Etude et Classification des algèbres Hom-associatives

Ahmed Zahari Abdou Damdji

Université de Haute Alsace
LMIA de UHA

Université des Comores
LMIS de UDC

Thèse

pour obtenir le grade de

Docteur en Mathematiques

présentée par

A. D. Ahmed Zahari

Étude et Classification des algèbres Hom-associatives

Thèse dirigée par Abdenacer Makhlouf et Mohamed Ibrahim Rachadi
soutenue le 24/05/2017 devant le jury composé de :

M.	Victor Abramov	Université de Tartu (Estonie)	Examinateur
M.	Martin Bordeman	Université de Haute Alsace	Examinateur
M.	Abdenacer Makhlouf	Université de Haute Alsace	Directeur de thèse
M.	Mohamed Ibrahim Rachadi	Université des Comores	Codirecteur
M.	Panaite Florin	Instituit IRMAR (Romanie)	Rapporteur
M.	Sergei Sivestrov	Université de Mälardalen (Suède)	Rapporteur

Remerciements

Je tiens vivement à remercier M. Abdenacer Makhlouf, mon directeur de thèse de recherche, pour sa sympatie, sa disponibilité et ses conseils intéressants et bien profitables pour l'avancement du travail. Pendant toutes ces heures passées ensembles, j'ai pu apprendre et profiter beaucoup de son expérience. J'ai un grand estime pour sa manière de communiquer les mathématiques qui, à travers de multiples interventions thechniques décisives, a été déterminante dans la construction de mon sujet.

Ma reconnaissance va aussi à M. Mohamed Ibrahim Rachadi, mon co-directeur de thèse qui m'a fait partager sa passion pour les mathématiques, et qui a su lors de mes premières années de formations, par son talent de pédagogue, me donner le goût des mathématiques à l'université des Comores où j'étais son assistant.

C'est avec grand plaisir que j'ai appris que M. Sergei Sivestrov et M. Panaite Florin étaient les raporteurs de ma thèse. Depuis mes premiers contacts avec mon futur sujet jusqu'aux denières minuites de la rédaction, j'ai lu et relu les travaux M. Sergei Sivestrov quotidiennment, admirant à chaque fois la profondeur, la rigueur et la porté de ses recherches. C'est un honneur qu'il ait accepté d'évaluer mon travail et faire partie du jyry. Je remercie également à M. Panaite Florin qui a accepté d'être raporteur de cette thèse et d'être membre du jyry. Ses travaux récents sur les Hom-algèbres ont motivé mes recherches.

J'aderesse aussi mes remerciement à M. Martin Bordeman et M. Victor Abramov qui ont accepté de faire partie du jyry en calité d'examinateur. Ses travaux m'ont été d'une grande utilité.

J'adresse mes sincères reconnaissances à M^{me}. Marie-Heleine Tulier, l'acienne Directrice de l'*É*cole Doctorale pour son aide morale et financière pour moi et ma femille, ses encouragement symphatiques et son soutien constant qui ont contribué à ma motivation durant les trois années de mathèse. J'exprime de même toute ma reconnaissance à M^{me} la Présidente de l'Université de Haute

Alsace pour son soutien administratif dans le cadre de mon séjour. Mes remerciements vont aussi à l'administration de l'UHA, en particulier M^{me} Nadia Benouamer, M^{me} Sandra Fernandez pour ses aides et soutiens constants durant ma thèse.

Bien sûr, je suis également très reconnaissant envers tous les membres du Laboratoire, Mathématiques, Informatique et Applications de Mulhouse qui m'ont accuelli dans leur équipe ces denières année et m'ont soutenu intellectuellement, moralement et thechniquement. Merci à l'équipe d'algèbre du LMIA, qui a été ma maison mathématiques pendant ces années de thèse. Un grand merci également aux doctorants et anciens doctorants qui m'ont souvent remonter le moral en partageant leur propre expérience de thésard : je pense tout particulierèment à Olivier Elchinger, Abdenour Kitouni, El-Kadri Adaoui, Benenedikt Hurle, Othman Yakhlef, P. Pavis D'Escurac, Benali Karima. Un merci spésial à Benenedikt Hurle, pour avoir répondu patiemment à toutes mes questions sur le logiciel Mathematica et à Olivier Elchinger pour ses conseils utiles lors de son passage à LMIA, notamment au sujet de la mise en forme de ma thèse.

Ce travail n'aurait pas pu être ce qu'il est aujourd'hui sans les exposés et discussions des groupes de travail, séminaires, colloques organisés ici et ailleurs, auquels j'ai participé ces dernières années : merci donc aux organisateurs et participants, dont les questions, commentaires et suggestions ont été très bénéfiques.

J'en profite également pour remercier l'équipe de la Faculté des Sciences et Techniques, Faculté des Lettre et Sciences Economiques, Instituit Universitaire de Technologie, et Instituit des Formations des Enseignants et de Recherche en Education de l'Université des Comores qui m'accueillent en tent qu'enseignant contractuel et qui me permetent ainsi de faire mes premiers pas dans l'enseignent supérieur.

À côté de ma thèse, j'ai également enseigné les mathématiques au Lycée Professionnel Joseph VOGT de Masevaux. Merci à ceux qui, sans le savoir, m'ont permis de changer d'air, plus particulièrement à M. Guillier le proviseur de l'établissement pour son soutien et ses encouragements, à mes collègues enseignants ainsi qu'au personnel de direction qui a toujours fait en sorte que je puisse me déplacer régulièrement à Mulhouse en m'accordant des emploi du temps adaptés.

Depuis le début de ma thèse, l'Ambassade de France auprès de l'Union des Comores a été présent. Il m'a aidé moralement et finacièrement durant les trois années de thèse. Il a aussi décidé beaucoup de son temps à discuté avec les autorités compétentes de l'UDC à propos de mon avenir et je lui en suis très reconnaissant. Je suis également très reconnaissant envers l'équipe de Campus france en particulier le bureau de Strasbourg qui m'a soutenu intellectuellement, moralement et techniquement. Mes remerciements vont aussi à la Fondation Spiegel de m'avoir attribué une bourse d'étude qui m'a permis de finir la thèse dans les bonnes conditions.

Enfin, je suis très reconnaissant envers mes femilles, mes amis, et tout particulièrement M^{me}. Faida et M^{me}. Halima qui ont su, pendant ces dernières années, me soutenir et me conseiller dans mes nombreux moments de doute, et ce malgré mon manque de disponibilité. Je tiens tout particulièment à remercier ceux qui m'ont hébergé de nombreux mois à Mulhouse en particulier M. Abdallah Daidine et M. Mdjassiri. Je remercie également mes parents et tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé à poursuivre mon travail de recherche ; cette thèse contient aussi une part d'eux même. Merci aussi à mes amis qui m'ont soutenu en particulier Ansli Zoubir et Bennoune Kamel...

Table des matières

Introduction

Les Hom-algèbres ou algèbres twistées par un homomorphisme sont apparues dans des travaux de physiciens, dans l'étude des quasi-déformations des algèbres de Lie de champs de vecteurs, en particulier les q-déformations des algèbres de Witt et de Virasoro, en lien avec l'algèbre des oscillateurs. Une q-déformation consiste à remplacer les dérivations usuelles par des σ-dérivations.

La notion d'algèbre Hom-associative est une généralisation des algèbres associatives, elle correspond à la notion d'algèbre Hom-Lie qui est apparue en physique, dans le sens que le commutateur d'une algèbre Hom-associative donne une algèbre Hom-Lie. Elle a été initialement introduite par Makhlouf et Silvestrov dans [MS10a]. L'algèbre Hom-associative considérée s'obtient en modifiant la condition d'associativité à l'aide d'un morphisme. Les algèbres Hom-associatives ont des liens étroits avec divers aspects de mathématiques et de physiques, par exemple les champs de vecteurs déformés et le calcul différentiel quantique. Il est bien connu aussi que les algèbres Hom-associatives simples jouent un rôle important dans la structure de ces algèbres. Peu de résultats sont connus sur le structure et la classification des algèbres Hom-associatives même si de nombreux outils et concepts ont été étudiés dans ce cadre comme la théorie des déformations qui sera utilisée dans l'étude des variétés algèbres des algèbres Hom-associatives $\mathcal{HA}ss_n$.

L'objectif de cette thèse est d'étudier la structure des algèbres Hom-associatives, notamment les algèbres simples c'est à dire n'admettant pas d'autres idéaux que l'idéal trivial ou toute l'algèbre. Par ailleurs, on s'intéresse aux classifications en dimensions inférieures ou égale à trois ainsi qu'aux invariants tels que la cohomologie, la déformation, les structures Rota-Baxter. De plus on a étudié les Hom-bialgèbres et les Hom-bialgèbres infinitésimales, les algèbres de Hopf ainsi que la cohomologie des Hom-bialgèbres et les variétés algébriques correspondantes à ces algèbres. La thèse comporte six chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle les bases de la théorie de la structure des Hom-algèbres. Dand la première section, on rappelle quelques définitions et propriétés des algèbres Hom-Lie et Hom-associatives. La deconde section sera consacrée par les algèbres Homfrléxibles et les algèbres Hom-Leibniz. On évoquera ses carcterisations en utilisant les α-associateurs. La toixième section se consacrera aux algèbres Hom-Lie admissibles et aux G-Hom-associatives.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle les bases de la théorie et on étudie la structure des algèbres Hom-associatives ainsi que différentes construction comme la composition avec des automorphismes qui nous permettent de construire de nouveaux objets et de d'établir certaines nouvelles propriétés. Parmi les résultats originaux, on peut signaler l'étude des algèbres Hom-associatives simples ainsi que leurs constructions. On a montré que toutes les algèbres Hom-associatives multiplicatives simples s'obtiennent par composition d'algèbres simples et d'automorphismes. Par ailleurs, on a donné de nombreux exemples liés à l'algèbre des matrices 2×2.

Dans le troixième chapitre, on commence par étudier les propriétés des changements de base dans ces structures algébriques. Puis, on s'est intéréssé à la classe des algèbres Hom-associatives multiplicatives en décrivant pour une dimension fixée les variétés algébriques correspondantes. On a calculé la base de Gröbner de l'idéal engendrant la variété algébrique des algèbres Hom-associatives de dimension 2 où la multiplication μ et l'application linéaire α sont identifiées à leurs constantes de structure relativement à une base donnée. Rappelons que la multiplication μ est une application bilinéaire $\mu : A \times A \to A$ et $\alpha : A \to A$ est un homomorphisme satisfaisant

$$\mu(\alpha(x), \mu(y,z)) = \mu(\mu(x,y), \alpha(z)). \tag{0.0.1}$$

L'action du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ permet de fibrer la variété algébrique $\mathcal{HA}ss_n$ et de décrire les orbites de ces algèbres. Soit $f \in GL_n(\mathbb{K})$, l'action $f.A$ transporte la structure par

$$f \cdot \mu(x,y) = f^{-1}\mu(f(x), f(y)) \tag{0.0.2}$$

$$f \cdot \alpha(x) = f^{-1}\alpha(f(x)). \tag{0.0.3}$$

L'orbite de l'algèbre Hom-associative A de $\mathcal{HA}ss_n$ est donnée par

$$\vartheta(A) = \left\{A' = f \cdot A,\, f \in GL_n(\mathbb{K})\right\}.$$

On établit les classifications à isomorphisme près des algèbres Hom-associatives unitaires et non unitaires en petite dimension. On a aussi décrit les algèbres de type associatif en se basant sur le théorème de twist de yau.

Dans le quatrième chapitre, on étudie certaines propriétés de dérivation en donnant des calculs explicites du premier groupe de cohomologie dans le cadre général. On énonce les définitions classique puis on traite la notion de α^k-dérivation où k est un entier positif. Et enfin, grâce à la classification établie dans le chapitre deux, on a calculé les dérivations et α-dérivations de ces algèbres. Cette étude nous a permis de voir les invariants des algèbres et confirmer l'appartenance à des orbites distinctes.

Dans le cinquième chapitre, on établit la cohomologie de ces algèbres. On a pu lister les algèbres rigides grace à leur classe de cohomologie puis on s'est s'intéressé aux déformations infinitésimales et aux dégénérations. D'une part, la cohomologie et la déformation de ces algèbres nous a permis d'identifier les algèbres rigides dont le deuxième groupe cohomologie est nulle, et d'autre part de caractériser les composantes irreductibles.

Dans le sixième chapitre, on s'intéresse aux structures Rota-Baxter de poids $\lambda \in \mathbb{K}$ des algèbres Hom-associatives. C'est la donnée d'une algèbre Hom-associative (A, μ, α) et d'une application linéaire $R : A \longrightarrow A$ qui satisfait les identités suivantes

$$\alpha \circ R = R \circ \alpha, \text{ et} R(x).R(y) = R(x.R(y) + R(x).y + \lambda x.y).$$

On a calculé ces strutures pour toutes les algèbres en dimension deux et trois.

Enfin, dans le dernier chapitre, on a travaillé sur les structures Hom-bialgèbres et leurs invariants. Cette structure fait intervenir les comultiplications et counités qui sont des applications de la forme $\Delta : A \to A \otimes A$ et $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ satisfaisant les conditions suivantes

$$(C1) \quad (\beta \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \beta) \circ \Delta$$
$$(C2) \quad (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id \quad (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id,$$

où β est le morphisme de structure et avec des conditions de compatibilité avec la multiplication Hom-associative.

On a étudié les propriétés et les classifications, ainsi que le calcul de certains invariants comme les premier et deuxièmes groupes de cohomologie.

1

Généralités sur les Hom-algèbres

Sommaire

Les Hom-algèbres ou algèbres twistées par un homomorphisme sont apparues dans les traux de physiciens, dans l'étude des quasi-déformations des algèbres de Lie des champs de vecteurs, en particulier les q-déformations des algèbres de Witt et Virasoro, en liens avec l'algèbre des osciallateurs [AS90]. Une q-déformation consiste à remplacer les dérivations usuelles par des σ-dérivations. Les algèbres Hom-Lie ont été introduites par Hartwig, Larson et Silvestrov pour décrire ces q-déformations à l'aide des σ-dérivations [HLS06]. Les algèbres associatives correspondantes qui sont les algèbres Hom-associatives, ont été introduites par Makhlouf et Silvestrov dans [MS08b].

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions fondamentales des Hom-algèbres en particulier les algèbres Hom-Lie et Hom-associatives, les algèbres Hom-flexibles et Hom-Leibniz ainsi que les algèbres Hom-Lie admissibles et G-Hom-associatives.

1.1 Algèbres Hom-Lie et Hom-associatives

Algèbres Hom-Lie

Les algèbres Hom-Lie ont été introduites par Hartwig, Larson et Silvestrov dans [HLS06] motivées par des exemples d'algèbres de Lie deformées resultant des discrétisations des champs de vecteurs.

Definition 1.1.1 On appelle algèbre Hom-Lie un triplet $(A,[.,.],\alpha)$ où A est un espace vectoriel, $[.,.] : A\times A \longrightarrow A$ est une application bilinéaire et $\alpha : A \longrightarrow A$ une application linéaire tels que

$$[\alpha(x),[y,z]]+[\alpha(z),[x,y]]+[\alpha(y),[z,x]] = 0 \quad \text{l'identité de Hom-Jacobi} \tag{1.1.1}$$

$$[x,y] = -[y,x] \quad \text{l'antisymétrie} \tag{1.1.2}$$

pour tous $x,y,z \in A$.

Soient $(A,[.,.],\alpha)$ et $(A',[.,.]',\alpha')$ deux algèbres Hom-Lie. Un morphisme d'algèbres Hom-Lie est une application $\phi : A \to A$ vérifiant $\phi([x,y]) = [\phi(x),\phi(y)]'$ pour tous $x,y \in A$.

Remark 1.1.2 Si Id_A alors l'identité précédente correspond à la condition de Jacobi, et l'algèbre définie est une algèbre de Lie. Toutes les algèbre de Lie sont des algèbres Hom-Lie avec $\alpha = Id_A$.

Definition 1.1.3 Soit $(A,[.,.],\alpha)$ une algèbre Hom-Lie. Un sous-espace vectoriel $\mathscr{A}$ de A est un ideal si $\forall a \in \mathscr{A}, \forall x \in A, [x,a] \in \mathscr{A}$ et $\alpha(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}$. C'est une sous-algèbre si $\forall a,b \in \mathscr{A}, [a,b] \in \mathscr{A}$ et $\alpha(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}$.

Proposition 1.1.4 *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $(A,[.,.],\alpha)$ une algèbre Hom-Lie multiplicative de dimension finie d sur $\mathbb{K}$. Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux ideaux de A et α surjective, alors on définit $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ comme étant le sous-espace vectoriel de A engendré par les $[X,Y]$ où $X \in \mathscr{A}$ et $Y \in \mathscr{B}$. C'est encore un idéal de A.*

Algèbres Hom-associatives

La notion d'algèbre Hom-associative a été introduite dans [**?**].

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et A un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les définitions et les propriétés suivantes restent valable sur n'importe quel corps.

Definition 1.1.5 Une algèbre Hom-associative est un triplet (A,μ,α) constitué d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A, une application bilinéaire $\mu : A\times A \to A$ et un homomorphisme $\alpha : A \to A$ satisfaisant

$$\mu(\alpha(x),\mu(y,z)) = \mu(\mu(x,y),\alpha(z)). \tag{1.1.3}$$

Elle est dite multiplicative si α est un morphisme d'algèbre,

$$\alpha(\mu(x,y)) = \mu(\alpha(x),\alpha(y)), \tag{1.1.4}$$

En terme de Hom-associateur on a

$$\mathfrak{as}_\alpha(x,y,z) = \mu(\alpha(x),\mu(y,z)) - \mu(\mu(x,y),\alpha(z)).$$

La condition d'associativité devient

$$\mathfrak{as}_\alpha(x,y,z) = 0.$$

Proposition 1.1.6 *[MS08a] A chaque algèbre Hom-associative (A,μ,α), on peut associer une algèbre Hom-Lie dont le crochet est défini pour tous $x,y,z \in A$ par $[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x)$.*

Démonstration. Ce crochet est bien sûr antisymétrique et un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
&[\alpha(x),[y,z]] + [\alpha(y),[z,x]] + [\alpha(z),[x,y]]\\
&= \mu(\alpha(x),\mu(y,z)) - \mu(\alpha(x),\mu(z,y)) - \mu(\mu((y,z),\alpha(x)) + \mu(\mu(z,y),\alpha(x))\\
&+\mu((\alpha(y),\mu(z,x)) - \mu(\alpha(y),\mu(x,z)) - \mu(\mu(z,x),\alpha(y)) + \mu(\mu(x,z),\alpha(y))\\
&+\mu((\alpha(z),\mu(x,y)) - \mu(\alpha(z),\mu(y,x)) - \mu(\mu(x,y),\alpha(z)) + \mu(\mu(y,x),\alpha(z))\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

1.2 Algèbres Hom-flexibles et Hom-Leibniz

Algèbres Hom-flexibles

Les algèbres flexibles ont été initialement introduites par Albert et par la suite par des nombreux auteurs comme Myung, Okubo, Laufer, Tomber et Santilli pour plus de details voir ([H.C82]).
La notion d'algèbre Hom-flexible a été introduite dans [MS08a]. On résume dans la suite sa définition et sa caracterisation.

On rappelle quelques résultats sur les structures flexibles décrites dans [MS10a].

Definition 1.2.1 Une Hom-algèbre $A = (A,\mu,\alpha)$ est dite flexible si pour tous $x,y \in A$

$$\mu(\mu(x,y),\alpha(x)) = \mu(\alpha(x),\mu(y,x)). \tag{1.2.1}$$

En utilisant le Hom-associateur $as_{\mu,\alpha}$, la condition (1.2.1) peut s'écrire comme

$$as_{\mu,\alpha}(x,y,x) = 0.$$

Lemma 1.2.2 *Soit $A = (A,\mu,\alpha)$ une Hom-algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *A est flexible.*
2. *Pour tous $x,y \in A \quad as_{\mu,\alpha}(x,y,x) = 0$.*
3. *Pour tous $x,y,z \in A, \quad as_{\mu,\alpha}(x,y,z) = -as_{\mu,\alpha}(z,y,x)$.*

Démonstration. L'équivalence des deux premiers points provient de la définition. L'égalité $a_{\mu,\alpha}(x-z,y,x-z) = 0$ est vérifiée par définition et est équivalente à $as_{\mu,\alpha}(x,y,z) + as_{\mu,\alpha}(z,y,x) = 0$ par linéarité. □

Corollary 1.2.3 *Toute algèbre Hom-associative est fexible.*

Soit $A = (A,\mu,\alpha)$ une Hom-algèbre, où μ est la multiplication et α une application twist. On définit deux nouvelles multiplications en utilisant μ :

$\forall x,y \in A \quad x \bullet y = \mu(x,y) + \mu(y,x), \quad \{x,y\} = \mu(x,y) - \mu(y,x)$.

On note $A^+ = (A,\bullet,\alpha)$ et $A^- = (A,\{,\},\alpha)$.

Proposition 1.2.4 *Une Hom-algèbre $A = (A,\mu,\alpha)$ est flexible si et seulement si*

$$\{\alpha(x), y \bullet z\} = \{x,y\} \bullet \alpha(z) + \alpha(y) \bullet \{x,z\}. \tag{1.2.2}$$

Démonstration. Soit A une Hom-algèbre flexible. Par le Lemme 1.2.2, c'est équivalent à $as_{\mu,\alpha}(z,y,x) = 0$ pour tous $x,y,z \in A$. Ceci implique que

$$\begin{aligned} &as_{\mu,\beta}(x,y,z) + as_{\mu,\alpha}(z,y,x) + as_{\mu,\beta}(x,z,y) + \\ &as_{\mu,\alpha}(y,z,x) - as_{\mu,\alpha}(y,x,z) - as_{\mu,\beta}(z,x,y) = 0. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

En développant, la relation précédente, on obtient $\{\alpha(x), y \bullet z\} = \{x,y\} \bullet \alpha(z) + \alpha(y) \bullet \{x,z\}$. Réciproquement, supposons que la condition (1.2.2) est vérifiée. En prenant $x = z$ dans (1.2.3), on obtient $as_{\mu,\alpha}(x,y,x) = 0$. Ainsi, A est flexible. □

Nous visons maitenant à donner une autre caractérisation des algèbres Hom-Lie admissibles. Soit $A = (A,\mu,\alpha)$ une Hom-algèbre et soit $A^- = (A,\mu^{-1},\alpha)$ (respectivement $A^+ = (A,\mu^+,\alpha)$) Hom-algèbre plus (resp. Hom-algèbre moins) avec la multiplication définie par $\forall x,y \in A$ par $\mu^-(x,y) = \frac{1}{2}(\mu(x,y) - \mu(y,x))$ (resp. $\mu^+(x,y) = \frac{1}{2}(\mu(x,y) + \mu(y,x))$). On aura donc la caracterisation suivante des algèbres Hom-flexibles.

Proposition 1.2.5 *Une Hom-algèbre $A = (A,\mu,\alpha)$ est une algèbre Hom-flexible si et seulement si*

$$\mu^-(\alpha(x),\mu^+(y,z)) = \mu^+(\mu^-(x,y),\alpha(z)) + \mu^+(\alpha(y),\mu^+(\alpha(y),\mu^-(x,z)) \tag{1.2.4}$$

Démonstration. Voir ([MS08b]) □

Algèbres Hom-Leibniz

Une classe des algèbres Hom-Leibniz a été introduite dans [**?**] en relation avec las algèbres quasi-Lie générales suivant les conventions standard de Loday pour les algèbres de Leibniz (i.e. les algèbres de Loday droite)

Definition 1.2.6 Une algèbre Hom-Leibniz est le triplet $(A,[.,.],\alpha)$ formé par un espace vectoriel A, une application bilinéaire $[.,.]: A\times A \longrightarrow A$ et une application linéaire $\alpha : A \longrightarrow A$ satisfaisant

$$[[x,y],\alpha(z)] = [[x,z],\alpha(y)] + [[\alpha(x),[y,z]].$$

En termes de l'homomorphisme adjoint (droite) $Ad_y : A \longrightarrow A$ défini par $Ad_y(x) = [x,y]$, on peut écrire la définition autrement par

$$Ad_{\alpha(z)}[x,y] = [Ad_z(x),\alpha(y)] + [\alpha(x), Ad_z(y)].$$

ou en termes d'opérateurs par

$$Ad_{\alpha(z)} \circ Ad_y = Ad_{\alpha(y)} \circ Ad_z + Ad_{Ad_z(y)} \circ \alpha.$$

1.3 Algèbres Hom-Lie admissibles et G-Hom-associatives

Hom-algèbres Hom-Lie admissibles

Les algèbres Lie-admissibles ont été introduites par A.A. Albert en 1948.

Definition 1.3.1 Un α-associateur et une application trilinéaire $a_{\mu,\alpha}$ sur A associée à une multiplication μ et un morphisme α tel que,

$$a_{\mu,\alpha}(x_1,x_2,x_3) = \mu(\mu(x_1,x_2),\alpha(x_3)) - \mu(\alpha(x_1),\mu(x_2,x_3)). \qquad (1.3.1)$$

Definition 1.3.2 Soit $A = (A,\mu,\alpha)$ une strucure Hom-algèbre. Alors A est une algèbre Hom-Lie admissible si le crochet défini pour tous $x,y \in A$ par

$$[x,y] = \mu(x,y) - \mu(y,x) \qquad (1.3.2)$$

vérifie l'identité de Hom-Jacobi.

Remark 1.3.3
1. Le commutateur (1.3.2) est antisymétrique.
2. Toute algèbre Hom-associative est une algèbre Hom-Lie admissible avec le même morphisme.

Proposition 1.3.4 *Toute algèbre Hom-Lie $(A,[,],\alpha)$ est une algèbre Hom-Lie admissible avec le même α.*

Démonstration. Voir ([MS08b]). □

Hom-algèbres G-Hom-associatives

On considère dans cette section la classe des algèbres G-associatives, introduite par Goze et Remm et généralisées au cas Hom par Makhlouf et Silvestrov. Elles permettent de classifier les algèbres Hom-Lie admissibles.

Definition 1.3.5 Soit G un sous-groupe du groupe des permutations S_3. Une Hom-algèbre sur A définie par une multiplication μ et un morphisme α est dite G-Hom-associative si

$$\sum_{\sigma\in G}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}(\mu(\mu(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)}),\alpha(x_{\sigma(3)}))-\mu(\alpha(x_{\sigma(1)}),\mu(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})))=0 \tag{1.3.3}$$

où $x_i \in A$, et $(-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ est la signature de la permutation σ.

Remark 1.3.6 la condition (1.3.3) peut être écrite sous la forme

$$\sum_{\sigma\in G}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}a_{\mu,\alpha}\circ\sigma=0. \tag{1.3.4}$$

où σ est l'extension de la permutation, désignée par la même notation de l'application triliéaire définie par

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(\sigma(x_1),\sigma(x_2),\sigma(x_3)). \tag{1.3.5}$$

Le crochet $[x,y]=\mu(x,y)-\mu(y,x)$, où μ est la multiplication d'une algèbre Hom-Lie admissible, vérifie la condition Hom-Jacobi équivaut à

$$\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}(\mu((x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\alpha(x_{\sigma(3)}))-\mu(\alpha(x_{\sigma(1)}),\mu(x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})))=0 \tag{1.3.6}$$

qu'on peut écrire

$$\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}a_{\mu,\alpha}\circ\sigma=0. \tag{1.3.7}$$

Proposition 1.3.7 *Soit G un sous-groupe du groupe des permutations S_3. Alors toute algèbre G-Hom-associative est une algèbre Hom-Lie admissible.*

Les sous-groupes de S_3 sont

$$G_1=\{Id\},\quad G_2=\{Id,\tau_{12}\},\quad G_3=\{Id,\tau_{23}\},$$
$$G_4=\{Id,\tau_{13}\},\quad G_5=A_3,\ G_6=S_3$$

où A_3 est le groupe alterné et τ_{ij} est la transposition entre i et j, alors on obtient les types suivants d'algèbres Hom-Lie admissibles.

- Les algèbres G_1-Hom-associatives sont les algèbres Hom-associatives définies précédement.
- Les algèbres G_2-Hom-associatives satisfont la condition $\mu(\alpha(x),\mu(y,z))-\mu(\alpha(y),\mu(x,z)) = \mu(\mu(x,y),\alpha(z))-\mu(\mu(y,x),\alpha(z))$. Quand α est l'identité l'algèbre est appelée une algèbre de Vinbert ou une algèbre symétrique gauche.
- Les algèbres G_3-Hom-associatives satisfont la condition $\mu(\alpha(x),\mu(y,z))-\mu(\alpha(x),\mu(z,y)) = \mu(\mu(x,y),\alpha(z))-\mu(\mu(x,z),\alpha(y))$. Quand α est l'identité l'algèbre est appelée une algèbre pre-Lie ou une algèbre symétrique droite.
- Les algèbres G_4-Hom-associatives satisfont la condition $\mu(\alpha(x),\mu(y,z))-\mu(\alpha(z),\mu(y,x)) = \mu(\mu(x,y),\alpha(z))-\mu(\mu(z,y),\alpha(x))$.
- Les algèbres G_5-Hom-associatives satisfont la condition $\mu(\alpha(x),\mu(y,z)) + \mu(\alpha(y),\mu(z,x)) + \mu(\alpha(z),\mu(x,y)) =$ $\mu(\mu(x,y),\alpha(z)) + \mu(\mu(y,z),\alpha(x)) - \mu(\mu(z,x),\alpha(y))$.
  Si le produit μ est antisymétrique alors la condition précédente est exactement l'identité de Hom-jacobi.
- Les algèbres G_6-Hom-associatives sont les algèbres Hom-Lie admissibles.

2

Structures des algèbres Hom-associatives

Sommaire

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions des Hom-algèbres introduites dans [MS08b, MS10b] généralisant les algèbres associatives et nous présentons les propriétés et des théorèmes de construction. Nous étudions aussi dans cette section quelques propriétés des algèbres Hom-associatives qui ne sont pas nécessairement multiplicatives. Une caractérisation complète est donnée pour les algèbres Hom-associatives multiplicative simples. Par ailleurs, de nombreux exemples sont établis en twistant l'algèbre des matrices 2×2.

2.1 Généralités sur les algèbres Hom-associatives

Nous nous occupons seulement des algèbres Hom-associatives multiplicatives, nous appelons algèbre Hom-associative pour simplicité. On supose aussi que l'ensemble des algèbres Hom-associatives est noté $\mathcal{HA}ss_n$ de dimension n.

Dans le language des algèbres de Hopf, une algèbre Hom-associative sur $\mathbb{K}$ est constituée de l'application linéaire $\mu : A \otimes A \to A$ et d'une application linéaire $\alpha : A \to A$ satisfaisant

$$\mu(\alpha(x) \otimes \mu(y \otimes z)) = \mu(\mu(x \otimes y) \otimes \alpha(z)). \tag{2.1.1}$$

Definition 2.1.1 Soient (A_1, μ_1, α) et (A_2, μ_2, β) deux algèbres Hom-associatives. Une application $\varphi : A_1 \to A_2$ est un momorphisme d'algèbre Hom-associative si

$$\varphi(\mu_1(x,y)) = \mu_2(\varphi(x), \varphi(y)),\ \beta \circ \varphi(x) = \varphi \circ \alpha(x),\ \forall x, y \in A. \tag{2.1.2}$$

En particuler, deux algèbres Hom-associatives (A_1, μ_1, α) et (A_2, μ_2, β) sont isomorphes si φ est une application bijective.

On dit que c'est un morphisme faible si seule la première condition est vérifiée.

Definition 2.1.2 Une algèbre Hom-associative unitaire est donnée par un quadruplet (A, μ, α, u) où u est un élément de A tels que

- (A, μ, α) est une algèbre Hom-associative
- $\mu(x, u) = \mu(u, x) = \alpha(x) \quad \forall x \in A$
- $\alpha(u) = u$

Nous annonçons d'abord le principe de twist qui permet de déformer des structures usuelles en Hom-structures.

Proposition 2.1.3 ([Yau09b]) *Soit (A, μ, α) une algèbre Hom-associative et $\beta : A \to A$ un morphisme d'algèbre Hom-associative. Alors $(A, \beta\mu, \beta\alpha)$ est une algèbre Hom-associative.*

En particulier, si (A, μ) est une algèbre associative et β est un morphisme d'algèbre, alors $(A, \beta\mu, \beta)$ est une algèbre Hom-associative.

Definition 2.1.4 Soit (A, μ, α) une algèbre Hom-associative. S'il existe une algèbre associative (A, μ') telle que $\mu(x,y) = \alpha\mu'(x,y), \forall x, y \in A$, on dit que (A, μ, α) est de type associatif et (A, μ') est son algèbre associative compatible.

On dit aussi que (A, μ, α) est l'algèbre induite par (A, μ') et le morphisme d'algèbre α.

Corollary 2.1.5 *Soit (A, μ, α) algèbre Hom-associative multiplicative de type associatif où α est inversible alors $(A, \mu' = \alpha^{-1} \circ \mu)$ est une algèbre associative et α est un automorphisme suivant μ'.*

Démonstration. On montre que $(A, \alpha^{-1} \circ \mu)$ est une algèbre associative. En effet,

$$\begin{aligned}
\mu'(\mu'(x,y),z) &= \alpha^{-1} \circ \mu(\alpha^{-1}\mu(x,y),z) \\
&= \alpha^{-1} \circ \mu(\alpha^{-1}\mu(x,y),\alpha^{-1} \circ \alpha(z)) \\
&= \alpha^{-2} \circ \mu(\mu(x,y),\alpha(z)) \\
&= \alpha^{-2} \circ \mu(\alpha(x),\mu(y,z)) \\
&= \alpha^{-1} \circ \mu(x,\alpha^{-1} \circ \mu(x,y)) \\
&= \mu'(x,\mu'(y,z)).
\end{aligned}$$

De plus, α est un automorphisme suivant μ'. On a donc

$$\begin{aligned}
\mu'(\alpha(x),\alpha(y)) &= \alpha^{-1} \circ \mu(\alpha(x),\alpha(y)) \\
&= \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \mu(x,y) = \alpha \circ \mu'(x,y).
\end{aligned}$$

□

Remark 2.1.6 Notons que si α n'est pas inversible, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu(\alpha(x),\mu(y,z)) &= \mu(\mu(x,y),\alpha(z)) \\
\alpha\tilde{\mu}(\alpha(x),\alpha\tilde{\mu}(y,z)) &= \alpha\tilde{\mu}(\alpha\tilde{\mu}(x,y),\alpha(z)) \\
\alpha^2(\tilde{\mu}(x,\tilde{\mu}(y,z))) &= \alpha^2(\tilde{\mu}(\tilde{\mu}(x,y),z)),
\end{aligned}$$

qui signifie que $\tilde{\mu}$ est associative modulo α^2.

Proposition 2.1.7 *Soient (A_1, μ_1, α_1) et (A_2, μ_2, α_2) deux algèbres Hom-associatives et $\phi : A_1 \to A_2$ un morphisme inversible d'algèbres Hom-associatives. Si (A_1, μ_1') est de type associatif et (A_1, μ_1, α_1) est son algèbre associative compatible alors (A_2, μ_2, α_2) est de type associatif avec l'algèbre associative compatible $(A_2, \mu_2' = \phi \circ \mu_1 \circ (\phi^{-1} \otimes \phi^{-1}))$ telle que $\phi : (A_1, \mu_1') \to (A_2, \mu_2')$ est un morphisme d'algèbre.*

Démonstration. Comme ϕ est un homomorphisme de (A_1, μ_1, α_1) à (A_2, μ_2, α_2), alors $\alpha_2\phi = \phi\alpha_1$, $\forall x, y \in A$, ϕ definit μ_2 par $\mu_2(\phi(x),\phi(y)) = \phi\mu_1(x,y)$. C'est facile de montrer que (A_2, μ_2) est une algèbre associative. En outre

$$\begin{aligned}
\mu_2(\phi(x),\phi(y)) = \phi \circ \mu_1(x,y) &= \phi \circ \alpha_1 \circ \mu_1'(x,y)) \\
&= \alpha_2 \circ \phi\mu_1'(x,y) = \alpha_2\mu_2'(\phi(x),\phi(y)).
\end{aligned}$$

On montre que μ_2 est une algèbre associative telle que $\mu_2(u,v) = \phi \circ \mu_1(\phi^{-1}(u),\phi^{-1}(v))$ avec $x = \phi^{-1}(u), y = \phi^{-1}(v)$ et $z = \phi^{-1}(w)$ pour tous $x, y, z \in A$.

$$\begin{aligned}
\mu_2(\mu_2(u,v),w) &= \phi \circ \mu_1(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(\phi \circ \mu_1(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(u,v),w) \\
&= \phi \circ \mu_1(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(\phi \circ \mu_1(\phi^{-1}(u),\phi^{-1}(v)),w) \\
&= \phi \circ \mu_1(\mu_1(\phi^{-1}(u),\phi^{-1}(v)),\phi^{-1}(w)) \\
&= \phi \circ \mu_1(\phi^{-1}(u),\mu_1(\phi^{-1}(v),\phi^{-1}(w))) \\
&= \phi \circ \mu_1(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(\phi \otimes \phi)(\phi^{-1}(u),\mu_1(\phi^{-1}(v),\phi^{-1}(w)) \\
&= \phi \circ \mu_1(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(u,\phi\mu_1(\phi^{-1}(v),\phi^{-1}(w))) \\
&= \mu_2(u,\mu_2(v,w)).
\end{aligned}$$

Donc, (A_2, μ_2) est une algèbre associative. $\square$

Proposition 2.1.8 *Soit (A, μ, α) une algèbre Hom-associative de dimension n et $\phi : A \to A$ une application linéaire inversible. Alors (A, μ, α) est isomorphe à l'algèbre Hom-associative $(A, \mu', \phi\alpha\phi^{-1})$ de dimension n où $\mu' = \phi \circ \mu \circ (\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})$. De plus, si $\left\{C_{ij}^k\right\}$ sont les contantes de structure de μ suivant la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, alors μ' a les même contantes de structure suivant la base $\{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\}$ où $\phi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{pk} e_k$.*

Démonstration. Nous prouvons pour toute l'application linéaire $\phi : A \to A$, $(A, \mu', \phi\alpha\phi^{-1})$ est une algèbre Hom-associative. En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\mu'(\mu'(x,y),\phi\alpha\phi^{-1}(z)) = \\
&= \phi\mu(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(\phi\mu(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(x,y),\phi\alpha\phi^{-1}(z)) \\
&= \phi\mu(\mu(\phi^{-1}(x),\phi^{-1}(y)),\alpha\phi^{-1}(z)) \\
&= \phi\mu(\alpha\phi^{-1}(x),\mu(\phi^{-1}(y),\phi^{-1}(z))) \\
&= \phi\mu(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(\phi \otimes \phi)(\alpha\phi^{-1}(x),\mu(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(y,z))) \\
&= \phi\mu(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(\phi\alpha\phi^{1}(x),\phi\mu(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(y,z)) \\
&= \mu'(\phi\alpha\phi^{-1}(x),\mu'(y,z)).
\end{aligned}$$

Donc, $(A, \mu', \phi\alpha\phi^{-1})$ est une algèbre Hom-associative.
Elle est également multiplicative. En effet,

$$\begin{aligned}
\phi\alpha\phi^{-1}\mu'(x,y) &= \phi\alpha\phi^{-1}\phi\mu(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(x,y) \\
&= \phi\alpha\mu(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(x,y) \\
&= \phi\mu(\alpha\phi^{-1}(x),\alpha\phi^{-1}(y)) \\
&= \phi\mu(\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})(\phi \otimes \phi)(\alpha\phi^{-1}(x),\alpha\phi^{-1}(y)) \\
&= \mu'(\phi\alpha\phi^{-1}(x),\phi\alpha\phi^{-1}(y)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\phi : (A, \mu, \alpha) \to (A, \mu', \phi\alpha\phi^{-1})$ est un morphisme, puisque
$\phi \circ \mu = \phi \circ \mu \circ (\phi \otimes \phi) \circ (\phi \otimes \phi) = \mu' \circ (\phi \otimes \phi)$ et $(\phi\alpha\phi^{-1}) \circ \phi = \phi \circ \alpha$.
Il est facile de montrer que $\{\phi(e_i), \cdots, \phi(e_n)\}$ est une base de A. Et pour $i, j = 1, \cdots, n$, on a

$$\mu_2(\phi(e_i),\phi(e_j)) = \phi\mu_1(\phi^{-1}(e_i),\phi^{-1}(e_j)) = \phi\mu(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{k}\phi(e_k).$$

□

Remark 2.1.9 Une algèbre Hom-associative (A,μ,α) est isomorphe à une algèbre associative si et seulement si $\alpha = id$. En effet, $\phi \circ \alpha\phi^{-1} = id$ est equivalent à $\alpha = id$.

Remark 2.1.10 La Proposition 2.1.8 est utile pour faire une classification des algèbres Hom-associative. En effet, nous devons considérer la classe de morphismes qui sont conjugués. La représentation de ces classes est donnée par la forme de la matrice de Jordan. Toute matrice $n\times n$ sur $\mathbb{C}$ est équivalente au changement de base de la forme canonique de Jordan, alors nous choisissons ϕ de sorte que la matrice de $\phi\alpha\phi^{-1} = \gamma$, où γ est la forme canonique de Jordan.
Par conséquent, pour obtenir la classification, nous ne considérons que la forme de Jordan pour l'application de structure des algèbres Hom-associatives.

Proposition 2.1.11 *Soit (A,μ,α) une algèbre Hom-associative sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(A,\mu',\phi\alpha\phi^{-1})$ son algèbre isomorphe décrite dans la Proposition 2.1.8. Si ψ est un automorphisme de (A,μ,α), alors $\phi\psi\phi^{-1}$ est un automorphisme de $(A,\mu,\phi\alpha\phi^{-1})$.*

Démonstration. Notons $\gamma = \phi\alpha\phi^{-1}$. On a
$\phi\psi\phi^{-1}\gamma = \phi\psi\phi^{-1}\phi\alpha\phi^{-1} = \phi\psi\alpha\phi^{-1} = \phi\alpha\psi\phi^{-1} = \phi\alpha\phi^{-1}\phi\psi\phi^{-1} = \gamma\phi\psi\phi^{-1}$.
Pour tous $x,y \in A$,

$$\begin{aligned}\phi\psi\phi^{-1}\mu'(\phi(x),\phi(y)) &= \phi\psi\phi^{-1}\phi\mu(x,y) = \phi\psi\mu(x,y)\\ &= \phi\mu(\psi(x),\psi(y)) = \mu'(\phi\psi(x),\phi\psi(y))\\ &= \mu'(\phi\psi\phi^{-1}(\phi(x)),\phi\psi\phi^{-1}(\phi(y))).\end{aligned}$$

Par définition, $\phi\psi\phi^{-1}$ est un automorphisme de $(A,\mu',\phi\alpha\phi^{-1})$. □

Proposition 2.1.12 *Soient (A,μ_A,α) et (B,μ_B,β) deux algèbres Hom-associatives. On a l'algèbre Hom-associative $(A\oplus B,\mu_{A\oplus B},\alpha+\beta)$, où l'application bilinéaire $\mu_{A\oplus B}(.,.) : (A\oplus B)\times(A\oplus B) \longrightarrow (A\oplus B)$ est donnée par*

$$\mu_{A\oplus B}(a_1+b_1,a_2+b_2) = (\mu_A(a_1,a_2),\mu_B(b_1,b_2)),\ \forall\, a_1,a_2 \in A,\ \forall\, b_1,b_2 \in B,$$

et l'application linéaire $(\alpha+\beta) : A\oplus B \longrightarrow A\oplus B$ est donnée par

$$(\alpha+\beta)(a,b) = (\alpha(a),\beta(b))\,\forall a \in A, b \in B.$$

Démonstration. Pour tous $a_i \in A$, $b_i \in B$, on a
$\mu_{A\oplus B}(a_1+b_1,a_2+b_2) = (\mu_A(a_1,a_2),\mu_B(b_1,b_2))$. Par calcul direct, on

obtient

$$\begin{aligned}
&\mu_{A\oplus B}((\alpha+\beta)(a_1,b_1),\mu_{A\oplus B}(a_2+b_2,a_3+b_3)) = \\
&= \mu_{A\oplus B}((\alpha+\beta)(a_1,b_1),(\mu_A(a_2,a_3),\mu_B(b_2,b_3))) \\
&= \mu_{A\oplus B}((\alpha(a_1),\beta(b_1)),(\mu_A(a_2,a_3),\mu_B(b_2,b_3))) \\
&= (\mu_A(\alpha(a_1),\mu_A(a_2,a_3)),\mu_B(\beta(b_1),\mu_B(b_2,b_3))) \\
&= (\mu_A(\mu_A(a_1,a_2),\alpha(a_3)),\mu_B(\mu_B(b_1,b_2),\beta(b_3))) \\
&= \mu_{A\oplus B}(\mu_{A\oplus B}(a_1+b_1,a_2+b_2),(\alpha+\beta)(a_3,b_3)))
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Rappelons qu'un morphisme d'algèbre Hom-associative $\phi : (A,\mu_A,\alpha) \to (B,\mu_B,\beta)$ est une application linéaire $\phi : A \to B$ telle que

$$\phi \circ \mu_A(a,b) = \mu_B \circ (\phi(a),\phi(b)), \forall a,b \in A, \quad \phi \circ \alpha = \beta \circ \phi.$$

Notons par $\xi_\phi \subset A\oplus B$, le graphe de l'application linéaire $\phi : A \to B$.

Proposition 2.1.13 *Une application linéaire $\phi : (A,\mu_A,\alpha) \to (B,\mu_B,\beta)$ est un morphisme d'algèbres Hom-associatives si et seulement si le graphe $\xi_\phi \subset A\oplus B$ est un sous-algèbre Hom-associative de $(A\oplus B,\mu_{A\oplus B},\alpha+\beta)$.*

Démonstration. Soit $\phi : (A,\mu_A,\alpha) \to (B,\mu_B,\beta)$ un morphisme d'algèbres Hom-associatives. Alors pour tous $a,b \in A$, on a

$$\mu_{A\oplus B}((a,\phi(a)),(b,\phi(b)) = (\mu_A(a,b),\mu_B(\phi(a),\phi(b))) = (\mu_A(a,b),\phi\mu_A(a,b)).$$

Ainsi, le graphe ξ_ϕ est fermé sous le produit $\mu_{A\oplus B}$. En outre, $\phi\circ\alpha = \beta\circ\phi$ on a

$$(\alpha+\beta)(a,\phi(a)) = (\alpha(a),\beta\circ\phi(a)) = (\alpha(a),\phi\circ\alpha(a))$$

ce qui implique que $(\alpha+\beta) \subset \xi_\phi$. Ainsi, ξ_ϕ est un sous-algèbre Hom-associative de $(A\oplus B,\mu_{A\oplus B},\alpha+\beta)$.

Réciproquement, si le graphe $\xi_\phi \subset A\oplus B$ est un sous-algèbre Hom-associative de $(A\oplus B,\mu_{A\oplus B},\alpha+\beta)$, alors

$$\mu_{A\oplus B}((a,\phi(a)),(b,\phi(b)) = (\mu_A(a,b),\mu_B(\phi(a),\phi(b)) \in \xi_\phi,$$

ce qui implique que $\mu_B(\phi(a),\phi(b)) = \phi\circ\mu_A(a,b)$. De plus, $(\alpha+\beta)(\xi_\phi) \subset \xi_\phi$ montre que

$$(\alpha+\beta)(a,\phi(a)) = (\alpha(a),\beta\circ\phi(a)) \in \xi_\phi,$$

qui est équivalent à la condition $\beta\circ\phi(a) = \phi\circ\alpha(a)$. Par conséquent, ϕ est un morphisme d'algèbres Hom-associatives. □

2.2 Algèbres Hom-associatives unitaires

Maintenant on définit l'ensemble $\mathcal{UHA}ss_n$ des algèbres Hom-associatives unitaires de dimension n.

Definition 2.2.1 Une algèbre Hom-associative (A,μ,α) est dite unitaire si il existe un élélement unité $u \in A$ tel que $\mu(x,u) = \mu(u,x) = \alpha(x)$ pour tout $x \in A$.

Nous avons les propriétés suivantes

- $(u.x).\alpha(y) = \alpha(u).(x.y)$ et $\alpha(x).\alpha(y) = \alpha(x.y)$
- $(x.u).\alpha(y) = \alpha((x).(u.y))$ et $u(x).\alpha(y) = \alpha(x).\alpha(y)$
- $(x.y).u = \alpha(x)(y.u)$
- $(u.u).\alpha(x) = \alpha(u)(u.x)$ et $u.\alpha(x) = u(\alpha(x))$
- $(u.x)\alpha(u) = \alpha(u).(x.u)$ et $\alpha(x).u = u.\alpha(x)$

Remark 2.2.2 Toute algèbre Hom-associative unitaire ne peut pas être obtenue comme une extension d'une algèbre Hom-associative non unitaire.

Proposition 2.2.3 *Soit (A,μ,α) une algèbre Hom-associative. Nous fixons $\tilde{A} = span(A,u)$ l'espace vectoriel engendré par les éléments de A et u. Supposons que $\mu(x,u) = \mu(u,x) = \alpha(x)$, $\forall x \in A$ et $\alpha(u) = u$. Alors $(\tilde{A},\mu,\alpha,u)$ est une algèbre Hom-associative untitaire.*

Démonstration. Par calcul simple, on vérifie la Hom-associativité. En effet,

$$\begin{aligned}\mu(\mu(x,y),\alpha(u)) = \mu(\mu(x,y),u) &= \alpha(\mu(x,y)) = \mu(\alpha(x),\alpha(y))\\ &= \mu(\alpha(x),\mu(y,u)).\end{aligned}$$ □

Remark 2.2.4 Soit (A,μ,α,u) une algèbre Hom-associative unitaire de dimension n et $\phi : A \to A$ une application linéaire telle que $\phi(u) = u$. Alors, elle est isomorphe à une algèbre Hom-associative $(A,\mu',\phi\alpha\phi^{-1},u)$ de dimension n où $\mu' = \phi \circ \mu \circ (\phi^{-1} \otimes \phi^{-1})$. De plus, si $\left\{C_{ij}^k\right\}$ sont les constantes de structure de μ suivant la base $\{e_1,\dots,e_n\}$ avec $e_1 = u$ étant l'unité, alors μ' a les mêmes constantes de structure suivant les bases $\{\phi(e_1),\dots,\phi(e_n)\}$ avec u l'élément unité.

En effet, on utilise la Proposition 2.1.8 et la Définition 2.1.2. L'unité est conservée, puisque $\mu'(x,e_1) = \phi \circ \mu(\phi^{-1}(x),\phi^{-1}(e_1)) = \phi \circ \alpha \circ \phi^{-1}(x)$.

Proposition 2.2.5 *Soient (A_1,μ_1,α_1,u_1) et (A_2,μ_2,α_2,u_2) deux algèbres Hom-associatives unitaires avec $\phi(u_1) = u_2$. Supposons qu'il existe un morphisme d'algèbres Hom-associatives $\phi : A_1 \to A_2$. Si (A_1,μ_1',u_1') est un twist de (A_1,μ_1,α_1,u_1) alors il existe un twist de (A_2,μ_2,α_2,u_2) tel que $\phi : (A_1,\mu_1',u_1') \to (A_2,\mu_2',u_2')$ est un morphisme d'algèbre.*

Démonstration. Comme ϕ est un morphisme de $(A_1, \mu_1, \alpha_1, u_1)$ dans $(A_2, \mu_2, \alpha_2, u_2)$. Alors $\alpha_2\phi = \phi\alpha_1, \forall x \in A$, on a
$\mu_2(\phi(x), \phi(u_1)) = \mu_2(\phi(x), u_2) = \alpha_2 \circ \phi(x)$. Et $\phi \circ \mu_1(x, u_1) = \phi \circ \alpha_1(x)$.
D'après la proposition 2.1.7, on peut voir que (A_2, μ_2, u_2) est aussi une algèbre associative. De plus,

$$\begin{aligned}\mu_2'(\phi(x), \phi(u_1)) = \mu_2'(\phi(x), u_2) &= \phi \circ \alpha_1' \circ \phi(x) = \phi \circ \alpha_1 \circ \mu_1(x, u_1)\\ &= \alpha_2 \circ \phi \circ \mu_1(x, u_1)\\ &= \alpha_2 \circ \mu_2(\phi(x), u_2).\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Remark 2.2.6 Soient $(A, \mu_A, u_A, \alpha_A)$ et $(B, \mu_B, u_B, \alpha_B)$ deux algèbres Hom-associatives, alors $(A \otimes B, \mu_{A\otimes B}, u_A \otimes u_B, \alpha_A \otimes \alpha_B)$ est une algèbre Hom-associative (appelé produit tensoriel de A et B), ou $\mu_{A\otimes B}$ est la multiplication usuelle $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$.

2.3 Algèbres Hom-associatives simples

Dans cette section, nous étudions les algèbres Hom-associatives multiplicatives simples. Cette étude s'inspire de l'étude des algèbres Hom-Lie simples dans [CH16].

Definition 2.3.1 Soit (A, μ, α) une algèbre Hom-associative. Un sous-espace H de A est appelé sous-algèbre Hom-associative de (A, μ, α) si $\alpha(H) \subseteq H$ et $\mu(H, H) \subseteq H$. En particulier, une sous-algèbre Hom-associative H est dite idéal bilalère de (A, μ, α) si $\mu(H, A) \subseteq H$ et $\mu(A, H) \subseteq H$.

Definition 2.3.2 L'ensemble

$$\mathscr{C}(A) = \left\{x \in A | \mu(x, y) = \mu(y, x),\ \mu(\alpha(x), y) = \mu(y, \alpha(x)),\ \forall, y \in A\right\}$$

est appelé centre de (A, μ, α).

Clairement, $\mathscr{C}(A)$ est un ideal bilatère.

Lemma 2.3.3 *Soit (A, μ, α) une algèbre Hom-associative multiplicative, alors $(Ker(\alpha), \mu, \alpha)$ est un ideal bilatère.*

Démonstration. Évidemment, $\alpha(x) = 0 \in Ker(\alpha)$ pour tout $x \in Ker(\alpha)$. Puisque $\alpha\mu(x, y) = \mu(\alpha(x), \alpha(y) = \mu(0, y) = 0$ pour tous $x \in Ker(\alpha)$ et $y \in A$, on obtient $\mu(x, y) \in Ker(\alpha)$.
D'autre part, on a $\alpha(y) = 0 \in Ker(\alpha)$ pour chaque $y \in Ker(\alpha)$. Comme $\alpha\mu(x, y) = \mu(\alpha(x), \alpha(y) = \mu(x, 0) = 0$ pour tous $x \in Ker(\alpha)$ et $y \in A$, on a $\mu(x, y) \in Ker(\alpha)$. Parconséquent, $(Ker(\alpha), \mu, \alpha)$ est un idéal bilalère de (A, μ, α) □

Definition 2.3.4 Soit $(A, \mu, \alpha)(\alpha \neq 0)$ une algèbre Hom-associative non triviale. Elle est dite simple si elle n'a pas d'idéaux bilatères propres.

Remark 2.3.5 Le seul idéal bilatère non trivial est A.

Theorem 2.3.6 *Soit (A,μ,α) une algèbre Hom-associative simple. Alors α est un automorphisme et l'algèbre associative induite est simple.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.3.3, $Ker(\alpha)$ est un idéal bilatère. Puisque l'algèbre Hom-associative est simple, soit $Ker(\alpha)=\{0\}$ ou $Ker(\alpha)=A$. L'algèbre Hom-associative est non triviale, donc $Ker(\alpha)\neq A$. Ainsi $(A,\tilde{\mu})$ est une algèbre associative induite et α est un automorphisme de $(A,\tilde{\mu})$.

En outre, (A,μ') une algèbre associative induite par une algèbre Hom-associative multiplicative simple (A,μ,α). Clairement, α est à la fois un automorphisme des (A,μ,α) et (A,μ').

Clairement, le produit $\tilde{\mu}$ est bilinéaire :

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(\alpha(x),\tilde{\mu}(y,z))=\tilde{\mu}(\alpha(x),\alpha^{-1}\mu(y,z)) &= \alpha^{-1}\mu(\alpha(x),\alpha^{-1}\mu(y,z))\\ &= \alpha^{-1}\mu(\alpha^{-1}\mu(x,y),\alpha(z))\\ &= \tilde{\mu}(\tilde{\mu}(x,y),\alpha(z)\end{aligned}$$

où $x,y,z\in A$.
De plus, on a $\alpha\tilde{\mu}(x,y)=\alpha\alpha^{-1}\mu(x,y)=\alpha^{-1}\mu(\alpha(x),\alpha(y))=\tilde{\mu}(\alpha(x),\alpha(y))$.

Supposons que $A_1\neq 0$, est un idéal maximal de (A,μ'). Comme $\alpha(A_1)$ un idéal bilatère de (A,μ'), alors $\alpha(A_1)\subseteq A_1$. De plus,

$$\mu(A_1,A)=\alpha\mu'(A_1,A)\subseteq\alpha(A_1)\subseteq A_1$$

et

$$\mu(A,A_1)=\alpha\mu'(A,A_1)\subseteq\alpha(A_1)\subseteq A_1.$$

Donc A_1 est un idéal bilatère de (A,μ,α). Alors $A_1=A$, et on a

$$\mu(A,A)=\mu(A_1,A)=\alpha\mu'(A_1,A)\subsetneqq\alpha(A_1)\subseteq A_1=A$$

et

$$\mu(A,A)=\mu(A,A_1)=\alpha\mu'(A,A_1)\subsetneqq\alpha(A_1)\subseteq A_1=A.$$

En outre, puisque (A,μ,α) est une algèbre Hom-associative simple, on a clairement $\mu(A,A)=A$. C'est une contraduction. Par conséquent $A_1=0$. □

Par le théorème ci-dessus, il existe une algèbre associative induite pour toute algèbre Hom-associative simple (A,μ,α) et α est un automorphisme de l'algèbre associative induite, en plus de cela, leurs produits sont mutuellement déterminés.

Theorem 2.3.7 *Deux algèbres Hom-associatives simples (A_1,μ_1,α) et (A_2,μ_2,β) sont isomorphes si et seulement si il existe un morphisme d'algèbre associatve $\varphi: A_1\rightarrow A_2$ (entre leurs algèbres associatives induites) satisfaisant $\varphi\circ\alpha=\beta\circ\varphi$. En d'autres termes, les deux automorphismes α et β sont conjugués.*

Démonstration. Soient $(A_1, \tilde{\mu}_1)$ et $(A_2, \tilde{\mu}_2)$ deux algèbres associatives induites de (A_1, μ_1, α) et (A_2, μ_2, β), respectivement.
Supposons $\varphi : (A_1, \mu_1, \alpha) \to (A_2, \mu_2, \beta)$ est un isomorphisme d'une algèbre Hom-associative, alors $\varphi \circ \alpha = \beta \circ \varphi$, ainsi $\varphi \circ \alpha^{-1} = \beta^{-1} \circ \varphi$. De plus,

$$\begin{aligned}\varphi\tilde{\mu}_1(x,y) = \varphi \circ \alpha^{-1} \circ \alpha\tilde{\mu}_1(x,y) &= \varphi \circ \alpha^{-1}\mu_1(x,y) = \beta^{-1} \circ \varphi\mu_1(x,y)\\ &= \beta^{-1}(\mu_2(\varphi(x),\varphi(y))) = \tilde{\mu}_2(\varphi(x),\varphi(y)).\end{aligned}$$

Donc, φ est un isomorphisme entre les deux algèbres associatives induites.

D'autre part, si il existe un isomorphisme φ de l'algèbre associative induite $(A_1, \tilde{\mu}_1)$ à $(A_2, \tilde{\mu}_2)$ telle que $\varphi \circ \alpha = \beta \circ \varphi$, alors

$$\begin{aligned}\varphi\mu_1(x,y) = \varphi \circ \alpha\tilde{\mu}_1(x,y) &= \beta \circ \tilde{\mu}_2(\varphi(x),\varphi(y))\\ &= \beta(\mu_2(\varphi(x),\varphi(y)) = \mu_2(\varphi(x),\varphi(y)).\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

2.4 Exemples d'algèbres Hom-associatives simples : algèbres Hom-associatives des matrices

Soit $\mathscr{B} = \{E_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ une base canonique l'ensemble de matrices $n \times n$. On considère l'algèbre associative simple définie par les matrices $n \times n$, qu'on note par $\mathscr{M}_n$. On cherche les applications linéres qui sont des morphismes d'algèbres des matrices $n\times n$. Dans la base canonique, on a

$$\varphi(E_{ij}).\varphi(E_{kl}) = \varphi(E_{ij}.E_{kl}) = \delta_{jk}\varphi(E_{il}), \text{ où } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{ij})\varphi(E_{kl}) &= \varphi(E_{ij}.E_{kl})\\
\sum_{m,n=1}^{n} \varphi_{ij}^{mn} E_{mn}. \sum_{p,q=1}^{n} \varphi_{jl}^{pq} E_{pq} &= \sum_{n,q=1}^{n} \delta_{j,k}\varphi_{il}^{mq} E_{mq}\\
\sum_{m,n=1}^{n} \sum_{p,q}^{n} \varphi_{ij}^{mn}\varphi_{kl}^{pq}\delta_{np}E_{mq} &= \sum_{n,q=1}^{n} \delta_{j,k}\varphi_{il}^{mq} E_{mq}\\
\sum_{n,p=1}^{n} \varphi_{ij}^{mn}\varphi_{kl}^{pq} & -\delta_{jk}\varphi_{il}^{mq} = 0\\
\sum_{p=1}^{n} \varphi_{ij}^{mp}\varphi_{kl}^{pq} & -\delta_{jk}\varphi_{il}^{mq} = 0
\end{aligned}$$

On obtient les morphismes d'algèbres φ suivants relativement à la base canonique.

On fait les calculs pour les matrices 2×2 notée par $\mathscr{M}_2$.

Morphisme 1

$$\begin{cases} \varphi(E_{11}) = E_{11} - i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} & \varphi(E_{12}) = i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{11} + \beta_1 E_{12} + \beta_2 E_{21} - i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{22} \\ \varphi(E_{21}) = \frac{E_{21}}{\beta_1} & \varphi(E_{22}) = i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} + E_{22} \end{cases}$$

Morphisme 2

$$\begin{cases} \varphi(E_{11}) = E_{11} + i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} & \varphi(E_{12}) = -i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{11} + \beta_1 E_{12} + \beta_2 E_{21} + i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{22} \\ \varphi(E_{21}) = \frac{E_{21}}{\beta_1} & \varphi(E_{22}) = -i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} + E_{22} \end{cases}$$

Morphisme 3

$$\begin{cases} \varphi(E_{11}) = E_{11} - \lambda_1 E_{21} & \varphi(E_{12}) = -\frac{\beta_2}{\lambda_1}E_{11} - \frac{\beta_2}{\gamma_2^2}E_{12} + \beta_2 E_{21} + \frac{\beta_2}{\lambda_1}E_{22} \\ \varphi(E_{21}) = -\frac{\lambda_1^2}{\beta_2}E_{21} & \varphi(E_{22}) = \lambda_1 E_{21} + E_{22} \end{cases}$$

Morphisme 4

$$\begin{cases} \varphi(E_{11}) = E_{11} - \lambda_1 E_{21} & \varphi(E_{12}) = \beta_1\lambda_1 E_{11} + \beta_1 E_{12} - \beta_1\lambda_1^2 E_{21} - \beta_1 E_{22} \\ \varphi(E_{21}) = \frac{E_{21}}{\beta_1} & \varphi(E_{22}) = \lambda_1 E_{21} + E_{22} \end{cases},$$

Morphisme 5

$$\begin{cases} \varphi(E_{11}) = E_{11} + \beta_3\gamma_1 E_{21} & \varphi(E_{12}) = -\beta_3 E_{11} + \frac{E_{12}}{\gamma_1} - \beta_3\gamma_1 E_{21} + \beta_3 E_{22} \\ \varphi(E_{21}) = \gamma_1 E_{21} & \varphi(E_{22}) = -\beta_3\gamma_1 E_{21} + E_{22} \end{cases},$$

Morphisme 6

$$\begin{cases} \varphi(E_{11}) = i\sqrt{\beta_2}\sqrt{\gamma_1}E_{21} + E_{22} & \varphi(E_{12}) = \beta_2 E_{21} \\ \varphi(E_{21}) = i\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\beta_2}}E_{11} + \frac{E_{12}}{\beta_2} + \gamma_1 E_{21} - i\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\beta_2}}E_{22} & \varphi(E_{22}) = E_{11} - i\sqrt{\beta_2}\sqrt{\gamma_1}E_{21} \end{cases},$$

Morphisme 7

$$\begin{cases} \varphi(E_{11}) = \frac{\beta_4}{\beta_2}E_{12} + E_{22} & \varphi(E_{12}) = \beta_4 E_{11} - \frac{\beta_4^2}{\beta_2}E_{12} + \beta_2 E_{21} - \beta_4 E_{22} \\ \varphi(E_{21}) = \frac{E_{12}}{\beta_2} & \varphi(E_{22}) = E_{11} - \frac{\beta_4}{\beta_2}E_{12} \end{cases},$$

Morphisme 8

$$\begin{cases} \varphi(E_{11}) = E_{11} + \gamma_2 E_{12} & \varphi(E_{12}) = \frac{E_{12}}{\gamma_1} \\ \varphi(E_{21}) = -\gamma_2 E_{11} - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1}E_{12} + \gamma_1 E_{21} + \gamma_2 E_{22} & \varphi(E_{22}) = -\frac{\beta_2}{\beta_1}E_{12} + E_{22} \end{cases},$$

Morphisme 9

$$\begin{cases} \varphi(E_{11}) = -\gamma_2 E_{21} + E_{22} & \varphi(E_{12}) = \frac{E_{21}}{\gamma_4} \\ \varphi(E_{21}) = -\gamma_2 E_{11} + \gamma_4 E_{12} - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_4}E_{21} + \gamma_2 E_{22} & \varphi(E_{22}) = E_{11} + \frac{\gamma_2}{\gamma_4}E_{21} \end{cases},$$

où $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\gamma_4 \in \mathbb{C}$ sont des paramètres.

De plus, la table de multiplication est donnée comme suit :

$*$	E_{11}	E_{12}	E_{21}	E_{22}
E_{11}	$\varphi(E_{11})$	$\varphi(E_{12})$	0	0
E_{12}	0	0	$\varphi(E_{11})$	$\varphi(E_{12})$
E_{21}	$\varphi(E_{21})$	$\varphi(E_{22})$	0	0
E_{22}	0	0	$\varphi(E_{21})$	$\varphi(E_{22})$

On a les algèbres Hom-associatives simples $(\mathcal{M}_2,*,\varphi)$ où

$$E_{ij} * E_{pq} = \varphi(E_{ij}.E_{pq})$$

Algèbre 1

$$\begin{cases} E_{11}*E_{11} = E_{11} - i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} & E_{11}*E_{12} = i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{11} + \beta_1 E_{12} + \beta_2 E_{21} - i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{22} \\ E_{12}*E_{21} = E_{11} - i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} & E_{12}*E_{22} = i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{11} + \beta_1 E_{12} + \beta_2 E_{21} - i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{22} \\ E_{21}*E_{11} = \frac{E_{21}}{\beta_1} & E_{21}*E_{12} = -i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} + E_{22} \\ E_{22}*E_{21} = \frac{E_{11}}{\beta_1} & E_{22}*E_{22} = -i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} + E_{22} \end{cases}$$

Algèbre 2

$$\begin{cases} E_{11}*E_{11} = E_{11} + i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} & E_{11}*E_{12} = -i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_1}E_{11} + \beta_1 E_{12} + \beta_2 E_{21} + i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_1}E_{22} \\ E_{12}*E_{21} = E_{11} + i\frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} & E_{12}*E_{22} = -i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{11} + \beta_2 E_{12} + \beta_2 E_{21} + i\sqrt{\beta_1}\sqrt{\beta_2}E_{22} \\ E_{21}*E_{11} = \frac{E_{21}}{\beta_1} & E_{21}*E_{12} = -i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} + E_{22} \\ E_{22}*E_{21} = \frac{E_{21}}{\beta_1} & E_{22}*E_{22} = -i\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}}E_{21} + E_{22} \end{cases}$$

Algèbre 3

$$\begin{cases} E_{11}*E_{11} = E_{11} - \lambda_1 E_{21} & E_{11}*E_{12} = -\frac{\beta_2}{\lambda_1}E_{11} - \frac{\beta_2}{{\gamma_2}^2}E_{12} + \beta_2 E_{21} + \frac{\beta_2}{\lambda_1}E_{22} \\ E_{12}*E_{21} = E_{11} - \lambda_1 E_{21} & E_{12}*E_{22} = -\frac{\beta_2}{\lambda_1}E_{11} - \frac{\beta_2}{{\gamma_2}^2}E_{12} + \beta_2 E_{21} + \frac{\beta_2}{\lambda_1}E_{22} \\ E_{21}*E_{11} = -\frac{\lambda_1^2}{\beta_2}E_{21} & E_{21}*E_{12} = \lambda_1 E_{21} + E_{22} \\ E_{22}*E_{21} = -\frac{\lambda_1^2}{\beta_2}E_{21} & E_{22}*E_{22} = \lambda_1 E_{21} + E_{22}. \end{cases}$$

Algèbre 4

$$\begin{cases} E_{11}*E_{11} = E_{11} - \lambda_1 E_{21} & E_{11}*E_{12} = \beta_1\lambda_1 E_{11} + \beta_1 E_{12} - \beta_1\lambda_1^2 E_{21} - \beta_1 E_{22} \\ E_{12}*E_{21} = E_{11} - \lambda_1 E_{21} & E_{12}*E_{22} = \beta_1\lambda_1 E_{11} + \beta_1 E_{12} - \beta_1\lambda_1^2 E_{21} - \beta_1 E_{22} \\ E_{21}*E_{11} = \frac{E_{21}}{\beta_1} & E_{21}*E_{12} = \lambda_1 E_{21} + E_{22} \\ E_{22}*E_{21} = \frac{E_{21}}{\beta_1} & E_{22}*E_{22} = \lambda_1 E_{21} + E_{22} \end{cases}$$

Algèbre 5

$$\begin{cases} E_{11} * E_{11} = E_{11} + \beta_3\gamma_1 E_{21} & E_{11} * E_{12} = -\beta_3 E_{11} + \frac{E_{12}}{\gamma_1} - \beta_3\gamma_1 E_{21} + \beta_3 E_{22} \\ E_{12} * E_{21} = E_{11} + \beta_3\gamma_1 E_{21} & E_{12} * E_{22} = -\beta_3 E_{11} + \frac{E_{12}}{\gamma_1} - \beta_3\gamma_1 E_{21} + \beta_3 E_{22} \\ E_{21} * E_{11} = \gamma_1 E_{21} & E_{21} * E_{12} = -\beta_3\gamma_1 E_{21} + E_{22} \\ E_{22} * E_{21} = \gamma_1 E_{21} & E_{22} * E_{22} = -\beta_3\gamma_1 E_{21} + E_{22} \end{cases}$$

Algèbre 6

$$\begin{cases} E_{11} * E_{11} = i\sqrt{\beta_2}\sqrt{\gamma_1} E_{21} + E_{22} & E_{11} * E_{12} = \beta_2 E_{21} \\ E_{12} * E_{21} = i\sqrt{\beta_2}\sqrt{\gamma_1} E_{21} + E_{22} & E_{12} * E_{22} = \beta_2 E_{21} \\ E_{21} * E_{11} = i\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\beta_2}} E_{11} + \frac{E_{12}}{\beta_2} + \gamma_1 E_{21} - i\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\beta_2}} E_{22} & E_{21} * E_{12} = E_{11} - i\sqrt{\beta_2}\sqrt{\gamma_1} E_{21} \\ E_{22} * E_{21} = i\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\beta_2}} E_{11} + \frac{E_{12}}{\beta_2} + \gamma_1 E_{21} - i\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\beta_2}} E_{22} & E_{22} * E_{22} = E_{11} - i\sqrt{\beta_2}\sqrt{\gamma_1} E_{21} \end{cases}$$

Algèbre 7

$$\begin{cases} E_{11} * E_{11} = \frac{\beta_4}{\beta_2} E_{12} + E_{22} & E_{11} * E_{12} = \beta_4 E_{11} - \frac{\beta_4^2}{\beta_2} E_{12} + \beta_2 E_{21} - \beta_4 E_{22} \\ E_{12} * E_{21} = \frac{\beta_4}{\beta_2} E_{12} + E_{22} & E_{12} * E_{22} = \beta_4 E_{11} - \frac{\beta_4^2}{\beta_2} E_{12} + \beta_2 E_{21} - \beta_4 E_{22} \\ E_{21} * E_{11} = \frac{E_{12}}{\beta_2} & E_{21} * E_{12} = E_{11} - \frac{\beta_4}{\beta_2} E_{12} \\ E_{22} * E_{21} = \frac{E_{12}}{\beta_2} & E_{22} * E_{22} = E_{11} - \frac{\beta_4}{\beta_2} E_{12} \end{cases}$$

Algèbre 8

$$\begin{cases} E_{11} * E_{11} = E_{11} + \gamma_2 E_{12} & E_{11} * E_{12} = \frac{E_{12}}{\gamma_1} \\ E_{12} * E_{21} = E_{11} + \gamma_2 E_{12} & E_{12} * E_{22} = \frac{E_{12}}{\gamma_1} \\ E_{21} * E_{11} = -\gamma_2 E_{11} - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} E_{12} + \gamma_1 E_{21} + \gamma_2 E_{22} & E_{21} * E_{12} = -\frac{\beta_2}{\beta_1} E_{12} + E_{22} \\ E_{22} * E_{21} = -\gamma_2 E_{11} - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} E_{12} + \gamma_1 E_{21} + \gamma_2 E_{22} & E_{22} * E_{22} = -\frac{\beta_2}{\beta_1} E_{12} + E_{22} \end{cases}$$

Algèbre 9

$$\begin{cases} E_{11} * E_{11} = -\gamma_2 E_{21} + E_{22} & E_{11} * E_{12} = \frac{E_{21}}{\gamma_4} \\ E_{12} * E_{21} = -\gamma_2 E_{21} + E_{22} & E_{12} * E_{22} = \frac{E_{21}}{\gamma_4} \\ E_{21} * E_{11} = -\gamma_2 E_{11} + \gamma_4 E_{12} - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_4} E_{21} + \gamma_2 E_{22} & E_{21} * E_{12} = E_{11} + \frac{\gamma_2}{\gamma_4} E_{21} \\ E_{22} * E_{21} = -\gamma_2 E_{11} + \gamma_4 E_{12} - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_4} E_{21} + \gamma_2 E_{22} & E_{22} * E_{22} = E_{11} + \frac{\gamma_2}{\gamma_4} E_{21} \end{cases}$$

3

Variétés algébriques et Clasification des algèbres Hom-associatives

Sommaire

Ce chapitre est consacré en premier lieu à l'étude des variétés algébriques des algèbres Hom-associatives multiplicatives $\mathcal{HA}ss_n$. Dans la première section, on étudie quelques propriétés de changement de base. Dans la seconde section, on rappelle quelques outils préparatoires pour la classification de ces algèbres Hom-associatives en utilisant l'action du groupe $GL_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des algèbres Hom-associatives. Puis, on donne également les bases de Gröbner de la multiplication μ et de l'application linéaire α de ces variétés algébriques en dimension 2. Dans la dernière section, on établit la classification à isomorphime près des algèbres Hom-associatives en dimensions 2 et 3 en précisant celles qui sont de type associatif.

3.1 Variétés algébriques des Hom-algèbres

Soit A un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\{e_1,\cdots,e_n\}$ une base de A. Une structure Hom-algèbre sur A avec un produit μ et une application de structure α est determinée par n^3 les constantes de structure C_{ij}^k où $\mu(e_i,e_j)=\sum_{k=0}^{n} C_{ij}^k e_k$ et par n^2 les constantes de structure a_{ji}, où $\alpha(e_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$. On a donc

$$\alpha\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Si on veut que cette structure algébrique soit une structure d'algèbres Hom-associatives, alors l'ensemble des constantes de structure (C_{ij}^k, a_{ij}) doit vérifier les conditions suivantes,

$$\mu(\alpha(e_i),\mu(e_j,e_k)) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1} a_{il}C_{jk}^m C_{lm}^s e_s, \quad i,j=1,\dots,j,$$

$$\mu(\mu(e_i,e_j),\alpha(e_k)) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1} C_{ij}^l a_{mk} C_{ml}^s e_s \quad i,j=1,\dots,j,$$

$$\alpha\circ\mu(e_i,e_j) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} C_{ij}^p a_{sp} e_s \quad i,j=1,\dots,j,$$

$$\mu(\alpha(e_i),\alpha(e_j)) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_{pi}a_{qj}C_{pq}^s e_s \quad i,j=1,\dots,j.$$

D'une part, on a

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1} a_{il}C_{jk}^m C_{lm}^s e_s - \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1} C_{ij}^l a_{mk} C_{ml}^s e_s = 0, \tag{3.1.1}$$

et d'autre part, on a

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} C_{ij}^p a_{sp} e_s - \sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_{pi}a_{qj}C_{pq}^s e_s = 0. \tag{3.1.2}$$

Par concéquent, on a le système d'équations polynômiales suivant

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{il}C_{jk}^m C_{lm}^s - a_{mk}C_{ij}^l C_{lm}^s = 0, \quad i,j,k,s=1,\dots,n. \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_{sp}C_{ij}^p - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{pi}a_{qj}C_{pq}^s = 0, \quad i,j,s=1,\dots,n. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

De plus si μ est commutative, on a $\mathcal{C}_{ij}^k = \mathcal{C}_{ji}^k \quad i,j,k = 1,\cdots,n$.

L'équation (3.1.1) correspond à la condition de la Hom-associative

$$\mu(\alpha(e_i),\mu(e_j,e_k)) = \mu(\mu(e_i,e_j),\alpha(e_k))$$

et l'équation (3.1.2) correspond à la multiplicativité

$$\alpha\circ\mu(e_i,e_j) = \mu(\alpha(e_i),\alpha(e_j)).$$

On désigne par $\mathcal{HA}ss_n$ l'ensemble de toutes les algèbres Hom-associative multiplicatives de dimension n. Considérons les algèbres Hom-associatives unitaires de dimension n. Alors, on a une sous-classe qu'on note $\mathcal{UHA}ss_n$ et qui est déterminée par les équations suivantes :

$$\mathcal{C}_{il}^k = \mathcal{C}_{li}^k = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = k \\ 0, & \text{si} \quad i \neq k \end{cases} \qquad \text{pour}\, i,j,k,s = 1,\ldots,n$$

$$0 = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{il}\mathcal{C}_{jk}^m\mathcal{C}_{lm}^s - a_{km}\mathcal{C}_{ij}^l\mathcal{C}_{lm}^s \quad \text{pour}\, i,j,k,s = 1,\ldots,n.$$

Supposons que $e_1 = u$ est dans la base $\mathcal{B}$. Il s'avère qu'en plus du système (7.3.1), nous avons l'expression de condition de l'unité suivante.

$u_1.e_i = e_i.u_1 = \alpha(e_i) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\mathcal{C}_{1i}^k e_k = \sum_{k=1}^{n}\mathcal{C}_{i1}^k e_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k$. That is

$$\mathcal{C}_{i1}^k = \mathcal{C}_{1i}^k = a_{ki} \quad \forall i,k. \tag{3.1.4}$$

Si on veut que la structure de Hom-algèbre soit une structure d'algèbre Hom-Lie, alors les constantes de structure $\left\{(\mathcal{C}_{ij}^k)_{i<j},(a_{ij})\right\}$ doivent vérifier les équations polynômiales

$$0 = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{il}\mathcal{C}_{jk}^m\mathcal{C}_{lm}^s + a_{jl}\mathcal{C}_{ki}^m\mathcal{C}_{lm}^s + a_{kl}\mathcal{C}_{ij}^m\mathcal{C}_{lm}^s = 0$$

où $\mathcal{C}_{ij}^k = -\mathcal{C}_{ji}^k$. Les classes des algèbres Hom-Lie de dimension n est notée $\mathcal{H}omLie_n$.

3.1.1 Action du groupe linéaire sur les variétés algébriques $\mathcal{HA}ss_n$.

Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur les variétés algébriques de Hom-structures par le transport de structure par l'action définie comme suit. Soit $A = (A,\mu,\alpha)$ une algèbre Hom-associative de dimension

n définie par une multiplication μ et une application linéaire α. Etant donné $f \in GL_n(\mathbb{K})$, l'action $f.A$ transporte la structure par

$$\begin{array}{ll} \Theta : GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{HA}ss_n & \longrightarrow \mathcal{HA}ss_n \\ (f,(A,\mu,\alpha)) & \longmapsto (A,(f^{-1} \circ \mu \circ f \otimes f, f \circ \alpha \circ f^{-1})) \end{array}$$

définie pour $x, y \in A$, par

$$f \cdot \mu(x,y) = f^{-1}\mu(f(x), f(y)) \tag{3.1.5}$$

$$f \cdot \alpha(x) = f^{-1}\alpha(f(x)). \tag{3.1.6}$$

La classe de conjugaison est donnée par
$\Theta(f,(A,\mu,\alpha)) = (A, f^{-1} \circ \mu \circ (f \otimes f), f \circ \alpha \circ f^{-1}))$ pour $f \in GL_n(\mathbb{K})$.

L'orbite de l'algèbre Hom-associative A de $\mathcal{HA}ss_n$ est donnée par

$$\vartheta(A) = \left\{A' = f \cdot A, f \in GL_n(\mathbb{K})\right\}.$$

Les orbites sont en $1-1$ correspondance avec les classes d'isomphismes des algèbres Hom-associatives de dimensions n. Le stabilisateur est

$$Stab((A,\mu,\alpha)) = \left\{f \in GL_n(\mathbb{K}) | (f^{-1} \circ \mu \circ (f \otimes f)) = \mu \quad \text{et} f \circ \alpha = \alpha \circ f\right\}$$

On caractérise en terme de constantes de structure que deux algèbres Hom-associatives sont dans une même orbite (ou isomorphes). Soient (A,μ_1,α_1) et (A,μ_2,α_2) deux algèbres Hom-associatives de dimension n. Elles sont isomorphes si il existe $\varphi \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\varphi \circ \mu_1 = \mu_2(\varphi \otimes \varphi) \quad \text{et} \quad \varphi \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi. \tag{3.1.7}$$

Remark 3.1.1 Les conditions (3.1.7) sont équivalentes aux conditions

$$\mu_1 = \varphi^{-1} \circ \mu_2 \circ \varphi \otimes \varphi \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \varphi^{-1} \circ \alpha_2 \circ \varphi. \tag{3.1.8}$$

Nous fixons la base suivante de l'espace vectoriel $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ et on pose
$\varphi(e_i) = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}e_p$, $\alpha_1(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}e_j$, $\alpha_2(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji}e_j$.
$\mu_1(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_{ij}^k e_k$, $\quad \mu_2(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}_{ij}^k e_k$.
Dans ce cas, on a

$$\varphi \circ \mu_1(e_i,e_j) = \mu_2(\varphi(e_i),\varphi(e_j)) \,\text{et}\, \varphi(\circ\alpha_1(e_i) = \alpha_2 \circ \varphi(e_i). \tag{3.1.9}$$

En effet, on a

$$\begin{cases} \phi(\mu_1(e_i,e_j)) = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_{ij}^{k} a_{qk} e_q, \quad i,j=1,\ldots,n, \\ \mu_2(\phi(e_i),\phi(e_j)) = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_{pi}a_{kj}\mathcal{D}_{pk}^{q} e_q, \quad i,j=1,\ldots,n, \\ \phi\circ\alpha_1(e_i) = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}a_{qk}e_q, \quad i,j=1,\ldots,n, \\ \alpha_2\circ\phi(e_i) = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\beta_{qk}e_q, \quad i,j=1,\ldots,n. \end{cases}$$

D'une part, on a $\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_{ij}^{k} a_{qk} e_q = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_{pi}a_{kj}\mathcal{D}_{pk}^{q} e_q$

et d'autre part, on a $\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}a_{qk}e_q = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\beta_{qk}e_q$.

Par conéquent, on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_{ij}^{k} a_{qk} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} \mathcal{D}_{pk}^{q} a_{pi}a_{kj} = 0 \quad i,j,q=1,\ldots,n. \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}a_{qk} - \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\beta_{qk} = 0 \quad i,q=1,\ldots,n. \end{cases}$$

3.1.2 Variétés algébriques $\mathcal{HA}ss_2$

L'algèbre Hom-associative est identifiée à ses constantes de structure $C_{i,j}^{k}$ et a_{ij} par rapport à la base donnée. Elles satisfont la première famille du système (7.3.1), pour laquelle les solutions appartiennent à la variété algébrique définie par la base de Gröbner suivante.

$$\begin{aligned}
&\langle a_{21}c_{11}^{1}c_{12}^{1} - a_{21}c_{11}^{1}c_{21}^{1} - a_{11}c_{11}^{2}c_{12}^{1} + a_{11}c_{11}^{2}c_{21}^{1}, a_{21}c_{11}^{1}c_{12}^{2} - a_{21}c_{11}^{1}c_{21}^{2} - a_{11}c_{11}^{2}c_{12}^{2} + a_{11}c_{11}^{2}c_{21}^{2},\\
&a_{12}(c_{11}^{1})^2 + a_{11}c_{11}^{1}c_{12}^{1} - a_{22}c_{11}^{1}c_{12}^{1} + a_{11}c_{12}^{1}c_{12}^{2} - a_{12}c_{11}^{2}c_{21}^{1} + a_{21}c_{12}^{1}c_{21}^{1} - a_{22}c_{11}^{2}c_{22}^{1} + a_{21}c_{12}^{2}c_{22}^{1},\\
&a_{12}(c_{11}^{2})^2 + a_{12}c_{11}^{2}c_{12}^{1} - a_{11}c_{11}^{1}c_{21}^{1} + a_{22}c_{11}^{1}c_{21}^{1} - a_{21}c_{12}^{1}c_{21}^{1} - a_{11}c_{21}^{1}c_{21}^{2} + a_{22}c_{11}^{2}c_{22}^{1} - a_{21}c_{21}^{2}c_{22}^{1},\\
&-a_{11}c_{11}^{1}c_{12}^{1} - a_{21}(c_{12}^{1})^2 + a_{11}c_{11}^{1}c_{21}^{1} - a_{11}c_{12}^{2}c_{21}^{1} + a_{21}(c_{21}^{1})^2 + a_{11}c_{12}^{1}c_{21}^{2} - a_{21}c_{12}^{2}c_{22}^{1} + a_{21}c_{21}^{2}c_{22}^{1},\\
&a_{12}c_{11}^{1}c_{12}^{1} + a_{12}c_{12}^{1}c_{12}^{2} - a_{12}c_{11}^{1}c_{21}^{1} - a_{12}c_{21}^{1}c_{21}^{2} + a_{22}c_{12}^{2}c_{22}^{1} - a_{22}c_{21}^{2}c_{22}^{1},\\
&-a_{22}c_{12}^{1}c_{21}^{1} + a_{12}c_{12}^{1}c_{22}^{2} + a_{22}c_{21}^{1}c_{22}^{1} - a_{12}c_{21}^{1}c_{22}^{2}, a_{22}c_{12}^{2}c_{22}^{1} - a_{12}c_{12}^{2}c_{22}^{2} - a_{22}c_{12}^{2}c_{22}^{2} + a_{22}c_{21}^{2}c_{22}^{2},\\
&a_{12}c_{11}^{1}c_{11}^{2} + a_{11}c_{11}^{2}c_{12}^{1} - a_{22}c_{11}^{1}c_{12}^{2} + a_{11}(c_{12}^{2})^2 - a_{12}c_{11}^{2}c_{21}^{2} + a_{21}c_{12}^{1}c_{21}^{2} - a_{22}c_{11}^{2}c_{22}^{2} + a_{21}c_{12}^{2}c_{22}^{2},\\
&a_{12}c_{11}^{1}c_{11}^{2} + a_{12}c_{11}^{2}c_{12}^{2} - a_{11}c_{11}^{2}c_{21}^{1} - a_{21}c_{12}^{2}c_{21}^{1} + a_{22}c_{11}^{1}c_{21}^{2} - a_{11}(c_{21}^{2})^2 + a_{22}c_{11}^{2}c_{22}^{2} - a_{21}c_{21}^{2}c_{22}^{2},\\
&-a_{11}c_{11}^{2}c_{12}^{1} - a_{21}c_{12}^{1}c_{12}^{2} + a_{11}c_{11}^{2}c_{21}^{1} + a_{21}c_{21}^{1}c_{21}^{2} - a_{21}c_{12}^{2}c_{22}^{2} + a_{21}c_{21}^{2}c_{22}^{2},\\
&a_{12}c_{11}^{2}c_{12}^{1} + a_{12}(c_{12}^{2})^2 - a_{12}c_{11}^{2}c_{21}^{1} - a_{22}c_{12}^{2}c_{21}^{1} + a_{22}c_{12}^{1}c_{21}^{2} - a_{12}(c_{21}^{2})^2 + a_{22}c_{12}^{2}c_{22}^{2} - a_{22}c_{21}^{2}c_{22}^{2},\\
&a_{12}c_{11}^{1}c_{21}^{1} + a_{22}(c_{21}^{1})^2 + a_{12}c_{12}^{1}c_{21}^{2} - a_{11}c_{11}^{1}c_{22}^{1} - a_{21}c_{12}^{1}c_{22}^{1} + a_{22}c_{21}^{2}c_{22}^{1} - a_{11}c_{21}^{1}c_{22}^{2} - a_{21}c_{22}^{1}c_{22}^{2},\\
&-a_{12}c_{11}^{1}c_{12}^{1} - a_{22}(c_{12}^{1})^2 - a_{12}c_{12}^{2}c_{21}^{1} + a_{11}c_{11}^{1}c_{22}^{1} - a_{22}c_{12}^{2}c_{22}^{1} + a_{21}c_{21}^{1}c_{22}^{1} + a_{11}c_{12}^{1}c_{22}^{2} + a_{21}c_{22}^{1}c_{22}^{2},\\
&a_{12}c_{11}^{2}c_{21}^{1} + a_{12}c_{12}^{2}c_{21}^{2} + a_{22}c_{21}^{1}c_{21}^{2} - a_{11}c_{11}^{2}c_{22}^{1} - a_{21}c_{12}^{2}c_{22}^{1} - a_{11}c_{21}^{2}c_{22}^{2} + a_{22}c_{21}^{2}c_{22}^{2} - a_{21}(c_{22}^{2})^2,\\
&-a_{12}c_{11}^{2}c_{12}^{1} - a_{22}c_{12}^{1}c_{12}^{2} - a_{12}c_{12}^{2}c_{21}^{2} + a_{11}c_{11}^{2}c_{22}^{1} + a_{21}c_{21}^{2}c_{22}^{1} + a_{11}c_{12}^{2}c_{22}^{2} - a_{22}c_{12}^{2}c_{22}^{2} + a_{21}(c_{22}^{2})^2\rangle
\end{aligned}$$

Si l'algèbre Hom-associative est multiplicative, elle doit satisfaire de plus la deuxième famille du système (7.3.1), c'est-à-dire qu'elle appartient à l'intersection avec la variété algébrique définie par la base de Gröbner suivante.

$$\begin{aligned}
&\langle a_{11}c_{11}^1 - a_{11}^2c_{11}^1 + a_{12}c_{11}^2 - a_{11}a_{21}c_{12}^1 - a_{11}a_{21}c_{21}^1 - a_{21}^2c_{22}^1,\\
&a_{11}a_{12}c_{11}^1 + a_{11}c_{12}^1 - a_{11}a_{2,2}c_{12}^1 + a_{12}c_{12}^2 - a_{12}a_{21}c_{21}^1 - a_{21}a_{22}c_{22}^1\\
&a_{11}a_{12}c_{11}^1 - a_{12}a_{21}c_{12}^1 + a^{11}c_{21}^1 - a_{11}a_{22}c_{21}^1 + a_{12}c_{21}^2 - a_{21}a_{22}c_{22}^1,\\
&a_{12}^2c_{11}^1 - a_{12}a_{22}c_{12}^1 - a_{12}a_{22}c_{21}^1 + a_{11}c_{22}^1 - a_{22}^2c_{22}^1 + a_{12}c_{22}^2,\\
&a_{21}c_{11}^1 - a_{11}^2c_{11}^2 + a_{22}c_{11}^2 - a_{11}a_{21}c_{12}^2 - a_{11}a_{21}c_{21}^2 - a_{21}^2c_{22}^2,\\
&a_{11}a_{12}c_{11}^2 + a_{21}c_{12}^1 + a_{22}c_{12}^2 - a_{11}a_{22}c_{12}^2 - a_{12}a_{21}c_{21}^2 - a_{21}a_{22}c_{22}^2,\\
&a_{11}a_{12}c_{11}^2 - a_{12}a_{21}c_{12}^2 + a_{21}c_{21}^1 + a_{22}c_{21}^2 - a_{11}a_{22}c_{21}^2 - a_{21}a_{22}c_{22}^2,\\
&a_{12}^2c_{11}^2 - a_{12}a_{22}c_{12}^2 - a_{12}a_{22}c_{21}^2 + a_{21}c_{22}^1 + a_{22}c_{22}^2 - a_{22}^2c_{22}^2\rangle.
\end{aligned}$$

3.2 Classification en dimension 2 et 3.

Dans cette partie, nous établissons la classification à isomorphisme près en dimension deux et trois des algèbres Hom-associatives non unitaires et les algèbres Hom-associatives unitaires en précisant les algèbres de type associatif associées.

3.2.1 Classification en dimension 2

Nous devons considérer deux classes de morphismes qui sont données par les formes de Jordan et qui sont représentées par les matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Nous fournissons toutes les algèbres Hom-associatives de dimension 2 correspondantes aux solutions du système (7.3.1). A cet effet, nous utilisons le logiciel de calcul formel : Mathematica.

Premier cas :

Structure de l'application α conjuguée à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Par simple calcul et avec l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica, on obtient les algèbres Hom-associatives dans le tableau 3.1.

Deuxième cas

Structure de l'application α conjuguée à $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Par simple calcul et avec l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica, on obtient les algèbres Hom-associatives dans le tableau 3.2

A_i^2	μ	α
A_1^2	$e_1 * e_1 = -a_1 e_1, \quad e_1 * e_2 = a_1 e_2,$ $e_2 * e_1 = a_1 e_2, \quad e_2 * e_2 = b_1 e_1.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = -e_2.$
A_2^2	$e_1 * e_1 = a_2 e_1, \quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0, \quad e_2 * e_2 = b_2 e_2.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = 0.$
A_3^2	$e_1 * e_1 = 0, \quad e_1 * e_2 = k a_3 e_1,$ $e_2 * e_1 = k a_3 e_1, \quad e_2 * e_2 = a_3 e_2.$	$\alpha(e_1) = k e_1,$ $\alpha(e_2) = e_2.$
A_4^2	$e_1 * e_1 = 0, \quad e_1 * e_2 = a_4 e_1,$ $e_2 * e_1 = a_4 e_1, \quad e_2 * e_2 = b_4 e_2.$	$\alpha(e_1) = \frac{a_4}{b_4} e_1,$ $\alpha(e_2) = e_2.$
A_5^2	$e_1 * e_1 = a_5 e_1, \quad e_1 * e_2 = b_5 e_2,$ $e_2 * e_1 = b_5 e_2, \quad e_2 * e_2 = 0.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = \frac{b_5}{a_5} e_2.$
A_6^2	$e_1 * e_1 = a_6 e_1, \quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0, \quad e_2 * e_2 = 0.$	$\alpha(e_1) = 0,$ $\alpha(e_2) = k e_2.$
A_7^2	$e_1 * e_1 = a_7 e_2, \quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0, \quad e_2 * e_2 = 0.$	$\alpha(e_1) = k e_1,$ $\alpha(e_2) = k^2 e_2,$

Table 3.1 –

A_i^2	μ	α
A_8^2	$e_1 * e_1 = 0, \quad e_1 * e_2 = a_8 e_2,$ $e_2 * e_1 = b_8 e_2, \quad e_2 * e_2 = c_8 e_1.$	$\alpha(e_1) = 0,$ $\alpha(e_2) = e_1.$
A_9^2	$e_1 * e_1 = 0, \quad e_1 * e_2 = a_9 e_1,$ $e_2 * e_1 = 0, \quad e_2 * e_2 = a_9 e_1 + a_9 e_2.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_1 + e_2.$
A_{10}^2	$e_1 * e_1 = 0, \quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = a_{10} e_1, \quad e_2 * e_2 = a_{10} e_1 + a_{10} e_2.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_1 + e_2.$

Table 3.2 –

Lemma 3.2.1 *Soit α un morphisme diagonal tel que $\alpha(e_1) = pe_1$, $\alpha(e_2) = qe_2$, $p \neq q$ suivant la base $\{e_1, e_2\}$ alors pour $\varphi : A \to A$ tel que $\varphi \circ \alpha = \alpha \circ \varphi$ est de la forme $\varphi(e_1) = \lambda e_1$ et $\varphi(e_2) = \rho e_2$ suivant la même base.*

Démonstration. Soient $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ et $\varphi(e_2) = \rho_1 e_1 + \rho_2 e_2$. D'une part, $\varphi \circ \alpha(e_1) = \lambda_1 p e_1 + \lambda_2 p e_2$ et $\alpha' \circ \varphi(e_1) = \lambda_1 p' e_1 + \lambda_2 q' e_2$. Don on obtient $\lambda_1 p = \lambda_1 p'$ et $\lambda_2 p = \lambda_2 q'$. D'autre part, $\varphi \circ \alpha(e_2) = q\rho_1 e_1 + q\rho_2 e_2$ et $\alpha' \circ \varphi(e_2) = \rho_1 p' e_1 + \rho_2 q' e_2$. On a $\rho_1 q = \rho_1 p'$ et $\rho_2 q = \rho_2 q'$.
Donc on a $\lambda_1(p - p') = 0, \quad \lambda_2(p - q') = 0, \quad \rho_1(q - p') = 0, \quad \rho_2(q - q') = 0$. Si $p = p'$ et $q = q'$, on obtient $\lambda_2(p - q') = 0$ et $\rho_2(q - q') = 0$
Si $p \neq q$, donc $\lambda_2 = \rho_1 = 0$. D'où le lemme avec $\lambda = \lambda_1$ et $\rho = \rho_2$. □

Theorem 3.2.2 *Toute algèbre Hom-associative multiplicative de dimension 2 est isomorphe à une des algèbres, non-isomorphes deux à deux, $(A, *, \alpha)$ où $*$ désigne la multiplication et α l'application linéaire. Soit $\{e_1, e_2\}$ une base de $\mathbb{K}^2$:*

A_i^2	μ	α
A_1^2	$e_1 * e_1 = -e_1,\quad e_1 * e_2 = e_2,$ $e_2 * e_1 = e_2,\quad e_2 * e_2 = e_1.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = -e_2.$
A_2^2	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0,\quad e_2 * e_2 = e_2.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = 0.$
A_3^2	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0,\quad e_2 * e_2 = 0.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = 0.$
A_4^2	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_1 * e_2 = e_2,$ $e_2 * e_1 = e_2,\quad e_2 * e_2 = 0.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_2.$
A_5^2	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0,\quad e_2 * e_2 = 0.$	$\alpha(e_1) = 0,$ $\alpha(e_2) = ke_2.$
A_6^2	$e_1 * e_1 = e_2,\quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0,\quad e_2 * e_2 = 0.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_2.$
A_7^2	$e_1 * e_1 = 0,\quad e_1 * e_2 = ae_1,$ $e_2 * e_1 = be_1,\quad e_2 * e_2 = ce_1.$	$\alpha(e_1) = 0,$ $\alpha(e_2) = e_1,$
A_8^2	$e_1 * e_1 = 0,\quad e_1 * e_2 = e_1,$ $e_2 * e_1 = 0,\quad e_2 * e_2 = e_1 + e_2.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_1 + e_2.$
A_9^2	$e_1 * e_1 = 0,\quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = e_1,\quad e_2 * e_2 = e_1 + e_2.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_1 + e_2.$

TABLE 3.3 – Classification en dimension 2 .

Démonstration. La preuve découle de la Définition 3.1.7 et Lemme 3.2.1. □

Soient $\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k$ et $\alpha \circ \tilde{\mu}(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} C_{ij}^p a_{kp} e_k$.

La résolution du système d'équation suivant permet de déterminer les algèbres de type associatif :

$$\mathcal{C}_{ij}^k - \sum_{p=1} \mathcal{C}_{ij}^p a_{kp} = 0, \quad i,j,k = 1,\dots,n. \tag{3.2.1}$$

Proposition 3.2.3 *Dans $\mathcal{HA}ss_2$, les algèbres Hom-associatives $A_1^2, A_4^2, A_6^2, A_8^2, A_9^2$ sont de type associatif.*

Démonstration. En effet, nous avons mis en évidence les algèbres associatives correspondantes :

$\tilde{A}_1^2$: $e_1 \cdot e_1 = -e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = -e_2, \quad e_2 \cdot e_1 = -e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1.$

$\tilde{A}_4^2$: $e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = 0.$

$\tilde{A}_6^2$: $e_1 \cdot e_1 = e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_2 \cdot e_1 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = 0.$

$\tilde{A}_8^2$: $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1, \quad e_2 \cdot e_1 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = e_2.$

$\tilde{A}_9^2$: $e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = e_1, \quad e_2 \cdot e_1 = 0, \quad e_2 \cdot e_2 = e_2.$

□

Remark 3.2.4 Il s'avère que les algèbres Hom-associatives $A_2^2, A_3^2, A_5^2, A_7^2$ ne peuvent être obtenues par twist des algèbres associatives.

3.2.2 Classification en dimension 3

Nous cherchons toutes les algèbres Hom-associatives en dimension 3. Nous considérons 3 classes de morphismes qui sont données par la forme de Jordan, à savoir qu'elles sont représentées par les matrices.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

En utilisant un calcul similaire à celui de la section précédente, on obtient la classification suivante.

Premier cas

Structure de l'application α conjuguée à $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Par simple calcul et avec l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica, on obtient les algèbres Hom-associatives :

A_1^3	$e_1 * e_1 = p_{11}e_1$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{52}e_2 + p_{53}e_3$, $e_2 * e_3 = p_{62}e_2 + p_{63}e_3$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = p_{82}e_2 + p_{83}e_3$, $e_3 * e_3 = p_{92}e_2 + p_{93}e_3$	$\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = 0$, $\alpha(e_3) = 0$
A_2^3	$e_1 * e_1 = p_{11}e_1 + p_{13}e_3$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = p_{31}e_1 + p_{33}e_3$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{52}e_2$, $e_2 * e_3 = 0$, $e_3 * e_1 = p_{71}e_1 + p_{73}e_3$, $e_3 * e_2 = 0$, $e_3 * e_3 = p_{91}e_1 + p_{93}e_3$	$\alpha(e_1) = 0$, $\alpha(e_2) = e_2$, $\alpha(e_3) = 0$
A_3^3	$e_1 * e_1 = p_{11}e_1 + p_{12}e_2$, $e_1 * e_2 = p_{21}e_1 + p_{22}e_2$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = p_{41}e_1 + p_{42}e_2$, $e_2 * e_2 = p_{51}e_1 + p_{52}e_2$, $e_2 * e_3 = 0$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = 0$, $e_3 * e_3 = p_{93}e_3$	$\alpha(e_1) = 0$, $\alpha(e_2) = 0$, $\alpha(e_3) = e_3$
A_4^3	$e_1 * e_1 = p_{11}e_1$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{52}e_2$, $e_2 * e_3 = 0$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = 0$, $e_3 * e_3 = p_{93}e_3$	$\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$, $\alpha(e_3) = 0$
A_5^3	$e_1 * e_1 = p_{11}e_1$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{52}e_2$, $e_2 * e_3 = 0$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = 0$, $e_3 * e_3 = p_{93}e_3$	$\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = 0$, $\alpha(e_3) = e_3$
A_6^3	$e_1 * e_1 = p_{11}e_1$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{52}e_2$, $e_2 * e_3 = 0$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = 0$, $e_3 * e_3 = p_{93}e_3$	$\alpha(e_1) = 0$, $\alpha(e_2) = e_2$, $\alpha(e_3) = e_3$
A_7^3	$e_1 * e_1 = p_{11}e_1$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{52}e_2$, $e_2 * e_3 = 0$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = 0$, $e_3 * e_3 = p_{93}e_3$	$\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$, $\alpha(e_3) = e_3$

Deuxième cas

Structure de l'application α conjuguée à $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Par simple calcul et avec l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica, on obtient les algèbres Hom-associatives :

A_1^3	$e_1*e_1=0$, $e_1*e_2=p_{21}e_1+p_{23}e_3$, $e_1*e_3=p_{31}e_1+p_{33}e_3$, $e_2*e_1=0$, $e_2*e_2=p_{51}e_1+p_{53}e_3$, $e_2*e_3=0$, $e_3*e_1=0$, $e_3*e_2=p_{81}e_1+p_{83}e_3$, $e_3*e_3=p_{91}e_1+p_{93}e_3$	$\alpha(e_1)=0$, $\alpha(e_2)=e_1$, $\alpha(e_3)=0$
A_2^3	$e_1*e_1=0$, $e_1*e_2=p_{21}e_1$, $e_1*e_3=p_{31}e_1$, $e_2*e_1=0$, $e_2*e_2=p_{51}e_1$, $e_2*e_3=p_{81}e_1$, $e_3*e_1=p_{71}e_1$, $e_3*e_2=p_{81}e_1$, $e_3*e_3=p_{91}e_1$	$\alpha(e_1)=0$, $\alpha(e_2)=e_1$, $\alpha(e_3)=0$
A_3^3	$e_1*e_1=0$, $e_1*e_2=p_{21}e_1$, $e_1*e_3=0$, $e_2*e_1=0$, $e_2*e_2=p_{51}e_1$, $e_2*e_3=p_{61}e_1$, $e_3*e_1=0$, $e_3*e_2=p_{81}e_1$, $e_3*e_3=0$	$\alpha(e_1)=0$, $\alpha(e_2)=e_1$, $\alpha(e_3)=ce_3$
A_4^3	$e_1*e_1=0$, $e_1*e_2=0$, $e_1*e_3=0$, $e_2*e_1=0$, $e_2*e_2=p_{51}e_1$, $e_2*e_3=p_{61}e_1$, $e_3*e_1=0$, $e_3*e_2=p_{81}e_1$, $e_3*e_3=p_{91}e_1$	$\alpha(e_1)=e_1$, $\alpha(e_2)=e_1+e_2$, $\alpha(e_3)=e_3$
A_5^3	$e_1*e_1=0$, $e_1*e_2=-p_{43}e_3$, $e_1*e_3=0$, $e_2*e_1=p_{43}e_3$, $e_2*e_2=p_{52}e_3$, $e_2*e_3=0$, $e_3*e_1=0$, $e_3*e_2=0$, $e_3*e_3=0$	$\alpha(e_1)=ae_1$, $\alpha(e_2)=e_1+ae_2$, $\alpha(e_3)=a^2e_3$
A_6^3	$e_1*e_1=0$, $e_1*e_2=0$, $e_1*e_3=0$, $e_2*e_1=0$, $e_2*e_2=0$, $e_2*e_3=p_{61}e_1$, $e_3*e_1=0$, $e_3*e_2=p_{81}e_1$, $e_3*e_3=0$	$\alpha(e_1)=ae_1$, $\alpha(e_2)=e_1+ae_2$, $\alpha(e_3)=e_3$
A_7^3	$e_1*e_1=0$, $e_1*e_2=0$, $e_1*e_3=0$, $e_2*e_1=0$, $e_2*e_2=p_{51}e_1$, $e_2*e_3=0$, $e_3*e_1=0$, $e_3*e_2=0$, $e_3*e_3=p_{11}e_1$	$\alpha(e_1)=e_1$, $\alpha(e_2)=e_1+e_2$, $\alpha(e_3)=-e_3$

Troisième cas

Structure de l'application α conjuguée à $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Par simple calcul et avec l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica, on obtient les algèbres Hom-associatives :

A_1^3	$e_1 * e_1 = 0$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = p_{31}e_1$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = 0$, $e_2 * e_3 = p_{61}e_1$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = p_{81}e_1$, $e_3 * e_3 = p_{91}e_1$	$\alpha(e_1) = 0$, $\alpha(e_2) = e_1$, $\alpha(e_3) = e_2$
A_2^3	$e_1 * e_1 = 0$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = 0$, $e_2 * e_3 = -p_{81}e_1$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = p_{81}e_1$, $e_3 * e_3 = p_{91}e_1$	$\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = e_1 + e_2$, $\alpha(e_3) = e_2 + e_3$

Theorem 3.2.5 *Toute algèbre Hom-associative multiplicative de dimension* 3 *est isomorphe à une des algèbres, non-isomorphes deux à deux,* $(A, *, \alpha)$ *où* $*$ *désigne la multiplication et* α *l'application linéaire. Soit* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *une base de* $\mathbb{K}^3$ *:*

A_i^3	μ	α
A_1^3	$e_1 * e_1 = e_1$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = e_2 + e_3$, $e_2 * e_3 = e_2 + e_3$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = e_2 + e_3$, $e_3 * e_3 = e_2 + e_3$.	$\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = 0$, $\alpha(e_3) = 0$.
A_2^3	$e_1 * e_1 = p_{11}e_1$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{52}e_2$, $e_2 * e_3 = 0$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = 0$, $e_3 * e_3 = p_{93}e_3$.	$\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$, $\alpha(e_3) = 0$.
A_3^3	$e_1 * e_1 = p_{11}e_1$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{52}e_2$, $e_2 * e_3 = 0$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = 0$, $e_3 * e_3 = p_{93}e_3$.	$\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$, $\alpha(e_3) = e_3$.
A_4^3	$e_1 * e_1 = 0$, $e_1 * e_2 = p_{21}e_1$, $e_1 * e_3 = p_{31}e_1$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{51}e_1$, $e_2 * e_3 = p_{81}e_1$, $e_3 * e_1 = p_{71}e_1$, $e_3 * e_2 = p_{81}e_1$, $e_3 * e_3 = p_{91}e_1$.	$\alpha(e_1) = 0$, $\alpha(e_2) = e_1$, $\alpha(e_3) = 0$.
A_5^3	$e_1 * e_1 = 0$, $e_1 * e_2 = 0$, $e_1 * e_3 = 0$, $e_2 * e_1 = 0$, $e_2 * e_2 = p_{51}e_1$, $e_2 * e_3 = 0$, $e_3 * e_1 = 0$, $e_3 * e_2 = 0$, $e_3 * e_3 = p_{93}e_3$.	$\alpha(e_1) = e_1$, $\alpha(e_2) = e_1 + e_2$, $\alpha(e_3) = 0$.

A_6^3	$e_1*e_1=0,\quad e_2*e_3=e_1,$ $e_1*e_2=e_1,\quad e_3*e_1=0,$ $e_1*e_3=0,\quad e_3*e_2=e_1,$ $e_2*e_1=0,\quad e_3*e_3=0.$ $e_2*e_2=e_1,$	$\alpha(e_1)=0,$ $\alpha(e_2)=e_1,$ $\alpha(e_3)=e_3.$
A_7^3	$e_1*e_1=0,\quad e_2*e_3=e_1,$ $e_1*e_2=0,\quad e_3*e_1=0,$ $e_1*e_3=0,\quad e_3*e_2=e_1,$ $e_2*e_1=0,\quad e_3*e_3=e_1.$ $e_2*e_2=e_1,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=e_1+e_2,$ $\alpha(e_3)=e_3.$
A_8^3	$e_1*e_1=0,\quad e_2*e_3=0,$ $e_1*e_2=-e_3,\quad e_3*e_1=0,$ $e_1*e_3=0,\quad e_3*e_2=0,$ $e_2*e_1=e_3,\quad e_3*e_3=0.$ $e_2*e_2=e_3,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=e_1+e_2,$ $\alpha(e_3)=e_3.$
A_9^3	$e_1*e_1=0,\quad e_2*e_3=p_{61}e_1,$ $e_1*e_2=0,\quad e_3*e_1=0,$ $e_1*e_3=0,\quad e_3*e_2=p_{81}e_1,$ $e_2*e_1=0,\quad e_3*e_3=0.$ $e_2*e_2=0,$	$\alpha(e_1)=ae_1,$ $\alpha(e_2)=e_1+ae_2,$ $\alpha(e_3)=e_3.$
A_{10}^3	$e_1*e_1=0,\quad e_2*e_3=0,$ $e_1*e_2=0,\quad e_3*e_1=0,$ $e_1*e_3=0,\quad e_3*e_2=0,$ $e_2*e_1=0,\quad e_3*e_3=p_{91}e_1.$ $e_2*e_2=p_{51}e_1,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=e_1+e_2,$ $\alpha(e_3)=-e_3.$
A_{11}^3	$e_1*e_1=0,\quad e_2*e_3=p_{61}e_1,$ $e_1*e_2=0,\quad e_3*e_1=0,$ $e_1*e_3=p_{31}e_1,\quad e_3*e_2=p_{81}e_1$ $e_2*e_1=0,\quad e_3*e_3=p_{91}e_1.$ $e_2*e_2=0,$	$\alpha(e_1)=0,$ $\alpha(e_2)=e_1,$ $\alpha(e_3)=e_2.$
A_{12}^3	$e_1*e_1=0,\quad e_2*e_3=-p_{81}e_1,$ $e_1*e_2=0,\quad e_3*e_1=0,$ $e_1*e_3=0,\quad e_3*e_2=p_{81}e_1,$ $e_2*e_1=0,\quad e_3*e_3=p_{91}e_1.$ $e_2*e_2=0,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=e_1+e_2,$ $\alpha(e_3)=e_2+e_3.$

TABLE 3.4: Classification en dimension 3.

Proposition 3.2.6 *Les algèbres Hom-associatives $A_3^3, A_7^3, A_8^3, A_9^3, A_{10}^3, A_{12}^3$ sont de type associatif.*

Démonstration. En effet, nous avons mis en évidence les algèbres associatives correspondantes :

$\tilde{A}_3^3$: $e_1\cdot e_1=p_{11}e_1,\quad e_1\cdot e_2=0,\quad e_1\cdot e_3=0,\quad e_2\cdot e_1=0\quad e_2\cdot e_2=p_{52}e_2$

$: e_2 \cdot e_3 = 0, \quad e_3 \cdot e_1 = 0, \quad e_3 \cdot e_2 = 0, \quad e_3 \cdot e_3 = p_{93} e_3.$

$\tilde{A}^3_7$ $: e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_3 = 0, \quad e_2 \cdot e_1 = e_1 \quad e_2 \cdot e_2 = e_1$
$: e_2 \cdot e_3 = e_1, \quad e_3 \cdot e_1 = 0, \quad e_3 \cdot e_2 = e_1, \quad e_3 \cdot e_3 = e_1.$

$\tilde{A}^3_8$ $: e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = -e_3, \quad e_1 \cdot e_3 = 0, \quad e_2 \cdot e_1 = e_3 \quad e_2 \cdot e_2 = e_3$
$: e_2 \cdot e_3 = 0, \quad e_3 \cdot e_1 = 0, \quad e_3 \cdot e_2 = 0, \quad e_3 \cdot e_3 = 0.$

$\tilde{A}^3_9$ $: e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_3 = 0, \quad e_2 \cdot e_1 = 0 \quad e_2 \cdot e_2 = 0$
$: e_2 \cdot e_3 = \frac{p_{61}}{a} e_1, \quad e_3 \cdot e_1 = 0, \quad e_3 \cdot e_2 = \frac{p_{81}}{a} e_1, \quad e_3 \cdot e_3 = 0.$

$\tilde{A}^3_{10}$ $: e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_3 = 0, \quad e_2 \cdot e_1 = 0 \quad e_2 \cdot e_2 = p_{51} e_1$
$: e_2 \cdot e_3 = 0, \quad e_3 \cdot e_1 = 0, \quad e_3 \cdot e_2 = 0, \quad e_3 \cdot e_3 = p_{91} e_1.$

$\tilde{A}^3_{12}$ $: e_1 \cdot e_1 = 0, \quad e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_3 = 0, \quad e_2 \cdot e_1 = e_3 \quad e_2 \cdot e_2 = 0$
$: e_2 \cdot e_3 = -p_{81} e_1, \quad e_3 \cdot e_1 = 0, \quad e_3 \cdot e_2 = p_{81} e_1, \quad e_3 \cdot e_3 = p_{91} e_1.$

□

Remark 3.2.7 Il s'avère que les algèbres Hom-associatives $A^3_1, A^3_2, A^3_4, A^3_5, A^3_6, A^3_{11}$ ne peuvent être obtenues par twist des algèbres associatives.

Theorem 3.2.8 *Toute algèbre Hom-associative multiplicative de dimension 2 est isomorphe à une des algèbres, non-isomorphes deux à deux, $(A, *, \alpha)$ où $*$ désigne la multiplication et α l'application linéaire. Soit $\{e_1, e_2\}$ une base de $\mathbb{K}^2$ avec $\alpha(e_1) = 1$ l'élement unitaire :*

A'^2_i	μ	α
A'^2_1	$e_1 * e_1 = e_1, \quad e_1 * e_2 = e_2,$ $e_2 * e_1 = e_2, \quad e_2 * e_2 = e_1 + e_2.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_2.$
A'^2_2	$e_1 * e_1 = e_1, \quad e_1 * e_2 = -e_2,$ $e_2 * e_1 = -e_2, \quad e_2 * e_2 = e_1.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = -e_2.$
A'^2_3	$e_1 * e_1 = e_1, \quad e_1 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0, \quad e_2 * e_2 = e_2.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = 0.$
A'^2_4	$e_1 * e_1 = e_1, \quad e_1 * e_2 = e_2,$ $e_2 * e_1 = e_2, \quad e_2 * e_2 = 0.$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_2.$

Table 3.5 – Classification en dimension 2.

Proposition 3.2.9 *Dans $\mathcal{UHA}ss_2$, les algèbres Hom-associatives $\tilde{A'}^2_1, \tilde{A'}^2_2, \tilde{A'}^2_4$ sont de type associatif.*

Démonstration. En effet, nous avons mis en évidence les algèbres associatives correspondantes :

$\tilde{A'}^2_1$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2.$

$\tilde{A'}^2_2$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = e_1.$

$$\tilde{A'}_4^2 : e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2, \quad e_2 \cdot e_2 = 0.$$

□

Remark 3.2.10 Il se trouve que l'algèbre Hom-associative $\tilde{A'}_3^2$ ne peut pas être obtenue en twistant une algèbre associative.

Theorem 3.2.11 *Toute algèbre Hom-associative multiplicative de dimension 3 est isomorphe à une des algèbres, non-isomorphe deux à deux, $(A, *, \alpha)$ où $*$ désigne la multiplication et α l'application linéaire. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{K}^3$ avec $\alpha(e_1) = 1$ l'élement unitaire :*

$A_i'^3$	μ	α
$A_1'^3$	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_2 * e_3 = e_2 + e_3,$ $e_1 * e_2 = 0,\quad e_3 * e_1 = 0,$ $e_1 * e_3 = 0,\quad e_3 * e_2 = e_2 + e_3,$ $e_2 * e_1 = 0,\quad e_3 * e_3 = e_2 + e_3.$ $e_2 * e_2 = e_2 + e_3,$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = 0,$ $\alpha(e_3) = 0.$
$A_2'^3$	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_2 * e_3 = 0,$ $e_1 * e_2 = 0,\quad e_3 * e_1 = e_3,$ $e_1 * e_3 = e_3,\quad e_3 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0,\quad e_3 * e_3 = e_1 + e_3.$ $e_2 * e_2 = e_2,$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = 0,$ $\alpha(e_3) = e_3.$
$A_3'^3$	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_2 * e_3 = 0,$ $e_1 * e_2 = 0,\quad e_3 * e_1 = -e_3,$ $e_1 * e_3 = -e_3,\quad e_3 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = 0,\quad e_3 * e_3 = e_1.$ $e_2 * e_2 = e_2,$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = 0,$ $\alpha(e_3) = -e_3.$
$A_4'^3$	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_2 * e_3 = 0,$ $e_1 * e_2 = e_2,\quad e_3 * e_1 = 0,$ $e_1 * e_3 = 0,\quad e_3 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = e_2,\quad e_3 * e_3 = e_3.$ $e_2 * e_2 = e_1 + e_2,$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_2,$ $\alpha(e_3) = 0.$
$A_5'^3$	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_2 * e_3 = 0,$ $e_1 * e_2 = -e_2,\quad e_3 * e_1 = 0,$ $e_1 * e_3 = 0,\quad e_3 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = -e_2,\quad e_3 * e_3 = e_3.$ $e_2 * e_2 = e_1,$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = -e_2,$ $\alpha(e_3) = 0.$
$A_6'^3$	$e_1 * e_1 = e_1,\quad e_2 * e_3 = e_3,$ $e_1 * e_2 = e_2,\quad e_3 * e_1 = e_3,$ $e_1 * e_3 = e_3,\quad e_3 * e_2 = e_3,$ $e_2 * e_1 = e_2,\quad e_3 * e_3 = e_2 + e_3.$ $e_2 * e_2 = e_2,$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = e_2,$ $\alpha(e_3) = e_3.$

A'^3_7	$e_1*e_1=e_1,\quad e_2*e_3=e_3,$ $e_1*e_2=e_2,\quad e_3*e_1=-e_3,$ $e_1*e_3=-e_3,\quad e_3*e_2=e_3,$ $e_2*e_1=e_2,\quad e_3*e_3=e_2.$ $e_2*e_2=-e_2,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=e_2,$ $\alpha(e_3)=-e_3.$
A'^3_8	$e_1*e_1=e_1,\quad e_2*e_3=e_2,$ $e_1*e_2=-e_2,\quad e_3*e_1=e_3,$ $e_1*e_3=e_3,\quad e_3*e_2=e_2,$ $e_2*e_1=-e_2,\quad e_3*e_3=-e_3.$ $e_2*e_2=e_3,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=-e_2,$ $\alpha(e_3)=e_3.$
A'^3_9	$e_1*e_1=e_1,\quad e_2*e_3=0,$ $e_1*e_2=ae_2,\quad e_3*e_1=e_3,$ $e_1*e_3=e_3,\quad e_3*e_2=0,$ $e_2*e_1=ae_2,\quad e_3*e_3=e_3.$ $e_2*e_2=0,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=ae_2,$ $\alpha(e_3)=e_3.$
A'^3_{10}	$e_1*e_1=e_1,\quad e_2*e_3=0,$ $e_1*e_2=ae_2,\quad e_3*e_1=-e_3,$ $e_1*e_3=-e_3,\quad e_3*e_2=0,$ $e_2*e_1=ae_2,\quad e_3*e_3=0.$ $e_2*e_2=0,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=ae_2,$ $\alpha(e_3)=-e_3.$
A'^3_{11}	$e_1*e_1=e_1,\quad e_2*e_3=0,$ $e_1*e_2=ae_2,\quad e_3*e_1=a^2e_3,$ $e_1*e_3=a^2e_3,\quad e_3*e_2=0$ $e_2*e_1=ae_2,\quad e_3*e_3=0.$ $e_2*e_2=e_3,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=ae_2,$ $\alpha(e_3)=a^2e_3.$
A'^3_{12}	$e_1*e_1=e_1,\quad e_2*e_3=e_3,$ $e_1*e_2=e_2,\quad e_3*e_1=be_3,$ $e_1*e_3=be_3,\quad e_3*e_2=0,$ $e_2*e_1=e_2,\quad e_3*e_3=0.$ $e_2*e_2=\frac{1}{b}e_2,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=e_2,$ $\alpha(e_3)=be_3.$
A'^3_{13}	$e_1*e_1=e_1,\quad e_2*e_3=0,$ $e_1*e_2=-e_2,\quad e_3*e_1=be_3,$ $e_1*e_3=be_3,\quad e_3*e_2=0,$ $e_2*e_1=-e_2,\quad e_3*e_3=0.$ $e_2*e_2=0,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=-e_2,$ $\alpha(e_3)=be_3.$
A'^3_{14}	$e_1*e_1=e_1,\quad e_2*e_3=0,$ $e_1*e_2=b^2e_2,\quad e_3*e_1=be_3,$ $e_1*e_3=be_3,\quad e_3*e_2=0,$ $e_2*e_1=b^2e_2,\quad e_3*e_3=e_2.$ $e_2*e_2=0,$	$\alpha(e_1)=e_1,$ $\alpha(e_2)=b^2e_2,$ $\alpha(e_3)=be_3.$

A'^3_{15}	$e_1 * e_1 = e_1, \quad e_2 * e_3 = 0,$ $e_1 * e_2 = ae_2, \quad e_3 * e_1 = be_3,$ $e_1 * e_3 = be_3, \quad e_3 * e_2 = 0,$ $e_2 * e_1 = ae_2, \quad e_3 * e_3 = 0.$ $e_2 * e_2 = 0,$	$\alpha(e_1) = e_1,$ $\alpha(e_2) = ae_2,$ $\alpha(e_3) = be_3.$

Table 3.6: Classification en dimension 3.

Proposition 3.2.12 *Les algèbres Hom-associatives* $\tilde{A'}^3_6, \tilde{A'}^3_7, \tilde{A'}^3_8, \tilde{A'}^3_9, \tilde{A'}^3_{10}, \tilde{A'}^3_{11}, \tilde{A'}^3_{12}, \tilde{A'}^3_{13}, \tilde{A'}^3_{14}, \tilde{A'}^3_{15}$ *sont de type associatif.*

Démonstration. En effet, nous avons mis évidence les algèbres associatives correspondantes :

$\tilde{A'}^3_6$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_3 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2 \quad e_2 \cdot e_2 = e_2$
$: e_2 \cdot e_3 = e_3, \quad e_3 \cdot e_1 = e_3, \quad e_3 \cdot e_2 = e_3, \quad e_3 \cdot e_3 = e_2 + e_3.$

$\tilde{A'}^3_7$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_3 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2 \quad e_2 \cdot e_2 = -e_2$
$: e_2 \cdot e_3 = -e_3, \quad e_3 \cdot e_1 = e_3, \quad e_3 \cdot e_2 = -e_3, \quad e_3 \cdot e_3 = e_2.$

$\tilde{A'}^3_8$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_3 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2 \quad e_2 \cdot e_2 = e_3$
$: e_2 \cdot e_3 = e_2, \quad e_3 \cdot e_1 = e_3, \quad e_3 \cdot e_2 = -e_2, \quad e_3 \cdot e_3 = -e_3.$

$\tilde{A'}^3_9$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_3 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2 \quad e_2 \cdot e_2 = 0$
$: e_2 \cdot e_3 = 0, \quad e_3 \cdot e_1 = e_3, \quad e_3 \cdot e_2 = 0, \quad e_3 \cdot e_3 = e_3.$

$\tilde{A'}^3_{10}$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_3 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2 \quad e_2 \cdot e_2 = 0$
$: e_2 \cdot e_3 = 0, \quad e_3 \cdot e_1 = e_3, \quad e_3 \cdot e_2 = 0, \quad e_3 \cdot e_3 = 0.$

$\tilde{A'}^3_{11}$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_3 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2 \quad e_2 \cdot e_2 = e_3$
$: e_2 \cdot e_3 = 0, \quad e_3 \cdot e_1 = e_3, \quad e_3 \cdot e_2 = 0, \quad e_3 \cdot e_3 = 0.$

$\tilde{A'}^3_{12}$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_3 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2 \quad e_2 \cdot e_2 = e_2$
$: e_2 \cdot e_3 = e_3, \quad e_3 \cdot e_1 = e_3, \quad e_3 \cdot e_2 = 0, \quad e_3 \cdot e_3 = 0.$

$\tilde{A'}^3_{14}$ $: e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2, \quad e_1 \cdot e_3 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_2 \quad e_2 \cdot e_2 = 0$
$: e_2 \cdot e_3 = 0, \quad e_3 \cdot e_1 = e_3, \quad e_3 \cdot e_2 = 0, \quad e_3 \cdot e_3 = e_2.$

□

Remark 3.2.13 Il se trouve que les algèbres Hom-associatives $\tilde{A'}^3_1, \tilde{A'}^3_2, \tilde{A'}^3_3, \tilde{A'}^3_4, \tilde{A'}^3_5$ ne peuvent pas être obtenues en twistant des algèbres associatives.

4

Dérivations des algèbres Hom-associatives

Sommaire

Dans ce chapitre, on étudie les dérivations des algèbres Hom-associatives ainsi que les dérivations généralisées. On calcule explicitement toutes les dérivations et les α-dérivations des algèbres Hom-associatives de dimension 2 et dimension 3 obtenues dans le chapitre précédent.

4.1 Dérivations des algèbres Hom-associatives

Soit (A, μ, α) une algèbre Hom-associative multiplicative. Pour tout k un entier positif, on note par α^k la composition k fois de α,

$$\alpha^k = \alpha \circ \cdots \circ \alpha \ (k - \text{times}).$$

En particulier, $\alpha^0 = id$ et $\alpha^1 = \alpha$. Si (A, μ, α) est régulière, on note par α^{-k} la composition k fois de α^{-1}.

Definition 4.1.1 On note le $\mathbb{K}$-algèbre associative commutative avec l'unité, et soit $D_\sigma(A)$ désigne l'ensemble des σ-dérivations sur A, formé de l'ensemble de toutes les applications $\mathbb{K}$-linéaires $D_\sigma : A \to A$ satisfait l'identité de σ-Leibniz

$$D_\sigma(fg) = D_\sigma(f)g + \sigma(f)D_\sigma(g). \tag{4.1.1}$$

On a

$$\begin{aligned}\mu(D\mu(x,y),z) \quad &+\mu(\sigma(\mu(x,y),D(z))) \\ &= \mu(\mu(D(x),y),z) + \mu(\mu(\sigma(x),D(y)),z) + \mu(\mu(\sigma(x),\sigma(y)),D(z)).\end{aligned}$$

Si $\sigma \circ \mu = \mu \circ (\sigma \otimes \sigma)$ où σ est un morphisme d'algèbre. Si

$$\begin{cases} \sigma D = D\sigma \quad \text{avec} \quad \sigma D = \sigma \circ D \\ \sigma^2 = \sigma \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Remark 4.1.2 Nous avons $D\mu(f,g) = \mu(D(f),g) + \mu(\sigma(f),D(g))$ et $D((\mu \otimes id)(x,y,z)) = D(\mu(\mu(x,y),z))$.

Proposition 4.1.3 *Pour tous $D, D' \in D_\sigma(A)$, on a $[D, D'] \in D_\sigma(A)$*

Démonstration. Premièrement,

$$\begin{aligned}(D \circ D')(f.g) \quad &= D(D'(f).g + \sigma(f)D'(g)) \\ &= D(D'(f))g + \sigma(D'(f))D(g) + D(\sigma(f))D'(g) + \sigma^2(f)D(D'(g)).\end{aligned}$$

Deuxièment,

$$\begin{aligned}(D' \circ D)(f.g) \quad &= D'(D(f).g + \sigma(f)D(g)) \\ &= D'(D(f))g + \sigma(D(f))D'(g) + D'(\sigma(f))D(g) + \sigma^2(f)D'(D(g)).\end{aligned}$$

Si $\sigma = id$, alors $D \circ D' - D' \circ D = [D, D']$ est une dérivation.
Si $\sigma \neq id$ alors

$$\begin{aligned}[D,D'](f.g) \quad &= [D,D'](f).g - \sigma^2(f)[D,D'](g) + \sigma(D'(f))D(f) \\ &+ D(\sigma(f)).D'(g) - \sigma(D(f).D'(g) - D'(\sigma(f).D(g) \\ &= [D,D'](f).g - \sigma^2(f).[D,D'](g) \\ &+ (\sigma D' - D'\sigma)(f).D(g) - (\sigma D - D\sigma)(g)D'(g)\end{aligned}$$

D'après les relations (4.1.2), $[D, D'](f.g) = [D, D'](f).g - \sigma(f).[D, D'](g)$ et par conséquent $[D, D']$ est une dérivation σ-twistée. $\square$

Definition 4.1.4 Pour tout entier positif k, une application linéaire $D : A \longrightarrow A$ est une α^k–dérivation de l'algèbre Hom-associative multiplicative (A,μ,α), si

$$\mu(D,\alpha) = 0, \quad \text{i.e} \quad D \circ \alpha = \alpha \circ D \tag{4.1.3}$$

et

$$D \circ \mu(f,g) = \mu(D(f),\alpha^k(g)) + \mu(\alpha^k(f),D(g)), \forall f,g \in A. \tag{4.1.4}$$

Nous désignons par $Der_{\alpha^k}(A)$ l'ensemble des α^k-dérivations de l'algèbre Hom-associative multiplicative (A,μ,α).
Soit $f \in A$ satisfaisant $\alpha(f) = f$, on définit $D_k(f) : A \to A$ par

$$D_k(f)(g) = \mu(\alpha^k(g),f), \quad \forall g \in A.$$

Alors $D(f)$ est une α^{k+1}-dérivation, qu'on appelera une α^{k+1}-dérivation intérieure. En effet, on a $D_k(f)(\alpha(g)) = \mu(\alpha^{k+1}(g),f) = \alpha(\mu(\alpha^k(g),f) = \alpha \circ D_k(f)(g)$, ce qui implique que l'équation (4.1.3) dans la Définition 4.1.4 est satisfaite. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} D_k(f)\mu(g,h) &= \mu(\alpha^k(\mu(g,h),f) = \mu(\mu(\alpha^k(g),\alpha^k(h)),\alpha(f)) \\ &= \mu(\alpha^{k+1}(g),\mu(\alpha^k(h),f)) + \mu(\mu(\alpha^k(g),f),\alpha^{k+1}(h)) \\ &= \mu(\alpha^{k+1}(g),D_k(f)(h)) + \mu(D_k(f)(g),\alpha^{k+1}(h)). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\delta_k(f)$ est une α^{k+1}-dérivation intérieure et l'ensemble des α^k-dérivations intérieures est noté par $\mathbf{Inner}_{\alpha^k}(A)$, i.e.

$$\mathbf{Inner}_{\alpha^k}(A) = \left\{\mu(\alpha^{k-1}(\bullet),f) : f \in A, \alpha(f) = f\right\}. \tag{4.1.5}$$

Pour tous $D \in Der_{\alpha^k}(A)$ et $D' \in Der_{\alpha^s}(A)$, on définit le commutateur $[D,D']$ comme d'habitude : $[D,D'] = D \circ D' - D' \circ D$.

Proposition 4.1.5 *Pour tous $D \in Der_{\alpha^k}(A)$ et $D' \in Der_{\alpha^s}(A)$, on a $[D,D'] \in Der_{\alpha^{k+s}}(A)$.*

Démonstration. Pour tous $f,g \in A$, on a

$$\begin{aligned} [D,D']\mu(f,g) &= D \circ D'\mu(f,g) - D' \circ D\mu(f,g) \\ &= D(\mu(D'(f),\alpha^s(g)) + \mu(\alpha^s(f),D'(g))) \\ &\quad -D'(\mu(D(f),\alpha^k(g)) + \mu(\alpha^k(f),D(g))) \\ &= \mu(D \circ D'(f),\alpha^{k+s}(g)) + \mu(\alpha^k \circ D'(f),D \circ \alpha^s(g)) \\ &\quad +\mu(D \circ \alpha^s(f),\alpha^k \circ D'(g)) + \mu(\alpha^{k+s}(f),D \circ D'(g)) \\ &\quad -\mu(D' \circ D(f),\alpha^{k+s}(g)) - \mu(\alpha^s \circ D(f),D' \circ \alpha^k(g)) \\ &\quad -\mu(D' \circ \alpha^k(f),\alpha^s \circ D(g)) - \mu(\alpha^{k+s}(f),D' \circ D(g)). \end{aligned}$$

Puisque D et D' satisfont $D \circ \alpha = \alpha \circ D, \quad D' \circ \alpha = \alpha \circ D'$, on obtient $\alpha^k \circ D' = D' \circ \alpha^k, \quad D \circ \alpha^s = \alpha^s \circ D$. Par conséquent, on arrive à

$$[D,D']\mu(f,g) = \mu(\alpha^{k+s}(f),[D,D'](g)) + \mu([D,D'](f),\alpha^{k+s}(g)).$$

De plus, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}[D,D']\circ\alpha = D\circ D'\circ\alpha - D'\circ D\circ\alpha &= \alpha\circ D\circ D' - \alpha\circ D'\circ D\\ &= \alpha\circ[D,D'],\end{aligned}$$

qui donne que $[D,D']\in Der_{\alpha^{k+s}}(A)$. □

On peut enoncer la propriété suivante établissant un lien entre les dérivations d'une algèbre associative et les α- dérivations de l'algèbre Hom-associative obtenue par twist.

Proposition 4.1.6 *Si D est dérivation de l'algèbre Hom-associative et si $D\circ\alpha = \alpha D$ alors $\alpha\circ D$ est une α-dérivation de l'algèbre Hom-associative associée.*

Démonstration. On a $D(x.y) = D(x).y + x.D(y)$ avec $x.y = \alpha(x*y)$. On a par suit,

$$\begin{aligned}D\circ\alpha(x*y) &= \alpha(D(x)*y + x*D(y))\\ &= \alpha D(x)*\alpha(y) + \alpha(x)*\alpha D(y)\\ &= \alpha\circ D(x*y)\end{aligned}$$

Ainsi, se termine la proposition. □

Remark 4.1.7 Soit (A,μ,α) une algèbre Hom-associative de type associatif et (A,μ') l'algèbre associative compatible.
Si f est une dérivation de (A,μ,α), on a
$f\circ\mu(x,y) = \mu(f(x),y) + \mu(x,f(y))$. Si $f\circ\alpha = \alpha\circ f$, on a
$f\circ\alpha(\mu'(x,y)) = \alpha f\circ\mu'(x,y) = \alpha\mu'(f(x),y) + \alpha\mu'(x,f(y))$. On obtient $\alpha(f\circ\mu'(x,y) - \mu'(f(x),y) - \mu'(x,f(y))) = 0$. Si α est inversible alors f est une dérivation de (A,μ').

4.2 Les dérivations des algèbres Hom-associatives de dimensions 2 et 3.

Dans cette section, on calcule explicitement toutes les dérivations des algèbres Hom-associatives de dimensions 2 et 3 obtenues dans la classification.
On considère l'application $D: A\to A$ et on pose, dans la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$, $D(e_i) = \sum_{l=1}^n d_{li}e_l$, exprimant la dérivation en terme de constantes de structure.

On a

$$D(e_i.e_j) = \varphi(e_i)e_j + e_iD(e_j). \tag{4.2.1}$$

$$\begin{aligned}D(e_i*e_j) &= D(e_i).e_j + e_i.D(e_j)\\ \sum_{k=1}^n C_{ij}^kD(e_k) &= \sum_{p=1}^n\sum_{k=1}^n d_{ki}C_{kj}^pe_p + \sum_{p=1}^n\sum_{k=1}^n d_{kj}C_{ik}^pe_p\\ \sum_{p=1}^n\sum_{k=1}^n d_{pk}C_{ij}^ke_p &- \sum_{p=1}^n\sum_{k=1}^n d_{kj}C_{kj}^pe_p - \sum_{p=1}^n\sum_{k=1}^n d_{kj}C_{ik}^pe_p = 0.\end{aligned}$$

On obtient par suite le système d'équations suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}(d_{pk}C_{ij}^{k} - d_{kj}C_{kj}^{p} - d_{kj}C_{ik}^{p}) = 0, \quad i,j,p = 1,\ldots,n. \tag{4.2.2}$$

Sa résolution permet d'obtenir les dérivations d'une algèbre Hom-associative donnée.

Les Dérivations dans $\mathcal{HA}ss_2$:

- $A_1^2, A_2^2, A_8^2, A_9^2 : D(e_i) = 0, \quad i = 1,2.$
- $A_3^2, A_4^2, A_5^2 : D(e_i) = 0, \quad D(e_i) = b_2e_2.$
- $A_6^2 : D(e_1) = \frac{1}{2}b_2e_1, \quad D(e_2) = a_2e_2 + b_2e_2.$
- $A_7^2 : D(e_1) = \frac{a+b}{c}e_1 + b_1e_1, \quad D(e_2) = 0.$

Remark 4.2.1 D commute avec α pour $A_1^2, \cdots, A_9^2$.

Les Dérivations dans $\mathcal{A}ss_2$:

- $\tilde{A}_1^2, \tilde{A}_8^2, \tilde{A}_9^2 : \tilde{D}(e_i) = 0, \quad i = 1,2.$
- $\tilde{A}_4^2 : \tilde{D}(e_1) = 0, \quad \tilde{D}(e_2) = b_2e_2.$
- $\tilde{A}_6^2 : \tilde{D}(e_1) = a_1e_1, \quad \tilde{D}(e_2) = a_2e_1 + 2b_2e_2.$

Les Dérivations dans $\mathcal{UHA}ss_2$:

- $A_1'^2, A_2'^2, A_3'^2 : D'(e_i) = 0, \quad i = 1,2.$
- $A_4'^2 : D'(e_1) = 0, \quad D'(e_2) = b_2e_2.$

Les Dérivations dans $\mathcal{UA}ss_2$:

- $\tilde{A}_1'^2, \tilde{A}_2'^2 : \tilde{D}'(e_i) = 0, \quad i = 1,2.$
- $\tilde{A}_4'^2 : \tilde{D}'(e_1) = 0, \quad \tilde{D}'(e_2) = b_2e_2.$

Les Dérivations dans $\mathcal{HA}ss_3$:

- $A_1^3, A_2^3, A_3^3, A_4^3 : D(e_i) = 0, \quad i = 1,2,3.$
- $A_5^3 : D(e_1) = 2b_2e_1 + b_1e_2, \quad D(e_2) = b_2e_2, \quad D(e_3) = 0.$
- $A_6^3 : D(e_1) = c_3e_1 - a_3e_2, D(e_2) = 0, D(e_3) = b_3e_2 + c_3e_3.$
- $A_7^3 : D(e_1) = c_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, D(e_2) = c_3e_2 - c_2e_3, D(e_3) = c_2e_2 + c_3e_3.$
- $A_8^3 : D(e_1) = \frac{1}{2}c_3e_1 + a_2e_2, D(e_2) = \frac{1}{2}c_3e_2, D(e_3) = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3.$
- $A_9^3 : D(e_1) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, D(e_2) = a_2e_2, D(e_3) = c_3e_3.$

- $A^3_{10}: D(e_1) = 2c_3e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $D(e_2) = c_3e_2 + pc_2e_3$, $D_\alpha(e_3) = c_2e_2 + c_3e_3$.
- $A^3_{11}: D(e_1) = a_1e_1 + pb_1e_3$, $D(e_2) = a_1e_2 + c_2e_3$, $D_\alpha(e_3) = 0$.
- $A^3_{12}: D(e_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $D(e_2) = b_1e_2 - pa_1e_3$, $D_\alpha(e_3) = c_3e_3$.

Les Dérivations dans $\mathcal{A}ss_3$:

- $\tilde{A}^3_3, \tilde{A}^3_{12}: D(e_i) = 0, \quad i = 1,2,3.$
- $\tilde{A}^3_7: D(e_1) = 2c_3e_1, \quad D(e_2) = 0, \quad D(e_3) = c_3e_2 + c_3e_3.$
- $\tilde{A}^3_8: D(e_1) = \frac{1}{2}c_3e_1 + a_2e_2$, $D(e_2) = \frac{1}{2}c_3e_2$, $D(e_3) = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$.
- $\tilde{A}^3_9: D(e_1) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $D(e_2) = a_2e_2\, D(e_3) = c_3e_3$.
- $\tilde{A}^3_{10}: D(e_1) = 2c_3e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $D(e_2) = c_3e_2 - pb_3e_3$, $D(e_3) = c_2e_2 + c_3e_3$.

Les Dérivations dans $\mathcal{UHA}ss_3$:

- $A'^3_1, A'^3_2, A'^3_3, A'^3_4, A'^3_5, A'^3_6, A'^3_7, A'^3_8: D(e_i) = 0, \quad i = 1,2,3.$
- $A'^3_9: D(e_i) = 0, \quad D(e_2) = a_{22}e_2, \quad D(e_3) = 0.$
- $A'^3_{10}, A'^3_{13}, A'^3_{15}: D(e_1) = 0$, $D(e_2) = a_{22}e_2$, $D(e_3) = a_{33}e_3$.
- $A'^3_{11}: D(e_1) = 0, \quad D(e_2) = \frac{1}{2}a_{33}e_2 \quad D(e_3) = a_{33}e_3.$
- $A'^3_{12}: D(e_i) = 0, i = 1,2. \quad D(e_3) = a_{33}e_3.$
- $A'^3_{14}: D(e_i) = 0, \quad D(e_2) = 2a_{33}e_2, \quad D(e_3) = a_{33}e_2.$

Les Dérivations dans $\mathcal{UA}ss_3$:

- $\tilde{A}'^3_6, \tilde{A}'^3_7, \tilde{A}'^3_8: D(e_i) = 0, \quad i = 1,2,3.$
- $\tilde{A}'^3_9: D(e_i) = 0, \quad D(e_2) = a_{22}e_2, \quad D(e_3) = 0.$
- $\tilde{A}'^3_{10}: D(e_1) = 0$, $D(e_2) = a_{22}e_2 + a_{23}e_3$, $D(e_3) = a_{32}e_2 + a_{33}e_3$.
- $\tilde{A}'^3_{11}: D(e_1) = 0$, $D(e_2) = \frac{1}{2}a_{33}e_2, \quad D(e_3) = a_{32}e_2 + a_{33}e_3.$
- $\tilde{A}^2_{12}: D(e_i) = 0, \quad i = 1,2. \quad D(e_3) = a_{33}e_3.$
- $\tilde{A}^3_{14}: D(e_i) = 0, \quad D(e_2) = 2a_{33}e_2 + a_{23}e_3, \quad D(e_3) = a_{33}e_3.$

4.3 Les α-dérivations des algèbres Hom-associatives en dimensions 2 et 3.

Dans cette section, on calcule explicitement toutes les α-dérivations des algèbres Hom-associatives en dimensions 2 et 3 obtenues dans la classification.

On considère l'application $D_\alpha : A \to A$ que l'on écrit dans la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ en terme de constantes de structure :

$$\begin{array}{ll} D_\alpha(e_i) = \sum_{l=1}^n d_{li}e_l & D_\alpha(e_j) = \sum_{k=1}^n d_{kj}e_k \\ \alpha(e_i) = \sum_{l=1}^n a_{li}e_l, & \alpha(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj}e_k \end{array}$$

et

$$D_\alpha(e_i.e_j) = D_\alpha(e_i)\alpha(e_j) + \alpha(e_i)D_\alpha(e_j). \tag{4.3.1}$$

$$\begin{array}{ll} D_\alpha(e_i * e_j) & = D_\alpha(e_i)\alpha(e_j) + \alpha(e_i)D_\alpha(e_j) \\ \sum_{k=1}^n \mathcal{C}_{ij}^k D_\alpha(e_k) & = \sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n d_{li}a_{kj}(e_l * e_k) + \sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n d_{kj}a_{li}(e_l * e_k) \\ \sum_{p=1}^n\sum_{k=1}^n \mathcal{C}_{ij}^k d_{pk}e_p & = \sum_{p,l,k=1}^n d_{li}a_{kj}\mathcal{C}_{lk}^p e_p + \sum_{p,k,l=1}^n a_{li}d_{kj}\mathcal{C}_{lk}^p e_p \\ \sum_{k=1}^n d_{pk}\mathcal{C}_{ij}^k & -\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n d_{li}a_{kj}\mathcal{C}_{lk}^p - \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n a_{li}d_{kj}\mathcal{C}_{lk}^p = 0 \end{array}$$

On obtient par suite le système d'équations suivantes :

$$\sum_{k=1}^n (d_{pk}\mathcal{C}_{ij}^k - \sum_{l=1}^n d_{li}a_{kj}\mathcal{C}_{lk}^p - \sum_{l=1}^n a_{li}d_{kj}\mathcal{C}_{lk}^p) = 0,\ i,j,p = 1,\dots,n. \tag{4.3.2}$$

Sa résolution permet d'obtenir les α-dérivations d'une algèbre Hom-associative donnée.

Les α-Dérivations dans $\mathcal{H}\mathcal{A}ss_2$:

- A_1^2, $A_2^2 : D_\alpha(e_i) = 0$, $i = 1,2$.
- A_3^2, $A_4^2 : D_\alpha(e_1) = 0$, $D_\alpha(e_2) = b_2e_2$.
- A_5^2, $D_\alpha(e_1) = b_1e_2$, $D_\alpha(e_2) = b_2e_2$.
- A_6^2, $D_\alpha(e_1) = a_1e_1$, $D_\alpha(e_2) = a_2e_1 + 2a_1e_2$.
- A_7^2, $A_8^2, A_9^2 : D_\alpha(e_1) = b_1e_2$, $D_\alpha(e_2) = 0$

Les α-Dérivations dans $\mathcal{A}ss_2$:

- $A_1'^2$, $A_2'^2$ $A_4'^2 : D_\alpha(e_i) = 0$, $i = 1,2$.
- $A_3'^2 :$ $D_\alpha(e_1) = 0$, $D_\alpha(e_2) = b_2e_2$.

Les α-Dérivations dans $\mathcal{H}\mathcal{A}ss_3$:

- $A_1^3 : D_\alpha(e_1) = 0$, $D_\alpha(e_2) = b_2e_2 - b_2e_3$, $D_\alpha(e_3) = b_3e_2 - b_3e_3$.
- A_2^3, $A_3^3 : D_\alpha(e_i) = 0$, $i = 1,2,3$.
- $A_4^3 : D_\alpha(e_1) = b_1e_2 + c_1e_3, D_\alpha(e_2) = -pb_3e_2, D_\alpha(e_3) = b_3e_2$.
- $A_5^3 : D_\alpha(e_1) = a_1e_1 + b_2e_2, D_\alpha(e_2) = \frac{1}{2}a_1e_2, D_\alpha(e_3) = b_2e_2$.
- $A_6^3 : D_\alpha(e_1) = b_1e_1 + c_1e_3, D_\alpha(e_2) = 0, D_\alpha(e_3) = b_3e_2 + c_3e_3$.

- $A_7^3 : D_\alpha(e_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $D_\alpha(e_2) = c_2e_2 + c_2e_3$, $D_\alpha(e_3) = b_1e_2 + b_1e_3$.
- $A_8^3 : D_\alpha(e_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $D_\alpha(e_2) = a_1e_2$, $D_\alpha(e_3) = a_3e_1 + b_3e_2 + 2a_1e_3$.
- $A_9^3 : D_\alpha(e_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $D_\alpha(e_2) = b_2e_2$, $D_\alpha(e_3) = \frac{c_1}{a}e_3$.
- $A_{10}^3 : D_\alpha(e_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $D_\alpha(e_2) = \frac{1}{2}a_1e_2 + c_2e_3$, $D_\alpha(e_3) = pc_2e_2 - \frac{1}{2}a_1e_3$.
- $A_{11}^3 : D_\alpha(e_1) = b_1e_2 + c_1e3 + c_1e_3$, $D_\alpha(e_2) = b_1e2 + c_2e_3$, $D_\alpha(e_3) = 0$.
- $A_{12}^3 : D_\alpha(e_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $D_\alpha(e_2) = \frac{1}{2}a_1e_2 + c_2e_3$, $D_\alpha(e_3) = \frac{1}{2}a_1e_3$.

Les α-Dérivations dans $\mathcal{HA}ss_3$:

- $A_1'^3 : D_\alpha(e_1) = 0$, $D_\alpha(e_2) = D_\alpha(e_2) = a_{22}e_2 - a_{22}e_3$, $D_\alpha(e_3) = a_{32}e_2 - a_{32}e_3$.
- $A_2'^3, A_3'^3, A_5'^3, A_6'^3, A_7'^3, A_8'^3, A_9'^3, A_{10}'^3, A_{11}'^3, A_{12}'^3, A_{13}'^3, A_{14}'^3, A_{15}'^3$: $D_\alpha(e_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$.
- $A_4'^3 : D_\alpha(e_1) = 0, \quad D_\alpha(e_2) = 0, \quad D_\alpha(e_3) = a_{33}e_3$

5

Cohomologie des algèbres Hom-associatives, Déformations et Composantes irréductibles.

Sommaire

La cohomologie de type Hochschild pour les algèbres Hom-associatives a été initiée par Makhlouf-Silvestrov dans [MS10b], ensuite completer dans le cas des algèbres Hom-associatives multiplicatives par Ammar-Ejbehi-Makhlouf dans [AEM11].

Dans ce chapitre, on rappelle le complexe de cohomologie et on procède aux calculs du deuxième et troixième groupes de cohomologie des algèbres Hom-associatives, des algèbres Hom-associatives unitaires et les algèbres associatives induites de dimensions 2 et 3.

De plus, nous nous intéressons aux déformations en utilisant le calcul de 2-cocycles pour determiner les déformations infinitésimales.

Enfin, on termine ce chapitre par la détermination des composantes irréductibles, appelée classification géométrique.

5.1 Cohomologie des algèbres Hom-associatives.

Dans cette section, on rappelle le complexe de cohomologie des algèbres Hom-associatives multiplicatives généralisant le complexe de cohomologie de Hochschild.

Algorithme de calcul de cohomologie

- On identifie les cochaines à leurs constantes de structure relativement à une base donnée.
- On résoud l'équation $\delta^n\varphi = 0$ pour déterminer les n-cocycles.
- On cherche s'il existe $f \in \varphi^{n-1}(A,A)$ telle que $\varphi = \delta^{n-1} f$ pour déterminer la classe de cohomologie.

Definition 5.1.1 Soit (A,μ,α) une algèbre Hom-associative, pour $n \geq 1$ on definit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^n_{Hom}(A,A)$ des n-cochaines comme suit : $\varphi \in \mathscr{C}^n_{Hom}(A,A)$ est une application n-linéaire $\varphi : A^n \to A$ satisfaisant

$$\alpha \circ \varphi(x_0,\cdots,x_{n-1}) = \varphi(\alpha(x_0),\cdots \alpha(x_{n-1})), \forall, x_0,\cdots,x_{n-1} \in A. \quad (5.1.1)$$

On appelle, pour $n \geq 1$, opérateur des n-cobords d'une algèbre Hom-associative (A,μ,α) l'application linéaire $\delta^n_{Hom} : \mathscr{C}^n_{Hom}(A,A) \to \mathscr{C}^{n+1}_{Hom}(A,A)$ définie par

$$\begin{aligned}\delta^n_{Hom}\varphi(x_0,\ldots,x_n) &= \mu(\alpha^{n-1}(x_0),\varphi(x_1,\ldots,x_n)) \\ &+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\varphi(\alpha(x_0),\ldots,\alpha(x_{k-2}),\mu(x_{k-1},x_k),\alpha(x_{k+1}), \\ &\ldots,\alpha(x_n)) + (-1)^{n+1}\mu(\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1}),\alpha^{n-1}(x_n)).\end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Definition 5.1.2 L'espace des n-cocycles est défini par

$$Z^n_{Hom}(A,A) = \{\varphi \in C^n_{Hom}(A,A) : \delta^n_{Hom}\varphi = 0\},$$

et l'espace des n-cobords est défini par

$$B^n_{Hom}(A,A) = \left\{\psi \in \delta^{n-1}_{Hom}\varphi : \varphi \in C^{n-1}(A,A)\right\}.$$

Lemma 5.1.3 $B^n_{Hom}(A,A) \subset Z^n_{Hom}(A,A)$.

Definition 5.1.4 On appelle le n^{ieme} groupe de cohomologie de l'algèbre Hom-associative A le quotient

$$H^n_{Hom}(A,A) = \frac{Z^n_{Hom}(A,A)}{B^n_{Hom}(A,A)}.$$

Lemma 5.1.5 *[MS10a] Soit $D_i : \mathscr{C}^n_{Hom}(A,A) \longrightarrow \mathscr{C}^{n+1}_{Hom}$ les opérateurs linéaires définissent pour $\varphi \in \mathscr{C}^n_{Hom}(A,A)$ et $x_0,x_1,\ldots,x_n \in A$ par $D_0\varphi(x_0,x_1,\ldots,x_n) =$*

$-\mu(\alpha^{n-1}(x_0),\varphi(x_1,\dots,x_n))$

$$\begin{array}{rl} D_0\varphi(x_0,x_1,\dots,x_n)= & -\mu(\alpha^{n-1}(x_0),\varphi(x_1,\dots,x_n)) \\ & +\varphi(\mu(x_0,x_1),\alpha(x_2),\dots,\alpha(x_n)), D_i\varphi(x_0,x_1,\dots,x_n) \\ & =\varphi(\alpha(x_0),\dots,\mu(x_i,x_{i+i}),\dots,\alpha(x_n))\,\forall\, 1\le i\le n-2, \\ & D_{n-1}\varphi(x_0,\dots,x_n)=\varphi(\alpha(x_0),\dots,\dots,\alpha(x_{n-2}), \\ & \mu(x_{n-1},x_n))-\mu(\varphi(x_0,\dots,x_{n-1}),\alpha^{n-1}(x_n)), \\ & D_i\varphi=0 \quad pour \quad i\ge n. \end{array}$$

Alors, $D_iD_j=DjD_{i-1}\quad 0\le j<i\le n$, *et* $\delta^n_{Hom}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}D_i$.

Proposition 5.1.6 *[MS10a] Soit (A,μ,α) une algèbre Hom-associative et $\delta^n_{Hom}:\mathscr{C}^n_{Hom}(A,A)\longrightarrow\mathscr{C}^{n+1}_{Hom}(A,A)$ l'opérateur défini dans (5.1.2) alors $\delta^{n+1}_{Hom}\circ\delta^n_{Hom}=0\quad pour\ n\ge 1$.*

Démonstration. On a $\delta^{n+1}_{Hom}\circ\delta^n_{Hom}=$

$$\begin{aligned} &=\sum_{0\le i,j\le n}(-1)^{i+j}D_iD_j=\sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j}D_iD_j+\sum_{0\le i\le n}(-1)^{i+j}D_iDj \\ &=\sum_{0\le j<i\le n}(-1)^{i+j}D_jD_{i-1}+\sum_{0\le i\le j\le n}(-1)^{i+j}D_iD_j \\ &=\sum_{0\le j\le k\le n}(-1)^{k+j+i}D_jD_k+\sum_{0\le i\le j\le n}(-1)^{i+j}D_iD_j \\ &=0. \end{aligned}$$

□

Definition 5.1.7 ([AEM11] Définition 3.5) On appelle opérateur de 2-cobord de l'algèbre Hom-associative A l'application

$$\delta^2_{Hom}:\mathscr{C}^2(A,A)\to\mathscr{C}^3(A,A),\ \varphi\mapsto\delta^2_{Hom}\varphi$$

définie par

$$\begin{aligned}\delta^2_{Hom}\varphi(x,y,z) &=\varphi(\alpha(x),\mu(y,z))-\varphi(\mu(x,y),\alpha(z)) \\ &+\mu(\alpha(x),\varphi(y,z))-\mu(\varphi(x,y),\alpha(z)).\end{aligned}$$

Proposition 5.1.8 *[MS10a] $\delta^2_{Hom}(\delta^1_{Hom})=0$.*

Démonstration. Soit $\delta^1_{Hom}f(x,y)=f(\mu(x,y))-\mu(f(x),y)-\mu(x,f(y))$.
Alors

$$\begin{aligned} &\delta^2_{Hom}(\delta^1\delta_{Hom}f)\varphi(x,y,z)= \\ &=\delta^1_{Hom}f(\alpha(x),\mu(y,z))-\delta^1_{Hom}f(\mu(x,y),\alpha(z)) \\ &+\mu(\alpha(x),\delta^1_{Hom}f(y,z))-\mu(\delta^1_{Hom}f(x,y),\alpha(z)) \\ &=f(\mu(\alpha(x),\mu(y,z)))-\mu(f(\alpha(x),\mu(y,z)) \\ &-\mu(\alpha(x),f(\mu(y,z)))-f(\mu(\mu(x,y),\alpha(z))) \\ &+\mu(f(\mu(x,y)),\alpha(z))+\mu(\mu(x,y),f(\alpha(z))) \\ &-\mu(\alpha(x),f(\mu(y,z)))-\mu(\alpha(x),\mu(f(y),z)) \\ &-\mu(\alpha(x),\mu(y,f(z)))-\mu(f(\mu(x,y)),\alpha(z))) \\ &+\mu(\mu(f(x),y)),\alpha(z)))+\mu(\mu(x,f(y)),\alpha(z))) \\ &=0, \end{aligned}$$

parce que α et f commutent et la multiplication μ est Hom-associative. $\square$

Nous définissons φ par ses constantes de structure $\varphi(e_i, e_j, e_k) = f_{ij}^k e_k$. Les conditions

$$\begin{array}{l} \delta^2_{Hom}\varphi(e_i, e_j, e_k) = 0 \quad \text{et} \\ \alpha \circ \varphi(e_i, e_j) - \varphi(\alpha(e_i), \alpha(e_j)) = 0 \end{array} \tag{5.1.3}$$

se traduisent par les conditions suivantes :
On a

$$\varphi(\alpha(e_i), \mu(e_j, e_k)) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n a_{pi} C_{jk}^q f_{pq}^r e_r \tag{5.1.4}$$

$$\varphi(\mu(e_i, e_j), \alpha(e_k)) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n a_{qk} C_{ij}^p f_{pq}^r e_r \tag{5.1.5}$$

$$\mu(\alpha(e_i), \varphi(e_j, e_k)) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n a_{pi} f_{jk}^q C_{pq}^r e_r \tag{5.1.6}$$

$$\mu(\varphi(e_i, e_j), \alpha(e_k)) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n a_{qk} f_{ij}^p C_{pq}^r e_r \tag{5.1.7}$$

$$\alpha \circ \varphi(e_i, e_j) = \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n f_{ij}^p a_{sp} e_s. \tag{5.1.8}$$

$$\varphi(\alpha(e_i), \alpha(e_j)) = \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pi} a_{qj} f_{pq}^s e_s. \tag{5.1.9}$$

Par conséquent, on a le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (a_{pi} C_{jk}^q f_{pq}^r - C_{ij}^p a_{qk} f_{pq}^r + a_{pi} f_{jk}^q C_{pq}^r - f_{ij}^p a_{qk} C_{pq}^r) = 0, \\ i, j, k, r = 1, \ldots, n. \\ \displaystyle\sum_{p=1}^n a_{sp} f_{ij}^p - \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pi} a_{qj} f_{pq}^s = 0, \quad i, j, s = 1, \ldots, n. \end{array} \right. \tag{5.1.10}$$

On pose $\delta^1 f(e_i, e_j) = f(e_i).e_j - f(e_i.e_j) + e_i.f(e_j)$ pour vérifier si les 2-cocycles sont des 2-cobords.

Remark 5.1.9 Si $H^2_{Hom}(A, A) = \frac{Z^2_{Hom}(A,A)}{B^2_{Hom}(A,A)} = \{0\}$, alors en terme géométrique, l'orbite de l'algèbre est un ouvert de Zariski et on dit l'algèbre est rigide. C'est équivalent aussi à dire que toute déformation est équivalente à une déformation triviale.

5.2 Deuxième groupe de cohomologie des algèbres de $\mathcal{HA}ss_2$ et $\mathcal{HA}ss_3$.

Dans cette section, on calcule explicitement les groupes de cohomologie des algèbres Hom-associatives de dimensions 2 et 3.

Calcul de $\mathcal{H}^2(A,A)$ pour A dans $\mathcal{HA}ss_2$

On considère $\varphi : A \times A \to A$ tels que

$$\alpha \circ \varphi = \varphi \circ (\alpha \otimes \alpha) \quad \text{et} \quad \delta^2_{Hom}\varphi = 0.$$

1. Pour A^2_1,A^2_4,A^2_8,A^2_9, le Z^2 est de dimension 0. Ainsi, on a $H^2 = \langle\{0\}\rangle$.
2. Pour A^2_2, le Z^2 est de dimension 1 engendré par les générateurs de 2-cocycle suivant : $\varphi_2(e_2,e_2) = e_2$. Ainsi, on a $H^2 = \langle 0\rangle$.
3. Pour A^2_3, le Z^2 est de dimension 3 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants : $\varphi_1(e_1,e_2) = e_2, \varphi_2(e_2,e_1) = e_2, \varphi_3(e_2,e_2) = e_2$. Ainsi, on a $H^2 = \langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle$.
4. Pour A^2_5, le Z^2 est de dimension 1 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivant : $\varphi_1(e_1,e_1) = e_1$. Ainsi, on a $H^2 = \langle 0\rangle$.
5. Pour A^3_6, le Z^2 est de dimension 2 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants : $\varphi_1(e_1,e_1) = e_2, \varphi_2(e_1,e_2) = e_2, \varphi_2(e_2,e_1) = e_2$. Ainsi, on a $H^2 = \langle \varphi_2 \rangle$.
6. Pour A^2_7, le Z^2 est de dimension 2 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants : $\varphi_1(e_1,e_2) = e_1, \varphi_2(e_2,e_1) = e_1$. Ainsi, on a $H^2 = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$.

Corollary 5.2.1 *Pour les algèbres Hom-associatives A^2_1, A^2_4, A^2_8 et A^2_9, la condition $\delta^2_{Hom}\varphi(e_i,e_j,e_k) = 0$ conduit aux 2-cocycles $\varphi(e_i,e_j) = 0$ pour tous $i,j = 1,2$.*
Donc les algèbres A^2_1, A^2_4, A^2_8 et A^2_9 sont rigides.

Calcul de $\mathcal{H}^2(A,A)$ pour A dans $\mathcal{HA}ss_3$

1. Pour A^3_1, le Z^2 est de dimension 12. Ainsi, on a $H^2 = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_{12} \rangle$.
2. Pour A^3_2, le Z^2 est de dimension 1 engendré par le générateur de 2-cocycle suivant $\varphi_1(e_3,e_3) = e_3$. Ainsi, on a $H^2 = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_{12} \rangle$.
3. Pour A^3_3,A^3_9, le Z^2 est de dimension 0 engendré par le générateur de 2-cocycle $\varphi = 0$. Ainsi, on a $H^2 = \langle\{0\}\rangle$.

4. Pour A_4^3, le Z^2 est de dimension 2 engendré par les générateurs de 2-cocycles
   $\varphi_1(e_1,e_2)=e_1$, $\varphi_2(e_1,e_3)=e_1$, $\varphi_3(e_2,e_1)=e_1$, $\varphi_4(e_2,e_3)=e_1$, $\varphi_5(e_3,e_1)=e_1$, $\varphi_6(e_3,e_2)=e_1$, $\varphi_7(e_3,e_3)=e_1$. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_1\rangle$.
5. Pour A_5^3, le Z^2 est de dimension 1 engendré par le générateurs de 2-cocycle suivants $\varphi_1(e_3,e_3)=e_3$. Ainsi, on a $H^2=\langle 0\rangle$.
6. Pour A_6^3, le Z^2 est de dimension 3 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants $\varphi_1(e_1,e_2)=e_1$, $\varphi_2(e_2,e_1)=e_1$, $\varphi_3(e_3,e_3)=e_3$. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_3\rangle$.
7. Pour A_7^3, le Z^2 est de dimension 1 engendré par le générateur de 2-cocycle suivant $\varphi_1(e_1,e_2)=e_1$. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_1\rangle$.
8. Pour A_8^3, le Z^2 est de dimension 3 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants
   $\varphi_1(e_1,e_1)=e_3$, $\varphi_2(e_1,e_2)=e_3$, $\varphi_2(e_2,e_1)=-e_3$. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$.
9. Pour A_{10}^3, le Z^2 est de dimension 1 engendré par le générateur de 2-cocycle suivant $\varphi_1(e_3,e_3)=e_1$. Ainsi, on a $H^2=\langle 0\rangle$.
10. Pour A_{11}^3, le Z^2 est de dimension 2 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants $\varphi_1(e_1,e_3)=e_1$ $\varphi_2(e_3,e_1)=e_1$. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_2\rangle$.
11. Pour A_{12}^3, le Z^2 est de dimension 0 engendré par le générateur de 2-cocycle $\varphi=0$. Ainsi, on a $H^2=\langle\{0\}\rangle$.

Corollary 5.2.2 *Pour les algèbres Hom-associatives A_3^3, A_9^3 et A_{12}^3, la condition $\delta^2_{Hom}\varphi(e_i,e_j,e_k)=0$ conduit aux 2-cocycles $\varphi(e_i,e_j)=0$ pour tous $i,j=1,2,3$. Donc les algèbres A_3^3, A_9^3 et A_{12}^3 sont rigides.*

5.3 Troisième groupe de cohomologie des algèbres de $\mathcal{H}\mathcal{A}ss_2$ et $\mathcal{H}\mathcal{A}ss_3$.

Definition 5.3.1 On appelle un opérateur de 3-cobord de l'algèbre Hom-associative A l'application

$$\delta^3_{Hom}: C^3(A,A)\to C^4(A,A),\ \psi\mapsto\delta^3_{Hom}\psi$$

définie par

$$\begin{aligned}\delta^3_{Hom}\psi(x,y,z,w) &= \mu(\alpha^2(x),\psi(y,z,w))-\psi(\mu(x,y),\alpha(z),\alpha(w))\\ &+\psi(\alpha(x),\mu(y,z),\alpha(w))-\psi(\alpha(x),\alpha(y),\mu(z,w))\\ &+\mu(\psi(x,y,z)),\alpha^2(w)).\end{aligned}$$

Proposition 5.3.2 $\delta^3_{Hom}(\delta^2_{Hom}) = 0.$

Démonstration. Soit $\begin{array}{ll}\delta^2_{Hom}\varphi(x,y,z) & = \varphi(\alpha(x),\mu(y,z)) - \varphi(\mu(x,y),\alpha(z)) \\ & +\mu(\alpha(x),\varphi(y,z)) - \mu(\varphi(x,y),\alpha(z)).\end{array}$

Alors, on a

$$\begin{array}{l}
\delta^3_{Hom}(\delta^2_{Hom}\varphi)\psi(x,y,z,w) = \\
= \mu(\alpha^2(x),\delta^2_{Hom}\psi(y,z,w)) - \delta^2_{Hom}\varphi(\mu(x,y),\alpha(z),\alpha(w)) \\
+\delta^2_{Hom}\varphi(\alpha(x),\mu(y,z),\alpha(w)) - \delta^2_{Hom}\varphi(\alpha(x),\alpha(y),\mu(z,w)) \\
+\mu(\delta^2_{Hom}\varphi(x,y,z)),\alpha^2(w)) \\
= \mu(\alpha^2(x),\varphi(\alpha(y),\mu(z,w)) - \mu(\alpha^2(x),\varphi(\mu(y,z),\alpha(w))) \\
+\mu(\alpha^2(x),\mu(\alpha(y),\varphi(z,w))) - \mu(\alpha^2(x),\mu(\varphi(y,z),\alpha(w))) \\
-\varphi(\alpha(\mu(x,y)),\mu(\alpha(z),\alpha(w))) + \varphi(\mu(\mu(x,y),\alpha(z)),\alpha^2(w)) \\
-\mu(\alpha(\mu(x,y),\varphi(\alpha(z),\alpha(w))) + \mu(\varphi(\mu(x,y),\alpha(z)),\alpha^2(w)) \\
+\varphi(\alpha^2(x),\mu(\mu(y,z),\alpha(w))) - \varphi(\mu(\alpha(x),\mu(y,z)),\alpha^2(w))) \\
+\mu(\alpha^2(x),\varphi(\mu(y,z),\alpha(w))) - \mu(\varphi(\alpha(x),\mu(y,z)),\alpha^2(w))) \\
-\varphi(\alpha^2(x),\mu(\alpha(y),\mu(z,w))) + \varphi(\mu(\alpha(x),\alpha(y)),\alpha\mu(z,w)) \\
-\mu(\alpha^2(x),\varphi(\alpha(y),\mu(z,w))) + \mu(\varphi(\alpha(x),\alpha(y)),\alpha\mu(z,w)) \\
+\mu(\varphi(\alpha(x),\mu(y,z)),\alpha^2(w)) - \mu(\varphi(\mu(x,y),\alpha(z)),\alpha^2(w)) \\
+\mu(\mu(\alpha(x),\varphi(y,z)),\alpha^2(w)) - \mu(\mu(\varphi(x,y),\alpha(z)),\alpha^2(w)) \\
= 0,
\end{array}$$

parce que α et φ commutent et la multiplication μ est Hom-associative. □

Nous définissons les constantes de structure $\psi(e_i,e_j,e_k,e_s) = \varphi^s_{ijk}e_s$. Les conditions

$$\begin{array}{l}
\delta^3_{Hom}\psi(e_i,e_j,e_k,e_s) = 0 \quad \text{et} \\
\alpha\circ\psi(e_i,e_j,e_k) - \psi(\alpha(e_i),\alpha(e_j),\alpha(e_k)) = 0
\end{array} \tag{5.3.1}$$

se traduisent par les conditions suivantes :

On a

$$\mu(\alpha^2(e_i),\psi(e_j,e_k,e_l)) = \sum_{s=1}^n\sum_{r=1}^n\sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n a_{pi}a_{rp}\varphi^q_{jkl}C^s_{rq}e_s. \tag{5.3.2}$$

$$\psi(\mu(e_i,e_j),\alpha(e_k),\alpha(e_k)) = \sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n\sum_{r=1}^n C^p_{ij}a_{qk}a_{rl}\varphi^s_{pqr}e_s. \tag{5.3.3}$$

$$\psi(\alpha(e_i),\mu(e_j,e_k),\alpha(e_l)) = \sum_{s=1}^n\sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n\sum_{r=1}^n a_{pi}C^q_{jk}a_{rl}\varphi^s_{pqr}e_s. \tag{5.3.4}$$

$$\psi(\alpha(e_i),\alpha(e_j),\mu(e_k,e_l)) = \sum_{s=1}^n\sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n\sum_{r=1}^n a_{pi}a_{qj}C^r_{kl}\varphi^s_{pqr}e_s. \tag{5.3.5}$$

$$\mu(\psi(e_i,e_j,e_k),\alpha^2(e_l)) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\varphi_{ijk}^{p}a_{ql}a_{rq}\mathcal{C}_{pr}^{s}e_s. \tag{5.3.6}$$

$$\alpha\circ\psi(e_i,e_j,e_k) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\varphi_{ijk}^{s}a_{ls}e_l \tag{5.3.7}$$

$$\psi(\alpha(e_i),\alpha(e_j),\alpha(e_j)) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}a_{qj}a_{sk}\varphi_{pqs}^{l} \tag{5.3.8}$$

Par conséquent, on a le système d'équations :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}(a_{pi}a_{rp}\varphi_{jkl}^{q}\mathcal{C}_{rq}^{s} - \mathcal{C}_{ij}^{p}a_{qk}a_{rl}\varphi_{pqr}^{s} + a_{pi}\mathcal{C}_{jk}^{q}\varphi_{pqr}^{s} \\ -a_{pi}a_{qj}\mathcal{C}_{kl}^{r}\varphi_{pqr}^{s} + \varphi_{ijk}^{p}a_{ql}a_{rq}\mathcal{C}_{pr}^{s}) = 0,\ i,j,k,s = 1,\cdots,n. \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{n}(\varphi_{ijk}^{s}a_{ls} - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}a_{qj}a_{sk}\varphi_{pqs}^{l}) = 0,\ i,j,k,l = 1,\cdots,n. \end{cases} \tag{5.3.9}$$

On pose

$$\begin{aligned} \delta_{Hom}^{2}\varphi(e_i,e_j,e_k) &= \varphi(\alpha(e_i),\mu(e_j,e_k)) - \varphi(\mu(e_i,e_j),\alpha(e_k)) \\ &\quad +\mu(\alpha(e_i),\varphi(e_j,e_k)) - \mu(\varphi(e_i,e_j),\alpha(e_k)). \end{aligned}$$

On vérifie que $\psi = \delta_{Hom}^{2}\varphi$ et $\alpha\circ\varphi(e_i,e_j) = \varphi(\alpha(e_i),\alpha(e_j))$ pour identifer les 3-cobords.

Calcul de $\mathcal{H}^3(A,A)$ pour A dans $\mathcal{H}\mathcal{A}ss_2$

Dans cette section, on calcule explicitement le troisième groupe de cohomologie des algèbres Hom-associatives de dimension 2.

1. Pour A_1^2,A_8^2,A_9^2 le Z^3 est de dimension 0. Ainsi, on a $H^3 = \langle\{0\}\rangle$.
2. Pour A_2^2, le Z^3 est de dimension 4 engendré par les générateurs de 3-cocycle suivants :
   $\psi_1(e_1,e_2,e_1) = -e_2,\quad \psi_3(e_2,e_2,e_1) = e_2,$
   $\psi_1(e_1,e_2,e_2) = e_2,\quad \psi_2(e_2,e_1,e_2) = e_2,\quad \psi_4(e_2,e_2,e_2) = e_2.$
   Ainsi, on a $H^3 = \left\langle \psi_1,\psi_2,\psi_4 \right\rangle$.
3. Pour A_3^2, le Z^3 est de dimension 6 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
   $\psi_1(e_1,e_2,e_1) = e_2,\quad \psi_3(e_2,e_1,e_1) = e_2,\quad \psi_5(e_2,e_2,e_1) = e_2,$
   $\psi_2(e_1,e_2,e_2) = e_2,\quad \psi_4(e_2,e_1,e_2) = e_2,\quad \psi_6(e_2,e_2,e_2) = e_2.$
   Ainsi, on a $H^3 = \left\langle \psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6 \right\rangle$.
4. Pour A_4^2, le Z^3 est est de dimension 4 et on a $H^3 = \langle\{0\}\rangle$.

5. Pour A_5^2, le Z^3 est de dimension 4 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
   $\psi_1(e_1,e_1,e_1)=e_1,$ $\psi_4(e_2,e_1,e_1)=-e_1,$
   $\psi_2(e_1,e_1,e_2)=e_1, \psi_3(e_1,e_2,e_1)=e_1,$ $\psi_4(e_2,e_1,e_2)=e_1.$
   Ainsi, on a $H^3=\left\langle \psi_1,\psi_2\psi_3,\psi_4\right\rangle.$
6. Pour A_6^2, le Z^3 est de dimension 4 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
   $\psi_1(e_1,e_1,e_1)=e_1,$ $\psi_3(e_1,e_1,e_2)=e_2,$
   $\psi_2(e_1,e_1,e_1)=e_2,$ $\psi_4(e_2,e_1,e_1)=e_2.$
   Ainsi, on a $H^3=\left\langle \psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4\right\rangle.$
7. Pour A_7^2, le Z^3 est de dimension 4 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
   $\psi_1(e_1,e_2,e_1)=-e_1,$ $\psi_3(e_2,e_2,e_1)=e_1,$
   $\psi_1(e_1,e_2,e_2)=e_1, \psi_2(e_2,e_1,e_2)=e_1,$ $\psi_4(e_2,e_2,e_2)=e_1.$
   Ainsi, on a $H^3=\left\langle \psi_1,\psi_2,\psi_3\psi_4\right\rangle.$

Calcul de $\mathcal{H}^3(A,A)$ pour A dans $\mathcal{HA}ss_3$

Dans cette section, on calcule explicitement le troisième groupe de cohomologie des algèbres Hom-assiciatives de dimension 3.

1. Pour A_1, le Z^3 est de dimension 2 engendré par les générateurs de 3-cocycles. Ainsi, on a $H^3=\left\langle \psi_1,\psi_2\right\rangle$.
2. Pour A_2^3,le Z^3 est de dimension 11 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
   $\psi_1(e_1,e_3,e_1)=e_3$ $\psi_5(e_2,e_3,e_2)=e_3,$ $\psi_9(e_3,e_3,e_1)=e_3,$
   $\psi_2(e_1,e_3,e_2)=e_3,$ $\psi_6(e_2,e_3,e_3)=e_3,$ $\psi_{10}(e_3,e_3,e_2)=e_3,$
   $\psi_3(e_1,e_3,e_3)=e_3,$ $\psi_7(e_3,e_1,e_3)=e_3,$ $\psi_{11}(e_3,e_3,e_3)=e_3.$
   $\psi_4(e_2,e_3,e_1)=e_3,$ $\psi_8(e_3,e_2,e_3)=e_3,$
   Ainsi, on a $H^3=\left\langle \psi_1,\psi_2,\psi_4,\psi_5,\psi_7,\psi_8,\psi_{11}\right\rangle.$
3. Pour A_3, le Z^3 est de dimension 0. Ainsi, on a $H^3=\langle\{0\}\rangle$.
4. Pour A_4, le Z^3 est de dimension 46.
   Ainsi $H^3=\left\langle \psi_1,\ldots,\psi_{46}\right\rangle \setminus \left\langle \begin{array}{c} \psi_5,\psi_6,\psi_{11},\psi_{17},\psi_{21},\psi_{25}, \\ ,\psi_{27},\psi_{29},\psi_{31},\psi_{35},\psi_{39},\psi_{43} \end{array}\right\rangle.$
5. Pour A_5^3, le Z^3 est de dimension 13 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
   $\psi_1(e_1,e_2,e_2)=-e_1$ $\psi_5(e_2,e_2,e_2)=e_1,$ $\psi_{10}(e_3,e_2,e_3)=e_3,$
   $\psi_1(e_2,e_2,e_1)=e_1,$ $\psi_6(e_2,e_3,e_1)=e_3,$ $\psi_{11}(e_3,e_3,e_1)=e_3,$
   $\psi_2(e_1,e_3,e_1)=e_3,$ $\psi_7(e_2,e_3,e_2)=e_3,$ $\psi_{12}(e_3,e_3,e_2)=e_3,$
   $\psi_3(e_1,e_3,e_2)=e_3,$ $\psi_8(e_2,e_3,e_3)=e_3,$ $\psi_{13}(e_3,e_3,e_3)=e_3.$
   $\psi_4(e_1,e_3,e_3)=e_3,$ $\psi_9(e_3,e_1,e_3)=e_3,$
   Ainsi, on a $H^3=\left\langle \psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_6,\psi_9,\psi_{10},\psi_{13}\right\rangle.$

6. For A_6^3, le Z^3 est de dimension 18 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_2,e_1)=e_1 & \psi_7(e_2,e_1,e_3)=e_1, & \psi_{13}(e_2,e_3,e_3)=e_1, \\ \psi_2(e_1,e_2,e_2)=e_1, & \psi_8(e_2,e_2,e_1)=e_1, & \psi_{14}(e_3,e_2,e_1)=e_1, \\ \psi_3(e_1,e_2,e_3)=e_1, & \psi_9(e_2,e_2,e_2)=e_1, & \psi_{15}(e_3,e_2,e_2)=e_1, \\ \psi_4(e_1,e_3,e_2)=e_1, & \psi_{10}(e_1,e_2,e_3)=e_1, & \psi_{16}(e_3,e_2,e_3)=e_1, \\ \psi_5(e_2,e_1,e_1)=e_1, & \psi_{11}(e_2,e_3,e_1)=e_1, & \psi_{17}(e_3,e_3,e_2)=e_1, \\ \psi_6(e_2,e_1,e_2)=e_1, & \psi_{12}(e_2,e_3,e_2)=e_1, & \psi_{18}(e_3,e_3,e_2)=e_1. \end{array}$$
Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1,\psi_4,\psi_5,\psi_6,\psi_7,\psi_8,\psi_9,\psi_{10},\psi_{13},\psi_{14},\psi_{18}\rangle$.
7. Pour A_7^3, le Z^3 est de dimension 4. Ainsi, on a : $H^3=\langle \psi_1,\ldots,\psi_8\rangle$.
8. Pour A_8^3, le Z^3 est de dimension 2 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_2,e_2)=e_1 & & \psi_1(e_3,e_2,e_2)=e_1, \\ \psi_1(e_2,e_2,e_1)=-e_1, & \psi_1(e_2,e_2,e_3)=-e_1, & \psi_2(e_2,e_2,e_2)=e_1. \end{array}$$
Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1,\psi_2,\psi_4\rangle$.
9. Pour A_9^3, le Z^3 est de dimension 4 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_3,e_3)=-e_1, & & \\ \psi_1(e_2,e_3,e_3)=-e_2, & \psi_1(e_3,e_3,e_2)=e_2, & \psi_3(e_3,e_2,e_3)=e_1, \\ & \psi_2(e_2,e_3,e_3)=e_1, & \psi_4(e_3,e_3,e_2)=e_1. \\ \psi_1(e_3,e_3,e_1)=e_1, & & \end{array}$$
Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1\rangle$.
10. Pour A_{10}^3, le Z^3 est de dimension 9 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_2,e_2)=e_1, & \psi_2(e_3,e_3,e_1)=e_2, & \psi_6(e_2,e_3,e_3)=e_1, \\ \psi_1(e_2,e_3,e_3)=-e_2, & \psi_3(e_2,e_2,e_1)=-e_1, & \psi_7(e_3,e_2,e_2)=e_3, \\ \psi_2(e_1,e_3,e_3)=-e_1, & \psi_4(e_2,e_2,e_2)=e_1, & \psi_8(e_3,e_2,e_3)=e_1, \\ \psi_2(e_3,e_3,e_1)=e_1, & \psi_5(e_2,e_2,e_3)=-e_3, & \psi_9(e_3,e_3,e_2)=e_1. \end{array}$$
Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1,\ldots,\psi_9\rangle$.
11. Pour A_{11}^3, le Z^3 est de dimension 19. Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1,\ldots,\psi_{17}\rangle \setminus \langle \psi_4,\psi_{10},\psi_{13}\rangle$.
12. Pour A_{12}^3, le Z^3 est de dimension 9. Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1,\psi_6,\psi_9\rangle$.

5.4 Cohomologie des algèbres Hom-associatives de type associative.

Dans cette section, on étudie les liens entre la cohomologie des algèbres Hom-associatives de type associative et la cohomologie des algèbres associatives correspondantes. Le complexe de Hochschild des algèbres associatives s'obtient en posant $\alpha = id$ dans les formules précédentes.

On a, en particulier,

$$\begin{array}{ll} \delta^2\varphi(x,y,z) & = \varphi(x,\mu(y,z)) - \varphi(\mu(x,y),z) \\ & +\mu(x,\varphi(y,z)) - \mu(\varphi(x,y),z). \end{array} \quad \text{et}$$

$$\delta^1_{Hom} f(x,y) = f(\mu(x,y)) - \mu(f(x),y) - \mu(x,f(y)).$$

Theorem 5.4.1 *Soit (A,μ,α) une algèbre Hom-associative de type associative ou $\mu = \alpha\mu'$ et (A,μ') est une algèbre associative. Soit φ' un n-cocycle suivant la cohomologie de Hochschild de (A,μ'). Si φ' satisfait la condition de multiplicativité. $\alpha\varphi' = \varphi' \circ (\alpha \otimes \alpha)$ alors $\alpha\varphi'$ est un n-cocycle de (A,μ,α) suivant la cohomologie de Hochschild des algèbres Hom-associatives.*

Démonstration. Soit

$$\begin{array}{ll} \delta^n_{Ass}\tilde{\varphi}(x_0,\ldots,x_n) & = \tilde{\mu}(x_0,\tilde{\varphi}(x_1,x_2,\ldots,x_n)) \\ & +\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\tilde{\varphi}(x_0,\ldots,x_{k-2},\tilde{\mu}(x_{k-1},x_k),x_{k+1},\ldots,x_n) \\ & +(-1)^{n+1}\tilde{\mu}(\tilde{\varphi}(x_0,\ldots,x_{n-1}),x_n). \end{array}$$

Si $\tilde{\varphi}$ satisfait

$$\alpha \circ \tilde{\varphi}(x_0,\ldots,x_{n-1}) = \tilde{\varphi}(\alpha(x_0),\ldots,\alpha(x_{n-1}))$$

pour $x_0,\ldots,x_{n-1} \in A$. D'après l'équation (5.1.2), on a

$$\mu(\alpha^{n-1}(x_0),\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\varphi(\alpha(x_0),\ldots,\alpha(x_{k-2}),\mu(x_{k-1},x_k),$$
$$\alpha(x_{k+1}),\ldots,\alpha(x_n)) + (-1)^{n+1}\mu(\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1}),\alpha^{n-1}(x_n)) = 0.$$

On obtient que $\alpha \circ \tilde{\varphi}$ est un n-cocycle pour $(A,\alpha\tilde{\mu},\alpha)$. □

Remark 5.4.2 En particulier, soit $\tilde{\varphi}(x,\tilde{\mu}(y,z)) - \tilde{\varphi}(\tilde{\mu}(x,y),z) + \tilde{\mu}(x,\tilde{\varphi}(y,z)) - \tilde{\mu}(\tilde{\varphi}(x,y),z) = 0$. Si $\tilde{\varphi}$ verifie $\alpha \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ (\alpha \otimes \alpha)$, alors on a $\alpha\tilde{\varphi}(\alpha(x),\alpha\tilde{\mu}(y,z)) - \alpha\tilde{\varphi}(\alpha\tilde{\mu}(x,y),\alpha(z)) + \alpha\tilde{\mu}(\alpha(x),\alpha\tilde{\varphi}(y,z)) - \alpha\tilde{\mu}(\alpha\tilde{\varphi}(x,y),\alpha(z)) = 0$. Donc $\alpha\varphi$ est un 2-cocycle pour $(A,\alpha\tilde{\mu},\alpha)$.

Nous écrivons φ en terme de constantes de structure

$$\varphi(e_i,e_j,e_k) = f_{ij}^k e_k.$$

Les conditions

$$\begin{array}{l} \delta^2\tilde{\varphi}(e_i,e_j,e_k) = 0 \quad \text{et} \\ \alpha \circ \tilde{\varphi}(e_i,e_j) - \tilde{\psi}(\alpha(e_i),\alpha(e_j)) = 0 \end{array} \tag{5.4.1}$$

se traduisent par les conditions suivantes :

$$\tilde{\varphi}(e_i,\tilde{\mu}(e_j,e_k)) = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} C_{jk}^p f_{ip}^q e_q \tag{5.4.2}$$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\mu}(e_i,e_j),e_k)=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\mathcal{C}_{ij}^{p}f_{pk}^{q}e_q \tag{5.4.3}$$

$$\tilde{\mu}(e_i,\tilde{\varphi}(e_j,e_k))=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}f_{jk}^{p}\mathcal{C}_{ip}^{q}e_q \tag{5.4.4}$$

$$\tilde{\mu}(\tilde{\varphi}(e_i,e_j),e_k)=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}f_{ij}^{p}\mathcal{C}_{pk}^{q}e_q \tag{5.4.5}$$

$$\alpha\circ\varphi(e_i,e_j)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}f_{ij}^{p}a_{sp}e_s. \tag{5.4.6}$$

$$\varphi(\alpha(e_i),\alpha(e_j))=\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}a_{qj}f_{pq}^{s}e_s. \tag{5.4.7}$$

Par conéquent, on a le système d'équations :

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}(\mathcal{C}_{jk}^{p}f_{ip}^{q}-\mathcal{C}_{ij}^{p}f_{pk}^{q}+f_{jk}^{p}\mathcal{C}_{ip}^{q}-f_{ij}^{p}\mathcal{C}_{pk}^{q})=0,\\ i,j,k,q=1,\ldots,n.\\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n}a_{sp}f_{ij}^{p}-\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}a_{qj}f_{pq}^{s}=0,\quad i,j,s=1,\ldots,n.\end{cases} \tag{5.4.8}$$

5.5 Deuxième groupe de cohomologie des algèbres de $\mathcal{A}ss_2$ et $\mathcal{A}ss_3$.

Dans cette section, on calcule explicitement les groupes de cohomologie des algèbres associatives correspondantes aux algèbres Hom-associatives de type associative de dimension 2 et 3.

Calcul de $\mathcal{H}^2(A,A)$ pour A dans $\mathcal{A}ss_2$

On calcule l'ensemble des 2-cocycles Z^2 puis le deuxième groupe de cohomologie des algèbres associatives correspondantes aux algèbres Hom-associatives de type associative de dimension 2.

1. Pour $\tilde{A}_1^2$, $\tilde{A}_4^2$, le Z^2 est de dimension 0. Ainsi, on a $H^2=\langle\{0\}\rangle$.
2. Pour $\tilde{A}_6^2$, le Z^2 est de dimension 4 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants :

$$\begin{array}{ll}\tilde{\varphi}_1(e_1,e_1)=e_1, & \\ \tilde{\varphi}_2(e_1,e_1)=e_2, & \tilde{\varphi}_3(e_2,e_2)=e_2,\\ \tilde{\varphi}_3(e_1,e_2)=e_1, & \tilde{\varphi}_4(e_1,e_2)=e_2,\\ \tilde{\varphi}_3(e_2,e_1)=e_1, & \tilde{\varphi}_4(e_2,e_1)=e_2.\end{array}$$

Ainsi, on a $H^2=\left\langle\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2\right\rangle$.

3. Pour $\tilde{A}_8^2$, le Z^2 est de dimension 0. Ainsi, on a $H^2 = \langle\{0\}\rangle$.
4. Pour $\tilde{A}_9^2$, le Z^2 est de dimension 0. Ainsi, on a $H^2 = \langle\{0\}\rangle$.

Calcul de $\mathcal{H}^2(A,A)$ pour A dans $\mathcal{A}ss_3$

On calcule l'ensemble des 2-cocycles Z^2 puis le deuxième groupe de cohomologie des algèbres associatives correspondantes aux algèbres Hom-associatives de type associative de dimension 3.

1. Pour $\tilde{A}_3^3$,$\tilde{A}_7^3$,$\tilde{A}_{12}^3$, le Z^2 est de dimension 0. Ainsi, on a $H^2 = \langle\{0\}\rangle$.
2. Pour $\tilde{A}_8^3$, le Z^2 est de dimension 4. Ainsi, on a $H^2 = \left\langle \tilde{\varphi}_1 \right\rangle$.
3. Pour $\tilde{A}_9^3$, le Z^2 est de dimension 4. Ainsi, on a $H^2 = \left\langle \tilde{\varphi}_1 \right\rangle$.
4. Pour $\tilde{A}_{10}^3$, le Z^2 est de dimension 5. Ainsi, on a $H^2 = \left\langle \tilde{\varphi}_1 \right\rangle$.

5.6 Troisième groupe de cohomologie des algèbres de $\mathcal{A}ss_2$ et $\mathcal{A}ss_3$.

On calcule l'ensemble des 3-cocycles Z^3 puis le troisième groupe de cohomologie des algèbres associatives correspondantes aux algèbres Hom-associatives de type associative de dimension 2 et 3. Nous définissons les 3-cocycles en terme de constantes de structure $\tilde{\psi}(e_i,e_j,e_k,e_s) = \tilde{\varphi}_{ijk}^s e_s$.
Les conditions

$$\begin{array}{l} \delta^3_{Hom}\tilde{\psi}(e_i,e_j,e_k,e_s) = 0 \quad \text{et} \\ \alpha\circ\tilde{\psi}(e_i,e_j,e_k) - \tilde{\psi}(\alpha(e_i),\alpha(e_j),\alpha(e_k)) = 0 \end{array} \tag{5.6.1}$$

se traduisent par les conditions suivantes :

$$\tilde{\mu}(e_i,\tilde{\psi}(e_j,e_k,e_l)) = \sum_q^n\sum_p^n \tilde{\varphi}_{jkl}^p C_{ip}^q e_q \tag{5.6.2}$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{\mu}(e_i,e_j),e_k,e_l)) = \sum_q^n\sum_p^n C_{ij}^p \tilde{\varphi}_{pkl}^p e_q \tag{5.6.3}$$

$$\tilde{\psi}(e_i,\tilde{\mu}(e_j,e_k),e_l)) = \sum_q^n\sum_p^n C_{jk}^p \tilde{\varphi}_{ipl}^q e_q \tag{5.6.4}$$

$$\tilde{\psi}(e_i,e_j,\tilde{\mu}(e_k,e_l)) = \sum_q^n\sum_p^n C_{kl}^p \tilde{\varphi}_{ijp}^q e_q \tag{5.6.5}$$

$$\tilde{\mu}(\tilde{\psi}(e_i,e_j,e_k),e_l) = \sum_q^n\sum_p^n \tilde{\varphi}_{ijk}^p C_{pl}^q e_q \tag{5.6.6}$$

$$\alpha \circ \tilde{\psi}(e_i, e_j, e_k) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \tilde{\varphi}_{ijk}^{s} a_{ls} e_l \tag{5.6.7}$$

$$\tilde{\psi}(\alpha(e_i), \alpha(e_j), \alpha(e_k)) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{pi} a_{qj} a_{sk} \tilde{\varphi}_{pqs}^{l} e_l \tag{5.6.8}$$

Par conséquent, on a le système d'équations :

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^{n} (\tilde{\varphi}_{jkl}^{q} \mathcal{C}_{ip}^{q} - \mathcal{C}_{ij}^{p} \tilde{\varphi}_{pql}^{q} + \mathcal{C}_{jk}^{p} \tilde{\varphi}_{ipl}^{q} - \mathcal{C}_{kl}^{p} \tilde{\varphi}_{ijp}^{q} + \tilde{\varphi}_{ijk}^{p} \mathcal{C}_{pl}^{q}) = 0, \\ i, j, k, l = 1, \ldots, n. \\ \sum_{s=1}^{n} \tilde{\varphi}_{ijk}^{s} a_{ls} - \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{pi} a_{qj} a_{sk} \tilde{\varphi}_{pqs}^{l} = 0, \; i, j, k, l = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.6.9}$$

Calcul de $\mathcal{H}^3(A, A)$ pour A dans $\mathcal{A}ss_2$.

1. Pour $\tilde{A}_1^2$, le Z^3 est de dimension 6 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :

   $\tilde{\psi}_1(e_1, e_1, e_2) = e_1$, $\tilde{\psi}_3(e_2, e_1, e_1) = e_1$, $\tilde{\psi}_5(e_2, e_1, e_2) = -e_1$,
   $\tilde{\psi}_1(e_1, e_2, e_2) = -e_2$, $\tilde{\psi}_3(e_2, e_2, e_1) = -e_2$, $\tilde{\psi}_5(e_2, e_2, e_2) = e_2$,
   $\tilde{\psi}_2(e_1, e_1, e_2) = e_2$, $\tilde{\psi}_4(e_2, e_1, e_1) = e_2$, $\tilde{\psi}_6(e_2, e_1, e_2) = e_2$,
   $\tilde{\psi}_2(e_1, e_2, e_2) = e_1$, $\tilde{\psi}_4(e_2, e_2, e_1) = e_1$, $\tilde{\psi}_6(e_2, e_2, e_2) = e_1$.

   Ainsi, on a $H^3 = \langle \psi_1, \ldots, \psi_6 \rangle$.

2. Pour $\tilde{A}_4^2$, le Z^3 est de dimension 6 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :

   $\tilde{\psi}_1(e_1, e_1, e_2) = e_1$, $\tilde{\psi}_3(e_2, e_2, e_1) = -e_2$,
   $\tilde{\psi}_1(e_1, e_2, e_2) = -e_2$, $\tilde{\psi}_4(e_2, e_1, e_1) = e_2$,
   $\tilde{\psi}_2(e_1, e_1, e_2) = e_2$, $\tilde{\psi}_5(e_2, e_1, e_2) = e_2$,
   $\tilde{\psi}_3(e_2, e_1, e_1) = e_1$, $\tilde{\psi}_6(e_2, e_2, e_2) = e_2$.

   Ainsi, on a $H^3 = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_6 \rangle$.

3. Pour $\tilde{A}_6^2$, le Z^3 est de dimension 8 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :

   $\tilde{\psi}_1(e_1, e_1, e_1) = e_1$, $\tilde{\psi}_4(e_1, e_1, e_2) = e_2$, $\tilde{\psi}_7(e_2, e_1, e_1) = e_1$,
   $\tilde{\psi}_2(e_1, e_1, e_1) = e_2$, $\tilde{\psi}_5(e_1, e_2, e_1) = e_1$, $\tilde{\psi}_7(e_2, e_2, e_1) = e_2$,
   $\tilde{\psi}_3(e_1, e_1, e_2) = e_1$, $\tilde{\psi}_6(e_1, e_2, e_1) = e_2$, $\tilde{\psi}_8(e_2, e_1, e_1) = e_2$.
   $\tilde{\psi}_3(e_2, e_1, e_2) = 2e_3$, $\tilde{\psi}_7(e_1, e_2, e_2) = e_2$,

   Ainsi, on a $H^3 = \langle \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7 \rangle$.

4. Pour $\tilde{A}_8^2$, le Z^3 est de dimension 5 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :

$$\begin{array}{lll}
\tilde{\psi_1}(e_1,e_1,e_1)=e_1, & & \\
\tilde{\psi_1}(e_1,e_2,e_1)=-e_2, & \tilde{\psi_2}(e_1,e_2,e_1)=e_2, & \tilde{\psi_3}(e_1,e_2,e_2)=e_1, \\
\tilde{\psi_1}(e_2,e_1,e_1)=e_2, & \tilde{\psi_2}(e_2,e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\psi_4}(e_2,e_2,e_1)=e_1, \\
\tilde{\psi_2}(e_1,e_1,e_2)=e_1, & \tilde{\psi_2}(e_1,e_2,e_2)=-e_2, & \tilde{\psi_5}(e_2,e_2,e_2)=e_1.
\end{array}$$

Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1,\psi_2,\psi_4,\psi_5\rangle$.

5. Pour $\tilde{A}_9^2$, le Z^3 est de dimension 5 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :

$$\begin{array}{lll}
\tilde{\psi_1}(e_1,e_1,e_1)=e_1, & & \\
\tilde{\psi_1}(e_1,e_2,e_1)=-e_2, & \tilde{\psi_2}(e_1,e_2,e_1)=e_2, & \tilde{\psi_3}(e_1,e_2,e_2)=e_1, \\
\tilde{\psi_1}(e_2,e_1,e_1)=e_2, & \tilde{\psi_2}(e_2,e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\psi_4}(e_2,e_2,e_1)=e_1, \\
\tilde{\psi_2}(e_1,e_1,e_2)=e_1, & \tilde{\psi_2}(e_1,e_2,e_2)=-e_2, & \tilde{\psi_5}(e_2,e_2,e_2)=e_1.
\end{array}$$

Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1,\psi_2,\psi_4,\psi_5\rangle$.

Calcul de $\mathcal{H}^3(A,A)$ pour A dans $\mathcal{A}ss_3$

1. Pour $\tilde{A}_3^3$, le Z^3 est de dimension 22. Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1,\dots,\psi_{22}\rangle$.
2. Pour $\tilde{A}_7^3$, le Z^3 est de dimension 8 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants
   Ainsi, on a $H^3=\langle \psi_1,\dots,\psi_8\rangle$.
3. Pour $\tilde{A}_8'^3$, le Z^3 est de dimension 46. Ainsi, on a :
   $$H^3=\left\langle \begin{array}{l} \psi_1,\psi_6,\psi_{13}\psi_{16},\psi_{17},\psi_{18},\psi_{19},\psi_{20},\psi_{26},\psi_{35}, \\ ,\psi_{37},\psi_{38},\psi_{39},\psi_{40},\psi_{41},\psi_{42},\psi_{43},\psi_{44},\psi_{46} \end{array}\right\rangle.$$
4. Pour $\tilde{A}_9'^3$, le Z^3 est de dimension 41 engendré par les générateurs de 3-cocycle. Ainsi, on a :
   $$H^3=\left\langle \begin{array}{l} \psi_3,\psi_4,\psi_8\psi_{10},\psi_{14},\psi_{15},\psi_{17},\psi_{18},\psi_{21},\psi_{22}, \\ ,\psi_{24},\psi_{25},\psi_{29},\psi_{31},\psi_{32},\psi_{34},\psi_{35},\psi_{38},\psi_{39},\psi_{41} \end{array}\right\rangle.$$
5. Pour $\tilde{A}_{10}'^3$, le Z^3 est de dimension 38 engendré par les générateurs de 3-cocycle. Ainsi, on a :
   $$H^3=\left\langle \begin{array}{l} \psi_1,\psi_2,\psi_{11}\psi_{12},\psi_{14},\psi_{15},\psi_{19},\psi_{21},\psi_{22}, \\ ,\psi_{27},\psi_{28},\psi_{30},\psi_{32},\psi_{34},\psi_{35},\psi_{37},\psi_{38} \end{array}\right\rangle.$$
6. Pour $\tilde{A}_{12}'^3$, le Z^3 est de dimension 45. Ainsi, on a :
   $$H^3=\left\langle \begin{array}{l} \psi_1,\psi_5,\psi_7\psi_9,\psi_{14},\psi_{19},\psi_{21},\psi_{24},\psi_{25},\psi_{30} \\ ,\psi_{32},\psi_{33},\psi_{35},\psi_{36},\psi_{38},\psi_{39},\psi_{41},\psi_{43},\psi_{44},\psi_{45} \end{array}\right\rangle.$$

5.7 Cohomologie des algèbres Hom-associatives unitaires.

Dans cette section, on calcule explicitement les groupes de cohomologie des algèbres Hom-associatives unitaires multiplicatives de dimensions 2 et 3.

5.8 Deuxième groupe de cohomologie des algèbres de $\mathcal{UHA}ss_2$ et $\mathcal{UHA}ss_3$.

Calcul de $\mathcal{H}^2(A,A)$ pour A dans $\mathcal{UHA}ss_2$.

1. Pour $A_1'^2$,$A_2'^2$,$A_4'^2$, le Z^2 est de dimension 0. Ainsi, on a $H^2 = \langle\{0\}\rangle$.
2. Pour $A_3'^2$, le Z^2 est de dimension 1 engendré par le générateur de 2-cocycle $\varphi(e_2,e_2) = e_2$. Ainsi, on a $B^2 = \langle\varphi_1\rangle$ avec $f(e_1) = 0$ et $f(e_2) = e_2$.

Calcul de $\mathcal{H}^2(A,A)$ pour A dans $\mathcal{UHA}ss_3$.

1. Pour $A_1'^3$, le Z^2 est de dimension 12. Ainsi, on a $H^2 = \langle\varphi_1,\ldots,\varphi_{12}\rangle$.
2. Pour $A_2'^3$, le Z^2 est de dimension 1 engendré par le générateur de 2-cocycle suivant : $\varphi(e_2,e_2) = e_2$. Ainsi, on a $H^2 = \langle\varphi_1\rangle$.
3. Pour $A_3'^3$, le Z^2 est de dimension 1 engendré par le générateur de 2-cocycle $\varphi(e_2,e_2) = e_2$. Ainsi, on a $B^2 = \langle\varphi_1\rangle$. avec $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = 0$.
4. Pour $A_4'^3$, le Z^2 est de dimension 1 engendré par le générateur de 2-cocycle $\varphi(e_3,e_3) = e_3$. Ainsi, on a $H^2 = \langle\varphi_1\rangle$.
5. Pour $A_5'^3$, le Z^2 est de dimension 1 engendré par le générateur de 2-cocycle $\varphi(e_3,e_3) = e_2$. Ainsi, on a $H^2 = \langle\varphi_1\rangle$.
6. Pour $A_7'^3$, le Z^2 est de dimension 1. Ainsi, on a $H^2 = \langle\varphi_1\rangle$.

Remark 5.8.1

1. Les algèbres Hom-associatives unitaires $\tilde{A}_6'^3$, $\tilde{A}_8'^3$, $\tilde{A}_9'^3$, $\tilde{A}_{10}'^3$, $\tilde{A}_{11}'^3$, $\tilde{A}_{12}'^3$,$\tilde{A}_{13}'^3$,$\tilde{A}_{14}'^3$ et $\tilde{A}_{15}'^3$ sont de dimensions 0 engendré par les générateurs de 2-cocycle $\varphi = 0$. Ainsi, on a $H^2 = \langle\{0\}\rangle$.
2. Elles sont des algèbres rigides.

Calcul de $\mathcal{H}^2(A,A)$ pour A dans $\mathcal{UA}ss_2$.

1. Pour $A_1'^2$, le Z^2 est de dimension 5 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants :
$$\begin{array}{ll} \varphi_1(e_1,e_1) = e_1, & \varphi_3(e_1,e_2) = e_2, \\ \varphi_2(e_1,e_1) = e_2, & \varphi_3(e_2,e_1) = e_2, \\ \varphi_2(e_1,e_2) = e_1, & \varphi_4(e_2,e_2) = e_1, \\ \varphi_2(e_2,e_1) = e_1, & \varphi_5(e_2,e_2) = e_2. \end{array} \quad \text{Ainsi, on a } H^2 = \langle\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\rangle.$$
2. Pour $A_2'^2$, le Z^2 est de dimension 4 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants :
$$\begin{array}{ll} \varphi_1(e_1,e_1) = e_1, & \varphi_2(e_1,e_2) = e_1, \\ \varphi_1(e_1,e_2) = e_2, & \varphi_2(e_2,e_1) = e_1, \\ \varphi_1(e_2,e_1) = e_2, & \varphi_3(e_2,e_2) = e_1, \\ \varphi_2(e_1,e_1) = e_2, & \varphi_4(e_2,e_2) = e_2. \end{array} \quad \text{Ainsi, on a } H^2 = \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle.$$

3. Pour $A_3'^2$, le Z^2 est de dimension 4 engendré par les générateurs de 2-cocycles suivants :
$\varphi_1(e_1,e_1)=e_1,\quad \varphi_2(e_1,e_1)=e_2,$
$\varphi_1(e_1,e_2)=e_2,\quad \varphi_3(e_2,e_2)=e_1,$ Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_2,\varphi_3\rangle$.
$\varphi_1(e_2,e_1)=e_2,\quad \varphi_4(e_2,e_2)=e_2.$

Calcul de $\mathcal{H}^2(A,A)$ pour A dans $\mathcal{UA}ss_3$.

1. Pour $\tilde{A}_6'^3$, le Z^2 est de dimension 15. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_{15}\rangle$.
2. Pour $\tilde{A}_7'^3$, le Z^2 est de dimension 12. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_{10}\rangle$.
3. Pour $\tilde{A}_8'^3$, le Z^2 est de dimension 1. De plus, on a $B^2=\langle\varphi_1\rangle$ avec $f(e_1)=e_1$, $f(e_2)=b_2e_2+c_2e_3$ et $f(e_3)=0$.
4. Pour $\tilde{A}_9'^3$, le Z^2 est de dimension 10 engendré par les générateurs de 2-cocycles. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_1,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6,\varphi_7,\varphi_8\rangle$.
5. Pour $\tilde{A}_{10}'^3$, le Z^2 est de dimension 11. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_4,\ldots,\varphi_{11}\rangle$.
6. Pour $\tilde{A}_{11}'^3$, le Z^2 est de dimension 11. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_2,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_7,\varphi_8,\varphi_9,\varphi_{10},\varphi_{11}\rangle$.
7. Pour $\tilde{A}_{12}'^3$, le Z^2 est de dimension 10. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_1,\varphi_2,\varphi_4,\varphi_6,\varphi_7,\varphi_8,\varphi_9,\varphi_{10}\rangle$.
8. Pour $\tilde{A}_{14}'^3$, le Z^2 est de dimension 10. Ainsi, on a $H^2=\langle\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_7,\varphi_8\rangle$.

5.9 Troisième groupe de cohomologie des algèbres de $\mathcal{UHA}ss_2$ et $\mathcal{UHA}ss_3$.

Dans cette section, on calcule explicitement le troisième groupe de cohomologie des algèbres Hom-associatives unitaires de dimensions 2 et 3.

Calcul de $\mathcal{H}^3(A,A)$ pour A dans $\mathcal{UHA}ss_2$.

1. Pour $A_1'^2$,$A_2'^2$,$\tilde{A}_4'^2$, le Z^3 est de dimension 0. Ainsi, on a $H^3=\langle\{0\}\rangle$.
2. Pour $\tilde{A}_3'^2$, le Z^3 est de dimension 4 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
$\psi_1(e_1,e_2,e_1)=-e_2,\qquad \psi_3(e_2,e_2,e_1)=e_2,$
$\psi_1(e_1,e_2,e_2)=e_2, \psi_2(e_2,e_1,e_2)=e_2,\quad \psi_4(e_2,e_2,e_2)=e_2.$ Ainsi,
on a $H^3=\langle\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4\rangle$.

Calcul de $\mathcal{H}^3(A,A)$ pour A dans $\mathcal{UHA}ss_3$.

1. Pour $A_1'^3$, le Z^3 est de dimension 48. Ainsi on a $H^3=\langle\psi_1,\ldots,\psi_{48}\rangle$.

2. Pour $A_2'^3$, le Z^3 est de dimension 11 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :

$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_2,e_1)=e_2, & \psi_5(e_2,e_2,e_1)=e_2, & \psi_9(e_3,e_2,e_1)=e_2,\\ \psi_2(e_1,e_2,e_2)=e_2, & \psi_6(e_2,e_2,e_2)=e_2, & \psi_{10}(e_3,e_2,e_2)=e_2,\\ \psi_3(e_1,e_2,e_3)=e_2, & \psi_7(e_2,e_2,e_3)=e_2, & \psi_{11}(e_3,e_2,e_3)=e_2.\\ \psi_4(e_2,e_1,e_2)=e_2, & \psi_8(e_2,e_3,e_2)=e_2, & \end{array}$$

Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_6,\psi_7,\psi_8,\psi_9,\psi_{10},\psi_{11}\rangle$.

3. Pour $\tilde{A}_3'^3$, le Z^3 est de dimension 11 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :

$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_2,e_1)=e_2, & \psi_5(e_2,e_2,e_1)=e_2, & \psi_9(e_3,e_2,e_1)=e_2,\\ \psi_2(e_1,e_2,e_2)=e_2, & \psi_6(e_2,e_2,e_2)=e_2, & \psi_{10}(e_3,e_2,e_2)=e_2,\\ \psi_3(e_1,e_2,e_3)=e_2, & \psi_7(e_2,e_2,e_3)=e_2, & \psi_{11}(e_3,e_2,e_3)=e_2.\\ \psi_4(e_2,e_1,e_2)=e_2, & \psi_8(e_2,e_3,e_2)=e_2, & \end{array}$$

Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6,\psi_9,\psi_{11}\rangle$.

4. Pour $\tilde{A}_4'^3$, le Z^3 est de dimension 11 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :

$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_3,e_1)=e_3, & \psi_5(e_2,e_3,e_2)=e_3, & \psi_9(e_3,e_3,e_1)=e_3,\\ \psi_2(e_1,e_3,e_2)=e_3, & \psi_6(e_2,e_3,e_3)=e_3, & \psi_{10}(e_3,e_3,e_2)=e_3,\\ \psi_3(e_1,e_3,e_3)=e_3, & \psi_7(e_3,e_1,e_3)=e_3, & \psi_{11}(e_3,e_3,e_3)=e_2.\\ \psi_4(e_2,e_3,e_1)=e_3, & \psi_8(e_3,e_2,e_3)=e_3, & \end{array}$$

Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\psi_2,\psi_4,\psi_5,\psi_6,\psi_7,\psi_9,\psi_{11}\rangle$.

5. Pour $\tilde{A}_5'^3$, le Z^3 est de dimension 11 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :

$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_3,e_1)=e_3, & \psi_5(e_2,e_3,e_2)=e_3, & \psi_9(e_3,e_3,e_1)=e_3,\\ \psi_2(e_1,e_3,e_2)=e_3, & \psi_6(e_2,e_3,e_3)=e_3, & \psi_{10}(e_3,e_3,e_2)=e_3,\\ \psi_3(e_1,e_3,e_3)=e_3, & \psi_7(e_3,e_1,e_3)=e_3, & \psi_{11}(e_3,e_3,e_3)=e_2.\\ \psi_4(e_2,e_3,e_1)=e_3, & \psi_8(e_3,e_2,e_3)=e_3, & \end{array}$$

Remark 5.9.1

1. Les algèbres Hom-associatives unitaires $\tilde{A}_6'^3$, $\tilde{A}_7'^3$, $\tilde{A}_8'^3$, $\tilde{A}_9'^3$, $\tilde{A}_{10}'^3$, $\tilde{A}_{11}'^3,\tilde{A}_{12}'^3,\tilde{A}_{13}'^3,\tilde{A}_{14}'^3$ et $\tilde{A}_{15}'^3$ sont de dimension 0. Ainsi, on a $H^3=\langle\{0\}\rangle$.

5.10 Troisième groupe de cohomologie des algèbres de $\mathcal{UA}ss_2$ et $\mathcal{UA}ss_3$.

Dans cette section, on calcule explicitement le troisième groupe de cohomologie des algèbres associatives correspondantes aux algèbres Hom-associatives unitaires de type associative de dimensions 2 et 3.

Calcul de $\mathcal{H}^3(A,A)$ pour A dans $\mathcal{UA}ss_2$.

1. Pour $\tilde{A}_1'^2$, le Z^3 est de dimension 6 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_1,e_2)=e_1, & \psi_3(e_2,e_1,e_1)=-e_1, & \psi_5(e_2,e_2,e_1)=e_2,\\ \psi_1(e_1,e_2,e_2)=-e_2, & \psi_3(e_2,e_2,e_1)=e_2, & \psi_6(e_2,e_2,e_1)=e_1,\\ \psi_2(e_1,e_1,e_2)=e_2, & \psi_4(e_2,e_1,e_1)=e_2, & \psi_6(e_2,e_2,e_2)=e_1.\\ \psi_2(e_1,e_2,e_2)=e_1, & \psi_4(e_2,e_1,e_2)=-e_1, & \end{array}$$
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6\rangle$.

2. Pour $\tilde{A}_2'^2$, le Z^3 est de dimension 6 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_1,e_2)=e_1, & \psi_3(e_2,e_1,e_1)=-e_1, & \psi_5(e_2,e_1,e_2)=e_2,\\ \psi_1(e_1,e_2,e_2)=-e_2, & \psi_3(e_2,e_2,e_1)=e_2, & \psi_5(e_2,e_2,e_2)=e_1,\\ \psi_2(e_1,e_1,e_2)=e_2, & \psi_4(e_2,e_1,e_1)=-e_2, & \psi_6(e_2,e_1,e_2)=-e_2,\\ \psi_2(e_1,e_2,e_2)=-e_1, & \psi_4(e_2,e_2,e_1)=e_1, & \psi_6(e_2,e_2,e_2)=e_1. \end{array}$$
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6\rangle$.

3. Pour $\tilde{A}_4'^2$, le Z^3 est de dimension 6 engendré par les générateurs de 3-cocycles suivants :
$$\begin{array}{lll} \psi_1(e_1,e_1,e_2)=e_1, & \psi_3(e_2,e_1,e_1)=-e_1, & \psi_5(e_2,e_1,e_2)=e_2,\\ \psi_1(e_1,e_2,e_2)=-e_2, & \psi_3(e_2,e_2,e_1)=e_2, & \psi_6(e_2,e_2,e_2)=e_2.\\ \psi_2(e_1,e_1,e_2)=e_2, & \psi_4(e_2,e_1,e_1)=e_2, & \end{array}$$
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\psi_3,\psi_5,\psi_6\rangle$.

Calcul de $\mathcal{H}^3(A,A)$ pour A dans $\mathcal{UA}ss_3$.

1. Pour $\tilde{A}_6'^3$, le Z^3 est de dimension 45.
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\ldots,\psi_{45}\rangle$.
2. Pour $\tilde{A}_7'^3$, le Z^3 est de dimension 38.
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_4,\psi_6,\psi_{37},\psi_{38}\rangle$.
3. Pour $\tilde{A}_8'^3$, le Z^3 est de dimension 7.
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\ldots,\psi_7\rangle$.
4. Pour $\tilde{A}_9'^3$, le Z^3 est de dimension 33.
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\ldots,\psi_{33}\rangle\setminus\langle\psi_2,\psi_3,\psi_6,\psi_{10},\psi_{11}\rangle$.
5. Pour $\tilde{A}_{10}'^3$, le Z^3 est de dimension 31.
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\ldots,\psi_{31}\rangle\setminus\langle\psi_4,\psi_6,\psi_7,\psi_{23},\psi_{24}\rangle$.
6. Pour $\tilde{A}_{11}'^3$, le Z^3 est de dimension 34.
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\ldots,\psi_{34}\rangle\setminus\langle\psi_6,\psi_8,\psi_{13},\psi_{20},\psi_{21}\rangle$.
7. Pour $\tilde{A}_{12}'^3$, le Z^3 est de dimension 34.
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\ldots,\psi_{34}\rangle$.
8. Pour $\tilde{A}_{14}'^3$, le Z^3 est de dimension 35.
Ainsi, on a $H^3=\langle\psi_1,\ldots,\psi_{35}\rangle$.

5.11 Déformations formelles et composantes irréductibles

La théorie des déformations formelles a été d'abord développée par Gerstenhaber pour les algèbres associatives, [**?**, **?**]. Elle est basée sur les séries formelles. Cette approche a été étendue naturellement aux algèbres de type-Hom, voir ([MS10a, AEM11]).

Soit A un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathbb{K}[[t]]$ l'anneau des séries formelles en une variable t à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $A[[t]]$ l'ensemble des séries formelles dont les cofficients sont des éléments de A, ($A[[t]]$ est obtenu par extension des scalaires de A de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{K}[[t]]$). Alors $A[[t]]$ est un $\mathbb{K}[[t]]$-module. Si A est de dimension finie, on a $A[[t]] = A\otimes\mathbb{K}[[t]]$. Il est à noter que A est sous-module de $A[[t]]$.

5.11.1 Déformations formelles d'algèbres Hom-associatives

On rappelle la thérie de la déformation formelle pour les algèbres Hom-associatives.

Definition 5.11.1 Soit (A,μ,α) une algèbre Hom-associative. Une déformation formelle de l'algèbre Hom-associative A est donnée par une application $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire

$$\mu_t : A[[t]]\times A[[t]] \to A[[t]]$$

et une application $[[t]]$-linéaire $\alpha_t : A[[t]] \to A[[t]]$ de la forme

$$\mu_t = \sum_{i\geq 0}\mu_i t^i \quad \text{et} \quad \alpha_t = \sum_{i\geq 0}\alpha_i t^i \tag{5.11.1}$$

où chaque μ_i est une application $\mathbb{K}$-bilinéaire $\mu_i : A\otimes A \to A$ (étendue pour être $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire) et chaque α_i est une application $\mathbb{K}$-linéaire (étendue pour être $\mathbb{K}[[t]]$-linéaire) telles qu'on ait la condition de Hom-associativité formelle suivante :

$$\mu_t(\mu_t(x,y),\alpha(z)) = \mu_t(\alpha(x),\mu_t(y,z)). \tag{5.11.2}$$

Cette équation peut s'écrire

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}}(\mu_i(\alpha_k(x),\mu_j(y,z)) - \mu_i(\mu_j(x,y),\alpha_k(z)))t^{i+j+k} = 0. \tag{5.11.3}$$

En introduisant les α-associateurs
$(x,y,z)\mapsto \mu_i\circ_\alpha\mu_j(x,y,z) = \mu_i(\alpha(x),\mu_j(y,z)) - \mu_i(\mu_j(x,y),\alpha((z)),$
l'équation de déformation peut s'écrire comme suit

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}}(\mu_i\circ_{\alpha_k}\mu_j)t^{i+j+k} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{s\in\mathbb{N}} t^s\sum_{k=0}^{s}\sum_{i=0}^{s-k}\mu_i\circ_{\alpha_k}\mu_{s-k-i} = 0.$$

Ceci est équivalent au système infini

$$\sum_{k=0}^{s}\sum_{i=0}^{s-k}\mu_i\circ_{\alpha_k}\mu_{s-k-i}=0,\quad s\in\mathbb{N}. \tag{5.11.4}$$

Une déformation d'orde 1 est dite infinitésimale.

Proposition 5.11.2 *Soit $\mu_{1,t}=\phi^{-1}\circ\mu_2\circ(\phi\otimes\phi)$ et $\alpha_{1,t}=\phi^{-1}\circ\alpha_2\circ\phi$ si (A,μ_2,α_2) est Hom-associative alors $(A[[t]],\mu_{1,t},\alpha_{1,t})$ est Hom-associative.*

Démonstration. Par calcul, on a
$\mu_{1,t}(\alpha_{1,t}(x),\mu_{1,t}(y,z))$
$=\phi^{-1}\mu_2(\phi(\phi^{-1}\circ\alpha_2\circ\phi(x)),\phi\phi^{-1}\circ\mu_2(\phi(y),\phi(z)))$
$=\phi^{-1}\mu_2(\alpha_2\circ\phi(x),\mu_2(\phi(y),\phi(z)))$
$=\phi^{-1}\mu_2(\mu_2(\phi(x),\phi(y)),\alpha_2\circ\phi(z))$
$=\phi^{-1}\mu_2(\phi\circ\phi^{-1}(\mu_2(\phi(x),\phi(y))),\phi\circ\phi^{-1}\alpha_2\phi(z)))$
$=\mu_{1,t}(\mu_{1,t}(x,y),\alpha_{1,t}(z))$

□

On suppose que l'application α ne soit pas déformé. La première équation ($s=0$) correspond à la Hom-associativité de $\mu_0=\mu$. La deuxième équation montre que μ_1 est un 2-cocycle pour la cohomologie de Hochschild $\left(\mu_1\in Z^2(A,A)\right)$.
Plus généralement, supposons que μ_p soit le premier coefficient non nul après $\mu_0=\mu$ dans la déformation μ_t.

Theorem 5.11.3 *L'application bilinéaire μ_p est un 2- cocycle pour la cohomologie de Hochschild type-Hom de A à valeurs dans l'algèbre A.*

Definition 5.11.4 Le cocycle μ_p est dit intégrable si c'est le premier terme, après μ_0, d'une déformation Hom-associative.

L'intégrabilité de μ_p implique une suite infinie de relations qui peuvent être interprétées comme des obstructions à l'intégrabilité de μ_p.

En regroupant le premier et le dernier termes de la $k^{\text{ième}}$ équation de pour k quelconque, $k>1$, L'équation s'écrit

$$\delta^2\mu_k(x,y,z)=\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i\left(\mu_{k-i}(x,y),\alpha(z)\right)-\mu_i\left(\alpha(x),\mu_{k-i}(y,z)\right).$$

Supposons que la déformation tronquée, à l'ordre $m-1$, c'est à dire $\mu_t=\mu_0+t\mu_1+t^2\mu_2+....t^{m-1}\mu_{m-1}$, satisfasse l'équation de déformation. La déformation s'étend en une déformation d'ordre m, $\mu_t=\mu_0+t\mu_1+t^2\mu_2+....t^{m-1}\mu_{m-1}+t^m\mu_m$ satisfaisant l'équation de déformation si

$$\delta^2\mu_m(x,y,z) = \sum_{i=1}^{m-1}\mu_i(\mu_{m-i}(x,y),\alpha(z)) - \mu_i(\alpha(x),\mu_{m-i}(y,z)). \tag{5.11.5}$$

Le terme de droite de l'équation (5.11.5) s'appelle *obstruction* pour déterminer μ_m.

Theorem 5.11.5 *Les obstructions sont des 3-cocycles de la cohomologie type-Hom de Hochschild .*

Remark 5.11.6

1. La classe de cohomologie de l'élément $\sum_{i+j=m,\ i,j\neq m}\mu_i\circ\mu_j$ est la première obstruction à l'intégrabilité de μ_m.
   Supposons $m=1$ et $\mu_t=\mu_0+t\mu_1+t^2\mu_2$. L'équation de déformation est équivalente à

   $$\begin{cases} \mu_0\circ\mu_0 = 0 & (\mu_0 \text{ est associative}) \\ \delta^2\mu_1 = 0 & \left(\mu_1\in Z^2(A,A)\right) \\ \mu_1\circ\mu_1 = d^2\mu_2. & \end{cases}$$

   On a $\mu_1\circ\mu_1$ est la première obstruction à l'intégrabilité de μ_1 et $\mu_1\circ\mu_1\in Z^3(A,A)$.
   Les éléments $\mu_1\circ\mu_1$ qui sont des cobords premettent d'étendre la déformation d'ordre 1 à une déformation d'order 2. Mais les éléments de $H^3(A,A)$ donnent des obstructions à l'intégrabilité de μ_1.
2. Si μ_m est intégrable alors la classe de cohomologie de $\Psi=\sum_{i+j=m\ i,j\neq m}\mu_i\circ\mu_j$ dans $H^3(A,A)$ doit être nulle.
   Dans l'exemple précédant μ_1 est intégrable implique $\mu_1\circ\mu_1=\delta^2\mu_2$, ce qui signifie que la classe de cohomologie de $\mu_1\circ\mu_1$ est nulle.

Si $H^3(A,A)=0$ alors toutes les obstructions s'annulent et tout élément $\mu_m\in Z^2(A,A)$ est intégrable.

D'où le théorème suivant :

Theorem 5.11.7 *Soit $\mu_t=\mu_0+t\mu_1+t^2\mu_2+....t^{m-1}\mu_{m-1}$ une déformation d'order $m-1$ de l'algèbre (A_0,μ_0). Alors elle s'étend en une déformation d'ordre m si et seulement si la classe de cohomologie de $\sum_{i+j=m\ i,j\neq m}\mu_i\circ\mu_j$ est nulle.*

5.11.2 Déformations équivalentes et triviales

Le problème suivant consiste à caractériser les déformations équivalentes et déformations triviales. Etant données deux déformations μ_t et μ_t' de μ_0, on dit qu'elles sont équivalentes s'il existe un isomorphisme formel f_t, qui est une application $\mathbb{K}[[t]]$-linéaire de la forme

$$f_t = Id + tf_1 + t^2 f_2 + \cdots \qquad \text{où} \quad f_i \in End_{\mathbb{K}}(A),$$

tel que $\mu_t = f_t \cdot \mu_t^{'}$, c'est à dire

$$\mu_t(x,y) = f_t^{-1} \circ \mu_t' \circ (f_t(x), f_t(y)) \quad \text{pour tout } x,y \in A. \tag{5.11.6}$$

Une déformation μ_t de μ_0 est dite *triviale* si et seulement si μ_t est équivalente à μ_0.

La condition 5.11.6 peut s'écrire

$$f_t(\mu_t(x,y)) = \mu_t'(f_t(x), f_t(y)) \quad \text{pour tout } x,y \in A. \tag{5.11.7}$$

Par identification des coefficients de t on obtient $\mu_1 = \delta f_1$.

En général, les déformations μ_t et μ_t' de μ_0 sont équivalentes si $\mu_1' = \mu_1 + \delta f_1$. D'où la proposition suivante :

Proposition 5.11.8 *L'intégrabilité de μ_1 depend seulement de sa classe de cohomologie.*

Rappelons que deux éléments sont cohomologues si leur différence est un cobord.

$\delta\mu_1 = 0$ implique $\delta\mu_1' = \delta(\mu_1 + \delta f_1) = \delta\mu_1 + \delta(\delta f_1) = 0$.
Si $\mu_1 = \delta g$ alors $\mu_1' = \delta g - \delta f_1 = \delta(g - f_1)$.

Remark 5.11.9 Les éléments de $H^2(A,A)$ déterminent les déformations infinitésimales ($\mu_t = \mu_0 + t\mu_1$).

Proposition 5.11.10 *Soit $A_0 = (A, \mu_0, \alpha)$ une algèbre Hom-associative. Il existe sur $\mathbb{K}[[t]]/t^2$, une correspondence biunivoque entre les éléments de $H^2(A,A)$ et les déformations infinitésimales de A_0 definies par*

$$\mu_t(x,y) = \mu_0(x,y) + \mu_1(x,y)t, \quad \forall x,y \in A. \tag{5.11.8}$$

Démonstration. L'équation de déformation est équivalente à $\delta^2\mu_1 = 0$, c'est à dire $\mu_1 \in Z^2(A,A)$. □

Supposons maintenant que $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + \cdots$ soit une famille de déformation à un paramètre de μ_0 telle que $\mu_1 = \cdots = \mu_{m-1} = 0$.
L'équation de déformation implique $d\mu_m = 0$ $\left(\mu_m \in Z^2(A_0, A_0)\right)$.
Si de plus $\mu_m \in B^2(A,A)$ (c'est à dire $\mu_m = dg$), en considérant le morphisme formel $f_t = Id + tf_m$, on obtient pour tout $x,y \in A$

$$\mu_t'(x,y) = f_t^{-1} \circ \mu_t \circ (f_t(x), f_t(y)) = \mu_0(x,y) + t^{m+1}\mu_{m+1}(x,y)\cdots$$

Ainsi $\mu_{m+1} \in Z^2(A,A)$.

Theorem 5.11.11 *Soit μ_t une déformation formelle à un paramètre de μ_0. Alors μ_t est équivalente à $\mu_t = \mu_0 + t^p\mu_p' + t^{p+1}\mu_{p+1}' + \cdots$ où $\mu_p' \in Z^2(A,A)$ et $\mu_p' \notin B^2(A,A)$.*

Remark 5.11.12 Si $H^2(A,A) = 0$ alors toute déformation de A est équivalente à une déformation triviale.

Déformations infinitésimales

On considère les 2-cocyles calculés précedemment et on cherche à déterminer ceux qui déterminent une déformation infinitésimale.

Le cocycle φ est intégrable et détermine une déformation infinitésimale dans les cas suivants :

1 Cas de $\mathcal{HA}ss_2, \mathcal{A}ss_2, \mathcal{UHA}ss_2$ et $\mathcal{UA}ss_2$:
$(\mu_2^2, \varphi_{2,1})$, $(\mu_2^2, \varphi_{2,2})$, $(\mu_3^2, \varphi_{3,3})$, $(\mu_5^2, \varphi_{5,1})$, $(\mu_6^2, \varphi_{6,1})$, $(\mu_7^2, \varphi_{7,1})$, $(\mu_7^2, \varphi_{7,2})$, $(\tilde{\mu}_6^2, \tilde{\varphi}_{6,1})$, $(\mu_3'^2, \varphi'_{3,1})$, $(\tilde{\mu}'^2_1, \tilde{\varphi}'_{1,2})$, $(\tilde{\mu}'^2_1, \tilde{\varphi}'_{1,4})$, $(\tilde{\mu}'^2_1, \tilde{\varphi}'_{1,5})$, $(\tilde{\mu}'^2_2, \tilde{\varphi}'_{2,2})$, $(\tilde{\mu}'^2_2, \tilde{\varphi}'_{2,3})$, $(\tilde{\mu}'^2_2, \tilde{\varphi}'_{2,3})$, $(\tilde{\mu}'^2_2, \tilde{\varphi}'_{2,4})$, $(\tilde{\mu}'^2_4, \tilde{\varphi}'_{4,1})$, $(\tilde{\mu}'^2_4, \tilde{\varphi}'_{4,2})$, $(\tilde{\mu}'^2_4, \tilde{\varphi}'_{4,3})$, $(\tilde{\mu}'^2_4, \tilde{\varphi}'_{4,4})$.

2 Cas de $\mathcal{HA}ss_3\, \mathcal{A}ss_3, \mathcal{UHA}ss_3$ et $\mathcal{AU}ss_3$:
$(\mu_1^3, \varphi_{1,5})$, $(\mu_1^3, \varphi_{1,6})$, $(\mu_1^3, \varphi_{1,7})$, $(\mu_1^3, \varphi_{1,8})$, $(\mu_1^3, \varphi_{1,9})$, $(\mu_1^3, \varphi_{1,10})$, $(\mu_1^3, \varphi_{1,11})$, $(\mu_1^3, \varphi_{1,12})$, $(\mu_2^3, \varphi_{2,1})$, $(\mu_4^3, \varphi_{4,1})$, $(\mu_4^3, \varphi_{4,2})$, $(\mu_4^3, \varphi_{4,3})$ $(\mu_4^3, \varphi_{4,4})$, $(\mu_4^3, \varphi_{4,5})$, $(\mu_4^3, \varphi_{4,6})$, $(\mu_4^3, \varphi_{4,7})$, $(\mu_5^3, \varphi_{5,1})$ $(\mu_6^3, \varphi_{6,1})$, $(\mu_1^3, \varphi_{1,12})$, $(\mu_6^3, \varphi_{6,2})$, $(\mu_6^3, \varphi_{6,3})$, $(\mu_8^3, \varphi_{8,1})$, $(\mu_{11}^3, \varphi_{11,1})$, $(\mu_1^3 1, \varphi_{11,2})$, $(\tilde{\mu}_3^3, \tilde{\varphi}_{3,1})$, $(\tilde{\mu}_3^3, \tilde{\varphi}_{3,2})$, $(\tilde{\mu}_3^3, \tilde{\varphi}_{3,5})$, $(\tilde{\mu}_3^3, \tilde{\varphi}_{3,7})$, $(\tilde{\mu}_3^3, \tilde{\varphi}_{3,9})$, $(\tilde{\mu}_3^3, \tilde{\varphi}_{3,10})$, $(\tilde{\mu}_8^3, \tilde{\varphi}_{8,1})$, $(\tilde{\mu}_8^3, \tilde{\varphi}_{8,6})$, $(\tilde{\mu}_8^3, \tilde{\varphi}_{8,9})$, $(\tilde{\mu}_{10}^3, \tilde{\varphi}_{10,3})$, $(\tilde{\mu}_{10}^3, \tilde{\varphi}_{10,4})$, $(\tilde{\mu}_{10}^3, \tilde{\varphi}_{10,5})$, $(\tilde{\mu}_{10}^3, \tilde{\varphi}_{10,6})$, $(\tilde{\mu}_{10}^3, \tilde{\varphi}_{10,9})$, $(\tilde{\mu}_{10}^3, \tilde{\varphi}_{10,10})$, $(\tilde{\mu}_{10}^3, \tilde{\varphi}_{10,12})$, $(\mu_1'^3, \varphi'_{1,5})$, $(\mu_1'^3, \varphi'_{1,6})$, $(\mu_1'^3, \varphi'_{1,7})$, $(\mu_1'^3, \varphi'_{1,8})$, $(\mu_1'^3, \varphi'_{1,9})$, $(\mu_1'^3, \varphi'_{1,10})$, $(\mu_1'^3, \varphi'_{1,11})$, $(\mu_1'^3, \varphi'_{1,12})$, $(\mu_2'^3, \varphi'_{2,1})$, $(\mu_3'^3, \varphi'_{3,1})$, $(\mu_4'^3, \varphi'_{4,1})$, $(\mu_5'^3, \varphi'_{5,1})$, $(\tilde{\mu}'^3_6, \tilde{\varphi}'_{6,12})$, $(\tilde{\mu}'^3_6, \tilde{\varphi}'_{6,13})$, $(\tilde{\mu}'^3_7, \tilde{\varphi}'_{7,11})$, $(\tilde{\mu}'^3_7, \tilde{\varphi}'_{1,12})$, $(\tilde{\mu}'^3_8, \tilde{\varphi}'_{8,6})$, $(\tilde{\mu}'^3_8, \tilde{\varphi}'_{8,7})$, $(\tilde{\mu}'^3_9, \tilde{\varphi}'_{9,2})$, $(\tilde{\mu}'^3_9, \tilde{\varphi}'_{6,6})$, $(\tilde{\mu}'^3_9, \tilde{\varphi}'_{9,10})$, $(\tilde{\mu}'^3_9, \tilde{\varphi}'_{9,11})$, $(\tilde{\mu}'^3_{11}, \tilde{\varphi}'_{11,1})$, $(\tilde{\mu}'^3_{11}, \tilde{\varphi}'_{11,3})$, $(\tilde{\mu}'^3_{11}, \tilde{\varphi}'_{11,5})$, $(\tilde{\mu}'^3_{11}, \tilde{\varphi}'_{11,6})$.

5.11.3 Composantes irréductibles

Dans cette section, on se propose d'étudier les composantes irréductibles des variétés algébriques de $\mathcal{HA}ss_n$ pour $n = 2, 3$. La géométrie de des variétés des algèbres de Lie Lie_n, des algèbres associatives $\mathcal{A}ss_n$ et des algèbres commutatives associatives $\mathcal{C}omm_n$ est assez compliquée. On sait que le nombre de composantes irréductibles et leur dimension sont au plus $\frac{2}{27}n^3 + O(n^{8/3})$ pour Lie_n, $\frac{4}{27}n^3 + O(n^{8/3})$ pour $\mathcal{A}ss_n$ et $\frac{2}{27}n^3 + O(n^{8/3})$ $\mathcal{C}omm_n$. La description des composantes pour les algèbres associatives en dimension plus petite que 5 a été faite par Gabriel et Mazzola.

Definition 5.11.13 Une algèbre Hom-associative A est dite formellement rigide, si toute déformation infinitésimale formelle de A est triviale. Elle est dite géométriquement rigide, si son orbite $\vartheta(\mu)$ est ouverte dans $\mathcal{HA}ss_n$. Dans ce cas l'adhérence de Zariski de son orbite $\overline{\vartheta(\mu)}$ est une composante irréductible de $\mathcal{HA}ss_n$.

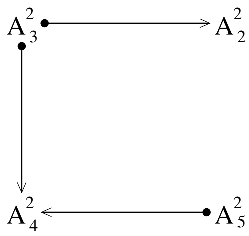
Remark 5.11.14 Toute composante irréductible $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}\mathcal{A}ss_n$ contenant A contient également toutes les dégénérations de A. En effet, on a $\vartheta(\mu) \subset \mathcal{C}$ qui est contenu dans $\overline{\vartheta(\mu)}$, puisque $\mathcal{C}$ est fermé.

Proposition 5.11.15 *Les composantes irréductibles de $\mathcal{H}\mathcal{A}ss_2$ sont les fermetures des orbites des algèbres Hom-associatives $\Omega = \left\{A_3^2, A_5^2\right\}$.*

Démonstration. On a

1. $A_{3,t}^2 \longrightarrow A_2^2 : e'_1 * e'_1 = e_1,\ e'_1 * e'_2 = 0,\ e'_2 * e'_1 = 0, \quad e'_2 * e'_2 = te_2,$
   $\alpha(e'_1) = e_1,\ \alpha(e'_2) = 0 \quad$ pour $t \to 1$.
2. $A_{3,t}^2 \longrightarrow A_4^2 : e'_1 * e'_1 = e_1,\ e'_1 * e'_2 = te_2,\ e'_2 * e'_1 = te_t,\ e'_2 * e'_2 = 0,$
   $\alpha(e'_1) = e_1, \quad \alpha(e'_2) = te_2$ pour $t \to 1$.
3. $A_{5,t}^2 \longrightarrow A_4^2 : e'_1 * e'_1 = e_1,\ e'_1 * e'_2 = te_2, \quad e'_2 * e'_1 = te_2, \quad e'_2 * e'_2 = 0.$

□



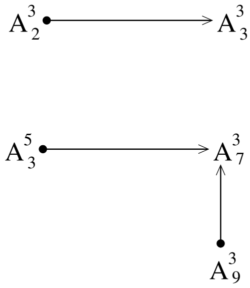
Composentes irréductibles de $\mathcal{H}\mathcal{A}ss_2$

Proposition 5.11.16 *Les composantes irréductibles de $\mathcal{H}\mathcal{A}ss_3$ sont les fermetures des orbites des algèbres Hom-associatives $\Omega = \left\{A_2^3, A_5^3, A_9^3\right\}$.*

Démonstration. On a

1. $A_{2,t}^3 \longrightarrow A_3^3 : e'_1 * e'_1 = a_1 e_1, \quad e'_1 * e'_2 = 0, \quad e'_1 * e'_3 = 0, \quad e'_2 * e'_1 = 0,$
   $e'_2 * e'_1 = 0\ e'_2 * e'_2 = te_2,\ e'_2 * e'_3 = 0,\ e'_3 * e'_1 = 0,\ e'_3 * e'_2 = 0,\ e'_3 * e'_3 = te_3$
   $\alpha(e'_1) = e_1, \quad \alpha(e'_2) = e_2 \quad \alpha(e'_3) = te_3 \quad$ pour $t \to 1$.
2. $A_{5,t}^3 \longrightarrow A_7^3 : e'_1 * e'_1 = 0, \quad e'_1 * e'_2 = 0, \quad e'_1 * e'_3 = 0, \quad e'_2 * e'_1 = 0,$
   $e'_2 * e'_1 = te_1\ e'_2 * e'_2 = 0,\ e'_2 * e'_3 = 0,\ e'_3 * e'_1 = 0,\ e'_3 * e'_2 = te_1,\ e'_3 * e'_3 = e_3$
   $\alpha(e'_1) = e_1, \quad \alpha(e'_2) = e_1 + e_2 \quad \alpha(e'_3) = te_3 \quad$ pour $t \to 1$.
3. $A_{9,t}^3 \longrightarrow A_7^3 : e'_1 * e'_1 = 0,\ e'_1 * e'_2 = 0,\ e'_1 * e'_3 = 0,\ e'_2 * e'_1 = 0,\ e'_2 * e'_1 =$
   $0,\ e'_2 * e'_2 = te_1,\ e'_2 * e'_3 = e_1,\ e'_3 * e'_1 = 0,\ e'_3 * e'_2 = e_1,\ e'_3 * e'_3 = te_3$
   $\alpha(e'_1) = e_1, \quad \alpha(e'_2) = e_1 + e_2 \quad \alpha(e'_3) = e_3 \quad$ pour $t \to 1$.

□



Composentes irréductibles de $\mathcal{HA}ss_3$

Proposition 5.11.17 *Les composantes irréductibles de $\mathcal{UHA}ss_2$ sont les fermetures des orbites des algèbres Hom-associatives* $\Omega = \left\{A_3'^2, A_4'^2\right\}$.

Démonstration. On a

1. $A_{2,t}'^2 \longrightarrow A_1'^2 : e_1' * e_1' = e_1, e_1' * e_2' = -te_2, e_2' * e_1' = -te_2, e_2' * e_2' = e_1 + t^2 e_2, \quad \alpha(e_1') = e_1, \quad \alpha(e_2') = -te_2$ pour $t \to -1$.
2. $A_{3,t}'^2 \longrightarrow A_1'^2 : e_1' * e_1' = e_1, \quad e_1' * e_2' = te_2, \quad e_2' * e_1' = te_2, \quad e_2' * e_2' = te_1 + e_2, \quad \alpha(e_1') = e_1, \quad \alpha(e_2') = te_2$ pour $t \to 1$.
3. $A_{4,t}'^2 \longrightarrow A_1'^2 : e_1' * e_1' = e_1, \quad e_1' * e_2' = e_2, \quad e_2' * e_1' = e_2, \quad e_2' * e_2' = te_1 + te_2, \quad \alpha(e_1') = e_1, \quad \alpha(e_2') = e_2$.
4. $A_{4,t}'^2 \longrightarrow A_2'^2 : e_1' * e_1' = e_1, e_1' * e_2' = te_2, e_2' * e_1' = te_2, e_2' * e_2' = t^2 e_2, \alpha(e_1') = e_1, \quad \alpha(e_2') = te_2$ pour $t \to -1$.

$$\begin{tikzcd}
A'^2_2 \arrow[r] & A'^2_1 \\
A'^2_4 \arrow[u] \arrow[ur] & A'^2_3 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Composantes irréductibles de $\mathcal{UHA}ss_2$

□

Remark 5.11.18 De la même façon, on peut donner aussi les composantes irréductibles suivantes :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{A}^2_1 & & & \\
 & \tilde{A}^2_6 & \tilde{A}^2_9 \arrow[r, leftrightarrow] & \tilde{A}^2_8 \\
\tilde{A}^2_4 \arrow[uu] & & &
\end{tikzcd}$$

Composantes irréductibles de $\mathcal{A}ss_2$

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{A}'^2_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\tilde{A}'^2_1 & & \tilde{A}'^2_2 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Composantes irréductibles de $\mathcal{UA}ss_2$

Proposition 5.11.19 *Les composantes irréductibles de $\mathcal{UHA}ss_3$ sont les fermetures des orbites des algèbres Hom-associatives* $\Omega = \left\{A_9'^3, A_{10}'^3, A_{11}'^3, A_{12}'^3, A_{13}'^3, A_{14}'^3, A_{15}'^3\right\}$.

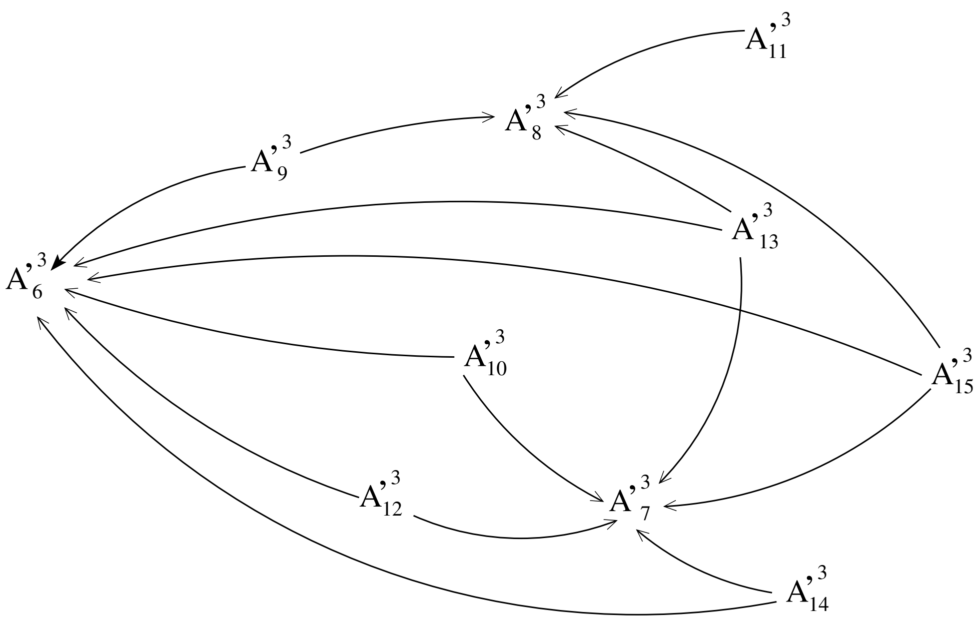
Démonstration. On a

1. $A'^3_{7,t} \longrightarrow A'^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = -te_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = -te_2, e'_2 * e'_3 = e_3, e'_3 * e'_1 = -te_3, e'_3 * e'_2 = e_3, e'_3 * e'_3 =$ $e_2 + t^2 e_3, \alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2, \alpha(e'_3) = -te_3$ pour $t \to -1$.
2. $A'^3_{9,t} \longrightarrow A'^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = te_2, e'_2 * e'_3 = te_3, e'_3 * e'_1 = e_3, e'_3 * e'_2 = te_3, e'_3 * e'_3 = te_2 + e_3,$ $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2,, \quad \alpha(e'_3) = e_3$ pour $t \to -1$ et $a = 1$.
3. $A'^3_{10,t} \longrightarrow A'^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = -te_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = t^2 e_2, e'_2 * e'_3 = t^2 e_3, e'_3 * e'_1 = -te_3, e'_3 * e'_2 = t^2 e_3, e'_3 * e'_3 =$ $t^2 e_2 + t^2 e_3, \alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2, \alpha(e'_3) = -te_3$ pour $t \to -1$, $a = 1$.
4. $A'^3_{12,t} \longrightarrow A'^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = e_2, e'_2 * e'_3 = e_3, e'_3 * e'_1 = e_3, e'_3 * e'_2 = te_3, e'_3 * e'_3 = te_2 + te_3,$ $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2, \alpha(e'_3) = e_3$ pour $t \to 1$ et $b = 1$.
5. $A'^3_{13,t} \longrightarrow A'^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = -te_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = -te_2,$ $e'_2 * e'_2 = t^2 e_2, e'_2 * e'_3 = t^2 e_3, e'_3 * e'_1 = e_3, e'_3 * e'_2 = t^2 e_3,$ $e'_3 * e'_3 = t^2 e_2 + t^2 e_3, \alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = -te_2, \alpha(e'_3) = e_3$ pour $t \to -1, b = 1$.
6. $A'^3_{14,t} \longrightarrow A'^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, \quad e'_1 * e'_2 = e_2, \quad e'_1 * e'_3 = e_3, \quad e'_2 * e'_1 =$ $e_2,$
   $e'_2 * e'_2 = te_2, e'_2 * e'_3 = te_3, \quad e'_3 * e'_1 = e_3, e'_3 * e'_2 = te_3, \quad e'_3 * e'_3 =$ $e_2 + te_3,$
   $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2, \quad \alpha(e'_3) = e_3$,pour $t \to 1$ et $b = 1$.
7. $A'^3_{15,t} \longrightarrow A'^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, \quad e'_1 * e'_2 = e_2, \quad e'_1 * e'_3 = e_3, \quad e'_2 * e'_1 =$ $e_2,$
   $e'_2 * e'_2 = te_2, e'_2 * e'_3 = te_3, \quad e'_3 * e'_1 = e_3, e'_3 * e'_2 = te_3, \quad e'_3 * e'_3 =$ $te_2 + te_3,$
   $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2, \quad \alpha(e'_3) = e_3,$ pour $t \to -1$ et $a = b = 1$.
8. $A'^3_{3,t} \longrightarrow A'^3_2 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = 0, e'_1 * e'_3 = -te_3, e'_2 * e'_1 = 0,$ $e'_2 * e'_2 = e_2, e'_2 * e'_3 = -te_3, e'_3 * e'_1 = -te_3, e'_3 * e'_2 = 0, e'_3 * e'_3 =$ $e_1 + t^2 e_3, \quad \alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = 0, \quad \alpha(e'_3) = -te_3$ pour $t \to -1$.
9. $A'^3_{5,t} \longrightarrow A'^3_4 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = -te_2, e'_1 * e'_3 = 0, e'_2 * e'_1 = -te_2,$ $e'_2 * e'_2 = e_1 + t^2 e_2, e'_2 * e'_3 = 0, e'_3 * e'_1 = 0, e'_3 * e'_2 = 0, e'_3 * e'_3 = t^2 e_3,$ $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = -te_2, \quad \alpha(e'_3) = 0,$ pour $t \to -1$.
10. $A'^3_{10,t} \longrightarrow A'^3_7 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = -e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = te_2, e'_2 * e'_3 = t^2 e_3, e'_3 * e'_1 = -e_3, e'_3 * e'_2 = t^2 e_3, e'_3 * e'_3 = t^2 e_2,$ $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2, \quad \alpha(e'_3) = -e_3,$ pour $t \to -1$ et $a = 1$.
11. $A'^3_{12,t} \longrightarrow A'^3_7 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = te_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = te_2, e'_2 * e'_3 = e_3, e'_3 * e'_1 = te_3, e'_3 * e'_2 = t^2 e_3, e'_3 * e'_3 = t^2 e_2,$ $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2, \quad \alpha(e'_3) = te_3,$ pour $t \to -1$ et $b = 1$.
12. $A'^3_{13,t} \longrightarrow A'^3_7 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = -te_2, e'_1 * e'_3 = -te_3, e'_2 * e'_1 =$ $-te_2,$

$e'_2 * e'_2 = te_2$, $e'_2 * e'_3 = t^2 e_3$, $e'_3 * e'_1 = -te_3$, $e'_3 * e'_2 = t^2 e_3$, $e'_3 * e'_3 = t^2 e_2$, $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = -te_2$, $\alpha(e'_3) = te_3$, pour $t \to -1$ et $b = 1$.

13. $A'^3_{14,t} \longrightarrow A'^3_7$: $e'_1 * e'_1 = e_1$, $e'_1 * e'_2 = e_2$, $e'_1 * e'_3 = te_3$, $e'_2 * e'_1 = e_2$, $e'_2 * e'_2 = te_2$, $e'_2 * e'_3 = t^2 e_3$, $e'_3 * e'_1 = te_3$, $e'_3 * e'_2 = t^2 e_3$, $e'_3 * e'_3 = e_2$, $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2$, $\alpha(e'_3) = e_3$, pour $t \to -1$ et $b = 1$.
14. $14 : A'^3_{15,t} \longrightarrow A'^3_7$: $e'_1 * e'_1 = e_1$, $e'_1 * e'_2 = e_2$, $e'_1 * e'_3 = te_3$, $e'_2 * e'_1 = e_2$, $e'_2 * e'_2 = te_2$, $e'_2 * e'_3 = t^2 e_3$, $e'_3 * e'_1 = te_3$, $e'_3 * e'_2 = t^2 e_3$, $e'_3 * e'_3 = t^2 e_2$,
$\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2$, $\alpha(e'_3) = te_3$, pour $t \to -1$ et $a = b = 1$.
15. $A'^3_{9,t} \longrightarrow A'^3_8$: $e'_1 * e'_1 = e_1$, $e'_1 * e'_2 = te_2$, $e'_1 * e'_3 = e_3$, $e'_2 * e'_1 = te_2$, $e'_2 * e'_2 = te_3$, $e'_2 * e'_3 = te_2$, $e'_3 * e'_1 = e_3$, $e'_3 * e'_2 = te_2$, $e'_3 * e'_3 = e_3$, $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = te_2$, $\alpha(e'_3) = e_3$ pour $t \to -1$ et $a = 1$.
16. $A'^3_{10,t} \longrightarrow A'^3_8$: $e'_1 * e'_1 = e_1$, $e'_1 * e'_2 = -t^2 e_2$, $e'_1 * e'_3 = -te_3$, $e'_2 * e'_1 = -t^2 e_2$,
$e'_2 * e'_2 = t^2 e_2$, $e'_2 * e'_3 = t^2 e_2$, $e'_3 * e'_1 = -t^2 e_3$, $e'_3 * e'_2 = t^2 e_3$, $e'_3 * e'_3 = t^2 e_3$, $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = te_2, \alpha(e'_3) = -te_3$, $t \to -1$, $a = 1$.
17. $A'^3_{11,t} \longrightarrow A'^3_8$: $e'_1 * e'_1 = e_1$, $e'_1 * e'_2 = te_2$, $e'_1 * e'_3 = e_3$, $e'_2 * e'_1 = te_2$, $e'_2 * e'_2 = e_3$, $e'_2 * e'_3 = t^2 e_2$, $e'_3 * e'_1 = e_3$, $e'_3 * e'_2 = t^2 e_2$, $e'_3 * e'_3 = te_3$, $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = te_2, \alpha(e'_3) = e_3$, pour $t \to -1$ et $a = 1$.
18. $A'^3_{13,t} \longrightarrow A'^3_8$: $e'_1 * e'_1 = e_1$, $e'_1 * e'_2 = -e_2$, $e'_1 * e'_3 = e_3$, $e'_2 * e'_1 = -e_2$, $e'_2 * e'_2 = t^2 e_3$, $e'_2 * e'_3 = t^2 e_2$, $e'_3 * e'_1 = e_3$, $e'_3 * e'_2 = t^2 e_2$, $e'_3 * e'_3 = te_3$, $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = e_2$, $\alpha(e'_3) = e_3$, pour $t \to -1$ et $b = 1$.
19. $A'^3_{15,t} \longrightarrow A'^3_8$: $e'_1 * e'_1 = e_1$, $e'_1 * e'_2 = te_2$, $e'_1 * e'_3 = e_3$, $e'_2 * e'_1 = te_2$, $e'_2 * e'_2 = t^2 e_3$, $e'_2 * e'_3 = t^2 e_2$, $e'_3 * e'_1 = e_3$, $e'_3 * e'_2 = t^2 e_2$, $e'_3 * e'_3 = te_3$, $\alpha(e'_1) = e_1, \alpha(e'_2) = te_2$, $\alpha(e'_3) = e_3$,pour $t \to -1$ et $a = 1$.

□



Composantes irréductibles de $\mathcal{UHA}ss_3$

Proposition 5.11.20 *Les composantes irréductibles de $\mathcal{UA}ss_3$ sont les fermetures des orbites des algèbres Hom-associatives unitaires $\Omega = \left\{\tilde{A}^3_{10}, \tilde{A}^3_{14}\right\}$.*

Démonstration. On a

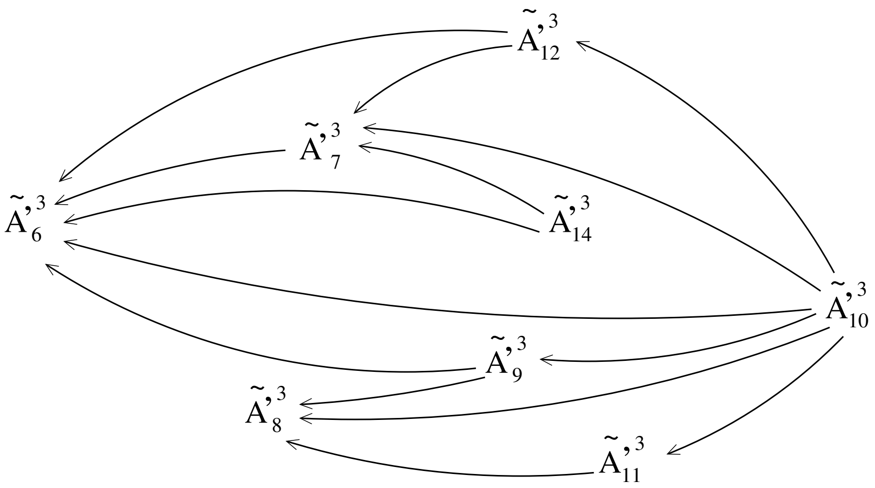
1. $\tilde{A'}^3_{7,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = -te_2, \quad e'_2 * e'_3 = -te_3, \quad e'_3 * e'_1 = e_3, e'_3 * e'_2 = -te_3,$ $e'_3 * e'_3 = e_2 - te_3,$ pour $t \to -1$.
2. $\tilde{A'}^3_{9,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = te_2, \quad e'_2 * e'_3 = te_3, \quad e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = te_3,$ $e'_3 * e'_3 = te_2 + e_3,$ pour $t \to 1$.
3. $\tilde{A'}^3_{10,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = te_3, \quad e'_2 * e'_3 = te_3, \quad e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * te'_2 = te_3,$ $e'_3 * e'_3 = te_2 + e_3,$ pour $t \to 1$.
4. $\tilde{A'}^3_{12,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = e_2, \quad e'_2 * e'_3 = e_3, \quad e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = te_3,$ $e'_3 * e'_3 = te_2 + te_3,$ pour $t \to 1$.
5. $\tilde{A'}^3_{14,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_6 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = te_2, e'_2 * e'_3 = te_3, e'_3 * e'_1 = e_3, e'_3 * e'_2 = te_3,$ $e'_3 * e'_3 = e_2 + te_3,$ pour $t \to 1$.
6. $\tilde{A'}^3_{10,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_7 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = te_2, \quad e'_2 * e'_3 = te_3, \quad e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = te_3,$ $e'_3 * e'_3 = t^2 e_2$ pour $t \to -1$.
7. $\tilde{A'}^3_{12,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_7 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = te_2, \quad e'_2 * e'_3 = te_3, e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = te_3,$ $e'_3 * e'_3 = t^2 e_2$ pour $t \to -1$.
8. $\tilde{A'}^3_{14,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_7 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = te_2, \quad e'_2 * e'_3 = te_3, e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = te_3,$ $e'_3 * e'_3 = e_2$ pour $t \to -1$.
9. $\tilde{A'}^3_{9,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_8 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = t^2 e_3, \quad e'_2 * e'_3 = t^2 e_2, e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = te_2,$ $e'_3 * e'_3 = te_3$ pour $t \to -1$.
10. $\tilde{A'}^3_{10,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_8 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = t^2 e_3, \quad e'_2 * e'_3 = t^2 e_2, e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = te_2,$ $e'_3 * e'_3 = te_3$ pour $t \to -1$.
11. $\tilde{A'}^3_{11,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_8 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$ $e'_2 * e'_2 = e_3, \quad e'_2 * e'_3 = t^2 e_2, e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = te_2,$ $e'_3 * e'_3 = te_3$ pour $t \to -1$.

12. $\tilde{A'}^3_{10,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_9 : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$
$e'_2 * e'_2 = 0, \quad e'_2 * e'_3 = 0, e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = 0,$
$e'_3 * e'_3 = te_3 \quad \text{pour}\, t \to 1.$

13. $\tilde{A'}^3_{10,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_{11} : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$
$e'_2 * e'_2 = te_3, \quad e'_2 * e'_3 = 0, e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = 0,$
$e'_3 * e'_3 = 0 \quad \text{pour}\, t \to 1.$

14. $\tilde{A'}^3_{10,t} \longrightarrow \tilde{A'}^3_{12} : e'_1 * e'_1 = e_1, e'_1 * e'_2 = e_2, e'_1 * e'_3 = e_3, e'_2 * e'_1 = e_2,$
$e'_2 * e'_2 = te_2, \quad e'_2 * e'_3 = te_3, e'_3 * e'_1 = e_3, \quad e'_3 * e'_2 = 0,$
$e'_3 * e'_3 = 0 \quad \text{pour}\, t \to 1.$

□



Composentes irréductibles de $\mathcal{A}ss_3$

Remark

D'après les calculs de la cohomologie, on remarque que les dimensions du deuxière et du troixième groupres de cohomologie des algèbres Hom-associatives de type associative sont inférieures ou égales à celles des algèbres associatives compatibles.

6

Structures Rota-Baxter des algèbres Hom-associatives.

Sommaire

Le but de ce chapitre est de déterminer les structures Rota-Baxter des algèbres Hom-associatives obtenues dans les classifications en dimensions 2 et 3.

6.1 Structure Rota-Baxter.

On rappelles les définitions et propriétés des opérateurs Rota-Baxter des algèbres Hom-associatives. Cette étude a été initialement faite par Makhlouf et Yau [Mak12, MY14].

Definition 6.1.1 Une algèbre Rota-Baxter Hom-associative de poid $\lambda \in \mathbb{K}$ est une algèbre Hom-associative (A, μ, α) munie d'une application linéaire $R : A \to A$ qui satisfait les conditions

$$\alpha \circ R = R \circ \alpha, \tag{6.1.1}$$

$$\mu(R(x), R(y)) = R(\mu(x.R(y)) + R(\mu(x,y) + \lambda\mu(x,y)). \tag{6.1.2}$$

Lemma 6.1.2 *Soit $(A, *, R)$ une algèbre Rota-Baxter Hom-associative et $\alpha : A \to A$ un endomorphisme d'algèbre commutant avec R. Alors $(A, *_\alpha, \alpha, R)$ où $*_\alpha = \alpha(x * y)$, est une algèbre Rota-Baxter Hom-associative.*

Démonstration. La structure Hom-associative de l'algèbre vient du Theorème de Yau. Maintenant on vérifie que R est encore un operateur Rota-Baxter pour la nouvelle algèbre Hom-associative.

$$\begin{aligned} R(x) *_\alpha R(y) &= \alpha(R(x) * R(y)) \\ &= \alpha(R(R(x) * y + x * R(y) + \lambda x * y)), \\ &= \alpha(R(R(x) * y)) + \alpha(R(x * R(y))) + \alpha(R(\lambda x * y))) \\ &= R(R(x) * \alpha(y))) + R(\alpha(x) * R(y)) + R(\lambda x * \alpha(y)))). \end{aligned}$$

Puisque α et R commutent alors

$$\begin{aligned} R(x) *_\alpha R(y) &= R(\alpha(R(x) * y)) + R(\alpha(x * R(y))) + R(\alpha(\lambda x * y))), \\ &= R(R(x) *_\alpha y + x *_\alpha R(y) + \lambda x *_\alpha y)). \end{aligned}$$

□

Proposition 6.1.3 *Soit (A, μ, α, R) une algèbre Rota-Baxter Hom-associative multiplicative ou α est inversible et tels que α et R commutent. Alors $(A, \mu_{\alpha^{-1}} = \alpha^{-1} \circ \mu, R)$ est une algèbre Rota-Baxter associative.*

Démonstration. La condition d'associativité suit de

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^{-2}\mu(\alpha(x), \mu(y,z))) - \mu(\mu(x,y), \alpha(z)) \\ &= \alpha^{-1}\mu(x, \alpha^{-1}\mu(y,z)) - \alpha^{-1}\mu(\alpha^{-1}\mu(x,y), z) \\ &= \mu_{\alpha^{-1}}(x, \mu_{\alpha^{-1}}(y,z)) - \mu_{\alpha^{-1}}(\mu^{\alpha^{-1}}(x,y), z). \end{aligned}$$

Puisque α et R commutent alors α^{-1} et R commutent bien. Donc R est un Rota-Baxter pour la nouvelle multiplication. □

Les conditions (6.1.1) et (6.1.2) se traduisent en termes de constantes de structure respectivement par :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}(a_{ji}b_{kj} - b_{ji}a_{kj}) = 0, \quad i,k = 1,\cdots,n. \\ \sum_{q,p=1}^{n} b_{pi}b_{qj}\mathcal{C}_{pq}^{r} - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pi}\mathcal{C}_{pj}^{q}b_{qr} - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} b_{pj}\mathcal{C}_{ip}^{q}b_{qr} - \lambda\sum_{q=1}^{n}\mathcal{C}_{ij}^{q}b_{qr} = 0, \\ i,j,r = 1,\cdots,n. \end{cases} \tag{6.1.3}$$

6.2 Les algèbres Rota-Baxter Hom-associatives en dimensions 2 et 3.

Dans cette section, on calcule les structures Rota-Baxter des algèbres Hom-associatives obtenues dans la classification.

On rappelle les données de l'algèbre Hom-associative et on précise tous les opérateurs Rota-Baxter qui lui correspondent.

6.2.1 Opérateurs Rota-Baxter dans $\mathcal{HA}ss_2$

1. $\begin{cases} \mu_1^2(e_1,e_1) = -e_1, & \mu_1^2(e_1,e_2) = e_2, \\ \mu_1^2(e_2,e_1) = e_2, & \mu_1^2(e_2,e_2) = e_1, \\ \alpha_1^2(e_1) = e_1, & \alpha_1^2(e_2) = -e_2, \end{cases}$
   on a :
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2.$
2. $\begin{cases} \mu_2^2(e_1,e_1) = e_1, & \mu_2^2(e_1,e_2) = 0, \\ \mu_2^2(e_2,e_1) = 0, & \mu_2^2(e_2,e_2) = e_2, \\ \alpha_2^2(e_1) = e_1, & \alpha_2^2(e_2) = 0, \end{cases}$
   on a :
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2.$
3. $\begin{cases} \mu_3^2(e_1,e_1) = e_1, & \mu_3^2(e_1,e_2) = 0, \\ \mu_3^2(e_2,e_1) = 0, & \mu_3^2(e_2,e_2) = 0, \\ \alpha_3^2(e_1) = e_1, & \alpha_3^2(e_2) = 0, \end{cases}$
   on a :
   - $R(e_1) = -\lambda e_1 \quad R(e_2) = a_{22}e_2.$
4. $\begin{cases} \mu_4^2(e_1,e_1) = e_1, & \mu_4^2(e_1,e_2) = e_2, \\ \mu_4^2(e_2,e_1) = e_2, & \mu_4^2(e_2,e_2) = 0, \\ \alpha_4^2(e_1) = e_1, & \alpha_4^2(e_2) = e_2, \end{cases}$
   on a :
   - $\begin{array}{l} R(e_1) = \frac{1}{2}(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 8a_{21}^2})e_1 + 2a_{21}e_2, \\ R(e_2) = a_{21}e_1 + \frac{1}{2}(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 8a_{21}^2})e_2, \end{array}$

- $R(e_1) = \frac{1}{2}(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 8a_{21}^2})e_1 + 2a_{21}e_2,$
  $R(e_2) = a_{21}e_1 + \frac{1}{2}(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 8a_{21}^2})e_2.$

5. $\begin{cases} \mu_5^2(e_1,e_1) = e_1, \quad \mu_5^2(e_1,e_2) = 0, \\ \mu_5^2(e_2,e_1) = 0, \quad \mu_5^2(e_2,e_2) = 0, \\ \alpha_5^2(e_1) = 0, \quad \alpha_5^2(e_2) = ke_2, \end{cases}$
on a :
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = a_{22}e_2.$

6. $\begin{cases} \mu_6^2(e_1,e_1) = e_2, \quad \mu_5^2(e_1,e_2) = 0, \\ \mu_6^2(e_2,e_1) = 0, \quad \mu_6^2(e_2,e_2) = 0, \\ \alpha_6^2(e_1) = e_1, \quad \alpha_6^2(e_2) = e_2, \end{cases}$ on a
   - $R(e_1) = a_{22}e_1 \quad R(e_2) = \frac{a_{22}^2}{\lambda+2a_{22}}e_2.$

7. $\begin{cases} \mu_7^2(e_1,e_1) = 0, \quad \mu_7^2(e_1,e_2) = 0, \\ \mu_7^2(e_2,e_1) = be_1, \quad \mu_7^2(e_2,e_2) = ce_1, \\ \alpha_6^2(e_1) = 0, \quad \alpha_6^2(e_2) = e_1, \end{cases}$
on a :
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2.$

8. $\begin{cases} \mu_8^2(e_1,e_1) = 0, \quad \mu_8^2(e_1,e_2) = e_1, \\ \mu_8^2(e_2,e_1) = 0, \quad \mu_8^2(e_2,e_2) = e_1 + e_2, \\ \alpha_8^2(e_1) = e_1, \quad \alpha_8^2(e_2) = e_1 + e_2, \end{cases}$
on a :
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2.$

9. $\begin{cases} \mu_9^2(e_1,e_1) = 0, \quad \mu_9^2(e_1,e_2) = 0, \\ \mu_9^2(e_2,e_1) = e_1, \quad \mu_9^2(e_2,e_2) = e_1 + e_2, \\ \alpha_9^2(e_1) = e_1, \quad \alpha_9^2(e_2) = e_1 + e_2, \end{cases}$
on a :
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2.$

6.2.2 Opérateurs Rota-Baxter dans $\mathcal{HA}ss_3$

1. $\begin{cases} \mu_1^3(e_1,e_1) = e_1, \quad \mu_1^3(e_2,e_2) = e_2 + e_3, \\ \mu_1^3(e_2,e_3) = e_2 + e_3, \quad \mu_1^3(e_3,e_2) = e_2 + e_3, \\ \mu_1^3(e_3,e_3) = e_2 + e_3, \quad \mu_1^3(e_i,e_j) = 0 \quad i = 1,2,3 \\ \alpha_1^3(e_1) = e_1 \quad \alpha_1^3(e_i) = 0, \quad i = 2,3, \end{cases}$
on a :
   - $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = \lambda e_3, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
   - $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_3, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
   - $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2 - \lambda e_3, \quad R(e_3) = 0,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = \lambda e_3, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$

- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2 - \lambda e_3, \quad R(e_3) = 0.$

2. $\begin{cases} \mu_2^3(e_1,e_1) = p_{11}e_1 \quad \mu_2^3(e_2,e_2) = p_{52}e_2 \\ \mu_2^3(e_3,e_3) = p_{93}e_3, \quad \mu_2^3(e_i,e_j) = 0 \quad i = 1,2,3 \\ \alpha_2^3(e_1) = e_1 \quad \alpha_2^3(e_2) = e_2, \quad \alpha_2^3(e_3) = 0, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

3. $\begin{cases} \mu_3^3(e_1,e_1) = p_{11}e_1 \quad \mu_3^3(e_2,e_2) = p_{52}e_2 \\ \mu_3^3(e_3,e_3) = p_{93}e_3, \quad \mu_3^3(e_i,e_j) = 0 \quad i = 1,2,3 \\ \alpha_3^3(e_1) = e_1 \quad \alpha_3^3(e_2) = e_2, \quad \alpha_3^3(e_3) = e_3 \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3..$

4. $\begin{cases} \mu_4^3(e_1,e_1) = 0 \quad \mu_4^3(e_1,e_2) = p_{21}e_1, \quad \mu_4^3(e_2,e_2) = p_{51}e_1, \\ \mu_4^3(e_2,e_1) = 0, \quad \mu_4^3(e_2,e_2) = p_{51}e_1 \quad \mu_4^3(e_2,e_3) = p_{81}e_1, \\ \mu_4^3(e_3,e_1) = p_{71}e_1, \quad \mu_4^3(e_3,e_2) = p_{81}e_1, \quad \mu_4^3(e_3,e_3) = p_{91}e_1, \\ \alpha_4^3(e_1) = 0, \quad \alpha_4^3(e_2) = e_1, \quad \alpha_4^3(,e_3) = 0, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

5. $\begin{cases} \mu_2^3(e_1,e_1) = 0 \quad \mu_2^3(e_2,e_2) = p_{52}e_2 \\ \mu_2^3(e_3,e_3) = p_{93}e_3, \quad \mu_2^3(e_i,e_j) = 0 \quad i = 1,2,3 \\ \alpha_2^3(e_1) = e_1, \quad \alpha_2^3(e_2) = e_2, \quad \alpha_2^3(e_3) = e_3, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = a_{12}e_2, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = a_{12}e_2, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1 + a_{12}e_2, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1 + a_{12}e_2, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

6. $\begin{cases} \mu_6^3(e_1,e_2) = e_1 \quad \mu_6^3(e_2,e_2) = e_1 \\ \mu_6^3(e_2,e_3) = e_1, \quad \mu_6^3(e_3,e_2) = e_1 \quad \mu_6^3(e_i,e_i) = 0 \quad i = 1,2,3 \\ \alpha_6^3(e_1) = 0, \quad \alpha_6^3(e_2) = e_1, \quad \alpha_6^3(e_3) = e_3, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = 0 \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 33e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 33e_3.$

7. $\begin{cases} \mu_7^3(e_2,e_2) = e_1 \quad \mu_7^3(e_2,e_2) = e_1 \\ \mu_7^3(e_3,e_2) = e_1, \quad \mu_7^3(e_3,e_3) = e_1 \quad \mu_6^3(e_i,e_i) = 0 \quad i = 1,2,3 \\ \alpha_7^3(e_1) = e_1, \quad \alpha_7^3(e_2) = e_1 + e_2, \quad \alpha_7^3(e_3) = e_3, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = a_{11}e_1, \quad R(e_2) = a_{11}e_2,$
  $R(e_3) = -\sqrt{\lambda a_{11} + a_{11}^2}e_2 + (a_{11} - \sqrt{\lambda a_{11} + a_{11}^2})e_3,$
- $R(e_1) = a_{11}e_1, \quad R(e_2) = a_{11}e_2,$
  $R(e_3) = \sqrt{\lambda a_{11} + a_{11}^2}e_2 + (a_{11} + \sqrt{\lambda a_{11} + a_{11}^2})e_3$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

8. $\begin{cases} \mu_8^3(e_1,e_2) = -e_3 \quad \mu_8^3(e_2,e_1) = e_3 \\ \mu_8^3(e_2,e_2) = e_3, \quad \mu_8^3(e_i,e_i) = 0 \quad i = 1,2,3 \\ \alpha_8^3(e_1) = e_1, \quad \alpha_8^3(e_2) = e_1 + e_2, \quad \alpha_8^3(e_3) = e_3, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = a_{12}e_2 + a_{13}e_3, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, R(e_2) = -\lambda e_2, R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = (a_{33} - \sqrt{\lambda a_{33} + a_{33}^2})e_1 + a_{12}e_2,$
  $R(e_2) = (a_{33} - \sqrt{\lambda a_{33} + a_{33}^2})e_2,$
  $R(e_3) = a_{33}e_3$
- $R(e_1) = (a_{33} + \sqrt{\lambda a_{33} + a_{33}^2})e_1 + a_{12}e_2,$
  $R(e_2) = (a_{33} + \sqrt{\lambda a_{33} + a_{33}^2}e_2,$
  $R(e_3) = a_{33}e_3.$

9. $\begin{cases} \mu_9^3(e_2,e_3) = p_{61}e_1, \mu_9^3(e_3,e_2) = p_{81}e_1, \mu_9^3(e_i,e_j) = 0, i = 1,2,3, \\ \alpha_9^3(e_1) = ae_1, \quad \alpha_9^3(e_2) = e_1 + ae_2, \quad \alpha_9^3(e_3) = e_3, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = a_{32}e_3,$
- $R(e_1) = a_{12}e_2, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = a_{33}e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1 + a_{12}e_2, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0.$

10. $\begin{cases} \mu_{10}^3(e_2,e_2) = p_{51}e_1, \mu_{10}^3(e_3,e_3) = p_{91}e_1, \mu_9^3(e_i,e_j) = 0, i = 1,2,3 \\ \alpha_{10}^3(e_1) = e_1, \quad \alpha_{10}^3(e_2) = e_1 + e_2, \quad \alpha_{10}^3(e_3) = -e_3, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

11. $\begin{cases} \mu_{11}^3(e_1,e_3) = p_{31}e_1, \mu_{10}^3(e_2,e_3) = p_{61}e_1, \mu_{11}^3(e_3,e_2) = p_{81}e_1, \\ \mu_{10}^3(e_3,e_3) = p_{91}e_1, \quad \mu_{10}^3(e_i,e_j) = 0, \quad i = 1,2,3, \\ \alpha_{10}^3(e_1) = 0, \quad \alpha_{10}^3(e_2) = e_1, \quad \alpha_{10}^3(e_3) = e_2, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

12. $\begin{cases} \mu_{12}^3(e_2,e_3) = -p_{81}e_1, \mu_{12}^3(e_3,e_2) = p_{81}e_1, \mu_{12}^3(e_3,e_3) = p_{91}e_1, \\ \mu_{12}^3(e_i,e_j) = 0, \quad i = 1,2,3, \\ \alpha_{12}^3(e_1) = e_1, \quad \alpha_{12}^3(e_2) = e_1 + e_2, \quad \alpha_{12}^3(e_3) = e_2 + e_3, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

6.2.3 Opérateurs Rota-Baxter dans $\mathcal{A}ss_2$

1. $\begin{cases} \tilde{\mu}_1^2(e_1,e_1) = -e_1, \quad \tilde{\mu}_1^2(e_1,e_2) = -e_2, \\ \tilde{\mu}_1^2(e_2,e_1) = -e_2, \quad \tilde{\mu}_1^2(e_2,e_2) = e_1, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = -\frac{3}{2}\lambda e_1 - \frac{1}{2}i\lambda e_2,$
  $R(e_2) = -\frac{1}{2}i\lambda e_1 - \frac{1}{2}\lambda e_2,$
- $R(e_1) = -\frac{\lambda}{2}e_1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}\lambda e_2,$
  $R(e_2) = \frac{\lambda}{2\sqrt{3}}e_1 - \frac{\lambda}{2}e_2.$

2. $\begin{cases} \tilde{\mu}_4^2(e_1,e_1) = e_1, \quad \tilde{\mu}_4^2(e_1,e_2) = e_2, \\ \tilde{\mu}_4^2(e_2,e_1) = e_2, \quad \tilde{\mu}_4^2(e_2,e_2) = 0, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = \frac{1}{2}(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 8a_{21}^2})e_1 + a_{21}e_2,$
  $R(e_2) = a_{21}e_1 - \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 8a_{21}^2})e_2,$
- $R(e_1) = -\frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 8a_{21}^2})e_1 + a_{21}e_2,$
  $R(e_2) = a_{21}e_1 + \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 8a_{21}^2})e_2.$

3. $\begin{cases} \tilde{\mu}_6^2(e_1,e_1) = e_2, \quad \tilde{\mu}_6^2(e_1,e_2) = 0, \\ \tilde{\mu}_6^2(e_2,e_1) = 0, \quad \tilde{\mu}_6^2(e_2,e_2) = 0, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = a_{11}e_1, \quad R(e_2) = \frac{a_{11}^2}{\lambda + 2a_{11}}ae_2.$

4. $\begin{cases} \tilde{\mu}_8^2(e_1,e_1) = 0, \quad \tilde{\mu}_8^2(e_1,e_2) = e_1, \\ \tilde{\mu}_8^2(e_2,e_1) = 0, \quad \tilde{\mu}_6^2(e_2,e_2) = e_2, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = -(\lambda + a_{11})e_1 - \sqrt{-\lambda a_{22} - a_{22}^2}e_2,$
  $R(e_2) = -\sqrt{-\lambda a_{22} - a_{22}^2}e_1 + a_{22}e_2,$
- $R(e_1) = -(\lambda + a_{11})e_1 - \sqrt{-\lambda a_{22} + a_{22}^2}e_2,$
  $R(e_2) = -\sqrt{-\lambda a_{22} - a_{22}^2}e_1 + a_{22}e_2.$

5. $\begin{cases} \tilde{\mu}_8^2(e_1,e_1) = 0, \quad \tilde{\mu}_8^2(e_1,e_2) = e_1, \\ \tilde{\mu}_8^2(e_2,e_1) = 0, \quad \tilde{\mu}_6^2(e_2,e_2) = e_2, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1) = -(\lambda + a_{11})e_1 - \sqrt{-\lambda a_{22} - a_{22}^2}e_2,$
  $R(e_2) = -\sqrt{-\lambda a_{22} - a_{22}^2}e_1 + a_{22}e_2,$
- $R(e_1) = -(\lambda + a_{11})e_1 - \sqrt{-\lambda a_{22} + a_{22}^2}e_2,$
  $R(e_2) = -\sqrt{-\lambda a_{22} - a_{22}^2}e_1 + a_{22}e_2.$

6.2.4 Opérateurs Rota-Baxter dans $\mathcal{A}ss_3$

1. $\begin{cases} \tilde{\mu}_3^3(e_1, e_1) = p_{11}e_1, & \tilde{\mu}_3^3(e_2, e_2) = p_{52}e_2, \\ \tilde{\mu}_3^3(e_3, e_3) = p_{93}e_3, & \tilde{\mu}_3^3(e_i, e_j) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$
   on a :
   - $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$
   - $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0,$
   - $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$
2. $\begin{cases} \tilde{\mu}_7^3(e_2, e_1) = e_3, & \tilde{\mu}_7^3(e_2, e_2) = e_1, \quad \tilde{\mu}_7^3(e_2, e_3) = e_1, \\ \tilde{\mu}_7^3(e_3, e_3) = e_1 & \tilde{\mu}_7^3(e_i, e_j) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$
   on a :
   - $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_2 - \lambda e_3,$
   - $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$
3. $\begin{cases} \tilde{\mu}_8^3(e_1, e_2) = -e_3, & \tilde{\mu}_8^3(e_2, e_1) = e_3, \\ \tilde{\mu}_8^3(e_2, e_2) = e_3, & \tilde{\mu}_8^3(e_i, e_j) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$
   on a :
   - $R(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
   - $R(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, R(e_2) = -\lambda e_2, R(e_3) = -\lambda e_3,$
   - $R(e_1) = (a_{33} - \sqrt{\lambda a_{33} + a_{33}^2})e_1 - a_{12}e_2,$
     $R(e_2) = (a_{33} - \sqrt{\lambda a_{33} + a_{33}^2})e_2, \quad R(e_3) = a_{33}e_3,$
   - $R(e_1) = (a_{33} + \sqrt{\lambda a_{33} + a_{33}^2})e_1 + a_{12}e_2,$
     $R(e_2) = (a_{33} + \sqrt{\lambda a_{33} + a_{33}^2})e_2, \quad R(e_3) = a_{33}e_3,$
4. $\begin{cases} \tilde{\mu}_9^3(e_2, e_3) = \frac{p_{61}}{a}e_1, & \tilde{\mu}_9^3(e_3, e_2) = \frac{p_{81}}{a}e_1, \\ \tilde{\mu}_9^3(e_i, e_j) = 0, & i = 1, 2, 3, \end{cases}$
   on a :

- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = a_{32}e_2 + a_{33}e_3,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = a_{31}e_1 + a_{33}e_3,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = a_{31}e_1 + a_{32}e_2,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = a_{22}e_2 + a_{23}e_3, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = a_{21}e_1 + a_{23}e_3, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = a_{21}e_2 + a_{22}e_2, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = a_{32}e_2 + a_{33}e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = a_{31}e_1 + a_{33}e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 - \lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = a_{22}e_2 + a_{23}e_3, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = a_{21}e_1 - \lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = a_{22}e_2, \quad R(e_3) = \frac{a_{22}(\lambda + a_{22})}{a_{11} - a_{22}}e_3,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = a_{22}e_2, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = a_{21}e_1, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = a_{32}e_2 - \lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = a_{33}e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = a_{31}e_1 - \lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2 + a_{23}e_3, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = a_{22}e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = a_{21}e_1 - \lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

5. $\begin{cases} \tilde{\mu}^3_{10}(e_2, e_2) = p_{51}e_1, \quad \tilde{\mu}^3_{10}(e_3, e_3) = p_{91}e_1, \\ \tilde{\mu}^3_{10}(e_i, e_j) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$
on a :

- $R(e_1) = 0 \quad R(e_2) = -pia_{31}e_1 - pia_{32}e_2 + a_{23}e_3, R(e_3) = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + pia_{23}e_3,$
- $R(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, R(e_2) = -\frac{\lambda}{2}e_2 - pe_3, R(e_3) = ipe_2 - \frac{\lambda}{2}e_3,$
- $R(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3,$
- $R(e_2) = -\frac{\lambda}{2}e_2 + ipe_3, R(e_3) = -ipe_2 - \frac{\lambda}{2}e_3$

- $R(e_1)=0$, $R(e_2)=-ipa_{32}e_2+a_{23}e_3$, $R(e_3)=a_{32}e_2+ipa_{23}e_3$,
- $R(e_1)=0$, $R(e_2)=ipa_{32}e_2+a_{23}e_3$, $R(e_3)=a_{32}e_2-ipa_{23}e_3$,
- $R(e_1)=0$, $R(e_2)=-ipa_{31}e_1-a_{32}e_2$, $R(e_3)=a_{31}e_1+a_{32}e_2$
- $R(e_1)=0$, $R(e_2)=ipa_{31}e_1+a_{32}e_2$, $R(e_3)=a_{31}e_1+a_{32}e_2$
- $R(e_1)=-\lambda e_1$, $R(e_2)=-ip\lambda a_{32}e_2$, $R(e_3)=a_{32}e_2-\lambda e_3$
- $R(e_1)=-\lambda e_1$, $R(e_2)=-ip\lambda a_{32}e_2$, $R(e_3)=a_{32}e_2-\lambda e_3$.

6. $\begin{cases} \tilde{\mu}^3_{12}(e_2,e_3)=-p_{81}e_1, & \tilde{\mu}^3_{12}(e_3,e_2)=p_{81}e_1, \\ \tilde{\mu}^3_{12}(e_3,e_3)=p_{91}e_1, & \tilde{\mu}^3_{12}(e_i,e_j)=0, \quad i=1,2,3, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=a_{21}e_1+a_{22}e_2+a_{23}e_3, \quad R(e_3)=-\lambda e_3$,
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-p\lambda e_2+p\lambda e_3, \quad R(e_3)=0$,
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-p\lambda e_2-p\lambda e_3, \quad R(e_3)=-\lambda e_3$.

6.3 Les algèbres Rota-Baxter Hom-associatives unitaires en dimension 2 et 3

6.3.1 Opérateurs Rota-Baxter dans $\mathcal{UHA}ss_2$

1. $\begin{cases} \mu'^2_1(e_1,e_1)=e_1 & \mu'^2_1(e_1,e_2)=e_2 \\ \mu'^2_1(e_2,e_1)=e_2 & \mu'^2_8(e_2,e_2)=e_1+e_2, \\ \alpha'^2_1(e_1)=e_1 & \alpha'^2_1(e_2)=e_2 \end{cases}$

on a :

- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2$,
- $R(e_1)=-\frac{\lambda(5+\sqrt{5})}{10}e_1+\frac{\lambda}{\sqrt{5}}e_2, \quad R(e_2)=\frac{\lambda}{\sqrt{5}}e_1+\frac{\lambda(-5+\sqrt{5})}{10}e_2$.
- $R(e_1)=\frac{\lambda(-5+\sqrt{5})}{10}e_1-\frac{\lambda}{\sqrt{5}}e_2, \quad R(e_2)=-\frac{\lambda}{\sqrt{5}}e_1-\frac{\lambda(-5+\sqrt{5})}{10}e_2$.

2. $\begin{cases} \mu'^2_2(e_1,e_1)=e_1 & \mu'^2_2(e_1,e_2)=-e_2 \\ \mu'^2_2(e_2,e_1)=-e_2 & \mu'^2_2(e_2,e_2)=e_1, \\ \alpha'^2_2(e_1)=e_1 & \alpha'^2_2(e_2)=e_2, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2$.

3. $\begin{cases} \mu'^2_3(e_1,e_1)=e_1 & \mu'^2_3(e_1,e_2)=0 \\ \mu'^2_3(e_2,e_1)=0 & \mu'^2_3(e_2,e_2)=e_2, \\ \alpha'^2_3(e_1)=e_1 & \alpha'^2_3(e_2)=0, \end{cases}$

on a :

- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2$,
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2$,
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=0$.

4. $\left\{\begin{array}{ll} \mu_4'^2(e_1,e_1)=e_1 & \mu_4'^2(e_1,e_2)=e_2 \\ \mu_4'^2(e_2,e_1)=e_2 & \mu_4'^2(e_2,e_2)=0, \\ \alpha_4'^2(e_1)=e_1 & \alpha_4'^2(e_2)=e_2 \end{array}\right.$
on a :
- $R(e_1)=\lambda e_1+2b_{21}e_2,\ R(e_2)=b_{21}e_1-\lambda e_2,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1+2b_{21}e_2,\ R(e_2)=b_{21}e_1-e_2.$

6.3.2 Opérateurs Rota-Baxter dans $\mathcal{UHA}ss_3$

1 $\left\{\begin{array}{l} \mu_1'^3(e_1,e_1)=e_1,\ \mu_1'^3(e_2,e_2)=e_2+e_3,\ \mu_1'^3(e_2,e_3)=e_2+e_3 \\ \mu_1'^3(e_3,e_2)=e_2+e_3,\ \mu_1'^3(e_3,e_3)=e_2+e_3, \mu_1'^3(e_i,e_j)=0,\ i,j=1,2,3 \\ \alpha_1'^3(e_1)=e_1 \quad \alpha_1'^3(e_2)=0, \quad \alpha_1'^3(e_3)=0, \end{array}\right.$
on a :
- $R(e_1)=0,\ R(e_2)=-\lambda e_2-\lambda e_3,\ R(e_3)=a_{32}e_2+a_{33}e_3$
- $R(e_1)=0,\ R(e_2)=-a_{32}e_2-a_{33}e_3,\ R(e_3)=a_{32}e_2+a_{33}e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1,\ R(e_2)=-(\lambda+a_{32})e_2-(\lambda+a_{33})e_3,\ R(e_3)=a_{32}e_2+a_{33}e_3$
- $R(e_1)=-\lambda e_1,\ R(e_2)=-a_{32}e_2-a_{33}e_3,\ R(e_3)=a_{32}e_2+a_{33}e_3.$

2. $\left\{\begin{array}{l} \mu_2'^3(e_1,e_1)=e_1,\ \mu_2'^3(e_1,e_3)=e_3,\ \mu_2'^3(e_2,e_2)=e_2 \\ \mu_2'^3(e_3,e_1)=e_3,\ \mu_2'^3(e_3,e_3)=e_1+e_3, \mu_2'^3(e_i,e_j)=0,\ i,j=1,2,3 \\ \alpha_2'^3(e_1)=e_1 \quad \alpha_1'^3(e_2)=0, \quad \alpha_2'^3(e_3)=e_3, \end{array}\right.$
on a :
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=-\lambda e_3$
- $R(e_1)=-\lambda e_1+\lambda e_3, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=\lambda e_1+\lambda e_3$
- $R(e_1)=\lambda e_1-\lambda e_3,\ R(e_2)=0,\ R(e_3)=-\lambda e_1-\lambda e_3$
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1+\lambda e_3, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=\lambda e_1+\lambda e_3$
- $R(e_1)=\lambda e_1-\lambda e_3, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_1-\lambda e_3.$

3. $\left\{\begin{array}{l} \mu_3'^3(e_1,e_1)=e_1,\ \mu_3'^3(e_1,e_3)=-e_3,\ \mu_3'^3(e_2,e_2)=e_2 \\ \mu_3'^3(e_3,e_1)=-e_3,\ \mu_3'^3(e_3,e_3)=e_1, \mu_3'^3(e_i,e_j)=0,\ i,j=1,2,3 \\ \alpha_2'^3(e_1)=e_1 \quad \alpha_1'^3(e_2)=0, \quad \alpha_3'^3(e_3)=-e_3, \end{array}\right.$
on a :
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

4 $\left\{\begin{array}{l} \mu_4'^3(e_1,e_1)=e_1,\ \mu_4'^3(e_1,e_2)=e_2, \quad \mu_4'^3(e_2,e_1)=e_2 \\ \mu_4'^3(e_2,e_2)=e_1+e_2,\ \mu_4'^3(e_3,e_3)=e_3,\ \mu_4'^3(e_i,e_j)=0,\ i,j=1,2,3 \\ \alpha_4'^3(e_1)=e_1 \quad \alpha_4'^3(e_2)=e_2, \quad \alpha_4'^3(e_3)=0, \end{array}\right.$
on a :
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_1-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0,$

- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = \lambda e_1, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_1 - \lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = \lambda e_1, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$

5. $\begin{cases} \mu_5'^3(e_1,e_1) = e_1, \mu_5'^3(e_1,e_2) = -e_2, \quad \mu_5'^3(e_2,e_1) = -e_2 \\ \mu_5'^3(e_2,e_2) = e_1, \mu_5'^3(e_3,e_3) = e_3, \mu_5'^3(e_i,e_j) = 0, i,j = 1,2,3 \\ \alpha_5'^3(e_1) = e_1 \quad \alpha_5'^3(e_2) = -e_2, \quad \alpha_5'^3(e_3) = 0, \end{cases}$
on a :
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = \lambda e_1, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = \lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

6. $\begin{cases} \mu_6'^3(e_1,e_1) = e_1, \mu_6'^3(e_1,e_2) = e_2, \quad \mu_6'^3(e_1,e_3) = e_3 \\ \mu_6'^3(e_2,e_1) = e_2, \mu_6'^3(e_2,e_2) = e_2, \mu_6'^3(e_2,e_3) = e_3, \\ \mu_6'^3(e_3,e_1) = e_3, \mu_6'^3(e_3,e_2) = e_3, \mu_6'^3(e_3,e_3) = e_2 + e_3, \\ \alpha_6'^3(e_1) = e_1 \quad \alpha_6'^3(e_2) = e_2, \quad \alpha_6'^3(e_3) = e_3, \end{cases}$
on a :
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

7. $\begin{cases} \mu_7'^3(e_1,e_1) = e_1, \mu_7'^3(e_1,e_2) = e_2, \quad \mu_7'^3(e_1,e_3) = -e_3 \\ \mu_7'^3(e_2,e_1) = e_2, \mu_7'^3(e_2,e_2) = -e_2, \mu_7'^3(e_2,e_3) = e_3, \\ \mu_7'^3(e_3,e_1) = -e_3, \mu_7'^3(e_3,e_2) = e_3, \mu_7'^3(e_3,e_3) = e_2, \\ \alpha_7'^3(e_1) = e_1 \quad \alpha_7'^3(e_2) = e_2, \quad \alpha_7'^3(e_3) = -e_3, \end{cases}$
on a :
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

8. $\begin{cases} \mu_8'^3(e_1,e_1) = e_1, \mu_8'^3(e_1,e_2) = -e_2, \quad \mu_8'^3(e_1,e_3) = e_3 \\ \mu_8'^3(e_2,e_1) = -e_2, \mu_8'^3(e_2,e_2) = e_3, \mu_8'^3(e_2,e_3) = e_2, \\ \mu_8'^3(e_3,e_1) = e_3, \mu_8'^3(e_3,e_2) = e_2, \mu_8'^3(e_3,e_3) = -e_3, \\ \alpha_8'^3(e_1) = e_1 \quad \alpha_8'^3(e_2) = -e_2, \quad \alpha_7'^3(e_3) = e_3, \end{cases}$
on a :
- $R(e_1) = 0, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = 0, \quad R(e_3) = 0,$
- $R(e_1) = -\lambda e_1, \quad R(e_2) = -\lambda e_2, \quad R(e_3) = -\lambda e_3.$

9. $\begin{cases} \mu_9'^3(e_1,e_1) = e_1, \mu_9'^3(e_1,e_2) = ae_2, \quad \mu_9'^3(e_1,e_3) = e_3, \\ \mu_9'^3(e_2,e_1) = ae_2, \mu_9'^3(e_2,e_2) = 0, \mu_9'^3(e_2,e_3) = 0, \\ \mu_9'^3(e_3,e_1) = -e_3, \mu_9'^3(e_3,e_2) = 0, \mu_9'^3(e_3,e_3) = e_3, \\ \alpha_9'^3(e_1) = e_1 \quad \alpha_9'^3(e_2) = ae_2, \quad \alpha_9'^3(e_3) = e_3, \end{cases}$
on a :

- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0.$

10. $$\begin{cases} \mu'^3_{10}(e_1,e_1)=e_1,\ \mu'^3_{10}(e_1,e_2)=ae_2, \quad \mu'^3_{10}(e_1,e_3)=-e_3 \\ \mu'^3_{10}(e_2,e_1)=ae_2,\ \mu'^3_{10}(e_2,e_2)=0,\ \mu'^3_{10}(e_2,e_3)=0, \\ \mu'^3_{10}(e_3,e_1)=-e_3,\ \mu'^3_{10}(e_3,e_2)=0,\ \mu'^3_{10}(e_3,e_3)=0, \\ \alpha'^3_{10}(e_1)=e_1 \quad \alpha'^3_{10}(e_2)=ae_2, \quad \alpha'^3_{10}(e_3)=-e_3, \end{cases}$$
on a :
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0.$

11. $$\begin{cases} \mu'^3_{11}(e_1,e_1)=e_1,\ \mu'^3_{11}(e_1,e_2)=ae_2, \quad \mu'^3_{11}(e_1,e_3)=a^2e_3 \\ \mu'^3_{11}(e_2,e_1)=ae_2,\ \mu'^3_{11}(e_2,e_2)=e_2,\ \mu'^3_{11}(e_2,e_3)=0, \\ \mu'^3_{11}(e_3,e_1)=a^2e_3,\ \mu'^3_{11}(e_3,e_2)=0,\ \mu'^3_{11}(e_3,e_3)=0, \\ \alpha'^3_{11}(e_1)=e_1 \quad \alpha'^3_{11}(e_2)=ae_2, \quad \alpha'^3_{11}(e_3)=a^2e_3, \end{cases}$$
on a :
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

12. $$\begin{cases} \mu'^3_{12}(e_1,e_1)=e_1,\ \mu'^3_{12}(e_1,e_2)=e_2, \quad \mu'^3_{12}(e_1,e_3)=be_3 \\ \mu'^3_{12}(e_2,e_1)=e_2,\ \mu'^3_{12}(e_2,e_2)=\frac{1}{b}e_2,\ \mu'^3_{12}(e_2,e_3)=e_3, \\ \mu'^3_{12}(e_3,e_1)=be_3,\ \mu'^3_{12}(e_3,e_2)=0,\ \mu'^3_{12}(e_3,e_3)=0, \\ \alpha'^3_{12}(e_1)=e_1 \quad \alpha'^3_{12}(e_2)=e_2, \quad \alpha'^3_{12}(e_3)=be_3, \end{cases}$$
on a :
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0.$

13. $$\begin{cases} \mu'^3_{13}(e_1,e_1)=e_1,\ \mu'^3_{13}(e_1,e_2)=-e_2, \quad \mu'^3_{13}(e_1,e_3)=be_3 \\ \mu'^3_{13}(e_2,e_1)=-e_2,\ \mu'^3_{13}(e_2,e_2)=0,\ \mu'^3_{13}(e_2,e_3)=0, \\ \mu'^3_{13}(e_3,e_1)=be_3,\ \mu'^3_{13}(e_3,e_2)=0,\ \mu'^3_{13}(e_3,e_3)=0, \\ \alpha'^3_{13}(e_1)=e_1 \quad \alpha'^3_{13}(e_2)=-e_2, \quad \alpha'^3_{13}(e_3)=be_3, \end{cases}$$
on a :

- $R(e_1)=0,\quad R(e_2)=0,\quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=0,\quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=0,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=0,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=0.$

14. $\begin{cases} \mu'^3_{14}(e_1,e_1)=e_1,\ \mu'^3_{14}(e_1,e_2)=b^2e_2,\quad \mu'^3_{14}(e_1,e_3)=be_3\\ \mu'^3_{14}(e_2,e_1)=b^2e_2,\ \mu'^3_{14}(e_2,e_2)=0,\ \mu'^3_{14}(e_2,e_3)=0,\\ \mu'^3_{14}(e_3,e_1)=be_3,\ \mu'^3_{14}(e_3,e_2)=0,\ \mu'^3_{14}(e_3,e_3)=2,\\ \alpha'^3_{14}(e_1)=e_1\quad \alpha'^3_{14}(e_2)=b^2e_2,\quad \alpha'^3_{14}(e_3)=be_3,\end{cases}$
on a :
   - $R(e_1)=0,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
   - $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=0,\quad R(e_3)=0,$
   - $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

15. $\begin{cases} \mu'^3_{15}(e_1,e_1)=e_1,\ \mu'^3_{15}(e_1,e_2)=ae_2,\quad \mu'^3_{15}(e_1,e_3)=be_3\\ \mu'^3_{15}(e_2,e_1)=ae_2,\ \mu'^3_{15}(e_2,e_2)=0,\ \mu'^3_{15}(e_2,e_3)=0,\\ \mu'^3_{15}(e_3,e_1)=be_3,\ \mu'^3_{15}(e_3,e_2)=0,\ \mu'^3_{15}(e_3,e_3)=0,\\ \alpha'^3_{15}(e_1)=e_1\quad \alpha'^3_{15}(e_2)=ae_2,\quad \alpha'^3_{13}(e_3)=be_3,\end{cases}$
on a :
   - $R(e_1)=0,\quad R(e_2)=0,\quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
   - $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=0,\quad R(e_3)=0,$
   - $R(e_1)=0,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=0,$
   - $R(e_1)=0,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
   - $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
   - $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=-\lambda e_2,\quad R(e_3)=0.$

6.3.3 Opérateurs Rota-Baxter dans $\mathcal{UA}ss_2$

1. $\begin{cases} \tilde{\mu}'^2_1(e_1,e_1)=e_1\quad \tilde{\mu}'^2_1(e_1,e_2)=e_2\\ \tilde{\mu}'^2_1(e_2,e_1)=e_2\quad \tilde{\mu}'^2_1(e_2,e_2)=e_1+e_2,\end{cases}$
on a :
   - $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=-\lambda e_2.$

2. $\begin{cases} \tilde{\mu}'^2_2(e_1,e_1)=e_1\quad \tilde{\mu}'^2_2(e_1,e_2)=e_2\\ \tilde{\mu}'^2_2(e_2,e_1)=e_2\quad \tilde{\mu}'^2_2(e_2,e_2)=e_1,\end{cases}$
on a :
   - $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=-\lambda e_2.$

4. $\begin{cases} \tilde{\mu}'^2_4(e_1,e_1)=e_1\quad \tilde{\mu}'^2_4(e_1,e_2)=e_2\\ \tilde{\mu}'^2_4(e_2,e_1)=e_2\quad \tilde{\mu}'^2_4(e_2,e_2)=0,\end{cases}$
on a :
   - $R(e_1)=-\lambda e_1,\quad R(e_2)=-\lambda e_2.$

6.3.4 Opérateurs Rota-Baxter dans $\mathcal{UA}ss_3$

1. $$\begin{cases} \tilde{\mu}'^3_6(e_1,e_1)=e_1, & \tilde{\mu}'^3_6(e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\mu}'^3_6(e_1,e_3)=e_3, \\ \tilde{\mu}'^3_6(e_2,e_1)=e_2, & \mu'^3_6(e_2,e_2)=e_2, & \mu'^3_6(e_2,e_3)=e_3, \\ \mu'^3_6(e_3,e_1)=e_3, & \mu'^3_6(e_3,e_2)=e_3, & \mu'^3_6(e_3,e_3)=e_2+e_3, \end{cases}$$
on a :
   - $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

2. $$\begin{cases} \tilde{\mu}'^3_7(e_1,e_1)=e_1, & \tilde{\mu}'^3_7(e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\mu}'^3_7(e_1,e_3)=e_3, \\ \tilde{\mu}'^3_7(e_2,e_1)=e_2, & \mu'^3_7(e_2,e_2)=-e_2, & \mu'^3_7(e_2,e_3)=-e_3, \\ \mu'^3_7(e_3,e_1)=e_3, & \mu'^3_7(e_3,e_2)=-e_3, & \mu'^3_7(e_3,e_3)=e_2, \end{cases}$$
on a :
   - $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

3. $$\begin{cases} \tilde{\mu}'^3_8(e_1,e_1)=e_1, & \tilde{\mu}'^3_8(e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\mu}'^3_8(e_1,e_3)=e_3, \\ \tilde{\mu}'^3_8(e_2,e_1)=e_2, & \mu'^3_8(e_2,e_2)=e_3, & \mu'^3_8(e_2,e_3)=e_2, \\ \mu'^3_8(e_3,e_1)=e_3, & \mu'^3_8(e_3,e_2)=-e_2, & \mu'^3_8(e_3,e_3)=-e_3, \end{cases}$$
on a :
   - $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

4. $$\begin{cases} \tilde{\mu}'^3_9(e_1,e_1)=e_1, & \tilde{\mu}'^3_9(e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\mu}'^3_9(e_1,e_3)=e_3, \\ \tilde{\mu}'^3_9(e_2,e_1)=e_2, & \mu'^3_9(e_2,e_2)=0, & \mu'^3_9(e_2,e_3)=0, \\ \mu'^3_9(e_3,e_1)=e_3, & \mu'^3_9(e_3,e_2)=0, & \mu'^3_9(e_3,e_3)=e_3, \end{cases}$$
on a :
   - $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
   - $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0,$
   - $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

5. $$\begin{cases} \tilde{\mu}'^3_{10}(e_1,e_1)=e_1, & \tilde{\mu}'^3_{10}(e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\mu}'^3_{10}(e_1,e_3)=e_3, \\ \tilde{\mu}'^3_{10}(e_2,e_1)=e_2, & \mu'^3_{10}(e_2,e_2)=0, & \mu'^3_{10}(e_2,e_3)=0, \\ \mu'^3_{10}(e_3,e_1)=e_3, & \mu'^3_9(e_3,e_2)=0, & \mu'^3_9(e_3,e_3)=10, \end{cases}$$
on a :
   - $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
   - $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0,$
   - $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

6. $$\begin{cases} \tilde{\mu}'^3_{11}(e_1,e_1)=e_1, & \tilde{\mu}'^3_{11}(e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\mu}'^3_{11}(e_1,e_3)=e_3, \\ \tilde{\mu}'^3_{11}(e_2,e_1)=e_2, & \mu'^3_{11}(e_2,e_2)=e_3, & \mu'^3_{11}(e_2,e_3)=0, \\ \mu'^3_{11}(e_3,e_1)=e_3, & \mu'^3_9(e_3,e_2)=0, & \mu'^3_9(e_3,e_3)=0, \end{cases}$$
on a :
   - $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

7. $$\begin{cases} \tilde{\mu}'^3_{12}(e_1,e_1)=e_1, & \tilde{\mu}'^3_{12}(e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\mu}'^3_{12}(e_1,e_3)=e_3, \\ \tilde{\mu}'^3_{12}(e_2,e_1)=e_2, & \mu'^3_{12}(e_2,e_2)=e_2, & \mu'^3_{12}(e_2,e_3)=e_3, \\ \mu'^3_{12}(e_3,e_1)=e_3, & \mu'^3_{12}(e_3,e_2)=0, & \mu'^3_{12}(e_3,e_3)=e_3, \end{cases}$$
on a :

- $R(e_1)=0, \quad R(e_2)=0, \quad R(e_3)=-\lambda e_3,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=0,$
- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

8. $\left\{\begin{array}{lll} \tilde{\mu}'^3_{14}(e_1,e_1)=e_1, & \tilde{\mu}'^3_{14}(e_1,e_2)=e_2, & \tilde{\mu}'^3_{14}(e_1,e_3)=e_3, \\ \tilde{\mu}'^3_{14}(e_2,e_1)=e_2, & \mu'^3_{14}(e_2,e_2)=0, & \mu'^3_{14}(e_2,e_3)=0, \\ \mu'^3_{14}(e_3,e_1)=e_3, & \mu'^3_{14}(e_3,e_2)=0, & \mu'^3_{14}(e_3,e_3)=e_2, \end{array}\right.$

on a :

- $R(e_1)=-\lambda e_1, \quad R(e_2)=-\lambda e_2, \quad R(e_3)=-\lambda e_3.$

7

Les Hom-Bialgèbres

Sommaire

Le but de ce chapitre est de déterminer les structures de Hom-Bialgèbres associées aux algèbres Hom-associatives des classifications en dimensions 2 et 3. Les algèbres Hom-Bialgèbres et Hom-Hopf sont des généralisations des structures de Bialgèbres et d'algèbres Hopf, où les conditions d'associativité et de coassociativité sont twistées par un homomorphisme.

7.1 Hom-Bialgèbres

On rappelle les définitions, voir [MS10b, **?**] pour la théorie générale.

Definition 7.1.1 Un coalgèbre Hom-coassociative est un quadriplet $(A,\Delta,\beta,\varepsilon)$ où A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et

$$\Delta : A \longrightarrow A\otimes A \quad et \quad \varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{K} \tag{7.1.1}$$

sont des applications linéaires satisfaisant les conditions suivantes :

$(C1)$ $\quad(\beta\otimes\Delta)\circ\Delta = (\Delta\otimes\beta)\circ\Delta$

$(C2)$ $\quad(id\otimes\varepsilon)\circ\Delta = \beta \quad (\varepsilon\otimes id)\circ\Delta = \beta.$

Soient $(A,\Delta,\beta,\varepsilon)$ et $(A',\Delta',\beta',\varepsilon')$ deux coalgèbres Hom-coassociatives. Une application linéaire $f : A \longrightarrow A'$ est un morphisme de coalgèbres Hom-coassociatives si

$$(f\otimes f)\circ\Delta = \Delta'\circ f, \quad \varepsilon = \varepsilon'\circ f \quad et \quad f\circ\beta = \beta'\circ f. \tag{7.1.2}$$

Si $A = A'$, alors les coalgèbres Hom-coassociatives sont isomorphes s'il existe une application linéaire bigective $f : A \longrightarrow A$ telle que

$$\Delta' = (f\otimes f)\circ\Delta\circ f^{-1}, \quad \varepsilon' = \varepsilon\circ f^{-1} \quad et \quad \beta = f^{-1}\circ\beta'\circ f. \tag{7.1.3}$$

Definition 7.1.2 Une Hom-bialgèbre est un sextuplet $(A,\mu,\alpha,\eta,\Delta,\beta,\varepsilon)$ où

$(B1)$ $\quad(A,\mu,\alpha,\eta)$ est une algèbre Hom-associative

$(B2)$ $\quad(A,\Delta,\beta,\varepsilon)$ est coalgèbre Hom-coassociative.

$(B3)$ $\quad$ les applications linéaires Δ et ε sont des morphismes d'algèbres (A,μ,α,η).

La condition $(B3)$ peut se traduire par le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta(e_1) = e_1\otimes e_1 \quad \text{où} \quad e_1 = \eta(1) \\ \Delta(\mu(x\otimes y)) = \Delta(x)\bullet\Delta(y) = \sum_{(x)(y)}\mu(x^{(1)}\otimes y^{(1)})\otimes\mu(x^{(2)}\otimes\mu(y^{(2)}) \\ \varepsilon(e_1) = 1 \\ \varepsilon(\mu(x\otimes y)) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) \end{cases}$$

où l $\bullet$ désigne la multiplication sur le produit tensoriel. De plus, on utilise la notation de Sweedler $\Delta(x) = \sum_{(x)} x^{(1)}\otimes x^{(2)}$. S'il n'y a pas d'ambiguité, on désigne la multiplication par un point.

On peut envisager une définition plus restrictive où les applications linéaires Δ et ε sont des morphismes d'algèbres Hom-associatives c'est-à-dire la condition $(B3)$ est équivalente à

$$\begin{cases} \Delta(e_1) = e_1\otimes e_1 \quad \text{où} \quad e_1 = \eta(1) \\ \Delta(\mu(x\otimes y)) = \Delta(x)\bullet\Delta(y) = \sum_{(x)(y)}\mu(x^{(1)}\otimes y^{(1)})\otimes\mu(x^{(2)}\otimes\mu(y^{(2)}) \\ \varepsilon(e_1) = 1 \\ \varepsilon(\mu(x\otimes y)) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) \\ \Delta(\alpha(x)) = \sum_{(x)}\alpha(x^{(1)})\otimes\alpha(x^{(2)} \\ \varepsilon\circ\alpha(x) = \varepsilon(x). \end{cases}$$

Dans la suite, on va considérer le cas $\alpha = \beta$ et la Hom-coalgèbre multiplicative.

Example 7.1.3 Soit G un groupe et $\mathbb{K}G$ l'algèbre de groupe correspondant sur $\mathbb{K}$. Comme un espace vectoriel, $\mathbb{K}G$ est engendré par $\{e_g : g \in G\}$. Si $\alpha : G \to G$ est un homomorphisme de groupe, puis étendu à un endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}G$ par

$$\alpha(\sum_{g\in G} a_g e_g) = \sum_{g\in G} a_g \alpha(e_g) = \sum_{g\in G} a_g e_{\alpha(g)}.$$

Considérons la structure bialgèbre usuelle sur $\mathbb{K}G$ et un morphisme de bialgèbre. Alors, on définit une Hom-bialgèbre $(\mathbb{K}G, \mu, \Delta, \alpha)$ sur $\mathbb{K}G$ par

$$\mu(e_g \otimes e'_g) = \alpha(e_{gg'}, \quad \Delta(e_g) = \alpha(e_g) \otimes \alpha(e_g).$$

Soit A un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. On fixe une base $\{e_i\}_{i=,\dots,n}$ de A dans laquelle une multiplication μ (resp une commultiplication Δ) est identifié avec ses n^3 constantes de structure $C_{ij}^k \in \mathbb{K}$ (resp. D_i^{jk}) ou $\mu(e_i \otimes e_j) = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k$ et $\Delta(e_i) = \sum_{j,k=1}^n D_i^{jk} e_j \otimes e_k$. La counité ε est identifiée à n ses constantes de structure b_i. On suppose que e_1 est l'élement unité.

$$(\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta = (\alpha \circ \Delta) \circ \Delta \quad \text{Hom-coassociativité} \tag{7.1.4}$$

$$(\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta(e_i) = \sum_{t=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n D_i^{pq} D_p^{rs} a_{tq} e_r \otimes e_s \otimes e_t. \tag{7.1.5}$$

$$(\alpha \circ \Delta) \circ \Delta(e_i) = \sum_{t=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n D_i^{pq} a_{rp} D_q^{st} e_r \otimes e_s \otimes e_t. \tag{7.1.6}$$

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \alpha \quad \text{co-unité} \tag{7.1.7}$$

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(e_i) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n D_i^{pq} \varepsilon_q e_q \tag{7.1.8}$$

$$(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(e_i) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n D_i^{qr} \varepsilon_r e_q \tag{7.1.9}$$

$$\Delta \circ \alpha(e_i) = (\alpha \otimes \alpha)\Delta(e_i) \quad \text{multiplicativité} \tag{7.1.10}$$

$$\Delta \circ \alpha(e_i) = \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} D_j^{pq} e_p \otimes e_q \tag{7.1.11}$$

$$(\alpha\otimes\alpha)\Delta(e_i)=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}D_i^{rs}a_{pr}a_{qs}e_p\otimes e_q \tag{7.1.12}$$

$$\Delta\circ\mu(e_i\otimes e_j)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^kD_k^{rs}e_r\otimes e_s \tag{7.1.13}$$

$$(\mu\otimes\mu)\circ\tau\circ(\Delta(e_i)\otimes\Delta(e_j))=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}D_i^{pq}D_j^{tm}C_{pt}^rC_{qm}^se_r\otimes e_s. \tag{7.1.14}$$

Par suite, on a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(D_i^{pq}D_p^{rs}a_{tq}-D_i^{pq}a_{rp}D_q^{st})=0 & (7.1.5)-(7.1.6)\\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n}D_i^{pq}\varepsilon_q-\sum_{r=1}^{n}D_i^{qr}\varepsilon_r=a_{ip} & (7.1.8)-(7.1.9),\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ji}D_j^{pq}-\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}D_i^{rs}a_{pr}a_{qs}=0 & (7.1.11)-(7.1.12)\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^kD_k^{rs}-\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}D_i^{pq}D_j^{tm}C_{pt}^rC_{qm}^s=0, & (7.1.13)-(7.1.14)\end{cases}$$

7.2 Hom-Bialgèbres en dimension 2 et 3.

Nous allons donner toutes les Hom-Bialgèbres associées aux algèbres Hom-associatives de dimension 2 et 3. Grâce aux calculs directs utilisant le logiciel de calcul formel Mathematica, on obtient les Hom-coalgèbres suivantes associées aux algèbres Hom-associatives afin d'obtenir une strucure de Hom-Bialgèbre. On désigne par $\Delta_{i,j}^k$ les comultiplications et les counités par $\varepsilon_{i,j}^k$, où i indiquent la multiplication et j lélément de la comultiplication qui, combiné avec la multiplication pour determiner une Hom-bigèbre.

7.2.1 Hom-Bialgèbres en dimension 2.

- Pour l'algèbre $A_1'^2$, on a les Hom-Bialgèbres suivantes :
  1. $\Delta_{1,1}^2(e_1)=e_1\otimes e_1$,
     $\Delta_{1,1}^2(e_2)=\frac{\sqrt5}{5}(-e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2)+\frac{5-\sqrt5}{10}(e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1)$,
     $\varepsilon_{1,1}^2(e_1)=1,\quad \varepsilon_{1,1}^2(e_2)=\frac{1+\sqrt5}{2}$.
  2. $\Delta_{1,2}^2(e_1)=e_1\otimes e_1$,
     $\Delta_{1,2}^2(e_2)=\frac{\sqrt5}{5}(e_1\otimes e_1-e_2\otimes e_2)+\frac{5+\sqrt5}{10}(e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1)$,
     $\varepsilon_{1,2}^2(e_1)=1,\quad \varepsilon_{1,2}^2(e_2)=\frac{1-\sqrt5}{2}$.

3. $\Delta^2_{1,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\Delta^2_{1,3}(e_2) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} e_1 \otimes e_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2)$,
$\varepsilon^2_{1,3}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^2_{1,3}(e_2) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
4. $\Delta^2_{1,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\Delta^2_{1,4}(e_2) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} e_1 \otimes e_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2)$,
$\varepsilon^2_{1,4}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^2_{1,4}(e_2) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- Pour l'algèbre A'^2_3, on a les Hom-Bialgèbres suivantes :
1. $\Delta^2_{3,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\Delta^2_{3,1}(e_2) = e_2 \otimes e_2$, $\varepsilon^2_{3,1}(e_1) = 1$, $\varepsilon^2_{3,1}(e_2) = 1$.
- Pour l'algèbre A'^2_4, on a les Hom-Biagèbres suivantes :
$\Delta^2_{4,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\Delta^2_{4,1}(e_2) = \lambda e_2 \otimes e_2$, $\varepsilon^2_{4,1}(e_1) = 1$, $\varepsilon^2_{4,1}(e_2) = \frac{1}{\lambda}$.

Remark 7.2.1 Il n'existe pas de Hom-Bialgèbres pour l'algèbre A'^2_2.

Voyons maintenant, les Hom-Bialgèbres de type associative de dimension 2.

- Pour l'algèbre $\tilde{A}'^2_1$, on a les Hom-Bialgèbres suivantes :
1. $\tilde{\Delta}^2_{1,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\tilde{\Delta}^2_{1,1}(e_2) = \frac{\sqrt{5}}{5}(-e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + \frac{5-\sqrt{5}}{10}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$,
$\tilde{\varepsilon}^2_{1,1}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^2_{1,1}(e_2) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. $\Delta^2_{1,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\Delta^2_{1,2}(e_2) = \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$,
$\varepsilon^2_{1,2}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^2_{1,2}(e_2) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
3. $\Delta^2_{1,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\Delta^2_{1,3}(e_2) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} e_1 \otimes e_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2)$,
$\varepsilon^2_{1,3}(e_2) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
4. $\Delta^2_{1,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\Delta^2_{1,4}(e_2) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} e_1 \otimes e_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2)$,
$\varepsilon^2_{1,4}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^2_{1,4}(e_2) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- Pour l'algèbre $\tilde{A'}^2_2$, on a les Hom-Bialgèbres suivantes :
1. $\tilde{\Delta}^2_{2,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^2_{2,1}(e_2) = \frac{1}{2}(-e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2)$,
$\tilde{\varepsilon}^2_{2,1}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^2_{2,1}(e_2) = 1$.
2. $\tilde{\Delta}^2_{2,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^2_{2,2}(e_2) = -e_2 \otimes e_2$,
$\tilde{\varepsilon}^2_{2,2}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^2_{2,2}(e_2) = -1$.
3. $\tilde{\Delta}^2_{2,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^2_{2,3}(e_2) = e_2 \otimes e_2$, $\tilde{\varepsilon}^2_{2,2}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^2_{2,2}(e_2) = 1$.
4. $\tilde{\Delta}^2_{2,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^2_{2,1}(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2)$,
$\tilde{\varepsilon}^2_{2,4}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^2_{2,4}(e_2) = -1$.

- Pour l'algèbre $\tilde{A}'^2_4$, on a les Hom-Bialgèbres suivantes :
$\tilde{\Delta}^2_{4,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^2_{4,1}(e_2) = \lambda e_2 \otimes e_2$, $\tilde{\varepsilon}^2_{4,1}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^2_{4,1}(e_2) = \frac{1}{\lambda}$.

7.2.2 Hom-Bialgèbres en dimension 3.

- Pour l'algèbre $A_1'^3$, on a les Bialgèbres suivantes :
  1 $\Delta^3_{1,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
  $\Delta^3_{1,1}(e_2) = \lambda(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) + \beta(e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$,
  $\Delta^3_{1,1}(e_3) = \beta(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) + \lambda(e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$,
  $\varepsilon^3_{1,1}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^3_{1,1}(e_2) = \frac{16\beta}{-1+8\beta}, \quad \varepsilon^3_{1,1}(e_3) = \frac{4(-1+4\beta)}{-1+8\beta}$.
  2 $\Delta^3_{1,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
  $\Delta^3_{1,2}(e_2) = \beta_1 e_2 \otimes e_2 - \beta_2(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3)$,
  $\Delta^3_{1,2}(e_3) = \frac{1}{4}\beta_3(e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 + \beta_4 e_3 \otimes e_3)$,
  $\varepsilon^3_{1,2}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^3_{1,2}(e_2) = 2, \quad \varepsilon^3_{1,2}(e_3) = 2$.
  3 $\Delta^3_{1,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
  $\Delta^3_{1,3}(e_2) = \frac{1}{8}(5e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$,
  $\Delta^3_{1,3}(e_3) = \frac{1}{8}(-3e_2 \otimes e_2 + 3e_2 \otimes e_3 + 3e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$,
  $\varepsilon^3_{1,3}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^3_{1,3}(e_2) = 2, \quad \varepsilon^3_{1,3}(e_3) = 2$.
- Pour l'algèbre $A_2'^3$, on a les Bialgèbres suivantes :
  1. $\Delta^3_{2,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \Delta^3_{2,1}(e_2) = e_2 \otimes e_2$
  $\Delta^3_{2,1}(e_3) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) + \frac{\sqrt{5}}{5}(-e_1 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3)$,
  $\varepsilon^3_{2,1}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^3_{2,1}(e_2) = 1, \quad \varepsilon^3_{2,1}(e_3) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
  2 $\Delta^3_{2,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \Delta^3_{2,2}(e_2) = e_2 \otimes e_2$
  $\Delta^3_{2,2}(e_3) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3)$,
  $\varepsilon^3_{2,2}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^3_{2,2}(e_2) = 1, \quad \varepsilon^3_{2,2}(e_3) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
  3 $\Delta^3_{2,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \Delta^3_{2,3}(e_2) = e_2 \otimes e_2$,
  $\Delta^3_{2,3}(e_3) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}e_1 \otimes e_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 - 2e_3 \otimes e_3)$,
  $\varepsilon^3_{2,3}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^3_{2,3}(e_2) = 1, \quad \varepsilon^3_{2,3}(e_3) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
  4 $\Delta^3_{2,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \Delta^3_{2,4}(e_2) = e_2 \otimes e_2$
  $\Delta^3_{2,3}(e_3) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}e_1 \otimes e_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 - 2e_3 \otimes e_3)$,
  $\varepsilon^3_{2,4}(e_1) = 1, \quad \varepsilon^3_{2,4}(e_2) = 1, \quad \varepsilon^3_{2,4}(e_3) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Pour l'algèbre $A_4'^3$, on a les Bialgèbres suivantes :
  1. $\Delta^3_{4,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
  $\Delta^3_{4,1}(e_2) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \frac{\sqrt{5}}{5}(-e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)$,
  $\Delta^3_{4,1}(e_3) = e_3 \otimes e_3 \quad \varepsilon^3_{4,1}(e_1) = 1, \varepsilon^3_{4,1}(e_2) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \varepsilon^3_{4,1}(e_3) = 1$.
  2. $\Delta^3_{4,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
  $\Delta^3_{4,2}(e_2) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2)$,
  $\Delta^3_{4,1}(e_3) = e_3 \otimes e_3, \quad \varepsilon^3_{4,1}(e_1) = 1, \varepsilon^3_{4,1}(e_2) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \varepsilon^3_{4,1}(e_3) = 1$.
  3. $\Delta^3_{4,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
  $\Delta^3_{4,3}(e_2) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}e_1 \otimes e_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2)$,
  $\Delta^3_{4,3}(e_3) = e_3 \otimes e_3, \quad \varepsilon^3_{4,3}(e_1) = 1, \varepsilon^3_{4,3}(e_2) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \varepsilon^3_{4,3}(e_3) = 1$.

4 $\Delta^3_{4,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\Delta^3_{4,4}(e_2) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} e_1 \otimes e_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2)$,
$\Delta^3_{4,4}(e_3) = e_3 \otimes e_3$, $\varepsilon^3_{4,4}(e_1) = 1$, $\varepsilon^3_{4,4}(e_2) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\varepsilon^3_{4,4}(e_3) = 1$.

- Pour l'algèbre A'^3_6, on a les Bialgèbres suivantes :
  1. $\Delta^3_{6,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
     $\Delta^3_{6,1}(e_2) = \frac{1}{5}(3e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2 + 2e_3 \otimes e_3)$,
     $\Delta^3_{6,1}(e_3) = \frac{1}{5}(-e_2 \otimes e_2 + 2e_2 \otimes e_3 + 2e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$,
     $\varepsilon^3_{6,1}(e_1) = 1$, $\varepsilon^3_{6,1}(e_2) = 2$, $\varepsilon^3_{6,1}(e_3) = 1$.
  2. $\Delta^3_{6,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\Delta^3_{6,2}(e_2) = e_2 \otimes e_2$,
     $\Delta^3_{6,2}(e_3) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_2 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3)$,
     $\varepsilon^3_{6,2}(e_1) = 1$, $\varepsilon^3_{6,2}(e_2) = 1$ $\varepsilon^3_{6,2}(e_3) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
  3. $\Delta^3_{6,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
     $\Delta^3_{6,3}(e_2) = \frac{5-\sqrt{5}}{10} e_2 \otimes e_1 + \frac{5+\sqrt{5}}{10} e_2 \otimes e_2 + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_2)$,
     $\Delta^3_{6,3}(e_3) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) + \frac{\sqrt{5}}{5}(e_2 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3)$,
     $\varepsilon^3_{6,3}(e_1) = 1$, $\varepsilon^3_{6,6}(e_2) = 1$, $\varepsilon^3_{6,6}(e_3) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
  4. $\Delta^3_{6,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
     $\Delta^3_{6,4}(e_2) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} e_2 \otimes e_1 + \frac{5-\sqrt{5}}{10} e_2 \otimes e_2 + \frac{\sqrt{5}}{5}(-e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_2)$,
     $\Delta^3_{6,4}(e_3) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) + \frac{\sqrt{5}}{5}(-e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3)$,
     $\varepsilon^3_{6,4}(e_1) = 1$, $\varepsilon^3_{6,4}(e_2) = 1$, $\varepsilon^3_{6,4}(e_3) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
  5. $\Delta^3_{6,5}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\Delta^3_{6,5}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2$,
     $\Delta^3_{6,5}(e_3) = e_1 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1$, $\varepsilon^3_{6,5}(e_1) = 1$,
     $\varepsilon^3_{6,5}(e_2) = 0$, $\varepsilon^3_{6,5}(e_3) = 0$.
  6. $\Delta^3_{6,6}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\Delta^3_{6,6}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2$,
     $\Delta^3_{6,6}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_2$, $\varepsilon^3_{6,6}(e_1) = 1$,
     $\varepsilon^3_{6,6}(e_2) = 0$, $\varepsilon^3_{6,6}(e_3) = 0$.
  7. $\Delta^3_{6,7}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\Delta^3_{6,7}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2$,
     $\Delta^3_{6,7}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_2$,
     $\varepsilon^3_{6,7}(e_1) = 1$, $\varepsilon^3_{6,7}(e_2) = 0$, $\varepsilon^3_{6,7}(e_3) = 0$.
  8. $\Delta^3_{6,8}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\Delta^3_{6,8}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2$,
     $\Delta^3_{6,8}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_2$,
     $\varepsilon^3_{6,8}(e_1) = 1$, $\varepsilon^3_{6,8}(e_2) = 0$, $\varepsilon^3_{6,8}(e_3) = 0$.

Nous allons donner les Hom-Bialgèbres des algèbres de type associative de dimension 3.

- Pour l'algèbre $\tilde{A}'^3_7$, on a les Bilagèbres suivantes :
  1. $\tilde{\Delta}^3_{7,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
     $\tilde{\Delta}^3_{7,1}(e_2) = \beta_1 e_2 \otimes e_2 - \beta_2(e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_3)$,
     $\tilde{\Delta}^3_{7,1}(e_3) = \gamma_1(e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2) + \gamma_2 e_3 \otimes e_3$,
     $\tilde{\varepsilon}^3_{7,1}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{7,1}(e_2) = -1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{7,1}(e_3) = -1$.

2. $\tilde{\Delta}^3_{7,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,2}(e_2) = \beta_1 e_2 \otimes e_1 + \beta_2 e_3 \otimes e_1 + \beta_3(-e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_2)$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,2}(e_3) = \beta_1 e_2 \otimes e_1 - \beta_2 e_3 \otimes e_1 + \beta_3(-e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_3)$,
   $\tilde{\varepsilon}^3_{7,2}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,2}(e_2) = -\beta_1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,2}(e_3) = \beta_2$.
3. $\tilde{\Delta}^3_{7,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,3}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + \beta_1 e_2 \otimes e_2 - \beta_2(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,3}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + \gamma_1(e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2) + \gamma_2 e_3 \otimes e_3, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,3}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,3}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,3}(e_3) = 0$.
4. $\tilde{\Delta}^3_{7,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,4}(e_2) = \beta_1 e_1 \otimes e_2 + \beta_2 e_1 \otimes e_3 + \beta_3(-e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3)$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,4}(e_3) = \beta_1 e_1 \otimes e_2 + \beta_2 e_1 \otimes e_3 + \beta_3(-e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$,
   $\tilde{\varepsilon}^3_{7,4}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,4}(e_2) = -\beta_1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,4}(e_3) = \beta_2$.
5. $\tilde{\Delta}^3_{7,5}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{7,5}(e_2) = -e_2 \otimes e_2$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,5}(e_3) = \gamma_1 e_2 \otimes e_2 - \gamma_2(e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3)$,
   $\tilde{\varepsilon}^3_{7,5}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,5}(e_2) = -1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,5}(e_3) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.
6. $\tilde{\Delta}^3_{7,6}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,6}(e_2) = \beta_1 e_2 \otimes e_2 - \beta_2(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3)$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,6}(e_3) = -e_3 \otimes e_3, \tilde{\varepsilon}^3_{7,6}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{7,6}(e_2) = -1, \tilde{\varepsilon}^3_{7,6}(e_3) = -1$.
7. $\tilde{\Delta}^3_{7,7}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,7}(e_2) = \beta_1 e_2 \otimes e_2 - \beta_2(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3)$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,7}(e_3) = \beta_1(-e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) + \beta_2 e_3 \otimes e_3$,
   $\tilde{\varepsilon}^3_{7,7}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,7}(e_2) = -1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,7}(e_3) = -1$.
8. $\tilde{\Delta}^3_{7,8}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,8}(e_2) = \beta_1(e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2) + \beta_2 e_3 \otimes e_3$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,8}(e_3) = -e_3 \otimes e_3, \tilde{\varepsilon}^3_{7,8}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{7,8}(e_2) = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \tilde{\varepsilon}^3_{7,8}(e_3) = -1$.
9. $\tilde{\Delta}^3_{7,9}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,9}(e_2) = \gamma_1(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2) + \gamma_2 e_3 \otimes e_3$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,9}(e_3) = \gamma_3 e_2 \otimes e_2 + \gamma_1 e_3 \otimes e_3$,
   $\tilde{\varepsilon}^3_{7,9}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,9}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,9}(e_3) = \frac{1}{\gamma_1}$.
10. $\tilde{\Delta}^3_{7,10}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,10}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,10}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + \gamma_1(e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2) + e_3 \otimes e_1 + \gamma_2 e_3 \otimes e_3, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,10}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,10}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,13}(e_3) = 0$.
11. $\tilde{\Delta}^3_{7,11}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,11}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,11}(e_3) = e_1 \otimes e_2 + \gamma_1 e_2 \otimes e_2 + \gamma_2(-e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3), \tilde{\varepsilon}^3_{7,11}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,11}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,11}(e_3) = \frac{1}{\gamma_2}$.
12. $\tilde{\Delta}^3_{7,12}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
   $\tilde{\Delta}^3_{7,12}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + \beta_1 e_2 \otimes e_2 + \beta_2(-e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2 +$

$e_3 \otimes e_3)$,
$\tilde{\Delta}^3_{7,12}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{7,12}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,12}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,12}(e_3) = 0.$

13. $\tilde{\Delta}^3_{7,13}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\tilde{\Delta}^3_{7,13}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + \beta_1 e_2 \otimes e_2 + \beta_2(-e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$,
$\tilde{\Delta}^3_{7,13}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + \beta_2(e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2)e_3 \otimes \otimes e_1 + \beta_1 e_3 \otimes e_3, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,13}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{7,13}(e_2) = 0, \tilde{\varepsilon}^3_{7,13}(e_3) = 0.$

14. $\tilde{\Delta}^3_{7,14}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{7,14}(e_2) = -e_2 \otimes e_2, \tilde{\Delta}^3_{7,14}(e_3) = -e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{7,19}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,19}(e_2) = -1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,19}(e_3) = -1.$

15. $\tilde{\Delta}^3_{7,15}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{7,15}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$,
$\tilde{\Delta}^3_{7,15}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3, \tilde{\varepsilon}^3_{7,15}(e_1) = 1$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{7,15}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,15}(e_3) = 0.$

- Pour l'algèbre $\tilde{A}'^3_8$, on a les Bialgèbres suivantes :

1. $\tilde{\Delta}^3_{8,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{8,1}(e_2) = -\frac{1}{2}(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2)$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,1}(e_3) = \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3), \tilde{\varepsilon}^3_{8,1}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{8,1}(e_2) = 0$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,1}(e_3) = -2.$

2. $\tilde{\Delta}^3_{8,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,2}(e_2) = -\frac{1}{2}i(e_2 \otimes e_2 - i(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 + ie_3 \otimes e_3))$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,2}(e_3) = -e_3 \otimes e_3, \tilde{\varepsilon}^3_{8,2}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{8,2}(e_2) = i, \tilde{\varepsilon}^3_{8,2}(e_3) = -1.$

3. $\tilde{\Delta}^3_{8,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,3}(e_2) = -\frac{i}{2}(e_2 \otimes e_2 - ie_2 \otimes e_3 + ie_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3)$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,3}(e_3) = -e_3 \otimes e_3, \tilde{\varepsilon}^3_{8,3}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{8,2}(e_2) = -i, \tilde{\varepsilon}^3_{8,3}(e_3) = -1.$

4. $\tilde{\Delta}^3_{8,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,4}(e_2) = -\frac{i}{4}(3e_2 \otimes e_2 - i(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 + ie_3 \otimes e_3))$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,4}(e_3) = -\frac{1}{4}(e_2 \otimes e_2 - i(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - 3ie_3 \otimes e_3))$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,4}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,4}(e_2) = i, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,4}(e_3) = -1.$

5. $\tilde{\Delta}^3_{8,5}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,5}(e_2) = \frac{i}{4}(3e_2 \otimes e_2 + i(e_2 \otimes e_3 + ie_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3))$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,5}(e_3) = -\frac{1}{4}(e_2 \otimes e_2 - i(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 + 3ie_3 \otimes e_3))$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,5}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,5}(e_2) = -i, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,5}(e_3) = -1.$

6. $\tilde{\Delta}^3_{8,6}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{8,6}(e_2) = -ie_2 \otimes e_2, \tilde{\Delta}^3_{8,6}(e_3) = -e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,6}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,6}(e_2) = i, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,6}(e_3) = -1.$

7. $\tilde{\Delta}^3_{8,7}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{8,7}(e_2) = -ie_2 \otimes e_2, \tilde{\Delta}^3_{8,7}(e_3) = -e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,7}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,7}(e_2) = -i, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,7}(e_3) = -1.$

8. $\tilde{\Delta}^3_{8,8}(e_1) = e_1 \otimes e_1$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,8}(e_2) = \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_1 - ie_2 \otimes e_2 + ie_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_2)$,
$\tilde{\Delta}^3_{8,8}(e_3) = -\frac{i}{2}(e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + i(e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3))$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,8}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,8}(e_2) = i, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,8}(e_3) = -1.$

9. $\tilde{\Delta}^3_{8,9}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,9}(e_2) = \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_1 + i(e_2 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_1 + ie_3 \otimes e_2)),$
$\tilde{\Delta}^3_{8,9}(e_3) = \frac{i}{2}(e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 - i(e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3)),$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,9}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,9}(e_2) = -i, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,9}(e_3) = -1.$
10. $\tilde{\Delta}^3_{8,10}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,10}(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 - ie_1 \otimes e_3 + ie_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3),$
$\tilde{\Delta}^3_{8,10}(e_3) = \frac{i}{2}(e_1 \otimes e_2 - ie_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 + ie_3 \otimes e_3),$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,10}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,10}(e_2) = -i, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,10}(e_3) = -1.$
11. $\tilde{\Delta}^3_{8,11}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{8,11}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_2,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,11}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,11}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,11}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,11}(e_3) = 0.$
12. $\tilde{\Delta}^3_{8,12}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{8,12}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,12}(e_3) = e_1 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,12}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,12}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,12}(e_3) = 0.$
13. $\tilde{\Delta}^3_{8,13}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,13}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - ie_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,13}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,13}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,13}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,13}(e_3) = 0.$
14. $\tilde{\Delta}^3_{8,14}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,14}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 + ie_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,14}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,14}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,14}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{7,14}(e_3) = 0.$
15. $\tilde{\Delta}^3_{8,15}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,15}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + \frac{3}{2}(e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2),$
$\tilde{\Delta}^3_{8,15}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + \frac{1}{2}e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_1 + \frac{3}{2}e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,15}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,15}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,15}(e_3) = 0.$
16. $\tilde{\Delta}^3_{8,16}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,16}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - \frac{1}{4}(ie_2 \otimes e_2 + 3e_3 \otimes e_2 - 3ie_3 \otimes e_3),$
$\tilde{\Delta}^3_{8,16}(e_3) = \frac{1}{4}(4e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 + ie_2 \otimes e_3 + 4e_3 \otimes e_1 + ie_3 \otimes e_2 +$
$5e_3 \otimes e_3),$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,16}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,16}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,16}(e_3) = 0.$
17. $\tilde{\Delta}^3_{8,17}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,17}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + \frac{1}{2}(-ie_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 - ie_3 \otimes e_3),$
$\tilde{\Delta}^3_{8,17}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,17}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,17}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,17}(e_3) = 0.$
18. $\tilde{\Delta}^3_{8,18}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,18}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + \frac{1}{2}(ie_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 + ie_3 \otimes e_3),$
$\tilde{\Delta}^3_{8,18}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,18}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,18}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,18}(e_3) = 0.$

19. $\tilde{\Delta}^3_{8,19}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,19}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - ie_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,19}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,19}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,19}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,19}(e_3) = 0.$
20. $\tilde{\Delta}^3_{8,20}(e_1) = e_1 \otimes e_1,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,20}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + ie_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2,$
$\tilde{\Delta}^3_{8,20}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{8,20}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,20}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,20}(e_3) = 0.$

- Pour l'algèbre $\tilde{A}'^3_9$, on a les Bialgèbres suivantes :
1. $\tilde{\Delta}^3_{9,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{9,1}(e_2) = \beta e_2 \otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{9,1}(e_3) = e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{9,1}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,1}(e_2) = \frac{1}{\beta}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,1}(e_3) = 1.$
2. $\tilde{\Delta}^3_{9,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{9,2}(e_2) = \beta_5 e_2 \otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{9,2}(e_2) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 - 2e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{9,2}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,2}(e_2) = \frac{1}{\beta_5}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,2}(e_3) = 1.$
3. $\tilde{\Delta}^3_{9,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{9,3}(e_2) = \beta e_2 \otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{9,3}(e_2) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{9,3}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,3}(e_2) = \frac{1}{\beta}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,3}(e_3) = 1.$
4. $\tilde{\Delta}^3_{9,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{9,4}(e_2) = \beta e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2,$
$\tilde{\Delta}^3_{9,4}(e_3) = e_3 \otimes e_3, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,4}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{9,4}(e_2) = 0, \tilde{\varepsilon}^3_{9,4}(e_3) = 1.$
5. $\tilde{\Delta}^3_{9,5}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{9,5}(e_2) = e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_2 \quad \tilde{\Delta}^3_{9,5}(e_3) = e_3 \otimes e_3, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,5}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{9,5}(e_2) = 0, \tilde{\varepsilon}^3_{9,5}(e_3) = 1.$
6. $\tilde{\Delta}^3_{9,6}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{9,6}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3, \quad \tilde{\Delta}^3_{9,6}(e_3) = e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{9,6}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,6}(e_2) = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,6}(e_3) = 1.$

- Pour l'algèbre $\tilde{A}'^3_{10}$, on a les Bialgèbres suivantes :
1 $\tilde{\Delta}^3_{10,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,1}(e_2) = \beta_8 e_2 \otimes e_2 + \beta_9 e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\Delta}^3_{10,1}(e_3) = \gamma_8 e_2 \otimes e_3 + \gamma_8 e_3 \otimes e_2 + \gamma_9 e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,1}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,1}(e_2) = \frac{1}{\beta_8}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{8,1}(e_3) = 0.$
2 $\tilde{\Delta}^3_{10,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,2}(e_2) = \beta_9 e_2 \otimes e_2 + \beta_6 e_2 \otimes e_3 + \beta_6 e_3 \otimes e_2 + \beta_9 e_3 \otimes e_3, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,2}(e_2) = \gamma_9 e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,2}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,2}(e_2) = -\beta_8, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{9,2}(e_3) = \frac{1}{\gamma_9}.$
3 $\tilde{\Delta}^3_{10,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,3}(e_2) = \beta_1 e_2 \otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,3}(e_3) = \gamma_5 e_2 \otimes e_2 + \gamma_6 e_2 \otimes e_3 + \gamma_6 e_3 \otimes e_2 + \gamma_9 e_3 \otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,3}(e_1) = 1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,3}(e_2) = \beta_1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,3}(e_3) = -\beta_1.$
4 $\tilde{\Delta}^3_{10,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,4}(e_2) = \beta_5 e_2 \otimes e_2 + \beta_6 (e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2),$
$\tilde{\Delta}^3_{10,4}(e_2) = \gamma_5 e_2 \otimes e_2 + \beta_6 e_3 \otimes e_3, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,4}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{10,4}(e_2) = 0, \tilde{\varepsilon}^3_{10,4}(e_3) = \frac{1}{\beta_6}.$
5 $\tilde{\Delta}^3_{10,5}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,5}(e_2) = \beta_1 e_2 \otimes e_2 + \beta_6 e_3 \otimes e_2 + \beta_7 e_3 \otimes e_1 \quad \tilde{\Delta}^3_{10,5}(e_3) = \beta_1 e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + \beta_8 e_3 \otimes e_3, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,5}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{10,5}(e_2) = -\beta_1, \tilde{\varepsilon}^3_{10,5}(e_3) = 0.$

6 $\tilde{\Delta}^3_{10,6}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,6}(e_2)=\gamma_6e_2\otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,6}(e_3)=\gamma_5e_2\otimes e_2+\gamma_6e_2\otimes e_3+\gamma_6e_3\otimes e_2,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,6}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,6}(e_2)=\frac{1}{\gamma_6}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,6}(e_3)=-\gamma_1.$

7 $\tilde{\Delta}^3_{10,7}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,7}(e_2)=\gamma_6e_2\otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,7}(e_3)=\gamma_4e_2\otimes e_1+\gamma_6e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_1,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,7}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,7}(e_2)=\frac{1}{\gamma_6}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,7}(e_3)=-\gamma_1.$

8 $\tilde{\Delta}^3_{10,8}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,8}(e_2)=\gamma_8e_2\otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,8}(e_3)=e_1\otimes e_3+\gamma_2e_1\otimes e_2+\gamma_8e_3\otimes e_2,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,8}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,8}(e_2)=\frac{1}{\gamma_8}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,8}(e_3)=-\gamma_1.$

9 $\tilde{\Delta}^3_{10,9}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,9}(e_2)=\gamma_5e_2\otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,9}(e_3)=\gamma_9e_3\otimes e_9,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,9}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,9}(e_2)=\frac{1}{\gamma_5}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,9}(e_3)=\frac{1}{\gamma_9}.$

10 $\tilde{\Delta}^3_{10,10}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,10}(e_2)=e_2\otimes e_1+\beta_7e_3\otimes e_1+\beta_8e_3\otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,10}(e_3)=\beta_8e_3\otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,10}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,10}(e_2)=\beta_1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,10}(e_3)=\frac{1}{\beta_8}.$

11 $\tilde{\Delta}^3_{10,11}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,11}(e_2)=\gamma_4e_2\otimes e_1-\gamma_4e_2\otimes e_2+\beta_8\gamma_4e_2\otimes e_3+\beta_8e_3\otimes e_3, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,11}(e_3)=e_2\otimes e_1-\beta_8\gamma_4e_2\otimes e_2+\beta_8e_3\otimes e_2,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,11}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,11}(e_2)=0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,11}(e_3)=\frac{1}{\beta_8}.$

12 $\tilde{\Delta}^3_{10,12}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,12}(e_2)=\beta_3e_1\otimes e_3-\beta_1e_2\otimes e_2+\beta_2\otimes e_3+\beta_6e_2\otimes e_3, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,12}(e_3)=e_1\otimes e_3-\beta_1e_3\otimes e_2+\beta_6e_3\otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,12}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,12}(e_2)=-\beta_1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,12}(e_3)=0.$

13 $\tilde{\Delta}^3_{10,13}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,13}(e_2)=e_1\otimes e_2-\beta_6\gamma_2e_2\otimes e_2+\beta_6e_2\otimes e_3, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,13}(e_3)=\gamma_2e_1\otimes e_2-\gamma_2\beta_6e_3\otimes e_2+\beta_6e_3\otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,13}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,13}(e_2)=0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,13}(e_3)=\frac{1}{\beta_6}.$

14 $\tilde{\Delta}^3_{10,14}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,14}(e_2)=e_1\otimes e_2+\beta_3e_1\otimes e_3+\beta_6e_2\otimes e_3, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,14}(e_3)=\beta_6e_3\otimes e_3,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,14}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,14}(e_2)=-\beta_1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,14}(e_3)=\frac{1}{\beta_6}.$

15 $\tilde{\Delta}^3_{10,15}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,15}(e_2)=\gamma_6e_2\otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,15}(e_3)=\gamma_6e_2\otimes e_3+e_3\otimes e_1,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,15}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,15}(e_2)=\frac{1}{\gamma_8}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,15}(e_3)=0.$

16 $\tilde{\Delta}^3_{10,16}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,16}(e_2)=\gamma_8e_2\otimes e_2, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,16}(e_3)=e_1\otimes e_3+\gamma_8e_3\otimes e_2,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,16}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,16}(e_2)=\frac{1}{\gamma_8}, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,16}(e_3)=0.$

17 $\tilde{\Delta}^3_{10,17}(e_1)=e_1\otimes e_1, \quad \tilde{\Delta}^3_{10,17}(e_2)=e_2\otimes e_1+\beta_8e_3\otimes e_2,$
$\tilde{\Delta}^3_{10,17}(e_3)=\beta_8e_3\otimes e_3, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,17}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,17}(e_2)=0,$
$\tilde{\varepsilon}^3_{10,17}(e_3)=\frac{1}{\beta_8}.$

18 $\tilde{\Delta}^3_{10,18}(e_1)=e_1\otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{10,18}(e_2)=e_1\otimes e_1+\beta_6e_2\otimes e_3, \tilde{\Delta}^3_{10,18}(e_3)=\gamma_6e_3\otimes e_3, \tilde{\varepsilon}^3_{10,18}(e_1)=1, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,18}(e_2)=0, \quad \tilde{\varepsilon}^3_{10,18}(e_3)=\frac{1}{\beta_6}.$

- Pour l'algèbre $\tilde{A}'^3_{11}$, on a les Bialgèbres suivantes :

1 $\tilde{\Delta}^3_{11,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{11,1}(e_2) = \beta_1 e_2 \otimes e_2 + \beta_2 e_2 \otimes e_3 + \beta_2 e_3 \otimes e_2 + \beta_3 e_3 \otimes_3$, $\tilde{\Delta}^3_{11,1}(e_3) = \beta_5 e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{11,1}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,1}(e_2) = \beta_4$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,1}(e_3) = -\beta_4$.

2 $\tilde{\Delta}^3_{11,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{11,2}(e_2) = -\beta_1 e_2 \otimes e_2 + \beta_2 e_2 \otimes e_3 + \beta_2 e_3 \otimes e_2 + \beta_3 e_3 \otimes e_3$, $\tilde{\Delta}^3_{10,2}(e_3) = \beta_1 e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{11,2}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,2}(e_2) = -\beta_4$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,2}(e_3) = -\beta_4$.

3 $\tilde{\Delta}^3_{11,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{11,3}(e_2) = -\sqrt{\beta_1} e_2 \otimes e_2 + \beta_1 e_2 \otimes e_3, + \beta_1 e_3 \otimes e_2$ $\tilde{\Delta}^3_{11,3}(e_3) = \beta_1 e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{11,3}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,3}(e_2) = 0$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,3}(e_3) = \frac{1}{\beta_1}$.

4 $\tilde{\Delta}^3_{11,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{11,4}(e_2) = \sqrt{\beta} e_2 \otimes e_2 + \beta e_2 \otimes e_3, + \beta e_3 \otimes e_2$ $\tilde{\Delta}^3_{11,4}(e_3) = \beta e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{11,4}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,4}(e_2) = 0$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,4}(e_3) = \frac{1}{\beta}$.

5 $\tilde{\Delta}^3_{11,5}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{11,5}(e_2) = \beta e_2 \otimes e_2, \tilde{\Delta}^3_{11,5}(e_3) = \beta^2 e_3 \otimes e_3$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,5}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{11,5}(e_2) = \frac{1}{\beta}$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,5}(e_3) = \frac{1}{\beta^2}$.

- Pour l'algèbre $\tilde{A}'^3_{12}$, on a les Bialgèbres suivantes :

1 $\tilde{\Delta}^3_{12,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{12,1}(e_2) = e_2 \otimes e_2 + \beta_9 e_3 \otimes e_3$, $\tilde{\Delta}^3_{12,1}(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 + \gamma_9 e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{12,1}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,1}(e_2) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,1}(e_3) = 0$.

2 $\tilde{\Delta}^3_{12,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{12,2}(e_2) = e_2 \otimes e_2 + \beta_8 e_2 \otimes e_3 + \beta_8 e_3 \otimes e_2 + \beta_9 e_3 \otimes e_3$, $\tilde{\Delta}^3_{12,2}(e_3) = \beta_1 e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{12,2}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{11,2}(e_2) = -\gamma_1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,2}(e_3) = -\gamma_1$.

3 $\tilde{\Delta}^3_{12,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{12,3}(e_2) = e_2 \otimes e_1 + \beta_7 e_3 \otimes e_1, + \beta_8 e_3 \otimes e_2$ $\tilde{\Delta}^3_{12,3}(e_3) = \beta_8 e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{12,3}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,3}(e_2) = -\beta_1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,3}(e_3) = \frac{1}{\beta_8}$.

4 $\tilde{\Delta}^3_{12,4}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{12,4}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2 + \beta_9 e_3 \otimes e_3$ $\tilde{\Delta}^3_{12,4}(e_3) = e_1 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_2 + \gamma_9 e_3 \otimes e_3$,
$\tilde{\varepsilon}^3_{12,4}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,4}(e_2) = 0$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,4}(e_3) = 0$.

5 $\tilde{\Delta}^3_{12,5}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{12,5}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + \beta_7 e_1 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_2 - \beta_7 e_2 \otimes e_3 + \beta_5 e_3 \otimes e_1 - \beta_7 e_3 \otimes e_2 + \beta_9 e_3 \otimes e_3$, $\tilde{\Delta}^3_{12,5}(e_3) = -\beta_1 e_3 \otimes e_3$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,5}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{12,5}(e_2) = \beta_3$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,5}(e_3) = \beta_4$.

6 $\tilde{\Delta}^3_{12,6}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{12,6}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + \beta_3 e_1 \otimes e_3 + \beta_6 e_2 \otimes e_3, \tilde{\Delta}^3_{12,6}(e_3) = \beta_6 e_3 \otimes e_3$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,6}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,6}(e_2) = -\beta_1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,6}(e_3) = \frac{1}{\beta_6}$.

7 $\tilde{\Delta}^3_{12,7}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{12,7}(e_2) = e_2 \otimes e_2$, $\tilde{\Delta}^3_{12,7}(e_3) = \gamma_9 e_3 \otimes e_3$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,7}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{12,7}(e_2) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,7}(e_3) = \frac{1}{\gamma_9}$.

8 $\tilde{\Delta}^3_{12,8}(e_1) = e_1 \otimes e_1, \tilde{\Delta}^3_{12,8}(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2$,
$\tilde{\Delta}^3_{12,8}(e_3) = \gamma_9 e_3 \otimes e_3$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,8}(e_1) = 1, \tilde{\varepsilon}^3_{12,8}(e_2) = 0, \tilde{\varepsilon}^3_{12,8}(e_3) = \frac{1}{\gamma_9}$.

- Pour l'algèbre $\tilde{A}'^{3}_{14}$, on a les Bialgèbres suivantes :
  1. $\tilde{\Delta}^3_{14,1}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{14,1}(e_2) = \beta e_2 \otimes e_2$, $\tilde{\Delta}^3_{14,1}(e_3) = \gamma_1 e_2 \otimes e_2 + \gamma_2 e_2 \otimes e_3 + \gamma_2 e_3 \otimes e_2 + \gamma_3 e_3 \otimes e_3$,
     $\tilde{\varepsilon}^3_{14,1}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{14,1}(e_2) = \gamma$, $\tilde{\varepsilon}^3_{12,1}(e_3) = \beta$.
  2. $\tilde{\Delta}^3_{14,2}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{14,2}(e_2) = \lambda e_2 \otimes e_2$, $\tilde{\Delta}^3_{14,2}(e_3) = \gamma_1 e_2 \otimes e_2 + \gamma_2 e_2 \otimes e_3 + \gamma_2 e_3 \otimes e_2 - \gamma_3 e_3 \otimes e_3$,
     $\tilde{\varepsilon}^3_{14,2}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{14,2}(e_2) = \gamma$, $\tilde{\varepsilon}^3_{14,2}(e_3) = \gamma$.
  3. $\tilde{\Delta}^3_{14,3}(e_1) = e_1 \otimes e_1$, $\tilde{\Delta}^3_{14,3}(e_2) = \gamma_1 e_2 \otimes e_2$, $\tilde{\Delta}^3_{14,3}(e_3) = \gamma_2 e_3 \otimes e_3$,
     $\tilde{\varepsilon}^3_{14,3}(e_1) = 1$, $\tilde{\varepsilon}^3_{14,3}(e_2)\frac{1}{\gamma_1}$, $\tilde{\varepsilon}^3_{14,3}(e_3) = \frac{1}{\gamma_2}$.

7.3 Algèbres Hom-Hopf.

On considère une Hom-bialgèbre $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$.

7.3.1 Définitions de l'antipode.

Definition 7.3.1 Un endomorphisme S de A est appelé antipode si c'est l'inverse de l'identité par rapport au produit de convolution défini sur $End(A)$ par

$$f * g = \mu \circ (f \otimes g)\Delta$$

où l'unité étant $\eta \circ \varepsilon$.

La condition d'antipode peut s'écrire :

$$\mu \circ S \otimes Id \circ \Delta = \mu \circ Id \otimes S \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon.$$

Definition 7.3.2 Une algèbre Hom-Hopf est une Hom-bialgèbre avec une antipode. Alors, une algèbre Hom-Hopf sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A est donnée par

$$\mathscr{H} = (A, \mu, \alpha, \eta, \Delta, \beta, \varepsilon, S)$$

où les morphismes suivants

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A, \quad \eta : \mathbb{K} \longrightarrow A, \quad \alpha : A \longrightarrow A$$
$$\Delta : A \longrightarrow A, \quad \varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \beta : A \longrightarrow A, \quad S : A \to \mathbb{K}$$

satisfaits les conditions suivantes :

1. (A, μ, α, η) est une algèbre Hom-associative unitare.
2. $(A, \Delta, \beta, \varepsilon)$ est une Hom-associative counitare.
3. Δ et ε sont des morphismes d'algèbres, qui se traduit par
$$\begin{cases} \Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1 \quad e_1 = \eta(1) \\ \Delta(\mu(x \otimes y)) = \Delta(x) \bullet \Delta(y) = \sum_{(x)(y)} \mu(x^{(1)} \otimes y^{(1)}) \otimes \mu(x^{(2)} \otimes \mu(y^{(2)}) \\ \varepsilon(e_1) = 1 \\ \varepsilon(x.y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) \end{cases}$$
4. S est l'antipode donc, on a
$$\mu \circ (S \otimes Id) \circ \Delta = \mu \circ (Id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon. \tag{7.3.1}$$

7.3.2 Propriétés des antipodes.

Soit $\mathscr{H} = (A, \mu, \alpha, \eta, \Delta, \beta, \varepsilon, S)$ une algèbre Hom-associative. Pour tout élément $x \in A$, en utilisant le counité et la notation de Sweedler, on peut écrire

$$x = \sum_{(x)} x^{(1)} \otimes \varepsilon(x^{(1)}) \otimes (x^{(2)}). \tag{7.3.2}$$

Alors, pour tout $f \in End_{\mathbb{K}}(A)$, on a

$$f(x) = \sum_{(x)} f(x^{(1)})\varepsilon(x^{(2)}) = \sum_{(x)} \varepsilon(x^{(1)}) \otimes f(x^{(2)}). \tag{7.3.3}$$

Soit $f * g = \mu \circ (f \otimes g)\Delta$ le produit de convolution de $f, g \in End_{\mathbb{K}}(A)$. on peut écrire

$$(f * g)(x) = \sum_{(x)} \mu(f(x^{(1)}) \otimes g(x^{(2)}). \tag{7.3.4}$$

Puisque l'antipode S est l'inverse de l'identité pour le produit de convolution alors S satisfait

$$\varepsilon(x)\eta(1) = \sum_{(x)} \mu(S(x^{(1)}) \otimes x^{(2)}) = \sum_{(x)} \mu((x^{(1)} \otimes S(x^{(2)})). \tag{7.3.5}$$

Proposition 7.3.3 *L'antipode S est unique et on a*

- $S(\eta(1)) = \eta(1)$.
- $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.

Démonstration. 1. On a $S*id = id*S = \eta \circ \varepsilon$. Puisque, $(S*id)*S = S * (id * S) = S$. Si S' est un autre antipode de $\mathscr{H}$ alors $S' = S' * id * S' = S' * idS = S * id * S = S$. Parconséquent l'antipode existe et unique.

2. Comme $e_1 = \eta(1)$ et puisque $\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1$ on a $(S * id)(e_1) = \mu(S(e_1) \otimes e_1) = \otimes S(e_1) = \eta(\varepsilon(e_1)) = e_1$.

3. En appliquant l'équation (7.3.3) à S, on obtient $S(x) = \sum_{(x)} S(x^{(1)})\varepsilon(x^{(2)})$. En appliquant l'équation (7.3.5), on obtient $\varepsilon(x) = \varepsilon \sum_{(x)} \mu(S(x^{(1)}) \otimes x^{(2)}))$. Puisque ε est un morphisme de Hom-algèbre, on a $\varepsilon(x) = \sum_{(x)} \varepsilon(S(x^{(1)}))\varepsilon(x^{(2)}) = \varepsilon \sum_{(x)} S(x^{(1)})\varepsilon(x^{(2)})) = \varepsilon(S(x))$. Donc $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.

□

7.3.3 Détermination des algèbres Hom-Hopf en dimensions 2 et 3.

On considère les Hom-bialgèbres précédentes $(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,\alpha)$ et on tente de les munir d'une structure d'algèbre Hom-Hopf.

La condition (7.3.1) de l'existence de l'antipode se traduit par le système suivant ou $S(e_i)=\sum_{k=1}^n W_{ik}e_k$.

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}(D_i^{rp}W_{rq}C_{rp}^s - D_i^{pq}W_{rq}C_{pr}^s)=0,\ i,s=1,\dots,n.\\ \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}D_i^{pq}W_{rp}C_{rq}^s - b_i\delta_{1s}=0,\quad i,s=1,\dots,n.\\ \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}D_i^{pq}W_{pr}C_{qr}^s - b_i\delta_{1s}=0,\quad i,s=1,\dots,n.\end{array}\right. \tag{7.3.6}$$

Par calculs directs, en utilisant le logiciel Mathématica, on obtient en dimension 2 :

1. $(\mu_1^2,\Delta_{1,4}^2)$, on a $S(e_1)=e_1,\quad S(e_2)=e_2.$
2. $(\tilde{\mu}'^2_1,\Delta_{1,4}^2)$, on a $S(e_1)=e_1,\quad S(e_2)=e_2.$
3. $(\tilde{\mu}'^2_2,\Delta_{2,2}^2)$, on a $S(e_1)=e_1,\quad S(e_2)=e_2.$
4. $(\tilde{\mu}'^2_2,\Delta_{2,4}^2)$, on a $S(e_1)=e_1,\quad S(e_2)=e_2.$

En dimension 3, on a les antipodes suivantes :

1. $(\tilde{\mu}'^3_{10},\Delta_{10,1}^3)$, on a $S(e_1)=e_1,\ S(e_2)=-\frac{\gamma_9 a_{32}}{\gamma_6}e_2+\frac{-\gamma_5+\gamma_6+\gamma_9 a_{32}}{\gamma_9}e_3,$ $S(e_3)=a_{32}e_2-\frac{\gamma_5 a_{32}}{\gamma-6}e_3.$
2. $(\tilde{\mu}'^3_{10},\Delta_{10,5}^3)$, on a $S(e_1)=e_1,\ S(e_2)=0\quad S(e_3)=0.$
3. $(\tilde{\mu}'^3_{11},\Delta_{11,1}^3)$, on a $S(e_1)=e_1,\ S(e_2)=0\quad S(e_3)=a_{33}e_3.$
4. $(\tilde{\mu}'^3_{11},\Delta_{11,2}^3)$, on a $S(e_1)=e_1,\ S(e_2)=0\quad S(e_3)=a_{33}e_3.$
5. $(\tilde{\mu}'^3_{12},\Delta_{12,2}^3)$, on a $S(e_1)=e_1,\ S(e_2)=0\quad S(e_3)=0.$
6. $(\tilde{\mu}'^3_{14},\Delta_{14,1}^3)$, on a $S(e_1)=e_1,\ S(e_2)=a_{22}e_2\quad S(e_3)=0.$
7. $(\tilde{\mu}'^3_{14},\Delta_{14,2}^3)$, on a $S(e_1)=e_1,\ S(e_2)=a_{22}e_2\quad S(e_3)=a_{33}e_3.$

7.3.4 Les Hom-bialgèbres infinitesimales

On s'intéresse dans cette partie à une classe de bialgèbres, appelées Hom-bialgèbres infinitesimales où la condition de compatibilité est différentes de celle concernant les Hom-bialgèbres precedentes. Ces algèbres ont été introduites par M. Aguiar dans [AM00] et généralisées au cas Hom par D. Yau dans ([**?**]).

Definition 7.3.4 Une Hom-bialgèbre infinitesinale est quadriplet (A,μ,Δ,α), avec (A,μ,α) est une algèbre Hom-associative, (A,Δ,α) est une coalgèbre Hom-associative, et la condition

$$\Delta\circ\mu=(\mu\otimes\alpha)\circ(\alpha\otimes\Delta)+(\alpha\otimes\mu)\circ(\Delta\otimes\alpha) \tag{7.3.7}$$

satisfaite.

On traduit en termes de constante de structure l'équation (7.3.7), comme suit

$$\Delta\circ\mu(e_i,e_j)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{k}D_{k}^{rs}e_r\otimes e_s \tag{7.3.8}$$

$$(\mu\otimes\alpha)\circ(\alpha\otimes\Delta)(e_i,e_j)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{ki}D_{j}^{pq}C_{kp}^{r}a_{sq}e_r\otimes e_s \tag{7.3.9}$$

$$(\alpha\otimes\mu)\circ(\Delta\otimes\alpha)(e_i,e_j)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}D_{i}^{pq}a_{ij}a_{rp}C_{qk}^{s}e_r\otimes e_s \tag{7.3.10}$$

Par conséquent, on a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ji}D_{j}^{pq}-\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}D_{i}^{rs}a_{pr}a_{qs}=0, \quad i,p,q=1,\dots,n.\\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}(D_{i}^{pq}D_{p}^{rs}a_{tq}-D_{i}^{pq}a_{rp}D_{q}^{st})=0, \quad i,r,s,t=1,\dots,n.\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{k}D_{k}^{rs}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{ki}D_{j}^{pq}C_{kp}^{r}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{ki}D_{i}^{pq}a_{kj}a_{rp}C_{qk}^{s},\\ i,j,r,s=1,\dots,n.\end{cases} \tag{7.3.11}$$

Proposition 7.3.5 *Les structures de Hom-bialgèbres infinitésimales sur $\mathbb{K}^2$ sont données, relativement aux algèbres Hom-associatives A_i^2 de la classification par les comultiplication suivantes.*

A_3^2 : $\Delta_{3,1}^2(e_1)=0, \quad \Delta_{3,1}^2(e_2)=b_{22}e_2\otimes e_2.$
A_6^2 : $\Delta_{6,1}^2(e_1)=a_{22}e_2\otimes e_2, \quad \Delta_{6,1}^2(e_2)=0.$
A_8^2 : $\Delta_{8,1}^2(e_1)=0, \quad \Delta_{8,1}^2(e_2)=b_{11}e_1\otimes e_1.$
$\tilde{A}_6^2$: $\Delta_{6,1}^2(e_1)=a_{22}e_2\otimes e_2, \quad \Delta_{6,1}^2(e_2)=0.$
$\tilde{A}_8^2$: $\Delta_{8,1}^2(e_1)=a_{11}e_1\otimes e_1, \quad \Delta_{8,1}^2(e_2)=b_{11}e_1\otimes e_1.$
$\tilde{A}_9^2$: $\Delta_{9,1}^2(e_1)=a_{11}e_1\otimes e_1, \quad \Delta_{9,1}^2(e_2)=b_{11}e_1\otimes e_1.$

Remark 7.3.6 Les algèbres A_1^2, A_2^2, A_4^2, A_5^2, A_7^2, $\tilde{A}_1^2$, $\tilde{A}_4^2$, $A_1'^2$, $A_2'^2$, $A_3'^2$, $A_4'^2$, $\tilde{A}_1^2$, $\tilde{A}_2^2$, $\tilde{A}_4^2$ ne possèdent pas de structure de Hom-bialèbres infinitésimales.

Proposition 7.3.7 *Les structures de Hom-bialgèbres infinitésimales sur $\mathbb{K}^3$ sont données, relativement aux algèbres Hom-associatives A_i^3 de la classification par les comultiplication suivantes.*

A_1^3 • : $\Delta_{1,1}^3(e_1) = 0,$
: $\Delta_{1,1}^3(e_2) = -c_{21}e_2 \otimes e_1 - c_{21}e_3 \otimes e_1 - c_{22}e_2 \otimes e_2 - c_{23}e_2 \otimes e_3,$
$- c_{32}e_3 \otimes e_2 - c_{33}e_3 \otimes e_3.$
: $\Delta_{1,1}^2(e_3) = c_{21}e_2 \otimes e_1 + c_{21}e_3 \otimes e_1 + c_{22}e_2 \otimes e_2 + c_{23}e_2 \otimes e_3$
$+ c_{32}e_3 \otimes e_2 + c_{33}e_3 \otimes e_3.$

• : $\Delta_{1,2}^3(e_1) = 0,$
: $\Delta_{3,1}^3(e_2) = -c_{22}e_2 \otimes e_2 - c_{23}e_2 \otimes e_3 - c_{32}e_3 \otimes e_2 - c_{33}e_3 \otimes e_3,$
: $\Delta_{3,1}^2(e_3) = c_{22}e_2 \otimes e_2 + c_{23}e_2 \otimes e_3 + c_{32}e_3 \otimes e_2 + c_{33}e_3 \otimes e_3.$

A_4^3 • : $\Delta_{4,1}^3(e_1) = 0,$
: $\Delta_{4,1}^3(e_2) = b_{11}e_1 \otimes e_1 + b_{12}e_1 \otimes e_2 + b_{13}e_1 \otimes e_3 - b_{33}(e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3),$
: $\Delta_{4,1}^3(e_3) = c_{11}e_1 \otimes e_1 + c_{12}e_1 \otimes e_2 + c_{13}e_1 \otimes e_3 - c_{33}(e_3 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_3).$

• : $\Delta_{4,2}^3(e_1) = 0, \quad \Delta_{4,2}^3(e_2) = b_{11}e_1 \otimes e_1,$
: $\Delta_{4,2}^3(e_3) = c_{11}e_1 \otimes e_1 + c_{12}e_1 \otimes e_2 + c_{13}e_1 \otimes e_3 - c_{22}e_2 \otimes e_1$
$+ c_{22}e_2 \otimes e_2 - c_{33}e_3 \otimes e_1 + c_{33}e_3 \otimes e_3.$

• : $\Delta_{4,3}^3(e_1) = 0,$
: $\Delta_{4,3}^3(e_2) = b_{11}e_1 \otimes e_1 + b_{12}e_1 \otimes e_2 + b_{13}e_1 \otimes e_3 + b_{32}e_3 \otimes e_2$
$- b_{31}e_3 \otimes e_1 + b_{33}e_3 \otimes e_3,$
: $\Delta_{4,3}^3(e_3) = 0.$

A_5^3 : $\Delta_{5,1}^3(e_1) = 0, \quad \Delta_{5,1}^3(e_2) = b_{11}e_1 \otimes e_1, \quad \Delta_{5,1}^3(e_3) = 0.$

A_6^3 : $\Delta_{6,1}^3(e_1) = 0,$
: $\Delta_{6,1}^3(e_2) = b_{11}e_1 \otimes e_1 + b_{12}e_1 \otimes e_2 + b_{13}e_1 \otimes e_3 - b_{33}e_3 \otimes e - b_{33}e_3 \otimes e_3,$
: $\Delta_{6,1}^3(e_3) = 0.$

A_7^3 : $\Delta_{7,1}^3(e_1) = 0, \quad \Delta_{7,1}^3(e_2) = b_{11}e_1 \otimes e_1, \quad \Delta_{7,1}^3(e_3) = c_{11}e_1 \otimes e_1.$

A_8^3 : $\Delta_{8,1}^3(e_1) = 0, \quad \Delta_{8,1}^3(e_2) = b_{33}e_3 \otimes e_3, \quad \Delta_{8,1}^3(e_3) = 0.$

A_{10}^3 : $\Delta_{10,1}^3(e_1) = 0, \quad \Delta_{10,1}^3(e_2) = b_{11}e_1 \otimes e_1, \quad \Delta_{10,1}^3(e_3) = 0.$

A_{11}^3 : $\Delta_{11,1}^3(e_1) = 0, \quad \Delta_{11,1}^3(e_2) = c_{11}e_1 \otimes e_1,$
: $\Delta_{11,1}^3(e_3) = c_{11}e_1 \otimes e_1 + c_{12}e_1 \otimes e_2 + c_{13}e_1 \otimes e_3 + c_{21}e_2 \otimes e_1 + c_{22}e_2 \otimes e_2.$

A_{12}^3 : $\Delta_{12,1}^3(e_1) = 0, \quad \Delta_{12,1}^3(e_2) = 0, \quad \Delta_{12,1}^3(e_3) = c_{11}e_1 \otimes e_1.$

$\tilde{A}_8^3$: $\Delta_{8,1}^3(e_1) = a_{33}e_3 \otimes e_3, \quad \Delta_{8,1}^3(e_2) = b_{33}e_3 \otimes e_3, \quad \Delta_{12,1}^3(e_3) = 0.$

$\tilde{A}_9^3$: $\Delta_{9,1}^3(e_1) = 0, \quad \Delta_{9,1}^3(e_2) = b_{11}e_1 \otimes e_1, \quad \Delta_{9,1}^3(e_3) = c_{11}e_1 \otimes e_1.$

$\tilde{A}_{10}^3$: $\Delta_{10,1}^3(e_1) = 0, \quad \Delta_{10,1}^3(e_2) = b_{11}e_1 \otimes e_1, \quad \Delta_{10,1}^3(e_3) = c_{11}e_1 \otimes e_1.$

$A_6'^3$: $\Delta_{6,1}^3(e_1) = a_{22}e_1 \otimes e_1 - a_{12}e_1 \otimes e_2 - a_{22}e_2 \otimes e_1 + a_{22}e_2 \otimes e_2,$
$\Delta_{6,1}^3(e_2) = 0, \quad \Delta_{6,1}^3(e_3) = 0.$

$\tilde{A}_6'^3$: $\Delta_{6,1}^3(e_1) = a_{22}e_1 \otimes e_1 - a_{22}e_1 \otimes e_2 - a_{22}e_2 \otimes e_1 + a_{22}e_2 \otimes e_2,$
$\Delta_{6,1}^3(e_2) = 0, \quad \Delta_{6,1}^3(e_3) = 0.$

$\tilde{A}'^{3}_{8}$: $\Delta^3_{8,1}(e_1) = a_{22}e_1 \otimes e_1 - a_{22}e_1 \otimes e_2 - a_{22}e_2 \otimes e_1 + a_{22}e_2 \otimes e_2$,
$\Delta^3_{8,1}(e_2) = 0, \quad \Delta^3_{8,1}(e_3) = 0.$

$\tilde{A}'^{3}_{10}$ • $\Delta^3_{10,1}(e_1) = -a_{23}e_2 \otimes e_2 + a_{23}e_2 \otimes e_3 + a_{32}e_3 \otimes e_2 - a_{32}e_3 \otimes e_3$,
$\Delta^3_{10,1}(e_2) = 0, \quad \Delta^3_{10,1}(e_3) = 0.$

- $\Delta^3_{10,2}(e_1) = a_{32}e_3 \otimes e_2 - a_{32}e_3 \otimes e_3$, $\Delta^3_{10,1}(e_2) = 0$, $\Delta^3_{10,1}(e_3) = 0$.

$\tilde{A}'^{3}_{12}$: $\Delta^3_{12,1}(e_1) = a_{22}e_1 \otimes e_1 - a_{22}e_1 \otimes e_2 - a_{22}e_2 \otimes e_1 + a_{22}e_2 \otimes e_2$,
$\Delta^3_{12,1}(e_2) = 0, \quad \Delta^3_{12,1}(e_3) = 0.$

Remark 7.3.8 Les algèbres $A^3_2, A^3_3, A^3_9, \tilde{A}^3_3, \tilde{A}^3_7, \tilde{A}^3_3, \tilde{A}^3_{12}, A'^3_3, A'^3_4, A'^3_7, A'^3_8, A'^3_8, A'^3_9, A'^3_{10}, A'^3_{11}, A'^3_{12}, A'^3_{13}, A'^3_{14}, A'^3_{15}, \tilde{A}^3_7, \tilde{A}^3_9, \tilde{A}^3_{11}, \tilde{A}^3_3$ ne possèdent pas de structure de Hom-bialgèbres infinitésimales.

7.4 Cohomologie de Gerstenhaber-Schack

Soient $B = (B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ une Hom-bialgèbre sur l'espace vectoriel B. Soit les cochaines : $\mathscr{C}^{p,q}_{Hom} = Hom_k(B^{\otimes q}, B^{\otimes p}), p, q \geq 1$,
$\mathscr{C}^{p,q}_{Hom} = \{ f : B^{\otimes q} \longrightarrow B^{\otimes p}, f \text{ est une application linéaire}, f \circ \alpha^{\otimes q} = \alpha^{\otimes p} \circ f \}$.
Les faces horizontales : $\delta^{p,q}_{Hom,H} : \mathscr{C}^{p,q}_{Hom} \longrightarrow \mathscr{C}^{p,q+1}_{Hom}$ sont définies comme :

$$\delta^{p,q}_{Hom,H}(f) = \lambda^p_l \circ (\alpha^{q-1} \otimes f) + \sum_{i=1}^{q} (-1)^i f \circ (\alpha^{\otimes(i-1)} \otimes \mu \otimes \alpha^{\otimes(q-1)}) + (-1)^{q+1} \lambda^p_r \circ (f \otimes \alpha^{q-1}). \tag{7.4.1}$$

Les faces verticales $\delta^{p,q}_{Hom,C} : \mathscr{C}^{p,q}_{Hom} \longrightarrow \mathscr{C}^{p+1,q}_{Hom}$ sont définies comme :

$$\delta^{p,q}_{Hom,C}(f) = (\alpha^{p-1} \otimes f) \circ \rho^q_l + \sum_{i=1}^{q} (-1)^j (\alpha^{\otimes}(j-1) \oplus \Delta \alpha^{\otimes(p-j)}) + (-1)^{p+1} (f \otimes \alpha^{p-1}) \circ \rho^q_r. \tag{7.4.2}$$

Proposition 7.4.1 *La composition*

$$\delta^{2,1}_{Hom,C} \circ \delta^{1,1}_{Hom,C} = 0, \quad \delta^{1,2}_{Hom,H} \circ \delta^{1,1}_{Hom,H} = 0,$$
$$\delta^{1,2}_{Hom,C} \circ \delta^{1,1}_{Hom,H} = \delta^{2,1}_{Hom,H} \circ \delta^{1,1}_{Hom,C}.$$

Démonstration. Voir ([DM16]). □

Proposition 7.4.2 *Soit $D^{p,q}_i : \mathscr{C}^{p,q}_{Hom}(B^{\otimes q}, B^{\otimes p}) \to \mathscr{C}^{p,q+1}_{Hom}(B^{\otimes q+1}, B^{\otimes p})$ des opérations linéaires définies pour $f \in \mathscr{C}^{p,q}_{Hom}(B^{\otimes q}, B^{\otimes p})$ par*

$$D^{p,q}_i(f) = \begin{cases} -\lambda^p_l \circ (\alpha^{q-1} \otimes f) + f \circ (\mu \otimes \alpha^{(q-1)} si\, i = 0, \\ f \circ (\alpha^{\otimes i} \otimes \mu \otimes \alpha^{\otimes(q-i-1)}) si\, \forall, 1 \leq i \leq q-2, \\ f \circ (\alpha^{\otimes q-1} \otimes \mu) - \lambda^p_r \circ (f \otimes \alpha^{q-1}) si\, i = q-1. \end{cases} \tag{7.4.3}$$

Alors

$$D_i^{1,q+1} \circ D_j^{1,q} = D_{j+1}^{1,q+1} \circ D_i^{1,q}\, 0 \leq q, i < j \leq q, et\, \delta_{Hom,H}^{1,q} = \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^{i+1} Di^{1,q}.$$

Proposition 7.4.3 *Soit $S_i^{p,q} : \mathscr{C}_{Hom}^{p,q}(B^{\otimes q}, B^{\otimes p}) \to \mathscr{C}_{Hom}^{p+1,q}(B^{\otimes q}, B^{\otimes p+1})$ des opérateurs linéaires définis pour $g \in \mathscr{C}_{Hom}^{p,q}(B^{\otimes q}, B^{\otimes p})$ par :*

$$S_i^{p,q}(g) = \begin{cases} (\alpha^{p-1} \otimes g) \circ \rho_l^q + (\Delta \otimes \alpha^{(p-1)} \circ g \,\mathrm{si}\, i = 0, \\ (\alpha^{\otimes i} \otimes \Delta \otimes \alpha^{\otimes (p-i-1)}) \circ g \,\mathrm{si}\, \forall, 1 \leq i \leq q-2, \\ (\alpha^{\otimes p-1} \otimes \Delta) - (g \otimes \alpha^{p-1}) \circ \rho_r^q \,\mathrm{si}\, i = p-1. \end{cases} \tag{7.4.4}$$

$$S_i^{p+1,1} \circ S_j^{p+1,1} = S_{j+1}^{p+1,1} \circ S_i^{p,1}\, 0 \leq i \leq j \leq n, \mathrm{et}\, \delta_{Hom,C}^{p,1} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+1} S_i^{p,1}.$$

Theorem 7.4.4 *([DM16]) Soit $B = (B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ une Hom-bialgèbre et $S_{Hom,H}^{p,q} : \mathscr{C}_{Hom}^{p,q} \to \mathscr{C}_{Hom}^{p,q+1}$, $S_{Hom,C}^{p,q} : \mathscr{C}_{Hom}^{p,q} \to \mathscr{C}_{Hom}^{p+1,q}$ les oprérateurs définis dans (7.4.1) et (7.4.2). Alors $(\mathscr{C}_{Hom}^{p,q}, \delta_{Hom,H}^{p,q}, \delta_{Hom,C}^{p,q})$ est un bicomplexe i.e.*

$$\delta_{Hom,C}^{p+1,q} \circ \delta_{Hom,C}^{p,q} = 0 \quad et \quad \delta_{Hom,H}^{p,q+1} \circ \delta_{Hom,H}^{p,q} = 0. \tag{7.4.5}$$

Démonstration. On prouve la première identité.

$$\begin{aligned} \delta_{Hom,C}^{p+1,q} \circ \delta_{Hom,C}^{p,q} &= (\sum_{i=0}^{p} (-)^{i+1} S_i^{p+1,q}) \circ (\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{j+1} S_j^{p,q}) \\ &= \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{i+j} S_i^{p+1,q} \circ S_j^{p,q} \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} S_i^{p+1,q} \circ S_j^{p,q} + \sum_{0 \leq i \leq n-1} (-1)^{i+j} S_i^{p+1,q} \circ S_j^{p,q} \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} S_i^{p+1,q} S_j^{p,q} + \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{i+j} S_{j+1}^{p+1,q} S_i^{p,q} \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} S_i^{p+1,q} S_j^{p,q} + \sum_{0 \leq i < k \leq n} (-1)^{i+k-1} S_k^{p+1,q} S_i^{p,q} = 0. \end{aligned}$$

Pour la seconde identité, voir ([AEM11]). □

Nous définissons le n-ième groupe de cohomologie du complexe ci-dessus pour être la cohomologie des Hom-bialgèbres de $H_{Hom}^n(B, B), n \geq 1$. Le ker de δ_{Hom}^n dans $\hat{C}_{Hom}^n$ est l'espace de n-cocycles défini par :

$$Z_{Hom}^n(B, B) = \left\{ \rho \in \hat{C}_{Hom}^n : \delta_{Hom}^n(\rho) = 0 \right\}. \tag{7.4.6}$$

L'image de ρ^n_{Hom} est l'espace de n-cobord défini par :

$$B^n_{Hom}(B,B) = \left\{\rho \in \hat{C}^n_{Hom} : \rho = \delta^{n-1}_{Hom}(\psi), \psi \in \hat{C}^{n-1}_{Hom}\right\}. \tag{7.4.7}$$

Le groupe de cohomologie de Gerstenhaber-Schack de la Hom-Bialgèbre $B = (B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, \alpha)$ avec coefficient dans elle-même est

$$H^n_{Hom}(B,B) = Z^n_{Hom}(B,B)/B^n_{Hom}(B,B). \tag{7.4.8}$$

En particulier,
$$H^1_{Hom}(B,B) = \left\{f : B \to B : \delta^{0,1}_{Hom,H}(f) = 0 \,\text{et}\, \delta^{1,0}_{Hom,C}(f) = 0\right\}, \text{où}$$

$$\delta^{0,1}_{Hom,H}(f) = \mu \circ (id_B \otimes f) - f \circ \mu + \mu \circ (f \otimes id_B), \tag{7.4.9}$$

$$\delta^{1,0}_{Hom,C}(f) = (id_B \otimes f) \circ \Delta - \Delta \circ f + (f \otimes id_B) \circ \Delta. \tag{7.4.10}$$

En terme des constantes de structure, l'équation (7.4.9) et l'équation (7.4.10) donnent le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{jk} C^q_{ik} - \sum_{k=1}^{n} C^k_{ij} b_{kq} + \sum_{p=1}^{n} b_{ip} C^q_{pj} = 0,\ i,j,q = 1,\dots,n. \\ \displaystyle\sum_{q=1}^{n} D^{pq}_i b_{qr} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik} D^{pr}_k + \sum_{q=1}^{n} D^{qp}_i = 0,\ i,p,r = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{7.4.11}$$

Example 7.4.5 On considère les Hom-bialgèbres de dimension 3 trouvées dans la classification. Les classes de 1-cohomologie suivant la base (e_1, e_2, e_3) sont :

- $(\tilde{\mu}^3_9, \tilde{\Delta}^3_{9,5}) : f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = b_{22} e_2, \quad f(e_3) = 0.$
- $(\tilde{\mu}^3_9, \tilde{\Delta}^3_{9,6}) : f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = b_{22} e_2, \quad f(e_3) = 0.$
- $(\tilde{\mu}^3_{10}, \tilde{\Delta}^3_{10,16}) : f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = 0, \quad f(e_3) = b_{33} e_3.$
- $(\tilde{\mu}^3_{10}, \tilde{\Delta}^3_{10,17}) : f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = b_{22} e_2, \quad f(e_3) = 0.$
- $(\tilde{\mu}^3_{10}, \tilde{\Delta}^3_{10,18}) : f(e_1) = 0, \quad f(e_2) = \frac{1}{2} b_{33} e_2, \quad f(e_3) = b_{33} e_3.$

Les groupes de cohomologie $H^2_{Hom}(B,B)$ et $H^3_{Hom}(B,B)$ jouent un role important dans la theorie de déformation. On écrit leurs définitions explicites.

$$Z^2_{Hom}(B,B) = \left\{ \begin{array}{l} (f,g) \in \hat{C}_{Hom}, \quad \delta^{1,2}_{Hom,H}(f) = 0, \\ \delta^{1,2}_{Hom,C}(f) + \delta^{2,1}_{Hom,H}(g), \delta^{1,0}_{Hom,C}(g) = 0 \end{array} \right\}, \tag{7.4.12}$$

où pour $f : B \otimes B \to B$ et $g : B \to B \otimes B$, on a

$$\delta^{1,2}_{Hom,H}(f) = \lambda^1_l \circ (\alpha \otimes f) - f \circ (\mu \otimes \alpha) + f \circ (\alpha \otimes \mu) - \lambda^1_r \circ (f \otimes \alpha); \tag{7.4.13}$$

$$\begin{aligned}\delta^{1,2}_{Hom,C}(f)+\delta^{2,1}_{Hom,H}(g) &= ((id_B\otimes f)\circ\rho^2_l-\Delta\circ f+(f\otimes id_B)\circ\rho^2_r)+\\ &+(\lambda^2_l\circ(id_B\otimes g)-g\circ\mu+\lambda^2_r\circ(g\otimes id_B)),\end{aligned} \quad (7.4.14)$$

$$\delta^{2,1}_{Hom,C}(g)=(\alpha\otimes g)\circ\rho^1_l-(\Delta\otimes\alpha)\circ g+(\alpha\otimes\Delta)\circ g-(g\otimes\alpha)\circ\rho^1_r, \quad (7.4.15)$$

où $\rho^1_l=\rho^1_r=\Delta \quad \lambda^1_l=\lambda^1_r=\mu$.

$$B^2_{Hom}(B,B)=\left\{(f,g)\in\hat{\mathcal{C}}_{Hom},\exists h:B\to B, f=\delta^{0,1}_{Hom,H}(h), g=\delta^{1,0}_{Hom,C}(h)\right\}, \quad (7.4.16)$$

où

$$\delta^{0,1}_{Hom,H}(h)=\mu\circ(id_B\otimes h)-h\circ\mu+\mu\circ(h\otimes id_B), \quad (7.4.17)$$

$$\delta^{1,0}_{Hom,C}(h)=(id_B\otimes h)\circ\Delta-\Delta\circ h+(h\otimes id_B)\circ\Delta. \quad (7.4.18)$$

$$\begin{aligned}Z^3_{Hom}(B,B)=\Big\{(F,H,G)\in\hat{\mathcal{C}}^3_{Hom}, \delta^{1,3}_{Hom,H}(F)=0, \delta^{2,2}_{Hom,H}(H)-\delta^{1,3}_{Hom,C}(F)=0,\\ \delta^{2,2}_{Hom,C}(H)+\delta^{3,1}_{Hom,H}(G)=0, \delta^{3,1}_{Hom,C}(G)=0\Big\}\end{aligned} \quad (7.4.19)$$

et

$$\begin{aligned}B^3_{Hom}(B,B)=\Big\{(F,H,G)\in\hat{\mathcal{C}}^3_{Hom},\exists(f,g)\in\hat{\mathcal{C}}^2_{Hom}, F=\delta^{1,2}_{Hom,H}(f),\\ H=\delta^{1,2}_{Hom,C}(f)+\delta^{2,1}_{Hom,H}(g), G=\delta^{2,1}_{Hom,C}(g)\Big\}\end{aligned} \quad (7.4.20)$$

où $F:B\otimes B\otimes B\to B$, $H:B\otimes B\to B\otimes B$ et $G:B\to B\otimes B\otimes B$.

D'apès l'équation (7.4.13), on a

$$\mu(\alpha\otimes f)(e_i,e_j,e_k)=\sum_{p=1}^n\sum_{r=1}^n\sum_{q=1}^n a_{qi}F^r_{jk}\mathcal{C}^p_{qr}e_p \quad (7.4.21)$$

$$f(\mu\otimes\alpha)(e_i,e_j,e_k)=\sum_{p=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{q=1}^n \mathcal{C}^l_{ij}a_{qk}F^p_{lq}e_p \quad (7.4.22)$$

$$f(\alpha\otimes\mu)(e_i,e_j,e_k)=\sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n\sum_{r=1}^n a_{ri}\mathcal{C}^q_{jk}F^p_{rq}e_p \quad (7.4.23)$$

$$\mu(f\otimes\alpha)(e_i,e_j,e_k)=\sum_{p=1}^n\sum_{r=1}^n\sum_{q=1}^n F^r_{ij}a_{qk}\mathcal{C}^p_{rq}e_p \quad (7.4.24)$$

On rappelle que

$$\begin{cases}\rho^2_l=(\mu\otimes id_B\otimes id_B)\circ\tau_{23}\circ\Delta\otimes\Delta\\ \rho^2_r=(id_B\otimes id_B\otimes\mu)\circ\tau_{23}\circ\Delta\otimes\Delta\end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_l^2 = (\mu\otimes\mu)\circ\tau_{23}\circ(\Delta\otimes id_B\otimes id_B) \\ \lambda_r^2 = (\mu\otimes\mu)\circ\tau_{23}\circ(id_B\otimes id_B\otimes\Delta) \end{cases}$$

D'après l'équation (7.4.14), on a

$$(id_B\otimes f)\circ\rho_l^2(e_i,e_j) = \sum_{u,v=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n} D_i^{pq}D_j^{rs}C_{pr}^{u}F_{qs}^{v}e_u\otimes e_v, \quad (7.4.25)$$

$$\Delta\circ f(e_i,e_j) = \sum_{u,v=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F_{ij}^{k}D_k^{uv}e_u\otimes e_v, \quad (7.4.26)$$

$$(f\otimes id_B)\circ\rho_r^2(e_i,e_j) = \sum_{u,v=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n} D_i^{pq}D_j^{rs}C_{qs}^{v}F_{pq}^{u}e_u\otimes e_v, \quad (7.4.27)$$

$$\lambda_l^2\circ(id_B\otimes g)(e_i,e_j) = \sum_{u,v=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n} G_j^{pq}D_i^{rs}C_{rp}^{u}C_{sq}^{v}e_u\otimes e_v, \quad (7.4.28)$$

$$g\circ\mu(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} C_{ij}^{k}G_k^{uv}e_u\otimes e_v, \quad (7.4.29)$$

$$\lambda_r^2\circ(g\otimes id_B)(e_i,e_j) = \sum_{u,v=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n} G_i^{pq}D_j^{rs}C_{pr}^{u}C_{qs}^{v}e_u\otimes e_v, \quad (7.4.30)$$

D'après l'équation (7.4.15), on a

$$(\alpha\otimes g)\circ\Delta(e_i) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s,t=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n} D_i^{pq}a_{rp}G_q^{st}e_r\otimes e_s\otimes e_t, \quad (7.4.31)$$

$$(\Delta\otimes\alpha)\circ g(e_i) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s,t=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n} G_ipqD_p^{rs}a_{tp}e_r\otimes e_s\otimes e_t, \quad (7.4.32)$$

$$(\alpha\otimes\Delta)\circ g(e_i) = \sum_{s,t=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n} G_i^{pq}a_{rp}D_q^{st}e_r\otimes e_s\otimes e_t, \quad (7.4.33)$$

$$(g\otimes\alpha)\circ\Delta(e_i) = \sum_{t=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n}\sum_{p,q=1}^{n} D_i^{pq}G_p^{rs}a_{tq}e_r\otimes e_s\otimes e_t. \quad (7.4.34)$$

On a donc le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l}
\sum_{r,q=1}^{n} a_{qi}F_{jk}^{r}C_{qr}^{p}-\sum_{l,q=1}^{n} C_{ij}^{l}a_{qk}F_{lq}^{p}+\sum_{q,r=1}^{n} a_{ri}C_{jk}^{q}F_{rq}^{p}-\sum_{r,q=1}^{n} F_{ij}^{r}a_{qr}C_{rq}^{p}=0,\\
i,j,q=1,\dots,n.\\
\sum_{p,q=1}^{n}(D_{i}^{pq}a_{rq}G_{q}^{st}-G_{i}^{pq}D_{p}^{rs}a_{tp}+G_{i}^{pq}a_{rp}D_{q}^{st}-D_{i}^{pq}a_{rp}G_{q}^{st})=0,\\
i,r,s,t=1,\dots,n.\\
\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n} D_{i}^{pq}D_{j}^{rs}C_{pr}^{u}F_{qs}^{v}-\sum_{k=1}^{n}F_{ij}^{k}D_{k}^{uv}+\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n} D_{i}^{pq}D_{j}^{rs}C_{qs}^{v}F_{pq}^{u}+\\
\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n} G_{j}^{pq}D_{i}^{rs}C_{rp}^{u}C_{sq}^{v}-\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^{k}G_{k}^{uv}+\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{r,s=1}^{n} G_{i}^{pq}D_{j}^{rs}C_{pr}^{v}C_{qs}^{u}=0,\\
i,j,u,v=1,\dots,n.
\end{array}\right. \tag{7.4.35}$$

Pour le couple $(A_1'^2,\Delta_{1,1}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 4 engendré par les générateurs de 2-cocycles. Ainsi, on a
$\mathscr{H}^2=\langle(f_1,g_1),(f_2,g_2),(f_3,g_3),(f_4,g_4)\rangle$ avec

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1(e_1,e_1)=e_1 & f_1(e_1,e_2)=e_2\\ f_1(e_2,e_1)=e_2 & f_1(e_2,e_2)=e_1\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} g_1(e_1)=e_1\otimes e_1\\ g_1(e_2)=e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} f_2(e_1,e_1)=e_2 & f_2(e_1,e_2)=e_1+e_2\\ f_2(e_2,e_1)=e_1+e_2 & f_2(e_2,e_2)=e_1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} g_2(e_1)=e_1\otimes e_1+e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1+e_2\otimes e_2\\ g_2(e_2)=e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_3(e_2,e_2)=e_1\\ g_3(e_2)=e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2.\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} g_4(e_2,e_2)=e_1\otimes e_1\\ g_4(e_2)=e_1\otimes e_1+e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1.\end{array}\right.$$

Pour le couple $(A_1'^2,\Delta_{1,2}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 4 engendré par les générateurs de 2-cocycles. Ainsi, on a
$\mathscr{H}^2=\langle(f_1,g_1),(f_2,g_2),(f_3,g_3),(f_4,g_4)\rangle$ avec

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1(e_1,e_1)=e_1, & \\ f_1(e_1,e_2)=e_2, & f_1(e_2,e_1)=e_2,\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} g_1(e_1)=e_1\otimes e_1,\\ g_1(e_2)=e_2\otimes e_2.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} f_2(e_1,e_1)=e_2, & \\ f_2(e_1,e_2)=e_1+e_2, & g_1(e_1)=e_1\otimes e_1+e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1+e_2\otimes e_2,\\ f_2(e_2,e_1)=e_1, & g_1(e_2)=e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2.\\ f_2(e_2,e_2)=e_2, & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_3(e_2,e_2)=e_1+e_2,\\ g_3(e_2)=e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2.\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} f_4(e_2,e_2)=e_1,\\ g_4(e_2)=-e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_1.\end{array}\right.$$

Pour le couple $(A_1'^2,\Delta_{1,3}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 2 engendré par les générateurs de 2-cocycles. Ainsi, on a $\mathscr{H}^2=\langle(f_1,g_1),(f_2,g_2)\rangle$ avec

$$\left\{\begin{array}{ll} f_1(e_1,e_1)=e_1,\ f_1(e_1,e_2)=e_2, & g_1(e_1)=-e_1\otimes e_1,\\ f_1(e_2,e_1)=e_2,\ f_1(e_2,e_2)=-e_1+e_2, & g_1(e_2)=-e_1\otimes e_1-e_2\otimes e_2.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_2(e_2,e_2)=-e_1,\\ g_2(e_2)=-e_1\otimes e_1+e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1-e_2\otimes e_2.\end{array}\right.$$

Pour le couple $(A_1'^2, \Delta_{1,4}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 4 engendré par les générateurs de 2-cocycles. Ainsi, on a
$\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2), (f_3, g_3), (f_4, g_4) \rangle$ avec

$$\begin{cases} f_2(e_1, e_1) = -e_2, & \\ f_2(e_1, e_2) = -e_1 - e_2, & g_2(e_1) = -e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2, \\ f_2(e_2, e_1) = -e_1 - e_2, & g_2(e_2) = e_1 \otimes e_1. \\ f_2(e_2, e_2) = -e_1 + e_2, & \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3(e_2, e_2) = e_1 - e_2, \\ g_3(e_2) = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2, \end{cases} \quad \begin{cases} f_4(e_2, e_2) = -e_1 - e_2, \\ g_4(e_2) = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2, \end{cases}$$

Pour le couple $(A_3'^2, \Delta_{3,1}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 2 engendré par les générateurs de 2-cocycles. Ainsi, on a $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1) \rangle$ avec

$$\begin{cases} f_1(e_1, e_1) = e_1, \\ g_1(e_1) = -e_1 \otimes e_1. \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(e_2, e_2) = e_2, \\ g_2(e_2) = -e_2 \otimes e_2. \end{cases}$$

Pour le couple $(A_4'^2, \Delta_{4,1}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 3 engendré par les générateurs de 2-cocycles.
Ainsi, on a $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1), (f_2, g_2), (f_3, g_3) \rangle$ avec

$$\begin{cases} f_1(e_1, e_1) = e_1, & & g_1(e_1) = -e_1 \otimes e_1, \\ f_1(e_1, e_2) = e_2, & f_1(e_2, e_1) = e_2, & g_1(e_2) = -\frac{1}{2\lambda} e_2 \otimes e_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(e_2, e_2) = e_1, \\ g_2(e_2) = \lambda e_2 \otimes e_2. \end{cases} \quad \begin{cases} f_3(e_2, e_2) = 2e_2, \\ g_3(e_2) = e_1 \otimes e_1 \lambda e_1 \otimes e_2 - \lambda e_2 \otimes e_2. \end{cases}$$

En utilisant la même procédée, on a :

- Pour le couple $(\tilde{A}_1'^2, \tilde{\Delta}_{1,1}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 4. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1), (f_2, g_2), (f_3, g_3), (f_4, g_4) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}_1'^2, \tilde{\Delta}_{1,2}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 4. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1), (f_2, g_2), (f_3, g_3), (f_4, g_4) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}_1'^2, \tilde{\Delta}_{1,3}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 2. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}_1'^2, \tilde{\Delta}_{1,4}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 4. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2), (f_3, g_3), (f_4, g_4) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}_2'^2, \tilde{\Delta}_{2,2}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 3. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1), (f_2, g_2), (f_3, g_3) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}_2'^2, \tilde{\Delta}_{2,3}^2)$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 4. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_3, g_3), (f_4, g_4) \rangle$.

Remark 7.4.6 Les couples $(\tilde{A}_2'^2, \tilde{\Delta}_{2,1}^2)$ et $(\tilde{A}_2'^2, \tilde{\Delta}_{2,4}^2)$ sont de dimension 0. Ainsi, on a $\mathscr{H}^2 = \langle \{0\}, \{0\} \rangle$.

Voyons maintenant, les Hom-bialgèbres de dimensions 3.

- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_9, \tilde{\Delta}^3_{9,1})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 5. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2), (f_4, g_4), (f_5, g_5) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_9, \tilde{\Delta}^3_{9,2})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 7. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2), (f_4, g_4), (f_5, g_5), (f_6, g_6), (f_7, g_7) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_9, \tilde{\Delta}^3_{9,3})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 7. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2), (f_5, g_5), (f_6, g_6), (f_7, g_7) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_9, \tilde{\Delta}^3_{9,5})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 10. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2), \ldots, (f_{10}, g_{10}) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_9, \tilde{\Delta}^3_{9,6})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 9. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2), \ldots, (f_9, g_9) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_{10}, \tilde{\Delta}^3_{10,1})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 4. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1), (f_2, g_2), (f_3, g_3), (f_4, g_4) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_{10}, \tilde{\Delta}^3_{10,16})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 8. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2), (f_3, g_3), (f_5, g_5), (f_6, g_6), (f_7, g_7), (f_8, g_8) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_{10}, \tilde{\Delta}^3_{10,17})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 9. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2), \ldots, (f_9, g_9) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_{10}, \tilde{\Delta}^3_{10,18})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 1. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_{11}, \tilde{\Delta}^3_{11,1})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 2. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_2, g_2) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_{10}, \tilde{\Delta}^3_{10,16})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 5. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1), \ldots, (f_5, g_5) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_{12}, \tilde{\Delta}^3_{10,12})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 1. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1) \rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^3_{14}, \tilde{\Delta}^3_{14,1})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 2. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle$.

- Pour le couple $(\tilde{A}'^{3}_{14}, \tilde{\Delta}^{3}_{14,2})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 2. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \left\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \right\rangle$.
- Pour le couple $(\tilde{A}'^{3}_{14}, \tilde{\Delta}^{3}_{14,3})$, le $\mathscr{Z}^2$ est de dimension 3. Ainsi, on a
  $\mathscr{H}^2 = \left\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2), (f_3, g_3) \right\rangle$.

Bibliographie

[ACZ09] A. Armour, H. Chen et Y. Zhang – « Classification of 4-dimensional superalgebras », *Comm. in Algebra* **(37)** (2009), p. 3697–3728.

[AEM11] F. Ammar., Z. Ejbehi. et A. Makhlouf – « Cohomology and deformations of hom-algebras », *J. Lie Theory* **(21)** (2011), no. 4, p. 813–736. (Cité pages 50, 52, 69 et 116.)

[Agu01] M. Aguiar – « On the associative analog of lie bialgebras, », *J. Algebras.* **(244)** (2001), p. 492–532.

[AM00] Aguiar et Marcelo – « Infinitesimal hopf algebras, », contemp. Math., vol. 267, Amer. Math. Scor., Providence, RI, 2000, p. 1–29. (Cité page 112.)

[AM07] H. Ataguema et A. Makhlouf – « Deformtions of ternary algebras. », *J.Gen. Lie Theory and Appl* **(1)** (2007), p. 41–55.

[AM09] — , « Notes on cohomologies of ternary algebras of associative type. », *Journal of Generalized Lie Theory and Applications* **(3)** (2009), no. 3, p. 157–174.

[AMS13] F. Ammar., A. Makhlouf. et N. Saadaoui – « Cohomology of hom-lie superalgebras and p-deforemed witt superalgebra », *Czechoslovak Maths.J.63* **3** (2013), p. 721–761.

[AS90] N. Aizawa et H. Sato – « q-deformation of the virasoro algebra with central extension », *Phys. Lett. B 256* **(1)** (1990), p. 185–190. (Cité page 1.)

[BM08] M. Bordemann et A. Makhlouf – « Formality and deformations ofuniversal enveloping algebras », *International Journal of Theoretical Physics* **47** (2008), p. 311–332.

[BM14] S. Benayadi et A. Makhlouf – « Hom-lie algebras with symmetric invariant nondegenerate bilinear forms », *Journal of Geomerty and Physics* **60** (2014), no. 76, p. 38–60.

[Car84] R. Carles – « Sur la structure des algèbres de lie rigides », *Annales de l'Intituit Fourier* **34** (1984), no. 3, p. 65–82.

[CBS02] W. Crawley-Boevey et J. Schoer – « Irreduduble components of varieties of modules », *J.Reine Angew. IMath* **553** (2002), p. 201–220.

[CD84] R. Carles et Y. Diakité – « Sur les variétés d'algèbres de lie de dimension ≤ 7 », *Journal of Algebra* **91** (1984), no. 1, p. 53–63.

[CG11] S. Caenepeel et S. Goyvaerts – « Hom-hopf algebras », *Comm. Aalegra* **39** (2011), no. 6, p. 2216–2240.

[CH16] X. Chen et W. Han – « Classification of multiplicative simple hom-lie algebras », *Journal of Lie Theory* **(26)** (2016), p. 767–775. (Cité page 16.)

[DM08] K. Dekkar et A. Makhlouf – « Bialgebra structures of 2-associative algebras, », *The Arabian Journal for Science and Engineering* **33** (2008), no. 2C.

[DM16] — , « Gerstenhaber-schack cohomology for hom–bialgebras and deformations », *Comm. Algebra* **45** (2016), no. 10, p. 4400–4428. (Cité pages 115 et 116.)

[EM09] M. Elhamdadi et A. Makhlouf – « Cohomology and formal deformations of left alternative algebras », *arXiv : 0907.1548v1[math.RA]* (2009).

[EM11] — , « Deformations of hom-altetnative and hom-malcev algebras », *Algebras Groups Geom.* **2** (2011), no. 28, p. 117–145.

[FGS09] Y. Fregier, A. Gohr et S. Silvestrov – « Unital algebras of hom-associative type and surjective or injective twistings », *J. Gen. Lie Theory Appl.* **(3)** (2009), p. 285–295.

[GD86] M. Gerstenhaber et S. D.Schack – « Relative hochschild cohomology, rigid and the bockstein », *Journal of Pure and Applied Algebra* **43** (1986), p. 53–74.

[Ger63a] M. Gerstenhaber – « The cohomology structure of an associative ring », *Ann of Math.* **(79)** (1963).

[Ger63b] — , « The cohomology structure of an associative ring », *Annals of Mathematics* **78** (1963), p. 267–288.

[Ger64] — , « On the deformation of rings and algebras », *Ann of Math* **79** (1964), no. 2, p. 59–103.

[GM90] M. Goze et A. Makhlouf – « On the rigid complex associative algebras. », *Communication in algebra* **(18)** (1990), p. 4031–4051.

[H.C82] H.C.Myung – « Lie algebras and flexible lie-admissible algebras », *Hadronic Press INC, Hadronic Press Monographs in Mathematics, 1, Massachusetts* (1982). (Cité page 3.)

[HLS06] J. Hartwig, D. Larson. et S. Silvestrov – « Deformations of lie algebras using σ-derivations », *J. Algebra* **(2)** (2006), p. 314–361. (Cité pages 1 et 2.)

[Hu99] N. Hu – « q-witt algebras, q-lie algebras, q-holomorph structure and representations, », *Algebra Colloquium* **6** (1999), no. 1, p. 51–70.

[JL08] Q. Jin et X. Li – « Hom-lie algebra structures on semi-simple lie algebras », *J. Algebra* **(319)** (2008), p. 1398–1408.

[Kha90] Y. Khakimdjanov – « The variety of structures of nilpotent lie algebras. (russian) », *Uspekhi Mat. Nauk* **(45)** (1990), no. 276., p. 151–152 ; translation in Russian Math. Survey.

[LS05a] D. Larson. et S. Silvestrov – « Quasi-hom-lie algebras, central extensions and 2-cocycle-like identities », *J. Algebra 288* **(2)** (2005), p. 321–344.

[LS05b] — , « Quasi-lie algebras, in noncommutave geometry and representation theory in mathematical physics », *Contemp. Math.* **(391)** (2005), p. 241–248.

[Mak97a] A. Makhlouf – « Algebres associatives et calcul formel », *Theorect. Comput. Sci.* **(187)** (1997), p. 123–145.

[Mak97b] — , « Associative algebras and computer algebra. », *Theorical computer science* **(187)** (1997), p. 123–145.

[Mak05] — , « Degeneration, rigidity and irreducible components of hopf algebras », *Algebra colloquium* **(12)** (2005), p. 241–254.

[Mak07] — , « A comparaison of deformations and geometric study of varieties of associative algebras », *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **(2)** (2007), no. ID 18915., p. 24 pages.

[Mak09] — , « Hom-alternative algebras and hom-jordan algebras », *arXiv :0909.0326 [math.RA]* (2009).

[Mak10] — , « Paradigm of nonassociative hom-algebras and hom-superalgebras », *Proceeding of the Jordan Structures in Algebra and Analysis" Meeting (Eds. J. Carmona Tapia,* *A. Morales Capoy, A. M. Peralta, M. I. Ramirez Ilvarez)* (2010), no. Publishing House : Circulo Rojo, p. 145–177.

[Mak12] — , « Hom-dendriform algebras and rota-baxter hom-algebras », *Operads and universal algebra* (2012), no. 9, p. 147–171. (Cité page 82.)

[Maz82] G. Mazzola – « How to count the number of irreducible components of the schemes of finite-dimensional algebra structures », *J.Algebra* **78** (1982), no. 2, p. 292–302.

[MBP05] A. M. M. Bordemann et T. Petit – « Déformation par quantification et rigidité des algèbres envelopantes », *Journal of Algebra* **285** (2005), no. 2, p. 623–648.

[MS08a] A. Makhlouf. et S. Silvestrov – « Hom-algebra structures », *Journal of Generalized Lie Theory and Applications* **(2)** (2008), no. 2, p. 51–64. (Cité page 3.)

[MS08b] — , « Hom-lie admissible hom-coalgebras and hom-hof algebras », *S. Silvestrov, E. Paal, V.Abramov, A. Stolin, (Eds), Generalized Lie theory in Mathematics, Physics and Beyond, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg* (2008), no. Published as Chapter 17, p. 189–206. (Cité pages 1, 4, 5 et 9.)

[MS10a] — , « Hom-algebras and coalgebras », *Journal of Algebra and its Applications* **(9)** (2010), no. 4, p. 553–589. (Cité pages xi, 3, 51, 52 et 69.)

[MS10b] — , « Note of formal deformation of hom-algebras and hom-lie algebras », *Forum Mathematicum* **22** (2010), no. 4, p. 715–739, arXiv : 0712.31a1 [math.RA]. (Cité pages 9, 50 et 98.)

[MY14] A. Makhlouf et Yau – « Rota-baxter hom-lie-admissible algebras », *Comm. Algebra* (2014), no. 42, p. 1431–1257. (Cité page 82.)

[San97] M. Santilli – « Invariant lie-admissible formulation of quantum deformations », *Foundations of Physics* **27** (1997), no. 8, p. 1159–1177.

[She12] Y. Sheng – « Representations of hom-lie algebras », *Algebr. Represent. Theory 15* **(6)** (2012), p. 1081–1098.

[Sil97] S. D. Silvestrov – « On the classification of 3-dimensional colored lie algebras, in quantum groups and quantum spaces », *Banach Center Publications* **40** (1997), p. 159–170.

[Swe69] M. Sweedler – « Hopf algebra, w. a. benjamin », *New York* (1969).

[XcYF12] L. Xiao-chao et L. Yong-Feng – « Classification of 3-dimensional multiplicative hom-lie algebras », *Journal of Xinyang Normal University* **25** (2012), no. 4.

[Xiu14] L. Xiuxian – « Strucures of multiplicative hom-lie algebras », *Advances in Mathematics (China)* **(43)** (2014), p. 817–823.

[Yau] D. Yau – « Infinitesimal hom-bialgebras and hom-lie bialgebras », *arXiv :1001.5000v1 [math.RA]*.

[Yau08a] — , « Enveloping algebra of hom-lie algebras, », *J.Gen.Lie Theory Appl.* **(2)** (2008), no. 2, p. 95–108.

[Yau08b] — , « Hom-bialgebras and comodule algebrs », *arXiv : 0712.3515v2* (2008).

[Yau09a] — , « The classical hom-yang-bxter equation and hom-lie bialgebras », *arXiv : 0906.4128v1* (2009).

[Yau09b] — , « Hom-algebras and homology », *J. Lie Theory.* **(19)** (2009), p. 409–421. (Cité page 10.)

[Yau09c] — , « The hom-yang-baxter equation and hom-lie algebras », *arXiv : 0905.1887v2* (2009).

[Yau09d] — , « Hom-yang-baxter equation, hom-lie algebras, and quasi-triangular bialgebras », *J. Phys. A* (2009), no. 42, p. 165–202.

[Yau10] — , « Hom-associative analogue of *n*-ary hom-nambu algebras and homology », *e-print arXiv : 1005.2373v1* (2010).