Tenseur d'impulsion-énergie et feuilletages

Georges Habib

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Georges HABIB

Tenseur d'impulsion-énergie et Feuilletages

Soutenue publiquement le 13 Juin 2006

Membres du jury :

Rapporteurs :	**Aziz El Kacimi**	Professeur, Valenciennes
	Andrei Moroianu	CNRS, École Polytechnique
Examinateurs :	**Jean Pierre Bourguignon**	Directeur de recherche, CNRS
	Kris Galicki	Professeur, New Mexico
	Oussama Hijazi	Directeur de Thèse, Professeur, Nancy I
	Harold Rosenberg	Professeur, Paris VII
	Sebastián Montiel	Professeur, Grenada (invité)

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

Que tous ceux qui m'ont aidé à mener ce travail à terme trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Oussama Hijazi pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais en octobre 2003 sur la géométrie spinorielle. L'enthousiasme, l'intuition scientifique et la ténacité dont il a fait preuve ainsi que la liberté qu'il m'a accordée au cours de ce travail ont grandement contribué à la richesse de cette thèse. Il m'a montré qu'honnêteté et sincérité devaient coexister avec efficacité et motivation. De plus, ces conseils tout au long de ces trois années ont toujours été clairs et m'ont permis d'aboutir à la production de cette thèse.

Andrei Moroianu et Aziz El Kacimi m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Les discussions que nous avons menées ont enrichi mes connaissances tant en géométrie spinorielle qu'au niveau des feuilletages. Ils ont également contribué par leurs remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire. Je les en remercie de même que pour leur participation au jury.

Je présente mes vifs remerciements à Jean Pierre Bourguignon qui m'a fait l'honneur de présider le jury et pour la lecture attentive de la thèse.

Je remercie également Harold Rosenberg pour l'intérêt qu'il a eu pour ce travail et pour avoir accepté de faire partie du jury.

J'exprime mes sincères remerciements à Sebastián Montiel pour son enthousiasme, son dynamisme, son extrême disponibilité et sa compétence qui m'ont permis de trouver de l'énergie pour approfondir l'étude des feuilletages en géométrie spinorielle. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses encouragements sans oublier la sympathie que j'ai trouvée auprès de lui. Je le remercie vivement pour sa participation au jury.

Je voudrais aussi témoigner ma profonde gratitude à Kris Galicki pour s'être intéressé à mon travail en acceptant de faire partie du jury. Je le remercie vivement.

Je tiens à remercier également tous les mathématiciens auxquels j'ai posé des questions et particulièrement : Jean-Louis Milhorat, Nicolas Ginoux, Bruno Colbois, Christian Bär, Thomas Friedrich, Ilka Agrikola, Sylvestre Gallot, Rod Gover et Amine Fawaz. Je mesure la chance que j'ai eu d'avoir pu profiter de leurs connaissances et leurs conseils.

Ma gratitude va aussi aux membres de l'institut Élie Cartan pour tous les moyens mis à ma disposition. J'adresse un remerciement tout particulier avec toute mon affection et ma reconnaissance à Patricio Cumsille Atallah, Pierre-Lin Pommier, Pierre Le Gall et Mohamad Iguernane pour toutes nos discussions mathématiques (et personnelles).

Je dois un grand merci à tous les membres de l'équipe de géométrie différentielle de Nancy, sans lesquels les trois années passées n'auraient pas été aussi agréables. Je les remercie pour les fructueuses discussions que nous avons pu avoir ainsi que pour les moments d'amitié et de complicité. Merci donc à Bernd Ammann, Julien Maubon, Emmanuel Humbert, Jean-François Grosjean (*"il ne faut pas rigoler pendant les séminaires"*), Simon Raulot, Julien Roth, Marie-Amélie Paillusseau (*"même remarque que Jean-François"*) et Lars Schäfer.

J'adresse mes chaleureux remerciements à tous les membres du département de mathématiques de l'Univerité Libanaise de Beyrouth pour leurs aides précieuses et leurs soutiens et je remercie plus particulièrement Mohamad Mehdi.

Je tiens à remercier mes amis, qui directement ou indirectement ont su me soutenir dans les moments difficiles particulièrement Jamil Damaj, Jamil Houhou, Malak Sayed Hassan, Mohamad Hajj Chehadé, Jamal Sabouné, Raymond Hamia, Simon Wehbé, Toufik Khatib, Ahmad Dib, Oussama Abou Chakra, Mohamad Nassar, Walid Tfaili, Rami Saad, Morten et Christine Vierling, Muaffaq El Jundi, Naiem El Wafai, Wael Youssef, Zakwan Halisso, Elmira Arab Tehrany, Antoine et Célia Eid.

Enfin, je ne saurais trop exprimer toute ma gratitude envers ma mère, mon père, mes frères et toute ma famille au Liban, le mérite de ce travail leur revient en grande partie. Comment exprimer cette reconnaissance à mes parents qui m'ont toujours soutenu moralement et financièrement ? Ils sont tout pour moi : amour, réconfort, conseils, protection,... Les écouter me rassure, les voir me ravie, les embrasser m'enchante. C'est plus qu'un merci que je veux leur dire. Puisse ce modeste travail leur témoigner ma profonde reconnaissance.

À tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce tra-

vail et à tous ceux qui me sont chers :

Un grand merci.

À ma mère Najla et mon père Élias,

À mes frères Gilbert, Jawad et Jad,

À toute ma famille et tous mes amis....

Je dédie cette thèse....

Table des matières

Introduction

Le sujet principal de cette thèse est d'interpréter géométriquement le tenseur d'impulsion-énergie dans le cadre des feuilletages. Ce tenseur qui est un 2-tenseur symétrique, défini sur une variété spinorielle, se manifeste dans deux cadres géométriques, la géométrie spinorielle intrinsèque et extrinsèque. Dans un premier temps, on s'intéresse à la question suivante : Quelles informations obtient-on sur le spectre de l'opérateur de Dirac d'une variété spinorielle M à courbure scalaire négative ou nulle ? On cite dans ce cadre, par exemple, les groupes d'Heisenberg (à courbure scalaire négative) et les variétés à groupe d'holonomie G_2 (à courbure scalaire nulle). Il est surprenant de voir que ce tenseur donne une réponse partielle à cette question du fait qu'il intervient dans le spectre de l'opérateur de Dirac. En plus, la géométrie spinorielle extrinsèque donne une interprétation naturelle de ce tenseur comme la seconde forme fondamentale des hypersurfaces et la *géométrie transverse* va permettre de le réaliser comme le *tenseur d'O'Neill* dans le cas des feuilletages. Dans cette thèse on suit deux directions qui semblent avoir plusieurs liens.

La première direction est la géométrie spinorielle. L'étude du spectre de l'opérateur de Dirac, qui est défini sur une variété spinorielle M, a fait l'objet d'investigations intenses, du fait qu'il contient des informations subtiles sur la topologie et la géométrie de la variété. En effet André Lichnerowicz [Lic63] a établi une formule de type Weitzenböck qui relie le carré de l'opérateur de Dirac au laplacien spinoriel, plus précisement

$$D_M^2 = \Delta + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}_M,$$

où Scal_M est la courbure scalaire de M. Une conséquence fondamentale de cette formule est que le noyau de l'opérateur de Dirac est trivial si la variété M est à courbure scalaire positive. Dans ce cas, son indice analytique, ainsi que topologique est forcément nul par le théorème d'Atiyah-Singer. On en déduit qu'il existe des obstructions topologiques à l'existence de métriques à courbure scalaire positive.

Des informations plus géométriques étaient obtenues en estimant la première valeur propre. En 1980, Th. Friedrich [Fri80] a minoré le carré de la première valeur propre λ_1 par l'infimum de la courbure scalaire (à une constante près), supposée positive. L'idée de la preuve est de modifier la connexion de Levi-Civita dans la direction de l'identité afin de pouvoir minorer le laplacien spinoriel par une quantité strictement positive ($\frac{\lambda_1^2}{n}\mathrm{Id}$, où n est la dimension de M). Dans le cas où l'égalité est atteinte dans l'estimation, une section spéciale apparaît sur le fibré des spineurs, appelée *spineur de Killing*. La dérivée covariante de cette section dans la direction d'un champ de vecteurs est proportionnelle à l'action du champ de vecteurs sur cette même section par multiplication de Clifford. Comme conséquence de l'existence de ces spineurs, la variété M est d'Einstein.

Plusieurs directions étaient explorées pour classifier les variétés admettant ces spineurs. C. Bär [Bär93] a donné une description géométrique des variétés simplement connexes admettant des spineurs de Killing. En effet il a montré qu'il y a une équivalence entre les spineurs de Killing sur une variété spinorielle M et les spineurs parallèles sur le *cône* [Gal79] de M, obtenu par le produit tordu de la variété M par la demi-droite réelle. Ainsi, par la classification des variétés simplement connexes admettant des spineurs parallèles [Wan89], il a classifié toutes les variétés spinorielles, simplement connexes, admettant des spineurs de Killing.

Dans [Hij84], O. Hijazi montre que, sur une variété kählérienne, l'ensemble des spineurs de Killing est réduit à zéro et que l'inégalité de Friedrich ne peut pas être atteinte. Ces variétés sont considérées par K. D. Kirchberg [Kir86] qui estime les valeurs propres suivant la parité de la dimension complexe. La preuve utilise la décomposition du fibré des spineurs sous l'action de la forme de Kähler et de la racine quatrième de l'unité. Ces estimations améliorent l'inégalité de Friedrich et dans le cas limite (en dimension complexe impaire) un spineur particulier apparaît, appelé *spineur de Killing kählérien*. Comme conséquence, la variété est d'Einstein.

Ces spineurs sont étudiés dans [Kir88], où il montre qu'en dimension complexe 3, l'espace projectif $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ et la variété des drapeaux $F(2,2)$ sont les seules variétés limites. De plus A. Moroianu [Mor95] établit que l'existence d'un tel spineur sur M implique l'existence d'un spineur de Killing sur un certain fibré en cercles UM au-dessus de M, dont le tenseur d'O'Neill de cette fibration est la structure complexe de M. Ainsi, en utilisant la classification des spineurs de Killing, il montre que UM admet une structure de 3-Sasaki régulière et en dimension complexe particulière les variétés limites sont les espaces des twisteurs associés aux variétés Kähler-quaternioniennes à courbure scalaire positive. Le cas de la dimension complexe paire se réduit au cas impair. En effet, le revêtement universel de la variété limite est un produit riemannien $N\times\mathbb{R}^2$, où N est une variété kählérienne limite de dimension complexe impaire [Mor99], [Lic90]. Finalement, un cadre géométrique important est considéré, où la variété M est à groupe d'holonomie $\mathrm{Sp}_1\cdot\mathrm{Sp}_m$, à courbure scalaire positive. Dans ce cas, M admet une structure Kähler-quaternionienne et est une variété d'Einstein. Une meilleure estimation est établie pour la première valeur propre de l'opérateur de Dirac [HM95b], [KSW99]. Le cas limite est caractérisé par le fait que la variété limite est l'espace projectif des quaternions [KSW98b].

L'inconvénient avec les estimations ci-dessus est que l'on perd les informations sur le spectre de l'opérateur de Dirac et donc sur la géométrie de M dans le cas où la courbure scalaire est négative ou nulle. Il est donc assez naturel d'établir de nouvelles estimations afin de compenser le terme en courbure scalaire dans la formule de Schrödinger-Lichnerowicz. D'où l'idée introduite dans [Hij95] de modifier la connexion de Levi-Civita dans la direction d'un tenseur symétrique et de minorer le laplacien spinoriel par la norme de ce tenseur. Ainsi, sur le complémentaire de l'ensemble des zéros d'un spineur Ψ, il définit un 2-tenseur symétrique T^Ψ, appelé tenseur *d'impulsion-énergie* par

$$T^\Psi(X,Y)=\frac{1}{2}\Re(X\cdot\nabla^M_Y\Psi+Y\cdot\nabla^M_X\Psi,\frac{\Psi}{|\Psi|^2}),$$

où $X,Y\in TM$, et ∇^M est la connexion de Levi-Civita associée à M. Il démontre que pour tout spineur propre Ψ associé à la première valeur λ_1

$$\lambda_1^2\geq\inf_M(\frac{\mathrm{Scal}_M}{4}+|T^\Psi|^2). \tag{0.0.1}$$

Le point important à remarquer est que, pour un spineur propre Ψ de l'opérateur de Dirac, l'ensemble des zéros de Ψ est de dimension de Hausdorff égale à $n-2$ [Bär97] et donc de mesure nulle. Il est facile de voir que dans un repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ de TM, le terme $T^\Psi(e_i,e_i)$ n'est autre que la projection de l'opérateur de Dirac sur chaque composante e_i. Par conséquent, sa trace est égale à λ_1 et l'estimation (0.0.1) améliore celle de Friedrich obtenue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz du fait que $|T^\Psi|^2\geq\frac{(\mathrm{tr}(T^\Psi))^2}{n}$ (tr est la trace). Le cas limite de (0.0.1) est caractérisé par l'existence d'un spineur Ψ qui satisfait pour tout $X\in TM$, l'équation $\nabla^M_X\Psi=-T^\Psi(X)\cdot\Psi$. Dans ce cas aucune géométrie particulière n'est obtenue sur la variété du fait que la borne inférieure de l'estimation dépend du spineur en question. Si maintenant on suppose que sur M, il existe un spineur Ψ tel que pour tout $X \in TM$,

$$\nabla^M_X \Psi = -E(X) \cdot \Psi, \tag{0.0.2}$$

où E est un endomorphisme symétrique de TM, alors, par les propriétés de la multiplication de Clifford, le tenseur E est égal à T^Ψ et on est dans le cas limite de l'inégalité (0.0.1). Il se trouve que ces spineurs vérifient le cas limite d'une certaine majoration intrinsèque des valeurs propres sur les variétés de Sasaki [HG].

L'étude de l'équation (0.0.2) en géométrie spinorielle extrinsèque est le point clé pour une interprétation naturelle de ce tenseur. En effet, si la dimension de M est égale à 2, Th. Friedrich [Fri98] montre que la donnée d'un spineur Ψ, de norme constante, satisfaisant l'équation $D_M\Psi = f\Psi$, où f est une fonction de M, est équivalente à la donnée d'un couple (Ψ, E), où E est un tenseur symétrique à trace égale à f satisfaisant (0.0.2). Ceci implique de plus que le tenseur symétrique E est forcément de Gauss-Codazzi et, dans ce cas, la variété est localement isométriquement immergée dans $\mathbb{R}^3$ avec un tenseur de Weingarten égal à E. D'où l'observation suivante [Mor02] : si M^n est une hypersurface d'une variété spinorielle N^{n+1} admettant un spineur parallèle, alors le tenseur d'impulsion-énergie peut être vu comme la seconde forme fondamentale de l'hypersurface. Ainsi la variété M admet intrinsèquement un spineur qui satisfait (0.0.2). Si, de plus, la courbure moyenne H est une constante positive, alors on est dans le cas limite de l'estimation extrinsèque établie dans [HMZ01]

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{2} \inf_\Sigma H,$$

où Σ^n est une variété compacte bordant un domaine compact, à courbure scalaire positive et λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur de Dirac de Σ.

Dans le but de classifier les variétés admettant des spineurs qui satisfont l'équation (0.0.2), B. Morel [Mor02] a construit le *cône généralisé* $\mathcal{Z} = I \times M$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, comme une généralisation du cône construit par C. Bär. Il a montré, que si on modifie la métrique de M dans la direction de T^Ψ supposée parallèle, alors la variété $\mathcal{Z}$ admet un spineur parallèle et donc elle est Ricci plate. Ce cas est considéré plus tard par A. Moroainu, P. Gauduchon et C. Bär [BGM05] dans le cas où le tenseur T^Ψ est un tenseur de Codazzi.

Le problème du tenseur d'impulsion-énergie est lié aux problèmes de variations du spectre de l'opérateur de Dirac [BG92]. En effet, les auteurs modifient la métrique de M dans la direction d'un tenseur symétrique k, i.e. ils considèrent la famille de métriques $g_t = g_M + tk$ et ils montrent que, pour tout spineur $\Psi \in \Sigma M$, on a

$$\frac{d}{dt}(D_t\Psi_t, \Psi_t)|_{t=0} = -\frac{1}{2}\int_M (k, T_\Psi) v_{g_M},$$

où $T^\Psi = T_\Psi/|\Psi|^2$ et Ψ_t est le transport parallèle de Ψ le long de la courbe $t \longrightarrow t$. En s'appuyant sur ce résultat, Th. Friedrich et E. C. Kim [FK00] ont montré que les équations d'Einstein-Dirac, i.e.

$$D_M\Psi = \lambda\Psi \quad \text{et} \quad \mathrm{Ric}_M - \frac{\mathrm{Scal}_M}{2} g_M = \frac{1}{2} T_\Psi,$$

où Ric_M et Scal_M sont respectivement la courbure de Ricci et la courbure scalaire de M, sont les équations d'Euler-Lagrange d'une fonctionnelle associée à Ψ. Une section spéciale du fibré des spineurs, appelée *spineur de Killing faible* est une solution des équations ci-dessus.

La deuxième direction dans cette thèse est la théorie des feuilletages. Un premier point de vue des feuilletages est un système différentiel dont les solutions apparaissent comme les feuilles du feuilletage. Ce point de vue est lié au théorème de Frobenius, où la condition d'intégrabilité d'un système de codimension 1 est $w \wedge dw = 0, w$ étant une 1-forme différentielle qui définit le système. Un autre point de vue de la théorie des feuilletages est la décomposition d'une variété en sous-variétés de même dimension. Ces sous-variétés s'appellent les feuilles de $\mathcal{F}$. Ainsi deux différentes structures apparaissent dans la théorie des feuilletages : la structure longitudinale, i.e. celles des feuilles et la structure transverse, i.e. orthogonale aux feuilles.

La théorie des feuilletages a été introduite par H. Hopf en liaison avec la question de l'existence d'un champ de 2-plans complètement intégrable sur la 3-sphère. Elle a été développée plus tard par Ehresmann, et al. En 1958, B. Reinhart [Rei59] a introduit la notion de feuilletage riemannien défini par la donnée d'une métrique riemannienne g_Q sur le fibré normal Q invariante le long des feuilles. De plus, il a introduit la notion d'une métrique *quasi-fibrée*, i.e. la métrique sur Q est la métrique induite qu'il a décrite géométriquement : en effet toute géodésique orthogonale au feuilletage en un point reste orthogonale au feuilletage en tout point.

L'existence d'une telle métrique induit une connexion métrique ∇ sur le fibré normal à torsion nulle. Cette connexion sera appelée connexion de *Levi-Civita transversale*. De plus la courbure associée à la connexion ∇ satisfait une propriété fondamentale dans le sens qu'elle s'annule le long des feuilles. On peut ainsi lui associer la courbure de Ricci transversale et la courbure scalaire transversale.

Dans le but d'établir un théorème de l'indice transversal et d'étudier une version du théorème d'Atiyah-Singer pour un feuilletage riemannien, J. F. Glazebrook et F. W. Kamber [GK91a, GK91b] ont introduit *l'opérateur de Dirac transversal* sur le fibré normal, supposé spinoriel. Il se trouve qu'un terme en courbure moyenne κ apparaît dans l'expression locale de l'opérateur de Dirac transversal et que sa restriction aux spineurs basiques (les spineurs constants le long des feuilles) définit *l'opérateur de Dirac basique* qui a un spectre discret [ElK90, EG97] si et seulement si le feuilletage est isoparamétrique, i.e. la courbure moyenne est constante le long des feuilles. Ils ont établi de plus une formule de type Schrödinger-Lichnerowicz pour cet opérateur et ont déduit que son indice analytique transversal est nul sous certaines conditions sur le feuilletage.

Dans [Jun01, JK03], S. D. Jung étudie le spectre de l'opérateur de Dirac basique pour différentes structures transverses. Il a montré une inégalité de type Friedrich pour la première valeur propre ainsi qu'une inégalité de type Kirchberg (en dimension complexe impaire) dans le cas où le fibré normal porte une structure kählérienne. L'importance de ces estimations est qu'elles n'exigent pas la positivité de la courbure scalaire transversale car la courbure moyenne κ intervient dans la borne inférieure. Le fait que le feuilletage soit minimal caractérise le cas limite de ces estimations.

Finalement, plusieurs questions restent encore importantes dans le cadre d'un feuilletage spinoriel. La classification de Berger-Simon du groupe d'holonomie du fibré normal constitue un premier pas vers la classification des feuilletages admettant des spineurs parallèles ou Killing basiques. D'où la question :

Peut-on déduire une géométrie particulière sur la variété M et sur le feuilletage de l'existence de spineurs transversaux particuliers ?

Présentation des résultats

Dans le premier chapitre, on commence par introduire les feuilletages sur une variété en illustrant plusieurs exemples. On s'intéresse plus particulièrement aux feuilletages riemanniens et on adapte les définitions considérées par P. Tondeur [Ton88]. On définit la notion d'une structure spinorielle transversale comme une généralisation d'une structure spinorielle sur une variété et on introduit l'opérateur de Dirac transversal et basique. On continue dans la direction prise par F. W. Kamber et J. F. Glazebrook et on montre une formule de type Schrödinger-Lichnerowicz pour l'opérateur de Dirac transversal. Une première conséquence de cette formule est que le noyau de l'opérateur de Dirac basique est trivial si le terme $\mathrm{Scal}^\nabla + |\kappa|^2$ est positif (Scal^∇ est la courbure scalaire transversale). Finalement, on montre une inégalité de type Friedrich en utilisant l'opérateur des twisteurs transversal. Le cas limite est caractérisé par l'existence d'un *spineur de Killing basique* et le fait que le feuilletage est minimal. Comme conséquence de l'existence de ces spineurs, le fibré normal est d'Einstein.

L'étude des submersions riemanniennes va donner une interprétation naturelle du tenseur d'impulsion-énergie dans le cadre des feuilletages. Dans le deuxième chapitre, on généralise l'égalité (0.0.2). On suppose que, sur une variété spinorielle (M^n, g_M), il existe un champ de spineurs Ψ qui satisfait pour tout $X \in TM$, l'équation $\nabla^M_X \Psi = -E(X) \cdot \Psi$, où E est un endomorphisme de TM. En utilisant les propriétés de la multiplication de Clifford, on trouve que la partie symétrique de E est le tenseur T^Ψ et la partie anti-symétrique est le tenseur défini sur le complémentaire des zéros de Ψ, par

$$Q^\Psi(X,Y) = \frac{1}{2}\Re(Y \cdot \nabla^M_X \Psi - X \cdot \nabla^M_Y \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}),$$

où $X, Y \in TM$. D'où, si on modifie la connexion de Levi-Civita dans la direction de T^Ψ et Q^Ψ, on montre que le laplacien scalaire est minoré par la norme de ces deux tenseurs. Ainsi on obtient une nouvelle estimation de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac de M en faisant intervenir le tenseur Q^Ψ et on a

$$\lambda_1^2 \geq \inf_M\left(\frac{\mathrm{Scal}_M}{4} + |T^\Psi|^2 + |Q^\Psi|^2\right), \tag{0.0.3}$$

où Ψ est un spineur propre de D_M^2. De plus on montre que, si en particulier la variété M porte une structure kählérienne, alors l'estimation (0.0.3) améliore celle de Friedrich.

Il se trouve que la géométrie transverse et plus particulièrement celle des *flots riemanniens*, qui sont localement donnés par des submersions riemanniennes à fibres de dimension 1, va permettre de caractériser géométriquement le tenseur Q^Ψ. Il existe en effet un tenseur antisymétrique naturel sur les feuilletages riemanniens, appelé tenseur d'O'Neill, défini pour tous $X, Y \in TM$ par

$$A_X Y = \pi^\perp(\nabla^M_{\pi(X)}\pi(Y)) + \pi(\nabla^M_{\pi(X)}\pi^\perp(Y)),$$

où $\pi : TM \longrightarrow Q$ est la projection et $\pi^\perp = \mathrm{Id} - \pi$. La géométrie du fibré normal est complètement déterminée par ce tenseur du fait qu'il est relié à la projection du crochet de Lie sur le fibré normal. Si le tenseur d'O'Neill s'annule, alors le fibré normal est intégrable et si de plus la courbure moyenne est nulle, la variété est localement un produit de deux variétés riemanniennes. Ce produit est global si M est simplement connexe et complète. Ainsi, si le fibré normal d'un flot riemannien admet un spineur parallèle, alors le tenseur Q^Ψ peut être interprété comme le tenseur d'O'Neill du flot. On a la proposition suivante :

Proposition 0.0.1 *Soit M une variété riemannienne spinorielle munie d'un flot riemannien $\mathcal{F}$. Si le fibré normal admet un spineur parallèle Ψ, alors, pour tous $Z, W \in \Gamma(Q)$, on a*

$$Q^\Psi(Z, W) = -\frac{1}{2} g_M(A_Z\xi, W),$$

où A est le tenseur d'O'Neill et ξ est le champ unitaire qui définit le flot.

Le groupe d'Heisenberg qui est une fibration riemannienne sur le tore plat est un exemple de la proposition précédente. Un cas particulier des flots riemanniens est celui des variétés de *Sasaki*. Le flot défini par le champ de Killing ξ est riemannien à fibres totalement géodésiques et le fibré normal porte une structure de Kähler. D'où le fait qu'une structure géométrique particulière apparaîsse sur le fibré normal dans le cas où l'égalité dans (0.0.3) est atteinte. On trouve

Théorème 0.0.2 *Soit (M, g_M) une variété de Sasaki simplement connexe spinorielle de dimension $2m+1$ et (ξ, h, η) sa structure de Sasaki. Si le fibré normal Q admet un spineur parallèle Ψ, alors M est η-Einstein. De plus, si le cas limite de l'inégalité* (0.0.3) *est atteint, alors Q porte une structure hyperkählérienne de rang $n = 2m = 8k$. Dans ce cas le spineur Ψ est harmonique pour l'opérateur de Dirac de M.*

On relie le tenseur d'impulsion-énergie aux problèmes de la variation du spectre de l'opérateur de Dirac. Plus précisément, si on varie la métrique de M dans la direction du flot, i.e. on considère la famille de métriques $g_t = t^2 g_\xi + g_Q$. Alors on montre que

$$\frac{d}{dt}(D_t\Psi, \Psi)|_{t=1} = -T_\Psi(\xi, \xi),$$

où D_t est l'opérateur de Dirac associé à g_t. Si, de plus, la variété M est compacte, alors le spectre de D_t tend vers celui de l'opérateur de Dirac basique.

On termine ce chapitre en traitant le cas des petites dimensions. On commence par considérer plusieurs exemples en dimension 3. On montre en particulier que le fibré hyperbolique $\mathbb{T}^3_B = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}/(x, y) \sim (B(x), y+1)$, où B est une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vue comme un difféomorphisme du tore plat, n'admet de spineurs parallèles transversaux que si B est l'identité, i.e. si $\mathbb{T}^3_B$ est le tore plat $\mathbb{T}^3$. De plus, il vérifie intrinsèquement, ainsi que le groupe d'Heisenberg, le cas d'égalité dans (0.0.1). L'existence, sur un flot riemannien, d'un spineur parallèle basique va donner une géométrie particulière en dimension 3. On montre en effet que le revêtement universel de M, supposée compacte, est $\mathbb{R}^3$ et la variété M est une fibration de Seifert à fibres totalement géodésiques. De plus on a

Théorème 0.0.3 *Soit $(M^3, g_M, \mathcal{F})$ une variété riemannienne compacte munie d'un flot riemannien harmonique $\mathcal{F}$. Alors les données suivantes sont équivalentes :*

1. *le fibré normal admet un spineur parallèle Ψ;*
2. *la courbure scalaire transversale est nulle et Ψ est une solution de*

$$D_M \Psi = \frac{b}{2} \Psi,$$

avec $|\Psi| = 1$.

On obtient ainsi l'analogue de la caractérisation des surfaces établie par Th. Friedrich. Les variétés Nil_3 et Sol_3 sont des exemples de variétés de dimension 3 admettant des spineurs parallèles transversaux.

Les submersions riemanniennes étaient le point clé dans la classification des variétés kählériennes admettant des spineurs de Killing kählériens. C'est ainsi que les feuilletages kählériens et Kähler-quaternioniens apparaissent dans ce cadre et le problème de généraliser les estimations connues s'impose naturellement. Pour cela, on considère le cas où le fibré normal porte une structure kählérienne [Hab05] et Kähler-quaternionienne [Haba]. On introduit les ingrédients basiques sur ces feuilletages pour établir les estimations. On montre que les inégalités de Kirchberg restent vraies pour n'importe quelle dimension complexe. La preuve que nous présentons est basée sur l'utilisation de l'opérateur des twisteurs kählérien transversal comme dans le cas d'une variété kählérienne. On a alors

Théorème 0.0.4 *Soient M une variété compacte munie d'un feuilletage kählérien spinoriel $\mathcal{F}$ de codimension $q = 2m$ et d'une métrique quasi-fibrée g_M. Alors la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac basique satisfait*

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4m} K_0^{\nabla} \qquad \textit{si } m \textit{ est impair,} \tag{0.0.4}$$

et

$$\lambda^2 \geq \frac{m}{4(m-1)} K_0^{\nabla} \qquad \textit{si } m \textit{ est pair,} \tag{0.0.5}$$

où $K_0^{\nabla} = \inf_M(\mathrm{Scal}^{\nabla} + |\kappa|^2)$. *Le cas limite de* (0.0.4) *est caractérisé par le fait que le feuilletage est minimal et par l'existence d'un spineur de Killing kählérien basique. Un spineur qui vérifie une équation plus compliquée caractérise le cas limite de* (0.0.5). *Dans ce cas, la courbure scalaire transversale est constante.*

De même si le fibré normal porte une structure Kähler-quaternion, à courbure scalaire transversale positive (ces feuilletages sont d'Einstein), alors on montre une estimation qui améliore les inégalités de Kirchberg et on a le

Théorème 0.0.5 *Sous les hypothèses du théorème précédent, et si le feuilletage $\mathcal{F}$ est Kähler-quaternionien spinoriel de codimension $q = 4m$, alors le feuilletage est minimal et la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac basique satisfait*

$$\lambda^2 \geq \frac{m+3}{4(m+2)} \mathrm{Scal}^{\nabla}. \tag{0.0.6}$$

La preuve de l'inégalité (0.0.6) est une adaptation de celle de [KSW99, KSW98b, BHMM]. Le point clé est de montrer que le feuilletage est minimal du fait que le premier groupe de cohomologie basique soit nulle. C'est une une conséquence de la positivité de la courbure de Ricci transversale. Le cas limite de (0.0.6) est caractérisé par l'existence d'un *spineur de Killing Kähler-quaternionien basique.*

Chapitre 1

Introduction à la géométrie spinorielle des feuilletages

"Nul ne peut atteindre l'aube
sans passer par le chemin de la nuit"

Khalil Gebran

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit la notion de feuilletage spinoriel sur une variété M. On commence par définir un feuilletage comme étant une décomposition de M en sous-variétés de même dimension localement données par les images inverses de submersions. Plus précisement, un *feuilletage* de codimension q sur M est la donnée d'un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$, de submersions $f_i : U_i \longrightarrow N$ (où N est une variété de dimension q) et de difféomorphismes locaux $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ tels que $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$. Les feuilles sont données sur l'ouvert U_i par les images inverses par f_i des points de N et la structure transverse du feuilletage est déterminée par la variété N et les difféomorphismes γ_{ij}.

Théorème 1.1.1 *Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage spinoriel $\mathcal{F}$ et d'une métrique riemannienne quasi-fibrée g_M. On suppose que la 1-forme κ de courbure moyenne est basique et harmonique. Alors la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac basique satisfait*

$$\lambda^2 \geq \frac{q}{4(q-1)} K_0^\nabla, \tag{1.1.1}$$

où $K_0^\nabla = \inf_M(\mathrm{Scal}^\nabla + |\kappa|^2)$ et Scal^∇ est la courbure scalaire transversale associée à ∇.

Le cas limite de (1.1.1) est caractérisé par le fait que le feuilletage soit minimal et par l'existence d'un spineur de Killing basique.

1.2 Préliminaires

On se donne une variété différentielle M de dimension $p+q$, supposée connexe et orientée.

Définition 1.2.1 *Un feuilletage $\mathcal{F}$ de M de codimension q est la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de M et de submersions $f_i : U_i \longrightarrow N$ où N est une variété différentielle de dimension q, et tels que pour $i, j \in I, U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on ait un difféomorphisme $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ qui satisfait*

$$f_j = \gamma_{ij} \circ f_i. \tag{1.2.1}$$

Autrement dit, un feuilletage est une décomposition de M en une famille de sous-variétés connexes de dimension p. Chaque sous-variété s'appelle *feuille* de $\mathcal{F}$ et localement chaque feuille est l'image inverse par f_i d'un point de N. La condition (1.2.1) montre que, sur $U_i \cap U_j$, les feuilles définies par les submersions f_i et f_j coïncident.

Définition 1.2.2 *Une structure transverse à $\mathcal{F}$ est la donnée d'une structure géométrique sur la variété N invariante par les difféomorphismes locaux γ_{ij}.*

Exemples

1. Un feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *riemannien* [Rei59], s'il existe une métrique riemannienne sur N telle que les γ_{ij} préservent la métrique de N, c'est-à-dire les γ_{ij} sont des isométries.
2. Un feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *transversalement spinoriel* [ElK01], si la variété N est spinorielle et si la structure spinorielle est préservée par les γ_{ij}.
3. Un feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *transversalement kählérien* (resp. *transversalement Kähler-quaternionien*) [TN88], si la variété N est kählérienne (resp. Kähler-quaternionienne) et si les γ_{ij} préservent la structure kählérienne (resp. Kähler-quaternionienne).

Soient maintenant $(M, g_M, \mathcal{F})$ une variété riemannienne de dimension $p+q$ et $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q. On note L le sous-fibré vectoriel de TM tangent aux feuilles et on considère la suite exacte :

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} TM \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0,$$

où Q désigne le fibré quotient TM/L. L'existence d'une métrique riemannienne sur M décompose orthogonalement l'espace tangent de M en L et

$L^\perp$, et on a un isomorphisme $\sigma : Q \longrightarrow L^\perp$. La métrique g_M se décompose ainsi en

$$g_M = g_L \oplus g_{L^\perp}.$$

Ainsi l'image réciproque de $g_{L^\perp}$ par σ induit une métrique sur le fibré Q faisant de l'isomorphisme σ une isométrie. Dans la suite, on identifiera Q à $L^\perp$ en tant que fibrés vectoriels.

Revenons aux cas des feuilletages riemanniens. L'image réciproque de la métrique sur N par les submersions f_i induit une métrique g_Q sur le fibré Q invariante le long des feuilles. Elle vérifie [Rei59]

$$\mathcal{L}_X g_Q = 0, \qquad \forall X \in \Gamma(L), \tag{1.2.2}$$

où $\mathcal{L}_X$ désigne la dérivée de Lie dans la direction de X. Cette condition s'appelle la condition *d'invariance d'holonomie*. L'égalité (1.2.2) assure l'existence d'une connexion de Levi-Civita transversale sur le fibré normal [Ton88]. On a la proposition suivante :

Proposition 1.2.3 *Soit g_Q une métrique définie sur le fibré normal Q qui vérifie* (1.2.2)*. Alors il existe une unique connexion métrique ∇ à torsion nulle.*

La preuve de cette proposition se fait de la même manière que dans le cas riemannien. La connexion ∇ peut être vue comme l'image réciproque de la connexion de Levi-Civita de N par les submersions qui définissent $\mathcal{F}$. La torsion sur Q est définie pour tous $X, Y \in TM$ par

$$T^\nabla(X,Y) = \nabla_X \pi(Y) - \nabla_Y \pi(X) - \pi[X,Y],$$

où $\pi : TM \longrightarrow Q$ est la projection. La courbure R^∇ agit sur $\Gamma(Q)$ par

$$R^\nabla(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]},$$

où $X, Y \in TM$. Une propriété fondamentale de R^∇ dans le cas des feuilletages riemanniens est la suivante,

Proposition 1.2.4 *Pour tout $X \in \Gamma(L)$, on a*

$$X \llcorner R^\nabla = 0,$$

où $\llcorner$ désigne le produit intérieur.

Preuve Le fait que la torsion sur Q soit nulle implique que pour tous $X \in \Gamma(L)$ et $Y \in TM$, on a $\nabla_X \pi(Y) = \pi[X, Y]$. D'où pour $X, X' \in \Gamma(L)$ et $Y \in \Gamma(Q)$, on calcule

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, X')Y &= \nabla_X \nabla_{X'} Y - \nabla_{X'} \nabla_X Y - \nabla_{[X,X']} Y \\ &= \nabla_X \pi[X', Y] - \nabla_{X'} \pi[X, Y] - \pi[[X, X'], Y] \\ &= \pi[X, [X', Y]] - \pi[X', [X, Y]] - \pi[[X, X'], Y] = 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence de l'identité de Jacobi. Il reste à montrer que $R^\nabla(X, Y)Z = 0$ pour $Y, Z \in \Gamma(Q)$. Pour cela, on commence par montrer le lemme suivant,

Lemme 1.2.5 *Pour toute connexion ∇ sur le fibré normal à torsion nulle, on a*

$$R^\nabla(X, Y)Z = R^\nabla(X, Z)Y,$$

où $X \in \Gamma(L)$ et $Y, Z \in \Gamma(Q)$.

Preuve La torsion de ∇ étant nulle, on a pour tous $X \in \Gamma(L)$ et $Y, Z \in \Gamma(Q)$,

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \pi[X, Z] - \nabla_Z \pi[X, Y] - \pi[[X, Y], Z] \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Z]} Y - \pi[Y, [X, Z]] - \nabla_Z \nabla_X Y - \pi[[X, Y], Z] \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - R^\nabla(Z, X)Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \pi[Y, [X, Z]] \\ &\quad -\pi[[X, Y], Z] \\ &= R^\nabla(X, Z)Y + \nabla_X \pi[Y, Z] - \pi[Y, [X, Z]] - \pi[[X, Y], Z] \\ &= R^\nabla(X, Z)Y + \pi[X, [Y, Z]] - \pi[Y, [X, Z]] - \pi[[X, Y], Z] \\ &= R^\nabla(X, Z)Y. \end{aligned}$$

□

Si la connexion ∇ est métrique, alors la 4-forme $g_Q(R^\nabla(X, Y)Z, W)$ est antisymétrique en Z et W. En effet,

$$\begin{aligned} g_Q(R^\nabla(X, Y)Z, Z) &= g_Q(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, Z) \\ &= X(g_Q(\nabla_Y Z, Z)) - g_Q(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Y(g_Q(\nabla_X Z, Z)) \\ &\quad +g_Q(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - \frac{1}{2}[X, Y](g_Q(Z, Z)) \\ &= \frac{1}{2} X(Y(g_Q(Z, Z))) - \frac{1}{2} Y(X(g_Q(Z, Z))) \\ &\quad -\frac{1}{2}[X, Y](g_Q(Z, Z)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La connexion de Levi-Civita transversale étant métrique à torsion nulle, on obtient alors par ce lemme que pour $Y, Z \in \Gamma(Q)$,

$$0 = g_Q(R^\nabla(X,Z)Y,Y) = g_Q(R^\nabla(X,Y)Z,Y) = -g_Q(R^\nabla(X,Y)Y,Z).$$

On en déduit que $R^\nabla(X,Y)Y = 0$. En utilisant de nouveau le lemme, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= R^\nabla(X,Y+Z)(Y+Z) \\ &= R^\nabla(X,Y)Y + R^\nabla(X,Y)Z + R^\nabla(X,Z)Y + R^\nabla(X,Z)Z \\ &= 2R^\nabla(X,Y)Z. \end{aligned}$$

On a alors le résultat demandé. □

On peut déduire de la proposition précédente que, pour tous $Y, Z \in \Gamma(Q)$, l'opérateur $R^\nabla(Y,Z) : \Gamma(Q) \longrightarrow \Gamma(Q)$ est un endomorphisme bien défini. De plus, il vérifie la première identité de Bianchi. En effet, pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(Q)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{cyclique} R^\nabla(X,Y)Z &= \sum_{cyclique} (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= \sum_{cyclique} (\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= \sum_{cyclique} (\nabla_Z(\pi[X,Y]) - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= \sum_{cyclique} \pi[Z,[X,Y]] = 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence de l'identité de Jacobi. L'équation (1.2.2) amène à la définition suivante :

Définition 1.2.6 *Une métrique g_M sur M est dite quasi-fibrée si la métrique induite g_Q sur Q vérifie la condition d'invariance d'holonomie.*

Dans ce cas, la connexion de Levi-Civita transversale est donnée pour tout $Y \in \Gamma(Q)$ par [Ton88]

$$\nabla_X Y = \begin{cases} \pi[X,Y], & \forall X \in \Gamma(L)\ , \\ \\ \pi(\nabla^M_X Y), & \forall X \in \Gamma(Q)\ , \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

où ∇^M désigne la connexion de Levi-Civita associée à M. On vérifie facilement que la connexion ∇ définie par (1.2.3) est métrique à torsion nulle. Un exemple de feuilletage riemannien est donné par un champ de Killing ξ non singulier sur M. Le feuilletage défini par les orbites de ξ est riemannien et la métrique induite sur Q est quasi-fibrée.

Dans la suite, on considérera un feuilletage riemannien avec une métrique quasi-fibrée.

Définition 1.2.7 *On définit la courbure de Ricci transversale par*

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Ric}^\nabla : \Gamma(Q) & \longrightarrow & \Gamma(Q) \\ Y & \longmapsto & \mathrm{Ric}^\nabla Y = \sum_{i=1}^q R^\nabla(Y, e_i)e_i, \end{array}$$

où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ *est un repère local orthonormé de* $\Gamma(Q)$*. De même, on définit la courbure scalaire transversale* Scal^∇ *comme étant la trace de la courbure de Ricci transversale. Un feuilletage* $\mathcal{F}$ *est dit transversalement d'Einstein si la courbure de Ricci transversale est proportionelle à* g_Q*.*

La seconde forme fondamentale II du fibré L est définie comme étant la seconde forme fondamentale de chaque feuille de $\mathcal{F}$. Ainsi, on a

$$\begin{array}{rcl} II : \Gamma(L) \times \Gamma(L) & \longrightarrow & \Gamma(Q) \\ (X, Y) & \longmapsto & II(X, Y) = \pi(\nabla^M_X Y). \end{array}$$

D'où II est symétrique par l'intégrabilité de L. La courbure moyenne κ de $\mathcal{F}$ est donnée pour tout $Y \in \Gamma(Q)$ par $\kappa(Y) = g_Q(\tau, Y)$, où τ est la trace de la seconde forme fondamentale. Un feuilletage est dit minimal si chaque feuille est minimale, c'est-à-dire si la courbure moyenne est nulle. Ainsi, un feuilletage est dit totalement géodésique si chaque feuille est totalement géodésique ce qui revient à dire que la seconde forme fondamentale est nulle.

On définit l'espace des *r-formes basiques* par :

$$\Omega^r_B(\mathcal{F}) = \{\alpha \in \Lambda^r T^*M |\ X \lrcorner \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_X \alpha = 0, \quad \forall X \in \Gamma(L)\},$$

où $X\lrcorner$ est le produit intérieur. Dans une carte locale $\{x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_q\}$ de M, les r-formes basiques s'écrivent

$$\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq q} \beta_{j_1,\cdots,j_r} dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_r},$$

où $\frac{\partial}{\partial x_l}\beta_{j_1,\cdots,j_r} = 0, \quad \forall l = 1, \cdots, p$. On note $\Omega_B(\mathcal{F}) = \oplus_{r=0}^{p+q} \Omega^r_B(\mathcal{F})$ l'algèbre tensorielle des formes basiques. La restriction $d_B = d|_{\Omega_B(\mathcal{F})}$ est bien définie du fait que la dérivée extérieure préserve les formes basiques. En effet, pour tous $X \in \Gamma(L)$ et α une forme basique, on a

$$X \lrcorner d\alpha = \mathcal{L}_X \alpha - d(X \lrcorner \alpha).$$

Un feuilletage est dit *isoparamétrique* si la 1-forme κ de courbure moyenne est basique. Si la variété est en plus compacte, κ est fermée [TK83]. La cohomologie basique de $\mathcal{F}$ est l'homologie du complexe $(\Omega_B^*(\mathcal{F}), d_B)$, elle est notée $H_B^*(\mathcal{F})$. Elle joue le rôle de la cohomologie de De Rham de l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$. Soit δ_B l'adjoint de d_B pour le produit scalaire induit de celui de $\Lambda^r T^* M$. Si le feuilletage est isoparamétrique, alors on a [AL92]

$$d_B = \sum_{i=1}^{q} e_i^\star \wedge \nabla_{e_i} \quad \text{et} \quad \delta_B = -\sum_{i=1}^{q} e_i \lrcorner \nabla_{e_i} + \kappa \lrcorner, \tag{1.2.4}$$

où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ est un repère local orthonormé de $\Gamma(Q)$. La démonstration de (1.2.4) se fait de la même manière que le cas ordinaire. Le terme en κ dans l'expression de δ_B est une conséquence de la formule de Green sur un feuilletage riemannien qu'on va rappeler dans le théorème suivant [YT90] :

Théorème 1.2.8 *Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension q et d'une métrique riemannienne quasi-fibrée g_M. Pour tout $Y \in \Gamma(Q)$, on a*

$$\int_M \mathrm{div}_Q Y = \int_M g_M(\kappa, Y),$$

où la divergence d'une section $Y \in \Gamma(Q)$ est définie pour tout repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ de $\Gamma(Q)$ par $\mathrm{div}_Q Y = \sum_{i=1}^q g_Q(\nabla_{e_i} Y, e_i)$.

La preuve de ce théorème est basée sur le fait que, pour tout $Y \in \Gamma(Q)$, on a

$$\mathrm{div}_M Y = -g_M(Y, \kappa) + \mathrm{div}_Q Y.$$

Ainsi l'intégrale sur M donne le résultat demandé. Finalement, on termine cette section en définissant le laplacien basique comme étant

$$\Delta_B = d_B \circ \delta_B + \delta_B \circ d_B.$$

1.3 L'opérateur de Dirac transversal

Dans cette section, on va introduire l'opérateur de Dirac transversal sur un feuilletage riemannien et on va établir une formule de type Schrödinger-Lichnerowicz pour cet opérateur. Pour cela, on considère une variété M munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ et une connexion métrique ∇ définie sur le fibré normal Q. On suppose que $\mathcal{F}$ est transversalement orienté et on note par $\mathrm{SO}Q$ le fibré au dessus de M des repères orthonormés de $\Gamma(Q)$. On a [LM89]

Définition 1.3.1 *Une structure spinorielle transversale est la donnée d'un couple* $(\mathrm{Spin}Q, \eta)$ *où* $\mathrm{Spin}Q$ *est un* Spin_q*-fibré principal sur* M *et* η *est un revêtement à deux feuillets tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}Q \times \mathrm{Spin}_q \arrow[r] \arrow[d, "\eta\otimes\mathrm{Ad}"] & \mathrm{Spin}Q \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & M \\
\mathrm{SO}Q \times \mathrm{SO}_q \arrow[r] & \mathrm{SO}Q \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Les applications

$$\mathrm{Spin}Q \times \mathrm{Spin}_q \longrightarrow \mathrm{Spin}Q$$

et

$$\mathrm{SO}Q \times \mathrm{SO}_q \longrightarrow \mathrm{SO}Q$$

sont respectivement les actions de Spin_q *et* SO_q *sur les fibrés principaux* $\mathrm{Spin}Q$ *et* $\mathrm{SO}Q$*. L'application* $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}_q \longrightarrow \mathrm{SO}_q$ *est définie pour tous* $u \in \mathrm{Spin}_q$ *et* $x \in \mathbb{R}^q$ *par* $\mathrm{Ad}_u(x) = u \cdot x \cdot u^{-1}$*. Dans ce cas, le feuilletage* $\mathcal{F}$ *est dit spinoriel.*

Cette définition est équivalente au fait que les fonctions de transition φ_{ij} de $\mathrm{SO}Q$ se relèvent à des fonctions de transition $\widetilde{\varphi}_{ij}$ de $\mathrm{Spin}Q$, i.e. le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Spin}_q \arrow[d, "\mathrm{Ad}"] \\
U_i \cap U_j \subset M \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}_{ij}"] \arrow[r, "\varphi_{ij}"] & \mathrm{SO}_q
\end{tikzcd}$$

commute et les $\widetilde{\varphi}_{ij}$ satisfont la condition de cocycle

$$\widetilde{\varphi}_{ij}\widetilde{\varphi}_{jk} = \widetilde{\varphi}_{ik}.$$

On définit le fibré spinoriel complexe par

$$S(\mathcal{F}) := \mathrm{Spin}Q \times_\rho \Sigma_q,$$

où

$$\rho : \mathrm{Spin}_q \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Sigma_q)$$

est la représentation spinorielle complexe et Σ_q est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2^{[\frac{q}{2}]}$, où [ ] désignant la partie entière. Une section Ψ de $S(\mathcal{F})$ est définie localement par :

$$\Psi|_U = [\tilde{s}, \alpha] \, ,$$

où $\tilde{s} \in \Gamma_U(\mathrm{Spin}Q)$, $U \subset M$ et $\alpha : U \longrightarrow \Sigma_q$ est une fonction.

La multiplication de Clifford $\mathcal{M}$ agit sur $\Gamma(S(\mathcal{F}))$ par :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M} \, : & \Gamma(Q) \times \Gamma(S(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \Gamma(S(\mathcal{F})) \\ & (Y, \Psi) & \longmapsto & Y \cdot \Psi := [\tilde{s}, \rho(\sigma)\alpha], \end{array}$$

où $Y = [\tilde{s}, \sigma]$ et $\Psi = [\tilde{s}, \alpha]$. Le fibré Q est vu via l'isomorphisme

$$\Gamma(Q) \simeq \mathrm{Spin}Q \times_{\mathrm{Ad}} \mathbb{R}^q.$$

Connexion sur le fibré spinoriel

Considérons un ouvert simplement connexe U de M et une section locale $s \in \Gamma_U \mathrm{SO}Q$, c'est-à-dire en tout point $x \in U$, on a $s(x) = (e_1(x), \cdots, e_q(x))$ où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ est une base orthonormée directe de $\Gamma(Q)$. Soit $\omega : T\mathrm{SO}Q \longrightarrow \mathfrak{so}_q$ la 1-forme de connexion définie localement sur le fibré principal $\mathrm{SO}Q$ par :

$$s^{\star}\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j,$$

où les ω_{ij} sont donnés par

$$\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^{q} \omega_{ij}(X) e_j,$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$. Comme U est simplement connexe et comme η est un revêtement, alors la section s se relève en une section $\tilde{s}$ de $\mathrm{Spin}Q$. On définit alors la 1-forme de connexion $\tilde{\omega}$ sur le fibré principal $\mathrm{Spin}Q$ comme étant l'unique 1-forme de connexion rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} & T\mathrm{Spin}Q \arrow[r, "\tilde{\omega}"] \arrow[d, "\eta_*"] & \mathfrak{spin}_q \arrow[d, "\mathrm{Ad}_*"] \\ TU \subset TM \arrow[ur, "\tilde{s}_*"] \arrow[r, "s_*"] & T\mathrm{SO}Q \arrow[r, "\omega"] & \mathfrak{so}_q \end{tikzcd}$$

La dérivée covariante sur $\Gamma(S(\mathcal{F}))$ est alors définie par

$$\nabla_X \Psi := [\tilde{s}, X(\alpha) + \rho_{\star}(\tilde{\omega} \circ \tilde{s}_{\star}(X))\alpha] \, ,$$

où $\Psi = [\tilde{s}, \alpha]$, $X \in TU$ et $X(\alpha)$ désigne la dérivée de Lie de α dans la direction du vecteur X.

Proposition 1.3.2 *1. La 1-forme de connexion $\tilde{\omega}$ vérifie pour tout $X \in \Gamma(TU)$*

$$\tilde{\omega}(\tilde{s}_\star(X)) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \omega_{ij}(X) e_i \cdot e_j.$$

2. Pour tout spineur $\Psi \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$, on a localement

$$\nabla_X \Psi = X(\Psi) + \frac{1}{2}\sum_{i<j} g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \Psi,$$

où $X \in \Gamma(TM)$.

Ainsi on définit la courbure spinorielle transversale pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\Psi \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$ par

$$R^S(X,Y)\Psi = \nabla_X \nabla_Y \Psi - \nabla_Y \nabla_X \Psi - \nabla_{[X,Y]}\Psi.$$

Par l'écriture locale de la dérivée covariante, on a, pour tout repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ de $\Gamma(Q)$,

$$R^S(X,Y)\Psi = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{q} g_Q(R^\nabla(X,Y)e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \Psi,$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$. Comme dans le cas d'une variété spinorielle, on vérifie qu'il existe un produit hermitien naturel sur $\Gamma(S(\mathcal{F}))$ défini par

$$\begin{array}{rcl} <\cdot,\cdot> : \ \Gamma(S(\mathcal{F})) \times \Gamma(S(\mathcal{F})) & \longrightarrow & C^\infty(M, \mathbb{C}) \\ (\Psi, \Phi) & \longmapsto & <\Psi, \Phi>, \end{array}$$

où $<\Psi, \Phi>(x) = <\Psi(x), \Phi(x)>$ est le produit hermitien dans Σ_q [LM89]. Ce produit hermitien ainsi défini est l'unique produit hermitien tel que les propriétés suivantes soient vérifiées pour $Y \in \Gamma(Q)$ et $X \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{array}{rcl} <Y \cdot \Psi, \Phi> & = & -<\Psi, Y \cdot \Phi>, \\ X(<\Psi, \Phi>) & = & <\nabla_X \Psi, \Phi> + <\Psi, \nabla_X \Phi>, \end{array}$$

où $\Psi, \Phi \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$.

Dans la suite, on va supposer que M est une variété munie d'un feuilletage spinoriel $\mathcal{F}$ et d'une métrique quasi-fibrée g_M. Le fibré normal Q de $\mathcal{F}$ muni de la connexion (1.2.3) est un $\mathcal{F}$-fibré au sens de [ElK90] (i.e. $X \lrcorner R^\nabla = 0, \ \forall X \in \Gamma(L)$). En particulier, le fibré spinoriel complexe $S(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{F}$-fibré. Également pour les variétés spinorielles, on peut établir l'identité de Ricci transversale. D'où, la proposition

Proposition 1.3.3 *Pour tous* $Y \in \Gamma(Q)$ *et* $\Psi \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$, *on a*

$$\sum_{j=1}^{q} e_j \cdot R^S(Y, e_j)\Psi = -\frac{1}{2}\mathrm{Ric}^\nabla Y \cdot \Psi,$$

où $\{e_j\}_{j=1,\cdots,q}$ *est un repère local orthonormé de* $\Gamma(Q)$.

L'expression locale de R^∇ et la première identité de Bianchi permettent de démontrer la proposition 1.3.3. En posant $Y = e_i$ et en traçant sur i, on obtient

$$\sum_{i,j=1}^{q} e_i \cdot e_j \cdot R^S(e_i, e_j)\Psi = \frac{1}{2}\mathrm{Scal}^\nabla \Psi. \tag{1.3.1}$$

Sur une variété spinorielle, il existe un opérateur différentiel elliptique d'ordre un agissant sur le fibré des spineurs appelé *l'opérateur de Dirac*. Il est défini comme étant la composée de la dérivée covariante avec la multiplication de Clifford. Si la variété est compacte, cet opérateur est essentiellement auto-adjoint ayant un spectre discret.

On va transporter cette définition au cas des feuilletages riemanniens. Pour cela, on définit *l'opérateur de Dirac transversal* D [BK] comme la composée de

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(S(\mathcal{F})) & \xrightarrow{\nabla^{tr}} & \Gamma(Q^\star \otimes S(\mathcal{F})) & \xrightarrow{\mathcal{M}} & \Gamma(S(\mathcal{F})) \\ \Psi & \longmapsto & \sum_{i=1}^q e_i^\star \otimes \nabla_{e_i}\Psi & \longmapsto & \sum_{i=1}^q e_i \cdot \nabla_{e_i}\Psi, \end{array}$$

où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ est un repère local orthonormé de $\Gamma(Q)$ et ∇^{tr} est la projection de la connexion ∇. L'opérateur D ainsi défini est transversalement elliptique. De plus, pour tous $\Psi, \Phi \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$, on a

$$(D\Psi, \Phi) = (\Psi, D\Phi) - \mathrm{div}_Q Y,$$

où $Y \in \Gamma(Q)$ est défini par $g_Q(Y, e_i) = (\Psi, e_i \cdot \Phi)$. Alors, en tenant compte de la formule de Green, on remarque que cet opérateur n'est pas formellement auto-adjoint pour le produit scalaire L^2. Pour cela, on considère pour tout $\Psi \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$, l'opérateur D_{tr} défini par [GK91a, GK91b]

$$D_{tr}\Psi = \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot \nabla_{e_i}\Psi - \frac{1}{2}\kappa \cdot \Psi. \tag{1.3.2}$$

Cet opérateur défini dans (1.3.2) est essentiellement auto-adjoint ayant un spectre non discret. Pour rendre son spectre discret, on va rappeler un résultat démontré dans [ElK90, EG97].

Soit M une variété munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Un $\mathcal{F}$-fibré E, muni d'une connexion ∇, est dit hermitien s'il admet un produit hermitien défini positif basique, (i.e. parallèle le long des feuilles). Soit alors E un $\mathcal{F}$-fibré hermitien sur M, supposée compacte. On définit l'ensemble des sections basiques

$$\Gamma_B(E) = \{s \in \Gamma(E) |\, \nabla_X s = 0,\ \forall X \in \Gamma(L)\}.$$

On a le théorème suivant

Théorème 1.3.4 *Soit A un opérateur différentiel basique transversalement elliptique $A : \Gamma_B(E) \longrightarrow \Gamma_B(E)$. Alors*

1. *Le noyau* $\mathrm{Ker}A$ *est de dimension finie.*
2. *On a une décomposition orthogonale,* $\Gamma_B(E) = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Im}A^*$.

Si de plus l'opérateur A est auto-adjoint, alors il admet une base hilbertienne de $L^2(E)$ formée de sections basiques et son spectre est discret.

Sur un feuilletage spinoriel $\mathcal{F}$ de M munie d'une métrique quasi-fibrée g_M, le fibré $S(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. D'où, on définit *l'opérateur de Dirac basique* D_b comme la restriction de D_{tr} à l'ensemble des sections basiques, noté $\Gamma_B(S(\mathcal{F}))$. L'image de cet opérateur est incluse dans $\Gamma_B(S(\mathcal{F}))$ si et seulement si le feuilletage est isoparamétrique. En effet, on considère un repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ de $\Gamma(Q)$ tel qu'en un point x de M, on ait $\nabla e_i|_x = 0$. Soit Ψ un spineur basique. Alors pour tout $X \in \Gamma(L)$, on a en x

$$\begin{aligned}
\nabla_X D_b \Psi &= \nabla_X\Big(\sum_{i=1}^{q} e_i \cdot \nabla_{e_i}\Psi - \frac{1}{2}\kappa \cdot \Psi\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot \nabla_X \nabla_{e_i}\Psi - \frac{1}{2}\nabla_X\kappa \cdot \Psi - \frac{1}{2}\kappa \cdot \nabla_X\Psi \\
&= \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot (R^S(X, e_i)\Psi + \nabla_{e_i}\nabla_X\Psi + \nabla_{[X,e_i]}\Psi) - \frac{1}{2}\nabla_X\kappa \cdot \Psi.
\end{aligned}$$

Puisque $X \in \Gamma(L)$, alors le premier terme s'annule. D'après la définition de la connexion ∇, on a que $[X, e_i]_x \in L_x$, d'où $\nabla_{[X,e_i]}\Psi = 0$. Ainsi $D_b\Psi$ est basique si et seulement si la courbure moyenne est constante le long des feuilles. Ceci est équivalent à dire que le feuilletage est isoparamétrique. $\square$

Ainsi le théorème 1.3.4, appliqué à $E = S(\mathcal{F})$, donne que le spectre de l'opérateur de Dirac basique est discret si le feuilletage est isoparamétrique et la variété M est compacte. Les questions naturelles qu'on peut maintenant se poser : a-t-on des estimations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac basique d'un feuilletage riemannien analogues à celles d'une variété spinorielle ? Si ces estimations existent, quelles interprétations géométriques obtient-on sur le feuilletage et sur la variété ambiante ?

Les valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur une variété riemannienne spinorielle sont estimées grâce à la formule de Schrödinger-Lichnerowicz. Cette formule relie le carré de l'opérateur de Dirac au laplacien spinoriel à un terme d'ordre zéro près. On va établir une formule de Schrödinger-Lichnerowicz pour l'opérateur de Dirac transversal. Pour cela, on note pour tous $X, Y \in \Gamma(Q)$,

$$\nabla^2_{X,Y} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y}.$$

Alors sur un feuilletage riemannien, on a [GK91a, GK91b]

Proposition 1.3.5 *Soit M une variété munie d'un feuilletage spinoriel $\mathcal{F}$ de codimension q et d'une métrique quasi-fibrée g_M. On suppose que la 1-forme κ de courbure moyenne est basique fermée et cofermée. Alors pour tout $\Psi \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$, on a la formule de Schrödinger-Lichnerowicz :*

$$D_{tr}^2 \Psi = \nabla^\star \nabla^{tr} \Psi + \frac{1}{4} K^\nabla \Psi + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{q} e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{\pi^\perp([e_i,e_j])} \Psi,$$

où $K^\nabla = \mathrm{Scal}^\nabla + |\kappa|^2$ avec $\pi^\perp : TM \longrightarrow L$ est la projection et

$$\nabla^\star \nabla^{tr} = -\sum_{i=1}^{q} \nabla^2_{e_i,e_i} + \nabla_\kappa,$$

où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ est un repère local orthonormé de $\Gamma(Q)$. Si de plus le spineur Ψ est basique, alors pour l'opérateur de Dirac basique on obtient

$$D_b^2 \Psi = \nabla^\star \nabla \Psi + \frac{1}{4} K^\nabla \Psi.$$

Preuve On considère en un point x de M un repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ de $\Gamma(Q)$ tel que $\nabla e_i|_x = 0$. Alors

$$
\begin{aligned}
D_{tr}^2\Psi &= D_{tr}(\sum_{j=1}^{q} e_j\cdot\nabla_{e_j}\Psi - \frac{1}{2}\kappa\cdot\Psi)\\
&= \sum_{i=1}^{q} e_i\cdot\nabla_{e_i}(\sum_{j=1}^{q} e_j\cdot\nabla_{e_j}\Psi - \frac{1}{2}\kappa\cdot\Psi) - \frac{1}{2}\kappa\cdot(\sum_{j=1}^{q} e_j\cdot\nabla_{e_j}\Psi - \frac{1}{2}\kappa\cdot\Psi)\\
&= \sum_{i,j=1}^{q} e_i\cdot e_j\cdot\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\Psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} e_i\cdot\nabla_{e_i}\kappa\cdot\Psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} e_i\cdot\kappa\cdot\nabla_{e_i}\Psi\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}\kappa\cdot e_j\cdot\nabla_{e_j}\Psi + \frac{1}{4}\kappa\cdot\kappa\cdot\Psi\\
&= -\sum_{i=1}^{q}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\Psi + \sum_{i\neq j} e_i\cdot e_j\cdot\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\Psi - \frac{1}{2}(d_B\kappa + \delta_B\kappa - |\kappa|^2)\Psi\\
&\quad +\nabla_\kappa\Psi - \frac{1}{4}|\kappa|^2\Psi.
\end{aligned}
$$

La dernière égalité est une conséquence des égalités (1.2.4) et du fait que pour tous $v, w\in\mathbb{R}^q$ et $\varphi\in\mathbb{C}l(Q)$, on a

$$
v\cdot\varphi = v\wedge\varphi - v\lrcorner\varphi \quad\text{et}\quad v\cdot w + w\cdot v = -2g(v,w)\mathrm{Id}.
$$

La courbure moyenne κ étant fermée et cofermée, alors par (1.3.1) on obtient

$$
\begin{aligned}
D_{tr}^2\Psi &= \nabla^\star\nabla^{tr}\Psi + \sum_{i<j} e_i\cdot e_j\cdot(R^S(e_i,e_j)\Psi + \nabla_{[e_i,e_j]}\Psi) + \frac{1}{4}|\kappa|^2\Psi\\
&= \nabla^\star\nabla^{tr}\Psi + \frac{1}{4}K^\nabla\Psi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{q} e_i\cdot e_j\cdot\nabla_{[e_i,e_j]}\Psi.
\end{aligned}
$$

D'où, en utilisant que $[e_i,e_j]_x\in L_x$ par la nullité de la torsion, on déduit le résultat cherché. $\square$

Les conditions imposées sur la courbure moyenne de la proposition précédente sont naturelles dans le cas où la variété M est compacte. En effet, sur un feuilletage riemannien $(M, g_M, \mathcal{F})$ avec M supposée compacte, on peut modifier la métrique quasi-fibrée g_M en une métrique quasi-fibrée g'_M tel que la courbure moyenne est une 1-forme basique et harmonique [MMOR96, Mas00]. Dans la suite, on considérera la métrique quasi-fibrée g'_M que l'on notera par g_M. On termine cette section en donnant un corollaire de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz.

Corollaire 1.3.6 *Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage spinoriel $\mathcal{F}$ et d'une métrique riemannienne quasi-fibrée g_M. Supposons que K^∇ est positive, alors on a* $\mathrm{Ker}\, D_b = 0$.

Preuve Par la formule de Schrödinger-Lichnerowicz et pour tout spineur basique Ψ, on a

$$\int_M |D_b\Psi|^2 v_g = \underbrace{\int_M |\nabla\Psi|^2 v_g}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{4}\int_M K^\nabla |\Psi|^2 v_g}_{>0}\,. \tag{1.3.3}$$

Donc $D_b\Psi$ ne peut pas être nulle. □

1.4 Estimations des valeurs propres

On se propose dans cette section d'établir des estimations pour la première valeur propre de l'opérateur de Dirac basique. On démontre comme dans le cas spinoriel une estimation de type Friedrich [Fri80] sur une variété compacte. Ces estimations n'exigent pas la positivité de la courbure scalaire transversale et ceci est une conséquence de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz.

Proposition 1.4.1 *Sous les mêmes hypothèses que le corollaire précédent, la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac basique satisfait*

$$\lambda^2 > \frac{1}{4}K_0^\nabla,$$

où $K_0^\nabla = \inf_M K^\nabla$.

Preuve L'inégalité découle directement de l'égalité (1.3.3). Le cas limite ne peut pas être atteint car sinon Ψ est parallèle et

$$D_b\Psi = -\frac{1}{2}\kappa\cdot\Psi = \lambda\Psi. \tag{1.4.1}$$

Or pour tout spineur Φ, on a que $(\Phi,\kappa\cdot\Phi) = -(\kappa\cdot\Phi,\Phi) = -\overline{(\Phi,\kappa\cdot\Phi)}$. Donc le produit scalaire $(\Phi,\kappa\cdot\Phi)$ est imaginaire pur. Le produit scalaire de l'égalité (1.4.1) par Ψ donne qu'il est harmonique, ce qui contredit le corollaire précédent. □

On va donner une inégalité de type Friedrich. Une démonstration est établie dans [Jun01] en modifiant la connexion transversale. On propose ici une démonstration plus naturelle en utilisant l'opérateur des twisteurs transversal comme dans le cas spinoriel [BFGK91, Hij94b].

Définition 1.4.2 *On définit l'opérateur des twisteurs transversal sur un feuilletage spinoriel comme la composée de*

$$\mathcal{P} : \Gamma(S(\mathcal{F})) \xrightarrow{\nabla^{tr}} \Gamma(Q^* \otimes S(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Ker}\mathcal{M}),$$

où la deuxième application est la projection orthogonale sur le noyau de la multiplication de Clifford $\mathcal{M}$.

Proposition 1.4.3 *Dans un repère local, on écrit*

$$\mathcal{P}\Psi = \sum_{i=1}^{q} e_i^* \otimes (\nabla_{e_i}\Psi + \frac{1}{q} e_i \cdot D_{tr}\Psi + \frac{1}{2q} e_i \cdot \kappa \cdot \Psi), \qquad (1.4.2)$$

pour tout $\Psi \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$.

On vérifie facilement que pour tout spineur Ψ, on a

$$\sum_{i=1}^{q} e_i \cdot \mathcal{P}_{e_i}\Psi = 0. \qquad (1.4.3)$$

Théorème 1.4.4 *[Jun01, Hab05] On se met sous les mêmes hypothèses que dans le corollaire 1.3.6. Si* λ *est la première valeur propre de l'opérateur de Dirac basique, alors on a une inégalité de type Friedrich,*

$$\lambda^2 \geq \frac{q}{4(q-1)} K_0^{\nabla}.$$

Preuve Pour tout spineur basique $\Psi \in \Gamma_B(S(\mathcal{F}))$, on a par (1.4.2) et (1.4.3)

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}\Psi|^2 &= \sum_{i=1}^{q} |\mathcal{P}_{e_i}\Psi|^2 = \sum_{i=1}^{q} (\mathcal{P}_{e_i}\Psi, \nabla_{e_i}\Psi) \\
&= \sum_{i=1}^{q} (\nabla_{e_i}\Psi + \frac{1}{q} e_i \cdot D_b\Psi + \frac{1}{2q} e_i \cdot \kappa \cdot \Psi, \nabla_{e_i}\Psi) \\
&= |\nabla\Psi|^2 - \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} (D_b\Psi, e_i \cdot \nabla_{e_i}\Psi) - \frac{1}{2q}\sum_{i=1}^{q} (\kappa \cdot \Psi, e_i \cdot \nabla_{e_i}\Psi).
\end{aligned}$$

D'où par l'égalité (1.3.2), on déduit

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}\Psi|^2 &= |\nabla\Psi|^2 - \frac{1}{q}(D_b\Psi, D_b\Psi + \frac{1}{2}\kappa \cdot \Psi) - \frac{1}{2q}(\kappa \cdot \Psi, D_b\Psi + \frac{1}{2}\kappa \cdot \Psi) \\
&= |\nabla\Psi|^2 - \frac{1}{q}|D_b\Psi|^2 - \frac{1}{q}\Re(D_b\Psi, \kappa \cdot \Psi) - \frac{1}{4q}|\kappa|^2|\Psi|^2.
\end{aligned}$$

Soit Ψ un spineur propre pour l'opérateur de Dirac basique associé à la valeur propre λ. Alors l'égalité précédente devient

$$|\mathcal{P}\Psi|^2 = |\nabla\Psi|^2 - \frac{1}{q}\lambda^2|\Psi|^2 - \frac{1}{q}\lambda\Re(\Psi, \kappa\cdot\Psi) - \frac{1}{4q}|\kappa|^2|\Psi|^2.$$

Le produit scalaire $(\Psi, \kappa\cdot\Psi)$ étant imaginaire pur, on obtient

$$|\mathcal{P}\Psi|^2 + \frac{1}{4q}|\kappa|^2|\Psi|^2 = |\nabla\Psi|^2 - \frac{1}{q}\lambda^2|\Psi|^2. \tag{1.4.4}$$

En intégrant sur M, en utilisant la formule de Schrödinger-Lichnerowicz et en tenant compte du fait que le terme de gauche est positif, on obtient

$$\lambda^2 \geq \frac{q}{4(q-1)}K_0^\nabla.$$

D'où le résultat demandé. □

Cas limite. Dans le cas où l'égalité dans (1.1.1) est atteinte, alors d'après (1.4.4) la courbure moyenne κ est nulle et Ψ est un spineur twisteur, i.e. $\mathcal{P}\Psi = 0$. D'où il vérifie un système différentiel dit *surdéterminé* et donné pour tous $Y \in \Gamma(Q)$ et $X \in \Gamma(L)$ par

$$\begin{cases} \nabla_Y\Psi = -\frac{\lambda}{q}Y\cdot\Psi, \\ \nabla_X\Psi = 0. \end{cases} \tag{1.4.5}$$

Ce système est une conséquence directe de (1.4.2). Ainsi tout champ de spineurs transversal qui vérifie (1.4.5) s'appelle un *spineur de Killing basique*. En calculant la courbure spinorielle et en utilisant l'identité de Ricci transversale, on déduit comme dans le cas des variétés spinorielles que le feuilletage est transversalement d'Einstein.

On sait que, sur une variété spinorielle (M^n, g_M), l'existence d'un champ de spineurs de Killing Ψ permet de lui associer un champ de vecteurs X_Ψ défini par

$$X_\Psi := i\sum_{j=1}^{n}(\Psi, e_j\cdot\Psi)e_j,$$

où $\{e_j\}_{j=1,\cdots,n}$ est un repère local orthonormé de TM. Ce champ ainsi défini est un champ de Killing, i.e. $\mathcal{L}_X g_M = 0$, d'où le nom de spineurs de Killing.

Donc, on est amené à la définition suivante : sur un feuilletage quelconque de M, un champ de vecteurs $Y \in TM$ est dit *feuilleté* si pour tout $X \in \Gamma(L)$, on a $[X, Y] \in \Gamma(L)$. On peut facilement voir que l'ensemble des champs feuilletés $\chi(M, \mathcal{F})$ est une algèbre de Lie et un $C_b^\infty(M)$-module, où $C_b^\infty(M)$ est l'ensemble des fonctions basiques. Le quotient $\chi(M/\mathcal{F}) = \chi(M, \mathcal{F})/\Gamma(L)$ est appelé l'algèbre de Lie des champs de vecteurs basiques. Un champ feuilleté Y est dit métrique si $\mathcal{L}_Y g_Q = 0$. Dans ce cas $\pi(Y)$ est dit un champ de Killing transverse [TK82].

L'existence d'un spineur de Killing basique sur un feuilletage riemannien permet de lui associer un champ de Killing transverse.

Chapitre 2

Tenseur d'impulsion-énergie sur les feuilletages [1]

"La théorie, c'est quand on sait tout
et que rien ne fonctionne.
La pratique, c'est quand tout fonctionne
et que personne ne sait pourquoi.
Ici, nous avons réuni théorie et pratique :
Rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi !"

Albert Einstein

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va aborder la question du tenseur d'impulsion-énergie dans le cas d'un feuilletage. Sur une variété riemannienne spinorielle (M^n, g_M), O. Hijazi [Hij95] a défini sur le complémentaire de l'ensemble des zéros d'un spineur Ψ un 2-tenseur symétrique, dit tenseur *d'impulsion-énergie*, par

$$T^{\Psi}(X,Y) = \frac{1}{2}\Re(X \cdot \nabla_Y^M \Psi + Y \cdot \nabla_X^M \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}), \tag{2.1.1}$$

pour tous $X, Y \in TM$. Il a montré que si M est compacte et Ψ est un spineur propre associé à la première valeur propre de l'opérateur de Dirac, alors on a

$$\lambda^2 \geq \inf_M (\frac{\mathrm{Scal}_M}{4} + |T^{\Psi}|^2), \tag{2.1.2}$$

[1]Ce chapitre est la traduction d'un article soumis [Habb].

où Scal_M est la courbure scalaire de M. La modification de la connexion de Levi-Civita dans la direction de T^Ψ est l'idée principale de la preuve. Cette estimation améliore celle de Friedrich, du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|T^\Psi|^2 \geqslant \frac{(\mathrm{tr}(T^\Psi))^2}{n}$ (tr est la trace). De plus, elle donne des informations au cas où la courbure scalaire est négative. L'existence d'un champ de spineurs satisfaisant, pour tout $X \in TM$ l'équation $\nabla^M_X \Psi = -T^\Psi(X) \cdot \Psi$, caractérise le cas limite. Ainsi, on a l'observation suivante : supposons qu'il existe un champ de spineurs Ψ tel que pour tout $X \in TM$,

$$\nabla^M_X \Psi = -E(X) \cdot \Psi, \tag{2.1.3}$$

où E est un 2-tenseur symétrique défini sur TM. Alors par les propriétés de la multiplication de Clifford, on montre facilement que $E = T^\Psi$ et on est dans le cas limite de l'estimation (2.1.2). Dans ce chapitre, on généralise l'égalité (2.1.3). On suppose que sur une variété riemanienne spinorielle (M, g_M), il existe un champ de spineurs Ψ qui satisfait, pour tout $X \in TM$, l'équation

$$\nabla^M_X \Psi = -E(X) \cdot \Psi, \tag{2.1.4}$$

où E est un endomorphisme de TM. L'existence d'un tel spineur implique que la partie symétrique de E est T^Ψ et la partie antisymétrique est le tenseur Q^Ψ défini pour tous $X, Y \in TM$ par,

$$Q^\Psi(X, Y) = \frac{1}{2}\Re(Y \cdot \nabla^M_X \Psi - X \cdot \nabla^M_Y \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}). \tag{2.1.5}$$

(Voir Section 2.2 pour le calcul). Ainsi, si on modifie la connexion de Levi-Civita de ΣM dans la direction de ces deux tenseurs, on peut estimer les valeurs propres de l'opérateur de Dirac en fonction de T^Ψ et Q^Ψ. On démontre alors le théorème suivant

Théorème 2.1.1 *Soit (M, g_M) une variété riemannienne compacte spinorielle. Alors la première valeur propre de l'opérateur de Dirac D_M satisfait*

$$\lambda^2 \geq \inf_M \left(\frac{\mathrm{Scal}_M}{4} + |T^\Psi|^2 + |Q^\Psi|^2\right), \tag{2.1.6}$$

où Ψ est un spineur propre associé à D^2_M.

Afin d'interpréter géométriquement les deux tenseurs T^Ψ et Q^Ψ, on considère une variété riemannienne spinorielle M feuilletée par des hypersurfaces. On montre que, si M admet un spineur parallèle, alors T^Ψ est la seconde forme fondamentale [Mor02] des hypersurfaces ainsi que la dérivée de Lie dans la direction du vecteur normal ν. Pour interpréter Q^Ψ on considère un cas spécial de feuilletages, les *flots* (les feuilles sont de dimension 1). On démontre alors que Q^Ψ joue le rôle du tenseur d'*O'Neill* [O'N66] si le fibré normal Q d'un flot riemannien admet un spineur parallèle. De plus, si le cas limite de (2.1.6) est atteint, alors on prouve que Q admet une structure hyperkählérienne dans le cas où M est une variété de *Sasaki* [BG00].

Le problème de variation du spectre de l'opérateur de Dirac d'un flot riemannien va caractériser le rôle du tenseur d'impulsion-énergie. En effet, si on fait varier la métrique dans la direction du flot, i.e. on considère la famille de métriques $g_t = t^2 g_\xi + g_Q$ sur M, alors on montre que pour tout $\Psi \in \Sigma M$,

$$\frac{d}{dt}(D_t\Psi, \Psi)|_{t=1} = -T_\Psi(\xi, \xi),$$

où $T_\Psi = T^\Psi/|\Psi|^2$ et ξ est le champ de vecteurs qui définit le flot. D'où la remarque suivante : Le tenseur d'impulsion-énergie d'un champ de vecteurs associé à un spineur n'est autre que la variation de l'opérateur de Dirac de ce spineur pour la métrique définie le long de ce champ.

Finalement, on cite un résultat important dans [BA98] dans le cadre des variations des métriques. L'action de $\mathbb{S}^1$ sur une variété spinorielle M, supposée libre et isométrique, décompose son fibré des spineurs en des sous-espaces propres de l'action de la dérivée de Lie dans la direction des fibres de ΣM. Ainsi, dans le cas où la structure spinorielle de M est projetable [Mor95] sur $M/\mathbb{S}^1$, alors le spectre de l'opérateur de Dirac tend vers celui de $M/\mathbb{S}^1$, si la dérivée de Lie est nulle, et tend vers l'infini sinon, quand la longueur des fibres tend vers zéro. Dans le cas où elle n'est pas projetable, alors le spectre tend vers l'infini. On va généraliser ce travail au cas des flots riemanniens. D'abord on prouve que la dérivée de Lie d'un spineur basique est nulle si le flot est harmonique. De plus on montre que le spectre de l'opérateur de Dirac de M tend vers celui de D_b sans l'hypothèse de minimalité du flot.

Le cas des petites dimensions est considéré dans la dernière partie. Dans [Fri98], Th. Friedrich caractérise les surfaces de $\mathbb{R}^3$ par une solution φ de l'équation de Dirac

$$D\varphi = H\varphi, \tag{2.1.7}$$

où H désigne la courbure moyenne du surface. En effet, en munissant la surface de la structure spinorielle induite de celle de $\mathbb{R}^3$, une solution de (2.1.7) n'est autre que la restriction à la surface d'un spineur parallèle de $\mathbb{R}^3$. Inversement, une solution φ de l'équation de Dirac sur une surface orientée M^2 implique l'existence d'un tenseur symétrique E à trace égale à H, tel que pour tout $X \in TM$, on ait $\nabla^M_X \varphi = -E(X) \cdot \varphi$ et on est dans le cas d'égalité de (2.1.2). De plus, le tenseur E vérifie les équations de Gauss-Codazzi et donc la surface est localement immergée dans $\mathbb{R}^3$ de tenseur de Weingarten égal à E.

On va alors établir l'analogue du résultat de Friedrich pour les flots riemanniens en dimension 3. On montre d'abord que le groupe d'Heisenberg et le groupe Sol_3 admettent des spineurs parallèles transversaux. De plus, on montre que, dans un flot riemannien, l'existence d'un spineur parallèle basique implique que le revêtement universel de M est $\mathbb{R}^3$. Donc, en utilisant la classification des flots riemanniens, M est soit le tore plat $\mathbb{T}^3$ soit une fibration de Seifert dont les fibres sont des cercles.

2.2 Estimation

Dans cette section, on donne une nouvelle estimation pour la première valeur propre de l'opérateur de Dirac.

Soient (M^n, g_M) une variété riemannienne spinorielle et ∇^M la connexion de Levi-Civita associée à g_M. On note par ΣM son fibré des spineurs et on suppose qu'il existe un champ de spineurs Ψ tel que,

$$\forall X \in \Gamma(TM), \qquad \nabla^M_X \Psi = -E(X) \cdot \Psi,$$

où E est un endomorphisme de TM. Une première conséquence de l'existence d'un tel spineur est que sa norme est constante. De plus, pour tous $Z, W \in TM$ et $\Psi \in \Sigma M$, on a

$$\Re(Z \cdot \Psi, W \cdot \Psi) = g_M(Z, W)|\Psi|^2.$$

Alors pour tous $X, Y \in TM$, on déduit que

$$\Re(X \cdot \nabla^M_Y \Psi + Y \cdot \nabla^M_X \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}) = g_M(X, E(Y)) + g_M(Y, E(X)).$$

Ainsi, on trouve que la partie symétrique de E est égale à T^Ψ défini par (2.1.1). De même, on a

$$\Re(Y \cdot \nabla^M_X \Psi - X \cdot \nabla^M_Y \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}) = g_M(Y, E(X)) - g_M(X, E(Y)).$$

Donc la partie antisymétrique de E n'est autre que le tenseur Q^Ψ défini par (2.1.5). Plusieurs questions se posent alors : quelle inégalité dont le cas limite peut être caractérisé par (2.1.4) ? Dans quelle contexte, le tenseur Q^Ψ a-t-il une interprétation géométrique ? Pour répondre à la première question, on modifie la connexion de Levi-Civita sur M dans la direction de ces deux tenseurs pour obtenir le :

Théorème 2.2.1 *Soit (M^n, g_M) une variété spinorielle compacte. Alors la première valeur propre de l'opérateur de Dirac D_M satisfait*

$$\lambda^2 \geq \inf_M \left(\frac{\mathrm{Scal}_M}{4} + |T^\Psi|^2 + |Q^\Psi|^2\right),$$

où Ψ est un spineur propre associé à D_M^2.

Preuve Pour tout spineur $\Psi \in \Sigma M$ et tout $X \in TM$, on considère sur ΣM la connexion modifiée $\widetilde{\nabla}_X \Psi = \nabla_X^M \Psi + E^\Psi(X) \cdot \Psi$, où $E^\Psi = T^\Psi + Q^\Psi$. Pour tout repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ de TM, on calcule

$$\begin{aligned} |\widetilde{\nabla}\Psi|^2 &= |\nabla^M \Psi|^2 + |E^\Psi|^2|\Psi|^2 - 2\sum_{i=1}^n (E^\Psi(e_i) \cdot \nabla_{e_i}^M \Psi, \Psi) \\ &= |\nabla^M \Psi|^2 + |E^\Psi|^2|\Psi|^2 - 2\sum_{i,j=1}^n g_M(E^\Psi(e_i), e_j)(e_j \cdot \nabla_{e_i}^M \Psi, \Psi). \end{aligned}$$

Du fait que pour tous $X, Y \in TM$, on a $E^\Psi(X, Y) = \Re(Y \cdot \nabla_X^M \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2})$. Alors on obtient

$$|\widetilde{\nabla}\Psi|^2 = |\nabla^M \Psi|^2 + |E^\Psi|^2|\Psi|^2 - 2\sum_{i,j=1}^n (E^\Psi(e_i, e_j))^2|\Psi|^2 = |\nabla^M \Psi|^2 - |E^\Psi|^2|\Psi|^2.$$

L'inégalité est ainsi prouvée par la formule de Schrödinger-Lichnerowicz. □

Une question naturelle qu'on peut se poser : Est-ce que l'estimation (2.1.6) améliore celle de Friedrich ? Il se trouve que la réponse à cette question est oui si la variété est kählérienne. En effet, soient (M^n, g_M, J) une variété kählérienne et J sa structure complexe. Il est connu qu'il existe un opérateur naturel défini pour tout $\Psi \in \Sigma M$, par $\widetilde{D}_M = \sum_{i=1}^n J(e_i) \cdot \nabla_{e_i}^M \Psi$. Cet opérateur est auto-adjoint pour le produit scalaire L^2 et on a que $\widetilde{D}_M^2 = D_M^2$ [Kir86]. Du théorème précédent, on déduit

Corollaire 2.2.2 *Soit (M, g_M) une variété kählérienne spinorielle compacte. Alors la première valeur propre de D_M satisfait*

$$\lambda^2 \geq \inf_M \left(\frac{\mathrm{Scal}_M}{4} + |Q^\Psi|^2\right), \tag{2.2.1}$$

où Ψ est un spineur propre associé à $\widetilde{D}_M$ pour la valeur propre λ.

Ce corollaire est une conséquence directe du théorème précédent, du fait qu'un spineur propre de $\widetilde{D}_M$ correspond à un spineur propre de D_M^2. Afin de montrer que l'inégalité (2.2.1) améliore celle de Friedrich, on écrit pour tout $\Psi \in \Sigma M$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_M \Psi &= \sum_{i=1}^{n} J(e_i) \cdot \nabla^M_{e_i} \Psi = \sum_{i,j=1}^{n} g_M(J(e_i), e_j) e_j \cdot \nabla^M_{e_i} \Psi \\
&= \sum_{i<j} g_M(J(e_i), e_j) e_j \cdot \nabla^M_{e_i} \Psi + \sum_{i<j} g_M(J(e_j), e_i) e_i \cdot \nabla^M_{e_j} \Psi \\
&= \sum_{i<j} g_M(J(e_i), e_j)(e_j \cdot \nabla^M_{e_i} \Psi - e_i \cdot \nabla^M_{e_j} \Psi).
\end{aligned}$$

Alors, d'une part le produit scalaire par un spineur propre Ψ de $\widetilde{D}_M$ donne

$$\lambda|\Psi|^2 = (\widetilde{D}_M \Psi, \Psi) = 2 \sum_{i<j} g_M(J(e_i), e_j) Q^\Psi(e_i, e_j)|\Psi|^2 = (Q^\Psi, J)|\Psi|^2. \tag{2.2.2}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$(Q^\Psi, J)^2 \leq |Q^\Psi|^2 |J|^2 = n|Q^\Psi|^2.$$

Ainsi, par (2.2.2), on déduit que $|Q^\Psi|^2 \geq \lambda^2/n$ et on obtient le résultat.

Dans ce qui suit, on donne une interprétation géométrique des deux tenseurs T^Ψ et Q^Ψ. On va démontrer que le tenseur T^Ψ est la seconde forme fondamentale des hypersurfaces qui feuilletent une variété et que le tenseur Q^Ψ est le tenseur d'O'Neill dans le cas des flots riemanniens.

2.3 Cas des hypersurfaces

Dans cette section, on étend le résultat trouvé dans [Mor02] au cas d'une variété feuilletée par des hypersurfaces. Pour cela, on considère une variété riemannienne spinorielle $(M, g_M, \mathcal{F})$ de dimension $n+1$ et un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension n, i.e. le fibré vectoriel L sur M des vecteurs tangents aux feuilles est de rang n. Soit g_L la métrique induite sur le fibré L par g_M et pour tous $X \in TM$ et $Y \in \Gamma(L)$, on pose $\nabla_X Y = \pi^\perp(\nabla^M_X Y)$ où ∇^M est la connexion de Levi-Civita de M et $\pi^\perp : TM \longrightarrow L$ est la projection orthogonale. On suppose que le fibré normal est trivial (c'est-à-dire qu'il est engendré par un champ de vecteur unitaire ν). La structure spinorielle définie sur M se restreint naturellement à L [Bär96, Mor02]. Pour y parvenir, à tout repère local orthonormé $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\Gamma(L)$, on associe le repère local orthonormé $(e_1, \cdots, e_n, \nu)$ de TM et le SO_n-fibré principal $\mathrm{SO}L$ des repères orthonormés de $\Gamma(L)$ s'identifie à un sous-fibré de $\mathrm{SO}M$. Soit α l'isomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathbb{C}l_n & \longrightarrow & \mathbb{C}l^0_{n+1} \\ & e_i & \longmapsto & e_i \cdot \nu, \end{array}$$

où $\mathbb{C}l_n$ désigne l'algèbre de Clifford complexe et $\mathbb{C}l^0_n$ est sa partie paire. L'isomorphisme α induit une inclusion naturelle entre Spin_n et Spin_{n+1} que l'on note aussi par α de manière que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin}_n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{Spin}_{n+1} \arrow[d, "\mathrm{Ad}"] \\ \mathrm{SO}_n \arrow[r, "\subset"] & \mathrm{SO}_{n+1} \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}_n \longrightarrow \mathrm{SO}_n$ est l'application définie pour tous $\eta \in \mathrm{Spin}_n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ par $\mathrm{Ad}_\eta(x) = \eta \cdot x \cdot \eta^{-1}$. Ainsi une structure spinorielle sur L, notée $\mathrm{Spin}L$, sera définie par l'image réciproque d'une structure spinorielle sur M et on trouve

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin}L \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Spin}M \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & M \\ \mathrm{SO}L \arrow[r] & \mathrm{SO}M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Le fibré des spineurs de M est défini par $\Sigma M = \mathrm{Spin}M \times_{\rho_{n+1}} \Sigma_{n+1}$ où $\rho_{n+1} : \mathrm{Spin}_{n+1} \longrightarrow \mathrm{End}(\Sigma_{n+1})$ est la représentation spinorielle complexe et Σ_{n+1} est l'espace des spineurs de dimension $2^{[\frac{n+1}{2}]}$. On rappelle que, si $n+1$ est impair, ρ_{n+1} est choisie de manière qu'elle agisse par l'identité sur Σ_{n+1}. Si Ψ est un spineur de ΣM, alors sur un ouvert U de M on a

$$\Psi|_U = [\tilde{s}, \sigma] = [\tilde{s}g, \rho_{n+1}(g^{-1})\sigma],$$

où $\tilde{s} \in \Gamma|_U(\mathrm{Spin}M), g \in \mathrm{Spin}_{n+1}$ et $\sigma : U \longrightarrow \Sigma_{n+1}$ est une fonction. Donc, on peut toujours supposer que $\pi(\tilde{s})$ est une base orthonormée de TM ayant ν pour dernier vecteur de base. Dans ce cas, il sera identifié à une section de $\mathrm{SO}L$ et tout spineur de M sera identifié à un spineur de L où le fibré des spineurs de L est défini par $S := \mathrm{Spin}L \times_{\rho_{n+1} \circ \alpha} \Sigma_{n+1}$. Par l'isomorphisme α, la multiplication de Clifford de S est donnée pour tous $Y \in \Gamma(L)$ et $\Psi \in \Gamma(S)$ par $Y \cdot_L \Psi = Y \cdot \nu \cdot \Psi$, où "$\cdot$" désigne la multiplication de Clifford sur ΣM.

Il existe un autre fibré des spineurs pour L, le fibré des spineurs intrinsèques donné par $\Sigma L := \mathrm{Spin} L \times_{\rho_n} \Sigma_n$. Pour comparer les deux fibrés, on distingue deux cas. D'abord, si $n = 2m$ est pair, les espaces des spineurs Σ_n et Σ_{n+1} ont même dimension et du fait que $\mathbb{C}l_{2m} \simeq \mathbb{C}(2^m)$, alors $\rho_{n+1} \circ \alpha \simeq \rho_n$ et les deux espaces s'identifient. Maintenant, si $n = 2m + 1$ est impair, alors $n + 1$ est pair et on a la décomposition en partie positive et partie négative $\Sigma M = \Sigma M^+ \oplus \Sigma M^-$. Dans ce cas, les deux représentations ρ_{2m+1} et $\rho^+_{2m+2} \circ \alpha$ sont irréductibles de $\mathbb{C}l_{2m+1}$ et de même dimension et agissant par l'identité. On déduit alors que ΣM^+ et ΣL peuvent être identifiés. Si on note Ψ^* le champ de spineurs de ΣL associé à Ψ par l'isomorphisme des fibrés ΣL et S, la multiplication de Clifford est donnée pour tout $Y \in \Gamma(L)$, par

$$Y \cdot_L \Psi^* = (Y \cdot \nu \cdot \Psi)^*.$$

Formule de Gauss spinorielle La connexion définie dans le paragraphe précédent permet d'établir la formule de Gauss spinorielle. Pour cela, pour tout $X \in TM$, on pose $h(X) = \nabla^M_X \nu$. La restriction de h sur L est l'application de Weingarten qui est symétrique et on a

$$\nabla^M_X Y = \nabla_X Y - g_M(h(X), Y)\nu, \tag{2.3.1}$$

où $Y \in \Gamma(L)$. D'où dans le repère $\{e_1, \cdots, e_n, \nu\}$, on a pour tous $X \in TM$ et $\Psi \in \Sigma M$ [Bär96, Bär98],

$$\begin{aligned}
\nabla^M_X \Psi &= X(\Psi) + \frac{1}{2}\sum_{i<j} g_M(\nabla^M_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \Psi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} g_M(\nabla^M_X e_i, \nu) e_i \cdot \nu \cdot \Psi \\
&= X(\Psi) + \frac{1}{2}\sum_{i<j} g_M(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \Psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} g_M(h(X), e_i) e_i \cdot \nu \cdot \Psi \\
&= \nabla_X \Psi - \frac{1}{2} h(X) \cdot \nu \cdot \Psi.
\end{aligned}$$

Maintenant, on généralise le résultat contenu dans [Mor02]. On donne une condition spinorielle pour l'existence d'un feuilletage riemannien de codimension 1. Pour cela, on rappelle que le tenseur d'impulsion-énergie est donné pour tous $X, Y \in TM$ par

$$T^\Phi(X, Y) = \frac{1}{2}\Re(\pi^\perp(X) \cdot_L \nabla_Y \Phi + \pi^\perp(Y) \cdot_L \nabla_X \Phi, \frac{\Phi}{|\Phi|^2}),$$

où Φ est un spineur de ΣL. On a la proposition suivante :

Proposition 2.3.1 *Soit M une variété riemannienne spinorielle munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension* 1. *Si M admet un spineur parallèle Ψ, alors pour tous $X, Y \in \Gamma(L)$, on a*

$$T^{\Phi}(X,Y) = -\frac{1}{2}g_M(hX,Y) = -\frac{1}{4}(\mathcal{L}_\nu g_M)(X,Y),$$

où $\Phi = \Psi^*$ et $\mathcal{L}_\nu$ est la dérivée de Lie dans la direction de ν. De plus, le feuilletage $\mathcal{F}$ est riemannien si et seulement si $T^{\Phi}(\nu, X) = 0$ pour tout $X \in \Gamma(L)$.

Preuve De la formule de Gauss spinorielle, on a pour tout $X \in TM$ que

$$\nabla_X \Phi = \frac{1}{2}h(X) \cdot_L \Phi.$$

Donc d'une part, pour tous $X, Y \in \Gamma(L)$, on calcule

$$\begin{aligned} T^{\Phi}(X,Y) &= \frac{1}{2}\Re(X \cdot_L \nabla_Y \Phi + Y \cdot_L \nabla_X \Phi, \frac{\Phi}{|\Phi|^2}) \\ &= \frac{1}{4}\Re(X \cdot_L h(Y) \cdot_L \Phi + Y \cdot_L h(X) \cdot_L \Phi, \frac{\Phi}{|\Phi|^2}) \\ &= \frac{1}{4}(-g_M(X, h(Y)) - g_M(Y, h(X))) \\ &= -\frac{1}{2}g_M(h(X), Y). \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que

$$(\mathcal{L}_\nu g_M)(X,Y) = g_M(\nabla^M_X \nu, Y) + g_M(\nabla^M_Y \nu, X) = 2g_M(h(X), Y),$$

d'où la première partie de la proposition. Pour la deuxième partie, on calcule pour tout $X \in \Gamma(L)$

$$\begin{aligned} T^{\Phi}(X,\nu) &= \frac{1}{2}\Re(X \cdot_L \nabla_\nu \Phi, \frac{\Phi}{|\Phi|^2}) = \frac{1}{4}\Re(X \cdot_L h(\nu) \cdot_L \Phi, \frac{\Phi}{|\Phi|^2}) \\ &= -\frac{1}{4}g_M(X, h(\nu)). \end{aligned}$$

Or le feuilletage est riemannien si et seulement si $h(\nu) = 0$ [Ton88], d'où le résultat. $\square$

On déduit de la proposition 2.3.1 que le tenseur d'impulsion-énergie peut être vu comme la seconde forme fondamentale des hypersurfaces. Une question naturelle se pose : peut-on lier le tenseur d'impulsion-énergie au tenseur de Ricci ? On donne une réponse partielle dans la proposition suivante :

Proposition 2.3.2 *Soit M une variété riemannienne spinorielle munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension 1 qui n'est pas minimal. Si la variété M admet un spineur parallèle Ψ, alors pour tous $Y, Z \in \Gamma(L)$ on a*

$$T^\Phi(Y,Z) = -\frac{1}{2H} g_M(\mathrm{Ric}_L Y - (\nabla^M_\nu h)(Y), Z),$$

où $\Phi = \Psi^*$ et H désigne la trace de h.

Preuve Pour tous $Y, Z \in TM$, la courbure agit sur $\Gamma(L)$ par

$$R(Y,Z) = \nabla_Y \nabla_Z - \nabla_Z \nabla_Y - \nabla_{[Y,Z]}.$$

En utilisant l'équation (2.3.1), on écrit pour tous $Y, Z, W \in \Gamma(L)$

$$\begin{array}{rcl} \nabla_Y \nabla_Z W &=& \nabla^M_Y \nabla_Z W + g_M(h(Y), \nabla_Z W)\nu \\ &=& \nabla^M_Y (\nabla^M_Z W + g_M(h(Z), W)\nu) + g_M(h(Y), \nabla^M_Z W)\nu \\ &=& \nabla^M_Y \nabla^M_Z W + Y(g_M(h(Z), W))\nu + g_M(h(Z), W) h(Y) \\ && + g_M(h(Y), \nabla^M_Z W)\nu. \end{array}$$

De même en permutant Y et Z, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \nabla_Z \nabla_Y W &=& \nabla^M_Z \nabla^M_Y W + Z(g_M(h(Y), W))\nu + g_M(h(Y), W) h(Z) \\ && + g_M(h(Z), \nabla^M_Y W)\nu. \end{array}$$

De plus, on a

$$\nabla_{[Y,Z]} W = \nabla^M_{[Y,Z]} W + g_M(h([Y,Z]), W)\nu.$$

Donc la courbure sera donnée par

$$\begin{array}{rcl} R(Y,Z)W &=& R^M(Y,Z)W + g_M(\nabla^M_Y h(Z), W)\nu + g_M(h(Z), \nabla^M_Y W)\nu \\ && + g_M(h(Z), W) h(Y) + g_M(h(Y), \nabla^M_Z W)\nu - g_M(\nabla^M_Z h(Y), W)\nu \\ && - g_M(h(Y), \nabla^M_Z W)\nu - g_M(h(Y), W) h(Z) - g_M(h(Z), \nabla^M_Y W)\nu \\ && - g_M(h([Y,Z]), W)\nu \\ &=& R^M(Y,Z)W + g_M((\nabla^M_Y h) Z, W)\nu + g_M(h(\nabla^M_Y Z), W)\nu \\ && + g_M(h(Z), W) h(Y) - g_M((\nabla^M_Z h) Y, W)\nu - g_M(h(\nabla^M_Z Y), W)\nu \\ && - g_M(h(Y), W) h(Z) - g_M(h([Y,Z]), W)\nu \\ &=& R^M(Y,Z)W + g_M((\nabla^M_Y h) Z, W)\nu + g_M(h(Z), W) h(Y) \\ && - g_M((\nabla^M_Z h) Y, W)\nu - g_M(h(Y), W) h(Z). \end{array}$$

La dernière égalité est une conséquence du fait que la torsion sur M soit nulle. La courbure de Ricci sur L est définie pour tout repère local orthonormé

$\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ par $\mathrm{Ric}_L Y = \sum_{i=1}^n R(Y, e_i)e_i$. De la relation précédente, on déduit alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_L Y &= \sum_{i=1}^n R^M(Y, e_i)e_i + g_M((\nabla_Y^M h)e_i, e_i)\nu + g_M(h(e_i), e_i)h(Y) \\ &\quad - g_M((\nabla_{e_i}^M h)Y, e_i)\nu - g_M(h(Y), e_i)h(e_i) \\ &= \mathrm{Ric}_M Y - R^M(Y,\nu)\nu + g_M((\nabla_Y^M h)e_i, e_i)\nu + Hh(Y) \\ &\quad - g_M((\nabla_{e_i}^M h)Y, e_i)\nu - h^2(Y).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}R^M(Y,\nu)\nu &= \nabla_Y^M\nabla_\nu^M\nu - \nabla_\nu^M\nabla_Y^M\nu - \nabla_{[Y,\nu]}^M\nu \\ &= \nabla_Y^M\nabla_\nu^M\nu - \nabla_\nu^M h(Y) - h([Y,\nu]) \\ &= \nabla_Y^M\nabla_\nu^M\nu - (\nabla_\nu^M h)(Y) - h(\nabla_\nu^M Y) + h([\nu, Y]) \\ &= \nabla_Y^M\nabla_\nu^M\nu - (\nabla_\nu^M h)(Y) - h^2(Y).\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_L Y &= \mathrm{Ric}_M Y - \nabla_Y^M\nabla_\nu^M\nu + (\nabla_\nu^M h)(Y) + g_M((\nabla_Y^M h)e_i, e_i)\nu + Hh(Y) \\ &\quad - g_M((\nabla_{e_i}^M h)Y, e_i)\nu.\end{aligned}$$

Or le feuilletage est riemannien, i.e. $\nabla_\nu^M\nu = 0$, et la variété M est Ricci plate comme conséquence de l'existence d'un spineur parallèle. Alors le produit scalaire par $Z \in \Gamma(L)$ donne

$$g_M(\mathrm{Ric}_L Y, Z) = Hg_M(h(Y), Z) + g_M((\nabla_\nu^M h)(Y), Z).$$

La démonstration est ainsi achevée par l'utilisation de la proposition 2.3.1. □

On voit que, si h est parallèle dans la direction de ν, alors le tenseur d'impulsion-énergie peut être vu comme la courbure de Ricci. Si le tenseur h est de Codazzi, alors on a

$$(\nabla_\nu^M h)(Y) = (\nabla_Y^M h)(\nu) = \nabla_Y^M h(\nu) - h(\nabla_Y^M \nu) = -h^2(Y).$$

D'où, $T^\Phi(Y, Z) = -\frac{1}{2H} g_M(\mathrm{Ric}_L Y + h^2(Y), Z)$.

On termine cette section en donnant un exemple [Ton88].

Exemple On note M l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ muni de la métrique euclidienne. On désigne par $\mathcal{F}$ le feuilletage de M par l'application

$f(x) = \frac{1}{2}|x|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$ où $x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, i.e. les feuilles de M sont des sphères concentriques. Le vecteur normal unitaire est $\nu(x) = \frac{1}{r}x$, où $r = |x|$. Donc

$$\nu = \frac{1}{r}x = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n+1} x_i \partial x_i = \frac{1}{r}df.$$

Or $df = rdr$, donc $\nu = dr$ est fermée et le feuilletage est riemannien. Le tenseur de Weingarten h est donné pour tout $X \in \Gamma(L)$ par

$$h(X) = \nabla_X^M \nu = \sum_{i=1}^{n+1} \nabla_X^M (\frac{1}{r}x_i\partial x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{r}X(x_i)\partial x_i = \frac{1}{r}X.$$

On note que $X(r) = 0$ car X est tangent à la sphère de rayon constant $r = |x|$. On peut facilement vérifier que l'application h est de Codazzi. La courbure moyenne κ est le champ de vecteurs donné pour tout repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ de $\Gamma(L)$ par la formule

$$\kappa = \sum_{i=1}^{n} g_M(\nabla_{e_i}^M e_i, \nu)\nu = -\sum_{i=1}^{n} g_M(e_i, \nabla_{e_i}^M \nu)\nu = -\frac{n}{r}\nu.$$

On déduit alors que le feuilletage n'est pas minimal. Du fait que la variété M admet un spineur parallèle, alors les hypothèses de la proposition 2.3.2 sont vérifiées. De la proposition 2.3.1, on a d'une part que pour tous $Y, Z \in \Gamma(L)$ $T^\Phi(Y, Z) = -\frac{1}{2r}g_M(Y, Z)$ et d'autre part que les sphères de rayon r sont des variétés d'Einstein de courbure de Ricci égale à $\frac{n-1}{r^2}$. Alors, on calcule

$$-\frac{1}{2H}g_M(\mathrm{Ric}Y + h^2(Y), Z) = -\frac{r}{2n}g_M(\frac{n-1}{r^2}Y + \frac{1}{r^2}Y, Z) = -\frac{1}{2r}g_M(Y, Z).$$

$\square$

Remarque 2.3.3 *Si le feuilletage est donné par une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, alors le tenseur d'impulsion-énergie peut être vu comme la hessienne de f à un nombre réel près. Il suffit de calculer dans ce cas la seconde forme fondamentale en fonction de f et on en déduit facilement l'argument.*

Maintenant, on va donner une interprétation géométrique du tenseur Q^Ψ. Le cas naturel à considèrer est le cas des flots, i.e. le cas où les feuilles sont les courbes intégrales d'un champ de vecteurs défini sur la variété. Dans ce cas, le fibré L des vecteurs tangents est trivial, donc le fibré normal Q va jouer le rôle de L. Les submersions vont donc être étudiées à la place des immersions et plus précisément l'étude des submersions riemanniennes dans le cas des flots riemanniens. Ainsi le tenseur naturel à considérer est le tenseur d'O'Neill qui est un 2-tenseur antisymétrique. On démontre dans la section suivante que, dans le cas d'un flot riemannien, le tenseur Q^Ψ joue le rôle du tenseur d'O'Neill dans le cas où le fibré normal admet un spineur parallèle.

2.4 Cas des flots riemanniens

Dans cette section, on étudie la structure transverse et on donne une interprétation des deux tenseurs T^Ψ et Q^Ψ. Pour les notations, on note X, Y des champs de vecteurs de TM et Z, W des sections de Q et ξ le champ de vecteurs unitaire sur TM qui définit le feuilletage. On munit le fibré Q de la métrique induite de M et on définit sur Q une connexion par $\nabla_X Z = \pi(\nabla^M_X Z)$ où $X \in TM, Z \in \Gamma(Q)$ et $\pi : TM \longrightarrow Q$ est la projection. Alors pour tous $X \in TM$ et $Z \in \Gamma(Q)$, on a

$$\nabla^M_X Z = \nabla_X Z - g_M(h(X), Z)\xi,$$

avec $h(X) = \nabla^M_X \xi$.

Théorème 2.4.1 *Soit M une variété riemannienne spinorielle de dimension $n+1$ munie d'un flot $\mathcal{F}$. Le fibré normal est alors spinoriel et pour tout $\Psi \in \Gamma(\Sigma M)$, on a*

$$\nabla^M_X \Psi = \nabla_X \Psi + \frac{1}{2}\xi \cdot h(X) \cdot \Psi, \tag{2.4.1}$$

pour tout $X \in TM$. De plus, si le fibré normal admet un spineur parallèle Ψ, alors, pour tous $Z, W \in \Gamma(Q)$, on a

$$T^\Psi(Z, W) = -\frac{1}{4}(\mathcal{L}_\xi g_M)(Z, W) \quad et \quad Q^\Psi(Z, W) = \frac{1}{4} g_M([Z, W], \xi),$$

où $\mathcal{L}_\xi$ désigne la dérivée de Lie dans la direction de ξ.

Preuve La première partie de la proposition se démontre de la même manière que le cas des hypersurfaces. Pour la deuxième partie, en utilisant l'égalité (2.4.1) on obtient pour tout $X \in TM$, que $\nabla^M_X \Psi = \frac{1}{2}\xi \cdot h(X) \cdot \Psi$. Alors, pour tous $X, Y \in TM$, on déduit

$$\begin{aligned}
T^\Psi(X, Y) &= \frac{1}{2}\Re(\xi \cdot X \cdot \nabla^M_Y \Psi + \xi \cdot Y \cdot \nabla^M_X \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}) \\
&= \frac{1}{2}\Re(\xi \cdot X \cdot \frac{1}{2}\xi \cdot h(Y) \cdot \Psi + \xi \cdot Y \cdot \frac{1}{2}\xi \cdot h(X) \cdot \Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}) \\
&= \frac{1}{4}(-g_M(X, h(Y)) - g_M(Y, h(X))) \\
&= -\frac{1}{4}(\mathcal{L}_\xi g_M)(X, Y).
\end{aligned}$$

En particulier si $X = \xi$ et $Z \in \Gamma(Q)$, on trouve que

$$T^\Psi(\xi, Z) = -\frac{1}{4} g_M(Z, h(\xi)) = -\frac{1}{4} g_M(\kappa, Z),$$

où $\kappa = \nabla^M_\xi \xi$ est la courbure moyenne de $\mathcal{F}$. Ainsi le feuilletage est minimal si et seulement si $T^\Psi(\xi, Z) = 0$ pour tout $Z \in \Gamma(Q)$. De même, on a

$$\begin{aligned}
Q^\Psi(X,Y) &= \frac{1}{2}\Re(\xi\cdot Y\cdot \nabla^M_X\Psi - \xi\cdot X\cdot\nabla^M_Y\Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2})\\
&= \frac{1}{2}\Re(\xi\cdot Y\cdot \frac{1}{2}\xi\cdot h(X)\cdot\Psi - \xi\cdot X\cdot\frac{1}{2}\xi\cdot h(Y)\cdot\Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2})\\
&= \frac{1}{4}(-g_M(Y,h(X)) + g_M(X,h(Y)))\\
&= \frac{1}{4}(g_M(\nabla^M_X Y,\xi) - g_M(\nabla^M_Y X,\xi)) = \frac{1}{4}g_M([X,Y],\xi).
\end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence du fait que la torsion sur M est nulle. Comme dans le cas précédent $\mathcal{F}$ est minimal si et seulement si $Q^\Psi(\xi, Z) = 0$ pour tout $Z \in \Gamma(Q)$. □

On considère maintenant un cas particulier de flots. Un flot est dit riemannien si la métrique g_M est une métrique quasi-fibrée [Car81, Car84]. Cette définition est équivalente au fait que l'application h est antisymétrique. On rappelle que dans ce cas, il existe une unique connexion métrique à torsion nulle donnée par (1.2.3). De plus pour tous $Z, W \in \Gamma(Q)$, on a $\nabla^M_Z W = \nabla_Z W - g_M(h(Z), W)\xi$ et

$$\begin{aligned}
\nabla^M_\xi Z &= \nabla^M_Z\xi + [\xi, Z]\\
&= h(Z) + \pi([\xi,Z]) + g_M([\xi,Z],\xi)\xi\\
&= h(Z) + \nabla_\xi Z + g_M(\nabla^M_\xi Z - \nabla^M_Z\xi,\xi)\xi\\
&= \nabla_\xi Z + h(Z) - \kappa(Z)\xi,
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

En utilisant ces égalités, on va trouver la relation entre la courbure de Ricci transversale et la courbure de Ricci de M ainsi qu'entre les courbures scalaires. Pour cela, on considère en un point x de M un repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ de $\Gamma(Q)$ tel que $\nabla e_i|_x = 0$. Alors, en x, on a

$$\begin{aligned}
R^\nabla(e_i,e_j)e_j &= \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_j - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_j = \nabla^M_{e_i}\nabla_{e_j}e_j - \nabla^M_{e_j}\nabla_{e_i}e_j\\
&= \nabla^M_{e_i}\nabla^M_{e_j}e_j - \nabla^M_{e_j}(\nabla^M_{e_i}e_j + g_M(h(e_i),e_j)\xi)\\
&= \nabla^M_{e_i}\nabla^M_{e_j}e_j - \nabla^M_{e_j}\nabla^M_{e_i}e_j - e_j(g_M(h(e_i),e_j))\xi\\
&\quad -g_M(h(e_i),e_j)h(e_j)\\
&= R^M(e_i,e_j)e_j + \nabla^M_{[e_i,e_j]}e_j - e_j(g_M(h(e_i),e_j))\xi\\
&\quad -g_M(h(e_i),e_j)h(e_j).
\end{aligned}$$

La torsion de Q étant nulle, on déduit que $[e_i, e_j]_x \in L_x$ et on écrit

$$\begin{aligned}
[e_i, e_j] &= g_M([e_i, e_j], \xi)\xi = g_M(\nabla^M_{e_i} e_j - \nabla^M_{e_j} e_i, \xi)\xi \\
&= (-g_M(h(e_i), e_j) + g_M(e_i, h(e_j)))\xi = 2g_M(h(e_j), e_i)\xi.
\end{aligned}$$

La courbure de Ricci transversale est obtenue en traçant la courbure sur j. Donc on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^\nabla e_i &= \mathrm{Ric}_M e_i - R^M(e_i, \xi)\xi + 2\sum_{j=1}^n g(h(e_j), e_i)\nabla^M_\xi e_j \\
&\quad - \sum_{j=1}^n e_j(g_M(h(e_i), e_j))\xi - h^2(e_i) \\
&= \mathrm{Ric}_M e_i - R^M(e_i, \xi)\xi + 2\sum_{j=1}^n g_M(h(e_j), e_i)(h(e_j) - \kappa(e_j)\xi) \\
&\quad - \sum_{j=1}^n e_j(g_M(h(e_i), e_j))\xi - h^2(e_i).
\end{aligned}$$

Ainsi la courbure de Ricci transversale sera égale à

$$\mathrm{Ric}_M e_i - R^M(e_i, \xi)\xi - 3h^2(e_i) - 2g_M(h(\kappa), e_i)\xi - \sum_{j=1}^n e_j(g_M(h(e_i), e_j))\xi.$$

Puisque $\nabla e_i|_x = 0$, on déduit que $[\xi, e_i]_x \in L_x$. D'où

$$[\xi, e_i] = g_M([\xi, e_i], \xi)\xi = g_M(\nabla^M_\xi e_i - \nabla^M_{e_i}\xi, \xi)\xi = -\kappa(e_i)\xi.$$

L'égalité précédente permet de calculer le terme de courbure suivant

$$\begin{aligned}
R^M(e_i, \xi)\xi &= \nabla^M_{e_i}\nabla^M_\xi \xi - \nabla^M_\xi \nabla^M_{e_i}\xi - \nabla^M_{[e_i,\xi]}\xi \\
&= \nabla^M_{e_i}\kappa - \nabla^M_\xi(h(e_i)) - \kappa(e_i)\kappa.
\end{aligned}$$

Finalement en remplaçant dans l'expression de la courbure de Ricci, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^\nabla e_i &= \mathrm{Ric}_M e_i - \nabla^M_{e_i}\kappa + \nabla^M_\xi(h(e_i)) + \kappa(e_i)\kappa - 3h^2(e_i) - 2g_M(h(\kappa), e_i)\xi \\
&\quad - \sum_{j=1}^n e_j(g_M(h(e_i), e_j))\xi. \qquad (2.4.3)
\end{aligned}$$

Pour établir maintenant la relation entre la courbure scalaire transversale et celle de M, il suffit de prendre la trace sur i de l'équation (2.4.3) et on obtient,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Scal}^\nabla &= \mathrm{Scal}_M - g_M(\mathrm{Ric}_M\xi,\xi) - \sum_{i=1}^n g_M(\nabla^M_{e_i}\kappa, e_i) + \sum_{i=1}^n g_M(\nabla^M_\xi(h(e_i)), e_i)\\
&\quad + |\kappa|^2 - 3\sum_{i=1}^n g_M(h^2(e_i), e_i)\\
&= \mathrm{Scal}_M - g_M(\mathrm{Ric}_M\xi,\xi) - \mathrm{div}_Q\kappa - \sum_{i=1}^n g_M(h(e_i), \nabla^M_\xi e_i) + |\kappa|^2 + 3|h|^2\\
&= \mathrm{Scal}_M - g_M(\mathrm{Ric}_M\xi,\xi) - \mathrm{div}_Q\kappa + |\kappa|^2 + 2|h|^2.
\end{aligned}$$

Or $g_M(\mathrm{Ric}_M\xi,\xi) = \sum_{i=1}^n g_M(R^M(e_i,\xi)\xi, e_i) = \mathrm{div}_Q\kappa + |h|^2 - |\kappa|^2$. On déduit finalement que

$$\mathrm{Scal}^\nabla = \mathrm{Scal}_M - 2\mathrm{div}_Q\kappa + 2|\kappa|^2 + |h|^2. \tag{2.4.4}$$

On définit maintenant le tenseur d'O'Neill [O'N66] pour tous $X, Y \in TM$ par

$$A_X Y = \pi^\perp(\nabla^M_{\pi(X)}\pi(Y)) + \pi(\nabla^M_{\pi(X)}\pi^\perp(Y)).$$

Alors, si $Z \in \Gamma(Q)$ et $Y = \xi$, on a $A_Z\xi = \pi(\nabla^M_Z\xi) = h(Z)$. Ainsi si $Z, W \in \Gamma(Q)$, alors

$$A_Z W = \pi^\perp(\nabla^M_Z W) = g_M(\nabla^M_Z W, \xi)\xi = -g_M(h(Z), W)\xi. \tag{2.4.5}$$

D'où puisque h est antisymétrique, A l'est aussi. Donc

$$A_Z W = \pi^\perp(\nabla^M_Z W) = \pi^\perp(\nabla^M_W Z + [Z,W]) = A_W Z + \pi^\perp[Z,W],$$

et on déduit que $A_Z W = \frac{1}{2}\pi^\perp[Z,W]$. Le fibré Q est involutif si et seulement si le tenseur A est nul. Dans ce cas, et si le feuilletage est minimal, alors d'après la décomposition de De Rham la variété est localement isométrique à un produit riemannien de deux variétés et ce produit est global si la variété est complète et simplement connexe.

On suppose maintenant que la variété M est spinorielle. Dans ce cas, le fibré normal est spinoriel et son fibré des spineurs intrinsèques $S(\mathcal{F})$ s'identifie au fibré extrinsèque ΣQ (resp. $\Sigma^+ Q$) dans le cas où n est pair (resp. n est impair). Si on note par Ψ^* le spineur de $S(\mathcal{F})$ associé à Ψ par l'identification, alors on a

$$Z \cdot_Q \Psi^* = (\xi \cdot Z \cdot \Psi)^*, \tag{2.4.6}$$

pour tout $Z \in \Gamma(Q)$. De plus, pour tout $\Psi \in \Sigma M$, on a

$$\begin{cases} \nabla^M_\xi \Psi = \nabla_\xi \Psi + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n e_i \cdot h(e_i) \cdot \Psi + \frac{1}{2}\xi \cdot \kappa \cdot \Psi, \\ \\ \nabla^M_Z \Psi = \nabla_Z \Psi + \frac{1}{2}\xi \cdot h(Z) \cdot \Psi, \end{cases} \tag{2.4.7}$$

où $Z \in \Gamma(Q)$ et $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ est un repère local orthonormé de $\Gamma(Q)$. La preuve de la deuxième égalité est similaire à celle de la section précédente. Pour la première, en utilisant l'égalité (2.4.2), on écrit dans le repère $\{\xi, e_1, \cdots, e_n\}$,

$$\begin{aligned} \nabla^M_\xi \Psi &= \xi(\Psi) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n g_M(\nabla^M_\xi \xi, e_j)\xi \cdot e_j \cdot \Psi + \frac{1}{2}\sum_{i<j} g_M(\nabla^M_\xi e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \Psi \\ &= \xi(\Psi) + \frac{1}{2}\xi \cdot \kappa \cdot \Psi + \frac{1}{2}\sum_{i<j} g_M(\nabla_\xi e_i + h(e_i), e_j) e_i \cdot e_j \cdot \Psi \\ &= \nabla_\xi \Psi + \frac{1}{2}\xi \cdot \kappa \cdot \Psi + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n e_i \cdot h(e_i) \cdot \Psi. \end{aligned}$$

En utilisant les équations (2.4.7), on démontre facilement que pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $\Psi \in \Gamma(\Sigma M)$, on a

$$\nabla_X(\xi \cdot \Psi) = \xi \cdot \nabla_X \Psi \quad \text{et} \quad D_{tr}(\xi \cdot \Psi) = -\xi \cdot D_{tr}\Psi. \tag{2.4.8}$$

Ainsi les équations (2.4.8) impliquent que si Ψ est un spineur basique, alors $\xi \cdot \Psi$ est basique. De plus, si Ψ est un spineur propre de l'opérateur de Dirac basique associé à la valeur propre λ, alors $\xi \cdot \Psi$ est un spineur propre associé à la valeur propre $-\lambda$ et le spectre de D_b est symétrique.

Maintenant on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.4.2 *Soit M une variété riemannienne spinorielle munie d'un flot riemannien $\mathcal{F}$. Si le fibré normal admet un spineur parallèle Ψ, alors, pour tous $Z, W \in \Gamma(Q)$, on a*

$$Q^\Psi(Z, W) = \frac{1}{2}g_M(A_Z W, \xi) = -\frac{1}{2}g_M(A_Z \xi, W),$$

où A est le tenseur d'O'Neill.

Preuve Du théorème 2.4.1, on a pour tous $Z, W \in \Gamma(Q)$,

$$Q^\Psi(Z, W) = \frac{1}{4}g_M([Z, W], \xi) = \frac{1}{2}g_M(A_Z W, \xi).$$

$\square$

Corollaire 2.4.3 *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente et si de plus le tenseur Q^Ψ est nul, alors le fibré normal est involutif et la variété M est localement isométrique à un produit de variétés riemanniennes. Ce produit est global si M est complète et simplement connexe.*

Il est intéressant de considérer un exemple de flot riemannien. On va discuter le cas où le fibré normal de ce flot admet un spineur parallèle et on va en donner une interprétation géométrique. Pour cela, on va rappeler la définition des variétés de Sasaki [BG00, BG01].

Définition 2.4.4 *Une variété riemannienne (M, g_M) de dimension $2m+1$ est dite de Sasaki, s'il existe un champ de Killing unitaire ξ tel que le tenseur h défini pour tout $X \in TM$ par $h(X) = \nabla^M_X \xi$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. $h^2 = -\mathrm{Id} + \eta \otimes \xi$,
2. $(\nabla^M_X h)(Y) = \eta(Y)X - g_M(X,Y)\xi$,

où X, Y sont des champs de vecteurs de TM et $\eta(X) = g_M(\xi, X)$.

Remarque 2.4.5 *On déduit facilement de la définition que pour tous $X, Y \in TM$, on a $g_M(h(X), h(Y)) = g_M(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$.*

Soit (M, g_M) une variété de Sasaki de dimension $2m+1$ et notons par (h, ξ, η) sa structure de Sasaki, alors le champ de Killing ξ définit un flot riemannien. Puisque ξ est unitaire, les feuilles sont totalement géodésiques et on a la proposition suivante :

Proposition 2.4.6 *Le fibré normal Q est de rang $2m$ et possède une structure de Kähler. De plus, la courbure de Ricci transversale est liée à la courbure de Ricci de M par*

$$\mathrm{Ric}^\nabla Z = \mathrm{Ric}_M Z + 2Z, \tag{2.4.9}$$

pour tout $Z \in \Gamma(Q)$.

Preuve Pour tout $Z \in \Gamma(Q)$, on considère $J(Z) = h(Z) = \nabla^M_Z \xi$ où ∇^M est la connexion de Levi-Civita de M. Alors J est une structure de Kähler par rapport à la métrique induite. En effet, par le point 1 de la définition 2.4.4, on a pour tout $Z \in \Gamma(Q)$

$$J^2(Z) = h^2(Z) = -Z + \eta(Z)\xi = -Z.$$

D'où J est une structure complexe. De plus pour tous $Z, W \in \Gamma(Q)$, on a

$$g_M(J(Z), J(W)) = g_M(h(Z), h(W)) - \eta(Z)\eta(W) = g_M(Z, W).$$

Ainsi J est hermitienne pour la métrique induite. Il reste à montrer que J est parallèle pour la connexion ∇. Pour cela, on considère en un point $x \in M$, un repère orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,2m}$ de $\Gamma(Q)$ tel que $\nabla e_i|_x = 0$. Alors, pour tout $Z \in \Gamma(Q)$, on a

$$(\nabla_Z J)(e_i) = \nabla_Z(J(e_i)) = \pi(\nabla^M_Z(h(e_i))) = \pi\left((\nabla^M_Z h)(e_i) + h(\nabla^M_Z e_i)\right).$$

D'après les équations (2.4.2), on a $\nabla^M_Z e_i$ colinéaire à ξ, d'où $h(\nabla^M_Z e_i) = 0$. Alors, en utilisant le point 2 de la définition 2.4.4, on obtient que $(\nabla_Z J)(e_i) = \pi(\eta(e_i)Z) = 0$. Il reste à calculer la dérivée de J dans la direction de ξ. Pour cela, on écrit

$$(\nabla_\xi J)(e_i) = \nabla_\xi(J(e_i)) = \pi[\xi, h(e_i)] = \pi\left(\nabla^M_\xi(h(e_i)) - \nabla^M_{h(e_i)}\xi\right).$$

On obtient alors

$$(\nabla_\xi J)(e_i) = \pi(\nabla^M_\xi(h(e_i))) - \pi(h^2(e_i)) = \pi((\nabla^M_\xi h)(e_i) + h(\nabla^M_\xi e_i)) + e_i.$$

Finalement en utilisant les équations (2.4.2), on trouve

$$(\nabla_\xi J)(e_i) = \pi(h(\nabla^M_\xi e_i)) + e_i = \pi(h^2(e_i)) + e_i = 0.$$

Pour établir la formule reliant les courbures de Ricci, on écrit l'équation (2.4.3) avec une courbure moyenne nulle

$$\mathrm{Ric}^\nabla e_i = \mathrm{Ric}_M e_i + \nabla^M_\xi(h(e_i)) + 3e_i - \sum_{j=1}^n e_j(g_M(h(e_i), e_j))\xi. \tag{2.4.10}$$

Donc, d'une part par le point 2 de la définition 2.4.4, on a

$$\nabla^M_\xi(h(e_i)) = (\nabla^M_\xi h)(e_i) + h(\nabla^M_\xi e_i) = h^2(e_i) = -e_i.$$

D'autre part, par le fait que $\nabla^M_{e_j} e_i$ est colinéaire à ξ, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n e_j(g_M(h(e_i), e_j)) &= \sum_{j=1}^n g_M(\nabla^M_{e_j}(h(e_i)), e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n (g_M((\nabla^M_{e_j} h)e_i, e_j) + g_M(h(\nabla^M_{e_j} e_i), e_j)) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi en remplaçant les termes par leurs valeurs, on trouve la formule demandée pour $Y = e_i$. □

Corollaire 2.4.7 *La courbure scalaire transversale est liée à la courbure scalaire de M par*

$$\mathrm{Scal}^\nabla = \mathrm{Scal}_M + 2m. \tag{2.4.11}$$

Le corollaire précédent est une conséquence directe de (2.4.9) et du fait que sur une variété de Sasaki, on a $\mathrm{Ric}_M\xi = 2m\xi$. Un cas important des variétés de Sasaki est la structure des variétés η-Einstein [BG01, BGM06]. On a la définition suivante

Définition 2.4.8 *Une variété de Sasaki (M, g_M) de dimension $2m+1$ est dite η-Einstein s'il existe des fonctions β et γ de M tel que*

$$\mathrm{Ric}_M = \beta g_M + \gamma\eta\otimes\eta.$$

Dans ce cas, les fonctions β et γ sont constantes et satisfont $\beta+\gamma = 2m$. La courbure scalaire est constante et égale à $2m(\beta+1)$.

On a la proposition suivante :

Théorème 2.4.9 *Soit (M, g_M) une variété de Sasaki simplement connexe spinorielle de dimension $2m+1$ et (ξ, h, η) sa structure de Sasaki. Si le fibré normal Q admet un spineur parallèle Ψ, alors M est η-Einstein. De plus, si le cas limite de l'inégalité (2.1.6) est atteint, alors Q porte une structure hyperkählérienne et de rang $n = 2m = 8k$. Dans ce cas, le spineur Ψ est harmonique pour l'opérateur de Dirac de M.*

Preuve Le fibré normal est Kähler et Ricci plat avec un groupe d'holonomie SU_m, du fait qu'il porte un spineur parallèle et la variété M est de Sasaki. On déduit donc de l'équation (2.4.11) que $\mathrm{Scal}_M = -2m$ et de la proposition (2.4.9) que

$$\mathrm{Ric}_M Z = -2Z \quad \text{et} \quad \mathrm{Ric}_M\xi = 2m\xi,$$

pour tout $Z \in \Gamma(Q)$. Ainsi la variété M est η-Einstein et par (2.4.7) elle admet un spineur Ψ qui satisfait

$$\begin{cases} \nabla^M_\xi\Psi = \frac{1}{2}\Omega\cdot\Psi, \\ \\ \nabla^M_Z\Psi = \frac{1}{2}\xi\cdot h(Z)\cdot\Psi, \end{cases} \tag{2.4.12}$$

où Ω est la forme de Kähler du fibré Q. Dans ce cas, $Q^\Psi(Z) = -\frac{1}{2}h(Z)$ pour tout $Z \in \Gamma(Q)$ et on est dans le cas limite de l'inégalité (2.1.6) si et seulement si $\Omega\cdot\Psi = 0$. De la décomposition du fibré des spineurs de Q, la condition $\Omega\cdot\Psi = 0$ donne que $\Psi \in \Sigma_{\frac{m}{2}}Q$ et $m = 2l$ est pair (Voir chapitre 3). Ayant un groupe d'holonomie SU_m, alors les seuls fibrés contenant des spineurs parallèles en dimension complexe paire sont $\Sigma_0 Q$ et $\Sigma_m Q$ [Wan89], d'où une contradiction. Donc le groupe d'holonomie est réduit à Sp_l, dans ce cas le fibré normal admet une structure hyperkählérienne et les fibrés contenant des spineurs parallèles sont de la forme $\Sigma_s Q$ avec s pair. $\square$

La classification des variétés spinorielles (M, g_M) admettant un spineur de *Killing généralisé* Ψ, i.e. satisfaisant pour tout $X \in TM$, l'équation $\nabla^M_X \Psi = -T^\Psi(X) \cdot \Psi$, a été commencée par B. Morel [Mor02]. L'idée de la classification repose sur la construction d'un *cône généralisé* au-dessus de M en modifiant la métrique de M dans la direction de T^Ψ, supposé parallèle. Le cône ainsi construit admet un spineur parallèle et donc il est Ricci plat. Dans [BGM05], les auteurs ont construit le *cylindre* sur la variété, $\mathcal{Z} = I \times M$ muni de la métrique $dt^2 + g_t$ avec g_t une famille de métriques sur M, et $t \in I$, un intervalle de $\mathbb{R}$. Ils ont montré que si le tenseur T^Ψ est de Codazzi, alors le cylindre avec la métrique $g_t(X,Y) = g_M((\mathrm{id}+2tT^\Psi)^2 X, Y)$ admet un spineur parallèle. De plus, ils ont prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.4.10 *Soient (M^n, g_t) une variété spinorielle avec une famille de métriques g_t et D_t l'opérateur de Dirac associé à g_t. On note M_t la paire (M, g_t). Alors, pour tout champ de spineurs Ψ de M_{t_0}, $t_0 \in I$, on a*

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \tau_t^{t_0} D_t \Psi_t = -\frac{1}{2}\mathfrak{D}_{\dot{g}_{t_0}}\Psi + \frac{1}{4}\mathrm{grad}_{M_{t_0}}(\mathrm{tr}_{g_{t_0}}(\dot{g}_{t_0})) \cdot_{t_0} \Psi - \frac{1}{4}\mathrm{div}_{M_{t_0}}(\dot{g}_{t_0}) \cdot_{t_0} \Psi, \tag{2.4.13}$$

où $\Psi_t = \tau_{t_0}^t \Psi$ est le transport parallèle le long de la courbe $t \longrightarrow t$ et $\mathfrak{D}_{\dot{g}_t}\Psi = \sum_{i,j=1}^n \dot{g}_t(e_i, e_j) e_i \cdot_t \nabla^t_{e_j} \Psi$ pour tout repère orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ de M_t.

La preuve de ce théorème est basée sur le calcul du commutateur de la dérivée covariante et de l'opérateur de Dirac. Ce théorème généralise celui établi par J.-P. Bourguignon et P. Gauduchon [BG92] pour $g_t = g_M + tk$, où k est un champ de 2-tenseurs symétriques défini sur M. On va montrer maintenant l'équivalent du théorème 2.4.10 pour le tenseur Q^Ψ. On a alors :

Théorème 2.4.11 *Soit M^{n+1} une variété riemannienne spinorielle munie d'un flot riemannien harmonique $\mathcal{F}$. Alors, pour tout champ de spineurs $\Psi \in \Sigma M$, on a*

$$[\nabla^M_\xi, D_{tr}]\Psi = -D_h \Psi + \frac{1}{2}\xi \cdot \mathrm{div}_Q h \cdot \Psi, \tag{2.4.14}$$

où $D_h = \sum_{i=1}^n \xi \cdot e_i \cdot \nabla_{h(e_i)}$, et $\mathrm{div}_Q h = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} h)(e_i)$ est la projection de la divergence de h et $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ est un repère local orthonormé de $\Gamma(Q)$.

Preuve Du fait que le flot est minimal, i.e. $\nabla^M_\xi \xi = 0$ alors on peut toujours trouver un repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ de $\Gamma(Q)$ tel que $\nabla^M_\xi e_i = 0$. Ainsi, pour tout spineur $\Psi \in \Sigma M$, on a

$$\begin{aligned}
[\nabla^M_\xi, D_{tr}]\Psi &= \nabla^M_\xi (D_{tr}\Psi) - D_{tr}(\nabla^M_\xi \Psi)\\
&= \sum_{i=1}^n (\nabla^M_\xi (\xi \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i}\Psi) - \xi \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i}\nabla^M_\xi \Psi)\\
&= \sum_{i=1}^n (\xi \cdot e_i \cdot (\nabla^M_\xi \nabla_{e_i}\Psi - \nabla_{e_i}\nabla^M_\xi \Psi)).
\end{aligned}$$

En utilisant les équations (2.4.7), on trouve

$$\begin{aligned}
[\nabla^M_\xi, D_{tr}]\Psi &= \sum_{i=1}^n (\xi \cdot e_i \cdot (\nabla^M_\xi (\nabla^M_{e_i}\Psi - \frac{1}{2}\xi \cdot h(e_i) \cdot \Psi)\\
&\quad -(\nabla^M_{e_i} - \frac{1}{2}\xi \cdot h(e_i)) \cdot \nabla^M_\xi \Psi))\\
&= \sum_{i=1}^n (\xi \cdot e_i \cdot (\nabla^M_\xi \nabla^M_{e_i}\Psi - \frac{1}{2}\xi \cdot \nabla^M_\xi (h(e_i)) \cdot \Psi - \nabla^M_{e_i}\nabla^M_\xi \Psi))\\
&= \sum_{i=1}^n (\xi \cdot e_i \cdot (R^M(\xi, e_i)\Psi + \nabla^M_{[\xi,e_i]}\Psi - \frac{1}{2}\xi \cdot \nabla^M_\xi (h(e_i)) \cdot \Psi)).
\end{aligned}$$

Le fait que la torsion sur M est nulle, donne $[\xi, e_i] = -h(e_i)$. Alors par les équations (2.4.7) et l'identité de Ricci, on obtient

$$\begin{aligned}
[\nabla^M_\xi, D_{tr}]\Psi &= -\frac{1}{2}\xi \cdot \mathrm{Ric}_M \xi \cdot \Psi - \sum_{i=1}^n (\xi \cdot e_i \cdot (\nabla_{h(e_i)}\Psi + \frac{1}{2}\xi \cdot h^2(e_i) \cdot \Psi\\
&\quad +\frac{1}{2}\xi \cdot \nabla^M_\xi (h(e_i)) \cdot \Psi))\\
&= -\frac{1}{2}\xi \cdot \mathrm{Ric}_M \xi \cdot \Psi - D_h\Psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (e_i \cdot (h^2(e_i) \cdot \Psi\\
&\quad +\nabla^M_\xi (h(e_i)) \cdot \Psi)).
\end{aligned}$$

Ainsi, on calcule

$$\nabla^M_\xi (h(e_i)) = \nabla^M_\xi \nabla^M_{e_i}\xi = R^M(\xi, e_i)\xi + \nabla^M_{[\xi,e_i]}\xi = R^M(\xi, e_i)\xi - h^2(e_i).$$

Et le commutateur devient égal à

$$\begin{aligned}
[\nabla^M_\xi, D_{tr}]\Psi &= -D_h\Psi - \frac{1}{2}\xi\cdot \mathrm{Ric}_M\xi\cdot\Psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n e_i\cdot R^M(\xi,e_i)\xi\cdot\Psi \\
&= -D_h\Psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}_M(\xi,e_i)\xi\cdot e_i\cdot\Psi + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_M(\xi,\xi)\Psi \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (R^M(\xi,e_i)\xi,e_j)e_i\cdot e_j\cdot\Psi.
\end{aligned}$$

Comme, pour $i\neq j$, le produit $e_i{\cdot}e_j$ est antisymétrique en i,j et $(R^M(\xi,e_i)\xi,e_j)$ est symétrique, alors le dernier terme de l'égalité ci-dessus est nul pour $i\neq j$. Donc on obtient

$$\begin{aligned}
[\nabla^M_\xi, D_{tr}]\Psi &= -D_h\Psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}_M(\xi,e_i)\xi\cdot e_i\cdot\Psi + \frac{1}{2}\mathrm{Ric}_M(\xi,\xi)\Psi \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (R^M(\xi,e_i)\xi,e_i)\Psi \\
&= -D_h\Psi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Ric}_M(\xi,e_i)\xi\cdot e_i\cdot\Psi.
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
(\nabla^M_{e_i}h)(e_j) - (\nabla^M_{e_j}h)(e_i) &= \nabla^M_{e_i}(h(e_j)) - h(\nabla^M_{e_i}e_j) - \nabla^M_{e_j}(h(e_i)) + h(\nabla^M_{e_j}e_i) \\
&= \nabla^M_{e_i}\nabla^M_{e_j}\xi - \nabla^M_{e_i}\nabla^M_{e_j}\xi - h([e_i,e_j]) = R^M(e_i,e_j)\xi.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_M(\xi,e_i) &= \sum_{j=1}^n (R^M(e_i,e_j)e_j,\xi) = -\sum_{j=1}^n (R^M(e_i,e_j)\xi,e_j) \\
&= -\sum_{j=1}^n ((\nabla^M_{e_i}h)(e_j) - (\nabla^M_{e_j}h)(e_i),e_j) \\
&= \sum_{j=1}^n ((\nabla^M_{e_j}h)(e_i),e_j) = -(\mathrm{div}_Q h, e_i).
\end{aligned}$$

La dernière égalité est une conséquence du fait que h est antisymétrique et on a ce qu'on voulait. $\square$

Si de plus $\nabla^M_\xi \Psi = 0$, alors le produit scalaire de (2.4.14) par Ψ, donne d'une part

$$\Re([\nabla^M_\xi, D_{tr}]\Psi, \Psi) = \Re(\nabla^M_\xi D_{tr}\Psi, \Psi) = \xi(\Re(D_{tr}\Psi, \Psi)) = \xi(\Re(D_{tr}\Phi, \Phi))$$

où $\Phi = \Psi^*$, et d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\Re(D_h\Phi, \Phi) &= \sum_{i=1}^n \Re(e_i \cdot_Q \nabla_{h(e_i)}\Phi, \Phi) = \sum_{i,j=1}^n g_M(h(e_i), e_j)\Re(e_i \cdot_Q \nabla_{e_j}\Phi, \Phi) \\
&= \sum_{i<j} g_M(h(e_i), e_j)\Re(e_i \cdot_Q \nabla_{e_j}\Phi, \Phi) \\
&\quad - \sum_{i<j} g_M(h(e_i), e_j)\Re(e_j \cdot_Q \nabla_{e_i}\Phi, \Phi) \\
&= 2\sum_{i<j} g_M(h(e_i), e_j)Q^\Phi(e_j, e_i)|\Phi|^2 = -(Q^\Phi, h)|\Phi|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi on déduit que $\xi(\Re(D_{tr}\Phi, \Phi)) = (Q^\Phi, h)|\Phi|^2$. $\square$

2.5 Variation de la métrique

Dans cette section, on considère une variété riemannienne $(M, g_M, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F}$ un flot riemannien de champ unitaire ξ. On montre que si le flot est harmonique, alors la dérivée de Lie d'un spineur basique dans la direction de ξ est nulle. Ainsi, si on fait varier la métrique g_M dans la direction du flot, alors le spectre de l'opérateur de Dirac de M tend vers celui du Dirac basique.

Calcul de la dérivée de Lie

Calculons la dérivée de Lie d'un champ de spineurs Ψ dans la direction de ξ. Remarquons d'abord que, la dérivée de Lie est liée à la dérivée covariante par la formule $\nabla^M_\xi \Psi = \mathcal{L}_\xi \Psi + \frac{1}{4} d\xi^\flat \cdot \Psi$ [BG92]. Alors, comme h est antisymétrique, on a pour tout repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n} \in \Gamma(Q)$,

$$d\xi^\flat(e_i, e_j) = -g_M(\xi, [e_i, e_j]) = 2g_M(h(e_i), e_j).$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\nabla^M_\xi \Psi &= \mathcal{L}_\xi \Psi + \frac{1}{4}\sum_{i<j} d\xi^\flat(e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \Psi \\
&= \mathcal{L}_\xi \Psi + \frac{1}{2}\sum_{i<j} g_M(h(e_i), e_j) e_i \cdot e_j \cdot \Psi = \mathcal{L}_\xi \Psi + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n e_i \cdot h(e_i) \cdot \Psi.
\end{aligned}$$

Ainsi, on tire de la première équation de (2.4.7) que $\mathcal{L}_\xi\Psi = \nabla_\xi\Psi + \frac{1}{2}\xi\cdot\kappa\cdot\Psi$. On en déduit alors que les spineurs basiques sont caractérisés par le fait que leur dérivée de Lie est nulle si le feuilletage est minimal. $\square$

Pour tout $t \in I$, où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, on considère sur M la famille de métriques $g_t = t^2 g_\xi + g_Q$ et on note (M, g_t) par M_t. On voit facilement que le flot $\mathcal{F}$ reste toujours riemannien pour M_t, de champ unitaire $\frac{1}{t}\xi$. Ainsi à tout repère orthonormé $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de $\Gamma(Q)$, on associe le repère orthonormé $\{\frac{1}{t}\xi, e_1, \cdots, e_n\}$ de M_t. Dans ce cas, l'équation (2.4.13) appliquée à la métrique g_t donne $\dot{g}_t = 2tg_\xi$ et pour $t = 1$,

$$\mathfrak{D}_{\dot{g}_1}\Psi = 2g_\xi(\xi,\xi)\xi\cdot\nabla^M_\xi\Psi = 2\xi\cdot\nabla^M_\xi\Psi.$$

Le produit scalaire par Ψ permet de déduire que

$$\frac{d}{dt}|_{t=1}\Re(D_t\Psi,\Psi) = -\Re(\xi\cdot\nabla^M_\xi\Psi,\Psi) = -T_\Psi(\xi,\xi). \qquad (2.5.1)$$

On va maintenant étudier de près le spectre de D_t et le comparer à celui du Dirac basique (voir [BA98] pour les $\mathbb{S}^1$-fibrés). Pour cela, on note par $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ les valeurs propres de l'opérateur de Dirac basique D_b. On a le théorème suivant :

Théorème 2.5.1 *Soit M une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension $n+1$ munie d'un flot riemannien $\mathcal{F}$. Alors on peut toujours numéroter les valeurs propres $(\lambda_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ de l'opérateur de Dirac D_t de M_t de manière qu'on ait quand $t \to 0$:*

1. *Si n est pair, alors*
$$\lambda_j(t) \to \mu_j.$$

2. *Si n est impair, alors*
$$\lambda_{2j-1}(t) \to \mu_j,$$
$$\lambda_{2j}(t) \to -\mu_j.$$

Preuve On pose $\Omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n e_i\cdot h(e_i)$ pour tout repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ de $\Gamma(Q)$. Donc en utilisant les équations (2.4.7), on calcule $D_t\Psi$

pour tout spineur basique Ψ et on obtient,

$$\begin{aligned}
D_t\Psi &= \frac{1}{t}\xi\cdot_t\nabla^t_{\frac{1}{t}\xi}\Psi+\sum_{i=1}^n e_i\cdot_t\nabla^t_{e_i}\Psi\\
&= \frac{1}{t}\xi\cdot_t(\frac{1}{2t}\xi\cdot_t\kappa_t\cdot_t\Psi+\frac{1}{2}\Omega_t\cdot_t\Psi)+\sum_{i=1}^n e_i\cdot_t(\nabla_{e_i}\Psi+\frac{1}{2t}\xi\cdot_t h_t(e_i)\cdot_t\Psi)\\
&= -\frac{1}{2}\kappa_t\cdot_t\Psi+\frac{1}{2t}\xi\cdot_t\Omega_t\cdot_t\Psi+\sum_{i=1}^n e_i\cdot_t\nabla_{e_i}\Psi-\frac{1}{t}\xi\cdot_t\Omega_t\cdot_t\Psi\\
&= -\frac{1}{2t}\xi\cdot_t\Omega_t\cdot_t\Psi+\sum_{i=1}^n e_i\cdot_t\nabla_{e_i}\Psi-\frac{1}{2}\kappa_t\cdot_t\Psi, \qquad (2.5.2)
\end{aligned}$$

où κ_t, h_t et Ω_t sont associées à M_t. Afin de démontrer que le premier terme à droite de l'équation tend vers zéro quand t tend vers zéro, on va exprimer Ω_t en fonction de Ω. Pour cela, on écrit

$$\Omega_t=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n e_i\cdot_t h_t(e_i)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g_t(h_t(e_i),e_j)e_i\cdot_t e_j. \qquad (2.5.3)$$

À l'aide de la formule de Koszul et comme h est antisymétrique, on vérifie facilement que $g_t(h_t(e_i),e_j)=tg_M(h(e_i),e_j)$ et $\kappa_t=\kappa$. L'équation (2.5.3) se réduit à

$$\Omega_t=\frac{t}{2}\sum_{i,j=1}^n g_M(h(e_i),e_j)e_i\cdot_t e_j=t\Omega.$$

Il faut remarquer d'après (2.4.6) que $e_i\cdot_t e_j$ et $e_i\cdot e_j$ se projettent intrinsèquement en $e_i\cdot_Q e_j$ sur $S(\mathcal{F})$ et donc ils sont égaux. Ainsi l'équation (2.5.2) peut être écrite comme

$$D_t\Psi=-\frac{t}{2}(\frac{1}{t}\xi)\cdot_t\Omega\cdot_t\Psi+\sum_{i=1}^n e_i\cdot_t\nabla_{e_i}\Psi-\frac{1}{2}\kappa\cdot_t\Psi. \qquad (2.5.4)$$

L'opérateur $B=(\frac{1}{t}\xi)\cdot_t\Omega : L^2(\Sigma M)\longrightarrow L^2(\Sigma M)$ est un opérateur borné et donc tB tend vers zéro quand t tend vers zéro. Le spectre de l'opérateur de Dirac basique est symétrique et il coïncide avec celui de l'opérateur $\tilde{D}=\xi\cdot D_b$. En effet, si β est une valeur propre de D_b, alors d'après les équations (2.4.8), on a que β ou $-\beta$ est une valeur propre de $\tilde{D}$ et inversement. Ainsi on a la preuve du théorème dans le cas pair. Le cas impair se fait de la même manière mais il faut remarquer que le fibré des spineurs de M se décompose en partie positive et partie négative. Dans ce cas, le spectre est symétrique. Ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

2.6 Spineurs parallèles basiques en petites dimensions

Dans cette partie, on va considérer le cas où M est de dimension 3 munie d'un flot riemannien $\mathcal{F}$ et on va montrer que l'existence d'un spineur parallèle basique est caractérisée par une solution de l'équation de Dirac et de plus que la variété M est une fibration de Seifert. Pour cela, on considère une variété riemannienne orientée M^3 munie d'un flot riemannien $\mathcal{F}$ défini par un champ de vecteurs unitaire ξ. On rappelle que la forme volume complexe

$$\omega_3 = -\xi \cdot e_1 \cdot e_2,$$

agit par l'identité sur le fibré des spineurs, où $\{\xi, e_1, e_2\}$ est un repère local orthonormé orienté de TM. Du fait que le rang de Q est pair, alors les fibrés des spineurs intrinsèque et extrinsèque $S(\mathcal{F})$ et ΣQ s'identifient. Si on note Ψ^* le spineur de $S(\mathcal{F})$ associé à Ψ par cet isomorphisme, alors pour tout $Z \in \Gamma(Q)$, on a

$$Z \cdot_Q \Psi^* = (\xi \cdot Z \cdot \Psi)^* \quad \text{et} \quad (\xi \cdot \Psi)^* = -i\overline{\Psi}^*, \tag{2.6.1}$$

où $\overline{\Psi}^* = \omega_2 \cdot_Q \Psi^*$ et ω_2 est la forme volume complexe du fibré $S(\mathcal{F})$ définie par $\omega_2 = ie_1 \cdot_Q e_2$.

On commence d'abord par traiter plusieurs exemples :

Exemple 1 [Dan05] Soit (M, g_M) une variété simplement connexe homogène de dimension 3 avec un groupe d'isométries de dimension 4. On sait que M est une fibration sur une variété simplement connexe de dimension 2 à courbure constante égale à K et à fibres totalement géodésiques. Elle admet localement un repère orthonormé direct $\{e_1, e_2, e_3\}$, où $e_3 = \xi$ désigne le champ de Killing le long des fibres qui satisfait

$$[e_1, e_2] = 2\tau e_3, \; [e_2, e_3] = \frac{K}{2\tau} e_1, \; [e_3, e_1] = \frac{K}{2\tau} e_2,$$

où τ est un nombre réel non nul. Les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = g_M(\nabla_{e_i}^M e_j, e_k)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{21}^3 = -\Gamma_{13}^2 &= \tau, \\ \Gamma_{32}^1 = -\Gamma_{31}^2 &= \tau - \frac{K}{2\tau}. \end{aligned}$$

Les autres symboles sont nuls. La courbure de Ricci de M est donnée par la matrice

$$\mathrm{Ric}_M = \begin{pmatrix} -2\tau^2 + K & 0 & 0 \\ 0 & -2\tau^2 + K & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau^2 \end{pmatrix}.$$

La courbure scalaire de M est égale à $-2\tau^2 + 2K$. On calcule la courbure de Ricci de e_1 et les autres se font de la même manière. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} R^M(e_1, e_2)e_2 &= \nabla^M_{e_1}\nabla^M_{e_2} e_2 - \nabla^M_{e_2}\nabla^M_{e_1} e_2 - \nabla^M_{[e_1,e_2]} e_2 \\ &= -\tau\nabla^M_{e_2} e_3 - 2\tau\nabla^M_{e_3} e_2 \\ &= -\tau^2 e_1 - 2\tau(\tau - \frac{K}{2\tau})e_1 = (-3\tau^2 + K)e_1. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} R^M(e_1, e_3)e_3 &= \nabla^M_{e_1}\nabla^M_{e_3} e_3 - \nabla^M_{e_3}\nabla^M_{e_1} e_3 - \nabla^M_{[e_1,e_3]} e_3 \\ &= \tau\nabla^M_{e_3} e_2 + \frac{K}{2\tau}\nabla^M_{e_2} e_3 = \tau(\tau - \frac{K}{2\tau})e_1 + \frac{K}{2\tau}\tau e_1 = \tau^2 e_1. \end{aligned}$$

D'où on déduit que $\mathrm{Ric}_M e_1 = (-2\tau^2 + K)e_1$. Le flot défini par e_3 est riemannien et harmonique. En effet le tenseur $h(Y) := \nabla^M_Y e_3$ est donné par

$$h(e_1) = -\tau e_2, \;\; h(e_2) = \tau e_1, \;\; h(e_3) = 0.$$

La courbure de Ricci transversale est calculée dans le repère $\{e_1, e_2\}$ et on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}^\nabla e_1 &= R^\nabla(e_1, e_2)e_2 = \nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1,e_2]} e_2 \\ &= -2\tau\nabla_{e_3} e_2 = -2\tau\pi[e_3, e_2] = -2\tau(-\frac{K}{2\tau})e_1 = Ke_1. \end{aligned}$$

De même on a $\mathrm{Ric}^\nabla e_2 = Ke_2$. On déduit donc que $\mathrm{Scal}^\nabla = 2K$. De plus, on peut facilement démontrer l'existence d'un spineur Ψ sur le fibré des spineurs de M qui vérifie

$$\nabla^M_{e_1}\Psi = \frac{1}{2} g_M(\nabla^M_{e_1} e_2, e_3) e_2 \cdot e_3 \cdot \Psi = \frac{1}{2}\tau e_1 \cdot \Psi,$$

ainsi que $\nabla^M_{e_2}\Psi = \frac{1}{2}\tau e_2 \cdot \Psi$ et $\nabla^M_{e_3}\Psi = \frac{1}{2}(\frac{K}{2\tau} - \tau)e_3 \cdot \Psi$. Donc on a $D_M\Psi = -\frac{1}{2}(\tau + \frac{K}{2\tau})\Psi$. Afin de montrer que l'égalité dans l'estimation (2.1.2) est atteinte, on calcule

$$T^\Psi(e_1, e_1) = -\frac{1}{2}\tau, \;\; T^\Psi(e_2, e_2) = -\frac{1}{2}\tau, \;\; T^\Psi(e_3, e_3) = -\frac{1}{2}(\frac{K}{2\tau} - \tau).$$

Alors on déduit

$$\inf_M\left(\frac{\mathrm{Scal}_M}{4}+|T^\Psi|^2\right)=\frac{-2\tau^2+2K}{4}+\frac{\tau^2}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{K}{2\tau}-\tau\right)^2=\frac{1}{4}\left(\tau+\frac{K}{2\tau}\right)^2.$$

En utilisant les équations (2.4.7), le spineur Ψ se projette sur $S(\mathcal{F})$ en un spineur $\Phi=\Psi^*$ tel que

$$\nabla_{e_1}\Phi=\nabla_{e_2}\Phi=0 \quad \text{et} \quad \nabla_{e_3}\Phi=-\frac{K}{4\tau}i\overline{\Phi}.$$

En effet, on calcule pour e_1 (de même pour e_2)

$$\nabla_{e_1}\Psi=\frac{1}{2}\tau e_1\cdot\Psi-\frac{1}{2}e_3\cdot h(e_1)\cdot\Psi=\frac{1}{2}\tau e_1\cdot\Psi+\frac{\tau}{2}e_3\cdot e_2\cdot\Psi=0.$$

Ainsi, comme $\Omega\cdot\Psi=-\tau e_1\cdot e_2\cdot\Psi$, on a pour e_3

$$\nabla_{e_3}\Psi=\frac{1}{2}\left(\frac{K}{2\tau}-\tau\right)e_3\cdot\Psi-\frac{1}{2}\Omega\cdot\Psi=\frac{1}{2}\left(\frac{K}{2\tau}-\tau\right)e_3\cdot\Psi+\frac{\tau}{2}e_3\cdot\Psi=\frac{K}{4\tau}e_3\cdot\Psi.$$

Alors, dans le cas où K est positive, la variété M est la sphère de Berger qui est une fibration sur une sphère S^2. Si la courbure K est négative, alors M est $\widetilde{PSL_2}(\mathbb{R})$ et se projette sur l'espace hyperbolique. Si K est nulle, alors M est le groupe d'Heisenberg et se projette sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, le fibré normal admet un spineur parallèle. De plus, on peut facilement vérifier la proposition 2.4.2,

$$\begin{aligned}
Q^\Psi(e_1,e_2) &= \frac{1}{2}\Re\left(e_3\cdot e_2\cdot\nabla^M_{e_1}\Psi-e_3\cdot e_1\cdot\nabla^M_{e_2}\Psi,\frac{\Psi}{|\Psi|^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\Re\left(e_3\cdot e_2\cdot\frac{1}{2}\tau e_1\cdot\Psi-e_3\cdot e_1\cdot\frac{1}{2}\tau e_2\cdot\Psi,\frac{\Psi}{|\Psi|^2}\right)\\
&= \frac{\tau}{2}\Re\left(e_3\cdot e_2\cdot e_1\cdot\Psi,\frac{\Psi}{|\Psi|^2}\right)=\frac{\tau}{2}=-\frac{1}{2}g_M(h(e_1),e_2).
\end{aligned}$$

Exemple 2 [Mey77] Soit B une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Elle peut être vue comme un difféomorphisme du tore plat $\mathbb{T}^2$ et admet deux valeurs propres λ et $\frac{1}{\lambda}$. Soit la variété $\mathbb{T}^3_B=\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}/(x,y)\sim(B(x),y+1)$ et notons par b la pente du vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, la variété $\mathbb{T}^3_B$ est compacte de revêtement universel $\mathbb{R}^3$. On considère le repère $\{e_1,e_2,e_3\}$ par

$$e_1=\lambda^{-z}(-b\partial x+\partial y),\ e_2=\lambda^z(\partial x+b\partial y),\ e_3=\partial z.$$

On peut facilement vérifier que

$$[e_1,e_2]=0,\ [e_1,e_3]=\ln(\lambda)e_1,\ [e_2,e_3]=-\ln(\lambda)e_2.$$

On définit sur M une métrique de manière que le repère $\{e_1, e_2, e_3\}$ soit orthonormé. Ainsi, par rapport à cette métrique, les symboles de Christoffel sont donnés par

$$\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{23}^2 = -\Gamma_{13}^1 = -\Gamma_{22}^3 = -\ln(\lambda).$$

Les autres symboles sont nuls. La courbure de Ricci de M est donnée par la matrice

$$\mathrm{Ric}_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(\ln(\lambda))^2 \end{pmatrix}.$$

En effet, on calcule la courbure de Ricci de e_1 et les autres se font de la même manière. On a $\mathrm{Ric}_M e_1 = R^M(e_1, e_2)e_2 + R^M(e_1, e_3)e_3$. Ainsi d'une part on calcule

$$R^M(e_1, e_2)e_2 = \nabla_{e_1}^M \nabla_{e_2}^M e_2 - \nabla_{e_2}^M \nabla_{e_1}^M e_2 - \nabla_{[e_1,e_2]}^M e_2 = \ln(\lambda)\nabla_{e_1}^M e_3 = (\ln(\lambda))^2 e_1.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} R^M(e_1, e_3)e_3 &= \nabla_{e_1}^M \nabla_{e_3}^M e_3 - \nabla_{e_3}^M \nabla_{e_1}^M e_3 - \nabla_{[e_1,e_3]}^M e_3 \\ &= -\ln(\lambda)\nabla_{e_3}^M e_1 - \ln(\lambda)\nabla_{e_1}^M e_3 = -(\ln(\lambda))^2 e_1. \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Ric}_M e_1 = 0$. Le flot défini par e_1 est riemannien et il n'est pas harmonique. Le tenseur $h(Y) = \nabla_Y^M e_1$ satisfait

$$h(e_2) = h(e_3) = 0 \quad \text{et} \quad \kappa = \nabla_{e_1}^M e_1 = -\ln(\lambda)e_3.$$

On peut facilement vérifier la formule de Green en calculant la divergence de la courbure moyenne

$$\mathrm{div}_Q \kappa = g_M(\nabla_{e_2}\kappa, e_2) + g_M(\nabla_{e_3}\kappa, e_3) = -\ln(\lambda)g_M(\nabla_{e_2}^M e_3, e_2) = (\ln(\lambda))^2 = |\kappa|^2.$$

En utilisant la définition de la connexion transversale, on calcule la courbure de Ricci transversale et on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}^\nabla e_2 &= R^\nabla(e_2, e_3)e_3 = \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_3 - \nabla_{[e_2,e_3]}e_3 \\ &= \ln(\lambda)\nabla_{e_3}e_2 + \ln(\lambda)\nabla_{e_2}e_3 = -(\ln(\lambda))^2 e_2. \end{aligned}$$

De même, on a $\mathrm{Ric}^\nabla e_3 = -(\ln(\lambda))^2 e_3$. Comme dans l'exemple précédent, il existe sur ΣM un spineur Ψ qui vérifie

$$\nabla_{e_1}^M \Psi = \frac{1}{2} g(\nabla_{e_1}^M e_1, e_3)e_1 \cdot e_3 \cdot \Psi = \frac{1}{2}\ln(\lambda)e_2 \cdot \Psi.$$

De même, on a $\nabla^M_{e_2}\Psi = \frac{1}{2}\ln(\lambda)e_1 \cdot \Psi$ et $\nabla^M_{e_3}\Psi = 0$ et on peut vérifier que l'égalité dans (2.1.2) est atteinte. Le spineur Ψ se projette en un spineur Φ de $S(\mathcal{F})$ qui satisfait

$$\nabla_{e_1}\Phi = \nabla_{e_3}\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_{e_2}\Phi = -\frac{i}{2}\ln(\lambda)\overline{\Phi}.$$

En utilisant (2.4.7), on a

$$\nabla_{e_1}\Psi = \nabla^M_{e_1}\Psi - \frac{1}{2}e_1 \cdot \kappa \cdot \Psi = \frac{1}{2}\ln(\lambda)e_2 \cdot \Psi + \frac{1}{2}\ln(\lambda)e_1 \cdot e_3 \cdot \Psi = 0.$$

Les autres sont vérifiés de la même manière. Le spineur Φ ainsi trouvé est un spineur basique et si $\lambda = 1$ il est parallèle. Dans ce cas, la variété M est le tore plat $\mathbb{T}^3$.

Exemple 3 [FK00] Soit M le groupe Sol_3. La variété M est le produit semi-direct $\mathbb{R}\rtimes\mathbb{R}^2$, où $t \in \mathbb{R}$ agit sur $\mathbb{R}^2$ via la transformation $(x, y) \longrightarrow (e^t x, e^{-t} y)$. On identifie Sol_3 avec $\mathbb{R}^3$ et la multiplication du groupe est donnée par

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^z y', z + z').$$

Le repère

$$e_1 = e^{-z}\partial x, \;\; e_2 = e^z \partial y, \;\; e_3 = \partial z$$

est un repère orthonormé associé à la métrique invariante à gauche

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2.$$

On vérifie facilement que le repère ainsi défini satisfait

$$[e_1, e_2] = 0, \;\; [e_1, e_3] = e_1, \;\; [e_2, e_3] = -e_2.$$

Ainsi on a le même calcul que dans l'Exemple 2 pour $\lambda = e$. Il existe sur M un spineur Ψ qui satisfait

$$\nabla^M_{e_1}\Psi = \frac{1}{2}e_2 \cdot \Psi, \;\; \nabla^M_{e_2}\Psi = \frac{1}{2}e_1 \cdot \Psi, \;\; \nabla^M_{e_3}\Psi = 0.$$

Le flot défini par e_3 est harmonique mais il n'est pas riemannien. En effet, le tenseur $h(Y) = \nabla^M_Y e_3$ satisfait

$$h(e_1) = e_1, \;\; h(e_2) = -e_2, \;\; h(e_3) = 0.$$

Dans ce cas on est dans la situation du théorème 2.4.1 et on a pour tout $X \in TM$

$$\nabla^M_X\Psi = \nabla_X\Psi + \frac{1}{2}e_3 \cdot h(X) \cdot \Psi.$$

D'où on tire $\nabla_{e_1}\Psi = \frac{1}{2}e_2\cdot\Psi - \frac{1}{2}e_3\cdot e_1\cdot\Psi = 0$. De même, on déduit que $\nabla_{e_2}\Psi = \nabla_{e_3}\Psi = 0$ et on trouve ainsi un spineur parallèle sur le fibré normal. Alors, d'une part on calcule

$$T^\Psi(e_1,e_1) = \Re(e_3\cdot e_1\cdot\nabla^M_{e_1}\Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}) = \frac{1}{2}\Re(e_3\cdot e_1\cdot e_2\cdot\Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}) = -\frac{1}{2}.$$

D'autre part, on a $-\frac{1}{4}(\mathcal{L}_{e_3}g_M)(e_1,e_1) = -\frac{1}{2}g_M(\nabla^M_{e_1}e_3,e_1) = -\frac{1}{2}$. De plus, on écrit

$$\begin{aligned} Q^\Psi(e_1,e_2) &= \frac{1}{2}\Re(e_3\cdot e_2\cdot\nabla^M_{e_1}\Psi - e_3\cdot e_1\cdot\nabla^M_{e_2}\Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}) \\ &= \frac{1}{4}\Re(e_3\cdot e_2\cdot e_2\cdot\Psi - e_3\cdot e_1\cdot e_1\cdot\Psi, \frac{\Psi}{|\Psi|^2}) = 0 = \frac{1}{4}g_M([e_1,e_2],e_3). \end{aligned}$$

□

Maintenant, on va montrer que l'existence d'un spineur parallèle sur le fibré normal d'un flot riemannien d'une variété compacte M implique que M est le tore plat ou une fibration de Seifert et de plus est caractérisé par une solution de l'équation de Dirac. Dans [Car84], Y. Carrière a démontré que les adhérences des feuilles d'un flot riemannien sur une variété compacte sont des tores et que, restreint à chaque tore, le flot est conjugué à un flot linéaire. Il a ainsi classifié tous les flots riemanniens en dimension 3 sur une variété compacte et a montré le théorème suivant

Proposition 2.6.1 *Soit M^3 une variété riemannienne compacte munie d'un flot riemannien $\mathcal{F}$. Alors, si*

1. *les orbites de $\mathcal{F}$ sont denses, la variété M est difféomorphe à $\mathbb{T}^3$ et le flot est conjugué à un flot linéaire sur $\mathbb{T}^3$;*
2. *les orbites de $\mathcal{F}$ sont ni fermées, ni denses, alors deux cas sont possibles :*
   - *(a) la variété M est difféomorphe à $\mathbb{T}^3$ et le flot est conjugué à un flot linéaire sur $\mathbb{T}^3$;*
   - *(b) la variété M est difféomorphe au fibré hyperbolique $\mathbb{T}^3_B$ et le flot est conjugué au flot défini dans l'Exemple* 2;
3. *le flot possède deux orbites fermées, alors deux cas sont possibles :*
   - *(a) la variété M est difféomorphe à un espace lenticulaire $L_{p,q}$;*
   - *(b) la variété M est difféomorphe à $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$;*
4. *le flot a toutes ses orbites fermées, la variété M est un fibré de Seifert dont les fibres sont les orbites de $\mathcal{F}$.*

L'espace lenticulaire $L_{p,q}$ est défini comme le quotient de $\mathbb{S}^3$ par le groupe engendré par l'isométrie : $(z_1, z_2) \longrightarrow (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i/q} z_2)$. L'existence d'un spineur parallèle implique que le fibré normal est Ricci plat comme une conséquence de la formule de Ricci transversale. Donc en codimension 2, il est plat. On rappelle alors le théorème suivant [Blu81]

Théorème 2.6.2 *Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q et d'une connexion basique plate et complète. Alors le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est un produit $\tilde{L} \times \mathbb{R}^q$, où $\tilde{L}$ est le revêtement universel des feuilles de $\mathcal{F}$. Les feuilles de $\tilde{M}$ sont identifiées à $\tilde{L} \times \{x\}, x \in \mathbb{R}^q$.*

Ce théorème généralise le fait que le revêtement universel d'une variété de dimension n admettant une connexion linéaire plate et complète est $\mathbb{R}^n$. Le corollaire suivant est une conséquence du théorème précédent

Corollaire 2.6.3 *Si M^n admet un flot avec une connexion basique plate et complète, alors le revêtement universel de M est $\mathbb{R}^n$.*

Soit M^3 est une variété compacte orientée munie d'un flot riemannien $\mathcal{F}$ admettant un spineur parallèle sur le fibré normal. Alors on peut déduire du corollaire 2.6.3 que le revêtement universel de M est $\mathbb{R}^3$ et il s'agit une fibration triviale sur $\mathbb{R}^2$. Donc il ne peut pas y avoir deux orbites du flot qui sont fermées. De plus, le calcul fait dans l'Exemple 2 montre que le fibré hyperbolique $\mathbb{T}^3_B$ n'admet de spineurs parallèles transversaux que si $\lambda = 1$, i.e. le tore plat $\mathbb{T}^3$. Ainsi, de la classification des flots riemanniens, on déduit que M est soit le tore plat $\mathbb{T}^3$, soit un fibré de Seifert dont les fibres sont des cercles. Si de plus $M/\mathcal{F}$ est une variété, alors M est une fibration sur le tore plat $\mathbb{T}^2$. Les groupes d'Heisenberg sont des exemples d'un tel cas.

De plus l'application $h(Z) = \nabla^M_Z \xi$ étant antisymétrique, alors elle peut être représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

où $b : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction. D'où le théorème suivant :

Théorème 2.6.4 *Soit M^3 une variété riemannienne compacte munie d'un flot riemannien harmonique $\mathcal{F}$. Alors les données suivantes sont équivalentes :*

1. *le fibré normal admet un spineur parallèle Ψ;*
2. *la courbure scalaire transversale est nulle et Ψ est une solution de*

$$D_M \Psi = \frac{b}{2} \Psi, \tag{2.6.2}$$

avec $|\Psi| = 1$.

Preuve Pour $1 \Rightarrow 2$, la première est évidente du fait que le fibré normal est Ricci plat. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\Omega \cdot \Psi &= \frac{1}{2}(e_1 \cdot h(e_1) \cdot \Psi + e_2 \cdot h(e_2) \cdot \Psi) \\
&= \frac{1}{2}(b\, e_1 \cdot e_2 \cdot \Psi - b\, e_2 \cdot e_1 \cdot \Psi) \\
&= b\, e_1 \cdot e_2 \cdot \Psi = b\,\xi \cdot \Psi.
\end{aligned}$$

D'où, si on calcule l'opérateur de Dirac de Ψ, on trouve

$$\begin{aligned}
D_M \Psi &= -\frac{b}{2}\Psi + \frac{1}{2} e_1 \cdot \xi \cdot h(e_1) \cdot \Psi + \frac{1}{2} e_2 \cdot \xi \cdot h(e_2) \cdot \Psi \\
&= -\frac{b}{2}\Psi + \frac{b}{2} e_1 \cdot \xi \cdot e_2 \cdot \Psi - \frac{b}{2} e_2 \cdot \xi \cdot e_1 \cdot \Psi \\
&= -\frac{b}{2}\Psi - b\,\xi \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \Psi = \frac{b}{2}\Psi.
\end{aligned}$$

Pour $2 \Rightarrow 1$, on calcule d'abord

$$\begin{aligned}
D_M \Psi &= \xi \cdot \nabla^M_\xi \Psi + e_1 \cdot \nabla^M_{e_1} \Psi + e_2 \cdot \nabla^M_{e_2} \Psi \\
&= \xi \cdot (\nabla_\xi \Psi + \frac{b}{2}\xi \cdot \Psi) + e_1 \cdot (\nabla_{e_1} \Psi + \frac{b}{2}\xi \cdot e_2 \cdot \Psi) \\
&\quad + e_2 \cdot (\nabla_{e_2} \Psi - \frac{b}{2}\xi \cdot e_1 \cdot \Psi) \\
&= \xi \cdot \nabla_\xi \Psi - \frac{b}{2}\Psi + e_1 \cdot \nabla_{e_1} \Psi + e_2 \cdot \nabla_{e_2} \Psi - b\xi \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \Psi \\
&= \xi \cdot \nabla_\xi \Psi + e_1 \cdot \nabla_{e_1} \Psi + e_2 \cdot \nabla_{e_2} \Psi + \frac{b}{2}\Psi. \qquad (2.6.3)
\end{aligned}$$

Puisque Ψ vérifie (2.6.2), on trouve par (2.6.1) que $D_{tr}\Phi = \nabla_\xi \Phi$ où $\Phi = \Psi^*$. Alors d'une part on a

$$\Re(D_{tr}\Phi, \Phi) = \Re(\nabla_\xi \Phi, \Phi) = \frac{1}{2}\xi(|\Phi|^2),$$

la norme de Φ étant constante, $\Re(D_{tr}\Phi, \Phi) = 0$. D'autre part, par le fait que pour tout $Z \in \Gamma(Q)$, on obtient $R^\nabla(\xi, Z)\Phi = 0$, donc

$$\begin{aligned}
D^2_{tr}\Phi &= D_{tr}(\nabla_\xi \Phi) \\
&= e_1 \cdot \nabla_{e_1}\nabla_\xi \Phi + e_2 \cdot \nabla_{e_2}\nabla_\xi \Phi \\
&= e_1 \cdot (\nabla_\xi \nabla_{e_1}\Phi + \nabla_{[e_1,\xi]}\Phi) + e_2 \cdot (\nabla_\xi \nabla_{e_2}\Phi + \nabla_{[e_2,\xi]}\Phi).
\end{aligned}$$

Si on choisit un repère $\{e_1, e_2\}$ de manière qu'en un point x de M, on ait $\nabla e_i|_x = 0$ pour $i = 1, 2$, alors le crochet $[\xi, e_i]_x$ est nul du fait que le feuilletage est totalement géodésique. Donc $D^2_{tr}\Phi = \nabla_\xi D_{tr}\Phi$. Ainsi, on tire que

$$\Re(D^2_{tr}\Phi, \Phi) = \Re(\nabla_\xi D_{tr}\Phi, \Phi) = -(D_{tr}\Phi, \nabla_\xi \Phi) = -|D_{tr}\Phi|^2.$$

L'intégrale sur M donne $D_{tr}\Phi = \nabla_\xi \Phi = 0$. Le spineur Φ est donc parallèle comme conséquence de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz et le fait que la courbure scalaire transversale est nulle. $\square$

Chapitre 3

Valeurs propres de l'opérateur de Dirac basique sur les feuilletages kählériens et Kähler-quaternioniens [1]

"La science a eu de merveilleuses applications,
mais la science qui n'aurait en vue que les applications
ne serait plus de la science,
elle ne serait plus que de la cuisine"

Henri Poincaré

3.1 Introduction

Dans [Lic87], A. Lichnerowicz a montré que, sur une variété spinorielle M de dimension $n \geq 2$ admettant des spineurs de Killing, il n'existe pas de k-formes parallèles ($k \neq 0, n$) non triviales sur M. En particulier de telles variétés sont nécessairement irréductibles et non kählériennes. Il est donc naturel d'établir de nouvelles estimations dans le cas où la variété M est Kähler. Dans [Kir86], K.D. Kirchberg établit que sur une telle variété de dimension complexe m, la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac satisfait

$$\lambda^2 \geq \begin{cases} \frac{m+1}{4m}\mathrm{Scal}_0 & \text{si } m \text{ est impair,} \\ \\ \frac{m}{4(m-1)}\mathrm{Scal}_0 & \text{si } m \text{ est pair,} \end{cases}$$

[1] Ce chapitre a fait l'objet de deux publications [Hab05] et [Haba].

où Scal_0 est l'infimum de la courbure scalaire. La preuve est basée sur la décomposition du fibré des spineurs sous l'action de la forme Ω et l'utilisation de la racine quatrième de l'unité. Dans [Hij94a], O. Hijazi propose une démonstration plus naturelle en modifiant la connexion de Levi-Civita dans la direction de l'opérateur $\tilde{D}_M = \sum_{i=1}^n J(e_i)\cdot\nabla^M_{e_i}$, où J est la structure complexe de M. Ainsi le cas limite est caractérisé par l'existence d'un spineur de *Killing kählérien*. Dans ce chapitre, on va montrer que les inégalités de Kirchberg restent vraies sur un feuilletage riemannien. On a alors le théorème suivant

Théorème 3.1.1 *Soit M une variété riemannienne compacte munie d'un feuilletage kählérien spinoriel $\mathcal{F}$ de codimension $q = 2m$ et d'une métrique quasi-fibrée g_M. Alors la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac basique satisfait*

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4m}K_0^\nabla \qquad \textit{si } m \textit{ est impair,} \tag{3.1.1}$$

et

$$\lambda^2 \geq \frac{m}{4(m-1)}K_0^\nabla \qquad \textit{si } m \textit{ est pair.} \tag{3.1.2}$$

Le cas limite de (3.1.1) est caractérisé par le fait que le feuilletage est minimal et par l'existence d'un spineur de Killing kählérien basique (voir théorème 3.3.4). On se refère au théorème 3.3.5 pour le cas limite de (3.1.2). On note que l'inégalité (3.1.1) est démontrée dans [JK03] avec l'hypothèse que la courbure moyenne κ est *transversalement holomorphe*.

Un autre cas important est celui des variétés compactes à courbure scalaire positives et de groupe d'holonomie $\mathrm{Sp}_1\cdot\mathrm{Sp}_m$. Ces variétés sont appelées *Kähler-quaternion* et sont de dimension $4m$. Elles sont caractérisées par l'existence d'une certaine 4-forme parallèle. J.-L. Milhorat [Mil92] a calculé le spectre de l'opérateur de Dirac de l'espace projecif $\mathbb{HP}^m$. Dans [HM95b], O. Hijazi et J.-L. Milhorat ont conjecturé que toute valeur propre de l'opérateur de Dirac satisfait

$$\lambda^2 \geq \frac{m+3}{4(m+2)}\mathrm{Scal}_M. \tag{3.1.3}$$

La courbure scalaire est constante du fait que ces variétés sont d'Einstein [Bes87]. Ils ont démontré que la conjecture est vraie pour $m = 2$ et $m = 3$. Pour cela, ils ont introduit un *opérateur des twisteurs* [HM97], comme dans le cas kählérien, sur chaque espace propre associé aux valeurs propres de la 4-forme fondamentale Ω [HM95a]. En utilisant la théorie des représentations, l'inégalité (3.1.3) a été établie par W. Kramer, U. Semmelmann et G. Weingart [KSW99] pour toute dimension et la seule variété limite est l'espace projectif des quaternions. Leur démonstration utilise la décomposition du fibré $TM \otimes TM \otimes \Sigma M$ en des sous-fibrés parallèles sous l'action du groupe $\mathrm{Sp}_1 \times \mathrm{Sp}_m$. On propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1.2 *On prend les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.1.1 et on suppose que le feuilletage $\mathcal{F}$ est spinoriel Kähler-quaternionien de codimension $q = 4m$. Alors le feuilletage est minimal et la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac basique satisfait*

$$\lambda^2 \geq \frac{m+3}{4(m+2)}\mathrm{Scal}^\nabla. \tag{3.1.4}$$

Notre approche est une adaptation de [BHMM] et [KSW98b] au cas des feuilletages riemanniens. Le point clé est de démontrer que la courbure moyenne est nulle du fait que la courbure scalaire transverse est strictement positive. Le cas limite est caractérisé par l'existence d'un spineur de *Killing Kähler-quaternionien basique* (Voir Section 3.6 pour les détails).

3.2 Feuilletage kählérien

Dans cette section, on considère une variété riemannienne (M, g_M) munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q pour lequel g_M est quasi-fibrée. On se refère à [TN88, Kir86, Kir90, Kir92, Hij94a, BHMM].

Définition 3.2.1 *Un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ est dit kählérien s'il existe une structure complexe $J : \Gamma(Q) \longrightarrow \Gamma(Q)$ $(q = 2m)$ telle que J soit parallèle pour la connexion ∇ définie en* (1.2.3) *et hermitienne pour g_Q, i.e. pour tous $X, Y \in \Gamma(Q)$, on ait*

$$g_Q(J(X), J(Y)) = g_Q(X, Y).$$

Soit Ω la forme de Kähler associée à J définie pour tous $X, Y \in \Gamma(Q)$, par

$$\Omega(X, Y) = g_Q(J(X), Y) = -g_Q(X, J(Y)).$$

L'élément de volume définissant l'orientation de Q est lié à la forme de Kähler par

$$\omega = \frac{1}{m!}\underbrace{\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega}_{m fois}.$$

Dans la suite, on supposera que le fibré Q est spinoriel. La forme Ω étant une 2-forme antisymétrique, on peut la voir comme un endomorphisme du fibré des spineurs de Q. Elle agit donc sur $S(\mathcal{F})$ par

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} e_i \cdot J(e_i) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q} J(e_i) \cdot e_i, \tag{3.2.1}$$

pour tout repère local orthonormé $\{e_i\}_{i=1,\cdots,q}$ de $\Gamma(Q)$. En effet, en utilisant la définition de Ω, on écrit

$$\Omega = \sum_{i<j} \Omega(e_i, e_j) e_i \cdot e_j = \sum_{i<j} g_Q(J(e_i), e_j) e_i \cdot e_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot J(e_i).$$

Une conséquence de l'écriture locale de Ω est que pour tout $X \in \Gamma(Q)$, on a

$$[\Omega, X] = 2J(X) \cdot \quad \text{et} \quad [\Omega, J(X)] = -2X \cdot . \tag{3.2.2}$$

La deuxième égalité se déduit directement de la première en remplaçant X par $J(X)$.

Proposition 3.2.2 *Sous l'action de la forme de Kähler, le fibré des spineurs $S(\mathcal{F})$ de Q se décompose en une somme orthogonale*

$$\Gamma(S(\mathcal{F})) = \overset{m}{\underset{r=o}{\oplus}} \Gamma(S_r(\mathcal{F})),$$

où $S_r(\mathcal{F})$ est l'espace propre de rang $\binom{m}{r}$ associé à la valeur propre $i\mu_r = i(2r-m)$ de la forme de Kähler Ω.

De plus, le fibré des spineurs porte un endomorphisme anti-linéaire parallèle j qui satisfait, pour tout $X \in \Gamma(Q)$, les relations

$$\begin{array}{rcl} j^2 &=& (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \mathrm{Id}, \\ [X, j] &=& 0, \\ (j\Psi, j\Phi) &=& (\Phi, \Psi). \end{array}$$

Le fait que $[X, j] = 0$ permet de déduire que $[\Omega, j] = 0$ par l'équation (3.2.1). Ainsi, pour tout spineur $\Psi_r \in \Gamma(S_r(\mathcal{F}))$, on a

$$\Omega \cdot j\Psi_r = j(\Omega \cdot \Psi_r) = j(i\mu_r \Psi_r) = -i\mu_r j\Psi_r = i\mu_{m-r} j\Psi_r.$$

D'où $j\Psi_r \in \Gamma(S_{m-r}(\mathcal{F}))$.

Lemme 3.2.3 *Pour tout $X \in \Gamma(Q)$, on a*

$$p_+(X) \cdot S_r(\mathcal{F}) \subset S_{r+1}(\mathcal{F}) \quad \textit{et} \quad p_-(X) \cdot S_r(\mathcal{F}) \subset S_{r-1}(\mathcal{F}),$$

où $p_\pm(X) = \frac{X \mp iJ(X)}{2}$.

Le fait que, pour tous $X \in \Gamma(Q)$ et $\Psi_r \in \Gamma(S_r(\mathcal{F}))$), on ait

$$X \cdot \Psi_r = p_-(X) \cdot \Psi_r + p_+(X) \cdot \Psi_r,$$

implique par ce lemme que l'image de la multiplication de Clifford est incluse dans $\Gamma(S_{r-1}(\mathcal{F})) \oplus \Gamma(S_{r+1}(\mathcal{F}))$.

Un opérateur naturel $\widetilde{D}_{tr}$ qui apparaît sur le fibré des spineurs défini par

$$\widetilde{D}_{tr}\Psi = \sum_{i=1}^{q} J(e_i) \cdot \nabla_{e_i}\Psi - \frac{1}{2}J(\kappa) \cdot \Psi.$$

L'opérateur ainsi défini est transversalement elliptique et essentiellement auto-adjoint par la formule de Green. De plus, le spectre de l'opérateur $\widetilde{D}_b = \widetilde{D}_{tr}|_{\Gamma_B(S(\mathcal{F}))}$ est discret si le feuilletage est isoparamétrique comme conséquence du théorème 1.3.4.

Lemme 3.2.4 *Les opérateurs D_b et $\widetilde{D}_b$ satisfont les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} [\Omega, D_b] &= 2\widetilde{D}_b, && (3.2.3)\\ [\Omega, \widetilde{D}_b] &= -2D_b, && (3.2.4)\\ [\Omega, D_b^2] &= 0, && (3.2.5)\\ D_b\widetilde{D}_b + \widetilde{D}_bD_b &= 0, && (3.2.6)\\ \widetilde{D}_b^2 &= D_b^2. && (3.2.7) \end{aligned}$$

Les équations (3.2.3), (3.2.4) sont démontrées en utilisant l'expression locale de Ω et les équations (3.2.5), (3.2.6) et (3.2.7) sont vraies sous la condition que la 1-forme κ de courbure moyenne soit basique fermée et cofermée. On définit maintenant les deux opérateurs D_+ et D_- par

$$D_+ = \frac{1}{2}(D_{tr} - i\widetilde{D}_{tr}) \quad \text{et} \quad D_- = \frac{1}{2}(D_{tr} + i\widetilde{D}_{tr}). \qquad (3.2.8)$$

L'opérateur D_{tr} se décompose en D_+ et D_-, et on a les deux suites

$$\Gamma(S_m(\mathcal{F})) \xrightarrow{D_-} \ldots \Gamma(S_r(\mathcal{F})) \xrightarrow{D_-} \Gamma(S_{r-1}(\mathcal{F})) \xrightarrow{D_-} \ldots \Gamma(S_0(\mathcal{F})), \qquad (3.2.9)$$

$$\Gamma(S_0(\mathcal{F})) \xrightarrow{D_+} \ldots \Gamma(S_r(\mathcal{F})) \xrightarrow{D_+} \Gamma(S_{r+1}(\mathcal{F})) \xrightarrow{D_+} \ldots \Gamma(S_m(\mathcal{F})). \quad (3.2.10)$$

3.3 Valeurs propres de l'opérateur de Dirac basique

Dans cette section, on démontre des inégalités de type Kirchberg en utilisant les opérateurs des twisteurs kählériens sur un feuilletage kählérien spinoriel [Kir86, Kir90, Hij94a, BHMM, Hab05].

Définition 3.3.1 *Sur un feuilletage kählérien spinoriel, on définit les opérateurs des twisteurs kählériens par*

$$\mathcal{P}^{(r)} : \Gamma(S_r(\mathcal{F})) \stackrel{\nabla^{tr}}{\longrightarrow} \Gamma(Q^* \otimes S_r(\mathcal{F})) \stackrel{\pi_r}{\longrightarrow} \Gamma(\mathrm{Ker}\mathcal{M}_{\mathrm{r}}),$$

où $\mathcal{M}_r$ est la multiplication de Clifford définie par

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{M}_r : & \Gamma(Q^* \otimes S_r(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \Gamma(S_{r-1}(\mathcal{F})) \oplus \Gamma(S_{r+1}(\mathcal{F})) \\ & X \otimes \Psi_r & \longmapsto & p_-(X) \cdot \Psi_r \oplus p_+(X) \cdot \Psi_r. \end{array}$$

Proposition 3.3.2 *Pour tous $r \in \{0, \ldots, m\}$ et $\Psi_r \in \Gamma(S_r(\mathcal{F}))$, on a*

$$\mathcal{P}^{(r)}\Psi_r = \sum_{i=1}^{q} e_i^* \otimes (\nabla_{e_i}\Psi_r + a_r p_-(e_i) \cdot \mathcal{D}_+\Psi_r + b_r p_+(e_i) \cdot \mathcal{D}_-\Psi_r), \quad (3.3.1)$$

où $\mathcal{D}_\pm = D_\pm + \frac{1}{2}p_\pm(\kappa)$ avec $a_r = \frac{1}{2(r+1)}$ et $b_r = \frac{1}{2(m-r+1)}$.

Les constantes a_r et b_r sont calculées à partir des deux traces

$$\sum_{i=1}^{q} e_i \cdot p_-(e_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{q} e_i \cdot p_+(e_i),$$

agissant respectivement sur $\Gamma(S_{r+1}(\mathcal{F}))$ et $\Gamma(S_{r-1}(\mathcal{F}))$. Ainsi, pour tout champ de spineurs $\Psi_r \in \Gamma(S_r(\mathcal{F}))$, on peut facilement vérifier que

$$\sum_{i=1}^{q} e_i \cdot \mathcal{P}^{(r)}_{e_i}\Psi_r = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{q} J(e_i) \cdot \mathcal{P}^{(r)}_{e_i}\Psi_r = 0. \quad (3.3.2)$$

Remarque 3.3.3 *Si la 1-forme κ de courbure moyenne est basique fermée et cofermée, alors, pour toute valeur propre λ de D_b, il existe un champ de spineurs $\Psi \in \Gamma_B(S(\mathcal{F}))$, dit de type $(r, r+1)$, tel que $D_b\Psi = \lambda\Psi$ et $\Psi = \Psi_r + \Psi_{r+1}$, avec $r \in \{0, \cdots, m-1\}$. En utilisant* (3.2.8), (3.2.9) *et* (3.2.10), *on déduit que $D_-\Psi_r = D_+\Psi_{r+1} = 0$, $D_-\Psi_{r+1} = \lambda\Psi_r$, $D_+\Psi_r = \lambda\Psi_{r+1}$ et $\|\Psi_r\|_{L^2} = \|\Psi_{r+1}\|_{L^2}$.*

Preuve Soit φ un spineur propre de D_b associé à la valeur propre λ. Alors, par la proposition 3.2.2, on a la décomposition $\varphi = \sum_{r=0}^m \varphi_r$, où $\varphi_r \in \Gamma_B(S_r(\mathcal{F}))$. Il existe donc r tel que φ_r ne s'annule pas. D'où, si on considère le spineur $\Psi = \frac{1}{\lambda}D_-D_+\varphi_r + D_+\varphi_r$, on peut facilement vérifier que Ψ est un spineur basique et $D_b\Psi = \lambda\Psi$ comme conséquence de $D_+^2 = D_-^2 = 0$. $\square$

Maintenant, on a tous les éléments pour établir les estimations :

Théorème 3.3.4 *Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage kählérien spinoriel $\mathcal{F}$ de codimension $q = 2m$ et d'une métrique riemannienne quasi-fibrée g_M. Alors la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac basique satisfait*

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4m}K_0^\nabla.$$

Si Ψ est un spineur propre de type $(r, r+1)$ associé à la valeur propre λ satisfaisant le cas limite de (3.1.1), alors $r = \frac{m-1}{2}$. De plus, le feuilletage $\mathcal{F}$ est minimal et, pour tout $X \in \Gamma(Q)$, le spineur Ψ satisfait

$$\nabla_X\Psi + \frac{\lambda}{2(m+1)}(X\cdot\Psi - i\varepsilon J(X)\cdot\bar{\Psi}) = 0, \tag{3.3.3}$$

où $\varepsilon = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$, et $\bar{\Psi} := (-1)^r(\Psi_r - \Psi_{r+1})$. Comme conséquence, m est impair et $\mathcal{F}$ est transversalement d'Einstein avec une courbure scalaire transversale constante positive.

Preuve Pour tout $\Phi_r \in \Gamma_B(S_r(\mathcal{F}))$, en utilisant les identités (3.3.1) et (3.3.2), on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{P}^{(r)}\Phi_r|^2 &= \sum_{i=1}^q |\mathcal{P}^{(r)}_{e_i}\Phi_r|^2 = \sum_{i=1}^q (\mathcal{P}^{(r)}_{e_i}\Phi_r, \nabla_{e_i}\Phi_r) \\
&= \sum_{i=1}^q (\nabla_{e_i}\Phi_r + a_r p_-(e_i)\cdot\mathcal{D}_+\Phi_r + b_r p_+(e_i)\cdot\mathcal{D}_-\Phi_r, \nabla_{e_i}\Phi_r) \\
&= |\nabla\Phi_r|^2 - a_r\sum_{i=1}^q(\mathcal{D}_+\Phi_r, p_+(e_i)\cdot\nabla_{e_i}\Phi_r) \\
&\quad -b_r\sum_{i=1}^q(\mathcal{D}_-\Phi_r, p_-(e_i)\cdot\nabla_{e_i}\Phi_r).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$|\mathcal{P}^{(r)}\Phi_r|^2 = |\nabla\Phi_r|^2 - a_r|\mathcal{D}_+\Phi_r|^2 - b_r|\mathcal{D}_-\Phi_r|^2. \tag{3.3.4}$$

Soient λ une valeur propre de D_b et Ψ un spineur propre de type $(r, r+1)$. L'égalité (3.3.4) appliquée à Ψ_r donne

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}^{(r)}\Psi_r|^2 &= |\nabla\Psi_r|^2 - a_r|\lambda\Psi_{r+1} + \frac{1}{2}p_+(\kappa)\cdot\Psi_r|^2 - \frac{b_r}{4}|p_-(\kappa)\cdot\Psi_r|^2 \\ &= |\nabla\Psi_r|^2 - a_r\lambda^2|\Psi_{r+1}|^2 - a_r\lambda\Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa)\cdot\Psi_r) \\ &\quad -\frac{a_r}{4}|p_+(\kappa)\cdot\Psi_r|^2 - \frac{b_r}{4}|p_-(\kappa)\cdot\Psi_r|^2.\end{aligned}$$

Par la formule de Schrödinger-Lichnerowicz et par le fait que Ψ_r et Ψ_{r+1} ont les mêmes normes-L^2, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_M |\mathcal{P}^{(r)}\Psi_r|^2 + \frac{a_r}{4}\int_M |p_+(\kappa)\cdot\Psi_r|^2 + \frac{b_r}{4}\int_M |p_-(\kappa)\cdot\Psi_r|^2 \quad = \\ &\int_M ((1-a_r)\lambda^2 - \frac{1}{4}K^\nabla)|\Psi_r|^2 - a_r\lambda\int_M \Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa)\cdot\Psi_r). \qquad (3.3.5)\end{aligned}$$

De même, en appliquant l'égalité (3.3.4) à Ψ_{r+1}, on a

$$\begin{aligned}&\int_M |\mathcal{P}^{(r+1)}\Psi_{r+1}|^2 + \frac{a_{r+1}}{4}\int_M |p_+(\kappa)\cdot\Psi_{r+1}|^2 + \frac{b_{r+1}}{4}\int_M |p_-(\kappa)\cdot\Psi_{r+1}|^2 \quad = \\ &\int_M ((1-b_{r+1})\lambda^2 - \frac{1}{4}K^\nabla)|\Psi_{r+1}|^2 + b_{r+1}\lambda\int_M \Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa)\cdot\Psi_r). \, (3.3.6)\end{aligned}$$

Afin de contrôler le terme $\lambda\int_M \Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa)\cdot\Psi_r)$, on divise l'équation (3.3.5) par a_r et l'équation (3.3.6) par b_{r+1} et puis on les somme. Ainsi, en tenant compte que les termes à gauche des deux équations sont positifs, on obtient

$$0 \leq \int_M ((\frac{1}{a_r} - 1)\lambda^2 - \frac{1}{4a_r}K^\nabla)|\Psi_r|^2 + \int_M ((\frac{1}{b_{r+1}} - 1)\lambda^2 - \frac{1}{4b_{r+1}}K^\nabla)|\Psi_{r+1}|^2.$$

et comme Ψ_r et Ψ_{r+1} ont les mêmes normes-L^2 en remplaçant a_r et b_{r+1} par leurs valeurs, l'inégalité précédente se réduit à

$$0 \leq [2(r+1) + 2(m-r) - 2]\lambda^2 - \frac{1}{4}[2(r+1) + 2(m-r)]K_0^\nabla.$$

On en déduit alors que $\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4m}K_0^\nabla$. Maintenant, on va discuter le cas limite de l'inégalité (3.1.1). En divisant comme avant, (3.3.5) par a_r et (3.3.6) par b_{r+1} et en remplaçant a_r, b_{r+1} et λ^2 par leurs valeurs après les avoir sommés, on déduit que $\kappa = 0$, $\mathcal{P}^{(r)}\Psi_r = 0$ et $\mathcal{P}^{(r+1)}\Psi_{r+1} = 0$. Alors par (3.3.5) et (3.3.6), on a $r = \frac{m-1}{2}$ et m est impair. Il reste à montrer que Ψ satisfait (3.3.3). Pour $r = \frac{m-1}{2}$, et par définition de l'opérateur des twisteurs kählérien, on obtient pour tout $j \in \{1, \cdots, q\}$,

$$\nabla_{e_j}\Psi_r + \frac{\lambda}{m+1}p_-(e_j)\cdot\Psi_{r+1} = 0,$$

et

$$\nabla_{e_j}\Psi_{r+1} + \frac{\lambda}{m+1} p_+(e_j)\cdot\Psi_r = 0.$$

En additionnant les deux équations, on obtient (3.3.3) pour $X = e_j$. En utilisant l'identité de Ricci, on démontre facilement que $\mathcal{F}$ est transversalement d'Einstein. □

Théorème 3.3.5 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème* 3.3.4 *pour m pair, la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac basique satisfait*

$$\lambda^2 \geq \frac{m}{4(m-1)} K_0^{\nabla}.$$

Si Ψ est un spineur propre de type $(r, r+1)$ associé à la valeur propre λ vérifiant l'égalité (3.1.2)*, alors $r = \frac{m}{2}$, le feuilletage $\mathcal{F}$ est minimal et Ψ satisfait, pour $X \in \Gamma(Q)$,*

$$\nabla_X\Psi_{r+1} = -\frac{\lambda}{q}(X - iJX)\cdot\Psi_r. \tag{3.3.7}$$

Preuve Soit Ψ un spineur propre de type $(r, r+1)$ associé à une valeur propre λ. En écrivant les égalités (3.3.5) et (3.3.6), on a

$$0 \leq \int_M ((1-a_r)\lambda^2 - \frac{1}{4}K^{\nabla})|\Psi_r|^2 - a_r\lambda\int_M \Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa)\cdot\Psi_r), \tag{3.3.8}$$

et

$$0 \leq \int_M ((1-b_{r+1})\lambda^2 - \frac{1}{4}K^{\nabla})|\Psi_{r+1}|^2 + b_{r+1}\lambda\int_M \Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa)\cdot\Psi_r). \tag{3.3.9}$$

L'endomorphisme j envoie $S_r(\mathcal{F})$ sur $S_{m-r}(\mathcal{F})$. Ainsi le spineur $j\Psi$ est de type $(m-(r+1), m-r)$. L'équation (3.3.4) appliquée au spineur $j\Psi$, donne les mêmes inégalités que (3.3.8) et (3.3.9). D'une part, si $\lambda\int_M \Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa)\cdot\Psi_r) \leq 0$, alors par (3.3.9)

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4(1-b_{r+1})} K_0^{\nabla}.$$

L'isomorphisme j permet de choisir μ_r positive (i.e. $r \geq \frac{m}{2}$) où μ_r est une valeur propre de Ω associée à Ψ_r. Ainsi l'étude du graphe de la fonction $\frac{1}{1-b_{r+1}}$ donne (3.1.2).

D'autre part, si $\lambda\int_M \Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa)\cdot\Psi_r) > 0$, on a

$$\lambda^2 > \frac{1}{1-a_r}\frac{K_0^{\nabla}}{4}.$$

Par l'isomorphisme j, on peut supposer $r \leq \frac{m}{2} - 1$. L'étude du graphe de la fonction $\frac{1}{1-a_r}$ donne l'inégalité (3.1.2). Maintenant, on va discuter le cas limite de (3.1.2). Comme on a vu que l'égalité ne peut pas être atteinte si $\lambda \int_M \Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa) \cdot \Psi_r) > 0$, alors l'autre cas doit être considéré. Du fait que $\frac{m}{m-1} = \inf\limits_{r \geq \frac{m}{2}} \frac{1}{1-b_{r+1}}$ on tire que $r = \frac{m}{2}$. Par (3.3.6), on a

$$\int_M |\mathcal{P}^{(r+1)}\Psi_{r+1}|^2 + \tfrac{a_{r+1}}{4} \int_M |p_+(\kappa) \cdot \Psi_{r+1}|^2$$

$$+ \tfrac{b_{r+1}}{4} \int_M |p_-(\kappa) \cdot \Psi_{r+1}|^2 - b_{r+1}\lambda \int_M \Re(\Psi_{r+1}, p_+(\kappa) \cdot \Psi_r) =$$

$$(1 - b_{r+1}) \int_M (\tfrac{m}{4(m-1)} K_0^\nabla - \tfrac{1}{4(1-b_{r+1})} K^\nabla)|\Psi_{r+1}|^2.$$

Le terme à gauche de l'égalité est positif, donc $\kappa = 0$ et $\mathcal{P}^{r+1}\Psi_{r+1} = 0$. Il reste à établir l'équation (3.3.7). Pour $r = \frac{m}{2}$, et par définition de l'opérateur des twisteurs kählérien, on obtient pour tout repère local orthonormé $\{e_j\}_{j=1,\cdots,q}$ de $\Gamma(Q)$

$$\nabla_{e_j} \Psi_{r+1} + \frac{\lambda}{q}(e_j - iJe_j) \cdot \Psi_r = 0.$$

$\square$

Exemple Soient (M, g_M) une variété de Sasaki spinorielle de dimension $n = 2m + 1$ et (h, ξ, η) sa structure de Sasaki. Puisque le rang de Q est pair, l'identification entre les fibrés intrinsèque et extrinsèque est choisie de manière à ce qu'on ait pour tout $\Psi^* \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$

$$Z \cdot_Q \Psi^* = (Z \cdot \Psi)^* \quad \text{et} \quad (\xi \cdot \Psi)^* = -i\overline{\Psi}^*, \tag{3.3.10}$$

pour tout $Z \in \Gamma(Q)$. On suppose maintenant que la variété M admet un spineur de Killing réel Ψ de norme constante supposée égale à 1. Pour tout $Z \in \Gamma(Q)$, on a

$$\nabla^M_\xi \Psi = \frac{\varepsilon}{2} \xi \cdot \Psi \quad \text{et} \quad \nabla^M_Z \Psi = \frac{\varepsilon}{2} Z \cdot \Psi,$$

où $\varepsilon = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$. Ainsi, en utilisant les équations (2.4.7), on obtient

$$\begin{cases} \nabla_\xi \Phi = -\frac{i\varepsilon}{2}\overline{\Phi} - \frac{1}{2}\Omega \cdot_Q \Phi, \\ \\ \nabla_Z \Phi = \frac{\varepsilon}{2} Z \cdot_Q \Phi - \frac{i}{2} J(Z) \cdot_Q \overline{\Phi}, \end{cases}$$

où $\Phi = \Psi^*$. Donc Φ est un spineur de Killing kählérien basique si et seulement si $\Omega \cdot_Q \Phi = -i\varepsilon\overline{\Phi}$. Par la décomposition du fibré des spineurs, ceci est équivalent à dire que $\Phi = \Phi_{\frac{m-1}{2}} + \Phi_{\frac{m+1}{2}}$. Dans ce cas, le cône sur M porte une structure de Kähler de dimension complexe $m+1 = 2k$ paire et admet un spineur parallèle qui se trouve dans le noyau de la forme de courbure du cône [Mor95]. Or de la classification des spineurs de Killing [Bär93], on sait que le groupe d'holonomie restreint du cône est l'un des groupes suivants : SU_{2k}, Sp_k et 0. Les spineurs parallèles dans le cas de SU_{2k} se trouvent dans Σ_0 et Σ_{2k} [Wan89], d'où une contradiction. Alors son groupe d'holonomie restreint se réduit à Sp_k ou à 0. Dans ce cas, le revêtement universel du cône admet une structure hyperkählérienne avec $k = 2l$ pair ou est égal à $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $k = 2l+1$ impair. Ainsi le revêtement universel de M est 3-Sasaki de dimension $n = 8l-1$ ou est la sphère S^{8l+3}. Dans la suite, on considère M de dimension $n = 8l-1$. Alors Φ est un spineur propre de l'opérateur de Dirac basique associé à la valeur propre $\frac{n+1}{2}$.

On considère sur M la métrique $g_t = t^2 g_\xi + g_Q$ et soit ∇^t la connexion de Levi-Civita associée à g_t. De l'équation (2.5.4) et de l'identification établie en (3.3.10), on a

$$\begin{aligned}
D_t\Psi &= -\frac{t}{2}B\cdot\Psi + \sum_{i=1}^{n-1} e_i \cdot_t \nabla_{e_i}\Psi \\
&= -\frac{t}{2}B\cdot\Psi + \sum_{i=1}^{n-1} e_i \cdot (-\frac{1}{2}e_i\cdot\Psi + \frac{1}{2}J(e_i)\cdot\xi\cdot\Psi) \\
&= -\frac{t}{2}B\cdot\Psi + \frac{n-1}{2}\Psi + \xi\cdot\Omega\cdot\Psi.
\end{aligned}$$

Le spineur $\xi\cdot\Omega\cdot\Psi$ se projette en $-i\Omega\cdot_Q\overline{\Phi} = -i(i\Phi) = \Phi$, donc il n'est autre que Ψ. Ainsi on obtient $D_t\Psi = -\frac{t}{2}B\cdot\Psi + \frac{n+1}{2}\Psi$, et la première valeur propre tend vers $\frac{n+1}{2}$ quand t tend vers zéro. De plus, on peut vérifier l'équation établie en (2.5.1). Alors d'une part on calcule

$$T_\Psi(\xi,\xi) = \Re(\xi\cdot\nabla^M_\xi\Psi,\Psi) = -\frac{1}{2}\Re(\xi\cdot\xi\cdot\Psi,\Psi) = \frac{1}{2}.$$

D'autre part le spineur $\frac{1}{t}\xi\cdot_t\Omega\cdot_t\Psi$ se projette en Φ, et est donc égal à Ψ. D'où

$$(D_t\Psi,\Psi) = -\frac{t}{2}\Re(\frac{1}{t}\xi\cdot_t\Omega\cdot_t\Psi,\Psi) + \frac{n+1}{2} = -\frac{t}{2} + \frac{n+1}{2}.$$

Ainsi, $\frac{d}{dt}(D_t\Psi,\Psi)|_{t=1} = -\frac{1}{2}$. $\square$

3.4 Feuilletage Kähler-quaternionien

Dans cette section, on rappelle quelques propriétés fondamentales d'un feuilletage Kähler-quaternionien spinoriel [HM95b] pour établir l'estimation [BHMM].

Définition 3.4.1 *Un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension $q = 4m$ est dit Kähler-quaternionien si son fibré principal des repères orthonormés directs* $\mathrm{SO}Q$ *admet une réduction* P *au sous-groupe* $\mathrm{Sp}_1 \cdot \mathrm{Sp}_m := \mathrm{Sp}_1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Sp}_m \subset \mathrm{SO}_{4m}$ *compatible avec la connexion* ∇ *(i.e. la connexion* ∇ *se réduit à* P*).*

Cette définition est équivalente à l'existence d'un sous-fibré E de $\mathrm{End}(Q)$ de rang 3 qui admet une base locale $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}$ tel que la métrique g_Q soit hermitienne pour $J_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ et vérifie

$$\begin{cases} J_\alpha \circ J_\beta = -\delta_{\alpha\beta}\mathrm{Id} + \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma, \\ \nabla J_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \omega^\beta_\alpha J_\beta, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

où ω^β_α sont des 1-formes locales sur M et $\varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} = \pm 1$ si (α, β, γ) est une permutation paire ou impaire de $(1, 2, 3)$.

Remarquons qu'un feuilletage Kähler-quaternionien est transversalement d'Einstein [Bes87]. Il admet donc une courbure scalaire transversale constante, supposée positive. On rappelle le théorème suivant démontré dans [Heb86, MORT91].

Théorème 3.4.2 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien sur une variété M munie d'une métrique quasi-fibrée complète g_M. Si la courbure de Ricci transversale est strictement positive, alors $H^1_B(\mathcal{F}) = 0$.*

Le fait que, sur un feuilletage riemannien $(M, g_M, \mathcal{F})$, où M est supposée compacte, la métrique quasi-fibrée est choisie de manière à ce que κ soit une 1-forme basique et harmonique, donne que $[\kappa] \in H^1_B(\mathcal{F})$. Du théorème précédent, on déduit que si la courbure de Ricci transversale est positive, alors la courbure moyenne est nulle.

Une conséquence de la définition 3.4.1 est l'existence d'une 4-forme parallèle Ω définie par $\Omega = \sum_{\alpha=1}^{3} \Omega_\alpha \wedge \Omega_\alpha$, où les Ω_α sont les 2-formes de Kähler associées à J_α. La 4-forme Ω peut être écrite

$$\Omega\cdot = \sum_{\alpha=1}^{3} \Omega_\alpha \cdot \Omega_\alpha \cdot +6m\mathrm{Id}. \tag{3.4.2}$$

Sous l'action de Ω, le fibré des spineurs $S(\mathcal{F})$ se décompose en une somme orthogonale [HM95a]

$$\Gamma(S(\mathcal{F})) = \overset{m}{\underset{r=0}{\oplus}} \Gamma(S_r(\mathcal{F})),$$

où $S_r(\mathcal{F})$ est l'espace propre associé à la valeur propre $\mu_r = 6m - 4r(r+2)$ de Ω. De plus, l'action du groupe $\mathrm{Sp}_1 \times \mathrm{Sp}_m$ décompose le fibré $Q^{\mathbb{C}} \otimes S_r(\mathcal{F})$ en

$$\begin{aligned} Q^{\mathbb{C}} \otimes S_r(\mathcal{F}) &= W_{r+1,\bar{r}}(\mathcal{F}) \oplus W_{r-1,\bar{r}}(\mathcal{F}) \oplus W_{r+1,r-1}(\mathcal{F}) \oplus W_{r-1,r+1}(\mathcal{F}) \\ &\oplus W_{r-1,r-1}(\mathcal{F}) \oplus W_{r+1,r+1}(\mathcal{F}), \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

où $W_{r,s}(\mathcal{F})$ désigne l'espace des représentations irréductibles du groupe $\mathrm{Sp}_1 \times \mathrm{Sp}_m$ avec un poids dominant

$$(r, 1, \cdots, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{s}),$$

et $W_{r,\bar{s}}(\mathcal{F})$ est l'espace des représentations irréductibles du groupe $\mathrm{Sp}_1 \times \mathrm{Sp}_m$ avec un poids dominant

$$(r, 2, 1, \cdots, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{s}).$$

Les deux derniers fibrés dans (3.4.3) sont respectivement isomorphes à $S_{r-1}(\mathcal{F})$ et $S_{r+1}(\mathcal{F})$. On note par m_r la restriction de la multiplication de Clifford à $Q^{\mathbb{C}} \otimes S_r(\mathcal{F})$. Le noyau de m_r se décompose en une somme orthogonale

$$\operatorname{Ker} m_r = W_{r+1,\bar{r}}(\mathcal{F}) \oplus W_{r-1,\bar{r}}(\mathcal{F}) \oplus W_{r+1,r-1}(\mathcal{F}) \oplus W_{r-1,r+1}(\mathcal{F}).$$

Ceci est une conséquence du calcul de l'image par m_r d'un vecteur maximal de chaque composante de (3.4.3). La restriction de m_r à $W_{r-1,r-1}(\mathcal{F})$ (resp. $W_{r+1,r+1}(\mathcal{F})$) est un isomorphisme sur $S_{r-1}(\mathcal{F})$ (resp. $S_{r+1}(\mathcal{F})$). Soit $(.\,,.)$ le produit hermitien usuel sur $Q^{\mathbb{C}} \otimes S(\mathcal{F})$. Puisque $(m_r(.), m_r(.))$ et $(.\,,.)$ sont des produits scalaires $(\mathrm{Sp}_1 \times \mathrm{Sp}_m)$-invariants sur $W_{r-1,r-1}(\mathcal{F})$ et $W_{r+1,r+1}(\mathcal{F})$, on déduit du lemme de Schur que

$$\forall w \in W_{r-1,r-1}(\mathcal{F}), \;\; |m_r(w)|^2 = \frac{2(r+1)(m-r+1)}{r}|w|^2, \tag{3.4.4}$$

et

$$\forall w \in W_{r+1,r+1}(\mathcal{F}), \;\; |m_r(w)|^2 = \frac{2(r+1)(m+r+3)}{r+2}|w|^2. \tag{3.4.5}$$

Afin d'obtenir un résultat similaire pour les autres termes dans (3.4.3), on définit localement l'opérateur $\widetilde{m} : \Gamma(Q^{\mathbb{C}} \otimes S(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma(E^{\mathbb{C}} \otimes S(\mathcal{F}))$ par

$$\widetilde{m}(X \otimes \Psi) = \sum_{\alpha=1}^{3} J_\alpha \otimes (J_\alpha(X) \cdot \Psi), \tag{3.4.6}$$

pour tous $X \in \Gamma(Q)$ et $\Psi \in \Gamma(S(\mathcal{F}))$. On note $\widetilde{m}_r$ la restriction de $\widetilde{m}$ à $Q^{\mathbb{C}} \otimes S_r(\mathcal{F})$. Comme avant, en calculant l'image par $\widetilde{m}_r$ d'un vecteur maximal sur chaque composante de (3.4.3), le noyau de $\widetilde{m}_r$ se décompose en

$$\operatorname{Ker} \widetilde{m}_r = W_{r+1,\bar{r}}(\mathcal{F}) \oplus W_{r-1,\bar{r}}(\mathcal{F}).$$

En utilisant le même argument que dans (3.4.4) et (3.4.5), on déduit du lemme de Schur que

$$|\widetilde{m}_r(w)|^2 = \begin{cases} 4(m-r+1)|w|^2, & \forall w \in W_{r+1,r-1}(\mathcal{F}), \\ 4(m+r+3)|w|^2, & \forall w \in W_{r-1,r+1}(\mathcal{F}) \ , \\ \frac{2(r-1)(m-r+1)}{r}|w|^2, & \forall w \in W_{r-1,r-1}(\mathcal{F}), \\ \frac{2(r+3)(m+r+3)}{r+2}|w|^2, & \forall w \in W_{r+1,r+1}(\mathcal{F}). \end{cases} \tag{3.4.7}$$

3.5 Résultat principal

Dans cette section, on démontre (3.1.4) en utilisant la décomposition du fibré $Q^{\mathbb{C}} \otimes S_r(\mathcal{F})$ donnée dans la section précédente. On se refère à [KSW98a, KSW99, BHMM].

Théorème 3.5.1 *On se met dans les hypothèses du théorème* 3.4.2 *avec l'hypothèse que le feuilletage $\mathcal{F}$ a une structure Kähler-quaternionienne spinorielle de codimension $q = 4m$. La courbure moyenne κ s'annule et la première valeur propre λ de l'opérateur de Dirac basique satisfait*

$$\lambda^2 \geq \frac{m+3}{4(m+2)} \mathrm{Scal}^\nabla.$$

Preuve La positivité de la courbure scalaire implique que la courbure de Ricci transversale est positive, du fait que le feuilletage est d'Einstein et la courbure moyenne est donc nulle. Pour la deuxième partie du théorème, pour tout $\Psi \in \Gamma_B(S_r(\mathcal{F}))$, la dérivée covariante $\nabla\Psi$ se décompose par (3.4.3) en

$$\begin{aligned} \nabla\Psi = \ & (\nabla\Psi)_{r+1,\bar{r}} + (\nabla\Psi)_{r-1,\bar{r}} + (\nabla\Psi)_{r+1,r-1} + (\nabla\Psi)_{r-1,r+1} \\ & +(\nabla\Psi)_{r-1,r-1} + (\nabla\Psi)_{r+1,r+1}. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Afin de calculer la norme de $\nabla\Psi$, les deux derniers termes de l'équation (3.5.1) sont respectivement des sections des sous-fibrés $S_{r-1}(\mathcal{F})$ et $S_{r+1}(\mathcal{F})$. On obtient alors de (3.4.4) et (3.4.5)

$$|(\nabla\Psi)_{r-1,r-1}|^2 = \frac{r}{2(r+1)(m-r+1)}|D_-\Psi|^2, \tag{3.5.2}$$

et

$$|(\nabla\Psi)_{r+1,r+1}|^2 = \frac{r+2}{2(r+1)(m+r+3)}|D_+\Psi|^2, \tag{3.5.3}$$

où $D_-\Psi = (D_b\Psi)_{r-1}$ et $D_+\Psi = (D_b\Psi)_{r+1}$. Des résultats similaires peuvent être obtenus pour les autres termes dans (3.5.1), en utilisant la définition de l'opérateur $\widetilde{m}$ dans (3.4.6). Pour cela, on considère pour tout spineur Ψ l'opérateur $D_\alpha\Psi$ défini localement par $\sum_{i=1}^{4m} J_\alpha(e_i)\cdot\nabla_{e_i}\Psi$. D'où $\widetilde{m}(\nabla\Psi) = \sum_{\alpha=1}^{3} J_\alpha\otimes D_\alpha\Psi$ et on obtient

$$|\widetilde{m}(\nabla\Psi)|^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}|D_\alpha\Psi|^2.$$

De plus, par (3.4.7), on a

$$\begin{aligned}
|\widetilde{m}((\nabla\Psi)_{r+1,r-1})|^2 &= 4(m-r+1)|(\nabla\Psi)_{r+1,r-1}|^2,\\
|\widetilde{m}((\nabla\Psi)_{r-1,r+1})|^2 &= 4(m+r+3)|(\nabla\Psi)_{r-1,r+1}|^2,\\
|\widetilde{m}((\nabla\Psi)_{r-1,r-1})|^2 &= \frac{2(r-1)(m-r+1)}{r}|(\nabla\Psi)_{r-1,r-1}|^2,\\
|\widetilde{m}((\nabla\Psi)_{r+1,r+1})|^2 &= \frac{2(r+3)(m+r+3)}{r+2}|(\nabla\Psi)_{r+1,r+1}|^2.
\end{aligned}$$

Donc, des équations ci-dessus et de (3.5.2) et (3.5.3), on déduit pour tout $\Psi\in\Gamma_B(S_r(\mathcal{F}))$ que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{3}|D_\alpha\Psi|^2 &= 4(m-r+1)|(\nabla\Psi)_{r+1,r-1}|^2 + 4(m+r+3)|(\nabla\Psi)_{r-1,r+1}|^2\\
&\quad+\frac{r+3}{r+2}|D_+\Psi|^2 + \frac{r-1}{r+1}|D_-\Psi|^2.
\end{aligned}\tag{3.5.4}$$

Ainsi, en utilisant les équations (3.5.2), (3.5.3), (3.5.4) et (3.5.1), on écrit la norme de $\nabla\Psi$ comme

$$\begin{aligned}
|\nabla\Psi|^2 &= |(\nabla\Psi)_{r+1,\bar{r}}|^2 + |(\nabla\Psi)_{r-1,\bar{r}}|^2 + \frac{2(r+1)}{m+r+3}|(\nabla\Psi)_{r+1,r-1}|^2\\
&\quad+\frac{1}{4(m+r+3)}\sum_{\alpha=1}^{3}|D_\alpha\Psi|^2 + \frac{1}{4(m+r+3)}|D_+\Psi|^2\\
&\quad+\frac{m+3r+1}{4(m-r+1)(m+r+3)}|D_-\Psi|^2.
\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

Soit λ la première valeur propre de l'opérateur de Dirac basique. Alors il existe un spineur propre Ψ, de type $(r, r+1)$ tel que

$$D_b\Psi = \lambda\Psi \quad \text{et} \quad \Psi = \Psi_r + \Psi_{r+1},$$

avec $r \in \{0, \cdots, m-1\}$. Pour tout spineur $\Psi \in \Gamma_B(S(\mathcal{F}))$, on a [HM95b]

$$\int_M \sum_{\alpha=1}^{3} |D_\alpha \Psi|^2 = 3\int_M (D_b^2\Psi, \Psi) + \frac{\mathrm{Scal}^\nabla}{4m(m+2)} \int_M ((\Omega - 6m)\cdot\Psi, \Psi).$$

Donc, en appliquant l'équation (3.5.5) à Ψ_{r+1} et en intégrant sur M, on obtient le fait que $D_-\Psi_{r+1} = \lambda\Psi_r$ et $D_+\Psi_{r+1} = 0$

$$0 \quad \leq \quad ||\nabla\Psi_{r+1}||^2_{L^2} - a_r\lambda^2||\Psi_{r+1}||^2_{L^2} + b_r\mathrm{Scal}^\nabla||\Psi_{r+1}||^2_{L^2} - c_r\lambda^2||\Psi_r||^2_{L^2},$$

où

$$\begin{cases} a_r = \frac{3}{4(m+r+4)}, \\ \\ b_r = \frac{(r+1)(r+3)}{4m(m+2)(m+r+4)}, \\ \\ c_r = \frac{m+3r+4}{4(m-r)(m+r+4)}. \end{cases}$$

Finalement avec la formule de Schrödinger-Lichnerowicz et le fait que Ψ_r et Ψ_{r+1} ont les mêmes normes-L^2, on obtient (3.1.4). □

3.6 Cas limite

Soient λ la première valeur propre satisfaisant le cas limite de (3.1.4) et Ψ un spineur propre de type $(r, r+1)$ associé à λ. De la preuve du théorème précédent, on obtient $r = 0$ et les équations suivantes [BHMM]

$$\begin{cases} |\nabla\Psi_0|^2 = \frac{1}{m+3}|D_b\Psi_0|^2, \\ \\ |\nabla\Psi_1|^2 = \frac{1}{4m}|D_b\Psi_1|^2 + \frac{1}{4(m+4)}\sum_{\alpha=1}^3 |D_\alpha\Psi_1|^2. \end{cases} \tag{3.6.1}$$

De plus le spineur Ψ_1 satisfait

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{\alpha=1}^3 \Omega_\alpha \cdot D_\alpha\Psi_1 = 0, \\ &\textstyle\sum_{\beta,\gamma} \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma}\Omega_\beta \cdot D_\gamma\Psi_1 = 8D_\alpha\Psi_1, \quad \forall\alpha = 1,2,3. \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Pour tout $X \in \Gamma(Q)$, on a les équations des champs de *Killing Kähler-quaternioniens basiques* [BHMM, KSW98a, KSW98b]

$$\nabla_X \Psi_0 = -\frac{\lambda}{m+3} p_1(X) \cdot \Psi_1, \tag{3.6.3}$$

et

$$\nabla_X \Psi_1 = -\frac{\lambda}{4m} X \cdot \Psi_0 - \frac{1}{4(m+4)} \sum_{\alpha=1}^{3} J_\alpha(X) \cdot D_\alpha \Psi_1, \tag{3.6.4}$$

où pour tout $X \in \Gamma(Q)$, l'opérateur p_1 est défini par (voir [HM97])

$$\begin{cases} p_1(X) = \frac{1}{8}(5X + \mathcal{J}(X)), \\ \\ \mathcal{J}(X) = \frac{1}{4}[\Omega, X]. \end{cases}$$

Pour démontrer (3.6.3), on définit l'opérateur des twisteurs Kähler-quaternioniens basiques, noté $\mathcal{P}^0$, sur le fibré $S_0(\mathcal{F})$ tel que son image soit à valeurs dans le fibré $Q^* \otimes S_0(\mathcal{F})$ (voir [HM97]). Pour tout spineur $\psi_0 \in \Gamma_B(S_0(\mathcal{F}))$ on écrit

$$\mathcal{P}^0 \psi_0 = \sum_{i=1}^{4m} e_i^* \otimes (\nabla_{e_i} \psi_0 + \frac{1}{m+3} p_1(e_i) \cdot D_b \psi_0),$$

où $\{e_i\}_{i=1,\cdots,4m}$ est un repère local orthonormé de $\Gamma(Q)$. De la définition de p_1 on déduit facilement que $\sum_{i=1}^{4m} e_i \cdot \mathcal{P}^0_{e_i} \psi_0 = 0$. L'image de $\mathcal{P}^0$ est donc dans le noyau de la multiplication de Clifford m_0. Or $\mathcal{P}^0_{e_i} \psi_0$ est une section de $S_0(\mathcal{F})$, on déduit de la définition de $\mathcal{J}$ que $\sum_{i=1}^{4m} \mathcal{J}(e_i) \cdot \mathcal{P}^0_{e_i} \psi_0 = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}^0 \psi_0|^2 &= \sum_{i=1}^{4m} (\mathcal{P}^0_{e_i} \psi_0, \mathcal{P}^0_{e_i} \psi_0) \\ &= \sum_{i=1}^{4m} (\mathcal{P}^0_{e_i} \psi_0, \nabla_{e_i} \psi_0) \\ &= |\nabla \psi_0|^2 + \frac{1}{m+3} \sum_{i=1}^{4m} (p_1(e_i) \cdot D_b \psi_0, \nabla_{e_i} \psi_0). \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

La multiplication de Clifford par $\mathcal{J}$ étant symétrique, on vérifie que $(\nabla_{e_i} \psi_0, p_1(e_i) \cdot D_b \psi_0) = -(e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi_0, D_b \psi_0)$. Donc, pour tout spineur $\psi_0 \in \Gamma_B(S_0(\mathcal{F}))$, l'équation (3.6.5) se réduit à

$$|\mathcal{P}^0 \psi_0|^2 = |\nabla \psi_0|^2 - \frac{1}{m+3} |D_b \psi_0|^2,$$

qui s'annule par (3.6.1) pour le spineur Ψ_0. L'équation (3.6.3) est donc satisfaite pour $X = e_i$. $\square$

Maintenant on va démontrer l'équation (3.6.4). La preuve consiste à calculer la somme

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=1}^{4m} |\nabla_{e_i}\Psi_1 + \frac{1}{4m} e_i \cdot D_b\Psi_1 + \frac{1}{4(m+4)} \sum_{\alpha=1}^{3} J_\alpha e_i \cdot D_\alpha \Psi_1|^2 = \\
&\textstyle|\nabla\Psi_1|^2 + \frac{1}{4m}|D_b\Psi_1|^2 + \frac{1}{16(m+4)^2} \sum_{i=1}^{4m} |\sum_{\alpha=1}^{3} J_\alpha e_i \cdot D_\alpha\Psi_1|^2 \\
&\textstyle+\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m}(\nabla_{e_i}\Psi_1, e_i \cdot D_b\Psi_1) + \frac{1}{2(m+4)}\sum_{i=1}^{4m}(\nabla_{e_i}\Psi_1, J_\alpha e_i \cdot D_\alpha\Psi_1) \\
&\textstyle+\frac{1}{8m(m+4)}\sum_{i=1}^{4m}(e_i \cdot D_b\Psi_1, J_\alpha e_i \cdot D_\alpha \Psi_1).
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

Comme les multiplications de Clifford par e_i et par $J_\alpha(e_i)$ sont antisymétriques, les trois derniers termes sont facilement calculés et il reste à calculer le troisième terme de (3.6.6). Pour cela, en utilisant un repère local orthonormé $\{J_\alpha e_i\}_{i=1,\cdots,4m}$ et (3.4.1), on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4m} |\sum_{\alpha=1}^{3} J_\alpha e_i \cdot D_\alpha \Psi_1|^2 &= \sum_{i,\alpha,\beta} (J_\alpha e_i \cdot D_\alpha\Psi_1, J_\beta e_i \cdot D_\beta \Psi_1) \\
&= \sum_{i,\alpha,\beta} (D_\alpha\Psi_1, e_i \cdot J_\beta J_\alpha e_i \cdot D_\beta\Psi_1) \\
&= 4(m+4)\sum_{\alpha=1}^{3} |D_\alpha\Psi_1|^2.
\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

La dernière égalité de (3.6.7) est une conséquence (3.4.1) et (3.6.2). Finalement, en substituant (3.6.7), l'équation (3.6.6) se réduit à

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=1}^{4m} |\nabla_{e_i}\Psi_1 + \frac{1}{4m} e_i \cdot D_b\Psi_1 + \frac{1}{4(m+4)} \sum_{\alpha=1}^{3} J_\alpha e_i \cdot D_\alpha \Psi_1|^2 = \\
&\textstyle|\nabla\Psi_1|^2 - \frac{1}{4m}|D_b\Psi_1|^2 - \frac{1}{4(m+4)}\sum_{\alpha=1}^{3}|D_\alpha\Psi_1|^2,
\end{aligned}$$

qui s'annule par (3.6.1). $\square$

Exemple 1 On considère la variété compacte $N = M \times \mathbb{HP}^m$, où M est une variété riemannienne compacte de dimension p et $\mathbb{HP}^m$ est l'espace projectif quaternionique avec sa métrique standard. Soit g_N la métrique produit sur N. On définit un feuilletage $\mathcal{F}$ sur N par les feuilles $M \times \{y\}$ où $y \in \mathbb{HP}^m$. On a ainsi un feuilletage riemannien sur N et g_N est une métrique quasi-fibrée avec des fibres totalement géodésiques. Puisque les fibres du fibré normal sont isomorphes à l'espace tangent de $\mathbb{H}\mathrm{P}^m$, alors l'opérateur de Dirac basique coïncide avec celui de $\mathbb{H}\mathrm{P}^m$ dont les valeurs propres sont calculées dans [Mil92]. Le cas limite de (3.1.4) est donc atteint.

Exemple 2 Soient M une variété 3-sasakienne et $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M défini par ces champs de Killing. C'est un feuilletage riemannien avec une métrique quasi-fibrée et les fibres sont totalement géodésiques et difféomorphes à $\Gamma \setminus S^3$ où Γ est un sous-groupe fini de Sp_1 [BGM94]. Il induit une structure Kähler-quaternionienne spinorielle sur le fibré normal avec une courbure scalaire transversale positive. Si M est S^{4q+3} ou $\mathbb{RP}^{4q+3}$, alors il se projette sur $\mathbb{H}\mathrm{P}^m$ (fibration de Hopf) et l'égalité dans (3.1.4) est atteinte.

Bibliographie

[AL92] J. Alvarez-López, *The basic component of the mean curvature of Riemannian foliations*, Ann. Glob. Anal. Geom. **10** (1992), 179–194.

[BA98] C. Bär and B. Ammann, *The Dirac operator on nilmanifolds and collapsing circle bundles*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 221–253.

[Bär93] C. Bär, *Real Killing spinors and holonomy*, Commun. Math. Phys. **154** (1993), 525–576.

[Bär96] ———, *Metrics with harmonic spinors*, Geom. And Functional Anal. **6** (1996), 899–942.

[Bär97] ———, *On nodal sets for Dirac and Laplace operators*, Commun. Math. Phys. **188** (1997), 709–721.

[Bär98] ———, *Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 573–596.

[Bes87] A. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BFGK91] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, and I. Kath, *Twistors and Killing spinors on Riemannian manifolds*, vol. 108, Teubner-Verlag, Stuttgart/Leipzig, 1991.

[BG92] J.-P. Bourguignon and P. Gauduchon, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 581–599.

[BG00] C. Boyer and K. Galicki, *On Sasakian-Einstein geometry*, Internat. J. Math. (2000), 873–909.

[BG01] ———, *Einstein manifolds and contact geometry*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2419–2430.

[BGM94] C. Boyer, K. Galicki, and B. M. Mann, *The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds*, J. reine angew. Math. **455** (1994), 183–220.

[BGM05] C. Bär, P. Gauduchon, and A. Moroianu, *Generalized cylinders in semi-Riemannian and spin geometry*, Math. Z. **249** (2005), 545–580.

[BGM06] C. Boyer, K. Galicki, and P. Matzeu, *On Eta-Einstein Sasakian geometry*, à paraître (2006).

[BHMM] J.-P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, and A. Moroianu, *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry*, (en préparation).

[BK] J. Brüning and F. Kamber, *On the spectrum and index of transversal Dirac operators associated to Riemannian foliations*, à paraître.

[Blu81] R. Blumenthal, *Foliated manifolds with flat basic connection*, J. Differential Geom. **16** (1981), 401–406.

[Car81] Y. Carrière, *Flots riemanniens et feuilletages géodésibles de codimension 1*, Ph.D. thesis, Université de Lille, 1981.

[Car84] ______, *Flots riemanniens*, Structure transverse des feuilletages, Toulouse, Astérique **116** (1984), 31–52.

[Dan05] B. Daniel, *Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds*, Preprint, math.DG/0503500, 2005.

[EG97] A. ElKacimi and B. Gmira, *Stabilité du caractère kählérien transverse*, Isr. J. Math. **101** (1997), 323–347.

[ElK90] A. ElKacimi, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compositio Mathematica **73** (1990), 57–106.

[ElK01] ______, *Towards a basic index theory*, Proc. of the Summer School and Workshop, Dirac Operators : Yesterday and Today (CAMS-AUB, Lebanon), 2001, pp. 251–261.

[FK00] Th. Friedrich and E. C. Kim, *The Einstein-Dirac equation on Riemannian spin manifolds*, J. Geom. Phys. **33** (2000), 128–172.

[Fri80] Th. Friedrich, *Der erste Eigenwert des Diracoperators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung*, Math. Nach. **97** (1980), 117–146.

[Fri98] ______, *On the spinor representation of surfaces in Euclidean 3-space*, J. Geom. Phys. **28** (1998), 143–157.

[Gal79] S. Gallot, *Équations différentielles caractéristiques de la sphère*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4ème série **12** (1979), 25–267.

[GK91a] J.F. Glazebrook and F.W. Kamber, *On spectral flow of transversal Dirac operators and a theorem of Vafa-Witten*, Ann. Glob. Anal. Geom. **9** (1991), 27–35.

[GK91b] ______, *Transversal Dirac families in Riemannian foliations*, Commun. Math. Phy. **140** (1991), 217–240.

[Haba] G. Habib, *Eigenvalues of the basic Dirac operator on quaternion-Kähler foliations*, à paraître dans Ann. Glob. Anal. Geom.

[Habb] ______, *Energy-Momentum tensor on foliations*, soumis.

[Hab05] ______, *Eigenvalues of the transversal Dirac operator on Kähler foliations*, J. Geom. Phys. **6** (2005), 260–270.

[Heb86] J. Hebda, *Curvature and focal points in Riemannian foliations*, Indiana Univers. Math. J. **35** (1986), 321–331.

[HG] G. Habib and N. Ginoux, *A Reilly-type inequality on Sasakian manifolds*, en préparation.

[Hij84] O. Hijazi, *Opérateurs de Dirac sur les variétés riemanniennes : Minoration des valeurs propres*, Ph.D. thesis, Thèse de 3ème cycle, Ecole Polytechnique, 1984.

[Hij94a] ______, *Eigenvalues of the Dirac operator on compact Kähler manifolds*, Commun. Math. Phys. **160** (1994), 563–579.

[Hij94b] ______, *Twistor operators and eigenvalues of the Dirac operator*, Proceedings of the conference on Quaternionic-Kähler Geometry (Trieste), 1994.

[Hij95] ______, *Lower bounds for the eigenvalues of the Dirac operator*, J. Geom. Phys. **16** (1995), 27–38.

[HM95a] O. Hijazi and J.-L. Milhorat, *Décomposition du fibré des spineurs d'une variété spin Kähler-quaternionienne sous l'action de la 4-forme fondamentale*, J. Geom. Phys. **15** (1995), 320–332.

[HM95b] ______, *Minoration des valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur les variétés Kähler-quaternioniennes*, J. Math. Pures Appl. **74** (1995), 387–414.

[HM97] ______, *Twistor operators and eigenvalues of the Dirac operator on compact quaternion-Kähler spin manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. **15** (1997), 117–131.

[HMZ01] O. Hijazi, S. Montiel, and X. Zhang, *Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 195–208.

[JK03] S.D. Jung and Tae Ho Kang, *Lower bounds for the eigenvalue of the transversal Dirac operator on a Kähler foliation*, J. Geom. Phys. **45** (2003), 75–90.

[Jun01] S.D. Jung, *The first eigenvalue of the transversal Dirac operator*, J. Geom. Phys. **39** (2001), 253–264.

[Kir86] K.D. Kirchberg, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature*, Ann. Glob. Anal. Geom. **3** (1986), 291–325.

[Kir88] ______, *Compact six-dimensional Kähler spin manifolds of positive scalar curvature with the smallest possible first eigenvalue of the Dirac operator*, Math. Ann. **282** (1988), 157–176.

[Kir90] ______, *The first eigenvalue of the Dirac operator on Kähler manifolds*, J. Geom. Phys. **4** (1990), 449–468.

[Kir92] ______, *Properties of Kählerian twistor-spinors and vanishing theorems*, Math. Ann. **293** (1992), 349–369.

[KSW98a] W. Kramer, U. Semmelmann, and G. Weingart, *Quaternionic Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 63–87.

[KSW98b] ______, *The first eigenvalue of the Dirac operator on quaternionic Kähler manifolds*, Commun. Math. Phys. **199** (1998), 327–349.

[KSW99] ______, *Eigenvalue estimates for the Dirac operator on quaternionic Kähler manifolds*, Math. Z. **230** (1999), 727–751.

[Lic63] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 7–9.

[Lic87] ______, *Spin manifolds, Killing spinors and universality of the Hijazi inequality*, Lett. Math. Phys. **13** (1987), 331–344.

[Lic90] ______, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac pour une variété kählérienne et son cas limite* , C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 717–722.

[LM89] H.B. Lawson and M.L. Michelson, *Spin Geometry*, vol. 38, Princeton Math. Series, Princeton University Press, 1989.

[Mas00] A. Mason, *An application of stochastic flows to Riemannian foliations*, Houston J. Math. **26** (2000), 481–515.

[Mey77] J. Meyer, *e-foliations of codimension two*, J. Differential Geom. **12** (1977), 583–594.

[Mil92] J.-L. Milhorat, *Spectre de l'opérateur de Dirac sur les espaces projectifs quaternioniens*, C. R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 69–72.

[MMOR96] P. March, M. Min-Oo, and A. E. Ruh, *Mean curvature of Riemannian foliations*, Can. Math. Bull. **39** (1996), 95–105.

[Mor95] A. Moroianu, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes*, Commun. Math. Phys. **3** (1995), 373–384.

[Mor99] ———, *Kähler manifolds with small eigenvalues of the Dirac operator and a conjecture of Lichnerowicz*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **49** (1999), 1637–1659.

[Mor02] B. Morel, *Tenseur d'impulsion-énergie et géométrie spinorielle extrinsèque*, Ph.D. thesis, Institut ÉLie Cartan, 2002.

[MORT91] M. Min-Oo, E. Ruh., and Ph. Tondeur, *Vanishing theorems for the basic cohomology of Riemannian foliations*, J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 167–174.

[O'N66] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Mich. Math J. **13** (1966), 459–469.

[Rei59] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Math. **69** (1959), 119–132.

[TK82] Ph. Tondeur and F. Kamber, *Infinitesimal automorphisms and second variation of the energy for harmonic foliations*, Tôhoku Math. J. **34** (1982), 525–538.

[TK83] ———, *Foliations and metrics*, Proc. of a year in Differential Geometry, University of Maryland, Brikhäuser, vol. 32, 1983, pp. 103–152.

[TN88] Ph. Tondeur and S. Nishikawa, *Transversal infinitesimal automorphisms for harmonic Kähler foliations*, Tôhoku Math. J. **40** (1988), 599–611.

[Ton88] Ph. Tondeur, *Foliations on Riemannian manifolds*, Springer, New York, 1988.

[Wan89] Mc. Y. Wang, *Parallel Spinors and parallel forms*, Ann. Global Anal. Geom. **7** (1989), 59–68.

[YT90] S. Yorozu and T. Tanemura, *Green's theorem on a foliated Riemannian manifold and its applications*, Acta. Math. Hung. **56** (1990), 239–245.

Le sujet principal de cette thèse est d'interpréter géométriquement le tenseur d'impulsion-énergie dans le cadre des feuilletages. On s'intéresse dans un premier temps à la géométrie spinorielle transverse, i.e. celle du fibré normal. On définit l'opérateur de Dirac basique sur un feuilletage riemannien et on établit une formule de type Schrödinger-Lichnerowicz. On donne ainsi des inégalités de type Friedrich et de type Kirchberg dans le cas d'un feuilletage kählérien et une estimation dans le cas d'un feuilletage Kähler-quaternionien. Le cas des flots riemanniens va permettre de mieux comprendre le tenseur d'impulsion-énergie dans le cadre des feuilletages. Il apparaît comme un tenseur naturel antisymétrique permettant de le voir comme le tenseur d'O'Neill du flot. Finalement, on caractérise le cas de dimension 3 par une solution de l'équation de Dirac.

Energy-Momentum tensor and Foliations :

The main subject of this thesis is to understand the energy-momentum tensor in the case of foliations. We first investigate the transverse spin geometry. We define the basic Dirac operator on Riemannian foliations and we establish a Schrödinger-Lichnerowicz formula. We then give inequalities of Friedrich type and Kirchberg type in the case of Kähler foliations and an estimate in the case of Quaternion-Kähler foliations. The case of Riemannian flows allows us for a better understand of the energy-momentum tensor in the case of foliations. It turns out that a natural skew-symmetric tensor appears that can be identified with the O'Neill tensor of the flow. Finally, we characterize the 3-dimensional case by a solution of the Dirac equation.

Discipline : Mathématiques

Mots clés : géométrie spinorielle, tenseur d'impulsion-énergie, feuilletages riemanniens, opérateur de Dirac basique, valeurs propres

Institut Élie Cartan Nancy
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex