

Immeubles affines et groupes de Kac-Moody

Cyril Charignon

▶ **To cite this version:**

Cyril Charignon. Immeubles affines et groupes de Kac-Moody. Mathématiques [math]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2010. Français. NNT : 2010NAN10138 . tel-01747097v2

HAL Id: tel-01747097
https://theses.hal.science/tel-01747097v2

Submitted on 6 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Immeubles affines et groupes de Kac-Moody

Mémoire présenté par M. Cyril CHARIGNON

en vue d'obtenir le diplôme de docteur en mathématiques

Soutenance prévue le vendredi 2 juillet devant le jury composé de :

Pierre-Emmanuel CAPRACE	rapporteur
Bertrand RÉMY	rapporteur
Caroline GRUSON	examinatrice
Anette WERNER	examinatrice
Guy ROUSSEAU	directeur de thèse

Institut Élie Cartan Nancy

Immeubles affines et groupes de Kac-Moody

Résumé

Le but de ce travail est d'étendre la théorie de Bruhat-Tits au cas des groupes de Kac-Moody sur des corps locaux. Il s'agit donc de définir un espace géométrique sur lequel un tel groupe agit, semblable à l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif.

En fait, la première partie reste dans le cadre de la théorie de Bruhat-Tits puisqu'on y définit une famille de compactification des immeubles affines. C'est dans la seconde partie qu'en s'inspirant de la construction de la première, on aborde le cas des groupes de Kac-Moody. Les espaces obtenus ne vérifient pas toutes les conditions demandées à un immeuble, car deux points peuvent ne pas appartenir à un même appartement. Ils sont donc appelés des masures, et plus précisément des masures bordées.

Mots clefs : immeuble, immeuble affine, Bruhat-Tits, Kac-Moody, groupe, masure, corps local, donnée radicielle, valuation.

Affine buildings and Kac-Moody groups

Abstract

This work aims at generalizing Bruhat-Tits theory to Kac-Moody groups over local fields. We thus try to construct a geometric space on wich such a group will act, and wich will look like the Bruhat-Tits building of a reductive group. Actually, the first part stays in the field of Bruhat-Tits theory as it exposes a family of compactification of an ordinary affine building. It is in the second part that we move to Kac-Moody theory, using the first part as a guide. The spaces obtained do not satisfy all the requirement for a building, as two points are not always in one apartment. They will be called hovels (”masures” in french), and more precisly bounded hovels.

keywords : building, affine building, Bruhat-Tits, Kac-Moody, group, hovel, local fiel, root datum, valuation.

Travail effectué à l'institut Élie Cartan, Unité mixte de recherche 7502 Nancy-Université et CNRS
Boulevard des aiguillettes, BP 70239, 54506 Vandoeuvre lès Nancy cedex (France)

Introduction

Lorsque G est un groupe réductif sur un corps valué $\mathbb{K}$, la théorie de Bruhat-Tits développée dans [BT72] et [BT84] permet de lui associer un immeuble $\mathcal{I} = \mathcal{I}(G)$, appelé immeuble de Bruhat-Tits de G. Les appartements de $\mathcal{I}$ sont des espaces affines, dont les espaces directeurs sont les appartements de l'immeuble vectoriel (ou plutôt de la réalisation vectorielle de l'immeuble de Tits) $\vec{\mathcal{I}}$ de G, ce qui explique que ce type d'immeuble soit appelé immeuble affine.

Rappelons rapidement quelques intérêts de cet immeuble. En premier lieu, l'immeuble $\mathcal{I}$ est plus précis que l'immeuble vectoriel $\vec{\mathcal{I}}$, au sens où il est possible de reconstruire $\vec{\mathcal{I}}$ à partir de $\mathcal{I}$. En fait, $\vec{\mathcal{I}}$ (ou plutôt la réalisation sphérique de l'immeuble de Tits de G) peut-être vu comme le bord à l'infini de $\mathcal{I}$ dans une certaine compactification de $\mathcal{I}$. De plus, l'immeuble $\mathcal{I}$ fait intervenir la topologie de G héritée de celle de $\mathbb{K}$; par exemple, si $\mathbb{K}$ est complet localement compact localement compact, les sous-groupes compacts maximaux de G sont les fixateurs des points de $\mathcal{I}$, ceci peut permettre de déterminer facilement les classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux. Enfin, le type de $\mathcal{I}$ est un groupe de Coxeter produit semi-direct du type de $\vec{\mathcal{I}}$ avec un groupe de translation, et les résultats généraux sur l'action d'un groupe sur un immeuble fournissent directement une décomposition de Cartan pour G.

Le point qui va particulièrement nous intéresser dans le présent travail est l'étude des immeubles des sous-groupes paraboliques de G. En effet, tout sous-groupe parabolique de G admet un facteur de Lévi qui est lui-même un groupe réductif et donc dispose de ses propre immeubles vectoriel et affine. L'immeuble vectoriel du sous-groupe parabolique $P(\vec{f})$, fixateur de la facette $\vec{f}$ de $\vec{\mathcal{I}}$, est tout simplement $\vec{f}^*$, la réunion des facettes de $\vec{\mathcal{I}}$ contenant $\vec{f}$ dans leur adhérence. Quant à l'immeuble affine pour $P(\vec{f})$, il n'apparait pas directement dans $\mathcal{I}$, mais on peut le voir comme le "bord à l'infini de $\mathcal{I}$ dans la direction de $\vec{f}$". Il faut bien entendu donner un sens plus précis à ceci, mais on constate alors qu'en rajoutant à $\mathcal{I}$ tous les immeubles affines des sous-groupes paraboliques de G on obtient un espace $\overline{\mathcal{I}}$ qui est une compactification de $\mathcal{I}$, dans le cas où $\mathcal{I}$ (c'est-à-dire $\mathbb{K}$) est localement compact. Cette compactification est différente de celle obtenue en rajoutant comme bord de $\mathcal{I}$ l'immeuble sphérique de G. On l'appelle compactification polyédrique, ou compactification de Satake car elle est semblable à la compactification de Satake d'un espace symétrique. Concernant cette compactification, on peut se référer à [Lan96].

On propose dans une première partie de définir cette compactification, mais sans faire usage d'un groupe G. En effet, un immeuble affine peut être défini de manière abstraite, et il existe certains immeubles affines de dimension inférieure à 3 qui ne sont l'immeuble de Bruhat-Tits d'aucun groupe réductif. Nous partons donc d'un immeuble affine $\mathcal{I}$ localement compact et construisons son compactifié $\overline{\mathcal{I}}$ par des méthodes uniquement géométriques. On propose de plus quelques variations de cette construction, qui comprennent celles introduites dans [Wer07], et qui dans le cas de l'immeuble d'un groupe réductif, reviennent à ne pas utiliser dans le bord de $\overline{\mathcal{I}}$ les immeubles de tous les sous-groupes paraboliques de G. Il est possible que, indépendamment de l'obtention de l'espace $\overline{\mathcal{I}}$, le lecteur trouve quelque intérêt à l'étude des propriétés d'incidence de $\mathcal{I}$ qui a été nécessaire.

Le but premier de cette thèse est néanmoins l'étude des groupes de Kac-Moody sur un corps valué. En effet, les groupes de Kac-Moody sont une généralisation usuelle, de dimension infinie, des groupes réductifs et il est naturel de vouloir les étudier au moyen d'immeubles. En fait, les méthodes de géométrie habituelles deviennent très délicates en dimension infinie, ce qui accroit l'utilité de méthodes immobilières. Soit donc G un groupe de Kac-Moody. L'immeuble vectoriel $\vec{\mathcal{I}}$ pour G est connu, lorsque G est déployé ou presque déployé, voir [Ré02]. Un appartement de $\vec{\mathcal{I}}$ n'est plus un espace vectoriel, mais un cône dans un espace vectoriel, réunion de deux cônes convexes opposés. L'immeuble $\vec{\mathcal{I}}$ aussi est réunion de deux parties convexes $\vec{\mathcal{I}}^+$ et $\vec{\mathcal{I}}^-$, chacune d'entre elles est un immeuble au sens usuel, et ces deux immeubles sont jumelés. On dira aussi simplement que $\mathcal{I}$ est un immeuble jumelé. Concernant les immeubles jumelés, on peut se reporter à [Abr96], [AB08] ou [Ré02].

Maintenant supposons G défini sur un corps valué $\mathbb{K}$, peut-on définir un immeuble affine pour G ? Dès que G n'est pas réductif, ceci est a priori impossible, car la décomposition de Cartan n'est pas vraie dans G. On peut tout de même en calquant la construction de Bruhat-Tits obtenir un espace $\mathcal{I}$ reflétant la structure de G, voir [GR08] et [Rou10] pour le cas d'un groupe G déployé. Cet espace ne vérifie pas les conditions d'incidence classiques définissant un immeuble, il porte le nom de masure.

Cependant, dès que P est un sous-groupe parabolique de G de type fini, c'est-à-dire dont les facteurs de Lévi sont de dimension finie, il admet un véritable immeuble affine. Ainsi, si, guidés par la construction de la première partie, on rajoute à $\mathcal{I}$ son bord polyédrique, on y trouvera plusieurs immeubles affines classiques, ce qui peut être d'un grand intérêt pour l'étude de $\mathcal{I}$. En fait, la réunion des immeubles affines (correspondant aux paraboliques de type fini d'un certain signe pour être précis) qui apparaissent dans le bord de $\mathcal{I}$ a déjà été étudiée par Guy Rousseau dans [Rou06]. Elle vérifie les conditions d'incidence définissant un immeuble abstrait, et a été dénommée "immeuble microaffine". On propose dans le second chapitre de construire directement un espace $\overline{\mathcal{I}}$ attaché au groupe G, réunion de la masure de G et de son bord polyédrique, appelé masure bordée. Cette construction sera valable pour un groupe G déployé mais aussi pour un groupe presque déployé (à condition que $\mathbb{K}$ soit de valuation discrète et son corps résiduel parfait, comparer à [BT84] 5.1.1), c'est peut-être le principal apport de ce travail.

De la même manière que dans [BT72], nous définirons une masure bordée dans le cadre plus général d'un groupe G muni d'une donnée radicielle valuée, après avoir adapté cette notion pour qu'elle comprenne le cas d'un système de racines infini, et donc le cas d'un groupe de Kac-Moody. Il apparait une difficulté supplémentaire : la définition des sous-groupes fixateurs d'un point de $\mathcal{I}$, appelés sous-groupes parahoriques dans [BT72], n'est plus évidente. Plusieurs possibilités sont envisageables, conduisant à des masures bordées a priori différentes. Nous définirons donc de manière axiomatique la notion de famille de sous-groupes parahoriques, et nous prouverons l'existence de familles de sous-groupes parahoriques maximale et minimale.

Le travail de [Rou10] prouve l'existence d'une "bonne" famille de parahoriques pour un groupe G déployé, et permet donc la définition d'une "bonne" masure bordée. Pour étudier un groupe presque déployé, on prouvera d'abord comme dans [BT72] 10, un résultat de descente général dans le cadre d'une donnée radicielle valuée. On appliquera ce résultat à G deux fois de suite, en passant par une extension intermédiaire de $\mathbb{K}$ qui quasi-déploie G, comme dans [BT84] 4 et 5.

Je tiens à remercier Guy Rousseau qui a été le directeur de thèse parfait pour moi. Je remercie également mes collègues de l'équipe de groupe de Lie et analyse harmonique, et particulièrement Stéphane Gaussent et Nicole Bardy-Panse qui m'ont aidé à apprendre les bases de la théorie des immeubles dans une très bonne ambiance au début de ma thèse. Amaury Thuillier, Annette Werner, et Bertrand Rémy dont le travail m'a donné l'idée de la condition (fonc) de la partie 11.2.3. Simon Goodwin pour avoir organisé une école d'été sur les groupes algébriques qui m'a été très profitable. Je remercie bien sûr l'état français pour avoir financé mon travail, sur un sujet pourtant assez loin d'applications concrètes et lucratives. Enfin, je remercie tous ceux que j'ai oublié de citer, ainsi que le climat lorrain, tellement propice au travail.

Table des matières

I Compactification polyédriques d'un immeuble affine **8**

1 Introduction **8**

2 La donnée initiale **9**
2.1 Conventions, notations . . . 9
2.2 Cônes convexes . . . 10
2.3 Décomposition d'un appartement en cônes . . . 10
2.4 Conséquences directes des hypothèses sur $\mathcal{F}$ . . . 11
2.5 Exemples . . . 11
2.5.1 Décompositions en cônes obtenues à partir d'une partie de S . . . 12
2.5.2 Comparaison avec [Wer07] . . . 14
2.5.3 Dessins, autres exemples . . . 14

3 Compactification de A_0 **15**
3.1 L'ensemble $\overline{A_0}$ . . . 15
3.2 Topologie sur $\overline{A_0}$ . . . 16
3.2.1 Définitions . . . 16
3.2.2 Séparation . . . 18
3.2.3 L'inclusion canonique . . . 18
3.2.4 Compacité . . . 18
3.3 Structure du bord de $\overline{A_0}$ . . . 20
3.3.1 Prolongement des automorphismes . . . 20
3.3.2 Coeurs de cônes . . . 20
3.3.3 Structure de complexe de Coxeter vectoriel sur une façade . . . 23
3.3.4 Structure de complexe de Coxeter affine sur une façade . . . 25
3.4 Compactification de chaque appartement . . . 25

4 Quelques résultats généraux sur les immeubles **25**
4.1 Parties closes dans un appartement . . . 26
4.1.1 Projection . . . 27
4.1.2 Les parties closes sont des complexes de chambre . . . 28
4.1.3 Intersection de deux appartements . . . 29
4.1.4 Isomorphisme entre deux appartements . . . 30
4.2 Cheminées . . . 30
4.3 Inclusion d'une partie d'appartement et d'une chambre dans un appartement . . . 32
4.4 Rétractions par rapport à deux chambres adjacentes . . . 35
4.5 Inclusion de deux galeries tendues dans un appartement . . . 36
4.5.1 Le théorème . . . 36
4.5.2 Conséquences . . . 38
4.6 Systèmes d'appartements . . . 39
4.7 Parallélisme . . . 42

5 Construction de $\overline{\mathcal{I}}$ **43**
5.1 Préliminaires . . . 43
5.2 Cônes dans l'immeuble . . . 44
5.3 Coeur d'un cône d'immeuble . . . 45
5.4 Équivalence de cônes, l'ensemble $\overline{\mathcal{I}}$ . . . 46
5.5 Injections canoniques . . . 47

6 Topologie sur $\overline{\mathcal{I}}$ **48**
6.1 Définition . . . 48
6.2 Lien avec la topologie de $\overline{A}$ . . . 49
6.3 $\overline{\mathcal{I}}$ est séparé . . . 50
6.4 $\overline{\mathcal{I}}$ est à base dénombrable d'ouverts . . . 51
6.5 Injections canoniques . . . 51
6.5.1 L'injection $\iota_{\mathcal{I}}$ . . . 51
6.5.2 Les injections ι_A . . . 51
6.6 Rétractions . . . 52
6.7 Compacité . . . 54

7 Unicité de la construction **57**

8 Description de $\overline{\mathcal{I}}$ **60**
8.1 $\overline{\mathcal{I}}$ est une réunion d'immeubles . . . 60
8.2 Bord d'une façade . . . 63
8.2.1 Compactification de $\mathcal{I}_F$ . . . 63
8.2.2 $\widehat{\mathcal{I}_F}$ comme réunion de façades de $\overline{\mathcal{I}}$ . . . 66

II Masures bordées et groupes de Kac-Moody sur un corps local **68**

9 Introduction **68**

10 Rappels et notations **69**
10.1 Immeubles vectoriels . . . 69
10.1.1 Donnée radicielle . . . 69
10.1.2 L'immeuble d'une donnée radicielle . . . 71
10.1.3 Décomposition de Lévi . . . 74
10.2 Valuation d'une donnée radicielle . . . 75

11 Construction générale **77**
11.1 L'appartement . . . 78
11.1.1 Façades d'appartement . . . 78
11.1.2 Murs et demi-appartements . . . 79
11.1.3 Parties closes . . . 80
11.1.4 Facettes . . . 82
11.1.5 Action de N . . . 82
11.1.6 Opposition . . . 85
11.2 Familles de sous-groupes parahoriques . . . 85
11.2.1 Définition . . . 86
11.2.2 La famille minimale de parahoriques . . . 87
11.2.3 La condition (fonc) . . . 89
11.2.4 Relations directes entre les conditions (para x) . . . 91
11.3 Définition de la masure bordée . . . 93
11.3.1 La relation d'équivalence . . . 93
11.3.2 Définition . . . 93
11.3.3 Façades d'immeuble . . . 96
11.4 Décomposition d'Iwasawa . . . 97
11.4.1 La décomposition . . . 97
11.4.2 Unicité . . . 98
11.5 Décomposition de Bruhat/Birkhoff . . . 99

11.6 Construction de familles vérifiant (para *dec*) . . . 100
11.7 Bonnes familles de parahoriques . . . 101
11.7.1 Une condition suffisante pour (para 2.2) . . . 101
11.7.2 Projections . . . 102
11.7.3 Conséquences variées . . . 102
11.7.4 Décomposition de Lévi . . . 104
11.8 La bonne famille de parahoriques maximale . . . 106
11.9 Très bonnes familles de parahoriques . . . 108
11.9.1 Action de $\vec{\mathcal{I}}$ sur $\mathcal{I}$ . . . 108
11.9.2 Existence d'isomorphismes entre appartements . . . 108
11.9.3 Intersection d'appartements . . . 110

12 Descente **112**
12.1 Contexte et notations . . . 112
12.2 Descente dans l'immeuble vectoriel . . . 113
12.3 Descente de la valuation . . . 116
12.4 Descente de la famille de parahoriques . . . 117
12.5 Injection des façades . . . 119

13 Le cas Kac-Moody **121**
13.1 Rappels et notations . . . 121
13.1.1 Groupes de Kac-Moody déployés . . . 121
13.1.2 Groupes de Kac-Moody presque déployés . . . 122
13.2 Action du groupe de Galois . . . 123
13.2.1 Action de Γ sur A . . . 123
13.2.2 Action de Γ sur $\mathcal{I}$ . . . 125
13.3 Action du normalisateur du tore déployé . . . 126
13.4 Descente . . . 127
13.4.1 Vérification des premières conditions de descente . . . 127
13.4.2 Corps intermédiaire . . . 128
13.4.3 Descente quasi-déployée . . . 129
13.4.4 Descente modérément ramifiée . . . 129
13.5 Conclusion . . . 131
13.6 Questions . . . 132

Première partie

Compactification polyédriques d'un immeuble affine

1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter une construction purement géométrique de la compactification polyédrique d'un immeuble affine localement fini, comme celle décrite par Landvogt [Lan96]. On s'affranchit totalement de l'usage d'un groupe agissant sur l'immeuble, ce qui permet de définir une compactification pour les quelques immeubles qui pourraient ne pas être associés à un groupe muni d'une BN-paire.

On propose également une généralisation : on définit toute une famille de compactifications, indexée par l'ensemble des partitions de l'espace directeur d'un appartement en cônes assujettis à certaines conditions. Parmi elles se trouvent la compactification polygonale classique définie dans [Lan96] ou [GR06] ainsi que celles décrites par Annette Werner dans [Wer07].

Décrivons rapidement l'espace obtenu. L'adhérence de chaque appartement sera l'espace compact formé en rajoutant à l'infini un polyèdre, dont chaque face sera un complexe de Coxeter dont le groupe de Coxeter sera un sous-groupe du groupe de Weyl de l'immeuble. On peut choisir n'importe quel polyèdre stable par le groupe de Weyl vectoriel, mais pour un choix quelconque, la structure de complexe de Coxeter sera triviale sur de nombreuses faces. La compactification de l'immeuble est obtenue en étendant la compactification d'un appartement de référence, d'une manière qu'on prouvera être unique, au moins dans le cas de l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif. Le bord ainsi rajouté à l'immeuble est en fait une réunion d'immeubles affines, dont les groupes de Coxeter sont des sous-groupes du groupe de Coxeter de l'immeuble de départ. Le choix de la décomposition en cônes au départ détermine lesquels de ces sous-groupes interviennent.

Par ailleurs, quelques résultats intermédiaires peuvent avoir leur intérêt propre, certains sont valides dans le cadre d'un immeuble quelconque. Il s'agit principalement des résultats de la partie 4, qui donnent des critères pour s'assurer qu'une partie d'un immeuble est incluse dans un seul appartement. On prouve notamment que deux galeries tendues sont, quitte à être réduites, incluse dans un même appartement (du système complet d'appartements), puis on généralise au cas d'une galerie tendue et d'une cheminée. Ceci prouve par exemple que deux facettes de quartiers quelconques contiennent des sous-facettes incluses dans un même appartement, généralisant le résultat similaire déjà connu pour les quartiers (voir par exemple la proposition (9.5) de [Ron89]).

Dans la partie 2, on énonce et on analyse brièvement les conditions requises sur une décomposition en cônes de l'espace directeur d'un appartement pour définir une compactification de l'immeuble. Dans la partie suivante, on définit la compactification d'un appartement. L'interlude de la partie 4 permet d'énoncer les quelques résultats nécessaires à la suite qui peuvent avoir un intérêt propre. La partie 5 définit l'ensemble qui sera l'immeuble compactifié, la partie 6 définit la topologie sur cet ensemble et prouve les propriétés attendues, en particulier la compacité. Dans la partie 7, on vérifie que la compactification de l'immeuble ainsi définie est unique lorsqu'une compactification d'un appartement est fixée et que l'immeuble provient d'un groupe muni d'une donnée radicielle. Cela fournit un moyen simple de comparer cette compactification avec d'autres, comme celles définies dans [Lan96], [GR06] et [Wer07]. Enfin, la partie 8 décrit le bord qu'on vient de rajouter à l'immeuble : il s'agit d'une réunion d'immeubles affines de dimensions inférieures.

2 La donnée initiale

2.1 Conventions, notations

Un immeuble $\mathcal{I}$ sera vu a priori comme un complexe simplicial vérifiant les axiomes classique ([Bro89], [Tit74]), ou comme un complexe polysimplicial comme dans [BT72]. Chaque appartement A est un complexe de Coxeter, dont on note $W(A)$ le groupe de Coxeter. Ce groupe est indépendant de A à isomorphisme près. Lorsqu'on choisit une chambre c de A, les réflexions par rapport aux cloisons de c forment une partie $S(c)$ de $W(A)$ telle que $(W(A), S(c))$ est un système de Coxeter. La classe d'isomorphisme de $W(A)$ est caractérisée par un diagramme appelé diagramme de Coxeter. Son ensemble de sommets est en bijection avec $S(c)$, et les sommets correspondant aux réflexions s et t sont reliés si s et t ne commutent pas, on précise alors sur l'arête l'ordre de st. Ce diagramme ne dépend pas du choix de A ni de c.

On définit sur l'ensemble des facettes le type, c'est une fonction à valeur dans $\mathcal{P}(S(c))$ qui permet de caractériser les orbites des facettes d'un appartement sous l'action du groupe de Weyl. Les isomorphismes entre appartements préservent le type, par définition.

L'ensemble des chambres de $\mathcal{I}$ est muni d'une distance à valeur dans $W(A)$, appelée W-distance. En fait, $\mathcal{I}$ est totalement déterminé par l'ensemble de ses chambres muni de sa W-distance, c'est d'ailleurs le point de vue adopté dans [Ron89].

Nous nous intéressons principalement aux immeubles affines. Dans ce cas, on identifie $\mathcal{I}$ à sa réalisation géométrique affine, qui est un espace métrique complet dans laquelle les appartements sont des espaces affines euclidiens, les groupes de Coxeter des groupes de transformations orthogonales affines, et les isomorphismes entre appartements des isométries. Voir [Bro89], chapitre VI, [BT72], [Tit86], [Par00],[Rou08]. C'est cet espace qu'on se propose de compactifier. Si A est un appartement, le groupe $W(A)$ est engendré par les réflexions orthogonales par rapport à des hyperplans appelés murs ([Bou68]). Les murs définissent une partition de A dont les parties sont identifiées aux facettes de A, les chambres étant les facettes de dimension maximale.

On note $\vec{A}$ l'espace directeur de A, c'est lui aussi un complexe de Coxeter dont le groupe $W(\vec{A})$ est l'ensemble des parties vectorielles des éléments de $W(A)$. Il est engendré par les réflexions orthogonales par rapport aux murs de $\vec{A}$, qui sont les espaces directeurs des murs de A. Les murs de $\vec{A}$ définissent une partition de $\vec{A}$ en cônes convexes appelés facettes de Weyl ou facettes vectorielles. Ces parties sont identifiées aux simplexes du complexe de Coxeter $\vec{A}$.

Il existe un système de racine $\phi \subset \vec{A}^*$ tel que les murs de $\vec{A}$ sont les noyaux des racines et dont $W(A)$ est le groupe de Coxeter affine associé, au sens de [Bou68], 2.5.

Si on fixe une chambre de Weyl $C \subset \vec{A}$, on note, pour $s \in S(C)$, α_s la racine correspondante (donc $\ker(\alpha_s) = \mathrm{Fix}(s)$). Alors $\{\alpha_s\}_{s\in S(C)}$ est une base de ϕ et $C = \left\{x \in \vec{A} \mid \forall s \in S(C),\ \alpha_s(x) > 0\right\}$. De plus, dans le diagramme de Coxeter de $\vec{A}$, deux sommets s et t sont reliés si et seulement si α_s n'est pas orthogonale à α_t. En considérant ce diagramme comme un simple graphe, on définit les notions de connexité habituelles.

Lorsqu'on passe du point de vue complexe simplicial au point de vue géométrique d'un immeuble affine, le vocabulaire change un peu :

Un complexe simplicial est en particulier un ensemble muni d'une relation d'ordre. On notera généralement $\sqsubset$ cette relation, et on dira que c est inclus dans d lorsque $c \sqsubset d$. Mais lorsque $c \sqsubset d$ dans un immeuble affine, alors dans la réalisation géométrique c est inclus dans l'adhérence de d, avec $c \subset d$ si et seulement si $c = d$; en général, $c \subset \partial d$.

De plus, dans un complexe simplicial, la facette maximale inférieure à c et à d, notée $c \wedge d$ est appelée l'intersection de c et d. Dans la réalisation géométrique, l'adhérence de $c \wedge d$ est égale à l'intersection des adhérences de c et d, mais $c \wedge d$ ne s'exprime pas de manière directe en fonction de c et d (en fait, $c \wedge d$ est l'intérieur de $\overline{c} \cap \overline{d}$ dans $\mathrm{Vect}(\overline{c} \cap \overline{d})$).

Si M est un mur et c une chambre dans un système de Coxeter A, on notera $\mathcal{D}(M, c)$ le demi-appartement fermé délimité par M et contenant c. Sauf précision, un demi-appartement signifiera un demi-appartement fermé. Un demi-appartement peut aussi être défini à l'aide de deux chambres adjacentes c et d, ou d'une racine α (on voit a priori les racines comme des formes affines sur un appartement) et d'un entier k : on notera $\mathcal{D}(c, d)$ la réunion des chambres fermées plus proches de c que de d, et $\mathcal{D}(\alpha, k) = \{x | \alpha(x) + k \geq 0\}$.

Soient D^+ et D^- les deux demi-appartements définis par un mur M dans un appartement A. On dira que deux parties α et β de A sont séparées par M si $\alpha \subset D^+$ et $\beta \subset D^-$, ou l'inverse. On notera alors $\alpha|^M\beta$ (Donc par exemple, $\alpha \subset M \Rightarrow \alpha|^M\beta$ quel que soit β). On dira que ces parties sont séparées strictement par M si en outre $\alpha \not\subset M$ et $\beta \not\subset M$.

L'enclos d'une partie E dans un appartement A est l'intersection de tous les demi-appartements fermés de A contenant E. On la note $\mathrm{Cl}_A(E)$.

Lorsque A et B sont deux appartements ayant au moins une chambre en commun, on peut naturellement identifier $\vec{A}$ avec $\vec{B}$. Lorsque la dimension de $A \cap B$ est moindre, on ne peut qu'identifier un sous-espace de $\vec{A}$ avec un sous-espace de $\vec{B}$, voici comment on procède :

Les sous-espaces $\mathrm{Vect}(\{\vec{xy} \in \vec{A} \mid x, y \in A \cap B\}) \subset \vec{A}$ et $\mathrm{Vect}(\{\vec{xy} \in \vec{B} \mid x, y \in A \cap B\}) \subset \vec{B}$ sont canoniquement isomorphes. On identifie alors ces deux sous-espaces, et on note l'espace obtenu $\vec{A} \cap \vec{B}$. Cet espace vérifie la propriété suivante : si E est un troisième appartement, si $\phi : A \xrightarrow{\sim} E$ et $\psi : B \xrightarrow{\sim} E$ sont deux isomorphismes qui coïncident sur un ensemble $b \subset A \cap B$, alors l'espace directeur $\vec{b}$ de $\mathrm{Aff}(b)$ est inclus dans $\vec{A} \cap \vec{B}$, et pour tout $\vec{v} \in \vec{b}$, on a $\vec{\phi}(\vec{v}) = \vec{\psi}(\vec{v})$.

Cette "intersection des espaces directeurs" ne vérifie pas l'associativité, en fait l'écriture $(\vec{A} \cap \vec{B}) \cap \vec{C}$ n'a même aucun sens, car $\vec{A} \cap \vec{B}$ n'est pas uniquement défini au moyen de la structure vectorielle de $\vec{A}$ et $\vec{B}$, mais bien de la structure d'espaces affines de A et B. (Une notation comme $A \vec{\cap} B$ serait sans doute plus appropriée.)

Remarque: Dans la suite, $\vec{b}$ ne signifiera pas en général l'espace directeur de $\mathrm{Aff}(b)$.

2.2 Cônes convexes

Dans ce chapitre, tous les cônes seront supposé convexes a priori. Un cône vectoriel convexe dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\vec{E}$ est un sous-ensemble de $\vec{E}$ stable par addition et multiplication par un scalaire strictement positif. Tout cône vectoriel contient 0 dans son adhérence. Si E est un espace affine dirigé par $\vec{E}$, un cône convexe affine de E est un sous-ensemble de E de la forme $f = s + \vec{f}$ où $s \in E$ et $\vec{f}$ est un cône convexe de $\vec{E}$.

Lorsque $\vec{f}$ est un cône de $\vec{E}$ ne contenant pas de droite (on dit aussi "cône pointu"), alors l'écriture $f = s + \vec{f}$ est unique, ce qui permet de définir s comme étant le *sommet* de f, noté $s(f)$.

Le cône vectoriel $\vec{f}$ est quand à lui toujours bien déterminé, on l'appelle la *direction* de f. Deux cônes ayant la même direction sont dit *parallèles*. Si g est un cône parallèle à f et $g \subset f$, alors g est un sous-cône parallèle de f, et on abrège "sous-cône parallèle" en "scp".

Remarque: Dans [BT72], deux parties d'un appartement égales à translation près sont appelées équipollentes au lieu de parallèles.

2.3 Décomposition d'un appartement en cônes

On fixe désormais un appartement A_0. On notera $W = W(A_0)$ son groupe de Coxeter, et $W^v = W(\overrightarrow{A_0})$ son groupe de Coxeter vectoriel. On choisit un ensemble $\mathcal{F}$ de parties non vides de $\overrightarrow{A_0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (H1) : $\overrightarrow{A_0} = \bigsqcup_{\vec{f} \in \mathcal{F}} \vec{f}$. (Le symbole $\sqcup$ signifie "réunion disjointe".)
- (H2) : $\mathcal{F}$ est fini.
- (H3) : $\{0\} \in \mathcal{F}$.
- (H4) : Chaque élément de $\mathcal{F}$ est décrit par un système d'équations et d'inéquations linéaires : pour tout $\vec{f} \in \mathcal{F}$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \overrightarrow{A_0}^*$, $r \in \mathbb{N}$ tels que $\vec{f} = \{x \in \overrightarrow{A_0} | \, \alpha_i(x) = 0, \forall i \in [\![1, r]\!], \text{ et } \alpha_j(x) > 0, \forall i \in [\![r+1, n]\!]\}$.

En particulier, chaque élément de $\mathcal{F}$ est un cône convexe, ouvert dans son support.

– (H5) : Le bord d'un cône $\vec{f}$ de $\mathcal{F}$ est une réunion d'autre cônes de $\mathcal{F}$, qu'on appelle les faces de $\vec{f}$.

– (H6) : Si $\vec{f}, \vec{g} \in \mathcal{F}$ et si $\vec{f}$ est une face de $\vec{g}$, alors $\overline{\vec{f}} = Vect(\vec{f}) \cap \overline{\vec{g}}$.

Lorsqu'on parle du bord d'un cône, on sous-entend ici le bord dans l'espace vectoriel qu'il engendre. Pour un cône $\vec{f}$ vérifiant (H4), qui est donc ouvert dans Vect($\vec{f}$), on a $\partial\vec{f} = \overline{\vec{f}} \setminus \vec{f}$.

A partir de ces données, on va définir une compactification de A_0. Dès qu'on voudra l'étendre en une compactification de $\mathcal{I}$, il faudra en outre supposer :

– (H7) : $\mathcal{F}$ est stable par le groupe de Weyl vectoriel W^v.

2.4 Conséquences directes des hypothèses sur $\mathcal{F}$

Chaque élément de $\mathcal{F}$ est un cône convexe, ouvert dans l'espace vectoriel qu'il engendre. De plus, $\{0\}$ est le seul cône à contenir 0, donc aucun élément de $\mathcal{F}$ ne contient de droite, et les sommets des cônes affines de direction un élément de $\mathcal{F}$ sont bien définis.

Remarque: La condition (H3) a en fait pour unique but de permettre de définir le sommet d'un cône pour faciliter les raisonnements dans la suite, mais elle semble superflue. Étudions brièvement le cas général. Soit $f \in \mathcal{F}$ le cône contenant 0. Comme f est un cône ouvert dans Vect(f), on a f = Vect(f), c'est-à-dire que f est un espace vectoriel. Comme l'adhérence de tout cône vectoriel contient 0, par (H5) on voit que f est dans le bord de chaque élément de $\mathcal{F}$. On vérifie alors que chacun de ces éléments est stable par addition par f, on peut donc quotienter par f pour obtenir un espace vectoriel muni d'une décomposition en cônes vérifiant cette fois toutes les hypothèses (H1) - (H6). Si $\partial(A_0/f)$ est le bord qu'on va définir dans la section 3, alors la même procédure appliquée à A_0 et $\mathcal{F}$ conduirait à rajouter exactement le même bord. En fait, la condition (H3) impose de rajouter à A_0 un bord de codimension 1 et non supérieure. Par exemple si on avait choisi $\mathcal{F} = \{\vec{A_0}\}$, la compactification $\overline{A_0}$ serait juste le compactifié d'Alexandroff de A_0.

Lorsque $(\alpha_i)_{i\in I\sqcup J}$ est une famille de formes linéaires définissant $\vec{f}$ comme dans (H4), on notera juste :

$$\vec{f} = \{\alpha_i > 0, \alpha_j = 0,\ i \in I,\ j \in J\}.$$

La famille $(\alpha_i)_{i\in I\sqcup J}$ est nécessairement génératrice de $\overrightarrow{A_0}^*$ sans quoi $\vec{f}$ ou une de ses faces contiendrait un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{A_0}$ non réduit à $\{0\}$.

Lorsque $\vec{g}$ est une face de $\vec{f}$, alors il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I\sqcup J\sqcup K}$ telle que :

$$\begin{cases} \vec{f} = \{\alpha_i > 0, \alpha_j = 0,\ i \in I \sqcup J,\ j \in K\} \\ \vec{g} = \{\alpha_i > 0, \alpha_j = 0,\ i \in I,\ j \in J \sqcup K\} \end{cases}$$

2.5 Exemples

Un premier exemple de telle décomposition de $\overrightarrow{A_0}$ en cônes est la décomposition en facettes de Weyl, notée $\mathcal{F}^\emptyset$. Les cônes affines dont les directions sont dans $\mathcal{F}^\emptyset$ sont les facettes de quartier, et la compactification qu'on obtiendra alors est la compactification polygonale classique, décrite dans [Lan96].

Un exemple un peu plus général est celui considéré par Annette Werner dans [Wer07], où l'idée est d'enlever à la décomposition en facettes de Weyl les cloisons d'un certain type. On détaille un peu cet exemple dans la suite de ce paragraphe.

2.5.1 Décompositions en cônes obtenues à partir d'une partie de S

On fixe une chambre de Weyl $C_0 \subset \overrightarrow{A_0}$, soit S l'ensemble des réflexions par rapport aux cloisons de C_0, de sorte que les facettes de $\overrightarrow{A_0}$ sont typées par les parties de S. Soit J une partie de S, l'idée est de rassembler les chambres séparées par une cloison de type $\{j\}$ avec $j \in J$. Pour assurer la convexité, il faut penser à rajouter alors les facettes de dimension plus petite qui se trouvent entre plusieurs chambres rassemblées. Pour s'assurer que (H5) et (H6) seront vérifiées, il faut aussi rassembler les facettes bordant plusieurs chambres rassemblées, lorsqu'elles engendrent le même espace vectoriel. On arrive à la définition suivante :

Définition 2.5.1. *Si f une facette de Weyl de $\overrightarrow{A_0}$ de type $I \subset S$, on note $\overline{f}^J$ la réunion de f et des facettes de son bord de type inclus dans $I \cup (J \cap I^\perp)$.*

Si h et f sont deux facettes d'une même chambre fermée, avec h de type I' et f de type I, alors h est incluse dans $\overline{f}^J$ si et seulement si I' est la réunion de I et d'une partie de J disconnectée de I. Donc une facette h n'est incluse dans aucun $\overline{f}^J$, avec $f \neq h$ si et seulement si son type ne contient aucune composante connexe incluse dans J. Une telle facette sera dite *admissible*. On dira également que son type est admissible, de sorte qu'une facette est admissible si et seulement si son type est admissible.

Définition 2.5.2. *Si f est une facette admissible de $\overline{C_0}$, on pose $J.f = W^v_{J\cap I^\perp}.\overline{f}^J$.*
On pose ensuite $\mathcal{F}^J = W^v.\{J.f \mid f \text{ facette admissible de } C_0\}$.

Remarque: Conformément à la notation déjà introduite, l'ensemble des facettes de Weyl est $\mathcal{F}^\emptyset$.

Proposition 2.5.3. *L'ensemble $\mathcal{F}^J$ est un ensemble de cônes, qui vérifie les hypothèses (H1)-(H2) et (H4-H7). Chaque facette de Weyl f est incluse dans un unique cône de $\mathcal{F}^J$, qu'on notera $J.f$. Lorsque J ne contient aucune composante connexe de S, alors $\mathcal{F}^J$ vérifie également (H3).*

Démonstration:
Les points (H2), et (H7) sont évidents, (H3) est vrai si et seulement si $\{0\}$ est une facette admissible, ce qui équivaut bien au fait que J ne contient aucune composante connexe de S. Il est également clair que $\vec{A} = \bigcup_{f\in\mathcal{F}^J} f$, et pour prouver (H4) et (H5), il suffit de considérer des éléments de $\mathcal{F}^J$ du type $J.f$, avec f une facette admissible de C_0.

On commence par (H4). Soient $\{\alpha_i\}_{i\in S}$ l'ensemble des racines délimitant C_0. Soit $I \subset S$ et f la facette de C_0 de type I, alors

$$f = \{\alpha_i = 0,\ \alpha_j > 0,\ i \in I,\ j \in S \setminus I\},$$

et

$$\overline{f}^J = \{\alpha_i = 0,\ \alpha_k > 0,\ \alpha_l \geq 0,\ i \in I,\ l \in J \cap I^\perp,\ k \in S \setminus (I \cup (J \cap I^\perp))\}.$$

Notons $L = J \cap I^\perp$ et $K = S \setminus (I \cup (J \cap I^\perp))$. Montrons que $J.f = \{\alpha_i = 0,\ w(\alpha_k) > 0,\ i \in I,\ k \in K,\ w \in W^v_{J\cap I^\perp}\}$. En attendant, notons E ce dernier ensemble. C'est un ensemble délimité par des murs, donc une réunion de facettes. De plus, pour tout $w \in W^v_{J\cap I^\perp}$ et tout $i \in I$, $w(\alpha_i) = \alpha_i$, on voit donc que E est stable par $W^v_{J\cap I^\perp}$.

Pour montrer que $J.f \subset E$, il suffit donc de montrer que $\overline{f}^J \subset E$. Soit $x \in \overline{f}^J$, il vérifie déjà les conditions $\alpha_i(x) = 0$, $i \in I$. Soit $k \in K$ et $w \in W^v_{J\cap I^\perp}$. On sait que $\{\alpha_s\}_{s\in S}$ est une base du système de racines de $\overrightarrow{A_0}$. Or, $w \in W_{J\cap I^\perp} = W_L$, et $L \cap K = \emptyset$. Donc $w(\alpha_k) = \alpha_k + \sum_{l\in L} n_l\alpha_l$, avec $n_l \in \mathbb{N}$. Il apparaît ainsi que $w(\alpha_k)(x) > 0$. Donc $x \in E$.
Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in E$, il existe $w \in W_L$ tel que $\forall l \in L$, $\alpha_l(w.x) \geq 0$. Comme E est stable par w, $w.x \in E$, et ainsi $w.x$ vérifie toutes les inégalités prouvant qu'il appartient à $\overline{f}^J$. Donc $x \in W_L.\overline{f}^J = J.f$.

A présent, prouvons que chaque facette de Weyl est incluse dans un unique cône de $\mathcal{F}^J$. Ceci impliquera directement (H1) car les éléments de $\mathcal{F}^J$ sont des réunions de facettes de Weyl. Soit $f \in \mathcal{F}^\emptyset$ une facette de Weyl, incluse dans deux éléments de $\mathcal{F}^J$, disons $w_1.J.g_1$ et $w_2.J.g_2$. En translatant tout par un élément de W^v, on peut supposer $f \subset \overline{C_0}$. Soit I_1 le type de g_1 et I_2 celui de g_2. Il existe $v_1 \in W^v_{J\cap I_1^\perp}$ et $v_2 \in W_{J\cap I_2^\perp}$ tels que $f \subset w_1v_1\overline{g_1}^J$ et $f \subset w_2v_2\overline{g_2}^J$. Comme f, g_1 et g_2 sont des facettes de $\overline{C_0}$, ceci implique en fait $f \subset \overline{g_1}^J \cap \overline{g_2}^J$. Le type de f s'écrit donc $I' = I_1 \sqcup J_1 = I_2 \sqcup J_2$ où J_1

et J_2 sont des parties de J disconnectées respectivement de I_1 et de I_2. Soit K une composante connexe du type de f, elle est incluse soit dans I_1 soit dans J_1. De deux choses l'une : soit $K \subset J$ et alors K ne peut être incluse dans I_1 car g_1 est admissible, soit $K \not\subset J$ et alors elle ne peut être incluse dans J_1. On voit donc que J_1 est la réunion des composantes connexes de I' incluses dans J, I_1 est la réunion des autres composantes connexes. Le même raisonnement est valable pour I_2 et J_2, ce qui prouve $I_1 = I_2$ et $J_1 = J_2$. D'où $g_1 = g_2$ et $J.g_1 = J.g_2$. Il reste à regarder w_1 et w_2. On sait que $w_1 v_1 \in \mathrm{Fix}(f) = W_{I'}$, et $I' = I_1 \cup J_1 \subset I \cup (J \cap I^\perp)$. D'où $w_1 v_1 \in W^v_{I\cup(J\cap I^\perp)}$, d'où $w_1 J.g_1 = J.g_1$. De même, $w_2 J.g_2 = J.g_2 = J.g_1 = w_1 J.g_1$. Ce qui prouve que f est incluse dans un unique cône de $\mathcal{F}^J$.

Prouvons (H5). Soit $f \in \mathcal{F}^\emptyset$ une facette de Weyl admissible qu'on peut supposer incluse dans C_0, soit I son type. Comme $J.f$ est une union de facettes de Weyl, son bord l'est aussi. Soit g une facette de Weyl bordant $J.f$. Quitte à translater g par un élément de $W^v_{J\cap I^\perp}$ qui stabilise $J.f$, on peut supposer $g \subset \overline{C_0}$, et donc $g \subset \overline{f}$. Comme $J.f$ est ouvert dans $\mathrm{Vect}(J.f)$, on a même $g \subset \overline{f} \setminus \overline{f}^J$. Notons $J.g$ le cône de $\mathcal{F}^J$ contenant g, il s'agit de prouver que $J.g \subset \partial J.f$. Soit I' le sous ensemble de S obtenu en retirant au type de g toutes ses composantes connexes incluses dans J. Soit h la facette de $\overline{C_0}$ de type I', alors h est admissible et $g \subset \overline{h}^J \subset J.h$, donc $J.g = J.h$. Si J_1 est une composante connexe de type(g) incluse dans J alors $J_1 \cap I$ est une réunion de composantes connexes de I incluses dans J, d'où $J_1 \cap I = \emptyset$ car I est admissible. Ceci prouve que $I \subset I'$, et donc $h \subset \overline{f}$. Ensuite, $J.h = W^v_{J\cap I'^\perp}.\overline{h}^J \subset \overline{J.f}$ car $W^v_{J\cap I'^\perp} \subset W^v_{J\cap I^\perp}$ et $\overline{h}^J \subset \overline{f}$. Et comme $J.h \neq J.f$ car $g \subset J.h$, on a $J.h \cap J.f = \emptyset$ d'où $J.h \subset \partial J.f$.

Il ne reste plus qu'à prouver (H6). Soit $J.h$ une face d'un cône $J.f$. Comme dans le paragraphe précédent, on peut supposer que h et f sont des facettes admissibles de $\overline{C_0}$. Soit I le type de f et I' le type de h. Nous procédons par récurrence sur $\mathrm{Card}(I' \setminus I)$, en commençant par montrer l'hérédité.

On suppose donc $\mathrm{Card}(I' \setminus I) \geq 2$. Comme $h \not\subset \overline{f}^J$, il existe $l \in I' \setminus (I \cup (J \cap I^\perp)$. Soit g la facette de $\overline{C_0}$ de type $I \cup \{l\}$, elle est admissible. Par récurrence on a $\overline{J.g} = \overline{J.f} \cap \mathrm{Vect}(J.g)$. De plus, $J.h$ est une face de $J.g$, différente de $J.g$ car h est admissible et ne peut donc être incluse dans $\overline{g}^J$. Donc par récurrence, $\overline{J.h} = \overline{J.g} \cap \mathrm{Vect}(J.h)$. La combinaison des deux égalités donne bien $\overline{J.h} = \overline{J.f} \cap \mathrm{Vect}(J.h)$.

Traitons maintenant le cas $\mathrm{Card}(I' \setminus I) = 1$. Dans l'égalité $\overline{J.h} = \mathrm{Vect}(J.h) \cap \overline{J.f}$, l'inclusion " $\subset$ " est évidente. Soit $x \in \mathrm{Vect}(J.h) \cap \overline{J.f}$, cela signifie, d'après la description de $J.f$ obtenue pour prouver (H4) :
- pour tout $i \in I'$, $\alpha_i(x) = 0$
- pour tout $w \in W^v_{J\cap I^\perp}$ et $k \in S \setminus (I \cup (J \cap I^\perp))$, $w.\alpha_k(x) \geq 0$.

Et le but est de prouver :
- pour tout $i \in I'$, $\alpha_i(x) = 0$
- pour tout $w \in W^v_{J\cap I'^\perp}$ et $k \in S \setminus (I' \cup (J \cap I'^\perp))$, $w.\alpha_k(x) \geq 0$.

Parmi ces inégalités, celles qui ne sont pas directement dans la liste des hypothèses sont les $w.\alpha_k(x) \geq 0$ lorsque :

$$k \in (S \setminus (I' \cup (J \cap I'^\perp))) \setminus (S \setminus (I \cup (J \cap I^\perp))) = (I \cup (J \cap I^\perp)) \setminus (I' \cup (J \cap I'^\perp)) = (J \cap I^\perp) \setminus (I' \cup (J \cap I'^\perp)) = (J \cap I^\perp) \setminus (I' \cup I'^\perp)$$

et lorsque $w \in W^v_{J\cap I'^\perp}$.

Soit k un tel indice et $w \in W^v_{J\cap I'^\perp}$. En particulier, $k \in W^v_{J\cap I^\perp}$. Soit l tel que $I' \setminus I = \{l\}$. Comme I' est admissible, $l \notin J \cap I^\perp$.

Alors $wk \in W^v_{J\cap I^\perp}$, et $l \in S \setminus (I \cup (J \cap I^\perp))$ d'où d'après les hypothèses $wk.\alpha_l(x) \geq 0$. Mais :

$$wk.\alpha_l(x) = \alpha_l(kw^{-1}x) = \alpha_l(w^{-1}x - 2\alpha_k(w^{-1}x).\alpha_k^\vee) = \alpha_l(w^{-1}x) - 2w\alpha_k(x).\langle \alpha_k | \alpha_l \rangle$$

Comme $l \in I'$ et $w^{-1}x \in \mathrm{Vect}(J.h)$, on a $\alpha_l(w^{-1}x) = 0$. Il reste donc $-2w\alpha_k(x).\langle \alpha_k | \alpha_l \rangle \geq 0$.
Mais $k \neq l$ car $l \in I'$ et $k \notin I'$. De plus, si k était orthogonal à l, il serait orthogonal à I', ce qui est exclus. Ainsi, $\langle \alpha_k | \alpha_l \rangle < 0$, ce qui entraîne $w\alpha_k(x) \geq 0$. □

2.5.2 Comparaison avec [Wer07]

On peut dès à présent vérifier de façon élémentaire que les partitions de $\overrightarrow{A_0}$ en parties convexes définies dans [Wer07] sont précisément du type précédent. Ces parties sont définies, pour l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe $G(K)$ avec K un corps local, à partir d'une représentation linéaire ρ fidèle et de dimension finie de $G(K)$, mais ne dépendent en fait que de la facette de Weyl de A_0^* dans laquelle se trouve le plus haut poids $\lambda_0(\Delta)$ de ρ une fois fixée une base Δ du système de racine ([Wer07] théorème 4.5). Soit J le type de cette facette (il est indépendant de Δ). Comme ρ est fidèle, J ne contient pas de composante connexe de S. Pour Δ la base du système de racines correspondant à la chambre C_0, on a $J = \{s \in S \mid \langle \alpha_s | \lambda_0(\Delta) \rangle = 0\}$. Nous allons vérifier que la partition $\Sigma(\rho)$ de $\overrightarrow{A_0}$ définie dans [Wer07] est $\mathcal{F}^J$.

Soit Δ une base du système de racines et $Y \subset \Delta$. Il est immédiat d'après la définition donnée dans [Wer07] (définition 1.1) que Y y est dit admissible si et seulement si il existe $I \subset S$ admissible (au sens défini plus haut) tel que $Y = \{\alpha_i\}_{i \in I}$.

Les parties définies dans [Wer07] sont notées F_Y^Δ pour Δ une base du système de racines et $Y \subset \Delta$ une partie admissible. Ce sont des réunions de facettes de Weyl ([Wer07], proposition 4.4), ouvertes dans leur support, qui réalisent une partition de $\overrightarrow{A_0}$ stable par le groupe de Weyl W^v. Soit Δ la base correspondant à C_0, et $Y \subset \Delta$ une partie admissible. Soit f la facette de C_0 de type I, avec $Y = \{\alpha_i\}_{i \in I}$, nous allons voir que $F_Y^\Delta = J.f$. Pour commencer, la proposition [Wer07] 4.4 montre que $F_Y^\Delta \cap \overline{C_0} = \overline{f}^J = J.f \cap \overline{C_0}$.

Montrons que F_Y^Δ est stable par $W_{J \cap I^\perp}$. Soit $s \in J \cap I^\perp$, alors la facette de C_0 de type $I \cup \{s\}$ est incluse dans $\overline{C_0} \cap F_Y^\Delta$. Or F_Y^Δ est ouverte dans son support, qui est $\bigcap_{i \in I} \ker(\alpha_i)$ et donc qui est stable par s. Alors F_Y^Δ doit contenir la facette $s.f$. D'où $F_Y^\Delta \cap s.F_Y^\Delta \neq \emptyset$, d'où s stabilise F_Y^Δ. On déduit de ceci que $J.f \subset F_Y^\Delta$.
Pour l'autre inclusion, soit $x \in F_Y^\Delta$. En choisissant $y \in f$ de manière générique, on peut s'assurer que $[x, y]$ ne rencontre que des facettes de dimension $\dim(f) - 1$. Soit g la première facette différente de f rencontrée par ce segment en partant de y. Comme $[x, y] \subset F_Y^\Delta$, par convexité de F_Y^Δ, on obtient que $g \subset \overline{f} \cap F_Y^\Delta = \overline{f}^J$. Comme g est de codimension 1 dans f, le type de g est $I \cup \{s\}$, avec $s \in J \cap I^\perp$. Alors la facette sf est incluse dans $J.f$, et elle contient "la suite" du segment $[x, y]$, c'est à dire un intervalle ouvert $]u, v[$ tel que $]u, v[\cup ([x, y] \cap g) \cup ([x, y] \cap f)$ est connexe. On a $J.f = J.(sf)$, et $F_{sY}^{s\Delta} = s.F_Y^\Delta = F_Y^\Delta$ (car ces deux cônes contiennent la facette sf). On peut appliquer la proposition [Wer07] 4.4, dans la chambre $s.C_0$, on obtient que $F_Y^\Delta \cap s\overline{C_0} = J.f \cap s\overline{C_0}$ est la réunion des facettes de $s.f$ de type inclus dans $I \cup (J \cap I^\perp)$. Alors la prochaine facette rencontrée par le segment $[x, y]$ est de type $I \cup \{t\}$, avec $t \in J \cap I^\perp$, elle est bien incluse dans $J.f$, la facette de dimension maximale suivante est $st.f$ qui est aussi dans $J.f$ car $st \in W_{J \cap I^\perp}$. Ainsi de suite, on vérifie que tout le segment $[x, y]$ est inclus dans $J.f$ (puisque $[x, y]$ ne rencontre qu'un nombre fini de facettes).

2.5.3 Dessins, autres exemples

Voici les dessins de quelques décompositions en cônes de l'appartement vectoriel de type A_2. On note s et t les réflexions par rapport aux cloisons de la chambre de base.

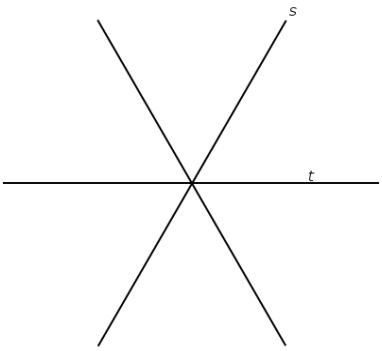


FIGURE 1 – Décomposition en facettes de Weyl. Je la laisse en arrière-plan dans les exemples suivants.

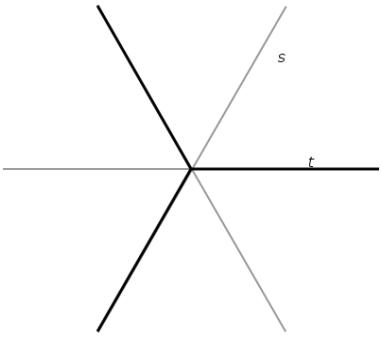


FIGURE 2 – Décomposition de type $\mathcal{F}^{\{s\}}$: on retire les cloisons de type s.

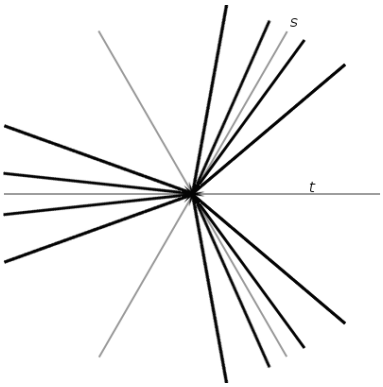


FIGURE 3 – Un autre exemple de décomposition vérifiant (H1)-(H7).

3 Compactification de A_0

3.1 L'ensemble $\overline{A_0}$

Définitions 3.1.1.

– *Un $\mathcal{F}$-cône affine dans A_0 est un cône dont la direction est dans $\mathcal{F}$. On note $\mathcal{F}_{A_0}$ l'ensemble des $\mathcal{F}$-cônes affines*

de A_0.

– *Deux $\mathcal{F}$-cônes affines sont équivalents lorsqu'ils sont parallèles et que leur intersection est non vide. L'intersection contient alors un autre $\mathcal{F}$-cône affine, parallèle aux deux premiers. On note $f \sim_{A_0} g$, ou juste $f \sim g$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.*

Proposition 3.1.2. *La relation "être équivalent" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}_{A_0}$.*

Remarquons également que les relations "être un sous-cône" et "être un sous-cône parallèle" sont des relations d'ordre.

Définition 3.1.3. *On pose $\overline{A_0} = \mathcal{F}_{A_0}/\sim_{A_0}$. Pour $f \in \mathcal{F}_{A_0}$, on note $[f]_{A_0}$, ou juste $[f]$ lorsqu'aucune confusion n'est possible, la classe de f. Et si $x = [u + \vec{f}]_{A_0}$ avec $u \in A_0$, $\vec{f} \in \mathcal{F}$, on appelle $\vec{f}$ le cône directeur ou la direction de x (il est uniquement déterminé).*

Pour $\vec{f} \in \mathcal{F}$, on note $A_{0\vec{f}}$ l'ensemble des points de $\overline{A_0}$ de cône directeur $\vec{f}$, c'est la "façade" de type $\vec{f}$ de l'appartement A_0. La projection $A_0 \to A_{0\vec{f}}$ est notée $p_{A_0,\vec{f}}$ ou juste $p_{\vec{f}}$. Lorsqu'un cône f de direction $\vec{f}$ est fixé, on pourra noter pour simplifier $A_f = A_{\vec{f}}$.

Proposition 3.1.4. *Soit $\vec{f} \in \mathcal{F}_{A_0}$. La façade $A_{0\vec{f}}$ est un espace affine isomorphe à $A_0/\mathrm{Vect}(\vec{f})$, et son espace vectoriel directeur est $\overrightarrow{A_{0\vec{f}}} \simeq \overrightarrow{A_0}/\mathrm{Vect}\vec{f}$.*

Lorsqu'un cône vectoriel $\vec{f} \in \mathcal{F}$ s'écrit $\vec{f} = \{\alpha_i > 0, \alpha_j = 0,\ i \in I,\ j \in J\}$ avec $(\alpha_i)_{i \in I \sqcup J}$ une famille de formes linéaires, alors les α_j, $j \in J$ s'identifient à des formes linéaires sur $\overrightarrow{A_{0\vec{f}}}$, elles forment même une famille génératrice de $\overrightarrow{A_{0\vec{f}}}^*$. Quand aux α_i, $i \in I$, on sait qu'elles envoient tout représentant de tout point de $A_{0\vec{f}}$ sur un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$, on dira donc qu'elles prennent la valeur $+\infty$ sur $A_{0\vec{f}}$.

3.2 Topologie sur $\overline{A_0}$

3.2.1 Définitions

Définition 3.2.1. *Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des voisinages de 0 dans $\overrightarrow{A_0}$ stables par le groupe de Weyl W^v. Pour U un tel voisinage, et $g \in \mathcal{F}_{A_0}$, on pose :*

$$\mathcal{V}_{A_0}(g, U) = \{x \in \overline{A_0} \mid \exists h \in x \ tq\ h \subset g + U\}.$$

C'est donc l'ensemble des points de $\overline{A_0}$ ayant un représentant inclus dans $g + U$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera juste $\mathcal{V}(g, U)$.

Remarque: Comme le produit scalaire de $\overrightarrow{A_0}$ est W^v-invariant, les boules de centre 0 sont des exemples d'éléments de $\mathcal{U}$.

Proposition 3.2.2. *Il existe une unique topologie sur $\overline{A_0}$ telle que pour tout $x \in \overline{A_0}$, l'ensemble des $\mathcal{V}_{A_0}(g, U)$ pour $U \in \mathcal{U}_{A_0}$ et $g \in x$ soit une base de voisinage de x.*

Démonstration:
Il suffit de vérifier que pour tout $x \in \overline{A_0}$, $U, V \in \mathcal{U}_{A_0}$, $g, g' \in x$, il existe $W \in \mathcal{U}_{A_0}$ et $h \in x$ tels que $\mathcal{V}_{A_0}(h, W) \subset \mathcal{V}_{A_0}(g, V) \cap \mathcal{V}_{A_0}(g', U)$. Mais comme $g \sim_{A_0} g'$, $g \cap g'$ contient un autre représentant h de x. Soit $W = U \cap V$, alors $h + W \subset g + U \cap g' + V$, d'où $\mathcal{V}_{A_0}(h, W) \subset \mathcal{V}_{A_0}(g, V) \cap \mathcal{V}_{A_0}(g', U)$. □

Remarque: La fonction $\mathcal{V}_{A_0}$ ainsi définie est croissante en les deux variables : si $U \subset V$ et $f \subset g$ alors $\mathcal{V}(f, U) \subset \mathcal{V}(f, V)$ et $\mathcal{V}(f, U) \subset \mathcal{V}(g, U)$.

On peut remplacer $\mathcal{U}$ par n'importe quelle base de voisinages de 0 dans $\overrightarrow{A_0}$, on obtiendra alors encore une base de la même topologie sur $\overline{A_0}$. On peut notamment choisir une base dénombrable de voisinages de 0, ensuite si on se limite par exemple aux cônes dont les coordonnées du sommet sont rationnelles, on obtient une base dénombrable de la topologie de $\overline{A_0}$, ainsi $\overline{A_0}$ est à base dénombrable d'ouverts, les caractérisations par des suites sont possibles.

Lemme 3.2.3. *Soit $\vec{f} \in \mathcal{F}$ et soit $\{\alpha_i = 0,\ \alpha_j > 0,\ i \in I,\ j \in J\}$ un système d'équations et d'inéquations déterminant $\vec{f}$. Soit $U \in \mathcal{U}$. Soit $(x_n)_n$ une suite dans A_0 telle que $\alpha_i(x_n) \to_{n\to\infty} 0$ pour $i \in I$, et $\lim_{n\to\infty} \alpha_j(x_n) = +\infty$ pour $j \in J$.*
Alors à partir d'un certain rang, les x_n sont dans $U + \vec{f}$.

Preuve du lemme:
La seule difficulté provient du fait que $\{\alpha_i\}_{i\in I\cup J}$ est une famille génératrice mais pas forcément libre de A_0^*. Soit $I' \subset I$ maximal tel que $\{\alpha_i\}_{i\in I'}$ soit libre. Soit ensuite $J' \subset J$ tel que $\{\alpha_i\}_{i\in I'\cup J'}$ soit une base de A_O^*. Il existe ϵ tel que $U' := \{x|\ |\alpha_i(x)| < \epsilon\ \forall i \in I' \cup J'\} \subset U$.

Pour n assez grand, on a $|\alpha_i(x_n)| < \epsilon$ pour $i \in I'$. Soit alors $y_n \in A_0$ tel que $\alpha_i(y_n) = \alpha_i(x_n)$ pour $i \in I'$ et $\alpha_j(y_n) = 0$ pour $j \in J'$. Le point y_n est alors dans U, et il suffit de vérifier que $x_n - y_n \in \vec{f}$.

Or pour tout $i \in I'$, $\alpha_i(x_n - y_n) = 0$. Comme tout $\alpha_i, i \in I$ est combinaison linéaire des α_j, $j \in I'$, on obtient que $\alpha_i(x_n - y_n) = 0$ pour tout $i \in I$. Enfin, U' est borné, donc pour tout $j \in J$, $\alpha_j(y_n)$ aussi. Comme $\alpha_j(x_n)$ tend vers ∞, on vérifie bien que $\alpha_j(x_n) - \alpha_j(y_n)$ est positif dès que n est assez grand. □

Il est maintenant facile de prouver la caractérisation des suites convergentes suivante :

Proposition 3.2.4. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{A_0}$ dont tous les éléments ont la même direction $\vec{f}$. Soit $l = [a + \vec{g}] \in \overline{A_0}$. Alors $(x_n)_n$ converge vers l si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

- *$\vec{f}$ est une face de $\vec{g}$.*
- *Pour toute famille $\{\alpha_i\}_{i\in I\sqcup J\sqcup K} \subset A_0^*$ de formes linéaires telle que $\vec{g} = \{x|\alpha_i(x) = 0, \alpha_j(x) > 0\,, i \in I,\ j \in J \sqcup K\}$ et $\vec{f} = \{x|\alpha_i(x) = 0, \alpha_j(x) > 0\,, i \in I \sqcup J,\ j \in K\}$ on a $\lim_{n\to\infty} \alpha_i(x_n) = \alpha_i(a)$ pour $i \in I$ et $\lim_{n\to\infty} \alpha_j(x_n) = \infty$ pour $j \in J$. (Il existe une telle famille $\{\alpha_i\}$ car $\vec{f}$ est une face de $\vec{g}$).*

Démonstration:
On commence par supposer que (x_n) tend vers l. Si $\vec{f}$ n'est pas une face de $\vec{g}$, alors il existe une forme linéaire α telle que $\alpha(\vec{f}) \subset \mathbb{R}^+$ et $\alpha(\vec{g}) \subset \mathbb{R}^-$, et un vecteur $\vec{v} \in \vec{f}$ tel que $\alpha(\vec{v}) > 0$. Donc $\alpha(\vec{f})$ contient un voisinage de l'infini (dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), et il en va de même de tous les $\alpha(h)$ pour h un représentant d'un x_n. Il est donc impossible qu'un tel h soit inclus dans un ensemble de la forme $U + a + \vec{g}$ dès que U est borné, il est alors impossible que x_n soit dans le voisinage $\mathcal{V}(a + \vec{g}, U)$ de l correspondant. Et $\mathcal{U}$ contient bien des éléments bornés, prendre par exemple des boules.

Soit ensuite un ensemble de formes linéaires $\{\alpha_i\}_{i\in I\sqcup J\sqcup K} \subset A_0^*$ tel que $\vec{g} = \{x|\alpha_i(x) = 0, \alpha_j(x) > 0\,, i \in I,\ j \in J \sqcup K\}$ et $\vec{f} = \{x|\alpha_i(x) = 0, \alpha_j(x) > 0\,, i \in I \sqcup J,\ j \in K\}$. Soit $i \in I$, montrons que $\alpha_i(x_n)$ tend vers $\alpha_i(a)$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\alpha_i(U) \subset]-\epsilon, \epsilon[$. Et pour n assez grand, $x_n \in \mathcal{V}(a + \vec{g}, U)$ donc x_n a un représentant inclus dans $U + a + \vec{g}$. Mais $\alpha_i(U + a + \vec{g}) \subset]\alpha_i(a) - \epsilon, \alpha_i(a) + \epsilon[$, car $\alpha_i(\vec{g}) = \{0\}$. On en déduit que $|\alpha_i(a) - \alpha_i(x_n)| < \epsilon$. On a ainsi prouvé que $\lim_{n\to\infty} \alpha_i(x_n) = \alpha_i(a)$

Soit $j \in J$, vérifions que $\alpha_j(x_n)$ tend vers l'infini. Soit $m \in \mathbb{R}$. Comme $\alpha_j(\vec{g})$ est un voisinage de l'infini, il existe $\vec{v} \in \vec{g}$ tel que $\alpha_j(a + \vec{v}) > m + 1$. Soit $U \in \mathcal{U}$ tel que $\alpha_j(U) \subset]-1, 1[$. Comme $a + \vec{v} + \vec{g}$ est un autre représentant de l, à partir d'un certain rang, x_n doit être dans $\mathcal{V}(a + \vec{v} + \vec{g}, U)$. Et cela implique $\alpha_j(x_n) > m$.

A présent, supposons que les deux conditions sont vérifiées par la suite (x_n) et montrons qu'elle converge alors vers l. Comme $\alpha_k(\vec{f})$ contient un voisinage de ∞ pour tout $k \in K$, on peut choisir y_n un point d'un représentant de x_n pour tout n, de sorte que les suites $\alpha_k(y_n)$ tendent vers ∞. Les suites $\alpha_i(y_n)$ pour $i \in I$ et $\alpha_j(y_n)$ pour $j \in J$ tendent quand à elle obligatoirement vers les $\alpha_i(a)$ et ∞, respectivement. Soit $U \in \mathcal{U}$, qu'on peut supposer ouvert, et soit $a' + \vec{g}$ un représentant de l, on peut supposer $a' \in a + \vec{g}$. On a pour tout $i \in I$, $\alpha_i(a) = \alpha_i(a')$ car a et a' diffèrent d'un élément de $\vec{g}$. Alors le lemme indique que y_n est dans $U + a' + \vec{g}$ à partir d'un certain rang. Mais comme y_n est un point d'un représentant de x_n, $y_n + \vec{f}$ est un représentant de x_n. Et $y_n \in U + a' + \vec{g}$, avec $U + a' + \vec{g}$ un ouvert, et $\vec{f} \subset \overline{\vec{g}}$ implique que $y_n + \vec{f} \subset U + a' + \vec{g}$. D'où $x_n \in \mathcal{V}(a' + \vec{g}, U)$.

Ceci étant vrai pour tout $U \in \mathcal{U}$ ouvert, et pour tout $a' \in a + \vec{g}$, cela prouve la proposition. □

3.2.2 Séparation

Proposition 3.2.5. *L'espace topologique $\bar{A_0}$ est séparé.*

Démonstration:

Soient x et y dans $\bar{A_0}$, $x \neq y$, et soient $f \in x, g \in y$ des représentants. Il faut trouver $U, V \in \mathcal{U}_{A_0}$, $f' \sim_{A_0} f$ et $g' \sim_{A_0} g$ tels que $\mathcal{V}_{A_0}(f', U) \cap \mathcal{V}_{A_0}(g', V) = \emptyset$. D'après la définition de $\mathcal{V}_{A_0}$, il suffit de s'assurer que $f' + U \cap g' + V = \emptyset$.

Pour commencer, supposons que $\vec{f} = \vec{g}$, c'est-à-dire que f et g sont parallèles. Alors $f \cap g = \emptyset$ car sinon on aurait $f \sim_{A_0} g$ puis $x = y$. Soient $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ et $\{\beta_j\}_{j\in J}$ des formes linéaires sur A_0 telles que $\vec{f} = \{z | \forall i,\ \alpha_i(z) = 0 \text{ et } \forall j,\ \beta_j(z) > 0\}$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $\exists i \in I,\ |\alpha_i(x) - \alpha_i(y)| > 2\epsilon$, soit B une boule centrée en 0 telle que $\alpha_i(B) \subset]-\epsilon, \epsilon[$. Alors $U = V = B$, $f' = f$ et $g' = g$ conviennent.

Étudions maintenant le cas où $\vec{f} \neq \vec{g}$. Alors $\vec{f} \cap \vec{g} = \emptyset$. Les adhérences de ces deux cônes ne sont pas égales, supposons par exemple $\vec{f} \not\subset \vec{g}$, soit $\vec{u} \in \vec{f} - \vec{g}$. Pour tout $\lambda > 0$, $f + \lambda\vec{u} \subset f$. Soit α une forme linéaire séparant $\vec{f}$ et $\vec{g}$: supposons par exemple $\alpha(\vec{f}) \subset \mathbb{R}^-$ et $\alpha(\vec{g}) \subset \mathbb{R}^+$. Alors $\alpha(\vec{u}) < 0$, et pour λ assez grand, $f + \lambda\vec{u}$ et g sont séparés par un hyperplan $\alpha^{-1}(k)$, $k \in \mathbb{R}$. Quitte à choisir λ encore un peu plus grand, on peut supposer que $\forall z \in f + \lambda\vec{u}$, $\alpha(z) \leq k - 1$ et $\forall z \in g$, $\alpha(z) \geq k$. Soit alors $U \in \mathcal{U}_{A_0}$ tel que $\alpha(U) \subset]-1/2, 1/2[$, on a $f + \lambda\vec{u} + U \cap g + U = \emptyset$, ce qui achève la preuve. □

3.2.3 L'inclusion canonique

Définition 3.2.6. *Soit i : $\begin{array}{ccc} A_0 & \to & \bar{A_0} \\ x & \mapsto & [\{x\}]_{A_0} \end{array}$. Cette fonction est bien définie car $\{0\} \in \mathcal{F}$. Il est immédiat qu'elle est injective. On l'appelle l'injection canonique de A_0 dans $\bar{A_0}$.*

Proposition 3.2.7. *L'injection canonique est continue, ouverte, d'image dense dans $\bar{A_0}$. De plus, pour $U \in \mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{F}_{A_0}$, $i^{-1}(\mathcal{V}(f, U)) = f + U$.*

Démonstration:

L'assertion $i^{-1}(\mathcal{V}(f, U)) = f+U$ découle directement des définitions. On voit alors que si U est ouvert, $i^{-1}(\mathcal{V}(f, U))$ est ouvert. Comme une base de la topologie de $\overline{A_0}$ est constituée des $\mathcal{V}(f, U)$ pour $U \in \mathcal{U}$ ouvert, ceci prouve que i est continue.

L'image est dense : si $f \in \mathcal{F}_{A_0}$, $U \in \mathcal{U}$ alors pour tout $x \in f + U$, $\{x\} \in i(A_0) \cap \mathcal{V}(f, U)$.

Enfin i est ouverte car les ensembles de la forme $x + U$, $x \in A_0$, $U \in \mathcal{U}$ forment une base de voisinages de A_0 et ont pour image les $\mathcal{V}(\{x\}, U)$. □

On identifie donc au moyen de i A_0 à un ouvert dense de $\bar{A_0}$. Une fois cette identification faite, on peut remarquer l'égalité suivante : $\forall U \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{F}_{A_0}$,

$$\overline{\mathcal{V}_{A_0}(f, U)} = \overline{f + U}$$

3.2.4 Compacité

Proposition 3.2.8. *L'espace topologique $\overline{A_0}$ est compact.*

Démonstration:

Il reste à montrer que toute suite admet une valeur d'adhérence. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{A_0}$. Comme $\mathcal{F}$ est fini, on peut supposer que tous les x_n ont une même direction $\vec{f}$. Fixons une origine $0 \in A_0$ et identifions $\overrightarrow{A_0}$ et A_0. Alors chaque x_n a un représentant inclus dans un cône de $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est fini, on peut supposer qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que chaque x_n a un représentant dans F. On a forcément $\vec{f} \subset \bar{F}$.

Choisissons un système d'inéquations pour F :

$$F = \{x \in A_0 \,|\alpha_i(x) > 0\ \forall i \in I,\ \alpha_i(x) = 0\ \forall i \in J\},$$

les $\{\alpha_i\}_{i\in I\cup J}$ étant une famille génératrice de A_0^*. Un système d'inéquations de $\vec{f}$ est alors de la forme :

$$\vec{f} = \{x \in A_0 \,|\alpha_i(x) > 0 \,\forall i \in I_1,\ \alpha_i(x) = 0 \,\forall i \in J \cup I_2\},$$

où $I = I_1 \sqcup I_2$ est une partition de I. Pour $i \in J$, on a $\alpha_i(x_n) = 0$ pour tout n puisque les x_n ont un représentant inclus dans F. Et pour $i \in I_1$, on a $\alpha_i(x_n) = \infty$.

Quitte à extraire une sous-suite de (x_n), on peut supposer que pour tout $i \in I_2$, soit $\alpha_i(x_n)$ converge vers une limite λ_i, soit $\alpha_i(x_n)$ tend vers ∞. Soit $C = \{i \in I_2 | \lim_{n\infty} \alpha_i(x_n) = \lambda_i\}$ et $N = \{i \in I_2 | \lim_{n\infty} \alpha_i(x_n) = \infty\}$ (C pour "convergent" et N pour "non convergent").

Posons

$$\vec{g} = \{x \in A_0 \,|\alpha_i(x) > 0 \,\forall i \in I_1 \sqcup N,\ \alpha_i(x) = 0 \,\forall i \in J \sqcup C\}.$$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe $u \in A_0$ tel que $\forall i \in C$, $\alpha_i(u) = \lambda_i$, puis que $g := u + \vec{g} \in \mathcal{F}_{A_0}$ puis enfin que la suite $\{x_n\}$ converge vers $[g]_{A_0}$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $(\alpha_i)_{i\in I\sqcup J}$ une famille génératrice finie dans E^*, $(x_n)_n$ une suite dans E vérifiant $\forall i \in I$, $(\alpha_i(x_n))_n$ est bornée, et $\forall j \in J$, $\alpha_j(x_n)$ tend vers ∞. Alors il existe $z \in E$ tel que $\forall i \in I$, $\alpha_i(z) = 0$ et $\forall j \in J$, $\alpha_j(z) > 0$.*

Preuve du lemme:

On montre le lemme par récurrence sur $|J|$ le cardinal de J. On peut supposer que les coordonnées des x_n selon J sont toujours non nulles.

Si $|J| = 0$ alors $z = 0$ convient.

Si $|J| = 1$, soit j l'élément de J. Soit $z_n = \frac{x_n}{\alpha_j(x_n)}$. Alors pour $i \in I$, $\alpha_i(z_n) \to 0$, et $\alpha_j(z_n) = 1$ pour tout n. Tous les $\alpha_i(z_n)$ convergent donc, et comme la famille des α_i est génératrice de E^*, la suite z_n admet une limite dans E. Et cette limite vérifie clairement les conditions requises.

Supposons maintenant $|J| = k > 1$. Quitte à prendre une sous suite de $(x_n)_n$, il existe une énumération $J = \{\alpha_{j_1}, ..., \alpha_{j_k}\}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{j_1}(x_n) \leq ... \leq \alpha_{j_k}(x_n)$.
- $\forall u \in [\![1, k]\!]$, la suite $(\frac{\alpha_{j_u}(x_n)}{\alpha_{j_k}(x_n)})_n$ converge.

On pose alors $z_n = \frac{x_n}{\alpha_{j_k}(x_n)}$, la suite (z_n) converge vers une limite $z_\infty \in E$. Cette limite vérifie $\alpha_i(z_\infty) = 0$ pour tout $i \in I$, et elle a au moins une coordonnée (α_{j_k}) strictement positive. Soit $J_1 = \{j \in J | \alpha_j(z_\infty) > 0\}$.

En retirant aux x_n un multiple convenable de z_∞, et en prenant éventuellement encore une sous suite, on peut rendre bornées un ensemble non vide $\{\alpha_j\}_{j\in K}$ de nouvelles coordonnées, avec $K \subset J_1$, sans changer les $\alpha_i(x_n), i \in I$, et en s'assurant que les α_j, $j \in J_1 - K$ qui ne sont pas devenue bornées tendent toujours vers l'infini. Alors par hypothèse de récurrence, il existe $z_1 \in E$ qui annule les α_i, $i \in I \sqcup K$ et tel que $\alpha_j(z_1) > 0$ pour $j \in J - K$. Alors $z = z_1 + z_\infty$ convient, ce qui prouve le lemme. □

Montrons l'existence d'un tel u :

Posons $\lambda_i = 0$ pour $i \in J$. Si la famille $\{\alpha_i\}_{i\in J\sqcup C}$ est libre, l'existence de u ne pose aucun problème. Soit $K \subset J \sqcup C$ tel que $\{\alpha_i\}_{i\in K}$ soit une sous famille libre maximale de $\{\alpha_i\}_{i\in J\sqcup C}$. On peut alors trouver u tel que $\alpha_i(u) = \lambda_i$ pour $i \in K$. Si $i \in (J \sqcup C) \setminus K$ alors α_i est combinaison linéaire des α_j, $j \in K$. Disons $\alpha_i = \sum_{j\in K} a_j\alpha_j$. En appliquant cette égalité aux x_n et en passant à la limite, on obtient $\lambda_i = \sum_{j\in K} a_j\lambda_j$. Donc $\alpha_i(u) = \sum_{j\in K} a_j\alpha_j(u) = \sum_{j\in K} a_j\lambda_j = \lambda_i$. Ainsi, u convient bien.

Montrons que $g \in \mathcal{F}$:

Pour montrer que $g = u + \vec{g} \in \mathcal{F}_{A_0}$, il faut montrer que $\vec{g} \in \mathcal{F}$. On a $\vec{g} \subset \overline{F}$, et $\vec{g}$ est l'intérieur de $\mathrm{Vect}(\vec{g}) \cap \overline{F}$. Donc $\vec{g}$ est une des faces de F, d'après les hypothèses faites sur $\mathcal{F}$. En fait, la seule difficulté est de montrer que $\vec{g} \neq \emptyset$. On va pour ce faire construire directement un point de $\vec{g}$ à partir de la suite (x_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $t_n \in A_0$ un point d'un représentant de x_n de sorte que $t_n \in F$ et $\alpha_i(t_n) \to_{n\to\infty} \infty$ pour tout $i \in I_1$. On a alors $\alpha_i(t_n) \to \infty$ pour i dans $I_1 \sqcup N$, $\alpha_i(t_n) \to \lambda_i$ pour $i \in C$ et $\alpha_i(t_n) = 0$ pour $i \in J$. Alors le lemme prouve l'existence d'un point de $\vec{g}$.

Conclusion :
En résumé, on dispose d'une famille génératrice (α_i) de A_0^*, indexée par $I_1 \sqcup C \sqcup N \sqcup J$, avec :
– $\alpha_i(x_n) = 0$ pour $i \in J$.
– $\alpha_i(x_n)$ tend vers λ_i pour $i \in C$.
– $\alpha_i(x_n) = \infty$ pour $i \in I_1$.
– $\alpha_i(x_n)$ tend vers ∞ pour $i \in N$.
De plus $\vec{g} = \{x | \alpha_i(x) > 0, \alpha_j(x) = 0 \, \forall i \in I_1 \sqcup N, j \in J \sqcup C\}$ et $\vec{f} = \{x | \alpha_i(x) > 0, \alpha_j(x) = 0 \, , \forall i \in I_1, j \in j \sqcup N \sqcup C\}$, et donc $\vec{f} \subset \overline{\vec{g}}$.
Nous sommes donc exactement dans la situation de la proposition 3.2.4, et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $[u + \vec{g}]_{A_0}$. □

3.3 Structure du bord de $\overline{A_0}$

3.3.1 Prolongement des automorphismes

Pour que les automorphismes de A_0 se prolongent en des homéomorphismes de $\overline{A_0}$, il est nécessaire de supposer que $\mathcal{F}$ est stable par le groupe de Weyl vectoriel W^v (hypothèse (H7)), ce que nous ferons dorénavant. Un tel prolongement est forcément unique puisque A_0 est dense dans $\overline{A_0}$.

Proposition 3.3.1. *Soit $w \in W$, et soit* $\tilde{w} : \begin{array}{ccc} \overline{A_0} & \to & \overline{A_0} \\ [f]_{A_0} & \mapsto & [w(f)]_{A_0} \end{array}$ *. Alors $\tilde{w}$ est un homéomorphisme bien défini de $\overline{A_0}$ qui prolonge w, c'est donc l'unique prolongement continu de w à $\overline{A_0}$.*

Démonstration:
Si $f = x + \vec{f} \in \mathcal{F}_{A_0}$, alors $w(f) = w(x) + \vec{w}(\vec{f}) \in \mathcal{F}_{A_0}$ car $\vec{w} \in W^v$ préserve $\mathcal{F}$. Donc W préserve $\mathcal{F}_{A_0}$. On voit également que W préserve la relation d'équivalence $\sim_{A_0}$ donc $\tilde{w}$ est bien défini. Comme de plus w est bijectif sur $\mathcal{F}_{A_0}$, on obtient que $\tilde{w}$ est bijectif.
Soit $x = [f]_{A_0} \in \overline{A_0}$, et $\mathcal{V}(f, U)$ un voisinage de x, montrons que $\tilde{w}^{-1}(\mathcal{V}(f, U))$ contient un voisinage de $\tilde{w}^{-1}(x) = [w^{-1}(f)]$. On calcule : $\tilde{w}^{-1}(\mathcal{V}(f, U)) = \{[w^{-1}(g)] | g \subset f + U\} = \{[g] | w(g) \subset f + U\} = \{[g] | g \subset w^{-1}(f + U)\}$. Mais $w^{-1}(f + U) = w^{-1}(f) + U$ donc $\tilde{w}^{-1}(\mathcal{V}(f, U)) = \mathcal{V}(w^{-1}(f), U\}$, qui est un voisinage de $\tilde{w}^{-1}(x)$. Donc $\tilde{w}$ est continue.
Comme $\overline{A_0}$ est compact (donc en particulier séparé), $\tilde{w}$ est automatiquement fermée, c'est donc un homéomorphisme.
□

Bien entendu, l'action de W^v sur $\overrightarrow{A_0}$ s'étend elle aussi de la même manière en une action par homéomorphismes sur $\bigsqcup_{\vec{f}\in\mathcal{F}} \overrightarrow{A_{0,\vec{f}}}$. L'action affine et l'action vectorielle sont compatibles au sens suivant : si $w \in W$ envoie $A_{0\vec{f}}$ sur $A_{0\vec{g}}$, si $\vec{w} \in W^v$ est sa partie vectorielle, alors $\vec{w}$ envoie $\overrightarrow{A_{0\vec{f}}}$ sur $\overrightarrow{A_{0\vec{g}}}$ et $\vec{w}_{|\overrightarrow{A_{0\vec{f}}}}$ est bien la partie vectorielle de $w_{|A_{0\vec{f}}}$.

3.3.2 Coeurs de cônes

Pour faire le lien entre les cônes de $\mathcal{F}$ et les facettes de Weyl vectorielles, la notion du coeur d'un cône développée dans ce paragraphe est utile. Il s'agit d'attacher à un cône de $\mathcal{F}$ une facette vectorielle, ou une partie de facette vectorielle, qui le caractérise.

Dans un complexe de Coxeter abstrait, donc un complexe simplicial, si f est une facette, alors f^* est le complexe de Coxeter formé de toutes les facettes g supérieures à f. Pour définir la notion similaire dans le cadre de la réalisation géométrique d'un immeuble abstrait, nous prenons les conventions suivante : si $\vec{\delta} \subset \vec{A}$ est un cône inclus dans une facette de Weyl, on appelle *étoile* de $\vec{\delta}$ dans A et $\vec{\delta}^*_A$ (parfois juste $\vec{\delta}^*$) l'union de toutes les chambres fermées contenant

$\vec{\delta}$. C'est un cône convexe fermé d'intérieur non vide. L'étoile de $\vec{\delta}$ a la propriété que tout mur coupant son intérieur doit contenir $\vec{\delta}$. De plus, si $\phi : A \to B$ est un isomorphisme alors $\vec{\phi}(\vec{\delta})^*_B = \vec{\phi}(\vec{\delta}^*_A)$.

Si $f = x + \vec{f}$ avec $\vec{f}$ un cône inclus dans une facette de Weyl, on pose $f^*_A = x + \vec{f}^*_A$.

Définition 3.3.2. *Soit $\vec{f} \in \mathcal{F}$, soit $W^v_{\vec{f}} = \mathrm{Stab}_{W^v}(\vec{f})$ le stabilisateur de $\vec{f}$. On pose $\delta(\vec{f}) := \vec{f}^{W^v_{\vec{f}}} = \{x \in \vec{f} \mid \forall w \in W^v_{\vec{f}},\ w(x) = x\} = \vec{f} \cap \mathrm{Fix}_{A_0}(W^v_{\vec{f}})$, c'est le coeur de $\vec{f}$.*

Voici quelques propriétés simples du coeur d'un cône. Remarquons qu'on obtient des informations non triviales sur les cônes de $\mathcal{F}$, en particulier sur leurs stabilisateurs dans W^v.

Proposition 3.3.3. *Soit $\vec{f} \in \mathcal{F}$. Alors :*

1. *$\forall w \in W^v$, $\delta(w.\vec{f}) = w.\delta(\vec{f})$.*
2. *$\delta(\vec{f})$ est un cône vectoriel convexe non vide.*
3. *Si $\vec{f} \neq \vec{g} \in \mathcal{F}$, alors $\delta(\vec{f}) \cap \delta(\vec{g}) = \emptyset$.*
4. *$\delta(\vec{f})$ est inclus dans l'intersection des murs coupant $\vec{f}$, et $W^v_{\vec{f}}$ contient les réflexions par rapport à ces murs.*
5. *$W^v_{\vec{f}} = \mathrm{Fix}_{W^v}(\delta(\vec{f}))$, c'est à dire qu'un élément de W^v stabilise $\vec{f}$ si et seulement si il fixe $\delta(\vec{f})$.*
6. *$\delta(\vec{f})$ est inclus dans une facette de Weyl.*
7. *$\vec{f} \subset \delta(\vec{f})^*$.*
8. *(amélioration de 4.) $\delta(\vec{f})$ est égal à l'intersection de $\vec{f}$ et des murs coupant $\vec{f}$, et $W^v_{\vec{f}}$ est le sous groupe de Coxeter engendré par les réflexions selon ces murs.*
9. *Si $\vec{g} \in \mathcal{F}$ et si $\vec{f} \subset \overline{\vec{g}}$, alors il existe une facette de Weyl $\vec{h}$ telle que $\delta(\vec{f}) \cup \delta(\vec{g}) \subset \overline{\vec{h}}$.*

Démonstration:

1. Comme $W^v_{w\vec{f}} = wW^v_{\vec{f}}w^{-1}$, les points fixes de $W^v_{w.\vec{f}}$ sont $w.Fix_{A_0}(W^v_{\vec{f}})$. D'où $\delta(w.\vec{f}) = w.\vec{f} \cap w.\mathrm{Fix}_{A_0}(W^v_{\vec{f}}) = w.(\vec{f} \cap \mathrm{Fix}_{A_0}(W^v_{\vec{f}}) = w.\delta(\vec{f})$.
2. L'ensemble des point fixes d'une application linéaire est un cône vectoriel convexe. Et $\vec{f}$ aussi. Donc $\delta(\vec{f})$ est une intersection de cônes vectoriels convexe, c'en est donc un aussi. Soit $z \in \vec{f}$. Comme $W^v_{\vec{f}}$ est fini, on peut définir g comme le barycentre de $\{w(z) | w \in W^v_{\vec{f}}\}$. Par convexité de $\vec{f}$, $g \in \vec{f}$, et c'est un point fixe pour $W^v_{\vec{f}}$. Donc $\delta(\vec{f}) \neq \emptyset$.
3. Ceci est clair car $\delta(\vec{f}) \subset \vec{f}$.
4. Soit $\vec{M}$ un mur coupant $\vec{f}$, soit σ la réflexion selon $\vec{M}$. Comme $\mathcal{F}$ est stable par W^v, $\sigma(\vec{f}) \in \mathcal{F}$. Mais σ fixe au moins un point de $\vec{f}$, donc $\vec{f} \cap \sigma(\vec{f}) \neq \emptyset$, donc $\sigma(\vec{f}) = \vec{f}$ et $\sigma \in W^v_{\vec{f}}$. Alors $\delta(\vec{f}) \subset \mathrm{Fix}_{\vec{f}}(\sigma) = \vec{M} \cap \vec{f}$.
5. Soit $w \in W^v$. Si $w \in W^v_{\vec{f}}$ alors w fixe $\delta(\vec{f})$ par définition. Réciproquement, si w fixe $\delta(\vec{f})$, alors w fixe au moins un point de $\vec{f}$, donc $w(\vec{f}) = \vec{f}$ (on a déjà fait ce raisonnement).
6. Il s'agit d'abord de prouver que pour tout mur vectoriel $\vec{M}$, $\delta(\vec{f})$ est soit inclus dans $\vec{M}$, soit inclus dans un des deux demi-appartements ouverts délimités par $\vec{M}$. Mais c'est une conséquence de la convexité de $\delta(\vec{f})$ et du quatrième point. Ensuite, d'après le point précédent, il suffit de vérifier que $\mathrm{Fix}_{W^v}(\delta(\vec{f})) = \mathrm{Fix}_{W^v}(\vec{g})$, où $\vec{g}$ est la facette de Weyl contenant $\delta(\vec{f})$. Ceci découle du fait que W^v préserve l'ensemble des facettes de Weyl, et que si $w \in W^v$ stabilise une facette, alors il la fixe.

7. Soit C une chambre fermée coupant $\vec{f}$. Montrons que C contient $\delta(\vec{f})$. Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in \delta(\vec{f}) \setminus C$. Soit $x \in C \cap \vec{f}$, alors $[x,y] \subset \vec{f}$. Soit z tel que $C \cap [x,y] = [x,z]$. On a $z \neq y$ car $y \notin C$. Alors z est dans un mur $\vec{M}$ qui borde C et qui ne contient par $[x,y]$. Mais $z \in \vec{f}$, donc $\vec{M}$ coupe $\vec{f}$, donc d'après le quatrième point, $\delta(\vec{f}) \subset \vec{M}$. En particulier, $y \in \vec{M}$, d'où $[x,y] \in \vec{M}$, ce qui est une contradiction.
8. Notons $\vec{g}$ la facette de Weyl contenant $\delta(\vec{f})$. Alors $W^v_{\vec{f}} = \mathrm{Fix}_{W^v}(\vec{g})$, c'est un sous groupe de Coxeter de W^v, engendré par les réflexions selon les murs contenant $\vec{g}$. Mais ces murs sont justement les murs coupant $\vec{f}$ (utiliser 4.), d'où la seconde partie de 8. On sait alors de plus que $\overline{\vec{g}}$ est l'ensemble des points fixes de $W^v_{\vec{f}}$, et aussi l'intersection des murs contenant $\vec{g}$. On obtient alors que $\delta(\vec{f}) = \overline{\vec{g}} \cap \vec{f}$ puis que $\delta(\vec{f})$ et l'intersection de $\vec{f}$ et des murs coupant $\vec{f}$.
9. Si $\vec{f} \subset \overline{\vec{g}}$, alors $\delta(\vec{f}) \subset \overline{\vec{g}} \subset \delta(\vec{g})^*$, d'où le résultat. □

Lorsque $\vec{f} \in \mathcal{F}$, $\vec{f}$ n'est pas forcement inclus dans une facette de Weyl. On peut néanmoins poser $\vec{f}^* = \delta(f)^*$. Ceci contient $\vec{f}$, par le point 7. de la proposition. On notera alors, si $f \in \mathcal{F}_{A_0}$, $f^* = s(f) + \vec{f}^*$.

Exemples :
- Dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\emptyset$ est l'ensemble des facettes de Weyl de $\vec{A}_0$, on a $\delta(\vec{f}) = \vec{f}$, pour tout $\vec{f} \in \mathcal{F}$.

- Dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{F}^J$ comme dans 2.5, si $\vec{f}$ est une facette admissible de $\overline{\vec{C}_0}$ de type I, alors par définition, $W^v_{J\cap I^\perp} \subset \mathrm{Stab}(J.\vec{f})$. D'autre part, il est clair que $W^v_I = \mathrm{Stab}(\vec{f}) \subset \mathrm{Stab}J.\vec{f}$. Il est facile de vérifier qu'en fait $\mathrm{Stab}(J.\vec{f}) = W^v_{I\cup(J\cap I^\perp)}$. Dès lors, le coeur de $J.\vec{f}$ est la facette de $\overline{\vec{C}_0}$ de type $I \cup (J \cap I^\perp)$. De manière plus générale, si $\vec{f}$ est une facette admissible, alors $\delta(J.\vec{f})$ est la sous-facette de Weyl de $\vec{f}$ de type $I \cup (J \cap I^\perp)$.

- La figure 4 représente les coeurs des cônes de la décomposition du troisième exemple de 2.5.3. Les coeurs de dimension 2 sont hachurés, ceux de dimension 1 sont en pointillé. Pour faciliter la lecture, la figure de gauche rappelle cette décomposition en cônes.

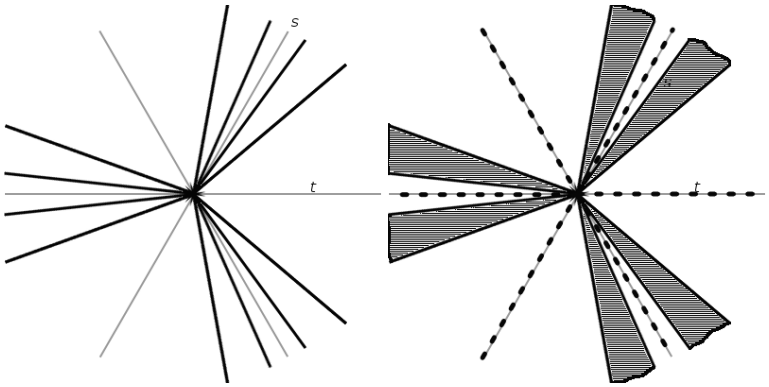


FIGURE 4 – Les coeurs d'un autre exemple de décomposition en cônes.

Pour finir, définissons le coeur d'un cône affine :

Définition 3.3.4. *Soit $f = x + \vec{f}$ un cône affine. On définit alors $\delta(f) = x + \delta(\vec{f})$, c'est le coeur de f.*

Le coeur d'un cône affine est toujours caractéristique du cône :

Proposition 3.3.5. *L'ensemble des coeurs de cône affine possibles est $\left\{x + \vec{\delta} \mid x \in A_0,\ \vec{\delta} \in \delta(\mathcal{F})\right\}$. Et chacun de ces coeurs est le coeur d'exactement un cône affine.*

Démonstration:
Il est évident que chacun des $x + \vec{\delta}$, pour $x \in A_0$ et $\vec{\delta}$ le coeur d'un cône vectoriel est le coeur d'un cône affine. Étudions l'unicité. Supposons $\delta(f) = \delta(g)$ avec $f, g \in \mathcal{F}_{A_0}$. Comme $\delta(f)$ et $\delta(g)$ sont des sous-cônes de f et g, ils ne contiennent pas de sous-espace vectoriel non trivial et ont donc chacun un unique sommet, tout comme f et g. On peut alors conclure, d'après la définition du coeur d'un cône, que le sommet de f est aussi celui de $\delta(f)$, de même pour g. Comme $\delta(f) = \delta(g)$, on obtient que tous ces sommets sont égaux. D'où $\delta(\vec{f}) = \delta(\vec{g})$, puis $\vec{f} = \vec{g}$ d'après l'étude du cas vectoriel, d'où enfin $f = g$. □

Définition 3.3.6. *Soit $\delta \in \delta(\mathcal{F}_{A_0})$ un coeur de cône dans A_0. On appelle cône affine de A_0 engendré par δ l'unique $f \in \mathcal{F}_{A_0}$ tel que $\delta(f) = \delta$.*

Voici quelques propriétés immédiates du coeur d'un cône affine :

Proposition 3.3.7. *Soit $f \in \mathcal{F}_{A_0}$. Alors :*
- *Si δ est un coeur tel que $\vec{\delta} \subset \overline{\delta(\vec{f})}$ et $\delta \subset f$, alors le cône engendré par δ est inclus dans f. Si $\vec{\delta} \subset \overline{\delta(\vec{f})}$ et $\delta \subset \bar{f}$, alors le cône engendré par δ est inclus dans $\bar{f}$.*
- *Pour tout $w \in W$, $w(f) = f$ si et seulement si w fixe $\delta(f)$.*

3.3.3 Structure de complexe de Coxeter vectoriel sur une façade

Fixons un cône $\vec{f} \in \mathcal{F}$. Dans ce paragraphe, on notera $F := A_{0\vec{f}}$ la façade de A_0 de type f. C'est un espace affine dont l'espace directeur est $\vec{F} = \overrightarrow{A_0}/\mathrm{Vect}(\vec{f})$. On munit $\vec{F}$ du produit scalaire obtenu en l'identifiant avec $(\vec{f})^\perp$. Nous commençons par étudier la structure de $\vec{F}$. Notons $p = p_{A_0,\vec{f}}$ la projection sur F, et $\vec{p} : \overrightarrow{A_0} \to \vec{F}$ sa partie vectorielle.

Soit $\mathcal{M}^v$ l'ensemble (fini) des murs vectoriels contenant $\vec{f}$. Si $\vec{M} \in \mathcal{M}^v$, alors $p(\vec{M})$ est un hyperplan de $\vec{F}$. Nous dirons que les $p(\vec{M})$, pour $\vec{M} \in \mathcal{M}^v$ sont les *murs* de $\vec{F}$. La fonction $p_{\mathcal{M}^v} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}^v & \to & \{\text{murs de } \vec{F}\} \\ \vec{M} & \mapsto & p(\vec{M}) \end{array}$ est injective, nous permettant d'identifier $\mathcal{M}^v$ à l'ensemble des murs de $\vec{F}$. Cet ensemble de murs fait de $\vec{F}$ un complexe de chambres, nous voulons prouver qu'il s'agit en fait d'un complexe de Coxeter. Il nous reste donc à trouver un groupe de Coxeter agissant simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de $\vec{F}$.

Rappelons que le groupe W^v agit sur $\cup_{\vec{f}\in\mathcal{F}} \vec{A}_{0\vec{f}}$ et que le stabilisateur de $\vec{f}$ est $W^v_{\vec{f}} = \{w \in W^v | w(\vec{f}) = \vec{f}\}$. Pour $w \in W^v_{\vec{f}}$, on note $p(w)$ l'application induite sur $\vec{F}$. Le groupe $p(W^v_{\vec{f}})$ préserve $\mathcal{M}^v$ et le produit scalaire de $\vec{F}$, c'est le candidat naturel comme groupe de Coxeter de $\vec{F}$. Montrons que c'est effectivement un groupe de Coxeter et qu'il agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de $\vec{F}$. On observe la suite exacte courte :

$$0 \to \mathrm{Fix}_{W^v_{\vec{f}}}(\vec{f}^\perp) \to W^v_{\vec{f}} \xrightarrow{p} p(W^v_{\vec{f}}) \to 0$$

D'après le paragraphe précédent, $W^v_{\vec{f}}$ est le fixateur dans W^v de $\delta(\vec{f})$, ou encore le fixateur de la facette de Weyl contenant $\delta(\vec{f})$. Choisissons une chambre C contenant $\delta(\vec{f})$ dans son adhérence, soit S le système générateur de W^v formé des réflexions par rapport aux murs de C. Alors il existe $I \subset S$ tel que $W^v_{\vec{f}} = W_I =< s | s \in I >$. De plus, $I = \{s \in S | s(\delta(\vec{f})) = \delta(\vec{f})\}$.

Comme W^v préserve le produit scalaire sur $\overrightarrow{A_0}$, les éléments de $W^v_{\vec{f}}$ stabilisent $\mathrm{Vect}(\vec{f})$ et $(\vec{f})^\perp$. Dans une base adaptée, leurs matrices sont du type $Mat(w) = \begin{bmatrix} \psi(w) & 0 \\ 0 & \phi(w) \end{bmatrix}$, où $\psi(w)$ est la matrice de w restreint à $\mathrm{Vect}(\vec{f})$ et $\phi(w)$ est la matrice de w restreint à $(\vec{f})^\perp$, c'est aussi la matrice de $p(w)$.

Soit $s \in I$, s est diagonalisable et préserve les espaces $\mathrm{Vect}(\vec{f})$ et $(\vec{f})^\perp$. On peut donc choisir une base adaptée comme précédemment en imposant en plus que $\psi(s)$ et $\phi(s)$ soient diagonales. Le spectre de s est composé d'un seul -1 et les autres valeurs propres sont 1, donc soit $\psi(s)$ est une réflexion et $\phi(s) = id$, soit $\phi(s)$ est une réflexion et $\psi(s) = id$.

Notons I_1 l'ensemble des réflexions de I se trouvant dans le premier cas, c'est-à-dire qui agissent sur $\vec{f}$ et fixent $\vec{f}^\perp$. Notons I_2 l'ensemble des réflexions se trouvant dans le second cas, qui fixent $\vec{f}$ et donnent une réflexion sur $\vec{f}^\perp$. Alors $W_{I_2} \subset \mathrm{Fix}_{W^v}(\vec{f})$, $W_{I_1} \cap W_{I_2} = \{id\}$, et $p_{|W_{I_2}}$ est injective. De plus, tout élément de W_{I_1} commute avec tout élément de W_{I_2} et $W^v_{\vec{f}} = W_I = W_{I_1 \sqcup I_2}$ est engendré par W_{I_1} et W_{I_2}.

Par conséquent, $W^v_{\vec{f}} \simeq W_{I_1} \times W_{I_2}$, avec $W_{I_2} \simeq \mathrm{Fix}_{W^v}(\vec{f}) \simeq p(W^v_{\vec{f}})$ (I_1 et I_2 sont deux parties disjointes du diagramme de Coxeter de $\vec{A}_0$). En particulier, $p(W^v_{\vec{f}})$ est un groupe de Coxeter.

A présent, on vérifie que le complexe de chambres défini par $\mathcal{M}^v$ sur $\vec{F}$ est isomorphe au complexe de Coxeter $W_{I_2}.C$. On dispose d'une fonction W_{I_2}-équivariante de $W_{I_2}.C$ dans les chambres de $\vec{F}$: il s'agit de la fonction p_C qui a une chambre D dans $W_{I_2}.C$ associe la chambre de $\vec{F}$ contenant $p(D)$.

Cette fonction est injective car les murs de $W_{I_2}.C$ contiennent tous les points fixes de W_{I_2} donc en particulier $\vec{f}$, donc ce sont tous des éléments de $\mathcal{M}$. Deux chambres distinctes dans $W_{I_2}.C$ sont donc séparées par un mur de $\mathcal{M}^v$, elles donnent donc deux chambres distinctes dans $\vec{F}$.

Enfin vérifions que p_C est surjective. Toutes les réflexions par rapport à un mur de $\mathcal{M}^v$ sont des éléments de W_{I_2}. Comme ces dernières agissent transitivement sur les chambre de $\vec{F}$ et comme p_C est W_{I_2}-invariante, on obtient bien la surjectivité.

Résumons :

Proposition 3.3.8. *Soit $\vec{f} \in \mathcal{F}$, alors l'espace vectoriel directeur de la façade $A_{0\vec{f}}$ est muni d'une structure de complexe de Coxeter où :*

- *les murs sont les hyperplans du type $p(\vec{M})$ où $\vec{M}$ est un mur de $\vec{A}_0$ contenant $\vec{f}$.*
- *le groupe de Coxeter est $p(W^v_{\vec{f}}) \simeq \mathrm{Fix}_{W^v}(\vec{f})$ (isomorphe à W_{I_2} avec les notations précédentes).*

Si C est une chambre fermée contenant $\delta(\vec{f})$, alors ce complexe de Coxeter est isomorphe à $\mathrm{Fix}_{W^v}(\vec{f}).C$, via l'application p_C : $w.C \mapsto$ la chambre de $\vec{F}$ contenant $p(w.C)$.

Remarque: Ce complexe de Coxeter n'est pas forcément essentiel. Le cas extrême est atteint lorsque $\vec{f}$ est une droite, incluse dans une chambre. Alors $I = \emptyset$, donc $A_{0\vec{f}}$ est trivial comme complexe de Coxeter, et pourtant il est de dimension $\dim(\mathcal{I}) - 1$.

En fait, $A_{0\vec{f}}$ est essentiel $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Fix}_{A_0}(W_{I_2}) = \mathrm{Vect}(\vec{f})$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Vect}(\vec{f}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Cl}(\vec{f}))$. En particulier, $A_{0\vec{f}}$ est essentiel si $\vec{f}$ est une réunion de facettes de Weyl.

Dans la décomposition $W^v_{\vec{f}} \simeq W_{I_1} \times W_{I_2}$, le premier facteur est donc le groupe de Coxeter de $\vec{F}$. Concernant le deuxième facteur, on montre facilement le résultat suivant :

Proposition 3.3.9. *Soit $\vec{E}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect}(\delta(\vec{f}))$ dans $\mathrm{Vect}(\vec{f})$, de sorte qu'en identifiant $\vec{F}$ avec $\vec{f}^\perp$, on a $\vec{A}_0 = \mathrm{Vect}(\delta(\vec{f})) \oplus \vec{E} \oplus \vec{F}$, et la somme est orthogonale.*

Alors les murs de $\vec{A}_0$ contenant $\delta(\vec{f})$ contiennent soit $\vec{E}$, soit $\vec{F}$. On sait déjà que les premiers induisent les murs de $\vec{F}$, les second définissent un complexe de Coxeter sur $\vec{E}$, dont le groupe de Coxeter est W_{I_1}. Ce complexe de Coxeter est essentiel.

En terme de diagrammes de Dynkin, disons que si D est le diagramme de A_0, I (qu'on identifie à un sous-diagramme de D) est obtenu en enlevant les noeuds de D correspondant au type de la facette de Weyl contenant $\delta(\vec{f})$. Le diagramme obtenu est séparé en deux parties non reliées, le digramme I_1 de $\vec{E}$ et le diagramme I_2 de $\vec{F}$. Notons que si le diagramme de $A_{\delta(\vec{f})}$ est connexe, alors $\vec{E}$ ou $\vec{F}$ doit être trivial, c'est-à-dire sans mur, ce qui correspond aux situations suivantes :

– $\vec{E}$ trivial $\Leftrightarrow$ $I_1 = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Stab}_{W^v}(\vec{f}) = \mathrm{Stab}_{W^v}(\delta(\vec{f}))$ $\Leftrightarrow$ $\vec{f} \subset \mathrm{Cl}(\delta(\vec{f}))$.
Comme $\delta(\vec{f}) = \mathrm{Cl}(\delta(\vec{f})) \cap \vec{f}$, ceci équivaut en fait à $\vec{f} = \delta(f)$ donc à $\vec{E} = \{0\}$.

– $\vec{F}$ trivial $\Leftrightarrow$ $I_2 = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Fix}_{W^v}(\vec{f}) = \{e\}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Cl}(\vec{f})$ contient une chambre.

3.3.4 Structure de complexe de Coxeter affine sur une façade

A présent, soit $\mathcal{M} = \{M \text{ mur de } A_0 \mid \vec{M} \in \mathcal{M}^v\}$. Alors $\mathcal{M}$ est un ensemble discret d'hyperplans. Le sous-groupe de W qui stabilise la façade $F = A_{0\vec{f}}$ est $W_{\vec{f}} = \{w \in W | \vec{w} \in W^v_{\vec{f}}\} = \{w \in W | \vec{w}(\vec{f}) = \vec{f}\}$. Ce sous-groupe contient les symétries par rapports aux murs de $\mathcal{M}$, il préserve la structure euclidienne de F et cet ensemble d'hyperplans. En notant $p(w)$ l'élément de $Isom(F)$ induit par w, on voit donc que $p(W_{\vec{f}})$ agit sur F en préservant $\mathcal{M}$, et qu'il contient les réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans de $\mathcal{M}$.

Ceci suffit à prouver que $\mathcal{M}$ définit un complexe de Coxeter affine sur F, et que $p(W_{\vec{f}})$ contient le groupe de Coxeter correspondant.

Définition 3.3.10. *L'ensemble des facettes de $\overline{A_0}$ est la réunion des ensembles de facettes de chacune de ses façades.*

3.4 Compactification de chaque appartement

Soit A un appartement de $\mathcal{I}$ soit $\phi : A_0 \to A$ un isomorphisme et $\vec{\phi} : \overrightarrow{A_0} \to \vec{A}$ sa partie linéaire. On notera encore $\mathcal{F}$ l'ensemble des $\vec{\phi}(\vec{f})$, $\vec{f} \in \mathcal{F}$. Comme deux isomorphismes entre A_0 et A diffèrent d'un élément du groupe de Weyl W, le choix de ϕ n'intervient pas dans cette définition. De la même manière, on notera encore $\mathcal{U}$ l'ensemble des $\vec{\phi}(U)$, $U \in \mathcal{U}$, ou si l'on préfère, l'ensemble des voisinage de 0 dans $\vec{A}$ stables par $W(\vec{A})$. Comme dans la partie précédente, on définit $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des cônes affines de A, $\overline{A}$ le compactifié de A, $\left\{A_{\vec{f}} \mid \vec{f} \in \mathcal{F}\right\}$ l'ensemble des façades de $\overline{A}$, $\mathcal{V}_A$ la fonction qui à un cône de $\mathcal{F}_A$ et un élément de $\mathcal{U}$ associe un voisinage dans $\overline{A}$, le coeur d'un cône, etc...

Un isomorphisme $\psi : A \xrightarrow{\sim} B$ entre deux appartements induit un isomorphisme entre chacun de ces objets pour A et l'objet correspondant pour B. Il s'étend notamment en un unique homéomorphisme de $\overline{A}$ sur $\overline{B}$, noté encore ψ. Explicitement, on a $\phi([f]_{A_0}) = [\phi(f)]_A$.

Pour toute façade $A_{\vec{f}}$ de A, ψ induit une isométrie entre $A_{\vec{f}}$ et $B_{\vec{\psi}(\vec{f})}$, cet homéomorphisme induit une bijection entre les murs de $A_{\vec{f}}$ et ceux de $B_{\vec{\psi}(\vec{f})}$, c'est donc un isomorphisme de complexes de Coxeter.

Dans la suite, on appellera isomorphismes d'appartements compactifiés les applications telles ϕ qui sont des homéomorphismes entre deux appartements compactifiés qui induisent sur chaque façade un isomorphisme de complexe de Coxeter.

4 Quelques résultats généraux sur les immeubles

Le but principal de cette section est de donner des critères permettant de s'assurer qu'une partie de $\mathcal{I}$ est incluse dans un appartement.

Les résultats de 4.1 sont bien connus (voir [AB08] 3.137, 4.97, 4.101), nous en redonnons tout de même une preuve pour faciliter la lecture et pour disposer d'un énoncé précis valable dans le cadre présent.

Ils sont vrais dans un immeuble quelconque, nous cesserons donc pour cette partie de supposer $\mathcal{I}$ affine. A défaut d'une réalisation affine, il sera toujours possible d'utiliser la réalisation comme cône de Tits d'un complexe de Coxeter Σ quelconque. Il s'agit d'un cône convexe C dans un espace vectoriel de dimension finie V dont le sommet est 0. Les murs de Σ correspondent à des hyperplans vectoriels de V (qui rencontrent l'intérieur de C), les facettes sont des cônes convexes de sommet 0, les facettes de dimension i sont des cônes ouverts dans un sous-espace vectoriel de dimension i (voir [Bou68] 4.6).

La notation $\langle f \rangle$ pour une facette f dans un complexe de Coxeter Σ représentera l'intersection des murs de Σ qui contiennent f. Si Σ est un complexe de Coxeter affine, identifié à sa représentation affine, alors $\langle f \rangle = \mathrm{Aff}(f)$, et si Σ

est un complexe de Coxeter quelconque identifié à son cône de Tits, alors $\langle f \rangle = \mathrm{Vect}(f)$.

On rappelle d'abord quelques résultats classiques, sur lesquels s'appuie toute la suite :

Proposition 4.0.1. *Soit $\mathcal{I}$ un immeuble, de système de Coxeter (W, S). Son système complet d'appartement est l'ensemble des parties de $\mathcal{I}$ isomorphes au complexe de Coxeter de (W, S).*

A partir de cette proposition, on montre le résultat fondamental suivant (voir [Ron89], théorème 3.6 page 31) :

Théorème 4.0.2. *Soit Z un ensemble de chambre de $\mathcal{I}$, isométrique pour la W-distance de $\mathcal{I}$ à une partie de $\Sigma(W, S)$. Alors il existe un appartement du système complet d'appartements de $\mathcal{I}$ contenant Z.*

On note immédiatement deux conditions équivalentes à celle donnée par le théorème :

Corollaire 4.0.3. *Soit Z un ensemble de chambres dans $\mathcal{I}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *Pour tout $c, d, e \in Z$, $\delta(c, e) = \delta(c, d)\delta(d, e)$, où δ est la W-distance de $\mathcal{I}$.*
- *Trois chambres quelconques de Z sont incluses dans un même appartement.*
- *Il existe un appartement contenant Z.*

Voici deux situations particulières où s'applique ce théorème :

Corollaire 4.0.4.
- *Si Z est une galerie tendue (pas forcément finie), alors Z est contenu dans un appartement du système complet d'appartements de $\mathcal{I}$.*
- *Si D est un demi-appartement délimité par un mur M, et si c est une chambre de $\mathcal{I}$ dont une cloison est incluse dans M, alors $D \cup c$ est inclus dans un appartement du système complet d'appartements de $\mathcal{I}$.*

Enfin, voici une version assez générale du résultat parfois appelé « lemme fondamental des immeubles » :

Lemme 4.0.5. *Soient Σ et Σ' des complexes de chambres. On suppose que dans Σ', toute cloison est dans au plus deux chambres. Soit c une chambre de Σ et d une chambre de Σ'. Alors il existe au plus un morphisme de complexes de chambres injectif de Σ dans Σ' qui envoie c sur d.*
En particulier, si $\Sigma \subset \Sigma'$ et $c = d$, un tel morphisme est forcément l'inclusion.

4.1 Parties closes dans un appartement

Voici quelques rappels sur la notion de partie close, principalement issus de [BT72] pour le cas affine. Pour le cas général considéré ici, on peut se reporter à [Ré02] 5.4.3. On donne une preuve de deux résultats classiques, à savoir la clôture de l'intersection de deux appartements et l'existence d'un isomorphisme entre deux appartements fixant leur intersection dans le cas général où l'intersection des appartements ne contient pas forcément de chambre.

Définition 4.1.1. *Une partie Z dans un appartement A est dite close si c'est une intersection de demi-appartements de A. Si Z est une partie quelconque de A, on note $Cl_A(Z)$ (ou juste $Cl(Z)$) et on appelle enclos de Z la plus petite partie close contenant Z. C'est aussi l'intersection de tous les demi-appartements de A contenant Z.*

Proposition 4.1.2. *Si Z est la fermeture d'un ensemble E de chambres, alors Z est clos si et seulement si E contient toutes les galeries minimales entre deux éléments de E.*

Démonstration:
Le sens $\Rightarrow$ est clair. Pour l'autre sens, il s'agit de montrer que si c est une chambre de A qui n'est pas dans E, alors il existe un mur séparant c de toutes les chambres de E.
Soit $d_1, ..., d_k, c$ une galerie minimale de E à c. Alors $d_1 \in E$ et $d_2 \notin E$. Soit M le mur entre d_1 et d_2. Soit $e \in E$, si M séparait d_1 et e alors il existerait une galerie minimale entre e et d_1 passant par d_2, ce qui impliquerait que $d_2 \in E$, ce qui est impossible. Donc M sépare c et E. □

Cette proposition permet une définition de la clôture dans $\mathcal{I}$, pour des ensembles de chambres, cohérente avec la précédente :

Définition 4.1.3. *Un ensemble de chambres de $\mathcal{I}$ est dit clos s'il contient toutes les galeries minimales entre deux de ses chambres. L'enclos d'un ensemble de chambres est le plus petit ensemble de chambres clos le contenant.*

La proposition précédente prouve que si Z est un ensemble de chambres inclus dans un appartement A, alors Z est clos (au sens 4.1.3) si et seulement si Z est clos dans A (au sens 4.1.1).

L'enclos d'une partie, même convexe, d'un appartement n'est pas toujours évidente. Par exemple dans un appartement de type $\tilde{B}_2$ on trouve facilement des parties convexes de toute dimension non nulle, dont l'enclos contient des chambres qui n'ont aucun point en commun avec la partie de départ.

4.1.1 Projection

Pour étudier la clôture d'ensembles de facettes qui ne sont pas forcement l'adhérence d'un ensemble de chambre, la notion de projection est très utile. Rappelons-en les principales propriétés.

Définition 4.1.4. *Soit Σ un complexe de chambres, soient c et d deux simplexes de Σ. On appelle projection de d sur c et on note $proj_c(d)$ l'intersection des chambres finales de toutes les galeries minimales de d à c.*

Proposition 4.1.5. *Soit Σ un complexe de Coxeter, et c, d deux simplexes de Σ. Alors :*
- *$proj_c(d) \subset Cl(c \cup d)$*
- *Soit g la chambre terminale d'une galerie minimale de d à c, et soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des murs contenant c et d. Alors $proj_c(d)$ est l'intersection de g et des murs de $\mathcal{M}$.*
- *L'étoile de $proj_c(d)$ est formée des chambres terminales des galeries tendues de d à c et des intersections de ces chambres. Son groupe de Coxeter, c'est-à-dire $\mathrm{Fix}_{W(\Sigma)}(proj_c(d))$ est le groupe engendré par les réflexions selon les murs de $\mathcal{M}$.*
- $\dim(proj_c(d)) \geq \dim(d)$ *avec égalité si et seulement si $c \subset \langle d \rangle_\Sigma$.*

Remarque: La dimension d'une facette f dans un complexe de Coxeter Σ est son nombre de sommet. Ceci coïncide avec la dimension de $\mathrm{Vect}(f)$ dans le cône de Tits, et avec la dimension de $\mathrm{Aff}(f)$ plus 1 dans une réalisation affine si Σ est de type affine et irréductible. Dans le cas non irréductible, la représentation affine de Σ contient des polysimplexes qui engendrent un espace de dimension moindre que leur nombre de sommets moins 1.
Cependant, la proposition est encore vraie dans ces cas si on remplace la dimension d'une facette par la dimension de l'espace affine qu'elle engendre.

Démonstration:
Pour le premier point, soit M^+ un demi-appartement délimité par le mur M et contenant c et d. Soit Γ une galerie minimale de d à c, si Γ n'est pas incluse dans M^+, alors en la pliant le long de M on obtient une autre galerie minimale de d à c qui elle est incluse dans M^+. La chambre finale de cette galerie contient $\mathrm{proj}_c(d)$, d'où $\mathrm{proj}_c(d) \subset M^+$. Ceci prouve que $\mathrm{proj}_c(d) \subset \mathrm{Cl}(c \cup d)$.

Passons au second point. Soit $\Gamma = g_0, ..., g_k$ une galerie tendue de d à c avec $g_k = g$ et $k = d(c, d)$. Soit $M \in \mathcal{M}$, notons σ_M la réflexion selon M. Alors $\sigma_M(\Gamma)$ est aussi une galerie minimale de d à c, donc $\mathrm{proj}_c(d) \subset g \wedge \sigma_M(g) = g \wedge M$. Nous prouvons ainsi que $\mathrm{proj}_c(d) \subset g \wedge \bigwedge_{M \in \mathcal{M}} M$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, il s'agit de prouver que toute galerie tendue de d à c se termine par une chambre contenant $g \wedge \bigwedge_{M \in M} M$. Soit $\Theta = h_0, ..., h_k$ une telle galerie. Il suffit de prouver que les murs séparant g de h_k sont dans $\mathcal{M}$. Si N est un tel mur, il contient $g \wedge h_k$ donc en particulier c. De plus, il ne peut couper ni Γ ni Θ sans quoi on pourrait réduire ces galeries par un pli le long de N. Donc N sépare g_0 de h_0, donc contient $g_0 \wedge h_0$, et en particulier d. Ceci prouve que $N \in \mathcal{M}$, et conclut la démonstration du second point.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des chambres terminales de galeries tendues de d à c. Notons aussi W' le groupe engendré par les réflexions selon un mur de $\mathcal{M}$. Nous venons de voir que tout mur séparant deux chambres de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{M}$. Nous avons vu juste avant que W' stabilise $\mathcal{T}$. Ceci entraîne que $\mathcal{T} = W'.g$, et que $\mathcal{T}$ contient toutes les galeries tendues entre deux de ses éléments. De plus, l'action de W' sur $\mathcal{T}$ est simplement transitive puisque celle de $W(\Sigma)$ sur les chambres de Σ l'est. Soit S' l'ensemble des réflexions selon les murs de $\mathcal{M}$ bordant $\mathcal{T}$. Si $w \in W'$, soit Λ une galerie tendue de g à wg, elle est incluse dans $\mathcal{T}$. Le premier mur qu'elle rencontre correspond à une réflexion $s \in S'$, et alors $l(sw) < l(w)$. On prouve ainsi par récurrence que W' est engendré par S', c'est donc le sous-groupe parabolique de $W(\Sigma)$ correspondant à la chambre g et aux réflexions S'. C'est donc le fixateur de la facette de g fixée par S'. Mais $\mathrm{Fix}_\Sigma(S') = \mathrm{Fix}_\Sigma(W') = \bigcap_{w\in W'} wg$, c'est l'intersection des chambres de $\mathcal{T}$, et par définition, c'est $\mathrm{proj}_c(d)$. Au final, $W' = \mathrm{Fix}_{W(\Sigma)}(\mathrm{proj}_c(d))$, et $\mathcal{T} = W'.g$ est l'ensemble des chambres de $(\mathrm{proj}_c(d))^*$. Ceci prouve le troisième point.

Pour le dernier point, on considère la réalisation géométrique $C \subset V$ de Σ comme cône de Tits. Soit $\mathcal{M}_g$ l'ensemble des murs de $\mathcal{M}$ qui bordent g, ils correspondent à une famille d'hyperplans linéairement indépendants (au sens où les formes linéaires les définissant sont indépendantes). Nous avons vu que $\mathrm{proj}_c(d)$ est l'intersection de g et des murs de $\mathcal{M}_g$, d'où $\mathrm{Codim}(\mathrm{proj}_c(d)) = \mathrm{Card}(\mathcal{M}_g) = \mathrm{Codim}(\bigcap_{M\in\mathcal{M}_g} M)$. Comme tous ces murs contiennent d, on a $d \subset \bigcap_{M\in\mathcal{M}_g} M$, d'où $\dim d \leq \dim(\bigcap_{M\in\mathcal{M}_g} M) = \dim(\mathrm{proj}_c(d)$.

Le cas d'égalité est atteint lorsque tous les murs contenant d contiennent également $\mathrm{proj}_c(d)$. On a alors $c \sqsubset \mathrm{proj}_c(d) \subset \langle d\rangle_\Sigma$. Réciproquement, si $c \subset \langle d\rangle_\Sigma$, alors tous les murs contenant d contiennent aussi c et donc sont dans $\mathcal{M}$. Au vu du point précédent, $\mathcal{M}$ est l'ensemble des murs contenant $\mathrm{proj}_c(d)$. On a donc $\langle d\rangle_\Sigma = \langle \mathrm{proj}_c(d)\rangle_\Sigma$ d'où $\dim d = \dim(\mathrm{proj}_c(d))$. □

4.1.2 Les parties closes sont des complexes de chambre

Proposition 4.1.6. *Une partie close dans un complexe de Coxeter est un complexe de chambre.*

Démonstration:
Soit E une partie close dans un complexe de Coxeter Σ. Soit c un simplexe de E, choisissons d un simplexe de dimension maximale dans E. La proposition 4.1.5 montre que $\mathrm{proj}_c(d)$ est inclus dans E et est de dimension supérieure à celle de d. Comme d est de dimension maximale, les dimensions sont en fait égale, ceci prouve que c est inclus dans un simplexe de dimension maximale.

Il reste à prouver qu'entre deux simplexes de E de dimension maximale existe une galerie dans E. Soient c et d deux tels simplexes, on procède par récurrence sur la distance, dans Σ, entre c et d.

Si $d(c,d) = 0$, cela signifie que c et d sont inclus dans une même chambre C de Σ. Soit alors $c \vee d$ la plus petite facette de C contenant c et d, elle est incluse dans $\mathrm{Cl}(c,d)$ donc dans E. Comme c et d sont de dimension maximales dans E, on a $\dim(c \vee d) = \dim(c) = \dim(d)$, d'où $c = c \vee d = d$. La galerie de longueur 0 formée uniquement de la chambre c relie c à d.

Si $d(c,d) > 0$, soit $\Gamma = g_0 ... g_k$, $k \geq 1$, une galerie tendue dans Σ de d à c. Comme $c \not\sqsubset g_{k-1}$, le simplexe $\sigma := c \wedge g_{k-1}$ est de codimension 1 dans c (c'est une cloison de E). Maintenant $\mathrm{proj}_\sigma(d)$ est une chambre de E adjacente à c et strictement plus proche dans Σ de d que c. Ce qui conclut la récurrence. □

Le cas particulier d'une intersection de murs est intéressant, puisqu'on prouve alors qu'il s'agit d'un complexe de chambre "au plus mince" :

Lemme 4.1.7. *Une intersection de murs dans un complexe de Coxeter est un complexe de chambres dans lequel une cloison est incluse dans au plus deux chambres.*

Démonstration:
Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de murs dans un complexe de Coxeter Σ, et E leur intersection. En particulier, c'est une partie close de Σ donc un complexe de chambres. Soit σ une cloison de E. On considère la réalisation géométrique C comme cône de Tits du complexe de Coxeter σ^* formé des simplexes de Σ contenant σ. La facette minimale de σ^* est σ, elle

correspond à {0} dans le cône de Tits. Les chambres de E contenant σ correspondent à des demi-droites issues de 0. Nous voulons montrer qu'il ne peut y avoir qu'au plus deux telles demi-droites.

Les demi-appartements de Σ contenant E soit contiennent σ^* soit contiennent σ dans le mur qui les bordent et induisent alors un demi-appartement de σ^*. Ceci prouve que $E \cap \sigma^*$ est égale à l'intersection des demi-appartements de σ^* induits par les demi-appartements de Σ contenant $E \cap \sigma^*$ et dont le bord contient σ. Donc $E \cap \sigma^*$ est une partie close de σ^*. Dans V, c'est l'intersection de C avec des demi-espaces, c'est donc un convexe. Donc si d est une chambre de E contenant σ, alors $E \cap \sigma^* \subset \text{Vect}(d)$, en identifiant $E \cap \sigma^*$ et d à leurs images dans V. Ainsi les chambres de E contenant σ sont, dans V, des demi-droites issues de 0 incluse dans la droite Vect(d) : il n'y en a que deux possibles.□

Ce dernier résultat permet de prouver la caractérisation géométrique des parties closes suivante :

Proposition 4.1.8. *Soit Σ un complexe de Coxeter, $C \subset V$ sa réalisation comme cône de Tits dans l'espace vectoriel V. Soit E un ensemble de facettes dont l'image dans C est fermée et convexe. Alors E est une partie close.*

Remarque:
- Réciproquement, une partie close de Σ est clairement convexe et fermée dans C, et égale à une union de facettes.
- Ce résultat est encore vrai dans le cadre d'un complexe de Coxeter affine en remplaçant la réalisation comme cône de Tits par la réalisation comme espace affine (et en remplaçant dans la preuve Vect(f) par Aff(f)).

Preuve du lemme:

On identifie E à son image dans C. Soit $f \subset E$ une facette de dimension maximale. Soit $x \in f$. Pour tout $y \in E$, le segment $[x, y]$ est contenu dans E. Comme f est une facette maximale de E, ce segment doit rester, au voisinage de x, dans f. Donc $[x, y] \subset \text{Vect}(f)$. Ceci prouve que $E \subset \text{Vect}(f)$.

A présent, soit $g \subset \text{Vect}(f)$ une facette qui n'est pas incluse dans E, montrons qu'il existe un mur M tel que $E|^M g$. Soit $x \in f$, $y \in g$. Comme E est fermée, il existe $z \in [x, y]$ tel que $[x, y] \cap E = [x, z]$. Quitte à déplacer le point x dans f, on peut supposer que z est dans une facette $h \subset \text{Vect}(f)$ de dimension $\dim(f) - 1$. Il existe un mur M tel que $h = M \cap \text{Vect}(f)$, vérifions que M convient. S'il existait un point $a \in E$ tel que $x|^M a$, alors le segment $[a, z]$ serait inclus dans E. Mais il existe au plus deux facettes de dimension $\dim(f)$ incluses dans Vect(f) et contenant z dans leur adhérence, par le lemme 4.1.7. Or $[x, z]$ et $[a, z]$ coupent deux telles facettes distinctes. Ceci prouve qu'il y en a deux, et qu'elles sont dans E. Mais ceci contredit la définition de z car l'adhérence de leur réunion contient un voisinage de z dans Vect(f) inclus dans E. □

4.1.3 Intersection de deux appartements

Proposition 4.1.9. *L'intersection de deux appartements A et B est une partie close de A et de B.*

Démonstration:

Soit f une facette maximale dans $A \cap B$, c'est à dire une facette qui n'est incluse dans l'adhérence d'aucune autre facette incluse dans $A \cap B$. Montrons que $A \cap B \subset \langle f \rangle_A$.

Soit g une facette dans $A \cap B$. Soient $\Gamma_A = a_1, ..., a_k$ et $\Gamma_B = b_1, ..., b_k$ deux galeries minimales de f à g, l'une dans A l'autre dans B (deux galeries minimales entre deux facettes ont forcément la même longueur). Soit $\Delta = (a_1 = d_1, ..., d_l = b_1)$ une galerie minimale de a_1 à b_1 et Z un appartement la contenant. On a $a_1 \wedge b_1 = f$ puisque f est une facette maximale dans $A \cap B$, et toutes les chambres de Δ contiennent f.

Soit $\rho = \rho_{A,a_1}$, $\rho(\Gamma_B)$ est une galerie minimale entre f et g dans A. Si ϕ est l'isomorphisme de Z sur A fixant a_1, les murs séparant a_1 et $\rho(b_1)$ sont les images par ϕ des murs de Z séparant a_1 et b_1. Si M est un tel mur, M ne sépare pas f et g puisque $f \subset M$. Donc $g \subset M$, sans quoi une des galeries Γ_A ou $\rho(\Gamma_B)$ traverserait M et ne serait donc pas minimale. Il reste donc à prouver que l'intersection de ces murs est $\langle f \rangle_A$, ou de manière équivalente, que l'intersection des murs de Z traversés par Δ est $\langle f \rangle_Z$.

Soit S le système générateur du groupe de Coxeter W de Z formé par les réflexions selon les cloisons de a_1. Soit $I \subset S$ le type de f, $W_I =< I >$ le fixateur de f dans W. Soient $M_1, .., M_l$ les murs traversés par Δ, $\sigma_1, ..., \sigma_l$ les

réflexions correspondantes, et U le groupe qu'elles engendrent. Il suffit de montrer que $U = W_I$. Pour commencer, $\sigma_1 \in I$ puisque M_1 est un mur de a_1 et que σ_1 fixe f. Notons $s_1 = \sigma_1$. Ensuite, on a $\sigma_2 = \sigma_1 \circ s_2 \circ \sigma_1$, avec $s_2 \in S$. On constate alors que s_2 fixe f. En continuant ainsi jusqu'à σ_l, on constate que $U =< s_1, s_2, s_3, ..., s_l >$ où les s_i sont des éléments de S qui fixent f, c'est à dire des éléments de I. Il ne reste plus qu'à prouver que chaque élément de I apparaît dans $\{s_1, ..., s_l\}$. Soit $s \in I$, supposons par l'absurde que $s \notin \{s_1, ..., s_l\}$. Soit h la facette de type $I - \{s\}$, c'est une facette strictement plus grande que f, et elle est fixée par toutes les s_i. Elle est donc fixée par toutes les σ_i, mais ceci entraîne que $h \subset a_1 \wedge b_1$, et cela contredit l'hypothèse de maximalité sur f.

Nous avons ainsi prouvé que $A \cap B \subset \langle f \rangle_A$. On peut conclure par récurrence sur la longueur l de Δ.

Si $l = 0$, alors f est une chambre. Il est alors bien connu que dans ce cas, $A \cap B$ est l'adhérence d'un ensemble de chambres, et que toute galerie minimale entre deux chambres de $A \cap B$ est incluse dans $A \cap B$. Donc $A \cap B$ est clos.

Si $l > 0$, utilisons le corollaire 4.0.4 pour trouver un appartement A_1 contenant un demi-appartement de A délimité par $d_1 \wedge d_2$ ainsi que d_1 et d_2. Cet appartement contient le mur de A définit par $d_1 \wedge d_2$, il contient donc en particulier $\langle f \rangle_A$, donc $A \cap B$. Donc $A \cap B = (A \cap A_1) \cap (B \cap A_1)$. Par hypothèse de récurrence, $A \cap A_1$ et $A_1 \cap B$ sont deux parties closes de A_1, donc $(A \cap A_1) \cap (B \cap A_1)$ est close dans A_1. Mais il existe un isomorphisme de A_1 sur A qui fixe $A \cap A_1$, donc en particulier $(A \cap A_1) \cap (B \cap A_1)$, ce qui conclut la preuve. □

4.1.4 Isomorphisme entre deux appartements

Proposition 4.1.10. *Soient A et B deux appartements, alors il existe un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ fixant $A \cap B$. De plus, si $\psi : A \xrightarrow{\sim} B$ est un isomorphisme fixant une facette de dimension maximale de $A \cap B$, alors ψ fixe $A \cap B$.*

Démonstration:

Par 4.1.9 et 4.1.6, $A \cap B$ est un complexe de chambre. Soit d une chambre de $A \cap B$. Soient C et D des chambres de A et B, respectivement, contenant d. Soit Z un appartement contenant $C \cup D$. En composant un isomorphisme de A sur Z fixant C puis un isomorphisme de Z sur B fixant D, on obtient un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ fixant d. Montrons que ϕ fixe $A \cap B$.

Le dernier point de la proposition 4.1.5 montre que $A \cap B \subset \langle d \rangle_A$ et $A \cap B \subset \langle d \rangle_B$. Or $\phi(\langle d \rangle_A) = \langle d \rangle_B$, d'où $\phi(A \cap B) \subset \langle d \rangle_B$. Comme $\langle d \rangle_B$ est un complexe de chambre "au plus mince", par 4.1.7, et que ϕ induit un morphisme injectif entre $A \cap B$ et $\langle d \rangle_B$ le "lemme fondamental des immeubles" 4.0.5 montre que ϕ fixe $A \cap B$. □

4.2 Cheminées

La notion de cheminée permettra d'utiliser pleinement le théorème 4.5.2 (ci-dessous). Nous en donnons ici une définition ainsi que les propriétés élémentaires. On suppose dorénavant que $\mathcal{I}$ est affine.

Lemme 4.2.1. *Soit A un appartement, c une facette de A, $\vec{f}$ une facette de $\vec{A}$. Alors les points de $Cl(c + \vec{f})$ restent à distance bornée de $c + \vec{f}$. De plus, si d est une autre facette de A, $\vec{g}$ une autre facette de $\vec{A}$ telles que $Cl(d + \vec{g}) \subset Cl(c + \vec{f})$, alors $\vec{g} \subset \overline{\vec{f}}$.*

Preuve du lemme:

Soit $\{\alpha_i\}_{i \in I \sqcup J}$ des formes affines sur A telles que $\{\vec{\alpha}_i\}_{i \in I \sqcup J}$ soit une base du système de racines de $\vec{A}$ avec $\vec{f} = \{\vec{\alpha}_i > 0, : \vec{\alpha}_j = 0,\ i \in I,\ j \in J\}$ et telles que les murs de A de direction $\ker \alpha_i$ sont les $\alpha_i^{-1}(\{n\})$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$c + \vec{f} \subset \{\alpha_i > inf_c(\alpha_i),\ \alpha_j \in \alpha_j(c),\ i \in I,\ j \in J\} \subset \{\alpha_i \geq n_i, : \alpha_j \in [n_j, m_j],\ i \in I,\ j \in J\}$$

en appelant, pour $i \in I \sqcup J$, n_i la partie entière de $\inf_c(\alpha_i)$ et pour $j \in J$, m_j le plus petit entier supérieur à $\sup_c(\alpha_j)$.

Le troisième ensemble est une intersection de demi-appartements donc une partie close, donc contient $\mathrm{Cl}(c + \vec{f})$. Il est de plus égal à $\overline{b + \vec{f}}$ avec $b = \{\alpha_i = n_i,\ \alpha_j \in [n_j, m_j]\}$. Comme $\{\vec{\alpha}_i\}_{i \in I \sqcup J}$ est une base de $\vec{A}^*$ et qu'elle reste bornée

sur b, on déduit que b est borné. Mais c est également borné, on voit alors facilement que les points de $\overline{b + \vec{f}}$ sont à distance bornée de $c + \underline{\vec{f}}$. Et ceci reste en particulier vrai pour les points de $\mathrm{Cl}(c + \vec{f})$.

Maintenant si $\vec{g} \not\subset \vec{f}$, cela signifie qu'il existe $\vec{v} \in \vec{g} \setminus \overline{\vec{f}}$. Alors $d(\vec{v}, \vec{f}) > 0$. Pour x un point de d, les points de la forme $x + \lambda\vec{v}$ sont dans $\mathrm{Cl}(d + \vec{g})$ et peuvent être rendus arbitrairement éloignés de $c + \vec{f}$, car c est borné. Ceci contredit que $\mathrm{Cl}(d + \vec{g}) \subset \mathrm{Cl}(c + \vec{f})$. □

Définition 4.2.2.

- *Une cheminée dans un appartement A est une partie de A de la forme $R = Cl(c + \vec{f})$, où c est une facette de A et $\vec{f}$ une facette de $\vec{A}$. La facette $\vec{f}$ est uniquement déterminée par R d'après le lemme 4.2.1, on l'appelle la direction de R.*

- *Soient R et R' deux cheminées. On dira que R' est une sous-cheminée de R lorsque $R' \subset R$. On dira que R' est une sous-cheminée pleine, abrégé en scp, lorsque de plus R et R' ont la même direction et* $\mathrm{Aff}(R) = \mathrm{Aff}(R')$.

On abrège de la même manière sous-cheminée pleine et sous-cône parallèle, mais les deux notions ont à peu près le même sens, l'une dans le cadre des cônes affines et l'autre dans le cadre des cheminées.

Proposition 4.2.3. *Soit $R = Cl(c + \vec{f})$ une cheminée dans A, soit d une facette de A incluse dans R. Alors $Cl(d + \vec{f}) \subset R$, c'est donc une sous-cheminée de R.*

Démonstration:
Soit D un demi-appartement de A contenant R, montrons qu'il contient $d + \vec{f}$. Ceci n'est pas tout à fait évident car d, et donc $d + \vec{f}$ n'est pas forcément incluse dans $c + \vec{f}$. Soit $\alpha \in A^*$, $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha, k) = \{x \in A | \alpha(x) \geq k\}$. Nous savons déjà que $d \subset R \subset \mathcal{D}$. Soit $\vec{v} \in \vec{f}$, $x \in d$, montrons que $x + \vec{v} \in \mathcal{D}$. Dans le cas contraire, nous aurions $\alpha(x) \geq k$ et $\alpha(x + \vec{v}) < k$, d'où $\vec{\alpha}(\vec{v}) < 0$. Choisissons alors un point quelconque $y \in c$, on aura $\alpha(c) \geq k$ car $c \subset \mathcal{D}$, mais $\alpha(c + \lambda\vec{v}) < 0$ pour λ un réel assez grand. ceci contredit le fait que $c + \vec{f} \subset \mathcal{D}$. Donc $x + \vec{v} \in \mathcal{D}$. □

Le lemme suivant permet dans certains cas de se ramener à des cheminées dont la base est une chambre.

Lemme 4.2.4. *Soit $R = Cl(x + \vec{f})$ une cheminée. Soit c une chambre dont l'adhérence contient x, et $R_1 = Cl(c + \vec{f})$. Alors toute sous-cheminée pleine de R_1 contient une sous-cheminée pleine de R.*

Preuve du lemme: Soit $R'_1 = \mathrm{Cl}(y + \vec{f})$ une scp de R_1. Le cône $y + \vec{f}^*$ contient une scp R' de R, et pour montrer que $R' \subset R'_1$, il suffit de prouver qu'aucun mur dont la direction contient $\vec{f}$ ne sépare strictement R de R'_1. Soit M un tel mur. Comme R et R'_1 sont deux parties incluse dans $R_1 = \mathrm{Cl}(c + \vec{f})$, si M sépare strictement R de R'_1, alors M doit séparer strictement deux parties de $c + \vec{f}$. Mais c'est impossible pour un mur dont la direction contient $\vec{f}$. □

Définition 4.2.5. *Soit $R = Cl(c + \vec{f})$ une cheminée. Une demi-droite caractéristique de R est une demi-droite δ dont l'extrémité est dans c et dont la direction est incluse dans $\vec{f}$ (en particulier, $\delta \subset R$).*

Remarque: Si δ est une demi-droite, alors $\mathrm{Cl}(\delta)$ est une cheminée dont δ est caractéristique.

Proposition 4.2.6. *Soit $R = Cl(c + \vec{f})$ une cheminée dans un appartement A. Soit δ une demi-droite caractéristique de R. Alors :*

- $R = Cl(\delta)$
- $\mathrm{Aff}(Cl(\delta))$ *est l'intersection des murs contenant δ*
- *Si δ' est une demi-droite incluse dans δ, alors $Cl(\delta')$ est une scp de R.*

Démonstration:

Pour le premier point, la proposition 4.2.3 prouve que $\mathrm{Cl}(\delta) \subset R$. Pour montrer l'autre inclusion, soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha, k)$ un demi-appartement contenant δ, montrons qu'il contient R. Soit x le sommet de δ, $\vec{\delta}$ sa direction, de sorte que $\delta = x + \vec{\delta}$. Le fait que x est dans c prouve que $\mathcal{D}$ contient c. Et le fait que $\mathcal{D}$ contient une demi droite dirigée par $\vec{\delta}$ prouve que $\alpha(\vec{\delta}) \subset [0, \infty[$. Mais $\vec{\delta}$ est inclus dans $\vec{f}$, et α est une racine, d'où $\alpha(\vec{f}) \subset [0, \infty[$. On obtient alors $c + \vec{f} \subset \mathcal{D}$, d'où $R \subset \mathcal{D}$.

Pour prouver le second point, soit $\mathcal{M}_\delta$ l'ensemble des murs contenant δ. Soit $M \in \mathcal{M}_\delta$, alors δ est dans les deux demi-appartements délimités par M, donc $\mathrm{Cl}(\delta)$ est dans l'intersection de ces deux demi-appartements, c'est-à-dire dans M. Ceci prouve que $\mathrm{Aff}(\mathrm{Cl}(\delta)) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{M}_\delta} M$.

Pour l'inclusion réciproque, comme la répartition des murs de A est discrète, il existe $x \in \delta$ qui n'est inclus dans aucun autre mur que ceux de $\mathcal{M}_\delta$. Soit ϵ la distance minimale entre x et un mur n'appartenant pas à $\mathcal{M}_\delta$, on a $\epsilon > 0$ encore par la répartition discrète des murs. Alors la boule dans $\bigcap_{M \in \mathcal{M}_\delta} M$ de centre x et de rayon ϵ est incluse dans $\mathrm{Cl}(\delta)$, ce qui prouve que $\bigcap_{M \in \mathcal{M}_\delta} M \subset \mathrm{Aff}(\mathrm{Cl}(\delta))$.

Enfin pour le troisième point, il faut montrer que $\mathrm{Aff}(\mathrm{Cl}(\delta)) = \mathrm{Aff}(\mathrm{Cl}(\delta'))$. Ceci provient directement du point précédent. □

Remarque: Guy Rousseau définit les cheminées comme l'enclos dans A d'une demi-droite, et d'un germe de segment de même origine. Dans le cas d'un immeuble où les murs sont répartis de manière discrète, c'est une définition équivalente au vu de la proposition qui précède.

Ainsi, une cheminée peut-être caractérisée par une demi-droite. Nous allons maintenant voir qu'une demi-droite est incluse dans une galerie tendue, ce qui permettra de ramener les raisonnements sur les cheminées à des raisonnement sur les galeries tendues.

Proposition 4.2.7. *Soit δ une demi-droite et s son origine, ou δ un segment et s une extrémité de δ. Alors pour toute chambre c_0 contenant s dans son adhérence, il existe une galerie tendue commençant par c_0 contenant δ dans son adhérence. De plus, l'adhérence de toute chambre ou cloison de cette galerie rencontre δ.*

Démonstration:

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble fini des murs contenant δ. Soit E l'intersection de tous les demi-appartements $\mathcal{D}(M, c_0)$ pour $M \in \mathcal{M}$. La demi-droite δ est incluse dans E. Elle est découpée en segments d'intérieur non vide (pour la topologie induite sur δ), et chacun de ces segments est inclus dans une unique chambre fermée incluse dans E. En effet, si un tel segment est inclus dans deux chambres, alors il existe un mur M séparant ces chambres et contenant ce segment. Comme le segment est d'intérieur non vide, M contient δ, donc $M \in \mathcal{M}$, donc au plus une des deux chambres est dans E. Soient $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ces segments, rangés de manière que le sommet de δ soit dans I_0 et que $\forall k$, $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$. Soient $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les chambres correspondantes, c_0 est bien la chambre donnée dans l'énoncé. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit Γ_k une galerie minimale entre c_k et c_{k+1}. C'est une galerie incluse dans E car E est clos. On définit enfin Γ comme la concaténation des Γ_k auxquels on a retiré leurs dernières chambres, c'est à dire c_{k+1}, pour éviter qu'elles n'apparaissent deux fois de suite. Cette galerie contient bien δ, il reste à vérifier qu'elle est tendue.

Remarquons pour commencer que puisque $\Gamma \subset E$, les murs de $\mathcal{M}$ ne séparent pas les chambres de Γ. Supposons qu'il existe un mur M coupant deux fois Γ, entre d_1 et d_2 puis entre e_1 et e_2. Il existe k et l tels que $d_1 \cup d_2 \subset \Gamma_k$ et $e_1 \cup e_2 \subset \Gamma_l$. Toutes les chambres de Γ_k contiennent dans leur adhérence le point de $I_k \cap I_{k+1}$, donc M contient aussi ce point. De même M contient le point de $I_l \cap I_{l+1}$. Mais M ne peut contenir deux points distincts de Δ sans contenir Δ, donc $k = l$. Alors M coupe Γ_k deux fois, mais c'est impossible puisque Γ_k est une galerie minimale. □

4.3 Inclusion d'une partie d'appartement et d'une chambre dans un appartement

On suppose dorénavant $\mathcal{I}$ munit de son système complet d'appartements.

Considérons une galerie tendue $\Gamma = c_1, ..., c_n$ de longueur n. Soit A_1 un appartement contenant c_1, le but est d'étudier quelles parties de A_1 sont incluses dans un appartement contenant également c_n. On peut supposer que c_2 n'est pas dans A_1. Soit M_1 le mur de A_1 contenant la cloison $c_1 \wedge c_2$. Alors d'après le corollaire 4.0.4, chacun des deux demi-espaces de A_1 délimités par M_1 est inclus dans un appartement contenant également c_2. Soit A_2 un tel appartement contenant un demi-appartement de A_1 et c_2. On définit M_2 comme étant le mur de A_2 contenant la cloison $c_2 \wedge c_3$. Alors chacun des demi-appartements de A_2 peut être inclus dans un appartement contenant c_3. Mais ces demi-appartements contiennent en quelque sorte des quarts d'appartement de A_1. En continuant ainsi jusqu'au bout de la galerie Γ, on prouve la :

Proposition 4.3.1. *Soit A un appartement et c une chambre. Soit n la longueur minimale entre une chambre de A et c. Alors il existe un découpage $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(A)$ de A en 2^n parties fermées, (certaines pouvant être vides) tel que :*

- *$\mathcal{P}$ est obtenu en coupant A en deux le long d'un mur, puis en coupant chacun des demi-appartements obtenus encore en deux le long d'autres murs, et en répétant cette opération encore $n-2$ fois*
- *chaque élément de $\mathcal{P}$ est inclus dans un appartement contenant également c.*

Remarque: Cette proposition est vraie dans un immeuble quelconque.

Voici deux résultats qui seront très utiles par la suite directement obtenus grâce à cette proposition.

Corollaire 4.3.2.

- *Soit $\Gamma = c_0, c_1, ...$ une galerie tendue infinie. Soit d une chambre de $\mathcal{I}$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et un appartement A contenant d et tous les c_i pour $i \geq n_0$.*
- *Soit f une facette de quartier, et c une chambre. Alors il existe un scp de f qui est inclus dans un appartement contenant également c.*

Démonstration: Il suffit de remarquer que si A est un appartement contenant Γ, si M est un mur de A alors un des deux demi-appartements de A définis par M contient tous les c_i à partir d'un certain rang, car une galerie tendue ne peut être coupée deux fois par un même mur. Et de la même manière, si A contient f, alors un des demi-appartements définis par M contient un scp de f. □

Nous voulons maintenant préciser la proposition 4.3.1, en déterminant certaines zones de A qui seront obligatoirement incluses dans un élément de la partition $\mathcal{P}$. Pour cela, il s'agit d'identifier des parties de A qui ne seront jamais coupées par un mur "séparant A de c". Commençons par donner un sens précis à ceci :

Proposition 4.3.3. *Soit $A \in \mathcal{A}$, soit $\Gamma = (c_i)_{i \in I}$ une galerie tendue telle que $c_0 \in A$, avec I un intervalle de $\mathbb{N}$ contenant 0. Soit Z un appartement contenant Γ, et $\phi : Z \xrightarrow{\sim} A$ un isomorphisme fixant c_0. Soit β une partie de A, connexe, contenant c_0, telle qu'aucun $\phi(M)$ pour M un mur de Z traversé par Γ ne sépare strictement deux points de β.*

Alors il existe un appartement contenant $Cl(\beta) \cup \Gamma$.

Démonstration:

On construit par récurrence une suite d'appartements $(Y_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, on ait $\beta \cup c_0 \cup c_1 \cup ... \cup c_i \subset Y_i$.

Pour $i = 0$, $Y_0 = A$ convient. Supposons à présent Y_i construit, avec $i \in I$ tel que $i+1 \in I$. Soit M_i le mur de Y_i contenant $c_i \wedge c_{i+1}$. Si nous prouvons que M_i ne coupe pas β alors ceci entraînera que $\beta \cup c_1 \cup ... \cup c_i \subset \mathcal{D}(M_i, c_i)$, et le corollaire 4.0.4 prouvera l'existence d'un Y_{i+1} convenable.

Supposons par l'absurde que M_i rencontre β. Soit $\chi_i : Y_i \xrightarrow{\sim} A$ l'isomorphisme fixant β (il est unique car β contient la chambre c_0). Alors $\chi_i(M_i)$ rencontre β. Mais $\chi_i(M_i) = \phi \circ \psi_i(M_i)$, ou $\psi_i : Y_i \xrightarrow{\sim} Z$ est l'isomorphisme fixant c_0. Et $\psi_i(M_i)$ est un mur de Z coupant Γ. Ceci contredit les hypothèses, et prouve donc l'existence de Y_{i+1}.

Chaque Y_i contient en fait $\mathrm{Cl}(\beta)$, car $A \cap Y_i$ est une partie close. Et $\mathrm{Cl}(\beta)$ est égal à l'adhérence de l'ensemble de ses chambres car il contient une chambre. A présent, pour tout triple (c, d, e) de chambres incluse dans $\mathrm{Cl}(\beta) \cup \Gamma$, il existe Y_i contenant $c \cup d \cup e$. Ceci prouve, en utilisant le corollaire 4.0.3 l'existence d'un appartement Y contenant $\mathrm{Cl}(\beta) \cup \Gamma$. □

Passons à présent à quelques situations particulières où s'applique ce résultat.

Définition 4.3.4. *Soit A un appartement et $\vec{\delta}$ un cône inclus dans une facette de $\vec{A}$. Soit $\delta = a + \vec{\delta}$ un cône de direction $\vec{\delta}$. On appelle base de δ, et on note $b(\delta)$ l'intersection de δ et des demi-appartements contenant un voisinage de a pour la topologie induite sur δ.*

Cette définition est indépendante de l'appartement A contenant δ choisi. De plus, comme les murs de A sont répartis de manire discrète, $b(\delta)$ contient un voisinage de a pour la topologie induite sur δ. En particulier, la base de δ contient une base affine de $\mathrm{Aff}_B(\delta)$, pour tout appartement B contenant δ. Dis autrement, $\mathrm{Aff}_B(b(\delta)) = \mathrm{Aff}_B(\delta)$. Enfin, $b(\delta)$ est inclus dans une facette de A.

Remarque: Cette définition sera réutilisée en 6 pour définir la topologie sur l'immeuble compactifié.

Proposition 4.3.5. *Soit A un appartement, $\vec{\delta}$ une facette de $\vec{A}$ non triviale, $a \in A$, on note $\delta := a + \vec{\delta}$. Soit b la base de δ. Soit B un autre appartement contenant b, et $\psi : A \xrightarrow{\sim} B$ un isomorphisme fixant b. Soit x une facette de B incluse dans $a - \vec{\psi}(\vec{\delta}_A^*)$ et telle qu'aucun mur dont la direction contient $\vec{\delta}$ ne sépare strictement a de x.*

Alors pour toute chambre $\vec{C} \subset \vec{A}$ incluse dans $\vec{\delta}_A^*$, il existe un appartement Z contenant $(a + \vec{C}) \cup \{x\}$.

En particulier, pour tout point t de δ_A^*, il existe un appartement contenant t, a et x.

Remarque:
- $\psi(\delta)$ et $\vec{\psi}(\vec{\delta})$ sont indépendants du choix de ψ.
- Comme $b \subset A \cap B$ contient une base affine de δ, on a en fait $\vec{\delta} \subset \vec{A} \cap \vec{B}$. Cependant, pour les démonstrations de cette sous-partie, il me parait plus clair de ne pas faire cette identification, c'est-à-dire de distinguer $\vec{\delta}$ de $\vec{\psi}(\vec{\delta})$.
- Dans la suite, on pourra noter $-\delta = a - \vec{\delta}$ le cône opposé à δ, et de manière générale si f est un cône ne contenant pas de droite, $-f = s(f) - \vec{f}$.

Démonstration:

Soit c_0 une chambre de A, coupant $a + \vec{C}$ et dont l'adhérence contient b. Soit $\Gamma = c_0, ..., c_k$ une galerie tendue entre c_0 et x. Si Z est un appartement contenant Γ, et $\psi_Z : A \xrightarrow{\sim} Z$ un isomorphisme fixant b, alors x est une facette de Z, les seuls murs de Z dont la direction contient $\vec{\psi}_Z(\vec{\delta})$ et qui séparent a de x contiennent a ou x, et enfin $x \in -\psi_Z(\delta)^*$. On est ainsi ramené au cas où l'intersection des deux appartements considérés contient la chambre c_0.

Soit $\beta = (a + \vec{C}) \cup c_0$, c'est un connexe contenant c_0, il faut maintenant vérifier que pour tout mur M de Γ, $\psi_Z^{-1}(M)$ ne coupe pas β. Soit M un tel mur. Alors $\psi_Z^{-1}(M)$ sépare strictement c_0 et x, donc coupe $-\delta^*$. Si en plus $\psi_Z^{-1}(M)$ coupe β alors il coupe $a + \vec{C}$ donc en particulier l'intérieur de δ^*. Ceci implique $\vec{\delta} \subset \overrightarrow{\psi_Z^{-1}(M)}$ puis $\vec{\delta} \subset \vec{M}$. Mais alors $x \subset M$ ou $a \in M$. Le premier cas est exclus car M sépare strictement x de c_0. Quand au second cas, il implique $\delta \subset M$, ce qui empêche que M coupe $a + \vec{C}$. □

Dans la variante suivante de ce résultat, on veut obtenir un appartement contenant $\delta^* \cup x$. Pour cela on peut renforcer l'hypothèse sur les murs dont la direction contient $\vec{\delta}$, en imposant par exemple que les seuls murs séparant b de x contiennent x. Cependant, nous nous contenterons de l'hypothèse $x \subset -\psi(\delta)$, qui présente l'avantage qu'en poussant un tout petit peu le raisonnement, on arrive à trouver un appartement contenant non seulement x, mais en fait $\delta^* \cup -\psi(\delta)$. Ceci donne le résultat :

Proposition 4.3.6. *Soient A, δ, a, b, B, ψ comme précédemment.*
Alors il existe un appartement contenant $\delta_A^* \cup -\psi(\delta)$

Démonstration:

On commence, comme pour la preuve précédente, par se ramener au cas où $A \cap B$ contient une chambre. Soient c et d deux chambres contenant b, incluses respectivement dans A et B. Soit $\Lambda = d, d_1, ..., d_k, c$ une galerie entre d et c. En utilisant $k + 1$ fois le corollaire 4.0.4, on trouve une suite $B_0 = B, B_1, ..., B_{k+1}$ d'appartements tels que $d_i \subset B_i$ (en notant $d_0 = d$ et $d_{k+1} = c$) et tels que $B_i \cap B_{i+1}$ contient un demi-appartement délimité par le mur M_i de B_i contenant $d_i \wedge d_{i+1}$. Or ce mur contient b, on vérifie alors par une simple récurrence que pour tout i, M_i contient $-\psi(\delta)$. Soit

$Z = B_{k+1}$: cet appartement contient $-\psi(\delta)$ et une chambre c de $A \cap Z$. Soit $\phi : Z \xrightarrow{\sim} A$ fixant c, alors $-\psi(\delta) = -\phi^{-1}(\delta)$.

Soit l une demi-droite dans Z passant par a, dont la direction est intérieure à $-\vec{\phi}^{-1}(\vec{\delta})$, et dont l'origine est dans b. Elle est donc incluse dans $-\psi(\delta) \cup b$. Soit $\Gamma = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une galerie tendue le long de l, donnée par la proposition 4.2.7 telle que $c_0 = c$. Soit $\beta = \mathrm{Cl}(c_0 \cup \delta_A^*) \subset A$. Pour pouvoir appliquer la proposition 4.3.3, il nous reste à prouver que pour tout mur M traversé par Γ, $\phi(M)$ ne coupe pas β.

Soit M un tel mur, il coupe l sans la contenir, donc $\vec{l} \not\subset \vec{M}$, d'où $\vec{\phi}^{-1}(\vec{\delta}) \cap \vec{M} = \emptyset$ et $\vec{M}$ ne peut couper $\vec{\phi}^{-1}(\vec{\delta}^*)$. Notons $\vec{M}^+$ et $\vec{M}^-$ les deux demi-appartements de $\vec{Z}$ délimités par $\vec{M}$ en choisissant $\vec{\phi}^{-1}(\vec{\delta}^*) \subset \vec{M}^+$. Soient M^+ et M^- les demi-appartements de Z correspondants, nous avons alors $c_0 \subset M^+$. Passons du côté de A : nous savons que $c_0 \subset \phi(M^+)$ et $\vec{\delta}^* \subset \vec{\phi}(\vec{M}^+)$. Donc $\beta \subset \mathrm{Cl}(c_0 + \vec{\delta}^*) \subset \phi(M^+)$. Ainsi, $\phi(M)$ ne coupe pas β.

D'après la proposition 4.3.3, il existe un appartement Y contenant $\beta \cup \Gamma$. Alors $l \subset Y \cap Z$ d'où $\mathrm{Cl}(l) \subset Y \cap Z$. Mais $\mathrm{Cl}(l) \supset -\phi^{-1}(\delta)$: c'est une conséquence de la proposition 4.2.6 (en fait $\mathrm{Cl}(l)$ est égal à la cheminée $\mathrm{Cl}_Z(b - \vec{\phi}^{-1}(\vec{\delta}))$). Comme $-\phi^{-1}(\delta) = -\psi(\delta)$, la proposition est prouvée. □

4.4 Rétractions par rapport à deux chambres adjacentes

Nous étudions ici comment change une rétraction lorsqu'on remplace la chambre de base par une chambre adjacente.

Proposition 4.4.1. *Soient c_1 et c_2 deux chambres adjacentes dans un appartement A. Soit f la cloison $c_1 \wedge c_2$ et M le mur de A contenant f, σ la réflexion selon M. Soient encore $\rho_1 = \rho_{c_1,A}$ et $\rho_2 = \rho_{c_2,A}$. Alors pour toute chambre $d \subset \mathcal{I}$,*

- *$\rho_2(d) = \rho_1(d)$ ou bien $\rho_2(d) = \sigma \circ \rho_1(d)$.*
- *Si $\rho_1(d)$ est du même côté de M que c_1 alors $\rho_2(d) = \rho_1(d)$.*
- *Si $\rho_1(d)$ est du même côté de M que c_2 alors les deux possibilités peuvent survenir, et on a $\rho_2(d) = \rho_1(d)$ si et seulement si c_1 est dans l'enclos de d et c_2.*

On peut aussi énoncer un résultat un peu moins précis mais plus clair :

Corollaire 4.4.2. *On reprend les hypothèses de la proposition. Alors $\rho_2(d) = \rho_1(d)$ si et seulement si il existe un appartement contenant c_1, c_2 et d.*

Remarque: Le sens $\Leftarrow$ du corollaire est de toute façon une conséquence directe de la définition d'une rétraction.

Démonstration:
Soit B un appartement contenant c_1 et d, soit $\phi : B \to A$ l'isomorphisme fixant c_1. Alors $\rho_1(d) = \phi(d)$.
Si $\rho_1(d)$ est du même côté de M que c_1 alors d est du même côté de $\phi^{-1}(M)$ que c_1. En vertu du corollaire 4.0.4, il existe un appartement Z contenant d, c_1 et c_2, ce qui prouve que $\rho_1(d) = \rho_2(d)$.

Dans l'autre situation, appelons c_2' la chambre adjacente à c_1 le long de f dans B. Cette chambre c_2' est donc dans l'enclos de c_1 et de d. Si $c_2' = c_2$ alors c_1, c_2 et d sont dans un même appartement, d'où $\rho_1(d) = \rho_2(d)$ et c_2 est bien dans l'enclos de c_1 et de d. Il ne reste donc qu'à vérifier que si $c_2 \neq c_2'$ alors $\rho_2(d) = \sigma \circ \rho_1(d)$ et c_2' n'est pas dans l'enclos de c_1 et d. Le deuxième point est prouvé car nous disposons d'un appartement, B qui contient c_1 et d, mais pas c_2 sans quoi il y aurait trois chambres contenant f dans B.

Pour prouver le premier point, constatons que la formule $\rho_2(x) = \sigma \circ \rho_1(x)$ est vraie lorsque $d = c_2'$. Soit B^+ le demi appartement délimité par $\phi^{-1}(M)$ et contenant c_2', donc également d. Par le corollaire 4.0.4, il existe un autre appartement B' contenant B^+ et c_2. Si $\phi' : B' \to A$ est l'isomorphisme correspondant, alors $\rho_2(d) = \phi'(d)$ et l'égalité $\rho_2(c_2) = \sigma \circ \rho_1(c_2)$ devient $\phi'(c_2) = \sigma \circ \phi(c_2)$. Restreignons $\sigma \circ \phi$ et ϕ' à B^+ : nous obtenons deux morphismes de complexe de chambre injectifs de B^+ dans A, qui coïncident en c_2. Comme B^+ est convexe, ceci entraîne que ϕ' et $\sigma \circ \phi$ coïncident sur B^+. □

4.5 Inclusion de deux galeries tendues dans un appartement

4.5.1 Le théorème

Définition 4.5.1. *Soit $\Gamma = (c_i)_{i\in I}$ une galerie. Une sous-galerie de Γ est une galerie obtenue en enlevant un nombre fini de chambres à Γ. Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ et où Γ est tendue, une sous-galerie de Γ est donc de la forme $(c_i)_{i\geq i_0}$ pour un $i_0 \in \mathbb{N}$.*

Théorème 4.5.2. *Soient $\Gamma = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\Delta = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux galerie tendues. Alors il existe une sous-galerie de Γ et une sous-galerie de Δ qui sont incluses dans un même appartement.*

Démonstration:

Notations :

Soit A un appartement contenant Γ. Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $\rho_i = \rho_{c_i,A}$, M_i le mur de A entre c_i et c_{i+1}, σ_i la réflexion selon M_i, de sorte que pour tout i et pour toute chambre c de $\mathcal{I}$, on a en vertu de la proposition 4.4.1 $\rho_{i+1}(c) = \rho_i(c)$ ou $\rho_{i+1}(c) = \sigma_i \circ \rho_i(c)$. Remarquons que par continuité de ρ_{i+1}, la même formule s'applique pour le calcul de ρ_{i+1} pour deux chambres adjacentes, sauf dans le cas où ces deux chambres sont projetées par ρ_i sur des chambre adjacentes à M_i.

Choisissons un point spécial 0 pour identifier A et $\vec{A}$. Quitte à réduire Γ, cette galerie est incluse dans une chambre vectorielle C. Grâce à la proposition 4.3.1, on voit que, quitte à la réduire, la rétraction d'une galerie tendue est une galerie tendue. En particulier, $\rho_i(\Delta)$ est incluse à translation près dans une chambre vectorielle. Choisissons D_i une chambre vectorielle à distance maximale de C contenant un translaté de $\rho_i(\Delta)$. Notons enfin δ_i la distance entre la chambre C et D_i. Comme le complexe de Coxeter vectoriel est fini, les δ_i sont majorées par une certaine constante δ_{max}.

Plan de la preuve :

Pendant cette démonstration, nous allons étudier en quoi ρ_i peut différer de ρ_{i+1}. Nous verrons qu'il y a trois cas à distinguer : soit ρ_i et ρ_{i+1} coïncident sur presque toutes les chambres de Δ, soit elles diffèrent sur un nombre infini de ces chambres et $\delta_{i+1} > \delta_i$, soit elles diffèrent sur un nombre infini de ces chambres et $\delta_{i+1} = \delta_i$. Nous allons commencer par traiter le cas où seul le premier cas intervient (lemme 4.5.4). Ensuite, nous allons vérifier que les trois cas cités sont effectivement les seuls possibles, nous en profiterons pour analyser un peu plus en détail le deuxième cas (lemme 4.5.5). Alors nous verrons qu'on peut réduire Γ pour se ramener à une situation où le deuxième cas n'apparaît pas, puis qu'on peut la réduire une seconde fois pour que le troisième cas n'apparaisse plus non plus.

Lemme 4.5.3. *Supposons que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour toute chambre d de Δ, $\rho_i(d) = \rho_{i+1}(d) = \rho(d)$. Alors Γ et Δ sont dans un même appartement.*

Preuve du lemme:

Par le corollaire 4.4.2, pour toute chambre d de Δ et tout $i \in \mathbb{N}$, d, c_i et c_{i+1} sont inclus dans un même appartement. Par ailleurs, quitte à réduire Δ, on peut supposer que Δ est incluse dans un appartement contenant aussi c_1. L'égalité des W-distances $\delta(a,c) = \delta(a,b)\delta(b,c)$ est alors réalisée dans le cas où $\{a,b,c\} = \{c_1,d,d'\}$, avec $d,d' \in \Delta$, et dans le cas où $\{a,b,c\} = \{c_i,c_{i+1},d\}$, avec $i \in \mathbb{N}$ et $d \in \Delta$ (et bien sûr aussi dans le cas $\{a,b,c\} \subset \Gamma$ ou $\{a,b,c\} \subset \Delta$). Le cas $\{a,b,c\} = \{c_i,c_j,d\}$, $i,j \in \mathbb{N}$ et $d \in \Delta$, s'obtient aisément par récurrence sur $|i-j|$. Le dernier cas est $\{a,b,c\} = \{d,d',c_i\}$ avec $d,d' \in \Delta$, il se traite à partir des cas précédents : $\delta(d,d') = \delta(d,c_1)\delta(c_1,d') = \delta(d,c_i)\delta(c_i,c_1)\delta(c_1,c_i)\delta(c_i,d') = \delta(d,c_i)\delta(c_i,d')$.

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 4.0.2 : Γ et Δ sont incluses dans un même appartement. □

Lemme 4.5.4. *Supposons que pour tout i, $\rho_i(d) = \rho_{i+1}(d) = \rho(d)$ pour toutes les chambres d de Δ sauf un nombre fini. Alors Γ et Δ sont incluses dans un même appartement.*

Preuve du lemme:

Nous allons construire par récurrence une sous-galerie Δ' de Δ telle que le lemme 4.5.3 s'applique à Γ et Δ'. Plus précisément, nous allons construire pour tout $i \in \mathbb{N}$ une sous-galerie Δ_i de Δ telle que $\forall k < i$, $\forall d \in \Delta_i$, $\rho_k(d) = \rho_{k+1}(d)$.

Pour des raisons techniques, nous allons imposer en outre que $\rho_i(\Delta_i) = \rho_1(\Delta_i)$ est une galerie tendue. Ensuite, nous vérifierons que la suite (Δ_i) est stationnaire à partir d'un certain rang, alors la "limite" de cette suite conviendra.
Commençons par choisir pour Δ_1 une sous galerie de Δ telle que $\rho_1(\Delta_1)$ est tendue. Supposons ensuite construite Δ_i, et construisons Δ_{i+1}. Supposons qu'il existe $d_k \in \Delta_i$ tel que $\rho_{i+1}(d_k) = \sigma_i \circ \rho_i(d_k)$. Par la proposition 4.4.1, $\rho_i(d_k)$ est dans le demi-appartement $\mathcal{D}(M_i, c_{i+1})$. Comme par hypothèse seul un nombre fini de chambres e de Δ vérifient $\rho_{i+1}(e) = \sigma_i \circ \rho_i(e)$, il existe $d_l \in \Delta_i$ tel que $\rho_{i+1}(d_l) = \rho_i(d_l)$. Nous pouvons choisir d_k et d_l adjacentes, c'est à dire $l = k \pm 1$. Alors $\rho_i(d_k), \rho_i(d_l) = \rho_{i+1}(d_l), \rho_{i+1}(d_k)$ est une galerie de longueur 2 dans A, donc $d(\rho_i(d_k), \rho_{i+1}(d_k)) \leq 2$. Mais $\rho_{i+1}(d_k) = \sigma_i(\rho_i(d_k))$ donc $d(\rho_i(d_k), \rho_{i+1}(d_k))$ est impair. En effet σ_i induit une involution sur l'ensemble des murs séparant $\rho_i(d_k)$ et $\rho_{i+1}(d_k)$, et cette involution n'a qu'un point fixe, M_i, car un mur stabilisé par σ_i ne peut séparer un point et son image par σ_i. Il y a donc un nombre impair de murs séparant $\rho_i(d_k)$ et $\rho_{i+1}(d_k)$.

Ainsi $d(\rho_i(d_k), \rho_{i+1}(d_k)) = 1$, les deux chambres $\rho_i(d_k)$ et $\rho_{i+1}(d_k)$ sont de part et d'autre de M_i, et $\rho_{i+1}(d_k) = \rho_{i+1}(d_l) = \rho_i(d_l)$. Comme $\rho_i(\Delta_i)$ est tendue, elle ne peut couper M_i une autre fois : k et l sont donc les seuls indices adjacents tels que $\rho_{i+1}(d_k) = \sigma_i \circ \rho_i(d_k)$ et $\rho_{i+1}(d_l) = \rho_i(d_l)$. Nous en déduisons que la première formule est vraie pour tous les indices inférieurs à k, et la seconde pour tous les indices supérieurs à k (en particulier, $l = k + 1$). Nous avons donc une description précise de la situation : une partie finie de $\rho_i(\Delta)$ est dans le demi-appartement $\mathcal{D}(M_i, c_{i+1})$, et c'est précisément cette partie qui va être déplacée lors du passage à ρ_{i+1}. On pose $\Delta_{i+1} = (d_j)_{j \geq k}$, et cela conclut la construction de la suite (Δ_i).

Il reste à vérifier qu'au cours de cette construction, il n'y a qu'un nombre fini d'étapes où on a réellement retiré des chambres à Δ_i pour obtenir Δ_{i+1}. Soit I l'ensemble des indices i tel que Δ_{i+1} est différent de Δ_i. Nous allons montrer qu'il ne peut y avoir deux indices i et j dans I tels que $\vec{M}_i = \vec{M}_j$, ce qui prouvera que I est fini puisque l'ensemble des murs vectoriels est fini. Supposons par l'absurde l'existence de tels i et j, avec $i < j$. Lors de la construction de Δ_{i+1}, on a fait en sorte que $\rho_{i+1}(\Delta_{i+1})$ soit inclus dans $\mathcal{D}(M_i, c_i)$. Comme Γ est tendue et $\vec{M}_i = \vec{M}_j$, $\mathcal{D}(M_i, c_i) \subset \mathcal{D}(M_j, c_j)$. D'après la construction, la galerie $\rho_j(\Delta_j)$ est une sous galerie de $\rho_i(\Delta_i)$, elle est donc incluse dans $\mathcal{D}(M_j, c_j)$. Mais cela implique alors que $\rho_{j+1|\Delta_j} = \rho_{j|\Delta_j}$ et cela contredit le fait que $j \in I$. □

Lemme 4.5.5. *Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que que $\rho_i \neq \rho_{i+1}$ pour un nombre infini de chambres de Δ. Supposons $\delta_i \leq \delta_{i+1}$.*
Alors $\delta_i = \delta_{i+1}$ et on peut supposer $D_{i+1} = D_i$. De plus, $\rho_i(\Delta)$ reste à distance bornée de M_i.

Preuve du lemme: Comme $\rho_i(\Delta)$ est tendue à partir d'un certain rang, on a $\rho_{i+1}(d) \neq \rho_i(d)$ pour toute chambre d de Δ à partir d'un certain rang.

Tout d'abord, $\rho_i(\Delta)$ est à partir d'un certain rang dans le demi appartement $\mathcal{D}(M_i, c_{i+1})$.

Par ailleurs, $\rho_{i+1}(\Delta)$ est à translation près dans la chambre $\vec{\sigma}_i(D_i)$, donc $d(C, D_i) \geq d(C, \vec{\sigma}_i(D_i))$. Cela signifie que $\vec{M}_i$ sépare C et D_i. Mais M_i est un translaté de $\vec{M}_i$ dans la direction de C. (Pour résumer les placements des différentes parties étudiées par rapport aux deux murs M_i et $\vec{M}_i$, on peut noter : $\Gamma, c_{i+1}, \rho_i(\Delta)|^{M_i} c_i|^{\vec{M}_i} D_i$, où $|^M$ symbolise le mur M.) Le point qui nous intéresse est celui-ci : un translaté de $\rho_i(\Delta)$ est dans $\mathcal{D}(M_i, c_{i+1})$ donc dans $\mathcal{D}(\vec{M}_i, C)$ et un autre translaté est dans D_i donc dans $-\mathcal{D}(\vec{M}_i, C)$. Cela implique que $\rho_i(\Delta)$ reste à distance bornée de $\vec{M}_i$, au sens où il existe un majorant M à la distance entre une chambre de $\rho_i(\Delta)$ et M_i.
Alors $2M$ est un majorant de la distance entre $\rho_i(d)$ et $\rho_{i+1}(d)$ pour les chambres $d \in \Delta$. Ceci implique que $\rho_{i+1}(\Delta)$ est incluse à translation près dans la même chambre vectorielle que $\rho_i(\Delta)$, c'est-à-dire dans D_i. Mais comme $\delta_{i+1} \leq \delta_i$, on trouve que $\delta_{i+1} = \delta_i$ et on peut choisir $D_{i+1} = D_i$. □

Fin de la démonstration de 4.5.2 :

Lorsque $\rho_i = \rho_{i+1}$ pour presque toutes les chambres de Δ, il est clair que $\delta_i = \delta_{i+1}$, et qu'on peut choisir $D_{i+1} = D_i$. Lorsque $\rho_i \neq \rho_{i+1}$ pour un nombre infini de ces chambres, nous venons de voir que $\delta_{i+1} \leq \delta_i$ implique que $\delta_{i+1} = \delta_i$ et qu'on peut encore supposer $D_{i+1} = D_i$. Donc la fonction $i \mapsto \delta_i$ est croissante. Comme elle est bornée par δ_{max}, elle est constante à partir d'un certain rang. Quitte à raccourcir Γ, on peut la supposer constante. Nous sommes alors pour tout i soit dans le cas de lemme 4.5.5, soit dans le cas $\rho_i = \rho_{i+1}$ pour presque toutes les chambres de Δ. En particulier on peut supposer que pour tout i, $D_i = D_1$. Il s'agit bien sûr de se ramener à présent au cas du lemme 4.5.4.

Soit F la facette vectorielle égale à l'intersection de tous les murs vectoriels à distance bornée desquels reste $\rho_1(\Delta)$.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des murs vectoriels contenant F, soit $W_F^v = \{w \in W^v | wF = F\}$. Nous allons montrer que pour tout i, $\mathcal{M}$ est égal à l'ensemble des murs à distance bornée desquels reste $\rho_i(\Delta)$.

Commençons par $i = 1$. Soient $M_1, .., M_k$ les murs à distance bornée desquels reste $\rho_1(\Delta)$, il s'agit en fait de vérifier que $\mathcal{M} = \{M_1, ..., M_k\}$. Soient $\alpha_1, .., \alpha_k$ des formes linéaires tels que $M_j = \ker \alpha_j$. Soit $M = \ker \alpha$ un mur dans $\mathcal{M}$. Alors α est combinaison linéaire des α_j. Mais chaque α_j est bornée sur $\rho_1(\Delta)$, donc α est également bornée sur $\rho_1(\delta)$, c'est à dire que $\rho_1(\Delta)$ reste à distance bornée de M.

Supposons à présent le résultat vrai au rang i. Si ρ_i et ρ_{i+1} ne diffèrent que sur un nombre fini de chambres de Δ, le résultat reste évidemment vrai au rang $i + 1$. Sinon, par le lemme 4.5.5, $\rho_i(\Delta)$ reste à distance bornée de M_i, et par hypothèse de récurrence, $\vec{M}_i \in \mathcal{M}$, et $\sigma_i \in W_F^v$. L'ensemble des murs à distance bornée de $\rho_{i+1}(\Delta)$ est donc $\sigma_i(\mathcal{M})$, mais ceci vaut $\mathcal{M}$ puisque σ_i fixe F.

On utilise maintenant la compactification de A définie par $\mathcal{F} = \{$facettes vectorielles de Weyl$\}$ (c'est à dire la compactification polygonale classique). Soit p la projection de A sur l'espace affine $A_F \simeq A/\mathrm{Vect}(\vec{F})$. On prend $p(0)$ comme origine dans A_F pour l'identifier à son espace vectoriel directeur. L'ensemble $\mathcal{M}$ s'identifie (via p) à l'ensemble des murs vectoriel de A_F, $W_F^v = \mathrm{Stab}_{W^v}(F)$ est le groupe de Coxeter vectoriel. L'ensemble des murs affines de A_F est $\{p(M) | M$ mur affine de A et $\vec{M} \in \mathcal{M}\}$, et si $M \in \mathcal{M}$ on notera encore M au lieu de $p_F(M)$. Enfin, si $w \in W$ vérifie $\vec{w} \in W_F^v$ alors w agit sur A_F en préservant les murs, notons $\tilde{w} \in GA(A_F)$ l'automorphisme affine induit par w sur A_F. (Attention : la fonction $w \mapsto \tilde{w}$ n'est pas injective et $\tilde{w}$ n'est pas forcement dans le groupe de Coxeter de A_F.)

Chaque galerie $\rho_i(\Delta)$ est tendue à partir d'un certain rang, et reste à distance bornée des murs de $\mathcal{M}$, elle ne coupe donc qu'un nombre fini de murs parallèles à un mur de $\mathcal{M}$. Donc à partir d'un certain rang, sa projection sur A_F reste dans une unique chambre de A_F, notons cette chambre g_i. Les chambres vectorielles C et D_1 sont également projetées dans des chambres vectorielles de A_F (de manière pas nécessairement surjective a priori), qu'on notera encore C et D_1 pour simplifier. Nous avons vu dans le lemme 4.5.5 que $\vec{M}_i$ sépare C et D_1, si $\rho_{i+1} \neq \rho_i$ pour un nombre infini de chambres de Δ. Comme $\vec{M}_i \in \mathcal{M}$, M_i est un mur de A_F, et la relation "M_i sépare D_1 et C" est encore vraie dans A_F. On a de plus dans ce cas que $g_{i+1} = \tilde{\sigma}_i(g_i)$. Mais M_i est un translaté de $\vec{M}_i$ dans la direction de C, donc M_i sépare g_i et D_1. Ceci entraîne que g_{i+1} est strictement plus proche de D_1 que g_i, au sens où pour toute chambre e incluse dans D_1, $d(e, g_{i+1}) < d(e, g_i)$.

Et s'il existe i tel que $g_i \in D_1$, alors la suite des g_k est constante pour $k \geq i$. Car si $g_k \subset D_1$, il n'est plus possible que M_k sépare D_1 de g_k, donc plus possible que $g_{k+1} = \tilde{\sigma}_k(g_k)$.

Nous avons donc prouvé que la suite (g_i) est finalement stationnaire. Nous pouvons raccourcir Γ de sorte qu'elle soit complètement stationnaire. Cela implique que pour tout i, $\rho_i \neq \rho_{i+1}$ seulement pour un nombre fini de chambres de Δ. Mais c'est précisément la situation du lemme 4.5.4, ce qui conclut la démonstration. □

4.5.2 Conséquences

Nous voici en mesure d'énoncer les résultats les plus forts de cette partie. Nous allons voir par exemple qu'étant donnés deux cônes affines f et g, il existe un appartement A contenant non seulement des sous-cônes parallèles de f et g, mais encore un "épaississement" de ces sous-cônes parallèles. Précisément, A contiendra des cheminées de direction $\vec{f}$ et $\vec{g}$, contenant des scp de f et g et dont les bases sont des chambres (4.5.7).

Pour commencer, le théorème permet de prouver que deux demi-droites peuvent être réduites pour être incluses dans un même appartement :

Proposition 4.5.6. *Soient δ_1 et δ_2 deux demi-droites. Alors il existe δ_1' et δ_2' deux demi-droites incluses respectivement dans δ_1 et δ_2 et un appartement Z tel que $\delta_1' \cup \delta_2' \subset Z$. Dès lors, Z contient $Cl(\delta_1') \cup Cl(\delta_2')$.*

preuve : Cela découle de la proposition 4.2.7 et du théorème 4.5.2 □

Ceci permet de traduire le théorème en terme de cheminées :

Proposition 4.5.7. *Soient R_1 et R_2 deux cheminées, dans les appartement respectifs A_1 et A_2. Alors il existe R'_1 scp R_1 et R'_2 scp R_2 deux sous cheminées pleines qui sont incluses dans un même appartement.*

Démonstration: Soient δ_1 et δ_2 des demi-droites caractéristiques de R_1 et R_2. Soit B contenant une demi-droite δ'_1 incluse dans δ_1 et une demi-droite δ'_2 incluse dans δ_2. Alors B contient $\mathrm{Cl}(\delta'_1)$ qui est une scp de R_1 et $\mathrm{Cl}(\delta'_2)$ qui est une scp de R_2. □

Le même procédé permet quelques variations :

Proposition 4.5.8.

1. *Soit R une cheminée et c une chambre, alors il existe un appartement contenant c et une scp de R*
2. *Soient deux cônes $f = x + \vec{f}$ et $g = y + \vec{g}$ où $\vec{f} \subset \vec{A}$ et $\vec{g} \subset \vec{B}$ sont inclus dans des facettes de Weyl. Alors il existe un appartement contenant des sous-cônes parallèles f' et g' de f et g.*
3. *Soit $f = x + \vec{f}$ comme au point précédent, et soit c une chambre, alors il existe un appartement contenant c et un scp de f.*

Démonstration:

1. Soit δ une demi-droite caractéristique de R, Γ une galerie tendue la contenant dans son adhérence. D'après 4.3.2, il existe $Z \in \mathcal{A}$ contenant c et une sous-galerie de Γ, alors Z contient c et une scp de R.

2. Soit $\delta_1 = x + \vec{\delta}_1$ et $\delta_2 = y + \vec{\delta}_2$ avec $\vec{\delta}_1 \subset \vec{f}$ et $\vec{\delta}_2 \subset \vec{g}$. Soit $B \in \mathcal{A}$ et δ'_1, δ'_2 des sous-demi-droites de δ_1 et δ_2 tels que $\delta'_1 \cup \delta'_2 \subset B$. Alors $\mathrm{Cl}(\delta'_1) \cup \mathrm{Cl}(\delta'_2) \subset B$. Mais nous savons que $\mathrm{Cl}(\delta'_1) = \mathrm{Cl}(c_1 + \vec{h}_1)$ où c est la facette affine contenant le sommet de δ'_1 et $\vec{h}_1$ est la facette vectorielle contenant la direction de δ'_1, c'est-à-dire $\vec{\delta}_1$. Alors $\vec{f} \subset \vec{h}_1$. De plus, c_1 contient le sommet s_1 de δ'_1, qui est un point de f. Donc au final, $\mathrm{Cl}(c_1 + \vec{h}_1)$ contient un scp $s_1 + \vec{f}$ de f. De même, $\mathrm{Cl}(\delta'_2)$ contient un scp de g.

3. Ce point est semblable aux précédents.

□

Faisons tout de suite le lien avec les coeurs de cônes affines :

Corollaire 4.5.9. *Soient $f \in \mathcal{F}_A$ et $g \in \mathcal{F}_B$ deux cônes affines. Alors il existe un appartement Z contenant un scp de $\delta(f)$ et un scp de $\delta(g)$.*

Ceci provient du fait que $\mathrm{Cl}(\delta(f))$ et $\mathrm{Cl}(\delta(g))$ sont des cheminées.

Remarque: Tout ceci généralise le fait bien connu que deux quartiers contiennent des sous-quartiers inclus dans un même appartement ([Ron89] proposition 9.5 page 121).

4.6 Systèmes d'appartements

Rappelons que selon les conventions adoptées ici, un immeuble est muni par définition d'un système d'appartements, de sorte que rigoureusement, l'immeuble étudié devrait être dénoté par $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$, $\mathcal{I}$ n'étant que l'ensemble sous-jacent. Si la définition des facettes est indépendante du système d'appartements choisis, celle des quartiers et autres cônes lui est au contraire très liée.

Jusqu'ici, nous avons toujours supposé que $\mathcal{A}$ était le système complet d'appartements, mais il peut être intéressant de noter que les résultats précédents sont encore vrais pour d'autres systèmes d'appartements (la construction d'un compactifié de $\mathcal{I}$ ne sera cependant possible qu'en munissant $\mathcal{I}$ de son système complet d'appartements). Nous allons étudier ici le cas d'un système d'appartements $\mathcal{A}'$ qui permet la définition d'un immeuble sphérique à l'infini $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')^\infty$, c'est-à-dire que deux quartiers de $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')$ contiennent toujours des sous-quartiers contenus dans un même

appartement de $\mathcal{A}'$. Un tel système d'appartements pourra être qualifié de "cohérent" ou "double" car c'est le type de système d'appartement qui provient d'un système de Tits double selon la terminologie de [BT72] 5.1.3.

Fixons avant tout un peu de formalisme ($\mathcal{A}$ est toujours le système complet d'appartements) :

Définition 4.6.1. *Un système d'appartements pour $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ est un sous-ensemble $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ tel que deux chambres de $\mathcal{I}$ sont toujours incluses dans un élément de $\mathcal{A}'$.*

La proposition suivante est alors immédiatement vérifiée :

Proposition 4.6.2.
- *Si $\mathcal{A}'$ est un système d'appartements pour $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$, alors $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')$ est un immeuble.*
- *Soit $A \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ une partie bornée de A. Alors il existe $A' \in \mathcal{A}'$ contenant $\mathcal{B}$.*

Définition 4.6.3. *Un système d'appartements $\mathcal{A}'$ pour $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ est dit double, ou cohérent, si pour tous quartiers Q_1 et Q_2 de $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')$, il existe des sous-quartiers Q_1' et Q_2' ainsi qu'un appartement $A \in \mathcal{A}'$ tels que $Q_1' \cup Q_2' \subset A$.*

D'après la proposition 4.5.8, le système complet d'appartements $\mathcal{A}$ est double.
Pour tout système double d'appartements, on peut définir l'immeuble sphérique à l'infini $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')^\infty$, voir [Wei09].

On fixe à présent un système double d'appartements. La proposition suivante est la proposition 10.28 de [Wei09] (où un système d'appartements est par définition double, et où un système "plein" est un système où la conclusion de la proposition suivante est vraie), elle affirme que le deuxième point du corollaire 4.0.4 est encore vrai dans $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')$:

Proposition 4.6.4. *Soit α un demi-appartement de $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')$, et c une chambre ayant une cloison dans $\partial\alpha$, alors il existe $A \in \mathcal{A}'$ tel que $\alpha \cup c \subset A$.*

Voici les grandes lignes de la démonstration :

Soit m la cloison de c incluse dans $\partial\alpha$, on peut supposer que m contient un sommet spécial o. Alors l'immeuble à l'infini $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')^\infty$ est isomorphe à l'ensemble des facettes de quartier de sommet o, et l'application $p : (\mathcal{I}, \mathcal{A}')^\infty \to o^*$ est un morphisme surjectif.

Soit Z contenant α, soient x et y les chambres de Z contenant m, avec $x \in \alpha$, $y \in -\alpha$. Soit d la chambre opposée à y dans $o^* \cap Z$.

Soient Q_x, Q_y, Q_d les quartiers inclus dans Z, de sommet o, contenant x, y et d respectivement, ces quartiers définissent des chambres à l'infini x^∞, y^∞ et d^∞. L'intersection de x^∞ et y^∞ est la cloison m^∞ de $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')^\infty$ correspondant au cône inclus dans $\partial\alpha$, de sommet o et contenant m.

Nous voulons à présent montrer qu'il existe une chambre $c^\infty \in (m^\infty)^*$ telle que $p(c^\infty) = c$. Ceci provient de [Wei09] 29.53, on reproduit ici l'argument.

Soit $Y \in \mathcal{A}'$ contenant x et c, soit x' l'opposée de x dans Y, donc il existe une galerie minimale Γ de x à x' passant par c, de longueur égale au diamètre d de o^* et de $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')^\infty$. Soit $x'^\infty \in (\mathcal{I}, \mathcal{A}')^\infty$ telle que $p(x'^\infty) = x'$. Comme p est un morphisme de complexes de chambres, on a $d(x, x') \leq d(x^\infty, x'^\infty)$, mais comme $d(x, x') = d$ est déjà maximale, on a en fait égalité. Donc x^∞ et x'^∞ sont opposées, et il existe une galerie Γ^∞ reliant x^∞ à x'^∞ de même type que Γ. Cette galerie est alors envoyée par p sur Γ, par conséquent on peut choisir pour c^∞ sa deuxième chambre.

Ensuite, il existe A tel que l'appartement à l'infini A^∞ contient c^∞ et d^∞, donc A contient des scp de Q_c et Q_d. Comme ces quartiers sont opposés en o, A contient en fait $Q_c \cup Q_d$ et donc en particulier c. D'autre part, A^∞ contient toute galerie tendue de d^∞ à c^∞, et il en existe une qui passe par x^∞. Donc A contient un scp de Q_x, mais comme A contient le sommet o de Q_x, on obtient $Q_x \subset A$. Alors par clôture de $A \cap Z$, $\alpha \subset A$. □

Corollaire 4.6.5. *Le résultat de 4.3.1 est encore vrai pour un immeuble muni d'un système double d'appartements.*

Les corollaires de la proposition 4.3.1 sont eux aussi encore vrais pour un système double d'appartements, si on part d'une galerie tendue ou d'une facette de quartier déjà incluse dans un appartement de $\mathcal{A}'$:

Corollaire 4.6.6.

- *Soit Γ une galerie tendue incluse dans un appartement de $\mathcal{A}'$ et c une chambre, alors il existe $A \in \mathcal{A}'$ contenant c et une sous-galerie de Γ.*
- *Soit f une facette de quartier dans un appartement de $\mathcal{A}'$ et c une chambre, alors il existe $A \in \mathcal{A}'$ contenant c et un scp de f.*

La proposition 4.5.7 reste elle aussi vraie dans un système double d'appartements :

Proposition 4.6.7. *Soient R_1 et R_2 deux cheminées de $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')$, alors il existe $A \in \mathcal{A}'$ contenant des sous-cheminées pleines de R_1 et R_2.*

Démonstration:

Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{A}'$ des appartements contenant R_1 et R_2, respectivement. Quitte à raccourcir R_1 et R_2, il existe un appartement Z dans le système complet $\mathcal{A}$ d'appartements tel que $R_1 \cup R_2 \subset Z$. Par le lemme 4.2.4, on peut supposer que R_1 et R_2 ont pour bases des chambres, disons $R_1 = \mathrm{Cl}(c_1 + \vec{f_1})$ et $R_2 = \mathrm{Cl}(c_2 + \vec{f_2})$. Soient $\delta_1 = s_1 + \mathbb{R}^+\vec{v}_1$ et $\delta_2 = s_2 + \mathbb{R}^+\vec{v}_2$ des droites caractéristiques pour R_1 et R_2 ; le fait de supposer que les bases de ces cheminées sont des chambres entraîne que R_i contient un voisinage de δ_i, pour $i \in \{1, 2\}$. En particulier, $Z \cap A_i$ contient un ouvert, ce qui fournit un isomorphisme canonique entre $\vec{Z}$ et $\vec{A_i}$.

Notons $M_t^i = s_i + t\vec{v}_i$, pour $i \in \{1, 2\}$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Quitte à déplacer s_2 à l'intérieur de c_2, on peut supposer que pour t assez grand, $\overrightarrow{M_t^1 M_t^2} = \overrightarrow{s_1 s_2} + t(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ est dans une chambre $\vec{D}$ de $\vec{Z}$. En raccourcissant δ_1 et δ_2, on peut supposer que c'est le cas pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Soit $\vec{D}_i$ la chambre correspondant à $\vec{D}$ dans $\vec{A_i}$. Alors $s_1 + \vec{D}_1$ et $s_2 - \vec{D}_2$ sont deux quartiers de $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')$, et il existe $A \in \mathcal{A}'$ contenant des sous-quartiers $s_1' + \vec{D}_1$ et $s_2' - \vec{D}_2$. Montrons que A contient $\delta_1 \cup \delta_2$.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Il existe $N_t^1, N_t^2 \in]M_t^1, M_t^2[$ tels que $[M_t^1, N_t^1[\subset A_1 \cap Z$ et $]N_t^2, M_t^2] \subset A_2 \cap Z$. On peut donc prolonger de manière unique le segment $[M_t^1, M_t^2]$ en un ensemble D_t, dans l'appartement A_1 d'un côté et dans A_2 de l'autre, de sorte que $D_t \cap A_1$ et $D_t \cap A_2$ soient des demi-droites. Comme $\overrightarrow{M_t^1 N_t^1} \in \vec{D}_1$ et $\overrightarrow{M_t^2 N_t^2} \in -\vec{D}_2$, on voit que $D_t \cap (s_1' + \vec{D}_1)$ et $D_t \cap (s_2' - \vec{D}_2)$ sont deux demi-droites (non vides).

Montrons que D_t est une droite. On note $D_i = D_t \cap A_i$ et $D_Z = D_t \cap Z$, donc $D_i \cap D_Z$ est un segment non trivial. Soit $i \in \{1, 2\}$, on commence par montrer que $D_i \cup D_Z$ est une géodésique.

Soit c une chambre de $Z \cap A_i$ telle que $\overline{c}$ contient un segment non trivial de $D_i \cap D_Z$, et soit ρ la rétraction $\rho_{c,Z}$. Alors $\rho(D_i \cup D_Z)$ est une demi-droite dans Z. Soient $x, y \in D_i \cup D_Z$, notons $l_{D_t}(x, y)$ (resp. $l_{\rho(\mathcal{D}_t)}(\rho(x), \rho(y))$) la longueur de la partie de D_t entre x et y (resp. de $\rho(D_t)$ entre $\rho(x)$ et $\rho(y)$). Alors, en utilisant successivement que $\rho(D_i \cup D_Z)$ est une demi-droite, que ρ induit une isométrie sur D_i et sur D_Z et que ρ diminue les distances : $d(\rho(x), \rho(y)) = l_{\rho(\mathcal{D}_t)}(\rho(x), \rho(y)) = l_{D_t}(x, y) \geq d(x, y) \geq d(\rho(x), \rho(y))$. Par conséquent, $d(x, y) = d(\rho(x), \rho(y)$ pour tous $x, y \in D_i \cup D_Z$. Comme $\rho(D_i \cup D_Z)$ en est une, ceci prouve que $D_i \cup D_Z$ est une géodésique, grâce à l'égalité $[x, y] = \{z \mid d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$.

Ainsi, $D_1 \cup D_Z$ et $D_2 \cup D_Z$ sont des géodésiques. Soit d une chambre de Z telle que $\overline{d}$ contient un segment non trivial de D_Z, alors $\rho_{d,Z}(D_1 \cup D_Z \cup D_2)$ est une droite de Z. Le même raisonnement que précédemment prouve maintenant que $D_t = D_1 \cup D_Z \cup D_2$ est une géodésique, donc une droite.

Comme A contient deux demi-droites opposées de D_t, il contient D_t, donc en particulier $[M_t^1, M_t^2]$. Donc $\delta_1 \cup \delta_2 \subset A$, d'où $R_1 \cup R_2 \subset A$. □

Corollaire 4.6.8.

- *Soit R une cheminée de $(\mathcal{I}, \mathcal{A}')$, et c une chambre, alors il existe $A \in \mathcal{A}'$ contenant c et une scp de R.*
- *Soient f et g deux cônes de direction incluse dans une facette de Weyl, alors il existe $A \in \mathcal{A}'$ contenant un scp de f et un scp de f.*
- *Soient Γ_1 et Γ_2 deux galeries, chacune incluse dans un appartement de $\mathcal{A}'$. Alors il existe $A \in \mathcal{A}'$ contenant des sous-galeries de Γ_1 et Γ_2.*

Démonstration: Les deux premiers points forment l'analogue de 4.5.8, ils sont clairs. Le troisième point est l'analogue de 4.5.2 à ceci près qu'il faut bien supposer Γ_1 et Γ_2 incluse à priori dans des appartements de $\mathcal{A}'$. Pour le prouver, il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 4.6.9. *Soit $\Gamma = c_0, c_1, ...$ une galerie tendue infinie dans un appartement A. Alors il existe une cheminée R contenant une sous-galerie de Γ et telle que toute scp de R contient une sous-galerie de Γ.*

Preuve du lemme:

Pour toute racine vectorielle $\vec{\alpha}$, une et une seule des trois possibilités suivantes est vérifiée (les racines sont vues ici comme des demi-appartements) :

1. Il existe une racine α de direction $\vec{\alpha}$ contenant une sous-galerie de Γ, et toute racine de direction $-\vec{\alpha}$ ne contient qu'une nombre fini de chambres de Γ.
2. Il existe une racine $-\alpha$ de direction $-\vec{\alpha}$ contenant une sous-galerie de Γ, et toute racine de direction $\vec{\alpha}$ ne contient qu'une nombre fini de chambres de Γ.
3. Il existe une racine α de direction $\vec{\alpha}$ telle que α et $-\alpha - 1$ contiennent des sous-galeries de Γ. Une telle racine α est alors unique.

Soit N l'ensemble des racines affines obtenues dans le cas 3., soit i_0 le premier indice tel que $c_{i_0} \subset \bigcap_{\alpha\in N}(\alpha \cap (-\alpha - 1))$. Pour chaque racine vectorielle $\vec{\beta}$ dans le cas 1., soit β la plus petite racine contenant $\{c_i\}_{i\geq i_0}$, soit P l'ensemble de ces racines. Soit la facette vectorielle $\vec{f} = \{\vec{\alpha} = 0 \text{ et } \vec{\beta} > 0, \forall \alpha \in N, \beta \in P\}$. Alors la cheminée $R := \mathrm{Cl}(c_{i_0} + \vec{f}) = \bigcap_{\alpha\in N\cup P} \alpha$ convient. □

4.7 Parallélisme

La notion de cheminée permet, grâce à la proposition 4.5.7, d'étendre la notion de parallélisme à des cônes qui ne sont pas forcément dans le même appartement :

Définition 4.7.1. *Soient f et g deux cônes chacun inclus dans une facette de quartier, de sorte qu'il existe un appartement contenant des scp f' et g' de f et g. On dit que f et g sont parallèles lorsque f' est parallèle à g' dans cet appartement.*

On vérifie facilement que la définition est indépendante des scp et de l'appartement choisi : si f et g sont parallèles, alors dès que deux scp f' et g' sont inclus dans un même appartement A, f' est un translaté de g'.

Nous savons qu'il existe toujours un appartement contenant des scp de f et g lorsque f et g sont (inclus dans) des facettes de quartiers. Lorsque $f \parallel g$, on peut encore améliorer ce résultat : il existe un appartement contenant un des deux cônes en entier. On peut même remplacer un des deux cônes par une cheminée.

Proposition 4.7.2. *Soient f, g deux facettes de quartier parallèles, et $R = Cl(c + \vec{f})$ où c est une chambre c contenant $s(f)$ dans son adhérence (donc $f \subset R$). Alors il existe un appartement contenant R et un scp de g.*

Démonstration:

Soit Z un appartement contenant une scp $R' = \mathrm{Cl}(c' + \vec{f})$ de R et un scp g' de g. Soit f' un scp de f inclus dans R'. Comme $\vec{g'} = \vec{f'}$, et que f'^*_Z est un cône d'intérieur non vide, g' doit couper f'^*_Z. Soit $y \in g' \cap f'^*_Z$. Soit $\vec{C} \subset \vec{Z}$ une chambre vectorielle, contenant $\vec{f'}$ dans son adhérence et telle que $y \in f' + \vec{C}$. Alors $y + \vec{g'} = y + \vec{f'} \subset f' + \vec{C}$. Or, par la proposition 4.3.5, il existe un appartement X contenant $c \cup (f' + \vec{C})$, donc en particulier, $y + \vec{g'}$ est un scp de g inclus dans X. Si A est un appartement contenant f, la clôture de $A \cap X$ implique que $R = \mathrm{Cl}(c \cup (x' + \vec{f'}))$ est également incluse dans X. □

Remarque: Si f et g ne vérifient pas $\vec{f} = \vec{g}$ mais seulement $\vec{f} \subset \overline{\vec{g}}$, alors le résultat de la proposition est encore vrai.

Proposition 4.7.3. *Le parallélisme est une relation d'équivalence.*

Démonstration:
Il est évident que le parallélisme est une relation réflexive et symétrique, montrons la transitivité. Soit $f \parallel g$ et $g \parallel h$ trois cônes inclus dans des facettes de quartiers. On peut supposer f et g inclus dans un appartement A, et h inclus dans un appartement B contenant un scp g' de g. Montrons que $f \parallel h$. On remarque que puisque le parallélisme à l'intérieur d'un appartement fixé est une relation d'équivalence, s'il existe un appartement contenant un scp de chacun des trois cônes f, g et h alors le résultat est vrai.

Soit x le sommet de f et z celui de h. Soit $\Gamma = c_1, ..., c_l$ une galerie minimale entre une chambre de A contenant x dans son adhérence et une chambre de B contenant z dans son adhérence. On raisonne par récurrence sur la longueur l de Γ.

Si $l = 1$, alors x et z sont dans une même chambre fermée $c \subset A \cap B$. Alors $A \cap B \supset \{x\} \cup g'$. Mais la clôture de ceci dans A contient f, d'où $f \subset A \cap B$. Alors B contient f, h et g', et dans B, f est translaté de g' et g' est translaté de h. Ceci implique que $f \parallel h$.

Supposons $l > 1$. Soit $x' \in c_1 \wedge c_2$ et f' le cône de A parallèle à f (et donc à g) de sommet x'. Soit A_2 contenant c_2 et un scp g_2 de g. Alors $A \cap A_2 \supset g_2 \cup \{x'\}$, d'où par convexité, $f' \subset A_2$. Alors la galerie $c_2, ..., c_l$ est de longueur $l - 1$, elle part d'une chambre de A_2 contenant le sommet de f', et $f' \subset A_2$, nous pouvons utiliser l'hypothèse de récurrence pour obtenir que $f' \parallel h$. Enfin, si R est la cheminée $\mathrm{Cl}(c_1 + \vec{f})$ dans A, il existe $Z \supset R \cup h_2$, avec h_2 un scp de h (proposition 4.7.2). Par convexité de $A \cap Z$, $f' \subset Z$. Et par transitivité du parallélisme à l'intérieur de Z, $f \parallel h$. □

5 Construction de $\overline{\mathcal{I}}$

On procède de la même manière que pour la construction de $\overline{A_0}$: l'ensemble $\overline{\mathcal{I}}$ sera un ensemble de cônes quotienté par la relation d'équivalence signifiant que deux cônes ont une intersection de dimension maximale. Ensuite ces cônes, légèrement élargis, fourniront une base de voisinage de la topologie.

5.1 Préliminaires

Voici regroupés quelques résultats techniques qui serviront plusieurs fois dans la suite.

Lemme 5.1.1. *Soient $A, Z, Z' \in \mathcal{A}$, soient $\phi : Z \xrightarrow{\sim} A$ et $\phi' : Z' \xrightarrow{\sim} A$ deux isomorphismes qui coïncident sur une facette $b \subset Z \cap Z'$. Alors il existe $w \in W_A$ qui fixe $\phi(b)$ et tel que $\forall x \in Z \cap Z'$, $\phi(x) = w.\phi'(x)$.*

Preuve du lemme: Soit $\xi : Z' \xrightarrow{\sim} Z$ fixant $Z' \cap Z$. Alors pour tout $x \in Z \cap Z'$, on a $\phi(x) = \phi \circ \xi \circ \phi'^{-1} \circ \phi'(x)$. On pose $w = \phi \circ \xi \circ \phi'^{-1}$: w fixe bien $\phi(b) = \phi'(b)$, donc w convient. □

Proposition 5.1.2. *Soient $A \in \mathcal{A}$, $x \in A$, $\vec{\gamma} \subset \vec{A}$ un cône inclus dans une facette de Weyl, et b une partie d'une facette de A. On suppose que b est incluse dans $x + \vec{\gamma}$, contient une base affine de $\mathrm{Aff}(x + \vec{\gamma})$ et que $x \in \overline{b}$.*

On considère un point $t \in \mathcal{I}$ inclus dans un appartement Z tel que $b \subset A \cap Z$. On suppose que t est envoyé par un isomorphisme $\phi : Z \xrightarrow{\sim} A$ fixant b dans une partie de A de la forme $x + \vec{g}$, où $\vec{g} \subset \vec{A}$ est convexe et incluse dans $\vec{\gamma}^*_A$. On suppose également que $0 \in \overline{\vec{g}}$ et $\vec{g}$ est stable par le fixateur de $\vec{\gamma}$ dans $W_{\vec{A}}$, qu'on note $W_{\vec{\gamma}}$.

Si b' est une autre partie incluse dans une facette, telle que $\vec{\gamma} \subset \overrightarrow{\mathrm{Aff}(b')}$, et $b' \subset b - \vec{\gamma}^*$, si Z' est un appartement contenant b' et t et si ϕ' est un isomorphisme $Z' \xrightarrow{\sim} A$ fixant b', alors $\phi'(t) \in x + \vec{g}$.

Remarque: Par continuité, on obtient directement que si $t \in \overline{Z}$ vérifie $\phi(t) \in \overline{x + \vec{g}}$, alors $\phi'(t) \in \overline{x + \vec{g}}$.

Dans le cas où b et b' sont des chambres (c'est le cas essentiel comme on va le voir dès le début de la preuve), cette proposition s'exprime beaucoup plus clairement :

Corollaire 5.1.3. *Soient x, $\vec{\gamma}$ et $\vec{g}$ comme dans la proposition. Soit c une chambre de A telle que $x \in \overline{c}$ et c' une autre chambre telle que $c' \subset x - \vec{\gamma}^*$. Soit t un point de $\mathcal{I}$ tel que $\rho_{c,A}(t) \in x + \vec{g}$ alors $\rho_{c',A}(t) \in x + \vec{g}$.*

Démonstration de la proposition

Soit $\Gamma = c_1, ..., c_k$ une galerie tendue de b à b', notons $\rho_i = \rho_{A,c_i}$ la rétraction sur A centrée en c_i. Comme b contient une base de $x + \vec{\gamma}$, $x + \vec{g}$ est stable par $\mathrm{Fix}_{W_A}(b)$. On déduit alors du lemme précédent que $\rho_1(t) \in x + \vec{g}$, et que le résultat sera prouvé si nous prouvons que $\rho_k(t) \in x + \vec{g}$. Montrons par récurrence que pour tout $l \in [\![1, k]\!]$, $\rho_l(t) \in x + \vec{g}$, le cas $l = 1$ est déjà vu.

Soit $l \in [\![2, k]\!]$, supposons $\rho_{l-1}(t) \in x + \vec{g}$. Soit M_l le mur de A contenant $c_l \wedge c_{l-1}$. Si M_l sépare, pas forcément strictement, c_l et $\rho_{l-1}(t)$, alors on est dans la disposition : $c_l \ |^{M_l} \ c_{l-1}, \rho_{l-1}(t)$. Alors la proposition 4.4.1 affirme que $\rho_l(t) = \rho_{l-1}(t) \in x + \vec{g}$.

Dans l'autre cas, on a $b', \ c_l, \ \rho_{l-1}(t) \ |^{M_l} \ c_{l-1}, \ b$, et $\rho_{l-1}(t) \notin M_l$. Notons σ_l la réflexion selon M_l, les deux possibilités $\rho_l(t) = \rho_{l-1}(t)$ ou $\rho_l(t) = \sigma_l \circ \rho_{l-1}(t)$ sont alors possibles. Dans le premier cas, on a évidemment $\rho_l(t) \in x + \vec{g}$, étudions le second cas. On note $y = \rho_{l-1}(t)$, donc $\rho_l(t) = \sigma_l(y)$.

Soit $\vec{\alpha} \in \vec{A}^*$ tel que $\vec{M}_l = \ker(\vec{\alpha})$. Comme M_l est un mur d'une galerie minimale entre b et b', il ne peut contenir b', donc il existe $u \in b'$ tel que $\vec{\alpha}(\vec{xu}) \neq 0$, on peut supposer $\vec{\alpha}(\vec{xu}) > 0$. Par ailleurs, avec ce choix de signe pour $\vec{\alpha}$, on a $\vec{\alpha}(\vec{xy}) > 0$. Mais $\vec{xu} \in -\vec{\gamma}^*$ et $\vec{xy} \in \vec{\gamma}^*$. Ceci entraîne que $\vec{M}_l$ coupe $\vec{\gamma}^*$, et donc que $\vec{\gamma} \subset \vec{M}_l$. En particulier, $\vec{\sigma}_l \in W_{\vec{\gamma}}$ et donc $\vec{\sigma}_l(\vec{g}) = \vec{g}$.

Soit z l'unique point de l'intersection $[x, y] \cap M_l$ (le cas où $\{x, y\} \subset M_l$ est trivial, on a alors $\rho_l(t) = \rho_{l-1}(t)$). Par convexité de $\vec{g}$ et comme $0 \in \overline{\vec{g}}$, $z \in x + \overline{\vec{g}}$. Nous savons que $\vec{\sigma}_l(\vec{xy}) \in \vec{g}$, et donc que $x + \vec{\sigma}_l(\vec{xy}) \in x + \vec{g}$. Ensuite $\sigma_l(y) = z + \vec{\sigma}_l(\vec{zy}) = z + \lambda\vec{\sigma}_l(\vec{xy})$ pour le scalaire $\lambda \in [0, 1]$ adéquat. C'est alors une simple application du théorème de Thalès que de vérifier que $\sigma_l(y) \in [y, x + \vec{\sigma}_l(\vec{xy})]$, d'où $\sigma_l(y) = \rho_l(t) \in x + \vec{g}$ par convexité. □

Lemme 5.1.4. *Soit Z un appartement, $f, g \in \mathcal{F}_Z$ avec g un scp de f. Alors g coupe le coeur $\delta(f)$, et donc il existe un scp g' de g dont le coeur est un scp de $\delta(f)$.*

Preuve du lemme:

Soit $x = s(f)$ et $y = s(g)$ les sommets des deux cônes. Soit $W_{\vec{f}} \subset Gl(\vec{Z})$ le stabilisateur de $\vec{f}$ dans le groupe de Weyl de $\vec{Z}$. On définit une action de $W_{\vec{f}}$ sur Z en imposant que x est un point fixe. Alors $\delta(f) = f \cap \mathrm{Fix}_Z(W_{\vec{f}})$. Soit $z = x + \sum_{w \in W_{\vec{f}}} w(\vec{xy})$. Le point z est bien $W_{\vec{f}}-fixe$. Comme $\vec{xy} \in \vec{f}$, il est dans f, et l'écriture $z = x + \vec{xy} + \sum_{w \in W_{\vec{f}} - \{e\}} w(\vec{xy})$ prouve qu'il est aussi dans g. donc $z \in \delta(f) \cap g$, ce qui prouve le lemme. □

5.2 Cônes dans l'immeuble

Définition 5.2.1. *Soit A un appartement, et $f \in \mathcal{F}_A$. Le cône de $\mathcal{I}$ correspondant au cône f de A est :*

$$\tilde{f} = \bigcup_{B \in \mathcal{A}, \delta(f) \subset B} \phi_B(f)$$

où ϕ_B est un isomorphisme quelconque de A sur B fixant $\delta(f)$.
On note $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ l'ensemble de tous ces cônes pour tous les choix de A et de f possibles.

Le choix de ϕ_B dans la définition n'importe pas puisque deux choix diffèrent d'un automorphisme de A fixant $\delta(f)$ donc stabilisant f.

Il est clair que si $f \in \mathcal{F}_A$ et $g \in \mathcal{F}_B$ sont des cônes tels que $\delta(f) = \delta(g)$, alors $\tilde{f} = \tilde{g}$: le coeur du cône affine suffit à déterminer le cône de l'immeuble. Dit autrement, si B contient $\delta(f)$, alors $\tilde{f} = \tilde{g}$ où g est le cône de B de coeur $\delta(f)$. Nous verrons plus tard que réciproquement, un cône d'immeuble définit un unique coeur de cône affine.

Lemme 5.2.2. *Soit $F = \tilde{f} \in \mathcal{F}_I$, avec $f \in \mathcal{F}_A$. Soit Z un appartement contenant $\delta(f)$, et $\phi : A \to Z$ un isomorphisme fixant $\delta(f)$. Alors $Z \cap \tilde{f} = \phi(f)$.*

Preuve du lemme:
L'inclusion $\supset$ est vraie par définition de $\tilde{f}$. Montrons $\subset$. Soit $y \in Z \cap \tilde{f}$. Par définition, il existe un appartement Y contenant y et $\delta(f)$ et tout isomorphisme de Y sur A fixant $\delta(f)$ envoie y dans f. Soit $\psi : Y \to Z$ un isomorphisme fixant y et $\delta(f)$. Alors $\phi^{-1} \circ \psi : Y \to A$ est un isomorphisme fixant $\delta(f)$. Donc $\phi^{-1} \circ \psi(y) \in f$, donc $y = \psi(y) \in \phi(f)$.□

Lemme 5.2.3. *Soient $f, g \in \mathcal{F}_A$ tels que f est un scp de g. Alors $\tilde{f} \subset \tilde{g}$.*

Preuve du lemme:
Remarquons que pour montrer qu'un point $t \in \tilde{f}$ appartient à $\tilde{g}$, il suffit de trouver un appartement contenant $\{t\} \cup \delta(f) \cup \delta(g)$.

Soit x le sommet de f et y celui de g. Il n'y a qu'un nombre fini de murs parallèles à $\delta(\vec{f})$ séparant strictement x et y, soit n ce nombre. On raisonne par récurrence sur n.

Si $n = 0$, soit $t \in \tilde{f}$, et Y un appartement contenant $\{t\} \cup \delta(f)$. Comme $f \subset \delta(f)^*_A$, le lemme précédent indique que $\tilde{f} \cap Y \subset \delta(f)^*_Y$, en particulier, $t \in \delta(f)^*_Y$. Dès lors, on peut trouver une chambre $\vec{C}$ de $\vec{Y}$ telle que $\delta(f) \cup \{t\} \subset \overline{x + \vec{C}}$ et la proposition 4.3.5 prouve qu'il existe $Z \in \mathcal{A}$ contenant $\{t\} \cup \delta(f) \cup \{y\}$. Par convexité et fermeture de $Z \cap A$, Z contient aussi $x + \delta(\vec{f}) = \delta(g)$ (car $\vec{f} = \vec{g}$ dans $\vec{A}$). On conclut que $t \in \tilde{g}$.

Si $n > 0$, soit M un mur parallèle à $\delta(\vec{f})$ séparant strictement x et y. Soit $z = [x, y] \cap M$, alors $z + \vec{f}$ est scp de g, et f est scp de $z + \vec{f}$. De plus, le nombre de murs parallèles à $\delta(\vec{f})$ séparant strictement y et z est strictement inférieur à n, de même que le nombre de murs parallèles à $\delta(\vec{f})$ séparant strictement z et x. Donc par hypothèse de récurrence, $\widetilde{z + \vec{f}} \subset \tilde{g}$ et $\tilde{f} \subset \widetilde{z + \vec{f}}$, d'où le résultat. □

Remarque: Il n'est pas vrai que $\tilde{f} \subset \tilde{g}$ si $f \subset g$ sans que $\vec{f} = \vec{g}$.

5.3 Coeur d'un cône d'immeuble

Lemme 5.3.1. *Soit $f \in \mathcal{F}_A$, et γ un scp de $\delta(f)$. Soit B un appartement contenant γ, soit $\xi : B \to A$ un isomorphisme fixant γ. Soit $x \in B \cap \tilde{f}$, alors $\xi(x) \in f$. Plus précisément, si Z contient x et $\delta(f)$, alors il existe un isomorphisme de Z sur A, fixant $\delta(f)$ et envoyant x sur $\xi(x)$.*

Preuve du lemme:
Soit $Z \supset \{x\} \cup \delta(f)$. Soit $\phi : Z \to B$ un isomorphisme fixant l'intersection $Z \cap B$. Alors $\xi \circ \phi$ est un isomorphisme de Z sur A qui vérifie $\xi \circ \phi(x) = \xi(x)$. Il suffit donc de prouver que $\xi \circ \phi$ fixe $\delta(f)$ pour prouver le lemme. Mais $\xi \circ \phi$ fixe γ, donc $\overrightarrow{\xi \circ \phi}$ fixe $\vec{\gamma} = \delta(\vec{f}) \subset \vec{Z} \cap \vec{A}$. Donc $\xi \circ \phi$ fixe $Z \cap A \cap (\gamma + \mathrm{Vect}(\delta(\vec{f})))$, ce qui contient $\delta(f)$. □

Proposition 5.3.2. *Si $f \in \mathcal{F}_A$ et $g \in \mathcal{F}_B$ sont deux cônes tels que $\tilde{f} = \tilde{g}$, alors $\delta(f) = \delta(g) \subset A \cap B$.*

Démonstration:
D'après la proposition 4.5.7, il existe un appartement Z contenant des scp δ_1 et δ_2 de $\delta(f)$ et $\delta(g)$. Soient $f', g' \in \mathcal{F}_Z$ les cônes engendrés par δ_1 et δ_2. Nous allons commencer par montrer que $\vec{g'} = \vec{f'}$.

Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas, donc $\vec{f'} \cap \vec{g'} = \emptyset$. Il est alors impossible que $\vec{f'} \subset \overline{\vec{g'}}$ et $\vec{g'} \subset \overline{\vec{f'}}$, d'après les hypothèses mises sur $\mathcal{F}$. on peut donc supposer qu'il existe $\vec{v} \in \vec{g'} \setminus \overline{\vec{f'}}$.

Soit y le sommet de g, y' celui de g'. Soit $\phi : Z \xrightarrow{\sim} B$ un isomorphisme fixant δ_2, alors $\phi(g')$ est le cône de B engendré par δ_2, c'est donc un scp de g. Par le lemme 5.2.3, $\widetilde{\phi(g')} \subset \tilde{g}$, mais $\widetilde{\phi(g')} = \widetilde{g'}$, d'où $\widetilde{g'} \subset \tilde{g}$.

De la même manière, soit $\psi : Z \to A$ un isomorphisme fixant δ_1. Alors $\psi(f')$ est un scp de f, et on obtient que $\tilde{f'} \subset \tilde{f} = \tilde{g}$.

Nous déduisons en particulier que $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, y' + \lambda\vec{v} \in \tilde{g}$. Et comme $\psi(f')$ est un scp de f, $\vec{\psi}(\vec{f'}) = \vec{f}$. Pour tout réel λ, $\psi(y' + \lambda\vec{v}) = \psi(y') + \lambda\vec{\psi}(\vec{v})$. Comme $\vec{v} \notin \overline{\vec{f'}}$, on a $\vec{\psi}(\vec{v}) \notin \overline{\vec{f}}$. Donc pour lambda assez grand, $\psi(y' + \lambda\vec{v}) \notin f$.

Comme $y' + \lambda\vec{v} \in \tilde{g} = \tilde{f}$, il existe un appartement X contenant $\delta(f) \cup \{y' + \lambda\vec{v}\}$. Soit $\eta : X \to Z$ un isomorphisme fixant $X \cap Z$, en particulier η fixe δ_1 et $y' + \lambda\vec{v}$. Alors $\psi \circ \eta : X \to A$ est un isomorphisme qui fixe δ_1, et donc $\mathrm{Aff}_X(\delta_1) \cap A$, ce qui contient $\delta(f)$. Nous savons dans cette situation que $X \cap \tilde{f} = (\psi \circ \eta)^{-1}(f)$, d'où $y' + \lambda\vec{v} \in (\psi \circ \eta)^{-1}(f)$, mais $\psi \circ \eta(y' + \lambda\vec{v}) = \psi(y' + \lambda\vec{v}) \notin f$, d'où la contradiction.

Nous avons donc prouvé que $\vec{f'} = \vec{g'}$, nous allons maintenant montrer que les sommets x et y de f et g coïncident. En utilisant la proposition 4.7.2, on peut supposer que Z contient $\delta(f)$ en entier, donc $\tilde{f} = \tilde{f'}$, on peut même supposer que $Z = A$. On peut également supposer que B contient un scp γ_1 de $\delta(f)$. En résumé, $A \cap B$ contient un scp γ_1 de $\delta(f)$ et un scp δ_2 de $\delta(g)$, et ces deux scp sont parallèles. L'égalité $\delta(\vec{f}) = \delta(\vec{g})$ a donc un sens (et est vraie), dans $\vec{A} \cap \vec{B}$.

Soit $\xi : B \to A$ un isomorphisme fixant $A \cap B$. D'après le lemme précédent, $\xi(y) \in f$ et $\xi^{-1}(x) \in g$. La seconde égalité implique $x \in \xi(g) = \xi(y) + \vec{\xi}(\vec{g})$. Or $\vec{\xi}(\vec{g})$ est un cône vectoriel de coeur $\vec{\xi}(\delta(\vec{g})) = \delta(\vec{f})$, puisque ξ fixe δ_2 et $\delta(\vec{g}) = \delta(\vec{f})$. Donc $\vec{\xi}(\vec{g}) = \vec{f}$, et $x \in \xi(y) + \vec{f}$.

Nous arrivons ainsi aux deux relations : $x \in \xi(y) + \vec{f}$ et $\xi(y) \in x + \vec{f}$. Par unicité du sommet de f, ceci implique $x = \xi(y)$. On utilise enfin la version précise du lemme précédent : soit T un appartement contenant $\delta(f)$ et y, il existe un isomorphisme $\zeta : T \to A$ fixant $\delta(f)$ et tel que $\zeta(y) = \xi(y)$. Mais $\zeta^{-1}(x) = x$ puisque $x \in \overline{\delta(f)}$, d'où $x = y$.

En particulier, $x = y \in A \cap B$, et par convexité de $A \cap B$, $\delta(f) \subset A \cap B$ et $\delta(g) \subset A \cap B$, et enfin on peut calculer, dans A ou dans B : $\delta(f) = x + \delta(\vec{f}) = y + \delta(\vec{g}) = \delta(g)$. □

Cette proposition permet les définitions suivantes :

Définitions 5.3.3.
- *Le coeur d'un cône $\tilde{f}$ de l'immeuble $\mathcal{I}$ est $\delta(f)$. On le note $\delta(\tilde{f})$.*
- *On appelle sommet de $\tilde{f}$ le sommet de $\delta(f)$, on le note $s(\tilde{f})$.*
- *Deux cônes $F, G \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$ sont dit parallèles lorsque $\delta(F) \parallel \delta(G)$, ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}_\mathcal{I}$.*
- *Si $G, F \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$ sont deux cônes parallèles avec $F \subset G$, on dit que F est un sous-cône parallèle de G, et on abrège sous-cône parallèle en scp. Ceci définit une relation d'ordre sur $\mathcal{F}_\mathcal{I}$.*

Lemme 5.3.4. *Soient $F, G \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$ tels que G est scp de F. Alors il existe un appartement contenant $\delta(F) \cup \delta(G)$.*

Preuve du lemme:

Nous savons déjà qu'il existe (proposition 4.7.2) un appartement A_1 contenant $\delta(G)$ et un scp δ de $\delta(F)$. Il existe aussi A_2 contenant $\delta(F) \cup \{s(G)\}$, ceci car $s(G) \in F$. Alors $A_1 \cap A_2 \supset \{s(G)\} \cup \delta$, d'où par convexité, $A_1 \cap A_2 \supset \delta(G)$, et donc $A_2 \supset \delta(F) \cup \delta(G)$. □

5.4 Équivalence de cônes, l'ensemble $\overline{\mathcal{I}}$

Nous définissons maintenant une relation d'équivalence sur l'ensemble des cônes de l'immeuble d'une manière tout à fait semblable à la définition de la relation d'équivalence sur l'ensemble des cônes affines de A_0.

Définition 5.4.1. *Deux cônes $F, G \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$ sont équivalents lorsqu'il existe $H \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$ qui est un scp de F et de G. On note alors $F \sim G$.*

Le lemme 5.2.3 montre que si $f, g \in \mathcal{F}_A$ alors $f \sim_A g \Rightarrow \tilde{f} \sim \tilde{g}$.

Lemme 5.4.2. *Soient $F, G \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$, alors $F \sim G$ si et seulement si $F \parallel G$ et $F \cap G \neq \emptyset$.*

Preuve du lemme:

Si $F \sim G$, il est clair que $F \cap G \neq \emptyset$ et que $F \parallel G$ (car $F \parallel H \parallel G$).

Supposons maintenant que $F \cap G \neq \emptyset$ et que $F \parallel G$. Soit $x \in F \cap G$, soit A et B des appartements tels que $\delta(F) \cup \{x\} \subset A$ et $\delta(G) \cup \{x\} \subset B$. Nous pouvons alors construire deux cônes : $\delta_1 := x + \overrightarrow{\delta(F)} \subset A$ et $\delta_2 := x + \overrightarrow{\delta(G)} \subset B$. Ces deux cônes sont parallèles, donc il existe Z contenant δ_1 et un sous-cône parallèle δ_2' de δ_2. Par convexité de $Z \cap B$, on voit qu'en fait $\delta_2 \subset Z$. Donc δ_1 et δ_2 sont deux cônes parallèles, inclus dans Z et de même sommet : $\delta_1 = \delta_2$. Soit $H \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$ tel que $\delta(H) = \delta_1$. Il est à peu près clair que $H \subset F \cap G$, voici quand même le raisonnement :

Soit $f \in \mathcal{F}_A$ tel que $\delta(f) = \delta(F)$. Alors $x \in f$, puis $\delta_1 \subset f$. Soit $h_1 \in \mathcal{F}_A$ tel que $\delta(h_1) = \delta_1$, alors $H = \tilde{h_1}$ et $h_1 \subset f$. Comme $F = \tilde{f}$, on conclut par le lemme 5.2.3 que $H \subset F$. On procède de même pour prouver que $H \subset G$. □

Proposition 5.4.3. *La relation "être équivalent" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}_\mathcal{I}$.*

Démonstration:

Cette relation est symétrique et réflexive, montrons qu'elle est transitive. Soient $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$ tels que $F_1 \sim F_2$ et $F_2 \sim F_3$. Soit G_1 un scp de F_1 et F_2, et G_2 un scp de F_2 et F_3. Il nous suffit de trouver un cône $H \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$ qui soit un scp de G_1 et de G_2. Et comme nous savons déjà que $G_1 \parallel G_2$, grâce au lemme précédent, il suffit de prouver que $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Quitte à remplacer G_1 par un scp, il existe un appartement Z_1 contenant $\delta(F_2) \cup \delta(G_1)$. Le lemme 5.1.4 appliqué à $F_2 \cap Z_1$ et $G_1 \cap Z_1$ dans l'appartement Z_1 prouve l'existence d'un scp H_1 de G_1 dont le coeur est un scp de $\delta(F_2)$. De même, il existe un scp H_2 de G_2 dont le coeur est aussi inclus dans $\delta(F_2)$.

Ainsi $\delta(H_1)$ et $\delta(H_2)$ sont deux scp du même cône $\delta(F_2)$, leur intersection contient donc un troisième scp de $\delta(F_2)$ (il suffit de vérifier que $s(\delta(F_2)) + \overrightarrow{s(\delta(F_2)s(\delta(H_1))} + \overrightarrow{s(\delta(F_2)s(\delta(H_2))} \in \delta(H_1) \cap \delta(H_2)$). Si H est le cône de $\mathcal{I}$ correspondant à ce coeur, alors H est un scp de H_1 donc de G_1 donc de F_1, ainsi que de H_2 donc de G_2 donc de F_3. Ce qui prouve que $F_1 \sim F_3$. □

Nous pouvons enfin définir l'ensemble $\overline{\mathcal{I}}$:

Définition 5.4.4. *On pose $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{F}_\mathcal{I} / \sim$. Si $F \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$, on note $[F]$ la classe d'équivalence de F pour $\sim$.*

Notons enfin ce petit résultat :

Lemme 5.4.5. *Soit $A \in \mathcal{A}$, et $f \in \mathcal{F}_A$. Soit $G \in F_\mathcal{I}$ tel que $\tilde{f} \sim G$. Alors il existe f' un scp de f tel que $\tilde{f'}$ est un scp de G.*

Démonstration: D'après la proposition 4.7.2, il existe un appartement Z contenant $\delta(f)$ et un scp de $\delta(G)$. Soit g' le cône affine de Z engendré par ce scp. D'après le lemme 5.1.4, il existe δ' un scp de $\delta(f)$ qui est inclus dans g'. Alors le cône f' engendré par δ' dans A convient. □

5.5 Injections canoniques

Définitions 5.5.1.

- *Soit $\iota_\mathcal{I} : \begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \to & \overline{\mathcal{I}} \\ x & \mapsto & [\{x\}] \end{array}$. C'est l'injection canonique de $\mathcal{I}$ dans $\overline{\mathcal{I}}$.*
- *Pour tout appartement A, soit $\iota : \begin{array}{ccc} \overline{A} & \to & \overline{\mathcal{I}} \\ [f]_A & \mapsto & [\tilde{f}] \end{array}$. C'est l'injection canonique de $\overline{A}$ dans $\overline{\mathcal{I}}$.*

Quelques mots pour s'assurer que ces définitions sont licites :

- Pour $\iota_\mathcal{I}$, il faut vérifier que $\{x\} \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$, $\forall x \in \mathcal{I}$. C'est le cas car si x est dans l'appartement A, alors $\{x\} \in \mathcal{F}_A$, et $\tilde{\{x\}} = \{x\}$.

– Nous avons déjà vu que si $f \sim_A g$ alors $\tilde{f} \sim \tilde{g}$ ce qui montre que ι_A est bien définie.

Proposition 5.5.2. *Les injections canoniques sont injectives.*

Démonstration:
Il est clair que ι_I est injective. Soit $A \in \mathcal{A}$, pour montrer que ι_A est injective, on considère deux cônes $f, g \in \mathcal{F}_A$ tels que $\iota_A([f]_A) = \iota_A([g]_A)$. C'est à dire que $\tilde{f} \sim \tilde{g}$. Donc il existe $H \in \mathcal{F}_I$ qui est scp de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$. Par le lemme 5.3.4, il existe $B \in \mathcal{A}$ contenant $\delta(f) \cup \delta(H)$. En utilisant le lemme 5.1.4 dans B, on obtient un nouveau cône $H' \in \mathcal{F}_I$ qui est scp de H et dont le coeur est inclus dans $\delta(f)$, donc dans A. Alors notant $h' = H' \cap A$, on voit que h' est scp dans A de f et g, et donc $f \sim_A g$. □

6 Topologie sur $\overline{I}$

6.1 Définition

Définition 6.1.1. *Soit $F \in \mathcal{F}_I$, soit $A \in \mathcal{A}(I)$ contenant $\delta(F)$. On note $b(F)$ et on appelle base de F la base de $\delta(F)$. De même, si $f \in \mathcal{F}_A$, on notera $b(f)$ la base de $\delta(f)$.*

La définition de la base d'un cône dont la direction est dans une facette vectorielle est donnée en 4.3.4.

Maintenant, nous avons besoin d'un moyen de définir un voisinage de 0 dans les espaces directeurs de tous les appartements à la fois. Nous avons déjà défini $\mathcal{U}$ comme étant l'ensemble des voisinages de 0 dans $\overrightarrow{A_0}$, où A_0 est l'appartement de référence choisi au début, stables par le groupe de Weyl de $\overrightarrow{A_0}$, $W\overrightarrow{A_0}$. Alors si $U \in \mathcal{U}$, si $\phi : A_0 \xrightarrow{\sim} B$ est un isomorphisme quelconque, l'image $\vec{\phi}(U) \subset \vec{B}$ est indépendante de l'isomorphisme ϕ choisi. Nous pouvons ainsi identifier U à un voisinage de 0 dans l'espace directeur de n'importe quel appartement. Et si $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ est un isomorphisme, nous pouvons écrire $\phi(x + U) = \phi(x) + U$, $\forall x \in A$.

Définition 6.1.2. *Soit $F \in \mathcal{F}_I$, A tel que $\delta(F) \subset A$, $f = A \cap F$, et $U \subset \vec{A}$, stable par $W(\vec{A})$. On pose :*

$$\widehat{f + U} = \bigcup_{B \supset b(F)} \phi_B((f + U) \cap \delta(f)^*_A).$$

L'union est prise sur tous les appartements B qui contiennent $b(F)$, et $\phi_B : A \xrightarrow{\sim} B$ est un isomorphisme qui fixe $b(F)$.

Remarque: Il aurait pu paraître plus simple de prendre l'union des $\phi_B(f + U)$, mais le fait de prendre l'intersection avec $\delta(f)^*_A$ permettra d'utiliser la proposition 4.3.5.

Le sous groupe de W_A qui fixe $b(f)$ fixe aussi $\delta(f)$, puisque $b(f)$ contient une base affine de $\mathrm{Aff}_A\delta(f)$, et donc il stabilise f, et sa partie vectorielle est un sous-groupe de W^v_A et donc stabilise U. Ceci permet de vérifier que le choix de ϕ_B n'importe pas.

Si A' est un autre appartement contenant $\delta(F)$, et si $f' = A' \cap F$ alors $\widehat{f + U} = \widehat{f' + U}$. Ceci permet la définition :

$$\widehat{F + U} := \widehat{f + U}.$$

Lemme 6.1.3. *On garde les notations précédentes. Si B est un appartement contenant $b(F)$, et si $\phi_B : A \xrightarrow{\sim} B$ est un isomorphisme qui fixe $b(F)$, alors $B \cap (\widehat{f + U}) = \phi_B((f + U) \cap \delta(f)^*_A)$. En particulier, $A \cap (\widehat{f + U}) = (f + U) \cap \delta(f)^*_A$.*

Preuve du lemme: Si $x \in B \cap (\widehat{f + U})$, alors il existe un appartement C contenant $b(f)$ et un isomorphisme $\phi_C : A \xrightarrow{\sim} C$ fixant $b(f)$ tel que $x \in \phi_C((f + U) \cap \delta(f)^*_A)$. On choisit alors $\psi : C \xrightarrow{\sim} B$ fixant $b(f) \cup \{x\}$, comme $\psi \circ \phi_C : A \xrightarrow{\sim} B$ fixe $b(f)$, on a $\psi \circ \phi_C((f + U) \cap \delta(f)^*_A) = \phi_B((f + U) \cap \delta(f)^*_A)$. D'où $x \in \phi_B((f + U) \cap \delta(f)^*_A)$. □

On peut maintenant définir les ensembles qui seront la base de voisinage de la topologie sur $\overline{I}$:

Définition 6.1.4. *Soit $F \in \mathcal{F}_I$, et $U \in \mathcal{U}$. On pose :*

$$\mathcal{V}_I(F,U) = \{x \in \overline{I} \mid \text{un représentant de } x \text{ est inclus dans } \widehat{F+U}\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confondre $\mathcal{V}_I(F,U)$ avec un voisinage $\mathcal{V}_A(f,U)$ d'un point dans un appartement compactifié, on pourra juste noter $\mathcal{V}(F,U)$.

Pour $x \in \overline{I}$, on note $\mathcal{V}_x = \{\mathcal{V}(F,U) \mid x = [F],\ U \in \mathcal{U}\}$.

Lemme 6.1.5. *Soient $F,G \in \mathcal{F}_I$ et $U,V \in \mathcal{U}$ alors :*
- *$\tilde{f} \subset \widehat{f+U}$*
- *si $\widehat{F+U} \subset \widehat{G+V}$, alors $\mathcal{V}(F,U) \subset \mathcal{V}(G,V)$*
- *si $U \subset V$, alors $\widehat{F+U} \subset \widehat{F+V}$*
- *si F est scp de G, alors $\widehat{F+U} \subset \widehat{G+U}$.*

Preuve du lemme:

Les trois premiers points sont évidents. Pour le quatrième point, on choisit un appartement A contenant $\delta(F)$ et $\delta(G)$ (lemme 5.3.4). On note $f = A \cap F$ le cône engendré par $\delta(F)$ dans A, et $g = A \cap G$ le cône engendré par $\delta(G)$, donc f est un scp de g. Il ne reste plus qu'à appliquer la même méthode que celle utilisée dans cette situation pour prouver que $\tilde{f} \subset \tilde{g}$ (en 5.2.3).

On commence par supposer qu'aucun mur de A, parallèle à $\delta(G)$ ne sépare strictement $s(f)$ et $s(g)$. Soit $x \in \widehat{F+U}$, il existe $B \supset \{x\} \cup b(F)$ et $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ fixant $b(F)$, tel que $x \in \phi((f+U) \cap f_A^*)$. En particulier, $x \in \phi(f)_B^*$. D'après la proposition 4.3.5, il existe un appartement Z contenant $b(G) \cup b(F) \cup \{x\}$. Soit $\psi : Z \xrightarrow{\sim} A$ fixant $A \cap Z$, donc en particulier $b(F) \cup b(G)$. Comme $x \in \widehat{F+U}$, $\psi(x) \in (f+U) \cap f_A^* \subset (g+U) \cap g_A^*$, donc $x \in \widehat{G+U}$.

S'il existe un mur M parallèle à $\delta(G)$ et séparant strictement $s(f)$ et $s(g)$, soit $z = [s(f), s(g)] \cap M$. Par récurrence, on a $\widehat{F+U} \subset \widetilde{z+\vec{f}+U}$ et $\widetilde{z+\vec{f}+U} \subset \widehat{G+U}$. □

Proposition 6.1.6. *Il existe une unique topologie sur $\overline{I}$ telle que pour tout $x \in \overline{I}$, $\mathcal{V}_x$ soit une base de voisinages de x.*

Démonstration:

Il faut montrer pour tout $x \in \overline{I}$, que $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$, que $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $x \in V$, et que $\forall x \in \overline{I}$, $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$, $\exists V_3 \in \mathcal{V}_x$ tel que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Les deux premières assertions sont claires.

Soit donc $x \in \overline{I}$ et $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$. Soient $F_1, F_2 \in x$ et $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tels que $V_1 = \mathcal{V}(F_1,U_1)$ et $V_2 = \mathcal{V}(F_2,U_2)$.

Comme $F_1 \sim F_2$, il existe H qui est scp de F_1 et de F_2. Soit $U = U_1 \cap U_2$, on a bien $U \in \mathcal{U}$. Alors, $\mathcal{V}(H,U) \in \mathcal{V}_x$ et d'après le lemme, $\mathcal{V}(H,U) \subset \mathcal{V}(F_1,U_1) \cap \mathcal{V}(F_2,U_2)$. □

Notons tout de suite ce résultat évident, mais important :

Proposition 6.1.7. *Soit $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{I})$. Alors g se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{I}$, en posant $g([F]) = [g(F)]$.*

6.2 Lien avec la topologie de $\overline{A}$

Nous allons maintenant faire le lien entre les voisinages du type $\mathcal{V}(F,U)$ dans l'immeuble et les $\mathcal{V}_A(f,U)$ dans un appartement. La seule petite difficulté provient du fait que dans la définition de $\widehat{f+U}$ on fait intervenir $(f+U) \cap f^*$ et non juste $f+U$ comme dans les $\mathcal{V}_A(f,U)$.

Définition 6.2.1. *Soit $A \in \mathcal{A}$, $U \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{F}_A$, on note :*

$$\mathcal{V}'_A(f,U) = \left\{x \in \overline{A} \mid \text{un représentant de } x \text{ est inclus dans } (f+U) \cap f^*\right\}.$$

Proposition 6.2.2. *Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors l'ensemble des $\mathcal{V}'_A(f,U)$, pour $f \in \mathcal{F}_A$ et $U \in \mathcal{U}$ est une base de voisinage de la topologie sur $\overline{A}$.*

Démonstration:

Déjà, quels que soient $f \in \mathcal{F}_A$ et $U \in \mathcal{U}$, on a $\mathcal{V}'_A(f,U) \subset \mathcal{V}_A(f,U)$. Il reste à vérifier que $\mathcal{V}'_A(f,U)$ est un voisinage de $[f]_A$.

Soit $U' \in \mathcal{U}$ borné et inclus dans U. Comme f^* est un cône d'intérieur non vide, il existe $x \in f$ tel que $x + U' \subset f^*$. Alors $x + \vec{f} + U' \subset (f+U) \cap f^*$ donc $\mathcal{V}_A(x+\vec{f}, U') \subset \mathcal{V}'_A(f,U)$, et $[x+\vec{f}]_A = [f]_A$ donc $\mathcal{V}_A(x+\vec{f}, U')$ est bien un voisinage de $[f]_A$. □

Étant donnés un cône $F \in \mathcal{F}_I$ et un appartement A contenant $b(F)$, il existe un unique élément de $\mathcal{F}_A$ dont le coeur est image de $\delta(F)$ par un isomorphisme d'appartements fixant $b(F)$. Nous noterons ce cône $\hat{F} \cap A$ car il est en fait égal à $\widehat{F + \{0\}} \cap A$. Si A contient un cône f tel que $F = \tilde{f}$, c'est-à-dire si A contient $\delta(F)$, alors $\hat{F} \cap A$ n'est autre que f. La propriété principale de $\hat{F} \cap A$ est que pour tout $U \in \mathcal{U}$, $\widehat{F+U} = (\hat{F} \cap \widehat{A}) + U$.

Nous voici en mesure d'écrire un voisinage de base de $\mathcal{I}$ en fonction des voisinages de base des appartements :

Proposition 6.2.3. *Soit $F \in \mathcal{F}_I$, $U \in \mathcal{U}$, borné. Alors :*

$$\mathcal{V}_I(F,U) = \bigcup_{A \supset b(F)} \mathcal{V}'_A(\hat{F} \cap A, U),$$

où l'union est prise sur tous les appartements A de $\mathcal{I}$ qui contiennent $b(F)$.

Démonstration:

On commence par l'inclusion "$\supset$". Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $b(F) \subset A$, notons $f = \hat{F} \cap A$. Soit $t \in \mathcal{V}'_A(f,U)$, soit $g \in \mathcal{F}_A$ un représentant de t inclus dans $(f+U) \cap f^*$. Comme $\widehat{F+U} = \widehat{f+U}$, tout ce que nous devons montrer est que $\tilde{g} \subset \widehat{f+U}$.

Lemme 6.2.4. *Soit $A \in \mathcal{A}$, $U \subset \vec{A}$ borné et stable par $W(\vec{A})$, et $f, g \in \mathcal{F}_A$ tels que $g \subset (f+U) \cap f^*$. Alors il existe un scp g' de g tel que $\tilde{g'} \subset \widehat{f+U}$.*

Preuve du lemme: On va appliquer la proposition 5.1.2, avec $\vec{\gamma} = \delta(\vec{g})$, $x = s(g')$ et $b = b(g')$. Il nous faut choisir b' de manière à ce que $b' \subset s(g') - \vec{g}^*$, $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(b')} \supset \delta(\vec{g})$. De plus, pour que la conclusion de la proposition 5.1.2 nous soit utile, il faut que $b(f) \subset b'$.

Comme $\vec{g} \subset \overline{\vec{f}}$, il existe une facette de Weyl $\vec{h}$ tel que $\delta(\vec{f}) \cup \delta(\vec{g}) \subset \overline{\vec{h}}$. Soit alors b' la base du cône $s(f) + \vec{h}$, de sorte que $\overrightarrow{\mathrm{Aff}(b')} \supset \delta(\vec{g})$ et $b(f) \subset b'$. Soit g' un scp de g tel que $b' \subset s(g') - \vec{g}^*$.

Soit $z \in \tilde{g'}$, soit $Z \in \mathcal{A}$ contenant $b' \cup \{z\}$, et $\phi : Z \xrightarrow{\sim} A$ fixant b'. Alors la proposition 5.1.2 prouve que $\phi(z) \in g'$, en particulier, $\phi(z) \in (f+U) \cap f^*$. Comme ϕ fixe b' qui contient $b(f)$, ceci prouve que $z \in \widehat{f+U}$. □

On passe à l'autre inclusion pour la preuve de la proposition. Soit $t \in \mathcal{V}_I(F,U)$. Il existe un représentant $G \in \mathcal{F}_I$ de t inclus dans $\widehat{F+U}$ et un appartement A contenant $b(F) \cup \delta(G)$ (corollaire 4.3.2). Soit $f = \hat{F} \cap A$, alors $A \cap \widehat{F+U} = (f+U) \cap f^*$, (par le lemme 6.1.3) d'où $G \cap A \subset (f+U) \cap f^*$. Et comme $t = [G \cap A]_A$, on a bien $t \in \mathcal{V}'_A(f,U)$. □

6.3 $\overline{\mathcal{I}}$ est séparé

Proposition 6.3.1. *L'espace topologique $\overline{\mathcal{I}}$ est séparé.*

Démonstration:

Soient x et y deux points distincts de $\overline{\mathcal{I}}$. D'après la proposition 4.5.8, il existe $A \in \mathcal{A}$, et $f, g \in \mathcal{F}_A$ tels que $x = [\tilde{f}]$ et $y = [\tilde{g}]$. D'après le lemme 5.2.3, $f \curlywedge_A g$. Comme $\overline{A}$ est séparé et que $[f]_A \neq [g]_A$, on peut, quitte à restreindre f et g à des scp, supposer qu'il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $f + U \cap g + U = \emptyset$. Quitte à remplacer U par une boule incluse dans U, on peut supposer que U est convexe.

On peut encore restreindre g à un scp pour s'assurer que $b(f) \subset s(g) - \delta(\vec{g})^*$. Alors nous pouvons utiliser la proposition 5.1.2 pour obtenir que $\widehat{f+U} \cap \widehat{g+U} = \emptyset$: soit $t \in \widehat{g+U}$, soit $Z \in \mathcal{A}$ contenant $b(f)$ et t, soit $\phi : Z \xrightarrow{\sim} A$ fixant $b(F)$, alors la proposition 5.1.2 affirme que $\phi(t) \in g + U$, donc $t \notin \widehat{f+U}$. Ceci implique directement que $\mathcal{V}(\tilde{f}, U) \cap \mathcal{V}(\tilde{g}, U) = \emptyset$: nous avons obtenu un voisinage de x et un de y qui sont disjoints. □

6.4 $\overline{\mathcal{I}}$ est à base dénombrable d'ouverts

Lorsque $\mathcal{I}$ est localement fini, ou plus généralement lorsque chaque cloison n'est pas incluse dans plus qu'un nombre dénombrable de chambres, la topologie qu'on vient de définir est à base dénombrable d'ouverts. Voici en quelques mots pourquoi.

Tout d'abord, pour calculer $\widehat{f+U}$, seuls U, $s(f)$ et $b(f)$ comptent. Or, pour un sommet fixé, il n'existe qu'un nombre fini de bases le contenant. L'hypothèse sur $\mathcal{I}$ implique qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de points de $\mathcal{I}$ à coordonnées rationnelles (en fixant une chambre de référence, et une base affine dans cette chambre). Donc en prenant tous les sommets à coordonnées rationnelles dans $\mathcal{I}$, toutes les bases correspondantes à ces sommets, et tous les voisinages de 0 dans $\vec{A}_0$ de la forme $B(0, \frac{1}{n})$, on obtient une base de voisinages pour la topologie de $\overline{\mathcal{I}}$ qui est dénombrable.

6.5 Injections canoniques

6.5.1 L'injection $\iota_{\mathcal{I}}$

Proposition 6.5.1. *L'injection canonique $\iota_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to \overline{\mathcal{I}}$ est telle que, pour tout $U \in \mathcal{U}$, $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ on a $\iota_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{V}_{\mathcal{I}}(F, U)) = \widehat{F+U}$. De plus, elle est continue, ouverte et d'image dense.*

Démonstration:

Soient $U \in U$, $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ et $x \in \iota_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{V}(F, U))$. On a alors $\{x\} \subset \widehat{F+U}$, donc $x \in \widehat{F+U}$. L'autre direction est (encore plus) claire.

Il est maintenant clair que l'image de $\iota_{\mathcal{I}}$ est dense dans $\overline{\mathcal{I}}$.

Montrons que $\iota_{\mathcal{I}}$ est ouverte. Soit O un ouvert, $x \in O$. Il existe un voisinage B de x dans $\mathcal{I}$, inclus dans O qui est une boule dans $\mathcal{I}$, $B = B(x, \epsilon)$. La boule dans $\vec{A}_0$ $B_{\vec{A}_0}(0, \epsilon)$ est stable par le groupe de Weyl de $\vec{A}_0$, donc $B_{\vec{A}_0}(0, \epsilon) \in \mathcal{U}$. Il est de plus clair que $B = \{x\} + \widehat{B_{\vec{A}_0}}(0, \epsilon)$. (Ici, $b(\{x\}) = \{b\}$ et $\{x\}_A^* = A$). Nous allons vérifier que $\iota_{\mathcal{I}}(B) = \mathcal{V}_{\mathcal{I}}(\{x\}, B_{\vec{A}_0}(0, \epsilon))$: ce sera alors bien un voisinage de $\iota_{\mathcal{I}}(x)$ dans $\overline{\mathcal{I}}$.

L'inclusion $\subset$ découle directement de l'égalité $B = \{x\} + \widehat{B_{\vec{A}_0}}(0, \epsilon)$. Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que puisque B est borné, si $y = [\tilde{f}] \in \iota_{\mathcal{I}}(B)$ alors $\vec{f} = \{0\}$.

Enfin, montrons que $\iota_{\mathcal{I}}$ est continue. Soit O un ouvert de $\overline{\mathcal{I}}$, soit $x \in \iota_{\mathcal{I}}^{-1}(O)$. Il existe un voisinage de $\iota_{\mathcal{I}}(x)$ inclus dans O de la forme $\mathcal{V}(\{x\}, U)$. Alors $x \in \iota_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{V}(\{x\}, U)) = \widehat{\{x\}+U} \subset \iota_{\mathcal{I}}^{-1}(O)$. Il reste à prouver que $\widehat{\{x\}+U}$ contient un voisinage de x dans $\mathcal{I}$. Or U contient une boule $B_{A_0}(0, \epsilon)$, donc $\widehat{\{x\}+U} \supset \{x\} + \widehat{B_{A_0}}(0, \epsilon) = B_{\mathcal{I}}(x, \epsilon)$ qui est un voisinage de x dans $\mathcal{I}$. □

Nous pouvons donc identifier $\mathcal{I}$ à l'ouvert dense $\iota_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$. La relation $\iota_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{V}(F, U)) = \widehat{F+U}$ devient alors $\mathcal{V}(F, U) \cap \mathcal{I} = \widehat{F+U}$.

6.5.2 Les injections ι_A

Proposition 6.5.2. *Soit $A \in \mathcal{A}$, alors l'injection canonique $\iota_A : \overline{A} \to \overline{\mathcal{I}}$ est telle que, pour tout $f \in \mathcal{F}_A$, $U \in \mathcal{U}$ borné, il existe $f' \in \mathcal{F}_A$ un scp de f tel que $\mathcal{V}_A(f', U) \subset \iota_A^{-1}(\mathcal{V}_{\mathcal{I}}(\tilde{f}, U)) \subset \mathcal{V}_A(f, U)$. Cette injection est de plus continue et fermée.*

En particulier, c'est un homéomorphisme de $\overline{A}$ sur son image qui est un fermé compact de $\overline{\mathcal{I}}$.

Démonstration:

Soit $f \in \mathcal{F}_A$, $U \in \mathcal{U}$, borné. Soit $[g]_A \in \iota_A^{-1}(\mathcal{V}_I(\tilde{f}, U))$, ce qui signifie que quitte à remplacer g par un scp, on a $\tilde{g} \subset \widehat{\tilde{f} + U}$. Alors $g \subset \widehat{\tilde{f} + U} \cap A = (f + U) \cap \delta(f)^* \subset f + U$. Donc $[g]_A \in \mathcal{V}_A(f, U)$.

Pour l'autre inclusion, notons $x = s(f)$. On choisit f' un scp de f tel que $f' + U \subset \delta(f)^*$, ceci existe car U est borné et $\delta(f)^*$ est un cône convexe et d'intérieur non vide. Alors $f' + U \subset (f + U) \cap f^*$. Vérifions que f' convient.

Soit $[g]_A \in \mathcal{V}_A(f', U)$, on peut supposer que $g \subset f' + U$ d'où $g \subset (f + U) \cap f^*$. On peut aussi imposer que $b(f) \subset b(g) - \delta(\vec{g})^*$. Alors en utilisant la proposition 5.1.2 (prendre $b = b(g)$, $b' = b(f)$, $\vec{\gamma} = \delta(\vec{g})$), on vérifie que $\tilde{g} \subset \widehat{f + U}$, d'où $\iota_A([g]_A) \subset \mathcal{V}(\tilde{f}, U)$.

La continuité de ι_A est alors immédiate. Le fait que ι_A est fermée provient alors de la compacité de $\overline{A}$ et de la séparation de $\overline{\mathcal{I}}$. □

Nous pouvons dsormais identifier un appartement compactifié $\overline{A}$ à un fermé compact de $\overline{\mathcal{I}}$. La proposition 4.5.8 nous permet de prouver une généralisation de l'axiome indiquant que deux chambres doivent être incluses dans un même appartement :

Soit c une chambre de $\mathcal{I}$ et $x = [F] \in \partial\mathcal{I}$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ contenant c et un scp de $\delta(F)$. Donc $c \cup \{x\} \subset \overline{A}$. De même, si $x = [F]$ et $y = [G]$ sont deux points du bord de $\mathcal{I}$, il existe $A \in \mathcal{A}$ contenant un scp de $\delta(F)$ et un scp de $\delta(G)$, et alors $\{x\} \cup \{y\} \subset \overline{A}$.

Lemme 6.5.3. *Soient x et y des facettes de $\mathcal{I}$ ou des points de $\partial\mathcal{I}$, alors il existe un appartement A tel que $x \cup y \subset \overline{A}$. (Ici, on identifie x à $\{x\}$ dans le cas où x est un point.)*

6.6 Rétractions

Nous avons vu que si A est un appartement et $w \in W_A$, alors w s'étend de manière unique en un homéomorphisme de $\overline{A}$ sur lui-même, puis que si $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ est un isomorphisme, alors ϕ s'étend de manière unique en un homéomorphisme de $\overline{A}$ sur $\overline{B}$, qu'on note encore ϕ. Les rétractions peuvent aussi s'étendre à $\overline{\mathcal{I}}$:

Proposition 6.6.1. *Soit $A \in \mathcal{A}$, et c une chambre de A, soit $\rho = \rho_{c,A}$ la rétraction sur A de centre c. Alors ρ s'étend de manière unique en une fonction continue $\overline{\rho}$ de $\overline{\mathcal{I}}$ sur $\overline{A}$.*

Démonstration:

Soit $x \in \partial\mathcal{I}$, nous savons qu'il existe $Z \in \mathcal{A}$ tel que $\{x\} \cup c \subset \overline{Z}$. Soit $\phi : Z \xrightarrow{\sim} A$ fixant c, alors $\rho_{|Z} = \phi$, il est donc naturel de poser $\rho(x) = \phi(x)$. Pour que cette définition soit valide, il faut s'assurer que si Z' est un autre appartement tel que $\{x\} \cup c \subset \overline{Z'}$ et si $\phi' : Z' \xrightarrow{\sim} A$ fixe c, alors $\phi(x) = \phi'(x)$.

Soient $f \in \mathcal{F}_Z$ et $f' \in \mathcal{F}_{Z'}$ des représentants de x. Alors $\rho(f) = \phi(f) \in \mathcal{F}_A$ et $\rho(f') = \phi'(f') \in \mathcal{F}_A$, et $\phi(x) = [\rho(f)]_A$, $\phi'(x) = [\rho(f')]_A$. Il nous faut donc vérifier que $\rho(f) \sim_A \rho(f')$.

Quitte à raccourcir f et f', il existe un appartement Y contenant $\delta(f) \cup \delta(f')$. Quitte à raccourcir encore f, on peut supposer, dans Z : $c \subset s(f) - \delta(\vec{f})^*_Z$. On peut raccourcir maintenant f', pour obtenir que, dans Y, $\delta(f') \subset \delta(f)^*$.

Supposons dans un premier temps qu'aucun mur de Y ne sépare strictement $\delta(f)$ de $\delta(f')$. Soit $\beta = \mathrm{Cl}(\delta(f) \cup \delta(f'))$. Alors, en notant ψ_Y un isomorphisme de Z sur Y fixant $\delta(f)$, si M est un mur de Z séparant strictement $s(f)$ et c, $\psi_Y(M)$ ne peut séparer strictement deux points de β. La proposition 4.3.3 permet donc de trouver un appartement X contenant $\delta(f) \cup \delta(f') \cup c$. Les $\mathcal{F}$-cônes engendrés par $\delta(f)$ et $\delta(f')$ dans X sont équivalents. Soit $\chi : X \xrightarrow{\sim} A$ fixant c, alors $\rho(\delta(f)) = \chi(\delta(f)$ et $\rho(\delta(f')) = \chi(\delta(f'))$. Il s'ensuit que les cônes engendrés par $\rho(\delta(f))$ et $\rho(\delta(f'))$ sont équivalents dans A. Mais ces cônes sont exactement $\rho(f)$ et $\rho(f')$.

Pour traiter le cas général, nous allons construire dans Y une suite $\delta(f) = \delta_0, ..., \delta_u = \delta(f')$ de coeurs qui ne sont séparés par aucun mur, et qui engendrent des cônes $f_0, ..., f_k$ équivalents. La projection $p_{\delta(f)} : Y \to Y_{\delta(f)}$ de Y sur la façade $Y_{\delta(f)}$ envoie $\delta(\vec{f})$ et $\delta(\vec{f'})$ dans deux facettes bien déterminées. Soit $\Gamma = g_0, ..., g_k$ une galerie dans $Y_{\delta(\vec{f})}$ entre ces deux facettes. On note f_Y et f'_Y les cônes engendrés par $\delta(f)$ et $\delta(f')$ dans Y. D'après 3.3.3, après avoir choisi un

système de générateurs S de $W(\vec{Y})$ adapté, on a une partition $I = I_1 \sqcup I_2$, où I est le type de $\delta(\vec{f_Y})$, I_1 est l'ensemble des réflexions de S fixant $\vec{f}^{\perp}$ et I_2 le type des réflexions fixant $\vec{f_Y}$. Si π est une cloison de $Y_{\delta(f)}$ de type inclus dans I_2, M le mur de Y correspondant, alors $\vec{M} \supset \vec{f_Y}$. Par conséquent, M ne peut séparer $\delta(f)$ de $\delta(f')$, car $f_Y \sim_Y f'_Y$. Ainsi le type de la galerie Γ est inclus dans I_1.

On définit à présent la suite de coeurs $\delta_0, \delta_1, ..., \delta_{2k}$ et la suite de cônes $f_0, ..., f_{2k}$ par récurrence. En plus des conditions déjà citées, on requiert que $p_{\delta(f)}(\delta_i) \subset g_{\frac{i}{2}}$ lorsque i est pair.

On pose $\delta_0 = \delta(f)$, $f_0 = f_Y$. Ensuite si $\delta_0, ..., \delta_i$ et $f_0, ..., f_i$ sont construits pour i un indice pair, soit σ_i la réflexion, dont la direction fixe $\delta(\vec{f_Y})$ qui relève la réflexion de $Y_{\delta(f)}$ définie par la cloison $g_i \wedge g_{i+1}$. La cloison $g_i \wedge g_{i+1}$ est de type un élément de I_1, donc $\vec{\sigma_i} \in W_{I_1}$, $\vec{\sigma_i}$ stabilise $\vec{f_Y}$ et fixe $\vec{f_Y}^{\perp}$. Soit s le sommet de f_i, par hypothèse de récurrence, $f_i \sim_Y f_Y$, donc $f_i = s + \vec{f_Y}$, et $\sigma_i(f_i) = \sigma_i(s) + \vec{\sigma_i}(\vec{f_Y}) = \sigma_i(s) + \vec{f_Y}$. Soit M_i le mur fixé par σ_i, donc $\vec{f_Y}^{\perp} \subset \vec{M_i}$, et soit h le projeté orthogonal de s sur M. Alors $\sigma_i(s) = s + 2\vec{sh}$, et $\vec{sh} \in \vec{M}^{\perp} \subset \vec{f_Y}^{\perp\perp} = \text{Vect}(\vec{f_Y})$.

On pose alors $f_{i+1} := h + \vec{f_Y} = f_i + \vec{sh}$ et $f_{i+2} = \sigma_i(f_i) = f_i + 2\vec{sh}$. Ces deux cônes sont équivalents à f_i. On pose ensuite $\delta_{i+1} = \delta(f_{i+1})$ et $\delta_{i+2} = \delta(f_{i+2})$. Les deux coeurs δ_i et δ_{i+1} sont projetés dans la même chambre fermée $\overline{g_{\frac{i}{2}}}$ de $Y_{\delta(f)}$, ce qui signifie qu'aucun mur dont la direction contient $\delta(\vec{f})$ ne sépare strictement δ_i de δ_{i+1}. Mais comme ces deux coeurs sont parallèles de direction $\delta(\vec{f})$, un mur dont la direction ne contient pas $\delta(\vec{f})$ ne peut de toute façon pas les séparer, donc aucun mur ne sépare strictement δ_i de δ_{i+1}. De même, δ_{i+1} et δ_{i+2} sont projetés dans la même chambre fermée $g_{\frac{i}{2}+1}$, donc aucun mur ne sépare strictement δ_{i+1} de δ_{i+2}.

Ainsi δ_{i+1} et δ_{i+2} vérifient les conditions requises. On construit ainsi les suites $\delta_0, ..., \delta_{2k}$ et $f_0, ..., f_{2k}$. Alors δ_{2k} est projeté dans la même chambre fermée g_k que $\delta(f')$ et $f_{2k} \sim_Y f_Y \sim_Y f'_Y$, il ne reste donc plus qu'à poser $f_{2k+1} = f'_Y$ et $\delta_{2k+1} = \delta(f')$ pour obtenir une suite de cônes de Y équivalents allant de f_Y à f'_Y telle que les coeurs de deux cônes consécutifs ne sont séparés strictement par aucun mur.

Nous avons que dans ces conditions, deux coeurs consécutifs ont des scp dont les images par ρ sont des coeurs de cônes de $\mathcal{F}_A$ équivalents. Donc $\delta(f)$ et $\delta(f')$ ont des scp γ et γ' envoyés par ρ sur des coeurs de cônes de $\mathcal{F}_A$ équivalents. Mais $\rho(\gamma) = \phi(\gamma)$ et $\rho(\gamma') = \phi'(\gamma)$, on a donc prouvé que $\phi(f) = \rho(f) \sim_A \phi'(f') = \rho(f')$. Ceci prouve que ρ est bien définie.

Montrons qu'elle est continue. Comme $\mathcal{I}$ est ouvert dans $\overline{\mathcal{I}}$, et que ρ est continue, la continuité de $\overline{\rho}$ est acquise en tout point de $\mathcal{I}$. Il s'agit donc de montrer, pour $y \in \partial A$, pour $x \in \overline{\rho}^{-1}(\{y\})$ et pour $\mathcal{V}_A(f, U)$ un voisinage de y dans $\overline{A}$, que $\overline{\rho}^{-1}(\mathcal{V}_A(f, U))$ contient un voisinage de x.
Soit $Z \in \mathcal{A}$ tel que $\{x\} \cup c \in \overline{Z}$, soit $\phi : Z \xrightarrow{\sim} A$ fixant c. Comme f n'est pas réduit à un point ($y \in \partial A$), on peut le raccourcir pour s'assurer que $c \subset s(f) - \delta(\vec{f})^*$. Un voisinage de $\{x\}$ dans $\overline{\mathcal{I}}$ est $\mathcal{V}(\phi^{-1}(f), U)$, vérifions qu'il est inclus dans $\rho^{-1}(\mathcal{V}_A(f, U))$. Soit $B \supset b(\phi^{-1}(f)) \cup \{t\}$ et $\psi : B \xrightarrow{\sim} Z$ fixant $b(\phi^{-1}(f))$ tels que $\psi(t) \in (\phi^{-1}(f) + U) \cap \phi^{-1}(f)^*$, il faut montrer que $\rho(t) \in f + U$.

Nous savons que $c \subset s(\phi^{-1}(f)) - \phi^{-1}(f)^*_Z$, donc en utilisant la proposition 4.3.5, on voit qu'il existe $B' \in \mathcal{A}$ contenant $\{t\} \cup b(\phi^{-1}(f)) \cup c$. Soit $\psi' : B' \xrightarrow{\sim} Z$ fixant $B' \cap Z$, en particulier, ψ' fixe $b(\phi^{-1}(f))$ donc $\psi'(t) \in \phi^{-1}(f) + U$. Ensuite $\phi \circ \psi'$ fixe c, donc $\rho(t) = \phi \circ \psi'(t) \in f + U$.

L'unicité de $\overline{\rho}$ découle de sa continuité et de la densité de $\mathcal{I}$ dans $\overline{\mathcal{I}}$. □

A présent, nous pouvons nous contenter de noter ρ à la place de $\overline{\rho}$.

Les résultats obtenus pour les rétractions de $\mathcal{I}$ peuvent souvent s'étendre aux rétractions sur $\overline{\mathcal{I}}$. Voici ce que devient la proposition 4.4.1 (l'énoncé est un peu différent de celui sur les rétraction dans $\mathcal{I}$ car il faut prendre en compte la possibilité que $\rho_2(x) = \sigma \circ \rho_2(x)$) :

Proposition 6.6.2. *Soit $A \in \mathcal{A}$, c_1 et c_2 deux chambres adjacentes dans A, M le mur les séparant, σ la réflexion selon M. Soit $\rho_1 = \rho_{A,c_1}$ et $\rho_2 = \rho_{A,c_2}$. Soit $x \in \overline{\mathcal{I}}$, alors :*
- *Soit $\rho_1(x) = \rho_2(x)$, soit $\rho_2(x) = \sigma \circ \rho_1(x)$.*
- *Si $\rho_1(x) \in \overline{\mathcal{D}}(M, c_1)$ alors $\rho_1(x) = \rho_2(x)$.*
- *Si $\rho_1(x) \notin \overline{\mathcal{D}}(M, c_1)$ et si $\rho_1(x) = \rho_2(x)$, alors il existe un appartement B contenant c_1, c_2 et x.*

Démonstration:

Les deux premiers points découlent de la proposition 4.4.1, et de la continuité de ρ_1, ρ_2 et σ.

Pour le troisième point, on répète quasiment la preuve de la proposition 4.4.1. Supposons $\rho_1(x) \notin \overline{\mathcal{D}(M, c_1)}$, soit $Z_1 \in \mathcal{A}$ tel que $\{x\} \cup c_1 \subset Z_1$. Supposons que $c_2 \not\subset Z_1$ et montrons qu'alors $\rho_2(x) = \sigma \circ \rho_1(x)$. Soit $\phi_1 : Z_1 \xrightarrow{\sim} A$ fixant c_1, alors $\rho_1(x) = \phi_1(x)$. Soit d la chambre de Z_1, voisine de c_1 le long de $\phi_1^{-1}(M)$ (en fait, $d = \phi^{-1}(c_2)$), $d \neq c_2$ puisque $c_2 \not\subset Z_1$. Il existe un appartement Z_2 contenant $\mathcal{D}_{Z_1}(\phi_1^{-1}(M), d) \cup c_2$. Cet appartement contient x dans son adhérence car il contient $\phi_1^{-1}(\mathcal{D}(M, c_2))$, et il ne contient pas c_1. Soit $\phi_2 : Z_2 \xrightarrow{\sim} A$ fixant c_2, on a $\rho_2(x) = \phi_2(x)$. On a aussi $\phi_2(d) = c_1 = \sigma \circ \phi_1(d)$. Alors ϕ_2 et $\sigma \circ \phi_1$ coïncident sur $\mathcal{D}(\phi_1^{-1}(M), d)$, puis sur $\overline{\mathcal{D}(\phi_1^{-1}(M), d)}$ donc en x. □

6.7 Compacité

Pour l'instant, la notation $\widehat{f + U}$ est définie pour f un cône dans un appartement et U une partie de $\vec{A}_0$. On définit à présent, si c est une facette dans un appartement A et si $\vec{C}$ est une partie de $\vec{A}$ stable par les parties vectorielles des éléments de $\mathrm{Fix}_{W_A}(c)$,

$$\widehat{c + \vec{C}} = \bigcup_{B \supset c} \phi_B(c + \vec{C}).$$

L'union est prise sur tous les appartements contenant c, et ϕ_B est un isomorphisme de A vers B fixant c dont le choix n'importe pas.

Avant de prouver la compacité de $\overline{\mathcal{I}}$, vérifions cette conséquence de la proposition 4.2.7 :

Lemme 6.7.1. *Soit A un appartement, et C une partie convexe et ouverte de A. Soit E la réunion de toute les facettes de A qui rencontrent C. Alors pour toute chambre c de E, et tout point $y \in \overline{C}$, il existe une galerie tendue de c à y qui reste dans E.*

Preuve du lemme: Soient $x \in C \cap c$, alors $[x, y[\subset C$. Comme $c \cap C$ est ouvert, on peut supposer que $[x, y]$ ne rencontre que des chambres et des cloisons (aucune facette de dimension inférieure) et que $\vec{xy}$ n'est inclus dans aucune direction de mur de A. Soit Γ une galerie le long de $[x, y]$, commençant par c, donnée par la proposition 4.2.7. L'adhérence de chaque chambre de Γ coupe $[x, y]$. Soit e une de ces chambres, $[x, y]$ rencontre soit e soit une de ses cloisons. Mais si elle rencontre une de ses cloisons, disons m, on ne peut avoir $\vec{xy} \subset \mathrm{Vect}(m)$ car $\mathrm{Vect}(m)$ est la direction d'un mur. Alors $[x, y]$ rencontre aussi e ($[x, y] \cap m$ est forcément dans $]x, y[$). Comme C est convexe, $[x, y[\subset C$ et $e \in E$. □

Il est temps de montrer que $\overline{\mathcal{I}}$ est compact

Théorème 6.7.2. *Si l'immeuble $\mathcal{I}$ est localement fini, alors l'espace $\overline{\mathcal{I}}$ est compact.*

Démonstration:

Comme nous savons déjà que $\overline{\mathcal{I}}$ est séparé et à base dénombrable d'ouverts, il ne reste plus qu'à montrer qu'il est séquentiellement compact. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\overline{\mathcal{I}}$, trouvons lui une valeur d'adhérence.

Première étape : Quitte à remplacer (x_n) par une sous-suite, il existe $A \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{F}_A$, c une chambre de A, et $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}$ tels que $(\rho_{A,c}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $y_\infty := [f]_A$, $\delta(f) \subset \overline{c + \vec{C}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_{A,c}(x_n) \in \overline{s(f) + \vec{C}}$.

Commençons par choisir c_0 dans A_0 au hasard, et notons $\rho_0 = \rho_{A_0, c_0}$. Comme $\overline{A_0}$ est compact, on peut supposer que la suite $(\rho_0(x_n))_n$ converge vers une limite $y_0 \in \overline{A_0}$. On peut aussi supposer que tous les $\rho(x_n)$ sont dans une même façade de A_0, c'est à dire qu'ils ont tous la même direction $\vec{g}$. Soit $f_0 \in y_0$ un représentant de y_0, alors $\vec{g} \subset \overline{\vec{f_0}}$. On peut de plus choisir f_0 de sorte que $c_0 \subset s(f_0) - \vec{f_0}^*$. Comme un voisinage de y_0 dans A_0 est inclus dans $\delta(f_0)^*$, on peut supposer que tous les $\rho_0(x_n)$ ont un représentant g_n inclus dans $\delta(f_0)^*$. Mais $\delta(\vec{f_0})^*$ est une réunion finie de chambres

fermées, donc il existe $\vec{C_0}$ chambre de $\vec{A_0}$ telle que $s(f_0) + \overline{\vec{C_0}}$ contient une infinité de g_n, on peut supposer qu'il les contient tous. Bien sûr, cela implique que $\overline{s(f_0) + \vec{C_0}}$ contient tous les $\rho_0(x_n)$.

Pour conclure la première étape, il ne reste plus qu'à s'assurer que $\delta(f_0) \subset \overline{c_0 + \vec{C_0}}$, ce qui, puisque $\delta(\vec{f_0}) \subset \overline{\vec{C_0}}$ revient à s'assurer que $\overline{c_0}$ coupe $\overline{s(f_0) - \vec{C_0}}$. Pour l'instant, c_0 est inclus seulement dans $s(f_0) - \delta(\vec{f_0})^*$. Soit d une chambre à distance minimale de c_0 dont l'adhérence coupe $\overline{s(f_0) - \vec{C_0}}$.

Nous allons maintenant prouver par récurrence sur k que s'il existe A', c', $\vec{C'}$, f' et d' dans la même configuration que A_0, c_0, $\vec{C_0}$, f_0 et d le sont actuellement, avec $d(c', d') = k$, alors il existe A, c, f, et $\vec{C}$ comme requis pour conclure la première étape.

Si $k = 0$ la conclusion est immédiate, A', c', $\vec{C'}$ et f' conviennent.

Si $k > 0$, soit $\Gamma = (c' = c_0, c_1, ..., c_k = d')$ une galerie minimale entre c' et d', et soit $M = \text{Vect}(c_0 \wedge c_1)$ le premier mur traversé, soit σ_M la symétrie de A' selon M, notons $\rho_0 = \rho_{A',c'}$ et $\rho_1 = \rho_{A',c_1}$.

Si $\rho_0(x_n) = \rho_1(x_n)$ pour une infinité d'indices n, alors on peut passer à une sous-suite pour supposer que $\rho_0(x_n) = \rho_1(x_n)$ pour tout n. Alors il suffit de remplacer c' par c_1 pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence.

Par contre, dans l'autre cas, on peut supposer que $\rho_1(x_n) = \sigma \circ \rho_0(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite des $\rho_1(x_n)$ ne vérifie plus du tout les hypothèses demandées, il va falloir changer d'appartement.

D'après la proposition 6.6.2, cette situation n'est possible que si pour tout n, $\rho_0(x_n) \notin \overline{\mathcal{D}(M, c')}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors une chambre e_n voisine de c' et de c_1, et un appartement dont l'adhérence contient e_n, c' et x_n. Comme $\mathcal{I}$ est supposé localement fini, il n'y a qu'un nombre fini de chambres voisines à c' et à c_1, on peut donc remplacer $(x_n)_n$ par une sous-suite pour qu'il existe une chambre fixe e, voisine de c_1 et c' telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $B_n \in \mathcal{A}$ tel que $c' \cup e \cup \{x_n\} \in \overline{B_n}$.

Soit A'' un appartement contenant c' et e, et soit $\phi : \overline{A'} \xrightarrow{\sim} \overline{A''}$ fixant $A' \cap A''$. Nécessairement, $\phi(c_1) = e$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_{A'',e}(x_n) = \phi(\rho_0(x_n))$. Comme de plus $d(e, \phi(d)) = k - 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A'', $e = \phi(c_1)$, $\phi(d)$, $\phi(f)$, et $\vec{\phi}(\vec{C})$. Ceci conclut la première étape.

Seconde étape : On note $\rho = \rho_{A,c}$ la rétraction obtenue dans la première étape. On montre à présent que soit la suite $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence dans $\mathcal{I}$, soit il existe une galerie tendue $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A issue de $d_0 = c$ et une suite $(t_n)_n$ telle que pour tout n, pour tout $i \geq n$, $\rho(x_i) \in \overline{d_n + \vec{C}}$, $t_n \in d_n$ et $\lim_{n\to\infty} t_n = y_\infty$. On peut enfin imposer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n \cap (c + \vec{C}) \neq \emptyset$.

On note $\rho = \rho_{A,c}$.

On commence par regarder le cas où $\vec{f} = \{0\}$. Dans ce cas, $y_\infty \in A$, et $K = \bigcup_{\overline{c} \supset y_\infty} \overline{c}$ est un voisinage de y_∞ dans A, il contient donc tous les $\rho(x_n)$ à partir d'un certain rang. Mais $\rho^{-1}(K)$ est une union finie de chambres fermées, donc c'est un compact, et la suite $(x_n)_n$ a une valeur d'adhérence dans $\rho^{-1}(K)$ donc dans $\mathcal{I}$.

Supposons à présent que $\vec{f} \neq \{0\}$. Par le lemme 6.7.1, il existe une galerie minimale $c = d_0, d_1, ..., d_u$ de c à $s(f)$ telle que $\forall i \in [\![0, u]\!]$, d_i coupe $c + \vec{C}$.

On choisit ensuite une demi-droite $\vec{l} \subset \delta(\vec{f})$, et on prolonge $d_0, ..., d_u$ par une galerie tendue dont l'adhérence contient $l := s(f) + \vec{l}$ (proposition 4.2.7). Vérifions qu'on peut s'assurer que $d_n \cap (c + \vec{C}) \neq \emptyset$ pour $n > u$. Notons $\mathcal{M}_l$ l'ensemble des murs contenant l, alors la construction faite dans la proposition 4.2.7 est telle que chaque chambre de la galerie $(d_n)_{n \geq d_u}$ est incluse dans $\bigcap_{M\in\mathcal{M}_l} \mathcal{D}(M, d_u)$. Par ailleurs, $c + \vec{C}$ est un convexe, délimité par un nombre fini de ses hyperplans d'appui, et ces hyperplans ont pour direction un mur de $\vec{A}$. Notons $\mathcal{H}_l$ l'ensemble des hyperplans d'appui de $c + \vec{C}$ qui contiennent l.

Il suffit de montrer que $d_i \cap (c + \vec{C}) \neq \emptyset$ pour les chambres d_i contenant un segment de l dans leur adhérence, car alors nous pourrons relier deux telles chambres par une galerie dont chaque chambre coupe $c + \vec{C}$, et la construction donnée dans la preuve de la proposition 4.2.7 consiste exactement à définir d'abord les chambres contenant un segment

de l dans leur adhérence, puis à relier ces chambres par des galeries tendues arbitraires. Soit d_i une de ces chambres, soit $]x-\vec{\epsilon}, x+\vec{\epsilon}[$ un segment de l inclus dans $\overline{d_i}$. Les hyperplans d'appui de d_i sont des murs en nombre fini, et ceux contenant x doivent contenir $]x-\vec{\epsilon}, x+\vec{\epsilon}[$ et sont donc des éléments de $\mathcal{M}_l$. Par conséquent, il existe un voisinage V de x tel que $V \cap \bigcap_{M\in\mathcal{M}_l} \mathcal{D}(M, d_u) \subset \overline{d_i}$. De la même manière, les hyperplans d'appui de $c+\vec{C}$ qui contiennent x doivent contenir l car $l \subset \overline{c+\vec{C}}$. Donc il existe un voisinage U de x tel que $U \cap \bigcap_{H\in\mathcal{H}_l} \mathcal{D}(H, c) \subset c+\vec{C}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $U \cap V \cap \bigcap_{H\in\mathcal{H}_l} \mathcal{D}(H, c) \bigcap_{M\in\mathcal{M}_l} \mathcal{D}(M, d_u)$ est d'intérieur non vide. Notons $S = \bigcap_{H\in\mathcal{H}_l} \mathcal{D}(H, c) \bigcap_{M\in\mathcal{M}_l} \mathcal{D}(M, d_u)$, nous savons que S est d'intérieur non vide puisque d_u contient un point disons u de $c+\vec{C} \cap \bigcap_{M\in\mathcal{M}_l} \mathcal{D}(M, d_u)$. De plus, $l \subset \overline{S}$ et S est convexe. Il ne reste plus qu'à relier u à x par une droite pour finalement obtenir un point intérieur à $U \cap V \cap S$.

Ceci permet d'obtenir que $d_n \cap (c+\vec{C}) \neq \emptyset$ pour tout n. Vérifions que la galerie $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'il y a un mur M qui sépare d_u de d_0 et d'une chambre d_n avec $n \geq u$. Mais $s(f) \in \overline{d_u} \cap \overline{(c+\vec{C})}$ et $\overline{d_n} \cap \overline{d_u + \vec{l}} \neq \emptyset$, d'où $l \subset M$. En particulier $s(f) \in M$, mais ceci est impossible puisque $d_0, ..., d_u$ est une galerie minimale de d_0 à $s(f)$. Donc la galerie $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue est bien tendue.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit $s_i \in l \cap \overline{d_i}$. La suite (s_i) tend vers y_∞. Donc pour tout i, les $\rho(x_n)$ sont inclus à partir d'un certain rang N_i dans $s_i + \delta(\vec{f})^*$. Vérifions qu'en fait ils sont dans $s_i + \vec{C}$. Soit $n \geq N_i$, un représentant g_n de $\rho(x_n)$ est inclus dans $s_i + \vec{F}$ où $\vec{F}$ est une facette vectorielle dont l'adhérence contient $\delta(\vec{f})$ et $\vec{g}$. Disons $g_n = s_i + \vec{v} + \vec{g}$ avec $\vec{v} \in \vec{F}$.

On calcule alors : $g_n = s(f) + \overrightarrow{s(f)s_i} + \vec{v} + \vec{g}$. Or $\overrightarrow{s(f)s_i} \in \delta(\vec{f})$ donc $\overrightarrow{s(f)s_i} + \vec{v} \in \vec{F}$ et $g_n \subset s(f) + \vec{F}$. Mais nous savons d'autre part que $\rho(x_n) \in s(f) + \vec{C}$. Donc $\vec{F} \subset \vec{C}$, et $\rho(x_n) \in s_i + \vec{F} \subset s_i + \vec{C}$.
Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, les $\rho(x_n)$ sont inclus dans $s_i + \vec{C}$ à partir d'un certain rang. En passant à une sous-suite, on peut supposer que $\forall n \geq i, \rho(x_n) \in d_i + \vec{C}$.
Par ailleurs, en déplaçant un peu les s_i on peut obtenir une suite (t_i) convergeant vers y_∞ et telle que $t_i \in d_i$. Ceci conclut la seconde étape.

Troisième étape : On suppose maintenant que (x_n) n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathcal{I}$. Montrons qu'il existe une sous-suite de (x_n), et une galerie tendue $\Gamma = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $c_0 = d_0 = c$, que pour tout i, $\rho(c_i) = d_i$ et que les x_k pour $k \geq i$ sont dans l'adhérence de $\widehat{c_i + \vec{C}}$.

Ici, on note $\widehat{c_i + \vec{C}} = \widehat{c_i + \vec{\phi_i}(\vec{C})}$ pour un isomorphisme ϕ_i de A sur un appartement B_i contenant c et c_i qui fixe c. On remarque que puisque c_i est une chambre, on a en fait $\widehat{c_i + \vec{C}} = \rho^{-1}_{B_i,c_i}(c_i + \vec{\phi_i}(\vec{C}))$, et l'adhérence de ceci vaut $\overline{\rho^{-1}_{B_i,c_i}(c_i + \vec{\phi_i}(\vec{C}))}$ (pour vérifier l'inclusion non évidente, utiliser le lemme 6.5.3 pour inclure un point et c_i dans un même appartement).

On commence par montrer par récurrence que pour tout i, il existe $c_0, ..., c_i$ et une sous-suite (x_n^i) de (x_n) satisfaisant aux conditions demandées.

D'après la première étape, tous les x_n sont dans $\rho^{-1}(\overline{c+\vec{C}})$. Donc $c_0 = c$ convient bien.

Ensuite, supposons $c_0, ..., c_i$ construits. Comme $x_n \in \widehat{c_i + \vec{C}}$ et c_i coupe $\widehat{c_0 + \vec{C}}$, en utilisant la proposition 4.3.5, on trouve un appartement B_n tel que $c_0 \cup c_i \cup \{x_n\} \subset \overline{B_n}$. Soit $\phi_n : B_n \xrightarrow{\sim} A$ fixant c_0, comme $\phi_n(x_n) = \rho(x_n) \in \overline{d_{i+1} + \vec{C}}$, pour $n \geq i+1$, on voit que $x_n \in \widehat{\phi_n^{-1}(d_{i+1}) + \vec{C}}$. Or $\phi_n^{-1}(d_{i+1})$ est une chambre adjacente à c_i, et il n'y a qu'un nombre fini de telles chambres. On peut donc passer à une sous suite (x_n^{i+1}) de (x_n^i) pour que tous les x_n^{i+1} soient dans un même $\widehat{e+\vec{C}}$ avec e une chambre adjacente à c_i dont l'image par ρ est d_{i+1}. Il ne reste plus qu'à poser $c_{i+1} = e$.

Enfin, on prend (y_n) la sous-suite de (x_n) définie par $y_n = x_n^n$. Le couple $(\Gamma = (c_0, c_1, ...), (y_n))$ satisfait aux conditions demandées par l'étape 3. Pour ne pas alourdir les notations, dans la suite on notera $x_n = y_n$.

Conclusion :

Soit Z un appartement contenant Γ, soit $\phi : Z \xrightarrow{\sim} A$ fixant c_0, soit $x_\infty = \phi^{-1}(y_\infty)$. Montrons que x_n tend vers x_∞.

Soit $\mathcal{V}(g, U)$ un voisinage de x_∞. Comme $\mathcal{V}_A(\phi(g), U) \cap \phi(g)^*$ est un voisinage de y_∞, il existe un entier N tel que $d_N \cap (\phi(g) + U) \cap \phi(g)^* \neq \emptyset$ et tel que $\underline{\forall n \geq N}$, $\rho(x_n) \subset \mathcal{V}_A(\phi(g), U) \cap \phi(g)^*$. Soit $n \geq N$, montrons que $x_n \in \mathcal{V}(g, U)$.

Comme c_N coupe $\widehat{c_0 + \vec{C}}$ et $x_n \in \widehat{c_N + \vec{C}}$, la proposition 4.3.5 indique l'existence d'un appartement B tel que $\{x_n\} \cup c_N \cup c_0 \subset \overline{B}$. Dès lors, on a les égalités : $\rho_{Z,c_N}(x_n) = \rho_{Z,c_0}(x_n) = \phi^{-1} \circ \rho(x_n)$, d'où $\rho_{Z,c_N}(x_n) \in \mathcal{V}_Z(g, U) \cap \overline{g^*}$. Mais comme c_N coupe $b(g) + \vec{g}^*$, on peut appliquer la proposition 5.1.2, qui prouve que si un appartement fermé $\overline{X}$ contient $b(g)$ et x_n, et si $\psi : \overline{X} \xrightarrow{\sim} \overline{Z}$ fixe $b(g)$, alors $\psi(x_n) \in V_Z(g, U) \cap g^*$. Ceci entraîne bien que $x_n \in \mathcal{V}(g, U)$. □

7 Unicité de la construction

On suppose dans cette partie que $\mathcal{I}$, muni de son système complet d'appartements, est l'immeuble obtenu à partir d'une donnée radicielle valuée discrète comme dans [BT72]. C'est donc en particulier le cas si $\mathcal{I}$ est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif sur un corps local.

Nous allons montrer qu'une fois fixée une compactification de A_0 de la manière présentée dans la partie 3, il n'existe en fait qu'une seule manière de l'étendre en une compactification de $\mathcal{I}$ sur laquelle G agit par homéomorphisme. Ceci permettra directement de comparer la compactification de $\mathcal{I}$ définie dans le présent travail à celles de [Lan96] et [Wer07].

Rappelons brièvement quelques notations.

On choisit un appartement A_0, ainsi qu'un sommet spécial $0 \in A_0$, qui permet d'identifier A_0 et $\overrightarrow{A_0}$ ainsi que $\vec{A}_0^*$ et les formes affines sur A_0 s'annulant en 0. Il existe un système de racine ϕ, éventuellement non réduit, sur $\vec{A}_0$, et pour tout $\alpha \in \phi$, il existe Γ_α un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ tel que les murs de A_0 sont les $\mathcal{M}(\alpha, k) := \{x \in A_0 \mid \alpha(x) + k = 0\}$ pour $\alpha \in \phi$ et $k \in \Gamma_\alpha$.

Un groupe G agit sur $\mathcal{I}$, pour tout $\alpha \in \phi$ et $k \in \Gamma_\alpha$, il existe un sous-groupe $U_{\alpha,k}$ de G qui fixe le demi-appartement $\mathcal{D}(\alpha, k) := \{x \in A_0 \mid \alpha(x) + k \geq 0\}$ ainsi que toutes les chambres ayant une cloison dans son intérieur. Pour $\alpha \in \phi$ et $k \leq l \in \Gamma_\alpha$, on a $U_{\alpha,l} \subset U_{\alpha,k}$, donc la réunion $U_\alpha := \bigcup_{k \in \Gamma_\alpha} U_{\alpha,k}$ est un groupe. Le groupe $U_{\alpha,k}$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des appartements contenant $\mathcal{D}(\alpha, k)$. Le groupe G est engendré par les $U_{\alpha,k}$, pour $\alpha \in \phi$ et $k \in \Gamma_k$ ainsi que par un autre sous-groupe noté H qui fixe A_0.

Ces sous-groupes vérifient les axiomes d'une donnée radicielle valuée. On suppose de plus l'axiome sur les commutateurs des $U_{\alpha,k}$ vérifié au sens fort : pour tout $\alpha, \beta \in \phi$ avec $\beta \notin \mathbb{R}^-.\alpha$, pour tout $k \in \Gamma_\alpha$, $l \in \Gamma_\beta$,

$$[U_{\alpha,k}, U_{\beta,l}] \subset \left\langle U_{p\alpha+q\beta,pk+ql} \right\rangle p, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p\alpha + q\beta \in \phi.$$

Le groupe G est muni de la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{I}$, c'est-à-dire qu'une base de voisinages de e est l'ensemble des fixateurs de parties bornées. Alors l'action de G sur $\mathcal{I}$ est continue.

Le fixateur dans A_0 d'un produit d'éléments de divers sous-groupes radiciels $U_{\alpha,k}$ est dans certains cas facile à déterminer :

Proposition 7.1. *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \phi$ des racines deux à deux non colinéaires, soit $(u_1, ..., u_k) \in U_{\alpha_1} \times ... \times U_{\alpha_k}$. On suppose que $\bigcap_i \mathrm{Fix}_{A_0}(u_i)$ contient au moins une chambre. Alors $\mathrm{Fix}_{A_0}(u_1...u_k) = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Fix}_{A_0}(u_i)$.*

Remarque: Pour des racines dans un sous-système réduit et positif de ϕ, l'hypothèse "non colinéaires" devient juste "distinctes".

Démonstration:

On note $g = u_1...u_k$. Pour chaque i, l'ensemble des points fixes de u_i est un demi-appartement $\mathcal{D}_i$ délimité par un mur M_i de direction $\ker(\alpha_i)$.

La première inclusion est claire.

Soit $x \in A_0 \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$, montrons que x n'est pas fixé par g. On remarque pour commencer qu'il est impossible que x soit fixé par g et tous les u_i sauf un.

Soit c une chambre incluse dans $\bigcap_i \mathcal{D}_i$. Comme c est ouvert dans A_0, on peut choisir $y \in c$ tel que $[x, y]$ ne rencontre pas d'intersection de murs. Si x était fixé par g, alors $[x, y]$ le serait aussi. Or le segment $[x, y]$ sort de $\bigcap_i \mathcal{D}_i$ en coupant un seul mur, disons M_j. Donc $[x, y]$ contient un point z qui est dans $(\bigcap_{i\neq j} \mathcal{D}_i) \setminus \mathcal{D}_j$. Donc z est fixe par tous les u_i sauf u_j, ce qui est impossible. □

Rappelons ce résultat (voir [BT72] 7.4.33), exprimant que lorsqu'un élément de $U_{\alpha,k}$ fixe une grande boule dans un appartement, alors il fixe une petite boule de même centre dans l'immeuble. On note $B_A(o, r)$ la boule dans A de centre o de rayon r, et $B_{\mathcal{I}}(o, r)$ la boule dans $\mathcal{I}$.

Proposition 7.2. *Il existe une constante λ dépendant uniquement de ϕ telle que pour tout $o \in A_0$, et $r \in \mathbb{R}^+$, si $\alpha \in \phi$ et $k \in \Lambda_\alpha$ sont tels que $B_{A_0}(o, \lambda r) \subset \mathcal{D}(\alpha, k)$ et si $u \in U_{\alpha,k}$, alors u fixe $B_{\mathcal{I}}(o, r)$.*

Démonstration:

Pour $\beta \in \phi$, notons M_β le maximum, de $|\vec{\beta}|$ sur la sphère unité, et soit $\lambda = \max\left\{\frac{M_\alpha}{M_\beta} \mid \alpha, \beta \in \phi\right\}$.

Soient $\alpha \in \phi$ et $k \in \Gamma_\alpha$ tels que $B_{A_0}(o, \lambda r) \subset \mathcal{D}(\alpha, k)$.

Soit V le groupe engendré par les $U_{p\alpha+q_1\beta_1+...+q_n\beta_n, pk+q_1l_1+...+q_nl_n}$ pour $n \in \mathbb{N}, \beta_1, ..., \beta_n \in \phi$, $(l_1, ..., l_n) \in \Gamma_{\beta_1} \times ... \times \Gamma_{\beta_n}$ et $p, q_1, ..., q_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p\alpha + q_1\beta_1 + ... + q_n\beta_n \in \phi$ et chaque $\mathcal{D}(\beta_i, l_i)$ contient o. Montrons que les éléments de V fixent $B_{A_0}(o, r)$. Déjà, pour $\vec{v}$ le vecteur qui maximise $\vec{\alpha}$ sur la sphère unité, on a $o - \lambda r\vec{v} \in \mathcal{D}(\alpha, k)$ d'où $(\alpha + k)(o) \geq \lambda r M_\alpha$. Soit maintenant $\gamma = p\alpha + q_1\beta_1 + ... + q_n\beta_n$ et $j = pk + q_1l_1 + ... + q_nl_n$ comme dans la définition de V. Alors $\gamma(o) + j \geq p(\alpha(o) + k) \geq \lambda r M_\alpha$. Ceci entraîne que la boule $B_{A_0}(o, \lambda\frac{M_\alpha}{M_\gamma} r)$ est incluse dans $\mathcal{D}(\gamma, j)$. Comme $\lambda\frac{M_\alpha}{M_\gamma} \geq 1$, on obtient le résultat voulu.

A présent, soit $u \in U_{\alpha,k}$, et d une chambre de $\mathcal{I}$ coupant $B_{\mathcal{I}}(o, r)$. Soit $\Gamma = c_0, ..., c_n = d$ une galerie tendue avec $o \in \overline{c_0} \subset A_0$. Soit ρ la rétraction sur A_0 de centre c_0. Il existe $\beta_1 \in \phi$, $l_1 \in \Gamma_{\beta_1}$ et $v_1 \in U_{\beta_1,l_1}$ tels que $v_1.c_1 = \rho(c_1)$ et $\mathcal{D}(\beta_1, l_1)$ contient c_0 donc o. Ensuite il existe $\beta_2 \in \phi$, $l_2 \in \Gamma_{\beta_2}$, $v_2 \in U_{\beta_2,l_2}$ tels que $v_2v_1c_2 = \rho(c_2)$, et $\mathcal{D}(\beta_2, l_2)$ contient $c_0 \cup \rho(c_1)$ donc encore o. On obtient finalement $\beta_1, ..., \beta_n, l_1, ..., l_n, v_1, ..., v_n$ tels que $\rho(d) = v_n...v_2v_1.d$. Notons $v = v_n...v_1$.

Comme $\rho(d)$ coupe $B_{A_0}(o, r) \subset B_{A_0}(o, \lambda r)$, on a $u.\rho(d) = \rho(d) = v.d = uv.d$. Le fait que chaque commutateur $(u, v_i) = uv_iu^{-1}v_i^{-1}$ soit dans V permet de prouver par un calcul classique que $(u, v) \in V$, et donc que $(u, v)^{-1}$ fixe $v.d$. Alors $v.d = (u, v)vu.d$ d'où $(u, v)^{-1}v.d = vu.d$ puis $d = u.d$. □

Corollaire 7.3. *Soient A et B deux appartements, on suppose qu'il existe $o \in A \cap B$ et $r > 0$ tels que $A \cap B$ contient la boule $B_A(o, \lambda r)$ où λ est la constante de la proposition. Alors il existe $g \in G$ tel que $g.A = B$, et g fixe $(A \cap B) \cup B_{\mathcal{I}}(o, r)$.*

Démonstration:

Par conjugaison, on peut supposer $A = A_0$. Le groupe engendré par les $U_{\alpha,k}$ tels que $\mathcal{D}(\alpha, k) \supset B_A(o, \lambda r)$ est transitif sur les appartements contenant $B_A(o, \lambda r)$ et il fixe $B_{\mathcal{I}}(o, r)$ d'après 7.2. □

Et voici le résultat annoncé :

Proposition 7.4. *Soit $\hat{\mathcal{I}}$ un espace topologique compact contenant $\mathcal{I}$, tel que $\mathcal{I}$ est ouvert dense dans $\hat{\mathcal{I}}$.*
On suppose que l'adhérence de l'appartement de référence A_0, qu'on note $\hat{A}_0$ est homéomorphe à $\overline{A_0}$ par un homéomorphisme fixant A_0. On note $\wedge : a \mapsto \hat{a}$ cet homéomorphisme.
On suppose que l'action de G sur $\mathcal{I}$ s'étend en une action continue sur $\hat{\mathcal{I}}$. Alors il existe un homéomorphisme $\chi : \overline{\mathcal{I}} \to \hat{\mathcal{I}}$ qui est G-équivariant et qui fixe $\mathcal{I}$.

Remarque: Par densité de A_0 dans $\bar{A}_0$, et par densité de $\mathcal{I}$ dans $\overline{\mathcal{I}}$, les applications $\wedge : a \mapsto \hat{a}$ et χ sont uniques si elles existent.

Démonstration:
Si A est un appartement de $\mathcal{I}$, on notera $\hat{A}$ son adhérence dans $\hat{\mathcal{I}}$. Les deux clôtures d'appartements $\bar{A}$ et $\hat{A}$ sont alors homéomorphes, par un unique homéomorphisme qui vaut $g^{-1}_{|\hat{A}} \circ \wedge \circ g_{|\bar{A}}$, où $g \in G$ est tel que $g.A = A_0$. Il est donc naturel de vouloir définir une fonction de la sorte :

$$\chi : \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{I}} & \to & \hat{\mathcal{I}} \\ g.a & \mapsto & g.\hat{a} \end{array}$$

, pour $g \in G$ et $a \in \bar{A}_0$.

Montrons que χ est bien définie : soient $g, g' \in G$ et $a, a' \in \bar{A}_0$ tels que $ga = g'a'$ et montrons que $g\hat{a} = g'\hat{a}'$. En remplaçant g par $(g')^{-1}g$, on se ramène au cas où $g' = 1$. Soient f un représentant de a et f' un représentant de a'. Quitte à les réduire, il existe $Z \in \mathcal{A}$ contenant $g(\delta(f)) \cup \delta(f')$. Soient d et d' des demi-droites incluses dans $\delta(f)$ et $\delta(f')$ de directions incluses dans $\vec{f}$ et $\vec{f'}$, de sorte que a est l'unique point dans $\bar{\mathcal{I}}$ de $\bar{d} \setminus d$ et a' est l'unique point dans $\mathcal{I}$ de $\bar{d'} \setminus d'$. Ainsi, d' et $g.d$ ont le même point limite dans $\bar{Z}$, qui est a'. Comme $\bar{Z}$ est homéomorphe à $\hat{Z}$ par un homéomorphisme fixant Z, on en déduit que d' et $g.d$ ont le même unique point limite dans $\hat{Z}$.

Le point limite de d' dans $\hat{A}_0$ est $\hat{a}'$ et comme $\hat{\mathcal{I}}$ est séparé, c'est aussi l'unique point limite de d' dans $\hat{I}$ donc en particulier dans $\hat{Z}$. De même, l'unique point limite de d dans $\hat{\mathcal{I}}$ est a, donc par continuité de g, le point limite de $g.d$ dans $\hat{\mathcal{I}}$, donc dans $\hat{Z}$ est $g.\hat{a}$. Ceci prouve que $\hat{a}' = g.\hat{a}$.

Donc χ est bien définie. C'est une fonction G-équivariante qui fixe $\mathcal{I}$, elle induit l'unique homéomorphisme de $\bar{A}$ sur $\hat{A}$ pour chaque appartement A. Comme deux points quelconques de $\overline{\mathcal{I}}$ sont toujours inclus dans l'adhérence d'un même appartement (lemme 6.5.3), ceci entraîne que χ est injective. Il ne reste plus qu'à montrer que χ est continue : elle sera alors fermée par compacité de $\overline{\mathcal{I}}$ et séparation de $\hat{\mathcal{I}}$, et son image sera un fermé de $\hat{\mathcal{I}}$ contenant $\mathcal{I}$ c'est-à-dire $\hat{\mathcal{I}}$ lui-même.

Soit $x \in \overline{\mathcal{I}}$, montrons que χ est continue en x. Le cas où $x \in \mathcal{I}$ est évident, et par G-équivariance de χ, on se ramène au cas où $x \in \bar{A}_0$. Au total, on peut supposer $x \in \partial A_0$.

Soit O un ouvert de $\hat{\mathcal{I}}$ contenant $\chi(x)$. Notons $\hat{\rho} : G \times \hat{\mathcal{I}} \to \hat{\mathcal{I}}$ l'action de G sur $\hat{\mathcal{I}}$. Par continuité de $\hat{\rho}$, et parce que $e.x = x \in \bar{A}_0$, il existe un voisinage ouvert Q de e dans G et un voisinage ouvert $\hat{V}$ de $\hat{x}$ dans $\hat{\mathcal{I}}$ tel que $Q.\hat{V} = \rho(Q \times \hat{V}) \subset O$. Soit $V = \chi^{-1}(\hat{V})$. Alors $x \in Q.V \subset \chi^{-1}(Q.\hat{V}) \subset \chi^{-1}(O)$. Il reste à prouver que $Q.V$ contient un voisinage de x dans $\overline{\mathcal{I}}$.

Soit $f \in \mathcal{F}_{A_0}$ un représentant de x. On peut supposer que Q est le fixateur dans G d'une partie bornée, de la forme $B_{\mathcal{I}}(o, r)$, avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $o \in A_0$, on peut même imposer $o \in -\delta(f)$, où $-\delta(f)$ signifie $s(f) - \delta(\vec{f})$.

Soit λ la constante donne par la proposition 7.2. Soient $\{\beta_i\}_{i\in I}$ l'ensemble des parties d'appartement égales à la clôture de $\delta(f)$ et d'une boule de centre o de rayon λr, c'est-à-dire :

$$\{\beta_i\}_{i\in I} = \{\beta \text{ sous-complexe simplicial de } \mathcal{I} \mid \exists B \in \mathcal{A} \text{ tq } \delta(f) \subset B,\ o \in B \text{ et } \beta = \mathrm{Cl}(B_B(o, \lambda r) \cup \delta(f))\}$$

Cet ensemble est fini car l'ensemble des sous-complexes simpliciaux de $B_{\mathcal{I}}(o, r)$ est fini.
On choisit alors $\{B_i\}_{i\in I}$ une famille d'appartements tels que $\forall i \in I, \beta_i \subset B_i$.

Pour tout $i \in I$, χ induit un homéomorphisme entre $\bar{B}_i$ et $\hat{B}_i$. Comme $x \in \bar{B}_i$, $\chi(x) = \hat{x} \in \hat{B}_i$. De plus, $\hat{V} \cap \hat{B}_i$ est un voisinage de $\hat{x}$ dans $\hat{B}_i$, donc $\chi^{-1}(\hat{V} \cap \hat{B}_i) \subset V$ est un voisinage de x dans $\bar{B}_i$. Il contient donc un ensemble de la forme $\mathcal{V}'_{B_i}(f_i, R_i)$, avec $R_i \in \mathcal{U}$ et $f_i \in \mathcal{F}_{B_i}$, $[f_i] = x$ ($\mathcal{V}'_{B_i}(f_i, R_i)$ est défini en 6.2.1). Comme $\delta(f) \subset B_i$, on peut supposer que $\delta(f_i) \subset \delta(f) \subset A$ (voir 5.1.4). Soit γ un scp de $\bigcap_{i\in I} \delta(f_i)$ tel que $B_A(o, \lambda r) \subset -\gamma^*_A$. Soit $R = \bigcap_{i\in I} R_i$. Alors $R \in \mathcal{U}$, et γ est un coeur de cône affine. Soit $g \in \mathcal{F}_{A_0}$ le cône engendré par γ, c'est un scp de f donc $[g] = x$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}(g, R)$ est un voisinage de x dans $\mathcal{I}$. Nous savons que pour tout $i \in I$, $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}(g, R) \cap B_i \subset V$. Montrons que $\mathcal{V}_{\mathcal{I}}(g, R) \subset Q.V$, cela conclura la preuve.

Soit $t \in \mathcal{V}_{\mathcal{I}}(g,R)$, il suffit de montrer qu'il existe $h \in Q$ et $i \in I$ tel que $h.t \in \mathcal{V}'_{B_i}(f_i,R_i)$. D'après la proposition 6.2.3, il existe un appartement Z contenant $b(g)$ et un représentant $\tau \in \mathcal{F}_Z$ de t, tel que $\tau \subset (\phi_Z(g)+R) \cap \phi_Z(g)^*$, où $\phi_Z : A \xrightarrow{\sim} Z$ est un isomorphisme fixant $b(g)$. Quitte à réduire τ, on peut supposer $\delta(\tau)$ inclus dans un des quartiers de la forme $\overline{b(g)+\vec{C}}$ avec $\vec{C}$ une chambre de $\phi_Z(\gamma)^*$. Comme o a été choisi dans $-\delta(f)$, il est dans $-\gamma$, donc aucun mur de A_0 dont la direction contient $\vec{\gamma}$ ne sépare strictement o et $b(g)$. La proposition 4.3.5 permet de conclure à l'existence d'un appartement Y contenant $\{o\} \cup b(g) \cup \delta(\tau)$.

Ensuite, la proposition 4.3.6 prouve qu'il existe un appartement X contenant $-\gamma_Y^* \cup \gamma$. En particulier, $X \cap A$ contient o et γ, donc $o+\vec{\gamma} = o+\delta(\vec{f})$, ce qui contient $\delta(f)$. De plus, nous avons supposé $B_A(o,\lambda r) \subset -\gamma_A^*$, ce qui entraîne que $B_Y(o,\lambda r) \subset -\gamma_Y^* \subset Y \cap X$.

Soit $i \in I$ tel que $B_i \cap X \supset B_X(o,\lambda r) \cup \delta(f)$. Par le corollaire 7.3, il existe $h \in G$ tel que $h.Y = B_i$, h fixe $Y \cap B_i$ et $B_{\mathcal{I}}(o,r)$. En particulier, $h \in Q$.

Enfin, si $\phi_Y : A_0 \xrightarrow{\sim} Y$ est un isomorphisme fixant $b(g)$, alors $h.\delta(\tau) \subset h.((\phi_Y(g)+R) \cap \phi_Y(g)^*) = (g_i+R) \cap g_i^*$, où g_i est le cône engendré par γ dans B_i. Comme $g_i \subset f_i$ et $R \subset R_i$, on obtient $h.\delta(\tau) \subset (f_i+R_i) \cap f_i^*$, d'où $h.t \in \mathcal{V}'_{B_i}(f_i,R_i) \subset V$. □

Ce résultat prouve que les compactifications de $\mathcal{I}$ définies par A. Werner dans [Wer07] sont identiques à celle présentée ici pour les décompositions en cône $\mathcal{F}^J$ décrites en 2.5. En effet, nous avons déjà vu que la décomposition $\Sigma(\rho)$ définie dans [Wer07] était égale à $\mathcal{F}^J$, et nous avons défini la compactification de A_0 à partir de $\mathcal{F}^J$ exactement de la même manière que dans [Wer07].

En particulier, les compactifications de [Lan96] et [GR06] coïncident avec celle présentée ici pour $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\emptyset$ la décomposition en cônes de Weyl vectoriels.

8 Description de $\overline{\mathcal{I}}$

Dans cette partie, on vérifie principalement une propriété attendue de $\overline{\mathcal{I}}$, à savoir que son bord est réunion d'immeubles affines, dont les groupes de Coxeter sont des sous-groupes de Coxeter de W.

8.1 $\overline{\mathcal{I}}$ est une réunion d'immeubles

Lemme 8.1.1. *Soient $A, B \in \mathcal{A}$, soient $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, $y \in \bar{A}$. Si y est dans la même facette de $\bar{A}$ que x alors $y \in \bar{B} \cap \bar{A}$ et x et y sont dans la même facette de $\bar{B}$.*

Notons a cette facette, elle est donc incluse dans $\bar{A} \cap \bar{B}$. Il existe un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ dont le prolongement à $\bar{A}$ dans $\bar{B}$ envoie la façade de A contenant x sur la façade de B contenant x et fixe a.

Enfin, si $f \in \mathcal{F}_A$, $f' \in \mathcal{F}_B$ sont tels que $x = [f]_A = [f']_B$, alors $\vec{\phi}(\vec{f}) = \vec{f'}$.

Preuve du lemme: Si x et y dans une même facette de $\bar{A}$, cela signifie qu'il existe $f, g \in \mathcal{F}_A$ tels que $x = [\tilde{f}]$ et $y = [\tilde{g}]$, avec $\vec{f} = \vec{g}$ et tels qu'aucun mur dont la direction contient $\vec{f}$ ne sépare au sens large f de g. C'est-à-dire qu'aucun mur dont la direction contient $\vec{f}$ ne sépare f de g ni ne contient l'un sans contenir l'autre.

D'autre part, $x \in \bar{B}$ donc il existe $f' \in \mathcal{F}_B$ tel que $x = [\tilde{f'}]$.

On choisit un appartement Z contenant, quitte à les raccourcir, $\delta(f)$ et $\delta(f')$. Nous allons montrer que $y \in \bar{A} \cap \bar{Z}$, c'est-à-dire qu'il existe un scp de g dont le coeur est inclus dans $A \cap Z$. Il suffit de montrer que $g \cap \mathrm{Cl}(\delta(f)) \neq \emptyset$. (Pour une compactification polygonale classique, où $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\emptyset$, c'est automatique.)

On décompose $\vec{A}$ en somme orthogonale de trois sous-espaces comme dans 3.3.9 : $\vec{A} = \mathrm{Vect}(\delta(f)) \oplus \vec{E} \oplus \vec{f}^{\perp}$, où $\vec{E}$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect}(\delta(\vec{f}))$ dans $\mathrm{Vect}(\vec{f})$. Notons $p_{\vec{E}}$ la projection orthogonale sur $\vec{E}$, alors $p_{\vec{E}}(\vec{f})$ est un cône convexe qui engendre $\vec{E}$ et qui est stable par son groupe de Coxeter. Comme $\vec{E}$ est essentiel, ceci implique que $p_{\vec{E}}(\vec{f}) = \vec{E}$.

Il existe donc un point $v \in g$ tel que $p_{\vec{E}}(v) = p_{\vec{E}}(s(f))$. En rajoutant à v un élément assez grand de $\delta(\vec{f})$, on peut aussi s'assurer que $v \in f_A^*$. Vérifions que $v \in \mathrm{Cl}(\delta(f))$. Supposons qu'un mur $M = \alpha^{-1}(\{0\})$ sépare strictement v et $\delta(f)$. Disons que $\alpha(\delta(f)) > 0$ et $\alpha(v) < 0$. Alors $\vec{\alpha}(\delta(\vec{f})) \geq 0$ et $\vec{\alpha}(\overrightarrow{s(f)v}) < 0$. Mais comme $\overrightarrow{s(f)v} \in \vec{f}^*$, ceci implique $\vec{\alpha}(\delta(\vec{f})) = 0$, c'est-à-dire $\delta(\vec{f}) \subset \vec{M}$. Mais nous savons qu'un tel mur soit contient $\vec{E}$ soit contient $\vec{f}^{\perp}$. Le premier cas est impossible car il implique $\vec{f} \subset \vec{M}$ et nous avons supposé qu'aucun mur dont la direction contient $\vec{f}$ ne sépare f et g. Quand au second cas, il implique que $\vec{\alpha}$ s'annule sur $\mathrm{Vect}(\delta(\vec{f})) \oplus \vec{f}^{\perp}$. Mais comme $p_{\vec{E}}(v) = p_{\vec{E}}(s(f))$, il est alors impossible que M sépare v et $s(f)$.

Ainsi, $v + \vec{f}$ est un scp de g et son coeur est inclus dans $\mathrm{Cl}(\delta(f)$ donc dans $A \cap Z$. Ceci prouve que $y \in \overline{A} \cap \overline{Z}$. En choisissant un isomorphisme $\phi_1 : A \xrightarrow{\sim} Z$ qui fixe $\delta(f)$, et donc $\delta(v + \vec{f})$, on vérifie que x et y sont dans la même facette de $\overline{Z}$. Alors comme précédemment, on peut trouver un scp g' de $\phi_1(v + \vec{f})$ dont le coeur est dans $\mathrm{Cl}(\delta(f'))$ donc dans $Z \cap B$. On obtient alors que $y \in \overline{B}$ et x et y sont dans la même facette de $\overline{B}$.

Il ne reste plus qu'à choisir un isomorphisme $\phi_2 : Z \xrightarrow{\sim} B$ fixant $\delta(f')$, et donc $\delta(g')$, et à poser $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ pour obtenir un isomorphisme de A sur B dont le prolongement à $\overline{A}$ fixe x. Il est immédiat que $\vec{\phi}(\vec{f}) = \vec{f'} = \vec{g}$, donc $\phi(A_f) = A_g$. La définition de ϕ est indépendante de y, et les raisonnements que nous venons d'effectuer prouvent que ϕ fixe toute la facette de $\overline{A}$ contenant x. □

Remarque: Comme $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermés, $\overline{A} \cap \overline{B}$ contient en fait $\overline{a}$. Et comme ϕ est continu, il fixe $\overline{a}$.

Lorsque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, mais que A contient un cône f, B un cône f' avec $f \parallel f'$, on peut quand même, comme dans la preuve précédente, en passant par un appartement Z contenant un scp de $\delta(f)$ et un scp de $\delta(f')$, prouver qu'il existe un isomorphisme de A sur B qui induit un isomorphisme entre A_f et $B_{f'}$. Ceci prouve le

Lemme 8.1.2. *Soient A et B deux appartements, $f \in \mathcal{F}_A$, $f' \in \mathcal{F}_B$ tels que $f \parallel f'$. Alors il existe un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} B$ induisant un isomorphisme de A_f sur $B_{f'}$, tel que $\vec{\phi}(\vec{f}) = \vec{f'}$.*

□

On définit l'ensemble des facettes de $\overline{\mathcal{I}}$ comme étant la réunion des ensembles de facettes de chaque appartement compactifié. Le lemme montre que deux facettes sont disjointes ou égales, et que si un appartement contient un point d'une facette, alors il contient toute la facette, et son adhérence.

Tout comme un immeuble, $\overline{\mathcal{I}}$ vérifie les assertions suivantes :

Proposition 8.1.3.
- $\overline{\mathcal{I}} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$
- *Pour deux facettes a et b, il existe $\overline{A}$ contenant les deux.*
- *Si $\overline{A} \cap \overline{B}$ contient deux facettes a et b, alors il existe un "isomorphisme d'appartements compactifiés" $\phi : \overline{A} \xrightarrow{\sim} \overline{B}$ fixant a et b.*

Mais bien sûr, les $\overline{A}$ ne sont pas des complexes de Coxeter.

Démonstration:
Le premier point vient directement de la définition de $\overline{\mathcal{I}}$. Le second est conséquence du lemme 6.5.3 et du fait que lorsqu'un appartement compactifié contient un point d'une facette, alors il contient toute cette facette.

Prouvons le troisième point. En remplaçant a et b un point inclus dans a et un point inclus dans b, on se ramène au cas où a et b sont deux points.

Soit $f_A \in \mathcal{F}_A$ un représentant de a dans A, et $g_B \in \mathcal{F}_B$ un représentant de b dans B. Soient d_a une demi-droite incluse dans l'intérieur de $\delta(f_A)$ dans $\mathrm{Aff}(\delta(f_A))$, et d_b une demi-droite incluse dans l'intérieur de $\delta(g_B)$ dans $\mathrm{Aff}(\delta(g_b))$. En choisissant des galeries, dans A et B, le long de ces demi-droites (proposition 4.2.7), puis en choisissant un appartement contenant des sous-galeries de ces galeries, on obtient un appartement Z dont l'intersection avec A contient un scp de

$\delta(f_A)$ et au moins une chambre disons c_A. L'intersection de Z avec B contient un scp de $\delta(g_B)$ et une chambre c_B. Quitte à réduire f_A et g_B, on suppose $Z \supset \delta(f_A) \cup \delta(g_B)$.

A présent, soit $\phi_1 : B \xrightarrow{\sim} Z$ un isomorphisme fixant $B \cap Z$. Alors ϕ est la restriction à B de la rétraction ρ_{Z,c_B}. Lorsqu'on étend ϕ_1 et ρ_{Z,c_B} par continuité à $\overline{B}$ et $\overline{I}$, on obtient $\rho_{Z,c_B}(a) = a$ et $\rho_{Z,c_B}(b) = b$ car $a \cup b \subset \overline{Z}$, d'où $\phi_1(a) = a$ et $\phi_1(b) = b$.

De la même manière il existe $\phi_2 : \overline{Z} \xrightarrow{\sim} \overline{A}$ qui fixe $a \cup b$, alors $\phi_2 \circ \phi_1$ convient. □

Définition 8.1.4. *Soit $F \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$, on note $\mathcal{I}_F = \{[G] \mid G \in \mathcal{I},\ G /\!\!/ F\}$. On appellera $\mathcal{I}_F$ la façade de l'immeuble $\mathcal{I}$ de type F.*

Bien sûr, $\mathcal{I}_F$ ne dépend que de la classe de parallélisme de F, et même que de la classe de parallélisme de $\delta(F)$. Si A est un appartement contenant $\delta(F)$, si $f \in \mathcal{F}_A$ est le cône engendré par $\delta(F)$, on notera indifféremment $\mathcal{I}_F$, $\mathcal{I}_f$, ou même $\mathcal{I}_{\delta(F)}$.

Proposition 8.1.5. *Pour tout $F \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_F$ est un immeuble affine. Ses appartements sont les A_f pour tous les appartements A contenant un cône f tel que $\tilde{f} /\!\!/ F$.*

Démonstration:

Chaque A_f est un complexe de Coxeter affine, et la réunion de ces complexes de Coxeter est bien $\mathcal{I}_F$. Si A et B sont deux appartements contenant des cônes f et g tels que $\tilde{f} /\!\!/ F /\!\!/ \tilde{g}$, alors $\delta(f) /\!\!/ \delta(g)$, et le lemme 8.1.2 prouve l'existence d'un isomorphisme entre A_f et B_g. Ainsi, tous les (présumés) appartements de $\mathcal{I}_\mathcal{F}$ sont isomorphes.

Soient a et b deux facettes de $\mathcal{I}_F$. Par la proposition 8.1.3, il existe un appartement A tel que $a \cup b \subset \overline{A}$. Alors a et b sont inclus dans des façades de A, disons $a \subset A_g$ et $b \subset A_h$, avec $g, h \in \mathcal{F}_A$. On peut choisir g représentant un élément de a et h représentant un élément de b. Alors $\tilde{g} /\!\!/ F /\!\!/ \tilde{h}$, d'où $A_g = A_h = A_F$ est un appartement de $\mathcal{I}_F$ qui contient $a \cup b$.

Enfin, soient A_F et B_F deux appartements (présumés) de $\mathcal{I}_F$, supposons que $A_F \cap B_F$ contienne deux facettes a et b, et cherchons un isomorphisme de A_F sur B_F fixant $a \cup b$. Par la proposition 8.1.3, il existe $\phi : \overline{A} \xrightarrow{\sim} \overline{B}$ un isomorphisme d'appartements compactifiés fixant $a \cup b$. Alors ϕ induit l'isomorphisme cherché entre A_F et B_F . □

Si A est un appartement contenant un cône f tel que $\tilde{f} /\!\!/ F$, alors $\vec{f}$ est unique (car le parallélisme est une relation d'équivalence : si g est un autre cône avec $\tilde{g} /\!\!/ F$, alors $f /\!\!/ g$). Ceci autorise la

Définition 8.1.6. *Si A est un appartement contenant un cône f tel que $\tilde{f} /\!\!/ F$, on note $A_F := A_f$.*
La projection de A sur A_f sera notée $p_{A,f}$ ou $p_{A,F}$, ou juste p_A, p_f, p_F selon le niveau de précision requis.

Donc en résumé, il y a trois notations pour le même objet : A_F, A_f et $A_{\vec{f}}$.

Remarque: L'immeuble $\mathcal{I}_F$ n'est pas forcément essentiel. Par exemple, si $\vec{\delta}(F)$ est contenu dans une chambre de Weyl vectorielle, alors $\mathcal{I}_F$ est un seul appartement, sans mur (voir la remarque de 3.3.8).

Maintenant qu'on sait que les façades sont des immeubles, on peut montrer d'autres résultats dans la même veine, par exemple :

Proposition 8.1.7. *Soit $F \in \mathcal{F}_\mathcal{I}$, soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux appartements contenant des cônes parallèles à $\delta(F)$. Alors il existe un isomorphisme $\phi : \overline{A} \xrightarrow{\sim} \overline{B}$ qui fixe $A_F \cap B_F$.*

Démonstration:

Soit x une facette de dimension maximale de $A_F \cap B_f$. Il existe $\phi : \overline{A} \xrightarrow{\sim} \overline{B}$ fixant x et envoyant A_F sur B_F, par le lemme 8.1.1. Notons $\phi_F : A_F \xrightarrow{\sim} B_F$ l'isomorphisme d'appartements de $\mathcal{I}_F$ induit par ϕ. Comme ϕ_F fixe une facette de dimension maximale de $A_F \cap B_F$, il fixe nécessairement $A_F \cap B_F$ (proposition 4.1.10). D'où le résultat. □

8.2 Bord d'une façade

On vérifie ici que chaque façade $\mathcal{I}_F$ peut être compactifiée tout comme nous avons compactifié $\mathcal{I}$, et que le résultat est homéomorphe à une réunion que nous préciserons, de plusieurs façades de $\overline{\mathcal{I}}$.

On fixe à présent un cône $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$.

8.2.1 Compactification de $\mathcal{I}_F$

Choisissons A un appartement contenant $\delta(F)$, soit $p = p_{A,F}$ la projection $A \to A_F$. Soit $f = F \cap A$, alors $A_F = A_f$ est un complexe de Coxeter affine et le groupe vectoriel associé est isomorphe via la projection p à $\mathrm{Fix}_{W(\vec{A})}(\vec{f})$.

On pose $\mathcal{F}^F = \left\{\vec{p}(\vec{g}) \mid \vec{g} \in \mathcal{F} \text{ et } \vec{f} \subset \overline{\vec{g}}\right\}$.

Lemme 8.2.1. *Soit $\vec{g} \in \mathcal{F}$ dont $\vec{f}$ est une face, c'est-à-dire $\vec{f} \subset \overline{\vec{g}}$. Alors $\vec{g}$ est stable par $\vec{f}$, c'est-à-dire $\vec{g} + \vec{f} \subset \vec{g}$.*

Remarque: En fait, $\vec{g} + \vec{f} = \vec{g}$ car $\vec{g}$ est ouvert dans $\mathrm{Vect}(\vec{g})$ et $0 \in \overline{\vec{f}}$.

Preuve du lemme: C'est immédiat si on fixe une description de $\vec{g}$ et de sa face $\vec{f}$ en termes d'équations et d'inéquations linéaires comme en 2.4, mais voici une preuve élémentaire :

Soit $x \in \vec{g}$ et $v \in \vec{f}$. Comme $\vec{g}$ est ouvert dans $\mathrm{Vect}(\vec{g})$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x, r)$ dans $\mathrm{Vect}(\vec{g})$ soit incluse dans $\vec{g}$. Ensuite $v \in \overline{\vec{g}}$ donc il existe $\epsilon \in \mathrm{Vect}(\vec{g})$, de norme inférieure à r tel que $v+\epsilon \in \vec{g}$. Alors $x+v = (x-\epsilon)+(v+\epsilon) \in \vec{g}$. □

Proposition 8.2.2. *L'ensemble $\mathcal{F}^F$ vérifie les conditions requises pour définir une compactification de $\mathcal{I}_F$. De plus, l'application $\vec{g} \mapsto \vec{p}(\vec{g})$ est une bijection entre l'ensemble des cônes de $\mathcal{F}$ ayant $\vec{f}$ comme face et $\mathcal{F}^F$.*

Démonstration:

On commence par les points évidents : $\mathcal{F}^F$ est fini, il contient $\{0\} = \vec{p}(\vec{f})$, et il est stable par le groupe de Weyl $W(\vec{A}_F) \simeq \mathrm{Fix}_{W(\vec{A})}(\vec{f})$.

Montrons que $A_f = \bigcup_{\vec{g} \in \mathcal{F}^F} \vec{g}$. Comme le terme de droite est stable par homothéties, il suffit de montrer qu'il contient un voisinage de 0. Par conséquent, il suffit de montrer que, dans A, $\bigcup\{\vec{g} \mid \vec{f} \subset \overline{\vec{g}}\}$ contient un voisinage d'un point de $\vec{f}$. Soit $x \in \vec{f}$. Si $\vec{g} \in \mathcal{F}$ est un cône ne contenant pas $\vec{f}$ dans son adhérence, alors $x \notin \overline{\vec{g}}$ (car $\partial\vec{g}$ est une réunion disjointe de cônes dans $\mathcal{F}$). Il existe donc $U_{\vec{g}}$ un voisinage de x dans A qui ne coupe pas $\vec{g}$. Comme $\mathcal{F}$ est fini, le nombre des $U_{\vec{g}}$ ainsi définis pour $\vec{g}$ variant parmi les cônes dont $\vec{f}$ n'est pas une face est fini, et leur intersection est un voisinage de x inclus dans $\bigcup_{\vec{g} \text{ tq } \vec{f} \subset \overline{\vec{g}}} \vec{g}$. Nous avons prouvé que $A_f = \bigcup_{\vec{g} \in \mathcal{F}^F} \vec{g}$.

Montrons que cette union est disjointe. Soit $\vec{p}(\vec{g})$ et $\vec{p}(\vec{h})$ deux éléments de $\mathcal{F}^F$, où $\vec{g}, \vec{h} \in \mathcal{F}$ sont des cônes ayant $\vec{f}$ comme face. Supposons que $\vec{p}(\vec{g}) \cap \vec{p}(\vec{h})$ contient un point, écrivons ce point sous la forme $\vec{p}(x)$ avec $x \in \vec{A}$. Alors il existe $v, w \in \mathrm{Vect}(\vec{f})$ tels que $x + v \in \vec{g}$ et $x + w \in \vec{h}$. Mais il existe $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \vec{f}$ tels que $v = v_1 - v_2$ et $w = w_1 - w_2$. Alors le point $x + v_1 + w_1 = x + v + v_2 + w_1 = x + w + w_2 + v_1$ est dans $\vec{g} \cap \vec{h}$, d'après le lemme. Ceci entraîne que $\vec{g} = \vec{h}$, donc $\vec{p}(\vec{g}) = \vec{p}(\vec{h})$.

Ceci montre également que l'application $\vec{g} \mapsto \vec{p}(\vec{g})$ est bijective.

Le petit raisonnement qu'on vient de faire fonctionne aussi dans le cas de cônes affines, il donne le résultat suivant, qu'on note pour utilisation ultérieure :

Lemme 8.2.3. *Soit $h, g \in \mathcal{F}_A$ deux cônes affines tels que $\vec{f}$ borde $\vec{g}$ et $\vec{h}$. Si $p(h) \cap p(g) \neq \emptyset$, alors $h \cap g \neq \emptyset$.*

□

Passons à la description des cônes à l'aide d'un système d'équations et d'inéquations. Soit $\vec{g} \in \mathcal{F}$ ayant $\vec{f}$ comme face. Soient $\{\alpha_i\}_{i\in I\sqcup J\sqcup K} \in \vec{A}^*$ telles que $\begin{cases} \vec{g} = \{\alpha_i > 0,\ \alpha_k = 0,\ i \in I \sqcup J,\ k \in K\} \\ \vec{f} = \{\alpha_i > 0,\ \alpha_k = 0,\ i \in I,\ k \in J \sqcup K\} \end{cases}$.

Les α_k pour $k \in J \sqcup K$ définissent des formes linéaires sur $\vec{A}_f$. Vérifions que $\vec{p}(\vec{g}) = \{\alpha_j > 0,\ \alpha_k = 0,\ j \in J,\ k \in K\}$. L'inclusion "$\subset$" est claire. Réciproquement, un point de l'ensemble de droite est de la forme $\vec{p}(x)$ avec $x \in \vec{A}$, $\alpha_j(x) > 0$ pour $j \in J$ et $\alpha_k(x) = 0$ pour $k \in K$, et nous voulons montrer qu'il existe $v \in \mathrm{Vect}(\vec{f})$ tel que $x + v \in \vec{g}$. On s'aperçoit qu'il suffit de choisir $v \in \vec{f}$ assez grand. Nous avons donc obtenu une description de $\vec{p}(\vec{g})$ en système d'équations et d'inéquations linéaires comme requis.

Passons aux deux conditions portant sur les faces d'un cône.

Soit $\vec{p}(\vec{g}) \in \mathcal{F}^F$, vérifions que son bord est la réunion d'autres cônes de $\mathcal{F}^F$. Soit $\vec{p}(x) \in \partial\vec{p}(\vec{g})$, soit $\vec{p}(\vec{h}) \in \mathcal{F}^F$ le cône contenant $\vec{p}(x)$. Nous allons montrer que $\vec{h} \subset \partial\vec{g}$. On choisit x pour que $x \in \vec{h}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point de $\vec{p}(\vec{g})$ à distance inférieure à $\frac{1}{n}$ de $\vec{p}(x)$. Cela signifie qu'il existe $\epsilon_n \in \vec{A}$, $v_n \in \mathrm{Vect}(\vec{f})$ tels que $x + v_n + \epsilon_n \in \vec{g}$ et $\|\epsilon_n\| < \frac{1}{n}$. On décompose $v_n = v_n^1 - v_n^2$ avec $v_n^1, v_n^2 \in \vec{f}$, on impose en outre que $\|x + v_n^1\| \geq 1$. Alors $x + v_n^1 \in \vec{h}$ et $x + v_n^1 + \epsilon_n \in \vec{g}$.

La suite $(\frac{x+v_n^1}{\|x+v_n^1\|})_n$ a une valeur d'adhérence y, a priori dans $\overline{\vec{h}}$. Mais en fait, cette suite reste dans $x + \vec{f}$, et $\overline{x + \vec{f}} = x + \overline{\vec{f}} \subset \vec{h}$ par le lemme 8.2.1 appliqué à $\vec{f}$ et à ses faces. Donc $y \in \vec{h}$. La suite $(\frac{x+v_n^1+\epsilon_n}{\|x+v_n^1\|})_n$ aussi admet y comme valeur d'adhérence, car $\|x + v_n^1\| \geq 1$ et $\epsilon_n \to 0$. Donc $y \in \overline{\vec{g}} \cap \vec{h}$. Comme $\vec{h} \neq \vec{g}$, $\vec{h}$ est une face de $\vec{g}$: $\vec{h} \subset \partial\vec{g}$. D'où $\vec{p}(\vec{h}) \subset \vec{p}(\partial\vec{g}) \subset \overline{\vec{p}(\vec{g})}$. Mais comme $\vec{p}(\vec{h}) \cap \vec{p}(\vec{g}) = \emptyset$, on arrive à $\vec{p}(\vec{h}) \subset \partial\vec{p}(\vec{g})$. Ainsi, $\partial\vec{p}(\vec{g})$ est une réunion d'autres cônes de $\mathcal{F}^F$.

Enfin, il reste à montrer que $\overline{\vec{p}(\vec{h})} = \mathrm{Vect}(\vec{p}(\vec{h})) \cap \overline{\vec{p}(\vec{g})}$, et nous savons que $\overline{\vec{h}} = \mathrm{Vect}(h) \cap \overline{\vec{g}}$. Par conséquent, il suffit de montrer que $\overline{\vec{p}(\vec{h})} = \vec{p}(\overline{\vec{h}})$ et $\overline{\vec{p}(\vec{g})} = \vec{p}(\overline{\vec{g}})$. Les deux égalités, pour $\vec{h}$ et $\vec{g}$ sont similaires, on ne traite que celle concernant $\vec{g}$. L'inclusion $\supset$ vient de la continuité de $\vec{p}$. Pour l'autre inclusion, il suffit de montrer que $\vec{p}(\overline{\vec{g}})$ est fermé, ce qui revient à montrer que $\overline{\vec{g}} + \mathrm{Vect}(\vec{f})$ est fermé. On reprend les $\{\alpha_i\}_{i\in I\sqcup J\sqcup K}$ comme au paragraphe précédent, on vérifie alors que $\overline{\vec{g}} + \mathrm{Vect}(\vec{f}) = \{\alpha_j \geq,\ \alpha_k = 0,\ j \in J,\ k \in K\}$, c'est bien fermé. □

L'avant dernier paragraphe de la preuve prouvait en fait :

Lemme 8.2.4. *Si $\vec{g}, \vec{h} \in \mathcal{F}$ sont bordés par $\vec{f}$ et si $\vec{p}(\vec{h})$ est une face de $\vec{p}(\vec{g})$, alors $\vec{h}$ est une face de $\vec{g}$.*

Nous pouvons donc compactifier $\mathcal{I}_F$ à l'aide de la décomposition $\mathcal{F}^F$ en cônes de l'appartement A_F. On note provisoirement $\widehat{\mathcal{I}_F}$ l'espace obtenu, si B_F est un appartement de $\mathcal{I}_F$, on note $\hat{B}_F$ sa compactification.

Vérifions rapidement que $\widehat{\mathcal{I}_F}$ ne dépend pas du choix de l'appartement A :

Proposition 8.2.5. *Soit B_F un appartement de $\mathcal{I}_F$, soit g le cône de B engendré par un coeur parallèle à $\delta(F)$, soit $p_B = p_{B,F} : B \to B_F$ la projection. Alors l'ensemble des cônes vectoriels de B_F est $\left\{\vec{p}(\vec{h}) \mid \vec{h} \in \mathcal{F} \text{ et } \vec{g} \subset \overline{\vec{h}}\right\}$.*

Démonstration:
Par définition, ceci est vrai pour $B = A$. Pour B quelconque, l'ensemble des cônes vectoriels de $\vec{B}_F$ est $\left\{\vec{\phi}(\vec{k}) \mid \vec{k} \in \mathcal{F}^F\right\}$ où $\phi : A_F \xrightarrow{\sim} B_F$ est un isomorphisme de complexes de Coxeter dont le choix n'importe pas.

Comme $f \parallel g$, il existe $\xi : A \xrightarrow{\sim} B$ tel que $\vec{\xi}(\vec{f}) = \vec{g}$ (lemme 8.1.2). Alors ξ induit un isomorphisme entre A_f et B_g, on peut choisir ϕ comme étant égal à cet isomorphisme. On a alors $\phi \circ p_A = p_B \circ \xi$, et on vérifie que $\left\{\vec{\phi}(\vec{k}) \mid \vec{k} \in \mathcal{F}^F\right\} = \left\{\vec{p}_B(\vec{h}) \mid \vec{g} \subset \overline{\vec{h}}\right\}$. □

Pour finir, étudions le lien entre le coeur d'un cône $\vec{g} \in \mathcal{F}$ bordé par $\vec{f}$ et le coeur de $\vec{p}(\vec{g}) \in \mathcal{F}^F$:

Proposition 8.2.6. *Soit $\vec{g} \in \mathcal{F}$ un cône bordé par $\vec{f}$, soit B_F un appartement de $\mathcal{I}_F$. Alors*
- *$\vec{p}_B(\delta(\vec{g})) \subset \delta(\vec{p}_B(\vec{g}))$.*
- *$\vec{p}_B(\vec{g}^*) = \vec{p}_B(\vec{g})^*$*
- *Si $g \in \mathcal{F}_B$ est de direction $\vec{g}$, alors $p_B(b(g)) \subset b(p_B(g))$.*

Démonstration:
Notons $p = p_B$ et fixons $f \in \mathcal{F}_B$ tel que $\tilde{f} \,/\!/\, f$.
Soit $x \in \delta(\vec{g})$, montrons que $\vec{p}(x) \in \delta(\vec{p}(\vec{g}))$. Il faut donc montrer que x est fixé par $\mathrm{Stab}_{W(\vec{B}_F)}(\vec{p}(\vec{g}))$. Soit $w \in \mathrm{Stab}_{W(\vec{B}_F)}(\vec{p}_B(\vec{g}))$, on identifie w à un élément de $\mathrm{Fix}_{W(\vec{B})}(\vec{f})$, ce qui assure déjà que $w(\vec{g})$ est encore bordé par $\vec{f}$. Et comme $\vec{p}(\vec{g}) = w(\vec{p}(\vec{g})) = \vec{p}(w(\vec{g}))$, on obtient par la deuxième partie de la proposition 8.2.2 que $w(\vec{g}) = \vec{g}$. Alors $w(x) = x$ par définition de $\delta(\vec{g})$, et donc $w(\vec{p}(x)) = \vec{p}(x)$.

Passons au second point. Si $\vec{C}$ est une facette de Weyl dans $\vec{B}$ dont l'adhérence contient $\delta(\vec{g})$, alors $\vec{p}(\delta(\vec{g})) \subset \vec{p}(\overline{\vec{C}}) \subset \overline{\vec{p}(\vec{C})}$. Notons $\vec{C}_F$ la facette de Weyl de $\vec{B}_F$ qui contient $\vec{p}(\vec{C})$, nous venons de prouver que son adhérence contient $\vec{p}(\delta(\vec{g}))$, elle contient donc toute la facette de Weyl contenant $\vec{p}(\delta(\vec{g}))$, et cette facette contient $\delta(\vec{p}(\vec{g}))$ par le premier point. Donc $\vec{C}_F \subset \vec{p}(\vec{g})^*$ et $\vec{p}(\vec{C}) \subset \vec{p}(\vec{g})^*$. Ce qui prouve $\vec{p}(\vec{g}^*) \subset \vec{p}(\vec{g})^*$.

Montrons l'autre inclusion : soit $\vec{C}_F$ une facette de Weyl de $\vec{B}_F$ dont l'adhérence contient $\delta(\vec{p}(\vec{g}))$. Soient $\{\alpha_i\}_{i\in I\sqcup J}$ des racines de $\vec{B}_F$, identifiées à des racines de $\vec{B}$ s'annulant sur f, telles que $\vec{C}_F = \{x \in \vec{B}_F \mid \alpha_i(x) = 0 \text{ et } \alpha_j(x) > 0, \forall i \in I,\ j \in J\}$. Alors $\overline{\vec{p}^{-1}(\vec{C}_F)}$ contient $\delta(\vec{g})$ et $\vec{p}^{-1}(\vec{C}_F) = \left\{x \in \vec{B} \mid \alpha_i(x) = 0 \text{ et } \alpha_j(x) > 0,\ \forall i \in I,\ j \in J\right\}$. Il existe une facette $\vec{C}$ de $\vec{B}$ incluse dans $\vec{p}^{-1}(\vec{C}_F)$, de dimension maximale, et dont l'adhérence contient $\delta(\vec{g}) \cup \delta(\vec{f})$ (proposition 3.3.3, point 9). Alors $\overline{\vec{C}}$ contient un cône $\vec{f}_1$ inclus dans $\vec{f}$, tel que $\mathrm{Vect}(\vec{f}_1) = \mathrm{Vect}(\vec{f})$. Il existe des racines $\{\alpha_k\}_{k\in K}$ telles que $\vec{C} = \left\{x \in \vec{B} \mid \alpha_i(x) = 0 \text{ et } \alpha_j(x) > 0,\ \forall i \in I,\ j \in J \sqcup K\right\}$. On ne rajoute aucune condition du type $\alpha_k = 0$ car $\vec{C}$ est choisi de dimension maximale. S'il existe $k \in K$ tel que $\alpha_k(\vec{f}) = 0$, alors $\ker(\alpha_k)$ induit un mur de $\vec{B}_F$, qui ne peut couper $\vec{C}_F$. Donc $\alpha_k(\vec{C}_F) > 0$, puis $\alpha_k(\vec{p}^{-1}(\vec{C}_F)) > 0$, ce qui signifie que la condition $\alpha_k > 0$ est inutile pour définir $\vec{C}$. On peut donc supposer que pour tout $k \in K$, $\alpha_k(\vec{f}) \neq \{0\}$. Alors, pour tout $k \in K$, il existe $v_k \in \vec{f}_1$ tel que $\alpha_k(v_k) \neq 0$. Comme $v_k \in \vec{f}_1 \subset \overline{\vec{C}}$, on a automatiquement $\alpha_k(v_k) > 0$ et $\alpha_l(v_k) \geq 0$ pour tout $l \in k$. En sommant tous ces v_k, on obtient $w \in \vec{f}$ tel que pour tout $k \in K$, $\alpha_k(w) > 0$. Alors pour tout $x \in \vec{p}^{-1}(\vec{C}_F)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $x + \lambda w \in \vec{C}$, et ceci prouve que $\vec{p}(\vec{C}) = \vec{C}_F$. Comme $\delta(\vec{g}) \subset \overline{\vec{C}}$, on a $\vec{C} \subset \vec{g}^*$, donc $C_F \subset \vec{p}(\vec{g}^*)$.

Enfin, pour le dernier point, il faut montrer que $p(b(g))$ est dans chaque demi-appartement de B_F contenant un voisinage de $s(p(g))$ dans $p(g)$. Notons $\mathcal{D}_{B_F}(M, +)$ un tel demi-appartement, M est un mur de B_F, identifié à un mur de B dont la direction contient $\vec{f}$. Soit O ouvert de B_F tel que $O \cap g \subset \mathcal{D}_{B_F}(M, +)$, alors $p^{-1}(O) \cap g \subset p^{-1}(O) \cap p^{-1}(p(g)) = p^{-1}(O \cap g) \subset p^{-1}(D_{B_F}(M, +))$. Ainsi $p^{-1}(D_{B_F}(M, +))$ est un demi-appartement de B contenant le voisinage $p^{-1}(O) \cap g$ de $s(g)$ dans g. Ceci entraîne que $b(g) \subset p^{-1}(D_{B_F}(M, +))$, donc que $p(b(g)) \subset D_{B_F}(M, +)$. □

L'inclusion réciproque du premier point n'est en général pas vraie, mais le fait que $\vec{p}(\delta(\vec{g})) \subset \delta(\vec{p}(\vec{g}))$ implique que $\vec{p}(\delta(\vec{g}))$ est inclus dans la même facette de Weyl que celle contenant $\delta(\vec{p}(\vec{g}))$. En terme de cônes affines, on obtient le

Corollaire 8.2.7. *Soit B_F un appartement de $\mathcal{I}_F$, soit $g \in \mathcal{F}_B$ un cône bordé par un cône parallèle à f. Alors $Cl(p_B(\delta(g))) = Cl(\delta(p_B(g)))$.*

On ne peut pas dire directement la même chose pour les bases, car $b(g)$ est définie comme l'intersection de g avec des demi-appartements fermés. Il se pourrait donc a priori que $p(b(g))$ soit inclus dans un bord de la facette de Weyl contenant $b(p(g))$. Mais ce n'est pas le cas. En effet, si M est un mur contenant $p(b(g))$, alors le mur correspondant contient $b(g)$ et donc g, d'où finalement $b(p(g)) \subset M$. On peut donc énoncer le

Corollaire 8.2.8. *Soit B_F un appartement de $\mathcal{I}_F$, soit $g \in \mathcal{F}_B$ bordé par un cône parallèle à f. Alors $Cl(p_B(b(g))) = Cl(b(p_B(g)))$.*

8.2.2 $\widehat{\mathcal{I}_F}$ comme réunion de façades de $\overline{\mathcal{I}}$

On montre ici que $\widehat{\mathcal{I}_F}$ est homéomorphe à la réunion de $\mathcal{I}_F$ et d'autres façades de $\overline{\mathcal{I}}$. On pose :

$$\mathcal{B}(F) = \left\{G \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}} \mid \exists A \in \mathcal{A},\ F' \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}},\ G' \text{ un scp de } G \text{ tq } F' /\!\!/ F,\ \delta(F') \cup \delta(G') \subset A \text{ et } A \cap F' \subset \overline{A \cap G'}\right\}$$

On dira que $\mathcal{B}(F)$ est l'ensemble des cônes de $\mathcal{I}$ bordés par F.

Proposition 8.2.9. *L'espace topologique $\widehat{\mathcal{I}_F}$ est homéomorphe à la réunion des $\mathcal{I}_G$ pour $G \in \mathcal{B}(F)$. L'homéomorphisme est donné par :*

$$\chi : \begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{I}_F} & \to & \bigcup_{G\in\mathcal{B}(F)} \mathcal{I}_G \\ [g]_{A_F} & \mapsto & [g_a]_A \end{array} .$$

Un point $[g]_{A_F}$ d'un appartement compactifié $\overline{A_F}$ est envoyé sur le point de $\overline{A}$ égal à $[g_a]$, où g_a est un relevé de g dans A, c'est à dire $g_a \in \mathcal{F}_A$, $p_A(g_a) = g$ et $\vec{f} \subset \overline{\vec{g}_a}$.
De plus, χ fixe $\mathcal{I}_F$.

Démonstration:

χ est bien défini :
Pour commencer, soit A_F un appartement de $\mathcal{I}_F$, soient g et h deux cônes équivalents dans A_F, soient $g_a, h_a \in \mathcal{F}_A$ des relevés, montrons que $g_a \sim_A h_a$. On a égalité des directions : $\vec{p}(\vec{g}_a) = \vec{g} = \vec{h} = \vec{p}(\vec{h}_a)$, donc $\vec{g}_a = \vec{h}_a$ par la deuxième assertion de la proposition 8.2.2. Et $g \cap h \neq \emptyset$ donc le lemme 8.2.3 s'applique : $g_a \cap h_a \neq \emptyset$. Donc $g_a \sim h_a$.

Passons au cas général : soit $x \in \widehat{\mathcal{I}_F}$, soient A_F et B_F deux appartements de $\mathcal{I}_F$, soit $g \in \mathcal{F}_{A_F}$ et $h \in \mathcal{F}_{B_F}$ tels que $x = [g]_{A_F} = [h]_{B_F}$. Soient $g_a \in \mathcal{F}_A$ et $h_b \in \mathcal{F}_B$ des relevés. Alors $\{\tilde{g}_a, \tilde{h}_b\} \subset \mathcal{B}(F)$
Il existe $f_a \in \mathcal{F}_A$ et $f_b \in \mathcal{F}_B$ tels que $\delta(f_a) /\!\!/ \delta(F) /\!\!/ \delta(f_b)$, $f_a \subset \overline{g}_a$, $f_b \subset \overline{h}_b$, $s(f_a) = s(g_a)$, et $s(f_b) = s(h_b)$. D'après la proposition 3.3.3, point 9, il existe une facette de quartier $k \subset A$ et une autre $l \subset B$ telles que $\delta(g_a) \cup \delta(f_a) \subset \overline{k}$ et $\delta(h_b) \cup \delta(f_b) \subset \overline{l}$. On choisit k et l minimales. Soit $Z \in \mathcal{A}$ contenant un scp de k et un scp de l, montrons que Z contient alors le coeur d'un scp de g_a et le coeur d'un scp de h_b.
Il y a deux possibilités : soit $\delta(\vec{f}_a) \subset \overline{\delta(\vec{g}_a)}$ et alors $\vec{k}$ est la facette de Weyl contenant $\delta(\vec{g}_a)$ et donc $\delta(\vec{g}_a) \subset \vec{g}_a \cap \vec{k}$, soit $\delta(\vec{f}_a)$ est disjoint de $\overline{\delta(\vec{g}_a)}$, alors $\vec{k}$ est la plus petite facette fermée contenant $\mathrm{Conv}(\delta(\vec{f}_a) \cup \delta(\vec{g}_a))$, alors $]u, v[\subset \vec{g}_a \cap \vec{k}$ pour n'importe quel $u \in \delta(\vec{g}_a)$ et $v \in \delta(\vec{f}_a)$. Dans tous les cas, $\vec{k} \cap \vec{g}_a \neq \emptyset$. Donc tout scp de k contient un point t de g_a, alors $t + \delta(\vec{g}) \subset k$ par le lemme 8.2.1. Ceci prouve que $A \cap Z$ contient le coeur d'un scp de g_a. De même, $B \cap Z$ contient le coeur d'un scp de h_b. Notons g_z et h_z les cônes engendrés par ces coeurs, ainsi $\tilde{g}_z \sim_{\mathcal{I}} \tilde{g}_a$ et $\tilde{h}_z \sim_{\mathcal{I}} \tilde{h}_b$.

Comme Z contient également un cône parallèle à f_a, il contient un cône parallèle à f et fournit donc un appartement Z_F de $\mathcal{I}_F$. Nous voulons montrer que $\tilde{g}_a \sim \tilde{h}_b$, et pour cela il suffit de montrer que $g_z \sim_Z h_z$. En raison du cas particulier traité au début de la preuve, il suffit de prouver que $p_Z(g_z) \sim_{Z_F} p_Z(h_z)$. Ce sera fait si nous prouvons que $\tilde{g} = \widetilde{p_A(g_a)} \sim_{\mathcal{I}_F} \widetilde{p_Z(g_z)}$ et $\tilde{h} = \widetilde{p_B(h_b)} \sim_{\mathcal{I}_F} \widetilde{p_Z(h_z)}$. Bien sûr les deux égalités sont similaires, vérifions juste la première.
Quitte à remplacer g_a par le scp engendré par $\delta(g_z)$, et g par la projection sur A_F du cône obtenu, on peut supposer $k \subset A \cap Z$, $\delta(g_a) = \delta(g_z)$ et $p_A(g_a) = g$. L'intersection $\overline{A} \cap \overline{Z}$ est fermée, donc contient $\overline{k}$. Or $\overline{k}$ contient $p_A(\overline{k} \cap A)$ car $\delta(\vec{f}_a) \subset \overline{\vec{k}}$ donc $\overline{k} \cap A$ est stable par addition avec $\delta(\vec{f}_a)$. Donc $A_F \cap Z_F \supset \mathrm{Cl}(p_A(\delta(g_a)))$. Et, d'après le corollaire 8.2.7, $A_F \cap Z_F \supset \delta(p_A(g_a)) = \delta(g)$.
On peut maintenant choisir $\phi : \overline{A} \xrightarrow{\sim} \overline{Z}$ un "isomorphisme d'appartements compactifiés" qui fixe $A_F \cap Z_F$. Alors $\phi(g) = \phi \circ p_A(g_a) = p_Z \circ \phi(g_a) = p_Z(g_z)$. Ainsi, $p_Z(g_z)$ est l'image de g par un isomorphisme d'appartements qui fixe $\delta(g)$, donc $p_Z(g_z)$ et g ont le même coeur, et donc $\tilde{g} = \widetilde{p_Z(g_z)}$. Ceci achève de prouver que χ est bien définie.

Prenons note de ce résultat, que nous avons montré au passage et qui resservira :

Lemme 8.2.10. *Soient $F', G, H \in \mathcal{F}_I$ tels que $G \in \mathcal{B}(F)$ et $H \in \mathcal{B}(F')$. Alors il existe un appartement Z, il existe $g_z, f_z, f'_z, h_z \in \mathcal{F}_Z$ tels que $\tilde{g}_z$ et $\tilde{h}_z$ sont des scp de G et H, $\tilde{f}_z$ et $\tilde{f}'_z$ sont parallèles à F et F', $f_z \subset \overline{g}_z$ et $f'_z \subset \overline{h}_z$.*

De plus, si A est un appartement de $\mathcal{I}$ contenant $\delta(G)$ et un cône parallèle à $\delta(F)$, si $g_a = A \cap G$, alors $\widetilde{p_A(g_a)} \sim_{\mathcal{I}_F} \widetilde{p_Z(g_z)}$. Et similairement pour H et F'.

Remarque: En appliquant ce lemme au cas où $F' = H$ et $G \sim H$, on vérifie que si $G \in \mathcal{B}(F)$ et $H \sim G$, alors $H \in \mathcal{B}(F)$.

χ est surjective : Soit $x \in \bigcup_{G \in \mathcal{B}(F)} \mathcal{I}_G$. Il existe un appartement A et un cône $g \in \mathcal{F}_A$ tel que $x = [g]_A$ et F borde $\tilde{g}$. Alors $p_A(g) \in \mathcal{F}_{A_F}$ et $x = \chi([p_A(g)]_{A_F})$.

χ est injective : Soient $x, y \in \widehat{\mathcal{I}_F}$, $x = [g]_{A_F}$, $y = [h]_{B_F}$, et supposons que $\chi(x) = \chi(y)$. Soient $g_a \in \mathcal{F}_A$, $h_b \in \mathcal{F}_B$ des relevés, alors $\tilde{g}_a \sim \tilde{h}_b$. Quitte à raccourcir g_a et h_b, on peut supposer grâce au lemme 8.2.10 qu'il existe $Z \in \mathcal{A}$, $g_z, h_z, f_z \in \mathcal{F}_Z$ tels que $\tilde{g}_z \sim \tilde{g}_a$, $\tilde{h}_z \sim \tilde{h}_b$ et $\tilde{f}_z \mathbin{/\!/} F$. Alors $g_z \sim_Z h_z$, c'est-à-dire que $g_z \cap h_z$ contient un scp de g_z et de h_z. Alors l'image par p_Z de ce scp est un scp de $p_Z(g_z)$ et de $p_Z(h_Z)$, donc $p_Z(g_z) \sim_{Z_F} p_Z(h_Z)$. Mais le lemme affirme en outre que $\tilde{g} = \widetilde{p_A(g_a)} \sim_{\mathcal{I}_F} \widetilde{p_Z(g_z)}$ et similairement pour h. Ceci implique que $\tilde{g} \sim_{\mathcal{I}_F} \tilde{h}$ donc $x = y$.

χ est continue : Soit $x = [g]_{A_F}$ un point d'un appartement compactifié $\overline{A}_F$ de $\mathcal{I}_F$. Fixons un relevé $g_a \in \mathcal{F}_A$ de g et un ouvert $U \in \mathcal{U}$ de sorte que $V := \mathcal{V}_{\mathcal{I}}(\tilde{g}_a, U) \cap (\cup_{G \in \mathcal{B}(F)} \mathcal{I}_G)$ est un voisinage de $\chi(x)$, et les voisinages obtenus de la sorte forment une base de voisinages de $\chi(x)$. Montrons que $\chi^{-1}(V)$ contient un voisinage de x, précisément, nous allons montrer que $\mathcal{V}_{\mathcal{I}_F}(g, \vec{p}(U)) \subset \chi^{-1}(V)$. Soit $f \in \mathcal{F}_A$ un cône tel que $\tilde{f} \mathbin{/\!/} F$.

Soit $t \in \mathcal{V}_{\mathcal{I}_F}(g, \vec{p}(U))$, soit $H \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ un représentant de t. Alors H est bordé par F, donc d'après la proposition 4.7.2, il existe $B \in \mathcal{A}$ contenant $b(g_a) + \delta(\vec{f})$ et un scp de $\delta(H)$, on peut supposer $\delta(H)$ lui-même. L'intersection $\overline{A} \cap \overline{B}$ contient alors $p(b(g_a))$ et donc $b(g)$ par le corollaire 8.2.8. Soit $\phi : \overline{B} \xrightarrow{\sim} \overline{A}$ induisant un isomorphisme $B_F \xrightarrow{\sim} A_F$ fixant $b(g)$. Alors $\phi(t) \in \mathcal{V}'_{A_F}(g, \vec{p}(U))$ (voir 6.2.3). On a $\chi \circ \phi(t) = \phi \circ \chi(t)$, il reste donc à vérifier que $\chi(\phi(t)) \in \mathcal{V}'_A(g_a, U)$.

Soit $h \in A_F$ un représentant de $\phi(t)$ inclus dans $(g + \vec{p}_A(U)) \cap g^*$. Comme $p_A(g_a + U) = g + \vec{p}(U)$, il existe $s \in g_a + U$ tel que $p_A(s) = s(g)$. Mais alors $s \in p^{-1}(g^*)$, donc d'après la proposition 8.2.6, il existe $\vec{v} \in \vec{f}$ tel que $s + \vec{v} \in g_a^*$. Alors $s + \vec{v} \in (g_a + U) \cap g_a^*$. On choisit le relevé h_a de h dont le sommet est $s + \vec{v}$, donc $h_a = s + \vec{v} + \vec{h}_a \subset (g_a + U) \cap g_a^*$, car $\vec{h}_a$ est dans le bord de $\vec{g}_a$ (lemme 8.2.4). Ceci prouve que $\chi(\phi(t)) \in \mathcal{V}'_A(g_a, U)$, donc χ est continue.

χ est fermée car $\widehat{\mathcal{I}_F}$ est compact et $\overline{\mathcal{I}}$ est séparé.

χ fixe $\mathcal{I}_F$: Soit $x \in \mathcal{I}_F$, soit A_F un appartement contenant x, soit $f \in \mathcal{F}_A$ un représentant de x, on a $\tilde{f} \mathbin{/\!/} f$. On a $x = [\{x\}]_{A_F}$ et un relevé de $\{x\}$ dans A est f. Donc $\chi(x) = [f]_A = x$. □

Ainsi, $\chi(\widehat{\mathcal{I}_F})$ est compact, donc fermé dans $\overline{\mathcal{I}}$. De plus, $\mathcal{I}_F$ est dense dans $\widehat{\mathcal{I}_F}$, donc $\chi(\mathcal{I}_F) = \mathcal{I}_F$ est dense dans $\chi(\widehat{\mathcal{I}_F})$. D'où le

Corollaire 8.2.11. *L'adhérence de $\mathcal{I}_F$ dans $\overline{\mathcal{I}}$ est $\chi(\widehat{\mathcal{I}_F}) = \bigcup_{G \in \mathcal{B}(F)} \mathcal{I}_G$.*

On peut donc identifier, au moyen de χ, la compactification $\widehat{\mathcal{I}_F}$ de $\mathcal{I}_F$ à la clôture de $\mathcal{I}_F$ dans $\overline{\mathcal{I}}$.

Deuxième partie

Masures bordées et groupes de Kac-Moody sur un corps local

9 Introduction

Le but de ce chapitre est de définir un objet semblable à l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif sur un corps local, mais pour un groupe de Kac-Moody.

Ceci a déjà été fait dans [GR08] par Stéphane Gaussent et Guy Rousseau, pour un groupe déployé sur un corps $\mathbb{K}$ dont le corps résiduel contient $\mathbb{C}$. L'objet défini est appelé "masure" car il ne satisfait pas toutes les conditions demandées à un immeuble habituel. Pour un corps plus général, mais toujours un groupe déployé, Guy Rousseau ([Rou06]) a défini des "immeubles microaffines", que l'on peut voir comme une partie du bord à l'infini d'une masure, semblable au bord rajouté à un immeuble affine lorsqu'on définit sa compactification polygonale. Enfin, il a également obtenu dans ce même cadre des masures, dans [Rou10].

On propose ici de se placer dans le cadre général des groupes munis d'une donnée radicielle valuée, cadre qui inclut les groupes de Kac-Moody déployés mais aussi presque déployés sur un corps muni d'une valuation réelle. Nous construirons simultanément une "masure" et son bord (qui contiendra deux "immeubles microaffines") car celui-ci sera utile à l'étude des propriétés géométriques de la masure. L'objet obtenu sera appelé une masure bordée.

On se rend compte que plusieurs choix peuvent être faits, menant à différentes masures bordées. Pour rentrer un peu dans le détail, la construction d'un appartement A ne présente pas de difficulté (partie 11.1) , et on cherche donc ensuite, selon le procédé habituel de Bruhat et Tits, à construire un objet immobilier comme quotient de $G \times A$ par la relation d'équivalence déterminée par le choix des sous-groupes de G qui seront les fixateurs des points de A. Ces sous-groupes sont appelés, comme dans le cas réductif, des "sous-groupes parahoriques", et contrairement au cas réductif, leur définition n'est pas évidente : plusieurs possibilités sont envisageables. Ainsi, dans [GR08], Stéphane Gaussent et Guy Rousseau définissent les familles de groupes parahoriques $\mathcal{P}^{min}$, $\mathcal{P}^{pm}$, $\mathcal{P}^{nm}$ dont la définition est quelque peu indirecte, et nécessite l'emploi de "complétions" du groupe de Kac-Moody G considéré.

Toujours par soucis de généralité, nous optons pour une approche axiomatique, c'est-à-dire que nous définissons abstraitement la notion de "famille de parahoriques", et nous étudions les objets immobiliers que l'ont peut construire, en fonction des propriétés vérifiées par une telle famille. C'est la partie 11. On étudiera plus particulièrement deux familles de parahoriques : la "minimale" puis la "maximale". Au 12, on essaie de descendre les structures précédentes (valuation et famille de parahoriques) à un sous-groupe. Dans la partie 13 enfin, on étudie le cas d'un groupe de Kac-Moody. Pour un groupe déployé, la partie 11 s'applique directement, mais pour un groupe presque-déployé, il faut d'abord utiliser les résultats de la partie 12 pour obtenir une valuation et une famille de parahoriques. Le résultat final est le suivant (théorème 13.5.1) :

Théorème. *Soit G un groupe de Kac-Moody presque déployé sur un corps $\mathbb{K}$, déployé sur la clôture séparable de $\mathbb{K}$. On suppose $\mathbb{K}$ muni d'une valuation réelle discrète non triviale, telle que son corps résiduel soit parfait.*

Alors il existe une masure bordée $\mathcal{I}_{\mathbb{K}}$ pour $G(\mathbb{K})$, qui provient d'une valuation $\varphi_{\mathbb{K}}$ et d'une bonne famille de parahoriques $Q_{\mathbb{K}}$ vérifiant (para 2.1^+)(sph). Pour toute facette sphérique $\vec{f}_{\mathbb{K}}$ de $\vec{I}(\mathbb{K})$, la façade $\mathcal{I}_{\mathbb{K},\vec{f}_{\mathbb{K}}}$ s'injecte dans la façade $\mathcal{I}_{\mathbb{L},\vec{f}}$, de la masure bordée $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}$ pour $G(\mathbb{L})$, où $\vec{f}$ est la facette de $\vec{I}(\mathbb{L})$ contenant un ouvert de $\vec{f}_{\mathbb{K}}$.

Les définitions de bonnes familles de parahoriques, de la condition (para 2.1^+), et des façade se trouvent en 11.2.1 et 11.3.3.

10 Rappels et notations

Lorsque $\alpha : X \to \mathbb{R}$ est une fonction sur un ensemble X, on notera pour $Y \subset X$, $\alpha(Y) = 0$ si $\alpha(Y) = \{0\}$, $\alpha(Y) > 0$ si $\alpha(Y) \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\alpha(Y) \geq 0$ si $\alpha(Y) \subset \mathbb{R}^{+}$, etc...

Si A est un complexe simplicial, si f est une facette de A, f^* est la réunion des facettes bordées par f. Ainsi, lorsque $\vec{f}$ est une facette dans un immeuble $\vec{I}$, $\vec{f}^*$ désignera la réunion des facettes de $\vec{I}$ dont l'adhérence contient $\vec{f}$, donc l'immeuble résiduel en $\vec{f}$. Si $\vec{Z}$ est un appartement de $\vec{I}$, la réunion des facettes de $\vec{Z}$ dont l'adhérence contient $\vec{f}$ sera donc $\vec{f}^* \cap \vec{Z}$.

10.1 Immeubles vectoriels

Ce que nous appelons ici les immeubles vectoriels sont les immeubles décrits dans [Ré02]. Ce sont des immeubles jumelés, donc en fait la réunion de deux immeubles classiques. Dans la réalisation géométrique de ces immeubles que nous considérons, les appartements sont inclus dans des espaces vectoriels, d'où l'appellation "immeubles vectoriels". Une autre appellation fréquente est "immeubles coniques", car les appartements sont des cônes dans ces espaces vectoriels.

10.1.1 Donnée radicielle

Il y a plusieurs définitions possibles pour une donnée radicielle, selon que l'on considère qu'un système de racines est un sous-ensemble d'un espace vectoriel réel (comme dans [Ré02] 6.2.4) ou un ensemble de demi-complexes de Coxeter (comme dans [Ré02] 1.4.1). La seconde possibilité est plus générale, la première plus précise, elle permet notamment de distinguer une racine et son double. Un système de racines du premier type sera dit vectoriel, un système du second type sera dit géométrique.

Si α, β sont deux racines d'un système ϕ, l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est défini de la sorte :

– $[\alpha, \beta] = \{p\alpha + q\beta \mid p, q \in \mathbb{N} \text{ et } p\alpha + q\beta \in \phi\}$ lorsque ϕ est un système de racines vectoriel.

– $[\alpha, \beta] = \{\gamma \in \phi \mid \alpha \cap \beta \subset \gamma\}$ lorsque ϕ est un système de racines géométrique.

On définit aussi $]\alpha, \beta[= [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha, \beta\}$ ainsi que $]\alpha, \beta]$ et $[\alpha, \beta[$ de la manière évidente.

Une partie ψ d'un système de racine est dite close lorsque pour tout $\alpha, \beta \in \psi$, $[\alpha, \beta] \subset \psi$. La partie ψ est dite de plus nilpotente si elle est finie. Enfin, une partie ψ est dite prénilpotente s'il existe un système positif ϕ^+ de ϕ et un élément $w \in W(\phi)$ du groupe de Weyl associé à ϕ tel que $\psi \subset \phi^+ \cap w(-\phi^+)$. Une partie ψ est nilpotente si et seulement si elle est close et prénilpotente. La notion de prénilpotence est principalement utilisée pour les paires de racines. Si $\{\alpha, \beta\}$ est une telle paire, il est presque immédiat que l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est clos, ainsi $\{\alpha, \beta\}$ est prénilpotente si et seulement si $[\alpha, \beta]$ est fini.

Dans la suite, sauf mention du contraire, les systèmes de racines considérés seront toujours de type vectoriel. Ainsi, l'existence d'un système de racines ϕ sous-entend l'existence d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\vec{V}$ tel que $\phi \subset \vec{V}^*$. On suppose de plus ϕ à base libre, c'est-à-dire que toute base Π du système de racines ϕ est aussi une base de l'espace vectoriel sous-jacent $\vec{V}^*$.

L'ensemble des $\ker(\alpha)$, $\alpha \in \phi$ est alors appelé l'ensemble des murs de $\vec{V}$, et pour toute racine $\alpha \in \phi$, il existe une réflexion dans $Gl(\vec{V})$, notée r_α, d'hyperplan fixe $\ker(\alpha)$ qui préserve l'ensemble des murs de $\vec{V}$. Le groupe engendré par ces r_α est le groupe de Weyl de ϕ, noté $W(\phi)$. Il existe une famille $(\alpha^\vee)_{\alpha \in \phi}$ de vecteurs de $\vec{V}$ telle que pour tout $\alpha \in \phi$, la réflexion r_α est donnée par la formule $r_\alpha(\vec{v}) = \vec{v} - \alpha(\vec{v}).\alpha^\vee$. On note pour tout $\alpha, \beta \in \phi$, $\langle \alpha, \beta \rangle = \beta(\alpha^\vee)$. On a clairement $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$.

Un système de racines ϕ est dit réduit si pour tout $\alpha \in \phi$, $\phi \cap \mathbb{R}.\alpha = \{\pm\alpha\}$. Lorsque ϕ n'est pas réduit, la seule possibilité est en fait $\phi \cap \mathbb{R}.\alpha = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ ou $\phi \cap \mathbb{R}.\alpha = \{\pm\alpha, \pm\frac{1}{2}\alpha\}$. On notera alors $\phi_{\text{red}} = \{\alpha \in \phi \mid 1/2\alpha \notin \phi\}$.

Définition 10.1.1. *Soit ϕ un système de racines, et ϕ^+ un système positif dans ϕ. Soit G un groupe et $(U_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ une famille de sous-groupes de G. On note $T = \bigcap_{\alpha \in \phi} N_G(U_\alpha)$ l'intersection des normalisateurs des U_α, $U^+ = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^+\} \rangle$ et $U^- = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in -\phi^+\} \rangle$.*

Le couple $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ est appelé une donnée radicielle de type ϕ si :

– *(DR1) : Chaque U_α est un sous-groupe de G non trivial.*

– *(DR2) : Pour toute paire prénilpotente de racines $\{\alpha,\beta\}$, le groupe $[U_\alpha, U_\gamma]$ des commutateurs de U_α et U_γ est inclus dans $\left\langle \left\{ U_\gamma \mid \gamma \in]\alpha,\beta[\right\} \right\rangle$.*
– *(DR3) : Si $\alpha \in \phi$ et $2\alpha \in \phi$, alors $U_{2\alpha}$ est inclus strictement dans U_α.*
– *(DR4) : Pour tout $\alpha \in \phi$, et tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, il existe $u', u'' \in U_{-\alpha}$ tels que $n(u) := u'uu''$ conjugue chaque U_β, $\beta \in \phi$ en $U_{r_\alpha\beta}$. De plus, les différents $n(u)$ peuvent être choisis de sorte que pour tout $u, v \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $n(u).T = n(v).T$.*
– *(DR5) : $T.U^+ \cap U^- = \{e\}$.*

Cette donnée radicielle est dite génératrice si de plus :
– *(DRG) : G est engendré par T et les U_α.*

Enfin, lorsque le système de racines ϕ est fini, on dira que $\mathcal{D}$ est de type fini.

Remarques:
– C'est la définition utilisée dans [Rou06], 1.5, elle équivaut à la définition de "donnée radicielle jumelée entière" de [Ré02] 6.2.5. Dans la terminologie de [Ré02], le qualificatif "entière" sert à indiquer que le système de racines est de type vectoriel. La définition d'une donnée radicielle pour un système de racines géométriques est exactement la même, à ceci près que la définition d'un intervalle de racines utilisée en (DR2) a changé, et que (DR3) devient inutile.
  Le qualificatif "jumelé" sert quand à lui à se rappeler que dans le cas où ϕ est infini, cette donnée radicielle mènera à un immeuble jumelé. Il n'a aucune signification formelle, ce qui explique son omission ici.
  Signalons enfin que c'est la notion géométrique de donnée radicielle qui est définie dans [AB08].
– Dans [BT72], la classe $n(u)T$, $u \in U_\alpha$ est notée M_α. La condition (DR4) y est exprimée avec les M_α plutôt que les $n(u)$.

Lorsque $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha)_{\alpha\in\phi})$ est une donnée radicielle, on notera toujours $T = \bigcap_{\alpha\in\phi} N_G(U_\alpha)$ comme dans la définition, c'est le tore maximal associé à $\mathcal{D}$. On prouve que les éléments $n(u)$ dans (DR4) sont uniques, on peut donc conserver la notation $n(u)$. On note enfin N le sous-groupe de G engendré par ces éléments et par T. On prouve facilement que $n(u^{-1}) = n(u)^{-1}$, que pour tout $m \in N$, $n(mum^{-1}) = mn(u)m^{-1}$, et que si u' et u'' sont tels que $n(u) = u'uu''$, alors $n(u) = n(u') = n(u'')$ (la preuve de ce dernier point sera rappelée en 11.1.11).

On prouve que N est le normalisateur de T dès que la condition "(CENT)" définie dans [Ré02] 1.2.5 est vérifiée. Cette condition s'exprime ainsi :

$$(CENT) : \ \forall \alpha \in \phi, \ Z_{U_\alpha}(T) = \{e\} .$$

Cette condition est vérifiée par tous les groupes de Kac-Moody sur un corps de cardinal au moins 4 (voir infra), et nous verrons qu'elle l'est aussi pour tous les groupes munis d'une donnée radicielle "valuée" (voir 10.2). On la supposera toujours vraie dans la suite.

Le groupe quotient N/T s'identifie au groupe de Weyl du système de racine ϕ en identifiant pour tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $n(u).T$ à la réflexion r_α.

Le groupe T et tous ses conjugués sont appelés les tores maximaux de G, avec un abus de langage puisque leur définition dépend en fait de la donnée radicielle $\mathcal{D}$. Si $T' = gTg^{-1}$ est un tore maximal, on note $N(T') = gNg^{-1}$ son normalisateur. On note aussi $g.\vec{V}$ et $g\phi \subset (g\vec{V})^*$ l'espace vectoriel et le système de racines abstraitement isomorphes à $\vec{V}$ et ϕ via les applications $\vec{v} \mapsto g.\vec{v}$ et $\alpha \mapsto g\alpha$. Si $g' \in G$ est un autre élément tel que $T' = g'Tg'^{-1}$, alors $g^{-1}g' \in N$ donc $g^{-1}g'$ agit sur $\vec{V}$ et sur ϕ, on peut donc identifier $g'\vec{V}$ à $g\vec{V}$ et $g'\phi$ à $g\phi$ via $g'.\vec{v} \mapsto g.(g^{-1}g')\vec{v}$ et $g'\alpha \mapsto g(g^{-1}g').\vec{v}$. Pour tout $\alpha \in \phi$, on note enfin $U_{g\alpha} = gU_\alpha g^{-1}$, ceci est compatible à l'identification $g\phi = g'\phi$. Alors $(G, (U_{g\alpha})_{g\alpha\in g\phi})$ est encore une donnée radicielle.

Dans la suite, on évitera de particulariser la donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\phi})$ (correspondant au tore T), on considérera plutôt que G est muni d'une classe d'équivalence, pour la conjugaison, de données radicielles. Pour chaque tore T on notera $\phi(T) \subset \vec{V}(T)^*$ le système de racine et $(U_\alpha)_{\alpha\in\phi(T)}$ les groupes radiciels correspondants.

Si $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha)_{\alpha\in\phi})$ est une donnée radicielle, pour toute partie ψ de ϕ, on notera $G(\psi) = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in \psi\} \rangle$. Ainsi, lorsque $\mathcal{D}$ est génératrice, on a $G = T.G(\phi)$.

Par définition même, un groupe de Kac-Moody déployé admet une donnée radicielle. Et c'est un des buts de [Ré02] que de prouver que c'est encore le cas pour une classe de groupes de Kac-Moody plus générale, celle des groupes de Kac-Moody "presque déployé". De [Ré02] 8.4.1 (pour le cas déployé), et 12.6.3 (pour le cas presque déployé) on obtient :

Proposition 10.1.2. *Si G est un groupe de Kac-Moody déployé ou presque déployé, alors il admet une donnée radicielle de type un système de racine ϕ vectoriel à base libre (comme ci-dessus). Dans le cas déployé, si $\mathbb{K}$ est un corps de cardinal au moins 4, alors $G(\mathbb{K})$ vérifie la condition (CENT).*

Pour la définition d'un groupe de Kac-Moody presque déployé, se reporter à [Ré02] partie 11.3

10.1.2 L'immeuble d'une donnée radicielle

Une donnée radicielle permet de définir un immeuble vectoriel. On notera dans la suite $\vec{I}$ l'immeuble obtenu à partir de la donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\phi})$, ou plutôt sa réalisation géométrique (voir [Ré02] chapitre 5). Dès que ϕ est infini, il s'agit en fait de la réunion de deux immeubles jumelés comme définis dans [Abr96].

Ses *appartements* sont en bijection avec les tores maximaux de G. L'appartement correspondant à un tore maximal T est inclus dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\vec{V}(T)$ tel que $\phi(T) \subset \vec{V}(T)^*$. Le choix d'une base Π de $\phi(T)$ définit un cône $\vec{C} = \vec{C}_\Pi = \left\{x \in \vec{V}(T) \mid \alpha(x) > 0,\ \forall \alpha \in \Pi\right\}$, c'est la chambre positive relative à Π. Les ensembles obtenus en remplaçant certaines des inégalités > 0 par des égalités $= 0$ dans la définition de $\vec{C}$ sont les *facettes* de $\vec{C}$. La réunion des facettes de $\vec{C}$ est donc l'adhérence $\overline{\vec{C}}$ de $\vec{C}$. L'appartement $\vec{A}(T)$ est alors $W(\phi(T)).\overline{\vec{C}} \cup W(\phi(T)).(-\overline{\vec{C}}) \subset \vec{V}(T)$, ses facettes sont les $\pm w\vec{f}$, pour $w \in W(\phi(T))$ et $\vec{f}$ une facette de $\vec{C}$. Les *chambres* sont les facettes de dimension maximales, donc les images de $\pm\vec{C}$ par un $w \in W(\phi(T))$, et les *cloisons* sont les facettes de codimension 1. C'est un cône, réunion de deux cônes convexes $\vec{A}^+(T) = W(\phi(T)).\overline{\vec{C}}$ et $\vec{A}^-(T) = -\vec{A}^+(T)$. Le cône positif $\vec{A}^+(T)$ est appelé le cône de Tits. Chacun de ces deux cônes convexes, avec sa structure de facettes, est un complexe de Coxeter pour $W(T)$.

L'intérieur, noté $\vec{A}_{\text{sph}}$, de $\vec{A}(T)$ dans $\vec{V}(T)$ est une réunion de facettes, appelées les *facettes sphériques*. Ce sont précisément les facettes dont le fixateur dans $W(\phi(T))$ est fini. Les chambres et les cloisons sont toujours sphériques, leur fixateur dans $W(\phi(T))$ étant respectivement $\{e\}$ et un groupe d'ordre 2.

On pourra noter le groupe de Weyl $W(\phi(T))$ par $W(T)$, ou $W(\vec{A}(T))$ pour rappeler qu'il s'agit du groupe de Weyl "vectoriel".

L'immeuble $\vec{I}$ est obtenu en collant les $\vec{A}(T)$ pour tous les tores maximaux T. Ces appartements sont permutés transitivement par G, selon la formule $g.\vec{A}(T) = \vec{A}(gTg^{-1})$ ([Ré02] 2.6.2). En conséquence, $N(T)$ est le stabilisateur de $\vec{A}(T)$. Pour $\alpha \in \phi$, $u \in U_\alpha$, l'élément $n(u)$ agit sur $\vec{A}(T)$ comme la réflexion selon le mur $\ker(\alpha)$. Le groupe T quand à lui est le fixateur de $\vec{A}(T)$.

Pour toute racine $\alpha \in \phi(T)$, $\vec{D}(\alpha) := \left\{x \in \vec{A}(T) \mid \alpha(x) \geq 0\right\}$ est le *demi-appartement* dirigé par α. Le groupe U_α fixe ce demi-appartement, et est simplement transitif sur les appartements le contenant.

Si on fixe un tore maximal T, et une base de $\phi(T)$, on définit $\vec{I}^+ = G.\vec{A}^+(T)$ et $\vec{I}^- = G.\vec{A}^-(T)$. Ce sont deux immeubles au sens classique. Lorsque ϕ est fini, ils coïncident. Lorsque ϕ est infini, leur intersection ne contient que des facettes non sphériques, et contient toujours $\{0\}$. Le découpage $\vec{I} = \vec{I}^+ \cup \vec{I}^-$ est indépendant des choix de T et de la base de $\phi(T)$, mais $\vec{I}^+$ et $\vec{I}^-$ sont échangés si on remplace par exemple une base de $\phi(T)$ par son opposée. Ces deux immeubles sont jumelés.

Pour toute partie $\vec{\Omega}$ d'un appartement $\vec{A}$, on note $\mathrm{Cl}_{\vec{A}}(\vec{\Omega})$ son *enclos*, il s'agit de l'intersection de tous les demi-appartements de $\vec{A}$ contenant $\vec{\Omega}$. Une partie égale à son enclos sera dite *close*. On verra (10.1.4) que l'enclos d'une partie $\vec{\Omega}$ est généralement indépendant de l'appartement $\vec{A}$ la contenant considéré, et on pourra éliminer l'indice $\vec{A}$

dans la notation $\mathrm{Cl}_{\vec{A}}(\vec{\Omega})$.

Lorsque $\vec{C}$ et $\vec{D}$ sont deux chambres de même signe, on peut définir leur distance (à valeur dans $\mathbb{N}$, pour l'usage qu'on en aura). Lorsque $\vec{C}$ et $\vec{D}$ sont de signes opposés, on définit leur codistance. Celle-ci est nulle si et seulement si $\vec{C}$ et $\vec{D}$ sont *opposées*, c'est-à-dire si $\vec{C} = -\vec{D}$ dans un certain appartement $\vec{A}$ les contenant. Dans ces conditions, on note $\vec{C} = \mathrm{op}_{\vec{A}}(\vec{D})$.

Lorsque $\vec{f}$ est une facette sphérique de $\vec{I}$, on peut définir la *projection* sur $\vec{f}$ ([Abr96] I.4). On commence par la définir pour les chambres de $\vec{I}$: si $\vec{C}$ est une chambre de $\vec{I}$, alors sa projection sur $\vec{f}$, notée $pr_{\vec{f}}(\vec{C})$ est l'unique chambre de $\vec{f}^*$ qui est à distance minimale (si $\vec{C}$ et $\vec{f}$ sont de même signe) ou à codistance maximale (dans le cas contraire) de $\vec{C}$. Ensuite, si $\vec{g}$ est une facette quelconque, on pose $pr_{\vec{f}}(\vec{g}) = \bigcap_{\vec{C}\in\vec{f}^*} \overline{pr_{\vec{f}}(\vec{C})}$, ou plutôt, $pr_{\vec{f}}(\vec{g})$ est la facette maximale contenue dans cette intersection fermée. Insistons sur le fait que la projection sur une facette $\vec{f}$ n'est définie que lorsque $\vec{f}$ est sphérique. (Lorsque $\vec{f}$ n'est pas sphérique, elle est en fait quand même définie pour les facettes $\vec{g}$ de même signe que $\vec{f}$.)

On prouve que si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont dans un appartement $\vec{A}$, alors $pr_{\vec{f}}(\vec{g}) \subset \vec{A}$ (voir [Abr96], I.4, corollaire 3). On peut alors donner une caractérisation géométrique de $pr_{\vec{f}}(\vec{g})$:

Proposition 10.1.3. *Soient $\vec{f}$ une facette sphérique et $\vec{g}$ une facette quelconque alors $pr_{\vec{f}}(\vec{g})$ est la plus grande facette de $\vec{f}^*$ incluse dans $Cl_{\vec{A}}(\vec{f} \cup \vec{g})$.*

De plus, $\overline{pr_{\vec{f}}(\vec{g})}$ est l'intersection de $\vec{f}^*$ et de tous les murs de $\vec{A}$ contenant $\vec{f} \cup \vec{g}$.

Démonstration: Pour tout demi-appartement $\vec{D}$ contenant $\vec{f} \cup \vec{g}$, il existe un appartement $\vec{B}$ tel que $\vec{D} = \vec{A} \cap \vec{B}$. Comme on vient de le rappeler, $pr_{\vec{f}}(\vec{g}) \subset \vec{A} \cap \vec{B} = \vec{D}$. On prouve ainsi que $pr_{\vec{f}}(\vec{g}) \subset \mathrm{Cl}(\vec{f} \cup \vec{g})$.

La première assertion découle alors de la deuxième, montrons celle-ci. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des murs de $\vec{A}$ contenant $\vec{f} \cup \vec{g}$. Soit $\vec{M} \in \mathcal{M}$, soient $\vec{C}$ et $\vec{D}$ les deux chambres de $\vec{g}^* \cap \vec{A}$ ayant une cloison commune dans $\vec{M}$. Alors $\vec{M}$ ne peut séparer $\vec{C}$ de $pr_{\vec{f}}(\vec{C})$, ni $\vec{D}$ de $pr_{\vec{f}}(\vec{D})$ sans quoi $\vec{C}$ serait plus proche (ou à codistance plus grande) de $r_{\vec{M}}.pr_{\vec{f}}(\vec{C})$ que de $pr_{\vec{f}}(\vec{C})$. Alors $pr_{\vec{f}}(\vec{g}) \subset pr_{\vec{f}}(\vec{C}) \cap pr_{\vec{f}}(\vec{D}) \subset \vec{M}$. D'où $pr_{\vec{f}}(\vec{g}) \subset \vec{f}^* \cap \bigcap_{\vec{M}\in\mathcal{M}} \vec{M}$.

Pour l'autre inclusion, soit $\vec{M}$ un mur contenant $pr_{\vec{f}}(\vec{g})$, montrons que $\vec{M} \in \mathcal{M}$. Il existe deux chambres $\vec{C}$ et $\vec{D}$ de $\vec{g}^* \cap \vec{A}$ telles que $\vec{M}$ sépare $pr_{\vec{f}}(\vec{C})$ de $pr_{\vec{f}}(\vec{D})$. Comme précédemment, $\vec{M}$ ne peux séparer $\vec{C}$ ni $\vec{D}$ de leur projections sur $\vec{f}$ et par conséquent, $\vec{M}$ sépare $\vec{C}$ de $\vec{D}$. Donc $\vec{M} \supset \overline{\vec{C}} \cap \overline{\vec{D}} \supset \vec{g}$. □

Pour toute partie $\vec{\Omega}$ d'un appartement $\vec{A}(T)$, on note $P(\vec{\Omega})$ son fixateur dans G, c'est le *sous-groupe parabolique* de G associé à $\vec{\Omega}$. Rappelons les propriétés essentielles de ces groupes :

Proposition 10.1.4.

1. *Si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont deux facettes d'un appartement $\vec{A}(T)$, alors $G = P(\vec{f}).N(T).P(\vec{g})$. Lorsque $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont de même signe, cette décomposition est dite de Bruhat, sinon de Birkhoff. Ceci entraine que pour toutes facettes $\vec{f}$ et $\vec{g}$ de $\vec{I}$, il existe un appartement les contenant.*
   Si $\vec{f} = \pm\vec{g}$, et si $\vec{f}$ est une chambre, on a une décomposition plus précise : $G = \bigsqcup_{n\in N(T)} U(\vec{f})nU(\vec{g})$, et pour tout $t \in T$ il y a écriture unique dans la double classe $U(\vec{f})tU(\vec{g})$.

2. *Soit $\vec{\Omega}$ une partie de $\vec{A}(T)$ incluse dans $\vec{A}^+(T)$, incluse dans $\vec{A}^-(T)$ ou rencontrant $\vec{A}^+(T)_{sph}$ et $\vec{A}^-(T)_{sph}$. Alors $\bigcap_{\vec{f}\in\vec{\Omega}} N(T).P(\vec{f}) = N(T).P(\vec{\Omega})$, ce qui signifie qu'entre deux appartements contenant $\vec{\Omega}$ existe un isomorphisme induit par un élément de G fixant $\vec{\Omega}$. Autrement dit, le groupe $P(\vec{\Omega})$ est transitif sur les appartements contenant $\vec{\Omega}$.*

3. *Soit $\vec{\Omega}$ une partie de $\vec{A}(T)$ incluse dans $\vec{A}(T)^+$, incluse dans $\vec{A}(T)^-$, ou rencontrant $\vec{A}^+(T)_{sph}$ et $\vec{A}^-(T)_{sph}$. Alors $P(\vec{\Omega}) = P(Cl(\vec{\Omega}))$.*

Au vu du point 2, ceci signifie que l'intersection de deux appartements $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est une partie close dans chacun des appartements $\vec{A}$ et $\vec{B}$ si elle est incluse dans $\vec{A}^+$, ou dans $\vec{A}^-$, ou si elle rencontre $\vec{A}_{sph}$.

Démonstration:

1. Voir [Ré02] partie 1. On prouve qu'un groupe muni d'une donnée radicielle est également muni d'une "BN-paire raffinée" en 1.5.4, puis qu'un tel groupe vérifie une version plus précise que celle énoncée ici de la décomposition de Bruhat en 1.2.3 et de la décomposition de Birkhoff en 1.2.4.

   Déduisons-en la version géométrique : soient $\vec{f}$ et $\vec{g}$ deux facettes de $\vec{I}$, soit $\vec{A}(T)$ un appartement contenant $\vec{f}$ et $h.\vec{A}(T)$, avec $h \in G$, un appartement contenant $\vec{g}$ (h et $\vec{A}(T)$ existent car $\vec{I}$ est la réunion de ses appartements, et car G permute ces derniers transitivement). On utilise alors la décomposition de Bruhat/Birkhoff dans l'appartement $\vec{A}(T)$ avec les facettes $h^{-1}\vec{g}$ et $\vec{f}$: il existe $p \in P(h^{-1}\vec{g})$, $n \in N(T)$ et $q \in P(\vec{f})$ tels que $h = qnp$. Alors l'appartement $q.\vec{A}(T)$ contient $\vec{f} \cup \vec{g}$.

2. La version géométrique de ce résultat est prouvée dans [AB08], 6.73 lorsque $\vec{\Omega}$ est l'adhérence d'une réunion de chambres. Elle est de plus connue si $\vec{\Omega} \subset A^+$ ou $\vec{\Omega} \subset A^-$ ([AB08] 4.5).

   Étudions le cas général, où $\vec{\Omega}$ rencontre $\vec{A}^+_{\text{sph}}$ et $\vec{A}^-_{\text{sph}}$. Soit $\vec{B}$ un autre appartement contenant $\vec{\Omega}$, soient $\vec{f}$ et $\vec{g}$ des facettes maximales de $\vec{A}^+ \cap \vec{B}^+$ et $\vec{A}^- \cap \vec{B}^-$, respectivement. Soit $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}$ contenant $\vec{f}$ dans son adhérence, et $\vec{D}$ une chambre de $\vec{B}$ contenant $\vec{g}$ dans son adhérence. Il existe un appartement $\vec{Z}$ contenant $\vec{C} \cup \vec{D}$. On sait que $\vec{Z}^+ \cap \vec{A}^+$ est une partie close (4.1.9) contenant la chambre $\vec{C}$, donc c'est l'adhérence d'un ensemble de chambres. Du côté négatif, comme $\vec{g}$ est une facette sphérique incluse dans $\vec{Z}^- \cap \vec{A}^-$, ce dernier ensemble est clos et contient la chambre $pr_{\vec{g}}(\vec{C})$. Il s'agit donc également de l'adhérence d'un ensemble de chambres. Donc $\vec{A} \cap \vec{Z}$ est l'adhérence d'un ensemble de chambres, et par [AB08], 6.73, il existe $g_1 \in G$ tel que $g.\vec{A} = \vec{Z}$, et g fixe $\vec{C}$, donc $\vec{f}$, et $\vec{g}$.

   De même, il existe $g_2 \in G$ tel que $g.\vec{Z} = \vec{B}$ et g_2 fixe $\vec{f} \cup \vec{g}$. Au final, $g_2 g_1$ fixe $\vec{f} \cup \vec{g}$ et envoie $\vec{A}$ sur $\vec{B}$. Par 4.1.10, $g_2 g_1$ fixe alors $\vec{A}^+ \cap \vec{B}^+$ et $\vec{A}^- \cap \vec{B}^-$. En particulier $g_2 g_1$ fixe $\vec{\Omega}$.

   Pour en déduire la version algébrique du résultat, si $g \in \bigcap_{\vec{f} \in \vec{\Omega}} N.P(\vec{f})$, posons $\vec{B} = g.\vec{A}$, et soit $g_2 g_1 \in P(\vec{\Omega})$ comme ci-dessus, alors $g^{-1} g_2 g_1 . \vec{A} = \vec{A}$ donc $g^{-1} g_2 g_1 \in N$ et $g \in N.P(\vec{\Omega})$.

3. Encore une fois, ceci est classique lorsque $\vec{\Omega} \subset \vec{A}^{\pm}$ (voir 4.1.9), on peut donc supposer que $\vec{\Omega}$ contient des points sphériques positifs et négatifs. On peut aussi supposer que $\vec{\Omega}$ contient $\text{Cl}(\vec{\Omega} \cap \vec{A}^+)$ et $\text{Cl}(\vec{\Omega} \cap \vec{A}^-)$, en particulier $\vec{\Omega}$ est l'adhérence d'une réunion de facettes sphériques.

   Lorsque $\vec{\Omega}$ est une partie "équilibrée" (c'est-à-dire une réunion finie de facettes sphériques en contenant au moins une positive et une négative), on a $P(\vec{\Omega}) = T.G(\phi(\vec{\Omega}))$ (voir [Ré02], chapitre 6, ceci sera détaillé un peu au paragraphe suivant). Chaque groupe radiciel U_α, $\alpha \in \phi(\vec{\Omega})$ fixe un demi-appartement contenant $\vec{\Omega}$, donc fixe aussi $\text{Cl}(\vec{\Omega})$.

   Si $\vec{\Omega}$ est l'adhérence d'un ensemble de chambres, alors $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ est la plus petite partie de $\vec{A}$ fermée et stable par projection sur ses cloisons ([AB08] 5.193, où une partie convexe est par définition un ensemble de chambres stable par projection sur ses cloisons intérieures). Si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont deux facettes sphériques de signes opposés, alors $\vec{f} \cup \vec{g}$ est une partie équilibrée, et le paragraphe précédent montre que $P(\vec{f} \cup \vec{g})$ fixe $\text{Cl}(\vec{f} \cup \vec{g})$, qui contient $pr_{\vec{f}}(\vec{g})$. Il est alors évident que $P(\vec{\Omega})$ fixe $P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$.

   Pour traiter le cas général, on reprend la démonstration de [AB08] 5.193. On commence par le

   Lemme 10.1.5. *Soit $\mathcal{C}$ une partie close de $\vec{A}^+$ ou de $\vec{A}^-$ contenant un point sphérique. Alors $\mathcal{C}$ est l'intersection des demi-appartements contenant $\mathcal{C}$ et dont le bord contient $\mathcal{C}$ ou une cloison sphérique de $\mathcal{C}$.*

   Remarque: Une cloison de $\mathcal{C}$ est par définition une facette de codimension 1 dans $\mathcal{C}$.

Preuve du lemme: Supposons par exemple $\mathcal{C} \subset \vec{A}^+$. Soit $\vec{f}$ une facette de $\vec{A}^+ \setminus \mathcal{C}$, montrons qu'il existe un demi-appartement comme dans l'énoncé qui sépare $\vec{f}$ de $\mathcal{C}$. Soit $\vec{c}$ une chambre de $\mathcal{C}$, à distance minimale de $\vec{f}$ (rappelons qu'une partie close d'un système de Coxeter est un complexe de chambre, d'après 4.1.6), $\vec{c}$ est donc une facette sphérique de $\vec{A}^+$.

Supposons dans un premier temps que $pr_{\vec{c}}(\vec{f}) \neq \vec{c}$. Soit $\vec{M}$ un mur contenant $\vec{c}$, et donc $\mathcal{C}$, mais pas $pr_{\vec{c}}(\vec{f})$, il ne contient alors pas $\vec{f}$. Le demi-appartement délimité par $\vec{M}$ et ne contenant pas $\vec{f}$ est comme requis dans l'énoncé, contient $\mathcal{C}$ et pas $\vec{f}$.

Supposons à présent que $pr_{\vec{c}}(\vec{f}) = \vec{c}$. Il existe alors une unique cloison $\vec{m}$ de $\vec{c}$ à distance minimale de $\vec{f}$. Remarquons que puisque $\mathcal{C}$ est fermé, $\vec{f} \not\subset \overline{\vec{c}}$, donc $pr_{\vec{m}}(\vec{f})$ est une facette de même dimension que $\vec{c}$, différente de $\vec{c}$, et incluse dans $\mathrm{Vect}_{\vec{A}}(\vec{c})$. Sachant que $\vec{c}$ est sphérique donc dans l'intérieur du cône de Tits, tout point de $\vec{m}$ est dans un segment ouvert reliant un point de $pr_{\vec{m}}(\vec{f})$ et un point de $\vec{c}$, donc $\vec{m}$ est dans l'intérieur du cône de Tits, donc $\vec{m}$ est une cloison sphérique de $\mathcal{C}$. Soit $\vec{M}$ un mur contenant $\vec{m}$ et pas $\vec{c}$, soit $\vec{D}$ le demi-appartement délimité par $\vec{M}$ contenant $\vec{c}$, alors $\vec{D}$ contient $\mathcal{C}$, sans quoi $pr_{\vec{m}}(\vec{f})$ serait dans $\mathcal{C}$, contredisant la définition de $\vec{c}$. De plus, $\vec{f} \not\subset \vec{D}$. □

On montre alors la version géométrique du point 3. Soit $\vec{B}$ un appartement tel que $\vec{A} \cap \vec{B}$ contient des points sphériques positifs et négatifs. Soit ϵ un signe. La partie $\mathcal{C}^\epsilon := \vec{A}^\epsilon \cap \vec{B}^\epsilon$ est close dans $\vec{A}^\epsilon$, c'est l'intersection des demi-appartements la contenant et dont le bord contient $\mathcal{C}^\epsilon$ ou une cloison sphérique de $\mathcal{C}^\epsilon$. Notons $\mathcal{D}^\epsilon$ cet ensemble de demi-appartements. Soit $\vec{D} \in \mathcal{D}^\epsilon$, et $\vec{m}$ une chambre ou une cloison sphérique de $\mathcal{C}$ incluse dans $\partial\vec{D}$. Comme $\vec{A} \cap \vec{B}$ est stable par projection, et que la projection sur $\vec{m}$ est bien définie puisque $\vec{m}$ est sphérique, $\mathcal{C}^\epsilon$ contient tous les $pr_{\vec{m}}(d)$ pour d une facette de $\vec{A}^{-\epsilon} \cap \vec{B}^{-\epsilon}$. Et ceci entraine que $\vec{D}$ contient $\vec{A}^{-\epsilon} \cap \vec{B}^{-\epsilon}$.
On prouve ainsi que $\mathrm{Cl}(\vec{A} \cap \vec{B})$ est égal à l'intersection des demi-appartements de $\mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$, puis que $\mathrm{Cl}(\vec{A} \cap \vec{B}) = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \subset \vec{A} \cap \vec{B}$.

Pour en déduire la version algébrique du résultat, soit $g \in P(\vec{\Omega})$, posons $\vec{B} = g.\vec{A}$. Par le point 2, il existe $h \in P(\vec{A} \cap \vec{B})$ tel que $h.\vec{A} = \vec{B}$, donc $g^{-1}h \in N(\vec{\Omega})$. Or $N(\vec{\Omega}) = N(\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}))$, et $\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}) \subset \vec{A} \cap \vec{B}$ d'où $h \in P(\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}))$. Au final, on obtient bien $g \in P(\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}))$.

□

10.1.3 Décomposition de Lévi

On se réfère ici à [Ré02] chapitre 6. On fixe dans ce paragraphe un tore T, et on note $\vec{A} = \vec{A}(T)$ et $\phi = \phi(T)$.

Soit $\vec{\Omega}$ une partie de $\vec{A}$. On note :
- $\phi^u(\vec{\Omega}) = \left\{\alpha \in \phi \mid \alpha(\vec{\Omega}) > 0\right\}$
- $\phi^m(\vec{\Omega}) = \left\{\alpha \in \phi \mid \alpha(\vec{\Omega}) = 0\right\}$
- $\phi(\vec{\Omega}) = \phi^u(\vec{\Omega}) \sqcup \phi^m(\vec{\Omega}) = \left\{\alpha \in \phi \mid \alpha(\vec{\Omega}) \geq 0\right\}$.

L'ensemble de racines $\phi^m(\vec{\Omega})$ est un sous-système de racines de ϕ. Lorsque $\vec{\Omega}$ contient un point sphérique, il est fini.

On définit ensuite les sous-groupes de $P(\vec{\Omega})$ suivants :

- $M_{\vec{A}}(\vec{\Omega})$, le *facteur de Lévi de $P(\vec{\Omega})$ par rapport $\vec{A}$:*
  Il est défini par $M_{\vec{A}}(\vec{\Omega}) := \mathrm{Fix}_G(\mathrm{Vect}_{\vec{A}}(\vec{\Omega})) = \mathrm{Fix}_G(\vec{\Omega} \cup \mathrm{op}_{\vec{A}}(\vec{\Omega}))$. Il est d'après 10.1.4 .2 transitif sur les appartements contenant $\mathrm{Vect}_{\vec{A}}(\vec{\Omega})$. Si $\vec{\Omega}$ est une facette ou si elle contient une facette sphérique, alors $M_{\vec{A}}(\vec{\Omega}) = \langle T, \left\{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^m(\vec{A})(\vec{\Omega})\right\}\rangle = T.G(\phi^m(\vec{\Omega}))$. Enfin, le couple $(M(\vec{\Omega}), (U_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{\Omega})})$ est une donnée radicielle de

système de racines $\phi^m(\vec{\Omega})$, voir [Ré02] 6.2.3. En particulier, lorsque $\vec{\Omega}$ contient un point sphérique, $\phi^m(\vec{\Omega})$ est un système de racines fini, et $M(\vec{\Omega})$ est muni d'une donnée radicielle de type fini.

– $U(\vec{\Omega})$, le *facteur unipotent de* $P(\vec{\Omega})$ *:*
C'est le sous-groupe distingué de $P(\vec{\Omega})$ engendré par $G(\phi^u(\vec{\Omega})) = \left\langle \left\{ U_\alpha \mid \alpha \in \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega}) \right\} \right\rangle$. Il est donc indépendant de l'appartement $\vec{A}$ contenant $\vec{\Omega}$ considéré. Si $\vec{\Omega}$ contient un point sphérique positif et un point sphérique négatif, il admet la décomposition avec écriture unique : $U(\vec{\Omega}) = \prod_{\alpha \in \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega})} U_\alpha$, quel que soit l'ordre des facteurs. En particulier, on a alors $U(\vec{\Omega}) = G(\phi^u(\vec{\Omega}))$. Lorsque $\vec{\Omega}$ est une chambre, $U(\vec{\Omega}) = G(\phi^u(\vec{\Omega}))$, et lorsque $\vec{\Omega}$ est une facette, $U(\vec{\Omega})$ est l'intersection des $U(\vec{C})$ pour $\vec{C}$ les chambres de $\vec{A}$ contenant $\vec{\Omega}$ dans leur adhérence. On prouve enfin que si $\vec{\Omega}$ est une facette sphérique, $U(\vec{\Omega}) = U(\vec{C}) \cap U(\vec{D})$ dès que $\vec{C}$ et $\vec{D}$ sont deux chambres opposées dans $\vec{\Omega}^* \cap \vec{A}$.

Une *partie équilibrée* dans $\vec{I}$ est une partie d'appartement qui contient des points positifs et négatifs et qui est recouverte par un nombre fini de facettes sphériques (éventuellement fermées).

Dans le cas où $\vec{\Omega}$ est soit une facette soit une partie équilibrée de $\vec{A}$, $P(\vec{\Omega})$ admet une décomposition de Lévi ([Ré02], 6.2.2 et 6.4.1) :

$$P(\vec{\Omega}) = M_{\vec{A}}(\vec{\Omega}) \ltimes U(\vec{\Omega}) \, .$$

Une extension vectorielle de $\vec{\Omega}$ est une partie de $\vec{I}$ de la forme $\mathrm{Vect}_{\vec{B}}(\vec{\Omega})$ pour un appartement $\vec{B}$ contenant $\vec{\Omega}$. La décomposition de Lévi peut aussi s'exprimer en disant que $U(\vec{\Omega})$ est simplement transitif sur les extensions vectorielles de $\vec{\Omega}$.

10.2 Valuation d'une donnée radicielle

A l'exemple de [BT72], on ajoute maintenant une structure supplémentaire à notre donnée radicielle qui permet de rendre compte, dans le cas d'un groupe sur un corps local, de la valuation du corps.

Définition 10.2.1. *Soit ϕ un système de racines. Soit $(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\phi})$ une donnée radicielle et pour tout $\alpha \in \phi$ soit φ_α une fonction de U_α dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $U_{\alpha,\lambda} = \varphi_\alpha^{-1}([\lambda, \infty])$.*

On dit que la famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\phi}$ est une valuation de la donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\phi})$, ou que $(G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\phi})$ est une donnée radicielle valuée si :

– *(V0) : $\forall \alpha \in \phi$, $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ a au moins trois éléments.*

– *(V1) : Pour tout $\alpha \in \phi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $U_{\alpha,\lambda}$ est un sous-groupe de U_α, et $U_{\alpha,\infty} = \{e\}$.*

– *(V2.1) : Pour tout $\alpha, \beta \in \phi$, $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $v \in U_\beta \setminus \{e\}$,*

$$\varphi_{r_\alpha.\beta}\left(n(u).v.n(u)^{-1}\right) = \varphi_\beta(v) - \langle \alpha, \beta \rangle \varphi_\alpha(u)$$

– *(V2.2) : Pour tout $\alpha \in \phi$, pour tout $t \in T$,* $\begin{array}{ccc} U_\alpha \setminus \{e\} & \to & \Lambda \\ v & \mapsto & \varphi_\alpha(v) - \varphi_\alpha(tvt^{-1}) \end{array}$ *est constante.*

– *(V3) : Pour toute paire prénilpotente de racines $\{\alpha, \beta\}$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:*

$$[U_{\alpha,\lambda}, U_{\beta,\mu}] \subset \left\langle \left\{ U_{p\alpha+q\beta, p\lambda+q\mu} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p\alpha + q\beta \in \phi \right\} \right\rangle$$

– *(V4) : Si $\alpha \in \phi$ et $2\alpha \in \phi$ alors $\varphi_{2\alpha}$ est la restriction de φ_α à $U_{2\alpha}$.*

Lorsque $(G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\phi})$ est une donnée radicielle valuée, on garde la notation $U_{\alpha,\lambda}$ qu'on vient d'introduire.

Si de plus pour tout $\alpha \in \phi_{red}$, $0 \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$, on dit que φ est une valuation spéciale.

Remarques:
- Soit $\alpha \in \phi$, et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Par (V1), on voit que $\varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(u^{-1})$, et par (V2.1) on obtient $\varphi_{-\alpha}(n(u).u.n(u)^{-1}) = -\varphi_\alpha(u)$.
- Avec (V0) et (V2.1), on voit qu'il existe un sous groupe de $\mathbb{R}$ non trivial Λ tel que $\phi_\alpha(U_\alpha) + \Lambda = \phi_\alpha(U_\alpha)$.

L'ensemble des valuation de $\mathcal{D}$ est muni d'une action de $\vec{V}$: pour tout $\vec{v} \in \vec{V}$ et φ une valuation de $\mathcal{D}$, on définit $\varphi + \vec{v}$ par $\forall \alpha \in \phi$, $u \in U_\alpha$, $(\varphi + \vec{v})_\alpha(u) = \varphi_\alpha(u) + \alpha(\vec{v})$. Il est immédiat de vérifier que $\varphi + \vec{v}$ est encore une valuation de $\mathcal{D}$. Deux valuations φ et φ' telles qu'il existe $\vec{v} \in \vec{V}$ tel que $\varphi = \varphi' + \vec{v}$ sont dites équipollentes. Soit φ une valuation quelconque. Le fait que ϕ engendre $\vec{V}^*$ entraine que l'action de $\vec{V}$ sur l'ensemble $\varphi + \vec{V}$ des valuations équipollentes à φ est simplement transitive, donc $\varphi + \vec{V}$ est un espace affine sous $\vec{V}$.

Si Π est une base de ϕ, il s'agit aussi d'une base de $\vec{V}$ et on peut donc trouver $\vec{v} \in \vec{V}$ tel que pour tout $\alpha \in \phi$, $0 \in \varphi_\alpha(U_\alpha) + \alpha(\vec{v})$. En utilisant (V2.1), on vérifie alors que cette relation reste vraie pour tout $\alpha \in \phi_{red}$. Ainsi, $\varphi + \vec{v}$ est une valuation spéciale équipollente à φ. On peut donc toujours se ramener à une valuation spéciale, à équipollence près.

Notons enfin que pour tout $g \in G$, la famille de fonction $g.\varphi$ définie par $\forall \alpha \in g.\phi$, $\forall u \in U_\alpha$, $(g.\varphi)_\alpha(u) = \varphi_{g^{-1}\alpha}(g^{-1}ug)$ est une valuation de la donnée radicielle $g.\mathcal{D}$.

Dans la définition de la valuation d'une donnée radicielle finie de [BT72], ou même dans la définition de la valuation d'une donnée radicielle quelconque de [Rou06], l'axiome (V2) est beaucoup plus faible que celui présenté ici. Par contre on ajoute un cinquième axiome à savoir :

(V5) : Pour tout $\alpha \in \phi$, pour tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, pour tous $u', u'' \in U_{-\alpha}$ tels que $n(u) = u'uu''$, alors $-\varphi_\alpha(u) = \varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u'')$.

On prouvera (en 11.1.11) que pour une donnée radicielle finie, la définition présente équivaut à celle de [BT72], autrement dit que d'une part l'axiome (V2) présenté ici est conséquence de sa version faible et de (V0), (V1), (V3), (V4), (V5), et que d'autre part (V5) découle des (V0)...(V4) ci-dessus. Dans le cas où ϕ est infini, l'auteur n'a pas pu se passer de la version forte de (V2).

Proposition 10.2.2. *Soit $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha)_{\alpha \ni \phi})$ une donnée radicielle admettant une valuation $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi}$. Alors $\mathcal{D}$ vérifie la condition (CENT).*

Démonstration: Soit $\alpha \in \phi$, $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Nous devons trouver $t \in T$ tel que $utu^{-1} \neq t$. Par (V0), il existe $v \in U_\alpha \setminus \{e\}$ tel que $\varphi_\alpha(u) \neq \varphi_\alpha(v)$. Posons $t = n(u)n(v)$, il est clair par (DR4) que t normalise chaque U_β, donc $t \in T$. Montrons que $t^{-1}ut \neq u$. On calcule $\varphi_\alpha(t^{-1}ut)$ en utilisant deux fois (V2.1) :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(n(v)^{-1}n(u)^{-1}.u.n(u)n(v)) &= \varphi_{-\alpha}(n(u)^{-1}un(u)) - \langle -\alpha, \alpha \rangle \varphi_\alpha(v) \\ &= \varphi_\alpha(u) - \langle \alpha, \alpha \rangle \varphi_\alpha(u) + 2\varphi_\alpha(v) = 2\varphi_\alpha(v) - \varphi_\alpha(u) \\ &\neq \varphi_\alpha(u) \end{aligned}$$

Donc $t^{-1}ut \neq u$. □

Proposition 10.2.3.

1. *Soit G un groupe de Kac-Moody déployé, soit $\mathbb{K}$ un corps muni d'une valuation non triviale $\varpi : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Alors il existe une valuation $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ de la donnée radicielle $(G(\mathbb{K}), (U_\alpha(\mathbb{K}))_{\alpha \in \phi})$, elle est définie par $\varphi_\alpha(u_\alpha(k)) = \varpi(k)$, où $(u_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ est un système de Chevalley pour ϕ.*
2. *Soit $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ une donnée radicielle avec ϕ un système de racines fini. Soit $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ une valuation de $\mathcal{D}$ au sens de [BT72] 6.2.1. Alors φ est aussi une valuation de $\mathcal{D}$ au sens présent.*

Démonstration:
Pour le cas Kac-Moody, on trouvera dans [Rou06] 2.2 des références qui prouvent toutes les conditions (Vx) sauf (V2). Dans le cas d'un système de racines fini, ces conditions sont les même dans [BT72] et ici.

Il ne reste qu'à étudier (V2). Cette condition découle rapidement de l'existence d'un espace affine muni d'une action convenable de N (un appartement en fait). Expliquons comment sous forme d'un lemme :

Lemme 10.2.4. *Soit $\phi \subset \vec{V}^*$ un système de racines, et $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha)_{\alpha\in\phi})$ une donnée radicielle. Soit $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha\in\phi}$ une famille de fonctions avec $\forall\alpha \in \phi$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $\varphi_\alpha^{-1}\{\infty\} = \{e\}$.*

On suppose qu'il existe un espace affine A sous $\vec{V}$, un point $o \in A$ et une action de N sur A par automorphismes affines telle que pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $n(u)$ agit comme la réflexion d'hyperplan $M(\alpha, \varphi_\alpha(u)) := \{x \in A \mid \alpha(\vec{ox}) + \varphi_\alpha(u) = 0\}$ dont la direction est la réflexion $r_\alpha \in W(\phi)$. Alors la famille φ vérifie (V2.1). Si de plus T agit sur A par translation, alors φ vérifie (V2.2).

Preuve du lemme: On identifie les $\alpha \in \phi$ à des formes affines sur A par $\alpha(x) = \alpha(\vec{ox})$. La valeur $\varphi_\alpha(u)$ est caractérisée par l'égalité $\alpha\left(\mathrm{Fix}_{\vec{V}}(n(u))\right) = \{-\varphi_\alpha(u)\}$.

Soient $\alpha, \beta \in \phi$ et $(u, v) \in U_\alpha \setminus \{e\} \times U_\beta \setminus \{e\}$. Pour calculer $\varphi_{r_\alpha.\beta}\left(n(u).v.n(u)^{-1}\right)$, il faut donc étudier la réflexion $n\left(n(u).v.n(u)^{-1}\right)$. Par la définition (voir (DR4)), il est clair que $n\left(n(u).v.n(u)^{-1}\right) = n(u).n(v).n(u)^{-1}$, et l'ensemble de ses points fixes est $n(u).\mathrm{Fix}_A(v)$. Il existe un point $a \in \mathrm{Fix}(n(u))$ et un réel x tel que $a + x.\alpha^\vee \in \mathrm{Fix}(n(v))$ (si α et β sont colinéaires, pour tout $a \in \mathrm{Fix}(n(u))$ il existe un tel x, sinon il existe $a \in \mathrm{Fix}(n(u)) \cap \mathrm{Fix}(n(v))$, alors $x = 0$ convient). Alors $n(u).(a + x.\alpha^\vee) = a - x.\alpha^\vee$, on a donc :

$$\begin{aligned}
-\varphi_\alpha(u) &= \alpha(a)\ , \\
-\varphi_\beta(v) &= \beta(a + x.\alpha^\vee) = \beta(a) + x\langle\alpha,\beta\rangle\ , \\
\text{et :}\quad -\varphi_{r_\alpha.\beta}(n(u).v.n(u)^{-1}) &= (r_\alpha.\beta)(a - x.\alpha^\vee) = (\beta - \langle\alpha,\beta\rangle\alpha)(a - x.\alpha^\vee) \\
&= \beta(a) - \langle\alpha,\beta\rangle\alpha(a) - x\langle\alpha,\beta\rangle + 2x\langle\alpha,\beta\rangle \\
&= \beta(a) - \langle\alpha,\beta\rangle\alpha(a) + x\langle\alpha,\beta\rangle \\
&= -\varphi_\beta(v) + \langle\alpha,\beta\rangle\varphi_\alpha(u)\ .
\end{aligned}$$

Ceci prouve (V2.1). On procède de même pour (V2.2) : soit $\alpha \in \phi$, $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$ et $t \in T$. On vérifie facilement que $n(tut^{-1}) = tn(u)t^{-1}$, c'est donc une réflexion d'hyperplan $M(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_t$, si $\vec{v}_t$ désigne le vecteur de la translation induite par t sur A. Alors $\varphi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(tut^{-1}) = \alpha(\vec{v}_t)$ ne dépend pas de u. □

Pour conclure la preuve de la proposition, dans les deux cas il existe un espace affine A muni d'une action de N comme dans le lemme, voir [Rou06] partie 2 et [BT72] 6.2.10. □

11 Construction générale

On fixe pour toute cette partie une donnée radicielle valuée génératrice $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\phi})$, avec φ spéciale. On rappelle que la condition (CENT) de [Ré02] 1.2.5 est alors vérifiée d'après 10.2.2, donc le normalisateur $N(T)$ d'un tore maximal T est le groupe engendré par T et les $n(u)$, $u \in U_\alpha$, $\alpha \in \phi(T)$.

On construit un objet immobilier $\mathcal{I}$ de manière tout à fait similaire à [BT72] : on commence par définir pour tout tore maximal T un appartement $A(T)$ muni d'une action de $N(T)$; on définit ensuite les sous-groupes, appelés "parahoriques", qui seront les fixateurs dans G des points de A ; et on définit finalement $\mathcal{I}$ comme quotient de $G \times A(T)$ par la relation imposant que les sous-groupes parahoriques soient effectivement les fixateurs des points de $A(T)$.

11.1 L'appartement

On fixe un tore maximal T dans G. On définit dans ce numéro l'objet $A(T)$ qui sera l'appartement relatif à T. Il s'agit d'une réunion disjointe d'espaces affines sous $\vec{V}(T)$ et certains de ses sous-espace vectoriels. Dans toute cette partie, on notera $\phi = \phi(T)$, $\vec{V} = \vec{V}(T)$, $\vec{A} = \vec{A}(T)$ et $N = N(T)$.

11.1.1 Façades d'appartement

Soit $Y(T)$ un espace affine sous $\vec{V}$. Les façades de $Y(T)$ sont définies exactement comme dans 3.1, à partir de la famille de cônes de $\vec{V}$ formée par les facettes de $\vec{A}$. On rappelle néanmoins rapidement ces définitions.

Un cône dans $Y(T)$ est une partie de $Y(T)$ de la forme $f = x + \vec{f}$, où $\vec{f}$ est un cône de $\vec{V}(T)$. Le cône vectoriel $\vec{f}$ est uniquement déterminé, c'est la direction de $x + \vec{f}$. Deux cônes de même direction sont dits parallèles, on note $g \parallel f$. Lorsque g est parallèle et inclus dans f, on dit que c'est un sous-cône parallèle, abrégé en "scp".

On définit une relation d'équivalence $\sim$ (ou $\sim_T$ lorsqu'il faut préciser) sur l'ensemble des cônes convexes de $Y(T)$. Soient $f = x + \vec{f}$ et $g = y + \vec{g}$, on pose :

$$f \sim g \Leftrightarrow (f \parallel g \text{ et } f \cap g \neq \emptyset) \Leftrightarrow (f \cap g \text{ contient un scp de } f \text{ et de } g\,) \Leftrightarrow (f \parallel g \text{ et } \vec{xy} \in \mathrm{Vect}(\vec{f}))$$

Pour tout cône convexe $\vec{f}$ on note $Y(T)_{\vec{f}}$ l'ensemble des cônes dirigés par $\vec{f}$ quotienté par $\sim$. C'est la *façade* de $Y(T)$ de *direction* $\vec{f}$. C'est un espace affine isomorphe à $Y(T)/\mathrm{Vect}(\vec{f})$, et l'action de $\vec{V}(T)$ sur A passe au quotient sur $Y(T)_{\vec{f}}$.

Soit $\mathcal{F}(\vec{A}(T))$ l'ensemble des facettes de $\vec{A}(T)$, ce sont en particulier des cônes convexes de $\vec{V}(T)$. L'*appartement (bordé) associé à* T est alors :

$$A(T) := \bigcup_{\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T))} Y(T)_{\vec{f}}$$

On notera $A(T)_{\vec{f}}$ pour désigner la façade $Y(T)_{\vec{f}}$, et les façades de $Y(T)$ seront appelées les façades de $A(T)$.
Les façades ainsi construites seront appelées façades d'appartement, pour les distinguer des façades d'immeubles dont la définition est à venir. Lorsque a est un point de $A(T)$, on notera $\vec{f}_a$ la direction de la façade le contenant. L'espace $\vec{V}$ agit sur l'appartement $A(T)$ par translation et les orbites sont ses façades.

On note $A(T)_{sph}$ la réunion des façades sphériques de $A(T)$, c'est-à-dire des façades de type une facette vectorielle sphérique. On note aussi $A(T)^+$, $A(T)^-$ la réunion des façades positives et négatives, $A(T)^+_{sph}$ et $A(T)^-_{sph}$ la réunion des façades sphériques positives et négatives. Dans la terminologie de [Rou06], $A(T)^+_{sph}$ et $A(T)^-_{sph}$ sont les réalisations de Satake de deux appartements microaffines.

On définit une topologie sur $A(T)$, telle que les voisinages d'un point $[x + \vec{f}]$ sont les :

$$\mathcal{V}(U, \vec{f}) = \left\{ a \in A(T) \mid \text{un représentant de } a \text{ est inclus dans } U + \vec{f} \right\},$$

pour tous les voisinages U de x dans l'espace affine $Y(T)$. Cette topologie induit la topologie classique d'un espace affine de dimension finie sur chaque façade et l'adhérence d'une façade $A_{\vec{f}}$ est l'union des façades $A_{\vec{g}}$ pour $\vec{f} \subset \overline{\vec{g}}$. Cette topologie est séparée, et si $\vec{f}$ est une facette sphérique, alors $\overline{A_{\vec{f}}} = \bigcup_{\vec{g}\ \mathrm{tq}\ \vec{f} \subset \overline{\vec{g}}} A_{\vec{g}}$ est compact (3.2.8).

Comme les bases de ϕ sont des bases de $\vec{V}^*$, la plus petite facette de $\vec{A}(T)$ est $\{0\}$. La façade $A(T)_{\{0\}} = Y(T)$ est appelée *la façade principale* de $A(T)$, c'est l'intérieur de $A(T)$. On la notera donc $\mathring{A}(T)$, et on pourra oublier la notation $Y(T)$.

Si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont deux facettes de $\vec{A}$ telles que $\vec{f} \subset \mathrm{Vect}(\vec{g})$, l'application $pr_{\vec{g}} : \begin{array}{ccc} A_{\vec{f}} & \to & A_{\vec{g}} \\ [a+\vec{f}] & \mapsto & [a+\vec{g}] \end{array}$ est bien définie, c'est la *projection* sur la façade $A_{\vec{g}}$.

Si $\Omega \subset A = A(T)$ est dans une façade $A_{\vec{f}}$, et si $\vec{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{Y}(T)$ contenant $\vec{f}$, alors on définit $\left\langle \Omega, \vec{E} \right\rangle_A = \overline{pr_{\vec{f}}^{-1}(\Omega) + \vec{E}}$, le *sous-appartement engendré par* Ω et $\vec{E}$..

Si $\vec{E}$ est juste une partie de $\vec{A}$, la notation $\left\langle \Omega, \vec{E} \right\rangle$ désignera $\left\langle \Omega, \mathrm{Vect}_{\vec{A}}(\vec{E}) \right\rangle$.

Remarque: Quels que soient Ω et $\vec{E}$, si $\Omega \neq \emptyset$, alors $\left\langle \Omega, \vec{E} \right\rangle_A$ coupe toujours la façade principale.

Jusqu'à la fin de 11.1, on notera $A = A(T)$.

11.1.2 Murs et demi-appartements

On fixe une origine $o \in \mathring{A}$, et on identifie les formes linéaires sur $\vec{V} = \vec{\mathring{A}}$ à des formes affines sur $\mathring{A}$ qui s'annulent en o, autrement dit on pose pour tout $\alpha \in \phi$ et $a \in A$, $\alpha(a) := \alpha(\vec{oa})$. Soit $\alpha \in \phi$ une racine. Si $\vec{f} \in \mathcal{F}$ est une facette telle que $\alpha(\vec{f}) = 0$, alors α définit encore une forme affine sur $A_{\vec{f}}$. Si $\alpha(\vec{f}) > 0$, on dit que α prend la valeur ∞ sur $A_{\vec{f}}$. Enfin si $\alpha(\vec{f}) < 0$, on dit que α prend la valeur $-\infty$ sur $A_{\vec{f}}$. De la sorte, α définit une fonction sur A, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Ces définitions permettent une caractérisation pratique de la topologie de A :

Lemme 11.1.1. *La topologie de A est engendrée par les demi-espaces ouverts* $\{x \in A \mid \alpha(x) > a\}$ *pour* $a \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in \phi$. *Autrement dit, une suite* x_n *tend vers une limite* x *si et seulement si* $\forall \alpha \in \phi$, $\alpha(x_n) \to \alpha(x)$.

□

Pour tout $\alpha \in \phi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $M(\alpha, \lambda) = \{x \in A \mid \alpha(x) + \lambda = 0\}$ et $D(\alpha, \lambda) = \{x \in A \mid \alpha(x) + \lambda \geq 0\}$. On notera également $D(\alpha, \infty) = A$. L'ensemble des $M(\alpha, \lambda)$ ainsi obtenus pour $\alpha \in \phi$ et $\lambda \in \varphi_\alpha(U_\alpha \setminus \{e\})$ est l'ensemble des *murs* de A ; l'ensemble des $D(\alpha, \lambda)$ correspondants est l'ensemble des *demi-appartements* de A.

Si $M = M(\alpha, \lambda)$ est un mur de $A(T)$, on notera $\vec{M} = \ker(\alpha) \subset \vec{V}$ la *direction* de M, c'est un mur de $\vec{A}$ (ou plutôt sa trace sur $\vec{A}$ est un mur de $\vec{A}$). Lorsqu'une intersection de murs est réduite à un seul point, ce point est appelé un *sommet*. Lorsqu'un sommet est inclus dans un mur de chaque direction possible, c'est un *sommet spécial*. Par exemple o est un sommet spécial (ceci est en fait équivalent à la condition "φ est spéciale").

Notons que si M est un mur contenant Ω dont la direction contient $\vec{E}$, alors $\left\langle \Omega, \vec{E} \right\rangle_A \subset M$.

Un isomorphisme affine ψ entre les façades principales de deux appartements $A(T)$ et $A(T')$ dont la partie vectorielle préserve $\mathcal{F}$ induit une bijection, encore notée ψ, entre $A(T)$ et $A(T')$. Si cette bijection préserve l'ensemble des murs, on dit que ϕ est un *isomorphisme d'appartements*. Remarquons qu'un isomorphisme d'appartements ainsi défini ne préserve pas forcément les types des facettes de $\vec{A}(T)$ ni même leur signe.

Pour tout mur $M = M(\alpha, \lambda)$, r_M désigne la réflexion de direction r_α qui fixe $M \cap \mathring{A}$. Elle induit un automorphisme involutif de $A(T)$, qu'on appelle la *réflexion selon* M.

Soit M un mur de $A(T)$ et $\vec{f} \in \mathcal{F}$. Alors $M \cap A(T)_{\vec{f}}$ est soit vide, soit un hyperplan de $A(T)_{\vec{f}}$. Ces hyperplans seront appelés les murs de $A(T)_{\vec{f}}$.

On notera pour toute partie ou filtre Ω de A, et pour tout $\alpha \in \phi$, $U_\alpha(\Omega) = \{u \in U_\alpha \mid \Omega \subset \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u))\}$. Par exemple, $U_\alpha(\emptyset) = U_\alpha$ et $U_\alpha(A) = \{e\}$. Pour toute partie ψ de ϕ, on notera aussi $G(\psi, \Omega) = \langle \{U_\alpha(\Omega) \mid \alpha \in \psi\} \rangle$. Enfin, $G(\Omega)$

désignera $G(\phi, \Omega)$.

Remarque: Dans [BT72], $\mathring{A}$ est par définition l'espace affine des valuations équipollentes à φ. Il est isomorphe à celui défini plus haut via $o + \vec{v} \mapsto \varphi + \vec{v}$. En particulier, la valuation φ est identifiée au point o.

11.1.3 Parties closes

Définition 11.1.2. *Une partie close de $A(T)$ est une intersection finie de demi-appartements. L'enclos d'une partie ou d'un filtre E de $A(T)$ est le filtre noté $Cl(E)$ engendré par les parties closes de $A(T)$ contenant E.*

Remarques:
- Avec cette définition, $\mathrm{Cl}(\emptyset) = \emptyset$.
- Cette définition de partie close est plus restrictive que celle de [GR08], elle conduit donc à des enclos plus grands. En effet, dans [GR08], on autorise des demi-appartements dirigés par des racines imaginaires, et une intersection infinie de demi-appartements est close, pourvu que ces demi-appartements soient dirigés par des racines distinctes.

Si Ω est une partie de A, on notera $\vec{\Omega}$ la réunion des directions des façades rencontrées par Ω. Lorsque Ω est un filtre, $\vec{\Omega}$ sera la réunion des directions des façades rencontrées par tous les éléments de Ω.

Exemples 11.1.3.

1. Soit $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}$ et $\Omega = A_{\vec{C}}$. Alors $\mathrm{Cl}(\Omega)$ est le filtre des voisinages de Ω, $\vec{\Omega} = \vec{C}$, et $\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}) = \overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)} = \overline{\vec{C}}$. En effet tout élément du filtre $\mathrm{Cl}(\Omega)$ contient des points de chaque façade dirigée par une facette de $\overline{\vec{C}}$, même si $\mathrm{Cl}(\Omega)$ ne contient aucun point d'aucune façade $A_{\vec{f}}$ pour $\vec{f} \subset \partial\vec{C}$.

2. Soit $\vec{m}$ une cloison de $\vec{A}$, prenons $\Omega = A_{\vec{m}} \cup A_{-\vec{m}}$. Alors $\vec{\Omega} = \vec{m} \cup -\vec{m}$, et $\mathrm{Cl}(\vec{\Omega})$ est l'hyperplan contenant $\vec{m}$. Mais $\mathrm{Cl}(\Omega) = A$, donc $\overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)} = \vec{A} \neq \mathrm{Cl}(\vec{\Omega})$. (Il suffit même de prendre $\Omega = A_{\vec{m}} \cup \{x\}$ avec x un point de $A_{-\vec{m}}$.)

3. Avec encore $\vec{m}$ une cloison de $\vec{A}$, en prenant $\Omega = A_{\vec{m}}$, on obtient $\overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)} = \overline{\vec{m}^*} \neq \mathrm{Cl}(\vec{\Omega}) = \overline{\vec{m}}$. Ainsi même en restant dans A^+ ou A^- on n'a pas $\overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)} = \mathrm{Cl}(\vec{\Omega})$.

Proposition 11.1.4. *Pour toute partie Ω de A, $\overrightarrow{Cl(\Omega)}$ est close. En conséquence, $\overrightarrow{Cl(\Omega)} \supset Cl(\vec{\Omega})$.*

Démonstration:
Soit $\vec{f} \subset \mathrm{Cl}(\overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)})$, montrons que $\vec{f} \subset \overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)}$. Il s'agit de prouver que tout élément du filtre $\mathrm{Cl}(\Omega)$ contient un point de $A_{\vec{f}}$. Soit donc $D_1 \cap ... \cap D_k \in \mathrm{Cl}(\Omega)$ une intersection finie de demi-appartements contenant Ω. Pour tout i, $\mathrm{Cl}(\Omega) \subset D_i$ donc $\overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)} \subset \vec{D}_i$, donc $\vec{f} \subset \vec{D}_i$. Si $\vec{f}$ est dans l'intérieur de $\vec{D}_i$, alors $A_{\vec{f}} \subset D_i$. On peut donc, quitte à retirer les D_i tels que $\vec{f}$ est dans l'intérieur de $\vec{D}_i$, supposer que pour tout i, $\vec{f} \subset \partial\vec{D}_i$. Alors $D_1 \cap D_2 ... \cap D_k$ est stable par $\mathrm{Vect}(\vec{f})$ et contient donc $\left\langle \Omega, \vec{f} \right\rangle_A$, qui contient bien au moins un point de $A_{\vec{f}}$ si $\Omega \neq \emptyset$. Le cas $\Omega = \emptyset$ est trivial.. □

Le résultat suivant fournit une description plus ou moins constructive de la trace de l'enclos d'une partie Ω dans une façade $A_{\vec{f}_0}$.

Proposition 11.1.5. *Soit Ω une partie de A. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des facettes de $\overrightarrow{Cl(\Omega)}$). On effectue les opérations suivantes sur Ω :*

1. *Pour chaque couple $(a, \vec{g})$ tel que $a \in \Omega$, $\vec{g} \in \mathcal{D}$ et a est dans la façade $A_{\vec{f}}$ avec $\vec{f} \subset \mathrm{Vect}(\vec{g})$, on rajoute $pr_{\vec{g}}(a)$ à Ω.*

2. *Pour chaque couple $(b, \vec{f})$, avec $b \in \Omega$, $\vec{f} \in \mathcal{D}$, tels que b est dans la façade $A_{\vec{g}}$ avec $\vec{f} \subset \mathrm{Vect}(\vec{g})$, on choisit $a \in pr_{\vec{g}}^{-1}(b) \cap A_{\vec{f}}$ et on rajoute $a + \vec{g}$ à Ω.*

Appelons $\Omega^1(C_1)$ l'ensemble ainsi obtenu, où C_1 représente les choix effectués à chaque opération 2. Si de nouveaux couples $(a, \vec{g})$ ou $(b, \vec{f})$ vérifiant les conditions ci-dessus sont apparus, on effectue à nouveau les opérations 1 et 2, et on note $\Omega^2(C_2)$ l'ensemble obtenu. On obtient ainsi par récurrence un ensemble $\Omega^n(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\Omega^\infty(C)$ la réunion de tous ces ensembles, il dépend de la suite C de tous les choix effectués à chaque opération 2. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les suites de choix possibles. Alors pour tout $\vec{f_0} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T))$:

$$Cl(\Omega) \cap A_{\vec{f_0}} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} Cl(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f_0}})$$

Ou plutôt, $Cl(\Omega) \cap A_{\vec{f_0}}$ est le filtre engendré par les $Cl(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f_0}})$, pour $C \in \mathcal{C}$.

Remarque: Ceci signifie grosso modo que $\mathrm{Cl}(\Omega)$ est la clôture de Ω sous les opérations 1, 2, et "prendre la clôture dans chaque façade". La difficulté de rédaction vient du fait que l'opération 2 n'est pas bien définie puisqu'elle dépend d'un choix.

Démonstration:

Pour montrer l'inclusion " $\supset$ ", il suffit de vérifier que pour tout demi-appartement D contenant Ω, il existe un choix $C \in \mathcal{C}$ tel que $D \supset \Omega^\infty(C)$. Ceci revient à vérifier que si D contient une partie Θ, alors il contient toute partie obtenue à partir de Θ par une opération 1, et que pour chaque couple $(b, \vec{f})$ vérifiant les conditions de 2, il existe un choix de $a \in pr_{\vec{g}}^{-1}(b)$ tel que la partie obtenue par l'opération 2 à partir de Θ est encore incluse dans D. Ces vérifications sont immédiates.

Pour montrer l'autre inclusion, il faut prouver que si D est un demi-appartement, dirigé par une racine $\alpha \in \phi^m(\vec{f_0})$, contenant un $\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f_0}}$, pour un $C \in \mathcal{C}$, alors $D \supset \Omega$. Soit donc D un tel demi-appartement, et supposons par l'absurde qu'il existe $\omega \in \Omega \setminus D$. Soit $\vec{g}$ la direction de la façade contenant ω. Soit $\vec{h} = pr_{\vec{f_0}}(\vec{g})$, en appliquant l'opération 1 à Ω avec le couple $(\omega, \vec{h})$, on voit que $pr_{\vec{h}}(\omega) \in \Omega^\infty(C)$. Ensuite, en appliquant l'opération 2 avec le couple $(pr_{\vec{h}}(\omega), \vec{f_0})$, on voit que $\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f_0}}$, et donc en particulier D, contient un cône de la forme $a + \vec{h}$. Ceci entraine que $\alpha(\vec{h}) \geq 0$, d'où $\alpha(\vec{g}) \geq 0$. D'autre part, $\alpha(\vec{g}) \leq 0$ sans quoi on aurait $\omega \in A_{\vec{g}} \subset D$. Ainsi, $\alpha(\vec{g}) = 0$: $\vec{g}$, $\vec{f_0}$ et donc aussi $\vec{h}$ sont dans $\ker(\alpha)$. Donc $\alpha(\omega) = \alpha(pr_{\vec{h}}(\omega)) = \alpha(a)$. Mais ceci contredit le fait que $\omega \notin D$ alors que $a \in D$. □

Corollaire 11.1.6. *Soient $\vec{f}, \vec{g}$ deux facettes incluses dans $\overrightarrow{Cl(\Omega)}$, telles que $\vec{f} \subset \mathrm{Vect}(\vec{g})$. On note $\Omega_{\vec{g}} = Cl(\Omega) \cap A_{\vec{g}}$, $\Omega_{\vec{f}} = Cl(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$. Alors $\Omega_{\vec{g}} = pr_{\vec{g}}(\Omega_{\vec{f}})$.*

Pour utiliser le résultat de la proposition 11.1.5 lorsqu'on ne connait pas précisément les directions des façades rencontrées par $\mathrm{Cl}(\Omega)$, on pourra utiliser le lemme suivant :

Lemme 11.1.7. *On se place à nouveau dans les conditions de la proposition 11.1.5. On suppose en outre que $\vec{f_0} \subset Cl(\vec{\Omega})$. Alors le résultat de la proposition 11.1.5 est encore valable si on définit les $\Omega^\infty(C)$ de la même manière, mais en n'effectuant les opérations 1 et 2 que lorsque les facettes $\vec{f}$ ou $\vec{g}$ concernées sont dans $Cl(\vec{\Omega})$.*

Preuve du lemme:

Les ensembles $\Omega^\infty(C)$ obtenus ici sont plus petits que ceux obtenus en 11.1.5, donc l'inclusion $\mathrm{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f_0}} \supset \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{Cl}\left(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f_0}}\right)$ est encore vraie.

Pour l'inclusion réciproque, la preuve de 11.1.5 est encore vraie puisqu'elle ne passe que par des facettes $\vec{g} \subset \vec{\Omega}$ et $\vec{h} = pr_{\vec{f_0}}(\vec{g}) \subset \mathrm{Cl}(\vec{\Omega})$. □

11.1.4 Facettes

Définition 11.1.8. *Soit $x \in A$, soit $\vec{f}$ la direction de la façade contenant x. On note $\vec{A}_x$ l'espace vectoriel $\vec{A}_{\vec{f}}$, muni des directions des murs contenant x. C'est donc un complexe de Coxeter, a priori non essentiel, de groupe $W(\vec{A}_x) = \left\{\vec{w} \in W(\vec{A}) \mid w.x = x\right\} \subset \mathrm{Fix}_{W(\vec{A})}(\vec{f})$. On y pense comme à l'espace tangent de A en x.*

Soit $x \in A(T)$, soit $A(T)_{\vec{f}}$ la façade contenant x. Soit $\vec{F} \subset \overrightarrow{A(T)_{\vec{f}}}$ une facette de $\vec{A}_x$. On note $F(x, \vec{F}) = \mathcal{G}erm_x(x + \vec{F})$ le filtre engendré par les parties closes de $A(T)$ contenant un voisinage de x dans $x + \vec{F}$ (pour la topologie induite). Insistons sur le fait que $F(x, \vec{F})$ est engendré uniquement par des parties closes.
L'ensemble de ces filtres est l'ensemble des facettes de $A(T)$. Si $F = F(x, \vec{F})$ est une facette de $A(T)$, la facette vectorielle $\vec{F}$ est uniquement déterminée par F, c'est la direction de F. Le point x par contre n'est uniquement déterminé que lorsque Λ est non discret ou que x est un sommet de A.

Dans le cas où Λ est discret, et où $\phi(T)$ est fini, les facettes sont en fait les filtres associés à des ensembles, et ces ensembles sont les facettes affines fermées habituelles.

Remarque: Cette définition est identique à celle de [Rou06] pour une facette sphérique, bien que non présentée de la même manière. Elle diffère cependant de celle de [GR08] pour une facette de $\mathring{A}$.

11.1.5 Action de N

Le normalisateur N du tore T agit sur l'appartement vectoriel $\vec{A}$, et même sur l'espace $\vec{V}$. On notera $\vec{\nu} : N \to W(\vec{A}) = Gl(\vec{V})$ cette action. On va définir, suivant l'exemple de [BT72], une action affine ν de N sur $\mathring{A}$, qui s'étendra à A, dont la partie vectorielle sera $\vec{\nu}$, et telle que l'élément $n(u)$, pour $u \in U_\alpha$, $\alpha \in \phi$ agira par réflexion selon le mur $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$. Remarquons que puisque le tore T fixe $\vec{V}$, il devra agir sur A par translation.

Proposition 11.1.9. *Pour tout $t \in T$, il existe un unique vecteur $\vec{v}_t \in \vec{V}$ tel que pour tout $\alpha \in \phi$, pour tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$,*

$$\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(tut^{-1})) = \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_t \ .$$

Ce vecteur est caractérisé par les égalités $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(tut^{-1})$, pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$.
L'application qui à t associe la translation de vecteur $\vec{v}_t$ est une action de T sur $Y(T)$.

Démonstration:
On commence par prouver l'unicité. Si $\vec{v}_t$ est un vecteur convenable, alors pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_t &= \{a \in A \mid \alpha(a) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} + \vec{v}_t \\
&= \{a + \vec{v}_t \in A \mid \alpha(a) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\
&= \{a \in A \mid \alpha(a - \vec{v}_t) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\
&= \{a \in A \mid \alpha(a) - \alpha(\vec{v}_t) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} = \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u) - \alpha(\vec{v}_t)) \ .
\end{aligned}$$

On en déduit $\varphi_\alpha(tut^{-1}) = \varphi_\alpha(u) - \alpha(\vec{v}_t)$ ou encore $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(tut^{-1})$. Comme ϕ est une famille génératrice de $\vec{V}^*$, ces conditions pour tous les $\alpha \in \phi$ forcent l'unicité de $\vec{v}_t$.

Passons à l'existence. D'après le calcul précédent, la condition $D(\alpha, \varphi_\alpha(tut^{-1})) = D(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_t$ équivaut à $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(tut^{-1})$. Soit Π un système de racines simples dans ϕ, il s'agit donc d'une base de $\vec{V}^*$. Pour chaque $\alpha \in \phi$, on choisit un $u_\alpha \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Il existe alors un unique $\vec{v}_t \in \vec{V}$ tel que $\forall \alpha \in \Pi$, $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u_\alpha) - \varphi_\alpha(tu_\alpha t^{-1})$. D'après la condition (V2.2) des valuations de données radicielles, la quantité $\varphi_\alpha(u_\alpha) - \varphi_\alpha(tu_\alpha t^{-1})$ est indépendante du choix de u_α, donc l'égalité précédent reste vraie pour tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Il reste à montrer que l'ensemble des racines vérifiant cette propriété est stable par n'importe quelle réflexion r_β, $\beta \in \Pi$.

C'est une conséquence de (V2.1). Soit $\alpha \in \phi$ une racine vérifiant $\forall u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u_\alpha) - \varphi(tu_\alpha t^{-1})$. Soit β une racine simple. Alors :

$$\begin{aligned} r_\beta.\alpha(\vec{v}_t) &= \alpha(\vec{v}_t) - \langle \beta, \alpha \rangle \beta(\vec{v}_t) \\ &= \varphi_\alpha(u_\alpha) - \varphi_\alpha(tu_\alpha t^{-1}) - \langle \beta, \alpha \rangle \left(\varphi_\beta(u_\beta) - \varphi_\beta(tu_\beta t^{-1}) \right) \\ &= \left(\varphi_\alpha(u_\alpha) - \langle \beta, \alpha \rangle \varphi_\beta(u_\beta) \right) - \left(\varphi_\alpha(tu_\alpha t^{-1}) - \langle \beta, \alpha \rangle \varphi_\beta(tu_\beta t^{-1}) \right) \end{aligned}$$

Mais par (V2.1), le premier terme est $\varphi_{r_\beta\alpha}(n(u_\beta).u_\alpha.n(u_\beta)^{-1})$ et le second est $\varphi_{r_\beta\alpha}(n(tu_\beta t^{-1}).tu_\alpha t^{-1}.n(tu_\beta t^{-1})^{-1}))$. Comme $n(tu_\beta t^{-1}) = tn(u_\beta)t^{-1}$, ce dernier vaut $\varphi_{r_\beta\alpha}(tn(u_\beta).u_\alpha.n(u_\beta)t^{-1})$, d'où le résultat.

Enfin, si t_1 et t_2 sont deux éléments de T, alors pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, on a $\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(t_1t_2ut_2^{-1}t_1^{-1})) = \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_{t_1t_2}$ et d'autre part $\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(t_1t_2ut_2^{-1}t_1^{-1})) = \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_{t_2} + \vec{v}_{t_1}$. Par unicité des $\vec{v}_t$, on obtient $\vec{v}_{t_1.t_2} = \vec{v}_{t_1} + \vec{v}_{t_2}$: on a bien une action de groupe. □

Proposition 11.1.10. *Il existe une unique action ν de N sur A par automorphismes d'appartement telle que pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $\nu(n(u))$ est la réflexion orthogonale selon le mur $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$ et pour tout $t \in T$, $\nu(t)$ est la translation de vecteur $\vec{v}_t$.*

Pour tout $n \in N$, on a $\overrightarrow{\nu(n)} = \vec{\nu}(n)$, autrement dit la partie vectorielle de cette action est $\vec{\nu}$. Enfin, cette action échange les demi-appartements de A selon la formule :

$$\forall n \in N,\ \alpha \in \phi \text{ et } u \in U_\alpha \setminus \{e\},\ \ \nu(n).\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) = \mathcal{D}(\vec{\nu}(n).\alpha,\ \varphi_{\vec{\nu}(n).\alpha}(nun^{-1}))\ .$$

Démonstration:

Rappelons qu'on a fixé un point $o \in \mathring{A}$ tel que pour tout $\alpha \in \phi$, le mur $M(\alpha, 0)$ passe par o. Notons $N_o = \langle \{n(u) \mid \alpha \in \phi,\ u \in U_\alpha \setminus \{e\} \text{ et } \varphi_\alpha(u) = 0\} \rangle$. On commence par définir ν sur N_o en posant que $\forall n \in N_o$, $\nu(n)$ est l'automorphisme affine de $Y(T)$ qui fixe o et dont la partie vectorielle est $\vec{\nu}(n)$.

On veut ensuite définir ν sur T en posant pour $t \in T$ que $\nu(t)$ soit la translation de vecteur $\vec{v}_t$, il faut vérifier que les deux définitions sont compatibles sur $N_o \cap T$. Déjà, $\vec{\nu}(T) = \{id_{\vec{Y}}\}$, donc $\nu(N_o \cap T) = \{id_{Y(T)}\}$. Il reste donc à prouver que pour tout $t \in N_o \cap T$, $\vec{v}_t = \vec{0}$. Fixons un tel t, au vu de la proposition précédente, il suffit de prouver que pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $\varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(tut^{-1})$. Fixons de tels α et u. Il découle de (V2.1) que pour tout $\beta \in \phi$ et $v \in U_\beta$ tel que $\varphi_\beta(v) = 0$, $\varphi_{r_\beta.\alpha}(n(v).u.n(v)^{-1}) = \varphi_\alpha(u)$. Ceci entraine que pour tout $n \in N_o$, $\varphi_{n.\alpha}(nun^{-1}) = \varphi_\alpha(u)$, et en particulier, $\varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(tut^{-1})$.

On a ainsi défini ν sur $N_o \cup T$. Montrons que $N = N_o.T$. Pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, il existe $u_o \in U_\alpha \setminus \{e\}$ tel que $\varphi_\alpha(u_o) = 0$. Donc $n(u)n(u_o) \in T$ et $n(u_o) \in N_o$, on prouve ainsi que $N = \langle N_o, T \rangle$. Mais comme N_o normalise T, on obtient bien $N = N_o.T$.

On définit alors ν sur N par $\nu(n_ot) = \nu(n_o) \circ \nu(t)$, pour tous $n_o \in N_o$ et $t \in T$. Ceci est bien défini car ν est trivial sur $N_o \cap T$. Comme $\vec{\nu}(T) = \{id\}$, il est évident que la partie vectorielle de $\nu(n)$ est $\vec{\nu}(n)$ pour tout $n \in N$. Montrons que ν est une action de groupe. Soient $n_1, n_2 \in N_o$ et $t_1, t_2 \in T$, par définition on a $\nu(n_1t_1n_2t_2) = \nu(n_1n_2n_2^{-1}t_1n_2t_2) = \nu(n_1)\nu(n_2)\nu(n_2^{-1}t_1n_2)\nu(t_2)$. Ceci devrait valoir $\nu(n_1)\nu(t_1)\nu(n_2)\nu(t_2)$, nous devons donc prouver que $\nu(n_2)\nu(n_2^{-1}t_1n_2) = \nu(t_1)\nu(n_2)$ autrement dit que $\vec{\nu}(n_2^{-1}).\vec{v}_{t_1} = \vec{v}_{n_2^{-1}t_1n_2}$. Il suffit de traiter le cas où $\vec{\nu}(n_2)$ est une réflexion : il existe alors $\beta \in \phi$ et $v \in U_\beta \setminus \{e\}$, avec $\varphi_\beta(v) = 0$ tel que $n_2 = n(v)$. Soit $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{v}_{n_2^{-1}t_1n_2}) &= \varphi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(n_2^{-1}t_1n_2.u.n_2^{-1}t_1^{-1}n_2) \\ &= \varphi_\alpha(u) - \varphi_{r_\beta\alpha}(t_1n_2.u.n_2^{-1}t_1^{-1}) - \langle \beta, \alpha \rangle \varphi_\beta(v) \\ &= \varphi_\alpha(u) + r_\beta\alpha(\vec{v}_{t_1}) - \varphi_{r_\beta\alpha}(n_2un_2^{-1}) - \langle \beta, \alpha \rangle \varphi_\beta(v) \\ &= \varphi_\alpha(u) + \alpha(r_\beta.\vec{v}_{t_1}) - \varphi_\alpha(u) + \langle \beta, \alpha \rangle \varphi_\beta(v) - \langle \beta, \alpha \rangle \varphi_\beta(v) \\ &= \alpha(r_\beta.\vec{v}_{t_1}) \\ &= \alpha(\vec{\nu}(n_2^{-1}).\vec{v}_{t_1}) \end{aligned}$$

Ceci, étant vrai quelque soit $\alpha \in \phi$, prouve bien que $\vec{\nu}(n_2^{-1}).\vec{v}_{t_1} = \vec{v}_{n_2^{-1}t_1n_2}$.

Comme la partie vectorielle de cette action est $\vec{\nu}$, qui préserve l'ensemble des facettes de $\vec{A}$, elle s'étend à une action sur A. Prouvons qu'elle stabilise l'ensemble des demi-appartements de $\mathring{A}$ selon la formule annoncée. Soit $\alpha \in \phi$, $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. La relation $\nu(n).\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) = \mathcal{D}(\vec{\nu}(n).\alpha, \varphi_{\vec{\nu}(n).\alpha}(nun^{-1}))$ est déjà vraie pour $n \in T$, par la définition des $\vec{v}_t$. Soit $n \in N_0$, on a déjà vu qu'alors $\varphi_{\vec{\nu}(n).\alpha}(nun^{-1}) = \varphi_\alpha(u)$. Il ne reste plus qu'à calculer :

$$\begin{aligned}
\nu(n).D(\alpha,\ \varphi_\alpha(u)) &= \{\nu(n).(o+\vec{v}) \in A \mid \alpha(o+\vec{v}) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\
&= \left\{o+\vec{v} \in A \mid \alpha\left(\nu(n)^{-1}(o+\vec{v})\right) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\right\} \\
&= \left\{o+\vec{v} \in A \mid \alpha\left(o+\vec{\nu}(n)^{-1}.(\vec{v})\right) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\right\} \\
&= \{o+\vec{v} \in A \mid \vec{\nu}(n).\alpha(o+\vec{v}) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\
&= D\left(\vec{\nu}(n).\alpha,\ \varphi_\alpha(u)\right) \\
&= D\left(\vec{\nu}(n).\alpha,\ \varphi_{\vec{\nu}(n).\alpha}(nun^{-1})\right)
\end{aligned}$$

A présent, soit $\alpha \in \phi$, $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, montrons que $\nu(n(u))$ est la réflexion selon le mur $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$. On sait déjà que la partie vectorielle de $\nu(n(u))$ est une réflexion selon le mur $\ker(\alpha)$, donc $\nu(n(u))$ est la composée d'une réflexion et d'une translation de vecteur $\vec{w} \in \ker(\alpha)$.

Alors $\nu(n(u))^2$ est la translation de vecteur $2\vec{w} = \vec{v}_{n(u)^2}$. Mais pour tout $\beta \in \phi$, $v \in U_\beta$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta(n(u)^2.v.n(u)^{-2}) &= \varphi_{r_\alpha\beta}(n(u).v.n(u)^{-1}) - \langle\, \alpha, \beta \,\rangle\, \varphi_\alpha(u) \\
&= \varphi_\beta(v) - \langle\, \alpha, r_\alpha\beta \,\rangle\, \varphi_\alpha(u) - \langle\, \alpha, \beta \,\rangle\, \varphi_\alpha(u) \\
&= \varphi_\beta(v)
\end{aligned}$$

car $\langle\, \alpha, r_\alpha\beta \,\rangle = \langle\, r_\alpha\alpha, \beta \,\rangle = -\langle\, \alpha, \beta \,\rangle$. Ceci prouve que $\vec{w} = 0$, donc $\nu(n(u))$ est une réflexion.

Maintenant, par le résultat précédent, $\nu(n).M(\alpha, \varphi_\alpha(u)) = M(-\alpha, \varphi_{-\alpha}(n(u).u.n(u)^{-1})$. Mais par (V2.1),

$$\varphi_{-\alpha}(n(u).u.n(u)^{-1}) = \varphi_\alpha(u) - \langle\, \alpha, \alpha \,\rangle\, \varphi_\alpha(u) = -\varphi_\alpha(u)\ .$$

Donc $\nu(n).M(\alpha, \varphi_\alpha(u)) = M(-\alpha, -\varphi_\alpha(u)) = M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$. Sachant que l'hyperplan fixe de $\nu(n(u))$ est parallèle à $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$, ceci entraine que c'est précisément $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$, et donc que $\nu(n(u))$ est la réflexion annoncée.

L'unicité de ν est claire car N est engendré par T et les $n(u)$, pour $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $\alpha \in \phi$. □

La définition de cette action de N permet de prouver la condition "(V5)" présente dans la définition de la valuation d'une donnée radicielle pour [BT72] ou [Rou06] :

Corollaire 11.1.11. *Soit $\alpha \in \phi$, $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$ et $u', u'' \in U_{-\alpha}$ tels que $n(u) = u'uu''$. Alors $\varphi_\alpha(u) = -\varphi_{-\alpha}(u') = -\varphi_{-\alpha}(u'')$.*

Lorsque ϕ est un système de racines fini, la définition de valuation d'une donnée radicielle donnée en 10.2 équivaut à celle de [BT72] 6.2.1 .

Démonstration: Il est classique que $n(u) = n(u') = n(u'')$. Rappelons tout de même la preuve : on a $u'uu'' = uu''n(u)^{-1}u'n(u)$. Mais $n(u)^{-1}u'n(u) \in U_\alpha$, d'où le résultat. Or $n(u)$, $n(u')$, $n(u'')$ agissent respectivement par les réflexions selon $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$, $M(-\alpha, \varphi_\alpha(u'))$ et $M(-\alpha, \varphi_\alpha(u''))$. L'égalité de ces trois murs entraine bien les égalités annoncées.

Comme la condition (V2) de 10.2 est clairement plus forte que celle de [BT72], et comme les autres conditions ((V0), (V1), (V3), (V4)) sont inchangée, le point précédent prouve qu'une valuation au sens de 10.2 est aussi une valuation pour [BT72]. Nous avons vu l'autre implication en 10.2.3. □

En conséquence de ce corollaire, pour tout facette sphérique $\vec{f}$, la famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})}$ est une valuation au sens de [BT72] de la donnée radicielle $(M_{\vec{A}}(\vec{f}), (U_\alpha)_{\alpha_i n\phi^m(\vec{f})})$. La donnée radicielle valuée $(M_{\vec{A}}(\vec{f}), (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha_i n\phi^m(\vec{f})})$ sera notée $\mathcal{D}_{\vec{f}}$.

Définition 11.1.12. *Le fixateur dans N d'un point ou d'une partie a de A ou de $\vec{A}$ sera noté $N(a)$ (et donc $N(T)(a)$ s'il faut préciser le tore). Le fixateur de A sera noté $H(T)$, ou juste H s'il est inutile de préciser le tore.*

Dans la suite, on omettra souvent de noter ν et $\vec{\nu}$ pour l'action d'un élément de N sur un point de A ou de $\vec{A}$.

Exemple 11.1.13. Remarquons tout de suite que pour une partie $\Omega \subset A$, $N(\Omega) \not\subset N(\mathrm{Cl}(\Omega))$. Il suffit de choisir deux chambres $\vec{c}$ et $\vec{d}$ de $\vec{A}(T)$, séparées par une cloison $\vec{m}$, et de trouver $t \in T$ qui induit une translation dont la direction n'est pas incluse dans $\vec{m}$. Alors t fixe $A_{\vec{c}} \cup A_{\vec{d}}$ mais pas $A_{\vec{m}}$, alors que $\mathrm{Cl}(A_{\vec{c}} \cup A_{\vec{d}}) = A_{\vec{c}} \cup A_{\vec{d}} \cup A_{\vec{m}}$.

Il est par contre clair d'après 10.1.4 qu'un $n \in N(\Omega)$ agit comme une translation sur chaque sous-espace $\left\langle \omega, \mathrm{Vect}(\mathrm{Cl}(\vec{\Omega})) \right\rangle_A$. La proposition suivante améliore un peu ce résultat, en permettant de remplacer $\mathrm{Cl}(\vec{\Omega})$ par $\overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)}$. Notons que les différentes translations induites sur chaque $\omega + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)})$ ne sont a priori pas selon le même vecteur.

Proposition 11.1.14. *Soit Ω une partie de A, alors $N(\Omega) \subset N(\overrightarrow{Cl(\Omega)})$.*

Démonstration:
Soit $n \in N(\Omega)$, soit $\vec{E} = \mathrm{Fix}_{\vec{A}}(n)$, c'est une partie close de $\vec{A}$ contenant $\mathrm{Cl}(\vec{\Omega})$. Supposons $\vec{E} \neq \overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)}$. Alors il existe $\alpha \in \phi$ tel que $\vec{E} \subset \vec{D}(\alpha)$ et un point $a \in \mathrm{Cl}(\Omega)$ tel que $\alpha(a) = -\infty$. Ce point a n'est donc dans aucun demi-appartement dirigé par α, et pourtant il est dans $\mathrm{Cl}(\Omega)$: il n'existe donc pas de demi-appartement dirigé par α qui contienne Ω. Il existe donc $(\omega) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ tel que $\alpha(\omega_i) \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}$ et $\lim_{i\to\infty} \alpha(\omega_i) = -\infty$.
L'ensemble $\vec{E} \cap \ker \alpha \subset \vec{A}$ est clos et non vide puisqu'il contient les directions des façades contenant les ω_n. Soit $\vec{f}$ une facette maximale de $\vec{E} \cap \ker \alpha$, alors tous les ω_n se projettent sur $A_{\vec{f}}$, et ces projetés sont fixes par n. Soit $(\omega'_n)_n \in (A_{\vec{f}})^{\mathbb{N}}$ la suite ainsi obtenue. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha(\overrightarrow{\omega'_0\omega'_n}) < 0$. Alors n fixe la droite contenant $\{\omega'_0, \omega'_n\}$, donc sa direction $\overrightarrow{\omega'_0\omega'_n}$, puis la facette $\vec{g}$ contenant cette direction. Donc $\vec{g} \subset \vec{E}$, mais $\alpha(\vec{g}) = \mathbb{R}^{-*}$ donc $\vec{g} \not\subset \vec{D}(\alpha)$, ce qui est impossible. Donc $\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{Cl}(\Omega)}$. □

Remarque: La définition des façades $A_{\vec{f}} \simeq A/\mathrm{Vect}(\vec{f})$ revient à essentialiser $\vec{A}$ pour le groupe de Coxeter $\mathrm{Fix}_{W(\vec{A})}(\vec{f})$. Cette construction est semblable à la compactification polyhédrale, ou de Satake, d'un appartement d'un immeuble affine. Elle permet d'avoir sur A une topologie séparée, et telle que l'adhérence d'une façade sphérique est compacte. Elle a cependant le défaut de perdre une partie de l'action du tore. En effet, si t induit une translation de direction incluse dans $\mathrm{Vect}(\vec{f})$ sur $Y(T)$, alors t agit trivialement sur $A_{\vec{f}}$. Dans la première réalisation d'un appartement microaffine dans [Rou06] par exemple, les façades sont toutes isomorphes comme espaces affines à $Y(T)$, ce qui évite ce souci.

11.1.6 Opposition

Définition 11.1.15. *Si $a = [x + \vec{f}] \in A(T)$, le point opposé à a dans $A(T)$ est $op_{A(T)}(a) = [x - \vec{f}]$.*

L'application $op_{A(T)}$ est une involution qui permute les façades de $A(T)$, préserve l'ensemble des murs et commute à l'action de $W(T)$. Plus généralement, elle commute à tout isomorphisme d'appartements. Cependant, ce n'est pas un automorphisme d'appartement car l'action sur le bord d'une façade n'est pas induite par l'action sur cette façade ($\mathrm{op}_{A(T)}$ n'est pas continue). En fait, $op_{A(T)}$ fixe la façade principale, et le seul automorphisme d'appartement de $A(T)$ fixant la façade principale est $id_{A(T)}$.

11.2 Familles de sous-groupes parahoriques

Maintenant que nous disposons des appartements $A(T)$, il faut, pour définir un immeuble selon la méthode usuelle, déterminer quels seront les fixateurs des points de $A(T)$. Ces fixateurs seront appelés des sous-groupes parahoriques de G.

Dans cette sous-section, on étudie quelles sont en général les propriétés qu'on peut espérer d'une famille de sous-groupes parahoriques. On étudie également l'exemple le plus simple de telle famille : la "famille minimale de parahoriques".

On fixe un tore maximal T, et on note $A = A(T)$, $N = N(T)$.

11.2.1 Définition

Définition 11.2.1. *Soit $Q = (Q(a))_{a\in A}$ une famille de sous-groupes de G. Si Ω est une partie de A, on note $Q(\Omega) = \bigcap_{\omega\in\Omega} Q(\omega)$. Si Ω est un filtre de A, on note $Q(\Omega) = \bigcup_{\Omega'\in\Omega} Q(\Omega')$.*

On dit que Q est une famille de sous-groupes parahoriques pour $\mathcal{D}$ si elle vérifie :
- *(para 0.1) : Si $a \in A_{\vec{f}}$, alors $U(\vec{f}) \subset Q(a) \subset P(\vec{f})$. (compatibilité avec l'immeuble vectoriel)*
- *(para 0.2) : $\forall a \in A(T)$, $N(T)_a \subset Q(a)$. (compatibilité de l'action de $N(T)$)*
- *(para 0.3) : $\forall a \in A(T)$, $\forall(\alpha,\lambda) \in \phi(T)\times\mathbb{R}$ tel que $a \in \mathcal{D}(\alpha,\lambda)$, $U_{\alpha,\lambda} \subset Q(a)$. (points fixes des groupes radiciels)*
- *(para 0.4) : $\forall n \in N(T)$, $\forall a \in A(T)$, $nQ(a)n^{-1} = Q(na)$.*

Si Q_1 et Q_2 sont deux familles de parahoriques, on dira que Q_2 contient Q_1 si $\forall a \in A$, $Q_1(a) \subset Q_2(a)$.
On note $\mathcal{P} = (P(a))_{a\in A}$ la famille de sous-groupes parahoriques de G définie par $\forall a \in A$, $P(a) = \left\langle U(\vec{f}_a), N(a), G(a)\right\rangle$.

On définit encore les condition suivantes sur Q, certaines dépendent d'une facette $\vec{g} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T))$, d'une partie $\Omega \subset A$, d'un point $a \in A$ ou d'une chambre $\vec{C}$ de $\vec{f}_a^* \cap \vec{A}$:

- *(para inj) : $\forall a \in A(T)$, $N(T)_a = Q(a) \cap N(T)$. (inclusion des appartements dans l'immeuble)*
- *(para sph) : Pour tout $a \in A_{sph}$, $Q(a) = P(a)$. (valeur sur les points sphériques)*
- *(para 2) (lien entre une façade et son bord) qui s'énonce en plusieurs variantes :*
  - *(para 2.1)($\vec{g}$) : $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\overline{\vec{g}})$, $\forall a \in A_{\vec{f}}$, $Q(a) \cap P(\vec{g}) = Q(\{a, pr_{\vec{g}}(a)\})$.*
  - *(para 2.2)($\vec{g}$) : $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\overline{\vec{g}})$, $\forall a \in A_{\vec{f}}$, $N(T)Q(a) \cap N(T)P(\vec{g}) = N(T)Q(\{a, pr_{\vec{g}}(a)\})$.*
  - *(para 2.1^+)($\vec{g}$) : $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\overline{\vec{g}})$, $\forall a \in A_{\vec{f}}$, $Q(a) \cap P(\vec{g}) = Q(\overline{a+\vec{g}})$.*
- *(para dec)($\vec{C}$, a) : $Q(a) = (Q(a) \cap U(\vec{C}))\ .\ (Q(a) \cap U(-\vec{C}))\ .\ N(a)$. (décomposition de $Q(a)$)*
- *(para 6)(Ω) : $Q(\Omega) = N_\Omega.Q(Cl(\Omega))$. (intersections d'appartements)*
- *(para 5)(Ω) : $\bigcap_{a\in\Omega}(N(T).Q(a)) = N(T).Q(\Omega)$. (isomorphismes entre appartements)*

Lorsque Q vérifie (para 2.1)($\vec{f}$) (ou une de ses variantes) pour toute facette $\vec{f}$, on dira juste que Q vérifie (para 2.1). Lorsqu'elle vérifie (para 2.1)($\vec{f}$) pour toute facette sphérique $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$, on dira qu'elle vérifie (para 2.1)(sph), lorsqu'elle vérifie (para 2.1)($\vec{m}$) pour toute cloison $\vec{m}$ de $\vec{A}$, on dira qu'elle vérifie (para 2.1)(cloison), etc...

Une famille de parahoriques vérifiant (para sph), (para inj) et (para 2.2)(sph) sera appelée une bonne famille de parahoriques.

Remarques:
- Ici, pour une partie Ω de A, $Q(\Omega)$ désigne par définition $\bigcap_{\omega\in\Omega} Q(\omega)$. Dans [GR08] ou [Rou10], on définit directement les valeurs d'une famille de parahoriques sur chaque partie Ω de A, et on prouve ensuite, au moins dans les bons cas, la relation $Q(\Omega) = \bigcap_{\omega\in\Omega} Q(\omega)$.

– On prouvera en 11.7.1 qu'une bonne famille de parahoriques vérifie automatiquement (para 2.1)(sph).

– Il est immédiat que pour toute facette $\vec{g}$, la conjonction de (para 2.1^+)($\vec{g}$) et de (para 2.2)($\vec{g}$) équivaut à :

$$(\text{para } 2.2^+)(\vec{g}) : \ \forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\overline{\vec{g}}),\ \forall a \in A_{\vec{f}}, \quad N(T)Q(a) \cap N(T)P(\vec{g}) = N(T)Q(\overline{a+\vec{g}}) .$$

– Pour toute famille de parahoriques Q, et pour toute partie Ω de A, $G(\Omega) \subset Q(\Omega)$, par (para 0.3). De même pour toute facette $\vec{f}$, $G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)$ est en quelque sorte le plus petit groupe évidemment inclus dans $Q(\Omega) \cap M(\vec{f})$.

Proposition 11.2.2. *La famille $\mathcal{P}$ est la plus petite famille de parahoriques.*

Démonstration: Rappelons que $G(a) = \langle \{U_{\alpha,k} \mid a \in \mathcal{D}(\alpha, k)\} \rangle$. Par (para 0.1), (para 0.2) et (para 0.3), toute famille de parahorique doit être supérieure à $\mathcal{P}$. Mais il est clair que cette dernière vérifie (para 0). □

Toute famille de parahoriques permettra de définir une masure bordée. Le but est bien sûr de trouver une famille de parahoriques vérifiant un maximum de conditions (para x), ce qui mènera à une masure possédant un maximum de propriétés semblables à celles d'un immeuble.

Nous verrons que, au moins dans le cas Kac-Moody, la famille P est une bonne famille de parahorique, et nous étudierons les propriétés de la masure bordée que définit une telle famille.

Nous prouverons au 11.8 l'existence d'une bonne famille de parahoriques maximale $\overline{P}$, de sorte que toute bonne famille de parahoriques sera à chercher entre P et $\overline{P}$.

11.2.2 La famille minimale de parahoriques

Dans ce paragraphe, on étudie le premier exemple de famille de parahoriques disponible : la famille minimale $\mathcal{P}$.

Lorsque $\vec{f}$ est sphérique, la théorie de Bruhat-Tits décrit bien les facteurs $M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(a)$, permettant de prouver la proposition suivante (qui est la raison d'être de la condition (para *sph*)) :

Proposition 11.2.3. *Soit $\vec{f}$ une facette sphérique, et $\Omega \subset A_{\vec{f}}$.*

1. *$P(\Omega) \cap M_{\vec{A}}(\vec{f})$ est le sous-groupe parahorique de $M_{\vec{A}}(\vec{f})$ associé à la partie Ω de l'appartement $A_{\vec{f}}$ pour la donnée radicielle valuée finie $\mathcal{D}_{\vec{f}} := (M_{\vec{A}}(\vec{f}), (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})})$, au sens de [BT72].*
2. *$P(\Omega) = U(\vec{f}) \rtimes \left(M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(\Omega)\right)$ et $M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(\Omega) = N(\Omega) \,.\, G\left(\phi^m(\vec{f}), \Omega\right)$.*
3. *$P(\Omega) = N(\Omega).P(Cl_{A_{\vec{f}}}(\Omega))$, autrement dit, $\mathcal{P}$ vérifie (para 6) sur les parties de $A_{\vec{f}}$.*
4. *$\bigcap_{\omega \in \Omega} N.P(\omega) = N.P(\Omega)$, autrement dit, $\mathcal{P}$ vérifie (para 5) sur les parties de $A_{\vec{f}}$.*
5. *Pour tout $a \in A_{\vec{f}}$, et $\vec{g} \in \vec{f}^* \cap \vec{A}$, $P(a) \cap P(\vec{g}) = P(\overline{a+\vec{g}})$.*
6. *Pour toute chambre $\vec{C}$ de $\vec{f}^*$, $P(\Omega) = (P(\Omega) \cap U(\vec{C}))\ .\ (P(\Omega) \cap U(-\vec{C}))\ .\ N(\Omega)$, autrement dit, P vérifie (para dec)(Ω).*

Démonstration:

1. Pour tout $a \in \Omega$, $P(a) = U(\vec{f}) \rtimes \left\langle N(a), \left\{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\right\}\right\rangle$, d'où $P(a) \cap M_{\vec{A}}(\vec{f}) = \left\langle N(a), \left\{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\right\}\right\rangle$. Ceci est précisément la définition du sous groupe parahorique de $M_{\vec{A}}(\vec{f})$ au point a. Ensuite, $P(\Omega) \cap M_{\vec{A}}(\vec{f})$ est l'intersection de tous ces groupes pour $a \in \Omega$, c'est bien le sous-groupe parahorique de $M_{\vec{A}}(\vec{f})$ pour la partie Ω.
2. Par la décomposition de Lévi de $P(\vec{f})$, on a $P(\Omega) \subset P(\vec{f}) = U(\vec{f}) \rtimes M_{\vec{A}}(\vec{f})$. Mais $U(\vec{f}) \subset P(\Omega)$ d'où $P(\Omega) = U(\vec{f}) \rtimes (M(\vec{f}) \cap P(\Omega))$. Et par [BT72], $M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(\Omega) = N(\Omega).G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)$.
3. Découle immédiatement de 1, car $G(\phi^m(\vec{f}), \Omega) = G(\phi^m(\vec{f}), \mathrm{Cl}_{A_{\vec{f}}}(\Omega))$.

4. On calcule :

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\omega\in\Omega} N.P(\omega) &= N.\bigcap_{\omega\in\Omega} N(\vec{f}).P(\omega)\\
&= N.\bigcap_{\omega\in\Omega} U(\vec{f})\,.\,N(\vec{f})\,.\,\left\langle \left\{U_\alpha(a)\mid \alpha\in\phi^m(\vec{f})\right\}\right\rangle\\
&= N.U(\vec{f})\,.\,\bigcap_{\omega\in\Omega}\,.\,N(\vec{f})\,.\,\left(M(\vec{f})\cap P(a)\right)\\
&= N.U(\vec{f})\,.\,N(\vec{f}).\left(M(\vec{f})\cap P(\Omega)\right)\\
&= N.P(\Omega)
\end{aligned}$$

La première égalité est vraie car pour tout $\omega\in\Omega$, $P(\omega)\subset P(\vec{f})$. La troisième vient de l'unicité de la décomposition de Lévi de $P(\vec{f})$, et la quatrième est le résultat classique dans les immeubles, voir [BT72].

5. Soit $g\in P(a)\cap P(\vec{g}) = U(\vec{f})\,.\,(M(\vec{f})\cap P(a))\cap P(\vec{g})$. Pour tout $\vec{h}\in\vec{f^*}\cap\vec{A}$, $U(\vec{f})\subset P(A_{\vec{h}})$. En particulier, $U(\vec{f})\subset P(\overline{a+\vec{g}})$, on peut donc supposer $g\in M(\vec{f})\cap P(a)\cap P(\vec{g})$. Le résultat est alors classique.

6. Le groupe $M(\vec{f})\cap P(\Omega)$ admet par [BT72] une telle décomposition, elle s'écrit ici :

$$M(\vec{f})\cap P(\Omega) = G(\phi(\vec{C})\cap\phi^m(\vec{f}),\Omega)\,.\,G(\phi(\vec{C'})\cap\phi^m(\vec{f}),\Omega)\,.\,N(\Omega)$$

, où $\vec{C'}$ est la chambre opposée à $\vec{C}$ dans $\vec{f^*}$. Mais $\phi(\vec{C'})\cap\phi^m(\vec{f}) = \phi(-\vec{C})\cap\phi^m(\vec{f})$, d'où

$$M(\vec{f})\cap P(\Omega)\subset G(\phi(\vec{C}),\Omega)\,.\,G(\phi(-\vec{C}),\Omega)\,.\,N(\Omega)\subset(P(\Omega)\cap U(\vec{C}))\,.\,(P(\Omega)\cap U(-\vec{C}))\,.\,N(\Omega)\,.$$

Comme $U(\vec{f})\subset P(\Omega)\cap U(\vec{C})$ et $P(\Omega) = U(\vec{f}).(M(\vec{f})\cap P(\Omega)$, on arrive au résultat annoncé.

□

Corollaire 11.2.4. *Les résultats de la proposition précédente sont vrais pour n'importe quelle famille Q de parahoriques vérifiant* (*para sph*).

Dans le cas où $\mathcal{D}$ vient d'un groupe de Kac-Moody déployé, Guy Rousseau a prouvé en [Rou10] 4.6 que $\mathcal{P}$ vérifie (para *dec*). Pour le cas d'un groupe de Kac-Moody sur un $\mathbb{C}((t))$, c'est [GR08] 3.4.1.

Proposition 11.2.5. *Si $\mathcal{D}$ est la donnée radicielle valuée issue d'un groupe de Kac-Moody déployé G, alors la famille minimale de parahoriques attachée à $\mathcal{D}$ vérifie (para dec).*

□

Remarque: Si on retire la condition $\forall a\in A,\ U(\vec{f_a})\subset Q(a)$ dans (para 0), on obtient une famille minimale plus petite que $\mathcal{P}$. Il s'agit de P_0, avec $P_0(a) = \langle\, N(a), G(a)\,\rangle$. On peut étudier rapidement cette famille de sous-groupes de G.

Soit $a\in A$, et $\vec{f}$ la direction de la façade de a. Pour tout $\alpha\in\phi^u(\vec{f})$, on a $U_\alpha(a) = U_\alpha$, et pour $\alpha\in\phi\setminus\phi(\vec{f})$, $U_\alpha(a) = \{e\}$. Donc $G(a) = G(\phi(\vec{f}),a) = \left\langle \left\{U_\alpha(a)\mid\alpha\in\phi(\vec{f})\right\}\right\rangle$. Sachant que $P_0(a)\subset P(\vec{f}) = U(\vec{f})\rtimes M_{\vec{A}}(\vec{f})$, le groupe $\left\langle N(a), G(\phi^m(\vec{f}),a)\right\rangle = \left\langle N(a), \left\{U_\alpha(a)\mid\alpha\in\phi^m(\vec{f})\right\}\right\rangle$, qui est inclus dans $M_{\vec{A}}(\vec{f})$, normalise $U(\vec{f})\cap P_0(a)$, et on prouve :

$$P_0(a) = \left(U(\vec{f})\cap P_0(a)\right)\rtimes\left\langle N(a),\ G\left(\phi^m(\vec{f}),a\right)\right\rangle$$

Comme $N(a)$ normalise à la fois $U(\vec{f})\cap P_0(a)$ et $G\left(\phi^m(\vec{f}),a\right)$, on a aussi les décompositions :

$$\begin{aligned} P_0(a) &= \left(U(\vec{f}) \cap P_0(a)\right) \rtimes \left(N(a) \,.\, G\left(\phi^m(\vec{f}), a\right)\right) \\ &= N(a) \,.\, \left(U(\vec{f}) \cap P_0(a)\right) \,.\, G\left(\phi^m(\vec{f}), a\right) \end{aligned}$$

Le groupe $U(\vec{f}) \cap P(a)$ est le sous-groupe distingué de $P(a)$ engendré par $G(\phi^u(\vec{f}))$, et plus précisément le plus petit sous-groupe de $P(a)$ contenant $G(\phi^u(\vec{f}))$ et normalisé par $G\left(\phi^m(\vec{f}), a\right)$. Il peut être strictement inclus dans $U(\vec{f})$.

Lorsque Ω est une partie de $A_{\vec{f}}$, par l'unicité dans la décomposition de Lévi $P(\vec{f}) = U(\vec{f}) \rtimes M_{\vec{A}}(\vec{f})$, on obtient :

$$P_0(\Omega) = \left(U(\vec{f}) \cap P_0(\Omega)\right) \rtimes \left(M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P_0(\Omega)\right) .$$

Notons que la famille P_0 bénéficie d'une propriété de plus que P : si $\vec{f}$ est une facette sphérique et si $\Omega \subset A_{\vec{f}}$, alors tout $p \in P_0(\Omega)$ fixe une partie de A de la forme $\bigcup_{\omega \in \Omega_0} \overline{\omega_0 + \vec{f}}$, avec Ω_0 une partie de $\mathring{A}$ telle que $pr_{\vec{f}}(\Omega_0) = \Omega$.

11.2.3 La condition (fonc)

Si a est un sommet spécial, alors $N(a)$, et donc $Q(a)$ pour n'importe quelle famille Q de parahoriques, contient un système de représentants pour $W(\vec{A})$. Donc $N.Q(a) = T.Q(a)$, ceci est un bon point de départ pour prouver par exemple (para *inj*), (para 2.2), ou (para 2.2^+). On est donc souvent capable de prouver ces conditions pour des sommets spéciaux.

Pour passer à un point a plus général, l'idée retenue ici est de plonger l'appartement A pour la donnée radicielle valuée $\mathcal{D}$ dans un appartement A^Δ pour une donnée radicielle $\mathcal{D}^\Delta$ qui soit identique à A comme ensemble, mais muni de plus de murs, de sorte que a soit spécial dans A^Δ. Il s'agit donc de trouver une donnée radicielle valuée, sur le même système de racines que $\mathcal{D}$, mais dont l'image de la valuation soit plus grande. Dans le cas d'un groupe de Kac-Moody déployé, ceci revient juste à considérer une extension (ramifiée) du corps de base.

Ceci est axiomatisé par la condition "(fonc)" :

Définition 11.2.6. *La donnée radicielle valuée $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ vérifie la condition (fonc) si pour tout sous-groupe Δ de $\mathbb{R}$, il existe une donnée radicielle valuée notée $\mathcal{D}^\Delta = (G^\Delta, (U_\alpha^\Delta, \varphi_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \phi})$ telle que, avec les notations évidentes :*

1. *$G \subset G^\Delta$ et $T \subset T^\Delta$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \phi$, $U_\alpha = U_\alpha^\Delta \cap G$.*
3. *Pour tout $\alpha \in \phi$, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha^\Delta|_{U_\alpha}$.*
4. *Pour tout $\alpha \in \phi$, $\varphi_\alpha^\Delta(U_\alpha)$ est stable par addition avec Δ.*

Lorsqu'une donnée radicielle $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha)$ vérifie (fonc), on notera pour tout sous-groupe Δ de $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}^\Delta$, G^Δ, U_α^Δ, N^Δ, T^Δ, $\mathcal{P}^\Delta = (P^\Delta(a))_{a \in A}$, ... tous les objets obtenus grâce à la donnée radicielle valuée $\mathcal{D}^\Delta$.

On notera A^Δ l'appartement pour $\mathcal{D}^\Delta$, muni de ses murs, facettes et son action de N^Δ, défini à partir de l'espace affine $\mathring{A}$ et du point de base o (c'est-à-dire les mêmes que pour A).

Proposition 11.2.7. *Un groupe de Kac-Moody G déployé sur un corps local $\mathbb{K}$ vérifie toujours la condition (fonc).*

Démonstration: Lorsque G est un groupe de Kac-Moody déployé sur un corps $\mathbb{K}$, il s'agit en fait de la valeur en $\mathbb{K}$ d'un foncteur $\mathcal{G}$ des $\mathbb{K}$-algèbres vers les groupes munis d'une donnée radicielle de système de racine fixé, et pour toute $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}'$, les sous-groupes radiciels de $\mathcal{G}(\mathbb{K}')$ sont isomorphes à $(\mathbb{K}', +)$. Étant donné Δ, il suffit donc de choisir une extension $\mathbb{K}^\Delta$ de $\mathbb{K}$ ramifiée de sorte que $\varpi(\mathbb{K}^\Delta) = \Delta$, puis de prendre $G^\Delta = \mathcal{G}(\mathbb{K}^\Delta)$. Le lemme 8.4.4 de [Ré02] prouve que G^Δ est muni d'une donnée radicielle vérifiant le point 2 ci-dessus, les points 1 et 3 sont clairs. □

Remarque: Lorsque G n'est que presque déployé, il s'agit encore d'un foncteur des $\mathbb{K}$-algèbres vers les groupes munis d'une donnée radicielle, mais le système de racine varie, et les groupes radiciels ne sont plus isomorphes au

groupe additif du corps.

Proposition 11.2.8. *Soit $\mathcal{D}$ une donnée radicielle valuée vérifiant (fonc), soit Δ un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Alors :*

1. *$T = T^\Delta \cap G$, et $N = N^\Delta \cap G$.*
2. *L'action de N sur $\vec{A}$ est la restriction de l'action de N^Δ, c'est-à-dire $\vec{\nu} = (\vec{\nu}^\Delta)|_N$. En particulier, pour toute facette $\vec{f}$ de $\vec{A}$, $G \cap N^\Delta(\vec{f}) = N(\vec{f})$.*
3. *Pour tout $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$, $P^\Delta(\vec{f}) \cap G = P(\vec{f})$, puis $U(\vec{f}) = U^\Delta(\vec{f}) \cap G$, $M(\vec{f}) = M^\Delta(\vec{f}) \cap G$, et $N^\Delta.P^\Delta(\vec{f}) \cap G = N.P(\vec{f})$.*
4. *L'immeuble $\vec{I} = \vec{I}(\mathcal{D})$ s'injecte dans $\vec{I}^\Delta = \vec{I}(\mathcal{D}^\Delta)$, les appartements de ces deux immeubles sont isomorphes.*
5. *Pour tout $a \in A_{sph}$, $P(a) = P^\Delta(a) \cap G$.*
6. *$\nu = \nu^\Delta|_N$. En particulier, pour tout $a \in A$, $N(a) = N^\Delta(a) \cap G$.*
7. *Lorsque $\Delta = \mathbb{R}$, tout point de A est un sommet spécial dans $\mathcal{I}^\Delta$.*

Démonstration:

1. On rappelle que par définition $T = \bigcap_{\alpha\in\phi} N_G(U_\alpha)$, où $N_G(U_\alpha)$ est le normalisateur de U_α. Soit $g \in G \cap T^\Delta$, alors pour tout $\alpha \in \phi$, $gU_\alpha g^{-1} \subset G \cap U_\alpha^\Delta = U_\alpha$. Donc $g \in T$.
   Étudions $N^\Delta \cap G$. Le groupe N^Δ est engendré par T^Δ et par un $n(u)$, pour un $u \in U_\alpha^\Delta$ pour chaque $\alpha \in \phi$. On peut choisir $u \in U_\alpha$, il vient alors $N^\Delta = N.T^\Delta$. Pour conclure, $N^\Delta \cap G = N.T^\Delta \cap G = N.(T^\Delta \cap G) = N.T = N$.

2. L'action de N^Δ sur $\vec{A}$ se fait via $W^\Delta = N^\Delta/T^\Delta$, et celle de N via $W = N/T$. Mais $N^\Delta = N.T^\Delta$ et $T^\Delta \cap N = T$, donc $W^\Delta = N/T = W$.

3. Soit $\vec{f}$ une facette de $\vec{A}$ et $g \in P^\Delta(\vec{f}) \cap G$. Soit $\vec{C}$ une chambre de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$, on notera $U^+ = U(\vec{C})$ et $\phi^+ = \phi(\vec{C})$. On rappelle la décomposition de Bruhat fine :

$$G = \bigsqcup_{n\in N} U^+.n.\left(U^+ \cap n^{-1}U^-n\right) .$$

   Soit $g = u_1 n u_2$ l'unique écriture de g selon cette décomposition.
   La même décomposition pour $P^\Delta(\vec{f})$ donne :

$$P^\Delta(\vec{f}) = \bigsqcup_{n\in N^\Delta(\vec{f})} U^{\Delta+}.n.\left(U^{\Delta+} \cap n^{-1}U^{\Delta-}n\right) .$$

   Soit $g = u_1^\Delta n^\Delta u_2^\Delta$ la décomposition correspondante de g. Si $n \neq n^\Delta$, les cellules $U^{\Delta+}.n^\Delta.\left(U^{\Delta+} \cap n^{\Delta-1}U^{\Delta-}n^\Delta\right) \subset U^{\Delta+}n^\Delta U^{\Delta+}$ et $U^+.n.\left(U^+ \cap n^{-1}U^-n\right) \subset U^{\Delta+}nU^{\Delta+}$ sont disjointes. Donc $n = n^\Delta \in N \cap N^\Delta(\vec{f}) = N(\vec{f})$. Ensuite, l'unicité de l'écriture dans la cellule $U^{\Delta+}.n.\left(U^{\Delta+} \cap n^{-1}U^{\Delta+}n\right)$ entraine $u_1 = u_1^\Delta \in U(\vec{C})$ et $u_2 = u_2^\Delta \in U(\vec{C})$. Ceci prouve que $g \in U^+N(\vec{f})U^+ \subset P(\vec{f})$.
   Ensuite, l'unicité de l'écriture dans la décomposition de Lévi $P^\Delta(\vec{f}) = U^\Delta(\vec{f}) \rtimes M^\Delta(\vec{f})$, et les inclusions $U(\vec{f}) \subset U^\Delta(\vec{f})$ et $M(\vec{f}) \subset M^\Delta(\vec{f})$ entrainent les deux égalités $U(\vec{f}) = U^\Delta(\vec{f}) \cap G$, $M(\vec{f}) = M^\Delta(\vec{f}) \cap G$.
   Soit enfin $g \in G \cap N^\Delta.P^\Delta(\vec{f})$. Comme N et N^Δ induisent le même groupe de transformations sur $\vec{A}$ (c'est juste le groupe de Weyl associé au système de racines ϕ), il existe $n \in N$ tel que $ng \in P^\Delta(\vec{f})$. Alors $ng \in P^\Delta(\vec{f}) \cap G = P(\vec{f})$.

4. Par construction, $\vec{I} = G \times \vec{A}/\!\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence $(g,a) \sim (h,b) \Leftrightarrow \exists n \in N$ tq $b = na$ et $g^{-1}bn \in P(\vec{f})$, où $\vec{f}$ est la facette contenant a. Pour $\vec{I}$ et $\vec{I}^\Delta$, les deux appartements de référence sont les mêmes, et le point précédent permet facilement de vérifier que $\vec{I}$ s'injecte dans $\vec{I}^\Delta$.

5. Soit $\vec{f}$ une facette sphérique, $a \in A_{\vec{f}}$ et $p \in P^\Delta(a) \cap G$. Alors $p \in U^\Delta(\vec{f}) \rtimes M^\Delta(a) \cap G = (U^\Delta(\vec{f}) \cap G) \rtimes (M^\Delta(a) \cap G)$ grâce au point 2 et à l'unicité dans la décomposition de Lévi de $P^\Delta(\vec{f})$. Le groupe $M^\Delta(a) \cap G$ est le fixateur dans G du point a de l'immeuble de Bruhat-Tits de la donnée radicielle $(M^\Delta(\vec{f}), (U^\Delta_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})})$. D'après [BT72] proposition 9.1.17, il s'agit de $M(a)$. D'autre part, il a déjà été vu que $U^\Delta(\vec{f}) \cap G = U(\vec{f})$.

6. Comme le point de base o est le même dans A et A^Δ, les action ν et ν^Δ coïncident sur N_o. Il reste à étudier l'action de T. Rappelons que pour $t \in T$, $\nu(t)$ est par définition la translation de Y de vecteur $\vec{v}_t$ tel que $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(tut^{-1})$ pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. L'égalité de $\nu(t)$ et de $\nu^\Delta(t)$ est alors conséquence du troisième point de la définition de la condition (fonc).

7. Clair.

□

Lorsqu'une donnée radicielle valuée $\mathcal{D}$ vérifie (fonc), il sera utile, étant donnée une famille de parahoriques $\mathcal{Q}$ pour $\mathcal{D}$ de savoir si $\mathcal{Q}$ se comporte bien vis-à-vis des extensions $\mathcal{D}^\Delta$ données par (fonc). Ceci justifie d'introduire encore une définition :

Définitions 11.2.9. *Soit Q une famille de parahoriques pour une donnée radicielle valuée $\mathcal{D}$.*

- *Pour toute partie Ω de A, on dira que Q vérifie la condition (fonc)(Ω) si $\mathcal{D}$ vérifie (fonc) et si pour tout $\Delta \leq \mathbb{R}$ il existe une famille de parahoriques Q^Δ pour $\mathcal{D}^\Delta$ telle que $\forall a \in \Omega$, $Q^\Delta(a) \cap G = Q(a)$.*

- *On dira que Q vérifie un ensemble de conditions (para $x_1, ..., x_k$) "fonctoriellement" si $\mathcal{D}$ vérifie (fonc) et si pour tout groupe $\Delta \leq \mathbb{R}$, il existe une famille de parahoriques Q^Δ pour $\mathcal{D}^\Delta$, contenant Q, et vérifiant (para $x_1, ..., x_k$).*

- *On dira que Q vérifie (fonc)(Ω) et un ensemble de conditions (para $x_1, ..., x_k$) "fonctoriellement" si $\mathcal{D}$ vérifie (fonc) et si pour tout groupe $\Delta \leq \mathbb{R}$, il existe une famille de parahoriques Q^Δ pour $\mathcal{D}^\Delta$, vérifiant (para $x_1, ..., x_k$), et telle que $\forall a \in \Omega$, $Q^\Delta(a) \cap G = Q(a)$.*

- *Les notations (fonc) et (fonc)(sph) désigneront respectivement (fonc)(A) et (fonc)(A_{sph}).*

Nous avons vu par exemple que dès que $\mathcal{D}$ vérifie (fonc), alors la famille minimale de parahoriques associée vérifie (fonc)(sph). De plus, toutes les propriétés que nous prouverons être vérifiées par la famille minimale de parahoriques P le seront en fait fonctoriellement. En particulier :

Proposition 11.2.10. *Si $\mathcal{D}$ est la donnée radicielle valuée attachée à un groupe de Kac-Moody G, alors la famille minimale de parahoriques P vérifie (para dec) fonctoriellement.*

11.2.4 Relations directes entre les conditions (para x)

Nous étudions les relations les plus directes entre les différentes conditions introduites en 11.2.1 et 11.2.3. La philosophie est la suivante : les conditions (para 5) et (para 6) sont équivalentes aux propriétés d'incidence classiques attendues d'un immeuble. On n'a en général pas trouvé de famille de parahoriques les vérifiant pour une donnée radicielle sur un système de racine infini. On tâchera cependant de déterminer des parties Ω pour lesquelles elles sont vraies (dans [GR08] par exemple, on détermine des "parties avec un bon fixateur" qui en particulier vérifient (para 5) et (para 6)).

Nous nous appuierons plutôt pour construire la masure sur les conditions (para *inj*), (para *sph*) et les variantes de (para 2.1). Celles-ci ont déjà une interprétation géométrique, et ceci permettra de les descendre d'un groupe de Kac-Moody déployé à un groupe presque déployé.

Les conditions (para *dec*) et (fonc) sont plutôt des intermédiaires techniques, vérifiés par les groupes de Kac-Moody déployés et qui entrainent les conditions précédentes. On ne s'en préoccupera a priori plus lors de l'étude d'un

groupe presque déployé.

On étudiera les relations un peu moins directes entre ces conditions après avoir défini la masure $\mathcal{I}(\mathcal{D}, Q)$, car certaines implications sont plus facilement prouvées grâce à cet outil géométrique.

Proposition 11.2.11. *Soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para dec) fonctoriellement. Alors pour tout point a et toute facette sphérique $\vec{f}$ de $\vec{f}_a^* \cap \vec{A}$, $Q(a) \cap P(\vec{f}) = Q(a) \cap P(pr_{\vec{f}}(a))$.*
En particulier, Q vérifie fonctoriellement (para sph) et (para 2.1)(sph).

Démonstration: Comme $\vec{f}$ est sphérique, on a la décomposition de Bruhat de $M_{\vec{A}}(\vec{f})$, d'où :

$$\begin{aligned} P(\vec{f}) &= U(\vec{f}) \rtimes M_{\vec{A}}(\vec{f}) \\ &= U(\vec{f}) \rtimes (G(\phi^m(\vec{f}), a) \,.\, N_{\vec{f}} \,.\, G(\phi^m(\vec{f}), a)) \\ &= G(\phi^m(\vec{f}), a) \,.\, U(\vec{f}) \,.\, N_{\vec{f}} \,.\, G(\phi^m(\vec{f}), a) \\ &\subset P(\langle a, \vec{f} \rangle_A) \,.\, U(\vec{f}) \,.\, N_{\vec{f}} \,.\, P(\langle a, \vec{f} \rangle_A) \end{aligned}$$

Soit $g \in Q(a) \cap P(\vec{f})$, nous pouvons donc supposer $g \in Q(a) \cap (U(\vec{f}) \rtimes N_{\vec{f}})$.

Dans un premier temps, supposons que a est un sommet spécial. Alors quitte à multiplier par un élément de $N(a + \vec{f})$, on peut supposer $g \in Q(a) \cap (U(\vec{f}) \rtimes T)$. Soit $u \in U(\vec{f}), t \in T$ tels que $g = u.t$. Par ailleurs, soit $\vec{C}$ une chambre de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$, et soient $u^+ \in U(\vec{C}) \cap Q(a)$, $u^- \in U(-\vec{C}) \cap Q(a)$ et $n \in N_a$ tels que $g = u^+ u^- n$. Alors $g = u^+ n n^{-1} u^- n = ut$, et par l'unicité modulo T du facteur dans N dans la décomposition de Birkhoff pour les chambres $\vec{C}$ et $-n^{-1}\vec{C}$, on obtient que $n.T = T$, donc g est dans la double classe $U^+ T U^-$. Enfin, par unicité d'écriture dans cette double classe, on obtient $u^+ = u \in U(\vec{f}) \cap Q(a)$, $n = t \in T \cap N(a)$ et $n^{-1} u^- n = e$ d'où $u^- = e$. L'élément $t \in N(a) \cap T$ fixe a, sa façade et son adhérence, et $u \in U(\vec{f}) \cap Q(a)$ fixe a et $A_{\vec{f}}$ en entier. Donc $g \in Q(a) \cap P(pr_{\vec{f}}(a))$.

Lorsque a n'est pas un sommet spécial de A, il l'est dans un certain A^Δ grâce à (fonc). Le paragraphe précédent entraine alors que $Q(a) \cap P(\vec{f}) \subset Q(a) \cap P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a))$. Mais $G \cap P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) = P(pr_{\vec{f}}(a))$ d'après 11.2.8. □

Proposition 11.2.12. *Toute famille Q de parahoriques vérifiant fonctoriellement (para sph) et (para 2.1)($\vec{m}$) pour toute cloison $\vec{m}$ de $\vec{A}$ vérifie (para inj).*

Démonstration:
Soit $a \in A$ et $g \in N \cap Q(a)$. Soit Δ tel que a est un sommet spécial dans A^Δ, soient $\mathcal{D}^\Delta = (G^\Delta, (U_\alpha^\Delta))$, N^Δ, T^Δ... les groupes donnés par la condition (fonc).
Il existe $n \in N^\Delta(a)$ tel que $ng \in T^\Delta \cap n.Q(a) \subset T^\Delta \cap Q^\Delta(a)$. Pour toute cloison $\vec{m}$ de $\vec{f}_a^* \cap \vec{A}$, Q^Δ vérifie (para 2.1)($\vec{m}$) d'où $ng \in T^\Delta \cap Q^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$. Comme $\vec{m}$ est sphérique, par (para *sph*) on obtient $ng \in T^\Delta \cap P^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$ ce qui vaut $T^\Delta \cap U^\Delta(\vec{m}) \rtimes (M^\Delta(\vec{f}) \cap P^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$ par la proposition 11.2.3. Comme $T^\Delta \subset M^\Delta(\vec{m})$ on obtient $ng \in T^\Delta \cap M^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$ et par [BT72], ceci est le fixateur dans $M^\Delta(\vec{m})$ de $A^\Delta_{\vec{m}}$, donc l'ensemble des $t \in T^\Delta$ induisant une translation de vecteur $\vec{v}_t \in \mathrm{Vect}_{\vec{A}}(\vec{m})$.
Ceci étant pour chaque cloison $\vec{m}$ de $\vec{f}_a^* \cap \vec{A}$, et comme l'intersection de $A^\Delta_{\vec{f}_a}$ et des murs contenant ces cloisons est triviale (car $\vec{A}_{\vec{f}_a}$ est essentiel), on voit que ng induit une translation triviale sur $A^\Delta_{\vec{f}_a}$, autrement dit, $ng \in T^\Delta \cap N^\Delta(A^\Delta_{\vec{f}_a})$ d'où $g \in N^\Delta(a) \cap G$. Or ceci vaut $N(a)$ par 11.2.8. □

Remarque: L'hypothèse la plus précise pour cette proposition est en fait "Q vérifie fonctoriellement (para *sph*) et (para 2.1)($\vec{f}$) pour $\vec{f}$ dans une famille $\mathcal{F}$ de facettes sphériques de $\vec{A}$ telle que $\bigcap_{\vec{f} \in \mathcal{F}} \mathrm{Vect}(\vec{f}) = \{0\}$. Par exemple la

famille $\mathcal{F}$ des cloisons bordant une chambre donnée convient. En général, nous appliquerons ce résultat à des familles vérifiant (para 2.1)(sph), ce qui entraine bien (para 2.1)($\vec{m}$) pour toute cloison $\vec{m}$.

En assemblant les deux propositions précédentes, on trouve :

Corollaire 11.2.13. *Toute famille vérifiant fonctoriellement (para dec) vérifie fonctoriellement (para inj), (para sph) et (para 2.1)(sph).*
C'est en particulier le cas, lorsque $\mathcal{D}$ est la donnée radicielle valuée issue d'un groupe de Kac-Moody G déployé, pour la famille minimale de parahoriques $\mathcal{P}$.

Remarque: Il ne manque que (para 2.2)(sph) à une telle famille pour quelle soit une bonne famille de parahoriques.

11.3 Définition de la masure bordée

11.3.1 La relation d'équivalence

Soit $\mathcal{Q} = (Q(a))_{a\in A}$ une famille de sous groupes de G vérifiant (para 0.2).

Définition 11.3.1. *Soit $\sim_{\mathcal{Q}}$ la relation sur $G \times A$ définie par :*

$$(g,a) \sim_{\mathcal{Q}} (h,b) \;\Leftrightarrow\; \exists n \in N(T) \text{ tq } b = na \text{ et } g^{-1}hn \in Q(a)$$

Proposition 11.3.2. *La relation $\sim_{\mathcal{Q}}$ est une relation d'équivalence si et seulement si $\mathcal{Q}$ vérifie (para 0.4).*

Démonstration:
Déjà, $\sim_{\mathcal{Q}}$ est toujours réflexive.

Supposons que $\mathcal{Q}$ vérifie (para 0.4). Commençons par montrer que $\sim_{\mathcal{Q}}$ est symétrique. Soient (g,a) et (h,b) tels que $(g,a) \sim_{\mathcal{Q}} (h,b)$. Soit $n \in N(T)$ tel que $b = na$ et $g^{-1}hn \in Q(a)$. Alors $a = n^{-1}b$ et $h^{-1}gn^{-1} = n(g^{-1}hn)^{-1}n^{-1} \in nQ(a)n^{-1} = Q(b)$.
Pour la transitivité, soient (g,a), (h,b) et (k,c) tels que $(g,a) \sim_{\mathcal{Q}} (h,b) \sim_{\mathcal{Q}} (k,c)$. Soit $n \in N(T)$ tel que $b = na$ et $g^{-1}hn \in Q(a)$, et soit $m \in N(T)$ tel que $c = mb$ et $h^{-1}km \in Q(b)$. Alors $c = mna$ et $g^{-1}kmn = (g^{-1}hn)n^{-1}(h^{-1}km)n \in Q(a).n^{-1}Q(b)n = Q(a)$.

Réciproquement, supposons $\sim_{\mathcal{Q}}$ une relation d'équivalence. Soit $n \in N(T)$ et $a \in A(T)$. soit $q \in Q(na)$, alors $(1,na) \sim_{\mathcal{Q}} (q^{-1}n,a)$. D'où par symétrie, $(q^{-1}n,a) \sim_{\mathcal{Q}} (1,na)$, donc il existe $n' \in N(T)$ tel que $na = n'a$ et $n^{-1}qn' \in Q(a)$. Alors $n^{-1}n' \in \mathrm{Fix}_{N(T)}(a) \subset Q(a)$ par (para 0.2). D'où $n^{-1}qn \in Q(a)$. Nous avons montré que $n^{-1}Q(na)n \subset Q(a)$. L'inclusion inverse s'obtient en appliquant ce résultat à n^{-1}. □

11.3.2 Définition

On fixe un tore maximal T_0, et une famille de parahoriques Q sur $A(T_0)$. On va construire l'objet immobilier $\mathcal{I}(Q)$ en se basant sur l'appartement $A(T_0)$, la construction sera bien sûr indépendante du choix de T_0.

Définition 11.3.3. *Soit $\mathcal{I}(Q) = G \times A(T_0)/\sim_Q$. C'est la masure bordée associée à $(\mathcal{D},Q)$. Lorsque le contexte sera clair, on notera juste $g.a$ pour la classe de (g,a) dans $\mathcal{I}(Q)$. Sinon on la notera $[g,a]_Q$.*
On définit une action de G sur $\mathcal{I}$ par $g'.[g,a] = [g'g,a]$.

Soit $\iota_{T_0,Q} : \begin{array}{ccc} A(T_0) & \to & \mathcal{I}_Q \\ a & \mapsto & [1,a]_Q \end{array}$. C'est l'injection canonique de $A(T_0)$ dans $\mathcal{I}(Q)$. Son image est l'appartement de $\mathcal{I}(Q)$ associé à T_0. Les images de ce dernier par les éléments de G sont les appartements de $\mathcal{I}(Q)$.

Proposition 11.3.4. *La fonction $\iota_{T_0,Q}$ est $N(T_0)$-équivariante. Elle est de plus injective si et seulement si Q vérifie (para inj).*

Démonstration:
La $N(T_0)$-équivariance découle de la définition de $\sim_Q$.
Si Q vérifie (para *inj*), soient $a, b \in A(T_0)$ tels que $(1,a) \sim_Q (1,b)$. Alors il existe $n \in N(T_0)$ tel que $b = na$ et $n \in Q(a)$. Donc $n \in Q(a) \cap N(T_0) = \mathrm{Fix}_{N(T_0)}(a)$, donc $a = b$.
Réciproquement, supposons ι_Q injective. L'inclusion $\mathrm{Fix}_{N(T_0)}(a) \subset Q(a) \cap N(T_0)$ est vraie par (para 0.2). Pour l'autre inclusion, soit $q \in Q(a) \cap N(T_0)$. Alors $qa \in A(T_0)$ et $(1,a) \sim_Q (1,qa)$ d'où par injectivité de ι_Q, $a = qa$ et $q \in \mathrm{Fix}(a)$. □

On suppose désormais que Q vérifie (para *inj*), et on identifie $A(T_0)$ à $\iota_{T_0,Q}(A(T_0))$.

Proposition 11.3.5. *Le stabilisateur de $A(T_0)$ dans G est $N(T_0)$.*

Démonstration:
L'inclusion $N(T_0) \subset \mathrm{Stab}_G(A(T_0))$ est vraie par la définition de $\sim_Q$ (ou par la $N(T_0)$-équivariance de l'inclusion de $A(T_0)$ dans $\mathcal{I}$).
Réciproquement, soit $g \in G$ tel que $g.A(T_0) = A(T_0)$. Soit $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T_0))$, soit $a \in A_{\vec{f}}$. Alors $g.a \in A(T)$ et par la définition de $\sim_Q$, il existe $n \in N(T_0)$ tel que $g.a = n.a$. Donc $g \in n.P(a) \subset N(T_0).P(\vec{f})$. Ceci étant valable pour toute facette $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T_0))$, on obtient $g \in \bigcap_{\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T_0))} N(T_0).P(\vec{f}) = N(T_0).P(\vec{A}(T_0)) = N(T_0).T_0 = N(T_0)$ (10.1.4 pour la première égalité). □

Les deux propositions précédentes permettent de définir la structure des appartements de $\mathcal{I}(Q)$:

Définition 11.3.6. *La structure d'appartement sur $A(T_0)$ (i.e. les murs et la structure affine sur chaque façade) est celle qui fait de $\iota_{T_0,Q}$ un isomorphisme d'appartements. Pour tout autre appartement $g.A(T_0)$, la structure d'appartement sur $g.A(T_0)$ est celle qui fait de $g|_{A_0}$ un isomorphisme d'appartements dont la partie vectorielle est l'application* $\begin{array}{ccc} \vec{V}(T_0) & \to & g.\vec{V}(T_0) \\ \vec{v} & \mapsto & g.\vec{v} \end{array}$ *(voir la fin de 10.1.1).*

Si $A = g.A(T_0)$ est un appartement, l'addition d'un point de A et d'un vecteur de $g.\vec{V}(T_0)$ sera notée $+_A$.

Par exemple, si A est un appartement, a un point de A, $\vec{v}$ un vecteur de $\vec{V}(T)$, et $g \in G$, alors $g(a +_A \vec{v}) = g(a) +_{gA} g(\vec{v})$. Si $n \in N(T)$, alors $n(a +_A \vec{v}) = n(a) +_A \vec{v}(n).\vec{v}$.

Proposition 11.3.7. *Soit T un tore maximal de G. Soit $g \in G$ tel que $T = gT_0g^{-1}$. Pour tout $\alpha \in \phi(T_0)$, on pose* $g.\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} U_{g\alpha} \setminus \{e\} & \to & \Lambda \\ u & \mapsto & \varphi_\alpha(g^{-1}ug) \end{array}$ *, et $g.\varphi_\alpha(e) = \infty$. Alors la famille $(g\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ est une valuation de la donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in g.\phi})$, et l'appartement abstrait $A(T)$ qu'elle définit est isomorphe de manière $N(T)$-équivariante à l'appartement de $g.A(T_0)$ de $\mathcal{I}$.*

Remarque: Le système de racine $g.\phi$ et la donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in g.\phi})$ ne dépendent pas du choix de $g \in G$ tel que $T = gTg^{-1}$, contrairement à la valuation $g\phi$.

Démonstration:
Il est immédiat que $g.\varphi$ est une valuation. Pour celle-ci, on a pour tout $\alpha \in \phi$ et $k \in \Lambda \cup \{\infty\}$, $g.U_{\alpha,k}g^{-1} = U_{g\alpha,k}$. En conséquence, si $o \in A(T)$ (resp. $o_0 \in A(T_0)$) est le point de base pour $g\varphi$ (resp. φ), alors le groupe $N(T)_0 = \left\langle \left\{ n(u) \mid u \in U_\alpha,\ \alpha \in g\phi,\ \text{et } g\varphi_{g^{-1}\alpha}(u) = 0 \right\} \right\rangle$ qui sert à définir l'action de $N(T)$ sur $A(T)$ dans 11.1.5 est égal à $g.N(T_0)_0g^{-1}$, et fixe le point $g.o_0$.

Alors l'application $\begin{array}{ccc} A(T) & \to & A(T_0) \\ o+\vec{v} & \mapsto & g.o_0 +_T \vec{v} \end{array}$ est un isomorphisme $N(T)$-équivariant. En effet, elle est clairement $N(T)_0$-équivariante, et concernant l'action de T, on vérifie directement avec la proposition 11.1.9 que pour tout $t \in T$, $\vec{v}_t = g(\vec{v}_{g^{-1}tg})$. □

Grâce à cette proposition, on identifie désormais pour tout $g \in G$ l'appartement $g.A(T_0)$ de $\mathcal{I}(Q)$ avec l'appartement abstrait $A(gT_0g^{-1})$.

Voici quelques propriétés immédiates de $\mathcal{I}$:

Proposition 11.3.8.

1. *Le fixateur d'un point $x \in A(T_0)$ est $Q(x)$. Plus généralement, pour un appartement $B = g.A(T_0) = A(gT_0g^{-1})$, le fixateur d'un point $x \in B$ est $gQ(g^{-1}x)g^{-1}$.*
2. *Soit T un tore maximal, $a \in A(T)$, $g \in G$. Si $g.a \in A(T)$, alors il existe $n \in N(T)$ tel que $g.a = n.a$.*
3. *Pour tout $x \in \mathcal{I}$, le groupe $\mathrm{Fix}_G(x)$ est transitif sur les appartements contenant x.*

Démonstration:

1. Si $(g,x) \sim_Q x$, alors il existe $n \in N(T_0)$ tel que $nx = x$ et $g^{-1}n \in Q(x)$. Alors $n \in \mathrm{Fix}_{N(T_0)}(x) \subset Q(x)$ par (para 0.2), et donc $g \in Q(x)$. La réciproque est claire, le cas général aussi.
2. Dans $A(T_0)$, c'est la définition de $\sim_Q$. Le cas plus général s'y ramène car $hN(T_0)h^{-1} = N(hT_0h^{-1})$.
3. Soient A et $g.A$ deux appartements contenant x. On peut supposer $A = A(T_0)$. Alors $g^{-1}x \in A(T_0)$, et par le point précédent, il existe $n \in N(T_0)$ tel que $g^{-1}x = nx$. Alors $gn \in \mathrm{Fix}_G(x)$, et $g.A(T_0) = gnA(T_0)$.

□

On prolonge naturellement la définition des sous-groupes parahoriques, de manière cohérente avec les notations $Q(x)$, $Q(\Omega)$ déjà introduites :

Définition 11.3.9. *Pour tout $x \in \mathcal{I}$, on note $Q(x) = \mathrm{Fix}_G(x)$. Pour toute partie Ω de $\mathcal{I}$, on note $Q(\Omega) = \mathrm{Fix}_G(\Omega)$.*

Remarques:

– Si A est un appartement, si $a \in A$ et $\vec{v} \in \vec{A}$, alors le point $a +_A \vec{v} \in A$ est bien défini par la formule $a +_A \vec{v} = g(g^{-1}(a) +_{A(T_0)} g^{-1}(\vec{v}))$, où $g \in G$ est tel que $g.A(T_0) = A$. Mais ceci dépend a priori de l'appartement A contenant a et tel que $\vec{v} \in \vec{A}$ considéré. On ne peut donc pas noter ce point $a + \vec{v}$. En terme de condition sur la famille $\mathcal{Q}$, le point $a + \vec{v}$ est bien défini si $N.Q(g^{-1}a) \cap N.P(g^{-1}\vec{v}) \subset N.(Q(\{g^{-1}a, g^{-1}(a+\vec{v})\}) \cap P(g^{-1}\vec{v}))$ (où l'addition est faite dans $A(T_0)$). Ceci est une conséquence de (para 2.2^+), voir la section 11.9.

– Il en va de même pour les projections : si $a \in A$ et $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$, on peut noter $pr_{A,\vec{f}}(a)$ la projection de a sur la façade $A_{\vec{f}}$ dans l'appartement A. Le projeté $pr_{\vec{f}}(a)$ est bien défini si $N.Q(a) \cap N.P(\vec{f}) \subset N.Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$, en particulier si Q vérifie (para 2.2)$(\vec{f})$. Voir 11.7.

– Pour l'enclos enfin, si Ω est une partie d'un appartement A, on notera $\mathrm{Cl}_A(\Omega)$ l'enclos de Ω dans A. Ceci sera indépendant de A si Q vérifie (para 5)(Ω) et (para 6)(Ω).

Enfin, on montre une caractérisation géométrique de la valuations des sous-groupes radiciels.

Proposition 11.3.10. *Soit T un tore maximal, $\alpha \in \phi(T)$, $u \in U_\alpha$. Alors l'ensemble des points fixes de u dans $A(T)$ est précisément $\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u))$.*

Démonstration:

Notons $k = \varphi_\alpha(u)$. Par (para 0.3) et comme pour tout $a \in A$, $Q(a) = \mathrm{Fix}(a)$, $U_{\alpha,k}$ fixe $\mathcal{D}(\alpha,k)$. Supposons que u fixe un point $x \in \mathcal{D}(-\alpha,-k) \setminus M(\alpha,k)$. Soient $u', u'' \in U_{-\alpha}$ tels que $n(u) = u'uu''$. D'après 11.1.11, $\varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u'') = -k$

donc u' et u'' fixent x. Ainsi $n(u) \in Q(x)$. Or $n(u)$ induit la réflexion selon le mur $M(\alpha, k)$ qui ne contient pas x. Donc $n(u) \in (Q(x) \cap N) \setminus N(x)$, ceci contredit (para *inj*). □

Corollaire 11.3.11. *Pour $\alpha \in \phi(T)$ et $x \in A(T)$, $U_\alpha(x) = \{u \in U_\alpha \mid u \text{ fixe } x\}$.*

Corollaire 11.3.12. *Soit $\alpha \in \phi(T)$, $x \in A(T)$, et $g \in G$. Alors $gU_\alpha(x)g^{-1} = U_{g\alpha}(g.x)$.*

Proposition 11.3.13. *Soient Q et R deux familles de parahoriques avec $Q \subset R$. Alors il existe une projection naturelle G équivariante $\phi : \mathcal{I}(Q) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(R), [g,a]_Q \mapsto [g,a]_R$. En particulier, la masure bordée $\mathcal{I}(P)$ correspondant à la famille minimale de parahoriques se projette sur toutes les autres masures bordées de G.*

Démonstration: Si $(g,a) \sim_Q (h,b)$, alors il existe $n \in N$ tel que $b = na$ et $g^{-1}hn \in Q(a)$. Comme $Q(a) \subset R(a)$, ceci entraine $(g,a) \sim_R (h,b)$. Donc ϕ est bien définie. Le reste est évident. □

11.3.3 Façades d'immeuble

Rappelons que, par définition (voir 11.3.6), les façades d'appartements dans $\mathcal{I}$ sont toutes les parties de la forme $g.(A_{0\vec{f}})$, avec $g \in G$ et $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}_0)$.

Lemme 11.3.14. *Soient $\mathfrak{f} = (hA_0)_{h\vec{f}}$ et $\mathfrak{e} = (gA_0)_{g\vec{e}}$ deux façades d'appartements. Si $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{e} \neq \emptyset$, alors $h\vec{f} = g\vec{e}$.*

Preuve du lemme: On peut supposer $h = e$. Soit $a \in A_{0\vec{f}} \cap (gA_0)_{g\vec{e}}$. Alors $g^{-1}a \in A_{0\vec{e}}$ donc il existe $n \in N$ tel que $gn \in Q(a)$. En particulier, $gn \in P(\vec{f})$ donc $g^{-1}\vec{f} = n\vec{f}$, et d'autre part $g^{-1}a = na$ d'où $n.\vec{f} = \vec{e}$. Au final, $g^{-1}\vec{f} = \vec{e}$. □

En conséquence de ceci, la direction d'une façade d'appartement dans $\mathcal{I}$ est bien définie :

Définition 11.3.15. *Soit $\mathfrak{f} = g.(A_{0\vec{f}})$ une façade d'appartement, alors la facette vectorielle $g.\vec{f}$ est appelée la direction de $\mathfrak{f}$. La réunion de toutes les façades d'appartement dirigées par une facette vectorielle $\vec{f}$ est appelée la façade de $\mathcal{I}$ de direction $\vec{f}$. On la note $\mathcal{I}_{\vec{f}}$.*

Proposition 11.3.16. *Les façades de $\mathcal{I}$ forment une partition de $\mathcal{I}$. De plus, l'application $\vec{f} \mapsto \mathcal{I}_{\vec{f}}$ est une bijection G-équivariante entre les facettes de $\vec{\mathcal{I}}$ et les façades de $\mathcal{I}$. En conséquence, le stabilisateur dans G de la façade $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ est $P(\vec{f})$.*

Démonstration: Le lemme prouve que deux façades sont disjointes ou égales. De plus, A_0 est la réunion de ses façades, donc $\mathcal{I} = G.A_0$ est la réunion de ses façades d'appartement, et donc de ses façades d'immeuble.

L'application $\vec{f} \mapsto \mathcal{I}_{\vec{f}}$ est clairement surjective et G-équivariante. Si $\mathcal{I}_{\vec{f}} = \mathcal{I}_{\vec{g}}$, soit $\mathfrak{f}$ une façade d'appartement de direction $\vec{f}$ et $a \in \mathfrak{f}$. Par hypothèse, il existe $\mathfrak{g}$ de direction $\vec{g}$ contenant a. Le lemme entraine alors $\vec{f} = \vec{g}$. □

Proposition 11.3.17. *Si $\vec{f}$ est une facette sphérique de $\vec{\mathcal{I}}$, et si Q vérifie (para sph), la façade $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ est l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe $M_{\vec{A}}(\vec{f})$, pour tout appartement $\vec{A}$ contenant $\vec{f}$.*

Pour une facette $\vec{f}$ générale, la façade fermée $\overline{\mathcal{I}_{\vec{f}}} := \bigcup_{\vec{g} \in \vec{f}^*} \mathcal{I}_{\vec{g}}$ est la masure bordée pour la donnée radicielle valuée $(M(\vec{f}), (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})})$ avec la famille de parahoriques Q restreinte à $\overline{A_{\vec{f}}}$.

Démonstration: Soit $\vec{f}$ une facette de $\vec{\mathcal{I}}$. Soit $\mathfrak{g} = B_{\vec{f}}$ une façade d'appartement de direction $\vec{f}$. Il existe $p \in P(\vec{f})$ tel que $B = p.A$ et donc $\mathfrak{g} = p.A_{\vec{f}}$. Ainsi, $\mathcal{I}_{\vec{f}} = P(\vec{f}).A_{\vec{f}}$. Mais comme $U(\vec{f})$ fixe $A_{\vec{f}}$, on a $\mathcal{I}_{\vec{f}} = M_{\vec{A}}(\vec{f}).A_{\vec{f}}$.

Supposons $\vec{f}$ sphérique. Alors $A_{\vec{f}}$ est un appartement pour la donnée radicielle valuée finie $\mathcal{D}_{\vec{A},\vec{f}}$. Le fait que pour tout $a \in A_{\vec{f}}$, $M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(a)$ soit le sous-groupe parahorique pour $\mathcal{D}_{\vec{A},\vec{f}}$ au point a permet de vérifier immédiatement que $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ est l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathcal{D}_{\vec{A},\vec{f}}$.

Dans le cas général, $\overline{A_{\vec{f}}} = \bigcup_{\vec{g} \in \vec{f}^* \cap \vec{A}} A_{\vec{g}}$ est un appartement pour $\mathcal{D}_{\vec{A},\vec{f}}$. De plus $\overline{\mathcal{I}_{\vec{f}}} = M_{\vec{A}}(\vec{f}).\overline{A_{\vec{f}}}$, et on vérifie directement sur la définition que ceci est la masure de $\mathcal{D}_{\vec{A},\vec{f}}$ pour la famille de parahoriques $(M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap Q(a))_{a \in \overline{A_{\vec{f}}}}$. □

11.4 Décomposition d'Iwasawa

On prouve ici la décomposition d'Iwasawa $G = P(\vec{C})\ .\ N(T)\ .\ G(F)$, valable pour toute chambre $\vec{C}$ de $\vec{A}(T)$ et pour toute facette $F \subset A$. Rappelons que selon nos notations, le groupe $G(F)$ est défini par $G(F) = \langle\ \{U_\alpha(F) \mid \alpha \in \phi(T)\}\ \rangle$, avec $U_\alpha(F) := \{u \in U_\alpha \mid F \subset \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u))\}$. Pour toute famille de parahorique Q, on a $G(F) \subset Q(F)$, donc la décomposition d'Iwasawa implique $G = P(\vec{f})\ .\ N(T)\ .\ Q(F)$, pour toute facette $\vec{f}$ de $\vec{A}(T)$ et F de $A(T)$.

11.4.1 La décomposition

Lemme 11.4.1. *Soit $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}(T)$, soit $\alpha \in \phi(T)$ qui s'annule sur une cloison $\vec{m}$ de $\vec{C}$. Autrement dit, α est une racine simple de $\phi(\vec{C})$. Alors :*

$$U(\vec{C}) = U(\vec{m}) \rtimes U_\alpha$$

Remarque: On rappelle que pour une chambre $\vec{C}$, $U(\vec{C}) = G(\phi(\vec{C}))$.

Preuve du lemme:
Le groupe U_α fixe la cloison $\vec{m}$ donc normalise $U(\vec{m})$. Soit $u \in U_\alpha \cap U(\vec{m})$, alors u fixe les deux chambres de $\vec{A}$ qui bordent $\vec{m}$, et $u \in U_\alpha$, ceci entraine $u = e$. Ainsi le groupe engendré par U_α et $U(\vec{m})$ est bien un produit semi-direct. Il est inclus dans $U(\vec{C})$ car U_α tout comme $U(\vec{m})$ le sont ($U(\vec{m}) = U(\vec{C}) \cap U(r_{\vec{m}}.\vec{C})$ si $r_{\vec{m}}$ est la réflexion dans $\vec{A}$ par rapport à $\vec{m}$). Enfin, pour toute racine $\beta \in \phi(\vec{C})$, on a soit $\beta = \alpha$, soit $\beta \in \phi^u(\vec{m})$, et dans les deux cas $U_\beta \subset U(\vec{m}) \rtimes U_\alpha$. D'où le résultat. □

Proposition 11.4.2. *(Décomposition d'Iwasawa) Soit $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}(T)$ et F une facette de $A(T)$. Alors :*

$$G = U(\vec{C})\ .\ N(T)\ .\ G(F)\,.$$

Démonstration:
La preuve est classique. Il suffit de prouver que l'ensemble $Z := U(\vec{C})\ .\ N(T)\ .\ G(F)$ est stable par multiplication à gauche par n'importe quel élément de G. Or G est engendré par T, par les U_α avec $\alpha \in \phi(\vec{C})$ et par les U_β avec β une racine simple de $\phi(-\vec{C})$. Déjà, Z est clairement stable par multiplication à gauche par T et les U_α. Soit donc $\beta = -\alpha$ une racine simple de $\phi(-\vec{C})$, montrons que Z est stable par multiplication à gauche par U_β.

Par le lemme précédent, $U(\vec{C}) = U(\vec{m}) \rtimes U_\alpha$, avec $\vec{m}$ la cloison de $\vec{C}$ qui est incluse dans le noyau de β. Le groupe $U(\vec{m})$ est normalisé par U_β, et $U_\beta.Z \subset U(\vec{m}).U_\beta.U_\alpha.N(T).G(F)$. L'ensemble $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, -\alpha\}$ est un système de racine fini, donc par [BT72], $U_\beta.U_\alpha \subset \left\langle\ U_\beta, U_\alpha, T\ \right\rangle = U_\alpha.T\{e, r_\alpha\}U_\alpha = U_\alpha.T \sqcup U_\alpha U_{-\alpha} T r_\alpha \subset U_\alpha U_{-\alpha} N$, où $r_\alpha = n(u)$ est la réflexion générée par un élément quelconque u de U_α.
Ainsi, $U_\beta.Z \subset U(\vec{m})\ .\ U_\alpha\ .\ U_{-\alpha}\ .\ N(T)\ .\ G(F) = U(\vec{C})\ .\ U_{-\alpha}\ .\ N(T)\ .\ G(F)$.

Étudions maintenant le produit $U_{-\alpha}.N(T).G(F)$. Pour tout $n \in N(T)$, $U_{-\alpha}.n = nn^{-1}U_{-\alpha}n = nU_{-n^{-1}.\alpha}$. Dans la donnée radicielle de type finie $(\langle\ U_{-n^{-1}.\alpha}, U_{n^{-1}.\alpha}, T\ \rangle, ((U_{-n^{-1}.\alpha}, \varphi_{-n^{-1}.\alpha}, (U_{n^{-1}.\alpha}, \varphi_{n^{-1}.\alpha})))$, en utilisant la décomposition d'Iwasawa ou de Bruhat selon que $n^{-1}\alpha(F)$ est fini ou non, il vient $U_{-n^{-1}.\alpha} \subset U_{n^{-1}\alpha}.N(T).G(F)$. D'où $U_{-\alpha}.N(T).G(F) \subset$

$U_\alpha.N(T).G(F)$.

On a alors obtenu : $U_\beta.Z \subset U(\vec{m}).U_\alpha\ .\ N(T)\ .\ G(F) \subset U(\vec{C})\ .\ N(T)\ .\ G(F)$. □

Corollaire 11.4.3. *Pour toutes facettes $\vec{f} \subset \vec{A}(T)$ et $F \subset A(T)$, pour toute famille $\mathcal{Q}$ de parahoriques sur $A(T)$, on a*

$$G = P(\vec{f}).N(T).Q(F)\ .$$

Corollaire 11.4.4. *Soit F une facette de $\mathcal{I}$ et $\vec{f}$ une facette de $\vec{\mathcal{I}}$. Pour tout appartement A contenant F, il existe $q \in Q(F)$ tel que $\vec{f} \subset q.\vec{A}$. En particulier, il existe un appartement contenant F dont l'appartement directeur contient $\vec{f}$.*

Démonstration: Soit $g \in G$ tel que $\vec{f} \subset g.\vec{A}$. Soit T le tore maximal tel que $A = A(T)$. Par le corollaire précédent, $g \in Q(F)N(T)P(g^{-1}\vec{f})$. Soit $g = qnp$ une écriture de g correspondante. Alors $\vec{f} \subset q.\vec{A}$. □

11.4.2 Unicité

Lorsque Q vérifie (para *dec*) pour une facette F, on prouve un résultat d'unicité pour le facteur dans N pour toute décomposition d'Iwasawa faisant intervenir F.

Proposition 11.4.5. *Soient $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}$ et F une facette de A, $F' \subset \overline{A}$ un élément du filtre F. Soient $n, n' \in N$ tels que $U(\vec{C}).n.G(F') \cap U(\vec{C}).n'.G(F') \neq \emptyset$. On suppose de plus que $\vec{f} \subset n\overline{\vec{C}}$ ou $\vec{f} \subset n'\overline{\vec{C}}$, ou $\vec{f}$ est la direction de la façade de F.*

Pour tout $a \in F'$, si Q vérifie (para dec)(a), alors $n^{-1}n' \in N(a)$. Autrement dit, le facteur dans N dans la décomposition de Lévi est unique modulo $N(a)$.

En particulier, si Q vérifie (para dec)(a) pour tout $a \in F'$, alors $n^{-1}n' \in N(F)$.

Démonstration:
Soit $a \in F'$ tel que Q vérifie (para *dec*)(a). On a $n' \in U(\vec{C}).n.Q(F')$, d'où $n^{-1}n' \in U(n^{-1}\vec{C})\ .\ Q(F') \subset U(n^{-1}\vec{C})\ .\ Q(a) = U(n^{-1}\vec{C})\ .\ (U(-n^{-1}\vec{C}) \cap Q(a))\ .\ N(a)$ par (para *dec*)(a). Donc il existe $n_a \in N(a)$ tel que $n^{-1}n'n_a \in U(n^{-1}\vec{C})\ .\ U(-n^{-1}\vec{C})$. Par unicité du facteur de N dans la décomposition de Birkhoff vectorielle, on obtient $n^{-1}n'n_a = e$. □

En fait, l'unicité modulo $N(a)$ d'un facteur $n \in N$ dans la décomposition d'Iwasawa $G = U(\vec{C}).N.Q(a)$, avec $\vec{f} \subset n\overline{\vec{C}}$, équivaut à l'égalité : $N \cap U(n^{-1}\vec{C}).Q(a) = N(a)$. Nous avons juste vérifié que cette dernière est conséquence de (para *dec*)(a). Nous verrons plus loin (11.7.6) qu'elle est également vraie lorsque Q est une bonne famille de parahoriques.

Corollaire 11.4.6. *Soit $a \in A$. Soit $\mathcal{Q}$ une famille de parahoriques vérifiant (para dec)(a) fonctoriellement. Alors pour tout sous-groupe Δ de $\mathbb{R}$, $G \cap N^\Delta(\vec{f}_a).Q^\Delta(a) = N(\vec{f}_a).(G \cap Q^\Delta(a))$.*

Et donc si $\mathcal{Q}$ vérifie en outre (fonc)(a), alors $G \cap N^\Delta.Q^\Delta(a) = N.Q(a)$.

Démonstration: Soit $g = u.n.p$ une écriture de g dans la décomposition d'Iwasawa $G = U(\vec{C})\ .\ N\ .\ Q(a)$, pour $\vec{C}$ une chambre de $\vec{f}_a^* \cap \vec{A}$. Comme $P(a) \subset P^\Delta(a)$, $N \subset N^\Delta$, et $U(\vec{C}) \subset U^\Delta(\vec{C})$, c'est aussi une écriture de g dans $G^\Delta = U^\Delta(\vec{C})\ .\ N^\Delta\ .\ Q^\Delta(a)$.

Par ailleurs, soit $g = n^\Delta.q^\Delta$ une écriture venant de l'hypothèse $g \in N^\Delta(\vec{f}_a).Q^\Delta(a)$. Par la proposition précédente, $n.N^\Delta(a) = n^\Delta.N^\Delta(a)$. Donc $g \in n.Q^\Delta(a)$, puis $g \in n.(Q^\Delta(a) \cap G)$, ce qui vaut $n.Q(a)$ si (fonc)(a) est vrai. □

Remarque: Le même raisonnement permettra la même conclusion lorsqu'on étudiera un groupe presque déployé par descente galoisienne.

11.5 Décomposition de Bruhat/Birkhoff

Proposition 11.5.1. *Soient F_1 et F_2 deux facettes d'un appartement $A(T)$. On suppose qu'au moins une des deux est sphérique. Alors $G = U(\vec{f_1})G(F_1)N(T)G(F_2)U(\vec{f_2})$, où $\vec{f_1}$, respectivement $\vec{f_2}$, est la direction de la façade de F_1, respectivement F_2.*

Remarque: En fait, l'hypothèse minimale sur les facettes F_1 et F_2 pour que la décomposition soit vraie, et prouvée par la preuve à suivre est : si $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ sont les directions des façades de F_1 et F_2, alors pour tout $w \in W(\vec{A}(T))$, $\phi^m(\vec{f_1} \cup w\vec{f_2})$ est fini.

Démonstration:
On fixe $g \in G$. Pour cette preuve, l'appartement par défaut est $A(T)$, c'est-à-dire qu'on notera N pour $N(T)$, $M(f)$ pour $M_{A(T)}(f)$ ... .

Par la décomposition d'Iwasawa de G, $g \in P(\vec{f_1})\ .\ N\ .\ G(F_2) = U(\vec{f_1}).M(\vec{f_1})\ .\ N\ .\ G(F_2)$. Comme $U(\vec{f_2})$ est normalisé par $G(F_2)$, on peut supposer qu'il existe $n \in N$ tel que $g \in M(\vec{f_1})\ .\ n$.

On utilise alors la décomposition d'Iwasawa dans $M(\vec{f_1})$, avec la facette affine F_1 et la facette vectorielle $pr_{\vec{f_1}}(n\vec{f_2})$. Le sous-groupe parabolique de $M(\vec{f_1})$ fixant cette facette vectorielle est le groupe engendré par les U_α avec $\alpha \in \phi^m(\vec{f_1}) \cap \phi(n\vec{f_2}) = \phi(\vec{\Omega})$, en notant $\vec{\Omega} = \text{conv}(\vec{f_1} - \vec{f_1} + n\vec{f_2})$. Donc $M(\vec{f_1}) = (G(F_1) \cap M(\vec{f_1}))\ .\ N(\vec{f_1})\ .\ P(\vec{\Omega})$. Notons que $\vec{\Omega}$ est équilibrée, car les deux facettes $pr_{\vec{f_1}}(\vec{f_2})$ et $pr_{-\vec{f_1}}(\vec{f_2})$ sont sphériques, incluses dans $\vec{\Omega}$, et de signes opposés. Donc $P(\vec{\Omega}) = M(\vec{\Omega}) \ltimes U(\vec{\Omega}) \subset M(\vec{\Omega}) \ltimes U(n\vec{f_2})$. Ainsi,

$$g \in G(F_1)\ .\ N(\vec{f_1})\ .\ M(\vec{\Omega})\ .\ U(n\vec{f_2}).n = G(F_1)\ .\ N(\vec{f_1})\ .\ M(\vec{\Omega})\ .\ n.U(\vec{f_2})$$

On peut donc supposer qu'il existe $n_1 \in N(\vec{f_1})$ tel que :

$$g \in n_1.M(\vec{\Omega}).n$$

Les facettes nF_2 et $n_1^{-1}F_1$ se projettent sur $A_{\vec{\Omega}}$. Et par la décomposition de Bruhat dans le groupe muni d'une donnée radicielle valuée finie $M(\vec{\Omega})$, on a $M(\vec{\Omega}) = G(\phi^m(\vec{\Omega}), pr_{\vec{\Omega}}(n_1^{-1}F_1))\ .\ N(\vec{\Omega})\ .\ G(\phi^m(\vec{\Omega}), pr_{\vec{\Omega}}(nF_2))$. Enfin, sachant que pour toute partie F de A_Ω, $G(\phi^m(\vec{\Omega}), F) \subset G(\left\langle F, \text{Vect}(\vec{\Omega}) \right\rangle_A)$, on arrive à

$$M(\vec{\Omega}) \subset G(n_1^{-1}F_1)\ .\ N(\vec{\Omega})\ .\ G(nF_2)$$

, puis :

$$g \in n_1G(n_1^{-1}F_1)\ .\ N(\vec{\Omega})\ .\ G(nF_2)n = G(F_1)\ .\ n_1N(\vec{\Omega})n\ .\ G(F_2) \subset G(F_1)\ .\ N\ .\ G(F_2)$$

□

Corollaire 11.5.2. *Pour toute famille Q de parahoriques, pour toutes facettes F_1 et F_2 d'un appartement $A(T)$, si l'une des deux est sphérique, alors :*

$$G = Q(F_1)\ .\ N(T)\ .\ Q(F_2)\ .$$

Corollaire 11.5.3. *Pour toute famille Q de parahoriques, pour toutes facettes F_1 et F_2 de $\mathcal{I}(Q)$, si l'une des deux est sphérique, alors il existe un appartement contenant $F_1 \cup F_2$.*

Démonstration: Soit $A(T)$ un appartement contenant F_1, soit $g \in G$ tel que $F_2 \subset g.A(T)$. Par la décomposition de Bruhat/Birkhoff, $G = Q(F_1)\ .\ N(T)\ .\ Q(g^{-1}F_2)$. Soit $g = q_1nq_2$ l'écriture correspondante de g. Alors $F_1 \cup F_2 \subset q_1.A(T)$. □

11.6 Construction de familles vérifiant (para *dec*)

Lemme 11.6.1. *Soit $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}$, $\vec{m}$ une cloison de $\vec{C}$, et $a \in A$ tel que $\vec{f_a} \subset \overline{\vec{m}}$. Soit $\alpha \in \phi$ la racine telle que $\alpha(\vec{C}) > 0$ et $\alpha(\vec{m}) = 0$. Pour toute famille Q de parahoriques vérifiant (para sph) et (para 2.1)($\vec{m}$) on a :*

$$Q(a) \cap U(\vec{C}) = (Q(a) \cap U(\vec{m})) \rtimes U_\alpha(a) \ .$$

Preuve du lemme: Soit $g \in Q(a) \cap U(\vec{C})$. On sait par le lemme 11.4.1 que $U(\vec{C}) = U(\vec{m}) \rtimes U_\alpha$, il existe donc une décomposition $g = u.u_\alpha$ avec $u \in U(\vec{m})$ et $u_\alpha \in U_\alpha$. Comme $U(\vec{C}) \subset P(\vec{m})$, on a $g \in Q(a) \cap P(\vec{m}) = Q(\{a, pr_{\vec{m}}(a)\})$ par (para 2.1)($\vec{m}$). Le facteur $u \in U(\vec{m})$ fixe toute la façade $A_{\vec{m}}$, on en déduit que $u_\alpha \in U_\alpha \cap P(pr_{\vec{m}}(a))$, c'est-à-dire $u_\alpha \in U_\alpha(a)$. En particulier, u_α fixe a, donc u aussi : $u \in U(\vec{m}) \cap Q(a)$. □

Proposition 11.6.2. *Soit ϵ un signe, soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para sph) et (para 2.1)($\vec{m}$) pour toute cloison $\vec{m}$ de signe ϵ. On suppose que la famille minimale P vérifie aussi (para*2.1)($\vec{m}$) *pour toute cloison $\vec{m}$. Alors pour tout $a \in A^\epsilon$ et toute chambre $\vec{C}$ de $\vec{f_a^*} \cap \vec{A}^\epsilon$, l'ensemble :*

$$R(a) = \left(Q(a) \cap U(\vec{C})\right) \ . \ \left(P(a) \cap U(-\vec{C})\right) \ . \ N(a)$$

est un sous-groupe de $Q(a)$ contenant $P(a)$. Il est en outre indépendant de la chambre $\vec{C}$ de $\vec{f_a^*} \cap \vec{A}^\epsilon$ choisie.

Si on définit en outre $R(a) = Q(a)$ pour tout $a \in A \setminus A^\epsilon$, on obtient une famille de parahoriques R incluse dans Q et vérifiant (para dec) pour les chambres de signe ϵ.

Démonstration:
Supposons $\epsilon = +$. Soit $a \in A$ et $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}^+$, notons $R_{\vec{C}}(a) = \left(Q(a) \cap U(\vec{C})\right) \ . \ \left(P(a) \cap U(-\vec{C})\right) \ . \ N(a)$.

Commençons par montrer que $R_{\vec{C}}(a)$ est indépendant de la chambre $\vec{C}$ de $\vec{f_a^*}$: il suffit de prouver que $R_{\vec{C}}(a) = R_{r_\alpha \vec{C}}(a)$ pour toute racine simple α de $\phi(\vec{C}) \cap \phi^m(\vec{f_a})$. Soit α une telle racine, et $\vec{m}_\alpha$ la cloison de $\vec{C}$ correspondante. D'après le lemme précédent, $Q(a) \cap U(\vec{C}) = (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)) \ . \ U_\alpha(a)$ et de même $P(a) \cap U(-\vec{C}) = (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)) \rtimes U_{-\alpha}(a)$. De plus, $U_\alpha(a)$ normalise $P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} R_{\vec{C}}(a) &= (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)) \ . \ U_\alpha(a) \ . \ (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)) \ . \ U_{-\alpha}(a) \ . \ N(a) \\ &= (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)) \ . \ (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)) \ . \ U_\alpha(a).U_{-\alpha}(a) \ . \ N(a) \end{aligned}$$

L'ensemble $U_\alpha(a).U_{-\alpha}(a)$ est inclus dans le groupe avec donnée radicielle valuée finie $M(\vec{m}_\alpha)$. Il est même inclus dans le fixateur $\mathrm{Fix}_{M(\vec{m}_\alpha)}(pr_{\vec{m}_\alpha}(a))$ du point $pr_{\vec{m}_\alpha}(a)$ de $\mathcal{I}_{\vec{m}_\alpha}$, l'immeuble de Bruhat-Tits de $M(\vec{m}_\alpha)$. Or ce fixateur est égal à $U_\alpha(a).U_{-\alpha}(a).(N(a) \cap M(\vec{m}_\alpha)) = U_{-\alpha}(a).U_\alpha(a).(N(a) \cap M(\vec{m}_\alpha))$ d'après [BT72]. Donc $U_\alpha(a).U_{-\alpha}(a) \subset U_{-\alpha}(a).U_\alpha(a).N(a)$ et finalement :

$$\begin{aligned} R_{\vec{C}}(a) &= (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)) \ . \ (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)) \ . \ U_{-\alpha}(a).U_\alpha(a).N(a) \\ &= (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)).U_{-\alpha}(a) \ . \ (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)).U_\alpha(a) \ . \ N(a) \end{aligned}$$

Or $\phi(r_\alpha \vec{C}) = (\phi(\vec{C}) \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\alpha\}$ et similairement pour $\phi(-r_\alpha \vec{C})$, donc le lemme précédent indique que $(Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)).U_{-\alpha}(a) = Q(a) \cap U(r_\alpha \vec{C})$ et $(P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)).U_\alpha(a) = P(a) \cap U(r_\alpha \vec{C})$. Nous avons bien prouvé que $R_{\vec{C}}(a) = R_{r_\alpha \vec{C}}(a)$.

On peut maintenant noter $R(a)$ au lieu de $R_{\vec{C}}(a)$. Pour montrer qu'il s'agit d'un groupe, il suffit de montrer qu'il est stable par multiplication à gauche par $G(a)$ et par $N(a)$. Commençons par la stabilité par multiplication par $G(a)$. Comme $G(a) = U(\vec{f_a}).\left\langle \left\{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f_a})\right\} \right\rangle$, il suffit de voir la stabilité sous la multiplication par $U(\vec{f_a})$ et par les $U_\alpha(a)$, $\alpha \in \phi^m(\vec{f_a})$. Pour tout $\alpha \in \phi^m(\vec{f_a})$, il existe une chambre $\vec{C} \subset \vec{f_a^*}$ positive telle que $\alpha \in \phi(\vec{C})$. Alors $U_\alpha(a) \subset Q(a) \cap U(\vec{C})$ d'où $U_\alpha(a).R(a) \subset R(a)$. Passons à $U(\vec{f_a})$: pour n'importe quelle chambre $\vec{C}$ de $\vec{f_a^*}$, on a $U(\vec{f_a}) \subset Q(a) \cap U(\vec{C})$, d'où $U(\vec{f_a}).R(a) \subset R(a)$.

Pour finir, soit $n \in N(a)$, fixons $\vec{C}$ une chambre positive. Alors $n.R(a) = n.R_{\vec{C}}(a) = n(Q(a) \cap U(\vec{C}))\ .\ (P(a) \cap U(-\vec{C}))\ .\ N(a) = (Q(a) \cap U(n\vec{C}))\ .\ (P(a) \cap U(-n\vec{C}))\ .\ nN(a) = R_{n\vec{C}}(a) = R(a)$.

Ceci prouve que $R(a)$ est un groupe. Il est clair que $P(a) \subset R(a) \subset Q(a)$, et ceci entraine immédiatement que $(R(a))_{a\in A}$ est une famille de parahoriques. De plus, pour toute chambre $\vec{C}$ positive, $Q(a) \cap U(\vec{C}) = R(a) \cap U(\vec{C})$ et $P(a) \cap U(-\vec{C}) \subset R(a) \cap U(\vec{C})$ donc R vérifie (para *dec*)($\vec{C}$). □

Remarque: Ceci et la proposition 11.2.11 prouvent que pour la famille minimale de parahoriques P, les conditions (para 2.1)(sph) fonctorielle (et même (para 2.1) fonctoriel sur les cloisons) et (para *dec*) fonctorielle sont équivalentes, car pour $Q = P$, on obtient $R = P$, quel que soit le signe ϵ choisi.

Corollaire 11.6.3. *S'il existe une famille de parahoriques vérifiant (para sph) et (para 2.1)($\vec{m}$) pour chaque cloison $\vec{m}$, alors la famille minimale P vérifie (para dec).*

Démonstration: Pour toute cloison $\vec{m}$, le fait que Q vérifie (para *sph*) et (para 2.1)($\vec{m}$) entraine que P vérifie aussi (para 2.1)($\vec{m}$), nous sommes donc bien dans les conditions d'application de la proposition.

Soit $a \in A$, soit $\vec{C}$ une chambre de $\vec{f}_a^* \cap \vec{A}$. Soit ϵ le signe de $\vec{C}$. Soit R^ϵ la famille de parahoriques construite par la proposition, alors $R^\epsilon(a) = (Q(a) \cap U(\vec{C})).(P(a) \cap U(-\vec{C})).N(a)$. Prenant l'intersection avec $P(a)$, il vient $P(a) = P(a) \cap R^\epsilon(a) = (P(a) \cap U(\vec{C})).(P(a) \cap U(-\vec{C})).N(a)$. □

11.7 Bonnes familles de parahoriques

11.7.1 Une condition suffisante pour (para 2.2)

Nous avons déjà vu au 11.2.13 que la condition (para *dec*) fonctorielle implique (para *inj*), (para *sph*) et (para 2.1)(sph). Nous pouvons maintenant, grâce à la décomposition d'Iwasawa, prouver qu'elle implique également (para 2.2)(sph), autrement dit que toute famille vérifiant (para *dec*) fonctoriellement est une bonne famille de parahoriques.

Proposition 11.7.1.

1. *Soit Q une famille de parahoriques qui vérifie (para dec) fonctoriellement. Alors Q vérifie (para 2.2)(sph) (fonctoriellement).*
2. *Soit $\vec{f}$ une facette telle que Q vérifie (para 2.2)($\vec{f}$). On suppose de plus que Q vérifie (para inj). Alors Q vérifie (para 2.1)($\vec{f}$). En particulier, toute bonne famille de parahoriques vérifie (para 2.1)(sph).*

Remarque: Les conditions du deuxième point sont plutôt plus faibles que celles du premier point, et sa preuve plus simple, on peut donc considérer la condition (para 2.1) comme plus faible que (para 2.2).

Démonstration:

1. Rappelons que Q vérifie (para *sph*), (para 2.1) et (para *inj*) par la proposition 11.2.11. Soit $a \in A$ et $\vec{f}$ une facette sphérique dans $\vec{f}_a^*$. Soit $g \in N.Q(a) \cap N.P(\vec{f})$, on peut supposer $g \in Q(a) \cap N(\vec{f}_a).P(\vec{f})$. Grâce à (fonc), soit Δ tel que a est spécial dans A^Δ, puis soit $n \in N^\Delta(a)$ tel que $ng \in P^\Delta(\vec{f})$. Comme Q vérifie fonctoriellement (para 2.1)($\vec{f}$) puis (para *sph*), on a $ng \in Q^\Delta(a) \cap P^\Delta(\vec{f}) = Q^\Delta(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\}) \subset P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a))$. D'où $g \in N^\Delta(a).P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) \cap G$. Le point $pr_{\vec{f}}(a)$ étant sphérique, la famille Q vérifie (fonc)($pr_{\vec{f}}(a)$) (par 11.2.8, 5) et (para *dec*)($pr_{\vec{f}}(a)$) (grâce à 11.2.3, 6). Par le corollaire 11.4.6, puis la proposition 11.2.3, 1, on obtient $g \in Q(a) \cap N.P(pr_{\vec{f}}(a)) = Q(a) \cap N.U(\vec{f}).G(\phi^m(\vec{f}), a)$. Comme $G(\phi^m(\vec{f}), a) \subset Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$, on peut supposer $g \in Q(a) \cap NU(\vec{f})$.

   Soit $\vec{C}$ une chambre dont l'adhérence contient $\vec{f}$. Soit $g = nu$ une écriture de g correspondant à $g \in N.U(\vec{f})$ et $g = n'u^{-\epsilon}u^\epsilon$ une écriture correspondant à $g \in Q(a) = N(a).(U(-\vec{C}) \cap Q(a)).(U(\vec{C}) \cap Q(a))$ (obtenue par (para *dec*)(a)). Alors $n^{-1}n' = u(u^\epsilon)^{-1}(u^{-\epsilon})^{-1}$. Et $u(u^\epsilon)^{-1} \in U(\vec{C})$. Donc par l'unicité dans la décomposition de Birkhoff vectorielle de G, on obtient $u = u^\epsilon \in U(\vec{f}) \cap Q(a) \subset Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$. Donc $g = nu \in N.Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$.

2. Soit $g \in Q(a) \cap P(\vec{f})$. D'après (para 2.2)$(\vec{f})$, on a alors $g \in N.Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$. Soit $g = nq$ l'écriture correspondante, on a $a = g.a = n.a$, d'où $n \in Q(a) \cap N = N(a)$ grâce à (para $\overline{inj}$). De même, $\vec{f} = g.\vec{f} = n.\vec{f}$ d'où $n \in N(\vec{f})$. Mais comme N agit de manière affine sur A, $n \in N(a) \cap N(\vec{f}) = N(a + \vec{f}) \subset Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$.

□

Corollaire 11.7.2. *Toute famille de parahoriques $\mathcal{Q}$ vérifiant fonctoriellement (para dec) vérifie fonctoriellement (para sph), (para inj), (para 2.1)(sph) et (para 2.2)(sph), c'est donc une bonne famille de parahoriques.*

C'est en particulier le cas pour la famille minimale de parahoriques dans un groupe de Kac-Moody déployé.

Démonstration: C'est une conséquence du corollaire 11.2.13 et de la proposition ci-dessus. □

11.7.2 Projections

La condition (para 2.2)$(\vec{f})$ entraine que la projection $pr_{\vec{f}}(a)$ est bien définie dans $\mathcal{I}$, dès que $\vec{f}_a \subset \overline{\vec{f}}$, indépendamment de l'appartement contenant a et $\vec{f}$ considéré. Ainsi, dans une bonne famille de parahoriques, la conjonction de (para 2.2)(sph) et de (para sph) permettra souvent de ramener une preuve à une étude dans une façade sphérique, donc dans un immeuble affine, bien connu grâce à [BT72].

Proposition 11.7.3. *Si $\mathcal{Q}$ vérifie (para 2.2)$(\vec{f})$, alors la projection $pr_{\vec{f}}$ est bien définie sur la réunion des $A(T)_{\vec{g}}$ tels que $\vec{f} \cup \vec{g} \subset \vec{A}(T)$ et $\vec{g} \subset \overline{\vec{f}}$. Pour tout $g \in G$, on a $g.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g\vec{f}}(g.a)$.*

Démonstration:

Soit a dans une façade $A(T)_{\vec{g}}$ telle que $\vec{f} \cup \vec{g} \subset \vec{A}(T)$ et $\vec{g} \subset \overline{\vec{f}}$. Soit T_0 un tore maximal de référence, soit $g \in G$ tel que $g.A(T) = A(T_0)$. Alors $g.\vec{f}$ et $g.\vec{g}$ sont deux facettes de $\vec{A}(T_0)$ telles que $g.\vec{g} \subset \mathrm{Vect}_{\vec{A}(T_0)}(g.\vec{f})$ donc la projection $pr_{g\vec{f}}(ga)$ est bien définie dans $A(T_0)$. On veut poser $pr_{\vec{f}}(a) = g^{-1}(pr_{g\vec{f}}(ga))$, il s'agit de vérifier que ceci est indépendant de T et de g.

Soient donc T' et g' d'autres choix possibles. Alors $g'g^{-1}$ envoie ga et $g\vec{f}$ sur un autre point de $A(T_0)$ et une autre facette de $\vec{A}(T_0)$. Donc $g'g^{-1} \in N(T_0)Q(ga) \cap N(T_0)P(g\vec{f})$. Ceci vaut $N(T_0)Q(\{ga, pr_{g\vec{f}}(ga)\})$ par (para 2.2)$(g\vec{f})$. Soit $n \in N(T_0)$ tel que $g'g^{-1} \in n.Q(\{ga, pr_{g\vec{f}}(ga)\})$. Alors $g'g^{-1}(pr_{g\vec{f}}(ga)) = n(pr_{g\vec{f}}(ga)) = pr_{ng\vec{f}}(nga) = pr_{g'\vec{f}}(g'a)$. Ceci prouve que $g^{-1}(pr_{g\vec{f}}(ga)) = (g')^{-1}(pr_{g'\vec{f}}(g'a))$. □

11.7.3 Conséquences variées

On rassemble ici quelques petits résultats obtenus au moyen des projections pour une bonne famille de parahoriques.

On peut dans une certaine mesure caractériser un point de $\mathcal{I}$ par ses projetés dans diverses façades. Par exemple, on prouve le :

Lemme 11.7.4. *Soit $\vec{f}$ une facette de $\vec{A}$, et $\mathcal{Q}$ une famille de parahoriques vérifiant (para sph) et (para 2.2)$(\vec{m})$ pour toute cloison $\vec{m}$ de $\overline{\vec{f}^*} \cap \vec{A}$. Alors pour tout $u \in U(\vec{f})$, pour tout $a \in A$ tel que $\vec{f} \subset \vec{f}^*_a$, ou $u.a = a$, ou bien $u.a \notin A$.*

En terme de groupes, ceci s'écrit $U(\vec{f}) \cap N.Q(a) \subset Q(a)$.

Preuve du lemme: Soit $a \in A$, supposons $u.a \in A$. Soit $\vec{m}$ une cloison de $\overline{\vec{f}^*} \cap \vec{A} \cap \vec{f}^*_a$, alors $u \in P(\vec{m})$, donc $u.pr_{\vec{m}}(a) = pr_{\vec{m}}(u.a) \in A_{\vec{m}}$. Ainsi u envoie le point $pr_{\vec{m}}(a)$ sur un autre point de l'appartement $A_{\vec{m}}$. Sachant que u fixe

par ailleurs un cône ouvert de $A_{\vec{m}}$ (c'est-à-dire une demi-droite, puisque $\dim(A_{\vec{m}}) = 1$), et que $\mathcal{I}_{\vec{m}}$ est un immeuble affine (en fait un arbre), ceci entraine que $u.pr_{\vec{m}}(a) = pr_{\vec{m}}(a)$, d'où $pr_{\vec{m}}(u.a) = pr_{\vec{m}}(a)$.

Donc a et $u.a$ sont deux points de A dont les projetés sur tous les $A_{\vec{m}}$, pour $\vec{m}$ une cloison de $\overline{\vec{f}^*} \cap \vec{A} \cap \vec{f}_a^*$ coïncident. Ceci entraine que $\overrightarrow{a\,u(a)}$ est dans l'intersection de ces $\vec{m}$. Mais celle-ci est triviale dans $A_{\vec{f}_a}$. □

Voici la première conséquence de ce lemme :

Proposition 11.7.5. *Toute famille de parahoriques vérifiant (para sph), (para inj), (para 2.1)($\vec{m}$) et (para 2.2)($\vec{m}$) pour toute cloison $\vec{m}$ vérifie aussi (para dec).*

Remarque: grâce à 11.7.1, on peut remplacer l'hypothèse (para 2.1)($\vec{m}$) par (para *inj*).

Démonstration:
Soit $a \in A$ et $\vec{C} \in \mathcal{F}(\vec{f}_a^* \cap \vec{A})$. Par la décomposition d'Iwasawa, $G = U(\vec{C}).N.P(a)$. Prenant l'intersection avec $Q(a)$, il vient $Q(a) = (U(\vec{C}).N \cap Q(a)).P(a)$. Mais le lemme entraine facilement (avec (para *inj*)) que $U(\vec{C}).N \cap Q(a) = (U(\vec{C}) \cap Q(a)).N(a)$. D'où $Q(a) = (U(\vec{C}) \cap Q(a)).P(a)$.
Maintenant, P vérifie (para *dec*) par le corollaire 11.6.3, donc $P(a) = (U(\vec{C}) \cap P(a)).(U(-\vec{C}) \cap P(a)).N(a) \subset (U(\vec{C}) \cap Q(a)).(U(-\vec{C}) \cap Q(a)).N(a)$. D'où le résultat : $Q(a) = (U(\vec{C}) \cap Q(a)).(U(-\vec{C}) \cap P(a)).N(a) \subset (U(\vec{C}) \cap Q(a)).(U(-\vec{C}) \cap Q(a)).N(a)$. □

Remarque: Le résultat obtenu est même un peu plus fort : on a vu que $Q(a) = (U(\vec{C}) \cap Q(a)).(U(-\vec{C}) \cap P(a)).N(a)$.

Vu le corollaire 11.7.2 et la proposition 11.2.12, dans le cas où la donnée radicielle est fonctorielle, on a donc pour toute famille de parahoriques Q équivalence entre les assertions suivantes :
- Q est fonctoriellement une bonne famille de parahoriques.
- Q vérifie fonctoriellement (para *dec*).
- Q vérifie fonctoriellement (para *sph*), (para 2.1)($\vec{m}$) et (para 2.2)($\vec{m}$) pour toute cloison $\vec{m}$.
- Q vérifie fonctoriellement (para *sph*), (para *inj*), et (para 2.2)($\vec{m}$) pour toute cloison $\vec{m}$.

Pour une famille Q vérifiant (para *sph*), (para *inj*), et (para 2.2) pour les cloisons, le lemme implique aussi l'égalité $N \cap U(\vec{C}).Q(a) = N(a)$, pour toute chambre $\vec{C}$ de $\vec{A}$ et tout point $a \in A$ tels que $\vec{f}_a \in \overline{\vec{C}}$. Et ceci permet, comme en 11.4.5, de prouver l'unicité modulo $N(a)$ du facteur dans N de la décomposition d'Iwasawa :

Proposition 11.7.6. *Soit Q une bonne famille de parahoriques. Soient $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}$ et $a \in A$. Alors $N \cap U(\vec{C}).Q(a) = N(a)$ si $\vec{f}_a \subset \overline{\vec{C}}$.*

En conséquence, pour tous $n, n' \in N$ tels que $\vec{f}_a \subset n\overline{\vec{C}}$ ou $\vec{f}_a \subset n'\overline{\vec{C}}$, on a :

$$U(\vec{C}).n.Q(a) \cap U(\vec{C}).n'.Q(a) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; n^{-1}n' \in N(a) \;\Rightarrow\; U(\vec{C}).n.Q(a) = U(\vec{C}).n'.Q(a).$$

Démonstration: Le premier point découle du lemme 11.7.4, la suite est immédiate (voir la partie 11.4.2). □

Proposition 11.7.7. *On suppose que Q vérifie (para 2.2)($\vec{m}$) pour toute cloison $\vec{m}$. Soit $\psi = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \subset \phi^u(\vec{C})$ un ensemble réduit de racines, rangées dans un ordre grignotant. (Ceci signifie que pour tout i, $\ker(\alpha_i)$ contient une cloison incluse dans l'intérieur de $\bigcap_{j>i} \mathcal{D}(\alpha_j)$, voir par exemple [Ré02] 9.1.2).*
Soit $u = u_1...u_k$ avec $u_i \in U_{\alpha_i}$. Alors :

$$\mathrm{Fix}_A(u) = \bigcap_i \mathrm{Fix}(u_i) = \bigcap_i \mathcal{D}(\alpha_i, \varphi_{\alpha_i}(u_i))$$

Démonstration:
La seconde égalité vient de 11.3.10. Pour la première, l'inclusion "$\supset$" est claire.

Soit $a \in \mathrm{Fix}_A(u)$. Par hypothèse, il existe une cloison $\vec{m}_1$, incluse dans $\ker(\alpha_1)$ et dans l'intérieur de $\bigcap_{j>1} \mathcal{D}(\alpha_j)$. Ainsi, $u \in P(\vec{m}_1)$, et pour tout $j > 1$, u_j fixe $A_{\vec{m}_1}$. Donc u agit sur $A_{\vec{m}_1}$ comme u_1. Par la proposition 11.7.3, u et u_1 fixent le point $pr_{\vec{m}_1}(a)$. Ceci entraine $u_1 \in U_{\alpha_1}(pr_{\vec{m}_1}(a)) = U_{\alpha_1}(a)$.

Maintenant l'élément $u_1^{-1}u = u_2...u_k$ fixe a et est le produit de $k-1$ éléments de groupes radiciels dans un ordre grignotant, par récurrence on obtient que pour tout $i \in [\![2, k]\!]$, $u_i \in U_{\alpha_i}(a)$.

D'où $u \in U_{\alpha_1}(a)...U_{\alpha_k}(a)$ et $a \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Fix}(u_i)$. □

11.7.4 Décomposition de Lévi

La proposition suivante donne dans certains cas une décomposition de Lévi pour $Q(\Omega)$:

Proposition 11.7.8. *Soit $\vec{f}$ une facette sphérique de $\vec{A}$, soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para 2.1)($\vec{f}$) et (para 2.2)($\vec{m}$) pour chaque cloison $\vec{m}$ de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$. Soit Ω une partie de A telle que $Cl(\vec{\Omega}) = \overline{\vec{f}}$. Alors :*

$$\begin{aligned} Q(\Omega) &= \left(U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)\right) \rtimes \left(N(\Omega).G\left(\phi^m(\vec{f}), \Omega\right)\right) \\ &= \left(U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)\right) \rtimes Q\left(\left\langle \Omega, \vec{f} \right\rangle_A\right) . \end{aligned}$$

Démonstration:
Il est clair que $\left(U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)\right) \rtimes \left(N(\Omega).G\left(\phi^m(\vec{f}), \Omega\right)\right) \subset \left(U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)\right) \rtimes Q\left(\left\langle \Omega, \vec{f} \right\rangle_A\right) \subset Q(\Omega)$.

Soit $g \in Q(\Omega)$. Notons $\Omega_{\vec{f}} = pr_{\vec{f}}(\Omega)$, d'après (para 2.1)($\vec{f}$), $g \in Q(\Omega_{\vec{f}})$. D'après 11.2.3, 2, on a $g \in U(\vec{f}) \rtimes \left(N(\Omega_{\vec{f}}).G(\phi^m(\vec{f}), \Omega_{\vec{f}})\right)$. Mais $G(\phi^m(\vec{f}), \Omega_{\vec{f}}) = G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)$, on peut donc supposer $g \in (U(\vec{f}).N(\Omega_{\vec{f}})) \cap Q(\Omega)$. Maintenant, le lemme 11.7.4 entraine $g \in (U(\vec{f}) \cap Q(\Omega))\ .\ N(\Omega)$. □

Cette proposition permet, pour prouver que Q vérifie (para 2.1^+)($\vec{f}$), de se ramener à l'étude de $U(\vec{f}) \cap Q(a)$, comme l'indique le corollaire suivant :

Corollaire 11.7.9. *Soit Q une famille de parahoriques vérifiant les hypothèses de la proposition. Si a est un point d'une façade $A_{\vec{g}}$ avec $\vec{g} \subset \overline{\vec{f}}$, alors :*

$$\begin{aligned} Q(a) \cap P(\vec{f}) &= \left(U(\vec{f}) \cap Q(a)\right) \rtimes \left(N(a + \vec{f}).G\left(\phi^m(\vec{f}), a\right)\right) \\ &= \left(U(\vec{f}) \cap Q(a)\right) \rtimes Q\left(\left\langle a, \vec{f} \right\rangle_A\right) . \end{aligned}$$

Démonstration: Ayant remarqué que $Q(a) \cap P(\vec{f}) = Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$, on applique la proposition à $\Omega = \{a, pr_{\vec{f}}(a)\}$.□

Nous avons ainsi obtenu une décomposition de Lévi pour le groupe $Q(\Omega)$ lorsque $Cl(\vec{\Omega})$ est l'adhérence d'une facette $\vec{f}$ sphérique. Cette décomposition repose sur la décomposition de Lévi vectorielle de $P(\vec{f})$. Il y a un autre cas où on dispose d'une décomposition de Lévi vectorielle : c'est pour le fixateur d'une partie $\vec{\Omega}$ équilibrée (c'est-à-dire une union finie de facettes sphériques dont au moins une est positive et une négative). Ceci fournit naturellement une décomposition des groupes $Q(\Omega)$ correspondants. De plus, dans le cas équilibré on dispose d'une bonne description du facteur unipotent.

Proposition 11.7.10. *Soit Ω une partie de A contenant au moins un point sphérique positif et un point sphérique négatif. On suppose que Q est une bonne famille de parahoriques. Alors :*

$$Q(\Omega) = U(\Omega) \rtimes \left(M(\vec{\Omega}) \cap Q(\Omega)\right)$$

avec :

$$U(\Omega) \quad := \quad G(\phi^u(\vec{\Omega}), \Omega) = \prod_{\alpha \in \phi^u_{red}(\vec{\Omega})} U_\alpha(\Omega)$$
$$M(\vec{\Omega}) \cap Q(\Omega) \quad = \quad N(\Omega).G(\phi^m(\vec{\Omega}), \Omega) \ .$$

(Le produit dans $U(\Omega)$ peut s'effectuer dans n'importe quel ordre.)

Démonstration:

Soient $\vec{f}^+$ et $\vec{f}^-$ des facettes maximales de $\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}) \cap \vec{A}^+$ et $\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}) \cap \vec{A}^-$. Alors $\mathrm{Vect}(\vec{f}^+) = \mathrm{Vect}(\vec{f}^-) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}))$, donc $M(\vec{f}^+) = M(\vec{f}^-) = M(\mathrm{Cl}(\vec{\Omega})) = M(\vec{\Omega})$. De plus, $\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-$ est une partie équilibrée, donc son fixateur admet la décomposition de Lévi $P(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) = U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) \rtimes M(\vec{\Omega})$.

Soit $g \in Q(\Omega)$. En particulier, $g \in P(\vec{\Omega}) = P(\mathrm{Cl}(\vec{\Omega})) \subset P(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)$, donc $g \in Q(\Omega) \cap (U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) \rtimes M(\vec{\Omega}))$. Soient $u \in U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)$ et $m \in M(\vec{\Omega})$ tels que $g = um$. Montrons que u et m fixent Ω.

Soit $\omega \in \Omega$. Alors $\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega$ est une partie équilibrée, donc

$$P(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega) = U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega) \rtimes M(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega) = U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega) \rtimes M(\vec{\Omega}) \ .$$

Le groupe $U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega)$ fixe toute la façade $A_{\vec{f}_\omega}$, donc

$$g \in Q(\omega) \cap P(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega) = U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega) \rtimes \left(M(\vec{\Omega}) \cap Q(\omega)\right) \ .$$

Mais $U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega) \subset U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)$, donc $g = um$ est également l'écriture de g dans la décomposition de $Q(\omega) \cap P(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}_\omega)$ qu'on vient d'obtenir. En particulier, u et m fixent ω.

On a ainsi prouvé :

$$\begin{aligned} Q(\Omega) \quad &= \quad \left(\bigcap_{\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{\Omega})} U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^- \cup \vec{f}) \right) \rtimes \left(M(\vec{\Omega}) \cap Q(\Omega)\right) \\ &= \quad \left(U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) \cap Q(\Omega)\right) \rtimes \left(M(\vec{\Omega}) \cap Q(\Omega)\right) \ . \end{aligned}$$

Étudions le premier facteur. Comme $\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-$ sont deux facettes sphériques de signes opposés, on sait par [Ré02] 6.3.1 que $U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) = G(\phi^u(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)) = \prod_{\alpha \in \phi^u_{red}(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)} U_\alpha$, pour un ordre qu'on peut choisir grignotant sur $\phi^u_{red}(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)$ (car $\phi(T)$ est réduit). Alors la proposition 11.7.7 permet de montrer que :

$$Q(\Omega) \cap U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) = \prod_{\alpha \in \phi^u_{red}(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)} U_\alpha(\Omega) \ .$$

Mais si $\alpha \notin \phi^u(\vec{\Omega})$, alors $U_\alpha(\Omega) = \{e\}$. D'où finalement :

$$Q(\Omega) \cap U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) = \prod_{\alpha \in \phi^u_{red}(\vec{\Omega})} U_\alpha(\Omega) \ .$$

Passons à la description de $M(\vec{\Omega}) \cap Q(\Omega)$. Soit $m \in M(\vec{\Omega}) \cap Q(\Omega)$. Soit $\omega \in \Omega$. Soit $\vec{f} = pr_{\vec{f}_\omega}(\vec{f}^\epsilon)$, où ϵ est un signe de $\vec{f}_\omega$. Il s'agit d'un facette sphérique. Par (para 2.1)($\vec{f}$) puis 11.2.3, $m \in Q(pr_{\vec{f}}(\omega)) \cap M(\vec{\Omega}) = N(pr_{\vec{f}}(\omega)).G(\phi^m(\vec{\Omega}), \omega)$. Comme $N(pr_{\vec{f}}(\omega)) = N(pr_{\vec{f}^+}(\omega))$, on obtient $m \in Q(pr_{\vec{f}^+}(\omega))$. Au final, m fixe la partie $pr_{\vec{f}^+}(\Omega)$, d'où, encore avec 11.2.3 :

$$m \in N(pr_{\vec{f}^+}(\Omega)).G(\phi^m(\vec{\Omega}), \Omega) \cap Q(\Omega) = N(\Omega).G(\phi^m(\vec{\Omega}), \Omega) \ .$$

□

Corollaire 11.7.11. *Dans les conditions de la proposition, $Q(\Omega) = N(\Omega).Q(Cl(\Omega))$.*

Exemple 11.7.12. Lorsque $\Omega = \mathcal{D}(\alpha, k)$ est un demi-appartement dans un appartement A, la proposition donne $Q(\Omega) = U_{\alpha,k} \rtimes H$. Soit $\Omega' = (\Omega \cap \mathring{A}) \cup M(\alpha, k)$, alors $\mathrm{Cl}(\Omega') = \Omega$, $N(\Omega') = N(\Omega)$, $\vec{\Omega}' = \vec{M}(\alpha)$, et la proposition donne alors $Q(\Omega) = Q(\Omega') = \{e\} \ltimes (H.U_{\alpha,k})$. On peut ainsi obtenir plusieurs décompositions de type Lévi d'un même groupe, selon que les facteurs de la forme $U_\alpha(\Omega)$ tels que $U_{-\alpha}(\Omega) = \{e\}$ sont considérés comme inclus dans le facteur unipotent ou dans le facteur de Lévi.

On préfèrera sûrement les placer dans le facteur unipotent, et pour obtenir ce résultat il faut appliquer la proposition à la partie $\mathrm{Cl}(\Omega)$ au lieu de Ω.

11.8 La bonne famille de parahoriques maximale

Définition 11.8.1. *Soit Q une bonne famille de parahoriques. On définit :*

$$\bar{Q}(a) = \left\{ g \in P(\vec{f}_a) \mid \forall \vec{f} \in (\vec{f}_a^*) \cap \vec{\mathcal{I}}_{sph},\ g.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g.\vec{f}}(a) \right\}$$

Ainsi $\bar{Q}(a)$ est l'ensemble des éléments de G qui permutent les projetés de a dans les façades sphériques.

Lemme 11.8.2. *Soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para sph) et (para 2.2)(sph) fonctoriellement. Soit Δ un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Alors l'application*

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}(Q) & \to & \mathcal{I}(Q^\Delta) \\ [g,a]_Q & \mapsto & [(g,a)]_{Q^\Delta} \end{array}$$

est bien définie, G-équivariante, et compatible aux projections (c'est-à-dire $\psi(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{\vec{f}}(\psi(a))$ pour toute facette $\vec{f}$ sphérique et tout $a \in A_{\vec{g}}$ avec $\vec{g} \subset \overline{\vec{f}}$). Elle induit une injection de $\mathcal{I}(Q)_{sph}$ dans $\mathcal{I}(Q^\Delta)_{sph}$, et plus généralement, l'image inverse d'un point $[(g,a)]_{Q^\Delta}$, $a \in A$ et $g \in G$ est de cardinal 1 dès que $G \cap N^\Delta.Q^\Delta(a) = N.Q(a)$.

Preuve du lemme: Il est clair que ψ est bien définie et G-équivariante. Elle est également compatible aux projections dans l'appartement A, puis par G-équivariance sur $\mathcal{I}(Q)$.

Détaillons un peu l'injectivité : soient $g, h \in G$, $a, b \in A$ tels que $(g,a) \sim_{Q^\Delta} (h,b)$. Alors $g^{-1}h \in N^\Delta.Q^\Delta(a) \cap G$, et par hypothèse (ou par 11.2.8 pour un point a sphérique), $N^\Delta.Q^\Delta(a) \cap G = N.Q(a)$. D'où $(g,a) \sim_Q (h,b)$. □

Proposition 11.8.3. *Pour toute famille de parahoriques Q fonctoriellement bonne, $\bar{Q}$ est encore une famille de parahoriques fonctoriellement bonne pour $\mathcal{D}$. Elle vérifie en outre (fonc), et (para 2.1), et non juste (para 2.1)(sph).*

Démonstration:

Pour tout $a \in A$, $\bar{Q}(a)$ est un sous-groupe de $P(\vec{f}_a)$ contenant $Q(a)$ et donc $P(a)$ d'après 11.7.3. De plus, (para 0.4) est claire, donc $\bar{Q}$ est une famille de parahoriques.

Si $a \in A_{\mathrm{sph}}$, alors $\vec{f}_a$ est une facette sphérique de $\vec{f}_a^*$ donc par définition de $\bar{Q}(a)$, on a pour tout $g \in \bar{Q}(a)$, $g.a = g.pr_{\vec{f}_a}(a) = pr_{g\vec{f}_a}(a) = a$. Donc $\bar{Q}(a) = Q(a) = P(a)$, car Q vérifie (para sph). Donc $\bar{Q}$ vérifie (para sph).

Montrons (fonc). Soit $a \in A$ et $g \in \bar{Q}^\Delta(a) \cap G$. Soit $\vec{f} \in (\vec{f}_a^*)_{\mathrm{sph}}$. Soit $\psi : \mathcal{I}(Q) \to \mathcal{I}(Q^\Delta)$ comme dans le lemme. On a $\psi(g.pr_{\vec{f}}(a)) = g.\psi(pr_{\vec{f}}(a)) = g.pr_{\vec{f}}(\psi(a)) = pr_{g\vec{f}}(\psi(a)) = \psi(pr_{g\vec{f}}(a))$. Mais comme $pr_{\vec{f}}(a)$ est un point sphérique et ψ est injective sur $\mathcal{I}(Q)_{\mathrm{sph}}$, ceci entraine que $g.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g\vec{f}}(a)$.

On prouve ainsi que $g \in \bar{Q}(a)$.

Étudions (para 2.1). Soit $a \in A$, $\vec{f} \in \vec{f}_a^*$ et $q \in \bar{Q}(a) \cap P(\vec{f})$. Pour montrer que $q \in \bar{Q}(pr_{\vec{f}}(a))$, il suffit de montrer que pour toute facette $\vec{h} \in (\vec{f}^*)_{\mathrm{sph}}$, $q.pr_{\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{q.\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a))$. Mais $pr_{\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{\vec{h}}(a)$, et $pr_{q.\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{q\vec{h}}(a)$, le résultat en découle.

La condition (para *in j*) est alors conséquence de 11.2.12.

Il reste à voir (para 2.2)(sph). Soit donc $a \in A$, $\vec{f}$ une facette sphérique de $\vec{f}_a^*$, et $g \in N\bar{Q}(a) \cap P(\vec{f}) = N(\vec{f}_a)\bar{Q}(a) \cap P(\vec{f})$. Soit $\Delta \leq \mathbb{R}$ tel que a soit spécial dans A^Δ, il existe alors $t \in T^\Delta$ tel que $tg \in \bar{Q}^\Delta(a) \cap P^\Delta(\vec{f})$, donc par (para 2.1)($\vec{f}$) pour $\bar{Q}^\Delta$, $tg \in \bar{Q}^\Delta(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$ puis $g \in T^\Delta\bar{Q}^\Delta(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\}) \cap G \subset T^\Delta P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) \cap G$. Alors, comme $pr_{\vec{f}}(a)$ est sphérique, P^Δ vérifie (para *dec*)($pr_{\vec{f}}(a)$) donc par 11.4.6, 11.2.8 point 5, puis 11.2.3, $g \in N(\vec{f}).P(pr_{\vec{f}}(a)) = N(\vec{f}).U(\vec{f}).G(\phi^m(\vec{f}), a)$. Quitte à multiplier g à droite par un élément de $G(\phi^m(\vec{f}), a)$, et à gauche par un élément de $N(\vec{f})$, on peut donc supposer $g \in N(\vec{f}_a).\bar{Q}(a) \cap U(\vec{f})$.

Dans G^Δ, ceci donne $g \in T^\Delta.\bar{Q}^\Delta(a) \cap U^\Delta(\vec{f})$ puisque a est spécial dans A^Δ. Soit $t \in T^\Delta$ tel que $g \in t.\bar{Q}^\Delta(a)$, alors $t^{-1}g \in \bar{Q}^\Delta(a) \cap P(\overline{\vec{f}^* \cap \vec{A}})$, donc $t^{-1}g$ fixe tous les projetés de a sur les façades sphériques de direction dans $\overline{\vec{f}^* \cap \vec{A}} \cap \vec{f}_a^*$. En particulier, soit $\vec{m}$ une cloison dans $\overline{\vec{f}^* \cap \vec{A}} \cap \vec{f}_a^*$, alors $g.pr_{\vec{m}}(a) = t.pr_{\vec{m}}(a) \in A_{\vec{m}}$. Comme $A_{\vec{m}}$ est une façade sphérique, le lemme 11.7.4 y est toujours vrai, et le fait que $g \in U^\Delta(\vec{f})$ entraine alors $g.pr_{\vec{m}}(a) = pr_{\vec{m}}(a)$. Donc t fixe la façade $A_{\vec{m}}$. Au total, t induit sur $A_{\vec{f}_a}$ une translation de vecteur inclus dans chaque Vect($\vec{m}$) pour $\vec{m}$ une cloison dans $\overline{\vec{f}^* \cap \vec{A}} \cap \vec{f}_a^*$. L'intersection de ces hyperplans et de $\vec{A}_{\vec{f}_a}$ est triviale, donc t fixe $A_{\vec{f}_a}$, et $g \in \bar{Q}^\Delta(a) \cap U^\Delta(\vec{f}) \cap G$.

Appliquant (para 2.1)($\vec{f}$), puis (fonc), on obtient $g \in \bar{Q}^\Delta(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\}) \cap G = \bar{Q}(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$. □

Lemme 11.8.4. *Soient Q et R deux familles de parahoriques vérifiant (para sph) et (para 2.2)(sph). On suppose que pour tout $a \in A$, $Q(a) \subset R(a)$. Alors le morphisme surjectif G-équivariant d'immeubles* $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}(Q) & \to & \mathcal{I}(R) \\ [g,a]_Q & \mapsto & [g,a]_R \end{array}$ *induit un isomorphisme entre $\mathcal{I}(Q)_{sph}$ et $\mathcal{I}(R)_{sph}$, et pour toute facette sphérique $\vec{h}$, pour tout point a tel que $\vec{f}_a \subset \overline{\vec{h}}$, on $a\ \psi(pr_{\vec{h}}(a)) = pr_{\vec{h}}(\psi(a))$.*

Preuve du lemme: Il est clair que ψ envoie $\mathcal{I}(Q)_{\text{sph}}$ sur $\mathcal{I}(R)_{\text{sph}}$. Montrons qu'elle est injective sur $\mathcal{I}(Q)_{\text{sph}}$. Soient $g, h \in G$, $a, b \in A_{\text{sph}}$ tels que $(g,a) \sim_R (h,b)$. Alors il existe $n \in N$ tel que $b = na$ et $g^{-1}hn \in R(a)$. Mais $R(a) = P(a) = Q(a)$ car R et Q vérifient (para *sph*). D'où $(g,a) \sim_Q (h,b)$.

Lorsque Q et R vérifient (para 2.2)($\vec{h}$) pour une certaine facette $\vec{h}$, la compatibilité entre ψ et $pr_{\vec{h}}$ est claire sur la définition. □

Proposition 11.8.5. *Pour toute bonne famille de parahoriques Q, sa complétion $\bar{Q}$ est égale à celle de P.*

Démonstration: Soit $\psi : \mathcal{I}(P) \to \mathcal{I}(Q)$ comme dans le lemme. Soit $a \in A$, $g \in \bar{P}(a)$ et $\vec{f} \in (\vec{f}_a^*)_{\text{sph}}$. Alors $g.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g\vec{f}}(a)$, d'où, puisque ψ est G-équivariante et compatible aux projections, $g.pr_{\vec{f}}(a) = g.pr_{\vec{f}}(\psi(a)) = pr_{g\vec{f}}(\psi(a)) = pr_{g\vec{f}}(a)$. On obtient ainsi $g \in \bar{Q}(a)$, puis $\bar{P} \subset \bar{Q}$.

Pour l'autre inclusion, soit $g \in \bar{Q}(a)$, $\vec{f} \in (\vec{f}_a^*)_{\text{sph}}$. Alors $\psi(g.pr_{\vec{f}}(a)) = g.pr_{\vec{f}}(\psi(a)) = pr_{g\vec{f}}(\psi(a)) = \psi(pr_{g\vec{f}}(a))$. Alors par injectivité de ψ sur $\mathcal{I}(Q)_{\text{sph}}$, on obtient dans $\mathcal{I}(Q)$, $g.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g\vec{f}}(a)$. D'où $\bar{Q} \subset \bar{P}$.

Maintenant, pour toute bonne famille Q de parahoriques, on a $Q \subset \bar{Q} = \bar{P}$. □

Corollaire 11.8.6. *Supposons qu'il existe une famille de parahoriques fonctoriellement bonne pour $\mathcal{D}$.*

Alors $\bar{P}$ est l'unique bonne famille de parahoriques maximale, et P est l'unique bonne famille de parahorique minimale.

Ceci est en particulier le cas dans un groupe de Kac-Moody déployé.

Démonstration: On a déjà vu que P est l'unique famille de parahoriques minimale, et grâce aux corollaires 11.6.3 et 11.7.2 qu'elle est bonne dès qu'il existe une famille de parahoriques fonctoriellement bonne pour $\mathcal{D}$. Concernant $\bar{P}$, il s'agit des deux propositions précédentes. □

11.9 Très bonnes familles de parahoriques

On donne maintenant quelques propriétés de $\mathcal{I}(Q)$ lorsque Q est une bonne famille de parahoriques vérifiant certaines hypothèses supplémentaires. Ces hypothèses supplémentaires sont vérifiées par exemple par la famille de parahoriques construite par Guy Rousseau pour un groupe de Kac-Moody déployé ([Rou10]), elles le seront encore par la famille de parahoriques que nous obtiendrons pour un groupe presque déployé dans la partie 13.

11.9.1 Action de $\vec{\mathcal{I}}$ sur $\mathcal{I}$

Proposition 11.9.1. *Soit $\vec{f}$ une facette de $\vec{A}$. Si Q vérifie (para 2.2^+)($\vec{f}$), alors pour tout $\vec{v} \in \vec{f}$ et $a \in A$ tel que $\vec{f}_a \subset \overline{\vec{f}}$, pour tout appartement B contenant a et $\vec{f}$, on a $a +_A \vec{v} = a +_B \vec{v}$. Autrement dit, l'opération $a + \vec{v}$ est bien définie, et indépendante de l'appartement contenant a et $\vec{f}$ considéré.*

De plus, tout appartement contenant a et $\vec{f}$ contient alors $\overline{a + \vec{f}}^A$, et cet ensemble est indépendant de A. On pourra donc le noter juste $\overline{a + \vec{f}}$.

Démonstration:

Soit $g \in G$ tel que $g.B = A$. Alors $g \in N.Q(a) \cap N.P(\vec{f}) = N.Q(\overline{a + \vec{f}}^A)$ (adhérence dans A). On peut supposer $g \in Q(\overline{a + \vec{f}}^A)$, en particulier, g fixe $a +_A \vec{v}$, donc $g^{-1}(a +_A \vec{v}) = a +_A \vec{v}$. Mais par définition de la structure affine sur les appartements, $g^{-1}(a +_A \vec{v}) = g^{-1}(a) +_{g^{-1}A} g^{-1}(\vec{v}) = a +_B \vec{v}$. D'où $a +_A \vec{v} = a +_B \vec{v}$.

Ensuite, le fait que $B = g^{-1}A$, avec $g^{-1} \in Q(\overline{a + \vec{f}}^A)$ entraine que $\overline{a + \vec{f}}^A \subset A \cap B$. Or de manière générale, $g^{-1}.\overline{a + \vec{f}}^A = \overline{g^{-1}a + g^{-1}\vec{f}}^{g^{-1}A}$, on obtient donc ici que $\overline{a + \vec{f}}^B = \overline{a + \vec{f}}^A$. □

11.9.2 Existence d'isomorphismes entre appartements

La condition (para 2.2^+)(sph) permet également de prouver (para 5) pour certaines parties Ω. Cependant, une condition un peu plus faible suffit, il s'agit de :

(para 2.1^{+-})($\vec{f}$) : $\forall g \in U(\vec{f})$, il existe $a \in \mathring{A}$ tel que $g \in Q\left(\overline{a + (\vec{f}^* \cap \vec{A})}\right)$.

Remarques:

- Comme $U(\vec{f}) = \bigcap_{\vec{C}} U(\vec{C})$, où $\vec{C}$ parcourt l'ensemble des chambres de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$, un élément $u \in U(\vec{f})$ fixe toujours un cône dirigé par chacune de ces chambres. Lorsque $\vec{f}$ est déjà une chambre, (para 2.1^{+-})($\vec{f}$) est donc toujours vérifiée. Pour une facette générale, cette condition impose que la réunion de ces cônes fixés soit connexe.
- Cette condition est clairement vérifiée si Q vérifie (para 2.1^+)($\vec{C}$) pour toute chambre $\vec{C}$ de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$.

Lemme 11.9.2. *Soit Q une bonne famille de parahoriques vérifiant (para 2.1^{+-})(sph).*

1. *Soit A un appartement de $\mathcal{I}(Q)$, soit $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}_{sph})$, $\Omega \subset A_{\vec{f}}$ et $g \in P(\Omega)$. Alors il existe une partie $\Omega_0 \subset \mathring{A}$ et $n \in N(\Omega)$ tels que $pr_{\vec{f}}(\Omega_0) = \Omega$ et $ng \in Q(\overline{\Omega_0 + \vec{f}})$.*

2. *Soit $\vec{f}$ une facette sphérique. Soit $a \in A$ tel que $\vec{f}_a \subset \mathrm{Vect}_{\vec{A}}(\vec{f})$ et telle que soit $\vec{f}_a$ est sphérique, soit $\vec{f}_a$ et $\vec{f}$ sont de même signe. Alors :*
   - *$\forall g \in Q(a) \cap P(\vec{f})$, $\exists b \in a + \vec{f}$ tel que $g \in Q(\{a\} \cup \overline{b + \vec{f}}) \subset Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$*
   - *$\forall g \in NQ(a) \cap P(\vec{f})$, $\exists b \in a + \vec{f}$ tel que $g \in NQ(\{a\} \cup \overline{b + \vec{f}}) \subset NQ(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$.*

3. *La projection $pr_{\vec{f}}(a)$ d'un point $a \in I$ sur une façade $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ avec $\vec{f}$ sphérique est bien définie lorsqu'il existe un appartement $\vec{A}$ contenant $\vec{f_a} \cup \vec{f}$, tel que $\vec{f_a} \subset \mathrm{Vect}_{\vec{A}}(\vec{f})$ et* { *$\vec{f_a}$ est de même signe que $\vec{f}$ ou $\vec{f_a}$ est sphérique*}. *On a alors pour tout $g \in G$, $g.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g\vec{f}}(ga)$.*

Le deuxième point constitue un renforcement de (para 2.1)(sph) et de (para 2.2)(sph), non seulement car il prouve qu'un cône dirigé par $\vec{f}$ est fixé, mais aussi car il s'applique lorsque $\vec{f_a} \subset \mathrm{Vect}(\vec{f})$ et non seulement lorsque $\vec{f_a} \subset \overline{\vec{f}}$.

Preuve du lemme:
On sait par 11.2.3 que $P(\Omega) = N(\Omega).U(\vec{f}).G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)$. Soient $n \in N(\Omega)$, $u \in U(\vec{f})$ et $m \in G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)$ tels que $ng = um$. Par (para 2.1^{+-})$(\vec{f})$, il existe $a \in A$ tel que u fixe $a + \overline{\vec{f}^* \cap \vec{A}}$, et ceci contient une partie de la forme $\Omega_0 + \overline{\vec{f}}$ avec $\Omega_0 \subset \mathring{A}$ et $pr_{\vec{f}}(\Omega_0) = \Omega$. Le facteur m fixe $\left\langle \Omega, \vec{f} \right\rangle_A$ qui contient $\Omega_0 + \overline{\vec{f}}$. Ceci prouve le premier point.

Soient $\vec{f}$ et a comme dans l'énoncé du second point. Soit $g \in Q(a) \cap P(\vec{f})$. En particulier, $g \in P(\vec{f_a} \cup \vec{f}) = P(\mathrm{Cl}(\vec{f_a} \cup \vec{f}))$ par 10.1.4. Soit $\vec{h} = pr_{\vec{f_a}}(\vec{f}) \subset \mathrm{Cl}(\vec{f_a} \cup \vec{f})$, alors $\vec{h}$ est une facette sphérique et $\mathrm{Vect}(\vec{h}) = \mathrm{Vect}(\vec{f})$. Par (para 2.1)$(\vec{h})$, $g \in Q(pr_{\vec{h}}(a))$. Par le premier point, il existe $n \in N(pr_{\vec{h}}(a))$ et $a_0 \in \mathring{A}$ tels que $pr_{\vec{h}}(a_0) = pr_{\vec{h}}(a)$ et $ng \in Q(\overline{a_0 + \vec{h}})$. Le cône $\overline{a_0 + \vec{h}}$ contient un sous cône de la forme $\overline{b + \vec{h}}$ avec $b \in a + \vec{h}$. En particulier, $b \in A_{\vec{f_a}}$ donc $\overline{b + \vec{h}} = \overline{b + \vec{f}}$. Finalement, $g \in Q(a) \cap N(pr_{\vec{h}}(a)).Q(\overline{b + \vec{f}})$. Modulo $G(\phi^m(\vec{h}), a)$, on peut supposer $g \in Q(a) \cap N(pr_{\vec{h}}(a)).(U(\vec{h}) \cap Q(\overline{b + \vec{f}}))$. Alors le lemme 11.7.4 entraine que le facteur dans $N(pr_{\vec{h}}(a))$ fixe a, et donc $\overline{a + \vec{h}}$. Ainsi, $g \in Q(a) \cap Q(\overline{b + \vec{f}})$.

Si maintenant $g \in NQ(a) \cap P(\vec{f})$, alors en particulier $g \in N.P(\vec{f_a}) \cap P(\vec{f})$ et d'après 10.1.4, ceci vaut $N.P(\mathrm{Cl}(\vec{f_a} \cup \vec{f}))$. On peut donc supposer $g \in P(\mathrm{Cl}(\vec{f_a} \cup \vec{f}))$, en particulier, $g \in P(\vec{h})$ en notant encore $\vec{h} = pr_{\vec{f_a}}(\vec{f})$. Alors par (para 2.2)$(\vec{h})$, $g \in N(\vec{h}).Q(\{a, pr_{\vec{h}}(a)\})$. Mais nous venons de voir que tout élément de $Q(\{a, pr_{\vec{h}}(a)\})$ fixe un cône de la forme $\overline{b + \vec{f}}$ avec $b \in a + \vec{f}$.

Le troisième point se prouve alors tout comme 11.7.3. □

Proposition 11.9.3. *Soit Q une bonne famille de parahoriques vérifiant (para 2.1^{+-})(sph). Soit Ω une partie de A contenant au moins un point sphérique et incluse dans A^+ ou dans A^-, ou contenant au moins un point sphérique positif et un point sphérique négatif.*
Alors :

$$\bigcap_{\omega \in \Omega} N.Q(\omega) = N.Q(\Omega)$$

Démonstration:
Soit $g \in \bigcap_{\omega\in\Omega} N.Q(\omega)$. En particulier, $g \in \bigcap_{\vec{f}\in\vec{\Omega}} N.P(\vec{f}) = N.P(\vec{\Omega}) = N.P(\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}))$ par la proposition 10.1.4, on peut donc supposer $g \in P(\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}))$, d'où $g \in \bigcap_{\omega\in\Omega} N(\vec{f_\omega}).Q(\omega)$.

On traite le cas où $\vec{\Omega}$ contient des facettes sphériques positives et négative, le cas où $\vec{\Omega} \subset \vec{A}^{\pm}$ étant plus simple. Soient $\vec{f}^+$ et $\vec{f}^-$ des facettes maximales de $\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}) \cap \vec{A}^+$ et $\mathrm{Cl}(\vec{\Omega}) \cap \vec{A}^-$, respectivement. Ces facettes sont sphériques, $pr_{\vec{f}^+}(\vec{f}^-) = \vec{f}^+$, et $pr_{\vec{f}^-}(\vec{f}^+) = \vec{f}^-$, d'où $\mathrm{Vect}(\vec{f}^+) = \mathrm{Vect}(\vec{f}^-)$ et $N(\vec{f}^+) = N(\vec{f}^-) = N(\vec{\Omega})$. Notons $\Omega^+ = \Omega \cap A^+$ et $\Omega^- = \Omega \cap A^-$.
D'après le deuxième point du lemme, $g \in \bigcap_{\omega\in\Omega^+} N(\vec{f}^+).Q(pr_{\vec{f}^+}(\omega))$, et ceci vaut $N(\vec{f}^+).Q(pr_{\vec{f}^+}(\Omega^+))$, par 11.2.3. De même, $g \in N(\vec{f}^-).Q(pr_{\vec{f}^-}(\Omega^-))$.

Par le premier point du lemme, il existe $\Theta_0^- \subset \mathring{A}$ telle que $pr_{\vec{f}^-}(\Theta_0^-) = pr_{\vec{f}^-}(\Omega^-)$ et $g \in N(\vec{f}^-).Q(\overline{\Theta_0^- + \vec{f}^-})$. Appliquant alors (para 2.2)$(\vec{f}^+)$ sur la partie Θ_0^-, puis 11.2.3 4, on trouve $g \in N(\vec{f}^+).Q(pr_{\vec{f}^+}(\Omega^+ \cup \Theta_0^-))$. Mais $\mathrm{Vect}(\vec{f}^+) =$

Vect($\vec{f^-}$) donc $pr_{\vec{f^+}}(\Omega^+ \cup \Theta_0^-) = pr_{\vec{f^+}}(\Omega)$.

Finalement, on peut supposer $g \in Q(pr_{\vec{f^+}}(\Omega))$, puis encore par le lemme, qu'il existe une partie $\Omega_0^+ \subset \mathring{A}$ et $n^+ \in N(\vec{f^+})$ tels que $pr_{\vec{f^+}}(\Omega_0^+) = pr_{\vec{f^+}}(\Omega)$ et $n^+ g$ fixe $\overline{\Omega_0^+ + \vec{f^+}}$. De même, il existe $\Omega_0^- \subset \mathring{A}$ et $n^- \in N(\vec{f^-})$ tels que $pr_{\vec{f^-}}(\Omega_0^-) = pr_{\vec{f^-}}(\Omega)$ et $n^-.g$ fixe $\overline{\Omega_0^- + \vec{f^-}}$.

On peut supposer $n^+ = e$. Soit $\omega \in \Omega_0^- + \vec{f^-}$. Alors $g \in N.Q(\omega) \cap P(\vec{f^+}) = N.Q(\{\omega, pr_{\vec{f^+}}(\omega)\})$, et il existe d'après le lemme un point $\omega' \in \mathring{A}$ tel que $g \in N.Q(\{\omega\} \cup \omega' + \vec{f^+})$. Soit $n \in N$ tel que $ng \in Q(\{\omega\} \cup \omega' + \vec{f^+})$. L'intersection $(\omega' + \vec{f^+}) \cap (\Omega_0^+ + \vec{f^+})$ contient un scp de $\omega' + \vec{f^+}$, car Ω_0^+ contient un point dont la projection sur $A_{\vec{f^+}}$ est la même que celle de ω et ω'. Comme g fixe $\Omega_0^+ + \vec{f^+}$, n fixe l'intersection $\omega' + \vec{f^+} \cap \Omega_0^+ + \vec{f^+}$, et en particulier ce scp. D'où, puisque n agit par automorphisme affine sur $\mathring{A}$, n fixe ω. Finalement, $g \in Q(\omega)$.

Ainsi, g fixe $(\Omega_0^+ + \vec{f^+}) \cup (\Omega_0^- + \vec{f^-})$.

Enfin, soit $\omega \in \Omega$, soit ϵ un signe de ω. Soit $\vec{h} = pr_{\vec{f_\omega}}(\vec{f^\epsilon})$ (bien défini car $\vec{f_\omega}$ et $\vec{f^\epsilon}$ sont de même signe), alors $g \in N.Q(\omega) \cap P(\vec{h}) = N.Q(\{\omega, pr_{\vec{h}}(\omega)\})$, et il existe $\omega' \in \omega + \vec{h}$ et $n \in N(\vec{f_\omega})$ tels que ng fixe $\overline{\omega' + \vec{h}}$. D'autre part, g fixe $pr_{\vec{h}}(\Omega_0^\epsilon) = pr_{\vec{h}}(\Omega)$, par (para 2.1)(sph), donc $g \in \overline{N(\vec{h})}.U(\vec{h}).G(\phi^m(\vec{\Omega}), \Omega)$. Le fait que g fixe Ω_0^ϵ entraine avec le lemme 11.7.4 que le facteur dans $N(\vec{h})$ fixe Ω_0^ϵ, et donc $\overline{\Omega_0^\epsilon + \vec{h}}$, donc g fixe un $\overline{\Omega_{\vec{h}} + \vec{h}}$ avec $\Omega_{\vec{h}} \subset \mathring{A}$, $pr_{\vec{h}}(\Omega_{\vec{h}}) = pr_{\vec{h}}(\Omega)$, et ceci contient en particulier un scp de $\omega' + \vec{h}$. On en déduit alors, comme au paragraphe précédent, $n \in N(\omega)$ d'où $g \in Q(\omega)$.

On a bien prouvé $g \in Q(\Omega)$. □

Corollaire 11.9.4. *Si Q est une bonne famille de parahoriques vérifiant (para 2.1^{+-})(sph), et si A et B sont deux appartements de $\mathcal{I}(Q)$ dont l'intersection contient un point sphérique de signe ϵ, alors il existe $g \in G$ tel que $g.A = B$ et g induit de A sur B un isomorphisme fixant $A^\epsilon \cap B^\epsilon$.*

Si $A \cap B$ contient un point sphérique de chaque signe, alors il existe $g \in G$ tel que $g.A = B$ et g fixe $A \cap B$.

Autrement dit, si Ω est une partie d'un appartement A, contenant un point sphérique et incluse dans $A^\pm$ ou bien contenant un point sphérique de chaque signe, alors $Q(\Omega)$ est transitif sur les appartements contenant Ω.

Corollaire 11.9.5. *Soit Ω une partie d'un appartement A contenant au moins un point sphérique positif et un point sphérique négatif. Alors pour tout appartement B contenant Ω, il existe $g \in G$ qui induit un isomorphisme de A sur B fixant $Cl_A(\Omega)$.*

En particulier, la partie $Cl(\Omega)$ est bien définie, indépendamment de l'appartement contenant Ω considéré.

Démonstration: C'est la concaténation de 11.9.4 et de 11.7.11. □

11.9.3 Intersection d'appartements

On passe maintenant à l'étude de (para 6).

On a vu en s'appuyant sur la décomposition de Lévi de $Q(\Omega)$, que cette condition est vérifiée pour des parties $\Omega \subset A$ contenant un point sphérique positif et un point sphérique négatif, dès que Q est une bonne famille de parahoriques (corollaire 11.7.11). Nous allons maintenant étudier le cas d'une partie Ω composée de points sphériques d'un même signe. On ne dispose pas pour le fixateur d'une telle partie de la décomposition de Lévi, mais on prouve tout de même (para 6), sous l'hypothèse (para 2.1^{+-})(sph).

Proposition 11.9.6. *Soit $\Omega \subset A_{sph}$. Soit Q une bonne famille de parahoriques vérifiant (para 2.1^{+-}). Alors :*

$$Q(\Omega) = N(\Omega).Q(Cl(\Omega) \cap A_{sph}) \ .$$

Démonstration:
L'inclusion " $\supset$ " est claire. Le cas où Ω coupe A^+_{sph} et A^-_{sph} découle de 11.7.10, on suppose donc $\Omega \subset A^+_{\text{sph}}$.

Soit $g \in Q(\Omega)$. En particulier, $g \in P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$ par 10.1.4. Par le lemme 11.9.2, il existe un choix $C \in \mathcal{C}$ tel que défini dans le lemme 11.1.7, tel que $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega'(C)} N_{\vec{f}_\omega}.Q(\omega)$, où $\vec{f}_\omega$ est la direction de la façade contenant ω, et où $\Omega'(\mathcal{C})$ est l'intersection de $\Omega^\infty(\mathcal{C})$ avec l'union des façades sphériques de direction incluse dans $\text{Cl}(\vec{\Omega})$. Lorsque $\vec{f}$ est une facette sphérique de $\text{Cl}(\vec{\Omega})$, on obtient alors $g \in N_{\vec{f}}.Q(\text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}}) \cap A_{\vec{f}})$. Or la partie $\text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}}) \cap A_{\vec{f}}$ contient $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$, d'après le lemme 11.1.7, d'où $g \in N_{\vec{f}}\ .\ Q(\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}})$.

Nous voulons maintenant prouver le résultat similaire lorsque $\vec{f}$ est une facette sphérique de $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$. Supposons qu'il existe $\vec{f}$ une telle facette non incluse dans $\text{Cl}(\vec{\Omega})$. Quitte à projeter $\vec{f}$ sur une facette adéquate de $\text{Cl}(\vec{\Omega})$, on peut supposer qu'une face $\vec{m}$ de $\vec{f}$ de codimension 1 est incluse dans $\text{Cl}(\vec{\Omega})$. La facette $\vec{m}$ est dans l'intérieur de l'enclos de $\vec{\Omega} \cup \vec{f}$ (pour la topologie induite), elle est donc sphérique. Le fait que $\vec{f} \not\subset \text{Cl}(\vec{\Omega})$ signifie qu'il existe $\alpha \in \phi(\vec{\Omega})$ telle que $\alpha(\vec{f}) < 0$. Tout demi-appartement dirigé par α ne contient aucun point de $A_{\vec{f}}$, or $\vec{f} \subset \overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$, ceci implique qu'aucun demi-appartement dirigé par α ne contient Ω. Il existe donc $(\omega) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha(\omega_n) \to_{n\to\infty} -\infty$ et $\alpha(\omega_n) \in \mathbb{R}$ pour tout n (autrement dit, $\vec{f}_{\omega_n} \subset \ker \alpha$ pour tout n). La facette $\vec{m}$ est maximale dans $\text{Cl}(\vec{\Omega}) \cap \ker(\alpha)$, donc tous les ω_n ont un projeté ω'_n dans $A_{\vec{m}}$. Comme $\vec{m}$ est sphérique, $\overline{A_{\vec{m}}}$ est compact, et la suite (ω') a une valeur d'adhérence ω_∞ dans $\overline{A_{\vec{m}}}$. Comme $\alpha(\omega_\infty) = -\infty$, ω_∞ est dans une facette $\vec{g} \not\subset \text{Cl}(\vec{\Omega})$, sphérique. Or, par 11.9.2, g fixe tous les ω'_n, $n \in \mathbb{N}$, puis comme $\vec{g}$ est sphérique, g fixe $\text{Cl}\{\omega'_n | n \in \mathbb{N}\}$. Donc g fixe un cône $c \subset A_{\vec{m}}$ tel que $\omega_\infty = [c]_{A_{\vec{m}}}$. Ainsi $g \in Q(\omega_\infty) \subset P(\vec{g})$, on peut donc rajouter ω_∞ à Ω, et $\vec{g}$ à $\vec{\Omega}$. On arrive ainsi à prouver que $g \in P(\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)})$.

Alors il existe un choix $C \in \mathcal{C}$ et $\Omega^\infty(C)$, comme définis cette fois à la proposition 11.1.5, tels que $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega^\infty(C)} N_{\vec{f}_\omega} Q(\omega)$. Donc pour chaque facette sphérique de $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$, $g \in N_{\vec{f}}.Q(A_{\vec{f}} \cap \text{Cl}(A_{\vec{f}} \cap \Omega^\infty(C)))$, or $A_{\vec{f}} \cap \text{Cl}(A_{\vec{f}} \cap \Omega^\infty(C))$ contient $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$, d'après la proposition 11.1.5. On conclut alors grâce à la proposition 11.9.3 que $g \in N_\Omega.Q(\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}})$.
□

12 Descente

Il est facile de généraliser au cas présent le théorème 9.2.10 de [BT72] qui permet sous certaines hypothèses de descendre la valuation de $\mathcal{D}$ à un sous-groupe. Pour obtenir une masure bordée pour ce sous-groupe, il faudra ensuite descendre la famille de parahoriques. Ce sont bien sûr ces résultats qui serviront pour définir une valuation dans un groupe de Kac-Moody presque déployé.

12.1 Contexte et notations

On fixe un tore maximal T et on note $\phi = \phi(T)$, $\vec{V} = \vec{V}(T)$, $\vec{A} = \vec{A}(T)$. On fixe également une bonne famille de parahoriques Q et on note $\mathcal{I} = \mathcal{I}(Q)$.

On se donne un autre système de racines $\phi^\natural \subset (\vec{V}^\natural)^*$ avec $\vec{V}^\natural$ un sous-espace de $\vec{V}$. On notera $W(\phi^\natural) \subset Gl(\vec{V}^\natural)$ le groupe de Weyl et $\vec{A}^\natural \subset \vec{V}^\natural$ l'appartement correspondants. On notera aussi $\vec{A}_\natural = \vec{A} \cap \vec{V}^\natural$, la trace de l'appartement $\vec{A}$ sur $\vec{V}^\natural$. On adopte la convention de noter en lettres latines les racines de $\phi^\natural$. On suppose :

– (DSR) : $\phi^\natural$ est un système de racines à base libre, et il existe une chambre $\vec{C}^\natural$ de $\vec{A}^\natural$ telle que toute facette de $\vec{C}^\natural$ rencontre $\vec{A}$ et toute facette sphérique de $\vec{C}^\natural$ rencontre $\vec{A}_{\text{sph}}$.

On notera $\Pi^\natural$ la base de $\phi^\natural$ correspondant à la chambre $\vec{C}^\natural$ donnée par (DSR). On ne suppose pas que $\phi^\natural$ engendre $(\vec{V}^\natural)^*$, autrement dit $(\phi^\natural, \vec{V}^\natural)$ n'est pas forcément essentiel.

On se donne ensuite une donnée radicielle $\mathcal{D}^\natural = (G^\natural, (U_a^\natural)_{a\in\phi^\natural})$ de système de racines $\phi^\natural$. On notera avec un $\natural$ en exposant tous les objets associés à la donnée radicielle $\mathcal{D}^\natural$, par exemple $N^\natural$, $T^\natural$ ...
Pour tout $a \in \phi^\natural$, $k \in \mathbb{R}$, on note :

$$\begin{aligned}
\phi_a &:= \left\{\alpha \in \phi \mid \alpha|_{\vec{V}^\natural} \in \mathbb{R}^{+*}.a\right\}\\
\phi_0 &:= \left\{\alpha \in \phi \mid \alpha(\vec{V}^\natural) = 0\right\}\\
\vec{D}(a) &:= \left\{x \in \vec{A}_\natural \mid a(x) \geq 0\right\} \subset \vec{A}_\natural\\
U_a &:= U(\vec{D}(a)) = G(\phi_a) = \langle\, \{U_\alpha \mid \alpha \in \phi_a\}\, \rangle\\
U_{a,k} &:= \left\langle \left\{U_{\alpha,rk} \mid \alpha \in \phi_a,\ r \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \alpha_{|\vec{V}^\natural} = ra\right\} \right\rangle\\
Z &:= P(\vec{A}_\natural) = \left\langle\, T, \left\{U_\alpha \mid \alpha \in \phi \text{ et } \alpha(\vec{V}^\natural) = 0\right\} \right\rangle\ .
\end{aligned}$$

Pour toute racine simple $a \in \Pi^\natural$, l'ensemble ϕ_a n'est autre que $\phi^u(\vec{D}(a))$. Il est inclus dans $\phi^m(\ker(a))$ qui est fini car d'après (DSR), $\ker(a) \cap \vec{A}_{\text{sph}} \neq \emptyset$. De plus, $P(\ker(a) \cap \vec{A}) = M_{\vec{A}}(\ker(a) \cap \vec{A}) = \langle\, Z, U_a, U_{-a}\, \rangle$, c'est un groupe muni d'une donnée radicielle de système de racine fini $\phi_a \cup \phi_{-a} \cup \phi_0$.

On suppose vérifiées les conditions suivantes de compatibilité des données radicielles :

– (DDR 1) : $G^\natural \subset G$ et $\forall a \in \phi^\natural$, $U_a^\natural \subset U_a$.
– (DDR 2) : $\forall a \in \phi^\natural$ tel que $2a \in \phi^\natural$, $\text{Card}\left\{\alpha_{|\vec{V}^\natural} \mid \alpha \in \phi \text{ et } \alpha_{|\vec{V}^\natural} \in \mathbb{R}^{+*}.a\right\} \leq 2$.
– (DDR 3.1) : $T^\natural \subset Z$.
– (DDR 3.2) : Pour tout $a \in \phi^\natural$, et $u \in U_a^\natural$, $n^\natural(u).Z.n^\natural(u)^{-1} = Z$, $n^\natural(u)U_a n^\natural(u)^{-1} = U_{-a}$ et $n^\natural(u)U_{-a}n^\natural(u)^{-1} = U_a$.

Remarquons que (DDR 1) entraine que pour tout a, $\phi_a \neq \emptyset$. En particulier, il existe $\alpha \in \phi$ tel que $\ker(a) = \ker(\alpha) \cap \vec{V}^\natural$, et même $\left\{x \in \vec{V}^\natural \mid a(x) \geq 0\right\} = \left\{x \in \vec{V}^\natural \mid \alpha(x) \geq 0\right\}$.

Concernant l'immeuble vectoriel, on suppose :

– (DIV) : $G^\natural.\vec{A}_\natural \cap \vec{A} = \vec{A}_\natural$.

On se donne encore une partie $\mathcal{I}_\sharp$ de $\mathcal{I}$. On note $A_\sharp = \mathring{A} \cap \mathcal{I}_\sharp$, et on suppose :

– (DM 1) : $\mathcal{I}_\sharp$ est stable par $G^\natural$ et pour toute facette sphérique $\vec{f} \subset \vec{I}$, $I_\sharp \cap \mathcal{I}_{\vec{f}}$ est une partie convexe de $\mathcal{I}_{\vec{f}}$.
– (DM 2) : $A_\sharp$ est un sous-espace affine de $\mathring{A}(T)$ dirigé par $\vec{V}^\natural$, et $A \cap \mathcal{I}_\sharp$ est l'adhérence dans A de $A_\sharp$.
– (DM 3) : Pour toute facette sphérique $\vec{f}$ rencontrant $\vec{A}^\natural$, il existe une facette F de $A_{\vec{f}}$, rencontrant $\mathcal{I}_\sharp$, qui n'est pas contenue dans l'adhérence d'une autre facette F' de $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ rencontrant $\mathcal{I}_\sharp$.
– (DM 4) : $\overline{A_\sharp}$ est stable par $N^\natural$.

La condition (DM 3) est non triviale : par exemple si $A_\sharp$ est un mur, il pourrait exister un autre appartement Z contenant $A_\sharp$ tel que $Z \cap \mathcal{I}_\sharp$ soit une bande dans Z, contenant $A_\sharp$ dans son intérieur. Alors si F est une facette de A maximale dans $A_\sharp$ (une cloison), elle est dans l'adhérence d'une chambre de Z coupant $\mathcal{I}_\sharp$.

Grâce à (DDR1), on définit pour tout $a \in \phi^\natural$, et $u \in U_a^\natural$,

$$\varphi_a^\natural(u) := \sup \{k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mid u \in U_{a,k}\} \ .$$

On suppose enfin les deux hypothèses suivantes concernant les valuations :

– (DV1) : "$\varphi \in A_\sharp$" autrement dit, le point $o \in A(T)$ tel que $\forall \alpha \in \phi$, $U_{\alpha,0}$ fixe o est dans $A_\sharp$.
– (DV 2) : $\forall a \in \phi^\natural$, $\mathrm{Card}(\varphi_a^\natural(U_a^\natural)) \geq 3$.

Les conditions (DV 1) et (DM 2) imposent donc que $A \cap \mathcal{I}_\sharp = \overline{o + \vec{V}^\natural}$.

Hormis le fait qu'on ne suppose pas ϕ fini, ces hypothèses sont plus fortes que celles de [BT72] : on a rajouté (DSR), (DIV) et (DM 4). (Par ailleurs, on a renommé les (DI x) en (DM x).)

12.2 Descente dans l'immeuble vectoriel

Conformément à nos notations, $\vec{A}^\natural$ est le cône de Tits dans $\vec{V}^\natural$ défini par le système de racines $\phi^\natural$. En général, on verra qu'il est plus grand que $\vec{A}_\natural$, ce qui empêche immédiatement de plonger l'immeuble $\vec{\mathcal{I}}^\natural$ dans $\vec{\mathcal{I}}$. Cependant, nous allons voir que $\vec{A}$ intersecte chaque facette de $\vec{A}^\natural$, ce qui permettra quand même d'identifier à l'intérieur de $\vec{\mathcal{I}}$ une réalisation de l'immeuble de $\mathcal{D}^\natural$. Cette réalisation sera notée $\vec{\mathcal{I}}_\natural$.

Lemme 12.2.1. *Soit $a \in \Pi^\natural$ une racine simple. Alors :*
– *Il existe une partie équilibrée $\vec{\Omega}$ de $\vec{A}$ telle que $\vec{\Omega} \subset \vec{D}(a) \subset Cl_{\vec{A}}(\vec{\Omega})$,*
– *$P(\vec{D}(a)) = Z \ltimes U_a$,*
– *Pour tout $u \in U_a^\natural \setminus \{e\}$, $n^\natural(u)$ permute $\vec{D}(a)$ et $\vec{D}(-a)$,*
– *$N^\natural \subset (N \cap \mathrm{Stab}(\vec{A}_\natural)) \ . \ Z$.*

En particulier, l'action de $N^\natural$ sur $\vec{\mathcal{I}}$ stabilise $\vec{A}_\natural$.

Remarque: Ceci entraine en particulier que ϕ_a est fini, et permet de prouver que les groupes $U_{a,\lambda}$ définis plus haut sont les mêmes que ceux définis à partir de $\varphi^\natural$ comme dans la définition 10.2.1.

Preuve du lemme:
Soit $\vec{m}^\natural$ la cloison de $\vec{C}^\natural$ telle que $\ker(a) = \mathrm{Vect}_{\vec{V}^\natural}(\vec{m}^\natural)$, alors d'après (DSR), $\vec{m}^\natural$ coupe $\vec{A}_{\mathrm{sph}}$. Comme $\vec{A}_{\mathrm{sph}}$ est un cône ouvert dans $\vec{V}$, il existe un cône $\vec{m} \subset \vec{m}^\natural$, inclus dans une facette sphérique de $\vec{A}$ et contenant un ouvert de $\vec{m}^\natural$. Alors l'enveloppe convexe de $\vec{m} \cup -\vec{m}$ est $\ker(a)$. Soit encore $\vec{x} \in \vec{C}^\natural \cap \vec{A}_{\mathrm{sph}}$, alors $\vec{\Omega} := \vec{m} \cup -\vec{m} \cup \{\vec{x}\}$ est une partie équilibrée, incluse dans $\vec{D}(a)$, et $\vec{D}(a) \subset \mathrm{Cl}_{\vec{A}}(\vec{\Omega})$.

Le sous-groupe parabolique $P(\vec{D}(a)) = P(\vec{\Omega})$ admet donc une décomposition de Lévi. Son facteur de Lévi est $\mathrm{Fix}_G(\vec{D}(a) \cup -\vec{D}(a)) = \mathrm{Fix}_G(\vec{A}_\natural) = Z$, et son facteur unipotent est U_a, par définition. D'où $P(\vec{D}(a)) = Z \ltimes U_a$.

Soit $u \in U_a^\natural \setminus \{e\}$. Alors (DDR 3.2) entraine que $n^\natural(u)$ conjugue $P(\vec{D}(a))$ en $P(\vec{D}(-a))$. Mais $P(\vec{D}(a))$ est un sous-groupe parabolique de $M(\ker(a))$ (correspondant à la facette contenant $\vec{D}(a)/\ker(a)$). Choisissons un Borel B^+ pour $M(\ker(a))$ dans $P(\vec{D}(a))$, et un autre B^- dans $P(\vec{D}(-a))$, alors il existe $n \in N \cap M(\ker(a))$ tel que $B^- = nB^+n^{-1}$. Alors $n.P(\vec{D}(a))n^{-1}$ et $P(\vec{D}(-a)) = n^\natural(u).P(\vec{D}(a)).n^\natural(u)^{-1}$ sont deux paraboliques conjugués dans $M(\ker(a))$ (remarquer que $n^\natural(u) \in M(\ker(a))$) contenant un même Borel : ils sont égaux. (On a en fait prouvé que les deux facettes contenant $\vec{D}(a)/\ker(a)$ et $\vec{D}(-a)/\ker(a)$ sont de même type.)

Dès lors, $nn^\natural(u)^{-1} \in M(\ker(a))$ stabilise les deux paraboliques $P(\vec{D}(a))$ et $P(\vec{D}(-a))$. Donc $nn^\natural(u)^{-1} \in P(\vec{D}(a)) \cap P(\vec{D}(-a)) = Z$ et $n^\natural(u) \in N.Z$.

Donc $n^\natural(u).\vec{A}_\natural = n.\vec{A}_\natural \subset \vec{A}$. Avec l'hypothèse (DIV), on obtient en plus $n^\natural(u).\vec{A}_\natural \subset G^\natural.\vec{A}_\natural \cap \vec{A} = \vec{A}_\natural$. Donc $n^\natural(u)$ stabilise $\vec{A}_\natural$. Comme Z fixe $\vec{A}_\natural$, l'élément $n \in Z.n^\natural(u)$ stabilise aussi $\vec{A}_\natural$.

Enfin, le fait que $n^\natural(u)$ échange $P(\vec{D}(a))$ et $P(\vec{D}(-a))$ entraine que $n^\natural(u)$ échange $\mathrm{Cl}_{\vec{A}}(\vec{D}(a))$ et $\mathrm{Cl}_{\vec{A}}(\vec{D}(-a))$, mais $\mathrm{Cl}_{\vec{A}}(\vec{D}(a)) \cap \vec{A}_\natural = \vec{D}(a)$, et similairement pour $-a$, donc $n^\natural(u)$ échange $\vec{D}(a)$ et $\vec{D}(-a)$.

Comme $N^\natural = \left\langle T^\natural, \left\{ n^\natural(u) \mid a \in \Pi^\natural,\ u \in U_a^\natural \right\} \right\rangle$, et $T^\natural \subset Z$ par (DDR 3.1), l'inclusion $N^\natural \subset (N \cap \mathrm{Stab}(\vec{A}_\natural)).Z$ est maintenant claire. □

Définition 12.2.2. *Pour tout $n \in N^\natural$, soient $n' \in N \cap \mathrm{Stab}(\vec{A}_\natural)$ et $z \in Z$ tels que $n = n'z$. On pose $\vec{v}_\natural(n) = \vec{v}(n')|_{\vec{V}^\natural}$.*

Ceci est bien défini car $N \cap Z$ fixe $\vec{V}^\natural$. Notons qu'il s'agit juste de la restriction à $\vec{A}_\natural$ de l'action de n sur $\vec{I}$, étendue par linéarité à $\vec{V}^\natural$, ce qui est possible car $\vec{A}_\natural$ engendre $\vec{V}^\natural$, par (DSR).

Proposition 12.2.3.

1. *Pour tout $n \in N^\natural$, $\vec{v}_\natural(n)$ stabilise $\vec{V}^\natural$ et $\vec{A}^\natural$. L'application $\vec{v}_\natural$ est une action de groupe, elle stabilise l'ensemble des facettes de $\vec{A}^\natural$, et induit sur cet ensemble la même action que $\vec{v}^\natural$.*
2. *Chaque facette $\vec{f}^\natural$ de $\vec{A}^\natural$ rencontre $\vec{A}$, et $\vec{f}^\natural \cap \vec{A}$ est l'intersection de $\vec{V}^\natural$ avec une réunion de facettes de $\vec{A}$. Si $\vec{f}^\natural$ est sphérique, elle rencontre $\vec{A}_{sph}$.*

Remarque: En conséquence, la condition (DSR) est vérifiée pour n'importe quelle chambre $\vec{C}^\natural$ de $\vec{A}^\natural$, et le lemme précédent est vrai pour n'importe quelle racine $a \in \phi^\natural$ (et non seulement $a \in \Pi^\natural$).

Démonstration:

Soit $t \in T^\natural$. Par (DDR 3.1), $t \in Z$ donc $\vec{v}_\natural(t) = id = \vec{v}^\natural(t)$. Ainsi $\vec{v}_\natural$ et $\vec{v}^\natural$ coïncident sur $T^\natural$.

De plus, la description de $\vec{v}_\natural$ comme extension par linéarité de l'action de $N^\natural$ sur $\vec{A}_\natural$ montre qu'il s'agit d'une action de groupe.

Ensuite, soit $a \in \Pi^\natural$, $u \in U_a \setminus \{e\}$ et $n = n^\natural(u)$. Comme $\vec{A}_\natural$ engendre $\vec{V}^\natural$, par la condition (DSR), le lemme montre que $\vec{v}_\natural(n)$ stabilise $\vec{V}^\natural$. De plus, il fixe $\ker(a)$ et échange les demi-espaces délimités par cet hyperplan. Enfin, $\vec{v}_\natural(n)^2 = \vec{v}_\natural(n^2)$ mais $n^2 \in T^\natural$ donc $\vec{v}_\natural(n^2) = Id_{\vec{V}^\natural}$, par la première phrase de cette preuve. Ceci prouve que $\vec{v}_\natural(n)$ est une réflexion d'hyperplan $\ker(a)$.

Montrons maintenant que $\vec{v}_\natural(n)$ préserve l'ensemble des murs de $\vec{A}^\natural$. Soit $b \in \Pi^\natural$. D'après le lemme, $Z \cap U_b = \{e\}$. Soit $u_b \in U_b^\natural \setminus \{e\}$, alors $u_b \notin Z$. L'élément u_b fixe $\vec{D}(b)$, et s'il fixait également une facette $\vec{f}$ rencontrant $\vec{A}_\natural$ mais pas $\vec{D}(b)$, alors en appliquant, grâce au lemme, la proposition 10.1.4, 3, u_b fixerait $\mathrm{Cl}(\vec{D}(b) \cup \vec{f})$, ce qui contient $\vec{A}_\natural$. Mais c'est impossible car $u_b \notin Z$. Ainsi $\mathrm{Fix}_{\vec{A}_\natural}(u_b) = \vec{D}(b)$.

Alors $\mathrm{Fix}_{\vec{A}_\natural}(nu_bn^{-1}) = \vec{v}_\natural(n).\vec{D}(b)$, et par ailleurs, comme $nu_bn^{-1} \in U_{r_a.b}$, nu_bn^{-1} fixe le demi-cône $\vec{D}(r_a^\natural.b)$. Donc $\vec{D}(r_a^\natural.b) \subset \vec{v}_\natural(n).\vec{D}(b)$. De la même manière, $\vec{D}(r_a^\natural(-b)) \subset \vec{v}(n).\vec{D}(-b)$. Et comme $\vec{D}(r_a^\natural(b)) \cup \vec{D}(r_a^\natural(-b)) = \vec{A}_\natural = \vec{D}(b) \cup \vec{D}(-b)$, on obtient l'égalité $\vec{D}(r_a^\natural.b) = \vec{v}_\natural(n).\vec{D}(b)$. En particulier, le bord de $\vec{D}(r_a^\natural.b)$ rencontre $\vec{A}_{\mathrm{sph}}$ et engendre un hyperplan de $\vec{V}^\natural$, il s'agit donc de $\ker(r_a^\natural.b)$. Ainsi le mur $\ker(b)$ est envoyé par $\vec{v}(n)$ sur $\ker(r_a^\natural.b)$.

Nous avons en particulier prouvé que pour toutes racines simples $a, b \in \Pi^\natural$, le mur $\ker(r_a^\natural.b)$ rencontre $\vec{A}_{\text{sph}}$. Ceci permet de recommencer le raisonnement du paragraphe précédent, et de prouver que pour toute racine simple $c \in \Pi$, pour tout $u_c \in U_c^\natural$, $\vec{v}(n^\natural(u_c))$. $\ker(r_a^\natural.b) = \ker(r_c^\natural.r_a^\natural.b)$. Puis finalement, nous obtenons que tout mur de $\vec{V}^\natural$ rencontre $\vec{A}_{\text{sph}}$, et que $\vec{v}_\natural$ permute l'ensemble de ces murs de la même manière que $\vec{v}^\natural$.

Soit $a \in \Pi^\natural$, $u \in U_a^\natural \setminus \{e\}$. Alors l'image $\vec{v}_\natural(n).\vec{C}^\natural$ de la chambre $\vec{C}^\natural$ donnée par (DSR) est une autre chambre de $\vec{A}^\natural$, et son adhérence contient $\overline{\vec{C}^\natural} \cap \ker(a)$, il s'agit donc $r_a^\natural.\vec{C}^\natural$. Le même résultat est encore vrai pour $-\vec{C}^\natural$, puis par l'argument standard des complexes de chambre minces, on prouve que $\vec{v}_\natural(n)$ agit comme $r_a^\natural$ sur l'ensemble des chambres de $\vec{A}^\natural$, et ceci entraine que $\vec{v}_\natural(n)$ agit comme $r_a^\natural$ sur l'ensemble des facettes de $\vec{A}^\natural$. En particulier, $\vec{v}_\natural(n)$ stabilise $\vec{A}^\natural$.
Le premier point est ainsi prouvé.

Le second point est maintenant facile. On a $\vec{A}^\natural = \vec{v}_\natural(N^\natural).\overline{\vec{C}^\natural} \cup \vec{v}_\natural(N^\natural).\overline{-\vec{C}^\natural}$, donc toute facette de $\vec{A}^\natural$ s'écrit $\vec{v}_\natural(n).\vec{f}^\natural$ pour un certain $n \in N^\natural$ et $\vec{f}^\natural$ une facette de $\vec{C}^\natural$. Par définition de $\vec{v}_\natural$, $\vec{v}_\natural(n).\vec{f}^\natural = \vec{v}(n').\vec{f}^\natural$ pour un certain $n' \in N$. Comme $\vec{A}$ et $\vec{A}_{\text{sph}}$ sont stables par $\vec{v}$, ceci intersecte $\vec{A}$, et même $\vec{A}_{\text{sph}}$ si $\vec{f}^\natural$ est sphérique.
De plus, $\vec{f}^\natural \cap \vec{A}$ est délimitée par des cônes de la forme $\ker(a) \cap \vec{A}$ qui sont traces de murs de $\vec{A}$. Ceci entraine l'existence d'une famille de facettes $(\vec{f}_i)$ telle que $\vec{f}^\natural \cap \vec{A} = (\bigcup_i \vec{f}_i) \cap \vec{V}^\natural$. □

On définit les murs de $\vec{A}_\natural$ comme étant les $\ker(a) \cap \vec{A}_\natural$ pour $a \in \phi^\natural$. D'après la proposition, $\vec{A}_\natural$ muni de $\vec{v}_\natural$ est, tout comme $\vec{A}^\natural$ muni de $\vec{v}^\natural$, une réalisation géométrique du complexe de Coxeter associé à $\phi^\natural$ muni de son action de $N^\natural$. Cependant, ni l'une ni l'autre ne sont en général l'appartement de référence pour l'immeuble $\vec{I}^\natural$ de la donnée radicielle $\mathcal{D}^\natural$, au sens de 10.1.2 car ils ne sont pas forcément essentiels. Soit $\vec{f}_0^\natural = \bigcap_a \ker(a)$ la plus petite facette de $\vec{A}^\natural$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\vec{V}^\natural$, et l'appartement de référence pour $\vec{I}^\natural$ est $\vec{A}_e^\natural := \vec{A}^\natural / \vec{f}_0^\natural$. Les actions $\vec{v}^\natural$ et $\vec{v}_\natural$ ne coïncident en général pas sur $\vec{V}^\natural$, puisqu'on peut modifier la famille $(a^\vee)_{a \in \phi^\natural}$ par n'importe quelle famille d'éléments dans $\vec{f}_0^\natural$, tout en gardant une famille de coracines pour $\phi^\natural$.
Par contre, sur $\vec{V}_e^\natural := \vec{V}^\natural / \vec{f}_0^\natural$, on peut montrer que $\vec{v}^\natural$ et $\vec{v}_\natural$ coïncident. En effet, pour tout $t \in T^\natural$, $\vec{v}^\natural(t) = Id = \vec{v}_\natural(t)$. Ensuite, soit $a \in \phi^\natural$ et $n \in n^\natural(U_a \setminus \{e\})$. Alors $\vec{v}^\natural(n)\vec{v}_\natural^{-1}(n)$ stabilise chaque facette, donc en particulier induit une homothétie de rapport positif sur chaque facette de dimension 1. En conjuguant par d'autres éléments de $N^\natural$, on voit que le rapport d'homothétie est le même dans chaque facette de dimension 1 d'un même type. Finalement, $\vec{v}^\natural(n)\vec{v}_\natural(n)^{-1}$ est une homothétie sur chaque composante irréductible de $\vec{V}_e^\natural$. Alors $\vec{v}^\natural(n)\vec{v}_\natural(n)^{-1}$ commute à $\vec{v}^\natural(n)$, permettant de voir que $(\vec{v}^\natural(n)\vec{v}_\natural(n)^{-1})^2 = \vec{v}^\natural(n^2)\vec{v}_\natural(n^2)^{-1} = Id$ car $n^2 \in T^\natural$. Donc le rapport d'homothétie est partout 1.

On pose $\vec{I}_\natural = G^\natural.\vec{A}_\natural \subset \vec{I}$, on définit ses appartements, ses facettes, ses murs comme étant les images par les éléments de $G^\natural$ de l'appartement $\vec{A}_\natural$ et de ses murs et facettes.

Proposition 12.2.4. *$\vec{I}_\natural$ est une réalisation géométrique de l'immeuble de $\mathcal{D}^\natural$, autrement dit le complexe simplicial formé des facettes de $\vec{I}_\natural$, avec son action de $G^\natural$ et la relation d'ordre "être dans l'adhérence de" est isomorphe à l'immeuble abstrait de $\mathcal{D}^\natural$.*

Démonstration:
On veut définir une application entre les facettes de $\vec{I}^\natural$ et celles de $\vec{I}_\natural$. On pose :

$$\vec{\jmath}: \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\vec{I}^\natural) & \to & \mathcal{F}(\vec{I}_\natural) \\ g.\vec{f} & \mapsto & g.((\vec{f} + \vec{f}_0^\natural) \cap \vec{A}) \end{array}$$

, pour tout $g \in G^\natural$ et $\vec{f}$ facette de $\vec{A}^\natural$.

Vérifions que $\vec{\jmath}$ est bien définie. Si $g.\vec{f} = h.\vec{e}$ dans $\vec{I}^\natural$, avec $g, h \in G^\natural$ et $\vec{f}, \vec{e} \in \mathcal{F}(\vec{A}^\natural)$, alors il existe $n \in N^\natural$ tel que $\vec{e} = n.\vec{f}$ (dans $\vec{A}_e^\natural$) et $g^{-1}hn \in P^\natural(\vec{f})$. Alors $\vec{v}^\natural(n).(\vec{e} + \vec{f}_0^\natural) = \vec{v}_\natural(n).(\vec{e} + \vec{f}_0^\natural) = \vec{f} + \vec{f}_0^\natural$. Soient $n' \in N$ et $z \in Z$ tels que $n = n'z$, alors par définition de $\vec{v}_\natural$, $\vec{v}_\natural(n) = \vec{v}(n')|_{\vec{V}^\natural}$. D'où $\vec{e} + \vec{f}_0^\natural = \vec{v}(n).(\vec{f} + \vec{f}_0^\natural)$ dans $\vec{I}$.

Comme $g^{-1}hn' = g^{-1}hnz^{-1} \in P^\natural(\vec{f}).P(\vec{f} + \vec{f}_0^\natural)$, et comme, d'après (DDR 1) et (DDR 3.1), $P^\natural(\vec{f}) \subset P(\vec{f} + \vec{f}_0^\natural)$, on prouve que $g.\vec{f} = h.\vec{b}$ dans $\vec{\mathcal{I}}$.

Ainsi $\vec{j}$ est bien définie. Elle est clairement $G^\natural$-équivariante, son image est $\vec{\mathcal{I}}_\natural$, et sa restriction à $\mathcal{F}(\vec{A}_e^\natural)$ est un isomorphisme de complexe de Coxeter sur $\mathcal{F}(\vec{A}_\natural)$. Maintenant, le fait que tout couple de facettes de $\vec{\mathcal{I}}^\natural$ est inclus dans un appartement, qui est image de $\vec{A}^\natural$ par un élément de $G^\natural$, prouve l'injectivité. □

Définition 12.2.5. *Pour toute facette $\vec{f}_\natural$ de $\vec{\mathcal{I}}_\natural$, on note $P^\natural(\vec{f}_\natural) = P^\natural(\vec{f}_\natural/\vec{f}_0^\natural)$, $M^\natural_{\vec{A}_\natural}(\vec{f}_\natural) = M^\natural_{\vec{A}^\natural}(\vec{f}_\natural/\vec{f}_0^\natural)$ et $U^\natural(\vec{f}_\natural) = U^\natural(\vec{f}_\natural/\vec{f}_0^\natural)$.*

Notons que $\vec{f}_\natural/\vec{f}_0^\natural$ est une partie de facette de $\vec{\mathcal{I}}^\natural$, mais son fixateur et ses facteurs unipotent et de Lévi sont égaux aux fixateur, facteur unipotent et facteur de Lévi de cette facette.

Proposition 12.2.6. *Soit $\vec{f}_\natural$ une facette de $\vec{\mathcal{I}}_\natural$, et $\vec{f}$ une facette de $\vec{\mathcal{I}}$ rencontrant $\vec{f}_\natural$. Alors :*
- $P^\natural(\vec{f}_\natural) = P(\vec{f}_\natural) \cap G^\natural = P(\vec{f}) \cap G^\natural$,
- $U^\natural(\vec{f}_\natural) = U(\vec{f}) \cap G^\natural = U(\vec{f}_\natural) \cap G^\natural$,
- $M^\natural_{\vec{A}_\natural}(\vec{f}_\natural) = M_{\vec{A}}(\vec{f}_\natural) \cap G^\natural = M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap G^\natural$, *si $\vec{f}_\natural$ est dans l'appartement $\vec{A}_\natural$*,
- $T^\natural = Z \cap G^\natural$,
- *pour tout $a \in \phi^\natural$, $U_a^\natural = U_a \cap G^\natural$.*

Démonstration:
Par la proposition précédente, $P^\natural(\vec{f}_\natural) = \mathrm{Fix}_{G^\natural}(\vec{f}_\natural/\vec{f}_0^\natural) = P(\vec{f}_\natural \cap \vec{A}) \cap G^\natural \subset P(\vec{f}) \cap G^\natural$. De plus, si $g \in G^\natural \cap P(\vec{f})$, alors g fixe une partie de la facette $\vec{f}_\natural$, et donc g fixe cette facette. D'où l'inclusion $G^\natural \cap P(\vec{f}) \subset P^\natural(\vec{f}_\natural)$.

Maintenant, on obtient directement, si $\vec{f}_\natural$ est dans $\vec{A}_\natural$, $M^\natural_{\vec{A}_\natural}(\vec{f}_\natural) = P^\natural(\vec{f}_\natural) \cap P^\natural(\mathrm{op}_{\vec{A}_\natural}(\vec{f}_\natural)) = G^\natural \cap P(\vec{f}_\natural) \cap P(\mathrm{op}_{\vec{A}}(\vec{f}_\natural)) = G^\natural \cap M_{\vec{A}}(\vec{f}_\natural) = G^\natural \cap P(\vec{f}) \cap P(\mathrm{op}_{\vec{A}}(\vec{f})) = G^\natural \cap M_{\vec{A}}(\vec{f})$.

Ensuite, $U^\natural(\vec{f}_\natural)$ est le sous-groupe distingué de $P^\natural(\vec{f}_\natural)$ engendré par les $U_a^\natural$, $a \in \phi^{\natural u}(\vec{f}_\natural)$. Chacun de ces $U_a^\natural$ est bien inclus dans $U(\vec{f}_\natural)$ et dans $U(\vec{f})$, et $P^\natural(\vec{f}_\natural) \subset P(\vec{f}_\natural) \cap P(\vec{f})$, donc $U(\vec{f}_\natural)$ et $U(\vec{f})$ sont normalisés par $P^\natural(\vec{f}_\natural)$. D'où l'inclusion $U^\natural(\vec{f}_\natural) \subset U(\vec{f}_\natural) \cap U(\vec{f}) \cap G^\natural$.

Une fois choisi un appartement contenant $\vec{f}_\natural$, les décompositions de Lévi $P^\natural(\vec{f}_\natural) = M^\natural(\vec{f}_\natural) \ltimes U^\natural(\vec{f}_\natural)$ et $P(\vec{f}) = M(\vec{f}) \ltimes U(\vec{f})$ permettent de prouver $U(\vec{f}) \cap G^\natural \subset U^\natural(\vec{f}_\natural)$.

On a alors $U^\natural(\vec{f}_\natural) = G^\natural \cap U(\vec{f}) \subset G^\natural \cap U(\vec{f}_\natural)$. L'inclusion manquante est évidente car $U(\vec{f}_\natural) \subset U(\vec{f})$, car $\vec{f}_\natural$ contient une partie de la facette $\vec{f}$.

Par le premier point, pour toute partie $\vec{\Omega}$ de $\vec{A}_\natural$, $P^\natural(\vec{\Omega}) = P(\vec{\Omega}) \cap G^\natural$. En particulier, pour tout $a \in \phi^\natural$, $P^\natural(\vec{D}(a)) = P(\vec{D}(a)) \cap G^\natural = (Z \ltimes U_a) \cap G^\natural$, comme on l'a vu dans le lemme 12.2.1. Mais $P^\natural(\vec{D}(a))$ admet par ailleurs la décomposition de Lévi $P^\natural(\vec{D}(a)) = T^\natural \ltimes U_a^\natural$. Les inclusions $T^\natural \subset Z$ et $U_a^\natural \subset U_a$ permettent alors de prouver que $T^\natural = Z \cap G^\natural$ et $U_a^\natural = U_a \cap G^\natural$. □

12.3 Descente de la valuation

On suppose désormais que Q vérifie (para 2.1^{+-})(sph).

Lemme 12.3.1. $N^\natural \subset N.Q(\overline{A_\natural})$.

Preuve du lemme: Le groupe $N^\natural$ stabilise $\overline{A_\sharp}$ par (DM 4). Et le groupe $Q(\overline{A_\sharp})$ est transitif sur les appartements contenant $\overline{A_\sharp}$, par le corollaire 11.9.4, car $\overline{A_\sharp}$ contient des points sphériques positifs et négatifs, et Q vérifie (para 2.1^{+-})(sph). □

On étudie maintenant l'action de $G^\natural$ sur A, et on prouve que $\varphi^\natural$ est une valuation pour $\mathcal{D}^\natural$.

Comme $o \in A_\sharp$, on peut identifier chaque $a \in \phi^\natural$ à une forme affine sur $A_\sharp$ s'annulant en o, et on note pour tout $a \in \phi^\natural$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $D(a,\lambda) = \left\{x \in A_\sharp \mid a(x) + \lambda \geq 0\right\}$ et $M(a,\lambda) = \left\{x \in A_\sharp \mid a(x) + \lambda = 0\right\}$.

Proposition 12.3.2. *Pour tout $a \in \phi^\natural$, pour tout $u \in U_a^\natural$, $\mathrm{Fix}_{A_\sharp}(u) = D(a, \varphi_a^\natural(u))$, et l'action de $n(u)$ sur $\mathcal{I}$ induit sur $A_\sharp$ une réflexion selon l'hyperplan $M(a, \varphi_a^\natural(u))$.*

La famille $\varphi^\natural$ forme une valuation pour $\mathcal{D}^\natural$.

Démonstration:

Soit $a \in \phi^\natural$, $k \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \phi_a$, soit $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\alpha|_{\vec{V}^\natural} = r.a$, alors $U_{\alpha,rk} = U_\alpha(D(a,k))$. Or $\prod_{\alpha\in\phi_{a,red}} U_\alpha(D(a,k))$ est égal au groupe $Q(D(a,k)) \cap U_a$, grâce à 11.7.10 car $\phi_{a,red}$ est une partie nilpotente de racines. Le fait qu'il s'agisse d'un groupe prouve que c'est $U_{a,k}$. Donc $U_{a,k} = \prod_{\alpha\in\phi_{a,red}} U_\alpha(D(a,k)) = U_a \cap Q(D(a,k))$.

Soit $u \in U_a^\natural$. Sachant que $\mathrm{Fix}_A(u)$ est une intersection de demi-appartements dirigés par des $\vec{D}(\alpha)$, $\alpha \in \phi_a$ (11.7.7), on voit que $\mathrm{Fix}_{A_\sharp}(u)$ est un demi-espace dirigé par $\vec{D}(a)$. La description qu'on vient d'obtenir des $U_{a,k}$ entraine alors que $\mathrm{Fix}_{A_\sharp}(u) = D(a, \varphi_a^\natural(u))$.

Soit $\vec{m}_\natural$ une cloison de $\vec{A}_\natural$ contenue dans $\ker(a)$. Comme $\vec{m}_\natural$ intersecte $\vec{A}_{\mathrm{sph}}$, il existe une facette $\vec{m}$ de $\vec{A}$, sphérique, contenant un ouvert de $\vec{m}_\natural$. On note $\mathcal{D}_{\vec{m}} = (M_{\vec{A}}(\vec{m}), (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\phi^m(\vec{m})})$. Il s'agit d'une donnée radicielle valuée de type fini. On note également $\mathcal{D}^\natural_{\vec{m}_\natural} = (M^\natural_{\vec{A}_\natural}(\vec{m}_\natural), (U_a^\natural)_{a\in\phi^{\natural m}(\vec{m}_\natural)})$, il s'agit d'une donnée radicielle de type fini. Avec la partie d'immeuble $\mathcal{I}_{\sharp\vec{m}} = \mathcal{I}_\sharp \cap \mathcal{I}_{\vec{m}}$, ces deux données radicielles vérifient les hypothèses du théorème [BT72] 9.2.10. En conclusion, la valuation $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\phi^m(\vec{m})}$ se descend à une valuation de $\mathcal{D}^\natural_{\vec{m}_\natural}$, qui n'est autre (si on compare la définition de [BT72] 9.1.6 à celle du présent texte) que $(\varphi_a^\natural)_{a\in\phi^{\natural m}(\vec{m}_\natural)}$. Ainsi, $(\varphi_a^\natural)_{a\in\phi^{\natural m}(\vec{m}_\natural)}$ est une valuation. Comme $\phi^{\natural m}(\vec{m}_\natural)$ contient au moins a et $-a$, on obtient directement (V2.2) et (V5) pour la racine a.

Soient $u', u'' \in U_{-a}$ tels que $n(u) = u'uu''$. Alors par (V5), $\varphi_{-a}(u') = \varphi_{-a}(u'') = -\varphi_a(u)$. Donc u' et u'' fixent $D(-a, -\varphi_a(u))$, et $n(u)$ fixe $M(u, \varphi_a^\natural(u))$.

Montrons que $n(u)$ agit sur $A_\sharp$ comme une réflexion. Soient $n' \in N$ et $q \in Q(\overline{A_\sharp}) \subset Z$ tels que $n(u) = n'.q$. Alors $\vec{\nu}_\natural(n(u)) = \vec{\nu}(n')|_{\vec{V}^\natural}$ et c'est une réflexion dans $\vec{V}^\natural$ (12.2.3, 1). Donc n' induit une réflexion sur $A_\sharp$. Mais $n(u)$ agit sur $A_\sharp$ comme n' car $n(u)^{-1}n' \in Q(A_\sharp)$. Donc $n(u)$ induit bien sur $A_\sharp$ une réflexion selon l'hyperplan $M(a, \varphi_a^\natural(u))$.

Il est maintenant facile de vérifier que $\varphi^\natural$ est une valuation. On a déjà supposé (V 0) : il s'agit de (DV2). Le (V 1) est clair, (V 2) découle du lemme 10.2.4, valide car $\vec{\nu}^\natural$ et $\vec{\nu}_\natural$ coïncident. La condition (V 3) est facilement vérifiée grâce à (DR 2) ($\mathcal{D}^\natural$ est une donnée radicielle) et grâce à la caractérisation de $\varphi_a^\natural(u)$ par les points fixes de u. Enfin (V 4) est évident sur la définition de $\varphi^\natural$. □

12.4 Descente de la famille de parahoriques

La dernière étape avant d'obtenir une masure bordée pour le groupe $G^\natural$ est de définir une famille de parahoriques pour $(\mathcal{D}^\natural, \varphi^\natural)$. Pour commencer, on décrit une réalisation $A_\natural$ de l'appartement affine $A^\natural$ en utilisant la masure bordée $\mathcal{I}$.

Comme $\phi^\natural$ est à base libre dans $(\vec{V}^\natural)^*$, on peut, quitte à remplacer φ par une valuation équipollente, supposer que $\varphi^\natural$ est spéciale, comme dans la partie 11.

On construit alors l'appartement $A_\natural$ comme dans 11.1 : il s'agit de l'ensemble $A_\natural$ des cônes dans $A_\sharp$ dirigés par une facette de $\vec{A}_\natural$, quotienté par la relation $f \sim g \Leftrightarrow f \cap g$ contient un scp de f et de g. Pour une facette $\vec{f}_\natural$ de $\vec{A}_\natural$, l'ensemble des classes de cônes dirigés par $\vec{f}_\natural$ est appelé la façade de direction $\vec{f}_\natural$ et noté $A_{\natural\vec{f}_\natural}$. Remarquons que pour

toute facette $\vec{f}$ de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{f}_\natural$, la façade $A_{\natural\vec{f}_\natural}$ est isomorphe à $pr_{\vec{f}}(A_\sharp)$ ou encore à $\overline{A_\sharp} \cap A_{\vec{f}}$, on pourra noter $pr_{\vec{f}}$ cet isomorphisme, et $pr_{\vec{f}_\natural}$ sa réciproque. La façade principale est $A_{\natural\vec{f}_0^\natural}$, où $\vec{f}_0^\natural$ est la plus petite facette de $\vec{A}_\natural$.

Les murs, demi-appartements, facettes sont définis à partir de ϕ et de φ comme dans 11.1. L'action de $N^\natural$ stabilise $A_\sharp$ et l'ensemble des facettes de $\vec{A}_\natural$, elle induit donc une action sur $A_\natural$ par automorphismes.

Soit $\vec{f}_\natural$ une facette de $\vec{A}_\natural$, soient $(\vec{f}_i)_{i\in I}$ les facettes de $\vec{A}$ qui contiennent un ouvert de $\vec{f}_\natural$, autrement dit les facettes maximales parmi celles qui recouvrent $\vec{f}_\natural$. On pose alors, pour tout $a \in A_{\vec{f}_\natural}$:

$$Q^\natural(a) = \bigcap_{i\in I} Q(pr_{\vec{f}_i}(a)) \cap G^\natural \ .$$

Remarque: Si $\vec{f}_\natural$ est sphérique, alors les $\vec{f}_i$ le sont aussi et en utilisant 11.9.2 puis (para 2.1)($\vec{f}_i$) pour chaque i, on voit que tous les $Q(pr_{\vec{f}_i}(a)) \cap P^\natural(\vec{f}_\natural)$ sont égaux, de sorte que $Q^\natural(a)$ est égal à n'importe lequel de ces groupes.

Lemme 12.4.1. *Soit $a \in A_\natural$, soit $\vec{f}_\natural$ la direction de la façade de a, soient $(\vec{f}_i)_{i\in I}$ les facettes de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{f}_\natural$, notons pour tout $i \in I$ $a_i = pr_{\vec{f}_i}(a)$.*
Alors

$$G^\natural \cap \mathrm{Stab}_N(\vec{f}_\natural).Q(\{a_i\}_{i\in I}) = N^\natural(\vec{f}_\natural).Q^\natural(a) \ .$$

Preuve du lemme:
L'inclusion $\supset$ vient de $N^\natural \subset N.Q(\overline{A_\sharp})$.

Réciproquement, soit $g = nq \in G^\natural \cap stab_N(\vec{f}_\natural).Q(\{a_i\}_{i\in I})$. Soit $g = u^\natural n^\natural q^\natural$ une écriture de g dans la décomposition d'Iwasawa $G^\natural = U^\natural(\vec{C}_\natural).N^\natural.G^\natural(a)$, avec $\vec{C}_\natural$ une chambre dont l'adhérence contient $\vec{f}_\natural$.

Soit $i \in I$. Soit $\vec{C}_i$ une chambre de $\vec{A}$ dont l'adhérence contient un ouvert de $\vec{C}^\natural$ et $n^{-1}\vec{f}_i$. Soient $n' \in N$, $z \in Q(\overline{A_\sharp})$ tels que $n^\natural = n'z$. Alors pour tout $i \in I$, $g = e.n.q = u^\natural.n'.(zq^\natural)$ sont deux écritures de g dans la décomposition d'Iwasawa $G = U(\vec{C}_i).N.Q(a_i)$. Par la proposition 11.7.6, applicable car $\vec{f}_i \subset n\vec{C}_i$, $n^{-1}n' \in N(a_i)$. Au total, $n^{-1}n' = n^{-1}n^\natural z^{-1} \in N(\{a_i\}_{i\in I})$ d'où $n \in n^\natural.Q(\{a_i\}_{i\in I})$. Alors $g = nq \in n^\natural.Q(\{a_i\}) \cap G^\natural \subset N^\natural.(Q(\{a_i\}_{i\in I}) \cap G^\natural) = N^\natural Q^\natural(a)$. □

Proposition 12.4.2. *La famille $Q^\natural$ est une bonne famille de parahoriques pour $(\mathcal{D}^\natural, \varphi^\natural)$. Si Q vérifie (para 2.1^+)(sph), alors $Q^\natural$ aussi.*

Remarque: La condition (para 2.1^{+-})(sph) ne semble pas se descendre à $Q^\natural$, en tout cas pas de manière évidente.

Démonstration:
On fixe une facette $\vec{f}_\natural \in \mathcal{F}(\vec{A}_\natural)$ et un point $x \in A_{\natural\vec{f}_\natural}$, on note $(\vec{f}_i)_{i\in I}$ l'ensemble des facettes de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{f}_\natural$, et pour tout $i \in I$, on pose $x_i = pr_{\vec{f}_i}(x)$.

Pour tout $i \in I$, on a $U^\natural(\vec{f}_\natural) \subset U(\vec{f}_\natural) \subset U(\vec{f}_i)$, donc $U_\natural(\vec{f}_\natural) \subset Q^\natural(x)$. D'autre part, pour tout $i \in I$, $Q^\natural(x) \subset P(\vec{f}_i) \cap G^\natural = P^\natural(\vec{f}_i) = P^\natural(\vec{f}_\natural)$. D'où $Q^\natural(x) \subset P^\natural(\vec{f}_\natural)$, donc $Q^\natural$ vérifie (para 0.1).

Soit $n \in N^\natural(x)$. Modulo un élément $z \in Q(\overline{A_\sharp})$, qui fixe donc tous les x_i, on peut supposer $n \in N(x)$. Alors il existe un représentant $f_\natural = y + \vec{f}_\natural$ de x inclus dans $A_\sharp$, tel que $f_\natural \cap n.f_\natural$ contient un scp de $f_\natural$. Autrement dit, $n \in N(\vec{f}_\natural)$ et $\overrightarrow{yn(y)} \in \mathrm{Vect}(\vec{f}_\natural)$. Ceci implique directement $n \in N(\vec{f}_i)$ et $\overrightarrow{yn(y)} \in \mathrm{Vect}(\vec{f}_i)$ (car $\mathrm{Vect}(\vec{f}_\natural) = \mathrm{Vect}(\vec{f}_i)$). D'où $n \in N(pr_{\vec{f}_i}(y)) = N(x_i)$. Ceci prouve (para 0.2).

Les deux conditions (para 0.3) et (para 0.4) sont claires, donc $Q^\natural$ est une famille de parahoriques.

Soit $\vec{g}_\natural$ une facette sphérique de $\vec{f}_\natural^* \cap \vec{A}_\natural$. Soit $g \in Q^\natural(x) \cap P^\natural(\vec{g}_\natural)$. Soit $\vec{g}$ une facette de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{g}_\natural$, il existe $i \in I$ tel que $\vec{f}_i \subset \overline{\vec{g}}$, alors $g \in Q(x_i) \cap P(\vec{g}) \subset Q(pr_{\vec{g}}(x_i)) = Q(pr_{\vec{g}}(pr_{\vec{g}_\natural}(x)))$. D'où (para 2.1)(sph).

Montrons (para *sph*) : supposons $\vec{f}_\natural$ sphérique et montrons que $Q^\natural(x) = P^\natural(x) = U^\natural(\vec{f}^\natural).N^\natural(x).G^\natural(\phi^{\natural m}(\vec{f}^\natural), x)$. Soit $i \in I$, alors $\vec{f}_i$ est sphérique (proposition 12.2.3) et :

$$\begin{aligned} Q^\natural(x) &= Q(x_i) \cap P^\natural(\vec{f}_\natural) \\ &= P(x_i) \cap P^\natural(\vec{f}_\natural) \\ &= U(\vec{f}_i) \rtimes (N(x_i).G(\phi^m(\vec{f}_i), x)) \cap P^\natural(\vec{f}_\natural) \end{aligned}$$

Avec la décomposition de Lévi $P^\natural(\vec{f}_\natural) = U^\natural(\vec{f}_\natural) \rtimes M^\natural(\vec{f}_\natural) = (U(\vec{f}_i) \cap G^\natural) \rtimes (M(\vec{f}_i) \cap G^\natural)$ (par 12.2.6), on obtient :

$$\begin{aligned} Q^\natural(x) &= \left(U(\vec{f}_i) \cap G^\natural\right) \rtimes \left(N(x_i).G(\phi^m(\vec{f}_i), x) \cap G^\natural\right) \\ &= U^\natural(\vec{f}_\natural) \rtimes \left(N(x_i).G(\phi^m(\vec{f}_i), x) \cap G^\natural\right) . \end{aligned}$$

C'est la proposition 9.1.17 de [BT72], appliquée aux données radicielles $\mathcal{D}_{\vec{f}_i}$ et $\mathcal{D}^\natural_{\vec{f}_\natural}$, et avec $S^\natural = T^\natural$, qui indique alors que $N(x_i).G(\phi^m(\vec{f}_i), x) \cap G^\natural = N^\natural(x_i).G^\natural(\phi^{\natural m}(\vec{f}_i), x)$. Comme $N^\natural(x_i) \subset N^\natural(x)$ et $\phi^{\natural m}(\vec{f}_i) = \phi^{\natural m}(\vec{f}_\natural)$, on a bien obtenu $Q^\natural(x) \subset P^\natural(x)$.

Montrons (para *inj*) : soit $n \in N^\natural \cap Q^\natural(a) = N^\natural \cap P(\vec{f}_\natural) \cap Q(\{a_i\}_{i\in I})$. Soit $a_0 \in A_\sharp$ tel que $a = [a_0 + \vec{f}_\natural]$, alors $n.a = [n.a_0 + \vec{f}_\natural]$. De plus, pour un $i \in I$ quelconque, le fait que $n.a_i = n.[a_0 + \vec{f}_i] = a_i$ entraine que $\overrightarrow{a_0 n(a_0)} \in \mathrm{Vect}(\vec{f}_i) = \mathrm{Vect}(\vec{f}_\natural)$. Donc $n.[a_0 + \vec{f}_\natural] = [a_0 + \vec{f}_\natural]$, autrement dit $n \in N^\natural(a)$.

Il ne manque à $Q^\natural$ plus que (para 2.2)(sph) pour être une bonne famille de parahoriques. Soit donc $\vec{g}_\natural$ une facette de $\vec{f}_\natural^* \cap \vec{A}_{\mathrm{sph}}$ et $g \in N^\natural.Q^\natural(x) \cap P(\vec{g}_\natural) = N^\natural(\vec{f}_\natural).Q^\natural(x) \cap P(\vec{g}_\natural)$. Soient $(\vec{g}_i)_{i\in I}$ des facettes de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{g}_\natural$, telles que pour tout $i \in I$ $\vec{f}_i \subset \overline{\vec{g}_i}$.

Pour tout $i \in I$, on a $g \in N(\vec{f}_\natural)Q(x_i) \cap P(\vec{g}_i) \subset N(\vec{f}_i).Q(x_i) \cap P(\vec{g}_i) = N(\vec{f}_i).Q(\{x_i, pr_{\vec{g}_i}(x_i)\})$. Donc par 11.9.3, $g \in P(\vec{g}_\natural) \cap \bigcap_{i\in I} N(\vec{f}_i).Q(\{x_i, pr_{\vec{g}_i}(x_i)\}) \subset N.Q(\{x_i, pr_{\vec{g}_i}(x_i)\}_{i\in I}) \cap P(\vec{g}_\natural) = N(\vec{g}_\natural).Q(\{x_i, pr_{\vec{g}_i}(x_i)\}_{i\in I})$. Si $\vec{g}$ est une facette de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{g}_\natural$ qui ne figure pas parmi les $\vec{g}_i$, alors $Q(\{x_i, pr_{\vec{g}_i}(x_i)\}_{i\in I}) \subset Q(pr_{\vec{g}}(x)$ (voir la remarque précédant le lemme). Alors comme de plus $g \in G^\natural$, on obtient par le lemme $g \in N^\natural(\vec{g}_\natural).Q^\natural(pr_{\vec{g}^*}(x))$.

Supposons que Q satisfasse à (para 2.1^+)(sph). Soit $\vec{g}_\natural \in \vec{f}_\natural^* \cap \vec{A}_\natural$, soit $g \in Q^\natural(a) \cap P^\natural(\vec{g}_\natural)$. Alors pour tout i, $g \in Q(a_i) \cap P(\vec{g}_i) = Q(\overline{a_i + \vec{g}_i})$. Ceci entraine bien que $g \in Q^\natural(\overline{a + \vec{g}_\natural})$. □

12.5 Injection des façades

Soit $\mathcal{I}^\natural = \mathcal{I}(Q^\natural)$ la masure bordée pour $G^\natural$ qu'on vient d'obtenir. Le but de ce paragraphe est d'identifier certaines façades de $\mathcal{I}^\natural$ à des parties de $\mathcal{I}$. Soit $\vec{f}_\natural$ une facette de $\vec{A}_\natural$, soit $\vec{f}$ une facette de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{f}_\natural$. Comme on l'a déjà dit, l'injection $A_{\natural\vec{f}_\natural} \hookrightarrow A_{\vec{f}}$ est bien définie par $[a_\sharp + \vec{f}_\natural] \mapsto [a_\sharp + \vec{f}]$, pour tout $a_\sharp \in A_\sharp$. Nous voulons à présent étudier l'injection de $\mathcal{I}^\natural_{\vec{f}_\natural}$ dans $\mathcal{I}_{\vec{f}}$.

Proposition 12.5.1. *La fonction* $j_{\vec{f}_\natural}$: $\begin{array}{ccc} \mathcal{I}^\natural_{\vec{f}_\natural} & \to & \mathcal{I}_{\vec{f}} \\ [g, [a_\sharp + \vec{f}_\natural]] & \mapsto & [g, [a_\sharp + \vec{f}]] \end{array}$ *est bien définie et $G^\natural$-équivariante.*

Si $\vec{f}$ est sphérique, elle est de plus injective.

Démonstration: Soient $g, h \in G^\natural$ et $a, b \in A_{\natural \vec{f_\natural}}$ tels que $(g,a) \sim_{Q^\natural} (h,b)$. Soient $a_\sharp, b_\sharp \in A_\sharp$ tels que $a = [a_\sharp + \vec{f_\natural}]$ et $b = [b_\sharp + \vec{f_\natural}]$, notons encore $a' = [a_\sharp + \vec{f}]$ et $b' = [b_\sharp + \vec{f}]$.

Soit $n \in N^\natural$ tel que $n.a = b$ et $g^{-1}hn \in Q^\natural(a)$. Donc $n.(a_\sharp + \vec{f_\natural}) \cap (b_\sharp + \vec{f_\natural}) \neq \emptyset$. Comme $\vec{f}$ contient un ouvert de $\vec{f_\natural}$, ceci entraine $n.(a_\sharp + \vec{f}) \cap (b_\sharp + \vec{f}) \neq \emptyset$. Il existe $n' \in N$ et $z \in Q(\overline{A_\sharp})$ tels que $n = n'z$, alors $n'.(a_\sharp + \vec{f}) = n.(a_\sharp + \vec{f})$, et nous venons de voir que ce cône est équivalent à $b_\sharp + \vec{f}$. Ainsi, $n'.a' = b'$.

De plus $g^{-1}hn' = g^{-1}hnz^{-1} \in Q^\natural(a).Q(a') = Q(a')$. Donc $(g,a) \sim_Q (h,b)$, et la fonction $j_{\vec{f_\natural}}$ est bien définie. Elle est clairement équivariante.

Gardant les notations précédentes, supposons maintenant $\vec{f_\natural}$ sphérique et $(g,a') \sim_Q (h,b')$. Donc $g^{-1}h.b' = a'$ et $g^{-1}h \in Q(a').N \cap P^\natural(\vec{f_\natural})$. Comme $Q(a') \subset P(\vec{f})$, on a en fait $g^{-1}h \in Q(a').N(\vec{f})$. Mais $N(\vec{f}) = N(\vec{f_\natural})$ d'où finalement $g^{-1}h \in \Big((Q(a') \cap P(\vec{f_\natural})).N(\vec{f_\natural})\Big) \cap P^\natural(\vec{f_\natural})$. Soient $(\vec{f_i})_{i\in I}$ les facettes de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{f_\natural}$, et $(a_i)_{i\in I}$ les projetés de a dans les façades $A_{\vec{f_i}}$. Comme les $\vec{f_i}$ sont sphériques et comme Q vérifie (para 2.1^{+-})(sph), $Q(a') \cap P(\vec{f_\natural}) = Q(a') \cap P(\bigcup_i \vec{f_i}) = Q(\{a_i\}_{i\in I})$. Alors le lemme 12.4.1 prouve que $g^{-1}h \in Q^\natural(a).N^\natural(\vec{f_\natural})$. Soit $n \in N^\natural(\vec{f_\natural})$ tel que $g^{-1}h \in Q^\natural(a)n^{-1}$, il reste à prouver que $n.a = b$. Sachant que $Q^\natural(a) \subset Q(a')$ et $g^{-1}h.b' = a'$, on a déjà $n.a' = b'$. Donc $n.(a_\sharp + \vec{f}) \cap (b_\sharp + \vec{f}) \neq \emptyset$. Donc $\overrightarrow{n(a_\sharp)b_\sharp} \in \mathrm{Vect}(\vec{f}) \cap \vec{V}^\natural = \mathrm{Vect}(\vec{f_\natural})$. Donc $n.(a_\sharp + \vec{f_\natural}) \cap (b_\sharp + \vec{f_\natural}) \neq \emptyset$. □

13 Le cas Kac-Moody

On adopte la définition de J. Tits pour les groupes de Kac-Moody, et on se réfère principalement à [Ré02].

13.1 Rappels et notations

13.1.1 Groupes de Kac-Moody déployés

Soit G un groupe de Kac-Moody déployé sur un corps $\mathbb{K}$, il s'agit donc d'un foncteur des $\mathbb{K}$-algèbres vers les groupes. Comme tout groupe de Kac-Moody, G vient avec une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ et une action $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ appelée l'action adjointe.

Pour chaque tore maximal T, on note T^* son groupe de caractères et T_* son groupe de cocaractères. On définit une forme bilinéaire $\langle ., . \rangle : T^* \times T_* \to \mathbb{Z}$ par $\langle \chi, h \rangle = n$ si $\chi \circ h(k) = k^n$ pour tout $k \in \mathbb{K}$.

A chaque tore maximal T correspond un système de racines $\phi^c(T)$ tel que l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(\mathbb{K})$ est graduée par $\phi^c(T) \cup \{0\}$. On note toujours $\vec{V}(T)$ l'espace vectoriel réel tel que $\phi^c(T) \subset \vec{V}(T)^*$, toute base de $\phi^c(T)$ est une base de $\vec{V}(T)^*$. On note aussi $Q(T) = \mathbb{Z}.\phi^c(T)$ le réseau des racines, il existe un morphisme de $Q(T)$ dans T^*, noté $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$, qui s'étend à une application linéaire de $\vec{V}(T)^*$ dans $T^* \otimes \mathbb{R}$.

Une racine est soit réelle, soit imaginaire, on note $\phi(T)$ l'ensemble des racines réelles, et $\phi^{\text{im}}(T)$ celui des racines imaginaires. L'ensemble $\phi^c(T)$ est appelé le système complet de racines. Dans la suite, ce sera le plus souvent $\phi(T)$ qui interviendra, ce qui explique qu'on ait choisi la notation la plus courte pour le désigner.

Il existe une base de Chevalley $(e_a)_{a \in \phi \sqcup Im}$ de $\mathfrak{g}$. Pour chaque $\alpha \in \phi$, $\mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension 1 et la base contient un élément noté e_α de $\mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Par contre pour α une racine imaginaire, ou $\alpha = 0$, $\mathfrak{g}_\alpha$ peut être de dimension supérieure, et la base contiendra plusieurs élément de $\mathfrak{g}_\alpha$. A chaque racine réelle $\alpha \in \phi(T)$ correspond un sous-groupe U_α de G, isomorphe au groupe additif. Il existe un choix des isomorphismes $(u_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ entre les $U_\alpha(\mathbb{K})$ et $(\mathbb{K}, +)$ tels que pour $\alpha \in \phi$, $Ad(u_\alpha(k)) = exp(ad(ke_\alpha)) = \sum_n k \otimes (\frac{ad(e_\alpha)^n}{n!}) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ (l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(\mathbb{K})$ vaut $\mathbb{K} \otimes \mathfrak{g}_\mathbb{Z}$, où $\mathfrak{g}_\mathbb{Z}$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre de Lie stable par les $\frac{ad(e_\alpha)^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$). Le tore T agit diagonalement, par $Ad(t).e_\alpha = \bar{\alpha}(t).e_\alpha$.

Le groupe U_α est normalisé par T, plus précisément, la formule suivante est vérifiée pour $k \in \mathbb{K}$ et $t \in T(\mathbb{K})$:

$$tu_\alpha(k)t^{-1} = u_\alpha(\bar{\alpha}(t).k)$$

On note $N(T)$ le normalisateur de T, il est engendré par T et les éléments $n_\alpha(k) := u_{-\alpha}(k^{-1})u_\alpha(k)u_{-\alpha}(k^{-1})$ pour $\alpha \in \phi$ et $k \in \mathbb{K}$. On note également $W(T) = N(T)/T$ le groupe de Weyl vectoriel relatif à T. La paire $(W(T), (n_\alpha(1).T)_{\alpha \in \pi})$ forme un système de Coxeter pour toute base Π de ϕ.

Tout ceci entraine que la famille $(G(\mathbb{K}), (U_\alpha(\mathbb{K}))_{\alpha \in \phi(T)})$ est une donnée radicielle génératrice.

Supposons maintenant $\mathbb{K}$ muni d'une valuation non triviale $\omega : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Comme on l'a déjà dit (proposition 10.2.3), la famille de fonction $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi(T)}$ définie par :

$$\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} U_\alpha(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ u_\alpha(k) & \mapsto & \omega(k) \end{array}$$

est une valuation de cette donnée radicielle.

Dans le cas d'un groupe de Kac-Moody, l'action de T sur $A(T)$ peut être décrite un peu plus directement que dans le cas général d'une donnée radicielle (11.1.9).

Proposition 13.1.1. *Soit T un tore maximal de G. Alors pour tout $t \in T$, le vecteur $\vec{v}_t$ est l'unique vecteur de $\vec{V}(T)$ tel que :*

$$\forall \alpha \in \phi,\ \alpha(\vec{v}_t) = -\omega(\bar{\alpha}(t)) \ .$$

Démonstration:

Par la proposition 11.1.9, le vecteur $\vec{v}_t$ est caractérisé par $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(tut^{-1})$, pour tout $\alpha \in \phi$ et tout $u \in U_\alpha(\mathbb{K}) \setminus \{e\}$.

Soit $\alpha \in \phi$, et prenons $u = u_\alpha(1)$ ($u \neq e$ puisque $u_\alpha^{-1}(e) = 0$). Alors :

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{v}_t) &= \varphi_\alpha(u_\alpha(1)) - \varphi_\alpha(tu_\alpha(1)t^{-1}) \\ &= 0 - \varphi_\alpha(u_\alpha(\overline{\alpha}(t).1)) \\ &= -\omega(\overline{\alpha}(t)). \end{aligned}$$

Donc $\vec{v}_t$ vérifie les égalités annoncées. L'unicité de $\vec{v}_t$ est claire car ϕ engendre $\vec{V}^*$. □

Nous avons vu (11.8.6) que les familles minimale et maximale de parahorique P et $\overline{P}$ sont fonctoriellement de bonnes familles de parahoriques.

D'après [Rou10], il existe une bonne famille de parahoriques Q pour $\mathcal{D}$, qui vérifie en outre (para 2.1^+)(sph) et (para *dec*). En particulier, tous les résultats de 11 s'appliquent à Q.

13.1.2 Groupes de Kac-Moody presque déployés

Soit maintenant un groupe de Kac-Moody G presque déployé sur un corps $\mathbb{K}$, déployé sur la clôture séparable $\mathbb{K}_s$ de $\mathbb{K}$. Il existe alors une extension galoisienne finie $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, incluse dans $\mathbb{K}_s$ qui déploie G. On se réfère à [Ré02] 11.3 pour la définition d'un groupe de Kac-Moody presque déployé, la condition principale est que le groupe de Galois de $\mathbb{K}|\mathbb{L}$ préserve la classe des sous-groupes de Borel positifs et négatifs de G. Ainsi, ce groupe de Galois stabilisera chacun des immeubles positifs et négatifs de $G(\mathbb{L})$. On fixe un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal $T_\mathbb{K}$. Il existe un tore maximal T $\mathbb{K}$-défini contenant $T_\mathbb{K}$, et quitte à remplacer $\mathbb{L}$ par une autre extension galoisienne un peu plus grande, on peut supposer T $\mathbb{L}$-déployé.

Le groupe $G(\mathbb{L})$ est tel que décrit au paragraphe précédent, et il admet une masure bordée $\mathcal{I}_\mathbb{L}$. On notera parfois G pour $G(\mathbb{L})$, $\vec{I}$ pour $\vec{I}(\mathbb{L})$ et $\mathcal{I}$ pour $\mathcal{I}_\mathbb{L}$

On suppose $\mathbb{K}$ muni d'une valuation non triviale $\omega : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \cup \infty$ (en particulier, $\mathbb{K}$ est infini). Soit $\Gamma = \mathcal{G}al(\mathbb{L}|\mathbb{K})$. On suppose $\mathbb{K}$ complet, ce qui entraîne en particulier que ω se prolonge de manière unique à $\mathbb{K}_s$, et donc à $\mathbb{L}$, la valuation obtenue est alors nécessairement Γ-stable.

On suppose enfin que pour toute extension séparable $\mathbb{M}$ de $\mathbb{K}$, $G(\mathbb{K}_s)^{\mathcal{G}al(\mathbb{K}_s|\mathbb{M})} = G(\mathbb{M})$ (c'est la condition (DSC 2) de [Ré02] 12.1.1). On est alors dans les conditions de [Ré02], chapitre 12, et il existe un immeuble vectoriel pour $G(\mathbb{K})$, venant d'une donnée radicielle. Voici un résumé :

Le groupe de Galois Γ agit par définition d'un groupe presque déployé sur $G(\mathbb{L})$ et sur son algèbre de lie $\mathfrak{g}(\mathbb{L})$, en vérifiant $\sigma(Ad(g).x) = Ad(\sigma g).\sigma x$ pour $g \in G$ et $x \in \mathfrak{g}$. Ceci définit une action de Γ sur $\vec{I}_\mathbb{L}$, par automorphismes d'immeubles, qui préserve les immeubles positif et négatif, mais qui ne préserve pas le type des facettes.On note $\vec{I}(\mathbb{K}) = \vec{I}^\Gamma$, on prouve qu'il s'agit d'un immeuble pour $G(\mathbb{K})$.

Les appartements de $\vec{I}(\mathbb{K})$, qu'on appellera les $\mathbb{K}$-appartements vectoriels, sont les parties maximales de $\vec{I}(\mathbb{K})$ de la forme $\vec{E} \cap \vec{A}(T)$ avec $\vec{E}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{V}(T)$ rencontrant $\vec{A}_{\text{sph}}(T)$. Ils sont en bijection avec l'ensemble des tores $\mathbb{K}$-déployés maximaux de $G(\mathbb{K})$. Comme Γ ne respecte pas les types, un $\mathbb{K}$-appartement n'est généralement pas une réunion de facettes de $\vec{I}(\mathbb{L})$. Un appartement de $\vec{I}(\mathbb{K})$ est toujours inclus dans un appartement de $\vec{I}$ qui est Γ-stable, ceci correspond à l'inclusion d'un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal dans un tore maximal défini sur $\mathbb{K}$. Réciproquement, si $T_d \subset T$ est l'inclusion d'un tore déployé maximal dans un tore maximal défini sur $\mathbb{K}$, alors $\vec{A}(T)$ est un appartement Γ-stable, dont le lieu des points fixes sous Γ est $\vec{A}_\mathbb{K}(T_d)$. Le fixateur du $\mathbb{K}$-appartement $\vec{A}_\mathbb{K}(T_d)$ est le centralisateur de T_d, noté $Z(T_d)$. Le fixateur de $\vec{A}_\mathbb{K}(T_d)$ dans $G(\mathbb{K})$ est donc $Z(T_d)(\mathbb{K}) = Z(T_d)^\Gamma$. Le stabilisateur de $\vec{A}_\mathbb{K}(T_d)$ est $N(T_d)$, il agit donc sur $\vec{A}_\mathbb{K}$ via $W(\vec{A}_\mathbb{K}) := N(T_d)/Z(T_d)$.

Soit $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ un $\mathbb{K}$-appartement vectoriel inclus dans un appartement vectoriel $\vec{A}$. Ses murs sont les $\vec{A}_{\mathbb{K}} \cap M$ pour M un mur d'un appartement $\vec{A}$ contenant $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ et tel que $\vec{A}_{\mathbb{K}} \cap M \cap \vec{A}_{\text{sph}} \neq \emptyset$ (cette dernière condition signifie que $\vec{A}_{\mathbb{K}} \cap M$ est un mur *réel*). Ces murs font de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ un complexe de Coxeter, dont le groupe de Coxeter est $W(\vec{A}_{\mathbb{K}})$. Les facettes de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ sont des réunions de parties de la forme $\vec{f}^{\uparrow}$ pour $\vec{f}$ une facette de $\vec{A}$ Γ-stable. Une facette de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ est sphérique si et seulement si elle coupe $\vec{A}_{\text{sph}}$ (et donc contient une $\vec{f}^{\uparrow}$, avec $\vec{f}$ une facette sphérique de $\vec{A}$). Les racines pour $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ sont les $\alpha|_{\vec{A}_{\mathbb{K}}}$ pour $\alpha \in \phi(\vec{A})$ telle que $\ker(\alpha) \cap \vec{A}_{\mathbb{K}}$ est un mur réel, autrement dit rencontre $\vec{A}_{\text{sph}}$ et n'est pas égal à $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ (donc $\alpha|_{\vec{A}_{\mathbb{K}}} \neq 0$). L'ensemble des racines de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ noté $\phi(\vec{A}_{\mathbb{K}})$ ou $\phi(T_d)$ est un système de racines, pas forcément réduit contrairement à $\phi(\vec{A})$, et son groupe de Weyl est $W(\vec{A}_{\mathbb{K}})$. Les $\mathbb{K}$-racines géométriques sont les demi-appartements de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$.

Pour tout $a \in \phi(T_d)$, on note, conformément à 12.1, $\phi_a = \left\{\alpha \in \phi(T) \mid \alpha|_{\vec{A}_{\mathbb{K}}} \in \mathbb{R}^{+*}.a\right\}$ et $U_a = \langle\, U_\alpha \,\rangle\, \alpha \in \phi_a$. Le sous-groupe radiciel associé à a est alors $U_a(\mathbb{K})$. La famille $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} := (G(\mathbb{K}), (U_a(\mathbb{K}))_{a\in\phi(T_d)})$ est une donnée radicielle pour $G(\mathbb{K})$ ([Ré02] 12.6.3). Il y a ici un petit conflit de notation puisque le groupe jouant le rôle de T pour la donnée radicielle $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$, c'est-à-dire $\bigcap_a N_{G(\mathbb{K})}(U_a(\mathbb{K}))$, est en fait $Z(T_d)(\mathbb{K})$.

L'immeuble que définit cette donnée radicielle n'est pas exactement $\vec{\mathcal{I}}(\mathbb{K}) = \vec{\mathcal{I}}^{\Gamma}$, cependant ce dernier en est tout de même une bonne réalisation géométrique (voir [Ré02] 12.4.4 et 13.4.2). L'immeuble $\vec{\mathcal{I}}(\mathbb{K})$ correspond en fait à l'immeuble $\vec{\mathcal{I}}_{\natural}$ de la partie 12, et l'immeuble de la donnée radicielle $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$ correspond à $\vec{\mathcal{I}}^{\natural}$.

Le cas d'un groupe de Kac-Moody presque déployé comporte une simplification notable par rapport à la situation générale étudiée en 12 : pour toute facette sphérique $\vec{f}_{\mathbb{K}}$ de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, il n'existe qu'une seule facette de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{f}_{\mathbb{K}}$. En effet, dans le cas contraire il existerait un mur de $\vec{A}$ coupant l'intérieur de $\vec{f}_{\mathbb{K}}$. Comme $\vec{f}_{\mathbb{K}}$ est sphérique, ce mur coupe $\vec{A}_{\text{sph}} \cap \vec{A}_{\mathbb{K}}$, et donc induit un mur de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, qui coupe $\vec{f}_{\mathbb{K}}$, ce qui est impossible.

13.2 Action du groupe de Galois

On définit dans ce paragraphe une action du groupe Γ sur l'immeuble $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}$. On rapelle qu'on a fixé un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal $T_{\mathbb{K}}$ inclus dans un tore maximal $\mathbb{K}$-défini et $\mathbb{L}$-déployé T. Le tore T est donc Γ-stable, ce qui permettra de définir une action de Γ sur l'appartement $A(T)$. L'extension de cette action à $\mathcal{I}$ ne posera ensuite aucun problème.

13.2.1 Action de Γ sur A

Dans cette partie, on note $\vec{A} = \vec{A}(T)$, $A = A(T)$, $\phi = \phi(T)$, $\vec{V} = \vec{V}(T)$. Le fait que T est défini sur $\mathbb{K}$ implique que $\vec{A}$ est Γ-stable, et cette action de Γ sur $\vec{A}$ s'étend par linéarité à $\vec{V}$. De plus Γ permute les racines et les sous-groupes radiciels relatifs à T, de manière compatible à son action sur l'algèbre de Lie. On a précisément, pour $\sigma \in \Gamma$ et $\alpha \in \phi$:

$$\sigma u_\alpha(k) = u_{\sigma\alpha}(\sigma(k).k_\alpha^\sigma)$$

où k_α^σ est défini par $\sigma.e_\alpha = k_\alpha^\sigma.e_{\sigma\alpha}$.

D'où

$$\sigma U(\alpha, \lambda) = U(\sigma(\alpha), \lambda + \omega_\alpha^\sigma)$$

où $\omega_\alpha^\sigma \in \mathbb{R}$ vaut $\omega(k_\alpha^\sigma)$.

Par conséquent, on veut définir une action de Γ sur A telle que σ envoie $D(\alpha, \lambda)$ sur $D(\sigma(\alpha), \lambda + \omega_\alpha^\sigma)$. Cette action doit être compatible avec l'action vectorielle de Γ sur $\vec{V}$, il ne reste donc qu'à déterminer l'image du point o. Voici en quelques mots la justification de la définition qui va suivre :
Nous voulons $\sigma M(\alpha, \lambda) = M(\sigma\alpha, \lambda + \omega_\alpha^\sigma)$, c'est-à-dire

$$\{\sigma x \in Y_0 \mid \alpha(x) + \lambda = 0\} = \{x \in Y_0 \mid \sigma\alpha(x) + \lambda + \omega_\alpha^\sigma = 0\}$$

Il faut donc que $\alpha(\sigma^{-1}(x)) = (\sigma\alpha)(x) + \omega_\alpha^\sigma$, et ce pour tout $\alpha \in \phi$. Soit $\vec{u} \in \vec{V}$ tel que $x = o + \vec{u}$, alors $(\sigma\alpha)(x) = (\sigma\alpha)(\vec{u}) = \alpha(\sigma^{-1}(\vec{u}))$. D'autre part, si nous définissons une action affine de σ sur A, dont la partie vectorielle coïncide avec l'action déjà connue de σ sur $\vec{V}$, nous aurons $\sigma^{-1}(x) = o + \overrightarrow{o\sigma^{-1}(o)} + \sigma^{-1}(\vec{u})$, puis $\alpha(\sigma^{-1}(x)) =$

$\alpha(\overrightarrow{o\sigma^{-1}(o)}) + \alpha(\sigma^{-1}(\vec{u}))$. Finalement, il nous faut faire en sorte que $\alpha(\overrightarrow{o\sigma^{-1}(o)}) = \omega_\alpha^\sigma$.

Lemme 13.2.1. *Soit $\sigma \in \Gamma$, on note $\omega_\alpha = \omega_\alpha^\sigma$ pour $\alpha \in \phi$. Soit $S \subset W(T)$ un système générateur de réflexions, et $\Pi = (\alpha_s)_{s\in S} \subset \phi$ la base de ϕ correspondante. Soient $\alpha, \beta \in \phi$, $s \in S$ tels que $\alpha = s.\beta = \beta - <\alpha_s, \beta>\alpha_s$. Alors $\omega_\alpha = \omega_\beta - <\alpha_s, \beta>\omega_{\alpha_s}$.*

Remarque: On rappelle que par définition, $<\alpha, \beta> = \beta(\alpha^\vee)$.

Preuve du lemme: On note pour $\gamma \in \phi$, $k_\gamma = k_\gamma^\sigma$, donc $\omega_\gamma = \omega(k_\gamma)$. On note également $k_s = k_{\alpha_s}^\sigma$, et on reprend les notations de [Ré02] chapitres 7 et 8.

Puisque $\alpha = s.\beta$, on a $e_\alpha = \pm s^* e_\beta = \pm Ad(n_{\alpha_s}(1)).e_\beta$. (La notation s^* désigne un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui relève l'élément du groupe de Weyl $s \in W(\phi)$, en caractéristique nulle, $s^* = \exp(\mathrm{ad}\ f_s)\exp(\mathrm{ad}\ e_s)\exp(\mathrm{ad}\ f_s)$). Appliquant σ à cette égalité, on trouve :

$$\begin{aligned} k_\alpha e_{\sigma\alpha} &= \pm Ad(\sigma(n_{\alpha_s}(1))).\sigma(e_\beta) \\ &= \pm k_\beta Ad(n_{\sigma\alpha_s}(k_s))e_{\sigma\beta} \\ &= \pm k_\beta Ad(n_{\sigma\alpha_s}(1).k_s^{-\alpha_{\sigma s}^\vee})e_{\sigma\beta} \\ &= \pm k_\beta k_s^{-<\alpha_s,\beta>} Ad(n_{\sigma\alpha_s}(1)).e_{\sigma\beta} \\ &= \pm \pm k_\beta k_s^{-<\alpha_s,\beta>} e_{\sigma(s).\sigma(\beta)} \\ &= \pm \pm k_\beta k_s^{-<\alpha_s,\beta>} e_{\sigma\alpha} \end{aligned}$$

D'où $\omega_\alpha = \omega_\beta - <\alpha_s, \beta>\omega_{\alpha_s}$. □

Comme Π est une base de $\vec{V}^*$, il existe pour tout $\sigma \in \Gamma$ un vecteur $\vec{v}_\sigma \in \vec{V}$ tel que pour tout $s \in S$, $\alpha_s(\vec{v}_\sigma) = \omega_{\alpha_s}^{\sigma^{-1}}$. Alors d'après le lemme, on a aussi $\alpha(\vec{v}_\sigma) = \omega_\alpha^{\sigma^{-1}}$ pour toute $\alpha \in \phi$.

Définition 13.2.2. *Pour $\sigma \in \Gamma$ et $\vec{u} \in \vec{V}$, on pose*

$$\sigma(o + \vec{u}) = o + \vec{v}_\sigma + \sigma(\vec{u})$$

Proposition 13.2.3. *La formule ci-avant s'étend à une action de groupe de Γ sur A, par automorphismes d'appartement, compatible avec celle de $N(T)$ au sens où $(\sigma n).x = \sigma(n(\sigma^{-1}.x))$, et compatible avec l'action de Γ sur les sous-groupes radiciels au sens où $\sigma.D(\alpha, \lambda) = D(\sigma\alpha, \mu)$ si $\sigma.U_{\alpha,\lambda} = U_{\sigma\alpha,\mu}$. L'ensemble de ses points fixes est l'adhérence d'un sous-espace affine de $\mathring{A}$ dirigé par $\vec{V}^\Gamma$.*

Démonstration:
Pour vérifier qu'il s'agit d'une action de groupe, on vérifie la condition de cocycle attendue sur les ω_α^σ. Soient $\alpha \in \phi$, $\sigma, \gamma \in \Gamma$, on calcule dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$:

$$\gamma\sigma.e_\alpha = \gamma(k_\alpha^\sigma e_{\sigma\alpha}) = \gamma(k_\alpha^\sigma)k_{\sigma\alpha}^\gamma e_{\gamma\sigma\alpha}$$

et d'autre part :

$$\gamma\sigma.e_\alpha = k_\alpha^{\gamma\sigma} e_{\gamma\sigma\alpha}$$

D'où la relation $\omega_\alpha^{\gamma\sigma} = \omega(\gamma(k_\alpha^\sigma)) + \omega_{\sigma\alpha}^\gamma = \omega_\alpha^\sigma + \omega_{\sigma\alpha}^\gamma$, la deuxième égalité car Γ préserve la valuation ω.

Maintenant, si $\gamma, \sigma \in \Gamma$, on a pour $\vec{u} \in \vec{V}$, $\gamma(\sigma(o + \vec{u})) = o + \vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma) + \gamma\sigma(\vec{u})$. Par conséquent, il faut vérifier que $\vec{v}_{\gamma\sigma} = \vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma)$.
Soit $\alpha \in \phi$, alors $\alpha(\vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma)) = \omega_\alpha^{\gamma^{-1}} + (\gamma^{-1}\alpha)(\vec{v}_\sigma) = \omega_\alpha^{\gamma^{-1}} + \omega_{\gamma^{-1}\alpha}^{\sigma^{-1}}$. Par le calcul précédent, ceci vaut $\omega_\alpha^{\sigma^{-1}\gamma^{-1}} = \omega_\alpha^{(\gamma\sigma)^{-1}} = \alpha(\vec{v}_{\gamma\sigma})$. Comme $\vec{v}_{\gamma\sigma}$ est l'unique vecteur de $\vec{V}$ vérifiant cette relation pour tout $\alpha \in \phi$, on obtient bien $\vec{v}_{\gamma\sigma} = \vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma)$,

et l'action de Γ sur A est bien une action de groupe.

Par construction, Γ agit par automorphismes affines et préserve l'ensemble des murs, cette action, a priori sur $\mathring{A}$, s'étend donc à une action sur A par automorphismes d'appartements.

Montrons la compatibilité avec l'action de N. Pour commencer, un élément de la forme $n_\alpha(l)$, avec $\alpha \in \phi$ et $l \in \mathbb{L}$, induit sur A la réflexion r selon le mur $M(\alpha, \omega(l))$. L'élément $\sigma(n_\alpha(l)) = n_{\sigma\alpha}(\sigma(l)k_\alpha^\sigma)$ induit alors la réflexion selon le mur $M(\sigma\alpha, \omega(l) + \omega_\alpha^\sigma) = \sigma.M(\alpha, \omega(l))$. C'est bien la conjugaison par l'action de σ de la réflexion r. Comme N est engendré par les $n_\alpha(l)$ et T, il reste à vérifier que $(\sigma t).x = \sigma(t(\sigma^{-1}x))$ pour $t \in T$.
Soit donc $t \in T$, d'après 13.1.1, t agit sur Γ par translation selon le vecteur $\vec{v}_t$ défini par

$$\alpha(\vec{v}_t) = -\omega(\overline{\alpha}(t)), \ \ \forall \alpha \in \phi \subset \vec{V}^*$$

Or pour $\alpha \in \phi$, $\alpha \circ \sigma = \sigma^{-1}.\alpha$ est encore dans ϕ et $\overline{\sigma^{-1}.\alpha} = \sigma^{-1} \circ \overline{\alpha} \circ \sigma \in T^*$ d'où :

$$\alpha(\sigma\vec{v}_t) = -\omega(\sigma^{-1} \circ \overline{\alpha} \circ \sigma(t)) = -\omega(\overline{\alpha}(\sigma t)), \ \ \forall \alpha \in T^* \subset \vec{Y}^*.$$

(la deuxième égalité car la valuation ω est Γ-stable.)
Ceci entraine $\vec{v}_{\sigma t} = \sigma(\vec{v}_t)$ d'où la relation de compatibilité entre les actions de t et de σ.

Enfin, comme Γ est fini, son action sur $\mathring{A}$ fixe un point, disons o'. Dès lors, $A^\Gamma = \overline{o' + \vec{V}^\Gamma}$. □

13.2.2 Action de Γ sur $\mathcal{I}$

On dira qu'une famille Q de parahoriques sur $A(T)$ est Γ-stable si pour tout $a \in A(T)$ et tout $\sigma \in \Gamma$, $\sigma.Q(a) = Q(\sigma a)$. Les familles minimale et maximale de parahoriques sont clairement Γ-stables, il en est de même de la famille construite dans [Rou10].

Soit Q une bonne famille de parahoriques Γ-stable, par définition $\mathcal{I}(Q) = G \times A(T)/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $(g, x) \sim (h, y) \Leftrightarrow \exists n \in N(T)$ tq $y = nx$ et $g^{-1}hn \in Q(x)$. Comme $N(T)$ est $\mathbb{K}$-défini, l'action de Γ sur $G \times A(T)$ par $\sigma.(g, x) = (\sigma g, \sigma x)$ passe au quotient et définit une action sur $\mathcal{I}(Q)$, cette action stabilise $A(T)$ et prolonge l'action définie précédemment.

Lemme 13.2.4. *Le groupe Γ agit sur $\mathcal{I}$ par automorphismes de masure bordée, c'est-à-dire qu'il préserve l'ensemble des appartements de $\mathcal{I}$ et induit entre deux appartements un isomorphisme d'appartements.*

De plus, pour tous $x \in \mathcal{I}$, $g \in G$, et $\sigma \in \Gamma$, $\sigma(gx) = \sigma(g)\sigma(x)$. Pour tout tore maximal T', $\sigma(A(T')) = A(\sigma(T'))$. Enfin, pour toute facette $\vec{f}$ de $\vec{I}$, $\sigma.\mathcal{I}_{\vec{f}} = \mathcal{I}_{\sigma\vec{f}}$.

Preuve du lemme:
Soit Z un appartement, soit $g \in G$ tel que $Z = g.A(T)$. Alors $\sigma Z = \sigma(g).A(T)$, c'est donc un appartement, l'appartement vectoriel lui correspondant est $\sigma(g).\vec{A}(T) = \sigma(g.\vec{A}(T)) = \sigma(\vec{Z})$. De plus, en notant σ_Z la restriction de l'action de σ à Z, et $\sigma_{A(T)}$ sa restriction à $A(T)$, on a $\sigma_Z = \sigma(g) \circ \sigma_{A(T)} \circ g^{-1}$. Comme g^{-1}, $\sigma(g)$ et $\sigma_{A(T)}$ induisent des isomorphismes entre les appartements concernés, σ_Z est bien un isomorphisme d'appartements.

La relation $\sigma(gx) = \sigma(g)\sigma(x)$ vient de la définition de l'action de Γ. Si T' est un autre tore maximal, soit $g \in G$ tel que $T' = gTt^{-1}$, alors $A(T') = g.A(T)$, d'où $\sigma.A(T') = \sigma(g).\sigma(A(T)) = \sigma(g).A(T) = A(\sigma(g)T\sigma(g)^{-1})$. Mais $\sigma(g)T\sigma(g)^{-1} = \sigma(gTg^{-1}) = \sigma(T')$.

Enfin, si $\vec{f}$ est une facette de $\vec{A}$, alors $\mathcal{I}_{\vec{f}} = P(\vec{f}).A_{\vec{f}}$ donc $\sigma.\mathcal{I}_{\vec{f}} = \sigma(P(\vec{f})).\sigma(A_{\vec{f}}) = P(\sigma\vec{f}).A_{\sigma\vec{f}} = \mathcal{I}_{\sigma\vec{f}}$. Le cas où $\vec{f} \not\subset \vec{A}$ s'obtient par conjugaison par un élément $g \in G$ tel que $g.\vec{f} \subset \vec{A}$. □

En particulier, si dans un appartement Z $y = x +_Z \vec{v}$, alors dans σZ $\sigma(y) = \sigma(x) +_{\sigma Z} \sigma(\vec{v})$.

13.3 Action du normalisateur du tore déployé

Nous avons obtenu pour tout tore maximal $\mathbb{K}$-défini et $\mathbb{L}$-déployé T contenant $T_{\mathbb{K}}$ une partie $A(T)^\Gamma$ stable par $N(T)(\mathbb{K})$. Nous allons voir qu'on peut, au moins sous l'hypothèse que le corps $\mathbb{L}$ est "maximalement complet", trouver un autre espace affine dirigé par $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ qui soit stable par $N(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$, c'est-à-dire qui permette de vérifier (DM 4).

Remarque: Les résultats de cette partie ne sont pas utilisés dans la suite, car cette construction ne permet pas de vérifier (DM 2). Elle permet cependant justement de se rendre compte de la difficulté rencontrée.

Soit $\vec{f}_{\mathbb{K}}$ une facette maximale de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, $\vec{f}$ une facette de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{f}_{\mathbb{K}}$. Soit $\mathcal{J} := \mathcal{I}_{\vec{f}}$, c'est un immeuble affine car $\vec{f}$ est sphérique, c'est en fait l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe $M_{\vec{A}}(\vec{f}) = \mathrm{Fix}_G(\vec{A}_{\mathbb{K}}) = Z(T_{\mathbb{K}})$.

Les groupes $Z(T_{\mathbb{K}})$ et Γ agissent sur $\mathcal{J}$, et $Z(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$ préserve l'ensemble $\mathcal{J}^\Gamma$, qui contient le singleton $pr_{\vec{f}}(A(T)^\Gamma)$.

Lemme 13.3.1. *L'ensemble $\mathcal{J}^\Gamma$ est une partie non vide, bornée et convexe de $\mathcal{J}$.*

Preuve du lemme: L'immeuble $\mathcal{J}$ est l'immeuble de Bruhat-Tits de $Z(T_{\mathbb{K}})$, c'est donc aussi l'immeuble du semi-simplifié de $Z(T_{\mathbb{K}})$, c'est-à-dire de $Z(T_{\mathbb{K}})/Z(Z(T_{\mathbb{K}}))$. Comme $T_{\mathbb{K}} \subset Z(Z(T_{\mathbb{K}}))$, et $T_{\mathbb{K}}$ est un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal, ce semi-simplifié n'a pas de tore $\mathbb{K}$-déployé, il est anisotrope. Alors la proposition 5.2.1 de [Rou77] entraine que $\mathcal{J}^\Gamma$ est borné.

C'est une partie convexe car Γ agit sur $\mathcal{J}$ par automorphismes d'immeuble, et non vide car elle contient $pr_{\vec{f}}(A(T)^\Gamma)$. □

Remarque: Sans supposer que la valuation de $\mathbb{K}$ est discrète, il n'est en général pas clair que l'immeuble de $Z(T_{\mathbb{K}})$ contienne un point Γ-fixe (voir [BT84] 5.1.6). Ici, c'est le fait d'avoir choisi $\mathbb{L}$ de manière à assurer l'existence d'un tore maximal $\mathbb{L}$-déployé et $\mathbb{K}$ défini contenant $T_{\mathbb{K}}$ qui a cette conséquence.

Proposition 13.3.2. *Si l'immeuble $\mathcal{J}$ est complet, il existe un sous-espace affine $Y(\mathbb{K})$ d'un appartement A de $\mathcal{I}$, stable par $N(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$, fixe par Γ, dirigé par* $\mathrm{Vect}_{\vec{A}}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$.

Remarque: L'immeuble $\mathcal{J}$ est complet si et seulement si $\mathbb{L}$ est "maximalement complet", d'après [BT72] 7.5.4 et 7.5.5, ce qui est le cas par exemple dès que la valuation de $\mathbb{L}$ est discrète.

Démonstration:
Le produit $Z(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K}) \times \Gamma$ agit sur $\mathcal{J}$ en stabilisant $\mathcal{J}^\Gamma$. D'après le lemme et le fait que $\mathcal{J}$ est complet, le théorème de point fixe de Bruhat-Tits prouve l'existence d'un point $p \in \mathcal{J}^\Gamma$ fixe par $Z(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$. Soit T' un tore maximal de $Z(T_{\mathbb{K}})$ tel que $p \in A(T')_{\vec{f}}$. Soit $Y = pr_{\vec{f}}^{-1}(p) \cap A(T')$, il s'agit de l'adhérence d'un espace affine de $A(T')$ stable par $N(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$ et par Γ, et dirigé par $\mathrm{Vect}_{\vec{A}(T')}(\vec{f})$. Alors Γ agit sur Y par automorphismes affines, avec des orbites finies, donc Y admet lui même un point Γ-fixe p. Finalement, $Y(\mathbb{K}) := Y^\Gamma = \overline{p + \mathrm{Vect}_{\vec{A}(T')}(\vec{f}^\Gamma)} = \overline{p + \mathrm{Vect}_{\vec{A}}(\vec{A}_{\mathbb{K}})}$ convient. □

On obtient de la sorte un espace $Y(\mathbb{K}) \subset \mathcal{I}^\Gamma$ sur lequel agit $N(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$. Cependant, on ne sait pas si il existe un appartement A le contenant tel que $A \cap \mathcal{I}^\Gamma = Y(\mathbb{K})$. Autrement dit, en modifiant $Y(\mathbb{K})$ pour satisfaire à (DM 4), on a perdu la condition (DM2).

Pour résoudre cette difficulté, nous aurons besoin d'hypothèses sur le groupe G ou le corps $\mathbb{K}$, et nous devrons choisir un $\mathcal{I}_\sharp$ plus petit que $\mathcal{I}^\Gamma$.

13.4 Descente

13.4.1 Vérification des premières conditions de descente

Proposition 13.4.1. *Soit G un groupe de Kac-Moody presque déployé sur un corps $\mathbb{K}$, déployé sur une extension galoisienne $\mathbb{L}$. On note $\mathcal{D}_\mathbb{K}$ et $\mathcal{D}_\mathbb{L}$ les données radicielles pour $G(\mathbb{L})$ et $G(\mathbb{K})$, correspondant à un tore maximal $\mathbb{L}$-déployé $T_\mathbb{L}$ et un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal $T_\mathbb{K}$ inclus dans $T_\mathbb{L}$. Alors le couple $(\mathcal{D}_\mathbb{L}, \mathcal{D}_\mathbb{K})$ vérifie les conditions (DSR), (DDR) et (DIV).*

Si $\mathbb{K}$ est muni d'une valuation non triviale ω, alors toute valuation $\varphi_\mathbb{L}$ de $\mathcal{D}_\mathbb{L}$ associée comme en 10.2.3 vérifie (DV 2).

Supposons de plus $T_\mathbb{L}$ $\mathbb{K}$-défini, soit $Q_\mathbb{L}$ une bonne famille de parahoriques vérifiant (para 2.1^{+-})(sph) pour $(\mathcal{D}_\mathbb{L}, \varphi_\mathbb{L})$, soit $\mathcal{I}_\mathbb{L} = \mathcal{I}(Q_\mathbb{L})$, et $\Gamma = \mathcal{G}al(\mathbb{L}|\mathbb{M})$, qui agit donc sur $\mathcal{I}_\mathbb{L}$. Alors la donnée $(\mathcal{D}_\mathbb{L}, \varphi_\mathbb{L}, \mathcal{D}_\mathbb{K}, \mathcal{I}_\mathbb{L}^\Gamma)$ satisfait aussi aux conditions (DM 1), (DM 2).

Les conditions manquantes sont donc (DM 3) et (DM 4), ainsi que (DV 1). Remarquons qu'on peut toujours remplacer $\varphi_\mathbb{L}$ par une valuation équipollente pour satisfaire à cette dernière.

On rappelle que, contrairement à ce que les notations pourraient faire croire, le groupe jouant le rôle de T dans la donnée radicielle $\mathcal{D}_\mathbb{K}$ est en fait $Z(T_\mathbb{K})(\mathbb{K})$, qui contient en général strictement $T_\mathbb{K}$.

De plus, on a pris $\vec{A}_\mathbb{K} = \vec{A}_\mathbb{L}^\Gamma$, de manière à voir $\vec{\mathcal{I}}_\mathbb{K}$ comme une partie de $\vec{\mathcal{I}}_\mathbb{L}$. C'est donc en général un complexe de Coxeter non essentiel, et ce n'est pas l'appartement obtenu abstraitement à partir de $\phi(T_d)$.

Pour le reste, on notera avec $\mathbb{K}$ en indice tous les objets habituellement obtenus à partir d'une donnée radicielle.

Voici le dictionnaire entre les objets $\mathbb{K}$-rationels considérés ici et les objets de la partie 12 :

- $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\mathbb{L}$, $\mathcal{D}^\natural = \mathcal{D}_\mathbb{K}$,
- $G^\natural = G(\mathbb{K})$, $T^\natural = Z(T_\mathbb{K})(\mathbb{K})$, $N^\natural = N(T_\mathbb{K})(\mathbb{K})$,
- $\phi^\natural = \phi(T_\mathbb{K})$, $U_a^\natural = U_{a,\mathbb{K}}$ pour tout $a \in \phi(T_\mathbb{K})$,
- $\vec{V} = \vec{V}(T_\mathbb{L})$, $\vec{V}^\natural = \mathrm{Vect}_{\vec{V}(T_\mathbb{L})}(\vec{A}_\mathbb{K})$,
- $\vec{\mathcal{I}}_\natural = \vec{\mathcal{I}}(\mathbb{K})$, $\vec{A}_\natural = \vec{A}_\mathbb{K}$,
- $\varphi = \varphi_\mathbb{L}$, $\varphi^\natural = \varphi_\mathbb{K}$,
- pour la deuxième partie de la proposition, on aura $\mathcal{I}_\sharp = \mathcal{I}_\mathbb{L}^\Gamma$, donc $A_\sharp = \mathring{A}(T_\mathbb{L})^\Gamma$.

Démonstration: On note $\vec{V}_\mathbb{L} = \vec{V}(T_\mathbb{L})$, $\vec{V}_\mathbb{K} = \mathrm{Vect}_{\vec{V}_\mathbb{L}}(\vec{A}_\mathbb{K})$, $A_\mathbb{L} = A(T_\mathbb{L})$ et $\phi_\mathbb{K} = \phi(T_\mathbb{K})$.

- (DSR) : On a $\phi_\mathbb{K} = \left\{\alpha|_{\vec{A}_\mathbb{K}} \mid \alpha \in \phi \text{ et } \ker(\alpha) \cap \vec{A}_{\mathbb{L}sph} \neq \emptyset\right\}$. Par [Ré02] 12.4.4, toutes les facettes de $\vec{\mathcal{I}}_\mathbb{K}$ coupent $\vec{\mathcal{I}}$; par 12.6 $\phi_\mathbb{K}$ est à base libre ; enfin si $\vec{f}_\mathbb{K}$ est une facette sphérique de $\vec{A}_\mathbb{K}$, alors $\phi_\mathbb{K}^m(\vec{f}_\mathbb{K})$ est fini, mais pour tout $a \in \phi_\mathbb{K}^m(\vec{f}_\mathbb{K})$, $\phi_\mathbb{L}^m(\ker(a))$ est aussi fini (car a est une $\mathbb{K}$-racine réelle), donc au final $\phi_L^m(\vec{f}_\mathbb{K})$ est fini, donc $\vec{f}_\mathbb{K}$ coupe au moins une facette sphérique.

- (DDR1) : Pour tout $a \in \phi_\mathbb{K}$, on a $U_{a,\mathbb{K}} = \left\langle \left\{U_{\alpha,\mathbb{L}} \mid \alpha \in \phi_\mathbb{L} \text{ et } \alpha|_{\vec{V}_\mathbb{K}} \in \{a, 2a\}\right\} \right\rangle^\Gamma$. Ceci est clairement inclus dans le groupe $U_a = \left\langle \left\{U_{\alpha,\mathbb{L}} \mid \alpha \in \phi_\mathbb{L} \text{ et } \alpha|_{\vec{V}_\mathbb{K}} \in \mathbb{R}^{+*}.a\right\} \right\rangle$.

- (DDR2) : Pour tout $a \in \phi_\mathbb{K}$, si $\alpha \in \phi_\mathbb{L}$ est telle que $\alpha|_{\vec{V}_\mathbb{K}} \in \mathbb{R}^{+*}.a$, alors $\alpha|_{\vec{V}_\mathbb{K}} \in \phi_\mathbb{K}$. Comme $\phi_\mathbb{K}$ est un système de racines, il ne peut y avoir plus de deux tels $\alpha|_{\vec{V}_\mathbb{K}}$.

- (DDR3) : Le groupe $T^\natural$ pour la donnée radicielle $\mathcal{D}_\mathbb{K}$ est en fait $Z(T_\mathbb{K})(\mathbb{K})$, avec $Z(T_\mathbb{K})$ le centralisateur du tore déployé maximal $T_\mathbb{K}$, autrement dit le fixateur de $\vec{A}_\mathbb{K}$. Or le groupe Z défini dans 12.1 est précisément ce fixateur. D'où l'inclusion $Z(T_\mathbb{K})(\mathbb{K}) \subset Z(T_\mathbb{K}) = Z$.
  Pour tout $a \in \phi_\mathbb{K}$, $u \in U_{\mathbb{K}a}$, $n(u)$ stabilise $\vec{A}_\mathbb{K}$ et donc normalise Z. Il agit sur $\vec{A}_\mathbb{K}$ comme une réflexion d'hyperplan $\ker a$, d'où $n(u)U_a n(u)^{-1} = U_{-a}$ et $n(u)U_{-a}n(u)^{-1} = U_a$.

– (DIV) : L'immeuble $\vec{I}(\mathbb{K}) = \vec{I}^{\Gamma}$ est stable par $G(\mathbb{K})$, et $\vec{I}(\mathbb{K}) \cap \vec{A} = \vec{A}_{\mathbb{K}}$. D'où (DIV).

– (DV2) : Soit $t \in T_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$, t induit sur A une translation de vecteur $\vec{v}_t$ et t stabilise $A_{\mathbb{K}}$ donc $\vec{v}_t \in \vec{V}_{\mathbb{K}}$. Pour tout $a \in \phi_{\mathbb{K}}$ et $k \in \mathbb{R}$, on a $tU_{a,k}t^{-1} = U_{a,k+a(\vec{v}_t)}$. Donc l'image de $\varphi_{\mathbb{K}a}$ est stable par le groupe $\mathbb{Z}.a(\vec{v}_t)$, et il nous faut maintenant prouver qu'il existe $t \in T_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$ tel que $a(\vec{v}_t) \neq 0$.
Le vecteur $\vec{v}_t$ est caractérisé par le fait que pour tout $\alpha \in \phi_{\mathbb{L}}$, $\alpha(\vec{v}_t) = -\omega(\overline{\alpha}(t))$ (proposition 13.1.1). En particulier, si $\alpha \in \phi_{\mathbb{L}}$ est telle que $\alpha|_{\vec{V}_{\mathbb{K}}} = a$, alors $a(\vec{v}_t) = \alpha(\vec{v}_t) = -\omega(\overline{\alpha}(t)) = -\omega(\overline{a}(t))$, car $\overline{a} = \overline{\alpha}|_{T_{\mathbb{K}}}$. Mais $a(T_{\mathbb{K}}) \supset a(a^{\vee}(\mathbb{K}^*)) = (\mathbb{K}^*)^2$, car $\langle a, a^{\vee}\rangle = 2$, et le résultat découle de ce que ω est une valuation non triviale sur $\mathbb{K}$, donc sur $(\mathbb{K}^*)^2$.

On suppose maintenant $T_{\mathbb{L}}$ $\mathbb{K}$-défini, et on prend $\mathcal{I}_\sharp = \mathcal{I}_{\mathbb{L}}^{\Gamma}$. On peut alors définir $A_{\mathbb{K}} = A_{\mathbb{L}}^{\Gamma} = \overline{A_\sharp}$.

– (DM1) : La partie $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}^{\Gamma}$ est clairement stable par $G(\mathbb{K})$. Soit $\vec{f}$ une facette sphérique. Si $\mathcal{I}_{\vec{f}}^{\Gamma} = \emptyset$, alors il s'agit bien d'une partie convexe et stable par $G(\mathbb{K})$. Sinon, la facette $\vec{f}$ est Γ-stable, et Γ agit sur $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ par automorphismes d'immeuble affine, donc $\mathcal{I}_{\vec{f}}^{\Gamma}$ est convexe et $G(\mathbb{K})$-stable.

– (DM2) : Conséquence de 13.2.3.

□

Dans toute la suite, on fixe une bonne famille de parahoriques Q pour $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$.

13.4.2 Corps intermédiaire

Soit $T_{\mathbb{K}}$ un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal. On suppose désormais qu'il existe une extension galoisienne $\mathbb{M}$ modérément ramifiée de $\mathbb{K}$, incluse dans $\mathbb{L}$, telle que le groupe réductif $Z(T_{\mathbb{K}})$ soit quasi-déployé sur $\mathbb{M}$. Ceci est par exemple le cas dès que la valuation de $\mathbb{K}$ est discrète et que son corps résiduel est parfait.

Il existe alors un sous-groupe de Borel $B_{\mathbb{M}}$ du groupe réductif $Z(T_{\mathbb{K}})$ défini sur $\mathbb{M}$. Ce Borel contient un tore maximal $T_{\mathbb{L}}$ défini sur $\mathbb{M}$. Comme $T_{\mathbb{K}} \subset Z(B_{\mathbb{M}})$, $T_{\mathbb{L}}$ contient $T_{\mathbb{K}}$. Soit $T_{\mathbb{M}}$ la partie $\mathbb{M}$-déployée de $T_{\mathbb{L}}$, c'est-à-dire le groupe engendré par les image des cocaractères de $T_{\mathbb{L}}$ fixes par $\Gamma_{\mathbb{M}} := \mathcal{G}al(\mathbb{L}|\mathbb{M})$. Cette partie contient encore $T_{\mathbb{K}}$ puisque tout cocaractère de $T_{\mathbb{K}}$ est un cocaractère de $T_{\mathbb{L}}$ fixe par $\Gamma_{\mathbb{M}}$.

Prouvons que $T_{\mathbb{L}} = Z_{Z(T_{\mathbb{K}})}(T_{\mathbb{M}})$. A priori, $Z_{Z(T_{\mathbb{K}})}(T_{\mathbb{M}})$ est le sous-groupe de Lévi de $Z(T_{\mathbb{K}})$ engendré par $T_{\mathbb{L}}$ et par les groupes radiciels U_α pour $\alpha \in \phi(T_{\mathbb{L}})$ tels que $\alpha(T_{\mathbb{M}}) = \{1\}$ (cette condition entraine automatiquement $\alpha \in \phi^m(T_{\mathbb{K}})$, donc $U_\alpha \subset Z(T_{\mathbb{K}})$).

Le système de racines de $Z(T_{\mathbb{K}})$ par rapport au tore maximal $T_{\mathbb{L}}$ est $\phi^m(T_{\mathbb{K}})$, où $\phi = \phi(T_{\mathbb{L}})$ est le système de racines pour G par rapport à $T_{\mathbb{L}}$. Soit Π la base de $\phi^m(T_{\mathbb{K}})$ correspondant à $B_{\mathbb{M}}$, et $\Pi^{\vee}$ sa base duale. Comme $B_{\mathbb{M}}$ est $\Gamma_{\mathbb{M}}$-stable, ces bases sont permutées par $\Gamma_{\mathbb{M}}$. Une base des cocaractères de $T_{\mathbb{M}}$ est alors l'ensemble des $\sum_{\rho\in O}\rho$, pour O une $\Gamma_{\mathbb{M}}$-orbite dans $\Pi^{\vee}$.

Soit maintenant $\alpha \in \phi^m(T_{\mathbb{K}})$ tel que $\alpha(T_{\mathbb{M}}) = \{1\}$. Alors α s'annule sur tout cocaractère de $T_{\mathbb{M}}$, donc pour toute orbite O dans $\Pi^{\vee}$, $\alpha(\sum_{\rho\in O}\rho) = \sum_{\rho\in O}\langle\,\alpha,\rho\,\rangle = 0$. Comme $O \subset \Pi^{\vee}$, tous les $\langle\,\alpha,\rho\,\rangle$ sont de même signe, donc finalement, ils sont tous nuls. Au total, α s'annule sur tous les élément de $\Pi^{\vee}$, ceci est impossible. Il n'existe donc pas de racine $\alpha \in \phi^m(T_{\mathbb{K}})$ s'annulant sur $T_{\mathbb{M}}$. Donc $Z_{Z(T_{\mathbb{K}})}(T_{\mathbb{M}}) = T_{\mathbb{M}}$.

Vérifions que $T_{\mathbb{M}}$ est un tore $\mathbb{M}$-déployé maximal. Si T est un tore $\mathbb{M}$-déployé contenant $T_{\mathbb{M}}$, alors $T \subset Z(T_{\mathbb{M}}) = T_{\mathbb{L}}$. Si ρ est un cocaratère de T, comme T est $\mathbb{M}$-déployé, ρ est $\Gamma_{\mathbb{M}}$-fixe. Donc par définition de $T_{\mathbb{M}}$, son image est dans $T_{\mathbb{M}}$. On prouve ainsi que $T \subset T_{\mathbb{M}}$.

Maintenant, le fait que $T_{\mathbb{K}} \subset T_{\mathbb{M}}$ entraine que $Z_{Z(T\mathbb{K})}(T_{\mathbb{M}}) = Z_G(T_{\mathbb{M}})$, donc finalement $Z_G(T_{\mathbb{M}}) = T_{\mathbb{L}}$, et le groupe G est lui aussi quasi-déployé sur $\mathbb{M}$.

On a finalement trois tores $T_{\mathbb{K}} \subset T_{\mathbb{M}} \subset T_{\mathbb{L}}$. Le premier est $\mathbb{K}$-déployé maximal, le second est $\mathbb{M}$-déployé maximal,

le troisième est maximal (et $\mathbb{L}$-déployé), et $\mathbb{M}$-défini. De plus l'extension de corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$ est modérément ramifiée, et G est quasi-déployé sur $\mathbb{M}$.

On a déjà introduit $\Gamma_{\mathbb{M}} = \mathcal{G}al(\mathbb{L}|\mathbb{M})$, on notera de plus $\Gamma_{\mathbb{K}} = \mathcal{G}al(\mathbb{M}|\mathbb{K})$. Le groupe $\Gamma_{\mathbb{M}}$ est distingué dans Γ et $\Gamma_{\mathbb{K}} \simeq \Gamma/\Gamma_{\mathbb{M}}$. Soient $A_{\mathbb{L}} = A(T_{\mathbb{L}})$, $\vec{A}_{\mathbb{L}} = \vec{A}(T_{\mathbb{L}})$, $\vec{A}_{\mathbb{M}} = \vec{A}(T_{\mathbb{M}}) \subset \vec{A}_{\mathbb{L}}$ et $\vec{A}_{\mathbb{K}} = \vec{A}(T_{\mathbb{K}}) \subset \vec{A}_{\mathbb{M}}$. Comme $T_{\mathbb{L}}$ est $\mathbb{M}$-défini, le groupe $\Gamma_{\mathbb{M}}$ agit sur $A_{\mathbb{L}}$, et l'ensemble $A_{\mathbb{M}} = A_{\mathbb{L}}^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$ est l'adhérence d'un espace affine sous $\vec{A}_{\mathbb{M}}$.

Remarque: On ne peut définir un espace $A_{\mathbb{K}}$ aussi simplement, il faudra attendre 13.4.4.

13.4.3 Descente quasi-déployée

On commence par appliquer la partie 12 aux données radicielles $\mathcal{D}_{\mathbb{M}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$. D'après la proposition 13.4.1, toutes les conditions de descente sauf (DM 3) et (DM 4) sont vérifiées, en prenant $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$ pour jouer le rôle de $\mathcal{I}^{\natural}$, et en remplaçant φ par une valuation équipollente basée en un point de $A_{\mathbb{M}}$.

Nous avons vu que G est quasi-déployé sur $\mathbb{M}$, c'est-à-dire que nous avons trouvé un tore $\mathbb{M}$-déployé maximal $T_{\mathbb{M}}$ tel que $T_{\mathbb{L}} = Z(T_{\mathbb{M}})$ est un tore maximal de G. Le tore $T_{\mathbb{L}}$ est donc $\mathbb{M}$-défini, et c'est l'unique tore maximal contenant $T_{\mathbb{M}}$.

On a $N(T_{\mathbb{M}}) \subset N(T_{\mathbb{L}}).Z(T_{\mathbb{M}}) = N(T_{\mathbb{L}})$, d'où $N(T_{\mathbb{M}})(\mathbb{M}) \subset N(T_{\mathbb{L}})(\mathbb{M})$. Comme la partie $A_{\mathbb{M}} = A(T_{\mathbb{L}})^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$ est en général stable par $N(T_{\mathbb{L}})(\mathbb{M})$, elle l'est ici aussi par $N(T_{\mathbb{M}})(\mathbb{M})$, ainsi la condition (DM 4) est-elle vérifiée.

Concernant (DM 3), soit $\vec{C}_{\mathbb{M}}$ une chambre de $\vec{A}_{\mathbb{M}}$ et $\vec{C}$ une chambre de $\vec{A}_{\mathbb{L}}$ rencontrant $\vec{C}_{\mathbb{M}}$. Soit $x \in A_{\mathbb{M}}$ et F la facette de $A_{\mathbb{L}}$ contenant $\mathcal{G}erm_x(x + \vec{C})$. C'est une chambre de $\mathcal{I}$ qui coupe $A_{\mathbb{M}}$ et donc $\mathcal{I}^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$. Pour toute facette sphérique $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}_{\mathbb{L}})$, la facette contenant $pr_{\vec{f}}(F)$ coupe $\overline{A_{\natural}}$, est une chambre de $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ et donc n'est incluse dans aucune autre facette de $\mathcal{I}_{\vec{f}}$.

On obtient donc par la partie 12 une valuation $\varphi_{\mathbb{M}}$ de la donnée radicielle $\mathcal{D}_{\mathbb{M}}$, un appartement $A_{\mathbb{M}} = A_{\mathbb{M}}(T_{\mathbb{M}})$, une bonne famille de parahoriques $Q_{\mathbb{M}}$ vérifiant (para 2.1^+)(sph), puis une masure bordée $\mathcal{I}_{\mathbb{M}} = \mathcal{I}(Q_{\mathbb{M}})$ pour $G(\mathbb{M})$.

On notera $\mathcal{J}_{\mathbb{M}} = G(\mathbb{M}).A_{\mathbb{M}} \subset \mathcal{I}^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$, c'est l'analogue des "points invariants ordinaires" de [Rou77] 2.4.13. Par la proposition 12.5.1, pour toute facette sphérique $\vec{f}_{\mathbb{M}}$ de $\vec{I}_{\mathbb{M}}$, la façade $\mathcal{I}_{\mathbb{M}\vec{f}_{\mathbb{M}}}$ de $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$ s'identifie à $\mathcal{J}_{\mathbb{M}} \cap I_{\vec{f}}$, où $\vec{f}$ est l'unique facette de $\vec{I}$ contenant un ouvert de $\vec{f}_{\mathbb{M}}$ (voir la remarque à la fin de 13.1.2).

Soit $\sigma \in \Gamma$, alors $\sigma.T_{\mathbb{M}}$ est un autre tore $\mathbb{M}$-déployé maximal de G, donc il existe $g \in G(\mathbb{M})$ tel que $\sigma.T_{\mathbb{M}} = g.T_{\mathbb{M}}.g^{-1}$. Montrons que $\sigma.A_{\mathbb{M}} = g.A_{\mathbb{M}}$.

Pour commencer, $\sigma.A_{\mathbb{M}} = \sigma.(A_{\mathbb{L}}^{\Gamma_{\mathbb{M}}}) = (\sigma A_{\mathbb{L}})^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$. En effet, si $x \in A_{\mathbb{L}}^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$, alors $\sigma.x \in \sigma.A_{\mathbb{L}}$, et pour tout $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{M}}$, $\gamma.\sigma.x = \sigma\sigma^{-1}\gamma\sigma x = \sigma x$ car $\sigma^{-1}\gamma\sigma \in \Gamma_{\mathbb{M}}$. Donc $\sigma.(A_{\mathbb{L}}^{\Gamma_{\mathbb{M}}}) \subset (\sigma A_{\mathbb{L}})^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$, l'autre inclusion est semblable.

Donc $\sigma.A_{\mathbb{M}} = (\sigma A_{\mathbb{L}})^{\Gamma_{\mathbb{M}}} = A_{\mathbb{L}}(\sigma T_{\mathbb{L}})^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$. Mais $\sigma.T_{\mathbb{L}} = gT_{\mathbb{L}}g^{-1}$ car c'est l'unique tore maximal contenant $\sigma T_{\mathbb{M}}$. Donc $\sigma.A_{\mathbb{M}} = (g.A_{\mathbb{L}})^{\Gamma_{\mathbb{M}}} = g.A_{\mathbb{L}}^{\Gamma_{\mathbb{M}}} = g.A_{\mathbb{M}}$ car g est $\Gamma_{\mathbb{M}}$-fixe.

Ceci prouve que $\mathcal{J}_{\mathbb{M}}$ est stable par Γ.

13.4.4 Descente modérément ramifiée

On étudie maintenant le groupe $G(\mathbb{K})$. On va utiliser les résultats de la partie 12, appliqués aux données radicielles $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$, le travail sur $\mathcal{D}_{\mathbb{M}}$ de la partie précédente servira à définir une partie $\mathcal{I}_{\natural\mathbb{K}}$ de $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}$, et à prouver les conditions (DM x).

On a vu que Γ agit sur $\mathcal{J}_{\mathbb{M}}$, on peut donc poser $\mathcal{I}_{\natural\mathbb{K}} = \mathcal{J}_{\mathbb{M}}^{\Gamma} = \mathcal{J}_{\mathbb{M}}^{\Gamma_{\mathbb{K}}}$. La masure bordée $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}$ admet des points Γ-fixes car G contient des tores maximaux $\mathbb{L}$-déployés et $\mathbb{K}$-définis. Donc $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}^{\Gamma} \neq \emptyset$. Cependant il n'est pas clair que $\mathcal{J}_{\mathbb{M}}^{\Gamma} = \mathcal{I}_{\mathbb{L}}^{\Gamma} \cap \mathcal{J}_{\mathbb{M}}$ soit non vide. Nous serons en fait obligés de le supposer, mais c'est une hypothèse qui, tout comme l'hypothèse sur l'existence de l'extension $\mathbb{M}$, est vérifiée dès que la valuation de $\mathbb{K}$ est discrète. C'est en fait l'analogue de la condition (DE) de [BT84] 5.1.5.

Proposition 13.4.2. *On suppose que la famille Q vérifie (para* 2.1^{+-}*)(sph), et que l'immeuble de Bruhat-Tits* $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(Z(T_{\mathbb{K}}))$ *du groupe réductif* $Z(T_{\mathbb{K}})$ *sur le corps* $\mathbb{M}$ *admet un point* Γ*-fixe.*

Alors il existe un tore maximal T *tel que les conditions de descente de la partie 12 sont vérifiées pour les données radicielles* $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}(T)$ *et* $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(T_{\mathbb{K}})$*, et pour la partie* $\mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$ *de* $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}$*.*

Comme pour 13.3.2, par le théorème de point fixe de Bruhat, $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(Z(T_{\mathbb{K}}))^{\Gamma}$ est non vide dès que l'immeuble $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(Z(T_{\mathbb{K}}))$ est complet, et ceci est vrai dès que la valuation de $\mathbb{K}$ est discrète.

Démonstration:

Pour toute facette sphérique $\vec{f}$ de $\vec{\mathcal{I}}_{\mathbb{L}}$, $\mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}} \cap \mathcal{I}_{\mathbb{L},\vec{f}}$ est vide si $\vec{f} \cap \vec{\mathcal{I}}_{\mathbb{M}} = \emptyset$. Sinon, il s'agit de l'ensemble des points Γ-fixes dans la façade $\mathcal{I}_{\mathbb{M}\vec{f}_{\mathbb{M}}}$ où $\vec{f}_{\mathbb{M}}$ est une facette de $\vec{\mathcal{I}}_{\mathbb{M}}$ contenant $\vec{f}^{\uparrow_{\mathbb{M}}}$. Cette façade est un immeuble, et Γ y agit par automorphismes, donc $\mathcal{I}^{\Gamma}_{\mathbb{M}\vec{f}_{\mathbb{M}}}$ est une partie convexe. Ainsi (DM 1) est vérifié, pour la partie d'immeuble $\mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$.

La proposition 13.4.1 prouve encore les conditions (DSR), (DDR), (DIV), et (DV 2), pour n'importe quel tore maximal T contenant $T_{\mathbb{K}}$ et pour n'importe quelle valuation de $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}(T)$. Il reste à voir (DM 2, 3 et 4) ainsi que (DV 1).

Le fait que l'extension $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$ soit modérément ramifiée entraine que le lieu $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(Z(T_{\mathbb{K}}))^{\Gamma_{\mathbb{K}}}$ des points $\Gamma_{\mathbb{K}}$-fixes de l'immeuble $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(Z(T_{\mathbb{K}}))$ de $Z(T_{\mathbb{K}})$ sur le corps $\mathbb{M}$ est de diamètre nul. En effet le groupe $Z(T_{\mathbb{K}})$, ou plutôt son semi-simplifié $Z(T_{\mathbb{K}})/Z(Z(T_{\mathbb{K}}))$ est $\mathbb{K}$-anisotrope, donc sachant que le degré de sauvagerie $s(\mathbb{M}|\mathbb{K})$ est nul, c'est la proposition 5.2.1 de [Rou77]. Comme nous avons supposé qu'il est non vide, il s'agit d'un singleton $\{p\}$, et le point p est donc fixé par $Z(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$.

Le groupe $Z(T_{\mathbb{K}})$ est le fixateur dans G du $\mathbb{K}$-appartement $\vec{A}_{\mathbb{K}}$. Pour toute chambre $\vec{f}_{\mathbb{K}}$ de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, on notera $\vec{f}$ la facette de $\vec{A}$ contenant un ouvert de $\vec{f}_{\mathbb{K}}$. La facette $\vec{f}$ est sphérique, et l'immeuble $\mathcal{I}(Z(T_{\mathbb{K}}))$ est isomorphe à $\mathcal{I}_{\vec{f}}$, la façade de $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathbb{L}}(G)$ de type $\vec{f}$. L'immeuble $\mathbb{M}$-rationnel $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(Z(T_{\mathbb{K}}))$ est alors isomorphe à $\mathcal{I}_{\vec{f}} \cap \mathcal{J}_{\mathbb{M}}$, par la proposition 12.5.1. Cet immeuble est inclus dans $\mathcal{I}^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$, de sorte que l'action de Γ y coïncide avec celle de $\Gamma_{\mathbb{K}}$.

On note $p_{\vec{f}}$ l'unique point Γ-fixe de $\mathcal{I}_{\vec{f}} \cap \mathcal{J}_{\mathbb{M}}$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de $\mathcal{J}_{\mathbb{M}}$ ainsi obtenus pour toutes les chambres de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc fixé par $Z(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$, et stabilisé par $N(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$.

Il existe $z \in Z(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{M})$ tel que le point Γ-fixe de $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(Z(T_{\mathbb{K}}))$ est dans l'appartement correspondant au tore $T := zT_{\mathbb{L}}z^{-1}$. Soit $Z = A(T) = z.A_{\mathbb{L}}$. Alors $Z^{\Gamma_{\mathbb{M}}}$ est inclus dans $\mathcal{J}_{\mathbb{M}}$ et contient $\mathcal{E}$. Notons que comme $z \in Z(T_{\mathbb{K}})$, $\vec{A}_{\mathbb{K}} \subset \vec{Z}$. Nous allons montrer que $Z \cap \mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$ est l'adhérence d'un espace affine dirigé par $\mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$, et qu'il est stable par $N(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$.

Comme $\mathcal{E}$ est constitué de points sphériques des deux signes, $\mathrm{Cl}_Z(\mathcal{E})$ est en fait indépendant de l'appartement le contenant considéré (corollaire 11.9.5). En conséquence, cet enclos est stable par Γ et par $N(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$. Il s'agit d'une partie convexe de Z, donc l'action de Γ fixe un point $x \in \mathring{Z} \cap \mathrm{Cl}(\mathcal{E})$. Soit $\sigma \in \Gamma$. Par le corollaire 11.9.5, il existe $g \in Q(\mathrm{Cl}(\mathcal{E}))$ tel que $\sigma.Z = g.Z$. Alors $g^{-1}\sigma$ est un automorphisme de Z qui fixe $\mathcal{E}$, donc sa partie vectorielle fixe $\vec{A}_{\mathbb{K}}$. Il fixe de plus x, et ceci entraine qu'il fixe $x + \mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$. Comme g fixe $\mathrm{Cl}(\mathcal{E})$ qui contient $x + \mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$, on voit que σ fixe $x + \mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$. Finalement, $x + \mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}}) \subset Z^{\Gamma}$. Comme $Z^{\Gamma} \subset Z^{\Gamma_{\mathbb{M}}} \subset \mathcal{J}_{\mathbb{M}}$, on obtient $x + \mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}}) \subset Z \cap \mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$.

Réciproquement, soit $y \in Z \cap \mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$, montrons que $y \in \overline{x + \mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}})}$. Supposons dans un premier temps $y \in \mathring{Z}$. Soit $\vec{f}$ une facette de $\vec{Z}$ contenant un ouvert d'une chambre de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$. Le point $pr_{\vec{f}}(y)$ est Γ-fixe, et comme $y \in \mathcal{J}_{\mathbb{M}}$, c'est un point de $\mathcal{I}_{\vec{f}} \cap \mathcal{J}_{\mathbb{M}}$, c'est donc $p_{\vec{f}}$. Ceci et le résultat similaire pour $-\vec{f}$ prouve déjà que $y \in \mathrm{Cl}(\mathcal{E})$. Ensuite, comme x et y ont la même projection sur $\mathcal{I}_{\vec{f}}$, quitte à déplacer y selon $\mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$, on peut supposer $y \in x + \vec{f}$. Soit $\vec{v} \in \vec{f}$ tel que $y = x +_Z \vec{v}$. Alors pour tout $\sigma \in \Gamma$, $y = \sigma(y) = \sigma(x) +_{\sigma Z} \sigma(\vec{v}) = x +_{\sigma Z} \sigma(\vec{v})$. Comme au paragraphe précédent, soit $q \in Q(\mathrm{Cl}(\mathcal{E}))$ tel que $\sigma.Z = q.Z$. Alors $q^{-1}\sigma.y = y$ (car $y \in \mathrm{Cl}(\mathcal{E})$) d'où, dans Z, $x +_Z \vec{v} = x +_Z q^{-1}\sigma(\vec{v})$, donc $\vec{v} = q^{-1}\sigma(\vec{v})$, et comme q fixe $\vec{f}$, $\vec{v} = \sigma(\vec{v})$.

Ainsi, $\vec{v} \in \vec{f}^{\uparrow} \subset \vec{A}_{\mathbb{K}}$, et $y \in x + \mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$. De la même manière, on obtient pour toute façade $Z_{\vec{g}}$ telle que $\vec{g} \cap \vec{A}_{\mathbb{K}} \neq \emptyset$, $Z_{\vec{g}} \cap \mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}} = pr_{\vec{g}}(x) + \mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$.

Ainsi, $Z \cap \mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$ est l'adhérence d'un espace affine sous $\mathrm{Vect}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$. On le note $Z_{\mathbb{K}}$, son intérieur jouera le rôle du $A_\sharp$ de la partie 12.

La condition (DM 2) est donc vérifiée pour l'appartement Z (c'est-à-dire le tore maximal T ou la donnée radicielle $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}(T)$). De plus nous avons vu que $Z_{\mathbb{K}} \subset \mathrm{Cl}(\mathcal{E})$ donc $Z_{\mathbb{K}} = \mathrm{Cl}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$, et comme ces deux ensembles sont stabilisés par $N(T_{\mathbb{K}})(\mathbb{K})$, $Z_{\mathbb{K}}$ aussi, d'où (DM 4).

Étudions (DM 3). Soit $\vec{g}$ une facette sphérique de $\vec{Z}$ coupant $\vec{A}_{\mathbb{K}}$. Soit $F = \mathcal{G}erm_x(x + \vec{F})$ une facette de $Z_{\vec{g}}$ coupant $Z_{\mathbb{K}}$ de dimension maximale, donc F contient un ouvert de $Z_{\mathbb{K}} \cap Z_{\vec{g}}$, et il existe une facette $\vec{f}$ de $\vec{Z} \cap \vec{g}^*$ contenant un ouvert de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ telle que $\vec{F} = \vec{f}/\mathrm{Vect}(\vec{g})$ (ou plutôt $\vec{F} = (\vec{f} + \mathrm{Vect}(\vec{g})).\mathrm{Vect}(\vec{g})$. Supposons qu'il existe une autre facette F' de $\mathcal{I}_{\vec{g}}$ rencontrant $\mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$ et telle que $F \subset \bar{F'}$. Il existe un appartement $B_{\vec{g}}$ de $\mathcal{I}_{\vec{g}}$ contenant F' et tel que $\vec{f} \subset \vec{B}_{\vec{g}}$. Soient $x \in F' \cap \mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$ et $y \in F \cap \mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$. Alors $pr_{\vec{f}}(x)$ tout comme $pr_{\vec{f}}(y)$ sont deux points Γ-fixes dans $\mathcal{J}_{\mathbb{M}} \cap \mathcal{I}_{\vec{f}}$: ils sont égaux. Donc $x \in y + \mathrm{Vect}_{\vec{B}_{\vec{g}}}(\vec{f}) = \mathrm{Aff}_{B_{\vec{g}}}(F)$. Mais $x \in F'$ et $F' \cap \mathrm{Aff}(F) = \emptyset$: on obtient une contradiction, et il n'existe pas de telle facette F'.

Enfin, soit φ une valuation de $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}(T)$ basée en un point $o \in Z_{\mathbb{K}}$, elle vérifie immédiatement (DV 1).

□

13.5 Conclusion

Résumons les résultats précédents. Soit G un groupe de Kac-Moody presque déployé sur un corps valué $\mathbb{K}$, déployé sur la clôture séparable de $\mathbb{K}$. Soit $T_{\mathbb{K}}$ un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal, il existe une extension galoisienne $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ qui déploie G et telle qu'il existe des tore maximaux $\mathbb{L}$-déployés contenant $T_{\mathbb{K}}$.

Pour tout tel tore T, la famille de parahoriques Q définie dans [Rou10] est une bonne famille de parahoriques pour $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}(T)$, et elle vérifie en outre (para 2.1^+)(sph). Alors la proposition 13.4.1 s'applique, permettant de vérifier les conditions de descente (DSR), (DDR) et (DIV), ainsi que (DV 2) pour toute valuation sur $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}(T)$.

Si de plus la valuation de $\mathbb{K}$ est discrète, et le corps résiduel parfait, alors il existe une extension intermédiaire $\mathbb{M} \subset \mathbb{L}$ telle que G est quasi-déployé sur $\mathbb{M}$ et telle que l'extension $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$ est non ramifiée. Ceci permet la définition de la partie $\mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}} = \mathcal{J}_{\mathbb{M}} \cap \mathcal{I}^\Gamma$. L'hypothèse de discrétion de la valuation de $\mathbb{K}$ permet également d'appliquer la proposition 13.4.2, prouvant que la partie $\mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$ vérifie les conditions (DM). La condition (DV 1) est obtenue dès qu'on choisit une valuation basée en un point de $\mathcal{I}_{\sharp\mathbb{K}}$, alors toutes les conditions de descente de la partie 12 sont vérifiées.

On obtient donc une valuation pour la donnée radicielle $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$, puis un appartement, une bonne famille de parahoriques vérifiant (para 2.1^+)(sph), et enfin une masure bordée. On sait en outre que les façades sphériques de cette masure bordée sont incluses dans des façades sphériques de la masure bordée $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}$ pour $\mathcal{D}_{\mathbb{L}}$.

Théorème 13.5.1. *Soit G un groupe de Kac-Moody presque déployé sur un corps $\mathbb{K}$, déployé sur la clôture séparable de $\mathbb{K}$, vérifiant les conditions de descente (DSC) de [Ré02] 12.1.1. On suppose $\mathbb{K}$ muni d'une valuation réelle discrète non triviale, telle que son corps résiduel soit parfait.*

Alors il existe une masure bordée $\mathcal{I}_{\mathbb{K}}$ pour $G(\mathbb{K})$, qui provient d'une valuation $\varphi_{\mathbb{K}}$ et d'une bonne famille de parahoriques $Q_{\mathbb{K}}$ vérifiant (para 2.1^+)(sph). Pour toute facette sphérique $\vec{f}_{\mathbb{K}}$ de $\vec{\mathcal{I}}(\mathbb{K})$, la façade $\mathcal{I}_{\mathbb{K},\vec{f}_{\mathbb{K}}}$ s'injecte dans la façade $\mathcal{I}_{\mathbb{L},\vec{f}}$, de la masure bordée $\mathcal{I}_{\mathbb{L}}$ pour $G(\mathbb{L})$, où $\vec{f}$ est la facette de $\vec{\mathcal{I}}(\mathbb{L})$ contenant un ouvert de $\vec{f}_{\mathbb{K}}$.

Remarque: Les hypothèses sur le corps $\mathbb{K}$ (valuation discrète et corps résiduel parfait) interviennent pour résoudre deux difficultés : pour assurer l'existence d'une extension $\mathbb{M}$ non ramifiée de $\mathbb{K}$ qui quasi-déploie le groupe réductif $Z(T_{\mathbb{K}})$, puis pour assurer l'existence d'un point Γ-fixe dans l'immeuble de ce dernier. Ces deux difficultés ne font intervenir qu'un groupe réductif, et sont rencontrées de la même manière dans [BT84]. Ainsi, si on veut affiner le résultat précédent en affaiblissant les hypothèses sur le corps $\mathbb{K}$, ceci devrait être possible de la même manière que dans [BT84].

13.6 Questions

Signalons finalement deux points qui restent non résolus.

En premier lieu, on ne sait pas s'il existe en général, pour toute donnée radicielle valuée, une bonne famille de parahoriques. Nous ne disposons a priori que de la famille minimale de parahoriques ; même la définition de la famille maximale n'est possible que si l'on suppose l'existence d'au moins une bonne famille. Ce n'est que dans le cas d'une donnée radicielle valuée venant d'un groupe de Kac-Moody que l'on sait, grâce à [Rou10] que la famille minimale est bonne, et qu'il existe en outre une bonne famille vérifiant en plus (para 2.1^+).

Par ailleurs, pour construire la masure bordée d'un groupe de Kac-Moody presque déployé, on définit un appartement, puis une famille de parahoriques, puis on applique la construction générale. Il n'est alors pas clair que la masure obtenue s'injecte (ou au moins que chacune de ses façades s'injecte) dans la masure du groupe déployé. On a seulement prouvé que ses façades sphériques s'injectent dans des façades sphériques de la masure du groupe déployé, et il est facile d'en déduire l'existence d'un plongement pour les immeubles microaffines de $G(\mathbb{K})$.

Références

[AB08] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown. *Buildings, theory and applications*. Springer, 2008.

[Abr96] Peter Abramenko. *Twin buildings and applications to S-arithmetic groups*. Number 1641 in Lecture notes in mathematics. Springer, 1996.

[Bou68] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV,V,VI*. Hermann, Paris, 1968.

[Bro89] Kenneth S. Brown. *Buildings*. Springer verlag, 1989.

[BT72] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local I, données radicielles valuées. *Publ. Math. I.H.E.S*, 41 :5–184, 1972.

[BT84] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local II, schémas en groupes, existence d'une donnée radicielle valuée. *Publ. Math. I.H.E.S*, 60 :197–376, 1984.

[GR06] Yves Guivarc'h and Bertrand Remy. Group theoretic compactification of Bruhat-Tits buildings. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 39 :871–920, 2006.

[GR08] Stéphane Gaussent and Guy Rousseau. Kac-Moody groups, hovels and Littelman paths. *Annales de l'Institut Joseph Fourier*, 58 :2605–2657, 2008.

[Lan96] Erasmus Landvogt. A compactification of the Bruhat-Tits building. *Springer lecture note in Math*, 1619, 1996.

[Par00] Anne Parreau. Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries. *Contemporary Math.*, 262 :263–302, 2000.

[Ron89] Mark A. Ronan. *Lectures on buildings*, volume 7 of *Perspectives in math.* Academic Press, 1989.

[Rou77] Guy Rousseau. *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*. thèse d'état, Université Paris sud, 1977.

[Rou06] Guy Rousseau. Groupes de Kac-Moody sur un corps local, immeubles microaffines. *Compositio Math.*, 142 :501–528, 2006.

[Rou08] Guy Rousseau. Euclidean buildings. *Séminaires et congrès de la SMF*, 18, 2008.

[Rou10] Guy Rousseau. Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local 2, masures ordonnées. *prépublication*, 2010.

[Ré02] Bertrand Rémy. *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, volume 277. Astérisque, 2002.

[Tit74] Jacques Tits. Buildings of spherical types and finite BN-pairs. *Springer lecture note in math*, 386, 1974.

[Tit86] Jacques Tits. Immeubles de type affine. *Springer lecture note in math*, 1181 :159–190, 1986.

[Wei09] Richard M. Weiss. *The structure of affine buildings*, volume 168 of *Annals of Math. Studies*. Princeton university press, 2009.

[Wer07] Annette Werner. Compactifications of Bruhat-Tits buildings associated to linear representations. *Proc. London Math. Soc.*, 95 :497–518, 2007.

Cyril Charignon
Institut Élie Cartan
Unité mixte de recherche 7502
Nancy-Université, CNRS
Boulevard des aiguillettes
BP 70239
54506 Vandoeuvre lès Nancy cedex (France)
cyril.charignon@iecn.u-nancy.fr