Tenseur d'impulsion-énergie et géométrie spinorielle extrinsèque

Bertrand Morel

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Bertrand MOREL

Tenseur d'impulsion-énergie et géométrie spinorielle extrinsèque

Soutenue publiquement le 17 Septembre 2002

Membres du jury :

Jean Pierre Bourguignon	Président du jury	Directeur de recherches, École Polytechnique
Vicente Cortés	Examinateur	Professeur, Nancy I
Sylvestre Gallot	Examinateur	Professeur, Grenoble I
Oussama Hijazi	Directeur de Thèse	Professeur, Nancy I
Andrei Moroianu	Examinateur	Chargé de recherches, École Polytechnique

Rapporteurs :

Christian Bär	Professeur, Hamburg
Sebastián Montiel	Professeur, Grenade

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

J'aimerais remercier en premier lieu mon directeur de thèse Oussama Hijazi. J'ai pu profiter dès la maîtrise de mathématiques de ses qualités d'enseignant, et découvrir ensuite avec lui la géométrie spinorielle. Il m'a fait découvrir très tôt le monde de la recherche, et permis de rencontrer de nombreux mathématiciens de premier ordre. Son esprit critique et son écoute ont souvent été les éléments déclencheurs d'une idée, ou tout simplement d'un enthousiasme, qui m'a fait aller de l'avant. J'aimerais donc lui adresser ici toute mon estime, tant pour ses compétences en mathématiques que pour ses qualités humaines.

Christian Bär et Sebastián Montiel font partie des chercheurs qui ont vu évoluer mes travaux tout au long de ces trois années de préparation. Leurs remarques et leurs encouragements m'ont été d'une aide précieuse. Je tiens à les remercier d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

J'ai eu la possibilité de travailler quelques heures avec Sylvestre Gallot. Sa gentillesse, sa confiance et sa vivacité d'esprit m'ont fait réaliser à quel point la rencontre d'une telle personne, rare, pouvait être importante pour un jeune chercheur. Je suis heureux qu'il soit aujourd'hui dans ce jury.

Andrei Moroianu et Vicente Cortés ont aussi aimablement accepté de prendre part à ce jury et je suis très sensible au grand honneur que me fait Jean Pierre Bourguignon en le présidant.

Nicolas Ginoux et moi avons travaillé ces trois années passées dans le même bureau à l'Institut Élie Cartan de Nancy. Son esprit critique, sa rigueur mathématique et bien sûr son amitié m'ont permis de surmonter les moments parfois difficiles du travail de recherche. J'ai pu maintes fois profiter de ses remarques et de ses connaissances et ce fut un véritable plaisir de collaborer avec lui pour un article en commun. Je tiens à lui adresser des remerciements particulièrement chaleureux.

J'ai beaucoup apprécié les nombreux échanges et surtout la bonne ambiance au sein de la jeune équipe de géométrie spinorielle de Nancy. Merci donc à Éric Beaufort, Xavier Charuel, Jean-François Grosjean, Emmanuel Humbert et Julien Maubon.

Parce que les nombreux moments de rire et de détente passés tous ensembles ont énormément participé à mon bien être, je tiens à remercier tous mes amis de l'Institut Élie Cartan (et assimilés !) : Christophe, Florent, Olivier, Sébastien, Édouard, Olivier, Simona ... et bien d'autres encore.

Enfin, je n'aurais pu mener à bien ce travail de recherche sans le soutien et surtout l'amour de mes parents et de Thi–Tuong–Vi.

À mon frère ...

Table des matières

Introduction

La principale motivation des travaux de cette thèse est de mieux comprendre le rôle du tenseur d'impulsion-énergie spinoriel, qui est un 2-tenseur symétrique défini de façon très simple à partir d'un champ de spineurs sur une variété riemannienne spinorielle (0), et qui se manifeste de manière encore incomprise dans deux problèmes apparemment sans liens. Il est surprenant de voir que la géométrie spinorielle extrinsèque, qui est un outil performant pour l'étude des propriétés géométriques des sous-variétés riemanniennes, semble déboucher sur une interprétation naturelle de ce tenseur. Plus précisément, le voir comme la seconde forme fondamentale d'une hypersurface va clarifier quelque peu son rôle.

L'opérateur de Dirac fondamental d'une variété riemannienne spinorielle est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre, agissant sur les sections du fibré des spineurs de cette variété. On interprète souvent les champs de spineurs comme les "racines carrées" des formes différentielles, mais la différence fondamentale entre ces deux types d'objets est que le fibré des spineurs dépend de la métrique considérée (même si le fait, pour une variété riemannienne, d'être spinorielle n'est qu'une propriété topologique).

L'opérateur de Dirac est elliptique, et si de plus la variété sur laquelle on le définit est compacte, il est essentiellement auto-adjoint. L'étude de son spectre, alors discret, a fait et continue à faire l'objet de recherches intensives. Une conséquence de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz est que si la courbure scalaire de la variété est strictement positive, alors le noyau de l'opérateur de Dirac est trivial [**27**].

Aussi, des informations géométriques bien plus subtiles ont été obtenues en cherchant à estimer la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Dirac. Th. Friedrich l'a minorée par un nombre proportionnel à l'infimum de la courbure scalaire [**10**], puis, grâce à la propriété de covariance conforme de l'opérateur de Dirac, O. Hijazi a remplacé cet infimum par la première valeur propre de l'opérateur de Yamabe [**18**], i.e., le laplacien scalaire conforme.

Le cas d'égalité dans l'estimation de Th. Friedrich est caractérisé par l'existence sur la variété d'une section spéciale du fibré des spineurs. La dérivée covariante de cette section est égale à l'action des champs de vecteurs sur cette même section par multiplication de Clifford, à un coefficient de proportionnalité près (appelé nombre de Killing). Une telle section est appelée *spineur de Killing*, et son existence implique de sévères restrictions sur la géométrie et la topologie de la variété.

La construction d'un cône riemannien sur une variété admettant un spineur de Killing avec un nombre de Killing réel a permis à C. Bär de caractériser de telles variétés en fonction de l'holonomie de ce cône [**4**], dont la géométrie a été précisée par S. Gallot dans [**15**]. En fait, on peut donner une correspondance bijective entre les spineurs de Killing sur la variété et les spineurs parallèles sur le cône, permettant alors d'exploiter les résultats déja connus sur les variétés admettant des spineurs parallèles [**24**], [**39**] et [**34**].

Dans un premier temps, on s'intéressera à la question suivante :

> **Existe-t-il des estimations analogues à celles citées plus haut pour un opérateur de Dirac naturellement défini sur les sous-variétés riemanniennes spinorielles ?**

La définition de l'opérateur de Dirac des sous-variétés est à rapprocher de celle de l'opérateur que E. Witten a introduit dans sa preuve spinorielle du théorème de la masse positive [**40**] : il est défini comme la composée de la dérivée covariante spinorielle ambiante et de la multiplication de Clifford restreinte aux vecteurs tangents à la sous-variété. Pour rendre cet opérateur formellement auto-adjoint, il faut en plus inclure dans sa définition la multiplication de Clifford par l'élément de volume du fibré normal à la sous-variété considérée.

On peut alors se demander comment étendre les minorations classiques pour l'opérateur de Dirac intrinsèque à cet opérateur de Dirac défini de manière extrinsèque. Les résultats de X. Zhang dans [**41**] et [**42**] constituent un premier pas dans cette direction et dans le cas d'une hypersurface. On constate alors que la courbure moyenne de l'immersion isométrique de l'hypersurface vient modifier la borne inférieure classique.

On peut citer aussi les résultats récents d'O. Hijazi, S. Montiel et X. Zhang [**22**],[**23**] : ces derniers donnent des estimations pour le spectre de l'opérateur de Dirac d'un domaine ou de son bord ayant pour corollaire un théorème classique d'Alexandrov [**2**].

L'étude des variations du spectre de l'opérateur de Dirac en fonction de la métrique, et l'estimation des valeurs propres de cet opérateur donnée par O. Hijazi dans [**19**] (voir (1) ci-après) sont deux problèmes tout à fait différents où apparaît le tenseur d'impulsion-énergie spinoriel. Il est surprenant de voir que la géométrie extrinsèque (en particulier celle des hypersurfaces) semble être un cadre naturel pour étudier cet objet.

Une solution géométrique du problème des variations du spectre de l'opérateur de Dirac en fonction de la métrique est donnée par J.-P. Bourguignon et P. Gauduchon dans [**8**]. On peut alors énoncer une conséquence de leurs résultats de la façon simplifiée suivante :

On considère un 2-tenseur symétrique k, et l'on fait varier la métrique g d'une variété riemannienne spinorielle compacte (M, g) dans la direction de k, c'est-à-dire, on considère les métriques $g_t = g + tk$, pour t un paramètre suffisamment proche de 0. On peut alors comparer entre eux les fibrés des spineurs pour chacune des métriques g_t, et considérer la famille D_t d'opérateurs de Dirac associés. Si ψ est un spineur propre pour l'opérateur de Dirac initial D et λ sa valeur propre associée, on s'intéresse à la branche λ_t du spectre de la famille D_t vérifiant $\lambda_0 = \lambda$. Alors

$$\frac{d\lambda_t}{dt}_{|t=0} = -\frac{1}{2}\int_M (k, T_\psi) v_g$$

où T_ψ est le 2-tenseur symétrique défini pour tous vecteurs tangents X et Y par

$$T_\psi(X, Y) = \frac{1}{2}\Re(X \cdot \nabla_Y \psi + Y \cdot \nabla_X \psi, \psi) , \qquad (0)$$

où $\Re(.\,,.)$ désigne la partie réelle du produit scalaire hermitien naturellement défini sur le fibré des spineurs, et pour lequel la multiplication de Clifford par un vecteur tangent est antisymétrique.

Le nom de *tenseur d'impulsion-énergie* est justifié par le résultat de E.C. Kim et Th. Friedrich [**13**], qui montre, en s'appuyant sur [**8**], que les équations d'Einstein-Dirac

$$\begin{cases} D\psi = \lambda\psi \ , \\ \mathrm{Ric} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}\, g = \frac{1}{2}T_\psi \end{cases} ,$$

(où Ric désigne le tenseur de Ricci d'une variété riemannienne spinorielle (M,g) et Scal sa courbure scalaire), sont les équations d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle

$$W(g,\psi) = \int_M \Big(\mathrm{Scal} + \lambda|\psi|^2 - (D\psi,\psi)\Big) v_g \ .$$

Cette approche variationnelle est effectivement celle qui permet aux physiciens de définir et de calculer en relativité générale le tenseur d'impulsion-énergie associé à une distribution de matière donnée ([**17**]).

On peut déjà remarquer la simplicité de l'expression du tenseur T_ψ, c'est le 2-tenseur symétrique le plus simple construit à l'aide de la dérivée covariante et de la multiplication de Clifford. Plus surprenant, il apparaît indépendamment dans la minoration du spectre démontrée par O. Hijazi dans [**19**] :

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_M(\,\mathrm{Scal} + |Q^\psi|^2)\ , \qquad (1)$$

pour toute valeur propre λ associée au spineur propre ψ, avec $Q^\psi = T_\psi/|\psi|^2$. Cette inégalité améliore celle de Th. Friedrich. Elle peut donner une borne inférieure non triviale si la courbure scalaire est négative, mais elle est moins exploitable du fait que la borne elle-même dépend d'un spineur propre.

La remarque suivante est fondamentale dans le résultat d'O. Hijazi : supposons que la dérivée covariante d'un champ de spineur non trivial ψ satisfait pour tout vecteur tangent X

$$\nabla_X\psi = E(X)\cdot\psi\ , \qquad (2)$$

où E est un 2-tenseur symétrique donné. Tout d'abord il est facile de remarquer que la norme de ce spineur est constante. Ensuite, en choisissant un repère local orthonormé du fibré tangent $(e_1,\ldots,e_n)$, et si on désigne par E_{ij} les coefficients de E dans ce repère, on voit que l'équation ci-dessus implique

$$\Re(e_i\cdot\nabla_{e_j}\psi,\psi) = E_{ij}\Re(e_i\cdot e_j\cdot\psi,\psi)\ .$$

Les propriétés de la multiplication de Clifford impliquent alors que $E = -Q^\psi$. Il est intéressant de remarquer que l'on peut définir de manière naturelle un champ de vecteurs associé à un champ de spineurs ψ vérifiant l'équation (2) et que ce champ de vecteurs est de Killing si Q^ψ est parallèle (voir la proposition III.6).

Cette remarque est essentielle pour la suite : on va pouvoir démontrer que la restriction d'un spineur parallèle à une hypersurface vérifie l'équation (2). On se pose donc la question

Le cadre des hypersurfaces est-il mieux adapté que le cadre intrinsèque pour comprendre le rôle du tenseur d'énergie-impulsion en géométrie spinorielle ?

Présentation des résultats

Dans le premier chapitre, on s'intéresse tout d'abord au cas des hypersurfaces. Après avoir identifié la restriction à une hypersurface du fibré des spineurs ambiant avec le fibré des spineurs intrinsèque de cette même hypersurface, on définit l'opérateur de Dirac des hypersurfaces D_H de façon analogue à l'opérateur introduit par Witten. On continue alors dans la direction prise par X. Zhang dans [**41**] et [**42**] en commençant tout d'abord par préciser les cas d'égalité dans ses estimations pour le spectre de D_H. On met alors en évidence dans ce contexte l'existence de spineurs de Killing sur l'hypersurface considérée, comme pour le cas de l'égalité intrinsèque correspondante (à savoir ici, celle de Th. Friedrich).

On donne ensuite une minoration extrinsèque faisant intervenir le tenseur d'impulsion-énergie, correspondante à celle d'O. Hijazi. Le cas limite est analogue au cas intrinsèque, mettant en œuvre une section spéciale du fibré des spineurs qui généralise la notion de spineur de Killing. On remarque d'ailleurs que si l'hypersurface est minimale, l'opérateur D_H correspond exactement à l'opérateur de Dirac fondamental D de l'hypersurface, et que ces minorations sont celles déjà connues.

La remarque principale de ce premier chapitre est la suivante : la seule donnée extrinsèque de ces estimations est la courbure moyenne H de l'hypersurface. Il est en fait possible d'obtenir des estimations de manière tout à fait analogue pour des opérateurs de "Dirac-Schrödinger" D_f définis intrinsèquement par $D_f = D - \frac{f}{2}\mathrm{Id}$, f étant une fonction réelle lisse donnée, jouant alors le rôle de la courbure moyenne H.

Le deuxième chapitre est la généralisation du premier aux sous-variétés. Ce travail, prolongeant aussi un article d'O. Hijazi et X. Zhang [**21**], a été effectué en collaboration avec Nicolas Ginoux.

Le cas de la codimension au moins égale à deux est évidemment moins facile. Un premier effort algébrique est à fournir pour identifier le fibré des spineurs ambiant avec le produit tensoriel du fibré des spineurs de la sous-variété et de celui du fibré normal. Cet effort est simplifié grâce à l'identification de C. Bär dans [**6**]. Ensuite, il faut trouver une définition de l'opérateur de Dirac des sous-variétés qui correspond à D_H dans le cas des hypersurfaces. En particulier, cet opérateur (toujours noté D_H) doit être elliptique, formellement auto-adjoint, et doit être relié de façon naturelle à l'opérateur de Dirac intrinsèque "tordu" par le fibré normal.

Après avoir répondu à ces questions, on démontre en particulier le théorème suivant :

Théorème. *Soit $M^m \subset \widetilde{M}^{m+n}$ une sous-variété riemannienne spinorielle compacte d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}, g)$. On munit le fibré normal de la structure* *spinorielle induite. Supposons que*

$$m(\,\mathrm{Scal}\,+\kappa_1) \geq (m-1)||H||^2$$

où Scal *désigne la courbure scalaire de* $(M^m, g_{|M})$, κ_1 *la première valeur propre d'un opérateur de courbure normal (cf. (II.17)) et* H *la courbure moyenne de* M *dans* $\widetilde{M}$. *Alors toute valeur propre* λ *de* D_H *satisfait*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_M \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(\,\mathrm{Scal}\,+\kappa_1)} - ||H||\right)^2 .$$

De plus, en cas d'égalité dans cette minoration, la courbure moyenne H *est de norme constante, et il existe un réel* μ *et un champ de spineurs* ψ *sur* M, *vérifiant pour tout champ de vecteurs* X *tangent à* M

$$\nabla_X \psi = -\mu X \underset{M}{\cdot} \psi\ ,$$

où "$\underset{M}{\cdot}$*" désigne la multiplication de Clifford sur le produit tensoriel du fibré des spineurs de la sous-variété* M *avec celui du fibré normal.*

Cette dernière équation définit donc une notion de spineur de Killing "tordu". C'est bien celle d'un spineur de Killing réel dans le cas d'une hypersurface orientée puisque dans ce cas, le fibré normal est trivial.

On donnera aussi des estimations analogues faisant intervenir le tenseur d'impulsion-énergie et un changement de métrique adapté.

Ici encore, on peut faire la remarque que de telles estimations peuvent être obtenues pour des opérateurs de Dirac définis de manière intrinsèque sur le fibré des spineurs d'une variété riemannienne spinorielle, tordus par un fibré vectoriel auxiliaire donné.

La question du tenseur d'impulsion-énergie est abordée dans le troisième chapitre qui débute par la proposition suivante :

Proposition. *Soit* $M^n \hookrightarrow (N^{n+1}, g)$ *une hypersurface compacte, orientée, isométriquement immergée dans une variété riemannienne spinorielle* (N^{n+1}, g), *ayant pour courbure moyenne une constante* H *et pour seconde forme fondamentale le* 2*-tenseur symétrique* h. *Si* (N^{n+1}, g) *admet un champ de spineurs parallèle, alors* M *satisfait le cas d'égalité dans* (1)*, c'est à dire, il existe un champ de spineurs* ψ *le long de* M, *vérifiant* $D\psi = \lambda\psi$ *et tel que*

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{Scal}\, + |Q^\psi|^2 .$$

De plus, le tenseur d'impulsion-énergie associé à ψ *vérifie*

$$2Q^\psi = h$$

(Dans la suite, on désignera toujours Q^ψ comme le tenseur d'impulsion-énergie associé à ψ. On considérera d'ailleurs souvent des champs de spineurs ψ de norme constante, justifiant cet abus de langage.)

Cette proposition est une conséquence du fait que la restriction d'un spineur parallèle à une hypersurface est une section spéciale du fibré des spineurs, qui lorsque la courbure moyenne est constante, correspond à la généralisation d'un spineur de Killing.

On nommera une telle section un “T-spineur de Killing” comme dans [**14**]. Ces sections réalisent le cas d’égalité dans (1).

On se demande alors dans quelle mesure l’argument de C. Bär peut être adapté pour caractériser les variétés riemanniennes spinorielles qui admettent de telles sections. On rappelle qu’un spineur de Killing est un T-spineur de Killing dont le tenseur d’impulsion-énergie est proportionnel à la métrique. Son existence correspond bien via la construction du cône à l’existence d’une immersion isométrique (et même d’un plongement) de la variété comme une hypersurface totalement ombilique dans une variété riemannienne spinorielle admettant un spineur parallèle.

On donne alors la construction d’un produit tordu généralisé en vue de relier les “T-spineurs de Killing” à des spineurs parallèles sur la variété ainsi construite. En particulier, on démontrera l’équivalent des formules d’O’Neill pour la connexion de Levi-Civita de ce produit tordu (voir la Proposition III.8).

La difficulté vient du fait que dans la proposition précédente, pour avoir le même résultat, il suffit d’imposer seulement sur la variété ambiante l’existence d’un spineur dont la dérivée covariante ne s’annule le long de M que pour les champs de vecteurs tangents à M. Cette construction ne donne donc une géométrie intéressante que dans des cas particuliers, et par la suite nous considérons uniquement le cas où le tenseur d’impulsion-énergie est parallèle (ce qui est naturel puisque c’est le cas pour les spineurs de Killing), et même un projecteur.

Enfin, le quatrième et dernier chapitre illustre bien l’idée principale du chapitre III qui est d’interpréter le tenseur d’énergie impulsion associé à un champ de spineurs comme la seconde forme fondamentale d’une immersion isométrique.

Dans [**12**], Th. Friedrich donne une formulation spinorielle élégante de la théorie des surfaces dans l’espace euclidien de dimension 3 (voir aussi [**1**]). En dimension 2, il est en effet possible de montrer que la donnée d’un spineur ψ de norme constante, vérifiant $D\psi = f\psi$ pour une fonction réelle lisse f, est équivalente à la donnée d’une immersion isométrique de la surface dans $\mathbb{R}^3$ avec f pour courbure moyenne . Ceci est permis par le fait que ces deux données sont encore équivalentes à l’existence sur la surface d’une section spéciale du fibré des spineurs, dont le tenseur d’impulsion-énergie associé vérifie automatiquement les équations de Gauß et de Codazzi-Mainardi.

On montre alors que l’argument persiste pour le cas des surfaces dans la sphère S^3 ou l’espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$, tous deux munis de leur métrique standard. On démontre par exemple, en étudiant la restriction à une surface d’un spineur de Killing imaginaire,

Théorème. *Soit (M^2, g) une surface riemannienne orientée et $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors, les données suivantes sont équivalentes :*

(1) *Une immersion isométrique $(\tilde{M}^2, g) \to \mathbb{H}^3$ du revêtement universel $\tilde{M}^2$ de M dans l’espace hyperbolique à trois dimensions $\mathbb{H}^3$, ayant pour courbure moyenne la fonction H.*

(2) *Une solution φ de l’équation de Dirac*

$$D\varphi = H\varphi + \overline{\varphi}\ ,$$

ne s’annulant nulle part sur M et satisfaisant

$$X|\varphi|^2 = -\Re(X \cdot \overline{\varphi}, \varphi)\ , \qquad \forall X \in \Gamma(TM).$$

($\overline{\varphi}$ désigne ici l’image de φ par l’action de la forme volume complexe).

(3) *Un champ de spineurs φ, non-trivial, et un champ d'endomorphismes symétriques T tels que* $\mathrm{tr}(T) = H$ *et*

$$\nabla_X \varphi + T(X) \cdot \varphi + \frac{1}{2} X \cdot \overline{\varphi} = 0 \,, \qquad \forall X \in \Gamma(TM) \,.$$

Pour des raisons algébriques, ce résultat ne s'étend pas aux variétés de dimension plus grande ou égale à 3. Cependant, un résultat analogue persiste dans les cas des hypersurfaces parallèles de l'espace euclidien de dimension 4.

CHAPITRE I

Estimations de valeurs propres pour les opérateurs de Dirac-Schrödinger

Ce chapitre est la traduction d'un article publié en anglais dans la revue "Journal of Geometry and Physics".

Estimations de valeurs propres pour les opérateurs de Dirac-Schrödinger, [29]

Résumé. On donne de nouvelles estimations pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac d'une hypersurface en fonction du tenseur d'impulsion-énergie associé à un spineur propre, de la courbure moyenne et de la courbure scalaire de cette hypersurface. On décrit ensuite les cas limites de ces estimations et de celles obtenues par X. Zhang et O. Hijazi dans [42] and [20]. On compare alors ces cas limites avec ceux correspondant aux inégalités de Friedrich et d'Hijazi. On conclut en comparant ces résultats à des estimations intrinsèques pour des opérateurs de Dirac-Schrödinger $D_f = D - \frac{f}{2}$.

1. Introduction

Dans cet article, on commence par comparer le fibré des spineurs restreints S d'une hypersurface M au fibré des spineurs fondamental ΣM de M. Le fibré des spineurs restreints S est obtenu par restriction du fibré des spineurs fondamental de l'espace ambiant N à M. Si $\varphi \in \Gamma(S)$ est une section de ce fibré, le tenseur d'impulsion-énergie Q^φ associé à φ est défini sur le complément de l'ensemble de ses zéros, par

$$Q^\varphi_{ij} = \frac{1}{2}(e_i \cdot \nu \cdot \nabla_j \varphi + e_j \cdot \nu \cdot \nabla_i \varphi, \varphi/|\varphi|^2),$$

où ν est un champ de vecteurs normal unitaire défini globalement sur M, e_i, e_j sont les vecteurs d'un repère local orthonormé de M, et où $\nabla_i \varphi$ désigne la dérivée covariante du champ de spineurs φ dans la direction de e_i . Alors, la formule de Schrödinger-Lichnerowicz pour l'opérateur de Dirac classique D sur M mène au résultat suivant (à comparer avec [42]) :

Théorème I.1. *Soit $M^n \subset (N^{n+1}, \widetilde{g})$ une hypersurface compacte orientée d'une variété riemannienne spinorielle N. Soit λ une valeur propre de l'opérateur de Dirac d'hypersurface $D_H = D - \frac{H}{2}$, associée au spineur propre φ. En supposant* $\mathrm{Scal} + 4|Q^\varphi|^2 > H^2 > 0$, *on a alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_M \left(\sqrt{\mathrm{Scal} + 4|Q^\varphi|^2} - |H| \right)^2 , \tag{I.1}$$

où Scal *et H sont respectivement la courbure scalaire et la courbure moyenne de M, et Q^φ le tenseur d'impulsion-énergie associé à φ.*

En fait, on voit que si M est une hypersurface minimale, l'opérateur de Dirac d'hypersurface correspond à l'opérateur de Dirac classique. Donc, dans ce cas, cette estimation est exactement celle donnée par O. Hijazi dans [19].

On discute alors des cas limites de l'estimation (I.1) et de celle donnée par X. Zhang dans [41].

Comme dans [18] et [20], on prouve le

Théorème I.2. *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème I.1, en supposant* $\overline{\mathrm{Scal}}\ e^{2u} + 4|Q^{\varphi}|^2 > H^2 > 0$*, où* $\overline{\mathrm{Scal}}$ *est la courbure scalaire de* M *pour une métrique conforme* $\overline{g} = e^{2u}\,\widetilde{g}$ *donnée, avec* $du(\nu)_{|M} \equiv 0$*, on a*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\ \inf_M \left(\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\ e^{2u} + 4|Q^{\varphi}|^2} - |H| \right)^2 . \tag{I.2}$$

La description des cas limites de cette inégalité et de celle prouvée dans [**20**] est similaire à celle de (I.1). En conclusion, on observe que ces inégalités correspondent à la généralisation des estimations classiques aux opérateurs de type Dirac-Schrödinger $D_f = D - \frac{f}{2}$, pour une fonction à valeurs réelles f sur M.

L'auteur aimerait remercier Oussama Hijazi pour l'avoir mené à ce problème, ainsi que Nicolas Ginoux et Xiao Zhang.

2. Préliminaires

2.1. Restriction des champs de spineurs à une hypersurface. Dans cet article, on considère une hypersurface compacte orientée (M^n, g) d'une variété riemannienne spinorielle $(N^{n+1}, \widetilde{g})$, munie d'une structure spinorielle $\mathrm{Spin}N$. La métrique g est la métrique induite sur M par $\widetilde{g}$. La possibilité de définir globalement un champ de vecteurs normal unitaire ν sur M permet d'induire de $\mathrm{Spin}N$ une structure spinorielle sur M, notée $\mathrm{Spin}M$. Pour y parvenir, on associe à chaque repère orthonormé orienté $(e_1, \dots, e_n)$ de M le repère orthonormé orienté $(e_1, \dots, e_n, \nu)$ de N de sorte que le $\mathrm{SO}(n)$-fibré principal $\mathrm{SO}_n M$ des repères orthonormés orientés sur M soit identifié à un sous fibré de $\mathrm{SO}_{n+1} N_{|M}$. Cette application sera notée Φ.

Soit $\mathbb{C}l_n$ l'algèbre de Clifford complexe en dimension n et $\mathbb{C}l_n^0$ sa partie paire. On rappelle qu'il existe un isomorphisme

$$\begin{aligned} \alpha :\ \mathbb{C}l_n &\longrightarrow \mathbb{C}l^0_{n+1} \\ e_i &\longmapsto e_i \cdot \nu. \end{aligned} \tag{I.3}$$

Ici, ν joue le rôle du dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

En particulier, α induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin}(n) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{Spin}(n+1) \arrow[d, "\mathrm{Ad}"] \\ \mathrm{SO}(n) \arrow[r, "\subset"] & \mathrm{SO}(n+1) \end{tikzcd}$$

où l'inclusion de $\mathrm{SO}(n)$ dans $\mathrm{SO}(n+1)$ est celle qui fixe le dernier vecteur de base sous l'action de $\mathrm{SO}(n+1)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, et Ad est la représentation adjointe de $\mathrm{Spin}(n)$ sur $\mathrm{SO}(n)$, donnée par

$$\mathrm{Ad}_\eta(x) = \eta \cdot x \cdot \eta^{-1}$$

pour tout $\eta \in \mathrm{Spin}(n)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Ceci permet de considérer l'image réciproque par Φ du fibré $\mathrm{Spin}N_{|M}$ sur $\mathrm{SO}M$ comme une structure spinorielle sur M, notée $\mathrm{Spin}M$. La projection de $\mathrm{Spin}M$ sur $\mathrm{SO}M$ est notée π, tout comme la projection de $\mathrm{Spin}N$ sur $\mathrm{SO}N$. Ainsi, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}M \arrow[r, "\Phi^*"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Spin}N_{|M} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{SO}M \arrow[r, "\Phi", "\subset"'] & \mathrm{SO}N_{|M}
\end{tikzcd}$$

Soit ΣN le fibré des spineurs complexes sur N, i.e.,

$$\Sigma N = \mathrm{Spin}N \times_{\rho_{n+1}} \Sigma_{n+1},$$

où ρ_{n+1} est la restriction à $\mathrm{Spin}(n+1)$ d'une représentation complexe irréductible de $\mathbb{C}l_{n+1}$ sur l'espace des spineurs Σ_{n+1}, de dimension $2^{[\frac{n+1}{2}]}$ ($[\,.\,]$ désigne la partie entière). On rappelle que si $n+1$ est impair, cette représentation est choisie de sorte que la forme volume complexe agisse sur Σ_{n+1} par l'identité.

Localement, par définition de ΣN, si U est un ouvert de N et $\psi \in \Gamma_U(\Sigma N)$ une section locale du fibré des spineurs, on peut écrire

$$\psi = [\widetilde{s}, \sigma]$$

où $\sigma : U \to \Sigma_{n+1}$ et $\widetilde{s} : U \to \mathrm{Spin}N$ sont des applications différentiables, et $[\widetilde{s}, \sigma]$ est la classe d'équivalence pour la relation

$$[\widetilde{s}, \sigma] \sim [\widetilde{s}g, \rho_{n+1}(g^{-1})\sigma], \qquad \forall g \in \mathrm{Spin}(n+1).$$

De plus, on peut toujours supposer que $\pi(\widetilde{s})$ est une section locale de $\mathrm{SO}N$ ayant ν pour dernier vecteur de base. On a alors

$$\psi_{|M} = [(\widetilde{s}_{|U\cap M}, \sigma_{|U\cap M})]$$

où la classe d'équivalence est réduite aux éléments de $\mathrm{Spin}(n)$.

Il suit que l'on peut réaliser la restriction à M du fibré des spineurs ΣN comme

$$S := \Sigma N_{|M} = \mathrm{Spin}M \times_{\rho_{n+1}\circ\alpha} \Sigma_{n+1}.$$

Remarque. L'inclusion de $\mathrm{Spin}(n)$ dans $\mathrm{Spin}(n+1)$ donnée par α est triviale. Cependant, cette notation souligne le fait que la multiplication de Clifford d'un champ de spineurs $\phi \in \Gamma(S)$ par un vecteur X tangent à M est donnée par

$$(X, \phi) \mapsto X \cdot \nu \cdot \phi. \tag{I.4}$$

Cette remarque est cruciale pour l'identification qui suit (voir aussi [**5**],[**9**]).

2.2. Identification de S avec ΣM. On compare maintenant S avec le fibré des spineurs intrinsèque sur M,

$$\Sigma M = \mathrm{Spin}M \times_{\rho_n} \Sigma_n.$$

Pour cela, on doit différencier les cas où n est pair ou impair. Supposons pour commencer que $n = 2m$ est pair. De (I.3) et

$$\mathbb{C}l_{2m} \cong \mathbb{C}(2^m), \tag{I.5}$$

il suit que la représentation de $\mathbb{C}l_{2m}$ donnée par $\rho_{2m+1}\circ\alpha$ est simplement la restriction de ρ_{2m+1} à $\mathbb{C}l^0_{2m+1}$. Mais cette représentation est irréductible (voir [**26**]). La représentation $\rho_{2m+1}\circ\alpha$ est donc une représentation irréductible de $\mathbb{C}l_{2m}$ de dimension $\dim\Sigma_{2m+1} = 2^{[\frac{2m+1}{2}]} = 2^m$, comme ρ_{2m}. Or, (I.5) implique que cette représentation est unique, à isomorphisme près. Ainsi $\rho_{2m} \cong \rho_{2m+1}\circ\alpha$ et on conclut que

$$S \cong \Sigma M. \tag{I.6}$$

Soit $\omega_{2m} = i^m e_1 \cdot \dots \cdot e_{2m}$ la forme volume complexe en dimension paire. Un calcul facile montre que $\alpha(\omega) = \omega$. La décompostion de ΣM en parties positive et négative est inchangée par l'isomorphisme (I.6) et on a

$$S = S^+ \oplus S^-$$

où

$$S^\pm = \{\psi \in S \mid i\nu \cdot \psi = \pm\psi\} \cong \Sigma M^\pm.$$

En fait, puisque l'on a choisi ρ_{2m+1} comme la représentation irréductible de $\mathbb{C}l_{2m+1}$ pour laquelle la forme volume complexe $\omega_{2m+1} = i^{m+1} e_1 \cdot \dots \cdot e_{2m} \cdot \nu$ agit par l'identité sur Σ_{2m+1}, on a, pour $\psi \in S$:

$$i\nu \cdot \psi = i\nu \cdot \omega_{2m+1} \cdot \psi = i^m i^2 \nu \cdot e_1 \cdot \dots \cdot e_{2m} \cdot \nu \cdot \psi = \omega_{2m} \cdot \psi.$$

On suppose maintenant que $n = 2m+1$ est impair. On rappelle l'isomorphisme suivant :

$$\mathbb{C}l_{2m+1} = \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m). \tag{I.7}$$

Comme mentionné plus haut, ρ_{2m+1} correspond à la représentation irréductible de $\mathbb{C}l_{2m+1}$ pour laquelle l'action de la forme volume complexe ω_{2m+1} est l'identité. Puisque $n+1 = 2m+2$ est pair, ΣN se décompose en parties positive et négative,

$$\Sigma N^\pm = \mathrm{Spin} N \times_{\rho^\pm_{2m+2}} \Sigma^\pm_{2m+2}.$$

Si e_k est un vecteur de base tangent à M, alors

$$\begin{aligned} \alpha(e_k) \cdot \omega_{2m+2} &= i^{m+1} e_k \cdot \nu \cdot e_1 \cdot \dots \cdot e_{2m+1} \cdot \nu \\ &= i^{m+1} (-1)^{2m+2} (-1)^{2m+2} e_1 \cdot \dots \cdot e_{2m+1} \cdot \nu \cdot e_k \cdot \nu \\ &= \omega_{2m+2}\, \alpha(e_k). \end{aligned}$$

Ainsi $\rho_{2m+2} \circ \alpha$ préserve la décomposition de ΣN, et

$$S = S^+ \oplus S^-$$

avec

$$S^\pm = \mathrm{Spin} M \times_{\rho^\pm_{2m+2} \circ \alpha} \Sigma^\pm_{2m+2},$$

et où ω_{2m+2} agit comme $\pm\mathrm{Id}$ sur $S^\pm$.

De plus,

$$\alpha(\omega_{2m+1}) = i^{m+1} (e_1 \cdot \nu) \cdot \dots \cdot (e_{2m+1} \cdot \nu) = i^{m+1} e_1 \cdot \dots \cdot e_{2m+1} \cdot \nu = \omega_{2m+2},$$

et donc ρ_{2m+1} et $\rho^+_{2m+2} \circ \alpha$ sont deux représentations irréductibles de $\mathbb{C}l_{2m+1}$ de mêmes dimensions, telles que $\rho_{2m+1}(\omega_{2m+1})$ et $\rho^+_{2m+2} \circ \alpha(\omega_{2m+1})$ sont respectivement l'identité sur Σ_{2m+1} et Σ^+_{2m+2}. Puisqu'une telle représentation est unique à isomorphisme près, on déduit que $\rho_{2m+1} \cong \rho^+_{2m+2} \circ \alpha$ et

$$S^+ \cong \Sigma M. \tag{I.8}$$

On a donc démontré la proposition suivante :

Proposition I.3. *Si n est pair (resp. impair), il existe un isomorphisme entre le fibré des spineurs restreints S (resp. S^+) et le fibré des spineurs ΣM qui envoie tout spineur $\varphi \in S$ (resp. S^+) sur le spineur noté $\varphi^* \in \Sigma M$. De plus, sous cette identification, la multiplication de Clifford par un champ de vecteurs X tangent à M est donnée par*

$$X \cdot \varphi^* = (X \cdot \nu \cdot \varphi)^*.$$

2.3. La formule de Gauss spinorielle et l'opérateur de Dirac d'hypersurface. Soit $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $(N^{n+1},\widetilde{g})$, et ∇ celle de (M^n,g). Soit $(e_1,\dots,e_n,e_{n+1}=\nu)$ un repère local orienté orthonormé de TM, alors la formule de Gauss donne pour $1\leq i,j\leq n$,

$$\widetilde{\nabla}_i e_j = \nabla_i e_j + h_{ij}\nu\ , \tag{I.9}$$

où h_{ij} sont les coefficients de la seconde forme fondamentale de l'hypersurface M dans la base $(e_1,\dots,e_n,e_{n+1})$. On peut de la même façon relier les connexions associées sur les fibrés des spineurs correspondants. Pour cela, on considère $\phi\in\Gamma(\Sigma N)$ et $\varphi=\phi_{|M}\in\Gamma(S)$ sa restriction à M. On rappelle que localement, pour $X\in\Gamma(TM)$,

$$\widetilde{\nabla}_X\phi = X(\phi)+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n+1}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X e_i,e_j)e_i\cdot e_j\cdot\phi \tag{I.10}$$

et

$$\begin{aligned}\nabla_X\varphi &= X(\varphi)+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n} g(\nabla_X e_i,e_j)e_i\cdot\nu\cdot e_j\cdot\nu\cdot\varphi\\ &= X(\varphi)+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n} g(\nabla_X e_i,e_j)e_i\cdot e_j\cdot\varphi.\end{aligned}$$

Ainsi, en restreignant chaque membre de l'équation (I.10) à M, et en utilisant le fait que $X(\phi)_{|M}=X(\phi_{|M})$ pour X tangent à M, la formule de Gauß (I.9) implique, pour $1\leq k\leq n$,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_k\phi)_{|M} &= e_k(\varphi)+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\widetilde{g}(\nabla_k e_i+h_{ki}\nu,e_j)e_i\cdot e_j\cdot\varphi\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq n}\widetilde{g}(\nabla_k e_i+h_{ki}\nu,\nu)e_i\cdot\nu\cdot\varphi\\ &= e_k(\varphi)+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n} g(\nabla_k e_i,e_j)e_i\cdot e_j\cdot\varphi\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq n} h_{ki}e_i\cdot\nu\cdot\varphi\\ &= \nabla_k\varphi+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq n} h_{ki}e_i\cdot\nu\cdot\varphi\end{aligned}$$

Ici, grâce à l'équation (I.10), écrire $(\widetilde{\nabla}_X\phi)_{|M}=\widetilde{\nabla}_X\varphi$ quand X est tangent à M a bien un sens, et on a donc prouvé la formule de Gauß spinorielle :

$$\forall\varphi\in\Gamma(S)\ ,\ \forall X\in\Gamma(TM),\qquad \widetilde{\nabla}_X\varphi=\nabla_X\varphi+\frac{1}{2}h(X)\cdot\nu\cdot\varphi. \tag{I.11}$$

(Ici h est vue comme un endomorphisme du fibré tangent.)

Il est bien connu (voir [**26**]) qu'il existe une métrique hermitienne définie positive $<.,.>$ sur ΣN telle que, si τ est une k-forme sur N,

$$<\tau\cdot\phi,\psi> = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} <\phi,\tau\cdot\psi>\quad ,\quad \forall\phi,\psi\in\Gamma(\Sigma N). \tag{I.12}$$

Si on note $(.,.)$ sa partie réelle, on a

$$(\widetilde{X}\cdot\phi,\widetilde{Y}\cdot\phi)=\widetilde{g}(\widetilde{X},\widetilde{Y})(\phi,\phi) \quad , \quad (\widetilde{X}\cdot\phi,\phi)=0 \quad , \quad \forall\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\Gamma(TN). \tag{I.13}$$

On restreint simplement $(.,.)$ à M pour obtenir un produit scalaire défini globalement sur S. Maintenant, puisque $\widetilde{\nabla}$ est compatible avec $(.,.)$, i.e.

$$X(\varphi,\psi)=(\widetilde{\nabla}_X\varphi,\psi)+(\varphi,\widetilde{\nabla}_X\psi) \quad , \quad \forall\varphi,\psi\in\Gamma(S),\ \forall X\in\Gamma(TM)\ ,$$

la formule (I.11) implique que ∇ est aussi compatible avec ce produit scalaire. On remarque que l'équation (I.11) implique que par rapport à l'identification de la proposition I.3, on a

$$(\nabla\phi)^*=\nabla\phi^*\ . \tag{I.14}$$

Ceci permet donc de définir un produit scalaire $(.\,,.)_{\Sigma M}$ sur le fibré des spineurs intrinsèque, avec les mêmes propriétés que $(.\,,.)$, rendant les deux fibrés correspondants isométriques.

Puique la multiplication de Clifford d'un champ de spineurs par un champ de vecteurs tangent à M est donnée par (I.4), si n est impair, S^+ est laissé stable par ∇ par multiplication de Clifford. Ainsi, l'opérateur de Dirac classique est simplement défini sur S pour n pair (resp. S^+ pour n impair) par

$$D=\sum_{i=1}^{n}e_i\cdot\nu\cdot\nabla_i.$$

On définit maintenant l'opérateur de Dirac d'hypersurface sur $\Gamma(S)$ par

$$D_H=\sum_{i=1}^{n}e_i\cdot\nu\cdot\widetilde{\nabla}_i.$$

Cette définition est motivée par le fait suivant. Soit

$$\widetilde{D}=\sum_{i=1}^{n}e_i\cdot\widetilde{\nabla}_i$$

l'opérateur de Dirac sur une hypersurface défini par E. Witten (voir [**40**], [**36**]) dans sa preuve du théorème de la masse positive en relativité générale. Alors $\widetilde{D}$ n'est pas formellement auto-adjoint par rapport à la métrique $(.,.)$. Aussi, il est démontré dans [**20**] que

$$D_H^2=\widetilde{D}^*\widetilde{D},$$

où $\widetilde{D}^*$ est l'adjoint formel de $\widetilde{D}$ par rapport à $(.\,,.)$.

De la formule (I.11), on déduit que pour n pair (resp. impair), on a les relations suivantes sur $\Gamma(S)$ (resp. $\Gamma(S^+)$) :

$$\begin{aligned} D_H &= \sum_i e_i \cdot \nu \cdot \nabla_i + \sum_i e_i \cdot \nu \cdot \frac{h(e_i)}{2} \cdot \nu \cdot \\ &= D + \sum_{i,j} \frac{h_{ij}}{2} e_i \cdot e_j \cdot \\ &= D + \sum_{i,j} \frac{h_{ij}}{4} (e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i) \cdot \\ &= D - \sum_{i,j} \frac{h_{ij}}{2} \delta_{ij} \end{aligned}$$

et donc, si $H = \sum_i h_{ii}$ est la courbure moyenne de l'hypersurface, on a

$$D_H = D - \frac{H}{2} \tag{I.15}$$

Dans la suite, on ne distinguera pas les cas où n est pair ou impair. En fait, si n est impair, D_H ne change pas la décomposition de S en spineurs positifs et négatifs, tout comme la multiplication de Clifford (cf. (I.4)), $\widetilde{\nabla}$ et ∇. Ainsi, si $\phi \in \Gamma(S)$ est un spineur propre pour D_H, associé à la valeur propre λ, il en est de même pour ϕ^+, sa partie positive. On considère alors seulement les spineurs positifs. Avec cette convention, les notations deviennent moins lourdes.

Maintenant, il est facile de voir par l'équation (I.15) que D_H est formellement auto-adjoint par rapport à la métrique $(.,.)$ (voir [**20**]). Finalement, on rappelle la formule de Schrödinger-Lichnerowicz sur $\Gamma(\Sigma M)$ qui, par l'identification précédente, est aussi vraie sur $\Gamma(S)$:

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\mathrm{Scal}}{4}, \tag{I.16}$$

Scal étant la courbure scalaire de M et ∇^* l'adjoint formel de ∇ pour la métrique $(.,.)$.

3. Preuve du théorème I.1

On donne maintenant une estimation des valeurs propres de D_H faisant intervenir le tenseur d'impulsion-énergie associé à un spineur propre (see [**19**]). Pour tout champ de spineurs $\varphi \in \Gamma(S)$, on définit le tenseur d'impulsion-énergie associé Q^φ sur le complément de l'ensemble de ses zéros, comme le 2-tenseur symétrique défini par

$$Q^\varphi_{ij} = \frac{1}{2}(e_i \cdot \nu \cdot \nabla_j \varphi + e_j \cdot \nu \cdot \nabla_i \varphi, \varphi / |\varphi|^2). \tag{I.17}$$

Remarque I.4. Cette définition correspond à celle donnée dans [**19**] si l'on remarque que sous l'identification de S avec ΣM de la proposition I.3,

$$Q^\varphi_{ij} = \frac{1}{2}(e_i \cdot \nabla_j \varphi^* + e_j \cdot \nabla_i \varphi^*, \varphi^* / |\varphi^*|^2)_{\Sigma M}.$$

Si φ est un spineur propre pour D_H, Q^φ est bien défini au sens des distributions. Pour toutes fonctions à valeurs réelles p et q, on considère la dérivée covariante modifiée définie sur S par

$$\nabla^Q_i = \nabla_i + \Big(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\Big) e_i \cdot \nu \cdot + \sum_j Q^\varphi_{ij}\, e_j \cdot \nu \cdot\ . \tag{I.18}$$

Remarque I.5. Cette connexion est bien définie sur S^+ si n est impair.

En utilisant (I.13), on a

$$\begin{aligned} |\nabla^Q\varphi|^2 &= |\nabla\varphi|^2 + n\left(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\right)^2 |\varphi|^2 \\ &+\sum_{i,j,k} Q^\varphi_{ij}\, Q^\varphi_{ik}(e_j\cdot\nu\cdot\varphi,\ e_k\cdot\nu\cdot\varphi) \\ &+2\left(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\right)\ \sum_i(\nabla_i\varphi,\ e_i\cdot\nu\cdot\varphi) \\ &+2\sum_{i,j} Q^\varphi_{ij}\ (\nabla_i\varphi,\ e_j\cdot\nu\cdot\varphi) \\ &+2\Big(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\Big)\ \sum_{i,j} Q^\varphi_{ij}\ (e_i\cdot\nu\cdot\varphi, e_j\cdot\nu\cdot\varphi)\ . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |\nabla^Q\varphi|^2 &= |\nabla\varphi|^2 + n\left(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\right)^2 |\varphi|^2 + |Q^\varphi|^2\,|\varphi|^2 \\ &-2\left(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\right)(D\varphi,\ \varphi) - 2|Q^\varphi|^2\,|\varphi|^2 \\ &+2\Big(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\Big)\ Tr(Q^\varphi)\,|\varphi|^2\ , \end{aligned}$$

or

$$Tr(Q^\varphi)\,|\varphi|^2 = (D\varphi,\varphi)\ ,$$

d'où

$$|\nabla^Q\varphi|^2 = |\nabla\varphi|^2 + n\left(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\right)^2 |\varphi|^2 - |Q^\varphi|^2\,|\varphi|^2\ . \tag{I.19}$$

Puisque $D_H = D - \frac{H}{2}$, la formule de Schrödinger-Lichnerowicz (I.16) sur $\Gamma(S)$ implique

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla\varphi|^2 v_g &= \int_M \Big(|D\varphi|^2 - \frac{\text{Scal}}{4}|\varphi|^2\Big) v_g \\ &= \int_M \Big((\lambda + \frac{H}{2})^2 - \frac{\text{Scal}}{4}\Big)|\varphi|^2 v_g\ . \end{aligned} \tag{I.20}$$

Ainsi, (I.19) et (I.20) mènent à

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla^Q\varphi|^2 v_g &= \int_M \Big((1+nq^2)\lambda^2 - \frac{\text{Scal}}{4} - |Q^\varphi|^2\Big)|\varphi|^2 v_g \\ &+ \int_M \Big((1+np^2)\frac{H^2}{4} + (1+npq)H\lambda\Big)|\varphi|^2 v_g\ . \end{aligned} \tag{I.21}$$

Si l'on suppose que la fonction q ne s'annule pas, on peut choisir $p = -\frac{1}{nq}$. Alors, (I.21) devient

$$\int_M |\nabla^Q\varphi|^2 v_g = \int_M (1+nq^2)\Big[\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\text{Scal} + 4|Q^\varphi|^2}{(1+nq^2)} - \frac{H^2}{nq^2}\Big)\Big]|\varphi|^2 v_g \tag{I.22}$$

Si $\mathrm{Scal} + 4|Q^{\varphi}|^2 > H^2 > 0$, on peut poser

$$nq^2 = \frac{|H|}{\sqrt{\mathrm{Scal} + 4|Q^{\varphi}|^2} - |H|} \tag{I.23}$$

Ainsi l'équation (I.22) devient

$$\int_M |\nabla^Q \varphi|^2 v_g = \int_M (1 + nq^2)\Big[\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big(\sqrt{\mathrm{Scal} + 4|Q^{\varphi}|^2} - |H|\Big)^2\Big]|\varphi|^2 v_g \tag{I.24}$$

Puisque le membre de droite de cette équation est positif et puique λ est une constante, on a

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_M \Big(\sqrt{\mathrm{Scal} + 4|Q^{\varphi}|^2} - |H|\Big)^2. \tag{I.25}$$

Remarque I.6. Si M est minimale, i.e. $H = 0$, on peut choisir $q \equiv 0$ dans (I.18) et (I.25) donne l'inégalité du théorème A dans [**19**].

Remarque I.7. La définition du tenseur d'impulsion-énergie Q^{φ} coïncide bien avec celle de [**19**]. La définition utilisée dans [**41**] et [**20**] donne un facteur $\frac{n}{n-1}$ devant le terme $\mathrm{Scal} + 4|Q^{\varphi}|^2$ dans l'inégalité (I.25) mais dans ce cas, Q^{φ} n'a pas d'interprétation intrinsèque.

4. Les cas limites

On commence par rappeler l'inégalité démontrée par X. Zhang :

Théorème I.8 ([**41**],[**42**]). *Soit $M^n \subset N^{n+1}$ une hypersurface compacte orientée d'une variété riemannienne spinorielle $(N, \widetilde{g})$. On suppose $n \geq 2$ et $n\,\mathrm{Scal} > (n-1)H^2 > 0$. Alors, si λ est une valeur propre de l'opérateur de Dirac d'hypersurface D_H, on a*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_M \Big(\sqrt{\frac{n}{n-1}\mathrm{Scal}} - |H|\Big)^2. \tag{I.26}$$

Comme pour la preuve du théorème I.1, la démonstration du théorème I.8 est basée sur l'utilisation d'une dérivée covariante modifiée

$$\nabla_i^{\lambda} = \nabla_i + \Big(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\Big)e_i \cdot \nu \cdot . \tag{I.27}$$

Ici, les fonctions p et q sont reliées par

$$p = \frac{1-q}{1-nq} \tag{I.28}$$

et

$$q = \frac{1}{n}\Bigg(1 - \sqrt{\frac{(n-1)|H|}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\mathrm{Scal}} - |H|}}\Bigg) \tag{I.29}$$

ou, en d'autres termes,

$$(1-nq)^2 = \frac{(n-1)|H|}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\mathrm{Scal}} - |H|}. \tag{I.30}$$

Le cas d'égalité est atteint dans (I.26) pour un spineur propre φ de D_H de valeur propre λ si et seulement si $\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} - |H|$ est une constante et $\nabla^\lambda\varphi \equiv 0$. Or, en tenant compte de l'identification de la proposition I.3, et par (I.14), $\nabla^\lambda\varphi \equiv 0$ est équivalent à

$$\forall i = 1,\ldots,n, \qquad \nabla_i\varphi^* = -\Big(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\Big)e_i\cdot\varphi^* \tag{I.31}$$

Il est bien connu (voir [**18**]) que si une telle section existe sur ΣM, alors $p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda$ doit être une constante (notée $\frac{\lambda_1}{n}$ par exemple) et que dans ce cas, la variété M est d'Einstein et $\mathrm{Scal} = 4\frac{n-1}{n}\lambda_1^2$. Ainsi φ est un spineur de Killing réel et on est dans le cas limite de l'inégalité de Friedrich [**12**]. De plus, puisque $\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} - |H|$ est une constante, la courbure moyenne H doit être constante.

Aussi, puisque $D\varphi = \lambda_1\varphi$ et $\lambda_1 = \frac{\mathrm{sign}(\lambda_1)}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}}$, l'équation suivante doit être satisfaite (on rappelle que $D_H = D - \frac{H}{2}$)

$$\lambda = \frac{\mathrm{sign}(\lambda_1)}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} - \frac{H}{2} = \frac{\mathrm{sign}(\lambda_1)}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} - \mathrm{sign}(H)\frac{|H|}{2} \tag{I.32}$$

Or le cas d'égalité donne

$$\lambda = \frac{\mathrm{sign}(\lambda)}{2}\Big(\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} - |H|\Big)\,. \tag{I.33}$$

Donc (I.32) et (I.33) impliquent

$$\mathrm{sign}(\lambda) = \mathrm{sign}(\lambda_1) = \mathrm{sign}(H) \tag{I.34}$$

D'autre part, un simple calcul mène à

$$\begin{aligned} p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda &= \frac{\mathrm{sign}(\lambda)}{2n}\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} \\ &\quad + \frac{(\mathrm{sign}(H) - \mathrm{sign}(\lambda))}{2n}\Big(1 + \sqrt{(n-1)(\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} - |H|)}\Big) \\ &= \frac{\mathrm{sign}(\lambda_1)}{2n}\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} \end{aligned}$$

et l'on retrouve la relation déja connue $p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda = \frac{\lambda_1}{n}$.

En fait, (I.34) peut être observé de manière simple puisque dans le cas d'égalité, Scal et H sont des constantes. On peut alors voir le spectre de D_H comme le spectre de D décalé par la valeur $-\frac{H}{2}$. La condition $n\,\mathrm{Scal} > (n-1)H^2 > 0$ dans le théorème I.8 implique simplement que la plus petite valeur propre de D_H (en valeur absolue) doit avoir le signe de H. En particulier, si n est pair, cela montre comment la symétrie du spectre est perdue en passant de D à D_H (au contraire du cas $H = 0$).

On discute maintenant du cas d'égalité dans le théorème I.1. Le cas limite de l'inégalité (I.1) a lieu pour un spineur propre φ de D_H ayant pour valeur propre λ si et seulement si $\nabla^Q\varphi \equiv 0$. On remarque d'abord que ceci implique que $|\varphi|$ est une constante. Alors, en tenant compte de l'identification de la proposition I.3, et par (I.14), $\nabla^Q\varphi \equiv 0$ est équivalent à

$$\nabla_i\varphi^* = -\Big(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\Big)e_i\cdot\varphi^* - \sum_j Q^\varphi_{ij}\,e_j\cdot\varphi^* \tag{I.35}$$

Soit $f = p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda$, alors l'équation (I.35) peut être écrite sous la forme

$$\nabla_i \varphi^* = -\sum_j (Q^\varphi_{ij} + f\delta_{ij})\; e_j \cdot \varphi^* \tag{I.36}$$

Si l'on pose $T_{ij} = Q^\varphi_{ij} + f\delta_{ij}$, en prenant la multiplication de Clifford par le vecteur e_k sur chaque membre de l'égalité (I.36), on déduit

$$e_k \cdot \nabla_i \varphi^* = -\sum_j T_{ij}\, e_k \cdot e_j \cdot \varphi^*,$$

puis

$$(e_k \cdot \nabla_i \varphi^*, \varphi^*)_{\Sigma M} = -\sum_j T_{ij} (e_k \cdot e_j \cdot \varphi^*, \varphi^*)_{\Sigma M}\ .$$

Puisque $(e_k \cdot e_j \cdot \varphi^*, \varphi^*)_{\Sigma M} = 0$ si $j \neq k$ et puisque T_{ij} est symétrique, on a montré

$$\frac{1}{2}(e_i \cdot \nabla_k \varphi^* + e_k \cdot \nabla_i \varphi^*, \varphi^*/|\varphi^*|^2)_{\Sigma M} = T_{ik}.$$

Donc

$$T_{ik} = Q^\varphi_{ik}$$

et on conclut que $f = 0$. L'équation (I.35) devient

$$\nabla_i \varphi^* = -\sum_j Q^\varphi_{ij}\; e_j \cdot \varphi^*. \tag{I.37}$$

De telles équations de champs ont été étudiées, ainsi que leurs conditions d'intégrabilité, par T. Friedrich et E. C. Kim dans [**13**]. Elles permettent une formulation élégante de la théorie des surfaces immergées dans l'espace euclidien de dimension 3 (voir [**12**]). On appellera un EM-spineur un champ de spineur non trivial satisfaisant (I.37). S'il s'agit d'un spineur propre pour l'opérateur de Dirac, ce qui est équivalent au fait que $\operatorname{tr} Q^\varphi$ est une constante, ce spineur est appelé T-Killing spineur (voir [**14**]). En fait, un T-Killing spineur est exactement un champ de spineurs satisfaisant le cas d'égalité dans l'estimation d'Hijazi [**19**].

On a de plus (voir [**19**] ou le lemme 4.1(iii) de [**13**])

$$(\operatorname{tr} Q^\varphi)^2 = \frac{\mathrm{Scal}}{4} + |Q^\varphi|^2\ . \tag{I.38}$$

Donc (I.37) implique

$$D\varphi = F\varphi$$

où $F^2 = \frac{\mathrm{Scal}}{4} + |Q^\varphi|^2$. Bien que le cas d'égalité dans (I.1) implique que $\sqrt{\mathrm{Scal}\ + 4|Q^\varphi|^2} - |H|$ est une constante, on ne peut pas conclure qu'à la fois $\frac{\mathrm{Scal}}{4} + |Q^\varphi|^2$ et H sont constants comme dans le cas de l'estimation de X. Zhang. Néanmoins, on a le corollaire suivant :

Corollaire I.9. *Si la courbure moyenne H est constante, alors le cas d'égalité dans (I.1) a lieu si et seulement si φ est un T-Killing spineur.*

Par hypothèse, H est de signe constant et on peut déduire que λ a le même signe. On rappelle que les fonctions p et q sont définies par

$$p = -\frac{1}{nq}$$

et

$$nq^2 = \frac{|H|}{\sqrt{\mathrm{Scal} \,+ 4|Q^{\varphi}|^2} - |H|}.$$

En fait, un simple calcul donne

$$0 = f = \left(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\right) = \frac{(\mathrm{sign}(\lambda) - \mathrm{sign}(H))}{2\sqrt{n}}\sqrt{|H|(\sqrt{\mathrm{Scal} \,+ 4|Q^{\varphi}|^2} - |H|)}. \tag{I.39}$$

Donc

$$\mathrm{sign}(\lambda) = \mathrm{sign}(H).$$

Remarque I.10. Le cas d'égalité dans (I.26) est inclus dans celui de (I.1) : si on suppose que φ est un spineur de Killing, alors nécessairement $Q^{\varphi}_{ij} = \frac{\lambda_1}{n}\delta_{ij}$ et ainsi $(\mathrm{tr}\, Q^{\varphi})^2 = \lambda_1^2 = \frac{1}{4}\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}$. L'équation (I.38) implique donc

$$4|Q^{\varphi}|^2 = \frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal} \,-\, \mathrm{Scal}$$

et on a

$$\lambda^2 = \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} - |H|\right)^2.$$

Remarque I.11. La remarque précédente montre que le théorème I.1 améliore le théorème I.8. En particulier, il n'impose pas à la courbure scalaire Scal d'être positive, et le cas d'égalité n'implique pas que H doit être constante.

5. Preuve du théorème II.2

On considère maintenant un changement conforme de la métrique $\overline{g} = e^{2u}\widetilde{g}$, avec u une fonction différentiable à valeurs réelles définie sur N. Pour simplifier les notations, posons $\overline{N} = (N, \overline{g})$. L'isométrie naturelle entre SON et SO$\overline{N}$ induite par ce changement conforme de métrique se relève en une isométrie entre le Spin$(n+1)$-fibré principal Spin$N$ et Spin$\overline{N}$, et donc en une isométrie entre les deux fibrés des spineurs restreints correspondants S et $\overline{S}$. Si $\varphi \in \Gamma(S)$, on note $\overline{\varphi} \in \Gamma(\overline{S})$ son image par cette isométrie. Soit $(.,.)_{\overline{g}}$ la métrique sur $\overline{S}$ naturellement définie comme décrit dans la section 2. Alors, si φ, ψ sont deux sections de S, on a

$$(\varphi, \psi) = (\overline{\varphi}, \overline{\psi})_{\overline{g}} \quad \text{et} \quad \overline{X}\,\overline{\cdot}\,\overline{\psi} = \overline{X \cdot \psi}$$

On continuera à noter $\overline{g} = e^{2u}{}_{|M}g$ la restriction de $\overline{g}$ à M. Par covariance conforme de l'opérateur de Dirac, on a, pour $\varphi \in \Gamma(S)$, (voir [**20**])

$$\overline{D}\Big(\,e^{-\frac{(n-1)}{2}u}\,\overline{\varphi}\,\Big) = e^{-\frac{(n+1)}{2}u}\,\overline{D\varphi}, \tag{I.40}$$

où $\overline{D}$ désigne l'opérateur de Dirac par rapport à la métrique $\overline{g}$. D'autre part

$$\overline{H} = e^{-u}\Big(H + n\,du(\nu)\Big)\,. \tag{I.41}$$

Ainsi, si $\overline{D}_{\overline{H}}$ désigne l'opérateur de Dirac d'hypersurface par rapport à la métrique $\overline{g}$, les équations (I.40) et (I.41) impliquent

$$\overline{D}_{\overline{H}}\,\Big(\,e^{-\frac{(n-1)}{2}u}\,\overline{\varphi}\,\Big) = e^{-\frac{(n+1)}{2}u}\,\Big(\,\overline{D_H\varphi} - \frac{n}{2}\,du(\nu)\,\overline{\varphi}\,\Big). \tag{I.42}$$

REMARQUE I.12. On voit que si $du(\nu)_{|M} = 0$, D_H est covariant conforme. Dans ce cas, les techniques utilisées dans ([**18**]) peuvent être appliquées pour estimer les valeurs propres de D_H. En fait, un tel changement conforme peut être vu comme un changement conforme intrinsèque pour la métrique sur M, en oubliant l'espace ambiant N (voir la section 7).

Désormais, on considère uniquement des changements de métrique conformes $\overline{g} = e^{2u}\widetilde{g}$ tels que $du(\nu) = 0$ sur M. On les appellera changements de métrique conformes *réguliers* comme dans [**20**].

Pour $\varphi \in \Gamma(S)$ un spineur propre pour D_H de valeur propre λ, on pose $\overline{\psi} := e^{-\frac{n-1}{2}u}\,\overline{\varphi}$. Alors, la relation (I.42) donne

$$\overline{D}_{\overline{H}}\,\overline{\psi} = \lambda\, e^{-u}\,\overline{\psi}\,. \tag{I.43}$$

On rappelle que

$$\overline{\nabla}_i\overline{\varphi} = \overline{\nabla_i\varphi} - \frac{1}{2}\,\overline{e_i\cdot \mathrm{d}u\cdot\varphi} - \frac{1}{2}e_i(u)\,\overline{\varphi}, \tag{I.44}$$

et $\overline{e_i} = e^{-u}e_i$. Maintenant, comme dans [**18**], il est immédiat d'obtenir

$$\begin{aligned}
\overline{Q}^{\overline{\psi}}_{\overline{i}\,\overline{j}} &= \frac{1}{2}\Big(\overline{e_i}\,\overline{\cdot}\,\overline{\nu}\,\overline{\cdot}\,\overline{\nabla}_{\overline{e}_j}\,\overline{\psi}\ +\ \overline{e_j}\,\overline{\cdot}\,\overline{\nu}\,\overline{\cdot}\,\overline{\nabla}_{\overline{e}_i}\,\overline{\psi}\ ,\ \overline{\psi}/|\overline{\psi}|^2_{\overline{g}}\Big)_{\overline{g}}\\
&= \frac{1}{2}\,e^{-u}\Big(\overline{e_i}\,\overline{\cdot}\,\overline{\nu}\,\overline{\cdot}\,\overline{\nabla}_{e_j}\,\overline{\varphi}\ +\ \overline{e_j}\,\overline{\cdot}\,\overline{\nu}\,\overline{\cdot}\,\overline{\nabla}_{e_i}\,\overline{\varphi}\ ,\ \overline{\varphi}/|\overline{\varphi}|^2_{\overline{g}}\Big)_{\overline{g}}\\
&= \frac{1}{2}\,e^{-u}\Big(e_i\cdot\nu\cdot\nabla_{e_j}\varphi\ + e_j\cdot\nu\cdot\nabla_{e_i}\varphi\ ,\ \varphi/|\varphi|^2\Big)\\
&= e^{-u}Q^{\varphi}_{ij}.
\end{aligned} \tag{I.45}$$

Donc,

$$|\overline{Q}^{\overline{\psi}}|^2 = e^{-2u}|Q^{\varphi}|^2 \tag{I.46}$$

L'équation (I.22), qui est vraie aussi sur N, une fois appliquée à $\overline{\psi}$ mène à

$$\int_M |\overline{\nabla}^Q\,\overline{\psi}|^2 v_{\overline{g}} = \int_M (1+nq^2)\Big[\lambda^2 e^{-2u} - \frac{1}{4}\Big(\frac{\overline{\mathrm{Scal}} + 4|\overline{Q}^{\overline{\psi}}|^2}{(1+nq^2)} - \frac{\overline{H}^2}{nq^2}\Big)\Big]|\overline{\psi}|^2 v_{\overline{g}} \tag{I.47}$$

qui, grâce à (I.41) et (I.46) donne

$$\int_M |\overline{\nabla}^Q\,\overline{\psi}|^2 v_{\overline{g}} = \int_M (1+nq^2)\Big[\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u} + 4|Q^{\varphi}|^2}{(1+nq^2)} - \frac{H^2}{nq^2}\Big)\Big]e^{-2u}|\overline{\psi}|^2 v_{\overline{g}}. \tag{I.48}$$

En posant

$$nq^2 = \frac{|H|}{\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u} + 4|Q^{\varphi}|^2} - |H|}\ ,$$

on termine alors la preuve du théorème I.2.

6. Des cas limites plus généraux

On investit maintenant le cas d'égalité dans l'estimation (I.2). Cette égalité a lieu si et seulement si $\overline{\nabla}^Q_{\overline{i}}\,\overline{\psi} = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, ce qui peut encore s'écrire

$$0 = \overline{\nabla}_{\overline{i}}\overline{\psi} + \Big(p\,\frac{\overline{H}}{2} + qe^{-u}\lambda\Big)\overline{e}_i\,\overline{\cdot}\,\overline{\nu}\,\overline{\cdot}\,\overline{\psi} + \sum_j \overline{Q}^{\overline{\psi}}_{ij}\,\overline{e}_j\,\overline{\cdot}\,\overline{\nu}\,\overline{\cdot}\,\overline{\psi}.$$

Puisque $\overline{\psi} := e^{-\frac{n-1}{2}u}\,\overline{\varphi}$, (I.44) et (I.46) impliquent

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; e^{-\frac{n-1}{2}u}e^{-u}\Big[\overline{\nabla_i\varphi} - \frac{1}{2}\,\overline{e_i\cdot \mathrm{d}u\cdot\varphi} - \frac{n}{2}e_i(u)\,\overline{\varphi} \\ &\quad + \Big(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda\Big)\overline{e_i\cdot\nu\cdot\varphi} + \sum_j Q^{\varphi}_{ij}\;\overline{e_j\cdot\nu\cdot\varphi}\Big]. \end{aligned} \qquad \text{(I.49)}$$

En tenant compte de l'identification de la proposition I.3, et par (I.14), cette dernière assertion est équivalente à

$$\nabla_i\varphi^* = \frac{1}{2}\;e_i\cdot \mathrm{d}u\cdot\varphi^* + \frac{n}{2}\mathrm{d}u(e_i)\varphi^* - f\;e_i\cdot\varphi^* - \sum_j Q^{\varphi}_{ij}\;e_j\cdot\varphi^*. \qquad \text{(I.50)}$$

où $f := p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda$. Comme dans la section 4, on pose $T_{ij} = Q^{\varphi}_{ij} + f\delta_{ij}$. Il est alors immédiat de montrer que $T_{ij} = Q^{\varphi}_{ij}$ et donc $f = 0$.

En prenant de part et d'autre le produit scalaire avec φ^* dans (I.50), il suit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e_i(|\varphi|^2) \;&=\; (\nabla_i\varphi^*,\varphi^*)_{\Sigma M} \\ &=\; \frac{1}{2}(\;e_i\cdot \mathrm{d}u\cdot\varphi^*,\varphi^*)_{\Sigma M} + \frac{n}{2}\mathrm{d}u(e_i)|\varphi|^2 \\ &=\; \frac{(n-1)}{2}\mathrm{d}u(e_i)|\varphi|^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}|\varphi|^2}{(n-1)|\varphi|^2}. \qquad \text{(I.51)}$$

On a donc prouvé que l'égalité a lieu dans (I.2) si et seulement si le spineur propre φ satisfait

$$\nabla_i\varphi^* = \frac{1}{2}\;e_i\cdot \mathrm{d}u\cdot\varphi^* + \frac{n}{2}\,\mathrm{d}u(e_i)\,\varphi^* - \sum_j Q^{\varphi}_{ij}\;e_j\cdot\varphi^* \qquad \text{(I.52)}$$

avec u vérifiant (I.51). De telles équations de champs ont été étudiées, ainsi que leurs conditions d'intégrabilité, par T. Friedrich et E.C. Kim dans [**13**]. On appellera un spineur vérifiant l'équation (I.52) un WEM-spineur. S'il satisfait de plus les équations d'Einstein-Dirac, on l'appelle WK-spineur. L'existence d'un WEM-spineur qui est de plus un spineur propre pour l'opérateur de Dirac classique correspond exactement au cas limite dans l'inégalité d'Hijazi qui fait intervenir un changement de métrique conforme et le tenseur d'impulsion-énergie [**19**].

Dans la situation présente, les WEM-spineurs considérés sont propres pour D. En conséquence, même si dans le cas limite $\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u} + 4|Q^{\varphi}|^2} - |H|$ est une constante, on ne peut conclure que $\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u} + 4|Q^{\varphi}|^2}$ et H en sont.

Néanmoins, comme dans la section précédente, un simple calcul mène à

$$0 = f = e^u\frac{(\mathrm{sign}(\lambda) - \mathrm{sign}(H))}{2\sqrt{n}}\sqrt{|H|(\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u} + 4|Q^{\varphi}|^2} - |H|)}.$$

D'où

$$\mathrm{sign}(\lambda) = \mathrm{sign}(H).$$

On rappelle maintenant l'estimation démontrée par O. Hijazi et X. Zhang :

Théorème I.13 ([**20**]). *Soit $M^n \subset N^{n+1}$ une hypersurface compacte orientée d'une variété riemannienne spinorielle $(N, \widetilde{g})$. On suppose $n \geq 2$ et $n\,\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u} > (n-1)H^2 > 0$ pour un changement de métrique conforme régulier $\overline{g} = e^{2u}\widetilde{g}$. Alors si λ est une valeur propre de l'opérateur de Dirac d'hypersurface D_H, on a*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_M \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u}} - |H| \right)^2 . \tag{I.53}$$

Comme pour la preuve du théorème I.2, on obtient le théorème I.13 en utilisant la connexion modifiée définie en (I.27), sur la variété $(N, \overline{g} = e^{2u}\widetilde{g})$.

Comme au début de cette section, il est facile de voir que le cas d'égalité a lieu dans (I.53) si et seulement si

$$0 = e^{-\frac{n-1}{2}u} e^{-u} \Big[\overline{\nabla_i \varphi} - \frac{1}{2}\,\overline{e_i \cdot \mathrm{d}u \cdot \varphi} - \frac{n}{2} e_i(u)\,\overline{\varphi} + \Big(p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda \Big) \overline{e_i \cdot \nu \cdot \varphi} \Big]. \tag{I.54}$$

En tenant compte de l'identification de la proposition I.3, et par (I.14), cette dernière assertion est équivalente à

$$\nabla_i \varphi^* = \frac{1}{2}\, e_i \cdot \mathrm{d}u \cdot \varphi^* + \frac{n}{2} \mathrm{d}u(e_i) \varphi^* - f\; e_i \cdot \varphi^* . \tag{I.55}$$

où $f := p\,\frac{H}{2} + q\,\lambda$. Comme dans la section 4, on pose $T_{ij} = f\delta_{ij}$. Il est alors immédiat de montrer que $T_{ij} = Q_{ij}^{\varphi}$ et que les champs de spineurs satisfaisant le cas d'égalité dans le théorème I.13 sont des WEM-spineurs particuliers. Maintenant, (I.38) et (I.45), impliquent que nécessairement

$$f = \pm \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n}{n-1}\,\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u}} . \tag{I.56}$$

Ainsi, les solutions de (I.55) correspondent exactement aux sections satisfaisant le cas limite dans l'inégalité (5.1) de [**18**].

On rappelle qu'ici, les fonctions p et q sont données par

$$p = \frac{1-q}{1-nq} \tag{I.57}$$

et

$$(1-nq)^2 = \frac{(n-1)|H|}{\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u}} - |H|} . \tag{I.58}$$

Ainsi, on peut montrer que $\mathrm{sign}(\lambda) = \mathrm{sign}(H)$ en calculant explicitement $p\frac{H}{2} + q\lambda$ comme précédemment. En fait, tout comme dans la remarque I.10, une conséquence de l'équation (I.38) est que le théorème I.2 est une amélioration du théorème I.13.

7. Remarque finale

On conclut cet article en remarquant que tous les calculs effectués dans ce qui précède pourraient être menés de manière tout à fait intrinsèque, en considérant un opérateur de Dirac modifié $D_f = D - \frac{f}{2}$, et les connexions sur ΣM suivantes :

$$\nabla_i^{\lambda} = \nabla_i + \Big(p\,\frac{f}{2} + q\,\lambda \Big) e_i \cdot$$

et

$$\nabla_i^Q = \nabla_i + \Big(p\,\frac{f}{2} + q\,\lambda\Big)e_i\cdot + Q_{ij}^{\varphi}\,e_j\cdot\,,$$

avec un choix approprié des fonctions p et q (il suffit simplement de remplacer H par f dans (I.28) et (I.30)).

L'identification des fibrés des spineurs donnée dans la section 2 permet alors de mener les mêmes raisonnements que dans les sections précédentes, mais dans un cadre plus général. On a donc démontré

Proposition I.14. *Soit (M^n,g) une variété riemannienne spinorielle compacte. On suppose $n \geq 2$ et $n\,\mathrm{Scal} > (n-1)f^2 > 0$, avec $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors, si λ est une valeur propre de l'opérateur de type Dirac-Schrödinger $D_f = D - \frac{f}{2}$, on a*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\,\inf_M \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}\,\mathrm{Scal}} - |f|\right)^2 .$$

L'égalité a lieu si et seulement si M admet un spineur de Killing (auquel cas (M^n,g) est d'Einstein), f est une constante, et

$$\mathrm{sign}(\lambda) = \mathrm{sign}(f).$$

De même, on a

Proposition I.15. *Soit (M^n,g) une variété riemannienne spinorielle compacte. Soit λ une valeur propre de l'opérateur de Dirac-Schrödinger $D_f = D - \frac{f}{2}$, associée au spineur propre φ. On suppose $\mathrm{Scal} + 4|Q^{\varphi}|^2 > f^2 > 0$. Alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\,\inf_M \left(\sqrt{\mathrm{Scal} + 4|Q^{\varphi}|^2} - |f|\right)^2 .$$

où Q^{φ} est le tenseur d'énergie impulsion associé à φ.

Dans le cas d'égalité, M admet un EM-spineur, et de plus,

$$\mathrm{sign}(\lambda) = \mathrm{sign}(f).$$

En utilisant un changement conforme de la métrique g, (voir la remarque I.12), on montre aussi

Proposition I.16. *Soit (M^n,g) une variété riemannienne spinorielle compacte. Soit λ une valeur propre de l'opérateur de Dirac-Schrödinger $D_f = D - \frac{f}{2}$, associée au spineur propre φ.*
On suppose $\overline{\mathrm{Scal}}\,e^{2u} + 4|Q^{\varphi}|^2 > f^2 > 0$, où $\overline{\mathrm{Scal}}$ est la courbure scalaire de M pour la métrique conforme $\overline{g} = e^{2u}g$. Alors

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\,\inf_M \left(\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\;e^{2u} + 4|Q^{\varphi}|^2} - |f|\right)^2 .$$

Dans le cas d'égalité, M admet un WEM-spineur, et la fonction u est définie à une constante près par

$$u = \frac{\ln(|\varphi|^2)}{(n-1)}.$$

De plus,

$$\mathrm{sign}(\lambda) = \mathrm{sign}(f).$$

CHAPITRE II

Estimations de valeurs propres pour l'opérateur de Dirac des sous-variétés

Ce chapitre est la traduction d'un article publié en anglais dans la revue "International Journal of Mathematics".

Estimations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac des sous-variétés, [**16**]

Résumé. On donne des minorations pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac des sous-variétés en fonction de termes de courbure intrinsèques et extrinsèques. On montre aussi que les cas limites caractérisent l'existence de champs de spineurs spéciaux généralisant la notion de spineur de Killing. On conclut en traduisant ces résultats dans le cadre plus général des opérateurs de Dirac tordus.

1. Introduction

Il est bien connu que les cas limites dans les estimations classiques pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac fondamental sur une variété compacte sans bord donne lieu à des géométries particulières ([**10**],[**18**]). En effet, ces cas limites sont caractérisés par l'existence de champs de spineurs spéciaux, tels que les spineurs de Killing dont l'existence impose des conditions très restrictives sur l'holonomie ([**4**]). Dans le cadre des hypersurfaces bordant un domaine, l'opérateur de Dirac d'hypersurface a été introduit par E. Witten pour prouver le théorème de la masse positive [**40**]. Les outils spinoriels développés pour étendre les estimations classiques aux cas des hypersurfaces sont devenus très efficaces pour résoudre des problèmes sur les variétés à bord en géométrie extrinsèque (voir par exemple [**23**],[**22**]). Dans cette approche, l'opérateur de Dirac d'hypersurface apparaît naturellement comme un terme de bord. Dans [**29**], cet opérateur est interprété de manière intrinsèque, comme un opérateur de type Dirac-Schrödinger, dont le potentiel est donné par la courbure moyenne.

Dans la même optique que [**41**] et [**42**], le spectre de l'opérateur de Dirac des sous-variétés a été étudié dans [**21**], où certaines estimations sont obtenues dans le cas des codimensions impaires. Dans cet article, on donne de nouvelles minorations pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac des sous-variétés (théorèmes II.6 et II.7) et on investit leurs cas limites.

On commence par restreindre le fibré des spineurs d'une variété riemannienne spinorielle à une sous-variété spinorielle munie de la métrique induite. On relie alors ce fibré au fibré des spineurs tordu de la sous-variété. Pour pouvoir étudier plus en détail les cas limites des estimations, on adapte l'identification algébrique des espaces des spineurs et des multiplications de Clifford donnée [**6**].

On définit ensuite des opérateurs de Dirac naturels et on les relie avec l'aide de la formule de Gauß spinorielle. L'opérateur de Dirac des sous-variétés D_H apparaît alors comme la généralisation naturelle de l'opérateur de Dirac des hypersurfaces (voir par exemple [**41**],[**29**]). On obtient alors des minorations pour les valeurs propres de D_H en fonction de la norme du champ de vecteur de courbure moyenne, du tenseur d'énergie impulsion associé à un spineur propre, et d'un changement de métrique conforme adapté.

Les minorants font aussi intervenir la courbure scalaire de la sous-variété ainsi qu'un terme de courbure normal qui n'apparaît que lorsque la codimension de la sous-variété est strictement plus grande que 1.

Comme conséquences des définitions, les estimations établies sont vraies *en toute codimension* (à comparer avec [**21**]).

Les identifications des fibrés des spineurs et des multiplications de Clifford permettent de caractériser les cas limites en termes de sections spéciales du fibré des spineurs tordu. Ces sections particulières généralisent la notion de spineur de Killing sur le fibré des spineurs de la sous-variété tordu par le fibré des spineurs normal.

Le point crucial de cet article est que de telles estimations (voir aussi [**41**],[**42**],[**21**]) peuvent toujours être vues de manière intrinsèque, en considérant un fibré vectoriel auxiliaire sur une variété plutôt que le fibré normal d'une sous-variété (voir les théorèmes II.10, II.11, II.12 et II.13).

Les auteurs aimeraient remercier Oussama Hijazi pour son soutien pendant la préparation de cet article.

2. Opérateurs de Dirac sur les sous-variétés

2.1. Préliminaires algébriques. Dans cette section, on adapte le matériel algébrique développé par C. Bär dans [**6**]. Les faits basiques concernant les représentations spinorielles peuvent être trouvés dans les livres classiques (voir [**11**],[**26**],[**7**] or [**9**]).

Soient m et n deux entiers. On commence par construire une représentation complexe irréductible de l'algèbre de Clifford complexe $\mathbb{C}l_{m+n}$ à partir de représentations irréductibles ρ_n et ρ_m de $\mathbb{C}l_n$ et $\mathbb{C}l_m$ respectivement. Soit Σ_p l'espace des spineurs complexes pour la représentation ρ_p. On rappelle que si p est pair, ρ_p est unique à un isomorphisme près, et que si p est impair, il existe deux représentations irréductibles, inéquivalentes de $\mathbb{C}l_p$; dans ce cas, (ρ_p^j, Σ_p^j), $j = 0, 1$, désigne la représentation qui envoie la forme volume complexe sur $(-1)^j \operatorname{Id}_{\Sigma_p^j}$. On a donc à considérer quatre cas en fonction de la parité de m et n.

Premier cas : On suppose que n et m sont pairs. On définit

$$\begin{aligned}\gamma\ : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n &\longrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_m \otimes \Sigma_n)\\ (v, w) &\longmapsto \rho_m(v) \otimes (\operatorname{Id}_{\Sigma_n^+} - \operatorname{Id}_{\Sigma_n^-}) + \operatorname{Id}_{\Sigma_m} \otimes \rho_n(w),\end{aligned}$$

où $\Sigma_n^{\pm}$ est l'espace propre pour la valeur propre ± 1 pour l'action de la forme volume complexe ω_n de $\mathbb{C}l_n$. On rappelle que $\omega_n = i^{[\frac{n+1}{2}]} e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne une base orthonormée, orientée positivement de $\mathbb{R}^n$ et où '$\cdot$' désigne la multiplication de Clifford dans $\mathbb{C}l_n$. Alors, pour $\sigma \in \Sigma_m$, $\theta \in \Sigma_n$, pour tous vecteurs $v \in \mathbb{R}^m$ et $w \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}\gamma(v + w)(\sigma \otimes \theta) &= \rho_m(v)\sigma \otimes (\theta^+ - \theta^-) + \sigma \otimes \rho_n(w)\theta\\ \gamma(v + w)^2(\sigma \otimes \theta) &= \rho_m(v)^2\sigma \otimes (\theta^+ + \theta^-) + \rho_m(v)\sigma \otimes (\rho_n(w)\theta^- - \rho_n(w)\theta^+)\\ &\quad + \rho_m(v)\sigma \otimes (\rho_n(w)\theta^+ - \rho_n(w)\theta^-) + \sigma \otimes \rho_n(w)^2\theta\\ &= -(|v|^2 + |w|^2)\sigma \otimes \theta.\end{aligned}$$

Donc, puisque $\gamma(v + w)^2 = -|v + w|^2 \operatorname{Id}$, l'application γ induit une représentation complexe non triviale de $\mathbb{C}l_{m+n}$ de dimension $2^{\frac{m+n}{2}}$ et ainsi γ est équivalente à ρ_{m+n}.

Étant donnée les inclusions de $\mathbb{C}l_m$ et $\mathbb{C}l_n$ dans $\mathbb{C}l_{m+n}$ correspondant aux inclusions

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n & \text{et} \qquad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n\\ v &\longmapsto (v, 0) & w &\longmapsto (0, w),\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \omega_{m+n} &= i^{[\frac{m+n+1}{2}]} e_1 \cdot \ldots \cdot e_{m+n} \\ &= i^{[\frac{m+1}{2}]} i^{[\frac{n+1}{2}]} e_1 \cdot \ldots \cdot e_m \cdot e_{m+1} \cdot \ldots \cdot e_{m+n} \\ &= \omega_m \cdot \omega_n \,. \end{aligned} \tag{II.1}$$

D'autre part, si $\sigma \in \Sigma_m$ et $\theta \in \Sigma_n$, alors pour tout $v \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \gamma(v \cdot \omega_n)(\sigma \otimes \theta) &= \gamma(v)\gamma(\omega_n)(\sigma \otimes \theta) \\ &= \gamma(v)(\sigma \otimes \gamma(\omega_n)\theta) \\ &= \gamma(v)(\sigma \otimes (\theta^+ - \theta^-)) \\ &= \rho_m(v)\sigma \otimes \theta \,. \end{aligned} \tag{II.2}$$

D'où, puisque m est pair,

$$\begin{aligned} \gamma(\omega_{m+n})(\sigma \otimes \theta) &= \rho_m(\omega_m)\sigma \otimes (\theta^+ - \theta^-) \\ &= \rho_m(\omega_m)\sigma \otimes \rho_n(\omega_n)\theta \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \Sigma^+_{m+n} &= \Sigma^+_m \otimes \Sigma^+_n \oplus \Sigma^-_m \otimes \Sigma^-_n \\ \Sigma^-_{m+n} &= \Sigma^+_m \otimes \Sigma^-_n \oplus \Sigma^-_m \otimes \Sigma^+_n \,. \end{aligned}$$

On peut alors définir

$$\Sigma := \Sigma_m \otimes \Sigma_n = \Sigma^+_{m+n} \oplus \Sigma^-_{m+n}.$$

Deuxième cas : On suppose que m est impair et n est pair. Pour $j = 0, 1$, on pose

$$\begin{aligned} \gamma^j \ : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma^j_m \otimes \Sigma_n) \\ (v, w) &\longmapsto \rho^j_m(v) \otimes (\mathrm{Id}_{\Sigma^+_n} - \mathrm{Id}_{\Sigma^-_n}) + \mathrm{Id}_{\Sigma^j_m} \otimes \rho_n(w), \end{aligned}$$

Comme plus haut, pour $\sigma \in \Sigma_m$ et $\theta \in \Sigma_n$, et pour tous vecteurs $v \in \mathbb{R}^m$ et $w \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \gamma^j(v + w)(\sigma \otimes \theta) &= \rho^j_m(v)\sigma \otimes (\theta^+ - \theta^-) + \sigma \otimes \rho_n(w)\theta \\ \gamma^j(v + w)^2(\sigma \otimes \theta) &= \rho^j_m(v)^2\sigma \otimes (\theta^+ + \theta^-) + \rho^j_m(v)\sigma \otimes (\rho_n(w)\theta^- - \rho_n(w)\theta^+) \\ &\quad + \rho^j_m(v)\sigma \otimes (\rho_n(w)\theta^+ - \rho_n(w)\theta^-) + \sigma \otimes \rho_n(w)^2\theta \\ &= -(|v|^2 + |w|^2)\sigma \otimes \theta \,. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application γ^j induit une représentation complexe non triviale de $\mathbb{C}l_{m+n}$ de dimension $2^{[\frac{m+n}{2}]}$. Puisque $\omega_{m+n} = \omega_m \cdot \omega_n$ comme dans (II.1), on a

$$\gamma^j(\omega_{m+n})(\sigma \otimes \theta) = \rho^j_m(\omega_m)\sigma \otimes \theta = (-1)^j \,\mathrm{Id},$$

et donc les représentations γ^j et ρ^j_{m+n} sont équivalentes. On remarque que

$$\gamma^j(v \cdot \omega_n) = \rho^j_m(v) \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n} \,, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \,. \tag{II.3}$$

Troisième cas : On suppose que m est pair et n est impair. Pour $j = 0, 1$, on pose

$$\begin{aligned}\gamma^j \ : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_m \otimes \Sigma_n^j)\\ (v,0) &\longmapsto i\begin{pmatrix} 0 & -\rho_m(v) \\ \rho_m(v) & 0\end{pmatrix} \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n^j}\\ (0,w) &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\Sigma_m^+} & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_{\Sigma_m^-}\end{pmatrix} \otimes \rho_n^j(w),\end{aligned}$$

où les matrices sont écrites selon la décomposition $\Sigma_m = \Sigma_m^+ \oplus \Sigma_m^-$. Une fois encore, si $\sigma \in \Sigma_m$ et $\theta \in \Sigma_n$, alors pour tous vecteurs $v \in \mathbb{R}^m$ et $w \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}\gamma^j(v+w)(\sigma\otimes\theta) &= i\rho_m(v)(\sigma^+ - \sigma^-)\otimes\theta + (\sigma^+ - \sigma^-)\otimes\rho_n^j(w)\theta\\ \gamma^j(v+w)^2(\sigma\otimes\theta) &= \rho_m(v)^2\sigma\otimes\theta + i\rho_m(v)\sigma\otimes\rho_n^j(w)\theta\\ &\quad -i\rho_m(v)\sigma\otimes\rho_n^j(w)\theta + \sigma\otimes\rho_n^j(w)^2\theta\\ &= -(|v|^2+|w|^2)\sigma\otimes\theta\,.\end{aligned}$$

Donc γ^j est une représentation complexe irréductible de $\mathbb{C}l_{m+n}$. Comme dans le cas précédent, $\omega_{m+n} = \omega_m \cdot \omega_n$ et on voit que

$$\gamma^j(\omega_{m+n})(\sigma\otimes\theta) = \begin{pmatrix} \rho_m(\omega_m) & 0 \\ 0 & -\rho_m(\omega_m)\end{pmatrix}\sigma\otimes(-1)^j\theta = (-1)^j\sigma\otimes\theta\,.$$

On a donc montré que γ^j est équivalente à ρ^j_{m+n} et que

$$\gamma^j(v\cdot\omega_n) = (-1)^j\, i\,\rho_m(v)\otimes\mathrm{Id}_{\Sigma_n^j}\,,\quad \forall v\in\mathbb{R}^m\,. \tag{II.4}$$

Quatrième cas : On suppose que m et n sont impairs. On définit

$$\begin{aligned}\Sigma^+ &:= \Sigma_m^0\otimes\Sigma_n^0\,,\\ \Sigma^- &:= \Sigma_m^0\otimes\Sigma_n^1\,,\\ \Sigma &:= \Sigma^+\oplus\Sigma^-\,,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma \ : \mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma)\\ (v,0) &\longmapsto i\begin{pmatrix} 0 & \rho_m^0(v)\otimes\tau^{-1} \\ -\rho_m^0(v)\otimes\tau & 0\end{pmatrix}\\ (0,w) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_{\Sigma_m^0}\otimes\tau^{-1}\circ\rho_n^1(w) \\ \mathrm{Id}_{\Sigma_m^0}\otimes\tau\circ\rho_n^0(w) & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

où τ est l'isomorphisme de Σ_n^0 dans Σ_n^1 satisfaisant

$$\tau\circ\rho_n^0(w)\circ\tau^{-1} = -\rho_n^1(w)\,,\quad \forall w\in\mathbb{R}^n.$$

Maintenant, si $\sigma \in \Sigma_m$ et $\theta \in \Sigma_n$, alors pour tous vecteurs $v \in \mathbb{R}^m$ et $w \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\gamma(v+w)^2 = &\begin{pmatrix} \rho_m^0(v)^2 \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n^0} & 0 \\ 0 & \rho_m^0(v)^2 \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n^1} \end{pmatrix} \\
&+ i \begin{pmatrix} \rho_m^0(v) \otimes \rho_n^0(w) & 0 \\ 0 & \rho_m^0(v) \otimes \rho_n^1(w) \end{pmatrix} \\
&+ i \begin{pmatrix} \rho_m^0(v) \otimes \tau^{-1} \circ \rho_n^1(w) \circ \tau & 0 \\ 0 & \rho_m^0(v) \otimes \tau \circ \rho_n^0(w) \circ \tau^{-1} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\Sigma_m^0} \otimes \rho_n^0(w)^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\Sigma_m^0} \otimes \rho_n^1(w)^2 \end{pmatrix} \\
= &- (|v|^2 + |w|^2)\mathrm{Id}_\Sigma \,.
\end{aligned}$$

On peut montrer que

$$\gamma(\omega_{m+n}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\Sigma^+} & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_{\Sigma^-} \end{pmatrix}$$

car dans le cas où m et n sont impairs, on a

$$\omega_{m+n} = -i\, \omega_m \cdot \omega_n \,.$$

On conclut donc que γ est équivalente à ρ_{m+n} et que $\Sigma_{m+n}^\pm \cong \Sigma^\pm$.

De plus, on a la relation

$$\gamma(v \cdot \omega_n) = i \begin{pmatrix} \rho_m^0(v) \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n^0} & 0 \\ 0 & -\rho_m^0(v) \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n^1} \end{pmatrix}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \,. \tag{II.5}$$

2.2. Restriction des champs de spineurs à une sous-variété. Soit $(\widetilde{M}^{m+n}, g)$ une variété riemannienne spinorielle et soit M^m une sous-variété orientée immergée dans $\widetilde{M}$ munie de la structure riemannienne induite. On suppose que $(M^m, g_{|M})$ est spinorielle. Si NM désigne le fibré normal à M dans $\widetilde{M}$, lors, il existe une structure spinorielle sur NM, notée $\mathrm{Spin}N$. Soit $\mathrm{Spin}M \times_M \mathrm{Spin}N$ l'image réciproque du fibré vectoriel produit $\mathrm{Spin}M \times \mathrm{Spin}N$ sur $M \times M$ par l'application diagonale. Il existe un morphisme de fibrés principaux $\Phi : \mathrm{Spin}M \times_M \mathrm{Spin}N \to \mathrm{Spin}\widetilde{M}_{|M}$, avec

$$\Phi((s_M, s_N)(a, a')) = \Phi((s_M, s_N))(a \cdot a') \tag{II.6}$$

pour tout (s_M, s_N) dans $\mathrm{Spin}M \times_M \mathrm{Spin}N$ et pour tout (a, a') dans $\mathrm{Spin}(m) \times \mathrm{Spin}(n)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}M \times_M \mathrm{Spin}N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dd] & \mathrm{Spin}\widetilde{M}_{|M} \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& & M \\
\mathrm{SO}M \times_M \mathrm{SO}N \arrow[r] & \mathrm{SO}\widetilde{M}_{|M} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale inférieure désigne simplement la juxtaposition des bases (voir [**28**]).

Maintenant, soit $\mathbb{S} := \Sigma\widetilde{M}_{|M}$, où $\Sigma\widetilde{M}$ est le fibré des spineurs de $\widetilde{M}$ et

$$\Sigma := \begin{cases} \Sigma M \otimes \Sigma N & \text{si } n \text{ ou } m \text{ est pair,} \\ \Sigma M \otimes \Sigma N \oplus \Sigma M \otimes \Sigma N & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle qu'il existe un produit hermitien défini positif sur $\mathbb{S}$, noté $< .\,,. >$, tel que la multiplication de Clifford par un vecteur de $T\widetilde{M}_{|M}$ est antisymétrique. Dans la suite, on note $(.\,,.) = \Re e(< .\,,. >)$ sa partie réelle.

2.3. Identification du fibré des spineurs restreints. De part les considérations précédentes, il est maintenant possible d'identifier $\mathbb{S}$ avec Σ. Par exemple, si m et n sont pairs, on a l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma M \otimes \Sigma N & \longrightarrow & \mathbb{S} \\ ([s_M, \sigma], [s_N, \eta]) & \longmapsto & [\Phi(s_M, s_N), \sigma \otimes \eta] \end{array}$$

où la dernière classe d'équivalence est donnée, pour tout $(a, a') \in \mathrm{Spin}(m) \times \mathrm{Spin}(n)$, par

$$\Big(\Phi((s_M, s_N)(a, a')), \sigma \otimes \eta\Big) \sim \Big(\Phi(s_M, s_N), \gamma(a \cdot a')(\sigma \otimes \eta)\Big),$$

à l'aide de (II.6). Désormais, l'inverse de cet isomorphisme est noté par

$$\psi \in \Gamma(\mathbb{S}) \mapsto \psi^\star \in \Gamma(\Sigma). \tag{II.7}$$

Cet isomorphisme est unitaire par rapport au produit hermitien induit naturellement sur Σ. C'est pourquoi on notera ces deux produits scalaires par le même symbole $< .\,,. >$ lorsque l'on utilisera cette identification.

On pose $\omega_\perp = \omega_n$ si n est pair, et $\omega_\perp = -i\omega_n$ si n est impair. On rappelle que dans les deux cas $\omega_\perp^2 = (-1)^n$ (à comparer avec la définition de $\omega_\perp$ dans [**21**] : on remarque qu'il garde les mêmes propriétés). De (II.2), (II.3), (II.4) et (II.5), il est facile de voir que, par rapport à la représentation γ définie dans la section 2.1, la multiplication de Clifford par un champ de vecteurs X tangent à M satisfait

$$\forall \psi \in \Gamma(\mathbb{S}), \quad X \underset{M}{\cdot} \psi^\star = (X \cdot \omega_\perp \cdot \psi)^\star. \tag{II.8}$$

2.4. La formule de Gauß et l'opérateur de Dirac des sous-variétés. On fixe un point p dans M et on désigne par $(e_1, \dots, e_m, \nu_1, \dots, \nu_n)$ une base locale orthonormée orientée de $T\widetilde{M}_{|M}$ telle que $(e_1, \dots, e_m)$ (resp. $(\nu_1, \dots, \nu_n)$) soit base locale orthonormée orientée de TM (resp. NM). Si $\widetilde{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita de $(\widetilde{M}, g)$, alors pour tout $X \in \Gamma(TM)$, pour tout $Y \in \Gamma(NM)$ et pour $i = 1, \dots, m$, la formule de Gauß s'écrit

$$\widetilde{\nabla}_i(X + Y) = \nabla_i(X + Y) + h(e_i, X) - h^*(e_i, Y), \tag{II.9}$$

où $\nabla_i(X + Y) = \nabla_i^M X + \nabla_i^N Y$, et $h^*(e_i, .)$ est la transposée de la seconde forme fondamentale h vue comme application linéaire de TM dans NM. Ici, $\widetilde{\nabla}_i$ signifie $\widetilde{\nabla}_{e_i}$.

On désigne aussi par $\widetilde{\nabla}$ et ∇ les dérivées covariantes spinorielles induites sur $\Gamma(\mathbb{S})$. Ainsi, sur $\Gamma(\mathbb{S})$, $\nabla = \nabla^{\Sigma M} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \nabla^{\Sigma N}$ excepté pour n et m impairs auquel cas $\nabla = (\nabla^{\Sigma M} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \nabla^{\Sigma N}) \oplus (\nabla^{\Sigma M} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \nabla^{\Sigma N})$. Pour $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$, la dérivée covariante $\nabla\psi$ est comprise au sens de $(\nabla\psi)^\star = \nabla\psi^\star$.

Comme dans [**6**], on déduit de (II.9) la formule de Gauß spinorielle :

$$\forall\psi \in \Gamma(\mathbb{S}), \quad \widetilde{\nabla}_i\psi = \nabla_i\psi + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} e_j \cdot h_{ij} \cdot \psi. \tag{II.10}$$

On définit maintenant les opérateurs de Dirac suivants :

$$\widetilde{D} = \sum_{i=1}^{m} e_i \cdot \widetilde{\nabla}_i \ , \quad D = \sum_{i=1}^{m} e_i \cdot \nabla_i \ ,$$

et, $H = \sum_{i=1}^{m} h(e_i, e_i)$ étant le champs de vecteur courbure moyenne,

$$D_H := (-1)^n\omega_\perp \cdot \widetilde{D} = (-1)^n\omega_\perp \cdot D + \frac{1}{2}H \cdot \omega_\perp \cdot \psi \tag{II.11}$$

puisque $H \cdot \omega_\perp \cdot = (-1)^{n-1}\omega_\perp \cdot H\cdot$ et $\widetilde{D} = D - \frac{1}{2}H\cdot$ par (II.10).

Remarque II.1. On peut définir un autre opérateur de Dirac en utilisant la multiplication de Clifford intrinsèque et en tordant l'opérateur de Dirac fondamental de la suos-variété par le fibr'e des spineurs normal. Cette définition est donnée par C. Bär dans [**6**] de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} D_M^{\Sigma N} \ : \ \Gamma(\Sigma) & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma) \\ \varphi & \longmapsto & \begin{cases} \sum_i e_i \underset{M}{\cdot} \nabla_i\varphi & \text{si } m \text{ ou } n \text{ est pair,} \\ \sum_i e_i \underset{M}{\cdot} \nabla_i\varphi \oplus -\sum_i e_i \underset{M}{\cdot} \nabla_i\varphi & \text{si } m \text{ et } n \text{ sont impairs.} \end{cases} \end{array}$$

En fait, à l'aide de (II.8) et (II.11), on peut donner une relation entre D_H et $D_M^{\Sigma N}$:

$$\begin{aligned} (D_H\psi)^\star &= \Big((-1)^n\omega_\perp \cdot D\psi + \frac{1}{2}H \cdot \omega_\perp \cdot \psi\Big)^\star \\ &= \sum_{i=1}^{m}(e_i \cdot \omega_\perp \cdot \nabla_i\psi)^\star + \frac{1}{2}(H \cdot \omega_\perp \cdot \psi)^\star \\ &= D_M^{\Sigma N}\psi^\star + \frac{1}{2}(H \cdot \omega_\perp \cdot \psi)^\star, \quad \forall\psi \in \Gamma(\mathbb{S}). \end{aligned} \tag{II.12}$$

Il est connu que D_H est formellement auto-adjoint et que $D_H^2 = \widetilde{D}^*\widetilde{D}$, où $\widetilde{D}^*$ est l'adjoint formel de $\widetilde{D}$ par rapport à $\int_M(.\,,.)v_g$ (voir [**21**]).

3. Estimations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac des sous-variétés

3.1. Estimations basiques. Tout d'abord, pour tout champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$, on définit la fonction

$$R_\psi^N := 2\sum_{i,j=1}^{m}(e_i \cdot e_j \cdot \mathrm{Id} \otimes \mathrm{R}^N_{e_i,e_j}\psi, \psi/|\psi|^2) \tag{II.13}$$

sur $M_\psi := \{x \in M \ : \ \psi(x) \neq 0\}$, où $\mathrm{R}^N_{e_i,e_j}$ désigne le tenseur de courbure normale spinorielle. On commence par donner la preuve du résultat suivant (voir [**21**]) :

THÉORÈME II.2 (Hijazi-Zhang). *Soit $M^m \subset \widetilde{M}^{m+n}$ une sous-variété spinorielle compacte d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}, g)$. On considère un champ de spineurs non trivial $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ tel que $D_H\psi = \lambda\psi$. On suppose $m \geq 2$ et*

$$m(\,\mathrm{Scal}\, + R^N_\psi) > (m-1)||H||^2 > 0$$

sur M_ψ, où Scal *est la courbure scalaire de $(M^m, g_{|M})$ et R^N_ψ est donné par (II.13). Alors on a*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_{M_\psi} \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(\,\mathrm{Scal}\, + R^N_\psi)} - ||H|| \right)^2 . \tag{II.14}$$

DÉMONSTRATION. Pour toute fonction réelle q, nulle part égale à $\frac{1}{m}$, on définit la connexion modifiée

$$\nabla^\lambda_i = \nabla_i + \frac{1-q}{2(1-mq)}\, e_i \cdot H \cdot + q\lambda e_i \cdot \omega_\perp \cdot\, .$$

En utilisant la formule de Lichnerowicz-Schrödinger (voir [**26**]) on a

$$(D^2\psi, \psi) = (\nabla^*\nabla\psi, \psi) + \frac{1}{4}(\,\mathrm{Scal}\, + R^N_\psi)|\psi|^2,$$

et on calcule facilement que

$$\int_M |\nabla^\lambda\psi|^2 v_g =$$
$$\int_M (1 + mq^2 - 2q)\Big[\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\mathrm{Scal}\, + R^N_\psi}{(1+mq^2-2q)} - \frac{(m-1)||H||^2}{(1-mq)^2}\Big)\Big]|\psi|^2 v_g \tag{II.15}$$

Alors, en supposant $m(\,\mathrm{Scal}\, + R^N_\psi) > (m-1)||H||^2 > 0$ sur M_ψ, on peut choisir q tel que

$$(1-mq)^2 = \frac{(m-1)||H||}{\sqrt{\frac{m}{m-1}(\,\mathrm{Scal}\, + R^N_\psi)} - ||H||} \qquad \text{sur } M_\psi. \tag{II.16}$$

En insérant l'équation (II.16) dans (II.15), et puisque le complément de M_ψ dans M est de mesure nulle, on conclut en remarquant que le membre de gauche de (II.15) est positif. □

Soit κ_1 la plus petite valeur propre de l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{R}^N$ défini par

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{R}^N & : \Gamma(\mathbb{S}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{S}) \\ & \varphi & \longmapsto & 2\displaystyle\sum_{i,j=1}^m e_i \cdot e_j \cdot \mathrm{Id} \otimes \mathrm{R}^N_{e_i,e_j}\varphi\, . \end{array} \tag{II.17}$$

L'hypothèse $m(\,\mathrm{Scal}\, + R^N_\psi) > (m-1)||H||^2 > 0$ du théorème II.2 peut être renforcée pour donner :

COROLLAIRE II.3. *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème II.2, on suppose que $m \geq 2$ et*

$$m(\,\mathrm{Scal}\, + \kappa_1) > (m-1)||H||^2 > 0$$

sur M. Alors

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_M \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(\,\mathrm{Scal}\, + \kappa_1)} - ||H|| \right)^2 . \tag{II.18}$$

On rappelle que dans le cas des hypersurfaces, les cas limites sont caractérisés par l'existence d'un spineur de Killing réel sur M et par le fait que la courbure moyenne H est constante (voir [**41**] et [**29**]). Une section non triviale ψ de $\mathbb{S}$ satisfaisant

$$\forall X \in \Gamma(TM), \quad \nabla_X \psi^\star = -\frac{\mu}{m} X \underset{M}{\cdot} \psi^\star$$

pour une constant réelle μ donnée sera appelée un spineur de Killing (réel) tordu.

PROPOSITION II.4. *Si l'égalité a lieu dans (II.18), alors $(M^m, g_{|M})$ admet un spineur de Killing tordu et $||H||$ est une constante.*

DÉMONSTRATION. On suppose que le cas d'égalité a lieu dans (II.18), alors l'infimum dans le membre de droite doit être une constante sur M, et

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}\Big(\sqrt{\frac{m}{m-1}(\,\mathrm{Scal}\, + \kappa_1)} - ||H||\Big)^2\,, \qquad \nabla^\lambda \psi = 0, \quad \text{on } M. \tag{II.19}$$

On remarque qu'il y a aussi égalité dans (II.14), ce qui implique $R_\psi^N = \kappa_1$. Donc ψ est un spineur propre pour l'opérateur $\mathcal{R}^N$, de valeur propre κ_1. En utilisant (II.19), on peut montrer que $|\psi|$ est constant sur M (et donc, $M_\psi = M$) et on calcule

$$\begin{aligned} D\psi &= -\sum_{i=1}^m e_i \cdot \Big(\frac{1-q}{2(1-mq)}\, e_i \cdot H \cdot \psi + q\lambda e_i \cdot \omega_\perp \cdot \psi\Big) \\ &= \frac{m(1-q)}{2(1-mq)} H \cdot \psi + mq\lambda\omega_\perp \cdot \psi\,. \end{aligned}$$

Alors, par (II.11) et le fait que $H \cdot \omega_\perp \cdot = (-1)^{n-1} \omega_\perp \cdot H \cdot$,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda\omega_\perp \cdot \psi + \frac{H}{2} \cdot \psi - \frac{m(1-q)}{2(1-mq)} H \cdot \psi - mq\lambda\omega_\perp \cdot \psi \\ 0 &= (1-mq)^2 \lambda\omega_\perp \cdot \psi - (m-1)\frac{H}{2} \cdot \psi\,. \end{aligned}$$

Puisque dans le cas d'égalité, $\sqrt{\frac{m}{m-1}(\,\mathrm{Scal}\, + \kappa_1)} - ||H|| = 2|\lambda|$, on en déduit la relation :

$$\omega_\perp \cdot \psi = \mathrm{sgn}(\lambda) \frac{H}{||H||} \cdot \psi.$$

En tenant compte de l'isomorphisme " $\star$ ", on peut écrire l'équation (II.19) de manière intrinsèque sur $\Gamma(\Sigma)$:

$$\begin{aligned} \forall X \in \Gamma(TM), \quad \nabla_X \psi^\star &= -\frac{\mu}{m} X \underset{M}{\cdot} \psi^\star \\ \text{avec} \quad \mu &= \frac{\mathrm{sgn}(\lambda)}{2} \sqrt{\frac{m}{m-1}(\,\mathrm{Scal}\, + \kappa_1)}. \end{aligned}$$

On remarque que s'il existe deux fonctions à valeurs réelles f et κ sur M et une section non triviale ψ de $\mathbb{S}$ satisfaisant pour tout champ de vecteurs X sur M

$$\nabla_X \psi^\star = -\frac{f}{m} X \underset{M}{\cdot} \psi^\star \quad \text{and} \quad \mathcal{R}^N \psi = \kappa\psi\,,$$

Alors, en calculant l'action du tenseur de courbure sur $\psi^\star$, on voit que nécessairement

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ric}(X)\underset{M}{\cdot}\psi^\star - \sum_{i=1}^{m}(e_i\cdot \mathrm{Id}\otimes \mathrm{R}^N_{X,e_i})\psi^\star = -\frac{1}{m}\mathrm{d}f\underset{M}{\cdot}X\underset{M}{\cdot}\psi^\star - \mathrm{d}f(X)\psi^\star + 2\frac{m-1}{m^2}f^2X\underset{M}{\cdot}\psi^\star\ ,$$

ce qui implique

$$f^2 = \frac{m}{4(m-1)}(\,\mathrm{Scal}\,+\kappa) = \text{constant}\ .$$

De plus, toujours dans le cas d'égalité, le fait que f est une constante implique que $||H||$ est une constante. $\square$

Remarque II.5. Si le tenseur de courbure normal est identiquement nul, alors μ doit être constant et la variété M doit être d'Einstein, avec un champ de vecteurs courbure moyenne de norme constante. En fait, le cas d'égalité correspond alors à celui de l'inégalité de Friedrich. Donc μ est la première valeur propre de l'opérateur de Dirac $D_M^{\Sigma N}$.

3.2. Estimation en fonction du tenseur d'impulsion-énergie. Si $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ est un champ de spineurs, on définit le tenseur d'impulsion-énergie Q^ψ associé à ψ sur M_ψ par

$$Q^\psi_{ij} = \frac{1}{2}(e_i\cdot\omega_\perp\cdot\nabla_j\psi + e_j\cdot\omega_\perp\cdot\nabla_i\psi, \psi/|\psi|^2).$$

On remarque que

$$Q^\psi_{ij} = \frac{1}{2}(e_i\underset{M}{\cdot}\nabla_j\psi^\star + e_j\underset{M}{\cdot}\nabla_i\psi^\star, \psi^\star/|\psi^\star|^2).$$

Ainsi, Q^ψ est le tenseur d'impulsion-énergie intrinsèque associé à $\psi^\star$. On observe qu'il s'agit du tenseur d'impulsion-énergie qui apparaît dans les équations d'Einstein-Dirac (voir [**13**]). On démontre le théorème suivant (à comparer avec [**29**])

Théorème II.6. *Soit $M^m \subset \widetilde{M}^{m+n}$ une sous-variété spinorielle compacte d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}, g)$. On considère un champ de spineurs non trivial $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ tel que $D_H\psi = \lambda\psi$. On suppose que*

$$\mathrm{Scal}\,+\kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > ||H||^2 > 0$$

sur M_ψ. Alors on a

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_{M_\psi}\left(\sqrt{\mathrm{Scal}\,+\kappa_1+4|Q^\psi|^2} - ||H||\right)^2. \tag{II.20}$$

Démonstration. Pour toute fonction à valeurs réelles q ne s'annulant jamais, on considère la dérivée covariante modifiée définie sur $\Gamma(\mathbb{S})$ par

$$\nabla^Q_i = \nabla_i - \frac{1}{2mq}e_i\cdot H\cdot + (-1)^{n+1}q\lambda e_i\cdot\omega_\perp\cdot + \sum_j Q^\psi_{ij}\,e_j\cdot\omega_\perp\cdot\ .$$

Comme dans la preuve du théorème II.2, on calcule

$$\begin{aligned}
&\int_M |\nabla^Q\psi|^2 v_g = \\
&\quad \int_M (1+mq^2)\Big[\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\text{Scal } + R^N_\psi + 4|Q^\psi|^2}{(1+mq^2)} - \frac{||H||^2}{mq^2}\Big)\Big]|\psi|^2 v_g \\
&-\frac{1}{4}\int_M (1+mq^2)\Big[\frac{2}{mq(1+mq^2)}(||H||^2 - \frac{< H\cdot\psi, \omega_\perp\cdot\psi >^2}{|\psi|^4})\Big]|\psi|^2 v_g
\end{aligned} \tag{II.21}$$

Pour finir la démonstration du théorème II.6, si $\text{Scal } + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > ||H||^2 > 0$, on pose

$$q = \sqrt{\frac{||H||}{m(\sqrt{\text{Scal } + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - ||H||)}}\ ,$$

et on observe que par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$||H||^2 - \frac{< H\cdot\psi, \omega_\perp\cdot\psi >^2}{|\psi|^4} \geq 0. \tag{II.22}$$

□

On suppose maintenant que le cas d'égalité a lieu dans (II.20). Alors

$$\nabla^Q\psi = 0 \quad , \quad |\lambda| = \frac{1}{2}\ \Big(\sqrt{\text{Scal } + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - ||H||\Big) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^N\psi = \kappa_1\psi\ .$$

De plus,

$$||H||^2 - \frac{< H\cdot\psi, \omega_\perp\cdot\psi >^2}{|\psi|^4} = 0,$$

de sorte que, par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\omega_\perp\cdot\psi = fH\cdot\psi,$$

pour une certaine fonction à valeurs réelles f sur M. Comme dans la section précédente, en tenant compte de l'identification (II.7), on déduit que $f = \frac{\text{sgn}(\lambda)}{||H||}$, et que la section ψ vérifie

$$\nabla_i\psi^\star = -\sum_j Q^\psi_{ij}\, e_j \underset{M}{\cdot} \psi^\star. \tag{II.23}$$

Donc, on peut dire que la section ψ est une sorte de EM-spineur (voir [**29**]). On appellera une telle section un EM-spineur tordu. On peut donner une condition d'intégrabilité pour l'équation des EM-spineurs tordus, en calculant l'action du tenseur de courbure sur cette section :

$$(\text{tr}(Q^\psi))^2 = \frac{1}{4}(\text{ Scal } + R^N_\psi + 4|Q^\psi|^2).$$

Ceci implique, avec l'équation (II.23), que la section $\psi^\star$ est “propre” pour $D^{\Sigma N}_M$ pour la *fonction* propre associée $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\text{Scal } + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2}$. On remarque que cette fonction est constante si et seulement si $||H||$ est constante.

3.3. Estimation en fonction d'un changement conforme de la métrique. On considère un changement conforme de la métrique $\overline{g} = e^{2u}g$ pour une fonction à valeurs réelles u donnée sur $\widetilde{M}$. Soit

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &\longrightarrow \overline{\mathbb{S}} \\ \psi &\longmapsto \overline{\psi} \end{aligned} \tag{II.24}$$

l'isométrie induite entre les deux fibrés des spineurs correspondants. On rappelle que si φ,ψ sont deux sections de $\mathbb{S}$, et Z un champ de vecteurs sur $\widetilde{M}$, on a

$$(\varphi, \psi) = (\overline{\varphi}, \overline{\psi})_{\overline{g}} \quad \text{et} \quad \overline{Z} \,\overline{\cdot}\, \overline{\psi} = \overline{Z \cdot \psi},$$

où $\overline{Z} = e^{-u}Z$. On désignera aussi par $\overline{g} = (e^{2u}g)_{|M}$ la restriction de $\overline{g}$ à M.

On remarque que cet isomorphisme commute avec l'isomorphisme " $\star$ " donné en (II.7). Par la propriété de covariance conforme de l'opérateur de Dirac, pour $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$, on a,

$$\overline{D}\Big(e^{-\frac{(m-1)}{2}u}\, \overline{\psi} \Big) = e^{-\frac{(m+1)}{2}u}\, \overline{D\psi}, \tag{II.25}$$

où $\overline{D}$ désigne l'opérateur de Dirac par rapport à la métrique $\overline{g}$. D'autre part, le champ de vecteurs courbure moyenne correspondant est donné par

$$\widetilde{H} = e^{-2u}\Big(H - m \operatorname{grad}^N u\Big). \tag{II.26}$$

On suppose maintenant que $\operatorname{grad}^N u = 0$. Si $\overline{D}_H$ désigne l'opérateur de Dirac des sous-variétés par rapport à la métrique $\overline{g}$, les équations (II.25) et (II.26) impliquent que $\overline{D}_H$ est un opérateur covariant conforme. En effet, on a alors

$$\overline{D}_H \Big(e^{-\frac{(m-1)}{2}u}\, \overline{\psi} \Big) = e^{-\frac{(m+1)}{2}u} \Big(\overline{D_H\psi} \Big). \tag{II.27}$$

pour toute section ψ de $\mathbb{S}$.

Désormais, on considérera seulement des changement s de métrique conformes réguliers, c'est-à-dire, les métriques s'écrivant $\overline{g} = e^{2u}g$ avec $\operatorname{grad}^N u = 0$, sur M.

THÉORÈME II.7. *Soit $M^m \subset \widetilde{M}^{m+n}$ une sous-variété spinorielle compacte d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}, g)$. On considère un champ de spineurs non trivial $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ tel que $D_H\psi = \lambda\psi$. On suppose que pour un changement de métrique conforme régulier $\overline{g} = e^{2u}g$ sur $\widetilde{M}$, on a*

$$\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > ||H||^2 > 0$$

sur M_ψ. Alors

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_{M_\psi} \left(\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - ||H|| \right)^2. \tag{II.28}$$

DÉMONSTRATION. Pour $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ un spineur propre de D_H associé à la valeur propre λ, on pose $\overline{\varphi} := e^{-\frac{n-1}{2}u}\,\overline{\psi}$. Alors (II.27) donne $\overline{D}_H\, \overline{\varphi} = \lambda\, e^{-u}\, \overline{\varphi}$. On rappelle que

$$\overline{\nabla}_i \overline{\psi} = \overline{\nabla_i \psi} - \frac{1}{2}\, \overline{e_i \cdot \mathrm{d}u \cdot \psi} - \frac{1}{2} e_i(u)\, \overline{\psi},$$

et $\overline{e_i} = e^{-u}e_i$. Il est maintenant immédiat de montrer que $\overline{Q}^{\overline{\varphi}}_{\overline{i}\,\overline{j}} = e^{-u}Q^\psi_{ij}$. Donc,

$$|\overline{Q}^{\overline{\varphi}}|^2 = e^{-2u}|Q^\psi|^2\,. \tag{II.29}$$

L'équation (II.21), qui est aussi vérifiée sur $(\widetilde{M}, \overline{g})$, appliquée à $\overline{\varphi}$ implique

$$\int_M |\overline{\nabla}^{\overline{Q}} \overline{\varphi}|^2 v_{\overline{g}} =$$

$$\int_M (1+mq^2)\Big[(\lambda e^{-u})^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\overline{\mathrm{Scal}} + \overline{\mathrm{Scal}}^N_{\overline{\varphi}} + 4|\overline{Q}^{\overline{\varphi}}|^2}{(1+mq^2)} - \frac{||\widetilde{H}||^2_{\overline{g}}}{mq^2}\Big)\Big]|\overline{\varphi}|^2_{\overline{g}}\, v_{\overline{g}}$$

$$-\frac{1}{4}\int_M (1+mq^2)\Big[\frac{2}{mq(1+mq^2)}(||\widetilde{H}||^2_{\overline{g}} - \frac{< \widetilde{H} \mathbin{\bar\cdot} \overline{\varphi}, \overline{\omega_\perp} \mathbin{\bar\cdot} \overline{\varphi} >^2_{\overline{g}}}{|\varphi|^4_{\overline{g}}})\Big]|\overline{\varphi}|^2_{\overline{g}}\, v_{\overline{g}}\ .$$

Puisque $\widetilde{H} = e^{-u}\overline{H}$, et $\overline{\mathrm{Scal}}^N_{\overline{\varphi}} = e^{-2u}R^N_\psi$, on a

$$\int_M |\overline{\nabla}^{\overline{Q}} \overline{\varphi}|^2 v_{\overline{g}} =$$

$$\int_M (1+mq^2)e^{-2u}\Big[\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + R^N_\psi + 4|Q^\psi|^2}{(1+mq^2)} - \frac{||H||^2}{mq^2}\Big)\Big]|\overline{\varphi}|^2 v_{\overline{g}}$$

$$-\frac{1}{4}\int_M (1+mq^2)e^{-2u}\Big[\frac{2}{mq(1+mq^2)}(||H||^2 - \frac{< H\cdot\psi, \omega_\perp\cdot\psi >^2}{|\psi|^4})\Big]|\overline{\varphi}|^2 v_{\overline{g}}\ .$$

Comme dans la preuve du théorème II.6, on choisit finalement

$$q = \sqrt{\frac{||H||}{m(\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - ||H||)}}$$

et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz (II.22). □

Si l'hypothèse dans le théorème II.7 est satisfaite par une fonction propre u_1 associée à la première valeur propre μ_1 de l'opérateur de Yamabe, on a alors :

Corollaire II.8. *Sous les mêmes conditions que dans le théorème II.7, on suppose* $m \geq 3$ *et* $\mu_1 + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > ||H||^2 > 0$ *on* M_ψ*. Alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_{M_\psi}\Big(\sqrt{\mu_1 + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - ||H||\Big)^2 .$$

Corollaire II.9. *Sous les mêmes conditions que dans le théorème II.7, si* M *est une surface compacte de genre zéro et si* $\frac{8\pi}{\mathrm{Area}(M)} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > ||H||^2 > 0$ *on* M_ψ*, alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_{M_\psi}\left(\sqrt{\frac{8\pi}{\mathrm{Area}(M)} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - ||H||\right)^2 .$$

On suppose maintenant que le cas d'égalité a lieu dans (II.28). Alors

$$\overline{\nabla}^{\overline{Q}}\overline{\varphi} = 0\ , \qquad \omega_\perp\cdot\psi = \varepsilon\frac{H}{||H||}\cdot\psi \quad \text{où } \varepsilon\in\{\pm 1\}\ ,$$

$$|\lambda| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - ||H||\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^N\psi = \kappa_1\psi\ .$$

En utilisant (II.24) et (II.29), il suit que $\varepsilon = \mathrm{sgn}(\lambda)$ et

$$\nabla_i\psi^\star = \frac{1}{2}e_i \underset{M}{\cdot} \mathrm{d}u \underset{M}{\cdot} \psi^\star + \frac{m}{2}\mathrm{d}u(e_i)\psi^\star - \sum_j Q^\psi_{ij}\, e_j \underset{M}{\cdot} \psi^\star \qquad \text{(II.30)}$$

avec $\mathrm{d}u = \frac{2\mathrm{d}(\ln(|\psi|))}{m-1}$. Des champs de spineurs non triviaux satisfaisant l'équation (II.30) seront appelés naturellement WEM-spineurs tordus (à comparer avec [**29**]).

4. Remarque finale

Dans cette section, on montre que le fibré normal de la sous-variété peut être remplacé par un fibré vectoriel auxiliaire arbitraire sur la sous-variété. Ainsi, tous les précédents calculs peuvent être menés de manière intrinsèque afin d'obtenir des estimations pour un opérateur de Dirac tordu sur cette variété.

Soit (M^m, g) une variété riemannienne spinorielle compacte. Soit $N \to M$ un fibré vectoriel riemannien de rang n sur M. On suppose que N est muni d'une connexion métrique ∇^N et d'une structure spinorielle. Soit ΣM (resp. ΣN) le fibré des spineurs de M (resp. N). Soit

$$\Sigma := \Sigma M \otimes \Sigma N.$$

On rappelle que la multiplication de Clifford sur $\Gamma(\Sigma)$ par un champ de vecteurs tangents X est donnée par :

$$\forall \psi \in \Gamma(\Sigma), \quad X \cdot \psi = (\rho_M(X) \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma N})(\psi).$$

On définit la connexion produit tensoriel ∇ sur $\Gamma(\Sigma)$ par

$$\nabla = \nabla^{\Sigma M} \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma N} + \mathrm{Id}_{\Sigma M} \otimes \nabla^{\Sigma N},$$

où $\nabla^{\Sigma M}$ et $\nabla^{\Sigma N}$ sont les dérivées covariantes spinorielles induites sur $\Gamma(\Sigma M)$ et $\Gamma(\Sigma N)$ respectivement. Soit $D_M^{\Sigma N}$ l'opérateur de Dirac tordu défini par

$$D_M^{\Sigma N} = \sum_{i=1}^{m} e_i \cdot \nabla_i.$$

Pour toute fonction à valeurs réelles f sur M, on définit l'opérateur de Dirac tordu modifié par

$$D_f = D_M^{\Sigma N} - \frac{f}{2}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les dérivées covariantes modifiées suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_i^{\lambda} &= \nabla_i + \frac{(1-q)f}{2(1-mq)}\, e_i \cdot + q\lambda e_i \cdot \\
\widehat{\nabla}_i^{Q} &= \nabla_i - \frac{f}{2mq}\, e_i \cdot + (-1)^{n+1} q\lambda e_i \cdot + \sum_j Q_{ij}^{\psi}\, e_j \cdot
\end{aligned}$$

où Q^{ψ} est maintenant le tenseur d'impulsion-énergie intrinsèque associé à ψ.

On remarque que ces dérivées peuvent être obtenues à partir de celles définies dans la section 3, en supposant que

$$H \cdot \psi = f\omega_{\perp} \cdot \psi.$$

En fait, c'est de cette manière que l'on donne un sens intrinsèque aux connexions utilisées dans les sections précédentes. Les mêmes calculs que dans les preuves des théorèmes II.2, II.6 et II.7, mènent alors aux propositions suivantes :

Soit (M^m, g) une variété riemannienne spinorielle compacte avec $N \to M$ un fibré vectoriel auxiliaire orienté, riemannien et spinoriel de rang n. Soit $\psi \in \Gamma(\Sigma)$ un spineur propre pour l'opérateur de Dirac tordu modifié D_f, associé à la valeur propre λ.

PROPOSITION II.10. *On suppose $m \geq 2$ et $m(\mathrm{Scal} + \kappa_1) > (m-1)f^2 > 0$ sur M_ψ. On a alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_{M_\psi} \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(\mathrm{Scal} + \kappa_1)} - |f| \right)^2 .$$

En cas d'égalité, (M^m, g) admet un spineur de Killing tordu.

En reprenant la preuve du théorème II.7, on peut affiner cette proposition en effectuant un changement de métrique conforme sur M. Pour le cas limite, on remarque que $Q^\psi = \frac{1}{m}\mathrm{tr}(Q^\psi)g$.

PROPOSITION II.11. *On suppose $m \geq 2$ et $m(\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + \kappa_1) > (m-1)f^2 > 0$ sur M_ψ pour un changement de métrique conforme $\overline{g} = e^{2u}g$ sur M. On a alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_{M_\psi} \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + \kappa_1)} - |f| \right)^2 .$$

En cas d'égalité, $(M^m, \overline{g})$ admet un WEM-spineur tordu, avec $Q^\psi = \frac{\mu}{m} g$, où

$$\mu^2 = \frac{1}{4}\frac{m}{m-1}(\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + \kappa_1) .$$

PROPOSITION II.12. *On suppose $\mathrm{Scal} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > f^2 > 0$ sur M_ψ. On a alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_{M_\psi} \left(\sqrt{\mathrm{Scal} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - |f| \right)^2 .$$

En cas d'égalité, (M^m, g) admet un EM-spineur tordu.

PROPOSITION II.13. *On suppose $\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > f^2 > 0$ sur M_ψ pour un changement de métrique conforme $\overline{g} = e^{2u}g$ sur M. On a alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_{M_\psi} \left(\sqrt{\overline{\mathrm{Scal}}\, e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - |f| \right)^2 .$$

En cas d'égalité, (M^m, g) admet un WEM-spineur tordu.

REMARQUE II.14. En supposant que le tenseur de courbure du fibré auxiliaire est nul et f constante, alors les conditions nécessaires pour les cas d'égalité dans les théorèmes II.10, II.11, II.12 et II.13 deviennent suffisantes. De plus, si m est impair, l'opérateur de Dirac considéré doit être éventuellement défini avec la multiplication de Clifford de signe opposé, en fonction du signe de f.

REMARQUE II.15. Les auteurs aimeraient remercier Christian Bär pour la suggestion suivante : les inégalités apparaissant dans les hypothèses des théorèmes et proposition de cet article peuvent être prises au sens large. On peut voir ceci en choisissant un fonction adaptée q_ε dépendant continuement d'un paramètre $\varepsilon > 0$ à la place de la fonction q définie dans chaque preuve des théorèmes. On obtient les inégalités larges en faisant tendre ε vers 0.

CHAPITRE III

Le tenseur d'impulsion-énergie comme seconde forme fondamentale

Le tenseur d'impulsion-énergie comme seconde forme fondamentale, [**30**]

Résumé. On considère le tenseur d'impulsion-énergie associé à un champ de spineurs comme la seconde forme fondamentale d'une immersion isométrique. En particulier, on donne une généralisation du produit tordu riemannien dans le but de caractériser les variétés admettant des T-spineurs de Killing. Ces sections spéciales du fibré des spineurs apparaissent dans le cas d'égalité de l'estimation d'O. Hijazi pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac donnée en fonction du tenseur d'impulsion-énergie.

1. Introduction

Dans ce chapitre, on montre qu'il y a une certaine analogie entre le rôle du tenseur d'impulsion-énergie associé à un champ de spineurs propre pour l'opérateur de Dirac sur une variété et le rôle de la seconde forme fondamentale pour une hypersurface (voir aussi le chapitre IV ou [**12**]).

L'estimation des valeurs propres de l'opérateur de Dirac (III.3), donnée dans [**19**] par O. Hijazi, et faisant intervenir le tenseur d'impulsion-énergie associé à un champ de spineurs peut donner une information non triviale sur le spectre de l'opérateur de Dirac dans le cas où la courbure scalaire de M est négative. Si le minorant donné dépend d'un champ de spineurs propre associé à la valeur propre estimée, on peut cependant lui donner un sens géométriquement précis lorsque l'on se place dans le cadre des hypersurfaces.

On commence donc par rappeler les outils de la géométrie spinorielle des hypersurfaces, tels que l'identification de la restriction du fibré des spineurs d'un espace ambiant avec le fibré des spineurs d'une hypersurface, et la formule de Gauß spinorielle.

On démontre ensuite que la borne extrinsèque pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur une hypersurface compacte bordant un domaine, donnée dans [**22**] (Théorème 6), est reliée à l'estimation intrinsèque (III.3).

Les cas d'égalités dans ces estimations intrinsèques et extrinsèques sont caractérisés par l'existence d'un T-spineur de Killing, qui généralise la notion de spineur de Killing (voir [**14**]).

Dans [**4**], C. Bär caractérise toutes les variétés riemanniennes spinorielles simplement connexes admettant un spineur de Killing réel. Pour cela, une correspondance bijective est donnée entre les spineurs de Killing réels et les spineurs parallèles sur le cône construit au dessus de la variété considérée. La géométrie de ce cône ayant été étudiée par S. Gallot dans [**15**], il suffit alors d'appliquer la classification déja connue des variétés riemanniennes spinorielles simplement connexes irréductibles admettant des spineurs parallèles [**24**],[**39**].

Dans le but de généraliser cet argument aux variétés riemanniennes spinorielles admettant un T-spineur de Killing, on construit une généralisation du produit tordu sur une variété riemannienne, en déformant la métrique initiale dans la direction du tenseur d'impulsion-énergie associé à un T-spineur de Killing.

2. Le principe de restriction et les T-spineurs de Killing

2.1. Restriction des champs de spineurs à une hypersurface. Soit (N^{n+1}, g) une variété riemannienne spinorielle orientée de dimension $n+1$, munie d'une structure spinorielle fixée. On désigne par ΣN le fibré des spineurs associé à cette structure spinorielle. Si M^n est une hypersurface orientée immergée isométriquement dans N, on désigne par ν le champ de vecteur normal unitaire global, définissant l'orientation de M. Alors M est munie d'une structure spinorielle, induite canoniquement par celle de N. On note ΣM le fibré des spineurs correspondant. On rappelle que le fibré des spineurs ΣN se décompose en

$$\Sigma N = \Sigma^+ N \oplus \Sigma^- N$$

où $\Sigma^\pm N$ est l'espace propre pour la valeur propre ± 1 sous l'action, par multiplication de Clifford, de la forme volume complexe $\omega_{n+1} = i^{[\frac{n+1}{2}]}\omega$. La proposition suivante est essentielle pour la suite (voir par exemple [**5**], [**9**], [**29**], [**38**]) :

Proposition III.1. *Il existe une identification de $\Sigma N_{|M}$ (resp. $\Sigma^+ N_{|M}$) si n est pair (resp. impair) avec ΣM, qui après restriction à M, envoit tout champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\Sigma N)$ sur le champ de spineurs noté $\psi^* \in \Gamma(\Sigma M)$. De plus, si "$\underset{N}{\cdot}$" (resp. "$\cdot$") désigne la multiplication de Clifford sur ΣN (resp. ΣM), on a alors*

$$(X \underset{N}{\cdot} \nu \underset{N}{\cdot} \psi)^* = X \cdot \psi^* \, , \tag{III.1}$$

pour tout champ de vecteur X tangent à M.

Une autre formule importante est la formule de Gauß spinorielle : si ∇^N et ∇ sont les dérivées covariantes respectives de $\Gamma(\Sigma N)$ et $\Gamma(\Sigma M)$, alors, pour tous $X \in TM$ et $\psi \in \Gamma(\Sigma N)$

$$(\nabla^N_X \psi)^* = \nabla_X \psi^* + \frac{1}{2} h(X) \cdot \psi^*, \tag{III.2}$$

où h est la seconde forme fondamentale de l'immersion $M \hookrightarrow N$ vue comme un endomorphisme symétrique du fibré tangent de M.

On rappelle que le fibré des spineurs ambiant ΣN peut être muni d'un produit scalaire hermitien $(\ ,\ )_N$ pour lequel la multiplication de Clifford par un vecteur tangent à N est antisymétrique. Ce produit en induit un autre sur ΣM, noté $(\ ,\ )$ faisant de l'identification de la proposition III.1 une isométrie. Aussi, la relation (III.1) montre que la multiplication de Clifford par un vecteur tangent à M est antisymétrique par rapport à $(\ ,\ )$.

2.2. Sur l'inégalité d'Hijazi en fonction du tenseur d'impulsion-énergie. On examine maintenant le rôle du tenseur d'impulsion-énergie associé à une section spéciale du fibré des spineurs lorsqu'il apparaît dans une borne inférieure pour le spectre de l'opérateur de Dirac. On rappelle l'estimation suivante

Théorème III.2 (Hijazi, [**19**]). *Sur une variété compacte spinorielle (M^n, g), toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac associée à un spineur propre ψ, satisfait*

$$\lambda^2 \geq \inf_M \left(\frac{1}{4}\operatorname{Scal} + |Q^\psi|^2\right), \tag{III.3}$$

où Scal *est la courbure scalaire de* (M^n, g)*, et* Q^ψ *le champ d'endomorphismes symétriques défini sur le complément de l'ensemble des zéros de* ψ *par*

$$Q^\psi(X,Y) = \frac{1}{2}\Re(X\cdot\nabla_Y\psi + Y\cdot\nabla_X\psi, \frac{\psi}{|\psi|^2})\ .$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on vérifie simplement que ce minorant améliore celui de Th. Friedrich [**10**]

$$\frac{n}{4(n-1)}\inf_M \mathrm{Scal}$$

et en particulier, il peut donner une information non triviale dans le cas où $\inf_M$ Scal est négatif alors que l'estimation de Friedrich n'est utile que si la courbure scalaire Scal est une fonction strictement positive.

En cas d'égalité dans (III.3), ψ a sa norme constante,

$$\mathrm{tr}(Q^\psi)^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{Scal}\, + |Q^\psi|^2 = \text{constant} \tag{III.4}$$

et

$$\mathrm{div}(Q^\psi) = 0\ . \tag{III.5}$$

En interprétant le tenseur d'impulsion-énergie associé à un champ de spineurs comme la seconde forme fondamentale d'une immersion isométrique (voir aussi [**14**]) mène à la proposition et aux remarques suivantes :

Proposition III.3. *Soit* $M^n \hookrightarrow (N^{n+1}, g)$ *une hypersurface compacte orientée immergée isométriquement dans une variété riemannienne spinorielle orientée* (N^{n+1}, g)*, de courbure moyenne constante* H *et de seconde forme fondamentale* h*. On suppose que* (N^{n+1}, g) *admet un champ de spineurs parallèle, alors* M *satisfait le cas d'égalité dans (III.3).*

De plus le tenseur d'impulsion-énergie associé au champ de spineurs ψ *dans le théorème III.2 satisfait*

$$2Q^\psi = h$$

Démonstration. Soit Φ un champ de spineurs parallèle sur N. Alors la proposition III.1 et la formule de Gauß (III.2) impliquent

$$\nabla_X\psi + \frac{1}{2}h(X)\cdot\psi = 0\ , \tag{III.6}$$

avec $\psi := \Phi^*$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base locale orthonormée orientée positivement de $\Gamma(TM)$. Alors pour $j = 1, \dots, n$ on a

$$\nabla_{e_j}\psi = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}h_{jk}e_k\cdot\psi\ .$$

En faisant agir e_i par multiplication de Clifford et en prenant le produit scalaire avec ψ des deux côtés de l'égalité précédente, on a

$$\Re(e_i\cdot\nabla_{e_j}\psi, \psi) = -\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}h_{jk}\Re(e_i\cdot e_k\cdot\psi, \psi)\ .$$

Puisque $\Re(e_i\cdot e_k\cdot\psi,\psi) = -\delta_{ik}|\psi|^2$, il suit que, par symétrie de h

$$\Re(e_i\cdot\nabla_{e_j}\varphi + e_j\cdot\nabla_{e_i}\psi, \psi) = h_{ij}|\psi|^2\ .$$

Ainsi, $2Q^\psi = h$. De plus, la variété N doit être Ricci plate, et l'équation de Gauß donne

$$\mathrm{tr}(2Q^\psi)^2 = n^2H^2 = \text{ Scal } + |2Q^\psi|^2 = \text{constante} .$$

En tracant l'équation (III.6), on termine la démonstration. □

Remarque III.4. Puisque l'équation de Gauß pour les hypersurfaces implique

$$\frac{n^2}{4}H^2 = \frac{1}{4}\,\text{Scal } + |Q^\psi|^2 = \text{constante} ,$$

on remarque que l'on est exactement dans le cas d'égalité de l'estimation extrinsèque donnée dans [**22**] (Théorème 6), comme attendu.

Remarque III.5. Réciproquement, on ne peut conclure que si (M, g), $\dim M \geq 3$, satisfait le cas d'égalité dans (III.3), il existe une immersion isométrique de M comme une hypersurface de courbure moyenne constante dans une variété riemannienne spinorielle ayant un champ de spineurs parallèle. Cependant, ceci est vrai si $\dim M = 2$ (voir [**12**]).

2.3. Sur les T-spineurs de Killing. On donne mainteant les propriétés de base des T-spineurs de Killing, qui satisfont le cas d'égalité dans (III.3). Ce sont des généralisations des spineurs de Killing, et ont été étudiés par Th. Friedrich et E.C. Kim dans [**14**].

Soit (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle de dimension n. Un T-spineur de Killing $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ est un champ de spineurs qui satisfait

$$\nabla_X\psi = -Q^\psi(X)\cdot\psi\ , \quad \forall X \in TM$$

et

$$\mathrm{tr}(Q^\psi) = \text{ constant,}$$

où Q^ψ est le tenseur d'impulsion-énergie associé au spineur ψ, comme défini dans le théorème III.2. Il est facile de voir qu'un tel champ de spineur est propre pour l'opérateur de Dirac et puisqu'il satisfait le cas d'égalité dans (III.3), il vérifie aussi les équations (III.4) et (III.5). De plus, ψ est de norme constante.

En fait, en calculant l'action du tenseur de courbure spinorielle $\mathcal{R}$ sur le champ de spineurs ψ, on voit que nécessairement, pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X,Y)\psi &= \nabla_X\nabla_Y\psi - \nabla_Y\nabla_X\psi - \nabla_{[X,Y]}\psi\\ &= \Big(Q^\psi(Y)\cdot Q^\psi(X) - Q^\psi(X)\cdot Q^\psi(Y)\Big)\cdot\psi \\ &\quad +\Big((\nabla_Y Q^\psi)(X) - (\nabla_X Q^\psi)(Y)\Big)\cdot\psi\end{aligned} \tag{III.7}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X)\cdot\psi &= 2\sum_{i=1}^n e_i\cdot\mathcal{R}(e_i,X)\psi\\ &= 4\mathrm{tr}(Q^\psi)Q^\psi(X)\cdot\psi - 4T_\psi^2(X)\cdot\psi - 2\sum_{i=1}^n e_i\cdot(\nabla_{e_i}Q^\psi)(X)\cdot\psi\end{aligned} \tag{III.8}$$

À chaque champ de spineurs ψ ne s'annulant pas, on peut associer le champ de vecteurs réel V_ψ défini par

$$g(V_\psi, X) = i(\psi, Q^\psi(X)\cdot\psi)\ , \qquad \forall X \in \Gamma(TM)\ .$$

PROPOSITION III.6. *Soit ψ un T-spineur de Killing. Si Q^ψ est parallèle, alors le champ de vecteurs V_ψ est un champ de Killing.*

DÉMONSTRATION. Pour tous $X, Y \in TM$, on calcule

$$\begin{aligned} g(\nabla_X V_\psi, Y) &= X g(V_\psi, Y) - g(V_\psi, \nabla_X Y) \\ &= i(\nabla_X \psi, Q^\psi(Y)\cdot\psi) + i(\psi, \nabla_X(Q^\psi(Y))\cdot\psi) \\ &\quad + i(\psi, Q^\psi(Y)\cdot\nabla_X\psi) - i(\psi, Q^\psi(\nabla_X Y)\cdot\psi) \end{aligned}$$

et puisque la multiplication de Clifford par un champ de vecteurs est antisymétrique par rapport à $(.\,,.)$, on a

$$g(\nabla_X V_\psi, Y) = i(Q^\psi(Y)\cdot Q^\psi(X)\cdot\psi, \psi) - i(Q^\psi(X)\cdot Q^\psi(Y)\cdot\psi, \psi) + i(\psi, \nabla_X(Q^\psi)(Y)\cdot\psi)$$

qui est clairement antisymétrique si Q^ψ est parallèle. $\square$

3. Une généralisation du produit tordu sur une variété riemannienne

On rappelle que si $\pi : M \to N$ est une application différentiable entre deux variétés, deux champs de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$ sont dits π-reliés ($X \overset{\pi}{\sim} Y$) si $d\pi(X_p) = Y_{\pi(p)}$ en tout point p de M. Deux champs de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$ sont π-reliés si et seulement si $X(f\circ\pi) = Y(f)\circ\pi$ pour toute fonction différentiable f définie sur N. De plus, c'est un fait classique que $X_1 \overset{\pi}{\sim} X_2$ et $Y_1 \overset{\pi}{\sim} Y_2$ impliquent $[X_1, Y_1] \overset{\pi}{\sim} [X_2, Y_2]$.

Soit maintenant (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte. On désigne par ∇ la connexion de Levi-Civita sur M. Si $h \in S^2(M)$ est un 2-tenseur symétrique, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, avec $f(1) = 0$ et $I =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset \mathbb{R}$, telle que la métrique

$$g_t = g + f(t)h \tag{III.9}$$

est bien définie sur M pour tout $t \in I$. On munit $M \times I$ de la métrique

$$\mathbf{g} = \pi_M^*(g_t) \oplus \pi_I^*(d^2t)\,, \tag{III.10}$$

où π_M et π_I sont respectivement la première et la seconde projection canonique de $M \times I$ sur M et I. On note $\mathcal{M} = (M \times I, \mathbf{g})$ le produit tordu riemannien généralisé ainsi construit.

On remarque que pour $f(t) = t^2 - 1$ et $h = g$, cette construction est celle du cône usuel sur M, la métrique g_t étant définie par $g_t = t^2 g \oplus d^2t$ (voir [**15**]). Dans la suite, on appelle $\mathcal{M}$ un *cône généralisé* si par définition $f(t) = t^2 - 1$

Le relevé d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ à $\mathcal{M}$ est appelé un champ de vecteurs *horizontal*. Par définition, c'est l'unique champ de vecteurs, $\widetilde{X} \in \Gamma(T\mathcal{M})$, tel que $d\pi_M(\widetilde{X}) = X$ et $d\pi_I(\widetilde{X}) = 0$. L'ensemble des champs de vecteurs horizontaux est noté $\mathcal{H}(\mathcal{M})$. Dans la suite, ∂_t désigne le champ de vecteurs unitaire engendrant $\Gamma(TI)$, mais aussi son relevé à $\Gamma(T\mathcal{M})$. On a alors le résultat classique suivant (voir [**35**] par exemple) :

PROPOSITION III.7. *Si $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{H}(\mathcal{M})$ sont deux champs de vecteurs horizontaux, alors*

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}, \quad \textit{et} \quad [\widetilde{X}, \partial_t] = 0.$$

Si $q : I \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, alors le gradient de $\widetilde{q} = q \circ \pi_I : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ est le relevé du gradient de q.

Pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $t \in I$ on désigne par $H_t(X)$ le champ de vecteurs défini par

$$g_t(H_t(X), Y) = h(X, Y), \quad \forall Y \in \Gamma(TM).$$

Proposition III.8. *Si $\boldsymbol{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita du produit tordu riemannien généralisé $\mathcal{M}$, et si ∇^t est la connexion de Levi-Civita de (M, g_t), alors pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a les formules d'O'Neill généralisée suivantes :*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\partial_t &= 0\\
\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t = \boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{X} &= \frac{f'(t)}{2}\widetilde{H_t(X)}\\
\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} &= \widetilde{\nabla^t_X Y} - \frac{f'(t)}{2}h(X,Y)\partial_t
\end{aligned}$$

Démonstration. La première égalité est triviale. Donc, on remarque que puisque $\mathbf{g}(\widetilde{X}, \partial_t) = 0$, on a $\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{X}, \partial_t) = 0$. D'autre part, $\mathbf{g}(\partial_t, \partial_t) = 1$ implique $\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t, \partial_t) = 0$. Par la formule de Koszul, on obtient

$$\begin{aligned}
2\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= 2\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t, \widetilde{Y}) = \partial_t(\mathbf{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})) = \partial_t(g_t(X,Y))\\
&= \partial_t(g(X,Y)) + \partial_t(f(t)h(X,Y)) = f'(t)h(X,Y)\\
&= f'(t)g_t(H_t(X), Y) = f'(t)\mathbf{g}(\widetilde{H_t(X)}, \widetilde{Y}),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la deuxième égalité. Encore par la formule de Koszul,

$$\begin{aligned}
2\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \partial_t) &= -\partial_t(\mathbf{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})) = -\partial_t(g_t(X,Y))\\
&= -\partial_t(g(X,Y)) - \partial_t(f(t)h(X,Y)) = -f'(t)h(X,Y)\ ,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) &= \widetilde{X}g_t(Y,Z) + \widetilde{Y}g_t(Z,X) - \widetilde{Z}g_t(X,Y)\\
&\quad -g_t(X,[Y,Z]) + g_t(Y,[Z,X]) + g_t(Z,[X,Y])\\
&= 2g_t(\nabla^t_X Y, Z) = 2\mathbf{g}(\widetilde{\nabla^t_X Y}, \widetilde{Z})\ .
\end{aligned}$$

□

Proposition III.9. *Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, on a*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = \boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\partial_t &= 0\\
\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t = \boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{X} &= \frac{f''(t)}{2}\widetilde{H_t(X)} - \frac{(f'(t))^2}{4}H_t(\widetilde{H_t(X)})\\
\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{Y} = \boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{Y}}\partial_t &= \frac{f'(t)}{2}\nabla^t_X\widetilde{H_t(Y)} - \frac{(f'(t))^2}{4}h(X, H_t(Y))\partial_t\\
\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} &= \frac{f'(t)}{2}\widetilde{A_t(X,Y)} - \frac{f'(t)}{2}\widetilde{H_t(\nabla^t_X Y)} - \frac{f''(t)}{2}h(X,Y)\partial_t\\
\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} &= \widetilde{\nabla^t_X\nabla^t_Y Z} - \frac{f'(t)}{2}h(X, \nabla^t_Y Z)\partial_t\\
&\quad -\frac{f'(t)}{2}Xh(Y,Z)\partial_t - \frac{(f'(t))^2}{4}h(Y,Z)\widetilde{H_t(X)}
\end{aligned}$$

où $A_t(X,Y)$ est le champ de vecteurs défini sur M par

$$\begin{aligned} g_t(A_t(X,Y),Z) &= Xh(Y,Z)+Yh(Z,X)-Zh(X,Y) \\ &\quad -h(X,[Y,Z])+h(Y,[Z,X])+h(Z,[X,Y])\ . \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. La première assertion est triviale. Puisque $\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t,\partial_t)=0$, on a

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t,\partial_t)=0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t,\widetilde{Y}) &= \partial_t\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t,\widetilde{Y})-\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t,\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{Y}) \\ &= \partial_t\Big(\frac{f'(t)}{2}\mathbf{g}(\widetilde{H_t(X)},\widetilde{Y})\Big)-\frac{(f'(t))^2}{4}\mathbf{g}(\widetilde{H_t(X)},\widetilde{H_t(Y)}) \\ &= \partial_t\Big(\frac{f'(t)}{2}g_t(H_t(X),Y)\Big)-\frac{(f'(t))^2}{4}g_t(H_t(X),H_t(Y)) \\ &= \frac{f''(t)}{2}g_t(H_t(X),Y)-\frac{(f'(t))^2}{4}g_t(H_t(H_t(X)),Y) \\ &= \mathbf{g}(\frac{f''(t)}{2}\widetilde{H_t(X)}-\frac{(f'(t))^2}{4}\widetilde{H_t(H_t(X))},Y), \end{aligned}$$

ce qui prouve la deuxième égalité. D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{Y},\widetilde{Z}) &= \widetilde{X}\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{Y},\widetilde{Z})-\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{Y},\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}) \\ &= \frac{f'(t)}{2}\Big(\widetilde{X}g_t(H_t(Y),Z)-g_t(H_t(Y),\nabla^t_XZ)\Big) \\ &= \frac{f'(t)}{2}\mathbf{g}(\widetilde{\nabla^t_XH_t(Y)},\widetilde{Z})\ , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{Y},\partial_t) &= \widetilde{X}\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{Y},\partial_t)-\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{Y},\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t) \\ &= -\frac{(f'(t))^2}{4}g_t(H_t(Y),H_t(X)) \\ &= -\frac{(f'(t))^2}{4}h(H_t(X),Y)\ . \end{aligned}$$

Ainsi, la troisième assertion est vraie. Pour la dernière, on montre que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\partial_t) &= \partial_t\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\partial_t)-\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\partial_t) \\ &= -\partial_t(\frac{f'(t)}{2}h(X,Y)) \\ &= -\frac{f''(t)}{2}h(X,Y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{Z}) &= \partial_t\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{Z})-\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{Z}) \\ &= \partial_t\mathbf{g}(\widetilde{\nabla^t_XY},\widetilde{Z})-\frac{f'(t)}{2}\mathbf{g}(\widetilde{\nabla^t_XY},\widetilde{H_t(Z)}) \\ &= \frac{f'(t)}{2}\mathbf{g}(\widetilde{A_t(X,Y)},\widetilde{Z})-\frac{f'(t)}{2}\mathbf{g}(\widetilde{H_t(\nabla^t_XY)},\widetilde{Z}), \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z},\partial_t) &= \widetilde{X}\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z},\partial_t)-\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z},\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t)\\ &= -\frac{f'(t)}{2}\Big(Xh(Y,Z)+g_t(\nabla^t_YZ,H_t(X))\Big)\\ &= -\frac{f'(t)}{2}\Big(Xh(Y,Z)+h(\nabla^t_YZ,X)\Big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z},\widetilde{V}) &= \widetilde{X}\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z},\widetilde{V})-\mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z},\boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V})\\ &= \widetilde{X}g_t(\nabla^t_YZ,V)-g_t(\nabla^t_YZ,\nabla^t_XV)-\frac{(f'(t))^2}{4}h(Y,Z)h(X,V)\\ &= g_t(\nabla^t_X\nabla^t_YZ,V)-\frac{(f'(t))^2}{4}h(Y,Z)g_t(H_t(X),V)\\ &= \mathbf{g}(\widetilde{\nabla^t_X\nabla^t_YZ},\widetilde{V})-\frac{(f'(t))^2}{4}h(Y,Z)\mathbf{g}(\widetilde{H_t(X)},\widetilde{V})\end{aligned}$$

□

PROPOSITION III.10. *Si $\boldsymbol{R}$ et R^t désignent respectivement les tenseurs de courbure de Riemann de $\mathcal{M}$ et (M,g_t), on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\partial_t,\partial_t)\partial_t &= \boldsymbol{R}(\partial_t,\partial_t)\widetilde{X}=0\\ \boldsymbol{R}(\widetilde{X},\partial_t)\partial_t &= -\frac{f''(t)}{2}\widetilde{H_t(X)}+\frac{(f'(t))^2}{4}H_t(\widetilde{H_t(X)})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\widetilde{X},\partial_t)\widetilde{Y} &= \frac{f'(t)}{2}\Big(\widetilde{\nabla^t_XH_t(Y)}+\widetilde{H_t(\nabla^t_XY)}-\widetilde{A_t(X,Y)}\Big)\\ &\quad+\frac{f''(t)}{2}h(X,Y)\partial_t-\frac{(f'(t))^2}{4}h(X,H_t(Y))\partial_t\\ \boldsymbol{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\partial_t &= \frac{f'(t)}{2}\Big[\nabla^t_X\widetilde{(H_t)}(Y)-\nabla^t_Y\widetilde{(H_t)}(X)\Big]\\ \boldsymbol{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} &= R^t\widetilde{(X,Y)}Z+\frac{f'(t)}{2}\Big((\nabla_Yh)(X,Z)-(\nabla_Xh)(Y,Z)\Big)\partial_t\\ &\quad+\frac{(f'(t))^2}{4}\Big(h(X,Z)\widetilde{H_t(Y)}-h(Y,Z)\widetilde{H_t(X)}\Big)\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Immédiat d'après la proposition précédente. □

REMARQUE III.11. Soit q une fonction différentiable strictement positive sur I. On définit $f=q^2-1$ et $h=g$. Alors $g_t=q^2(t)g$ et $\mathcal{M}$ est le produit tordu usuel construit sur M. On a $f'=2qq'$ et $f''=2(qq''+(q')^2)$, et puisque

$$q^2(t)g(H_t(X),Y)=g_t(H_t(X),Y)=h(X,Y)=g(X,Y),$$

on obtient

$$H_t(X)=\frac{1}{q^2(t)}X.$$

Ainsi, il est immédiat de voir que les propositions III.8, III.9 et III.10 correspondent précisément aux formules d'O'Neill ([**35**] p. 206 et 210).

Dans la suite, on pose $f(t) = t^2 - 1$. Si $X, Y, Z, W \in \Gamma(T(M \times_f I)_{|M})$ sont des champs de vecteurs tangents à M et ∂_t le champ de vecteurs unitaire normal à M, alors, la proposition III.10 implique

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{g}(\boldsymbol{R}(X,\partial_t)\partial_t, Y) & = & h(H(X),Y) - h(X,Y) \\ \mathbf{g}(\boldsymbol{R}(X,Y)\partial_t, Z) & = & (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \\ \mathbf{g}(\boldsymbol{R}(X,Y)Z, W) & = & g(R(X,Y)Z,W) + h(X,Z)h(Y,W) - h(Y,Z)h(X,W) \end{array}$$

Comme attendu, la construction de $\mathcal{M}$ permet l'interprétation de h comme la seconde forme fondamentale de l'hypersurface $M \times \{1\} \subset \mathcal{M}$.

4. T-spineurs de Killing avec un tenseur d'impulsion-énergie parallèle

On suppose que (M^n, g) admet un T-spineur de Killing non trivial ψ dont le tenseur d'impulsion-énergie Q^ψ est parallèle. On considère le cône généralisé $\mathcal{M}$ construit sur M, avec $h = 2Q^\psi$.

En revenant sur la construction de $\mathcal{M}$, étant donnés $X, Y \in TM$, il est immédiat de voir que,

$$\nabla^t_X Y = \nabla_X Y + (t^2 - 1)B^t(X,Y)$$

où le 2-tenseur symétrique à valeurs vectorielles B^t est défini par

$$g_t(B^t(X,Y), Z) = (\nabla_X h)(Y,Z) + (\nabla_Y h)(Z,X) - (\nabla_Z h)(X,Y)\ , \quad \forall Z \in TM\ .$$

Ainsi, les propositions III.8,III.10 et la formule (III.8) mènent à

Proposition III.12. *On suppose que (M^n, g) admet un T-spineur de Killing non trivial ψ dont le tenseur d'impulsion-énergie Q^ψ est parallèle. Alors la connexion de Levi-Civita et le tenseur de courbure de Riemann du cône généralisé $\mathcal{M}$ construit sur M, avec $h = 2Q^\psi$ satisfont*

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\partial_t & = & 0 \\ \boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\partial_t = \boldsymbol{\nabla}_{\partial_t}\widetilde{X} & = & t\,\widetilde{H_t(X)} \\ \boldsymbol{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} & = & \widetilde{\nabla_X Y} - t\,h(X,Y)\partial_t \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{R}(\partial_t,\partial_t)\partial_t & = & \boldsymbol{R}(\partial_t,\partial_t)\widetilde{X} = \boldsymbol{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\partial_t = 0 \\ \boldsymbol{R}(\widetilde{X},\partial_t)\partial_t & = & -\widetilde{H_t(X)} + t^2 H_t\widetilde{(H_t(X))} \\ \boldsymbol{R}(\widetilde{X},\partial_t)\widetilde{Y} & = & h(X,Y)\partial_t - t^2 h(X, H_t(Y))\partial_t \\ \boldsymbol{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} & = & R\widetilde{(X,Y)}Z + t^2\Big(h(X,Z)\widetilde{H_t(Y)} - h(Y,Z)\widetilde{H_t(X)}\Big) \end{array}$$

De plus, le tenseur de Ricci (M^n, g), vu comme un champ d'endomorphismes symétriques, satisfait pour tout $X \in \Gamma(TM)$

$$\mathrm{Ric}(X) = \mathrm{tr}(H)H(X) - H^2(X)$$

où H désigne H_1 avec les notations expliquées précédemment.

Avec l'aide de cette proposition, on peut donner une relation explicite entre le tenseur de Ricci du cône généralisé $\mathcal{M}$ et le tenseur de Ricci de M. Pour ce faire, on doit définir une base locale orthonormée orientée canonique de $T\mathcal{M}$. À un point $t \in I$ fixé, on définit l'endomorphisme symétrique positif G_t de TM par

$$g_t(X,Y) = g(G_t(X),Y)\ , \quad \forall X,Y \in TM\ .$$

Maintenant, étant donné une base locale orthonormée orientée $(e_1,\dots,e_n)$ de TM, on obtient la base locale orthonormée orientée $(E_1,\dots,E_n,\partial_t)$ de $T\mathcal{M}$ en définissant, en chaque point $(x,t) \in \mathcal{M}$, le vecteur $E_i(x,t)$ comme le relevé du vecteur

$$e_i^t(x) := G_t^{-\frac{1}{2}}(e_i(x)) \in T_xM$$

(où pour tout endomorphisme symétrique positif B, $B^{\frac{1}{2}}$ désigne sa racine carrée positive).

Puisque $g_t = g + (t^2-1)h$, il est facile de voir que $G_t = \mathrm{Id} + (t^2-1)H$ pour tout $t \in I$. Donc, en un point fixé $t \in I$, G_t est parallèle puisque l'on suppose H parallèle.

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire III.13. *Soit $\widetilde{Ric}$ le tenseur de Ricci de $\mathcal{M}$, alors pour tous champs de vecteurs horizontaux $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathcal{H}(\mathcal{M})$, en un point fixé $(x,t) \in \mathcal{M}$, on a*

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ric}(\widetilde{X},\partial_t) &= 0\\
\widetilde{Ric}(\partial_t,\partial_t) &= t^2\sum_{i=1}^n h(e_i^t,H_t(e_i^t)) - \sum_{i=1}^n h(e_i^t,e_i^t)\\
\widetilde{Ric}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= \mathrm{tr}(H)h(X,Y) - h(H(X),Y) - t^2\sum_{i=1}^n h(e_i^t,e_i^t)h(X,Y) + t^2h(H_t(X),Y)\ .
\end{aligned}$$

Démonstration. Immédiat d'après la proposition III.12. On remarque que puisque G_t est parallèle, on a

$$g_t(R(e_i^t,X)e_i^t,Y) = g(R(e_i,X)e_i,Y)\ .$$

□

Remarque III.14. Comme dans la remarque III.11, en supposant $h = g$, alors $g_t = t^2g$ et $\mathcal{M}$ est le cône usuel sur M. On obtient

$$H_t(X) = \frac{1}{t^2}X \qquad \text{et} \qquad e_i^t = \frac{1}{t}e_i\ .$$

Puisque $2Q^\psi = h$, le champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ est en réalité un champ de spineurs de Killing de nombre de Killing $\frac{1}{2}$ et on a retrouvé le résultat de C. Bär qui énonce que $\mathcal{M}$ doit être Ricci plat ([**4**]).

5. Le cas d'un projecteur

Si M admet une distribution différentiable $\mathcal{K}$, parallèle de dimension k, on peut définir sur M un champ d'endomorphismes symétriques parallèle H satisfaisant $H^2 = H$ comme la projection orthogonale sur $\mathcal{K}^\perp$. On peut aussi considérer le cône généralisé $\mathcal{M}$

sur M construit avec H. Alors, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée orientée de TM telle que les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ engendrent $\mathcal{K}$, on obtient

$$H_t(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \in \mathcal{K} \\ \frac{1}{t^2} X & \text{si } X \in \mathcal{K}^\perp \end{cases}$$

et

$$e_i^t = \begin{cases} e_i & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \frac{1}{t} e_i & \text{si } k+1 \leq i \leq n\ . \end{cases}$$

Ainsi, le corollaire III.13 implique la proposition suivante :

Proposition III.15. *Soient (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte admettant une distribution différentiable parallèle $\mathcal{K}$ et ψ un T-spineur de Killing non trivial dont le tenseur d'impulsion-énergie Q^ψ correspond à la projection orthogonale sur $\mathcal{K}^\perp$. Alors le cône généralisé $\mathcal{M}$ est Ricci plat.*

L'argument de C. Bär dans [**4**] pourrait donc être repris dans cette situation. D'où la question suivante, toujours dans le cas où (M^n, g) est une variété riemannienne spinorielle compacte admettant une distribution différentiable parallèle :

Peut-on trouver des minorations pour la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur (M^n, g), telles que les cas limites soient caractérisés par l'existence de T-spineurs de Killing dont le tenseur d'impulsion-énergie est un projecteur ?

Une telle estimation sur une variété riemannienne spinorielle compacte admettant une 1-forme parallèle est donnée dans [**3**]. On remarque alors que le problème posé ci-dessus est un cas particulier du problème de l'étude du spectre de l'opérateur de Dirac sur une variété admettant une k-forme parallèle.

CHAPITRE IV

Le cas des petites dimensions

Ce chapitre est la traduction d'une prépublication en anglais.

Les surfaces de $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{H}^3$ via les spineurs, [**31**]

Résumé. On généralise la caractérisation spinorielle des immersions isométriques des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ donnée dans [**12**] par Th. Friedrich aux surfaces dans $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{H}^3$. Pour ce faire, les équations des restrictions des spineurs de Killing réels et imaginaires à une surface sont étudiées. Il apparaît qu'une caractérisation des immersions isométriques en terme d'une section spéciale du fibré des spineurs existe aussi pour les hypersurfaces parallèles de l'espace euclidien de dimension 4.

1. Introduction

Il est bien connu qu'une description d'une immersion conforme d'une surface arbitraire $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ par un champ de spineurs φ sur M^2 satisfaisant l'équation de Dirac non homogène

$$D\varphi = H\varphi, \tag{IV.1}$$

où H désigne la courbure moyenne de la surface, est possible. Récemment, beaucoup d'articles investissent une telle description (voir par exemple [**25**],[**37**])

En fait, il est clair que toute surface orientée immergée $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ hérite de $\mathbb{R}^3$ une solution de l'équation (IV.1), la surface M étant munie de la métrique et de la structure spinorielle induites. De plus, cette solution est de norme constante. Cette solution est obtenue par restriction à la surface d'un champ de spineurs parallèle de $\mathbb{R}^3$. Dans [**12**], Th. Friedrich clarifie la représentation des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ mentionnée plus haut d'une manière géométriquement invariante, en démontrant le théorème suivant :

Théorème IV.1 (Friedrich [**12**]). *Soit (M^2, g) une surface orientée et $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors les données suivantes sont équivalentes :*

(1) *Une immersion isométrique $(\widetilde{M}^2, g) \to \mathbb{R}^3$ du revêtement universel $\widetilde{M}^2$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ de courbure moyenne H.*

(2) *Une solution φ de l'équation de Dirac*

$$D\varphi = H\varphi\,,$$

de norme constante $|\varphi| \equiv 1$.

(3) *Une paire (φ, T) consistant en un endomorphisme symétrique T du fibré tangent TM tel que $\mathrm{tr}(T) = H$ et un champ de spineurs φ vérifiant, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, l'équation*

$$\nabla_X\varphi + T(X)\cdot\varphi = 0\,.$$

Dans cet article, on démontre les caractérisations analogues pour les surfaces dans $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{H}^3$ (théorèmes IV.9 et IV.10). Elles sont obtenues en étudiant les équations des restrictions à une surface des champs de spineurs de Killing réels et imaginaires (à comparer avec [**12**]).

2. Restriction des champs de spineurs de Killing à une surface

Soit N^3 une variété riemannienne orientée de dimension 3, munie d'une structure spinorielle fixée. On note ΣN le fibré des spineurs associé à cette structure spinorielle. Si M^2 est une surface orientée immergée isométriquement dans N^3, on note ν le champ de vecteurs unitaire normal global, qui définit son orientation. Alors M^2 est munie d'une structure spinorielle, canoniquement induite par celle de N^3. On note ΣM le fibré des spineurs correspondant.

On suppose que N^3 admet un champ de spineurs de Killing non trivial avec pour constante de Killing $\eta \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire, un champ de spineurs $\Phi \in \Gamma(\Sigma N)$ satisfaisant

$$\nabla^N_Y \Phi = \eta Y \underset{N}{\cdot} \Phi \tag{IV.2}$$

pour tout champ de vecteurs Y sur N. On rappelle que η est réel ou imaginaire pure et que Φ ne s'annule pas sur N, puisqu'on peut le voir comme une section parallèle non triviale pour une dérivée covariante modifiée (voir [**7**],[**9**]). Dans la suite, on considère les espaces modèles, munis de leurs métriques standards, $\mathbb{R}^3$ avec $\eta = 0$, $\mathbb{S}^3$ avec $\eta = 1/2$, et $\mathbb{H}^3$ avec $\eta = i/2$ qui sont caractérisés par le fait qu'ils admettent un nombre maximum de champs de spineurs de Killing linéairement indépendants de constante η.

Soit (e_1, e_2) une base locale orthonormée, positivement orientée de $\Gamma(TM)$ telle que (e_1, e_2, ν) est une base locale orthonormée, positivement orientée de $\Gamma(TN)_{|M}$. On note

$$\omega_3 = -e_1 \underset{N}{\cdot} e_2 \underset{N}{\cdot} \nu$$

la forme volume complexe, élément du fibré de Clifford complexe $\mathbb{C}lN$, et $\omega = e_1 \cdot e_2$ la forme volume réelle sur $\mathbb{C}lM$. On rappelle que ω_3 agit par multiplication de Clifford comme l'identité sur ΣN. Ainsi, en posant $\varphi := \Phi^*$, la formule (III.1) implique

$$(e_1 \underset{N}{\cdot} \Phi)^* = (-e_1 \underset{N}{\cdot} e_1 \underset{N}{\cdot} e_2 \underset{N}{\cdot} \nu \underset{N}{\cdot} \Phi)^* = e_2 \cdot \varphi = -e_1 \cdot \omega \cdot \varphi$$

$$(e_2 \underset{N}{\cdot} \Phi)^* = (-e_2 \underset{N}{\cdot} e_1 \underset{N}{\cdot} e_2 \underset{N}{\cdot} \nu \underset{N}{\cdot} \Phi)^* = -e_1 \cdot \varphi = -e_2 \cdot \omega \cdot \varphi$$

et

$$(\nu \underset{N}{\cdot} \Phi)^* = (-\nu \underset{N}{\cdot} e_1 \underset{N}{\cdot} e_2 \underset{N}{\cdot} \nu \underset{N}{\cdot} \Phi)^* = \omega \cdot \varphi \,.$$

Alors, ces dernières relations et les équations (III.2) et (IV.2) montrent que

$$\forall X \in TM\,, \qquad \nabla_X \varphi + \frac{1}{2} h(X) \cdot \varphi + \eta X \cdot \omega \cdot \varphi = 0 \tag{IV.3}$$

On rappelle que le fibré des spineurs ΣM se décompose en

$$\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$$

où $\Sigma^\pm M$ est l'espace propre pour la valeur propre ± 1 sous l'action de la forme volume complexe $\omega_2 = i\,\omega$. Sous cette décomposition, on note $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, et on définit $\overline{\varphi} := \varphi^+ - \varphi^-$. Ainsi, l'équation (IV.3) est équivalente à

$$\nabla_X \varphi + \frac{1}{2} h(X) \cdot \varphi - i\eta X \cdot \overline{\varphi} = 0\,.$$

On rappelle que le fibré des spineurs ambiant ΣN peut être muni d'un produit scalaire hermitien $(\ ,\ )_N$ pour lequel la multiplication de Clifford par un vecteur tangent à N est antisymétrique. Ce produit induit un autre produit scalaire hermitien sur ΣM, noté $(\ ,\ )$ faisant alors de l'identification de la proposition III.1 une isométrie. Maintenant, la relation (III.1) montre que la multiplication de Clifford par un vecteur tangent à M est antisymétrique par rapport à $(\ ,\ )$.

PROPOSITION IV.2. *Si $\eta \in \mathbb{R}$, alors φ est de norme constante. Si $\eta \in i\mathbb{R}^*$, alors pour tout vecteur X tangent à M,*

$$X|\varphi|^2 = 2\Re(i\eta X \cdot \overline{\varphi}, \varphi)\ .$$

DÉMONSTRATION. Puisque la multiplication de Clifford par un vecteur tangent à M est antisymétrique par rapport à $(\ ,\ )$, on a $\Re(Y \cdot \varphi, \varphi) = 0$ pour tout $Y \in TM$. En tenant compte de ce fait et en calculant

$$X|\varphi|^2 = 2\Re(\nabla_X \varphi, \varphi)$$

avec l'aide de la formule (IV.3), on termine la démonstration. □

En rappelant que l'opérateur de Dirac D est défini sur $\Gamma(\Sigma M)$ par

$$D = e_1 \cdot \nabla_{e_1} + e_2 \cdot \nabla_{e_2}\ ,$$

on calcule directement que

$$D\varphi = H\varphi + 2\eta\, \omega \cdot \varphi = H\varphi - 2i\eta\overline{\varphi}$$

où H est la courbure moyenne de l'immersion $M \hookrightarrow N$. Il est bien connu que l'opérateur de Dirac satisfait $(D\varphi)^{\pm} = D\varphi^{\mp}$ (voir [**26**],[**9**]). On remarque donc que

$$D(\varphi^{\pm}) = (H \pm 2i\eta)\varphi^{\mp}\ . \tag{IV.4}$$

Comme dans [**12**], on a la proposition suivante :

PROPOSITION IV.3. *Soit M^2 une surface minimale dans N^3. Alors la restriction d'un champ de spineurs de Killing Φ de constante de Killing η sur N^3 donne un spineur $\varphi^\star$ sur la surface M vérifiant*

$$D\varphi^\star = 2\eta\varphi^\star$$

De plus, si η est réel, $\varphi^\star$ est de norme constante.

DÉMONSTRATION. Puisque $H = 0$, on a

$$D(\varphi^{\pm}) = \pm 2i\eta\varphi^{\mp}\ .$$

Il suffit alors de définir $\varphi^\star = \varphi^+ + i\varphi^-$. □

3. Solutions de l'équation des spineurs de Killing restreints

Soit (M^2, g) une surface riemannienne orientée munie d'une structure spinorielle. On munit le fibré des spineurs ΣM d'un produit scalaire hermitien $(\ ,\ )$ pour lequel la multiplication de Clifford par un vecteur tangent à M est antisymétrique.

On étudie maintenant les propriétés d'une solution $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$ de l'équation suivante :

$$\nabla_X \varphi + T(X) \cdot \varphi - i\eta X \cdot \overline{\varphi} = 0\ , \tag{IV.5}$$

ou, de façon équivalente

$$\nabla_X \varphi + T(X) \cdot \varphi + \eta X \cdot \omega \cdot \varphi = 0\ , \tag{IV.6}$$

où T désigne un endomorphisme symétrique du fibré tangent de M, et $\eta \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

D'après la section précédente, et pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, on appelle cette équation l'*équation des spineurs de Killing restreints*. La proposition suivante montre le rôle des solutions de l' équation des spineurs de Killing restreints dans la théorie des surfaces dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{H}^3$. En fait, on voit que les conditions d'intégrabilité pour cette équation sont exactement les équations de Gauß et de Codazzi-Mainardi.

Dans la suite, (e_1, e_2) désigne une base locale orthonormée, positivement orientée de $\Gamma(TM)$.

Proposition IV.4. *On suppose que (M^2, g) admet une solution non triviale de l'équation (IV.5). On pose $S = 2T$, alors*

$$(\nabla_X S)(Y) = (\nabla_Y S)(X) \qquad \textit{(équation de Codazzi-Mainardi),}$$

et

$$R_{1212} - \det(S) = 4\eta^2 \qquad \textit{(équation de Gauß),}$$

où $R_{1212} = g(R(e_1, e_2)\, e_2, e_1)$, et R est le tenseur de Riemann de M.

Démonstration. Soit φ une solution non triviale de l'équation (IV.5). On calcule l'action du tenseur de courbure spinoriel $\mathcal{R}$ sur φ, défini pour tous $X, Y \in TM$ par

$$\mathcal{R}(X, Y)\varphi = \nabla_X \nabla_Y \varphi - \nabla_Y \nabla_X \varphi - \nabla_{[X,Y]}\varphi\ .$$

Puisque ce dernier est antisymétrique et que $\dim M = 2$, avec l'aide de la formule (IV.6), il suffit de calculer

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}\varphi &= \nabla_{e_1}(-T(e_2)\cdot\varphi - \eta e_2\cdot\omega\cdot\varphi)\\
&= \nabla_{e_1}(-T(e_2)\cdot\varphi - \eta e_1\cdot\varphi)\\
&= -\nabla_{e_1}T(e_2)\cdot\varphi - T(e_2)\cdot\nabla_{e_1}\varphi - \eta\nabla_{e_1}e_1\cdot\varphi - \eta e_1\cdot\nabla_{e_1}\varphi\\
&= -\nabla_{e_1}T(e_2)\cdot\varphi + T(e_2)\cdot T(e_1)\cdot\varphi - \eta T(e_2)\cdot e_2\cdot\varphi\\
&\quad -\eta\nabla_{e_1}e_1\cdot\varphi + \eta e_1\cdot T(e_1)\cdot\varphi - \eta^2 e_1\cdot e_2\cdot\varphi
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}\varphi &= -\nabla_{e_2}T(e_1)\cdot\varphi + T(e_1)\cdot T(e_2)\cdot\varphi + \eta T(e_1)\cdot e_1\cdot\varphi\\
&\quad +\eta\nabla_{e_2}e_2\cdot\varphi - \eta e_2\cdot T(e_2)\cdot\varphi + \eta^2 e_1\cdot e_2\cdot\varphi\ .
\end{aligned}$$

Donc, en tenant compte du fait que $[e_1, e_2] = \nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{e_2}e_1$, un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(e_1, e_2)\varphi &= \Big((\nabla_{e_2}T)(e_1) - (\nabla_{e_1}T)(e_2)\Big)\cdot\varphi\\
&\quad -\Big(T(e_1)\cdot T(e_2) - T(e_2)\cdot T(e_1)\Big)\cdot\varphi\\
&\quad -2\eta^2 e_1\cdot e_2\cdot\varphi
\end{aligned} \tag{IV.7}$$

D'autre part, il est bien connu que le tenseur de courbure spinoriel correspond au tenseur de Riemann R de M via la relation

$$\mathcal{R}(e_1, e_2)\varphi = -\frac{1}{2}R_{1212}e_1\cdot e_2\cdot\varphi\ . \tag{IV.8}$$

Maintenant, il est facile de voir que

$$T(e_1)\cdot T(e_2) - T(e_2)\cdot T(e_1) = 2\det(T)e_1\cdot e_2$$

et donc, en posant $S = 2T$ et en définissant la *fonction*

$$G := R_{1212} - \det(S) - 4\eta^2$$

et le *champ de vecteurs*

$$C := (\nabla_{e_1} S)(e_2) - (\nabla_{e_2} S)(e_1),$$

les équations (IV.7) et (IV.8) mènent à

$$C \cdot \varphi = G e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi \ .$$

On remarque que $e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi = -i\,\overline{\varphi}$, donc

$$C \cdot \varphi^{\pm} = \pm i G \varphi^{\mp} \ .$$

En appliquant deux fois cette relation, il suffit de voir que

$$||C||^2 \varphi^{\pm} = -G^2 \varphi^{\pm} \ ,$$

et donc que $C = 0$ et $G = 0$. □

Quitte à multiplier la métrique par une constante positive, on peut supposer $\eta = 0$, $1/2$, ou $i/2$. Le cas $\eta = 0$ est traité dans [**12**] et est le point de départ de la preuve du théorème IV.1. On examine les cas $\eta = 1/2$ et $\eta = i/2$ séparément. On commence par démontrer le lemme suivant :

LEMME IV.5. *Soit φ une solution non triviale de l' équation des spineurs de Killing restreints (IV.5). Alors*

– *Si $\eta = 1/2$, le champ de spineurs φ est de norme constante, et l'endomorphisme symétrique T, vue comme 2-tenseur symétrique covariant, est donné par*

$$T(X,Y) = \frac{1}{2} \Re(X \cdot \nabla_Y \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi/|\varphi|^2)$$

– *si $\eta = i/2$, le champ de spineurs φ satisfait $X|\varphi|^2 = -\Re(X \cdot \overline{\varphi}, \varphi)$ et on a*

$$T(X,Y)|\varphi|^2 = \frac{1}{2} \Re(X \cdot \nabla_Y \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi) + \frac{1}{2}\Big(|\varphi^-|^2 - |\varphi^+|^2\Big) g(X,Y)$$

DÉMONSTRATION. La première assertion de chaque cas vient de la proposition IV.2. Soit

$$T_{jk} = g(T(e_j), e_k) \ .$$

Alors, pour $j = 1, 2$,

$$\nabla_{e_j} \varphi = -\sum_{k=1}^{2} T_{jk} e_k \cdot \varphi + i\eta e_j \cdot \overline{\varphi} \ .$$

En prenant de part et d'autre la multiplication de Clifford par e_l et le produit scalaire avec φ, on obtient

$$\Re(e_l \cdot \nabla_{e_j} \varphi, \varphi) = -\sum_{k=1}^{2} T_{jk} \Re(e_l \cdot e_k \cdot \varphi, \varphi) + \Re(i\eta e_l \cdot e_j \cdot \overline{\varphi}, \varphi) \ .$$

Puisque $\Re(e_l \cdot e_k \cdot \varphi, \varphi) = -\delta_{lk}|\varphi|^2$, il suit, par symétrie de T

$$\Re(e_l \cdot \nabla_{e_j} \varphi + e_j \cdot \nabla_{e_l} \varphi, \varphi) = 2T_{lj}|\varphi|^2 - 2\Re(i\eta\overline{\varphi}, \varphi)\delta_{lj} \ .$$

Ceci complète la preuve en prenant $\eta = 1/2$ ou $\eta = i/2$. □

Maintenant, on montre que les conditions nécessaires pour un champ de spineurs $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ obtenues dans la section précédente (c'est à dire la proposition IV.2 et l'équation (IV.4)) sont suffisantes pour que ψ soit solution de l'équation des champs de spineurs de Killing restreints.

Le cas $\boldsymbol{\eta = 1/2}$: On considère un champ de spineurs non trivial ψ, de norme constante, satisfaisant $D\psi^{\pm} = (H \pm i)\psi^{\mp}$. On définit les 2-tenseurs suivants sur (M^2, g)

$$T^{\pm}(X,Y) = \Re(\nabla_X \psi^{\pm}, Y \cdot \psi^{\mp}) \; .$$

On remarque d'abord que

$$\mathrm{tr} T^{\pm} = -\Re(D\psi^{\pm}, \psi^{\mp}) = -\Re((H \pm i)\psi^{\mp}, \psi^{\mp}) = -H|\psi^{\mp}|^2 \; . \tag{IV.9}$$

On a aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T^{\pm}(e_1, e_2) &= \Re(\nabla_{e_1}\psi^{\pm}, e_2 \cdot \psi^{\mp}) = \Re(e_1 \cdot \nabla_{e_1}\psi^{\pm}, e_1 \cdot e_2 \cdot \psi^{\mp}) \\ &= \Re(D\psi^{\pm}, e_1 \cdot e_2 \cdot \psi^{\mp}) - \Re(e_2 \cdot \nabla_{e_2}\psi^{\pm}, e_1 \cdot e_2 \cdot \psi^{\mp}) \\ &= \Re((H \pm i)\psi^{\mp}, e_1 \cdot e_2 \cdot \psi^{\mp}) + \Re(\nabla_{e_2}\psi^{\pm}, e_1 \cdot \psi^{\mp}) \\ &= |\psi^{\mp}|^2 + T^{\pm}(e_2, e_1) \; . \end{aligned} \tag{IV.10}$$

Lemme IV.6. *Les 2-tenseurs $T^{\pm}$ sont liés par l'équation suivante :*

$$|\psi^+|^2 T^+ = |\psi^-|^2 T^-$$

Démonstration. La relation est triviale en tout point $p \in M$ où $|\psi^+|^2$ ou $|\psi^-|^2$ est nul. On peut donc supposer dans la suite que les deux champs de spineurs ψ^+ et ψ^- sont non nuls dans un voisinage d'un point de M.

Par rapport au produit scalaire $\Re(\,,\,)$, les champs de spineurs

$$e_1 \cdot \frac{\psi^-}{|\psi^-|} \qquad \text{et} \qquad e_2 \cdot \frac{\psi^-}{|\psi^-|}$$

forment une base orthonormée locale de $\Gamma(\Sigma^+ M)$. On peut alors écrire dans cette base

$$\begin{aligned} \nabla_X \psi^+ &= \Re(\nabla_X \psi^+, e_1 \cdot \frac{\psi^-}{|\psi^-|})\, e_1 \cdot \frac{\psi^-}{|\psi^-|} + \Re(\nabla_X \psi^+, e_2 \cdot \frac{\psi^-}{|\psi^-|})\, e_2 \cdot \frac{\psi^-}{|\psi^-|} \\ &= \frac{T^+(X)}{|\psi^-|^2} \cdot \psi^- \end{aligned}$$

où le champ de vecteurs $T^+(X)$ est défini par

$$g(T^+(X), Y) = T^+(X,Y) \, , \qquad \forall Y \in TM \; .$$

De la même façon, on peut montrer que

$$\nabla_X \psi^- = \frac{T^-(X)}{|\psi^+|^2} \cdot \psi^+ \; .$$

Puisque ψ est de norme constante, pour tout vecteur X tangent à M, on a

$$\begin{aligned} 0 &= X|\psi|^2 = X(|\psi^+|^2 + |\psi^-|^2) \\ &= 2\Re(\nabla_X \psi^+, \psi^+) + 2\Re(\nabla_X \psi^-, \psi^-) \\ &= 2\Re(W(X) \cdot \psi^-, \psi^+) \end{aligned} \tag{IV.11}$$

avec

$$W(X) = \frac{T^+(X)}{|\psi^-|^2} - \frac{T^-(X)}{|\psi^+|^2} \ .$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que les équations (IV.9) et (IV.10) impliquent que W est symétrique et de trace nulle, et que l'équation (IV.11) implique que W est de rang au plus égal à 1. On en déduit évidemment que $W = 0$. $\square$

PROPOSITION IV.7. *On suppose que (M^2, g) admet une solution non triviale ψ de l'équation $D\psi = H\psi - i\overline{\psi}$, de norme constante. Alors une telle solution satisfait l'équation des champs de spineurs de Killing restreints avec $\eta = 1/2$.*

DÉMONSTRATION. On définit $F := T^+ + T^-$. Le lemme IV.6, et en particulier le début de sa preuve, implique

$$\frac{F}{|\psi|^2} = \frac{T^+}{|\psi^-|^2} = \frac{T^-}{|\psi^+|^2} \ .$$

Donc $F/|\psi|^2$ est bien défini sur toute la surface M, et

$$\nabla_X\psi = \nabla_X\psi^+ + \nabla_X\psi^- = \frac{F(X)}{|\psi|^2} \cdot \psi \tag{IV.12}$$

où le champ de vecteurs $F(X)$ est défini par $g(F(X), Y) = F(X, Y)$, $\forall Y \in TM$. On remarque que par l'équation (IV.10), le 2-tenseur F n'est pas symétrique. On définit alors le 2-tenseur symétrique

$$T(X, Y) = -\frac{1}{2|\psi|^2}\left(F(X, Y) + F(Y, X)\right) \ .$$

On remarque que T est bien défini comme dans le lemme IV.5. Il est immédiat de montrer que

$$T(e_1, e_1) = -F(e_1, e_1)/|\psi|^2 \quad , \quad T(e_2, e_2) = -F(e_2, e_2)/|\psi|^2 \ ,$$

$$T(e_1, e_2) = -F(e_1, e_2)/|\psi|^2 + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad T(e_2, e_1) = -F(e_2, e_1)/|\psi|^2 - \frac{1}{2} \ ,$$

une fois de plus par l'équation (IV.10). En tenant compte de ces dernières relations dans l'équation (IV.12), on conclut que

$$\nabla_X\psi = -T(X) \cdot \psi - \frac{1}{2} X \cdot \omega \cdot \psi \ .$$

$\square$

Le cas $\eta = i/2$:

PROPOSITION IV.8. *On suppose que (M^2, g) admet une solution non triviale ψ, ne s'annulant jamais, de l'équation $D\psi = H\psi + \overline{\psi}$. Alors, si cette solution vérifie*

$$X|\psi|^2 = -\Re(X \cdot \overline{\psi}, \psi) \ , \qquad \forall X \in \Gamma(TM),$$

elle est solution de l'équation des champs de spineurs de Killing restreints avec $\eta = i/2$.

Démonstration. On définit les 2-tenseurs $T^{\pm}$ comme dans le cas précédent. On obtient alors

$$\mathrm{tr}T^{\pm} = -(H \mp 1)|\psi^{\mp}|^2 \ , \tag{IV.13}$$

et

$$T^{\pm}(e_1, e_2) = T^{\pm}(e_2, e_1) \ . \tag{IV.14}$$

On remarque que

$$-\Re(X \cdot \overline{\psi}, \psi) = -\Re(X \cdot \psi^+, \psi^-) + \Re(X \cdot \psi^-, \psi^+) = 2\Re(X \cdot \psi^-, \psi^+) \ .$$

Donc, en reprenant la preuve du lemme IV.6, on obtient

$$\Re(X \cdot \psi^-, \psi^+) = \Re(W(X) \cdot \psi^-, \psi^+) \tag{IV.15}$$

avec

$$W(X) = \frac{T^+(X)}{|\psi^-|^2} - \frac{T^-(X)}{|\psi^+|^2} \ .$$

Comme dans le cas précédent, les équations (IV.13), (IV.14) et (IV.15) impliquent que $W - \mathrm{Id}_{TM}$ est symétrique, de trace nulle, et de rang pas plus grand que 1. Donc $W = \mathrm{Id}_{TM}$ et on a la relation

$$|\psi^+|^2 T^+ - |\psi^-|^2 T^- = |\psi^+|^2 |\psi^-|^2 g$$

Ainsi, en définissant le 2-tenseur symétrique $F = T^+ + T^- + \frac{1}{2}(|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2)g$, on a sur toute la surface M

$$\frac{F}{|\psi|^2} = \frac{T^+ + T^- + (|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2)g}{|\psi^+|^2 + |\psi^-|^2} = \frac{T^-}{|\psi^+|^2} + \frac{1}{2}g = \frac{T^+}{|\psi^-|^2} - \frac{1}{2}g$$

D'autre part, on obtient aussi

$$\nabla_X \psi = \nabla_X \psi^+ + \nabla_X \psi^- = \frac{T^+(X)}{|\psi^-|^2} \cdot \psi^- + \frac{T^-(X)}{|\psi^+|^2} \cdot \psi^+$$

Ces deux dernières équations impliquent

$$\nabla_X \psi = \frac{F(X)}{|\psi|^2} \cdot (\psi^+ + \psi^-) + \frac{1}{2} X \cdot \psi^- - \frac{1}{2} X \cdot \psi^+$$

ce qui est équivalent à

$$\nabla_X \psi = -T(X) \cdot \psi - \frac{1}{2} X \cdot \overline{\psi} \ .$$

Naturellement, on pose $T = -\frac{F}{|\psi|^2}$ et on remarque que T est bien défini comme dans le lemme IV.5. □

4. Surfaces dans $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{H}^3$

On peut maintenant généraliser le théorème IV.1 aux surfaces dans $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{H}^3$. Dans la section 2, on a vu qu'une surface orientée immergée $M^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ (resp. $\mathbb{H}^3$) hérite de la métrique induite g, d'une structure spinorielle induite, et d'une solution φ de

$$D\varphi = H\varphi - i\overline{\varphi} \qquad (\text{resp. } D\varphi = H\varphi + \overline{\varphi}\ )$$

de norme constante (resp. vérifiant $X|\varphi|^2 = -\Re(X \cdot \overline{\varphi}, \varphi)$ pour tout vecteur X tangent à M). Ce champ de spineurs φ sur M^2 est la restriction d'un champ de spineurs de Killing réel (resp. imaginaire) de $\mathbb{S}^3$ (resp. $\mathbb{H}^3$). La section 3 montre que la réciproque est vraie au moins localement. On suppose qu'il existe une solution non triviale des équations mentionnées plus haut sur une surface riemannienne orientée (M^2, g), munie d'une structure spinorielle, pour une fonction donnée $H : M \to \mathbb{R}$. Alors cette solution vérifie l'équation des champs de spineurs de Killing restreints avec un endomorphisme bien défini $T : TM \to TM$ satisfaisant $\mathrm{tr}T = H$. De plus, il existe une immersion isométrique $(M^2, g) \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ (resp. $\mathbb{H}^3$) ayant pour seconde forme fondamentale $S = 2T$.

THÉORÈME IV.9. *Soit (M^2, g) une surface riemannienne orientée et $H : M \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable. Alors les données suivantes sont équivalentes :*

(1) *Une immersion isométrique $(\tilde{M}^2, g) \to \mathbb{S}^3$ du revêtement universel $\tilde{M}^2$ dans la sphère ronde $\mathbb{S}^3$ de dimension 3 de courbure moyenne H.*
(2) *Une solution φ de l'équation de Dirac*
$$D\varphi = H\varphi - i\overline{\varphi}$$
de norme constante.
(3) *Une paire (φ, T) constituée d'un endomorphisme symétrique T tel que* $\mathrm{tr}(T) = H$, *et d'un champ de spineurs φ vérifiant l'équation*
$$\nabla_X\varphi + T(X)\cdot\varphi - \frac{i}{2}X\cdot\overline{\varphi} = 0\,.$$

THÉORÈME IV.10. *Soit (M^2, g) une surface riemannienne orientée et $H : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors les données suivantes sont équivalentes :*

(1) *Une immersion isométrique $(\tilde{M}^2, g) \to \mathbb{H}^3$ du revêtement universel $\tilde{M}^2$ dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ de dimension 3 de courbure moyenne H.*
(2) *Une solution φ, ne s'annulant jamais, de l'équation de Dirac*
$$D\varphi = H\varphi + \overline{\varphi}$$
et vérifiant
$$X|\varphi|^2 = -\Re(X\cdot\overline{\varphi}, \varphi) \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$
(3) *Une paire (φ, T) constituée d'un endomorphisme symétrique T tel que* $\mathrm{tr}(T) = H$, *et d'un champ de spineurs φ vérifiant l'équation*
$$\nabla_X\varphi + T(X)\cdot\varphi + \frac{1}{2}X\cdot\overline{\varphi} = 0 \quad \forall X \in \Gamma(TM)\,.$$

REMARQUE IV.11. Il a été signalé à l'auteur que le cas des surfaces dans $\mathbb{S}^3$ a déjà été traité par Leonard Voss (*Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin*, non publié).

5. Hypersurfaces parallèles dans $\mathbb{R}^4$

On conclut cet article en donnant une caractérisation des hypersurfaces parallèles de l'espace euclidien de dimension 4 en terme d'une section spéciale du fibré des spineurs intrinsèque de l'hypersurface, de façon analogue au théorème IV.1. Sa démonstration est très simple compte tenu des paragraphes précédents.

THÉORÈME IV.12. *Soit (M^3, g) une variété riemannienne orientée de dimension* 3. *Alors les données suivantes sont équivalentes :*

(1) *Une immersion isométrique $(\widetilde{M}^3, g) \to \mathbb{R}^4$ du revêtement universel $\widetilde{M}^3$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, de seconde forme fondamentale parallèle h.*

(2) *Une paire (φ, T) constituée d'un endomorphisme symétrique parallèle T du fibré tangent TM tel que $2T = h$ et d'un champ de spineurs non trivial φ vérifiant, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, l'équation*

$$\nabla_X \varphi + T(X) \cdot \varphi = 0\,.$$

Démonstration. Soit (M^3, g) une hypersurface orientée immergée isométriquement dans $\mathbb{R}^4$, avec une seconde forme fondamentale h parallèle. Alors par la proposition III.1, la formule (III.2), et la preuve de la proposition III.3, qu'en restreignant un champ de spineurs parallèle sur $\mathbb{R}^4$ à M, et en considérant $T = \frac{1}{2}h$ on obtient la paire (φ, T) recherchée.

Réciproquement, si (M^3, g) est une variété riemannienne orientée de dimension 3, qui admet une telle paire (φ, T), alors l'équation de Codazzi-Mainardi est vérifiée de façon évidente par $h = 2T$ et la formule (III.7) implique

$$\sum_{k \neq l} \Big(\mathcal{R}_{ijkl} + 4T_{il}T_{jk} - 4T_{ik}T_{jl} \Big) e_k \cdot e_l \cdot \varphi = 0$$

qui montre qu'en dimension 3 chaque composante

$$\mathcal{R}_{ijkl} + 4T_{il}T_{jk} - 4T_{ik}T_{jl}$$

est nulle, puisque pour $1 \leq k < l \leq 3$ et $1 \leq k' < l' \leq 3$,

$$\Re(e_k \cdot e_l \cdot \varphi, e_{k'} \cdot e_{l'} \cdot \varphi) = \pm \delta_{kk'} \delta_{ll'} |\varphi|^2\,.$$

Donc $h = 2T$ vérifie aussi l'équation de Gauß. $\square$

Bibliographie

[1] U. Abresch, *Constant mean curvature and the Dirac Operator*, Talk at the conference in Luminy, 1987.

[2] A.D. Alexandrov, *A characteristic property of sphere*, Ann. Mat. Pura Appl. **58** (1962), 303–315.

[3] B. Alexandrov, G. Grantcharov, and S. Ivanov, *An estimate for the first eigenvalue of the Dirac operator on compact Riemannian spin manifold admitting parallel one-form*, J. Geom. Phys. **28** (1998), 263–270.

[4] C. Bär, *Real Killing Spinors and Holonomy*, Com. Math. Phys. **154** (1993), 525–576.

[5] ———, *Metrics with Harmonic Spinors*, Geom. Func. Anal. **6** (1996), 899–942.

[6] ———, *Extrinsic Bounds for Eigenvalues of the Dirac Operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), 573–596.

[7] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, and I. Kath, *Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds*, Teubner Verlag, Stuttgart/Leipzig, 1991.

[8] J.P. Bourguignon and P. Gauduchon, *Spineurs, Opérateurs de Dirac et Variations de Métriques*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 581–599.

[9] J.P. Bourguignon, O. Hijazi, J.-L. Milhorat, and A. Moroianu, *A Spinorial approach to Riemannian and Conformal Geometry*, Monograph, En préparation.

[10] Th. Friedrich, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalar-krümmung*, Math. Nach. **97** (1980), 117–146.

[11] ———, *Dirac–Operatoren in der Riemannschen Geometrie*, Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 1997.

[12] ———, *On the spinor representation of surfaces in Euclidean* 3*-space*, J. Geom. Phys. **28** (1998), no. 1-2, 143–157.

[13] Th. Friedrich and E.-C. Kim, *The Einstein-Dirac equation on Riemannian spin manifolds*, J. Geom. Phys. **33** (2000), no. 1–2, 128–172.

[14] ———, *Some remarks on the Hijazi inequality and generalizations of the Killing equation for spinors*, J. Geom. Phys. **37** (2001), no. 1-2, 1–14.

[15] S. Gallot, *Equations différentielles caractéristiques de la sphère*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **12** (1979), 235–267.

[16] N. Ginoux and B. Morel, *On Eigenvalue Estimates for the Submanifold Dirac Operator*, Int. J. Math. **13** (2002), no. 5, 533–548.

[17] S.W. Hawking and G.F. Ellis, *[The] Large scale structure of space-time*, Cambridge university press, 1973.

[18] O. Hijazi, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Commun. Math. Phys. **104** (1986), 151–162.

[19] ———, *Lower bounds for the eigenvalues of the Dirac operator*, J. Geom. Phys. **16** (1995), 27–38.

[20] O. Hijazi and X. Zhang, *Lower bounds for the Eigenvalues of the Dirac Operator, Part I. The Hypersurface Dirac Operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **19** (2001), no. 4, 355–376.

[21] ———, *Lower bounds for the Eigenvalues of the Dirac Operator, Part II. The Submanifold Dirac Operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **20** (2001), no. 2, 163–181.

[22] O. Hijazi, X. Zhang, and S. Montiel, *Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Math. Res. Let. **8** (2001), no. 1-2, 195–208.

[23] ______, *Eigenvalues of the Dirac operator on manifolds with boundary*, Commun. Math. Phys. **221** (2001), no. 2, 255–265.

[24] N. Hitchin, *Harmonic Spinors*, Advances in Math. **14** (1974), 1–55.

[25] R. Kusner and N. Schmitt, *Representation of surfaces in space*, Preprint dg-ga/9610005.

[26] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Univ. Press, 1989.

[27] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 7–9, Série A-B.

[28] J. Milnor, *Remarks concerning spin manifolds*, Princeton Univ. Press (1965), 55–62.

[29] B. Morel, *Eigenvalue Estimates for the Dirac-Schrödinger Operators*, J. Geom. Phys. **38** (2001), 1–18.

[30] ______, *The energy-momentum tensor as a second fundamental form*, En préparation (2002).

[31] ______, *Surfaces in S^3 and H^3 via Spinors*, Preprint, math.DG/0204090 (2002).

[32] ______, *Introduction aux structures spinorielles et à l'opérateur de Dirac*, Notes de cours, Workshop sur les invariants de Seiberg-Witten, Marrakech (Juin 2001).

[33] A. Moroianu, *Classification des variétés admettant des spineurs de Killings réels*, Mémoire de D.E.A, Université Paris XI, 1994.

[34] A. Moroianu and U. Semmelmann, *Parallel spinors and holonomy groups*, J. Math. Phys. **41** (2000), 2395–2402.

[35] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Acad. Press, New York, 1983.

[36] T. Parker and C. Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys. **84** (1982), 223–238.

[37] I.A. Taimanov, *The Weierstrass representation of closed surfaces in $\mathbb{R}^3$*, Funct. Anal. Appl. **32** (1998), no. 4, 49–62.

[38] A. Trautman, *Spinors and the Dirac operator on hypersurfaces I. General Theory*, Journ. Math. Phys. **33** (1992), 4011–4019.

[39] M.Y. Wang, *Parallel spinors and parallel forms*, Ann. Glob. Anal. Geom. **7** (1989), 59–68.

[40] E. Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys. **80** (1981), 381–402.

[41] X. Zhang, *Lower bounds for eigenvalues of hypersurface Dirac operators*, Math. Res. Lett. **5** (1998), 199–210.

[42] ______, *A remark : Lower bounds for eigenvalues of hypersurface Dirac operators*, Math. Res. Lett. **6** (1999), 465–466.

La principale motivation des travaux de cette thèse est de mieux comprendre le rôle du tenseur d'impulsion-énergie en géométrie spinorielle. On s'intéresse dans un premier temps à la géométrie spinorielle extrinsèque. On relie les restrictions à une sous-variété riemannienne d'objets spinoriels aux objets définis de manière intrinsèque. En particulier, on donne des estimations pour la première valeur propre d'un opérateur de Dirac défini sur les sous-variétés riemanniennes spinorielles compactes. Il apparaît alors que le cadre des hypersurfaces est un cadre naturel pour l'étude du tenseur d'impulsion-énergie associé à un champ de spineurs. On construit un produit tordu généralisé permettant de voir ce dernier comme la seconde forme fondamentale d'une immersion isométrique. On caractérise enfin les surfaces de $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{H}^3$ en terme de sections spéciales du fibré des spineurs, ainsi que les hypersurfaces parallèles de $\mathbb{R}^4$.

Energy-Momentum Tensor and Extrinsic Spin Geometry :

The results of this thesis are motivated by a better understanding of the energy-momentum tensor in spin geometry. We first investigate extrinsic spin geometry. We give relations between restrictions to a Riemannian submanifold of spinorial objects and objects defined in an intrinsic way. We then prove estimates for the first eigenvalue of a Dirac operator which is defined on compact spin Riemannian submanifolds. It turns out that the study of hypersurfaces gives a natural setup for the study of the energy-momentum tensor associated with a spinor field. We construct a generalized warped product which allows to consider this tensor as the second fundamental form of an isommetric immersion. Finally, we characterize surfaces in $\mathbb{S}^3$ and $\mathbb{H}^3$ in terms of special sections of the spin bundle, as well as parallel hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$.

Discipline : Mathématiques

Mots clés : géométrie spinorielle, tenseur d'impulsion-énergie, opérateur de Dirac, sous-variétés riemanniennes, opérateurs de Dirac-Schödinger, valeurs propres

Institut Élie Cartan Nancy
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex