



**HAL**  
open science

# Conception robuste de structure spatiale en présence de méconnaissances de modèle

Fabien Maugan

► **To cite this version:**

Fabien Maugan. Conception robuste de structure spatiale en présence de méconnaissances de modèle. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2017. Français. NNT : 2017UBFCD013 . tel-01782429

**HAL Id: tel-01782429**

**<https://theses.hal.science/tel-01782429>**

Submitted on 2 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SPIM

## Thèse de Doctorat



UBFC

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**  
UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE-FRANCHE-COMTÉ

*Thèse présentée par*

**Fabien Karl MAUGAN**

*Pour obtenir le*

**GRADE DE DOCTEUR**

**DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE FRANCHE-COMTE**

**spécialité mécanique**

**CONCEPTION ROBUSTE DE STRUCTURE SPATIALE  
EN PRÉSENCE DE MÉCONNAISSANCES DE MODÈLE**

*Soutenance le 19 janvier 2017 devant la commission d'examen :*

**Rapporteurs**

- Anas BATOU, Maître de Conférences, Université de Liverpool
- Charles PEZERAT, Professeur, Université du Maine

**Examineurs**

- François HEMEZ, Docteur Ingénieur, Los Alamos National Laboratory
- Gaëtan KERSCHEN, Professeur, Université de Liège

**Directeur**

- Scott COGAN, Chargé de Recherche, CNRS, HDR, Institut FEMTO-ST

**Co encadrants**

- Aurélien HOT, Docteur Ingénieur, CNES Toulouse
- Emmanuel FOLTÊTE, Professeur, ENSMM de Besançon



À mes grand-pères



## Remerciements

Les travaux présentés dans ce manuscrit n'auraient pas pu voir le jour sans le soutien financier du Centre National d'Études Spatiales de Toulouse et de la Région Franche-Comté.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur principal de thèse Scott Cogan pour m'avoir offert l'opportunité de travailler sur ce projet. Ses conseils ainsi que sa bienveillance m'auront beaucoup éclairé durant ces quelques années. Un grand merci également à Emmanuel Foltête, pour m'avoir accueilli au sein du Département de Mécanique Appliquée de Besançon, pour son oreille attentive et son enthousiasme.

Je remercie également Fabrice Buffe et Aurélien Hot du Centre National d'Études Spatiales de Toulouse, qui ont tous deux participé à l'encadrement industriel de cette thèse. Leur confiance et leurs idées ont constitué des moteurs efficaces au cours de cette entreprise.

Merci à Gaëtan Kerschen de m'avoir accueilli à l'Université de Liège pendant un mois au cours duquel j'ai pu m'initier à la dynamique des modes normaux non-linéaires. Merci à Arnaud et Emeline de m'avoir aidé à les intégrer dans mes travaux de manière harmonieuse.

Un grand merci à Antoine, Titouan et Jean, mes maîtres AESOP auprès desquels de nombreux problèmes ont trouvé solution, non sans une certaine dose de sueurs et de céphalés.

Merci à Xavier, Jean, Yanxia, Oussenou, Olivier, Mohammed, Polo, Paul, Dimitri, Hamza et Miguel. Leur passage au 45H a transformé ce simple bureau de travail en un lieu des plus amical et chaleureux.

Merci à tous mes collègues qui eurent une influence fugace ou durable sur ces années de thèse, pour les événements et les discussions avec ou sans contenu scientifiquement exploitable, mais toujours très enrichissant. Merci à Gaël, Julien, Alexandre, Kévin, Saber, Diala, Leandro, Ali, Roméo, Romain, Pauline, Justine...

Merci à l'équipe du LaMCoS pour son accueil chaleureux en attendant la soutenance.

Enfin et surtout, merci à mes parents et mon frère, qui ont toujours cru en moi, et qui m'ont encouragé et soutenu tout au long de mes aventures. Merci à ma chérie, qui a réussi à maintenir mon morale au plus haut dans les moments difficiles de ces derniers mois de thèse.



# Table des matières

Remerciements . . . . .	v
Table des matières . . . . .	x
Liste des figures . . . . .	xiv
Liste des tableaux . . . . .	xv
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Vérification et Validation de Simulations Numériques . . . . .	2
1.1.1 Cadre de la V&V . . . . .	2
1.1.2 Quantification d'incertitudes . . . . .	5
1.2 Contexte industriel . . . . .	7
1.2.1 Exigences de conception du CNES . . . . .	7
1.2.2 Quantification d'incertitudes et marges de sécurité . . . . .	9
1.3 Objectifs scientifiques du doctorat . . . . .	11
<b>2 État de l'art</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	16
2.2 Dynamique des structures . . . . .	16
2.2.1 Introduction . . . . .	16
2.2.2 Dynamique linéaire . . . . .	17
2.2.3 Dynamique non-linéaire . . . . .	19
2.3 Plan de test pour l'analyse modale . . . . .	21

2.3.1	Introduction . . . . .	21
2.3.2	Placement de capteurs . . . . .	23
2.3.3	Placement d'excitateurs . . . . .	27
2.3.4	Élaboration du profil d'excitation de la structure, problématique de la mise en place d'un notching . . . . .	28
2.4	Conception robuste . . . . .	35
2.4.1	Introduction . . . . .	35
2.4.2	Analyse de fiabilité . . . . .	35
2.4.3	Méthodes de conception robuste . . . . .	44
2.4.4	Approches non-probabilistes pour la modélisation d'incertitudes . .	49
2.5	Conclusion partielle . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Conception robuste d'un plan de test pour l'analyse modale d'une struc- ture</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	56
3.2	Méthodologies . . . . .	56
3.2.1	Méthodologie de placement robuste de capteurs . . . . .	56
3.2.2	Extension aux capteurs multiaxiaux . . . . .	59
3.2.3	Méthodologie de placement robuste d'excitateurs . . . . .	60
3.2.4	Extension aux structures localement non-linéaires . . . . .	61
3.3	Application à une structure académique . . . . .	63
3.3.1	Placement de capteurs . . . . .	65
3.3.2	Placement robuste d'excitateurs . . . . .	68
3.3.3	Perspective d'extension aux structures localement non-linéaires . . .	70
3.4	Conclusion partielle . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Conception robuste d'une structure mécanique en présence de mécon- naissances de modèle, extension au calcul de profil de notching primaire</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	76
4.2	Conception robuste . . . . .	76

4.2.1	Construction et validation des métamodèles . . . . .	76
4.2.2	Analyse de fiabilité par approche <i>Info-Gap</i> . . . . .	78
4.2.3	Conception robuste vis-à-vis des méconnaissances de modèle . . . . .	83
4.3	Conception robuste du profil de notching primaire . . . . .	88
4.3.1	Définition du problème par fréquence . . . . .	88
4.3.2	Topologie du problème par fréquence et métamodèles . . . . .	89
4.3.3	Calcul de la probabilité de défaillance pour 35Hz . . . . .	93
4.3.4	Généralisation à une bande de fréquence . . . . .	97
4.4	Notching d'une structure non-linéaire . . . . .	99
4.5	Conclusion partielle . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Application à une structure industrielle : la plateforme MYRIADE</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	104
5.2	Présentation de la filière MYRIADE . . . . .	104
5.2.1	Introduction . . . . .	104
5.2.2	La filière MYRIADE . . . . .	104
5.2.3	Le modèle éléments finis MYRIADE . . . . .	107
5.3	Placement robuste de capteurs . . . . .	109
5.3.1	Positionnement de capteurs . . . . .	111
5.3.2	Recherche d'une direction robuste d'excitation . . . . .	120
5.4	Conception robuste de structure . . . . .	124
5.4.1	Définition du problème de conception robuste de structure . . . . .	124
5.4.2	Étude de sensibilité et choix des paramètres de conception . . . . .	125
5.4.3	Choix des paramètres incertains . . . . .	125
5.4.4	Construction des métamodèles . . . . .	128
5.4.5	Conception robuste en présence de méconnaissances de modèle . . . . .	130
5.5	Conception robuste du profil de notching primaire . . . . .	136
5.5.1	Analyse de sensibilité . . . . .	137
5.5.2	Métamodélisation et pistes de poursuite . . . . .	138
5.6	Conclusion partielle . . . . .	139

<b>6 Conclusions et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>156</b>
<b>A Calcul de courbes de robustesse</b>	<b>157</b>
A.1 Résolution analytique . . . . .	158
<b>B Réduction de modèle</b>	<b>159</b>
B.1 Réduction dynamique exacte . . . . .	160
B.2 Guyan . . . . .	161
B.3 Craig-Bampton . . . . .	162
<b>C Analyses de sensibilité</b>	<b>165</b>
<b>D Métamodèles</b>	<b>169</b>
D.1 Métamodèles communément utilisés . . . . .	169
D.1.1 Les surfaces de réponse . . . . .	169
D.1.2 Le Krigeage . . . . .	171
D.1.3 Les réseaux de neurones . . . . .	172
D.2 Critères de comparaison des métamodèles . . . . .	174
D.3 Métamodèles adaptatifs . . . . .	175
D.3.1 Maillage adaptatif . . . . .	175

# Table des figures

1.1	La finesse des modèles éléments finis n'est pas gage de justesse (Source NASTRAN) . . . . .	2
1.2	Approche algorithmique de la V&V . . . . .	3
1.3	Approches Top-Down et Bottom-Up . . . . .	5
2.1	Différentes étapes lors du lancement d'une ARIANE 5 (© Cédric Audinot)	29
2.2	Modèle de test du satellite PICARD (source CNES) en parallèle de la modélisation à trois degrés de libertés . . . . .	31
2.3	Effort d'interface de la structure soumise à une excitation d'amplitude constante . . . . .	32
2.4	Profil de notching (a), effort d'interface après application du profil notché (b) . . . . .	33
2.5	Profil de notching pour différentes incertitudes ajoutées (source ESA) . . .	34
2.6	Optimisation RBDO et RDO . . . . .	46
3.1	Réponses linéaire et non-linéaire d'un oscillateur de type Duffing . . . . .	62
3.2	12 premières déformées propres de la structure . . . . .	63
3.3	Dispersion en déformées propres . . . . .	65
3.4	Distributions de 9, 10,11 et 12 capteurs par la méthode QR . . . . .	66
3.5	Courbes de robustesse obtenues pour les distributions de 9 à 12 capteurs. Critère en conditionnement (a) et en indice MAC (b) . . . . .	67
3.6	Courbes de robustesse obtenues pour les distributions de 12 capteurs. Critère en conditionnement (a) et en indice MAC (b) . . . . .	68

3.7	Courbes de robustesse déduites du placement d'excitateur robuste et déterministe . . . . .	69
3.8	Contrôle de la performance du modèle réduit . . . . .	71
3.9	Comparaison FRF linéaire et non linéaire . . . . .	72
3.10	Réponses temporelles de la structure pour deux fréquences d'excitation différentes . . . . .	72
3.11	Zones d'influences des harmoniques des modes cible (en rouge) et fréquences propres des modes hautes fréquences du système linéaire (en bleu) . . . . .	73
4.1	Courbes de robustesse pour le cas $C_\sigma$ avec analyse par Monte-Carlo (1e6 échantillons), FORM, FORM appliqué sans métamodèle, et SORM . . . . .	81
4.2	Courbes de robustesse pour le cas $C_{\mu,\sigma}$ avec recherche du maximum de probabilité de défaillance par Monte-Carlo, approche borne et <i>fmincon</i> . . . . .	82
4.3	Convergence de la procédure RRDO-IG pour les cas $C_\sigma$ et $C_{\mu,\sigma}$ . . . . .	84
4.4	Résolution du problème $C_\sigma$ . . . . .	86
4.5	Résolution du problème $C_{\mu,\sigma}$ . . . . .	87
4.6	Résolution du problème $C_{\mu,\sigma}$ avec un modèle d'incertitude ellipsoïdale . . . . .	87
4.7	Topologie de la fonction de contrainte dans l'espace standard pour les paramètres $m_1$ et $m_2$ . . . . .	90
4.8	Meilleures performances des métamodèles testés par fréquence . . . . .	91
4.9	Nombre d'appels au modèle à chaque pas de fréquence . . . . .	92
4.10	(a) Évolution de la topologie de la fonction contrainte en fonction de l'excitation à 35Hz, (b) Probabilité de défaillance en fonction de l'excitation, par FORM en rouge et par Subset-Simulation en bleu . . . . .	93
4.11	Régression par <i>polyfit</i> . . . . .	95
4.12	Profils de notching pour différentes probabilités de défaillance critiques à $\alpha = 0.5$ (a) et pour différents horizons d'incertitudes à $P_c = 0.05$ (b) . . . . .	97
4.13	Profils de notching dans le cas $C_{\mu,\sigma}$ pour différents horizons d'incertitude . . . . .	98
4.14	Incertaince sur $k_{nl}$ seul . . . . .	99
4.15	Topologie de la fonction de contrainte dans l'espace standard pour les paramètres $m_1$ et $m_2$ . . . . .	100

5.1	Plateformes MYRIADE en phase d'intégration pour différentes charges utiles (source CNES) . . . . .	105
5.2	Visuel du modèle éléments finis de la plateforme MYRIADE . . . . .	108
5.3	Aperçu des 10 premiers modes de la structure . . . . .	108
5.4	Surfaces candidates pour le placement de capteurs (positions possibles pour les équipements incertains en bleu et rouge). . . . .	110
5.5	Dispersion des modes . . . . .	111
5.6	Profils des valeurs singulières pour différents horizons d'incertitude . . . . .	112
5.7	Courbes de robustesse pour des distributions construites de manière déterministe, et robuste pour un horizon d'incertitude de 0.3 . . . . .	113
5.8	AutoMAC des distributions robustes et déterministes pour 10, 14 et 20 capteurs . . . . .	114
5.9	Courbes de robustesse pour les distributions de capteurs construites par approche QR . . . . .	115
5.10	AutoMACs obtenus pour des distributions des 10, 14 et 20 capteurs par approches déterministes et robustes. . . . .	116
5.11	Valeur de l'indice MAC (5; 7) . . . . .	117
5.12	Nombre de capteurs recommandé en fonction du seuil choisi sur les valeurs singulières de la SVD et de l'horizon d'incertitude . . . . .	118
5.13	Évolution de la performance des distributions pour un nombre de capteur évolutif, indexé sur un seuil en SVD de 1e-5 . . . . .	119
5.14	Analyse de la robustesse des différentes directions d'excitation de la structure	121
5.15	Résultats de la recherche d'une seconde direction d'excitation . . . . .	122
5.16	Représentation circulaire des critères robustes MMIF pour différents horizons d'incertitude . . . . .	123
5.17	Visuel du modèle éléments finis des cornières de la plateforme MYRIADE	125
5.18	Approche cas par cas de la sensibilité des premières fréquences propres aux paramètres incertains . . . . .	127
5.19	Résultats de l'analyse de Morris . . . . .	128
5.20	Courbes de robustesse pour le design nominal, et les designs obtenus par RBDO et RRDO-IG à 30% d'incertitude pour le cas $C_\sigma$ . . . . .	131

5.21	Courbes de robustesse obtenues par RRDO-IG pour des horizons d'incertitude de construction de 0 à 0.5 (a). Évolution de la masse après optimisation de la structure (b) . . . . .	132
5.22	Courbes de robustesse du design nominal et espace d'existence des courbes de robustesse pour $f_c = 33\text{Hz}$ (a) et $35\text{Hz}$ (b) . . . . .	133
5.23	Traitement du problème d'optimisation avec des lois normales tronquées pour le cas $C_\sigma$ . . . . .	134
5.24	Cas $C_{\mu,\sigma}$ . . . . .	135
5.25	FRFs de quelques balayages fréquentiels de la structure à l'interface satellite dans la direction y . . . . .	137
5.26	Résultats de l'analyse de Morris pour le niveau de réponse à la fréquence propre . . . . .	138
5.27	Meilleure performance des métamodèles usuels par fréquence . . . . .	139
C.1	Visuel des trajectoires utilisées dans la méthode de Morris (a). Hiérarchisation des variables par la méthode de Morris (b) . . . . .	167
D.1	Représentation schématique d'un neurone formel, $f$ représente la sigmoïde	173
D.2	Représentation schématique d'un réseau de neurones non-bouclé . . . . .	173
D.3	Représentation schématique d'un réseau de neurones bouclé . . . . .	174

# Liste des tableaux

1.1	Valeurs de FOSY et FOSU en fonction du matériau et du type de vérification	11
2.1	Spécifications d'essais de qualification en sinus balayé pour ARIANE 5	30
3.1	Dispersion en fréquences propres	64
3.2	Performance de la réduction en fréquence	71
4.1	Performance des différents métamodèles testés	77
5.1	Performances offertes par la plateforme Myriade	106
5.2	Dispersion en fréquences propres	110
5.3	Critères de performance pour la métamodélisation de la première fréquence propre	129
5.4	Critères de performance pour la métamodélisation de la deuxième fréquence propre	129
5.5	Critères de performance pour la métamodélisation de la masse	130
5.6	Analyse des designs	131



Chapitre **1**

# Introduction générale

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Vérification et Validation de Simulations Numériques . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1.1	Cadre de la V&V . . . . .	2
1.1.2	Quantification d'incertitudes . . . . .	5
<b>1.2</b>	<b>Contexte industriel . . . . .</b>	<b>7</b>
1.2.1	Exigences de conception du CNES . . . . .	7
1.2.2	Quantification d'incertitudes et marges de sécurité . . . . .	9
<b>1.3</b>	<b>Objectifs scientifiques du doctorat . . . . .</b>	<b>11</b>

---

## 1.1 Vérification et Validation de Simulations Numériques

### 1.1.1 Cadre de la V&V

Le prototype virtuel est devenu une étape incontournable dans la conception de systèmes complexes. En effet, autrefois, les essais expérimentaux étaient conçus et réalisés dans l'objectif de qualifier un système tandis que la simulation numérique était utilisée pour comprendre *a posteriori* les phénomènes physiques en jeu dans le système. Les deux activités pouvaient évoluer de manière quasi-indépendante.

Dans le domaine de la mécanique des structures, la méthode des éléments finis [156] est très certainement la plus utilisée pour construire les modèles. Modèles qui, d'après [103], ne sont qu'une représentation simplifiée d'un système, destinée à améliorer notre capacité à comprendre, prédire et éventuellement contrôler son comportement.

L'évolution rapide de la puissance de calcul des ordinateurs rend possible la construction de modèles éléments finis de plus en plus complexes et détaillés. Néanmoins, ces avancées en terme de modélisation ne garantissent pas pour autant une meilleure représentation de la structure réelle, et une confrontation entre les résultats numériques et expérimentaux montrera souvent que le modèle n'est pas satisfaisant.

Cette incapacité à représenter la réalité de manière fidèle est le fruit d'un amoncellement d'incertitudes de natures diverses, tant sur la partie modélisation qu'expérimentale.

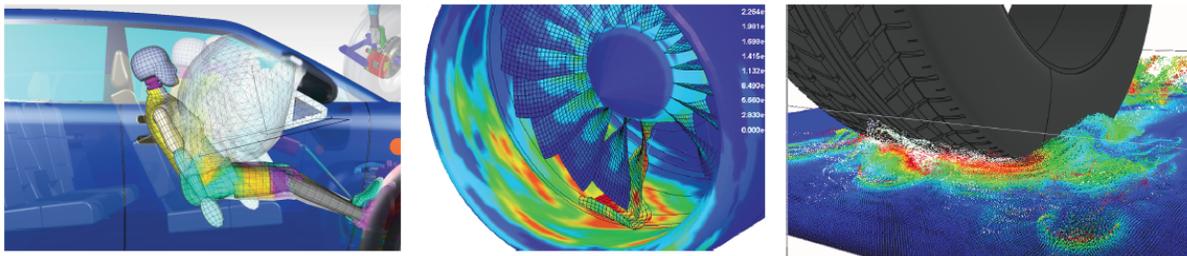


FIGURE 1.1: La finesse des modèles éléments finis n'est pas gage de justesse (Source NAS-TRAN)

L'accumulation de ces limitations rend difficile la prise de décision à partir de modèles et ne fait que mettre en exergue la nécessité de développer des méthodologies permettant d'assurer la crédibilité d'un modèle.

Historiquement, cette question a commencé à être traitée dans les années 90 lorsque le gouvernement des États-Unis d'Amérique a soumis la question suivante aux départements d'énergie des laboratoires de Los Alamos et de Sandia National :

*“Comment est-il possible de démontrer et d’entretenir la fiabilité de l’arsenal nucléaire américain sans avoir recours à aucun test en conditions réelles ?”*

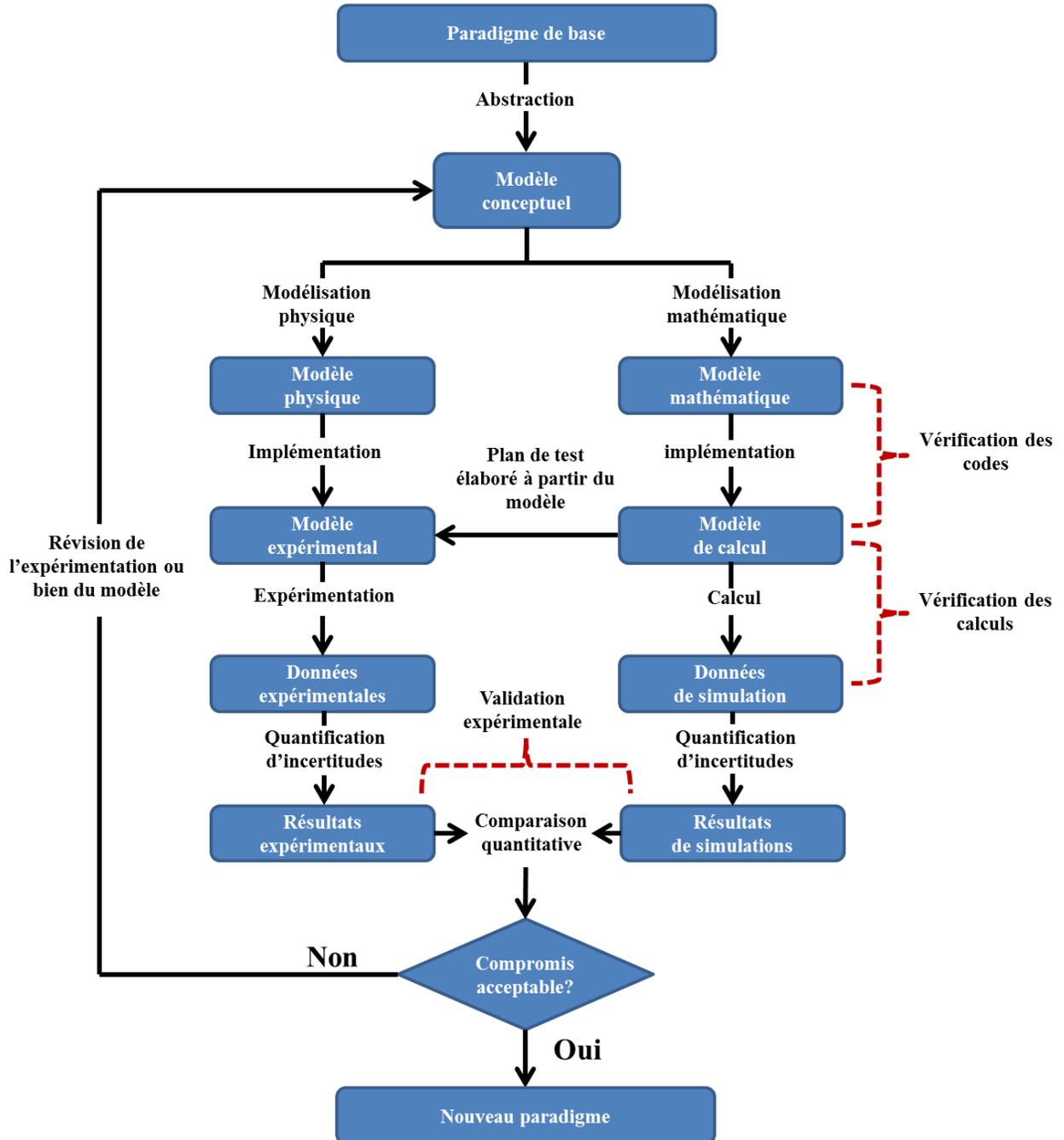


FIGURE 1.2: Approche algorithmique de la V&V

Cette question, cristallisant toute l'importance de la démarche, a permis la formalisation de procédures pour la Vérification et la Validation (V&V) des simulations numériques. L'*American Institute of Aeronautics and Astronautics* (AIAA) et l'*American Society of Mechanical Engineers* (ASME) ont publié deux documents, respectivement [43] et [134], présentant la philosophie de la V&V.

La V&V a pour objectif avoué d'établir la capacité d'un modèle numérique donné à fournir un niveau requis de précision. Ceci en vue d'une prise de décision pour une application prévue.

Le procédé V&V donne un cadre relativement large, et renvoie vers de nombreuses étapes de la conception d'un système. Le schéma présenté figure 1.2 permet d'en dégager assez naturellement les éléments principaux. Cette figure met en avant la symbiose devant exister durant la maturation des parties numérique et expérimentale du projet de conception. Les phases de vérification ainsi que celle de validation sont ici matérialisées par les accolades rouges pointillées.

La vérification, tout d'abord, est le processus déterminant que l'implémentation d'un modèle représente fidèlement sa description conceptuelle ainsi que sa solution [43]. L'ASME propose de distinguer cette activité en deux parties ; la première s'assurant de la justesse des codes de manière à éviter les erreurs de programmation, et la seconde visant à vérifier que les solutions fournies convergent bien vers la solution vraie. Cette étape peut être mis en œuvre en utilisant un système simple dont les réponses sont connues *a priori*.

La validation est le processus déterminant dans quelle mesure le modèle est une représentation fidèle de la réalité du point de vue de l'utilisation prévue. Cette étape est basée sur la confrontation des résultats numériques à la réalité d'un dispositif expérimental conçu à cet effet. Dans le cas de structures complexes, composées de différents sous-ensembles, l'ordre dans lequel les différents composants doivent être testés n'est pas trivial. L'ASME apporte une solution en pointant le fait que les systèmes industriels peuvent être hiérarchisés tel que présenté figure 1.3. Dans le cas d'un satellite, la décomposition peut se faire en charge utile et plateforme, puis dans un second temps, en terme d'instruments, de boîtiers électriques et de panneaux solaires, pour terminer par les éléments les plus simples qui sont les poutres, coques et composants électriques. Deux stratégies peuvent alors être adoptées. Soit une validation allant du système complet vers ses sous-éléments distincts (*Top-Down*) soit l'inverse (*Bottom-Up*). La stratégie *Bottom-Up* est à privilégier dans le sens où elle permet une validation graduelle des composants jusqu'à l'obtention du système dans son intégrité. Sa mise en place dans l'avancée du projet est donc plus simple. Pour chaque niveau de la pyramide, la routine présentée figure 1.2 doit être appliquée, afin de garantir l'efficacité de la démarche V&V à tous les niveaux de la conception.

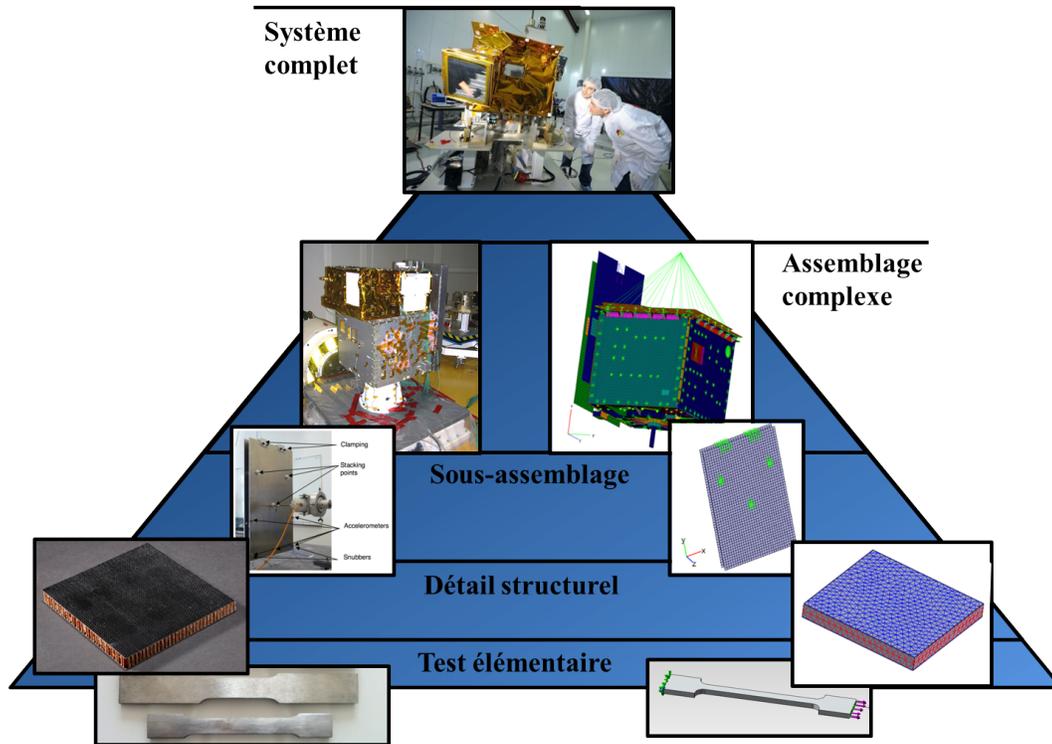


FIGURE 1.3: Approches Top-Down et Bottom-Up

L'étape de calibration de modèle, loin d'être intuitive, peut entraîner des erreurs plus pernicieuses sous la forme d'effets de compensations [136, 9]. En d'autres termes, il est possible que plusieurs modèles différents donnent un résultat en accord avec les relevés expérimentaux. Des critères de sélection de modèle ont été développés afin de choisir le modèle tolérant le plus d'incertitudes (en d'autres termes, le plus robuste) vis-à-vis des paramètres à calibrer.

Un choix doit donc être fait en amont de cette étape, afin d'établir s'il est plus intéressant (ou matériellement possible) de rechercher un modèle le plus fidèle possible aux données d'essai, ou bien un modèle le plus robuste possible vis-à-vis des incertitudes.

### 1.1.2 Quantification d'incertitudes

Comme il est possible de le constater figure 1.2, la quantification d'incertitudes apparaît dans les deux branches du processus de V&V. La quantification d'incertitudes est l'étape permettant d'assurer que les différentes sources de variabilité ont bien été prises en compte lors de la modélisation ainsi que leur impact sur les réponses d'intérêt.

La classification de l'incertitude est, depuis quelques années, bien établie : on citera, sans être exhaustif, [134, 69, 41, 85, 106, 125]. Même si les noms diffèrent d'une publication à

une autre, deux grandes catégories sont communément utilisées :

- les incertitudes aléatoires (ou incertitudes irréductibles, incertitudes stochastiques, incertitudes intrinsèques, variabilité, incertitudes de type A) sont dues à la variabilité intrinsèque du système étudié et de son environnement [106]. Elles caractérisent notamment la nature non déterministe d'un système et seront toujours présentes, même si l'on connaît précisément le système. Elles résultent, par exemple, de la variabilité des propriétés matériaux, de la variabilité des assemblages de composants, de la variabilité des conditions environnementales, etc. Ces incertitudes sont naturellement susceptibles d'affecter le fonctionnement d'un système ;
- les incertitudes épistémiques (ou incertitudes réductibles, incertitudes subjectives, méconnaissances, ignorance, incertitudes de type B) résultent d'un manque de connaissance et doivent pouvoir être diminuées par une augmentation de la quantité d'information. Il est possible d'y trouver, par exemple, les modèles de comportement des matériaux, la prise en compte de physiques négligées telles que les non-linéarités dans le calcul de réponses, les erreurs d'échantillonnage, etc. Ces incertitudes sont la conséquence de notre incapacité à appréhender complètement des phénomènes complexes.

Dans [134, 106] une distinction supplémentaire séparant les erreurs des incertitudes est proposée. Une erreur est définie comme une imprécision identifiable qui n'est pas due à un manque de connaissance. Les erreurs peuvent être volontaires, par exemple lors d'une simplification de maillage destinée à accélérer les calculs ; ou involontaires, par exemple lors d'étourderies dans la programmation. Pour peu que l'analyste ou toute autre personne prenne le temps de vérifier son travail, les erreurs involontaires sont théoriquement identifiables. De même, la motivation, l'entraînement, l'expérience permettent de diminuer le risque d'erreurs. Les erreurs involontaires semblant alors réductibles, on pourrait tout de même considérer qu'elles se classent dans la catégorie des incertitudes épistémiques. Mais d'aucuns objecteront que « l'erreur est humaine », dans ce cas elle devient une incertitude intrinsèque. Cette ambiguïté est souvent présente lorsque, acceptant la catégorisation Incertitudes Irréductibles/Incertitudes Réductibles, on se pose la question : « ces incertitudes sont-elles réductibles ou irréductibles ? ». Pour une discussion sur l'importance ou non de distinguer les incertitudes réductibles des incertitudes irréductibles, on pourra lire [41]. Les auteurs y montrent sur deux problèmes de fiabilité qu'une mauvaise catégorisation des incertitudes peut avoir des conséquences sur les résultats des analyses.

Pour finir, remarquons que Knight [86] désigne par « risque » une incertitude que l'on peut mesurer et par « incertitude » une incertitude ou un risque que l'on ne peut pas mesurer. Cette « incertitude » est aussi appelée « incertitude de Knight ».

Quelle que soit l'incertitude considérée, le moment venu de la formaliser au sein d'un modèle d'incertitude peut donner lieu à débat. En effet, à un type d'incertitude ne correspond pas une forme dédiée de modèle. Dans [41], il est justement indiqué que la caractérisation de l'incertitude est un choix pragmatique et dépend de l'utilisation du modèle. En effet, même si une approche probabiliste semble particulièrement appropriée à une incertitude de type réductible, le choix du modèle à utiliser reste une décision d'ingénierie devant tenir compte du but de l'application, et des moyens et connaissances disponibles. Ainsi, pour les incertitudes épistémiques, certains utiliseront également une approche probabiliste [19] quand d'autres préféreront un cadre de méthodologies plus dédiées [21, 96].

Différentes approches visant à la modélisation des incertitudes seront présentées section 2.4.4. L'accent sera porté sur les méthodes non-probabilistes, qui sont au cœur des applications entreprises durant ce doctorat.

## 1.2 Contexte industriel

La procédure de dimensionnement et de qualification CNES intègre une logique de validation et de vérification de la structure. Cette section présente les objectifs retenus par le CNES concernant les exigences de conception mais également la manière dont sont gérées les incertitudes.

### 1.2.1 Exigences de conception du CNES

Les exigences de conception découlent directement des trois fonctions que doit assurer la structure : intégrité, rigidité et stabilité.

**Intégrité** L'évènement le plus dimensionnant que la structure satellite a à subir au cours de sa vie est bien entendu le lancement. Pour ce cas, un ensemble de spécifications a été élaboré par les autorités lanceur de manière à assurer la survie du système au cours de son vol. D'autres sources de dommages peuvent néanmoins exister, notamment lors des transports du satellite et des opérations de manutention. Bien que le caractère dimensionnant de ces étapes soit réduit à son minimum possible, des isolements mécaniques peuvent être à mettre en place.

Le cas particulier de la mise sous pression des réservoirs et accumulateurs exige un dimensionnement et une vérification spécifique.

Enfin, les efforts de verrouillage des articulations des appendices déployables peuvent également être dimensionnants, d'autant que ceux-ci peuvent s'effectuer dans des conditions de températures sévères (entre  $-150$  et  $+120^{\circ}\text{C}$ ).

**Rigidité** Le dimensionnement en rigidité s'adresse quant à lui au comportement dynamique du satellite. Il est ici question d'assurer le découplage fréquentiel entre les différents systèmes. Tout d'abord entre le lanceur et le satellite, puis entre le satellite et ses sous-systèmes et équipements. Ceci permet d'éviter les couplages mécaniques et les amplifications de mouvements. L'objectif final est de borner les accélérations à l'intérieur du satellite.

Maîtriser le comportement dynamique de la structure peut aussi être motivé par des besoins de stabilisation et de pointage de certains instruments. Si le SCAO (Système de contrôle d'Attitude et d'Orbite) ne peut être découplé fréquemment de certaines structures (antennes, générateurs solaires...), il est primordial de connaître le comportement de ces derniers avec le plus de précision possible de manière à le prendre en compte dans les lois de contrôle. Le cas des instruments de communication et d'observation nécessite également une grande stabilité de position en dynamique. Ceux-ci sont très sensibles aux perturbations de faible niveau qui peuvent être amplifiées par les résonances du système. Les ordres de grandeur mis en jeu ici sont de quelques microradians pour les positions angulaires. Ces phénomènes sont classés dans la catégorie des microvibrations.

**Stabilité dimensionnelle** La stabilité dimensionnelle a trait aux structures du satellite requérant un grand maintien des alignements. Les exigences moyennes sont de  $1/10^{\text{ième}}$  de millimètre pour les réflecteurs et de l'ordre du micromètre pour les instruments d'observation optique. Cette stabilité peut être affectée par deux types de déformations :

- les biais permanents, qui sont déterministes et compensables en vol par des mécanismes à réglages actifs. Ils peuvent être dus à des micro-glissements ou des plastifications survenant lors du lancement, à l'absence de pesanteur en orbite (le satellite étant assemblé au sol, sous  $1g$  statique homogène) ou encore par la désorption de l'humidité confinée dans les matériaux à matrice organique.
- les déformations à variations lentes ou cycliques parmi lesquelles se trouvent les déformations thermo-élastiques liées aux fluctuations de l'environnement thermique en orbite. Ces fluctuations affectent la structure primaire du satellite et donc directement la longueur des chemins optiques.

Les facteurs environnementaux tels que l'oxygène monoatomique ou les rayonnements ultraviolets ne sont pas ou très peu dommageables aux structures.

L'optimisation de la stabilité du satellite est assurée par une approche conjointe des composantes thermiques et structures :

- un contrôle thermique permet de minimiser les variations temporelles et les gradients de température,
- des choix architecturaux réfléchis permettent une optimisation des coefficients de dilatation thermo et hygro-élastiques des matériaux. La mise en place de structures filtrantes permet l'isolation des parties sensibles de la structure.

### 1.2.2 Quantification d'incertitudes et marges de sécurité

En plus de respecter ces trois règles d'or que sont l'intégrité, la rigidité et la stabilité, une bonne méthodologie de conception d'une structure doit lui permettre de tolérer les deux familles d'incertitudes décrites plus haut. Ces incertitudes sont en général prises en considération par les industriels au travers de facteurs et de marges de sécurité.

Dans le cas du CNES, et d'après ECSS-E-ST-32-10C "*Structural factors of safety for spaceflight hardware*", la distinction est faite entre les valeurs qui ne dépendent que de l'environnement ou du chargement appliqué à la structure, et les valeurs qui ne dépendent que de la structure elle même.

Pour la première catégorie, la charge limite ( $LL$  pour *Limit Load*) représentant les charges maximales susceptibles d'être rencontrées en vol (avec une probabilité associée le cas échéant) est définie et sert de base à toutes les charges pouvant être utilisées au cours de la conception du satellite. Ces charges sont modulées par un facteur de sécurité qui leur est propre. Sont ainsi définies :

- La charge de qualification ( $QL$  pour *Qualification Load*) représentant les charges rencontrées lors des essais de qualification telle que :

$$QL = LL \times KQ \quad (1.1)$$

- La charge de recette ( $AL$  pour *Acceptance Load*) pour les charges rencontrées en essai de recette telle que :

$$AL = LL \times KA \quad (1.2)$$

- La charge de dimensionnement ( $DLL$  pour *Design Limit Load*) telle que :

$$DLL = A \times LL \quad (1.3)$$

- La charge à limite élastique (*DYL* pour *Design Yield Load*) qui est comparée à la charge acceptable à limite élastique, telle que :

$$DYL = B \times DLL \quad (1.4)$$

- La charge extrême ou ultime (*DUL* pour *Design Ultimate Load*) qui est comparée à la charge acceptable extrême ou ultime, telle que :

$$DUL = C \times DLL \quad (1.5)$$

Pour la seconde catégorie, sont définies :

- La charge acceptable à la limite élastique qui couvre les valeurs maximales de sollicitation n'entraînant pas de plastification des matériaux (0.2% de déformation est en général toléré)
- La charge acceptable extrême ou ultime, qui est la valeur de sollicitation pour laquelle la structure est soumise à la rupture et/ou au flambage. Elle caractérise donc les sollicitations minimales entraînant la ruine de la structure.

Les facteurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont de la forme :

$$A = KQ \times K_M \times K_P \quad B = FOSY \times K_{LD} \quad C = FOSU \times K_{LD} \quad (1.6)$$

où :

- $K_M$  est un facteur couvrant les incertitudes de modélisation, il varie entre 1.2 au début du projet à 1 après recalage.
- $K_P$  atteste de l'état de maturité du projet et couvre les éventuels changements d'aménagement. Il varie également communément de 1.2 à 1.
- $K_{LD}$  prend en compte les difficultés de modélisations locales ou l'absence de méthodologie de dimensionnement fiable. Il est en général fixé à une valeur de 1.2 pour représenter les discontinuités de la structure au sein des composites, des liaisons et des insertions.
- $FOSY$  et  $FOSU$  correspondent respectivement aux facteurs de sécurité (*Factor Of Safety*) de la limite élastique (*Yield*) et ultime (*Ultimate*). Ils dépendent des matériaux et des conditions de vérification considérés. En se rapportant au tableau 1.1, il est notable que  $FOSY$  ne s'applique qu'aux matériaux métalliques, les autres matériaux étant caractérisés par un comportement fragile avec un domaine élastique quasi inexistant. Les différences existantes entre le cas avec ou sans essai tiennent à

la volonté de ne pas dégrader la structure lors des essais de qualification. Ces valeurs font toujours l'objet d'un accord avec le client et de la législation applicable.

	Métaux	Composites	Verres ou céramiques
Analyse et essai	FOSY = 1.1 FOSU = 1.25	FOSU = 1.25	FOSU = 2.5
Analyse seule	FOSY = 1.25 FOSU = 2	FOSU=2	FOSU = 5

TABLE 1.1: Valeurs de FOSY et FOSU en fonction du matériau et du type de vérification

D'une manière générale, les valeurs préconisées par les ECSS (*European Cooperation or Space Standardization*) ne sont applicables que dans le cadre du strict respect de l'intégralité des exigences ECSS. Tout écart doit être compensé par une adaptation des valeurs.

Cette approche consistant à instaurer des coefficients de sécurité souffre de deux faiblesses potentielles. Tout d'abord, l'accumulation des facteurs de sécurité à chaque niveau de décomposition du système (élément unitaire, sous-ensemble puis assemblage) peut mener à un surdimensionnement de ce dernier, et donc à une structure inutilement lourde. De plus, l'arrivée de nouveaux matériaux et technologies peut mener à des comportements exotiques de la structure qui n'entrent plus dans la logique des facteurs de sécurité utilisés jusqu'à présent.

### 1.3 Objectifs scientifiques du doctorat

Les travaux présentés dans cette thèse visent à apporter des outils d'aide à la décision à partir de modèles prenant en compte une représentation des différentes sources d'incertitudes du système. Il est en effet possible en utilisant des simulations numériques de développer des indicateurs de support à la décision sous un certain niveau d'incertitude aléatoire ou épistémique. Le principe de conception est ici utilisé au sens large, et peut entrer dans le cadre du dimensionnement structural de composants, de la définition de l'amplitude d'excitation maximale d'un essai, ou encore de la mise en place d'une distribution de capteurs.

La littérature traitant de l'impact des incertitudes aléatoires grâce à des méthodes probabilistes pour la conception robuste, la validation ou encore la calibration de modèles est très riche. Il apparaît cependant très rapidement qu'une approche purement probabiliste ne peut pas s'appliquer à tous les domaines et tous les problèmes. En effet, dans la plupart des problèmes d'ingénierie, de nombreuses sources d'incertitudes ne sont pas

de nature probabiliste. Dans le cas plus particulier du spatial, où les structures sont en général en exemplaire unique, il est impossible pour la plupart des paramètres de mener des études basées sur les populations, et donc de construire proprement les fonctions de densité de probabilité. Dans ce contexte de grandes incertitudes, où la différence entre ce qui est connu et ce qui doit l'être est trop importante pour prendre une décision éclairée, des stratégies alternatives mais complémentaires doivent être élaborées.

Les différents problèmes de prise de décision en présence de méconnaissances de modèle seront ici traités dans le cadre d'une représentation des incertitudes par des modèles *Info-Gap* [21]. Cette approche apporte les outils nécessaires à l'analyse et à l'amélioration de la robustesse des systèmes vis-à-vis des principales sources d'incertitudes rencontrées dans le domaine du spatial, à savoir : les propriétés mécaniques et matériaux, les paramètres des lois de probabilité ou encore les non-linéarités locales. La question fondamentale ici traitée sera :

Dans quelle mesure le modèle numérique peut-il être faux sans que les erreurs sur les résultats soient dommageables à l'intégrité de la structure ?

Un design pouvant tolérer de grandes méconnaissances de modèle est considéré comme robuste vis-à-vis de ces dernières. Si tel n'est pas le cas, la conception doit être améliorée de manière à offrir des performances plus satisfaisantes. Cette stratégie fournit des outils rationnels pour moduler les facteurs de sécurité en fonction du degré de connaissance du maître d'œuvre.

Le plan de ce manuscrit est construit de manière à illustrer ces propos.

- Dans le deuxième chapitre, un tour d'horizon des méthodes et concepts existants entrant dans le cadre de ces travaux de doctorat seront étudiés.
- Le troisième se concentrera sur le développement d'une méthodologie de placement robuste de capteurs et d'excitateurs. Celle-ci s'articulera autour de l'adaptation des méthodes de Kammer et par décomposition QR à la prise en compte des méconnaissances de modèle avec un formalisme *Info-Gap*. Ces méthodologies seront ensuite testées sur une structure académique de type treillis puis étendues à une structure possédant des non-linéarités locales. Ce chapitre s'efforcera de donner des éléments de réponse à la question : dans quelle mesure est-il possible d'attester la robustesse d'une distribution de capteurs (et d'excitateurs) à partir d'un modèle soumis à des manques de connaissances ?
- Le quatrième quant à lui reviendra sur une vision plus classique de l'optimisation d'une grandeur sous contrainte. Après avoir validé pas à pas la méthodologie sur une structure académique très simple modélisant les deux premiers modes longitudinaux

d'un satellite, celle-ci sera appliquée dans le cadre de la conception d'un profil de notching puis, là encore, étendue aux structures localement non-linéaires. La question posée ici est : comment le niveau d'un notching primaire doit-il être défini de manière à assurer un niveau donné de robustesse vis-à-vis des méconnaissances de modèle ? Dans cette application, les densités de probabilité des variables physiques seront définies, mais leurs paramètres (moyenne et écart-type) seront considérés comme inconnus.

- Enfin, le cinquième et dernier chapitre permettra de mettre en relief les méthodologies précédemment développées en les appliquant au contexte industriel de la conception d'un satellite scientifique de la filière MYRIADE.

Quelques annexes disponibles en toute fin du document permettront au lecteur intéressé d'approfondir différentes thématiques qui n'auront pas pu être développées dans le corps du manuscrit.



# Chapitre 2

## État de l'art

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Dynamique des structures</b>	<b>16</b>
2.2.1	Introduction	16
2.2.2	Dynamique linéaire	17
2.2.3	Dynamique non-linéaire	19
<b>2.3</b>	<b>Plan de test pour l'analyse modale</b>	<b>21</b>
2.3.1	Introduction	21
2.3.2	Placement de capteurs	23
2.3.3	Placement d'excitateurs	27
2.3.4	Élaboration du profil d'excitation de la structure, problématique de la mise en place d'un notching	28
<b>2.4</b>	<b>Conception robuste</b>	<b>35</b>
2.4.1	Introduction	35
2.4.2	Analyse de fiabilité	35
2.4.3	Méthodes de conception robuste	44
2.4.4	Approches non-probabilistes pour la modélisation d'incertitudes	49
<b>2.5</b>	<b>Conclusion partielle</b>	<b>54</b>

---

## 2.1 Introduction

Le second chapitre de cette thèse constitue l'état de l'art des méthodes et concepts qui seront utilisés et développés dans la suite du document. A chaque section, un large horizon des théories existantes sera balayé avant de recentrer le propos uniquement sur celles qui seront mises à profit.

Cet état de l'art démarrera par un rappel bref mais essentiel des outils fondamentaux de la dynamique des structures linéaires, puis s'étendra sur le concept de modes non-linéaires et plus précisément sur la manière de synthétiser le comportement dynamique non-linéaire d'une structure. La méthode ici présentée se nomme la Balance Multi-Harmonique. Elle constitue un cadre privilégié pour l'étude de structures comportant des non-linéarités locales.

Vient ensuite un tour d'horizon des méthodologies existantes concernant la mise en place de plans de test pour les essais en vibration. Seront abordées dans un premier temps les problématiques de placement de capteurs et d'excitateurs, avec en particulier les approches de Kammer et par décomposition QR. Différents critères permettant d'attester de la performance d'une distribution de capteurs seront également exposés. Dans un second temps, le dimensionnement d'un profil d'excitation lors de la préparation d'un essai en sinus balayé sera présenté. Là, le principe de notching d'un profil sera explicité et l'effet de certaines incertitudes sera éclairé.

Enfin, l'ensemble des outils théoriques nécessaires à la conception robuste d'une structure en présence de méconnaissances de modèle sera investigué. À la lumière de la définition de la fiabilité d'un système, il sera vu comment la notion et le calcul d'une probabilité de défaillance peuvent être intégrés à des procédures d'optimisations existantes. L'accent sera finalement mis sur la manière de modéliser les incertitudes épistémiques par une approche non-probabiliste.

## 2.2 Modélisation des comportements dynamiques d'une structure

### 2.2.1 Introduction

Ces travaux de thèse s'inscrivant dans un contexte de dynamique des structures, il paraît important de poser les bases permettant la modélisation et l'étude des phénomènes vibratoires d'une structure. Bien que le cadre de la dynamique linéaire permette bon nombre

d'applications dans de vastes domaines de la mécanique, les besoins industriels concernant le traitement de problèmes non-linéaires se font de plus en plus présents. Cette section propose un aperçu des grandes lignes de la dynamique linéaire pour se diriger ensuite vers le formalisme de la dynamique non-linéaire.

### 2.2.2 Dynamique linéaire

La théorie décrivant la dynamique linéaire des structures se base sur des équations du mouvement de la forme :

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + C\dot{\mathbf{q}}(t) + K\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (2.1)$$

avec  $M$ ,  $C$  et  $K$  les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système ( toutes dans  $\mathbb{R}^{N,N}$ ),  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  et  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  les vecteurs déplacement, vitesse et accélération et  $\mathbf{p}(t)$  le vecteur des efforts appliqués à la structure (tous dans  $\mathbb{R}^{N,1}$ ). De celle-ci découle la définition de modes propres de la structure qui sont en fait les solutions de l'équation 2.1 dans sa forme homogène, où  $\mathbf{p}(t) = 0$ .

Chaque mode constitue un couple formé d'une pulsation propre (valeur propre du problème) et d'une déformée propre (vecteur propre du problème). Mécaniquement, la pulsation propre représente la fréquence de résonance du mode multipliée par  $2\pi$  tandis que la déformée propre représente la forme prise par la structure lorsque ce mode est le seul à répondre. L'ensemble des modes de la structure constitue la base modale. Elle est orthogonale et complète.

La grande force de la dynamique linéaire réside dans le fait qu'elle autorise le découplage par modes de la structure, comme s'il s'agissait d'oscillateurs indépendants. De ce découplage découlent deux grandes propriétés :

- l'invariance : si le mouvement est initié de manière appropriée à uniquement l'un des modes de la structures, alors les autres modes ne se manifestent pas. Cette propriété découle de l'orthogonalité de la base modale.
- la superposition modale : les oscillations libres et forcées d'une structure peuvent être décrites comme la combinaison linéaire des mouvements des modes de la structure. Cette propriété découle du fait que la base modale est une base complète.

L'approximation d'une structure à un système linéaire constitue donc un cadre permettant l'utilisation simple d'un grand nombre d'outils lors de l'étude dynamique d'une structure. Il est ainsi possible de résoudre ces systèmes de manière simple, en posant un certain nombre d'hypothèses.

En considérant un système conservatif, autrement dit dont l'amortissement est négligeable, il est possible de supprimer la matrice  $C$  de l'équation 2.1. En se plaçant dans le cas d'un régime harmonique stationnaire, de pulsation  $\omega$ , les transformations suivantes peuvent être utilisées :

- $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}e^{j\omega t}$  le vecteur complexe des déplacements.
- $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}e^{j\omega t}$  le vecteur complexe des efforts.

L'équation d'équilibre peut alors être réécrite telle que :

$$(-\omega^2 M + K) \mathbf{q} = \mathbf{p} \quad (2.2)$$

L'équation caractéristique du système homogène correspondant au régime libre est donné par :

$$(-\omega_\nu^2 M + K) \phi_\nu = 0 \quad (2.3)$$

Ce système linéaire admet  $N$  valeurs propres réelles positives  $\lambda_\nu = \omega_\nu^2$  et autant de vecteurs propres associés  $\phi_\nu$  dans  $\mathbb{R}^{N,1}$  aussi appelés modes normaux. En regroupant les valeurs propres au sein de la matrice spectrale diagonale  $\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2) \in \mathbb{R}^{N,N}$  et les vecteurs propres dans la matrice modale  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N] \in \mathbb{R}^{N,N}$ , il devient possible d'écrire le problème aux valeurs propres généralisées par rapport aux matrices  $K$  et  $M$  :

$$K\Phi - M\Phi\Lambda = 0 \quad (2.4)$$

Les vecteurs propres obtenus satisfont les règles d'orthogonalité suivantes :

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \text{ et } \Phi^T M \Phi = I_N \quad (2.5)$$

La dynamique linéaire constitue la pierre d'angle des méthodes de réduction [16], de l'analyse modale expérimentale [53], de la méthode de modélisation des structures par éléments finis [56] ou encore du *health-monitoring* des structures [47].

Il faut néanmoins garder à l'esprit que l'existence d'un système réel linéaire est une gageure, et que ceux-ci ne représentent qu'une idéalisation d'un système au minimum faiblement non-linéaire.

### 2.2.3 Dynamique non-linéaire

En effet, les phénomènes dynamiques non-linéaires sont dépendants de l'énergie du système. Une traduction communément admise de l'équation du mouvement dans le domaine non-linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) + f_{NL}(q(t), \dot{q}(t)) = p(t) \quad (2.6)$$

où il est aisé de retrouver  $M$ ,  $C$ ,  $K$  et  $p(t)$  déjà présents dans la version linéaire 2.1 de cette équation ainsi que  $f_{NL}(q(t), \dot{q}(t))$  qui synthétise le vecteur des efforts non-linéaires internes. Cette composante additionnelle est souvent fonction d'une loi quadratique ou cubique. Dans le cadre de mouvements entraînant de faibles déplacements et vitesses, l'approximation à un système linéaire trouve tout son sens.

La résolution de l'équation 2.6 dans le domaine temporel est possible grâce à des algorithmes d'intégration, mais leur application reste cantonnée à des structures de taille très réduite. La méthode de la balance multi-harmonique utilisée au cours des travaux présentés est une approche fréquentielle qui a été implémentée de manière à résoudre cette équation de manière efficace dans le cas de sollicitations périodiques. De nombreuses améliorations visant à inclure des harmoniques de haut rang dans la méthode ont vu le jour dans les années 80 [114, 33]. La version utilisée ici est la formulation de Cardona [34].

#### 2.2.3.1 Balance Multi-Harmonique

L'hypothèse principale de la méthode de la balance multi-harmonique est que la réponse du système est périodique, même en présence de non-linéarités. Cette hypothèse, bien que forte, regroupe une grande partie des non-linéarités observables en pratique. Elle légitime l'écriture de la réponse du système sous la forme d'une décomposition de Fourier :

$$q(t) = Q_0 + \sum_{j=1}^n (Q_j^c \cos(m_j \omega t) + Q_j^s \sin(m_j \omega t)) \quad (2.7)$$

où  $Q_0$  est la composante statique de la réponse,  $Q_j^c$  et  $Q_j^s$  sont respectivement les  $j^{\text{ièmes}}$  coefficients en cosinus et sinus des séries de Fourier et  $m_j$  représente la  $j^{\text{ième}}$  harmonique pour une excitation de pulsation  $\omega$ .

L'introduction de cette décomposition dans l'équation 2.6 conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
& K \left( Q_0 + \sum_{j=1}^n (Q_j^c \cos(m_j \omega t) + Q_j^s \sin(m_j \omega t)) \right) + \\
& C \left( Q_0 + \sum_{j=1}^n (-m_j \omega Q_j^c \sin(m_j \omega t) + m_j \omega Q_j^s \cos(m_j \omega t)) \right) + \\
& M \left( Q_0 + \sum_{j=1}^n (-(m_j \omega)^2 Q_j^c \cos(m_j \omega t) - (m_j \omega)^2 Q_j^s \sin(m_j \omega t)) \right) + \\
& f_{NL}(q(t), \dot{q}(t)) - p(t) = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

La procédure de calcul de la réponse par balance multi-harmonique vise ensuite à pré-multiplier l'équation 2.8 par les fonctions harmoniques d'intérêt  $(1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(m_1 \omega t), \dots, \cos(m_n \omega t), \sin(m_n \omega t))$ , d'intégrer sur une période de  $T = 2\pi/\omega$  et de regrouper les équations résultantes pour chaque harmonique dans l'expansion de Fourier. L'équation suivante peut être obtenue dans le domaine fréquentiel :

$$\mathcal{Z}(\omega) \mathcal{Q} + \mathcal{F}(\mathcal{Q}) - \mathcal{P} = 0 \tag{2.9}$$

avec  $\mathcal{Q} = \{Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n-1}, Q_{2n}\}$ , le vecteur des coefficients harmoniques tels que les  $Q_i$  appartiennent à  $\mathbb{R}^{N,1}$ . Cette équation est en général résolue grâce à un algorithme prédicteur-correcteur de manière à suivre les distorsions occasionnées par le comportement non-linéaire [54].

La matrice de raideur multi-harmonique  $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{(2n+1)N, (2n+1)N}$  est donnée par :

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K - (m_1 \omega)^2 M & m_1 \omega C & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 \omega C & K - (m_1 \omega)^2 M & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K - (m_n \omega)^2 M & m_n \omega C \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -m_n \omega C & K - (m_n \omega)^2 M \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Les vecteurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{P}$ , tous deux de  $\mathbb{R}^{(2n+1)N,1}$  correspondent respectivement aux efforts non-linéaires et aux excitations externes de la structure et peuvent être décrits par :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \int_0^T f_{NL}(q(t), \dot{q}(t)) dt \\ \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f_{NL}(q(t), \dot{q}(t)) \cos(\omega t) dt \\ \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f_{NL}(q(t), \dot{q}(t)) \sin(\omega t) dt \\ \vdots \\ \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f_{NL}(q(t), \dot{q}(t)) \cos(m_n \omega t) dt \\ \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f_{NL}(q(t), \dot{q}(t)) \sin(m_n \omega t) dt \end{array} \right\}, \quad \mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{c} \int_0^T p(t) dt \\ \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p(t) \cos(\omega t) dt \\ \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p(t) \sin(\omega t) dt \\ \vdots \\ \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p(t) \cos(m_n \omega t) dt \\ \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p(t) \sin(m_n \omega t) dt \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

L'équation 2.11 présente bien le fort couplage qu'il existe entre les composantes temporelles et fréquentielles au sein de la méthode de la balance multi-harmonique. Il est en général plus simple d'estimer les efforts dans le domaine temporel pour ensuite les exploiter dans le domaine fréquentiel.

La taille du système à résoudre par la méthode de la balance multi-harmonique est donc de  $(2n + 1) N * (2n + 1) N$ . Ceci constitue un frein important lorsqu'il s'agit de traiter des modèles éléments finis imposants, car la prise en compte d'un nombre suffisant d'harmoniques peut entraîner des calculs à la durée rédhibitoire. Ce problème peut être pallié par l'utilisation de méthodes de réduction sur les parties linéaires du système. C'est d'ailleurs cette méthode qui est appliquée au cours de ces travaux. Quelques unes des méthodologies de réduction sont présentées en annexe B.

Cette méthodologie de calcul du comportement dynamique non-linéaire d'une structure a été utilisée au travers d'un utilitaire construit par le laboratoire de mécanique appliqué de Besançon.

De nombreuses autres approches permettant la synthèse de réponses non-linéaires existent. Il est notamment possible de citer [84, 112] qui présente et traite le cas des Modes Normaux Non-linéaires grâce à une approche par continuation par pseudo-arclength.

## 2.3 Plan de test pour l'analyse modale

### 2.3.1 Introduction

L'augmentation de la taille et de la complexité des structures spatiales rend nécessaire la conception d'un plan de test à partir de modèles éléments finis afin d'assurer l'identification des modes avec les meilleures informations sur la dynamique de la structure. Les contraintes matérielles s'appliquant sur les tests de qualification induisent en général que seul un nombre limité de capteurs et un temps de mesure réduit peuvent être mis en

place, quand une observabilité et une distinction parfaite des déformées modales seraient obtenues pour une mesure en chaque point de la structure sur un temps d'acquisition le plus long possible. Cette contingence est d'autant plus forte dans le cas du placement d'excitateurs, dont le nombre est souvent très inférieur à celui des capteurs.

Un grand nombre de stratégies déterministes ont été développées au cours des trente dernières années pour définir une configuration optimale de capteurs et d'actionneurs à partir d'un modèle numérique. Dans la majorité des cas, une répartition optimale garantit la meilleure observabilité et distinction des modes cibles. Une liste non exhaustive de ces méthodes regroupe [88, 79] basées sur la réduction de Guyan, [77] utilisant le critère d'indépendance effective, [68] mettant à profit l'énergie de contrainte de la structure, [130] où la matrice modale de la structure subit une décomposition QR, ou encore [15] qui se base sur les Séquences Maximum Orthogonales (OMS).

L'amélioration des puissances de calcul des ordinateurs a permis de mettre à jour des euristicques plus complexes basées sur des algorithmes utilisant des approches stochastiques afin de tenir compte des incertitudes de mesure. [3] utilisant les résidus, [107, 108, 109] basée sur l'entropie, ou encore [36] sont des éléments importants de cette partie de la littérature. Bien que ces méthodologies soient très adaptées à des incertitudes de type aléatoire, elles ne se prêtent pas au traitement des méconnaissances de modèle, résultats d'erreurs de forme ou de niveaux inconnus sur la précision des paramètres du modèle. Ces méconnaissances peuvent être particulièrement importantes dans le cas où l'étude se base sur un modèle non encore validé, par exemple lors des premières phases de la conception du système. Dans le domaine de l'industrie spatiale, les structures éléments finis sont en général décomposées en sous-systèmes, fournis par des sous-traitants différents possédant leurs propres codes et savoir-faire. Tous ces modèles possèdent différents degrés de précision, et cette situation mène souvent à des erreurs pouvant être importantes sur les propriétés des modes à causes d'une mauvaise estimation des paramètres mécaniques de la structure. Les impacts de ces types d'erreurs sur les propriétés modales d'une structure ont été investigués dans [78] et différentes solutions ont été proposées pour propager les incertitudes au travers des modèles éléments finis afin de déterminer les incertitudes correspondantes sur les propriétés modales [14, 149]. La première publication traitant de la prise en compte des méconnaissances de modèle dans une stratégie de placement de capteurs et d'excitateurs peut être trouvée dans [146].

La littérature concernant la mise en place de moyens d'excitations est beaucoup moins riche. Notons tout de même l'approche de Schedlinski [130], qui utilise de nouveau la décomposition QR, mais appliquée cette fois ci à la matrice de force du système.

## 2.3.2 Placement de capteurs

Même si de nombreuses méthodes et heuristiques de placement de capteurs existent, seules les approches QR et de Kammer seront abordées avec précision car elles seront utilisées au cours des travaux contenus dans ce manuscrit.

### 2.3.2.1 Méthode de Kammer - Indépendance Effective

La méthodologie de placement de capteurs proposée par Kammer [77] a été pensée pour permettre au dynamiqueur de pouvoir valider les réponses d'un modèle éléments finis à partir des données collectées.

Contrairement à la majeure partie des méthodologies présentes dans la littérature, l'approche de Kammer ne repose pas sur une recherche exhaustive et calculatoirement intensive des localisations possibles des capteurs. Basée sur les résultats préliminaires fournis par un modèle éléments finis, un ensemble de modes cibles est sélectionné pour l'identification. Les modes choisis sont supposés faire partie des modes sollicités de manière satisfaisante par les excitateurs. Une répartition initiale de capteurs est également sélectionnée. Les positions des capteurs sont ensuite hiérarchisées suivant leur contribution à l'indépendance linéaire de la matrice modale associée aux modes cibles en jeu. Les positions qui ne contribuent pas à cette indépendance linéaire sont supprimées des candidats pour l'étape suivante. Cette approche procède donc de manière itérative, et le nombre de positions candidates réduit jusqu'à atteindre le nombre de capteurs désiré.

Cette méthode permet de sélectionner un sous-ensemble de capteurs à partir d'une répartition préétablie, de manière à ce que la participation de chaque mode reste indépendante.

À cause de cette nature itérative, l'approche de Kammer ne peut conduire qu'à une distribution dont le caractère sera sous-optimal. Néanmoins, il est attendu que le résultat fourni soit proche de celui venant d'une approche optimale.

Le groupe des degrés de liberté candidats à recevoir un capteur peut être déterminé de manière empirique, suivant l'accessibilité ou bien encore en considérant l'énergie modale cinétique de la structure.

$$Q = \Phi_{cand}^T W \Phi_{cand} \quad (2.12)$$

La technique d'Indépendance Effective utilise la maximisation du déterminant de la matrice d'information de Fisher 2.12 comme critère d'optimisation. Dans le cas de placement de capteurs, son utilisation garantit en effet de maximiser l'indépendance spatiale des modes cibles, ainsi que la force du signal leur correspondant. Elle se construit comme la

projection de la matrice de covariance  $W$  sur la base modale réduite aux degrés de liberté candidats  $\Phi_{cand}$ .

$$Q = \sum \Phi_{cand_i}^T \Phi_{cand_i} = \sum Q_i \quad (2.13)$$

$\Phi_{cand_i}$  est la  $i^{ième}$  ligne de la base modale, et donc le champ associé au  $i^{ième}$  degré de liberté candidat et  $n_{cand}$  le nombre de candidats.

L'équation 2.13 montre bien que retirer un degré de liberté de l'ensemble des candidats revient à retirer de l'information à la matrice de Fisher.

En s'intéressant au retrait du degré de liberté  $i$ , il est possible d'écrire :

$$\det(Q^i) = \det(Q) \det(1 - E_{ii}) \quad (2.14)$$

avec  $E_{ii}$  l'indépendance effective telle que :

$$E_{ii} = \Phi_{cand_{ii}} Q^{-1} \Phi_{cand_{ii}}^T \quad (2.15)$$

$E_{ii}$  représente la perte occasionnée au déterminant de la matrice de Fisher dans le cas du retrait du  $i^{ième}$  degré de liberté des candidats. Les candidats peuvent donc être rangés grâce à leur indépendance effective. En adoptant un schéma itératif, le groupe candidat peut être réduit jusqu'au nombre de degrés de liberté souhaité. Ce procédé sous optimal permet de maintenir l'information maximale dans la matrice de Fisher.

L'indépendance effective  $E_{ii}$  est un réel compris entre 0 et 1. Une valeur proche de 0 traduit un degré de liberté n'apportant pas d'informations à la matrice de Fisher tandis qu'une valeur de 1 signifie que le degré de liberté en question est essentiel à la perception du comportement vibratoire de la structure.

Le retrait d'un degré de liberté du groupe des candidats entraîne un changement de l'ensemble des valeurs des  $E_{ii}$ . Pour être efficace, la méthode d'indépendance effective doit donc retirer les degrés de liberté un à un. La procédure peut donc durer un temps non négligeable lorsqu'il s'agit de traiter une structure imposante et/ou dont le maillage est fortement raffiné. À noter enfin que l'indépendance effective a également été utilisée dans le cadre de l'instrumentation de structures non-linéaires [122].

### 2.3.2.2 Placement de capteurs par approche QR

La méthodologie de placement de capteurs par décomposition QR repose sur le fait que cette décomposition optimise l'indépendance linéaire des colonnes de la matrice à laquelle

elle est appliquée. Les tenants et aboutissants mathématiques de cette décomposition peuvent être trouvés dans [61]. Son application au placement de capteur a déjà été testée et éprouvée dans [130, 146].

Pour une matrice  $A$  donnée, la décomposition QR avec pivot peut être écrite de telle façon que :

$$QR = AE \quad (2.16)$$

Les matrices obtenues sont :

- $Q$  : matrice résultat de la décomposition à proprement parler qui est orthogonale,
- $R$  : matrice de passage rectangulaire supérieure dont les termes diagonaux vont en décroissant,
- $E$  : matrice gardant en mémoire les permutations ayant eu lieu durant la décomposition.

Ce type de décomposition permet de hiérarchiser les colonnes de  $A$  de la plus à la moins indépendante linéairement. Cet ordre est obtenu par le produit  $AE$ .

L'application de cet outil mathématique au placement de capteur s'effectue en prenant pour argument la transposée de la base modale du système réduite aux degrés de liberté candidats à recevoir un capteur. La transposition de la matrice garantit un ordonnancement de l'information obtenue par les capteurs dans la direction des degrés de liberté.

$$QR = \Phi_{cand}^T E \quad (2.17)$$

L'un des avantages majeurs de l'utilisation de cette méthode est la grande simplicité de sa mise en place, quelle que soit la structure considérée.

### 2.3.2.3 Critères de performance pour les distributions de capteurs

Les deux caractéristiques devant être prises en compte pour attester de la performance d'une distribution de capteurs sont la détection et la distinction qu'elle apporte pour les modes propres considérés.

**Conditionnement** Ces deux points peuvent être mesurés en passant par le calcul du conditionnement de la matrice de capteurs, qui est la matrice modale de la structure réduite, d'une part, aux modes d'intérêt, et d'autre part, aux degrés de liberté comportant un capteur.

Le conditionnement d'une matrice est défini comme le ratio entre la valeur singulière la plus élevée  $\sigma_{max}$  et la plus faible  $\sigma_{min}$  de la matrice considérée 2.18. Il s'agit d'un nombre réel supérieur à 1. Plus la valeur de ce réel est élevée, moins les colonnes de la matrice considérée sont linéairement indépendantes.

$$cond(\Phi_S) = \frac{\sigma_{max}(\Phi_S)}{\sigma_{min}(\Phi_S)} \quad (2.18)$$

Rapporté au cas du placement de capteurs, une valeur faible du conditionnement de la matrice de capteurs permet d'attester que chaque capteur possède une position lui permettant d'obtenir une information qui n'est pas redondante (colinéaire) par rapport aux informations collectées par les autres capteurs. L'ajout d'un capteur peut donc soit diminuer la valeur du conditionnement, si le point de vue qu'il adopte sur les déformées modales est en mesure d'apporter des données orthogonales à celles déjà collectées, soit l'augmenter s'il ne fait que dupliquer les informations déjà détectables.

**MAC** La matrice de MAC (*Modal Assurance Criterion*) aussi appelée matrice de corrélation modale, est souvent utilisée pour la comparaison entre deux ensembles de modes. Elle constitue un outil très prisé lors du recalage d'un modèle par rapport à une base modale expérimentale, ou encore pour vérifier la justesse et les capacités de prédiction d'un modèle réduit. Pour deux bases modales  $\Phi^1$  et  $\Phi^2$  la composante  $(i, j)$  de la matrice s'écrit :

$$MAC_{i,j}(\Phi^1, \Phi^2) = \frac{|\Phi_i^{1T} \cdot \Phi_j^2|^2}{\|\Phi_i^1\|^2 \|\Phi_j^2\|^2} \quad (2.19)$$

Chaque composante de la matrice est un nombre réel compris entre 0 et 1. si  $MAC_{i,j} = 1$  alors le  $i^{ième}$  vecteur de  $\Phi^1$  est colinéaire au  $j^{ième}$  vecteur de  $\Phi^2$ , ce qui veut dire que les deux déformées propres sont identiques. Si  $MAC_{i,j} = 0$  alors les deux vecteurs propres sont orthogonaux. Dans la pratique, les coefficients de corrélation se situent entre ces deux valeurs et il est nécessaire de définir des intervalles de proximité. Dans ce contexte de corrélation entre deux bases modales, il est également important de prendre en compte l'écart fréquentiel entre les modes d'une base et leurs homologues présumés. En effet, il n'est pas licite d'appairer deux modes trop éloignés fréquentiellement même si l'indice MAC correspondant vaut 1.

Dans le cas du placement de capteurs, elle permet de vérifier l'orthogonalité des modes réduits aux degrés de liberté possédant un capteur. En d'autres termes, la matrice MAC permet de savoir si la distribution de capteurs testée distingue bien les modes les uns des autres. Pour cette application  $\Phi^1 = \Phi^2$  et la matrice obtenue est appelée autoMAC.

**Indépendance effective** L'indépendance effective, qui a déjà été définie dans 2.15 peut également être utilisée pour attester de la pertinence d'une distribution de capteurs.

Chaque  $E_{ii}$  représente en fait les termes diagonaux d'une matrice  $E$  définie telle que :

$$E = \Phi_S [\Phi_S^T \Phi_S]^{-1} \Phi_S^T \quad (2.20)$$

$E$  peut être identifié comme un projecteur orthogonal sur le sous-espace des colonnes de  $\Phi_S$ . Cette matrice possède la propriété intéressante d'être idempotente, c'est à dire que pour tout  $n$  entier  $E^n = E$ . Une caractéristique particulière de cette famille de matrices est que leur trace est égale à leur rang. C'est pourquoi ses termes diagonaux peuvent être utilisés pour représenter la contribution de l'emplacement capteur correspondant.

Partant de ce constat :

- Si  $E_{ii} = 0$ , alors la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $\Phi_S$  est nulle et donc, les modes ne sont pas observables à partir de cette position.
- Si la longueur ellipsoïdale  $E_{ii}$  est égale à 1, la position testée pour le capteur est considérée comme parfaite du point de vue de l'indépendance effective et donc de l'identification des modes.

### 2.3.3 Placement d'excitateurs

Étant donnée une distribution de capteurs, un moyen simple d'obtenir l'emplacement optimal pour un exciteur est de décomposer par méthode QR la transposée de la matrice de force du système réduite aux degrés de liberté portant déjà un capteur. La matrice de force est le produit de la base modale du système par la matrice de masse  $F = M\Phi$ . En réduisant cette matrice à ses composantes portant un capteur, l'approche force la position de chaque exciteur à être coïncidente avec l'un des capteurs présents, ce qui garantit l'optimalité du positionnement. La décomposition qui survient peut être décrite par l'équation 2.21. De manière analogue au placement de capteur, la transposition de la matrice permet une direction suivant les degrés de liberté de la structure.

$$QR = F_S^T E \quad (2.21)$$

Une fois la distribution de capteurs et d'excitateurs déterminée, Schedlinsky [130] propose d'en attester les performances par l'utilisation de l'indicateur MMIF (*Multivariat Mode Indicator Function*). Le calcul de cet indicateur s'effectue en résolvant le problème défini en équation 2.22 pour chaque fréquence d'intérêt  $\omega_{0i}$ .

$$\left[ - \left( H_{re}^T H_{re} + H_{im}^T H_{im} \right) \Lambda_1 (\omega_{0i}) + H_{re}^T H_{re} \right] \alpha (\omega_{0i}) = 0 \quad (2.22)$$

Dans cette équation,  $H$  correspond aux matrices FRF du système (les parties réelles et imaginaires sont appelées ici suivant les indices respectifs  $im$  et  $re$ ),  $\Lambda_1 (\omega_{0i})$  constitue l'indicateur MMIF pour  $\omega = \omega_{0i}$ , enfin  $\alpha (\omega_{0i})$  traduit le vecteur force approprié au système. L'indicateur MMIF  $\Lambda_1 (\omega_{0i})$ , compris entre 1 et 0, montre de manière explicite comment les déformées modales sont sollicitées par la distribution d'excitateurs.

### 2.3.4 Élaboration du profil d'excitation de la structure, problématique de la mise en place d'un notching

Représenter l'environnement basse fréquence auquel est soumis le satellite lors du décollage du lanceur est une tâche complexe. C'est pourtant sur ce laps de temps très court relativement à la durée de vie du satellite, que celui-ci aura à endurer les sollicitations les plus importantes d'un point de vue mécanique. C'est donc vis-à-vis de ces sollicitations que la structure du satellite doit être dimensionnée. Ces dernières sont d'une part solidiennes, et sont transmises du lanceur au satellite via la virole d'interface, d'autre part acoustiques, et sont rayonnées par la coiffe du lanceur ou les parois du Sylda.

En se concentrant uniquement sur les phénomènes ayant un impact sur la dynamique du système, les événements dimensionnants sont listés en suivant. Une illustration de chacune des situations décrites et disponible en figure 2.1.

- la rafale à la pression dynamique maximale (poussée longitudinale et dynamique en latéral) (a -b)),
- le passage en transsonique (acoustique et dynamique en latéral dues à une excitation aérodynamique de la coiffe et du corps du lanceur) (a - b),
- les oscillations de pression des EAP (propulseurs latéraux à poudre) qui sont liées à l'entrée en résonance d'un mode acoustique de la cavité interne au propulseur lorsqu'il atteint un certain seuil de vidange en fin d'utilisation. Cette résonance interne de la cavité du propulseur entraîne une fluctuation de poussée en sortie de tuyère (a - b),
- la séparation des EAP, qui provoque une relaxation brusque de l'effort ponctuel au niveau des jonctions (b),

- l'extinction des étages, qui produit une secousse (ou “*chugging*”) dans la poussée avant coupure complète (b - c),
- les séparations de coiffe, d'étage et enfin Sylda et/ou satellite-lanceur, qui sont produites par la décharge de jonctions pyrotechniques (c, d et e),
- l'ouverture des appendices du satellite tels que les générateurs solaires, les capteurs ou encore les antennes (f).

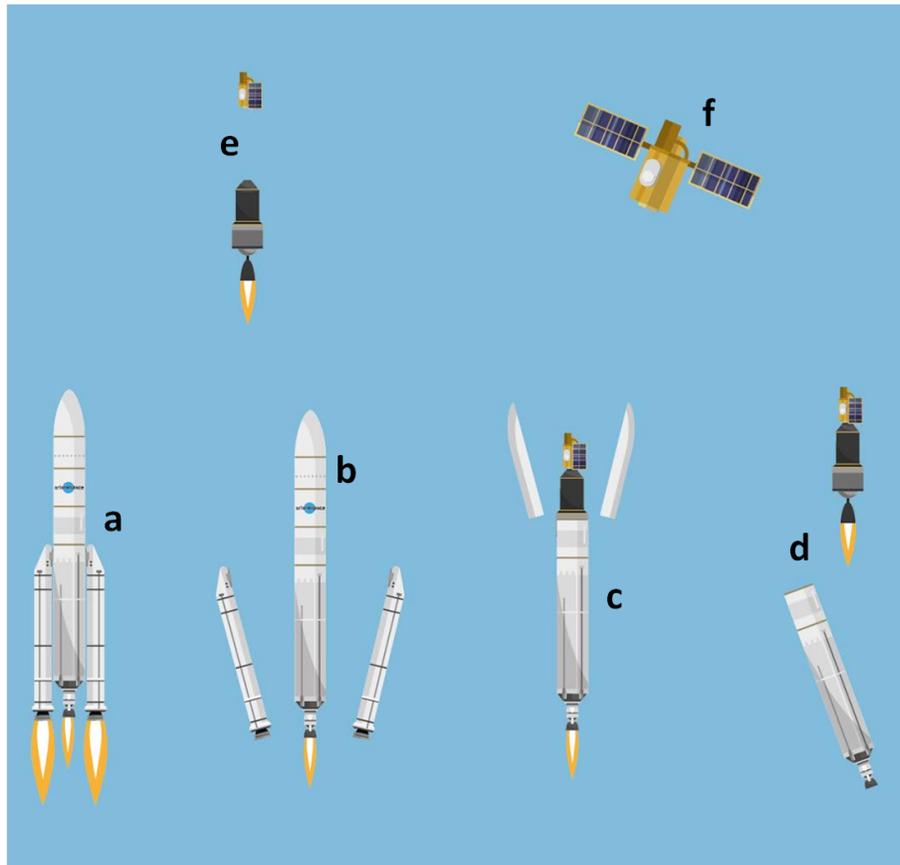


FIGURE 2.1: Différentes étapes lors du lancement d'une ARIANE 5 (© Cédric Audinot)

Cet ensemble de sources d'excitations, auquel il faut ajouter que cet environnement dépend aussi du couplage satellite/lanceur, rend la nature du transitoire extrêmement complexe. Pour cette raison, les autorités lanceurs ont choisi d'utiliser dans le cadre des tests de qualification des versions simplifiées et conservatives dites spécifications 2.1. Cette enveloppe du sinus balayé est choisie de manière à englober les conséquences que pourraient avoir les transitoires réels sur le satellite. Le sinus balayé équivalent est celui qui permet la même réponse des modes du système au transitoire considéré.

	Fréquences (Hz)	Niveaux de qualification (0 - crête)
Axe longitudinal (axe lanceur)	4-5	12.4mm
	5-50	1.25g
	50-100	1g
Axe latéral	2-5	9.9mm
	5-25	1g
	25-100	0.8g
Vitesse de balayage		2 oct/min

TABLE 2.1: Spécifications d'essais de qualification en sinus balayé pour ARIANE 5

En pratique, la réduction de la réalité du vol à une enveloppe forfaitaire conduit à surdimensionner et à surtester le satellite s'il est appliqué sans réduction de niveaux pour certaines bandes de fréquence où le satellite présente des modes et où les sollicitations sont en réalité faibles. En effet, les niveaux maximums sont obtenus autour des zones de couplage entre les modes satellite et lanceur, mais seront beaucoup plus faibles aux alentours des modes propres du satellite seul. Cette réduction locale du niveau de sollicitation est nommée *notching*. [37] justifie tant qualitativement que quantitativement l'utilisation du *notching* d'un profil d'excitation dans le cas d'un test aléatoire ou en sinus balayé pour une structure spatiale.

Un *notching* est dit primaire s'il s'agit de limiter les efforts à une limite quasistatique spécifiée. Ce type de *notching* sont appliqués sur les premiers modes globaux du satellite. Les *notchings* secondaires quant à eux limitent les réponses internes des sous-systèmes sensibles à des niveaux d'accélération permettant d'en garantir la sécurité.

Afin d'illustrer le principe de *notching*, il est possible d'utiliser une réduction à 3 degrés de liberté d'un satellite (ici PICARD). La structure qui permettra d'exposer la méthodologie de conception robuste est une simplification du système satellite monté sur une table vibrante. Comme le montre la figure 2.2, chacun des ensembles massiques du satellite sont modélisés par une masse ponctuelle.

La première et la plus lourde représente la table vibrante utilisée pour appliquer le chargement en accélération. Dans la pratique, une valeur de masse très importante y est assignée de manière à éviter la présence de modes parasites aux alentours des modes naturels de la structure. La valeur de  $m_1 = 1e6\text{kg}$  a ici été choisie.

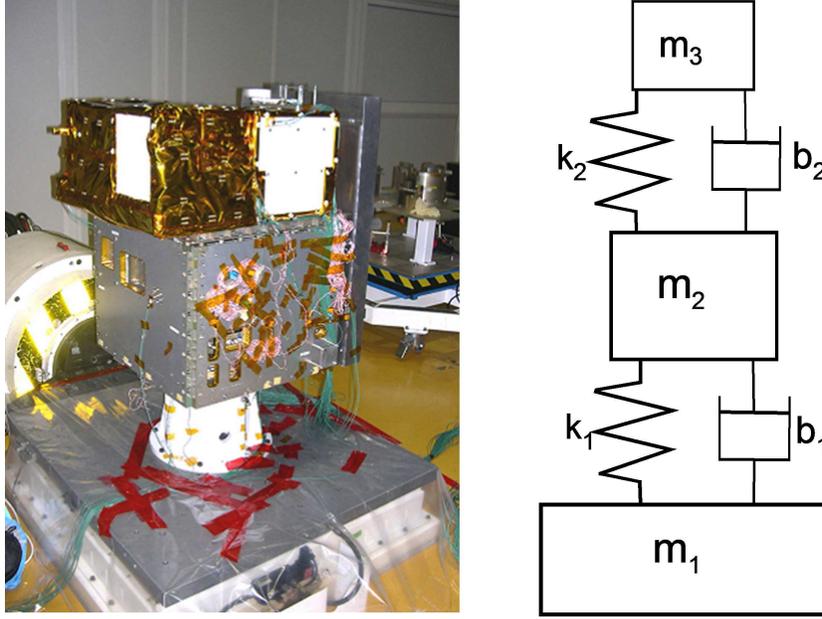


FIGURE 2.2: Modèle de test du satellite PICARD (source CNES) en parallèle de la modélisation à trois degrés de libertés

Les autres des caractéristiques mécaniques de la structure sont choisies de manière à simuler les premier et second modes longitudinaux d'un satellite scientifique de taille moyenne par rapport aux missions MYRIADE existantes. Les paramètres établis sont donc :

- $m_2 = 100\text{kg}$
- $m_3 = 60\text{kg}$
- $k_1 = k_2 = 1e7\text{N.m}^{-1}$
- $b_1 = b_2 = 300\text{N.s.m}^{-1}$  donnant à la structure un amortissement de 2%, qui est traditionnellement utilisé dans le cas des assemblages d'aluminium.

L'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel pour ce système à trois degrés de liberté est :

$$[K + j\omega B - \omega^2 M] \mathbf{y} = \mathbf{f}(\omega) \quad (2.23)$$

où  $M$ ,  $K$  et  $B$  sont respectivement les matrices de masse, de raideur et d'amortissement données par :

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 & 0 \\ -b_1 & b_1 + b_2 & -b_2 \\ 0 & -b_2 & b_2 \end{bmatrix}, \text{ and } K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

et  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{f}(\omega)$  sont respectivement les réponses et excitations extérieures du système. La valeur de  $\mathbf{f}(\omega)$  est choisie de manière à être assimilée à une accélération de 1.5g appliquée sur la table vibrante.

Cette conformation permet l'obtention d'un mode de plateforme aux alentours de 40Hz et d'un mode de charge utile autour de 225 Hz qui sont représentatifs de la gamme de satellites visée.

Enfin, définissons  $f_{k_1}(\mathbf{d})$  l'effort interne à l'interface table vibrante - plateforme tel que :

$$f_{k_1}(\omega) = k_1 |y_1(\omega) - y_2(\omega)| \quad (2.25)$$

Au cours du test en vibration, la structure du satellite est soumise à une accélération en sinus balayé dont l'amplitude est spécifiée par les autorités lanceurs. L'amplitude devant être utilisée pour qualifier le satellite est le résultat d'une spécification déduite du lanceur qui est prévu lors de l'envoi du satellite dans l'espace. Ces spécifications sont conçues de manière à couvrir tous les événements susceptibles de surgir durant la phase de vol. Elles représentent donc par nature une version approximée et conservative de la sollicitation réelle qu'aura à supporter le satellite. De plus, les conditions aux limites du satellite sont différentes lors de sa qualification (fixé sur table vibrante très raide) et lors du lancement (fixé sur le lanceur beaucoup plus souple). C'est pourquoi sur de faibles bandes de fréquences, l'effort d'interface atteint lors de la qualification peut dépasser le maximum attendu en vol spécifié par le lanceur et donc stresser inutilement la structure du satellite. La figure 2.3 montre que dans le cas du système construit ci-dessus, l'effort mesuré entre  $m_1$  et  $m_2$  peut dépasser la limite autorisée, matérialisée par la ligne rouge.

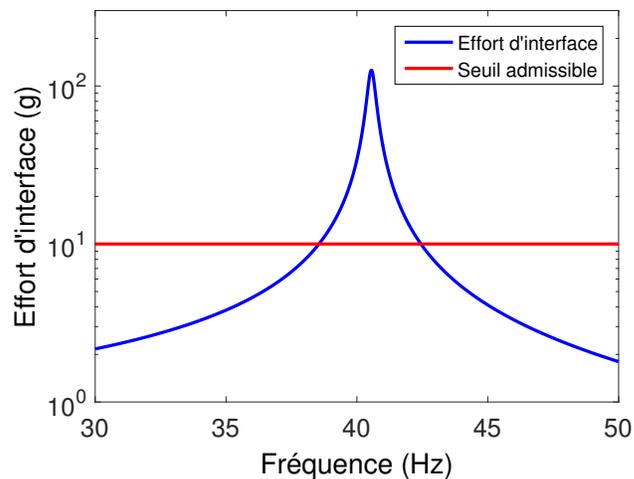


FIGURE 2.3: Effort d'interface de la structure soumise à une excitation d'amplitude constante

Le niveau d'excitation peut donc être localement diminué de manière à pouvoir qualifier la structure sans l'endommager. Ceci constitue le principe du notching primaire. C'est alors que débute la discussion entre le maître d'œuvre du satellite et les autorités lanceurs de manière à trouver le compromis délicat entre la performance du test et sa sécurité pour la structure. Chacun ayant pour but antagoniste de respectivement diminuer et augmenter la valeur de l'amplitude de chargement.

Si du côté des autorités lanceur, aucun évènement de vol n'est attendu pour la bande de fréquence concernée, la réduction locale du niveau d'excitation est autorisée, et le maître d'œuvre peut utiliser une version "notché" du profil d'excitation pour qualifier la structure (voir figure 2.4). Dans le cas contraire, une partie du design du satellite est à revoir. Cette analyse est réalisée en menant une analyse couplée lanceur/satellite. Elle consiste à soumettre le modèle à une variation temporelle réaliste d'efforts externes (poussée des tuyères ou bien champ de pression aérodynamique) et à vérifier les accélérations et efforts potentiellement pathologiques.

Le profil de notching  $\eta(\omega)$  est défini tel que le chargement extérieur de la structure devienne :  $\mathbf{f}_\eta(\omega) = \eta(\omega) \mathbf{f}(\omega)$  de manière à garantir :

$$f_{k_1}(\omega) \leq f_c(\omega), \forall \omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$$

avec  $0 < \eta(\omega) < 1$ . En figure 2.4(b) est simulée la réponse de la structure soumise au profil notché. Comme il est possible de le constater, la sortie enregistrée ne dépasse plus la limite en contrainte.

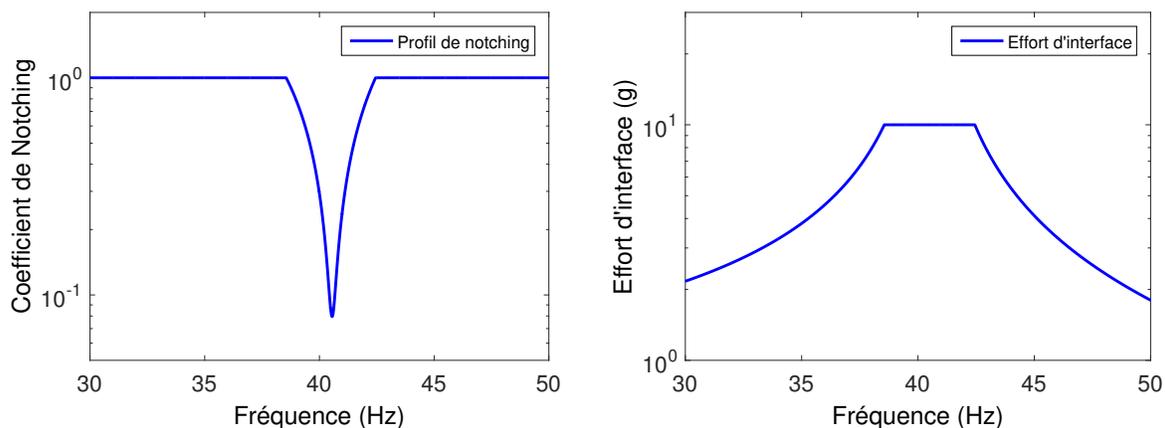


FIGURE 2.4: Profil de notching (a), effort d'interface après application du profil notché (b)

Le principe de l'illustration présentée peut être généralisé de manière à fournir un moyen systématique de concevoir des profils de notching. Néanmoins, les premiers profils doivent

être conçus dès les premières phases de développement de la structure satellite, quand les incertitudes et méconnaissances de modèle sont encore très larges. En effet, les différentes phases d'optimisation du système n'ont pas encore eu lieu, et *a fortiori*, aucun résultat expérimental concernant la validation et/ou la calibration du modèle n'est encore disponible.

Il est possible d'anticiper le fait que le notching est sensible aux incertitudes en conduisant à une réduction accrue du niveau de sollicitation ou même à l'apparition de notchings dans d'autres bandes de fréquence.

Une étude présentée dans [25, 26] sur un satellite de télécommunication, beaucoup plus imposant qu'un satellite scientifique, montre la sensibilité du profil de notching à différents paramètres :

- Premières fréquences propres (10%) et masses de chaque sous-systèmes (2%)(test 1 en bleu),
- position et direction des capteurs ainsi que l'amplitude d'excitation (10%) (test 2 en cyan),
- en autorisant les couplages de modes (5%) (test 3 en jaune),
- amortissement (10%) (test 4 en orange).

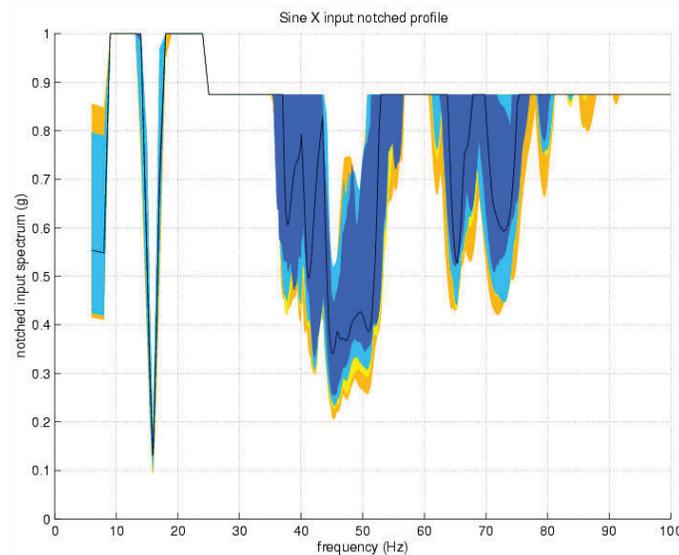


FIGURE 2.5: Profil de notching pour différentes incertitudes ajoutées (source ESA)

Les résultats présentés figure 2.5 permettent d'apprendre que les incertitudes peuvent d'une part rendre le notching nominal plus profond, mais également en faire apparaître d'autres (ici à 55 et 80Hz). Ceci induit que le fait d'introduire des incertitudes sur le

notching nominal n'est pas suffisant. Les incertitudes doivent être appliquées au modèle du système pour permettre l'apparition de nouveaux phénomènes.

Cette étude montre l'importance de prendre en compte les incertitudes lors de l'élaboration d'un profil de notching. Celles-ci doivent faire partie intégrante des discussions menées avec les autorités lanceurs lors de la définition des spécifications applicables à la structure en conception. Le fait que cette étude ne soit basée que sur 120 échantillons ne permet cependant pas de faire des évaluations précises des effets des incertitudes sur le profil de notching.

## 2.4 Méthodologies de conception robuste en présence de méconnaissances de modèle

### 2.4.1 Introduction

Comme il a été développé dans le préambule de cette thèse, la présence d'incertitudes au sein d'un système peut entraîner sa défaillance, voire sa ruine. Assurer la fiabilité d'un système est très vite devenu essentiel dans l'histoire de l'ingénierie, mais c'est en 1957, avec un rapport de l'AGREE [6] qu'est défini dans les termes suivants le concept de fiabilité :

*“The probability of a product performing without failure a specified function under given conditions for a specified period of time.”*

La fiabilité se voit donc ici définie comme une probabilité de ne pas entrer dans le domaine de défaillance du système. En pratique, c'est bien la probabilité de défaillance qui sera calculée.

Cette section donne un aperçu non-exhaustif du paysage de la conception robuste de structures en présence d'incertitudes et de méconnaissances de modèle. Après une définition mathématique de la probabilité de défaillance, il sera détaillé différentes heuristiques permettant de la calculer. L'état de l'art se concentrera ensuite sur les méthodes d'optimisation existantes permettant d'inclure l'information de fiabilité du système au cours d'un processus d'optimisation. Enfin, différentes manières de modéliser les méconnaissances de modèle seront traitées.

### 2.4.2 Analyse de fiabilité

L'analyse de fiabilité d'une structure vise donc à calculer la probabilité de défaillance du système. Pour cela, un certain nombre de données a besoin d'être défini :

- la définition des variables aléatoires  $\mathbf{X} = [X_1 \cdots X_{n_x}]$  dont les réalisations sont les valeurs  $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_{n_x}]$ . Ce vecteur est stochastique et est décrit par la densité de probabilité conjointe  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Les réponses  $\mathbf{y} = [y_1 \cdots y_{n_y}]$  du modèle utilisé sont liées à  $\mathbf{x}$  par la relation  $\mathbf{y} = \mathcal{M}\mathbf{x}$ .
- la définition des modes de défaillance donnant les conditions pour lesquelles le fonctionnement du système est considéré comme étant défaillant ou non. Celui-ci peut être mis sous la forme d'une équation d'état limite. À chaque état limite est associée une fonction  $g(\mathbf{x}) = R - S$  exprimant la différence entre la ressource disponible  $R$  et la sollicitation  $S$  telle que :
  - $\mathcal{D}_f = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$  définit le domaine de défaillance,
  - $\mathcal{D}_s = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) > 0\}$  décrit le domaine de sécurité,
  - $\Sigma = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$  constitue l'équation d'état limite.

La probabilité de défaillance du système est ensuite définie comme étant la propension à violer l'état limite. Ce qui revient à calculer l'intégrale suivante :

$$P_f = \int_{\mathcal{D}_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.26)$$

Dans la pratique, la portion d'espace définie par  $\mathcal{D}_f$  peut être complexe et rendre le calcul de cette intégrale difficile voire impossible de manière analytique. En effet, la topologie de l'état limite peut être non-linéaire, ou bien le nombre de variables très important. La densité de probabilité conjointe peut également ne pas être connue.

Des méthodes numériques permettent néanmoins de pallier ces difficultés et d'obtenir une approximation fiable de la probabilité de défaillance. Elles sont regroupées dans deux grandes familles :

- les méthodes de transformation, qui se basent sur une forme hypothétique linéaire (FORM *First Order Reliability Method*) ou quadratique (SORM *Second Order Reliability Method*),
- les méthodes de simulation basées sur des tirages de Monte-Carlo, où seul le signe de la fonction de performance est utile.

Les deux sections suivantes dressent le portrait des méthodes qui viennent d'être citées.

#### 2.4.2.1 Méthodes de transformation

Les méthodes de calcul de la probabilité de défaillance par FORM et SORM partent toutes les deux d'un socle commun qui est une transformation isoprobabiliste permettant

de passer de l'espace des variables physiques à celui des variables standards. Les deux transformations traditionnellement utilisées sont :

- la transformée de Rosenblatt [123], qui requiert la connaissance de la densité conjointe  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  et des densités conditionnelles. Or, comme précisé plus haut, ce genre d'information est rarement disponible. Cette transformée constitue donc un outil plus théorique que pratique.
- la transformée de Nataf [102], nécessite quant à elle les densités marginales et la matrice de corrélation. Ces données sont beaucoup plus faciles à récolter ou à construire.

**Méthode FORM** La méthode FORM [89] consiste à approximer l'hyper-surface  $H(u) = 0$  d'état limite à un hyper-plan  $\tilde{H}(u) = 0$  de manière à rendre le calcul de la probabilité de défaillance plus simple.

L'équation de l'hyperplan peut s'écrire :  $\tilde{H}(u) = \sum_i \alpha_i u_i + \beta = 0$

d'où, sur la probabilité de défaillance :

$$P_f = Prob(\tilde{D}_f) \approx Prob\left(\sum_i \alpha_i u_i + \beta \leq 0\right) = Prob\left(\sum_i \alpha_i u_i \leq -\beta\right) \quad (2.27)$$

Dans cette expression, posons  $Z = \sum_i \alpha_i u_i$  une combinaison linéaire des variables normées  $u_i$  et des cosinus directeurs normés  $\alpha_i$ .  $Z$  est donc une variable aléatoire normée, d'où :

$$P_f = Prob(Z \leq -\beta) = \Phi(-\beta) \quad (2.28)$$

Une fois le calcul de  $\beta$  mené, la méthode FORM permet d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance pour un coût nul. Néanmoins, le résultat fourni ne doit être accepté qu'après expertise. En effet, la méthode FORM n'est exacte que pour les surfaces d'état limite linéaires, et des non-linéarités courantes peuvent entraîner d'importantes erreurs.

**Méthode SORM** La méthode SORM [89] est une "amélioration" de la méthode FORM. En effet, l'approximation de l'hyper-surface d'état limite ne se fait plus par un hyper-plan, mais par une hyper-surface d'ordre 2. Ceci nécessite de connaître les courbures au point de conception  $P^*$ . Afin de simplifier les démarches et avant toute chose, une rotation est effectuée de manière à placer le point de conception sur le dernier axe du repère de l'espace standard. Ces coordonnées deviennent donc  $P^* = (0, 0, \dots, \beta)$ .

La formulation la plus utilisée est en général celle de Breitung. Soit une hyper-surface d'état limite définie par la relation  $H(\mathbf{u}) = 0$ . Si  $H$ , deux fois continument dérivable, vérifie :

- $\inf_{H(\mathbf{u}) \leq 0} = \beta > 0$ ;
- il existe un nombre au plus fini (indiqué  $\alpha = 1, \dots, n$ ) de points  $\mathbf{u}^{(\alpha)}$  tels que  $\|\mathbf{u}^{(\alpha)}\| = \beta$ ;
- en ces points, le gradient de  $H$  n'est pas nul ;
- en ces points, les courbures de l'hyper-surface vérifient :

$$k_j^{(\alpha)} \beta > -1; j = 1, \dots, n - 1$$

et  $\alpha$  variant sur l'ensemble des points minimaux.

On a alors, pour  $\beta \rightarrow \infty$  ( $>3$  dans les faits), une approximation de la probabilité de défaillance :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \left( \sum_{\alpha=1}^{\eta} \left( \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta k_j^{(\alpha)})^{-1/2} \right) \right) \quad (2.29)$$

En pratique, on applique la relation en un seul point :

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta k_j^{(\alpha)}}} \quad (2.30)$$

Une démonstration est disponible dans [89]

D'autres formulations existent comme celle de Hohenbichler qui réécrit la formule asymptotique 2.31

$$P_f \simeq \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\phi(\beta)}{\Phi(-\beta)} k_j}} \quad (2.31)$$

ou celle de Tvedt qui permet de prendre en compte les termes d'ordre supérieur dans la formule de Breitung tels que  $P_f = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$  avec  $A_1$  donné par la formule de Breitung et :

$$A_2 = [\beta \Phi(-\beta) - \phi(\beta)] \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta k_j)^{-\frac{1}{2}} - \prod_{j=1}^{n-1} [1 + (1 + \beta) k_j]^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.32)$$

$$A_3 = (1 + \beta) [\beta \Phi(-\beta) - \phi(\beta)] \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \beta k_j)^{-\frac{1}{2}} - Re \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} [1 + (i + \beta) k_j]^{-\frac{1}{2}} \right\} \right\} \quad (2.33)$$

où  $Re$  désigne la fonction partie réelle.

**Synthèse** Les méthodes de transformations permettent un calcul aisé de la probabilité de défaillance, et son coût de calcul ne dépend pas de la précision attendue sur la probabilité de défaillance. Néanmoins ceci se fait, d'une part au prix d'hypothèses fortes sur la topologie de la surface de défaillance (linéaire ou bien quadratique respectivement pour les méthodes FORM et SORM), d'autre part sous condition que l'algorithme converge vers un point de conception  $P^*$  où l'approximation de la surface de défaillance peut être faite. En effet, l'algorithme de recherche de  $P^*$  est sensible aux minima locaux et n'est pas approprié dans le cas de surfaces de défaillances multiples.

D'autres méthodes, dites par simulation et basées sur un échantillonnage direct des fonctions du problème, permettent de passer outre ce genre de difficultés.

La prochaine section présente une partie de ces méthodes très employées. Les explications ne seront cependant développées que pour celles qui seront utilisées par la suite dans le manuscrit.

#### 2.4.2.2 Méthodes de simulation

Contrairement aux méthodes de transformation, les approches par simulation permettent de s'affranchir des problèmes pouvant être posés par la complexité des topologies des surfaces de défaillance. Il est possible grâce à elles de trouver une solution précise à n'importe quel problème dont la résolution nécessite des évaluations déterministes d'un certain modèle numérique ou analytique réalisant une fonction de base [132]. Elles permettent en particulier de calculer des intégrales complexes, des équations différentielles, etc. Ces calculs sont par exemple nécessaires lors de la résolution de problèmes d'optimisation, de problèmes inverses, de propagations d'incertitudes. Ce type d'approche garantit une précision toujours plus grande à mesure que le nombre de simulations augmente ce qui en fait un outil de prédilection dans le cas de modèles simples et rapides. Le revers de la médaille est que pour un modèle complexe, le nombre de simulations nécessaires à la convergence du résultat est bien souvent rédhibitoire.

**Méthode de Simulation par Monte-Carlo** Une simulation de Monte-Carlo consiste à simuler des échantillons ou tirages aléatoires des paramètres d'entrée d'un modèle à partir de leurs distributions de probabilité et à calculer les réponses correspondantes. Ces jeux de données servent à résoudre le problème considéré. Bien que les méthodes dérivées de Monte-Carlo restent sujettes aux erreurs de modèles et aux approximations algorithmiques

des générateurs de nombres aléatoires, elles permettent d'éviter certaines approximations de résolutions analytiques. C'est pourquoi ces méthodes sont classées dans les approches dites exactes.

Dans le cadre du travail présenté dans ce manuscrit, les analyses faisant appel à la méthode de Monte-Carlo serviront presque exclusivement au calcul de probabilités de défaillance défini en équation 2.26 et qu'il est possible de réécrire :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}}} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E[\mathbf{1}_{\mathcal{D}_f}] \quad (2.34)$$

avec :

- $\mathbf{1}_{\mathcal{D}_f}$  : la fonction indicatrice valant 1 dans le domaine de défaillance et 0 ailleurs,
- $E[\cdot]$  : l'espérance mathématique,

Le formalisme ici présenté sous-entend que l'équation 2.34 est évaluée à partir d'un nombre  $n_s$  d'échantillons du vecteur des variables aléatoires  $\mathbf{X}$  obtenus à partir de  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Par l'application de la loi des grands nombres, on peut déduire la relation suivante entre la moyenne arithmétique et l'espérance mathématique :

$$E[\mathbf{1}_{\mathcal{D}_f}] \approx \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} \quad (2.35)$$

En posant  $n_{\mathcal{D}_f}$  comme étant le nombre d'échantillons dans le domaine de défaillance, la méthode de Monte-Carlo permet de construire facilement un indicateur non-biaisé de la probabilité de défaillance du système :

$$\hat{P}_{f,MC} = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} = \frac{n_{\mathcal{D}_f}}{n_s} \quad (2.36)$$

L'estimateur non-biaisé de la variance de  $\hat{P}_{f,MC}$  est quant à lui :

$$\sigma^2[\hat{P}_{f,MC}] = \frac{1}{n_s - 1} \sum_{k=1}^{n_s} \left( \mathbf{1}_{\mathcal{D}_f} - \hat{P}_{f,MC} \right)^2 \quad (2.37)$$

Cette variance caractérise l'erreur statique de simulation et permet de voir que la diminution de l'erreur est directement dépendante du nombre d'échantillons calculés. Si  $n_s$  tend vers l'infini, alors l'erreur tend vers 0. Ce nombre  $n_s$  est donc à déterminer en fonction des objectifs de précision que l'utilisateur se fixe sur la valeur de la probabilité de défaillance.

En partant du principe que la valeur des probabilités de défaillance à calculer dans le domaine de la fiabilité des structures se situe entre  $10^{-3}$  et  $10^{-6}$  et en prenant le coefficient de variation :

$$CV_{\hat{P}_{f,MC}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 [\hat{P}_{f,MC}]}{E [\hat{P}_{f,MC}]}} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{n_s P f}} \quad (2.38)$$

il apparait qu'entre  $4 \times 10^5$  et  $4 \times 10^8$  échantillons sont nécessaires à l'obtention d'un coefficient de variation de 5%. Dès lors, à partir du moment où le temps d'évaluation de la fonction contrainte prend plus de quelques secondes, il devient très vite prohibitif d'utiliser ce genre de méthode. Cependant, et toujours dans le cas d'un calcul d'intégrale complexe, une méthode par simulation gardera toujours l'avantage d'être plus simple à mettre en oeuvre qu'une approche par transformation type FORM ou SORM. C'est pourquoi de nombreuses heuristiques différentes ont été développées afin de réduire le nombre d'échantillons nécessaires à la convergence du processus. Ces techniques sont dites de réduction de la variance. Une liste non-exhaustive est donnée ici [116] :

- de l'échantillonnage préférentiel – *importance sampling* [11, 64, 94],
- du tirage hypercube latin – *latin hypercube sampling* [67, 93],
- du tirage quasi Monte-Carlo [24, 98, 104],
- du tirage descriptif – *descriptive sampling* [128, 129, 144],
- des variables de contrôle – *control variates* [142],
- des variables antithétiques – *antithetic variates* [55, 65],
- du tirage adaptatif – *adaptive sampling* [32],
- du tirage par séquence de Hammersley – *Hammersley sequence sampling* [76].

Le couplage de ces méthodes avec des méthodes de transformation est par la suite possible pour la résolution de problèmes spécifiques [140].

- la méthode *line sampling* [87, 117],
- la méthode *subset simulation* [10, 12],
- la méthode *directional simulation* [45, 46],
- la méthode axis *orthogonal simulation* [70],
- la méthode de Hohenbichler et Rachwitz [70].

La méthode des Subset-Simulation fait l'objet d'un développement dédié dans la suite de ce manuscrit.

**Subset-Simulation** Il a été mis en avant dans la section précédente que l'un des principaux freins à l'utilisation d'un échantillonnage de Monte-Carlo pour l'évaluation d'une probabilité de défaillance est l'augmentation importante du nombre d'échantillons à calculer à mesure que la probabilité à estimer devient faible.

La méthode Subset-Simulation offre une approche intéressante en couplant l'échantillonnage à une Chaîne de Markov. Elle se base sur l'idée originale de calculer des probabilités de défaillance intermédiaires, plus importantes, et donc plus simples à estimer. En effet, en reprenant  $\mathcal{D}_f$  le domaine de défaillance, il est possible de définir une succession de  $m$  domaines intermédiaires  $\mathcal{D}_i$  de l'espace incertain tels que :

$$\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2 \supset \dots \supset \mathcal{D}_m = \mathcal{D}_f \quad (2.39)$$

La définition de la probabilité conditionnelle donne ensuite :

$$P_f = P(\mathcal{D}_f) = P(\mathcal{D}_m | \mathcal{D}_{m-1}) P(\mathcal{D}_{m-1}) = P(\mathcal{D}_1) \prod_{i=2}^m P(\mathcal{D}_i | \mathcal{D}_{i-1}) \quad (2.40)$$

La théorie autorise donc à calculer les probabilités  $P(\mathcal{D}_i | \mathcal{D}_{i-1})$  et à faire leur produit au lieu d'estimer de manière frontale  $P(\mathcal{D}_f)$  qui peut être très petite. Les questions découlant de cette idée, telles que la manière de choisir la forme et le nombre de domaines intermédiaires sont traitées dans [10, 12].

$\mathcal{D}_f$  peut être représenté comme un excédent par rapport à une valeur seuil admissible  $y_c$  :

$$\mathcal{D}_f = \{Y \geq y_c\} \quad (2.41)$$

La stratégie Subset-Simulation consiste en la définition d'une liste de seuils successifs  $0 < y_1 \dots < y_m = y_c$  tels que l'écart entre  $\mathcal{D}_i$  et  $\mathcal{D}_{i-1}$  permette le calcul de  $P(\mathcal{D}_i | \mathcal{D}_{i-1})$  qui ne soit pas petit. Autrement, l'algorithme se retrouve dans le cadre de l'évaluation d'évènement rare, et les inconvénients d'un Monte-Carlo cru réapparaissent.

L'algorithme est en général réglé de manière à ce que  $P(\mathcal{D}_i | \mathcal{D}_{i-1})$  appartienne à [0.1, 0.2]

Dans sa version originale [10], la méthode Subset-Simulation progresse suivant un algorithme de Métropolis-Hasting [95, 66] faisant intervenir les chaînes de Markov. De nouveaux candidats sont échantillonnés de manière aléatoire suivant une loi de distribution choisie a priori .

Ces candidats sont acceptés ou refusés suivant le ratio de la probabilité recherchée. Il est choisi de manière à ce que la corrélation le long de la chaîne de Markov soit faible. Ceci permet d'éviter les effets de moyennage et donc, d'augmenter l'efficacité du processus.

Le choix de la distribution de base influe sur le choix des candidats lors des échantillonnages et donc sur l'efficacité de la procédure MCMC. Elle doit être choisie de manière à ce que la corrélation le long de la chaîne de Markov soit faible. Elle doit également trouver un équilibre entre deux cas :

- Fournir des candidats appartenant à  $\mathcal{D}_i$ , qui sont acceptés, pris pour nouvelle référence, mais trop proches des points précédents pour permettre une avancée efficace de l'algorithme,
- Fournir des candidats n'appartenant pas à  $\mathcal{D}_i$ , qui sont rejetés.

L'application de cette méthode à des problèmes d'optimisation peut être trouvée dans [12, 51].

**Synthèse** Bien que de nombreuses techniques de réductions de la variance existent pour rendre les méthodes de simulation moins gourmandes en temps de calcul, celles-ci conservent une convergence en  $1/\sqrt{n_s}$ . Le nombre d'échantillons à calculer est donc encore dans de nombreux cas trop important pour parvenir à des algorithmes d'optimisation plus performants, le temps de calcul doit donc être gagné en amont, sur la durée même de l'évaluation du modèle.

Pour cela, de nombreuses méthodes de réanalyses approchées existent. Leur but est d'arriver à une approximation locale du modèle de manière à en synthétiser de manière simplifiée et rapide les sorties d'intérêt en fonction des entrées du problème.

Les approches les plus utilisées dans le cadre de la fiabilité des structures sont les constructions de métamodèles à base de surfaces de réponses [31, 57, 124, 150], de Krigeages [52, 83] ou de réseaux de neurones [73, 72]. De manière plus marginale, les approches par réduction de modèles sont aussi utilisées [119].

D'autres méthodes, qui ne seront pas utilisées dans ce manuscrit sont le chaos polynomial [22, 58, 140, 141] et la collocation stochastique [29, 121].

Les techniques de construction des métamodèles et de réduction des structures sont abordées respectivement en annexes D et B.

L'intégration de l'analyse de fiabilité dans le contexte de conception robuste est quant à elle explicitée dans la section suivante.

### 2.4.3 Méthodes de conception robuste

#### 2.4.3.1 Introduction

Au delà de simplement garantir un niveau de performance du système, le processus de conception vise à minimiser son coût de production ou encore le coût de son cycle de vie [116]. Si des règles métier existent, basées sur l'expérience et le bon sens, il est souvent intéressant de compléter cette base méthodologique par des approches d'optimisation. De nombreuses méthodes déterministes existent mais ne permettent pas de prendre en compte les incertitudes et sont donc peu fiables dans un contexte où les connaissances sur le système sont faibles.

Les approches stochastiques répondent en partie à ce manque en tenant compte des incertitudes qu'il est possible de représenter par des lois mathématiques. Ces approches sont déjà plus réalistes car les incertitudes sont présentes à toutes les échelles et toutes les étapes de la conception d'une structure et durant son cycle de vie.

La définition fondamentale de la conception robuste est donnée par : "un produit ou procédé est dit robuste s'il est insensible à la variabilité de ces sources d'incertitude, même si ces sources ne sont pas éliminées."

Les sections à venir font un état des lieux des méthodes de conception robuste utilisées, en partant du cas historique de la méthode Taguchi pour ensuite s'attarder sur les méthodes par optimisations qui seront utilisées dans les applications présentées dans ce manuscrit.

#### 2.4.3.2 L'approche Taguchi

L'un des pionniers en matière de conception robuste fut Taguchi [35] qui dès les années 50 développa une méthodologie visant à obtenir une conception de qualité par l'application de concepts statistiques. L'approche de conception robuste au sens de Taguchi repose sur l'utilisation de plans d'expérience orthogonaux. On y distingue [80] :

- les facteurs contrôlés, c'est-à-dire, les paramètres de conception qui peuvent être ajustés en fonction de la performance désirée et pour diminuer la variabilité ; ils constituent le plan interne ;
- les facteurs de bruit, c'est-à-dire, les paramètres qu'il est impossible ou trop coûteux de contrôler ; ils constituent le plan externe ;
- une fonction perte permettant de quantifier la perte de qualité subie par le produit ;
- le ratio signal/bruit qui mesure l'effet de la variation des paramètres de conception du modèle et environnementaux sur les fonctions performance.

La définition du ratio signal/bruit varie suivant le problème étudié mais il s'agit toujours d'une fonction de la forme :

$$RSB = -10 \log_{10}(SB) \quad (2.42)$$

Généralement, on cherche à maximiser ce ratio en prenant  $SB = \sigma^2/\mu^2$ , où  $\sigma$  et  $\mu$  sont respectivement l'écart-type et la moyenne de la fonction performance.

Les effets de la variabilité des paramètres de conception sont étudiés au moyen des plans d'expérience orthogonaux où les facteurs contrôlés et de bruit prennent un nombre limité de valeurs appelées niveaux. Une fois que la conception permettant de maximiser le ratio signal/bruit est trouvée, la moyenne de la fonction performance est ajustée sur la réponse voulue en faisant varier les paramètres de conception ayant peu d'influence sur la variance de la performance.

Cette démarche est très largement utilisée dans les entreprises – au point d'être une marque déposée – car très bien documentée, facile à mettre œuvre et, dans la cas de la simulation numérique, demandant peu de calculs. La méthode industrielle de contrôle de la qualité Six Sigma intègre d'ailleurs les plans d'expérience de Taguchi. On trouvera dans [17] une approche Six Sigma en RBDO et RDO (définis plus bas).

La méthode Taguchi a cependant de nombreuses limites. Il lui est notamment reproché [80, 111] :

- de mal prendre en compte les interactions entre les paramètres ;
- de mal considérer les contraintes ;
- d'être mise en défaut en cas de relation non-linéaire entre les entrées et les sorties ;
- de limiter les valeurs de paramètres aux niveaux pris par ceux-ci dans le plan d'expérience.

Ce dernier point rend particulièrement inefficace cette approche dans le cadre du calcul des structures où les paramètres prennent des valeurs continues. Néanmoins, certains travaux s'appuyant sur l'approche Taguchi ont aussi été développés en calcul des structures. On en trouvera une revue dans [80].

L'augmentation de la puissance des ordinateurs a permis le développement de techniques de conception robuste plus coûteuses en temps de calcul mais plus justes du point de vue statistique. Ces techniques reposent principalement sur des techniques d'optimisation, et sont l'objet de la suite de cette section.

### 2.4.3.3 Les approches par optimisation

Les deux grands paradigmes sur lesquels se basent les routines d'optimisation sont :

- la fiabilité, illustrée ici par la RBDO (*Reliability-Based Design Optimisation*),
- la conception robuste, illustrée ici par la RDO (*Robust Design Optimisation*)

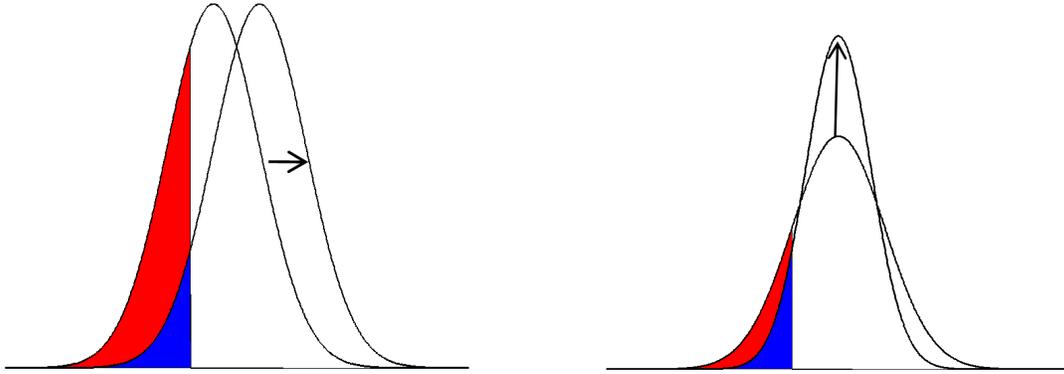


FIGURE 2.6: Optimisation RBDO et RDO

Ces deux approches traitent de manière différente les mêmes types de problèmes. Dans le cas de la RBDO, l'algorithme vise à “déplacer” la moyenne des distributions afin de diminuer la probabilité de défaillance du système, tandis que la RDO tente de diminuer la variabilité de la fonction performance. Une illustration de la philosophie de ces approches est disponible figure 2.6.

**RBDO** Un problème de RBDO peut se formaliser comme suit [116] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} f(\mathbf{d}) & f \in \mathbb{R} \\ \text{avec} & \\ \mathbf{g}(\mathbf{d}) \leq 0 & \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n_g} \\ \mathbf{h}(\mathbf{d}) = 0 & \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n_h} \\ P_f(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \leq P_c & \end{array} \right. \quad (2.43)$$

où

- $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{n_x}]^T$  est le vecteur des variables aléatoires ;
- $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_{n_x}]^T$  est le vecteur des variables de conception ;

- $f(\mathbf{d})$  est la fonction objectif - ou fonction coût - à minimiser ;
- $\mathbf{g}(\mathbf{d}) = [g_1(\mathbf{d}), g_2(\mathbf{d}), \dots, g_{n_g}(\mathbf{d})]$  est le vecteur des  $n_g$  contraintes d'inégalités ;
- $\mathbf{h}(\mathbf{d}) = [h_1(\mathbf{d}), h_2(\mathbf{d}), \dots, h_{n_h}(\mathbf{d})]$  est le vecteur des  $n_h$  contraintes d'égalités ;
- $P_f(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  est la probabilité de défaillance en fonction de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{d}$  ;
- $P_c$  est le seuil critique que la probabilité de défaillance ne doit pas dépasser.

Cette optimisation peut être multi-objectifs et les variables de  $\mathbf{d}$  peuvent être aléatoires et appartenir à  $\mathbf{x}$ . La RBDO ne sera pas traitée outre mesure dans ce manuscrit. De nombreuses applications peuvent néanmoins être trouvées dans [4, 5, 62, 74, 75, 80, 81, 100, 126, 110, 116, 118, 133, 139, 155].

**RDO** Une formalisation possible d'un problème de RDO peut être [116] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} [f(\mathbf{d}), m(\mathbf{x}, \mathbf{d})]^T \quad f \in \mathbb{R}, m_\sigma \in \mathbb{R} \\ \text{avec} \\ \mathbf{g}(\mathbf{d}) \leq 0 \quad \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n_g} \\ \mathbf{h}(\mathbf{d}) = 0 \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n_h} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

À la minimisation de la fonction objectif  $f(\mathbf{d})$  s'ajoute ici la minimisation d'une mesure de la variabilité de la réponse d'intérêt  $m(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ . Par nature, une approche RDO est donc toujours multi-objective. Ce qui n'empêche en rien l'ajout d'autres fonctions objectives ou bien celui d'autres mesures de variabilité à minimiser.

La définition de la mesure de la variabilité de la fonction de performance  $f(\mathbf{d})$  du système est en général exprimée en fonction de  $\mu_f$  et de  $\sigma_f$  désignant respectivement ses moyennes et écart-types tels que :

$$\min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} [f(\mathbf{d}), m(\mathbf{x}, \mathbf{d})]^T = \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} [\mu_f, \sigma_f]^T \quad (2.45)$$

Mais d'autres choix sont possibles comme dans le cas d'une optimisation multi-objectifs [7, 30, 59] où :

$$\min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} [f(\mathbf{d}), m(\mathbf{x}, \mathbf{d})]^T = \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} \left[ f(\mathbf{d}), \frac{\sigma_f}{\mu_f} \right]^T \quad (2.46)$$

où les  $\frac{\sigma_f}{\mu_f} = \frac{1}{f_r}$  sont les fonctions de vulnérabilité associées à chaque  $f$  et où  $f_r$  est la fonction de robustesse.

La mesure de la variabilité peut aussi être définie au sens de Pareto, ce qui permet une réduction à un problème mono-objectif où l'amélioration d'un paramètre va de pair avec la dégradation de tout ou partie des autres paramètres [48, 49, 80, 154] :

$$\min \alpha \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + (1 - \alpha) \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*} \quad (2.47)$$

où  $\alpha$  compris entre 0 et 1 permet la pondération de l'importance de la moyenne vis-à-vis de l'écart-type. Les valeurs étoilées  $\mu_f^*$  et  $\sigma_f^*$  représentent les objectifs désirés en moyenne et écart-type. Cette méthode peut ne pas trouver de solutions dans le cas où sa convexité n'est pas respectée.

En général, la conception d'une structure doit satisfaire des critères à la fois de fiabilité et de robustesse. Les deux approches présentées peuvent donc être vues comme étant complémentaires. Cependant, comme sous-entendu, mener une optimisation RBDO nécessite le calcul de probabilités de défaillance. Or il a été mis en évidence dans la partie précédente que celles-ci pouvaient être difficiles à mettre en place, coûteuses et sujettes à de nombreuses erreurs suivant la topologie de la surface d'état limite. La RDO semble donc plus simple d'application, d'autant plus que la réduction de la variabilité de la réponse du système s'accompagne généralement d'une réduction de la probabilité de défaillance, comme illustré dans la figure 2.6.

**RRDO** En plus des problèmes de type RBDO et RDO, des problèmes du type RRDO (*Reliability-Based Robust Design Optimization*) apparaissent aujourd'hui [116, 151] et peuvent être formalisés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} [f(\mathbf{d}), m(\mathbf{x}, \mathbf{d})]^T \quad f \in \mathbb{R}, m_\sigma \in \mathbb{R} \\ \text{avec} \\ \mathbf{g}(\mathbf{d}) \leq 0 \quad \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n_g} \\ \mathbf{h}(\mathbf{d}) = 0 \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n_h} \\ P_f(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \leq P_c \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Il s'agit d'un problème de conception robuste auquel a été ajouté une contrainte probabiliste sur la probabilité de défaillance. Il peut donc être vu comme une sorte d'agglomération des deux méthodes citées plus haut.

Différentes synthèses des approches de conception robuste par optimisation peuvent être trouvées dans [23, 80, 116, 133, 154].

**Résolution** La résolution des problèmes d’optimisation définis précédemment peut se faire de deux manières différentes :

- Par voie déterministe [48, 49, 80, 120] : en faisant intervenir des algorithmes d’optimisation locaux ou globaux. Les mesures de robustesse et les contraintes sont donc calculées de manière explicite par des techniques numériques.
- Par simulations : les incertitudes sont traitées par simulations (Monte-Carlo par exemple) au sein même de l’optimisation. Les algorithmes évolutionnaires sont souvent employés dans le cadre de cette approche [30, 7, 8, 59]. Les calculs requérant de nombreux appels au modèle, les différentes techniques de réanalyses approchées tels que la métamodélisation ou la réduction de modèle sont souvent couplées à la procédure d’optimisation [116, 30, 7, 59].

La prise en compte des incertitudes lors d’une procédure d’optimisation fait l’objet de la section suivante. En effet, des approches non-probabilistes sont possibles dans le cadre d’une étude de conception robuste [18, 92].

## 2.4.4 Approches non-probabilistes pour la modélisation d’incertitudes

### 2.4.4.1 Introduction

Comme il a été exposé lors du préambule de cette thèse 1.1.2, les incertitudes peuvent être de nature et de sources très diverses. Mais toutes sont liées par la nécessité d’être à un moment donnée conceptualisées de manière mathématique afin de pouvoir être utilisées en ingénierie.

De nombreuses méthodes prennent pour hypothèse une définition stochastique de ces incertitudes. Deux écoles se rencontrent sur ce terrain. La première, fréquentiste, se veut objective et ne traite que de l’occurrence d’un évènement donné pour en calculer la probabilité. La seconde, Bayésienne, plus subjective, calcule la probabilité à partir d’un état *a priori* de l’information. Les approches stochastiques de traitement des problèmes sous incertitudes ne seront pas abordées plus en profondeur dans ce manuscrit car elles ne permettent pas la modélisation des méconnaissances de modèle à proprement parler. Il est toutefois possible de se rapporter à [132, 133] pour de plus amples informations.

En opposition à ces approches, des méthodologies non-probabilistes existent. Il est possible de citer les méthodes par intervalles [44, 97, 40, 135] dont l’arithmétique particulière est développée dans la suite du manuscrit, les ensembles flous [152] dont le paramètre incertain est lié à un degré d’appartenance dépendant du jugement sur l’incertitude du paramètre,

et enfin, la méthode *Info-Gap* [21] qui est au cœur de la modélisation des méconnaissances qui seront traitées dans ce document.

#### 2.4.4.2 Théorie des intervalles

Cette théorie repose sur le principe relativement simple et intuitif de représenter les incertitudes par des intervalles lorsque la loi de probabilité associée n'est pas connue. Cette approche permet alors de trouver les bornes extrêmes des variations des réponses, information qui peut suffire au concepteur. Le socle théorique de la méthode est le suivant.

Un intervalle d'incertitude  $[I]$  est défini par sa fonction caractéristique  $\chi_I$  selon

$$\chi_I : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \rightarrow \chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } I^- \leq x \leq I^+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.49)$$

Le vecteur des paramètres incertains représenté par  $x \in \mathbb{R}$  est ainsi borné par les valeurs  $I^-$  et  $I^+$ . La propagation des incertitudes au sein du modèle se fait ensuite par application de l'arithmétique particulier des intervalles. Pour une opération courante  $* \in \{+, -, \times, \div, \min, \max\}$  entre deux intervalles fermés  $[I]$  et  $[J]$  tels que :

$$[I] + [J] = [I^- + J^-, I^+ + J^+],$$

$$[I] - [J] = [I^- - J^+, I^+ - J^-],$$

$$[I] \times [J] = [\min(I^- J^-, I^- J^+, I^+ J^-, I^+ J^+), \max(I^- J^-, I^- J^+, I^+ J^-, I^+ J^+)],$$

$$[I] \div [J] = [I^-, I^+] \times [I/I^+, I/I^-] \quad 0 \notin [J].$$

La fonction  $f(x) = 2x - x$  est classiquement utilisée pour montrer que le caractère pessimiste d'une propagation d'incertitudes par la théorie des intervalles est l'un de ses défauts majeurs. Ainsi, en appliquant les règles de soustraction des intervalles, le résultat suivant est obtenu :

$$f([I]) = [2[I]^- - [I]^+, 2[I]^+ - [I]^-] \supset [I]$$

L'intervalle résultat est donc plus vaste que  $[I]$  alors que le fait que  $2x - x = x$  pouvait laisser attendre un résultat du type  $f([I]) = [I]$ . Ces surestimations proviennent du fait que la dépendance des occurrences en  $x$  n'est pas prise en compte. Pour pallier à ces problèmes, l'arithmétique affine a été développée [38]. Des travaux dans le domaine de la dynamique des structures [42, 44] ont, par exemple, permis d'obtenir des FRFs enveloppes.

À noter pour conclure que la toolbox INTLAB est disponible et permet l'application de la théorie des intervalles.

La théorie des intervalles a par la suite été agrémentée d'heuristiques plus évoluées, mais celles-ci ne seront pas traitées dans ce manuscrit. La théorie *Info-Gap*, plus récente, fait partie de cet héritage de méthodologies basées sur des modèles convexes.

#### 2.4.4.3 L'approche *Info-Gap*

La théorie *Info-Gap* [21] a émergé au cours des années 90 sous l'impulsion de Y. Ben-Haim dans l'objectif de fournir des outils d'aide à la décision dans un contexte d'incertitudes sévères [2]. Elle fournit une représentation quantitative de l'incertitude au sens de Knight, c'est à dire l'incertitude pour laquelle il n'existe pas de mesure objective de la probabilité. Plus précisément, la théorie *Info-Gap* quantifie la distance - *gap* - entre l'information - *info* - qui est connue et celle qu'il est nécessaire de connaître pour prendre une décision fiable. Lors d'une prise de décision, l'objectif est de minimiser cette distance.

La philosophie de l'approche prend ses racines dans le concept de la rationalité limitée, développé par Simon [137] : face à la prise de décision, le comportement humain est rationnel - les êtres humains peuvent expliquer les décisions qu'ils prennent - mais il est également limité - les êtres humains sont incapables, lors d'une prise de décision, d'imaginer et de conceptualiser toutes les possibilités et leurs conséquences. En présence de grandes incertitudes, le comportement humain pousse à choisir une situation raisonnable. C'est la raison pour laquelle la théorie est qualifiée de *satisficing*, un mot-valise formé des mots *satisfactory* (satisfaisant) et *sufficing* (suffisant). En utilisant la théorie *Info-Gap*, l'analyste privilégiera une décision satisfaisante plutôt qu'une décision optimale.

La théorie *Info-Gap* a déjà fait ses preuves dans de nombreuses applications telles que le positionnement de capteurs [146], la détermination de facteurs de sécurité [71] ou encore la calibration de modèles [113, 145], le tout en présence de méconnaissances de modèle. Elle repose sur la définition de trois éléments :

**Le modèle du système** Le modèle du système permet d'établir la relation fonctionnelle qui lie les paramètres connus  $\mathbf{q}$  et inconnus  $\mathbf{m}$  du système avec ses sorties. Ces paramètres sont généralement les paramètres mécaniques et géométriques du modèle éléments finis. Mais comme il sera développé plus tard au sein de ce document, ceux-ci peuvent aussi être les paramètres d'une loi de probabilité. Le modèle du système peut se formaliser par l'équation :

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{m}) \quad (2.50)$$

Dans le cas d'une application à la mécanique des structures, le modèle du système peut tisser les liens entre des raideurs d'interfaces incertaines et des fréquences propres (chapitre 5), ou encore la position de certains équipements avec les déformées du système (chapitre 3).

**Le modèle d'incertitude** représente l'espace de variation de l'incertitude sous la forme d'imbrication de domaines convexes. Plus précisément, ces modèles sont constitués d'une famille infinie de sous-ensembles centrés et imbriqués sur les estimations des paramètres incertains  $u$  dans leur configuration nominale  $u_0$ . La taille de ces sous-ensembles est contrôlée par un réel positif, appelé horizon d'incertitude et noté  $\alpha$ . Ces sous-ensembles convexes sont notés  $\mathcal{U}(\alpha, u_0)$ . Il est important de noter qu'il n'existe pas de restriction sur la nature mathématique des paramètres  $u$ . Par exemple, les paramètres incertains peuvent être des paramètres associés à des lois de distribution, ce qui revient à considérer la loi de probabilité comme incertaine. Ces modèles particuliers sont qualifiés de modèles hybrides. On pourra consulter le chapitre 10 de [21] ou encore [115] pour plus de détails. Il existe divers modèles d'incertitude *Info-Gap* (cf. p. 20 dans [21]). Par exemple :

- le modèle enveloppe :

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) = \{\mathbf{m} : \|\mathbf{m} - \mathbf{m}^{(0)}\| \leq \alpha \mathbf{m}^{(0)}\} \quad (2.51)$$

- le modèle énergétique :

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) = \left\{ u : \int_0^{+\infty} (\mathbf{m} - \mathbf{m}^{(0)})^2 \leq \alpha^2 \right\} \quad (2.52)$$

- le modèle hybride ( $u_{0X}$  est alors la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ ) :

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{m}_X^{(0)}) = \left\{ u_X : u_X \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{m}_X = 1, \left| \mathbf{m}_X - \mathbf{m}_X^{(0)} \right| \leq \alpha \mathbf{m}_X^{(0)} \right\} \quad (2.53)$$

La diversité de ces modèles nous suggère qu'il n'y a pas de façon universelle dont l'incertitude est imbriquée. Le choix du modèle d'incertitude est clairement dicté par la physique du système et s'avère être subjectif. Découlant généralement des propriétés de convexité des sous-ensembles, les modèles d'incertitude *Info-Gap* possèdent des propriétés mathématiques intéressantes, formulées initialement dans [20] :

- **Imbrication.** Soient  $\mathcal{U}(\alpha, u_0)$  et  $\mathcal{U}(\beta, u_0)$

$$\alpha < \beta \Rightarrow \mathcal{U}(\alpha, u_0) \subseteq \mathcal{U}(\beta, u_0) \quad (2.54)$$

- **Contraction.** Le modèle *Info-Gap* particulier  $\mathcal{U}(\alpha = 0, u_0)$  est un singleton constitué du centre du domaine :

$$\mathcal{U}(\alpha = 0, u_0) = \{u_0\} \quad (2.55)$$

- **Translation.** Soit  $\mathcal{U}(\alpha, u_0)$  un modèle *Info-Gap* et 0 l'élément neutre de l'espace où se situe  $u_0$ , alors :

$$\mathcal{U}(\alpha, u_0) = \mathcal{U}(\alpha, 0) + \{u_0\} \quad (2.56)$$

- **Expansion linéaire.** Soit  $\mathcal{U}(\alpha, u_0)$  un modèle *Info-Gap*, alors  $\forall (\alpha, \beta) \in R_+^{*2}$  :

$$\mathcal{U}(\beta, u_0) = \frac{\alpha}{\beta} \mathcal{U}(\alpha, u_0) \quad (2.57)$$

**Le critère de performance** dit aussi modèle de prise de décision, traduit le niveau d'exigence que l'on veut atteindre sur la réponse d'intérêt du système afin de pouvoir prendre une décision. Ce critère peut être difficile à exprimer mathématiquement mais est en général présenté comme un seuil  $\kappa_c$  que la réponse d'intérêt du système  $y$  ne doit pas excéder :

$$|y| \leq \kappa_c \quad (2.58)$$

Toujours en prenant des exemples dans le domaine de la dynamique des structures, ce seuil peut symboliser une limite en fréquence qu'un mode ne doit pas dépasser.

Ces trois composantes du formalisme *Info-Gap* permettent la définition des fonctions de robustesse et d'opportunité qui sont les réels outils sur lesquels repose la prise de décision. Ces deux fonctions sont duales l'une de l'autre et permettent d'aborder la problématique des incertitudes selon deux directions différentes car «l'incertitude peut être soit néfaste soit propice» (p. 37 dans [21]).

La fonction de robustesse  $\hat{\alpha} = \alpha(q, y)$  va donc permettre de détecter le plus grand horizon d'incertitude pour lequel aucune défaillance n'est possible, tandis que la fonction d'opportunité  $\hat{\beta} = \hat{\beta}(q, y)$  révélera le plus petit horizon d'incertitude pour lequel l'occurrence d'un

phénomène espéré  $\kappa_e$  peut avoir lieu.

$$\hat{\alpha} = \max \left\{ \alpha : \left\{ \max_{m \in \mathcal{U}(\alpha, m^{(0)})} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{m}) \right\} \leq \kappa_c \right\} \in \mathbb{R}_+ \quad (2.59)$$

$$\hat{\beta} = \min \left\{ \alpha : \left\{ \min_{m \in \mathcal{U}(\alpha, m^{(0)})} \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{m}) \right\} \leq \kappa_e \right\} \in \mathbb{R}_+ \quad (2.60)$$

Ces deux fonctions découlent intimement des trois éléments précédemment définis. Les fonctions robustesse et opportunité sont des fonctions monotones vis-à-vis de l'exigence de performance. Cette propriété découle directement d'un théorème exprimant les compromis entre exigence de performance et immunité vis-à-vis des incertitudes. Soient  $\kappa_{c_1}$  et  $\kappa_{c_2}$  deux critères de performance fixés, alors il est possible de démontrer l'assertion suivante :

$$\kappa_{c_1} < \kappa_{c_2} \Rightarrow \hat{\alpha}(\mathbf{q}, \kappa_{c_1}) \geq \hat{\alpha}(\mathbf{q}, \kappa_{c_2}) \quad (2.61)$$

Cette relation met donc en évidence le compromis existant entre exigence de performance et robustesse vis-à-vis des incertitudes. Pour étudier ces compromis, on trace des courbes de robustesse qui sont la représentation graphique de la relation  $\hat{\alpha}(\mathbf{q}, \kappa_c) = f(\kappa_c)$ . Naturellement, les courbes de robustesse sont monotones (croissantes) : c'est en effet une propriété découlant directement de l'équation 2.61.

Dans la pratique, la fonction opportunité est assez peu utilisée dans le sens où le souci de l'ingénierie vise principalement à éviter un évènement néfaste à la structure.

## 2.5 Conclusion partielle

Ce chapitre a permis de faire un tour d'horizon des méthodologies et concepts qui seront utilisés par la suite.

Ainsi les chapitres 3 et 4 seront respectivement dédiés au placement de capteurs ou d'excitateurs et à la conception robuste de structure à proprement parler. Dans les deux cas, les méthodologies précédemment expliquées seront adaptées de manière à fournir des résultats robustes vis-à-vis des méconnaissances de modèle ainsi que des outils d'aide à la décision. Les approches robustes ainsi bâties seront ensuite à chaque fois étendues à des systèmes possédant des non-linéarités locales.

# Conception robuste d'un plan de test pour l'analyse modale d'une structure

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>56</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthodologies</b>	<b>56</b>
3.2.1	Méthodologie de placement robuste de capteurs	56
3.2.2	Extension aux capteurs multiaxiaux	59
3.2.3	Méthodologie de placement robuste d'excitateurs	60
3.2.4	Extension aux structures localement non-linéaires	61
<b>3.3</b>	<b>Application à une structure académique</b>	<b>63</b>
3.3.1	Placement de capteurs	65
3.3.2	Placement robuste d'excitateurs	68
3.3.3	Perspective d'extension aux structures localement non-linéaires	70
<b>3.4</b>	<b>Conclusion partielle</b>	<b>74</b>

---

## 3.1 Introduction

Il est largement reconnu que les incertitudes aléatoires présentes dans un système et son environnement doivent être prises en compte au cours du processus de conception [131]. Un large panel des stratégies de conception robuste dans le domaine de la dynamique des structures peut être trouvé dans [153]. Cependant, les incertitudes peuvent se présenter sous de nombreuses formes et les erreurs modélisées ne sont pas nécessairement de type aléatoire. À titre d'exemple, les erreurs de forme ou les niveaux inconnus sur l'imprécision des paramètres requièrent souvent une approche non-probabiliste pour être prises en compte de manière correcte. Et d'ajouter que le principe de conception robuste n'est pas exclusivement réservé à la conception des structures, il a également prouvé son utilité dans le développement d'algorithmes en général.

Dans ce qui va suivre, une nouvelle stratégie ayant pour but de maximiser la robustesse vis-à-vis d'erreurs de modèle d'un placement de capteurs et d'excitateurs pour un test de vibration sera proposée. Ce chapitre s'évertuera à investiguer jusqu'à quel point il est possible d'améliorer un plan de test pour l'analyse modale d'une structure en présence d'incertitudes épistémiques. Une méthodologie robuste est élaborée pour offrir un compromis entre la performance du test et la prise en compte des incertitudes. Les approches proposées dans [146] et [77] sont également étendues au placement d'excitateurs et aux structures localement non-linéaires.

## 3.2 Méthodologies

### 3.2.1 Méthodologie de placement robuste de capteurs

Comme il a été précisé dans l'état de l'art, une distribution de capteurs a pour principales fonctions de détecter et de distinguer les modes significatifs d'une structure pour une bande de fréquences définie. Le modèle  $M$  liant les  $i^{\text{ième}}$  entrées inconnues du système  $\mathbf{m}_i$ , aux sorties inconnues (ici la base modale  $\Phi_i$ ) peut être défini par l'équation (3.1). Chaque vecteur  $\mathbf{m}_i$  peut contenir des propriétés matériaux ou géométriques par exemple. Ceci constitue la première brique de l'intégration du formalisme *Info-Gap* dans une logique de placement de capteurs.

$$M(\mathbf{m}_i) = \Phi_i \quad (3.1)$$

Dans le but de prendre en compte les incertitudes de modèle, l'approche adoptée ici consiste

en un échantillonnage du modèle incertain sur le domaine de conception de manière à constituer une base de données des bases modales  $\Phi$  telle que  $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_N]$  soit représentative des incertitudes définies. Cet échantillonnage doit suivre un modèle d'incertitude  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{m}^{(0)})$ , toujours défini dans le cadre de la théorie *Info-Gap*, où  $\mathbf{m}$  est le vecteur des paramètres incertains,  $\mathbf{m}^{(0)}$  est le vecteur des mêmes paramètres incertains dans leur configuration nominale et  $\alpha$  est l'horizon d'incertitude. Ce modèle doit représenter la physique des paramètres incertains et, dans un cadre simple, définir un intervalle dans l'espace de conception incertain où les paramètres sont autorisés à varier. L'utilisation d'une méthode d'échantillonnage présente l'avantage non-négligeable de ne pas avoir à formuler d'hypothèses sur le type ou bien le nombre de modes présents dans la bande de fréquence d'intérêt. Dans l'étude présentée, le modèle *enveloppe bound* défini dans [149] est utilisé :

$$\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) = \left\{ \mathbf{m} : \left| \mathbf{m}_i - \mathbf{m}_i^{(0)} \right| < \alpha w_i \mathbf{m}_i^{(0)}, i = 1, \dots, p \right\} \quad (3.2)$$

Une fois la base de donnée constituée, une décomposition aux valeurs singulières (SVD) [60] de la matrice  $\Phi$  est faite de telle sorte que  $U\Sigma V^T = \Phi$ , dans le but de réduire l'espace modal incertain. Cette décomposition fournit 3 matrices :

- $U$  : Matrice orthogonale contenant les vecteurs singuliers gauches correspondant aux directions singulières du problème, aussi appelés modes propres orthogonaux (POM),
- $\Sigma$  : Matrice pseudo-diagonale contenant les valeurs singulières aussi appelées valeurs propres orthogonales (POV). Elles sont liées à l'énergie des POMs,
- $V$  : Matrice orthogonale contenant les vecteurs singuliers droits. Ils représentent la modulation temporelle des POMs.

L'examen des valeurs singulières obtenues consécutivement à la décomposition SVD permet de définir un espace réduit mais représentatif des comportements vibratoires rencontrés. Si les incertitudes n'occasionnent pas d'effets notables sur la dynamique du système, le sous-espace résultant sera très proche de la base modale nominale de la structure. A mesure que l'incertitude augmente, le sous-espace représentatif augmente en taille de manière naturelle afin d'incorporer les nouveaux comportements modaux. La colonne à partir de laquelle la matrice  $U$  est tronquée est choisie par analyse des valeurs singulières. Il est de coutume de choisir un ratio par rapport à la plus grande valeur singulière ( $1e^{-5}$  en général) en deçà duquel les valeurs singulières sont considérées comme étant attachées à des vecteurs singuliers négligeables pour l'application. Ce procédé permet la construction d'une base  $U_r$  de vecteurs orthogonaux représentatifs des comportements vibratoires prépondérants observés lors de l'échantillonnage. La dimension de ce sous-espace conditionne le nombre minimum de capteurs pouvant être placés de manière à observer tous les

comportements linéairement indépendants de la structure. En effet, suivant la méthode utilisée, il n'est en général possible de ne positionner qu'un capteur par mode (i.e. par colonne).

À compter du moment où la base  $U_r$  est déterminée, il est possible de la considérer comme n'importe quelle base modale d'une structure mécanique. Elle peut donc être utilisée comme entrée d'un algorithme déterministe de placement de capteurs. La robustesse de l'approche est donc ici apportée par la construction de la base modale et non par la méthodologie de placement en propre. Dans l'étude qui suivra, les méthodologies choisies sont celles de Kammer [77], basée sur l'indépendance effective, et celle de Schedlinski [130], construite sur la décomposition QR. Un descriptif de ces méthodes est donné en section 2.3.2.

Une fois la distribution de capteurs établie, il reste encore à en mesurer la robustesse vis à vis des méconnaissances présentes dans le modèle éléments finis. Un critère légitime doit être révélateur de la **distinction** des modes propres correspondants à une base modale donnée. Qualitativement, une base modale est considérée comme étant bien distinguée si aucun de ses modes propres ne peut être écrit comme étant une combinaison linéaire des autres modes de la même base. Dans [146] la distinction d'une base modale est quantifiée grâce au conditionnement de la matrice des capteurs  $\Phi_s$ , qui est la matrice modale réduite à ses degrés de liberté comportant un capteur. En raisonnant ainsi, meilleure est la distinction de la base modale, meilleur est également le conditionnement de la matrice de vecteurs.

Reste à présent à définir un critère de performance attestant de la robustesse de la distribution de capteurs pour un horizon d'incertitude déterminé. Pour cela, il faut être en mesure de déterminer le **conditionnement** maximum (i.e. le pire) sur l'ensemble des bases modales échantillonnées pour cet horizon d'incertitude. Cette mesure peut ainsi être comparée à une valeur seuil de consigne  $\kappa_{c_{cond}}$ .

$$\max(\text{cond}(\Phi_s)) \leq \kappa_{c_{cond}} \quad (3.3)$$

La fonction de robustesse associée peut être facilement déduite en bouclant le critère de performance sur l'horizon d'incertitude.

$$\tilde{\alpha}_{cond} = \max \left\{ \alpha, \max_{\mathbf{m} \in U(\alpha, \mathbf{m}^0)} (\text{cond}(\Phi_s)) \leq \kappa_{c_{cond}} \right\} \quad (3.4)$$

Un critère de performance basé sur l'indice de **MAC** peut aussi être utilisé. Ce dernier a également été proposé dans [130]. En effet, il est admis qu'un autoMAC de la matrice de

capteur parfaitement diagonal garantit la bonne distinction des modes cibles. En choisissant de se concentrer sur la valeur maximale des indices extradiagonaux (équation 3.5), il est possible de connaître le cas où la distinction des modes est la plus défavorable pour la distribution de capteurs choisie.

$$\max (MAC(\Phi_s)) \leq \kappa_{cMAC} \quad (3.5)$$

La fonction de robustesse associée à ce critère suit le même formalisme que le critère en conditionnement de la matrice de capteur.

$$\tilde{\alpha}_{MAC} = \max \left\{ \alpha, \max_{\mathbf{m} \in U(\alpha, \mathbf{m}^0)} (MAC(\Phi_s)) \leq \kappa_{cMAC} \right\} \quad (3.6)$$

Dans des cas où l'expertise doit aller plus loin dans l'analyse des performances de la distribution, il est possible de considérer non plus la matrice MAC dans son ensemble, mais chaque indice indépendamment des autres. Ceci sera utilisé dans le chapitre 5.

Un critère de performance basé sur **l'indépendance effective** a également été mis en place, ce dernier est construit sur le même principe que le précédent (voir équation 3.7). En effet, l'indépendance effective fournit également une matrice. Le manque de temps n'a malheureusement pas permis d'investiguer de manière satisfaisante les informations qu'il est possible de retirer de ce paramètre. En effet, l'indépendance effective ne donne plus une information sur la détection ou la distinction des modes, mais bien un indicateur sur le bien fondé de l'ajout de chaque capteur. Ainsi, pour un nombre de capteurs supérieur au nombre de modes cibles, les résultats deviennent rapidement difficiles à interpréter. Ceux-ci ne seront donc pas présentés dans ce manuscrit.

$$\tilde{\alpha}_{IE} = \max \left\{ \alpha, \max_{\mathbf{m} \in U(\alpha, \mathbf{m}^0)} \left( \max_i (E_{ii}) \right) \leq \kappa_{cIE} \right\} \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Extension aux capteurs multiaxiaux

La décomposition de Gramm-Schmidt avec pivot [61] constitue en fait une amélioration de la décomposition QR. L'intérêt de cette décomposition réside dans le ré-ordonnement des colonnes de la matrice argument avant sa décomposition. À l'itération  $i$  de la décomposition, une permutation est faite entre la  $i^{ième}$  colonne de la matrice et la colonne possédant la norme 2 la plus importante parmi les colonnes non encore décomposées. Ce critère, formalisé par l'équation 3.8, permet l'optimisation de l'orthogonalité de la base résultante de

la décomposition en choisissant les colonnes dont l'information est prépondérante au sens de la norme 2.

$$\max_i^n \{|\Phi_{S_i}|, \dots, |\Phi_{S_n}|\} \quad (3.8)$$

Dans le cadre d'une application visant à placer des capteurs monoaxiaux, le découplage de l'information suivant chaque axe  $x$ ,  $y$  et  $z$  n'a pas d'importance particulière. Chaque direction est analysée et traitée indépendamment des autres. Si la volonté de l'utilisateur est à présent de positionner des capteurs triaxiaux, il est nécessaire de considérer non plus des vecteurs seuls, chacun porteur de l'information suivant une direction  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , mais bien des triplets indissociables.

L'adaptation choisie de la méthode de Gram-Schmidt avec pivot au cas multidimensionnel passe par la création de trois matrices  $\Phi_S^x$ ,  $\Phi_S^y$  et  $\Phi_S^z$  regroupant chacune les vecteurs de  $\Phi_S$  portant l'information suivant l'axe associé en exposant. Cette écriture permet la définition d'un nouveau critère de permutation (équation 3.9 à l'itération  $i$ ) prenant en compte les trois informations de manière simultanée. La réduction de chacune des matrices peut ensuite se faire au cas par cas, suivant la procédure classique. En procédant ainsi, il est possible de distinguer à l'étape  $i$  le triplet possédant l'information principale au sens de la norme 2, et de positionner chacun de ces vecteurs en position  $i$  dans les trois matrices en cours de décomposition.

$$\max \{|\Phi_{S_i}^x| \times |\Phi_{S_i}^y| \times |\Phi_{S_i}^z|, \dots, |\Phi_{S_n}^x| \times |\Phi_{S_n}^y| \times |\Phi_{S_n}^z|\} \quad (3.9)$$

Le passage à des capteurs biaxiaux peut par la suite être effectué en testant les différentes compositions possible pour les couples de colonnes faisant intervenir les directions deux par deux.

### 3.2.3 Méthodologie de placement robuste d'excitateurs

Une approche robuste pour le placement de capteurs mono et pluri-axiaux a été précédemment développée. Dans l'objectif de proposer une méthodologie complète de conception robuste d'un plan expérimental, il reste encore à traiter le cas du placement robuste d'excitateurs. Ce sujet a déjà été traité par voie déterministe dans [130] en appliquant la décomposition QR à la transposée de la matrice de force  $M\Phi$  réduite aux degrés de liberté auxquels sont attachés des capteurs. Ce procédé garantit la colocation entre chaque exciteur et l'un des capteurs présents dans la distribution. L'incorporation de cette méthodologie au schéma algorithmique robuste précédemment présenté se fait d'une manière

très similaire à la méthodologie QR employée pour la recherche de placement de capteurs. L'unique différence est que la décomposition ne s'applique pas directement à la matrice  $U_r$ , mais à sa réduction aux degrés de liberté capteurs comme formalisé équation (3.10).

$$QR = [MU_{rs}]^T E \quad (3.10)$$

La performance d'une distribution d'excitateurs peut être établie grâce au calcul des *Multivariate Mode Indicator Function* (MMIF) [148]. Cet indicateur donne pour chaque mode et chaque fréquence un réel entre 0 et 1. Plus l'indicateur MMIF affiche une valeur faible, meilleure est l'excitation du mode considéré pour la fréquence testée.

Dans l'application présentée dans ce document, et pour un horizon d'incertitude fixé, l'indicateur MMIF maximum (i.e. le pire) calculé sur l'ensemble des modes propres à leur fréquence de résonance est utilisé en tant que critère de performance. De cette manière, il est possible de connaître dans quelle mesure le mode le moins bien excité est sollicité par la distribution, mais pas de connaître l'état d'excitation de chaque mode. La fonction de robustesse découlant de ce critère de performance peut être décrite par l'équation (3.11), avec des excitateurs en position  $\mathbf{x}_{exc}$ , et les fréquences propres  $\mathbf{f}$  de la base modale considérée.

$$\tilde{\alpha}_{MMIF} = \max \left\{ \alpha, \max_{\mathbf{m} \in U(\alpha, \mathbf{m}^0)} (\max (\text{MMIF} (\Phi_s, \mathbf{x}_{exc}, \mathbf{f}))) \leq \kappa_{cMMIF} \right\} \quad (3.11)$$

### 3.2.4 Extension aux structures localement non-linéaires

L'augmentation de la capacité de calcul des ordinateurs et l'enrichissement des méthodes numériques permet le traitement de problèmes mécaniques de plus en plus complexes. Parmi eux, les phénomènes non-linéaires attirent un intérêt grandissant au sein de la communauté scientifique. En effet, les paramètres attachés aux comportements non-linéaires d'une structure peuvent être difficiles à appréhender ou à mesurer et leur effets sur le comportement dynamique de la structure peuvent mener au déplacement des pics de résonance et à la manifestation en basse fréquence de modes situés très en dehors du domaine fréquentiel étudié. La figure 3.1 montre comment le comportement dynamique d'une structure peut évoluer par l'ajout d'une non-linéarité, ici pour le cas d'un oscillateur harmonique à un degré de liberté (masse : 100kg, raideur 1e7N.m, amortissement : 300N.s/m et raideur NL : 1e9N.m). Les non-linéarités constituent donc un cadre privilégié pour l'application de méconnaissances de modèle.

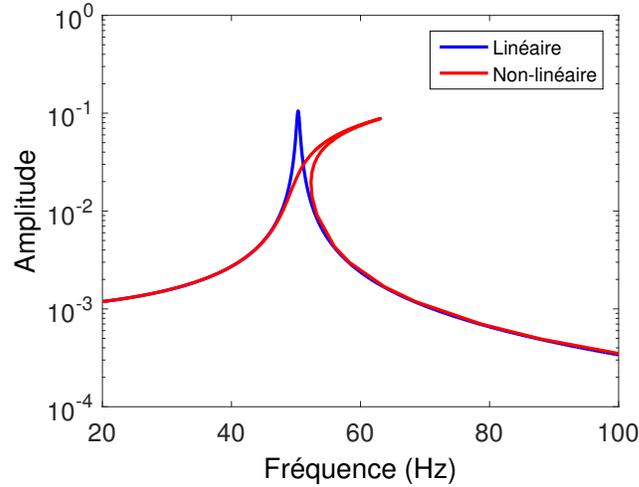


FIGURE 3.1: Réponses linéaire et non-linéaire d'un oscillateur de type Duffing

Cette section propose d'intégrer ce type de phénomènes dans le cadre des méthodologies de placement de capteurs et d'excitateurs précédemment développées. Les structures destinées à être traitées ici sont localement non-linéaires. Les non-linéarités sont donc concentrées au sein de quelques liaisons telles que des raideurs et ou des amortisseurs, et non distribuées.

Pour certaines configurations de structures, les jonctions non-linéaires peuvent être excitées par les modes propres et produire la manifestation d'harmoniques. Ces harmoniques peuvent à leur tour venir solliciter des modes linéaires situés à des fréquences plus élevées. Dès lors, ces modes haute fréquence font partie intégrante de la dynamique du système sur la plage fréquentielle de fonctionnement. Il devient donc primordial de fournir une distribution de capteurs capable de les détecter et de les distinguer.

En utilisant les algorithmes de construction des Fonctions de Réponse en Fréquence non-linéaires tels que Fcont [84, 112] ou Manlab [127] il est possible pour une fréquence donnée de connaître les harmoniques composant la réponse du système. La connaissance des plages basses fréquences où les harmoniques du système se manifestent permet d'identifier les plages hautes fréquences où des modes de la structure peuvent être excités. En couplant cette information au répertoire des fréquences propres de la structure, il devient possible de connaître quels sont les modes à détecter. Ceux-ci peuvent donc être inclus dans la base modale servant à la construction des placements de capteurs.

L'exemple présenté dans la figure 3.1 ne possédant qu'un seul degré de liberté, il ne possède pas de modes hautes fréquences. Une application est présentée à la section suivante et permet d'entrer plus en avant dans le détail de cette heuristique.

### 3.3 Application à une structure académique

La méthodologie robuste de placement de capteurs et d’excitateurs est ici appliquée à une structure académique de type portique. Cette dernière est constituée de deux montants en aluminium reliés par deux poutres transversales également en aluminium. Chaque section de la structure porte en son milieu une masse ponctuelle représentant un équipement. La position de l’équipement présent au milieu de la section droite en bas (en rouge figure 3.2) est encore incertaine au moment de cette étape de la conception du système. Ce cas d’étude présente donc une structure dont les paramètres structuraux et géométriques sont connus, à l’exception de la position de cette masse, qui sera donc sujette à un manque de connaissance.

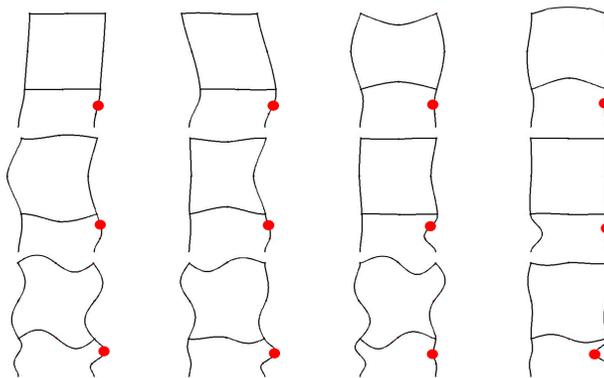


FIGURE 3.2: 12 premières déformées propres de la structure

Les positions possibles pour la masse sont l’ensemble des nœuds du maillage éléments finis de la section où elle se trouve, à l’exception des deux extrémités. Ceci constitue un ensemble de 22 nœuds. La conformation nominale est arbitrairement prise comme étant celle où la masse est au centre de la section (ceci correspondant à un horizon d’incertitude  $\alpha = 0$ ) et la conformation la plus extrême correspond à la position offrant la distance à la position nominale la plus grande (ceci correspondant à  $\alpha = 1$ ). Le modèle d’incertitude associé à ce paramètre méconnu est de type enveloppe :

$$m \in U(\alpha, \mathbf{m}^0) = \{\mathbf{m} : \mathbf{m}^0(1 - \alpha) \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{m}^0(1 + \alpha)\} \quad (3.12)$$

L’examen de la figure 3.2 représentant les douze premières déformées modales de la structure pour une position médiane de la masse incertaine, permet de conjecturer que les modes 7, 9, 10 et 12 seront les plus impactés par cette méconnaissance. En effet, ces modes présentent des ventres de vibrations importants qui sont susceptibles de “suivre” la

position de la masse. Ceci est vérifié en étudiant la distribution des fréquences propres et des modes propres sur le domaine incertain. Le tableau 3.1 montre que le mode 7 est fréquentiellement le plus sensible au changement de position de la masse. Presque la totalité des déformations observables pour ce mode est en effet concentrée sur la section possédant la masse incertaine. Il est à noter que les bandes de fréquence d'existence des modes sont disjointes, ce qui simplifiera le travail d'analyse. La figure 3.3 quant à elle est obtenue en calculant successivement l'intégralité des matrices MAC entre la base modale de la structure nominale et celles échantillonnées. Pour chaque composante, l'adresse  $ij$  ( $i \neq j$ ) comporte la valeur MAC maximale existante entre le mode  $i$  de la base modale nominale et le mode  $j$  de toutes les bases modales échantillonnées. L'adresse  $ij$  ( $i = j$ ) quant à elle comporte la valeur MAC minimum entre les deux modes de même rang. La figure présentée montre donc une compilation des pires cas de décorrélation entre les modes nominaux et échantillonnés rencontrés sur l'ensemble de l'espace de conception. Il est possible de noter que les quatre premiers modes structuraux sont très peu affectés par les incertitudes de modèle. Les modes de plus haut rang peuvent par contre adopter des formes pouvant aller jusqu'à devenir orthogonales à leur variété nominale. En effet, la variation de la position de la masse peut déplacer des ventres de vibration là où un nœud était nominalelement présent.

Mode	f <sub>nom</sub> (Hz)	f <sub>min</sub> (Hz)	f <sub>max</sub> (Hz)	delta (Hz)	delta (%)
1	4.16	4.1	4.17	0.05	1.2
2	13.56	12.89	13.68	0.66	4.8
3	27.01	26.92	27.11	0.09	0.3
4	38.17	37.98	38.32	0.19	0.5
5	45.07	43.76	45.89	1.31	2.9
6	53.63	52.56	54.43	1.07	2
7	60.73	58.30	110.33	49.59	81
8	111.43	111.39	112.64	1.20	1
9	190.85	179.74	194.95	11.10	5.8
10	212.02	200.64	218.24	11.38	5.3
11	218.49	217.57	220.09	1.59	0.7
12	240.09	224.60	264.48	24.39	10.2

TABLE 3.1: Dispersion en fréquences propres

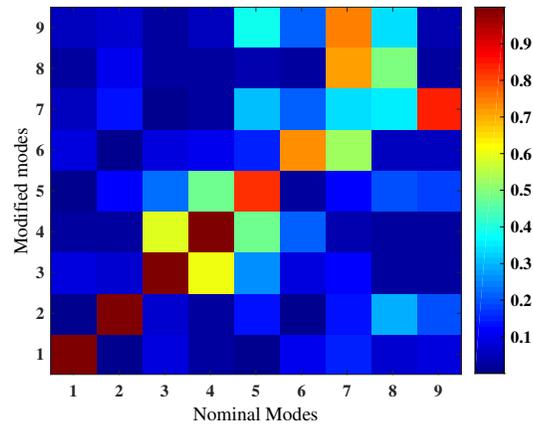
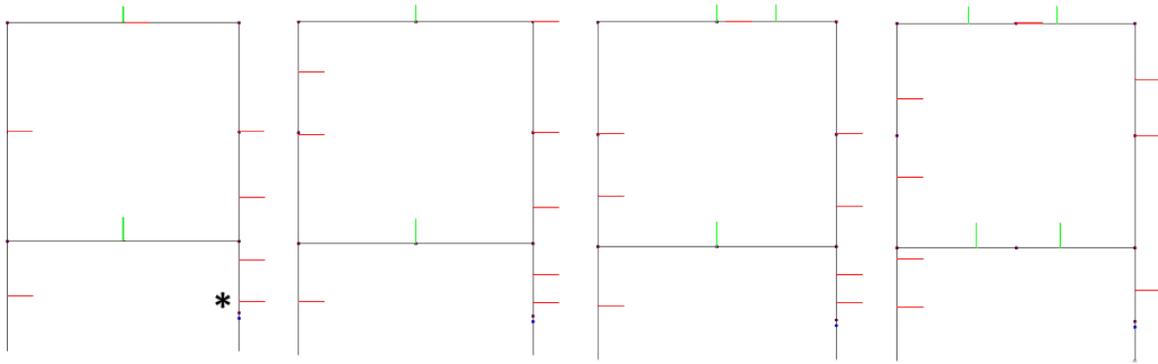


FIGURE 3.3: Dispersion en déformées propres

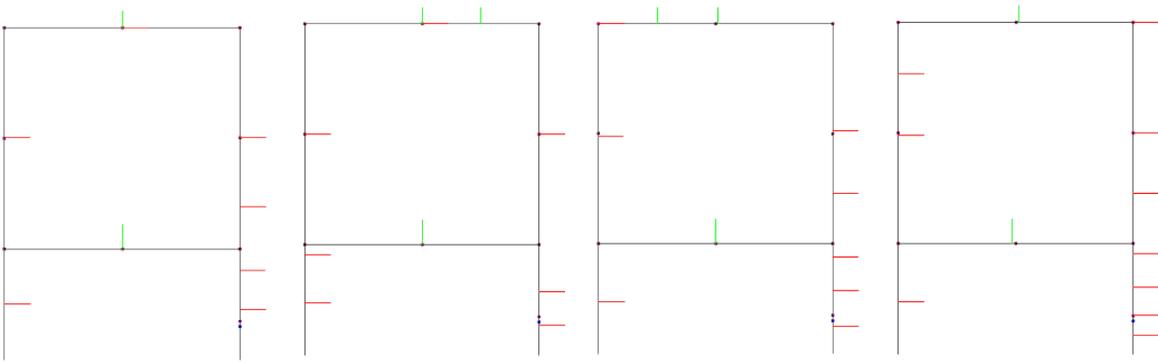
### 3.3.1 Placement de capteurs

Les distributions de capteurs produites dans ce manuscrit peuvent être construites de manières différentes. Elles peuvent contenir un nombre de capteurs différents, avoir été construites par approche robuste ou déterministe sous des horizons d'incertitudes variés, ou encore avoir été élaborées à partir de méthodes de placement différentes. Tous ces procédés s'appuient sur des hypothèses de construction propres et peuvent conduire, par exemple, à des matrices de tailles différentes. L'application de la méthodologie robuste de placement de capteurs doit donc se faire en suivant certains aménagements de manière à s'assurer que les résultats obtenus puissent être comparés :

- Les distributions robustes et déterministes seront toujours associées et comparées en fonction de leur nombre de capteurs. Ceci permet en effet de manipuler des matrices de même taille lors du calcul des critères en conditionnement et en indice MAC présentés en section 3.2.
- Les distributions déterministes sont établies à partir de bases modales constituées d'autant de modes nominaux qu'il y a de capteurs à placer. Cette manière de procéder a été choisie car elle est représentative de la méthode usuelle de placement de capteurs sur une structure mécanique, où le nombre de capteurs à placer est égal au nombre de mode que l'utilisateur souhaite observer.
- Dans le cas des distributions construites de manières robustes, les bases modales de constructions sont l'ensemble des bases modales échantillonnées pour un horizon d'incertitude de construction donné. Ces bases modales sont tronquées de manière à ne contenir que les modes en dessous de 200Hz. Dans le cas d'étude présenté, toutes ces bases sont donc peuplées de 9 modes et l'horizon d'incertitude choisi est de 0.5.



(a) Approche déterministe



(b) Approche robuste

FIGURE 3.4: Distributions de 9, 10, 11 et 12 capteurs par la méthode QR

L'évolution des distributions formées de 9, 10, 11 puis 12 capteurs par la méthode QR est affichée en figure 3.4. Elle permet de mettre en avant les différences des topologies fournies par l'approche déterministe(a) et par l'approche robuste (b).

Pour le placement déterministe, il est important de constater que l'ajout d'un mode dans la base modale de construction ne conduit pas simplement à l'ajout d'un capteur en conservant les positions des autres capteurs. Ceci serait le cas si les distributions déterministes étaient toutes construites avec une base modale de construction de même taille. Les distributions peuvent donc arborer des répartitions très différentes à mesure que le nombre de capteurs augmente suivant l'algorithme utilisé. Il est possible ici de constater que, globalement, l'augmentation du nombre de capteurs se concentre ici sur les parties transverses de la structure.

En ce qui concerne l'approche robuste, et à quelques exceptions près, les capteurs vont très vite se concentrer sur la section où la masse mouvante se trouve. En effet, la base de construction n'est formée que des premiers vecteurs principaux obtenus par SVD à

partir de la concaténation de l'ensemble des bases modales échantillonnées. Ceci fait que les “modes” permettant l'enrichissement de la base vont mettre en évidence les zones dont les déformées sont les plus perturbées par les incertitudes. Les capteurs vont donc naturellement venir s'y placer.

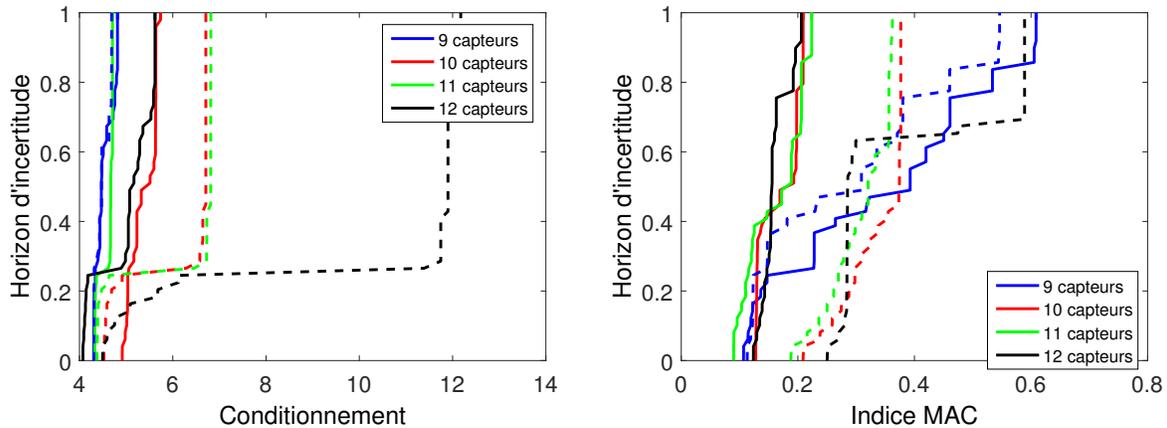


FIGURE 3.5: Courbes de robustesse obtenues pour les distributions de 9 à 12 capteurs. Critère en conditionnement (a) et en indice MAC (b)

La figure 3.5 montre les courbes de robustesse établies à partir des critères de performance définis en 3.2. Les résultats provenant des approches déterministes sont en traits pointillés tandis que ceux provenant des approches robustes sont en traits pleins. Les courbes de même couleur proviennent de distributions portant le même nombre de capteurs. Pour rappel, plus les valeurs des critères sont faibles, meilleures sont les performances des distributions.

Dans le cas des deux critères, il ressort que pour un nombre de capteurs égal au nombre de modes cibles (9 pour rappel) les performances des deux approches sont très similaires. Ceci s'explique par le fait que la base modale de construction de l'approche robuste n'a pas encore été enrichie des modifications qu'apporte l'incertitude sur la position de la masse.

En se plaçant à un horizon d'incertitude égal à l'horizon d'incertitude de construction des distributions, c'est à dire pour  $\alpha = 0.5$ , la différence de performance entre les deux approches apparait clairement. Les critères des courbes construites par approche robuste restent de valeurs faibles (donc bonnes) à mesure que le nombre de capteurs augmente. Les critères des courbes construites par approche déterministe ont quant à eux tendance à prendre des valeurs de plus en plus importantes. L'ajout de modes haute fréquence ne permet en effet pas à l'algorithme déterministe de proposer des distributions capables de détecter les modes modifiés par la méconnaissance de modèle.

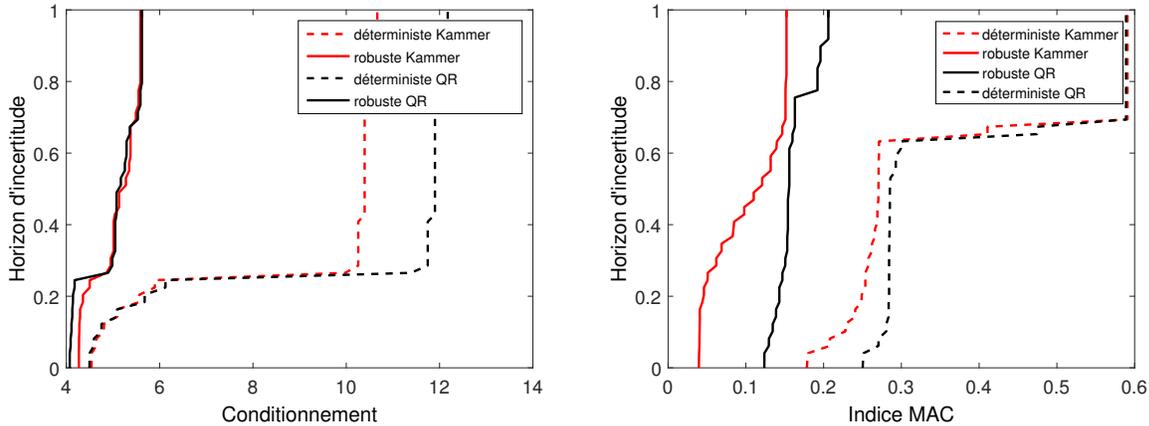


FIGURE 3.6: Courbes de robustesse obtenues pour les distributions de 12 capteurs. Critère en conditionnement (a) et en indice MAC (b)

En reprenant la même étude avec non plus la méthode de placement de capteurs QR, mais la méthode de Kammer, les résultats et conclusions sont très similaires. Ces derniers ne seront donc pas présentés dans ce manuscrit. À titre de synthèse néanmoins, la figure 3.6 met en parallèle les courbes de robustesse venant des méthodes de Kammer et QR pour des distributions à 12 capteurs. Elle permet d'apprécier le gain de performance qu'il est possible d'obtenir en utilisant une approche robuste.

### 3.3.2 Placement robuste d'excitateurs

La section précédente a permis l'application de la méthodologie de placement robuste de capteurs et sa comparaison à des approches déterministes. Toujours dans l'objectif de fournir une approche globale, cette section traite le cas de la recherche d'un unique emplacement pour l'excitation de la structure.

Comme il a été précisé dans 3.2.1 le placement d'un exciteur sur la structure doit en principe se faire en restreignant les choix de positions aux endroits où un capteur est déjà présent de manière à assurer l'obtention d'une FRF colocalisée. Afin de conserver la logique des approches déterministes et robustes, le placement robuste d'exciteur est appliqué pour un horizon d'incertitude de construction de 0.5 sur le jeu de capteurs déterminé lui aussi de manière robuste à l'étape précédente. Le même principe est appliqué pour la version déterministe. Les distributions de capteurs utilisées sont celles possédant 12 capteurs et établies par la méthode de Kammer.

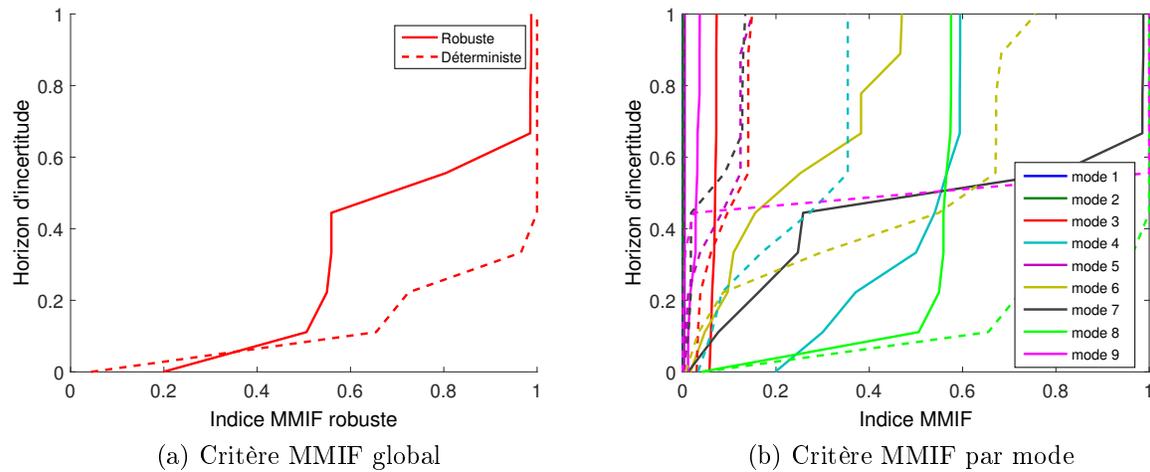


FIGURE 3.7: Courbes de robustesse déduites du placement d'excitateur robuste et déterministe

La robustesse respective des placements obtenus suivant les deux approches est présentée au travers de la figure 3.7. Les courbes de la figure 3.7(a) sont calculées à l'aide du critère de performance basé sur les indices MMIF (voir 3.2) pour un pas en horizon d'incertitude de 0.05. L'examen de la figure permet de distinguer 3 domaines différents le long de l'axe de l'horizon d'incertitude, chacun offrant un choix de conception différent :

- Sous un horizon d'incertitude de 0.075 la position proposée par l'approche déterministe pour l'excitateur est très efficace pour exciter tous les modes de la structure, mais cette efficacité décroît rapidement à mesure que l'horizon d'incertitude s'étend.
- À partir du point d'intersection des deux courbes, entre des horizons d'incertitude de 0.075 et 0.65, la courbe de robustesse obtenue par approche robuste donne des valeurs MMIF inférieures à celles de l'approche déterministe. Cet intervalle d'incertitude est celui où l'approche robuste offre une distribution plus apte à exciter les modes cibles du problème.
- Au dessus d'un horizon d'incertitude de 0.65, les deux courbes montrent des indicateurs MMIF très proches de 1. Ceci traduit le fait qu'au moins l'un des modes cible n'est pas excité et qu'aucune des deux stratégies n'apporte de placement acceptable. Pour pallier ceci, un nouvel excitateur doit être ajouté de manière à éviter d'avoir une excitation orthogonale à l'une des déformées cibles.

Bien que l'information retirée de ces courbes soit très utile pour hiérarchiser les performances des deux designs d'excitation en fonction de l'horizon d'incertitudes, celles-ci ne permettent pas d'accéder à l'information par mode. Afin de pallier ce manque et de pouvoir pousser plus loin l'interprétation des résultats, la figure 3.7(b) détaille l'évolution des

indices MMIF par modes pour les placements déterministes et robustes. Il devient ainsi possible de savoir quel mode est dimensionnant en terme d'excitabilité. Dans le cas de l'application déterministe, ce sont les modes 8 et 9 qui sont incriminés et qui ne sont plus excités dès un horizon d'incertitude respectif de 0.35 et 0.5. Du côté de l'application robuste, le mode problématique est le 7<sup>ième</sup> à partir d'un horizon d'incertitude de 0.65. En effet, l'algorithme robuste propose de placer l'excitateur sur la partie de la structure portant la masse dont la position est incertaine. Ceci permet de ne pas risquer de devenir orthogonal à la plupart des modes dont les ventres et nœuds se situent ailleurs.

La difficulté qu'apporte le 7<sup>ième</sup> mode est sa grande sensibilité au déplacement de la masse. Il y a donc toujours un horizon d'incertitude à partir duquel l'excitateur se trouve sur un nœud de vibration, et devient donc orthogonal à l'une des variétés du mode. L'approche robuste garantit cependant une bonne excitation de l'ensemble des modes jusqu'à un horizon d'incertitude de 0.6 qui est supérieur à l'horizon d'incertitude de 0.5 utilisé pour la recherche de l'emplacement.

### 3.3.3 Perspective d'extension aux structures localement non-linéaires

L'exotisme apporté par les comportements structurels non-linéaires génère des problématiques nouvelles en terme de détection. En effet, comme il a été précisé plus haut, alors qu'il suffit de se concentrer sur une bande de fréquences donnée pour observer tous les modes impactant la dynamique d'un système linéaire, ceci n'est plus suffisant dans le cas d'une structure comportant des non-linéarités. En effet, des interactions peuvent exister entre les harmoniques des modes basses fréquences et des modes d'ordre plus élevés.

L'ajout d'une non-linéarité locale à la structure linéaire du portique permettra d'illustrer dans cette section comment intégrer ce type de systèmes dans la démarche robuste de placement de capteurs. Pour ce faire, la masse dont la position était jusqu'à présent incertaine est maintenant reliée à la structure par un lien infiniment rigide suivant l'axe vertical et par une raideur non-linéaire suivant l'axe horizontal. Cette masse peut permettre de représenter un équipement dont la jonction avec la structure porteuse est sujette à des phénomènes complexes tels que des chocs.

Le calcul de la Fonction de Réponse en Fréquence non-linéaire est effectué grâce à un algorithme développé au laboratoire et basé sur la méthode de la Balance Multi-Harmonique présenté en 2.2.3.1. Afin de diminuer le temps de calcul de manière drastique, la structure a été réduite par la méthode de Craig-Bampton expliquée dans l'annexe B. Cette approche permet de garantir la représentativité du comportement dynamique de la structure dans le cadre des modes cibles sélectionnés, aux nœuds maîtres conservés.

Les modes cibles concernés sont les mêmes 9 modes que précédemment et les nœuds maîtres correspondent aux 10 nœuds donnés par la distribution QR déterministe (voir figure 3.4). Pour chacun de ces nœuds maîtres, les deux directions sont prises en compte. À ceci est également ajouté le degré de liberté horizontal de la masse reliée à la raideur non-linéaire. Cette masse est fixée à la hauteur du point capteur agrémenté d'une astérisque sur la même figure. Ceci fait un total de 30 degrés de liberté pour le système réduit, permettant ainsi une grande prédictibilité du modèle réduit sur une bande de fréquence supérieure à deux fois la bande de fréquence d'intérêt.

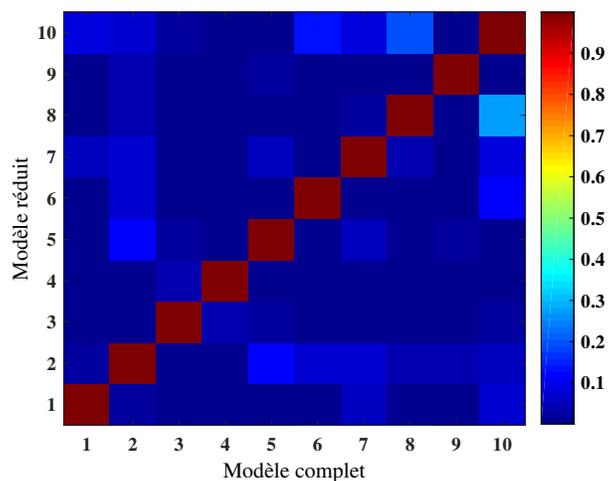


FIGURE 3.8: Contrôle de la performance du modèle réduit

Mode	Ecart fréquentiel (Hz)	Ecart fréquentiel (%)	
1	4.16	0	0
2	13.56	0	0
3	27.01	1e-4	3.7e-6
4	38.17	1e-4	2.6e-6
5	45.07	1e-4	2.2e-6
6	53.63	6e-4	1.1e-5
7	60.73	6e-4	1e-5
8	111.43	0.0146	1.3e-4
9	190.85	5e-4	2.6e-6

TABLE 3.2: Performance de la réduction en fréquence

Afin d'attester des performances de prédiction du modèle réduit utilisé sur les modes cibles de la structure, la matrice MAC et les écarts fréquentiels sont disponibles dans la figure 3.8 et le tableau 3.2.

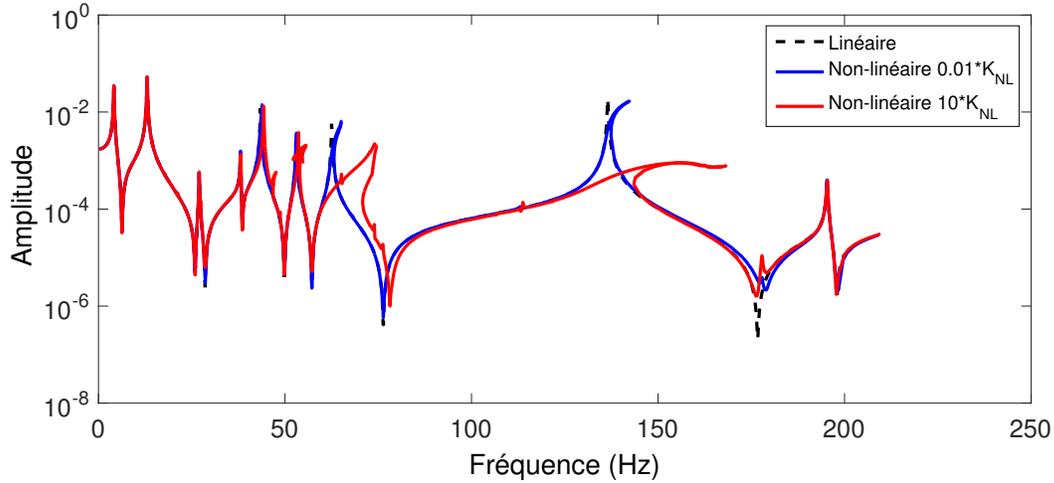


FIGURE 3.9: Comparaison FRF linéaire et non linéaire

Afin de représenter cette liaison incertaine, les méconnaissances de modèle sont donc portées ici par la valeur de la raideur non-linéaire. Celle-ci peut aller de  $10^{-2}$  à 10 fois sa valeur nominale. La figure 3.9 affiche les FRF du système linéaire puis du système non-linéaire pour les valeurs extrêmes de la raideur non-linéaire. Cette image permet de se rendre compte que ce sont les modes 7 et 9 qui sont les plus affectés. En effet, le mode 8 n'est pas visible sur cette FRF, mesurée au point d'attache de la non-linéarité. Pour ces deux modes, un effet raidissant, entraînant les résonances vers les hautes fréquences est clairement visible. Il est également possible de noter différents artefacts survenant en des endroits où aucun mode linéaire ne répond. Ceux-ci sont dus aux effets des harmoniques du système que la non-linéarité permet d'activer.

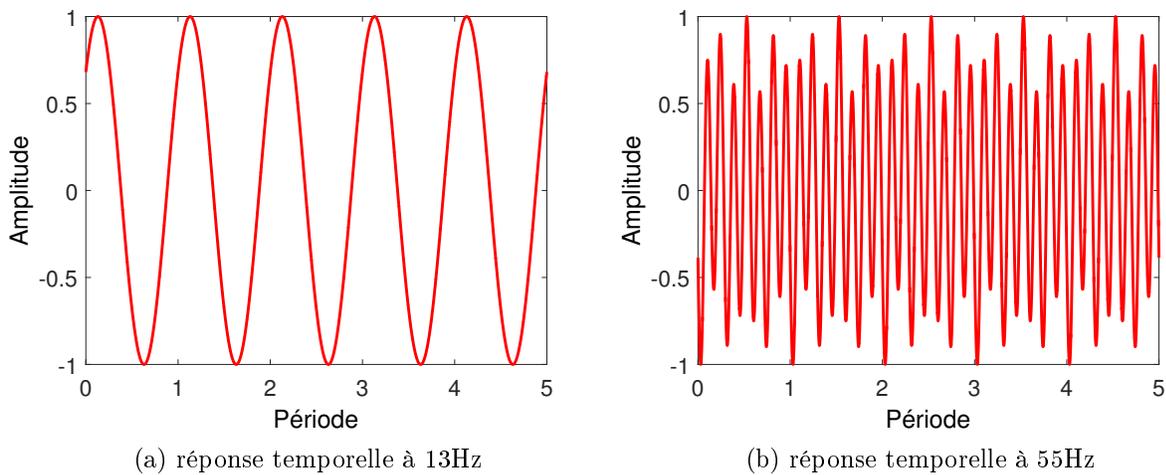


FIGURE 3.10: Réponses temporelles de la structure pour deux fréquences d'excitation différentes

Une analyse de la réponse temporelle de la structure aux alentours de ces artéfacts permet de se rendre compte de la richesse du spectre qu'il est possible de rencontrer. La figure 3.10 met en exergue la différence des réponses entre une fréquence où la non-linéarité ne répond pas (a) et où seul le caractère linéaire de la structure domine, et une autre où la non-linéarité vient activer les harmoniques du système qui viennent se superposer à la réponse linéaire (b).

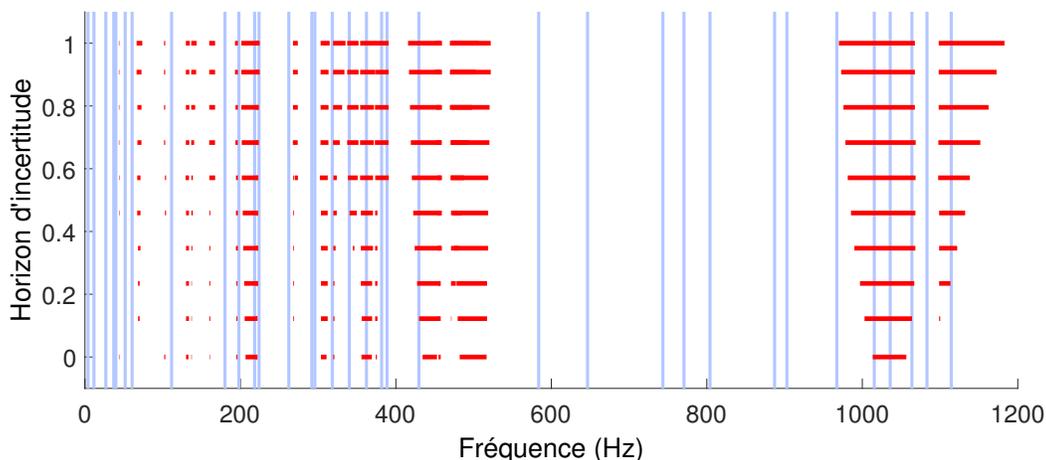


FIGURE 3.11: Zones d'influences des harmoniques des modes cible (en rouge) et fréquences propres des modes hautes fréquences du système linéaire (en bleu)

Un système comportant des non-linéarités même locales peut donc activer les harmoniques des modes présents dans la bande de fréquence cible. Ces harmoniques risquent à leur tour d'interagir avec des modes de la structure dont les fréquences propres sont en dehors du domaine étudié. La méthode de la Balance Multi-Harmonique permet de savoir à une fréquence donnée quelles sont les harmoniques activées. En multipliant cette fréquence par l'ordre de l'harmonique, il est donc possible de connaître les plages hautes fréquences qui peuvent être à leur tour excitées. La figure 3.11 montre l'évolution de ces plages d'excitation à mesure que l'incertitude sur la valeur de la raideur non-linéaire augmente. Il est possible de constater une augmentation de la taille de la plupart des intervalles (ce qui est très visible entre 1000Hz et 2000Hz), mais également l'apparition de nouveaux. Dans le cas présenté, les harmoniques 3 et 7 sont les plus représentées, même si celles de rang 5 interviennent de manière ponctuelles.

En arrière plan de cette image, les fréquences propres du portique jusqu'à 1200Hz se trouvent matérialisées par les traits verticaux bleus. Elles permettent de constater que, à mesure que l'horizon d'incertitude augmente, certaines d'entre elles entrent dans la zone d'influence des harmoniques. Ces modes haute fréquence deviennent donc partie intégrante

de la dynamique basse fréquence de la structure et devraient être pris en compte lors de l'établissement du plan de test.

Dans le cas présenté, l'incertitude n'a pas d'influence sur les fréquences propres linéaires de la structure. Si tel avait été le cas, alors les chances d'interactions auraient été d'autant plus importantes.

Dans les faits, un tri important peut être fait dans les modes pouvant interagir avec les harmoniques. Premièrement, une analyse doit être menée afin de déterminer si l'excitation produite par l'harmonique en question n'est pas orthogonale au mode haut niveau, et donc dans l'incapacité de l'exciter. Deuxièmement, ces modes n'agissant que de manière relativement marginale sur la structure, la plupart peuvent ne pas avoir de réelle incidence sur le test. Il peut néanmoins être important d'être capable de détecter ces modes au cas où ils seraient en mesure de mettre en mouvement des parties sensibles de la structure telles que des équipements fragiles.

### 3.4 Conclusion partielle

Ce chapitre a permis de proposer une approche robuste de conception d'un plan d'essai complet, visant au placement d'un jeu de capteurs et d'un excitateur. Les méthodes de Kammer et QR ont servi de vecteur aux applications entreprises, et ont permis de valider et de comparer les performances respectives des approches robustes et déterministes. L'intérêt de l'adoption de cette approche vis à vis d'une approche déterministe plus conventionnelle a ainsi pu être mise en avant grâce à différents critères ayant permis de mener des études de robustesse.

La structure du portique utilisée lors des applications reste néanmoins une structure académique relativement simple et légère. L'un des effets est par exemple que l'ajout de capteurs au-delà du nombre de modes cibles reste d'un intérêt très discutable même pour un fort horizon d'incertitude. C'est pourquoi une application plus industrielle est présentée dans le chapitre 5 afin d'éprouver la méthodologie sur un système de grande taille et possédant des comportements plus intéressants.

Une extension aux structures localement non-linéaires a également été proposée en appliquant la méthode de la Balance Multi-Harmonique à un modèle réduit de la structure. Le manque de temps n'a néanmoins pas permis de mener l'application complète. Celle-ci constitue une perspective intéressante pour la poursuite des travaux.

Conception robuste d'une structure  
mécanique en présence de méconnaissances de  
modèle, extension au calcul de profil de  
notching primaire

**Sommaire**

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>76</b>
<b>4.2</b>	<b>Conception robuste</b>	<b>76</b>
4.2.1	Construction et validation des métamodèles	76
4.2.2	Analyse de fiabilité par approche <i>Info-Gap</i>	78
4.2.3	Conception robuste vis-à-vis des méconnaissances de modèle	83
<b>4.3</b>	<b>Conception robuste du profil de notching primaire</b>	<b>88</b>
4.3.1	Définition du problème par fréquence	88
4.3.2	Topologie du problème par fréquence et métamodèles	89
4.3.3	Calcul de la probabilité de défaillance pour 35Hz	93
4.3.4	Généralisation à une bande de fréquence	97
<b>4.4</b>	<b>Notching d'une structure non-linéaire</b>	<b>99</b>
<b>4.5</b>	<b>Conclusion partielle</b>	<b>101</b>

---

## 4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la présentation de méthodes d'optimisation robuste en présence de méconnaissances de modèle. La même approche globale est appliquée à deux types de problèmes différents déjà détaillés dans l'introduction générale du manuscrit. Le premier est l'optimisation de variables de conception de la structure du système étudié, tels que des paramètres dimensionnels. Le deuxième s'intéresse au dimensionnement de l'accélération à appliquer lors du test de qualification dynamique de la structure, et s'inscrit dans la phase dite de notching.

## 4.2 Conception robuste en présence de méconnaissances de modèle

L'exposé de la méthodologie d'optimisation de structure en présence de méconnaissances de modèle est ici détaillée et justifiée étape par étape.

Différents métamodèles sont dans un premier temps construits et comparés de manière à pouvoir mener une optimisation sans avoir à passer par l'appel répétitif au modèle éléments finis de la structure. Le modèle en question ici, est la représentation à 3 degrés de libertés du satellite déjà présenté lors de l'état de l'art au chapitre 2.

Les résultats fournis par plusieurs méthodes de calcul de probabilité de défaillance sont ensuite discutés. Une distinction est faite suivant que l'application considère ou non les incertitudes sur les moyennes et les écart-types des paramètres. En effet, les méconnaissances ne seront pas ici appliquées directement aux valeurs des paramètres physiques, mais aux valeurs des paramètres des lois de distribution qui y sont attachées.

Les courbes de robustesse obtenues sont ensuite analysées et leur dépendance vis-à-vis du modèle d'incertitude choisi est mise en avant.

### 4.2.1 Construction et validation des métamodèles

Dans l'optique d'utiliser des métamodèles pour accélérer les temps de calcul des analyses de fiabilité, une comparaison a été effectuée afin de pouvoir choisir le type de métamodèle le mieux adapté parmi ceux disponibles. Cette section a pour but de présenter le résultat de ces investigations.

La construction d'un métamodèle nécessite l'établissement d'une base d'échantillons des paramètres de modèle et les réponses correspondantes. Étant donné que le problème auquel

nous nous intéressons ne porte que sur les masses de la charge utile et de la plateforme, nous choisissons de construire des bases d'échantillonnage de 200 individus. À des fins de contrôle, une autre base d'échantillonnage indépendante de 50 individus est également établie, cette dernière servira à calculer les critères de comparaison des métamodèles en des points qui n'ont pas servis à la construction. Tous ces échantillons sont des évaluations exactes du modèle.

Le logiciel AESOP développé par le Département de Mécanique Appliquée de l'Institut FEMTO-ST permet la construction de trois types de métamodèles, à savoir, des surfaces de réponses (polynômes), des modèles de Krigeage et des réseaux de neurones. Le principe de ces méthodes est donné en annexe D.

Les comparaisons ont été réalisées pour :

- un polynôme d'ordre deux et ses termes croisés (P2).
- un polynôme d'ordre trois et ses termes croisés (P3).
- un modèle de Krigeage d'ordre deux (K2).
- un modèle de Krigeage d'ordre trois (K3).
- un réseau de neurones à deux étages de trois neurones (N23).
- un réseau de neurones à trois étages de quatre neurones (N34).

Des études menées précédemment ont montré qu'il était intéressant de construire les métamodèles sur un échantillonnage latin hypercube uniforme LhsU, puis de contrôler ses performances sur une base échantillonnée par procédé latin hypercube normal LhsN. Dans le cas présenté, le paramétrage des échantillonnages suit les lois suivantes :

- cas LhsU : une distribution uniforme sur  $[0, 7; 1, 3] \times$  la valeur nominale des paramètres est associée à chaque paramètre ;
- cas LhsN : une distribution normale d'écart type  $\sigma = 0,1 \times$  la valeur nominale des paramètres et de moyenne égale à la valeur nominale est associée à chaque paramètre.

	P2	P3	K2	K3	N23	N34
R <sup>2</sup>	0.91749	0.87034	1	1	0.97692	0.85229
ERAM	4.8241	6.0379	3.8675e-07	2.5535e-08	2.0297	6.6721
MERA	6.384	8.1282	1.0078e-06	1.1639e-07	8.8492	9.2437

TABLE 4.1: Performance des différents métamodèles testés

Les résultats de la comparaison sont présentés dans le tableau 4.1. La nature et la signification des critères utilisés est disponible dans l'annexe D. Même si les trois familles de métamodèles présentent de bonnes performances pour cette application (R<sup>2</sup> proche de 1

et ERAM et MERA faibles), la méthode de Krigeage donne les meilleurs résultats, avec une approximation très précise de la fonction de base. Le Krigeage d'ordre 2 sera utilisé dans la suite de la présentation.

## 4.2.2 Analyse de fiabilité par approche *Info-Gap*

### 4.2.2.1 Modèle *Info-Gap* utilisé

Comme annoncé lors de l'état de l'art, le paradigme de conception robuste en présence de méconnaissances de modèle s'appuie dans cette thèse sur une hybridation de méthodes probabilistes et non-probabilistes, la première composante permettant le calcul de probabilités de défaillance et la seconde autorisant la modélisation d'incertitudes épistémiques. Ce mélange peut s'exprimer selon :

$$U\left(\alpha, f_X^{(0)}\right) = \left\{ f_X(\mathbf{x}) : f_X(\mathbf{x}) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \left| f_X(\mathbf{x}) - f_X^{(0)}(\mathbf{x}) \right| \leq \alpha f_0 \right\}, \alpha \geq 0 \quad (4.1)$$

avec  $f_X$  une fonction de densité de probabilité incertaine,  $f_X^{(0)}$  étant la meilleure estimation que l'on ait pour représenter cette densité à titre nominal et  $f_0$ , une constante pouvant par exemple être la constante de normalisation de la distribution.

Ce modèle *Info-Gap* qui porte directement sur les fonctions de densité de probabilité considérés est plus conceptuel que pratique. Pour « agir » sur ces fonctions, il a été choisi d'associer un modèle *Info-Gap* de type enveloppe aux paramètres caractérisant la loi de probabilité qui est liée aux variables incertaines. Dans un premier temps, Seule la loi normale sera étudiée. Cette loi est paramétrique, et régie selon deux paramètres dit pour le premier de localisation (la moyenne  $\mu$ ) et pour le second d'échelle (l'écart-type  $\sigma$ ). Les variables potentiellement méconnues sont donc ces deux paramètres.

Il est important de noter le fait qu'associer une loi normale à des paramètres tels que l'épaisseur et le coefficient de Poisson n'est en principe pas cohérent. En effet, cette loi est désormais reconnue comme non-appropriée à des variables ne pouvant prendre des valeurs négatives. Cependant, de par ses propriétés et les implications qu'elle peut induire, cette loi est généralement employée en phase de « réglage » et de développement des nouvelles méthodes d'analyse en environnement incertain, ce qui est le cas de cette étude.

Le modèle *Info-Gap* utilisé par la suite est le modèle enveloppe défini selon

$$U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) = \{ \mathbf{m} : (1 - \alpha) \mathbf{m}^{(0)} + \alpha \mathbf{m}_{min} \leq \mathbf{m} \leq (1 - \alpha) \mathbf{m}^{(0)} + \alpha \mathbf{m}_{max} \} \quad (4.2)$$

avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Le vecteur  $\mathbf{m}$  des variables méconnues regroupe ici les deux paramètres de masse plateforme et charge-utile. Dans la suite, deux cas seront distingués suivant si l'incertitude se porte uniquement sur les écarts-types (cas  $C_\sigma$ )

$$\mathbf{m} = [\sigma_{m_1} \ \sigma_{m_2}]^T \quad (4.3)$$

ou bien aussi sur les moyennes des valeurs (cas  $C_{\mu\sigma}$ )

$$\mathbf{m} = [\mu_{m_1} \ \sigma_{m_1} \ \mu_{m_2} \ \sigma_{m_2}]^T \quad (4.4)$$

Il est possible de voir dans l'équation 4.2 que la variation du vecteur des variables méconnues  $\mathbf{m}$  est limitée à l'intervalle  $[\mathbf{m}_{min}; \mathbf{m}_{max}]$ . Une telle limitation est nécessaire, car en effet, les métamodèles ont été construits et testés sur des bases d'échantillons uniformément distribués sur  $[0, 7; 1, 3] \times$  la valeur nominale des paramètres de modèle. Les valeurs  $\mathbf{m}_{min} = 0,9$  et  $\mathbf{m}_{max} = 1,1$  ont été choisies arbitrairement.

La fonction de robustesse associée au problème et servant à la construction des courbes de robustesse est :

$$\hat{\alpha}(\mathbf{d}, P_c) = \max \left\{ \alpha : \max_{\mathbf{m} \in U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)})} P_f(\mathbf{q}) \leq P_c \right\} \quad (4.5)$$

Dans la pratique, le principe général pour calculer les courbes de robustesse est de fixer une série de valeurs croissantes  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{n_\alpha}\}$  de l'horizon d'incertitude et de déterminer la valeur critique correspondante, ici :

$$P_{c, \alpha_i} = \max_{\mathbf{m} \in U(\alpha_i, \mathbf{m}^{(0)})} P_f(\mathbf{q}) \quad (4.6)$$

pour chaque  $\alpha_i$ .

Les différentes approches permettant la recherche de la probabilité de défaillance maximum sont :

- l'algorithme d'optimisation sous contrainte *fmincon* disponible sous Matlab<sup>®</sup> ;
- un algorithme génétique, là encore disponible sous Matlab<sup>®</sup> ;
- la méthode dite « borne » qui consiste à calculer la mesure de performance, ici  $P_f(\mathbf{q})$ , pour toutes les combinaisons où les paramètres  $m_i$  atteignent leurs bornes.

- une approche par échantillonnage de Monte-Carlo sur le domaine défini par  $U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)})$  permettant une recherche du jeu de paramètres de conception offrant la probabilité de défaillance la plus importante en s'affranchissant des lacunes des autres algorithmes en terme d'approche locale ou de convergence. Cette performance a bien entendu un prix qui est le coût en terme de temps de calcul.

Suivant que l'on considère le cas  $C_\sigma$  ou le cas  $C_{\mu\sigma}$ , la résolution de ce problème est différente. En effet, à moins de travailler avec un modèle très fortement non-linéaire, ce qui n'est pas le cas ici, plus l'écart-type sera élevé plus la probabilité de défaillance sera grande. Ainsi, dans l'un ou l'autre cas, l'écart type peut toujours être fixé à sa borne supérieure et ainsi dans le cas  $C_\sigma$  l'optimisation n'est plus nécessaire et les valeurs de  $\mathbf{m}$  peuvent être fixées à leur maximum autorisé par le modèle *Info-Gap*. Dans le cas  $C_{\mu\sigma}$ , l'optimisation suivant la moyenne est par contre encore nécessaire.

#### 4.2.2.2 Application sur le cas test

Afin de tester les différentes méthodologies de calcul de probabilité de défaillance, il a été choisi de comparer les courbes de robustesse données par les approches de Monte-Carlo, FORM et SORM pour le cas  $C_\sigma$ . Les résultats disponibles en figure 4.1.

Le tirage de Monte-Carlo a été effectué pour 1 000 000 d'échantillons, et les courbes sont calculées pour un pas de  $\alpha = 0.01$ . Pour chaque pas, la valeur de la probabilité de défaillance affichée est directement celle calculée, sans prendre en compte le fait que celle-ci devrait être la valeur maximale rencontrée jusque là. Cet affichage permet de constater l'instabilité de l'approche de Monte-Carlo, et ce, en dépit du grand nombre d'échantillons alloués. Cette instabilité crée de nombreux minima locaux ce qui rend inutilisable cette méthode dans le cadre d'un processus d'optimisation. Cette conclusion est la même en testant l'approche avec des algorithmes de la même famille tels que l'importance sampling ou encore la Subset-Simulation.

L'approche par FORM permet quand à elle l'obtention de courbes de robustesse pour un coût en calcul très faible puisque la convergence est ici atteinte en 24 itérations au maximum. Cette vitesse d'exécution a permis la comparaison au modèle numérique (sans métamodèle). Comme il est possible de le constater, la superposition est quasiment parfaite, attestant une fois encore de la performance du métamodèle. L'algorithme FORM a ici été directement adapté aux routines Matlab<sup>®</sup> depuis la toolbox open source FERUM 4.1 [1] mise à disposition par l'IFMA.

En regardant à présent du côté des calculs menés par l'approche SORM, il est possible de constater que la linéarisation de la surface de défaillance opérée par l'analyse FORM en-

traîne dans le cas présenté une sous-estimation de la robustesse du système. En effet, pour un horizon d'incertitude fixé, la probabilité de défaillance calculée par FORM est plus importante que celle donnée par SORM. Dans ce cas, cette erreur n'est pas préjudiciable car il vaut mieux sous-estimer la robustesse que de la sur-estimer. L'analyse SORM présente des résultats correspondant mieux à la courbe moyenne calculée par échantillonnage de Monte-Carlo. Avec un nombre d'échantillons plus grand, mais définitivement rédhibitoire, il est fort probable que la courbe de robustesse obtenue par Monte-Carlo se rapproche encore de celle obtenue avec SORM.

Dans un but de simplicité, la méthode FORM sera employée dans le reste de l'étude.

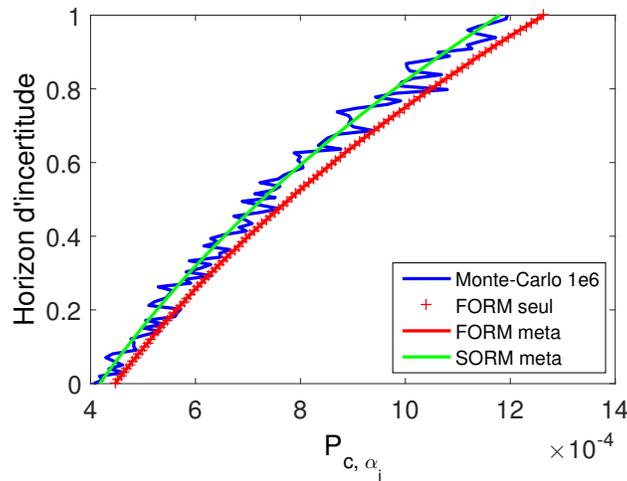


FIGURE 4.1: Courbes de robustesse pour le cas  $C_\sigma$  avec analyse par Monte-Carlo (1e6 échantillons), FORM, FORM appliqué sans métamodèle, et SORM

Dans le cas d'un problème de la forme  $C_{\mu\sigma}$  le calcul de la probabilité de défaillance est plus complexe. S'il est toujours possible de considérer dans le cas de faibles non-linéarités, que celle-ci est maximale pour le plus écart-type grand autorisé, une recherche doit être menée concernant la moyenne. Il n'est en effet pas trivial que la moyenne maximale maximise la probabilité de défaillance.

Différentes techniques peuvent être testées pour cette recherche :

- Un échantillonnage Monte-Carlo basé sur un tirage latin hypercube sur le domaine  $U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)})$ . Guider l'échantillonnage à l'aide d'un latin hypercube [93, 67] permet de mener des tirages de Monte-Carlo sur différentes parcelles de l'espace, puis de capitaliser les résultats. Ceci permet d'éviter de délaissier les bords de l'espace de recherche.

- Une approche par algorithme d'optimisation. Dans le cas présenté, il s'agit d'une optimisation menée sur un espace borné. L'algorithme *fmincon*, disponible dans Matlab<sup>®</sup> est utilisé dans la démonstration, mais d'autres peuvent être employés tels que les algorithmes génétiques (aussi disponibles sous Matlab<sup>®</sup>) ou encore la fonction *fminsearchbnd* qui est une extension multidimensionnelle de la fonction *fminbnd*.
- Une approche par méthode bornes. Celle-ci utilise l'hypothèse que la performance la plus défavorable se trouve à l'un des coins de l'espace des variables. Elle consiste donc en l'évaluation de la probabilité de défaillance uniquement en ces points.

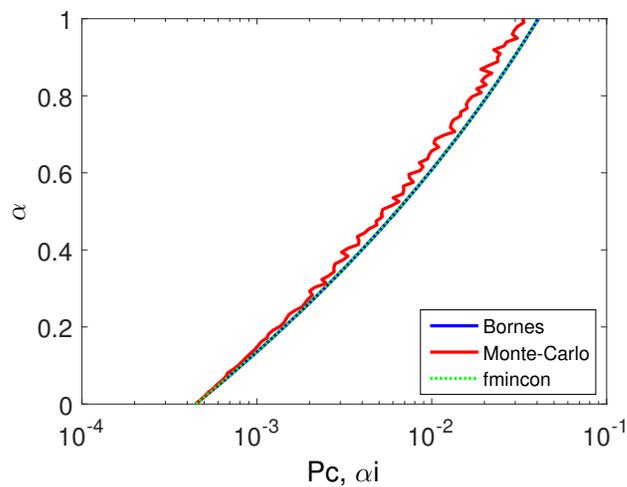


FIGURE 4.2: Courbes de robustesse pour le cas  $C_{\mu, \sigma}$  avec recherche du maximum de probabilité de défaillance par Monte-Carlo, approche borne et *fmincon*

La figure 4.2 permet la comparaison des courbes de robustesse obtenues suivant les différentes méthodes. Il est possible d'ores-et-déjà de constater que l'ajout de méconnaissances sur la moyenne entraîne une hausse significative de la valeur des probabilités de défaillance mises en jeu par rapport au cas  $C_{\sigma}$ .

Encore une fois, l'approche par tirage de Monte-Carlo est mise en défaut par la lenteur de sa convergence. Les 5000 points d'échantillonnage pris ici ne sont pas suffisants.

Concernant les approches par optimisation et bornes, des résultats similaires sont obtenus. Dans le cas particulier de l'application présentée, la moyenne maximisant la probabilité de défaillance du système se trouve donc à l'une des bornes de l'espace d'incertitude. Il est important de noter que dans le cas de problèmes de forte dimension, l'approche borne peut devenir plus coûteuse en temps calcul qu'une approche par optimisation. Pour un problème de dimension  $n$  le nombre de sites à calculer est en effet de  $2^n$ .

### 4.2.3 Conception robuste vis-à-vis des méconnaissances de modèle

Il reste à présent à incorporer la méthodologie de calcul des probabilités de défaillance précédente au sein d'un algorithme d'optimisation à proprement parler. En observant le rappel de la formulation d'un problème de RRDO (équation 4.7), il apparait que la mesure de la probabilité de défaillance intervient dans la définition des contraintes du problème. La mesure de robustesse est, elle, prise en compte en tant que fonction objective.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} [f(\mathbf{d}), m(\mathbf{x}, \mathbf{d})]^T, \quad f \in \mathbb{R}, m_\sigma \in \mathbb{R} \\ \text{avec} \\ \mathbf{g}(\mathbf{d}) \leq 0, \quad \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n_g}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{d}) = 0, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n_h}, \\ P_f(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \leq P_c, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Dans le cadre de l'utilisation d'une modélisation *Info-Gap* des méconnaissances de modèle, la mesure de la robustesse  $m(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  du système est sous-jacente à la définition du modèle *Info-Gap*. Voilà pourquoi l'approche proposée dans ce manuscrit suit le même schéma, mais la mesure de robustesse est déportée et remplacée par la définition du modèle d'incertitude  $U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)})$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} f(\mathbf{d}) \quad f \in \mathbb{R}, \\ \text{avec} \\ \mathbf{m} = U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) \\ \alpha = \alpha_i \quad 0 < \alpha_i < 1 \\ \mathbf{d}_{\min} < \mathbf{d} < \mathbf{d}_{\max} \\ P_f(\mathbf{q}) \leq P_c \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Tel que présentée ici, la méthode est nommée RRDO-IG, et peut bien entendu varier d'un problème à l'autre. Il est intéressant de remarquer que lorsque  $\alpha_i = 0$ , ce formalisme conduit à celui d'un problème de RBDO classique.

**Première analyse** Dans le but de tester de manière efficace et simple la convergence du calcul de la probabilité de défaillance au sein de cette famille d'algorithmes, le problème défini équation 4.9 est posé. Il ne constitue en soit aucun intérêt applicatif, mais permet une approche pas à pas de la validation du processus.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} |P_f(\mathbf{q}) - P_c| \\ \text{avec} \\ \mathbf{m} = U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) \\ \alpha = \alpha_i \\ \mathbf{d}_{\min} < \mathbf{d} < \mathbf{d}_{\max} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

En effet, cette application ne se différencie de la précédente que par l'ajout d'une boucle d'optimisation au sein de laquelle la probabilité de défaillance sera calculée à chaque itération de la minimisation de  $|P_f(\mathbf{q}) - P_c|$ . Son but est de rechercher le jeu de paramètres incertains permettant d'obtenir la probabilité de défaillance la plus proche de  $P_c$  tout en garantissant une certaine robustesse au sens *Info-Gap*. L'application se déroule en deux temps :

- La première phase consiste en le calcul direct des probabilités de défaillance admissibles  $P_{c,\alpha_i}$  pour un  $\alpha$  fixé à  $\alpha_i = 0.3$  et pour différentes valeurs des paramètres de conception  $\mathbf{d}$ . Dans le cas présenté, seul le paramètre  $m_1$  est affiché. Il est échantillonné dans l'intervalle  $[\mathbf{d}_{\min}, \mathbf{d}_{\max}] = [0.9, 1.1]$  à hauteur de 11 valeurs, incluant le point nominal.
- Dans un deuxième temps, l'analyse décrite par le système 4.9 est résolue pour différentes valeurs de  $P_{c,\alpha_i}$ . La recherche se porte donc sur la valeur de  $\mathbf{d}$  minimisant  $|P_f(\mathbf{q}) - P_c|$  dans  $[\mathbf{d}_{\min}, \mathbf{d}_{\max}]$ . Pour ce faire, les 11 valeurs cibles de  $P_{c,\alpha_i}$  sont choisies légèrement décalées par rapport aux précédentes, de manière à améliorer la lisibilité des graphiques de la figure 4.3.

Le problème est appliqué aux cas  $C_\sigma$  et  $C_{\mu,\sigma}$ .

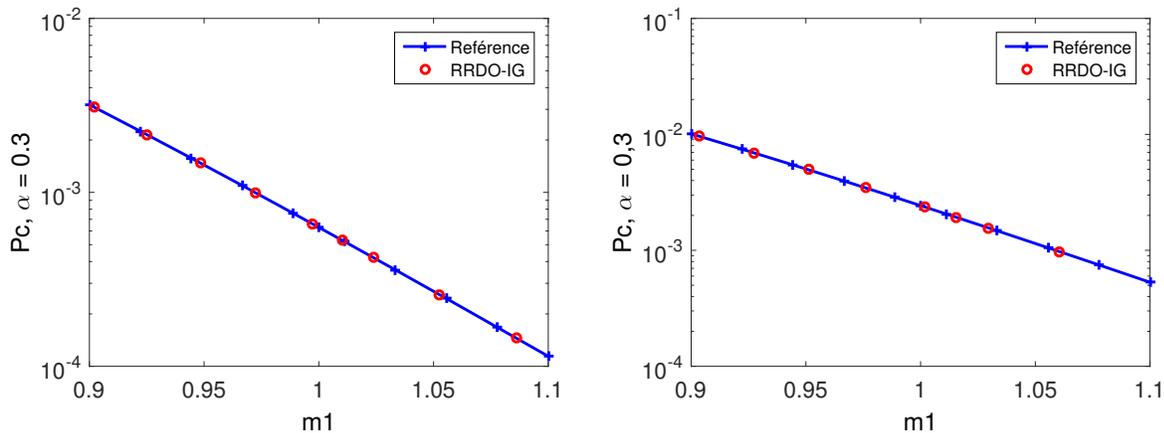


FIGURE 4.3: Convergence de la procédure RRDO-IG pour les cas  $C_\sigma$  et  $C_{\mu,\sigma}$

Dans la figure 4.3, les courbes bleues affichent les résultats obtenus lors de la première phase de calculs. Les points calculés  $y$  sont matérialisés par de petites croix. Les ronds rouges sont les points calculés lors de la phase d'optimisation. La superposition des tracés dans les cas  $C_\sigma$  et  $C_{\mu,\sigma}$  permet d'attester de la performance de l'approche proposée.

**Deuxième analyse** La deuxième analyse présentée est plus applicative, même si elle reste d'un intérêt très discuté industriellement parlant. Le but est ici de minimiser la masse  $\mathcal{M} = m_1 + m_2$  du système tout en garantissant que sa première fréquence propre ne passe pas en dessous de 39Hz sous une probabilité de défaillance autorisée  $P_c$  de 0.005 pour le cas  $C_\sigma$  et de 0.05 pour le cas  $C_{\mu,\sigma}$ . Les paramètres méconnus sont  $m_1$  et  $m_2$ . Il est choisi de leur adjoindre une loi de distribution normale dont la moyenne est de respectivement 100kg et 60kg et l'écart-type de 10% de la valeur moyenne. Chacun de ces paramètres est autorisé à varier sur un intervalle allant de 0.9 à 1.1 fois sa valeur nominale. Ceci simule une problématique classique de l'industrie aérospatiale, à savoir la minimisation de la masse du système avec une garantie de non-défaillance.

Le problème  $C_\sigma$  peut donc être formalisé de la sorte :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}} \mathcal{M}(\mathbf{d}) & f \in \mathbb{R}, \\ \text{avec} & \\ \mathbf{m} = U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) & \\ \alpha = \alpha_i & 0 < \alpha_i < 1 \\ [0.9, 0.9] < \mathbf{d} < [1.1, 1.1] & \\ P_f(\mathbf{q}) \leq 0.005 & \end{array} \right. \quad (4.10)$$

avec  $\mathbf{d} = \mathbf{m} = [m_1, m_2]$ .

Les courbes de robustesse présentées dans les figures 4.4 et 4.5 permettent de vérifier et de comparer les performances des différents designs obtenus pour les cas  $C_\sigma$  et  $C_{\mu,\sigma}$ . Chaque courbe est ici tracée à partir d'un design construit à un horizon d'incertitude spécifique. De la courbe la plus claire à la plus sombre, ces horizons d'incertitude de construction sont 0, 0.25, 0.5, 0.75 et enfin l'horizon d'incertitude maximum 1. Les courbes de robustesses sont construites en venant tester les designs précédemment obtenus, pour d'autres horizons d'incertitude.

Dans le cas  $C_\sigma$  tout d'abord, figure 4.4, et pour le design construit à  $\alpha = 0$  (ce qui est, pour rappel, assimilable à un problème RBDO classique), il est possible de constater que la condition  $P_f(\mathbf{q}) \leq 0.005$  est bien respectée, mais que ceci n'est plus le cas dès lors que  $\alpha > 0$ . Ensuite, au fur et à mesure que  $\alpha$  grandit, les courbes de robustesse ont tendance à se déporter vers les probabilités de défaillance de valeur plus faible et traversent la droite d'équation  $P_f(\mathbf{q}) = 0.005$  pour la valeur de leur horizon d'incertitude de construction respectif. Ceci entraîne une grande diminution de la fiabilité cible du système pour  $\alpha_i = 0$ , et donc, *a priori*, des condition de plus en plus difficile à satisfaire à mesure que l'horizon d'incertitude de construction est élevé.

Cette ordonnancement des courbes répond aussi à la propriété d'imbrication des ensembles définis par le modèle d'incertitude *Info-Gap*, et atteste du fait que les design sont de plus en plus robustes vis-à-vis des méconnaissances de modèle.

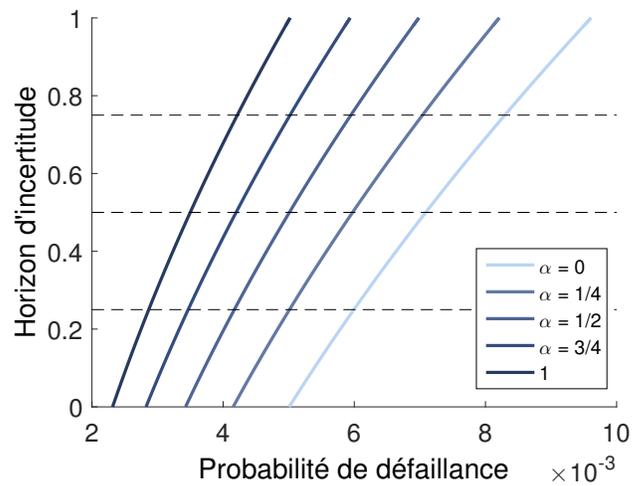
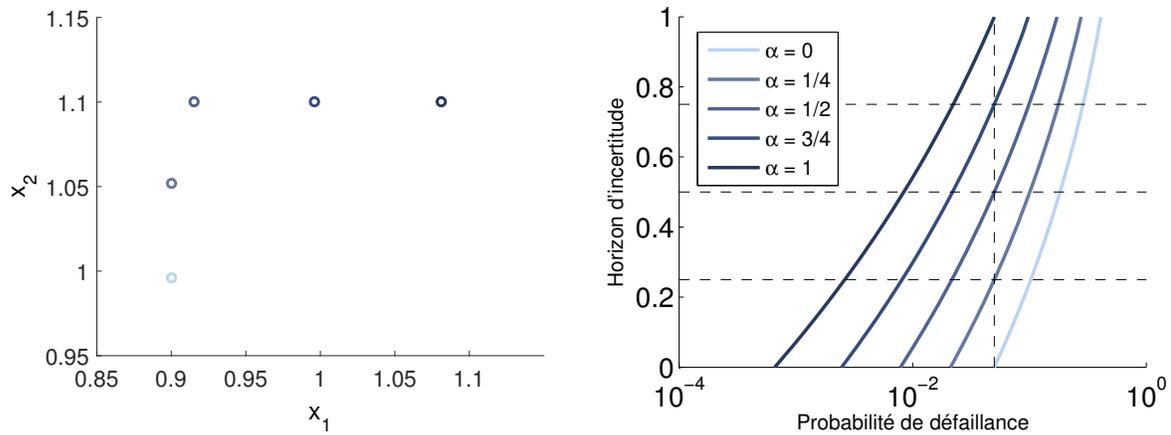
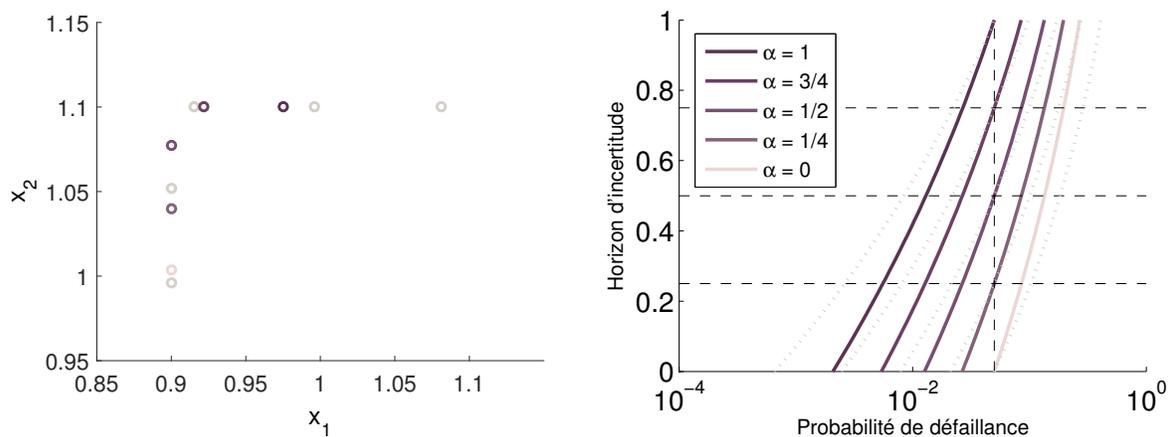


FIGURE 4.4: Résolution du problème  $C_\sigma$

Dans le cadre du problème  $C_{\mu,\sigma}$  à présent, la figure 4.5(a) donne une représentation graphique des coordonnées de chaque design issu de l'optimisation. Le premier d'entre eux, et également le plus clair, est obtenu pour l'horizon d'incertitude le plus faible. Ce point est le résultat de la minimisation des deux paramètres  $m_1$  et  $m_2$ , jusqu'à ce que la condition  $P_f(\mathbf{q}) = 0.05$  soit atteinte. À mesure que l'horizon d'incertitude s'étend, la condition  $P_f(\mathbf{q}) = 0.05$  s'obtient pour des points de plus en plus éloignés de l'origine. Pour respecter ce seuil en probabilité de défaillance, l'algorithme d'optimisation augmente ici la valeur de  $m_2$ , puis finalement celle de  $m_1$  pour les trois derniers horizons d'incertitude testés.

FIGURE 4.5: Résolution du problème  $C_{\mu,\sigma}$ 

Ces résultats permettent de mettre en avant l'intérêt qu'il peut y avoir à adopter une démarche robuste de modélisation des incertitudes lors de la mise en place d'une phase d'optimisation. La comparaison entre un design obtenu par RBDO (à  $\alpha = 0$ ) conduit à un design qui ne permet pas de respecter les conditions du problème en probabilité de défaillance dès lors que l'horizon d'incertitude augmente.

FIGURE 4.6: Résolution du problème  $C_{\mu,\sigma}$  avec un modèle d'incertitude éllipsoïdale

Dans la plupart des travaux présentés, un modèle d'incertitude de type enveloppe est choisi. Afin de visualiser l'impact que la forme du modèle d'incertitude peut induire sur les résultats de l'optimisation, la même étude a été menée avec un modèle éllipsoïdal. Ayant établi précédemment qu'une approche "borne" du problème était suffisante, l'extension de ce principe à été faite sur l'ellipse. La périphérie de cette dernière a donc été discrétisée en 200 points sur lesquels le calcul de probabilité de défaillance a été mené. La figure 4.6

permet d'apprécier la différence obtenue avec les designs (a) et les courbes de robustesses (b) précédentes.

Cette dernière application restera anecdotique dans ce manuscrit, mais rappelle que le choix du modèle d'incertitude n'est pas anodin et conditionne directement la convergence et l'allure des courbes de robustesse pouvant être obtenues. Cet exemple illustre donc l'importance d'établir un modèle d'incertitude qui soit conforme à la réalité des incertitudes rencontrées.

### 4.3 Extension au calcul de notching pour une structure linéaire

L'application d'une stratégie d'optimisation en présence de méconnaissances de modèle permet de travailler dans des contextes pouvant être très différents du précédent, tout en conservant la même philosophie de méthodologie.

La section qui va suivre a pour but de présenter tout d'abord l'optimisation du profil de notching. Cette application est menée tout d'abord pour une fréquence et pour le système à trois degrés de liberté déjà utilisé. L'extension à une bande de fréquence complète est ensuite présentée pour les cas  $C_\sigma$  et  $C_{\mu,\sigma}$ .

#### 4.3.1 Définition du problème par fréquence

Par analogie avec l'équation 2.43, le problème de conception robuste d'un profil de notching pour une fréquence  $\omega$  donné peut être décrit par l'équation 4.11.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathbf{d} \in U(\alpha, \mathbf{d}^{(0)})} \eta(\omega) \\ \text{avec} \\ \mathbf{m} = U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) \\ \alpha = \alpha_i \\ \mathbf{d}_{min} < \mathbf{d} < \mathbf{d}_{max} \\ P_f(f_{k_1}(\mathbf{d}) - f_c) \leq P_c \end{array} \right. \quad (4.11)$$

avec :

- $\eta(\omega)$  : le coefficient compris entre 0 et 1 qui module l'amplitude de l'excitation de la structure à la pulsation  $\omega$  donnée,
- $f_{k_1}(\mathbf{d})$  : l'effort développé dans la jonction table vibrante - satellite,
- $f_c$  : l'effort limite toléré dans la jonction table vibrante - satellite,
- $P_f$  : la probabilité de défaillance calculée,
- $P_c$  : la probabilité de défaillance limite concédée.

Le problème vise donc à la maximisation d'un facteur  $\eta(\omega)$  appliqué à l'amplitude de sollicitation de la structure. La probabilité de défaillance qui sert ici de fonction contrainte repose sur la mesure de l'effort au sein de l'interface entre la plateforme et la table vibrante modélisée par la raideur  $k_1$ . Les paramètres portant les méconnaissances sont de nouveau les deux masses du système.

### 4.3.2 Topologie du problème par fréquence et métamodèles

Le système d'intérêt étant ici linéaire et ne possédant que deux variables de conception, il est possible de visualiser la topologie de l'effort circulant dans la raideur  $k_1$ . Les quatre images de la figure 4.7 ont été obtenues suite au calcul des FRF du système à  $\eta = 1$ . Elles représentent cet effort dans le plan défini par les plages d'existence des variables  $m_1$  et  $m_2$  pour des fréquences de 20Hz (avant la première occurrence du premier mode), 35Hz (dans le domaine d'existence du premier mode), 60Hz (entre les deux modes) et 90 Hz (dans le domaine d'existence du deuxième mode). De manière à obtenir une image suffisamment fine, chaque axe est discrétisé en cent parcelles.

L'observation de la figure 4.7 permet facilement de distinguer deux types de topologies différentes. Dans le cas des figures (a) et (c), les surface affichées sont très douces et monotones. Ces dernières ont été réalisées à des fréquences de respectivement 20 et 60Hz, auxquelles les modes de la structure ne sont pas sollicités. Un échantillonnage sur ces zones fréquentielles ne pose donc pas de difficulté et un métamodèle est facilement constructible par la suite.

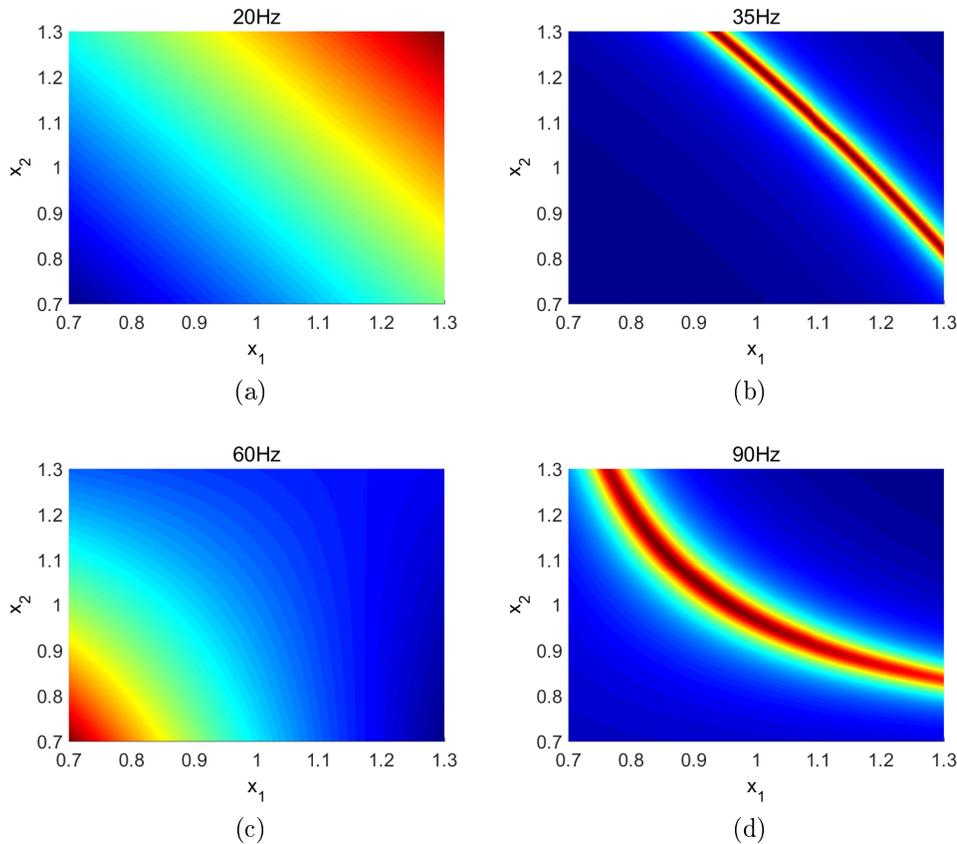


FIGURE 4.7: Topologie de la fonction de contrainte dans l'espace standard pour les paramètres  $m_1$  et  $m_2$

Les figure (b) et (d), quant à elles, montrent des surfaces présentant chacune une arête saillante qui traverse de part en part le domaine d'existence des variables de conception. Elles sont obtenues pour des fréquences de 35 et 90Hz, où les modes de la structure peuvent se manifester. Ce type de géométrie peut entraîner les difficultés classiques lors de la construction de métamodèles de fonctions dont la topologie contient des singularités :

- D'une part, un échantillonnage à l'aveugle, géré par un processus aléatoire, peut ne pas fournir suffisamment d'informations pour représenter la finesse de ces détails. En effet, les zones à géométrie complexe souffrent de sous-échantillonnage de manière locale. L'augmentation du nombre d'échantillon peut en partie résoudre le problème, mais le sur-échantillonnage des zones à géométrie simple alourdirait considérablement le coût en calcul.
- D'autre part, la nature du métamodèle utilisé fera que ces informations d'échantillonnage seront traitées différemment. Pour des approches fonctionnant par régression telles que les surfaces de réponses ou encore les réseaux de neurones, les métamodèles ont tendance à atténuer les singularités des fonctions. Ces singularités étant en géné-

ral (et dans le cas présent) dues aux comportements dimensionnants du système, cet effacement risque de supprimer des zones de défaillance de l'espace de conception. Dans le cas des approches fonctionnant par interpolation telles que les techniques de Krigage, la valeur du métamodèle au point échantillonné est exacte. Ceci a pour conséquence, dans le cas d'une fonction à fortes variations, de créer des oscillations qui déforment la surface de défaillance.

Afin de mettre ces effets en lumière, une base d'échantillonnage a été construite à partir de 500 FRFs du système, sélectionnées de manière homogène dans l'espace des variables incertaines. Pour chaque fréquence voulue (ici tous les 0.1Hz) différents métamodèles ont été construits sur 450 échantillons et testés sur les 50 restants. Ces métamodèles testés sont ici les mêmes que ceux de la section précédente, à savoir des surfaces de réponse d'ordre 2 et 3, des Krigages d'ordre 2 et 3 et des réseaux de neurones à 2 et 3 étages pour 3 et 4 neurones.

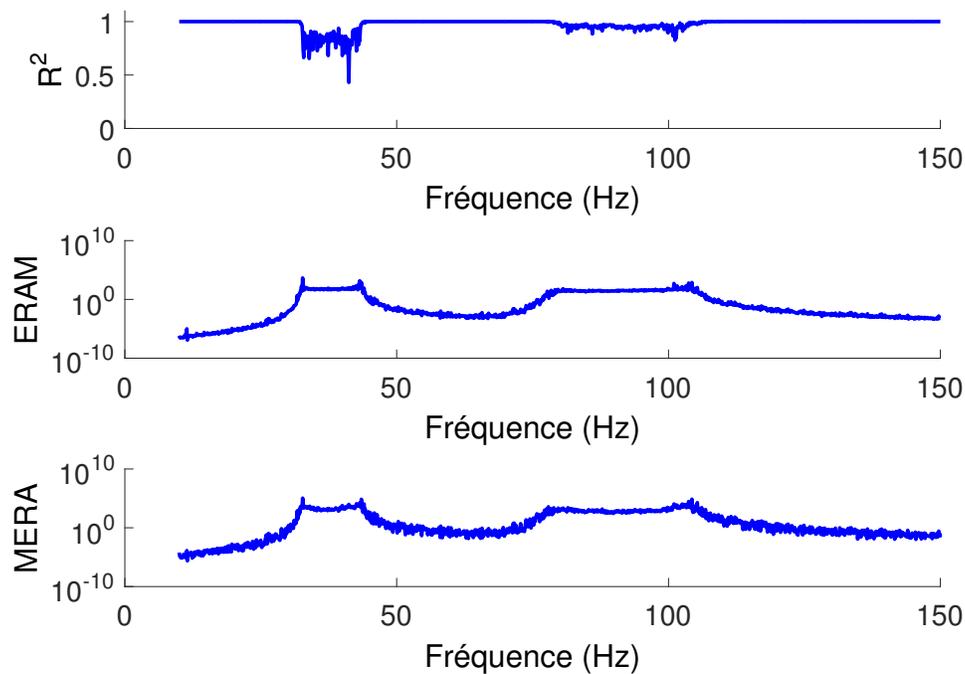


FIGURE 4.8: Meilleures performances des métamodèles testés par fréquence

La figure 4.8 montre comment les critères de performance détaillés à l'annexe D évoluent en fonction de la fréquence. Afin de rendre les résultats plus lisibles, seules les meilleures valeurs ont été conservées par fréquence, tous métamodèles confondus. Comme il était attendu, les zones fréquentielles sur lesquels les modes se manifestent sont très difficiles

à métamodéliser. En effet, même si le critère  $R^2$  garde des valeurs encore honnêtes, les valeurs de ERAM et MERA deviennent rédhibitoires pour l'utilisation de ces métamodèles. En dehors de ces zones, les performances affichées par les métamodèles sont bonnes, mais ceux-ci sont inutiles puisque le notching n'y est pas nécessaire.

Les métamodèles usuels sont donc dans l'incapacité de fournir une approximation suffisante de la fonction contrainte du problème pour les zones fréquentielles d'intérêt. Pour pallier ceci, une approche différente, adaptative, a été testée. Cette méthode porte le nom d'algorithme de Smoliak [138]. Il repose sur un pré-échantillonnage établi de l'espace. Des analyses de sensibilité locales sont ensuite faites de manière à déterminer les zones et directions de l'espace devant être investiguées avec plus de précision. L'annexe D donne plus de détails sur le fonctionnement de ce type d'approche. Son résultat est un métamodèle construit par morceaux qui peut donc traiter des singularités et des discontinuités des fonctions.

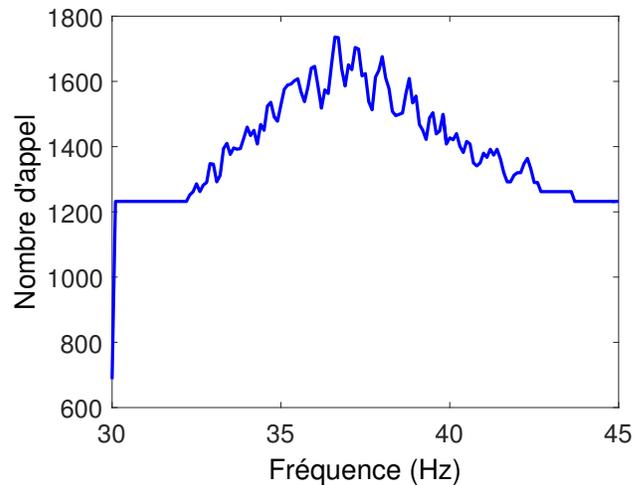


FIGURE 4.9: Nombre d'appels au modèle à chaque pas de fréquence

Dans l'hypothèse de la possibilité future du calcul de la probabilité de défaillance en utilisant ce type de métamodèle, il serait possible d'optimiser de manière importante le processus de notching sur plusieurs fréquences. En effet, dans le cadre de l'utilisation d'un modèle éléments finis lors du calcul d'une FRF par Nastran, la majeure partie du temps de calcul est consacrée à l'importation des données et au calcul des matrices et non à celui des FRFs. De plus, l'algorithme adaptatif de Smolyak suit un schéma d'échantillonnage basé sur un quadrillage prédéfini de l'espace, n'autorisant la recherche qu'en certains points de l'espace.

La figure 4.9 montre le nombre d'appels au modèle pour chaque pas de fréquence. Celui-ci

permet de se rendre compte que seuls 1250 échantillons sont utiles pour la métamodélisation de la fonction contrainte en dehors de la zone fréquentielle où les modes peuvent résoner. Ce socle de 1250 échantillons est toujours le même quelque soit la fréquence de travail. D'autres échantillons peuvent ensuite être nécessaires lorsque la topologie de la fonction devient plus complexe comme c'est le cas ici entre 33 et 43Hz. En mettant en mémoire les FRFs déjà calculées, il est donc possible d'atteindre une économie de temps importante lors de la réalisation du métamodèle. Il ne reste par la suite qu'à échantillonner les points permettant la convergence de l'algorithme.

D'autres pistes d'optimisation sont plus simples à mettre en œuvre. Par exemple un test sur la réponse du système pour une excitation maximum permet de savoir si le notching est envisageable ou non, et ainsi faire l'économie de calculs inutiles à des fréquences non concernées.

### 4.3.3 Calcul de la probabilité de défaillance pour 35Hz

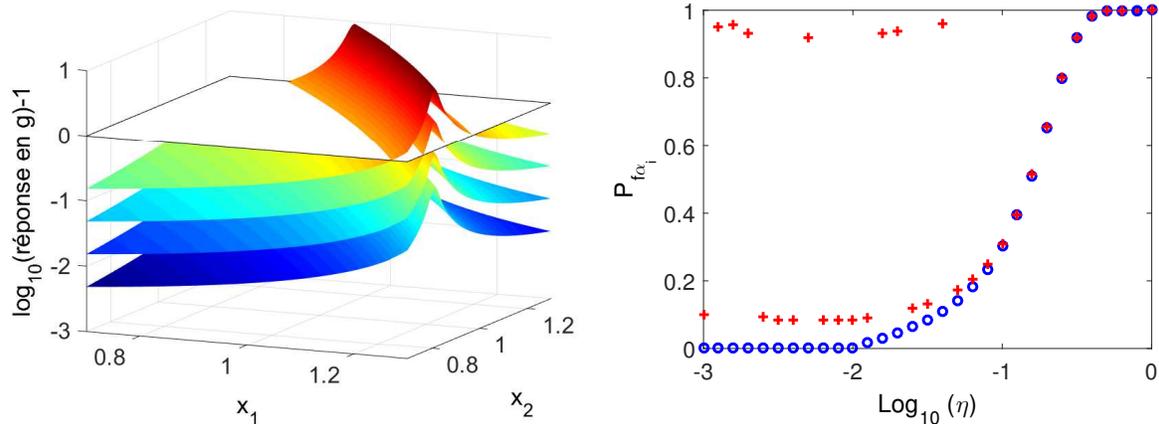


FIGURE 4.10: (a) Évolution de la topologie de la fonction contrainte en fonction de l'excitation à 35Hz, (b) Probabilité de défaillance en fonction de l'excitation, par FORM en rouge et par Subset-Simulation en bleu

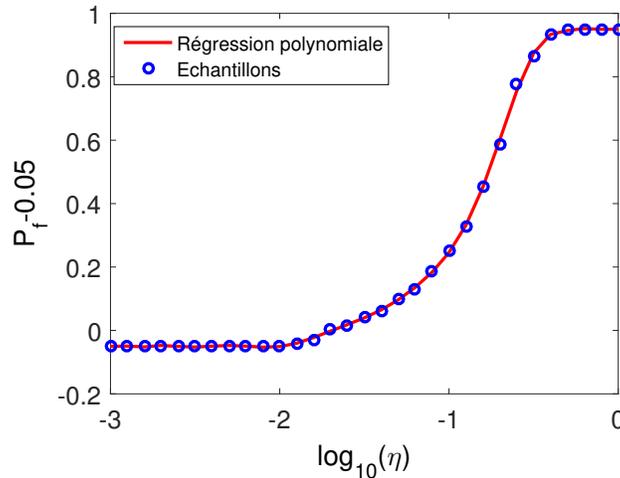
Comme constaté précédemment, la topologie de la fonction contrainte de notre problème pour 35Hz présente une arête saillante. Cette géométrie est d'une grande importance car elle intervient aux fréquences où les modes se manifestent sur le domaine d'incertitude, donc là où les niveaux d'accélération sont les plus élevés, et donc, là où un notching peut intervenir. Or, cette topologie induit que pour de faibles probabilités de défaillance limites, le domaine de défaillance ne représente plus qu'une fine bande de l'espace des variables incertaines. La figure 4.10(a) permet de voir cette bande pour différentes valeurs de l'effort injecté sur la structure. Les différentes surfaces sont ici tracées pour des  $\log_{10}(\eta)$  de -3, -2, -1

et 0, afin de pouvoir observer la diminution importante du domaine de défaillance à mesure que  $\eta$  diminue. La conséquence est que l'utilisation d'une méthode de transformation de type FORM ou SORM conduit à une large surestimation de la probabilité de défaillance du système. En effet, ces méthodes de transformation considèrent toute la zone se situant derrière la surface de défaillance comme étant elle aussi en défaillance. Ceci correspond au profil de croix rouges observables figure 4.10(b) convergeant vers 0.1% à mesure que l'amplitude de l'excitation décroît.

La finesse de l'espace de défaillance peut également entraîner des difficultés de convergence de la part de ces algorithmes. Le pas de recherche, usuellement déterminé par une règle d'Armijo peut ne pas être suffisamment fin pour détecter la surface de défaillance et conduire à des valeurs aberrantes. C'est le cas des croix rouges stagnant aux alentours de 0.9% alors que l'amplitude de l'excitation appliquée est très faible. En effet, les méthodes FORM et SORM peuvent converger sur le mauvais front du domaine de défaillance. Dans ce cas, le domaine de défaillance vu par l'algorithme de transformation recouvre l'ensemble de l'espace de conception exceptée la portion se trouvant derrière la surface de défaillance calculée. Toujours sur la figure 4.10(b), l'algorithme FORM ne permet de converger que pour des probabilités de défaillance supérieures à 0.2. La réduction du pas de recherche de la surface de défaillance permet bien entendu une meilleure convergence de l'algorithme, mais fait perdre l'avantage de la rapidité de ce genre de méthode tout en ne résolvant pas le problème de la surestimation de la probabilité de défaillance.

Des méthodes alternatives, basées sur des processus tout ou partie aléatoires ont donc dû être explorées. La toolbox FERUM offre la possibilité de paramétrer avec facilité des approches par Importance-Sampling ou par Subset-Simulation. Dans le cas présent, l'Importance-Sampling ne serait d'aucune utilité car il se base sur une recherche du point de conception par FORM ou SORM. Or la convergence de ces procédés n'est pas assurée. Le choix se tourne donc naturellement vers la méthode des Subset-Simulation qui, comme en atteste la figure 4.10(b), n'est pas sujette aux défauts des méthodes de transformations. La convergence vers 0 de la probabilité de défaillance devient donc possible.

L'approche par Subset-Simulation permet donc de pallier les différents problèmes occasionnés par les méthodes de transformation. Néanmoins, comme énoncé précédemment, l'approche par Subset-Simulation opère en partie de manière aléatoire, et sa précision augmente donc avec le nombre d'échantillons que l'utilisateur autorise à être calculés.

FIGURE 4.11: Régression par *polyfit*

Bien que ce phénomène ne soit pas visible sur les figures, cette composante aléatoire entraîne une erreur résiduelle sur le résultat et ne permet pas de garantir la monotonie de la probabilité de défaillance de manière locale en fonction de l’amplitude de l’excitation appliquée à la structure. Or cette monotonie est nécessaire au bon fonctionnement des algorithmes d’optimisation tels que *fmincon* de Matlab<sup>®</sup> qui sont bâtis pour rechercher un minimum local. Ces algorithmes ont donc tendance ici à converger vers des minima artificiels, créés à cause de l’instabilité de la méthode de calcul de la probabilité de défaillance.

Une étape supplémentaire est donc mise en place de manière à rétablir la monotonie et permettre la convergence de *fmincon*. Pour cela, un échantillonnage linéaire est entrepris pour différentes valeurs de  $\eta$ . Une régression polynomiale (ici par la fonction *polyfit* de Matlab<sup>®</sup>) est ensuite effectuée 4.11.

Cette régression peut être menée pour un coût en calcul relativement raisonnable, dans le sens où le calcul des différents points se fait sur des fonctions déjà métamodélisées. L’ajout de cette étape permet un lissage de la fonction sur laquelle l’optimisation doit être menée, et solutionne ainsi les problèmes de convergences dus à la composante aléatoire de la méthode des Subset-Simulation. Dans le cas de la figure 4.11, où la probabilité de défaillance admise vaut  $P_c = 0.05$ , l’algorithme d’optimisation convergera facilement vers  $P_f - P_c = 0$ .

La recherche de l’optimum sur cette fonction peut ensuite être menée sans difficulté par *fmincon*. La convergence de cette étape d’optimisation est de plus très rapide compte tenu du fait que le problème global est ramené à un problème à une dimension. La démarche globale de conception robuste d’un profil de notching peut être décrit par l’algorithme

4.1. Dans sa simplicité apparente se cache la complexité de l'étape d'échantillonnage et de calcul des probabilités de défaillance qui, comme il a été vu, constituent les point sensibles de l'entreprise de calcul des profils de notching.

---

**Algorithme 4.1** Algorithme de conception robuste de profile de noching en présence de méconnaissances de modèle

---

Pour toutes les fréquences

  Si (réponse maximum > réponse limite)

    Construction du métamodèle

    Échantillonnage de la probabilités de défaillance pour différents  $\eta$

    Régression linéaire de  $P_f(\eta) - P_c$

    Résolution du problème de notching 4.11

  Fin si

Fin pour

---

#### 4.3.4 Généralisation à une bande de fréquence

L'extension de la méthodologie à plusieurs fréquences se fait de manière triviale par bouclage de l'algorithme précédemment présenté sur la bande de fréquences choisie et pour le pas fréquentiel souhaité. Compte tenu de la difficulté de l'utilisation des métamodèles, les courbes suivantes ont donc été directement calculées à partir du modèle de la structure.

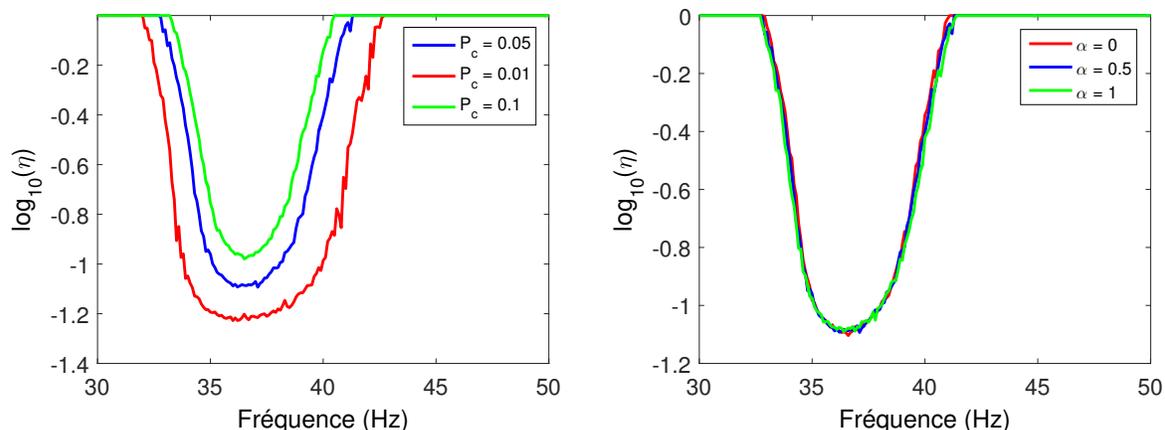


FIGURE 4.12: Profils de notching pour différentes probabilités de défaillance critiques à  $\alpha = 0.5$  (a) et pour différents horizons d'incertitudes à  $P_c = 0.05$ (b)

Les résultats des profils de notching obtenus après résolution des problèmes  $C_\sigma$  sont affichés dans la figure 4.12. Deux jeux de courbes ont été obtenus pour un pas en fréquence de 0.1Hz. Le premier, figure (a) à horizon d'incertitude fixe et pour différentes probabilités de défaillances limites, le second, figure (b), à probabilité de défaillance limite fixe et pour différents horizons d'incertitudes.

Ainsi, plus la probabilité de défaillance concédée est faible, plus le notching est profond. A contrario, une augmentation de la valeur de probabilité de défaillance critique entraîne une hausse du plancher du notching et autorise donc un test plus conservatif, susceptible de recouvrir plus d'évènement de vols. Un tel test est par contre, de fait, plus risqué pour le satellite, qui est plus susceptible d'entrer en défaillance, et donc de subir un stress trop important.

La variation de l'horizon d'incertitude entraîne des changements beaucoup plus faibles sur les profils de notching que celles constatées avec la probabilité de défaillance. Ce faible effet est du au fait que l'incertitude est ici appliquée uniquement sur les écarts-types. Il est néanmoins possible de constater que la largeur du notching augmente légèrement avec la valeur de l'horizon d'incertitude pour une probabilité de défaillance critique fixe. Ceci respecte bien la propriété d'imbrication des modèles *Info-Gap*.

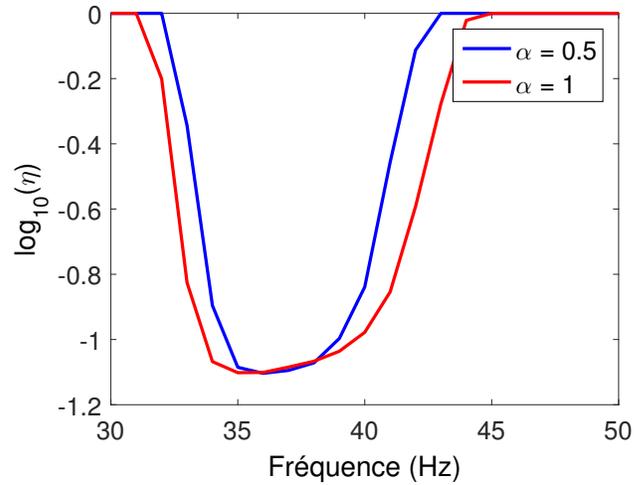


FIGURE 4.13: Profils de notching dans le cas  $C_{\mu, \sigma}$  pour différents horizons d'incertitude

Le traitement du problème  $C_{\mu, \sigma}$  réclame un temps de calcul beaucoup plus long. En effet, contrairement au cas d'étude de la section précédente, le pire cas à horizon d'incertitude fixé ne se situe plus sur le contour du modèle d'incertitude. La méthode Borne ne peut donc plus être utilisée et une optimisation à proprement parler doit être mise en place à chaque itération de la boucle principale. Cette recherche a été menée en utilisant la fonction *fminsearchbnd* qui est une extension de la fonction *fminbnd* de Matlab<sup>®</sup> à plusieurs dimensions disponibles sur le site mathworks.com. La fonction *fmincon* de Matlab<sup>®</sup> a été utilisée dans un premier temps, mais le fait de ne pas définir de fonction contrainte a tendance à gêner la convergence de la procédure.

Le temps de calcul ajouté fait que les profils de notching pour ce cas n'ont été calculés que tous les Hertz. La figure 4.13 montre les profils calculés à  $\alpha = 0.5$  et 1 pour une probabilité de défaillance critique de 0.05. L'influence de l'horizon d'incertitude sur la physionomie du notching est ici beaucoup plus importante que sur le cas  $C_{\sigma}$ . Ceci est dû au fait que les incertitudes sont maintenant également appliquées à la moyenne des distributions.

L'horizon d'incertitude et la probabilité de défaillance seuil sont donc des paramètres qui influent de manière importante sur la profondeur et la largeur de la partie notchée. Ces deux paramètres sont malheureusement difficiles à appréhender et le choix de leur valeur lors du calcul du profil de notching doit être le fruit de la collaboration et de l'expérience du maître d'œuvre et des autorités lanceurs.

## 4.4 Perspective d'extension au calcul de notching pour une structure localement non-linéaire

Comme il a déjà été précisé à de nombreuses reprises dans ce manuscrit, si leur effet n'est pas toujours perceptible, les non-linéarités sont légions dans la dynamique des structures. L'adaptation de la méthodologie de conception de profil de notching robuste peut se justifier par le fait que l'effet des non-linéarités peut se focaliser sur des éléments sensibles de la structure. Dans [112] par exemple, l'effet des non-linéarités se concentre sur une antenne du satellite.

L'emploi du même outil de synthèse des FRFs non-linéaires que dans le chapitre 3 permet l'obtention de chaque FRF en un temps variant de 15 secondes à une minute suivant que le comportement non-linéaire se manifeste ou non. Ce temps d'exécution a été suffisamment court pour construire les graphiques suivants, mais pas suffisamment pour pouvoir calculer des probabilités de défaillances sans métamodèle.

Le système utilisé dans cette étude est de nouveau la représentation du satellite par trois degrés de liberté. Une raideur cubique de  $1e9\text{N.m}^{-1}$  est ajoutée entre  $m_1$ , modélisant le shaker et  $m_2$  modélisant la plateforme du satellite.

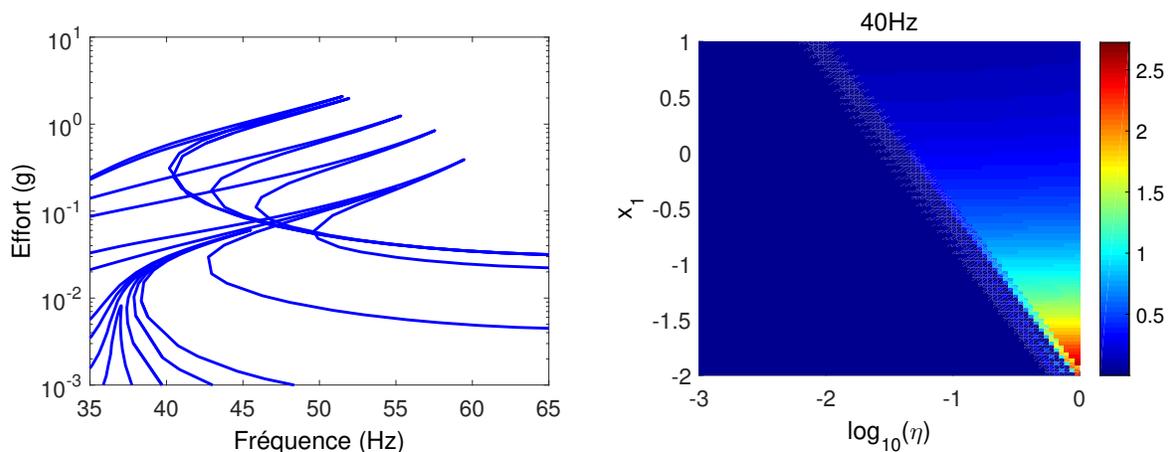


FIGURE 4.14: Incertitude sur  $k_{nl}$  seul

Dans un premier temps, seule la raideur non-linéaire du système est considérée comme méconnue. Un modèle d'incertitude de type enveloppe est de nouveau choisi, en autorisant comme intervalle maximal de  $10^{-2}$  à 10 fois la valeur nominale de la raideur. L'observation des réponses harmoniques du système en figure 4.14(a) atteste de la nature raidissante de la non-linéarité, ceci est surtout visible par le déplacement vers les hautes fréquences de la

première résonance du système. Les 10 courbes présentées ont été tracées pour des couples aléatoires en  $\eta$  et en raideur non-linéaire. Les différentes raideurs ont été choisies dans l'intervalle autorisé par le modèle d'incertitude tandis que les valeurs de  $\eta$  oscillent entre 1 et 0.001. Ce graphique permet également de déduire que le profil de notching résultant d'un tel comportement sera lui aussi déporté vers les hautes fréquences.

La figure 4.14(b) donne un aperçu de l'amplitude de la réponse du système en échelle logarithmique pour 40Hz, qui est une fréquence à laquelle le notching devait être fait dans le cas linéaire. Le niveau de réponse critique de 10g est donc ici équivalent à 1. La figure donne l'impression non triviale que l'augmentation du module de la raideur non-linéaire entraîne une diminution du niveau de la réponse. Dans les faits, à mesure que la raideur non-linéaire augmente, la résonance du système se déplace vers les hautes fréquences. Il est donc possible de constater graphiquement que le notching n'est ici nécessaire que si l'horizon permet une diminution suffisante de la raideur non-linéaire. Bien que l'application n'ait pu être traitée dans ce cas, la figure 4.14 permet tout de même de montrer l'existence d'une solution au problème de notching pour les systèmes non-linéaires.

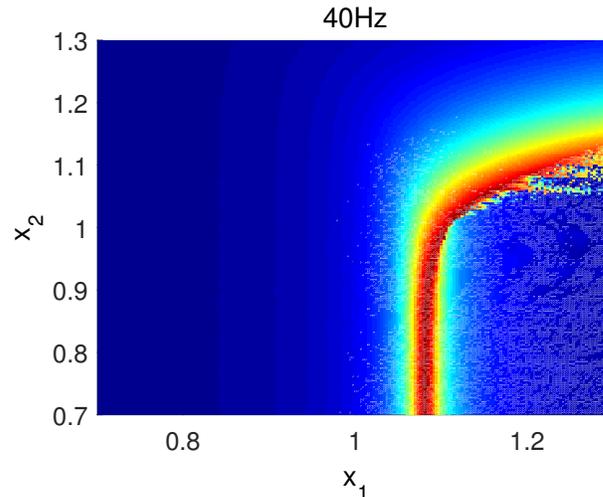


FIGURE 4.15: Topologie de la fonction de contrainte dans l'espace standard pour les paramètres  $m_1$  et  $m_2$

En revenant au cas précédent où l'incertitude est portée par les valeurs des masses, et en se plaçant à 40Hz, pour une raideur non-linéaire de  $1e9N.m^{-1}$  et  $\eta = 1$  un nouveau phénomène apparaît dans la figure 4.15. Il est possible en effet de retrouver une topologie globalement similaire à celle présente dans la figure 4.7, mais une zone d'instabilité se manifeste à l'arrière du front. Cette zone où les états de réponse hauts et bas cohabitent constitue un nouveau défi en terme de métamodèle et de calcul de la probabilité de défaillance qui n'a malheureusement pas pu être adressé durant ces travaux de thèse.

Une possibilité envisagée serait de construire l'enveloppe des réponses maximales et de ne considérer que ces dernières lors de la construction du métamodèle. Ce procédé garantirait un résultat conservatif en permettant un dimensionnement au pire cas.

## 4.5 Conclusion partielle

La stratégie d'optimisation robuste en présence de méconnaissances de modèle a pu être précédemment utilisée sans difficulté sur le cas du système à trois masses et ressorts pour un problème classique de diminution de la masse du système. Les topologies rencontrées ont permis l'utilisation de métamodèles classiques de même que l'emploi de la méthode de transformation FORM, peu gourmande en calcul, lors de l'estimation de la probabilité de défaillance. De plus, concernant le cas  $C_{\mu,\sigma}$  une approche borne s'est révélée suffisamment efficace pour déterminer le design offrant la plus forte probabilité de défaillance pour un horizon d'incertitude donné. Toutes ces simplifications font que le problème est relativement rapide à résoudre malgré la complexité de l'algorithme mis en place.

L'application au cas du notching permet d'explorer les limites de ces méthodologies, même si la simplicité du système utilisé a permis le calcul de différents profils de notching. Les topologies saillantes des fonctions contraintes du problème ont en effet eu de nombreuses conséquences dommageables. Les métamodèles standards n'ont pas permis d'obtenir une qualité de prédiction suffisante. L'utilisation d'heuristiques de métamodélisation adaptative a permis d'améliorer la prédiction mais pas la convergence du calcul de probabilité de défaillance. Ces topologies plus exotiques font également que le maximum de probabilité de défaillance pour le cas  $C_{\mu,\sigma}$  ne se trouve plus sur les bornes de l'intervalle défini par le modèle *Info-Gap* et doit être recherché au moyen d'un autre algorithme d'optimisation.

Dans le cas d'une extension à un système non-linéaire, les mêmes problèmes se rencontrent.

Cette application permet également de rappeler que le succès d'une optimisation dépend grandement des topologies des fonctions rencontrées même pour un problème supposé simple. En effet, le notching ne consiste finalement qu'en l'optimisation d'une seule variable.



# Application à une structure industrielle : la plateforme MYRIADE

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>104</b>
<b>5.2</b>	<b>Présentation de la filière MYRIADE</b>	<b>104</b>
5.2.1	Introduction	104
5.2.2	La filière MYRIADE	104
5.2.3	Le modèle éléments finis MYRIADE	107
<b>5.3</b>	<b>Placement robuste de capteurs</b>	<b>109</b>
5.3.1	Positionnement de capteurs	111
5.3.2	Recherche d'une direction robuste d'excitation	120
<b>5.4</b>	<b>Conception robuste de structure</b>	<b>124</b>
5.4.1	Définition du problème de conception robuste de structure	124
5.4.2	Étude de sensibilité et choix des paramètres de conception	125
5.4.3	Choix des paramètres incertains	125
5.4.4	Construction des métamodèles	128
5.4.5	Conception robuste en présence de méconnaissances de modèle	130
<b>5.5</b>	<b>Conception robuste du profil de notching primaire</b>	<b>136</b>
5.5.1	Analyse de sensibilité	137
5.5.2	Métamodélisation et pistes de poursuite	138
<b>5.6</b>	<b>Conclusion partielle</b>	<b>139</b>

---

## 5.1 Introduction

L'ensemble des chapitres précédents de ce manuscrit a permis de présenter le développement de nombreuses et différentes stratégies de conception robuste en présence de méconnaissances de modèle. À partir d'un état de l'art des méthodologies existantes au chapitre 2, des méthodologies robustes de placement de capteurs et d'excitateurs ainsi que des approches d'optimisation robuste des structures et des profils d'excitation ont été développées dans les chapitres 3 et 4. Ces dernières ont été appliquées à des structures académiques afin d'en démontrer les performances ainsi que certaines de leurs limites. Le chapitre à venir présente l'application de ces méthodologies à une structure de dimension industrielle, à savoir la plateforme satellite MYRIADE, dont le CNES est le maître d'œuvre.

## 5.2 Présentation de la filière MYRIADE

### 5.2.1 Introduction

Le but de cette section est la présentation du modèle de la plateforme qui est utilisée dans le reste des applications, à savoir la plateforme MYRIADE. Dans un premier temps, une contextualisation du système dans le cadre des activités du CNES est faite grâce à un descriptif des missions couvertes par les satellites construits à partir d'une plateforme MYRIADE et les différentes spécificités de la plateforme sont exposées. Dans un deuxième temps, une familiarisation avec la géométrie et les différentes parties du modèle éléments finis, ainsi que le vocabulaire associé, est proposée.

### 5.2.2 La filière MYRIADE

La plateforme est constituée d'un ensemble de chaînes fonctionnelles qui peuvent évoluer indépendamment les unes des autres. Les missions des satellites construits à partir de la plateforme MYRIADE étant surtout des missions d'étude et d'analyse de la surface de la terre, la plateforme a été conçue pour des orbites basses de 600 km à 1000 km d'altitude et pour une durée de vie typique de 2 ans. Cette gamme d'altitudes permet d'éviter d'une part les perturbations atmosphériques pouvant affecter le pointage en-dessous de 600km et d'autre part les radiations présentes au-delà des 1000km pouvant limiter la durée de vie du satellite. Les inclinaisons acceptées couvrent le domaine de 20 à 98°. Enfin, une application à l'orbite GTO (*Geostationary Transfert Orbite*) a également été réalisée (SPIRALE).



FIGURE 5.1: Plateformes MYRIADE en phase d'intégration pour différentes charges utiles (source CNES)

La structure de la plateforme est un parallélépipède rectangle à base carré de 60 centimètres de côté, et 50 cm de hauteur, constituée de :

- un panneau de base massif en aluminium, assurant l'interface avec le lanceur, et susceptible d'accueillir le module de propulsion,
- 4 panneaux latéraux en NIDA, permettant la fixation des équipements. Ces panneaux s'ouvrent en pétale afin de faciliter la réalisation des travaux d'intégration,
- 4 cornières en aluminium permettant de rigidifier la structure,
- un panneau supérieur, également en NIDA, destiné à recevoir la charge utile.

Le système d'alimentation utilise un générateur solaire constitué de deux panneaux articulés qui sont repliés contre la plate-forme lors du lancement. Il est alors dit qu'ils sont en position gerbée. Une fois déployé en orbite, ce générateur d'une surface de  $0.8 \text{ m}^2$ , génère une puissance électrique de 180 watts environ en début de vie, grâce à l'utilisation de cellules AsGA à haut rendement. Il est orientable autour d'un axe au moyen d'un mécanisme d'entraînement, ce qui lui permet de suivre la course du soleil tout au long de son orbite. Le système est complété par une batterie Lithium ion et un boîtier électronique assurant la gestion de la charge de la batterie et la redistribution de l'énergie vers l'ensemble des équipements du satellite.

Performances offertes aux charges utiles :
Masse : jusqu'à 80 kg
Puissance : 60 W permanent (orbite avec éclipse)
Pointage : précision $< 5.10^{-3}$ °, stabilité $< 2.10^{-2}$ °
Propulsion : 80 m/s
Mémoire de masse : 16 Gbits
Débit télémesure : 400 kbits/s
Télémesure haut débit : 16,8 Mbits/s

TABLE 5.1: Performances offertes par la plateforme Myriade

Cette plateforme a été, et est encore utilisée sur de nombreux projets scientifiques et militaires tant français qu'internationaux :

- DEMETER est la première mission Myriade, pour l'étude de l'environnement électromagnétique de la Terre et la prévision des séismes. Il est lancé le 29 juin 2004 de Baïkonour avec succès et le satellite fonctionne bien.
- PARASOL étudie les propriétés des aérosols et des nuages de l'atmosphère terrestre. Il est lancé le 18 décembre 2004 de Kourou et rejoint la constellation A-train. Plateforme et charge utile fonctionnent parfaitement.
- PICARD pour l'étude du soleil et de ses impacts sur la climatologie terrestre. Lancé le 15 juin 2010.
- MICROSCOPE pour le Test du Principe d'Équivalence. Lancement prévu en 2016.
- TARANIS : Étude du couplage atmosphère - ionosphère - magnétosphère lors des orages atmosphériques. Lancement prévu en 2016.
- SMESE en coopération avec la Chine. Étude de la physique solaire, de la physique du milieu interplanétaire et de la géocouronne, et de la météorologie spatiale. Abandonnée en 2010 lors du Séminaire de Prospective Scientifique.
- ESSAIM, une constellation de 4 satellites, pour la DGA, est lancée avec succès le 18 décembre 2004 de Kourou avec Parasol.
- ELISA, 4 satellites pour le compte de la DGA. Alsat-2 : 2 satellites d'observation de la Terre pour le compte de l'Agence Spatiale Algérienne (ASAL). Le premier satellite a été lancé par une fusée PSLV le 12 juillet 2010 depuis le Centre spatial de Satish Dhawan, en Inde.
- SSOT / FASat-Charlie : satellite d'observation de la Terre pour le compte de la Fuerza Aeria de Chile (FAS), lancé le 16 décembre 2011 par un lanceur Soyouz-2 depuis le Centre Spatial Guyanais de Kourou.

- VNREDSat 1A : satellite d'observation de la Terre pour le compte de l'Académie des Sciences et Technologies du Vietnam (VAST), lancé le 7 mai 2013 par un lanceur VEGA depuis le Centre Spatial Guyanais de Kourou.
- SPIRALE, un démonstrateur de 2 satellites pour le compte de la DGA.

### 5.2.3 Le modèle éléments finis MYRIADE

Le modèle éléments finis qui a été utilisé au cours des applications présentées dans ce chapitre correspond à la structure de la plateforme MYRIADE du satellite TARANIS. Ce modèle est le résultat des différentes itérations effectuées lors du projet, sa définition est donc proche de celle du modèle de vol. Il est possible de distinguer les différentes parties de l'anatomie de la structure sur la figure 5.2, son maillage est composé d'un peu moins de 400 000 degrés de libertés :

- La caisse du satellite constitue la structure mécanique primaire. Elle renferme la plupart des équipements vitaux de la structure avec notamment les réserves d'énergie et l'ordinateur de bord.
- Les générateurs solaires sont modélisés par des éléments composites. Ces derniers sont ici représentés en position gerbée. Une fois le satellite séparé du dernier étage du lanceur, les générateurs solaires se déploient pour assurer la fourniture en énergie du système.
- Le senseur stellaire est un sous-système du satellite permettant le repérage de certaines étoiles fixes du ciel. Il permet au satellite de connaître sa position par rapport au repère formé par ces étoiles.
- La virole d'interface ou SIR (Satellite Interface Ring) constitue le système par lequel le satellite est fixé au lanceur au moment du décollage.
- La charge utile constitue la partie du satellite dédiée à sa mission. Elle regroupe donc les différents senseurs et/ou télescopes nécessaires à la mesure du phénomène étudié. Dans le cas présenté, la charge utile est définie comme une masse ponctuelle de valeur nominale 50kg, reliée par des liens infiniment rigides en différents points d'attache du plateau haut de la plateforme.

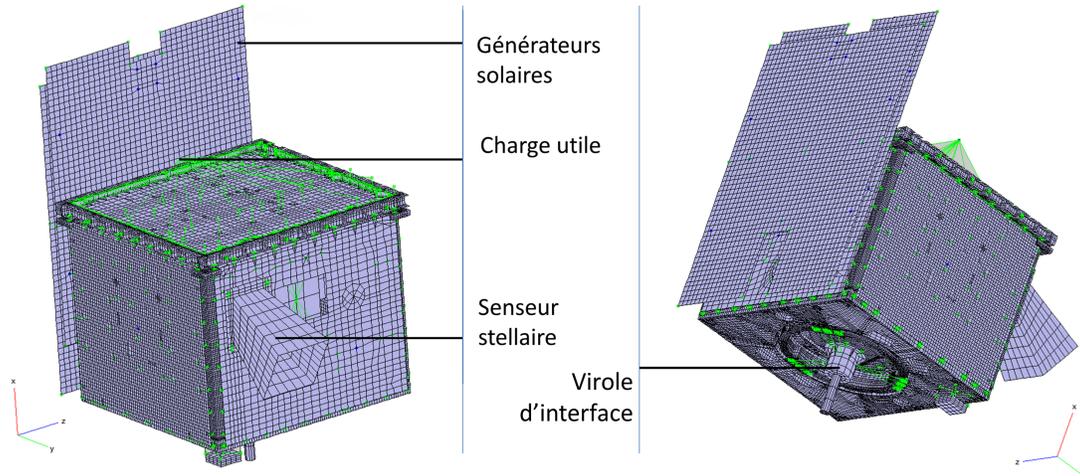


FIGURE 5.2: Visuel du modèle éléments finis de la plateforme MYRIADE

Ce modèle a permis dans un premier temps de calculer les 10 premiers modes linéaires de la structure. Ceux-ci constituent les modes globaux qui impactent la dynamique basse fréquence du satellite. Un aperçu de ces modes est disponible en figure 5.3. Les deux premiers modes de la structure sont des modes globaux latéraux du satellite dus à une rotation suivant  $y$  puis suivant  $z$  de la caisse du satellite autour de la virole d'interface. Les modes 3, 4, 6, 7, 8 et 9 constituent principalement des modes de générateurs solaires, même si le 9<sup>ème</sup> fait également intervenir la caisse du satellite. Enfin, les modes 5 et 10 déforment la caisse du satellite suivant des mouvements de pompage en  $x$  ou dans le plan  $(y, z)$ .

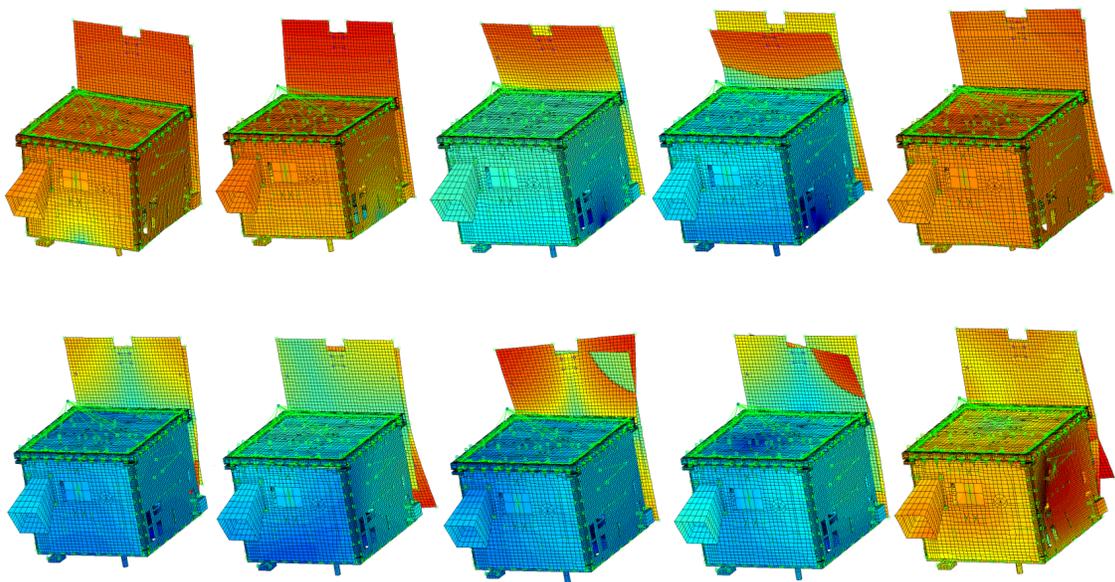


FIGURE 5.3: Aperçu des 10 premiers modes de la structure

## 5.3 Placement robuste de capteurs

Le scénario de l'application qui est présenté ici correspond à la conception robuste d'un plan de test pour la plateforme MYRIADE. Ceci comprend l'instrumentation complète de la structure en vue des tests en vibration. La mise en place de distributions de capteurs sera donc étudiée dans un premier temps. Concernant l'excitation de la structure, l'approche sera ici différente de ce qui a précédemment été présenté. En effet, dans le cas des satellites l'excitation se fait obligatoirement par la virole d'interface du satellite. Il est donc inutile de chercher une nouvelle position. L'étude se propose donc ici de rechercher une direction d'excitation robuste.

Le modèle éléments finis de la plateforme précédemment exposé est utilisé dans ce chapitre afin d'appliquer la méthodologie de placement de capteurs robuste développée dans le chapitre 3.

Comme il a été précisé dans la section précédente, la plateforme MYRIADE se veut générique. Elle se doit donc d'être robuste vis-à-vis des méconnaissances que vont constituer les éléments différents qui y seront intégrés suivant la mission à effectuer.

Afin de s'ancrer dans ce contexte, la structure de la plateforme est ici considérée comme étant bien définie, sans incertitudes. Les méconnaissances sont placées sur les entités amenées à varier suivant les missions, à savoir :

- La masse de la charge utile, dont l'incertitude est portée à 10% de sa valeur nominale de 50kg,
- La position de la charge utile, autorisée à évoluer jusqu'à 10cm autour de sa position nominale dans les directions y et z.
- Les positions de deux équipements additionnels sur la plateforme de 5kg peuvent également varier. Celles-ci sont restreintes aux positions correspondant aux points rouges et bleus sur la figure 5.4. L'horizon d'incertitude sera pour ce cas mesuré à l'instar de ce qui a été fait au chapitre 3. L'utilisation du logiciel AESOP développé au laboratoire a permis une gestion relativement simple de cette incertitude sans avoir à modifier le fichier .bdf obtenu depuis PATRAN. Un interfaçage depuis Matlab<sup>®</sup> permet de changer l'adresse des masses ponctuelle simulant les équipements en choisissant de manière aléatoire parmi les positions possibles à l'horizon d'incertitude courant.

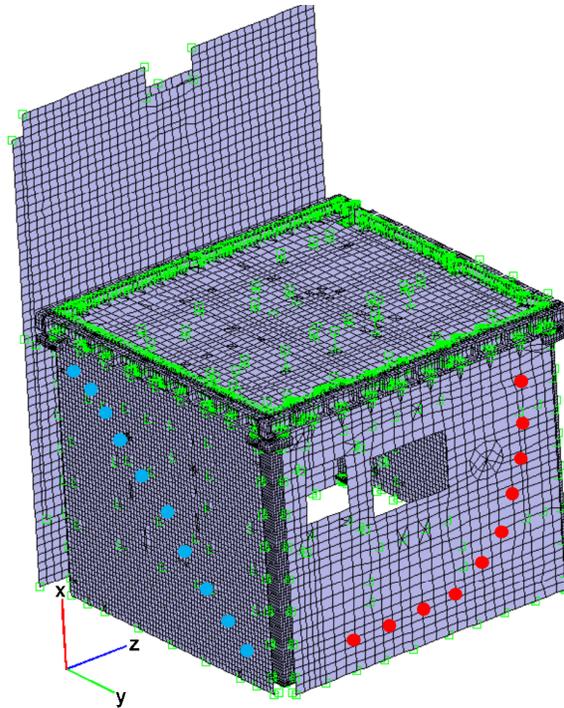


FIGURE 5.4: Surfaces candidates pour le placement de capteurs (positions possibles pour les équipements incertains en bleu et rouge).

Pour des raisons évidente d'accès aux zones où les capteurs doivent être placés, seuls les nœuds des plateaux de la caisse de la plateforme ainsi que ceux des générateurs solaires sont candidats à recevoir un capteur. Ces surfaces correspondent à celles affichées dans la figure 5.4. Ceci permet également de réduire le nombre de degrés de liberté possible à une valeur de 43 835.

Mode	f <sub>nom</sub> (Hz)	f <sub>min</sub> (Hz)	f <sub>max</sub> (Hz)	delta (Hz)	delta (%)
1	41.33	37.15	45.10	7.94	19,21
2	44.09	0.17	47.75	7.58	17.19
3	64.98	64.72	65.31	0.58	0.9
4	79.29	79.21	79.37	0.16	0.2
5	106.30	102.00	110.49	8.48	8
6	112.65	112.64	112.66	0.01	9e-5
7	115.75	115.51	116.10	0.58	0.5
8	116.76	116.74	116.78	0.03	2e-4
9	125.99	125.66	152.57	26.91	21.5
10	144.50	143.50	173.53	30.02	20.7

TABLE 5.2: Dispersion en fréquences propres

Les 10 premiers modes structuraux du système formé par la plateforme et la charge utile sont choisis comme modes cibles. Ceux-ci définissent en effet le comportement dynamique du satellite en dessous de 150Hz, ce qui englobe très largement le cadre des tests en balayage fréquentiel réels normalement menés jusqu'à 100Hz. C'est en effet sous cette fréquence que la majeure partie des efforts qu'aura à supporter la structure du satellite seront produit. D'autres tests, comme ceux en vibrations aléatoires, montent jusqu'à des fréquences de 2000Hz, mais ne seront pas étudiés ici.

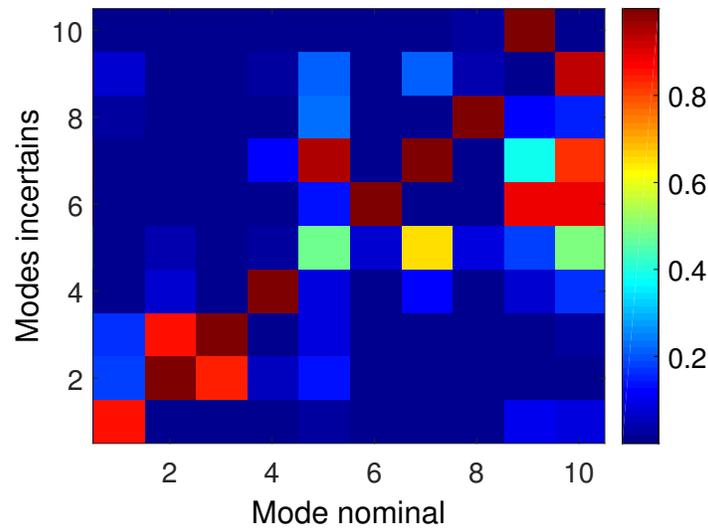


FIGURE 5.5: Dispersion des modes

Le tableau 5.2 et l'autoMAC présenté dans la figure 5.5 permettent d'apprécier la dispersion observable respectivement en fréquence et en déformée. Celles-ci se portent surtout sur les modes 5, 9 et 10. Ces modes correspondent à ceux entraînant des déformations de la caisse du satellite.

### 5.3.1 Positionnement de capteurs

Comme il a été développé au chapitre 3, la méthodologie de placement robuste de capteurs débute par une décomposition SVD de la base de données formée des bases modales échantillonnées concaténées. Pour chaque SVD calculée à un horizon d'incertitude donné, l'ensemble de ses valeurs singulières peut être visualisées, comme dans la figure 5.6.

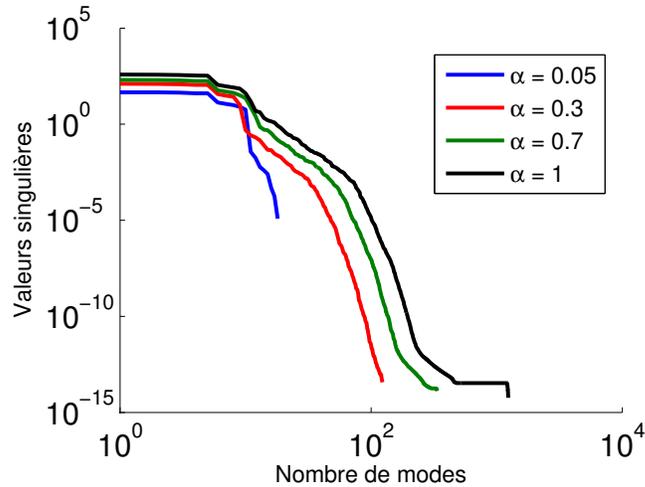


FIGURE 5.6: Profils des valeurs singulières pour différents horizons d'incertitude

L'examen des profils des valeurs singulières présentés figure 5.6 permet de constater que celles-ci sont de plus en plus importantes à mesure que l'horizon d'incertitude augmente. L'origine de ce phénomène est que, en augmentant l'horizon d'incertitude, des comportements vibratoires de plus en plus exotiques par rapport au nominal vont être pris en compte. Leur caractère orthogonal s'affirme donc également en entraînant une valeur singulière associée de plus en plus grande. Cet effet est à mettre en corrélation direct avec la propriété d'imbrication des ensembles *Info-Gap* dans le cadre duquel les incertitudes sont modélisées.

L'étude qui va suivre s'appuiera sur des distributions de capteurs comportant entre 10 et 20 capteurs. Celles-ci seront obtenues soit de manière déterministe soit de manière robuste en suivant le schéma de construction présenté en 3.2. Les comparaisons entre les différentes distributions seront établies pour des horizons de 0.3 et 0.7, correspondant à des incertitudes de respectivement 30 et 70% sur la position autorisée des équipements et de la charge utile, ainsi que pour une incertitude de respectivement 3 et 7% sur la valeur de la masse de la charge utile.

Comme il a été énoncé précédemment, la base modale d'intérêt regroupe les modes de la structure situés en dessous de 150Hz. Les bases modales servant de matière d'œuvre pour la construction des distributions robustes sont donc constituées des variantes existantes de ces modes sélectionnés par la SVD. Les bases modales utilisées pour la construction des distributions déterministes sont quant à elles construites en utilisant autant de modes naturels de la structure qu'il y a de capteurs à positionner. Cette manière de procéder permettra une comparaison entre des distributions construites sur des bases modales de même taille, et construites de manière adaptée à chacune des méthodes.

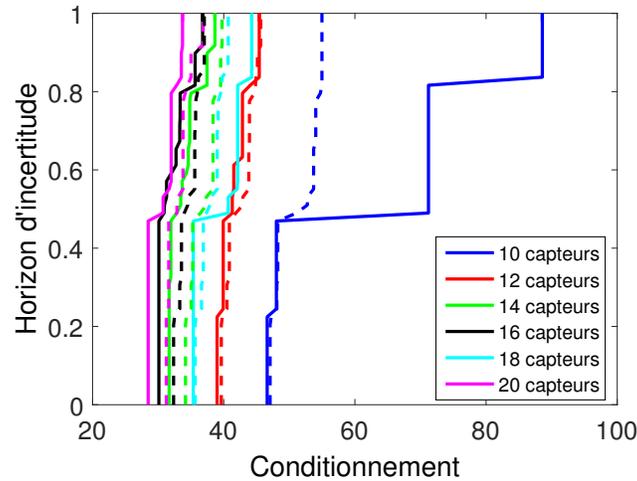


FIGURE 5.7: Courbes de robustesse pour des distributions construites de manière déterministe, et robuste pour un horizon d'incertitude de 0.3

Les résultats affichés dans la figure 5.7 montrent les courbes de robustesse tracées à partir des distributions de capteurs. Les performances de chaque distribution (construites ici pour un horizon d'incertitude de 0.3) sont testées suivant le critère en conditionnement défini en 3.2 sur toute la gamme d'incertitude possible. Les courbes issues de distributions obtenues de manière déterministe sont affichées en traits pointillés, tandis que les versions robustes sont en traits pleins.

Indépendamment du caractère déterministe ou robuste de l'approche employée, il est à noter que l'ajout de capteurs se traduit de manière quasi-automatique par l'amélioration des performances de la distribution. En effet, la structure étant relativement simple dans sa géométrie et n'ayant pas de modes locaux dans la plage de fréquences d'intérêt, l'ajout d'un capteur où que ce soit apporte presque toujours de l'information orthogonale sur les modes cible. Ceci ne se vérifie cependant pas pour les distributions à dix huit capteurs (en cyan). En effet, étant à un horizon d'incertitude de construction modeste, il est tout à fait possible que la recherche d'une distribution à  $N$  capteurs ne parvienne pas à être plus performante qu'une distribution à  $N-2$  capteurs. L'information peut alors être redondante et augmenter la valeur du conditionnement.

Une analyse générale de ces courbes montre rapidement qu'au delà d'un certain horizon d'incertitude, il est possible que les performances offertes par les distributions robustes puissent être moins bonnes que celles de leur pendant déterministe possédant le même nombre de capteur. C'est par exemple le cas pour les distributions de 10 capteurs pour un horizon d'incertitude supérieur à 0.5. En se focalisant sur des horizons d'incertitudes plus faibles, et en particulier pour  $\alpha = 0.3$  (i.e. l'horizon d'incertitude de construction) il

apparaît que les distributions robustes sont systématiquement plus performantes que les distributions déterministes associées.

L'approche robuste permet donc de garantir, pour un nombre de capteurs équivalents, une meilleure performance en terme de distinction des modes pour un horizon d'incertitude de construction donné.

La mesure du conditionnement permet un aperçu global de la performance d'une distribution de capteurs et présente une manière synthétique de les comparer entre elles. Elle reste néanmoins très hermétique à la compréhension de la manière dont les modes sont détectés et distingués individuellement. Pour accéder à cette information un outil classiquement utilisé en ingénierie est l'autoMAC de la matrice de capteurs [130]. Étant donné le cadre robuste que revêt l'application présentée, une version "robustifiée" de cet outil sera utilisé ici. Pour chaque coordonnée de la matrice d'autoMAC, la valeur maximum sur l'ensemble des échantillons inclus dans l'horizon d'incertitude d'étude sera conservée.

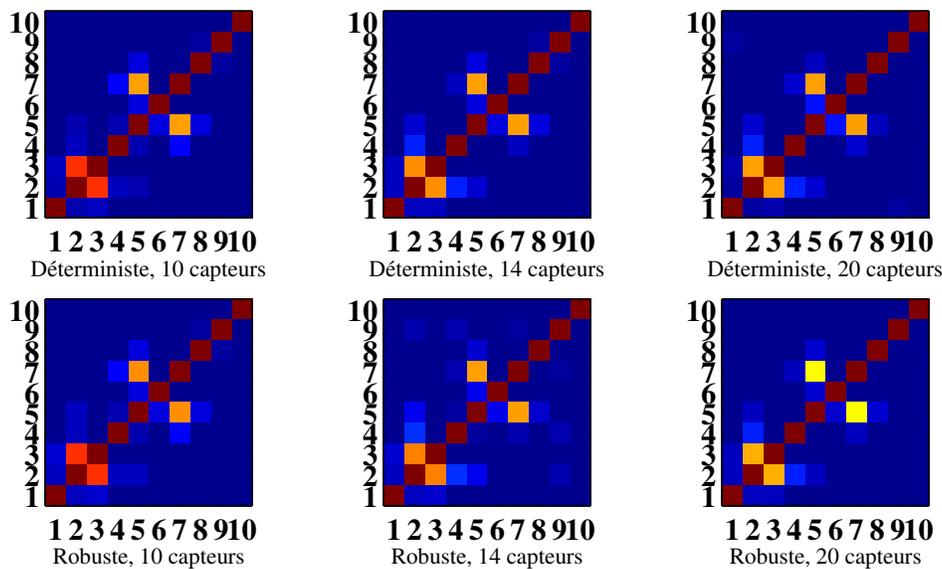


FIGURE 5.8: AutoMAC des distributions robustes et déterministes pour 10, 14 et 20 capteurs

Étant donné qu'il n'est pas possible de représenter les autoMACs pour différentes distributions de capteurs sur un même graphe, ou bien de manière évolutive sur une vidéo, la figure 5.8 présente les matrices d'autoMAC pour des distributions de 10, 14 et 20 capteurs dans les cas robustes et déterministes établis pour un horizon d'incertitude de 0.3.

Le premier couple de matrices, représentant les distributions de 10 capteurs montre une capacité de détection et de distinction équivalente pour les distributions robustes et déterministes. Ceci était parfaitement envisageable par la proximité des courbes bleues de

la figure 5.7 pour un horizon d'incertitude de 0.3. Ces autoMACs permettent également d'apprendre que les couples de modes 2 - 3 et 5 - 7 sont difficiles à distinguer.

L'observation des couples d'autoMACs pour des distributions de 14 et 20 capteurs permet d'apprécier l'amélioration croissante de la distinction des modes 2 - 3 et 5 - 7. En effet, la couleur des carrés associés à ces deux couplages devient de plus en plus froide à mesure que le nombre de capteurs autorisés augmente. L'augmentation du nombre de capteurs au sein des distributions entraîne également une divergence des comportements entre les approches robustes et déterministes. Il est ainsi possible de constater que pour ces couplages, la distinction des modes est toujours plus performante en adoptant une approche robuste, même si cela n'est clairement visible que pour 20 capteurs.

En contre-partie de cette amélioration, il est notable que le découplage des modes 8 - 5 ou encore 5 - 2 est légèrement moins efficace pour l'approche robuste. Ceci ne porte cependant pas préjudice ici dans la mesure où les indices d'autoMAC restent très faibles et que ces couplages s'effectuent entre des modes suffisamment éloignés fréquentiellement les uns des autres pour ne pas être confondus.

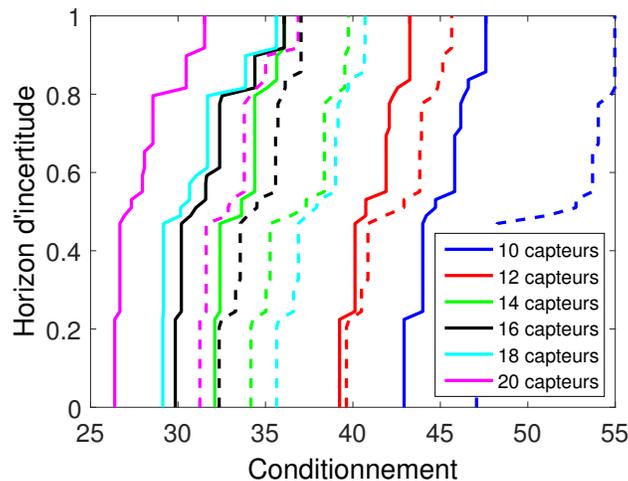


FIGURE 5.9: Courbes de robustesse pour les distributions de capteurs construites par approche QR

Afin de compléter les observations précédentes, l'analyse est renouvelée pour des distributions robustes de capteurs construites à un horizon d'incertitude de 0.7. La dispersion autorisée au sein des modes d'intérêt est donc bien supérieure. La première grande évolution observable grâce à la figure 5.9 (équivalente à la figure 5.7 dans le cas à  $\alpha = 0.3$ ) est la disparition des cas pathologiques qu'il était possible d'observer pour l'horizon d'incertitude de construction précédent. La généralisation des règles suivantes peut également être faite :

- Autoriser la mise en place de capteurs supplémentaires au sein d'une distribution établie de manière robuste améliore systématiquement ses performances en terme de distinction des modes.
- À nombre de capteurs égaux, une distribution construite de manière robuste permet là aussi une meilleure distinction des modes que son équivalent déterministe. Cette règle est valable pour tout horizon d'incertitude inférieur ou égal à l'horizon d'incertitude de construction.
- Une comparaison plus poussée permet également de remarquer que pour un nombre de capteurs équivalent, une distribution construite à un horizon d'incertitude de 0.7 sera également plus performante que son homologue établi à 0.3.

Ces phénomènes sont les conséquences directes de l'augmentation de la valeur de l'horizon d'incertitude. Celle-ci permet à la SVD de détecter et de sélectionner des comportements vibratoires de plus en plus exotiques par rapport aux modes nominaux cibles. Dans le cas d'un horizon d'incertitude de construction à 0.3, les emplacements rendus accessibles aux capteurs par ces modes permettent de distinguer ces derniers, mais ne sont pas encore "suffisamment orthogonaux" pour supporter des phénomènes vibratoires survenant à des horizons d'incertitudes plus importants. Dans ce cas, la méthode traditionnelle consistant à ajouter à la base modale cible des modes de plus hautes fréquences, sans prendre en compte les méconnaissances de modèle, permet de pallier ce problème et offre de meilleures performances.

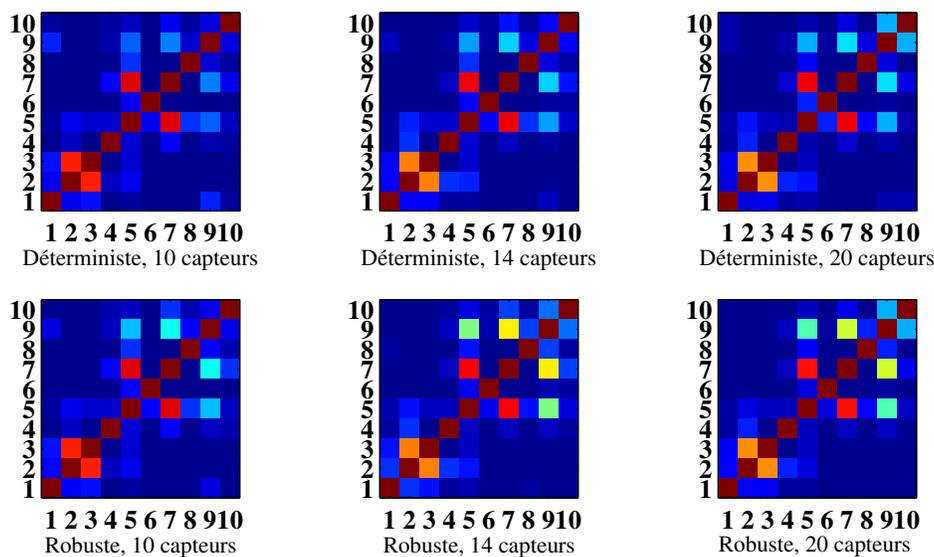


FIGURE 5.10: AutoMACs obtenus pour des distributions des 10, 14 et 20 capteurs par approches déterministes et robustes.

En passant à un horizon d'incertitude de 0.7, des phénomènes vibratoires beaucoup plus marginaux sont pris en compte lors de la construction des distributions par voie robuste. Ces derniers permettent de placer des capteurs à des emplacements plus légitimes et conduisent à des distributions plus performantes que l'approche déterministe sur l'ensemble de l'espace d'incertitude.

De la même manière que pour l'analyse à  $\alpha = 0.3$  les matrices automacs des approches déterministes et robustes sont construites et présentées figure 5.10 pour des distributions de 10, 14 et 20 capteurs et pour un horizon d'incertitude de 0.7.

Bien qu'il soit possible de constater que les indices 2 - 3 et 5 - 7 sont toujours plus faibles pour les distributions robustes que pour les distributions déterministes, cette amélioration de performance est beaucoup moins visible que via le critère de conditionnement de la figure 5.9.

Pour que l'intérêt de l'approche robuste réapparaisse, il ne faut plus regarder uniquement le maximum sur l'intervalle d'incertitude des indices autoMAC extradiagonaux, mais l'ensemble des indices calculés pour toutes les bases modales échantillonnées. Cette analyse est présentée dans la figure 5.11 pour les indices 5 - 7. En effet, les courbes pleines (obtenues par voie robuste) sont systématiquement dominées par les courbes en pointillés obtenues par voie déterministe. Cette hiérarchie s'établit indépendamment de la méthode de placement de capteurs utilisée (QR en bleu et Kammer en rouge). Cette représentation permet de pointer le fait que l'approche robuste apporte bien des indices 5 - 7 plus faibles sur toute la gamme d'incertitude. Elle permet donc toujours une meilleure distinction des modes.

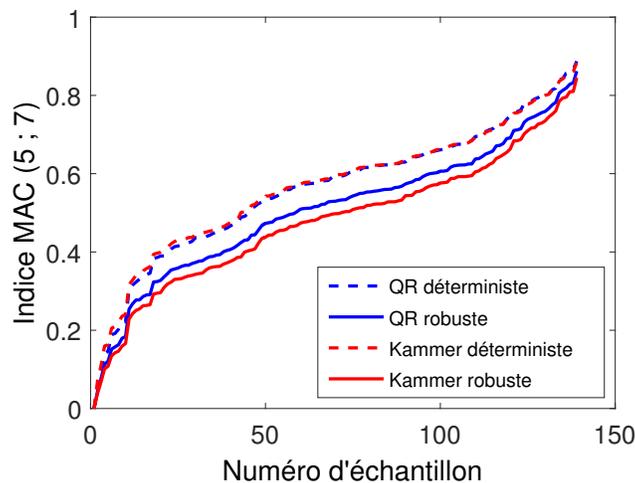


FIGURE 5.11: Valeur de l'indice MAC (5 ; 7)

Il est tout de même à noter une dégradation de la distinction en ce qui concerne le couplage 9 - 7. La valeur de l'indice MAC reste néanmoins suffisamment faible pour que la confusion entre ces modes n'ait pas lieu.

Dans la pratique, un nombre supérieur de capteurs est souvent placé lors des tests en vibration des structures de manière à assurer une redondance en cas de défaillance de certains d'entre eux, sans avoir à réitérer l'essai. L'emplacement de ces capteurs est en général basé sur un examen des déformées du modèle éléments finis, ou en étendant la base modale des modes cibles par les modes de plus hautes fréquences. Comme le montrent les figures 5.7 et 5.9, opter pour la deuxième méthode peut conduire à une amélioration ou à une dégradation des propriétés de la distribution suivant que le capteur ajouté permet ou non d'accéder à de nouvelles informations sur les modes d'intérêt de la structure.

Les travaux précédemment exposés prenaient le parti de ne comparer que des distributions de capteurs ayant le même nombre de capteurs quel que soit l'horizon d'incertitude considéré. Ceci permettait en effet de conserver et de comparer des matrices de mêmes tailles au fur et à mesure que l'incertitude progresse. Or, comme il a été mis en avant avec la figure 5.6, le degré d'incertitude conditionne la norme des valeurs singulières. Plus l'incertitude est importante, plus les premières valeurs singulières vont avoir tendance à augmenter du fait de l'orthogonalité croissante des nouvelles bases modales apparues.

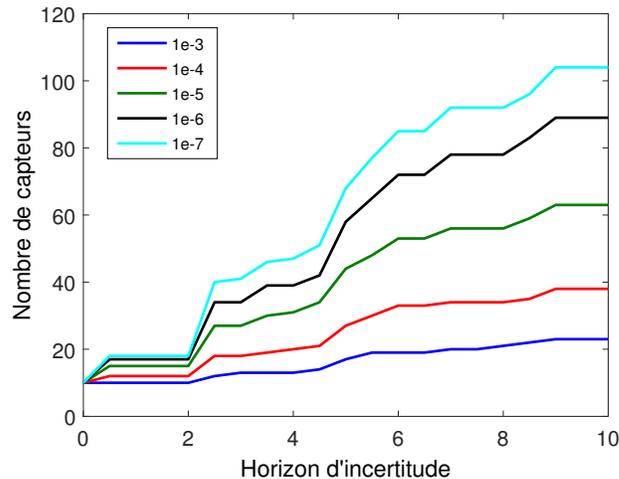


FIGURE 5.12: Nombre de capteurs recommandé en fonction du seuil choisi sur les valeurs singulières de la SVD et de l'horizon d'incertitude

Il est donc possible grâce à la SVD de choisir un seuil sur les valeurs singulières en deçà duquel celles-ci sont considérées comme ayant une participation négligeable. Pour un horizon d'incertitude donné, le nombre de valeurs singulières conservées, et donc le nombre de

vecteurs jugés influents dans la matrice  $\Sigma$ , permet de connaître le nombre de capteurs à positionner pour détecter toute l'information nécessaire. La figure 5.12 donne l'évolution du nombre de capteurs conseillés en fonction du seuil sur les valeurs singulières de la SVD et de l'horizon d'incertitude.

La valeur seuil de  $10^{-5}$  se retrouve de manière assez redondante dans la littérature lorsqu'il s'agit d'extraire l'information principale d'une décomposition SVD. Cette valeur sera utilisée par la suite. Une fois le nombre de capteurs choisi pour un horizon d'incertitude donné, il est possible de construire les distributions par voie déterministe ou robuste.

La figure 5.13 met à profit cette façon de procéder en comparant les performances de distributions dont le nombre de capteurs change en se basant sur les conseils de la décomposition par SVD. La courbe en rouge pointillée représente la courbe de robustesse de la distribution à dix capteurs déjà présente dans les figures 5.7 et 5.9. Celle-ci permet d'avoir une base de référence pour comparer les performances de la nouvelle approche. Les deux courbes pleines sont construites en prenant pour chaque horizon d'incertitude calculé le nombre de capteurs recommandé par la troncature en SVD. La courbe en bleu est établie par le procédé robuste, la rouge, par voie déterministe.

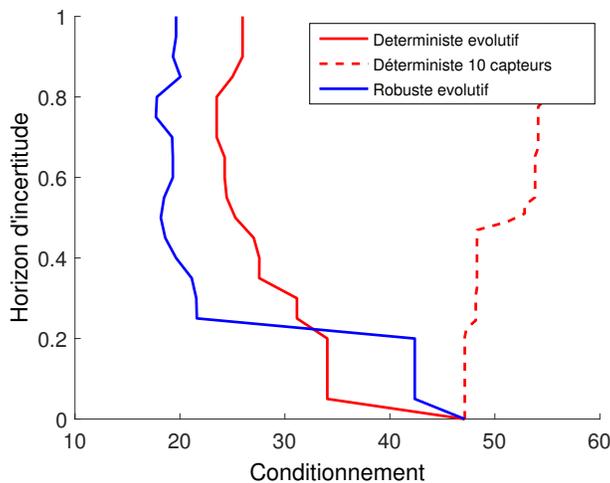


FIGURE 5.13: Évolution de la performance des distributions pour un nombre de capteur évolutif, indexé sur un seuil en SVD de  $1e-5$

L'ajout de capteurs guidé par la SVD au fur et à mesure de l'augmentation de l'incertitude entraîne une amélioration des performances des deux approches jusqu'à  $\alpha = 0.5$ , une stagnation s'observe par la suite. L'ajout de modes à plus hautes fréquences permet dans un premier temps à l'approche déterministe d'être plus performante que l'approche robuste. En effet, et comme il a été relevé plus tôt, les positions offertes par les modes de

fréquences propres supérieures sont plus intéressantes du point de vue de l'indépendance linéaire que celles possibles par l'analyse des seuls modes soumis à une faible incertitude. Cependant, à mesure que l'incertitude augmente, les courbes de robustesse se rapprochent pour finalement se croiser à  $\alpha = 0.21$ . Au-delà de cet horizon d'incertitude, l'approche robuste demeure celle offrant la meilleure performance.

### 5.3.2 Recherche d'une direction robuste d'excitation

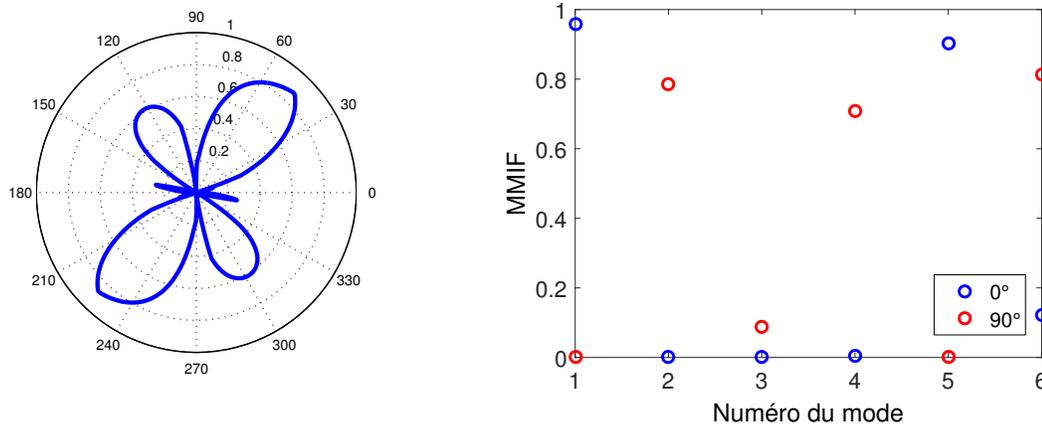
La recherche d'une localisation robuste pour l'excitation d'une plateforme satellite à la manière de celle présentée au chapitre 3 n'a pas d'intérêt du point de vue du dimensionnement et de la qualification du satellite. En effet, l'excitation en tests de cette catégorie de structure ne se fait pas par le biais d'un pot vibrant en un point donné, mais au moyen d'une table vibrante fixée à la virole d'interface du système. Cette configuration permet un test se déroulant sous des conditions aux limites conformes aux conditions dans lesquelles le satellite se trouve au sein de la coiffe du lanceur. Il n'y a donc pas de recherche à mener concernant le point d'application de l'effort lors des tests en sinus balayé.

Une optimisation est néanmoins possible concernant la direction de l'excitation dans le plan  $(y, z)$ . En effet, à l'heure actuelle, la structure est tout d'abord sollicitée suivant  $y$  puis désolidarisée du pot avant d'être testée suivant  $z$ . En plus de soumettre les opérateurs aux contraintes du démontage-montage de la structure, cette pratique s'appuie sur le fait que la dynamique basse fréquence du satellite est très corrélée à sa géométrie, et les deux premiers modes latéraux du satellite sont purs suivant ces deux axes. Plusieurs questions peuvent alors être soulevées :

- Premièrement, ces directions sont-elles optimales et/ou robustes ?
- Deuxièmement, et plus généralement, si le choix de deux directions orthogonales l'une à l'autre paraît justifié mécaniquement et géométriquement parlant, est-ce toujours le cas vis à vis des méconnaissances de modèle ?
- Enfin, n'y aurait-il pas moyen de gagner du temps en supprimant l'un des axes d'excitation mais en garantissant une bonne excitabilité des modes ?

Dans sa configuration d'essai, la structure du satellite est fixée rigidement à la table vibrante au moyen de systèmes vis-écrous par sa virole d'amarrage à la table vibrante. Afin de représenter ceci sur le modèle éléments finis, les emplacements des vis sur la plateforme sont tous liés en un point par des raideurs infinies. De cette manière, la sollicitation peut n'être appliquée qu'en un seul point. Le logiciel utilisé ici étant Nastran, le lien utilisé est un élément RBE2. L'étude se concentre ici sur les 6 premiers modes structuraux de la plateforme afin d'obtenir une bonne lisibilité des résultats.

Afin de tester la robustesse d'une direction d'excitation, une rotation de l'angle souhaité est appliquée au modèle éléments finis pour une excitation dont la direction ne change pas. Le critère de performance appliqué ensuite est toujours le même que dans le chapitre 3, à savoir le pire indice MMIF rencontré sur l'ensemble des échantillons testés sous un horizon d'incertitude donné.



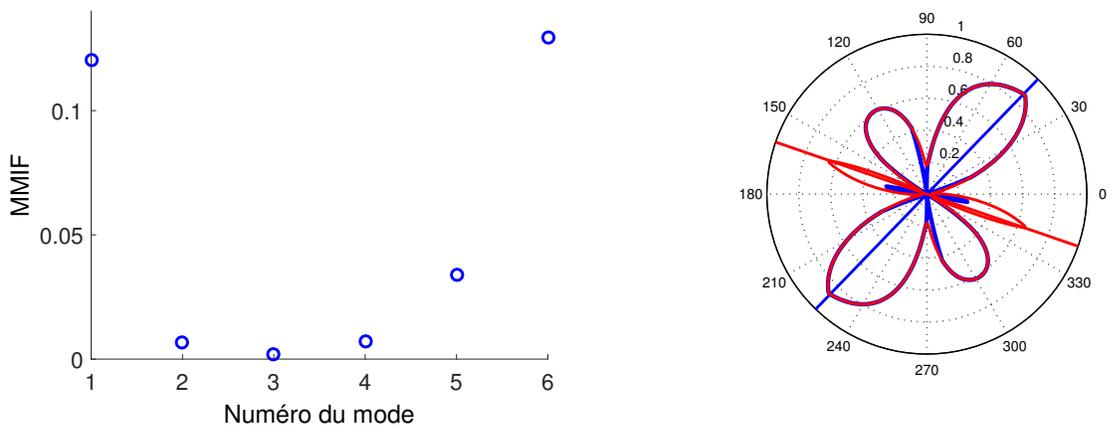
(a) Représentation circulaire des critères robustes MMIF à  $\alpha = 0.3$  (b) Pires indices MMIF par mode pour des directions d'excitation de  $0^\circ$  et  $90^\circ$

FIGURE 5.14: Analyse de la robustesse des différentes directions d'excitation de la structure

En ce plaçant à un horizon d'incertitude de 0.3 et en traçant le critère de performance robuste dans un graphique polaire, les calculs mènent à la figure 5.14(a). À cette fin, le critère affiché est en fait 1-MMIF de manière à faire ressortir les angles pour lesquels la direction de la sollicitation est la plus efficace. Le graphe permet ici de constater que pour les directions 0 et  $90^\circ$  correspondant à celles utilisées usuellement, les indices sont très faibles, donc mauvais. Ceci traduit le fait que l'un des modes au moins n'est pas excité. La figure 5.14(b) donne le détail par mode des indices MMIF vrais (plus faible est ici le meilleur). L'analyse des indicateurs montre que, mis à part le troisième mode qui est convenablement excité pour les deux angles, chaque mode est excité de manière presque parfaite dans une direction et de façon inefficace dans l'autre. Ceci est parfaitement normal pour les deux premiers modes au moins, qui sont chacun pur dans une direction différente. En revenant à la figure 5.14(a) il apparaît que d'autres directions offrent des conditions plus intéressantes. D'une part, une valeur proche de 1 atteste d'une bonne excitabilité des modes dans cette direction. D'autre part, la largeur du lobe renseigne sur la robustesse de cette excitabilité vis à vis de l'angle de sollicitation. Le constat peut ainsi être fait que des angles différents des angles naturels de la structure devraient être choisis pour exciter le

système car ils offrent une garantie que tous les modes d'intérêt seront excités de manière satisfaisante. Ceci est par exemple le cas pour un angle de  $46^\circ$ .

Il est ainsi possible d'envisager de repérer une direction d'excitation en recherchant l'angle qui minimise l'indicateur MMIF. Dans le cas présenté ici une seule direction d'excitation peut *a priori* suffire puisqu'en effet l'indicateur MMIF révèle que tous les modes sont excités de manière très satisfaisante. Néanmoins, dans le cas où certains modes resteraient sollicités de manière marginale, il est important de pouvoir déterminer une seconde direction suivant laquelle mener un autre test de vibration.



(a) Indices MMIF par mode pour la première direction choisie par l'approche robuste (b) Représentation circulaire des critères robustes MMIF à  $\alpha = 0.3$  pour la recherche de la seconde direction d'excitation

FIGURE 5.15: Résultats de la recherche d'une seconde direction d'excitation

Lors du premier calcul, la mise en mémoire de l'indicateur MMIF pour chaque angle testé et chaque mode cible permet de connaître *a posteriori* le degré d'excitation de chaque mode à l'angle  $\theta_1$  défini précédemment comme étant le plus robuste. En définissant un seuil sur l'indicateur MMIF à partir duquel le mode est considéré comme étant mal sollicité, il est possible de décrire un nouveau set de modes cibles pour lesquels une nouvelle direction d'excitation sera recherchée.

Dans l'exemple présenté ici, le détail des indicateurs MMIF par mode est présenté figure 5.15(a) pour un angle d'excitation de  $\theta_1$ . Un seuil arbitrairement fixé à  $8/10 \cdot \min(\text{MMIF})$ , soit la règle des 80/20, permet d'identifier uniquement les modes 1 et 6 comme étant ceux nécessitant la recherche d'une seconde direction de sollicitation. Tous les indicateurs MMIF ayant été calculés à l'étape précédente, il suffit de retirer de la base de données ceux liés aux modes jugés bien sollicités. Le nouvel indicateur tracé à partir du pire MMIF par angle sur les modes restants est affiché 5.15(b) en rouge. La géométrie nouvellement

obtenue inclut la précédente car elle est libérée de la contrainte des modes déjà identifiés et traités de manière satisfaisante.

La nouvelle direction de sollicitation peut ensuite être déterminée en recherchant le MMIF minimum ne se trouvant pas sur l'aire d'efficacité de la direction précédemment déterminée. En pratique, ce minimum a été recherché à une distance supérieure à  $45^\circ$  du précédent. L'angle  $\theta_2$ , ici déterminé à  $162^\circ$  se situe au sommet d'un lobe étroit, formé par la disparition de la contrainte d'excitabilité des modes 2 à 5.

Il est intéressant de remarquer que l'angle entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  n'est pas orthogonal. Ceci est le fruit des méconnaissances de modèle. En effet, les variétés de modes dimensionnants peuvent ne pas provenir de la même base modale échantillon.

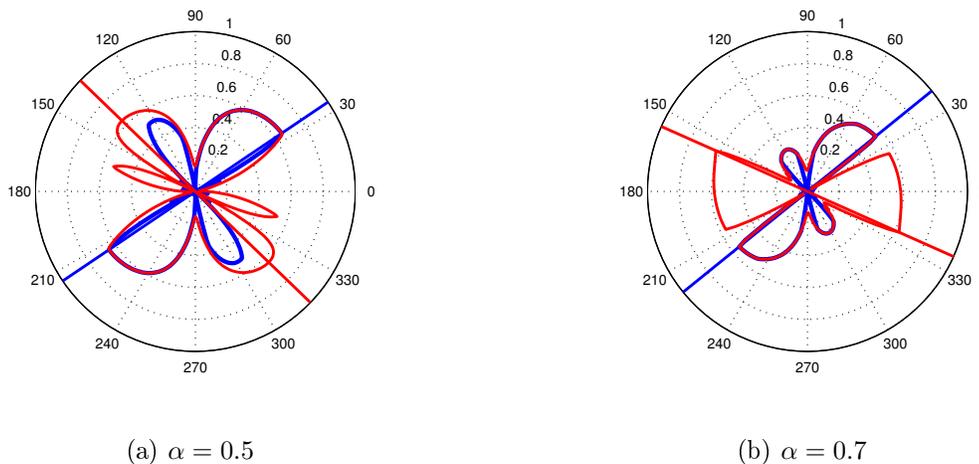


FIGURE 5.16: Représentation circulaire des critères robustes MMIF pour différents horizons d'incertitude

La procédure peut bien entendu être lancée pour n'importe quel horizon d'incertitude. La figure 5.16 permet de constater l'évolution des indicateurs et des directions robustes d'excitation au fur et à mesure de l'augmentation de l'horizon d'incertitude à 0.5 puis à 0.7.

Il est à noter en tout premier lieu que la propriété d'imbrication des domaines d'incertitude se retrouve ici dans le caractère inclusif des profils bleus. Cette remarque ne s'applique pas sur les profils issus de la seconde phase de recherche car ceux-ci ne sont pas systématiquement basés sur les mêmes modes. Ces derniers dépendent en effet de l'horizon d'incertitude.

Cet effet d'auto-inclusion va de pair avec un effet de rétractation de la figure et l'augmentation de l'horizon d'incertitude. L'ajout de modes entraîne en effet une contrainte de plus

en plus grande sur l'excitabilité des modes, d'où une augmentation globale des niveaux MMIF.

## 5.4 Conception robuste de structure

### 5.4.1 Définition du problème de conception robuste de structure

Le problème d'optimisation que cette section cherche à traiter est classique dans le cadre d'une application issue du domaine de l'aérospatial. Il s'agit de minimiser la masse du système  $\mathcal{M}_T$  tout en assurant une rigidité minimal afin que certaines de ses fréquences propres n'entrent pas en interaction avec certaines sollicitations de l'environnement. La formalisation du problème sous forme RRDO-IG est disponible dans l'équation 5.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{d} \in R^{n_d}} \mathcal{M}_T \\ \text{avec} \\ \mathbf{m} \in U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) \\ \alpha = \alpha_i \\ \mathbf{d}_{min} \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}_{max} \\ P_f \leq P_c \\ \mathcal{D}_f = \{\mathbf{x} : \min(f_1, f_2) \leq f_c\} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

avec :

- $\mathbf{d}$ , les paramètres de conception du système,
- $\mathbf{x}$ , les paramètres incertains qui ne sont pas des paramètres de conception,
- $\mathbf{m}$ , l'ensemble des paramètres méconnus du problème. Il est possible d'avoir  $\mathbf{m} = [\mathbf{x}, \mathbf{d}]$  ou  $\mathbf{m} = \mathbf{x}$ .
- $f_1$  et  $f_2$  correspondent aux deux premières fréquences propres du système.
- Le domaine de défaillance  $\mathcal{D}_f$  est ici défini tel que la plus faible des fréquences propres du système ne devienne pas inférieure à une valeur seuil  $f_c$ . Cette valeur est choisie de manière à éviter des effets de couplages entre les modes du satellite et ceux du lanceur.
- Le modèle d'incertitude  $\mathbf{m} \in U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)})$  permet ici d'intégrer la prise en compte des méconnaissances de modèle dans le problème d'optimisation.

### 5.4.2 Étude de sensibilité et choix des paramètres de conception

Des travaux antérieurs à la thèse et réalisés sur la même structure ont déjà permis d'étudier en partie l'optimisation des épaisseurs des raidisseurs du plateau bas du satellite. Ces éléments sont visibles sur la figure 5.2 à droite. Les paramètres incertains alors considérés étaient les raideurs d'interface situées entre les panneaux latéraux du satellite.

Les paramètres de conception utilisés ici sont les épaisseurs des quatre cornières de la structure du satellite (voir figure 5.17). Celles-ci constituent en effet le seul lien mécanique structurellement important dans la transmission des efforts depuis le plateau bas vers le plateau haut de la structure. Ces cornières sont des poutres en L modélisées par des éléments plaque (PSHELL) sous Nastran. Elles sont d'une épaisseur nominale de 3mm sauf aux zones d'interface des panneaux latéraux où cette épaisseur atteint 6mm. Ces zones sont celles colorées en rouge sur l'une des cornières de la figure. Pour chacune des cornières, les deux épaisseurs sont regroupées sous une seule et même variable adimensionnelle. Le problème compte donc quatre paramètres de conception.

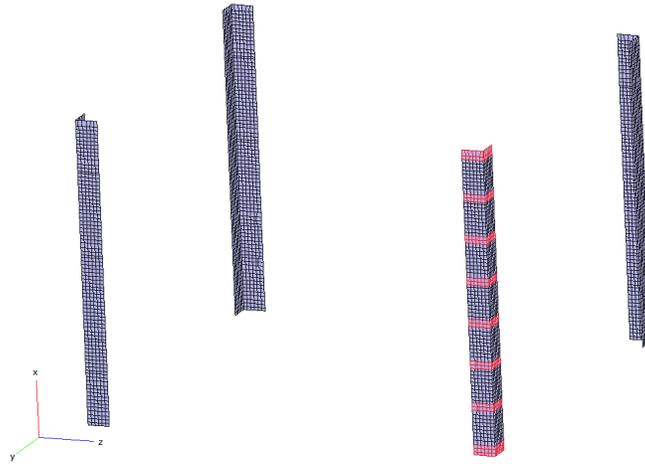


FIGURE 5.17: Visuel du modèle éléments finis des cornières de la plateforme MYRIADE

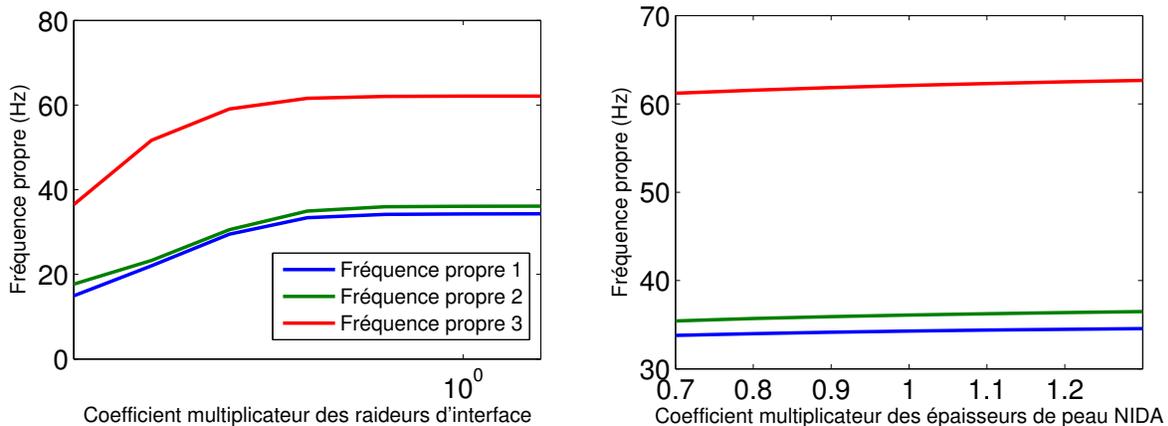
### 5.4.3 Choix des paramètres incertains

Différents travaux précédemment entrepris ou financés par le CNES ont mis à jour plusieurs sources importantes d'incertitudes au sein des modèles éléments finis de satellites.

- Il y est indiqué que les Masses Non-Structurales (NSM), peuvent dans les faits comporter une erreur allant jusqu'à 20%. Ce paramètre est utilisé sous NASTRAN pour ajouter une masse fictive et répartie sur les éléments des plaques latérales de la structure de manière à simuler les harnais qui ne sont pas modélisés dans la structure.

- Les épaisseurs des peaux des structures sandwich NIDA utilisées sur les plateaux des satellites peuvent avoir une dispersion allant jusqu'à 30% autour des 0.8mm nominaux. Les épaisseurs choisies sur le modèle d'études sont situées elles aussi sur les plateaux latéraux du satellite.
- Le but étant ici de dimensionner la plateforme du satellite sans en connaître la charge utile, il faut s'intéresser à l'historique des satellites de la filière Myriade. Celui-ci permet de définir l'intervalle sur lequel la masse de la charge utile peut varier. La charge utile est modélisée ici au moyen d'une masse ponctuelle placée à son centre de gravité. La masse nominale de la charge utile  $M_{CU}$  est choisie comme étant de 50kg avec 20% d'incertitude maximum sur sa masse et 10cm de déplacement possible selon les axes y et z.
- De manière plus générale, les raideurs d'interfaces sont toujours sujettes à de fortes variations, étant donnée la complexité des phénomènes mécaniques ayant lieu en ces points. Les dispersions attendues peuvent aller de  $10^{-3}$  à 10 fois la valeur prévue. Les interfaces utilisées lors de cette étude sont celles assurant les connexions des différents plateaux latéraux  $k_{PL}$  et bas  $k_{PB}$ . La raideur positionnée entre la plateforme et la charge utile  $k_{CU}$  est également étudiée.

L'étude qui va suivre n'est pas une analyse de sensibilité à proprement parler. L'influence des différents paramètres sensibles y est étudiée en observant l'effet de leur variation autorisée sur les grandeurs contraintes du problème. L'évolution des trois premières fréquences propres est donc évaluée pour différentes valeurs possibles des différents paramètres. Concernant les raideurs, celles-ci sont calculées pour toutes les puissances entières de  $10^{-5}$  à 10 fois leur valeurs nominales. Les raideurs d'interface des plateaux sont arbitrairement regroupées sous une seule et même variable. Les autres paramètres sont calculés pour chaque dixième possible sur leur intervalle d'existence.



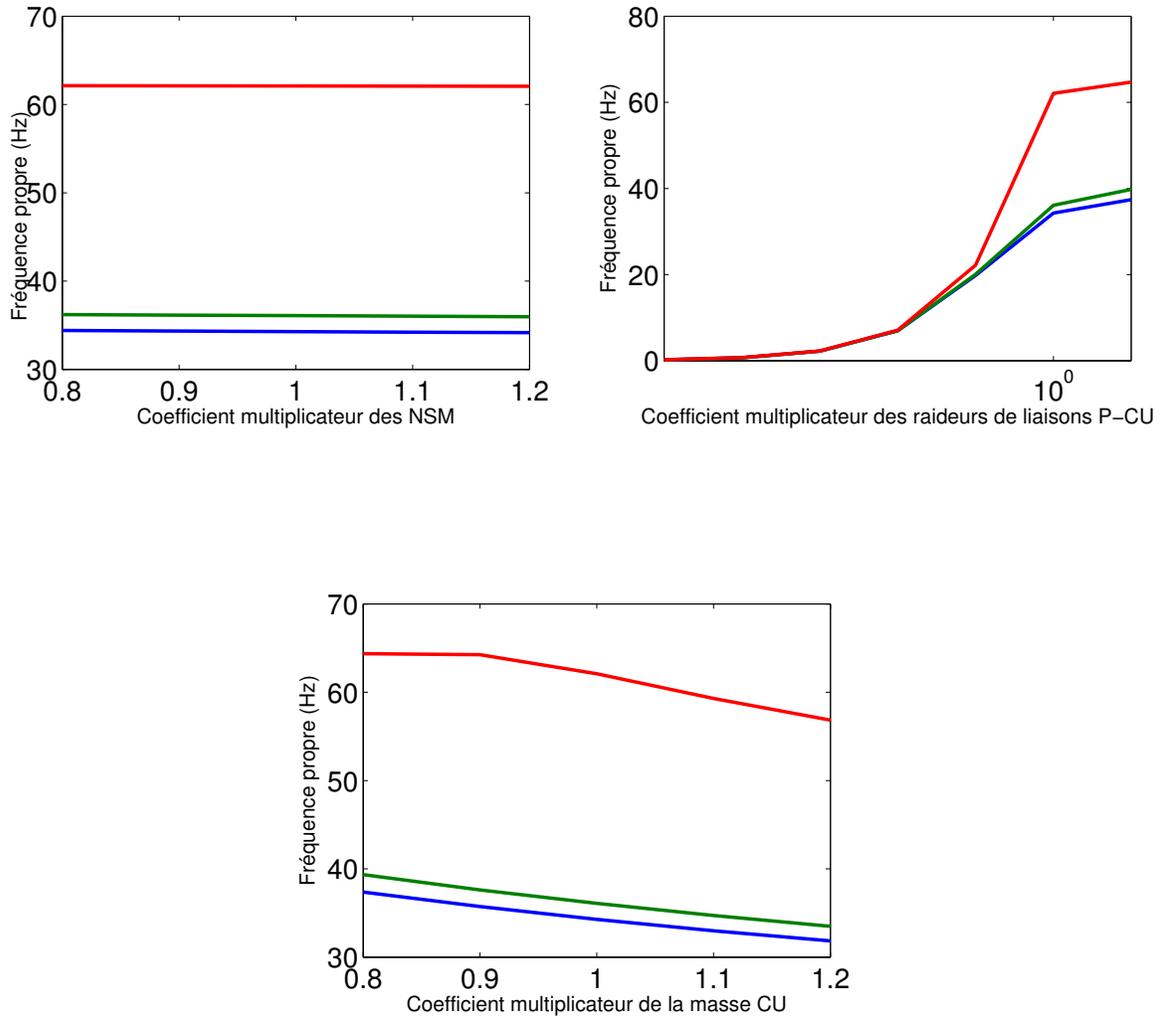


FIGURE 5.18: Approche cas par cas de la sensibilité des premières fréquences propres aux paramètres incertains

L'étude de la variation des fréquences propres en fonction de l'évolution des paramètres incertains est disponible figure 5.18. Son analyse permet d'écartier du problème les paramètres qui ne sont pas jugés suffisamment sensibles.

En effet, la variation des épaisseurs de peaux NIDA et des NSM (respectivement figures 5.18(b) et (c)) n'entraînent pas, par exemple, une différence de fréquence suffisamment importante pour entrer en jeu. Les paramètres à conserver sont donc toutes les raideurs d'interface ainsi que la masse de la charge utile (respectivement figures 5.18(a), (d) et (e)).

L'étude de sensibilité qui vient d'être exposée a été rendue possible car le problème est ici de dimension encore relativement faible, et possède des grandeurs simples à quantifier et à trier (des fréquences propres).

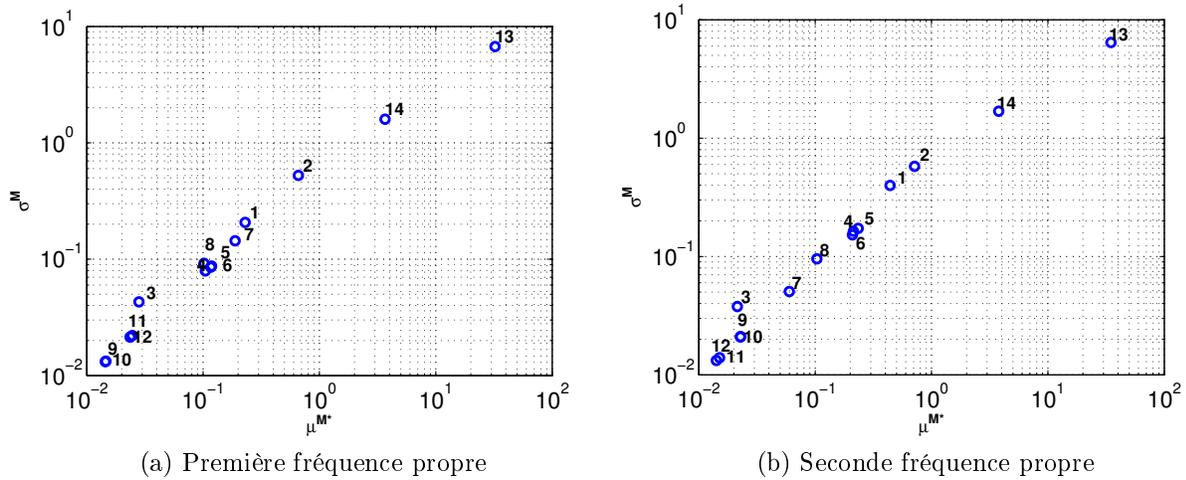


FIGURE 5.19: Résultats de l'analyse de Morris

Afin de généraliser la méthode et de donner plus d'assise à ce choix dans les paramètres incertains, une analyse de Morris a été effectuée. Cette dernière est une analyse de sensibilité qualitative capable de traiter des problèmes de haute dimension de manière globale. Elle permet donc d'obtenir un aperçu beaucoup plus fiable qu'une approche par différence finie mais également plus rapide que des approches quantitatives telles que FAST. La méthode de Morris fait également partie des outils disponibles dans AESOP, et un descriptif de la méthode implémentée peut être trouvé en annexe C.

Les résultats de l'analyse de Morris sont disponibles dans les diagrammes affichés en figure 5.19, et permettent de retrouver la même hiérarchisation des paramètres du problème. Chacun des diagrammes montre la sensibilité des premières fréquences propres vis-à-vis des paramètres incertains.

En prenant la valeur maximale des valeurs absolues sur les moyennes des effets élémentaires  $\mu^{M*}$ , qui se trouve être aux alentours de 40 pour le paramètre 13 dans les deux cas, il est possible de sélectionner les paramètres sensibles en gardant tous ceux ayant une sensibilité au moins cent fois inférieure. Ce calibre constitue un critère courant de négligeabilité. Ceci englobe donc les paramètres 1, 2, 13 et 14, qui constituent respectivement les raideurs d'interfaces latérales et basses, la masse de la charge utile et enfin la raideur reliant la charge utile à la plateforme.

#### 5.4.4 Construction des métamodèles

La stratégie de conception robuste par optimisation réclame un grand nombre de calculs des fonctions objectifs et contraintes du problème, en particulier lors de l'évaluation des

probabilités de défaillance. Chacun de ces calcul sous-entend l'appel et le calcul modal du modèle éléments finis, soit une cinquantaine de secondes, bien que ce modèle industriel soit encore d'une taille raisonnable. Une stratégie de métamodélisation a donc été mise en place afin de diminuer de manière drastique le temps de calcul lors des phases d'optimisation, ce qui permettra également de multiplier les cas d'étude. La première étape consiste en l'échantillonnage du modèle éléments finis. Celui-ci a été réalisé de la même manière que pour le placement de capteurs grâce au logiciel AESOP. Les paramètres de raideurs ont été échantillonnés de manière logarithmique entre  $10^{-3}$  et 10 fois leur valeur nominale, les paramètres d'épaisseur  $ep_i$  entre 0.1 et 2.5 fois et le paramètre de masse entre 0.5 et 1.5 fois. 2000 échantillons sont réservés à la construction des métamodèles, tandis que 200 autres permettront d'en estimer les performances de prédiction.

Compte tenu des fonctions objectifs et contraintes que le problème contient, les métamodèles doivent être capables d'évaluer avec justesse les premières et deuxièmes fréquences propres du système, ainsi que sa masse totale. Trois métamodèles sont donc à construire.

Pour chacun d'entre eux, les tableaux 5.3, 5.4 et 5.5 permettent la comparaison des performances de différentes méthodes de métamodélisation.  $RS_2$  et  $RS_3$  sont des surfaces de réponses d'ordre 2 et 3,  $K_1$  et  $K_2$  des Krigeages d'ordre 1 et 2 et enfin,  $N_{23}$  et  $N_{34}$  des réseaux de neurones à respectivement 3 niveaux de 2 neurones et 4 niveaux de 3 neurones. Le descriptif de ces métamodèles est disponible en annexe D.

	$RS_2$	$RS_3$	$K_1$	$K_2$	$N_{23}$	$N_{34}$
R $\hat{2}$	0.9870	0.9974	1	1	0.9711	0.9793
ERAM	3.8898	1.709	0.0225	0.0144	5.8170	4.6428
MERA	15.2099	6.7862	0.2413	0.1443	16.6357	23.5470

TABLE 5.3: Critères de performance pour la métamodélisation de la première fréquence propre

	$RS_2$	$RS_3$	$K_1$	$K_2$	$N_{23}$	$N_{34}$
R $\hat{2}$	0.9855	0.9978	1	1	0.9944	0.9861
ERAM	4.2789	1.6103	0.0247	0.0175	2.5742	3.8024
MERA	15.9940	7.2874	0.2888	0.1578	11.0352	17.8498

TABLE 5.4: Critères de performance pour la métamodélisation de la deuxième fréquence propre

	$RS_2$	$RS_3$	$K_1$	$K_2$	$N_{23}$	$N_{34}$
$R\hat{2}$	1	1	1	1	0.9923	0.9735
ERAM	0.0112	0.0113	0.0110	0.0111	0.4145	0.7269
MERA	0.0264	0.0290	0.0225	0.0264	1.2859	2.5059

TABLE 5.5: Critères de performance pour la métamodélisation de la masse

Les métamodèles obtenus par opération de Krigeage offrent les meilleures performances de prédiction pour les trois grandeurs d'intérêt. Les vitesses d'exécution des appels aux métamodèles par Krigeage n'étant pas contraignantes (moins du centième de seconde),  $K_2$  est choisi pour l'évaluation du modèle dans les applications qui suivront.

## 5.4.5 Conception robuste en présence de méconnaissances de modèle

### 5.4.5.1 Modèles *Info-Gap*

L'étude qui suit porte sur différentes configurations du problème décrit équation 5.1. Les cas  $C_\sigma$  et  $C_{\mu,\sigma}$  sont envisagés comme dans le chapitre 4, mais également les cas où les paramètres de conception portent ou non une incertitude.

Dans la première configuration, les paramètres de conception ne comportent pas de méconnaissances de modèle :

- $\mathbf{x} = [k_{PB}, k_{PL}, k_{CU}, M_{CU}]$
- $\mathbf{d} = [ep_1, ep_2, ep_3, ep_4]$

Dans la seconde, ceux-ci sont intégrés au vecteur des paramètres incertains :

- $\mathbf{x} = [k_{PB}, k_{PL}, k_{CU}, M_{CU}, ep_1, ep_2, ep_3, ep_4]$
- $\mathbf{d} = [ep_1, ep_2, ep_3, ep_4]$

L'incertitude portée par les paramètres de conception suit une loi uniforme dont les bornes inférieures et supérieures sont situées à  $\pm 0.1mm$ . Cette incertitude permet de représenter les tolérances existantes sur la fabrication de ces pièces mécaniques. Dans les faits, l'ajout de ces tolérances apporte des différences très minimes par rapport aux courbes de robustesse obtenues au cas présenté précédemment. Ces dernières ne sont donc pas présentées dans le manuscrit mais il est intéressant de savoir que les programmes ont été implémentés de manière à supporter ce genre de tolérances.

### 5.4.5.2 Étude des courbes de robustesse

Pour cette première application d'optimisation, la probabilité de défaillance critique a été fixée à 0.11. Cette valeur est très élevée dans le cadre d'une application industrielle, mais permet l'observation de différents phénomènes intéressants. La limite en fréquence est, elle, fixée à  $f_c = 34\text{Hz}$ . Dans tous les cas présentés ici la probabilité de défaillance est estimée par la méthode FORM dont les résultats ont préalablement été comparés à une approche par tirage de Monte-Carlo.

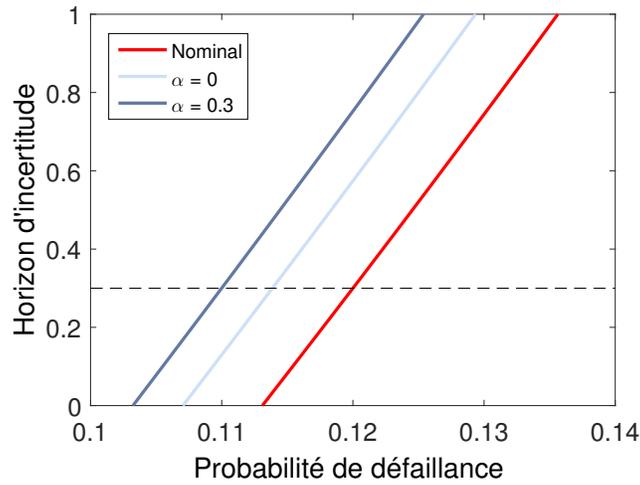


FIGURE 5.20: Courbes de robustesse pour le design nominal, et les designs obtenus par RBDO et RRDO-IG à 30% d'incertitude pour le cas  $C_\sigma$

Ep1	Ep2	Ep3	Ep4	Pc	Tps	Mc
1	1	1	1			145.8kg
0.5	0.5	0.5	0.5	0.11	14s	144.9kg
0.8962	1.2784	0.5044	0.5015	0.11	61s	145.45kg

TABLE 5.6: Analyse des designs

Les résultats présentés dans la figure 5.20 sont en partie en accord avec ceux du chapitre 4. En effet, la résolution du problème RRDO-IG à  $\alpha = 0.3$  permet bien l'obtention d'un design capable de respecter la contrainte de  $P_c \leq 0.11$ . En contre partie, l'optimisation contraint le design à être plus performant sur les horizons d'incertitudes plus faibles.

Cette règle est cependant enfreinte lors de la résolution du problème RRDO-IG pour  $\alpha = 0$ , qui est équivalente à un problème de type RBDO. Logiquement, pour un horizon d'incertitude nul, la courbe de robustesse obtenue devrait être concourante avec la verticale à  $P_f = 0.11$ . Contrairement à ce qui a été présenté au chapitre 4, ce n'est pas le cas sur la

figure 5.20. Ceci est du à un effet de saturation car les variables de conception ne peuvent pas sortir de l'intervalle  $[0.5, 2]$ . Il est d'ailleurs possible de constater grâce au tableau 5.6 que les valeurs des paramètres de conception correspondant à cette courbe de robustesse ont tous atteint la borne limite basse de leur intervalle d'existence pour cette application. De tels phénomènes sont parfaitement normaux dans le cadre de la mise en place d'une méthode d'optimisation. Il convient donc de toujours tracer une courbe de robustesse au préalable de manière à connaître les ordres de grandeurs de la probabilité de défaillance cible atteignable.

Les effets de saturation sont ici accentués par le fait que les fréquences propres de la structure soient relativement peu sensibles aux paramètres de design par rapport aux variables incertaines. Si les variables de conceptions avaient été d'une sensibilité plus importante, les effets de saturation existeraient toujours, mais seraient repoussés beaucoup plus loin vers les faibles et hautes probabilités de défaillance, comme cela était le cas pour l'exemple du chapitre 4.

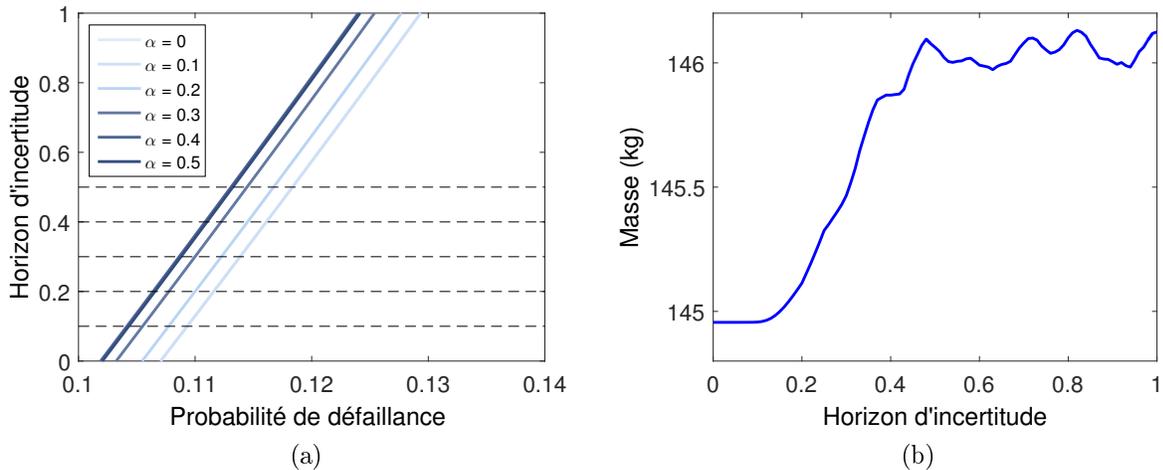


FIGURE 5.21: Courbes de robustesse obtenues par RRDO-IG pour des horizons d'incertitude de construction de 0 à 0.5 (a). Évolution de la masse après optimisation de la structure (b)

Cet effet de saturation entraîne que les courbes de robustesse sont elles-même confinées dans un certain espace. La figure 5.21(a) montre différentes courbes de robustesse tracées suite à la résolution du même problème RRDO-IG que précédemment, pour les horizons d'incertitude de 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5. Alors que les designs obtenus pour  $\alpha = 0.2$  et  $\alpha = 0.3$  respectent bien la contrainte en probabilité de défaillance pour l'horizon d'incertitude de construction, ce n'est pas le cas pour les autres configurations. En effet, pour  $\alpha = 0$  et

$\alpha = 0.1$ , les courbes de robustesse, qui sont confondues, coupent l'axe  $P_f = 0.11$  pour un horizon d'incertitude de 0.11, donc supérieur à 0.1. Dans les cas où  $\alpha = 0.4$  et  $\alpha = 0.5$  l'intersection a lieu pour un horizon d'incertitude aux alentours de 0.36, donc en deçà de 0.4. Dans les deux cas, ces limites sont dues à la saturation des variables de conception qui ne peuvent être optimisées au-delà des limites de leur intervalle autorisé.

La figure 5.21(b) donne aussi une image de cette saturation en affichant la valeur de la masse du satellite optimisé pour différents horizons d'incertitude de construction. Des paliers sont clairement discernables en dessous de 0.1 et au dessus de 0.4. Dans le second cas, l'instabilité est due au fait que ce n'est pas toujours la ou les mêmes variables qui sont saturées.

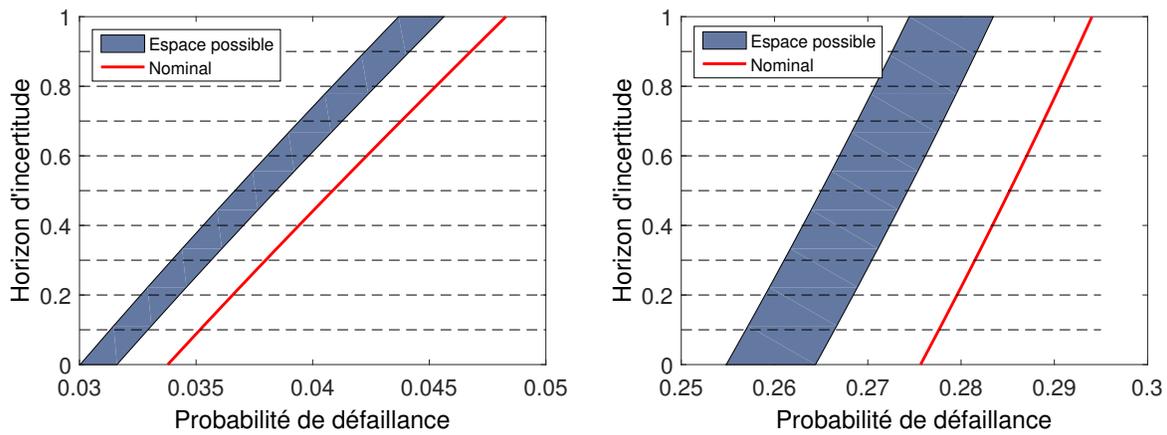


FIGURE 5.22: Courbes de robustesse du design nominal et espace d'existence des courbes de robustesse pour  $f_c = 33\text{Hz}$  (a) et  $35\text{Hz}$  (b)

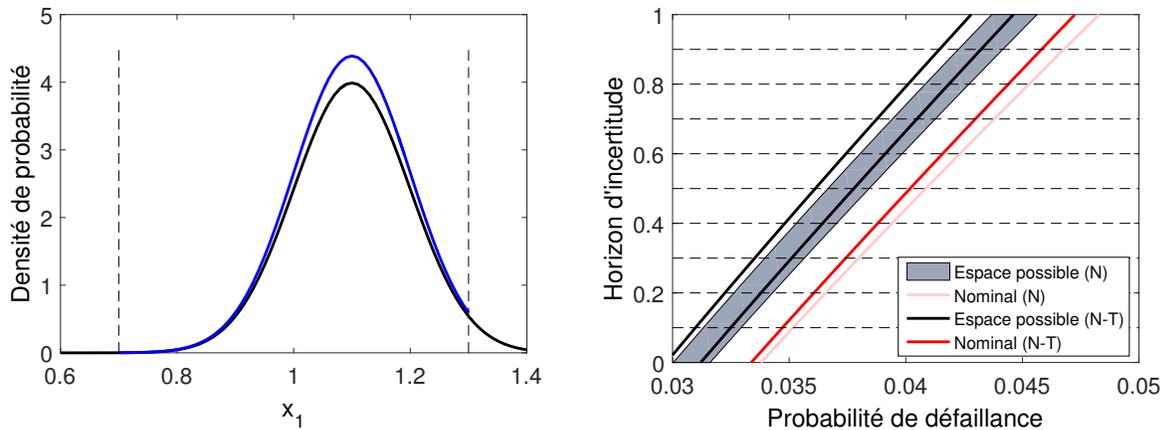
Outre la dépendance à la sensibilité des variables utilisées, l'effet de saturation est également plus ou moins marqué en fonction des contraintes fixées par le problème. La figure 5.22 montre à quel point la saturation des variables de conception devient de plus en plus perceptible du point de vue de la robustesse du design à mesure que la fréquence limite diminue. L'effet des queues de distribution gagne alors en importance et restreint la plage de probabilité de défaillance utilisable. Ceci conduit également à une limitation importante du gain en robustesse possible.

La robustesse d'un système et les possibilités d'optimisation offertes dépendent donc énormément du système et de la manière dont est posé le problème. La plage d'existence des variables de conception ainsi que leur sensibilité peuvent contraindre le gain en robustesse de manière importante, de même que les paramètres du problème en eux-mêmes tels que les seuils des fonctions de contraintes.

### 5.4.5.3 Utilisation de lois normales tronquées

Bien que les lois de distributions normales permettent une représentation commode et simple pour les paramètres de conception, elles ne sont pas représentatives de la nature réelle des phénomènes aléatoires observables. En effet, une loi normale concède que des valeurs extrêmes et négatives puissent exister. Or dans la réalité les paramètres situés hors de certaines limites sont rebutés et n'ont aucune légitimité à être envisagés au sein d'une structure. Pour pallier ce manque, l'utilisation de lois normales tronquées a été étudiée. Ces dernières permettent de conserver la nature gaussienne de la loi normale, tout en contraignant les valeurs des paramètres à un intervalle défini. En effet, et comme l'illustre la figure 5.23(a), les occurrences situées en dehors des bornes de la loi sont rejetées. Les effets des queues de distribution de la loi normale sont donc supprimés, et la norme au sein de l'intervalle est augmentée de manière à ce que l'intégrale de la courbe de distribution soit toujours égale à 1.

Les lois normales tronquées ont pu être implémentées directement en utilisant les possibilités offertes par la toolbox FERUM.



(a) Différences entre une loi normale et sa version tronquée (b) Robustesse des designs obtenus à partir de lois normales tronquées

FIGURE 5.23: Traitement du problème d'optimisation avec des lois normales tronquées pour le cas  $C_\sigma$

Les courbes de robustesses de la figure 5.23(b) ont été tracées pour un même design, mais avec des paramètres incertains suivant des lois normales (en noir) ou normales tronquées (en bleu). L'utilisation de lois normales tronquées entraîne une légère amélioration des performances du système. Ceci est dû à la nature même des lois de distributions. En effet, l'absence de queues de distribution des lois normales tronquées empêchent la réalisation

d'évènements très peu probables. Le design courant a donc moins de chances d'entrer en défaillance, ce qui entraîne une diminution des valeurs de probabilité de défaillance.

Si la modélisation des phénomènes aléatoires rencontrés par des lois normales tronquées paraît physiquement plus sensée, l'utilisation de lois normales simples permet un gain de temps et une simplicité de mise en œuvre intéressants. Elles fournissent également une approche plus conservatrice en surestimant la valeur des probabilités de défaillance. C'est pourquoi ces dernières seront tout de même utilisées dans la suite des travaux présentés dans ce manuscrit.

#### 5.4.5.4 Cas $C_{\mu\sigma}$

Dans le cas d'un problème  $C_{\mu\sigma}$  et comme il a été précisé au chapitre 4, l'approche par borne peut être une alternative très intéressante par rapport à des algorithmes d'optimisation dans le cas où la topologie des fonctions en présence est suffisamment monotone. Une étude préliminaire a permis de constater que cette approche est toujours valable ici, et même avec les 8 dimensions du problème (16 en considérant les incertitudes sur les épaisseurs) le gain de temps est encore intéressant.

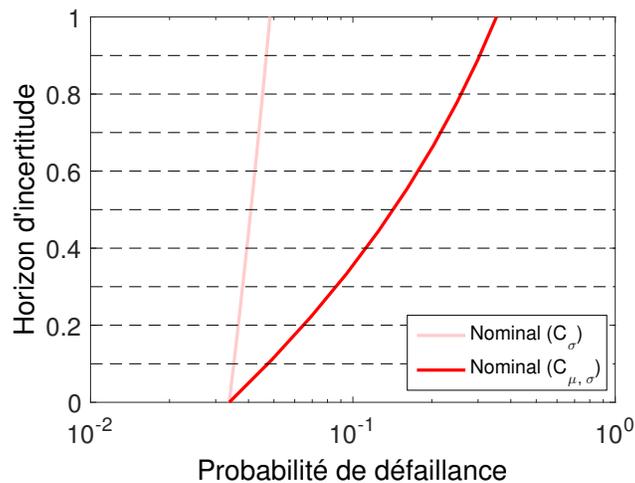


FIGURE 5.24: Cas  $C_{\mu, \sigma}$

Les courbes présentées dans la figure 5.24 reprennent le cas où  $f_c = 33\text{Hz}$  avec des lois de distributions normales. Elle permet la comparaison entre deux courbes de robustesse construites à partir du même design mais pour les deux cas  $C_{\sigma}$  et  $C_{\mu\sigma}$ . Les résultats montrent que pour un horizon de contrôle nul, les deux courbes sont concourantes. Ceci

est la conséquence du fait que sans incertitude, tout problème RRDO-IG est ramené à un formalisme RBDO. Les cas  $C_\sigma$  et  $C_{\mu\sigma}$  conduisent donc à la même robustesse.

L'effet de la méconnaissances de modèle sur les moyennes des distributions occasionne par contre un effet beaucoup plus important sur les performances des designs à mesure que l'horizon d'incertitude augmente. Les courbes de robustesse obtenues par les designs construits à partir du problème  $C_{\mu\sigma}$  se déportent donc beaucoup plus vite vers les hautes probabilités de défaillance.

## 5.5 Conception robuste du profil de notching primaire

La partie précédente du chapitre a permis de montrer l'application de la stratégie de conception robuste en présence de méconnaissances de modèle sur la structure de la plateforme MYRIADE. Il est maintenant question de la faisabilité du passage à la même structure industrielle pour la méthodologie de conception robuste de profil de notching. Cette application nécessite beaucoup plus de préparatifs que pour le système à trois degrés de liberté ayant servi précédemment. En effet, si le problème conserve le même formalisme (équation 5.2), des ajouts doivent être faits pour représenter le satellite dans son état fixé à la table vibrante et l'obtention des réponses harmoniques doit également être orchestrée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathbf{d} \in U(\alpha, \mathbf{d}^{(0)})} \eta(\omega) \\ \text{avec} \\ \mathbf{m} = U(\alpha, \mathbf{m}^{(0)}) \\ \alpha = \alpha_i \\ \mathbf{d}_{min} < \mathbf{d} < \mathbf{d}_{max} \\ P_f(f_{k_1}(\mathbf{d}) - f_c) \leq P_c \end{array} \right. \quad (5.2)$$

L'encastrement du satellite sur la table vibrante est modélisé suivant la méthode dite de la "grosse masse" déjà illustrée dans l'état de l'art, au chapitre 2. Une masse ponctuelle de 1e6 kg est donc modélisée à l'aide d'un élément CONM2. Celle-ci est reliée par une raideur pure (couple CBUSH et PBUSH) à un point fictif lui même relié de manière rigide grâce à un RBE2 aux zones de fixation de la virole d'interface.

Le calcul de notching réclame d'être en capacité de construire les réponses harmoniques du système. Étant donné que l'analyse porte ici sur le notching primaire de la structure, le critère dimensionnant porte sur l'effort dans l'interface satellite dans la direction y. Ce

dernier doit être mesuré dans le CBUSH qui représente la raideur entre le shaker et la plateforme.

### 5.5.1 Analyse de sensibilité

Bien que AESOP permette de tracer directement les FRFs d'un système, il a été choisi de procéder de manière indirecte, en passant par des analyses en sol103. En procédant de cette manière, l'échantillonnage des réponses de la structure a pu se faire plus simplement. Pour chaque itération, et donc chaque changement de valeur des paramètres, la réponse modale est évaluée et les matrices mécaniques stockées. Les réponses en g sont calculées par la suite directement à partir des matrices mécaniques aux nœuds d'intérêt.

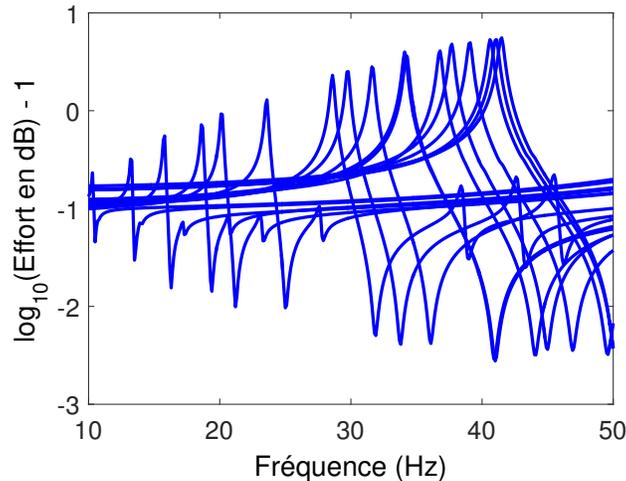


FIGURE 5.25: FRFs de quelques balayages fréquentiels de la structure à l'interface satellite dans la direction y

Les fonctions de réponse en fréquence affichées en figure 5.25 sont le fruit de différents jeux de paramètres mécaniques mais ont toutes été calculées pour  $\eta = 1$ . Il est possible de constater que la limite des 10g (0 en échelle logarithmique) est violée ici pour une bande de fréquences allant de 20Hz à 43Hz. Elles ont été tracées en prenant les mêmes paramètres méconnus que ceux ayant servi pour l'optimisation de la structure lors de la section précédente. L'analyse de sensibilité qui avait alors été menée avait permis de déterminer que les différentes raideurs d'interface ainsi que la masse de la charge utile étaient des paramètres déterminants pour les fréquences propres des premiers modes de la structure.

L'application de notching s'intéressant au niveau de la réponse à la fréquence propre, une étude de sensibilité supplémentaire a dû être menée pour investiguer ce point. Ceci

afin de s'assurer de ne pas écarter les autres paramètres de manière abusive. Les plages de variations des différentes variables ne sont pas modifiées par rapport à ce qui a été précédemment fait. L'analyse de Morris a de nouveau été choisie pour effectuer cette étude de sensibilité.

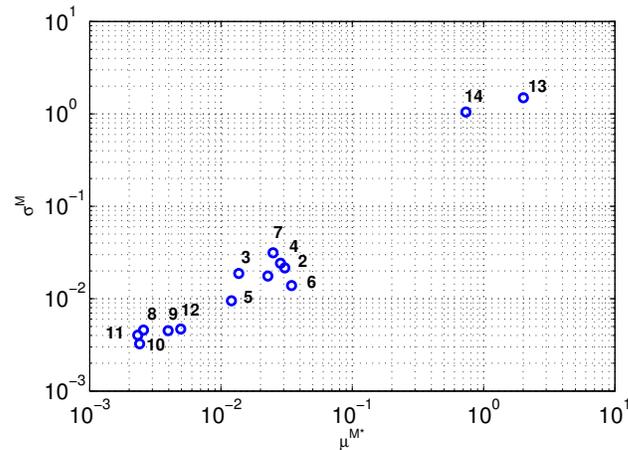


FIGURE 5.26: Résultats de l'analyse de Morris pour le niveau de réponse à la fréquence propre

La hiérarchisation supplémentaire des variables affichée en figure 5.26 est légèrement différente de celles obtenues pour les valeurs des fréquences propres. Alors que jusque là, la sensibilité des paramètres 1 et 2 (respectivement les raideurs d'interfaces latérales et basses) se détachait clairement de celle des paramètres de nature plus dimensionnelles de la plateforme, elle ne ressort ici pas du lot. Les paramètres 13 et 14 (respectivement la masse de la charge utile et la raideur d'interface (charge-utile/plateforme) restent quant à eux très sensibles.

Cette analyse de Morris permet donc de savoir que la sensibilité du niveau de réponse de la structure vis-à-vis des variables incertaines ne justifie pas de conserver d'autres variables que les paramètres 13 et 14. Il a cependant été montré que les valeurs des fréquences propres sont sensibles aux variations des paramètres 1 et 2. Au final, les paramètres à conserver par la suite sont donc les mêmes que lors de l'application précédente.

### 5.5.2 Métamodélisation et pistes de poursuite

À l'instar des études précédentes, les différents métamodèles usuels que sont les surfaces de réponse, le Krigeage et les réseaux de neurones ont été testés afin d'approximer la fonction contrainte d'intérêt.

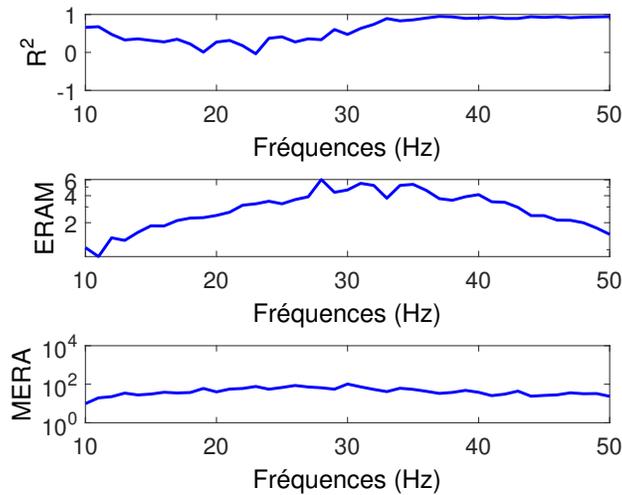


FIGURE 5.27: Meilleure performance des métamodèles usuels par fréquence

Encore une fois, les métamodèles classiques ne permettent pas de fournir une approximation suffisamment fiable de la fonction de contrainte pour permettre un calcul performant de la probabilité de défaillance. Comme le montre la figure 5.27 le critère de performance  $R^2$  conserve des valeurs trop faibles sur de nombreuses bandes de fréquences, le critère MERA reste quant à lui trop élevé. La poursuite de l'étude ne peut donc se faire par cette voie ci.

La construction de métamodèle par l'algorithme de Smoliak n'a pas pu être effectuée par manque de temps, mais il y a fort à parier que les performances soient plus intéressantes, comme cela a pu être constaté dans la section antérieure. Le prix à payer en terme de temps de calcul n'est néanmoins pas négligeable étant donné le nombre de dimensions du problème et le temps d'obtention d'une réponse harmonique.

L'optimisation du profil de notching pour la structure éléments finis de la plateforme MYRIADE reste donc inachevée faute d'être en mesure de calculer des probabilités de défaillances de manière confortable. En effet, un Monte-Carlo brutal ne donne pas de résultat convergé en deçà du million d'échantillon, et les métamodèles classiques sont dépassés par la complexité de la topologie de la fonction contrainte du système.

## 5.6 Conclusion partielle

Les différentes méthodologies dont le développement a fait l'objet dans les chapitres 3 et 4 ont été appliquées à la structure de la plateforme satellite MYRIADE. Cette dernière a

été contextualisée de manière générale puis plus particulièrement à partir de son modèle éléments finis. Quelques éléments de son design et ses premiers modes ont notamment été introduits.

Les surfaces libres modélisées par des plaques ont été utilisées pour la recherche de distributions robustes de capteurs. Les incertitudes portaient à la fois sur des paramètres physiques discrets et continus. La recherche de direction robuste d'excitation de la structure a été menée par la suite.

Concernant la partie dédiée à l'optimisation robuste, une démarche globale incluant analyse de sensibilité et optimisation a été appliquée. La méthode de Morris a en effet été utilisée de manière à déterminer les variables sensibles du problème et à supprimer les autres. Des métamodèles ont ensuite été construits sur la base de ces paramètres afin de diminuer le temps d'évaluation des fonctions objectifs et contraintes. La construction des courbes de robustesse élaborées à partir des différents designs obtenus a permis de mettre en évidence des effets de saturation possible et sa sensibilité aux différents paramètres et seuils du problème. Ceci a également permis de rappeler l'intérêt d'une pré-étude du problème de manière à déterminer la gamme des possibles en matière d'optimisation du design existant.

Comme le laissait présager le chapitre 4, l'application au cas de l'optimisation du profil de notching n'a pu être menée à terme, les métamodèles standards n'étant pas suffisamment performants pour permettre de remplacer les appels au modèle éléments finis. De plus, contrairement à l'application pédagogique du chapitre 4, il n'a pas été possible de mener l'étude sans métamodèle.

## Conclusions et perspectives

Ce manuscrit propose de nombreux contextes d'optimisation différents dans lesquels les méconnaissances de modèle ont pu être intégrées. Celles-ci ont été appliquées sur des paramètres de natures très variées, tantôt discrets, continus, physiques ou stochastiques.

En tout premier lieu, dans le chapitre 3 portant sur le placement de capteurs, ces incertitudes ont été portées sur des paramètres physiques continus ou discrets. Une modélisation simple de ces méconnaissances de modèle a permis de développer une méthodologie robuste de placement de capteurs et d'excitateurs, ainsi que différents critères de performance. La méthodologie elle-même est d'une structure relativement simple dans le sens où il n'y a pas de boucle d'optimisation ou de phase de construction de métamodèle pour le traitement des bases modales échantillonnées. La contrepartie de cette simplicité se trouve dans l'échantillonnage des bases modales qui doit être suffisamment exhaustif pour détecter les comportements vibratoires les plus dimensionnant pour la structure. Un gain important en rapidité et en efficacité peut être encore fait sur ce point en travaillant sur une heuristique permettant de réduire le nombre d'échantillons à calculer. Des approches adaptatives telles que celle de Smoliak pourraient être adaptées.

Le chapitre 4 augmente la complexité de la définition des modèles d'incertitudes. Ceux-ci ne sont plus appliqués directement aux paramètres physiques, mais aux paramètres de la loi de distribution qui y est attachée, afin de se rapprocher de la problématique industrielle. Ces modèles d'incertitude sont de surcroît intégrés au schéma d'optimisation par le biais de fonctions contraintes basées sur le calcul de probabilités de défaillance. Dans une première application visant à l'optimisation de paramètres dimensionnels de la structure, différentes méthodologies de construction de métamodèles, de calcul de fiabilité et d'optimisation ont permis d'obtenir des designs et des courbes de robustesse convaincantes et interprétables pour un coût en calcul raisonnable. Une seconde application orientée vers

la conception de profils de notchings pour le test en sinus balayé de structures satellites a permis de montrer les limites des méthodologies de calcul usuelles, et des approches plus poussées de calculs des probabilités de défaillance ont dû être mises en place. Une estimation par Subset-Simulation s'est par exemple révélée très efficace. Concernant la phase de construction des métamodèles, il a pu être mis en évidence que des approches courantes peuvent facilement être mises en défaut par des fonctions aux topologies complexes. Si des approches adaptatives de type Smoliak semblaient apporter des réponses intéressantes à ce type de problématiques, il s'est avéré que ce type de méthodologie ne permettait pas la convergence des procédures de calcul des probabilités de défaillance. Une autre alternative intéressante qui n'a malheureusement pas eu le temps d'être exploitée consiste à utiliser l'approche de Smoliak uniquement pour piloter l'échantillonnage de l'espace puis à construire un métamodèle standard à partir de la base formée. Des résultats encourageants ont pu être obtenus avec des méthodes de Krigeage sur différentes fonctions test mais des études plus poussées doivent être faites.

L'application de ces différentes méthodologies à un modèle éléments finis industriel au cours du chapitre 5 a par la suite permis de faire apparaître les contingences inhérentes à l'utilisation d'un modèle lourd. Le temps de calcul engendré s'est notamment révélé un obstacle important dès lors que les approches standards ne permettaient plus d'obtenir les résultats attendus. Afin de réduire ce temps de calcul, des phases d'analyse de sensibilité ont été intégrées de manière à diminuer la dimension du problème à traiter par la suppression des variables peu sensibles. Des effets de saturation ont également été notés lorsque les variables de conception étaient peu sensibles, avec pour effet une limitation des possibilités d'optimisation de la structure.

Plus largement, ce manuscrit a été l'occasion de montrer le potentiel des applications contenant des comportements non-linéaires. Au delà de la difficulté d'obtenir les réponses d'un système non-linéaire de manière fiable et rapide, le fait de s'intéresser à cette catégorie de phénomènes force à repenser et à étendre les méthodologies à des cas pouvant très vite gagner une grande complexité.

Sur un plan plus personnel, ces travaux de thèse auront été l'occasion de l'apprentissage et du perfectionnement d'un grand nombre de méthodologies utilisées dans les études dynamiques. Une liste non-exhaustive regroupe la réduction de modèle, les non-linéarités, le placement de capteurs ou encore l'emploi de métamodèles. Ces dernières années ont également été l'occasion de différents voyages, rendus possibles grâce aux conférences, dont le gain culturel est loin d'être négligeable.

Enfin, il est à relever qu'un certain nombre d'auteurs influents pensent qu'il est dangereux de croire dans les petites probabilités car elles peuvent être extrêmement sensibles aux

incertitudes et de là conduire au désastre. Ainsi, Taleb [143] juge qu'en cas d'évènements rares, il vaut mieux s'efforcer de prévoir les conséquences envisageables plutôt que les probabilités qui selon lui ne peuvent pas être connues. Ceci peut être vu comme une extension de la bien connue loi de Murphy qui rappelle que tout ce qui peut arriver, arrivera, quelle qu'en soit la probabilité. Il reste donc encore à chiffrer le gain véritable d'une approche robuste par rapport à une approche classique par coefficients de sécurité car la mise en place de méthodologies comprenant une estimation fiable de la probabilité de défaillance d'un système peut également revêtir un intérêt du point de vue programmatique. En effet, alors que les coefficients de sécurité sont basés sur l'expérience de l'entreprise, et non sur le modèle en cours de conception, une approche robuste permet la définition d'une structure pour une performance de fiabilité demandée. Les approches de cette nature peuvent donc permettre de justifier et/ou de redéfinir les coefficients de sécurité historiques. À plus longue échéance, cette garantie de fiabilité peut justifier de négocier la diminution du coût des assurances qui sont l'un des verrous financiers majeurs de l'industrie du spatial. L'un des principaux axes de travail à investiguer pour se diriger dans cette voie est la calibration des modèles d'incertitude. L'application du chapitre 4 concernant l'optimisation robuste de structure a permis de mettre en évidence que le simple fait de changer de modèle d'incertitude pouvait entraîner des résultats différents concernant les designs obtenus. Cette divergence de résultats s'est par la suite traduite par un comportement différent des courbes de robustesse. Ceci a permis de mettre en exergue l'intérêt de choisir un modèle d'incertitude adéquat. La littérature est malheureusement très pauvre à ce sujet mais les résultats pourraient pourtant d'une part être scientifiquement intéressants et d'autre part rendre les méthodologies robustes plus séduisantes pour les industriels en leur offrant une base plus concrète de modélisation de leurs incertitudes.



# Bibliographie

- [1] Ferum 4.1, <http://www.ifma.fr/ferum>.
- [2] Info-gap decision theory, <http://info-gap.com/>.
- [3] M. Abdelghani and M.I. Friswell. Sensor validation for structural systems with multiplicative sensor faults. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 :270–279, 2007.
- [4] Erdem Acar and Raphael T Haftka. Reliability-based aircraft structural design pays, even with limited statistical data. *Journal of Aircraft*, 44(3) :812–823, 2007.
- [5] Harish Agarwal and John Renaud. Reliability based design optimization using response surfaces in application to multidisciplinary systems. *Engineering Optimization*, 36(3) :291–311, 2004.
- [6] AGREE. Reliability of military electronic equipment. report, the advisory group on reliability of electronic equipment. *Office of the Assistant Secretary of Defense*, 1957.
- [7] B Ait Brik, S Ghanmi, Nouredine Bouhaddi, and Scott Cogan. Robust design in structural mechanics. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 8(1) :39–49, 2006.
- [8] DK Anthony and AJ Keane. Robust-optimal design of a lightweight space structure using a genetic algorithm. *AIAA journal*, 41(8) :1601–1604, 2003.
- [9] Sez Atamturktur, Zhifeng Liu, Scott Cogan, and Hsein Juang. Calibration of imprecise and inaccurate numerical models considering fidelity and robustness : a multi-objective optimization-based approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(3) :659–671, 2015.
- [10] Siu-Kui Au and James L Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4) :263–277, 2001.

- [11] SK Au and JL Beck. Important sampling in high dimensions. *Structural safety*, 25(2) :139–163, 2003.
- [12] SK Au, J Ching, and JL Beck. Application of subset simulation methods to reliability benchmark problems. *Structural safety*, 29(3) :183–193, 2007.
- [13] Sophie Baillargeon. *Le krigeage : revue de la théorie et application à l'interpolation spatiale de données de précipitations*. 2005.
- [14] E. Balmes. Uncertainty propagation in experimental modal analysis. *International Modal Analysis Conference*, 2004.
- [15] E. Balmes. Orthogonal maximum sequence sensor placements algorithms for modal tests, expansion and visibility. *International Modal Analysis Conference, Orlando*, 2005.
- [16] Mervyn Bampton and Roy Craig. Coupling of substructures for dynamic analyses. *Aiaa Journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [17] Chantal Baril, Soumaya Yacout, and Bernard Clément. Design for six sigma through collaborative multiobjective optimization. *Computers & Industrial Engineering*, 60(1) :43–55, 2001.
- [18] Michael Beer and Martin Liebscher. Designing robust structures—a nonlinear simulation based approach. *Computers & Structures*, 86(10) :1102–1122, 2008.
- [19] Jalel Ben Abdallah. *Inversion Gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux*. PhD thesis, 1995.
- [20] Yakov Ben-Haim. *Information-gap decision theory : decisions under severe uncertainty*. Academic Press, 2001.
- [21] Yakov Ben-Haim. *Info-gap decision theory : decisions under severe uncertainty*. Academic Press, 2006.
- [22] Marc Berveiller. *Eléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité*. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2005.
- [23] Hans-Georg Beyer and Bernhard Sendhoff. Robust optimization—a comprehensive survey. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(33) :3190–3218, 2007.
- [24] Géraud Blatman, Bruno Sudret, and Marc Berveiller. Quasi random numbers in stochastic finite element analysis. *Mécanique & Industries*, 8(03) :289–297, 2007.
- [25] M Boswald, E Cavro, A Girard, S Iugovich, S Laborde, and M Link. Dynamited part 1. 2010.

- [26] M Boswald, E Cavro, A Girard, S Iugovich, S Laborde, and M Link. Dynamited part 2. 2010.
- [27] N BOUHADDI and R FILLOD. Condensation dynamique de guyan : domaine de validité. *Mécanique, matériaux, électricité*, (444) :9–10, 1992.
- [28] N Bouhaddi and R Fillod. Model reduction by a simplified variant of dynamic condensation. *Journal of Sound and Vibration*, 191(2) :233–250, 1996.
- [29] Ph Bressollette, M Fogli, and C Chauvière. A stochastic collocation method for large classes of mechanical problems with uncertain parameters. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(2) :255–270, 2010.
- [30] Boubker Ait Brik. *Méthodologies de conception robuste et d'optimisation dans un contexte de conception d'architectures mécaniques nouvelles en avant projet*. PhD thesis, 2005.
- [31] CG Bucher and U Bourgund. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural safety*, 7(1) :57–66, 1990.
- [32] Christian G Bucher. Adaptive sampling – an iterative fast monte carlo procedure. *Structural Safety*, 5(2) :119–126, 1988.
- [33] TM Cameron and JH Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of applied mechanics*, 56(1) :149–154, 1989.
- [34] Alberto Cardona, Thierry Coune, Albert Lerusse, and Michel Geradin. A multiharmonic method for non-linear vibration analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(9) :1593–1608, 1994.
- [35] Stéphane Caro. *Conception robuste de mécanismes*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2004.
- [36] R Castro-Triguero, S. Murugan, R Gallego, and M.I. Friswell. Robustness of optimal sensor placement under parametric uncertainty. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 41 :268–287, 2013.
- [37] Andrea Ceresetti. Spacecraft equipment vibration qualification testing applicability and advantages of notching. In *Fourth International Symposium Environmental Testing for Space Programmes*, volume 467, page 391, 2001.
- [38] João Luiz Dihl Comba and Jorge Stol. A ne arithmetic and its applications to computer graphics. In *Proceedings of VI SIBGRAPI (Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing)*, pages 9–18. Citeseer, 1993.
- [39] R Craig and A Kurdila. *Fundamentals of Structural Dynamics, Second Edition*, Wiley, New Jersey. 2006.

- [40] Arthur P Dempster. Upper and lower probabilities generated by a random closed interval. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 957–966, 1968.
- [41] Armen Der Kiureghian and Ove Ditlevsen. Aleatory or epistemic ? does it matter ? *Structural Safety*, 31(2) :105–112, 2009.
- [42] Olivier Dessombz. *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. PhD thesis, 2000.
- [43] Olivier Dessombz, Fabrice Thouverez, J-P L  n  , and Louis J  z  quel. Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulation. *AIAA-G-1998*, 1998.
- [44] Olivier Dessombz, Fabrice Thouverez, J-P L  n  , and Louis J  z  quel. Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5) :949–968, 2001.
- [45] Ove Ditlevsen, P Bjerager, R Olesen, and AM Hasofer. Directional simulation in gaussian processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(4) :207–217, 1988.
- [46] Ove Ditlevsen and Henrik O Madsen. *Structural reliability methods*, volume 178. Wiley New York, 1996.
- [47] Scott W Doebbling, Charles R Farrar, Michael B Prime, and Daniel W Shevitz. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : a literature review. Technical report, Los Alamos National Lab., NM (United States), 1996.
- [48] Ioannis Doltsinis and Zhan Kang. Robust design of structures using optimization methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(23) :2221–2237, 2004.
- [49] Ioannis Doltsinis, Zhan Kang, and Gengdong Cheng. Robust design of non-linear structures using optimization methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(12) :1779–1795, 2005.
- [50] G Dreyfus. Les réseaux de neurones. *Mécanique industrielle et matériaux*, 51, 1998.
- [51] Vincent Dubourg, Bruno Sudret, and Jean-Marc Bourinet. Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44(5) :673–690, 2011.
- [52] B Echard, N Gayton, and M Lemaire. Ak-mcs : an active learning reliability method combining kriging and monte carlo simulation. *Structural Safety*, 33(2) :145–154, 2011.
- [53] DJ Ewins. *Modal testing. theory, practise and appliction*, 2000.

- [54] Janito Vaqueiro Ferreira and Alberto Luiz Serpa. Application of the arc-length method in nonlinear frequency response. *Journal of sound and vibration*, 284(1) :133–149, 2005.
- [55] George S Fishman and Baosheng D Huang. Antithetic variates revisited. *Communications of the ACM*, 26(11) :964–971, 1983.
- [56] Michael Friswell and John E Mottershead. *Finite element model updating in structural dynamics*, volume 38. Springer Science & Business Media, 1995.
- [57] N Gayton, JM Bourinet, and M Lemaire. Cq2rs : a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural safety*, 25(1) :99–121, 2003.
- [58] RG Ghanem and PD Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*springer. *New York*, 1991.
- [59] S Ghanmi, M Guedri, M-L Bouazizi, and N Bouhaddi. Robust multi-objective and multi-level optimization of complex mechanical structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7) :2444–2461, 2011.
- [60] G. Golub and W. Kahan. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series B Numerical Analysis*, 2(2) :205–224, 1965.
- [61] Gene Golub. Numerical methods for solving linear least squares problems. *Numerische Mathematik*, 7(3) :206–216, 1965.
- [62] Subroto Gunawan and Panos Y Papalambros. A bayesian approach to reliability-based optimization with incomplete information. *Journal of Mechanical Design*, 128(4) :909–918, 2006.
- [63] Robert J Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA journal*, 3(2) :380–380, 1965.
- [64] JM Hammersley and DC Handscomb. *Monte carlo methods* (methuen, london, 1964).
- [65] JM Hammersley and KW Morton. A new monte carlo technique : antithetic variates. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 52, pages 449–475. Cambridge Univ Press, 1956.
- [66] W Keith Hastings. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1) :97–109, 1970.
- [67] Jon C Helton and Freddie Joe Davis. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 81(1) :23–69, 2003.

- [68] F. Hemez and C. Farhat. An energy based optimum sensor placement criterion and its application to structural damage detection. *International Modal Analysis Conference*, pages 1568–1575, 1994.
- [69] F Owen Hoffman and Jana S Hammonds. Propagation of uncertainty in risk assessments : the need to distinguish between uncertainty due to lack of knowledge and uncertainty due to variability. *Risk analysis*, 14(5) :707–712, 1994.
- [70] Michael Hohenbichler and Ruediger Rackwitz. Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(12) :2195–2199, 1988.
- [71] Aurélien Hot, Scott Cogan, Emmanuel Foltête, Gaetan Kerschen, Fabrice Buffe, Jérôme Buffe, and Stéphanie Behar. Design of uncertain prestressed space structures : An info-gap approach. In *Topics in Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 4*, pages 13–20. Springer, 2012.
- [72] Jorge E Hurtado. An examination of methods for approximating implicit limit state functions from the viewpoint of statistical learning theory. *Structural Safety*, 26(3) :271–293, 2004.
- [73] Jorge E Hurtado and Diego A Alvarez. Neural-network-based reliability analysis : a comparative study. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(1) :113–132, 2001.
- [74] HA Jensen, MA Valdebenito, and GI Schuëller. An efficient reliability-based optimization scheme for uncertain linear systems subject to general gaussian excitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(1) :72–87, 2008.
- [75] C Jiang, X Han, and GR Liu. Optimization of structures with uncertain constraints based on convex model and satisfaction degree of interval. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49) :4791–4800, 2007.
- [76] Jayant R Kalagnanam and Urmila M Diwekar. An efficient sampling technique for off-line quality control. *Technometrics*, 39(3) :308–319, 1997.
- [77] D.C. Kammer. Sensor placement for non-orbitmodal identification and correlation of large space structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(2) :251–259, 1991.
- [78] D.C. Kammer. Effect of model error on sensor placement for on-orbit modal identification of large space structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 15(2) :334–341, 1992.
- [79] D.C. Kammer, C.C. Falnigan, and W. Dreyer. A super-element approach to test-analysis model development. *Proceedings of the Fourth International Modal Analysis Conference*, pages 663–673, 1986.

- [80] Zhan Kang. Robust design optimization of structures under uncertainties. 2005.
- [81] Zhan Kang, Yangjun Luo, and Alex Li. On non-probabilistic reliability-based design optimization of structures with uncertain-but-bounded parameters. *Structural Safety*, 33(3) :196–205, 2011.
- [82] I. Kaymaz. *Application of kriging method to structural reliability problems*. Elsevier, 2005.
- [83] Irfan Kaymaz. Application of kriging method to structural reliability problems. *Structural Safety*, 27(2) :133–151, 2005.
- [84] Gaëtan Kerschen, Maxime Peeters, Jean-Claude Golinval, and Alexander F Vakakis. Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170–194, 2009.
- [85] George J Klir. Generalized information theory : aims, results, and open problems. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1) :21–38, 2004.
- [86] Frank H Knight. Risk, uncertainty and profit. *New York : Hart, Schaffner and Marx*, 1921.
- [87] PS Koutsourelakis, HJ Pradlwarter, and GI Schuëller. Reliability of structures in high dimensions, part i : algorithms and applications. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19(4) :409–417, 2004.
- [88] G. Lallement, A. Ramanitrajan, and S. Cogan. Optimal sensor deployment : application to model updating. *Journal of Vibration and Control*, 4 :29–46, 1998.
- [89] J.C. Mitteau M. Lemaire, A. Cateuneuf. *Fiabilite des structures : couplage mecano-fabiliste statique*. Genie civil, 2ditions Lavoisier, 2005.
- [90] Richard H MacNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4) :581–601, 1971.
- [91] David R Martinez, A Keith Miller, and Thomas G Carne. Combined experimental/analytical modeling of shell/payload structures. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (USA), 1985.
- [92] F Massa, B Lallemand, and T Tison. Fuzzy multiobjective optimization of mechanical structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(5) :631–643, 2009.
- [93] Michael D McKay, Richard J Beckman, and William J Conover. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 42(1) :55–61, 2000.
- [94] RE Melchers. Importance sampling in structural systems. *Structural safety*, 6(1) :3–10, 1989.

- [95] Nicholas Metropolis, Arianna W Rosenbluth, Marshall N Rosenbluth, Augusta H Teller, and Edward Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6) :1087–1092, 1953.
- [96] David Moens and Michael Hanss. Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics : Recent advances. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(1) :4–16, 2011.
- [97] Ramon E Moore. *Interval analysis*, volume 4. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1966.
- [98] William J Morokoff and Russel E Caffisch. Quasi-monte carlo integration. *Journal of computational physics*, 122(2) :218–230, 1995.
- [99] M.D. Morris. Factorial sampling plans for preliminary computationnal experiments. *Technometrics*, (33) :161–174, 1991.
- [100] Fred Moses. Problems and prospects of reliability-based optimization. *Engineering Structures*, 19(4) :293–301, 1997.
- [101] N.R.Aluru N.AgarvalL. *A domain adaptative stochastic collocation approach for analysis of MEMs under uncertainties*. Journal of computational physics, 2009.
- [102] Andre Nataf. Statistique mathematique-determination des distributions de probabiles dont les marges sont donnees. *COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L ACADEMIE DES SCIENCES*, 255(1) :42, 1962.
- [103] Richard B Nelson. Simplified calculation of eigenvector derivatives. *AIAA journal*, 14(9) :1201–1205, 1976.
- [104] Harald Niederreiter. Quasi-monte carlo methods for multidimensional numerical integration. In *Numerical Integration III*, pages 157–171. Springer, 1988.
- [105] N.Roussouly. *Approche probabiliste pour la justification par analyse des structures spatiales*. 2012.
- [106] William L Oberkampf, Sharon M DeLand, Brian M Rutherford, Kathleen V Diegert, and Kenneth F Alvin. Error and uncertainty in modeling and simulation. *Reliability Engineering & System Safety*, 75(3) :333–357, 2002.
- [107] C. Papadimitriou, J.L. Beck, and S.K. Au. Entropy-based optimal sensor location for structural model updating. *Journal of Vibration and Control*, 6 :781–800, 2000.
- [108] Costas Papadimitriou. Optimal sensor placement methodology for parametric identification of structural systems. *Journal of sound and vibration*, 278(4) :923–947, 2004.
- [109] Costas Papadimitriou and Geert Lombaert. The effect of prediction error correlation on optimal sensor placement in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 28 :105–127, 2012.

- [110] Manolis Papadrakakis and Nikos D Lagaros. Reliability-based structural optimization using neural networks and monte carlo simulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(32) :3491–3507, 2002.
- [111] JM Parks. On stochastic optimization : Taguchi methods defystified ; its limitations and fallacy clarified. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(1) :87–101, 2011.
- [112] Maxime Peeters, Régis Vigié, Guillaume Sérandour, Gaëtan Kerschen, and J-C Golinval. Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical systems and signal processing*, 23(1) :195–216, 2009.
- [113] Daniel Pereiro, Scott Cogan, Emeline Sadoulet-Reboul, and F Martinez. Robust model calibration with load uncertainties. In *Topics in Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 5*, pages 89–97. Springer, 2013.
- [114] C Pierre, AA Ferri, and Earl H Dowell. Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method. *Journal of applied mechanics*, 52(4) :958–964, 1985.
- [115] E. Pillet. *Conception Robuste d’une Structure Spatiale en Presence de Meconnaisances de Modele*. Memoire post-doctoral, 2012.
- [116] V. Plevris. *Innovative Computational Techniques for the Optimum Structural Design Considering Uncertainties*. PhD thesis, Stuttgart university, 2005.
- [117] HJ Pradlwarter, GI Schueller, PS Koutsourelakis, and DC Charnpms. Application of line sampling simulation method to reliability benchmark problems. *Structural Safety*, 29(3) :208–221, 2007.
- [118] Y Pu, PK Das, and D Faulkner. A strategy for reliability-based optimization. *Engineering Structures*, 19(3) :276–282, 1997.
- [119] N Rabhi, M Guedri, H Hassis, and N Bouhaddi. Structure dynamic reliability : A hybrid approach and robust meta-models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7) :2313–2323, 2011.
- [120] Sirisha Rangavajhala, Anoop Mullur, and Achille Messac. The challenge of equality constraints in robust design optimization : examination and new approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 34(5) :381–401, 2007.
- [121] H Riahi, Ph Bressollette, and A Chateauneuf. Random fatigue crack growth in mixed mode by stochastic collocation method. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(16) :3292–3309, 2010.
- [122] TG Ritto. Choice of measurement locations of nonlinear structures using proper orthogonal modes and effective independence distribution vector. *Shock and Vibration*, 2014, 2014.

- [123] Murray Rosenblatt. Remarks on a multivariate transformation. *The annals of mathematical statistics*, 23(3) :470–472, 1952.
- [124] Nicolas Roussouly, Frank Petitjean, and M Salaun. A new adaptive response surface method for reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 32 :103–115, 2013.
- [125] W.D Rowe. Understanding uncertainty. *Risk Analysis*, 14 :743–750, 1994.
- [126] Johannes O Royset, Armen Der Kiureghian, and Elijah Polak. Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach. *Reliability Engineering & System Safety*, 73(3) :213–221, 2001.
- [127] E Sadoulet-Reboul and A Lejeune. Toward the automation of non linear solver coupling harmonic balance and asymptotic numerical method (hbanm). *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS*, 2012.
- [128] Eduardo Saliby. Descriptive sampling : a better approach to monte carlo simulation. *Journal of the Operational Research Society*, pages 1133–1142, 1990.
- [129] Eduardo Saliby. Descriptive sampling : an improvement over latin hypercube sampling. In *Proceedings of the 29th conference on Winter simulation*, pages 230–233. IEEE Computer Society, 1997.
- [130] Carsten Schedlinski and Michael Link. An approach to optimal pick-up and exciter placement. pages 1–7, 1996.
- [131] G. I. Schueller. *On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis*. Computers and Structures (2007) 235-243, 2007.
- [132] Gerhart I Schuëller. A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4) :197–321, 1997.
- [133] Gerhart I Schuëller and Hector A Jensen. Computational methods in optimization considering uncertainties—an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(1) :2–13, 2008.
- [134] LE Schwer, HU Mair, and RL Crane. Guide for verification and validation in computational solid mechanics. *American Society of Mechanical Engineers, ASME V&V*, 10 :2006, 2006.
- [135] Glenn Shafer et al. *A mathematical theory of evidence*, volume 1. Princeton university press Princeton, 1976.
- [136] Parker Shields. *Evaluating the predictive capability of numerical models considering robustness ton non-probabilistic uncertainty in the input parameters*. PhD thesis, 2013.

- [137] Herbert A Simon. Models of man ; social and rational. 1957.
- [138] S. Smolyak. *Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions*. Soviet Math. Dolk, 1963.
- [139] H Streicher and R Rackwitz. Time-variant reliability-oriented structural optimization and a renewal model for life-cycle costing. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19(1) :171–183, 2004.
- [140] Bruno Sudret. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models—contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. *Habilitationa diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France*, 2007.
- [141] Bruno Sudret and Armen Der Kiureghian. *Stochastic finite element methods and reliability : a state-of-the-art report*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California Berkeley, CA, 2000.
- [142] Roberto Szechtman. Control variate techniques for monte carlo simulation : control variates techniques for monte carlo simulation. In *Proceedings of the 35th conference on Winter simulation : driving innovation*, pages 144–149. Winter Simulation Conference, 2003.
- [143] Nassim Nicholas Taleb. *The black swan : The impact of the highly improbable*. Random house, 2007.
- [144] Megdouda Tari and Abdelnasser Dahmani. Refined descriptive sampling : A better approach to monte carlo simulation. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 14(2) :143–160, 2006.
- [145] Kendra L Van Buren, Sez Atamturktur, and François M Hemez. Model selection through robustness and fidelity criteria : modeling the dynamics of the cx-100 wind turbine blade. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 43(1) :246–259, 2014.
- [146] P. Vinot, S. Cogan, and V. Cipolla. A robust model-based test planning procedure. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 288 :571–585, 2005.
- [147] Pascal Vinot, Scott Cogan, and Gérard Lallement. Approche non-probabiliste de fiabilité basée sur les modèles convexes. *Mécanique & industries*, 4(1) :45–50, 2003.
- [148] Roger Williams, John Crowley, and Havard Vold. The multivariate mode indicator function in modal analysis. In *International Modal Analysis Conference*, pages 66–70, 1985.
- [149] Y.Ben-Haim. *Info-Gap, Decision theory, Decisions under severe uncertainty, second edition*. Academic Press, 2006.

- [150] Byeng D Youn and Kyung K Choi. A new response surface methodology for reliability-based design optimization. *Computers & structures*, 82(2) :241–256, 2004.
- [151] Byeng D Youn and Kyung K Choi. The performance moment integration method for reliabilitybased robust design optimization. In *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, volume 1, pages 915–925, 2004.
- [152] Lotfi A Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3) :338–353, 1965.
- [153] C. Zang, M. I. Friswell, and J. E. Mottershead. *A review of robust design and its application in dynamics*. *Computers and Structures* 83 (2005) 315-326, 2005.
- [154] C Zang, MI Friswell, and JE Mottershead. A review of robust optimal design and its application in dynamics. *Computers & structures*, 83(4) :315–326, 2005.
- [155] Thomas A Zang, Michael J Hensch, Mark W Hilburger, Sean P Kenny, James M Luckring, Peiman Maghami, Sharon L Padula, and W Jefferson Stroud. Needs and opportunities for uncertainty-based multidisciplinary design methods for aerospace vehicles. 2002.
- [156] OC Zienkiewicz. *The finite element method in engineering science*. mcgraw-hillbook co. *Inc., London*, 1971.

## Calcul de courbes de robustesse

Comme le suggèrent les équations 2.59 et 2.60, une analyse de robustesse par approche *Info-Gap* nécessite l'imbrication de deux boucles d'optimisation l'une dans l'autre. Ces applications sont non-linéaires et l'obtention d'un résultat analytique est bien souvent impossible. C'est pourquoi, dans la pratique, ces optimisations sont menées en utilisant des procédés itératifs.

En partant du principe que les données suivantes sont disponibles :

- Le vecteur des paramètres incertains  $\mathbf{m}$  appartenant au modèle d'incertitude  $\mathcal{U}(\alpha, \mathbf{m}^0)$ ,
- Le modèle du système  $\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = y$ ,
- Le critère de performance  $y \leq y_c$ .

Une première possibilité pour le calcul de la robustesse du système à un  $\alpha$  empirique choisi est donné par [147]. Un procédé itératif mêlant interpolation et optimisation permet d'aboutir à  $y_c$  et à la robustesse  $\hat{\alpha}(\mathbf{d}, y_c)$  correspondante. Cette approche est très coûteuse en temps calcul, mais dans la pratique, ce n'est pas  $y_c$  qui est usuellement fixé, mais  $\alpha$ . Ainsi, pour un intervalle d'horizon d'incertitude  $\mathcal{I} = [0, \alpha_{max}]$ , il est défini pour chaque  $\hat{\alpha}_i \in \mathcal{I}$  le problème d'optimisation suivant :

$$y_{c, \hat{\alpha}_i} = \max_{x \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}_i, \mathbf{m}^0)} \mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \quad (\text{A.1})$$

L'obtention de la courbe de robustesse se fait en traçant les robustesses discrétisées  $\hat{\alpha}_i$  en fonction des valeurs de performances calculées  $y_{c, \hat{\alpha}_i}$ .

La résolution du problème d'optimisation A.1 peut être difficile lorsque  $\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  possède plusieurs optima locaux. La vérification des différentes étapes de la résolution du problème est donc un point très important.

## A.1 Résolution analytique

Le calcul de courbes de robustesses de manière analytique est ici illustré sur un exemple simple, à un degré de liberté.

$$f = m \times x^3 \quad (\text{A.2})$$

En choisissant  $f = 1\text{N}$  et en prenant pour paramètre incertain une raideur de  $m^0 = 1000\text{N.m}^{-1}$ , il est possible de définir le modèle *Info-Gap* suivant :

$$m \in \mathcal{U}(\alpha, m^0) = \left\{ m : \left| \frac{m - m^0}{m^0} \right| \leq \alpha \right\} \quad (\text{A.3})$$

Pour un  $\alpha$  non nul, il reste à définir un critère de performance  $x_c$  au-delà duquel le système est considéré comme défaillant. La définition de la fonction de robustesse qui en découle est donc :

$$\hat{\alpha}(x_c) = \max \left\{ \alpha : \left( \max_{m \in \mathcal{U}(\alpha, m^0)} x \right) \leq x_c \right\} \in R_+^* \quad (\text{A.4})$$

Le maximum de déplacement peut ensuite être déterminé pour un horizon d'incertitude  $\alpha$  donné :

$$\max_{m \in \mathcal{U}(\alpha, m^0)} x = \max_{m \in \mathcal{U}(\alpha, m^0)} \sqrt[3]{\frac{f}{m}} = \max \left\{ \sqrt[3]{\frac{f}{(1-\alpha)m^0}}; \sqrt[3]{\frac{f}{(1+\alpha)m^0}} \right\} \quad (\text{A.5})$$

Comme  $m^0 \geq 0$  et  $f \geq 0$  :

$$\max_{m \in \mathcal{U}(\alpha, m^0)} x = \max \left\{ \sqrt[3]{\frac{f}{(1-\alpha)m^0}} \right\} \quad (\text{A.6})$$

Il peut alors être défini  $x_c$  tel que :

$$x_c = \max_{m \in \mathcal{U}(\hat{\alpha}, m^0)} x = \max \left\{ \sqrt[3]{\frac{f}{(1-\hat{\alpha})m^0}} \right\} \quad (\text{A.7})$$

Enfin, il est possible de réarranger l'équation de manière à obtenir l'expression analytique de la robustesse en fonction de  $x_c$  :

$$\hat{\alpha}(x_c) = 1 - \frac{f}{m^0 \times x_c^3} \quad (\text{A.8})$$

## Réduction de modèle

Les méthodes de réduction de modèles ont commencé à voir le jour autour des années 60, alors que la complexité et la taille des modèles éléments finis devenait trop importante pour les capacités de calcul de l'époque.

De nos jours, l'application de la réduction de modèle vise plutôt à l'allègement de la structure dans ses parties linéaires et bien maîtrisées au profit d'autres parties conservées intactes et dans lesquelles il est possible de simuler des comportements plus complexes.

Dans le cadre des applications présentées dans ce manuscrit, la réduction a permis de ne conserver de la structure que les nœuds entre lesquels des non-linéarités locales ont été placées, et d'autres, où les propriétés mécaniques étaient incertaines.

De nombreuses méthodes existent, et toutes sont plus ou moins spécialisées et comportent leurs défauts et qualités. Cette annexe ne visant pas à faire un compte rendu exhaustif des méthodes de réduction, seules les plus emblématiques seront détaillées. Il est néanmoins possible de citer [28, 91, 90] qui dressent un tableau plus large du domaine.

Les méthodes de réduction présentées ici se basent toutes sur une ségrégation des  $n$  degrés de liberté de la structure en deux catégories :

- D'un côté se trouvent  $m$  nœuds maîtres, choisis par l'utilisateur et qui seront conservés par la réduction. Il est donc toujours possible de venir interroger les propriétés dynamiques de la structure en ces points.
- De l'autre côté,  $s$  nœuds dit esclaves, destinés à être éliminés (mis à part quelques uns dans la méthode de Craig-Bampton par exemple). Aucun effort ne doit donc être appliqué sur ces nœuds, et il sera impossible de venir y récupérer des données de calcul une fois la réduction effectuée.

La réduction vise donc à passer de  $n$  à  $m$  nœuds, avec  $n = m + s$  et  $m \ll n$ .

Cette séparation s'effectue dès les premiers instants de la fabrication de la matrice de transformation. En partant de l'équation du mouvement d'une structure conservative :

$$(-\omega^2 M + K) U = F \quad (\text{B.1})$$

Les colonnes et lignes des matrices sont rangées suivant si leur nœud correspondant est maître ou esclave.

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sm} \\ M_{ms} & M_{mm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_m \\ u_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

## B.1 Réduction dynamique exacte

En reprenant le système B.2, le développement de la seconde ligne donne :

$$u_s = - (K_{ss} - \omega^2 M_{ss})^{-1} (K_{sm} - \omega^2 M_{sm}) u_m \quad (\text{B.3})$$

Il est donc possible de définir une transformation  $T_D(\omega)$  liant les déplacements de l'ensemble des degrés de liberté  $U$  à celui des nœuds maîtres  $u_m$

$$U = T_D(\omega) u_m \quad (\text{B.4})$$

où :

$$T_D(\omega) = \begin{pmatrix} I \\ - (K_{ss} - \omega^2 M_{ss})^{-1} (K_{sm} - \omega^2 M_{sm}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

La transformation  $T_D(\omega)$  s'applique ensuite de la manière suivante au système linéaire complet décrit en B.1 :

$$T_D^T(\omega) (-\omega^2 M + K) T_D(\omega) u_m = T_D^T(\omega) F \quad (\text{B.6})$$

$$(-\omega^2 M_D(\omega) + K_D(\omega)) u_m = f_m \quad (\text{B.7})$$

Cette méthode de réduction permet la conservation du comportement dynamique exact de la structure aux nœuds maîtres. Le revers de la médaille est que la matrice de trans-

formation doit être recalculée à chaque fréquence. De ceci découle le fait que ce procédé soit très peu utilisé dans la pratique.

D'autres méthodes plus industrialisables ont été développées, et sont présentées dans la suite de cette annexe.

## B.2 Guyan

La méthode de Guyan [63] est historiquement l'une des premières à avoir été développée pour la réduction des modèles éléments finis.

De la même manière que dans la version exacte, la première étape de la construction de la matrice de transformation est le partitionnement des matrices mécaniques du système, mais à présent, la partie dynamique (dépendante de  $\omega^2$ ) est négligée. Voilà pourquoi cette méthode est aussi appelée méthode de réduction statique.

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ u_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

La matrice de transformation de Guyan  $T_G$  peut être décrite par :

$$U = T_G u_m \quad (\text{B.9})$$

avec :

$$T_G = \begin{pmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1} K_{sm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \Psi \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Chaque colonne de la matrice  $\Psi$  peut être interprétée comme le vecteur des déplacements des degrés de liberté esclaves  $\Psi_i$  pour un déplacement unitaire du nœud maître  $i$  alors que les autres nœuds maîtres restent bloqués. Les vecteurs  $\Psi_i$  sont habituellement appelés modes contraints.

La transformation peut ensuite s'appliquer à l'équation de mouvement du système :

$$T_G^T (-\omega^2 M + K) T_G u_m = T_G^T F \quad (\text{B.11})$$

$$(-\omega^2 M_G + K_G) u_m = f_m \quad (\text{B.12})$$

Ce modèle réduit permet d'obtenir le même comportement statique que la structure d'origine aux nœuds maitres. Là encore, aucun effort ne doit être appliqué aux degrés de liberté esclaves. Les capacités de prédiction de ce modèle en dynamique sont par contre très réduites fréquemment. Ce domaine peut être évalué en calculant les premières fréquences propres  $f_{rs}$  du système contraint :

$$(K_{ss} - \omega^2 M_{ss}) y_s = 0 \quad (\text{B.13})$$

Dans [27] il est estimé que cette bande de fréquence est de  $[0, \frac{f_{rs}}{3}]$ .

### B.3 Craig-Bampton

La méthode de réduction par Craig-Bampton [39, 16] est couramment utilisée dans le domaine de l'ingénierie pour réduire les structures éléments finis, spécialement si elles sont composées de plusieurs sous-systèmes. Elle est le fruit d'une combinaison du mouvement des nœuds de liaison et du comportement modal du reste de la structure, en partant du principe que les nœuds maitres sont encastés.

Toujours en reprenant le partitionnement B.2, il est possible d'obtenir les composantes de la matrice de réduction faisant intervenir le comportement de la structure à interfaces fixes. Celles-ci sont obtenues en bloquant les degrés de liberté concernés et en résolvant le système :

$$(K_{ss} - \omega_j^2 M_{ss}) \{\phi_s\}_j = 0 \quad (\text{B.14})$$

La matrice modale des  $n_s$  modes normaux à interfaces fixe est  $\Phi_{ss}$ . Ce qui conduit à la matrice modale assemblée :

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} \Phi_{ss} \\ 0_{ms} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$n_u \times n_s$

Les modes sont ensuite normalisés de telle façon que

$$\Phi_{ss}^T M_{ss} \Phi_{ss} = I_{ss} \quad (\text{B.16})$$

et

$$\Phi_{ss}^T K_{ss} \Phi_{ss} = \Lambda_{ss} = \text{Diag}(\omega_j^2) \quad (\text{B.17})$$

Un mode contraint est défini comme une déformation statique de la structure obtenue lorsqu'un déplacement unitaire est appliqué à l'une des coordonnées d'un des nœuds maîtres, tandis que les autres nœuds maîtres sont bloqués et que le reste de la structure est libre de sollicitations. La matrice modale des modes contraints est obtenue via :

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{sm} \\ I_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{sm} \\ R_{mm} \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

La matrice  $\Psi_C$  est assemblée de telle façon que :

$$\begin{matrix} \Psi_C \\ n_u \times n_m \end{matrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{sm} \\ I_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K_{ss}^{-1} K_{sm}) \\ I_{mm} \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Il est important de noter, à des fins de vérification, que les modes contraints sont tous orthogonaux aux modes à interfaces fixes par rapport à la raideur du système.

$$\Phi_s K \Psi_C = 0 \quad (\text{B.20})$$

La transformation de Craig-Bampton utilise à la fois les modes à interfaces fixes et les modes contraints. Les coordonnées physiques  $u^{(s)}$  du système  $s$  peuvent être représentées comme :

$$u^{(s)} = \begin{Bmatrix} u_s \\ u_m \end{Bmatrix}^{(s)} = \begin{bmatrix} \Phi_{sk} & \Psi_{sm} \\ 0_{ms} & I_{mm} \end{bmatrix}^{(s)} \begin{Bmatrix} p_k \\ p_m \end{Bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

La matrice de transformation de Craig-Bampton  $\Psi_{CB}^{(s)}$  se définit finalement par

$$\Psi_{CB}^{(s)} = \begin{bmatrix} \Phi_{sk} & \Psi_{sm} \\ 0_{ms} & I_{mm} \end{bmatrix}^{(s)} \quad (\text{B.22})$$

Elle permet d'obtenir la matrice réduite de masse du système  $s$

$$\hat{M}_{CB}^{(s)} = \Psi_{CB}^{(s)T} M^{(s)} \Psi_{CB}^{(s)} \quad (\text{B.23})$$

$$\hat{M}_{CB}^{(s)} = \begin{bmatrix} \Phi_{sk}^T M_{ss} \Phi_{sk} & \Phi_{sk}^T (M_{ss} \Psi_{sm} + I_{mm} M_{sm}) \\ (\Psi_{sm}^T M_{ss} + I_{mm} M_{ms}) \Phi_{sk} & I_{mm} (M_{ms} \Psi_{sm} + I_{mm} M_{mm}) \end{bmatrix}^{(s)} \quad (\text{B.24})$$

$$\hat{M}_{CB}^{(s)} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{kk} & \hat{M}_{km} \\ \hat{M}_{mk} & \hat{M}_{mm} \end{bmatrix}^{(s)} \quad (\text{B.25})$$

puis la matrice réduite de raideur  $s$

$$\hat{K}_{CB}^{(s)} = \Psi_{CB}^{(s)T} K^{(s)} \Psi_{CB}^{(s)} \quad (\text{B.26})$$

$$\hat{K}_{CB}^{(s)} = \begin{bmatrix} \Phi_{sk}^T K_{ss} \Phi_{sk} & \Phi_{sk}^T (K_{ss} \Psi_{sm} + I_{mm} K_{sm}) \\ (\Psi_{sm}^T K_{ss} + I_{mm} K_{ms}) \Phi_{sk} & I_{mm} (K_{ms} \Psi_{sm} + I_{mm} K_{mm}) \end{bmatrix}^{(s)} \quad (\text{B.27})$$

dont les termes extradiagonaux sont tous nuls.

$$\hat{K}_{CB}^{(s)} = \begin{bmatrix} \Lambda_{kk} & 0_{km} \\ 0_{mk} & \hat{K}_{mm} \end{bmatrix}^{(s)} \quad (\text{B.28})$$

La force réduite appliquée au système se traduit quand à elle par :

$$\hat{F}_{CB}^{(s)} = \Psi_{CB}^{(s)T} F^{(s)} = \Psi_{CB}^{(s)T} \begin{bmatrix} F_s \\ F_m \end{bmatrix}^{(s)} \quad (\text{B.29})$$

Les matrices réduites précédentes peuvent se décomposer par :

$$\hat{M}_{CB} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{k_1 k_1} & 0_{k_1 k_2} & \hat{M}_{k_1 b}^{(1)} \\ 0_{k_2 k_2} & \hat{I}_{k_2 k_2} & \hat{M}_{k_2 b}^{(2)} \\ \hat{M}_{b k_1}^{(1)} & \hat{M}_{b k_2}^{(2)} & \hat{M}_{bb}^{(1)} + \hat{M}_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{K}_{CB} = \begin{bmatrix} \Lambda_{k_1 k_1}^{(1)} & 0_{k_1 k_2} & 0_{k_1 b} \\ 0_{k_2 k_2} & \Lambda_{k_2 k_2}^{(2)} & 0_{k_2 b} \\ 0_{b k_1} & 0_{b k_2} & \hat{K}_{bb}^{(1)} + \hat{K}_{bb}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

De nouveau, l'indice  $b$  transcrit un degré de liberté maître alors que les indices numériques renvoient au reste de la structure.

$$\hat{M}_{CB} \begin{Bmatrix} \dots \\ p_k \\ p_m \end{Bmatrix} + \hat{K}_{CB} \begin{Bmatrix} p_k \\ p_m \end{Bmatrix} = \hat{F}_{CB}^{(s)} \quad (\text{B.31})$$

## Analyses de sensibilité

Les analyses de sensibilité ont pour but principal de hiérarchiser les paramètres visant à être utilisés dans un problème. Il peut ainsi être mis en évidence que les fonctions d'intérêts sont très peu sensibles à certains de ces paramètres. Il est alors possible de retirer ces derniers de l'étude. Le problème perd ainsi autant de dimensions et devient beaucoup plus rapide à résoudre.

De nombreuses méthodes existent, toutes avec des complexités et des résultats différents. Il est possible de citer la méthode des différences finies ou encore la méthode FAST (*Fourier Amplitude Sensitivity Test*). La première donne une indication qualitative mais rapide de la sensibilité locale des paramètres. La seconde est une analyse globale et quantitative, mais son résultat s'obtient au prix d'un grand nombre d'évaluations du modèle.

La méthode présentée ici est celle de Morris [99] qui est globale, et permet en un temps honnête d'obtenir une hiérarchisation qualitative de la sensibilité des variables en jeu. Cette méthode est utilisée notamment au chapitre 5 afin de déterminer les paramètres incertains devant être conservés.

Les paramètres candidats sont regroupés dans le vecteur  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{n_x}] \in \mathcal{X}$  des  $n_x$  paramètres candidats.  $\mathcal{X}$  représente à la fois l'espace de variation des paramètres et le domaine d'incertitude. Une distribution uniforme est associée à chacun des paramètres.

La première étape de la méthode consiste à discrétiser l'espace incertain de manière régulière, et ce, afin que chacun des  $n_x$  paramètres puisse prendre  $n_l$  valeurs possibles. Ces valeurs sont appelées niveaux.

La méthode est par la suite basée sur le calcul des effets élémentaires des paramètres. Pour

l'échantillon  $\mathbf{x}^{(i)}$ , l'effet élémentaire du paramètre  $x_k$  est défini par :

$$EE_k^{(i)} = \frac{f(\mathbf{x}^{(i)} \pm \Delta e_k) - f(\mathbf{x}^{(i)})}{\pm \Delta} \quad (\text{C.1})$$

où  $e_k$  est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles exceptée la  $k^{\text{ième}}$ .  $\Delta$  est une valeur choisie parmi  $1/(n_i-1), \dots, 1 - 1/(n_i-1)$ . Il est conseillé par la méthode de choisir un nombre pair de niveaux et de prendre  $\Delta = n_i/(2n_i-2)$ .

$r$  trajectoires de  $(n_x + 1)$  points sont réalisées dans  $\mathcal{X}'$  qui est une réduction de  $\mathcal{X}$  de manière à ce que  $\mathbf{x}^{(i)} \pm \Delta$  soit toujours dans  $\mathcal{X}$ . Chaque trajectoire est construite grâce à une matrice d'orientation  $O$  telle que :

$$O = X^{rep} + \frac{\Delta}{2} ((2B - J)D + J) \quad (\text{C.2})$$

$X^{rep}$  est une matrice dont chaque ligne est le vecteur  $\mathbf{x}^{(i)}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times n_x}$  est une matrice de 1,  $B \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times n_x}$  est une matrice triangulaire inférieure et enfin  $D \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  est une matrice diagonale dont les éléments ont une probabilité égale de valoir  $\pm 1$ .

Chaque ligne de la matrice  $O$  change de la précédente suivant une seule composante. La trajectoire est suivie en passant d'une ligne à la suivante. La figure C.1(a) montre l'exemple de trois trajectoires obtenues pour un problème à trois variables et quatre niveaux. Pour que  $\mathbf{x}^{(i)}$  soit toujours dans  $\mathcal{X}$ , les valeurs de  $X^{rep}$  sont choisies aléatoirement entre 0 et 1/3. Pour une trajectoire  $\mathbf{x}^{(i)} = [0, 1/3, 1/3]$  les matrices suivantes sont obtenues :

$$X^{rep} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

ce qui conduit à la matrice  $O$  :

$$O = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Il devient alors possible de calculer les effets élémentaires pour chaque paramètre comme il est fait dans l'équation C.5. Le calcul de ces indices nécessite  $r(n_x + 1)$  évaluations de la fonction d'intérêt.

$$\begin{aligned}
EE_1^{(i)} &= \frac{f(0,1/3,1/3) - f(2/3,1/3,1/3)}{-\Delta} \\
EE_2^{(i)} &= \frac{f(0,1,1/3) - f(0,1/3,1/3)}{-\Delta} \\
EE_3^{(i)} &= \frac{f(0,1,1) - f(0,1,1/3)}{-\Delta}
\end{aligned}
\tag{C.5}$$

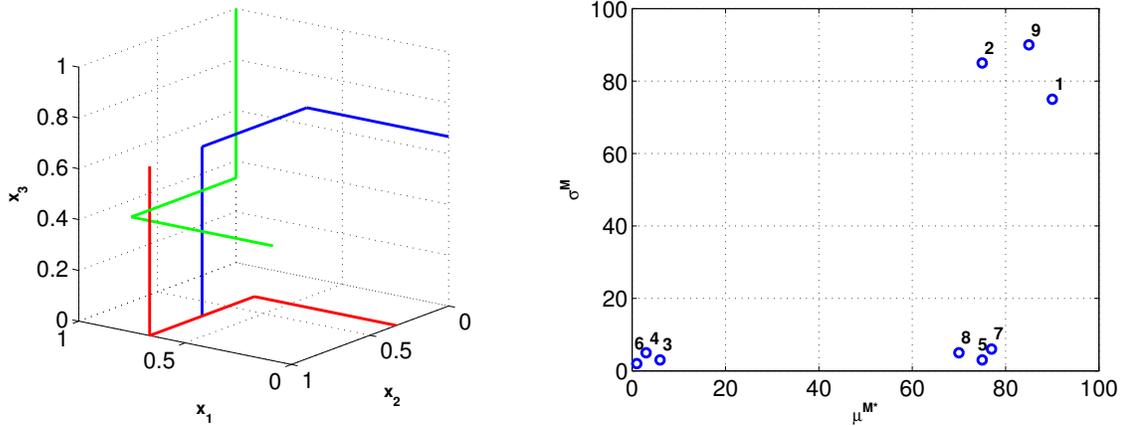


FIGURE C.1: Visuel des trajectoires utilisées dans la méthode de Morris (a). Hiérarchisation des variables par la méthode de Morris (b)

La sensibilité des paramètres passe ensuite par le calcul de la moyenne  $\mu_k^M = E(EE_k)$  et de l'écart-type  $\sigma_k^M = \sigma(EE_k)$  des indices  $EE_k^{(i)}$ . La mesure de la sensibilité des paramètres à proprement parlé est réalisée en utilisant la moyenne comme indicateur. Une forte valeur de moyenne indique un paramètre sensible. L'écart-type permet d'apporter plus de précision sur la nature de l'influence du paramètre. Ainsi, dans la figure C.1(b), les paramètres 3, 4 et 6 sont considérés comme peu sensibles, contrairement à tous les autres. Néanmoins, les paramètres 5, 7 et 8 n'ont qu'une influence linéaire sur la réponse d'intérêt car leur écart-type est faible. Le fort écart-type des derniers paramètres traduit le fait que ceux-ci ont : soit un effet non-linéaire, soit sont couplés entre eux.

Il est également possible dans le cas d'un modèle à plusieurs réponses d'intérêt de prendre en compte  $\mu_k^M = E(|EE_k|)$ .



## Métamodèles

L'approche par métamodèle vise à lier une ou plusieurs sorties d'intérêt  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_P)$  à une ou plusieurs variables du problème  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$  au travers d'une fonction  $\hat{\phi}$  qui n'est autre qu'une émulation de la fonction  $\phi$  telle que  $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$ . L'enjeu de l'obtention d'un métamodèle suffisamment performant réside dans le fait d'atteindre une relation du type  $\mathbf{y} = \hat{\phi}(\mathbf{x}) + \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est une erreur de modélisation à rendre la plus faible possible.

Les métamodèles sont dans la plupart des cas entraînés sur une base de données préalablement échantillonnée.

### D.1 Métamodèles communément utilisés

#### D.1.1 Les surfaces de réponse

Les métamodèles de type surface de réponse donnent une approximation polynomiale de l'application  $\phi$ . Dans le cadre de phénomènes statiques, une approximation à l'ordre deux est suffisante, comme dans l'équation D.1.

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{m=1}^M a_m x_m + \sum_{i=m}^M \sum_{n \geq m}^M a_{mn} x_m x_n \quad (\text{D.1})$$

Les coefficients  $a = (a_0, \dots, a_M, a_{11}, \dots, a_{MM})$  doivent être déterminés à partir de la base de données. Dans ce cas, la minimisation de l'écart  $\varepsilon$  est généralement guidée par une application de la méthode des moindres carrés.

$$y = \hat{\phi}(\mathbf{x}) + \varepsilon \quad (\text{D.2})$$

Afin d'illustrer le propos, pour un échantillon statistique de taille  $N$ , tel que  $N \geq Q + 1$  où  $Q + 1$  est le nombre de coefficients à déterminer dans le modèle polynomial :

$$\left( \begin{array}{c|c} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_P^{(1)} & y_1 \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_P^{(2)} & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \dots, x_P^{(N)} & y_N \end{array} \right) \quad (\text{D.3})$$

La recherche du modèle de l'équation D.4 consiste à écrire :

$$y_i = a_o + a_1 z_1^{(i)} + \dots + a_Q z_Q^{(i)} + \varepsilon_i \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (\text{D.4})$$

où  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_Q)$  correspond aux monômes en  $x_i$  et  $x_i x_j$ .

Les résidus  $\varepsilon_i$  sont, par hypothèse, les réalisations de variables aléatoires normales, identiques, indépendantes et centrées ( $E[\varepsilon_i] = 0$ ) dont la variance est notée  $Var[\varepsilon_i] = \sigma^2$ .

Si l'échantillon provient de la réalisation de variables aléatoires  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$ , les variables  $\varepsilon_i$  sont supposées indépendantes de la loi de  $\mathbf{X}$ . Dans ce cas, le modèle recherché correspond à l'espérance d'une variable aléatoire  $Y$  conditionnée par les réalisations des variables  $\mathbf{X}$  :

$$E[Y|X_1 = x_1^{(i)}, \dots, X_M = x_M^{(i)}] = \hat{\phi}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad \text{and} \quad Var[Y|X_1 = x_1^{(i)}, \dots, X_M = x_M^{(i)}] = \sigma^2$$

Dans le cas présenté, supposons que l'échantillon est fourni par une modélisation déterministe. Les  $\varepsilon_i$  ne reflètent donc plus qu'une erreur d'ajustement entre le modèle de référence et le modèle approché, sans partie aléatoire.

L'équation D.4 peut se réécrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\mathbf{a} + \varepsilon$$

où l'on suppose  $\mathbf{Z}$  de rang maximum (ses colonnes sont linéairement indépendantes). La meilleure approximation de  $\mathbf{a}$  est obtenue par minimisation de l'erreur des moindres carrés entre le modèle de référence et le modèle approché :

$$\hat{\mathbf{a}} = \underset{b \in \mathbb{R}^M}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{b}\|^2$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne. La solution vaut :

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{y}$$

### D.1.2 Le Krigeage

Le Krigeage [13][82] est une méthode d'interpolation issue de la géostatistique, qui connaît un succès grandissant dans le domaine des sciences de l'ingénieur.

L'idée est ici de considérer la grandeur d'intérêt  $y$  comme la réalisation, à la fois d'un processus aléatoire et des variables d'entrées  $\mathbf{x}$ . Le modèle de Krigeage suppose donc la réalisation du processus aléatoire  $Y(\mathbf{x})$  comme étant :

$$Y(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^P a_p h_p(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x})$$

où :

- $\sum_{p=1}^P a_p h_p(\mathbf{x})$  représente la valeur moyenne avec  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$  les coefficients à déterminer et  $\mathbf{h}(x) = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_p(\mathbf{x}))$  des fonctions des variables  $\mathbf{x}$  qui, de manière générale, sont des monômes de degrés inférieurs ou égaux à 2. Dans ce cas, ce terme est identique au modèle de régression linéaire appliqué pour les métamodèles en surfaces de réponses sans le terme d'erreur (i.e  $h_p(\mathbf{x}) = z_p$ ).
- $W(\mathbf{x})$  est un processus gaussien centré, de variance  $\sigma^2$  et de fonction d'auto-corrélation défini par :

$$C_W(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma^2 R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, 1) = \sigma^2 \exp\left(\sum_{m=1}^M \left(-\left|\frac{x_m - x'_m}{l_m}\right|^2\right)\right)$$

La fonction d'autocorrélation traduit le degré de corrélation entre deux variables aléatoires correspondant aux réponses du modèle calculées aux valeurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  des paramètres d'entrée. Il vaut 1 lorsque  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ .

Les paramètres inconnus  $\theta = \{\mathbf{a}, \sigma^2, \mathbf{l}\}$  sont estimés à partir d'un échantillon statistique de taille  $N$  grâce au principe de vraisemblance. Cette méthode vise à maximiser la fonction de vraisemblance qui est égale au produit des densités de probabilité  $f_Y(\mathbf{x})$  du modèle en chaque point de l'échantillon. L'estimation de ces paramètres prend la forme :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \prod_{i=1}^N f_Y(\mathbf{x}^{(i)}, \theta)$$

Pour une longueur de corrélation  $\mathbf{l}$  fixée, les paramètres  $\mathbf{a}$  et  $\sigma^2$  sont estimés par :

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}$$

et

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{a}})$$

Le Krigeage étant basé sur une interpolation, les points servant à l'apprentissage sont estimés de manière exacte par le métamodèle, contrairement aux surfaces de réponse. Ceci est très intéressant puisque les échantillons établis par des processus déterministes ne sont *a priori* pas entachés d'erreurs.

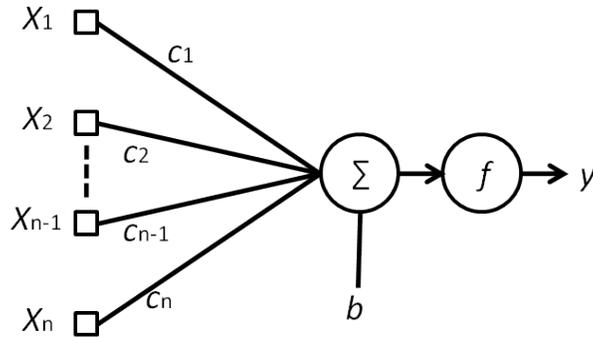
### D.1.3 Les réseaux de neurones

Les réseaux de neurones [50] forment une famille de métamodèles à la structure avancée. Contrairement à ce que leur nom pourrait laisser penser, ils ne constituent pas en soi des processus d'intelligences artificielles, et leurs propriétés sont purement mathématiques. Leur fonctionnement est plutôt à rapprocher des méthodes de régression (comme celle des moindres carrés par exemple).

Chaque neurone (dit neurone formel) est en fait une fonction linéaire ou non-linéaire et bornée dont la valeur dépend de paramètres appelés coefficients ou poids. Cette fonction consiste en général en l'application d'une fonction linéaire de la famille des sigmoïdes à une combinaison linéaire des entrées.

$$y = \tanh \left( b + \sum_{i=1}^n c_i x_i \right) \quad (\text{D.5})$$

En prenant les  $x_i$  comme variables du problème et les  $c_i$  et  $b$  comme les paramètres ajustables du neurone, on peut aussi adopter la représentation imagée disponible figure D.1.

FIGURE D.1: Représentation schématique d'un neurone formel,  $f$  représente la sigmoïde

Si plusieurs neurones sont connectés de manière acyclique, le réseau de neurones est dit non-bouclé (voir figure D.2). Les sorties de certains neurones servent d'entrée aux autres, mais il n'existe pas de retour possible en arrière. Les neurones présents entre les neurones d'entrée et de sortie sont appelés neurones cachés.

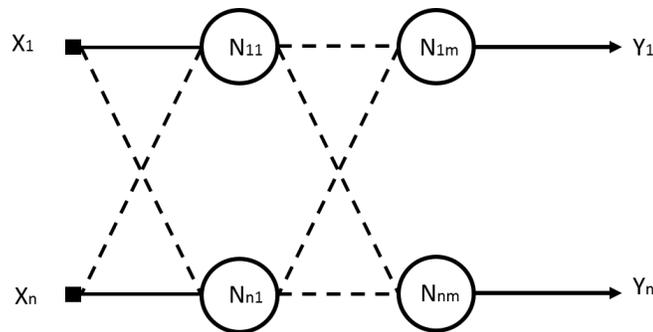


FIGURE D.2: Représentation schématique d'un réseau de neurones non-bouclé

Les réseaux de neurones non-bouclés sont des objets statiques et indépendants du temps une fois que leurs paramètres sont choisis. Ils sont utilisés dans le cadre de régressions non-linéaires, ou encore de classification.

Dans un réseau bouclé (voir figure D.3), les connections entre les neurones peuvent être quelconques. L'information peut rebrousser chemin. Ceci nécessite un fonctionnement à temps discret du réseau qui est alors régi par des équations aux différences non-linéaires. Ce type de conformation est utilisé pour la modélisation de systèmes dynamiques, la commande de processus, ou le filtrage.

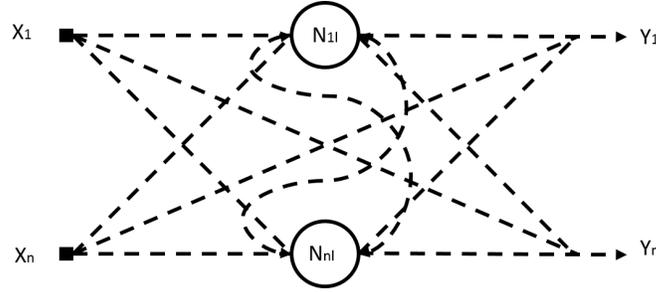


FIGURE D.3: Représentation schématique d'un réseau de neurones bouclé

Le grand intérêt des réseaux de neurones par rapport aux autres algorithmes de régression ou d'approximation est qu'ils sont parcimonieux. En effet, le nombre de paramètres à évaluer évolue linéairement par rapport au nombre de variables, et la fonction sigmoïde incluse dans les neurones leur confère une grande souplesse.

## D.2 Critères de comparaison des métamodèles

Les critères de comparaison suivants sont d'une grande utilité quand il s'agit d'attester ou de comparer les performances offertes par des métamodèles.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_s} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^2}{\sum_{i=1}^{n_s} (y^{(i)} - \bar{y}^{(i)})^2} \quad (\text{D.6})$$

Un  $R^2$  proche de 1 atteste d'un métamodèle prédictif. Concernant l'erreur relative absolue moyenne ERAM, une meilleure performance est obtenue pour une valeur proche de 0%.

$$\text{ERAM} = 100 \times \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{|y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}|}{|y^{(i)}|} \quad (\text{D.7})$$

Enfin, le maximum de l'erreur relative absolue MERA, permet d'accéder à une information plus locale. Dans le cas où  $R^2$  et ERAM donnent de bonnes valeurs, mais que le MERA est haut, alors le métamodèle présente des difficultés locales à épouser le modèle.

$$\text{MERA} = 100 \times \max \left( \frac{|y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}|}{|y^{(i)}|} \right) \quad (\text{D.8})$$

De nombreux autres critères plus performants peuvent être utilisés et font intervenir le nombre d'échantillons ayant servi à la construction du métamodèle. Ces critères sont dit "pénalisés". Le principe est de faire intervenir le nombre d'échantillons utilisés dans la

formulation des critères de manière à ce que ceci soit un frein à l'obtention de bonnes valeurs. [105] dresse un panel assez large des critères pénalisés pouvant être utilisés.

## D.3 Construction de métamodèles sur une base d'échantillonnage construite de manière adaptative

Le but de la création d'un domaine adaptatif [101] est d'optimiser le nombre de points de quadrature de manière à minimiser le temps de calcul. Une possibilité est d'utiliser l'algorithme de Smolyak [138].

### D.3.1 Maillage adaptatif

En présence de discontinuités, l'efficacité de l'interpolation diminue. Il est même courant qu'une interpolation par polynômes devienne moins efficace qu'une interpolation par fonctions linéaires. Une solution possible est d'utiliser un échantillonnage adaptatif.

En partant de l'espace aléatoire complet, l'algorithme de Smoliak permet de construire un maillage et de déterminer les erreurs commises sur l'interpolation. Ceci permet de déterminer les dimensions les plus sensibles et de raffiner en sous-domaines suivant celles-ci, jusqu'à obtention de la précision escomptée. Autrement dit, l'espace de base  $\Gamma = [0, 1]^n$  des variables aléatoires  $\xi$  sera partagé en  $N_d$  sous-domaines disjoints ( $\Gamma = \cup_{s=1}^{N_d} \Gamma_s$ ) pour lesquels sont définies les fonctions indicatrices  $I_s$ .

En partant du principe que l'approximation sur le  $s^{\text{ième}}$  sous-domaine soit construite par un algorithme de Smoliak d'itération  $q_s$ , et donc en calculant les surplus hiérarchiques  $w_j^k$ , il est possible de guider le raffinement du maillage.

La matrice d'interpolation incrémentale  $\Delta A_{q,n}(f)$  corrige ainsi l'interpolation  $A_{q-1,n}(f)$  aux nouveaux points  $\Delta \mathcal{H}_{q,n}$  et l'erreur d'interpolation peut être calculée par :

$$\beta_s = \max_{|\mathbf{k}|=n+q} (|w_j^k|) \quad (\text{D.9})$$

Cette valeur est le maximum des nouveaux surplus hiérarchiques. Le raffinement ou non de cet élément  $s$  est ensuite géré par la condition :

$$\beta_s J_s \geq \tau_1 \quad (\text{D.10})$$

où  $J_s = Pr(I_s = 1)$  et  $\tau_1$  est la tolérance.

La détermination de la direction la plus sensible pour chaque parcelle d'espace se calcul ensuite pour  $i$  allant de 1 à  $n$  :

$$\gamma_i = \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}=\mathbf{k}_i} (w_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}})^2, \quad \mathbf{k}_i = \{\mathbf{k} : k_i = q_s + 1, k_j = 1 \forall j \neq i\} \quad (\text{D.11})$$

Le raffinement des parcelles peut ensuite s'effectuer dans toutes les directions où  $\gamma_i \geq \tau_2 \cdot \left( \max_{j=1, \dots, n} \gamma_j \right)$ ,  $0 < \tau_2 < 1$  avec  $\tau_2$  un coefficient permettant de fixer le seuil.

La principale difficulté du paramétrage de cet algorithme est de choisir des valeurs efficaces pour  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Après avoir effectué de nombreux essais, il semble que la meilleure philosophie soit de choisir une valeur permettant de ne sélectionner que très peu de candidats pour l'itération suivante. Cette sélection drastique, bien que contre-intuitive, aide grandement à la convergence de l'algorithme vers les zones complexes de l'espace. Ceci tout en réduisant de manière importante le nombre de calculs à effectuer. L'algorithme global de cette méthode est donné en D.1.

---

#### Algorithme D.1 Métamodélisation adaptative

---

1. Pre-processing : Identifier les paramètres incertains, et les transformer en variables aléatoires indépendantes  $\xi$  dans  $\Gamma$ .
2. Échantillonnage : échantillonner de manière adaptative suivant :
  - (a) Initialiser : nombre de sous domaines  $N_d = 1$ , itération  $q_s = q_0$ ,  $s = 1, \dots, N_d$ , tolérance à  $\tau_1$  et seuil à  $\tau_2$ .
  - (b) Tant que  $\beta_s J_s \geq \tau_1$ ,
    - i. Pour  $s$  allant de 1 à  $N_d$ , résoudre le problème déterministe en  $\mathcal{H}_{q_s, n}$  et calculer  $\beta_s$  et  $\gamma_i$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$ .
    - ii. Si  $\beta_s J_s \geq \tau_1$ , alors :
      - A. Si  $\gamma_i \geq \tau_2 \cdot \left( \max_{j=1, \dots, n} \gamma_j \right)$ , alors :
        - B. ajouter la dimension  $i$  dans l'index,
        - C. Fin si.
      - iii. Scinder l'élément en deux dans toutes les dimensions répertoriées dans l'index, et mettre à jour le nombre de sous domaines,
      - iv. Sinon ne rien faire pour cet élément,
      - v. Fin si.
    - (c) Fin tant que.
  3. Post processing.

---

