

Exploitation de la non-circularité pour les transmissions et l'écoute passive

Mustapha Sadok

▶ **To cite this version:**

Mustapha Sadok. Exploitation de la non-circularité pour les transmissions et l'écoute passive. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National des Télécommunications; Université Pierre et Marie Curie, 2017. Français. NNT : 2017TELE0019 . tel-01721582v2

HAL Id: tel-01721582

https://theses.hal.science/tel-01721582v2

Submitted on 4 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT CONJOINT TELECOM SUDPARIS ET UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : Mathématiques appliquées et traitement du signal

École Doctorale : Informatique, Télécommunication et Électronique - EDITE

Présenté par

SADOK Mustapha

Pour obtenir le grade de DOCTEUR DE TELECOM SUDPARIS

Exploitation de la Noncircularité pour les Transmissions et l'Écoute Passive

Date de soutenance : 15 Décembre 2017

Devant le jury composé de :

Directeurs de thèse	Jean Pierre Delmas, Professeur Télécom SudParis
	Pascal Chevalier, Professeur CNAM laboratoire CEDRIC
Rapporteurs	Pascal Larzabal, Professeur ENS Cachan
	Yide Wang, Professeur Polytech'Nantes
Examinateurs	Philippe Forster, Professeur Université Paris Ouest Nanterre
	Sylvie Marcos, Professeur Centrale Supélec laboratoire L2S.
	Karim Abed Meraim, Professeur Université Orléans.
	Michel Terre, Professeur CNAM laboratoire CEDRIC.

Thèse n : 2017TELE0019

Avant-propos

Ce manuscrit récapitule les travaux entrepris par son auteur dans le cadre de sa préparation du Doctorat de Télécom SudParis et Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, commencé en décembre 2012 au sein du Département Communication, Image et Traitement de l'Information (CITI), financé par Institut National des Télécommunications et des TIC d'Oran (INTTIC) Algérie, sous la direction de Pr. Jean Pierre Delmas (Télécom SudParis) et Pr. Pascal Chevalier (CNAM, THALES Communications).

SADOK Mustapha
Evry, 09 Octobre 2017

Remerciements

Je souhaiterai remercier tout d'abord monsieur Pascal Larzabal, professeur à l'ENS Cachan et monsieur Yide Wang, professeur à Polytech'Nantes qui ont accepté de donner de leur temps précieux pour expertiser cette thèse. Je remercie aussi : monsieur Philippe Forster, professeur à l'ENS Cachan ; madame Sylvie Marcos, professeur à Centrale Supélec laboratoire LSS ; monsieur Karim Abed Meraim, professeur à l'université d'Orléans et monsieur Michel Terre, professeur au CNAM laboratoire CEDRIC, pour m'avoir réservé l'honneur de prendre part au jury de cette thèse. Je suis également très reconnaissant envers professeur Karim Abed Meraim pour ces précieux cours auxquels j'ai eu la chance d'y assister à l'université des Sciences et de la Technologie d'Oran.

Je remercie particulièrement mon directeur de thèse, monsieur Jean Pierre Delmas, professeur à Télécom SudParis pour la qualité de son encadrement, son exigence, ses conseils et surtout pour ses encouragements pendant les moments difficiles. Malgré la difficulté de mes conditions de travail, Jean-Pierre par sa gentillesse et sa disponibilité a toujours su comment m'aider pour avancer sereinement dans mes travaux de thèse.

J'exprime ma profonde gratitude à monsieur Pascal Chevalier, professeur au CNAM et expert THALES Communications, d'avoir codirigé cette thèse et pour son aide compétente qu'il m'a apportée et ses critiques scientifiques constructives.

Je remercie mes chers amis Fethi Belghaouti et Abderrahmene Daoudi dont la compagnie a contribué à rendre mes séjours à Paris très agréables.

Ma profonde gratitude à ma deuxième famille à l'Institut National des Télécommunications et des TIC d'Oran qui m'a réservé l'aide et le soutient pour réussir mes travaux de thèse, particulièrement messieurs Abdelmajid Boutaleb, Abdelkader Temmar, Belkacem Kouninef, Abdelhadi Lotfi et Rabie Hachemi et tous les collègues qui m'ont fourni de l'aide quand j'en avais vraiment besoin.

Finalement, je remercie ma grand-mère, mes parents et toute ma famille pour leurs affections et pour ce qu'ils m'ont apporté dans ma vie.

Dédicace

A la mémoire de mon grand père Benyounes : *Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour toi. Ce travail est le fruit de ton éducation...Que Dieu l'accueille dans son vaste paradis.*

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'exploitation des propriétés de non-circularité et de non-gaussianité des signaux d'intérêt (SOI) et/ou des interférences pour les transmissions sans fil et l'écoute passive.

Dans une première partie de cette thèse, nous nous intéressons à l'extension des récepteurs SIMO-MLSE conventionnels vers de nouvelles architectures exploitant la potentielle non-circularité au second ordre des interférences co-canal (CCI), pour la démodulation de signaux rectilignes (BPSK, ASK), quasi-rectilignes (MSK, GMSK et OQAM) et à symboles complexes (QAM). L'architecture générale des récepteurs développés est basée sur un prétraitement avec une extension widely linear (WL) du filtre adapté spatio-temporel, ramenant le traitement de démodulation à un problème scalaire, un échantillonnage au rythme symbole et ensuite un organe de décision basé sur une version modifiée de l'algorithme de Viterbi. Pour le cas particulier des signaux quasi-rectiligne, on intercale un traitement de dérotation entre l'échantillonneur et l'organe de décision. Un travail de modélisation à temps discret des SOI, brouilleurs et du bruit de fond a été mené afin de créer des modèles de simulations pour la validation des expressions SINR analytiques interprétables, via l'évaluation des probabilités d'erreur symboles. Ces nouvelles architectures de récepteur SIMO-MLSE, permettent la réjection d'une CCI à partir d'une seule antenne (concept single antenna interference cancellation (SAIC)), même en situation de canal sélectif en fréquence pour le signal d'intérêt, avec un CCI rectiligne à un ou deux trajets. Bien que les nouvelles structures du récepteur SIMO-MLSE aient été développées sous de fausses hypothèses de stationnarité et de gaussianité des interférences, les performances restent toujours supérieures à celle des récepteurs SIMO-MLSE conventionnels.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à la formation de voies antibrouillée (Beamforming) non-linéaire à travers des structures de Volterra complexe du troisième ordre. Ces dernières permettent l'exploitation de la non-circularité jusqu'au sixième ordre et du caractère non-gaussien des SOI et/ou des interférences. Dans le contexte de l'écoute passive, nous avons introduit un beamformer MVDR de Volterra du troisième ordre utilisant la seule information a priori du vecteur directionnel du SOI et implémentable grâce à une structure équivalente GSC. Nous avons étudié ses performances en particulier par l'évaluation analytique des expressions du SINR en fonction des statistiques de l'interférence, et par sa vitesse de convergence d'apprentissage, démontrant ainsi sa supériorité par rapport aux beamformers MVDR linéaire et WL classiques. Dans

un contexte de radiocommunications, nous avons étudié une version MMSE de ce beamformer de Volterra complexe du troisième ordre qui prend lui en compte les propriétés statistiques de non-circularité jusqu'au sixième ordre et de non-gaussianité du SOI et du CCI. Nous avons défini dans ce cadre un SINR grâce à une décomposition orthogonale ainsi qu'une relation générale entre MSE et SINR. Dans le cas particulier d'une seule antenne, nous avons comparé différentes constellations de modulations linéaires et démontré par des expressions analytiques de SINR exprimées en fonction du décalage temporel et de phase entre SOI et CCI que ce filtrage de Volterra permettait de bénéficier de la discrimination d'amplitude pour de fortes interférences pour des symboles BPSK et QPSK.

La dernière partie de cette thèse est consacrée à la robustesse de tests de détection de rectilinéarité de signaux en présence d'offsets de fréquence. Ces tests sont importants pour ajuster la nature du traitement (linéaire ou WL) en fonction de la rectilinéarité des signaux, afin de garantir le meilleur rapport performance/temps de convergence des algorithmes. Plusieurs tests à base de moments du second ordre et du quatrième ordre sont présentés et étudiés. Les tests de rectilinéarité basés sur des cumulants d'ordre quatre souffrent d'une importante erreur d'estimation pour un nombre réduit d'observations, malgré la robustesse des cumulants face au bruit de fond Gaussien circulaire en situation de faible valeur du SNR. Seul le test de rectilinéarité au second ordre présente une robustesse vis-à-vis du nombre d'observations réduit, du faible rapport SNR, du bruit de phase et du résidu de porteuse. Pour aboutir à des seuils de décision optimaux, nous avons pu établir les expressions analytiques asymptotiques des courbes COR de ce test de rectilinéarité au second ordre en présence de bruit de phase et résidu de porteuse.

Abstract

This thesis is devoted to exploit the non-circularity and non-gaussianity properties of signals of interest (SOI) and/or interference for wireless transmissions and passive listening.

In the first part of this thesis, we are interested in the extension of conventional SIMO-MLSE receivers to new architectures exploiting the potential second order non-circularity of co-channel interference (CCI), for the demodulation of rectilinear signals (BPSK, ASK), quasi-rectilinear (MSK, GMSK and OQAM) and quadrature amplitude modulation (QAM). The general architecture of the developed receivers is based on a pre-processing with a widely linear (WL) extension of the spatio-temporal matched filter, bringing the demodulation processing back to a scalar problem, a sampling at the symbol rate and then a decision block based on a modified version of the Viterbi algorithm. For the particular case of the quasi-rectilinear signals, a derotation processing is interposed between the sampler and the decision block. A work on equivalent discrete time modeling of SOI, interferers and background noise has been carried out in order to create simulation models as for the validation of the interpretable analytic SINR expressions, by the evaluation of the symbol error rates. These new SIMO-MLSE receivers allow the single antenna interference cancellation (SAIC) effect to be maintained, even in a frequency selective channel for SOI and for rectilinear CCI with a single or two-path propagation model. Although the new structures of the SIMO-MLSE receiver have been developed under false assumptions on interference of stationarity and gaussianity, higher performance is always maintained with respect to conventional SIMO-MLSE receivers.

In a second part, we are interested to the beamforming through complex Volterra structures of the third order. These structures allow us the exploitation of the non-circularity up to the sixth order as well as the non-gaussian nature of the SOI and/or the interferences. For passive listening applications, we have introduced a third-order Volterra MVDR beamformer using only a priori information of SOI steering vector and implemented by an equivalent GSC structure. We have studied its performance, in particular by interpretable closed-form expressions as functions of statistics of the interference, and by its speed of learning, thus proving its advantages with respect to the conventional linear and WL MVDR beamformers. For wireless communications applications, we have studied an MMSE version of this complex Volterra beamformer of the third order that takes into account of the non-circularity up to the sixth order as well as the non-gaussian nature of the interference. We have defined in this framework a SINR thanks to an orthogonal decomposition

as well as a relation between MSE and SINR. In the particular case of a single antenna, we have compared different constellations of linear modulations and proved by closed-form expressions of the SINR as functions of the delay and phase of the CCI with respect to the SOI, that this Volterra filtering allow us to benefit from the amplitude discrimination for strong CCI only for BPSK and QPSK symbols.

The last part of this thesis is devoted to the robustness of rectilinearity tests in the presence of frequency offset. These tests are important for adjusting the processing (linear or WL) as a function of the rectilinearity of the signals in order to guarantee the best performance/convergence rate ratio of algorithms. Several tests based on second-order and fourth-order moments are presented and studied. Rectilinearity tests based on cumulants of fourth order suffer from the large estimation error for a reduced number of observations, despite the theoretical robustness of cumulants against the circular background noise (low SNR situation). Only the second order rectilinearity test is robust in situation of reduced number of observations, low SNR, phase noise and frequency offset. In order to derive optimum decision thresholds, we have given asymptotic closed-form expressions of the ROC curves of the second order rectilinearity test in the presence of phase noise and frequency offset.

Table des matières

Résumé **5**

Abstract **8**

Table des matières **10**

Table des figures **14**

Liste des tableaux **20**

Liste des abréviations **23**

Liste des notations **24**

Liste des publications **26**

Introduction générale **29**

1 Récepteur SIMO-MLSE sous hypothèse bruit gaussien stationnaire potentiellement noncirculaire **33**

1.1 Introduction 33

1.2 Récepteur SIMO MLSE 35

1.2.1 Problème général de détection 35

1.2.2 Dérivation de la structure du récepteur SIMO MLSE 38

1.2.3 Cas particulier de symboles réels 39

1.2.4 Cas particulier d'une modulation linéaire quasi-rectiligne 40

1.3 Interprétation des filtres WL 42

1.4 Performances en terme de SINR 43

1.4.1 Objectifs 43

1.4.2 Cas de bruit total stationnaire 43

1.4.3 Cas de bruit total cyclostationnaire 45

1.5 Cas particuliers et illustrations 47

1.5.1 Hypothèses . . . 47
1.5.2 Cas d'une absence d'interférence . . . 48
1.5.3 Cas de la présence d'une interférence rectiligne mono-trajet . . . 48
1.5.4 Cas de la présence d'une interférence rectiligne bi-trajets . . . 51
1.6 Performance en probabilité d'erreur symbole . . . 55
1.7 Conclusion . . . 57

2 Beamforming MVDR de Volterra pour interférences non-gaussiennes et potentiellement non-circulaires 59
2.1 Introduction . . . 59
2.2 Position du problème . . . 62
2.2.1 Hypothèses . . . 62
2.2.2 Statistiques du signal . . . 63
2.2.3 Formulation du problème . . . 67
2.3 Beamforming MVDR de Volterra du troisième ordre . . . 69
2.3.1 Beamformer de Volterra du troisième ordre . . . 69
2.3.2 Beamformer MVDR de Volterra du troisième ordre . . . 69
2.3.3 Structure GSC équivalente du Beamformer MVDR de Volterra du troisième ordre . . . 72
2.3.4 SINR en sortie du beamformer . . . 74
2.4 Analyse des performances en présence d'une seule interférence . . . 75
2.4.1 Composition du bruit total d'observation . . . 75
2.4.2 Performances des structures partielles L-C(q) du beamformer MVDR de Volterra . . . 76
2.4.3 Performances des beamformers WL-C(q) et L-C(q_1, q_2) . . . 81
2.4.4 Illustrations et simulations par ordinateur . . . 82
2.5 Implémentation adaptative . . . 90
2.6 Beamformer MVDR complexe de Volterra à complexité linéaire . . . 93
2.6.1 Nouvelles contraintes . . . 94
2.6.2 Nouveau beamformer MVDR de Volterra . . . 94
2.6.3 Interprétation GSC . . . 94
2.6.4 Calcul de SINR . . . 96
2.6.5 Comparaisons avec le beamformeur de Volterra à complexité cubique . . . 96
2.6.6 Sous optimalité et vitesse de convergence . . . 97
2.7 Conclusion . . . 97

3 Beamforming et filtrage de Volterra complexe MMSE 99
3.1 Introduction . . . 99

3.2 Hypothèses et formulation du problème . . . 100
3.2.1 Hypothèses . . . 100
3.2.2 Formulation du problème . . . 101
3.3 Beamforming de Volterra complexe MMSE . . . 101
3.3.1 Filtre de Volterra complexe . . . 101
3.3.2 Cas particulier de symboles a_k réels . . . 103
3.3.3 MMSE . . . 103
3.3.4 Décomposition orthogonale et SINR . . . 104
3.3.5 Beamformer et filtrage de Volterra complexe MMSE d'ordre 3 . . . 106
3.4 Analyse des performances du beamformer et du filtrage de Volterra complexe MMSE d'ordre 3 . . . 106
3.4.1 Modèle d'interférence et statistiques . . . 106
3.4.2 Vecteur directionnel étendu . . . 108
3.4.3 Optimalité de structures partielles . . . 109
3.4.4 Etude du SINR dans le cas du filtrage . . . 110
3.4.5 Probabilité d'erreur symboles . . . 115
3.4.6 Illustrations numériques . . . 116
3.5 Conclusion . . . 135

4 Robustesse d'un test de rectilinéarité aux offsets de fréquence 137
4.1 Introduction . . . 137
4.2 Position du problème . . . 138
4.2.1 Modèle du signal . . . 138
4.3 Dérivation du test de rectilinéarité au second ordre . . . 139
4.3.1 Courbes ROC en absence résidus de porteuse et sans bruit de phase . . . 140
4.3.2 Illustrations et simulations Monte Carlo . . . 144
4.4 Test de rectilinéarité basé sur les cumulants du quatrième ordre . . . 146
4.4.1 Premier test empirique . . . 147
4.4.2 Deuxième test empirique . . . 147
4.4.3 Illustrations et simulations Monte Carlo . . . 148
4.5 Conclusion . . . 150

Conclusion générale et perspectives 153

Annexes 156

A Annexe du chapitre 1 157
A.1 Cyclo-stationnarité au second ordre de signaux à temps continu . . . 157

A.1.1 Définitions . . . 157
A.1.2 Modulations numériques linéaires QAM . . . 160
A.1.3 Modulations numériques linéaires quasi-rectilignes . . . 165
A.1.4 Formule des interférences . . . 173
A.2 Factorisation spectrale . . . 176
A.2.1 Définitions . . . 176
A.2.2 Théoréme de Riesz-Fejér, factorisation spectrale . . . 177
A.2.3 Généralisation du théorème de Riesz-Fejér au processus complexes non nécessairement circulaire au second ordre . . . 177
A.2.4 Algorithme de factorisation d'une matrice de densité spectrale de puissance . 178
A.3 Principe de simulation à temps discret . . . 180
A.3.1 Scénario 1 : SOI modulation linéaire rectiligne . . . 181
A.3.2 Scénario 2 : SOI modulation linéaire quasi-rectiligne . . . 184
A.3.3 Scénario 3 : SOI modulation linéaire à symboles complexes . . . 189
A.3.4 Algorithme de Viterbi modifié . . . 191

B Annexe du chapitre 2 **195**
B.1 **Preuve des relations** (2.4.13)**,** (2.4.14)**,** (2.4.15) **et** (2.4.16) . . . 195
B.2 Application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz . . . 196
B.3 Calcul des moments temporels de l'enveloppe complexe d'une modulation linéaire . . 198
B.3.1 Preuves des relations (2.2.12) à (2.2.18) . . . 198
B.3.2 Preuves des relations (2.2.19) et (2.2.20) . . . 201
B.4 Beamforming MVDR complexe de Volterra dans le contexte de SOI à module constant 202
B.4.1 Nouvelles contraintes . . . 202
B.4.2 Nouveau beamformer MVDR Volterra . . . 203
B.5 Beamformer de Volterra MVDR à réduction du nombre de contraintes par contraintes sommes . . . 206
B.5.1 Equivalent GSC . . . 206

C Annexe du chapitre 3 **209**
C.1 Calcul symbolique avec *Symbolic Math Toolbox* de MATLAB . . . 209

D Annexe du chapitre 4 **213**
D.1 Théorème central limite multidimensionnel pour variables aléatoires complexes . . . 213
D.2 Théorème de continuité . . . 213
D.3 Loi de probabilité de Rayleigh improper . . . 214

Bibliographie **217**

Table des figures

1.1 Structure du récepteur MLSE non circulaire pour symboles complexes. 39
1.2 Structures du récepteur MLSE non circulaire avec des symboles réels. 40
1.3 Structure 1 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes. 41
1.4 Structure 2 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes. 41
1.5 Moyenne de $\min_k(\mathrm{SNR}_{z,k}^{nc})$ et $\min_k(\mathrm{SNR}_{z,k}^{c})$ par rapport à ϕ_j, ϕ_{s_1} et à ϕ_{s_2} comme fonction de $|\mu_j|^2/N_0$. 51
1.6 $\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc}$ et $\mathrm{SINR}_{z,k}^{c}$ comme fonction du roll off α_{ro}. 54
1.7 $\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc}$ et $\mathrm{SINR}_{z,k}^{c}$ comme fonction de la phase du deuxième trajet interférence ϕ_{j_2}. 54
1.8 $\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc}$ et $\mathrm{SINR}_{z,k}^{c}$ comme fonction du retard du deuxième trajet interfèrence τ_{j_2}. . 55
1.9 $\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc}$ et $\mathrm{SINR}_{z,k}^{c}$ comme fonction du rapport INR $|\mu_{j_1}|^2/N_0$. 55

2.1 Structure GSC équivalent du beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre. 74
2.2 $\mathrm{SINR_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence BPSK non-filterée. 83
2.3 $\mathrm{G_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence BPSK non-filterée. 83
2.4 $\mathrm{SINR_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence QPSK non-filterée. 84
2.5 $\mathrm{G_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence QPSK non-filterée. 84
2.6 $\mathrm{SINR_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence impulsive de Bernoulli et circulaire. 85
2.7 G_{B} en fonction de la corrélation spatiale α our une interférence impulsive de Bernoulli et circulaire. 85
2.8 $\mathrm{SINR_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence impulsive de Bernoulli et rectiligne. 86
2.9 G_{B} en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence impulsive de Bernoulli et rectiligne. 86
2.10 Gain de la structure partielle WL-C(0) en fonction de INR pour une interférence BPSK non-filtrée. 87

2.11 Gain de la structure partielle LC-(1,3) beamformer en fonction de INR pour une interférence QPSK non-filtrée. 87
2.12 $\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(0)}}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence BPSK avec INR = 20dB. 88
2.13 $\mathrm{G}_{\mathrm{L-C(0)}}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence BPSK avec INR = 20dB. 88
2.14 $\mathrm{G}_{\mathrm{L-C(0)}}$ en fonction de l'INR de l'interférence BPSK. 89
2.15 $\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1,3)}}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence QPSK avec INR = 20dB. 89
2.16 $\mathrm{G}_{\mathrm{L-C(1,3)}}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence QPSK avec INR = 20dB. 90
2.17 $\mathrm{G}_{\mathrm{L-C(1,3)}}$ en fonction de l'INR de l'interférence QPSK. 90
2.18 $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour une interférence BPSK non-filtrée. 92
2.19 $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour une interférence BPSK non-filtrée)zoom sur $K \in [0, 30]$). 92
2.20 $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour une interférence QPSK non-filtrée. 93
2.21 Structure GSC équivalente du beamformer MVDR complexe de Volterra à complexité linéaire. 96

3.1 SINR en sortie du filtre de Volterra MMSE en fonction du SNR d'entrée ϵ_s pour SOI BPSK et en absence de CCI. 112
3.2 SINR en sortie du filtre de Volterra MMSE en fonction du SNR d'entrée ϵ_s pour SOI QPSK et en absence d'interférence. 114
3.3 Comparaison des différentes structures partielles du filtre MMSE complexe de Volterra en terme de $\overline{\mathrm{SINR}}$. 116
3.4 Comparaison des différentes structures partielles du filtre MMSE complexe de Volterra en terme de SINR pour $\phi = 0$. 117
3.5 Comparaison des différentes structures partielles du filtre MMSE complexe de Volterra en terme de SINR pour $\phi = \pi/4$. 117
3.6 Comparaison des différentes structures partielles du filtre MMSE complexe de Volterra en terme de SINR pour $\phi = \pi/2$. 118
3.7 Histogramme de la composante réelle de y_k pour symboles SOI et CCI BPSK pour la structure complète WL-C(0,1,2,3) et WL-C(0) pour $\phi = 0$. 119
3.8 Histogramme de la composante réelle de y_k pour symboles SOI et CCI BPSK pour la structure complète WL-C(0,1,2,3) et WL-C(0) pour $\phi = \pi/4$. 119

3.9 $\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C(0)}}$ et $\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL}}$ pour symboles SOI et CCI BPSK en fonction de ϕ pour r_{off} = 0.3, SNR = 10dB et INR = 30dB. 120
3.10 $\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C(0)}}$ et $\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL}}$ pour symboles SOI et CCI BPSK en fonction de τ/T pour ϕ = 0, SNR = 10dB et INR = 30dB. 121
3.11 $\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C(0)}}$ et $\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL}}$ pour symboles SOI et CCI 4ASK en fonction de τ/T pour ϕ = 0, SNR = 10dB et INR = 30dB. 121
3.12 $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC(1,3)}}$ comparé au $\mathrm{SINR}_{\mathrm{L}}$ pour des symboles SOI et CCI QPSK en fonction de $\tau_/T$ pour ϕ = 0, SNR = 10dB et INR = 30dB. 122
3.13 $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC(1,3)}}$ comparé au $\mathrm{SINR}_{\mathrm{L}}$ pour des symboles SOI et CCI QPSK en fonction de ϕ pour SNR = 10dB et INR = 30dB. 122
3.14 $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC(1,3)}}$ pour des symboles SOI et CCI QPSK en fonction du INR pour SNR = 10dB. 123
3.15 $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC(1,3)}}$ et $\mathrm{SINR}_{\mathrm{L}}$ pour des symboles SOI et CCI 16QAM en fonction du τ/T pour SNR = 10dB, INR = 30dB et $\forall\phi$. 123
3.16 SINR et SER pour symboles SOI et CCI BPSK synchronisés en fonction de INR, pour ϕ = 0 et SNR = 10dB 124
3.17 SER pour symboles SOI et CCI BPSK synchronisés en fonction de INR, pour ϕ = 0 et SNR = 10dB 125
3.18 SER pour symboles SOI BPSK en absence d'interférence en fonction de SNR 126
3.19 Histogramme de la composante I pour symboles SOI BPSK en absence d'interférence pour SNR = 4dB 126
3.20 Histogramme de la composante I pour symboles SOI BPSK en absence d'interférence pour SNR = 7dB 127
3.21 Histogramme de la composante I pour symboles SOI BPSK en absence d'interférence pour SNR = 10dB 127
3.22 SER en fonction de l'INR pour les récepteurs L, LC(1), LC(1,3) et MAP pour ϕ = 0 et SNR=10dB pour symboles SOI et CCI QPSK synchonisés. 128
3.23 SINR en fonction de l'INR pour les récepteurs L, LC(1) et LC(1,3) pour ϕ = 0 et SNR=10dB pour symboles SOI et CCI QPSK synchonisés. 129
3.24 SER pour symboles SOI QPSK en absence d'interférence en fonction du SNR. 130
3.25 Histogramme de la sortie y_k du filtre MMSE de Volterra L-C(1,3) pour symboles SOI QPSK en absence d'interférence pour SNR = 10dB. 131
3.26 Histogramme de la sortie y_k du filtre MMSE de Volterra L-C(1) pour symboles SOI QPSK en absence d'interférence pour SNR = 10dB. 131
3.27 Histogramme de la sortie $y(k)$ du filtre MMSE de Volterra L pour symboles SOI QPSK en absence d'interférence pour SNR = 10dB. 132

3.28 Comparaison entre beamformer MMSE et MVDR de Volterra, our des symboles SOI et CCI BPSK synchronisés, en fonction de la corrélation spectrale pour INR = 30dB et $\omega = 0.7$ . . . 133
3.29 Comparaison entre beamformer MMSE et MVDR de Volterra, pour des symboles SOI et CCI QPSK synchronisés, en fonction de la corrélation spectrale pour INR = 30dB et $\omega = 0.7$ . . . 133
3.30 $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour symboles SOI et CCI BPSK synchonisés . . . 134
3.31 $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour symboles SOI et CCI QPSK synchonisés . . . 134

4.1 Courbes ROC pour SNR = -5dB. . . . 144
4.2 Courbes ROC pour SNR = -3dB et $k = 50$. . . . 145
4.3 Courbes ROC pour SNR = 0dB et $K = 100$. . . . 145
4.4 Courbes ROC pour SNR = 0dB et $K = 100$. . . . 146
4.5 Courbes ROC pour SNR = -3dB et $K = 1000$ 149
4.6 Courbes ROC pour SNR = -6dB et $K = 1000$ 149
4.7 Courbes ROC pour SNR = -10dB et $K = 1000$ 150
4.8 Courbes ROC pour SNR = -3dB et $K = 1000$ en présence de résidu de porteuse avec $Kf_sT = 1/4$ . . . 150

A.1 Densité Spectrale de puissance cyclique pour une modulation rectiligne ($r_x^{\frac{k}{T}}(f) = c_x^{\frac{k}{T}}(f)$) BPSK avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0$ . . 163
A.2 Densité Spectrale de puissance cyclique pour une modulation rectiligne ($r_x^{\frac{k}{T}}(f) \equiv c_x^{\frac{k}{T}}(f)$) BPSK avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0.5$. 164
A.3 Densité Spectrale de puissance cyclique pour une modulation circulaire ($c_x^{\frac{k}{T}}(f) \equiv 0$) 4-QAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0$ 164
A.4 Densité Spectrale de puissance cyclique pour une modulation circulaire ($c_x^{\frac{k}{T}}(f) \equiv 0$) 4-QAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0.5$ 165
A.5 Densité Spectrale de puissance cyclique $r_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0$ 168
A.6 Densité Spectrale de puissance cyclique complémentaire $c_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0$ . . . 168
A.7 Densité Spectrale de puissance cyclique $r_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0.4$ 169

A.8 Densité Spectrale de puissance cyclique complémentaire $c_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0.4$ 169
A.9 Densité Spectrale de puissance cyclique $r_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 1$ 170
A.10 Densité Spectrale de puissance cyclique complémentaire $c_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 1$ 170
A.11 Impulsion $v(f)$ de MSK. 171
A.12 $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ pour différentes valeurs de k, modulation MSK. 171
A.13 Impulsion $v(t)$ de GMSK linéarisée. 172
A.14 $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ pour différentes valeurs de k, modulation GMSK. 173
A.15 Structures du récepteur MLSE non circulaire avec des symboles réels. 181
A.16 Modèle discret équivalent au récepteur SIMO MLSE de la figure A.15 181
A.17 Générateur des échantillons SOI modulation rectiligne 182
A.18 Générateur des échantillons de l'interférence 183
A.19 Echantillons $n_{G,k}$ du bruit de fond en sortie du filtre WL multidimensionnel 183
A.20 Générateur des échantillons $n_{G,k}$ équivalent au modèle continu de la figure A.19 . . . 184
A.21 Structure 1 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes. 185
A.22 Modèle discret équivalent au récepteur SIMO MLSE de la figure A.21 185
A.23 Générateur des échantillons SOI modulation quasi-rectiligne 186
A.24 Générateur des échantillons interférence modulation quasi-rectiligne 187
A.25 Echantillons n_k du bruit de fond 187
A.26 Structures du générateur des échantillons du bruit gaussien n_k avec une entrée : $\widetilde{\boldsymbol{n}}_{2N,k} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mathbf{0}, \mathbf{I_{2N}}, \mathbf{0})$ 189
A.27 Structure du récepteur MLSE non circulaire pour symboles complexes. 189
A.28 Treillis à $N_\sigma = (card\mathcal{A})^{L_i}$ états pour la détection au sens ML d'un signal modulée linéairement à deux états ($card\mathcal{A} = 2$) [1]et transmis à travers un canal sélectif en fréquence (étendue du canal discret équivalent = $L_i + 1$). 193
A.29 Symbol courant a_k et état courant du canal σ_k 194

B.1 SINR moyenné sur ϕ_s en sortie du beamformer MVDR WL à contraintes modifiées ou non pour SOI BPSK non filtré 204
B.2 SINR pour $\phi_s = 0$ en sortie du beamformer MVDR à contraintes modifiées ou non pour SOI BPSK non filtré 204

B.3 SINR moyenné sur ϕ_s en sortie du beamformer de Volterra MVDR de structure WL-C(0) à contraintes modifiées ou non pour SOI BPSK non filtré 205
B.4 SINR pour $\phi_s = 0$ en sortie du beamformer de Volterra MVDR de structure WL-C(0) à contraintes modifiées ou non pour SOI BPSK non filtré 205

Liste des tableaux

1.1 Taux d'erreur binaire pour SOI et interférence BPSK 56
1.2 Taux d'erreur binaire pour SOI GMSK et interférence BPSK 57
1.3 Taux d'erreur binaire pour SOI QPSK et interférence BPSK 57
1.4 Taux d'erreur binaire pour SOI et interférence GMSK 57

2.1 Coefficients SO, FO et SIO pour différentes constellations. 66

C.1 Variable, Expression et Fonction symboliques 210
C.5 Fonctions pour représentation graphique des fonctions symboliques 210
C.2 Manipulation et Simplification des expressions symboliques 211
C.3 Calcul différentiel et intégral 212
C.4 Algèbre linéaire 212

Liste des abréviations

Pour des raisons de lisibilité, la signification d'une abréviation ou d'un acronyme n'est souvent rappelée qu'à sa première apparition dans le texte d'un chapitre. Par ailleurs, puisque nous utilisons toujours l'abréviation la plus usuelle, il est fréquent que ce soit le terme anglais qui soit employé, auquel cas nous présentons une traduction.

ACI	Adjacent Channel Interference
ASK	Amplitude Shift Keying
BPSK	Binary Phase Shift Keying
CCI	Co Channel Interference
CDMA	Code Division Multiple Access
CPM	Continuous Phase Modulation
CSI	Conjugate Symbol Interference
DOA	Direction Of Arrival
FAST	Filtre Adapté Spatio Temporel
FDMA	Frequency Division Multiple Access
GLR	Generalized Likelihood Ratio
GLRT	Generalized Likelihood Ratio Test
GMSK	Gaussian Minimum Shift Keying
GSC	Generalized Side-lobe Canceller
GSM	Global System for Mobile communications
IC	Interference Cancellation
IID	Independent and Identically Distributed
INR	Interference to Noise Ratio
ISI	Inter Symbol Interference
LCMP	Linearly Constrained Minimum Power
LCMV	Linearly Constrained Minimum Variance
LRT	Likelihood Ratio Test

MAIC	Multiple Antenna Interference Cancellation
MDDR	Minimum Dispersion Distortionless Response
MIMO	Multiple Input Multiple Output
ML	Maximum Likelihood
MLSE	Maximum Likelihood Sequence Estimation
MMF	Multi-dimensional Matched Filter
MMSE	Minimum Mean Square Error
MPDR	Minimum Power Distortionless Response
MSE	Mean Square Error
MSK	Minimum Shift Keying
MVDR	Minimum Variance Distortionless Response
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
OQAM	Offset Quadrature Amplitude Modulation
OQPSK	Offset Quadrature Phase-Shift Keying
PAM	Pulse Amplitude Modulation
Pd	Probability of Detection
Pfa	Probability of False Alarm
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QPSK	Quadrate Phase Shift Keying
ROC	Receiver Operating Characteristic
SAIC	Single Antenna Interference Cancellation
SER	Symbol Error Rate
SIMO	Single Input Multiple Output
SINR	Signal to Interference Noise Ratio
SMI	Sample Matrix Inversion
SNR	Signal to Noise Ratio
SOI	Signal Of Interest
ST	Spatio Temporel
TDMA	Time Division Multiple Access
TI	Time Invariant
TV	Time Variant
ULA	Uniform Linear Array
WCDMA	Wideband Code Division Multiple Access
WL	Widely Linear
WL-MDDR	Widely Linear Minimum Dispersion Distortionless Response
WL-MVDR	Widely Linear Minimum Variance Distortionless Response

Liste des notations

Nous avons regroupé ci-dessous les principales notations employées dans les différents chapitres du document. Les matrices sont représentées par des majuscules grasses $\mathbf{A}$, les vecteurs par des minuscules grasses $\mathbf{a}$ (par défaut, sont orientées "colonne") et les scalaires par des minuscules non grasses a.

Re(a)	Partie réelle du nombre complexe a.
Im(a)	Partie imaginaire du nombre complexe a.
$(a)^*$	Complexe conjugué du nombre complexe a.
$\|a\|$	Valeur absolue d'un nombre réel a et module d'un nombre complexe a.
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse de $\mathbf{A}$.
$\mathbf{A}^{\#}$	Pseudo-inverse de $\mathbf{A}$ au sens de Moore-Penrose.
$\det(\mathbf{A})$	Déterminent de la matrice $\mathbf{A}$.
$Ker(\mathbf{A})$	Noyau d'une matrice $\mathbf{A}$.
$Range(\mathbf{A})$	Espace image d'une matrice $\mathbf{A}$.
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	Produit de Kronecker.
$\mathbf{a} \oslash \mathbf{b}$	Produit de Kronecker symétrique.
$\mathbf{A}^{\otimes q}$	Produit de Kronecker $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} ... \otimes \mathbf{A}$ avec $q-1$ produits de Kronecker.
$\mathbf{I}_p$	Matrice d'identité d'ordre p.
$\mathbf{0}_p$	Vecteur nul d'ordre p.
$\mathbf{O}_{p,q}$	Matrice $p \times q$ nulle.
$\triangleq$	Par définition.
$\propto$	Proportionnel.
$o(.)$	Signifie $\lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.
$\mathbf{x}(t) * \mathbf{y}(t)$	Produit de convolution composante à composante.

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Convergence en loi.
$E[.]$	Espérance mathématique.
E[./.]	Espérance conditionnelle.
$Cum(.)$	Opérateur de cumulant.
$P(a = b)$	Probabilité que a soit égal à b.
$\widehat{\theta}$	Estimé de θ.
$\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mathbf{m}, \mathbf{R})$	Loi gaussienne d'une variable aléatoire réelle d'espérance $\mathbf{m}$ et de matrice de covariance $\mathbf{R}$.
$\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{m}, \mathbf{R}, \mathbf{C})$	Loi gaussienne d'une variable aléatoire complexe d'espérance $\mathbf{m}$ et de matrice de covariance $\mathbf{R}$ et de matrice de covariance complémentaire $\mathbf{C}$.

Propriétés algébriques

On utilisera principalement les propriétés suivantes des produit de Kronecker et de l'opérateur vectoriel (les dimensions des matrices sont supposées telles que ces expressions aient un sens) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) \end{aligned}$$

Publications de l'auteur

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a donné lieu aux contributions suivantes :

Articles de revue

J.P. Delmas, P. Chevalier, S. Sallem et M. Sadok, "Récepteurs SIMO MLSE Widely Linear : Structures et performances en présence d'interférences non-circulaires", *Revue Traitement du Signal*, vol. 32/1, pp.7-37, 2015.

P. Chevalier, J.P. Delmas, and M. Sadok, "Third-order Volterra beamforming for non-Gaussian and potentially non-circular interference rejection", *IEEE Trans. Signal Processing*, en cours de review.

J.P. Delmas, M. Sadok, and P. Chevalier, "Robustness of a rectilinear test with respect to frequency offset", *IEEE Signal Processing letters*, en cours de rédaction.

M. Sadok, J.P. Delmas, and P. Chevalier, "Third-order Volterra MMSE bemforming - single and multiple antenna interference cancellation", *Signal Processing*, en cours de rédaction.

Articles de conférence

M. Sadok, J.P Delmas, and P. Chevalier, "Enhanced single antenna interference cancellation from MMSE third-order complex Volterra filters", *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), New Orleans, USA*, March 2017.

M. Sadok, J.P Delmas, and P. Chevalier, "SAIC pour une interférence circulaire au second-ordre par filtrage de Volterra complexe d'ordre 3", *XXVIe Colloque sur le Traitement du Signal et des Images du GRETSI*, Juan-les-Pins, France, 5-8 septembre 2017.

P. Chevalier, J.P. Delmas, and M. Sadok, "Performance analysis of an MVDR third-order Volterra beamformer", *26th European Signal Processing Conference*, à soumettre dès l'ouverture du site EUSIPCO 2018.

Introduction générale

Dans le contexte des radiocommunications à accès multiple, l'effort des théoriciens en communications numériques est focalisé sur le développement des structures des récepteurs qui permettent d'atteindre une capacité importante avec une qualité de service acceptable.

D'une part, pour ce type de système de communication, Il est bien connu que la capacité est inversement proportionnelle au niveau des interférences [83], [86], dont la classification est la suivante :

- *Interférence Co-canal (Cochannel Interference - CCI)* : Définie comme étant un signal interférent de même fréquence porteuse que le signal utile.
- *Interférence du canal adjacent (Adjacent Channel Interference - ACI)* : L'interférence du canal adjacent peut être classifiée en une interférence *inband* et *out-of-band*. le terme *inband* est utilisé quand la fréquence centrale du signal interférent appartient à la bande de fréquence du signal utile. Par contre le terme *out-of-band* correspond à la situation pour laquelle la fréquence centrale du signal interférent est en dehors de la bande de fréquence du signal utile.

D'une autre part, la transmission radio est sévèrement affectée par la propagation multi-trajets ; les ondes électromagnétiques sont : dispersées, diffractées et réfléchies, et atteignent l'antenne du récepteur à travers différent chemins, comme une superposition de plusieurs signaux, avec différents retards causés par la différence dans la longueur des trajets empruntés. Ceci mène à un modèle d'interférence qui dépend de la fréquence et de la position géographique. Le récepteur mobile se déplace à travers ce modèle d'interférence, qui change dans la milliseconde et varie aussi sur la bande de transmission, donc le canal radio est caractérisé par une variance temporelle et une sélectivité fréquentielle. La sélectivité fréquentielle implique de l'interférence inter-symboles (*Inter Symbol Interference - ISI*) [70]. Dans ce type d'interférence, aucun rapport E_b/N_0 ne permettra d'atteindre un taux d'erreur binaire requis pour un niveau de performance adéquat. La solution générale consiste à utiliser une méthode d'élimination ou de réduction de distorsion dont le choix est fixé par la nature de l'évanouissement (évanouissement lent : égalisation adaptative, CDMA, OFDM... évanouissement rapide : modulation robuste, codage et entrelacement). Implicitement, ce type de traitement s'accompagne d'une technique de diversité afin d'améliorer le rapport puissance signal sur puissance bruit (SNR).

Le paramètre puissance signal sur puissance interférence plus bruit (SINR) à l'entrée du récepteur est donc un paramètre déterminant pour les performances d'un réseau cellulaire. Le problème de suppression de n'importe quel type d'interférence dans les communications sans fil peut être traité par différentes méthodes directes et indirectes [86] :

1. *Méthodes de suppression d'interférence indirectes :* L'élimination de l'interférence dans ce cas est réalisée à travers le choix d'une architecture spécifique de l'interface radio (filtrage spatial : sectorisation, réduction de la hauteur des antennes des stations de base, diminution du facteur de charge des cellules, contrôle de puissance, diversité temporelle). En d'autres termes, la suppression d'interférence est réalisée systématiquement dès que le signal est reçu par le front-end du récepteur.
2. *Méthodes de suppression d'interférence directes :* Ces méthodes se basent principalement sur des algorithmes d'élimination d'interférences, d'égalisation et des structures de filtre qui permettent d'atteindre l'objectif d'une transmission robuste vis-à-vis les interférences et les distorsions causées par le canal radio.

L'efficacité des méthodes directes est conditionnée par l'exactitude de la modélisation associée aux signaux utiles, d'interférences et aux distorsions issues du canal radio. De plus l'originalité de l'outil mathématique utilisé pour représenter de tels phénomènes permet une meilleure compréhension du fonctionnement des algorithmes développés et ainsi identifier des cas particuliers d'utilisation pratique.

Dans un autre contexte relié la régulation de l'environnement radio, la rareté des ressources spectrale due au nombre croissant des objets connectés a stimulé l'avènement de nouveaux standards de transmission cognitifs en parallèle avec la naissance d'un nouveau paradigme dans la gestion du spectre comme le projet *Google Spectrum Database* pour un accès dynamique et optimale aux ressources spectrales, en utilisant les deux degrés de liberté : temps et position géographique. Pour de telles applications, les récepteurs pour l'écoute passive doivent se perfectionner en utilisant les propriétés communes à tout les signaux de radiocommunications et en se basant seulement sur des traitements en aveugle.

La croissance spectaculaire de la puissance de calcul des processeurs embarqués, durant les dernières années, a suscité un regain d'intérêt vers les systèmes non-linéaires, afin de repousser encore plus les bornes de performances dans les futurs systèmes de traitement de l'information. En radiocommunications, la représentation des signaux en bande de base (donc à valeurs complexes) en elle même ne représente pas une nouveauté mais l'exploitation de la corrélation entre les parties réelles et imaginaires (c'est à dire la non circularité au second ordre) du signal à travers des systèmes *Widely Linear* est une approche qui a montré ses preuves dans certaines applications d'élimination d'interférence et de densification des réseaux téléphoniques cellulaires [95]. Les structures non-linéaires telles que les filtres de Volterra complexes permettent l'exploitation des propriétés de non-gaussianité et de non-circularité des signaux qui sont

omniprésentes en radiocommunications. La difficulté d'étudier ces structures non-linéaires réside d'une part dans la définition des métriques de performance (ex SINR ou SNR) et d'autre part dans la complexité de l'analyse analytique des performances à travers l'évaluation de ces métriques en fonction des paramètres statistiques des signaux utiles (SOI) et interférents (CCI).

Dans cette optique, nos travaux de recherche dans une première partie se concentrent sur l'analyse théorique des performances de différentes structures de récepteur optimales imbriquant des techniques directes et indirectes d'élimination d'interférence. L'une des fonctions fondamentales d'un récepteur est la compensation des distorsions du canal radio dans le but d'accroître l'efficacité de la liaison sans fil en utilisant la plus faible puissance d'émission possible. Pratiquement, cette tâche est réalisé par un algorithme d'égalisation, dont la structure et la complexité dépendent du degré de connaissance du canal radio et le critère d'optimalité utilisé par l'égaliseur. Notre choix s'est porté sur le critère de *maximum likelihood sequence estimation* (MLSE), qui minimise la probabilité d'erreur de décision. L'égaliseur associé exploitera ainsi la connaissance de la distribution de probabilité des signaux, contrairement aux égaliseurs linéaires, *Decision Feedback Equaliser* (DFE) et *minimum mean square estimation* (MMSE) qui sont à structures imposées et n'exploitent que les statistiques du second ordre des signaux. Il est bien connu dans la théorie du traitement d'antenne, qu'il est possible à l'aide d'un réseau d'antennes d'ajuster la forme du diagramme de rayonnement afin d'améliorer la puissance du signal utile et même, en cas de diversité spatiale (différents angles d'arrivée) de supprimer des signaux interférents. Lorsque le canal présente une sélectivité fréquentielle, les performances des techniques d'élimination d'interférence basées sur des structures purement spatiales deviennent insuffisantes. L'extension de ces techniques vers des structures spatio-temporelles permet d'augmenter le pouvoir de réjection d'interférence, en exploitant la diversité de trajet. Dans nos nouvelles structures de récepteur SIMO MLSE, nous avons introduit l'hypothèse peu exploitée à ce jour que le bruit total comprenant le bruit de fond et les interférences était stationnaire gaussien et potentiellement non circulaire [77].

Dans une deuxième partie de notre thèse, nous nous sommes intéressés aux techniques d'élimination d'interférence indirectes qui est le beamforming dans une situation d'écoute passive. Notre choix s'est fixé sur le beamformer *Minimum Variance Distortionless Response* (MVDR) qui consiste à minimiser la puissance en sortie du réseau d'antenne, sous des contraintes qui permettent de conserver le SOI sans déformation. Son implémentation nécessite seulement la connaissance a priori ou bien une estimation du vecteur directionnel du SOI, d'où sa grande utilité dans les applications de radio surveillance du spectre ou l'écoute passive en particulier. Notre beamformer MVDR non-linéaire de Volterra complexe à structure imposée, bien que sous-optimal par rapport à une approche ML permet d'améliorer les performances par rapport aux structures linéaires et WL dans un contexte de signaux non gaussiens et non-circulaires jusqu'au sixième ordre (SO).

Dans une troisième partie, en s'inspirant du beamformer dit MVDR_2 ou MMSE introduit dans

[22, 24] qui est une extension du beamformer WL MVDR [21] qui lui utilise des statistiques d'ordre deux du SOI, nous présentons une extension du beamformer de Volterra MVDR complexe sous la forme d'un beamformer de Volterra MMSE qui utilisera lui des statistiques d'ordre supérieur du SOI. Nous généralisons ici les notions de *vecteur directionnel étendu*, de *décomposition orthogonale* et de SINR en sortie de beamformer que l'on relira à la MSE qui ont été introduits dans [22, 24]. Le cas particulièrement important d'un seul capteur que nous appellerons filtrage de Volterra MMSE sera étudié en détail. En effet, il est maintenant bien connu que l'une des propriétés les plus importantes d'un filtre WL [68] est sa capacité à rejeter un CCI rectiligne (BPSK, ASK) ou quasi-rectiligne (MSK, GMSK, OQAM) à partir d'une seule antenne (concept de single antenna interference cancellation ou SAIC), permettant la séparation de deux utilisateurs à partir d'une seule antenne [89, 20, 54]. Nous allons montrer que le filtrage de Volterra MMSE complexe du 3ème ordre permet une amélioration de la technologie SAIC basée sur un simple filtrage WL, car cette structure exploite la non gaussiannité et les non-circularité d'ordre 2, 4 et 6 des signaux, contrairement au filtrage WL qui n'exploite que la non circularité d'ordre 2. Les gains en performance obtenus dépendent de différents paramètres tels que les constellations, les phases, les puissances et l'asynchronisme des signaux. Nous verrons enfin que ce filtrage de Volterra MMSE complexe du 3ème ordre a la capacité de séparer deux signaux de constellations QPSK synchrones de phases quelconques et aussi deux signaux BPSK, même en absence de discrimination de phase (contrairement au filtre WL), mais de puissances différentes reçus par une seule antenne, sans avoir à démoduler les deux signaux grâce à l'effet de discrimination d'amplitude. Cette propriété très importante permet d'offrir de nouvelles solutions pour les transmissions en full-duplex (émission-réception sur une même fréquence porteuse et avec une seule antenne) prévus dans les réseaux mobiles 5G.

Dans la dernière partie de notre thèse, nous nous intéressons à la détection de situation favorable (rectilinéarité des signaux) à l'amélioration des performances des algorithmes par un traitement WL, en utilisant la matrice de covariance complémentaire, en complément de la matrice de covariance traditionnelle. Il faut bien noter que malgré le traitement WL offre de meilleures performances en termes de SINR ; il souffre par contre d'une vitesse de convergence réduite par rapport au traitement linéaire, d'où l'utilité d'ajuster dynamiquement le type de traitement utilisé dans certaines applications imposant un nombre réduit d'observations. Le gain en performance n'étant significatif que dans le cas des signaux rectilignes ou quasi-rectilignes, cela implique que les tests de rectilinéarité semblent plus utiles que les simples tests de non circularité proposés dans la littérature. Dans des situations d'utilisation pratique, les signaux rectilignes ou quasi-rectilignes sont corrompus par un résidu de porteuse et un bruit de phase et sont observés au travers d'observations bruitées par du bruit circulaire. De telles imprécisions nécessitent donc l'utilisation de tests robustes de rectilinéarité et une étude de leurs performances.

Chapitre 1

Récepteur SIMO-MLSE sous hypothèse bruit gaussien stationnaire potentiellement noncirculaire

Sommaire

1.1 Introduction 33
1.2 Récepteur SIMO MLSE 35
1.3 Interprétation des filtres WL 42
1.4 Performances en terme de SINR 43
1.5 Cas particuliers et illustrations 47
1.6 Performance en probabilité d'erreur symbole 55
1.7 Conclusion 57

1.1 Introduction

L'une des fonctions fondamentales d'un récepteur est la compensation des distorsions du canal radio dans le but d'accroître l'efficacité de la liaison sans fil en utilisant la plus faible puissance d'émission possible. Pratiquement, cette tâche est réalisé par un algorithme d'égalisation, dont la structure et la complexité dépendent du degré de connaissance du canal radio et le critère d'optimalité utilisé par l'égaliseur.

L'égaliseur *maximum likelihood sequence estimation* MLSE, minimisant la probabilité d'erreur de décision, représente l'algorithme le plus efficace dans le sens où il exploite la totalité de l'énergie reçu du signal utile en plus d'une décision *soft* ; contrairement aux égaliseurs : *Decision Feedback Equaliser* DFE, linéaire et *minimum mean square estimation* MMSE.

Il est bien connu dans la théorie du traitement d'antenne, qu'il est possible à l'aide d'un réseau

d'antennes d'ajuster la forme du diagramme de rayonnement afin d'améliorer la puissance du signal utile et même, en cas de diversité spatiale (différents angles d'arrivée), la suppression des signaux interférents.
Lorsque le canal présente une sélectivité fréquentielle, les performances des techniques d'élimination d'interférence basées sur des structures purement spatiales deviennent insuffisantes. L'extension de ces techniques vers des structures spatio-temporelles permet d'augmenter le pouvoir de réjection d'interférence, en exploitant la diversité de trajet (l'asynchronisime).

Le récepteur optimal pour la démodulation d'une séquence finie de symboles, modulés linéairement, en présence d'interférence entre symboles est le récepteur MLSE lorsque les séquences sont équiprobables. Ce récepteur a été introduit par Forney [33] pour une liaison mono-voie sous l'hypothèse d'un bruit réel gaussien, centré et stationnaire blanc. Une structure alternative a été proposée deux ans plus tard par [91] et s'est montrée équivalente à celle de Forney [10]. Des extensions du récepteur MLSE à des liaisons SIMO en présence de bruit gaussien, centré, stationnaire, circulaire, temporellement et spatialement coloré sont présentées dans [56, 94, 52, 10]. Cependant, dans les réseaux de communications pour les mobiles, le bruit total est principalement constitué d'interférences co-canal qui possèdent la même forme d'onde que le signal d'intérêt. En conséquence, le bruit total est généralement cyclostationaire et potentiellement non circulaire au second ordre [67]. C'est en particulier le cas pour les réseaux utilisant des modulations soit rectilignes (i.e., PAM, BPSK, ASK), soit quasi rectilignes (MSK, GMSK, OQAM) comme le réseau GSM. Pour cette raison, plusieurs récepteurs prenant en considération le caractère potentiellement non circulaire au second ordre des interférences co-canal ont été développés durant les 15 dernières années [35, 88, 89, 20, 54, 63]. Toutefois, alors que [20, 54] supposent une absence d'interférence entre symboles, [35], et [63], ne proposent que des récepteurs sous-optimaux pour des canaux sélectifs en fréquence. Seul [88, 89] considère le récepteur MLSE en présence d'interférence entre symboles et d'interférences co-canal potentiellement non circulaires au second ordre. Néanmoins, [88, 89] se focalise sur les réseaux GSM et ne présente qu'une analyse de performances en sortie via le calcul des bornes du filtre adapté. Notons qu'il existe quelques travaux (par exemple [14, 47]) dans la littérature portant sur la détection d'une forme d'onde observée en présence de bruit additif non gaussien, mais à notre connaissance aucune portant sur la détection de symboles dans le cadre d'interférences intersymbole et d'interférences co-canal non gaussienne.

Dans ce chapitre, on considère des signaux d'intérêt à modulations QAM [70] et on présente et analyse les propriétés et performances du récepteur MLSE pour la démodulation d'un tel signal d'intérêt en présence d'interférence entre symboles et d'interférences co-canal potentiellement non circulaire au second ordre. De manière à maîtriser les calculs, le récepteur MLSE est développé sous l'hypothèse (fausse en pratique) d'un bruit total centré, gaussien, stationnaire, non circulaire, coloré temporellement et spatialement. En d'autres termes, le récepteur proposé exploite l'information

contenue dans la noncircularité à l'ordre 2 potentielle des interférences mais n'exploite pas celle contenue dans la cyclostationnarité à l'ordre 2 potentielle de celles-ci. Il est montré que le récepteur MLSE proposé est composé d'un filtre widely linear [68] invariant dans le temps, suivi d'un échantillonneur au rythme symbole et d'un organe de décision au sens du maximum de vraisemblance implémentant une version modifiée de l'algorithme de Viterbi. Ce filtre WL est interprété comme un filtre adapté spatio-temporel maximisant le rapport SINR en sortie sur le symbole courant. Le cas des modulations linéaires quasi rectilignes est aussi considéré dans ce cadre où il est montré que le récepteur optimal a une structure comparable mais fonction du temps symbole et intégrant un post-traitement de dérotation. En dépit du fait qu'en pratique, les interférences co-canal sont cyclostationnaires [36] et souvent non gaussiennes, on démontre que le récepteur MLSE proposé présente de meilleures performances que les récepteurs conventionnels pour des interférences potentiellement non circulaires au second ordre aussi bien stationnaires que cyclostationnaires. En présence d'un SOI rectiligne, le récepteur proposé permet en particulier l'annulation d'une interférence rectiligne à partir d'une seule antenne et étend ainsi aux canaux sélectifs en fréquence le concept SAIC (*Single Antenna Interference Cancellation*) présenté dans [20] pour des canaux sans interférence entre symboles.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans le deuxième paragraphe, le récepteur SIMO MLSE d'une modulation linéaire quelconque en présence de bruit total centré, gaussien, stationnaire, coloré et potentiellement non circulaire au second ordre est présenté comme cas particulier d'un problème général de détection d'une forme d'onde. Une interprétation de la structure développée en fonction du type de modulations (complexe, rectiligne ou quasi rectiligne) est décrite au troisième paragraphe. Conjecturant que le taux d'erreurs symbole en sortie du récepteur est directement lié au SINR sur le symbole courant en sortie, comme cela est démontré dans [70] pour des modulations PAM et pour un récepteur MLSE conventionnel sans interférence, des expressions générales du SINR sur le symbole courant en sortie du récepteur MLSE proposé sont calculées au quatrième paragraphe pour les différentes modulations traitées et pour des interférences aussi bien stationnaires que cyclostationnaires. Ces expressions sont alors comparées à celles obtenues en sortie du récepteur MLSE conventionnel calculé sous l'hypothèse d'un bruit total circulaire au second ordre. Des cas particuliers sont alors considérés et illustrés au cinquième paragraphe de manière à mettre en évidence concrètement certaines propriétés et performances du récepteur MLSE proposé. Enfin une conclusion résume les principaux résultats du chapitre.

1.2 Récepteur SIMO MLSE

1.2.1 Problème général de détection

Considérons la transmission d'une forme d'onde déterministe multidimensionnelle à temps continu $\mathbf{s}^{(m)}(t) \in \mathbb{C}^N$ parmi M formes d'onde dénotées par m, $m = 1, ..., M$, observée en présence

d'un bruit $\mathbf{n}(t)$ additif centré de distribution gaussienne et stationnaire. Le signal observé est alors :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}^{(m)}(t) + \mathbf{n}(t), \quad m = 1, ..., M. \tag{1.2.1}$$

Dans le cas où les messages $\{\mathbf{s}^{(m)}(t)\}_{m=1,...,M}$ sont équiprobables, les critères maximum à posteriori (MAP) (minimisation de la probabilité d'erreur) et de maximisation de vraisemblance (ML) sont équivalents. Pour définir rigoureusement le détecteur ML à partir du signal à temps continu (1.2.1), nous allons d'abord considérer le cas particulier où $\mathbf{n}(t)$ est circulaire, spatialement et temporellement blanc.

En utilisant une base orthonormée complexe scalaire $\mathcal{S} = \{\phi_\ell(t)\}_{\ell=1,...,L}$ de l'espace vectoriel engendré par les N composantes de $\{\mathbf{s}^{(m)}(t)\}_{m=1,...,M}$, donc de dimension finie $L \leq NM$, [92, Chap. 4], [81] dont il est inutile de préciser ici les expressions de $\phi_\ell(t)$, chaque signal $\mathbf{s}^{(m)}(t)$ est complètement déterminé par un vecteur $\mathbf{s}^{(m)}$ à LN composantes. Donc le vecteur $\mathbf{x}$ associé au signal $\mathbf{x}(t)$ est donné par

$$\mathbf{x} = \mathbf{s}^{(m)} + \mathbf{n} \in \mathbb{C}^{LN}.$$

Le problème de détection de formes d'onde à temps continu (1.2.1) est alors équivalent à un problème de détection vectorielle à dimension finie car $\mathbf{x}$ par lui même contient toute l'information de l'observation $\mathbf{x}(t)$ qui est utile pour la détection au sens ML de m [99, Chap. 4]. Quand la densité spectrale de puissance de $\mathbf{n}(t)$ est $\sigma^2\mathbf{I}_N$, il est aisé de démontrer que le vecteur à composantes complexes $\mathbf{n}$ est de distribution gaussienne centrée circulaire de matrice de covariance $\sigma^2\mathbf{I}_{LN}$ [81]. En conséquence, le détecteur ML de m est donné par $\widehat{m} = \text{Arg}\min_m \|\mathbf{x} - \mathbf{s}^{(m)}\|^2$. Comme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{s}^{(m)}\|^2 &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{\ell'=1}^{L}(x_{n,\ell} - s_{n,\ell}^{(m)})(x_{n,\ell'} - s_{n,\ell'}^{(m)})^*\delta_{\ell,\ell'}\right) = \sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{\ell=1}^{L}(x_{n,\ell} - s_{n,\ell}^{(m)})\phi_\ell(t)\right|^2 dt \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x_n^{\mathcal{S}}(t) - s_n^{(m)}(t)\right|^2 dt = \sum_{n=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x_n(t) - s_n^{(m)}(t)\right|^2 dt,
\end{aligned}$$

où $(x_{n,\ell}, s_{n,\ell}^{(m)})_{n=1,..,N,\ell=1,..,L}$ désignent les composantes de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{s}^{(m)}$, $\delta_{\ell,\ell'}$ est l'opérateur de Kronecker et où $x_n(t) = x_n^{\mathcal{S}}(t) + x_n^{\mathcal{S}^\perp}(t)$ représente la décomposition orthogonale de la composante n de $\mathbf{x}(t)$. De même, nous obtenons de façon équivalente

$$\widehat{m} = \text{Arg}\min_m \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{s}^{(m)}(t)\|^2 dt. \tag{1.2.2}$$

Puis quand $\mathbf{n}(t)$ est potentiellement non circulaire, spatialement et temporellement coloré, nous pouvons étendre l'opération classique de blanchiment utilisé dans le cas de bruit scalaire réel coloré dans [91] et [92, Chap. 4]. Ici les propriétés statistiques de $\mathbf{n}(t)$ sont caractérisées par la matrice de covariance

$$\mathbf{R}_{\widetilde{n}}(\tau) = \text{E}[\widetilde{\mathbf{n}}(t)\widetilde{\mathbf{n}}^H(t-\tau)] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n(\tau) & \mathbf{C}_n(\tau) \\ \mathbf{C}_n^*(\tau) & \mathbf{R}_n^*(\tau) \end{bmatrix}$$

du vecteur étendu $\widetilde{\mathbf{n}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{n}^T(t), \mathbf{n}^H(t)]^T$ où $\mathbf{R}_n(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t-\tau)]$ et $\mathbf{C}_n(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(t-\tau)]$ sont respectivement les matrices de covariance et de covariance complémentaire de $\mathbf{n}(t)$. Pour calculer le détecteur ML, nous avons besoin du résultat suivant démontré en annexe A.2.3

Résultat : *Si la transformée de Fourier*[1] $\mathbf{R}_n(f)$ *de* $\mathbf{R}_n(\tau)$ *est inversible pour toutes les valeurs de* f *(c'est le cas lorsque* $\mathbf{n}(t)$ *est une somme d'interférences et d'un bruit de fond circulaire spatialement et temporellement blanc indépendants), il existe un filtre WL* $[\mathbf{W}_1(t), \mathbf{W}_2(t)]$ *blanchisseur causal et causalement inversible de taille* $N \times 2N$ *tel que* :

$$\mathbf{n}_w(t) = \mathbf{W}_1(t) \star \mathbf{n}(t) + \mathbf{W}_2(t) \star \mathbf{n}^*(t)$$

est à la fois circulaire, spatialement et temporellement blanc, c'est à dire :

$$\mathrm{E}[\mathbf{n}_w(t)\mathbf{n}_w^H(t-\tau)] = \delta(\tau)\mathbf{I}_N \quad \text{et} \quad \mathrm{E}[\mathbf{n}_w(t)\mathbf{n}_w^T(t-\tau)] = \mathbf{0}_N$$

où $\star$ est le produit de convolution et $\delta(.)$ est le symbole de Kronecker.

Utilisant le modèle blanchi $\mathbf{x}_w(t) = \mathbf{s}_w^{(m)}(t) + \mathbf{n}_w(t)$ où $\mathbf{x}_w(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}_1(t) \star \mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_2(t) \star \mathbf{x}^*(t)$ et $\mathbf{s}_w^{(m)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}_1(t) \star \mathbf{s}^{(m)}(t) + \mathbf{W}_2(t) \star \mathbf{s}^{*(m)}(t)$ qui est équivalent à (1.2.1) puisque le filtre WL blanchisseur est causal et causalement inversible, le détecteur ML de m est alors donné à partir de (1.2.2) par

$$\widehat{m} = \underset{m}{\mathrm{Arg\,min}} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{x}_w(t) - \mathbf{s}_w^{(m)}(t)\|^2 dt, \tag{1.2.3}$$

qui grâce au théorème de Parseval et à l'annexe A.2.3 est équivalent à

$$\widehat{m} = \underset{m}{\mathrm{Arg\,min}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\widetilde{\mathbf{x}}(f) - \widetilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f)]^H \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) [\widetilde{\mathbf{x}}(f) - \widetilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f)] df \tag{1.2.4}$$

où $\widetilde{\mathbf{x}}(f) = [\mathbf{x}^T(f), \mathbf{x}^H(-f)]^T$ et $\widetilde{\mathbf{s}}^{(m)}(f) = [\mathbf{s}^{(m)T}(f), \mathbf{s}^{(m)H}(-f)]^T$ sont les transformées de Fourier respectives de $\widetilde{\mathbf{x}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}^H(t)]^T$ et $\widetilde{\mathbf{s}}^{(m)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{s}^{(m)T}(t), \mathbf{s}^{(m)H}(t)]^T$ parce que $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) = \mathbf{W}_{\widetilde{n}}^H(f)\mathbf{W}_{\widetilde{n}}(f)$ où $\mathbf{W}_{\widetilde{n}}(f)$ est défini par :

$$\mathbf{W}_{\widetilde{n}}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(f) & \mathbf{W}_2(f) \\ \mathbf{W}_2^*(-f) & \mathbf{W}_1^*(-f) \end{bmatrix} \tag{1.2.5}$$

Utilisant à nouveau le théorème de Parseval, (1.2.4) est équivalent à :

$$\widehat{m} = \underset{m}{\mathrm{Arg\,min}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\widetilde{\mathbf{x}}(t) - \widetilde{\mathbf{s}}^{(m)}(t)]^H \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{\mathrm{Inv}}(t-\tau) [\widetilde{\mathbf{x}}(\tau) - \widetilde{\mathbf{s}}^{(m)}(\tau)] dt d\tau, \tag{1.2.6}$$

où $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{\mathrm{Inv}}(\tau)$ désigne la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)$.

1. Toutes les transformées de Fourier de scalaires x, vecteurs $\mathbf{x}$ et matrices $\mathbf{X}$ seront représentées avec la même notation, où la variable temporelle t ou τ est simplement remplacée par f.

1.2.2 Dérivation de la structure du récepteur SIMO MLSE

Afin de déterminer la structure du récepteur SIMO MLSE, appliquons le résultat (1.2.3) à la détection de la séquence $\{a_k\}_{k=0,\cdots,K-1}$ de K symboles consécutifs signal bande de base d'une modulation linéaire en quadrature transmise sur un canal linéaire sélectif en fréquence :

$$\mathbf{s}^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \mathbf{g}(t-kT), \quad \text{avec} \quad \mathbf{g}(t) = v(t) \star \mathbf{h}(t) \tag{1.2.7}$$

où $v(t)$ et $\mathbf{h}(t)$ dénotent respectivement l'impulsion de mise en forme et la réponse impulsionnelle équivalente bande de base d'un canal multivoies et où $m = 1, ..., M$ avec $M = (\text{card } \mathcal{A})^K$ où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des symboles complexes $\{a_k\}$ de la modulation. En considérant uniquement les termes qui ne dépendent que des symboles a_k dans (1.2.4), la séquence $\{a_k\}_{k=0,...,K-1}$ qui minimise le critère (1.2.4) est de façon équivalente donnée par la minimisation de la métrique suivante :

$$\Lambda(a_0, .., a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} \text{Re}(a_k^* a_{k'} r_{k-k'} + a_k a_{k'} r'^*_{k-k'}) - 2 \sum_{k=0}^{K-1} \text{Re}(a_k^* y_k), \tag{1.2.8}$$

où y_k, r_k et r'_k sont donnés fréquentiellement par

$$y_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi kfT} df \tag{1.2.9}$$

et

$$r_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{i2\pi kfT} df, \tag{1.2.10}$$

$$r'_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_2(f) e^{i2\pi kfT} df, \tag{1.2.11}$$

avec $\mathbf{g}_1(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{g}_2(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix}$ où $\mathbf{g}(f) = v(f)\mathbf{h}(f)$.

La séquence $\{y_k\}_{k=0,...,K-1}$ est donc un résumé exhaustif du problème de détection dans laquelle y_k peut être interprété comme la sortie à l'instant kT du filtre WL multidimensionnel de fonction de transfert

$$\mathbf{w}_1^H(f) = \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f), \tag{1.2.12}$$

dont l'entrée est $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$.

Le filtre de mise en forme $v(t)$ étant non-causal, pour des raisons de commodité, l'interférence intersymboles (ISI) à la sortie du canal est limitée aux L_i symboles précédents et L_i symboles suivants. Donc $r_k = r'_k = 0$ pour $|k| > L_i$. En exploitant la symétrie des coefficients r_k et r'_k, tel qu'il est expliqué en annexe A.3.4, la métrique (1.2.8) qui permet l'évaluation, au sens du maximum de vraisemblance, de la séquence optimale $\{a_k\}_{k=0,...,K-1}$ s'écrit :

$$\Lambda(\sigma_0, ..., \sigma_{k+1}; a_k) = \Lambda(\sigma_0, ..., \sigma_k; a_{k-1}) + m(\sigma_k, \sigma_{k+1}; a_k; y_k) \tag{1.2.13}$$

La minimisation de cette métrique récursive revient à résoudre un problème de programmation dynamique qui peut être résolu efficacement par l'algorithme de Viterbi.

Par suite, le récepteur MLSE sous hypothèse de bruit gaussien stationnaire potentiellement non circulaire a, dans le cas général de symboles complexes, la structure suivante :

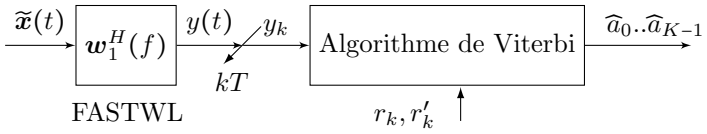


FIGURE 1.1 – Structure du récepteur MLSE non circulaire pour symboles complexes.

Sous l'hypothèse de bruit circulaire, $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^{-1}(f) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_n^{-1*}(-f) \end{bmatrix}$ et (1.2.9), (1.2.10), et (1.2.11) se réduisent respectivement à

$$y_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{x}(f)e^{i2\pi kfT}df, \tag{1.2.14}$$

$$r_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)e^{i2\pi kfT}df \quad \text{et} \quad r'_k = 0.$$

Nous retrouvons alors naturellement le récepteur MLSE sous hypothèse de bruit gaussien stationnaire circulaire constitué du filtre linéaire adapté de fonction de transfert

$$\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f), \tag{1.2.15}$$

d'une prise d'échantillon au rythme symbole kT à sa sortie suivi par la minimisation par l'algorithme de Viterbi de la métrique classique

$$\Lambda(a_0, .., a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{k'=0}^{K-1} \mathrm{Re}(a_k^* a_{k'} r_{k-k'}) - 2\sum_{k=0}^{K-1} \mathrm{Re}(a_k^* y_k).$$

qui peut ce mettre aussi sous la même forme indiquée par l'équation (1.2.13)

1.2.3 Cas particulier de symboles réels

Quand les symboles a_k sont réels, $2\mathrm{Re}(a_k^* y_k) = a_k z_k$ dans (1.2.8), où maintenant

$$z_k = 2\mathrm{Re}(y_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{x}}(f)e^{i2\pi kfT}df, \tag{1.2.16}$$

avec $\widetilde{\mathbf{g}}(f) = [\mathbf{g}^T(f), \mathbf{g}^H(-f)]^T$. Le résumé exhaustif se réduit maintenant à la séquence $\{z_k\}_{k=0,...,K-1}$ où z_k peut aussi être interprété comme la sortie à l'instant kT du filtre WL multidimensionnel de fonction de transfert

$$\widetilde{\mathbf{w}}^H(f) = \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f). \tag{1.2.17}$$

La structure du récepteur MLSE devient alors :

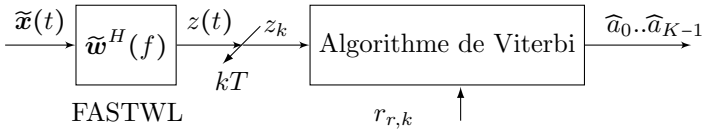


FIGURE 1.2 – Structures du récepteur MLSE non circulaire avec des symboles réels.

Sous l'hypothèse de bruit circulaire, nous retrouvons

$$z_k = 2\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{x}(f)e^{i2\pi kfT}df\right), \tag{1.2.18}$$

qui est aussi la sortie d'un filtre WL.

1.2.4 Cas particulier d'une modulation linéaire quasi-rectiligne

Concentrons nous ici sur le cas particulier des modulations linéaires quasi-rectilignes [2] pour lesquelles $a_k = i^k b_k$ et où b_k et l'impulsion $v(t)$ de (1.2.7) sont réels. Appartiennent à cette famille de modulations les modulations MSK et OQAM ainsi que, de manière approchée, la modulation GMSK.

En remplaçant a_k par $i^k b_k$ dans l'expression de la métrique (1.2.8), on obtient :

$$\Lambda(b_0,..,b_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'}\mathrm{Re}\left(r_{d,k-k'} + (-1)^k r'^{*}_{d,k-k'}\right) - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k} \tag{1.2.19}$$

avec

$$r_{d,k} \stackrel{\text{def}}{=} (-i)^k r_k \quad \text{et} \quad r'_{d,k} \stackrel{\text{def}}{=} i^k r'_k$$

et

$$\begin{aligned} z_{d,k} &= 2\mathrm{Re}[(-i)^k y_k] = (-i)^k y_k + i^k y_k^* \\ &= (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f)\widetilde{\mathbf{x}}(f)e^{i2\pi kfT}df + (i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_2^H(f)\widetilde{\mathbf{x}}(f)e^{i2\pi kfT}df, \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

avec $\mathbf{w}_2^H(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_2^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)$.

Sous les mêmes hypothèses que pour les modulations QAM de la partie 1.2.2, le récepteur MLSE se compose donc de deux filtres WL, d'une prise d'échantillons aux instants kT, de deux post-rotations [3] de $\pm k\pi/2$ et d'une minimisation de la métrique (1.2.19) qui peut être réalisée par l'algorithme de Viterbi dont la métrique de branche dépend ici de la parité de k, avec la structure suivante :

2. Ces modulations d'enveloppe complexe

$$\left[\left(\sum_k (-1)^k b_{2k} v(t-2kT)\right) + i\left(\sum_k (-1)^k b_{2k+1} v(t-(2k+1)T)\right)\right]$$

sont aussi appelées modulations linéaires décalées.

3. Notons que cette rotation de $\pi/2$ avait été introduite sous forme d'une pré-rotation dans [88].

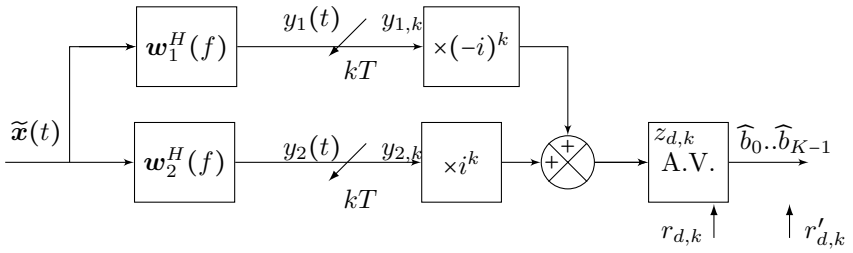


FIGURE 1.3 – Structure 1 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.

Remarquons que l'opération classique de pré-rotation aboutirait après un long développement à la structure équivalente suivante :

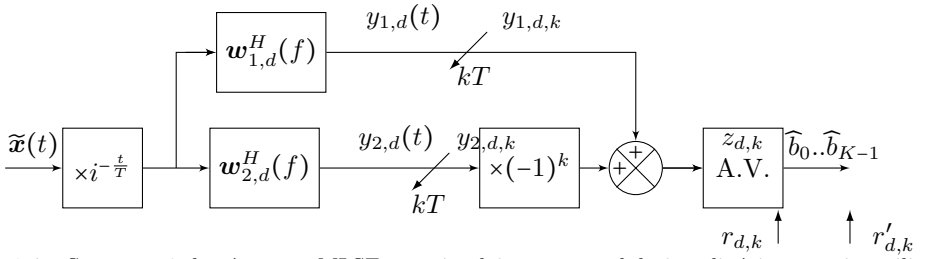


FIGURE 1.4 – Structure 2 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.

où $\boldsymbol{w}_{1,d}(f) = \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f+\frac{1}{4T})\mathbf{g}_1(f+\frac{1}{4T})$ et $\boldsymbol{w}_{2,d}(f) = \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f+\frac{1}{4T})\mathbf{g}_2(f+\frac{1}{4T})$.

Notons que le résumé exhaustif $z_{d,k}$ (1.2.20) s'écrit sous la forme

$$z_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f)\widetilde{\mathbf{x}}(f)e^{i2\pi kfT}df$$

avec

$$\mathbf{w}_{(k)}^H(f) = [i^k\mathbf{g}_1^H(f) + (-i)^k\mathbf{g}_2^H(f)]\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}_{(k)}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f), \tag{1.2.21}$$

qui peut s'interpréter comme une famille de quatre filtres associés aux instants kT avec k modulo 4.

Sous l'hypothèse de bruit circulaire, $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)$ est bloc diagonale. Par suite

$$z_{d,k} = 2\mathrm{Re}\left((-i)^k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{x}(f)e^{i2\pi kfT}df\right), \tag{1.2.22}$$

et $r_{d,k} = (-i)^k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)e^{i2\pi kfT}df$ et $r'_{d,k} = 0$. La métrique (1.2.19) se réduit alors à

$$\Lambda(b_0,..,b_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'}\mathrm{Re}[r_{d,k-k'}] - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k}, \tag{1.2.23}$$

ce qui donne un récepteur MLSE identique au cas de symboles réels (voir (1.2.18)) en y incluant un terme de post-rotation.

1.3 Interprétation des filtres WL

Dans le cas particulier d'une modulation QAM et de bruit circulaire, le filtre linéaire $\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)$ (1.2.15) maximise parmi les filtres linéaires dans y_k, le rapport SINR de la puissance du symbole courant sur la puissance du bruit total. D'où son interprétation de filtre linéaire adapté spatio-temporel (STMF) pour spatio-temporal multidimensional filter (appelé aussi (MMF) pour multidimensional matched filter dans [94]). Cette interprétation s'étend dans le cas non circulaire. En effet puisque dans le cas de symboles complexes ou réels, nous avons respectivement

$$\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \mathbf{g}_1(t-kT) + \sum_{k=0}^{K-1} a_k^* \mathbf{g}_2(t-kT) + \widetilde{\mathbf{n}}(t), \tag{1.3.1}$$

$$\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \widetilde{\mathbf{g}}(t-kT) + \widetilde{\mathbf{n}}(t), \tag{1.3.2}$$

les filtres $\mathbf{w}_1^H(f) = \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)$ (1.2.12) et $\widetilde{\mathbf{w}}^H(f) = \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)$ (1.2.17) sont aussi clairement des filtres adaptés spatio-temporels WL. Notons que nous avons respectivement en sortie de ces filtres

$$y_k = a_k r_0 + a_k^* r_0' + \sum_{l\neq k} (a_l r_{k-l} + a_l^* r_{k-l}') + n_k, \tag{1.3.3}$$

$$z_k = a_k r_{r,0} + \sum_{l\neq k} a_l r_{r,k-l} + n_{r,k}, \tag{1.3.4}$$

avec $n_k \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{n}}(f)e^{i2\pi kfT}df$ et $n_{r,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{n}}(f)e^{i2\pi kfT}df$ et où $r_{r,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{g}}(f)e^{i2\pi kfT}df$.

Dans le cas de symboles complexes, (1.3.3) montre qu'à l'interférence intersymbole (ISI), s'ajoute une interférence autosymbole a_k^* dite CSI (conjugate symbol interference). De plus nous avons démontré les relations suivantes à partir de la formule des interférences

$$\mathrm{E}(n_l n_{l-k}^*) = r_k, \quad \mathrm{E}(n_l n_{l-k}) = r_k' \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(n_{r,l} n_{r,l-k}) = r_{r,k},$$

qui généralisent les relations classiques obtenues dans le cas bruit circulaire.

Pour les modulations linéaires quasi-rectilignes où

$$\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} b_k \mathbf{g}_{(k)}(t-kT) + \widetilde{\mathbf{n}}(t),$$

avec $\mathbf{g}_{(k)}(t) = [i^k \mathbf{g}_1(t) + (-i)^k \mathbf{g}_2(t)]$, le filtre WL $\mathbf{w}_{(k)}^H(f) = \mathbf{g}_{(k)}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)$ (1.2.21) peut donc aussi s'interpréter comme un filtre adapté spatio-temporel WL à l'instant kT. Notons que la sortie $z_{d,k}$ de ce filtre adapté s'écrit sous la forme suivante

$$z_{d,k} = 2[b_k \left(r_0 + (-1)^k \mathrm{Re}(r_0'^*)\right) + \sum_{l\neq k} b_l \mathrm{Re}\left((-i)^{k-l} r_{k-l} + i^{k+l} r_{k-l}'^*\right)] + n_{d,k},$$

avec $n_{d,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f)\widetilde{\mathbf{n}}(f)e^{i2\pi kfT}df$.

Notons enfin que tous les filtres WL adaptés obtenus sont structurés comme sous l'hypothèse de bruit circulaire. Ils se composent ici d'un filtrage WL de blanchiment spatio-temporel qui blanchit temporellement et spatialement et qui circularise le bruit total au second-ordre, d'un filtre adapté au canal global étendu sur chaque capteur lui-même composé de la cascade d'un filtre adapté au canal de propagation et d'une filtre adapté au filtre de mise en forme.

1.4 Performances en terme de SINR

1.4.1 Objectifs

Les performances des récepteurs MLSE en terme de probabilité d'erreur par symbole n'ont été analysées à notre connaissance que dans le cas de modulations d'amplitude bande de base dans le contexte mono voie sous bruit additif gaussien blanc dans [70, Sec.10.1.4]. Dans ce cas particulier, une approximation de la probabilité d'erreur par symbole a été donnée sous la forme

$$P(\text{erreur}) \approx c_1 Q\left(c_2\sqrt{\text{SNR}}\right) \quad \text{avec} \quad Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

où le terme SNR représente le rapport de la puissance du symbole courant sur la puissance du bruit en sortie du filtre adapté et où c_1 et c_2 qui représente une perte de SNR due à l'interférence intersymbole ($c_2 = 1$ pour $L_i = 1$), ne dépendent que du nombre d'états de la modulation et de la mémoire L_i du canal global.

Nous conjecturons ici que les performances en terme de probabilité d'erreur par symbole des récepteurs MLSE que nous avons introduits sont toujours guidées par le SINR du symbole courant en sortie de filtre adapté aux instants kT.

Nous allons donc donner des expressions analytiques des différents rapports de la puissance du symbole courant sur la puissance du bruit total avant décision (noté SINR car le bruit total contient les interférences co canal et le bruit de fond) des différents récepteurs MLSE que nous avons développés au paragraphe 1.2. Bien que les récepteurs soient calculés sous l'hypothèse de bruit gaussien stationnaire circulaire ou non circulaire, les SINRs de ces différents récepteurs seront d'abord calculés en présence de bruit potentiellement non circulaire stationnaire, puis pour traiter le cas d'interférences co-canal de même nature que le SOI, nous considérerons le cas de bruit potentiellement nonciculaire cyclostationnaire de même période que celle du SOI.

1.4.2 Cas de bruit total stationnaire

1.4.2.1 Récepteurs MLSE sous hypothèse circulaire

Dans le cas de symboles complexes, nous avons d'après (1.2.14) et (1.2.15), une puissance symbole $P_s = \text{E}|a_k^2|r_0^2 = \text{E}|a_k^2|[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)df]^2$ et une puissance de bruit total $P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)df$. Par suite le SINR en sortie du filtre linéaire adapté ne dépend que

de la matrice de covariance du bruit total et est donné par

$$\mathrm{SINR}_y^c = \mathrm{E}|a_k^2| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)df. \tag{1.4.1}$$

Au contraire pour des symboles réels, puisque le filtrage adapté (1.2.18) est WL, le SINR dépendra à la fois de la matrice de covariance et de la matrice de covariance complémentaire du bruit total. On obtient $P_s = 4\mathrm{E}(a_k^2)r_0^2$ et une puissance du terme bruit total de z_k (1.2.18) donnée à l'aide de la formule des interférences A.1.4 par

$$P_n = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f)\mathbf{R}_n(f)\mathbf{w}(f)df + 2\mathrm{Re}[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f)\mathbf{C}_n(f)\mathbf{w}^*(-f)df]$$

avec $\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)$. Par suite le SINR en sortie du filtre WL adapté est donné par

$$\mathrm{SINR}_z^c = \frac{2\mathrm{E}(a_k^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)df}{1 + \frac{\mathrm{Re}[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{C}_n(f)\mathbf{R}_n^{-1*}(-f)\mathbf{g}^*(-f)df]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)df}}. \tag{1.4.2}$$

Dans le cas de modulations linéaires quasi-rectilignes, nous avons aussi d'après (1.2.22), $P_s = 4\mathrm{E}(b_k^2)r_0^2$ et une puissance du terme bruit total de $z_{d,k}$ qui peut aussi être dérivée de la formule des interférences A.1.4 et qui est donnée ici par $P_n = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f)\mathbf{R}_n(f)\mathbf{w}(f)df + 2(-1)^k\mathrm{Re}[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f)\mathbf{C}_n(f)\mathbf{w}^*(-f)df]$. On obtient alors ici un SINR en sortie à l'instant kT du filtre WL adapté donné par

$$\mathrm{SINR}_{z,k}^c = \frac{2\mathrm{E}(b_k^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)df}{1 + (-1)^k\frac{\mathrm{Re}[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{C}_n(f)\mathbf{R}_n^{-1*}(-f)\mathbf{g}^*(-f)df]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)\mathbf{R}_n^{-1}(f)\mathbf{g}(f)df}}. \tag{1.4.3}$$

1.4.2.2 Récepteurs MLSE sous hypothèse non circulaire

Dans le cas des récepteurs MLSE que nous avons calculés sous hypothèse de bruit total stationnaire potentiellement non circulaire, le SINR en sortie du filtre WL adapté aux instants kT s'obtient directement à partir des filtres WL $\mathbf{w}_1^H(f)$ (1.2.12), $\widetilde{\mathbf{w}}^H(f)$ (1.2.17) et $\widetilde{\mathbf{w}}_{(k)}^H(f)$ (1.2.21). On obtient ainsi pour des modulations QAM, ASK et linéaires quasi-rectilignes, les expressions suivantes des SINRs

$$\mathrm{SINR}_y^{nc} = \mathrm{E}|a_k^2| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_1(f)df, \tag{1.4.4}$$

$$\mathrm{SINR}_z^{nc} = \mathrm{E}(a_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{g}}(f)df, \tag{1.4.5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc} &= \mathrm{E}(b_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_{(k)}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_{(k)}(f)df \\ &= \mathrm{E}(b_k^2) \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{g}_1(f)+(-1)^k\mathbf{g}_2(f)]^H\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)[\mathbf{g}_1(f)+(-1)^k\mathbf{g}_2(f)]df.\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Comme les filtres adaptés des récepteurs MLSE obtenus sous l'hypothèse de bruit total circulaire sont sous optimaux (vis à vis du SINR) sous l'hypothèse de bruit total non circulaire, nous avons par le principe d'inclusion

$$\mathrm{SINR}_y^{nc} \geq \mathrm{SINR}_y^c, \quad \mathrm{SINR}_z^{nc} \geq \mathrm{SINR}_z^c \quad \text{et} \quad \mathrm{SINR}_{z_d}^{nc} \geq \mathrm{SINR}_{z_d}^c. \tag{1.4.7}$$

Des illustrations numériques seront présentées au paragraphe 1.5 pour illustrer le gain en SINR apporté par les récepteurs MLSE construits sous hypothèse non circulaire par rapport aux récepteurs MLSE classiques construits sous hypothèse circulaire, utilisés en environnement non circulaire.

1.4.3 Cas de bruit total cyclostationnaire

Nous considérons ici le cas où le bruit total potentiellement non circulaire est constitué d'une somme d'interférences co-canal sous forme de modulations linéaires QAM, ASK ou de modulations linéaires quasi-rectilignes (de période symbole T' et d'impulsion non nécessairement égales à celles du SOI) et d'un bruit de fond. Si $n(t)$ est un tel signal, nous rappelons les relations (voir les paragraphes (A.1.9) et (A.1.10)) :

$$\mathrm{E}|n^2(kT)| = \sum_{\alpha} e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha}(f)df \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(n^2(kT)) = \sum_{\beta} e^{i2\pi\beta kT} \int_{-\infty}^{+\infty} c_n^{\beta}(f)df \tag{1.4.8}$$

où $r_n^{(\alpha)}(f)$ et $c_n^{(\beta)}(f)$ désignent les densités spectrales cycliques [4] de puissance et les densités spectrales cycliques complémentaires de puissance de $n(t)$ et où α et β sont les fréquences cycliques (pour les modulations QAM et ASK, α et β sont multiples de $1/T'$ mais pour les modulations linéaires quasi-rectilignes, α sont multiples de $1/T'$ et β multiples impairs de $1/2T'$) de $r_n^{(\alpha)}(f)$ et $c_n^{(\beta)}(f)$. Si $\mathbf{n}_i(t)$ est un tel signal cyclostationnaire multidimensionnel filtré par un filtre linéaire MISO (voir remarque 6 en annexe A.1.4) $\mathbf{w}^H(f)$, sa sortie $n_o(t)$ est aussi cyclostationnaire de densité spectrale cyclique et spectrale cyclique complémentaire de puissance données respectivement par les formules des interférences suivantes, démontrées en annexe A.1.4 :

$$r_{n_0}^{(\alpha)}(f) = \mathbf{w}^H(f+\frac{\alpha}{2})\mathbf{R}_{n_i}^{(\alpha)}(f)\mathbf{w}(f-\frac{\alpha}{2}) \tag{1.4.9}$$

$$c_{n_0}^{(\beta)}(f) = \mathbf{w}^H(f+\frac{\beta}{2})\mathbf{C}_{n_i}^{(\beta)}(f)\mathbf{w}^*(-f+\frac{\beta}{2}). \tag{1.4.10}$$

Comme les filtres adaptés linéaires et WL des récepteurs MLSE que nous avons introduits ont été calculés sous hypothèse de stationnarité du bruit total, nous remplacerons les matrices de densité spectrale $\mathbf{R}_n(f)$ et de densité spectrale complémentaire $\mathbf{C}_n(f)$ de ces filtres par la densité spectrale cyclique et la densité spectrale cyclique complémentaire de puissance à la fréquence cyclique 0, notées $\mathbf{R}_n^{(0)}(f)$ et $\mathbf{C}_n^{(0)}(f)$, transformées de Fourier des moyennes temporelles des corrélations et corrélations complémentaires.

1.4.3.1 Récepteurs MLSE sous hypothèse circulaire

Dans le cas de symboles complexes, la puissance du bruit total en sortie du filtre linéaire adapté $\mathbf{w}^H(f) = \mathbf{g}^H(f)(\mathbf{R}_n^{(0)})^{-1}(f)$ à l'instant kT est donné par application de (1.4.8) et (1.4.9) par

4. $r_n^{(\alpha)}(f)$ et $c_n^{(\beta)}(f)$ sont respectivement définies comme les transformées de Fourier associées aux coefficients de Fourier $r_n^{(\alpha)}(\tau)$ et $c_n^{(\beta)}(\tau)$ des corrélations et corrélations complémentaires $r_n(t,\tau) = \mathrm{E}[n(t+\tau/2)n^*(t-\tau/2)]$ et $c_n(t,\tau) = \mathrm{E}[n(t+\tau/2)n(t-\tau/2)]$ périodiques en t de période T', où nous avons choisi ici leurs définitions symétriques.

$P_n = \sum_\alpha e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f+\frac{\alpha}{2})\mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f)\mathbf{w}(f-\frac{\alpha}{2})df$. Par suite le SINR est donné par l'expression

$$\mathrm{SINR}_y^c = \frac{\mathrm{E}|a_k^2| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f))^{-1}\mathbf{g}(f)df|^2}{\sum_\alpha e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f+\frac{\alpha}{2})(\mathbf{R}_n^{(0)}(f+\frac{\alpha}{2}))^{-1}\mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f-\frac{\alpha}{2}))^{-1}\mathbf{g}(f-\frac{\alpha}{2})df}. \quad (1.4.11)$$

Pour des symboles réels, la puissance du bruit total en sortie du filtrage WL adapté (1.2.18) à l'instant kT est donné par application de (1.4.8), (1.4.9) et (1.4.10) par $P_n = \frac{1}{2}\sum_\alpha e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f+\frac{\alpha}{2})\mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f)\mathbf{w}(f-\frac{\alpha}{2})df + \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\sum_\beta e^{i2\pi\beta kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f+\frac{\beta}{2})\mathbf{C}_n^{(\beta)}(f)\mathbf{w}^*(\frac{\beta}{2}-f)df]$. Par suite le SINR est donné par

$$\mathrm{SINR}_z^c = \frac{2\mathrm{E}(a_k^2)| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f))^{-1}\mathbf{g}(f)df|^2}{\left\{ \begin{array}{l} \sum_\alpha e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f+\frac{\alpha}{2})(\mathbf{R}_n^{(0)}(f+\frac{\alpha}{2}))^{-1}\mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f-\frac{\alpha}{2}))^{-1}\mathbf{g}(f-\frac{\alpha}{2}) \\ +\mathrm{Re}[\sum_\beta e^{i2\pi\beta kT}\mathbf{g}^H(f+\frac{\beta}{2})(\mathbf{R}_n^{(0)}(f+\frac{\beta}{2}))^{-1}\mathbf{C}_n^{(\beta)}(f)(\mathbf{R}_n^{(0)*}(\frac{\beta}{2}-f))^{-1}\mathbf{g}^*(\frac{\beta}{2}-f)]df \end{array} \right.}. \quad (1.4.12)$$

Pour des modulations linéaires quasi-rectilignes, la puissance du bruit total en sortie du filtrage WL adapté (1.2.22) à l'instant kT est de même donné par application de (1.4.8), (1.4.9) et (1.4.10) par $P_n = \frac{1}{2}\sum_\alpha e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f+\frac{\alpha}{2})\mathbf{R}_n^{(0)}(f)\mathbf{w}(f-\frac{\alpha}{2})df + \frac{1}{2}(-1)^k\mathrm{Re}[\sum_\beta e^{i2\pi\beta kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}^H(f+\frac{\beta}{2})\mathbf{C}_n^{(0)}(f)\mathbf{w}^*(\frac{\beta}{2}-f)df]$. Par suite le SINR est donné par

$$\mathrm{SINR}_{z,k}^c = \frac{2\mathrm{E}(b_k^2)| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f))^{-1}\mathbf{g}(f)df|^2}{\left\{ \begin{array}{l} \sum_\alpha e^{i2\pi\alpha kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^H(f+\frac{\alpha}{2})(\mathbf{R}_n^{(0)}(f+\frac{\alpha}{2}))^{-1}\mathbf{R}_n^{(\alpha)}(f)(\mathbf{R}_n^{(0)}(f-\frac{\alpha}{2}))^{-1}\mathbf{g}(f-\frac{\alpha}{2}) \\ +(-1)^k\mathrm{Re}[\sum_\beta e^{i2\pi\beta kT}\mathbf{g}^H(f+\frac{\beta}{2})(\mathbf{R}_n^{(0)}(f+\frac{\beta}{2}))^{-1}\mathbf{C}_n^{(\beta)}(f)(\mathbf{R}_n^{(0)*}(\frac{\beta}{2}-f))^{-1}\mathbf{g}^*(\frac{\beta}{2}-f)]df \end{array} \right.}. \quad (1.4.13)$$

1.4.3.2 Récepteurs MLSE sous hypothèse non circulaire

Appliquant (1.4.8) et (1.4.9) où le bruit total d'entrée est le bruit étendu $\widetilde{\mathbf{n}}(t)$ de fréquences cycliques γ, les puissances du bruit total aux instants kT, en sortie de filtres adaptés (1.2.9), (1.2.16) et (1.2.20) pour les cas de symboles complexes, réels ou de modulations linéaires quasi-rectilignes sont donnés respectivement par $P_n = \sum_\gamma e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f+\frac{\gamma}{2})\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f)\mathbf{w}_1(f-\frac{\gamma}{2})df$, $P_n = \sum_\gamma e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f+\frac{\gamma}{2})\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f)\widetilde{\mathbf{w}}(f-\frac{\gamma}{2})df$ et $P_n = \sum_\gamma e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f+\frac{\gamma}{2})\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f)\mathbf{w}_{(k)}(f-\frac{\gamma}{2})df$. Par suite les SINR en sortie aux instants kT de ces filtres WL respectifs sont donnés respectivement par

$$\mathrm{SINR}_y^{nc} = \frac{\mathrm{E}|a_k^2| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)(\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f))^{-1}\mathbf{g}_1(f)df|^2}{\sum_\gamma e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f+\frac{\gamma}{2})(\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f+\frac{\gamma}{2}))^{-1}\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(\gamma)}(f)(\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f-\frac{\gamma}{2}))^{-1}\mathbf{g}_1(f-\frac{\gamma}{2})df}. \quad (1.4.14)$$

$$\mathrm{SINR}_z^{nc} = \frac{\mathrm{E}(a_k^2)| \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)(\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f))^{-1}\widetilde{\mathbf{g}}(f)df|^2}{\sum_\gamma e^{i2\pi\gamma kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{g}}^H(f+\frac{\gamma}{2})(\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f+\frac{\gamma}{2}))^{-1}\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(\gamma)}(f)(\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f-\frac{\gamma}{2}))^{-1}\widetilde{\mathbf{g}}(f-\frac{\gamma}{2})df}. \quad (1.4.15)$$

et

$$\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc} = \frac{\mathrm{E}(b_k^2)|\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathbf{g}_1(f)+(-1)^k\mathbf{g}_2(f)]^H(\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f))^{-1}[\mathbf{g}_1(f)+(-1)^k\mathbf{g}_2(f)]df|^2}{\left\{\begin{array}{r}\sum_\gamma e^{i2\pi\gamma kT}\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathbf{g}_1(f+\frac{\gamma}{2})+(-1)^k\mathbf{g}_2(f+\frac{\gamma}{2})]^H(\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f+\frac{\gamma}{2}))^{-1}\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(\gamma)}(f)\\ (\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{(0)}(f-\frac{\gamma}{2}))^{-1}[\mathbf{g}_1(f-\frac{\gamma}{2})+(-1)^k\mathbf{g}_2(f-\frac{\gamma}{2})]df\end{array}\right.}.$$

Notons que les interférences QAM ou ASK ou sous forme de modulations linéaires quasi-rectilignes sont toutes cyclostationnaires du second ordre, exception faite des modulations QAM ou ASK avec impulsion de mise en forme de type "racine carrée" de Nyquist de roll off égal à 0 qui sont stationnaires du second ordre. Pour des modulations linéaires d'impulsion de mise en forme quelconque et de période symbole quelconque T', les fréquences cycliques sont en général k/T' pour $k \in \mathbb{Z}$ pour les modulations QAM ou ASK, alors que pour les modulations linéaires quasi-rectilignes, elles sont k/T' et $(2k+1)/2T'$ pour $k \in \mathbb{Z}$ respectivement pour les densités spectrales cyclique et cyclique complémentaire (voir les annexes A.1.2 et A.1.3).

Dans le cas particulier de filtres de mise en forme de type impulsion "racine carrée" de Nyquist, le nombre de fréquences cycliques contenues dans le bruit total est fini et dépend du roll off α_{ro} de cette impulsion. Ainsi les interférences QAM ou ASK ne contiennent que les fréquences cycliques $-\frac{1}{T}$, 0 et $\frac{1}{T}$ pour $\alpha_{\mathrm{ro}} \neq 0$. Quant aux interférences sous forme de modulations linéaires quasi-rectilignes, elle contiennent les fréquences cycliques $-\frac{1}{2T}$, 0, $\frac{1}{2T}$ pour $\alpha_{\mathrm{ro}} = 0$, $-\frac{1}{T}$, $-\frac{1}{2T}$, 0, $\frac{1}{2T}$ et $\frac{1}{T}$ pour $\alpha_{\mathrm{ro}} \in]0,1/2[$ et $-\frac{3}{2T}$, $-\frac{1}{T}$, $-\frac{1}{2T}$, 0, $\frac{1}{2T}$, $\frac{1}{T}$ et $\frac{3}{2T}$ pour $\alpha_{\mathrm{ro}} \in [1/2,1]$. Dans le cas particulier des modulations MSK et GMSK, les fréquences cycliques sont aussi essentiellement $-\frac{3}{2T}$, $-\frac{1}{T}$, $-\frac{1}{2T}$, 0, $\frac{1}{2T}$, $\frac{1}{T}$ et $\frac{3}{2T}$. Notons enfin que pour des interférences QAM ou ASK de même période symbole que le SOI, $e^{i2\pi\alpha kT} = e^{i2\pi\beta kT} = e^{i2\pi\gamma kT} = 1$ dans toutes les expressions des SINRs dans les paragraphes 1.4.3.1 et 1.4.3.2.

1.5 Cas particuliers et illustrations

1.5.1 Hypothèses

Le but de cette partie est d'analyser plus finement les performances en SINR des différents récepteurs et de montrer quelques propriétés des structures développées, via l'obtention de formules interprétables pour des canaux invariants et spéculaires en temps pour le SOI et les interférences et pour des sources mises en forme par des filtres de type "racine carrée" de Nyquist en cosinusoïdes surélevées.

Plus précisément $v(t)$ sera réelle, d'énergie unité et de roll-off α_{ro}. Pour des canaux spéculaires, les réponses fréquentielles des canaux SOI et interférences (respectivement d'amplitudes et de retards $(\mu_{s_m},\tau_{s_m})_{m=1,..,M_s}$ et $(\mu_{j_m},\tau_{j_m})_{m=1,..,M_j}$) seront respectivement :

$$\boldsymbol{h}_s(f) = \sum_{m=1}^{M_s} \mu_{s_m} e^{-i2\pi f\tau_{s_m}} \boldsymbol{h}_{s_m} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{h}_j(f) = \sum_{m=1}^{M_j} \mu_{j_m} e^{-i2\pi f\tau_{j_m}} \boldsymbol{h}_{j_m},$$

dont les premières composantes des vecteurs directionnels de chaque trajet $\boldsymbol{h}_{s,m}$ et $\boldsymbol{h}_{j,m}$ sont égales à l'unité. Nous considérerons dans la suite trois scénarios.

1.5.2 Cas d'une absence d'interférence

En absence d'interférences où le bruit de fond circulaire est temporellement et spatialement blanc $\mathbf{R}_n(f) = N_0\mathbf{I}_N$ et $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}(f) = N_0\mathbf{I}_{2N}$ pour $f \in [-\frac{1}{2T}(1+\alpha_{\rm ro}), +\frac{1}{2T}(1+\alpha_{\rm ro})]$. Par suite les formules de SINR circulaires et non circulaires (1.4.1) (1.4.4), (1.4.2) (1.4.5), (1.4.3) (1.4.6) qui sont ici des SNRs, coïncident et sont données par

$$\mathrm{SNR}_y = \frac{\mathrm{E}|a_k^2|}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathbf{g}(f)\|^2 df, \tag{1.5.1}$$

pour des modulations QAM et par

$$\mathrm{SNR}_z = \frac{2\mathrm{E}(a_k^2)}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathbf{g}(f)\|^2 df, \quad \mathrm{SNR}_{z,k} = \frac{2\mathrm{E}(b_k^2)}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathbf{g}(f)\|^2 df, \tag{1.5.2}$$

respectivement pour des modulations ASK et linéaires quasi-rectilignes. Ces deux SNRs (1.5.1) et (1.5.2) doubles l'un de l'autre (pour des symboles d'énergies identiques) sont des bornes supérieures ultimes qui permettent d'évaluer la perte de SNR en présence d'interférences. Dans le cas particulier de canaux spéculaires, puisque $\mathbf{g}(f) = v(f)\mathbf{h}_s(f)$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|\mathbf{g}(f)\|^2 df = \sum_{m=1}^{M_s}\sum_{m'=1}^{M_s}\mu_{s_m}^*\mu_{s_{m'}}\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_{s_{m'}}\int_{-\infty}^{+\infty}|v(f)|^2 e^{-i2\pi f(\tau_{s_m}-\tau_{s_{m'}})}df. \tag{1.5.3}$$

Par suite, il y a remise en phase temporelle et spatiale de tous les trajets SOI avant décision. De plus, dans le cas où les différences des retards $\tau_{s_m} - \tau_{s_{m'}}$ sont tous multiples de la période symbole T, les SNRs (1.5.1) et (1.5.2) deviennent chacun la somme des SNRs sur chaque trajet, quelque soit le roll off de $v(t)$:

$$\mathrm{SNR}_y = \frac{\mathrm{E}|a_k^2|}{N_0}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\|\boldsymbol{h}_{s_m}\|^2, \tag{1.5.4}$$

$$\mathrm{SNR}_z = \frac{2\mathrm{E}(a_k^2)}{N_0}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\|\boldsymbol{h}_{s_m}\|^2, \quad \mathrm{SNR}_z = \frac{2\mathrm{E}(b_k^2)}{N_0}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\|\boldsymbol{h}_{s_m}\|^2. \tag{1.5.5}$$

1.5.3 Cas de la présence d'une interférence rectiligne mono-trajet

Nous considérons ici le cas où le bruit total est constitué d'une interférence rectiligne (de symboles c_k) mono-trajet ($M_j = 1$, $\mu_j \overset{\text{def}}{=} \mu_{j_1}$) et de bruit de fond. Pour obtenir des formules interprétables, nous supposons aussi que les différences des retards du SOI $\tau_{s_m} - \tau_{s_{m'}}$ sont tous multiples de la période symbole T. De plus nous supposons que les roll-off du SOI et de l'interférence sont nuls, auquel cas le bruit total est alors stationnaire. Sous ces conditions, par application du lemme d'inversion matricielle appliqué à $\mathbf{R}_n(f)$ et $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}(f)$, les SINRs (1.4.1) (1.4.4), (1.4.2) (1.4.5) et (1.4.3) (1.4.6) deviennent respectivement en présence de

SOI sous une forme de modulation QAM :

$$\mathrm{SINR}_y^c = \frac{\mathrm{E}|a_k^2|}{N_0}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\left(||\boldsymbol{h}_{s_m}||^2-\frac{|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2}{\beta_{n,j}+||\boldsymbol{h}_j||^2}\right), \tag{1.5.6}$$

$$\mathrm{SINR}_y^{nc} = \frac{\mathrm{E}|a_k^2|}{N_0}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\left(||\boldsymbol{h}_{s_m}||^2-\frac{|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2}{\beta_{n,j}+2||\boldsymbol{h}_j||^2}\right), \tag{1.5.7}$$

Pour un seul capteur ($N = 1$) et pour une interférence très puissante par rapport au bruit de fond ($|\mu_j|^2 \gg N_0$) :

$$\mathrm{SINR}_y^c \approx \frac{\mathrm{E}|a_k^2|}{\mathrm{E}(c_k^2)|\mu_j|^2}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2 \ll \mathrm{SNR}_y, \tag{1.5.8}$$

$$\mathrm{SINR}_y^{nc} \approx \frac{1}{2}\mathrm{SNR}_y, \tag{1.5.9}$$

où la valeur de SNR_y est donnée par (1.5.4)

SOI sous une forme de modulation ASK :

$$\mathrm{SINR}_z^c = \frac{\frac{2\mathrm{E}(a_k^2)}{N_0}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\left(||\boldsymbol{h}_{s_m}||^2-\frac{|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2}{\beta_{n,j}+||\boldsymbol{h}_j||^2},\right)}{1+\frac{\beta_{n,j}}{(\beta_{n,j}+||\boldsymbol{h}_j||^2)^2}\frac{\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2\cos(2\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\left(||\boldsymbol{h}_{s_m}||^2-\frac{|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2}{\beta_{n,j}+||\boldsymbol{h}_j||^2}\right)}}, \tag{1.5.10}$$

$$\mathrm{SINR}_z^{nc} = \frac{2\mathrm{E}(a_k^2)}{N_0}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\left(||\boldsymbol{h}_{s_m}||^2-\frac{|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2\cos^2(\Delta_{s_m,j})}{\beta_{n,j}+2||\boldsymbol{h}_j||^2}\right), \tag{1.5.11}$$

Pour un seul capteur ($N = 1$) et pour une interférence très puissante par rapport au bruit de fond ($|\mu_j|^2 \gg N_0$) :

$$\mathrm{SINR}_z^c \approx \frac{\frac{2\mathrm{E}(a_k^2)}{\mathrm{E}(c_k^2)|\mu_j|^2}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2}{1+\frac{\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\cos(2\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2}} \ll \mathrm{SNR}_z, \tag{1.5.12}$$

$$\mathrm{SINR}_z^{nc} \approx \mathrm{SNR}_z\frac{\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\sin^2(\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2}, \tag{1.5.13}$$

où la valeur de SNR_z est donnée par (1.5.5)

SOI sous une forme de modulation linéaire quasi-rectiligne :

$$\mathrm{SINR}_{z,k}^c = \frac{\frac{2\mathrm{E}(b_k^2)}{N_0}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\left(||\boldsymbol{h}_{s_m}||^2-\frac{|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2}{\beta_{n,j}+||\boldsymbol{h}_j||^2}\right)}{1+(-1)^k\frac{\beta_{n,j}}{(\beta_{n,j}+||\boldsymbol{h}_j||^2)^2}\frac{\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2\cos(2\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\left(||\boldsymbol{h}_{s_m}||^2-\frac{|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2}{\beta_{n,j}+||\boldsymbol{h}_j||^2}\right)}}, \tag{1.5.14}$$

$$\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc} = \frac{2\mathrm{E}(b_k^2)}{N_0}\sum_{m=1}^{M_s}|\mu_{s_m}|^2\left(||\boldsymbol{h}_{s_m}||^2-\frac{|\boldsymbol{h}_{s_m}^H\boldsymbol{h}_j|^2\left(1+(-1)^k\cos\left(2\Delta_{s_m,j}\right)\right)}{\beta_{n,j}+2||\boldsymbol{h}_j||^2}\right), \tag{1.5.15}$$

avec $\beta_{n,j} \stackrel{\text{def}}{=} N_0[\mathrm{E}(c_k^2)|\mu_j|^2]^{-1}$, $\mu_{s_m} = |\mu_{s_m}|e^{i\phi_{s_m}}$, $\mu_j = |\mu_j|e^{i\phi_j}$, $\boldsymbol{h}_{s_m}^H \boldsymbol{h}_j = |\boldsymbol{h}_{s_m}^H \boldsymbol{h}_j|e^{i\phi_{s_m,j}}$ et $\Delta_{s_m,j} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_j - \phi_{s_m} + \phi_{s_m,j}$.

Pour un seul capteur ($N = 1$) et pour une interférence très puissante par rapport au bruit de fond ($|\mu_j|^2 \gg N_0$) :

$$\mathrm{SINR}_{z,k}^{c} \approx \frac{\frac{2\mathrm{E}(a_k^2)}{\mathrm{E}(c_k^2)|\mu_j|^2} \sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2}{1 + (-1)^k \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \cos 2\Delta_{s_m,j}}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2}} \ll \mathrm{SNR}_z, \tag{1.5.16}$$

$$\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc} \approx \mathrm{SNR}_z \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \sin^2(\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2} \quad \text{pour } k \text{ pair}, \tag{1.5.17}$$

$$\approx \mathrm{SNR}_z \frac{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2 \cos^2(\Delta_{s_m,j})}{\sum_{m=1}^{M_s} |\mu_{s_m}|^2} \quad \text{pour } k \text{ impair}, \tag{1.5.18}$$

avec $\beta_{n,j} \stackrel{\text{def}}{=} N_0[\mathrm{E}(c_k^2)|\mu_j|^2]^{-1}$, $\mu_{s_m} = |\mu_{s_m}|e^{i\phi_{sm}}$, $\mu_j = |\mu_j|e^{i\phi_j}$, $\boldsymbol{h}_{s_m}^H \boldsymbol{h}_j = |\boldsymbol{h}_{s_m}^H \boldsymbol{h}_j|e^{i\phi_{s_m,j}}$, $\Delta_{s_m,j} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_j - \phi_{s_m}$ et où SNR_z est donné par (1.5.5).

Notons que les SINRs (1.5.7), (1.5.11), (1.5.15) des récepteurs MLSE non circulaires sont la somme des SINRs de chaque trajet SOI, contrairement aux SINRs (1.5.10), (1.5.14) des récepteurs MLSE circulaires pour modulations ASK et linéaire quasi-rectiligne. Cela est dû au fait que les filtres adaptés des récepteurs MLSE circulaires ne sont plus adaptés en présence de bruit non circulaire. Mais dans le cas de symboles complexes, puisque le SINR obtenu (1.5.6) par le récepteur MLSE circulaire en présence de bruit non circulaire ne dépend pas de la non circularité du bruit, la désadaptation du filtre adapté conserve l'additivité des SINRs des différents trajets. Nous constatons que tous ces SINRs, qui ne dépendent pas du retard $\tau_j \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{j,1}$ de l'interférence (ce qui est naturel puisque celle-ci est stationnaire) sont dégradés par rapport aux références (1.5.4), (1.5.5). Cette dégradation dépend de la différence angulaire entre le vecteur directionnel de l'interférence et ceux des différents trajets du SOI et de plus des différentes phases du SOI et de l'interférence pour les récepteurs MLSE pour modulations ASK et linéaire quasi-rectiligne.

Nous vérifions l'effet SAIC pour les récepteurs MLSE non circulaires pour SOI rectiligne (1.5.13) lorsque au moins un des trajets m SOI vérifie $\Delta_{s_m,j} \neq 0$, et pour SOI quasi rectiligne (1.5.16) lorsque au moins un des trajets m SOI vérifie $\Delta_{s_m,j} \neq 0$ et $\Delta_{s_m,j} \neq \pi/2$. Par contre, nous démontrons ici le résultat nouveau que cet effet SAIC se maintient pour des constellations SOI complexes (1.5.9) quelque soit les valeurs des phases différentielles $\Delta_{s_m,j}$.

Bien que nous ne disposions pas de formules interprétables dans le cas général d'impulsions $v(t)$ et de retards différentiels $\tau_{s_m} - \tau_{s_{m'}}$ quelconques, cet effet SAIC se maintient dans ces situations. En particulier, lorsque le SOI est une modulation linéaire quasi-rectiligne quelconque, nous avons obtenu la relation suivante pour une interférence forte ($|\mu_j|^2 \gg N_0$) en présence de trajets SOI où μ_{s_m} sont réels :

$$\frac{\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc}}{\mathrm{SINR}_{z,k}^{c}} \approx 1 + \frac{|\mu_j|^2}{N_0} \sin^2(2\phi_j). \tag{1.5.19}$$

Ce rapport ne dépend ni de l'instant kT, ni du canal SOI, ni de l'impulsion SOI, donc du type de modulation linéaire quasi-rectiligne, contrairement aux expressions $\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc}$ et $\mathrm{SINR}_{z,k}^{c}$ qui en dépendent fortement. Au vu de la dépendance forte de ces SINRs par rapport à la parité de k, nous conjecturons que les performances en probabilité d'erreur en sortie de l'algorithme de Viterbi seront fonction des valeurs $\min_k(\mathrm{SNR}_{z,k}^{nc})$ et $\min_k(\mathrm{SNR}_{z,k}^{c})$.

Pour illustrer la robustesse de l'effet SAIC par rapport aux hypothèses qui nous ont permis d'obtenir les formules interprétables précédentes des différents SINRs, nous considérons dans la figure 1.5 que le SOI est une modulation GMSK et l'interférence une modulation BPSK. Cette figure compare pour $M_s = 2$, l'évolution des valeurs minimales de $\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc}$ et de $\mathrm{SINR}_{z,k}^{c}$ par rapport à la parité de k, moyennées par rapport à ϕ_j, ϕ_{s_1} et à ϕ_{s_2} uniformément réparties dans $[0, 2\pi]$ comme fonction de $|\mu_j|^2/N_0$, pour $\tau_{s_1} = 0$, $\tau_{s_2} = T/2$, $|\mu_{s_1}|^2/N_0 = 10$ et $|\mu_{s_2}|^2/|\mu_{s_1}|^2 = 0.5$.

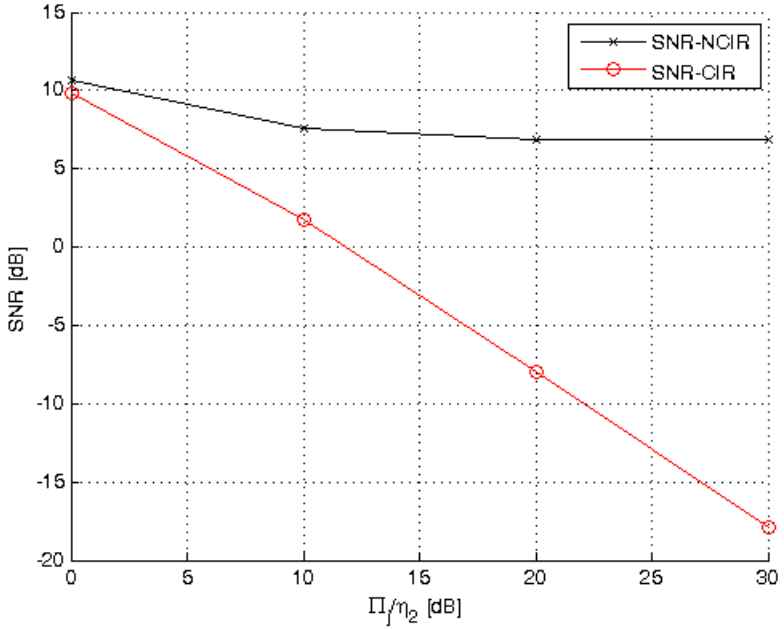


FIGURE 1.5 – Moyenne de $\min_k(\mathrm{SNR}_{z,k}^{nc})$ et $\min_k(\mathrm{SNR}_{z,k}^{c})$ par rapport à ϕ_j, ϕ_{s_1} et à ϕ_{s_2} comme fonction de $|\mu_j|^2/N_0$.

Cette figure montre clairement que les conclusions de la formule interprétable (1.5.19) s'étendent à des conditions plus larges que celles que nous avons introduites pour obtenir cette simple relation. Le récepteur MLSE présenté est très peu sensible à l'augmentation de la puissance de l'interférence co-canal contrairement au récepteur MLSE traditionnel, pour lequel le SINR se dégrade fortement.

1.5.4 Cas de la présence d'une interférence rectiligne bi-trajets

On suppose ici que le SOI est mono-trajet ($M_s = 1$, $\mu_s \overset{\text{def}}{=} \mu_{s_1}$) et que le bruit total est constitué d'une interférence rectiligne bi-trajets et de bruit de fond. Les roll-off du SOI et de l'interférence sont nuls, auquel cas le bruit total est toujours stationnaire. Pour obtenir des formules interprétables,

nous supposons que la différence des retards des deux trajets de l'interférence vaut T ($\tau_{j_2} - \tau_{j_2} = T$). De plus nous supposons, que dans le cas de plusieurs capteurs ($N > 1$), les vecteurs directionnels des deux trajets interférence sont orthogonaux ($\mathbf{h}_{j_2}^H \mathbf{h}_{j_1} = 0$) et dans le cas d'un seul capteur ($N = 1$), la phase différentielle des trajets interférents est égale à $\pi/2$ ($\phi_{j_2} - \phi_{j_1} = \pi/2$). Sous ces conditions, par application du lemme d'inversion matricielle appliqué à $\mathbf{R}_n(f)$ et $\mathbf{R}_{\tilde{n}}(f)$, les SINRs (1.4.4), (1.4.5) et (1.4.6) des récepteurs MLSE non circulaires puis des récepteurs MLSE circulaires deviennent respectivement en présence :

SOI sous une forme de modulation QAM :

$$\mathrm{SINR}_y^{nc} = \frac{\mathrm{E}|a_k^2|}{N_0}|\mu_s|^2 \left(||\boldsymbol{h}_s||^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + 2(|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2)} \right) \tag{1.5.20}$$

$$\mathrm{SINR}_y^{c} = \frac{\mathrm{E}|a_k^2|}{N_0}|\mu_s|^2 \left(||\boldsymbol{h}_s||^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + 2(|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2)} \right) \tag{1.5.21}$$

SOI sous une forme de modulation ASK :

$$\mathrm{SINR}_z^{nc} = \frac{2\mathrm{E}(a_k^2)}{N_0}|\mu_s|^2 \left(||\boldsymbol{h}_s||^2 - \frac{2\left(|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 \cos^2(\Delta\phi_{s,j_1}) + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2 \cos^2(\Delta\phi_{s,j_2})\right)}{\beta_n + 2(|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2)} \right) \tag{1.5.22}$$

$$\mathrm{SINR}_z^{c} = \frac{\frac{2\mathrm{E}(a_k^2)}{N_0}|\mu_s|^2 \left(||\boldsymbol{h}_s||^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + |\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2} \right)}{1 + \frac{\beta_n}{(\beta_n + |\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2)^2} \times \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 \cos(2\Delta_{s,j_1}) + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2 \cos(2\Delta_{s,j_2})}{||\boldsymbol{h}_s||^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + (|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2)}}} \tag{1.5.23}$$

SOI sous une forme de modulation linéaire quasi-rectiligne :

$$\begin{aligned} \mathrm{SINR}_{z,k}^{nc} = {} & \frac{2\mathrm{E}(b_k^2)}{N_0}|\mu_s|^2 \\ & \times \left(||\boldsymbol{h}_s||^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 \left(1 + (-1)^k \cos(2\Delta\phi_{s,j_1})\right) + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2 \left(1 + (-1)^k \cos(2\Delta\phi_{s,j_2})\right)}{\beta_n + 2(|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2)} \right) \end{aligned} \tag{1.5.24}$$

$$\mathrm{SINR}_{z,k}^{c} = \frac{\frac{2\mathrm{E}(a_k^2)}{N_0}|\mu_s|^2 \left(||\boldsymbol{h}_s||^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + |\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2} \right)}{1 + (-1)^k \frac{\beta_n}{(\beta_n + |\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2)^2} \times \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 \cos(2\Delta_{s,j_1}) + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2 \cos(2\Delta_{s,j_2})}{||\boldsymbol{h}_s||^2 - \frac{|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2}{\beta_n + (|\mu_{j_1}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_1}| + |\mu_{j_2}|^2 |\boldsymbol{h}_s^H \boldsymbol{h}_{j_2}|^2)}}} \tag{1.5.25}$$

avec $\beta_n \overset{\text{def}}{=} N_0[\mathrm{E}(c_k^2)]^{-1}$.

Notons que même sous l'hypothèse de phase différentielle égale à $\pi/2$ pour les deux trajets interférences, les expressions des SINRs des récepteurs MLSE circulaire contiennent une intégrale dans le cas monocapteur ($N = 1$) y compris pour une interférence très puissance par rapport au bruit de fond ($|\mu_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 \gg N_0$). Cela entraîne des expressions analytiques plus lourdes des SINRs. Par exemple, pour le récepteur MLSE circulaire en présence de SOI sous forme de modulation QAM nous avons

$$\mathrm{SINR}_y^c = \frac{\mathrm{E}|a_k^2|}{\mathrm{E}(c_k^2)|\mu_{j_1}||\mu_{j_2}|}|\mu_s|^2 g\left(\frac{1}{2}\left(\beta_{n,j} + s + \frac{1}{s}\right)\right)$$

avec $\beta_{n,j} \overset{\text{def}}{=} N_0[\mathrm{E}(c_k^2)|\mu_{j_1}||\mu_{j_2}|]^{-1}$ et $g(a) \overset{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi\sqrt{a^2-1}} \arctan(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}})$ où $s \overset{\text{def}}{=} |\mu_{j_2}|/|\mu_{j_1}|$ est la sélectivité du canal interférent, auquel cas $\mathrm{SINR}_y^c \ll \mathrm{SNR}_y$ pour $|\mu_{j_1}|^2 + |\mu_{j_2}|^2 \gg N_0$. Dans ce dernier cas, nous constatons l'effet SAIC pour les trois récepteurs MLSE non circulaires, puisque les SINRs (1.5.20), (1.5.22) et (1.5.24) deviennent :

$$\mathrm{SINR}_y^{nc} \approx \frac{1}{2}\mathrm{SNR}_y, \tag{1.5.26}$$

$$\mathrm{SINR}_z^{nc} \approx \mathrm{SNR}_z\left(\frac{\sin^2(\Delta_{s,j_1}) + s^2\sin^2(\Delta_{s,j_2})}{1+s^2}\right), \tag{1.5.27}$$

$$\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc} \approx \mathrm{SNR}_z\left(\frac{\sin^2(\Delta_{s,j_1}) + s^2\sin^2(\Delta_{s,j_2})}{1+s^2}\right) \text{ pour } k \text{ pair}, \tag{1.5.28}$$

$$\approx \mathrm{SNR}_z\left(\frac{\cos^2(\Delta_{s,j_1}) + s^2\cos^2(\Delta_{s,j_2})}{1+s^2}\right) \text{ pour } k \text{ impair}, \tag{1.5.29}$$

Nous constatons donc que l'effet SAIC se maintient pour une interférence rectiligne à deux trajets, mais cet effet dépend non seulement des phases différentielles entre le trajet SOI et les deux trajets interférents, mais aussi de la sélectivité de ce canal interférent. Naturellement, nous retrouvons dans le cas d'un seul trajet la relation

$$\mathrm{SINR}_z^{nc} \approx \mathrm{SNR}_z \sin^2(\Delta\phi_{s,j_1}) = \frac{2\mathrm{E}(a_k^2)|\mu_s|^2}{N_0}\sin^2(\Delta\phi_{s,j_1})$$

dérivée dans [20] pour le cas d'un SOI et d'une interférence co-canal rectilignes de même impulsion en "racine carrée" de Nyquist de roll off quelconque dont les monotrajets sont synchronisés et dont le récepteur MLSE sous hypothèse de bruit non circulaire se réduit à une simple détection symbole à symbole derrière le filtre adapté.

Cet effet SAIC en présence de deux trajets interférents est illustré dans les quatre figures suivantes pour une modulation BPSK pour le SOI et l'interférence dans lesquelles nous testons la robustesse de cet effet SAIC par rapport aux hypothèses simplificatrices qui nous ont permis d'obtenir la formule interprétable (1.5.27). Ainsi les figures 1.6, 1.7, 1.8 et 1.9 comparent les valeurs numériques des SINRs du récepteur MLSE non circulaire et récepteur MLSE circulaire dans les conditions nominales suivantes $\tau_s = 0$, $\tau_{j_1} = 0$, $\tau_{j_2} = T$, $\phi_s = 0$, $\phi_{j_1} = \pi/4$, $\phi_{j_2} = 3\pi/4$, $|\mu_s|^2/N_0 = 10$,

$|\mu_{j_1}|^2/N_0$ = 10, s^2 = 0.5 et roll off α_{ro} = 0 en fonction respectivement du seul paramètre α_{ro}, ϕ_{j_2}, τ_{j_2}/T et $|\mu_{j_1}|^2/N_0$.

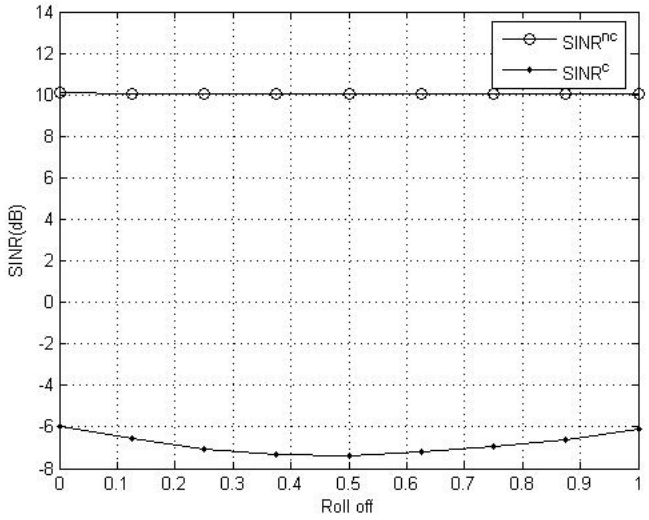


FIGURE 1.6 – $\text{SINR}_{z,k}^{nc}$ et $\text{SINR}_{z,k}^{c}$ comme fonction du roll off α_{ro}.

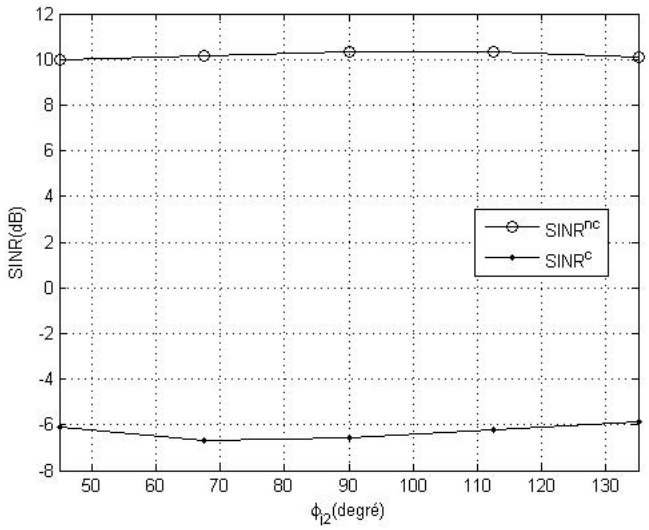


FIGURE 1.7 – $\text{SINR}_{z,k}^{nc}$ et $\text{SINR}_{z,k}^{c}$ comme fonction de la phase du deuxième trajet interférence ϕ_{j_2}.

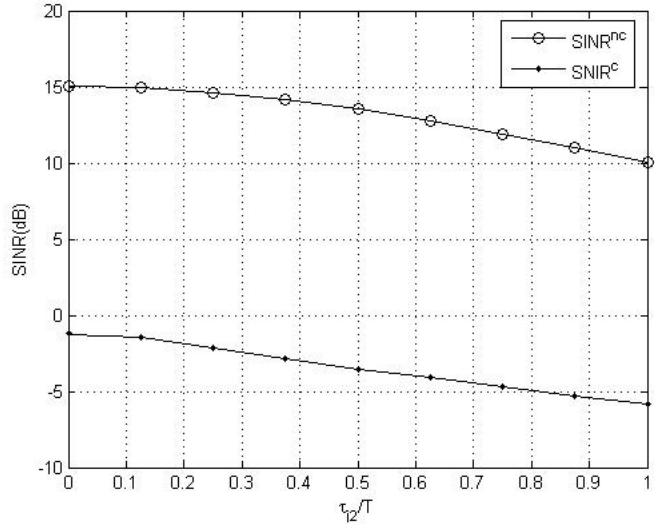


FIGURE 1.8 – $\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc}$ et $\mathrm{SINR}_{z,k}^{c}$ comme fonction du retard du deuxième trajet interfèrence τ_{j_2}.

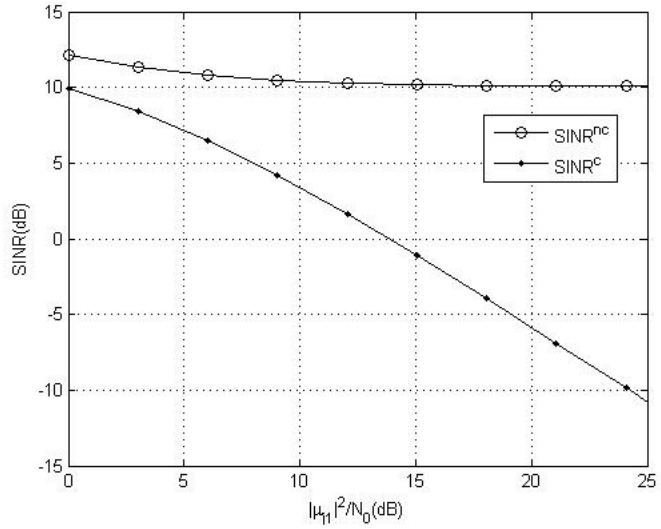


FIGURE 1.9 – $\mathrm{SINR}_{z,k}^{nc}$ et $\mathrm{SINR}_{z,k}^{c}$ comme fonction du rapport INR $|\mu_{j_1}|^2/N_0$.

Ces formules montrent clairement la robustesse du récepteur MLSE non circulaire par rapport aux hypothèses simplificatrices et donc que l'effet SAIC se maintient dans des configurations très générales en cas d'un bi-trajet interférence.

1.6 Performance en probabilité d'erreur symbole

Le récepteur MLSE, tel qu'il est expliqué dans l'annexe A.3.4, détermine la séquence transmise qui minimise la métrique (1.2.13) ce qui est équivalent à trouver parmi tous les chemins possibles d'un trellis, le chemin avec la plus faible métrique. Explicitement on définit un trellis comme un

diagramme représentant tous les chemins possibles d'une chaine de Markov à $N_\sigma = (\text{card } \mathcal{A})^{L_i}$ états $\{S_i\}_{i=1,...,N_\sigma}$, de l'instant $k = 0$ à $k = K-1$. Formellement, si σ_k représente l'état à l'instant k, dont les valeurs appartiennent à l'ensemble $\{S_i\}_{i=1,...,N_\sigma}$, et $m(\sigma_k, \sigma_{k+1})$ représente le coefficient de pondération du chemin émanent de σ_k et se terminent à σ_{k+1}, les métriques (1.2.8) et (1.2.13) deviennent respectivement :

$$\Lambda(a_0, ..., a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} m(\sigma_k, \sigma_{k+1}) \tag{1.6.1}$$

$$\Lambda(\sigma_0, ..., \sigma_{k+1}; a_k) = \Lambda(\sigma_0, ..., \sigma_k; a_{k-1}) + m(\sigma_k, \sigma_{k+1}; a_k; y_k) \tag{1.6.2}$$

avec : $\sigma_k \triangleq (a_{k-1}, .., a_{k+L_i-1})$

En assimilant le signal transmis pendant une durée $D \times T$ ($D >> L_i$ avec L_i : la longueur de la mémoire du canal) comme étant un élément ψ_i d'un espace de signaux Ψ ; une erreur de décision est commise par le récepteur MLSE lorsque ce dernier décide un signal transmis ψ_j avec $i \neq j$. En conséquence, les performances du récepteur MLSE sont une fonction d'une géométrie non régulière des éléments de l'espace Ψ (distribution non uniforme de la distance euclidienne entre les éléments de Ψ, vu la structure du treillis qui modélise le canal discret) et aussi du niveau du bruit et de l'interférence par rapport au signal utile. En conclusion, une évaluation du gain en performance de nos différents récepteurs ne peut se faire qu'à travers le SINR sur le symbole courant (condition nécessaire mais pas suffisante) mais dois être accompagné par des courbes de taux d'erreur symbole.

Le tableau suivant présente les taux d'erreur binaire obtenus (mesurés avec 400 erreurs) pour les récepteurs MLSE non circulaire et MLSE circulaire dans des conditions de monotrajet SOI et bi-trajet interférence avec les paramètres suivants : $N = 1$, $\tau_s = 0$, $\tau_{j_1} = 0$, $\tau_{j_2} = T$, $\phi_s = 0$, $\phi_{j_1} = \pi/4$, $\phi_{j_2} = 3\pi/4$, $|\mu_s|^2/N_0 = 9dB$, $s^2 = 0,5$ et roll off $\alpha_{\text{ro}} = 0,3$ pour différentes valeurs d'INR $|\mu_{j_1}|^2/N_0$ pour des scénarios de SOI/interfèrence BPSK/BPSK, GMSK/BPSK et QPSK/BPSK. Les modèles équivalents discrets des différentes structures de récepteurs ont été mis en oeuvre en prenant en considération l'effet du filtrage sur les statistiques du bruit de fond, à l'entrée de l'organe de décision A.3. Les algorithmes de Viterbi modifiés des différents récepteurs ont été mises en oeuvre avec une troncature des termes r_k, r'_k et $r'_{d,k}$ telles que leurs valeurs relatives par rapport aux termes r_0, r'_0 et $r'_{d,0}$ sont inférieures à 5 %, soit pour des valeurs de L_i de 2 à 4 selon les récepteurs et configuration d'interférence.

$\lvert\mu_{j_1}\rvert^2/N_0$ (dB)	3	5	10	15	20
BER réc. MLSE circulaire	0,025	0,073	0,27	0,41	0,50
BER réc. MLSE non circulaire	6,3e-05	3,0e-04	0,0021	0,0064	0,0082

TABLE 1.1 – Taux d'erreur binaire pour SOI et interférence BPSK

$\lvert\mu_{j_1}\rvert^2/N_0$ (dB)	0	3	5	10	15	20
BER réc. MLSE circulaire	0,0071	0,053	0,11	0,24	0,33	0,47
BER réc. MLSE non circulaire	0,0070	0,046	0,078	0,12	0,16	0,14

TABLE 1.2 – Taux d'erreur binaire pour SOI GMSK et interférence BPSK

$\lvert\mu_{j_1}\rvert^2/N_0$ (dB)	0	3	5	10	15	20
BER réc. MLSE circulaire	0,0030	0,069	0,20	0,50	0,61	0,72
BER réc. MLSE non circulaire	0,0020	0,018	0,035	0,095	0,11	0,12

TABLE 1.3 – Taux d'erreur binaire pour SOI QPSK et interférence BPSK

Nous voyons d'après ces tableaux que l'effet SAIC se maintient dans des configurations de bi-trajet interférence en présente d'une interférence non stationnaire BPSK pour un SOI BPSK et GMSK pour notre récepteur MLSE non circulaire, contrairement au récepteur MLSE traditionnel circulaire.

$\lvert\mu_{j_1}\rvert^2/N_0$ (dB)	0	3	5	10	15	20
BER réc. MLSE circulaire	0,097	0,16	0,22	0,27	0,37	0,42
BER réc. MLSE non circulaire	0,020	0,090	0,14	0,27	0,35	0,41

TABLE 1.4 – Taux d'erreur binaire pour SOI et interférence GMSK

En revanche bien qu'améliorant les performances par rapport au récepteur MLSE traditionnel circulaire, le récepteur MLSE non circulaire ne parvient pas à réaliser l'effet SAIC dans la configuration SOI et interférence GMSK.

1.7 Conclusion

Le récepteur SIMO MLSE optimal pour la démodulation d'une séquence finie de symboles, modulés linéairement, en présence d'interférence entre symboles et d'interférences co-canal potentiellement non circulaires au second ordre a été présenté sous l'hypothèse (simplificatrice) d'un bruit total centré, stationnaire, gaussien et non circulaire. Pour des symboles aussi bien complexes que réels, le récepteur MLSE développé est constitué d'un filtre adapté ST WL qui maximise le SINR sur le symbole courant, d'un échantillonneur au rythme symbole et d'un organe de décision qui implémente une version étendue de l'algorithme de Viterbi. Cette structure du récepteur MLSE reste valable pour des modulations quasi rectilignes moyennant un traitement de post-rotation. Le SINR sur le symbole courant en sortie de ce récepteur MLSE a été calculé

et comparé à celui du récepteur MLSE conventionnel pour des signaux d'intérêts à constellation complexe, réelle et quasi rectiligne en présence d'interférences non circulaires au second ordre aussi bien stationnaires que cyclostationnaires. Une analyse paramétrique de ce SINR a été présentée pour différents scénarios d'interférences via l'obtention de formules interprétables pour ce SINR. En dépit du fait qu'en pratique, les interférences co-canal sont généralement cyclostationnaires et non gaussiennes, le récepteur MLSE proposé, qui n'exploite aucune de ces deux propriétés statistiques, présente de meilleures performances que les récepteurs conventionnels pour ce type d'interférences dès qu'elles sont non circulaires au second ordre. En particulier, en présence d'un SOI de modulation linéaire à symboles complexes, rectiligne ou quasi rectiligne, le récepteur proposé permet l'annulation d'une interférence rectiligne à partir d'une seule antenne et étend ainsi aux canaux sélectifs en fréquence le concept SAIC présenté il y a quelques années pour seulement des canaux sans interférence entre symboles pour un SOI rectiligne ou quasi rectiligne.

Les problèmes de mise en œuvre opérationnelle de ce récepteur est un point important à considérer en particulier dans le contexte des réseaux cellulaires de radiocommunications utilisant des modulations complexes, rectilignes ou quasi rectilignes dans une perspective d'applications aux réseaux utilisant les modulations OQAM, aux réseaux GSM et à ses extensions telles que les réseaux MUROS/VAMOS standardisés tout récemment [60, 61]. Enfin, notons que le récepteur SIMO MLSE que nous avons dérivé sous l'hypothèse de bruit total stationnaire, s'il permet de réaliser l'effet SAIC pour une interférence rectiligne co-canal multitrajet non stationnaire, ne permet pas de le réaliser en présence d'une interférence co-canal quasi rectiligne.

Chapitre 2

Beamforming MVDR de Volterra pour interférences non-gaussiennes et potentiellement non-circulaires

Sommaire

2.1 Introduction 59
2.2 Position du problème 62
2.3 Beamforming MVDR de Volterra du troisième ordre 69
2.4 Analyse des performances en présence d'une seule interférence 75
2.5 Implémentation adaptative 90
2.6 Beamformer MVDR complexe de Volterra à complexité linéaire 93
2.7 Conclusion 97

2.1 Introduction

Le beamforming ou le traitement d'antenne joue un rôle important dans plusieurs applications telles que le radar, le sonar, les communications par satellite, les radiocommunications, l'acoustique et l'écoute passive [93]. Il optimise, par un filtrage linéaire de l'observation, la réception d'un SOI potentiellement corrompu par des interférences. Le beamforming consiste à orienter un lobe dans la direction d'arrivée du SOI tout en créant des trous dans les directions d'arrivée des signaux d'interférence. Le traitement d'antenne peut être aussi implémenté au niveau émetteur, afin de focaliser toute l'énergie disponible dans une direction particulière. Le beamforming est opérationnel en réception comme en émission dans les réseaux cellulaires 4G et il sera aussi parmi les techniques de diversité adoptées par les réseaux cellulaires 5G [73, 71] et potentiellement couplé avec les systèmes massive MIMO [40]. Le beamformer le plus populaire a été introduit par Capon [11, 12] dans la

fin des années soixante et qui correspond aussi au beamformer *Minimum Variance Distortionless Response* (MVDR). Ce dernier consiste à minimiser la puissance en sortie du réseau d'antenne, sous une contrainte linéaire qui permet de conserver le SOI sans déformation. Son implémentation nécessite seulement la connaissance a priori ou bien une estimation du vecteur directionnel du SOI, d'où sa grande utilité dans les applications de radio surveillance du spectre ou l'écoute passive en particulier. Ce beamformer correspond aussi à un cas particulier du beamformer *Linearly Constrained Minimum Variance* (LCMV) [34] et dont sa forme sans contraintes, *Generalized Sidelobe Canceller* (GSC) est introduite pour la première fois dans [38].

Cependant, il est bien connu [68] que le beamformer optimal, au sens de l'erreur quadratique moyenne *Mean Square Error* (MSE), correspond à l'espérance conditionnelle du SOI par rapport à l'observation. Ce beamformer est linéaire seulement quand le SOI et l'observation sont conjointement gaussiens et circulaires [67]. Le beamformer linéaire devient sous-optimal pour un SOI et/ou une observation qui sont non-gaussiens et/ou non-circulaires, situation omniprésente en radiocommunications en particulier. En effet, la plupart des signaux en radiocommunications sont non-gaussiens, à l'exception des signaux multi-porteuses qui tendent vers un caractère gaussien quand le nombre de sous-porteuses augmente. Cependant, plusieurs signaux de radiocommunications sont non-circulaires soit au second ordre (SO) et/ou aux ordres supérieures (HO). Par exemple, une modulation d'amplitude $M-ASK$ est non-gaussienne et au moins non-circulaire à tout les ordres pairs. Une modulation de phase $M-PSK$ est non-gaussienne et non-circulaire à l'ordre $2q$ tel que $2q \geq M$ [4]. Une modulation d'amplitude en quadrature carrée $4M^2-QAM$ est non- gaussienne et au moins non-circulaire au quatrième ordre (FO). Dans ce contexte, les beamformers non-linéaires deviennent d'une grande importance en radiocommunication et en radio surveillance.

Plus précisément, quand le SOI et l'observation sont de moyenne nulle, conjointement gaussiens mais non-circulaires, le beamformer optimal devient *Widely Linear* (WL) [68], i.e., pondérant linéairement et indépendamment les observations ainsi que leurs complexes conjugués. Le beamformer WL MVDR (appelé aussi WL-MVDR$_1$), exploite seulement la non-circularité potentielle de l'interférence qui a été introduit récemment dans [18, 21] pour la radio surveillance du spectre et son implémentation a été étudiée dans [98]. Pour prendre en considération la non-circularité au second ordre potentielle du SOI et de l'interférence, un second beamformer WL MVDR, désigné par WL MVDR$_2$, a été introduit dans [22, 24]. Cet algorithme nous permet d'implémenter un beamformer WL *Minimum Mean Square Error* (MMSE), sans aucune connaissance a priori sur le SOI mais seulement une connaissance a priori ou une estimation du vecteur directionnel et le coefficient de non-circularité au second ordre du SOI. Un estimateur de ce coefficient est proposé dans [102] conjointement avec une version robuste, par rapport aux erreurs d'estimation de ces paramètres, du beamformer WL MVDR$_2$. Des versions robustes de ce beamformer, par rapport aux erreurs dans le vecteur directionnel et le coefficient de non-circularité

au second ordre du SOI ont été proposées dans [96, 97, 103, 104]. Récemment des beamformers WL ont été présentés pour combattre les imperfections RF [39] et un beamformer à rang réduit [84] pour une utilisation en massive MIMO et d'autres en acoustique pour réduire le bruit binaural [8, 13].

De plus, quand le SOI et l'observation sont conjointement non-gaussiens (conjointement circulaires ou non), le beamformer optimal devient une fonction non-linéaire de l'observation et dépend de la loi de probabilité conjointe du SOI et de l'observation. Cependant en pratique, cette loi de probabilité est généralement inconnue a priori. Une première approche consiste à estimer cette loi afin d'optimiser la non-linéarité du beamformer. Cette estimation peut être implémentée à travers des méthodes stochastiques basées, par exemple, sur le filtrage particulaire [6, 28] ou à travers un modèle de mélange de gaussiennes [37], bien adapté pour la modélisation de bruit non gaussien/non-circulaire [57]. Toutefois, dans tous les cas, cette approche est complexe et difficile à implémenter. Une seconde approche, plus simple à mettre en œuvre, consiste à imposer une structure non-linéaire au beamformer, incluant la structure linéaire, et de dériver le beamformer (par exemple MVDR) ayant cette structure imposée. Bien que sous-optimal, le beamformer non-linéaire considéré est construit pour améliorer les performances par rapport à la structure linéaire dans un contexte de signaux non gaussiens. Une telle approche, basée sur le critère de module constant (*constant modulus*) a été étudiée dans [101] pour l'élimination de bruit non gaussien dans le contexte des communications par satellites en utilisant le concept *Radial Basis Functions* (RBF) beamforming. Cependant, bien que performant pour la l'élimination de bruit non gaussien, le beamformer RBF peut avoir de très faibles performances pour un bruit gaussien et circulaire, puisqu'il n'inclut pas la structure linéaire.

Une structure particulière non-linéaire, incluant les deux structures linéaire et WL, correspond à une structure de Volterra complexe d'ordre p ($p \geq 2$) [15, 16]. Une telle structure permet d'améliorer les performance d'un beamformer linéaire dans un contexte non gaussien et potentiellement non-circulaire, en exploitant les propriétés de non gaussiennité et la non-circularité potentielle de l'observation jusqu'à l'ordre $2p$. Il faut noter que le filtrage de Volterra [78] a été introduit en traitement du signal depuis plusieurs décennies dans différentes applications telles que la détection, l'estimation [69, 66], l'identification des systèmes [48], l'annulation des échos [1, 42], l'égalisation non-linéaire [9, 50, 62] mais généralement dans le cas d'observations à valeurs réelles. L'utilisation la plus courante du filtrage de Volterra pour des données complexes concerne la modélisation et le traitement de pré-distorsion en bande de base pour des amplificateurs de puissance en radiocommunications [7]. Cependant, la structure de Volterra qui est considérée dans ce type d'application ne correspond qu'à un sous-ensemble des structures complexe de Volterra qui étaient introduites dans les travaux [15, 16]. D'autres rares travaux sur le filtrage complexe de Volterra concernent l'identification aveugle de certains systèmes linéaire-quadratique [55], estimation au sens du critère MS (*Mean Square Error*) et la détection à partir d'une structure

linéaire-quadratique [17] ou à partir de système d'ordre p [15, 16], le beamforming [85, 25] et l'annulation d'interférence à partir d'une seule antenne (*Single Antenna Interference Cancellation* (SAIC)) [75]. [85] introduit une structure partielle du beamformer MVDR de Volterra pour l'amélioration de l'élimination d'interférence non gaussienne. Cependant, ce beamformer n'exploite pas la potentielle non-circularité de l'interférence. En revanche, [25] et [75] présentent une structure complète du troisième ordre d'un beamformer de Volterra et un filtre de Volterra du troisième ordre à structure partielle, respectivement, exploitant la non gausiennité et la potentielle non-circularité de l'interférence. Toutefois [25] traite les réseaux cellulaires utilisant la technique d'accès *Code Division Multiple Access* (CDMA), par contre [75] traite seulement le scénario des modulations ASK et une seule antenne de réception. Ces deux travaux utilisent une approche MMSE pour la démodulation et leurs implémentations nécessitent une séquence d'apprentissage. De tels algorithmes ne peuvent pas être utilisés pour des applications de radio surveillance du spectre pour des signaux inconnus a priori.

Dans ce contexte, le but de ce chapitre est d'introduire un beamformer MVDR de Volterra du troisième ordre pour la réception d'un SOI, dont sa forme d'onde est inconnue mais son vecteur directionnel est connu, affecté par une interférence potentiellement non gaussienne et non-circulaire. Ce beamformer est une extension au troisième ordre du beamformer de Capon [11, 12] du beamformer WL MVDR_1 [21] et la structure partielle du beamformer de Volterra [85]. Il exploite la potentielle non gaussiennité et non-circularité jusqu'à l'ordre 6 de l'interférence. L'analyse des propriétés, des performances et de l'implémentation adaptative de ce nouveau beamformer constituent le second objectif de chapitre. Il est démontré que le beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre améliore les performances par rapport au beamformers classique de Capon et WL MVDR_1, pour une interférence non-Gaussienne/circulaire et non gaussienne/non-circulaire, respectivement et de plus les performance de Capon et beamformer de Volterra du troisième ordre [85] pour une interférence non-circulaire. Ce nouveau beamformer ouvre de nouvelles perspectives pour la radio surveillance du spectre des signaux non gaussiens et non-circulaires, et pour les radiocommunications utilisant ce type de signaux. Il faut noter que la propriété de non gaussiennité des observations a été bien utilisée pour améliorer la rapidité de convergence des beamformers linéaires [44, 43] et la non-circularité au quatrième ordre des observations a été utilisée par le beamformer WL MVDR [5] pour compenser l'effet I/Q imbalance.

2.2 Position du problème

2.2.1 Hypothèses

On considère un réseau d'antennes de N capteurs et on note par $\mathbf{x}(t)$ le vecteur d'observation, représentant les amplitudes complexes du signal, issues de chaque élément du réseau. Chaque capteur reçoit la contribution du SOI corrompu par des interférences et du bruit de fond. Sous

ces conditions, on peut écrire le vecteur d'observation comme suit :

$$\mathbf{x}(t) = s(t)\mathbf{s} + \mathbf{n}(t), \tag{2.2.1}$$

où $s(t)$ et $\mathbf{s}$ correspondent respectivement à l'enveloppe complexe, supposée de moyenne nulle, et le vecteur directionnel, supposé parfaitement connu tel que sa première composante est égale à l'unité, du SOI. Le vecteur $\mathbf{n}(t)$ représente le bruit total, interférences plus bruit de fond, supposé de moyenne nulle, potentiellement non gaussien, non-circulaire et indépendant de $s(t)$.

Il faut noter que le modèle (2.2.1) suppose un canal sans multi-trajet, situation qui correspond par exemple à celle du contrôle du spectre à partir d'un satellite ou d'un drone. Ce modèle peut encore être valable, pour un canal à évanouissement plat, en remplaçant $\mathbf{s}$ par un vecteur directionnel aléatoire $\mathbf{h}_s$ ou bien encore pour un canal sélectif en fréquence où les trajets non corrélés peuvent être traités comme des sources différentes.

2.2.2 Statistiques du signal

Généralement en radiocommunications, les signaux $\mathbf{x}(t)$ sont non-stationnaires, Les statistiques considérées dans ce chapitre correspondent à des moyennes temporelles des moments de $\mathbf{x}(t)$, jusqu'au 6^{ime} ordre, avec $1 \leq n \leq 6$, définis par :

$$\mathrm{E}[x_{i_1}(t)..x_{i_q}(t), x^*_{i_{q+1}}(t)..x^*_{i_{q+r}}(t)], \tag{2.2.2}$$

où $x_i(t)$ est la i-ème composante de $\mathbf{x}(t)$, pour $1 \leq i_j \leq N$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq q \leq n$, $q + r = n$.

Pour une observation circulaire $\mathbf{x}(t)$, dont la loi de probabilité est invariante par rotation de phase, et pour un couple d'entiers donnés (q, r), il est montré en [67] [4] que :

$$\mathrm{E}[x_{i_1}(t)..x_{i_q}(t), x^*_{i_{q+1}}(t)..x^*_{i_{q+r}}(t)] = 0 \quad \text{pour } q \neq r. \tag{2.2.3}$$

Dans ce dernier cas, les moments non-nuls de $\mathbf{x}(t)$ sont ceux d'ordre pair ($n = 2q$), appelés *moments circulaires*, puisqu'ils sont invariants par rotation de phase des composantes de $\mathbf{x}(t)$. Ces derniers sont définis par :

$$\mathrm{E}[x_{i_1}(t)..x_{i_q}(t), x^*_{i_{q+1}}(t)..x^*_{i_{2q}}(t)]. \tag{2.2.4}$$

Ces moments sont toujours différents de zéro quelle que soit la valeur de q et apportent donc toujours de l'information, quelles que soient les propriétés statistiques de $\mathbf{x}(t)$. Un vecteur $\mathbf{x}(t)$ qui vérifie (2.2.3) pour tout couple d'entiers (q, r) tels que $q \neq r$ et $q + r = n$ est dit *circulaire à l'ordre* n .

Pour illustrer les moments (2.2.2) qui seront utilisés plus loin, on calcule le moment d'ordre n ($1 \leq n \leq 6$) d'un signal scalaire $u(t)$, qui correspond à un SOI $s(t)$, une interférence ou au bruit de fond. En pratique la loi de probabilité de $u(t)$ est symétrique, pour laquelle les moments impairs sont nuls, on se limite donc au calcul pour $n = 2p$, avec $1 \leq p \leq 3$.

Puisque $\mathrm{E}[u^{2p-q}(t)u^{*q}(t)] = \left(\mathrm{E}[u^q(t)u^{*(2p-q)}(t))]\right)^*$, les moments d'ordre $2p$ (2.2.2) de $u(t)$ sont complètement définis à partir des $p+1$ moments $\mathrm{E}[u^q(t)u^{*(2p-q)}(t)]$, $p \le q \le 2p$. Tout au long de ce chapitre, nous allons montrer que le nouveau beamformer proposé exploite l'information contenue dans les moyennes temporelles $< \mathrm{E}[u^q(t)u^{*(2p-q)}(t)] >$ des statistiques $\mathrm{E}[u^q(t)u^{*(2p-q)}(t)]$ pour $0 \le q \le 2p$ et $1 \le p \le 3$, où $< . >$ représente l'opérateur moyenne sur la durée d'observation. En particulier, $\pi_u \stackrel{\text{def}}{=} < \mathrm{E}|u^2(t)| >$ est la puissance du signal $u(t)$ à l'entrée du beamformer.

Les moments circulaires normalisés réels d'ordre $2p$ de $u(t)$, exploités par notre beamformer, sont appelés *coefficients circulaires d'ordre* $2p$ de $u(t)$ définis par : $< \mathrm{E}|u^{2p}(t)| > / < [\mathrm{E}|u^2(t)|]^p >$. En particulier pour $p = 2$ et $p = 3$, on obtient les coefficients circulaires du quatrième ordre (FO) et du sixième ordre (SIO), dénotés respectivement par $\kappa_{u,c}$ et $\chi_{u,c}$:

$$\kappa_{u,c} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}|u^4(t)| >}{(< \mathrm{E}|u^2(t)| >)^2} \quad \text{et} \quad \chi_{u,c} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}|u^6(t)| >}{(< \mathrm{E}|u^2(t)| >)^3}. \tag{2.2.5}$$

Les p moments non-circulaires normalisés d'ordre $2p$ de $u(t)$ sont généralement à valeurs complexes. Ces moments, utilisés par notre beamformer, sont appelés *coefficients non-circulaires* d'ordre $2p$ de $u(t)$ sont définis par $< \mathrm{E}[u^{2p-i+1}(t)u^{*(i-1)}(t)] > / < [\mathrm{E}|u^2(t)|]^p >$, $1 \le i \le p$. En particulier pour $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$, les coefficients non-circulaires du SO, FO et SIO sont respectivement dénotés par γ_u, $\kappa_{u,nc,i}$ et $\chi_{u,nc,i}$:

$$\gamma_u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}[u^2(t)] >}{< \mathrm{E}|u^2(t)| >}, \tag{2.2.6}$$

$$\kappa_{u,nc,i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}[u^{4-i+1}(t)u^{*(i-1)}(t)] >}{(< \mathrm{E}|u^2(t)| >)^2}, i = 1,2 \quad \text{et} \quad \chi_{u,nc,i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}[u^{6-i+1}(t)u^{*(i-1)}(t)] >}{(< \mathrm{E}|u^2(t)| >)^3}, i = 1,2,3. \tag{2.2.7}$$

Il est clair que $|\gamma_u| \le 1$. Le signal $u(t)$ est considéré circulaire au SO si $\gamma_u = 0$ et non-circulaire au SO dans le cas contraire. Quand $u(t)$ est réel à un facteur de phase près, il est dit *rectiligne* et $|\gamma_u| = 1$. De la même façon, il est facile de prouver (voir annexe B.2) $|\kappa_{u,nc,i}| \le \kappa_{u,c}, i = 1,2$ et $|\chi_{u,nc,i}| \le \chi_{u,c}, i = 1,2,3$. Le signal $u(t)$ est circulaire au FO et au SIO si respectivement $\kappa_{u,nc,i} = 0, i = 1,2$ et $\chi_{u,nc,i} = 0, i = 1,2,3$. Dans le cas contraire, le signal est respectivement non-circulaire au FO et au SIO. Pour une signal $u(t)$ rectiligne $|\kappa_{u,nc,i}| = \kappa_{u,c}, i = 1,2$ et $|\chi_{u,nc,i}| = \chi_{u,c}, i = 1,2,3$. En général, pour n'importe quel signal $u(t)$, on a les inégalités suivantes : $1 \le \kappa_{u,c}^2 \le \chi_{u,c}$ et $|\kappa_{u,nc,i}^2| \le \chi_{u,c}, i = 1,2$ (voir annexe B.2).

Pour illustrer au paragraphe 2.4 les performances de notre beamformer, nous allons se limiter à trois cas particuliers des statistiques de l'interférence $u(t)$. Dans le premier cas, $u(t)$ est supposé centré, stationnaire et gaussien. Il est simple de démontrer, à partir des expressions des moments SO, FO et SIO [19], que les coefficients du FO se réduisent à :

$$\kappa_{u,c} = 2 + |\gamma_u|^2, \quad \kappa_{u,nc,1} = 3\gamma_u^2 \quad \text{et} \quad \kappa_{u,nc,2} = 3\gamma_u, \tag{2.2.8}$$

tandis que les coefficients du SIO deviennent :

$$\chi_{u,c} = 3(2 + 3|\gamma_u|^2), \quad \chi_{u,nc,1} = 15\gamma_u^3, \quad \chi_{u,nc,2} = 15\gamma_u^2 \quad \text{et} \quad \chi_{u,nc,3} = 3\gamma_u(4 + |\gamma_u|^2). \tag{2.2.9}$$

Les expressions (2.2.8) et (2.2.9) montrent que pour une interférence $u(t)$ centrée, stationnaire et gaussienne les coefficients circulaires FO et SIO sont des fonctions croissantes de $|\gamma_u|$ tel que $2 \leq \kappa_{u,c} \leq 3$ et $6 \leq \chi_{u,c} \leq 15$. En particulier, $(\kappa_{u,c}, \chi_{u,c}) = (2, 6)$ pour un signal gaussien et circulaire, tandis que $(\kappa_{u,c}, \chi_{u,c}) = (3, 15)$ pour un signal gaussien et rectiligne ($|\gamma_u| = 1$). Par conséquent, ce résultat montre qu'un signal centré stationnaire tel que $0 \leq \kappa_{u,c} < 2$ ou $3 < \kappa_{u,c}$ ou $0 \leq \chi_{u,c} < 6$ ou $15 < \chi_{u,c}$ est nécessairement non gaussien, ce qui implique que $\kappa_{u,c}$ et $\chi_{u,c}$ sont des métriques du caractère non gaussien du signal.

De plus, les expressions (2.2.8) et (2.2.9)) montrent que pour un signal gaussien, centré et stationnaire, la circularité au SO, FO et SIO sont équivalentes. Pour cette même classe de signaux, le module des coefficients de non-circularité au SO, FO et SIO prend une valeur maximale pour un signal rectiligne, d'où l'équivalence de la non-circularité au SO, FO et SIO. Finalement, on vérifie que $1 \leq \kappa_{u,c}^2 \leq \chi_{u,c}, \forall \gamma_u$.

Dans le second cas, $u(t)$ représente l'enveloppe complexe d'une modulation numérique linéaire définie par :

$$u(t) = \mu e^{i\phi} \sum_n a_n v(t - nT - t_0), \tag{2.2.10}$$

Les a_n forment une séquence aléatoire i.i.d centrée qui représente les symboles transmis, T est la durée symbole, t_0 est l'instant initial d'échantillonnage, la fonction réelle $v(t)$ représente le filtre de mise en forme, μ est une constante qui contrôle l'amplitude de $u(t)$ et ϕ représente le terme de phase. Le coefficient non-circulaire au SO de $u(t)$ est donnée par :

$$\gamma_u = e^{i2\phi} \gamma_a. \tag{2.2.11}$$

où γ_a est le coefficient non-circulaire au SO des symboles a_n.

Il est démontré en annexe B.3 que les coefficients au FO de $u(t)$ sont donnés par :

$$\kappa_{u,c} = \kappa_{a,c} r_{v,1} + \left(2 + |\gamma_a^2|\right) r_{v,2}, \tag{2.2.12}$$

$$\kappa_{u,nc,1} = e^{i4\phi} \left(\kappa_{a,nc,1} r_{v,1} + 3\gamma_a^2 r_{v,2}\right) \tag{2.2.13}$$

$$\kappa_{u,nc,2} = e^{i2\phi} \left(\kappa_{a,nc,2} r_{v,1} + 3\gamma_a r_{v,2}\right), \tag{2.2.14}$$

et ceux du SIO :

$$\chi_{u,c} = \chi_{a,c} r_{v,3} + \left(3\gamma_a \kappa_{a,nc,2}^* + 9\kappa_{a,c} + 3\gamma_a^* \kappa_{a,nc,2}\right) r_{v,4} + \left(9|\gamma_a^2| + 6\right) r_{v,5} \tag{2.2.15}$$

$$\chi_{u,nc,1} = e^{i6\phi} \left(\chi_{a,nc,1} r_{v,3} + 15\gamma_a \kappa_{a,nc,1} r_{v,4} + 15\gamma_a^3 r_{v,5}\right) \tag{2.2.16}$$

$$\chi_{u,nc,2} = e^{i4\phi} \left(\chi_{a,nc,2} r_{v,3} + (10\gamma_a \kappa_{a,nc,2} + 5\kappa_{a,nc,1}) r_{v,4} + 15\gamma_a^2 r_{v,5}\right) \tag{2.2.17}$$

$$\chi_{u,nc,3} = e^{i2\phi} \left(\chi_{a,nc,3} r_{v,3} + (6\gamma_a \kappa_{a,c} + 8\kappa_{a,nc,2} + \gamma_a^* \kappa_{a,nc,1}) r_{v,4} + 3\gamma_a(\gamma_a^2| + 4) r_{v,5}\right) \tag{2.2.18}$$

Dans ce cas, les statistiques $\kappa_{u,c}$, $\kappa_{u,nc,1}$, $\kappa_{u,nc,2}$, $\chi_{u,c}$, $\chi_{u,nc,1}$, $\chi_{u,nc,2}$ et $\chi_{u,nc,3}$ sont aussi en relation avec les statistiques du FO et du SIO des symboles a_n. Les coefficients $r_{v,j}$, $j = 1, .., 5$ sont définis

par :

$$r_{v,1} \overset{\text{def}}{=} \frac{\overline{v^4(t)}}{\left[\overline{v^2(t)}\right]^2}, \quad r_{v,2} \overset{\text{def}}{=} \frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\overline{v^2(t)v^2(t-kT)}}{\left[\overline{v^2(t)}\right]^2}, \quad r_{v,3} \overset{\text{def}}{=} \frac{\overline{v^6(t)}}{\left[\overline{v^2(t)}\right]^3}, \tag{2.2.19}$$

$$r_{v,4} \overset{\text{def}}{=} \frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\overline{v^4(t)v^2(t-kT)}}{\left[\overline{v^2(t)}\right]^3}, \quad r_{v,5} \overset{\text{def}}{=} \frac{6\sum_{0<k<\ell}^{\infty}\overline{v^2(t)v^2(t-kT)v^2(t-\ell T)}}{\left[\overline{v^2(t)}\right]^3}, \tag{2.2.20}$$

où $\overline{(.)} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}(.)dt$.

Les expressions (2.2.12) à (2.2.18) montrent que le filtre de mise en forme $v(t)$ modifie les coefficients aux FO et SIO de a_n. Pour le cas particulier d'une impulsion rectangulaire de durée symbole T, avec une durée d'observation infinie, il est facile de vérifier : $r_{v,1} = r_{v,3} = 1$ et $r_{v,2} = r_{v,4} = r_{v,5} = 0$, ce qui veut dire que $u(t)$ et $e^{i\phi}a_n$ possèdent les mêmes propriétés statistiques au FO et SIO.

Afin d'évaluer le caractère non gaussien et non-circulaire de quelques constellations utilisées en pratique, le tableau 2.1 résume les valeurs des coefficients du SO, FO et SIO des symboles a_n pour les constellations : BPSK, QPSK, 8-PSK, 4-ASK, 16-QAM et pour des signaux gaussiens circulaires (C-Gaus) et gaussiens rectilignes (R-Gaus).

	BPSK	QPSK	8-PSK	4-ASK	16-QAM	C-Gaus	R-Gaus
γ_a	1	0	0	1	0	0	1
$\kappa_{a,c}$	1	1	1	41/25	33/25	2	3
$\kappa_{a,nc,1}$	1	1	0	41/25	-17/25	0	3
$\kappa_{a,nc,2}$	1	0	0	41/25	0	0	3
$\chi_{a,c}$	1	1	1	73/25	49/25	6	15
$\chi_{a,nc,1}$	1	0	0	73/25	0	0	15
$\chi_{a,nc,2}$	1	1	0	73/25	-33/25	0	15
$\chi_{a,nc,3}$	1	0	0	73/25	0	0	15

TABLE 2.1 – Coefficients SO, FO et SIO pour différentes constellations.

Pour le troisième cas $u(t)$ est un signal stationnaire, impulsif centrée et blanc. $u(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, où $r(t)$ et $\theta(t)$ sont des processus aléatoires réels stationnaires et indépendants. $r(t)$ suit une loi de Bernoulli, prenant une amplitude μ avec une probabilité p et 0 avec une probabilité $1-p$, et $\theta(t)$ est uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ ou bien $[\theta_0, \theta_0 + \pi]$ où θ_0 est une constante. Pour le premier intervalle, $u(t)$ est circulaire à l'ordre n, $\forall n$, et rectiligne pour le deuxième intervalle. Pour les deux intervalles de phase on a :

$$\chi_{u,c} = \kappa_{u,c}^2 = \frac{1}{p^2} \tag{2.2.21}$$

et pour le cas rectiligne, nous avons :

$$\kappa_{u,nc,1} = \frac{1}{p}e^{i4\theta_0}, \ \kappa_{u,nc,2} = \frac{1}{p}e^{i2\theta_0}, \ \chi_{u,nc,1} = \frac{1}{p^2}e^{i6\theta_0}, \ \chi_{u,nc,2} = \frac{1}{p^2}e^{i4\theta_0}, \ \chi_{u,nc,3} = \frac{1}{p^2}e^{i2\theta_0}. \tag{2.2.22}$$

2.2.3 Formulation du problème

Il est bien connu [68] que la meilleure estimée $\widehat{s}_{\text{MMSE}}(t)$, de $s(t)$, au sens de l'erreur moyenne quadratique, à partir du vecteur d'observation $\mathbf{x}(t)$, est l'espérance conditionnelle de $s(t)$ par rapport à $\mathbf{x}(t)$, définie par :

$$\widehat{s}_{\text{MMSE}}(t) = \text{E}[s(t)|\mathbf{x}(t)]. \tag{2.2.23}$$

Considérons le filtre spatial $\mathbf{w}_f$ de dimension $N \times 1$ tel que $\mathbf{w}_f^H \mathbf{s} = 1$. En appliquant la propriété de linéarité de l'espérance conditionnelle (2.2.23) au modèle (2.2.1), nous obtenons :

$$\widehat{s}_{\text{MMSE}}(t) = \mathbf{w}_f^H \mathbf{x}(t) - \mathbf{w}_f^H \text{E}[\mathbf{n}(t)|\mathbf{x}(t)] = s(t) + \mathbf{w}_f^H \left(\mathbf{n}(t) - \text{E}[\mathbf{n}(t)|\mathbf{x}(t)]\right). \tag{2.2.24}$$

Les expressions (2.2.23) et (2.2.24) montrent que l'estimée $\widehat{s}_{\text{MMSE}}(t)$, et donc le beamformer optimal, dépend de la loi de probabilité conjointe de $(s(t), \mathbf{x}(t))$ ou bien $(\mathbf{n}(t), \mathbf{x}(t))$, et donc exploite implicitement le caractère non gaussien et non-circulaire du SOI et du bruit total $\mathbf{n}(t)$. Cependant cette loi de probabilité n'est pas connu pratiquement et ce n'est qu'une solution sous-optimale qui est possible.

L'information a priori du vecteur directionnel $\mathbf{s}$ permet la projection orthogonale de $\mathbf{x}(t)$ sur ce dernier et sur l'espace orthogonal $\mathbf{s}^\perp$ donnant ainsi respectivement les observations $\mathbf{x}_s(t) \overset{\text{def}}{=} (\mathbf{s}^H\mathbf{s})^{-1}\mathbf{s}\mathbf{s}^H\mathbf{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{\Pi}_s\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{x}_{s^\perp}(t) \overset{\text{def}}{=} [\mathbf{I} - (\mathbf{s}^H\mathbf{s})^{-1}\mathbf{s}\mathbf{s}^H]\mathbf{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{\Pi}_{s^\perp}\mathbf{x}(t)$ tel que :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_{s^\perp}(t) = s(t)\mathbf{s} + \mathbf{n}_s(t) + \mathbf{n}_{s^\perp}(t), \tag{2.2.25}$$

où $\mathbf{n}_s(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{\Pi}_s\mathbf{n}(t)$ et $\mathbf{n}_{s^\perp}(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{\Pi}_{s^\perp}\mathbf{n}(t) = \mathbf{x}_{s^\perp}(t)$.

Considérons l'estimé $\widehat{s}(t)$ de $s(t)$ à partir d'une fonction arbitraire de $\mathbf{x}(t)$, $f(\mathbf{x}(t))$. Si on impose à $f(\mathbf{x}(t))$ d'être une fonction linéaire par rapport à $s(t)$ garantissant aucun déformation du SOI, $\widehat{s}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ devient une fonction linéaire de $\mathbf{x}_s(t)$ et prend la forme suivante :

$$\widehat{s}(t) = \mathbf{w}_f^H \mathbf{x}_s(t) - g(\mathbf{x}_{s^\perp}(t)) = s(t) + (\mathbf{s}^H\mathbf{s})^{-1}\mathbf{s}^H\mathbf{n}(t) - g(\mathbf{n}_{s^\perp}(t)). \tag{2.2.26}$$

Le beamformer MVDR, possédant la structure (2.2.26), est celui qui minimise l'erreur quadratique moyenne $\text{E}[|(\mathbf{s}^H\mathbf{s})^{-1}\mathbf{s}^H\mathbf{n}(t) - g(\mathbf{n}_{s^\perp}(t))|^2]$. La solution à ce problème est l'espérance conditionnelle : $g_{\text{MVDR}}(\mathbf{n}_{s^\perp}(t)) = \text{E}[(\mathbf{s}^H\mathbf{s})^{-1}\mathbf{s}^H\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)]$ et le beamformer MVDR (2.2.26) prend la forme suivante :

$$\widehat{s}_{\text{MVDR}}(t) = \mathbf{w}_f^H \mathbf{x}_s(t) - (\mathbf{s}^H\mathbf{s})^{-1}\mathbf{s}^H \text{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)] = s(t) + (\mathbf{s}^H\mathbf{s})^{-1}\mathbf{s}^H \left(\mathbf{n}(t) - \text{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)]\right). \tag{2.2.27}$$

L'expression (2.2.27) décrit la sortie du beamformer MVDR en fonction de la loi de probabilité du bruit total $\mathbf{n}(t)$. Ce beamformer permet donc d'exploiter le caractère non gaussien et non-circulaire potentiel du bruit total (interférences plus bruit de fond) seulement. En choisissant $\mathbf{w}_f = (\mathbf{s}^H\mathbf{s})^{-1}\mathbf{s}$ et en comparant (2.2.27) à (2.2.24), nous pouvons dire que $\widehat{s}_{\text{MMSE}}(t)$ et $\widehat{s}_{\text{MVDR}}(t)$ possèdent des formes identiques mais $\text{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{x}(t)]$ dans (2.2.24), qui contient de l'information sur la loi de probabilité du

SOI, est remplacée par $\mathrm{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)]$ dans (2.2.27), qui contient aucune information sur le SOI. Si $\mathbf{n}(t)$ est gaussien circulaire, $\mathrm{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)]$ est une fonction linéaire de $\mathbf{n}_{s^\perp}(t)$ et le beamformer MVDR (2.2.27) est une fonction linéaire de $\mathbf{x}(t)$ correspondant au beamformer classique de Capon [11, 12]. Si $\mathbf{n}(t)$ est gaussien et non-circulaire, $\mathrm{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)]$ est une fonction WL de $\mathbf{n}_{s^\perp}(t)$ et le beamformer MVDR (2.2.27) est une fonction WL de $\mathbf{x}(t)$ correspondant au beamformer WL MVDR_1 [21]. Si $\mathbf{n}(t)$ est non-Gaussian, $\mathrm{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)]$ est une fonction non-linéaire de $\mathbf{n}_{s^\perp}(t)$ et le beamformer MVDR (2.2.27) est une fonction non-linéaire de $\mathbf{x}(t)$, selon la loi de probabilité du bruit total inconnu en pratique. Pour cette raison, on propose dans ce chapitre d'approximer chaque composante de $\mathrm{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)]$ par un polynôme fonction des composantes de $\mathbf{n}_{s^\perp}(t)$ à travers une implémentation du beamformer MVDR complexe de Volterra.

La relation entrée/sortie du beamformer complexe de Volterra d'ordre M de structure complète est définie dans [15][16] par :

$$y(t) = w_0 + \sum_{m=1}^{M} \sum_{q=0}^{m} \mathbf{w}_{m,q}^H [\mathbf{x}(t)^{\otimes(m-q)} \otimes \mathbf{x}^*(t)^{\otimes q}], \tag{2.2.28}$$

où $\mathbf{w}_{m,q}$ avec $0 \leq q \leq m$ et $1 \leq m \leq M$ est un filtre complexe $N^m \times 1$ et w_0 est un scalaire qui assure que $y(t)$ est de moyenne nulle quelles que soient les entrées du beamformer. Puisque $\mathbf{x}(t)$ est de moyenne nulle , $w_0 = 0$, l'expression (2.2.28) définit un beamformer WL [68] pour $M = 1$, tandis que pour $M = 2$ elle définit beamformer complexe linéaire-quadratique [17].

Rappelons que $\mathrm{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)]$ est la projection orthogonale de $\mathbf{n}(t)$ dans l'espace des vecteurs aléatoires qui sont fonctions de $\mathbf{n}_{s^\perp}(t)$. Donc, la meilleure approximation polynômiale d'ordre M de $\mathrm{E}[\mathbf{n}(t)/\mathbf{n}_{s^\perp}(t)]$ correspond à la projection orthogonale de $\mathbf{n}(t)$ dans l'espace généré par les composantes de (2.2.28), avec $\mathbf{n}_{s^\perp}(t)$ au lieu $\mathbf{x}(t)$. Le terme $\mathbf{w}_{m,q}^H[\mathbf{x}(t)^{\otimes(m-q)} \otimes \mathbf{x}^*(t)^{\otimes q}]$ n'apporte de l'information que seulement si $\mathbf{w}_{m,q}^H[\mathbf{n}(t)^{\otimes(m-q)} \otimes \mathbf{n}^*(t)^{\otimes q}]$ est corrélé avec $\mathbf{n}(t)$, ce qui nécessite que les moments d'ordres $(m+1)$, $\mathrm{E}[n_{i_1}(t)...n_{i_{m-q}}(t)n^*_{i_{m-q+1}}(t)...n^*_{i_{m+1}}(t)]$ soient différents de zéro, où $n_i(t)$ est l'i-ème composante de $\mathbf{n}(t)$. Quand la loi de probabilité de $\mathbf{n}(t)$ est symétrique, ce qui est souvent valable en pratique, les moments d'ordres impairs de $\mathbf{n}(t)$ sont nuls. Donc, seulement les beamformer MVDR complexes de Volterra d'ordre M tel que M est impair et contenant uniquement des termes d'ordres impairs présentent une amélioration des performances par rapport aux beamformers classiques. Pour cette raison, on limite notre étude au beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre, ne contenant aucun terme du second ordre et exploitant uniquement les statistiques du bruit total.

2.3 Beamforming MVDR de Volterra du troisième ordre

2.3.1 Beamformer de Volterra du troisième ordre

Considérons un beamformer complexe de Volterra de structure partielle du troisième ordre dont le signal de sortie s'écrit :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{w}_{1,0}^H\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_{1,1}^H\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{w}_{3,0}^H[\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}(t)] + \mathbf{w}_{3,1}^H[\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)] \\ &+ \mathbf{w}_{3,2}^H[\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)] + \mathbf{w}_{3,3}^H[\mathbf{x}^*(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathbf{w}}^H\widetilde{\mathbf{x}}(t), \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

où $\mathbf{w}_{1,0}$ et $\mathbf{w}_{1,1}$ sont des filtres spatiaux de dimension $N\times 1$, $\mathbf{w}_{3,0}$, $\mathbf{w}_{3,1}$, $\mathbf{w}_{3,2}$ et $\mathbf{w}_{3,3}$ sont des filtres spatiaux de dimension $N^3\times 1$, et $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ et $\widetilde{\mathbf{w}}$ sont les vecteurs étendus d'observation et du filtre spatial de dimension $(2N+4N^3)\times 1$. Avec : $\widetilde{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}^H(t), [\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}(t)]^T, [\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)]^T, [\mathbf{x}(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)]^T, [\mathbf{x}^*(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)\otimes\mathbf{x}^*(t)]^T]^T$ et $\widetilde{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}_{1,0}^T, \mathbf{w}_{1,1}^T, \mathbf{w}_{3,0}^T, \mathbf{w}_{3,1}^T, \mathbf{w}_{3,2}^T, \mathbf{w}_{3,3}^T]^T$. Les deux premiers termes de l'expression (2.3.1) décrivent la sortie du beamformer linéaire quand $\mathbf{w}_{1,1} = \mathbf{0}$ et celle du beamformer WL dans le cas contraire. Les termes d'ordre trois sont appelés *termes cubiques* et notés (C). Dans ce qui suit, le nombre r des vecteurs d'observation cubiques de dimension $N^3\times 1$, $\mathbf{x}_{3,q}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{x}(t)^{\otimes(3-q)}\otimes\mathbf{x}^*(t)^{\otimes q}]$, visible dans (2.3.1) peuvent être tels que $1\le r\le 4$, selon le nombre des filtres spatiaux non-nuls, $\mathbf{w}_{3,q}$, $(0\le q\le 3)$. L'entier q est appelé *indice* de $\mathbf{x}_{3,q}(t)$ et $\mathbf{w}_{3,q}$. En présence de r termes cubiques $(1\le r\le 4)$ possédant l'indice q_j $(1\le j\le r)$, $(0\le q_j\le 3)$, le beamformer (2.3.1) est noté L-C$(q_1,q_2,..,q_r)$ si la première partie est linéaire (L) ou bien WL-C$(q_1,q_2,..,q_r)$ si la première partie est WL.

En particulier, quand tous les termes de (2.3.1) sont considérés, le beamformer associé est appelé WL-C(0,1,2,3), tandis que seulement le beamformer L-C(1) n'a été considéré dans la littérature [85]. En effet, tous les beamformers L-C$(q_1,q_2,..,q_r)$ et WL-C$(q_1,q_2,..,q_r)$ $(0\le q_j\le 3)$, $(1\le j\le r\le 4)$, à l'exception du beamformer L-C(1), exploitent des informations sur la non-circularité aux ordres supérieurs potentielle de l'observation, donc ce beamformer peut prendre le nom d'un beamformer widely non-linear du troisième ordre, tel que suggéré dans [23].

2.3.2 Beamformer MVDR de Volterra du troisième ordre

En utilisant (2.2.1) dans (2.3.1), on déduit du paragraphe 2.2.3 que pour construire le beamformer MVDR complexe de Volterra exploitant les statistiques du bruit total $\mathbf{n}(t)$ seulement, il est nécessaire d'imposer des contraintes de non-distorsion du SOI à la sortie du beamformer (2.3.1) en gardant que le terme proportionnel à $s(t)$ et en annulant les termes non-linéaires de $s(t)$. Les filtres spatiaux des termes du premier ordre doivent vérifier les contraintes suivantes :

$$\mathbf{w}_{1,0}^H\mathbf{s} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_{1,1}^H\mathbf{s}^* = 0, \tag{2.3.2}$$

qui correspondent aux contraintes imposées dans [21] pour le beamformer WL MVDR$_1$. Cependant, pour les filtres spatiaux des termes cubiques, les contraintes qui annulent les termes non-linéaires de $s(t)$ ne sont pas si évidentes à obtenir puisque $\mathbf{n}(t)$ est un vecteur aléatoire. En exploitant l'information a priori, que le vecteur directionnel $\mathbf{s}$ supposé connu, il est possible de construire une base orthonormale $(\mathbf{u}_1, ...\mathbf{u}_{N-1})$ de l'espace $\mathbf{s}^{\perp}$, ce qui signifie que $(\mathbf{s}, \mathbf{u}_1, ...\mathbf{u}_{N-1})$ devient une base orthonormale de $\mathbb{C}^N$. Le vecteur $\mathbf{n}(t)$ est donc une combinaison linéaire de ces vecteurs tel que :

$$\mathbf{n}(t) = \nu_0(t)\mathbf{s} + \sum_{i=1}^{N-1} \nu_i(t)\mathbf{u}_i, \tag{2.3.3}$$

où $\nu_i(t)$ $(0 \leq i \leq N-1)$ sont des variables aléatoires centrées et corrélées (mais décorrélées de $s(t)$). Pour $0 \leq q \leq 3$, remplaçant (2.2.1) et (2.3.3) dans le terme cubique $\mathbf{w}_{3,q}^H \mathbf{x}_{3,q}(t)$ de l'équation (2.3.1). Afin d'annuler les termes non-linéaires de $s(t)$, il est nécessaire d'annuler tous les termes de $\mathbf{w}_{3,q}^H \mathbf{x}_{3,q}(t)$ à l'exception de ceux qui contiennent seulement des composantes du bruit $\mathbf{u}_i$. Par exemple pour $q = 1$, on doit imposer $1 + 3(N-1) + 3(N-1)^2 = N^3 - (N-1)^3$ contraintes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*) &= 0 \\
\mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*) &= 0,\ \mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{s}^*) = 0,\ \mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{u}_i^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\
\mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{u}_j\otimes\mathbf{s}^*) &= 0,\ \mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{u}_j^*) = 0,\ \mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{u}_j^*) = 0, \quad 1 \leq i,j \leq N-1
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Si on réarrange les $N^3-(N-1)^3$ vecteurs de contraintes $\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*$, $\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*$.... $\mathbf{s}\otimes\mathbf{u}_i\otimes\mathbf{u}_j^*$, $1 \leq i,j \leq N-1$ qui apparaissent en (2.3.4) dans la matrice de dimension $N^3 \times (N^3 - (N-1)^3)$, dénotée par $\mathbf{C}_1$, L'ensemble des contraintes (2.3.4) peut être écrit d'une façon plus compacte $\mathbf{C}_1^H \mathbf{w}_{3,1} = \mathbf{0}_{N^3-(N-1)^3}$. Pour d'autres valeurs de q $(q = 0, 2, 3)$, les contraintes données par (2.3.4) sont les mêmes sauf qu'il faut remplacer $\mathbf{w}_{3,1}$ par $\mathbf{w}_{3,q}$ donc les vecteurs des contraintes de dimension $N^3 - (N-1)^3$ contiennent q termes conjugués au lieu de 1. Pour chaque valeur q, si on arrange les $N^3 - (N-1)^3$ vecteurs de contraintes en une matrice de dimension $N^3 \times (N^3 - (N-1)^3)$, dénotée $\mathbf{C}_q$, l'ensemble des contraintes peuvent être écrit comme suit :

$$\mathbf{C}_q^H \mathbf{w}_{3,q} = \mathbf{0}_{N^3-(N-1)^3}. \tag{2.3.5}$$

En réarrangeant les $2 + 4[N^3 - (N-1)^3]$ vecteurs contraintes qui apparaissent dans les équations (2.3.2) et (2.3.5) dans une matrice $\mathbf{C}$ de dimension $(2N + 4N^3) \times (2 + 4[N^3 - (N-1)^3])$ définie par :

$$\mathbf{C} = \mathrm{Diag}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*, \mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3). \tag{2.3.6}$$

L'ensemble de toutes les contraintes prend la forme suivante :

$$\mathbf{C}^H \widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{f}, \tag{2.3.7}$$

où $\mathbf{f}$ est un vecteur de dimension $(2+4[N^3-(N-1)^3]) \times 1$ défini par : $\mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} (1, \mathbf{0}_{1+4[N^3-(N-1)^3]}^T)^T$. Sous les contraintes (2.3.7) et en utilisant le modèle (2.2.1), la sortie (2.3.1) du beamformer complexe de

Volterra du troisième ordre est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t) + \mathbf{w}_{1,0}^H \mathbf{n}(t) + \mathbf{w}_{1,1}^H \mathbf{n}^*(t) + \mathbf{w}_{3,0}^H [\mathbf{n}(t) \otimes \mathbf{n}(t) \otimes \mathbf{n}(t)] + \mathbf{w}_{3,1}^H [\mathbf{n}(t) \otimes \mathbf{n}(t) \otimes \mathbf{n}^*(t)] \\ &+ \mathbf{w}_{3,2}^H [\mathbf{n}(t) \otimes \mathbf{n}^*(t) \otimes \mathbf{n}^*(t)] + \mathbf{w}_{3,3}^H [\mathbf{n}^*(t) \otimes \mathbf{n}^*(t) \otimes \mathbf{n}^*(t)] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} s(t) + \widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{n}}(t), \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

où $\widetilde{\mathbf{n}}(t)$ est défini de la même façon que $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ mais avec $\mathbf{n}(t)$ à la place de $\mathbf{x}(t)$.

La meilleure estimée (2.3.1) ou (2.3.8) du SOI $s(t)$, exploitant les statistiques du bruit total seulement, correspond à la sortie du beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre $\widetilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}}$ qui minimise la puissance moyenne en sortie, $\widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\widetilde{x}} \widetilde{\mathbf{w}} = \pi_s + \widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\widetilde{n}} \widetilde{\mathbf{w}}$, où $\pi_s \stackrel{\text{def}}{=} < \mathrm{E}|s(t)|^2 >$ et $\mathbf{R}_{\widetilde{x}} \stackrel{\text{def}}{=} < \mathrm{E}[\widetilde{\mathbf{x}}(t)\widetilde{\mathbf{x}}^H(t)] >$, $\mathbf{R}_{\widetilde{n}} \stackrel{\text{def}}{=} < \mathrm{E}[\widetilde{\mathbf{n}}(t)\widetilde{\mathbf{n}}^H(t)] >$ sont les matrices de corrélation moyenne respectives de $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ et $\widetilde{\mathbf{n}}(t)$, sous la contrainte (2.3.7),

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}} \stackrel{\text{def}}{=} \arg\{\min_{\mathbf{C}^H \widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{f}} \widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\widetilde{x}} \widetilde{\mathbf{w}}\} = \arg\{\min_{\mathbf{C}^H \widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{f}} \widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\widetilde{n}} \widetilde{\mathbf{w}}\}. \tag{2.3.9}$$

Cependant, comme le vecteur d'observation $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ et $\widetilde{\mathbf{n}}(t)$ possèdent des composantes redondantes pour $N > 1$, les matrices $\mathbf{R}_{\widetilde{x}}$ et $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}$ sont singulières et le vecteur $\widetilde{\mathbf{w}}$ solution du problème précédent d'optimisation sous contraintes est difficile à trouver (voir i.e., [41, sec.19.3c]). Pour résoudre ce problème, les redondances de $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ ou celle de $\widetilde{\mathbf{n}}(t)$ doivent être retirées et les contraintes adaptées en fonction. Cette solution n'est pas aussi facile à réaliser puisque la position des redondances dans $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ ou $\widetilde{\mathbf{n}}(t)$ et dans les vecteurs de contraintes peuvent être différentes. Mais heureusement ce problème de minimisation sous contraintes peut-être modifié en un problème de minimisation sans contraintes en utilisant une structure équivalente de Volterra GSC. Cette structure sera introduite au paragraphe 2.3.3. Avec cette structure, les redondances du signal peuvent être retirées facilement.

Quand tous les termes du troisième ordre dans l'expression (2.3.1) sont utilisés, la relation (2.3.8) montre que le beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre exploite toutes les statistiques circulaires et non-circulaires du SO, FO et SIO du bruit total, décrits dans (2.2.2) pour $n = 2, 4$ et 6 avec $n(t)$ à la place de $x(t)$, constituant les éléments de la matrice de covariance étendue $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}$. Cependant, si quelques termes dans (2.3.1) sont retirés, quelques statistiques ne seront pas exploitées par le beamformer complexe de Volterra du troisième ordre. Par exemple, le beamformer L-C(1) dans [85] n'exploite que les coefficients circulaires au SO, FO et au SIO du bruit total $\mathbf{n}(t)$ et donc n'exploite pas le caractère non-circulaire du bruit total. Pour exploiter la non-circularité au second ordre du bruit total $\mathbf{n}(t)$, la première partie de l'expression (2.3.1) doit être nécessairement WL. De plus, chaque beamformer WL-C [resp. L-Cubique] avec au moins un terme du troisième ordre [resp. deux termes du troisième ordre] dans (2.3.1), exploite au moins quelques statistiques non-circulaire du FO de $\mathbf{n}(t)$. Finalement, l'exploitation des statistiques non-circulaires au SIO de $\mathbf{n}(t)$ avec le beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre nécessite l'existence de deux termes cubiques dans la composition du vecteur d'observation (2.3.1) et donc ne peut pas être réalisé sans l'exploitation de la non-circularité au FO de $\mathbf{n}(t)$.

Enfin remarquons que nous pourrions concevoir d'autres contraintes que les contraintes (2.3.4) si nous disposions de la connaissance a priori que le SOI $s(t)$ présentait un module constant. Ce point est développé dans l'annexe B.4.

Par ailleurs, nous pourrions concevoir des contraintes moins fortes que les contraintes (2.3.4) en globalisant certains sous ensembles de contraintes sous la forme de contraintes somme. Cela devrait pouvoir augmenter le SINR en sortie du beamformer de Volterra associé. Ce point sera abordé dans l'annexe B.5 où nous démontrerons que finalement la structure équivalente GCS associée se réduit à la structure GCS du beamformer de Volterra que nous venons de présenter.

2.3.3 Structure GSC équivalente du Beamformer MVDR de Volterra du troisième ordre

La structure GSC associée au beamformer MVDR de Volterra, transforme le problème d'optimisation sous contrainte en un autre problème d'optimisation sans contrainte. Cette réécriture sans contrainte facilite le retrait des redondances de $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ et permet de réduire la complexité de calcul.

Pour cela remarquons que l'on peut décomposer n'importe quel filtre spatial $\widetilde{\mathbf{w}}$ en deux composantes :

$$\widetilde{\mathbf{w}} = \widetilde{\mathbf{w}}_f - \widetilde{\mathbf{v}}, \tag{2.3.10}$$

où $\widetilde{\mathbf{w}}_f \overset{\text{def}}{=} [\mathbf{w}_f^T, \mathbf{0}_{N+4N^3}^T]^T$, tel que $\mathbf{w}_f$ est un filtre spatial fixe de dimension $N \times 1$ qui satisfait $\mathbf{w}_f^H \mathbf{s} = 1$ (e.g., $\mathbf{w}_f = \|\mathbf{s}\|^{-2}\mathbf{s}$). Puisque $\widetilde{\mathbf{w}}_f$ satisfait les contraintes (2.3.7), alors on peut les réécrire comme suit :

$$\mathbf{C}^H \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{2+4[N^3-(N-1)^3]}. \tag{2.3.11}$$

Ce qui veut dire que $\widetilde{\mathbf{v}} \in \text{span}(\mathbf{C})^\perp$, l'espace orthogonal à celui engendré par les colonnes de $\mathbf{C}$. Considérons maintenant la matrice bloquante $\mathbf{B}$ de dimension $[2N + 4N^3] \times [2(N-1) + 4(N-1)^3)]$ et de rang plein colonne, dont les colonnes engendrent $\text{span}(\mathbf{C})^\perp$. On obtient :

$$\mathbf{B}^H \mathbf{C} = \mathbf{O}_{[2(N-1)+4(N-1)^3] \times [2+4(N^3-(N-1)^3)]}. \tag{2.3.12}$$

On déduit que l'expression (2.3.11) est équivalente à l'existence d'un filtre spatial $\widetilde{\mathbf{w}}_a$ de dimension $[2(N-1) + 4(N-1)^3] \times 1$ tel que :

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\widetilde{\mathbf{w}}_a. \tag{2.3.13}$$

Considérons la matrice $\mathbf{B}_{1,0}$ de dimension $N \times (N-1)$ et de rang plein colonne qui vérifie : $\mathbf{B}_{1,0}^H \mathbf{s} = \mathbf{0}_{N-1}$. La matrice $\mathbf{B}_{1,0} = [\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{N-1}]$ est une solution qui remplit cette dernière condition.

En utilisant les propriétés du produit de Kronecker, la matrice :

$$\mathbf{B} = \text{Diag}(\mathbf{B}_{1,0}, \mathbf{B}_{1,0}^*, \mathbf{B}_{3,0}, \mathbf{B}_{3,1}, \mathbf{B}_{3,2}, \mathbf{B}_{3,3}), \tag{2.3.14}$$

de taille $(2N + 4N^3) \times (2(N-1) + 4(N-1)^3)$ est une matrice bloquante de rang plein colonne qui vérifie (2.3.12), où $\mathbf{B}_{3,q} = [\mathbf{B}_{1,0}^{\otimes(3-q)} \otimes \mathbf{B}_{1,0}^{*\otimes q}]$, $q = 0, .., 3$. Dans ce cas, le beamformer MVDR de

Volterra (2.3.9) qui satisfait les contraintes (2.3.7) est équivalent au filtre spatial $\widetilde{\mathbf{w}} = \widetilde{\mathbf{w}}_f - \mathbf{B}\widetilde{\mathbf{w}}_{a,\text{opt}}$, sans aucune condition supplémentaire. Par conséquent, $\widetilde{\mathbf{w}}_{a,\text{opt}}$ minimise la puissance moyenne de $y(t) = (\widetilde{\mathbf{w}}_f - \mathbf{B}\widetilde{\mathbf{w}}_a)^H\widetilde{\mathbf{x}}(t)$:

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{a,\text{opt}} = \arg\{\min_{\widetilde{\mathbf{w}}_a} < \mathrm{E}|(\widetilde{\mathbf{w}}_f - \mathbf{B}\widetilde{\mathbf{w}}_a)^H\widetilde{\mathbf{x}}(t)|^2 >\}, \tag{2.3.15}$$

où $\widetilde{\mathbf{w}}_f^H\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{w}_f^H\mathbf{x}(t)$. On dénote par $\mathbf{z}(t)$ le vecteur de dimension $(N-1)\times 1$, avec $\mathbf{z}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}_{1,0}^H\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B}_{1,0}^H\widetilde{\mathbf{n}}(t)$ et en utilisant la propriété $\mathbf{B}_{3,q}^H\mathbf{x}_{3,q}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{B}_{1,0}^{\otimes(3-q)} \otimes \mathbf{B}_{1,0}^{*\otimes q}]^H[\mathbf{x}(t)^{\otimes(3-q)} \otimes \mathbf{x}^*(t)^{\otimes q}] = [(\mathbf{B}_{1,0}^H\mathbf{x}(t))^{\otimes(3-q)} \otimes (\mathbf{B}_{1,0}^T\mathbf{x}^*(t))^{\otimes q}] = [\mathbf{z}(t)^{\otimes(3-q)} \otimes \mathbf{z}^*(t)^{\otimes q}]$, nous obtenons :

$$\mathbf{B}^H\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B}^H\widetilde{\mathbf{n}}(t) = \widetilde{\mathbf{z}}(t), \tag{2.3.16}$$

où $\widetilde{\mathbf{z}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{z}^T(t), \mathbf{z}^H(t), [\mathbf{z}(t)\otimes\mathbf{z}(t)\otimes\mathbf{z}(t)]^T, [\mathbf{z}(t)\otimes\mathbf{z}(t)\otimes\mathbf{z}^*(t)]^T, [\mathbf{z}(t)\otimes\mathbf{z}^*(t)\otimes\mathbf{z}^*(t)]^T, [\mathbf{z}^*(t)\otimes\mathbf{z}^*(t)\otimes\mathbf{z}^*(t)]^T$ et le problème de minimisation (2.3.15) devient :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{a,\text{opt}} = \arg\{\min_{\widetilde{\mathbf{w}}_a} < \mathrm{E}|\mathbf{w}_f^H\mathbf{x}(t) - \widetilde{\mathbf{w}}_a^H\widetilde{\mathbf{z}}(t)|^2 >\}, \tag{2.3.17}$$

Néanmoins, pour $N > 2$, chaque vecteur $\mathbf{z}_{3,q}(t)$, de dimension $(N-1)^3\times 1$ avec $\mathbf{z}_{3,q}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{z}(t)^{\otimes(3-q)}\otimes \mathbf{z}^*(t)^{\otimes q}]$ avec $q = 0,..,3$, qui compose le vecteur étendu $\widetilde{\mathbf{z}}(t)$ possède des composantes redondantes, qui génère une matrice de covariance moyenne singulière, $\mathbf{R}_{\tilde{z}} \stackrel{\text{def}}{=} < \mathrm{E}[\widetilde{\mathbf{z}}(t)\widetilde{\mathbf{z}}^H(t)] >$ de $\widetilde{\mathbf{z}}(t)$ qui rend difficile la résolution du problème d'optimisation (2.3.17). En effet, pour une valeur donnée de q $(0 \le q \le 3)$, les éléments du vecteur $\mathbf{z}_{3,q}(t)$ sont les grandeurs $z_{i_1}(t),.,z_{i_{3-q}}(t), z^*_{i_{4-q}}(t),.,z^*_{i_3}(t)$ avec $1 \le i_j \le N-1$ et $1 \le j \le 3$. Si on dénote par N_q le nombre de composantes non-redondantes de $\mathbf{z}_{3,q}(t)$, il est facile de prouver que $N_0 = N_3 = \frac{(N^2-1)N}{6}$ et $N_1 = N_2 = \frac{(N-1)^2N}{2}$. Pour chaque valuer de q, $0 \le q \le 3$, on note par $\mathbf{z}'_{3,q}(t)$ le vecteur non-redondant associé à $\mathbf{z}_{q,3}(t)$, Il existe une *matrice de sélection* de dimension $N_q \times (N-1)^3$ dénotées par $\mathbf{K}_q$, qui permet de sélectionner les composantes non-redondantes de $\mathbf{z}_{3,q}(t)$, i.e.,

$$\mathbf{z}'_{3,q}(t) = \mathbf{K}_q\mathbf{z}_{3,q}(t), q = 0,1,2,3. \tag{2.3.18}$$

On définit : $\widetilde{\mathbf{z}}'(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{z}'^T(t), \mathbf{z}'^H(t), \mathbf{z}'^T_{3,0}(t), \mathbf{z}'^T_{3,1}(t), \mathbf{z}'^T_{3,2}(t), \mathbf{z}'^T_{3,3}(t)]^T$, qui n'est que le vecteur étendu non-redondant de dimension $N_z \times 1$ associé à $\widetilde{\mathbf{z}}(t)$, avec $N_z = 2(N-1)(2N^2-N+3)/3$:

$$\widetilde{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{K}\widetilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{B}^H\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{B}^H\widetilde{\mathbf{n}}(t), \tag{2.3.19}$$

où $\mathbf{K}$ est la *matrice de sélection* de dimension $N_z\times[2(N-1)+4(N-1)^3]$ qui permet de ne considérer que les composantes non-redondantes de l'observation $\widetilde{\mathbf{z}}(t)$ et qui est définie par :

$$\mathbf{K} = \mathrm{Diag}(\mathbf{I}_{N-1}, \mathbf{I}_{N-1}, \mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3). \tag{2.3.20}$$

En éliminant les redondances, le problème d'optimisation (2.3.17) consiste à déterminer le vecteur $\widetilde{\mathbf{w}}'_{a,\text{opt}}$ de dimension $N_z \times 1$ tel que

$$\widetilde{\mathbf{w}}'_{a,\text{opt}} = \arg\{\min_{\widetilde{\mathbf{w}}'_a} < \mathrm{E}|\mathbf{w}_f^H\mathbf{x}(t) - \widetilde{\mathbf{w}}'^H_a\widetilde{\mathbf{z}}'(t)|^2 >\}. \tag{2.3.21}$$

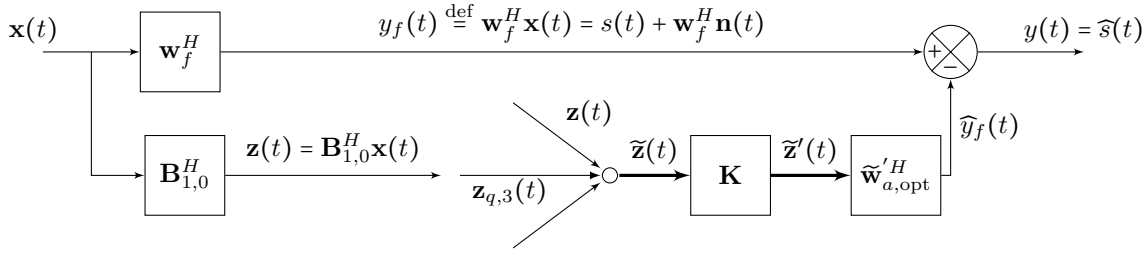


FIGURE 2.1 – Structure GSC équivalent du beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre.

dont la solution est :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{a,\text{opt}}^{'} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_{\tilde{z}'}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{z}',x}\mathbf{w}_f = [\mathbf{K}\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{x}}\mathbf{B}\mathbf{K}^H]^{-1}\mathbf{K}\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{x}}\widetilde{\mathbf{w}}_f = [\mathbf{K}\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{n}}\mathbf{B}\mathbf{K}^H]^{-1}\mathbf{K}\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{n}}\widetilde{\mathbf{w}}_f, \quad (2.3.22)$$

avec $\mathbf{R}_{\tilde{z}'} \stackrel{\text{def}}{=} < \text{E}[\tilde{\mathbf{z}}'(t)\tilde{\mathbf{z}}'^H(t)] >$ et $\mathbf{R}_{\tilde{z}',x} \stackrel{\text{def}}{=} < \text{E}[\tilde{\mathbf{z}}'(t)\mathbf{x}^H(t)] >$. Par conséquent, la sortie $y(t)$ de la structure GSC équivalente est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{w}_f^H\mathbf{x}(t) - \widetilde{\mathbf{w}}_{a,\text{opt}}^{'H}\tilde{\mathbf{z}}'(t) = s(t) + \mathbf{w}_f^H\mathbf{n}(t) - \widetilde{\mathbf{w}}_{a,\text{opt}}^{'H}\mathbf{K}\mathbf{B}^H\widetilde{\mathbf{x}}(t) \\ &= s(t) + (\widetilde{\mathbf{w}}_f - \mathbf{B}\mathbf{K}^H\widetilde{\mathbf{w}}_{a,\text{opt}}^{'})^H\widetilde{\mathbf{n}}(t). \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

La structure GSC équivalente du beamformer MVDR de Volterra décrite dans la figure 2.1 est en concordance avec la struture optimal GSC décrite en (2.2.27). Il faut noter que la structure GSC équivalente de Volterra du troisième ordre peut être dérivée pour toute structure partielle arbitraire L-C$(q_1, q_2, .., q_r)$ et WL-C$(q_1, q_2, .., q_r)$, en définissant les matrices de blocage et de sélection $\mathbf{B}$ et $\mathbf{K}$ définies dans (2.3.14) et (2.3.20), par respectivement Diag$(\mathbf{B}_{1,0}, \mathbf{B}_{3,q_1}, \mathbf{B}_{3,q_2}, .., \mathbf{B}_{3,q_r})$, Diag$(\mathbf{I}_{N-1}, \mathbf{K}_{q_1}, \mathbf{K}_{q_2}, .., \mathbf{K}_{q_r})$, et Diag$(\mathbf{B}_{1,0}, \mathbf{B}_{1,0}^*, \mathbf{B}_{3,q_1}, \mathbf{B}_{3,q_2}, .., \mathbf{B}_{3,q_r})$, Diag$(\mathbf{I}_{N-1}, \mathbf{I}_{N-1}, \mathbf{K}_{q_1}, \mathbf{K}_{q_2}, .., \mathbf{K}_{q_r})$. De plus, la structure GSC associée aux beamformers de Capon et WL-MVDR$_1$ [21] peuvent être déduites à partir de la figure 2.1 en gardant seulement les termes linéaire $z(t)$ et WL $(z(t), z^*(t))$ dans $\widetilde{\mathbf{z}}(t)$.

2.3.4 SINR en sortie du beamformer

En remplaçant (2.3.22) dans la décomposition orthogonale (2.3.23), on peut déduire le rapport entre la puissance moyenne SOI et celle du bruit total de $y(t)$ du beamformer MVDR, qui ne représente que le SINR en sortie :

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}} = \frac{\pi_s}{\mathbf{w}_f^H[\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{\tilde{n},n}^H\mathbf{B}\mathbf{K}^H(\mathbf{K}\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{n}}\mathbf{B}\mathbf{K}^H)^{-1}\mathbf{K}\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{n},n}]\mathbf{w}_f}, \quad (2.3.24)$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{n},n} \stackrel{\text{def}}{=} < \text{E}[\widetilde{\mathbf{n}}(t)\mathbf{n}^H(t)] >$. Pour $N = 2$, $\mathbf{z}(t)$ est un scalaire impliquant que $\widetilde{\mathbf{z}}(t)$ ne comprend aucune redondance, $\mathbf{K} = \mathbf{I}$ et par conséquent (2.3.24) se réduit à :

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}} = \frac{\pi_s}{\mathbf{w}_f^H[\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{\tilde{n},n}^H\mathbf{B}(\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{n}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{n},n}]\mathbf{w}_f}. \quad (2.3.25)$$

Il faut noter que bien que le couple choisi $(\mathbf{w}_f, \mathbf{B}_{1,0})$ qui vérifie $\mathbf{w}_f^H \mathbf{s} = 1$ et $\text{Range}(\mathbf{B}_{1,0}) = \{\mathbf{s}\}^\perp$, ne soit pas unique, l'expression du SINR donnée par (2.3.24) et (2.3.25) ne dépend pas de ce choix. En outre, on dénote par SINR_B, le SINR à la sortie du beamformer MVDR B, les inégalités suivantes peuvent être déduites en utilisant le principe d'inclusion appliqué au problème de minimisation sous contraintes (B.5.5) :

$$\begin{aligned}
\text{SINR}_{\text{L}} &\leq \text{SINR}_{\text{L-C}(q_1)} \leq \text{SINR}_{\text{L-C}(q_1,q_2)} \leq \text{SINR}_{\text{L-C}(q_1,q_2,q_3)} \leq \text{SINR}_{\text{L-C}(0,1,2,3)}, \\
\text{SINR}_{\text{WL}} &\leq \text{SINR}_{\text{WL-C}(q_1)} \leq \text{SINR}_{\text{WL-C}(q_1,q_2)} \leq \text{SINR}_{\text{WL-C}(q_1,q_2,q_3)} \leq \text{SINR}_{\text{WL-C}(0,1,2,3)} \\
\text{SINR}_{\text{L-C}(q_1)} &\leq \text{SINR}_{\text{WL-C}(q_1)}, \quad \text{SINR}_{\text{L-C}(q_1,q_2)} \leq \text{SINR}_{\text{WL-C}(q_1,q_2)}, \\
\text{SINR}_{\text{L-C}(q_1,q_2,q_3)} &\leq \text{SINR}_{\text{WL-C}(q_1,q_2,q_3)}, \quad \text{SINR}_{\text{L-C}(0,1,2,3)} \leq \text{SINR}_{\text{WL-C}(0,1,2,3)},
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

pour $0 \leq q_j \leq 3$, $j = 1, .., 4$, où SINR_{L} et SINR_{WL}, tel que $\text{SINR}_{\text{L}} \leq \text{SINR}_{\text{WL}}$ correspondent au SINR à la sortie respective des beamformers de Capon et WL MVDR [21] tel que :

$$\text{SINR}_{\text{L}} = \pi_s \mathbf{s}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}. \tag{2.3.27}$$

Il faut noter qu'il n'y a pas de règle générale entre $\text{SINR}_{\text{L-C}(q_1,..q_r)}$ et SINR_{WL}, comme il est illustré plus loin dans le paragraphe 2.4.4. Par exemple, on a $\text{SINR}_{\text{L-C}(1)} < \text{SINR}_{\text{WL}}$ et $\text{SINR}_{\text{L-C}(3)} < \text{SINR}_{\text{WL}}$ pour le cas d'une seule interférence BPSK non-filtrée, comme illustré dans la figure 2.2 par contre $\text{SINR}_{\text{L-C}(1)} > \text{SINR}_{\text{WL}}$ et $\text{SINR}_{\text{L-C}(3)} > \text{SINR}_{\text{WL}}$ pour une seule interférence QPSK non-filtrée, comme illustré dans la figure 2.4.

2.4 Analyse des performances en présence d'une seule interférence

Dans ce paragraphe, nous évaluons les performances du beamformer MVDR de Volterra à travers l'analyse du comportement du SINR en sortie ainsi le gain apporté par rapport au beamformer classique de Capon. Le seul cas d'une seule interférence non gaussienne et potentiellement non-circulaire est considéré.

2.4.1 Composition du bruit total d'observation

Nous considérons le modèle d'observation (2.2.1), où le vecteur du bruit total $\mathbf{n}(t)$ est composé de la contribution d'une seule interférence et d'un bruit de fond, tous les deux statistiquement indépendants du SOI $s(t)$. Sous ces conditions, le bruit total $\mathbf{n}(t)$ s'écrit :

$$\mathbf{n}(t) = j(t)\mathbf{j} + \mathbf{n}_G(t), \tag{2.4.1}$$

où $j(t)$ et $\mathbf{j}$ correspondent respectivement à l'enveloppe complexe, supposée centrée et potentiellement non gaussienne et/ou non-circulaire, et le vecteur directionnel de l'interférence. Le vecteur $\mathbf{n}_G(t)$ est le bruit de fond, supposé centrée, gaussien, stationnaire, circulaire et spatialement blanc, telle que chaque composante possède une puissance η_2.

2.4.2 Performances des structures partielles L-C(q) du beamformer MVDR de Volterra

Dans ce paragraphe, nous analysons les performances des structures partielles L-C(q) du beamformer de Volterra, $q = 0, ..3$, dans le cas particulier d'une seule interférence.

2.4.2.1 SINR en sortie des beamformers de Capon, WL MVDR$_1$ et L-C(q)

En présence d'une seule interférence, le SINR (2.3.27) à la sortie du beamformer de Capon est donné par l'expression suivante [21] :

$$\mathrm{SINR_L} = \epsilon_s \left(1 - \frac{\epsilon_j}{1+\epsilon_j}\alpha^2\right). \tag{2.4.2}$$

Les variables ϵ_s et ϵ_j sont définies par $\epsilon_s \overset{\text{def}}{=} \|\mathbf{s}\|^2\pi_s/\eta_2$ et $\epsilon_j \overset{\text{def}}{=} \|\mathbf{j}\|^2\pi_j/\eta_2$, où $\pi_j \overset{\text{def}}{=} < \mathrm{E}|j^2(t)| >$ est la puissance de l'interférence reçue par une antenne omnidirectionnelle et α avec $0 \leq \alpha \leq 1$, est le module du coefficient de la corrélation spatiale entre l'interférence et le SOI, défini par :

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{|\mathbf{s}^H\mathbf{j}|}{\|\mathbf{s}\|\|\mathbf{j}\|}. \tag{2.4.3}$$

En utilisant les mêmes notations, le SINR à la sortie du beamformer WL MVDR$_1$ calculé dans [21] peut s'écrire sous la forme plus simple suivante :

$$\mathrm{SINR_{MVDR}} = \epsilon_s \frac{\beta^4(1-|\gamma_j|^2)\epsilon_j^2 + 2\beta^2\epsilon_j + 1}{(1-|\gamma_j|^2)\beta^2\epsilon_j^2 + (1+\beta^2)\epsilon_j + 1}, \tag{2.4.4}$$

où γ_j est défini par (2.2.6) avec $j(t)$ à la place de $u(t)$ et $\beta^2 \overset{\text{def}}{=} 1-\alpha^2$.

Pour calculer analytiquement le SINR à la sortie des beamformers MVDR de Volterra L-C(q), $q = 0, .., 3$, on se limite à la situation de deux antennes $N = 2$, pour laquelle la variable $\mathbf{z}(t)$ se réduit à un scalaire. Pour un choix particulier du couple $(\mathbf{w}_f, \mathbf{B}_{1,0})$, on déduit à partir de (2.3.25), en appliquant une décomposition orthogonale de Gram-Schmidt au couple de variables aléatoires $(z(t), z_{3,q}(t))$ décrite en annexe B.1 les résultats suivants (ces résultats ont été vérifiés ensuite par des outils de calcul symbolique complexe (*Symbolic Math Toolbox*) de Matlab décrit en annexe C.1 :

$$\mathrm{SINR_{LC(0)}} = \epsilon_s \frac{(1+\epsilon_j\beta^2)A_0}{(1+\epsilon_j)A_0 - \alpha^2\beta^6\epsilon_j^4|\kappa_{j,nc,2} - 3\gamma_j|^2} \tag{2.4.5}$$

$$\mathrm{SINR_{LC(1)}} = \epsilon_s \frac{(1+\epsilon_j\beta^2)A_1}{(1+\epsilon_j)A_1 - \alpha^2\beta^6\epsilon_j^4(\kappa_{j,c} - 2)^2} \tag{2.4.6}$$

$$\mathrm{SINR_{LC(2)}} = \epsilon_s \frac{(1+\epsilon_j\beta^2)A_2}{(1+\epsilon_j)A_2 - \alpha^2\beta^6\epsilon_j^4|(\kappa_{j,nc,2} - \gamma_j) + 2\gamma_j/(\beta^2\epsilon_j)|^2} \tag{2.4.7}$$

$$\mathrm{SINR_{LC(3)}} = \epsilon_s \frac{(1+\epsilon_j\beta^2)A_3}{(1+\epsilon_j)A_3 - \alpha^2\beta^6\epsilon_j^4|\kappa_{j,nc,1}^2|}, \tag{2.4.8}$$

où les grandeurs A_q, $q = 0,..,3$ sont définies par :

$$\begin{aligned} A_0 = A_2 &\overset{\text{def}}{=} \beta^8\epsilon_j^4(\chi_{j,c} - |\kappa_{j,nc,2}^2|) + \beta^6\epsilon_j^3(\chi_{j,c} + 9\kappa_{j,c} - 6\mathrm{Re}(\gamma_j\kappa_{j,nc,2}^*)) \\ &+ 9\beta^4\epsilon_j^2(\kappa_{j,c} + 2 - |\gamma_j^2|) + 24\beta^2\epsilon_j + 6, \qquad (2.4.9) \\ A_1 &\overset{\text{def}}{=} \beta^8\epsilon_j^4(\chi_{j,c} - \kappa_{j,c}^2) + \beta^6\epsilon_j^3(\chi_{j,c} + \kappa_{j,c}) + \beta^4\epsilon_j^2(5\kappa_{j,c} + 2) + 8\beta^2\epsilon_j + 2, \qquad (2.4.10) \\ A_3 &\overset{\text{def}}{=} \beta^8\epsilon_j^4(\chi_{j,c} - |\kappa_{j,nc,1}^2|) + \beta^6\epsilon_j^3(\chi_{j,c} + 9\kappa_{j,c}) + 9\beta^4\epsilon_j^2(\kappa_{j,c} + 2) + 24\beta^2\epsilon_j + 6. \qquad (2.4.11) \end{aligned}$$

Ici les coefficients du FO et du SIO $\kappa_{j,c}$, $\kappa_{j,nc,1}$, $\kappa_{j,nc,2}$ et $\chi_{j,c}$ sont définis par (2.2.5) et (2.2.7) avec $j(t)$ à la place de $u(t)$. En définissant le gain en SINR du beamformer MVDR de Volterra, de structure partielle B, par rapport au beamformer classique de Capon, noté $G_{\mathrm{B}} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{SINR_B}/\mathrm{SINR_L}$, nous obtenons à partir des équations (2.4.2) et de (2.4.4) à (2.4.8) :

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{WL}} &= 1 + \frac{\alpha^2\beta^2\epsilon_j^2|\gamma_j|^2}{(1+\epsilon_j\beta^2)[1+\epsilon_j(1+\beta^2)+\epsilon_j^2(1-|\gamma_j|^2)\beta^2]}, \qquad (2.4.12) \\ G_{\mathrm{LC}(0)} &= 1 + \frac{\alpha^2\beta^6\epsilon_j^4|\kappa_{j,nc,2} - 3\gamma_j|^2}{(1+\epsilon_j)A_0 - \alpha^2\beta^6\epsilon_j^4|\kappa_{j,nc,2} - 3\gamma_j|^2}, \qquad (2.4.13) \\ G_{\mathrm{LC}(1)} &= 1 + \frac{\alpha^2\beta^6\epsilon_j^4(\kappa_{j,c} - 2)^2}{(1+\epsilon_j)A_1 - \alpha^2\beta^6\epsilon_j^4(\kappa_{j,c} - 2)^2}, \qquad (2.4.14) \\ G_{\mathrm{LC}(2)} &= 1 + \frac{\alpha^2\beta^6\epsilon_j^4|(\kappa_{j,nc,2} - \gamma_j) + 2\gamma_j/(\beta^2\epsilon_j)|^2}{(1+\epsilon_j)A_2 - \alpha^2\beta^6\epsilon_j^4|(\kappa_{j,nc,2} - \gamma_j) + 2\gamma_j/(\beta^2\epsilon_j)|^2}, \qquad (2.4.15) \\ G_{\mathrm{LC}(3)} &= 1 + \frac{\alpha^2\beta^6\epsilon_j^4|\kappa_{j,nc,1}^2|}{(1+\epsilon_j)A_3 - \alpha^2\beta^6\epsilon_j^4|\kappa_{j,nc,1}^2|}. \qquad (2.4.16) \end{aligned}$$

Les expressions de (2.4.12) à (2.4.16) montrent que les beamformer WL et MVDR de Volterra L-C(q), $q = 0,..,3$, n'apportent aucune information supplémentaire par rapport au beamformer classique de Capon (i.e., $G = 1$), en absence d'interférence ($\epsilon_j = 0$) ou bien dans les situations d'une interférence et SOI de vecteurs directionnels orthogonaux ($\alpha = 0$) ou bien co-linéaires ($\beta = 0$). Dans le premier cas, le beamformer de Capon est capable d'annuler totalement l'interférence par contre dans le deuxième cas, l'annulation d'interférence par un traitement spatial est impossible. Entre ces deux situations extrêmes, le SINR et ainsi le gain du beamformer considéré dépendent des propriétés statistiques de l'interférence et en particuliers des coefficients γ_j, $\kappa_{j,c}$, $\kappa_{j,nc,1}$, $\kappa_{j,nc,2}$ et $\chi_{j,c}$. Ces beamformers sont analysés plus précisemment dans les paragraphes suivants.

2.4.2.2 Beamformer L-C(1)

Le beamformer MVDR de Volterra L-C(1) exploite le potentiel caractère non gaussien de l'interférence à travers les coefficients $\kappa_{j,c}$ et $\chi_{j,c}$. L'expression (2.4.14) montre que ce beamformer n'apporte aucune information supplémentaire par rapport au beamformer de Capon si $\kappa_{j,c} = 2$, ce qui correspond au cas d'une interférence gaussienne circulaire, pour laquelle un beamformer de Capon est optimal. Par contre, le beamformer L-C(1) améliore la réjection d'interférence à condition

que $\kappa_{j,c} \neq 2$, ce qui est vérifié pour une interférence non gaussienne, circulaire ou non-circulaire, et aussi le cas d'une interférence gaussienne non-circulaire vérifiant $\kappa_{j,c} = |\gamma_j|^2 + 2$ (2.2.8). Donc le beamformer MVDR L-C(1) exploite aussi la non-circularité au second ordre d'une interférence gaussienne. Cependant, pour $\kappa_{j,c} \neq 2$, en se plaçant dans une situation de forte interférence ($\epsilon_j \gg 1$), l'expression (2.4.14) montre que si $\chi_{j,c} \neq \kappa_{j,c}^2$, le beamformer MVDR L-C(1) n'améliore que peu la réjection d'interférence, par rapport au beamformer de Capon, puisque $G_{\mathrm{LC}(1)} - 1$ devient une grandeur inversement proportionnelle à la puissance de l'interférence ϵ_j. Une telle situation correspond par exemple (voir (2.2.8) et (2.2.9)) à une interférence gaussienne non-circulaire pour laquelle le beamformer MVDR L-C(1) reste moins performant que le beamformer WL MVDR. Cependant, pour une forte interférence tel que $\chi_{j,c} = \kappa_{j,c}^2$ et $\beta \neq 0$ (2.4.6) et (2.4.14) deviennent :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(1)} \approx \epsilon_s \left(1 - \frac{\alpha^2(5\kappa_{j,c} - 4)}{\kappa_{j,c}(\kappa_{j,c}+1) - \alpha^2(\kappa_{j,c}-2)^2}\right), \quad \chi_{j,c} = \kappa_{j,c}^2, \ \alpha \neq 1, \ \epsilon_j \gg 1, \tag{2.4.17}$$

$$G_{\mathrm{LC}(1)} \approx 1 + \frac{\alpha^2(\kappa_{j,c} - 2)^2}{\kappa_{j,c}(\kappa_{j,c}+1) - \alpha^2(\kappa_{j,c}-2)^2}, \quad \chi_{j,c} = \kappa_{j,c}^2, \ \alpha \neq 1, \ \epsilon_j \gg 1. \tag{2.4.18}$$

Il faut noter que la condition $\chi_{j,c} = \kappa_{j,c}^2$ signifie que $|j(t)|$ prend deux valeurs au plus, correspondant à une valeur nulle et une autre constante différente de zéro (voir annexe B.2). En particulier pour une interférence telle que $|j(t)|$ est constante (interférences : CPM, FSK ou PSK non-filtrée), $\chi_{j,c} = \kappa_{j,c}^2 = 1$, $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(1)} \approx \epsilon_s[1 - \alpha^2/(2-\alpha^2)]$ et $G_{\mathrm{LC}(1)} \approx 1 + \alpha^2/(2-\alpha^2)$, ce qui montre que $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(1)}$ décroît avec α, tandis que $G_{\mathrm{LC}(1)}$ augmente avec α et dont la limité supérieure est égale 2 quand α tend vers l'unité. De plus, pour $\kappa_{j,c} \geq 1$, il est clair que $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(1)}$ et $G_{\mathrm{LC}(1)}$ définis respectivement par (2.4.17) et (2.4.18), décroît de $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(1)} \approx \epsilon_s[1-\alpha^2/(2-\alpha^2)]$ et $G_{\mathrm{LC}(1)} \approx 1+\alpha^2/(2-\alpha^2)$, pour $\kappa_{j,c} = 1$, à $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(1)} \approx \epsilon_s(1-\alpha^2)$ et $G_{\mathrm{LC}(1)} \approx 1$, pour $\kappa_{j,c} = 2$ et augmentent à $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(1)} \approx \epsilon_s$ et $G_{\mathrm{LC}(1)} \approx 1+\alpha^2/(1-\alpha^2)$, pour une très grande valeur de $\kappa_{j,c}$. Dans ce dernier cas, le $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(1)}$ est maximal et correspond au cas d'absence d'interférence, ainsi l'interférence est totalement annulée par le beamformer MVDR L-C(1) quelque soit la valeur de α ($\alpha \neq 1$), ce qui est équivalent à un gain $G_{\mathrm{LC}(1)}$ infiniment croissant avec α ($\alpha \neq 1$). Cela démontre l'efficacité du beamformer MVDR L-C(1) par rapport au beamformer classique de Capon. Une telle situation correspond au cas d'une interférence impulsive telle que $|j(t)|$ suit une distribution de Bernoulli. Dans ce cas, il est mentionné dans (2.2.21) que $\chi_{j,c} = \kappa_{j,c}^2 = 1/p^2$ et donc le SINR (2.4.17) et le gain (2.4.18) tendent vers les valeurs maximales $\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(1)} \approx \epsilon_s$ et $G_{\mathrm{LC}(1)} \approx 1+\alpha^2/(1-\alpha^2)$, quand p tend vers zéro, i.e., pour une interférence fortement impulsive.

2.4.2.3 Beamformers L-C(q), $q = 0, 2$

Les beamformers MVDR de Volterra L-C(q), $q = 0, 2$ n'exploitent pas seulement le caractère non gaussien de l'interférence, à travers les coefficients $(\kappa_{j,c}, \chi_{j,c})$ mais aussi la non-circularité potentielle au second ordre et du quatrième ordre, à travers les coefficients γ_j et $\kappa_{j,nc,2}$. Les expressions

(2.4.13) et (2.4.15) montrent que les beamformers L-C(0) et L-C(2) n'apportent respectivement pas d'information additionnelle par rapport au beamformer de Capon quand $\kappa_{j,nc,2} = 3\gamma_j$ et $\kappa_{j,nc,2} = \gamma_j(1 - 2/(\beta^2\epsilon_j))$ Un exemple de ce cas particulier correspond à une interférence circulaire au second ordre avec $\gamma_j = 0$ et $\kappa_{j,nc,2} = 0$. Une telle interférence circulaire, peut correspondre à une modulation 2^k-PSK ($k > 2$) ou une modulation $4M^2$-QAM. De plus, pour une interférence gaussienne non-circulaire, pour laquelle $\kappa_{j,nc,2} = 3\gamma_j$ (2.2.8), le beamformer L-C(0) n'améliore plus les performances par rapport au beamformer classique de Capon, par contre le beamformer L-C(2) peut toujours apporter une information additionnelle.

Cependant, les beamformers MVDR L-C(0) et L-C(2) améliorent les performances par rapport au beamformer de Capon quand respectivement $\kappa_{j,nc,2} \neq 3\gamma_j$ et $\kappa_{j,nc,2} \neq \gamma_j(1 - 2/(\beta^2\epsilon_j))$. Cela nécessite une interférence non-circulaire au second ordre, qui n'est pas gaussienne dans le premier cas, mais qui peut l'être dans le deuxième. Dans ces deux cas, sous l'hypothèse d'une forte interférence, (2.4.9),(2.4.13) et (2.4.15) montrent que si $\chi_{j,c} \neq |\kappa_{j,nc,2}|^2$, les beamformer MVDR L-C(0) et L-C(2) améliorent faiblement les performances du beamformer de Capon. Une telle situation se produit par exemple pour une forte interférence non-circulaire et gaussienne.

Cependant, pour une forte interférence tel que $\chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,2}|^2$ et $\beta \neq 0$, (2.4.5), (2.4.7), (2.4.13) et (2.4.15) deviennent :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(0)} \approx \epsilon_s\left(1 - \frac{9\alpha^2(\kappa_{j,c} - |\gamma_j^2|)}{|\kappa_{j,nc,2}|^2 + 9\kappa_{j,c} - 6\mathrm{Re}(\gamma_j\kappa_{j,nc,2}^*) - \alpha^2|\kappa_{j,nc,2} - 3\gamma_j|^2}\right), \tag{2.4.19}$$

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(2)} \approx \epsilon_s\left(1 - \frac{\alpha^2(9\kappa_{j,c} - |\gamma_j^2| - 4\mathrm{Re}(\gamma_j\kappa_{j,nc,2}^*))}{|\kappa_{j,nc,2}|^2 + 9\kappa_{j,c} - 6\mathrm{Re}(\gamma_j\kappa_{j,nc,2}^*) - \alpha^2|\kappa_{j,nc,2} - \gamma_j|^2}\right), \tag{2.4.20}$$

$$G_{\mathrm{LC}(0)} \approx 1 + \frac{\alpha^2|\kappa_{j,nc,2} - 3\gamma_j|^2}{|\kappa_{j,nc,2}|^2 + 9\kappa_{j,c} - 6\mathrm{Re}(\gamma_j\kappa_{j,nc,2}^*) - \alpha^2|\kappa_{j,nc,2} - 3\gamma_j|^2}, \tag{2.4.21}$$

$$G_{\mathrm{LC}(2)} \approx 1 + \frac{\alpha^2|\kappa_{j,nc,2} - \gamma_j|^2}{|\kappa_{j,nc,2}|^2 + 9\kappa_{j,c} - 6\mathrm{Re}(\gamma_j\kappa_{j,nc,2}^*) - \alpha^2|\kappa_{j,nc,2} - \gamma_j|^2}, \tag{2.4.22}$$

$$\text{pour } \chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,2}|^2, \quad \alpha \neq 1 \text{ et } \epsilon_j \gg 1$$

La condition $\chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,2}|^2$ signifie que $j^2(t)$ prend au plus deux valeurs constantes (voir annexe B.2), et par conséquent $j(t)$ est nécessairement rectiligne. En particulier, pour une interférence tel que $j^2(t)$ est constante (ex : interférence BPSK non-filtrée), $\chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,2}|^2 = 1$, nous obtenons :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(0)} \approx \epsilon_s, \quad \chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,2}|^2 = 1,\ \alpha \neq 1\ \ \epsilon_j \gg 1, \tag{2.4.23}$$

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(2)} \approx \epsilon_s(1 - \alpha^2), \quad \chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,2}|^2 = 1,\ \alpha \neq 1,\ \epsilon_j \gg 1, \tag{2.4.24}$$

$$G_{\mathrm{LC}(0)} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}, \quad \chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,2}|^2 = 1,\ \alpha \neq 1,\ \epsilon_j \gg 1, \tag{2.4.25}$$

$$G_{\mathrm{LC}(2)} \approx 1, \quad \chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,2}|^2 = 1,\ \alpha \neq 1,\ \epsilon_j \gg 1. \tag{2.4.26}$$

Tandis que (2.4.4) et (2.4.12) deviennent :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL}} \approx \epsilon\left(1-\frac{\alpha^2}{2-\alpha^2}\right), \quad |\gamma_j|=1,\ \alpha\neq 1,\ \epsilon_j\gg 1, \tag{2.4.27}$$

$$G_{\mathrm{WL}} \approx 1+\frac{\alpha^2}{2-\alpha^2}, \quad |\gamma_j|=1,\ \alpha\neq 1,\ \epsilon_j\gg 1. \tag{2.4.28}$$

Dans ce cas, (2.4.24) et (2.4.26) montrent que le beamformer MVDR L-C(2) n'améliore pas les performances par rapport au beamformer de Capon, tandis que (2.4.23), (2.4.25), (2.4.27) et (2.4.28) montrent que le beamformer MVDR L-C(0) surpasse les deux beamformers Capon et WL MVDR en annulant complètement l'interférence quelque soit la valeur α ($\alpha \neq 1$) et le gain $G_{\mathrm{LC}(0)}$ augmente indéfiniment avec α ($\alpha \neq 1$). De telles bonnes performances sont observées aussi à la sortie des beamformers MVDR L-C(0) et L-C(2) quand l'interférence rectiligne est très impulsive, comme dans le cas d'une interférence $|j(t)|$ qui suit une distribution de Bernoulli avec une faible valeur de la probabilité p. Dans ce cas,

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(0)} \approx \mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(2)} \approx \epsilon_s \ \text{ et } \ G_{\mathrm{LC}(0)} \approx G_{\mathrm{LC}(2)} \approx 1+\alpha^2/(1-\alpha^2),$$

démontrent le grand intérêt des structures linéaire-cubique du beamformer MVDR.

2.4.2.4 beamformer L-C(3)

Le beamformer MVDR L-C(3) exploite la non-gaussienité potentielle de l'interférence à travers les coefficients $(\kappa_{j,c}, \chi_{j,c})$ ainsi que la non-circularité au quatrième ordre au travers les coefficients $\kappa_{j,nc,1}$. On déduit à partir (2.4.16) que le beamformer MVDR L-C(3) n'apporte aucune information par rapport au beamformer de Capon quand $\kappa_{j,nc,1} = 0$. Cela correspond à une interférence circulaire au quatrième ordre tel que, par exemple, une modulation 2^k-PSK ($k > 2$). Cependant le beamformer MVDR L-C(3) améliore généralement les performances par rapport au beamformer de Capon quand $\kappa_{j,nc,1} \neq 0$. Cela est en particulier vérifié pour une interférence gaussienne non-circulaire, pour une interférence rectiligne (BPSK, M-ASK, impulsive) mais aussi pour une interférence non-gaussienne circulaire au second ordre telle qu'une modulation QPSK ou 16-QAM. Dans ce cas et pour une forte interférence, les équations (2.4.11) et (2.4.16) montrent que si $\chi_{j,c} \neq |\kappa_{j,nc,1}|^2$, le beamformer MVDR L-C(3) n'améliore que marginalement les performances par rapport au beamformer de Capon. Une telle situation se produit par exemple pour une forte interférence gaussienne et non-circulaire ou bien pour une modulation M-ASK ou 16-QAM. Néanmoins, pour une forte interférence telle que $\chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,1}|^2$ et $\alpha \neq 1$, (2.4.8) et (2.4.16) deviennent :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{LC}(3)} \approx \epsilon_s\left(1-\frac{9\alpha^2\kappa_{j,c}}{9\kappa_{j,c}+(1-\alpha^2)|\kappa_{j,nc,1}|^2}\right),\ \chi_{j,c}=|\kappa_{j,nc,1}|^2,\ \alpha\neq 1,\ \epsilon_j\gg 1, \tag{2.4.29}$$

$$G_{\mathrm{LC}(3)} \approx 1+\frac{\alpha^2\chi_{j,c}}{9\kappa_{j,c}+(1-\alpha^2)|\kappa_{j,nc,1}|^2},\ \chi_{j,c}=|\kappa_{j,nc,1}|^2,\ \alpha\neq 1,\ \epsilon_j\gg 1. \tag{2.4.30}$$

La condition $\chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,1}|^2$ signifie que $j^4(t)$ prend deux valeurs au plus correspondant à deux valeurs constantes dont l'une d'entre elles est nulle (voir annexe B.2). En particulier, pour une interférence telle que $j^4(t)$ est constante (ex : interférences non-filtrées BPSK ou QPSK),$\chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,1}|^2 = 1$, nous obtenons donc :

$$\text{SINR}_{\text{LC(3)}} \approx \epsilon_s \left(1 - \frac{9\alpha^2}{10-\alpha^2}\right) \quad \chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,1}|^2 = 1,\ \alpha \neq 1\ \ \epsilon_j \gg 1, \tag{2.4.31}$$

$$G_{\text{LC(3)}} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{10-\alpha^2}, \quad \chi_{j,c} = |\kappa_{j,nc,1}|^2 = 1,\ \alpha \neq 1,\ \epsilon_j \gg 1 \tag{2.4.32}$$

Ce qui prouve que le beamformer MVDR L-C(3) améliore que légèrement les performances par rapport au beamformer de Capon et de plus reste moins performant que le beamformer WL pour une interférence rectiligne. Finalement, pour une interférence rectiligne très impulsive telle que $|j(t)|$ suit une loi de Bernoulli avec une faible valeur de p, $\text{SINR}_{\text{LC(3)}} \approx \epsilon_s$ et $G_{\text{LC(3)}} \approx 1 + \alpha^2/(1-\alpha^2)$, montre l'intérêt de l'utilisation du beamformer MVDR L-C(3) dans ce cas.

2.4.3 Performances des beamformers WL-C(q) et L-C(q_1, q_2)

On considère dans ce paragraphe, les beamformers WL-C(q_1) et L-C(q_1, q_2), $q_1, q_2 = 0, .., 3$ et on analysera leurs performances en présence d'une seule interférence, c'est-à-dire à partir du modèle du bruit total (2.4.1). En utilisant Symbolic Math Toolbox de MATLAB (voir annexe C.1), il est possible de prouver que le rapport $G_{\text{WL-C}(q_1)}/G_{\text{WL}}$ ainsi que le gain $G_{\text{L-C}(q_1,q_2)}$ peuvent être représentés par la fraction rationnelle suivante :

$$G(\epsilon_j) = 1 + \frac{\alpha^2\beta^6\epsilon_j^4(a_{P-4}\epsilon_j^{P-4} + ... + a_1\epsilon_j + a_0)}{b_P\epsilon_j^P + ... + b_1\epsilon_j + b_0}. \tag{2.4.33}$$

avec, $P = 9$ [sauf pour le cas particulier d'une interférence BPSK pour lequel $P = 4$] dans l'expression $G_{\text{WL-C}(q_1)}/G_{\text{WL}}$ et $P = 8$ [sauf pour le cas particulier d'une interférence QPSK pour lequel $P = 4$] dans l'expression $G_{\text{L-C}(q_1,q_2)}$. Les coefficients a_i et b_i sont des expressions très complexes, fonctions de α, β et des statistiques du bruit total figurant dans la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{n}}$. Il faut noter que, $G_{\text{L-C}(q_1,q_2)} = G_{\text{WL-C}(q_1)}/G_{\text{WL}} = G_{\text{WL}} = 1$ si $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ou $\epsilon_j = 0$. De plus, on peut vérifier que $G_{\text{L-C}(q_1,q_2)} = 1$ et $G_{\text{WL-C}(q_1)}/G_{\text{WL}} = 1$ respectivement pour une interférence circulaire et pour une interférence gaussienne arbitraire, ce qui est en cohérence avec l'optimalité respective des beamformers de Capon et WL MVDR, et dans de telles situations. Par ailleurs, à partir (2.4.33) et des résultats du paragraphe 2.4.2, nous avons démontré que pour une forte interférence BPSK non-filtrée :

$$\begin{aligned} G_{\text{WL-C(0)}} &\approx G_{\text{WL-C(1)}} \approx G_{\text{WL-C(3)}} \approx G_{\text{L-C(0,1)}} \approx G_{\text{L-C(0,2)}} \approx G_{\text{L-C(0,3)}} \approx G_{\text{L-C(1,3)}} \approx G_{\text{L-C(0)}} \\ &\approx 1 + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} > G_{\text{WL}} \approx G_{\text{L-C(1)}} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2-\alpha^2} > G_{\text{L-C(3)}} > G_{\text{L-C(2)}} = 1, \end{aligned} \tag{2.4.34}$$

cependant pour une forte interférence QPSK non-filtrée :

$$G_{\text{L-C(1,3)}} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} > G_{\text{L-C(1)}} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2-\alpha^2} > G_{\text{L-C(3)}} > G_{\text{WL}} = G_{\text{L-C(0)}} = G_{\text{L-C(2)}} = 1. \tag{2.4.35}$$

Ce résultat montre qu'en particulier dans ce dernier cas, $\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1,3)}} \approx \epsilon_s$, ce qui prouve la quasi-optimalité (parmi les beamformers qui utilisent seulement la matrice de covariance du bruit total comme information) du beamformer MVDR L-C(1,3) pour une forte interférence QPSK non-filtrée. Finalement, Il faut noter que dans tous les cas, le beamformer MVDR WL-C(0,1,2,3) atteint au moins les meilleures performances des beamformers WL-C(q_1) et L-C(q_1, q_2) et donc une quasi-optimalité non seulement pour des fortes interférences non-filtrées BPSK et QPSK mais aussi pour des interférences très impulsives, circulaire ou non.

2.4.4 Illustrations et simulations par ordinateur

Dans le but d'identifier les structures partielles du beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre, permettant d'avoir à la fois un gain en SINR maximal, par rapport au beamformers classiques de Capon et WL MVDR_1, et une augmentation en complexité acceptable, nous avons étudié les beamformers utilisant des vecteurs d'observation étendus comprenant deux entrées, notés L-C(q_i), et trois entrées, notés WL-C(q_i), avec $q_i = 0, 1, 2, 3$.

2.4.4.1 Cas de modulations non-filtrées

Pour illustrer les résultats des paragraphes 2.4.2 et 2.4.3, nous considérons un réseau d'antennes à deux éléments omnidirectionnels et nous supposons que le SOI possède un SNR,π_s/η_2, égal à 10dB. Le SOI est supposé corrompu par une seule interférence avec un INR, π_j/η_2, égal à 30dB. Sous ces hypothèses, les figures 2.2 et 2.3 montrent, pour une interférence BPSK non-filtrée, la variation du $\mathrm{SINR}_{\mathrm{B}}$ et G_{B} respectivement, à la sortie des beamformers B MVDR en fonction de la corrélation spatiale α, pour B = L, WL, L-C(q), $q = 0, .., 3$, L-C(1,3), WL-C(0), WL-C(0,1), WL-C(0,1,3) et WL-C(0,1,2,3). Il faut noter que ces figures confirment les résultats (2.4.34), à savor l'équivalence des beamformers MVDR L-C(0), WL-C(0) et L-C(1, 3) et la supériorité du beamformer MVDR L-C(0) par rapport au beamformer WL MVDR, et de plus ce dernier est meilleur que les beamformers MVDR L-C(1), L-C(3) et L-C(2), et le dernier est équivalent au beamformer de Capon. De plus, les figures 2.2 et 2.3, montrent le faible apport en information des beamformers MVDR WL-C(0,1), WL-C(0,1,3) et WL-C(0,1,2,3) par rapport aux beamformers MVDR L-C(0) ou L-C(1,3) qui sont quasi-optimaux.

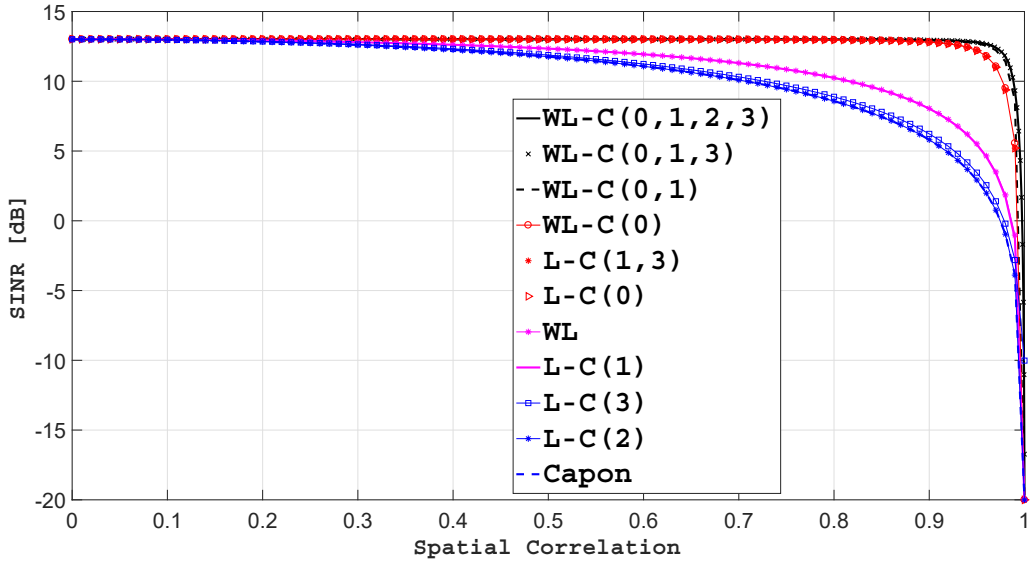


FIGURE 2.2 – $\mathrm{SINR_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence BPSK non-filterée.

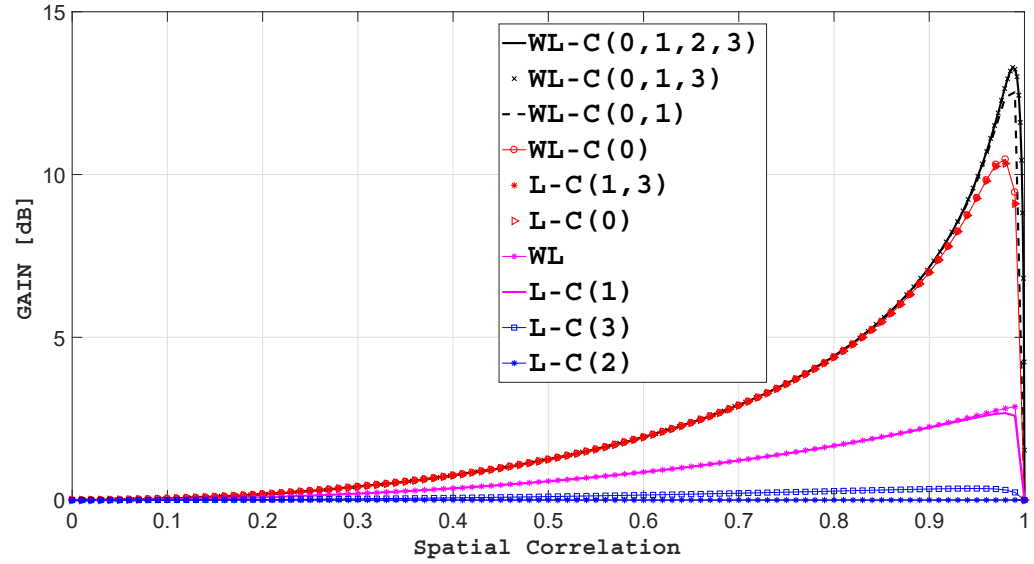


FIGURE 2.3 – $\mathrm{G_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence BPSK non-filterée.

Sous les mêmes hypothèses des figures 2.2 et 2.3, les figures 2.4 et 2.5 montrent les mêmes variations que celles des figures respectives 2.2 et 2.3, mais pour une interférence QPSK non-filtrée et B = L, L-C(q), $q = 1, 3$ et L-C(1,3). De même ces figures confirment les résultats (2.4.35), c'est à dire la supériorité du beamformer MVDR L-C(1,3) par rapport au beamformer MVDR L-C(1), lui-même supérieur au beamformer MVDR L-C(3) et ce dernier supérieur au beamformer classique de Capon.

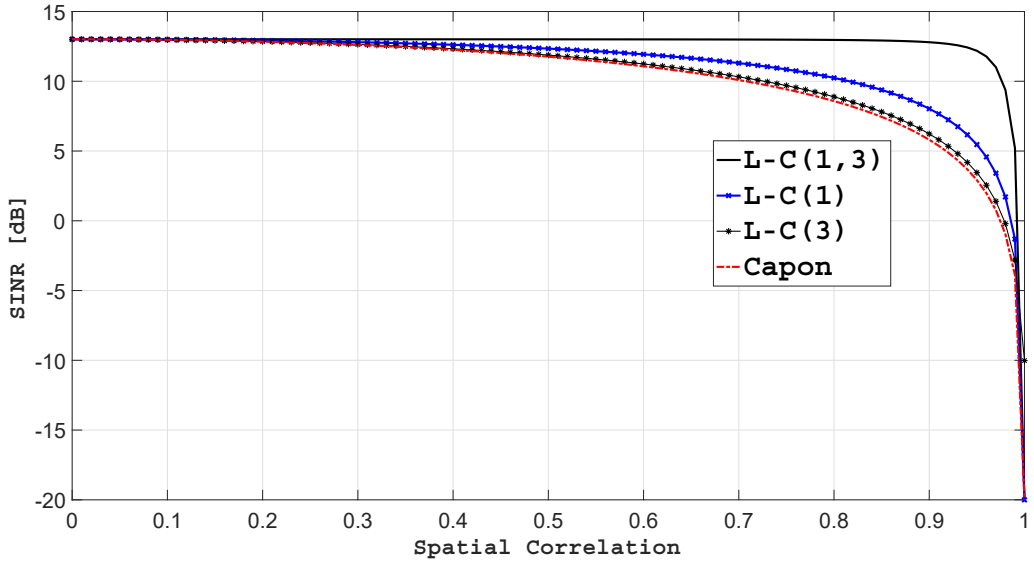


FIGURE 2.4 – $\mathrm{SINR_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence QPSK non-filterée.

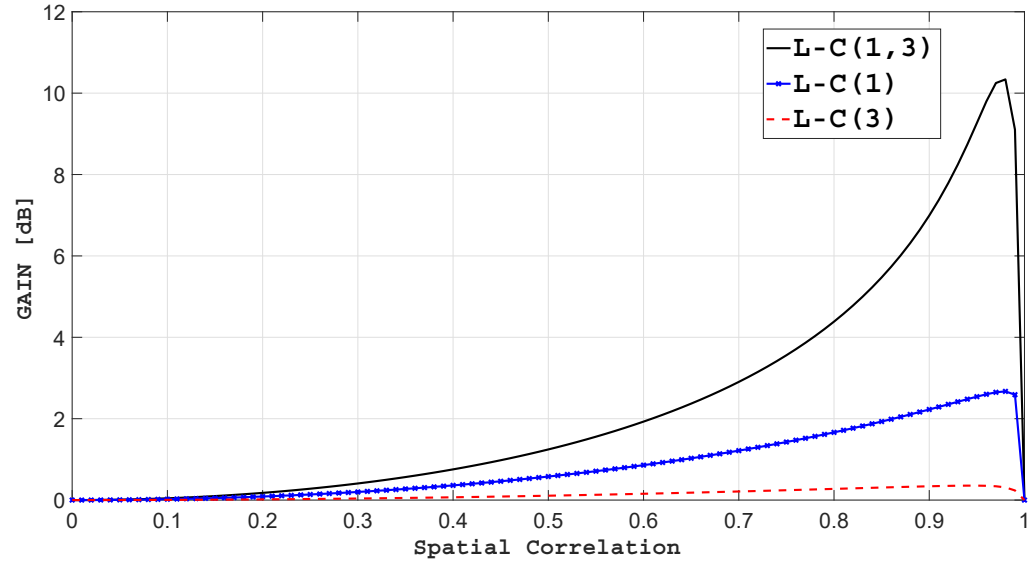


FIGURE 2.5 – $\mathrm{G_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence QPSK non-filterée.

Sous les mêmes hypothèses des figures 2.2 et 2.3, les figures 2.7 et 2.9 illustrent les mêmes variations que la figure 2.3 mais pour une interférence respectivement impulsive circulaire et rectiligne tel que $|j(t)|$ suit une loi de Bernoulli avec un paramètre $p = 0.001$. Pour la figure 2.7, B = L-C(1), L-C(1,3) et L-C(0,1,2,3), tandis que pour la figure 2.9, B = WL, L-C(q) et WL-C(q), $q = 0,..,3$ et WL-C(0,1,2,3). La valeur $p = 0.001$ donne une importante valeur du coefficient circulaire au quatrième ordre $\kappa_{j,c} = 1000$ (2.2.21) et par conséquent cette figure confirme dans ce cas $G_{\mathrm{LC}(1)} \approx 1+\alpha^2/(1-\alpha^2)$ est quasi-optimal pour une très grande valeur $\kappa_{j,c}$. Comme résultat, les

beamformers MVDR L-C(1,3) et L-C(0,1,2,3) n'apportent aucun gain par rapport au beamformer L-C(1).

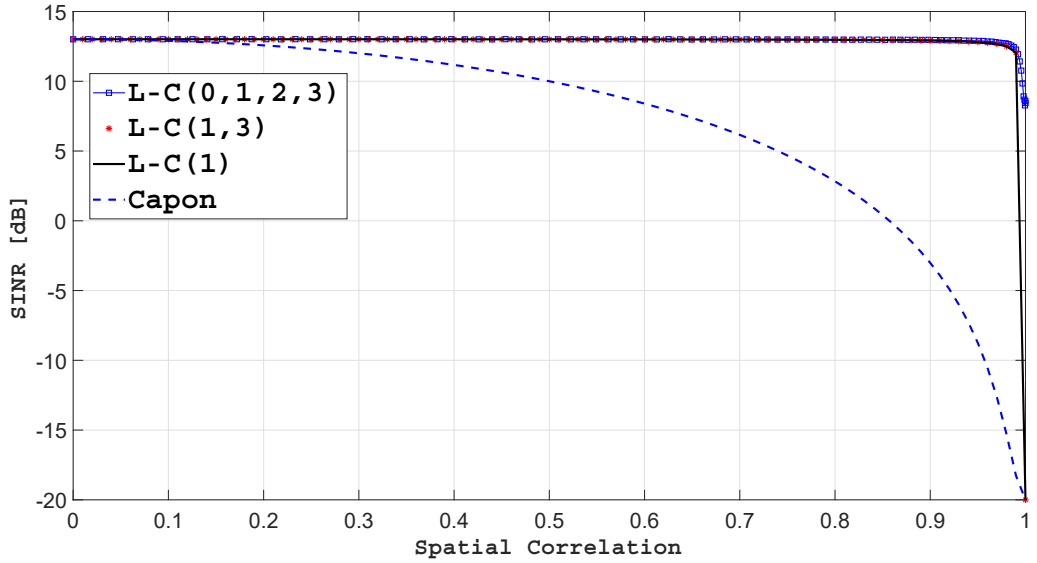


FIGURE 2.6 – $\mathrm{SINR_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence impulsive de Bernoulli et circulaire.

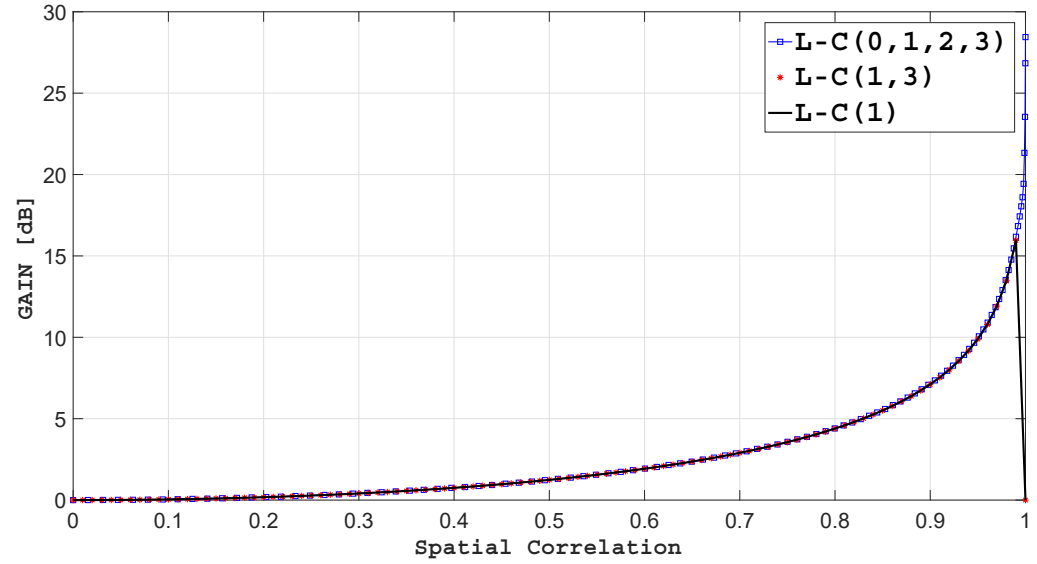


FIGURE 2.7 – G_{B} en fonction de la corrélation spatiale α our une interférence impulsive de Bernoulli et circulaire.

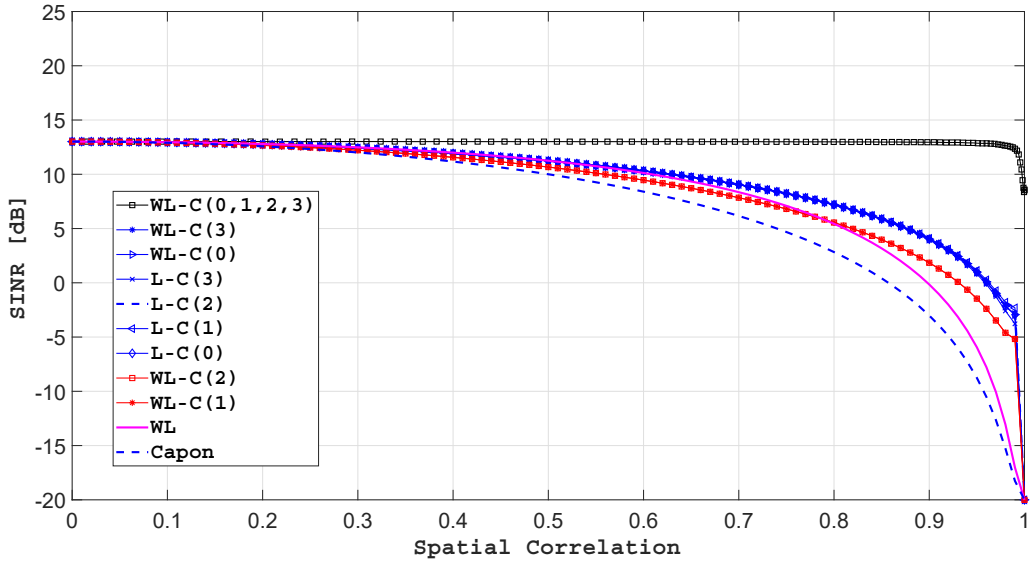


FIGURE 2.8 – $\mathrm{SINR_B}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence impulsive de Bernoulli et rectiligne.

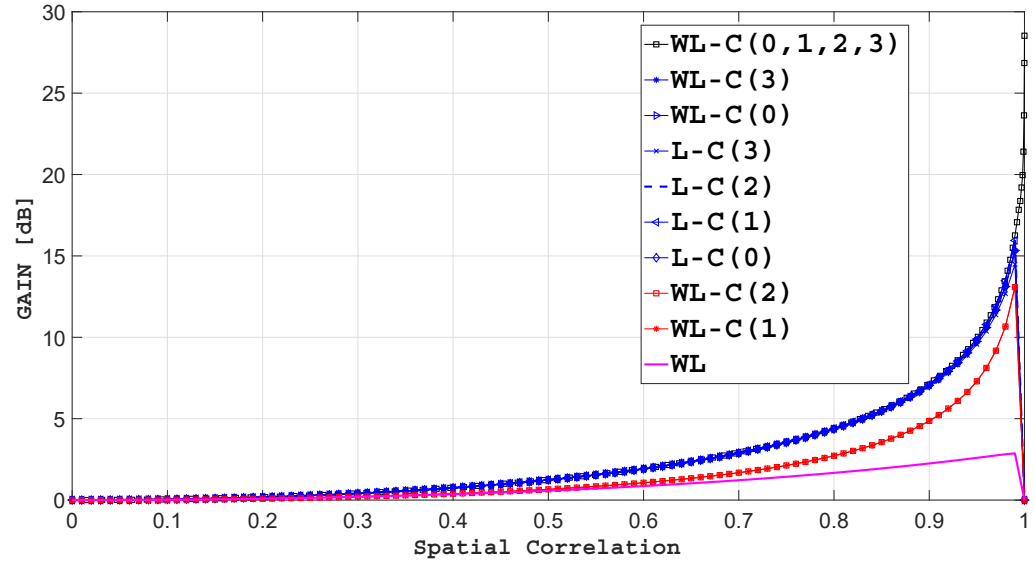


FIGURE 2.9 – G_{B} en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence impulsive de Bernoulli et rectiligne.

Nous notons sur les figures 2.6 et 2.8 que le SINR se maintient pour des corrélations spatiales proches de 1 pour les beamformers de Volterra contrairement à celui du beamformer de Capon qui s'effondre au voisinage de $\alpha = 1$.

La figure 2.10 [resp. figure 2.11] confirme non seulement l'amélioration des performances en termes de SINR pour la structure partielle WL-C(0) [resp. L-C(1,3)], en situation d'une faible discrimination spatiale ($\alpha \approx 1$), mais aussi un gain en SINR croissant en fonction de la puissance de l'interférence.

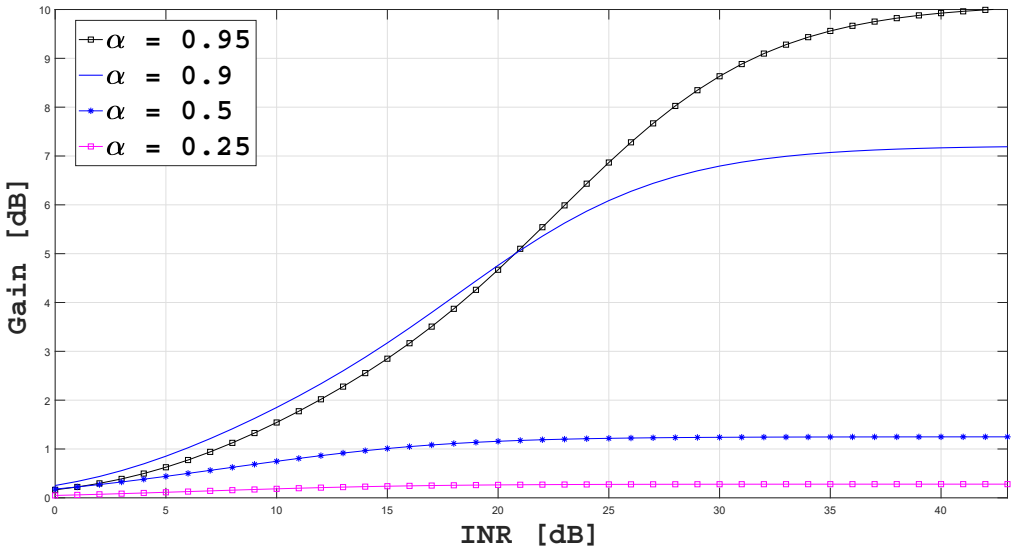


FIGURE 2.10 – Gain de la structure partielle WL-C(0) en fonction de INR pour une interférence BPSK non-filtrée.

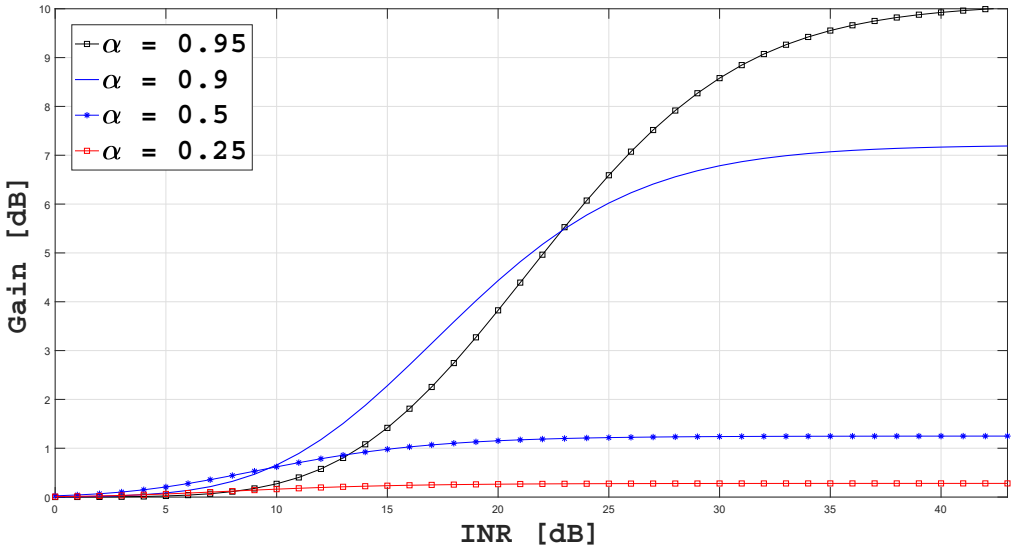


FIGURE 2.11 – Gain de la structure partielle LC-(1,3) beamformer en fonction de INR pour une interférence QPSK non-filtrée.

2.4.4.2 Cas de modulations filtrées

Enfin, les figures 2.12, 2.13 et 2.14 analysent l'impact du filtrage de mise en forme pour des interférences de type modulations linéaires, sur les performances du beamformer MVDR complexe de Volterra. A cette fin, nous considérons les mêmes hypothèses que dans les figures 2.2 et 2.3 mais avec une fonction de mise en forme soit rectangulaire (ce qui est équivalent à une modulations BPSK non-filtrée) ou bien en cosinus surélevé avec un roll-off ω. Sous ces hypothèses, les figures 2.12, 2.13

et 2.14 illustrent les variations du $\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(0)}}$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{L-C(0)}}$ pour les deux cas de figure du filtrage de mise en forme. On constate une dégradation des performances du beamformer L-C(0) sous l'effet du filtrage de mise en forme en cosinus surélevé avec un roll-off ω croissant. Cette observation est justifiée par le fait que l'accroissement du roll-off engendre plus d'interférence entre symboles qui gaussiannise l'interférence, selon l'approximation déduite du théorème de la limite centrale, pour laquelle le gain du beamformer MVDR complexe de Volterra se réduit à l'unité.

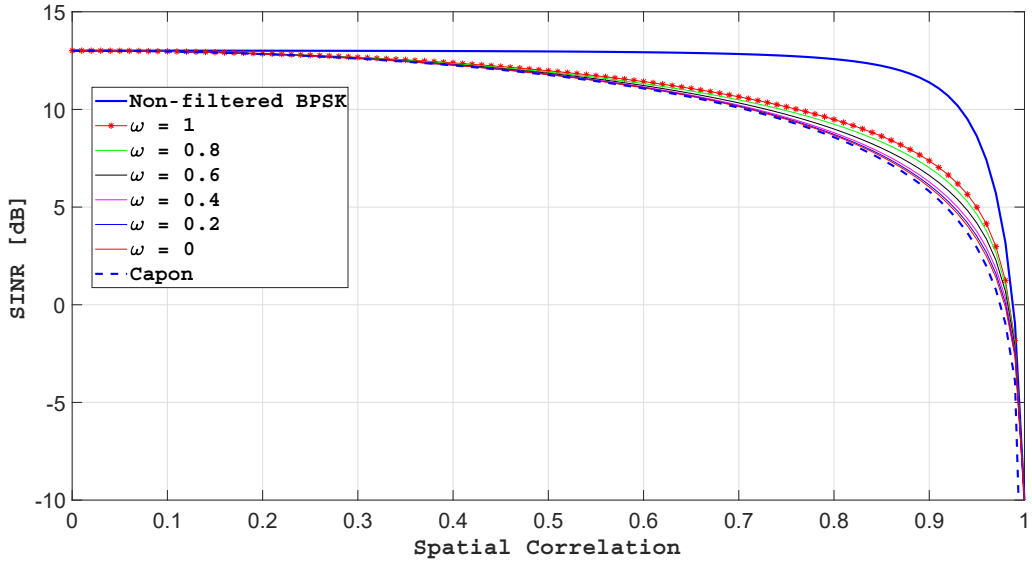


FIGURE 2.12 – $\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(0)}}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence BPSK avec INR = 20dB.

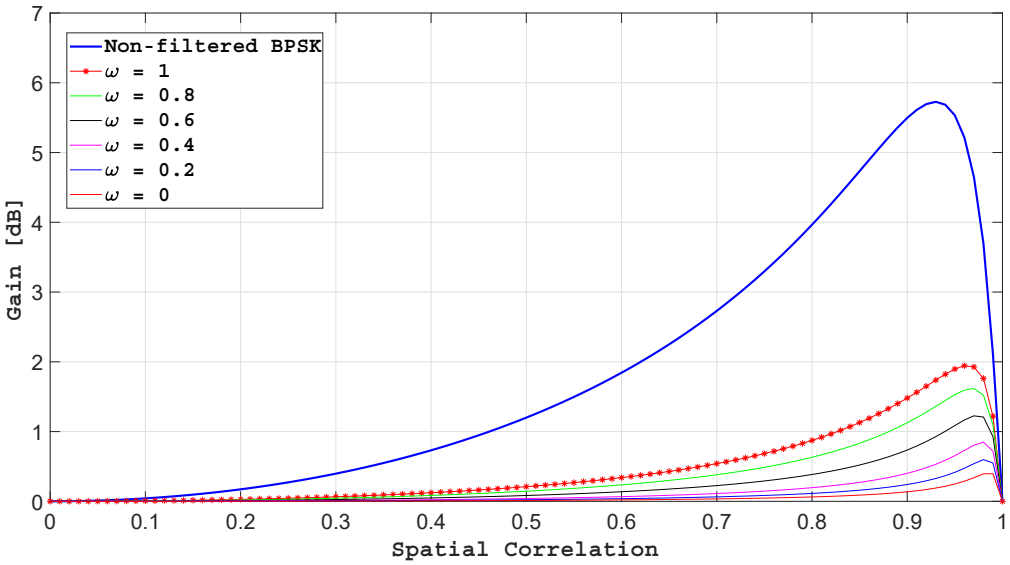


FIGURE 2.13 – $\mathrm{G}_{\mathrm{L-C(0)}}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence BPSK avec INR = 20dB.

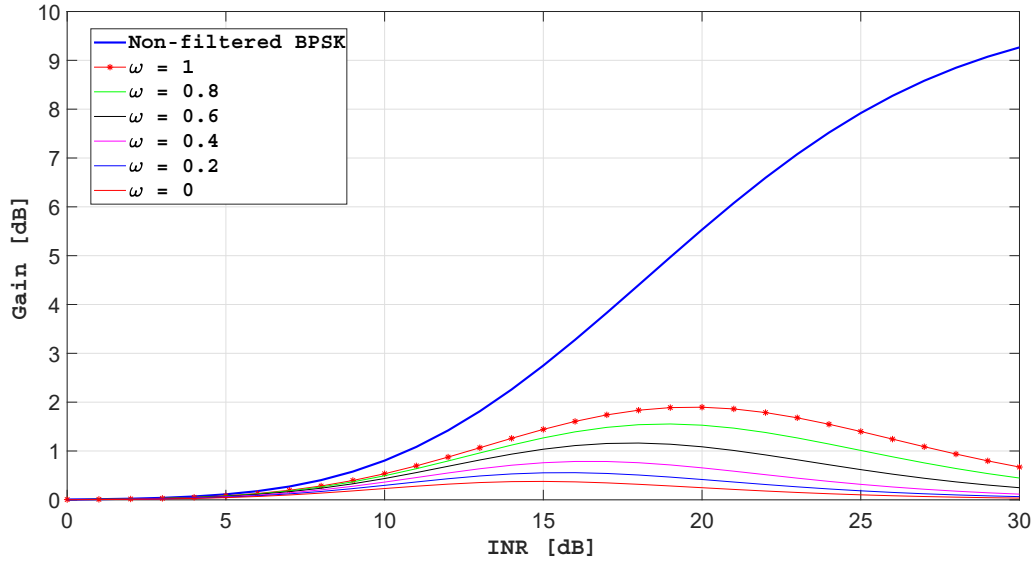


FIGURE 2.14 – $G_{L-C(0)}$ en fonction de l'INR de l'interférence BPSK.

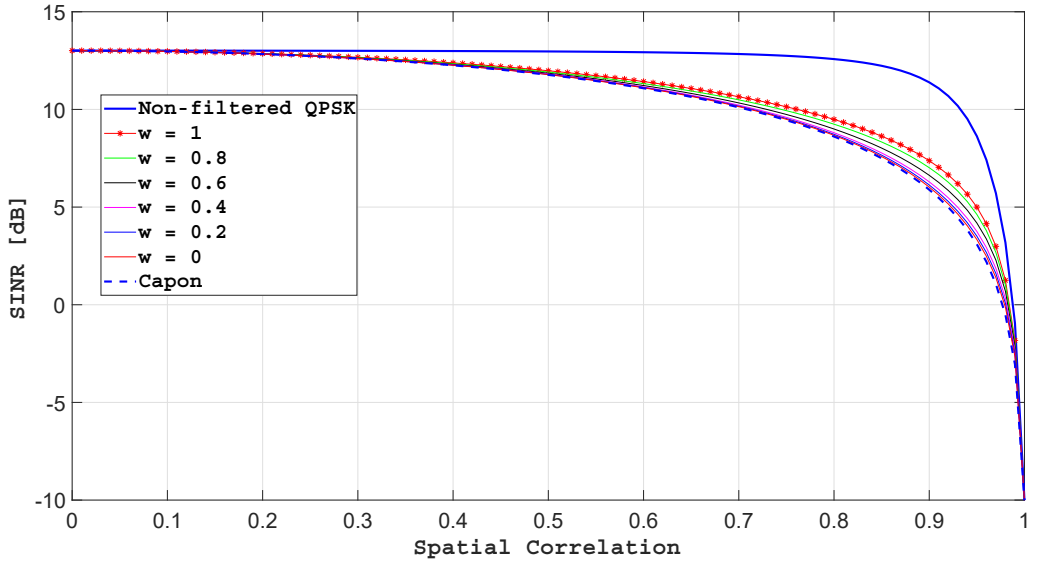


FIGURE 2.15 – $SINR_{L-C(1,3)}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence QPSK avec INR = 20dB.

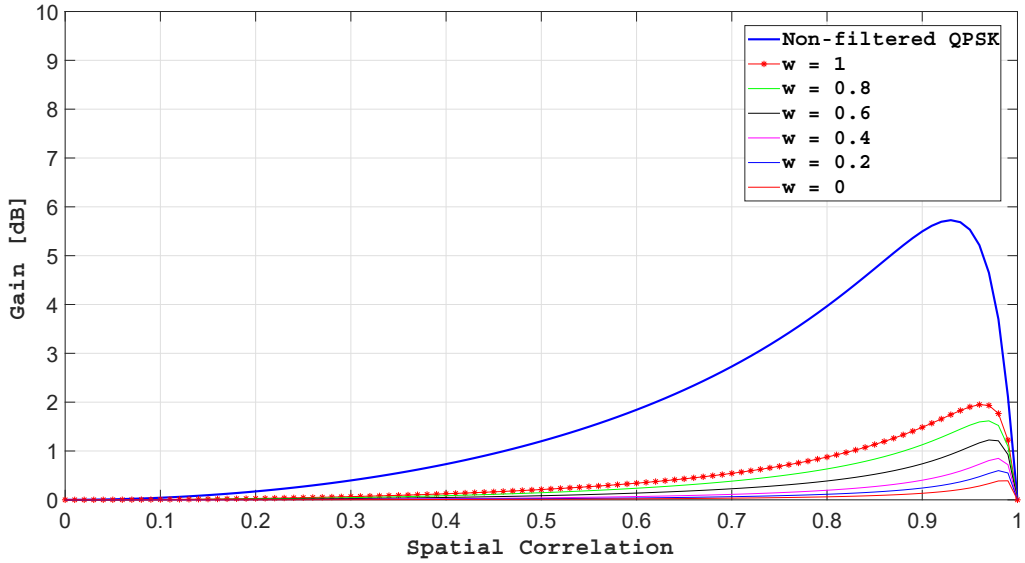


FIGURE 2.16 – $G_{L-C(1,3)}$ en fonction de la corrélation spatiale α pour une interférence QPSK avec INR = 20dB.

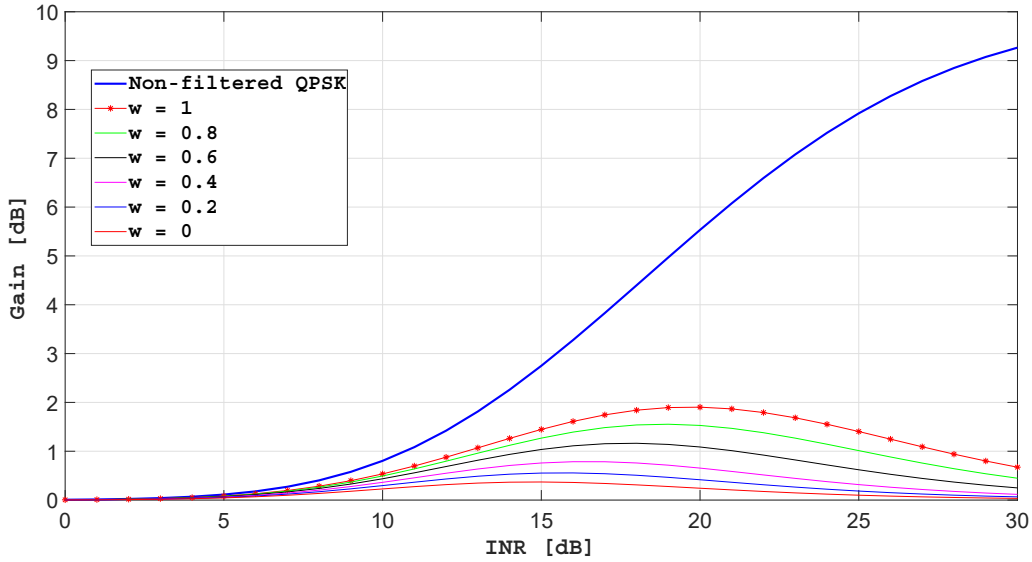


FIGURE 2.17 – $G_{L-C(1,3)}$ en fonction de l'INR de l'interférence QPSK.

2.5 Implémentation adaptative

Comme pour le beamformer de Capon, plusieurs implémentations adaptatives peuvent être construites à partir de la structure GSC du beamformer MVDR complexe de Volterra au troisième ordre. Nous proposons d'utiliser l'extension de l'algorithme *Sample Matrix Inversion* (SMI) [72] pour implémenter (2.3.22). Cet algorithme se résume à l'estimation de la matrice $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ à partir K

observations $\widetilde{\mathbf{x}}(kT_e)$, où T_e est la période d'échantillonnage, par l'estimé empirique donnée par :

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\widetilde{\mathbf{x}}(kT_e)\widetilde{\mathbf{x}}^H(kT_e) \tag{2.5.1}$$

et pour calculer une estimé, $\widehat{\widetilde{\mathbf{w}'}}_{\mathbf{a},\mathrm{opt}}$, de $\widetilde{\mathbf{w}'}_{a,\mathrm{opt}}$, on utilise l'expression :

$$\widehat{\widetilde{\mathbf{w}'}}_{a,\mathrm{opt}} = [\mathbf{K}\mathbf{B}^H\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}\mathbf{B}\mathbf{K}^H]^{-1}\mathbf{K}\mathbf{B}^H\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}\widetilde{\mathbf{w}}_f. \tag{2.5.2}$$

Pour des observations sur échantillonnées cycloergodiques, $\widehat{\widetilde{\mathbf{w}'}}_{\mathbf{a},\mathrm{opt}}$ converge asymptotiquement vers $\widetilde{\mathbf{w}'}_{a,\mathrm{opt}}$.

L'analyse théorique de l'algorithme SMI pour notre beamformer MVDR complexe de Volterra dépasse le cadre de notre thèse. On se limite dans ce qui suit à l'étude de la convergence à travers des simulations de Monte-Carlo. Pour cette étude, on considère le modèle du bruit total (2.4.1) avec $N = 2$ et on se met dans une situation d'un coefficient de corrélation spatiale, $\alpha = 0.95$ avec $\phi = 0$. Le SOI et l'interférence sont des modulations linéaires non filtrées à symboles soit tous deux BPSK ou tous deux QPSK possédant la même forme d'onde

$$s(t) = \mu_s\sum_n a_n v(t-nT), \quad \text{et} \quad j(t) = \mu_j e^{i\phi}\sum_n b_n v(t-nT-t_0),$$

et avec les niveaux de puissance, SNR = 10dB et INR = 30dB. Le SINR à la sortie du beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre implémenté par l'algorithme SMI, pour K observations indépendantes, est défini par :

$$\mathrm{SINR}(K) = \frac{\pi_s}{(\widetilde{\mathbf{w}}_f - \mathbf{B}\widehat{\widetilde{\mathbf{w}'}}_{a,\mathrm{opt}})^H\mathbf{R}_{\tilde{x}}(\widetilde{\mathbf{w}}_f - \mathbf{B}\widehat{\widetilde{\mathbf{w}'}}_{\mathbf{a},\mathrm{opt}}) - \pi_{\mathbf{s}}} \tag{2.5.3}$$

Sous ces hypothèses, les figures 2.18 et 2.20 illustrent, pour des signaux BPSK et QPSK non-filtrés, la variation de l'estimaté $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ de la valeur moyenne $\mathrm{E}(\mathrm{SINR}(K))$ de $\mathrm{SINR}(K)$ en fonction du nombre d'observations K et calculé à travers 1000 tirages aléatoires. Ces estimations sont faites pour les beamformers de Capon, WL-MVDR$_1$ et différentes structures du beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre. Nous avons de plus ajouté sur les figures 2.18 et 2.19, le SINR du beamformer WL Minimum Dispersion Distortionless Response (WL-MDDR) à norme infinie proposé dans [43].

Malgré une plus faible vitesse d'apprentissage que les beamformers de Capon et WL-MVDR, notre beamformer MVDR complexe de Volterra du troisième ordre converge pratiquement au bout de quelques centaine d'échantillons et avec de bien meilleures performances en terme de SINR.

Notons par ailleurs que le beamformer WL-MDDR illustré ici pour 2 antennes ne converge pas plus rapidement que tous les beamformers de type MVDR, et de plus présente un SINR limite inférieur que celui du beamformer WL-MVDR qui est optimal parmi tous les beamformers de type WL-MDDR. Ce beamformer présenté dans [43] perd ici l'avantage de rapidité qu'il présente par rapport au beamformer WL-MVDR pour un plus grand nombre N d'antennes.

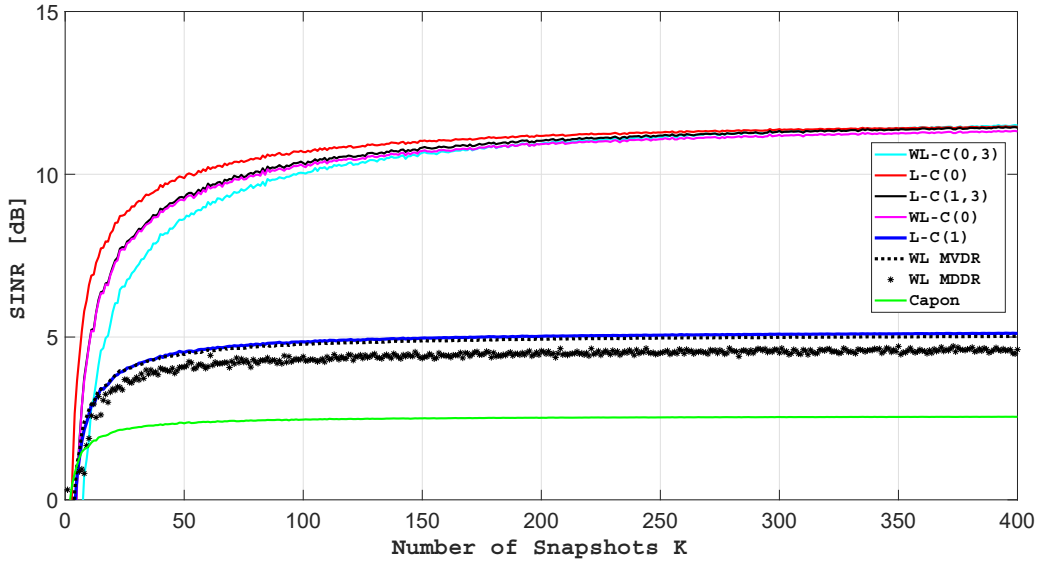


FIGURE 2.18 – $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour une interférence BPSK non-filtrée.

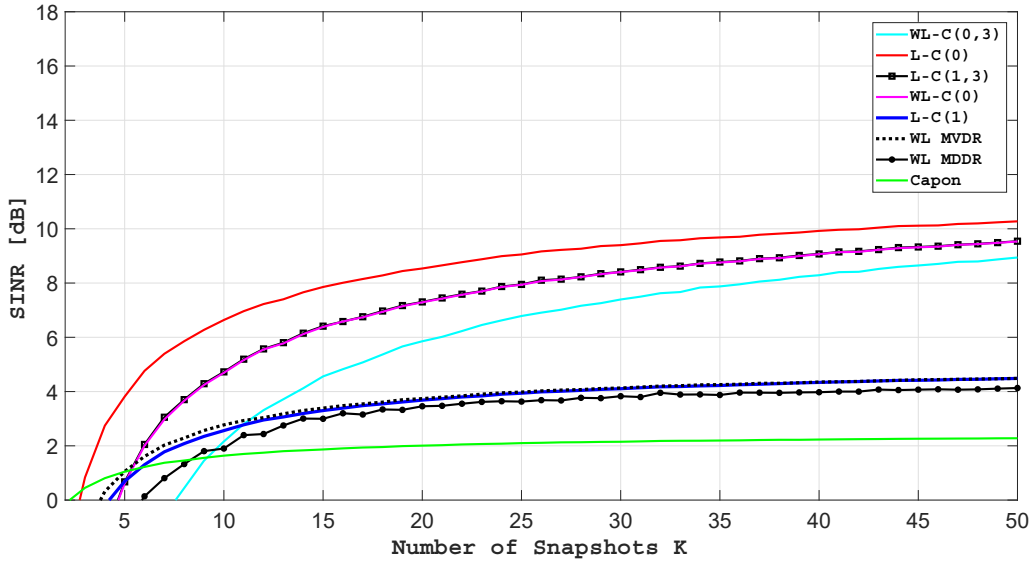


FIGURE 2.19 – $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour une interférence BPSK non-filtrée)zoom sur $K \in [0, 30]$).

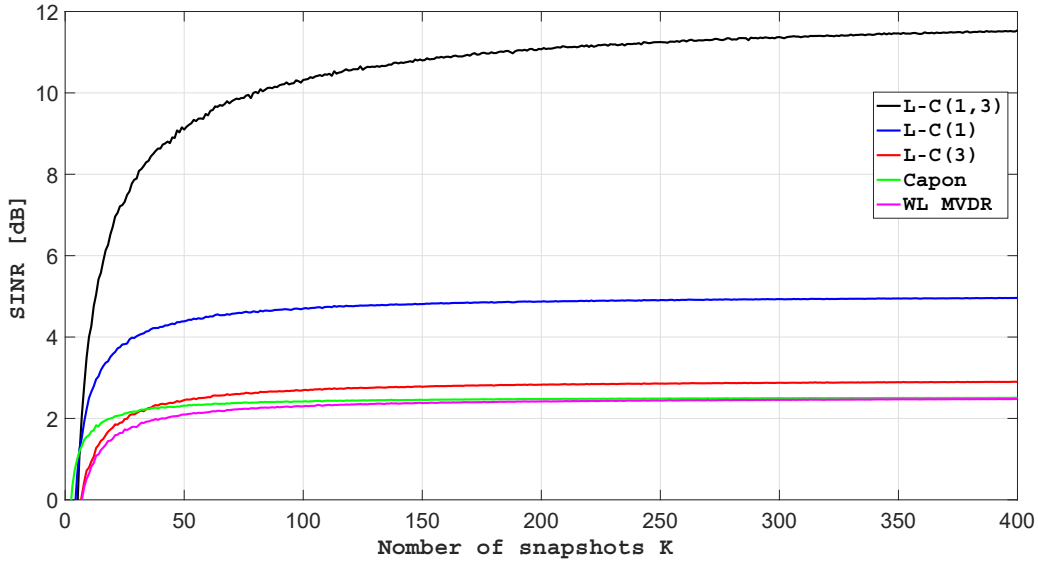


FIGURE 2.20 – $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour une interférence QPSK non-filtrée.

2.6 Beamformer MVDR complexe de Volterra à complexité linéaire

Pour réduire la complexité des beamformers de Volterra du troisième ordre que nous avons présentés qui devient prohibitive pour des grandes valeurs du nombre N d'antennes, nous considérons dans ce paragraphe des structures à complexité linéaire sous optimales. Pour cela nous imposons que les $N^3 \times 1$ vecteurs $\mathbf{w}_{3,q}$, $q = 0,..,3$ soient structurés sous la forme

$$\mathbf{w}_{3,q} = \mathbf{w}_{3,q,1} \otimes \mathbf{w}_{3,q,2} \otimes \mathbf{w}_{3,q,3}. \tag{2.6.1}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{w}_{1,0}^H \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}_{1,1}^H \mathbf{x}^*(t) \\ &+ (\mathbf{w}_{3,0,1}^H \mathbf{x}(t))(\mathbf{w}_{3,0,2}^H \mathbf{x}(t))(\mathbf{w}_{3,0,3}^H \mathbf{x}(t)) + (\mathbf{w}_{3,1,1}^H \mathbf{x}(t))(\mathbf{w}_{3,1,2}^H \mathbf{x}(t))(\mathbf{w}_{3,1,3}^H \mathbf{x}^*(t)) \\ &+ (\mathbf{w}_{3,2,1}^H \mathbf{x}(t))(\mathbf{w}_{3,2,2}^H \mathbf{x}^*(t))(\mathbf{w}_{3,2,3}^H \mathbf{x}^*(t)) + (\mathbf{w}_{3,3,1}^H \mathbf{x}^*(t))(\mathbf{w}_{3,3,2}^H \mathbf{x}^*(t))(\mathbf{w}_{3,3,3}^H \mathbf{x}^*(t)). \end{aligned}$$

avec $[\mathbf{w}_{3,q,1}]_1 = [\mathbf{w}_{3,q,2}]_1 = 1$, $q = 0,..,3$ pour lever l'ambiguïté des produits de trois termes et ainsi assurer l'unicité.

2.6.1 Nouvelles contraintes

Pour que $y(t)$ contienne $s(t)$ sans distorsion, nous imposons alors les contraintes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{1,0}^H\mathbf{s} &= 1,\ \mathbf{w}_{1,1}^H\mathbf{s}^* = 0 \\
\mathbf{w}_{3,0,1}^H\mathbf{s} &= 0,\ \mathbf{w}_{3,0,2}^H\mathbf{s} = 0 \text{ et } \mathbf{w}_{3,0,3}^H\mathbf{s} = 0, \\
\mathbf{w}_{3,1,1}^H\mathbf{s} &= 0,\ \mathbf{w}_{3,1,2}^H\mathbf{s} = 0 \text{ et } \mathbf{w}_{3,1,3}^H\mathbf{s}^* = 0, \\
\mathbf{w}_{3,2,1}^H\mathbf{s} &= 0,\ \mathbf{w}_{3,2,2}^H\mathbf{s}^* = 0 \text{ et } \mathbf{w}_{3,2,3}^H\mathbf{s}^* = 0, \\
\mathbf{w}_{3,3,1}^H\mathbf{s}^* &= 0,\ \mathbf{w}_{3,3,2}^H\mathbf{s}^* = 0 \text{ et } \mathbf{w}_{3,3,3}^H\mathbf{s}^* = 0,
\end{aligned}$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\mathbf{C}^H\widetilde{\mathbf{w}}_L = \mathbf{f}, \tag{2.6.2}$$

avec $\widetilde{\mathbf{w}}_L \overset{\text{def}}{=} [\mathbf{w}_{1,0}^T, \mathbf{w}_{1,1}^T, \mathbf{w}_{3,0,1}^T, \mathbf{w}_{3,0,2}^T, ..., \mathbf{w}_{3,3,3}^T]^T$ et où $\mathbf{f} \overset{\text{def}}{=} (1, \mathbf{0}_{13}^T)^T$.

2.6.2 Nouveau beamformer MVDR de Volterra

Sous ces nouvelles contraintes (2.6.2), la sortie de ce nouveau beamformer MVDR de Volterra prend la forme :

$$\begin{aligned}
y(t) &= s(t) + \mathbf{w}_{1,0}^H\mathbf{n}(t) + \mathbf{w}_{1,1}^H\mathbf{n}^*(t) \\
&+ (\mathbf{w}_{3,0,1}^H\mathbf{n}(t))(\mathbf{w}_{3,0,2}^H\mathbf{n}(t))(\mathbf{w}_{3,0,3}^H\mathbf{n}(t)) + (\mathbf{w}_{3,1,1}^H\mathbf{n}(t))(\mathbf{w}_{3,1,2}^H\mathbf{n}(t))(\mathbf{w}_{3,1,3}^H\mathbf{n}^*(t)) \\
&+ (\mathbf{w}_{3,2,1}^H\mathbf{n}(t))(\mathbf{w}_{3,2,2}^H\mathbf{n}^*(t))(\mathbf{w}_{3,2,3}^H\mathbf{n}^*(t)) + (\mathbf{w}_{3,3,1}^H\mathbf{n}^*(t))(\mathbf{w}_{3,3,2}^H\mathbf{n}^*(t))(\mathbf{w}_{3,3,3}^H\mathbf{n}^*(t)) \\
&\overset{\text{def}}{=} s(t) + \widetilde{\mathbf{w}}^H\widetilde{\mathbf{n}}(t),
\end{aligned} \tag{2.6.3}$$

où $\widetilde{\mathbf{w}} \overset{\text{def}}{=} [\mathbf{w}_{1,0}^T, \mathbf{w}_{1,1}^T, (\mathbf{w}_{3,0,1}^T \otimes \mathbf{w}_{3,0,2}^T \otimes \mathbf{w}_{3,0,3}^T), ..., (\mathbf{w}_{3,3,1}^T \otimes \mathbf{w}_{3,3,2}^T \otimes \mathbf{w}_{3,3,3}^T)]^T$. Nous avons toujours

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}} \overset{\text{def}}{=} \arg\{\min_{\widetilde{\mathbf{w}};\mathbf{C}^H\widetilde{\mathbf{w}}_L=\mathbf{f}} \widetilde{\mathbf{w}}^H\mathbf{R}_{\widetilde{x}}\widetilde{\mathbf{w}}\} = \arg\{\min_{\widetilde{\mathbf{w}};\mathbf{C}^H\widetilde{\mathbf{w}}_L=\mathbf{f}} \widetilde{\mathbf{w}}^H\mathbf{R}_{\widetilde{n}}\widetilde{\mathbf{w}}\}. \tag{2.6.4}$$

2.6.3 Interprétation GSC

La minimisation avec contraintes (2.6.4) peut aussi être transformée en minimisation sans contrainte par l'interprétation GSC. En appelant : $\mathbf{w}_f$ un vecteur tel que $\mathbf{w}_f^H\mathbf{s} = 1$ et $\mathbf{B}_{1,0} \overset{\text{def}}{=} [\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_{N-1}]$, les contraintes (2.6.2) sur $\widetilde{\mathbf{w}}_L$ sont équivalentes à

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{1,0} &= \mathbf{w}_f - \mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,1,0},\quad \mathbf{w}_{1,1} = -\mathbf{B}_{1,0}^*\mathbf{w}_{a,1,1}, \\
\mathbf{w}_{3,0,1} &= -\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,3,0,1},\quad \mathbf{w}_{3,0,2} = -\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,3,0,2},\quad \mathbf{w}_{3,0,3} = -\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,3,0,3} \\
\mathbf{w}_{3,1,1} &= -\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,3,1,1},\quad \mathbf{w}_{3,1,2} = -\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,3,1,2},\quad \mathbf{w}_{3,1,3} = -\mathbf{B}_{1,0}^*\mathbf{w}_{a,3,1,3} \\
\mathbf{w}_{3,2,1} &= -\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,3,2,1},\quad \mathbf{w}_{3,2,2} = -\mathbf{B}_{1,0}^*\mathbf{w}_{a,3,2,2},\quad \mathbf{w}_{3,2,3} = -\mathbf{B}_{1,0}^*\mathbf{w}_{a,3,2,3} \\
\mathbf{w}_{3,3,1} &= -\mathbf{B}_{1,0}^*\mathbf{w}_{a,3,3,1},\quad \mathbf{w}_{3,3,2} = -\mathbf{B}_{1,0}^*\mathbf{w}_{a,3,3,2},\quad \mathbf{w}_{3,3,3} = -\mathbf{B}_{1,0}^*\mathbf{w}_{a,3,3,3}.
\end{aligned}$$

Puisque :

$$\begin{aligned}[(\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,3,0,1}) \otimes (\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,3,0,2}) \otimes (\mathbf{B}_{1,0}\mathbf{w}_{a,3,0,3})]^H(\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) \\ = (\mathbf{w}_{a,3,0,1}^H\mathbf{z}(t))(\mathbf{w}_{a,3,0,2}^H\mathbf{z}(t))(\mathbf{w}_{a,3,0,3}^H\mathbf{z}(t)) \\ = (\mathbf{w}_{a,3,0,1} \otimes \mathbf{w}_{a,3,0,2} \otimes \mathbf{w}_{a,3,0,3})^H(\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t)),\end{aligned}$$

et de même pour $q = 1, 2, 3$ avec $\mathbf{z}(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{B}_{1,0}^H\mathbf{x}(t)$, la minimisation sous contrainte (2.6.4) est équivalente à la minimisation sans contrainte :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{a_L,\text{opt}} = \arg\{\min_{\widetilde{\mathbf{w}}_{a_L}} < \mathrm{E}|\mathbf{w}_f^H\mathbf{x}(t) - \widetilde{\mathbf{w}}_a^H\widetilde{\mathbf{z}}(t)|^2 >\}, \tag{2.6.5}$$

où :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_a \overset{\text{def}}{=} [\mathbf{w}_{a,1,0}^T, \mathbf{w}_{a,1,1}^T, (\mathbf{w}_{a,3,0,1} \otimes \mathbf{w}_{a,3,0,2} \otimes \mathbf{w}_{a,3,0,3})^T, ..., (\mathbf{w}_{a,3,3,1} \otimes \mathbf{w}_{a,3,3,2} \otimes \mathbf{w}_{a,3,3,3})^T]^T$$

et

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{a_L} \overset{\text{def}}{=} [\mathbf{w}_{a,1,0}^T, \mathbf{w}_{a,1,1}^T, \mathbf{w}_{a,3,0,1}^T, \mathbf{w}_{a,3,0,2}^T, \mathbf{w}_{a,3,0,3}^T, ..., \mathbf{w}_{a,3,3,1}^T, \mathbf{w}_{a,3,3,2}^T, \mathbf{w}_{a,3,3,3}^T]^T$$

où nous imposons aussi $[\mathbf{w}_{a,3,q,1}]_1 = [\mathbf{w}_{a,3,q,2}]_1 = 1$, $q = 0, ..3$, pour assurer l'unicité de $\widetilde{\mathbf{w}}_{a_L}$.

Ce problème de minimisation (2.6.5) s'écrit sous la forme :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{a_L,\text{opt}} = \arg\{\min_{\widetilde{\mathbf{w}}_{a_L}} \widetilde{\mathbf{w}}_a^H\mathbf{R}_{\tilde{z}}\widetilde{\mathbf{w}}_a - 2\mathrm{Re}[\widetilde{\mathbf{w}}_a^H\mathbf{R}_{\tilde{z},x}\mathbf{w}_f]\}, \tag{2.6.6}$$

qui n'a pas de solution analytique contrairement au beamformer de Volterra du troisième ordre que nous avons présenté précédemment. Cette minimisation sans contrainte (2.6.6) est un problème non convexe qui ne pourra donc se résoudre que par un algorithme de type itératif. Nous pourrions par example utiliser une méthode de minimisation alternative. Ainsi pour la structure partielle L-C(0), nous pourrions alternativement considerer les trois minimisations :

$$\min_{\mathbf{w}_{a,1,0},\mathbf{w}_{a,3,0,1}} \widetilde{\mathbf{w}}_a^H\mathbf{R}_{\tilde{z}}\widetilde{\mathbf{w}}_a - 2\mathrm{Re}[\widetilde{\mathbf{w}}_a^H\mathbf{R}_{\tilde{z},x}\mathbf{w}_f], \tag{2.6.7}$$

$$\min_{\mathbf{w}_{a,1,0},\mathbf{w}_{a,3,0,2}} \widetilde{\mathbf{w}}_a^H\mathbf{R}_{\tilde{z}}\widetilde{\mathbf{w}}_a - 2\mathrm{Re}[\widetilde{\mathbf{w}}_a^H\mathbf{R}_{\tilde{z},x}\mathbf{w}_f], \tag{2.6.8}$$

$$\min_{\mathbf{w}_{a,1,0},\mathbf{w}_{a,3,0,3}} \widetilde{\mathbf{w}}_a^H\mathbf{R}_{\tilde{z}}\widetilde{\mathbf{w}}_a - 2\mathrm{Re}[\widetilde{\mathbf{w}}_a^H\mathbf{R}_{\tilde{z},x}\mathbf{w}_f], \tag{2.6.9}$$

dans lesquelles, les arguments de chaque minimisation sont injectés dans la suivante et cela de façon itérative. Notons que chaque minimisation est une minimisation quadratique classique qui nécessite une inversion d'une matrice de taille $N - 1$. Cette approche n'a pas été traitée dans ce travail de thèse et pourrait être l'objet de travaux ultérieurs.

La sortie du récepteur GSC sera :

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathbf{w}_f^H\mathbf{x}(t) - \widetilde{\mathbf{w}}_{a,\text{opt}}^H\widetilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{w}_f^H\mathbf{x}(t) \\ &- [\mathbf{w}_{a_{\text{opt}},1,0}^H\mathbf{z}(t) + \mathbf{w}_{a_{\text{opt}},1,1}^H\mathbf{z}^*(t) + (\mathbf{w}_{a_{\text{opt}},3,0,1} \otimes \mathbf{w}_{a_{\text{opt}},3,0,2} \otimes \mathbf{w}_{a_{\text{opt}},3,0,3})^H(\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t)) \\ &\quad ... + (\mathbf{w}_{a_{\text{opt}},3,3,1} \otimes \mathbf{w}_{a_{\text{opt}},3,3,2} \otimes \mathbf{w}_{a_{\text{opt}},3,3,3})^H(\mathbf{z}^*(t) \otimes \mathbf{z}^*(t) \otimes \mathbf{z}^*(t))].\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

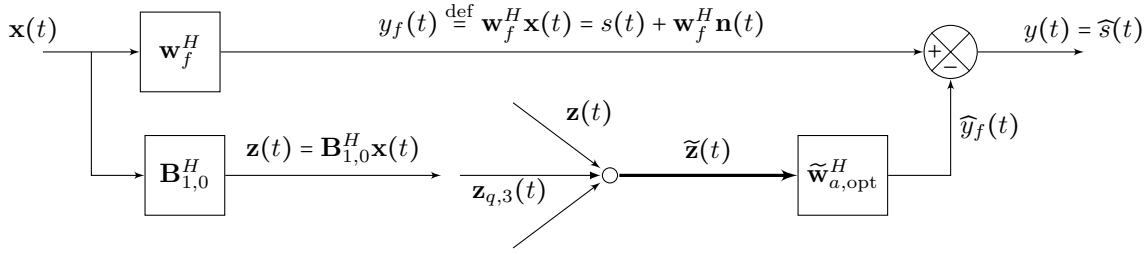


FIGURE 2.21 – Structure GSC équivalente du beamformer MVDR complexe de Volterra à complexité linéaire.

Dans le cas particulier $N = 2$, $\mathbf{z}(t)$ et $\mathbf{w}_{a,3,q,i}$, $q = 0,..,3$, $i = 1,2,3$ sont scalaires et

$$(\mathbf{w}_{a,3,0,1} \otimes \mathbf{w}_{a,3,0,2} \otimes \mathbf{w}_{a,3,0,3})^H(\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t)) = (1 \times 1 \times w_{a,3,0,3})z^3(t).$$

La minimisation (2.6.5) est donc équivalente à celle du récepteur GSC classique 2.1.

2.6.4 Calcul de SINR

Nous avons ici la décomposition orthogonale

$$y(t) \quad = \quad s(t) + \left(\mathbf{w}_f^H\mathbf{n}(t) - \widetilde{\mathbf{w}}_{a_{\text{opt}}}^H\mathbf{B}^H\widetilde{\mathbf{n}}(t)\right);$$

D'où le SINR en sortie du récepteur GSC de la même manière que le calcul de SINR présenté au paragraphe 2.3.4 :

$$\text{SINR}_{\text{MVDR}} = \frac{\pi_s}{\mathbf{w}_f^H\mathbf{R}_n\mathbf{w}_f + \widetilde{\mathbf{w}}_{a_{\text{opt}}}^H\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{n}}\mathbf{B}\widetilde{\mathbf{w}}_{a_{\text{opt}}} - 2\text{Re}[\widetilde{\mathbf{w}}_{a_{\text{opt}}}^H\mathbf{B}^H\mathbf{R}_{\tilde{n},n}\mathbf{w}_f]}. \tag{2.6.11}$$

2.6.5 Comparaisons avec le beamformeur de Volterra à complexité cubique

Nous donnons ici quelques éléments de comparaison de ce beamformer à complexité linéaire avec le beamformer précédent.

2.6.5.1 Comparaisons de complexité

Pour le récepteur de Volterra MVDR à complexité cubique nous avons une minimisation quadratique avec solution analytique sur $\widetilde{\mathbf{w}}_{a'} \in \mathbb{C}^{N_z}$ avec $N_z = 2(N-1)(2N^2 - N + 3)/3$. Par exemple :

$N = 2$, on a $N_z = 6$,

$N = 3$, on a $N_z = 24$,

$N = 4$, on a $N_z = 62$,

$N = 5$, on a $N_{z_L} = 128$,

$N \gg 1$, on a $N_z \sim (4/3)N^3$.

Pour le récepteur Volterra MVDR à complexité linéaire nous avons minimisation sans solution analytique (donc très coûteuse en temps calcul) sur $\widetilde{\mathbf{w}}_{a'_L} \in \mathbb{C}^{N_{z_L}}$, ($\widetilde{\mathbf{w}}_{a'_L}$ désigne le vecteur $\widetilde{\mathbf{w}}_{a_L}$ privé

des composantes égales à l'unité pour assurer l'unicité) avec $N_{z_L} = 2(N-1) + 4[3(N-1) - 2]$. Soit par exemple :

$N = 2$, on a $N_{z_L} = N_z = 6$,

$N = 3$, on a $N_{z_L} = 20$,

$N = 4$, on a $N_{z_L} = 34$,

$N = 5$, on a $N_{z_L} = 48$,

$N \gg 1$, on a $N_{z_L} \sim 12N$.

2.6.6 Sous optimalité et vitesse de convergence

Les contraintes (2.6.1) imposées aux vecteur $\widetilde{\mathbf{w}}_L$ vont probablement entraîner une dégradation du SINR par rapport au beamformer de Volterra MVDR à complexité cubique.

Par ailleurs la vitesse de convergence de l'apprentissage sans doute plus rapide par rapport au beamformer de Volterra MVDR à complexité cubique, car il y moins de coefficients à estimer. Ces points pourraient aussi faire l'objet de travaux ultérieurs.

2.7 Conclusion

Le beamformer MVDR complexe de Volterra au troisième ordre, correspondant à une structure de beamformer MVDR Widely Linear Cubic, a été étudié et analysé dans ce chapitre, pour la réception d'un SOI de forme d'onde inconnue, mais de vecteur directionnel connu, corrompu par une interférence potentiellement non gaussienne et/ou non-circulaire. Des structures partielles de ce beamformer telles que MVDR Linear-Cubic ont été considérés aussi dans ce chapitre. Les beamformers MVDR Linear-Cubic et WL-Cubic sont respectivement les extensions au troisième ordre des beamformers classique de Capon et WL MVDR_1, permettant de prendre en compte le caractère non gaussien et/ou le caractère non-circulaire de l'interférence jusqu'au sixième ordre. Ces beamformers ne nécessitent aucune information a priori sur l'interférence, ce qui les rend adaptés aux opérations de contrôle du spectre dans un contexte de signaux circulaires ou non-circulaire et non gaussiens. Chacun des ces beamformers possède une structure GSC équivalente, permettant une implémentation adaptative à complexité réduite à partir de l'extension de l'algorithme SMI. Une étude analytique des performances de quelques structures du beamformer MVDR complexe de Volterra au troisième ordre, L-Cubic et WL-Cubic, en présence d'une seule interférence a été présentée pour $N = 2$ antennes. Il a été démontré, en fonction des statistiques du second, quatrième et sixième ordre de l'interférence, que d'une part certaines structures du beamformer MVDR complexe de Volterra au troisième ordre surpassent le beamformer classique de Capon pour des interférences circulaires, non gaussiennes ; d'autre part certaines structures surpassent le beamformer WL MVDR_1 pour une interférence non-circulaire, non gaussienne. Dans certains cas, quelques beamformers MVDR complexe de Volterra du troisième ordre éliminent l'interférence

sous condition que son module du coefficient de corrélation spatiale, α, avec le SOI n'approche pas l'unité ; et ainsi délivrent un SINR en sortie élevé correspondant au cas d'absence d'interférence. Cette situation s'observe particulièrement pour une très forte interférence BPSK ou QPSK non-filtrée ou bien pour une interférence de Bernoulli très impulsive, d'où le grand intérêt de notre beamformer non-linéaire. Dans toutes les situations considérées, le beamformer WL-Cubic MVDR à structure complète ne peut présenter des performances dégradées par rapport au beamformer classique de Capon et WL MVDR_1. Enfin une solution sous optimale à complexité linéaire a été introduite dont l'étude pourrait faire l'objet de travaux ultérieurs.

Chapitre 3

Beamforming et filtrage de Volterra complexe MMSE

Sommaire

3.1 Introduction 99
3.2 Hypothèses et formulation du problème 100
3.3 Beamforming de Volterra complexe MMSE 101
3.4 Analyse des performances du beamformer et du filtrage de Volterra complexe MMSE d'ordre 3 106
3.5 Conclusion 135

3.1 Introduction

Nous avons introduit au chapitre 2 un nouveau beamformer de type MVDR, c'est à dire qui fournit une estimation sans biais $\hat{s}(t)$ du SOI $s(t)$ et de variance minimale dans la classe des fonctions polynomiales complexes d'un degré fixé M. Celui-ci n'utilise aucune information statistique sur ce SOI. En s'inspirant du beamformer dit MVDR_2 ou MMSE introduit dans [22, 24] qui est une extension du beamformer WL MVDR [21] qui lui utilise des statistiques d'ordre deux du SOI, nous présentons dans ce chapitre une extension du beamformer de Volterra MVDR complexe introduit au chapitre 2 sous la forme d'un beamformer de Volterra MMSE ou MVDR_2 complexe qui utilisera lui des statistiques d'ordre M maximum du SOI. Nous généralisons ici les notions de *vecteur directionnel étendu*, de *décomposition orthogonale* et de SINR en sortie de beamformer que l'on relira à la MSE qui ont été introduits dans [22, 24].

Le cas particulièrement important d'un seul capteur que nous appellerons filtrage de Volterra MMSE sera étudié en détail. En effet il est maintenant bien connu que l'une des propriétés les plus importantes d'un filtre WL [68] est sa capacité à rejeter une interférence rectiligne (BPSK, ASK)

ou quasi-rectiligne (MSK, GMSK, OQAM) co-canal à partir d'une seule antenne (concept de single antenna interference cancellation ou SAIC), permettant la séparation de deux utilisateurs à partir d'une seule antenne [89, 20, 54]. L'efficacité de ce concept, conjointement à sa faible complexité expliquent pourquoi il est opérationnel dans la plupart des portables GSM, permettant des gains très significatifs pour la capacité des réseaux GSM [54, 59]. Toutefois, comme expliqué dans [95, 58, 74], des extensions et renforcements du concept SAIC sont requis pour certains nouveaux standards tels que VAMOS, une évolution du GSM standardisée récemment [65]. Un besoin similaire est aussi requis pour traiter l'interférence entre porteuses pour les réseaux utilisant la forme d'onde multi-porteuses FBMC-OQAM, candidate prometteuse pour les réseaux mobiles 5G [100]. Nous allons montrer ici qu'un filtrage de Volterra MMSE complexe du 3ème ordre permet une amélioration de la technologie SAIC basée sur un simple filtrage WL, car cette structure exploite la non gaussiannité et les non-circularité d'ordre 2, 4 et 6 des signaux, contrairement au filtrage WL qui n'exploite que la non circularité d'ordre 2. Les gains en performance obtenus dépendent de différents paramètres tels que les constellations, les phases, les puissances et l'asynchronisme des signaux. Nous verrons enfin que ce filtrage de Volterra MMSE complexe du 3ème ordre a la capacité de séparer deux signaux de constellations QPSK synchrones et de phases quelconques mais de puissances différentes reçus par une seule antenne, sans avoir à démoduler les deux signaux grâce à l'effet de discrimination d'amplitude.

Notons que les rares travaux analysant la capacité des filtres de Volterra complexes à rejeter une interférence correspondent à [15, 25, 85]. Alors que [15] traite des filtres de Volterra complexes d'ordre M pour la détection et l'estimation en contexte non-gaussien avec une application à la réjection d'interférence pour $M = 2$, [25, 85] concernent l'analyse des filtres de Volterra complexes d'ordre 3 pour la réjection d'interférences. Néanmoins, [25] se limite à des réseaux CDMA alors que [85] considère du beamforming avec au moins 2 antennes.

3.2 Hypothèses et formulation du problème

3.2.1 Hypothèses

Nous reprenons ici les hypothèses du modèle (2.2.1) du chapitre 2 où le signal d'intérêt (SOI) $s(t)$ est une modulation linéaire et où nous supposons que le canal de propagation est à un seul trajet. Avec une parfaite synchronisation fréquentielle et temporelle par rapport au SOI, l'envelope complexe $\mathbf{x}(t)$ en sortie d'antenne s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mu_s \sum_k a_k v(t - kT)\mathbf{s} + \mathbf{n}(t), \tag{3.2.1}$$

où a_k est une séquence de symboles identiquement distribués centrés de constellation soit rectiligne, soit circulaire du second-ordre et symétrique par rapport à l'origine dans le plan complexe. T est la période symbole, $v(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre tel que $r(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t) \otimes v^*(-t)$ est

un filtre de Nyquist en cosinus surélevé, μ_s est l'amplitude du SOI. Nous obtenons les enveloppes complexes échantillonnées au rythme symbole en sortie de filtrage adapté à l'impulsion $v(t)$:

$$\mathbf{x}_k = \mu_s a_k r(0)\mathbf{s} + \mathbf{n}_k, \tag{3.2.2}$$

où $\mathbf{n}_k$ supposé stationnaire, désigne les échantillons au rythme symbole en sortie de filtrage adapté, associé au bruit total $\mathbf{n}(t)$.

3.2.2 Formulation du problème

Le problème considéré ici est la détection des symboles a_k à l'aide des observations $\mathbf{x}_k$ en utilisant un critère MMSE. Naturellement l'estimée y_k de a_k selon le critère MMSE est l'espérance conditionnelle $y_k = \mathrm{E}(a_k|\mathbf{x}_k)$, qui dans le cas d'une distribution conjointe de $(a_k, \mathbf{x}_k)$ respectivement gaussienne circulaire ou non circulaire devient linéaire ou WL en $\mathbf{x}_k$ [68]. Mais pour des distributions de $(a_k, \mathbf{x}_k)$ non gaussiennes, cette espérance conditionnelle devient non linéaire en $\mathbf{x}_k$. Or celle-ci est impossible à obtenir car en pratique la distribution de $(a_k, \mathbf{x}_k)$ est inconnue.

Pour cette raison, nous considérons dans ce chapitre une approximation de cette espérance conditionnelle à travers l'analyse d'une classe particulière de filtres non linéaires correspondant à des filtres de Volterra complexes (VC) introduits pour la première fois dans [15] et [16] dans le contexte général de la détection et de l'estimation. Le modèle général sans mémoire de ce filtrage invariant dans le temps de Volterra complexe d'ordre M est défini par :

$$y_k = \sum_{m=0}^{M} \sum_{q=0}^{m} \mathbf{w}_{m,q}^H (\mathbf{x}_k^{\oslash(m-q)} \otimes \mathbf{x}_q^{*\oslash q}), \tag{3.2.3}$$

où nous avons utilisé le produit de Kronecker symétrique $\oslash$ (introduit dans [25]) entre deux vecteurs identiques, plutôt que le produit de Kronecker standard $\otimes$ pour éviter les termes redondants. Pour $w_{0,0} = 0$, (3.2.3) définit un filtre WL [68] pour $M = 1$ et un filtre linéaire quadratique complet [17] pour $M = 2$.

Le problème consiste donc à trouver le filtre $(\mathbf{w}_{m,q})_{0\leq m\leq M,\ 0\leq q\leq m}$ de Volterra complexe d'ordre M qui minimise la MSE entre y_k et a_k.

3.3 Beamforming de Volterra complexe MMSE

3.3.1 Filtre de Volterra complexe

Le beamformer complexe de Volterra (3.2.3) peut être écrit sous la forme compacte suivante :

$$y_k = \widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{x}}_k, \tag{3.3.1}$$

où

$$\widetilde{\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1,0} \\ \mathbf{w}_{1,1} \\ \mathbf{w}_{2,0} \\ \mathbf{w}_{2,1} \\ \mathbf{w}_{2,2} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{M,0} \\ \mathbf{w}_{M,1} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{M,M} \end{bmatrix} \text{ et } \widetilde{\mathbf{x}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_k^* \\ \mathbf{x}_k \oslash \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_k \otimes \mathbf{x}_k^* \\ \mathbf{x}_k^* \oslash \mathbf{x}_k^* \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \oslash \mathbf{x}_k \oslash \ldots \oslash \mathbf{x}_k \\ (\mathbf{x}_k \oslash \ldots \oslash \mathbf{x}_k) \otimes \mathbf{x}_k^* \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^* \oslash \mathbf{x}_k^* \oslash \ldots \oslash \mathbf{x}_k^* \end{bmatrix} \tag{3.3.2}$$

est le *vecteur d'observation augmenté* [25]. Le beamformer de Volterra complexe d'ordre M correspond au filtrage $\widetilde{\mathbf{w}}$ qui minimise le critère :

$$\text{MSE}(\widetilde{\mathbf{w}}) = \text{E}|a_k - \widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{x}}_k|^2.$$

Ce filtre est classiquement donné par :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{\text{VC–MMSE}} = \mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}, \tag{3.3.3}$$

où : $\mathbf{R}_{\tilde{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}(\widetilde{\mathbf{x}}_k \widetilde{\mathbf{x}}_k^H)$ et $\mathbf{r}_{\tilde{x},a} \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}(\widetilde{\mathbf{x}}_k a_k^*)$. Notons que contrairement aux cas linéaires et WL du beamformer MMSE [23] où respectivement :

$$\mathbf{w}_{\text{L–MMSE}} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{r}_{x,a} \text{ et } \mathbf{w}_{\text{WL–MMSE}} = \mathbf{R}_{\bar{x}}^{-1} \mathbf{r}_{\bar{x},a},$$

où $\mathbf{R}_x \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H)$ et $\mathbf{r}_{x,a} \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}(\mathbf{x}_k a_k^*)$, $\mathbf{R}_{\bar{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}(\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_k^H)$ et $\mathbf{r}_{\bar{x},a} \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}(\bar{\mathbf{x}}_k a_k^*)$ avec $\bar{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k^T, \mathbf{x}_k^H]^T$, pour lesquels :

$$\mathbf{r}_{x,a} = \mu_{s,a} \mathbf{s} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{\bar{x},a} = \mu_{s,a} \tilde{\mathbf{s}}_\gamma,$$

avec $\mu_{s,a} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_s \text{E}|a_k^2| r(0)$ et $\tilde{\mathbf{s}}_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{s}^T, \gamma_a^* \mathbf{s}^H]^T$, nous avons ici :

$$\mathbf{r}_{\tilde{x},a} = \mu_{s,a} \widetilde{\mathbf{s}}_n, \tag{3.3.4}$$

dont les deux premières composantes de $\widetilde{\mathbf{s}}_n$ sont $\mathbf{s}$ et $\gamma_a^* \mathbf{s}^*$ où :

$$\gamma_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{E}(a_k^2)}{\text{E}|a_k^2|}$$

est le coefficient de non-circularité au second ordre des symboles a_k. Le vecteur $\widetilde{\mathbf{s}}_n$ qui joue le rôle de *vecteur directionnel étendu*, dépend maintenant de $\mathbf{s}$, et de statistiques de a_k et $\mathbf{n}_k$ d'ordres inférieurs ou égaux à M. Avec ces notations, l'équation (3.3.3) nous donne :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{\text{VC–MMSE}} = \mu_{s,a} \mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1} \widetilde{\mathbf{s}}_n. \tag{3.3.5}$$

Notons qu'en pratique $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$ et $\mathbf{r}_{\tilde{x},a}$ ne sont pas connus et doivent être estimées à l'aide d'une séquence d'apprentissage corrélée avec les symboles SOI, en utilisant une approche moindre carrée. Un exemple de vitesse d'apprentissage sera donné au paragraphe 3.4.6.4.

3.3.2 Cas particulier de symboles a_k réels

Il faut noter que les composantes du vecteur d'observation augmenté (3.3.2) $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ peuvent être représentées sous cette forme :

$$\widetilde{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{'} \\ \mathbf{x}_k^{'*} \end{bmatrix}.$$

Par conséquent l'estimé VC-MMSE y_k de a_k peut être interprétée comme une estimé WL-MMSE de a_k à partir de l'observation $\mathbf{x}_k^{'}$ et donc l'estimé VC-MMSE hérite des propriétés remarquables de l'estimateur WL-MMSE [68]. En particulier, dans le cas de symboles SOI a_k à valeurs réelles, bien que l'observation complexe $\mathbf{x}_k^{'}$ soit complexe, l'estimé y_k donnée par (3.3.1) est à valeurs réelles.

Cette propriété s'étend aux structures de filtrage de Volterra complexe partielles dès que le nouveau vecteur d'observation augmenté $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ contient un sous ensemble de termes de $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ (3.3.2) de la structure complète, tel que les termes de $\widetilde{\mathbf{x}}_k^*$ sont aussi les termes de $\widetilde{\mathbf{x}}_k$, par exemple $\widetilde{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k^T, \mathbf{x}_k^H, \mathbf{x}_k^T \otimes \mathbf{x}_k^H]$. En effet dans ce cas, il existera une matrice de permutation $\mathbf{P}$ telle que $\widetilde{\mathbf{x}}_k^* = \mathbf{P}\widetilde{\mathbf{x}}_k$ et $y_k^* = \mathbf{r}_{\tilde{x},a}^T[\mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1}]^T\widetilde{\mathbf{x}}_k^*$ avec $[\mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1}]^T = [\mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1}]^* = \mathbf{P}\mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1}\mathbf{P}^T$ et $\mathbf{r}_{\tilde{x},a}^T = \mathbf{r}_{\tilde{x},a}^H\mathbf{P}^T$. Puisque $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^*$, y_k est à valeurs réelles.

3.3.3 MMSE

L'erreur quadratique moyenne minimale obtenue par le beamformer MMSE de Volterra complexe (3.3.3) est donnée par :

$$\text{MMSE} \stackrel{\text{def}}{=} \text{MSE}[\widetilde{\mathbf{w}}_{\text{VC-MMSE}}] = \pi_a - \mathbf{r}_{\tilde{x},a}^H\mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1}\mathbf{r}_{\tilde{x},a}, \tag{3.3.6}$$

où $\pi_a \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}|a_k|^2$. Si certaines composantes du beamformer de Volterra complexe d'ordre M à structure complète (3.2.3) sont supprimées, nous obtenons différentes structures partielles. L'augmentation de l'erreur quadratique moyenne minimale $\Delta_{\text{VC-MMSE}}$ obtenue par de telles structures partielles peut être déterminée en partitionnant $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ en composantes conservées $\widetilde{\mathbf{x}}_{1,k}$ et supprimées $\widetilde{\mathbf{x}}_{2,k}$. En appliquant la lemme d'inversion matricielle sur la matrice de covariance augmentée et partitionnée :

$$\mathbf{R}_{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\tilde{x}_{11}} & \mathbf{R}_{\tilde{x}_{12}} \\ \mathbf{R}_{\tilde{x}_{12}}^H & \mathbf{R}_{\tilde{x}_{22}} \end{bmatrix},$$

l'augmentation de l'erreur quadratique moyenne minimale obtenue par le beamformer de Volterra complexe d'ordre M qui utilise seulement une partie $\widetilde{\mathbf{x}}_{1,k}$ de l'observation augmentée, est donnée par :

$$\Delta_{\text{VC-MMSE}} = (\mathbf{r}_{\tilde{x}_2,a}^H - \mathbf{r}_{\tilde{x}_1,a}^H\mathbf{R}_{\tilde{x}_{11}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{x}_{12}})\left(\mathbf{R}_{\tilde{x}_{22}} - \mathbf{R}_{\tilde{x}_{12}}^H\mathbf{R}_{\tilde{x}_{11}}^{-1}\mathbf{R}_{\tilde{x}_{12}}\right)^{-1}(\mathbf{r}_{\tilde{x}_2,a} - \mathbf{R}_{\tilde{x}_{12}}^H\mathbf{R}_{\tilde{x}_{11}}^{-1}\mathbf{r}_{\tilde{x}_1,a}) \geq 0. \tag{3.3.7}$$

Par suite, le terme $\widetilde{\mathbf{x}}_{2,k}$ n'apporte aucune information supplémentaire ($\Delta_{\text{VC-MMSE}} = 0$) si $\widetilde{\mathbf{x}}_{2,k}$ est décorrélé à la fois de a_k et de $\widetilde{\mathbf{x}}_{1,k}$. Un exemple d'une telle situation est le cas de signaux

centrés à distribution symétrique par rapport à l'origine dans le plan complexe où les termes $\widetilde{\mathbf{x}}_{1,k}$ et $\widetilde{\mathbf{x}}_{2,k}$ regroupent respectivement les termes d'ordre m impairs et pairs de l'expression (3.2.3). En conséquence dans la suite de notre développement, uniquement les beamformers de Volterra complexes tel que M est impair et contenant seulement des termes d'ordre m impair sont considérés.

Par contre si $\widetilde{\mathbf{x}}_{1,k}$ rassemble seulement les termes (x_k, x_k^*) et $\widetilde{\mathbf{x}}_{2,k}$ les termes impair d'ordres supérieurs, tous les termes $\widetilde{\mathbf{x}}_{2,k}$ sont corrélés avec à la fois a_k et $\widetilde{\mathbf{x}}_{1,k}$ et donc contribuent à faire décroître la MMSE par rapport à celle du filtre WL-MMSE. Cela prouve les meilleurs performances en terme de MMSE de tout filtre de Volterra complexe de structure partielle d'ordre M avec seulement des termes d'ordres impairs par rapport au filtre WL-MMSE.

3.3.4 Décomposition orthogonale et SINR

Pour mieux comprendre le comportement de nos filtres de Volterra complexe MMSE et pour le comparer à celui du filtre WL-MMSE, nous étendons l'interprétation de ce dernier, introduite dans [24] en remarquant que tous les termes de $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ contiennent une composante SOI au travers de sa décomposition orthogonale :

$$\widetilde{\mathbf{x}}_k = a_k \left(\frac{\mathbf{r}_{\tilde{x},a}}{\pi_a} \right) + \widetilde{\mathbf{i}}_k = a_k \mu_s r(0) \widetilde{\mathbf{s}}_n + \widetilde{\mathbf{i}}_k. \tag{3.3.8}$$

Cela implique que les différents termes de la forme $a_k^{(m-q)} a_k^{*q}$ en relation avec a_k qui composent l'observation augmentée $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ peuvent apporter de l'information supplémentaire à propos de a_k. Cela généralise le filtrage WL-MMSE où le terme a_k^* de $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ apportait de l'information dans le cas de symboles réels a_k. Cette décomposition (3.3.8) permet donc d'étendre la notion classique de SINR en sortie de tout filtre de Volterra complexe $\widetilde{\mathbf{w}}$:

$$\mathrm{SINR}(\widetilde{\mathbf{w}}) = \frac{|\widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{r}_{\tilde{x},a}|^2}{\pi_a \widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{i}} \widetilde{\mathbf{w}}}, \tag{3.3.9}$$

où $\mathbf{R}_{\tilde{i}} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}(\widetilde{\mathbf{i}}_k \widetilde{\mathbf{i}}_k^H)$ est la matrice de covariance de la composante $\widetilde{\mathbf{i}}_k$ de $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ (3.3.8) qui rassemble tous ses termes non corrélés avec le symbole SOI a_k.

Il est aisé de démontrer que les filtres $\widetilde{\mathbf{w}}$ de Volterra complexe qui maximisent le SINR (3.3.9) sont les filtres colinéaires à $\mathbf{R}_{\tilde{i}}^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}$. Appliquant le lemme d'inversion matricielle à

$$\mathbf{R}_{\tilde{i}} = \mathbf{R}_{\tilde{x}} - \pi_a^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}^H$$

déduit de la décomposition orthogonale (3.3.8), il est aisé de vérifier que $\mathbf{R}_{\tilde{i}}^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}$ et $\mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}$ sont colinéaires. En conséquence les filtres de Volterra $\widetilde{\mathbf{w}}$ qui maximisent le SINR (3.3.9) sont colinéaires à $\widetilde{\mathbf{w}}_{\text{VC–MMSE}}$ (3.3.3). La valeur maximum du SINR (3.3.9), dénotée MSINR est donc donnée par :

$$\mathrm{MSINR} = \frac{1}{\pi_a} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}^H \mathbf{R}_{\tilde{i}}^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a} = \frac{\pi_a^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}^H \mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}}{1 - \pi_a^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}^H \mathbf{R}_{\tilde{x}}^{-1} \mathbf{r}_{\tilde{x},a}}. \tag{3.3.10}$$

Par ailleurs, il est aisé de démontrer à partir de (3.3.8) et (3.3.9), la relation générale suivante reliant la MSE et le SINR à la sortie y_k d'un filtre de Volterra complexe arbitraire $\widetilde{\mathbf{w}}$:

$$\mathrm{MSE}(\widetilde{\mathbf{w}}) = \pi_a \left| 1 - \frac{\widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{r}_{\tilde{x},a}}{\pi_a} \right|^2 + \frac{|\widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{r}_{\tilde{x},a}|^2}{\pi_a \mathrm{SINR}(\widetilde{\mathbf{w}})}. \tag{3.3.11}$$

Nous déduisons à partir de (3.3.11) que le filtre de Volterra complexe $\widetilde{\mathbf{w}}$, qui minimise $\mathrm{MSE}(\widetilde{\mathbf{w}})$ sous la contrainte $\widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{r}_{\tilde{x},a} = \pi_a$ est aussi le filtre de Volterra complexe qui maximise $\mathrm{SINR}(\widetilde{\mathbf{w}})$ sous ses mêmes contraintes. Cela démontre que sous la contrainte $\widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{r}_{\tilde{x},a} = \pi_a$, la minimisation de la MSE et la maximisation du SINR sont des critères équivalents. Cela donne une interprétation physique au SINR (3.3.9) en terme de minimisation de la MSE. Sans cette contrainte, (3.3.11) montre que la minimisation de la MSE n'est plus équivalente à la maximisation du SINR (3.3.9), mais $\widetilde{\mathbf{w}}_{\mathrm{VC-MMSE}}$ qui minimise $\mathrm{MSE}(\widetilde{\mathbf{w}})$, maximise aussi $\mathrm{SINR}(\widetilde{\mathbf{w}})$, mais n'est pas le seul.

En utilisant l'expression (3.3.6) du MMSE dans le deuxième terme de (3.3.10) on obtient la relation $\mathrm{MMSE} = \frac{\pi_a}{1+\mathrm{MSINR}}$. Cette valeur est à comparer à la valeur de la MSE du beamformer de Volterra complexe qui maximiserait le SINR (3.3.9) sous la contrainte $\widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{r}_{\tilde{x},a} = \pi_a$, appelé $\mathrm{MSE}(\widetilde{\mathbf{w}}_{\mathrm{VC-MVDR_2}})$ par analogie avec le beamformer $\mathrm{MVDR_2}$ introduit dans [24] :

$$\mathrm{MMSE} = \frac{\pi_a}{1 + \mathrm{MSINR}} \leq \frac{\pi_a}{\mathrm{MSINR}} = \mathrm{MSE}(\widetilde{\mathbf{w}}_{\mathrm{VC-MVDR_2}}). \tag{3.3.12}$$

Finalement bien qu'utilisé dans un contexte de détection de symboles et non d'écoute comme pour les beamformers classiques MVDR [11], WL-MVDR introduit dans [21] et MVDR de Volterra (introduit au chapitre 2), le SINR commun aux beamformers de Volterra complexes MMSE et $\mathrm{MVDR_2}$ peut être comparé aux SINRs des beamformers précédents ainsi qu'au beamformer WL-MMSE. En effet si nous considérons que tous ces beamformers sont définis par la minimisation d'une puissance de sortie $\widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\tilde{x}} \widetilde{\mathbf{w}}$ sous différentes contraintes linéaires sur $\widetilde{\mathbf{w}}$, nous avons par le principe d'inclusion sur cette contrainte :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{MVDR}} \leq \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-MVDR}} \leq \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-MMSE}} \leq \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-MMSE_2}} = \mathrm{SINR}_{\mathrm{VC-MMSE}} \tag{3.3.13}$$

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{VC-MVDR}} \leq \mathrm{SINR}_{\mathrm{VC-MMSE}} = \mathrm{SINR}_{\mathrm{VC-MVDR_2}}. \tag{3.3.14}$$

Notons que cette dernière relation s'applique aux beamformers de Volterra complexes à structures complètes ou partielles identiques.

3.3.5 Beamformer et filtrage de Volterra complexe MMSE d'ordre 3

Pour des raisons de complexité nous nous limiterons ici au beamformer de Volterra complexe MMSE d'ordre $M = 3$ à termes m d'ordres impairs 1 et 3 suivant :

$$\begin{aligned} y(t) &= \overbrace{\underbrace{\mathbf{w}_{1,0}^H \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_{1,1}^H \mathbf{x}_k^*}_{WL} + \underbrace{\mathbf{w}_{3,0}^H [\mathbf{x}_k \oslash \mathbf{x}_k \oslash \mathbf{x}_k]}_{C(0)} + \underbrace{\mathbf{w}_{3,1}^H [(\mathbf{x}_k \oslash \mathbf{x}_k) \otimes \mathbf{x}_k^*]}_{C(1)}}^{L} \\ &+ \underbrace{\mathbf{w}_{3,2}^H [\mathbf{x}_k \otimes ((\mathbf{x}_k^* \oslash \mathbf{x}_k^*)]}_{C(2)} + \underbrace{\mathbf{w}_{3,3}^H [\mathbf{x}_k^* \oslash \mathbf{x}_k^* \oslash \mathbf{x}_k^*]}_{C(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{x}}_k. \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Un tel filtre est dénoté par WL-C(0,1,2,3) et des filtres à structures partielles ne retenant que certains termes cubiques de (3.3.15) dénotés WL-C(i), WL-C(i,j), $(i,j) \in \{0,1,2,3\}$ peuvent aussi être étudiés. On peut aussi s'intéresser à des filtres de structures partielles ne contenant pas le terme linéaire conjugué, dénotés L-C(i) et L-C(i,j).

Notons que notre formalisme inclut le cas particulier d'un seul capteur $N = 1$, pour lequel nous obtenons le filtrage de Volterra complexe d'ordre 3 défini par :

$$y_k = \overbrace{\underbrace{w_{1,0}^* x_k + w_{1,1}^* x_k^*}_{WL} + \underbrace{w_{3,0}^* x_k^3}_{C(0)} + \underbrace{w_{3,1}^* x_k^2 x_k^*}_{C(1)} + \underbrace{w_{3,2}^* x_k x_k^{2*}}_{C(2)} + \underbrace{w_{3,3}^* x_k^{3*}}_{C(3)}}^{L} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{x}}_k. \tag{3.3.16}$$

3.4 Analyse des performances du beamformer et du filtrage de Volterra complexe MMSE d'ordre 3

3.4.1 Modèle d'interférence et statistiques

Nous considérerons ici le cas où le bruit total $\mathbf{n}(t)$ est constitué d'une seule interférence cocanal (CCI) $j(t)\mathbf{j}$ de modulation linéaire de même débit symbole que le SOI avec un canal de propagation monotrajet et d'un bruit de fond $\mathbf{n}_G(t)$ centré, gaussien circulaire blanc temporellement et spatialement, indépendant du CCI. Par suite :

$$\mathbf{x}(t) = \mu_s \sum_k a_k v(t - kT)\mathbf{s} + \mu_j e^{i\phi} \sum_k b_k v(t - kT - \tau)\mathbf{j} + \mathbf{n}_G(t), \tag{3.4.1}$$

où μ_j, ϕ, τ et $\mathbf{j}$, représentent respectivement le module, la phase et le retard par rapport au SOI et le vecteur directionnel du CCI. b_k est aussi une séquence de symboles identiquement distribués centrés de constellation soit rectiligne, soit circulaire du second-ordre et symétrique dans le plan complexe par rapport à l'origine, identique à celle des symboles a_k du SOI. Par suite en sortie de filtre adapté, (3.4.1) devient :

$$\mathbf{x}_k = \mu_s a_k r(0)\mathbf{s} + \mu_j e^{i\phi} \sum_\ell b_\ell r((k - \ell)T - \tau)\mathbf{j} + \mathbf{n}_{G_k}, \tag{3.4.2}$$

où $\mathbf{n}_{G_k}$ est une suite stationnaire de variables aléatoires gaussiennes centrées circulaire telle que $\mathrm{E}(\mathbf{n}_{G_k}\mathbf{n}_{G_k}^H) = \eta_2\mathbf{I}_N$. Nous appelons a'_k et $b'_k(\tau)$ les symboles a_k et les termes $\sum_\ell b_\ell r((k-\ell)T-\tau)$, normalisés tels que $\mathrm{E}|{a'_k}^2| = \mathrm{E}|{b'_k}^2(\tau)| = 1$. Sous ces hypothèses, (3.4.2) prend la forme suivante :

$$\mathbf{x}_k = \sqrt{\pi_s}a'_k\mathbf{s} + \sqrt{\pi_j}e^{i\phi}b'_k(\tau)\mathbf{j} + \mathbf{n}_{G_k}, \tag{3.4.3}$$

où $\pi_s \overset{\text{def}}{=} \mu_s^2\pi_a r^2(0)$ et $\pi_j \overset{\text{def}}{=} \mu_j^2\pi_b(\sum_n r^2((k-n)T-\tau)$ (avec $\pi_a \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}|a_k^2|$ et $\pi_b \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}|b_k^2|$) sont les puissances respectives du SOI et du CCI. Notons que puisque $r(t)$ est réel, les termes $b'_k(\tau)$ sont aussi à valeurs réelles lorsque les symboles b_k sont réels. De plus remarquons que pour des symboles b_k circulaires du second ordre, l'expression $b'_k(\tau)$ est aussi circulaire du second ordre.

Nous aurons besoin au paragraphe 3.4.4 des moments du 4ième et 6ième ordre du SOI et du CCI. Nous utiliserons les notations et les relations suivantes pour des symboles réels :

$$\kappa_j \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({b'_k}^4(\tau)) = \mathrm{E}(b_k^4)\sum_\ell r_\ell^4 + 6[\mathrm{E}(b_k^2)]^2\sum_{k<\ell} r_k^2 r_\ell^2 \tag{3.4.4}$$

$$\chi_j \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({b'_k}^6(\tau)) = \mathrm{E}(b_k^6)\sum_\ell r_\ell^6 + 15\mathrm{E}(b_k^2)\mathrm{E}(b_k^4)\sum_{k\neq\ell} r_k^4 r_\ell^2 + 90[\mathrm{E}(b_k^2)]^3\sum_{i<k<\ell} r_i^2 r_k^2 r_\ell^2 \tag{3.4.5}$$

et $\kappa_s \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}(a_k^4)$ et $\chi_s \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}(a_k^6)$, où $r_k \overset{\text{def}}{=} r(kT-\tau)/\sqrt{\pi_b\sum_\ell r^2(\ell T-\tau)}$. Et pour des symboles circulaires du second-ordre et symétriques dans le plan complexe par rapport à l'origine, nous utiliserons les notations et les relations suivantes :

$$\kappa_{j,c} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}|{b'_k}^4(\tau)| = \mathrm{E}|b_k^4|\sum_\ell r_\ell^4 + 4[\mathrm{E}|b_k^2|]^2\sum_{k<\ell} r_k^2 r_\ell^2 \tag{3.4.6}$$

$$\kappa_{j,nc,1} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({b'_k}^4(\tau)) = \mathrm{E}(b_k^4)\sum_\ell r_\ell^4 \tag{3.4.7}$$

$$\kappa_{j,nc,2} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({b'_k}^2(\tau)|{b'_k}^2(\tau)|) = \mathrm{E}(b_k^2|b_k^2|)\sum_\ell r_\ell^4 \tag{3.4.8}$$

$$\chi_{j,c} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}|{b'_k}^6(\tau)| = \mathrm{E}|b_k^6|\sum_\ell r_\ell^6 + 9\mathrm{E}|b_k^2|\mathrm{E}|b_k^4|\sum_{k\neq\ell} r_k^4 r_\ell^2 + 36[\mathrm{E}|b_k^2|]^3\sum_{i<k<\ell} r_i^2 r_k^2 r_\ell^2 \tag{3.4.9}$$

$$\chi_{j,nc,1} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({b'_k}^6(\tau)) = \mathrm{E}(b_k^6)\sum_\ell r_\ell^6 \tag{3.4.10}$$

$$\chi_{j,nc,2} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({b'_k}^4(\tau)|{b'_k}^2(\tau)|) = \mathrm{E}(b_k^4|b_k^2|)\sum_\ell r_\ell^6 + 5\mathrm{E}(b_k^4)\mathrm{E}|b_k^2|\sum_{k\neq\ell} r_k^4 r_\ell^2 \tag{3.4.11}$$

$$\chi_{j,nc,3} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({b'_k}^2(\tau)|{b'_k}^4(\tau)|) = \mathrm{E}(b_k^2|b_k^4|)\sum_\ell r_\ell^6 + 4\mathrm{E}(b_k^4)\mathrm{E}|b_k^2|\sum_{k\neq\ell} r_k^4 r_\ell^2. \tag{3.4.12}$$

Notons que pour les constellations $4M^2$ MAQ et 2^M PSK de symboles, celles-ci sont invariantes par rotation de $\pi/2$, ce qui implique : $\kappa_{j,nc,2} = \chi_{j,nc,1} = \chi_{j,nc,3} = 0$. Nous aurons aussi besoin des mêmes définitions pour le SOI : $\kappa_{s,c} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}|{a'_k}^4|$, $\kappa_{s,nc,1} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({a'_k}^4)$, $\kappa_{s,nc,2} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({a'_k}^2|{a'_k}^2|)$, $\chi_{s,c} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}|{a'_k}^6|$, $\chi_{s,nc,1} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({a'_k}^6)$, $\chi_{s,nc,2} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({a'_k}^4|{a'_k}^2|)$ et $\chi_{s,nc,3} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}({a'_k}^2|{a'_k}^4|)$.

3.4.2 Vecteur directionnel étendu

Le vecteur directionnel étendu $\widetilde{\mathbf{s}}_n$ défini en (3.3.4) peut se décomposer dans le cas d'une seule interférence :

$$\widetilde{\mathbf{s}}_n = \widetilde{\mathbf{s}} + \widetilde{\mathbf{s}}_j + \widetilde{\mathbf{s}}_{n_G},$$

où le vecteur $\widetilde{\mathbf{s}}$ ne dépend que du vecteur directionnel et des statistiques d'ordre 2 et 4 du SOI :

$$\widetilde{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \gamma_a^* \mathbf{s}^* \\ \pi_s \kappa_{s,nc,2} (\mathbf{s} \oslash \mathbf{s} \oslash \mathbf{s}) \\ \pi_s \kappa_{s,c} ((\mathbf{s} \oslash \mathbf{s}) \otimes \mathbf{s}^*) \\ \pi_s \kappa_{s,nc,2}^* (\mathbf{s} \otimes (\mathbf{s}^* \oslash \mathbf{s}^*)) \\ \pi_s \kappa_{s,nc,1}^* (\mathbf{s}^* \oslash \mathbf{s}^* \oslash \mathbf{s}^*) \end{bmatrix}, \tag{3.4.13}$$

où $\kappa_{s,c}$, $\kappa_{s,nc,1}$ et $\kappa_{s,nc,2}$ se réduisent à κ_s dans le cas de symboles SOI réels. $\widetilde{\mathbf{s}}_j$ dépend des statistiques d'ordre 2 et des vecteurs directionnels du SOI et du CCI. Il est défini par :

$$\widetilde{\mathbf{s}}_j = \pi_j \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \gamma_b e^{2i\phi} [(\mathbf{s} \oslash \mathbf{j} \oslash \mathbf{j}) + (\mathbf{j} \oslash \mathbf{s} \oslash \mathbf{j}) + (\mathbf{j} \oslash \mathbf{j} \oslash \mathbf{s})] \\ ((\mathbf{s} \oslash \mathbf{j}) \otimes \mathbf{j}^*) + ((\mathbf{j} \oslash \mathbf{s}) \otimes \mathbf{j}^*) + \gamma_a^* \gamma_b e^{2i\phi} ((\mathbf{j} \oslash \mathbf{j}) \otimes \mathbf{s}^*) \\ \gamma_b^* e^{-2i\phi} (\mathbf{s} \otimes (\mathbf{j}^* \oslash \mathbf{j}^*)) + \gamma_a^* (\mathbf{j} \otimes (\mathbf{s}^* \oslash \mathbf{j}^*)) + \gamma_a^* (\mathbf{j} \otimes (\mathbf{j}^* \oslash \mathbf{s}^*)) \\ \gamma_a^* \gamma_b^* e^{-2i\phi} [(\mathbf{s}^* \oslash \mathbf{j}^* \oslash \mathbf{j}^*) + (\mathbf{j}^* \oslash \mathbf{s}^* \oslash \mathbf{j}^*) + (\mathbf{j}^* \oslash \mathbf{j}^* \oslash \mathbf{s}^*)] \end{bmatrix}, \tag{3.4.14}$$

où γ_b est le coefficient de non-circularité du second-ordre des symboles b_k. Puis $\widetilde{\mathbf{s}}_{n_G}$ est une composante bruit de fond seule, où par exemple pour $N = 2$:

$$\widetilde{\mathbf{s}}_{n_G} = \eta_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_b \\ \mathbf{s}_c + \mathbf{s}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{s}_a = [s_1, 0, s_2, 0, 0, s_2]^T$, $\mathbf{s}_b = [s_1, 0, 0, s_1, 0, s_2]^T$, $\mathbf{s}_c = \gamma_s^* [s_1^*, 0, 0, 0, s_1^*, s_2^*]^T$ et $\mathbf{s}_d = \gamma_s^* [s_1^*, s_2^*, 0, 0, 0, s_2^*]^T$ avec $\mathbf{s} = [s_1, s_2]^T$ et pour $N = 1$:

$$\widetilde{\mathbf{s}}_{n_G} = \eta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.4.3 Optimalité de structures partielles

Nous allons ici traiter de structures partielles permettant de simplifier le beamformer de Volterra complexe d'ordre 3 de structure complète (3.3.15). Pour cela, nous allons évaluer les pertes de performance obtenues dans quelques scénarios de constellations de symboles SOI et CCI pour quelques structures partielles WL-C(q_1), WL-C(q_1, q_2), L-C(q_1) et L-C(q_1, q_2).

Dans le cas de symboles a_k et b_k de constellations QPSK ou MAQ16, considérons la structure partielle L-C(1,3). En partitionnant $\widetilde{\mathbf{x}}_k$ en

$$\widetilde{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}_{k,1} \\ \widetilde{\mathbf{x}}_{k,2} \end{bmatrix},$$

où

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{k,1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ (\mathbf{x}_k \oslash \mathbf{x}_k) \otimes \mathbf{x}_k^* \\ \mathbf{x}_k^* \oslash \mathbf{x}_k^* \oslash \mathbf{x}_k^* \end{bmatrix} \text{ et } \widetilde{\mathbf{x}}_{k,2} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^* \\ \mathbf{x}_k \oslash \mathbf{x}_k \oslash \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_k \otimes (\mathbf{x}_k^* \oslash \mathbf{x}_k^*) \end{bmatrix},$$

nous avons

$$\mathrm{E}[\widetilde{\mathbf{x}}_{k,2} a_k^*] = \mathbf{0} \text{ et } \mathrm{E}[\widetilde{\mathbf{x}}_{k,2}^H \widetilde{\mathbf{x}}_{k,1}] = \mathbf{O},$$

puisque

$$\mathrm{E}\left[\begin{pmatrix} (a_k + b_k + n_{i,k})^* \\ (a_k + b_k + n_{i,k})^3 \\ (a_k + b_k + n_{i,k})(a_k + b_k + n_{i,k})^{*2} \end{pmatrix} a_k^*\right] = \mathbf{0}$$

et

$$\mathrm{E}\left[\begin{pmatrix} (a_k + b_k + n_{i,k})^* \\ (a_k + b_k + n_{i,k})^3 \\ (a_k + b_k + n_{i,k})(a_k + b_k + n_{i,k})^{*2} \end{pmatrix} \right.$$
$$\left. \left((a_k + b_k + n_{i,k})^*, (a_k + b_k + n_{i,k})(a_k + b_k + n_{i,k})^{*2}, (a_k + b_k + n_{i,k})^3\right)\right] = \mathbf{O},$$

où $(n_{i,k})_{i=1,..,N}$ désigne une composante du bruit de fond $\mathbf{n}_{G_k}$. Par suite la structure partielle L-C(1,3) sera optimale (sans perte de MMSE par rapport à la structure complète) dans ce scénario.

Par ailleurs alors que le terme conjugué $\mathbf{x}_k^*$ n'apporte pas d'information par rapport au terme linéaire $\mathbf{x}_k$ dans tous scénarios circulaires du second ordre, nous remarquons que ce terme $\mathbf{x}_k^*$ apporte de l'information au terme linéaire-cubique des structures partielles L-C(0) et L-C(2), mais n'en apporte pas par rapport aux structures partielles L-C(1) et L-C(3). Par suite les structures partielles WL-C(0) et WL-C(2) ont un intérêt, alors que les structures partielles WL-C(1) et WL-C(3) n'en ont pas dans ce scénario.

Au contraire, dans le cas de symboles a_k et b_k de constellations rectilignes, nous pouvons démontrer qu'aucune structure partielle WL-C(q_1), WL-C(q_1, q_2) et WL-C(q_1, q_2, q_3) n'est optimale par rapport à la structure complète. Nous illustrerons ces points dans le paragraphe 3.4.6.

Enfin signalons que les structures partielles WL-C(0) et WL-C(3), d'une part et WL-C(1) et WL-C(2), d'autre part, sont équivalentes dans tous les scénarios de symboles SOI et CCI, car contiennent les mêmes statistiques dans la matrice de covariance étendue $\mathbf{R}_{\tilde{x}}$.

3.4.4 Etude du SINR dans le cas du filtrage

3.4.4.1 Effet SAIC du récepteur WL pour symboles réels

Dans le cas d'un seul capteur ($N = 1$) pour des SOI et CCI à symboles réels, le SINR en sortie d'un récepteur WL-MMSE est donné [20] pour une forte CCI (i.e., $\pi_j \gg \eta_2$) par

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL}} \approx \frac{2\pi_s}{\eta_2}\left(1-\cos^2\phi\right). \tag{3.4.15}$$

La relation (3.4.15) montre que le récepteur WL-MMSE permet l'effet SAIC grâce à la *discrimination de phase* entre SOI et CCI, mais le SINR (3.4.15) décroît quand le déphasage entre le CCI et le SOI ϕ tend vers zéro.

3.4.4.2 Effet SAIC du récepteur de Volterra complexe d'ordre 3 pour symboles réels

Dans le cadre des récepteur de Volterra complexes d'ordre 3 à structures partielles ou complète, le calcul théorique des SINR et de leur approximation pour fort CCI est très complexe. Mais grâce à l'utilisation de la Symbolic Math Toolbox de MATLAB (voir annexe C.1), nous avons prouvé que le SINR à la sortie de tout filtre de Volterra complexe d'ordre 3 de structure WL-C(q_1), WL-C(q_1, q_2), WL-C($q_1, q_2, , q_3$) et WL-C($0, 1, 2, 3$) $q_i = 0, 1, 2, 3$ s'écrit comme une faction rationnelle en π_j :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}} = \frac{a_P\pi_j^P + ... + a_1\pi_j + a_0}{b_P\pi_j^P + .. + b_1\pi_j + b_0}, \tag{3.4.16}$$

où P dépend de la structure particulière du filtre de Volterra et les coefficients $a_0, .., a_P, b_0, .., b_P$, sont fonctions de π_s, η_2, κ_s, χ_s, κ_j, χ_j et ϕ.

En particulier, la valeur maximum de P est 4 pour les récepteurs WL-C(q) ($q = 0, 1, 2$ ou 3) MMSE. Dans ce cas, nous avons prouvé les résultats asymptotiques suivants selon les valeurs de $\chi_j - \kappa_j^2 \geq 0$:

- Pour $\chi_j - \kappa_j^2 = 0$ qui arrive d'après l'annexe B.2 que si $b'_k(\tau) \in \{0, -1, +1\}$, qui en utilisant (3.4.4) et (3.4.5) ne se produit que pour des CCI à symboles BPSK synchronisés ($\tau = 0$) avec le SOI.

$$\lim_{\pi_j \to \infty} \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(q)} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{2\pi_s}{\eta_2}, \quad \forall\phi. \tag{3.4.17}$$

- Pour $\chi_j - \kappa_j^2 > 0$, i.e., pour des symboles CCI réels non BPSK ou non synchronisés avec le SOI :

$$\lim_{\pi_j \to \infty} \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(q)} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{2\pi_s}{\eta_2}\left(1-\cos^2\phi\right). \tag{3.4.18}$$

La relation (3.4.17) montre que pour des symboles CCI BPSK synchronisés avec le SOI, ce CCI est complètement annulé quelque soit sa phase ϕ par rapport au SOI grâce à une *discrimination d'amplitude entre SOI et CCI*. Dans ce cas, le gain en performances par rapport au récepteur WL MMSE (3.4.15) augmente avec ϕ. Cette discrimination est généralement forte dans les systèmes full-duplex [3]. Pour des symboles CCI non synchronisés avec le SOI ou non BPSK, en dépit de l'absence de gain apporté par le récepteur WL-C(q) MMSE par rapport au récepteur WL MMSE pour de très puissants CCI ($\pi_j \to \infty$), nous monterons au paragraphe 3.4.6, qu'il est encore possible d'obtenir des gains en SINR significatifs pour de puissants CCI.

Pour comparer les différentes structures partielles WL-C(q), $q = 0, 1, 2, 3$ pour des symboles SOI et CCI de constellations BPSK, notre outil MATLAB (voir annexe C.1), nous a permis d'obtenir les approximations suivantes pour $\pi_s \gg \eta_2$ et $\pi_j \gg \eta_2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(0)} = \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(3)} &\approx \frac{2\pi_s}{\eta_2} - \left[\frac{(20\pi_s + 9\eta_2)\cos(2\phi) + 2\pi_s\cos(4\phi) + 18\pi_s + 9}{\eta_2}\right]\frac{\pi_s}{\pi_j}, \\
\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(1)} = \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(2)} &\approx \frac{2\pi_s}{\eta_2} - \left[\frac{(12\pi_s + 3\eta_2)\cos(2\phi) + 2\pi_s\cos(4\phi) + 10\pi_s + 3\eta_2}{\eta_2}\right]\frac{\pi_s}{\pi_j}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne en moyennant (noté $\overline{\mathrm{SINR}}$) sur la phase ϕ du CCI par rapport au SOI :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{SINR}}_{\mathrm{WL-C}(0)} = \overline{\mathrm{SINR}}_{\mathrm{WL-C}(3)} &\approx \frac{2\pi_s}{\eta_2} - \left[18\frac{\pi_s}{\eta_2} + 9\right]\frac{\pi_s}{\pi_j} \\
\overline{\mathrm{SINR}}_{\mathrm{WL-C}(1)} = \overline{\mathrm{SINR}}_{\mathrm{WL-C}(2)} &\approx \frac{2\pi_s}{\eta_2} - \left[10\frac{\pi_s}{\eta_2} + 3\right]\frac{\pi_s}{\pi_j}.
\end{aligned}$$

Par suite les structures WL-C(1) et WL-C(2) fournissant les plus grandes valeurs de SINR sont préférées aux structures WL-C(0) et WL-C(3).

Par ailleurs, pour $\phi = 0$, pour lequel $\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL}} \sim \pi_s/\pi_j$ pour $\pi_j \to \infty$, nous avons prouvé que

$$\lim_{\pi_j \to \infty} \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(i)}/\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL}} = 1 + \frac{(3 - \kappa_j)^2}{\chi_j - \kappa_j^2}. \tag{3.4.19}$$

Ce qui est naturel car il n'y pas de gain par rapport au récepteur WL MMSE pour un CCI $b'_k(\tau)$ de distribution gaussienne réelle pour lequel $\kappa_j = 3$.

Enfin, signalons que nos outils de calculs symboliques de l'annexe C.1, nous permettent d'évaluer le SINR en sortie de tout filtre de Volterra de structure partielle en absence de CCI. Nous avons obtenu ainsi en particulier pour $\pi_j = 0$:

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(0)} = \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(3)} = 2\epsilon_s + \frac{(\kappa_s^2 - 6\kappa_s + 9)\epsilon_s^3}{(\chi_s - \kappa_s^2)\epsilon_s^3 + 9(\kappa_s - 1)\epsilon_s^2 + 18\epsilon_s + 6} > 2\epsilon_s, \tag{3.4.20}$$

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(1)} = \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(2)} = 2\epsilon_s + \frac{(\kappa_s^2 - 6\kappa_s + 9)\epsilon_s^3}{(\chi_s - \kappa_s^2)\epsilon_s^3 + 5(\kappa_s - 1)\epsilon_s^2 + 6\epsilon_s + 2} > 2\epsilon_s, \tag{3.4.21}$$

$$\geq \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(0)} = \mathrm{SINR}_{\mathrm{WL-C}(3)}. \tag{3.4.22}$$

Par suite les filtrages de Volterra de structures WL-C(q) permettent d'augmenter le SINR par rapport au filtrage WL MMSE ($\text{SINR}_{\text{WL}} = 2\epsilon_s$) pour des symboles SOI réels arbitraires. On retrouve aussi que pour a_k variable aléatoire gaussienne centrée ($\kappa_s = 3$) ce filtrage de Volterra n'apporte aucun gain par rapport au filtrage WL MMSE qui est le traitement optimal au sens de la MMSE.

Et en particulier (3.4.20) et (3.4.21) donnent pour des symboles SOI BPSK ($\kappa_s = 1$, $\chi_s = 1$)

$$\text{SINR}_{\text{WL-C(0)}} = \text{SINR}_{\text{WL-C(3)}} = 2\epsilon_s + \frac{2\epsilon_s^3}{9\epsilon_s + 3} > 2\epsilon_s, \tag{3.4.23}$$

$$\text{SINR}_{\text{WL-C(1)}} = \text{SINR}_{\text{WL-C(2)}} = 2\epsilon_s + \frac{2\epsilon_s^3}{3\epsilon_s + 1} > 2\epsilon_s, \tag{3.4.24}$$

$$> \text{SINR}_{\text{WL-C(0)}} = \text{SINR}_{\text{WL-C(3)}}. \tag{3.4.25}$$

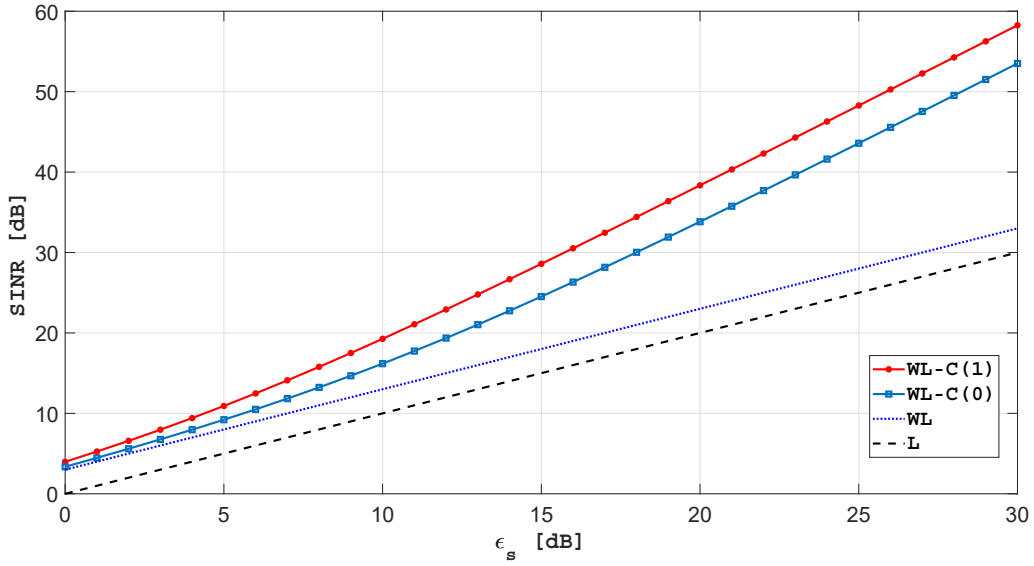


FIGURE 3.1 – SINR en sortie du filtre de Volterra MMSE en fonction du SNR d'entrée ϵ_s pour SOI BPSK et en absence de CCI.

On observe sur la figure 3.1 des gains importants en SINR et donc en MMSE (d'après (3.3.12)) par rapport au filtrage WL MMSE. Par contre nous verrons au paragraphe 3.4.6.2 que ces beamformers de Volterra de structure WL-C(0) et WL-C(1) ne présentent aucun gain en probabilité d'erreurs par rapport à un simple traitement WL.

3.4.4.3 Effet SAIC du récepteur de Volterra complexe d'ordre 3 pour symboles circulaires d'ordre 2

Pour des SOI et CCI à symboles circulaires du second-ordre, nous avons aussi pu exprimer les SINR à la sortie des récepteurs de Volterra complexe MMSE du 3ème ordre de structures WL-C et L-C arbitraires à l'aide de fractions rationnelles en π_j Nous avons ainsi démontré :

$$\text{SINR}_{\text{L-C}} = \frac{a_P \pi_j^P + ... + a_1 \pi_j + a_0}{b_{P+1} \pi_j^{P+1} + .. + b_1 \pi_j + b_0} \quad \text{et} \quad \text{SINR}_{\text{WL-C}} = \frac{a_P \pi_j^P + ... + a_1 \pi_j + a_0}{b_{P+1} \pi_j^{P+1} + .. + b_1 \pi_j + b_0} \tag{3.4.26}$$

où P dépend de la structure partielle cubique choisie et où les coefficients $a_0, .., a_P, b_0, .., b_{P+1}$ sont fonctions de π_s, η_2, $\kappa_{j,c}$, $\kappa_{j,nc,i}$, $i = 1, 2$, $\chi_{j,c}$, $\chi_{j,nc,i}$, $i = 1, 2, 3$, des mêmes statistiques associées au SOI et de ϕ. En particulier pour les structures partielles L-C à 1 et 2 termes cubiques, les valeurs de P sont respectivement 3 et 5 et nous avons démontré en particulier :

- Pour la structure partielle L-C(1), $b_4 = 0 \Leftrightarrow \chi_{j,c} - \kappa_{j,c}^2 = 0 \Leftrightarrow |b_k'(\tau)|$ prend au plus les valeurs 0 ou 1 ; ce qui est réalisé en particulier pour des symboles PSK quelconques (et en particulier QPSK) synchrones, avec les symboles SOI, mais également dans le cadre plus général d'un modèle de CCI non filtré à module constant, pour lesquels :

$$\lim_{\pi_j \to \infty} \mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1)}} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{\pi_s}{\pi_s + 2\eta_2}, \quad \forall \phi. \tag{3.4.27}$$

- Nous avons de même pour la structure partielle L-C(3) et dans les mêmes conditions :

$$\lim_{\pi_j \to \infty} \mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(3)}} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{\pi_s}{9\pi_s + 10\eta_2}, \quad \forall \phi. \tag{3.4.28}$$

  Par suite la structure partielle L-C(1) est préférable à la structure partielle L-C(3).

- Pour la structure partielle L-C(1,3), le terme b_6 est très complexe, mais pour $\kappa_{j,c} = \kappa_{j,nc,1} = \chi_{j,c} = \chi_{j,nc,2} = 1$ et $\kappa_{j,nc,1} = \chi_{j,nc,1} = \chi_{j,nc,3} = 0$, ce qui réalisé en particulier pour des symboles QPSK synchrones avec les symboles SOI, nous avons

$$\lim_{\pi_j \to \infty} \mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1,3)}} = \frac{a_5}{b_5} = \frac{\pi_s}{\eta_2}, \quad \forall \phi. \tag{3.4.29}$$

  Ce qui est le SINR d'un récepteur linéaire en absence de CCI.

La rel. (3.4.29) montre que pour des symboles QPSK synchronisés avec le SOI, le CCI est complètement annulé grâce à la seule *discrimination d'amplitude* du CCI vis à vis du SOI. Pour des symboles non QPSK ou non synchrones, il est encore possible de bénéficier de la discrimination d'amplitude CCI/SOI pour des CCI de fortes puissances comme nous le verrons dans le paragraphe 3.4.6.

Enfin, là aussi nos outils de calculs symboliques de l'annexe C.1 nous permettent aussi d'obtenir l'expressions suivante du SINR en absence de CCI pour des symboles SOI circulaires du second ordre de constellations quelconques, pour une structure linéaire-cubique L-C(1) :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1)}} = \epsilon_{\mathrm{s}} + \frac{(\kappa_{\mathrm{s}} - 2)^2 \epsilon_{\mathrm{s}}^3}{(\chi_{\mathrm{s}} - \kappa_{\mathrm{s}}^2)\epsilon_{\mathrm{s}}^3 + (5\kappa_{\mathrm{s}} - 4)\epsilon_{\mathrm{s}}^2 + 6\epsilon_{\mathrm{s}} + 2} \geq \epsilon_{\mathrm{s}}, \tag{3.4.30}$$

Par suite le filtrage de Volterra de structure L-C(1) permet d'augmenter le SINR par rapport au filtrage linéaire MMSE ($\mathrm{SINR}_{\mathrm{L}} = \epsilon_s$) pour des symboles SOI circulaires du second ordre. On retrouve aussi que pour a_k variable aléatoire gaussienne circulaire centrée ($\kappa_s = 2$), ce filtrage de Volterra n'apporte aucun gain par rapport au filtrage linéaire MMSE qui est le traitement optimal au sens de la MMSE.

Et en particulier (3.4.30) donne pour des symboles SOI QPSK ($\kappa_s = 1$, $\chi_s = 1$)

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1)}} = \epsilon_{\mathrm{s}} + \frac{\epsilon_{\mathrm{s}}^3}{\epsilon_{\mathrm{s}}^2 + 6\epsilon_{\mathrm{s}} + 2} > \epsilon_{\mathrm{s}}. \tag{3.4.31}$$

Par ailleurs pour un SOI circulaire du second ordre, de modulation à module constant de constellation invariante par rotation de phase de $\pi/2$ (par exemple, QPSK, 8PSK...), i.e., vérifiant les conditions suivantes :

$\kappa_{s,c}^2 = \chi_{s,c}$ et $|\kappa_{s,nc,1}|^2 = \chi_{s,c}$, condition imposée par le module constant (voir (B.2.3) et (B.2.7))

$\kappa_{s,nc,2} = \chi_{s,nc,1} = \chi_{s,nc,3} = 0$, condition imposée par l'invariance par rotation de phase de $\pi/2$

l'expression du $\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1,3)}}$ en absence d'interférence prend la forme suivante :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1,3)}} = \frac{\begin{cases}\left[2\mathrm{Re}\{\kappa_{\mathrm{s,c}}\kappa_{\mathrm{s,nc,1}}\chi^*_{\mathrm{s,nc,2}}\} - \kappa_{\mathrm{s,c}}^4 - |\chi^2_{\mathrm{s,nc,2}}|\right]\epsilon_{\mathrm{s}}^7 \\ \quad + \left[2\kappa_{\mathrm{s,c}}^3 - 2\kappa_{\mathrm{s,c}}^4 + 2\mathrm{Re}\{\kappa_{\mathrm{s,nc,1}}\chi^*_{\mathrm{s,nc,2}}\} - 2\mathrm{Re}\{\kappa_{\mathrm{s,c}}\kappa_{\mathrm{s,nc,1}}\chi^*_{\mathrm{s,nc,2}}\}\right]\epsilon_{\mathrm{s}}^6 \\ \quad + 8\kappa_{\mathrm{s,c}}^2\left[\kappa_{\mathrm{s,c}} + 1\right]\epsilon_{\mathrm{s}}^5 + 24\kappa_{\mathrm{s,c}}\left[\kappa_{\mathrm{s,c}} + 3\right]\epsilon_{\mathrm{s}}^4 + 4\left[2\kappa_{\mathrm{s,c}}^2 + 6\kappa_{\mathrm{s,c}} + 27\right]\epsilon_{\mathrm{s}}^3 + 72\kappa_{\mathrm{s,c}}^2 + 12\epsilon_{\mathrm{s}}\end{cases}}{\begin{cases}\left[2\mathrm{Re}\{\kappa_{\mathrm{s,c}}\kappa_{\mathrm{s,nc,1}}\chi^*_{\mathrm{s,nc,2}}\} - \kappa_{\mathrm{s,c}}^4 - |\chi^2_{\mathrm{s,nc,2}}|\right]\epsilon_{\mathrm{s}}^6 + 6\left[\kappa_{\mathrm{s,c}}^3 - \mathrm{Re}\{\kappa_{\mathrm{s,nc,1}}\chi^*_{\mathrm{s,nc,2}}\}\right]\epsilon_{\mathrm{s}}^5 \\ \quad + 36\kappa_{\mathrm{s,c}}(\kappa_{\mathrm{s,c}} - 1)\epsilon_{\mathrm{s}}^4 + 72(2\kappa_{\mathrm{s,c}} - 1)\epsilon_{\mathrm{s}}^3 + 12(4\kappa_{\mathrm{s,c}} + 7)\epsilon_{\mathrm{s}}^2 + 72\epsilon_{\mathrm{s}} + 12\end{cases}}. \tag{3.4.32}$$

Pour le cas particulier de SOI de constellation QPSK, ($\kappa_{s,c} = \kappa_{s,nc,1} = \chi_{s,c} = \chi_{s,nc,2} = 1$), l'équation (3.4.32) se réduit à :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1,3)}} = \frac{16\epsilon_s^5 + 96\epsilon_s^4 + 140\epsilon_s^3 + 72\epsilon_s^2 + 12\epsilon_s}{72\epsilon_s^3 + 132\epsilon_s^2 + 72\epsilon_s + 12} = \frac{2\epsilon_s^3 + 9\epsilon_s^2 + 3\epsilon_s}{9\epsilon_s + 3} = \epsilon_s + \frac{2\epsilon_s^3}{9\epsilon_s + 3} > \epsilon_s, \tag{3.4.33}$$

$$> \mathrm{SINR}_{\mathrm{L-C(1)}} \tag{3.4.34}$$

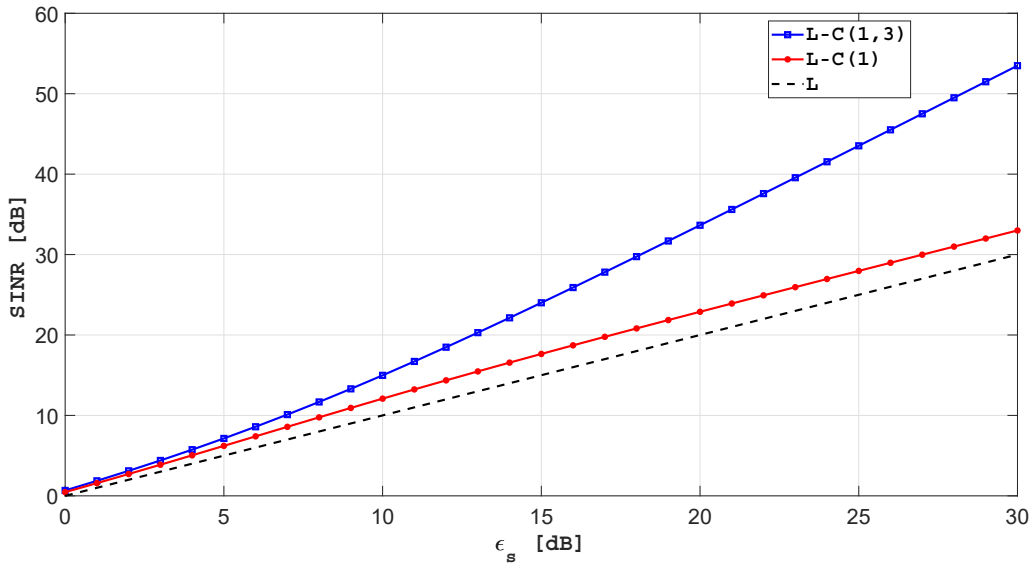


FIGURE 3.2 – SINR en sortie du filtre de Volterra MMSE en fonction du SNR d'entrée ϵ_s pour SOI QPSK et en absence d'interférence.

On observe sur la figure 3.2 des gains importants en SINR et donc en MMSE (d'après (3.3.12)) par rapport au filtrage linéaire MMSE. Mais nous verrons au paragraphe 3.4.6.2 que ces beamformers de Volterra de structure WL-C(0) et WL-C(1) ne présenteront aucun gain en probabilité d'erreurs par rapport à un simple traitement linéaire.

3.4.5 Probabilité d'erreur symboles

Bien que le critère MMSE et par suite MSINR (grâce à la relation (3.3.12)) semblent très pertinents pour évaluer les performances en terme de détection de symbole SOI, le véritable critère de performance est la probabilité ou taux d'erreur symboles (SER). Nous allons ici nous intéresser à la probabilité d'erreur symboles d'un détecteur pseudo ML placé en sortie y_k de notre beamformer ou filtre de Volterra complexe. Notons qu'un tel détecteur est sous optimal mais permet d'être implémenté sans la connaissance préalable des différents paramètres π_s, π_j, ϕ et $\mathbf{j}$. A partir de

$$y_k = a_k \mu_s r(0) \widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{s}}_n + \widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{i}}_k, \tag{3.4.35}$$

où a_k et $\widetilde{\mathbf{i}}_k$ sont noncorrélés, le détecteur pseudo ML, c'est à dire le récepteur ML d'observation y_k qui fait l'hypothèse (fausse) que le bruit total $\widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{i}}_k$ est indépendant de a_k et est centré gaussien circulaire est donné par :

$$\widehat{a}_k = \operatorname{Arg} \min_{a \in \mathcal{A}} |y_k - \alpha_s a|, \tag{3.4.36}$$

où $\alpha_s \overset{\text{def}}{=} \mu_s r(0) \widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{s}}_n$, et se réduit à un simple détecteur de signe pour des symboles BPSK :

$$\widehat{a}_k = \operatorname{Signe}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{y_k}{\widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{s}}_n} \right) \right]. \tag{3.4.37}$$

La dérivation de la probabilité d'erreur symboles d'un tel détecteur est compliquée parce que la composante bruit total $\widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{i}}_k$ n'est pas de distribution gaussienne et n'est pas indépendante de a_k. De plus, notons que l'approximation gaussienne par le théorème central limite peut ne pas être justifié ici car $\widetilde{\mathbf{w}}^H \widetilde{\mathbf{i}}_k$ est constitué d'une somme de variables aléatoires qui peuvent avoir des variances de différents ordres de grandeur selon les valeurs respectives de π_s, π_j et η_2, comme nous en verrons un exemple dans le paragraphe 3.4.6. C'est la raison pour laquelle nous aurons recourt à des probabilités d'erreurs estimées par des expériences de Monte Carlo au paragraphe 3.4.6.

Enfin, nous comparerons cette probabilité d'erreurs à celles d'un récepteur théorique qui connaîtrait tous les paramètres π_s, π_j, ϕ, τ, et $\mathbf{j}$. Pour simplifier cette étude, nous considérons le cas des symboles BPSK ou QPSK où le CCI est synchronisée avec le SOI ($\tau = 0$). Dans ce cas (3.4.3) devient :

$$\mathbf{x}_k = \sqrt{\pi_s} a_k \mathbf{s} + \sqrt{\pi_j} e^{i\phi} b_k \mathbf{j} + \mathbf{n}_{G_k}. \tag{3.4.38}$$

Dans ce cas particulier la distribution de $\mathbf{x}_k$ est celle d'un mélange de loi gaussiennes circulaires et le détecteur MAP ou ML d'observation $\mathbf{x}_k$ est donné par

$$\hat{a}_k = \operatorname{Arg} \max_{a \in \mathcal{A}} \sum_{b_k \in \mathcal{B}} \exp\left(- \frac{\| \mathbf{x}_k - a\sqrt{\pi_s}\mathbf{s} - b_k e^{i\phi} \sqrt{\pi_j}\mathbf{j} \|^2}{\eta_2} \right). \tag{3.4.39}$$

où $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{-1, +1\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{-1, +1, -i, +i\}$ pour des constellation de symboles SOI et CCI respectivement BPSK et QPSK.

On peut aussi comparer la probabilité d'erreurs du détecteur (3.4.36) à un détecteur conjoint où les symboles SOI et CCI sont de simples paramètres inconnus :

$$\hat{a}_k = \mathrm{Arg}_{a\in\mathcal{A}}\{\min_{a\in\mathcal{A},b\in\mathcal{B}} \|\mathbf{x}_k - a\sqrt{\pi_s}\mathbf{s} - be^{i\phi}\sqrt{\pi_j}\mathbf{j}\|^2\}. \tag{3.4.40}$$

Nous illustrerons ces comparaisons de probabilités d'erreur au paragraphe 3.4.6.

3.4.6 Illustrations numériques

On désignera dans toute cette partie par SNR et INR, les rapports respectifs π_s/η_2 et π_j/η_2.

3.4.6.1 Filtrage de Volterra complexe (SINR)

Cas de symboles SOI et CCI réels

Nous allons dans ce paragraphe illustrer et préciser les résultats du paragraphe 3.4.4.2. Dans un premier scénario, la figure 3.3 représente pour des symboles SOI et CCI synchronisés et de constellation BPSK avec SNR=10dB, les SINRs moyennés ($\overline{\mathrm{SINR}}$) en fonction de la phase ϕ du CCI par rapport au SOI en sortie des beamformers de Volterra de structures partielles WL-C(0), WL-C(1), WL-C(2), WL-C(3) et complète WL-C(0,1,2,3) ainsi que du beamformer WL MMSE en fonction de l'INR. Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 représentent le SINR en sortie des mêmes beamformers pour la phases respectives $\phi = 0$, $\phi = 0\pi/4$ et $\phi = \pi/2$ du CCI par rapport au SOI.

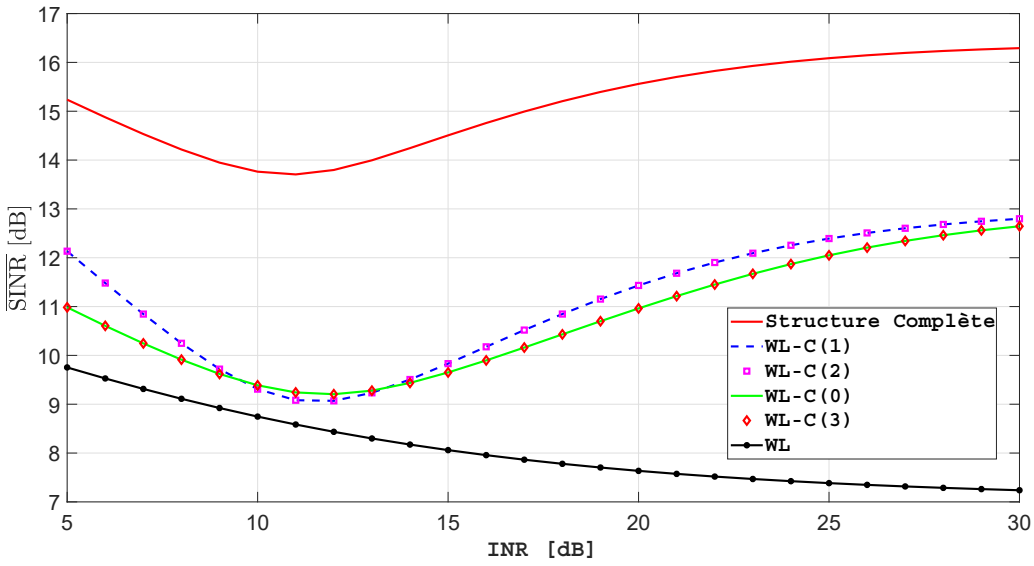


FIGURE 3.3 – Comparaison des différentes structures partielles du filtre MMSE complexe de Volterra en terme de $\overline{\mathrm{SINR}}$.

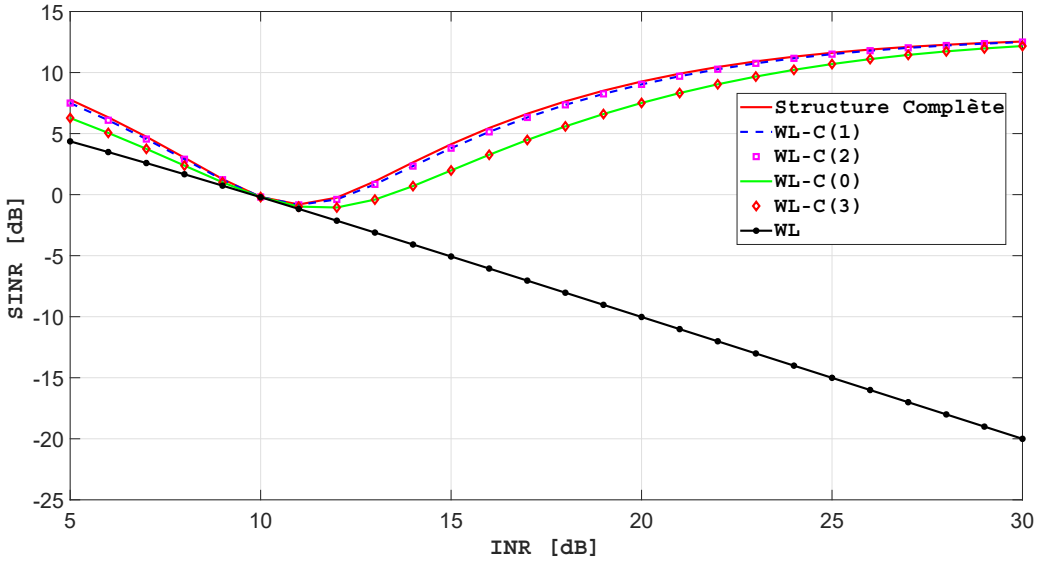


FIGURE 3.4 – Comparaison des différentes structures partielles du filtre MMSE complexe de Volterra en terme de SINR pour $\phi = 0$.

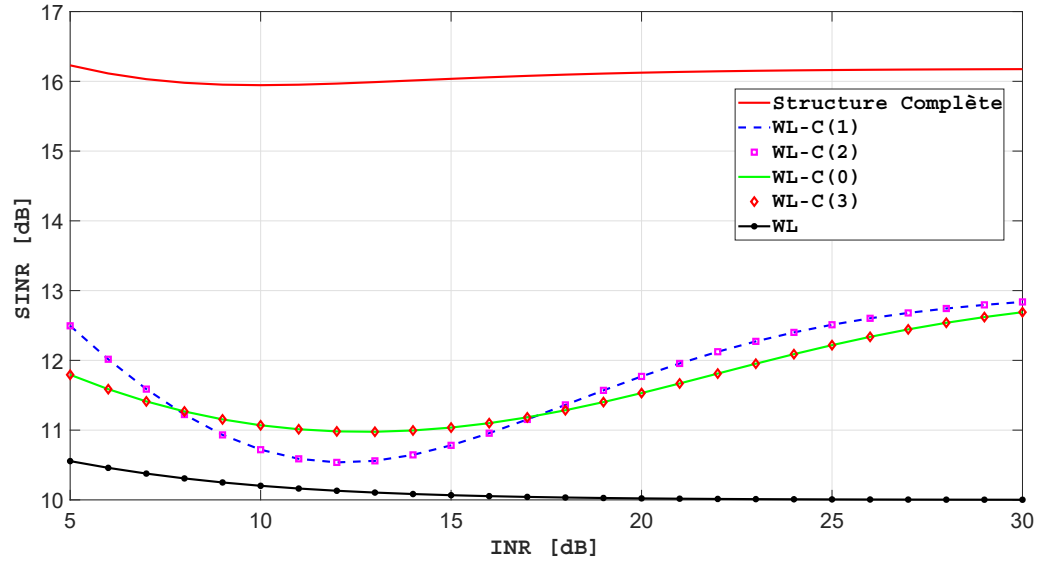


FIGURE 3.5 – Comparaison des différentes structures partielles du filtre MMSE complexe de Volterra en terme de SINR pour $\phi = \pi/4$.

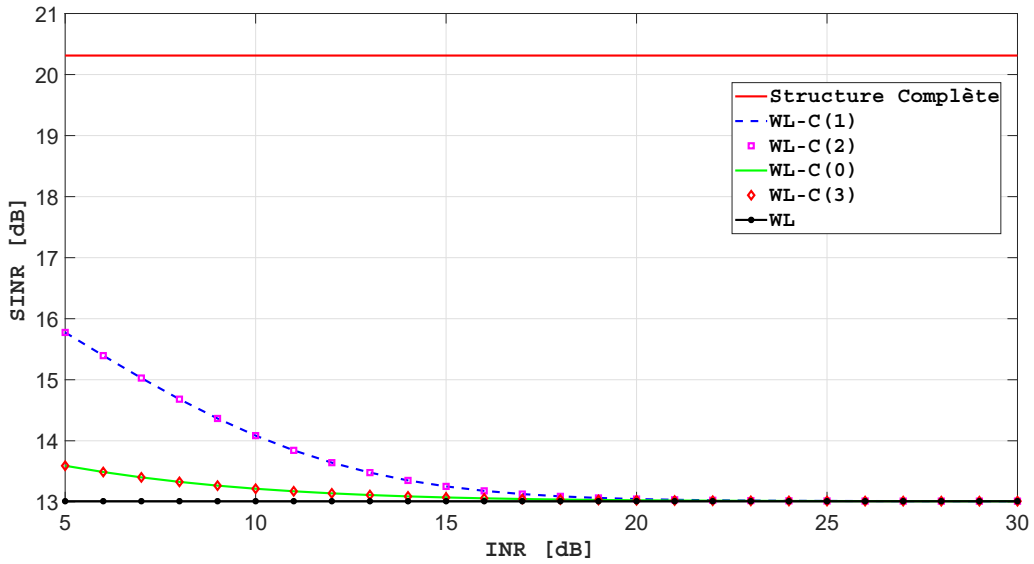


FIGURE 3.6 – Comparaison des différentes structures partielles du filtre MMSE complexe de Volterra en terme de SINR pour $\phi = \pi/2$.

Nous voyons sur la figure 3.3 que les SINR moyennés de tous les beamformers WL-C(0), WL-C(1), WL-C(2) et WL-C(3) sont supérieurs au SINR moyennés du filtre WL avec un SINR moyenné minimum pour INR ≈ SNR, mettant en évidence l'effet de *discrimination d'amplitude*. Nous voyons aussi que les filtrages de Volterra de structures partielles WL-C(1) et WL-C(2) surpassent en général ceux de structures partielles WL-C(0) et WL-C(3) sauf dans la région INR ≈ SNR.

La figure 3.5 pour $\phi = \pi/4$ montre des résultats similaires à la figure 3.3, tandis que la figure 3.4 pour $\phi = 0$ montre que la structure complète est pratiquement équivalente aux structures partielles WL-C(1) et WL-C(2) dont les SINR sont toujours supérieures à ceux des structures partielles WL-C(0) et WL-C(3). Par contre la figure 3.6 pour $\phi = \pi/2$ montre que la structure WL élimine complètement le CCI (SINR=13dB) alors que toutes les structures de Volterra présentent un SINR supérieur.

Nous observons que les SINR moyennés de la figure 3.3 et les SINR pour $\phi = \pi/4$ et $\phi = \pi/2$ des figures respectives 3.5 et 3.6 présentés par le filtrage de Volterra à structure complète surpassent largement le SINR des filtres de Volterra de structures partielles WL-C(0) et WL-C(3). Par contre nous avons observé que les performances en probabilité d'erreur de ce filtre de Volterra à structure complète sont quelquefois moins bonnes que celles du filtres de Volterra de structures partielles WL-C(0) et WL-C(3). Ce curieux phénomène s'explique par le trop grand nombre de degrés de liberté de ce filtre de Volterra à structure complète dans la minimisation de la MSE qui produit en sortie des valeurs de y_k de distribution très dissymétriques pour certaines valeurs de ϕ, n'optimisant pas ainsi la probabilité d'erreur. Cela est illustré sur les figures 3.7 et 3.8 qui représentent les histogrammes de y_k à la sortie du filtre de structure complète et de sa partie réelle $\mathrm{Re}(y_k)$ pour le filtre de structure WL-C(0) pour des symboles SOI et CCI BPSK synchronisés avec SNR=10dB

et INR=30dB, pour respectivement des phases $\phi = 0$ et $\phi = \pi/4$. Nous y voyons clairement une distribution quasi symétrique par rapport aux symboles SOI pour $\phi = 0$ alors que pour $\phi = \pi/4$, celle-ci est très dissymétrique et bien plus concentrée autour des symboles (présentant ainsi une MMSE plus faible). Ce phénomène s'observe aussi pour les filtres de Volterra de structures partielles WL-C(0), WL-C(1), WL-C(2) et WL-C(3) pour $\phi = \pi/2$ qui surpassent le SINR donné par le filtre WL qui lui élimine le CCI pour toutes les valeurs de l'INR.

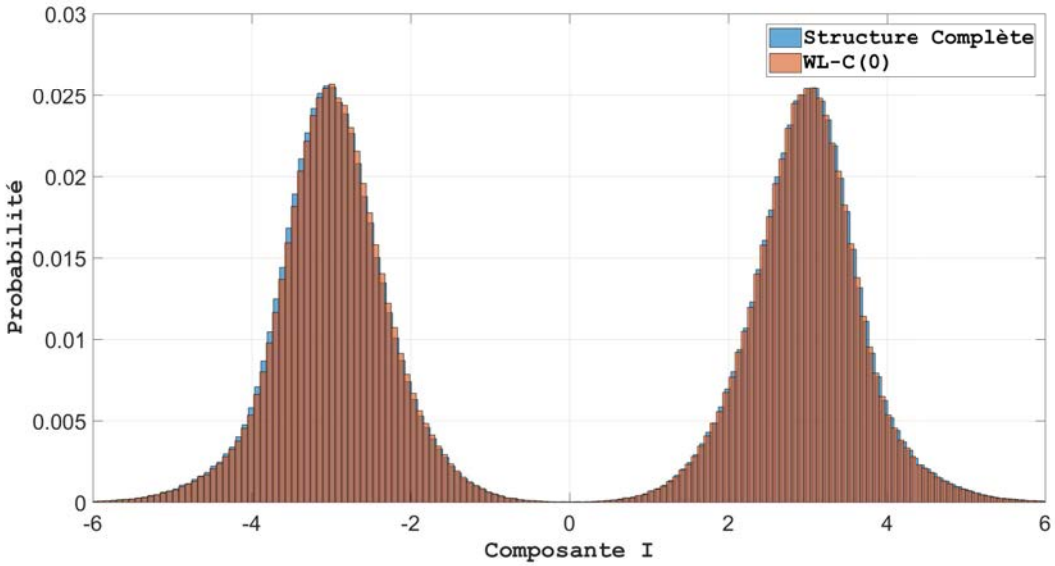


FIGURE 3.7 – Histogramme de la composante réelle de y_k pour symboles SOI et CCI BPSK pour la structure complète WL-C(0,1,2,3) et WL-C(0) pour $\phi = 0$.

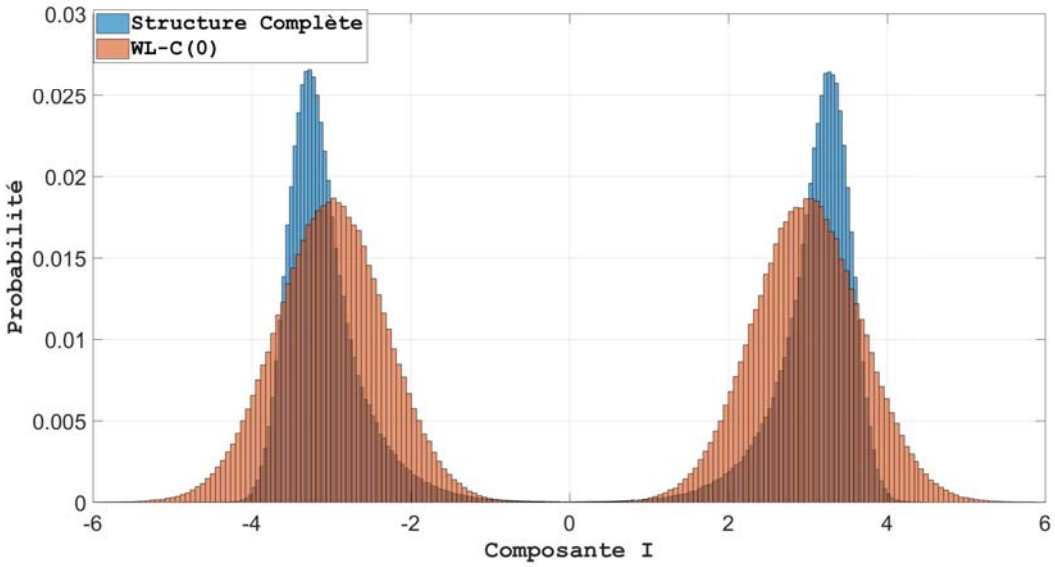


FIGURE 3.8 – Histogramme de la composante réelle de y_k pour symboles SOI et CCI BPSK pour la structure complète WL-C(0,1,2,3) et WL-C(0) pour $\phi = \pi/4$.

Pour des symboles CCI non BPSK ou non synchronisés avec les symboles SOI, en dépit de l'absence de gain en SINR apportés par les récepteurs de Volterra MMSE WL-C(i) par rapport aux récepteurs WL MMSE pour des infinimment puissants CCI d'après la relation (3.4.18), les figures 3.9, 3.10 et 3.11, montrent qu'un gain en SINR est encore possible pour des puissants CCI. Les figures 3.9 et 3.10 exhibent le SINR des filtres de Volterra MMSE WL-C(0) et WL MMSE comme respectivement fonction de ϕ pour différentes valeurs de τ pour un roll-off de 0.3, et fonction de τ/T pour différentes valeurs du roll-off r_{off} pour $\phi = 0$. Dans ces deux figures, les symboles SOI et CCI BPSK avec SNR=10dB et INR=30dB. Ces deux figures montrent que le gain en SINR décroît quant le roll-off r_{off} de $v(t)$ décroît et quand $\tau \in [0, T/2]$ croît. Cela s'explique par la présence d'un terme interférence intersymbole du à l'impulsion du CCI désynchronisé dont la puissance augmente qui gaussianise la composante CCI $b'_k(\tau)$ par l'approximation déduite du théorème central limite pour lequel le gain par rapport au récepteur WL tend vers zéro.

La figure 3.11 montre pour des symboles SOI et CCI de constellation 4ASK, le SINR des filtres de Volterra MMSE WL-C(0) et WL MMSE, fonction de τ/T pour différentes valeurs du roll-off r_{off} pour $\phi = 0$. Nous voyons que là aussi un gain en SINR subsiste pour des symboles non BPSK et non synchronisés, malgré une très forte dégradation para rapport à la constellation BPSK.

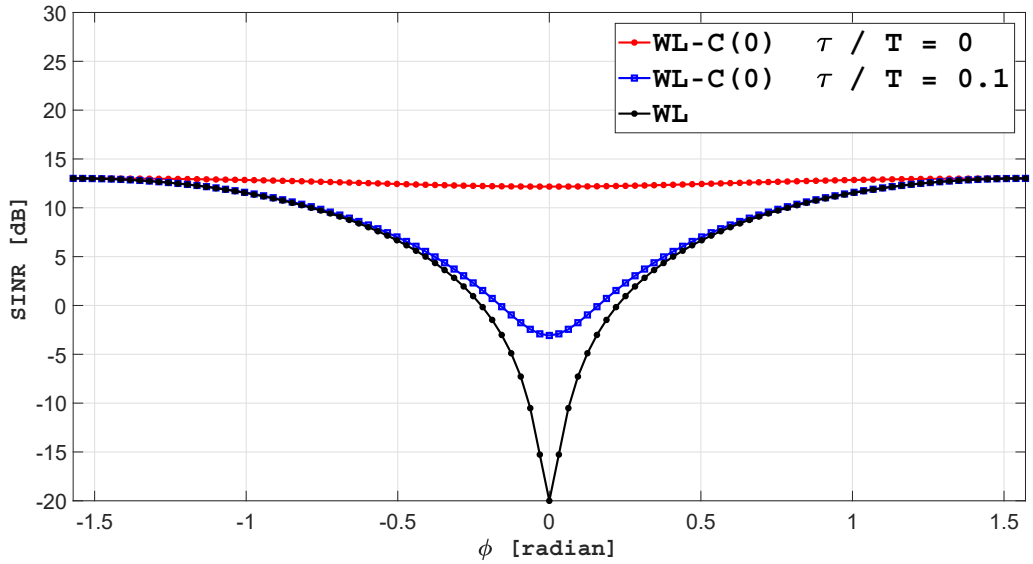


FIGURE 3.9 – $\text{SINR}_{\text{WL-C(0)}}$ et SINR_{WL} pour symboles SOI et CCI BPSK en fonction de ϕ pour r_{off} = 0.3, SNR = 10dB et INR = 30dB.

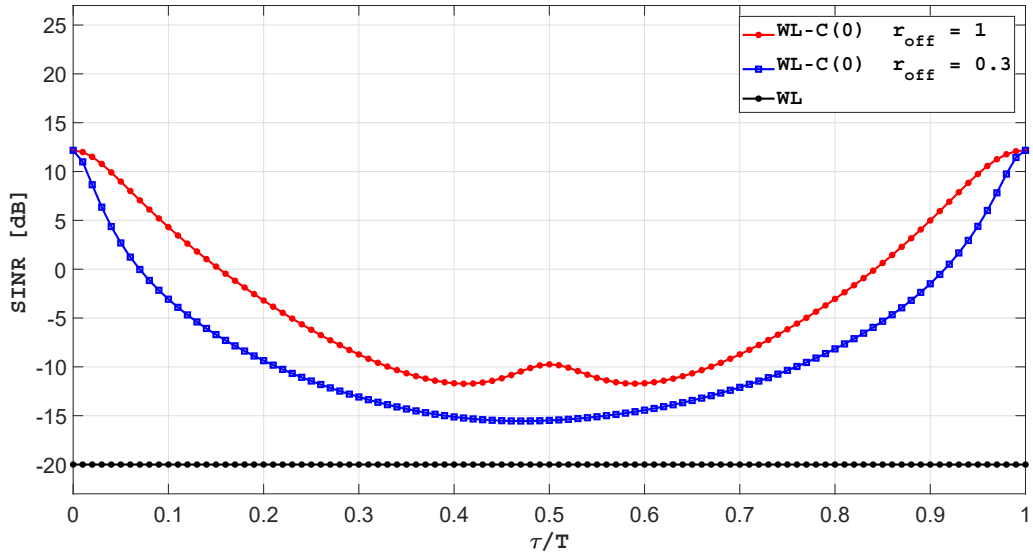


FIGURE 3.10 – $\text{SINR}_{\text{WL-C(0)}}$ et SINR_{WL} pour symboles SOI et CCI BPSK en fonction de τ/T pour ϕ = 0, SNR = 10dB et INR = 30dB.

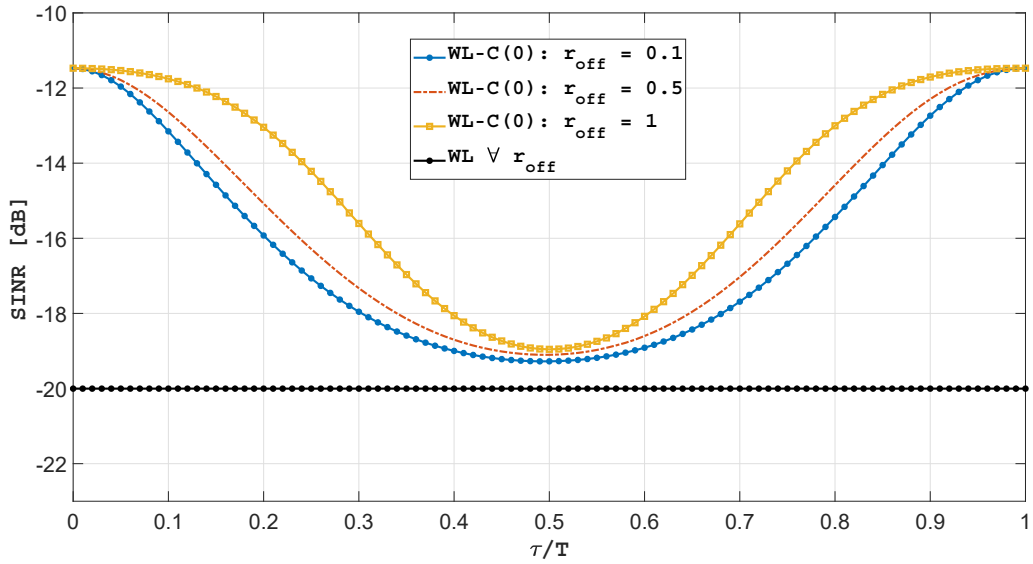


FIGURE 3.11 – $\text{SINR}_{\text{WL-C(0)}}$ et SINR_{WL} pour symboles SOI et CCI 4ASK en fonction de τ/T pour ϕ = 0, SNR = 10dB et INR = 30dB.

Cas de symboles SOI et CCI circulaires du second ordre

Nous allons dans ce paragraphe illustrer et préciser les résultats du paragraphe 3.4.4.3. Nous allons montrer ici que pour des symboles CCI non QPSK ou non synchrones avec les symboles SOI, il est encore possible de bénéficier de la discrimination d'amplitude CCI/SOI pour des CCI de fortes puissances. Ceci est illustré sur la figure 3.12 qui exhibe les SINR du récepteur de Volterra LC(1,3) et du récepteur linéaire et en fonction de τ/T pour des symboles QPSK pour différentes valeurs du

roll-off r_{off} de $v(t)$ où le SINR du récepteur de Volterra LC(1,3) diminue quand r_{off} augmente. La figure 3.13 montre que $\text{SINR}_{\text{LC(1,3)}}$ est très peu sensible à ϕ, contrairement au récepteur WL-C(1,3) pour des symboles BPSK comme le montre la figure 3.9.

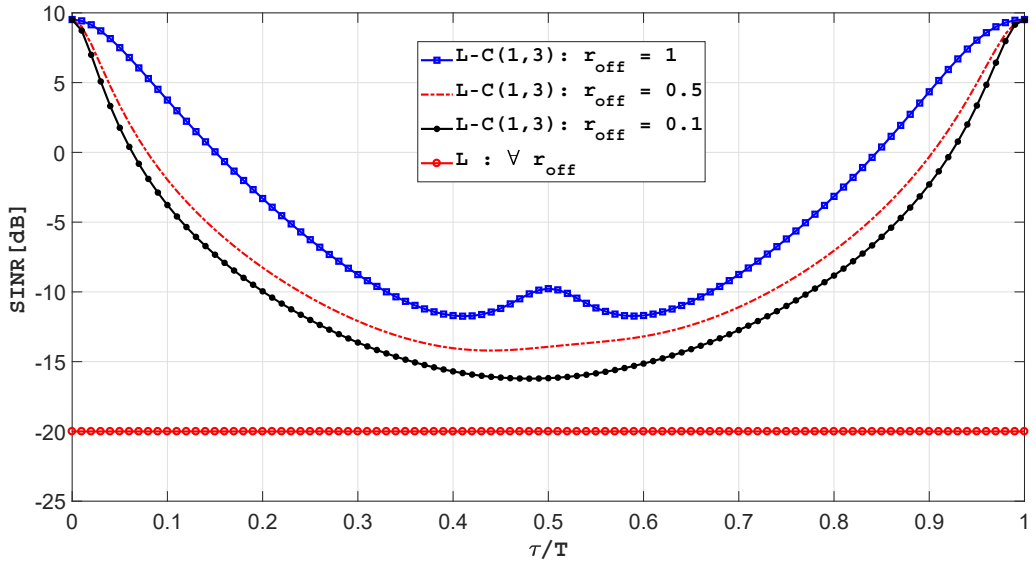


FIGURE 3.12 – $\text{SINR}_{\text{LC(1,3)}}$ comparé au SINR_{L} pour des symboles SOI et CCI QPSK en fonction de τ/T pour $\phi = 0$, SNR = 10dB et INR = 30dB.

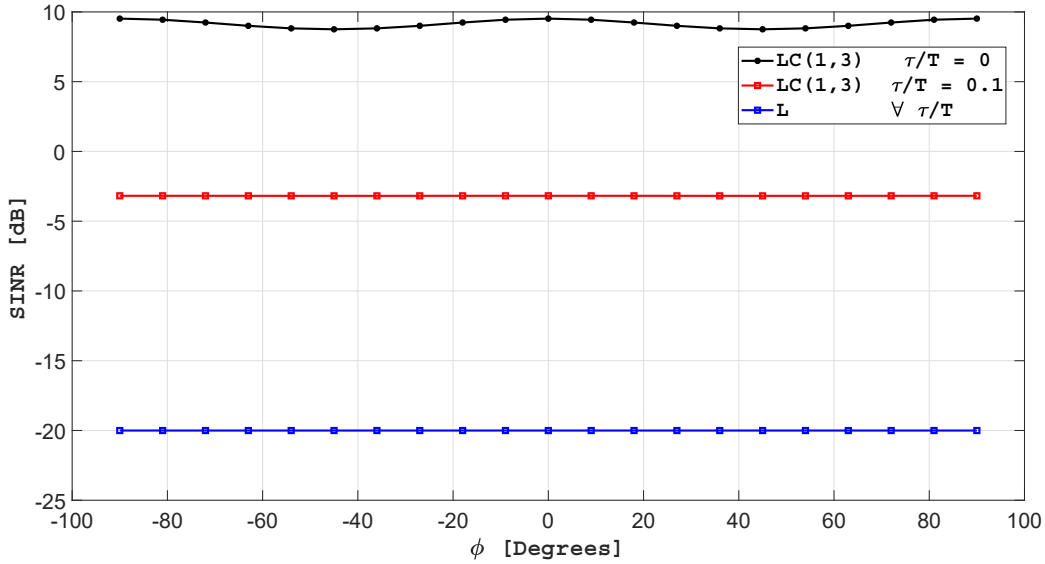


FIGURE 3.13 – $\text{SINR}_{\text{LC(1,3)}}$ comparé au SINR_{L} pour des symboles SOI et CCI QPSK en fonction de ϕ pour SNR = 10dB et INR = 30dB.

La figure 3.14 montre que dans les scénario de symboles SOI et CCI BPSK, le phénomène de discrimination d'amplitude a lieu à partir de la même valeur de INR, quelque soit la phase ϕ du CCI

par rapport au SOI (y compris pour $\phi = \pi/2$ où le filtre WL MMSE annule presque la composante CCI).

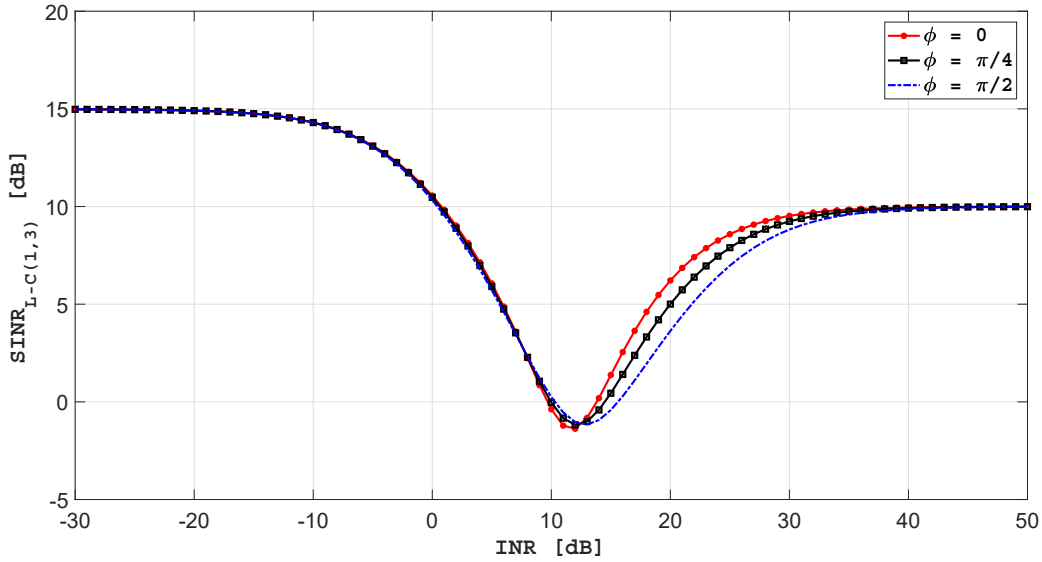


FIGURE 3.14 – $\text{SINR}_{\text{LC(1,3)}}$ pour des symboles SOI et CCI QPSK en fonction du INR pour SNR = 10dB.

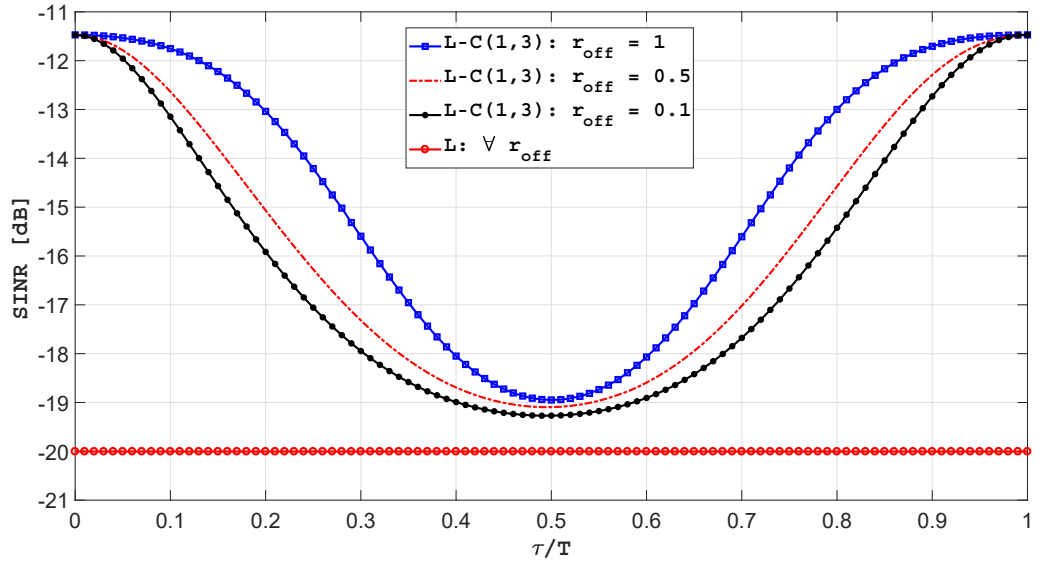


FIGURE 3.15 – $\text{SINR}_{\text{LC(1,3)}}$ et SINR_{L} pour des symboles SOI et CCI 16QAM en fonction du τ/T pour SNR = 10dB, INR = 30dB et $\forall\phi$.

Enfin la figure 3.15 montre pour des symboles SOI et CCI de constellation 16QAM, le SINR des filtres de Volterra MMSE LC(1,3) et linéaire MMSE, fonction de τ/T pour différentes valeurs du roll-off r_{off} pour n'importe quelle valeur de ϕ. Nous voyons que là aussi un gain en SINR subsiste pour des symboles non QPSK et non synchronisés, malgré une très forte dégradation par rapport

à la constellation QPSK.

3.4.6.2 Filtrage de Volterra complexe (SER)

Nous allons dans ce paragraphe illustrer le paragraphe 3.4.5.

Cas de symboles SOI et CCI réels

Commençons par comparer les taux d'erreurs symbole pour des symboles SOI et CCI BPSK synchronisés obtenu en sortie du filtre de Volterra WL-C(0) MMSE et du filtre WL MMSE (les deux utilisant un simple détection de signe (3.4.37)) en sortie y_k au taux d'erreurs symbole de référence donné par le détecteur MAP (ou ML) (3.4.39) qui connaît les paramètres π_s, π_j, ϕ et η_2, en fonction de l'INR où SNR = 10dB. Sur la figure 3.16, ces taux d'erreurs symboles sont représentés en bleu. Les SINR à la sortie du filtre de Volterra WL-C(0) MMSE et du filtre WL MMSE sont également représentés en rouge sur cette figure.

Cette figure illustre la discrimination d'amplitude utilisée par le récepteur de Volterra WL-C(0) MMSE, pour lequel le SINR en sortie est minimum pour SNR ≈ INR et atteint son maximum $2\pi_s/\eta_2$ pour de très puissants CCI pour lesquels le SER est minimum. Ainsi le SER et le SINR fournis par récepteur de Volterra WL-C(0) MMSE ont des comportements consistants. Cela renforce la signification du SINR (3.3.9) défini à l'aide de la décomposition orthogonale (3.3.8). De plus nous notons que bien que le récepteur MAP ait un SER toujours meilleur que celui des récepteurs de Volterra WL-C(0) MMSE, leur SER sont quasi-équivalents pour de très puissants CCI.

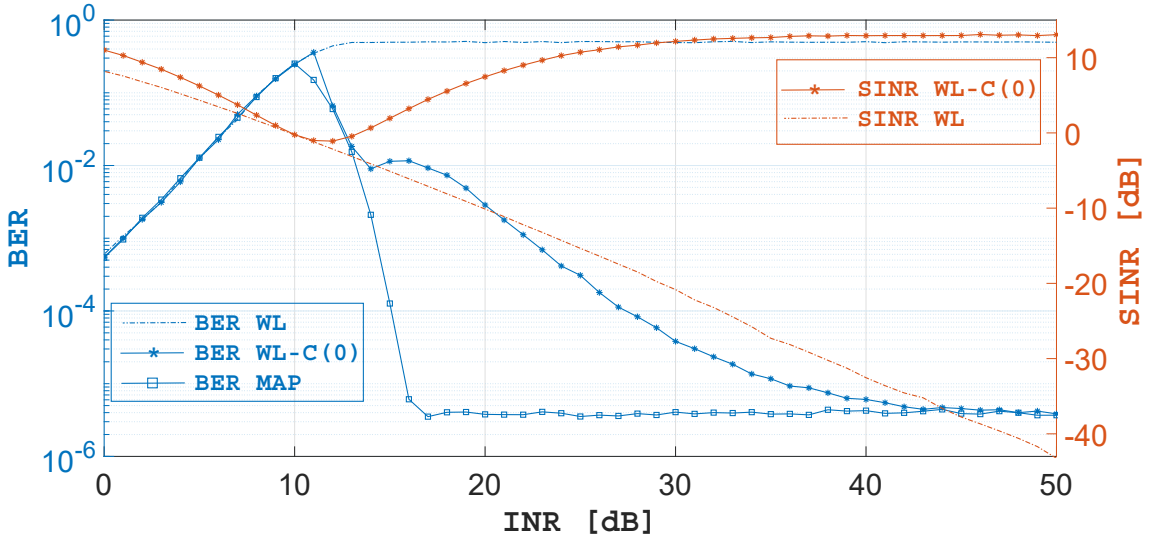


FIGURE 3.16 – SINR et SER pour symboles SOI et CCI BPSK synchronisés en fonction de INR, pour $\phi = 0$ et SNR = 10dB

La figure 3.17 montre que les détecteurs de référence MAP (ou ML) (3.4.39) et conjoint (3.4.40) présentent des performances en termes de taux d'erreurs symboles identiques, malgré leur

connaissance a priori différentes.

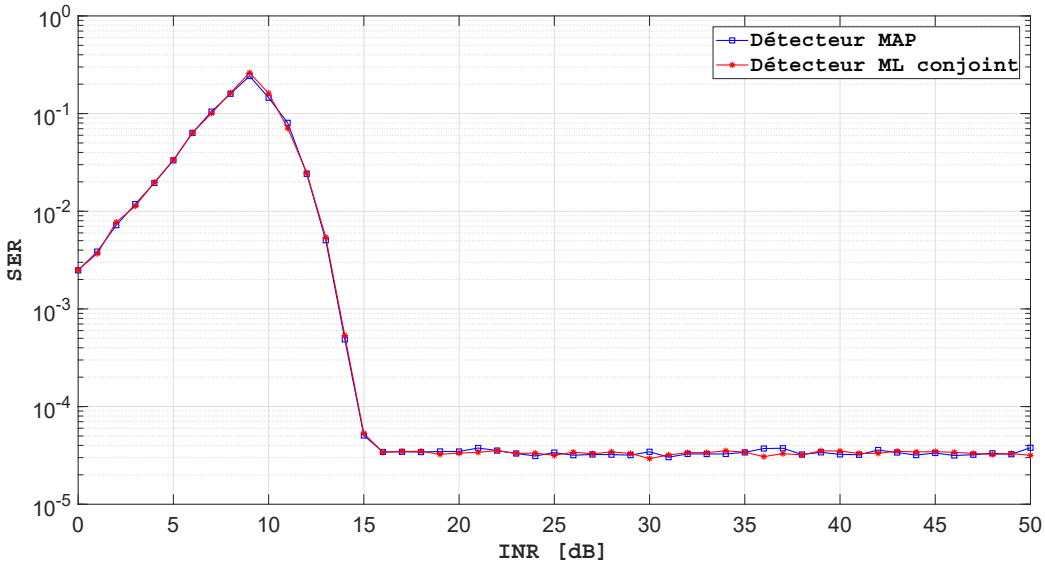


FIGURE 3.17 – SER pour symboles SOI et CCI BPSK synchronisés en fonction de INR, pour $\phi = 0$ et SNR = 10dB

Enfin, considérons le cas particulier d'absence de CCI où nous comparons ici le comportement des filtres de Volterra WL-C(0) aux simples filtres L et WL en terme de probabilité d'erreur dans le cas de symboles SOI BPSK. Nous voyons sur la figure 3.18 que la probabilité d'erreur donnée par un détecteur à signe (3.4.37) en sortie du filtre de Volterra WL-C(0) est au mieux identique à celle obtenue à la sortie d'un simple filtre linéaire contrairement à l'amélioration du SINR en sortie du filtre de Volterra WL-C(0) présentée à la figure 3.1. Cette observation n'a rien de contradictoire car le récepteur qui minimise la probabilité d'erreur en absence de CCI à partir de l'observation $x(t)$ est un simple filtre adapté suivi d'un échantillonnage au rythme symbole d'une multiplication complexe et d'un détecteur à signe.

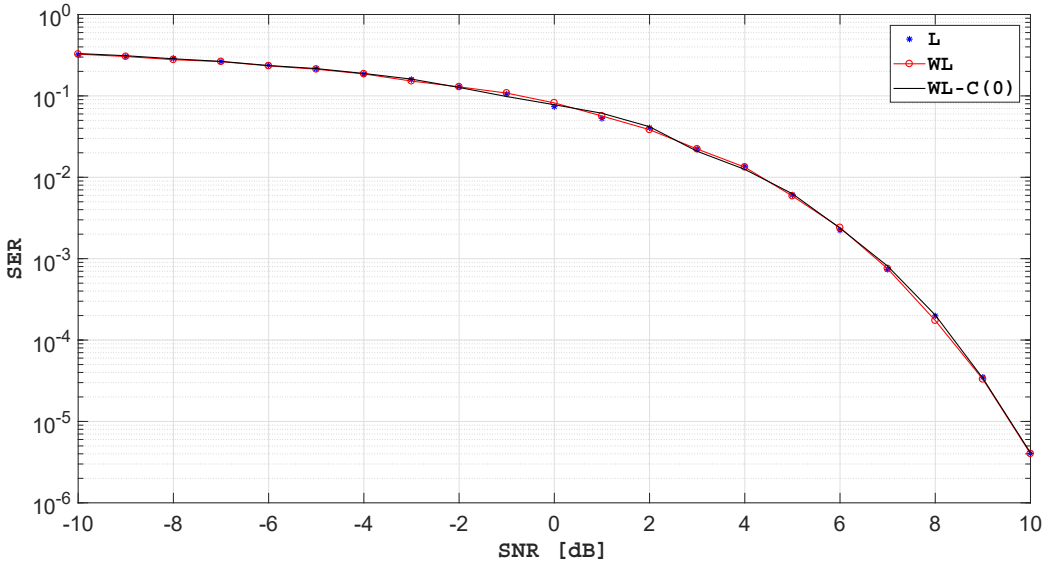


FIGURE 3.18 – SER pour symboles SOI BPSK en absence d'interférence en fonction de SNR

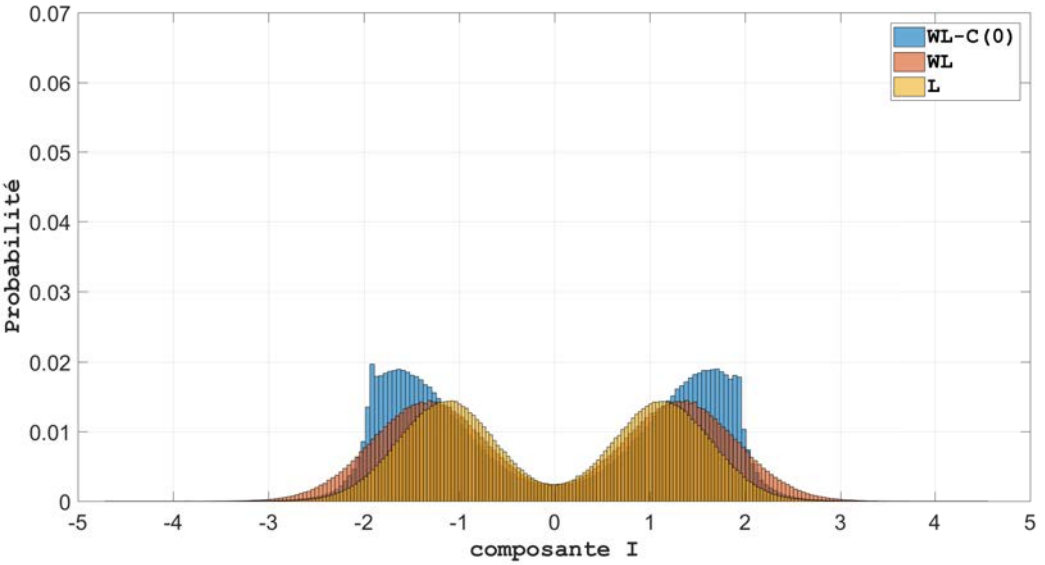


FIGURE 3.19 – Histogramme de la composante I pour symboles SOI BPSK en absence d'interférence pour SNR = 4dB

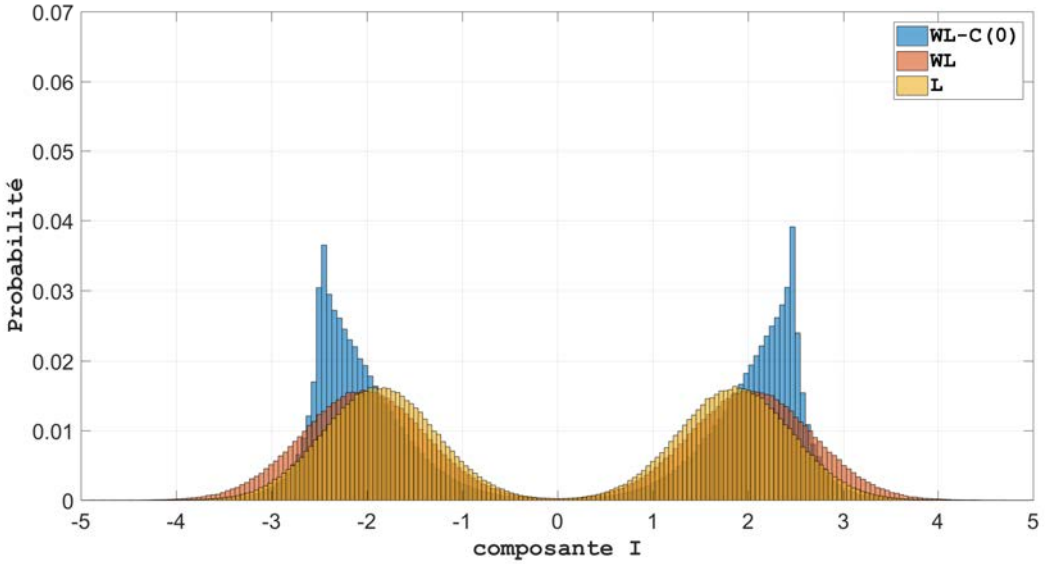


FIGURE 3.20 – Histogramme de la composante I pour symboles SOI BPSK en absence d'interférence pour SNR = 7dB

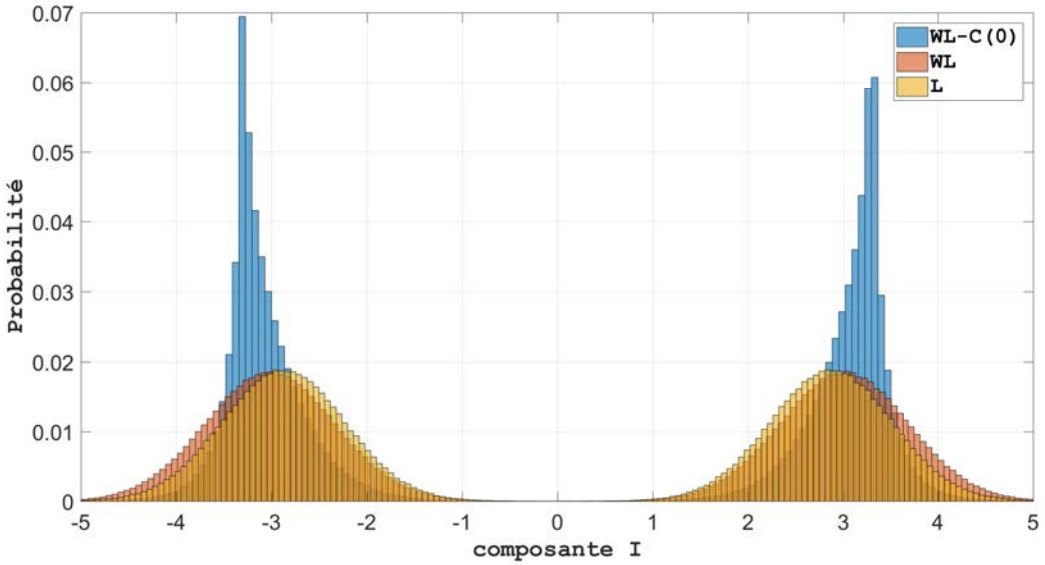


FIGURE 3.21 – Histogramme de la composante I pour symboles SOI BPSK en absence d'interférence pour SNR = 10dB

A nouveau les histogrammes 3.19, 3.20 et 3.21 de $\mathrm{Re}(y_k)$ pour les filtres de Volterra WL-C(0) et linéaires et de y_k pour le filtres WL expliquent cette différence de comportement entre SINR (ou MMSE) et SER où le critère de minimisation de la MSE n'est ici pas équivalent à la minimisation du SER. Ainsi nous voyons que malgré l'amélioration du SINR en sortie du filtre de Volterra MMSE, i.e., la réduction de la dispersion des nuages de constellation pour la structure partielle WL-C(0), le SER reste invariable en fonction de l'augmentation du SNR à cause de l'invariance de la probabilité d'avoir $\mathrm{Re}(y_k)$ dans la zone d'erreur.

Cas de symboles SOI et CCI circulaires du second ordre

Nous nous intéressons ici à la variation du taux d'erreur symbole obtenu en sortie de filtres L-C(1) et L-C(1,3) en utilisant un simple détecteur à seuil pour symboles SOI et CCI QPSK synchronisés où $\phi = 0$ et SNR $= 10$dB, en fonction de l'INR. Ce SER est comparé à celui d'un récepteur MAP (3.4.39). Les figures 3.22 et 3.23 illustrent le phénomène de *discrimination d'amplitude* CCI/SOI pour lequel le SER (resp. SINR) du récepteur L-C(1,3) est maximum (resp. minimum) pour INR $\approx$ SNR. De même le SER est minimum pour un fort CCI pour lequel le SINR est maximum. De plus, quoique le récepteur MAP est toujours meilleur que le récepteur L-C(1,3), nous remarquons que les SER sont très proches pour un très fort CCI. Enfin, en comparant les figures 3.22 et 3.23, nous notons que les performances en terme de SER et de SINR sont consistantes, renforçant la aussi le sens du SINR défini à partir de la décomposition orthogonale (3.3.8), comme indicateur de performance.

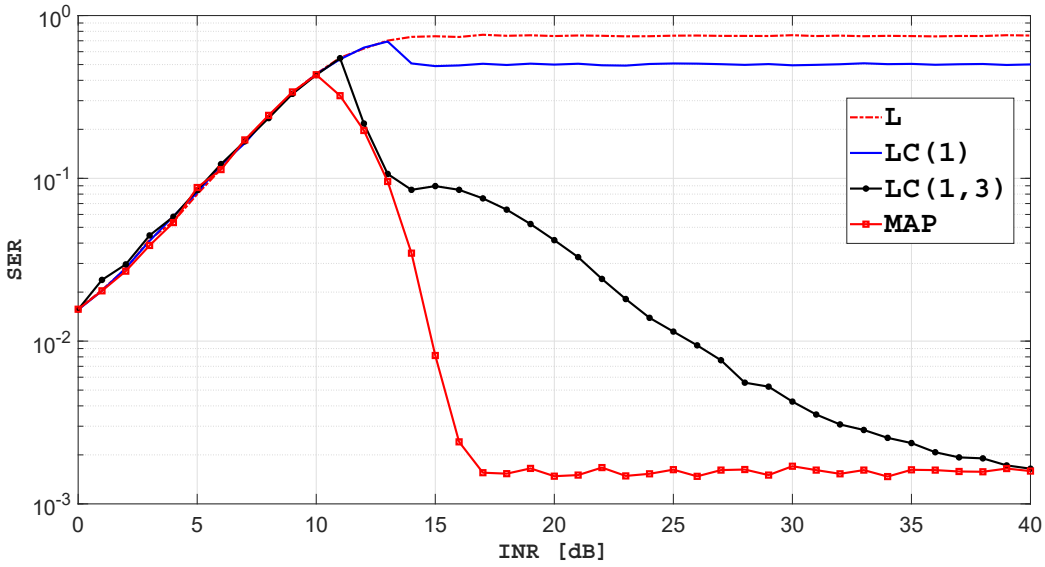


FIGURE 3.22 – SER en fonction de l'INR pour les récepteurs L, LC(1), LC(1,3) et MAP pour $\phi = 0$ et SNR=10dB pour symboles SOI et CCI QPSK synchonisés.

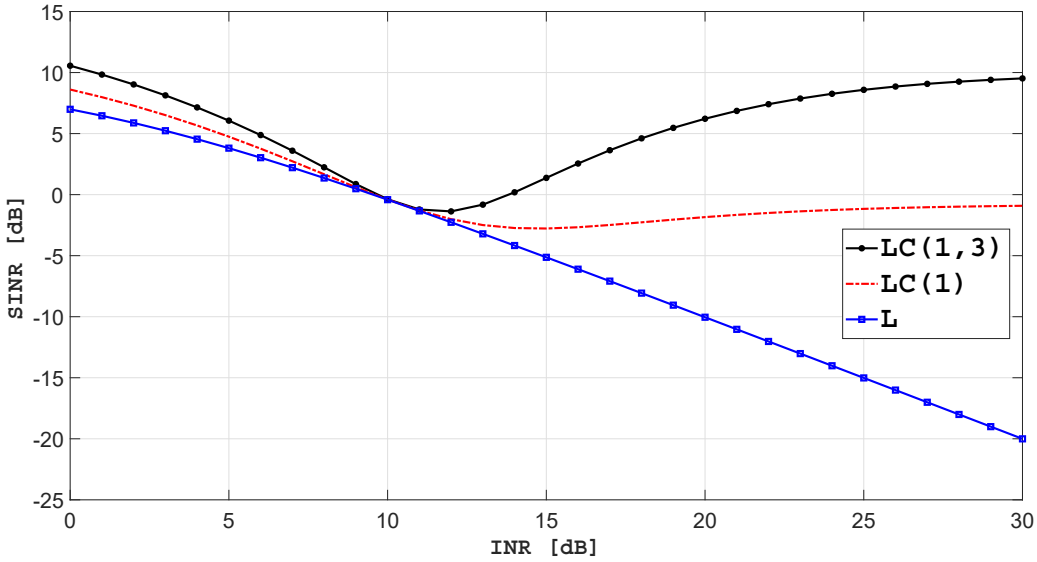


FIGURE 3.23 – SINR en fonction de l'INR pour les récepteurs L, LC(1) et LC(1,3) pour $\phi = 0$ et SNR=10dB pour symboles SOI et CCI QPSK synchonisés.

Enfin, considérons le cas particulier d'absence de CCI où nous comparons ici le comportement des filtres de Volterra L-C(1) et L-C(1,3) au simple filtre linéaire en terme de probabilité d'erreur dans le cas de symboles SOI QPSK. Nous voyons sur la figure 3.24 que la probabilité d'erreur donnée par un simple détecteur (3.4.36) en sortie des filtres de Volterra L-C(1) et L-C(1,3) sont au mieux identiques à celle obtenue par un détecteur (3.4.36) à la sortie d'un simple filtre linéaire contrairement à l'amélioration du SINR en sortie des filtres de Volterra L-C(1) et L-C(1,3) présentée à la figure 3.2. Cette observation n'a rien de contradictoire car le récepteur qui minimise la probabilité d'erreur en absence de CCI à partir de l'observation $x(t)$ est un simple filtre adapté suivi d'un échantillonnage au rythme symbole d'une multiplication complexe et du simple détecteur (3.4.36).

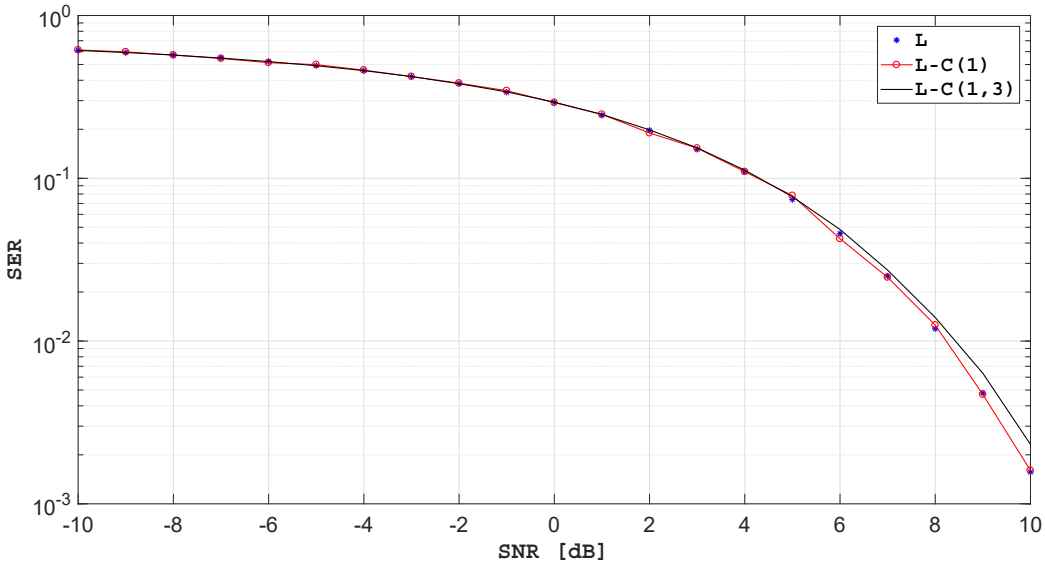


FIGURE 3.24 – SER pour symboles SOI QPSK en absence d'interférence en fonction du SNR.

Là aussi les histogrammes de la sortie y_k des filtres MMSE de Volterra L-C(1) et L-C(1,3) permettent de comprendre la différence de comportement entre le SINR (c'est à dire aussi la MMSE) et le SER. Les figures 3.25, 3.26 et 3.27 montrent que bien que l'amélioration en terme de SINR soit visible (moins de dispersion des nuages de constellation) pour les structures de Volterra L-C(1) et L-C(1,3) par rapport à la structure linéaire, Les performances en SER restent invariables. Ce résultat est due à l'invariance du nombre d'occurrence des échantillons dans les régions qui délimitent chaque quadrant du domaine complexe. Une légère dégradation en SER est visible pour la structure de Volterra L-C(1,3) de la figure 3.22 sous l'effet d'une forte asymétrie des nuages de constellation et du fait qu'on utilise un organe de décision sous l'hypothèse fausse d'un bruit gaussien.

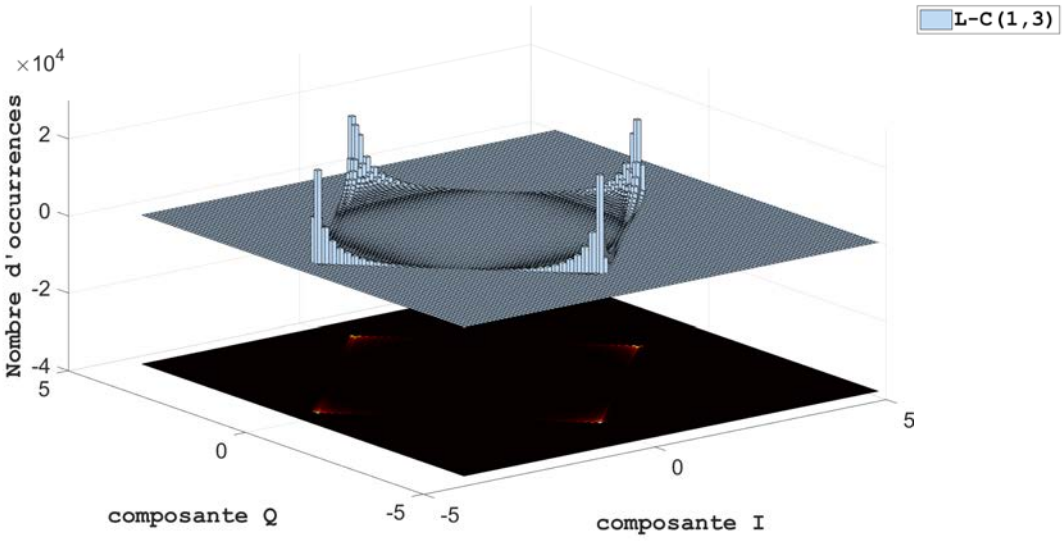


FIGURE 3.25 – Histogramme de la sortie y_k du filtre MMSE de Volterra L-C(1,3) pour symboles SOI QPSK en absence d'interférence pour SNR = 10dB.

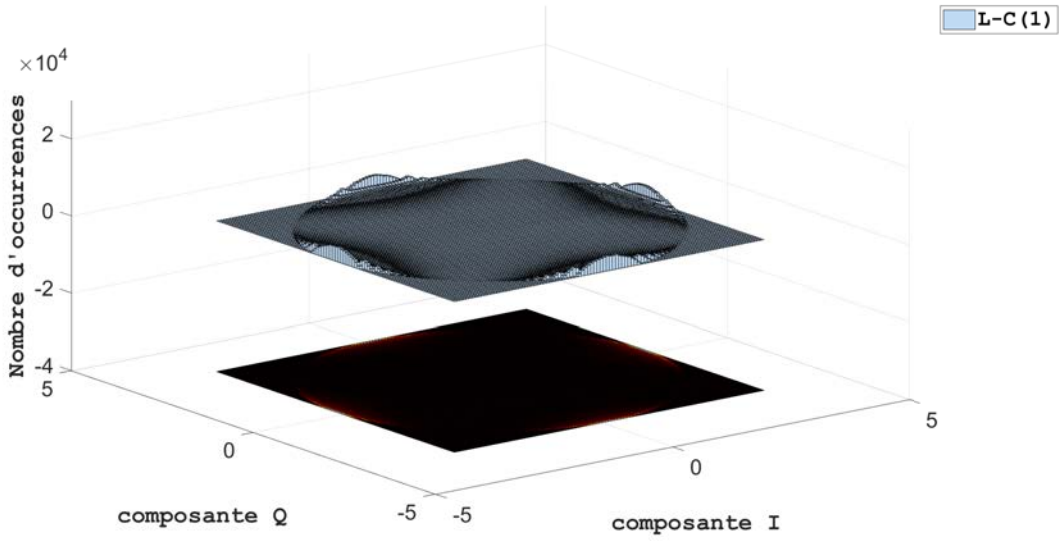


FIGURE 3.26 – Histogramme de la sortie y_k du filtre MMSE de Volterra L-C(1) pour symboles SOI QPSK en absence d'interférence pour SNR = 10dB.

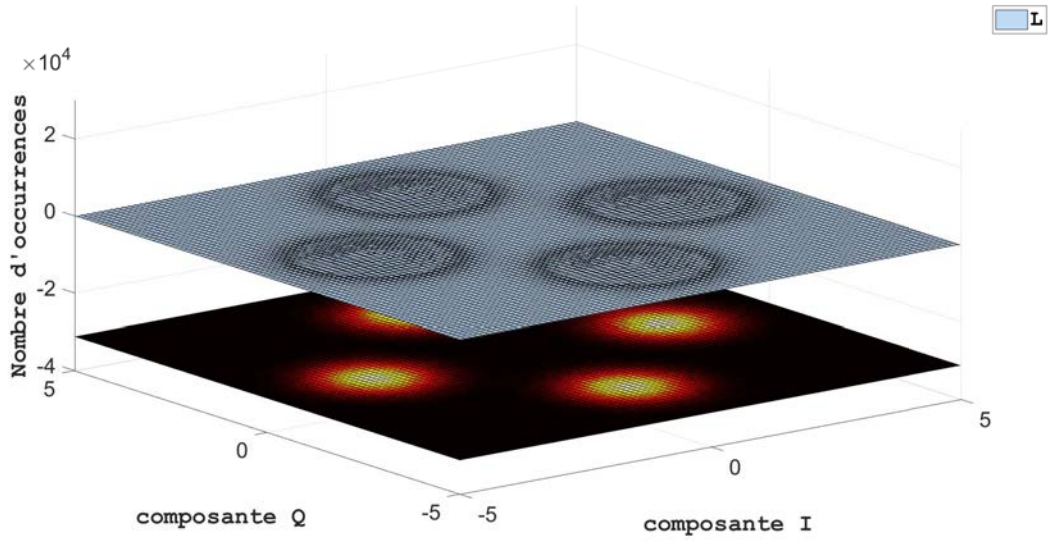


FIGURE 3.27 – Histogramme de la sortie $y(k)$ du filtre MMSE de Volterra L pour symboles SOI QPSK en absence d'interférence pour SNR = 10dB.

3.4.6.3 Beamforming de Volterra complexe

Nous considérons ici le cas de beamformers à $N = 2$ antennes où nous comparons les SINR théoriques en sortie de quelques beamformers de Volterra MMSE par rapport à leurs équivalents Volterra MVDR présentés au chapitre 2. Ces comparaisons sont menées aux figures 3.28 et 3.29 pour respectivement les beamformers de Volterra WL-C(0) pour symboles BPSK et les beamformers de Volterra L-C(1,3) pour symboles QPSK, en fonction du module la corrélation spatiale défini par :

$$\alpha = \frac{|\mathbf{s}^H \mathbf{j}|}{\|\mathbf{s}\| \|\mathbf{j}\|},$$

pour SNR=10dB et INR=30dB et pour un roll off $\omega = 0.7$ pour des symboles synchronisés. Nous voyons sur ces deux figures la supériorité des SINR des beamformers de Volterra MMSE par rapport à celui de leurs équivalents Volterra MVDR comme signalé en (3.3.14). Nous voyons de plus que l'effet de discrimination d'amplitude des beamformers de Volterra MMSE permet de maintenir un fort SINR pour des modules de la corrélation spatiale proche de 1 contrairement aux beamformers de Volterra MVDR.

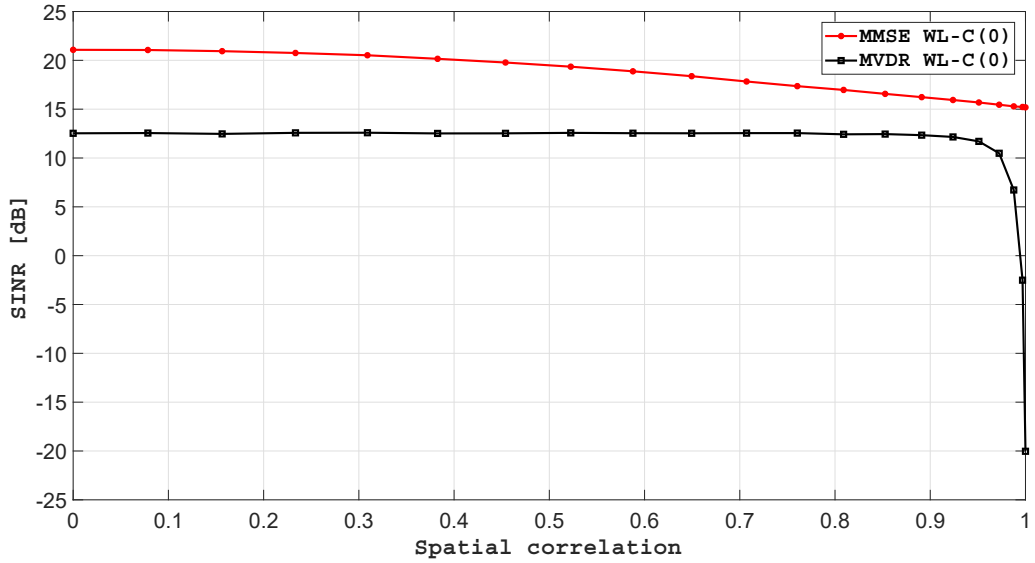


FIGURE 3.28 – Comparaison entre beamformer MMSE et MVDR de Volterra, our des symboles SOI et CCI BPSK synchronisés, en fonction de la corrélation spectrale pour INR = 30dB et $\omega = 0.7$

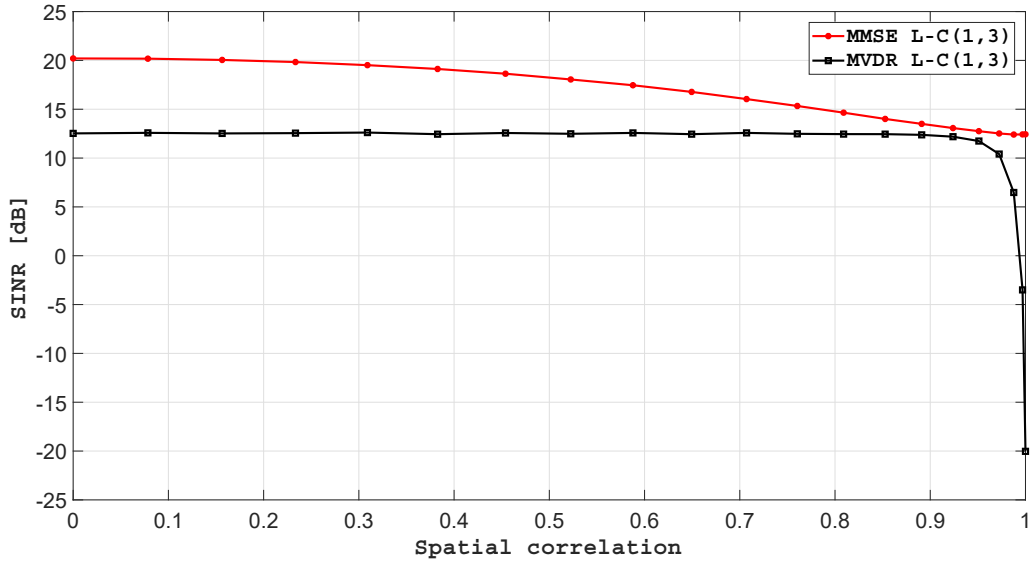


FIGURE 3.29 – Comparaison entre beamformer MMSE et MVDR de Volterra, pour des symboles SOI et CCI QPSK synchronisés, en fonction de la corrélation spectrale pour INR = 30dB et $\omega = 0.7$

3.4.6.4 Vitesse d'apprentissage

Nous comparons ici les vitesses d'apprentissage du beamformer de Volterra MMSE WL-C(0) à quelques beamformers de Volterra MVDR présentés au chapitre 2 dans le paragraphe 2.5. Nous nous plaçons aussi ici dans le scénario de $N = 2$ antennes, du module du coefficient de corrélation spatiale de $\alpha = 0.95$ avec SNR=10dB et INR =30dB et de symboles SOI et CCI synchronisés, tous

deux soit BPSK soit QPSK.

Les figures suivantes montrent les variations du SINR(K) moyen estimé (calculé sur 1000 réalisations) soit de $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en utilisant une séquence d'apprentissage de K symboles, nous avons pour le beamformer de Volterra MMSE :

$$\mathrm{SINR}(K) = \frac{\pi_s |\widehat{\widetilde{\mathbf{w}}}^H \widetilde{\mathbf{s}}_n|^2}{\widehat{\widetilde{\mathbf{w}}}^H \mathbf{R}_{\tilde{i}} \widehat{\widetilde{\mathbf{w}}}} = \frac{\pi_s |\widehat{\widetilde{\mathbf{w}}}^H \widetilde{\mathbf{s}}_n|^2}{\widehat{\widetilde{\mathbf{w}}}^H (\mathbf{R}_{\tilde{x}} - \pi_s \widetilde{\mathbf{s}}_n \widetilde{\mathbf{s}}_n^H) \widehat{\widetilde{\mathbf{w}}}}, \tag{3.4.41}$$

où $\widehat{\widetilde{\mathbf{w}}} = \widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}}^{-1} \widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x},a}$ avec $\widehat{\mathbf{R}}_{\tilde{x}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \widetilde{\mathbf{x}}_k \widetilde{\mathbf{x}}_k^H$ et $\widehat{\mathbf{r}}_{\tilde{x},a} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \widetilde{\mathbf{x}}_k a_k^*$.

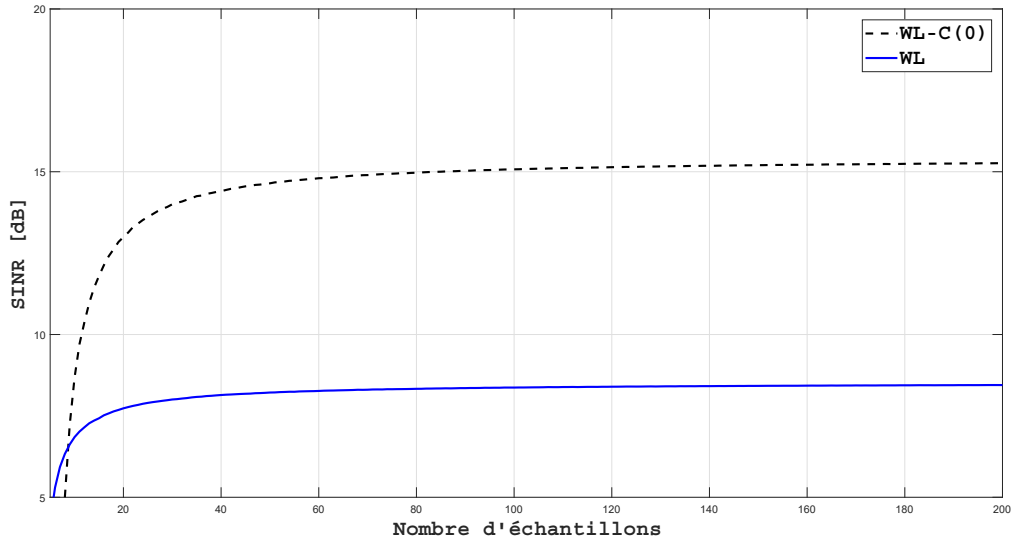


FIGURE 3.30 – $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour symboles SOI et CCI BPSK synchonisés

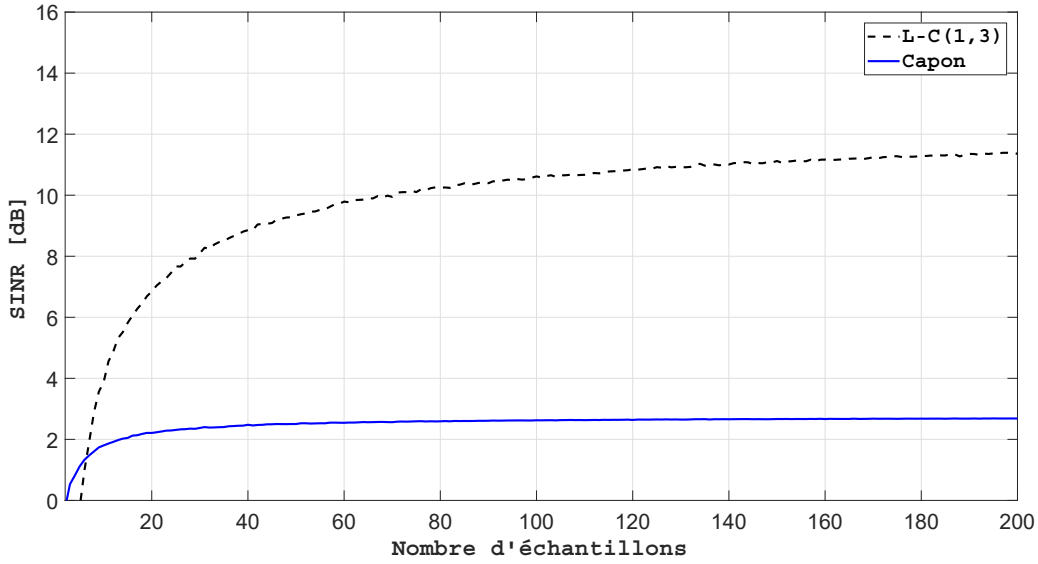


FIGURE 3.31 – $\widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{SINR}(K))$ en fonction du nombre d'observations K pour symboles SOI et CCI QPSK synchonisés

Nous notons que ces figures 3.30 et 3.31 sont proches des figures 2.18 et 2.20 associées aux beamformers de Volterra WL-C(0) et L-C(1,3) MVDR présentés au chapitre 2.

3.5 Conclusion

Nous avons démontré dans ce chapitre que le beamforming de Volterra complexe d'ordre M de type MVDR pouvait s'adapter sous la forme MMSE, permettant d'exploiter les statistiques jusqu'à l'ordre M du SOI. Dans le cas particulier d'une seule antenne, nous avons montré qu'un filtre de Volterra complexe du 3ème ordre MMSE permet de renforcer l'effet SAIC pour des SOI et CCI de constellations rectilignes, en particulier de type BPSK, par rapport à un simple filtrage WL. De plus nous avons montré que ce filtre de Volterra complexe du 3ème ordre MMSE permet de séparer deux signaux QPSK synchrones de puissances très différentes sans avoir à démoduler les deux signaux. Enfin pour des symboles de modules constants non QPSK ou non synchrones, il est encore possible de bénéficier de la discrimination d'amplitude CCI/SOI pour des CCI de fortes puissances. Par ailleurs nous avons montré que les critères de MMSE et MSINR sont pratiquement équivalents à la minimisation du SER pour les structures partielles de Volterra MMSE de type L-C(i) ou WL-C(i), mais pas nécessairement équivalentes pour les structures de Volterra MMSE complètes.

Chapitre 4

Robustesse d'un test de rectilinéarité aux offsets de fréquence

Sommaire

4.1 Introduction 137
4.2 Position du problème 138
4.3 Dérivation du test de rectilinéarité au second ordre 139
4.4 Test de rectilinéarité basé sur les cumulants du quatrième ordre . . . 146
4.5 Conclusion 150

4.1 Introduction

L'amélioration des performances des algorithmes de traitement du signal, en utilisant la matrice de covariance complémentaire, en complément de la matrice de covariance traditionnelle, dans le contexte des signaux non-circulaires, n'est significatif que dans le cas des signaux rectilignes ou quasi-rectilignes. Cela implique que les tests de rectilinéarité semblent plus utiles que les simples test de non circularité. Mais en pratique, ces signaux rectilignes ou quasi-rectilignes sont corrompus par un résidu de porteuse et un bruit de phase et sont observés au travers d'observations bruitées par du bruit circulaire. De plus dans ce cadre la matrice de covariance complémentaire doit souvent être estimée à partir d'un nombre réduit d'échantillons et en présence d'un faible rapport signal à bruit (SNR). Dans ces conditions, une telle estimée peut être proche de zéro même pour des signaux rectilignes. Une telle imprécision nécessite donc l'utilisation d'un test robuste de rectilinéarité.

Un test de non-circularité sous la forme d'un test d'hypothèse binaire $\mathcal{H}_0 : \mathbf{C}_x = \mathbf{0}$ contre $\mathcal{H}_1 : \mathbf{C}_x \neq \mathbf{0}$ a été proposé dans la littérature dans plusieurs articles dont [64] et [79] et une analyse de performances a été présentée [26]. Par contre la détection de rectilinéarité n'a été considérée à notre connaissance que dans [46] et [24] sous la forme respective d'un traitement adaptatif et bloc.

Ces travaux considèrent la détection de rectilinéarité de toutes les sources noyées dans du bruit à partir d'un mélange de sources statistiquement indépendantes. Le traitement proposé se présente en trois étapes : (1) une séparation de sources en bloc [24] ou adaptative [46] en aveugle, (2) une estimation du coefficient de non-circularité au second ordre, de chaque source et (3) la comparaison de cette statistique à un seuil empirique. Une source est classifiée rectiligne en cas d'un coefficient de non-circularité supérieur à un seuil.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une étude de performance asymptotique de ce test de rectilinéarité au second ordre sous forme bloc, pour déterminer le seuil de détection optimal sur la base des courbes ROC. L'accent est mis sur des situations d'utilisation pratique à savoir : résidu de porteuse et bruit de phase. Deux tests de rectilinéarité au quatrième ordre seront aussi proposés dans les scénarios de faibles SNR.

4.2 Position du problème

4.2.1 Modèle du signal

On suppose le vecteur d'observation $(\mathbf{x}_k)_{k=1,...,K} \in \mathbb{C}^N$ qui représente un mélange de M sources statistiquement indépendantes, corrompues par un bruit de fond gaussien $\boldsymbol{\nu}_k$, tel que :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{s}_k + \boldsymbol{\nu}_k, \tag{4.2.1}$$

où le vecteur $\mathbf{s}_k = [s_{1,k}, ..., s_{M,k}]^T$ rassemble les M sources et $\mathbf{A}$ représente la matrice de mélange de dimension $N \times M$. Les variables aléatoires $\mathbf{s}_k$ et $\boldsymbol{\nu}_k$ sont mutuellement indépendantes.

Après la première étape de séparation de source en aveugle, en utilisant des méthodes bien connues dans la littérature (voir par exemple [45]), chaque source estimée $(\hat{s}_{m,k})_{m=1,...,M}$, notée plus simplement y_k est égale à :

$$y_k = s_k + n_k \in \mathbb{C}, \tag{4.2.2}$$

où n_k représente l'erreur d'estimation de la m-ième source, englobant les résidus du bruit et des autres sources du mélange. Les variables aléatoires s_k et n_k sont supposées indépendantes où n_k est un bruit centré, gaussien et circulaire de variance η_2.

Si on considère le contexte d'un canal MIMO à évanouissement plat, $\mathbf{x}_k$ représente le vecteur enveloppe complexe obtenu après une transposition en fréquence et filtrage passe-bas, avec un éventuel résidu de porteuse et bruit de phase, et un échantillonnage après un filtrage adapté d'un mélange de M modulations numériques linéaires, non nécessairement synchronisées. Les symboles indépendants a_k considérés sont soit réels (ASK, BPSK) ou complexes (QPSK, 8PSK, 16QAM, 16PSK...), par conséquent :

$$s_k = \sqrt{\pi_s}(\sum_n a_n r_{k-n}) e^{i2\pi k f_s T} e^{i\phi_{s,k}}, \tag{4.2.3}$$

où $r_k = v(t-\tau_s) \otimes v^*(-t)|_{t=kT}$ avec $v(t)$ est le filtre de mise en forme, en cosinus-surélevé. Donc r_k est réel. Les symboles a_k sont normalisés ($\mathrm{E}|a_k|^2 = 1$) et de plus, on suppose sans perte de généralité que $\sum_n r_n^2 = 1$. f_s est inconnue et constante pour chaque observation $k = 1, .., K$, $\phi_{s,k} = \phi_s + \Delta\phi_{s,k}$ où $\Delta\phi_{s,k}$ représente le bruit de phase considéré comme une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[-\Delta, +\Delta]$ qui varie d'une observation à une autre. ϕ_s est une phase constante issue de l'étape de séparation de sources en aveugle. $1/T$ est le débit symbole.

4.3 Dérivation du test de rectilinéarité au second ordre

Le test de rectilinéarité peut être formulé comme un test d'hypothèse binaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : &\quad \text{sequence } a_k \text{ circulaire au second ordre} \\ \mathcal{H}_1 : &\quad \text{sequence } a_k \text{ réel} \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Utiliser la loi de probabilité de $(y_k)_{k=1,..,K}$ sous $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ Pour la construction d'un test de rectilinéarité au sens du maximum de vraisemblance est une tâche complexe. Par conséquent, seulement un test empirique de rectilinéarité peut être dérivé. Il faut noter que si la suite a_k est réelle [resp. circulaire au second ordre], la suite $a'_k \overset{\text{def}}{=} \sum_n a_n r_{k-n}$ (avec $\mathrm{E}|a'_k|^2 = 1$) est aussi réelle [resp. circulaire au second ordre]. Le test de rectilinéarité (4.3.1), est équivalent à :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : &\quad (s_k)_{k=1,...,K} \text{ circulaire au second ordre} \\ \mathcal{H}_1 : &\quad (s_k)_{k=1,...,K} \text{ rectiligne,} \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

En absence de résidus de porteuse et bruit de phase, l'observation se ramène à :

$$s_k = \sqrt{\pi_s} a'_k e^{i\phi_s} \overset{\text{def}}{=} \rho_k e^{i\phi_s} \tag{4.3.3}$$

Ce qui justifie l'utilisation du même test de rectilinéarité présenté dans [24] et [46] pour le modèle général de l'observation (4.2.3). Ce test empirique se résume à une décision $\mathcal{H}_1$ si :

$$\Lambda_K(\hat{r}_y, \hat{c}_y) > \alpha \tag{4.3.4}$$

et une décision $\mathcal{H}_0$ dans le cas contraire où la statistique $\Lambda_K(\hat{r}_y, \hat{c}_y)$ est définie par :

$$\Lambda_K(\widehat{r}_y, \widehat{c}_y) = \frac{|\widehat{c}_y|}{\widehat{r}_y} \in [0, 1], \tag{4.3.5}$$

où

$$\widehat{r}_y \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} |y_k^2| \quad \text{et} \quad \widehat{c}_y \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} y_k^2. \tag{4.3.6}$$

Le seuil α doit être déterminé d'une façon optimale à partir des courbes ROC théoriques obtenues dans les paragraphes 4.3.1.2 et 4.3.1.3.

4.3.1 Courbes ROC en absence résidus de porteuse et sans bruit de phase

4.3.1.1 Distributions asymptotiques de la statistique du test de rectilinéarité

Afin de déterminer la distribution asymptotique de la suite de statistique $\Lambda_K(\widehat{r}_y, \widehat{c}_y)$, on décompose ce test de rectilinéarité en une succession d'applications :

$$\left[\begin{array}{c} \widehat{r}_y \\ \widehat{c}_y \end{array} \right] \mapsto \widehat{\gamma}_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widehat{c}_y}{\widehat{r}_y} \mapsto \Lambda_K(\widehat{r}_y, \widehat{c}_y) = |\widehat{\gamma}_y| = \sqrt{\widehat{\gamma}_y \widehat{\gamma}_y^*}. \tag{4.3.7}$$

Sous $\mathcal{H}_1$, les differentielles [53] de (4.3.7) au point (r_y, c_y) (où $r_y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}|y_k^2|$, $c_y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(y_k^2)$ et $\gamma_y \stackrel{\text{def}}{=} c_y/r_y$) sont données par :

$$d\gamma = (-\frac{c_y}{r_y^2}, \frac{1}{r_y}) \left(\begin{array}{c} dr \\ dc \end{array} \right) \quad \text{et} \quad d\Lambda_K = -\frac{1}{2|\gamma_y|}(\gamma_y^*, \gamma_y) \left(\begin{array}{c} d\gamma \\ d\gamma^* \end{array} \right), \tag{4.3.8}$$

Sous $\mathcal{H}_0$, la première dérivée se réduit à $d\gamma = \frac{1}{r_y} dc$ et la seconde n'est pas définie.

Le théorème central limite (voir Annexe D.1) appliqué à la suite des variables aléatoires à valeurs complexes et bidimensionnelle, $(|y_k^2|, y_k^2)^T$, donne :

$$\sqrt{K} \left(\begin{array}{c} \widehat{r}_y - r_y \\ \widehat{c}_y - c_y \end{array} \right) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}_C\left(\mathbf{0}; \mathbf{R}_i, \mathbf{C}_i\right), \quad i = 0, 1 \tag{4.3.9}$$

où sous $\mathcal{H}_0$:

$$\mathbf{R}_0 = \left(\begin{array}{cc} (\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2 + \eta_2^2 & 0 \\ 0 & \kappa_s\pi_s^2 + 4\pi_s\eta_2 + 2\eta_2^2 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{C}_0 = \left(\begin{array}{cc} (\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2 + \eta_2^2 & 0 \\ 0 & \kappa_s'\pi_s^2 e^{4i\phi_s} \end{array} \right),$$

et sous $\mathcal{H}_1$:

$$\mathbf{R}_1 = \left(\begin{array}{cc} (\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2 + \eta_2^2 & ((\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2)e^{-2i\phi_s} \\ ((\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2)e^{2i\phi_s} & (\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 4\pi_s\eta_2 + 2\eta_2^2 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{C}_1 = \left(\begin{array}{cc} (\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2 + \eta_2^2 & ((\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2)e^{2i\phi_s} \\ ((\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2)e^{2i\phi_s} & (\kappa_s' - 1)\pi_s^2 e^{4i\phi_s} \end{array} \right),$$

où $\kappa_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}|a_k'^4|$ et $\kappa_s' \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(a_k'^4)$.

En utilisant le théorème de continuité (voir Annexe D.2) adapté à des suites de variables aléatoires à valeurs complexes (voir e.g., [82, p.122]), on obtient la convergence en distribution suivante :

$$\sqrt{K}\ (\widehat{\gamma}_y - \gamma_y) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}_C\left(0; r_{\gamma,i}, c_{\gamma,i}\right), \quad i = 0, 1, \tag{4.3.10}$$

avec :

$$\begin{aligned} \gamma_y &= 0 \ \text{ sous } \ \mathcal{H}_0 \\ \gamma_y &= \pi_s e^{2i\phi_s}/(\pi_s + \eta_2) \ \text{ sous } \ \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r_{\gamma,0} &= \frac{1}{r_y^2}[\mathbf{R}_0]_{2,2} \text{ et } c_{\gamma,0} = \frac{1}{r_y^2}[\mathbf{C}_0]_{2,2} \text{ sous } \mathcal{H}_0 \\ r_{\gamma,1} &= (-\frac{c_y}{r_y^2}, \frac{1}{r_y})\mathbf{R}_1(-\frac{c_y}{r_y^2}, \frac{1}{r_y})^H \text{ et } c_{\gamma,1} = (-\frac{c_y}{r_y^2}, \frac{1}{r_y})\mathbf{C}_1(-\frac{c_y}{r_y^2}, \frac{1}{r_y})^T \text{ sous } \mathcal{H}_1. \end{aligned}$$

En utilisant encore une autre fois le théorème de continuité, on a sous $\mathcal{H}_1$:

$$\sqrt{K}\ (\Lambda_K - \Lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_R\,(0; r_\Lambda) \tag{4.3.11}$$

avec

$$\Lambda = \pi_s/(\pi_s + \eta_2)$$

et

$$r_\Lambda = \frac{1}{4|\gamma_y|^2}(\gamma_y^*, \gamma_y)\begin{pmatrix} r_{\gamma,1} & c_{\gamma,1} \\ c_{\gamma,1}^* & r_{\gamma,1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_y \\ \gamma_y^* \end{pmatrix} = \frac{(1+\kappa_s)\epsilon_s^2 + 4\epsilon_s + 1}{(1+\epsilon_s)^4}, \tag{4.3.12}$$

où $\epsilon_s \overset{\text{def}}{=} \pi_s/\eta_2$ est la valeur SNR pour l'observation y_k. Il faut noter que r_Λ est une fonction décroissante de SNR.

Par contre sous $\mathcal{H}_0$, Λ_K est non différentiable par rapport à γ_y au point $\gamma_y = 0$, mais la distribution asymptotique de $\Lambda_K = |\gamma_y|$ peut être directement déduite à partir la distribution asymptotique gaussienne de moyenne nulle (4.3.10).

$$\sqrt{K}\ \Lambda_K \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{ Improper Rayleigh distribution} \tag{4.3.13}$$

de paramètres [80, p.23] (voir Annexe D.2)

$$r_{\gamma,0} = \frac{\kappa_s\epsilon_s^2 + 4\epsilon_s + 2}{(\epsilon_s+1)^2} \text{ et } \rho_{\gamma,0} = \frac{\kappa_s'\epsilon_s^2}{\kappa_s\epsilon_s^2 + 4\epsilon_s + 2}.$$

Cette distribution se réduit à la distribution classique de Rayleigh pour une source s_k circulaire jusqu'à l'ordre 4, pour laquelle $\kappa_s' = 0$, par exemple pour la modulation 8PSK de symboles a_k avec une parfaite synchronisation (i.e., $a_k' = a_k$).

4.3.1.2 Expression théorique asymptotique des courbes ROC en absence de résidus de porteuse et bruit de phase

La distribution asymptotique de la suite de statistique Λ_K, nous permet de déduire une approximation des valeurs des probabilités de false alarme P_{FA} et détection P_{D} du test (4.3.4) en fonction du seuil α :

$$P_{\text{FA}} = P(\Lambda_K > \alpha/\mathcal{H}_0) \approx Q_{\mathcal{R}}\left(\alpha\sqrt{K}\right) \tag{4.3.14}$$

$$P_{\text{D}} = P(\Lambda_K > \alpha/\mathcal{H}_1) \approx Q_{\mathcal{N}}\left(\frac{\sqrt{K}(\alpha - \Lambda)}{\sqrt{r_\Lambda}}\right) \tag{4.3.15}$$

pour $K \gg 1$, où $Q_{\mathcal{R}}(.)$ et $Q_{\mathcal{N}}(.)$ représentent respectivement la fonction de répartition complémentaire d'une distribution non-circulaire de Rayleigh dont les paramètres sont : $r_{\gamma,0}$ et $c_{\gamma,0}$ et de celle d'une distribution gaussienne centrée et de variance unité.

En éliminant α entre les probabilités P_{FA} et P_{D}, on obtient l'expression des courbes ROC du test (4.3.4) :

$$P_{\mathrm{D}} \approx Q_{\mathcal{N}}\left(\frac{Q_{\mathcal{R}}^{-1}(P_{\mathrm{FA}}) - \Lambda\sqrt{K}}{\sqrt{r_{\Lambda}}}\right). \tag{4.3.16}$$

Nous voyons clairement que sur cette expression que pour P_{FA} fixé, P_{D} est une fonction croissante du nombre d'échantillons d'observation K. La dépendance de P_{D} par rapport au SNR est plus compliquée, mais des illustrations numériques montrent que le terme dominant est r_{Λ}. Par suite P_{D} est aussi une fonction croissante du SNR pour une valeur fixe P_{FA}.

4.3.1.3 Expression théorique asymptotique des courbes ROC en présence de résidus de porteuse et bruit de phase

En présence de résidus de porteuse et/ou bruit de phase, la suite des variables aléatoires $(|y_k^2|, y_k^2)$ sont indépendantes mais plus identiquement distribuées. On peut suivre la même démarche que dans le paragraphe 4.3.1.1 pour trouver l'expression de la distribution asymptotique de la sequence du test statistique $\Lambda_K(\widehat{r}_y, \widehat{c}_y)$. Le théorème central limite classique (4.3.9) doit être remplacé par le théorème de Lyapunov (voir par exemple [51, th.2.7.1]) étendu au cas multidimentionnel, pour des variables aléatoires à valeurs complexes et en utilisant aussi la propriété au second ordre des variables aléatoires [30, th.1] (voir Annexe D.1). Cela nous permet d'affirmer l'existence d'une suite de matrices 2×2, notées $\mathbf{A}_K$, telles que :

$$\mathbf{A}_K^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{r}_y - \bar{r}_y \\ \widehat{c}_y - \bar{c}_y \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_C(\mathbf{0}; \mathbf{I}, \mathbf{\Delta}), \tag{4.3.17}$$

où $\bar{r}_y \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}|y_k^2|$, $\bar{c}_y \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \mathrm{E}(y_k^2)$ et $\mathbf{\Delta}$ est une matrice diagonale de termes réels situés entre 0 et 1, telle que :

$$\mathbf{A}_K \mathbf{A}_K^H = \begin{pmatrix} \mathrm{E}((\widehat{r}_y - \bar{r}_y)^2) & \mathrm{E}((\widehat{r}_y - \bar{r}_y)(\widehat{c}_y - \bar{c}_y)^*) \\ \mathrm{E}((\widehat{c}_y - \bar{c}_y)(\widehat{r}_y - \bar{r}_y)^*) & \mathrm{E}(|\widehat{c}_y - \bar{c}_y|^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_K \mathbf{\Delta} \mathbf{A}_K^T = \begin{pmatrix} \mathrm{E}((\widehat{r}_y - \bar{r}_y)^2) & \mathrm{E}((\widehat{r}_y - \bar{r}_y)(\widehat{c}_y - \bar{c}_y)) \\ \mathrm{E}((\widehat{c}_y - \bar{c}_y)(\widehat{r}_y - \bar{r}_y)) & \mathrm{E}((\widehat{c}_y - \bar{c}_y)^2) \end{pmatrix},$$

où les éléments de ces deux matrices sont donnés par :

$$\mathrm{E}(\widehat{r}_y - \bar{r}_y)^2 = \frac{1}{K}\left((\kappa_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2 + \eta_2^2\right) \text{ sous } \mathcal{H}_0 \text{ et } \mathcal{H}_1,$$

$$\mathrm{E}|\widehat{c}_y - \bar{c}_y|^2 = \begin{cases} \frac{1}{K}\left(\kappa_s\pi_s^2 + 4\pi_s\eta_2 + 2\eta_2^2\right) & \text{sous } \mathcal{H}_0 \\ \frac{1}{K}\left((\kappa_s - \mathrm{sinc}_{\Delta}^2(2))\pi_s^2 + 4\pi_s\eta_2 + 2\eta_2^2\right) & \text{sous } \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(\widehat{c}_y - \bar{c}_y)^2 = \begin{cases} \frac{1}{K}\kappa'_s\pi_s^2\mathrm{sinc}_\Delta(4)\mathrm{sinc}_{f_s}(4)e^{i4\phi_s} & \text{sous } \mathcal{H}_0 \\ \frac{1}{K}\left(\left(\kappa_s\mathrm{sinc}_\Delta(4) - \mathrm{sinc}_\Delta^2(2)\right)\pi_s^2\mathrm{sinc}_{f_s}(4)e^{i4\phi_s}\right) & \text{sous } \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(\widehat{c}_y - \bar{c}_y)(\widehat{r}_y - \bar{r}_y) = \begin{cases} 0 & \text{sous } \mathcal{H}_0 \\ \frac{1}{K}\left(((\kappa'_s - 1)\pi_s^2 + 2\pi_s\eta_2)\mathrm{sinc}_\Delta(2)\mathrm{sinc}_{f_s}(4)e^{i2\phi_s}\right) & \text{sous } \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

où $\mathrm{sinc}_\Delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x\Delta}{x\Delta}$ et $\mathrm{sinc}_{f_s}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x\pi K f_s T}{x\pi f_s T}e^{ix\pi(K+1)f_sT)}$.

En utilisant encore une fois le théorème de continuité à la première application de (4.3.7) étendu aux variables aléatoires complexes, il existe une suite complexe $\alpha_{K,i}$ et une constante c_i, $i = 0, 1$, tel que :

$$\alpha_{K,i}^{-1}\left(\widehat{\gamma}_y - \gamma_y\right) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}_C\left(0; 1, c_i\right), \quad i = 0, 1, \tag{4.3.18}$$

avec $\gamma_y = 0$ sous $\mathcal{H}_0$ et

$$\gamma_y = \frac{\pi_s}{\pi_s + \eta_2}\frac{\sin 2\Delta}{2\Delta}\frac{\sin 2\pi K f_s T}{2\pi K f_s T)}e^{2i\phi_s}e^{2i\pi(K+1)f_sT} \quad \text{sous} \quad \mathcal{H}_1$$

et où :

$$\begin{aligned} |\alpha_{K,i}|^2 &= \left(-\frac{\bar{c}_y}{\bar{r}_y^2}, \frac{1}{\bar{r}_y}\right)\mathbf{A}_K\mathbf{A}_K^H\begin{pmatrix} -\frac{\bar{c}_y^*}{\bar{r}_y^2} \\ \frac{1}{\bar{r}_y} \end{pmatrix} \\ c_i\alpha_{K,i}^2 &= \left(-\frac{\bar{c}_y}{\bar{r}_y^2}, \frac{1}{\bar{r}_y}\right)\mathbf{A}_K\mathbf{\Delta}\mathbf{A}_K^T\begin{pmatrix} -\frac{\bar{c}_y}{\bar{r}_y^2} \\ \frac{1}{\bar{r}_y} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

Finalement, en utilisant le théorème de continuité, il existe une suite de valeurs réelles β_K, sous $\mathcal{H}_1$, telle que :

$$\beta_K^{-1}\left(\Lambda_K - \Lambda\right) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}_R\left(0; 1\right), \tag{4.3.20}$$

avec

$$\Lambda = \frac{\pi_s}{\pi_s + \eta_2}\left|\frac{\sin 2\Delta}{2\Delta}\right|\left|\frac{\sin 2\pi f_s KT}{2\pi f_s KT}\right| \tag{4.3.21}$$

et

$$\beta_K^2 = \frac{1}{4|\gamma_y|^2}(\gamma_y^*, \gamma_y)\begin{pmatrix} |\alpha_{K,1}^2|^2 & c_1\alpha_{K,1}^2 \\ c_1^*\alpha_{K,1}^{*2} & |\alpha_{K,1}^2| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_y \\ \gamma_y^* \end{pmatrix}. \tag{4.3.22}$$

Sous $\mathcal{H}_0$, la distribution asymptotique de Λ_K peut être dérivée avec la même démarche que celle du paragraphe 4.3.1.1 à partir de la distribution asymptotique gaussienne centrée (4.3.18). De plus, il faut noter pour $\kappa'_s = 0$, (4.3.19) donne $c_0 = 0$ et la distribution asymptotique gaussienne centrée (4.3.18) devient circulaire de même qu'au paragraphe 4.3.1.1.

Par conséquent, la distribution approchée du test statistique Λ_K est de même forme que dans le cas d'absence de résidus de porteuse et bruit de phase et les courbes ROC peuvent être déduites de façon similaires. Nous discuterons de la perte de performance de ce test dans le paragraphe suivant.

4.3.2 Illustrations et simulations Monte Carlo

On examine dans ce paragraphe la validité des expressions des courbes ROC (4.3.16) et l'influence de la synchronisation, du résidus de porteuse et du bruit de phase sur le comportement de ces courbes. Tout au long de ce paragraphe, les symboles sont QPSK sous $\mathcal{H}_0$ et BPSK sous $\mathcal{H}_1$.

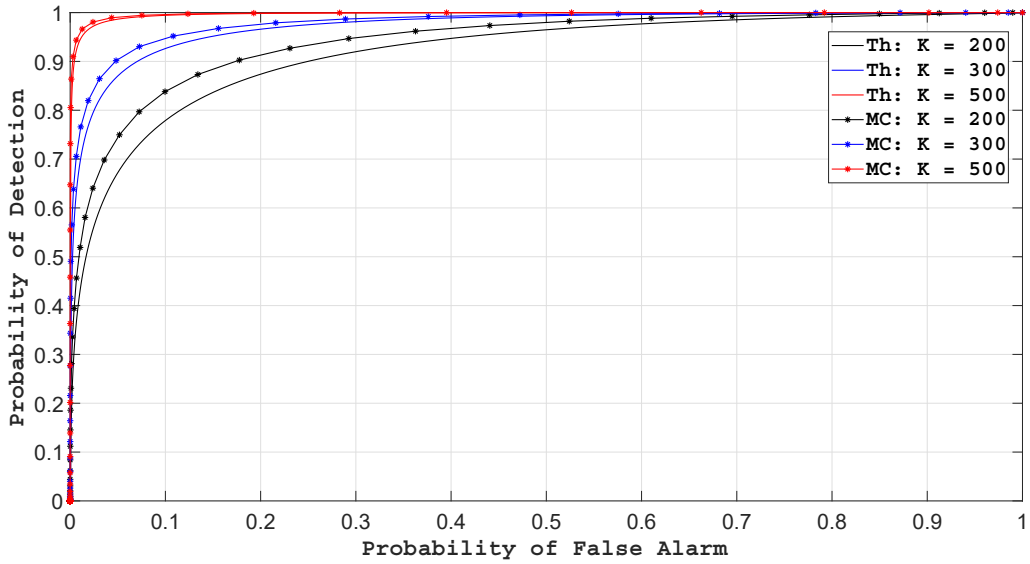


FIGURE 4.1 – Courbes ROC pour SNR = -5dB.

La figure 4.1 illustre les courbes ROC théoriques (4.3.16) et Monte Carlo, pour trois valeurs différentes du nombre d'échantillons K utilisé pour l'estimation de la statistique Λ_K et un SNR = -6dB. On remarque que les courbes empiriques Monte Carlo ROC se rapprochent des courbes théoriques ROC (4.3.16) à partir d'un nombre réduit d'échantillons K = 300 pour cette faible valeur de SNR.

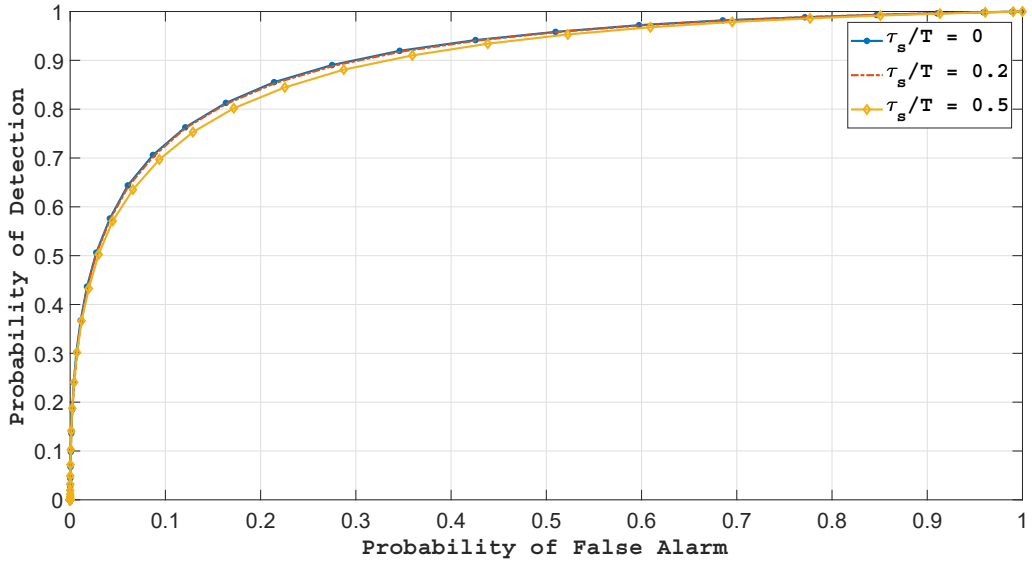


FIGURE 4.2 – Courbes ROC pour SNR = -3dB et k = 50.

La Figure 4.2 illustre les courbes ROC empiriques pour différentes valeurs du retard relatif τ_s/T et avec les paramètres suivants : $roll-off$ = 0.2, K = 50 et SNR = -3dB. Ces courbes présentent une faible sensibilité à l'asynchronisme du CCI par rapport au SOI.

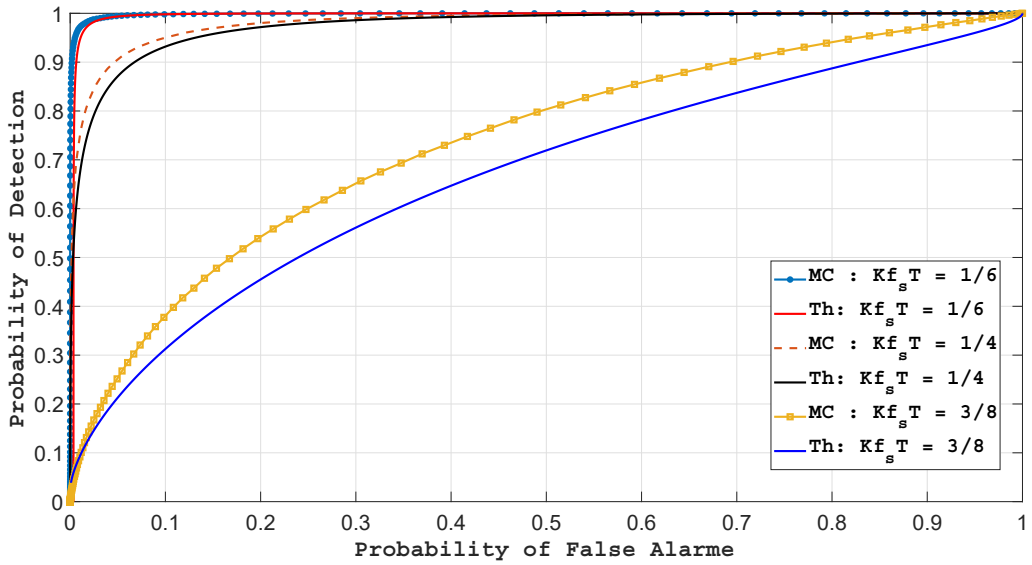


FIGURE 4.3 – Courbes ROC pour SNR = 0dB et K = 100.

La figure 4.3 représente les courbes ROC théoriques (Th.) et empiriques (MC) en présence de résidus de porteuse seulement, pour différentes valeurs Kf_sT et pour SNR = 0dB, K = 100. La courbe ROC est très sensible au résidu de porteuse et le test de rectilinéarité échoue complètement pour $Kf_sT \approx 3/8$.

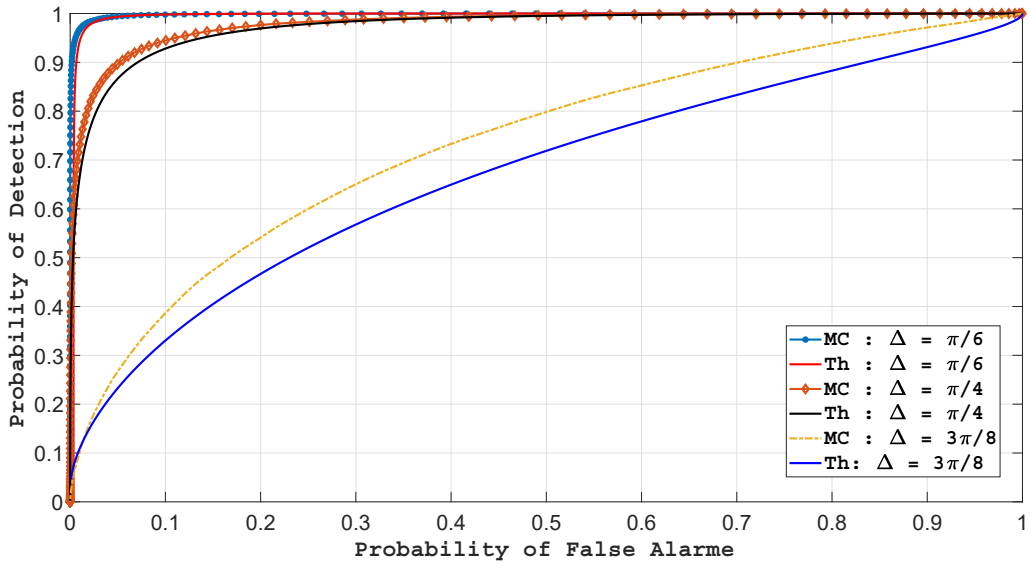


FIGURE 4.4 – Courbes ROC pour SNR = 0dB et $K = 100$.

La figure 4.4 illustre les courbes ROC empiriques (MC) et théoriques (th.) en présence de bruit de phase seulement, pour différentes valeurs Δ et pour $K = 100$, SNR = 0dB. La courbes ROC est très sensible au bruit de phase et le test de rectilinéarité échoue complètement pour $\Delta \approx 3\pi/8$.

En comparant les figure 4.3 et 4.4, on peut remarquer la similitude des courbes ROC en présence de résidu de porteuse seul et bruit de phase seul pour les mêmes valeurs de K et du SNR à condition que f_s et Δ soient reliés par

$$\pi f_s K T \approx \Delta$$

comme cela est suggéré par la relation (4.3.21).

4.4 Test de rectilinéarité basé sur les cumulants du quatrième ordre

Le test du second ordre que nous avons présenté, ne tenait pas compte de l'existence d'un bruit additif gaussien circulaire centré. Si nous voulons tenir compte de cette information a priori, nous devons alors faire appel à des moments d'ordre quatre ou mieux à des cumulants d'ordre quatre. En effet en utilisant l'hypothèse d'indépendance entre les échantillons du SOI et du bruit de fond notés respectivement s_k et n_k et l'hypothèse que n_k est de distribution gaussienne (donc de cumulants d'ordre quatre nuls) dans l'équation (4.2.2), tous les cumulants d'ordre quatre de y_k et s_k sont égaux :

$$\mathrm{Cum}(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, y_k^{(3)}, y_k^{(4)}) = \mathrm{Cum}(s_k^{(1)}, s_k^{(2)}, s_k^{(3)}, s_k^{(4)})$$

où $(1),(2),(3),(4)$ dénote l'existence ou non de l'opérateur complexe conjugué. De plus, en ce basant sur la propriété de multilinéarité des cumulants, nous avons sous $\mathcal{H}_1$:

$$\begin{aligned}
\kappa_y^{(1)} &\stackrel{\text{def}}{=} \quad \text{Cum}(y_k, y_k, y_k^*, y_k^*) = \text{Cum}(\rho_k, \rho_k, \rho_k, \rho_k) \\
\kappa_y^{(2)} &\stackrel{\text{def}}{=} \quad \text{Cum}(y_k, y_k, y_k, y_k^*) = e^{2i\theta_s}\text{Cum}(\rho_k, \rho_k, \rho_k, \rho_k) \\
\kappa_y^{(3)} &\stackrel{\text{def}}{=} \quad \text{Cum}(y_k, y_k, y_k, y_k) = e^{4i\theta_s}\text{Cum}(\rho_k, \rho_k, \rho_k, \rho_k)
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

.

4.4.1 Premier test empirique

Les relations (4.4.1) impliquent les relations suivantes sous $\mathcal{H}_1$:

$$\left(\frac{\kappa_y^{(2)}}{\kappa_y^{(1)}}\right)^2 = \frac{\kappa_y^{(3)}}{\kappa_y^{(1)}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\kappa_y^{(3)}}{\kappa_y^{(1)}}\right| = 1.$$

D'une façon équivalente :

$$\left|\left(\frac{\kappa_y^{(2)}}{\kappa_y^{(1)}}\right)^2 - \frac{\kappa_y^{(3)}}{\kappa_y^{(1)}}\right|^2 + \left(\left|\frac{\kappa_y^{(3)}}{\kappa_y^{(1)}}\right| - 1\right)^2 = 0.$$

On peut donc formuler un nouveau test de rectilinéarité qui prend en considération l'effet du bruit de fond :

$$\Lambda_K(\widehat{\kappa}_y^{(1)}, \widehat{\kappa}_y^{(2)}, \widehat{\kappa}_y^{(3)}) \underset{\mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \alpha, \tag{4.4.2}$$

où la nouvelle statistique $\Lambda_K(\widehat{\kappa}_y^{(1)}, \widehat{\kappa}_y^{(2)}, \widehat{\kappa}_y^{(3)})$ du test est définie par

$$\Lambda_K(\widehat{\kappa}_y^{(1)}, \widehat{\kappa}_y^{(2)}, \widehat{\kappa}_y^{(3)}) = \left|\left(\frac{\widehat{\kappa}_y^{(2)}}{\widehat{\kappa}_y^{(1)}}\right)^2 - \frac{\widehat{\kappa}_y^{(3)}}{\widehat{\kappa}_y^{(1)}}\right|^2 + \left(\left|\frac{\widehat{\kappa}_y^{(3)}}{\widehat{\kappa}_y^{(1)}}\right| - 1\right)^2, \tag{4.4.3}$$

où $\widehat{\kappa}_y^{(1)}$, $\widehat{\kappa}_y^{(2)}$ et $\widehat{\kappa}_y^{(3)}$ sont les estimés empiriques classiques des cumulants :

$$\widehat{\kappa}_y^{(1)} = \widehat{\kappa'}_y^{(1)} - 2\,\widehat{r}_y^2 - |\widehat{c}_y^2| \tag{4.4.4}$$

$$\widehat{\kappa}_y^{(2)} = \widehat{\kappa'}_y^{(2)} - 3\,\widehat{r}_y\widehat{c}_y \tag{4.4.5}$$

$$\widehat{\kappa}_y^{(3)} = \widehat{\kappa'}_y^{(3)} - 3\,\widehat{c}_y^2 \tag{4.4.6}$$

où $\widehat{\kappa'}_y^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K}\sum_{k=1}^K |y_k^4|$, $\widehat{\kappa'}_y^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K}\sum_{k=1}^K y_k^2|y_k^2|$ et $\widehat{\kappa'}_y^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K}\sum_{k=1}^K y_k^4$.

4.4.2 Deuxième test empirique

Puisque (4.2.2) et (4.2.3) impliquent que sous $\mathcal{H}_1$

$$c_y \stackrel{\text{def}}{=} \text{E}(y_k^2) = \text{E}(\rho_k^2)e^{i2\theta_s},$$

les équations (4.4.1) impliquent que sous $\mathcal{H}_1$, les vecteurs

$$\mathbf{Cum_y} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \kappa_y^{(1)} \\ \kappa_y^{(2)} \\ \kappa_y^{(3)} \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \text{Cum}(y_k, y_k, y_k^*, y_k^*) \\ \text{Cum}(y_k, y_k, y_k, y_k^*) \\ \text{Cum}(y_k, y_k, y_k, y_k) \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\arg[c_y]} \\ e^{i2\arg[c_y]} \end{bmatrix}$$

sont colinéaires. Donc sous $\mathcal{H}_1$:

$$\text{rg}\left(\left[\begin{array}{cc} \frac{\mathbf{Cum}_y}{\|\mathbf{Cum}_y\|} & , \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\arg[c_y]} \\ e^{i2\arg[c_y]} \end{pmatrix} \end{array}\right]\right) = 1 \Longleftrightarrow \sigma_2\left(\left[\begin{array}{cc} \frac{\mathbf{Cum}_y}{\|\mathbf{Cum}_y\|} & , \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\arg[c_y]} \\ e^{i2\arg[c_y]} \end{pmatrix} \end{array}\right]\right) = 0,$$

où $\sigma_2(\mathbf{M})$ représente la plus petite valeur singulière de la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{3\times 2}$.

On peut donc définir un deuxième test de rectilinéarité basé sur les estimées classiques empiriques des cumulants de y_k, noté $\widehat{\mathbf{Cum}}_y$:

$$\Lambda_K(\widehat{\kappa}_y^{(1)}, \widehat{\kappa}_y^{(2)}, \widehat{\kappa}_y^{(3)}, \widehat{c}_y, \widehat{r}_y) \underset{\mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_0}{\gtrless}} \alpha, \tag{4.4.7}$$

avec

$$\Lambda_K(\widehat{\kappa}_y^{(1)}, \widehat{\kappa}_y^{(2)}, \widehat{\kappa}_y^{(3)}, \widehat{c}_y, \widehat{r}_y) \overset{\text{def}}{=} \sigma_2\left[\begin{array}{cc} \frac{\widehat{\mathbf{Cum}}_y}{\|\widehat{\mathbf{Cum}}_y\|} & , \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\arg[\widehat{c}_y]} \\ e^{i2\arg[\widehat{c}_y]} \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

où $\widehat{\kappa}_y^{(1)}$, $\widehat{\kappa}_y^{(2)}$ et $\widehat{\kappa}_y^{(3)}$ sont définis (4.4.4), (4.4.5), (4.4.6) et où $\widehat{c}_y$ et $\widehat{r}_y$ sont définis en (4.3.6).

4.4.3 Illustrations et simulations Monte Carlo

Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 illustrent les courbes ROC empiriques de nos trois tests. La figure 4.5 montre que le deuxième test du quatrième ordre (4.4.7) est meilleur que premier test du quatrième ordre (4.4.2) et les trois figures montrent la supériorité du test du second ordre par rapport au test du quatrième ordre (4.4.7) pour SNR = -3dB, -6dB et -10dB. Cela est du à la variance importante des estimés des cumulants du quatrième ordre malgré le nombre K=1000 d'échantillons [87], par rapport à la variance des estimés des moments du second ordre. Cette imprécision des cumulants du quatrième ordre ne compense pas la prise en compte du bruit additif gaussien par les tests du quatrième ordre.

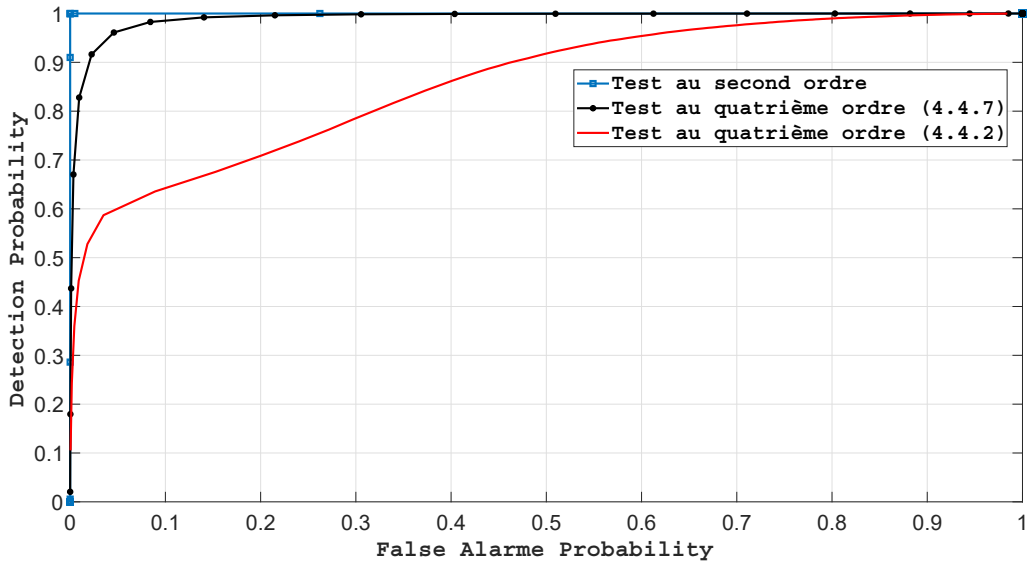


FIGURE 4.5 – Courbes ROC pour SNR = -3dB et K = 1000

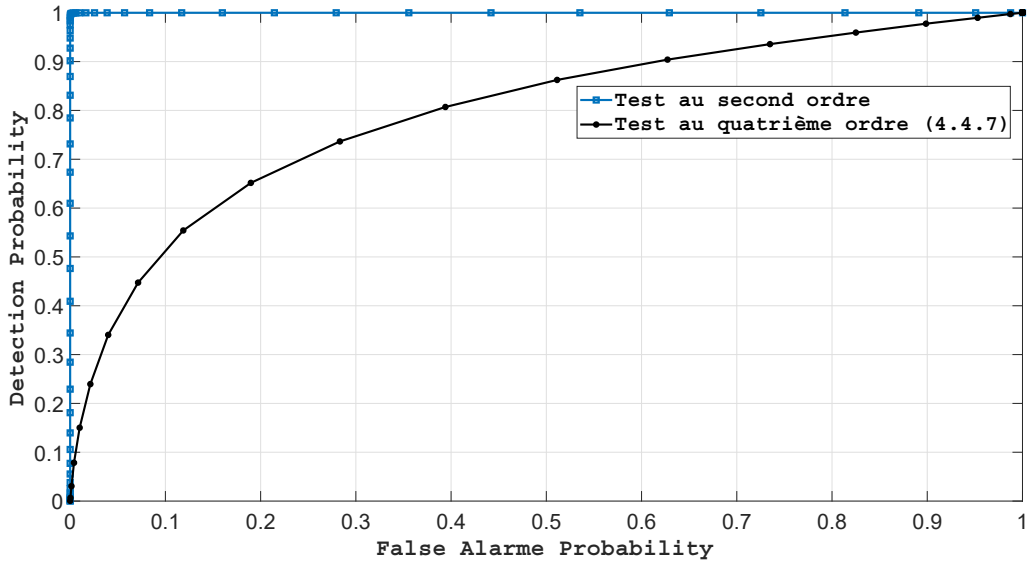


FIGURE 4.6 – Courbes ROC pour SNR = -6dB et K = 1000

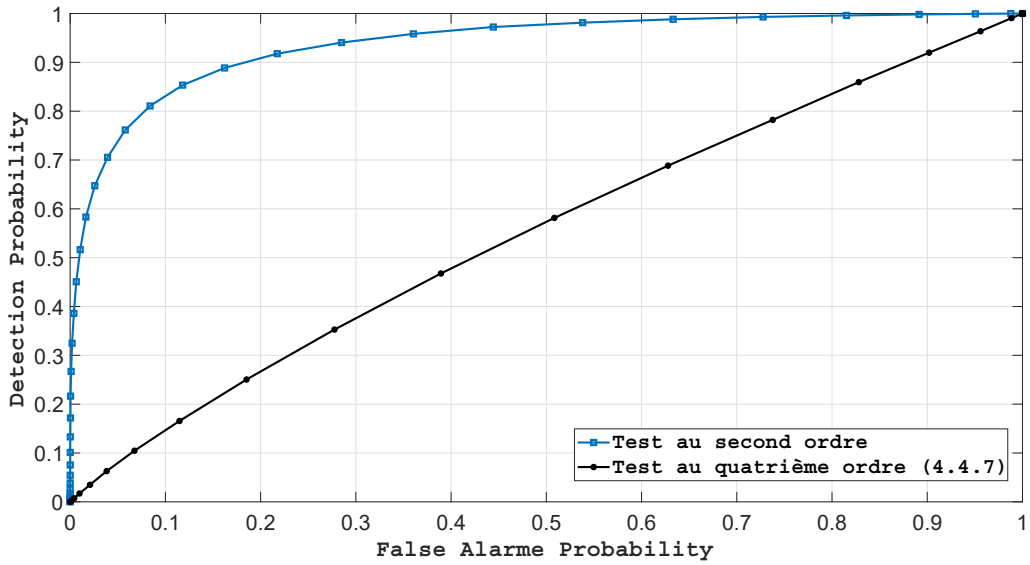


FIGURE 4.7 – Courbes ROC pour SNR = -10dB et K = 1000

La figure 4.8 pour SNR = -3dB et K = 1000 en présence de résidu de porteuse avec $Kf_sT = 1/4$ confirme la supériorité du test du second ordre par rapport aux tests du quatrième ordre de la figure 4.5.

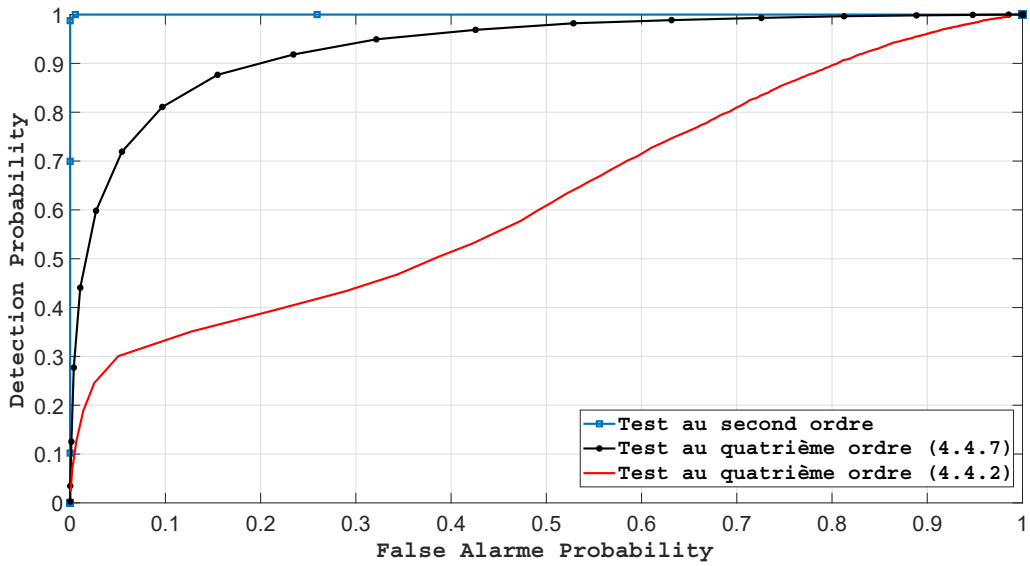


FIGURE 4.8 – Courbes ROC pour SNR = -3dB et K = 1000 en présence de résidu de porteuse avec $Kf_sT = 1/4$

4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude de robustesse d'un test de rectlinéarité au second ordre en présence de résidu de porteuse, de bruit de phase et de bruit additif gaussien

circulaire à l'aide de courbes ROC théoriques approchées. Nous avons également introduit deux tests empiriques de rectlinéarité au quatrième ordre susceptibles de prendre en compte le bruit additif gaussien. Cependant ces deux derniers tests sont moins performants que le test du second ordre à cause de la moins bonne estimation des cumulants d'ordre quatre pour le même nombre d'observations malgré la prise en compte par ceux-ci du bruit additif gaussien.

Conclusion générale et perspectives

Principales contributions et conclusion générale

Dans cette thèse nous avons abordé l'exploitation des propriétés de non-circularité et de non-gaussianité des signaux d'intérêt (SOI) et/ou des interférences pour les transmissions sans fil et l'écoute passive.

Dans le cadre de notre étude, la première problématique traitée concerne un nouveau récepteur SIMO MLSE pour une modulation linéaire quelconque dérivé sous l'hypothèse d'un bruit total centré gaussien, stationnaire, coloré et potentiellement non circulaire, qui est présenté comme cas particulier d'un problème général de détection d'une forme d'onde. Une interprétation de la structure obtenue en fonction du type de modulations (complexe, rectiligne ou quasi rectiligne) a aussi été présentée. Des expressions analytiques du SINR de sortie sur symbole courant ont été dérivées pour les différentes modulations traitées sous les hypothèses d'interférences cyclostationnaires au second ordre et comparées à celles obtenues en sortie du récepteur MLSE conventionnel construit sous l'hypothèse d'un bruit total circulaire au second ordre. L'analyse des performances a été complétée par des simulations Monte Carlo pour l'évaluation des taux d'erreur binaire (BER), qui est la vraie métrique de performance, à travers un modèle équivalent discret prenant en compte les propriétés statistiques exactes du second ordre des interférences et du bruit de fond.

Dans la deuxième partie de notre thèse nous avons introduit le beamformer MVDR de Volterra du troisième ordre pour la réception d'un SOI, dont sa forme d'onde est inconnue mais son vecteur directionnel est connu, affecté par une interférence potentiellement non gaussienne et non-circulaire. Ce beamformer est une extension au troisième ordre du beamformer de Capon [11, 12] du beamformer WL MVDR_1 [21] et de la structure partielle du beamformer de Volterra [85]. Il exploite la potentielle non gaussiennité et non-circularité jusqu'à l'ordre 6 de l'interférence. Ce beamformer dans sa forme sans contrainte, *Generalized Sidelobe Canceller* (GSC) nous a permis une implémentation simple de notre beamformer et une étude analytique de ses performances en terme de SINR en sortie pour 2 antennes évalué en fonction des statistiques du second, quatrième et sixième ordre de l'interférence. Il a été en particulier démontré que d'une part certaines structures partielles du beamformer MVDR complexe de Volterra au troisième ordre surpassent le beamformer classique

de Capon pour des interférences circulaires non gaussiennes ; d'autre part certaines structures surpassent le beamformer WL MVDR_1 pour une interférence non-circulaire non gaussienne. Dans certains cas, quelques beamformers MVDR complexe de Volterra du troisième ordre éliminent l'interférence sous condition que son module du coefficient de corrélation spatiale avec le SOI n'approche pas l'unité ; et ainsi délivrent un SINR en sortie élevé correspondant au cas d'absence d'interférence. Cette situation s'observe particulièrement pour une très forte interférence BPSK ou QPSK non-filtrée ou bien pour une interférence de Bernoulli très impulsive, d'où le grand intérêt de notre beamformer non-linéaire. Dans toutes les situations considérées, le beamformer WL-Cubic MVDR à structure complète ne peut présenter des performances dégradées par rapport aux beamformers classiques de Capon et WL MVDR_1.

Dans la troisième partie, nous avons présenté le beamformer MMSE non-linéaire de Volterra exploitant la non-circularité jusqu'au sixième ordre et la non-gaussianité à la fois du SOI et CCI. Ce beamformer a démontré une forte robustesse aux interférences même en situation de faible discrimination spatiale, en présence d'une forte discrimination d'amplitude entre SOI et CCI. Dans le cas particulier d'une seule antenne, nous avons démontré qu'un filtre de Volterra complexe du 3ème ordre MMSE permet de renforcer l'effet SAIC pour des SOI et CCI de constellations rectilignes, en particulier de type BPSK, même en absence de discrimination de phase, par rapport à un simple filtrage WL. De plus nous avons montré que ce filtre de Volterra complexe du 3ème ordre MMSE permet de séparer deux signaux QPSK synchrones de puissances très différentes sans avoir à démoduler les deux signaux. Enfin pour des symboles de modules constants non QPSK ou non synchrones, il est encore possible de bénéficier de la discrimination d'amplitude CCI/SOI pour des CCI de fortes puissances. Par ailleurs nous avons montré que les critères de MMSE et MSINR sont pratiquement équivalents à la minimisation du SER pour les structures partielles de Volterra MMSE de type L-C(i) ou WL-C(i), mais pas nécessairement équivalentes pour les structures de Volterra MMSE complètes.

Notons par ailleurs que certaines dérivations d'expressions analytiques de SINR dans l'étude des beamformers non linéaires de Volterra MVDR et MMSE n'ont été possibles que grâce à des outils de calculs symboliques *Symbolic Math Toolbox* de MATLAB.

Dans la dernière partie de notre thèse, nous avons présenté une étude de performance asymptotique d'un test de rectilinéarité au second ordre sous forme bloc, pour établir des expressions théoriques approchées des courbes ROC (en absence et en présence de résidu de porteuse et bruit de phase) afin d'ajuster le seuil de décision d'une façon optimale selon le compromis probabilité de détection/probabilité de fausse alarme choisi.

Perspectives

A l'issue de nos travaux, nous avons identifié quelques perspectives de recherches futures qui apparaissent dans chaque problématique abordée :

Pour le récepteur SIMO-MLSE :

- Le récepteur SIMO-MLSE que nous avons présenté a été dérivé sous l'hypothèse d'un bruit total (interférence plus bruit de fond) gaussien stationnaire potentiellement non circulaire, à partir d'une problématique générale de détection d'une forme d'onde. Or les interférences ne sont en général pas stationnaires mais cyclostationnaires. Il serait donc intéressant de construire le récepteur SIMO-MLSE sous l'hypothèse d'un bruit total gaussien cyclostationnaire potentiellement non circulaire à partir de cette problématique générale de détection d'une forme d'onde.
- Nous n'avons mené aucune étude d'implémentation pratique du récepteur SIMO MLSE. Il serait intéressant d'étudier l'influence des paramètres de suréchantillonnage et de troncature de filtre RIF d'implémentations pratiques de ce récepteur SIMO MLSE sur des plateformes de traitement du signal numérique.

Pour le beamformer MVDR de Volterra :

- Nous n'avons étudié les performances en terme de SINR que dans le cas particulier d'une seule interférence et de 2 antennes. Pour compléter l'étude de ce beamformer MVDR de Volterra du troisième ordre, il est nécessaire de déterminer le nombre d'interférences (*capacité de traitement*) que chacune des différentes structures partielles pourrait traiter en fonction de leurs statistiques du second, quatrième et sixième ordre et du nombre d'antennes. Il serait aussi intéressant d'étendre nos calculs analytiques de SINR à l'aide de nos outils de calcul formel au cas d'au moins 3 antennes avec au moins 2 interférences.
- Nous n'avons qu'introduit un beamformer MVDR de Volterra à complexité linéaire. Il serait donc nécessaire d'étudier des algorithmes itératifs permettant de calculer ce beamformer, puis d'en examiner les performances en terme de dégradation de SINR et de vitesse de convergence de son apprentissage par rapport au beamformer MVDR de Volterra de complexité cubique.

- Afin de remédier aux dégradations de performances en présence d'interférences constituées de modulations linéaires filtrées, il serait intéressant de s'intéresser à des structures MVDR de Volterra spatiotemporelles à complexité contrôlée.

Pour le beamformer MMSE de Volterra :

- Nous n'avons étudié les performances analytiques en terme de SINR que dans le cas particulier d'une seule interférence et d'une seule antenne. Il est donc nécessaire d'étendre nos calculs analytiques de SINR à l'aide de nos outils de calcul formel au cas d'au moins 2 antennes avec au moins 2 interférences.
- Notre traitement purement spatial est adapté à un modèle de signal qui n'intègre aucun trajet multiple. Il serait utile de prendre en compte des canaux sélectifs en fréquence par un beamformer MMSE de Volterra à structure spatio-temporelle.
- Certains travaux sur les beamformers MMSE linéaires exploitent la cyclostationnarité [2] du signal. On pourrait examiner si des extensions sont possibles avec des structures non-linéaires de Volterra.

Pour le test de rectilinéarité :

- De nombreuses études ont été menées (par exemple [87]) sur la reconnaissance automatique de modulations linéaires. Il serait utile d'en évaluer les performances en présence de résidus de porteuse et de bruit de phase. Des études de performances théoriques de certains de ces tests de détection pourraient sans doute être menées avec nos outils de calculs asymptotiques.

Annexe A

Annexe du chapitre 1

A.1 Cyclo-stationnarité au second ordre de signaux à temps continu

A.1.1 Définitions

Soit $x(t)$ un signal à temps continu centré et à valeurs complexes. $x(t)$ est dit cyclo-stationnaire à l'ordre n_0 quelconque si et seulement si ses statistiques jusqu'à l'ordre n_0 varient d'une manière périodique dans le temps. Dans le cas particulier de $n_0 = 2$, les signaux sont dits cyclo-stationnaires du second ordre. La fonction de corrélation [1]

$$r_x(t,\tau) \triangleq E[x(t+\tau/2)x^*(t-\tau/2)]$$

et la fonction de corrélation complémentaire

$$c_x(t,\tau) \triangleq E[x(t+\tau/2)x(t-\tau/2)]$$

de $x(t)$ sont périodiques en t et de période T appelé période cyclique. Ainsi, ils sont développables en séries de Fourier

$$\begin{aligned} r_x(t,\tau) &= \sum_k r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{i2\pi\frac{k}{T}t} \\ c_x(t,\tau) &= \sum_k c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{i2\pi\frac{k}{T}t}, \end{aligned}$$

avec

$$r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T r_x(t,\tau) e^{-i2\pi\frac{k}{T}t} dt \quad (A.1.1)$$

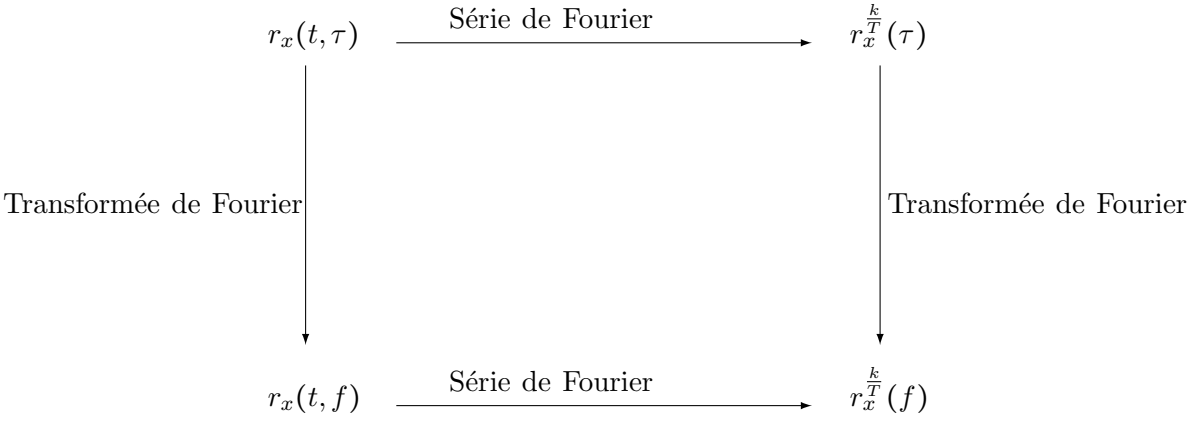
$$c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T c_x(t,\tau) e^{-i2\pi\frac{k}{T}t} dt \quad (A.1.2)$$

1. Nous choisissons cette définition symétrique plutôt que la définition classique $r'_x(t,\tau) \triangleq E[x(t)x^*(t-\tau)]$ et $c'_x(t,\tau) \triangleq E[x(t)x(t-\tau)]$, car elle a été jugée plus pratique dans la littérature cyclo-stationnaire. Notons que ces deux définitions sont équivalentes car $r'_x(t,\tau) = r_x(t-\frac{\tau}{2},\tau)$ et $c'_x(t,\tau) = c_x(t-\frac{\tau}{2},\tau)$.

représentent respectivement les coefficients de corrélation cyclique et les coefficients de corrélation cyclique complémentaire. Les transformées de Fourier [2] des expressions (A.1.1) et (A.1.2) constituent la densité spectrale cyclique de puissance et la densité spectrale cyclique de puissance complémentaire, respectivement

$$\begin{aligned} r_x^{\frac{k}{T}}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\ c_x^{\frac{k}{T}}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Remarque 1 : De façon équivalente les densités spectrales de puissance cycliques $r_x^{\frac{k}{T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{T}}(f)$ peuvent s'obtenir comme les coefficients de série de Fourier des transformées de Fourier (par rapport à τ) $r_x(t,f)$ et $c_x(t,f)$ de respectivement $r_x(t,\tau)$ et $c_x(t,\tau)$.



Donc, nous avons en particulier

$$r_x(t,f) = \sum_k r_x^{\frac{k}{T}}(f) e^{i2\pi\frac{k}{T}t}$$

et

$$r_x(nT,f) = \sum_k r_x^{\frac{k}{T}}(f). \tag{A.1.3}$$

De plus, les relations entre les deux définitions des fonctions de corrélations et corrélations complémentaires données dans la note de bas de page 1 impliquent par série de Fourier que

$$r_x'^{\frac{k}{T}}(\tau) = r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{-i2\pi\frac{k\tau}{2T}} \text{ et } c_x'^{\frac{k}{T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) e^{-i2\pi\frac{k\tau}{2T}}$$

qui par transformée de Fourier donnent

$$r_x'^{\frac{k}{T}}(f) = r_x^{\frac{k}{T}}(f + \frac{k}{2T}) \text{ et } c_x'^{\frac{k}{T}}(f) = c_x^{\frac{k}{T}}(f + \frac{k}{2T}). \tag{A.1.4}$$

2. Avec notre convention de représenter les transformées de Fourier avec la même lettre.

Notons les symétries :

$$r_x(t,-\tau) = r_x^*(t,\tau) \quad \text{et} \quad c_x(t,-\tau) = c_x(t,\tau)$$

qui entraînent

$$r_x^{\frac{k}{T}}(-\tau) = \left[r_x^{-\frac{k}{T}}(\tau)\right]^* \quad \text{et donc} \quad \left[r_x^{-\frac{k}{T}}(f)\right]^* = r_x^{\frac{k}{T}}(f) \tag{A.1.5}$$

$$c_x^{\frac{k}{T}}(-\tau) = c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) \quad \text{et donc} \quad c_x^{\frac{k}{T}}(-f) = c_x^{\frac{k}{T}}(f) \tag{A.1.6}$$

Par ailleurs, nous avons en particulier

$$r_x^0(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^0(f)df \text{ et } c_x^0(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^0(f)df.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T E|x^2(t)|dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^0(f)df \\ \frac{1}{T}\int_0^T E(x^2(t))dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^0(f)df, \end{aligned}$$

qui pour les signaux cyclo-stationnaires ergodiques représentent la moyenne temporelles de $|x^2(t)|$ et $x^2(t)$. Soit :

$$< |x^2(t)| > = \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^0(f)df \tag{A.1.7}$$

$$< x^2(t) > = \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^0(f)df, \tag{A.1.8}$$

avec

$$< g(t) > \triangleq \lim_{T'\to+\infty} \frac{1}{T'}\int_{-T'/2}^{T'/2} g(t)dt.$$

De même :

$$\begin{aligned} E|x^2(t)| &= r_x(t,0) = \sum_k r_x^{\frac{k}{T}}(\tau)|_{\tau=0} e^{i2\pi\frac{k}{T}t} \\ &= \sum_k e^{i2\pi\frac{k}{T}t}\int_{-\infty}^{+\infty} r_x^{\frac{k}{T}}(f)df \end{aligned} \tag{A.1.9}$$

$$\begin{aligned} E(x^2(t)) &= c_x(t,0) = \sum_k c_x^{\frac{k}{T}}(\tau)|_{\tau=0} e^{i2\pi\frac{k}{T}t} \\ &= \sum_k e^{i2\pi\frac{k}{T}t}\int_{-\infty}^{+\infty} c_x^{\frac{k}{T}}(f)df. \end{aligned} \tag{A.1.10}$$

En particulier,

$$E|x^2(nT)| = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^{\frac{k}{T}}(f)df \tag{A.1.11}$$

$$E(x^2(nT)) = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^{\frac{k}{T}}(f)df. \tag{A.1.12}$$

Remarque 2 : Dans le cas où $x(t)$ est stationnaire du second ordre $r_x(t,\tau) = r_x(\tau)$ et $c_x(t,\tau) = c_x(\tau)$; soit

$$r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = 0 \text{ pour } k \neq 0, r_x^{\frac{k}{T}}(f) = c_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0 \text{ pour } k \neq 0$$

et

$$r_x^0(f) = r_x(f) \text{ et } c_x^0(f) = c_x(f)$$

où $r_x(\tau)$ et $c_x(\tau)$ désignent la fonction de corrélation et la fonction de corrélation complémentaire et $r_x(f)$ et $c_x(f)$ la densité spectrale et la densité spectrale complémentaire de $x(t)$.
Dans la suite de cette annexe, nous allons illustrer ces définitions générales par des modulations QAM.

A.1.2 Modulations numériques linéaires QAM

Pour une modulation linéaire de type QAM, l'enveloppe complexe de signal modulé associé à la suite des symboles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ s'écrit sous la forme :

$$x(t) = \sum_k a_k \upsilon(t - kT), \tag{A.1.13}$$

avec $\upsilon(t)$ est la fonction de mise en forme, T est la période symbole et la suite des symboles a_n est supposée centrée et stationnaire au sens large de statistiques au second ordre $r_a(n) = E[a_k a_{k-n}^*]$ et $c_a(n) = E[a_k a_{k-n}]$.

La fonction d'autocorrélation s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} r_x(t,\tau) &= \sum_k \sum_l E[a_k a_l^*] \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - kT) \upsilon^*(t - \frac{\tau}{2} - lT) \\ &= \sum_n r_a(n) \sum_l \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT) \upsilon^*(t - \frac{\tau}{2} - lT). \end{aligned}$$

De même

$$c_x(t,\tau) = \sum_n c_a(n) \sum_l \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT) \upsilon(t - \frac{\tau}{2} - lT).$$

On peut constater que $r_x(t,\tau)$ et $c_x(t,\tau)$ sont périodiques de période T, par conséquent le signal $x(t)$ est cyclostationnaire au second ordre de fréquence cyclique fondamentale $1/T$. Les coefficients de corrélation cyclique s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_n r_a(n) \left[\sum_l \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT) \upsilon^*(t - \frac{\tau}{2} - lT) \right] e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_n r_a(n) \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - nT) \upsilon^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt. \end{aligned}$$

De même

$$c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_n c_a(n) \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - nT) \upsilon(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi \frac{k}{T} t} dt.$$

Notons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon(t+\frac{\tau}{2}-nT)\upsilon^*(t-\frac{\tau}{2})e^{-i2\pi\frac{k}{T}t}dt = e^{-i\pi\frac{k\tau}{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon(t+\tau-nT)\upsilon^*(t)e^{-i2\pi\frac{k}{T}t}dt$. Par suite, avec la notation $\phi(\frac{k}{T},\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon(t+\tau)\upsilon^*(t)e^{-i2\pi\frac{k}{T}t}dt$ et $\psi(\frac{k}{T},\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon(t+\tau)\upsilon(t)e^{-i2\pi\frac{k}{T}t}dt$, nous avons

$$r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_n r_a(n)e^{-i2\pi\frac{k}{2T}\tau}\phi(\frac{k}{T},\tau-nT) \quad (A.1.14)$$

$$c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_n c_a(n)e^{-i2\pi\frac{k}{2T}\tau}\psi(\frac{k}{T},\tau-nT). \quad (A.1.15)$$

En remarquons que :

$$\phi(\frac{k}{T},\tau) = \upsilon(\tau) * [\upsilon^*(-\tau)e^{i2\pi\frac{k}{T}\tau}]$$
$$\psi(\frac{k}{T},\tau) = \upsilon(\tau) * [\upsilon(-\tau)e^{i2\pi\frac{k}{T}\tau}],$$

de transformée de Fourier respectives $\upsilon(f)\upsilon^*(f-\frac{k}{T})$ et $\upsilon(f)\upsilon(-f+\frac{k}{T})$. Par suite, la densité spectrale de puissance cyclique et la densité spectrale de puissance cyclique complémentaire (les transformées de Fourier des expressions (A.1.14) et (A.1.15)) sont ainsi données par

$$r_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T}\sum_n r_a(n)\upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon^*(f-\frac{k}{2T})e^{-i2\pi n(f+\frac{k}{2T})T} \quad (A.1.16)$$

$$c_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T}\sum_n c_a(n)\upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon(-f+\frac{k}{2T})e^{-i2\pi n(f+\frac{k}{2T})T}. \quad (A.1.17)$$

Soient

$$r_a(f) \triangleq \sum_n r_a(n)e^{-i2\pi nfT} \text{ et } c_a(f) \triangleq \sum_n c_a(n)e^{-i2\pi nfT}, \quad (A.1.18)$$

le spectre et le spectre complémentaire de la suite a_k, ainsi (A.1.16) et (A.1.17) s'écrivent sous la forme

$$r_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T}r_a(f+\frac{k}{2T})\upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon^*(f-\frac{k}{2T}) \quad (A.1.19)$$

$$c_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T}c_a(f+\frac{k}{2T})\upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon(-f+\frac{k}{2T}). \quad (A.1.20)$$

En particulier d'après (A.1.7) et (A.1.8)

$$< |x^2(t)| > = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} r_a(f+\frac{k}{2T})|\upsilon(f)|^2df$$
$$< x^2(t) > = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} c_a(f+\frac{k}{2T})\upsilon(f)\upsilon(-f)df,$$

et d'après (A.1.9) et (A.1.10)

$$E|x^2(t)| = \frac{1}{T}\sum_k e^{i2\pi\frac{k}{T}t}\int_{-\infty}^{+\infty} r_a(f+\frac{k}{2T})\upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon^*(f-\frac{k}{2T})df$$
$$E(x^2(t)) = \frac{1}{T}\sum_k e^{i2\pi\frac{k}{T}t}\int_{-\infty}^{+\infty} c_a(f+\frac{k}{2T})\upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon(-f+\frac{k}{2T})df,$$

qui deviennent pour $t = nT$ et une suite a_k i.i.d. centrée :

$$\begin{aligned} E|x^2(nT)| &= \frac{E|a_k^2|}{T}\sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon^*(f-\frac{k}{2T})df \\ E(x^2(nT)) &= \frac{E(a_k^2)}{T}\sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon(-f+\frac{k}{2T})df. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où les symboles a_k sont non corrélés (au sens réel) i.e., $r_a(k) = E|a_k^2|\delta_{k,0}$ et $c_a(k) = E(a_k^2)\delta_{k,0}$, (A.1.16) et (A.1.17) deviennent

$$r_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T}E|a_k^2|\upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon^*(f-\frac{k}{2T}) \quad \text{(A.1.21)}$$

$$c_x^{\frac{k}{T}}(f) = \frac{1}{T}E(a_k^2)\upsilon(f+\frac{k}{2T})\upsilon(-f+\frac{k}{2T}). \quad \text{(A.1.22)}$$

(A.1.19), (A.1.20), (A.1.21) et (A.1.22) représentent des extensions de la formule de Benett classique du cas stationnaire circulaire dans le cas de symboles a_k respectivement corrélés ou non corrélés.

Remarque 3 : Considérons l'enveloppe complexe d'un signal QAM issue d'une $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ stationnaire :

$$y(t) = \sum_k a_k \upsilon(t - kT - t_0),$$

avec t_0 est une variable aléatoire de loi de probabilité uniforme dans $[0, T]$ et indépendant de la séquence a_k. Alors

$$\begin{aligned} r_y(t,\tau) &= \frac{1}{T}\sum_k\sum_l E[a_k a_l^*]\int_0^T \upsilon(u+\frac{\tau}{2}-kT-t_0)\upsilon^*(u-\frac{\tau}{2}-lT-t_0)du. \\ &= \frac{1}{T}\sum_n r_a(n)\int_{-\infty}^{+\infty}\upsilon(u-nT)\upsilon^*(u-\tau)du, \end{aligned}$$

de même

$$c_y(t,\tau) = \frac{1}{T}\sum_n c_a(n)\int_{-\infty}^{+\infty}\upsilon(u-nT)\upsilon(u-\tau)du,$$

et donc $y(t)$ est stationnaire du second ordre car $r_y(t,\tau)$ et $c_y(t,\tau)$ ne dépendent pas de t. Leurs transformées de Fourier s'écrivent ainsi

$$\begin{aligned} r_y(f) &= \tfrac{1}{T}r_a(f)|\upsilon(f)|^2 \\ c_y(f) &= \tfrac{1}{T}c_a(f)\upsilon(f)\upsilon(-f). \end{aligned} \quad \text{(A.1.23)}$$

D'après (A.1.19) et (A.1.20) $r_x^0(f) = r_y(f)$ et $c_x^0(f) = c_y(f)$. La densité spectrale cyclique et la densité spectrale cyclique complémentaire à la fréquence 0 représentent respectivement la densité spectrale et la densité spectrale complémentaire du signal stationnaire associé.

Cas particulier : Dans le cas où $\upsilon(t)$ est une impulsion de Nyquist de transformée de Fourier en cosinus surrélevé (de roll off α_{ro}) nous distinguons les cas :

- Pour $\alpha_{ro} = 0$, $\upsilon(f)$ est de support $[\frac{-1}{2T}, \frac{1}{2T}]$, $r_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0$ et $c_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0$ sauf pour $k = 0$ d'après (A.1.19) et (A.1.20). Ainsi $r_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{T}}(\tau) = 0$ pour $k \neq 0$. Dans ce cas particulier $x(t)$ est stationnaire du second ordre et

$$r_x(t,\tau) = r_x^0(\tau) \text{ et } c_x(t,\tau) = c_x^0(\tau). \tag{A.1.24}$$

- Pour $\alpha_{ro} \in]0,1]$, $\upsilon(f)$ est de support $\left[-\frac{1}{2T}(1+\alpha_{ro}), \frac{1}{2T}(1+\alpha_{ro})\right]$

$$r_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0 \text{ et } c_x^{\frac{k}{T}}(f) = 0 \text{ sauf pour } k = 0, -1, 1$$

d'après (A.1.19) et (A.1.20) $x(t)$ n'aura que 3 fréquences cycliques $0, \frac{1}{T}$ et $\frac{-1}{T}$

.

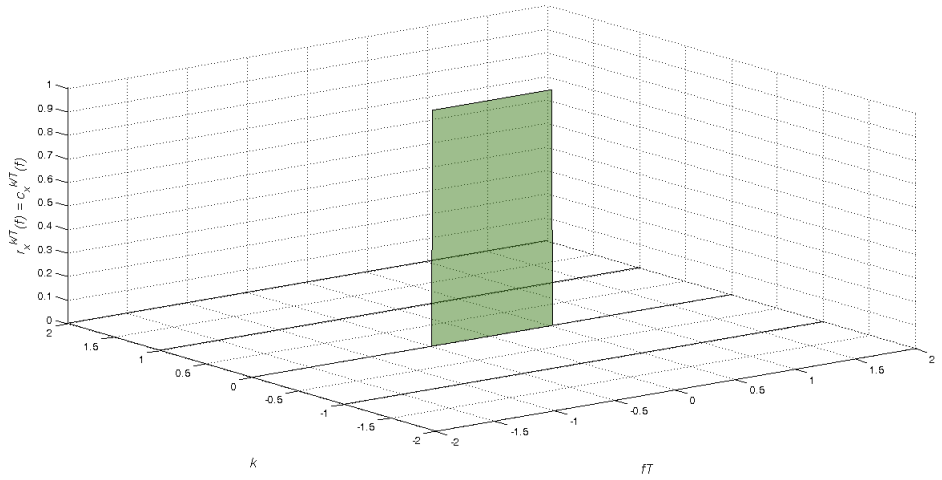


FIGURE A.1 – Densité Spectrale de puissance cyclique pour une modulation rectiligne ($r_x^{\frac{k}{T}}(f) = c_x^{\frac{k}{T}}(f)$) BPSK avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0$

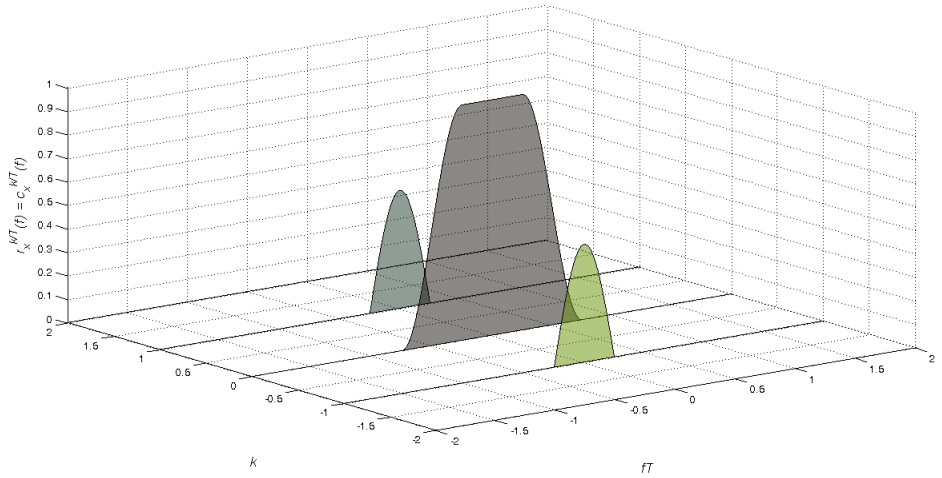


FIGURE A.2 – Densité Spectrale de puissance cyclique pour une modulation rectiligne ($r_x^{\frac{k}{T}}(f) \equiv c_x^{\frac{k}{T}}(f)$) BPSK avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0.5$

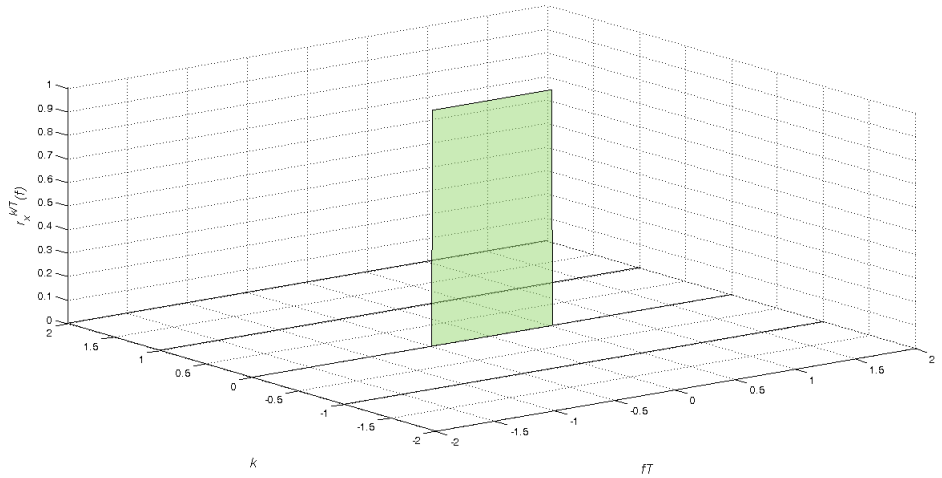


FIGURE A.3 – Densité Spectrale de puissance cyclique pour une modulation circulaire ($c_x^{\frac{k}{T}}(f) \equiv 0$) 4-QAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0$

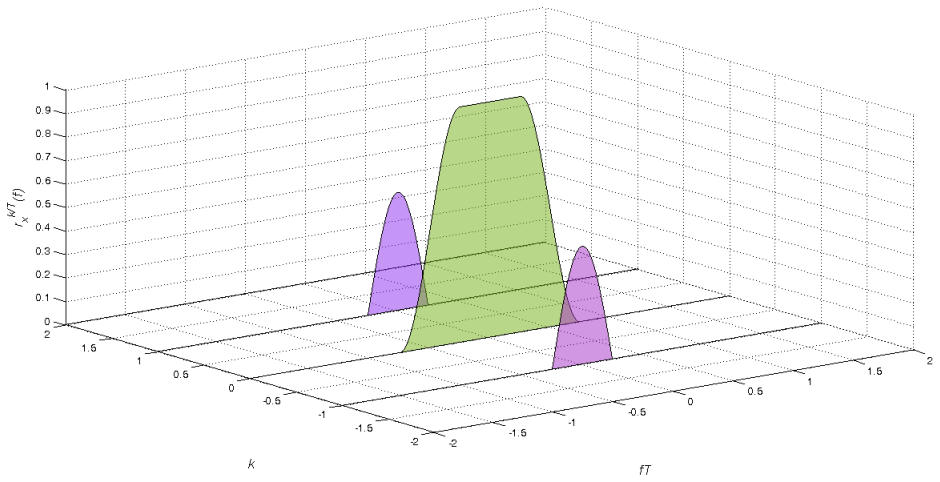


FIGURE A.4 – Densité Spectrale de puissance cyclique pour une modulation circulaire ($c_x^{\frac{k}{T}}(f) \equiv 0$) 4-QAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0.5$

A.1.3 Modulations numériques linéaires quasi-rectilignes

Comme il a été expliqué dans le chapitre 1, les enveloppes complexes de ces modulations sont données par

$$x(t) = \sum_k i^k b_k \upsilon(t - kT),$$

où la suite des symboles $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et l'impulsion $\upsilon(t)$ sont réels. Dans le cas où la suite b_k est centrée et stationnaire du second ordre et de statistiques du second ordre $r_b(n) = E[b_k b_{k-n}]$, la fonction d'autocorrélation s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} r_x(t,\tau) &= \sum_k \sum_l i^{k-l} E[b_k b_l] \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - kT)\upsilon(t - \frac{\tau}{2} - lT) \\ &= \sum_n i^n r_b(n) \sum_l \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT)\upsilon(t - \frac{\tau}{2} - lT). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} c_x(t,\tau) &= \sum_k \sum_l i^{k+l} E[b_k b_l] \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - kT)\upsilon(t - \frac{\tau}{2} - lT) \\ &= \sum_n i^n r_b(n) \sum_l (-1)^l \upsilon(t + \frac{\tau}{2} - nT - lT)\upsilon(t - \frac{\tau}{2} - lT). \end{aligned}$$

Par suite, $r_x(t,\tau)$ est toujours périodique en t de période T, mais $c_x(t,\tau)$ est périodique de période $2T$. Par conséquent le signal $x(t)$ est cyclostationnaire au second ordre de période $2T$.

Le calcul des coefficients de corrélation cyclique et de corrélation complémentaire cyclique aux fréquences $k/2T$ peut être mené en suivant la même démarche que pour les modulations linéaires.

On obtient

$$\begin{aligned} r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) &= \frac{1}{2T}\int_0^{2T}\sum_n i^n r_b(n)\left[\sum_l \upsilon(t+\frac{\tau}{2}-nT-lT)\upsilon(t-\frac{\tau}{2}-lT)\right]e^{-i2\pi\frac{k}{2T}t}dt \\ &= \frac{1+(-1)^k}{2T}\sum_n i^n r_b(n)\int_{-\infty}^{+\infty}\upsilon(t+\frac{\tau}{2}-nT)\upsilon(t-\frac{\tau}{2})e^{-i2\pi\frac{k}{2T}t}dt. \end{aligned}$$

De même

$$c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1-(-1)^k}{2T}\sum_n i^n r_b(n)\int_{-\infty}^{+\infty}\upsilon(t+\frac{\tau}{2}-nT)\upsilon(t-\frac{\tau}{2})e^{-i2\pi\frac{k}{2T}t}dt.$$

Or puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\upsilon(t+\frac{\tau}{2}-nT)\upsilon(t-\frac{\tau}{2})e^{-i2\pi\frac{k}{2T}t}dt = e^{-i\pi\frac{k\tau}{2T}}\int_{-\infty}^{+\infty}\upsilon(t+\tau-nT)\upsilon(t)e^{-i2\pi\frac{k}{2T}t}dt,$$

nous avons

$$r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1+(-1)^k}{2T}\sum_n i^n r_b(n)e^{-i\pi\frac{k}{2T}\tau}\psi(\frac{k}{2T},\tau-nT) \quad (A.1.25)$$

$$c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1-(-1)^k}{2T}\sum_n i^n r_b(n)e^{-i\pi\frac{k}{2T}\tau}\psi(\frac{k}{2T},\tau-nT), \quad (A.1.26)$$

avec ici :

$$\psi(\frac{k}{2T},\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty}\upsilon(t+\tau)\upsilon(t)e^{-i2\pi\frac{k}{2T}t}dt = \upsilon(\tau) * [\upsilon(-\tau)e^{i2\pi\frac{k}{2T}\tau}],$$

de transformée de Fourier $\upsilon(f)\upsilon(-f+\frac{k}{2T})$. Par suite, la transformée de Fourier de $\psi(\frac{k}{2T},\tau-nT)$ est $\upsilon(f)\upsilon(-f+\frac{k}{2T})e^{-i2\pi nfT}$ et celle de $e^{-i\frac{k\pi}{2T}\tau}\psi(\frac{k}{2T},\tau-nT)$ est $\upsilon(f+\frac{k}{4T})\upsilon(-f+\frac{k}{4T})e^{-i2\pi n(f+\frac{k}{4T})T}$. Par suite, la densité spectrale de puissance cyclique et la densité spectrale de puissance cyclique complémentaire sont données par :

$$\begin{aligned} r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) &= \frac{1+(-1)^k}{2T}\sum_n r_b(n)e^{-i2\pi n(f+\frac{k}{4T}-\frac{1}{4T})T}\upsilon(f+\frac{k}{4T})\upsilon(-f+\frac{k}{4T}) \\ c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) &= \frac{1-(-1)^k}{2T}\sum_n r_b(n)e^{-i2\pi n(f+\frac{k}{4T}-\frac{1}{4T})T}\upsilon(f+\frac{k}{4T})\upsilon(-f+\frac{k}{4T}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$r_x^{\frac{k}{2T}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{T}r_b(f+\frac{k}{4T}-\frac{1}{4T})\upsilon(f+\frac{k}{4T})\upsilon(-f+\frac{k}{4T}), & \text{pour } k \text{ pair} \\ 0, & \text{pour } k \text{ impair} \end{cases} \quad (A.1.27)$$

$$c_x^{\frac{k}{2T}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{T}r_b(f+\frac{k}{4T}-\frac{1}{4T})\upsilon(f+\frac{k}{4T})\upsilon(-f+\frac{k}{4T}), & \text{pour } k \text{ impair} \\ 0, & \text{pour } k \text{ pair} \end{cases} \quad (A.1.28)$$

où

$$r_b(f) \triangleq \sum_n r_b(n)e^{-i2\pi nfT}.$$

Pour une suite b_k i.i.d. centrée

$$r_x^{\frac{k}{2T}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{T}E[b_k^2]\upsilon(f+\frac{k}{4T})\upsilon(-f+\frac{k}{4T}), & \text{pour } k \text{ pair} \\ 0, & \text{pour } k \text{ impair} \end{cases} \quad (A.1.29)$$

$$c_x^{\frac{k}{2T}}(f) = \begin{cases} \frac{1}{T}E[b_k^2]\upsilon(f+\frac{k}{4T})\upsilon(-f+\frac{k}{4T}), & \text{pour } k \text{ impair} \\ 0, & \text{pour } k \text{ pair} \end{cases} \quad (A.1.30)$$

Ainsi nous retrouvons des fréquences cycliques $\alpha = \frac{k}{T}$ pour la densité spectrale cyclique et $\beta = \frac{2k+1}{2T}$ pour la densité spectrale cyclique complémentaire. Nous pouvons alors écrire plus simplement

$$r_x^{\alpha}(f) = \frac{\mathrm{E}[b_k^2]}{T} v(f + \frac{\alpha}{2}) v(-f + \frac{\alpha}{2}) \quad (A.1.31)$$

$$c_x^{\beta}(f) = \frac{\mathrm{E}[b_k^2]}{T} v(f + \frac{\beta}{2}) v(-f + \frac{\beta}{2}) \quad (A.1.32)$$

avec $\alpha = \frac{k}{T}$ et $\beta = \frac{2k+1}{2T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Notons que les relations (A.1.9) et (A.1.10) s'appliquent ici avec la période $2T$. Par suite (A.1.11) et (A.1.12) deviennent respectivement :

$$E|x^2(nT)| = \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} r_x^{\alpha}(f) df \quad (A.1.33)$$

$$E(x^2(nT)) = \sum_{\beta} e^{i2\pi n\beta T} \int_{-\infty}^{+\infty} c_x^{\beta}(f) df. \quad (A.1.34)$$

Cas particulier 1 : Dans le cas où $v(t)$ est une impulsion de Nyquist de transformée de Fourier en cosinus surrélevé de roll off α_{ro}, notons que contrairement au cas de la modulation linéaire QAM, $x(t)$ n'est stationnaire du second ordre pour aucune valeur de α_{ro}. Puisque $v(t)$ est de support $[\frac{-1}{2T}(1+\alpha_{ro}), \frac{1}{2T}(1+\alpha_{ro})]$, distinguons les cas :

- Pour $\alpha_{ro} = 0$, $r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = 0$ sauf pour $k = 0$ pour $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $k = -1, +1$ pour $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$. Donc $x(t)$ a 3 fréquences cycliques $0, \frac{-1}{2T}, \frac{1}{2T}$.
- Pour $\alpha_{ro} \in]0, \frac{1}{2}[$, $r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = 0$ sauf pour $k = 0, -2, +2$ pour $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $k = -1,\ +1$ pour $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$. Donc $x(t)$ a 5 fréquences cycliques $0, \frac{-1}{T}, \frac{-1}{2T}, \frac{1}{T}, \frac{1}{2T}$.
- Pour $\alpha_{ro} \in [\frac{1}{2}, 1]$, $r_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = c_x^{\frac{k}{2T}}(\tau) = 0$ sauf pour $k = 0, -2, +2$ pour $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $k = -1, +1, -3, +3$ pour $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$. Donc $x(t)$ a 7 fréquences cycliques $0, \frac{-3}{2T}, \frac{-1}{T}, \frac{-1}{2T}, \frac{1}{2T}, \frac{1}{T}, \frac{3}{2T}$.

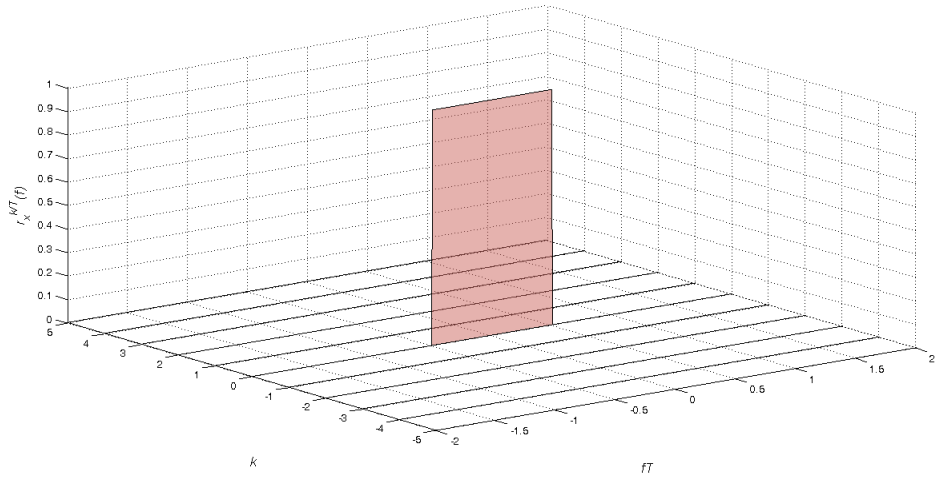


FIGURE A.5 – Densité Spectrale de puissance cyclique $r_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0$

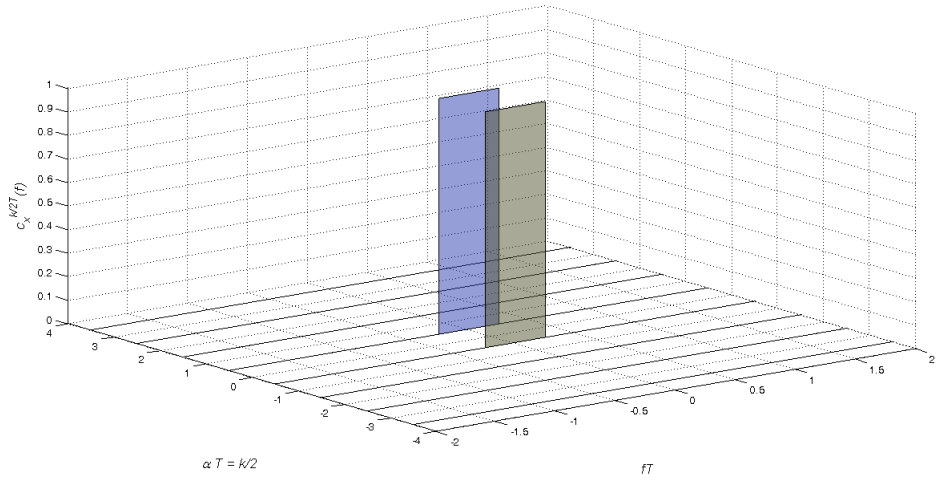


FIGURE A.6 – Densité Spectrale de puissance cyclique complémentaire $c_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0$

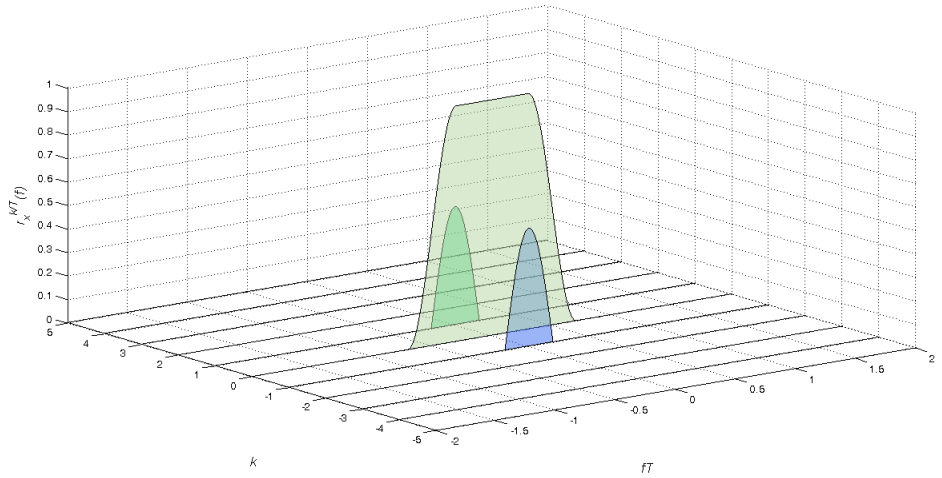


FIGURE A.7 – Densité Spectrale de puissance cyclique $r_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0.4$

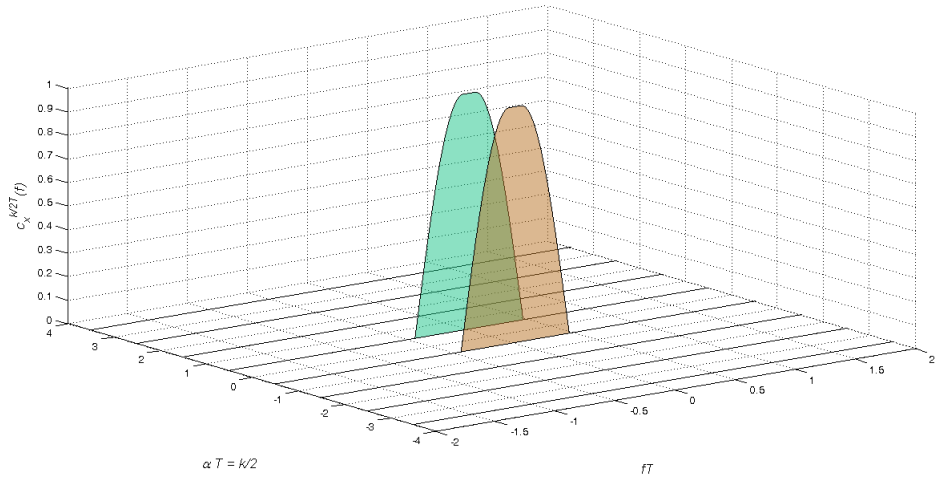


FIGURE A.8 – Densité Spectrale de puissance cyclique complémentaire $c_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 0.4$

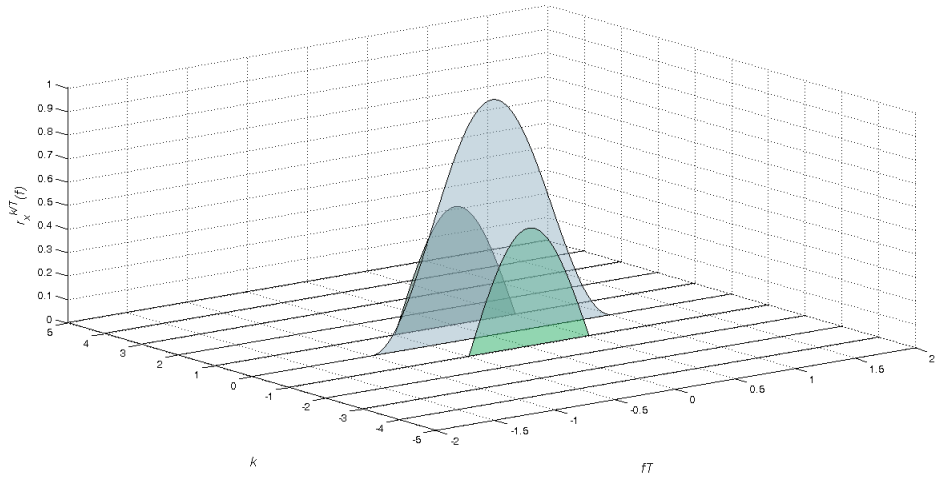


FIGURE A.9 – Densité Spectrale de puissance cyclique $r_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 1$

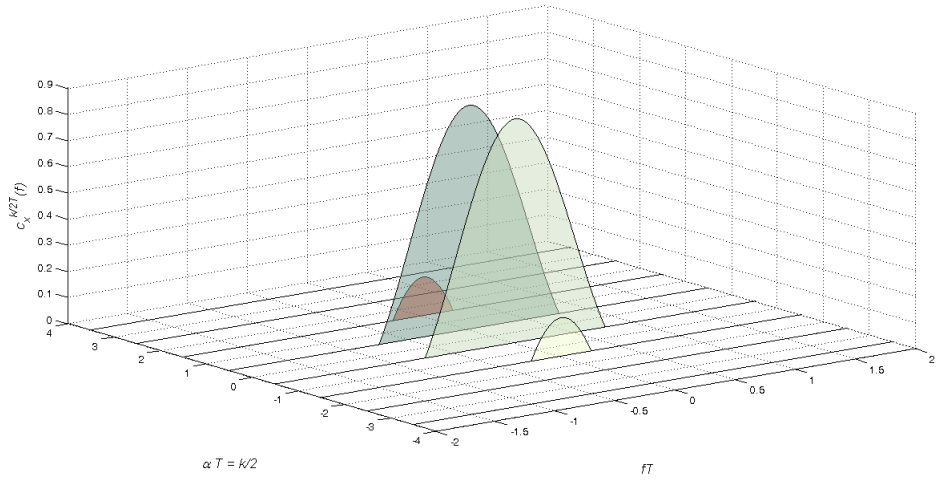


FIGURE A.10 – Densité Spectrale de puissance cyclique complémentaire $c_x^{\frac{k}{T}}(f)$ pour une modulation quasi-rectiligne 4-OQAM avec une impulsion de mise en forme de Nyquist de roll-off $\alpha_{ro} = 1$

Cas particulier 2 : Pour la modulation MSK, la transformé de Fourier de l'impulsion

$$\upsilon(t) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi t}{2T}) & \text{pour } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est

$$\upsilon(f) = \frac{4T\cos(2\pi fT)}{\pi(1-16T^2f^2)},$$

présentée par la figure A.11.

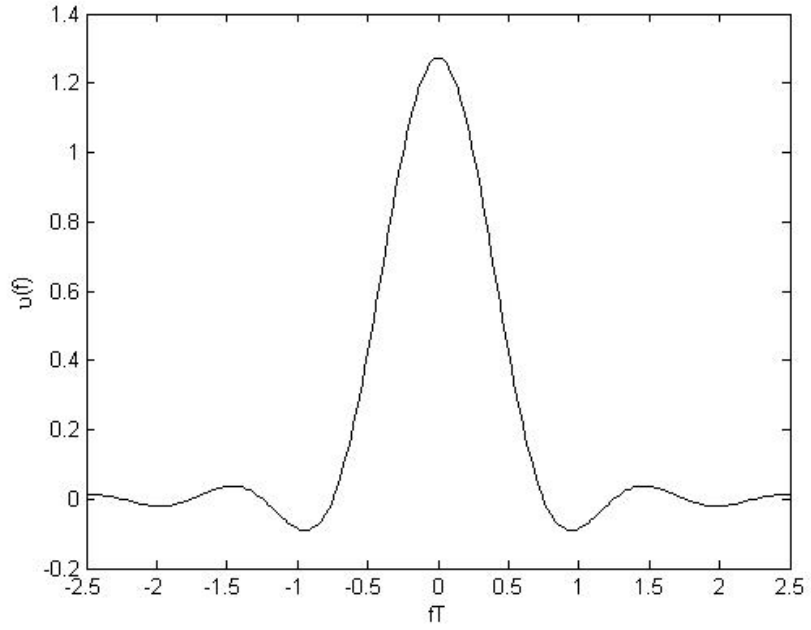


FIGURE A.11 – Impulsion $v(f)$ de MSK.

Par suite, il y a théoriquement une infinité de fréquences cycliques. En pratique, vu la décroissance de $v(f)$ en $1/f^2$, nous pouvons considérer qu'il n'y a principalement que 7 fréquences cycliques en raisonnant sur le lobe principal $[\frac{-3}{4T}, \frac{3}{4T}]$ de $v(f)$.

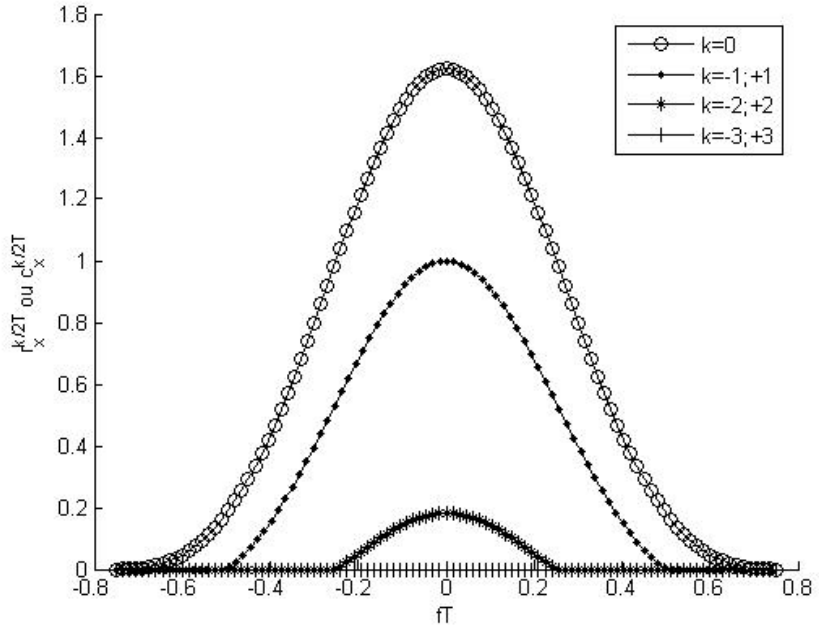


FIGURE A.12 – $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ pour différentes valeurs de k, modulation MSK.

La figure A.12 présente $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ (valeurs pairs de k) et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ (valeurs impairs de k). Naturellement, nous constatons une décroissance des amplitudes de $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ en augmentant la valeur de k.

Cas particulier 3 : Pour la modulation GMSK nous ne disposons que de valeur analytique exacte ni de $\upsilon(t)$, ni de sa transformée de Fourier $\upsilon(f)$ qui a aussi un support théorique infini, donc théoriquement une infinité de fréquences cycliques. De plus, cette modulation dépend du paramètre BT. A notre connaissance le nombre approximatif de fréquences cycliques n'a pas été étudié dans la littérature.
Cependant, nous avons présenté numériquement (figure A.13) la transformée de Fourier de l'approximation de Laurent [49] de $\upsilon(t)$ correspondante à $BT = 0.3$. Ceci nous a permis de constater que le support de cette transformée de Fourier $\upsilon(f)$ s'étend approximativement à l'intervalle $[\frac{-3}{4T}, \frac{3}{4T}]$ et nous avons ainsi 7 fréquences cycliques comme pour la modulation MSK.

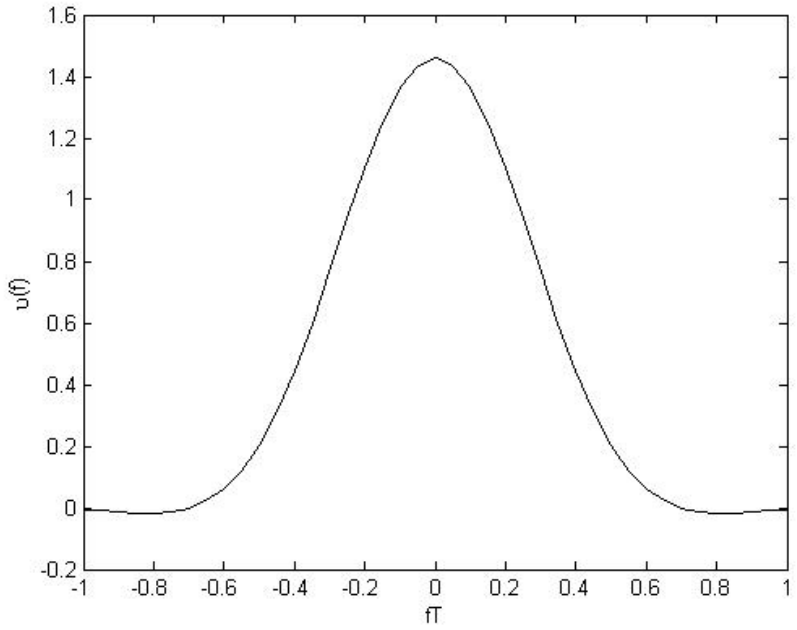


FIGURE A.13 – Impulsion $\upsilon(t)$ de GMSK linéarisée.

La figure A.14 présente $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ (valeurs pairs de k) et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ (valeurs impairs de k). Naturellement, les amplitudes de $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ décroient en augmentant la valeur de k.

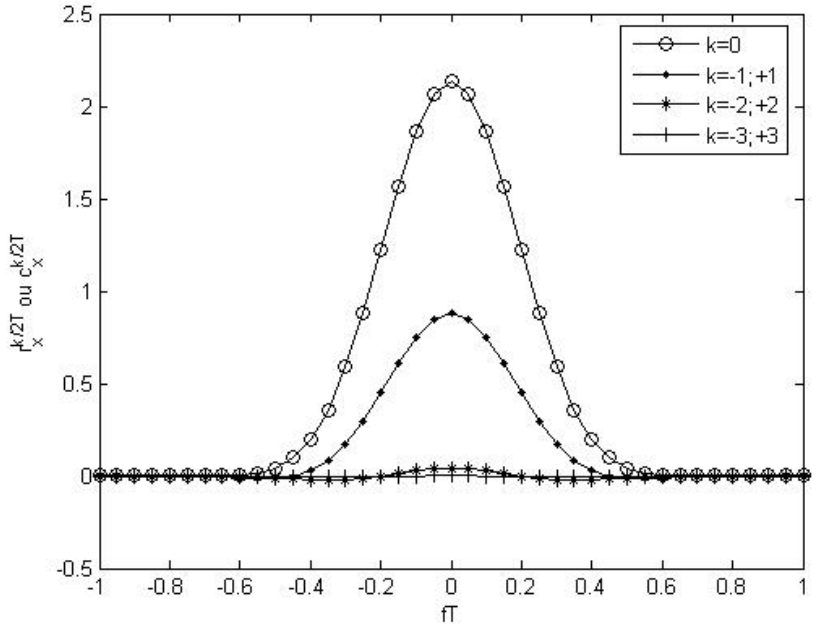
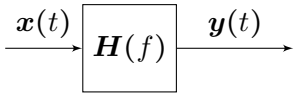


FIGURE A.14 – $r_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ et $c_x^{\frac{k}{2T}}(f)$ pour différentes valeurs de k, modulation GMSK.

A.1.4 Formule des interférences

Dans le cas de signaux centrés stationnaires de second ordre multidimensionnel $\boldsymbol{x}(t)$ filtrés par un filtre linéaire de fonction de transfert multidimensionnelle $\boldsymbol{H}(f)$ ayant pour sortie $\boldsymbol{y}(t)$,



$\boldsymbol{y}(t)$ est aussi centré stationnaire du second ordre. Les densités spectrales de puissance et densité spectrale de puissance complémentaire de $\boldsymbol{x}(t)$ et $\boldsymbol{y}(t)$ sont reliés par les relations classiques suivantes :

$$\boldsymbol{R}_y(f) = \boldsymbol{H}(f)\boldsymbol{R}_x(f)\boldsymbol{H}^H(f) \tag{A.1.35}$$

$$\boldsymbol{C}_y(f) = \boldsymbol{H}(f)\boldsymbol{C}_x(f)\boldsymbol{H}^T(-f). \tag{A.1.36}$$

Les notions de signal cyclo-stationnaire au second ordre de période cyclique T s'étendent aux signaux multidimensionnels $\boldsymbol{x}(t)$ pour lesquels nous avons les définitions suivantes

$$\mathbf{R}_x(t,\tau) \triangleq \mathrm{E}[\mathbf{x}(t+\tau/2)\mathbf{x}^H(t-\tau/2)]$$

$$\mathbf{C}_x(t,\tau) \triangleq \mathrm{E}[\mathbf{x}(t+\tau/2)\mathbf{x}^T(t-\tau/2)]$$

sont périodiques de période T. On définit de la même façon des matrices spectrales de puissance

cyclique $\boldsymbol{R}_x^{\frac{k}{T}}(f)$ et de puissance cyclique complémentaire $\boldsymbol{C}_x^{\frac{k}{T}}(f)$ qui satisfont les symétries :

$$\left[\mathbf{R}_x^{\frac{k}{T}}(f)\right]^H = \mathbf{R}_x^{-\frac{k}{T}}(f) \tag{A.1.37}$$

$$\left[\mathbf{C}_x^{\frac{k}{T}}(f)\right]^T = \mathbf{C}_x^{\frac{k}{T}}(-f). \tag{A.1.38}$$

Par suite la matrice spectrale à la fréquence cyclique 0 est hermitienne : $[\mathbf{R}_x^{(0)}(f)]^H = \mathbf{R}_x^{(0)}(f)$.

Considérons un signal $\mathbf{x}(t)$ cyclostionnaire du second ordre de fréquences cycliques $\alpha \in \boldsymbol{\alpha}$ et cycliques complémentaires $\beta \in \boldsymbol{\beta}$. Filtré par un filtre linéaire multi-dimensionnel $\boldsymbol{H}(f)$, la sortie est alors aussi cyclostationnaire de mêmes fréquences cycliques $\alpha \in \boldsymbol{\alpha}$ et $\beta \in \boldsymbol{\beta}$. Les matrices spectrales de puissance cycliques et les matrices spectrales de puissance cycliques complémentaires de $\boldsymbol{x}(t)$ et $\boldsymbol{y}(t)$ sont reliées par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{R}_y^{\alpha}(f) = \boldsymbol{H}(f+\frac{\alpha}{2})\boldsymbol{R}_x^{\alpha}(f)\boldsymbol{H}^H(f-\frac{\alpha}{2}) \tag{A.1.39}$$

$$\boldsymbol{C}_y^{\beta}(f) = \boldsymbol{H}(f+\frac{\beta}{2})\boldsymbol{C}_x^{\beta}(f)\boldsymbol{H}^T(-f+\frac{\beta}{2}). \tag{A.1.40}$$

Démonstration :

Nous avons

$$\boldsymbol{R}_x(t,\tau) \triangleq E[\boldsymbol{x}(t+\tau/2)\boldsymbol{x}^H(t-\tau/2)] = \sum_{\alpha} \boldsymbol{R}_x^{\alpha}(\tau)e^{i2\pi\alpha t}, \text{ avec } \alpha \in \boldsymbol{\alpha}$$

et

$$\boldsymbol{R}_y(t,\tau) \triangleq E[\boldsymbol{y}(t+\tau/2)\boldsymbol{y}^H(t-\tau/2)],$$

avec

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t+\tau/2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}(\theta_1)\boldsymbol{x}(t+\tau/2-\theta_1)d\theta_1 \\ \boldsymbol{y}(t-\tau/2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}(\theta_2)\boldsymbol{x}(t-\tau/2-\theta_2)d\theta_2.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_y(t,\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}(\theta_1)E[\boldsymbol{x}(t+\tau/2-\theta_1)\boldsymbol{x}^H(t-\tau/2-\theta_2)]\boldsymbol{H}^H(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}(\theta_1)\boldsymbol{R}_x(t-\frac{\theta_1+\theta_2}{2},\tau+\theta_2-\theta_1)\boldsymbol{H}^H(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2.\end{aligned}$$

Nous voyons clairement que $\boldsymbol{R}_y(t+T,\tau) = \boldsymbol{R}_y(t,\tau)$ et donc $\boldsymbol{y}(t)$ est aussi cyclostationnaire du second ordre de période T. En écrivant

$$\boldsymbol{R}_x(t-\frac{\theta_1+\theta_2}{2},\tau+\theta_2-\theta_1) = \sum_{\alpha} \boldsymbol{R}_x^{\alpha}(\tau+\theta_2-\theta_1)e^{i2\pi\alpha t}e^{-i2\pi\alpha\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$

nous obtenons

$$\boldsymbol{R}_y(t,\tau) = \sum_{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}(\theta_1)\boldsymbol{R}_x^{\alpha}(\tau+\theta_2-\theta_1)\boldsymbol{H}^H(\theta_2)e^{i2\pi\alpha t}e^{-i2\pi\alpha\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}d\theta_1 d\theta_2,$$

ayant pour transformée de Fourier (par rapport à τ)

$$\boldsymbol{R}_y(t,f) = \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}(\theta_1)\boldsymbol{R}_x^\alpha(\tau+\theta_2-\theta_1)\boldsymbol{H}^H(\theta_2)e^{i2\pi\alpha t}e^{-i2\pi\alpha\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}e^{-i2\pi f\tau}d\theta_1 d\theta_2 d\tau. \tag{A.1.41}$$

En remarquant que $e^{-i2\pi f\tau} = e^{-i2\pi f(\tau+\theta_2-\theta_1)}e^{-i2\pi f\theta_1}e^{i2\pi f\theta_2}$ et qu'avec les changements de variable adéquats, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}(\theta_1)e^{-i2\pi f\theta_1}e^{-i2\pi\frac{\alpha}{2}\theta_1}d\theta_1 &= \boldsymbol{H}(f+\frac{\alpha}{2}) \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}^H(\theta_2)e^{i2\pi f\theta_2}e^{-i2\pi\frac{\alpha}{2}\theta_2}d\theta_2 &= \boldsymbol{H}^H(f-\frac{\alpha}{2}) \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{R}_x^\alpha(\tau+\theta_2-\theta_1)e^{-i2\pi f(\tau+\theta_2-\theta_1)}d\tau &= \boldsymbol{R}_x^\alpha(f),
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\boldsymbol{R}_y(t,f) = \sum_\alpha \boldsymbol{H}(f+\frac{\alpha}{2})\boldsymbol{R}_x^\alpha(f)\boldsymbol{H}^H(f-\frac{\alpha}{2})e^{i2\pi\alpha t}.$$

Par conséquent, d'après la remarque 1

$$\boldsymbol{R}_y^\alpha(f) = \boldsymbol{H}(f+\frac{\alpha}{2})\boldsymbol{R}_x^\alpha(f)\boldsymbol{H}^H(f-\frac{\alpha}{2}),$$

de même nous obtenons

$$\boldsymbol{C}_y^\beta(f) = \boldsymbol{H}(f+\frac{\beta}{2})\boldsymbol{C}_x^\beta(f)\boldsymbol{H}^T(-f+\frac{\beta}{2}).$$

■

Remarque 4 : Dans le cas où $\boldsymbol{x}(t)$ est stationnaire au second ordre $\boldsymbol{R}_x^\alpha(f) = \boldsymbol{C}_x^\beta(f) = \boldsymbol{0}$ pour $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ avec $\boldsymbol{R}_x^0(f) = \boldsymbol{R}_x(f)$, $\boldsymbol{C}_x^0(f) = \boldsymbol{C}_x(f)$ et (A.1.39) et (A.1.40) se réduisent à (A.1.35) et (A.1.36).

Remarque 5 : Dans le cas particulier où $x(t)$ est une modulation QAM (A.1.13) filtrée par un filtre linéaire de fonction de transfert $\boldsymbol{h}(t)$, alors $\boldsymbol{y}(t) = \sum_k a_k\boldsymbol{g}(t-kT)$ avec $\boldsymbol{g}(t) = \upsilon(t) * \boldsymbol{h}(t)$, (A.1.39) et (A.1.40) et (A.1.20) permettent de conclure que

$$\boldsymbol{R}_y^\alpha(f) = \frac{1}{T}r_a(f)\boldsymbol{g}(f+\frac{\alpha}{2})\boldsymbol{g}^H(f-\frac{\alpha}{2}) \tag{A.1.42}$$

$$\boldsymbol{C}_y^\beta(f) = \frac{1}{T}c_a(f)\boldsymbol{g}(f+\frac{\beta}{2})\boldsymbol{g}^T(-f+\frac{\beta}{2}). \tag{A.1.43}$$

Remarque 6 : Dans le cas particulier d'un filtre linéaire de type MISO (où la fonction de transfert $\boldsymbol{H}(f)$ est un vecteur ligne noté $\boldsymbol{h}^H(f)$), les matrices spectrales de puissance cycliques et les matrices spectrales de puissance cycliques complémentaires de $\boldsymbol{x}(t)$ et $y(t)$ donnés par (A.1.39) et (A.1.40)

sont reliées par les relations suivantes :

$$r_y^{\alpha}(f) = \boldsymbol{h}^H(f+\frac{\alpha}{2})\boldsymbol{R}_x^{\alpha}(f)\boldsymbol{h}(f-\frac{\alpha}{2}) \quad (A.1.44)$$

$$c_y^{\beta}(f) = \boldsymbol{h}^H(f+\frac{\beta}{2})\boldsymbol{C}_x^{\beta}(f)\boldsymbol{h}^*(-f+\frac{\beta}{2}). \quad (A.1.45)$$

Remarque 7 : Dans le cas particulier d'un filtre linéaire de type SIMO (où la fonction de transfert $\boldsymbol{H}(f)$ est un vecteur colonne noté $\boldsymbol{h}(f)$), les matrices spectrales de puissance cycliques et les matrices spectrales de puissance cycliques complémentaires de $x(t)$ et $\mathbf{y}(t)$ donnés par (A.1.39) et (A.1.40) sont reliées par les relations suivantes :

$$\mathbf{R}_y^{\alpha}(f) = r_x^{\alpha}(f)\boldsymbol{h}(f+\frac{\alpha}{2})\boldsymbol{h}^H(f-\frac{\alpha}{2}) \quad (A.1.46)$$

$$\mathbf{C}_y^{\beta}(f) = c_x^{\beta}(f)\boldsymbol{h}(f+\frac{\beta}{2})\boldsymbol{h}^T(-f+\frac{\beta}{2}). \quad (A.1.47)$$

A.2 Factorisation spectrale

A.2.1 Définitions

Un polynôme trigonométrique défini pour tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit comme suit :

$$s(z) = \sum_{k=-n}^{n} r_k z^{-k} \quad (A.2.1)$$

avec : $r_{-k} = r_k^*$

On note l'ensemble de ces polynômes dont les coefficients r_k sont réels par $\mathbb{R}[z]$, qui sont aussi désignés comme des *polynômes symétriques*, puisque $r_{-k} = r_k$.

Pour des coefficients r_k complexes le polynôme (A.2.1) est dit *hermitien* puisque $r_{-k} = r_k^*$; qu'on note $\mathbb{C}[z]$.

Un polynôme *causal* est défini par $H(z) = \sum_{k=0}^{n} h_k z^{-k}$. Les ensembles associés pour des coefficients réels et complexes sont notés respectivement $\mathbb{R}_+[z]$ et $\mathbb{C}_+[z]$.

La partie causale de (A.2.1) s'écrit :

$$s_+(z) = \frac{r_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} r_k z^{-k} \quad (A.2.2)$$

Remarque : la valeur de $s \in \mathbb{R}[z]$ sur le cercle unité $\mathbb{T}$ $(z = e^{i2\pi f}, f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$:

$$\begin{aligned} s(f) \triangleq s(e^{i2\pi f}) &= 2\mathrm{Re}\left\{s_+(e^{i2\pi f})\right\} \\ &= r_0 + 2\sum_{k=1}^{n} r_k \cos 2k\pi f \end{aligned} \quad (A.2.3)$$

De même, la valeur de $s \in \mathbb{C}[z]$ sur le cercle unité $\mathbb{T}$ $(z = e^{i2\pi f}, f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$:

$$s(z) = \sum_{k=-n}^{n} r_k z^{-k} = \sum_{k=-n}^{n} [u_k + v_k] z^{-k} \quad (A.2.4)$$

en prenant en considération la symétrie hermitienne de ce polynôme on peut écrire :

$$s(f) = u_0 + 2\sum_{k=1}^{n} u_k \cos 2k\pi f + 2\sum_{k=1}^{n} v_k \sin 2k\pi f \tag{A.2.5}$$

Le polynôme $s(z)$ défini par l'expression (A.2.1) est dit *défini positif* (resp. *semi-défini positif*) sur le cercle unité $\mathbb{T}$ c'est-à-dire : $s(f) > 0, \forall f \in \mathbb{T}$ (resp. $s(f) \geq 0, \forall f \in \mathbb{T}$). On note $\mathbb{RP}[z]$ et $\mathbb{CP}[z]$ les ensembles des polynômes défini positifs de coefficients réels et complexes, respectivement.

A.2.2 Théoréme de Riesz-Fejér, factorisation spectrale

Un polynôme $s \in \mathbb{C}[z]$ tel que défini en (A.2.1) est semi-défini positif sur le cercle unité $\mathbb{T}$ si et seulement si un polynôme causal :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{n} h_k z^{-k} \tag{A.2.6}$$

existe tel que :

$$s(z) = H(z)H^*(z^{-1}) \tag{A.2.7}$$

avec : $H^*(z) = \sum_{k=0}^{n} h_k^* z^{-k}$.
L'égalité (A.2.7) représente la *factorisation spectrale* d'un polynôme $s(z)$ semi-défini positif. Cette derniére expression peut s'écrire en fonction des coefficients de $s(z)$ et $H(z)$ comme suit :

$$r_k = \sum_{i=k}^{n} h_i h_{i-k}^* \quad pour k \geq 0 \tag{A.2.8}$$

r_k est une fonction d'*autocorrélation* si $s(f) \geq 0, \ \forall f \in \mathbb{T}$.

Remarque Pour une densité spectrale de puissance $s(z)$ rationnelle avec M zéros et N pôles, il y aura 2^{M+N} choix possibles de la fonction de transfert $H(z)$ en absence de conditions supplémentaires sur la phase. Une fonction de transfert unique peut être déterminée en choisissant les pôles et les zéros à l'intérieur du cercle unité $\mathbb{T}$ (*filtre à phase minimale*).

A.2.3 Généralisation du théorème de Riesz-Fejér au processus complexes non nécessairement circulaire au second ordre

Nous allons étendre le célèbre théorème de factorisation spectrale aux processus à temps continu complexes $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^N$ stationnaires au sens large (WSS) [3] non nécessairement circulaires du second ordre. Pour cela, considérons le processus réel associé $\bar{\mathbf{n}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathrm{Re}(\mathbf{n}^T(t)), \mathrm{Im}(\mathbf{n}^T(t))]^T$ et le processus complexe étendu $\widetilde{\mathbf{n}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{n}^T(t), \mathbf{n}^H(t)]^T$ reliés par

$$\widetilde{\mathbf{n}}(t) = \mathbf{T}\bar{\mathbf{n}}(t) \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{n}}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{T}^H\widetilde{\mathbf{n}}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & i\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -i\mathbf{I} \end{bmatrix}. \tag{A.2.9}$$

3. C'est-à-dire où le processus conjoint associé $(\mathrm{Re}(\mathbf{n}(t)), \mathrm{Im}(\mathbf{n}(t))$ est WSS.

Sous des hypothèses où le théorème de factorisation spectrale s'applique au processus réel à temps continu [4] $\bar{\mathbf{n}}(t)$, il existe une fonction de transfert causale et inversiblement causale $\mathbf{G}(f) \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$ telle que $\mathbf{R}_{\bar{n}}(f) = \mathbf{G}(f)\mathbf{G}^H(f)$ avec $\mathbf{G}^*(f) = \mathbf{G}(-f)$. En conséquence $\mathbf{W}_{\bar{n}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}^{-1}(f)$ satisfait

$$\mathbf{W}_{\bar{n}}(f)\mathbf{R}_{\bar{n}}(f)\mathbf{W}_{\bar{n}}^H(f) = \mathbf{I}_{2N} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_{\bar{n}}^*(f) = \mathbf{W}_{\bar{n}}(-f). \tag{A.2.10}$$

Puis utilisant la relation (A.2.9), $\mathbf{R}_{\bar{n}}(f) = \frac{1}{4}\mathbf{T}^H\mathbf{R}_{\widetilde{n}}(f)\mathbf{T}$, nous obtenons

$$\mathbf{W}_{\widetilde{n}}(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}(f)\mathbf{W}_{\widetilde{n}}^H(f) = \mathbf{I}_{2N}, \tag{A.2.11}$$

où $\mathbf{W}_{\widetilde{n}}(f) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{T}\mathbf{W}_{\bar{n}}(f)\mathbf{T}^H$ a la structure

$$\mathbf{W}_{\widetilde{n}}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(f) & \mathbf{W}_2(f) \\ \mathbf{W}_2^*(-f) & \mathbf{W}_1^*(-f) \end{bmatrix} \tag{A.2.12}$$

grâce à (A.2.10). Sa transformée de Fourier inverse $\mathbf{W}_{\widetilde{n}}(t)$ a la structure

$$\mathbf{W}_{\widetilde{n}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(t) & \mathbf{W}_2(t) \\ \mathbf{W}_2^*(t) & \mathbf{W}_1^*(t) \end{bmatrix}$$

et en conséquence d'après (A.2.11) $\mathbf{n}_w(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}_1(t) \star \mathbf{n}(t) + \mathbf{W}_2(t) \star \mathbf{n}^*(t)$ est à la fois circulaire du second ordre et spatialement et temporellement blanc. ■

A.2.4 Algorithme de factorisation d'une matrice de densité spectrale de puissance

A.2.4.1 Définition 1

Une fonction matricielle de la variable f, $\mathbf{R}(f)$, de dimension $(q \times q)$ définie sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est une *densité spectrale* si elle possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbf{R}(f)$ est *Hermitienne*, semi-définie positive et $\mathbf{R}(f) = \mathbf{R}^H(f) = \mathbf{R}^T(-f)$;
2. $\mathbf{R}(f)$ est intégrable et possède une décomposition en série de Fourier :

$$\mathbf{R}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{\Gamma}_k e^{i2\pi fk} \tag{A.2.13}$$

où les coefficients $\{\mathbf{\Gamma}_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ est la *fonction de covariance*. Ces derniers sont définis par :

$$\mathbf{\Gamma}_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}(f) e^{-i2\pi fk} df \tag{A.2.14}$$

En conséquence de la condition (1) les coefficients $\mathbf{\Gamma}_k$ sont réels et vérifient $\mathbf{\Gamma}_k = \mathbf{\Gamma}_{-k}^T$

4. C'est en particulier le cas quand la matrice de densité spectrale de puissance $\mathbf{R}_{\widetilde{n}}(f)$ est une fraction rationnelle en $e^{i2\pi f}$ pour laquelle $\mathbf{R}_{\bar{n}}(f)$ est inversible pour toute valeur de f, voir en particulier [32].

A.2.4.2 Théorème

Si $\mathbf{R}(f)$ tel que définie dans la section A.2.4.1 satisfait aux conditions supplémentaires :

1. $\mathbf{R}(f)$ est de rang maximal q
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \log\det \mathbf{R}(f)df > -\infty$

donc : $\mathbf{R}(f) = \mathbf{G}(f)\mathbf{G}^H(f)$ où la *fonction génératrice* $\mathbf{G}(f)$ est une matrice carrée de dimension $(q \times q)$ définie sur le cercle unité $\mathbb{T} = \{|z| = 1\}$ avec les propriétés suivantes :

a) $\mathbf{G}$ possède une décomposition en série de Fourier aux puissances positives de $e^{i2\pi f}$ seulement,

$$\mathbf{G}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k e^{i2\pi fk} \tag{A.2.15}$$

avec : $\mathbf{A}_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{G}(f)e^{-i2\pi fk}df$

b) $\mathbf{G}$ admet une extension holomorphique sur le disque $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ donnée par :

$$\mathbf{G}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k z^k \tag{A.2.16}$$

c) l'extension $\mathbf{G}(z)$ est *optimale* c'est-à-dire $\det \mathbf{G}(z) \neq 0$, dans $\mathbb{D}$

Les propriétés (a) à (c) déterminent d'une manière unique $\mathbf{G}$.

Remarque : $\mathbf{G}$ peut être déterminé en imposant que la matrice $\mathbf{A}_0 = \mathbf{G}(0)$ soit réelle, triangulaire supérieure avec des éléments de la diagonale positifs. Une conséquence directe de ces contraintes et de la propriété (1) de la définition de $\mathbf{R}(f)$ A.2.4.1 c'est que tous les coefficients $\mathbf{A}_k$ sont réels. On conclut aussi que la factorisation $\mathbf{R}(f) = \mathbf{G}(f)\mathbf{G}^H(f)$ peut être exprimé en termes de $\mathbf{\Gamma}_k$ et $\mathbf{A}_k$:

$$\mathbf{\Gamma}_k = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}_{j+k}\mathbf{A}_j^T \tag{A.2.17}$$

A.2.4.3 Définition 2

Etant donnée une fonction $\mathbf{M}(f)$ définie dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ qui peut être exprimée par la série de Fourier $\mathbf{M}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_k e^{i2\pi fk}$, on définit l'opérateur $[\ .\ ]^+$:

$$[\mathbf{M}(f)]^+ = \frac{1}{2}\mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}_k e^{i2\pi fk} = \mathbf{\Phi}(e^{i2\pi fk}) \tag{A.2.18}$$

Le problème de factorisation d'une matrice spectrale $\mathbf{R}(f)$ consiste à trouver la fonction génératrice $\mathbf{G}$, ou d'une manière équivalente les coefficients $\{\mathbf{A}_k\}$.

On s'intéresse donc à une solution itérative au problème suivant :

$$\mathbf{Y}(f) = \mathbf{G}(f)\mathbf{G}^H(f) - \mathbf{R}(f) = 0, \quad \tfrac{1}{2} \leq f \leq \tfrac{1}{2}$$

L'expression récursive pour trouver la fonction génératrice est la suivante [90] :

$$\mathbf{G}_{m+1} = \mathbf{G}_m \left\{ [\mathbf{G}_m^{-1} \mathbf{R} \mathbf{G}_m^{-H} + \mathbf{I}]^+ \right\} \tag{A.2.19}$$

Data: $\mathbf{R}(z), \epsilon$
Result: $\mathbf{G}(z)$
$m \longleftarrow 0$
begin
  $\mathbf{\Gamma_k} \longleftarrow IFFT\,[\mathbf{R}(z)]$
  $\mathbf{G}_0(z) \longleftarrow Cholesky\,[\mathbf{\Gamma_0}]$
  repeat
    $\mathbf{G}_{m+1} \longleftarrow \mathbf{G}_m[\mathbf{G}_m^{-1} \mathbf{R} \mathbf{G}_m^{-H} + \mathbf{I}]^+$
    $m \longleftarrow m + 1$
    $Error_{\mathbf{G}} \longleftarrow \mathbf{G}_{m+1} - \mathbf{G}_m$
  until $Error_{\mathbf{G}} < \epsilon$;
  $\mathbf{G}(z) \longleftarrow \mathbf{G}_{m+1}(z)$
end

Algorithm 1: Factorisation spectrale multidimensionnelle à temps discret

A.3 Principe de simulation à temps discret

Afin de valider les performances en terme de SINR, nous devons définir pour chacun des récepteurs MLSE conventionnel et non circulaire pour SOI complexe, rectiligne ou quasi-rectiligne, un modèle discret équivalent pour la génération des suites y_k, z_k et $z_{d,k}$ en entrée du détecteur de Viterbi et mener les calculs des paramètres $(r_k, r_{k'})$, $r_{r,k}$ et $(r_{d,k}, r'_{d,k})$ nécessaires aux calculs de métrique des branches de ce détecteur. Notons que le cas d'un SOI quasi-rectiligne, ces métriques de branches sont fonctions de la parité du symbole courant k (le terme $(-1)^k$ dans la métrique (1.2.19)).

Pour la génération des suites y_k, z_k et $z_{d,k}$ nous considérons le cas d'un SOI perturbé par une seule interférence et un bruit de fond gaussien, centré, blanc temporellement et spatialement. Le signal reçu par le récepteur sera donc :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{j}(t) + \mathbf{n}_{\mathbf{G}}(t) \tag{A.3.1}$$

avec :

$$\mathbf{s}(t) = \sum_k a_k v(t - kT) \star \mathbf{h}(t) = \sum_k a_k \mathbf{g}(t - kT)$$
$$\mathbf{j}(t) = \sum_k c_k v_j(t - kT) \star \mathbf{h}_j(t) = \sum_k c_k \mathbf{g}_j(t - kT)$$

A.3.1 Scénario 1 : SOI modulation linéaire rectiligne

La structure du récepteur SIMO MLSE pour ce scénario est la suivante :

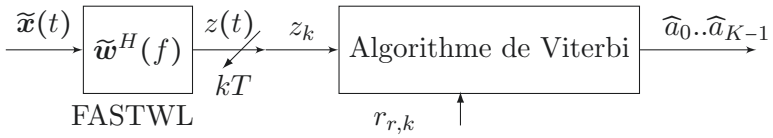


FIGURE A.15 – Structures du récepteur MLSE non circulaire avec des symboles réels.

Génération des observations : Pour une modulation BPSK à symboles réels a_k, le résumé exhaustif $\{2\mathrm{Re}(a_k^* y_k)\}_{k=0}^{K-1}$ dans (1.2.8), se réduit à la séquence $\{z_k\}_{k=0,\ldots,K-1}$ définie par :

$$z_k = 2\mathrm{Re}(y_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f)\widetilde{\mathbf{x}}(f)e^{i2\pi kfT}df, \tag{A.3.2}$$

qui peut être interprété comme la sortie à l'instant kT du filtre WL multidimensionnel de fonction de transfert

$$\widetilde{\mathbf{w}}^H(f) = \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f). \tag{A.3.3}$$

avec $\widetilde{\mathbf{g}}(f) = [\mathbf{g}^T(f), \mathbf{g}^H(-f)]^T$.

Le signal observé $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ étant composé d'un SOI, interférence et bruit de fond (gaussien, circulaire, spatialement et temporellement blanc), on peut écrire :

$$\begin{aligned} z_k &= 2\mathrm{Re}(y_k) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f)\left[\widetilde{\mathbf{s}}(f) + \widetilde{\mathbf{j}}(f) + \widetilde{\mathbf{n}}_G(f)\right]e^{i2\pi kfT}df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f)\widetilde{\mathbf{s}}(f)e^{i2\pi kfT}df + \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f)\widetilde{\mathbf{j}}(f)e^{i2\pi kfT}df + \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f)\widetilde{\mathbf{n}}_G(f)e^{i2\pi kfT}df \\ &= z_{1,k} + z_{2,k} + n_{G,k} \end{aligned} \tag{A.3.4}$$

avec :

- $z_{1,k}$: échantillons du SOI
- $z_{2,k}$: échantillons de l'interférence
- $n_{G,k}$: échantillons bruit gaussien à la sortie du filtre $\widetilde{\mathbf{w}}^H(f)$

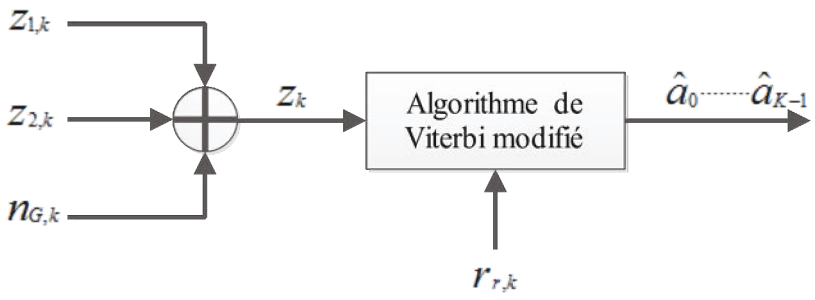


FIGURE A.16 – Modèle discret équivalent au récepteur SIMO MLSE de la figure A.15

1. **SOI**

A partir des équations (1.2.16) et (A.3.4), on peut exprimer les échantillons SOI comme suit :

$$\begin{aligned} z_{1,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f)\widetilde{\mathbf{s}}(f)e^{i2\pi kfT}df \\ &= a_k r_{r,0} + \sum_{k\neq l} a_l r_{r,k-l} \end{aligned} \tag{A.3.5}$$

où $r_{r,k}$ est défini par :

$$r_{r,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{g}}(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.6}$$

Avec : $r_{r,k} \neq 0$ pour $|k| \leq L_i$ (voir la définition de L_i au paragraphe 1.2.2)

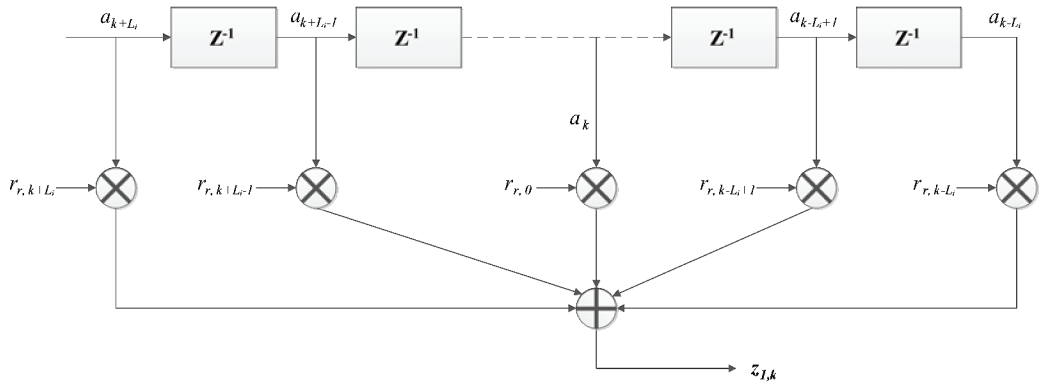


FIGURE A.17 – Générateur des échantillons SOI modulation rectiligne

2. **Interférence**

De même que le SOI, à partir des équations (1.2.16) et (A.3.4), on peut exprimer les échantillons interférence comme suit :

$$\begin{aligned} z_{2,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f)\widetilde{\mathbf{j}}(f)e^{i2\pi kfT}df \\ &= c_k r_{j,0} + \sum_{k\neq l} c_l r_{j,k-l} \end{aligned} \tag{A.3.7}$$

où $r_{j,k}$ est défini par :

$$r_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{g}}_j(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.8}$$

avec :

- $r_{j,k} \neq 0$ pour $|k| \leq L_i$ où L_i représente l'étendu de l'interférence inter-symbole de l'interférence, causale et anti-causale, perçu par le récepteur.
- $\widetilde{\mathbf{g}}_j(f) = [\mathbf{g}_j^T(f), \mathbf{g}_j^H(-f)]^T$ où $\mathbf{g}_j(t) = v_j(t) \star \mathbf{h}_j(t)$. $v_j(t)$ et $\mathbf{h}_j(t)$ dénotent respectivement l'impulsion de mise en forme brouilleur et la réponse impulsionnelle équivalente bande de base du canal multivoies brouilleur.

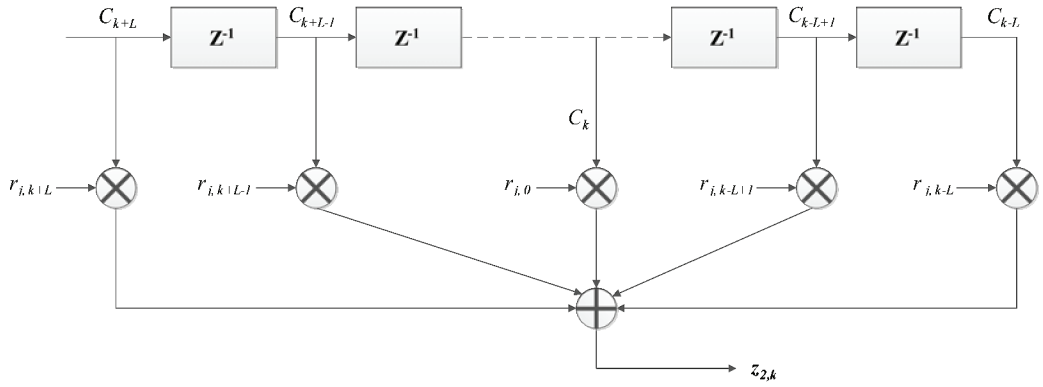


FIGURE A.18 – Générateur des échantillons de l'interférence

3. **Bruit de fond gaussien**

Les échantillons du bruit de fond en sortie du filtre adapté WL multidimensionnel sont définis par l'expression suivante :

$$n_{G,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f)\widetilde{\mathbf{n}}_G(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.9}$$

avec : $\widetilde{\mathbf{n}}_G(f) = [\mathbf{n}_G^T(f), \mathbf{n}_G^H(-f)]^T$ et $\mathbf{n}_G(t) \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{0}, N_0\mathbf{I}_N\delta(\tau), \mathbf{0})$

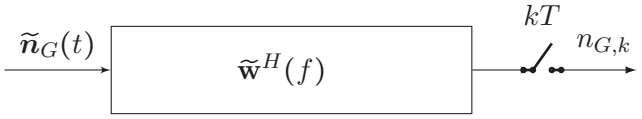


FIGURE A.19 – Echantillons $n_{G,k}$ du bruit de fond en sortie du filtre WL multidimensionnel

Les échantillons $n_{G,k}$, représentent une suite stationnaire colorée de variable aléatoire réelle, gaussienne et centrée. A travers la formule des interférences, la fonction d'autocorrélation correspondante vaut :

$$\begin{aligned} r_{n_G}(k) = \mathrm{E}[n_{G,l}n_{G,l-k}] &= N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{w}}^H(f)\widetilde{\mathbf{w}}(f)df \\ &= N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{g}}^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-2}(f)\widetilde{\mathbf{g}}(f)df \end{aligned} \tag{A.3.10}$$

avec : $r_{n_G}(k) \neq 0$ pour $k \in [-Q; Q]$.

La densité spectrale de puissance de la suite aléatoire $n_{G,k}$ est égale à :

$$S_{n_G}(z) = \sum_{k=-Q}^{Q} r_{n_G}(k)z^{-k} \tag{A.3.11}$$

Selon le théorème de Riesz-Fejér (section A.2.2) [29], une fonction de transfert causale unique

peut être déterminée en choisissons les pôles et les zéros à l'intérieur du cercle unité (filtre à phase minimale) $H(z) = \sum_{k=0}^{Q} h_k(k) z^{-k}$ tel que :

$$S_{n_G}(z) = H(z) H^* \left(\frac{1}{z} \right) \tag{A.3.12}$$

qui représente la factorisation spectrale de la fonction d'autocorrélation $r_{n_G}(k)$, avec : $H^*(z) = \sum_{k=0}^{Q} h_k^* z^{-k}$.

Afin de générer les échantillons $n_{G,k}$, on utilise le modèle discret équivalent :

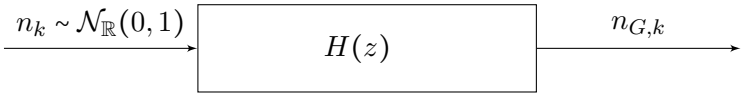


FIGURE A.20 – Générateur des échantillons $n_{G,k}$ équivalent au modèle continu de la figure A.19

4. **Métrique de Viterbi**

Pour des symboles a_k réels, la métrique de Viterbi (1.2.8) peut s'écrire comme suit :

$$\Lambda(a_0, .., a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} a_k a_{k'} \mathrm{Re}(r_{k-k'} + r'^{*}_{k-k'}) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k z_k$$

Avec :

$$r_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{i2\pi k f T} df, \tag{A.3.13}$$

$$r'_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_2(f) e^{i2\pi k f T} df, \tag{A.3.14}$$

avec $\mathbf{g}_1(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{g}_2(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix}$ où $\mathbf{g}(f) = v(f)\mathbf{h}(f)$.

A.3.2 Scénario 2 : SOI modulation linéaire quasi-rectiligne

Contrairement au récepteur MLSE non circulaire pour SOI rectiligne, ce récepteur présente deux post-rotations de $\pm k\pi/2$ ce qui est équivalent à un filtre variable dans le temps, défini par :

$$\mathbf{w}_{(k)}^H(f) = [i^k \mathbf{g}_1^H(f) + (-i)^k \mathbf{g}_2^H(f)] \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) = \mathbf{g}_{(k)}^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)$$

Génération des observations : Pour une modulation linéaire quasi-rectiligne GMSK de symbole complexe $a_k = i^k b_k$ (après approximation de Laurent), le résumé exhaustif $\{2\mathrm{Re}(a_k^* y_k)\}_{k=0}^{K-1}$ dans la métrique (1.2.8), se réduit à la séquence $\{z_k\}_{k=0,\ldots,K-1}$ définie par :

$$\begin{aligned} z_{d,k} &= 2\mathrm{Re}[(-i)^k y_k] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} df \\ &= (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} df + (i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_2^H(f) \widetilde{\mathbf{x}}(f) e^{i2\pi k f T} df \end{aligned} \tag{A.3.15}$$

avec :

$\mathbf{w}_1(f) \triangleq \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_1(f)$

$\mathbf{w}_2(f) \triangleq \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_2(f)$

$\mathbf{g}_1(f) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}(f) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{g}_2(f) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}^*(-f) \end{bmatrix}$ où $\mathbf{g}(f) = v(f)\mathbf{h}(f)$.

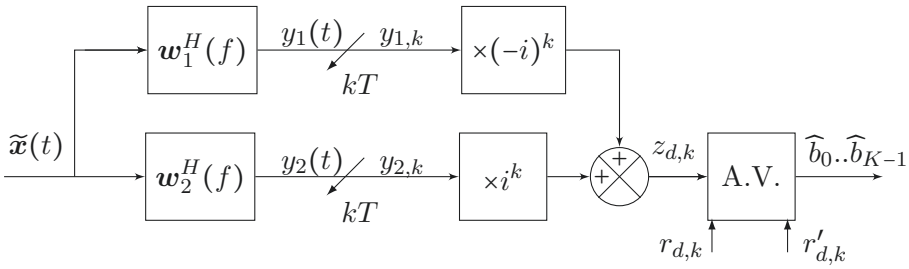


FIGURE A.21 – Structure 1 du récepteur MLSE non circulaire pour modulations linéaires quasi-rectilignes.

L'observation $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ étant composée d'un SOI, interférence et bruit de fond (gaussien, circulaire, spatialement et temporellement blanc), on peut écrire :

$$\begin{aligned} z_{d,k} &= 2\mathrm{Re}[(-i)^k y_k] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f)\left[\widetilde{\mathbf{s}}(f) + \widetilde{\mathbf{j}}(f) + \widetilde{\mathbf{n}}_G(f)\right] e^{i2\pi kfT} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f)\widetilde{\mathbf{s}}(f) e^{i2\pi kfT} df + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f)\widetilde{\mathbf{j}}(f) e^{i2\pi kfT} df + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^H(f)\widetilde{\mathbf{n}}_G(f) e^{i2\pi kfT} df \\ &= z_{1d,k} + z_{2d,k} + n_{G,k} \end{aligned} \tag{A.3.16}$$

avec :

— $z_{1d,k}$: échantillons du SOI

— $z_{2d,k}$: échantillons de l'interférence

— $n_{G,k}$: échantillons bruit gaussien à la sortie du filtre $\mathbf{w}_{(k)}^H(f)$

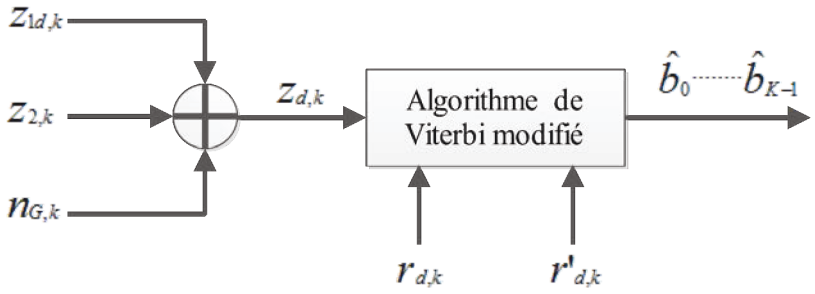


FIGURE A.22 – Modèle discret équivalent au récepteur SIMO MLSE de la figure A.21

1. **SOI**

A partir des équations (1.2.22) et (A.3.16), on peut exprimer les échantillons SOI comme

suit :

$$\begin{aligned} z_{1d,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^{H}(f)\widetilde{\mathbf{s}}(f)e^{i2\pi kfT}df \\ &= 2\sum_{l} b_l \mathrm{Re}\{(-i)^{(k-l)}r_{k-l} + i^{(k+l)}r_{k-l}^{'*}\} \\ &= 2b_k \mathrm{Re}\{r_0 + (-1)^k r_0^{'*}\} + 2\sum_{l\neq k} b_l \mathrm{Re}\{(-i)^{(k-l)}r_{k-l} + i^{(k+l)}r_{k-l}^{'*}\} \\ &= b_k\alpha_{k,k} + \sum_{l\neq k} b_l\alpha_{k,l} \end{aligned} \tag{A.3.17}$$

où r_k, $r_k^{'}$ et $\alpha_{k,l}$ sont définis par :

$$r_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_1(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.18}$$

$$r_k^{'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_2(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.19}$$

$$\alpha_{k,l} = 2\mathrm{Re}\left\{(-i)^{(k-l)}r_{k-l} + i^{(k+l)}r_{k-l}^{'*}\right\} \tag{A.3.20}$$

avec : $r_k \neq 0$ et $r_k^{'} \neq 0$ pour $|k| \leq L_i$ (voir la définition de L_i en section 1.2.2)

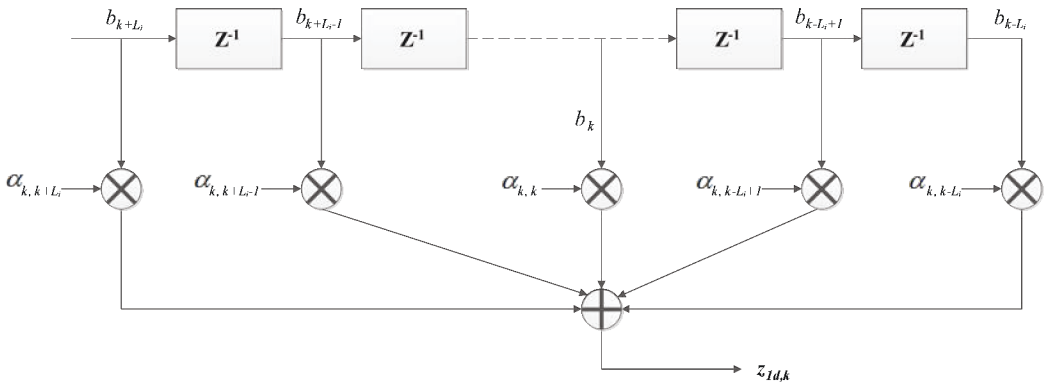


FIGURE A.23 – Générateur des échantillons SOI modulation quasi-rectiligne

2. **Interférence**

A partir des équations (1.2.22) et (A.3.16), on peut exprimer les échantillons interférence comme suit :

$$\begin{aligned} z_{2d,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_{(k)}^{H}(f)\widetilde{\mathbf{j}}(f)e^{i2\pi kfT}df \\ &= 2\sum_{l} c_l \mathrm{Re}\left\{(-i)^{(k-l)}r_{j,(k-l)} + i^{(k+l)}r_{j,(k-l)}^{'*}\right\} \\ &= 2c_k \mathrm{Re}\left\{r_{j,0} + (-1)^k r_{j,0}^{'*}\right\} + 2\sum_{l\neq k} c_l \mathrm{Re}\left\{(-i)^{(k-l)}r_{j,(k-l)} + i^{(k+l)}r_{j,(k-l)}^{'*}\right\} \\ &= c_k\beta_{k,k} + \sum_{l\neq k} c_l\beta_{k,l} \end{aligned} \tag{A.3.21}$$

où $r_{j,k}$, $r'_{j,k}$ et $\beta_{k,l}$ sont définis par :

$$r_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_{j1}(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.22}$$

$$r'_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_{j2}(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.23}$$

$$\beta_{k,l} = 2\mathrm{Re}\left\{(-i)^{(k-l)}r_{j,(k-l)} + i^{(k+l)}r'^{*}_{j,(k-l)}\right\} \tag{A.3.24}$$

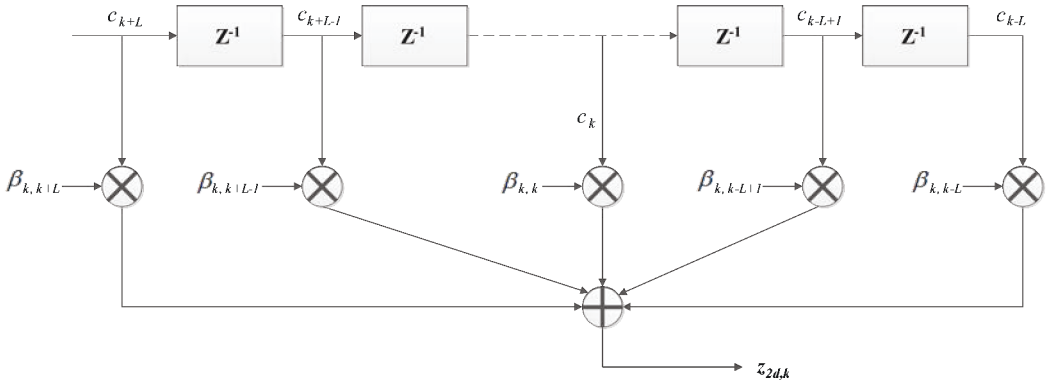


FIGURE A.24 – Générateur des échantillons interférence modulation quasi-rectiligne

avec :

- $r_{j,k} \neq 0$ et $r'_{j,k} \neq 0$ pour $|k| \leq L_i$ (L_i : représente l'étendu de l'interférence inter-symboles brouilleur, perçue par le récepteur)

- $\mathbf{g}_{j1}(f) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_j(f) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{g}_{j2}(f) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_j^*(-f) \end{bmatrix}$ où $\mathbf{g}_j(f) = v_j(f)\mathbf{h}_j(f)$.

3. **Bruit de fond gaussien**

Les échantillons du bruit gaussien à l'entrée de l'organe de décision de Viterbi sont définis par :

$$n_{G,k} = 2\mathrm{Re}\left\{(-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f)\widetilde{n}_G(f)e^{i2\pi fkT}df\right\} \tag{A.3.25}$$

$$= 2\mathrm{Re}\left\{(-i)^k n_k\right\} \tag{A.3.26}$$

avec : $\widetilde{\mathbf{n}}_G(f) = [\mathbf{n}_G^T(f), \mathbf{n}_G^H(-f)]^T$ et $\mathbf{n}_G(t) \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{0}, N_0\mathbf{I}_N\delta(\tau), \mathbf{0})$

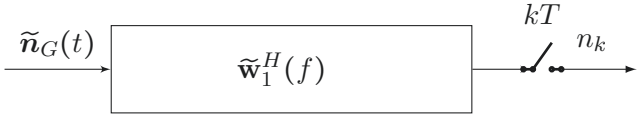


FIGURE A.25 – Echantillons n_k du bruit de fond

La séquence n_k est une suite de variable aléatoire complexe gaussienne, centré, non circulaire, stationnaire et colorée. Les densités spectrales de puissance, en utilisant les résultats de la section A.1.4, s'écrivent :

$$r_{n_k}(f) = \mathbf{w}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}_G}(f)\mathbf{w}_1(f) \tag{A.3.27}$$

$$c_{n_k}(f) = \mathbf{w}_1^H(f)\mathbf{C}_{\widetilde{n}_G}(f)\mathbf{w}_1^*(-f) \tag{A.3.28}$$

pour un bruit de fond $\widetilde{\mathbf{n}}_G(t) \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{0}, N_0\mathbf{I}_{2N}\delta(\tau), \mathbf{0})$, on a :

$$r_{n_k}(f) = N_0\|\mathbf{w}_1^H(f)\|^2 \tag{A.3.29}$$

$$c_{n_k}(f) = N_0\mathbf{w}_1^H(f)\mathbf{J}_{2N}\mathbf{w}_1^*(-f) \tag{A.3.30}$$

avec : $\mathbf{J}_{2N} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Les fonctions d'autocorrélation de la séquence n_k s'écrivent :

$$r_{n_k}(k) = \mathrm{E}[n_l n_{l-k}^*] \tag{A.3.31}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} r_{n_k}(f)e^{i2\pi fkT}df \tag{A.3.32}$$

$$= N_0\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-2}(f)\mathbf{g}_1(f)e^{i2\pi fkT}df \tag{A.3.33}$$

$$c_{n_k}(k) = \mathrm{E}[n_l n_{l-k}] \tag{A.3.34}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c_{n_k}(f)e^{i2\pi fkT}df \tag{A.3.35}$$

$$= N_0\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{J_{2N}}\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{*-1}(-f)\mathbf{g}_1^*(-f)e^{i2\pi fkT}df \tag{A.3.36}$$

avec : $r_{n_k}(k) \neq 0$ pour $k \in [-Q_r; Q_r]$ et $c_{n_k}(k) \neq 0$ pour $k \in [-Q_c; Q_c]$

On définit le vecteur composite $\bar{n}_k$ comme suit :

$$\bar{\mathbf{n}}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{n_k\} \\ \mathrm{Im}\{n_k\} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_k \\ n_k^* \end{bmatrix} \tag{A.3.37}$$

$$= \mathbf{T}\widetilde{\mathbf{n}}_k \in \mathbb{R}^2 \tag{A.3.38}$$

La matrice de covariance du vecteur composite $\bar{\mathbf{n}}_k$ est reliée à la matrice de covariance du vecteur étendu $\widetilde{\mathbf{n}}_k$ par la relation :

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{n}}_k}(k) = \mathbf{T}\mathbf{R}_{\widetilde{\mathbf{n}}_k}(k)\mathbf{T}^H \tag{A.3.39}$$

avec : $\mathbf{R}_{\widetilde{\mathbf{n}}_k}(k) \triangleq \begin{bmatrix} r_{n_k}(k) & c_{n_k}(k) \\ c_{n_k}^*(k) & r_{n_k}^*(k) \end{bmatrix}$

La transformée en z de la matrice de covariance du vecteur composite $\bar{n}_k$ s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{n}}_k}(z) \triangleq \sum_{l=-L}^{L} \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{n}}_k}(l) z^{-l} \tag{A.3.40}$$

$$= \mathbf{G}^T(z^{-1})\mathbf{G}(z) \tag{A.3.41}$$

L'expression (A.3.41) représente la *factorisation spectrale multidimensionnelle à temps discret* A.2.4 de la matrice spectrale du vecteur composite $\bar{\mathbf{n}}_k$.

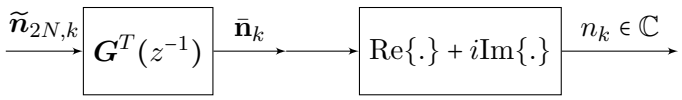


FIGURE A.26 – Structures du générateur des échantillons du bruit gaussien n_k avec une entrée : $\widetilde{\boldsymbol{n}}_{2N,k} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(\mathbf{0}, \mathbf{I_{2N}}, \mathbf{0})$

Il faut noter que la séquence d'échantillons $n_{G,k} = 2\mathrm{Re}\left\{(-i)^k n_k\right\}$ représente le bruit présent à l'entrée de l'organe de décision.

4. **Métrique de Viterbi**

$$\Lambda(b_0, ..., b_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \mathrm{Re}\left\{r_{d,k-k'} + (-1)^k r'^{*}_{d,k-k'}\right\} - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k} \tag{A.3.42}$$

$$\Lambda(b_0, ..., b_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{k'=0}^{K-1} b_k b_{k'} \mathrm{Re}\left\{(-i)^{k-k'} r_{k-k'} + (i)^{k+k'} r'^{*}_{k-k'}\right\} - \sum_{k=0}^{K-1} b_k z_{d,k} \tag{A.3.43}$$

avec :

$$r_{d,k} = (-i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_1(f) e^{i2\pi k f T} df \tag{A.3.44}$$

$$r'_{d,k} = (i)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f) \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f) \mathbf{g}_2(f) e^{i2\pi k f T} df \tag{A.3.45}$$

A.3.3 Scénario 3 : SOI modulation linéaire à symboles complexes

La structure du récepteur SIMO MLSE pour une modulation linéaire à symboles complexes est la suivante :

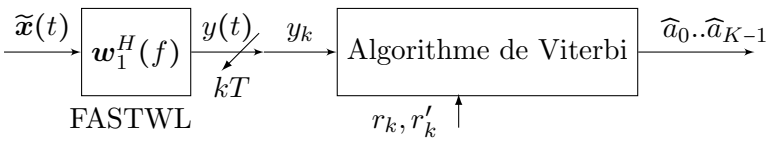


FIGURE A.27 – Structure du récepteur MLSE non circulaire pour symboles complexes.

Génération des observations :

le résumé exhaustif dans (1.2.8) correspond à la séquence $\{y_k\}_{k=0,\ldots,K-1}$ définie par :

$$y_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{x}}(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.46}$$

avec : $\mathbf{w}_1(f) \triangleq \mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_1(f)$ et $\mathbf{g}_1(f) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}(f) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

L'observation y_k peut être décomposée en trois séquences représentant les contributions : SOI, interférence et bruit gaussien :

$$\begin{aligned} y_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f)\left[\widetilde{\mathbf{s}}(f) + \widetilde{\mathbf{j}}(f) + \widetilde{\mathbf{n}}_G(f)\right]e^{i2\pi kfT}df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f)\widetilde{\mathbf{s}}(f)e^{i2\pi kfT}df + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f)\widetilde{\mathbf{j}}(f)e^{i2\pi kfT}df + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f)\widetilde{\mathbf{n}}_G(f)e^{i2\pi kfT}df \\ &= y_{1,k} + y_{2,k} + n_{G,k} \end{aligned} \tag{A.3.47}$$

1. **SOI**

   A partir des équations (A.3.47) et (1.2.9), on exprimer les échantillons SOI :

   $$y_{1,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f)\widetilde{\mathbf{s}}(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.48}$$

   $$y_{1,k} = a_k r_0 + a_k^* r_0' + \sum_{l\neq k}[a_l r_{k-l} + a_l^* r'_{k-l}] \tag{A.3.49}$$

   avec :

   $$r_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_1(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.50}$$

   $$r_k^{'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_2(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.51}$$

   avec : $r_k \neq 0$ et $r_k^{'} \neq 0$ pour $|k| \leq L_i$ (voir la définition de L_i en section 1.2.2)

2. **Interférence**

   Pour une interférence en modulation linéaire rectiligne et à partir les expression (1.2.9) et (A.3.47), la séquence des échantillons correspondant s'exprime :

   $$y_{2,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}_1^H(f)\widetilde{\mathbf{j}}(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.52}$$

   $$y_{2,k} = c_k r_{j,0} + \sum_{l\neq k}[c_l r_{j,(k-l)}] \tag{A.3.53}$$

   avec :

   $$r_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{g}}_j(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.54}$$

   et $\widetilde{\mathbf{g}}_j(f) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_j(f) \\ \mathbf{g}_j^*(-f) \end{bmatrix}$; $\mathbf{g}_j(f) \triangleq v_j(f)\mathbf{h}_j(f)$

3. **Bruit de fond gaussien**

   La séquence des échantillons $n_{G,k}$ de l'expression (A.3.47) est générée de la même façon que la séquence n_k de l'expression (A.3.25) du cas d'une modulation SOI quasi-rectiligne.

A.3.4 Algorithme de Viterbi modifié

La séquence $\{a_k\}_{k=0,...,K-1}$ qui minimise le critère (1.2.4) est de façon équivalente donnée par la minimisation de la métrique suivante :

$$\Lambda(a_0,..,a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{k'=0}^{K-1} \mathrm{Re}(a_k^* a_{k'} r_{k-k'} + a_k a_{k'} r'^*_{k-k'}) - 2\sum_{k=0}^{K-1} \mathrm{Re}(a_k^* y_k), \tag{A.3.55}$$

où y_k, r_k et r'_k sont donnés fréquentiellement par

$$y_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\widetilde{\mathbf{x}}(f)e^{i2\pi kfT}df \tag{A.3.56}$$

et

$$r_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_1(f)e^{i2\pi kfT}df, \tag{A.3.57}$$

$$r'_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_1^H(f)\mathbf{R}_{\widetilde{n}}^{-1}(f)\mathbf{g}_2(f)e^{i2\pi kfT}df, \tag{A.3.58}$$

avec : $r_k = r'_k = 0$ pour $|k| > L_i$ et

$$\mathbf{g}_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{g}(f) = v(f)\mathbf{h}(f).$$

En prenant en considération l'effet de bord $a_{1-L_i} = ... = a_0 = 0$ et $a_{K+1} = ... = a_{K+L_i} = 0$, le premier terme de l'expression (A.3.55) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{k'=0}^{K-1}\mathrm{Re}(a_k^* a_{k'} r_{k-k'} + a_k a_{k'} r_{k-k'}^{'*}) &= \sum_{l=-L_i}^{L_i}\left(\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}(a_k^* a_{k-l} r_l + a_k a_{k-l} r_l^{'*})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}\left(|a_k^2| r_0 + a_k^2 r_0^{'}\right) + \sum_{l=1}^{L_i}\left(\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}(a_k^* a_{k-l} r_l + a_k a_{k-l} r_l^{'*})\right) \\
&+ \sum_{l=1}^{L_i}\left(\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}(a_k^* a_{k+l} r_l + a_k a_{k+l} r_l^{'*})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}\left(|a_k^2| r_0 + a_k^2 r_0^{'}\right) + \sum_{l=1}^{L_i}\left(\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}(a_k^* a_{k-l} r_l + a_k a_{k-l} r_l^{'*})\right) \\
&+ \sum_{l=1}^{L_i}\left(\sum_{k'=1+l}^{K+l}\mathrm{Re}(a_{k'-l}^* a_{k'} r_{-l} + a_{k'-l} a_{k'} r_{-l}^{'*})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}\left(|a_k^2| r_0 + a_k^2 r_0^{'}\right) + \sum_{l=1}^{L_i}\left(\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}(a_k^* a_{k-l} r_l + a_k a_{k-l} r_l^{'*})\right) \\
&+ \sum_{l=1}^{L_i}\left(\sum_{k'=1}^{K}\mathrm{Re}(a_{k'} a_{k'-l}^* r_{-l} + a_{k'} a_{k'-l} r_{-l}^{'*})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}\left(|a_k^2| r_0 + a_k^2 r_0^{'}\right) + \sum_{l=1}^{L_i}\left(\sum_{k=1}^{K}\mathrm{Re}(a_k^* a_{k-l} r_l + a_k a_{k-l} r_l^{'*})\right) \\
&+ \sum_{l=1}^{L_i}\left(\sum_{k'=1}^{K}\mathrm{Re}(a_{k'}^* a_{k'-l} r_{-l}^* + a_{k'}^* a_{k'-l}^* r_{-l}^{'})\right).
\end{aligned} \tag{A.3.59}$$

Selon la définition des variables r_k et r'_k (A.3.57),(A.3.58) qui sont nécessaires au calcul des métriques de branche de l'algorithme de Viterbi modifié, on a les relations suivantes :

$$r_{-k} = r_k^* \quad \text{et} \quad r'_{-k} = r'_k \tag{A.3.60}$$

Ce dernier résultat en prenant en compte l'effet de bord permet de récrire le premier terme de l'expression (A.3.55) comme suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{k'=0}^{K-1}\mathrm{Re}(a_k^* a_{k'} r_{k-k'} + a_k a_{k'} r_{k-k'}^{'*}) &= \sum_{k=1}^{K}\left[\mathrm{Re}\left(|a_k^2| r_0 + a_k^2 r_0^{'}\right) + \sum_{l=1}^{L_i}\left(\mathrm{Re}(a_k^* a_{k-l}[r_l + r_{-l}^*] + a_k a_{k-l}[r_l^{'*} + r_{-l}^{'*}])\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{K}\left[\mathrm{Re}\left(|a_k^2| r_0 + a_k^2 r_0^{'}\right) + 2\sum_{l=1}^{L_i}\mathrm{Re}(a_k^* a_{k-l} r_l + a_k^* a_{k-l}^* r'_l)\right]
\end{aligned} \tag{A.3.61}$$

Par suite la métrique (A.3.55) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Lambda(a_0, .., a_{K-1}) = \sum_{k=0}^{K-1}\left[\underbrace{\mathrm{Re}\left\{a_k^*\left((a_k r_0 + a_k^* r_0^{'}) + 2\sum_{l=1}^{L_i}(a_{k-l} r_l + a_{k-l}^* r'_l)\right) - 2a_k^* y_k\right\}}_{\lambda(\sigma_k, a_k, y_k)}\right] \tag{A.3.62}$$

d'où l'écriture récursive suivante :

$$\Lambda(a_0,..,a_k) = \Lambda(a_0,..,a_{k-1}) + \lambda(\sigma_k, a_k, y_k) \tag{A.3.63}$$

avec : $\sigma_k \triangleq (a_{k-1},...,a_{k-L_i})$. Pour le cas des modulations linéaires à symboles complexes, rectilignes et quasi-rectilignes, toutes les structures développées du récepteur SIMO MLSE non-circulaire sont basées sur la minimisation de la métrique générale (A.3.61). La minimisation de cette dernière consiste à trouver parmi tous les chemins possibles d'un treillis, le chemin dont la métrique associée $m(\sigma_{début};\sigma_{fin})$ est minimale.

Précisément, on définit le treillis de la figure A.28 comme un diagramme représentant toutes les trajectoires [5], de l'instant $k = 0$ à $k = K-1$, d'une chaîne de Markov dont l'état à l'instant k, noté σ_k, prend les valeurs $\{S_i\}_{i=1}^{N_\sigma}$.

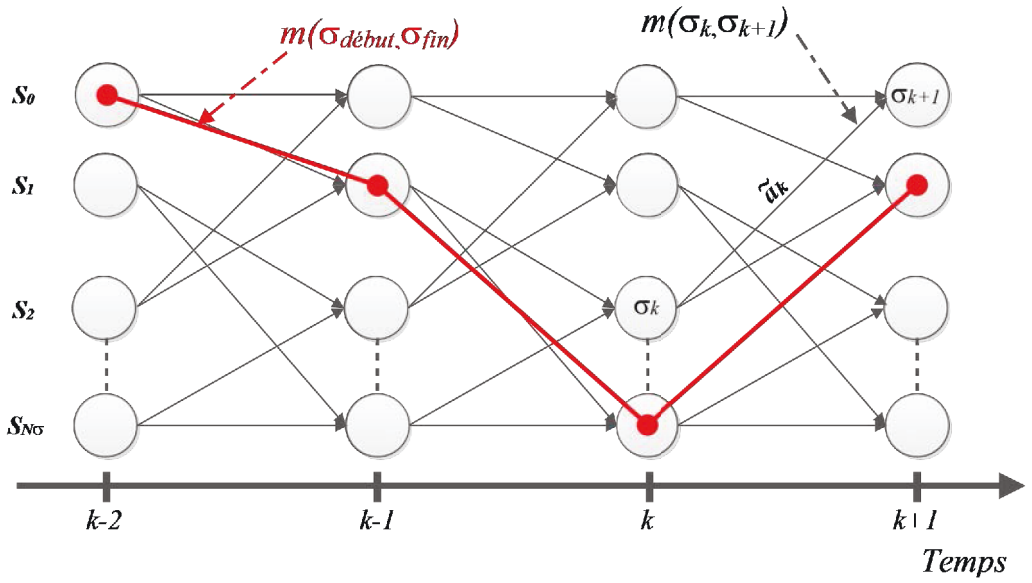


FIGURE A.28 – Treillis à $N_\sigma = (card\mathcal{A})^{L_i}$ états pour la détection au sens ML d'un signal modulée linéairement à deux états $(card\mathcal{A} = 2)$ [6]et transmis à travers un canal sélectif en fréquence (étendue du canal discret équivalent = $L_i + 1$).

Sachant que chaque branche du treillis est munie d'une métrique associée $\{m(\sigma_k;\sigma_{k+1})\}_{k=0}^{K-1}$, la métrique totale, notée $m(\sigma_0;\sigma_{K-1})$, d'un trajet, de l'instant $k = 0$ à $k = K-1$ traversant ainsi le treillis de bout en bout, est égale à la somme des métriques de toutes les branches constituant ce trajet. Formellement, on veut minimiser cette métrique :

$$\begin{aligned}\Lambda(a_0,...,a_{K-1}) &= \sum_{k=0}^{K-1} m(\sigma_k,\sigma_{k+1}) \\ &= m(\sigma_0;\sigma_{K-1})\end{aligned} \tag{A.3.64}$$

5. Il faut noter qu'il y a une correspondance biunivoque entre la séquence des K états $\{\sigma_k\}_{k=0}^{K-1}$ et les trajectoires du treillis.

6. $\mathcal{A}$ représente l'ensemble des symboles $\{a_k\}$ de la modulation considérée.

Les notions de symbole courant a_k et de l'état du canal σ_k à l'instant k sont définis, conformément au schéma suivant :

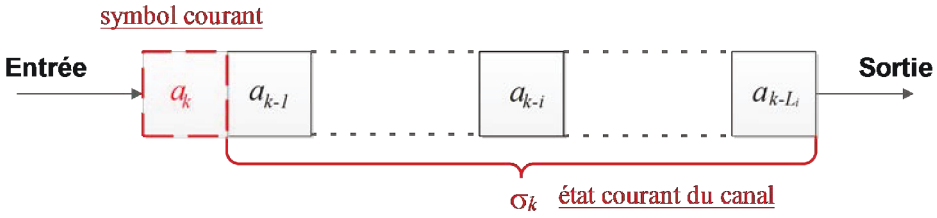


FIGURE A.29 – Symbol courant a_k et état courant du canal σ_k

Pour réduire le délai de prise de décision (égale à $K \times T$) et la complexité qui est proportionnelle, d'une manière exponentielle, à la taille de la séquence transmise $\{a_k\}_{k=0}^{K-1}$ (de même pour l'espace mémoire alloué au traitement) ; la prise de décision n'est pas réalisée après la fin de la transmission de la totalité de la séquence $\{a_k\}_{k=0}^{K-1}$ mais au bout d'un temps $D \times T < K \times T$ sous la condition que $D \gg L_i + 1$, du fait de la décorrélation des symboles futures avec les symboles déjà transmis, garantissant ainsi une troncature dont la dégradation des performances impliquée (à cause de l'effet de bord) soit acceptable.

Annexe B

Annexe du chapitre 2

B.1 Preuve des relations (2.4.13), (2.4.14), (2.4.15) et (2.4.16)

Pour des vecteurs directionnels arbitraires $\mathbf{s} = (1, e^{i\omega_s})^T$ et $\mathbf{j} = (1, e^{i\omega_j})^T$ avec $\omega_s, \omega_j \in [-\pi, +\pi]$, il est simple de prouver que $\alpha = |\cos\left(\frac{\omega_j - \omega_s}{2}\right)|$ et que pour $\mathbf{w}_f = \frac{\mathbf{s}}{2}$ et $\mathbf{u}_1 = \frac{ie^{i\phi}\text{sign}(\omega_s - \omega_j)}{\sqrt{2}}(e^{i(\omega_j - \omega_s)/2}, -e^{i(\omega_j + \omega_s)/2}))^T$ on a le modèle simplifié suivant :

$$y_f(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{w}_f^H \mathbf{x}(t) = s(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha j'(t) + n_1(t)\right) \tag{B.1.1}$$

$$z(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{u}_1^H \mathbf{x}(t) = \beta j'(t) + n_2(t), \tag{B.1.2}$$

avec $j'(t) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{2}\ j(t)e^{-i\phi}$ ($\frac{\mathbf{s}^H\mathbf{j}}{2} = \alpha e^{i\phi}$) où $n_1(t)$ et $n_2(t)$ sont indépendants, centrés, circulaires et Gaussiens de variance η_2.

Par sa construction, la structure équivalente GSC du beamformer MVDR de Volterra et selon le théorème de projection orthogonal, nous permet d'écrire :

$$<\text{E}|y_f^2(t)|> = <\text{E}|\widehat{y}_f^2(t)|> + <\text{E}|y^2(t)|> .$$

Le SINR à la sortie du beamformer est donné par :

$$\begin{aligned} \text{SINR}_{\text{MVDR}} &= \frac{<\text{E}|s^2(t)|>}{<\text{E}|y^2(t)| > - <\text{E}|s^2(t)|>} = \frac{<\text{E}|s^2(t)|>}{<\text{E}|y_f^2(t)|> - <\text{E}|\widehat{y}_f^2(t)|> - <\text{E}|s^2(t)|>} \\ &= \frac{\pi_s}{\alpha^2\pi_j + \frac{\eta_2}{2} - <\text{E}|\widehat{y}_f^2(t)|>}. \end{aligned} \tag{B.1.3}$$

Pour calculer $<\text{E}|\widehat{y}_f^2(t)|>$, on utilise la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt du couple $(z(t), z_{q,3}(t))$, ce qui permet d'avoir des variables aléatoires non-corrélées et de variance unité :

$$v_1(t) = \frac{z(t)}{<\text{E}|z^2(t)|>} \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{z_{q,3}(t) - \left(\frac{<\text{E}(z^*(t)z_{q,3}(t))>}{<\text{E}|z^2(t)|>}\right) z(t)}{\sqrt{< \text{E}\left(\left|z_{q,3}(t) - \left(\frac{<\text{E}(z^*(t)z_{q,3}(t))>}{<\text{E}|z^2(t)|>}\right) z(t)\right|^2 >\right)}}. \tag{B.1.4}$$

Dans cette nouvelle base, la sortie du filtrage optimal (au sens du critère de l'erreur quadratique moyenne,) d'entrée $\widetilde{\mathbf{z}}(t) = (z(t), z_{q,3}(t))^T$ est donné par :

$$\widehat{y}_f(t) = <\mathrm{E}\left[v_1^*(t)y_f(t)\right]> v_1(t) + <\mathrm{E}\left[v_2^*(t)y_f(t)\right]> v_2(t), \tag{B.1.5}$$

ce qui donne $<\mathrm{E}|\widehat{y}_f^2(t)|> = |<\mathrm{E}\left[v_1^*(t)y_f(t)\right]>|^2 + |<\mathrm{E}\left[v_2^*(t)y_f(t)\right]>|^2$. Il faut noter que pour le beamformer de Capon $\widehat{y}_f(t) = <\mathrm{E}\left[v_1^*(t)y_f(t)\right]> v_1(t)$ implique que $<\mathrm{E}|\widehat{y}_f^2(t)|> = |<\mathrm{E}\left[v_1^*(t)y_f(t)\right]>|^2$, et donc le SINR en sortie est donné par :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{Capon}} = \frac{\pi_s}{\alpha^2\pi_j + \frac{\eta_2}{2} - |<\mathrm{E}\left[v_1^*(t)y_f(t)\right]>|^2}. \tag{B.1.6}$$

Par conséquent, en comparant les expressions $\mathrm{SINR}_{\mathrm{MVDR}}$ et $\mathrm{SINR}_{\mathrm{Capon}}$ données par (B.1.3) et (B.1.6), on déduit que le gain $G_{\mathrm{LC}_q/\mathrm{L}}$ en SINR par rapport au beamformer de Capon satisfait la relation suivante :

$$G_{\mathrm{LC}_q/\mathrm{L}}^{-1} = 1 - \frac{\mathrm{SINR}_{\mathrm{Capon}}}{\pi_s}|<\mathrm{E}\left[v_2^*(t)y_f(t)\right]>|^2 \leq 1. \tag{B.1.7}$$

En remplaçant respectivement $z(t)$ donné par (B.1.2) dans (B.1.4) et $y_f(t)$ par (B.1.1), les valeurs de $|<\mathrm{E}\left[v_2^*(t)y_f(t)\right]>|^2$ sont déduites pour $q = 0, 1, 2, 3$ après simplification et en utilisant l'expression :

$$\mathrm{SINR}_{\mathrm{Capon}} = \frac{2\pi_s}{\eta_2}\left(1 - \frac{\epsilon_j\alpha^2}{\epsilon_j + 1}\right), \tag{B.1.8}$$

les expressions (2.4.13), (2.4.14), (2.4.15) et (2.4.16) sont démontrées.

B.2 Application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz

L'espace de Hilbert des processus aléatoires du second ordre est muni du produit scalaire défini par :

$$(x_t, y_t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} < \mathrm{E}(x_t y_t^*) >$$

La *norme* ce déduit du produit scalaire par :

$$||x_t|| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{< \mathrm{E}(|x_t|^2) >}$$

L'*inégalité de Cauchy-Schwartz* a pour expression :

$$|(x_t, y_t)|^2 \leq ||x_t||^2 ||y_t||^2 \tag{B.2.1}$$

L'égalité dans la dernière expression est vérifiée si et seulement si $x_t = cy_t$ avec $c \in \mathbb{C}$. Par application de (B.2.1) à différents couples (x_t, y_t) de puissance ou de puissance conjuguées de j_t, on obtient différentes inégalités :

- **Pour $G_{\text{L-C}(1)}$:**

$$|<\mathrm{E}(|j_t^3||j_t|)>|^2 \leq (<\mathrm{E}(|j_t^6|)>)(<\mathrm{E}(|j_t^2|)>)$$

Selon les notations adoptées au paragraphe 2.2.2, on peut écrire :

$$\kappa_{j,c}^2 \leq \chi_{j,c} \tag{B.2.2}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \kappa_{j,c}^2 = \chi_{j,c} &\Leftrightarrow |j_t^3| = c|j_t| \\ &\Leftrightarrow |j_t|[|j_t^2| - c] = 0 \\ &\Leftrightarrow |j_t^2| = c \quad \text{ou} \quad j_t = 0 \end{aligned} \tag{B.2.3}$$

Ce cas représente un cas particulier d'une interférence impulsive de Bernoulli circulaire ou non-circulaire, pour $j_t = 0$ avec probabilité nulle et $|j_t| = c$ avec une probabilité égale à l'unité ou bien une modulation à enveloppe constante.

- **Pour $G_{\text{L-C}(0)}$ et $G_{\text{L-C}(2)}$:**

$$|<\mathrm{E}(j_t^3 j_t^*)>|^2 \leq (<\mathrm{E}(|j_t^6|)>)(<\mathrm{E}(|j_t^2|)>)$$

Selon les notations adoptées au paragraphe 2.2.2, on peut écrire :

$$|\kappa_{j,nc,2}|^2 \leq \chi_{j,c} \tag{B.2.4}$$

et donc

$$\begin{aligned} |\kappa_{j,nc,2}|^2 = \chi_{j,c} &\Leftrightarrow j_t^3 = cj_t \\ &\Leftrightarrow j_t[j_t^2 - c] = 0 \\ &\Leftrightarrow j_t^2 = c \quad \text{ou} \quad j_t = 0 \end{aligned} \tag{B.2.5}$$

Ce cas représente par exemple une interférence BPSK ou une interférence impulsive de Bernoulli rectiligne.

- **Pour $G_{\text{L-C}(3)}$:**

$$|<\mathrm{E}(j_t^3 (j_t^*)^*)>|^2 \leq (<\mathrm{E}(|j_t^6|)>)(<\mathrm{E}(|j_t^2|)>)$$

Selon les notations adoptées au paragraphe 2.2.2, on peut écrire :

$$|\kappa_{j,nc,1}|^2 \leq \chi_{j,c} \tag{B.2.6}$$

sans perte de généralité, on prend : $c \stackrel{\text{def}}{=} r_0 e^{i\theta_0}$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} |\kappa_{j,nc,1}|^2 = \chi_{j,c} \quad &\Leftrightarrow \quad j_t^3 = cj_t^* \\ &\Leftrightarrow \quad |j_t|^3 e^{i3\arg(j_t)} = c|j_t| e^{-i\arg(j_t)} \\ &\Leftrightarrow \quad |j_t|\left[|j_t|^2 e^{i4\arg(j_t)} - r_0 e^{i\theta_0}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad j_t = 0 \quad \text{ou} \quad j_t^4 = c. \end{aligned} \tag{B.2.7}$$

Ce cas représente par exemple une interférence BPSK ou QPSK.

B.3 Calcul des moments temporels de l'enveloppe complexe d'une modulation linéaire

B.3.1 Preuves des relations (2.2.12) à (2.2.18)

Nous considérons l'enveloppe complexe d'une modulation linéaire,

$$u(t) = \mu e^{i\phi} \sum_k a_k v(t - kT - t_0)$$

sous l'hypothèse d'une suite de symboles a_k i.i.d. et centrés où nous avons les différentes relations :

Coefficient de non-circularité au second ordre :

$$\mathrm{E}[|u^2(t)|] = \mu^2 \mathrm{E}[|a_k^2|] \sum_k v^2(t-kT-t_0) \tag{B.3.1}$$

$$\mathrm{E}[u^2(t)] = \mu^2 \mathrm{E}[a_k^2] e^{i2\phi} \sum_k v^2(t-kT-t_0) \tag{B.3.2}$$

$$\gamma_u \overset{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}[u^2(t)] >}{< \mathrm{E}|u^2(t)| >} = e^{i2\phi}\gamma_a \tag{B.3.3}$$

Moments temporels du quatrième ordre :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[u^4(t)] &= \mu^4 e^{i4\phi} \left[\sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \mathrm{E}[a_k a_l a_m a_n] v(t-kT-t_0) v(t-lT-t_0) v(t-mT-t_0) v(t-nT-t_0) \right] \\ &= \mu^4 e^{i4\phi} \left[\mathrm{E}[a_k^4] \sum_k v^4(t-kT) + 3\mathrm{E}[a_k^2]\mathrm{E}[a_l^2] \sum_{k\neq l} v^2(t-kT-t_0) v^2(t-lT-t_0) \right]\end{aligned} \tag{B.3.4}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{u,nc,1} &\overset{\text{def}}{=} \frac{<\mathrm{E}[u^4(t)]>}{(<\mathrm{E}|u^2(t)|>)^2} \\ &= e^{i4\phi} \left[\frac{\mathrm{E}[a_k^4]}{\mathrm{E}[|a_k^2|])^2} \quad \frac{< \sum_k v^4(t-kT-t_0) >}{(< \sum_k v^2(t-kT-t_0) >)^2} + 3 \frac{(\mathrm{E}[a_k^2])^2}{(\mathrm{E}[|a_k^2|])^2} \frac{< \sum_{k\neq l} v^2(t-kT-t_0) v^2(t-lT-t_0) >}{(< \sum_k v^2(t-kT-t_0) >)^2} \right] \\ &= e^{i4\phi} \left[\kappa_{a,nc,1} r_{v,1} + 3\gamma_a^2 r_{v,2} \right]\end{aligned} \tag{B.3.5}$$

avec :

$$r_{v,1} \overset{\text{def}}{=} \frac{< \sum_k v^4(t-kT-t_0) >}{(< \sum_k v^2(t-kT-t_0) >)^2} \tag{B.3.6}$$

$$r_{v,2} \overset{\text{def}}{=} \frac{< \sum_{k\neq l} v^2(t-kT-t_0) v^2(t-lT-t_0) >}{(< \sum_k v^2(t-kT-t_0) >)^2}. \tag{B.3.7}$$

$$\mathrm{E}[u^4(t)] = \mu^4 e^{i4\phi}\left[\sum_k\sum_l\sum_m\sum_n \mathrm{E}[a_k a_l a_m a_n] v(t-kT-t_0)v(t-lT-t_0)v(t-mT-t_0)v(t-nT-t_0)\right]$$
$$= \mu^4 e^{i4\phi}\left[\mathrm{E}[a_k^4]\sum_k v^4(t-kT-t_0) + 3\mathrm{E}[a_k^2]\mathrm{E}[a_l^2]\sum_{k\neq l} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)\right] \tag{B.3.8}$$

$$\mathrm{E}[|u^4(t)|] = \mu^4\left[\sum_k\sum_l\sum_m\sum_n \mathrm{E}[a_k a_l^* a_m a_n^*] v(t-kT-t_0)v(t-lT-t_0)v(t-mT-t_0)v(t-nT-t_0)\right] \tag{B.3.9}$$

$$\mathrm{E}[|u^4(t)|] = \mu^4\left[\mathrm{E}[|a_k^4|]\sum_k v^4(t-kT) + 2\left[\mathrm{E}[|a_k^2|]\right]^2\sum_{k\neq l} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)\right.$$
$$\left. +\mathrm{E}[a_k^2]\mathrm{E}[a_k^{2*}]\sum_{k\neq l} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)\right] \tag{B.3.10}$$

$$\kappa_{u,c} \overset{\text{def}}{=} \frac{<\mathrm{E}[|u^4(t)|]>}{(<\mathrm{E}[|u^2(t)|]>)^2} = \frac{\mathrm{E}[|a_k^4|]}{(\mathrm{E}[|a_k^2|])^2}\ \frac{<\sum_k v^4(t-kT-t_0)>}{(<\sum_k v^2(t-kT-t_0)>)^2}$$
$$+\left[2\frac{(\mathrm{E}[|a_k^2|])^2}{(\mathrm{E}[|a_k^2|])^2} + \frac{\mathrm{E}[a_k^2]\mathrm{E}[a_k^{2*}]}{(\mathrm{E}[|a_k^2|])^2}\right]\frac{<\sum_{k\neq l} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)>}{(<\sum_k v^2(t-kT-t_0)>)^2} \tag{B.3.11}$$

$$\kappa_{u,c} = \kappa_{a,c} r_{v,1} + (2+|\gamma_a^2|) r_{v,2} \tag{B.3.12}$$

$$\mathrm{E}[u^3(t)u^*(t)] = \mu^4 e^{i2\phi}\left[\sum_k\sum_l\sum_m\sum_n \mathrm{E}[a_k a_l a_m a_n^*] v(t-kT-t_0)v(t-lT-t_0)v(t-mT-t_0)v(t-nT-t_0)\right]$$
$$= \mu^4 e^{i2\phi}\left[\mathrm{E}[a_k^3 a_k^*]\sum_k v^4(t-kT) + 3\mathrm{E}[a_k^2]\mathrm{E}[|a_k^2|]\sum_{k\neq l} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)\right] \tag{B.3.13}$$

$$\kappa_{u,nc,2} \overset{\text{def}}{=} \frac{<\mathrm{E}[u^3(t)u^*(t)]>}{(<\mathrm{E}[|u^2(t)|]>)^2} = e^{i2\phi}\left[\kappa_{a,nc,2} r_{v,1} + 3\gamma_a r_{v,2}\right] \tag{B.3.14}$$

Moments temporels du sixième ordre :

$$\mathrm{E}[u^6(t)] = \mu^6 e^{i6\phi}\left[\sum_k\sum_l\sum_m\sum_n\sum_p\sum_q \mathrm{E}[a_k a_l a_m a_n a_p a_q]\right.$$
$$\left.\times v(t-kT-t_0)v(t-lT-t_0)v(t-mT-t_0)v(t-nT-t_0)v(t-pT-t_0)v(t-qT-t_0)\right] \tag{B.3.15}$$

$$\mathrm{E}[u^6(t)] = \mu^6 e^{i6\phi}\left[\mathrm{E}[a_k^6]\sum_k v^6(t-kT) + 15\mathrm{E}[a_k^4]\mathrm{E}[a_k^2]\sum_{k\neq l} v^4(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)\right.$$
$$\left. +15\left[\mathrm{E}[a_k^2]\right]^3\sum_{k\neq l, l\neq m, k\neq m} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)v^2(t-mT-t_0)\right] \tag{B.3.16}$$

$$\chi_{u,nc,1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}[u^6(t)] >}{(< \mathrm{E}[|u^2(t)|] >)^3} = e^{i6\phi}\left[\chi_{a,nc,1} r_{v,3} + 15\gamma_a \kappa_{a,nc,1} r_{v,4} + 15\gamma_a^3 r_{v,5}\right] \tag{B.3.17}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[|u^6(t)|] = \mu^6 \Bigg[& \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \mathrm{E}[a_k a_l^* a_m a_n^* a_p a_q^*] \\ & \times v(t-kT-t_0) v(t-lT-t_0) v(t-mT-t_0) v(t-nT-t_0) v(t-pT-t_0) v(t-qT-t_0) \Bigg]\end{aligned} \tag{B.3.18}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[|u^6(t)|] = \mu^6 \Bigg[& \mathrm{E}[|a_k^6|] \sum_k v^6(t-kT-t_0) \\ & + \sum_{k \neq l} \left[3\mathrm{E}[a_k^3 a_k^*]\mathrm{E}[a_k^{*2}] + 9\mathrm{E}[|a_k^4|]\mathrm{E}[|a_l^2|] + 3\mathrm{E}[a_k a_k^{*3}]\mathrm{E}[a_k^2]\right] v^4(t-kT-t_0) v^2(t-lT-t_0) \\ & + \sum_{k \neq l, l \neq m, k \neq m} \left[6\mathrm{E}[|a_k^2|]\mathrm{E}[|a_l^2|]\mathrm{E}[|a_m^2|] + 9\mathrm{E}[|a_k^2|]\mathrm{E}[a_l^{*2}]\mathrm{E}[a_m^2]\right] v^2(t-kT-t_0) v^2(t-lT-t_0) v^2(t-mT-t_0) \Bigg]\end{aligned} \tag{B.3.19}$$

$$\chi_{u,c} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}[|u^6(t)|] >}{(< \mathrm{E}[|u^2(t)|] >)^3} = \left[\chi_{a,c} r_{v,3} + (3\gamma_a \kappa_{a,nc,2}^* + 9\kappa_{a,c} + 3\gamma_a^* \kappa_{a,nc,2}) r_{v,4} + (9|\gamma_a^2| + 6) r_{v,5}\right] \tag{B.3.20}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[u^5(t)u^*(t)] = \mu^6 e^{i4\phi} \Bigg[& \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \mathrm{E}[a_k a_l a_m a_n a_p a_q^*] \\ & \times v(t-kT-t_0) v(t-lT-t_0) v(t-mT-t_0) v(t-nT-t_0) v(t-pT-t_0) v(t-qT-t_0) \Bigg]\end{aligned} \tag{B.3.21}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[u^5(t)u^*(t)] = \mu^6 e^{i4\phi} \Bigg[& \sum_k \mathrm{E}[a_k^5 a_k^*] v^6(t-kT-t_0) + \sum_{k \neq l} \left[10\mathrm{E}[a_k^3 a_k^*]\mathrm{E}[a_k^2] + 5\mathrm{E}[a_k^4]\mathrm{E}[|a_k^2|]\right] \\ & \times v^4(t-kT) v^2(t-lT) + 15\left[\mathrm{E}[a_k^2]\right]^3 \sum_{k \neq l, l \neq m, k \neq m} v^2(t-kT-t_0) v^2(t-lT-t_0) v^2(t-mT-t_0) \Bigg]\end{aligned} \tag{B.3.22}$$

$$\chi_{u,nc,2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}[u^5(t)u^*(t)] >}{(< \mathrm{E}[|u^2(t)|] >)^3} = e^{i4\phi}\left[\chi_{a,nc,2} r_{v,3} + (10\gamma_a \kappa_{a,nc,2} + 5\kappa_{a,nc,1}) r_{v,4} + 15\gamma_a^2 r_{v,5}\right] \tag{B.3.23}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[u^4(t)u^{*2}(t)] = \mu^6 e^{i2\phi} \Bigg[& \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \mathrm{E}[a_k a_l a_m a_n a_p^* a_q^*] \\ & \times v(t-kT-t_0) v(t-lT-t_0) v(t-mT-t_0) v(t-nT-t_0) v(t-pT-t_0) v(t-qT-t_0) \Bigg]\end{aligned} \tag{B.3.24}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[u^4(t)u^{*2}(t)] = \mu^6 e^{i2\phi} \Bigg[& \sum_k \mathrm{E}[a_k^4 a_k^{*2}] v^6(t-kT-t_0) \\ & + \sum_{k \neq l} \left[6\mathrm{E}[a_k^2 a_k^{*2}]\mathrm{E}[a_l^2] + 8\mathrm{E}[a_k^3 a_k^*]\mathrm{E}[|a_l^2|] + \mathrm{E}[a_k^4]\mathrm{E}[a_k^{*2}]\right] v^4(t-kT-t_0) v^2(t-lT-t_0) + \\ & 3\mathrm{E}[a_k^2] \sum_{k \neq l, l \neq m, k \neq m} \left[\mathrm{E}[a_k^2]\mathrm{E}[a_l^{*2}] + 4\mathrm{E}[|a_k^2|]\mathrm{E}[|a_l^2|]\right] v^2(t-kT-t_0) v^2(t-lT-t_0) v^2(t-mT-t_0) \Bigg]\end{aligned} \tag{B.3.25}$$

$$\chi_{u,nc,3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \mathrm{E}[u^4(t)u^{*2}(t)] >}{(< \mathrm{E}[|u^2(t)|] >)^3} = e^{i2\phi}\left[\chi_{a,nc,3}r_{v,3} + \left(6\gamma_a\kappa_{a,c} + 8\kappa_{a,nc,2} + \gamma_a^*\kappa_{a,nc,1}\right)r_{v,4} + 3\gamma_a(|\gamma_a^2| + 4)r_{v,5}\right] \quad \text{(B.3.26)}$$

avec :

$$r_{v,3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \sum_k v^6(t-kT-t_0) >}{(< \sum_k v^2(t-kT-t_0) >)^3} \quad \text{(B.3.27)}$$

$$r_{v,4} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \sum_{k\neq l} v^4(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0) >}{(< \sum_k v^2(t-kT-t_0) >)^3} \quad \text{(B.3.28)}$$

$$r_{v,5} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \sum_{k\neq l, l\neq m, k\neq m} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)v^2(t-mT-t_0) >}{(< \sum_k v^2(t-kT-t_0) >)^3} \quad \text{(B.3.29)}$$

B.3.2 Preuves des relations (2.2.19) et (2.2.20)

Puisque les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} g(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_k v^{2q}(t-kT-t_0) \\ g(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\neq l} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0) \\ g(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\neq l} v^4(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0) \\ g(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\neq l, l\neq m, k\neq m} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)v^2(t-mT-t_0) \end{aligned} \quad \text{(B.3.30)}$$

sont toutes périodiques de période T, sous condition de l'existence des sommations, $< g(t) >$ est le terme d'indice zéro du développement de Fourier des fonctions $g(t)$. Par suite

$$< g(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt.$$

Par suite, on peut écrire :

$$\begin{aligned} < \sum_k v^{2a}(t-kT-t_0) > &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_k v^{2q}(t-kT-t_0)dt \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} v^{2q}(t)dt \end{aligned} \quad \text{(B.3.31)}$$

$$\begin{aligned} < \sum_{k\neq l} v^\alpha(t-kT-t_0)v^\beta(t-lT-t_0) > &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k\neq l} v^\alpha(t-kT)v^\beta(t-lT)dt \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-kT}^{-(k-1)T} \sum_{k\neq l} v^\alpha(u)v^\beta\left(u-(l-k)T\right)du \quad \text{avec :} \quad u \stackrel{\text{def}}{=} t-kT \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} v^\alpha(u)v^\beta(u-nT)du \quad \text{avec :} \quad n \stackrel{\text{def}}{=} l-k \end{aligned} \quad \text{(B.3.32)}$$

$$< \sum_{k\neq l, l\neq m, k\neq m} v^2(t-kT-t_0)v^2(t-lT-t_0)v^2(t-mT-t_0) >$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k\neq l, l\neq m, k\neq m} v^2(t-kT)v^2(t-lT)v^2(t-mT)dt$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-kT}^{-(k-1)T} \sum_{k\neq l} v^2(u)v^2\left(u-(l-k)T\right)v^2\left(u-(m-k)T\right)du \quad \text{avec :} \quad n \stackrel{\text{def}}{=} l-k \quad \text{et} \quad p \stackrel{\text{def}}{=} m-k$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\sum_{n\neq p, n\neq 0, p\neq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(u)v^2\left(u-nT\right)v^2\left(u-pT\right)du. \quad \text{(B.3.33)}$$

Par suite les relations (2.2.19) et (2.2.20) s'en déduisent.

B.4 Beamforming MVDR complexe de Volterra dans le contexte de SOI à module constant

Nous considérons ici des SOI sous forme de modulations linéaires :

$$s(t) = \mu_s e^{i\phi_s}\sum_n a_n v(t-nT-t_0), \quad \text{(B.4.1)}$$

de symboles SOI a_k de module constant unité (i.e., $|a_k| = 1$) (ex : BPSK, QPSK, 8-PSK...) où $v(t)$ est une impulsion NRZ de durée T et d'amplitude unité, ou sous forme de modulations CPM

$$s(t) = \mu_s e^{i\phi_s}\left(\sum_n e^{i2\pi h\sum_{k=0}^n a_k u(t-kT)}v(t-nT-t_0)\right), \quad \text{(B.4.2)}$$

où h et l'impulsion $u(t)$ dépendent du type de modulation CPM. Nous avons alors avec $\pi_s \stackrel{\text{def}}{=} |s^2(t)| = \mu_s^2$,

$$s(t)|s^2(t)| = \pi_s s(t). \quad \text{(B.4.3)}$$

De plus nous avons pour des symboles BPSK de modulations linéaires :

$$s^*(t) = s(t)e^{-2i\phi_s}, \quad s^3(t) = \pi_s s(t)e^{2i\phi_s}, \quad s^*(t)|s^2(t)| = \pi_s s(t)e^{-2i\phi_s}, \quad s^{3*}(t) = \pi_s s(t)e^{-4i\phi_s}.$$

B.4.1 Nouvelles contraintes

Dans le but de renforcer la puissance du SOI en sortie de beamforming, nous pourrions remplacer la contrainte d'annulation $\mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*) = 0$ du beamformer de Volterra par la nouvelle contrainte

$$\mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*) = 1.$$

Dans le cas de symboles BPSK de modulations linéaires, le remplacement supplémentaire des contraintes

$$\mathbf{w}_{1,1}^H\mathbf{s}^* = 0,\ \mathbf{w}_{3,0}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}) = 0,\ \mathbf{w}_{3,2}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*\otimes\mathbf{s}^*) = 0 \text{ et } \mathbf{w}_{3,3}^H(\mathbf{s}^*\otimes\mathbf{s}^*\otimes\mathbf{s}^*) = 0$$

par les nouvelles contraintes

$$\mathbf{w}_{1,1}^H\mathbf{s}^* = 1,\ \mathbf{w}_{3,0}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}) = 1,\ \mathbf{w}_{3,2}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*\otimes\mathbf{s}^*) = 1 \text{ et } \mathbf{w}_{3,3}^H(\mathbf{s}^*\otimes\mathbf{s}^*\otimes\mathbf{s}^*) = 1,$$

impliquerait en sortie de beamforming la composante

$$[(1+e^{-2i\phi_s}) + \pi_s(e^{2i\phi_s} + 1 + e^{-2i\phi_s} + e^{-4i\phi_s})]s(t),$$

qui nécessiterait la connaissance de ϕ_s pour détecter les symboles et dont certaines structures réduites pourraient annuler cette composante SOI pour certaines phases. Par exemple la phase $\phi_s = \pi/2$ annule la composante SOI pour les structures WL et L-C(0,1) et $\phi_s = \pi/4$ annule la composante SOI pour la structure L-C(0,1,2,3). Pour ces raisons, ces dernières nouvelles contraintes n'ont pas d'intérêt.

B.4.2 Nouveau beamformer MVDR Volterra

Avec les notations du beamformer MVDR Volterra, les nouvelles contraintes s'écriraient globalement

$$\mathbf{C}^H\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{f}, \tag{B.4.4}$$

où $\mathbf{f}$ est le $(2+4[N^3-(N-1)^3])\times 1$ vecteur défini par

$$\mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} (1, \mathbf{0}_{1+N^3-(N-1)^3}^T, 1, \mathbf{0}_{N^3-(N-1)^3-1}^T, \mathbf{0}_{N^3-(N-1)^3}^T, \mathbf{0}_{N^3-(N-1)^3}^T)^T.$$

Mais sous les contraintes (B.4.4), la sortie du beamformeur MVDR de Volterra ne prendra plus la forme :

$$\begin{aligned} y(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\mathbf{w}}^H\widetilde{\mathbf{x}}(t) \\ &= (1+\pi_s)s(t) + \mathbf{w}_{1,0}^H\mathbf{n}(t) + \mathbf{w}_{1,1}^H\mathbf{n}^*(t) \\ &+ \mathbf{w}_{3,0}^H[\mathbf{n}(t)\otimes\mathbf{n}(t)\otimes\mathbf{n}(t)] \\ &+ \mathbf{w}_{3,1}^H[\mathbf{n}(t)\otimes\mathbf{n}(t)\otimes\mathbf{n}^*(t)] + \mathbf{w}_{3,2}^H[\mathbf{n}(t)\otimes\mathbf{n}^*(t)\otimes\mathbf{n}^*(t)] + \mathbf{w}_{3,3}^H[\mathbf{n}^*(t)\otimes\mathbf{n}^*(t)\otimes\mathbf{n}^*(t)] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (1+\pi_s)s(t) + \widetilde{\mathbf{w}}^H\widetilde{\mathbf{n}}(t), \end{aligned} \tag{B.4.5}$$

car $y(t)$ contiendra maintenant des termes supplémentaires : $s^2(t)u_0^*(t)$, $s^*(t)u_0^2(t)$, $|s^2(t)|u_0(t)$, $s(t)|u_0^2(t)|$ et $u_0(t)|u_0^2(t)|$ provenant de la décomposition $\mathbf{n}(t) = u_0(t)\mathbf{s} + \sum_{i=1}^{N-1}u_i(t)\mathbf{u}_i$ qui ne sont plus annulés par la nouvelle contrainte $\mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*) = 1$.

Le remplacement de la contrainte $\mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*) = 0$ par la contrainte $\mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}\otimes\mathbf{s}^*) = 1$ ne permet donc plus d'obtenir un beamformer MVDR. Les figures suivantes sont réalisées pour un SOI et CCI tous deux BPSK non filtrées avec SNR=10dB et INR=20dB avec deux capteurs. Les figures B.2 et B.2 affichent respectivement les SINR moyenné sur ϕ_s et le SINR pour $\phi_s = 0$ en sortie du beamformer MVDR à contraintes modifiées ou non. Ici l'exploitation de la contrainte à module constant de $s(t)$ améliore le SINR pour $\phi_s = 0$ mais seulement très légèrement le SINR moyenné.

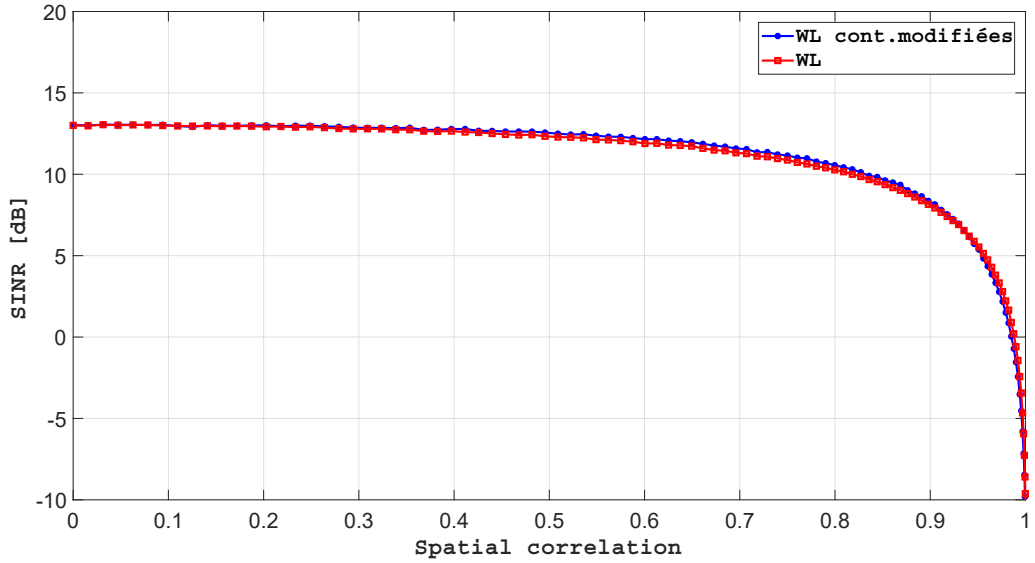


FIGURE B.1 – SINR moyenné sur ϕ_s en sortie du beamformer MVDR WL à contraintes modifiées ou non pour SOI BPSK non filtré

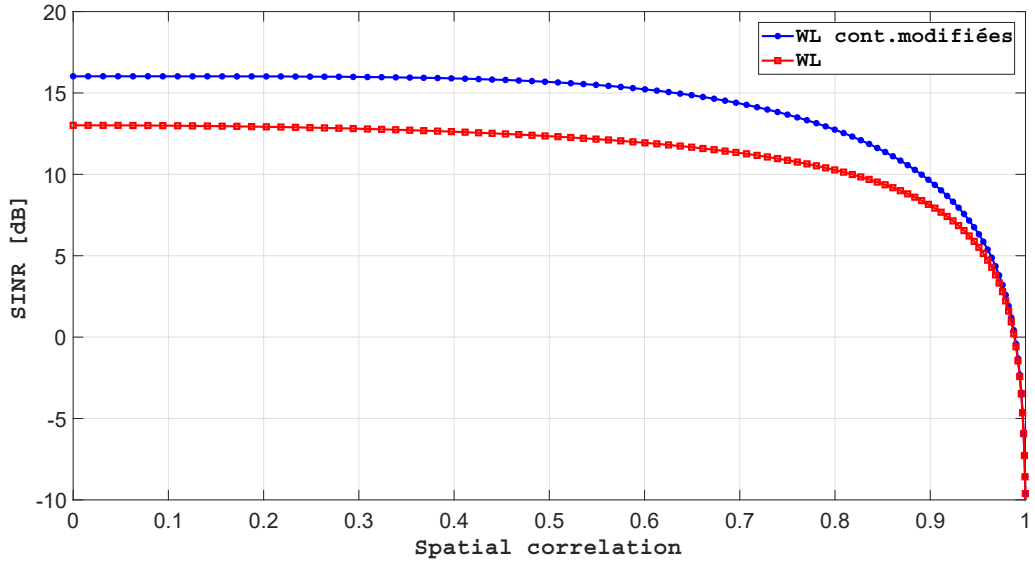


FIGURE B.2 – SINR pour $\phi_s = 0$ en sortie du beamformer MVDR à contraintes modifiées ou non pour SOI BPSK non filtré

Au contraire sur les figures B.3 et B.4 qui affichent respectivement les SINR moyenné sur ϕ_s et le SINR pour $\phi_s = 0$ en sortie du beamformer de Volterra MVDR de structure W-C(0) à contraintes modifiées ou non, montrent que le SINR n'est pas uniformément en fonction de la corrélation spatiale (α) amélioré car le beamformer de Volterra MVDR de structure W-C(0) à contraintes modifiées n'est plus de type MVDR.

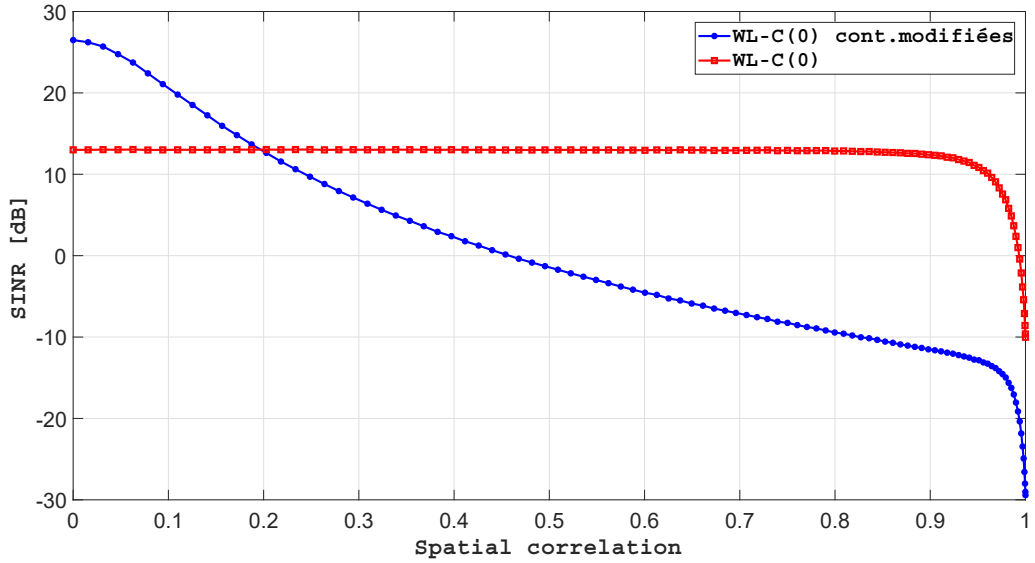


FIGURE B.3 – SINR moyenné sur ϕ_s en sortie du beamformer de Volterra MVDR de structure WL-C(0) à contraintes modifiées ou non pour SOI BPSK non filtré

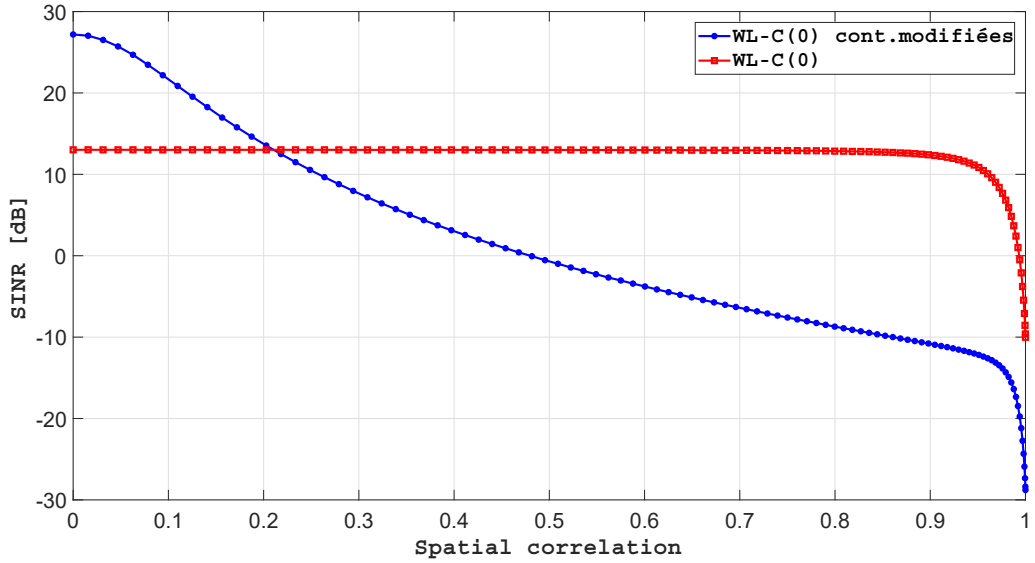


FIGURE B.4 – SINR pour $\phi_s = 0$ en sortie du beamformer de Volterra MVDR de structure WL-C(0) à contraintes modifiées ou non pour SOI BPSK non filtré

B.5 Beamformer de Volterra MVDR à réduction du nombre de contraintes par contraintes sommes

Une augmentation du SINR en sortie du beamformer devrait pouvoir être obtenue par des contraintes moins fortes. En effet pour $q = 0$, les $3(N-1)$ et $3(N-1)^2$ respectives contraintes

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{3,0}^H(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) &= 0,\ \mathbf{w}_{3,0}^H(\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}) = 0,\ \mathbf{w}_{3,0}^H(\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i) = 0, \quad 1 \le i \le N-1 \\ \mathbf{w}_{3,0}^H(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s}) &= 0,\ \mathbf{w}_{3,0}^H(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j) = 0,\ \mathbf{w}_{3,0}^H(\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j) = 0, \quad 1 \le i,j \le N-1,\end{aligned} \tag{B.5.1}$$

peuvent être remplacées par les $(N-1)$ et $(N-1)^2$ respectives nouvelles contraintes :

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{3,0}^H[(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) + (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}) + (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i)] &= 0, \quad 1 \le i \le N-1 \\ \mathbf{w}_{3,0}^H[(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s}) + (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j) + (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j)] &= 0, \quad 1 \le i,j \le N-1\end{aligned} \tag{B.5.2}$$

Il en de même pour $q = 3$. Pour $q = 1$, les $2(N-1)$ et $2(N-1)^2$ respectives contraintes

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*) = 0,\ \mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^*) &= 0, \quad 1 \le i \le N-1 \\ \mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j^*) = 0,\ \mathbf{w}_{3,1}^H(\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j^*) &= 0, \quad 1 \le i,j \le N-1,\end{aligned} \tag{B.5.3}$$

peuvent être remplacées par les respectivement $(N-1)$ et $(N-1)^2$ nouvelles contraintes :

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{3,1}^H[(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^*) + (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}^*)] &= 0, \quad 1 \le i \le N-1 \\ \mathbf{w}_{3,1}^H[(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_j^*) + (\mathbf{s} \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j)^*] &= 0, \quad 1 \le i,j \le N-1.\end{aligned} \tag{B.5.4}$$

Il en de même pour $q = 2$.

Puisque qu'un vecteur $\widetilde{\mathbf{w}}$ satisfaisant les anciennes contraintes (B.5.1) et (B.5.3) satisfait les nouvelles contraintes (B.5.2) et (B.5.4), le SINR à la sortie $y(t)$ du beamformer devrait augmenter par le principe d'inclusion appliqué à la minimisation :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_{\text{MVDR}} \stackrel{\text{def}}{=} \arg\{\min_{\mathbf{C}^H\widetilde{\mathbf{w}}=\mathbf{f}} \widetilde{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_{\widetilde{x}} \widetilde{\mathbf{w}}\}. \tag{B.5.5}$$

B.5.1 Equivalent GSC

Un équivalent GSC se déduit facilement de ces nouvelles contraintes (B.5.2) et (B.5.4) si l'on normalise le vecteur directionnel $\mathbf{s}$, c'est à dire si l'on remplace $\mathbf{s}$ dans par $\mathbf{s}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{s}/|\mathbf{s}|$.

En effet sn prenant l'exemple du terme $q = 0$, $\mathbf{w}_{3,0}$ satisfait l'ensemble du nouveau jeu de contraintes $\mathbf{C}_0'^H \mathbf{w}_{3,0} = \mathbf{0}$ si et seulement si

$$\mathbf{w}_{3,0} = \mathbf{B}'_{3,0} \mathbf{w}_{a,3,0}$$

où $\mathbf{B}'_{3,0}$ est une matrice $N^3 \times [(N-1)^3 + 2(N-1) + 2(N-1)^2]$ de colonnes :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{u}_k, \quad 1 \leq i,j,k \leq N-1 \\
&(\mathbf{s}' \otimes \mathbf{s}' \otimes \mathbf{u}_i) - (\mathbf{s}' \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}'), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\
&2(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}' \otimes \mathbf{s}') - (\mathbf{s}' \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}') - (\mathbf{s}' \otimes \mathbf{s}' \otimes \mathbf{u}_i), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\
&(\mathbf{s}' \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j) - (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}' \otimes \mathbf{u}_j), \quad 1 \leq i,j \leq N-1 \\
&2(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \otimes \mathbf{s}') - (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{s}' \otimes \mathbf{u}_j) - (\mathbf{s}' \otimes \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j), \quad 1 \leq i,j \leq N-1,
\end{aligned}
$$

car si $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, et $\mathbf{a}_3$ sont trois vecteurs orthonormés, alors par exemple $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2$ et $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ seront orthogonaux.

Par suite $(\mathbf{B}'_{3,0}\mathbf{w}_{a,3,0})^H \mathbf{x}_{3,0}(t) = \mathbf{w}_{a,3,0}^H [\mathbf{B}'^H_{3,0}\mathbf{x}_{3,0}(t)]$ avec maintenant :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}'^H_{3,0}\mathbf{x}_{3,0}(t) &= \begin{pmatrix}
\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) \\
z_s(t) \otimes z_s(t) \otimes \mathbf{z}(t) - z_s(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes z_s(t) \\
2\mathbf{z}(t) \otimes z_s(t) \otimes z_s(t) - z_s(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes z_s(t) - z_s(t) \otimes z_s(t) \otimes \mathbf{z}(t) \\
z_s(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t) \otimes z_s(t) \otimes \mathbf{z}(t) \\
2\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes z_s(t) - \mathbf{z}(t) \otimes z_s(t) \otimes \mathbf{z}(t) - z_s(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{0} \\
\mathbf{0}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

où $z_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{s}'^H \mathbf{x}(t)$. Par suite le nombre de composantes du filtre $\mathbf{w}_{a,3,0}$ reste inchangé. Il en serait de même pour les composantes de $\mathbf{w}_{a,3,3}$. Un raisonnement similaire s'appliquerait pour les contraintes sur $\mathbf{w}_{3,1}$ et $\mathbf{w}_{3,2}$ en construisant le nouveau équivalent GSC en remarquant que si $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont deux vecteurs orthonormés, alors par exemple $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ seront orthogonaux. Par suite, ce beamformer par contraintes sommes se réduit au beamformer de Volterra que nous avons introduit au chapitre 2.

Annexe C

Annexe du chapitre 3

C.1 Calcul symbolique avec *Symbolic Math Toolbox* de MATLAB

La boite à outils de MATLAB *Symbolic Math Toolbox* fournit une multitude de fonctions pour la résolution, le tracé et la manipulation des équations mathématiques symboliques. Cette boite à outils fournit différentes librairies de fonctions pour :

- La manipulation de fonction symbolique à une seule ou à plusieurs variables ;
- L'analyse mathématique : Détermination des racines d'un polynôme, factorisation des polynôme, calcul des limites, test de continuité, différentielle, dérivée et intégrale...etc ;
- La manipulation et simplification des équations algébriques ;
- L'algèbre linéaire ;
- La résolution des équations différentielles ordinaires.

L'intérêt principale de cette boite à outil se résume à la fois dans la réduction de la complexité calculatoire d'un certain nombre d'algorithmes et la résolution du problème de propagation des erreurs d'arrondi. Par exemple pour un problème d'ajustement de modèle, au sens des moindres carrées, le calcul des paramètres de ce dernier se résout bien plus efficacement à travers le calcul symbolique (dérivée analytique, matrice Jacobienne) qu'avec une résolution numérique (approximation à travers les différences finies).

Un autre avantage de *Symbolic Math Toolbox*, c'est de permettre un calcul numérique avec une précision variable quelque soit les capacités de représentation des données dans la plateforme informatique utilisée.

Dans nos travaux, cette boite à outils nous a permis d'étudier les performances de nos nouvelles structures développées de filtres et de beamformers, à travers l'évaluation exacte des expressions SINR. Cette évaluation a été faite en calculant les matrices de covariance exactes du bruit total (interférence + bruit de fond) en sortie de ces structures. Le recourt à une telle évaluation précise et complexe, au lieu de l'utilisation des matrices de covariance empiriques, est motivé par :

— L'importance de l'effet des erreurs d'arrondi dans l'évaluation des moments statistiques d'ordres supérieurs et ainsi l'effet sur l'exactitude des résultats obtenus.

— L'obtention des expressions exactes du SINR en fonctions des différents paramètres statistiques du SOI et de l'interférence permettant d'identifier les structures avec de meilleures performances ainsi qu'une description détaillée des dépendances, à travers des expressions interprétables.

Commandes	Description
syms	Créer des fonctions et des variables symboliques
symfun	Créer des fonctions symboliques
fold	Combiner le vecteur à l'aide d'une fonction
symvar	Déterminer les variables dans l'expression symboliques
argnames	Arguments de la fonction symbolique
formula	Expression mathématique définissant la fonction symbolique
has	Vérifier si expression contient une sous-expression particulière
pretty	Expressions symboliques en Prettyprint
sympref	Réglage des préférences dans les fonctions symboliques
fplot	Plot symbolic expression or function
vpa	Arithmétique en précision variable

Table C.1 – Variable, Expression et Fonction symboliques

Commandes	Description
fplot, fmesh, fplot3	Fonctions pour tracés 2D, 3D et paramétrique

Table C.5 – Fonctions pour représentation graphique des fonctions symboliques

Commandes	Description
simplify	Simplifier une expression
simplifyFraction	Simplification d'une fraction Symbolique
subexpr	Réécrire l'expression symbolique en termes de sous-expressions communes
coeffs	Coefficients du polynôme
expand	Développement symbolique de polynômes et fonctions élémentaires
horner	Factorisation de polynôme par méthode de Horner
numden	Extraire le numérateur et le dénominateur
partfrac	Décomposition d'une fraction en fractions partielles
children	Expressions élémentaires ou termes d'une expression symbolique
collect	Détermination des coefficients d'un polynôme par rapport à une sous-expression
combine	Combiner des termes de structure algébrique identique
compose	Composition fonctionnelle
divisors	Détermination des diviseurs d'une expression
gcd	Plus grand commun diviseur
lcm	Plus petit commun multiple
mod	Opération de calcul du reste de la division euclidienne
quorem	Quotient et reste d'une division euclidienne
factor	Factorisation d'un polynôme
isolate	Isoler une variable ou une expression dans une équation
lhs	Côté gauche d'une équation
rhs	Côté droit d'une équation
rewrite	Réécrire une expression en fonction d'une autre fonction
subs	Substitution symbolique d'expression
assume	Définir des hypothèse sur l'objet symbolique
piecewise	Définir une expression ou fonction conditionnelle
isAlways	Vérifier si l'équation ou l'inégalité est vérifier pour toutes les valeurs de ses variables

Table C.2 – Manipulation et Simplification des expressions symboliques

Commandes	Description
diff	Dérivation d'une fonction ou expression symbolique
int	Intégrales défini et indéfinies
gradient	Gradient d'une fonction symbolique
divergence	Divergence d'un vecteur symbolique
curl	Rotationnel d'un vecteur symbolique
jacobian	Calcul de la matrice Jacobienne d'une fonction vectorielle symbolique
taylor	Développement en série de Taylor d'une fonction symbolique
hessian	Matrice Hessienne
limit	Calculer la limite d'une expression symbolique

Table C.3 – Calcul différentiel et intégral

Commandes	Description
sort	Trier les éléments symboliques d'un vecteurs ou d'une matrices
diag	Créer ou extraire les diagonales des matrices symboliques
rank	Le rang d'une matrice symbolique
eig	Valeurs et vecteurs propres d'une matrice symbolique
adjoint	Comatrice d'une matrice symbolique
inv	Inverse d'une matrice symbolique
pinv	Pseudo-inverse (Moore-Penrose) d'une matrice symbolique
svd	Décomposition en valeurs singulières d'une matrice symbolique
lu	Factorisation LU
qr	Factorisation QR

Table C.4 – Algèbre linéaire

Annexe D

Annexe du chapitre 4

D.1 Théorème central limite multidimensionnel pour variables aléatoires complexes

Tous les théorèmes de type central limite multidimensionnels pour variables aléatoires réelles s'étendent aisément au cas de variables aléatoire complexes.

Ainsi pour le théorème central limite classique où $\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^k$ est une suite de vecteur complexe aléatoire i.i.d. de moyenne $\mathbf{m} = \mathrm{E}(\mathbf{x}_i)$, de matrice de covariance $\mathbf{R} = \mathrm{E}(\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^H)$ et de matrice de covariance complémentaire $\mathbf{C} = \mathrm{E}(\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T)$, nous avons la convergence en loi suivante :

$$\sqrt{n}\,(\overline{\mathbf{x}}_n - \mathbf{m}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}; \mathbf{R}, \mathbf{C})$$

où $\overline{\mathbf{x}}_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$.

Quant au théorème central limite classique mise sous forme blanchie, il s'écrit sous la forme suivante pour $\mathbf{R}$ inversible :

$$\sqrt{n}\mathbf{U}\mathbf{R}^{-1/2}\,(\overline{\mathbf{x}}_n - \mathbf{m}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}; \mathbf{I}, \mathbf{\Delta}),$$

avec $\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-T/2} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{U}^T$ (SVD d'une matrice symétrique complexe) et $\mathbf{\Delta} = \mathrm{Diag}(\kappa_1, .., \kappa_k)$ où $\kappa_1, .., \kappa_k$ sont les coefficients de non circularité de $\mathbf{x}_i$ tels que $0 \leq \kappa_1, \leq .. \leq \kappa_k \leq 1$.

D.2 Théorème de continuité

De même le théorème de continuité classique pour variables aléatoires réelles (voir e.g., [82, p.122]), s'étend à des suites de variables aléatoires complexes.

Ainsi s'il existe une suite déterministe $c_n > 0$ telle que $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$ telle que

$$c_n\,(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}; \mathbf{R}, \mathbf{C}),$$

alors si $\mathbf{g}(.)$ désigne une fonction multidimensionnelle complexe de $\mathbf{x}$ différentiable au sens complexe au voisinage de $\mathbf{m}$ de matrice différentielle $\mathbf{D} = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}} \right]$ non nulle, nous avons la convergence en loi suivante :

$$c_n \left(\mathbf{g}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{g}(\mathbf{m}) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}; \mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{D}^H, \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{D}^T \right). \tag{D.2.1}$$

Par contre si $\mathbf{g}(.)$ n'est que seulement différentiable au sens réel au voisinage de $\mathbf{m}$, c'est à dire si :

$$\mathbf{g}(\mathbf{m} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{m}) + \mathbf{D}_1 \delta\mathbf{x} + \mathbf{D}_2 \delta\mathbf{x}^* + o(\delta\mathbf{x}),$$

avec $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2) \neq \mathbf{O}$, nous avons la convergence en loi suivante :

$$c_n \left(\mathbf{g}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{g}(\mathbf{m}) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$
$$\mathcal{N}\left(\mathbf{0}; \mathbf{D}_1\mathbf{R}\mathbf{D}_1^H + \mathbf{D}_1\mathbf{C}\mathbf{D}_2^H + \mathbf{D}_2\mathbf{C}^*\mathbf{D}_1^H + \mathbf{D}_2\mathbf{R}^*\mathbf{D}_2^H, \mathbf{D}_1\mathbf{C}\mathbf{D}_1^T + \mathbf{D}_1\mathbf{R}\mathbf{D}_2^T + \mathbf{D}_2\mathbf{R}^*\mathbf{D}_1^T + \mathbf{D}_2\mathbf{C}^*\mathbf{D}_2^T \right),$$

qui se réduit à (D.2.1) pour $\mathbf{D}_1 \neq \mathbf{O}$ et $\mathbf{D}_2 = \mathbf{O}$.

D.3 Loi de probabilité de Rayleigh improper

On appelle loi de probabilité de *Rayleigh improper*, la loi de probabilité du module $|z|$ d'une variable aléatoire complexe scalaire $z = x + iy$ gaussienne centrée non rectiligne de loi de probabilité $\mathcal{N}_c(0; r_z, c_z)$ donc telle que $|c_z| \neq r_z$.

Pour donner l'expression analytique de sa densité de probabilité $f_{|z|}(u)$, nous considérons le changement de variable bijectif $(x, y) \to (u, \theta)$, défini par :

$$\begin{cases} x = u\cos\theta \\ y = u\sin\theta \end{cases}, \tag{D.3.2}$$

avec $u \in [0, +\infty[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Par suite la densité de probabilité $f_{|z|}(u)$ est la densité de probabilité marginale de la densité de probabilité conjointe $f_{|z|,\theta}(u, \theta)$ qui se déduit de la densité de probabilité conjointe $f_{x,y}(x, y)$ par la relation :

$$f_{|z|,\theta}(u, \theta) = |J(u, \theta)| f_{x,y}(x, y) \tag{D.3.3}$$

où $J(u, \theta)$ est le Jacobien de la transformation (D.3.2) défini par :

$$J(u, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}. \tag{D.3.4}$$

Comme $f_{x,y}(x, y)$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire gaussienne centrée réelle à 2 dimensions de matrice de covariance

$$\mathbf{C}_{x,y} = \begin{bmatrix} c_x & c_{xy} \\ c_{xy} & c_y \end{bmatrix}, \tag{D.3.5}$$

où :

$$\begin{aligned} c_x &= \mathrm{E}\left[\left(\frac{z+z^*}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}r_z[1+\rho\cos(\phi)] \\ c_y &= \mathrm{E}\left[\left(\frac{z-z^*}{2i}\right)^2\right] = \frac{1}{2}r_z[1-\rho\cos(\phi)] \\ c_{xy} &= \mathrm{E}\left[\left(\frac{z+z^*}{2}\right)\left(\frac{z-z^*}{2i}\right)\right] = \frac{1}{2}r_z\rho\sin(\phi), \end{aligned}$$

avec :

$$\rho e^{i\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_z}{r_z} \in \mathbb{C} \quad \text{avec ici} \quad \rho \neq 1.$$

Nous obtenons :

$$\mathbf{C}_{x,y} = \frac{1}{2}r_z\begin{bmatrix}[1+\rho\cos(\phi)] & \rho\sin(\phi) \\ \rho\sin(\phi) & [1-\rho\cos(\phi)]\end{bmatrix}, \tag{D.3.6}$$

avec

$$\det(\mathbf{C}_{x,y}) = \frac{1}{4}r_z^2(1-\rho^2) \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_{x,y}^{-1} = \frac{2}{r_z}\frac{1}{(1-\rho^2)}\begin{bmatrix}[1-\rho\cos\phi] & -\rho\sin\phi \\ -\rho\sin\phi & [1+\rho\cos\phi]\end{bmatrix}. \tag{D.3.7}$$

Par suite

$$\begin{aligned} f_{x,y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbf{C}_{x,y})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x,y)\mathbf{C}_{x,y}^{-1}(x,y)^T\right\} \\ &= \frac{1}{\pi r_z\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{\left[x^2+y^2-(x^2+y^2)\rho\cos\phi-2xy\rho\sin\phi\right]}{r_z(1-\rho^2)}\right\}. \end{aligned}$$

D'où par application de (D.3.3) nous obtenons l'expression suivante :

$$f_{|z|,\theta}(u,\theta) = \frac{u}{\pi r_z\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2\left[1-\rho\cos(2\theta-\phi)\right]}{r_z(1-\rho^2)}\right\}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta), \tag{D.3.8}$$

de densité de probabilité marginale du module $|z|$ de z :

$$\begin{aligned} f_{|z|}(u) &= \int_0^{2\pi} f_{|z|,\theta}(u,\theta)d\theta \\ &= \frac{2u}{r_z\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2}{r_z(1-\rho^2)}\right\}I_0\left(\frac{u^2\rho}{r_z(1-\rho^2)}\right)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u), \end{aligned} \tag{D.3.9}$$

où

$$I_0(x) \triangleq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\theta}d\theta$$

est la fonction de Bessel modifiée du premier type d'ordre 0. Cette densité de probabilité de *Rayleigh improper* dépend des deux paramètres réels (r_z,ρ) avec $r_z > 0$ et $0 \leq \rho < 1$.

Notons que dans le cas particulier où $\rho = 0$, la variable aléatoire complexe z gaussienne est circulaire et donc les variables aléatoires x et y sont gaussiennes non corrélées et la loi de probabilité (D.3.9) de Rayleigh improper se réduit à la loi de Rayleigh classique de paramètre unique r_z :

$$f_{|z|}(u) = \frac{2u}{r_z}e^{-\frac{u^2}{r_z}}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u). \tag{D.3.10}$$

Bibliographie

[1] O. Agazzi, D.G. Messerschmitt, and D.A. Hodges, "Non linear echo cancellation of data signals," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 30, no. 11, pp. 2421-2433, Nov. 1982.

[2] B.G. Agee, S.V. Schell, and W.A. Gardner, "Self-coherence Restoral : a New Approach to Blind Adaptive Signal Extraction Using Antenna Arrays", *IEEE Proceedings* 78(4), April 1990, 753-767.

[3] A. Ahmed and A.M. Eltawil, "All-digital self-interference cancellation technique for full-duplex systems", *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 14, no. 7, pp. 3519-3532, July 2015.

[4] P.O. Amblard, M. Gaeta, and J.L. Lacume, "Statistics for complex variables and signals - Part I and II," *Signal Processing, Elsevier*, vol. 53, no. 1, pp. 1-25, Aug. 1996.

[5] L. Antilla and M. Valkama, "Blind signal estimation in widely-linear signal models with fourth-order circularity : Algorithms and application to receiver I/Q calibration," *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 20, no. 3, pp. 221-224, March 2013.

[6] M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp, "A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 2, pp. 174-188, Feb. 2002.

[7] S. Benedetto, E. Bigieri, and R. Daffara, "Modeling and performance evaluation of non-linear satellite links - A Volterra series approach," *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst.*, vol. 15, pp. 494-507, July 1979.

[8] J. Benesty, J. Chen, and Y. Huang, "Binaural noise reduction in the time domain with a stereo setup," *IEEE Trans. Audio, Speech and Language Process.*, vol. 19, no. 8, pp. 2260-2272, Nov. 2011.

[9] E. Biglieri, A. Gersho, R.D. Gitlin, and T.L. Lim, "Adaptive cancellation of nonlinear intersymbol interference for voiceband data transmission," *IEEE J. Selected Area Commun.*, vol. 2, pp. 765-777, 1984.

[10] G. Bottomley and S. Chennakeshu, "Unification of MLSE receivers and extension to time-varying channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, no. 4, pp. 464-472, April 1998.

[11] J. Capon, R.J. Greenfield, and R.J. Kolker, "Multidimensional maximum likelihood processing of a large aperture seismic array," *Proc. IEEE*, vol. 55, no. 2, pp. 191-211, Feb. 1967.

[12] J. Capon, "High resolution frequency wave number spectrum analysis," *Proc. IEEE*, vol. 57, no. 8, pp. 1408-1418, Aug. 1969.

[13] J. Chen and J. Benesty, "On the time-domain widely linear LCMV filter for noise reduction with a stereo system", *IEEE Trans. Audio, Speech and Language Process.*, vol. 21, no. 7, pp. 1343-1354, July 2013.

[14] V. G. Chavali (2012). "*Signal detection and modulation classification in non-gaussian noise environments*". Thèse de doctorat non publiée, Blacksburg, Virginia.

[15] P. Chevalier, P. Duvaut, and B. Picinbono, "Le filtrage de Volterra transverse réel et complexe en traitement du signal," *Traitement du Signal*, Numéro spécial "Non linéaire et non gaussien," vol 7, n.5, pp 451-476, 1990.

[16] P. Chevalier, P. Duvaut, and B. Picinbono, "Complex transversal Volterra filters optimal for detection and estimation", *Proc ICASSP*, Toronto (Canada), pp. 3537-3540, 1991.

[17] P. Chevalier and B. Picinbono, "Complex linear-quadratic systems for detection and array processing," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 44, no. 10, pp. 2631-2634, Oct. 1996.

[18] P. Chevalier and A. Maurice, "Constrained beamforming for cyclostationary signals," *Proc. ICASSP*, pp. 3789-3792, Munich (Germany), May 1997.

[19] P. Chevalier, L. Albera, A. Ferreol, and P. Comon, "On the virtual array concept for higher order array processing", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 4, pp. 1254-1271, April 2005.

[20] P. Chevalier and F. Pipon, "New insights into optimal widely linear array receivers for the demodulation of BPSK, MSK and GMSK signals corrupted by non circular interferences - Application to SAIC," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol 54, no. 3, pp. 870-883, March 2006.

[21] P. Chevalier and A. Blin, "Widely linear MVDR beamformers for the reception of an unknown signal corrupted by noncircular interferences", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 55, no. 11, pp. 5323-5336, Nov 2007.

[22] P. Chevalier, J.P. Delmas, and A. Oukaci, "Optimal widely linear MVDR beamforming for noncircular Signals," *Proc. ICASSP*, Taipei (Taiwan), April 2009.

[23] P. Chevalier, A. Oukaci, and J.P. Delmas, "Third order widely nonlinear Volterra MVDR beamforming", *Proc. ICASSP*, Prague, Czech Republic, May 2011.

[24] P. Chevalier, J.P. Delmas, and A. Oukaci, "Properties, performance and practical interest of the widely linear MMSE beamformer for nonrectilinear signals," *Signal Processing*, vol. 97, pp. 269-281, April 2014.

[25] P. Comon, R. Liu, and D. Slock, "Path-wise wide-sense polynomial receiver for UMTS communications," *Proc. 39th Allerton Conf. Com. Contr. Comput.*, Allerton, Illinois (USA), Oct. 2001.

[26] J.P. Delmas, A. Oukaci, and P. Chevalier, "On the asymptotic distribution of GLR for impropriety of complex signals," *Signal Processing*, vol. 91, pp. 2259-2267, October 2011.

[27] J.P. Delmas, P. Chevalier, S. Sallem et M. Sadok, "Récepteurs SIMO MLSE Widely Linear : Structures et performances en présence d'interférences non-circulaires", *Revue Traitement du Signal*, vol. 32/1, pp.7-37, 2015.

[28] P.M. Djuric, J.H. Kotecha, J. Zhang, Y. Huang, T. Ghirmai, M.F. Bugallo, and J. Miguez, "Particle filtering," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 20, no. 5, pp. 19-38, 2003.

[29] B. A.Dumitrescu, "*Positive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications*". *Springer*, 2007.

[30] J. Eriksson and V. Koivunen, "Complex random vectors and ICA Models : Identifiability, uniqueness, and separability," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 3, pp. 1017-1029, March 2006.

[31] J. Eriksson, E. Ollila, and V. Koivunen, "Essential statistics and tools for complex random variables," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no ; 10, pp. 5400-5408, Oct., 2010.

[32] J. Feinstein, Y.Shamash, "Spectral factorization of a rational matrix", *IEEE Trans.von Info. Theory*, vol. 23, no 4, p. 534-538. July,1977.

[33] G. Forney, "Maximum-likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interferences," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 363-378, May 1972.

[34] O.L. Frost, III, "An algorithm for linearly constrained adaptive array processing," *Proc. IEEE*, vol. 60, no. 8, pp. 926-935, Aug. 1972.

[35] P. Forster, T. Asté, and L. Fety, "Multisensors receivers using a filtered reference : application to GSM," *In Proc. of IEEE international conference on universal personal communications*. Florence, Italy, 1998.

[36] W.A. Gardner, A. Napolitano, and L. Paura, "Cyclostationarity : Half a century of research," *Signal Processing*, vol. 86, pp. 641-697, September 2006.

[37] L.M. Garth and H.V. Poor, "Narrowband interference suppression in impulsive channels," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 28, no. 1, pp. 15-34, 1992.

[38] L.J. Griffiths, C.W. Jim, "An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming," *IEEE Trans. Ant. Prop.*, vol AP-30, no.1, pp. 27-34, Jan. 1982.

[39] A. Hakkarainen, J. Werner, K.R. Dandekar, and M. Valkama, "Widely linear beamforming and RF impairment suppression in massive antenna arrays," *Journal of Communications and Networks*, vol. 15, no. 4, pp. 383-397, Aug. 2013.

[40] S. Han, C-L I, Z. Xu, and C. Rowell, "Large-scale antenna systems with hybrid analog and digital beamforming for millimeter wave 5G," *IEEE Comm. Magazine*, pp. 186-194, Jan. 2015.

[41] D.A. Harville, *Matrix algebra from a statistician's perspective*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[42] R. Hu, H.M. Ahmed, "Echo cancellation in high speed data transmission systems using adaptive layered bilinear filters", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, no. 234, 1994.

[43] L. Huang, Z. Zhang, L. Zhang, and Z. Ye, "Widely linear minimum dispersion beamforming for sub-Gaussian noncircular signals", *Signal Processing*, vol. 122, p. 123-128, 2016.

[44] X. Jiang, W.J. Zeng, A. Yasotharan, H.C. So, and T. Kirubarajan, "Minimum dispersion beamforming for non-Gaussian signals," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 7, pp. 1879-1893, April 2014.

[45] C. Jutten and P. Comon, *Handbook of blind source separation independent component analysis and applications*, Academic Press, 2010.

[46] S. Kanna, M. Xiang, and D. P. Mandic, "Real-time detection of rectilinear sources for wireless communication signals," *Proceedings of ISWCS conference*, Brussels, Belgium, Aug. 2015.

[47] S. A. Kassam, J. B.Thomas, "*Signal detection in non-gaussian noise series*" Springer Texts in Electrical Engineering, 1988.

[48] T. Koh and E.J. Powers, "Second order Volterra filtering and its application to non linear system identification," *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, vol. 33, no. 6, pp. 1445-1455, Dec. 1985.

[49] P. A. Laurent, "Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulses (AMP)," *IEEE Trans. Communications*, vol. COM-34, pp. 150-160, Feb. 1986.

[50] G. Lazzarin, S. Pupolin, and A. Sarti, "Nonlinearity compensation in digital radio systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, no. 234, pp. 988-998, 1994.

[51] E.L. Lehmann, *Elements of large sample theory*, Springer texts in Statistics, 1998.

[52] E. Lindskog, "Multi-channel maximum likelihood sequence estimation," *In Proc. of IEEE vehicular technology conference*,vol. 2, Phoenix, Arizona, USA, pp. 715-719, May 5-7 1997.

[53] J.R. Magnus and H. Neudecker, *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*, Wiley series in probability and statistics, revised edition, 1999.

[54] R. Meyer, W. H. Gerstacker, R. Schober, and J.B. Huber,"A single antenna interference cancellation algorithm for increased gsm capacity." *IEEE Trans. Wireless Commun.* 5 , no. 7 (2006) : 1616-1621.

[55] G. Mileounis and N. Kalouptsidis, "Blind identification of second-order Volterra systems with complex random inputs using higher order cumulants," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 10, pp. 4129-4135, Oct. 2009.

[56] J. W. Modestino, and M. V. Eyuboglu, "Integrated multielement receiver structures for spatially distributed interference channels," *IEEE Trans. Inf. Theory* 32, no. 2 : 195-219, 1986.

[57] A. Mohammadi and K.N. Plataniotis, "Complex-valued Gaussian sum filter for nonlinear filtering of non-Gaussian/non-circular noise", *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 22, no. 4, pp. 440-444, April 2015.

[58] D. Molteni and M. Nicoli, "Joint OSC receiver for evolved GSM/EDGE", *IEEE Trans. Wireless Com.*, vol 12, no. 6, pp. 2608-2619, June 2013.

[59] A. Mostafa, R. Kobylinski, I. Kostanic, and M. Austin, "Single antenna interference cancellation (SAIC) for GSM networks", *Proc. VTC*, vol. 2, pp. 1089-1093, Orlando, Florida, USA, Oct. 2004.

[60] MUROSa. (2009). *3GPP TSG Geran Tdoc GP-090114 MUROS uplink receiver performance.* Valetta, Malta, ST-NXP Wireless France, Com-Research, GERAN no41.

[61] MUROSb. (2009). *3GPP TSG Geran Tdoc GP-090115 MUROS downlink receiver performance for interference and sensitivity.* Valetta, Malta, ST-NXP Wireless France, Com-Research, GERAN no41.

[62] R.D. Nowak and B.D. Van Veen, "Volterra filter equalization : a fixed point approach," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, no. 2, pp. 377-388, Feb. 1997.

[63] J. C. Olivier and W. Kleynhans, "Single antenna interference cancellation for synchronized GSM networks using widely linear receiver," *IET Communications*, Vol. 1, No. 1, pp. 131- 136, 2007.

[64] E. Ollila and V. Koivunen, "Generalized complex elliptical distributions," in *Proc. 3rd Sensor Array Mutichannel Signal Processing Workshop*, Sitges, Spain, July 2004.

[65] R.C.D. Paiva, R.D. Vieira, R. Lida, F.M. Tavares, M. Saily, J. Hulkkonen, R. Jarvela, and K. Niemela, "GSM voice evolution using orthogonal subchannels", *IEEE Commun. Magazine*, pp. 80-86, Dec. 2012.

[66] B. Pincibono and P. Duvaut, "Geometrical properties of optimal Volterra filters for signal processing," *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. 36, no. 5, pp. 1061-1068, Sept. 1990.

[67] B. Picinbono, "On Circularity," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, no. 12, pp. 3473-3482, Dec. 1994.

[68] B. Picinbono and P. Chevalier, "Widely linear estimation with complex data", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 8, pp. 2030-2033, Aug. 1995.

[69] B. Pincibono and P. Duvaut, "Optimal linear quadratic systems for detection and estimation," *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. 34, pp. 304-311, March 1988.

[70] J. G. Proakis and M. Salehi, "*Digital Communications*," McGraw-Hill, Fifth Edition, 2008.

[71] S.M. Razavizadeh, M. Ahn, and I. Lee, "Three-dimensional beamforming - A new enabling technology for 5G wireless networks," *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 94-101, Nov. 2014.

[72] I.S. Reed, J.D. Mallet, and L.E. Brennan, "Rapid convergence rate in adaptive arrays," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 10, no. 6, pp. 853-863, Nov. 1974.

[73] W. Roh, J.Y. Seol, J. Park, B. Lee, J. Lee, Y. Kim, J. Cho, K. Cheun, and F. Aryanfar, "Millimeter-wave beamforming as an enabling technology for 5G cellular communications : Theoretical Feasibility and Prototype Results," *IEEE Comm. Magazine*, pp. 106-113, Feb. 2014.

[74] M. Ruder, R. Meyer, F. Obernosterer, H. Kalveram, R. Schober, and W. Gerstacker, "Receiver concepts and resource allocation for OSC downlink transmission", *IEEE Trans. Wireless Com.*, vol 13, no. 3, pp. 1568-1581, March 2014.

[75] M. Sadok, JP. Delmas, and P. Chevalier, "Enhanced Single-Antenna Interference Cancellation from MMSE third-order complex Volterra filters," *Proc. ICASSP*, New-Orleans (USA), March 2017.

[76] M. Sadok, J.P Delmas, and P. Chevalier, "SAIC pour une interférence circulaire au second-ordre par filtrage de Volterra complexe d'ordre 3", *XXVIe Colloque sur le Traitement du Signal et des Images du GRETSI*, Juan-les-Pins, France, 5-8 septembre 2017.

[77] P. J. Schreier and L. L. Scharf, "*Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data : The Theory of Improper and Noncircular Signals*," Cambridge University Press, 2012.

[78] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener theory of non linear systems*, Wiley, New-York, 1980.

[79] P.J. Schreier, L.L. Scharf, and A. Hanssen, "A generalized likelihood ratio test for impropriety of complex signals," *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 13, no. 7, pp. 433-436, July 2006.

[80] P.J. Schreir and L.L. Scharf, *Statistical signal processing of complex-valued data, the theory of improper and noncircular signals*, Cambridge, 2010.

[81] M. Schwartz, "Abstract vector spaces applied to problems in detection and estimation theory." *IEEE Trans. Inf. Theory* 12 , no. 3 : 327-336, 1966.

[82] R.J. Serfling, *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons, 1980.

[83] T. L. Singal, "*Wireless Communications*," McGraw-Hill,First Edition, 2010.

[84] N. Song, W.U. Alokozai, R.C. De Lamare, and M. Haardt, "Adaptive widely linear reduced-rank beamforming based on joint iterative optimization," *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 21, no. 3, pp. 265-269, March 2014.

[85] A. Souloumiac, P. Chevalier, and C. Demeure, "Improvement in non-Gaussian jammers rejection with a non linear spatial filter," *Proc ICASSP*, Minneapolis (USA), pp. 670-673, April 1993.

[86] P. Stavroulakis, "*Interference Analysis and Reduction for Wireless Systems*," Artech House mobile communications series, 2003.

[87] A. Swami and B.M. Sadler, "Hierarchical digital modulation classification using cumulants," *IEEE Trans. Commun.*, vol.48, no.3, pp. 416-429, March 2000.

[88] H. Trigui and D. Slock, "Cochannel interference cancellation within the current GSM standard," *In proc. of int. conf. universal personal communications*, pp. 511-515, Florence (Italy), 1998.

[89] H. Trigui and D. Slock, "Performance bounds for cochannel interference cancellation within the current GSM standard," *Signal Processing*, vol. 80, pp. 1335-1346, 2000.

[90] G. Tunnicliffe Wilson, "The Factorization of Matricial Spectral Densities" *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 23, no. 4, pp. 420-426, Dec. 1972. 1986.

[91] G. Ungerboeck, "Adaptive maximum likelihood receiver for carrier-modulated data transmission systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 22, no. 5, pp. 624-636, May 1974.

[92] H. L. Van Trees, "*Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part 1*". Wiley, 1968.

[93] B.D. Van Veen, K.M. Buckley, "Beamforming : A versatile approach to spatial filtering," *IEEE ASSP Magazine*, pp. 4-24, April 1988.

[94] P. Vila, F. Pipon, D. Pirez, and L. Fety, "MLSE antenna diversity equalization of a jammed frequency selective fading channel," *In European signal processing conference (EUSIPCO)*. Edinburgh, Scotland, pp. 1516-1519, 1994.

[95] M. Vutukuri, R. Malladi, K. Kuchi, and R. Koilpillai, "SAIC receiver algorithms for VAMOS downlink transmission", *ISWCS*, pp. 31-35, Aachen, Germany, Nov. 2011.

[96] G. Wang, J.P. Lie, and C.S. See, "A Robust approach to optimum widely linear MVDR beamformer," *Proc. ICASSP*, pp. 2593-2596, March 2012.

[97] F. Wen, Q. Wan, H. Wei, R. Fan, and Y. Luo, "Robust Capon beamforming exploiting the second-order noncircularity of signals," *Signal Processing, Elsevier*, vol. 102, pp. 100-111, 2014.

[98] T. Mc Whorter and P. Schreier, "Widely linear beamforming," *Proc. 37th Asilomar Conference*, Pacific Groeve (USA), pp. 753-759, Nov. 2003.

[99] J. M. Wozencraft and I. M. Jacobs, *Principles of Communication Engineering. New York : Wiley*, 1965.

[100] G. Wunder *et al.* "5GNOW : Non-orthogonal asynchronous waveforms for future mobile applications", *IEEE Commun. Magazine*, pp. 97-105, Feb. 2014.

[101] C.Q. Xu, C.L. Law, and S. Yosshida, "Interference rejection in non-Gaussian noise for satellite communications using non-linear beamforming," *Int. Journal on Satellite Communications and Networking*, vol. 21, pp. 13-22, 2003.

[102] D. Xu, L. Huang, X. Xu, and Z. Ye, "Widely linear MVDR beamformers for noncircular signals based on time-averaged Second-Order Noncircularity Coefficient Estimation," *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 62, no. 7, pp. 3219-3227, Sept. 2013.

[103] D. Xu, C. Gong, S. Cao, X. Xu, and Z. Ye, "Robust widely linear beamforming based on spatial spectrum of noncircularity coefficient," *Signal Processing, Elsevier*, vol. 104, pp. 167-173, Nov. 2014.

[104] J. Zhang, L. Huang, L. Zhang, B. Zhang, and Z. Ye, "Robust widely linear beamformer based on a projection constraint," *Proc. ICASSP*, Brisbane (Australia), pp. 2509-2513, April 2015.