ H^2(G_\Sigma(K_n),T) \arrow[r, "\mathrm{res}"] & H^2(G_\Sigma(K_m),T) \end{tikzcd}$$

et le fait que

$$\mathcal{H}^2(L_\infty,T)_\Delta := (\varinjlim H^2(G_\Sigma(L_n,T))_\Delta \cong \varinjlim(H^2(G_\Sigma(L_n,T)_{\Delta_n})$$

montrent que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} H^2(G_\Sigma(L_n),T)_{\Delta_n} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{cor}"', "\wr"] & \mathcal{H}^2(L_\infty,T)_\Delta \arrow[d, "\wr"] \\ H^2(G_\Sigma(K_n),T) \arrow[r] & \mathcal{H}^2(K_\infty,T) \end{tikzcd}$$

est commutatif. D'où

$$H^1(\Gamma_n,\mathcal{H}^1(K_\infty,T)) \cong \ker(H^2(G_\Sigma(L_n),T)_{\Delta_n} \longrightarrow \mathcal{H}^2(L_\infty,T)_\Delta).$$

Or

$$H^1(L_\infty/L_n,\mathcal{H}^1(L_\infty,T)) \cong H^1(L_\infty/L_n,\mathcal{H}^1(L_\infty,\mathbb{Z}_p(1))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1})$$

et les groupes de cohomologie $H^1(L_\infty/L_n,\mathcal{H}^1(L_\infty,\mathbb{Z}_p(1))$ sont bornés (voir [12]), on en déduit que les groupes $H^1(\Gamma_n,\mathcal{H}^1(K_\infty,T))$ sont bornés ; d'où la première partie de (**P4**). Pour la deuxième, notons que B_n est un $\mathcal{O}$-module sans torsion, donc B_∞ l'est aussi. Par suite $H^1(\Gamma_n,(B_\infty)_{tor}) = 0$, d'où la deuxième partie de (**P4**). □

Proposition 2.13. *Soit Σ' un ensemble fini de places de K contenant Σ_p, et soit*

$$H^1_{\mathcal{F}}(F_w,T) = \begin{cases} H^1_{\mathcal{F}_{ur}}(F_w,T), & si\ w \in \Sigma-\Sigma'\,; \\ H^1(F_w,T), & si\ w\in\Sigma'. \end{cases}$$

Alors pour toute extension $K\subset L'\subset L$ l'application naturelle

$$H^1_{\mathcal{F}^*,\Sigma}(L'K_\infty,T^*) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(L'K_\infty,T^*)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(L'K_\infty/K)]]$-modules. En particulier, pour $\Sigma'=\Sigma$

$$\varinjlim_n \ker^1_\Sigma(L_n,T^*) \cong H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(L_\infty,T^*),$$

$$\varinjlim_n \ker^1_\Sigma(K_n,T^*) \cong H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*),$$

où $\ker^1_\Sigma(F,T^*) = \ker(\ H^1(G_\Sigma(F),T^*) \longrightarrow \bigoplus_{w\in\Sigma} H^1(F_w,T^*)\ ).$

Démonstration. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*,\Sigma}(L'_\infty, T^*) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(L'_\infty, T^*) \longrightarrow \varinjlim_{L' \subset_f F \subset L'_\infty} \oplus_{w \in \Sigma' - \Sigma_p} H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(F_w, T^*)$$

où $L'_\infty := L'K_\infty$. Remarquons d'abord que si w est une place infinie, on a $H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(F_w, T^*) = 0$ $(p \neq 2)$. Pour toute place w finie de L', on fixe une place $\overline{w}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de w. On note w_n la place de $L'_n := L'K_n$ au-dessous de $\overline{w}$. L'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ assure qu'il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $w \in \Sigma - \Sigma_\infty$, la place w_n est la seule place de L'_n au-dessus de w_{n_0}. Ainsi, si on note L'_{w_n} le complété de L'_n en w_n, on a

$$\varinjlim_{L' \subset_f F \subset L'_\infty} \oplus_{w \in \Sigma - \Sigma_p} H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(F_w, T^*) = \oplus_{w \in \Sigma - (\Sigma_p \cup \Sigma_\infty)} \varinjlim_{n \geq n_0} H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(L'_{w_n}, T^*).$$

Si $w \in \Sigma - (\Sigma_p \cup \Sigma_\infty)$, le groupe d'inertie de w_n dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L'_n)$ ne dépend pas de n. Comme $H^1(I_{w_n}, T)$ est un $\mathcal{O}$-module de type fini , cf. [33, Proposition B.2.7,(iii)], on obtient $\varprojlim_{n \geq n_0} H^1(I_{w_n}, T)^{\mathrm{Frob}_{w_n}=1} = 0$; par suite

$$\begin{aligned} \varinjlim_{n \geq n_0} H^1_{ur}(L'_{w_n}, T)^{\perp} &= \varinjlim_{n \geq n_0} \big(H^1(L'_{w_n}, T)/H^1_{ur}(L'_{w_n}, T)\big)^{\vee} \\ &= \big(\varprojlim_{n \geq n_0} H^1(L'_{w_n}, T)/H^1_{ur}(L'_{w_n}, T)\big)^{\vee} \\ &\cong (\varprojlim_{n \geq n_0} H^1(I_{w_n}, T)^{\mathrm{Frob}_{w_n}=1})^{\vee} = 0, \end{aligned}$$

puisque pour toute place $w_n \nmid p$, $H^1(L'_{w_n}, T)/H^1_{ur}(L'_{w_n}, T) \cong H^1(I_{w_n}, T)^{\mathrm{Frob}_{w_n}=1}$. Il suffit maintenant d'appliquer la remarque 1.10 et l'inclusion $H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(L'_{w_n}, T^*) \subset H^1_{ur}(L'_{w_n}, T^*)$ pour pouvoir conclure. □

Définition 2.14. *On pose*

$$\widetilde{\oplus}_{v \in \Sigma} H^2(L_{n,v}, T) := \ker(\oplus_{v \in \Sigma} H^2(L_{n,v}, T) \longrightarrow H^0(G_{L_n,\Sigma}, T^*)^{\vee}).$$

Lemme 2.15. *Les $\mathcal{O}$-modules*

$$H_0(\Delta_n, \widetilde{\oplus}_{v \in \Sigma} H^2(L_{n,v}, T)) \quad et \quad H_1(\Delta_n, \widetilde{\oplus}_{v \in \Sigma} H^2(L_{n,v}, T))$$

sont finis d'ordre borné indépendamment de n.

Démonstration. Comme G_{L_n} est contenu dans le noyau de χ, on a

$$H^2(L_{n,v}, T) \simeq H^2(L_{n,v}, \mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}).$$

Ainsi, en utilisant le théorème de dualité locale,

$$H^2(L_{n,v},T)\simeq\begin{cases}\mathcal{O}(\chi^{-1}), & \text{si } v\in\Sigma-\Sigma_\infty\,;\\ 0, & \text{si } v\in\Sigma_\infty.\end{cases}$$

Puisque les places finies de L ne se décomposent pas totalement dans L_∞/L, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, le cardinal de $\Sigma-\Sigma_\infty$ ne dépend pas de n. Le nombre minimal de générateurs de $\widetilde{\oplus}_{v\in\Sigma}H^2(L_{n,v},T)$ est donc borné indépendamment de n.
On en déduit que $H_0(\Delta_n,\widetilde{\oplus}_{v\in\Sigma}H^2(L_{n,v},T))$ et $H_1(\Delta_n,\widetilde{\oplus}_{v\in\Sigma}H^2(L_{n,v},T))$ sont des $\mathcal{O}$-modules finis d'ordre borné indépendamment de n. $\square$

Proposition 2.16. *Les Λ-modules $H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)^\vee$ et $(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(L_\infty,T^*)^\vee)_\Delta$ sont pseudo-isomorphes.*

Démonstration. On sait, d'après la proposition 2.13 que

$$\varinjlim_n \ker^1_\Sigma(L_n,T^*)\cong H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(L_\infty,T^*).$$

La dualité de Poitou-Tate (2.2), montre qu'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(L_\infty/K)]$-modules

$$H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(L_\infty,T^*)^\vee\simeq\varprojlim_n \ker^2_\Sigma(L_n,T).$$

De même on a $H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)^\vee\simeq\varprojlim_n \ker^2_\Sigma(K_n,T)$. D'après le théorème 2.4, on a la suite exacte

$$0\to\ker^2_\Sigma(L_n,T)\to H^2(G_\Sigma(L_n),T)\to\oplus_{v\in\Sigma}H^2(L_{n,v},T)\to H^0(G_\Sigma(L_n),T^*)^\vee\to 0.$$

D'où la suite exacte

$$0\to\ker^2_\Sigma(L_n,T)\to H^2(G_\Sigma(L_n),T)\to\widetilde{\oplus}_{v\in\Sigma}H^2(L_{n,v},T)\to 0. \tag{2.5}$$

Par homologie, on a donc, pour tout $n\geq 0$, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \ker^2_\Sigma(L_n,T)_{\Delta_n} & \to & H^2(G_\Sigma(L_n),T)_{\Delta_n} & \to & (\widetilde{\oplus}_{v\in\Sigma}H^2(L_{n,v},T))_{\Delta_n} & \to & 0\\ & & \downarrow N'_n & & \wr\downarrow N_n & & \downarrow N''_n & & \\ 0 & \to & \ker^2_\Sigma(K_n,T) & \to & H^2(G_\Sigma(K_n),T) & \to & \widetilde{\oplus}_{v\in\Sigma}H^2(K_{n,v},T) & \to & 0\end{array}$$

où toutes les flèches verticales sont induites par la corestriction. Celle du milieu est un isomorphisme car $\mathrm{G}_\Sigma(K_n)$ est de p-dimension cohomologique égale à 2 ($p\neq 2$). Ainsi, par application du lemme du serpent, on obtient

$$\mathrm{coker}(N'_n)\cong\ker(N''_n)\quad\text{et}\quad\ker(N'_n)\cong\mathrm{coker}\alpha_n$$

où

$$\alpha_n: H_1(\Delta_n,H^2(G_\Sigma(L_n),T))\to H_1(\Delta_n,\widetilde{\oplus}_{v\in\Sigma}H^2(L_{n,v},T)).$$

Le lemme 2.15 permet de conclure. $\square$

Chapitre 3

Systèmes d'Euler

En général, les systèmes d'Euler peuvent être regardés comme collections de classes de cohomologie compatibles dans une tour des extensions abéliennes d'un corps de nombres K, en établissant un pont entre des objets d'intérêt arithmétique et des valeurs spéciales des fonction L. Pour les faits de base des systèmes d'Euler voir [5, 27, 33].

Soit T une représentation p-adique de G_K non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places de K et soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de K. Nous avons besoin de quelques notations supplémentaires :

$K(\mathfrak{q})$: la p-extension maximale de K contenue dans le corps de rayon de K modulo $\mathfrak{q}$;
$\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}$: un Frobenius de $\mathfrak{q}$ dans G_K ;
$K(\mathfrak{r})$: le composé des corps $K(\mathfrak{q}_i)$, où $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r$ et $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_j$;
$F(\mathfrak{r})$: le composé des corps F et $K(\mathfrak{r})$.

Si $\mathfrak{q} \notin (\Sigma_p \cup \Sigma_\infty \cup \mathrm{Ram}(T))$, on définit

$$P_{\mathfrak{q}}(T, x) := \det(1 - \mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}^{-1} x \,|\, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T, \mathbb{Z}_p(1)).$$

Fixons une fois pour toutes une $\mathbb{Z}_p$-extension K_∞ de K dans laquelle aucune place finie de K ne décompose totalement dans K_∞. Une telle $\mathbb{Z}_p$-extension existe par exemple la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K.

Définition 3.1 ([33]). *Soit $\mathcal{N}$ un idéal de K divisible par les idéaux p-adiques et par tous les idéaux premiers de K où T est ramifiée, et soit $\mathcal{K}$ une extension abélienne de K telle que*

- *Pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \nmid \mathcal{N}$, $K(\mathfrak{q}) \subset \mathcal{K}$;*
- *$K_\infty \subset \mathcal{K}$.*

Un système d'Euler pour $(T, \mathcal{K}, \mathcal{N})$ est une collection de classes de cohomologie

$$\mathbf{c} = \{c_F \in H^1(F,T) \ \ K \subset_f F \subset \mathcal{K}\}$$

telles que pour toutes $K \subset_f F \subset_f F' \subset \mathcal{K}$

$$\mathrm{cor}_{F',F}(c_{F'}) = \Big(\prod_{\mathfrak{q} \in \Sigma(F'/F)} P_{\mathfrak{q}}(T, \mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}^{-1})\Big) c_F$$

où $\Sigma(F'/F)$ est l'ensemble des places ramifient dans F' et non dans F.

Remarque 3.2. *Soit $\mathcal{K}_{min} := \bigcup_{F,\mathfrak{r}} F(\mathfrak{r})$ où $\mathfrak{r}$ parcourt l'ensemble des idéaux entiers de K, sans facteur carré, premiers à $\mathcal{N}$ et $K \subset F \subset K_\infty$. Alors un système d'Euler pour $(T, \mathcal{K}_{min}, \mathcal{N})$ est complètement déterminé par la collection*

$$\{c_{F(\mathfrak{r})} : \mathfrak{r} \text{ sans facteur carré, premiers à } \mathcal{N} \text{ et } K \subset_f F \subset K_\infty\}$$

telle que pour toutes $K \subset_f F \subset_f F'K_\infty$ et tout $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{r}\mathcal{N}$

$$\mathrm{cor}_{F(\mathfrak{r}\mathfrak{q}),F(\mathfrak{r})}(c_{F(\mathfrak{r}\mathfrak{q})}) = P_{\mathfrak{q}}(T, \mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}^{-1}) c_{F(\mathfrak{r})}$$

$$\mathrm{cor}_{F'(\mathfrak{r}),F(\mathfrak{r})}(c_{F'(\mathfrak{r})}) = c_{F(\mathfrak{r})}.$$

En effet, pour $K \subset_f F' \subset \mathcal{K}_{min}$, il suffit de prendre

$$c_{F'} = \mathrm{cor}_{F(\mathfrak{r}),F'}(c_{F(\mathfrak{r})})$$

où $\mathfrak{r}$ et F sont minimales tel que $F' \subset F(\mathfrak{r})$.

3.1 Exemple classique

Soit F un corps de nombres. Par la théorie de Kummer, $H^1(F, \mathbb{Z}_p(1)$ est le complété p-adique $\varprojlim F^\times / F^{\times p^n}$ du groupe multiplicatif $F^\times$ de F. Fixons une famille $\{\zeta_m : m \geq 1\}$ où les ζ_m sont des racines de l'unité d'ordre m vérifiant $\zeta_{mn}^n = \zeta_m$. Soit ℓ un nombre premier.

- Si ℓ est premier à m, écrivons $1 = ul + vm$. On a alors $\zeta_{m\ell} = \zeta_m^u \zeta_\ell^v$ et

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{Q}(\mu_{m\ell})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(1 - \zeta_{m\ell}) &= N_{\mathbb{Q}(\mu_{m\ell})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(1 - \zeta_m^u \zeta_\ell^v) \\ &= \prod_{i=1}^{\ell-1}(1 - \zeta_m^u \zeta_\ell^i) \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{\ell-1}(1 - \zeta_m^u \zeta_\ell^i)}{1 - \zeta_m^u} = \frac{1 - \zeta_m^{u\ell}}{1 - \zeta_m^u} \\ &= \frac{1 - \zeta_m}{1 - \zeta_m^{\mathrm{Frob}_\ell^{-1}}} = (1 - \zeta_m)^{1 - \mathrm{Frob}_\ell^{-1}}. \end{aligned}$$

- Si ℓ divise m, on a

$$N_{\mathbb{Q}(\mu_{m\ell})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(1-\zeta_{m\ell}) = \prod_{i=0}^{\ell-1}(1-\zeta_{m\ell}\zeta_\ell^i) = 1-\zeta_{m\ell}^\ell = 1-\zeta_m.$$

Pour tout entier $m \geq 1$, posons

$$c_{m\infty} := N_{\mathbb{Q}(\mu_{mp})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(1-\zeta_{mp}) \in \mathbb{Q}(\mu_m)^\times \subset H^1(\mathbb{Q}(\mu_m), \mathbb{Z}_p(1))$$

et

$$c_m := N_{\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q}(\mu_m)^+}(c_{m\infty}).$$

La famille $\{c_m, c_{m\infty}\}$ détermine donc un système d'Euler pour $(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}^{ab}, p)$, puisque pour tout $\ell \neq p$, $P_\ell(\mathbb{Z}_p(1), x) = \det(1 - \mathrm{Frob}_\ell^{-1} x \,|\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p(1), \mathbb{Z}_p(1)) = 1 - x$.

Chapitre 4

Systèmes d'Euler et unités de Stark

L'objectif de ce chapitre est de construire un système d'Euler à partir des unités prédites par la conjecture de Stark [38] et de montrer le théorème 0.1 énoncé dans l'introduction.

Nous conservons les notations du chapitre précédent.

4.1 Systèmes d'Euler

Dans cette section, nous allons construire un système d'Euler pour la représentation $T = \mathbb{Z}_p(1) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1})$ à partir des unités prédites par la conjecture de Stark [38].

Rappelons que

$$\chi : \mathrm{G}_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$$

est un caractère non trivial $\overline{\mathbb{Q}_p}$-irréductible de G_K, qui se factorise à travers une extension finie L de K. Remarquons que la partie finie du conducteur de L_n/K peut s'écrire sous la forme $\mathfrak{f}_n = \mathfrak{h}\mathfrak{s}_n$, où $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{s}_n$ sont premiers entre eux, et $\mathfrak{s}_n$ est divisible uniquement par les idéaux de K qui sont ramifiés dans L_∞/L. Notons

$\mathfrak{f}_\chi$	:	le conducteur de χ ;
$\mathcal{R}$	:	l'ensemble des idéaux $\mathfrak{r}$ de $\mathcal{O}_K$ sans facteur carré premiers à $p\mathfrak{f}_\chi$;
$\widetilde{\mathfrak{a}}$	:	le produit des idéaux premiers distincts divisant $\mathfrak{a}$, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_K$;
$L_{n,\mathfrak{g}}$	:	la sous-extension maximale de L_n de conducteur premier à $\widetilde{\mathfrak{h}}\mathfrak{g}^{-1}$, pour tout $\mathfrak{g} \mid \widetilde{\mathfrak{h}}$.

4.1.1 Unités de Stark

Dans toute la suite, sauf mention express du contraire, on suppose vérifiée l'hypothèse

$$\Sigma_\infty \textit{ contient une seule place } v_0 \textit{ totalement décomposée dans } L/K.$$

Soit $\Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ l'ensemble des places de K formé des places archimédiennes et des places ramifiées dans $L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$. La conjecture de Stark $St(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K, \Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))$, cf. [38, page 89, Conjecture 2.2], prédit l'existence d'un élément $\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}) \in L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$, unique à une racine de l'unité près, telle que

(i) si $|\Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})| \geq 3$, $\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ est une unité de $L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$;

(ii) si $\Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}) = \{v_0, v\}$, alors $|\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})|_w$ est constant pour toute place de $L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ au-dessus de v. De plus $|\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})|_w = 1$ pour toute place w de $L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ tel que $w \nmid v_0$ et $w \nmid v$;

(iii) $L'_{\Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}(0,\rho) = \dfrac{-1}{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})} \displaystyle\sum_{\delta \in \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K)} \rho(\delta) \log |\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^\delta|_{w_0}$, pour tout caractère irréductible $\rho \ : \ \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, où w_0 est une place de $L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ au-dessus de v_0 ;

(iv) l'extension $L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})\big(\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{1/e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}\big)/K$ est abélienne.

Ici $e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}) := |\mu(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))|$ est l'ordre du groupe des racines de l'unité de $L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ et $L(s,\rho)$ est la fonction L d'Artin définie pour les nombres complexes s tels que $\mathfrak{Re}(s) > 1$ par

$$L(s,\rho) = L_{\Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}(s,\rho) = \prod_{v \notin \Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})} (1 - \rho(\mathrm{Frob}_v)(Nv)^{-s})^{-1},$$

où Nv désigne la norme absolue de v. Rappelons que $L(s,\rho)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe $\mathbb{C}$ avec un pôle (éventuel) au point $s = 1$.

Remarque 4.1. *La conjecture de Stark $St(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K, \Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))$ est vraie si $K = \mathbb{Q}$ ou si K est un corps quadratique imaginaire, c.f [38, Proposition I.V.3.9].*

Soit $\mathcal{F}_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ l'annulateur de $\mu(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))$ dans $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K)]$. La description de $\mathcal{F}_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ donnée dans [38, Chap.IV, lemme 1.1] permet de déduire de la propriété (iv) ci-dessus que pour tout $\eta \in \mathcal{F}_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$, il existe un élément $\varepsilon_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})$ de $L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ tel que

$$\varepsilon_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})^{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})} = \varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^\eta. \tag{4.1}$$

Définition 4.2. *Soit $\mathcal{F}_{n,\mathfrak{g}}$ l'annulateur de $\mu(L_{n,\mathfrak{g}})$ dans $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}/K)]$ et soit D_n le $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L_n/K)]$-module engendré par $\mu(L_n)$ et par tous les $\varepsilon_{n,\mathfrak{g},\eta}$, où $\mathfrak{g} \mid \widetilde{\mathfrak{h}}$ et $\eta \in \mathcal{F}_{n,\mathfrak{g}}$. On définit le groupe des unités de Stark par*

$$St_n := D_n \cap \mathcal{E}_n,$$

où $\mathcal{E}_n$ est le groupe des unités de L_n.

Soit n_0 tel que $\mathfrak{s}_{n_0}$ est divisible par tous les idéaux ramifiés dans L_∞/L. En particulier, si $n \geq n_0$ alors $\#\Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}) \geq 2$ pour tout $\mathfrak{g}$ et tout $\mathfrak{r}$. Rappelons le résultat classique suivant

Lemme 4.3. *Soient $\mathfrak{g}$ un idéal divisant $\widetilde{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{r} \in \mathcal{R}$ et $\mathfrak{q} \in \mathcal{R}$ tel que $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{r}$. Alors pour tout $n \geq 0$, on a*

$$N_{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})/L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}(\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{qr}))^{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})} = \varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{(1-\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}^{-1})e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{qr})}. \tag{4.2}$$

De plus pour $m \geq n \geq n_0$,

$$N_{L_{m,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}(\varepsilon_{m,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))^{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})} = \varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{e_{m,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}.$$

Démonstration. Fixons un caractère $\rho : \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$. Vu les propriétés des unités de Stark, il suffit de montrer que

$$|\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})^{N_\mathfrak{q}}|_{w_0^\sigma} = |\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{(1-\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}^{-1})}|_{w_0^\sigma}$$

pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta \in \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K)} \rho(\delta) \log |\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{(1-\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}^{-1})\delta}|_{w_0} &= (1-\rho(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q})) \sum_{\delta \in \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K)} \rho(\delta) \log |\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{\delta}|_{w_0} \\
&= -e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})(\mathfrak{r})(1-\rho(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}))L'_{\Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}(0,\rho) \\
&= -e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})L'_{\Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})}(0,\rho) \\
&= (\frac{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})}) \sum_{\delta \in \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})/K)} \rho(\delta) \log |\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})^{\delta}|_{w_0} \\
&= (\frac{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})}) \sum_{\delta \in \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K)} \rho(\delta) \log |\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})^{N_\mathfrak{q}\delta}|_{w_0}
\end{aligned}$$

où $N_\mathfrak{q} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})/L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})} \sigma$, et donc

$$|\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{rq})^{N_\mathfrak{q}}|_{w_0^\sigma} = |\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{(1-\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}^{-1})}|_{w_0^\sigma}$$

pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/K)$. Par suit

$$|\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}\mathfrak{q})^{N_\mathfrak{q}}|_w = |\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{(1-\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}^{-1})}|_w$$

pour toute place w de $L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$. D'où

$$N_{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}\mathfrak{q})/L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}(\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{q}\mathfrak{r}))^{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})} = \varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{(1-\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}^{-1})e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{q}\mathfrak{r})}.$$

De même on montre

$$N_{L_{m,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}(\varepsilon_{m,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))^{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})} = \varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})^{e_{m,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}.$$

pour $m \geq n \geq n_0$, puisque $\Sigma_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}) = \Sigma_{m,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$. □

4.1.2 Système d'Euler pour la représentation $\mathbb{Z}_p(1)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1})$.

Rappelons que pour tout corps de nombres F, il existe un isomorphisme canonique

$$v_F : \widehat{F^\times} \longrightarrow H^1(F, \mathbb{Z}_p(1)). \tag{4.3}$$

De plus, si F'/F est une extension galoisienne finie de corps de nombres alors

$$v_F \circ N_{F'/F} = \mathrm{cor}_{F,F'} \circ v_{F'}.$$

Soit $\mathcal{K}$ l'union de tous les corps $L_n(\mathfrak{r})$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{r} \in \mathcal{R}$. Posons $\mathcal{G}_\mathcal{K} := \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/K)$ et notons $\Lambda(\mathcal{G}_\mathcal{K}) := \mathbb{Z}_p[[\mathcal{G}_\mathcal{K}]]$ l'algèbre d'Iwasawa de $\mathcal{G}_\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{F}_\infty$ l'idéal de $\Lambda(\mathcal{G}_\mathcal{K})$ annulateur des racines de l'unité de $\mathcal{K}$ d'ordre une puissance de p. Comme pour la formule (4.1), on peut montrer que pour tous $\eta \in \mathcal{F}_\infty$, $\mathfrak{r} \in \mathcal{R}$ et $\mathfrak{g} \mid \widetilde{\mathfrak{h}}$, il existe un élément $\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r}) \in \widehat{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}^\times$ tel que

$$\widehat{\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}^{\eta} = (\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r}))^{e_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}.$$

Rappelons que $\widehat{\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}$ est l'image de $\varepsilon_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})$ par l'application canonique

$$L_{n,\mathfrak{g}}^\times(\mathfrak{r}) \longrightarrow \widehat{L_{n,\mathfrak{g}}^\times(\mathfrak{r})} \cong H^1(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}), \mathbb{Z}_p(1)).$$

Remarque 4.4. *En utilisant le lemme* 4.3, *on peut montrer que pour tous* $\eta \in \mathcal{F}_\infty$, $\mathfrak{r} \in \mathcal{R}$, $\mathfrak{g} \mid \widetilde{\mathfrak{h}}$ *et* $\mathfrak{q} \in \mathcal{R}$ *tel que* $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{r}$

(i) Il existe une racine de l'unité $\zeta \in \mu(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))$ *tel que*

$$N_{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}\mathfrak{q})/L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}(\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{q}\mathfrak{r})) = (\zeta\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r}))^{(1-\mathrm{Frob}_\mathfrak{q}^{-1})}$$

pour tout $n \geq 0$.

(ii) Il existe une racine de l'unité $\zeta \in \mu(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))$ tel que

$$N_{L_{m,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})/L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}(\widehat{\varepsilon}_{m,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})) = \zeta \widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})$$

pour $m \geq n \geq n_0$.

Rappelons que la partie finie du conducteur de L_n/K peut s'écrire sous la forme $\mathfrak{f}_n = \mathfrak{h}\mathfrak{s}_n$, où $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{s}_n$ sont premiers entre eux, et $\mathfrak{s}_n$ est divisible uniquement par les idéaux de K qui sont ramifiés dans L_∞/L. Dans toute la suite, soit

$\mathfrak{g}$: un idéal de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K, divisant $\widetilde{\mathfrak{h}}$;
$\mathfrak{f}_\chi$: le conducteur de χ.

Si $\mathfrak{r} \in \mathcal{R}$ et $\widetilde{\mathfrak{f}_\chi}$ divise $\mathfrak{g}\widetilde{\mathfrak{s}}_0$, alors pour tout $n \geq 0$, $\chi(G_{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}) = 1$ et donc

$$H^1(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}), \mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}) \cong H^1(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}), \mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1})).$$

L'isomorphisme (4.3) induit donc un isomorphisme

$$\widehat{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}^\times \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}) \xrightarrow{\sim} H^1(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}), \mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))\ .$$

Pour simplifier les notations, on identifie $\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r}) \otimes 1_{\chi^{-1}}$ avec son image par cet isomorphisme. Posons

$$c_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r}) := \begin{cases} \mathrm{cor}_{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}),K_n(\mathfrak{r})}(\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r}) \otimes 1_{\chi^{-1}}), & \text{si } n \geq n_0\,; \\ \mathrm{cor}_{L_{n_0,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}),K_n(\mathfrak{r})}(\widehat{\varepsilon}_{n_0,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r}) \otimes 1_{\chi^{-1}}), & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Proposition 4.5. *Supposons que l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ est vérifiée, et soient $\mathfrak{g}$ un idéal sans facteur carré de $\mathcal{O}_K$ et $\eta \in \mathcal{F}_\infty$. Si $\widetilde{\mathfrak{f}_\chi}$ divise $\mathfrak{g}\widetilde{\mathfrak{s}}_0$ alors la famille $\{c_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})\}_{n\geq 0,\,\mathfrak{r}\in\mathcal{R}}$ définit un système d'Euler pour $(\mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}), \mathcal{K}_{min}, p\mathfrak{f}_\chi)$, où $\mathcal{K}_{min}$ est l'union de tous les corps $K_n(\mathfrak{r})$, $n \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{r} \in \mathcal{R}$.*

Démonstration. Comme $\widetilde{\mathfrak{f}_\chi} \mid \mathfrak{g}\widetilde{\mathfrak{s}}_0$, on a

$$\chi(\mathrm{G}_{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}) = 1$$

pour tout $\mathfrak{r} \in \mathcal{R}$. Tenant compte de l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, on voit que

$$(\mu(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_{\mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))/K_n(\mathfrak{r}))}} = 1,$$

où $N_{\mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))/K_n(\mathfrak{r}))} = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))/K_n(\mathfrak{r}))} \sigma$. Puisque

$$N_{\mathrm{Gal}(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}))/K_n(\mathfrak{r}))} = \mathrm{res}_{K_n(\mathfrak{r}),L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})} \circ \mathrm{cor}_{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}),K_n(\mathfrak{r})}$$

et la restriction $\mathrm{res}_{K_n(\mathfrak{r}),L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})}$ est un isomorphisme (Lemme 2.9), il s'ensuit que

$$\mathrm{cor}_{L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r}),K_n(\mathfrak{r})}(\mu(L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1})) = 1.$$

En utilisant la remarque 4.4, on en déduit si $\mathfrak{r} \in \mathcal{R}$ et $\mathfrak{q}$ est un idéal premier ne divisant pas $\mathfrak{r}$, alors pour tout entier $n \geq 0$ et tout $m \geq n$, on a

- $\mathrm{cor}_{K_n(\mathfrak{r}\mathfrak{q}),K_n(\mathfrak{r})}(c_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r}\mathfrak{q})) = (c_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r}))^{1-\chi(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}^{-1})}$ et
- $\mathrm{cor}_{K_m(\mathfrak{r}),K_n(\mathfrak{r})}(c_{m,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})) = c_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})$.

$\square$

4.2 Preuve du théorème 0.1

Dans cette section nous allons démontrer le Théorème 0.1 énoncé dans l'introduction.

Théorème 0.1. Supposons satisfaites les hypothèses $(\mathcal{H}_0), \cdots, (\mathcal{H}_5)$. Alors

$$\mathrm{char}((A_\infty)_\chi) \quad \text{divise} \quad \mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{St_\infty})_\chi).$$

On conserve les notations des sections précédentes. Dans tout le reste de cette section

$$T = \mathbb{Z}_p(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}).$$

Pour tout système d'Euler $\mathbf{c}$ de T, on note

$$\mathbf{c}_{K,\infty} := (c_F)_{K \subset_f F \subset K_\infty}$$

l'élément correspondant dans $H^1_{Iw}(K,T) := \varprojlim_n H^1(K_n,T)$. On suppose que

$$(\mathcal{H}_3) \quad \textit{le caractère } \chi\kappa^{-1} \textit{ est non trivial.}$$

L'une des clés de la preuve du théorème 0.1 est le résultat suivant dû à Rubin

Théorème 4.6. *Soit* $\mathbf{c}$ *un système d'Euler pour la représentation* T *de* G_K*. Sous l'hypothèse* $(\mathcal{H}_3)$*, si* $\mathbf{c}_{K,\infty} \notin H^1_{Iw}(K,T)_{\Lambda-tor}$ *alors le* Λ*-module* $H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)^\vee$ *est de type fini et de torsion. De plus*

$$\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)^\vee) \quad \textit{divise} \quad \mathrm{char}((H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T)/\mathbf{c}_{K,\infty}\Lambda)_{\Lambda-tor}).$$

Démonstration [33, Theorem 2.3.2 et Theorem 2.3.3]) Comme l'action de G_{K_∞} sur T est donnée par $\kappa\chi^{-1}$, elle n'est ni triviale ni donnée par le caractère cyclotomique. En particuliers les hypothèses notés $\mathbf{Hyp}(K_\infty,V)$, $\mathbf{Hyp}(K_\infty,T)$ et $\mathbf{Hyp}(K_\infty/K)$ des théorèmes de Rubin sont automatiquement vérifiées. $\square$

Pour tout $n \geq 0$, notons $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{E}'_n$) le groupe des unités (resp. p-unités) de L_n. Rappelons que la partie finie du conducteur de L_n/K peut s'écrire sous la forme $\mathfrak{f}_n = \mathfrak{h}\mathfrak{s}_n$, où $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{s}_n$ sont premiers entre eux, et $\mathfrak{s}_n$ est divisible uniquement par les idéaux de K qui sont ramifiés dans L_∞/L. Soit $\mathfrak{f}_\chi$ le conducteur de χ et soit $\eta \in \mathcal{F}_\infty$. Pour tout $n \geq n_0$ et tout $\mathfrak{g} \mid \widetilde{\mathfrak{h}}$ tel que $\widetilde{\mathfrak{f}}_\chi \mid \mathfrak{g}\widetilde{\mathfrak{s}}_0$, posons

$$\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta} := \mathrm{cor}_{L_{n,\mathfrak{g}}(1),L_{n,\mathfrak{g}}}(\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta}(1)).$$

Par définition, on a

$$c_{n,\mathfrak{g},\eta} := \mathrm{cor}_{K_n(1),K_n}(c_{n,\mathfrak{g},\eta}(1)) \in H^1(K_n,T)$$

où $c_{n,\mathfrak{g},\eta}(1)$ est défini dans (4.4). Soit maintenant

$$c_{\mathfrak{g},\eta,\infty} = \{c_{n,\mathfrak{g},\eta}\}_{n\geq n_0}$$

l'élément correspondant de $\{c_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})\}_{n\geq 0,\, \mathfrak{r}\in\mathcal{R}}$ dans $H^1_{Iw}(K,T)$, où $c_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})$ est défini dans (4.4).

Remarque 4.7. *Pour tout $n \geq n_0$, on a*

- $c_{n,\mathfrak{g},\eta} = \mathrm{cor}_{L_{n,\mathfrak{g}},K_n}(\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta} \otimes 1_{\chi^{-1}})$
- $\mathrm{res}_{K_n,L_n}(\mathrm{cor}_{L_n,K_n}(\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta} \otimes 1_{\chi^{-1}})) = [L_n : L_{n,\mathfrak{g}}]\mathrm{res}_{K_n,L_n}(c_{n,\mathfrak{g},\eta})$.

Rappelons que les Λ-modules $(\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta$ et $H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T)$ sont isomorphes (voir (2.3)), où $\widehat{\mathcal{E}'_\infty} = \varprojlim_n \widehat{\mathcal{E}'_n}$. Notons

$$\theta : (\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T)$$

Lemme 4.8. *Supposons que $p \nmid [L : L_\chi]$. Posons*

$$\varepsilon_{\mathfrak{g},\eta,\infty} = \{\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta} \otimes 1_{\chi^{-1}}\}_{n\geq n_0}.$$

Alors sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$, on a

$$\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)^\vee) \quad \textit{divise} \quad \mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/\varepsilon^{N_\Delta}_{\mathfrak{g},\eta,\infty}\Lambda)$$

pour tous $\eta \in \mathcal{F}_\infty$ et $\mathfrak{g}$ tel que $\widetilde{\mathfrak{f}}_\chi \mid \mathfrak{g}\widetilde{\mathfrak{s}}_0$.

Démonstration. Soit $n \geq n_0$. Puisque $[L_n : L_{n,\mathfrak{g}}] = [L : L_\mathfrak{g}]$, la remarque ci-dessus montre que

$$(\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta} \otimes 1_{\chi^{-1}})^{N_{\Delta_n}} = [L : L_\mathfrak{g}]\mathrm{res}_{K_n,L_n}(c_{n,\mathfrak{g},\eta}).$$

Comme $L_\chi \subset L_\mathfrak{g} \subset L$ et $p \nmid [L : L_\chi]$, on a

$$\theta(\varepsilon^{N_\Delta}_{\mathfrak{g},\eta,\infty})\Lambda = c_{\mathfrak{g},\eta,\infty}\Lambda.$$

D'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \varepsilon_{\mathfrak{g},\eta,\infty}^{N_\Delta}\Lambda \arrow[r, hook] \arrow[d, "\theta", "\wr"'] & (\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\Delta} \arrow[d, "\theta", "\wr"'] \\ c_{\mathfrak{g},\eta,\infty}\Lambda \arrow[r, hook] & H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty, T) \end{tikzcd} .$$

Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, la proposition 4.5 montre que la famille $\{c_{n,\mathfrak{g},\eta}(\mathfrak{r})\}_{n\geq 0,\, \mathfrak{r}\in\mathcal{R}}$ définit un système d'Euler pour T. L'élément $\varepsilon_{\mathfrak{g},\eta,\infty}^{N_\Delta}$ est non nul. En effet, par définition cet élément est lié à la dérivée en zéro de la fonction $L(s,\chi)$. Or $L'(0,\chi) \neq 0$ vu que $\chi(D_v(L/K) \neq 1$ pour toute place $v \in \Sigma_\infty \backslash \{v_0\}$. Le théorème 2.11 implique que $H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty, T)/c_{\mathfrak{g},\eta,\infty}\Lambda$ est un Λ-module de torsion. Le théorème 4.6 permet de conclure. $\square$

Lemme 4.9. *Le Λ-module $(\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}$ est engendré par les $\varepsilon_{\mathfrak{g},\eta,\infty}^{N_\Delta}$, $\eta \in \mathcal{F}_\infty$ et $\widetilde{\mathfrak{f}}_\chi \mid \mathfrak{g}\widetilde{\mathfrak{s}}_0$*

$$(\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta} = \langle \varepsilon_{\mathfrak{g},\eta,\infty}^{N_\Delta} : \eta \in \mathcal{F}_\infty, \widetilde{\mathfrak{f}}_\chi \mid \mathfrak{g}\widetilde{\mathfrak{s}}_0 \rangle.$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ un idéal entier de K, sans facteurs carrés. Si $\mathfrak{g} \mid \widetilde{\mathfrak{f}}_\chi$ et $\mathfrak{g} \neq \widetilde{\mathfrak{f}}_\chi$ alors pour tout $n \geq 0$ $\chi(\mathrm{Gal}(L_n/L_{n,\mathfrak{g}}) \neq 1$ et donc

$$(\widehat{\varepsilon}_{n,\mathfrak{g},\eta} \otimes 1_{\chi^{-1}})^{N_{\Delta_n}} = 1\,;$$

on en déduit que

$$\varepsilon_{\mathfrak{g},\eta,\infty}^{N_\Delta} = 0$$

pour tout $\eta \in \mathcal{F}_\infty$. D'où le lemme. $\square$

Corollaire 4.10. *Sous les hypothèses et notations du lemme 4.8*

$$\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty, T^*)^\vee) \quad \textit{divise} \quad \mathrm{char}\big((\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\Delta}/(\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}\big).$$

Démonstration. On sait d'après le théorème 2.11 qu'il existe un isomorphisme

$$(\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\Delta} \xrightarrow{\ \sim\ } \Lambda\,.$$

Rappelons que pour tout idéal $\mathfrak{P}$ de Λ, l'idéal caractéristique de $\Lambda/\mathfrak{P}$ est l'unique idéal principal (f) de Λ contenant $\mathfrak{P}$ tel que le quotient $(f)/\mathfrak{P}$ est pseudo-nul. Soit ψ l'homomorphisme composé

$$\psi\ :\ (\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta} \hookrightarrow (\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta} \hookrightarrow \Lambda$$

de sorte qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \Lambda \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\wr"] & \Lambda/\psi((\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}) \arrow[d, two heads] \\
(f) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \Lambda \arrow[r, two heads] & \Lambda/(f) \\
\text{pseudo-nul} & &
\end{tikzcd}$$

où $(f) = \mathrm{char}(\Lambda/\psi((\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}))$. Le lemme 4.8 et le lemme 4.9 affirment que

$$\psi((\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}) \subset \mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty, T^*)^\vee).$$

Par conséquent,
$\mathrm{char}(\Lambda/\psi((\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta})) = \mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta / (\widehat{St_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta})$ est divisible par $\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty, T^*)^\vee)$. $\square$

Remarque 4.11. *Lorsque $(\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta$ est de rang supérieur à 1, en utilisant les éléments de Rubin-Stark au lieu des unités de Stark, on démontre un résultat semblable au corollaire 4.10, cf. théorème 0.3, généralisant ainsi au cas non semi-simple les résultats de Büyükboduk obtenus dans [8, Theorem A].*

Lemme 4.12. *Pour toute place p-adique de K, soit D_{v_∞} le sous-groupe de décomposition de v dans L_∞/K_∞. Alors on a une suite exacte de Λ-modules*

$$0 \to (\widehat{\mathcal{E}_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta \to (\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta \to \bigoplus_{\substack{v|p \\ \chi(D_{v_\infty})=1}} (\mathcal{O}[[S]]/\omega_{n_v}\mathcal{O}[[S]])$$

où $\omega_{n_v} = (S+1)^{p^{n_v}} - 1$ et p^{n_v} est l'indice du groupe de décomposition de v dans K_∞/K.

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a la suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}'_n \longrightarrow \oplus_{v|p}\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L_n/K)/D_v(L_n/K)]$$

où v parcourt l'ensemble des places p-adiques de K. Comme les $\mathbb{Z}$-modules en présence sont de type fini, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}_n \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}'_n} \longrightarrow \oplus_{v|p}\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(L_n/K)/D_v(L_n/K)]\ . \tag{4.5}$$

On peut aisément montrer l'existence d'isomorphismes naturels

$$(\mathcal{O}(\chi^{-1})[\mathrm{Gal}(L_n/K)/D_v(L_n/K)])^{\Delta_n} \simeq \begin{cases} 0, & \text{si } \chi(D_v(L_n/K_n)) \neq 1\,; \\ \mathcal{O}[\mathrm{Gal}(K_n/K)/D_v(K_n/K)], & \text{si } \chi(D_v(L_n/K_n)) = 1\ . \end{cases}$$

Ainsi par passage à la limite projective, on obtient

$$(\mathcal{O}(\chi^{-1})[\mathcal{G}/D_v(L_\infty/K)])^{\Delta} \cong \begin{cases} 0, & \chi(D_{v_\infty}) \neq 1\,; \\ \mathcal{O}[[S]]/(\omega_{n_v})\mathcal{O}[[S]], & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où le lemme. □

Rappelons que pour toute place $v \in \Sigma_p$, $\mathcal{A}_v$ est l'idéal de Λ engendré par les éléments $\sigma - 1$, $\sigma \in \Gamma^{d_v}$, où d_v est l'indice du groupe de décomposition $D_v(K_\infty/K)$ dans $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Notons $\mathcal{A}$ le produit des idéaux $\mathcal{A}_v$, où v parcourt l'ensemble des places p-adiques de K.

Lemme 4.13. *L'idéal* $\mathrm{char}((\widehat{A_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta)$ *divise* $\mathcal{A}.\,\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty, T^*)^\vee)$.

Démonstration. Considérons la suite exacte :

$$(\oplus_{w|p} H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(L_{n,w}, T^*))^\vee \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(L_n, T^*)^\vee \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(L_n, T^*)^\vee \longrightarrow 0\ .$$

Comme D_w opère trivialement sur T^* et D_w/I_w est sans torsion, le $\mathcal{O}$-module $H^1_{ur}(L_{n,w}, T^*)$ est divisible, et donc d'après la proposition 1.7

$$H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(L_{n,w}, T^*) \cong \mathrm{Hom}_c(D_w/I_w, T^*).$$

Ainsi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(L_{n,w}, T^*), D) \cong (D_w/I_w) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}(\chi^{-1})$ et

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\oplus_{w|p} H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(L_{n,w}, T^*), D) \cong \oplus_{v|p} \mathcal{O}(\chi^{-1})[\mathrm{Gal}(L_n/K)/D_v(L_n/K)].$$

Par passage à la limite projective, on a

$$(\mathcal{O}(\chi^{-1})[\mathcal{G}/D_v(L_\infty/K)])_\Delta \simeq \begin{cases} \text{fini}, & \text{si } \chi(D_v(L_\infty/K_\infty)) \neq 1\,; \\ \mathcal{O}[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)/D_v(K_\infty/K)], & \text{si } \chi(D_v(L_\infty/K_\infty)) = 1\ . \end{cases}$$

L'exemple 2.3 montre que

$$\begin{aligned} H^1_{\mathcal{F}^*_{ur}}(L_n, T^*)^\vee &\cong \mathrm{Hom}(A_n, T^*)^\vee \\ &\cong (A_n \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\vee\vee} \\ &\cong A_n \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}) \end{aligned}$$

Par suite la proposition 2.16 permet de conclure. □

Remarque 4.14. *Sous l'hypothèse de Leopoldt, il est bien connu dans le cas où* L *est totalement réel que* $\mathrm{char}((A_\infty)_\chi$ *est premier à l'idéal d'augmentation de* Λ. *D'où dans ce cas*

$$\mathrm{char}((\widehat{A_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta) \quad \textit{divise} \quad \mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty, T^*)^\vee).$$

Proposition 4.15. *Supposons que* $p \nmid [L : L_\chi]$. *Alors sous les hypothèses* $(\mathcal{H}_0)$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$, *on a*

$$\mathrm{char}((\widehat{A_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta) \quad \textit{divise} \quad \mathcal{A}^2\,\mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/(\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}).$$

Démonstration. Le lemme 4.12 montre que l'idéal $\mathrm{char}(\varprojlim((\widehat{\mathcal{E}'_n}/\widehat{\mathcal{E}_n})\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\Delta_n})$ divise $\mathcal{A}$. D'où $\mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}'_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/(\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta)$ divise $\mathcal{A}\,\mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/(\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta})$. D'après le lemme 4.13, on sait que

$$\mathrm{char}((\widehat{A_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta) \quad \text{divise} \quad \mathcal{A}\,\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty, T^*)^\vee).$$

Or d'après le corollaire 4.10, on a

$$\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty, T^*)^\vee) \quad \text{divise} \quad \mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}'_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/(\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}).$$

On en déduit que

$$\mathrm{char}((\widehat{A_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta) \quad \text{divise} \quad \mathcal{A}^2\mathrm{char}(\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/(\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}).$$

$\square$

Démonstration du théorème 0.1. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & (\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta & \longrightarrow & (\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle N_\Delta} & & \downarrow{\scriptstyle N_\Delta} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta & \longrightarrow & (\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \twoheaddownarrow & & \twoheaddownarrow & & & & \\
 & & (\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/(\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta} & \longrightarrow & \widehat{H}^0(\Delta, \widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1})) & & & &
\end{array}$$

où $A = ((\widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{St_\infty})\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta$ et $B = (\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/(\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta$. En utilisant le fait que

$$\mathrm{char}((\widehat{St_\infty}\otimes\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/(\widehat{St_\infty}\otimes\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}).\,\mathrm{char}(B) = \mathrm{char}((\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes\mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta/(\widehat{St_\infty}\otimes\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta}),$$

une simple chasse dans le diagramme ci-dessus montre que

$$\operatorname{char}((\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\Delta}/(\widehat{St_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))^{N_\Delta})$$

divise

$$\operatorname{char}(\widehat{H}^0(\Delta,\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1})).\operatorname{char}(((\widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{St_\infty})\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta).$$

La proposition 4.15 donne donc $\operatorname{char}((\widehat{A_\infty}\otimes\mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta)$ divise $\mathcal{A}^2.\operatorname{char}(\widehat{H}^0(\Delta,\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1})).\operatorname{char}(((\widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{St_\infty})\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta)$. Reste à montrer que le Λ-module $\widehat{H}^0(\Delta,\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))$ est pseudo-nul :

Théorème 4.16. *Sous l'hypothèse ($\mathcal{H}_5$), le Λ-module $\widehat{H}^0(\Delta,\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))$ est pseudo-nul.*

Avant de donner la démonstration du théorème 4.16, remarquons d'abord que

$$\widehat{H}^0(\Delta,\widehat{\mathcal{E}_\infty}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))\cong\varprojlim\widehat{H}^0(\Delta_n,\widehat{\mathcal{E}_n}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1})).$$

Remarquons aussi

$$\widehat{H}^0(\Delta_n,\widehat{\mathcal{E}_n}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))=\widehat{H}^0(\mathrm{Gal}(K_nL_\chi/K_n),\widehat{\mathcal{E}_n(L_\chi)}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}(\chi^{-1}))$$

puisque $p\nmid[L:L_\chi]$, où $\mathcal{E}_n(L_\chi)$ est le groupe des unités de K_nL_χ. On peut donc supposer que $L=L_\chi$.

Dans toute la suite, on suppose que la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour tous les corps L_n. Pour $n\geq 0$ fixé, on choisit un ensemble Σ fini de places de K de sorte que $Cl_\Sigma(L_n)=0$, où $Cl_\Sigma(L_n)$ est le groupe des Σ-classes de L_n. On a alors la suite exacte courte

$$0\longrightarrow U_\Sigma(L_n)\otimes\mathbb{Z}_p\longrightarrow\bigoplus_{w\in\Sigma}\widehat{L_{n,w}^\times}\longrightarrow\mathcal{X}_\Sigma(L_n)\longrightarrow 0$$

où $U_\Sigma(L_n)$ est le groupe des Σ-unités de L_n et $\mathcal{X}_\Sigma(L_n)\simeq H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n),\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee$ est le groupe de Galois de la pro-p-extension abélienne non-ramifiée en dehors de Σ maximale de L_n. En tensorisant par $\mathcal{O}(\chi^{-1})$, on obtient la suite exacte

$$0\longrightarrow H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n),T)\longrightarrow\oplus_{w\in\Sigma}H^1(L_{n,w},T)\longrightarrow H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n),T^*)^\vee\longrightarrow 0$$

où $T=\mathbb{Z}_p(1)\otimes\mathcal{O}(\chi^{-1})$ et $T^*=D(\chi)$. Par cohomologie, on obtient la suite exacte

$$\widehat{H}^{-1}(\Delta_n,H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n),T^*)^\vee)\longrightarrow\widehat{H}^0(\Delta_n,H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n),T))\longrightarrow\widehat{H}^0(\Delta_n,\oplus_{w\in\Sigma}H^1(L_{n,w},T))\,.$$

Lemme 4.17. *Pour tout $n\geq 0$, on a*

- $\widehat{H}^{-1}(\Delta_n, H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi))^\vee) \cong \mathcal{O}(\chi^{-1})_{\Delta_n}$.
- $\widehat{H}^0(\Delta_n, \oplus_{w\in\Sigma} H^1(L_{n,w}, \mathbb{Z}_p(1) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}))) = 0$.

Démonstration. Rappelons que si G est un groupe fini et M est un G-module, on a

$$\widehat{H}^i(G, M^\vee) \cong \widehat{H}^{-i-1}(G, M)^\vee,$$

[9, Corollary 6.5]. En particulier,

$$\widehat{H}^{-1}(\Delta_n, H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi))^\vee) \cong \widehat{H}^0(\Delta_n, H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi)))^\vee.$$

Puisque la p-dimension cohomologique du groupe $\mathrm{G}_\Sigma(L_n)$ ($p > 2$) est égale à 2 et L_n vérifie la conjecture de Leopoldt,

$$H^i(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi)) = 0$$

pour tout $i \geq 2$. La suite spectrale de Hochschild-Serre

$$H^p(\Delta_n, H^q(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi))) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathrm{G}_\Sigma(K_n), D(\chi))$$

entraîne alors que

$$H^2(\Delta_n, H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi))) \cong H^4(\Delta_n, H^0(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi)).$$

Du fait que Δ_n est cyclique, on a

$$\begin{aligned} \widehat{H}^0(\Delta_n, H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi))) &\cong \widehat{H}^2(\Delta_n, H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi))) \\ &\cong H^4(\Delta_n, H^0(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi))) \\ &\cong \widehat{H}^0(\Delta_n, D(\chi)). \end{aligned}$$

Puisque $N_{\Delta_n} D(\chi) = 0$ ($\chi \neq \mathbf{1}$) et $D(\chi)^\vee \cong \mathcal{O}(\chi^{-1})$, il vient

$$\begin{aligned} \widehat{H}^{-1}(\Delta_n, H^1(\mathrm{G}_\Sigma(L_n), D(\chi))^\vee) &\cong \widehat{H}^0(\Delta_n, D(\chi))^\vee \\ &\cong \mathcal{O}(\chi^{-1})_{\Delta_n}. \end{aligned}$$

Si l'on note $\Delta_{n,v}$ le groupe de décomposition de v dans L_n/K_n, le lemme de Shapiro montre que

$$\widehat{H}^0(\Delta_n, \oplus_{w|v} H^1(L_{n,w}, \mathbb{Z}_p(1) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}))) \cong \widehat{H}^0(\Delta_{n,v}, H^1(L_{n,w}, \mathbb{Z}_p(1) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}))).$$

Du fait que la p-dimension cohomologique du groupe absolu d'un corps local est égale à 2 et que $H^2(L_{n,w}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$ (l'analogue de la conjecture de Leopoldt pour les corps locaux), on a

$$H^i(L_{n,w}, D(\chi)) = 0 \text{ pour tout } i \geq 2.$$

La suite spectrale de Hochschild-Serre entraîne de nouveau que

$$H^1(\Delta_{n,v}, H^1(L_{n,w}, D(\chi)) \cong H^3(\Delta_{n,v}, H^0(L_{n,w}, D(\chi)).$$

Rappelons que la dualité locale (1.1) donne $H^1(L_{n,w}, \mathbb{Z}_p(1)\otimes\mathcal{O}(\chi^{-1})) \cong H^1(L_{n,w}, D(\chi))^\vee$. Comme $\Delta_{n,v}$ est cyclique, on montre comme ci-dessus que

$$\begin{aligned}\widehat{H}^0(\Delta_{n,v}, H^1(L_{n,w}, \mathbb{Z}_p(1)\otimes\mathcal{O}(\chi^{-1}))) &\cong \widehat{H}^1(\Delta_{n,v}, H^1(L_{n,w}, D(\chi)))^\vee \\ &\cong \widehat{H}^0(\Delta_{n,v}, \mathcal{O}(\chi^{-1}))\end{aligned}$$

Ainsi si $\chi(\Delta_{n,v}) \neq 1$, $H^0(\Delta_{n,v}, \mathcal{O}(\chi^{-1})) = 0$ et donc $\widehat{H}^0(\Delta_{n,v}, \mathcal{O}(\chi^{-1})) = 0$. Sinon $\Delta_{n,v} = 1$ et donc $\widehat{H}^0(\Delta_{n,v}, \mathcal{O}(\chi^{-1})) = 0$. D'où le lemme. □

Démonstration du théorème 4.16. Pour $n \geq 0$ et Σ assez gros ($Cl_\Sigma(L_n) = 0$). Considérons la suite exacte

$$U_\Sigma(L_n)_\chi \xrightarrow{N^\Sigma_{\Delta_n}} U_\Sigma(L_n)^\chi \longrightarrow \mathrm{coker} N^\Sigma_{\Delta_n} \longrightarrow 0\ . \tag{4.6}$$

Le lemme ci-dessus montre que

$$|\mathrm{coker} N^\Sigma_{\Delta_n}| \leq |\mathcal{O}(\chi^{-1})_\Delta|.$$

Passant à la limite inductive sur Σ, on obtient la suite exacte

$$\varinjlim_\Sigma U_\Sigma(L_n)_\chi \longrightarrow \varinjlim_\Sigma U_\Sigma(L_n)^\chi \longrightarrow \varinjlim_\Sigma \mathrm{coker} N^\Sigma_{\Delta_n} \longrightarrow 0$$

Or

$$\varinjlim_\Sigma U_\Sigma(L_n)_\chi \cong (\varinjlim_\Sigma U_\Sigma(L_n))_\chi \cong (L_n^\times)_\chi$$

et (du fait que les morphismes de transitions sont injectifs)

$$\varinjlim_\Sigma U_\Sigma(L_n)^\chi \cong (\varinjlim_\Sigma U_\Sigma(L_n))^\chi \cong (L_n^\times)^\chi$$

Ainsi pour tout $n \geq 0$, nous avons une suite exacte

$$(L_n^\times)_\chi \xrightarrow{N_{\Delta_n}} (L_n^\times)^\chi \longrightarrow \mathrm{coker} N_{\Delta_n} \longrightarrow 0$$

avec $|\mathrm{coker} N_{\Delta_n}| \leq |\mathcal{O}(\chi^{-1})_\Delta|$. On passe maintenant à la limite projective sur n, on obtient

$$(\mathcal{E}'_\infty)_\chi \longrightarrow (\mathcal{E}'_\infty)^\chi \longrightarrow \varprojlim \mathrm{coker} N_{\Delta_n} \longrightarrow 0$$

car $\varprojlim \widehat{L_n^{\times}} \cong \varprojlim(\mathcal{E}'_n \otimes \mathbb{Z}_p)$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{coker}(\ (\mathcal{E}'_\infty)_\chi \xrightarrow{N_\Delta} (\mathcal{E}'_\infty)^\chi\ )$$

est pseudo-nul. Pour finir, la suite exacte (4.5) et l'hypothèse ($\mathcal{H}_2$) montrent que

$$\widehat{\mathcal{E}'_n}/\widehat{\mathcal{E}_n}$$

est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini de rang borné indépendamment de n. Il s'ensuit que le Λ-module

$$\mathrm{coker}(\ (\mathcal{E}_\infty)_\chi \xrightarrow{N_\Delta} (\mathcal{E}_\infty)^\chi\ )$$

est pseudo-nul. $\square$

Chapitre 5

Systèmes d'Euler et éléments de Rubin-Stark

5.1 Éléments de Rubin-Stark

Soit K un corps de nombres et soit F une extension abélienne finie de K de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(F/K)$. Fixons un ensemble S fini de places de K contenant les places infinies et les places ramifiées dans F/K, et un deuxième ensemble $\mathcal{T}$ de places de K disjoint de S. Posons $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$. Pour tout $\rho \in \widehat{G}$, on définit la fonction L d'Artin modifiée associée à ρ par

$$L_{S,\mathcal{T}}(s,\rho) = \prod_{\mathfrak{p}\notin S}(1-\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}})\mathbf{N}\mathfrak{p}^{-s})^{-1}\prod_{\mathfrak{p}\in\mathcal{T}}(1-\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}})\mathbf{N}\mathfrak{p}^{1-s}).$$

Il est bien connu, e.g. [38, Proposition I.3.4], que

$$r_S(\rho) = \mathrm{ord}_{s=0}L_{S,\mathcal{T}}(s,\rho) = \begin{cases} |\{v \in S \ : \ \rho(D_v(F/K)) = 1\}|, & \rho \neq 1\,; \\ |S|-1, & \rho = 1. \end{cases}$$

où $D_v(F/K)$ est le sous-groupe de décomposition de v dans F/K.

Suivant [38], on définit l'élément de Stickelberger

$$\Theta_{S,\mathcal{T}}(s) = \Theta_{S,\mathcal{T},F/K}(s) = \sum_{\rho\in\widehat{G}} L_{S,\mathcal{T}}(s,\rho^{-1})e_\rho$$

où $e_\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\rho(\sigma)\sigma^{-1}$.

Avant d'énoncer la conjecture de Rubin-Stark, faisons les hypothèses $\mathbf{H}(F/K, S, \mathcal{T}, r)$ suivantes :

(i) l'ensemble S contient les places infinies et les places ramifiées dans F/K.

(ii) l'ensemble S contient au moins r places totalement décomposées dans F/K.

(iii) $|S| \geq r+1$

(iv) $\mathcal{T} \neq \emptyset$, $S \cap \mathcal{T} = \emptyset$ et $U_{S,\mathcal{T}}(F)$ est sans torsion

où $U_{S,\mathcal{T}}(F)$ est le sous-groupe de S-unités de F formé des éléments congrus à 1 modulo les éléments de $\mathcal{T}$.

Remarque 5.1. *Les hypothèses (ii) et (iii) assurent que la fonction* $s^{-r}\Theta_{S,\mathcal{T}}(s)$ *est holomorphe en* $s=0$.

Soit $V = \{v_1, ..., v_r\}$ un sous-ensemble de l'ensemble des places de K totalement décomposées dans F/K et soit $W = \{w_1, ..., w_r\}$ un ensemble de places de F telles que $w_i \mid v_i$. Pour tout $\mathbb{Z}[G]$-module M et tout anneau commutatif $\mathbf{R}$, on note $\mathbf{R}M$ le produit tensoriel $\mathbf{R} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. On définit $\mathcal{L}_{S,V}$ comme étant le composé

$$\mathbb{R}U_S(F) \xrightarrow{\mathcal{L}_S} \mathbb{R}S_F \xrightarrow{\pi_V} \mathbb{R}V_F$$

où $\mathcal{L}_S$ est le plongement logarithmique de $U_S(F)$;

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}_S : & U_S(F) & \longrightarrow & \mathbb{R}S_F := \bigoplus_{w \in S_F} \mathbb{R}w \\ & \varepsilon & \longmapsto & -\sum_{w \in S_F} \log|\varepsilon|_w w \end{array}$$

et π_V est la projection de $\mathbb{R}S_F = \mathbb{R}V_F \oplus \mathbb{R}V'_F$ sur $\mathbb{R}V_F$, $S = V \cup V'$.

Soit $x \in \mathbb{R}U_S(F)$. Comme W est une $\mathbb{R}[G]$-base de $\mathbb{R}V_F$, $\mathcal{L}_{S,V}(x)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$\mathcal{L}_{S,V}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{w_i}(x) w_i$$

avec $\lambda_{w_i}(x) \in \mathbb{R}[G]$. Un raisonnement facile montre que $\lambda_{w_i} : \mathbb{R}U_S(F) \longrightarrow \mathbb{R}[G]$ est le $\mathbb{R}[G]$-morphisme vérifié

$$\lambda_{w_i}(1 \otimes \varepsilon) = -\sum_{g \in G} \log|\varepsilon^g|_{w_i} g^{-1}.$$

Soit

$$\textstyle\bigwedge_{\mathbb{R}[G]}^r \mathcal{L}_{S,V} : \quad \bigwedge_{\mathbb{R}[G]}^r \mathbb{R}U_S(F) \longrightarrow \bigwedge_{\mathbb{R}[G]}^r \mathbb{R}V_F = \mathbb{R}[G](w_1 \wedge ... \wedge w_r)$$

le $\mathbb{R}[G]$-morphisme induit par $\mathcal{L}_{S,V}$. Comme $\{w_1 \wedge ... \wedge w_r\}$ est une $\mathbb{R}[G]$-base de $\bigwedge_{\mathbb{R}[G]}^r \mathbb{R}V_F$, on peut définir un unique $\mathbb{R}[G]$-morphisme "régulateur"

$$\mathrm{R}_{F/K,W} : \textstyle\bigwedge_{\mathbb{R}[G]}^r \mathbb{R}U_S(F) \longrightarrow \mathbb{R}[G]$$

par

$$\bigwedge_{\mathbb{R}[G]}^{r} \mathcal{L}_{S,V}(x) = \mathrm{R}_{F/K,W}(x)(w_1 \wedge ... \wedge w_r).$$

De façon explicite, $\mathrm{R}_{F/K,W}(x_1 \wedge ... \wedge x_r) = \det(\lambda_{w_i}(x_j))_{i,j=1}^{r}$, $x_i \in \mathbb{R}U_S(F)$.

Soit maintenant M un $\mathbb{Z}[G]$-module. On note $\widetilde{M}$ l'image de M par l'application canonique $M \longrightarrow \mathbb{Q}M$. On définit

$$\widetilde{M}_{r,S} := \left\{x \in \widetilde{M} \mid \ e_\rho.x = 0 \text{ dans } \mathbb{C}M \text{ pour tout } \rho \in \widehat{G} \text{ tel que } r_S(\rho) > r\right\}.$$

Remarquons que si M est un $\mathbb{Q}[G]$-module alors $\widetilde{M}_{r,S} = e_{S,r}M$, que l'on note $M_{r,S}$, où $e_{S,r} = \sum_{r_S(\rho)=r} e_\rho$.

Lemme 5.2.

(i) Les modules $(\mathbb{Q}U_S(F))_{r,S}$ *et* $(\mathbb{Q}[G]_{r,S})^r$ *sont isomorphes sur* $\mathbb{Q}[G]$.

(ii) Soit $\varepsilon \in U_S(F)$ *tel que* $1 \otimes \varepsilon \in (\mathbb{Q}U_S(F))_{S,r}$. *Si* $|S| > r+1$ *alors* $\varepsilon \in U_V(F)$.

Démonstration. L'assertion (i) est une conséquence directe de

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(e_\rho(\mathbb{C}U_S(F))_{r,S})\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(e_\rho((\mathbb{C}[G]_{r,S})^r)\right) = \begin{cases} r, & \text{si } r_S(\rho) = r\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la seconde, remarquons que

$$e_{S,r}\mathbb{R}V_F' = \begin{cases} 0, & \text{si } |S| > r+1\,; \\ \mathbb{R}\sum_{w|v_{r+1}} w, & \text{si } |S| = r+1 \ (V' = \{v_{r+1}\}). \end{cases}$$

où V' est l'ensemble défini ci-dessus. Comme $1 \otimes \varepsilon \in (\mathbb{Q}U_S(F))_{S,r}$ et $|S| > r+1$, $\mathcal{L}_S(1 \otimes \varepsilon) \in e_{S,r}\mathbb{R}S_F \subset \mathbb{R}V_F$. D'où $\varepsilon \in U_V(F)$. $\square$

En identifiant $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(U_{S,\mathcal{T}}(F), \mathbb{Z}[G])$ à un sous module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}U_{S,\mathcal{T}}(F), \mathbb{C}[G])$, pour tout r-uplet $(\phi_1, \cdots, \phi_r) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(U_{S,\mathcal{T}}(F), \mathbb{Z}[G])^r$, on définit

$$\begin{array}{rccc} \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r : & \mathbb{C}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r U_{S,\mathcal{T}}(F) & \longrightarrow & \mathbb{C}[G] \\ & u_1 \wedge \cdots \wedge u_r & \longmapsto & \det\limits_{1 \le i,j \le r}(\phi_i(u_j)) \end{array}$$

et

$$\Lambda_{S,\mathcal{T}} := \left\{ \begin{array}{c} x \in (\mathbb{Q}\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^r U_{S,\mathcal{T}}(F))_{r,S} \quad | \quad (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r)(x) \in \mathbb{Z}[G], \\ \forall \phi_1, \cdots, \phi_r \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(U_{S,\mathcal{T}}(F), \mathbb{Z}[G]) \end{array} \right\}.$$

Remarque 5.3. *Il est immédiat que si $r = 1$ alors $\Lambda_{S,\mathcal{T}} = \widetilde{U_{S,\mathcal{T}}(F)}_{S,1}$. De manière générale, si $r > 1$, on a les inclusions suivantes*

$$| G |^n \Lambda_{S,\mathcal{T}} \subset (\widetilde{\bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,\mathcal{T}}})_{S,r} \subset \Lambda_{S,\mathcal{T}},$$

pour un entier n suffisamment grand. De plus, comme $U_{S,\mathcal{T}}(F)$ est d'indice fini dans $U_S(F)$,

$$\mathbb{Q}\Lambda_{S,\mathcal{T}} = (\mathbb{Q} \bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_{S,\mathcal{T}}(F))_{r,S} = (\mathbb{Q} \bigwedge_{\mathbb{Z}[G]}^{r} U_S(F))_{r,S}. \tag{5.1}$$

Soit $\Theta_{S,\mathcal{T}}^{(r)}(0)$ le coefficient de s^r dans la série de Taylor de $\Theta_{S,\mathcal{T}}$:

$$\Theta_{S,\mathcal{T}}^{(r)}(0) := \lim_{x \to 0} s^{-r} \Theta_{S,\mathcal{T}}^{(r)}(s).$$

Conjecture 1. $\mathbf{RS}(F/K, S, \mathcal{T}, r)$ *Supposons que les hypothèses $\mathbf{H}(F/K, S, \mathcal{T}, r)$ sont vérifiées. Alors il existe un unique élément $\varepsilon_{F,S,\mathcal{T}} \in \Lambda_{S,\mathcal{T}}$ tel que*

$$\mathrm{R}_{F/K,W}(\varepsilon_{F,S,\mathcal{T}}) = \Theta_{S,\mathcal{T}}^{(r)}(0).$$

Remarque 5.4.

- *La validité de la conjecture $\mathbf{RS}(F/K, S, \mathcal{T}, r)$ est indépendante du choix des places v_i et w_i.*

- *Soit $\varepsilon_{F,S,\mathcal{T}}$ l'élément (conjectural) de Rubin-Stark. Le lemme 5.2 et l'équation* (5.1) *assurent que l'élément $1 \otimes \varepsilon_{F,S,\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}\Lambda_{S,\mathcal{T}}$ peut s'écrire sous la forme $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$, avec $x_i \in (\mathbb{Q}U_S(F))_{r,S}$. Or on peut écrire*

$$x_i = \frac{1}{n_i} \otimes \varepsilon_i,\ n_i \in \mathbb{Z}_{n \geq 1} \text{ et } 1 \otimes \varepsilon_i \in (\mathbb{Q}U_S(F))_{S,r}$$

  D'où

$$1 \otimes \varepsilon_{F,S,\mathcal{T}} = \frac{1}{n}(1 \otimes \varepsilon_1) \wedge ... \wedge (1 \otimes \varepsilon_r),\ n = n_1 ... n_r.$$

  Par suite, il existe $\beta \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\Theta_{S,\mathcal{T}}^{(r)}(0) = \beta \det \big(\lambda_{w_i}(1 \otimes \varepsilon_j)\big)_{i,j=1}^{r} = \beta \det \big(\sum_{g \in G} \log |\varepsilon_j^g|_{w_i} g^{-1}\big)_{i,j=1}^{r}.$$

Supposons maintenant que K est un corps de nombres totalement réel de degré $r = [K : \mathbb{Q}]$, K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K et conservons les notations des chapitres précédents. En particulier,

$$\chi : \mathrm{G}_K \longrightarrow \mathcal{O}^\times$$

est un caractère non trivial $\overline{\mathbb{Q}_p}$-irréductible de G_K, qui se factorise à travers une extension finie L de K. Fixons un ensemble S fini de places de K contenant à la fois les places infinies et au moins une place finie, mais ne contient aucune place p-adique. Pour toute extension galoisienne F de K, notons $\mathrm{Ram}(F/K)$ l'ensemble des places de K qui se ramifient dans F/K. Posons

$$S_F = S \cup \mathrm{Ram}(F/K).$$

Suivant [8], on choisit un ensemble $\mathcal{T} = \{\mathfrak{q}_0\}$, où $\mathfrak{q}_0$ est un idéal premier tel que $p \nmid (\mathbf{N}\mathfrak{q}_0 - 1)$ et $\mathfrak{q}_0 \nmid 2$, pour un tel ensemble $\mathcal{T} = \{\mathfrak{q}_0\}$, on a

$$\widehat{U_{S_F,\mathcal{T}}(F)} = \widehat{U_{S_F}(F)}.$$

De plus, si F est un corps totalement réel, les hypothèses $\mathbf{H}(F/K, S_F, \{\mathfrak{q}_0\}, r)$ sont vérifiées.

Avec les notations de paragraphe 4.1, posons

$$\mathcal{K}_0 = \{L_{n,\mathfrak{g}},\ L_{n,\mathfrak{g}}(\mathfrak{r})\ :\ \mathfrak{r} \text{ est premier à } \mathfrak{q}_0\mathfrak{f}_\chi p,\ \mathfrak{g} \mid \widetilde{\mathfrak{h}} \text{ et } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Dans toute la suite, sauf mention express du contraire, on suppose vérifiée l'hypothèse

$$(\mathcal{H}'_0) \quad \textit{le corps } L \textit{ est totalement réel.}$$

Donc pour toute extension $F \in \mathcal{K}_0$, les hypothèses $\mathbf{H}(F/K, S_F, \{\mathfrak{q}_0\}, r)$ sont vérifiées. Supposons que

la conjecture $\mathbf{RS}(F/K, S_F, \{\mathfrak{q}_0\}, r)$ *est vérifiée pour toute extension* $F \in \mathcal{K}_0$.

Définition 5.5. *Soit* $\varepsilon_{n,\mathfrak{g}} = \varepsilon_{L_{n,\mathfrak{g}}, S_{L_{n,\mathfrak{g}}}, \{\mathfrak{q}_0\}}$, *et soit* $\mathcal{E}_n$ *le groupe des unités de* L_n. *On définit* RS_n *comme étant le* $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L_n/K)]$*-module engendré par l'image inverse des éléments* $1 \otimes \varepsilon_{n,\mathfrak{g}}$ *par l'application* $\bigwedge^r \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathbb{Q} \bigwedge^r \mathcal{E}_n$ *pour tout* $\mathfrak{g} \mid \widetilde{\mathfrak{h}}$.

Rappelons que pour tout corps de nombres F, $H^1(F, \mathbb{Z}_p(1)) \cong \widehat{F^\times}$. Puisque $\chi(G_{L_n(\mathfrak{r})}) = 1$, on a

$$H^1(L_n(\mathfrak{r}), \mathbb{Z}_p(1)) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}) \cong H^1(L_n(\mathfrak{r}), \mathbb{Z}_p(1) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1})).$$

Par suite

$$\widehat{L_n(\mathfrak{r})^\times} \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}) \cong H^1(L_n(\mathfrak{r}), \mathbb{Z}_p(1) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1})) = H^1(L_n(\mathfrak{r}), T) \qquad (5.2)$$

Soit $\varepsilon_n(\mathfrak{r}) = \varepsilon_{L_n(\mathfrak{r}), S_{L_n(\mathfrak{r})}, \{\mathfrak{q}_0\}}$ l'élément de Rubin-Stark associé à $\mathbf{RS}(L_n(\mathfrak{r})/K, S_{L_n(\mathfrak{r})}, \{\mathfrak{q}_0\}, r)$. D'après la remarque 5.4, on peut écrire $1 \otimes \varepsilon_n(\mathfrak{r})$ d'une manière unique sous la forme $\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_r$, avec $\varepsilon_i \in \mathbb{Q} \otimes L_n(\mathfrak{r})^\times$. On pose

$$\varepsilon_{n,\chi}(\mathfrak{r}) := \widehat{\varepsilon_1} \otimes 1_{\chi^{-1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\varepsilon_r} \otimes 1_{\chi^{-1}} \qquad (5.3)$$

où $\widehat{\varepsilon_i}$ est l'image de ε_i par l'application $\mathbb{Q} \otimes L_n(\mathfrak{r})^\times \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} L_n(\mathfrak{r})^{\times,\wedge}$. L'isomorphisme (5.2) permet d'identifier $\varepsilon_{n,\chi}(\mathfrak{r})$ à son image dans $\mathbb{Q}_p \otimes \bigwedge^r H^1(L_n(\mathfrak{r}), T)$. Par suite, pour tout $\mathfrak{r}$ premier à $\mathfrak{q}_0 \mathfrak{f}_\chi p$ et tout $n \geq 0$, on définit

$$c_n(\mathfrak{r}) = \mathrm{cor}^{(r)}_{L_{n+1}(\mathfrak{r}), K_n(\mathfrak{r})}(\varepsilon_{n+1,\chi}(\mathfrak{r})), \quad c_n = \mathrm{cor}^{(r)}_{L_{n+1}, K_n}(\varepsilon_{n+1,\chi}) \qquad (5.4)$$

où $\mathrm{cor}^{(r)}_{L_{n+1}(\mathfrak{r}), K_n(\mathfrak{r})}$ est l'application

$$\mathbb{Q}_p \otimes \bigwedge^r H^1(L_{n+1}(\mathfrak{r}), T) \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes \bigwedge^r H^1(K_n(\mathfrak{r}), T)$$

induite par

$$\mathrm{cor}_{L_{n+1}(\mathfrak{r}), K_n(\mathfrak{r})} : H^1(L_{n+1}(\mathfrak{r}), T) \longrightarrow H^1(K_n(\mathfrak{r}), T) \, .$$

Soit G un groupe fini et soit M un $\mathcal{O}[G]$-module, on dispose d'une application

$$\iota_M : \bigwedge^{r-1}_{\mathcal{O}[G]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[G]}(M, \mathcal{O}[G]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Phi[G]}(\Phi \otimes \bigwedge^r_{\mathcal{O}[G]} M, \Phi \otimes M) \, . \qquad (5.5)$$

En effet, l'application canonique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[G]}(M, \mathcal{O}[G]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Phi[G]}(\Phi \otimes M, \Phi[G])$ induit un morphisme

$$\bigwedge^{r-1}_{\mathcal{O}[G]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[G]}(M, \mathcal{O}[G]) \longrightarrow \bigwedge^{r-1}_{\Phi[G]} \mathrm{Hom}_{\Phi[G]}(\Phi \otimes M, \Phi[G]) \, .$$

D'autre part, considérons l'application

$$f : \mathrm{Hom}_{\Phi[G]}(\Phi \otimes M, \Phi[G]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Phi[G]}(\bigwedge^s_{\Phi[G]} \Phi \otimes M, \bigwedge^{s-1}_{\Phi[G]} \Phi \otimes M)$$

définie par $f(\psi)(m_1 \wedge \cdots \wedge m_s) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i+1} \psi(m_i) m_1 \wedge \cdots \wedge m_{i-1} \wedge m_{i+1} \cdots \wedge m_s$,. Par itération, on obtient un morphisme

$$\bigwedge^{r-1}_{\Phi[G]} \mathrm{Hom}_{\Phi[G]}(\Phi \otimes M, \Phi[G]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Phi[G]}(\bigwedge^r_{\Phi[G]} \Phi \otimes M, \Phi \otimes M) \, .$$

Rappelons que pour toutes extensions galoisiennes finies $F \subset F'$ de K, la norme $N_{F'/F}$ induit un morphisme

$$\bigwedge\nolimits_{\mathcal{O}[\Delta_{F'}]}^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_{F'}]}(H^1(F',T),\mathcal{O}[\Delta_{F'}]) \longrightarrow \bigwedge\nolimits_{\mathcal{O}[\Delta_F]}^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(H^1(F,T),\mathcal{O}[\Delta_F]) \tag{5.6}$$

où $\Delta_F = \mathrm{Gal}(F/K)$. En particulier, la famille

$$\Big(\bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_{K_n(\mathfrak{r})}]}(H^1(K_n(\mathfrak{r}),T),\mathcal{O}[\Delta_{K_n(\mathfrak{r})}])\Big)_{n,\mathfrak{r}}$$

forme un système projectif pour les morphismes (5.6).

Définition 5.6. *Soit* $\Psi = \{\psi_{n,\mathfrak{r}}\}_{n,\mathfrak{r}}$ *un élément arbitraire de*

$$\varprojlim_{n,\mathfrak{r}} \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_{K_n(\mathfrak{r})}]}(H^1(K_n(\mathfrak{r}),T),\mathcal{O}[\Delta_{K_n(\mathfrak{r})}]).$$

On note aussi $\psi_{n,\mathfrak{r}}$ *l'image de* $\psi_{n,\mathfrak{r}}$ *par l'application* (5.5) *et* $M = H^1(K_n(\mathfrak{r}),T)$. *On définit*

$$\varepsilon_{n,\Psi}(\mathfrak{r})^{\chi} := \psi_{n,\mathfrak{r}}(c_n(\mathfrak{r})) \quad et \quad \varepsilon_{n,\Psi}^{\chi} := \psi_n(c_n),$$

où $c_n(\mathfrak{r})$ *est défini dans* (5.4). *Le corollaire* 1.3 *de [32] montre que*

$$\varepsilon_{n,\Psi}(\mathfrak{r})^{\chi} \in H^1(K_n(\mathfrak{r}),T) \quad et \quad \varepsilon_{n,\Psi}^{\chi} \in H^1(K_n,T).$$

Proposition 5.7. *La famille* $\{\varepsilon_{n,\Psi}(\mathfrak{r})^{\chi}\}_{n\geq 0,\mathfrak{r}}$ *détermine un système d'Euler pour* $(T,\mathcal{K}_{min},\mathfrak{q}_0 p\mathfrak{f}_{\chi})$.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 6.2 de [32]. □

5.2 Condition locale en p

L'une des clés de la démonstration du théorème 0.3 est la construction d'une "bonne" condition locale en p. Précisément, avec le bon choix de la condition locale en p on peut démontrer un résultat semblable à celui de Rubin [33, Theorem 2.3.2 et theorem 2.3.3]. A cette fin, nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

($\mathcal{H}'_1$) *L'extension* $L/\mathbb{Q}$ *est non ramifiée en* p *;*

($\mathcal{H}'_2$) $\chi(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) \neq 1$ *pour toute place* p*-adique de* K.

Le théorème suivant est absolument crucial pour notre but. C'est une conséquence directe de [17, Theorem 2.2]

Théorème 5.8. *Pour toute place p-adique v de $K(\mathfrak{r})$, le $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(K_\infty(\mathfrak{r})_v/\mathbb{Q}_p)]]$-module*

$$H^1_{Iw}(K(\mathfrak{r})_v, T) := \varprojlim_n H^1(K_n(\mathfrak{r})_v, T)$$

est libre de rang un.

Démonstration. Posons $F = L(\mathfrak{r})$ et $F_n = L_n(\mathfrak{r})$ pour simplifier les notations et fixons une place w de F au-dessus de v. D'après [17, Theorem 2.2], nous avons une suite exacte de $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(F_w(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)]]$-modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow \varprojlim_n U^1(F_{n,w}(\mu_p)) \xrightarrow{h} \mathcal{V}(1) \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{V}(1)$ est libre de rang 1. Donc la $\mathrm{Gal}(F_w(\mu_{p^\infty})/F_{\infty,w})$-cohomologie associée aux suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow \varprojlim_n U^1(F_{n,w}(\mu_p)) \xrightarrow{h} \mathrm{im}(h) \longrightarrow 0\ ,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}(h) \longrightarrow \mathcal{V}(1) \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow 0$$

et le fait que

$$H^i(F_w(\mu_{p^\infty})/F_{\infty,w}, \mathbb{Z}_p(1)) = 0, \quad \text{for } i \geq 0$$

assurent que

$$H^0(F_w(\mu_{p^\infty})/F_{\infty,w}, \varprojlim_n U^1(F_{n,w}(\mu_p)) \cong H^0(F_w(\mu_{p^\infty})/F_{\infty,w}, \mathcal{V}(1)).$$

D'où

$$\varprojlim_n U^1(F_{n,w}) \cong H^0(F_w(\mu_{p^\infty})/F_{\infty,w}, \mathcal{V}(1)).$$

Comme $\chi(\mathrm{Frob}_v) \neq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} H^1_{Iw}(K(\mathfrak{r})_v, T) &\cong (\varprojlim_n U^1(F_{n,w}) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\mathrm{Gal}(F_{\infty,w}/K_\infty(\mathfrak{r})_v)} \\ &\cong (H^0(F_w(\mu_{p^\infty})/F_{\infty,w}, \mathcal{V}(1)) \otimes \mathcal{O}(\chi^{-1}))^{\mathrm{Gal}(F_{\infty,w}/K_\infty(\mathfrak{r})_v)}. \end{aligned}$$

Par suite, le $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(K_\infty(\mathfrak{r})_v/\mathbb{Q}_p)]]$-module $H^1_{Iw}(K(\mathfrak{r})_v, T)$ est libre de rang un. $\square$

Corollaire 5.9. *Le $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(K_\infty(\mathfrak{r})/K)]]$-module*

$$H^1_{Iw}(K(\mathfrak{r})_p, T) = \oplus_{v|p} H^1_{Iw}(K(\mathfrak{r})_v, T)$$

est libre de rang $[K:\mathbb{Q}]$. En particulier, $H^1_{Iw}(K_p, T)$ est un Λ-module libre de rang $[K:\mathbb{Q}]$.

Démonstration. Soit v une place p-adique de $K(\mathfrak{r})$. Le théorème 5.8 montre que $H^1_{Iw}(K(\mathfrak{r})_v, T)$ est un $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(K_\infty(\mathfrak{r})_v/K_w)]]$-module libre de rang $[K_w : \mathbb{Q}_p]$, où w est une place de K au-dessous de v, et donc le $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(K_\infty(\mathfrak{r})/K)]]$-module

$$H^1_{Iw}(K(\mathfrak{r})_p, T) = \oplus_{v|p} H^1_{Iw}(K(\mathfrak{r})_v, T)$$

est libre de rang $\displaystyle\sum_{w|p} [K_w : \mathbb{Q}_p] = [K : \mathbb{Q}]$. □

Soient $\mathcal{K} = \bigcup_{n,\mathfrak{r}} K_n(\mathfrak{r})$ et $\mathcal{G}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/K)$.

Corollaire 5.10. *Le* $\mathcal{O}[[\mathcal{G}]]$*-module* $\mathbb{V} := \varprojlim_{n,\mathfrak{r}} H^1(K_n(\mathfrak{r})_p, T) = \varprojlim_{\mathfrak{r}} H^1_{Iw}(K(\mathfrak{r})_p, T)$ *est libre de rang* $[K : \mathbb{Q}]$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire 5.9. □

Proposition 5.11. *Soit* ϖ *le ppcm des entiers p-adiques* $1 - \chi(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})$*, où* $\mathfrak{p}$ *est une place de* K*. Alors pour toute extension* $K \subset_f F \subset \mathcal{K}$*, le morphisme canonique*

$$\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F} \longrightarrow H^1(F_p, T)$$

est injectif dont le conoyau est annulé par ϖ*, où* $\mathcal{G}_F = \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/F)$.

Démonstration. Pour toute place p-adique w de F, fixons une place $\overline{w}$ de $\mathcal{K}$ au-dessus de w. On a

$$\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F} \cong \bigoplus_{w|p} \Big(\varprojlim_{F_w \subset_f F'_w \subset \mathcal{K}_{\overline{w}}} H^1(F'_w, T) \Big)_{D_w(\mathcal{K}/F)}$$

où $D_w(\mathcal{K}/F)$ est le sous groupe de décomposition de w dans $\mathcal{K}/F$. En dualisant la suite exacte d'inflation-restriction

$$H^1(D_w(\mathcal{K}/F), (T^*)^{G_{\mathcal{K}_{\overline{w}}}}) \hookrightarrow H^1(F_w, T^*) \to H^1(\mathcal{K}_{\overline{w}}, T^*)^{D_w(\mathcal{K}/F)} \to H^2(D_w(\mathcal{K}/F), (T^*)^{G_{\mathcal{K}_{\overline{w}}}}) \,,$$

on obtient la suite exacte

$$H^2(D_w(\mathcal{K}/F), (T^*)^{G_{\mathcal{K}_{\overline{w}}}})^\vee \to (H^1(\mathcal{K}_{\overline{w}}, T^*)^{D_w(\mathcal{K}/F)})^\vee \to H^1(F_w, T^*)^\vee \twoheadrightarrow (H^1(D_w(\mathcal{K}/F), (T^*)^{G_{\mathcal{K}_{\overline{w}}}}))^\vee \,.$$

Comme $H^2(D_w(\mathcal{K}/F), (T^*)^{G_{\mathcal{K}_{\overline{w}}}})^\vee$ est un $\mathcal{O}$-module de torsion et,

$$(H^1(\mathcal{K}_{\overline{w}}, T^*)^{D_w(\mathcal{K}/F)})^\vee \cong \Big(\varprojlim_{F_w \subset_f F'_w \subset \mathcal{K}_{\overline{w}}} H^1(F'_w, T) \Big)_{D_w(\mathcal{K}/F)}$$

est un $\mathcal{O}$-module sans torsion, nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow (H^1(\mathcal{K}_{\overline{w}}, T^*)^{D_w(\mathcal{K}/F)})^\vee \longrightarrow H^1(F_w, T^*)^\vee \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow (H^1(D_w(\mathcal{K}/F), (T^*)^{G_{\mathcal{K}_{\overline{w}}}}))^\vee \,.$$

Or $T^* = D(\chi)$, donc pour toute extension $K \subset F \subset \mathcal{K}$, $H^0(K_p, T^*) = H^0(F_p, T^*)$. Par suite

$$\varpi.(T^*)^{G_{\mathcal{K}_{\overline{w}}}} = 0$$

où ϖ est le ppcm des entiers p-adiques $1 - \chi(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}})$. Il s'ensuit que le morphisme

$$\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F} \longrightarrow H^1(F_p, T)$$

est injectif dont le conoyau est annulé par ϖ. $\square$

Suivant [8], nous fixons un facteur direct libre $\mathbb{L}$ de rang 1 du $\mathcal{O}[[\mathcal{G}]]$-module libre (voir corollaire 5.10)

$$\mathbb{V} = \varprojlim_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}} H^1(F_p, T) = \varprojlim_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}} \mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}.$$

Rappelons que Σ est un ensemble fini de places de K contenant les places infinies, les places p-adiques et les places en lesquelles T est ramifiée.

Définition 5.12. *On définit la structure de Selmer* $(\mathcal{L}, \Sigma)$ *sur* T *par*

- *Si* $w \nmid p$, $H^1_{\mathcal{L}}(F_w, T) = H^1_{\mathcal{F}_{can}}(F_w, T)$,
- $H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T) \subset H^1(F_p, T)$ *comme étant le* $\mathcal{O}$*-saturation de* $\mathbb{L}_{\mathcal{G}_F}$ *dans* $H^1(F_p, T)$.

5.3 Construction de certains morphismes

Nous conservons les notations précédentes. S'inspirant de [8], nous démontrons l'existence d'un homomorphisme $\Psi' = (\Psi'_F)_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}}$ tel que

$$\Psi'_F\big(\bigwedge^r H^1(F_p, T)\big) \subset H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T).$$

La fixation d'une base $\{\psi^{(i)}_{\mathbb{L}}\}_{i=1}^{r-1}$ de

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/K)]]}(\mathbb{V}/\mathbb{L}, \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/K)]])$$

sur $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/K)]]$ revient à fixer une base $\{\psi^{(i)}_{\mathcal{L}_F}\}_{i=1}^{r-1}$ de

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}/\mathbb{L}_{\mathcal{G}_F}, \mathcal{O}[\Delta_F])$$

sur $\mathcal{O}[\Delta_F]$, pour toutes les extensions $K \subset_f F \subset \mathcal{K}$, telles que les homomorphismes $\{\psi^{(i)}_{\mathcal{L}_F}\}_{i=1}^{r-1}$ sont compatibles avec les morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_{F'}]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_{F'}}/\mathbb{L}_{\mathcal{G}_{F'}}, \mathcal{O}[\Delta_{F'}]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}/\mathbb{L}_{\mathcal{G}_F}, \mathcal{O}[\Delta_F])$$

pour $F \subset_f F'$. Notons $\psi_F^{(i)}$ l'image de $\psi_{\mathcal{L}_F}^{(i)}$ par l'injection canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}/\mathbb{L}_{\mathcal{G}_F}, \mathcal{O}[\Delta_F]) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}, \mathcal{O}[\Delta_F])$$

et considérons

$$\Psi_F := \psi_F^{(1)} \wedge \psi_F^{(2)} \wedge \cdots \wedge \psi_F^{(r-1)} \in \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}, \mathcal{O}[\Delta_F]).$$

Donc

$$\Psi := (\Psi_F)_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}} \in \varprojlim_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}} \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}, \mathcal{O}[\Delta_F]). \tag{5.7}$$

Remarquons que l'application

$$\Psi_{\mathcal{L}_F} := \bigoplus_{i=1}^{r-1} \psi_F^{(i)} : \mathbb{V}_{\mathcal{G}_F} \longrightarrow \mathcal{O}[\Delta_F]^{r-1}$$

est surjective et que $\ker(\Psi_{\mathcal{L}_F}) = \mathbb{L}_{\mathcal{G}_F}$.

Rappelons le résultat bien connu [21, Lemme B.1].

Proposition 5.13. *Pour toute extension $K \subset_f F \subset \mathcal{K}$, le morphisme Ψ_F induit un isomorphisme*

$$\Psi_F : \bigwedge^r \mathbb{V}_{\mathcal{G}_F} \xrightarrow{\sim} \ker(\Psi_{\mathcal{L}_F}) = \mathbb{L}_{\mathcal{G}_F}\ .$$

Proposition 5.14. *Il existe un élément*

$$\Psi' = (\psi'_F)_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}} \in \varprojlim_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}} \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(H^1(F_p, T), \mathcal{O}[\Delta_F])$$

tel que, pour toute extension $K \subset_f F \subset \mathcal{K}$,

$$\psi'_F(\bigwedge^r H^1(F_p, T)) \subset H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T).$$

Démonstration. D'après la proposition 5.11, on sait que l'application canonique

$$\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F} \longrightarrow H^1(F_p, T)$$

est injective dont le conoyau est annulé par ϖ, et donc le conoyau de l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(H^1(F_p, T), \mathcal{O}[\Delta_F]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}, \mathcal{O}[\Delta_F])$$

est annulé aussi par ϖ. Par suite le conoyau de

$$\varprojlim_{K\subset_f F\subset\mathcal{K}} \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(H^1(F_p,T),\mathcal{O}[\Delta_F]) \longrightarrow \varprojlim_{K\subset_f F\subset\mathcal{K}} \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F},\mathcal{O}[\Delta_F]) \tag{5.8}$$

est annulé par ϖ^{r-1}. D'où $\varpi^{r-1}\Psi$ appartient à l'image de l'application (5.8), où Ψ est l'élément défini dans (5.7). Ainsi

$$(\varpi^{r-1}\Psi_F)(\bigwedge^{r} H^1(F_p,T)) \subset \mathbb{L}_{\mathcal{G}_F} \subset H^1_{\mathcal{L}}(F_p,T).$$

D'où la proposition. □

5.4 Système de Kolyvagin pour $(\Sigma,\mathcal{L})$

L'objectif de sous-paragraphe est de démontrer que les classes dérivées de Kolyvagin (pour la définition voir [33, §IV.4]) associées à nos système d'Euler définissent un système de Kolyvagin pour la structure de Selmer $(\mathcal{L},\Sigma)$.

Notons $c_{K,\infty}=\{\varepsilon^{\chi}_{n,\Psi}\}\in H^1_{Iw}(K,T)$ l'élément correspondant au système d'Euler $\{\varepsilon_{n,\Psi}(\mathfrak{r})^{\chi}\}_{n,\mathfrak{r}}$ dans $H^1_{Iw}(K,T)=\varprojlim_n H^1(K_n,T)$.

Proposition 5.15. *Soit $\mathbb{H}_{\mathbb{L}}$ l'ensemble des applications*

$$\Psi=(\Psi_F)_F\in \varprojlim_{K\subset F\subset\mathcal{K}} \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F},\mathcal{O}[\Delta_F]) \text{ telles que } \Psi_F(\textstyle\bigwedge^r \mathbb{V}_{\mathcal{G}_F})=\mathbb{L}_{\mathcal{G}_F}.$$

Alors

$$\{\mathrm{loc}_p(\varepsilon^{\chi}_{0,\Psi}) : \Psi\in\mathbb{H}_{\mathbb{L}}\} = [\bigwedge^{r}\mathbb{V}_{\mathcal{G}} : \mathcal{O}.\mathrm{loc}_p^{(r)}(c_0)]\mathbb{L}_{\mathcal{G}}$$

où $\mathrm{loc}_p : H^1(K,T)\longrightarrow H^1(K_p,T)$.

Démonstration. Il s'agit de [7, Corollaire 3.5]. □

Remarque 5.16. *Si l'application* $\mathrm{loc}_p : H^1(K,T)\longrightarrow H^1(K_p,T)$ *est injective, alors d'après [32, Proposition 6.6 (ii)], on voit que* $[\bigwedge^r \mathbb{V}_{\mathcal{G}} : \mathcal{O}.\mathrm{loc}_p^{(r)}(c_0)]<\infty$.

Soit F une extension finie de K dans $\mathcal{K}$ et soit $(\mathcal{F},\Sigma(\mathcal{F}))$ une structure de Selmer sur T. Suivant [21, §2.1], on définit la structure de Selmer $(\mathcal{F}^{\mathfrak{r}},\Sigma(\mathcal{F}^{\mathfrak{r}}))$ par

- $\Sigma(\mathcal{F}^{\mathfrak{r}})=\Sigma(\mathcal{F})\cup\Sigma_{\mathfrak{r}}$

- $H^1_{\mathcal{F}^{\mathfrak{r}}}(F_w, T) = \begin{cases} H^1_{\mathcal{F}}(F_w, T), & \text{if } w \in \Sigma(\mathcal{F}) - \Sigma_{\mathfrak{r}}\,; \\ H^1(F_w, T), & w \in \Sigma_{\mathfrak{r}}. \end{cases}$

où $\Sigma_{\mathfrak{r}} = \{w \subset F\,; w \mid \mathfrak{r}\}$.

Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}$ et soit M une puissance de π. Nous poserons $W_M = T/MT$. Soit $\mathbf{c}$ un système d'Euler de T, et soit $\kappa_{[K_n,\mathfrak{r},M]} \in H^1(K_n, W_M)$ la classe dérivée de Kolyvagin associée au système d'Euler $\mathbf{c}$, construit dans [33, §IV.4]). On rappelle que

$$\kappa_{[K_n,\mathfrak{r},M]} \in H^1_{\mathcal{F}^{\mathfrak{r}}_{can}}(K_n, W_M)$$

c.f. [33, Theorem 4.5.1].

Dans la suite, nous construisons un système d'Euler $\mathbf{c}$ de T tel que

$$\kappa_{[K_n,\mathfrak{r},M]} \in H^1_{\mathcal{L}^{\mathfrak{r}}}(K_n, W_M).$$

Nous avons besoin de quelques faits sur la condition locale $\mathcal{L}$.

Lemme 5.17. *Soit $\mathcal{L}_F := \mathbb{L}_{\mathcal{G}_F}$ et soit ϖ le ppcm des entiers p-adiques $1-\chi(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}})$. Alors*

$$\varpi.(H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T)/\mathcal{L}_F) = 0.$$

Démonstration. D'une part la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T)/\mathcal{L}_F \longrightarrow H^1(F_p, T)/\mathcal{L}_F \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow H^1(F_p, T)/H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T)$$

et le fait que $H^1(F_p, T)/H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T)$ est un $\mathcal{O}$-module sans torsion (par définition) montrent que

$$\mathrm{tor}_{\mathcal{O}}(H^1(F_p, T)/\mathcal{L}_F) = H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T)/\mathcal{L}_F.$$

D'autre part la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}/\mathcal{L}_F \longrightarrow H^1(F_p, T)/\mathcal{L}_F \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow H^1(F_p, T)/\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}$$

et les faits que $\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}/\mathcal{L}_F$ est un $\mathcal{O}$-module sans torsion et que le $\mathcal{O}$-module $H^1(F_p, T)/\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}$ est de torsion, assurent

$$\mathrm{tor}_{\mathcal{O}}(H^1(F_p, T)/\mathcal{L}_F) \cong H^1(F_p, T)/\mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}.$$

La proposition 5.11 permet de conclure. $\square$

Proposition 5.18. *Soit $G_{n,\mathfrak{r}} = \mathrm{Gal}(K_n(\mathfrak{r})/K_n)$. Alors le conoyau de*

$$H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, W_M) \longrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, W_M)^{G_{n,\mathfrak{r}}}$$

est annulé par ϖ.

Démonstration. Soit F une extension finie de K dans $\mathcal{K}$. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{M} T \longrightarrow W_M \longrightarrow 0 .$$

Comme $\mathcal{L}$ est cartésienne et $H^1(F_p, T)$ est un $\mathcal{O}$-module sans torsion, nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T) \xrightarrow{M} H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(F_p, W_M) \longrightarrow 0 .$$

Or la restriction $\mathrm{res} : H^1(K_{n,p}, T) \longrightarrow H^1(K_n(\mathfrak{r})_p, T)^{G_{n,\mathfrak{r}}}$ est un isomorphisme et $H^1(K_{n,p}, T)/H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, T)$ est un $\mathcal{O}$-module sans torsion, le diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, T) \arrow[r] \arrow[d, "res"] & H^1(K_{n,p}, T) \arrow[r] \arrow[d, "res", "\wr"'] & H^1(K_{n,p}, T)/H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)^{G_{n,\mathfrak{r}}} \arrow[r] & H^1(K_n(\mathfrak{r})_p, T)^{G_{n,\mathfrak{r}}} \arrow[r] & (H^1(K_n(\mathfrak{r})_p, T)/H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T))^{G_{n,\mathfrak{r}}} &
\end{tikzcd}$$

montre que l'application $H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, T) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)^{G_{n,\mathfrak{r}}}$ est un isomorphisme. Par suite, nous avons un diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, T) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "res", "\wr"'] & H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, T) \arrow[r] \arrow[d, "res", "\wr"'] & H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, W_M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)^{G_{n,\mathfrak{r}}} \arrow[r, "M"] & H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)^{G_{n,\mathfrak{r}}} \arrow[r] & H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, W_M)^{G_{n,\mathfrak{r}}} &
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{coker}(\ H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, W_M) \longrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, W_M)^{G_{n,\mathfrak{r}}}\ ) &\cong \mathrm{coker}(\ H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)^{G_{n,\mathfrak{r}}} \longrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, W_M)^{G_{n,\mathfrak{r}}} \\
&= H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T))[M]
\end{aligned}$$

où $H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T))[M]$ est le sous module de $H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T))$ annulé par M . Il suffit donc de montrer que

$$\varpi . H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)) = 0.$$

En effet, d'après la $G_{n,\mathfrak{r}}$-cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{K_n(\mathfrak{r})} \longrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)/\mathcal{L}_{K_n(\mathfrak{r})} \longrightarrow 0 .$$

on obtient la suite exacte

$$H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, \mathcal{L}_{K_n(\mathfrak{r})}) \longrightarrow H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)) \longrightarrow H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)/\mathcal{L}_{K_n(\mathfrak{r})}) \longrightarrow H^2(G_{n,\mathfrak{r}}, \mathcal{L}_{K_n(\mathfrak{r})}) .$$

Comme $\mathcal{L}_{K_n(\mathfrak{r})}$ est un facteur direct de $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(K_n(\mathfrak{r})/K)]$-module libre $\mathbb{V}_{\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/K_n(\mathfrak{r}))}$,

$$H^i(G_{n,\mathfrak{r}}, \mathcal{L}_n^{\mathfrak{r}}) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq 1$$

Il s'ensuit que

$$H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)) \cong H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)/\mathcal{L}_{K_n(\mathfrak{r})}).$$

D'où

$$\varpi . H^1(G_{n,\mathfrak{r}}, H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)) = 0$$

puisque $\varpi.(H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)/\mathcal{L}_{K_n(\mathfrak{r})}) = 0$ (voir Lemme 5.17). □

Soit $c_n(\mathfrak{r}) \in \mathbb{Q}_p \otimes \bigwedge^r H^1(K_n(\mathfrak{r}), T)$ l'élément défini dans (5.4). Notons loc_p le morphisme de localisation dans la cohomologie semi-locale en p

$$\mathrm{loc}_p : \ \mathbb{Q}_p \otimes H^1(K_n(\mathfrak{r}), T) \longrightarrow \mathbb{Q}_p \otimes H^1(K_n(\mathfrak{r})_p, T) \ .$$

Comme $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}_{\mathcal{G}_{K_n(\mathfrak{r})}} \cong \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^1(K_n(\mathfrak{r})_p, T)$,

$$\mathrm{loc}_p^{(r)}(c_n(\mathfrak{r})) \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge^r \mathbb{V}_{\mathcal{G}_{K_n(\mathfrak{r})}}.$$

D'après les propriétés définissant les éléments de Rubin-Stark, on voit que pour tout

$$\psi = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_r \in \bigwedge^r \mathrm{Hom}(\mathbb{V}_{\mathcal{G}_{K_n(\mathfrak{r})}}, \mathcal{O}[\mathrm{Gal}(K_n(\mathfrak{r})/K)])$$

on a

$$\psi(\mathrm{loc}_p^{(r)}(c_n(\mathfrak{r})) \in \mathcal{O}[\mathrm{Gal}(K_n(\mathfrak{r})/K)].$$

Donc, d'après l'exemple 1 suivant la proposition 1.2 de [32], on obtient

$$\mathrm{loc}_p^{(r)}(c_n(\mathfrak{r})) \in \bigwedge^r \mathbb{V}_{\mathcal{G}_{K_n(\mathfrak{r})}}.$$

Soit F une extension finie de K dans $\mathcal{K}$; le morphisme

$$\mathrm{loc}_p : H^1(F, T) \longrightarrow H^1(F_p, T) \ .$$

induit un morphisme

$$\varprojlim_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}} \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(H^1(F_p, T), \mathcal{O}[\Delta_F]) \to \varprojlim_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}} \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(H^1(F, T), \mathcal{O}[\Delta_F]) \ . \tag{5.9}$$

Si $\Psi \in \varprojlim_{K \subset_f F \subset \mathcal{K}} \bigwedge^{r-1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[\Delta_F]}(H^1(F_p, T), \mathcal{O}[\Delta_F])$, pour simplifier les notations, nous notons aussi Ψ son image par (5.9). Soit Ψ' l'élément construit dans la proposition 5.14 et soit $\{\varepsilon_{n,\Psi'}(\mathfrak{r})^\chi\}_{n,\mathfrak{r}}$ le système d'Euler de T associé à Ψ' (voir la proposition 5.7). La proposition 5.14 et le fait que $\mathrm{loc}_p^{(r)}(c_n(\mathfrak{r})) \in \bigwedge^r \mathbb{V}_{\mathcal{G}_{K_n(\mathfrak{r})}}$ assurent que

$$\mathrm{loc}_p(\varepsilon_{n,\Psi'}(\mathfrak{r})^\chi) \in H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T). \tag{5.10}$$

Le lemme suivant est crucial pour la preuve du théorème 0.3 :

Lemme 5.19. *Soit $\kappa_{[K_n,\mathfrak{r},M]}$ la classe dérivée de Kolyvagin associé au système d'Euler $\mathbf{c} = \{\varpi.\varepsilon_{n,\Psi'}(\mathfrak{r})^\chi\}_{n,\mathfrak{r}}$, construit dans [33, §IV.4]). Alors*

$$\kappa_{[K_n,\mathfrak{r},M]} \in H^1_{\mathcal{L}^\mathfrak{r}}(K_n, W_M).$$

Démonstration. Comme $\mathcal{L}^\mathfrak{r} \leq \mathcal{F}^\mathfrak{r}_{can}$, nous avons une suite exacte

$$H^1_{\mathcal{L}^\mathfrak{r}}(K_n, W_M) \hookrightarrow H^1_{\mathcal{F}^\mathfrak{r}_{can}}(K_n, W_M) \longrightarrow H^1(K_{n,p}, W_M)/H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, W_M)\ .$$

Le théorème 4.5.1 de [33] montre que $\kappa_{[K_n,\mathfrak{r},M]} \in H^1_{\mathcal{F}^\mathfrak{r}_{can}}(K_n, W_M)$. Il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{loc}_p(\kappa_{[K_n,\mathfrak{r},M]}) \in H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, W_M).$$

Soit $D_\mathfrak{r}$ l'opérateur de dérivée de Kolyvagin, défini dans [33, DefinitionIV.4.1]. Comme

$$\mathrm{loc}_p : H^1(K_n(\mathfrak{r}), T) \longrightarrow H^1(K_n(\mathfrak{r})_p, T)$$

est un $\mathrm{Gal}(K_n(\mathfrak{r})/K)$-morphisme,

$$\mathrm{loc}_p(D_\mathfrak{r}\varpi.\varepsilon_{n,\Psi}(\mathfrak{r})^\chi) = D_\mathfrak{r}\mathrm{loc}_p(\varpi.\varepsilon_{n,\Psi}(\mathfrak{r})^\chi).$$

donc d'après (5.10), on obtient

$$\mathrm{loc}_p(D_\mathfrak{r}\varpi.\varepsilon_{n,\Psi'}(\mathfrak{r})^\chi) \in H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T).$$

Or $D_\mathfrak{r}\varpi.\varepsilon_{n,\Psi'}(\mathfrak{r})^\chi \mod M$ est invariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(K_n(\mathfrak{r})/K_n)$ [33, Lemma 4.4.2], donc

$$\mathrm{loc}_p(D_\mathfrak{r}\varpi.\varepsilon_{n,\Psi'}(\mathfrak{r})^\chi) \mod M \in (H^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T)/MH^1_{\mathcal{L}}(K_n(\mathfrak{r})_p, T))^{\mathrm{Gal}(K_n(\mathfrak{r})/K_n)}.$$

Par suite, la proposition 5.18 et [33, Lemma 4.4.13] assurent que

$$\mathrm{loc}_p(\kappa_{[K_n,\mathfrak{r},M]}) \in H^1_{\mathcal{L}}(K_{n,p}, W_M)$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

5.5 Preuve du théorème 0.3

Dans cette section nous allons démontrer le théorème 0.3 énoncé dans l'introduction ;

Théorème 0.3. Supposons satisfaites les hypothèses $(\mathcal{H}'_0) - (\mathcal{H}'_3)$. Alors

$$\mathrm{char}((A_\infty)_\chi) \quad \text{divise} \quad \varpi\mathrm{char}\left(((\bigwedge^r \widehat{\mathcal{E}_\infty})/\widehat{\mathrm{RS}_\infty})_\chi\right)$$

où ϖ est le ppcm des entiers p-adiques $1 - \chi(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})$.

Notons $c_{K,\infty} = \{\varepsilon^\chi_{n,\Psi'}\} \in H^1_{Iw}(K, T)$ l'élément correspondant au système d'Euler $\{\varepsilon_{n,\Psi'}(\mathfrak{r})^\chi\}_{n,\mathfrak{r}}$ dans $H^1_{Iw}(K, T)$, où Ψ' est l'élément construit dans la proposition 5.14. Remarquons que sous la conjecture de Leopoldt pour L, l'application de localisation

$$\mathrm{loc}_p : H^1(K, T) \longrightarrow H^1(K_p, T)$$

est injective. En effet, sous la conjecture de Leopoldt l'application

$$H^1(L, \mathbb{Z}_p(1)) \longrightarrow \bigoplus\nolimits_{w|p} H^1(L_w, \mathbb{Z}_p(1))$$

est injective, et donc les isomorphismes

$$H^1(K, T) \cong H^1(L, T)^{\mathrm{Gal}(L/K)} \quad \text{et} \quad H^1(K_p, T) \cong H^1(L_p, T)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$$

permettent de conclure. Ainsi, d'après la remarque 5.16 et la proposition 5.15, il existe un élément Ψ' (sous la conjecture de Leopoldt) tel que $c_{K,\infty} \neq 0$.

L'une des clés de la preuve du théorème 0.3 est le résultat suivant

Théorème 5.20. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H}'_0)$ et $(\mathcal{H}'_3)$, on a*

$$\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{L}^*}(K_\infty, T^*)^\vee) \quad \textit{divise} \quad \mathrm{char}(H^1_{\mathcal{L}}(K_\infty, T)/\Lambda.\mathbf{c}_{K,\infty})$$

Démonstration. Remarquons que pour toute place $v \nmid p$,

$$H^1_{\mathcal{L}}(F_v, T) = H^1_{\mathcal{F}_{can}}(F_v, T).$$

Donc la preuve se déduit de celle de Rubin [33, Theorem 2.3.3], si l'on remplace

$$S_{\Sigma_p}(F, W^*_M) \quad \text{par} \quad H^1_{\mathcal{L}}(T, T^*[M])$$

et

$$S^{\Sigma_{p\mathfrak{r}}}(F, W_M) \quad \text{par} \quad H^1_{\mathcal{L}^r}(F, W_M),$$

où $T^*[M] = \ker(\ T^* \xrightarrow{M} T^*\ )$, et si l'on justifie les assertions suivantes

(i) $\kappa_{[K_n,\mathfrak{r},M]} \in H^1_{\mathcal{L}^{\mathfrak{r}}}(K_n, W_M)$.

(ii) $(H^1_{\mathcal{L}^*}(K_\infty, T^*)^\vee)_{\Gamma_n}$ et $\Lambda_{\Gamma_n}/\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{L}^*}(K_\infty, T^*)^\vee)\Lambda_{\Gamma_n}$ sont finis.

L'assertion (i) est le lemme 5.19. Pour l'assertion (ii) ; d'une part, on dispose d'une surjection

$$H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(K_\infty, T^*)^\vee \twoheadrightarrow H^1_{\mathcal{L}^*}(K_\infty, T^*)^\vee \ ,$$

d'autre part, le noyau de la restriction

$$H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(K_\infty, T^*) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(L_\infty, T^*)$$

est fini. Donc il suffit de montrer que $H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(L_\infty, T^*)^{\Gamma_n}$ est fini. En effet, soit M_∞ la p-extension abélienne non-ramifiée en dehors p maximale de L_∞ et soit $\mathfrak{X}_\infty = \mathrm{Gal}(M_\infty/L_\infty)$. La conjecture de Leopoldt pour L_n assure que $\mathfrak{X}_\infty^{\Gamma_n} = 0$, e.g. [24, Proposition 11.3.3]. Comme $H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(L_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee \cong \mathfrak{X}_\infty$, $H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(L_\infty, T^*)^{\Gamma_n}$ est fini. □

Proposition 5.21. *Supposons que l'hypothèses $(\mathcal{H}'_0)$ et $(\mathcal{H}'_3)$ sont vérifiées. Alors*

$$\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(K_\infty, T^*)^\vee) \quad \textit{divise} \quad \mathrm{char}(H^1_{Iw,\mathcal{L}}(K_p, T)/\mathrm{loc}_p(\mathbf{c}_{K,\infty}))$$

Démonstration. Comme $\mathcal{F}_{str} \leq \mathcal{L}$, le théorème 2.7 donne la suite exacte

$$H^1_{\mathcal{F}_{str}}(K_\infty, T) \hookrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(K_\infty, T) \xrightarrow{\mathrm{loc}_p} H^1_{Iw,\mathcal{L}}(K_p, T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(K_\infty, T^*)^\vee \twoheadrightarrow H^1_{\mathcal{L}^*}(K_\infty, T^*)^\vee \ .$$

La proposition 2.10 montre que $H^1_{\mathcal{F}_{str}}(K_\infty, T) = 0$. Nous avons donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathcal{L}}(K_\infty, T)/\Lambda.\mathbf{c}_{K,\infty} \longrightarrow H^1_{Iw,\mathcal{L}}(K_p, T)/\mathrm{loc}_p(\mathbf{c}_{K,\infty}) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(K_\infty, T^*)^\vee \twoheadrightarrow H^1_{\mathcal{L}^*}(K_\infty, T^*)^\vee \ .$$

Le théorème 5.20 permet de conclure. □

Comme K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K, aucune place finie de K ne se décompose totalement dans K_∞, donc par passage à la limite projective dans le lemme 5.17, on voit que les Λ-modules

$$\varprojlim_{K \subset F \subset K_\infty} \mathcal{L}_F \quad \text{et} \quad H^1_{Iw,\mathcal{L}}(K_p, T) := \varprojlim_{K \subset F \subset K_\infty} H^1_{\mathcal{L}}(F_p, T)$$

sont pseudo-isomorphes. De même, la proposition 5.11 assure que les Λ-modules

$$H^1_{Iw}(K_p, T) \quad \text{et} \quad \varprojlim_{K \subset F \subset K_\infty} \mathbb{V}_{\mathcal{G}_F}$$

sont aussi pseudo-isomorphes. Par suite, on déduit d'après la proposition 5.13 que les Λ-modules

$$H^1_{Iw,\mathcal{L}}(K_p,T) \quad \text{et} \quad \bigwedge^r H^1_{Iw}(K_p,T) \tag{5.11}$$

sont pseudo-isomorphes.

Notons ι le composé

$$\bigwedge^r \varprojlim_n H^1(K_n,T) \longrightarrow \varprojlim_n \bigwedge^r H^1(K_n,T) \longrightarrow \varprojlim_n (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge^r H^1(K_n,T)) \ ,$$

et $c_\infty := \{c_n\}_{n\geq 0} \in \varprojlim_n (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge^r H^1(K_n,T))$, où c_n est défini dans (5.4).

Théorème 5.22. *Soit* $\mathbf{c}$ *un élément de* $\iota^{-1}(\varpi.c_\infty)$. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{H}'_0)$ *et* $(\mathcal{H}'_3)$, *on a*

$$\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)^\vee) \quad \textit{divise} \quad \mathrm{char}((\bigwedge^r H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T))/\Lambda.\mathbf{c})$$

Démonstration. D'une part, en utilisant les faits $\mathcal{F}_{str} \leq \mathcal{F}_{can}$ et $H^1_{\mathcal{F}_{str}}(K_\infty,T) = 0$, on obtient la suite exacte

$$H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T) \xhookrightarrow{\mathrm{loc}_p} H^1_{Iw}(K_p,T) \longrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(K_\infty,T^*)^\vee \twoheadrightarrow H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)^\vee \ .$$

D'où

$$\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{str}}(K_\infty,T^*)^\vee) = \mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)^\vee).\mathrm{char}(\mathrm{coker}(\mathrm{loc}_p)).$$

La proposition 5.21 montre que

$$\mathrm{char}(H^1_{\mathcal{F}^*_{can}}(K_\infty,T^*)^\vee).\mathrm{char}(\mathrm{coker}(\mathrm{loc}_p)) \quad \text{divise} \quad \mathrm{char}(H^1_{Iw,\mathcal{L}}(K_p,T)/\Lambda.\mathrm{loc}_p(\mathbf{c}_{K,\infty})).$$

Le théorème 2.11 (resp. le lemme 5.9) montre que le Λ-module $H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T)$ (resp. $H^1_{Iw}(K_p,T)$) est libre de rang r, donc l'injection $H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T) \xhookrightarrow{\mathrm{loc}_p} H^1_{Iw}(K_p,T)$ induit la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\bigwedge^r H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T))/\Lambda.\mathbf{c} \longrightarrow (\bigwedge^r H^1_{Iw}(K_p,T))/\Lambda.(\mathrm{loc}_p^{(r)}(\mathbf{c})) \twoheadrightarrow \mathrm{coker}(\mathrm{loc}_p^{(r)}) \ .$$

D'où

$$\mathrm{char}((\bigwedge^r H^1_{Iw}(K_p,T))/\Lambda.(\mathrm{loc}_p^r(\mathbf{c}))) = \mathrm{char}((\bigwedge^r H^1_{\mathcal{F}_{can}}(K_\infty,T))/\Lambda.\mathbf{c}).\mathrm{char}(\mathrm{coker}(\mathrm{loc}_p^{(r)})).$$

D'autre part, d'après (5.11), on voit que les Λ-modules

$$\bigwedge^r H^1_{Iw}(K_p,T)/\Lambda.\mathrm{loc}_p^{(r)}(\mathbf{c})) \text{ et } H^1_{Iw,\mathcal{L}}(K_p,T)/\Lambda.\mathrm{loc}_p(\mathbf{c}_{K,\infty})$$

sont pseudo-isomorphes. Le fait que

$$\mathrm{char}(\mathrm{coker}(\mathrm{loc}_p^{(r)})) = \mathrm{char}(\mathrm{coker}(\mathrm{loc}_p)) \quad \text{(voir [3, page 258])}$$

permet de conclure. □

Rappelons que sous la conjecture de Leopoldt pour les corps L_n, le conoyau de

$$(\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta \xrightarrow{N_\Delta} (\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta$$

est pseudo-nul (voir théorème 4.16). On en déduire le résultat suivant

Corollaire 5.23. *Sous la conjecture de Leopoldt pour les corps L_n, le conoyau de*

$$\bigwedge^r(\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta \xrightarrow{N_\Delta^{(r)}} \bigwedge^r(\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta$$

est pseudo-nul

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de Λ de hauteur ≤ 1. Comme le conoyau

$$(\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta \xrightarrow{N_\Delta} (\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta$$

est pseudo-nul,

$$\mathrm{Im}(N_\Delta)_\mathfrak{p} \cong ((\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta)_\mathfrak{p},$$

donc

$$(\mathrm{Im}(N_\Delta^{(r)}))_\mathfrak{p} = \bigwedge^r \mathrm{Im}(N_\Delta)_\mathfrak{p} \cong \bigwedge^r((\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta)_\mathfrak{p}.$$

Il s'ensuit que le conoyau de

$$\bigwedge^r(\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))_\Delta \xrightarrow{N_\Delta^{(r)}} \bigwedge^r(\widehat{\mathcal{E}}_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta$$

est pseudo-nul. □

Soit RS_n le $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L_n/K)]$-module engendré par les éléments de Rubin-Stark (Définition 5.5) et soit $c_n = \mathrm{cor}^{(r)}_{L_{n+1},K_n}(\varepsilon_{n+1,\chi})$. Ici c_n est l'élément défini dans (5.4). Notons

$$\widehat{RS_\infty} := \varprojlim_n \widehat{RS_n} \quad \text{et} \quad \widetilde{\varepsilon}_{\infty,\chi} := \{\varepsilon_{n,\chi}\}_{n\geq 1}.$$

Comme pour tout $n \geq 1$, $c_n = \mathrm{cor}^{(r)}_{L_n,K_n}(\widetilde{\varepsilon}_{n,\chi})$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{res}^{(r)}_{K_n,L_n}(c_n) &= \mathrm{res}^{(r)}_{K_n,L_n}(\mathrm{cor}^{(r)}_{L_n,K_n}(\varepsilon_{n,\chi})) \\ &= |\Delta|^{r-1}N_\Delta(\varepsilon_{n,\chi})\end{aligned}$$

et donc

$$|\Delta|^{r-1}N_\Delta((\widehat{RS_\infty})_\chi) \cong \Lambda\mathbf{c},$$

où $\mathbf{c}$ est un élément de l'image réciproque de $|\Delta|^{r-1}N_\Delta(\varepsilon_{\infty,\chi})$ par le composé

$$\bigwedge^r \varprojlim_n H^1(K_n,T) \longrightarrow \varprojlim_n \bigwedge^r H^1(K_n,T) \longrightarrow \varprojlim_n (\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \bigwedge^r H^1(K_n,T)) .$$

Preuve du théorème 0.3. Considérons le diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
 & (\widehat{\mathrm{RS}_\infty})_\chi \arrow[r] \arrow[d, two heads, "|\Delta|^{r-1}N_\Delta"] & \bigwedge^r(\widehat{\mathcal{E}_\infty})_\chi \arrow[r, two heads] \arrow[d, "N_\Delta^{(r)}"] & \left(\bigwedge^r \widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{\mathrm{RS}_\infty}\right)_\chi \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & |\Delta|^{r-1}N_\Delta(\varepsilon_{\infty,\chi})) \arrow[r] & \bigwedge^r(\widehat{\mathcal{E}_\infty})^\chi \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \bigwedge^r(\widehat{\mathcal{E}_\infty})^\chi/|\Delta|^{r-1}N_\Delta(\varepsilon_{\infty,\chi})) \\
 & & \mathrm{coker}(N_\Delta^{(r)}) &
\end{tikzcd}$$

où $(\widehat{\mathcal{E}_\infty})^\chi = (\widehat{\mathcal{E}_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta$. Le corollaire 5.23 montre que $\mathrm{coker}(N_\Delta^{(r)})$ est fini, donc

$$\mathrm{char}(\bigwedge^r(\widehat{\mathcal{E}_\infty})^\chi/|\Delta|^{r-1}N_\Delta(\varepsilon_{\infty,\chi})) \quad \text{divise} \quad \mathrm{char}\Big(\big(\bigwedge^r \widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{\mathrm{RS}_\infty}\big)_\chi\Big).$$

Comme $\chi(\mathrm{Frob}_v) \neq 1$ pour toute place p-adique de K,

$$(\widehat{\mathcal{E}'_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta \cong (\widehat{\mathcal{E}_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\chi^{-1}))^\Delta.$$

Le théorème 5.22 et la remarque 4.14 permettent de conclure ;

$$\mathrm{char}((A_\infty)_\chi) \quad \text{divise} \quad \varpi.\mathrm{char}\Big(\big(\bigwedge^r \widehat{\mathcal{E}_\infty}/\widehat{\mathrm{RS}_\infty}\big)_\chi\Big).$$

Bibliographie

[1] **Assim, J., Mazigh, Y. Oukhaba, H.** *Théorie d'Iwasawa des unités de Stark et groupe de classes.* International Journal of Number Theory. DOI : 10.1142/S1793042117500634

[2] **Assim, J. ; Oukhaba, H.** *Stark units in $\mathbb{Z}_p$-extensions.* Funct. Approx. Comment. Math. 45 (2011), part 1, 105-124.

[3] **Bourbaki. N.** *Algèbre commutative, chapitre* 7*, Diviseurs*, Hermann, 1965.

[4] **Bley, W.** *Equivariant Tamagawa number conjecture for abelian extensions of a quadratic imaginary field.* Doc. Math. 11 (2006), 73-118.

[5] **Kato, K** *Euler systems, Iwasawa theory, and Selmer groups.* Kodai Math. J. 22 (1999), no. 3, 313-372.

[6] **Büyükboduk, K.** *Λ-adic Kolyvagin systems.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, no. 14, 3141-3206

[7] **Büyükboduk, K.** *Kolyvagin systems of Stark units* . J. Reine Angew. Math. 631 (2009), 85-107.

[8] **Büyükboduk, K.** *Stark units and the main conjectures for totally real fields.* Compos. Math. 145 (2009), no. 5, 1163-1195.

[9] **Cartan, H. ; Eilenberg, S.** *Homological algebra.* Princeton University Press. L.C. Card No. 53-10148 (1956).

[10] **Cherbonnier, F. ; Colmez, P.** *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local.* J. Amer. Math. Soc., 12(1) :241-268, 1999.

[11] **Gras, G.** *Class field theory from theory to practice*. Springer 2003.

[12] **Iwasawa, K.** *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields.* Ann. of Math. (2) 98, 246–326 (1973)

[13] **Greenberg, R.***Iwasawa theory for p-adic representations.* Algebraic number theory,97-137, Adv. Stud. Pure Math., 17, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[14] **Gillard, R.** *Fonctions L p-adiques des corps quadratiques imaginaires et de leurs extensions abéliennes.* J. Reine Angew. Math. 358 (1986) 76-91.

[15] **Greither, C.** *Class groups of abelian fields, and the main conjecture.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 42 (1992), no. 3, 449-499.

[16] **Greither, C.** *Sur les normes universelles dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions.* Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 6 (1994), 205-220.

[17] **Greither, C.** *On Chinburg's second conjecture for abelian fields* J. Reine Angew. Math. 479 (1996), 1-37.

[18] **Kolyvagin, V. A.** *Euler systems.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 435-483, Progr. Math., 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[19] **Milne, J.***Arithmetic duality theorems.* Acad. Press, Boston, 1986.

[20] **Mazigh, Y.** *Iwasawa theory of Rubin-Stark units and class groups.* manuscripta math. (2016) DOI : 10.1007/s00229-016-0889-0.

[21] **Mazur, B. ; Rubin, K.** *Kolyvagin systems.* Mem. Amer. Math. Soc., 168(799) :viii+96, 2004.

[22] **Mazur, B. ; Rubin, K.** *Controlling Selmer groups in the higher core rank case.* J. Théor. Nombres Bordeaux 28 (2016), no. 1, 145-183.

[23] **Mazur,B. ; Wiles, A.** *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$. Invent. Math. 76 (1984), 179-330.

[24] **Neukirch, J. ; Schmidt, A. ; Wingberg, K.** *Cohomology of number fields.* Springer (1991).

[25] **Nekovár, J.** *Selmer complexes.* Astérisque 310 (2006).

[26] **Perrin-Riou, B.***Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques.* Invent. Math. 109 (1992) 137-185.

[27] **Perrin-Riou, B.** *Systèmes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 48(5) :1231-1307, 1998.

[28] **Ribes, L. ; Zalesskii, P.** *Profinite groups.* Second edition. Springer 2000.

[29] **Rubin, K.** *The main conjecture.* appendix to : S. Lang, Cyclotomic Fields I-II (second ed.), Grad. Texts in Math. 121, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1990, pp. 397-419.

[30] **Rubin, K.** *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields.*Invent. Math. 103 (1991), 1, 25-68.

[31] **Rubin, K.** *Stark units and Kolyvagin's "Euler systems".* J. Reine Angew. Math. 425 (1992), 141-154.

[32] **Rubin, K.** *A Stark conjecture "over* $\mathbb{Z}$ *" for abelian L-functions with multiple zeros.*Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 46 (1996), no. 1, 33-62.

[33] **Rubin, K.** *Euler systems.* Annals of Mathematics Studies, 147. Hermann Weyl Lectures. The Institute for Advanced Study. Princeton University Press, Princeton, 2000

[34] **Serre, J.-P.** *Corps locaux.* Deuxième édition, Hermann, Paris, (1968).

[35] **Serre, J.-P.** *Cohomologie galoisienne.* Lecture Notes in Mathematics, 5. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[36] **Oukhaba, H.** *On Iwasawa theory of elliptic units and 2-ideal class groups.* J. Ramanujan Math. Soc. 27 (2012), no. 3, 255-273.

[37] **Tate, J.** *Relations between* K_2 *and Galois cohomology.* Invent. Math. 36 (1976), 257-274.

[38] **Tate, J.** *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en s=0.* Birkhäuser Boston Inc, 1984. Lecture notes edited by Dominique Bernardi and Norbert Schappacher.

[39] **Vauclair, D.** *Sur les normes universelles et la structure de certains modules d'Iwasawa* . (2006) Non publié.

[40] **Washington, L.** *Introduction to cyclotomic fields.* Springer, second edition (1997).

[41] **Wilson, J.S.** *Profinite groups.* Clarendon Press, Oxford(1998).