Opérateurs de Dirac sur les sous-variétés

Nicolas Ginoux

Remerciements

C'est à plusieurs titres que je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse, Oussama Hijazi. Par la qualité pédagogique de ses enseignements, il m'a donné un accès privilégié à la géométrie spinorielle. Je lui dois aussi de m'avoir ouvert les portes de la recherche et permis de nouer de nombreux contacts. Enfin, c'est grâce à son soutien dynamique, sa capacité d'écoute et son esprit critique que bien des problèmes ont trouvé leurs solutions.

L'intérêt manifesté pendant ces trois années par Helga Baum et Sebastián Montiel à l'égard de mon travail a contribué à l'enrichir de manière significative. Les discussions que nous avons menées ensemble ont représenté pour moi une source continuelle de motivation. Qu'ils en soient chaleureusement remerciés ici. Je tiens d'autre part à les remercier d'avoir accepté la lourde responsabilité d'être rapporteurs.

Je suis sensible à l'honneur que me fait Paul Gauduchon en acceptant de présider ce jury. Je remercie également Gérard Besson et Bruno Colbois pour leur participation à ce jury.

J'ai partagé tout au long de ma thèse le bureau 211 de l'Institut Élie Cartan avec Bertrand Morel. Sa constante disponibilité et son ouverture d'esprit le placent à mes yeux bien au-dessus d'un simple collègue. J'ai beaucoup appris lors de nos nombreux échanges, et la clarté des résultats énoncés lui doit aussi beaucoup. Ses compétences informatiques ont par ailleurs considérablement facilité la rédaction de cette thèse. Je tiens donc tout naturellement à le remercier ici.

J'ai d'autre part eu la chance de bénéficier des connaissances approfondies et des remarques pertinentes des membres de l'équipe de géométrie spinorielle. J'en remercie par conséquent Éric Beaufort, Xavier Charuel, Jean-François Grosjean, Emmanuel Humbert et Julien Maubon.

Je suis redevable à l'Institut Élie Cartan pour son accueil et les excellents moyens mis à ma disposition.

Il est difficile de mener à bien un travail de thèse dans une mauvaise ambiance. C'est pourquoi je suis sincèrement reconnaissant à tous mes camarades doctorants pour l'atmosphère conviviale et détendue qu'ils ont entretenue durant ces années.

Bien avant d'arriver entre les mains des membres du jury, l'introduction de cette thèse est d'abord passée sous l'oeil critique de Florent. Je le remercie non seulement pour le travail que cela lui a demandé, mais aussi pour la qualité de ses remarques.

L'achèvement de cette thèse doit beaucoup au soutien sans faille et à l'amour dont m'a entouré Caroline. Ma famille, et ma mère en particulier, m'ont également apporté une aide précieuse dans les moments difficiles.

Je dédie cette thèse à mon père.

Table des matières

Introduction

Les différents travaux présentés dans cette thèse ont pour motivation l'étude de la géométrie extrinsèque d'une sous-variété à travers celle du spectre des opérateurs de Dirac qui lui sont naturellement associés.

La géométrie d'une variété (lisse) riemannienne compacte orientée est fortement liée aux propriétés du spectre de son laplacien scalaire, agissant sur les fonctions. Les valeurs propres de cet opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 dépendent en effet intimement de certains invariants riemanniens fondamentaux tels que, par exemple, le tenseur de Ricci ou le volume de la métrique. Ainsi, d'après le théorème de Lichnerowicz ([46]), si le tenseur de Ricci de la variété est minoré par celui de la sphère ronde (de courbure 1), alors la première valeur propre non nulle du laplacien de la variété est plus grande que celle de la sphère ronde. De plus, seule cette dernière réalise l'égalité dans la minoration de Lichnerowicz (M. Obata, [53]).

Lorsque la variété est de plus spinorielle, un autre opérateur s'avère incontournable dans l'étude de sa géométrie, à savoir l'opérateur de Dirac (dit "fondamental"). Cet opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 agit sur les sections d'un fibré vectoriel appelé *fibré des spineurs*. Comparable à une "racine carrée" du laplacien sur les formes, il s'en distingue cependant déjà par la dépendance du fibré des spineurs par rapport à la métrique. C'est surtout à travers la formule de Schrödinger-Lichnerowicz ([47]) que l'opérateur de Dirac se révèle porter des renseignements subtils touchant tant à la métrique qu'à la topologie de la variété. Cette formule de type Bochner montre que la différence entre le carré de l'opérateur de Dirac et le laplacien brut spinoriel se réduit à un terme proportionnel à la courbure scalaire. Ainsi, avec la condition faible de positivité de la courbure scalaire, A. Lichnerowicz ([47]) en a déduit la trivialité du noyau de l'opérateur de Dirac ; combiné avec le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer ([4]), ce théorème d'annulation fournit une obstruction topologique à l'existence de métriques à courbure scalaire positive sur une variété donnée (voir [45] pour des références sur ces questions).

Raffinant l'argument de A. Lichnerowicz, T. Friedrich a minoré le carré de toute valeur propre de l'opérateur de Dirac par un nombre proportionnel à l'infimum de la courbure scalaire (cf. [19]). Si cette dernière estimation, pertinente dès que la courbure scalaire de la variété est strictement positive, tient lieu de "théorème de Lichnerowicz" pour l'opérateur de Dirac, en revanche son cas-limite s'avère plus fécond que le théorème d'Obata. En effet, l'égalité dans la minoration de Friedrich est caractérisée par l'existence de *spineurs de Killing réels* ([19]). Un spineur de Killing est une section du fibré des spineurs dont la dérivée covariante est proportionnelle à la multiplication de Clifford. Lorsque la constante de proportionnalité est réelle (resp. imaginaire pure), le spineur de Killing est dit réel (resp. imaginaire). L'équation différentielle satisfaite par un tel spineur est surdéterminée : l'existence d'une solution à cette équation entraine des restrictions sur la variété. Par exemple, celle-ci doit être d'Einstein, et en dimension 4 doit être à courbure sectionnelle constante. C'est à travers l'étude de leur holonomie ([59], [5]) qu'une caractérisation de ces variétés a pu être établie, faisant apparaître en certaines dimensions *d'autres exemples* que la sphère ronde. Ces exemples intéressent aussi les physiciens, pour lesquels l'opérateur de Dirac joue un rôle important dans le projet d'unification de la mécanique quantique avec la relativité générale.

Quand une variété est vue comme immergée dans une autre, l'étude de sa géométrie vient s'enrichir des estimations extrinsèques de valeurs propres. Par exemple, si la variété ambiante est l'espace euclidien, T. Takahashi ([57]), puis R. C. Reilly ([54]), D. Bleecker et J. Weiner ([13]) ont montré que le comportement des fonctions coordonnées de l'immersion, et par suite la géométrie même de la sous-variété, était étroitement lié à la première valeur propre non nulle du laplacien scalaire de la sous-variété.

Lorsque l'on s'intéresse au rôle des spineurs en géométrie extrinsèque, des difficultés surgissent par rapport au cas du laplacien scalaire, telle que par exemple la restriction de spineurs à une sous-variété. L'identification entre les différents fibrés de spineurs sur une sous-variété permet de définir les opérateurs de Dirac qui entrent en jeu dans la description de sa géométrie.
Historiquement, la première intervention des spineurs dans le cadre des sous-variétés est due à E. Witten ([60]), qui simplifie considérablement la preuve du théorème de la masse positive par l'introduction d'un opérateur de Dirac, appelé *opérateur de Dirac-Witten*, sur le bord d'une variété. Apparaissant naturellement comme un terme de bord dans la formule de Schrödinger-Lichnerowicz intégrée, cet opérateur s'avère central dans l'interface entre la géométrie du domaine et celle de son bord et justifie donc une étude en soi. Défini sur toute hypersurface orientée d'une variété spinorielle, l'opérateur de Dirac-Witten possède un opérateur formellement auto-adjoint associé, dont le spectre a fait l'objet d'études récentes par X. Zhang, O. Hijazi et B. Morel. En particulier, X. Zhang ([61], [62]), puis O. Hijazi et X. Zhang ([34], [35]) ont prouvé plusieurs minorations de la plus petite valeur propre de cet opérateur, dont les cas d'égalité, établis par B. Morel ([51]), sont caractérisés par l'existence de spineurs satisfaisant une équation généralisant celle des spineurs de Killing. De plus, B. Morel a mis à jour l'interprétation intrinsèque de cet opérateur en termes d'opérateurs de Schrödinger et montré que les minorations obtenues contiennent l'estimation de Friedrich ([51]).

Sur une sous-variété de codimension quelconque, un opérateur de Dirac-Witten peut également être défini ([6]), qui possède lui aussi un opérateur formellement auto-adjoint associé ([35]). Le spectre de cet opérateur a fait l'objet d'un premier travail de O. Hijazi et X. Zhang ([35]) où les auteurs ont étendu certains des résultats de [34]. Cet article [35] appelle cependant la question suivante : quelles sous-variétés particulières peut-on caractériser par ces estimations ? C'est tout d'abord à ce problème que nous donnons un élément de réponse, en montrant le rôle prépondérant joué par l'identification entre les différents fibrés de spineurs sur une sous-variété.

Par ailleurs, l'étude de problèmes à bord (type Dirichlet) pour l'opérateur de Dirac a mis en évidence l'efficacité de celui-ci dans la détection de propriétés tant intrinsèques qu'extrinsèques d'une sous-variété. Sous des conditions de bord convenables, O. Hijazi, S.

Montiel et X. Zhang ([31, 32]) ont ainsi montré que l'on pouvait déduire de la formule de Schrödinger-Lichnerowicz des minorations de valeurs propres de l'opérateur de Dirac d'un domaine ou de son bord permettant de contrôler directement sa géométrie. Par exemple, le théorème d'Alexandrov ([2]), affirmant que les seules hypersurfaces compactes plongées à courbure moyenne constante de l'espace euclidien sont les sphères rondes, vient comme une conséquence immédiate d'une estimation de valeurs propres du bord d'une variété ([31, 32]). Cette même estimation améliore d'ailleurs l'inégalité de Friedrich et est valable sans hypothèse sur le signe de la courbure scalaire du bord ([31, 32]). Cet ensemble de résultats montre plus généralement que l'approche de la géométrie extrinsèque par les spineurs peut dépasser à la fois l'approche classique par le laplacien et la géométrie intrinsèque.

Parallèlement à ces avancées, une autre question se pose de manière naturelle : existe-t-il sur une sous-variété des spineurs jouant pour l'opérateur de Dirac un rôle analogue à celui des fonctions coordonnées pour le laplacien ? Une première réponse dans ce sens est venue de C. Bär dans [6], où les spineurs parallèles (resp. de Killing réels non parallèles) sur l'espace euclidien (resp. sur la sphère) restreints à une sous-variété apparaissent comme les meilleurs spineurs-test dans le principe du Min-Max. C. Bär obtient en effet des majorations optimales analogues à celles de Bleecker, Weiner et Reilly pour le laplacien. En revanche, comme dans la situation du laplacien, le passage aux sous-variétés de l'espace hyperbolique ajoute une difficulté, car cet espace n'admet pas de spineurs possédant d'aussi bonnes propriétés que les autres espaces-forme. Utilisant la restriction de spineurs de Killing imaginaires à une sous-variété, C. Bär a donné dans ce cas une estimation des petites valeurs propres, mais qui s'avère non optimale. Ce travail soulève par conséquent la question de savoir quel spineur est le plus adapté dans cette optique, et plus largement quelles informations tirer de la restriction de spineurs particuliers à une sous-variété.

Présentation des résultats

On s'attache ici à deux problèmes traités par deux méthodes distinctes. D'une part, on s'intéresse à un opérateur généralisant celui de Dirac-Witten en codimension supérieure à 1. Cette étude, dont la formule de Schrödinger-Lichnerowicz constitue l'outil fondamental, fait l'objet du premier chapitre[1]. D'autre part, on cherche à travers la restriction de spineurs particuliers à une sous-variété à donner des informations sur le spectre d'un opérateur de Dirac qui lui est associé. Basé cette fois-ci sur la formule de Gauß pour les spineurs ainsi que le principe du Min-Max, ce travail s'étend sur les chapitres 2, 3 et 4.

Dans un premier temps, on se place sur une sous-variété riemannienne compacte et spinorielle d'une variété riemannienne spinorielle. Si la codimension de cette sous-variété est quelconque, le fibré normal n'est pas trivial en général. L'opérateur de Dirac le plus simple alors à définir en tenant compte de la géométrie extrinsèque de la sous-variété est l'opérateur de Dirac dit "tordu" par le fibré normal. La restriction de la dérivée covariante ambiante donne également naissance à un opérateur de type Dirac-Witten. Comme dans le cas des hypersurfaces, ce dernier opérateur n'est pas formellement auto-adjoint sur la sous-variété. Dans [35], O. Hijazi et X. Zhang ont canoniquement associé à cet opérateur un opérateur elliptique formellement auto-adjoint, appelé "submanifold Dirac operator" et noté D_H. À la manière de T. Friedrich dans [19], l'utilisation de connexions modifiées

[1] Ce chapitre est un travail effectué en collaboration avec Bertrand Morel

et d'une formule de type Schrödinger-Lichnerowicz leur a permis, en codimension *impaire* et sous des conditions fortes sur l'immersion, de minorer le bas du spectre de D_H. Qu'en est-il alors des sous-variétés de codimension paire ? Quel(s) type(s) de contrainte(s) l'égalité de la plus petite valeur propre de D_H avec le minorant obtenu impose-t-elle à la sous-variété ? Existe-t-il une formulation "intrinsèque", dont le sens reste à préciser, de l'opérateur D_H comme opérateur de Schrödinger ? C'est à ces questions que nous nous proposons de répondre dans le chapitre 1. Via le choix d'une connexion modifiée adaptée, nous démontrons en particulier le théorème suivant :

Théorème 0.1 *Soit $M^m \overset{\iota}{\hookrightarrow} (\widetilde{M}^{m+n}, g)$ une sous-variété riemannienne compacte spinorielle d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}^{m+n}, g)$. Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Supposons que*

$$S + \kappa_1 \geq m(m-1)|H|^2,$$

où S désigne la courbure scalaire de M, κ_1 la plus petite valeur propre d'un opérateur de courbure normal (cf. 1.13), et H le vecteur courbure moyenne de l'immersion ι. Alors toute valeur propre λ de D_H vérifie

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_M \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(S + \kappa_1)} - m|H| \right)^2.$$

De plus, si l'égalité a lieu dans cette minoration, alors la norme de H est constante et il existe une section ψ de la restriction du fibré des spineurs de $\widetilde{M}$ à M satisfaisant, pour un réel μ et pour tout champ de vecteurs X tangent à M,

$$\nabla_X \psi = -\frac{\mu}{m} X \underset{M}{\cdot} \psi.$$

Ici, "$\underset{M}{\cdot}$" désigne la multiplication de Clifford déduite de la multiplication ambiante après restriction et identification des fibrés des spineurs sur M (voir formule (1.8)).

Il est à remarquer qu'en codimension $n > 1$ cette dernière équation *n'est pas* celle d'un spineur de Killing sur M, car la connexion ∇ ci-dessus est construite à partir de la connexion canonique de M *ainsi que* celle de son fibré normal (voir paragraphe 1.2.4). La section ψ ci-dessus n'est d'ailleurs pas propre pour l'opérateur de Dirac fondamental de M mais pour l'opérateur de Dirac tordu. En revanche, lorsque $n = 1$, ces deux opérateurs de Dirac coïncident et on retrouve un résultat de B. Morel ([51]).

Ce premier théorème fait aussi apparaître le rôle joué dans ce problème par l'opérateur de Dirac tordu d'une sous-variété par son fibré normal. C'est précisément au spectre de cet opérateur que l'on s'intéresse par la suite. Nous commençons par étudier le cas d'une hypersurface dans une variété spinorielle, situation qui présente des avantages par rapport à celle d'une sous-variété de codimension $n > 1$. D'une part, une hypersurface porte toujours une structure spinorielle induite dès qu'elle est orientée. D'autre part, étant trivial et plat, le fibré normal n'intervient que faiblement dans les identifications entre fibrés des spineurs, ce qui permet de mettre directement en relation les estimations extrinsèques obtenues avec les données intrinsèques à l'hypersurface.

On considère tout d'abord une hypersurface compacte et orientée M^m de l'espace hyperbolique (de courbure -1). Au moyen de la caractérisation variationnelle usuelle des premières valeurs propres d'un opérateur elliptique auto-adjoint, C. Bär a montré dans [6] que la plus petite valeur propre λ_1 de l'opérateur de Dirac fondamental de M satisfait ([6], Corollary 4.5) :

$$|\lambda_1| \leq \frac{m}{2}\left(||H||_\infty + 1\right).$$

Ce résultat tient lieu d'analogue à ceux prouvés par C. Bär pour les hypersurfaces de l'espace euclidien ou de la sphère ([6], Theorem 4.1), car l'auteur choisit le spineur-test le plus naturel dans ce contexte, à savoir la restriction d'un spineur de Killing imaginaire à l'hypersurface. L'espace hyperbolique admet en effet un spineur de Killing imaginaire (cf. [8]), tout comme l'espace euclidien (resp. la sphère ronde) admet un spineur parallèle (resp. un spineur de Killing réel non parallèle). La différence de nature du majorant obtenu (la norme du sup de la courbure moyenne au lieu de sa norme L^2) par rapport aux autres cas provient du fait que la norme d'un spineur de Killing imaginaire, au contraire de celle d'un spineur de Killing réel, n'est pas constante. Toutefois, cette approche se révèle incomplète. En effet, cette estimation est premièrement une inégalité stricte, puisque son cas-limite n'est atteint sur aucune hypersurface. Deuxièmement, la méthode mise en oeuvre par l'auteur repose sur une identité comparant, sur l'hypersurface, l'opérateur de Dirac fondamental à celui de Dirac-Witten ([6], Lemma 2.1 ou identité (2.4)). Or cette seule formule s'avère insuffisante dans l'évaluation du quotient de Rayleigh associé à l'opérateur de Dirac, car son intégration sur l'hypersurface cache un terme de courbure ambiant derrière un terme croisé contenant la courbure moyenne. Nous proposons dans le chapitre 2 une alternative à ces deux problèmes en montrant que, bien qu'il n'existe en général pas de spineur de Killing imaginaire dont même la restriction à l'hypersurface soit de norme constante, une majoration optimale de λ_1 peut être obtenue :

Théorème 0.2 *Soit (M^m, g) une hypersurface riemannienne compacte orientée de l'espace hyperbolique. Munissons M de la structure spinorielle induite. Alors la plus petite valeur propre λ_1 de l'opérateur de Dirac fondamental D_M de (M, g) satisfait*

$$\lambda_1^2 \leq \frac{m^2}{4}\left(||H||_\infty^2 - 1\right).$$

De plus, si l'égalité a lieu, alors M est à courbure moyenne constante et la restriction de tout spineur de Killing imaginaire sur M est propre pour D_M^2 associé à la valeur propre λ_1^2.

Il est à noter que le cas-limite dans cette inégalité est atteint lorsque M est une sphère géodésique de l'espace hyperbolique. Ce théorème peut ainsi être comparé à celui établi par E. Heintze dans [27] pour la plus petite valeur propre non nulle du laplacien scalaire.

Une autre façon d'aborder ce problème de majorations extrinsèques de valeurs propres consiste à y intégrer la propriété fondamentale de *covariance conforme* de l'opérateur de Dirac ([36], [45]). C'est ce point de vue que nous adoptons dans le chapitre 3. Considérant l'espace hyperbolique comme une demi-sphère munie d'une métrique conforme à la métrique standard, nous démontrons en particulier le théorème suivant :

Théorème 0.3 *Soit (M^m, g) une hypersurface riemannienne compacte orientée de l'espace hyperbolique, vu comme la demi-sphère supérieure*

$$\{(x_1, \ldots, x_{m+2}) \in \mathbb{R}^{m+2}, \quad x_1^2 + \ldots + x_{m+2}^2 = 1 \quad et \quad x_{m+2} > 0\},$$

munie de la métrique $\frac{1}{x_{m+2}^2} g_0$ conforme à la métrique standard g_0 de la sphère. Alors

$$\lambda_1^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \left(H^2 - 1\right) v_g + \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M g_0\left(e_{m+2}^T, e_{m+2}^T\right) v_g,$$

où e_{m+2}^T est le projeté orthogonal du vecteur $e_{m+2} = (0, \ldots, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^{m+2}$ sur l'espace tangent à M.
De plus, si l'égalité est atteinte dans cette majoration, alors M est une sphère géodésique.

On remarque que l'inégalité ci-dessus ne constitue pas l'analogue exact de la majoration d'A. El Soufi et S. Ilias pour la plus petite valeur propre non nulle du laplacien ([18]). Ce théorème ouvre une nouvelle voie dans la recherche d'un tel résultat.

Cette approche permet en outre de considérer une famille plus large de variétés ambiantes, celles admettant des *spineurs-twisteurs*. Les spineurs-twisteurs peuvent en effet être vus comme l'extension naturelle des spineurs de Killing dans le contexte conforme. Or l'existence de tels spineurs sur une variété n'entraine pas de conditions aussi fortes que celle de spineurs de Killing. De nombreux travaux ont été effectués afin de caractériser les variétés admettant des spineurs-twisteurs (cf. [11] et [40] à [44] par exemple). Bien que des résultats fins aient été prouvés dans cette direction, la géométrie de ces variétés n'est, de notre point de vue, toujours pas complètement comprise. Nous nous intéressons donc dans la dernière partie du chapitre 3 aux propriétés géométriques que l'on peut déduire de la restriction d'un tel spineur à une hypersurface. Nous généralisons par exemple dans le corollaire 3.1 un résultat du chapitre 2 en montrant que les hypersurfaces de niveau de la norme d'un spineur-twisteur (de norme non constante sur la variété ambiante) satisfont pour une métrique conforme le cas-limite dans l'estimation de Bär ([6], Theorem 4.1) ainsi que dans celle de Friedrich.

Toujours dans l'esprit d'affiner à l'aide des opérateurs de Dirac la géométrie intrinsèque d'une sous-variété d'un point de vue extrinsèque, nous nous restreignons dans la suite à un autre cadre géométrique spécial et radicalement différent des précédents, puisque nous considérons des variétés ambiantes qui sont *kählériennes*. Une première difficulté consiste à trouver le bon équivalent des spineurs-twisteurs dans ce cas. En effet, certaines variétés kählériennes n'admettent pas de spineurs-twisteurs, comme l'a montré O. Hijazi dans [29]. Il existe pour ces variétés une extension de la notion de spineurs de Killing, les *spineurs de Killing kählériens* (Définition 4.3 ou [29],[38],[39]). Toutes les variétés kählériennes n'admettent pas de spineurs de Killing kählériens. Ces spineurs ont été introduits afin de caractériser le cas-limite d'une minoration de Kirchberg ([37]), qui améliore celle de Friedrich pour les variétés spinorielles compactes kählériennes. L'existence de spineurs de Killing kählériens sur une variété kählérienne entraine un certain nombre de conditions sur, entre autres, sa courbure et sa dimension complexe ([29],[38],[39]). Les variétés compactes admettant de tels spineurs ont été complètement décrites par A. Moroianu dans [52]. Par exemple, tout espace projectif complexe de dimension complexe *impaire* (l'espace projectif complexe de dimension complexe paire *n'est pas* spinoriel) admet de tels

spineurs.
Nous nous penchons donc sur les sous-variétés de variétés kählériennes admettant des spineurs de Killing kählériens. La présence d'une structure complexe J amène à considérer une décomposition J-invariante de la restriction du fibré tangent à la sous-variété M. Nous revenons donc dans le chapitre 4 au cadre plus général des sous-variétés CR ([12] ou Définition 4.2) de telles variétés et étudions le spectre de leur opérateur de Dirac tordu par le fibré normal. En particulier, cette approche traitera le cas des sous-variétés kählériennes ou lagrangiennes, pour lesquelles nous démontrons les théorèmes suivants :

Théorème 0.4 *Soit* (M^{2d}, g, J) *une sous-variété kählérienne spinorielle compacte (de dimension complexe* d*) de l'espace projectif complexe* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ *de dimension complexe* n impaire*. Munissons* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ *de la métrique de Fubini-Study de courbure sectionnelle holomorphe constante égale à 4, et le fibré normal de* M *de la structure spinorielle induite. Alors la plus petite valeur propre* λ_1 *de l'opérateur de Dirac tordu satisfait :*

$$\lambda_1^2 \leq \begin{cases} (d+1)^2 & \text{lorsque } d \text{ est impair} \\ d(d+2) & \text{lorsque } d \text{ est pair.} \end{cases}$$

Théorème 0.5 *Soit* (M^n, g) *une sous-variété lagrangienne spinorielle compacte de l'espace projectif complexe* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ *de dimension complexe* n impaire*. Munissons* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ *de la métrique de Fubini-Study de courbure sectionnelle holomorphe constante égale à 4, et le fibré normal de* M *de la structure spinorielle induite. Alors la plus petite valeur propre* λ_1 *de l'opérateur de Dirac tordu satisfait :*

$$\lambda_1^2 \leq \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{n^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M |H|^2 v_g.$$

Il est à remarquer que, lorsque d est impair, $(d+1)^2$ est le carré de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac fondamental de $\mathbb{C}\mathrm{P}^d$ ([56]). L'inégalité obtenue dans le théorème 0.4 constitue donc l'analogue de la majoration de A. Ros ([55]) pour le laplacien scalaire.

De plus, toute hypersurface orientée d'une variété kählérienne étant une sous-variété CR, cette étude s'applique aussi aux hypersurfaces de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ (n impair). Nous démontrons dans ce cas une estimation de valeurs propres pour l'opérateur de Dirac *fondamental* de l'hypersurface. Le majorant obtenu dépend non seulement de la norme L^2 de la courbure moyenne et d'un terme proportionnel à la courbure ambiante, mais aussi de formes différentielles traduisant des propriétés de l'endomorphisme de Weingarten vis-à-vis de la structure complexe (cf. théorème 4.5). Au-delà de la stricte recherche d'informations spectrales, cette dernière approche devrait constituer un outil pour l'analyse de propriétés plus géométriques d'une hypersurface bordant un domaine, dans l'esprit des travaux de O. Hijazi, S. Montiel et X. Zhang ([31, 32, 33]).

Chapitre 1

Estimations de valeurs propres pour un opérateur de type Dirac-Witten sur une sous-variété

Ce chapitre est un travail en collaboration avec Bertrand Morel et a fait l'objet d'une publication ([24]).

1.1 Introduction

Il est bien connu que les cas-limites des estimations de valeurs propres de l'opérateur de Dirac fondamental sur une variété spinorielle compacte sans bord donnent lieu à des géométries spéciales ([19],[28]). En effet, ces cas-limites sont caractérisés par l'existence de spineurs particuliers, tels que les spineurs de Killing, existence qui impose des conditions très restrictives sur l'holonomie ([5]). Lorsque l'on considère des hypersurfaces bordant un domaine, l'opérateur de Dirac hypersurfacique a été introduit par E. Witten afin de prouver le théorème de la masse positive ([60]). Les outils spinoriels développés dans le but d'étendre les estimations classiques aux hypersurfaces sont devenus incontournables dans la résolution de problèmes sur les variétés à bord en géométrie extrinsèque (cf. par exemple [31],[32]).

Dans cette optique, le spectre de l'opérateur de Dirac D_H (cf. formule (1.11) pour la définition de cet opérateur) a été étudié dans [35], où les auteurs ont obtenu des estimations de valeurs propres en codimension impaire. Dans ce chapitre, nous donnons tout d'abord de nouvelles minorations des valeurs propres de D_H (théorèmes 1.2 et 1.3) et en discutons les cas-limites.

Nous commençons par restreindre le fibré des spineurs d'une variété riemannienne spinorielle à une sous-variété spinorielle munie de la métrique induite. Nous mettons ensuite en relation ce fibré avec le fibré des spineurs de la sous-variété tordu par celui de son fibré normal. En vue d'étudier les cas-limites, nous adaptons les identifications algébriques de [6] entre espaces des spineurs ainsi qu'entre multiplications de Clifford.

Une fois définis les opérateurs de Dirac appropriés et établie la formule de Gauß spinorielle, qui permet de les lier l'un à l'autre, l'opérateur D_H apparaît comme la généralisation naturelle de l'opérateur de Dirac hypersurfacique (voir par exemple [61], [51]). Nous déterminons alors des minorations pour les valeurs propres de D_H en termes de norme du vecteur courbure moyenne, du tenseur d'énergie-impulsion associé à un spineur propre, et d'un changement conforme de métrique convenable.

Les minorants obtenus mettent aussi en jeu la courbure scalaire de la sous-variété ainsi que sa courbure normale ; cette dernière n'apparaît qu'en codimension strictement supérieure à un.

Comme conséquence de nos définitions, les estimations établies le sont *en codimension quelconque* (comparer avec [35]).

Nos identifications permettent aussi de discuter des cas-limites en termes de sections particulières du fibré des spineurs. La notion de spineurs de Killing peut ainsi être étendue au fibré des spineurs de la sous-variété tordu par celui de son fibré normal.

Le point-clef de ce chapitre consiste à interpréter intrinsèquement nos estimations (cf. aussi [61], [62], [35]) en considérant un fibré vectoriel arbitraire sur une variété qui joue le rôle de "fibré normal" (voir propositions 1.2 à 1.5).

Nous remercions Oussama Hijazi pour son soutien tout au long de la préparation de l'article [24].

1.2 Les différents opérateurs de Dirac sur une sous-variété

1.2.1 Préliminaires algébriques

Dans ce paragraphe, nous adaptons la formulation de C. Bär des représentations spinorielles restreintes ([6]). Pour les propriétés de base des représentations spinorielles classiques, on pourra consulter [21], [45], [11] ou [14].
Soient m et n deux entiers positifs. Nous construisons en premier lieu une représentation irréductible de l'algèbre de Clifford complexe $\mathbb{C}l_{m+n}$ d'après les représentations δ_m et δ_n de $\mathbb{C}l_m$ et $\mathbb{C}l_n$ respectivement. Soit Σ_p l'espace des spineurs complexes pour la représentation δ_p . Rappelons que, si p est pair, δ_p est unique à équivalence près, et si p est impair, il existe deux représentations irréductibles inéquivalentes de $\mathbb{C}l_p$; dans ce cas, $(\delta_p^j\,,\Sigma_p^j)$, $j = 0, 1$, désigne la représentation qui envoie la forme volume complexe sur $(-1)^j\,\mathrm{Id}_{\Sigma_p^j}$. Rappelons que celle-ci, notée désormais ω_p, est définie par

$$\omega_p := i^{[\frac{p+1}{2}]} e_1 \cdot \ldots \cdot e_p,$$

où $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée directe quelconque de $\mathbb{R}^p$ et "$\cdot$" désigne la multiplication de Clifford dans $\mathbb{C}l_p$.
Nous devons donc considérer quatre cas selon la parité de m et de n.
Premier cas : Supposons m et n pairs. Définissons

$$\begin{aligned} \gamma\ : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_m \otimes \Sigma_n) \\ (v, w) &\longmapsto \delta_m(v) \otimes (\mathrm{Id}_{\Sigma_n^+} - \mathrm{Id}_{\Sigma_n^-}) + \mathrm{Id}_{\Sigma_m} \otimes \delta_n(w), \end{aligned}$$

où $\Sigma_n^\pm$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre ± 1 de l'action de la forme volume complexe ω_n de $\mathbb{C}l_n$. Alors, pour σ dans Σ_m, θ dans Σ_n, pour tous vecteurs v de $\mathbb{R}^m$ et w de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\gamma(v+w)^2(\sigma\otimes\theta) &= \delta_m(v)^2\sigma\otimes(\theta^+ + \theta^-) + \delta_m(v)\sigma\otimes(\delta_n(w)\theta^- - \delta_n(w)\theta^+)\\ &\quad +\delta_m(v)\sigma\otimes(\delta_n(w)\theta^+ - \delta_n(w)\theta^-) + \sigma\otimes\delta_n(w)^2\theta\\ &= -(|v|^2+|w|^2)\sigma\otimes\theta.\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $\gamma(v+w)^2 = -|v+w|^2\,\mathrm{Id}$, l'application γ induit une représentation complexe non triviale de $\mathbb{C}l_{m+n}$ de dimension $2^{\frac{m+n}{2}}$; par suite, γ est équivalente à δ_{m+n}. Les inclusions de $\mathbb{C}l_m$ et $\mathbb{C}l_n$ dans $\mathbb{C}l_{m+n}$ données par

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}^n\\ v & \longmapsto & (v,0)\end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}^n\\ w & \longmapsto & (0,w),\end{array}$$

permettent d'écrire ω_{m+n} sous la forme :

$$\begin{aligned}\omega_{m+n} &= i^{[\frac{m+n+1}{2}]}e_1\cdot\ldots\cdot e_{m+n} \\ &= i^{[\frac{m+1}{2}]}i^{[\frac{n+1}{2}]}e_1\cdot\ldots\cdot e_m\cdot e_{m+1}\cdot\ldots\cdot e_{m+n}\\ &= \omega_m\cdot\omega_n\,.\end{aligned}\tag{1.1}$$

D'autre part, si σ appartient à Σ_m et θ appartient à Σ_n, alors pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^m$,

$$\gamma(v\cdot\omega_n)(\sigma\otimes\theta) = \delta_m(v)\sigma\otimes\theta\,.\tag{1.2}$$

Puisque m est pair,

$$\gamma(\omega_{m+n})(\sigma\otimes\theta) = \delta_m(\omega_m)\sigma\otimes\delta_n(\omega_n)\theta,$$

si bien que

$$\begin{aligned}\Sigma_{m+n}^+ &= \Sigma_m^+\otimes\Sigma_n^+\oplus\Sigma_m^-\otimes\Sigma_n^-\\ \Sigma_{m+n}^- &= \Sigma_m^+\otimes\Sigma_n^-\oplus\Sigma_m^-\otimes\Sigma_n^+\,.\end{aligned}$$

Nous pouvons alors définir

$$\Sigma := \Sigma_m\otimes\Sigma_n = \Sigma_{m+n}^+\oplus\Sigma_{m+n}^-.$$

Second cas : Supposons m impair et n pair. Pour $j=0,1$, posons

$$\begin{array}{rcl}\gamma^j\ :\mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_m^j\otimes\Sigma_n)\\ (v,w) & \longmapsto & \delta_m^j(v)\otimes(\mathrm{Id}_{\Sigma_n^+}-\mathrm{Id}_{\Sigma_n^-}) + \mathrm{Id}_{\Sigma_m^j}\otimes\delta_n(w),\end{array}$$

Comme précédemment, l'application γ^j induit une représentation complexe non triviale de $\mathbb{C}l_{m+n}$ de dimension $2^{[\frac{m+n}{2}]}$. De même que dans (1.1), $\omega_{m+n} = \omega_m\cdot\omega_n$, d'où $\gamma^j(\omega_{m+n}) = (-1)^j\,\mathrm{Id}$. Par conséquent les représentations γ^j et δ_{m+n}^j sont équivalentes. Remarquons que

$$\gamma^j(v\cdot\omega_n) = \delta_m^j(v)\otimes\mathrm{Id}_{\Sigma_n}\,,\quad \forall v\in\mathbb{R}^m\,.\tag{1.3}$$

Troisième cas : Supposons m pair et n impair. Pour $j = 0, 1$, posons

$$\begin{array}{rcl} \gamma^j \ : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_m \otimes \Sigma_n^j) \\ (v, 0) & \longmapsto & i \begin{pmatrix} 0 & -\delta_m(v) \\ \delta_m(v) & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n^j} \\ (0, w) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\Sigma_m^+} & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_{\Sigma_m^-} \end{pmatrix} \otimes \delta_n^j(w), \end{array}$$

où les matrices sont définies par rapport à la décomposition $\Sigma_m = \Sigma_m^+ \oplus \Sigma_m^-$. À nouveau, γ^j est une représentation irréductible complexe de $\mathbb{C}l_{m+n}$. Comme dans le cas précédent, $\omega_{m+n} = \omega_m \cdot \omega_n$, dont on tire $\gamma^j(\omega_{m+n}) = (-1)^j \mathrm{Id}$.
Nous avons donc démontré que γ^j est équivalente à δ_{m+n}^j et que

$$\gamma^j(v \cdot \omega_n) = (-1)^j \, i \, \delta_m(v) \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n^j} \, , \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \, . \tag{1.4}$$

Quatrième cas : Supposons m et n impairs. Définissons

$$\begin{array}{rcl} \Sigma^+ & := & \Sigma_m^0 \otimes \Sigma_n^0 \, , \\ \Sigma^- & := & \Sigma_m^0 \otimes \Sigma_n^1 \, , \\ \Sigma & := & \Sigma^+ \oplus \Sigma^- \, , \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \gamma \ : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma) \\ (v, 0) & \longmapsto & i \begin{pmatrix} 0 & \delta_m^0(v) \otimes \mathcal{T}^{-1} \\ -\delta_m^0(v) \otimes \mathcal{T} & 0 \end{pmatrix} \\ (0, w) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_{\Sigma_m^0} \otimes \mathcal{T}^{-1} \circ \delta_n^1(w) \\ \mathrm{Id}_{\Sigma_m^0} \otimes \mathcal{T} \circ \delta_n^0(w) & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

où $\mathcal{T}$ est un isomorphisme de Σ_n^0 sur Σ_n^1 satisfaisant

$$\mathcal{T} \circ \delta_n^0(w) \circ \mathcal{T}^{-1} = -\delta_n^1(w) \, , \quad \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

De même que précédemment, $\gamma(v + w)^2 = -(|v|^2 + |w|^2)\mathrm{Id}_\Sigma$ pour tous v dans $\mathbb{R}^m$ et w dans $\mathbb{R}^n$. En outre, puisque dans le cas où m et n sont impairs, $\omega_{m+n} = -i \, \omega_m \cdot \omega_n$, on peut montrer que

$$\gamma(\omega_{m+n}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\Sigma^+} & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_{\Sigma^-} \end{pmatrix} .$$

Nous concluons que γ est équivalente à δ_{m+n} et que $\Sigma_{m+n}^\pm \cong \Sigma^\pm$.
De plus, nous obtenons la relation suivante :

$$\gamma(v \cdot \omega_n) = i \begin{pmatrix} \delta_m^0(v) \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n^0} & 0 \\ 0 & -\delta_m^0(v) \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma_n^1} \end{pmatrix}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \, . \tag{1.5}$$

1.2.2 Restriction de spineurs à une sous-variété

Soit $(\widetilde{M}^{m+n}, g)$ une variété riemannienne spinorielle et soit M^m une sous-variété riemannienne immergée dans $\widetilde{M}$. Supposons aussi $(M^m, g_{|M})$ spinorielle. Si NM désigne le fibré normal de M dans $\widetilde{M}$, il existe une structure spinorielle sur NM, notée $\mathrm{Spin}N$. Soit $\mathrm{Spin}M \times_M \mathrm{Spin}N$ l'image réciproque du fibré produit $\mathrm{Spin}M \times \mathrm{Spin}N$ sur $M \times M$ par l'application diagonale. Il existe un homomorphisme des fibrés principaux,

$$\Phi : \mathrm{Spin}M \times_M \mathrm{Spin}N \to \mathrm{Spin}\widetilde{M}_{|M},$$

avec

$$\Phi\left((s_M, s_N)(a, a')\right) = \Phi\left((s_M, s_N)\right)(a \cdot a') \tag{1.6}$$

pour tous (s_M, s_N) dans $\mathrm{Spin}M \times_M \mathrm{Spin}N$ et (a, a') dans $\mathrm{Spin}(m) \times \mathrm{Spin}(n)$, et tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}M \times_M \mathrm{Spin}N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dd] & \mathrm{Spin}\widetilde{M}_{|M} \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& & M \\
\mathrm{SO}M \times_M \mathrm{SO}N \arrow[r] & \mathrm{SO}\widetilde{M}_{|M} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{SO}M \times_M \mathrm{SO}N \longrightarrow \mathrm{SO}\widetilde{M}_{|_M}$ désigne la juxtaposition des bases (cf. [50]).
Notons $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$ la restriction du fibré des spineurs de $\widetilde{M}$ à M, et soit

$$\Sigma := \begin{cases} \Sigma M \otimes \Sigma N & \text{si } m \text{ ou } n \text{ est pair,} \\ \Sigma M \otimes \Sigma N \oplus \Sigma M \otimes \Sigma N & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappelons qu'il existe un produit scalaire hermitien sur $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$, noté $< .,. >$, tel que la multiplication de Clifford par un vecteur sur $T\widetilde{M}_{|M}$ est antisymétrique.

1.2.3 Identification entre fibrés des spineurs

D'après les considérations précédentes, nous sommes maintenant en mesure d'identifier $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$ avec Σ. Par exemple, si m et n sont pairs, nous obtenons l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma M \otimes \Sigma N & \longrightarrow & \Sigma\widetilde{M}_{|_M} \\ ([s_M, \sigma], [s_N, \eta]) & \longmapsto & [\Phi(s_M, s_N), \sigma \otimes \eta] \end{array}$$

où la classe déquivalence à droite est donnée pour tout (a, a') dans $\mathrm{Spin}(m) \times \mathrm{Spin}(n)$ par

$$\Big(\Phi((s_M, s_N)(a, a')), \sigma \otimes \eta\Big) \sim \Big(\Phi(s_M, s_N), \gamma(a \cdot a')(\sigma \otimes \eta)\Big).$$

Cet isomorphisme sera désormais noté

$$\phi \in \Sigma \longmapsto \phi \in \Sigma\widetilde{M}_{|_M}. \tag{1.7}$$

Vis-à-vis de $< .,. >$ et du produit scalaire hermitien naturellement induit sur Σ, cet isomorphisme est unitaire. C'est pourquoi les deux produits scalaires hermitiens seront écrits de la même façon.

Soit $\omega_\perp := \omega_n$ si n est pair, et $\omega_\perp := -i\omega_n$ si n est impair. Rappelons que, dans les deux cas, $\omega_\perp^2 = (-1)^n$ (on pourra comparer avec la définition de $\omega_\perp$ dans [35] et remarquer que $\omega_\perp$ conserve les mêmes propriétés). D'après (1.2) à (1.5), la multiplication de Clifford par un champ de vecteurs X tangent à M satisfait, via (1.7) :

$$X \underset{M}{\cdot} \phi = X \cdot \omega_\perp \cdot \phi, \tag{1.8}$$

pour toute section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$.

1.2.4 La formule de Gauß et l'opérateur de Dirac-Witten

Soit $(X_1, \ldots, X_m, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ une base orthonormée directe locale de $T\widetilde{M}_{|M}$ telle que $(X_1, \ldots, X_m)$ (resp. $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$) soit une base orthonormée directe locale de TM (resp. de NM). Soit $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $(\widetilde{M}, g)$ et II la seconde forme fondamentale de M dans $\widetilde{M}$. Pour toutes sections X et Y de TM, pour toute section N de NM, la formule de Gauß peut s'écrire de la manière suivante :

$$\widetilde{\nabla}_X(Y + N) = \nabla_X(Y + N) + II(X, Y) - II^*(X, N), \tag{1.9}$$

où $\nabla_X(Y+N) := \nabla^M_X Y + \nabla^N_X N$, et $II^*(X, .)$ est l'adjoint de $II(X, .)$ (l'homomorphisme $II^*(X, .)$ envoie NM dans TM).
Notons également $\widetilde{\nabla}$ et ∇ les dérivées covariantes induites sur $\Gamma(\Sigma\widetilde{M}_{|_M})$. Ainsi, sur $\Gamma(\Sigma\widetilde{M}_{|_M})$,

$$\nabla = \nabla^{\Sigma M} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \nabla^{\Sigma N},$$

sauf si m et n sont impairs, auquel cas

$$\nabla = (\nabla^{\Sigma M} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \nabla^{\Sigma N}) \oplus (\nabla^{\Sigma M} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \nabla^{\Sigma N}).$$

Pour une section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$, la dérivée covariante $\nabla\phi$ a bien un sens via l'isomorphisme (1.7).
Comme dans [6], on peut déduire de (1.9) la formule de Gauß spinorielle : pour toute section ϕ de Σ, pour tout X dans TM,

$$\widetilde{\nabla}_X \phi = \nabla_X \phi + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot II(X, X_j) \cdot \phi. \tag{1.10}$$

Définissons maintenant les opérateurs de Dirac suivants :

$$\widehat{D} := \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot \widetilde{\nabla}_{X_j} \ , \quad D := \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot \nabla_{X_j} \ .$$

L'opérateur $\widehat{D}$ est appelé *opérateur de Dirac-Witten*. L'opérateur formellement auto-adjoint associé à cet opérateur est (cf. [35])

$$D_H := (-1)^n \omega_\perp \cdot \widehat{D}. \tag{1.11}$$

Remarquons tout de suite que, si $H := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} II(X_j, X_j)$ désigne le champ de courbure moyenne, puisque $H \cdot \omega_\perp \cdot = (-1)^{n-1} \omega_\perp \cdot H \cdot$ et que $\widehat{D} = D - \frac{m}{2} H \cdot$ d'après (1.10), alors $D_H = (-1)^n \omega_\perp \cdot D + \frac{m}{2} H \cdot \omega_\perp \cdot$.

Remarque 1.1 *On peut définir un autre opérateur de Dirac à l'aide de la muliplication de Clifford intrinsèque et la connexion de la sous-variété tordue par celle de son fibré normal. C. Bär a ainsi posé dans [6]*

$$\begin{array}{rcl} D_M^{\Sigma N} : \Gamma(\Sigma) & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma) \\ \phi & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \sum_j X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}\phi & \textit{si } m \textit{ ou } n \textit{ est pair,} \\ \sum_j X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}\phi \oplus - \sum_j X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}\phi & \textit{si } m \textit{ et } n \textit{ sont impairs.} \end{array} \right. \end{array}$$

Sauf en codimension $n = 1$, cet opérateur ne coïncide pas *avec l'opérateur de Dirac fondamental de M.*

Via (1.8) et (1.11), les opérateurs D_H et $D_M^{\Sigma N}$ sont liés par

$$\begin{aligned} D_H\phi &= (-1)^n \omega_\perp \cdot D\phi + \frac{m}{2} H \cdot \omega_\perp \cdot \phi \\ &= D_M^{\Sigma N}\phi + \frac{m}{2} H \cdot \omega_\perp \cdot \phi, \end{aligned} \tag{1.12}$$

pour toute section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$.

1.3 Estimations de valeurs propres de D_H

1.3.1 Premières minorations

Pour chaque section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$, définissons la fonction

$$S_\phi^N := -2 \sum_{j,k=1}^{m} \Re\mathrm{e} \left(< X_j \cdot X_k \cdot \mathrm{Id} \otimes \mathrm{R}^N_{X_j, X_k}\phi, \phi/|\phi|^2 > \right) \tag{1.13}$$

sur $M_\phi := \{x \in M \ : \ \phi(x) \neq 0\}$, où $\mathrm{R}^N_{X_i, X_j}$ désigne le tenseur de courbure du fibré spinoriel normal. Nous donnons tout d'abord une nouvelle preuve du résultat suivant (cf. [35]) :

Théorème 1.1 (Hijazi-Zhang) *Soit $M^m \subset \widetilde{M}^{m+n}$ une sous-variété riemannienne spinorielle compacte d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}, g)$. Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Soit ψ un spineur propre de D_H associé à la valeur propre λ. Supposons que $m \geq 2$ et que*

$$S + S_\psi^N > m(m-1)|H|^2 > 0$$

sur M_ψ, où S est la courbure scalaire de $(M^m, g_{|M})$ et S_ψ^N est défini par (1.13). Alors

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_{M_\psi} \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(S + S_\psi^N)} - m|H| \right)^2 . \tag{1.14}$$

Démonstration : Soit ψ un spineur propre de D_H associé à la valeur propre λ. Pour une fonction réelle arbitraire q sur M, différente de $\frac{1}{m}$ en tout point, définissons la connexion modifiée suivante :

$$\nabla_X^\lambda := \nabla_X + \frac{m(1-q)}{2(1-mq)} X \cdot H \cdot + q\lambda X \cdot \omega_\perp \cdot \ .$$

D'après la formule de Lichnerowicz-Schrödinger pour l'opérateur de Dirac tordu $D_M^{\Sigma N}$ (cf. [45] par exemple),

$$\Re\mathrm{e}(< D^2\psi, \psi >) = \Re\mathrm{e}(< \nabla^*\nabla\psi, \psi >) + \frac{1}{4}(S + S_\psi^N)|\psi|^2,$$

et un calcul rapide donne

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla^\lambda\psi|^2 v_g \ &= \\ \int_M (1 + mq^2 - 2q)\Big[\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big(&\frac{S + S_\psi^N}{(1 + mq^2 - 2q)} - \frac{m^2(m-1)|H|^2}{(1 - mq)^2}\Big)\Big]|\psi|^2 v_g. \quad (1.15)\end{aligned}$$

Par hypothèse, $S + S_\psi^N > m(m-1)|H|^2 > 0$ sur M_ψ ; nous pouvons donc choisir q de sorte que

$$(1 - mq)^2 = \frac{m(m-1)|H|}{\sqrt{\frac{m}{m-1}(S + S_\psi^N)} - m|H|} \quad \text{sur } M_\psi. \tag{1.16}$$

Reportons l'équation (1.16) dans (1.15). Puisque le complémentaire de M_ψ dans M est négligeable, l'inégalité cherchée vient directement du fait que le membre de gauche de (1.15) est positif ou nul.

□

Soit κ_1 la plus petite valeur propre du champ d'endomorphismes symétriques $\mathcal{R}^N$ défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^N \ : \ \Sigma\widetilde{M}_{|M} \ &\longrightarrow \ \Sigma\widetilde{M}_{|M} \\ \phi \ &\longmapsto \ -2\sum_{i,j=1}^m X_i \cdot X_j \cdot \mathrm{Id} \otimes \mathrm{R}^N_{X_i, X_j}\phi \ .\end{aligned}$$

L'hypothèse $S + S_\psi^N > m(m-1)|H|^2 > 0$ dans le théorème 1.1 peut alors être remplacée par une condition qui ne dépend plus du spineur propre ψ :

Corollaire 1.1 *Sous les hypothèses du théorème 1.1, supposons de plus que*

$$S + \kappa_1 > m(m-1)|H|^2 > 0$$

sur M. Alors

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_M \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(S + \kappa_1)} - m|H|\right)^2 . \tag{1.17}$$

Rappelons que, dans le cas des hypersurfaces, les cas-limites sont caractérisés par l'existence d'un spineur de Killing réel sur M et le fait que la courbure moyenne H est constante (cf. [61] et [51]). Une section non nulle ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$ satisfaisant, pour une constante réelle fixée μ et pour tout champ de vecteurs X tangent à M,

$$\nabla_X\phi = -\frac{\mu}{m} X \underset{M}{\cdot} \phi,$$

sera appelée un *spineur de Killing (réel) tordu.*

Proposition 1.1 *Si l'égalité a lieu dans (1.17), alors* $(M^m, g_{|M})$ *admet un spineur de Killing réel tordu et la fonction* $|H|$ *est constante sur* M.

Démonstration : Soit ψ un spineur propre de D_H associé à la valeur propre λ. Si le cas-limite a lieu dans (1.17), alors le membre de droite doit être constant sur M, et

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{m}{m-1}(S+\kappa_1)} - m|H|)^2\,, \qquad \nabla^\lambda\psi = 0, \quad \text{sur } M. \tag{1.18}$$

Remarquons que l'égalité est aussi vérifiée dans (1.14), ce qui entraine $S_\psi^N = \kappa_1$. Par suite, ψ est un spineur propre de $\mathcal{R}^N$ associé à la valeur propre κ_1. Grâce à (1.18), on montre que $|\psi|$ doit être constante sur M (ainsi $M_\psi = M$). De plus,

$$\begin{aligned} D\psi &= -\sum_{j=1}^m X_j \cdot \Big(\frac{m(1-q)}{2(1-mq)}\,X_j\cdot H\cdot\psi + q\lambda X_j\cdot\omega_\perp\cdot\psi\Big) \\ &= \frac{m^2(1-q)}{2(1-mq)}H\cdot\psi + mq\lambda\omega_\perp\cdot\psi\,. \end{aligned}$$

Par (1.11) et le fait que $H\cdot\omega_\perp\cdot = (-1)^{n-1}\omega_\perp\cdot H\cdot$,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda\omega_\perp\cdot\psi + m\frac{H}{2}\cdot\psi - \frac{m^2(1-q)}{2(1-mq)}H\cdot\psi - mq\lambda\omega_\perp\cdot\psi \\ 0 &= (1-mq)^2\lambda\omega_\perp\cdot\psi - m(m-1)\frac{H}{2}\cdot\psi\,. \end{aligned}$$

Puisque, dans le cas d'égalité, $\sqrt{\frac{m}{m-1}(S+\kappa_1)} - m|H| = 2|\lambda|$, nous pouvons déduire la relation :

$$\omega_\perp\cdot\psi = \mathrm{sgn}(\lambda)\frac{H}{|H|}\cdot\psi.$$

Utilisant l'isomorphisme (1.7), l'équation (1.18) peut être réécrite intrinsèquement sur $\Gamma(\Sigma)$: pour tout champ de vecteurs X tangent à M,

$$\begin{aligned} \nabla_X\psi &= -\frac{\mu}{m}X \underset{M}{\cdot} \psi \\ \text{avec} \quad \mu &= \frac{\mathrm{sgn}(\lambda)}{2}\sqrt{\frac{m}{m-1}(S+\kappa_1)}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, s'il existe deux fonctions réelles lisses f et κ sur M, ainsi qu'une section non nulle ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$ satisfaisant, pour tout champ de vecteurs X sur M,

$$\nabla_X\phi = -\frac{f}{m}X \underset{M}{\cdot} \phi \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^N\phi = \kappa\phi\,,$$

alors, d'après le calcul de l'action du tenseur de courbure sur ϕ, il vient nécessairement

$$\frac{1}{2}\mathrm{Ric}(X) \underset{M}{\cdot} \phi + \sum_{i=1}^m (X_i\cdot\mathrm{Id}\otimes\mathrm{R}^N_{X,X_i})\phi = -\frac{1}{m}\mathrm{d}f \underset{M}{\cdot} X \underset{M}{\cdot} \phi - \mathrm{d}f(X)\phi + 2\frac{m-1}{m^2}f^2 X \underset{M}{\cdot} \phi.$$

Cette égalité entraine

$$f^2 = \frac{m}{4(m-1)}(S+\kappa) = \text{constante}.$$

De plus, dans le cas-limite, si f est constante, alors la fonction $|H|$ est aussi constante.

$\square$

Remarque 1.2 *Si le tenseur de courbure normal s'annule, alors la fonction μ doit être constante et la variété M d'Einstein avec son vecteur courbure moyenne de norme constante. En outre, le cas-limite correspond exactement à celui de l'inégalité de Friedrich. Par conséquent μ est la plus petite valeur propre de l'opérateur de Dirac $D_M^{\Sigma N}$.*

1.3.2 Minorations en fonction du tenseur d'énergie-impulsion

Soit ϕ une section de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$. Le *tenseur énergie-impusion* associé à ϕ, noté Q^ϕ, est défini sur M_ϕ par :

$$Q^\phi(X,Y) := \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left(< X\cdot\omega_\perp\cdot\nabla_Y\phi + Y\cdot\omega_\perp\cdot\nabla_X\phi, \phi/|\phi|^2 >\right),$$

pour tous champs de vecteurs X et Y tangents à M. Remarquons que

$$Q^\phi(X,Y) = \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left(< X \underset{M}{\cdot} \nabla_Y\phi + Y \underset{M}{\cdot} \nabla_X\phi, \phi/|\phi|^2 >\right).$$

Le tenseur Q^ϕ est ainsi le tenseur énergie-impulsion *intrinsèque* associé à ϕ. C'est ce dernier tenseur qui apparaît dans l'équation d'Einstein-Dirac (cf. [22]). Nous allons montrer que Q^ϕ joue un rôle naturel dans les minorations de valeurs propres de D_H (comparer avec [51]) :

Théorème 1.2 *Soit $M^m \subset \widetilde{M}^{m+n}$ une sous-variété riemannienne spinorielle compacte d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}, g)$. Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Soit ψ un spineur propre de D_H associé à la valeur propre λ. Supposons que*

$$S + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > m^2|H|^2 > 0$$

sur M_ψ. Alors

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_{M_\psi}\left(\sqrt{S+\kappa_1+4|Q^\psi|^2} - m|H|\right)^2. \tag{1.19}$$

Démonstration : Soit ψ un spineur propre de D_H associé à la valeur propre λ. Pour une fonction réelle lisse q qui ne s'annule en aucun point de M, considérons la dérivée covariante suivante, définie sur $\Gamma(\Sigma\widetilde{M}_{|M})$ par

$$\nabla_X^Q := \nabla_X - \frac{1}{2q}X\cdot H\cdot + (-1)^{n+1}q\lambda X\cdot\omega_\perp\cdot + Q^\psi(X)\cdot\omega_\perp\cdot\ .$$

Comme dans la preuve du théorème 1.1, évaluons $\int_M |\nabla^Q\psi|^2 v_g$:

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla^Q\psi|^2 v_g &= \int_M (1+mq^2)\Big[\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{S+S_\psi^N+4|Q^\psi|^2}{(1+mq^2)} - \frac{m|H|^2}{q^2}\Big)\Big]|\psi|^2 v_g\\ &- \frac{1}{4}\int_M (1+mq^2)\Big[\frac{2m}{q(1+mq^2)}(|H|^2 - \frac{< H\cdot\psi, \omega_\perp\cdot\psi >^2}{|\psi|^4})\Big]|\psi|^2 v_g.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Sous l'hypothèse $S + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > |H|^2 > 0$, posons

$$q := \sqrt{\frac{|H|}{\sqrt{S+\kappa_1+4|Q^\psi|^2} - m|H|}}\ .$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|H|^2 - \frac{< H \cdot \psi, \omega_\perp \cdot \psi >^2}{|\psi|^4} \geq 0, \tag{1.21}$$

ce qui, par application du même argument que dans le preuve du théorème (1.1), achève celle du théorème (1.2).

□

Supposons maintenant que (3.2) est une égalité. Alors, pour le spineur propre ψ considéré,

$$\nabla^Q \psi = 0 \quad , \quad |\lambda| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{S + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - m|H|\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^N \psi = \kappa_1 \psi \ .$$

En outre,

$$|H|^2 - \frac{< H \cdot \psi, \omega_\perp \cdot \psi >^2}{|\psi|^4} = 0,$$

si bien que, d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\omega_\perp \cdot \psi = fH \cdot \psi,$$

pour une fonction réelle f sur M. Comme dans le paragraphe précédent, nous en déduisons que $f = \frac{\mathrm{sgn}(\lambda)}{|H|}$, et que la section ψ satisfait

$$\nabla_X \psi = -Q^\psi(X) \underset{M}{\cdot} \psi. \tag{1.22}$$

Par suite, le spineur ψ peut être vu comme un "spineur énergie-impulsion" (cf. [51]). Nous appellerons une telle section un *EM-spineur tordu* ("EM" pour "Energy-Momentum"). Le calcul de l'action du tenseur de courbure de $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$ sur ψ fournit une condition d'intégrabilité pour l'existence d'un EM-spineur tordu :

$$(\mathrm{tr}(Q^\psi))^2 = \frac{1}{4}(S + S^N_\psi + 4|Q^\psi|^2).$$

Cette relation implique, avec l'équation (1.22), que la section ψ est un "spineur propre" de $D_M^{\Sigma N}$ associé à la fonction $\pm\frac{1}{2}\sqrt{S + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2}$. Remarquons que cette fonction est constante si et seulement si $|H|$ est constante.

1.3.3 Minorations conformes

Considérons maintenant un changement conforme de métrique $\overline{g} := e^{2u}g$, où u est une fonction réelle lisse sur $\widetilde{M}$. Soit

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\widetilde{M}_{|_M} & \longrightarrow & \Sigma_{\overline{g}}\widetilde{M}_{|_M} \\ \phi & \longmapsto & \overline{\phi} \end{array} \tag{1.23}$$

l'isomorphisme unitaire induit entre les deux fibrés des spineurs correspondants. Rappelons que, si ϕ, ψ sont deux sections de $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$, et Z un champ de vecteurs sur $\widetilde{M}$, alors

$$< \phi, \psi > = < \overline{\phi}, \overline{\psi} >_{\overline{g}} \quad \text{et} \quad \overline{Z} \,\bar{\cdot}\, \overline{\phi} = \overline{Z \cdot \phi},$$

où $\overline{Z} = e^{-u}Z$. Nous noterons également $\overline{g} = (e^{2u}g)_{|M}$ la restriction de $\overline{g}$ à M.
Cet isomorphisme commute avec l'isomorphisme (1.7). De plus, pour toute section ϕ de Σ et tout champ de vecteurs X tangent à M,

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{\phi} = \overline{\nabla_X\phi} - \frac{1}{2}\,\overline{X\cdot \mathrm{d}u\cdot\phi} - \frac{1}{2}X(u)\,\overline{\phi},$$

avec $\overline{X} = e^{-u}X$. La propriété de covariance conforme de l'opérateur de Dirac s'en déduit : pour toute section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$,

$$\overline{D}\Big(\,e^{-\frac{(m-1)}{2}u}\,\overline{\phi}\,\Big) = e^{-\frac{(m+1)}{2}u}\,\overline{D\phi}, \tag{1.24}$$

où $\overline{D}$ désigne l'opérateur de Dirac D de $(M, \overline{g})$. D'autre part, les champs de courbure moyenne H et $\widetilde{H}$ pour les métriques respectives g et $\overline{g}$ sont liés par :

$$\widetilde{H} = e^{-2u}\Big(H - \mathrm{grad}^N u\Big). \tag{1.25}$$

Supposons que $\mathrm{grad}^N u = 0$. Si $\overline{D}_H$ est l'opérateur D_H pour la métrique $\overline{g}$, les équations (1.24) et (1.25) impliquent que $\overline{D}_H$ est covariant conforme, i.e.,

$$\overline{D}_H\,\Big(\,e^{-\frac{(m-1)}{2}u}\,\overline{\phi}\,\Big) = e^{-\frac{(m+1)}{2}u}\,\Big(\,\overline{D_H\phi}\,\Big) \tag{1.26}$$

pour toute section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$.
Désormais, nous nous restreignons à des changements conformes *réguliers* de métrique, i.e., $\overline{g} = e^{2u}g$, avec $\mathrm{grad}^N u = 0$ sur M.

Théorème 1.3 *Soit $M^m \subset \widetilde{M}^{m+n}$ une sous-variété riemannienne spinorielle compacte d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}, g)$. Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Soit ψ un spineur propre de D_H associé à la valeur propre λ. Supposons que, pour chaque changement conforme régulier de métrique $\overline{g} := e^{2u}g$ sur $\widetilde{M}$,*

$$\overline{S}e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > m^2|H|^2 > 0$$

sur M_ψ. Alors

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\,\inf_{M_\psi}\left(\sqrt{\overline{S}e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2} - m|H|\right)^2. \tag{1.27}$$

Démonstration : Soit ψ un spineur propre de D_H associé à la valeur propre λ et posons $\overline{\varphi} := e^{-\frac{n-1}{2}u}\,\overline{\psi}$. La relation (1.26) donne $\overline{D}_H\overline{\varphi} = \lambda e^{-u}\overline{\varphi}$. De plus, pour tous champs de vecteurs X et Y tangents à M : $\overline{Q}^{\overline{\varphi}}(\overline{X}, \overline{Y}) = e^{-u}Q^\psi(X, Y)$, et par suite

$$|\overline{Q}^{\overline{\varphi}}|^2 = e^{-2u}|Q^\psi|^2\,. \tag{1.28}$$

L'identité (1.20), également valable sur $(\widetilde{M}, \overline{g})$, peut être appliquée à $\overline{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\int_M |\overline{\nabla}^{\overline{Q}}\overline{\varphi}|^2 v_{\overline{g}} \;&=\; \int_M (1+mq^2)\Big[(\lambda e^{-u})^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\overline{S} + \overline{S}^N_{\overline{\varphi}} + 4|\overline{Q}^{\overline{\varphi}}|^2}{(1+mq^2)} - \frac{m|\widetilde{H}|^2_{\overline{g}}}{q^2}\Big)\Big]|\overline{\varphi}|^2_{\overline{g}}\,v_{\overline{g}}\\ &-\; \frac{1}{4}\int_M (1+mq^2)\Big[\frac{2m}{q(1+mq^2)}(|\widetilde{H}|^2_{\overline{g}} - \frac{<\widetilde{H}\,\bar{\cdot}\,\overline{\varphi}, \overline{\omega_\perp}\,\bar{\cdot}\,\overline{\varphi}>^2_{\overline{g}}}{|\varphi|^4_{\overline{g}}})\Big]|\overline{\varphi}|^2_{\overline{g}}\,v_{\overline{g}}\,.\end{aligned}$$

Puisque $\widetilde{H} = e^{-u}\overline{H}$ et $\overline{S}^N_{\overline{\varphi}} = e^{-2u}S^N_{\psi}$,

$$\begin{aligned}\int_M |\overline{\nabla}^{\overline{Q}}\overline{\varphi}|^2 v_{\overline{g}} &= \int_M (1+mq^2)e^{-2u}\Big[\lambda^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\overline{S}e^{2u} + S^N_{\psi} + 4|Q^{\psi}|^2}{(1+mq^2)} - \frac{m|H|^2}{q^2}\Big)\Big]|\overline{\varphi}|^2 v_{\overline{g}} \\ &- \frac{1}{4}\int_M (1+mq^2)e^{-2u}\Big[\frac{2m}{q(1+mq^2)}(|H|^2 - \frac{< H\cdot\psi, \omega_{\perp}\cdot\psi >^2}{|\psi|^4})\Big]|\overline{\varphi}|^2 v_{\overline{g}}\ .\end{aligned}$$

Comme dans la preuve du théorème 1.2, posons

$$q := \sqrt{\frac{|H|}{\sqrt{\overline{S}e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^{\psi}|^2} - m|H|}}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraine immédiatement le résultat.

□

Si l'hypothèse dans le théorème 1.3 est satisfaite par une fonction propre u_1 associée à la première valeur propre μ_1 de l'opérateur de Yamabe, nous obtenons les corollaires suivants :

Corollaire 1.2 *Sous les hypothèses du théorème 1.3, supposons de plus que $m \geq 3$ et que $\mu_1 + \kappa_1 + 4|Q^{\psi}|^2 > m^2|H|^2 > 0$ sur M_{ψ}. Alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_{M_{\psi}}\Big(\sqrt{\mu_1 + \kappa_1 + 4|Q^{\psi}|^2} - m|H|\Big)^2.$$

Corollaire 1.3 *Sous les hypothèses du théorème 1.3, si M est une surface compacte de genre zéro vérifiant $\frac{8\pi}{\mathrm{Aire}(M)} + \kappa_1 + 4|Q^{\psi}|^2 > 4|H|^2 > 0$ sur M_{ψ}. Alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_{M_{\psi}}\left(\sqrt{\frac{8\pi}{\mathrm{Aire}(M)} + \kappa_1 + 4|Q^{\psi}|^2} - 2|H|\right)^2.$$

Supposons maintenant que l'égalité a lieu dans (1.27). Alors, pour $\overline{\varphi} := e^{-\frac{n-1}{2}u}\,\overline{\psi}$, où ψ est un spineur propre de D_H associé à la valeur propre λ,

$$\begin{gathered}\overline{\nabla}^{\overline{Q}}\overline{\varphi} = 0\ , \qquad \omega_{\perp}\cdot\psi = \varepsilon\tfrac{H}{|H|}\cdot\psi \quad \text{où } \varepsilon \in \{\pm 1\}\ , \\ |\lambda| = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\overline{S}e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^{\psi}|^2} - m|H|\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}^N\psi = \kappa_1\psi\ .\end{gathered}$$

D'après (1.23) et (1.28), il vient $\varepsilon = \mathrm{sgn}(\lambda)$ et

$$\nabla_X\psi = \frac{1}{2}X \underset{M}{\cdot} du \underset{M}{\cdot} \psi + \frac{m}{2}du(X)\psi - Q^{\psi}(X) \underset{M}{\cdot} \psi \tag{1.29}$$

avec $du = \frac{2d(\ln(|\psi|))}{m-1}$. Les spineurs non nuls solutions de l'équation (1.29) seront, par comparaison avec [51], naturellement appelés des *WEM-spineurs tordus* ("WEM" pour "Weak Energy-Momentum").

1.4 Remarque finale

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que le fibré normal d'une sous-variété peut être remplacé par un fibré vectoriel auxiliaire quelconque. En particulier, tous les calculs précédents peuvent être effectués intrinsèquement pour un opérateur de Dirac tordu défini sur la variété.
Soit (M^m, g) une variété riemannienne spinorielle compacte. Soit $E \to M$ un fibré vectoriel riemannien de rang n sur M. Supposons E muni d'une connexion métrique ∇^E ainsi que d'une structure spinorielle. Soit ΣM (resp. ΣE) le fibré des spineurs de M (resp. de E). Posons

$$\Sigma := \Sigma M \otimes \Sigma E.$$

La multiplication de Clifford d'un spineur ϕ dans Σ par un vecteur tangent X à M est définie par :

$$X \cdot \phi := (\gamma_M(X) \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma E})(\phi).$$

Définissons la dérivée covariante produit tensoriel ∇ sur $\Gamma(\Sigma)$ par

$$\nabla := \nabla^{\Sigma M} \otimes \mathrm{Id}_{\Sigma E} + \mathrm{Id}_{\Sigma M} \otimes \nabla^{\Sigma E},$$

où $\nabla^{\Sigma M}$ et $\nabla^{\Sigma E}$ désignent les dérivées covariantes induites sur $\Gamma(\Sigma M)$ et $\Gamma(\Sigma E)$ respectivement. Soit $D_M^{\Sigma E}$ l'opérateur de Dirac tordu défini dans une base orthonormée locale $(X_j)_{1 \leq j \leq m}$ de TM par :

$$\begin{array}{rcl} D_M^{\Sigma E} : \Gamma(\Sigma) & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma) \\ \phi & \longmapsto & D_M^{\Sigma E}\phi := \displaystyle\sum_{j=1}^{m} X_j \cdot \nabla_{X_j}\phi. \end{array}$$

Pour une fonction réelle lisse f sur M, définissons l'opérateur de Dirac tordu "modifié"

$$D_f := D_M^{\Sigma E} - \frac{f}{2}.$$

Pour un réel λ, considérons les dérivées covariantes "modifiées" suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\nabla}_X^{\lambda} & := & \nabla_X + \dfrac{(1-q)f}{2(1-mq)} X \cdot + q\lambda X \cdot \\ \widehat{\nabla}_X^{Q} & := & \nabla_X - \dfrac{f}{2mq} X \cdot + (-1)^{n+1} q\lambda X \cdot + Q^{\psi}(X) \cdot \end{array}$$

où Q^{ψ} désigne désormais le tenseur énergie-impulsion intrinsèque associé à ψ.
Remarquons que ces dérivées covariantes s'obtiennent à partir de celles définies dans les paragraphes 1.3.1, 1.3.2 et 1.3.3 sous la condition supplémentaire

$$H \cdot \psi = f\omega_{\perp} \cdot \psi.$$

Cette dernière hypothèse est inévitable lorsque l'on veut donner un sens intrinsèque aux dérivées covariantes "modifiées" précédemment définies. Des calculs identiques à ceux menés dans les démonstrations des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 débouchent sur les résultats suivants :
Soit (M^m, g) une variété riemannienne spinorielle compacte munie d'un fibré vectoriel riemannien spinoriel $E \to M$ de rang n. Soit ψ un spineur propre de l'opérateur de Dirac D_f associé à la valeur propre λ :

Proposition 1.2 *Supposons que $m \geq 2$ et que $m(S+\kappa_1) > (m-1)f^2 > 0$ sur M. Alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_M \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(S+\kappa_1)} - |f| \right)^2 .$$

Si de plus l'égalité a lieu, (M^m, g) admet un spineur de Killing tordu.

Comme dans le paragraphe 1.3.3, la proposition précédente s'étend en considérant un changement conforme de métrique sur M. Remarquons seulement que, pour le cas-limite, $Q^\psi = \frac{1}{m}\mathrm{tr}(Q^\psi)g$ pour un spineur propre ψ.

Proposition 1.3 *Supposons que $m \geq 2$ et que, pour chaque métrique conforme $\overline{g} = e^{2u}g$ sur M, $m(\overline{S}e^{2u} + \kappa_1) > (m-1)f^2 > 0$ sur M. Alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_M \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}(\overline{S}e^{2u}+\kappa_1)} - |f| \right)^2 .$$

Si de plus l'égalité a lieu, (M^m, g) admet un WEM-spineur tordu ψ avec $Q^\psi = \frac{\mu}{m}g$, où

$$\mu^2 := \frac{1}{4}\frac{m}{m-1}(\overline{S}e^{2u}+\kappa_1) .$$

Proposition 1.4 *Supposons que $S + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > f^2 > 0$ sur M_ψ. Alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_{M_\psi} \left(\sqrt{S+\kappa_1+4|Q^\psi|^2} - |f| \right)^2 .$$

Si de plus l'égalité a lieu, (M^m, g) admet un EM-spineur tordu.

Proposition 1.5 *Supposons que, pour chaque métrique conforme $\overline{g} = e^{2u}g$ sur M, $\overline{S}e^{2u} + \kappa_1 + 4|Q^\psi|^2 > f^2 > 0$ sur M_ψ. Alors*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \inf_{M_\psi} \left(\sqrt{\overline{S}e^{2u}+\kappa_1+4|Q^\psi|^2} - |f| \right)^2 .$$

Si de plus l'égalité a lieu, $(M^m, \overline{g})$ admet un WEM-spineur tordu.

Remarques 1.1

1. *En supposant le tenseur de courbure normal nul et la fonction f constante, les conditions nécessaires d'égalité dans les propositions 1.2 à 1.5 deviennent suffisantes. En outre, si m est impair, l'opérateur de Dirac considéré doit éventuellement être défini à l'aide de la multiplication de Clifford opposée selon le signe de f.*
2. *Nous remercions C. Bär pour la remarque suivante : toutes les inégalités apparaissant dans les hypothèses des précédents théorèmes n'ont pas besoin d'être supposées strictes. Par exemple, le choix d'une fonction adaptée q_ε dépendant continûment d'un paramètre $\varepsilon > 0$, au lieu de q, permet d'obtenir les inégalités lorsque ε tend vers 0.*

Chapitre 2

Hypersurfaces des variétés admettant des spineurs de Killing imaginaires

2.1 Introduction

Soit $(M,\, g)$ une variété riemannienne compacte (connexe) de dimension m isométriquement immergée dans l'un des trois espaces-forme $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{m+1}$ (l'espace euclidien), S^{m+1} (la sphère ronde de courbure sectionnelle 1), ou $\mathbb{H}^{m+1}$ (l'espace hyperbolique de courbure sectionnelle -1). Considérons le problème suivant : comment majorer de façon optimale la plus petite valeur propre λ_1 de l'opérateur de Dirac fondamental de M ?

Différents auteurs se sont penchés sur ce problème (voir [3], [10], [15], [6]). Récemment, C. Bär a donné des majorations optimales pour les hypersurfaces de $\mathbb{R}^{m+1}$ et S^{m+1}. Les majorants obtenus dépendent de la norme L^2 de la courbure moyenne H de l'immersion ainsi que de la courbure ambiante. Plus précisément, l'auteur a montré les résultats suivants ([6], Theorem 4.1) :

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &\leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M H^2 v_g\,, &&\text{si } \widetilde{M} = \mathbb{R}^{m+1}, \qquad \text{et} \\ \lambda_1^2 &\leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M (H^2+1) v_g\,, &&\text{si } \widetilde{M} = S^{m+1}, \end{aligned}$$

l'égalité étant atteinte pour les sphères géodésiques.
En revanche, si M est immergée dans $\mathbb{H}^{m+1}$, C. Bär a prouvé que ([6], Theorem 4.4) :

$$|\lambda_1| \leq \frac{m}{2}(||H||_\infty + 1),$$

majoration qui n'est pas optimale : pour les sphères géodésiques de rayon r, l'inégalité est stricte, et $\lim\limits_{r\to 0} \frac{2|\lambda_1|}{m(||H||_\infty+1)} = 1$ ([6], p. 590). Une autre estimation en termes de la norme L^2 de la courbure moyenne et du rayon extrinsèque de l'hypersurface a été donnée par le même auteur ([6], p. 587), mais son cas-limite n'est atteint par aucune hypersurface.
Dans ce chapitre, nous approfondissons ce cas en vue d'une nouvelle majoration optimale pour λ_1. Nous démontrons le théorème suivant, qui tient lieu d'analogue à celui établi par E. Heintze pour le laplacien scalaire ([27]) :

Théorème 2.1 *Soit (M, g) une hypersurface riemannienne (immergée) compacte et orientée de $\mathbb{H}^{m+1}$. Munissons M de la structure spinorielle induite. Alors la plus petite valeur propre λ_1 de l'opérateur de Dirac fondamental de M satisfait :*

$$(\lambda_1)^2 \leq \frac{m^2}{4}\left(||H||_\infty^2 - 1\right). \tag{2.1}$$

Remarquons que les sphères géodésiques satisfont l'égalité dans (2.1).

Dans le paragraphe 2.2, nous rappelons les propriétés de base du fibré des spineurs restreint. Par application du principe du Min-Max, nous démontrons alors dans le paragraphe 2.3 une estimation lorsque la variété ambiante admet un spineur de Killing imaginaire. Puisque l'espace hyperbolique admet de tels spineurs, l'inégalité (2.1) en découle.
La difficulté dans cette approche réside dans le fait que, contrairement à celle des spineurs de Killing réels, la norme d'un spineur de Killing imaginaire *n'est pas* constante sur la variété. On ne peut même pas la supposer constante sur l'hypersurface, car si c'est le cas l'hypersurface doit être totalement ombilique (cf. paragraphe 2.4).

2.2 Spineurs et opérateurs de Dirac sur une hypersurface orientée

Pour ces préliminaires sur les spineurs et les opérateurs de Dirac, nous nous référons à [45], [14], [21], [11], et [58]. On pourra aussi voir [51] pour un traitement récent de ces questions.
Soit $\iota : M \longrightarrow (\widetilde{M}, g)$ une immersion d'une hypersurface connexe et orientée M dans une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}, g)$. Nous supposerons toujours la dimension m de M supérieure ou égale à 2. Soit $\nu : M \longrightarrow NM$ la section unitaire du fibré normal NM telle que, pour toute base directe $(X_1, \ldots, X_m)$ de TM, la base $(X_1, \ldots, X_m, \nu)$ de $T\widetilde{M}|_M$ soit directe. Soit A l'endomorphisme de Weingarten de l'immersion ι, défini par $A := -\widetilde{\nabla}\nu$. Nous munissons M de la métrique induite que nous notons g, de norme associée "$|\cdot|$", d'élément de volume v_g et, lorsque M est compacte, de volume total $\mathrm{Vol}(M)$. Soient ∇ et $\widetilde{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita respectives de (M, g) et de $(\widetilde{M}, g)$.
Le fibré normal étant trivialisé par ν, la variété (M, g) admet une structure spinorielle. Notons ΣM (resp. $\Sigma\widetilde{M}$) le fibré vectoriel des spineurs de (M, g) (resp. de $(\widetilde{M}, g)$). Posons

$$\Sigma := \begin{cases} \Sigma M & \text{si } m \text{ est pair} \\ \Sigma^0 M \oplus \Sigma^1 M & \text{si } m \text{ est impair,} \end{cases}$$

où, pour m impair et j dans $\{0, 1\}$, $\Sigma^j M$ désigne le fibré vectoriel des spineurs sur M sur lequel la forme volume complexe agit par $(-1)^j \mathrm{Id}$. Nous notons "$\underset{M}{\cdot}$" (resp. "$\cdot$") la multiplication de Clifford sur Σ (resp. sur $\Sigma\widetilde{M}|_M$).
Le fibré vectoriel Σ peut être muni d'un produit scalaire hermitien, noté $< \cdot\,, \cdot >$, ainsi que d'une dérivée covariante ∇, qui satisfont les propriétés suivantes, pour tous champs de vecteurs X et Y sur M et pour toutes sections ψ et ϕ de Σ :

– $< X \underset{M}{\cdot} \psi \,,\, \phi > = - < \psi \,,\, X \underset{M}{\cdot} \phi >$
– $X\,(< \psi \,,\, \phi >) = < \nabla_X \psi \,,\, \phi > + < \psi \,,\, \nabla_X \phi >$
– $\nabla_X \left(Y \underset{M}{\cdot} \phi \right) = \nabla_X Y \underset{M}{\cdot} \phi + Y \underset{M}{\cdot} \nabla_X \phi.$

Le fibré vectoriel $\Sigma\widetilde{M}$ (et par conséquent $\Sigma\widetilde{M}|_M$) peut aussi être muni d'une dérivée covariante $\widetilde{\nabla}$ et d'un produit scalaire hermitien satisfaisant les mêmes propriétés.

Il existe un isomorphisme de Σ sur $\Sigma\widetilde{M}|_M$,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & \Sigma\widetilde{M}|_M \\ \phi & \longmapsto & \phi, \end{array} \tag{2.2}$$

qui satisfait, pour tout champ de vecteur X sur M et pour toute section ϕ de Σ :

– $X \underset{M}{\cdot} \phi$ est envoyé sur $X \cdot \nu \cdot \phi$.
– Cet isomorphisme est unitaire par rapport aux produits scalaires hermitiens respectifs
– Vis-à-vis des dérivées covariantes ∇ et $\widetilde{\nabla}$:

$$\widetilde{\nabla}_X \phi = \nabla_X \phi + \frac{1}{2} A(X) \cdot \nu \cdot \phi. \tag{2.3}$$

Les produits scalaires hermitiens sur Σ et $\Sigma\widetilde{M}|_M$ seront par suite notés de la même manière, ainsi que la norme associée "$|\cdot|$". Remarquons cependant que cet isomorphisme n'est pas unique, et qu'il ne préserve pas les dérivées covariantes comme l'indique (2.3).

L'isomorphisme (2.2) peut aussi être choisi de sorte que l'action de $i\nu$ sur $\Sigma\widetilde{M}|_M$ induise un champ d'endomorphismes sur Σ satisfaisant, pour tout champ de vecteurs X tangent à M et toute section ϕ de Σ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\nu)^2 = \mathrm{Id} \\ |i\nu \cdot \phi| = |\phi| \\ i\nu \cdot (X \underset{M}{\cdot} \phi) = -X \underset{M}{\cdot} (i\nu \cdot \phi) \\ \nabla_X (i\nu \cdot \phi) = i\nu \cdot \nabla_X \phi \end{array} \right.$$

Si m est pair, le fibré vectoriel Σ se scinde sous l'action de la forme volume complexe en $\Sigma = \Sigma^+ \oplus \Sigma^-$, et l'action de $i\nu$ est donnée par :

$$i\nu \cdot (\phi^+ + \phi^-) = \phi^+ - \phi^-, \text{ où } \phi^\pm \in \Sigma^\pm.$$

Si m est impair, et si $\mathcal{T} : \Sigma^0 M \longrightarrow \Sigma^1 M$ est l'isomorphisme induit par l'équivalence des représentations spinorielles, l'action de $i\nu$ est donnée par

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & \mathcal{T}^{-1} \\ \mathcal{T} & 0 \end{array} \right).$$

Dans une base orthonormée locale $(X_j)_{1 \leq j \leq m}$ de TM, soit D et $\widehat{D}$ les opérateurs définis par :

$$D := \sum_{j=1}^m X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}, \qquad \widehat{D} := \sum_{j=1}^m X_j \cdot \widetilde{\nabla}_{X_j}.$$

L'opérateur $\widehat{D}$ est appelé *l'opérateur de Dirac-Witten* (cf. [61]). Ces deux opérateurs, agissant respectivement sur les sections de Σ et $\Sigma\widetilde{M}|_M$, sont liés par

$$\widehat{D}\phi = \nu \cdot \left(D\phi - \frac{mH}{2}\phi \right), \tag{2.4}$$

pour toute section ϕ de Σ, où $H := \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} g(A(X_j)\,,\, X_j)$ est la courbure moyenne de l'immersion ι.

Remarque 2.1 *Si m est pair, l'opérateur D coïncides avec l'opérateur de Dirac D_M de la variété (M, g). Cependant, si m est impair, via l'isomorphisme $\Sigma^0 M \xrightarrow{\mathcal{T}} \Sigma^1 M$, et en notant D_M l'opérateur de Dirac (M, g) agissant sur les sections de $\Sigma^0 M$,*

$$D = D_M \oplus -D_M,$$

c'est-à-dire

$$\forall \phi^0, \psi^0 \in \Gamma(\Sigma^0 M), \quad D\left(\phi^0 \oplus \mathcal{T}(\psi^0)\right) = D_M\phi^0 \oplus -\mathcal{T}(D_M\psi^0).$$

Lorsque M est compacte, si $(\cdot,\cdot) := \int_M < \cdot\,, \cdot > v_g$, de norme associée $||\cdot||$, l'opérateur D est formellement auto-adjoint par rapport à $(\cdot,\cdot)$: pour toutes sections ψ et ϕ de Σ,

$$(D\psi, \phi) = (\psi, D\phi).$$

Les valeurs propres de D sont donc réelles.

Lemme 2.1 *Le spectre de D est symétrique par rapport à l'origine.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que, pour toute section ϕ de Σ,

$$D\left(i\nu \cdot \phi\right) = -i\nu \cdot \left(D\phi\right),$$

par conséquent si ϕ est un spineur propre de D associé à la valeur propre λ, alors $i\nu \cdot \phi$ est un spineur propre de D associé à la valeur propre $-\lambda$.

□

Remarque 2.2 *Si m est impair, toute valeur propre de D_M est une valeur propre de D. Cependant, si λ est une valeur propre de D, alors λ* ou *$-\lambda$ est une valeur propre de D_M.*

Lorsque M est compacte, l'opérateur D étant elliptique, ses valeurs propres positives ou nulles forment une suite croissante non bornée. La suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ des valeurs propres de D (comptées avec multiplicité) sera en conséquence numérotée par ordre croissant des valeurs absolues :

$$0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}| \leq \ldots.$$

2.3 Majorations de valeurs propres lorsque la variété ambiante admet des spineurs de Killing imaginaires

Nous supposons M compacte et connexe. Afin de majorer les petites valeurs propres de D, nous allons utiliser la proposition bien connue suivante :

Proposition 2.1 (Principe du Min-Max) *Pour tout entier k supérieur ou égal à 1,*

$$\lambda_k^2 = \underset{E_k \subset \Gamma(\Sigma)}{Min} \Big\{ \underset{\phi \in E_k \setminus \{0\}}{Max} \{ \frac{(D^2\phi, \phi)}{||\phi||^2} \} \Big\},$$

où le minimum est pris sur tous les sous-espaces vectoriels E_k de dimension k de $\Gamma(\Sigma)$.

L'application de ce principe est conditionnée au choix d'un sous-espace E_k de sections de Σ (appelées sections-test), sur lequel est évalué le quotient de Rayleigh $\frac{(D^2\phi,\phi)}{||\phi||^2}$. Les trois espaces modèles portent des spineurs particuliers dont la restriction à M forment des spineurs-test naturels, à savoir des spineurs de Killing. Rappelons qu'étant donnée une constante complexe α, un α-spineur de Killing sur $(\widetilde{M}, g)$ est une section ψ de $\Sigma\widetilde{M}$ satisfaisant, pour tout champ de vecteurs Z sur $\widetilde{M}$,

$$\widetilde{\nabla}_Z \psi = \alpha Z \cdot \psi.$$

Si une telle section non nulle existe, le nombre α doit être réel ou imaginaire pur, et la variété $(\widetilde{M}, g)$ être d'Einstein à courbure scalaire constante égale à $4m(m+1)\alpha^2$ ([11], [21]). Un spineur de Killing n'admet pas de zéro puisqu'est une section parallèle pour la dérivée covariante $Z \mapsto \widetilde{\nabla}_Z - \alpha Z \cdot$. Il existe cependant d'importantes différences entre les spineurs de Killing réels et imaginaires, particulièrement concernant la norme $|\psi|$ d'un tel spineur : cette fonction est constante sur $\widetilde{M}$ lorsque α est réel, alors qu'elle ne peut être constante lorsque α est imaginaire pur.
L'espace euclidien et la sphère ronde admettent des spineurs de Killing réels ; ceux-ci sont parallèles sur $\mathbb{R}^{m+1}$ (i.e. $\alpha = 0$), et sont des $\pm\frac{1}{2}$-spineurs de Killing sur S^{m+1}. C'est en calculant le quotient de Rayleigh sur de tels spineurs que C. Bär a obtenu des majorations optimales pour les hypersurfaces de $\mathbb{R}^{m+1}$ ou S^{m+1} ([6], Corollaries 4.2 et 4.3).
Par opposition aux deux autres espaces-forme, l'espace hyperbolique admet des $\pm\frac{i}{2}$-spineurs de Killing. L'idée qui se présente naturellement consiste à reprendre la méthode précédente et remplacer un spineur de Killing réel par un spineur de Killing imaginaire. Nous y ajoutons cependant un raffinement en comparant les *carrés* des opérateurs de Dirac et Dirac-Witten. Cette relation permet une évaluation rapide du quotient de Rayleigh calculé sur la restriction d'un spineur de Killing imaginaire.

Lemme 2.2 *Pour toute section ϕ de Σ,*

$$D^2\phi = \widehat{D}^2\phi + \frac{m}{2} dH \cdot \nu \cdot \phi + \frac{m^2 H^2}{4}\phi.$$

Démonstration : Dans une base orthonormée locale $(X_j)_{1\leq j\leq m}$ de TM,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}(\nu\cdot\phi) &= \sum_{j=1}^{m} X_j\cdot\widetilde{\nabla}_{X_j}\nu\cdot\phi + X_j\cdot\nu\cdot\widetilde{\nabla}_{X_j}\phi \\
&= mH\phi - \nu\cdot\widehat{D}\phi.
\end{aligned}$$

De $\widehat{D}\phi = \nu\cdot\left(D\phi - \frac{mH}{2}\phi\right)$ et cette identité, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^2\phi &= mH\left(D\phi - \frac{mH}{2}\phi\right) - \nu\cdot\widehat{D}\left(D\phi - \frac{mH}{2}\phi\right) \\
&= mH\left(D\phi - \frac{mH}{2}\phi\right) - \nu\cdot\nu\cdot\left(D^2\phi - \frac{m}{2}D(H\phi) - \frac{mH}{2}D\phi + \frac{m^2H^2}{4}\phi\right) \\
&= mH\left(D\phi - \frac{mH}{2}\phi\right) + D^2\phi - \frac{m}{2}dH\cdot\nu\cdot\phi - \frac{mH}{2}D\phi - \frac{mH}{2}D\phi + \frac{m^2H^2}{4}\phi \\
&= D^2\phi - \frac{m}{2}dH\cdot\nu\cdot\phi - \frac{m^2H^2}{4}\phi.
\end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le principal théorème de ce paragraphe.

Théorème 2.2 *Soit $(M,\, g)$ une hypersurface riemannienne (immergée) de dimension m compacte et orientée d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M},\, g)$. Munissons M de la structure spinorielle induite. Supposons que $(\widetilde{M},\, g)$ admet un espace de dimension N d'α-spineurs de Killing, avec $\alpha \in i\mathbb{R}^*$. Alors*

$$(\lambda_N)^2 \leq \frac{m^2}{4}\left(||H||_\infty^2 - 4|\alpha|^2\right). \tag{2.5}$$

Démonstration : Soit ψ un α-spineur de Killing non nul sur $(\widetilde{M},\, g)$, i.e. une section non nulle de $\Sigma\widetilde{M}$ satisfaisant $\widetilde{\nabla}_Z\psi = \alpha Z\cdot\psi$ pour tout champ Z sur $\widetilde{M}$. Évaluons $\frac{(D^2\psi,\psi)}{||\psi||^2}$.
Puisque ψ est un α-spineur de Killing sur $(\widetilde{M},\, g)$,

$$\widehat{D}^2\psi = -m^2|\alpha|^2\psi,$$

et le lemme 2.2 entraine

$$D^2\psi = -m^2|\alpha|^2\psi + \frac{m^2H^2}{4}\psi + \frac{m}{2}dH\cdot\nu\cdot\psi.$$

Prenons le produit scalaire hermitien de cette identité avec ψ et identifions-en les parties réelles :

$$\Re e\left(< D^2\psi, \psi >\right) = -m^2|\alpha|^2|\psi|^2 + \frac{m^2H^2}{4}|\psi|^2.$$

Nous obtenons l'expression suivante pour le quotient de Rayleigh :

$$\frac{(D^2\psi,\psi)}{(\psi,\psi)} = -m^2|\alpha|^2 + \frac{m^2}{4}\frac{\int_M H^2|\psi|^2 v_g}{\int_M |\psi|^2 v_g}. \tag{2.6}$$

L'application du principe du Min-Max donne immédiatement l'inégalité (2.5).

$\square$

Remarques 2.1

1. *L'inégalité (2.5) entraine en particulier*

$$||H||_\infty \geq 2|\alpha|.$$

Nous réobtenons le fait que la courbure moyenne d'une hypersurface compacte M de l'espace hyperbolique ne peut être arbitrairement petite. Rappelons que ceci vient également comme conséquence d'une majoration de valeurs propres de A. El Soufi et S. Ilias pour le laplacien scalaire (cf. [18]).

2. *Lorsque la variété ambiante est l'espace hyperbolique (de courbure sectionnelle constante égale à -1), il existe un espace de dimension $2^{[\frac{m+1}{2}]}$ de $\frac{i}{2}$-spineurs de Killing, et un espace de dimension $2^{[\frac{m+1}{2}]}$ de $\left(-\frac{i}{2}\right)$-spineurs de Killing. Dans ce cas, le théorème 2.2 se traduit sous la forme :*

$$(\lambda_N)^2 \leq \frac{m^2}{4}\left(||H||_\infty^2 - 1\right)$$

avec $N = 2.2^{[\frac{m+1}{2}]}$, ce qui implique le théorème 2.1.

Nous terminons ce paragraphe par l'étude du cas-limite pour la plus petite valeur propre dans le théorème 2.2.

Proposition 2.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.2, supposons de plus que*

$$(\lambda_1)^2 = \frac{m^2}{4}\left(||H||_\infty^2 - 4|\alpha|^2\right).$$

Alors la courbure moyenne H doit être constante, et la restriction de chaque α-spineur de Killing à M doit être un spineur propre pour D^2 associé à la plus petite valeur propre λ_1^2.

Démonstration : D'après la caratérisation variationnelle de la plus petite valeur propre, si l'égalité est atteinte, alors chaque α-spineur de Killing ψ sur $(\widetilde{M},\, g)$ vérifie :

$$D^2\psi = \lambda_1^2\psi.$$

Mais le lemme 2.2 implique par suite

$$\lambda_1^2\psi = \frac{m^2}{4}\left(H^2 - 4|\alpha|^2\right)\psi + \frac{m}{2}dH\cdot\nu\cdot\psi.$$

Prenant le produit scalaire hermitien de cette égalité avec ψ, il vient par identification des parties réelles

$$\lambda_1^2 = \frac{m^2}{4}\left(H^2 - 4|\alpha|^2\right),$$

et par conséquent la courbure moyenne H est constante sur M.

$\square$

2.4 Spineurs de Killing imaginaires de norme constante sur une hypersurface

La norme d'un spineur de Killing imaginaire non nul n'est pas constante sur la variété $\widetilde{M}$. Mais l'existence d'un α-spineur de Killing de norme constante *sur l'hypersurface* M suffirait à obtenir une majoration L^2 pour les petites valeurs propres de D. Nous allons montrer que ceci n'est en général pas possible. Les propositions suivantes étendent des résultats prouvés par H. Baum pour les hypersurfaces des variétés admettant des spineurs de Killing imaginaires de type 1 (voir [9], pp. 145-150, et corollaire 2.1).

Proposition 2.3 *Supposons qu'il existe un α-spineur de Killing ϕ sur $(\widetilde{M}, g)$, avec α imaginaire, qui soit de norme constante sur M. Alors l'hypersurface M est totalement ombilique.*

Démonstration : Soit V_ϕ le champ de vecteurs sur $\widetilde{M}$ défini par :

$$g(V_\phi\,,\,Z) := i < \phi\,,\,Z\cdot\phi >,$$

pour tout champ Z sur $\widetilde{M}$. Soient f_1 et f_2 les fonctions sur M respectivement définies par $|\phi|^2$ et $i<\phi\,,\,\nu\cdot\phi> = g(V_\phi\,,\,\nu)$. Puisque $\mathrm{grad}_g^{\widetilde{M}}\,(|\phi|^2) = 2i\alpha V_\phi$, le champ de vecteurs $V_{\phi_{|_M}}$ est, sous l'hypothèse $|\phi|$ constante sur M, orthogonal à TM en chaque point, i.e.,

$$V_{\phi_{|_M}} = f_2\,\nu.$$

Mais pour tout champ de vecteurs Z sur $\widetilde{M}$,

$$\widetilde{\nabla}_Z V_\phi = 2i\alpha|\phi|^2 Z.$$

En effet, fixons une base orthonormée locale $(e_j)_{1\leq j\leq m+1}$ de $T\widetilde{M}$. Alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_Z V_\phi &= i\sum_{j=1}^{m+1}\Big(<\widetilde{\nabla}_Z\phi, e_j\cdot\phi> + <\phi, e_j\cdot\widetilde{\nabla}_Z\phi>\Big)\,e_j \\
&= i\alpha\sum_{j=1}^{m+1}(<Z\cdot\phi, e_j\cdot\phi> + <e_j\cdot\phi, Z\cdot\phi>)\,e_j \\
&= 2i\alpha\sum_{j=1}^{m+1} g(Z,e_j)|\phi|^2 e_j \\
&= 2i\alpha|\phi|^2 Z.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout champ X tangent à M,

$$\widetilde{\nabla}_X V_{\phi_{|_M}} = X(f_2)\nu - f_2 A(X).$$

Par identification des composantes tangentielles et normales de l'égalité précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
X(f_2) &= 0 \\
f_2 A(X) &= -2i\alpha f_1 X.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que f_2 est constante sur M ; cette constante ne peut être nulle, sinon la fonction f_1 s'annulerait aussi par la seconde identité, si bien que

$$A(X) = -\frac{2i\alpha f_1}{f_2} X,$$

i.e. M est totalement ombilique.

$\square$

Il est bien connu que les hypersurfaces totalement ombiliques des variétés d'Einstein sont à courbure moyenne constante. Si de plus $(\widetilde{M}, g)$ admet des spineurs de Killing, on peut également prouver l'existence de tels spineurs sur l'hypersurface M.

Proposition 2.4 *Supposons que $(\widetilde{M}, g)$ admet un α-spineur de Killing ϕ, avec α réel ou imaginaire, et que l'hypersurface M est totalement ombilique. Alors M est à courbure moyenne constante et admet un spineur de Killing.*
Plus précisément, soit

$$\beta := \begin{cases} \frac{H}{2} & si\ \alpha = 0 \\ \beta_1\beta_2 & sinon, \end{cases}$$

où β_1 et β_2 sont deux constantes telles que $(\beta_1)^2 = \frac{H}{2} - i\alpha$, $(\beta_2)^2 = \frac{H}{2} + i\alpha$. Alors la section ψ définie par

$$\psi := \begin{cases} \phi & si\ \alpha = 0 \\ \beta_1(\phi + i\nu \cdot \phi) + \beta_2(\phi - i\nu \cdot \phi) & sinon \end{cases}$$

satisfait, pour tout champ de vecteurs X sur M,

$$\nabla_X \psi = -\beta X \underset{M}{\cdot} \psi. \tag{2.7}$$

En outre, si $\beta \neq 0$, la section ψ induit un $\pm\beta$-spineur de Killing non nul sur (M, g). Si $\beta = 0$ et $\psi = 0$, alors ϕ induit un spineur parallèle non nul sur (M, g).

Démonstration : Le premier point de la proposition 2.4 est un fait élémentaire, nous le rappelons en détail. Soit $\widetilde{R}$ le tenseur de courbure ambiant, défini sur tous champs de vecteurs Z et Z' sur $\widetilde{M}$ par :

$$\widetilde{R}_{Z,Z'} := \widetilde{\nabla}_{[Z,Z']} - [\widetilde{\nabla}_Z, \widetilde{\nabla}_{Z'}].$$

Soit $\widetilde{Ric}$ le tenseur de Ricci de $(\widetilde{M}, g)$. Pour tous champs de vecteurs X et Y tangents à M, l'équation de Codazzi-Mainardi

$$\nabla_X A(Y) - \nabla_Y A(X) = \widetilde{R}_{X,Y}\nu$$

implique, dans une base orthonormée locale $(X_j)_{1\leq j\leq m}$ de TM,

$$\delta A(X) \;=\; -\sum_{j=1}^{m} \nabla_{X_j} A(X_j, X)$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{j=1}^{m} \nabla_{X_j} A(X, X_j) \\
&= -\sum_{j=1}^{m} \nabla_X A(X_j, X_j) - \sum_{j=1}^{m} g\left(\widetilde{R}_{X_j,X}\nu, X_j\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{m} \nabla_X (HId)(X_j, X_j) + \widetilde{Ric}(X, \nu) \\
&= -mX(H) + \widetilde{Ric}(X, \nu),
\end{aligned}$$

i.e. $\delta A = -mdH + \widetilde{Ric}(\nu)^T$, où Z^T est le projeté orthogonal du champ Z de $T\widetilde{M}_{|_M}$ sur TM. Comme la variété ambiante est d'Einstein, $\widetilde{Ric}(\nu)^T = 0$; puisque l'hypersurface M est totalement ombilique, $\delta A = -dH$ et nous déduisons de l'identité précédente que

$$(m-1)dH = 0,$$

i.e. M est à courbure moyenne constante.
Nous pouvons alors construire un spineur de Killing sur $(M,\, g)$ à l'aide du spineur de Killing ϕ (comparer avec [8], pp. 221-222). Pour tout champ X tangent à M, la relation (2.3) entraine

$$\nabla_X \phi = i\alpha X \cdot \nu \cdot i\nu \cdot \phi - \frac{H}{2} X \cdot \nu \cdot \phi.$$

Par suite, le champ d'endomorphismes $i\nu$ étant parallèle (cf. paragraphe 2.2),

$$\nabla_X (i\nu \cdot \phi) = -i\alpha X \cdot \nu \cdot \phi + \frac{H}{2} X \cdot \nu \cdot i\nu \cdot \phi,$$

si bien que

$$\nabla_X (\phi + i\nu \cdot \phi) = -(\frac{H}{2} + i\alpha) X \cdot \nu \cdot (\phi - i\nu \cdot \phi).$$

De la même manière, $\nabla_X(\phi - i\nu\cdot\phi) = -(\frac{H}{2} - i\alpha) X \cdot \nu \cdot (\phi + i\nu \cdot \phi)$. Nous déduisons que :

$$\nabla_X \psi = -\beta X \underset{M}{\cdot} \psi.$$

Lorsque $\beta \neq 0$, $\phi + i\nu \cdot \phi \neq 0$ et $\phi - i\nu \cdot \phi \neq 0$. En effet, si $i\nu \cdot \phi = \varepsilon\phi$ pour un ε dans $\{\pm 1\}$, pour tout champ X tangent à M, $\nabla_X(i\nu \cdot \phi) = \varepsilon \nabla_X \phi$ et $\nabla_X(i\nu \cdot \phi) = -\varepsilon \nabla_X \phi$, dont on peut conclure que $\nabla\phi = 0$. Mais

$$\nabla_X \phi = (i\alpha\varepsilon - \frac{H}{2}) X \underset{M}{\cdot} \phi,$$

donc $H = 2i\alpha\varepsilon$ et $\beta = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\beta \neq 0$. De plus, si $\phi + i\nu \cdot \phi \neq 0$ et $\phi - i\nu \cdot \phi \neq 0$, alors ces deux sections sont orthogonales, et par suite linéairement indépendantes, en tout point. On en déduit que $\psi \neq 0$.
Lorsque $\beta = 0$, le spineur ψ ne s'annule pas sauf si $i\nu \cdot \phi = \varepsilon\phi$: mais dans ce cas, ϕ induit un spineur parallèle non nul sur $(M,\, g)$.

$\square$

Remarques 2.2

1. *La variété M n'est pas supposée compacte dans les propositions 2.3 et 2.4.*

2. *Si l'on suppose que, sur une hypersurface riemannienne orientée M de $(\widetilde{M}, g)$, le spineur ψ défini ci-dessus satisfait l'équation (2.7), alors on peut montrer que M doit être totalement ombilique dans $\widetilde{M}$. La réciproque de la proposition 2.4 est par conséquent vraie.*
3. *Lorsque M est* compacte *et totalement ombilique dans une variété riemannienne spinorielle admettant un espace de dimension N d'α-spineurs de Killing, comme la courbure moyenne H est constante, il vient :*

$$\lambda_N^2 \leq \frac{m^2}{4}\left(H^2 + 4\alpha^2\right).$$

Mais, d'après les équations de Gauß, puisque M est totalement ombilique, les courbures scalaire et moyenne sont liées par :

$$S = m(m-1)\left(H^2 + 4\alpha^2\right). \tag{2.8}$$

En particulier, la courbure scalaire S de (M, g) est constante. En utilisant l'inégalité de Friedrich ([19]), nous obtenons la suite d'inégalités :

$$\frac{mS}{4(m-1)} \leq \lambda_1^2 \leq \ldots \leq \lambda_N^2 \leq \frac{m^2}{4}\left(H^2 + 4\alpha^2\right).$$

Or, l'identité (2.8) implique que toutes ces inégalités sont en réalité des égalités. Par suite,

$$\lambda_1^2 = \frac{mS}{4(m-1)},$$

qui n'est rien d'autre que le cas-limite dans l'inégalité de Friedrich et entraine donc l'existence de spineurs de Killing réels. Nous redémontrons par conséquent l'existence de tels spineurs sur M directement grâce à des estimations de valeurs propres.

À un α-spineur de Killing imaginaire ϕ sur $\widetilde{M}$ est associé un invariant conforme, noté q_ϕ, défini par (cf. [11], [9], et chapitre 3)

$$q_\phi = (m+1)^2|\alpha|^2\left(|\phi|^4 - |V_\phi|^2\right).$$

Cet invariant est une constante positive ou nulle sur la variété $\widetilde{M}$. Si q_ϕ est nul, le spineur ϕ est dit *de type 1*, sinon ϕ est dit *de type 2*.
Nous déduisons des propositions 2.3 et 2.4 le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *Supposons que $(\widetilde{M}, g)$ admet un α-spineur de Killing imaginaire ϕ de norme constante sur l'hypersurface compacte M. Alors M est totalement ombilique à courbure moyenne constante, (M, g) admet un spineur de Killing réel non nul et, si N désigne la dimension de l'espace des α-spineurs de Killing sur $(\widetilde{M}, g)$:*

$$\frac{mS}{4(m-1)} = \lambda_1^2 = \ldots = \lambda_N^2 = \frac{m^2}{4}\left(H^2 - 4|\alpha|^2\right),$$

où S est la courbure scalaire de (M, g). De plus, (M, g) admet un spineur parallèle non nul si et seulement si ϕ est de type 1 sur $\widetilde{M}$.

Démonstration : Sous les hypothèses du corollaire 2.1, la première assertion vient comme une conséquence immédiate des propositions 2.3 et 2.4 ; comme M est supposée compacte, tout spineur de Killing induit sur M est nécessairement réel (cf. également les remarques 2.2). En outre, les calculs dans la démonstration de la proposition 2.3 montrent que $V_\phi = i < \phi, \nu \cdot \phi > \nu$ avec $i < \phi, \nu \cdot \phi >= -\frac{2i\alpha|\phi|^2}{H}$. Par conséquent,

$$q_\phi = (m+1)^2|\alpha|^2|\phi|^4\left(1 - \frac{4|\alpha|^2}{H^2}\right)$$

sur M, ce qui achève la preuve du corollaire 2.1.

□

Exemple 2.1 Comme nous l'avons vu dans les remarques 2.2, toute hypersurface compacte totalement ombilique d'une variété riemannienne spinorielle admettant un α-spineur de Killing satisfait

$$\lambda_1^2 = \frac{m^2}{4}\left(H^2 + 4\alpha^2\right),$$

et donc, lorsque α est imaginaire, l'égalité dans le théorème 2.2. Or les variétés riemanniennes spinorielles complètes admettant des spineurs de Killing imaginaires ont été classifiées par H. Baum dans [9] et [8]. Une variété riemannienne spinorielle complète admet un α-spineur de Killing imaginaire de type 1 si et seulement si elle est isométrique à un produit tordu

$$\left(F \times \mathbb{R}\,,\, e^{4i\alpha t}h \oplus dt^2\right),$$

où $(F,\, h)$ est une variété riemannienne spinorielle complète admettant un spineur parallèle. D'autre part, en dimension différente de 3 et 5, la seule variété riemannienne spinorielle complète admettant un $\pm\frac{i}{2}$-spineur de Killing de type 2 est l'espace hyperbolique. Il est à remarquer que, sur l'espace hyperbolique, il existe des spineurs de Killing imaginaires de type 1 en toutes dimensions, alors qu'il n'existe de spineurs de Killing imaginaires de type 2 qu'en dimension différente de 3 et 5.

1. Soit $(\widetilde{M},\, g) := (F^m \times \mathbb{R}\,,\, e^{4i\alpha t}h \oplus dt^2)$, où $(F^m,\, h)$ est une variété riemannienne spinorielle admettant des spineurs parallèles. Supposons F compacte. Puisque F est totalement ombilique dans $\widetilde{M}$, cette variété satisfait le cas-limite dans le théorème 2.2.
2. Soit $(\widetilde{M},\, g) := (\mathbb{H}^{m+1},\, g)$, l'espace hyperbolique à courbure sectionnelle -1. Toute sphère géodésique est totalement ombilique dans $\widetilde{M}$, et satisfait par conséquent l'égalité $\lambda_1^2 = \frac{m^2}{4}(H^2 - 1)$. Signalons cependant que, comme dans les cas des hypersurfaces de $\mathbb{R}^{m+1}$ et S^{m+1}, la question de savoir si les sphères géodésiques sont les *seules* variétés-limite demeure ouverte.

Remarque 2.3 *On peut aussi déduire de (2.6) qu'étant donné un α-spineur de Killing imaginaire ψ sur $(\widetilde{M},\, g)$,*

$$\lambda_1^2 \leq -m^2|\alpha|^2 + \frac{m^2 C_\psi}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M H^2 v_g,$$

avec $C_\psi = \frac{\sup_M(|\psi|^2)}{\inf_M(|\psi|^2)}$. Comme dans la proposition 2.2, il est facile de prouver que, si l'égalité est atteinte dans cette majoration, alors la norme $|\psi|$ de ψ est constante sur M. Cette *estimation donne en conséquence un mauvais résultat pour les hypersurfaces de l'espace hyperbolique, car si le spineur ψ est de type 1 sur $\mathbb{H}^{m+1}$, les seules hypersurfaces de niveau possibles de la fonction $|\psi|$ sont celles admettant des spineurs* parallèles *(corollaire 2.1), ce qui n'est évidemment pas la situation d'une sphère géodésique.*

Chapitre 3

Hypersurfaces des variétés admettant des spineurs-twisteurs

Le paragraphe 3.2 de ce chapitre a fait l'objet d'une publication ([23]).

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons une autre approche du problème consistant à majorer extrinsèquement les valeurs propres de l'opérateur de Dirac fondamental sur une hypersurface. Cette approche repose sur la propriété de *covariance conforme* de l'opérateur de Dirac. Comme les spineurs de Killing réels se révèlent être les meilleurs spineurs-test pour le principe du Min-Max, nous supposons l'existence de tels spineurs dans la *classe conforme* de la métrique *ambiante*, et démontrons dans le paragraphe 3.2 une majoration de λ_1. Les trois espaces modèles constituent les premiers exemples de telles variétés ambiantes, puisque $\mathbb{H}^{m+1}$ peut être conformément plongé dans la sphère ronde ou la boule unité de même dimension. Nous montrons ensuite que l'inégalité obtenue étend les résultats de C. Bär pour les hypersurfaces de $\mathbb{R}^{m+1}$ ou S^{m+1} ([6], Theorem 4.1), et est optimale pour une hypersurface de $\mathbb{H}^{m+1}$ (voir exemple 3.1).
Plus généralement, un lemme de A. Lichnerowicz permet de considérer des variétés ambiantes admettant des spineurs-twisteurs : s'il existe un spineur-twisteur sur une variété riemannienne spinorielle, alors il existe pour une métrique conforme un spineur de Killing réel en dehors de l'ensemble des zéros du spineur-twisteur. Nous allons montrer dans le paragraphe 3.3 que, même dans le cas où un spineur-twisteur ambiant a un zéro sur l'hypersurface, on peut donner une majoration L^2 de λ_1. Via l'étude de la restriction d'un spineur-twisteur à une hypersurface, cette méthode s'avère fournir des exemples de variétés-limite pour les estimations conformes de valeurs propres, i.e. des hypersurfaces pour lesquelles les inégalités sont des égalités.

3.2 Immersions conformes dans les variétés admettant des spineurs de Killing

Nous rappelons dans un premier temps les relations de base entre spineurs et métriques conformes (on pourra aussi consulter [45], [14], [7], [36] ou [30]). Soit $\overline{g} := e^{2u}g$ un changement conforme de métrique sur $\widetilde{M}$, où u est une fonction réelle lisse sur M. La variété $(\widetilde{M}, \overline{g})$ étant spinorielle, soit $\Sigma_{\overline{g}}\widetilde{M}$ son fibré vectoriel des spineurs, et "$\bar{\cdot}$" la multiplication

de Clifford sur $\Sigma_{\overline{g}}\widetilde{M}$.
Il existe un isomorphisme unitaire,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\widetilde{M} & \longrightarrow & \Sigma_{\overline{g}}\widetilde{M} \\ \phi & \longmapsto & \overline{\phi} \end{array}$$

satisfaisant, pour tout champ de vecteurs Z sur $\widetilde{M}$ et toute section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}$,

$$\overline{Z \cdot \phi} = e^{-u} Z \,\bar{\cdot}\, \overline{\phi}.$$

Un tel isomorphisme existe également de Σ sur $\Sigma_{\overline{g}}$, qui sera noté de la même manière.
Les dérivées covariantes respectives ∇ et $\nabla^{\overline{g}}$ sur Σ resp. $\Sigma_{\overline{g}}$ sont liées par la relation suivante : pour tout champ de vecteurs X tangent à M et toute section ϕ de Σ,

$$\nabla^{\overline{g}}_X \overline{\phi} = \overline{\nabla_X \phi} - \frac{1}{2}\overline{X \underset{M}{\cdot} du \underset{M}{\cdot} \phi} - \frac{1}{2} du(X)\overline{\phi},$$

où $du := d(u_{|M})$. Une relation analogue existe pour les dérivées covariantes $\widetilde{\nabla}$ et $\widetilde{\nabla}^{\overline{g}}$: pour tout champ de vecteurs X tangent à M et toute section ϕ de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$,

$$\widetilde{\nabla}^{\overline{g}}_X \overline{\phi} = \overline{\widetilde{\nabla}_X \phi} - \frac{1}{2}\overline{X \cdot du \cdot \phi} - \frac{\nu(u)}{2}\overline{X \cdot \nu \cdot \phi} - \frac{1}{2} du(X)\overline{\phi}. \tag{3.1}$$

Théorème 3.1 *Soit (M, g) une hypersurface riemannienne (immergée) de dimension m compacte et orientée d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M}, g)$. Munissons M de la structure spinorielle induite. Supposons que, pour une métrique conforme $\overline{g} = e^{2u} g$, la variété $(\widetilde{M}, \overline{g})$ admet un espace de dimension N de spineurs de Killing réels. Alors*

$$(\lambda_N)^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \left(H^2 + R(\iota)\right) v_g + \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)} ||du||^2_{L^2(M)}, \tag{3.2}$$

où, dans une base orthonormée locale $(X_j)_{1 \leq j \leq m}$ de TM,

$$R(\iota) := \frac{1}{m(m-1)} \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \widetilde{K}(X_i, X_j),$$

et $\widetilde{K}$ est la courbure sectionnelle de $(\widetilde{M}, g)$.

Démonstration : Soit $\overline{\psi}$ un α-spineur de Killing sur $(\widetilde{M}, \overline{g})$; le nombre α est ici supposé *réel*. Évaluons le quotient de Rayleigh $\frac{(D^2\psi, \psi)}{||\psi||^2}$, où, comme dans le paragraphe 2.2, ψ est identifié à une section de Σ via l'isomorphisme (2.2).
Afin de mener à bien ce calcul, il est non seulement nécessaire de comparer les carrés de D et $\widehat{D}$, mais aussi de mettre en relation les opérateurs de Dirac-Witten $\widehat{D}$ et $\widehat{D}_{\overline{g}}$ associés respectivement aux métriques g et $\overline{g}$.

Lemme 3.1 *Pour toute section ϕ de Σ,*

$$\widehat{D}_{\overline{g}}\,\overline{\phi} = e^{-u}\Big(\overline{\widehat{D}\phi} + \frac{m-1}{2}\overline{du\cdot\phi} + \frac{m}{2}\nu(u)\overline{\nu\cdot\phi}\Big).$$

Démonstration : Soit ϕ une section de Σ. Appliquons la formule (3.1) en utilisant le fait que, si $(X_j)_{1\leq j\leq m}$ est une base g-orthonormée locale de TM, alors $(e^{-u}X_j)_{1\leq j\leq m}$ est une base $\overline{g}$-orthonomée locale de TM :

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_{\overline{g}}\overline{\phi} &= \sum_{j=1}^{m} e^{-2u}X_j \,\bar{\cdot}\, \widetilde{\nabla}^{\overline{g}}_{X_j}\overline{\phi} \\
&= e^{-u}\left(\sum_{j=1}^{m}\overline{X_j\cdot\widetilde{\nabla}_{X_j}\phi} - \frac{1}{2}\overline{X_j\cdot X_j\cdot du\cdot\phi} - \frac{\nu(u)}{2}\overline{X_j\cdot X_j\cdot\nu\cdot\phi} + \frac{1}{2}\overline{du(X_j)X_j\cdot\phi}\right) \\
&= e^{-u}\left(\overline{\widehat{D}\phi} + \frac{m-1}{2}\overline{du\cdot\phi} + \frac{m\nu(u)}{2}\overline{\nu\cdot\phi}\right).
\end{aligned}$$

□

Nous déduisons du lemme 3.1 que

$$\widehat{D}\psi = -m\alpha e^{u}\psi - \frac{m-1}{2}du\cdot\psi - \frac{m}{2}\nu(u)\nu\cdot\psi.$$

Calculons maintenant $\widehat{D}^2\psi$:

$$\begin{aligned}
\widehat{D}(e^u\psi) &= d(e^u)\cdot\psi + e^u\widehat{D}\psi \\
&= -m\alpha e^{2u}\psi - \frac{m-3}{2}e^u du\cdot\psi - \frac{m}{2}e^u\nu(u)\nu\cdot\psi.
\end{aligned}$$

D'autre part, en notant $\triangle$ le laplacien scalaire de $(M,\,g)$,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}(du\cdot\psi) &= \sum_{j=1}^{m}X_j\cdot\widetilde{\nabla}_{X_j}du\cdot\psi + \sum_{j=1}^{m}X_j\cdot du\cdot\widetilde{\nabla}_{X_j}\psi \\
&= \sum_{j=1}^{m}X_j\cdot\nabla_{X_j}du\cdot\psi + \sum_{j=1}^{m}g(A(du),X_j)X_j\cdot\nu\cdot\psi - du\cdot\sum_{j=1}^{m}X_j\cdot\widetilde{\nabla}_{X_j}\psi \\
&- 2\sum_{j=1}^{m}du(X_j)\widetilde{\nabla}_{X_j}\psi \\
&= (\triangle u)\psi + A(du)\cdot\nu\cdot\psi - du\cdot\widehat{D}\psi - 2\widetilde{\nabla}_{du}\psi.
\end{aligned}$$

Or, d'après (3.1),

$$\widetilde{\nabla}_{du}\psi = \alpha e^u du\cdot\psi + \frac{1}{2}\nu(u)du\cdot\nu\cdot\psi,$$

par suite

$$\widehat{D}(du\cdot\psi) = (\triangle u)\psi + A(du)\cdot\nu\cdot\psi + (m-2)\alpha e^u du\cdot\psi - \frac{m-1}{2}|du|^2\psi + \frac{m-2}{2}\nu(u)du\cdot\nu\cdot\psi.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}(\nu(u)\nu\cdot\psi) &= d(\nu(u))\cdot\nu\cdot\psi + mH\nu(u)\psi - \nu(u)\nu\cdot\widehat{D}\psi \\
&= d(\nu(u))\cdot\nu\cdot\psi + mH\nu(u)\psi + m\alpha e^u\nu(u)\nu\cdot\psi - \frac{m-1}{2}\nu(u)du\cdot\nu\cdot\psi \\
&- \frac{m}{2}\nu(u)^2\psi.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\widehat{D}^2\psi &= m^2\alpha^2e^{2u}\psi - \alpha e^u du\cdot\psi - \frac{m-1}{2}A(du)\cdot\nu\cdot\psi + \frac{(m-1)^2}{4}|du|^2\psi - \frac{m-1}{2}(\triangle u)\psi\\ &+ \frac{m-1}{2}\nu(u)du\cdot\nu\cdot\psi - \frac{m}{2}d(\nu(u))\cdot\nu\cdot\psi - \frac{m^2H}{2}\nu(u)\psi + \frac{m^2\nu(u)^2}{4}\psi.\end{aligned}$$

Le lemme 2.2 entraine :

$$\begin{aligned}D^2\psi &= \frac{m^2}{4}\left(H^2 - 2H\nu(u) + \nu(u)^2 + 4\alpha^2e^{2u}\right)\psi + \frac{(m-1)^2}{4}|du|^2\psi - \frac{m-1}{2}(\triangle u)\psi\\ &+ X_0\cdot\psi + Y_0\cdot\nu\cdot\psi,\end{aligned}$$

où X_0 et Y_0 sont les champs de vecteurs tangents à M définis par :

$$\begin{aligned}X_0 &:= -\alpha e^u du\\ Y_0 &:= \frac{m-1}{2}\left(\nu(u)du - A(du)\right) + \frac{m}{2}d\left(H - \nu(u)\right).\end{aligned}$$

Remarquons que, si $H_{\overline{g}}$ est la courbure moyenne de l'immersion $M \hookrightarrow (\widetilde{M}, \overline{g})$,

$$\begin{aligned}H^2 - 2H\nu(u) + \nu(u)^2 &= (H - \nu(u))^2\\ &= e^{2u}H_{\overline{g}}^2.\end{aligned}$$

D'après A. El Soufi et S. Ilias ([18], Proposition 2),

$$e^{2u}\left(H_{\overline{g}}^2 + \overline{R}(\iota)\right) = H^2 + R(\iota) - \frac{m-2}{m}|du|^2 + \frac{2}{m}\triangle u, \tag{3.3}$$

avec $\overline{R}(\iota) := R(\iota, \overline{g})$.
Mais si $(\widetilde{M}, g)$ est d'Einstein à courbure scalaire ρ, alors $R(\iota) = \frac{\rho}{m(m+1)}$. Dans notre situation, il vient donc $\overline{R}(\iota) = 4\alpha^2$, et la relation (3.3) entraine :

$$D^2\psi = \frac{m^2}{4}\left(H^2 + R(\iota)\right)\psi + \frac{1}{4}|du|^2\psi + \frac{1}{2}(\triangle u)\psi + X_0\cdot\psi + Y_0\cdot\nu\cdot\psi. \tag{3.4}$$

Puisque $\overline{\psi}$ est de norme constante sur $\widetilde{M}$, le spineur ψ est aussi de norme constante sur M, norme que nous supposons désormais égale à 1. En prenant le produit scalaire hermitien de l'égalité (3.4) avec ψ, nous obtenons :

$$< D^2\psi\,,\,\psi >= \frac{m^2}{4}\left(H^2 + R(\iota)\right) + \frac{1}{4}|du|^2 + \frac{1}{2}\triangle u + < X_0\cdot\psi\,,\,\psi > + < Y_0\cdot\nu\cdot\psi\,,\,\psi > .$$

Les champs X_0 et Y_0 sont des champs de vecteurs tangents à M, par conséquent les deux derniers termes sont imaginaires purs. Comme l'opérateur D est formellement auto-adjoint, ces termes ne sont pas nécessaires au calcul du quotient de Rayleigh. En intégrant sur M, il vient :

$$\frac{(D^2\psi, \psi)}{(\psi, \psi)} = \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M \left(H^2 + R(\iota)\right)v_g + \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M |du|^2 v_g.$$

Cette relation est vraie pour tout α-spineur de Killing $\overline{\psi}$ sur $(\widetilde{M}, \overline{g})$. Le principe du Min-Max donne donc le résultat.

$\square$

Remarques 3.1

1. *Si la fonction u est constante sur $\widetilde{M}$, i.e. si la variété $(\widetilde{M}, g)$ admet elle-même des α-spineurs de Killing avec α réel, l'inégalité (3.2) est celle prouvée par C. Bär dans [6] (Theorem 4.1), car dans ce cas $R(\iota) = 4\alpha^2$.*
2. *Lorsque $m = 2$, l'intégrale $\int_M (H^2 + R(\iota))\, v_g$ est* l'intégrale de Willmore*. Cette intégrale est invariante par changement conforme de métrique sur $\widetilde{M}$.*
3. *Lorsque la variété ambiante $\widetilde{M}$ est simplement connexe, la structure spinorielle de $(\widetilde{M}, g)$ est préservée sous l'action des difféomorphismes conformes conservant l'orientation. L'inégalité (3.2) peut alors être améliorée :*

$$\lambda_N^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \big(H^2 + R(\iota)\big)\, v_g + \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)} \inf\Big\{ ||dv||^2_{L^2(M)} \Big\},$$

où l'infimum porte sur tous *les difféomorphismes conformes γ de $(\widetilde{M}, g)$ et les fonctions v sont données par : $e^{2v} g := \gamma^* \overline{g}$. D'après l'équation de Gauß, cette inégalité est équivalente à*

$$\begin{aligned} \lambda_N^2 \;&\leq\; \frac{m}{4(m-1)\mathrm{Vol}(M)} \int_M S\, v_g + \frac{m}{4(m-1)\mathrm{Vol}(M)} ||\tau||^2_{L^2(M)} \\ &+\; \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)} \inf\Big\{ ||dv||^2_{L^2(M)} \Big\}, \end{aligned}$$

où τ désigne le tenseur d'ombilicité, i.e. $\tau := A - H\mathrm{Id}$. On pourra comparer ce résultat à celui obtenu par I. Agricola et T. Friedrich lorsque $m = 2$ (cf. [1], Theorem 2).

Nous examinons maintenant le cas-limite dans le théorème 3.1 pour la valeur propre λ_1.

Proposition 3.1 *Si $(\widetilde{M}, \overline{g})$ admet un nombre maximal de spineurs de Killing réels* non-parallèles*, alors*

$$\lambda_1^2 = \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \big(H^2 + R(\iota)\big)\, v_g + \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)} ||du||^2_{L^2(M)} \tag{3.5}$$

si et seulement si $du = 0$ et $H^2 + R(\iota)$ est constant égal à $\frac{4\lambda_1^2}{m^2}$.

Démonstration : Si (3.5) a lieu, pour *tout spineur de Killing réel* $\overline{\psi}$ sur $(\widetilde{M}, \overline{g})$,

$$D^2\psi = \lambda_1^2 \psi.$$

Mais l'identité (3.4) entraine

$$\lambda_1^2 = \frac{m^2}{4}\big(H^2 + R(\iota)\big) + \frac{1}{4}|du|^2 + \frac{1}{2}\triangle u,$$

dont nous déduisons que

$$X_0 \cdot \psi + Y_0 \cdot \nu \cdot \psi = 0.$$

S'il existe un nombre maximal d'α-spineurs de Killing sur $(\widetilde{M},\, \overline{g})$ (i.e. $N = 2^{[\frac{m+1}{2}]}$), alors X_0 et Y_0 s'annulent identiquement sur M. En effet, fixons un point x sur M, et soit ϕ dans $\Sigma_x \widetilde{M}|_M$. Il existe un spineur de Killing $\overline{\psi}$ sur $(\widetilde{M},\, \overline{g})$ tel que $\psi_x = \phi$. L'identité précédente entraine par conséquent que l'égalité $X_0(x) \cdot \phi + Y_0(x) \cdot \nu_x \cdot \phi = 0$ est vraie pour tout ϕ dans $\Sigma_x \widetilde{M}|_M$. La représentation $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m+1} \longrightarrow \mathbb{C}(2^{[\frac{m+1}{2}]})$ de l'algèbre de Clifford complexe $\mathbb{C}\mathrm{l}_{m+1}$ étant injective, on en déduit que $X_0(x) + Y_0(x) \cdot \nu_x = 0$, dont découle : $X_0(x) = Y_0(x) = 0$. En outre, si $\alpha \neq 0$, alors $du = 0$ d'après la définition de X_0.

□

Remarques 3.2

1. *Si $\alpha \neq 0$, alors dans le cas-limite $\lambda_1 \neq 0$ et ψ* ne peut être *un spineur propre pour D.*
2. *Lorsque $(\widetilde{M},\, \overline{g})$ admet un spineur* parallèle *(i.e. si $\alpha = 0$), on ne peut conclure de (3.5) que $du = 0$, même s'il existe un nombre maximal de spineurs parallèles sur $(\widetilde{M},\, \overline{g})$. Si $(\widetilde{M},\, g)$ est l'espace hyperbolique, ce fait peut s'expliquer par l'existence d'une métrique conforme sur $\mathbb{H}^{m+1}$ admettant des spineurs parallèles mais pour laquelle les hypersurfaces satisfaisant $du = 0$ ne sont pas compactes (cf. paragraphe 3.3).*

Exemple 3.1 Soit $(\mathbb{H}^{m+1},\, g)$ l'espace hyperbolique de dimension $m+1$ (et à courbure sectionnelle constante égale à -1).

1. Considérons son modèle en demi-sphère
$$\{x = (x_1, \ldots, x_{m+2}) \in \mathbb{R}^{m+2}, \quad x_1^2 + \ldots + x_{m+2}^2 = 1 \text{ et } x_{m+2} > 0\},$$
munie de la métrique $g := \frac{1}{x_{m+2}^2} g_0$, où g_0 est la métrique standard sur la sphère ronde S^{m+1}. Puisque $(S^{m+1},\, g_0)$ admet un espace de dimension $2^{[\frac{m+1}{2}]}$ de $\frac{1}{2}$-spineurs de Killing, ainsi qu'un espace de dimension $2^{[\frac{m+1}{2}]}$ de $\left(-\frac{1}{2}\right)$-spineurs de Killing, le théorème 3.1 s'applique et on obtient, en posant $N := 2.2^{[\frac{m+1}{2}]}$: pour $1 \leq k \leq N$,
$$\lambda_k^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \left(H^2 - 1\right) v_g + \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M g_0(e_{m+2}^T\,,\, e_{m+2}^T) v_g,$$
où e_{m+2}^T est le projeté orthogonal du vecteur $e_{m+2} = (0, \ldots, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^{m+2}$ sur l'espace tangent à M. De plus, si le cas-limite dans cette inégalité est atteint pour λ_1, d'après la proposition 3.1, la fonction x_{m+2} est constante sur M, i.e. M est une sphère géodésique centrée en e_{m+2}. Nous réobtenons le fait que, pour une sphère géodésique de $\mathbb{H}^{m+1}$,
$$\lambda_1^2 = \frac{m^2}{4} \left(H^2 - 1\right).$$
2. D'un autre point de vue, on peut considérer $(\mathbb{H}^{m+1},\, g)$ comme B^{m+1}, la boule unité de $\mathbb{R}^{m+1}$, munie de la métrique $g := \frac{4}{(1-|x|^2)^2} g_0$, où g_0 est la métrique standard sur B^{m+1}. Posons $N := 2^{[\frac{m+1}{2}]}$. Puisque $(B^{m+1},\, g_0)$ admet un espace de dimension N de spineurs parallèles, nous obtenons : pour $1 \leq k \leq N$,
$$\lambda_k^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \left(H^2 - 1\right) v_g + \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M g_0(x^T, x^T) v_g, \tag{3.6}$$

où x^T est le projeté orthogonal du vecteur-position x dans B^{m+1} sur l'espace tangent à M. Remarquons que toute sphère géodésique centrée à l'origine satisfait l'égalité pour λ_1 dans (3.6), puisque $x^T = 0$ sur cette hypersurface.
En outre, il existe une majoration extrinsèque du terme de gradient $||du||^2_{L^2(M)}$: si R désigne le rayon extrinsèque de M dans $\mathbb{H}^{m+1}$, J.-F. Grosjean a démontré dans [26] (inégalité (22), Chap. 5) que

$$\int_M |du|^2 v_g \leq \frac{\mathrm{th}\left(\frac{R}{2}\right)^2}{4\left(m-1-\mathrm{th}\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)}\left(\int_M H^2 v_g - \coth^2(R)\mathrm{Vol}(M)\right),$$

avec égalité si et seulement si M est une sphère géodésique, auquel cas le membre de droite s'annule. On peut donc déduire de (3.6) l'inégalité suivante : pour $1 \leq k \leq N$,

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 \;\; \leq \;\; & \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \left(H^2 - 1\right) v_g \\ + \;\; & \frac{\mathrm{th}\left(\frac{R}{2}\right)^2}{16\left(m-1-\mathrm{th}\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)}\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M H^2 v_g - \coth^2(R)\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Le cas-limite pour λ_1 dans (3.7) est atteint *seulement* pour les sphères géodésiques.

3.3 Restriction de spineurs-twisteurs sur une hypersurface

Nous supposons maintenant que la variété $(\widetilde{M}, g)$ admet un spineur-twisteur non nul, i.e. une section non nulle ϕ de $\Sigma\widetilde{M}$ appartenant au noyau de l'opérateur de Penrose $\widetilde{P}$ défini, pour tout champ de vecteurs Z et tout spineur φ sur $\widetilde{M}$, par :

$$\widetilde{P}_Z\varphi := \widetilde{\nabla}_Z\varphi + \frac{1}{m+1} Z \cdot D_{\widetilde{M}}\varphi,$$

où $D_{\widetilde{M}}$ est l'opérateur de Dirac fondamental de $(\widetilde{M}, g)$. L'opérateur de Penrose, qui envoie $\Gamma(T^*\widetilde{M} \otimes \Sigma\widetilde{M})$ dans $\Gamma(\Sigma\widetilde{M})$, peut être vu comme le "complémentaire orthogonal" de l'opérateur de Dirac $D_{\widetilde{M}}$, puisqu'il s'obtient en projetant la dérivé covariante spinorielle $\widetilde{\nabla}$ sur le noyau de la multiplication de Clifford (cf. [11], [30], [36], [45]). Les spineurs-twisteurs généralisent également de manière naturelle les spineurs de Killing, car un spineur de Killing est un spineur-twisteur qui est propre pour $D_{\widetilde{M}}$.
La principale propriété mise en jeu dans ce paragraphe est celle de *covariance conforme* de l'opérateur de Penrose : si $\overline{g} = e^{2u}g$ est une métrique (lisse) conforme à g, alors pour toute section φ de $\Sigma\widetilde{M}$ et tout champ de vecteurs Z sur $\widetilde{M}$,

$$\widetilde{P}^{\overline{g}}_Z\left(e^{\frac{u}{2}}\overline{\varphi}\right) = e^{\frac{u}{2}}\overline{\widetilde{P}_Z\varphi},$$

où $\widetilde{P}^{\overline{g}}$ est l'opérateur de Penrose de $(\widetilde{M}, \overline{g})$. Cette relation entraine plusieurs propriétés importantes des spineurs-twisteurs, parmi lesquelles nous rappelons les plus intéressantes en regard de notre problème (pour d'autres propriétés, cf. [11] et [40] à [44]) :

Proposition 3.2 ([48], [20], [40]) *Soit ϕ un spineur-twisteur non nul sur $(\widetilde{M}, g)$:*

1. *Il existe un invariant conforme attaché à ϕ, noté q_ϕ et défini par :*

$$q_\phi = |\phi|^2 |D_{\widetilde{M}}\phi|^2 - \frac{(m+1)^2}{4}|\mathrm{grad}_g^{\widetilde{M}}(|\phi|^2)|^2.$$

   Cet invariant est un nombre positif ou nul.

2. *Les zéros de ϕ forment un sous-ensemble discret de $\widetilde{M}$, noté $\mathcal{Z}_\phi$.*
3. *La variété $(\widetilde{M} \setminus \mathcal{Z}_\phi,\, \overline{g} := \frac{1}{|\phi|^4}g)$ admet un spineur de Killing réel non nul. De plus, le spineur $\frac{\overline{\phi}}{|\phi|}$ est parallèle si et seulement si $q_\phi = 0$.*

3.3.1 Estimation générale de valeurs propres pour l'opérateur de Dirac fondamental sur une hypersurface

Considérons une hypersurface riemannienne compacte et orientée M de $\widetilde{M}$, munie de la structure spinorielle induite. Lorsque l'ensemble $\mathcal{Z}_\phi$ ne rencontre pas l'hypersurface M, la métrique conforme $\overline{g} := \frac{1}{|\phi|^4}g$ est bien définie dans un voisinage de M ; en d'autres termes, cette situation correspond à l'existence d'un spineur de Killing réel pour une métrique conforme sur la variété ambiante, et on peut directement obtenir une majoration des petites valeurs propres de D par le théorème 3.1. Cependant, nous allons donner une estimation générale lorsqu'aucune hypothèse n'est faite sur le nombre de zéros de ϕ sur l'hypersurface M.

Théorème 3.2 *Soit $(M,\, g)$ une hypersurface riemannienne (immergée) de dimension m compacte et orientée d'une variété riemannienne spinorielle $(\widetilde{M},\, g)$. Munissons M de la structure spinorielle induite. Supposons que $(\widetilde{M},\, g)$ admet un spineur-twisteur non nul ϕ, et que la dimension m de M est supérieure ou égale à 3. Alors la plus petite valeur propre λ_1 de D satisfait :*

$$(\lambda_1)^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M \left(H^2 + R(\iota)\right) v_g + \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M \Big\{\frac{|d|\phi|^2|^2}{|\phi|^4} - 2\triangle\left(\ln(|\phi|^2)\right)\Big\} v_g. \quad (3.8)$$

La démonstration de l'inégalité (3.8) repose sur trois lemmes.

Lemme 3.2 *Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles lisses sur M qui s'annulent dans un voisinage de chaque point de $M \cap \mathcal{Z}_\phi$. Alors*

$$(\lambda_1)^2 \leq \inf_{f \in \mathcal{E}\setminus\{0\}} \Big\{ \frac{\Big(\{\frac{m^2}{4}(H^2 + R(\iota)) + \frac{1}{4}\frac{|d|\phi|^2|^2}{|\phi|^4} - \frac{1}{2}\triangle\left(\ln(|\phi|^2)\right)\}f, f\Big)}{(f,f)} + \frac{(\triangle f, f)}{(f,f)} \Big\}. \quad (3.9)$$

Démonstration du lemme 3.2 : Soit f une fonction dans $\mathcal{E}$ qui ne s'annule pas identiquement, et soit ψ un α-spineur de Killing réel sur $(\widetilde{M} \setminus \mathcal{Z}_\phi,\, \overline{g})$, où $\overline{g} := \frac{1}{|\phi|^4}g = e^{2u}g$. Nous supposons à nouveau que $|\psi|^2$ est constante égale à 1 sur $\widetilde{M} \setminus \mathcal{Z}_\phi$.

Puisque le spineur $f\psi$ est non seulement défini sur $M \setminus \mathcal{Z}_\phi$, mais aussi sur M, on peut évaluer le quotient de Rayleigh de l'opérateur de Dirac sur $f\psi$.
Tout d'abord, pour toute section φ de Σ, et toute fonction v sur M,

$$D^2(v\varphi) = vD^2\varphi + (\triangle v)\varphi - 2\nabla_{dv}\varphi.$$

La preuve de cette identité est élémentaire : dans une base orthonormée locale $(X_j)_{1\leq j\leq m}$ de TM,

$$\begin{aligned} D(v\varphi) &= \sum_{j=1}^m X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}(v\varphi) \\ &= \sum_{j=1}^m X_j(v)X_j \underset{M}{\cdot} \varphi + vX_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}\varphi \\ &= dv \underset{M}{\cdot} \varphi + vD\varphi. \end{aligned}$$

Par suite

$$D^2(v\varphi) = D(dv \underset{M}{\cdot} \varphi) + D(vD\varphi).$$

Or, pour toute 1-forme θ sur M,

$$\begin{aligned} D(\theta \underset{M}{\cdot} \varphi) &= \sum_{j=1}^m X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}(\theta \underset{M}{\cdot} \varphi) \\ &= \sum_{j=1}^m X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}\theta \underset{M}{\cdot} \varphi + X_j \underset{M}{\cdot} \theta \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}\varphi, \end{aligned}$$

et puisque (voir par exemple [30])

$$\sum_{j=1}^m X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}\theta \underset{M}{\cdot} \varphi = (d+\delta)\theta \underset{M}{\cdot} \varphi,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} D(\theta \underset{M}{\cdot} \varphi) &= (d+\delta)\theta \underset{M}{\cdot} \varphi - \theta \underset{M}{\cdot} \sum_{j=1}^m X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}\varphi - 2\sum_{j=1}^m \theta(X_j)\nabla_{X_j}\varphi \\ &= (d+\delta)\theta \underset{M}{\cdot} \varphi - \theta \underset{M}{\cdot} D\varphi - 2\nabla_\theta\varphi. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} D^2(v\varphi) &= (d+\delta)dv \underset{M}{\cdot} \varphi - dv \underset{M}{\cdot} D\varphi - 2\nabla_{dv}\varphi + dv \underset{M}{\cdot} D\varphi + vD(D\varphi) \\ &= vD^2\varphi + (\triangle v)\varphi - 2\nabla_{dv}\varphi. \end{aligned}$$

Le terme $D^2\psi$ a déjà été calculé dans la démonstration du théorème 3.1. De plus, le spineur $\overline{\psi}$ étant un α-spineur de Killing sur $\widetilde{M} \setminus \mathcal{Z}_\phi$, les relations (2.3) et (3.1) impliquent

$$\begin{aligned} \nabla_{df}\psi &= \widetilde{\nabla}_{df}\psi - \frac{1}{2}A(df)\cdot\nu\cdot\psi \\ &= \alpha e^u df\cdot\psi + \frac{1}{2}df\cdot du\cdot\psi + \frac{1}{2}g(df,du)\psi + \frac{1}{2}\left(\nu(u)df - A(df)\right)\cdot\nu\cdot\psi, \end{aligned}$$

dont on tire

$$\begin{aligned} D^2(f\psi) &= \{\frac{m^2}{4}(H^2+R(\iota))+\frac{|du|^2}{4}+\frac{\triangle u}{2}\}f\psi+fX_0\cdot\psi+fY_0\cdot\nu\cdot\psi+(\triangle f)\psi \\ &- 2\alpha e^u df\cdot\psi-df\cdot du\cdot\psi-g(df,du)\psi-(\nu(u)df-A(df))\cdot\nu\cdot\psi. \end{aligned}$$

Remarquons que cette expression a un sens *a priori* seulement sur $M\setminus\mathcal{Z}_\phi$, mais est définie en réalité sur M toute entière puisque la fonction f s'annule dans un voisinage de chaque point où ψ n'est éventuellement pas défini.
Prenant le produit scalaire hermitien de cette identité avec $f\psi$, nous identifions les parties réelles des deux membres. Puisque

$$\Re\mathrm{e}\,(< df\cdot du\cdot\psi,\psi >) = -g(df,du)|\psi|^2,$$

il vient

$$\Re\mathrm{e}\left(< D^2(f\psi), f\psi >\right) = \left\{\frac{m^2}{4}(H^2+R(\iota))+\frac{|du|^2}{4}+\frac{\triangle u}{2}\right\}f^2+f\triangle f. \tag{3.10}$$

Ici, $u=-\ln(|\phi^2|)$, si bien que $du=-\frac{d|\phi|^2}{|\phi|^2}$; l'intégration de (3.10) puis l'application du principe du Min-Max achèvent la preuve du lemme 3.2.

□

Nous construisons maintenant des fonctions f "convenables" dans $\mathcal{E}$ en vue de simplifier l'expression du majorant dans l'inégalité (3.9). Pour tout $\rho>0$ et p dans M, notons $B_\rho(p)$ la boule géodésique (dans M) de rayon ρ et centrée en p.

Lemme 3.3 *Soit $(M,\,g)$ une variété riemannienne et $\mathcal{Z}$ un sous-ensemble fini de M. Il existe une constante positive c telle que, pour tout $\varepsilon>0$ suffisamment petit, il existe une fonction positive ou nulle f_ε dans $\mathcal{E}$ et un réel strictement positif $C_\varepsilon\geq c\varepsilon^2$ satisfaisant :*

$$\left|\begin{array}{lcll} f_\varepsilon & = & 0 & \textit{sur } \bigcup_{p\in\mathcal{Z}} B_\varepsilon(p) \\ f_\varepsilon & = & C_\varepsilon & \textit{sur } M\setminus\left(\bigcup_{p\in\mathcal{Z}} B_{2\varepsilon}(p)\right) \\ |df_\varepsilon| & \leq & \varepsilon & \textit{sur } M. \end{array}\right.$$

Démonstration : De telles fonctions existent évidemment au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^m$; en utilisant une carte normale au voisinage de chaque p dans $\mathcal{Z}$, on peut transporter ces fonctions sur le domaine de carte. L'extension de cette fonction par C_ε à M donne la fonction f_ε désirée.

□

Lemme 3.4 *Soit $(M,\,g)$ une variété riemannienne compacte orientée, et h une fonction intégrable sur M, i.e. $h\in L^1(M)$. Soit $\mathcal{Z}$ un sous-ensemble fini de M et, pour chaque $\varepsilon>0$ suffisamment petit, f_ε la fonction construite dans le lemme 3.3. Alors*

$$\frac{\int_M f_\varepsilon^2 h v_g}{\int_M f_\varepsilon^2 v_g} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\int_M h v_g}{\mathrm{Vol}(M)}.$$

Démonstration : Pour chaque $\varepsilon > 0$, posons $f'_\varepsilon := \frac{f_\varepsilon}{C_\varepsilon}$. Par construction, $f'_\varepsilon = 1$ sur $M \backslash \left(\bigcup_{p \in \mathcal{Z}} B_{2\varepsilon}(p) \right)$ si bien que $f'_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1$ pour presque tout x dans M. D'après le théorème de Lebesgue, on obtient immédiatement la convergence quand $\varepsilon \to 0$ de $\int_M (f'_\varepsilon)^2 v_g$ vers $\mathrm{Vol}(M)$ et de $\int_M (f'_\varepsilon)^2 h v_g$ vers $\int_M h v_g$.

$\square$

Démonstration du théorème 3.2 : Premièrement, remarquons que la fonction

$$h := \frac{m^2}{4}\left(H^2 + R(\iota)\right) + \frac{1}{4}\frac{|d|\phi|^2|^2}{|\phi|^4} - \frac{1}{2}\triangle\left(\ln(|\phi|^2)\right)$$

est intégrable sur M. Le terme $\frac{m^2}{4}\left(H^2 + R(\iota)\right)$ est intégrable car lisse. D'autre part, si p est un zéro de ϕ sur M, on sait que (cf. [44])

$$\begin{cases} |\phi|_p^2 & = & 0 \\ d_p|\phi|^2 & = & 0 \\ Hess_p(|\phi|^2) & = & \frac{2}{(m+1)^2}|D_{\widetilde{M}}\phi|_p^2 g. \end{cases}$$

Le point p ne pouvant être un zéro de ϕ *et* de $D_{\widetilde{M}}\phi$ (sinon $\phi = 0$, voir par exemple [11]), c'est un zéro d'ordre 2 de $|\phi|^2$, et par conséquent un zéro d'ordre 4 de $|\phi|^4$. En outre, si $v := |d|\phi|^2|^2$, la fonction v satisfait :

$$\begin{cases} v_p & = & 0 \\ d_p v & = & 0 \\ Hess_p(v) & = & \frac{8}{(m+1)^3}|D_{\widetilde{M}}\phi|_p^4 g, \end{cases}$$

dont on déduit que p est aussi un zéro d'ordre 2 de v.
En résumé, tout zéro p de ϕ est un *pôle* d'ordre 2 des fonctions $\frac{|d|\phi|^2|^2}{|\phi|^4}$ et $\triangle\left(\ln(|\phi|^2)\right) = -\frac{|d|\phi|^2|^2}{|\phi|^4} - \frac{\triangle|\phi|^2}{|\phi|^2}$.
Or, si $m \geq 3$, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{|x|^2}$ est intégrable dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^m$. En supposant que la dimension de M est strictement supérieure à 2, la fonction h définie ci-dessus est par conséquent intégrable.

Comme $\mathcal{Z}_\phi$ est un sous-ensemble discret de $\widetilde{M}$, son intersection avec M est un ensemble fini. Soit $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la famille de fonctions construite dans le lemme 3.3 avec $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_\phi$. D'après les propriétés de base de f_ε, il vient :

$$\begin{aligned} (\triangle f_\varepsilon, f_\varepsilon) &= \int_{\bigcup_{p \in \mathcal{Z}_\phi} B_{2\varepsilon}(p)} |df_\varepsilon|^2 v_g \\ &\leq \varepsilon^2 \mathrm{Vol}\left(\bigcup_{p \in \mathcal{Z}_\phi} B_{2\varepsilon}(p) \right), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$(f_\varepsilon, f_\varepsilon) \geq C_\varepsilon^2 \mathrm{Vol}\left(M \setminus \left\{ \bigcup_{p \in \mathcal{Z}_\phi} B_{2\varepsilon}(p) \right\} \right).$$

En choisissant ε suffisamment petit, nous pouvons supposer que

$$\mathrm{Vol}\left(M \setminus \Big\{ \bigcup_{p\in\mathcal{Z}_\phi} B_{2\varepsilon}(p)\Big\}\right) \geq \mathcal{V} > 0,$$

qui ne dépend plus de ε. Par suite,

$$\begin{aligned}\frac{(\triangle f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{(f_\varepsilon, f_\varepsilon)} &\leq \frac{\varepsilon^2 \mathrm{Vol}\left(\bigcup_{p\in\mathcal{Z}_\phi} B_{2\varepsilon}(p)\right)}{C_\varepsilon^2 \mathcal{V}} \\ &\leq \frac{1}{c^2\mathcal{V}} \frac{\mathrm{Vol}\left(\bigcup_{p\in\mathcal{Z}_\phi} B_{2\varepsilon}(p)\right)}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Mais, en dimension strictement supérieure à 2,

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(B_\varepsilon(p))}{\varepsilon^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

d'où $\frac{(\triangle f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{(f_\varepsilon, f_\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$; on tire du lemme 3.4

$$\frac{(hf_\varepsilon, f_\varepsilon)}{(f_\varepsilon, f_\varepsilon)} + \frac{(\triangle f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{(f_\varepsilon, f_\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\int_M h v_g}{\mathrm{Vol}(M)}.$$

Le théorème 3.2 découle donc du lemme 3.2.

$\square$

Remarque 3.1 *Si le spineur-twisteur ϕ n'a pas de zéro sur M, la fonction $u := -\ln(|\phi|^2)$ est une fonction lisse sur M, par conséquent $\int_M (\triangle u)\, v_g = 0$ et l'inégalité (3.8) devient*

$$(\lambda_1)^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \big(H^2 + R(\iota)\big)\, v_g + \frac{1}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \frac{|d|\phi|^2|^2}{|\phi|^4} v_g.$$

Cette majoration n'est rien d'autre que celle donnée par le théorème 3.1 avec $u = -\ln(|\phi|^2)$; le théorème 3.2 généralise donc le théorème 3.1 sous l'hypothèse d'existence d'un spineur-twisteur non nul sur la variété ambiante.
En outre, si ϕ n'a pas de zéro sur M, l'inégalité (3.8) est encore valable si $m = 2$.

3.3.2 Hypersurfaces de niveau de la norme d'un spineur-twisteur

La majoration donnée dans le théorème 3.2 dépend de la norme du spineur-twisteur ambiant ϕ ; lorsque cette fonction est constante sur M, on peut évidemment déduire de l'inégalité (3.8) la majoration suivante :

$$(\lambda_1)^2 \leq \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M \big(H^2 + R(\iota)\big)\, v_g.$$

Mais, comme dans le paragraphe 2.4, on peut aussi se demander si cette inégalité n'est pas en fait une égalité et n'impose pas de restrictions sévères sur l'immersion comme sur l'hypersurface elle-même. Nous allons montrer que la proposition 2.3 et le corollaire 2.1 s'étendent au cas d'une variété ambiante admettant des spineurs-twisteurs.

Proposition 3.3 *Soit* $(M,\, g)$ *une hypersurface riemannienne orientée de dimension* m *d'une variété riemannienne spinorielle* $(\widetilde{M},\, g)$*. Munissons* M *de la structure spinorielle induite. Supposons que* $(\widetilde{M},\, g)$ *est d'Einstein et admet un spineur-twisteur non nul* ϕ *de norme non constante tel que :*

- *La fonction* $|\phi|$ *est constante sur* M
- *Il existe un point* x *dans* M *tel que* $\nu(|\phi|^2)_x \neq 0$.

Alors M *est totalement ombilique dans* $\widetilde{M}$.

Démonstration : Cette proposition vient comme conséquence d'un lemme élémentaire :

Lemme 3.5 *Soit* $(\widetilde{M}, g)$ *une variété riemannienne orientée admettant un champ de vecteurs* V *satisfaisant* $\widetilde{\nabla} V = u\mathrm{Id}$ *pour une fonction réelle* u *sur* $\widetilde{M}$*. Alors toute hypersurface riemannienne orientée* M *de* $\widetilde{M}$ *vérifiant*

$$V_{|_M} \in \Gamma(NM) \setminus \{0\}$$

est totalement ombilique.

Démonstration du lemme 3.5 : Si $V_{|_M}$ est un champ normal, posons $f := g(V_{|_M}, \nu)$, de sorte que $V_{|_M} = f\nu$. Différencions alors cette égalité : pour tout champ de vecteurs X tangent à M, $\widetilde{\nabla}_X V_{|_M} = uX$ d'après les hypothèses. D'autre part,

$$\widetilde{\nabla}_X V_{|_M} = X(f)\nu - fA(X).$$

L'identification des composantes tangentielles et normales de l'égalité précédente donne

$$\begin{aligned} X(f) &= 0 \\ -fA(X) &= uX. \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur M, et ne peut s'annuler, sinon $V_{|_M} = 0$, ce qui contredit les hypothèses. Par suite,

$$A = -\frac{u}{f}\mathrm{Id},$$

i.e. M est totalement ombilique dans $\widetilde{M}$.

□

Considérons le champ de vecteurs $V := \mathrm{grad}_g^{\widetilde{M}}(|\phi|^2)$ sur $\widetilde{M}$. Rappelons que (cf. par exemple [11]), si $m \geq 2$, pour tout champ de vecteurs X sur $\widetilde{M}^{m+1}$,

$$\widetilde{\nabla}_X V = |\phi|^2 \widetilde{L}(X) + \frac{2}{(m+1)^2}|D_{\widetilde{M}}\phi|^2 X.$$

Ici $\widetilde{L}$ désigne le $(1,1)$-tenseur de Schouten de $(\widetilde{M}, g)$, i.e. $\widetilde{L}(X) := \frac{1}{m-1}\left(-\widetilde{Ric}(X) + \frac{\widetilde{S}}{2m}X\right)$ où $\widetilde{S}$ est la courbure scalaire de $(\widetilde{M}, g)$. Lorsque $(\widetilde{M}, g)$ est d'Einstein, l'expression de $\widetilde{\nabla}_X V$ se simplifie :

$$\widetilde{\nabla}_X V = \frac{2}{(m+1)^2}\left(|D_{\widetilde{M}}\phi|^2 - \frac{(m+1)\widetilde{S}|\phi|^2}{4m}\right)X.$$

Soit $u := \frac{2}{(m+1)^2}\left(|D_{\widetilde{M}}\phi|^2 - \frac{(m+1)\widetilde{S}|\phi|^2}{4m}\right)$, de sorte que $\widetilde{\nabla} V = u\mathrm{Id}$. Les hypothèses de la proposition 3.3 assurent précisément que $V_{|M}$ est un champ normal, et ne s'annule pas identiquement sur M, par conséquent nous obtenons par le lemme 3.5 la totale ombilicité de M dans $\widetilde{M}$.

$\square$

Remarque 3.2 *Sous les hypothèses du lemme 3.5, si la fonction u ne s'annule pas identiquement sur M, le champ de vecteurs $V_{|M}$ ne s'annule pas non plus. En particulier, si la courbure scalaire ambiante est* strictement négative, *alors la fonction u définie dans la preuve de la proposition 3.3 est strictement positive sur $\widetilde{M}$. Dans ce cas, la condition $\nu(|\phi|^2) \neq 0$ sur M est automatiquement satisfaite et on peut conclure que tout sous-ensemble non vide $|\phi| = c$, pour une constante strictement positive c, est une hypersurface totalement ombilique de $\widetilde{M}$. Nous réobtenons la proposition 2.3 lorsqu'il existe un spineur de Killing imaginaire sur la variété ambiante.*

Nous avons vu dans le paragraphe 2.4 qu'une hypersurface totalement ombilique d'une variété riemannienne spinorielle admettant un spineur de Killing admet elle-même un spineur de Killing ; de plus, lorsque l'hypersurface est compacte, elle vérifie le cas-limite dans les majorations extrinsèques de valeurs propres (cf. remarques 2.2). Quand la variété ambiante admet un spineur-twisteur, la situation est similaire :

Proposition 3.4 *Soit M^m une hypersurface totalement ombilique d'une variété riemannienne spinorielle $\widetilde{M}$ admettant un spineur-twisteur ϕ. Alors ϕ est un spineur-twisteur sur M. De plus, en notant $\overline{g} := \frac{1}{|\phi|^4} g$ sur $\widetilde{M} \setminus \mathcal{Z}_\phi$,*

- *si ϕ n'a pas de zéro sur M, alors $(M, \overline{g})$ admet un spineur de Killing réel. En outre, si M est compacte*

$$\frac{mS_{\overline{g}}}{4(m-1)} = \lambda_1^2(\overline{D}) = \frac{m^2}{4}\left(H_{\overline{g}}^2 + \overline{R}(\iota)\right),$$

  où $S_{\overline{g}}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement la courbure scalaire et l'opérateur de Dirac fondamental de $(M, \overline{g})$
- *si ϕ a un zéro sur M, alors $\frac{\phi}{|\phi|}$ est parallèle sur $(M \setminus \mathcal{Z}_\phi, \overline{g})$ et $(M \setminus \mathcal{Z}_\phi, \overline{g}) \hookrightarrow (\widetilde{M} \setminus \mathcal{Z}_\phi, \overline{g})$ est totalement géodésique.*

Démonstration : Soit P l'opérateur de Penrose de (M, g) ; relions tout d'abord les opérateurs de Penrose P et $\widetilde{P}$.

Lemme 3.6 *Pour toute section φ de Σ et tout champ de vecteurs X tangent à M,*

$$\widetilde{P}_X\varphi - \frac{1}{m} X \cdot \nu \cdot \widetilde{P}_\nu \varphi = P_X\varphi + \frac{\tau(X)}{2} \cdot \nu \cdot \varphi.$$

Démonstration du lemme 3.6 : D'après (2.3),

$$D_{\widetilde{M}}\varphi - \nu\cdot\widetilde{\nabla}_\nu\varphi = \nu\cdot\left(D\varphi - \frac{mH}{2}\right)\varphi,$$

dont on déduit que

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_X\varphi - \frac{1}{m}X\cdot\nu\cdot\widetilde{P}_\nu\varphi &= \widetilde{\nabla}_X\varphi + \frac{1}{m+1}X\cdot D_{\widetilde{M}}\varphi - \frac{1}{m}X\cdot\nu\cdot\widetilde{\nabla}_\nu\varphi + \frac{1}{m(m+1)}X\cdot D_{\widetilde{M}}\varphi \\
&= \widetilde{\nabla}_X\varphi + \frac{1}{m}X\cdot D_{\widetilde{M}}\varphi - \frac{1}{m}X\cdot\nu\cdot\widetilde{\nabla}_\nu\varphi \\
&= \nabla_X\varphi + \frac{A(X)}{2}\cdot\nu\cdot\varphi + \frac{1}{m}X\cdot\nu\cdot\widetilde{\nabla}_\nu\varphi + \frac{1}{m}X\cdot\nu\cdot D\varphi \\
&- \frac{H}{2}X\cdot\nu\cdot\varphi - \frac{1}{m}X\cdot\nu\cdot\widetilde{\nabla}_\nu\varphi \\
&= P_X\varphi + \frac{\tau(X)}{2}\cdot\nu\cdot\varphi.
\end{aligned}$$

$\square$

Si ϕ est un spineur-twisteur sur $(\widetilde{M},g)$, alors $\widetilde{P}\phi = 0$ et le lemme 3.6 entraine, pour tout champ de vecteurs X tangent à M,

$$P_X\phi = -\frac{\tau(X)}{2}\underset{M}{\cdot}\phi.$$

Par suite, M est totalement ombilique dans $\widetilde{M}$ (i.e. $\tau = 0$) si et seulement si $P\phi = 0$, i.e. ϕ est un spineur-twisteur sur (M,g). La première assertion de la proposition 3.4 est donc démontrée. De plus, si ϕ n'a pas de zéro sur M, on sait d'après la proposition 3.2 que $(M,\overline{g})$ admet un spineur de Killing réel. Si M est compacte, la coïncidence de la borne de Friedrich et du majorant $\frac{m^2}{4}\left(H_{\overline{g}}^2 + \overline{R}(\iota)\right)$ est une conséquence des remarques 2.2.
À l'opposé, si ϕ a un zéro sur M, puisque le spineur $\frac{\phi}{|\phi|}$ est un spineur parallèle *à la fois* sur $(\widetilde{M}\setminus\mathcal{Z}_\phi,\overline{g})$ et sur $(M\setminus\mathcal{Z}_\phi,\overline{g})$ (proposition 3.2), nous déduisons de (2.3) que l'endomorphisme de Weingarten de $(M\setminus\mathcal{Z}_\phi,\overline{g}) \hookrightarrow (\widetilde{M}\setminus\mathcal{Z}_\phi,\overline{g})$ s'annule, i.e. que $M\setminus\mathcal{Z}_\phi$ est totalement géodésique dans $(\widetilde{M}\setminus\mathcal{Z}_\phi,\overline{g})$.

$\square$

Corollaire 3.1 *Sous les hypothèses de la proposition 3.3, l'hypersurface M est totalement ombilique à courbure moyenne constante et admet un spineur de Killing réel. En outre, si M est compacte,*

$$\frac{mS}{4(m-1)} = (\lambda_1)^2 = \frac{m^2}{4}\left(H^2 + R(\iota)\right). \tag{3.11}$$

Démonstration : Si $|\phi|_{|_M} = c$, pour une valeur régulière c de $|\phi|$, on sait par la proposition 3.3 que l'hypersurface M est totalement ombilique dans $(\widetilde{M},g)$; puisque $(\widetilde{M},g)$ est d'Einstein, M est à courbure moyenne constante (cf. preuve de la proposition 2.4). De plus, puisque $|\phi| = c$ et $c \neq 0$ (les zéros de ϕ forment un sous-ensemble discret de $\widetilde{M}$, voir proposition 3.2), la métrique $\overline{g} := \frac{1}{|\phi|^4}g$ est bien définie sur M et est *homothétique* à g. La proposition 3.4 entraine alors que $(M,\overline{g})$, et par suite (M,g), admet un spineur de Killing réel, et que, si M est compacte, la plus petite valeur propre de l'opérateur de Dirac fondamental de (M,g) satisfait les égalités (3.11).

□

Remarque 3.3 *Puisqu'un spineur-twisteur sur une variété d'Einstein est toujours la somme de deux spineurs de Killing (cf. par exemple [48]), on peut être tenté de dire que le corollaire 3.1 ne donne pas plus de renseignements que le corollaire 2.1 ; cependant, le carré de la norme d'un spineur-twisteur* n'est pas *la somme des carrés des normes des deux spineurs de Killing, car ces deux spineurs ne sont pas ponctuellement orthogonaux l'un à l'autre en général. Par conséquent le corollaire 3.1 étend et améliore le corollaire 2.1.*

Chapitre 4

Opérateur de Dirac sur les sous-variétés des variétés kählériennes

4.1 Introduction

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons vu comment déduire de l'existence de spineurs particuliers sur la variété ambiante des informations extrinsèques sur le spectre de l'opérateur de Dirac d'une hypersurface. Complétant les travaux de C. Bär pour les hypersurfaces des trois espaces-modèles ([6]), nous avons ainsi abordé l'étude des hypersurfaces de variétés admettant des spineurs-twisteurs. Qu'en est-il maintenant lorsque la variété ambiante n'admet pas de tels spineurs ? Par exemple, toute variété kählérienne spinorielle n'admet pas de spineurs de Killing réels non parallèles ([48], [30]). Un résultat plus fort d'O. Hijazi dans [29] montre même que l'espace projectif complexe de dimension complexe impaire n'admet pas de spineurs-twisteurs.
Nous envisageons donc de manière naturelle le cas d'une variété kählérienne comme variété ambiante. Puisque nous serons amenés à restreindre la structure complexe sur la sous-variété, nous considérons des sous-variétés CR sur lesquelles nous étudions le spectre de l'opérateur de Dirac *tordu* par le fibré normal. L'existence, sur certaines variétés kählériennes ambiantes, et dans certaines dimensions, de spineurs de Killing kählériens ([29],[38],[39] et Définition 4.3) permet de donner des estimations analogues à celles obtenues par A. Ros ([55]) et B.-Y. Chen ([17]) pour le laplacien scalaire.
Lorsque l'on considère une sous-variété *kählérienne* de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, n impair, nous en déduisons que les petites valeurs propres de l'opérateur de Dirac tordu sont majorées par un nombre ne dépendant que de la courbure ambiante et de la dimension complexe de la sous-variété (théorème 4.2).
Quand la sous-variété est *lagrangienne* dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, n impair, nous obtenons une estimation en fonction de la norme L^2 du vecteur courbure moyenne ainsi que d'un nombre proportionnel à la courbure ambiante (corollaire 4.2). Dans cette situation particulière, on peut également donner une majoration pour les sous-variétés lagrangiennes spinorielles de l'espace hyperbolique complexe de dimension complexe impaire (corollaire 4.3). Ce dernier résultat montre en particulier la non-existence de sous-variétés lagrangiennes spinorielles compactes *minimales* dans l'espace hyperbolique complexe de dimension complexe impaire.
Cette approche traite aussi le cas des hypersurfaces réelles, toute hypersurface réelle

orientée étant une sous-variété CR. Les estimations obtenues se simplifient également dans ce cadre (cf. théorème 4.5). De plus, l'opérateur de Dirac tordu coïncidant alors avec une double copie de l'opérateur de Dirac fondamental de l'hypersurface, ces résultats ouvrent une nouvelle voie vers l'étude de la géométrie intrinsèque de cette dernière via la résolution de problèmes à bord, à la façon de O. Hijazi, S. Montiel et X. Zhang dans [31], [32] et [33] pour les hypersurfaces plongées de l'espace euclidien.

4.2 Spineurs en géométrie kählérienne et restriction à une sous-variété

4.2.1 Fibré des spineurs sur une variété kählérienne

Dans un premier temps, nous rappelons les différentes décompositions du fibré des spineurs d'une variété kählérienne (cf. par exemple [29], [37], [38] ou [39]).

Soit (M^{2d}, g, J) une variété kählérienne spinorielle de dimension complexe d. Soient p_+ et p_- les projecteurs définis sur $T^cM := TM \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ par

$$p_\pm := \frac{1}{2}\left(\mathrm{Id} \mp iJ\right),$$

où J est étendu en un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de T^cM. L'application $p_\pm$ est la projection sur $\mathrm{Ker}\,(J \mp i\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(J \pm i\mathrm{Id})$; en particulier nous avons les relations :

- $p_+ \circ p_- = p_- \circ p_+ = 0$
- $p_\pm \circ J = J \circ p_\pm = \pm i p_\pm$.

Si g désigne l'extension $\mathbb{C}$-bilinéaire de la métrique à T^cM, la projection $p_\pm$ n'est pas une projection g-orthogonale, mais vérifie, pour tous champs Z et Z' dans T^cM :

$$g\left(p_+(Z), Z'\right) = g\left(Z, p_-(Z')\right),$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} g\left(p_+(Z), p_+(Z)\right) &= g\left(p_-(Z), p_-(Z)\right) = 0 \\ g\left(p_+(Z), p_-(Z)\right) &= g\left(p_-(Z), p_+(Z)\right) = \frac{1}{2} g(Z, Z). \end{aligned}$$

De plus, J étant parallèle, l'endomorphisme $p_\pm$ est parallèle.

Soit, en un point x de M, un système de vecteurs $(X_1, \ldots, X_d)$ de T_xM tel que le système $(X_1, J(X_1), \ldots, X_d, J(X_d))$ soit une base orthonormée directe de T_xM. Soit $\left(Z_1, \ldots, Z_d, \overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_d\right)$ la base de Witt associée, i.e. la base de T^c_xM définie par :

$$Z_j := p_+(X_j), \qquad \overline{Z}_j := p_-(X_j),$$

pour tout $1 \leq j \leq d$. D'après les propriétés de p_+ et p_-, les vecteurs Z_j et $\overline{Z}_j$ satisfont :

$$\begin{aligned} g\left(Z_j, Z_j\right) &= g\left(\overline{Z}_j, \overline{Z}_j\right) = 0 \\ g\left(Z_j, \overline{Z}_j\right) &= g\left(\overline{Z}_j, Z_j\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Soit Ω la 2-forme de Kähler de (M, g, J), définie pour tous vecteurs X et Y sur M par

$$\Omega(X, Y) := g\left(J(X), Y\right).$$

Via l'identification $T^*M \overset{g}{\cong} TM$, la forme Ω s'écrit dans la base $\left(Z_1, \ldots, Z_d, \overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_d\right)$

$$\Omega = -2i \sum_{j=1}^{d} Z_j \wedge \overline{Z}_j.$$

Rappelons le rôle algébrique joué par les projecteurs $p_\pm$ ainsi que la 2-forme Ω dans la structure de fibré de Clifford. Soit ∇ la connexion de Levi-Cività de $(M,\, g)$. Le fibré ΣM est naturellement équipé d'un produit scalaire hermitien $< \cdot\,, \cdot >$ (supposé $\mathbb{C}$-linéaire en la première variable), de sa dérivée covariante $\nabla^{\Sigma M}$ et de sa structure de fibré de Clifford $TM \otimes \Sigma M \xrightarrow{\mu} \Sigma M$ naturelles vérifiant, pour tous champs de vecteurs X, Y et pour tous spineurs ψ et ϕ sur M :

$$\begin{aligned} < X \underset{M}{\cdot} \psi, \phi > &= - < \psi, X \underset{M}{\cdot} \phi > & (4.1)\\ X(< \psi, \phi >) &= < \nabla_X^{\Sigma M} \psi, \phi > + < \psi, \nabla_X^{\Sigma M} \phi > & (4.2)\\ \nabla_X^{\Sigma M}(Y \underset{M}{\cdot} \phi) &= (\nabla_X Y) \underset{M}{\cdot} \phi + Y \underset{M}{\cdot} \nabla_X^{\Sigma M} \phi, & (4.3) \end{aligned}$$

où $X \underset{M}{\cdot} \phi := \mu\left(X \otimes \phi\right)$.
Soit $\omega^{\mathbb{C}}$ la forme volume complexe de $(M,\, g)$, donnée dans une base orthonormée directe locale $(Y_j)_{1 \leq j \leq 2d}$ de TM par $\omega^{\mathbb{C}} := i^d Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_{2d}$. La variété M étant de dimension paire, le fibré ΣM se scinde orthogonalement sous l'action de $\omega^{\mathbb{C}}$:

$$\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M,$$

où $\Sigma^\pm M$ est le sous-espace propre de la forme volume complexe correspondant à la valeur propre ± 1. Chaque vecteur de TM anticommutant avec $\omega^{\mathbb{C}}$, $\mu\left(TM \otimes \Sigma^\pm M\right) \subset \Sigma^\mp M$. La forme $\omega^{\mathbb{C}}$ étant parallèle, $\nabla^{\Sigma M}$ préserve cette décomposition.
La variété (M, g, J) étant de plus kählérienne, la multiplication de Clifford μ se décompose sous la forme

$$\mu = \mu_+ \oplus \mu_-,$$

avec $\mu_\pm\left(X \otimes \phi\right) := \mu\left(p_\pm(X) \otimes \phi\right) = p_\pm(X) \underset{M}{\cdot} \phi$. D'après l'identité (4.1), pour tout X tangent à M et pour tous ϕ et ψ dans Σ, la relation suivante est vérifiée :

$$< p_+(X) \underset{M}{\cdot} \psi, \phi >= - < \psi, p_-(X) \underset{M}{\cdot} \phi > .$$

L'homorphisme μ étant parallèle par (4.3), μ_+ et μ_- sont parallèles.
D'autre part, la forme de Kähler Ω agit sur ΣM. Rappelons l'expression de cette action sur un spineur φ dans une base de Witt locale $(Z_1, \ldots, Z_d, \overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_d)$ de T^cM. Via l'isomorphisme des fibrés vectoriels $\bigwedge T^*M \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}\mathrm{l}(TM)$, pour lequel (cf. [45])

$$X \wedge \varphi - X \lrcorner\, \varphi \simeq X \underset{M}{\cdot} \varphi,$$

pour tout champ X tangent à M, l'action de la forme Ω est donnée par :

$$\Omega \underset{M}{\cdot} \varphi = -2i \sum_{j=1}^{d} Z_j \underset{M}{\cdot} \overline{Z}_j \underset{M}{\cdot} \varphi - id\varphi. \tag{4.4}$$

Nous pouvons déduire de (4.4) que la forme Ω décompose orthogonalement le fibré ΣM de la façon suivante (cf. par exemple [37]) :

$$\Sigma M = \bigoplus_{r=0}^{d} \Sigma_r M, \tag{4.5}$$

où, pour $0 \leq r \leq d$,

$$\Sigma_r M := \mathrm{Ker}\Big(\Omega - i(2r-d)\mathrm{Id}\Big).$$

Cette décomposition n'est pas laissée stable par μ. Précisément,

$$\mu_\pm : TM \otimes \Sigma_r M \longrightarrow \Sigma_{r\pm 1} M.$$

Par contre, la forme de Kähler étant parallèle sur M, la décomposition (4.5) est préservée par la dérivée covariante $\nabla^{\Sigma M}$.

D'autre part, Ω commute avec $\omega^{\mathbb{C}}$, donc cette décomposition est laissée stable par Ω. Plus précisément,

$$\Sigma^+ M = \bigoplus_{r \text{ pair}} \Sigma_r M, \qquad \Sigma^- M = \bigoplus_{r \text{ impair}} \Sigma_r M. \tag{4.6}$$

4.2.2 Fibrés de spineurs sur une sous-variété

Nous rappelons maintenant la construction des différents fibrés des spineurs sur une sous-variété ainsi que des opérateurs de Dirac qui agissent naturellement dessus. Puisque nous serons amenés à considérer une sous-variété d'une variété kählérienne, nous nous restreignons dans ce paragraphe au cas où la dimension de la variété ambiante est paire (cf. [6] ou le chapitre 1 pour le cas général et pour plus de détails).

Soit $(M^m, g) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (\widetilde{M}^{2n}, g)$ une sous-variété riemannienne spinorielle de dimension m immergée dans une variété riemannienne spinorielle de dimension (réelle) $2n$. Nous supposerons toujours $m \geq 2$. Soient II la seconde forme fondamentale de l'immersion ι, ∇ (resp. $\widetilde{\nabla}$) la connexion de Levi-Civitá de (M, g) (resp. de $(\widetilde{M}, g)$), ΣM (resp. $\Sigma\widetilde{M}$) le fibré des spineurs de M (resp. de $\widetilde{M}$). Munissons comme précédemment ΣM d'un produit scalaire hermitien, de sa structure de fibré de Clifford, et de sa dérivée covariante canoniques vérifiant les relations (4.1) à (4.3). Nous noterons par $< \cdot\,, \cdot >$, $\widetilde{\nabla}$ et "$\cdot$" les objets analogues sur $(\widetilde{M}, g)$.

Puisque M et $\widetilde{M}$ sont supposées spinorielles, le fibré normal $NM \longrightarrow M$ admet également une structure spinorielle. Notons ΣN le fibré des spineurs de $NM \longrightarrow M$ et

$$\Sigma := \begin{cases} \Sigma M \otimes \Sigma N & \text{si } m \text{ est pair} \\ \Sigma M \otimes \Sigma N \oplus \Sigma M \otimes \Sigma N & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Notons ∇ la dérivée covariante sur Σ définie par

$$\nabla := \begin{cases} \nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N} & \text{si } m \text{ est pair} \\ \nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N} \oplus \nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le fibré tangent TM agit sur Σ par multiplication de Clifford sur le premier facteur ; nous noterons aussi "$\underset{M}{\cdot}$" cette action.

Muni du produit scalaire hermitien induit par ΣM et ΣN, de la multiplication de Clifford "$\underset{M}{\cdot}$" et de la connexion ∇, le fibré Σ vérifie les propriétés (4.1) à (4.3). Le produit scalaire hermitien et la multiplication de Clifford peuvent être également choisis de sorte qu'il existe un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & \Sigma\widetilde{M}_{|_M} \\ \phi & \longmapsto & \phi, \end{array} \tag{4.7}$$

satisfaisant :

- L'isomorphisme (4.7) est unitaire par rapport aux produits scalaires hermitiens respectifs sur Σ et $\Sigma\widetilde{M}_{|_M}$
- Pour tout champ X tangent à M et pour tout ϕ dans Σ, l'isomorphisme (4.7) envoie $X \underset{M}{\cdot} \phi$ sur $X \cdot \omega_\perp \cdot \phi$, où $\omega_\perp = i^{n-[\frac{m+1}{2}]}\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m}$ dans une base orthonormée directe locale $(\nu_j)_{1\leq j\leq 2n-m}$ de NM
- Via (4.7), les dérivées covariantes ∇ et $\widetilde{\nabla}$ sont liées par la formule de Gauss (cf. [6], [24]) : dans une base orthonormée locale $(X_j)_{1\leq j\leq m}$ de TM,

$$\widetilde{\nabla}_X\phi = \nabla_X\phi + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} X_j \cdot II(X, X_j)\cdot\phi, \tag{4.8}$$

  valable pour toute section ϕ de Σ et tout champ X tangent à M.

L'isomorphisme (4.7) étant unitaire, les produits scalaires hermitiens seront notés de la même façon sur Σ et $\Sigma\widetilde{M}$. La norme associée sera notée "$|\cdot|$".

Définition 4.1 ([6], [45]) *L'opérateur de Dirac de M tordu par le fibré normal, noté $D_M^{\Sigma N}$, est défini dans une base orthonormée locale $(X_j)_{1\leq j\leq m}$ de TM par :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\Sigma) & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma) \\ \phi & \longmapsto & D_M^{\Sigma N}\phi := \displaystyle\sum_{j=1}^{m} X_j \underset{M}{\cdot} \nabla_{X_j}\phi. \end{array}$$

Cet opérateur est elliptique (son symbole principal est non dégénéré) et formellement auto-adjoint : si $(\cdot\,,\cdot)$ est le produit scalaire L^2 sur Σ, pour toutes sections à support compact ϕ et ψ de Σ,

$$\left(D_M^{\Sigma N}\phi, \psi\right) = \left(\phi, D_M^{\Sigma N}\psi\right).$$

Par conséquent, si la variété M est compacte, le spectre de $D_M^{\Sigma N}$ est réel, discret et non borné. De plus, l'action de $\omega_\perp$ induisant sur Σ un automorphisme parallèle qui anticommute avec la multiplication de Clifford, le spectre de $D_M^{\Sigma N}$ est symétrique par rapport à l'origine. Nous noterons donc ainsi la suite des valeurs propres de $D_M^{\Sigma N}$:

$$0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}| \leq \ldots \longrightarrow +\infty$$

Dans les estimations de valeurs propres de $D_M^{\Sigma N}$, nous serons amenés à utiliser un autre opérateur de Dirac sur M, appelé opérateur de Dirac-Witten, défini dans une base orthonormée locale $(X_j)_{1\leq j\leq m}$ de TM par (cf. [6], [60], [35]) :

$$\widehat{D} := \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot \widetilde{\nabla}_{X_j}.$$

Cet opérateur agit sur les sections de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$, et est relié à $D_M^{\Sigma N}$ via (4.7) et (4.8) par (cf. [6])

$$\widehat{D}\phi = \omega_\perp \cdot D_M^{\Sigma N}\phi - \frac{mH}{2} \cdot \phi,$$

pour toute section ϕ de Σ, où $H = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m II(X_j, X_j)$ est le vecteur courbure moyenne de M dans $\widetilde{M}$. Il sera également utile de connaître la relation entre les carrés de ces deux opérateurs :

Lemme 4.1 *Pour toute section ϕ de Σ,*

$$\widehat{D}^2\phi = \left(D_M^{\Sigma N}\right)^2\phi - \frac{m^2|H|^2}{4}\phi - \frac{m}{2}\sum_{j=1}^m X_j \cdot \nabla^N_{X_j} H \cdot \phi. \tag{4.9}$$

Démonstration : Comme dans le lemme 2.2, il suffit d'évaluer $\widehat{D}\left(\omega_\perp \cdot \phi\right)$ en fonction de $\widehat{D}\phi$ et de l'action de la seconde forme fondamentale.
Posons $\delta := n - [\frac{m+1}{2}]$. D'après la formule de Gauß, pour tout champ X tangent à M et toute section ν du fibré normal,

$$\widetilde{\nabla}_X\nu = -II^*(X, \nu) + \nabla^N_X\nu,$$

où $II^*(X, \nu)$ est déterminé par la relation :

$$g\left(II^*(X, \nu), Y\right) = g\left(\nu, II(X, Y)\right),$$

pour tout champ Y tangent à M. La forme $\omega_\perp$ étant ∇^N-parallèle,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\left(\omega_\perp \cdot \phi\right) &= i^\delta\widetilde{\nabla}_X\left(\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m} \cdot \phi\right)\\
&= -i^\delta\Big\{II^*(X, \nu_1) \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m} + \ldots\\
&+ \nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m-1} \cdot II^*(X, \nu_{2n-m})\Big\} \cdot \phi\\
&+ i^\delta\Big\{\underbrace{\nabla^N_X\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m} + \ldots + \nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m-1} \cdot \nabla^N_X\nu_{2n-m}}_{0}\Big\} \cdot \phi\\
&+ \omega_\perp \cdot \widetilde{\nabla}_X\phi\\
&= -i^\delta\sum_{j=1}^m\Big\{g\left(II^*(X, \nu_1), X_j\right)X_j \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m}\\
&+ \ldots + g\left(II^*(X, \nu_{2n-m}), X_j\right)\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m-1} \cdot X_j\Big\} \cdot \phi\\
&+ \omega_\perp \cdot \widetilde{\nabla}_X\phi\\
&= i^\delta\sum_{j=1}^m\Big\{g\left(II(X, X_j), \nu_1\right)X_j \cdot \nu_1 \cdot \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m}\\
&+ g\left(II(X, X_j), \nu_{2n-m}\right)X_j \cdot \nu_{2n-m} \cdot \nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_{2n-m}\Big\} \cdot \phi + \omega_\perp \cdot \widetilde{\nabla}_X\phi\\
&= \sum_{j=1}^m X_j \cdot II(X, X_j) \cdot \omega_\perp \cdot \phi + \omega_\perp \cdot \widetilde{\nabla}_X\phi.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\widehat{D}\left(\omega_\perp \cdot \phi\right) &= \sum_{j=1}^{m} \left\{ X_j \cdot \widetilde{\nabla}_{X_j}\omega_\perp \cdot \phi + X_j \cdot \omega_\perp \cdot \widetilde{\nabla}_{X_j}\phi \right\} \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} X_j \cdot X_k \cdot II(X_j, X_k) \cdot \omega_\perp \cdot \phi + (-1)^{2n-m}\omega_\perp \cdot \widehat{D}\phi \\
&= -mH \cdot \omega_\perp \cdot \phi + (-1)^{2n-m}\omega_\perp \cdot \widehat{D}\phi.
\end{aligned}$$

Nous tirons de cette identité

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^2\phi &= \widehat{D}\left(\omega_\perp \cdot D_M^{\Sigma N}\phi\right) - \frac{m}{2}\widehat{D}\left(H \cdot \phi\right) \\
&= -mH \cdot \omega_\perp \cdot D_M^{\Sigma N}\phi + (-1)^{2n-m}\omega_\perp \cdot \widehat{D}\left(D_M^{\Sigma N}\phi\right) - \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{m} X_j \cdot \nabla^N_{X_j} H \cdot \phi \\
&+ \frac{mH}{2} \cdot \widehat{D}\phi \\
&= -mH \cdot \omega_\perp \cdot D_M^{\Sigma N}\phi + \left(D_M^{\Sigma N}\right)^2\phi - (-1)^{2n-m}\frac{m}{2}\omega_\perp \cdot H \cdot D_M^{\Sigma N}\phi \\
&- \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{m} X_j \cdot \nabla^N_{X_j} H \cdot \phi + \frac{mH}{2} \cdot \omega_\perp \cdot D_M^{\Sigma N}\phi - \frac{m^2|H|^2}{4}\phi \\
&= \left(D_M^{\Sigma N}\right)^2\phi - \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{m} X_j \cdot \nabla^N_{X_j} H \cdot \phi - \frac{m^2|H|^2}{4}\phi,
\end{aligned}$$

car $H \cdot \omega_\perp = (-1)^{2n-m-1}\omega_\perp \cdot H$.

$\square$

4.2.3 Cas des sous-variétés CR

Pour les préliminaires sur les sous-variétés CR, nous nous référons à [12] et [16].

Lorsque la variété ambiante $\widetilde{M}$ est munie d'une structure complexe J, il est naturel de considérer une décomposition J-invariante du fibré $T\widetilde{M}_{|M}$. Pour cela, définissons, en tout point x de M, le sous-espace vectoriel suivant de T_xM :

$$\mathcal{D}_x := T_xM \cap J_x(T_xM).$$

Le sous-espace $\mathcal{D}_x$ est le sous-espace J_x-invariant maximal de T_xM. La dimension de $\mathcal{D}_x$ n'est en général pas constante sur M. Nous nous restreignons par conséquent à la situation suivante :

Définition 4.2 ([12]) *Une sous-variété M d'une variété hermitienne $(\widetilde{M}, g, J)$ est dite CR si et seulement si il existe une distribution $\mathcal{D}$ sur M telle que*

$$J(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \qquad et \qquad J(\mathcal{D}^\perp) \subset NM,$$

où $\mathcal{D}^\perp$ est l'orthogonal de $\mathcal{D}$ dans TM.

Signalons qu'il existe d'autres définitions de structures CR (cf. par exemple [25]) ; nous choisissons ici celle qui semble la plus adaptée à notre problème.

Par exemple, toute sous-variété *complexe* M d'une variété hermitienne, i.e. telle que $J(TM) = TM$, est une sous-variété CR : en effet, $\mathcal{D} = TM$ et donc $\mathcal{D}^\perp = \{0\}$ dans ce cas. Une autre famille de sous-variétés CR est constituée des sous-variétés M *totalement réelles*, i.e. telles que $J(TM) \subset NM$: la distribution $\mathcal{D}$ est réduite à $\{0\}$ et $\mathcal{D}^\perp = TM$ dans ce cas. Signalons également que toute hypersurface réelle orientée M est une sous-variété CR, avec $\mathcal{D}^\perp = \mathbb{R}J(\nu)$ dans ce cas, où ν est un champ unitaire normal à l'hypersurface.

Supposons désormais la variété $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$ kählérienne et la sous-variété M^m CR. Remarquons qu'alors la distribution $\mathcal{D}$ de la définition 4.2 est nécessairement $TM \cap J(TM)$. Nous pouvons définir les distributions J-invariantes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \mathcal{D}^\perp \oplus J(\mathcal{D}^\perp) \\ \mathcal{F} &:= (\mathcal{D} \oplus \mathcal{E})^\perp . \end{aligned}$$

En tout point x de M, $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{F}_x$ sont des sous-espaces de $T_x\widetilde{M}_{|_M}$. Nous obtenons ainsi la décomposition à la fois orthogonale et J-invariante

$$T\widetilde{M}_{|_M} = \mathcal{D} \underset{\perp}{\oplus} \mathcal{E} \underset{\perp}{\oplus} \mathcal{F}. \tag{4.10}$$

De plus,

$$TM = \mathcal{D} \underset{\perp}{\oplus} \mathcal{D}^\perp \qquad \text{et} \qquad NM = J(\mathcal{D}^\perp) \underset{\perp}{\oplus} \mathcal{F}.$$

Nous noterons d le rang complexe de $\mathcal{D}$, de sorte que

$$\begin{aligned} rg_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) &= d \\ rg_{\mathbb{C}}(\mathcal{E}) &= m - 2d \\ rg_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) &= n - m + d. \end{aligned}$$

En particulier, si M est une sous-variété kählérienne (i.e. $\mathcal{E} = \{0\}$, ou encore $m = 2d$), le nombre d désignera la dimension complexe de M.

La décomposition (4.10) du fibré $T\widetilde{M}_{|_M}$ en somme directe orthogonale de distributions J-invariantes sur M permet de raffiner la formule de Gauß liant la dérivée covariante canonique de $T\widetilde{M}_{|_M}$ à celle de TM. Nous allons aussi dans ce qui vient décrire les relations entre les formes de Kähler de certaines de ces distributions et l'opérateur de Dirac-Witten.

Dans toute la suite, nous noterons $(e_j)_{1 \leq j \leq 2n}$ une base orthonormée locale de $T\widetilde{M}_{|_M}$ construite de la manière suivante : $(e_j)_{2d+1 \leq j \leq 2(m-d)}$ (resp. $(e_j)_{1 \leq j \leq 2d}$, $(e_j)_{2(m-d)+1 \leq j \leq 2n}$) est une base orthonormée locale de $\mathcal{E}$ (resp. de $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$) telle que $(e_j)_{2d+1 \leq j \leq m}$ est une base orthonormée locale de $\mathcal{D}^\perp$ et, pour $m+1 \leq j \leq 2(m-d)$, nous posons $e_j := J(e_{j-m+2d})$.

Pour une distribution $\mathcal{K} \subset T\widetilde{M}_{|_M}$, soit $Z \longmapsto Z^{\mathcal{K}}$ la projection orthogonale de $T\widetilde{M}_{|_M}$ sur $\mathcal{K}$. Soit $\nabla^{\mathcal{K}}$ la projection de la dérivée covariante ambiante sur $\mathcal{K}$, i.e.,

$$\nabla^{\mathcal{K}}_X Z := \left(\widetilde{\nabla}_X Z\right)^{\mathcal{K}},$$

pour tout champ X tangent à M et pour toute section Z de $T\widetilde{M}_{|M}$. Restreinte à $\mathcal{K}$, $\nabla^{\mathcal{K}}$ est une connexion compatible avec la métrique induite sur $\mathcal{K}$. De plus, la formule de Gauß, combinée avec l'hypothèse "$(\widetilde{M}, g, J)$ kählérienne", permet de lier $\nabla^{\mathcal{K}}$ à la seconde forme fondamentale, pour $\mathcal{K} := \mathcal{D}$, $\mathcal{D}^\perp$, $J(\mathcal{D}^\perp)$ ou $\mathcal{F}$. En notant, pour tous champs X et Y tangents à M,

$$II^{\mathcal{K}}(X,Y) := \{II(X,Y)\}^{\mathcal{K}},$$

et $II^*(X,\cdot)$ le champ d'homomorphismes de NM dans TM défini pour tout champ Y tangent à M et toute section N de NM par

$$g\left(II^*(X,N),Y\right) := g\left(II(X,Y),N\right),$$

nous avons les relations suivantes (cf. aussi [16]) :

Lemme 4.2 *Pour tout champ X tangent à M, pour toute section s (resp. t, ξ) de $\mathcal{D}$ (resp. de $\mathcal{D}^\perp$, $\mathcal{F}$),*

$$\begin{array}{lllll}
1. & \nabla^{\mathcal{D}}_X\left(J(s)\right) & = & J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_X s\right) \\
 & \nabla^{\mathcal{D}^\perp}_X s & = & -J\left(II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\{X,J(s)\}\right) \\
 & II^{\mathcal{F}}\{X,J(s)\} & = & J\left(II^{\mathcal{F}}\{X,s\}\right) \\
 & & & \\
2. & \nabla^{\mathcal{D}}_X t & = & J\left(II^*\{X,J(t)\}^{\mathcal{D}}\right) \\
 & \nabla^{\mathcal{D}^\perp}_X t & = & -J\left(\nabla^{J(\mathcal{D}^\perp)}_X\{J(t)\}\right) \\
 & II^{J(\mathcal{D}^\perp)}(X,t) & = & J\left(II^*\{X,J(t)\}^{\mathcal{D}^\perp}\right) \\
 & \nabla^{\mathcal{F}}_X\{J(t)\} & = & J\left(II^{\mathcal{F}}\{X,t\}\right) \\
 & & & \\
3. & II^*\{X,J(\xi)\}^{\mathcal{D}} & = & J\left(II^*\{X,\xi\}^{\mathcal{D}}\right) \\
 & \nabla^{J(\mathcal{D}^\perp)}_X \xi & = & J\left(II^*\{X,J(\xi)\}^{\mathcal{D}^\perp}\right) \\
 & \nabla^{\mathcal{F}}_X\{J(\xi)\} & = & J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_X \xi\right).
\end{array}$$

Démonstration : D'après la formule de Gauß, pour tous champs X et Y tangents à M et toute section N de NM,

$$\widetilde{\nabla}_X(Y+N) = \underbrace{\nabla_X Y - II^*(X,N)}_{\in TM} + \underbrace{II(X,Y) + \nabla^N_X N}_{\in NM},$$

où ∇^N désigne la dérivée covariante induite par $\widetilde{\nabla}$ sur le fibré normal NM. En remplaçant Y par $J(Y)$, N par $J(N)$, et en utilisant le fait que J est $\widetilde{\nabla}$-parallèle, nous obtenons :

- pour toute section s de $\mathcal{D}$,

$$\nabla_X\left(J(s)\right) + II\left(X,J(s)\right) = J(\nabla_X s) + J\left(II(X,s)\right),$$

  dont nous déduisons, par projection orthogonale sur $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^\perp$ et $\mathcal{F}$, les trois premières relations.
- pour toute section t de $\mathcal{D}^\perp$,

$$-II^*\left(X,J(t)\right) + \nabla^N_X\left(J(t)\right) = J(\nabla_X t) + J\left(II(X,t)\right),$$

  dont nous tirons de manière analogue les trois relations du point 2.

– pour toute section ξ de $\mathcal{F}$,

$$-II^*\left(X, J(\xi)\right) + \nabla^N_X\left(J(\xi)\right) = -J\left(II^*(X,\xi)\right) + J\left(\nabla^N_X \xi\right),$$

dont les trois relations du point 3 découlent.

□

Pour une question de clarté du texte à suivre, nous noterons encore $II^{\mathcal{F}}$ l'extension de $II^{\mathcal{F}}$ en une application bilinéaire de $TM \times (\mathcal{D} \oplus \mathcal{E})$ dans $\mathcal{F}$ via la relation :

$$II^{\mathcal{F}}(X,\cdot)_{|_{J(\mathcal{D}^\perp)}} := J \circ II^{\mathcal{F}}(X,\cdot) \circ J^{-1},$$

valable pour tout champ X tangent à M. Puisque, d'après le point 1 du lemme 4.2, $II^{\mathcal{F}}\left(s, J(s')\right) = J\left(II^{\mathcal{F}}(s,s')\right)$ pour toutes sections s et s' de $\mathcal{D}$, alors pour tout champ X tangent à M et toute section $s \oplus t$ de $\mathcal{D} \oplus \mathcal{E}$,

$$II^{\mathcal{F}}\left(X, J(s \oplus t)\right) = J\left(II^{\mathcal{F}}(X, s \oplus t)\right),$$

et d'autre part,

$$\nabla^{\mathcal{F}}_X\left(s \oplus t\right) = II^{\mathcal{F}}\left(X, s \oplus t\right).$$

De même, nous noterons $II^{\mathcal{F}*}(X,\cdot)$ le champ d'homorphismes de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{D} \oplus \mathcal{E}$ donné par la relation

$$g\left(II^{\mathcal{F}*}(X,\xi), s \oplus t\right) = g\left(\xi, II^{\mathcal{F}}(X, s \oplus t)\right),$$

valable pour toute section $s \oplus t$ de $\mathcal{D} \oplus \mathcal{E}$.

L'endomorphisme J de $T\widetilde{M}_{|M}$ étant $\widetilde{\nabla}$-parallèle, sa restriction à une distribution J-invariante $\mathcal{K}$ est "$\nabla^{\mathcal{K}}$-parallèle", i.e.,

$$\nabla^{\mathcal{K}}\left(J(Z)\right) = J\left(\nabla^{\mathcal{K}} Z\right),$$

pour toute section Z de $T\widetilde{M}_{|M}$. En particulier, les formes de Kähler respectives $\Omega^{\mathcal{E}}$ et $\Omega^{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont parallèles pour les connexions respectives $\nabla^{\mathcal{E}}$ et $\nabla^{\mathcal{F}}$. Cependant, elles ne sont pas parallèles pour la connexion ambiante, et n'appartiennent en général pas au noyau de l'opérateur de Dirac-Witten d'après le lemme que nous allons démontrer. Notons la trace d'un 2-tenseur b (à valeurs vectorielles ou scalaires) sur un sous-fibré $\mathcal{K}$ de $T\widetilde{M}_{|M}$ par $tr_{\mathcal{K}}(b)$.

Lemme 4.3 *Soit X un champ tangent à M et φ une section de $\Sigma\widetilde{M}_{|M}$. Alors,*
1. Pour toutes sections Y et Z de $T\widetilde{M}_{|M}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X \Omega^{\mathcal{E}}(Y,Z) &= g\left(J\{\nabla^{\mathcal{D}}_X\left(Y^{\mathcal{E}}\right) - \nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Y^{\mathcal{D}}\right)\} + J\{\nabla^{\mathcal{F}}_X\left(Y^{\mathcal{E}}\right) - \nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Y^{\mathcal{F}}\right)\}, Z\right)\\
\widetilde{\nabla}_X \Omega^{\mathcal{F}}(Y,Z) &= g\left(J\{\nabla^{\mathcal{D}}_X\left(Y^{\mathcal{F}}\right) - \nabla^{\mathcal{F}}_X\left(Y^{\mathcal{D}}\right)\} + J\{\nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Y^{\mathcal{F}}\right) - \nabla^{\mathcal{F}}_X\left(Y^{\mathcal{E}}\right)\}, Z\right)
\end{aligned}$$

2. Dans la base orthonormée locale (e_j) décrite ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}\left(\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\varphi\right) &= \Omega^{\mathcal{E}}\cdot\widehat{D}\varphi - 2\textstyle\sum_{j=2d+1}^{m} J(e_j)\cdot\widetilde{\nabla}_{e_j}\varphi + J\left(tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^{\perp})}\}\right)\cdot\varphi\\
&- J\left(tr_{\mathcal{D}^{\perp}}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right)\cdot\varphi - mJ(H)^{\mathcal{F}}\cdot\varphi\\
&+ \textstyle\sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=2d+1}^{m}\left\{e_j\wedge\{e_k\wedge J\left(II^{\mathcal{F}}(e_j,e_k)\right) - J(e_k)\wedge II^{\mathcal{F}}(e_j,e_k)\}\right\}\cdot\varphi\\
&- \textstyle\sum_{j,k=2d+1}^{m}\left\{e_j\wedge J(e_k)\wedge II^{\mathcal{F}}(e_j,e_k)\right\}\cdot\varphi\\
&- \textstyle\sum_{j,k=1}^{2d}\left\{e_j\wedge e_k\wedge II^{J(\mathcal{D}^{\perp})}\left(e_j,J(e_k)\right)\right\}\cdot\varphi\\
&- \textstyle\sum_{j=2d+1}^{m}\sum_{k=1}^{2d}\left\{e_j\wedge e_k\wedge\{II^{J(\mathcal{D}^{\perp})}\left(e_j,J(e_k)\right) + J(II^{J(\mathcal{D}^{\perp})}(e_j,e_k))\}\right\}\cdot\varphi\\
\widehat{D}\left(\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\varphi\right) &= \Omega^{\mathcal{F}}\cdot\widehat{D}\varphi + mJ(H)^{\mathcal{F}}\cdot\varphi\\
&+ \textstyle\sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=2d+1}^{m}\left\{e_j\wedge J(e_k)\wedge II^{\mathcal{F}}(e_j,e_k)\right\}\cdot\varphi\\
&+ \textstyle\sum_{j,k=2d+1}^{m}\left\{e_j\wedge J(e_k)\wedge II^{\mathcal{F}}(e_j,e_k)\right\}\cdot\varphi.
\end{aligned}$$

Démonstration : Soient Y et Z deux sections de $T\widetilde{M}_{|M}$. Par définition,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\Omega^{\mathcal{E}}(Y,Z) &= X\left(\Omega^{\mathcal{E}}(Y,Z)\right) - \Omega^{\mathcal{E}}\left(\widetilde{\nabla}_X Y, Z\right) - \Omega^{\mathcal{E}}\left(Y,\widetilde{\nabla}_X Z\right)\\
&= X\left(\Omega^{\mathcal{E}}(Y^{\mathcal{E}},Z^{\mathcal{E}})\right) - \Omega^{\mathcal{E}}\left(\nabla^{\mathcal{E}}_X Y, Z^{\mathcal{E}}\right) - \Omega^{\mathcal{E}}\left(Y^{\mathcal{E}},\nabla^{\mathcal{E}}_X Z\right)\\
&= \nabla^{\mathcal{E}}_X\Omega^{\mathcal{E}}(Y^{\mathcal{E}},Z^{\mathcal{E}}) - \Omega^{\mathcal{E}}\left(\nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Y^{\mathcal{D}}+Y^{\mathcal{F}}\right),Z^{\mathcal{E}}\right) - \Omega^{\mathcal{E}}\left(Y^{\mathcal{E}},\nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Z^{\mathcal{D}}+Z^{\mathcal{F}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Puisque le champ d'endomorphismes J est $\nabla^{\mathcal{E}}$-parallèle, $\nabla^{\mathcal{E}}\Omega^{\mathcal{E}} = 0$. De plus, l'adjoint de l'endomorphisme $Y \longmapsto \nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Y^{\mathcal{D}}\right)$ de $T\widetilde{M}_{|M}$ est $Y \longmapsto -\nabla^{\mathcal{D}}_X\left(Y^{\mathcal{E}}\right)$. De même, celui de $Y \longmapsto \nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Y^{\mathcal{F}}\right)$ est $Y \longmapsto -\nabla^{\mathcal{F}}_X\left(Y^{\mathcal{E}}\right)$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\Omega^{\mathcal{E}}(Y,Z) &= -g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Y^{\mathcal{D}}+Y^{\mathcal{F}}\right)\right),Z^{\mathcal{E}}\right) - g\left(J\left(Y^{\mathcal{E}}\right),\nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Z^{\mathcal{D}}+Z^{\mathcal{F}}\right)\right)\\
&= -g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Y^{\mathcal{D}}+Y^{\mathcal{F}}\right)\right),Z^{\mathcal{E}}\right) + g\left(\{\nabla^{\mathcal{D}}_X+\nabla^{\mathcal{F}}_X\}\left(J(Y^{\mathcal{E}})\right),Z^{\mathcal{D}}+Z^{\mathcal{F}}\right)\\
&= -g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{E}}_X\left(Y^{\mathcal{D}}+Y^{\mathcal{F}}\right)\right),Z^{\mathcal{E}}\right) + g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_X Y^{\mathcal{E}}+\nabla^{\mathcal{F}}_X Y^{\mathcal{E}}\right),Z^{\mathcal{D}}+Z^{\mathcal{F}}\right)\\
&= g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_X Y^{\mathcal{E}}-\nabla^{\mathcal{E}}_X Y^{\mathcal{D}}\right),Z^{\mathcal{D}}+Z^{\mathcal{E}}\right)\\
&+ g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_X Y^{\mathcal{E}}-\nabla^{\mathcal{E}}_X Y^{\mathcal{F}}\right),Z^{\mathcal{E}}+Z^{\mathcal{F}}\right).
\end{aligned}$$

La preuve de la seconde identité du point 1 est analogue, il suffit d'intervertir les rôles des distributions $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Pour la preuve du second point, évaluons tout d'abord $\widehat{D}\Omega^{\mathcal{E}}$ et $\widehat{D}\Omega^{\mathcal{F}}$.

$$\widehat{D}\Omega^{\mathcal{E}} = \sum_{j=1}^{m} e_j\cdot\widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{E}}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\{e_j \wedge \widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{E}} - e_j \lrcorner \widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{E}}\}.$$

D'après le point 1 du lemme,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} e_j \wedge \widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{2n} \widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{E}}\left(e_k, e_l\right) e_j \wedge e_k \wedge e_l \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{2n} g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_k\right), e_l\right) e_j \wedge e_k \wedge e_l \\
&+ g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{F}}_k\right), e_l\right) e_j \wedge e_k \wedge e_l \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2n} e_j \wedge e_k \wedge \{J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_k\right) + J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{F}}_k\right)\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2n} e_j \wedge e_k \wedge \{J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_k\right)\} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{2n} g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{F}}_k\right), e_l\right) e_j \wedge e_k \wedge e_l \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2n} e_j \wedge e_k \wedge \{J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_k\right)\} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{2n} g\left(J\left(\nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_l - \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_l\right), e_k\right) e_j \wedge e_k \wedge e_l \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2n} e_j \wedge e_k \wedge \{J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_k\right)\} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{2n} e_j \wedge \{J\left(\nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_l - \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_l\right)\} \wedge e_l \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2n} e_j \wedge e_k \wedge \{J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_k\right)\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} e_j \wedge \widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{E}} &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2d+1}^{2(m-d)} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_k\right) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2d+1}^{m} e_j \wedge \{e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_k\right) - J(e_k) \wedge \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_k\} \\
&- \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{D}^{\perp}}_{e_j} e_k + \nabla^{J(\mathcal{D}^{\perp})}_{e_j} e_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=2d+1}^{m} e_j \wedge \{e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_k\right) - J(e_k) \wedge \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_k\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{j,k=2d+1}^{m} e_j \wedge \{e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_k\right) - J(e_k) \wedge \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_k\} \\
&- \sum_{j,k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{D}^\perp}_{e_j} e_k + \nabla^{J(\mathcal{D}^\perp)}_{e_j} e_k\right) \\
&- \sum_{j=2d+1}^{m} \sum_{k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{D}^\perp}_{e_j} e_k + \nabla^{J(\mathcal{D}^\perp)}_{e_j} e_k\right).
\end{aligned}
$$

Or $\nabla^{\mathcal{F}}_X Y = II^{\mathcal{F}}(X,Y)$ pour toutes sections X et Y de $\mathcal{D}^\perp$, donc

$$
\sum_{j,k=2d+1}^{m} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_k\right) = 0
$$

par symétrie de II. Pour la même raison, puisque $\nabla^{J(\mathcal{D}^\perp)}_X Y = II^{J(\mathcal{D}^\perp)}(X,Y)$,

$$
\sum_{j,k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{J(\mathcal{D}^\perp)}_{e_j} e_k\right) = 0.
$$

En utilisant le lemme 4.2, il reste donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} e_j \wedge \widetilde{\nabla}_{e_j} \Omega^{\mathcal{E}} &= \sum_{j=1}^{2d} \sum_{k=2d+1}^{m} e_j \wedge \{e_k \wedge J\left(II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\right) - J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\} \\
&- \sum_{j,k=2d+1}^{m} e_j \wedge J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k) \\
&- \sum_{j,k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\left(e_j, J(e_k)\right) \\
&- \sum_{j=2d+1}^{m} \sum_{k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge \{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\left(e_j, J(e_k)\right) + J(II^{J(\mathcal{D}^\perp)}(e_j, e_k))\}.
\end{aligned}
$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} e_j \lrcorner \widetilde{\nabla}_{e_j} \Omega^{\mathcal{E}} &= \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\nabla}_{e_j} \Omega^{\mathcal{E}}(e_j, \cdot) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \{J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_j - \nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_j\right) + J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_j\right) - J\Big(\nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} \underbrace{e^{\mathcal{F}}_j}_{0}\Big)\} \\
&= \sum_{j=2d+1}^{m} J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_{e_j} e_j\right) - \sum_{j=1}^{2d} J\left(\nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e_j\right) + \sum_{j=2d+1}^{m} J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_j\right) \\
&= \sum_{j=2d+1}^{m} J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_{e_j} e_j\right) - \sum_{j=1}^{2d} J\left(\nabla^{\mathcal{D}^\perp}_{e_j} e_j\right) - \sum_{j=1}^{2d} J\left(II^{J(\mathcal{D}^\perp)}(e_j, e_j)\right) \\
&+ \sum_{j=2d+1}^{m} J\left(II^{\mathcal{F}}(e_j, e_j)\right) \\
&= J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}(\nabla^{\mathcal{D}})\right) - J\left(tr_{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}^\perp})\right) - J\left(tr_{\mathcal{D}}(II^{J(\mathcal{D}^\perp)})\right) + J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}(II^{\mathcal{F}})\right).
\end{aligned}
$$

D'après la seconde identité du lemme 4.2, pour toutes sections s et s' de $\mathcal{D}$,

$$\nabla_s^{\mathcal{D}^\perp} s' = -J\left(II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\{s, J(s')\}\right),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\nabla_s^{\mathcal{D}^\perp} s + \nabla_{J(s)}^{\mathcal{D}^\perp} J(s) &= -J\left(II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\{s, J(s)\}\right) + J\left(II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\{J(s), s\}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

La distribution $\mathcal{D}$ étant J-invariante, nous en déduisons que

$$tr_{\mathcal{D}}\left(\nabla^{\mathcal{D}^\perp}\right) = 0.$$

Cette propriété est celle de *minimalité* de la distribution $\mathcal{D}$ découverte par B.-Y. Chen dans [16].
De même, puisque $J(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, nous pouvons supposer la base locale $(e_j)_{1\leq j\leq 2d}$ de $\mathcal{D}$ de la forme $\{e_1, \ldots, e_d, J(e_1), \ldots, J(e_d)\}$. Comme $II^{\mathcal{F}}(X, \cdot) \circ J = J \circ II^{\mathcal{F}}(X, \cdot)$,

$$\begin{aligned}tr_{\mathcal{D}}\left(II^{\mathcal{F}}\right) &= \sum_{j=1}^{2d} II^{\mathcal{F}}(e_j, e_j)\\ &= \sum_{j=1}^{d} II^{\mathcal{F}}(e_j, e_j) + \sum_{j=1}^{d} II^{\mathcal{F}}\left(J(e_j), J(e_j)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{d}\{II^{\mathcal{F}}(e_j, e_j) - II^{\mathcal{F}}(e_j, e_j)\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $tr_{\mathcal{D}}\left(\nabla^{\mathcal{D}^\perp}\right) = 0$ et $tr_{\mathcal{D}^\perp}\left(II^{\mathcal{F}}\right) = mH^{\mathcal{F}}$, donc

$$\sum_{j=1}^{m} e_j \lrcorner \widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{E}} = J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}(\nabla^{\mathcal{D}})\right) - J\left(tr_{\mathcal{D}}(II^{J(\mathcal{D}^\perp)})\right) + mJ\left(H^{\mathcal{F}}\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\widehat{D}\Omega^{\mathcal{E}} &= \sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=2d+1}^{m} e_j \wedge \{e_k \wedge J\left(II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\right) - J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\}\\ &- \sum_{j,k=2d+1}^{m} e_j \wedge J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\\ &- \sum_{j,k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\left(e_j, J(e_k)\right)\\ &- \sum_{j=2d+1}^{m}\sum_{k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge \{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\left(e_j, J(e_k)\right) + J\left(II^{J(\mathcal{D}^\perp)}(e_j, e_k)\right)\}\\ &+ J\left(tr_{\mathcal{D}}(II^{J(\mathcal{D}^\perp)})\right) - J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right) - mJ\left(H^{\mathcal{F}}\right).\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} e_j \wedge \widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{F}} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2n} e_j \wedge e_k \wedge \{J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_{e_j} e^{\mathcal{F}}_k - \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_k\right) + J\left(\nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{F}}_k - \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k\right)\} \\
&= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2n} e_j \wedge e_k \wedge \{J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_k + \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k\right)\}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2n} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_k\right) &= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_k\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge J\left(II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\right) \\
&= -\sum_{j=2d+1}^{m}\sum_{k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge J\left(II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\right),
\end{aligned}$$

par symétrie de II. La somme $\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2n} e_j \wedge e_k \wedge J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_k\right)$ ayant été calculée précédemment, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} e_j \wedge \widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{F}} &= -\sum_{j=2d+1}^{m}\sum_{k=1}^{2d} e_j \wedge e_k \wedge J\left(II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\right) \\
&- \sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=2d+1}^{m} e_j \wedge \{e_k \wedge J\left(II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\right) - J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)\} \\
&+ \sum_{j,k=2d+1}^{m} e_j \wedge J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k) \\
&= \sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=2d+1}^{m} e_j \wedge J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k) \\
&+ \sum_{j,k=2d+1}^{m} e_j \wedge J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} e_j \lrcorner \widetilde{\nabla}_{e_j}\Omega^{\mathcal{F}} &= \sum_{j=1}^{m} J\left(\nabla^{\mathcal{D}}_{e_j} e^{\mathcal{F}}_j - \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{D}}_j\right) + J\left(\nabla^{\mathcal{E}}_{e_j} e^{\mathcal{F}}_j - \nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e^{\mathcal{E}}_j\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{2d} J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_j\right) - \sum_{j=2d+1}^{m} J\left(\nabla^{\mathcal{F}}_{e_j} e_j\right) \\
&= -tr_{TM}\left(II^{\mathcal{F}}\right) \\
&= -mJ\left(H^{\mathcal{F}}\right).
\end{aligned}$$

Il vient

$$\widehat{D}\Omega^{\mathcal{F}} = \sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=2d+1}^{m} e_j \wedge J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k)$$

$$+ \quad \sum_{j,k=2d+1}^{m} e_j \wedge J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k) + mJ\left(H^{\mathcal{F}}\right).$$

Reste à déterminer le commutateur de $\Omega^{\mathcal{E}}$ et $\Omega^{\mathcal{F}}$ avec un vecteur X tangent à M. Pour toute 2-forme ω et pour tout champ X sur $\widetilde{M}$,

$$\begin{aligned}
X \cdot \omega &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2n} \omega(e_j, e_k) X \cdot e_j \cdot e_k \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2n} \omega(e_j, e_k) e_j \cdot X \cdot e_k - \sum_{j,k=1}^{2n} \omega(e_j, e_k) g(X, e_j) e_k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2n} \omega(e_j, e_k) e_j \cdot e_k \cdot X + \sum_{j,k=1}^{2n} \omega(e_j, e_k) g(X, e_k) e_j - \sum_{j,k=1}^{2n} \omega(e_j, e_k) g(X, e_j) e_k \\
&= \omega \cdot X + \sum_{j=1}^{2n} \omega(e_j, X) e_j - \sum_{k=1}^{2n} \omega(X, e_k) e_k \\
&= \omega \cdot X - 2X \lrcorner\, \omega.
\end{aligned}$$

Lorsque ω est la forme de Kähler $\Omega^{\mathcal{K}}$ d'une distribution J-invariante $\mathcal{K}$ de $T\widetilde{M}$ (ou de $T\widetilde{M}_{|M}$), $X \lrcorner\, \Omega^{\mathcal{K}} = J(X)^{\mathcal{K}}$, et par conséquent

$$X \cdot \Omega^{\mathcal{K}} = \Omega^{\mathcal{K}} \cdot X - 2J(X)^{\mathcal{K}},$$

où $J(X)^{\mathcal{K}}$ est le projeté orthogonal de $J(X)$ sur $\mathcal{K}$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\widehat{D}\left(\Omega^{\mathcal{E}} \cdot \varphi\right) &= \sum_{j=1}^{m} e_j \cdot \widetilde{\nabla}_{e_j}\left(\Omega^{\mathcal{E}} \cdot \varphi\right) \\
&= \left(\widehat{D}\Omega^{\mathcal{E}}\right) \cdot \varphi + \sum_{j=1}^{m} e_j \cdot \Omega^{\mathcal{E}} \cdot \widetilde{\nabla}_{e_j}\varphi \\
&= \left(\widehat{D}\Omega^{\mathcal{E}}\right) \cdot \varphi + \sum_{j=1}^{m} \Omega^{\mathcal{E}} \cdot e_j \cdot \widetilde{\nabla}_{e_j}\varphi - 2\sum_{j=1}^{m} J(e_j)^{\mathcal{E}} \cdot \widetilde{\nabla}_{e_j}\varphi \\
&= \left(\widehat{D}\Omega^{\mathcal{E}}\right) \cdot \varphi + \Omega^{\mathcal{E}} \cdot \widehat{D}\varphi - 2\sum_{j=2d+1}^{m} J(e_j) \cdot \widetilde{\nabla}_{e_j}\varphi.
\end{aligned}$$

En remplaçant $\widehat{D}\Omega^{\mathcal{E}}$ par l'expression calculée précédemment, nous obtenons la première identité du second point.
La seconde identité se démontre de manière analogue, en utilisant cette fois-ci le fait que, pour tout champ X tangent à M, on a la relation : $X \cdot \Omega^{\mathcal{F}} = \Omega^{\mathcal{F}} \cdot X$. Ceci achève la preuve du lemme 4.3.

$\square$

Remarquons que les dérivées covariantes de $\Omega^{\mathcal{E}}$ et $\Omega^{\mathcal{F}}$ s'expriment en fonction de la seconde forme fondamentale II et de son adjoint : d'après le lemme 4.2, si $Y^{\mathcal{E}} = Y_1 + J(Y_2)$, où Y_1 et Y_2 sont deux sections de $\mathcal{D}^{\perp}$, alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X \Omega^{\mathcal{E}}(Y, \cdot) &= -II^*\left(X, J(Y_1)\right)^{\mathcal{D}} - J\left(II^*\left(X, J(Y_2)\right)^{\mathcal{D}}\right) - II^{J(\mathcal{D}^{\perp})}\left(X, J(Y^{\mathcal{D}})\right) \\
&- J\left(II^{J(\mathcal{D}^{\perp})}(X, Y^{\mathcal{D}})\right) + J\left(II^{\mathcal{F}}(X, Y^{\mathcal{E}})\right) + J\left(II^{\mathcal{F}*}(X, Y^{\mathcal{F}})\right),
\end{aligned}$$

et

$$\widetilde{\nabla}_X\Omega^{\mathcal{F}}(Y,\cdot) = -J\left(II^*(X,Y^{\mathcal{F}})^{\mathcal{D}}\right) - J\left(II^{\mathcal{F}}(X,Y^{\mathcal{D}})\right) - J\left(II^{\mathcal{F}}(X,Y^{\mathcal{E}})\right) - J\left(II^{\mathcal{F}*}(X,Y^{\mathcal{F}})\right),$$

pour tout champ X tangent à M et pour toute section Y de $T\widetilde{M}_{|_M}$.

4.3 Estimations de valeurs propres pour les sous-variétés CR

Nous supposerons dans ce paragraphe la sous-variété M^m CR et compacte. Pour obtenir des majorations des valeurs propres de $D_M^{\Sigma N}$ par le principe du Min-Max, nous allons restreindre certains spineurs particuliers à M qui joueront le rôle de spineurs-test dans le quotient de Rayleigh de cet opérateur.

Définition 4.3 ([29],[38]) *Pour un nombre complexe non nul α, on appelle α-spineur de Killing kählérien sur $(\widetilde{M}, g, J)$ tout couple de sections (ψ, ϕ) de $\Sigma\widetilde{M}$ vérifiant, pour tout champ Z sur $\widetilde{M}$:*

$$\begin{cases} \widetilde{\nabla}_Z\psi + \alpha p_-(Z)\cdot\phi &= 0 \\ \widetilde{\nabla}_Z\phi + \alpha p_+(Z)\cdot\psi &= 0. \end{cases}$$

Si $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$ admet un α-spineur de Killing kählérien non nul, O. Hijazi ([29]) et K.-D. Kirchberg ([38]) ont montré que nécessairement la dimension complexe n de $\widetilde{M}$ est impaire, la variété $(\widetilde{M},\, g)$ d'Einstein, α est réel ou imaginaire pur, et que (ψ, ϕ) est une section de $\Sigma_{\frac{n-1}{2}}\widetilde{M} \times_M \Sigma_{\frac{n+1}{2}}\widetilde{M}$.

Pour une sous-variété CR M^m de $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$, définissons, dans la base orthonormée locale (e_j) précédemment construite, les sections suivantes de $\bigwedge^3 T^*\widetilde{M}_{|_M}$:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &:= \sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=2d+1}^{m} e_j\wedge e_k\wedge J\left(II^{\mathcal{F}}(e_j,e_k)\right)\\
\beta_2 &:= \sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=2d+1}^{m} e_j\wedge J(e_k)\wedge II^{\mathcal{F}}(e_j,e_k)\\
\beta_3 &:= \sum_{j,k=2d+1}^{m} e_j\wedge J(e_k)\wedge II^{\mathcal{F}}(e_j,e_k)\\
\beta_4 &:= -\sum_{j,k=1}^{2d} e_j\wedge e_k\wedge II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\left(e_j,J(e_k)\right)\\
\beta_5 &:= -\sum_{j=2d+1}^{m}\sum_{k=1}^{2d} e_j\wedge e_k\wedge \{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\left(e_j,J(e_k)\right) + J(II^{J(\mathcal{D}^\perp)}(e_j,e_k))\}.
\end{aligned}$$

Théorème 4.1 *Soit (M^m, g) une sous-variété CR spinorielle compacte d'une variété kählérienne spinorielle $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$. Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Supposons que $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$ admet un α-spineur de Killing kählérien (ψ, ϕ) avec α réel. Alors*

$$\begin{aligned}
(\lambda_1)^2 &\leq \frac{\alpha^2}{4}\left((m+2)^2 - 2(m-2d)\right) + \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M |H|^2 v_g \\
&- \frac{\alpha^2}{4\mathrm{Vol}(M)} || \left(\Omega^{\mathcal{E}} + 2\Omega^{\mathcal{F}}\right) \cdot (\psi + \phi) ||^2_{L^2(M)} \\
&+ \frac{\alpha^2}{2\mathrm{Vol}(M)} \int_M \left(i < \Omega^{\mathcal{E}} \cdot \phi, \phi > - i < \Omega^{\mathcal{E}} \cdot \psi, \psi >\right) v_g \\
&- \frac{\alpha}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M \Im\mathrm{m} \left(< \{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5\} \cdot \phi, \psi >\right) v_g. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

La preuve du théorème 4.1 repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.4 *Supposons que M^m est CR et que (ϕ, ψ) est un α-spineur de Killing kählérien sur $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$, avec α complexe. Alors*

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^2(\psi + \phi) &= \frac{\alpha^2}{4}\Big\{ (m+2)^2 - 2(m-2d) \Big\}(\psi + \phi) + \frac{\alpha^2}{4}\left(\Omega^{\mathcal{E}} + 2\Omega^{\mathcal{F}}\right)^2 \cdot (\psi + \phi) \\
&- \frac{i\alpha}{2} J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right) \cdot (\phi - \psi) + \frac{im\alpha}{2} J(H)^{\mathcal{F}} \cdot (\phi - \psi) \\
&+ \frac{i\alpha}{2} J\left(tr_{\mathcal{D}}(II^{J(\mathcal{D}^\perp)})\right) \cdot (\phi - \psi) \\
&+ \frac{i\alpha^2}{2}\Omega^{\mathcal{E}} \cdot (\phi - \psi) + \frac{i\alpha}{2}\Big\{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5\Big\} \cdot (\phi - \psi). \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme 4.4 : Dans la base orthonormée locale $(e_j)_{1 \leq j \leq 2n}$ de $T\widetilde{M}_{|_M}$ précédemment construite, évaluons tout d'abord $\widehat{D}\psi$ et $\widehat{D}\phi$. Nous noterons encore, pour $1 \leq j \leq 2n$, $Z_j := p_+(e_j)$ et $\overline{Z}_j := p_-(e_j)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{D}\psi &= -\alpha \sum_{j=1}^m e_j \cdot p_-(e_j) \cdot \phi \\
&= -\alpha \sum_{j=1}^m p_+(e_j) \cdot p_-(e_j) \cdot \phi \\
&= -\alpha \sum_{j=1}^m Z_j \cdot \overline{Z}_j \cdot \phi \\
&= -\alpha \sum_{j=1}^{2n} Z_j \cdot \overline{Z}_j \cdot \phi + \alpha \sum_{j=m+1}^{2n} Z_j \cdot \overline{Z}_j \cdot \phi.
\end{aligned}$$

On reconnaît dans la première somme l'action de la forme de Kähler ambiante $\widetilde{\Omega}$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n} Z_j \cdot \overline{Z}_j \cdot \phi &= 2\Big\{\frac{i\widetilde{\Omega}}{2}\cdot\phi - \frac{n}{2}\phi\Big\} \qquad \text{d'après (4.4)}\\ &= -(n+1)\phi \qquad \text{car } \widetilde{\Omega}\cdot\phi = i\phi.\end{aligned}$$

La seconde somme exprime de même les actions de $\Omega^{\mathcal{E}}$ et $\Omega^{\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=m+1}^{2n} Z_j \cdot \overline{Z}_j \cdot \phi &= \sum_{j=m+1}^{2(m-d)} Z_j \cdot \overline{Z}_j \cdot \phi + \sum_{j=2(m-d)+1}^{2n} Z_j \cdot \overline{Z}_j \cdot \phi\\ &= \left(\frac{i\Omega^{\mathcal{E}}}{2}\cdot\phi - \frac{m-2d}{2}\phi\right) + 2\left(\frac{i\Omega^{\mathcal{F}}}{2}\cdot\phi - \frac{n-m+d}{2}\phi\right)\\ &= \frac{i\Omega^{\mathcal{E}}}{2}\cdot\phi + i\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\phi - \left(n-\frac{m}{2}\right)\phi.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\widehat{D}\psi &= (n+1)\alpha\phi + \frac{i\alpha\Omega^{\mathcal{E}}}{2}\cdot\phi + i\alpha\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\phi - \left(n-\frac{m}{2}\right)\alpha\phi\\ &= \frac{\alpha}{2}(m+2)\,\phi + \frac{i\alpha\Omega^{\mathcal{E}}}{2}\cdot\phi + i\alpha\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\phi. \qquad (4.13)\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}\widehat{D}\phi &= -\alpha\sum_{j=1}^{m} e_j\cdot p_+(e_j)\cdot\psi\\ &= -\alpha\sum_{j=1}^{m}\overline{Z}_j\cdot Z_j\cdot\psi\\ &= -\alpha\sum_{j=1}^{2n}\overline{Z}_j\cdot Z_j\cdot\psi + \alpha\sum_{j=m+1}^{2n}\overline{Z}_j\cdot Z_j\cdot\psi.\end{aligned}$$

Comme précédemment,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n}\overline{Z}_j\cdot Z_j\cdot\psi &= -\sum_{j=1}^{2n} Z_j\cdot\overline{Z}_j\cdot\psi - 2\sum_{j=1}^{2n} g\left(\overline{Z}_j, Z_j\right)\psi\\ &= -\left(i\widetilde{\Omega}\cdot\psi - n\psi\right) - 2n\psi\\ &= -\left(i\widetilde{\Omega}\cdot\psi + n\psi\right) \qquad \text{avec } \widetilde{\Omega}\cdot\psi = -i\psi\\ &= -(n+1)\psi.\end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned}\sum_{j=m+1}^{2n}\overline{Z}_j\cdot Z_j\cdot\psi &= -\frac{1}{2}\left(i\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\psi + (m-2d)\psi\right) - \left(i\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\psi + (n-m+d)\psi\right)\\ &= -\frac{i\Omega^{\mathcal{E}}}{2}\cdot\psi - i\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\psi - \left(n-\frac{m}{2}\right)\psi.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}\phi &= (n+1)\alpha\psi - \frac{i\alpha\Omega^{\mathcal{E}}}{2}\cdot\psi - i\alpha\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\psi - \left(n - \frac{m}{2}\right)\alpha\psi \\
&= \frac{\alpha}{2}(m+2)\,\psi - \frac{i\alpha\Omega^{\mathcal{E}}}{2}\cdot\psi - i\alpha\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\psi. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Nous déduisons maintenant du lemme 4.3 ainsi que des identités (4.13) et (4.14) que

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^2\psi &= \frac{\alpha}{2}(m+2)\,\widehat{D}\phi + \frac{i\alpha}{2}\widehat{D}\left(\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\phi\right) + i\alpha\widehat{D}\left(\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\phi\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}(m+2)\,\widehat{D}\phi + \frac{i\alpha}{2}\Big\{\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\widehat{D}\phi - 2\sum_{j=2d+1}^{m} J(e_j)\cdot\widetilde{\nabla}_{e_j}\phi - J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right)\cdot\phi \\
&- mJ(H)^{\mathcal{F}}\cdot\phi + J\left(tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\}\right)\cdot\phi + (\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4+\beta_5)\cdot\phi\Big\} \\
&+ i\alpha\Big\{\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\widehat{D}\phi + mJ(H)^{\mathcal{F}}\cdot\phi + (\beta_2+\beta_3)\cdot\phi\Big\} \\
&= \frac{\alpha}{2}\Big\{(m+2) + i\Omega^{\mathcal{E}} + 2i\Omega^{\mathcal{F}}\Big\}\cdot\widehat{D}\phi - i\alpha\sum_{j=2d+1}^{m} J(e_j)\cdot\widetilde{\nabla}_{e_j}\phi \\
&+ \frac{i\alpha}{2}\Big\{mJ(H)^{\mathcal{F}} - J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right) + J\left(tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\}\right) \\
&+ \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5\Big\}\cdot\phi.
\end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2d+1}^{m} J(e_j)\cdot\widetilde{\nabla}_{e_j}\phi &= -\alpha\sum_{j=2d+1}^{m} J(e_j)\cdot p_+(e_j)\cdot\psi \\
&= i\alpha\sum_{j=2d+1}^{m}\overline{Z}_j\cdot Z_j\cdot\psi \\
&= i\alpha\left(-\frac{i\Omega^{\mathcal{E}}}{2} - \frac{m-2d}{2}\right)\cdot\psi \\
&= -\frac{i\alpha}{2}\left(i\Omega^{\mathcal{E}} + m - 2d\right)\cdot\psi.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^2\psi &= \frac{\alpha^2}{4}\Big\{(m+2) + i\Omega^{\mathcal{E}} + 2i\Omega^{\mathcal{F}}\Big\}\cdot\Big\{(m+2) - i\Omega^{\mathcal{E}} - 2i\Omega^{\mathcal{F}}\Big\}\cdot\psi \\
&- \frac{\alpha^2}{2}\left(i\Omega^{\mathcal{E}} + m - 2d\right)\cdot\psi + \frac{i\alpha}{2}\Big\{mJ(H)^{\mathcal{F}} - J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right) + J\left(tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\}\right) \\
&+ \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5\Big\}\cdot\phi.
\end{aligned}$$

Or

$$\left((m+2) + i\Omega^{\mathcal{E}} + 2i\Omega^{\mathcal{F}}\right)\cdot\left((m+2) - i\Omega^{\mathcal{E}} - 2i\Omega^{\mathcal{F}}\right) = (m+2)^2 + \left(\Omega^{\mathcal{E}} + 2\Omega^{\mathcal{F}}\right)\cdot\left(\Omega^{\mathcal{E}} + 2\Omega^{\mathcal{F}}\right).$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^2\psi &= \frac{\alpha^2}{4}\Big\{(m+2)^2 - 2(m-2d)\Big\}\psi + \frac{\alpha^2}{4}\left(\Omega^{\mathcal{E}} + 2\Omega^{\mathcal{F}}\right)\cdot\left(\Omega^{\mathcal{E}} + 2\Omega^{\mathcal{F}}\right)\cdot\psi - \frac{i\alpha^2}{2}\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\psi \\
&+ \frac{i\alpha}{2}\Big\{mJ(H)^{\mathcal{F}} - J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right) + J\Big(tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\}\Big)\Big\}\cdot\phi \\
&+ \frac{i\alpha}{2}\Big\{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5\Big\}\cdot\phi.
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^2\phi &= \frac{\alpha}{2}(m+2)\widehat{D}\psi - \frac{i\alpha}{2}\widehat{D}\left(\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\psi\right) - i\alpha\widehat{D}\left(\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\psi\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}(m+2)\widehat{D}\psi - \frac{i\alpha}{2}\Big\{\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\widehat{D}\psi - 2\sum_{j=2d+1}^{m} J(e_j)\cdot\widetilde{\nabla}_{e_j}\psi - J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right)\cdot\psi \\
&- mJ(H)^{\mathcal{F}}\cdot\psi + J\Big(tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\}\Big)\cdot\psi + (\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4+\beta_5)\cdot\psi\Big\} \\
&- i\alpha\Big\{\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\widehat{D}\psi + mJ(H)^{\mathcal{F}}\cdot\psi + (\beta_2+\beta_3)\cdot\psi\Big\},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2d+1}^{m} J(e_j)\cdot\widetilde{\nabla}_{e_j}\psi &= -\alpha\sum_{j=2d+1}^{m} J(e_j)\cdot p_-(e_j)\cdot\phi \\
&= -i\alpha\sum_{j=2d+1}^{m} Z_j\cdot\overline{Z}_j\cdot\phi \\
&= -i\alpha\left(\frac{i\Omega^{\mathcal{E}}}{2} - \frac{m-2d}{2}\right)\cdot\phi \\
&= -\frac{i\alpha}{2}\left(i\Omega^{\mathcal{E}} - (m-2d)\right)\cdot\phi.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^2\phi &= \frac{\alpha^2}{4}\Big\{(m+2) - i\Omega^{\mathcal{E}} - 2i\Omega^{\mathcal{F}}\Big\}\cdot\Big\{(m+2) + i\Omega^{\mathcal{E}} + 2i\Omega^{\mathcal{F}}\Big\}\cdot\phi \\
&+ \frac{\alpha^2}{2}\left(i\Omega^{\mathcal{E}} - (m-2d)\right)\cdot\phi \\
&- \frac{i\alpha}{2}\Big\{mJ(H)^{\mathcal{F}} - J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right) + J\Big(tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\}\Big) \\
&+ \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5\Big\}\cdot\psi \\
&= \frac{\alpha^2}{4}\Big\{(m+2)^2 - 2(m-2d)\Big\}\phi + \frac{\alpha^2}{4}\left(\Omega^{\mathcal{E}} + 2\Omega^{\mathcal{F}}\right)\cdot\left(\Omega^{\mathcal{E}} + 2\Omega^{\mathcal{F}}\right)\cdot\phi + \frac{i\alpha^2}{2}\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\phi \\
&- \frac{i\alpha}{2}\Big\{mJ(H)^{\mathcal{F}} - J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right) + J\Big(tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\}\Big)\Big\}\cdot\psi \\
&- \frac{i\alpha}{2}\Big\{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5\Big\}\cdot\psi,
\end{aligned}$$

d'où découle le lemme 4.4.

□

Démonstration du théorème 4.1 : D'après le lemme 4.4 et la relation (4.9),

$$\begin{aligned}
\left(D_M^{\Sigma N}\right)^2(\psi+\phi) &= \frac{m^2|H|^2}{4}(\psi+\phi)+\frac{m}{2}\sum_{j=1}^{m} e_j\cdot\nabla^N_{e_j}H\cdot(\psi+\phi) \\
&+ \frac{\alpha^2}{4}\left((m+2)^2-2(m-2d)\right)(\phi+\psi)+\frac{\alpha^2}{4}\left(\Omega^{\mathcal{E}}+2\Omega^{\mathcal{F}}\right)^2\cdot(\psi+\phi) \\
&+ \frac{i\alpha^2}{2}\Omega^{\mathcal{E}}\cdot(\phi-\psi)+\frac{i\alpha}{2}\Big\{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5\Big\}\cdot(\phi-\psi) \\
&- \frac{i\alpha}{2}J\left(tr_{\mathcal{D}^\perp}\{\nabla^{\mathcal{D}}\}\right)\cdot(\phi-\psi)+\frac{im\alpha}{2}J(H)^{\mathcal{F}}\cdot(\phi-\psi) \\
&+ \frac{i\alpha}{2}J\left(tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\}\right)\cdot(\phi-\psi)\,. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Prenons le produit scalaire hermitien de (4.15) avec $\psi+\phi$ et identifions les parties réelles. Remarquons que, puisque ψ est dans $\Sigma_{\frac{n-1}{2}}\widetilde{M}$ et ϕ est dans $\Sigma_{\frac{n+1}{2}}\widetilde{M}$, pour tout champ de vecteurs Z sur $\widetilde{M}$,

$$< Z\cdot\phi,\phi>=< Z\cdot\psi,\psi>=0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Re\mathrm{e}\left(i< Z\cdot(\phi-\psi),\psi+\phi>\right) &= \Re\mathrm{e}\left(i< Z\cdot\phi,\psi>-i< Z\cdot\psi,\phi>\right) \\
&= -\Im\mathrm{m}\left(< Z\cdot\phi,\psi>+<\psi,Z\cdot\phi>\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour toute 2-forme ω_2 (resp. pour toute 3-forme ω_3) sur $\widetilde{M}$,

$$<\omega_2\cdot\phi,\psi>=<\omega_2\cdot\psi,\phi>=0$$

(resp. $<\omega_3\cdot\phi,\phi>=<\omega_3\cdot\psi,\psi>=0$) : cela provient encore du fait que ψ est dans $\Sigma_{\frac{n-1}{2}}\widetilde{M}$ et ϕ est dans $\Sigma_{\frac{n+1}{2}}\widetilde{M}$. De plus, l'action de ω_2 (resp. de ω_3) sur $\Sigma\widetilde{M}$ est antisymétrique (resp. symétrique), et par suite

$$\Re\mathrm{e}\left(i<\omega_2\cdot(\phi-\psi),\psi+\phi>\right)=i<\omega_2\cdot\phi,\phi>-i<\omega_2\cdot\psi,\psi>.$$

De même,

$$\Re\mathrm{e}\left(i<\omega_3\cdot(\phi-\psi),\psi+\phi>\right)=-2\Im\mathrm{m}\left(<\omega_3\cdot\phi,\psi>\right).$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\Re\mathrm{e}\Big(<\left(D_M^{\Sigma N}\right)^2(\psi+\phi),\psi+\phi>\Big) &= \frac{m^2|H|^2}{4}|\psi+\phi|^2 \\
&+ \frac{\alpha^2}{4}\left((m+2)^2-2(m-2d)\right)|\psi+\phi|^2 \\
&- \frac{\alpha^2}{4}|\left(\Omega^{\mathcal{E}}+2\Omega^{\mathcal{F}}\right)\cdot(\psi+\phi)|^2 \\
&+ \frac{\alpha^2}{2}\left(i<\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\phi,\phi>-i<\Omega^{\mathcal{E}}\cdot\psi,\psi>\right) \\
&- \alpha\Im\mathrm{m}\left(<\{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5\}\cdot\phi,\psi>\right).
\end{aligned}$$

Puisque α est réel, la norme du spineur $\psi+\phi$ est constante (cf. [38]). En intégrant cette identité sur M, nous en déduisons le théorème 4.1 par application du principe du Min-Max.

□

4.4 Estimations de valeurs propres pour les sous-variétés kählériennes

Dans ce paragraphe, nous supposerons que

$$J(TM) = TM,$$

i.e. que (M^{2d}, g, J) est une sous-variété *complexe* spinorielle de $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$. Ici, d et n sont les dimensions *complexes* respectives de M et de $\widetilde{M}$. Rappelons que, puisque $(\widetilde{M}, g, J)$ est kählérienne par hypothèse, une telle sous-variété M est nécessairement aussi kählérienne.

Le théorème 4.1 s'applique à cette situation. Nous allons cependant raffiner l'inégalité (4.11) en montrant le théorème suivant :

Théorème 4.2 *Soit (M^{2d}, g, J) une sous-variété kählérienne spinorielle compacte d'une variété kählérienne spinorielle $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$. Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Supposons que $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$ admet un espace de dimension N d'α-spineurs de Killing kählériens avec α réel. Alors*

$$\lambda_N^2 \leq \begin{cases} (d+1)^2\alpha^2 & \textit{lorsque } d \textit{ est impair} \\ d(d+2)\alpha^2 & \textit{lorsque } d \textit{ est pair.} \end{cases}$$

Démonstration : Si M est une sous-variété kählérienne de $(\widetilde{M}, g, J)$, l'identité (4.12) du lemme 4.4 se simplifie considérablement. En effet, $\mathcal{D} = TM$, $\mathcal{E} = \{0\}$ et $\mathcal{F} = NM$ dans ce cas. En particulier $\Omega^{\mathcal{F}}$ coïncide avec la forme de Kähler Ω^N du fibré normal. D'autre part, puisque $m = 2d$, les formes β_l, $l = 1, \ldots, 5$, sont nulles d'après leurs définitions. Enfin, M est minimale dans $(\widetilde{M}, g)$ car est une sous-variété kählérienne. Nous déduisons donc de (4.12) que

$$\widehat{D}^2\,(\psi + \phi) = (d+1)^2\alpha^2\,(\psi + \phi) + \alpha^2\Omega^N \cdot \Omega^N \cdot (\psi + \phi)\,.$$

L'inégalité du théorème 4.1 peut alors être améliorée en vertu du lemme suivant :

Lemme 4.5 *Pour toute section φ de Σ,*

$$-(n-d)^2|\varphi|^2 \;\leq\; < \Omega^N \cdot \Omega^N \cdot \varphi, \varphi > \;\leq \begin{cases} 0 & \textit{si } d \textit{ est impair} \\ -|\varphi|^2 & \textit{si } d \textit{ est pair.} \end{cases}$$

Démonstration du lemme 4.5 : Comme en (4.5), la forme Ω^N agit sur ΣN, qu'elle décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces propres associés aux valeurs propres $i(2r-n+d)$, pour $0 \leq r \leq n-d$. Or, pour toute 2-forme ω sur NM et pour toute section φ de Σ,

$$\left(\mathrm{Id}_{\Sigma M} \otimes \omega \underset{N}{\cdot}\right)\varphi = \omega \cdot \varphi.$$

Par conséquent, Ω^N décompose de manière identique le fibré Σ.
Soit $\varphi = \sum_{r=0}^{n-d} \varphi_r$ la décomposition de φ en spineurs propres pour Ω^N, i.e.

$$\Omega^N \cdot \varphi_r = i(2r-n+d)\varphi_r.$$

Alors
$$\Omega^N \cdot \Omega^N \cdot \varphi = -\sum_{r=0}^{n-d}(2r-n+d)^2\varphi_r,$$
donc $< \Omega^N \cdot \Omega^N \cdot \varphi, \varphi >= -\sum_{r=0}^{n-d}(2r-n+d)^2|\varphi_r|^2$, dont se déduit l'encadrement :
$$-\underset{0\leq r\leq n-d}{\mathrm{Max}}(2r-n+d)^2|\varphi|^2 \leq < \Omega^N \cdot \Omega^N \cdot \varphi, \varphi > \leq -\underset{0\leq r\leq n-d}{\mathrm{Min}}(2r-n+d)^2|\varphi|^2.$$
Si $n-d$ est pair, i.e. si d est impair, $\underset{0\leq r\leq n-d}{\mathrm{Min}}(2r-n+d)^2 = 0$, alors que sinon $\underset{0\leq r\leq n-d}{\mathrm{Min}}(2r-n+d)^2 = 1$. Dans les deux cas, $\underset{0\leq r\leq n-d}{\mathrm{Max}}(2r-n+d)^2 = (n-d)^2$, d'où le lemme 4.5.

□

Puisque $H = 0$, les opérateurs $\widehat{D}^2$ et $\left(D_M^{\Sigma N}\right)^2$ coïncident par (4.9) ; d'après les calculs précédents,
$$\left(D_M^{\Sigma N}\right)^2(\psi+\phi) = (d+1)^2\alpha^2(\psi+\phi) + \alpha^2\Omega^N \cdot \Omega^N \cdot (\psi+\phi)\,. \tag{4.16}$$
Par le lemme 4.5, α étant réel, il vient donc :
$$\Re\mathrm{e}\left(< D_M^{\Sigma N 2}(\psi+\phi),(\psi+\phi)>\right) \leq \begin{cases} (d+1)^2\alpha^2|\psi+\phi|^2 & \text{si } d \text{ est impair} \\ (d+1)^2\alpha^2|\psi+\phi|^2 - \alpha^2|\psi+\phi|^2 & \text{si } d \text{ est pair}\end{cases}$$
Nous en déduisons le théorème 4.2.

□

Exemple 4.1 Soit $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ l'espace projectif complexe de dimension complexe n. Muni de la métrique de Fubini-Study, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante égale à 4. Cependant, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ n'est spinoriel que si n est impair, et admet dans ce cas des 1-spineurs de Killing kählériens ([29],[38],[56]). Plaçons-nous sous cette hypothèse, et considérons la sous-variété totalement géodésique $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^d$, où d est impair et $1 \leq d < n$.
D'après [56], si $\lambda_1(D_M)$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur de Dirac fondamental D_M de $\mathbb{C}\mathrm{P}^d$,
$$\lambda_1^2(D_M) = (d+1)^2, \tag{4.17}$$
par conséquent nous obtenons l'inégalité suivante liant les valeurs propres de D_M et $D_M^{\Sigma N}$:
$$\lambda_N^2\left(D_M^{\Sigma N}\right) \leq \lambda_1^2(D_M). \tag{4.18}$$
L'inégalité (4.18) surprend a priori, compte-tenu du fait que $\mathbb{C}\mathrm{P}^d$ est une sous-variété non seulement totalement géodésique mais aussi à fibré normal trivial dans $\mathbb{C}P^m$. L'identification entre D_M et $D_M^{\Sigma N}$ est cependant rendue impossible par la présence de la courbure normale, car le fibré normal de $\mathbb{C}\mathrm{P}^d$ dans $\mathbb{C}P^m$ n'est *pas* plat.
Le théorème 4.2 fournit donc la possibilité de comparer les spectres de ces deux opérateurs.

4.5 Estimations de valeurs propres pour les sous-variétés totalement réelles

Nous supposerons dans ce paragraphe que $(M,\, g)$ est une sous-variété *totalement réelle* d'une variété kählérienne spinorielle $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$, i.e. une sous-variété pour laquelle

$$J(TM) \subset NM.$$

Si m est la dimension (réelle) de M, nécessairement $m \leq n$. Lorsque $m = n$, la sous-variété M est dite *lagrangienne*.
Comme au paragraphe précédent, nous n'allons pas déduire directement du théorème 4.1 une majoration pour la plus petite valeur propre de $D_M^{\Sigma N}$, mais montrer que l'inégalité (4.11) peut être améliorée dans ce cas :

Théorème 4.3 *Soit $(M^m,\, g)$ une sous-variété totalement réelle compacte spinorielle d'une variété kählérienne spinorielle $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$. Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Supposons que $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$ admet un α-spineur de Killing kählérien (ψ, ϕ) avec α réel. Soit β_3 la section de $\bigwedge^3 T^*\widetilde{M}_{|M|}$ définie dans la base orthonormée locale (e_j) par*

$$\beta_3 := \sum_{j,k=1}^{m} e_j \wedge J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k).$$

Alors

$$\begin{aligned}(\lambda_1)^2 \;&\leq\; \frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)} \int_M |H|^2 v_g - \frac{\alpha}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M \Im\mathrm{m}\,(<\beta_3 \cdot \phi, \psi>)\, v_g \\ &+ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(m+1)^2\alpha^2}{4} & \textit{si } m \textit{ est impair} \\ \frac{m(m+2)\alpha^2}{4} & \textit{si } m \textit{ est pair.} \end{array} \right.\end{aligned}$$

Démonstration : Si M est totalement réelle, $\mathcal{D} = \{0\}$, $\mathcal{E} = TM \oplus J(TM)$ et $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\perp}$. Une première conséquence est que $\Omega^{\mathcal{E}} = \widetilde{\Omega} - \Omega^{\mathcal{F}}$ (identité entre éléments de de $\Lambda^2 T^*\widetilde{M}_{|M}$), et comme $\widetilde{\Omega}$ et $\Omega^{\mathcal{F}}$ commutent,

$$\left(\widetilde{\Omega} + \Omega^{\mathcal{F}}\right) \cdot \left(\widetilde{\Omega} + \Omega^{\mathcal{F}}\right) \cdot (\psi + \phi) = -\,(\psi + \phi) + 2i\Omega^{\mathcal{F}} \cdot (\phi - \psi) + \Omega^{\mathcal{F}} \cdot \Omega^{\mathcal{F}} \cdot (\psi + \phi)\,.$$

Puisque $d = 0$, les formes β_1, β_2, β_4 et β_5 sont nulles par définition. L'égalité (4.12) devient donc dans ce cas

$$\begin{aligned}\widehat{D}^2\,(\psi + \phi) \;&=\; \frac{\alpha^2}{4}\left((m+2)^2 - 2m\right)(\psi + \phi) - \frac{\alpha^2}{4}\,(\psi + \phi) + \frac{i\alpha^2}{2}\Omega^{\mathcal{F}} \cdot (\phi - \psi) \\ &+\; \frac{\alpha^2}{4}\Omega^{\mathcal{F}} \cdot \Omega^{\mathcal{F}} \cdot (\psi + \phi) - \frac{\alpha^2}{2}\,(\psi + \phi) - \frac{i\alpha^2}{2}\Omega^{\mathcal{F}} \cdot (\phi - \psi) \\ &+\; \frac{im\alpha}{2} J(H)^{\mathcal{F}} \cdot (\phi - \psi) + \frac{i\alpha}{2}\beta_3 \cdot (\phi - \psi) \\ &=\; \frac{(m+1)^2\alpha^2}{4}\,(\psi + \phi) + \frac{\alpha^2}{4}\Omega^{\mathcal{F}} \cdot \Omega^{\mathcal{F}} \cdot (\psi + \phi) + \frac{im\alpha}{2} J(H)^{\mathcal{F}} \cdot (\phi - \psi) \\ &+\; \frac{i\alpha}{2}\beta_3 \cdot (\phi - \psi)\,.\end{aligned}$$

Nous tirons de cette égalité et de la relation (4.9) l'identité

$$\begin{aligned} \left(D_M^{\Sigma N}\right)^2(\psi+\phi) &= \left(\frac{m^2|H|^2}{4}+\frac{(m+1)^2\alpha^2}{4}\right)(\psi+\phi)+\frac{\alpha^2}{4}\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\Omega^{\mathcal{F}}\cdot(\psi+\phi) \\ &+ \frac{i\alpha}{2}\beta_3\cdot(\phi-\psi)+\frac{m}{2}\sum_{j=1}^{m}e_j\cdot\nabla^N_{e_j}H\cdot(\psi+\phi)+\frac{im\alpha}{2}J(H)^{\mathcal{F}}\cdot(\phi-\psi)\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Par hypothèse, α est réel, donc

$$\begin{aligned} \Re\mathrm{e}\Big(<\left(D_M^{\Sigma N}\right)^2(\psi+\phi),\psi+\phi>\Big) &= \Big\{\frac{(m+1)^2\alpha^2}{4}+\frac{m^2|H|^2}{4}\Big\}|\psi+\phi|^2 \\ &+ \frac{\alpha^2}{4}\Re\mathrm{e}\left(<\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\Omega^{\mathcal{F}}\cdot(\psi+\phi)\,,\psi+\phi>\right) \\ &- \alpha\Im\mathrm{m}\left(<\beta_3\cdot\phi,\psi>\right). \end{aligned}$$

Le terme $<\Omega^{\mathcal{F}}\cdot\Omega^{\mathcal{F}}\cdot(\psi+\phi)\,,\psi+\phi>$ peut être encadré comme dans le lemme 4.5 :

$$\begin{aligned} -(n-m)^2|\psi+\phi|^2 &\leq <\Omega^N\cdot\Omega^N\cdot(\psi+\phi)\,,(\psi+\phi)>\leq \\ & \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est impair} \\ -|\psi+\phi|^2 & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Par application du principe du Min-Max, le résultat s'en déduit immédiatement.

□

Si $\beta_3=0$, le majorant du quotient de Rayleigh précédemment calculé ne dépend plus du spineur de Killing kählérien (ψ,ϕ). Un plus grand nombre de valeurs propres de $D_M^{\Sigma N}$ peut donc être estimé :

Corollaire 4.1 *Soit $(M^m,\,g)$ une sous-variété totalement réelle compacte spinorielle d'une variété kählérienne spinorielle $(\widetilde{M}^{2n},g,J)$. Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Supposons que $(\widetilde{M}^{2n},g,J)$ admet un espace de dimension N d'α-spineurs de Killing kählériens avec α réel, et que*

$$\sum_{j,k=1}^{m}e_j\wedge J(e_k)\wedge II^{\mathcal{F}}(e_j,e_k)=0.$$

Alors

$$\lambda_N^2\leq\frac{m^2}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M|H|^2v_g+\begin{cases}\frac{(m+1)^2\alpha^2}{4} & \textit{si } m \textit{ est impair}\\ \frac{m(m+2)\alpha^2}{4} & \textit{si } m \textit{ est pair.}\end{cases}$$

Lorsque la variété ambiante $(\widetilde{M},g,J)$ admet un α-spineur de Killing avec α imaginaire, nous obtenons également des estimations de valeurs propres :

Théorème 4.4 *Soit* $(M^m,\, g)$ *une sous-variété totalement réelle compacte spinorielle d'une variété kählérienne spinorielle* $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$. *Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Supposons que* $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$ *admet un espace de dimension* N *d'*α*-spineurs de Killing kählériens avec* α *imaginaire pur. Supposons aussi que*

$$\sum_{j,k=1}^{m} e_j \wedge J(e_k) \wedge II^{\mathcal{F}}(e_j, e_k) = 0$$

et que $H^{\mathcal{F}} = 0$. *Alors*

$$\lambda_N^2 \leq -\frac{(n+1)(2m-n+1)|\alpha|^2}{4} + \frac{m^2||H||_\infty^2}{4}.$$

Démonstration : La preuve est quasi-identique à celle du théorème 4.3 ; la différence principale réside dans le fait que la norme d'un spineur de Killing kählérien imaginaire n'est pas constante (cf. [38]).
D'après (4.19), sous les hypothèses $\beta_3 = 0$ et $H^{\mathcal{F}} = 0$,

$$\begin{aligned} \left(D_M^{\Sigma N}\right)^2 (\psi + \phi) &= \left(\frac{(m+1)^2\alpha^2}{4} + \frac{m^2|H|^2}{4}\right)(\psi + \phi) + \frac{\alpha^2}{4}\Omega^{\mathcal{F}} \cdot \Omega^{\mathcal{F}} \cdot (\psi + \phi) \\ &+ \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{m} X_j \cdot \nabla^N_{X_j} H \cdot (\psi + \phi), \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \Re\mathrm{e}\left(< \left(D_M^{\Sigma N}\right)^2 (\psi + \phi), \psi + \phi >\right) &= \left(\frac{(m+1)^2\alpha^2}{4} + \frac{m^2|H|^2}{4}\right)|\psi + \phi|^2 \\ &+ \frac{\alpha^2}{4}\Re\mathrm{e}\left(< \Omega^{\mathcal{F}} \cdot \Omega^{\mathcal{F}} \cdot (\psi + \phi), \psi + \phi >\right). \end{aligned}$$

Nous déduisons de (4.20) que

$$\begin{aligned} \Re\mathrm{e}\left(< \left(D_M^{\Sigma N}\right)^2 (\psi + \phi), \psi + \phi >\right) &\leq \left(\frac{(m+1)^2\alpha^2}{4} + \frac{m^2|H|^2}{4}\right)|\psi + \phi|^2 \\ &- \frac{(n-m)^2\alpha^2}{4}|\psi + \phi|^2, \end{aligned}$$

puis l'inégalité du théorème 4.4 par application du principe du Min-Max.

□

Lorsque $m = n$, i.e. si M est une sous-variété lagrangienne de $(\widetilde{M}, g, J)$, on a $\mathcal{F} = \{0\}$; nous pouvons donc déduire du théorème 4.3 et du théorème 4.4 les corollaires suivants :

Corollaire 4.2 *Soit* $(M^n,\, g)$ *une sous-variété lagrangienne spinorielle compacte d'une variété spinorielle kählérienne* $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$. *Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Supposons que* $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$ *admet un espace de dimension* N *d'*α*-spineurs de Killing kählériens avec* α *réel. Alors*

$$\lambda_N^2 \leq \frac{(n+1)^2\alpha^2}{4} + \frac{n^2}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M |H|^2 v_g.$$

Corollaire 4.3 *Soit (M^n, g) une sous-variété lagrangienne compacte spinorielle d'une variété spinorielle kählérienne $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$. Munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Supposons que $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$ admet un espace de dimension N d'α-spineurs de Killing kählériens avec α imaginaire pur. Alors*

$$\lambda_N^2 \leq -\frac{(n+1)^2|\alpha|^2}{4} + \frac{n^2}{4}||H||_\infty^2.$$

Exemple 4.2 Soit $M := \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, portant sa métrique usuelle de courbure sectionnelle 1, et $\widetilde{M} := \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, portant la métrique de Fubini-Study de courbure sectionnelle holomorphe 4. L'immersion canonique de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est isométrique, totalement géodésique et lagrangienne. Supposons que $n \equiv 3\ (4)$. Sous cette hypothèse, la variété M (ainsi que $\widetilde{M}$, cf. exemple 4.1) est spinorielle, et admet deux structures spinorielles non isomorphes. Choisissons l'une d'elles, et munissons le fibré normal de la structure spinorielle induite. Puisque $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ admet des 1-spineurs de Killing kählériens, nous déduisons du corollaire 4.2 que :

$$\lambda_1^2 \leq \frac{(n+1)^2}{4}.$$

D'autre part, d'après le théorème 1.1 (chapitre 1), pour tout spineur propre φ de $D_M^{\Sigma N}$ associé à la valeur propre λ_1,

$$\lambda_1^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \inf_{M_\varphi}\{S + S_\varphi^N\},$$

où $S_\varphi^N := -2\sum_{j,k=1}^n \Re\mathrm{e}\left(< e_j \cdot e_k \cdot \mathrm{R}^N_{e_j,e_k}\varphi, \varphi/|\varphi|^2 >\right)$ et $M_\varphi := \{x \in M,\, \varphi_x \neq 0\}$. Or $S = n(n-1)$, et M étant lagrangienne dans $\widetilde{M}$ qui est kählérienne,

$$R^N_{X,Y}J(Z) = J\left(R^M_{X,Y}Z\right),$$

pour tous champs X, Y et Z tangents à M. En combinant cette identité avec le fait que M est à courbure sectionnelle constante égale à 1, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{j_1,j_2=1}^n e_{j_1}\cdot e_{j_2}\cdot R^N_{e_{j_1},e_{j_2}} &= \frac{1}{4}\sum_{j_1,j_2,k_1,k_2=1}^n g\left(R^N_{e_{j_1},e_{j_2}}J(e_{k_1}), J(e_{k_2})\right) e_{j_1}\cdot e_{j_2}\cdot J(e_{k_1})\cdot J(e_{k_2})\cdot \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j_1,j_2,k_1,k_2=1}^n g\left(R^M_{e_{j_1},e_{j_2}}e_{k_1}, e_{k_2}\right) e_{j_1}\cdot e_{j_2}\cdot J(e_{k_1})\cdot J(e_{k_2})\cdot \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j_1,j_2,k_1,k_2=1}^n \{\delta_{j_1k_1}\delta_{j_2k_2} - \delta_{j_1k_2}\delta_{j_2k_1}\} e_{j_1}\cdot e_{j_2}\cdot J(e_{k_1})\cdot J(e_{k_2})\cdot \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j_1,j_2=1}^n e_{j_1}\cdot e_{j_2}\cdot\{J(e_{j_1})\cdot J(e_{j_2}) - J(e_{j_2})\cdot J(e_{j_1})\}\cdot \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^n e_{j_1}\cdot e_{j_2}\cdot J(e_{j_1})\cdot J(e_{j_2})\cdot \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^n g\left(J(e_{j_1}), J(e_{j_2})\right) e_{j_1}\cdot e_{j_2}\cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^{n} e_{j_1}\cdot J(e_{j_1})\cdot e_{j_2}\cdot J(e_{j_2}) - \frac{n}{2}\mathrm{Id}_\Sigma \\ &= -\frac{1}{2}\widetilde{\Omega}\cdot\widetilde{\Omega}\cdot - \frac{n}{2}\mathrm{Id}_\Sigma. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour le spineur φ ci-dessus fixé, et en un point où φ ne s'annule pas,

$$\begin{aligned} S_\varphi^N &= \Re\mathrm{e}\left(\frac{<\widetilde{\Omega}\cdot\widetilde{\Omega}\cdot\varphi,\varphi> + n|\varphi|^2>}{|\varphi|^2}\right) \\ &= n - \frac{|\widetilde{\Omega}\cdot\varphi|^2}{|\varphi|^2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, sur M_φ,

$$\frac{n}{4(n-1)}\{S + S_\varphi^N\} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4(n-1)}\left(n - \frac{|\widetilde{\Omega}\cdot\varphi|^2}{|\varphi|^2}\right),$$

puis que

$$\frac{n^2}{4} + \frac{n}{4(n-1)}\left(n - \sup_{M_\varphi}\frac{|\widetilde{\Omega}\cdot\varphi|^2}{|\varphi|^2}\right) \le \lambda_1^2 \le \frac{(n+1)^2}{4}.$$

À nouveau, la présence de la courbure normale ne permet pas de conclure à l'égalité de λ_1^2 avec le minorant ou le majorant.

4.6 Estimations de valeurs propres pour les hypersurfaces réelles

Nous supposerons dans ce paragraphe que M est une hypersurface réelle de $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$, i.e. une sous-variété de codimension (réelle) 1. Dans ce cas particulier, le fibré normal de M dans $\widetilde{M}$ est trivial dès que M est orientée. Si nous la supposons orientée, la variété M hérite donc d'une structure spinorielle. Fixons désormais un champ normal unitaire ν sur M tel que, pour toute base directe $(X_1,\ldots,X_m)$ de TM, la base $(X_1,\ldots,X_m,\nu)$ soit une base directe de $T\widetilde{M}_{|_M}$.
Une hypersurface réelle orientée M est une sous-variété CR : en effet, étant orthogonal à ν en tout point de M, le champ $J(\nu)$ est tangent à M et $\mathcal{D}^\perp$ est donc le fibré (trivial) en droites engendré par $J(\nu)$. Puisque $J^2(\nu) = -\nu$, l'hypothèse $J(\mathcal{D}^\perp) \subset NM$ est donc bien vérifiée.

Par identification de ΣN avec $M\times\mathbb{C}$, le fibré Σ devient

$$\Sigma = \Sigma M \oplus \Sigma M,$$

et les propriétés de l'isomorphisme unitaire (4.7) vis-à-vis de la multiplication de Clifford et des dérivées covariantes ∇ et $\widetilde{\nabla}$ se traduisent sous la forme suivante : pour tout champ X tangent à M et pour toute section ϕ de Σ,

$$\begin{aligned} X \underset{M}{\cdot} \phi &= X\cdot\nu\cdot\phi \\ \text{et}\qquad \widetilde{\nabla}_X\phi &= \nabla_X\phi + \frac{1}{2}A(X)\cdot\nu\cdot\phi, \end{aligned}$$

où $A := -\widetilde{\nabla}\nu$ est l'endomorphisme de Weingarten associé à l'immersion $M \hookrightarrow (\widetilde{M}, g)$.
De plus, l'opérateur de Dirac tordu $D_M^{\Sigma N}$ s'identifie avec l'opérateur $D := D_M \oplus -D_M$, où D_M est l'opérateur de Dirac fondamental de (M, g).
Notons $A^{\mathcal{D}}$ le champ d'endomorphismes symétriques de $\mathcal{D}$ défini par :

$$A^{\mathcal{D}}(s) := A(s)^{\mathcal{D}},$$

pour toute section s de $\mathcal{D}$.

Théorème 4.5 *Soit M une hypersurface réelle compacte et orientée d'une variété spinorielle kählérienne $(\widetilde{M}^{2n}, g, J)$. Munissons M de la structure spinorielle induite. Supposons que $(\widetilde{M}, g, J)$ admet un α-spineur de Killing kählérien (ψ, ϕ) avec α réel. Soit β_4 la section de $\bigwedge^3 T^*\widetilde{M}_{|M}$ donnée dans la base orthonormée locale (e_j) construite ci-dessus par :*

$$\beta_4 := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2(n-1)} e_j \wedge \{J \circ A^{\mathcal{D}} + A^{\mathcal{D}} \circ J\}(e_j) \wedge \nu.$$

Alors

$$\begin{aligned}(\lambda_1)^2 &\leq n(n+1)\alpha^2 + \frac{(2n-1)^2}{4\mathrm{Vol}(M)}\int_M H^2 v_g - \frac{\alpha}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \Im\mathrm{m}\,(< \beta_4 \cdot \phi, \psi >)\, v_g \\ &+ \frac{\alpha}{\mathrm{Vol}(M)}\int_M \Im\mathrm{m}\left(< \{(J \circ A \circ J(\nu))^{\mathcal{D}} \wedge J(\nu) \wedge \nu\} \cdot \phi, \psi >\right) v_g. \qquad (4.21)\end{aligned}$$

Démonstration : Si M est une hypersurface réelle, i.e. $m = 2n-1$, alors $\mathcal{E} = \mathbb{R}J(\nu) \oplus \mathbb{R}\nu$ et $\mathcal{F} = \{0\}$. En particulier, $d = n-1$, $\Omega^{\mathcal{E}} = \nu \wedge J(\nu)$ et $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Déterminons les champs de vecteurs $tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\}$ et $tr_{\mathcal{D}^\perp}(\nabla^{\mathcal{D}})$.

$$\begin{aligned} tr_{\mathcal{D}}\{II^{J(\mathcal{D}^\perp)}\} &= tr_{\mathcal{D}}\{II\} \\ &= tr_{\mathcal{D}}\left(A^{\mathcal{D}}\right)\nu. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} tr_{\mathcal{D}^\perp}(\nabla^{\mathcal{D}}) &= \left(\widetilde{\nabla}_{J(\nu)}J(\nu)\right)^{\mathcal{D}} \\ &= J\left(\widetilde{\nabla}_{J(\nu)}\nu\right)^{\mathcal{D}} \\ &= -\left(J \circ A \circ J(\nu)\right)^{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Reste à préciser les expressions de β_4 et β_5 :

$$\begin{aligned} \beta_4 &= -\sum_{j,k=1}^{2(n-1)} e_j \wedge e_k \wedge II\,(e_j, J(e_k)) \\ &= -\sum_{j,k=1}^{2(n-1)} g\left(A^{\mathcal{D}}(e_j), J(e_k)\right) e_j \wedge e_k \wedge \nu \\ &= \sum_{j=1}^{2(n-1)} e_j \wedge J \circ A^{\mathcal{D}}(e_j) \wedge \nu. \end{aligned}$$

Puisque $A^{\mathcal{D}}$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{D}$, alors l'adjoint de $J\circ A^{\mathcal{D}}$ est $-A^{\mathcal{D}}\circ J$. Si nous décomposons $J\circ A^{\mathcal{D}}$ en somme d'un endomorphisme symétrique et d'un endomorphisme antisymétrique, seule la composante antisymétrique demeure dans l'expression précédente, i.e.

$$\sum_{j=1}^{2(n-1)} e_j \wedge J\circ A^{\mathcal{D}}(e_j) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2(n-1)} e_j \wedge \{J\circ A^{\mathcal{D}} + A^{\mathcal{D}}\circ J\}(e_j).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\beta_5 &= -\sum_{k=1}^{2(n-1)} J(\nu)\wedge e_k \wedge \Big(II\{J(\nu),J(e_k)\} + J\{II(J(\nu),e_k)\}\Big)\\
&= -\sum_{k=1}^{2(n-1)} J(\nu)\wedge e_k \wedge \Big(g\left(A\circ J(\nu),J(e_k)\right)\nu + g\left(A\circ J(\nu),e_k\right)J(\nu)\Big)\\
&= J(\nu)\wedge\{J\circ A\circ J(\nu)\}^{\mathcal{D}}\wedge\nu - J(\nu)\wedge\{A\circ J(\nu)\}^{\mathcal{D}}\wedge J(\nu)\\
&= -\{J\circ A\circ J(\nu)\}^{\mathcal{D}}\wedge J(\nu)\wedge\nu.
\end{aligned}$$

Nous déduisons donc de (4.12) que

$$\begin{aligned}
\widehat{D}^2\left(\psi+\phi\right) &= \frac{\alpha^2}{4}\Big((2n+1)^2-2\Big)\left(\psi+\phi\right) - \frac{\alpha^2}{4}\left(\psi+\phi\right) + \frac{i\alpha^2}{2}\nu\cdot J(\nu)\cdot(\phi-\psi)\\
&+ \frac{i\alpha}{2}tr_{\mathcal{D}}\left(A^{\mathcal{D}}\right)J(\nu)\cdot(\phi-\psi) + \frac{i\alpha}{2}\{A\circ J(\nu)\}^{\mathcal{D}}\cdot(\phi-\psi)\\
&+ \frac{i\alpha}{2}\beta_4\cdot(\phi-\psi)\\
&- \frac{i\alpha}{2}\Big(\{J\circ A\circ J(\nu)\}^{\mathcal{D}}\wedge J(\nu)\wedge\nu\Big)\cdot\left(\phi-\psi\right).
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$i < \nu\cdot J(\nu)\cdot\left(\phi-\psi\right), \psi+\phi > \leq |\psi+\phi|^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Re\mathrm{e}\Big(< D^2\left(\psi+\phi\right), \psi+\phi >\Big) &\leq \frac{(2n-1)^2H^2}{4}|\psi+\phi|^2 + n(n+1)\alpha^2|\psi+\phi|^2\\
&- \alpha\Im\mathrm{m}\left(<\beta_4\cdot\phi,\psi>\right)\\
&+ \alpha\Im\mathrm{m}\Big(<\{\left(J\circ A\circ J(\nu)\right)^{\mathcal{D}}\wedge J(\nu)\wedge\nu\}\cdot\phi,\psi>\Big),
\end{aligned}$$

et le résultat en découle par le principe du Min-Max.

□

Bibliographie

[1] Agricola I., Friedrich T., *Upper bounds for the first eigenvalue of the Dirac operator on surfaces*, J. Geom. Phys., 1999, **30**, 1–22.

[2] Alexandrov A.D., *A characteristic property of spheres*, Ann. Mat. Pura Appl., 1962, **58**, 303–315.

[3] Anghel N., *Extrinsic upper bounds for eigenvalues of Dirac-type operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 1993, **117**, 501–509.

[4] Atiyah M.F., Singer I.M., *The index of elliptic operators I*, Ann. of Math., 1968, **87**, 484–530.

[5] Bär C., *Real Killing Spinors and Holonomy*, Comm. Math. Phys., 1993, **154**, 525–576.

[6] ———, *Extrinsic Bounds for Eigenvalues of the Dirac Operator*, Ann. Glob. Anal. Geom., 1998, **16**, 573–596.

[7] Baum H., *Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeiten*, Teubner-Verlag Leipzig, 1981, Teubner-Texte zur Mathematik **41**.

[8] ———, *Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom., 1989, **7**, 205–226.

[9] ———, *Odd-dimensional Riemannian manifolds admitting imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom., 1989, **7**, 141–153.

[10] ———, *An upper bound for the first eigenvalue of the Dirac operator on compact spin manifolds*, Math. Zeit., 1991, **206**, 409–422.

[11] Baum H., Friedrich T., Grunewald R., Kath I., *Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds*, Teubner-Verlag Stuttgart/Leipzig, 1991, Teubner-Texte zur Mathematik **124**.

[12] Bejancu A., *CR-submanifolds of a Kähler manifold I*, Proc. Amer. Math. Soc., 1978, **69**, 134–142.

[13] Bleecker D., Weiner J., *Extrinsic bounds on λ_1 of Δ on a compact manifold*, Comment. Math. Helv., 1976, **51**, 601–609.

[14] Bourguignon J.-P., Hijazi O., Milhorat J.-L., Moroianu A., *A Spinorial approach to Riemannian and Conformal Geometry*, (en préparation).

[15] Bunke U., *Upper bounds of small eigenvalues of the Dirac operator and isometric immersions*, Ann. Glob. Anal. Geom., 1991, **9**, 109–116.

[16] Chen B.-Y., *CR-submanifolds of a Kähler manifold, I, II*, J. Diff. Geom., 1981, **16**, 305–322, 493–509.

[17] ———, *On the first eigenvalue of Laplacian of compact minimal submanifolds of rank one symmetric spaces*, Chinese J. Math., 1983, **11**, n^{0}4, 1–15.

[18] El Soufi A., Ilias S., *Une inégalité de type Reilly pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique*, Comment. Math. Helv., 1992, **67**, n^{0}2, 167–181.

[19] Friedrich T., *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung*, Math. Nach., 1980, **97**, 117–146.

[20] ______, *On the conformal relation between twistors and Killing spinors*, Suppl. Rend. Circ. Math. Palermo, 1989, **22**, 59–75.

[21] ______, *Dirac operators in Riemannian geometry*, American Mathematical Society, 2000, Graduate Studies in Mathematics **25**.

[22] Friedrich T., Kim E.-C., *The Einstein-Dirac equation on Riemannian spin manifolds*, J. Geom. Phys., 2000, **33**, n^{0}1-2, 128–172.

[23] Ginoux N., *Reilly-type spinorial inequalities*, Math. Zeit., 2002.

[24] Ginoux N., Morel B., *On eigenvalue estimates for the submanifold Dirac operator*, Int. J. Math., 2002, **13**, n^{0}5, 533–548.

[25] Greenfield S., *Cauchy-Riemann equations in several variables*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1968, **22**, 275–314.

[26] Grosjean J.-F., *Quelques estimations extrinsèques de la première valeur propre d'opérateurs elliptiques naturels définis sur des sous-variétés et applications*, 138 p., Th., Mathématiques, Université de Tours, 2000.

[27] Heintze E., *Extrinsic upper bound for λ_1*, Math. Ann., 1988, **280**, 389–402.

[28] Hijazi O., *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors*, Commun. Math. Phys., 1986, **104**, 151–162.

[29] ______, *Eigenvalues of the Dirac operator on compact Kähler manifolds*, Commun. Math. Phys., 1994, **160**, n^{0}3, 563–579.

[30] ______, *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures*, World Scientific Physics, 2001, Proceedings of the summer school on geometric methods in quantum field theory, July 12–30, 1999 (Villa de Leyva, Colombia).

[31] Hijazi O., Montiel S., Zhang X., *Eigenvalues of the Dirac operator on manifolds with boundary*, Comm. Math. Phys., 2001, **221**, 255–265.

[32] ______, *Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Math. Res. Let., 2001, **8**, 195–208.

[33] ______, *Conformal lower bounds for the Dirac operator of embedded hypersurfaces*, Asian J. Math., 2002, **6**, n^{0}1, 23–36.

[34] Hijazi O., Zhang X., *Lower bounds for the Eigenvalues of the Dirac Operator, Part I. The Hypersurface Dirac Operator*, Ann. Glob. Anal. Geom., 2001, **19**, 355–376.

[35] ______, *Lower bounds for the Eigenvalues of the Dirac Operator, Part II. The Submanifold Dirac Operator*, Ann. Glob. Anal. Geom., 2001, **20**, 163–181.

[36] Hitchin N., *Harmonic spinors*, Adv. in Math., 1974, **14**, 1–55.

[37] Kirchberg K.-D., *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature*, Ann. Global Anal. Geom., 1986, **4**, 291–325.

[38] ______, *The first eigenvalue of the Dirac operator on Kähler manifolds*, J. Geom. Phys., 1990, **7**, n^{0}4, 449–468.

[39] ______, *Killing spinors on Kähler manifolds*, Ann. Global Anal. Geom., 1993, **11**, n^{0}2, 141–164.

[40] Kühnel W., Rademacher H.-B., *Twistor Spinors with zeros*, Int. J. Math., 1994, **5**, 877–895.

[41] ———, *Twistor Spinors and Gravitational Instantons*, Lett. Math. Phys., 1996, **38**, 411-419.

[42] ———, *Conformal completion of $\mathbb{U}_n$-invariant Ricci flat Kähler metrics at infinity*, Zeitschr. Anal. Anwend., 1997, **16**, 113–117.

[43] ———, *Twistor spinors on conformally flat manifolds*, Illin. J. Math., 1997, **41**, 495–503.

[44] ———, *Asymptotically Euclidean Manifolds and Twistor Spinors*, Commun. Math. Phys., 1998, **196**, 67–76.

[45] Lawson H.B., Michelsohn M.-L., *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.

[46] Lichnerowicz A., *Géométrie des groupes de transformations*, Paris, Dunod, 1958.

[47] ———, *Spineurs harmoniques*, C.R. Acad. Sci. Paris, 1963, **257**, 7–9.

[48] ———, *Killing spinors, twistor-spinors and Hijazi inequality*, J. Geom. Phys., 1988, **5**, $n^0 1$, 1–18.

[49] ———, *Sur les zéros des spineurs-twisteurs*, C.R. Acad. Sci. Paris, 1990, **310**, 19–22.

[50] Milnor J., *Remarks concerning spin manifolds*, Princeton University Press, 1965, 55–62.

[51] Morel B., *Eigenvalue Estimates for the Dirac-Schrödinger Operators*, J. Geom. Phys., 2001, **38**, 1–18.

[52] Moroianu A., *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes*, Commun. Math. Phys., 1995, **169**, 373–384.

[53] Obata M., *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan, 1962, **14**, 333–340.

[54] Reilly R.C., *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space*, Comment. Math. Helv., 1977, **52**, 525–533.

[55] Ros A., *Spectral geometry of CR-minimal submanifolds in the complex projective space*, Kodai Math. J., 1983, **6**, $n^0 1$, 88–99.

[56] Seifarth S., Semmelmann U., *The spectrum of the Dirac operator on the odd dimensional complex projective space $\mathbb{C}P^{2m-1}$*, Preprint SFB 288, Humboldt Universität zu Berlin, 1993, **95**.

[57] Takahashi T., *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, 1966, **18**, 380–385.

[58] Trautman A., *The Dirac operator on hypersurfaces*, Acta Phys. Polon., 1995, **6**, 1283–1310.

[59] Wang Mc.K., *Parallel spinors and parallel forms*, Ann. Glob. Anal. Geom., 1989, **7**, 59–68.

[60] Witten E., *A new proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Phys., 1981, **80**, 381–402.

[61] Zhang X., *Lower bounds for eigenvalues of hypersurface Dirac operators*, Math. Res. Lett., 1998, **5**, 199–210.

[62] ———, *A remark : Lower bounds for eigenvalues of hypersurface Dirac operators*, Math. Res. Lett., 1999, **6**, 465–466.