Approche fonctorielle et combinatoire de la propérade des algèbres double Poisson

Johan Leray

▶ **To cite this version:**

Johan Leray. Approche fonctorielle et combinatoire de la propérade des algèbres double Poisson. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Angers, 2017. Français. NNT : 2017ANGE0027 . tel-01719403

HAL Id: tel-01719403
https://theses.hal.science/tel-01719403

Submitted on 28 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Johan LERAY

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions, section CNU 25
Unité de recherche : Laboratoire de recherche en mathématiques angevin (LAREMA)

Soutenue le 5 décembre 2017

Approche fonctorielle et combinatoire de la propérade des algèbres double Poisson

JURY

Rapporteur :	**Mme Muriel LIVERNET**, Professeur, Université Paris Diderot
Examinateurs :	**Mme Alessandra FRABETTI**, Maître de conférence, Université Lyon 1
	M. Éric HOFFBECK, Maître de conférence, Université Paris 13
	M. Vladimir RUBTSOV, Professeur, Université d'Angers
	M. Friedrich WAGEMANN, Maître de conférence, Université de Nantes
Directeur de thèse :	**M. Geoffrey POWELL**, Directeur de recherche CNRS, Université d'Angers
	* * *
Rapporteur :	**M. Martin MARKL**, Professeur, Mathematical Institute of the Czech Academy

Thèse pour obtenir le grade de Docteur ès Mathématiques

Approche fonctorielle et combinatoire de la propérade des algèbres double Poisson

présentée à l'Université d'Angers par
Johan Leray

sous la direction de
Geoffrey Powell - Directeur de recherche CNRS

soutenue le
5 décembre 2017

Ce travail de thèse a été financée par

Soutien de nouvelle thématique à l'arrivée d'un nouveau chercheur, Convention numéro 2013-10203 / 10204 entre la Région des Pays de la Loire et l'Université d'Angers

Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement du travail que j'ai mené pendant trois années au sein du laboratoire de mathématiques d'Angers. Ce manuscrit n'aurait pu voir le jour sans l'aide et le soutien que m'ont apporté un certain nombre de personnes qui méritent d'être citées ici.

Je tiens à commencer par remercier grandement mon directeur de thèse, M. Geoffrey Powell, sans qui ce document n'existerait pas. Merci de m'avoir fait confiance, d'avoir été si présent pour moi pendant plus de trois ans, depuis mon mémoire de master jusqu'à la fin mouvementée de cette thèse. Vous avez toujours été d'un soutien sans faille, même dans les moments les moins agréables. Merci également à l'armada de stylos rouges qui a été décimée lors de votre relecture extrêmement minutieuse de ce manuscrit. Encore merci pour tous ces moments au tableau autour d'un café, à vous acharner à me faire comprendre des rudiments de topologie algébrique classique, d'homotopie stable, de géométrie algébrique dérivée, etc ... Grâce à vous, j'ai aujourd'hui un peu moins peur des spectres. J'aurai appris à votre coté à apprécier l'approche fonctorielle des mathématiques, approche qui me semble si belle aujourd'hui. Merci pour tout cela et pour tout le reste.

Je tiens ensuite à remercier les rapporteurs de ce mémoire, Mme Muriel Livernet et M. Martin Markl, pour avoir consacré autant de temps à une relecture minutieuse de ce manuscrit, pour les différentes remarques et enrichissements qu'ils y ont apportés. Tout particulièrement, je tiens à remercier grandement M. Markl d'avoir accepter de relire ce manuscrit en français et Mme Livernet pour la longue discussion que nous avons pu avoir après les rencontres du GDR qu'elle a organisées à Paris. Je tiens également à remercier le reste des membres de mon jury qui m'ont fait l'honneur et le plaisir de venir assister à ma soutenance : merci à Mme Alessandra Frabetti, notamment pour les discussions que nous avons pu avoir lors de notre rencontre aux Diablerets ; merci à M. Éric Hoffbeck, pour sa relecture minutieuse de mon manuscrit et son expertise sur les bases PBW ; un grand merci à M. Friedrich Wagemann, avec qui j'ai toujours eu plaisir à converser de mathématiques, qui n'a jamais été avare ni en explications, ni en temps, et qui a toujours porter un intérêt à mon travail ; enfin, un grand merci à M. Vladimir Rubtsov, d'avoir partagé avec moi, un peu de sa grande expertise mathématique, d'avoir toujours su me conseiller de bonnes lectures, me poser de bonnes questions afin de me faire progresser et d'élargir le champ de mes intérêts, tout cela avec une extrême gentillesse.

À présent un grand merci aux différents membres du Laboratoire Angevin de REcherche en MAthématiques (LAREMA), pour leur accueil, il y a déjà plus de trois ans, lors mon mémoire de master 2. Pour commencer, merci aux membres de l'équipe Physique Mathématique et Topologie Algébrique : encore une fois, merci à Geoffrey et Volodya pour toutes les discussions et les conseils qu'ils ont pu me prodiguer, et aux nombreuses activités qu'ils ont organisées avec un grand investissement. Je remercie Luc pour m'avoir si chaleureusement expliquer les arcanes du laboratoire, pour

m'avoir parrainer sur mon premier enseignement, et pour toutes les discussions mathématiques, de politique interne, et autres que nous avons pu avoir ; merci à Mattia pour sa bonne humeur et son léger accent italien qui ont amenés tant de soleil dans notre salle café ; merci à Jean-Claude pour avoir partagé sa grande expérience et son expertise, merci pour tes conseils et tes compliments, notamment ceux que tu m'avais prodigué après mon premier exposé de groupe de travail, pendant lequel je n'en menais pas large. Enfin, merci à Sinan, pour tous ces moments à parler de mathématiques, mais également pour tous les autres moments (à l'heure où j'écris ces lignes, nous venons de partager une nouvelle édition des Utopiales, édition, ma fois, fort peu reposante ... À qui la faute ?).

Je tiens également à remercier tous les autres membres du laboratoire, en particulier : Frédéric et Mohammed, pour leur direction respective du laboratoire et du département ; François, pour m'avoir fortement épaulé pendant ces trois années, notamment pour avoir, grâce à lui, expérimenté les ateliers (et la relecture d'articles) Math.en.Jeans, pour avoir partagé avec lui les olympiades de maths, pour sa disponibilité afin de répondre à mes questions et mes inquiétudes au niveau de l'enseignement et de l'informatique ; merci à Hélène, qui m'a fait confiance pour m'occuper d'une partie des heures de prépa CAPES ; merci à Étienne, notamment pour sa gestion des relations parfois conflictuelles avec l'ED STIM, mais également pour l'ensemble des discussions mathématiques (mais pas que) que nous avons pu avoir ; un grand merci à Daniel N., pour m'avoir introduit à Tikz, pour les enseignements que nous avons partagés et surtout pour toutes les discussions non-mathématiques que nous avons pu avoir avec Laurent E., que je remercie également, autour d'un café ou, pour sa part, d'une tasse de thé blanc préparée méticuleusement ; enfin, merci à Rodolphe, Fabien, Nicolas, Frédéric P. (pour ses conseils littéraires), Moha, Laurent M., Jacquelin.

Merci à Caroline, pour sa gentillesse, et à Denis, pour sa joie de vivre communicative, qui nous donne chaque semaine une très bonne excuse pour arrêter de travailler. Enfin, merci à Alexandra, pour toute son aide, pour ses délicieux gâteaux, pour toutes les pauses café que nous avons pu partager. Il est clair que je regrette déjà toutes les fois où j'ai pu venir "t'embêter".

Enfin, un grand merci à l'ensemble des doctorants et assimilés que j'ai pu croisé dans les couloirs du LAREMA pendant ces trois ans. Pour commencer, merci les plus anciens : Monsieur Simon (une première fois) qui m'a réservé une place dans le meilleur bureau du labo, en compagnie de Jérôme T., discret mais toujours souriant ; Benjamin, pour toutes les discussions que nous avons eu sur ce que c'est qu'être doctorant et tout le reste. Je te souhaite une bonne continuation après ton post-doc parisien, en espérant que tu puisses trouver un poste ; Quiet, mon "grand frère" de thèse, avec qui je n'ai malheureusement échangé que trop rarement ; Delphine et Mohamed, pour leur organisation du groupe de travail des doctorants à mon arrivée, et pour tout le reste ; Ahn, pour son éternelle bonne humeur.

Merci également à ceux de "ma génération" : Viet Ahn, avec qui j'ai partagé le bureau I104 pendant trois ans ; Clément le démotivateur, pour ton amour (addiction) de la bière et du saucisson (qui résiste à l'envahisseur végétalien), pour toutes les fois où tu es venu nous voir travailler. Nous pourrons, peut-être un jour, partager une partie de Don't Starve together ; Le Li, toujours souriant et avec qui j'ai toujours le plaisir de partager un café.

Un mot également concernant Gaël et Zeina, de passage une année au LAREMA : bon courage à toi Gaël, pour la poursuite de tes recherches au Brésil, le laboratoire de Sao Paulo a récupéré un excellent chercheur mais surtout un joyeux drille ; et enfin bravo à toi, Zeina, pour ton poste de MCF à Besançon.

Enfin, un dernier mot pour les "jeunes" : Ann, merci pour toutes les discussions passionnantes et enrichissantes sur de multiples sujets que nous avons pu avoir, qui m'auront fait énormément

réfléchir, pour tes coups de gueules lors de la préparation de tes cours ou lors de la correction de certaines copies, pour l'organisation des rencontres doctorales que nous avons partagée, et pour tout le reste ; merci à Alexis, qui tient la seule salle d'arcade valable de tout le département, qui n'aura jamais eu peur de tenter de nous faire comprendre son intérêt pour les équations aux q-différences ; merci à Jérôme S., le dernier arrivé du bureau I104, qui aura fini (avec Sinan) d'achever le passage vers le coté obscur d'un certain nombre des doctorants, pourvu que cela dure ; enfin, merci à Marine, Axel et Ouriel, mon "petit frère de thèse", qui vont, j'en suis sûr, perpétrer la bonne ambiance qui règne dans cette petite mais solide équipe de doctorant·e·s : vous avez bien commencé, ne faiblissez pas.

Je ne saurais poursuivre ces remerciements sans écrire quelques mots concernant le LMJL et ses occupants. Un grand merci aux différents enseignant·e·s et personnels qui m'ont accueilli : Gilles Carron et Yahn Rollin, pour m'avoir permis d'avoir un accès au laboratoire afin d'assister au séminaire et d'y venir travailler une fois par semaine ; l'équipe TGA avec dans le désordre Baptiste, qui fût le premier à m'accueillir en tant que collègue, et sa volonté de nous faire comprendre les catégories de Fukaya (désolé, il me reste encore un peu de travail), Paolo, pour ses délicieux gâteaux, Christophe, pour son encadrement de mon mémoire de master 1, et également Sylvain, François L. et Vincent C. et tout particulièrement ceux qui ont animés nos différents groupes de travail Angers-Nantes, Aurélien, Vincent F., Hossein, Laurent, et Friedrich. Merci également à Salim, pour sa passion débordante et communicative des mathématiques, passion qui a occupé un certain nombre de nos trajets communs en train. Un grand merci à Simon Covez, dont la pale copie continue de massacrer du JJG sur les ondes, merci pour nos échanges algébriques, sur l'enseignement, pour les parties de taroinches, et les "quelques" soirées que nous avons faites ensemble. Enfin merci aux autres membres du LMJL, notamment Brigitte du secrétariat et Claude du CRDM, qui m'ont toujours réservé un accueil chaleureux.

Il est grand temps de remercier l'ensemble des doctorants que j'ai pu côtoyer lors de mes jeudis nantais : tout d'abord, merci à Victor M.D., Moudhaffar et Florian pour avoir partagé leur bureau lors de mes venues, cela a toujours été un plaisir de faire des maths en votre compagnie ; merci également Guillaume, pour sa très grande connaissance de la géométrie, notamment sur Euclidea ; merci Olivier, j'espère que tu reviendras très vite des Hauts de France, pour que nous puissions de nouveau partager une bière au Sur Mesure, à moins que tu ne préfères la scène Michelet. En tout cas, nous n'oublierons pas de demander à Caroline V. de nous accompagner, j'en profite pour la remercier également ; merci à Jacques, pour sa gentillesse et la pédagogie dont il a fait preuve pour essayer de m'expliquer tant de choses lors de nos différents échanges mathématiques ; un grand merci à Victor Vilaça Da Rocha (j'aurai au moins écrit une fois ton nom sans me tromper), pour son incommensurable amour et connaissance du cinéma et de la musique (un petit air d'Agnès Obel me trotte dans la tête, superposé à un solo de guitare saturée venu directement de la fête des enfers, c'est dire comme ton spectre est large), pour ta bonne humeur si communicative ; également un grand merci à Noémie, pour son éternel sourire et ses chants guillerets qui me font penser que les invariants de nœuds rendent les gens heureux ; un très grand merci à M. Thomas Wallez, pour le nombre incalculable de blagues qu'il a produit, celle du tapis volant en tête, pour toutes ces explications sur les subtilités du handball, pour tous les échanges autour de l'enseignement et notre passion commune pour la bonne bouffe et la bonne bière ; enfin merci aux arrivants plus récents, notamment Caroline R., qui me fait toujours rire, Solène et son addiction à la taroinche, Matthieu D., pour les manifs que nous avons partagé et cette soirée traquenard à Angers ; Hélène, pour ces cafés dans les trains en directions de GDR où très certainement, nous n'allions rien comprendre

aux exposés. Un merci également à Côme, Matthieu K., Zoé, Nicolló, Guillem et Claire. Également merci à Ronan, le grimpeur fou, expatrié à Poitiers pour sa thèse.

Comment pourrais-je oublier les fabuleux, les magnifiques solides du bureau 9. Un grand merci à Valentin, enfin revenu de Mayotte où il a expérimenté le semi-groupe de la chaleur, ainsi que malheureusement, les inégalités. Je suis ravi que tu es pu revenir t'installer en quasi-voisin avec la toujours souriante Camille, que d'apéros, de soirées et de vacances nous allons pouvoir de nouveau partager. Je vous souhaite le meilleur à tous les deux.

Également un grand merci à M. Pierre Vidotal, le meilleur des bizuts, qui a hérité, il y a fort longtemps, du pire des parrains. Toi aussi, tu as enfin pu revenir d'une lointaine et obscure contrée appelée Vendée, où règne un mâle qui ne dort jamais (Simon). Un grand merci à Elsa et à la plus-si-petite Lisa, je vous souhaite tout le bonheur du monde, comme le dirait une chanson pas terrible (oui, je reste et resterai bégueule en musique, mais pas que). Vous formez une bien belle famille, que j'ai toujours plaisir à retrouver autour d'une petite partie de palets sur les bords de l'Erdre, ou à l'une de ces fameuses soirées "pas de projet".

Attention , message d'urgence transmit par le ministère de l'agriculture : on annonce une baisse importante de la consommation de bières et de saucissons en région Nantaise depuis un peu moins de deux ans. Cette diminution entraîne un déséquilibre important du marché agricole de l'Ouest, avec de graves conséquences sur l'économie. Le ministre et toute son équipe cherche activement une solution. J'en ai une simple et peu coûteuse : un billet d'avion Montréal-Nantes à l'attention de M. Gobin. Un immense merci, Damien, pour tout ce que nous avons partagé depuis le master 1 : les discussions mathématiques, la bière, les discussions politiques, le saucisson, notre vision commune de l'enseignement, encore la bière, une partie de console, un ibuprofène, nos réflexions quant aux métiers de fin de carrière, nos vacances dans le Sud avec le reste de la fine équipe, les expéditions plages, les boîtes de Haribo, re la bière et le saucisson. Enfin bref, tous ces moments qui se font trop rares depuis que tu es parti outre atlantique. J'ai hâte que tu reviennes du pays des caribous (en plus, nous, on a du fromage !).

L'enchaînement est tout trouvé : un très grand merci aux exilés parisiens, que j'ai toujours plaisir à retrouver lors des vacances (ou d'une conf à Paris). À commencer par Monsieur Charron, pour ton aide en prépa agreg, ton chaleureux accueil à l'île d'oeil (pour tolérer mes jeux de mots foireux), pour nos discussions autour de l'enseignement, toujours enrichissantes pour moi, et pour tout le reste. Merci à Pti Radis et Moyen Radis, connus également sous les pseudonymes Claudie et Émilien : Claudie, pour tous les cafés de démotivations que je t'ai forcé à prendre et qui ne t'auront finalement pas si mal réussi et Émilien, maestro à la fois de la physique et des pots de thèses, pour avoir été l'investigateur de ce fameux McDo à Escourse qui nous aura fait tant rire (alors que le repas qui suivi, bizarrement beaucoup moins, merci Pti-radis ...). Encore merci à tous les deux. Merci beaucoup à Leïla, tous ces moments de fou rire, notamment au sujet de Dagobert, et pour nous avoir accueilli dans ta colloc pour d'innombrables soirées inoubliables en ta compagnie. Un grand merci à Maëva, Nicolas et le très jeune Arthur (que j'ai hâte de rencontrer), pour tous les cafés pris en prépa agreg (avec Claudette), pour votre accueil chaleureux dans votre jolie maison : je vous souhaite plein de bonheur dans votre nouvelle vie à trois.

Ces remerciements seraient incomplet sans évoquer le nom de M. Beaudouin : Thomas, merci pour tout, tout ce que nous avons pu partager pendant ces années, qui commencent à être nombreuses, ces moments de maths, ces nombreux débats politiques, syndicaux, et autour de l'enseignement. Un grand merci pour toutes ces soirées, notamment les soirées angevines dans ton petit appart de la Doutre, en compagnie de Simon (encore lui) et Sébastien. J'espère que tu pourras

quitter Bressuire rapidement pour revenir dans la région nantaise.

Un grand merci à Henri, notamment pour ce séjour à l'exposition universelle de Milan. De même, un grand merci à Viviane, que je suis toujours content de retrouver lors de ces passages exprès à Nantes : c'est toujours agréable d'aller manger une galette en ta compagnie. Un très grand merci à Gwendoline, pour les cinés du mardi et les bière de débrief qui suivent, pour ces apéros improvisés, enfin, pour ces deux voyages en Inde que nous avons partagé : je te souhaite une très bonne continuation pour ta thèse. I want to thank Sayali and Anto for their beautiful wedding : thank you to Salayi's family, especially her parents and her sister Aboli, for their warm welcome in Pune : I look forward to see you in France.

Enfin, je ne peux finir ces remerciements sans évoquer ceux qui m'accompagnent depuis maintenant de longue années, avant cette vie mathématique.

Commençons par la bande de prépa, avec qui j'ai partagé et je partage tant de choses (mais surtout des kisscool ...). Un grand merci à : Pierre dit Tripio, pour sa gentillesse, malgré qu'elle soit si bien cachée, et son sens du compliment ; Romain dit Manouch, Romain dit Roomy, Frédéric dit Derrick, ou l'éternel gros poulet ; Pierre-Emmanuel dit P.E., notamment pour les très bonnes soirées que j'ai pu passer en ta compagnie sur Paris ; Vincent dit Vince, rien que pour la non-entrée au Studio 49, je t'en suis reconnaissant à jamais (Notons au passage le peu d'originalité quant aux choix de ces surnoms. En même temps, ils vous vont si bien.) ; Alexandre dit Winnie, reviens-nous mon Winnie, tu es trop loin ; Mélanie dite Chonchon, pour tous les bons moments partagés en première année puis ensuite en licence, c'est bien elle, la reine hispanique de cette promotion ; il ne faudrait surtout pas oublier M. Simon Souchet dit Saimone, pour l'ensemble de son œuvre, tous les moments partagés depuis maintenant dix ans ; Sébastien dit M. Groupe 15, le meilleur des binômes de khôlles (car nous n'étions qu'un binôme), parti en région lilloise afin de devenir notre fournisseur officiel de Chimay bleue, j'espère que tu reviendras vite ; Élodie, pour son éternelle joie de vivre et la magnifique paire de chaussettes qu'elle m'a offerte, j'espère que nous pourrons bientôt goûter ton fromage ; enfin Louise et Aurélien, pour les soirées de théâtres d'impro et les autres, je vous souhaite plein de bonheur dans votre nouveau chez-vous.

Je remercie également Cécile et Olivier, et leurs deux enfants Enzo et Lise : même si vous êtes (re)parti loin sous le soleil du sud, j'ai toujours plaisir à vous retrouver. Bon courage Olivier pour les concours d'enseignants, tu seras parfait face à des élèves. Un grand merci à Alice et Lucas : il est vrai que vous aussi, je ne vous vois que trop rarement mais toujours avec plaisir. En espérant que votre envie de monter votre clinique se concrétise bientôt.

Si l'on remonte encore dans le temps (et cela ne nous rajeunit pas), on arrive à la bande des mousquetaires. Comment te remercier Ambroise, pour tous ces innombrables moments passés en ta compagnie, depuis les salles de ces foutus cours d'anglais, les inoubliables soirées passées à Pompinelle en compagnie de Geoffroy, Gaël et Bertille (dont je me remémore les gaufres de notre première rencontre), cette fameuse bataille de maïs à Andard, ce superbe voyage en Espagne organisé par Monique et Christian, que je remercie au passage, la soirée saucissette (entre autres), nos innombrables trajets à pied, toujours ponctués du traditionnel arrêt, jusqu'aux dernières soirées rennaises, agrémentée de la désormais célèbre chanson "Minumaï".

J'en profite également pour remercier Ophélie, qui compte encore beaucoup pour moi : j'espère te revoir très bientôt.

Viens le tour de ceux qui m'ont fait l'honneur d'être l'un des témoins de ce que la tradition veut être le plus beau jour de leur vie (même si, pour plagier la célèbre modestie des Potots, ce n'était qu'un jour bien terne par rapport à celui où ils m'ont rencontré). Merci à toi, mon Jean-Eudes,

pour être l'une des plus belles personnes qu'il m'ait été donner de côtoyer, reste qui tu es. Je chérie le souvenir des moments passés square de l'isoret en ta compagnie. Merci Marion, de supporter Jeanneudes, de rester simple, franche et toujours souriante. Merci à Théa, de les avoir rendus si heureux. Vous formez tous les trois une magnifique petite famille.

Enfin, les quatre mousquetaires ne seraient pas quatre sans notre dernier comparse. Un très grand merci à mon ami Samuel, mais également à celle qui l'accompagne depuis un petit bout de chemin, Noémie. Merci à tous les deux, j'ai toujours un immense plaisir à vous retrouver pour partager un verre, un repas, un concert de rock-prog-jazz (rayer la mention inutile). Merci pour toutes les fois où vous m'avez fourni le gîte et le couvert dans votre jolie maison. Vivement la prochaine fois ! Florian et Samuel, un grand merci pour tous ces moments musicaux, que ce soit en répétition dans la longère aménagée par vos parents, ou dans son grenier pendant nos soirées arrosées au rhum et au rock des années 70 : le titre de la section 4.3.3 vous est dédiée. J'en profite au passage pour remercier Marie-Claire et Thierry pour avoir supporter tout ce bruit et pour leur accueil toujours chaleureux. Une pensée à Lélia également, qui a dû subir mes cours de maths.

Bref, merci à tous les trois, fidèles parmi les fidèles, vous méritez un bisou.

Merci à Delphine, Charlotte et Vincent, Audrey et Arnaud, et enfin le magnifique Mathias, que je ne vois que trop peu mais que je suis toujours ravi de retrouver à l'occasion. Merci à Matthieu pour tout ce que nous avons partager étant enfant et à Fabienne d'avoir fait son bonheur lors d'un très joli mariage : je vous souhaite plein de bonheur. J'ai également une pensée mélancolique pour Emmanuel ...

Mes presque-derniers mots sont dédiés à mes deux familles (la "classique" et la belle, bien que la première soit très belle également). Véronique et Jacques, je ne saurais assez vous remercier du merveilleux accueil que vous m'avez fait dans votre maison, il y a cela maintenant dix ans. J'y ai fais la rencontre d'une famille merveilleuse, remplie de belles personnes. Merci pour tout ces moments partagés, qui m'auront fait grandir, et toutes ces galettes dont l'abus m'aura fait ... Merci à Myriam, notamment pour m'avoir supporté lors de notre périple en Inde (les grottes d'Ellora resterons gravées dans ma mémoire), en espérant que ta nouvelle vie à Coutances te plaise. Merci à Barthélemy et Mathieu, à qui je souhaite le meilleur pour la suite. Enfin, il est grand temps de remercier du fond du cœur les deux personnes sans qui, ces lignes n'auraient jamais existées. Je remercie donc mes parents Françoise et Daniel. Merci pour tout, votre totale confiance, votre soutien constant, tous vos encouragements qui m'ont poussés à toujours continuer, pour tous ces Lego qui ont très certainement déteints sur ce travail : l'ensemble de ce texte (et plus particulièrement le titre de la section 6.1.3) vous est dédié. Je tiens également à remercier très chaleureusement le reste de ma famille : Sébastien, Véronique, Sidonie et Philomène ; Nicolas, Anne, Louise et Rose ; Karine, Élaïa et Nell ; et the last but not the least, Manon.

Mes enfin-derniers mots sont à l'attention de Mathilde qui égaye ma vie depuis maintenant tant années. Le plus grand des merci pour ton soutien et tes encouragements permanents, pour m'avoir supporté pendant ces derniers mois de thèse, pour nos voyages passés et futurs ... bref, pour tous ces instants que nous avons et surtout allons partager. Merci d'être présente à mes côtés, et de rendre ma vie plus belle.

SOMMAIRE

Introduction **17**

Conventions **31**

1 Double-crochet de Poisson **33**
1.1 Rappels sur des structures usuelles . . . 33
1.1.1 Crochets d'une catégorie monoïdale symétrique additive . . . 33
1.1.2 Catégorie monoïdale symétrique fermée . . . 36
1.1.3 Modules et bimodules . . . 38
1.1.4 Dérivations . . . 41
1.2 Σ-Algèbre double-Poisson . . . 45
1.2.1 Définition . . . 45
1.2.2 Double Poisson dans la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ . . . 51
1.2.3 Double Poisson sur un monoïde libre . . . 54

2 Double Lie et double Lie Rinehart **59**
2.1 Double Lie-Rinehart . . . 59
2.1.1 Rappels sur les algèbres de Lie-Rinehart . . . 59
2.1.2 Double Lie-Rinehart . . . 61
2.1.3 Exemple : le double crochet de Koszul . . . 65
2.1.4 Propriété de décalage . . . 68
2.2 Comportement homotopique des double crochets quadratiques . . . 71
2.2.1 Quelques rappels sur l'homotopie des algèbres . . . 71
2.2.2 Critère d'existence de double crochets décalés . . . 73
2.2.3 Double-Poisson et résolution minimale . . . 77

3 Structures monoïdales **83**
3.1 Sur les $\mathfrak{S}$-modules . . . 87
3.1.1 Combinatoire pour les $\mathfrak{S}$-modules . . . 87
3.1.2 Produits de composition et de concaténation sur $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$ . . . 92
3.1.3 Produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-modules réduits . . . 98
3.2 Sur les $\mathfrak{S}$-bimodules . . . 101
3.2.1 Combinatoire sous-jacente aux produits de $\mathfrak{S}$-bimodules . . . 101
3.2.2 Produits de la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$ . . . 105
3.2.3 Produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-bimodules . . . 110

3.2.4 Aparté : au sujet du produit $\circ$ . . . 113
3.3 Foncteur d'induction . . . 113
3.3.1 Adjonction Ind-Res . . . 114
3.3.2 Compatibilité avec les produits . . . 116
3.4 Résumé . . . 119

4 Pro(to)pérades **123**
4.1 Rappels sur les opérades, les propérades et les props . . . 123
4.1.1 Définitions équivalentes de PROP . . . 123
4.1.2 Une première classe d'exemples : les opérades . . . 127
4.1.3 Une classe d'exemples plus large : les propérades . . . 134
4.1.4 Les exemples centraux . . . 137
4.2 Monoïdes diagonaux . . . 144
4.2.1 PROPs induites . . . 144
4.2.2 Protopérade et coprotopérade . . . 146
4.2.3 Compositions partielles . . . 147
4.3 Description de la protopérade libre . . . 149
4.3.1 Monoïde libre d'une catégorie monoïdale abélienne . . . 150
4.3.2 Une première description de la protopérade libre . . . 151
4.3.3 Foncteur d'induction et protopérade libre . . . 157
4.4 Maçonnerie de la protopérade libre . . . 157
4.4.1 Another brick in the wall . . . 158
4.4.2 Retour vers la protopérade libre . . . 164
4.4.3 Représentation diagrammatique des monômes de $\mathscr{F}(V)$ . . . 167

5 Dualité de Koszul **171**
5.1 Dérivation . . . 171
5.1.1 (Co)Augmentation . . . 171
5.1.2 Bimodule infinitésimal sur une protopérade . . . 172
5.1.3 (Co)Dérivations . . . 174
5.2 Construction (Co)Bar et dualité de Koszul des protopérades . . . 176
5.2.1 Adjonction bar-cobar . . . 176
5.2.2 Dualité de Koszul . . . 178
5.2.3 Le cas des pro(to)pérades quadratiques . . . 180
5.3 Exemples de résultats de dualité . . . 182
5.3.1 Loi de remplacement pour les propérades . . . 182
5.3.2 Le cas de la propérade $\mathcal{D}Pois$ . . . 184
5.3.3 $\mathcal{P}$-algèbres homotopiques . . . 186

6 Bases PBW **189**
6.1 Protopérade-shuffle . . . 190
6.1.1 Produit shuffle . . . 190
6.1.2 Définition par les compositions partielles . . . 193
6.1.3 Le complexe du Lego® . . . 195
6.1.4 Construction bar de la protopérade libre . . . 203
6.2 Suite spectrale de Poincaré-Birkhoff-Witt . . . 204

6.2.1 Bases PBW . . . 204
6.2.2 Suite spectrale . . . 209
6.2.3 Homologie du complexe filtré . . . 212
6.2.4 Le cas $\mathcal{DC}om^{proto}$ . . . 218

7 Une approche diopéradique **221**
7.1 Combinatoire de genre 0 . . . 221
7.2 Monoïdes . . . 223
7.2.1 Compositions partielles et monoïde libre . . . 223
7.2.2 Intermède - les diopérades . . . 225
7.3 Dualité de Koszul et bases PBW . . . 228

Perspectives **231**

A Algèbre catégorique **235**
A.1 Catégorie monoïdale . . . 235
A.2 Produit de convolution de Day . . . 238

B Σ-Algèbre NC-Poisson **239**
B.1 Dérivation II . . . 239
B.2 Définitions . . . 243
B.2.1 à la Crawley-Boevey . . . 243
B.2.2 Définition équivalente . . . 244
B.3 Lien avec les Σ-algèbres double Poisson . . . 246
B.4 Algèbres NC-Poisson libres dans $\mathtt{C} = \mathtt{DGA}_k$ . . . 247
B.5 Double crochet induisant une structure $\mathbf{1}$-$\mathtt{NCPoiss}$ . . . 249

C Rappels de Vallette **253**
C.1 Foncteurs polynomiaux et analytiques . . . 253
C.2 Monoïde libre dans une catégorie monoïdale abélienne . . . 254
C.3 Correspondance des produits $\boxtimes_c$ et $\boxtimes_c^{Val}$ . . . 257
C.4 Le produit de composition non-connexe $\boxtimes$ *"à la Vallette"* . . . 260
C.5 Structures de catégorie de modèles . . . 263

D Utilisation de Singular **265**
D.1 Procédures de bases . . . 265
D.2 Calcul tensoriel . . . 267
D.2.1 Unité . . . 267
D.2.2 Degré . . . 268
D.2.3 Comparaison/simplification . . . 269
D.2.4 Bimodule . . . 270
D.2.5 Symétrie . . . 270
D.3 Anti-symétrie . . . 271
D.4 Compatibilité du double crochet avec la différentielle . . . 273
D.4.1 Différenciation . . . 273
D.4.2 Différentielle v.s. double crochet . . . 274
D.5 Double Jacobi . . . 275

D.5.1 Double crochet 275
D.5.2 Double Jacobiateur 278
D.6 NC-Poisson 281
D.6.1 Calcul tensoriel 281
D.6.2 Anti-symétrie 283
D.6.3 Compatibilité avec la différentielle 285
D.6.4 NC-Jacobi 286
D.7 Un exemple d'utilisation 287

Bibliographie **290**

Index **297**

INTRODUCTION

Le but de cette thèse est d'amener à une meilleure compréhension des structures double Poisson de la géométrie algébrique non-commutative, introduite par Van den Bergh en 2008 dans son article *Double Poisson algebras* [VdB08a], lorsque l'on se place dans le cadre plus général de la géométrie algébrique non-commutative dérivée.

Géométrie algébrique non-commutative

En géométrie algébrique, à une algèbre commutative C au dessus d'un corps k (que l'on prendra de caractéristique 0 pour toute cette thèse) correspond un schéma affine $\mathrm{Spec}(C)$, donné par son foncteur des points

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Spec}(C): & \mathtt{CommAlg}_k & \longrightarrow & \mathtt{Sets} \\ & B & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathtt{CommAlg}_k}(C,B) \end{array}.$$

Le schéma $\mathrm{Spec}(C)$ est l'objet géométrique correspondant à l'algèbre des fonctions C. Cependant, qu'advient-il si l'on veut considérer une algèbre de fonctions *non-commutative* ? À quel objet géométrique une telle algèbre associative A correspond-elle ? Kontesevich et Rosenberg propose de considérer la famille $\left\{\mathrm{Rep}_V(A)//\mathrm{GL}(V)\right\}_V$, *l'espace de modules des représentations de* A, paramétrée par un k-espace vectoriel V de dimension finie, comme des "approximations successives" d'un hypothétique schéma affine non-commutatif "$\mathrm{Spec}(A)$".

Le schéma $\mathrm{Rep}_V(A)$, dit *schéma de représentations* de A sur un espace vectoriel V de dimension finie, est défini par son foncteur des points

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Rep}_V(A): & \mathtt{CommAlg}_k & \longrightarrow & \mathtt{Sets} \\ & B & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathtt{Alg}_k}(A, \mathrm{End}\,(V)\otimes B) \end{array}.$$

Ce schéma est affine, c'est à dire qu'il existe une k-algèbre commutative notée A_V telle que

$$\mathrm{Rep}_V(A) = \mathrm{Spec}(A_V)$$

et telle que, pour tout algèbre commutative B, on a l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathtt{Alg}_k}(A, \mathrm{End}\,(V)\otimes B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{CommAlg}_k}(A_V, B).$$

Ainsi, une description simple de $\mathrm{Rep}_V(A)$ est de donner l'algèbre commutative A_V qui lui correspond : celle-ci est définie comme l'algèbre commutative sur l'ensemble de générateurs

$$\left\{a_{ij} \;\middle|\; a\in A, 1\leqslant i,j\leqslant \dim_k V\right\}$$

pour un isomorphisme $k^{\dim_k V} \cong V$ fixé, et soumise aux relations suivantes :

$$\alpha a_{ij} = (\alpha a)_{ij}, \quad a_{ij} + b_{ij} = (a+b)_{ij}, \ \sum_l a_{il} b_{lj} = (ab)_{ij} \text{ et } 1_{ij} = \delta_{ij}$$

avec $\alpha \in k$, $a, b \in A$ et où δ est le symbole de Kronecker. Le passage au quotient par l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur les schémas de représentations correspond au niveau des algèbres à un passage aux invariants sous l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}(V)$: on considèrera alors l'algèbre $A_V^{\mathrm{GL}(V)}$, l'algèbre des coordonnées de $\mathrm{Rep}_V(A)//\mathrm{GL}(V)$.

Kontsevich et Rosenberg considèrent alors que, si l'espace de modules des représentations approxime l'espace affine non-commutatif associé à A, alors toute construction non-commutative sur A devrait induire son homologue classique (commutatif) sur la famille $\left\{\mathrm{Rep}_V(A)//\mathrm{GL}(V)\right\}_V$: c'est le *principe de Kontsevich-Rosenberg*. En suivant ce principe, de nombreux auteurs ont développé la géométrie algébrique non-commutative. On pourra se référer à [Gin05] pour la plupart des constructions suivantes.

- ▷ Le k-espace vectoriel des *fonctions régulières* (cf. [Gin05, Déf. 11.3.1]) associé à l'algèbre associative A est
$$A_\natural := A/[A,A];$$
notons qu'ici, on ne quotiente pas par l'idéal engendré par les commutateurs mais seulement par les commutateurs, d'où la perte de la structure d'algèbre. Remarquons également que $A_\natural$ est égal à $\mathrm{HC}_0(A)$, avec $\mathrm{HC}_\bullet(-)$ l'homologie cyclique (cf. [Lod98]). L'espace vectoriel des fonctions régulières est munie d'un morphisme trace :
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr}_V(A) : & A/[A,A] & \longrightarrow & A_V^{\mathrm{GL}(V)} \\ & a & \longmapsto & \sum a_{ii} \end{array},$$
qui induit un morphisme surjectif $\mathrm{Sym}(\mathrm{Tr}_V(A)) : \mathrm{Sym}(A_\natural) \to A_V^{\mathrm{GL}(V)}$ (où $\mathrm{Sym}(-)$ est l'algèbre symétrique libre), par un théorème de Procesi [Pro76].
- ▷ Pour une k-algèbre associative commutative C et un C-module à gauche N, l'espace $\mathrm{Der}(C,N)$ des dérivations $\theta : C \to N$ est représenté par le C-module Ω_C^{com} des différentielles de Kähler, c'est à dire qu'on a l'isomorphisme naturel
$$\mathrm{Der}(C,N) \cong \mathrm{Hom}_{C-\mathtt{Mod}}(\Omega_C^{com}, N).$$
Dans le cas de la géométrie non-commutative, Cuntz et Quillen introduisent, associé à A une k-algèbre associative, le A-bimodule Ω_A des 1-formes différentielles non commutatives (cf. définition 1.1.4.7) et le complexe de de Rham non-commutatif donné par
$$\mathrm{DR}_k^\bullet(A) := \left(T_A(\Omega_A)\right)_\natural$$
où, pour une k-algèbre graduée B, $B_\natural$ est le k-espace vectoriel $B/[B,B]$ avec $[-,-]$ le commutateur donné par $[a,b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba$ et avec la différentielle induite par la dérivation universelle $d : A \to \Omega_A$.
- ▷ Crawley-Boevey introduit le A-bimodule des bidérivations ou double dérivations (cf. définition 1.2.1.1) :
$$\mathbb{D}\mathrm{er}(A) := \mathrm{Der}(A, A \otimes A) ;$$

alors tout $\Theta \in \mathbb{D}\mathrm{er}(A)$ induit une matrice $(\Theta_{ij})_{i,j\in[\![1,\dim V]\!]}$ de champs de vecteurs sur chaque $\mathrm{Rep}_V(A)$, donnée par

$$\Theta_{ij}(a_{uv}) = \Theta(a)'_{uj} \cdot \Theta(a)''_{iv}$$

(où l'on utilise la notation de Sweedler pour l'expression de $\Theta(a) \overset{not}{:=} \Theta(a)' \otimes \Theta(a)''$). Crawley-Boevey, Etingof et Ginzburg définissent dans [CEG05] la version non-commutative du fibré cotangent, par

$$T_A\big(\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\big)$$

et montrent que, si A est formellement lisse (au sens de Cuntz-Quillen), ce fibré cotangent non-commutatif satisfait le principe de Kontsevich-Rosenberg.

▷ Crawley-Boevey, Etingof et Ginzburg définissent également une version non-commutative de la géométrie symplectique en introduisant la notion de *forme bi-symplectique*. C'est une première étape vers les structures de Poisson non-commutatives.

Une version non-commutative du crochet de Poisson

De manière naturelle, on peut alors se demander quelle est la bonne définition d'une structure de Poisson non-commutative ? Rappelons qu'un crochet de Poisson sur une k-algèbre associative commutative C est un crochet de Lie $\{-,-\} : C \otimes C \to C$ qui vérifie la règle de Leibniz $\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$ pour tous a, b et c dans C. Pour les algèbres non-commutatives, cette définition est trop restrictive, comme le montre [FL98, Th. 1.2] : sur une algèbre A possédant un domaine non-commmutatif, tout crochet de Poisson est un multiple du commutateur.

Crawley-Boevey dans [CB11] nous fournit la structure minimale, qu'il appelle H_0-Poisson, que doit posséder A pour que l'algèbre $A_V^{\mathrm{GL}(V)}$ soit munie d'un crochet de Poisson.

Définition. *Algèbre H_0-Poisson (NCPoisson)* – (cf. définition B.4.0.1 et [CB11, Déf. 1.1])
Soit A une k-algèbre associative. A est une ***algèbre NC-Poisson*** (ou est munie d'une ***structure H_0-Poisson***) si $A_\natural := A/[A, A]$ est muni d'un crochet de Lie $\langle -, -\rangle$ tel que, pour tout $a \in A$, l'application

$$\langle \bar{a}, -\rangle : A/[A, A] \longrightarrow A/[A, A],$$

avec $\bar{a}$ est la classe de a dans $A_\natural$, est induite par une dérivation $d_a : A \to A$.

Théorème. [CB11, Th. 1.6]
Si $\langle -, -\rangle$ est une structure H_0-Poisson sur A, alors, pour tout k-espace vectoriel V de dimension finie, il existe une unique structure de Poisson $\{-,-\}$ sur l'algèbre des coordonnées $A_V^{\mathrm{GL}(V)}$ de $\mathrm{Rep}_V(A)//\mathrm{GL}(V)$ avec la propriété

$$\big\{\mathrm{Tr}\, a, \mathrm{Tr}\, b\big\} = \mathrm{Tr}\, \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle,$$

pour tout $a, b \in A$.

Il est important de noter qu'il n'existe que peu ou pas d'exemples de structure NC-Poisson qui ne proviennent pas d'une structure plus riche. Un exemple de structure induisant une structure NC-Poisson est donné par Van den Bergh, qui pose la définition de *double crochet de Poisson*, une version non-commutative du crochet de Poisson, donné par un double crochet défini au niveau de

l'algèbre A. Un double crochet de Poisson sur A est un morphisme k-linéaire

$$\begin{array}{rccc} \{\!\{-,-\}\!\}: & A\otimes A & \longrightarrow & A\otimes A \\ & a\otimes b & \longmapsto & \{\!\{a,b\}\!\}'\otimes\{\!\{a,b\}\!\}'' \end{array}$$

(en utilisant la notation de Sweedler) qui est anti-symétrique, i.e. pour tout $a,b\in A$, $\{\!\{a,b\}\!\} = -\{\!\{b,a\}\!\}''\otimes\{\!\{b,a\}\!\}$, qui est une double dérivation en sa deuxième variable et qui vérifie un analogue de la relation de Jacobi, appelée *double Jacobi* (cf. définition 1.2.1.8).

Même si les conditions à vérifier semblent contraignantes, il existe un certain nombres d'exemples de cette structure : ainsi, Odesskii, Rubstov et Sokolov ([ORS13]) classifient les doubles crochets de Poisson quadratiques (cf. définition 1.2.3.8) sur une algèbre associative libre à deux générateurs, puis Sokolov seul classifie dans [Sok13] ces structures sur une algèbre associative libre à trois générateurs. Van de Weyer, dans [VdW08], étudie les structures double Poisson sur les algèbres semi-simples de dimension finie. Notons que cet objet est purement adapté au monde non-commutatif : dans [Pow16], Powell montre que tout double crochet de Poisson est trivial sur une k-algèbre commutative libre à au moins deux générateurs (cf. théorème 1.2.2.6).

De manière analogue au monde commutatif, Van den Bergh met en correspondance bijective les formes bi-symplectiques et les structures double Poisson d'une algèbre associative formellement lisse (cf. [VdB08a, Prop. 4.1.2, Th. A.6.1]). Il montre également ([VdB08a, Lem. 2.6.2]) qu'une algèbre double Poisson $\big(A,\{\!\{-,-\}\!\}\big)$ induit une structure d'algèbre NC-Poisson, où le crochet de Lie $\{-,-\}_\natural$ est donné par $\{-,-\}_\natural := \mu\circ\{\!\{-,-\}\!\}$, avec μ la multiplication de A. Il décrit également de manière simple, la structure de Poisson obtenue sur A_V :

Théorème. [VdB08a, Prop. 7.5.1, 7.5.2, 7.7.2]
Soit $\big(A,\{\!\{-,-\}\!\}\big)$ une algèbre double Poisson. Alors, pour tout k-espace vectoriel de dimension finie V, l'algèbre A_V est une algèbre de Poisson pour le crochet

$$\{a_{ij},b_{uv}\}_V := \{\!\{a,b\}\!\}'_{uj}\cdot\{\!\{a,b\}\!\}''_{iv}.$$

Ce crochet passe aux invariants sous l'action de $\mathrm{GL}(V)$ et est compatible avec la structure H_0-Poisson, c'est à dire, pour tous éléments a et b de A, vérifie l'identité

$$\big\{\mathrm{Tr}\,a,\mathrm{Tr}\,b\big\}_V = \mathrm{Tr}\,\{\bar{a},\bar{b}\}_\natural.$$

Les doubles crochets de Poisson apparaissent aujourd'hui dans différents champs des mathématiques.

- ▷ En géométrie, l'une des structures algébriques importantes apparaissant dans l'étude d'une variété symplectique M est la catégorie de Fukaya associée $\mathrm{Fuk}(M)$. Ce n'est pas une catégorie à proprement parler mais une A_∞-catégorie dont les objets sont les sous-variétés lagrangiennes de M, l'ensemble des morphismes entre deux sous-variétés lagrangiennes L_0 et L_1 de M est le complexes de Floer associé et la composition des morphismes n'est associative qu'à homotopie près, i.e. $\mathrm{Fuk}(M)$ est munie d'applications

  $$m_n : \mathrm{Hom}(L_{n-1},L_n)\otimes\cdots\otimes\mathrm{Hom}(L_1,L_2)\otimes\mathrm{Hom}(L_0,L_1)\longrightarrow\mathrm{Hom}(L_0,L_n)$$

  de degré $|m_n| = 2-n$ et vérifiant les relations A_∞ (cf. définition 5.3.3.3).

Dans leur article [CHSY15, Th.17], Chen et ses co-auteurs montrent qu'à une variété symplectique exacte M de dimension $2d$ de première classe de Chern nulle, le dual linéaire de la construction bar réduite de $\mathrm{Fuk}(M)$ est naturellement muni d'un double crochet de Poisson explicite de degré $2-d$. Cela implique ([CHSY15, Cor. 19]) que la cohomologie cyclique $\mathrm{HC}^\bullet(\mathrm{Fuk}(M))$ est munie d'un $(2-d)$-crochet de Lie, crochet analogue au crochet de Chas-Sullivan en topologie des cordes.

▷ Les double crochets de Poisson interviennent dans le traitement des systèmes intégrables non-commutatifs, comme par exemple dans [DSKV15, DSKV16]. Notons également la généralisation de la notion de double crochet de Poisson faite par Arthamonov dans [Art15, Art16], où il relâche la condition d'anti-symétrie.

▷ Considérons un carquois (cf. [CEG05]) fini $Q = (Q, I, s, t)$ avec I l'ensemble des sommets, Q l'ensemble des flèches et $s, t : Q \to I$ les morphimes sources et but. L'algèbre d'un carquois est l'algèbre associative engendrée par l'ensemble des flèches de Q et par l'ensemble $\{e_i | i \in I\}$ des flèches triviales, la multiplication étant donnée par concaténation des flèches. À Q, on associe son *double* obtenu à partir de Q en adjoignant à chaque flèche $a \in Q$ une flèche opposée a^*. Van den Bergh montre dans [VdB08a, Sect. 6] que, pour tout carquois fini Q, l'algèbre de son double $A = k\bar{Q}$ est naturellement munie d'un double crochet de Poisson défini par

$$\{\!\{a, a^*\}\!\} := e_{s(a)} \otimes e_{t(a)} \quad \text{et} \quad \{\!\{a^*, a\}\!\} := -e_{t(a)} \otimes e_{s(a)}$$

et où tous les autres double crochets sont nuls. Comme structure de Lie induite sur $(k\bar{Q})_\natural$ par ce double crochet, on retrouve le crochet de Lie de Kontsevich. Pour l'étude de cet exemple, Pichereau et Van de Weyer ont développé dans [PVdW08] la cohomologie double Poisson, définie pour une classe importante d'algèbres double Poisson dites *différentielles* ([VdB08a, Déf. 4.4.1]).

▷ Van den Bergh définit également les algèbres doubles quasi-Poisson, homologue non-commutatif des algèbres quasi-Poisson, où le double crochet vérifie une identité double-Jacobi modifiée. Un double crochet quasi-Poisson sur une algèbre associative A induit, pour tout k-espace vectoriel V de dimension finie, un crochet quasi-Poisson sur A_V ([VdB08a, Th. 7.12.2, Rem. 7.12.3], et une structure NC-Poisson sur A (cf. [VdB08a, Lem. 5.1.3]).

Soient Σ, une surface orientée à bord, munie d'un point base $* \in \partial\Sigma$, $\pi := \pi_1(\Sigma, *)$ et $A = k[\pi]$. Notons que $A_\natural$ est le k-module libre de base $\check{\pi}$, l'ensemble des classes de conjugaisons de π ([MT14, Sect. 3.3]). Dans [MT14, Th. 3.1], Massuyeau et Turaev montrent, en utilisant la technologie des doubles crochets quasi-Poisson, que pour tout k-espace vectoriel non nul V de dimension finie :

(i) l'algèbre A_V est munie d'un crochet quasi-Poisson canonique ;

(ii) le morphisme trace $\mathrm{Tr} : k[\check{\pi}] \to A_V^{\mathrm{GL}(V)}$ est un morphisme d'algèbres de Lie où $k[\check{\pi}]$ est muni du crochet $2 \times \{-,-\}^{Gold}$, avec $\{-,-\}^{Gold}$ le crochet de Lie de Goldman, et $A_V^{\mathrm{GL}(V)}$ muni du crochet de Lie induit par le crochet quasi-Poisson canonique du point (i).

Ces structures interviennent également dans les travaux récents d'Alekseev et ses co-auteurs sur le problème de Kashiwara-Vergne, comme par exemple dans [AKKN17, Th. 5].

Schémas de représentations dérivés

On a vu que certaines constructions non-commutatives nécessitent une condition de lissité sur l'algèbre A pour vérifier le principe de Kontsevich-Rosenberg. Une manière naturelle d'étendre ces constructions à toute algèbre associative est de passer à un cadre dérivé (au sens de Quillen). On appliquera ainsi nos constructions sur des remplacements cofibrants (donc lisse) de nos algèbres, la structure de modèle sur la catégorie $\mathtt{DGA}_k$ étant induite par celle de $\mathtt{Ch}_k$ (cf. [DS95, Hov99]).

Pour cela, il faut étendre toutes nos constructions à la catégorie des algèbres différentielles graduées. Ainsi, Berest et ses co-auteurs dans [BFR14, BKR13] étendent la définition du schéma de représentations à un cadre différentiel gradué : pour tout k-espace vectoriel V

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Rep}_V(A): & \mathtt{CDGA}_k & \longrightarrow & \mathtt{Sets} \\ & C & \longmapsto & \underline{\hom}_{\mathtt{DGA}_k}\big(A, \underline{\mathrm{End}}(V)\otimes C\big). \end{array}$$

ce foncteur étant toujours représentable par un objet A_V. Ils montrent ainsi ([BKR13, Th. 2.2]) que les foncteurs

$$(-)_V : \mathtt{DGA}_k \leftrightarrows \mathtt{CDGA}_k : \underline{\mathrm{End}}(V)\otimes -$$

forment une paire de Quillen et donc que $(-)_V$ possède un foncteur dérivé total à gauche

$$\mathbb{L}(-)_V : \mathtt{Ho}(\mathtt{DGA}_k) \longrightarrow \mathtt{Ho}(\mathtt{CDGA}_k).$$

Ils définissent le schéma de représentations dérivé comme le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{DRep}_V: & \mathtt{Alg}_k & \longrightarrow & \mathtt{Ho}(\mathtt{CDGA}_k) \\ & A & \longmapsto & (QA)_V, \end{array}$$

où QA est une résolution cofibrante de A, et *l'homologie de représentation de A à coefficient dans V* comme

$$\mathrm{H}_\bullet(A,V) := \mathrm{H}_\bullet\big(\mathrm{DRep}_V(A)\big),$$

et ils étudient *l'espace tangent dérivé* de $\mathrm{DRep}_V(A)$ en un point $\rho : A \to \mathrm{End}\,(V)$ (cf. [BKR13, Prop. 5.1]). Le passage aux invariants sous l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}(V)$ possédant également un bon comportement homotopique, les auteurs montrent également l'existence du foncteur dérivé à gauche

$$\mathbb{L}(-)_V^{\mathrm{GL}(V)} : \mathtt{Ho}(\mathtt{DGA}_k) \longrightarrow \mathtt{Ho}(\mathtt{CDGA}_k),$$

ainsi que l'isomorphisme $\mathrm{H}_\bullet\big(\mathbb{L}(A)_V^{\mathrm{GL}(V)}\big) \cong \mathrm{H}_\bullet(A,V)^{\mathrm{GL}(V)}$. Dans le cas des schémas de représentations classiques, on a vu qu'il existe un morphisme trace $\mathrm{Tr} : A_\natural \to A_V^{\mathrm{GL}(V)}$. D'après [FgT85, FgT87] et [BKR13, Sect. 3], le foncteur $(-)_\natural : \mathtt{DGA}_k \to \mathtt{Ch}_k$ possède un foncteur dérivé à gauche qui vérifie

$$\mathrm{HC}_{n-1}(A) = \mathrm{H}_n\big(\mathbb{L}(A)_\natural\big),$$

avec $\mathrm{HC}_\bullet(A)$, l'homologie cyclique de A, ce qui permet aux auteurs de passer le morphisme trace au cadre dérivé : [BKR13, Prop. 4.1] exhibe le morphisme

$$\bigwedge \mathrm{Tr}_V(A)_\bullet : \bigwedge \mathrm{HC}_\bullet(A) \longrightarrow \mathrm{H}_\bullet(A,V)^{\mathrm{GL}(V)},$$

(avec $\bigwedge(-)$ l'algèbre symétrique libre graduée) qui, contrairement au cas classique, n'est pas sur-

jectif pour tout V de dimension fini, mais le devient quand on passe au cas stable, c'est à dire quand l'on fait tendre la dimension de V vers l'infini (cf. [BKR13, Sect. 6]). Citons également [BFP$^+$14], où les auteurs construisent les schémas dérivés de représentations d'algèbres de Lie. Dans l'article [BCER12], Berest et ses co-auteurs définissent une version dérivée de la structure NC-Poisson qui munit $\mathrm{HC}_\bullet(A)$ d'un r-crochet de Lie $\{-,-\}_\natural$ qui est compatible avec le morphisme trace, i.e. tel qu'il existe une unique structure d'algèbre r-Poisson $\{-,-\}$ sur $\mathrm{H}_\bullet(A,V)^{\mathrm{GL}(V)}$ telle que

$$(\mathrm{Tr}_V)_\bullet\big(\{\alpha,\beta\}_\natural\big) = \big\{(\mathrm{Tr}_V)_\bullet(\alpha),(\mathrm{Tr}_V)_\bullet(\beta)\big\}$$

pour tous $\alpha,\beta \in \mathrm{HC}_\bullet(A)$ (cf. [BCER12, Th. 9]). Cependant, cette structure NC-Poisson dérivée n'est pas explicite.

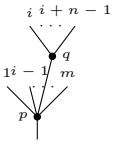
On peut alors se demander comment se comporte le double crochet de Poisson à homotopie près : l'intérêt de considérer cette structure est qu'elle est de nature *propéradique*, ce qui nous fournit un bon cadre pour étudier sa version dérivée (cf. [Val03, MV09a, MV09b]). Commençons par un bref rappel sur les opérades (algébriques) : ce sont les objets qui modélisent les opérations algébriques à plusieurs entrées (et une seule sortie) sur un complexe de chaînes, comme par exemple un crochet de Lie ou un produit associatif. Une opérade est la donnée d'un $\mathfrak{S}$-module $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (chaque $\mathcal{O}(n)$ étant muni d'une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$) muni de compositions partielles, pour $m,n \in \mathbb{N}^*$ et pour $i \in [\![1,m]\!]$:

$$-\circ_i - : \mathcal{O}(m)\otimes\mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}(m+n-1),$$

composition compatible avec l'action des groupes symétriques. On représente les éléments d'une opérade par des arbres : ainsi $p \in \mathcal{O}(m)$ est représenté par un arbre à m feuilles

,

et le produit $p \circ_i q$ pour $q \in \mathcal{O}(n)$ par la concaténation d'arbres



.

Les opérades encodent par exemple les structures d'algèbre associative, commutative, de Lie, de Leibniz (cf. section 4.1.2) : par exemple, une structure d'algèbre associative sur un k-espace vectoriel V correspond à un morphisme d'opérades $\big\{\mathcal{A}s(n) \to \mathrm{Hom}(V^{\otimes n},V)\big\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $\mathcal{A}s$ est l'opérade engendrée par un élément μ

sur lequel $\mathfrak{S}_2$ agit librement et qui vérifie la condition d'associativité

et avec $\{\mathrm{Hom}(V^{\otimes n},V\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'opérade des endomorphismes. Les propérades sont une généralisation

des opérades : elles encodent des opérations à plusieurs entrées et plusieurs sorties. Une propérade est un $\mathfrak{S}$-bimodule muni d'un produit de composition (cf. section 4.1.3), et en particulier, il existe une propérade $\mathcal{DP}ois$ telle qu'une structure d'algèbre double Poisson sur un k-espace vectoriel correspond à une famille de morphismes $\{\mathcal{DP}ois(m,n) \to \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V^{\otimes m})$, compatibles avec les actions des groupes symétriques et le produit de composition. C'est dans ce cadre que l'on étudie les algèbres double Poisson.

Plan de la thèse

CHAPITRE 1 – Double-crochet de Poisson

Dans ce premier chapitre, on étend la définition d'algèbre double Poisson décalée, posée par Van den Bergh dans [VdB08a], au cadre général d'une catégorie $(\mathtt{C}, \otimes)$ monoïdale symétrique additive. Ainsi, pour Σ un élément du groupe de Picard de $\mathtt{C}$ et A un monoïde associatif de $\mathtt{C}$, un Σ-double crochet de Poisson sur A est la donnée d'un morphisme

$$\{\!\{-,-\}\!\} : \Sigma A \otimes \Sigma A \longrightarrow \Sigma A \otimes A$$

vérifiant des propriétés d'anti-symétrie, de dérivation (cf. définition 1.2.1.3) ainsi que l'identité double Jacobi (cf. définition 1.2.1.8). On étudie ensuite deux classes d'exemples d'algèbres double Poisson.

CHAPITRE 2 – Double Lie et double Lie Rinehart

On commence par étudier les double crochets de Poisson linéaires. Ils correspondent aux algèbres double Lie-Rinehart (appelés également double Lie algebroïds par Van den Bergh [VdB08b, Sect. 3.2]), qui sont la version non-commutative des algèbres de Lie-Rinehart. Les algèbres de Lie-Rinehart apparaissant naturellement en géométrie (par exemple, pour X une variété $\mathscr{C}^\infty$, un champ de vecteur sur X est une $\mathscr{C}^\infty(X)$-algèbre de Lie-Rinehart), il est naturelle de vouloir étendre cette structure au monde non-commutatif. Citons à ce propos, le travail de Fernández Álvarez dans [ACF15, FA15].

On montre un premier résultat de décalage de la structure double Lie-Rinehart. Pour une structure opéradique (par exemple un crochet de Lie), on sait ([LV12]) qu'un k-espace vectoriel est muni d'une structure r-décalée si et seulement si $V[-r]$ est muni de la structure 0-décalé, avec $V[r]$ le complexe V tensorisé par k concentré en degré r. Cela n'est pas vrai en général pour les algèbres sur une propérade, notamment pour les algèbres double Poisson. Par contre, on démontre un résultat similaire pour les algèbre double Lie-Rinehart (qui sont des algèbres sur une propérade colorée, cf. section 4.1.4.3).

Théorème. (cf. proposition 2.1.4.1).
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(A, M, \rho_M, \{\!\{-,-\}\!\}_M)$ *est une* Σ*-algèbre double Lie-Rinehart ;*

(ii) $(A, \Sigma M, \rho_{\Sigma M}, \{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M})$ *est une* $\mathbb{1}$*-algèbre double Lie-Rinehart ;*

on a l'équivalence de catégories

$$\Sigma\text{-}\mathtt{DLR}_A \cong \mathbb{1}\text{-}\mathtt{DLR}_A,$$

avec $\Sigma\text{-}\mathtt{DRL}_A$ *la catégorie des* Σ*-algèbres double Lie-Rinehart au dessus de* A*.*

Un exemple d'algèbre double Lie-Rinehart (de degré 1) est donné par Van den Bergh [VdB08a, App. A] : le double crochet de Koszul. On reprend cet exemple dans un cadre général et sans décalage (cf. section 2.1.3), qui nous permet d'associer canoniquement à une Σ-algèbre double Poisson, une Σ-algèbre double Lie-Rinehart

$$(A, \{\!\{-,-\}\!\}) \quad \rightsquigarrow \quad (A, \Omega_A, \rho^{\Omega}, \{\!\{-,-\}\!\}^{\Omega}).$$

Dans un second temps, on étudie une classe d'exemples de double crochets quadratiques en donnant un critère pour construire un double-crochet de Poisson quadratique décalé sur la résolution minimale (cf. [LV12, Sect. 1.5.8]) d'une algèbre de Koszul. Ainsi, on dispose de la résolution minimale de l'algèbre fournie par la construction cobar sur sa coalgèbre duale $\mathbf{\Omega} A^{\text{¡}}$ (cf. section 2.2.1 ou [LV12, Chap. 3]).

Théorème. (cf. théorème 2.2.2.3)
Soient $A = T(W_0)/\langle R\rangle$ une algèbre de Koszul et $T(W) := \mathbf{\Omega} A^{\text{¡}}$ sa résolution minimale.

(i) Si $T(W)$ est muni d'une application linéaire antisymétrique

$$f := \{\!\{-,-\}\!\} : (W[r] \otimes W[r])_{-r} \longrightarrow \big(W \otimes W)[r]\big)_{-r}$$

telle que $f\big(\partial(W[r]\otimes W[r])_{-r+1}\big) \subset R\otimes W_0 \oplus W_0 \otimes R$, alors $\{\!\{-,-\}\!\}$ s'étend en un unique r-double crochet quadratique sur $T(W)$.

(ii) Si, de plus, le double jacobiateur associé à cette extension est nul sur $(W[r]\otimes W[r]\otimes W[r])_{-2r}$, alors

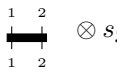
$$\{\!\{-,-\}\!\} : T(W)\otimes T(W) \longrightarrow T(W)\otimes T(W)$$

est un r-double crochet de Poisson.

Ce résultat facilite la construction d'exemples de structures double Poisson décalés.

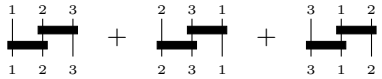
La question qui motive toute la suite de cette thèse est la suivante : si l'on se donne une algèbre associative A, concentrée en degré 0, munie d'un double-crochet de Poisson et que l'on considère une résolution cofibrante QA de A dans la catégorie des algèbres différentielles graduées associatives (munie de sa structure usuelle de catégorie de modèles héritée de celle de $\mathtt{Ch}_k$), de quelle structure hérite QA? Comme la structure double-Poisson est *propéradique*, c'est à dire qu'un complexe de chaîne A est une algèbre double-Poisson si et seulement s'il existe un morphisme de propérades $\mathcal{DP}ois \to \mathrm{End}_A$ avec $\mathrm{End}_A := \big\{\mathrm{Hom}_k(V^{\otimes m}, V^{\otimes n})\big\}_{m,n\in\mathbb{N}^*}$ la propérade des endomorphismes, si l'on détermine une résolution $\mathcal{DP}ois_\infty$ de la propérade $\mathcal{DP}ois$, alors une résolution de A sera naturellement munie d'une structure de $\mathcal{DP}ois_\infty$-algèbre.

Une résolution de $\mathcal{DP}ois$ nous est donnée par l'adjonction bar/cobar des propérades (cf. [Val03, Th. 125]), cependant, une telle résolution est inutilisable en pratique ; une manière d'obtenir une résolution explicite plus petite (en fait minimale) serait de montrer que la propérade est de Koszul. Afin d'aborder cette question, le choix est fait de restreindre l'objet afin d'en faciliter l'étude. On commence donc par se restreindre à étudier la propérade $\mathcal{DL}ie$ qui encode les algèbres double Lie : elle est engendrée par un unique générateur en arité $(2,2)$



$\otimes\, sgn(\mathfrak{S}_2)\uparrow_{\mathfrak{S}_2^{op}}^{\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_2^{op}}$

qui représente le double-crochet anti-symétrique à deux entrées et deux sorties et qui est soumis à la relation double-Jacobi :



La relation double-Jacobi correspond, en terme de représentation à

$$k\uparrow_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}^{\mathfrak{S}_3\times\mathfrak{S}_3^{op}},$$

ce qui implique que la propérade $\mathcal{DL}ie$ est, en tant que $\mathfrak{S}$-bimodule, dans l'image du foncteur d'induction Ind défini, pour P un $\mathfrak{S}$-module (réduit) et $s, e \in \mathbb{N}^*$, par

$$\mathrm{Ind}\,(P)(s,e) := \begin{cases} P(e)\uparrow_{\mathfrak{S}_e^{op}}^{\mathfrak{S}_e\times\mathfrak{S}_e^{op}} & \text{si } s = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'objet des chapitres suivants est donc de ramener l'étude de la koszulité de la propérade $\mathcal{DL}ie$ à la catégorie des $\mathfrak{S}$-modules afin de simplifier le problème.

CHAPITRE 3 – Structures monoïdales

On présente ici les structures monoïdales sur les catégories de foncteurs $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k := \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$ et $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k := \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$, avec $\mathtt{Fin}$, la catégorie des ensembles finis avec les bijections comme morphismes, qui sont au centre de cette thèse. On construit une nouvelle structure monoïdale sur la sous-catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$ des $\mathfrak{S}$-modules réduits (cf. définition 3.0.0.5), le produit connexe $\boxtimes_c$.

Définition. *Produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-modules* – (cf. définition 3.1.3.1)
Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits. Le *produit de composition connexe* de P et Q est donné, pour tout ensemble S fini non vide, par :

$$P\boxtimes_c Q(S) := \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha)\otimes\bigotimes_{\beta} Q(J_\beta)$$

avec $\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)$ l'ensemble des couples de partitions de S vérifiant une certaine propriété de connexité.

Ce nouveau produit est l'avatar du produit connexe $\boxtimes_c^{Val}$ de la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}$ défini par Vallette dans sa thèse [Val03]. La propriété la plus importante du produit $\boxtimes_c$ est sa compatibilité avec le produit de Vallette par le foncteur d'induction $\mathrm{Ind} : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}$. On démontre le théorème suivant

Théorème. (cf. théorème 3.3.2.10)
Le foncteur d'induction

$$\mathrm{Ind} : \left(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c\right) \longrightarrow \left(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{Val}\right)$$

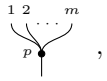
est monoïdal.

CHAPITRE 4 – Pro(to)pérades

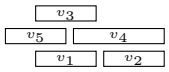
On commence ce chapitre par un rappel sur les monoïdes classiques dans les catégories des $\mathfrak{S}$-(bi)modules : les opérades, les propérades et, plus généralement, les props. On y définit notamment les propérades $\mathcal{DL}ie$, $\mathcal{DC}om$, qui est associée à $\mathcal{DL}ie$ par dualité, et $\mathcal{DP}ois$. On clôt cette section par une première description de structure induite par le foncteur d'induction. Le foncteur Ind permet donc d'associer une prop aux algèbres commutative tordues munies d'une structure supplémentaire.

Proposition. (cf. proposition 4.2.1.3)
Soit V un $\mathfrak{S}$-module muni d'une structure d'algèbre commutative tordue et tel que, pour tout entier naturel m, $V(m)$ soit muni d'une structure d'algèbre associative compatible avec la structure d'algèbre commutative tordue. Alors $\mathrm{Ind}\,(V)$ est munie d'une structure de prop.

Notons que les algèbres commutative tordues sont aux centre de travaux récents en théorie des représentations de groupes, comme par exemples ceux de Sam [SS12, SS15, NSS16]. Après avoir défini au chapitre 3, le produit connexe pour les $\mathfrak{S}$-modules, il est naturel d'étudier les monoïdes qui lui correspondent : les *protopérades*. On décrit notamment, grâce aux travaux de Vallette [Val03, Val09], la protopérade libre ainsi que la combinatoire sous-jacente. Dans le cas des opérades, la combinatoire est contrôlée par des arbres de la forme



où m est le nombre d'entrées de l'opération $p \in \mathcal{O}(m)$ représentée par l'arbre. En ce qui concerne les protopérades, la combinatoire est contrôlée par des murs. Un mur sur un ensemble fini S non vide est un ensemble de sous-ensembles de S, muni d'un ordre partiel compatible avec l'intersection et tel que la réunion de ces sous-ensembles soit S. On les représente diagrammatiquement de la manière suivante :



la largeur de chaque brique nous donnant le nombre d'entrées et de sorties de chacune des opérations v_i représentées. On obtient ainsi une description combinatoire de la protopérade libre

Proposition. *Description de la protopérade libre* – (cf. proposition 4.4.2.1)
Soit V un $\mathfrak{S}$-module ; pour tout ensemble S fini, on a l'isomorphisme naturel de $\mathrm{Aut}(S)$-modules

$$\mathscr{F}(V)(S) \cong \bigoplus_{\substack{(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A},\leqslant)\\ \in \mathcal{W}^{conn}(S)}} \bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha)$$

avec $\mathcal{W}^{conn}(S)$ l'ensemble des murs connexes.

CHAPITRE 5 – Dualité de Koszul

Dans ce chapitre, on transpose une partie des résultats obtenus sur les propérades par Vallette dans [Val03] au cadre protopéradique grâce à l'exactitude du foncteur d'induction Ind. On démontre l'existence d'une adjonction bar/cobar dans le cas des protopérades :

$$\mathbf{\Omega}(-) : \mathtt{coprotoperades}_k^{coaug} \leftrightarrows \mathtt{protoperades}_k^{aug} : \mathbf{B}(-).$$

On obtient aussi le théorème suivant, analogue protopéradique du critère de Koszul des propérades démontré par Vallette ([Val03, Th. 149]).

Théorème. *Critère de Koszul* – (cf. théorème 5.2.2.8)
Soit P une protopérade (vérifiant deux hypothèses techniques). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P est de Koszul ;

(ii) l'inclusion $P^{\text{¡}} \hookrightarrow \mathbf{B}(P)$ est un quasi-isomorphisme, où $P^{\text{¡}}$ est la copropérade duale à P ;

(iii) le complexe de Koszul $\big(P^{\text{¡}} \boxtimes_c P, \partial = \partial_P + d^r_\Delta\big)$ est acyclique ;

(iv) le complexe de Koszul $\big(P \boxtimes_c P^{\text{¡}}, \partial = \partial_P + d^l_\Delta\big)$ est acyclique ;

(v) le morphismes de protopérades graduées par un poids, $\mathbf{\Omega}(P^{\text{¡}}) \to P$, est un quasi-isomorphisme.

CHAPITRE 6 – Bases PBW

Ce chapitre correspond à une tentative (malheureusement infructueuse) de démontrer un théorème de type Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) pour les protopérades. Ce type de théorèmes nous dit que si l'on exhibe une certaine base dite PBW pour une algèbre (cf. [Pri70]) ou plus généralement pour une opérade (cf. [Hof10]), alors l'opérade est de Koszul, donc admet une résolution cofibrante, c'est à dire un objet libre ayant le même type d'homotopie, explicite.

Pour étudier le problème au niveau protopéradique, on reprend la stratégie adoptée par Hoffbeck dans son article [Hof10, Th. 3.10]. Dans une première partie, on définit la notion de protopérade shuffle, version rigidifiée d'une protopérade. On donne ensuite une version combinatoire de la construction bar de la protopérade libre en termes de murs et de coloriages : on définit un coloriage d'un mur W comme étant une application surjective $W \twoheadrightarrow C$, où C est un ensemble fini de couleurs, qui induit un ordre partiel sur C. On représente un coloriage d'un mur de la manière suivante

À un mur W défini sur un ensemble totalement ordonné, on associe son *complexe de coloriages* $C^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}_\bullet(W)$ (cf. définition 6.1.3.15) qui est, pour tout mur connexe de plus de deux briques, acyclique. On montre alors :

Proposition. *Description combinatoire de* $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)$ – (cf. proposition 6.1.4.2)
Soit V un $\mathfrak{S}$-module concentré en degré 0. On a, pour tout ensemble fini S non-vide et totalement ordonné, l'isomorphisme de complexes de chaines suivant :

$$\big(\mathbf{B}\mathscr{F}(V)\big)(S) \cong \bigoplus_{K \in \mathcal{W}^{conn}(S)} \bigoplus_{\varphi \in Col(K)} \Sigma^{\#\varphi(K)} \Big(\bigotimes_{\alpha \in A} V(K_\alpha), \varphi \Big),$$

où Σ est la suspension de degré homologique 1.

On définit ensuite un ordre partiel sur l'ensemble $\mathcal{B}^{\mathscr{F}_{\text{ш}}(V)}$ des monômes de la protopérade shuffle libre, compatible avec les compositions partielles, ce qui nous permet de définir la notion de *base PBW* pour les protopérades. La section 6.2.2 explique enfin comment, pour une protopérade P munie d'une base PBW, on filtre le complexe $\mathbf{B}P$ pour obtenir la suite spectrale de Poincaré-Birkhoff-Witt. On exhibe enfin pourquoi le genre des graphes sous-jacent aux murs empêche en général

que la suite spectrale dégénère à la page E^1 (ce qui était le cas dans le cas opéradique, cf. [Hof10, Sect. 4.6]). La filtration obtenue par l'ordre étant compliquée, il est difficile d'envisager d'étudier les pages supérieures de la suite spectrale. Comme $\mathrm{B}P$ est une coprotopérade, une idée serait d'utiliser le coproduit pour donner plus de structure à la suite spectrale et pouvoir ainsi en tirer plus d'information.

Pour finir, on étudie la protopérade $\mathcal{DC}om^{proto}$ et on tente de lui exhiber une base PBW. Cet essai reste infructueux, encore une fois, à cause du genre des graphes sous-jacents aux monômes de $\mathcal{DC}om^{proto}$.

CHAPITRE 7 – Une approche diopéradique

Comme l'on a montré que le genre pose problème dans l'étude de la koszulité de $\mathcal{DC}om^{proto}$, on se libère de celui-ci en se restreignant à l'étude de la diopérade associée aux propérades $\mathcal{DC}om$ et $\mathcal{DL}ie$. Les diopérades sont des objets entre opérades et propérades car elles encodent des opérations à plusieurs entrées et plusieurs sorties, mais leur composition est proche de celle des opérades car elle ne crée pas de genre dans le graphe sous jacent (pour une définition des diopérades et de leur dualité de Koszul, on se référera à [Gan03]). Comme la relation double Jacobi est de genre 0 (i.e. le graphe sous-jacent est de genre 0), on définit la diopérade $\mathcal{DL}ie^{diop}$ associée à la propérade $\mathcal{DL}ie$.

Pour l'étude de la koszulité de $\mathcal{DL}ie^{diop}$, on applique la même stratégie que pour le cas propéradique, en se ramenant aux $\mathfrak{S}$-modules. On définit alors un produit $\boxtimes_c^{\varnothing}$ de composition connexe de "genre 0" sur les $\mathfrak{S}$-modules, qui est compatible avec la structure monoïdale qui encode les diopérades, à travers le foncteur d'induction. De la même manière que dans les chapitres précédents, on définit une adjonction bar-cobar, une dualité de Koszul et une notion de base PBW pour les monoïdes de $\boxtimes_c^{\varnothing}$. On montre cette fois-ci, un théorème PBW :

Théorème. *Soit $P = \mathscr{P}(V, R)$ un objet quadratique de $\mathtt{As}^u\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)^{aug}$, avec V de dimension finie, munie d'une base PBW. Alors P est de Koszul.*

On en déduit que la diopérade $\mathcal{DL}ie^{diop}$ est de Koszul.

Théorème. *La diopérade $\mathcal{DL}ie^{diop} := \mathscr{F}_{\varnothing}(V_{\mathcal{DL}ie})/\langle R_{\mathcal{DJ}}\rangle$ est de Koszul.*

PERSPECTIVES

Une perspective à court terme serait, avec les résultats de [MV09a, Sect. 5.6] et de la section 4.1.4, de conclure quant à la koszulité des propérades $\mathcal{DL}ie$ et $\mathcal{DP}ois$. Si on montre que $\mathcal{DP}ois$ est de Koszul, il faudrait expliciter la structure d'algèbre double Poisson à homotopie près, notamment le comportement de la relation de dérivation et les liens avec les algèbres de Leibniz à homotopie près (cf. [Liv97]). Comme l'homologie cyclique est donnée par le foncteur dérivé de $(-)_\natural$, on peut également se demander de quelle structure hérite l'homologie cyclique d'une algèbre double Poisson et ainsi faire le lien avec les structures NC-Poisson dérivées de [BCER12]. Si la propérade $\mathcal{DL}ie$ n'est finalement pas de Koszul, on peut se demander comment contrôler ce défaut de koszulité afin de trouver une résolution cofibrante de $\mathcal{DL}ie$ qui soit plus petite que la résolution provenant de l'adjonction bar-cobar.

ANNEXE A – Algèbre catégorique

On fait ici les rappels nécessaires en termes de catégories monoïdales et sur les foncteurs (Lax)-monoïdaux. On rappelle également la construction du produit de convolution de Day.

ANNEXE B – Σ-Algèbre NC-Poisson

On donne une définition générale des algèbres de Poisson non-commutative à la Crawley-Boevey dans le cadre général d'une catégorie monoïdale symétrique abélienne et on donne une condition suffisante pour qu'une algèbre différentielle graduée quasi-libre soit munie d'une structure de r-algèbre de Poisson non-commutative.

ANNEXE C – Rappels de Vallette

Cette annexe contient les rappels nécessaires des articles [Val03, Val09] de Vallette concernant la construction du monoïde libre pour une catégorie monoïdale symétrique. On fait également le lien entre le produit de composition connexe défini à la section 3.2.3 et la définition originale de [Val03]. Enfin, on rappelle les structures de catégories de modèles sur les catégories des opérades, propérades et props.

ANNEXE D – Utilisation de Singular

Cette dernière annexe contient les différentes procédures Singular permettant de tester si, pour une algèbre différentielle graduée quasi-libre $\big(T(V),\partial\big)$, une application linéaire

$$\{\!\{-,-\}\!\} : V[r]\otimes V[r] \longrightarrow \big(T(V)\otimes T(V)\big)[r]$$

définit un r-double crochet de Poisson sur $T(V)$.

CONVENTIONS

Dans toute cette thèse, k est un corps commutatif de caractéristique nulle. Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!] := [1,n] \cap \mathbb{Z}$. On note également $\mathbb{N}^* := \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Catégories

On présente ici l'ensemble des catégories qui apparaîtront au travers de cette thèse.

- ▷ Pour $\mathtt{C}$ et $\mathtt{D}$ deux catégories avec $\mathtt{C}$ essentiellement petite, on note $\mathrm{Func}(\mathtt{C},\mathtt{D})$ la catégorie des foncteurs de $\mathtt{C}$ vers $\mathtt{D}$.
- ▷ $\mathtt{Fin}$ est la catégorie des ensembles finis avec pour morphismes les bijections d'ensembles.
- ▷ $\mathtt{Ord}$ est la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés avec pour morphismes les bijections d'ensembles qui préservent l'ordre.
- ▷ $\mathtt{Ch}_k$ est la catégorie des complexes de k-espaces vectoriels. Par convention, la différentielle est de degré -1. Le degré d'un élément homogène est noté $|-|$. On munie la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ de son produit monoïdal usuel $\otimes_k$ que l'on note $\otimes$. On note aussi $C[n]$ la suspension de degré n donnée par $(C[n])_k := C_{k-n}$. Une application linéaire $\varphi : C \to D$ entre complexes de chaines est de degré n si elle induit un morphisme de complexes de chaînes : $\tilde{\varphi} : C[n] \to D$. Pour tout complexe C, on note également $\underline{\hom}_{\mathtt{Ch}_k}(C,-) : \mathtt{Ch}_k \longrightarrow \mathtt{Ch}_k$, le foncteur hom-interne des applications linéaires de tout degré, adjoint à droite de $(-)\otimes C$ et on pose $\underline{\mathrm{End}}_k(C) := \underline{\hom}_{\mathtt{Ch}_k}(C,C)$.
- ▷ $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k := \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$ est la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathtt{Fin}$ vers $\mathtt{Ch}_k$. On appelle $\mathfrak{S}$-module un objet de cette catégorie. $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$ est la sous-catégorie pleine des $\mathfrak{S}$-modules réduits (cf. définition 3.0.0.5).
- ▷ $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k := \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$ est la catégorie des foncteurs de $\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op}$ vers $\mathtt{Ch}_k$. On appelle $\mathfrak{S}$-bimodule un objet de cette catégorie. $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}$ est la sous-catégorie pleine des $\mathfrak{S}$-bimodules réduits.

Produits monoïdaux

Pour $(\mathtt{C},\odot,I)$ une catégorie monoïdale symétrique, on note

- ▷ $\mathtt{As}(\mathtt{C},\odot)$ la catégorie des monoïdes associatifs de $\mathtt{C}$;
- ▷ $\mathtt{As}^u(\mathtt{C},\odot)$ la catégorie des monoïdes associatifs unitaires de $\mathtt{C}$;
- ▷ $\mathtt{coAs}^u(\mathtt{C},\odot)$ la catégorie des comonoïdes coassociatifs counitaires de $\mathtt{C}$;

- ▷ $\mathtt{Com}(\mathtt{C}, \odot)$ la catégorie des monoïdes commutatifs non-unitaires de $\mathtt{C}$.
- ▷ $\mathtt{Com}^u(\mathtt{C}, \odot)$ la catégorie des monoïdes commutatifs unitaires de $\mathtt{C}$.

Dans le cas où $(\mathtt{C}, \odot, I) = (\mathtt{Ch}_k, \otimes, k)$, on note :

- ▷ $\mathtt{DGA}_k := \mathtt{As}^u(\mathtt{Ch}_k, \otimes)$ la catégorie des k-algèbres différentielles graduées, i.e. la catégorie des monoïdes unitaires de $\mathtt{Ch}_k$. Pour A une k-algèbre différentielle graduée, on note $[A, A]$ le complexe des commutateurs gradués de A : pour tous éléments homogènes a et b de A, on a $[a, b] := ab - (-1)^{|a||b|}ba$. Pour B un A-bimodule, on note $\underline{\mathrm{Der}}_k(A, B)$ le complexe des dérivations de A dans B, $\underline{\mathrm{Der}}_k(A) := \underline{\mathrm{Der}}_k(A, A)$ le complexe des dérivations de A dans elle-même et $\underline{\mathbb{D}\mathrm{er}}_k(A) = \underline{\mathrm{Der}}_k(A, A \otimes A)$ le complexe des double-dérivations ;
- ▷ $\mathtt{CDGA}_k := \mathtt{Com}^u(\mathtt{Ch}_k, \otimes)$ la catégorie des k-algèbres différentielles graduées commutatives unitaires, i.e. la catégorie des monoïdes commutatifs de $\mathtt{Ch}_k$;
- ▷ pour A une k-algèbre différentielle graduée, $A\text{-}\mathtt{bimod}_k$ la catégorie des A-bimodules.

CHAPITRE 1

DOUBLE-CROCHET DE POISSON

1.1 Rappels sur des structures usuelles

Dans cette section, on fait des rappels sur certaines structures usuelles dans une catégorie monoïdale symétrique additive. On gardera comme exemple *"fil rouge"* la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ des complexes de chaînes sur un anneau commutatif k.

1.1.1 Crochets d'une catégorie monoïdale symétrique additive

On considère $(\mathtt{C}, \otimes)$ une catégorie additive, munie d'une structure monoïdale $\otimes$, d'unité $\mathbb{1}$, telle que le bifoncteur

$$- \otimes - : \mathtt{C} \times \mathtt{C} \longrightarrow \mathtt{C}$$

soit additif en chacune de ces entrées. On suppose de plus, que $(\mathtt{C}, \otimes)$ est symétrique pour τ avec, pour A et B deux objets de $\mathtt{C}$,

$$\tau_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A,$$

qui vérifie $\tau^2 = \mathrm{id}$.

1.1.1.1 Définition. *Groupe de Picard*
Soit $(\mathtt{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique. Le *groupe de Picard* $Pic^{\otimes}(\mathtt{C})$ de la catégorie $\mathtt{C}$ est le groupe des classes d'isomorphismes des objets inversibles, i.e. qui possèdent un inverse pour le produit $\otimes$.

On considère $\Sigma \in Pic^{\otimes}(\mathtt{C})$ avec la donnée de $\Sigma^- \in Pic^{\otimes}(\mathtt{C})$ et un isomorphisme $\rho : \Sigma^- \otimes \Sigma \to \mathbb{1}$. Par la structure symétrique de $\mathtt{C}$, on dispose du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^- \otimes \Sigma & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{1} \\ {\scriptstyle \tau_{\Sigma^-,\Sigma}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \uparrow{\scriptstyle \cong} \\ \Sigma \otimes \Sigma^- & & \end{array} .$$

Pour tout objet Σ de $\mathrm{Pic}^{\otimes}(\mathtt{C})$, le foncteur $\Sigma \otimes (-) : \mathtt{C} \to \mathtt{C}$ est une équivalence de catégorie : en particulier, si $\mathtt{C}$ est abélienne, alors il est exact. Pour tout objet C de la catégorie $\mathtt{C}$, on note $\Sigma C := \Sigma \otimes C$.

1.1.1.2 Définition. *Crochets usuels*
Soit $\mathfrak{g}$ un objet de la catégorie $\mathtt{C}$.

(i) L'objet $\mathfrak{g}$ est une Σ-*algèbre de Leibniz* (à gauche) si $\mathfrak{g}$ est muni d'un morphisme

$$f := \{-,-\}_{\mathfrak{g}} : \Sigma\mathfrak{g} \otimes \Sigma\mathfrak{g} \longrightarrow \Sigma\mathfrak{g},$$

appelé Σ-*crochet de Leibniz*, qui vérifie la relation dite *de Jacobi-Leibniz* :

$$f(1 \otimes f) = f(f \otimes 1) + f(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma\mathfrak{g},\Sigma\mathfrak{g}} \otimes 1).$$

Un morphisme $\varphi : (\mathfrak{g}, \{-,-\}_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{h}, \{-,-\}_{\mathfrak{h}})$ de Σ-algèbres de Leibniz est un morphisme de $\mathtt{C}$ qui est compatible avec les Σ-crochets de Leibniz, c'est-à-dire faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\mathfrak{g} \otimes \Sigma\mathfrak{g} & \xrightarrow{\Sigma\varphi\otimes\Sigma\varphi} & \Sigma\mathfrak{h} \otimes \Sigma\mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \{-,-\}_{\mathfrak{g}}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \{-,-\}_{\mathfrak{h}}} \\ \Sigma\mathfrak{g} & \xrightarrow[\Sigma\varphi]{} & \Sigma\mathfrak{h}\ . \end{array}$$

(ii) L'objet $\mathfrak{g}$ est une Σ-*algèbre de Lie* si $\mathfrak{g}$ est une Σ-algèbre de Leibniz telle que son Σ-crochet f soit anti-symétrique, c'est-à-dire qu'on ait le diagramme anti-commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\mathfrak{g} \otimes \Sigma\mathfrak{g} & \xrightarrow{f} & \Sigma\mathfrak{g} \\ {\scriptstyle \tau_{\Sigma\mathfrak{g},\Sigma\mathfrak{g}}}\downarrow & \ominus & \uparrow{\scriptstyle f} \\ \Sigma\mathfrak{g} \otimes \Sigma\mathfrak{g} & & \end{array}\ .$$

Un tel Σ-crochet est appelé Σ-*crochet de Lie*. Un morphisme $\varphi : (\mathfrak{g}, \{-,-\}_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{h}, \{-,-\}_{\mathfrak{h}})$ est un morphisme de Σ-algèbres de Lie si c'est un morphisme de Σ-algèbres de Leibniz. En particulier, la catégorie des Σ-algèbres de Lie de $\mathtt{C}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des Σ-algèbres de Leibniz.

(iii) Supposons que $\mathfrak{g}$ soit muni d'une structure $\mu : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de monoïde commutatif unitaire dans $\mathtt{C}$. $\mathfrak{g}$ est une Σ-*algèbre de Poisson* si $\mathfrak{g}$ est une Σ-algèbre de Lie vérifiant la propriété de compatibilité dite *propriété de dérivation* suivante :

$$f(\Sigma\mathfrak{g} \otimes \Sigma\mu) = \Sigma\mu(f \otimes \mathfrak{g}) + \Sigma\mu(\tau_{\mathfrak{g},\Sigma} \otimes \mathfrak{g})(\mathfrak{g} \otimes f)(\tau_{\Sigma\mathfrak{g}\otimes\Sigma,\mathfrak{g}} \otimes \mathfrak{g}).$$

Un morphisme $\varphi : (\mathfrak{g}, \{-,-\}_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{h}, \{-,-\}_{\mathfrak{h}})$ de Σ-algèbres de Poisson est un morphisme de $\mathtt{C}$ qui est compatible avec les Σ-crochets de Poisson et les produits μ, c'est-à-dire qui fait commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi\otimes\varphi} & \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \mu_{\mathfrak{g}}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\mathfrak{h}}} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathfrak{h} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma\mathfrak{g} \otimes \Sigma\mathfrak{g} & \xrightarrow{\Sigma\varphi\otimes\Sigma\varphi} & \Sigma\mathfrak{h} \otimes \Sigma\mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \{-,-\}_{\mathfrak{g}}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \{-,-\}_{\mathfrak{h}}} \\ \Sigma\mathfrak{g} & \xrightarrow[\Sigma\varphi]{} & \Sigma\mathfrak{h}. \end{array}$$

1.1.1.3 Exemple. On considère $\mathtt{C} = \mathtt{Ch}_k$ avec k un corps, munie de la structure monoïdale symétrique additive usuelle : $\otimes = \otimes_k$ est le produit tensoriel de complexes et la structure symétrique est

donnée, pour A et B deux complexes de chaînes, par

$$\begin{array}{rccc} \tau : & A \otimes B & \longrightarrow & B \otimes A \\ & a \otimes b & \longmapsto & (-1)^{|a||b|} b \otimes a \end{array}$$

(on appliquera donc la règle de Koszul). Pour la suite, **on fixe** r **un entier**. On considère Σ le complexe concentré en degré r avec $\Sigma_r = k$. Ainsi, on a, pour tout complexe de chaînes A et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\Sigma A)_n = A_{n-r} =: A[-r].$$

On présente maintenant le cas particulier fondamental des définitions précédentes pour la catégorie des complexes de chaînes.

1.1.1.4 Définition. *r-Algèbre de Lie différentielle graduée* – [GJ94, Sect. 1.3]
Soit $(\mathfrak{g}, d)$ un complexe de chaînes. $\mathfrak{g}$ est une *k-algèbre de r-Lie différentielle graduée* si $\mathfrak{g}$ est une Σ-algèbre de Lie pour Σ le complexe concentré en degré r avec $\Sigma_r = k$. Autrement dit, $\mathfrak{g}$ est munie d'une application de degré r k-linéaire

$$\{-,-\} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

appelée *crochet de Lie*, qui respecte la différentielle de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} & \xrightarrow{\{-,-\}} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle d_{\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle (-1)^r d_{\mathfrak{g}}} \\ \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} & \xrightarrow[\{-,-\}]{} & \mathfrak{g} \end{array}$$

autrement dit, pour tous éléments a et b de $\mathfrak{g}$, on a l'identité

$$(-1)^r d\{a,b\} = \{da, b\} + (-1)^{|a|}\{a, db\}$$

et qui vérifie, pour tous éléments a, b et c de $\mathfrak{g}$ homogènes :

$$\begin{array}{rcll} \{a,b\} & = & -(-1)^{(|a|+r)(|b|+r)}\{b,a\} & \text{(antisymétrie)}, \\ \big\{a,\{b,c\}\big\} & = & \big\{\{a,b\},c\big\} + (-1)^{(|a|+r)(|b|+r)}\big\{b,\{a,c\}\big\} & \text{(relation de Jacobi)}. \end{array}$$

Un morphisme $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ d'algèbres de r-Lie différentielles graduées est un morphisme de la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ qui est compatible avec les crochets de Lie, c'est-à-dire que pour tous éléments a et b de $\mathfrak{g}$, on a

$$\varphi(\{a,b\}_{\mathfrak{g}}) = \{\varphi(a), \varphi(b)\}_{\mathfrak{h}}.$$

On note r-$\mathtt{DGL}_k$ la catégorie des k-algèbres de r-Lie différentielles graduées.

1.1.1.5 Définition. *r-Algèbre de Poisson* – [GJ94, Sect. 1.3]
Soit (C, d_C) une k-algèbre différentielle graduée commutative. On appelle *r-crochet de Poisson* sur C une application k-linéaire de degré r

$$\{-,-\} : C \otimes C \longrightarrow C$$

qui respecte la différentielle de C et qui vérifie, pour tous a, b et c homogènes dans C :

$$\begin{array}{rcll} \{a,b\} & = & -(-1)^{(|a|+r)(|b|+r)}\{b,a\} & \text{(antisymétrie)} \\ \big\{a,\{b,c\}\big\} & = & \big\{\{a,b\},c\big\} + (-1)^{(|a|+r)(|b|+r)}\big\{b,\{a,c\}\big\} & \text{(relation de Jacobi)} \\ \{a,bc\} & = & \{a,b\}\cdot c + (-1)^{(|a|+r)|b|}b\cdot\{a,c\} & \text{(dérivation).} \end{array}$$

Si C est muni d'un tel crochet, on dit que $(C, \{-,-\})$ est une algèbre de r-Poisson différentielle graduée.

Un morphisme $\varphi : C \to D$ d'algèbres de r-Poisson différentielles graduées est un morphisme de la catégorie $\mathtt{CDGA}_k$ qui est compatible avec les crochets de Lie, c'est-à-dire que pour tous a et b dans C, on a

$$\varphi(\{a,b\}_C) = \{\varphi(a),\varphi(b)\}_D.$$

On note $r\text{-}\mathtt{Poiss}_k$ la catégorie de telles algèbres. On a les foncteurs oublis qui oublient respectivement la structure d'algèbre et le crochet de Lie :

$$r\text{-}\mathtt{Poiss}_k \longrightarrow r\text{-}\mathtt{DGL}_k \qquad \text{et} \qquad r\text{-}\mathtt{Poiss}_k \longrightarrow \mathtt{CDGA}_k\ .$$

1.1.2 Catégorie monoïdale symétrique fermée

On considère à présent $\mathtt{C}$ une catégorie additive monoïdale symétrique *fermée*, i.e. pour tout $C \in \mathrm{Ob}\,\mathtt{C}$, il existe un foncteur $\underline{\hom}(C,-)$ avec l'adjonction suivante :

$$-\otimes C : \mathtt{C} \rightleftarrows \mathtt{C} : \underline{\hom}(C,-), \tag{1.1.1}$$

c'est-à-dire, l'équivalence naturelle de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(-_1\otimes -_2, -_3) \cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}\big(-_1, \underline{\hom}(-_2,-_3)\big).$$

On a notamment, l'équivalence

$$\mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}\big(\mathbb{1}_{\mathtt{C}}, \underline{\hom}(-_1,-_2)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(-_1,-_2).$$

1.1.2.1 Exemple. La catégorie monoïdale symétrique $(\mathtt{Ch}_k, \otimes, \mathbb{1})$ est fermée : pour (C,∂_C) et (D,∂_D) deux complexes de chaînes, le foncteur $-\otimes C : \mathtt{Ch}_k \longrightarrow \mathtt{Ch}_k$ possède un adjoint à droite appelé *foncteur Hom-interne* :

$$\underline{\hom}_k(C,-) : \mathtt{Ch}_k \longrightarrow \mathtt{Ch}_k$$

où $\big((\underline{\hom}_k(C,D))_\bullet, \partial_{\underline{\hom}}\big)$ est le complexe des applications linéaires entre les complexes C et D avec $(\underline{\hom}_k(C,D))_r$ le k-module des applications linéaires de degré r, c'est-à-dire, pour r un entier, on a

$$\underline{\hom}(C,D)_r := \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathtt{Mod}}(C_{i-r}, D_i),$$

avec la différentielle $\partial_{\underline{\hom}}$ définie, pour $f \in \underline{\hom}(C,D)_r$, par

$$\partial_{\underline{\hom}} f := \partial_D \circ f - (-1)^r f \circ \partial_C.$$

Ainsi, la collection des cycles du hom interne $\underline{\hom}(-,-)$ de degré 0 coïncide avec le foncteur hom

externe, i.e.

$$\mathcal{Z}_0(\underline{\hom}(-,-)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{Ch}_k}(-,-).$$

1.1.2.2 Lemme. *Soient* $\mathtt{C}$ *une catégorie additive monoïdale symétrique fermée et* C *un objet de la catégorie* $\mathtt{C}$*. Les foncteurs*

$$\underline{\hom}(C,-) : \mathtt{C} \to \mathtt{C} \quad \textit{et} \quad \underline{\hom}(-,C) : \mathtt{C}^{op} \to \mathtt{C}$$

sont exacts à gauche.

L'existence d'une telle adjonction nous donne, pour tout $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathtt{C}$, l'existence d'un *morphisme naturel d'évaluation*

$$ev_{A,B} : \underline{\hom}(A,B) \otimes A \longrightarrow B$$

comme counité de l'adjonction i.e. l'image du morphisme identité par l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(\underline{\hom}(A,B), \underline{\hom}(A,B)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(\underline{\hom}(A,B) \otimes A, B).$$

On a également, pour tous objets A, B et C de la catégorie $\mathtt{C}$, l'existence d'un *morphisme naturel de composition* :

$$\underline{\hom}(B,C) \otimes \underline{\hom}(A,B) \overset{c_{A,B,C}}{\longrightarrow} \underline{\hom}(A,C),$$

l'image par l'adjonction du morphisme suivant :

$$\underline{\hom}(B,C) \otimes \underline{\hom}(A,B) \otimes A \xrightarrow{1 \otimes ev_{A,B}} \underline{\hom}(B,C) \otimes B \xrightarrow{ev_{B,C}} C.$$

1.1.2.3 Remarque. L'isomorphisme $\rho : \Sigma^- \otimes \Sigma \overset{\cong}{\to} \mathbb{1}$ induit, par l'adjonction (1.1.1), le morphisme

$$\Sigma^- \cong \underline{\hom}(\Sigma, \mathbb{1}).$$

Soit $\Sigma \in Pic^{\otimes}(\mathtt{C})$: on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^- \otimes \Sigma & \xrightarrow[\rho]{\cong} & \mathbb{1} \\ {\scriptstyle \tau_{\Sigma^-,\Sigma}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & \nearrow_{\mu}^{\cong} & \\ \Sigma \otimes \Sigma^- & & \end{array}$$

qui induit induit l'adjonction

$$\Sigma \otimes - : \mathtt{C} \leftrightarrows \mathtt{C} : \Sigma^- \otimes -$$

d'unité $\eta : \mathbb{1}_{\mathtt{C}} \to \Sigma\Sigma^- \otimes -$ et de counité $\varepsilon : \Sigma^-\Sigma \otimes - \to \mathbb{1}_{\mathtt{C}}$. Par l'adjonction (1.1.1) et l'unicité de l'adjoint à droite, on a l'isomorphisme naturel de foncteurs $\underline{\hom}(\Sigma, -) \cong \Sigma^- \otimes -$. On a donc notamment l'isomorphisme naturel

$$\Sigma^- \cong \underline{\hom}(\Sigma, \mathbb{1}).$$

et l'isomorphisme ρ correspond au morphisme d'évaluation $\underline{\hom}(\Sigma, \mathbb{1}) \otimes \Sigma \to \mathbb{1}$. Ainsi, pour tout objet X de $\mathtt{C}$, on a $X \otimes \underline{\hom}(\Sigma, \mathbb{1}) \otimes \Sigma \cong X$, ce qui nous donne par adjonction, l'isomorphisme

$$X \otimes \underline{\hom}(\Sigma, \mathbb{1}) \cong \underline{\hom}(\Sigma, X). \tag{1.1.2}$$

Autrement dit, Σ est fortement dualisable.

1.1.2.4 Proposition. *Soit $(\mathtt{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale fermée. L'adjonction (1.1.1) s'internalise, i.e. pour tous objets X, Y et Z de $\mathtt{C}$, on a l'isomorphisme naturel*

$$\underline{\hom}(X \otimes Y, Z) \cong \underline{\hom}\big(X, \underline{\hom}(Y, Z)\big).$$

Démonstration. Soient X, Y et Z, trois objets de la catégorie $\mathtt{C}$. Pour tout objet A de $\mathtt{C}$, on a, par l'adjonction (1.1.1), les bijections naturelles

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(A, \underline{\hom}(X \otimes Y, Z)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(A \otimes X \otimes Y, Z) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}\big(A \otimes X, \underline{\hom}(Y, Z)\big) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}\big(A, \underline{\hom}(X, \underline{\hom}(Y, Z))\big) \quad . \end{aligned}$$

On conclut par le lemme de Yoneda : on obtient donc l'isomorphisme naturel

$$\underline{\hom}(X \otimes Y, Z) \cong \underline{\hom}\big(X, \underline{\hom}(Y, Z)\big).$$

□

1.1.3 Modules et bimodules

On considère ici $(\mathtt{C}, \otimes, \tau)$, une catégorie monoïdale symétrique fermée additive.

1.1.3.1 Définition. *Modules*

Soient (A, μ) et (B, ν) deux monoïdes associatifs d'une catégorie monoïdale $\mathtt{C}$.

(i) Un objet M de $\mathtt{C}$ est un *A-module à gauche* s'il est muni d'un morphisme ${}_A\mu : A \otimes M \longrightarrow M$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{A \otimes {}_A\mu} & A \otimes M \\ {\scriptstyle \mu \otimes M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}_A\mu} \\ A \otimes M & \xrightarrow[{}_A\mu]{} & M. \end{array}$$

De plus, si A est un monoïde unitaire d'unité $\iota : \mathbb{1} \to A$, M doit également vérifier la condition suivante de compatibilité avec l'unité :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \otimes M & \xrightarrow{\cong} & M. \\ {\scriptstyle \iota \otimes M}\downarrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle {}_A\mu} \\ A \otimes M & & \end{array}$$

Pour deux A-modules à gauche $(M, {}_A\mu^M)$ et $(N, {}_A\mu^N)$ de $\mathtt{C}$, un morphisme $\varphi : M \to N$ est un morphisme de A-modules à gauche s'il fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{A \otimes \varphi} & A \otimes N \\ {\scriptstyle {}_A\mu^M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}_A\mu^N} \\ M & \xrightarrow[\varphi]{} & N \quad . \end{array}$$

On note A-$\mathtt{Mod}_{\mathtt{C}}$ la catégorie des A-modules à gauche.

(ii) Un objet M de $\mathtt{C}$ est un *A-module à droite* s'il est muni d'un morphisme $\mu_A : M \otimes A \longrightarrow M$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes A \otimes A & \xrightarrow{A \otimes \mu_A} & M \otimes A \\ {\scriptstyle \mu \otimes M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ M \otimes A & \xrightarrow[\mu_A]{} & M. \end{array}$$

De plus, si A est un monoïde unitaire d'unité $\iota : \mathbb{1} \to A$, M doit également vérifier la condition suivante de compatibilité avec l'unité :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\cong} & M. \\ {\scriptstyle M \otimes \iota}\downarrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \mu_A} \\ M \otimes A & & \end{array}$$

Pour deux A-modules à droite (M, μ_A^M) et (N, μ_A^N) de $\mathtt{C}$, un morphisme $\varphi : M \to N$ est un morphisme de A-modules à droite s'il fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M \otimes A & \xrightarrow{\varphi \otimes A} & N \otimes A \\ {\scriptstyle \mu_A^M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A^N} \\ M & \xrightarrow[\varphi]{} & N \ . \end{array}$$

On note $\mathtt{Mod}_{\mathtt{C}}$-$A$ la catégorie des A-modules à droite.

(iii) Un objet M de $\mathtt{C}$ est un *(A, B)-bimodule* s'il est muni d'une structure de A-module à gauche ${}_A\mu$ et d'une structure de B-module à droite μ_B compatible entre elles, c'est-à-dire faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M \otimes B & \xrightarrow{A \otimes \mu_B} & A \otimes M \\ {\scriptstyle {}_A\mu \otimes B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}_A\mu} \\ M \otimes B & \xrightarrow[\mu_B]{} & M. \end{array}$$

Pour deux (A, B)-bimodules M et N de $\mathtt{C}$, un morphisme $\varphi : M \to N$ est un morphisme de (A, B)-bimodules si c'est à la fois un morphisme de A-modules à gauche et de B-modules à droite. On note (A, B)-$\mathtt{Bimod}_{\mathtt{C}}$ la catégorie des (A, B)-bimodules. On note également A-$\mathtt{Bimod}_{\mathtt{C}}$ la catégorie des (A, A)-bimodules et on appelle A-bimodule les objets de cette catégorie.

1.1.3.2 Exemple. Soient A et B deux monoïdes associatifs, C un objet de $\mathtt{C}$ et $(M, {}_A\mu_B)$ un (A, B)-bimodule dans $\mathtt{C}$. La structure sur M induit sur $\underline{\hom}(C, M)$ une structure naturelle de (A, B)-bimodule. En effet, on a le morphisme

$$A \otimes \underline{\hom}(C, M) \otimes C \overset{1 \otimes ev}{\to} A \otimes M \overset{{}_A\mu}{\to} M$$

composé du morphisme d'évaluation avec le morphisme de structure de M. Par adjonction, on a

alors le morphisme

$$A \otimes \underline{\hom}(C, M) \to \underline{\hom}(C, M),$$

qui munit $\underline{\hom}(C, M)$ d'une structure de A-module à gauche. De même, on a le morphisme

$$\underline{\hom}(C, M) \otimes B \otimes C \xrightarrow{1 \otimes \tau_{B,C}} \underline{\hom}(C, M) \otimes C \otimes B \xrightarrow{ev \otimes 1} M \otimes B \xrightarrow{\mu_B} M \ ,$$

qui nous donne par adjonction le morphisme de structure de B-module à droite

$$\underline{\hom}(C, M) \otimes B \to \underline{\hom}(C, M).$$

On a donc montré le lemme suivant.

1.1.3.3 Lemme. *Soient A et B deux monoïdes associatifs, C un objet de $\mathtt{C}$ et $(M, {}_A\mu, \mu_B)$ un (A, B)-bimodule dans $\mathtt{C}$. Alors $\underline{\hom}(C, M)$ est muni d'une structure canonique de (A, B)-bimodule.*

1.1.3.4 Définition. *Produit tensoriel*
Soient (A, μ) et (B, ν) deux monoïdes associatifs. Le *produit tensoriel* $A \otimes B$ est muni d'une structure canonique de monoïde associatif, donnée par le morphisme

$$(\mu \otimes \nu)(A \otimes \tau_{A,B} \otimes B) : (A \otimes B)^{\otimes 2} \longrightarrow (A \otimes B).$$

1.1.3.5 Définition. *Monoïde opposé*
Le *monoïde opposé* A° du monoïde (A, μ_A) est l'objet A de $\mathtt{C}$ muni de la structure de monoïde associatif opposé, donnée par le morphisme

$$\mu_{A^\circ} := \mu_A \circ \tau_{A,A} : A \otimes A \longrightarrow A.$$

On a les isomorphismes canoniques $(A^\circ)^\circ \cong A$ et $(A \otimes B)^\circ \cong A^\circ \otimes B^\circ$.

1.1.3.6 Notation(s). Pour tout monoïde (A, μ_A), on note $A^e := A \otimes A^\circ$, qui est muni du produit

$$\mu_{A^e} := (\mu_A \otimes \mu_A)(A^{\otimes 2} \otimes \tau_{A,A})(A \otimes \tau_{A,A} \otimes A).$$

1.1.3.7 Lemme. *Soit A un monoïde associatif de $\mathtt{C}$. On a les équivalences de catégories*

$$\mathtt{Mod_C}\text{-}A \cong A^\circ\text{-}\mathtt{Mod_C} \quad \textit{et} \quad A\text{-}\mathtt{Bimod_C} \cong A^e\text{-}\mathtt{Mod_C} \quad .$$

La structure de monoïde de $A \otimes A^\circ$ munit $A \otimes A$ d'une structure canonique de A^e-bimodule, i.e. d'une structure de A^e-module à gauche, appelée *structure externe*, et d'une structure de A^e-module à droite, appelée *structure interne*. Plus explicitement, on a les définitions suivantes :

1.1.3.8 Définition/Proposition. *Structures canoniques de A-bimodule sur $A \otimes A$*
Soit (A, μ) un monoïde de la catégorie $\mathtt{C}$, l'objet $A \otimes A$ possède deux structures de A-bimodule canoniques décrites ci-dessous.

▷ La structure *externe* donnée par le morphisme de structure de A-module à droite

$$\mu_A^e := (1 \otimes \mu) : (A \otimes A) \otimes A \to A \otimes A$$

et le morphisme de structure de A-module à gauche.

$$ {}_A\mu^e := (\mu \otimes 1) : A \otimes (A \otimes A) \to A \otimes A. $$

▷ La structure *interne* donnée par le morphisme de structure de A-module à droite

$$ \mu^i_A := (\mu \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A}) : (A \otimes A) \otimes A \to A \otimes A $$

et le morphisme de structure de A-module à gauche.

$$ {}_A\mu^i := (1 \otimes \mu)(\tau_{A,A} \otimes 1) : A \otimes (A \otimes A) \to A \otimes A. $$

1.1.3.9 Remarque. La structure symétrique τ de la catégorie $\mathtt{C}$ induit un isomorphisme de A-bimodules

$$ (A \otimes A, \mu^e_A, {}_A\,\mu^e) \cong (A \otimes A, \mu^i_A, {}_A\,\mu^i). $$

1.1.3.10 Remarque. On transporte ces structures à $\Sigma A \otimes A$ et $\Sigma A \otimes \Sigma A$. Notons que $\tau_{A,\Sigma}$ est l' isomorphisme donné par la symétrie de la catégorie $\mathtt{C}$, Σ étant un élément du groupe de Picard de $\mathtt{C}$.

(i) Sur $\Sigma A \otimes A$, on a :

▷ la structure externe donnée par

$$ \mu^e_A := (\Sigma A \otimes \mu) : (\Sigma A \otimes A) \otimes A \to \Sigma A \otimes A, $$
$$ {}_A\mu^e := (\Sigma\mu \otimes A)(\tau_{A,\Sigma} \otimes A \otimes A) : A \otimes (\Sigma A \otimes A) \to \Sigma A \otimes A; $$

▷ la structure interne donnée par

$$ \mu^i_A := (\Sigma\mu \otimes A)(\Sigma A \otimes \tau_{A,A}) : (\Sigma A \otimes A) \otimes A \to \Sigma A \otimes A, $$
$$ {}_A\mu^i := (\Sigma A \otimes \mu)(\tau_{A,\Sigma A} \otimes 1) : A \otimes (\Sigma A \otimes A) \to \Sigma A \otimes A. $$

(ii) Sur $\Sigma A \otimes \Sigma A$, on a :

▷ la structure externe donnée par

$$ \mu^e_A := (\Sigma A \otimes \Sigma\mu) : (\Sigma A \otimes \Sigma A) \otimes A \to \Sigma A \otimes \Sigma A, $$
$$ {}_A\mu^e := (\Sigma\mu \otimes \Sigma A)(\tau_{A,\Sigma} \otimes A \otimes \Sigma A) : A \otimes (\Sigma A \otimes \Sigma A) \to \Sigma A \otimes \Sigma A; $$

▷ la structure interne donnée par

$$ \mu^i_A := (\Sigma\mu \otimes \Sigma A)(\Sigma A \otimes \tau_{\Sigma A,A}) : (\Sigma A \otimes \Sigma A) \otimes A \to \Sigma A \otimes \Sigma A, $$
$$ {}_A\mu^i := (\Sigma A \otimes \Sigma\mu)(\tau_{A,\Sigma A\Sigma} \otimes A) : A \otimes (\Sigma A \otimes \Sigma A) \to \Sigma A \otimes \Sigma A. $$

1.1.4 Dérivations

On considère $\mathtt{C}$, une catégorie monoïdale symétrique fermée abélienne. Ainsi, on peut considérer les noyaux et les conoyaux des morphismes de $\mathtt{C}$. On peut à présent définir les dérivations.

1.1.4.1 Définition/Proposition. *Dérivation*
Soient (A,μ) un monoïde de $\mathtt{C}$, X et Y deux objets de $\mathtt{C}$ et $(M,{}_A\mu,\mu_A)$ un A-bimodule dans $\mathtt{C}$. Soient $p_{X,Y}, q_{X,Y} : \underline{\hom}(X\otimes A\otimes Y, M)\otimes X\otimes(A\otimes A)\otimes Y \longrightarrow M$ les morphismes définis par :

$$p_{X,Y} := ev_{X\otimes A\otimes Y,M}(\mathbb{1}_{\underline{\hom}}\otimes\mathbb{1}_X\otimes\mu\otimes\mathbb{1}_Y)$$

$$q_{X,Y} := \mu_A(ev_{X\otimes A\otimes Y,M}\otimes\mathbb{1}_A)(\mathbb{1}_{\underline{\hom}\otimes X\otimes A}\otimes\tau_{A,Y}) +_A\mu(\mathbb{1}_A\otimes ev_{X\otimes A\otimes Y,M})(\tau_{\underline{\hom}\otimes X,A}\otimes\mathbb{1}_{A\otimes Y}).$$

Par adjonction, on a les morphismes $p^*_{X,Y}, q^*_{X,Y} : \underline{\hom}(X\otimes A\otimes Y, M) \longrightarrow \underline{\hom}(X\otimes A\otimes A\otimes Y, M)$. On définit $\underline{\mathrm{Der}}(X\otimes A\otimes Y, M)$ comme l'égaliseur des morphismes p^* et q^*, i.e. , par l'objet universel

$$\underline{\mathrm{Der}}(X\otimes A\otimes Y,M)\longrightarrow \underline{\hom}(X\otimes A\otimes Y,M)\underset{p^*_{X,Y}}{\overset{q^*_{X,Y}}{\rightrightarrows}}\underline{\hom}(X\otimes A\otimes A\otimes Y,M).$$

On note

$$\mathrm{Der}(X\otimes A\otimes Y,M) := \mathrm{Hom}\big(\mathbb{1},\underline{\mathrm{Der}}(X\otimes A\otimes Y,M)\big)$$

qui est l'égalisateur

$$\mathrm{Der}(X\otimes A\otimes Y,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(X\otimes A\otimes Y,M)\underset{p^*_{X,Y}}{\overset{q^*_{X,Y}}{\rightrightarrows}}\mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(X\otimes A\otimes A\otimes Y,M).$$

1.1.4.2 Remarque. Pour définir $\underline{\mathrm{Der}}$, l'hypothèse $\mathtt{C}$ abélienne est trop forte : il suffit d'avoir $\mathtt{C}$ additive avec assez d'égaliseurs.

1.1.4.3 Remarque. Le morphisme d'évaluation $\underline{\hom}(A,B)\otimes A\to B$ induit un morphisme d'évaluation pour les dérivations

$$ev : \underline{\mathrm{Der}}(X\otimes A\otimes Y,M)\otimes X\otimes A\otimes Y\longrightarrow M,$$

qui vérifie la propriété que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathrm{Der}}(X\otimes A\otimes Y,M)\otimes X\otimes A\otimes A\otimes Y & \xrightarrow{ev\circ(X\otimes\mu\otimes Y)} & M \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (ev\otimes A)(\underline{\mathrm{Der}}\otimes X\otimes\tau_{A,Y})\atop\scriptstyle +(A\otimes ev)(\tau_{\underline{\mathrm{Der}}\otimes X,A}\otimes A\otimes Y)} & & \nearrow{\scriptstyle ({}_A\mu,\mu_A)} \\
A\otimes M\oplus M\otimes A & &
\end{array}.$$

1.1.4.4 Remarque. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\hom}(X\otimes A\otimes Y,M) & \underset{p^*_{X,Y}}{\overset{q^*_{X,Y}}{\rightrightarrows}} & \underline{\hom}(X\otimes A\otimes A\otimes Y,M) \\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong \\
\underline{\hom}(A\otimes X\otimes Y,M) & \underset{p^*_{\mathbb{1},X\otimes Y}}{\overset{q^*_{\mathbb{1},X\otimes Y}}{\rightrightarrows}} & \underline{\hom}(A\otimes A\otimes X\otimes Y,M) \\
\downarrow\cong & & \cong\downarrow \\
\underline{\hom}\big(A,\underline{\hom}(X\otimes Y,M)\big) & \underset{p^*_{\mathbb{1},\mathbb{1}}}{\overset{q^*_{\mathbb{1},\mathbb{1}}}{\rightrightarrows}} & \underline{\hom}\big(A\otimes A,\underline{\hom}(X\otimes Y,M)\big),
\end{array}$$

d'où l'isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Der}}(X \otimes A \otimes Y, M) \cong \underline{\mathrm{Der}}\big(A, \underline{\hom}(X \otimes Y, M)\big),$$

où $\underline{\hom}(X \otimes Y, M)$ est muni de la structure de A-bimodule induite par celle de M (cf. lemme 1.1.3.3).

1.1.4.5 Lemme. *Soient (A, μ) un monoïde de $(\mathtt{C}, \otimes)$, M un A-bimodule et $\Sigma \in Pic^{\otimes}(\mathtt{C})$. On a l'isomorphisme canonique*

$$\underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, M) \cong \underline{\mathrm{Der}}(A, M \otimes \Sigma^{-}),$$

où la structure de A-bimodule de $M \otimes \Sigma^{-}$ est induite par celle de M.

Démonstration. Soient (A, μ) un monoïde de $(\mathtt{C}, \otimes)$, M un A-bimodule et $\Sigma \in Pic^{\otimes}(\mathtt{C})$. Par adjonction, on a l'injection ι :

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\iota}{\swarrow} & \underline{\mathrm{Der}}(A, M \otimes \Sigma^{-}) & & \\ & & \big\downarrow & & \\ \underline{\hom}(\Sigma A, M) & \xleftarrow{\cong} & \underline{\hom}(A, \underline{\hom}(\Sigma, M)) & \xleftarrow[\cong]{} & \underline{\hom}(A, M \otimes \Sigma^{-}) \ . \end{array}$$

On a le diagramme commutatif aux colonnes exactes (par définition de $\underline{\mathrm{Der}}$ dans $\mathtt{C}$ abélienne) :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & & & 0 \\ \big\downarrow & & & & \big\downarrow \\ \underline{\mathrm{Der}}(A, M \otimes \Sigma^{-}) & & & & \underline{\mathrm{Der}}(\Sigma \otimes A, M) \\ \big\downarrow & & & & \big\downarrow \\ \underline{\hom}(A, M \otimes \Sigma^{-}) & \xrightarrow{\cong} & \underline{\hom}\big(A, \underline{\hom}(\Sigma, M)\big) & \xrightarrow{\cong} & \underline{\hom}(\Sigma \otimes A, M) \\ \big\downarrow & & & & \big\downarrow \\ \underline{\hom}(A \otimes A, M \otimes \Sigma^{-}) & \xrightarrow{\cong} & \underline{\hom}\big(A \otimes A, \underline{\hom}(\Sigma, M)\big) & \xrightarrow{\cong} & \underline{\hom}(\Sigma \otimes A \otimes A, M) \end{array}$$

où $\underline{\hom}(\Sigma, M) \cong B \otimes \Sigma^{-}$ par (1.1.2), et donc l'isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, M) \cong \underline{\mathrm{Der}}(A, M \otimes \Sigma^{-}).$$

□

Si le A-bimodule M est muni de plus de structure, alors celle-ci se transporte parfois aux dérivations, comme le montre la proposition suivante.

1.1.4.6 Proposition. *Soient A et C deux monoïdes associatifs de $\mathtt{C}$ et M un (A^e, C)-bimodule de $\mathtt{C}$. Alors $\underline{\mathrm{Der}}(A, M)$ est un sous C-module à droite de $\underline{\hom}(A, M)$.*

Démonstration. Le morphisme de structure est donné par la composition

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Der}}(A, M) \otimes C \otimes A & \xrightarrow{(A \otimes ev)(\underline{\mathrm{Der}}(A,M) \otimes \tau_{C,A})} & M \otimes A \\ & \searrow & \big\downarrow \mu_A \\ & & M, \end{array}$$

ce qui nous donne le morphisme

$$\mu_C : \underline{\mathrm{Der}}(A, M) \otimes C \longrightarrow \underline{\mathrm{Der}}(A, M).$$

□

Pour A, un monoïde associatif *unitaire*, on va montrer que le foncteur $\mathrm{Der}(A,-) : A\text{-}\mathtt{Bimod}_{\mathtt{C}} \longrightarrow \mathtt{Sets}$ est représentable dans la catégorie des A-bimodules, i.e. il existe un A-bimodule Ω_A tel que

$$\mathrm{Der}(A,-) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathtt{Bimod}}(\Omega_A,-).$$

1.1.4.7 Définition/Proposition. *1-formes différentielles non-commutatives*
Soit (A,μ,ι), un monoïde associatif unitaire de la catégorie $\mathtt{C}$. On définit le *A-bimodule des 1-formes différentielles non-commutatives* Ω_A comme le coégalisateur

$$\begin{tikzcd} A^{\otimes 4} \arrow[r, shift left, "A\otimes\mu\otimes A"] \arrow[r, shift right, "\mu\otimes A^{\otimes 2}+A^{\otimes 2}\otimes\mu"'] & A^{\otimes 3} \arrow[r, "\tilde{d}"] & \Omega^1_A \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des A-bimodules de $\mathtt{C}$, où $A^{\otimes i}$, pour $i = 3,4$, sont munis de leur structure de A-bimodule extérieur. On note

$$d : \tilde{d}(\iota\otimes A\otimes\iota) : A \longrightarrow \Omega_A$$

la dérivation universelle.

Démonstration. Montrons que d est une dérivation. Le diagramme de flèches $\to$ suivant commute

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(\iota\otimes A\otimes A\otimes\iota)"'] & A \arrow[d, "(\iota\otimes A\otimes\iota)"'] \arrow[dr, bend left, "d"] & \\ A^{\otimes 4} \arrow[r, shift left, "A\otimes\mu\otimes A"] \arrow[r, shift right, dotted, "\mu\otimes A^{\otimes 2}+A^{\otimes 2}\otimes\mu"'] & A^{\otimes 3} \arrow[r, "\tilde{d}"] & \Omega^1_A, \end{tikzcd}$$

donc, par propriété du coégalisateur, d est une dérivation. □

1.1.4.8 Proposition. *Le A-bimodule Ω_A vérifie la propriété universelle suivante : pour tout A-bimodule M et toute dérivation $h : A \to M$, il existe un unique morphisme de A-bimodules $i_h : \Omega_A \to M$ tel que $h = i_h \circ d$. Autrement dit, on a l'isomorphisme canonique*

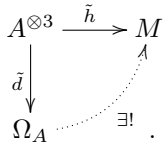
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}(A,M) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathtt{Bimod}}(\Omega_A,M). \\ h & \longmapsto & i_h \end{array}$$

Démonstration. Soit $h \in \mathrm{Der}(A,M)$. On a $\tilde{h} :_A\mu(A\otimes\mu_A)(A\otimes h\otimes A) : A^{\otimes 3} \longrightarrow M$, morphisme de A-bimodules. De plus,

$$\begin{aligned} {}_A\mu(A\otimes\mu_A)(A\otimes h\circ\mu\otimes A) &= {}_A\mu(A\otimes\mu_A)(A\otimes\mu_A\otimes A)(A\otimes h\otimes A^{\otimes 2}) \\ &\quad +{}_A\mu(A\otimes\mu_A)(A\otimes_A\mu\otimes A)(A^{\otimes 2}\otimes h\otimes A) \\ &= {}_A\mu(A\otimes\mu_A)(A\otimes h\otimes\mu) +{}_A\mu(A\otimes\mu_A)(\mu\otimes h\otimes A), \end{aligned}$$

donc $\tilde{h}$ se factorise canoniquement, de manière unique, à travers Ω_A, d'où on a le diagramme com-

mutatif suivant dans la catégorie des A-bimodules :



□

1.1.4.9 Corollaire. *Soient A un monoïde associatif unitaire, M un A-bimodule et X, Y deux objets de $\mathtt{C}$. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Der}(X \otimes A \otimes Y, M) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathtt{Bimod}}(X \otimes \Omega_A \otimes Y, M).$$

Démonstration. Il suffit de généraliser la preuve de la proposition 1.1.4.8 en utilisant l'exactitude à droite du foncteur $- \otimes -$ pour identifier $\Omega_{X\otimes A\otimes Y}$ et $X \otimes \Omega_A \otimes Y$. □

1.2 Σ-Algèbre double-Poisson

Le but de cette section est d'étendre les différentes constructions faites par Van den Bergh dans [VdB08a] à un cadre catégorique général. On considère $(\mathtt{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale, d'unité $\mathbb{1}$, symétrique pour τ fermée additive et on fixe $\Sigma \in Pic^{\otimes}(\mathtt{C})$.

1.2.1 Définition

On commence par définir le A-bimodule des bidérivations de A ; les bidérivations jouent le rôle des dérivations en géométrie non-commutative.

1.2.1.1 Définition. *Bidérivation*
On définit $\underline{\mathbb{D}\mathrm{er}}(A)$, le A-bimodule des bidérivations de A, par

$$\underline{\mathbb{D}\mathrm{er}}(A) := \underline{\mathrm{Der}}(A, A \otimes A)$$

pour $A \otimes A$ muni de sa structure de A-bimodule extérieur. On note également

$$\mathbb{D}\mathrm{er}(A) := \mathrm{Der}(A, A \otimes A).$$

1.2.1.2 Remarque. La structure de A-bimodule de $\underline{\mathbb{D}\mathrm{er}}(A)$ découle (cf. proposition 1.1.4.6) de la structure interne de A^e-bimodule de $A \otimes A$ (cf. définition 1.1.3.8).

On définit maintenant l'objet central de cette thèse, les Σ-double crochets de Poisson, introduit pour la première fois par Van den Bergh dans [VdB08a]. On étend ici la définition à n'importe quelle catégorie monoïdale symétrique fermée additive.

1.2.1.3 Définition. *Double-crochet Σ-décalé*
Soit (A, μ) un monoïde de $\mathtt{C}$. Un *double-crochet Σ-décalé* ou *Σ-double-crochet* sur A est un morphisme

$$f : \Sigma A \otimes \Sigma A \longrightarrow \Sigma A \otimes A,$$

représenté de manière diagrammatique par

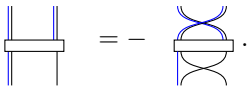
où la lecture du diagramme s'effectue de haut en bas, le brin bleu représentant la suspension Σ.

Le double crochet f

▷ est dit *anti-symétrique* si le diagramme suivant anti-commute :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{f} & \Sigma A \otimes A \\ {\scriptstyle \tau_{\Sigma A, \Sigma A}}\downarrow & \ominus & \uparrow{\scriptstyle \Sigma\tau_{A,A}} \\ \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow[f]{} & \Sigma A \otimes A, \end{array}$$

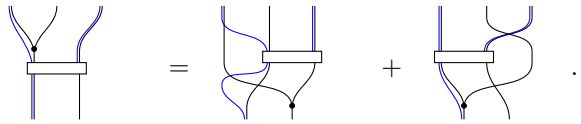
ce qui s'énonce en termes diagrammatiques :



▷ vérifie *la propriété de dérivation* si le morphisme $(\Sigma^- f)^* : A \to \underline{\hom}(\Sigma A, A \otimes A)$, adjoint du morphisme $\Sigma^- f : A \otimes \Sigma A \to A \otimes A$, est une dérivation pour la structure de A-bimodule de $\underline{\hom}(\Sigma A, A \otimes A)$ induite par la structure interne de $A \otimes A$, i.e.

$$(\Sigma^- f)^* \in \mathrm{Der}\big(A, \underline{\hom}(\Sigma A, A \otimes A)\big),$$

ce qui s'énonce en termes diagrammatiques de la manière suivante :



Si on a $\Sigma = \mathbb{1}$, on parlera juste de double-crochet ou de $\mathbb{1}$-double-crochet.

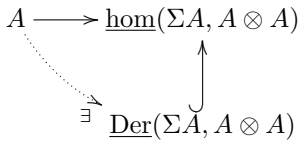
1.2.1.4 Remarque. Supposons (A, μ, ι) un monoïde unitaire ($\iota : \mathbb{1} \to A$) de $\mathtt{C}$ muni d'un Σ-double crochet f vérifiant la propriété de dérivation. Alors, par l'assertion de dérivation du Σ-double-crochet et comme le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\iota \otimes \iota} & A \otimes A\,, \\ {\scriptstyle \cong}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mathbb{1} & \xrightarrow[\iota]{} & A \end{array}$$

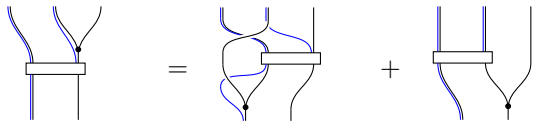
le morphisme $\mathbb{1} \otimes A \xrightarrow{f(\iota \otimes 1)} A \otimes A$ est nul.

1.2.1.5 Proposition. *Soit (A, μ) un monoïde de la catégorie $\mathcal{C}$, muni d'un Σ-double-crochet f. Alors*

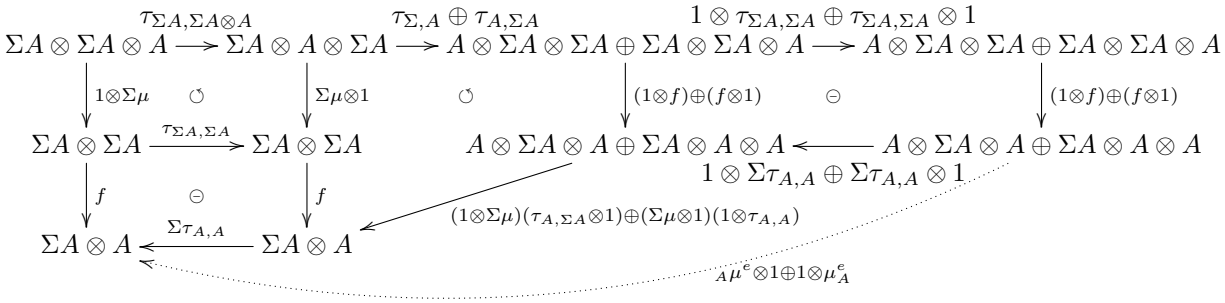
le morphisme $\Sigma^- f : A \to \underline{\hom}(\Sigma A, A \otimes A)$ *se factorise :*



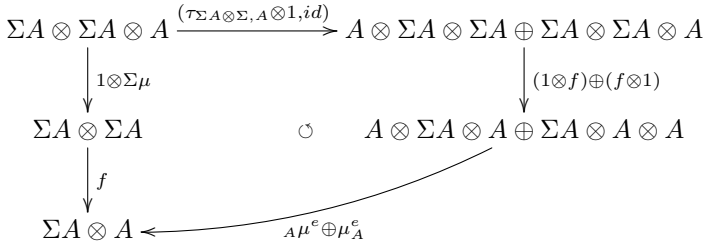
où $\underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, A \otimes A)$ *est défini par rapport à la structure externe de* A*-bimodule de* $A \otimes A$*. Ainsi, le* Σ*-double-crochet vérifie une propriété de dérivation à droite que l'on peut exprimer de manière diagrammatique de la manière suivante :*



Démonstration. On a le diagramme suivant :



où les carrés anticommutatifs proviennent de la propriété d'anti-symétrie du Σ-double-crochet et le carré central commute par la propriété de dérivation de f. Donc le diagramme extérieur en trait plein commute. De plus, la partie basse du diagramme peut se factoriser en la flèche en pointillés. Finalement, on a le diagramme commutatif suivant :



et, ainsi, un Σ-double-crochet sur A est une dérivation en sa deuxième entrée pour la structure externe de A-bimodule de $\Sigma A \otimes A$, i.e. le morphisme $A \to \underline{\hom}(\Sigma A, A \otimes A)$ se factorise à travers $\underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, A \otimes A)$, ce qui conclut cette preuve. □

1.2.1.6 Définition. *Algèbre* Σ*-double Lie*

Soit A un objet de la catégorie $\mathtt{C}$ muni d'un Σ-double crochet anti-symétrique

$$f := \{\!\{-,-\}\!\} : \Sigma A \otimes \Sigma A \longrightarrow \Sigma A \otimes A.$$

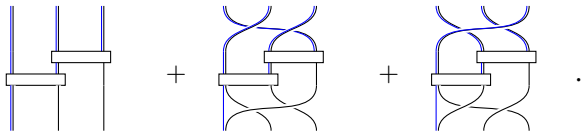
On appelle *double-jacobiateur* associé à f l'application

$$DJ_f : \Sigma A \otimes \Sigma A \otimes \Sigma A \to \Sigma A \otimes A \otimes A$$

que l'on note également $\{\!\{-,-,-\}\!\}$, définie par

$$DJ_f := (f \otimes 1)(1 \otimes f) + \Sigma\tau_{A\otimes A,A}(f \otimes 1)(1 \otimes f)\tau_{\Sigma A,\Sigma A\otimes\Sigma A} + \Sigma\tau_{A,A\otimes A}(f \otimes 1)(1 \otimes f)\tau_{\Sigma A\otimes\Sigma A,\Sigma A}.$$

On représente diagrammatiquement le double-jacobiateur de la manière suivante :



On dit que le Σ-double-crochet f vérifie *l'identité double-Jacobi* si le double-jacobiateur associé, DJ_f, est nul. Dans ce cas, on dit que A est une algèbre Σ-*double Lie*.

Pour deux algèbres Σ-double Lie $(A, \{\!\{-,-\}\!\}_A)$ et $(B, \{\!\{-,-\}\!\}_B)$, un morphisme $\varphi : A \to B$ de la catégorie $\mathtt{C}$ est un morphisme de Σ-algèbres double Lie si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{\Sigma\varphi\otimes\Sigma\varphi} & \Sigma B \otimes \Sigma B \\ {\scriptstyle \{\!\{-,-\}\!\}_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \{\!\{-,-\}\!\}_B} \\ \Sigma A \otimes A & \xrightarrow[\Sigma\varphi\otimes\varphi]{} & \Sigma B \otimes B. \end{array}$$

On note $\Sigma\text{-}\mathtt{DLie}_{\mathtt{C}}$ la catégorie des Σ-algèbres double Lie.

1.2.1.7 Remarque. Le double Jacobiateur est stable sous l'action diagonale de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, i.e.

$$DJ_f = \Sigma\tau_{A,A\otimes A} DJ_f \tau_{\Sigma A\otimes\Sigma A,\Sigma A}.$$

Cette propriété motive l'approche adoptée dans les prochains chapitres, notamment les chapitres 3 et 4.

1.2.1.8 Définition. *La catégorie* $\Sigma\text{-}\mathtt{DPoiss}_{\mathtt{C}}$
Soit (A, μ) un monoïde de $\mathtt{C}$ muni d'un Σ-double-crochet

$$f := \{\!\{-,-\}\!\} : \Sigma A \otimes \Sigma A \longrightarrow \Sigma A \otimes A,$$

qui est un double crochet de Lie qui vérifie la propriété de dérivation. Un tel Σ-double crochet est alors dit *de Poisson* et le monoïde A est une Σ-*algèbre double-Poisson* de $\mathtt{C}$.

Soient (A, f_A) et (B, f_B) deux Σ-algèbres double-Poisson et soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de $\mathtt{C}$. On dit que φ est un morphisme de Σ-algèbre double-Poisson si φ est un morphisme de monoïdes tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{f_A} & \Sigma A \otimes A \\ {\scriptstyle \Sigma\varphi\otimes\Sigma\varphi}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\varphi\otimes\varphi} \\ \Sigma B \otimes \Sigma B & \xrightarrow[f_B]{} & \Sigma B \otimes B. \end{array}$$

On note Σ-$\mathtt{DPoiss}_{\mathtt{C}}$ la sous-catégorie des Σ-algèbres double-Poisson dans $\mathtt{C}$ muni des morphismes de Σ-algèbre double-Poisson. On a les deux foncteurs oublis :

$$\Sigma\text{-}\mathtt{DPoiss}_{\mathtt{C}} \longrightarrow \Sigma\text{-}\mathtt{DLie}_{\mathtt{C}} \quad \text{et} \quad \Sigma\text{-}\mathtt{DPoiss}_{\mathtt{C}} \longrightarrow \mathtt{As}(\mathtt{C}, \otimes).$$

1.2.1.9 Lemme. (cf. [VdB08a, Prop 2.4.2.])
Soit (A, μ) un monoïde de $\mathtt{C}$ muni d'un Σ-double-crochet f et DJ_f son double-jacobiateur associé. On a l'identité :

$$\begin{aligned}(\Sigma\mu f \otimes 1)(1 \otimes f) + (1 \otimes \mu)(\Sigma\tau \otimes 1)(1 \otimes \tau)(f \otimes 1)(1 \otimes \Sigma\tau)(1 \otimes f) \quad & -f(\mu f \otimes 1) - f(1 \otimes \mu f)(\bar{\tau} \otimes 1) \\ = \quad & (\Sigma\mu \otimes 1)DJ_f - (1 \otimes \mu)DJ_f(\bar{\tau} \otimes 1)\end{aligned}$$

où $\tau := \tau_{A,A}$ et $\bar{\tau} = \tau_{\Sigma A, \Sigma A}$.

Démonstration. On étudie séparément les termes à gauche de l'égalité. Pour commencer, on a l'égalité :

$$(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(f \otimes 1)(1 \otimes \Sigma\tau_{A,A})(1 \otimes f) = -(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(f \otimes 1)(1 \otimes f)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A})$$

par antisymétrie de f. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
&f(\mu f \otimes 1) \\
&= -\Sigma\tau_{A,A} f \tau_{\Sigma A, \Sigma A}(\Sigma\mu f \otimes 1) \\
&= -\Sigma\tau_{A,A} f(1 \otimes \Sigma\mu)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A, \Sigma A})(f \otimes 1) \\
&= -\Sigma\tau_{A,A} f(1 \otimes \Sigma\mu)(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A}) \\
&= -(\Sigma\mu \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(f \otimes 1)(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A}) \\
&\quad -\Sigma\tau_{A,A}(\Sigma\mu \otimes 1)(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(f \otimes 1)(1 \otimes \Sigma\tau_{A,A})(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A}) \\
&= -(\Sigma\mu \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(f \otimes 1)(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A}) \\
&\quad -(1 \otimes \mu)(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(f \otimes 1)(1 \otimes \Sigma\tau_{A,A})(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A}) \\
&= -(\Sigma\mu \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(f \otimes 1)(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A}) \\
&\quad -(1 \otimes \mu)(1 \otimes \tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(f \otimes 1)(1 \otimes \Sigma\tau_{A,A})(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A}) \\
&= -(\Sigma\mu \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(f \otimes 1)(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A}) \\
&\quad +(1 \otimes \mu)(1 \otimes \tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(f \otimes 1)(1 \otimes f)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A})(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A}).
\end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned}
f(1 \otimes \mu f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1) =& (1 \otimes \mu)(f \otimes 1)(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1) \\
&+(\Sigma\mu \otimes 1)(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(f \otimes 1)(1 \otimes \Sigma\tau_{A,A})(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1) \\
=& (1 \otimes \mu)(f \otimes 1)(1 \otimes f)(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1) \\
&- (\Sigma\mu \otimes 1)(\Sigma\tau_{A,A} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{A,A})(f \otimes 1)(1 \otimes f)(1 \otimes \tau_{\Sigma A, \Sigma A})(\tau_{\Sigma A, \Sigma A} \otimes 1)
\end{aligned}$$

On a donc finalement que

$$
\begin{aligned}
(\Sigma\mu f\otimes 1)(1\otimes f)+(1\otimes\mu)(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(f\otimes 1)(1\otimes\Sigma\tau_{A,A})(1\otimes f)-f(\mu f\otimes 1)-f(1\otimes\mu f)(\bar{\tau}\otimes 1)&\\
=(\Sigma\mu\otimes 1)(f\otimes 1)(1\otimes f)&\\
-(1\otimes\mu)(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(f\otimes 1)(1\otimes f)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})&\\
-(\Sigma\mu\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(f\otimes 1)(1\otimes f)(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})&\\
+(1\otimes\mu)(1\otimes\tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(f\otimes 1)(1\otimes f)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})&\\
+(1\otimes\mu)(f\otimes 1)(1\otimes f)(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)&\\
-(\Sigma\mu\otimes 1)(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(f\otimes 1)(1\otimes f)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)&\\
=\ (\Sigma\mu\otimes 1)\Big((f\otimes 1)(1\otimes f)&\\
+(1\otimes\tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(f\otimes 1)(1\otimes f)(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})&\\
+(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(f\otimes 1)(1\otimes f)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)\Big)&\\
-(1\otimes\mu)\Big((\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(f\otimes 1)(1\otimes f)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)&\\
+(1\otimes\tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(f\otimes 1)(1\otimes f)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)&\\
+(f\otimes 1)(1\otimes f)\Big)(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)&\\
=\ (\Sigma\mu\otimes 1)\Big((f\otimes 1)(1\otimes f)&\\
+(1\otimes\tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(f\otimes 1)(1\otimes f)(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})&\\
+(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(f\otimes 1)(1\otimes f)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)\Big)&\\
-(1\otimes\mu)\Big((\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(f\otimes 1)(1\otimes f)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)&\\
+(1\otimes\tau_{A,A})(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(f\otimes 1)(1\otimes f)(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{\Sigma A,\Sigma A})&\\
+(f\otimes 1)(1\otimes f)\Big)(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)&\\
=(\Sigma\mu\otimes 1)DJ_f-(1\otimes\mu)DJ_f(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1).&
\end{aligned}
$$

□

1.2.1.10 Proposition. *Soit (A,μ) un monoïde de $\mathtt{C}$ muni d'un Σ-double-crochet de Poisson f. Alors $(\Sigma A,\Sigma\mu f)$ est une algèbre de Leibniz dans $\mathtt{C}$. De plus, la composée des deux morphismes suivants est nulle :*

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \underline{\hom}(\Sigma A\otimes A,A) \\
 & \overset{0}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle p^*_{\Sigma,\mathbb{1}}-q_{\Sigma,\mathbb{1}^*}} \\
A & \xrightarrow[(\Sigma\mu f)^*]{} & \underline{\hom}(\Sigma A,A)
\end{array}
\tag{1.2.1}
$$

avec $p^*_{\Sigma,\mathbb{1}}$ et $q^*_{\Sigma,\mathbb{1}}$, les morphismes définis à la définition 1.1.4.1.

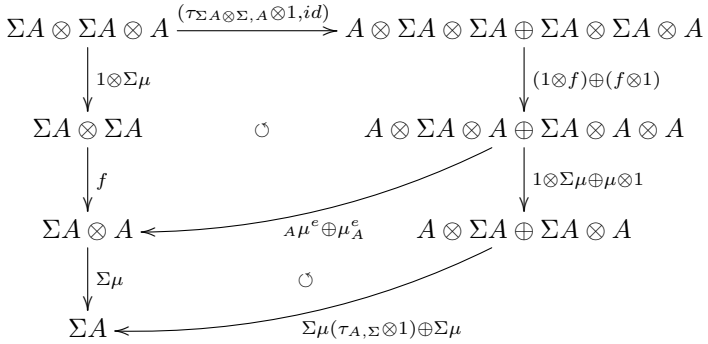
Démonstration. D'après ce qui précède, on a

$$
\Sigma\mu f(1\otimes\Sigma\mu f)=(\Sigma\mu\otimes 1)(1\otimes\mu)\big((f\otimes 1)(1\otimes f)+(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(f\otimes 1)(1\otimes\Sigma\tau_{A,A})(1\otimes f)\big).
$$

D'après le lemme 1.2.1.9, et comme f vérifie l'identité double-Jacobi, on a

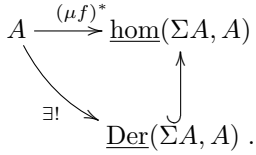
$$\begin{aligned}0 =&\Sigma\mu\big((\Sigma\mu\otimes 1)(f\otimes 1)(1\otimes f)+(1\otimes\mu)(\Sigma\tau_{A,A}\otimes 1)(1\otimes\tau_{A,A})(f\otimes 1)(1\otimes\Sigma\tau_{A,A})(1\otimes f)\big)\\ &-\Sigma\mu f(\Sigma\mu f\otimes 1)-\Sigma\mu f(1\otimes\Sigma\mu f)(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)\\ =&\Sigma\mu f(1\otimes\Sigma\mu f)-\Sigma\mu f(\Sigma\mu f\otimes 1)-\Sigma\mu f(1\otimes\Sigma\mu f)(\tau_{\Sigma A,\Sigma A}\otimes 1)\end{aligned}$$

et donc $\Sigma\mu f$ vérifie l'identité de Jacobi-Leibniz. On a donc bien que $(\Sigma A,\Sigma\mu f)$ est une algèbre de Leibniz. On a également le diagramme suivant :



qui est commutatif par 1.2.1.5. Donc $\Sigma\mu f$ est une dérivation en sa deuxième entrée, donc le diagramme 1.2.1 commute. □

1.2.1.11 Remarque. Si la catégorie $\mathtt{C}$ est *abélienne*, la proposition précédente nous donne la factorisation



1.2.2 Double Poisson dans la catégorie $\mathtt{Ch}_k$

Dans cette sous-section, on considère $\mathtt{C}=\mathtt{Ch}_k$ munie de la structure monoïdale symétrique fermée additive usuelle (cf. exemple 1.1.1.3). On note $\mathtt{DGA}_k$, la sous-catégorie des monoïdes unitaires de $\mathtt{Ch}_k$, i.e. des algèbres différentielles graduées. Soit A une telle algèbre. Pour a un élément de A, on note sa l'élément correspondant dans $\Sigma A=A[r]:s$ est le générateur du complexe k concentré en degré r. On note comme suit les deux structures canoniques de A-bimodule sur $A\otimes A$: pour a,b,u et v des éléments de A, on a

- ▷ la structure externe donnée par $a\cdot(u\otimes v)\cdot b:=au\otimes vb$;
- ▷ la structure interne donnée par $a\star(u\otimes v)\star b:=(-1)^{|a||u|+|a||b|+|b||v|}ub\otimes av$.

Les signes apparaissant dans la structure interne découlent des signes de Koszul classiques. Nous allons à présent expliciter la structure de Σ-double-crochet de Poisson sur une algèbre différentielle graduée (A,∂_A). La donnée d'une telle structure sur A est donc la donnée d'un morphisme de complexes de chaînes

$$\begin{array}{rccc}\{\!\{-,-\}\!\}: & \Sigma A\otimes\Sigma A & \to & \Sigma A\otimes A\\ & sa\otimes sb & \longmapsto & s\{\!\{a,b\}\!\}\end{array},$$

c'est à dire qu'un tel morphisme fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{\{\!\{-,-\}\!\}} & \Sigma A \otimes A \\ {\scriptstyle \partial_{\Sigma A \otimes \Sigma A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{\Sigma A \otimes A}} \\ \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{\{\!\{-,-\}\!\}} & \Sigma A \otimes A \ , \end{array}$$

ce qui en terme d'éléments se traduit par la relation suivante : pour a et b, deux éléments de A,

$$(-1)^r s(\partial_{A\otimes A}\{\!\{a,b\}\!\}) = (-1)^r s\{\!\{\partial_A a, b\}\!\} + (-1)^{|a|} s\{\!\{a, \partial_A b\}\!\}$$

ce qui équivaut à

$$\partial_{A\otimes A}\{\!\{a,b\}\!\} = \{\!\{\partial_A a, b\}\!\} + (-1)^{|a|+r}\{\!\{a, \partial_A b\}\!\}.$$

L'anti-symétrie du double-crochet se traduit en terme d'éléments par l'égalité suivante ; pour a et b, deux éléments de A,

$$s\{\!\{a,b\}\!\} = (-1)^{(|a|+r)(|b|+r)} s(\tau\{\!\{b,a\}\!\}).$$

La propriété de dérivation est que le morphisme Hamiltonien

$$\begin{array}{rccc} H: & A & \longrightarrow & \underline{\hom}(\Sigma A, A\otimes A) \\ & a & \longmapsto & \{\!\{a,-\}\!\} : sb \mapsto \{\!\{a,b\}\!\} \end{array}$$

est une dérivation, c'est à dire que, pour tous éléments a, b et c de A, on a $\{\!\{ab,c\}\!\} = a \star \{\!\{b,c\}\!\} + (-1)^{|b|(|c|+r)}\{\!\{a,c\}\!\} \star b$, le signe provenant de la permutation $A \otimes \underline{A} \otimes \Sigma A \overset{1\otimes\bar{\tau}}{\to} A \otimes \Sigma A \otimes \underline{A}$.

1.2.2.1 Remarque. Par la propriété 1.2.1.5, un Σ-double-crochet est aussi une dérivation en son deuxième argument, ce qui se traduit par la propriété

$$\forall a,b,c \in A, \quad \{\!\{a,bc\}\!\} = (-1)^{(|a|+r)|b|} b \cdot \{\!\{a,c\}\!\} + \{\!\{a,b\}\!\} \cdot c.$$

1.2.2.2 Notation(s). On adoptera parfois la notation (dite de Sweedler) suivante :

$$\{\!\{a,b\}\!\} = \sum_i \{\!\{a,b\}\!\}'_i \otimes \{\!\{a,b\}\!\}''_i \overset{not}{=:} \{\!\{a,b\}\!\}' \otimes \{\!\{a,b\}\!\}''$$

qui rend implicite la somme. Pour $a, b_1, \ldots, b_n$ des éléments homogènes de A, on définit :

$$\{\!\{a, b_1 \otimes \ldots \otimes b_n\}\!\}_L := \{\!\{a,b_1\}\!\} \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_n.$$

Ainsi, l'identité double Jacobi se traduit en terme d'éléments, pour a, b et c, trois éléments de A, par

$$s\{\!\{a, \{\!\{b,c\}\!\}\}\!\}_L + (-1)^{(|a|+r)(|b|+|c|)} s\tau_{A\otimes A,A}\{\!\{b, \{\!\{c,a\}\!\}\}\!\}_L + (-1)^{(|c|+r)(|a|+|b|)} s\tau_{A,A\otimes A}\{\!\{c, \{\!\{a,b\}\!\}\}\!\}_L = 0,$$

où le signe $(-1)^{(|a|+r)(|b|+|c|)}$ provient de la permutation $\tau_{\Sigma A,\Sigma A\otimes\Sigma A}$ et le signe $(-1)^{(|c|+r)(|a|+|b|)}$, de la permutation $\tau_{\Sigma A\otimes\Sigma A,\Sigma A}$. Finalement, on a la forme explicite de la définition d'algèbre Σ-double Poisson.

1.2.2.3 Définition/Proposition. *Algèbre r-double Poisson*
Soit A une k-algèbre différentielle graduée non nécessairement unitaire. On dit que A est *une al-*

gèbre r-double Poisson si elle est munie d'un morphisme de complexe de chaînes

$$\{\!\{-,-\}\!\} : \Sigma A \otimes \Sigma A \to \Sigma A \otimes A$$

vérifiant les trois assertions suivantes pour tous éléments a, b et c de A :

Antisymétrie :

$$\{\!\{a,b\}\!\} = (-1)^{(|a|+r)(|b|+r)}(\tau\{\!\{b,a\}\!\});$$

Dérivation :

$$\{\!\{ab,c\}\!\} = a \star \{\!\{b,c\}\!\} + (-1)^{|b|(|c|+r)}\{\!\{a,c\}\!\} \star b;$$

Double-Jacobi :

$$\begin{aligned}\{\!\{a,\{\!\{b,c\}\!\}\}\!\}_L + (-1)^{(|a|+r)(|b|+|c|)}(\tau\otimes 1)(1\otimes\tau)\{\!\{b,\{\!\{c,a\}\!\}\}\!\}_L \\ + (-1)^{(|c|+r)(|a|+|b|)}(1\otimes\tau)(\tau\otimes 1)\{\!\{c,\{\!\{a,b\}\!\}\}\!\}_L \;=\; 0.\end{aligned}$$

Soient (A, f_A) et (B, f_B) deux r-algèbres double-Poisson et soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'algèbres différentielles graduées. On dit que φ est un morphisme de Σ-algèbre double-Poisson si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{f_A} & \Sigma A \otimes A \\ \downarrow{\scriptstyle \Sigma\varphi\otimes\Sigma\varphi} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\varphi\otimes\varphi} \\ \Sigma B \otimes \Sigma B & \xrightarrow[f_B]{} & \Sigma B \otimes B. \end{array}$$

On note r-$\mathtt{DPoiss}_k$ la catégorie des k-algèbres r-double-Poisson.

1.2.2.4 Exemple. [VdB08a, Ex. 2.3.3]
Soit $A = k[t]$. Les double-crochets

$$\{\!\{t,t\}\!\}^1 := t\otimes 1 - 1\otimes t \quad \text{et} \quad \{\!\{t,t\}\!\}^3 := t^2\otimes t - t\otimes t^2$$

munissent chacun A d'une structure d'algèbre double Poisson.

1.2.2.5 Exemple. [Pow16, Prop. A.1]
Soit $A = k[t]$. Pour $\lambda, \mu, \nu \in k$,

$$\{\!\{t,t\}\!\} := \lambda\{\!\{t,t\}\!\}^1 + \mu(t^2\otimes 1 - 1\otimes t^2) + \nu\{\!\{t,t\}\!\}^3$$

définit un double crochet de Poisson sur A si et seulement si $\lambda\nu - \mu^2 = 0$ et tout double crochet de Poisson sur $k[t]$ est de cette forme.

Comme le montre [FL98, Th. 1.2] : sur une algèbre A possédant un domaine non-commmutatif, tout crochet de Poisson est un multiple du commutateur donc s'annule sur $A_\natural := A/[A,A]$. Le crochet de Poisson classique n'est donc pas adapté au monde non-commutatif. De manière opposée, les doubles crochets de Poisson ne sont pas adaptés au monde commutatif, comme l'illustre le théorème suivant.

1.2.2.6 Théorème. [Pow16, Th. 1]
Soit R un anneau commutatif pour lequel l'application $x \mapsto x^2$ est injective. Alors, pour $d \geqslant 2$, toute structure double Poisson sur $R[t_1, \ldots, t_d]$ avec $|t_i| = 0$ pour tout i, est triviale.

1.2.2.7 Remarque. Pour $A = (T(V), \partial)$ une algèbre différentielle graduée libre, si l'on se donne une application linéaire

$$\{\!\{-,-\}\!\} : V[r] \otimes V[r] \longrightarrow \big(T(V) \otimes T(V)\big)[r],$$

il est en général difficile de vérifier à la main que $\{\!\{-,-\}\!\}$ munit $T(V)$ d'une structure de r-algèbre double Poisson, notamment à cause de la condition double Jacobi. Pour cela, nous avons mis au point des procédures dans le langage Singular que l'on pourra consulter en annexe D.

Une application directe du théorème B.3.0.1 pour $\mathtt{C} = \mathtt{DGA}_k$ nous redonne le résultat de Van den Bergh [VdB08a, Cor 2.4.6.].

1.2.2.8 Corollaire. *Soit $\big(A, \{\!\{-,-\}\!\}\big)$ une algèbre de r-double-Poisson différentielle graduée. Alors le crochet*

$$\{-,-\} := \mu_A \circ \{\!\{-,-\}\!\} : A \otimes A \longrightarrow A$$

induit une structure de r-Poisson non-commutative sur A. On a donc que $A_\natural$ est une r-algèbre de Lie différentielle graduée, de crochet

$$\begin{array}{rccc} \{-,-\}_\natural : & A_\natural \otimes A_\natural & \longrightarrow & A_\natural \\ & x \otimes y & \longmapsto & \{\!\{x,y\}\!\}'\{\!\{x,y\}\!\}'', \end{array}$$

d'où l'existence du foncteur

$$(-)_\natural : r\text{-}\mathtt{DPoiss}_k \longrightarrow r\text{-}\mathtt{NCPoiss}_k.$$

1.2.2.9 Remarque. [Art15, Sect 3.4] On considère $A = k\langle x, y\rangle$, l'algèbre des polynômes non-commutatifs à deux variables. On définit sur A, les double crochets $\{\!\{-,-\}\!\}^1$ et $\{\!\{-,-\}\!\}^2$ définis par :

$$\begin{array}{lll} \{\!\{x,y\}\!\}^1 = -yx \otimes 1; & \{\!\{y,x\}\!\}^1 = xy \otimes 1; & \{\!\{x,x\}\!\}^1 = 0 = \{\!\{y,y\}\!\}^1; \\ \{\!\{x,y\}\!\}^1 = xy \otimes 1; & \{\!\{y,x\}\!\}^2 = -yx \otimes 1; & \{\!\{x,x\}\!\}^2 = 0 = \{\!\{y,y\}\!\}^2. \end{array}$$

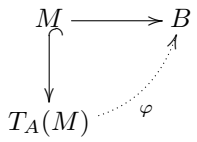
Ces double crochets ne sont clairement pas antisymétriques donc ne sont pas de Poisson. Pourtant, les crochets $\{-,-\}^i := \mu \circ \{\!\{-,-\}\!\}^i$ pour $i \in \{1,2\}$ munissent A d'une structure d'algèbre NCPoisson (voir annexe B).

1.2.3 Double Poisson sur un monoïde libre

On fixe A un monoïde de $\mathtt{C}$ et M un A-bimodule. On considère la A-algèbre libre sur M :

$$T_A(M) := A \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} M^{\otimes_A n}$$

possédant la propriété universelle suivante : pour toute A-algèbre B munie d'un morphisme $M \to B$ de A-bimodule, on a l'extension canonique suivante :



avec φ un morphisme de A-algèbre unique. En particulier, on a l'injection $A \oplus M \hookrightarrow T_A M$.

On va définir plusieurs classes de doubles crochets de Poisson sur $T_A(M)$: notons qu'un Σ-double crochet f sur $T_A(M)$ anti-symétrique et vérifiant la propriété de dérivation est entièrement déterminé par ses restrictions à $\Sigma A \otimes \Sigma A$, $\Sigma M \otimes \Sigma A$ et $\Sigma M \otimes \Sigma M$.

§ 1 Double crochets constants

1.2.3.1 Définition. *Double Poisson constant*
Soient A un monoïde associatif de $\mathtt{C}$, M un A-bimodule et $\{\!\{-,-\}\!\}$ un Σ-double crochet de Poisson sur $T_A(M)$. On dit que le double crochet $\{\!\{-,-\}\!\}$ est *constant* si les restrictions de $\{\!\{-,-\}\!\}$ à $\Sigma A \otimes \Sigma A$ et $\Sigma M \otimes \Sigma A$ sont nulles et si sa restriction à $\Sigma M \otimes \Sigma M$ est à valeurs dans $\Sigma A \otimes A$, c'est-à-dire que $\{\!\{-,-\}\!\}$ est entièrement déterminé par le Σ-double crochet anti-symétrique

$$\{\!\{-,-\}\!\} : \Sigma M \otimes \Sigma M \longrightarrow \Sigma A \otimes A.$$

1.2.3.2 Exemple. Si l'on se place dans la catégorie des complexes de chaînes, un Σ-double crochet de Poisson linéaire sur $T_k(M)$, pour M un complexe, correspond à la donnée d'une forme anti-symétrique sur M.

§ 2 Double crochets linéaires

1.2.3.3 Définition. *Double Poisson linéaire*
Soient A un monoïde associatif de $\mathtt{C}$, M un A-bimodule et $\{\!\{-,-\}\!\}$ un Σ-double crochet de Poisson sur $T_A(M)$. On dit que le double crochet $\{\!\{-,-\}\!\}$ est *linéaire* si la restriction de $\{\!\{-,-\}\!\}$ à $\Sigma A \otimes \Sigma A$ est nulle et ses restrictions à $\Sigma M \otimes \Sigma A$ et $\Sigma M \otimes \Sigma M$ sont respectivement à valeurs dans $\Sigma A \otimes A$ et $\Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M)$, c'est-à-dire que $\{\!\{-,-\}\!\}$ est entièrement déterminé par les doubles crochets

$$\begin{aligned}\{\!\{-,-\}\!\} &: \Sigma M \otimes \Sigma A \longrightarrow \Sigma A \otimes A \quad \text{et} \\ \{\!\{-,-\}\!\} &: \Sigma M \otimes \Sigma M \longrightarrow \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M).\end{aligned}$$

On note $\Sigma\text{-}\mathtt{DPFree}_A^{lin}$ la sous-catégorie des A-algèbres libres munies d'un Σ-double crochet de Poisson linéaire avec pour morphismes, les morphismes de Σ-algèbres double Poisson induits par un morphisme de A-bimodule.

1.2.3.4 Exemple. (cf. [ORS13, Sect. 2]) On considère $\{\!\{-,-\}\!\}$, un $\mathbb{1}$-double crochet linéaire sur $T(M) := T_{\mathbb{1}} M$, qui est donc entièrement déterminé par les morphismes $f : M \otimes M \longrightarrow M \otimes \mathbb{1}$ et $g : M \otimes \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$. À cause de la propriété de dérivation du double-crochet, le morphisme g est nul. L'identité double-Jacobi nous donne que l'identité

$$pr_{M \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}} \{\!\{-,-,-\}\!\}|_{M^{\otimes 3}} = 0$$

où $\{\!\{-,-,-\}\!\}$ est le double-jacobiateur associé à $\{\!\{-,-\}\!\}$; on a donc $(f\otimes \mathbb{1})(M\otimes f)-(\tau_{\mathbb{1},M}\otimes \mathbb{1})(\mathbb{1}\otimes f)(f\otimes M)=0$ ce qui équivaut, grâce aux isomorphismes $M\otimes\mathbb{1}\cong M\cong \mathbb{1}\otimes M$, à l'identité

$$f(M\otimes f)=f(f\otimes M),$$

ce qui correspond à une structure de monoïde associatif non-unitaire sur M. On a ainsi l'équivalence de catégories

$$\mathbb{1}\text{-}\mathtt{DPFree}_{\mathbb{1}}^{lin}\cong \mathtt{As}(\mathtt{C},\otimes).$$

§ 3 L'exemple du double crochet de Schouten-Nijenhuis

En suivant [VdB08a, Sect. 3.2], on rappelle la définition du 0-*double-crochet de Schouten-Nijenhuis*. On se place dans la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ et on considère A une algèbre différentielle graduée finiment engendrée, ce qui implique que Ω_A est un A-bimodule finiment engendré. Les morphismes

$$(A\otimes\tau_{A,A})\Big((ev\otimes A)(\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes ev)-(A\otimes ev)(\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes ev)(\tau_{\mathbb{D}\mathrm{er}(A),\mathbb{D}\mathrm{er}(A)}\otimes A)\Big):\mathbb{D}\mathrm{er}(A)^{\otimes 2}\otimes A\to A^{\otimes 3}$$
$$(\tau_{A,A}\otimes A)\Big((A\otimes ev)(\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes ev)-(ev\otimes A)(\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes ev)(\tau_{\mathbb{D}\mathrm{er}(A),\mathbb{D}\mathrm{er}(A)}\otimes A)\Big):\mathbb{D}\mathrm{er}(A)^{\otimes 2}\otimes A\to A^{\otimes 3}$$

définissent, par adjonction, les morphismes

$$\{\!\{-,-\}\!\}_l^{SN}:\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\to\mathrm{Hom}(A,A^{\otimes 3})$$
$$\{\!\{-,-\}\!\}_r^{SN}:\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\to\mathrm{Hom}(A,A^{\otimes 3})$$

1.2.3.5 Proposition. [VdB08a, Prop. 3.2.1]
Le morphisme $\{\!\{-,-\}\!\}_l^{SN}$ (resp. $\{\!\{-,-\}\!\}_r^{SN}$) se factorise à travers $\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes A$ (resp. $A\otimes\mathbb{D}\mathrm{er}(A)$).

Démonstration. Le fait que le A-bimodule Ω_A soit finiment engendré implique l'isomorphisme

$$\mathrm{Der}(A,A^{\otimes 3})\cong\mathrm{Hom}_{A^e}(\Omega_A,A\otimes A)\otimes A\underset{1.1.4.8}{\cong}\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes A.$$

□

1.2.3.6 Remarque. Van den Bergh définit un double crochet de Schouten Nijenhuis de degré 1. Nous faisons ici le même type de construction, en omettant le décalage. Pour retrouver son résultat, on pourra utiliser le théorème 2.1.4.1.

1.2.3.7 Théorème. [VdB08a, Thm. 3.2.2]
Les morphismes

$$\{\!\{-,-\}\!\}_l^{SN}+\{\!\{-,-\}\!\}_r^{SN}:\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\to\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes A\oplus A\otimes\mathbb{D}\mathrm{er}(A)$$
$$(ev,-\tau_{A,A}\circ ev\circ\tau_{A,\mathbb{D}\mathrm{er}(A)}):\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\otimes A\oplus A\otimes\mathbb{D}\mathrm{er}(A)\to A\otimes A$$

munissent la A-algèbre libre $T_A\mathbb{D}\mathrm{er}(A)$ d'une structure de 0-algèbre double Poisson linéaire.

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve de Van den Bergh [VdB08a, Th. 3.2.2] en faisant attention aux signes de Koszul. □

§ 4 Double crochets quadratiques

1.2.3.8 Définition. *Double Poisson quadratique*
Soient A un monoïde associatif de $\mathtt{C}$, M un A-bimodule et $\{\!\{-,-\}\!\}$ un Σ-double crochet de Poisson sur $T_A(M)$. On dit que le double crochet $\{\!\{-,-\}\!\}$ est *quadratique* si les restrictions de $\{\!\{-,-\}\!\}$ à $\Sigma A \otimes \Sigma A$ et $\Sigma M \otimes \Sigma A$ sont nulles et si sa restriction à $\Sigma M \otimes \Sigma M$ est à valeurs dans $\Sigma M \otimes M$, c'est-à-dire que $\{\!\{-,-\}\!\}$ est entièrement déterminé par le Σ-double crochet anti-symétrique

$$\{\!\{-,-\}\!\} : \Sigma M \otimes \Sigma M \longrightarrow \Sigma M \otimes M.$$

On note $\Sigma\text{-}\mathtt{DPFree}_A^{quad}$ la sous-catégorie des A-algèbres libres munies d'un Σ-double crochet de Poisson quadratique et ayant pour morphismes, les morphismes de Σ-algèbres double Poisson induits par des morphismes de A-bimodules.

1.2.3.9 Proposition. *Le foncteur $T(-)$ induit l'équivalence de catégories*

$$T(-) : \Sigma\text{-}\mathtt{DLie}_{\mathtt{C}} \xrightarrow{\cong} \Sigma\text{-}\mathtt{DPFree}_{\mathbb{1}}^{quad}.$$

Démonstration. On étend le double crochet de Lie par dérivation en chacune de ces variables. □

1.2.3.10 Exemples. (i) Dans [ORS13, Sect. 2.1], Rubtsov et ses co-auteurs donnent une classification complète des double crochets de Poisson quadratiques sur une algèbre tensorielle à deux générateurs concentrée en degré 0.

(ii) Dans [Sok13], Sokolov donne une classification complète des double crochets de Poisson quadratiques sur une algèbre tensorielle à trois générateurs concentrée en degré 0.

CHAPITRE 2

DOUBLE LIE ET DOUBLE LIE RINEHART

On étudie dans ce chapitre deux types de structures double Poisson. Pour commencer, on se concentre sur les double crochets linéaires : ces structures correspondent aux algèbres double Lie-Rinehart, version non-commutative des algèbres de Lie-Rinehart. On démontre notamment une propriété de décalage de ces structures (cf. théorème 2.1.4.1). Dans un second temps, on étudie les double crochets de Poisson quadratiques, qui correspondent aux algèbres double Lie. On exhibe un critère pour définir des exemples de double crochets de Poisson sur la résolution minimale d'une algèbre de Koszul (cf. section 2.2).

2.1 Double Lie-Rinehart

On donne dans cette section, une description dans un cadre général des algèbres double Lie-Rinehart, définies par Van den Bergh dans [VdB08b], qui sont une version non-commutative des algèbres de Lie-Rinehart. On commence par quelques rappels sur le cas classique (commutatif).

2.1.1 Rappels sur les algèbres de Lie-Rinehart

Commençons par rappeler la définition des algèbres de Lie-Rinehart. On se réfère notamment à [Kap07], [LV12, Sect. 13.3.8] et [FA15, Sect. 5.1.2].

2.1.1.1 Définition. *Algèbre de Lie-Rinehart*
Soit $(\mathtt{C}, \otimes, \tau)$ une catégorie monoïdale symétrique fermée abélienne et A un monoïde associatif commutatif de $\mathtt{C}$. On dit qu'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [-,-])$ est une *algèbre de Lie-Rinehart* au dessus de A si $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure de A-module $\mu_A : A \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, que A est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module $\mu_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \otimes A \to A$ et les deux structures de modules sont compatibles, i.e. satisfont les propriétés suivantes.

(i) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit par dérivation sur A, i.e. le morphisme $(\mu_{\mathfrak{g}})^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,(A)$, adjoint de $\mu_{\mathfrak{g}}$, se factorise à travers $\mathrm{Der}(A)$ en un morphisme d'algèbres de Lie :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{(\mu_{\mathfrak{g}})^*} & \mathrm{End}\,(A) \\ & \searrow^{\rho} & \uparrow \\ & & \mathrm{Der}(A)\ . \end{array}$$

Le morphisme $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(A)$ est appelé *ancre*.

(ii) On a la relation dite *de Leibniz* :

$$[-,-](1\otimes\mu_A)=\mu_A(ev\otimes 1)(\rho\otimes 1\otimes 1)+\mu_A(1\otimes[-,-])(\tau_{A,\mathfrak{g}}\otimes 1).$$

Soient $(M,\rho_M,[-,-]_M)$ et $(N,\rho_N,[-,-]_N)$ deux algèbres de Lie-Rinehart au dessus de A. Un morphisme $\varphi : M\to N$ de A-modules est un *morphisme d'algèbres de Lie-Rinehart* s'il préserve les crochets de Lie

2.1.1.2 Exemples. On donne différents exemples d'algèbre de Lie-Rinehart (voir [Kap07, Ex. 1.1.3]).

(i) Quand $A=k$, une k-algèbre de Lie-Rinehart est simplement une k-algèbre de Lie. Plus généralement, une algèbre de Lie-Rinehart sur A avec une ancre nulle est une A-algèbre de Lie.

(ii) Ce second exemple justifie l'intérêt de considérer une telle structure. En effet, elle apparaît naturellement en géométrie : si on considère X une variété $\mathscr{C}^\infty$ et qu l'on note T_X son fibré tangent, alors les sections de T_X forment une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie-Rinehart au dessus de $\mathscr{C}^\infty(X)$.

(iii) Soit B une algèbre associative. Alors l'algèbre de Lie $B_{\mathrm{Lie}}:=(B,[-,-])$, où $[-,-]$ est le commutateur, est une algèbre de Lie-Rinehart sur $B_{\natural\natural}:=B/\langle[B,B]\rangle$.

(iv) Pour toute algèbre commutative A, $\mathrm{Der}(A)$ munie de l'ancre $\rho=\mathrm{id}$ est une algèbre de Lie-Rinehart sur A.

(v) Soit M un A-module. *L'algèbre d'Atiyah de* M est l'algèbre de Lie-Rinehart sur A, que l'on note $\mathrm{At}(M)$, dont les éléments sont les paires (φ,D) avec φ un endomorphisme k-linéaire de M et D une dérivation de A satisfaisant la propriété suivante : pour $a\in A$ et $m\in M$,

$$\varphi(am)-a\cdot\varphi(m)=D(a)\cdot m.$$

Le crochet de Lie $\langle-,-\rangle_{\mathrm{At}}$ de $\mathrm{At}(M)$ est défini de la manière suivante :

$$\langle(\varphi_1,D_1),(\varphi_2,D_2)\rangle:=\big([\varphi_1,\varphi_2],[D_1,D_2]\big).$$

pour (φ_1,D_1) et (φ_2,D_2) dans $\mathrm{At}(M)$ et $[-,-]$ les commutateurs des endomorphismes de M et des dérivations de A ; l'ancre est simplement définie comme la projection

$$\begin{array}{rccc}\rho: & \mathrm{At}(M) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A)\\ & (\varphi,D) & \longmapsto & D\end{array}.$$

Pour une démonstration des compatibilités, on se réfère à [FA15, Prop. 5.1.13].

La notion d'algèbre Lie-Rinehart est profondément liée à la structure d'algèbre de Poisson comme le montre la proposition suivante.

2.1.1.3 Proposition. (cf. [LV12, Prop. 13.3.8])
Toute structure d'algèbre de Lie-Rinehart au dessus de A sur L munit $P:=A\oplus L$ d'une structure de Poisson telle que le produit μ et le crochet de Poisson $\{-,-\}$ prennent leurs valeurs de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll}A\otimes A\xrightarrow{\mu}A, & A\otimes A\xrightarrow{\{-,-\}}0,\\ A\otimes L\xrightarrow{\mu}L, & L\otimes A\xrightarrow{\{-,-\}}A,\\ L\otimes L\xrightarrow{\mu}0, & L\otimes L\xrightarrow{\{-,-\}}L.\end{array}$$

Inversement, toute algèbre de Poisson P, telle que le k-espace vectoriel sous-jacent peut s'écrire $P = A \oplus L$ et tel que le produit et le crochet prennent leur valeurs comme précédemment, munit L d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart au dessus de A. Les deux constructions sont inverses l'une de l'autre.

2.1.1.4 Remarque. Ce résultat est en fait bien plus général, car il est de nature opéradique (cf. proposition 4.1.2.15 et [VdL04, Prop. 3.6.2]).

2.1.2 Double Lie-Rinehart

Il est naturel de vouloir construire l'équivalent non-commutatif des algèbres Lie-Rinehart : ce sont les algèbres double Lie-Rinehart (appelées également Lie algebroïde dans [VdB08b]).

2.1.2.1 Notation(s). Soient A un monoide associatif de la catégorie monoïdale symétrique fermé additive $(\mathtt{C}, \otimes, \tau)$, M et N deux A-bimodules et $\varphi : M \to N$ un morphisme de A-bimodules. On peut étendre de manière canonique le morphisme φ à un morphisme de A-bimodules

$$\tilde{\varphi} : A \otimes M \oplus M \otimes A \longrightarrow A \otimes N \oplus N \otimes A$$

où les structures de bimodules sont celles de M et N, en posant

$$\tilde{\varphi}|_{A\otimes M} = A \otimes \varphi \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}|_{M\otimes A} = \varphi \otimes A.$$

Par la suite, on ne fera pas de distinction entre φ et $\tilde{\varphi}$.

2.1.2.2 Définition. *Σ-Algèbre double Lie-Rinehart*
Soient (A, μ) un monoide associatif de la catégorie monoïdale symétrique abélienne $(\mathtt{C}, \otimes, \tau)$ et $(M, {}_A\mu, \mu_A)$ un A-bimodule. On dit que M est une *Σ-algèbre double Lie-Rinehart au dessus de A* s'il est muni :

(i) d'un morphisme de A-bimodules appelé *ancre* :

$$\rho : \Sigma M \longrightarrow \underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, \Sigma A \otimes A)$$

pour lequel on note $\rho^* : \Sigma M \otimes \Sigma A \to \Sigma A \otimes A$ l'application adjointe ;

(ii) d'un morphisme

$$\{\!\{-,-\}\!\}^M : \Sigma M \otimes \Sigma M \longrightarrow \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M)$$

pour lequel on note $\{\!\{-,-\}\!\}^M_l := pr_{\Sigma M \otimes A} \circ \{\!\{-,-\}\!\}^M$ et $\{\!\{-,-\}\!\}^M_r := pr_{\Sigma A \otimes M} \circ \{\!\{-,-\}\!\}^M$; qui vérifie les conditions suivantes :

(a) *anti-symétrie* : on a le diagramme anticommutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma M \otimes \Sigma M & \xrightarrow{\{\!\{-,-\}\!\}^M} & \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{\Sigma M, \Sigma M}} & \ominus & \downarrow{\scriptstyle \Sigma(\tau_{M,A}, \tau_{A,M})} \\ \Sigma M \otimes \Sigma M & \xrightarrow[\{\!\{-,-\}\!\}^M]{} & \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M); \end{array}$$

(b) la première compatibilité avec l'ancre, appelée *propriété de dérivation*, donnée par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma M \otimes \Sigma(A \otimes M) & \xrightarrow{\Sigma M \otimes \Sigma_A \mu} & \Sigma M \otimes \Sigma M & \xleftarrow{\Sigma M \otimes \Sigma \mu_A} & \Sigma M \otimes \Sigma(M \otimes A) \\ & \searrow^{\varphi^l} & \downarrow{\scriptstyle \{\!\{-,-\}\!\}^M} & \swarrow_{\varphi^r} & \\ & & \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M), & & \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi^l :=& ({}_A\mu^{\Sigma M} \otimes A, {}_A\mu^{\Sigma A} \otimes M)(A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}^M)(\tau_{\Sigma M \Sigma, A} \otimes M) + (\Sigma A \otimes_A \mu)(\rho^* \otimes M) \\ \varphi^r :=& (\Sigma M \otimes \mu, \Sigma A \otimes \mu_A)(\{\!\{-,-\}\!\}^M \otimes A) \\ & + (\Sigma \mu_A \otimes A)(\tau_{M,\Sigma} \otimes A \otimes A)(M \otimes \rho^*)(\tau_{\Sigma M \Sigma, M} \otimes A); \end{aligned}$$

(c) la seconde compatibilité avec l'ancre donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} & (\rho^*_\tau \otimes A)(\Sigma A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}^M_l) \\ & \quad + \quad \tau_{\Sigma A \otimes \Sigma A, \Sigma A}(\rho^* \otimes A)(\Sigma M \otimes \rho^*)\tau_{\Sigma A, \Sigma M \otimes \Sigma M} \\ & \quad + \quad \tau_{\Sigma A, \Sigma A \otimes \Sigma A}(\rho^* \otimes A)(\Sigma M \otimes \rho^*_\tau)\tau_{\Sigma A \otimes \Sigma M, \Sigma M} = 0 \end{aligned}$$

où $\rho^*_\tau := -(\Sigma\tau_{A,A})\rho^*\tau_{\Sigma A, \Sigma M} : \Sigma A \otimes \Sigma M \to \Sigma A \otimes A$.

(d) l'identité double-Jacobi :

$$\begin{aligned} & (\{\!\{-,-\}\!\}^M_l \otimes A)(\Sigma M \otimes \{\!\{-,-\}\!\}^M_l) \\ & \quad + \quad \Sigma\tau_{A, M \otimes A}(\{\!\{-,-\}\!\}^M_r \otimes A)(\Sigma M \otimes \{\!\{-,-\}\!\}^M_l)\tau_{\Sigma M \otimes \Sigma M, \Sigma M} \\ & \quad + \quad \Sigma\tau_{A \otimes A, M}(\rho^* \otimes A)(\Sigma M \otimes \{\!\{-,-\}\!\}^M_r)\tau_{\Sigma M, \Sigma M \otimes \Sigma M} = 0. \end{aligned}$$

Soient $(M, \{\!\{-,-\}\!\}^M)$ et $(N, \{\!\{-,-\}\!\}^N)$ deux Σ-algèbres double Lie-Rinehart au dessus de A. Un morphisme de A-bimodule φ est un *morphisme de Σ-algèbre double Lie-Rinehart* s'il vérifie la propriété

$$\varphi\big(\{\!\{-,-\}\!\}^M\big) = \{\!\{\varphi(-), \varphi(-)\}\!\}^N.$$

On note Σ-$\mathtt{DLR}_A$ la catégorie des Σ-algèbres double Lie-Rinehart au dessus de A.

2.1.2.3 Remarque. Dans le cas où $\mathtt{C} = \mathtt{Ch}_k$ et où A est une algèbre différentielle graduée finiment engendrée, la condition (ii)c de la définition 2.1.2.2 correspond à l'égalité

$$\rho\big(\{\!\{-,-\}\!\}^M\big) = \{\!\{\rho, \rho\}\!\}^{SN}$$

où $\{\!\{-,-\}\!\}^{SN}$ est le double crochet de Schouten Nijenhuis (cf. définition 1.2.3.7).

2.1.2.4 Exemples. On donne des exemples d'algèbres double Lie-Rinehart qui sont les homologues non-commutatifs de certains des exemples 2.1.1.2.

(i) Pour toute algèbre différentielle graduée A finiment engendrée, le A-bimodule $\mathbb{D}\mathrm{er}(A)$ des bidérivations (cf. définition 1.2.1.1) muni du double crochet de Schouten Nijenhuis et de l'identité comme ancre est une 0-algèbre double Lie-Rinehart au dessus de A.

(ii) Dans [FA15, Sect. 5.5], Fernández définit la version non-commutative de l'algèbre d'Atiyah (cf. exemple 2.1.1.2 (v)). Soient A une k-algèbre associative et M un A-bimodule de présentation finie. On note

$$\mathbb{E}\mathrm{nd}(M) := \mathrm{Hom}_k(M, M \otimes A \oplus A \otimes M),$$

et pour φ un élément de $\mathbb{E}\mathrm{nd}(M)$, on note $\varphi_l := pr_{M\otimes A} \circ \varphi$ et $\varphi_r := pr_{A\otimes M} \circ \varphi$. On définit *l'algèbre d'Atiyah double sur* M, que l'on note $\mathbb{A}\mathrm{t}(M)$, comme l'ensemble des paires (d, φ) avec $d \in \mathbb{D}\mathrm{er}(A)$ et $\varphi \in \mathbb{E}\mathrm{nd}(M)$ telles que, pour tout $a \in A$ et tout $m \in M$

$$\begin{aligned} \varphi(a \cdot m) = &\quad a \cdot \varphi(m) + d(a) \cdot m, \\ \varphi(m \cdot a) = &\quad \varphi(m) \cdot a + m \cdot d(a). \end{aligned}$$

avec $d(a) \cdot m = d(a)' \otimes_A \mu^M\big(d(a)''m\big)$ et $m \cdot d(a) = \mu_A^M\big(m, d(a)'\big) \otimes d(a)''$. On pose le double crochet suivant : pour (d^1, φ^1) et (d^2, φ^2), deux éléments de $\mathbb{A}\mathrm{t}(M)$

$$\begin{aligned} \{\!\{(d^1, \varphi^1), (d^2, \varphi^2)\}\!\}_l^{\sim} &:= (\varphi_l^1 \otimes A)\varphi_l^2 + (d^1 \otimes M)\varphi_r^2 - \big((M \otimes d^2)\varphi_l^1 + (A \otimes \varphi_r^2)\varphi_1^r\big) \\ \{\!\{(d^1, \varphi^1), (d^2, \varphi^2)\}\!\}_r^{\sim} &:= (A \otimes \varphi_r^1)\varphi_r^2 + (A \otimes d^1)\varphi_l^2 - \big((d^1 \otimes M)\varphi_r^1 + (\varphi_l^2 \otimes A)\varphi_l^1\big), \end{aligned}$$

qui nous fournit le double crochet

$$\{\!\{(d^1, \varphi^1), (d^2, \varphi^2)\}\!\} := (M \otimes \tau_{A,A}) \circ \{\!\{\varphi^1, \varphi^2\}\!\}_l^{\sim} + (\tau_{M,A} \otimes A) \circ \{\!\{\varphi^1, \varphi^2\}\!\}_r^{\sim},$$

où l'on utilise implicitement, comme dans le cas du double crochet de Schouten Nijenhuis, l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_k(M, M \otimes A \otimes A) \cong \mathrm{Hom}_k(M, M \otimes A) \otimes A$. Cela nous permet de définir *le double crochet d'Atiyah* défini, pour (d^1, φ^1) et (d^2, φ^2) de $\mathbb{A}\mathrm{t}(M)$, par

$$\{\!\{(d^1, \varphi^1), (d^2, \varphi^2)\}\!\}^{\mathbb{A}\mathrm{t}} := \big(\{\!\{d^1, d^2\}\!\}^{SN}, \{\!\{(d^1, \varphi^1), (d^2, \varphi^2)\}\!\}\big),$$

où $\{\!\{-,-\}\!\}^{SN}$ est le double crochet de Schouten Nijenhuis (cf. section 1.2.3.3). Par [FA15, Prop. 5.5.3], $\mathbb{A}\mathrm{t}(M)$ muni du double crochet d'Atiyah et de l'ancre

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{A}\mathrm{t}(M) & \longrightarrow & \mathbb{D}\mathrm{er}(A) \\ & (d, \varphi) & \longmapsto & d \end{array}$$

est une algèbre double Lie-Rinehart sur A.

On démontre à présent la version non-commutative de la correspondance entre les algèbre Lie-Rinehart et certaines algèbres de Poisson énoncée en 2.1.1.3. Ainsi, on fait correspondre des algèbres double Lie Rinehart et les algèbres double Poisson linéaires.

2.1.2.5 Proposition. (cf.[VdB08a, (3.4-1)-(3.4-8)] – [VdB08b, Sect. 3.2])
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M *est une* Σ*-algèbre de double Lie-Rinehart au dessus de* A*;*

(ii) $T_A(M)$ *est une* Σ*-algèbre double Poisson linéaire.*

On a l'équivalence de catégories

$$\Sigma\text{-}\mathtt{DPFree}_A^{lin} \cong \Sigma\text{-}\mathtt{DLR}_A.$$

Démonstration. Par adjonction, l'ancre ρ d'une Σ-algèbre de double Lie-Rinehart M au dessus de A

correspond à un morphisme $\rho^* : \Sigma M \otimes \Sigma A \to \Sigma A \otimes A$ que l'on étend par anti-symétrie à un double crochet $\{\!\{-,-\}\!\}^A : \Sigma M \otimes \Sigma A \oplus \Sigma A \otimes \Sigma M \to \Sigma A \otimes A$.

La condition (ii)b de la définition 2.1.2.2 correspond exactement aux propriétés de dérivation de la restriction à $\Sigma M \otimes \Sigma A \oplus \Sigma A \otimes \Sigma M$ d'un Σ-double crochet linéaire sur $T_A M$. Ainsi, la donnée d'un Σ-double crochet linéaire sur $T_A M$ correspond à la donnée d'une ancre $\rho : \Sigma M \to \underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, \Sigma A \otimes A)$ et d'un morphisme $f : \Sigma M \otimes \Sigma M \to \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M)$ vérifiant les conditions (ii)a et (ii)b de la définition 2.1.2.2. Reste à montrer que les conditions (ii)c et (ii)d de la définition de Σ-algèbre double Lie-Rinehart correspondent à l'identité double Jacobi vérifiée par un Σ-double crochet de Poisson linéaire sur $T_A M$.

Le double-jacobiateur de $T_A M$ restreint au terme $\Sigma A \otimes \Sigma M \otimes \Sigma M$ est donné par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
\Sigma M \otimes \Sigma A \otimes \Sigma M & \xleftarrow{\tau_{\Sigma A \otimes \Sigma M, \Sigma M}} & \Sigma A \otimes \Sigma M \otimes \Sigma M & \xrightarrow{\tau_{\Sigma A, \Sigma M \otimes \Sigma M}} & \Sigma M \otimes \Sigma M \otimes \Sigma A \\
\downarrow{\scriptstyle (\rho^* \otimes A)(\Sigma M \otimes \rho_r^*)} & & \downarrow{\scriptstyle (\rho_r^* \otimes A)(\Sigma A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_l)} & & \downarrow{\scriptstyle (\rho^* \otimes A)(\Sigma A \otimes \rho^*)} \\
\Sigma(A)^{\otimes 3} & \xrightarrow[\Sigma\tau_{A, A\otimes A}]{} & \Sigma(A)^{\otimes 3} & \xleftarrow[\Sigma\tau_{A\otimes A, A}]{} & \Sigma(A)^{\otimes 3},
\end{array}$$

ce qui nous donne la condition (ii)c de la définition d'une Σ-algèbre double Lie-Rinehart.

Le double-jacobiateur de $T_A M$ restreint au terme $(\Sigma M)^{\otimes 3}$ est à valeurs dans

$$\Sigma(M \otimes A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 2} \otimes M \oplus A \otimes M \otimes A).$$

Par stabilité sous l'action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (cf. remarque 1.2.1.7), l'annulation de la restriction du double-jacobiateur de $T_A M$ au terme $(\Sigma M)^{\otimes 3}$ est équivalente à l'annulation de sa projection sur le terme $\Sigma M \otimes A^{\otimes 2}$, qui est donnée par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
(\Sigma M)^{\otimes 3} & \xleftarrow{\tau_{\Sigma M \otimes \Sigma M, \Sigma M}} & (\Sigma M)^{\otimes 3} & \xrightarrow{\tau_{\Sigma M, \Sigma M \otimes \Sigma M}} & (\Sigma M)^{\otimes 3} \\
\downarrow{\scriptstyle (\{\!\{-,-\}\!\}_r^M \otimes A)(\Sigma M \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_l^M)} & & \downarrow{\scriptstyle (\{\!\{-,-\}\!\}_l^M \otimes A)(\Sigma A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_l^M)} & & \downarrow{\scriptstyle (\rho^M \otimes A)(\Sigma M \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_r^M)} \\
\Sigma A \otimes M \otimes A & \xrightarrow[\Sigma\tau_{A, M\otimes A}]{} & \Sigma M \otimes A^{\otimes 2} & \xleftarrow[\Sigma\tau_{A\otimes A, M}]{} & \Sigma A^{\otimes 2} \otimes M;
\end{array}$$

ainsi, l'annulation de la restriction du double-jacobiateur de $T_A M$ au terme $(\Sigma M)^{\otimes 3}$ est équivalente à la condition (ii)d de la définition 2.1.2.2.

Reste à vérifier la propriété au niveau des morphismes. Soient $(M, \{\!\{-,-\}\!\}^M)$ et $(N, \{\!\{-,-\}\!\}^N)$ deux Σ-algèbres de Lie-Rinehart au dessus de A et $\varphi : M \longrightarrow N$ un morphisme d'algèbres de Lie-Rinehart. Le morphisme φ nous fournit, via le foncteur $T_A(-)$, un morphisme de A-algèbres $\varphi' : T_A(M) \to T_A(N)$ car $T_A(M)$ est libre. De plus, on a $\varphi\big(\{\!\{-,-\}\!\}^M\big) = \{\!\{\varphi(-), \varphi(-)\}\!\}^N$ donc, comme φ' est un morphisme d'algèbres, que les doubles crochets de $T_A(M)$ et $T_A(N)$ sont obtenus en étendant par dérivations les double crochets $\{\!\{-,-\}\!\}^M$ et $\{\!\{-,-\}\!\}^N$, alors φ' est un morphisme de Σ-algèbres double Poisson.

Soit à présent $\psi : T_A(M) \to T_A(N)$ un morphisme de Σ-algèbres double Poisson avec $T_A(M)$ et $T_A(N)$ munis de double crochets linéaires. Le morphisme $\psi' : pr_N \circ \psi \circ i : M \to N$ avec $i : M \hookleftarrow T_A(M)$ et $pr_N : T_A(N) \twoheadrightarrow N$ est un morphisme de A-bimodules, qui commute avec le double crochet. □

2.1.2.6 Remarque. D'après la proposition 1.2.1.10, si M est une $\mathbb{1}$-algèbre double Lie-Rinehart au dessus de A, alors le morphisme

$$\{-,-\} := \mu_A^M \{\!\{-,-\}\!\}_l^M +_A \mu^M \{\!\{-,-\}\!\}_r^M : M \otimes M \longrightarrow M$$

munit M d'une structure d'algèbre de Leibniz, qui est un morphisme de A-bimodule, où la structure sur $M \otimes M$ est donnée par la structure du terme de droite.

La composition de l'ancre avec le produit de A est une dérivation en sa deuxième entrée :

$$\widetilde{\rho} := \mu \circ \rho : M \otimes A \longrightarrow A.$$

De plus, d'après la proposition 2.1.2.5 et par le lemme 1.2.1.9, la condition double Jacobi restreinte au tenseur $M \otimes M \otimes A$ implique $\widetilde{\rho}$ munit A d'une structure de représentation anti-symétrique de M (pour la définition de représentation d'algèbre de Leibniz, le lecteur peut se référer à [Cov10, Déf. 1.2.1 et 1.2.4]).

2.1.3 Exemple : le double crochet de Koszul

Dans cette section, on considère A un monoïde associatif unitaire, muni d'un Σ-double crochet de Poisson :

$$\{\!\{-,-\}\!\} : \Sigma A \otimes \Sigma A \longrightarrow \Sigma A \otimes A.$$

On lui associe, de manière canonique, une structure de Σ-algèbre double Lie-Rinehart sur le A-bimodule Ω_A des 1-formes différentielles non-commutatives. Par la propriété de dérivation de $\{\!\{-,-\}\!\}$ en chacune de ces entrées, la proposition 1.1.4.8 nous dit que l'on peut étendre naturellement le double crochet en le morphisme φ de A^e-bimodules

$$\varphi : \Sigma\Omega_A \otimes \Sigma\Omega_A \longrightarrow \Sigma A \otimes A.$$

En composant φ par d (étendu par dérivation sur $A \otimes A$, i.e. $d(A \otimes A) := d(A) \otimes A + A \otimes d(A)$), on obtient le morphisme de $\mathtt{C}$, $\{\!\{-,-\}\!\}^\Omega$, appelé *double crochet de Koszul* :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{\{\!\{-,-\}\!\}} & \Sigma A \otimes A \\ {\scriptstyle \Sigma d \otimes \Sigma d}\downarrow & \overset{\varphi}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle d\otimes A + A \otimes d} \\ \Sigma\Omega_A \otimes \Sigma\Omega_A & \xrightarrow[=:\{\!\{-,-\}\!\}^\Omega]{} & \Sigma\big(\Omega_A \otimes A \oplus A \otimes \Omega_A\big). \end{array}$$

On note comme suit les projections de $\{\!\{-,-\}\!\}^\Omega$ sur chacune des composantes d'arrivée :

$$\{\!\{-,-\}\!\}_r^\Omega \overset{not.}{:=} pr_{\Sigma\Omega_A \otimes A} \circ \{\!\{-,-\}\!\}^\Omega \quad \text{et} \quad \{\!\{-,-\}\!\}_l^\Omega \overset{not.}{:=} pr_{\Sigma A \otimes \Omega_A} \circ \{\!\{-,-\}\!\}^\Omega.$$

Par les propriétés de dérivation de $\{\!\{-,-\}\!\}$ et la proposition 1.1.4.8, on étend naturellement le double crochet en deux morphismes de A-bimodules :

▷ le morphisme

$$\rho_l^\Omega : \Sigma\Omega_A \otimes \Sigma A \longrightarrow \Sigma A \otimes A$$

avec à gauche, la structure de A-bimodule induite par celle de Ω_A et à droite, la structure

interne ;

▷ le morphisme

$$\rho_r^{\Omega} : \Sigma A \otimes \Sigma\Omega_A \longrightarrow \Sigma A \otimes A$$

avec à gauche, la structure de A-bimodule induite par celle de Ω_A et à droite, la structure externe.

Par définition, ils font commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{\{\!\{-,-\}\!\}} & \Sigma A \otimes A \\ {\scriptstyle \Sigma d \otimes \Sigma A}\downarrow & \nearrow_{\rho_l^{\Omega}} & \\ \Sigma\Omega_A \otimes \Sigma A & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{\{\!\{-,-\}\!\}} & \Sigma A \otimes A \\ {\scriptstyle \Sigma A \otimes \Sigma d}\downarrow & \nearrow_{\rho_r^{\Omega}} & \\ \Sigma A \otimes \Sigma\Omega_A & & \end{array}$$

et, par anti-symétrie de $\{\!\{-,-\}\!\}$, vérifient le diagramme anti-commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\Omega_A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{\rho_l^{\Omega}} & \Sigma A \otimes A \\ {\scriptstyle \tau_{\Sigma\Omega_A,\Sigma A}}\downarrow & \ominus & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\tau_{A,A}} \\ \Sigma A \otimes \Sigma\Omega_A & \xrightarrow[\rho_r^{\Omega}]{} & \Sigma A \otimes A. \end{array}$$

On note alors $\rho^{\Omega} := \rho_l^{\Omega}$. On démontre dans la proposition suivante que les morphismes ρ^{Ω} et $\{\!\{-,-\}\!\}^{\Omega}$ munissent le A-bimodule Ω_A d'une structure de Σ-algèbre double Lie-Rinehart.

Une construction similaire est déjà présente dans l'article de Van den Bergh [VdB08a, Prop. A.2.1] mais dans une version décalée. Nous généralisons donc son résultat en nous plaçant dans un cadre plus large et en faisant disparaître ce décalage. Remarquons que la section 2.1.4 nous permettra de retrouver le décalage de Van den Bergh.

2.1.3.1 Proposition. *Soit A une Σ-algèbre double Poisson d'une catégorie monoïdale symétrique abélienne $(\mathtt{C}, \otimes, \tau)$. Les morphismes $(\rho^{\Omega})^*$ et $\{\!\{-,-\}\!\}^{\Omega}$ munissent le A-bimodule Ω_A d'une structure de Σ-algèbre double Lie-Rinehart. De manière équivalente (cf. proposition 2.1.2.5), la A-algèbre libre $T_A\Omega_A$ est munie d'une structure de Σ-algèbre double-Poisson linéaire.*

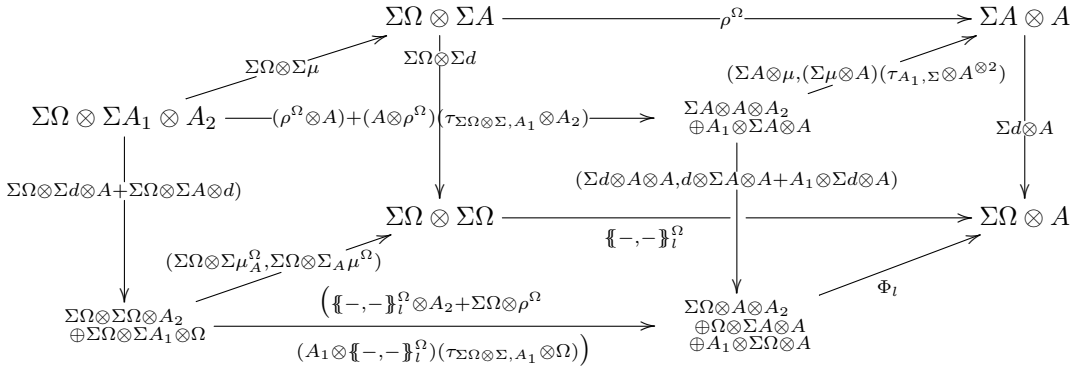
Démonstration. Soit $(A, \{\!\{-,-\}\!\})$ une Σ-algèbre double Poisson, on note $\Omega := \Omega_A$ avec ${}_A\mu^{\Omega}$ et μ_A^{Ω} les morphismes qui définissent sa structure de A-bimodule. Montrons que les morphismes $(\rho^{\Omega})^*$ et $\{\!\{-,-\}\!\}^{\Omega}$ munissent le A-bimodule Ω d'une structure de Σ-algèbre double Lie-Rinehart.

Le double-crochet $\{\!\{-,-\}\!\}^{\Omega}$ est anti-symétrique : en effet, il est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \xrightarrow{\{\!\{-,-\}\!\}} & \Sigma A \otimes A \\ {\scriptstyle d\otimes d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d\otimes A + A\otimes d} \\ \Sigma\Omega \otimes \Sigma\Omega & \xrightarrow[\{\!\{-,-\}\!\}^{\Omega}]{} & \Sigma\big(\Omega \otimes A \oplus A \otimes \Omega\big) \end{array}$$

donc $\{\!\{-,-\}\!\}^{\Omega}$ vérifie la condition d'anti-symétrie (ii)a de la définition 2.1.2.2 par l'anti-symétrie du double crochet de A.

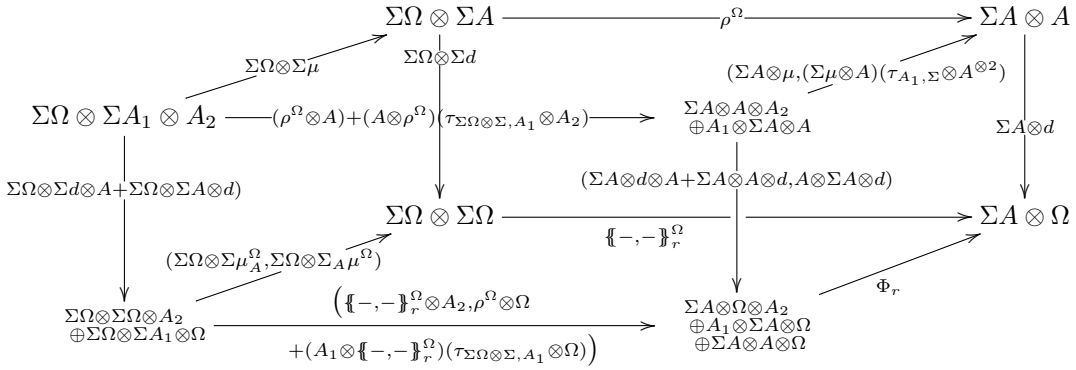
Montrons que ρ^{Ω} et $\{\!\{-,-\}\!\}^{\Omega}$ vérifie la condition de dérivation (ii)b de la définition 2.1.2.2. On pose $A_1 = A = A_2$; on a le diagramme (2.1). Les faces du fond et de devant commutent par définition de $\{\!\{-,-\}\!\}_l^{\Omega}$, les faces de gauche et droite commutent car d est une dérivation et la face du haut



avec $\quad \Phi_l := \big(\Sigma\Omega \otimes \mu, (\Sigma\mu_A^\Omega \otimes A)(\tau_{\Omega,\Sigma} \otimes A^{\otimes 2}), (\Sigma_A\mu^\Omega \otimes A)(\tau_{A,\Sigma} \otimes \Omega \otimes A)\big).$

FIGURE 2.1 – Premier diagramme de compatibilité (ii)b

commute car ρ^Ω est une dérivation. Donc la face du bas commute. Par le même type d'argument, on a le diagramme commutatif (2.2). Ainsi, les morphismes ρ^Ω et $\{\!\{-,-\}\!\}^\Omega$ vérifient la condition de

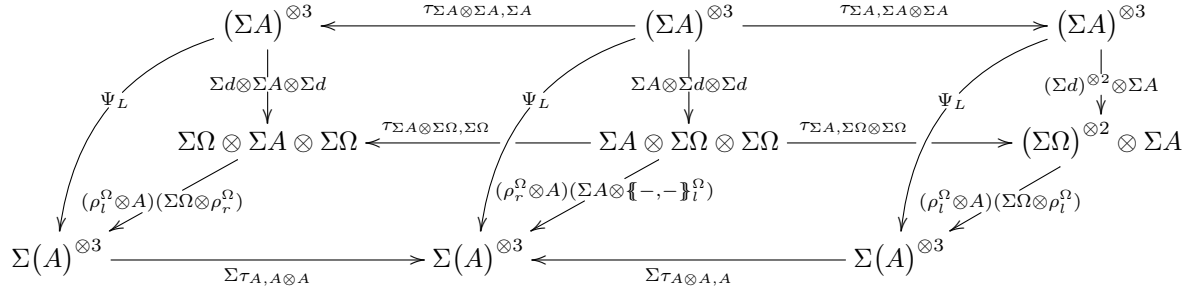


avec $\quad \Phi_r := (\Sigma A \otimes \mu_A^\Omega, (\Sigma\mu \otimes \Omega)(\tau_{A,\Sigma} \otimes A \otimes \Omega), \Sigma A \otimes_A \mu^\Omega).$

FIGURE 2.2 – Second diagramme de compatibilité (ii)b

compatibilité (ii)b de la définition de Σ-algèbre double Lie-Rinehart.

Montrons que ρ^Ω et $\{\!\{-,-\}\!\}^\Omega$ vérifient la condition (ii)c de la définition d'une Σ-algèbre de double Lie-Rinehart. On pose $\Psi_L := \{\!\{-,\{\!\{-,-\}\!\}\}\!\}_L = \big(\{\!\{-,-\}\!\}\otimes A\big)\big(\Sigma A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}\big)$. On a le diagramme suivant dont les faces verticales commutent :

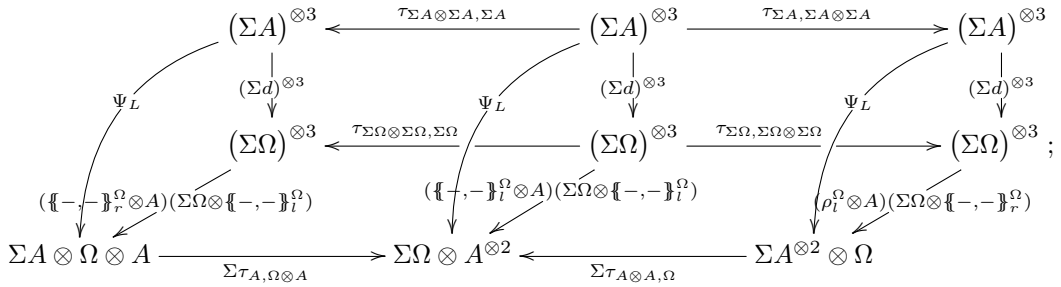


donc, comme $\{\!\{-,-\}\!\}$ vérifie l'identité double Jacobi, le terme

$$\begin{aligned}&(\rho_r^\Omega \otimes A)(\Sigma A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_l^\Omega)\\ &\quad +\tau_{\Sigma A\otimes\Sigma A,\Sigma A}(\rho_l^\Omega \otimes A)(\Sigma\Omega\otimes\rho_l^\Omega)\tau_{\Sigma A,\Sigma\Omega\otimes\Sigma\Omega}\\ &\quad +\tau_{\Sigma A,\Sigma A\otimes\Sigma A}(\rho_l^\Omega \otimes A)(\Sigma\Omega\otimes\rho_r^\Omega)\tau_{\Sigma A\otimes\Sigma\Omega,\Sigma\Omega}\end{aligned}$$

est nul, donc $\{\!\{-,-\}\!\}^\Omega$ et ρ^Ω vérifient bien la condition (ii)c de la définition 2.1.2.2.

On a le diagramme suivant dont les faces verticales commutent :



comme $\{\!\{-,-\}\!\}$ vérifie l'identité double Jacobi, le terme

$$\begin{aligned}&(\{\!\{-,-\}\!\}_l^\Omega \otimes A)(\Sigma\Omega \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_l^\Omega)\\ &\quad +\Sigma\tau_{A,\Omega\otimes A}(\{\!\{-,-\}\!\}_r^\Omega \otimes A)(\Sigma\Omega \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_l^\Omega)\tau_{\Sigma\Omega\otimes\Sigma\Omega,\Sigma\Omega}\\ &\quad +\Sigma\tau_{A\otimes A,\Omega}(\rho_l^\Omega \otimes A)(\Sigma\Omega \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_r^\Omega)\tau_{\Sigma\Omega,\Sigma\Omega\otimes\Sigma\Omega}\end{aligned}$$

est nul. Par stabilité sous l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ du double-jacobiateur, le double crochet $\{\!\{-,-\}\!\}^\Omega$ vérifie l'identité double-Jacobi, ce qui conclut cette preuve. □

2.1.4 Propriété de décalage

Dans le cas d'algèbres sur une opérade (cf. section 4.1.2) comme par exemple l'opérade $\mathcal{L}eib$ (cf. exemple 4.1.2.1 (v)) qui encode les algèbres de Leibniz (à gauche) ou encore l'opérade $\mathcal{L}ie$ (cf. exemple 4.1.2.1 (iv)) qui encode les algèbres de Lie, la donnée d'une structure Σ-décalée sur un objet M est équivalente à la donnée d'une structure non décalée sur ΣM (pour plus de précisions sur le sujet, on pourra se référer à [LV12]). Cependant, cela n'est plus vrai dans le cas d'algèbres sur une propérade. Par exemple, pour A une algèbre différentielle graduée, une structure r-double Poisson sur A est la donnée d'un double crochet

$$\{\!\{-,-\}\!\} : A[r] \otimes A[r] \longrightarrow (A \otimes A)[r]$$

qui vérifie la propriété d'anti-symétrie (2.3a) alors qu'une structure 0-double Poisson sur $A[r]$ est la donnée d'un double crochet

$$\{\!\{-,-\}\!\} : A[r] \otimes A[r] \longrightarrow A[r] \otimes A[r]$$

qui vérifie la propriété d'anti-symétrie (2.3b). Ainsi, on voit clairement que les signes de Koszul ne sont pas les mêmes, la permutation des termes de sorties prenant en compte la suspension dans le cas (2.3b). Cependant, cette propriété de décalage est vraie pour les algèbres double Lie-Rinehart (qui sont des algèbres sur la propérade colorée $\mathcal{DL}ie\mathcal{R}in$, cf. exemple 4.1.2.6), comme le montre la

(a) Anti-symétrie d'un Σ double crochet sur A

(b) Anti-symétrie d'un $\mathbb{1}$ double crochet sur ΣA

FIGURE 2.3 – Anti-symétrie des double-crochets

propriété suivante.

2.1.4.1 Théorème. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(A, M, \rho_M, \{\!\{-,-\}\!\}_M)$ *est une* Σ*-algèbre double Lie-Rinehart ;*

(ii) $(A, \Sigma M, \rho_{\Sigma M}, \{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M})$ *est une* $\mathbb{1}$*-algèbre double Lie-Rinehart ;*

où les morphismes d'ancres ρ_M *et* $\rho_{\Sigma M}$ *sont reliés par le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma M & \xrightarrow{\rho_M} & \underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, \Sigma A \otimes A) \\ & \searrow^{\rho_{\Sigma M}} & \downarrow \cong \\ & & \underline{\mathrm{Der}}(A, A \otimes A) \end{array}$$

et les doubles crochets vérifient

$$\{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M} = (\Sigma M \otimes A, \tau_{\Sigma,A} \otimes M) \circ \{\!\{-,-\}\!\}.$$

On a l'équivalence de catégories

$$\Sigma\text{-}\mathtt{DLR}_A \cong \mathbb{1}\text{-}\mathtt{DLR}_A.$$

Démonstration. Il suffit de reprendre la définition de Σ-algèbre double Lie-Rinehart. Une structure de A-bimodule sur M correspond canoniquement à une structure de A-bimodule sur ΣM. Rappelons (cf. lemme 1.1.4.5) également que, pour tout A-bimodule N, on a l'isomorphisme de A-bimodules :

$$\underline{\mathrm{Der}}(A, N) \cong \underline{\mathrm{Der}}(A, \Sigma N \otimes \Sigma^{-1}) \cong \underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, \Sigma N)\ ;$$

en particulier, pour $N = A \otimes A$, l'isomorphisme $\Phi : \underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, \Sigma A \otimes A) \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}\mathrm{er}(A)$, qui nous donne l'égalité $\rho_{\Sigma M} = \Phi \circ \rho_M$. Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M) & \xrightarrow{\cong} & \Sigma M \otimes A \oplus A \otimes \Sigma M \\ {\scriptstyle \Sigma\tau_{M,A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{\Sigma M,A}} \\ \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M) & \xrightarrow[\cong]{} & \Sigma M \otimes A \oplus A \otimes \Sigma M \end{array}$$

implique que l'on a une correspondance canonique entre un Σ-double crochet anti-symétrique $\{\!\{-,-\}\!\}_M : \Sigma M \otimes \Sigma M \longrightarrow \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M)$ et un $\mathbb{1}$-double crochet anti-symétrique $\{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M} : \Sigma M \otimes \Sigma M \longrightarrow \Sigma M \otimes A \oplus A \otimes \Sigma M$ donné par

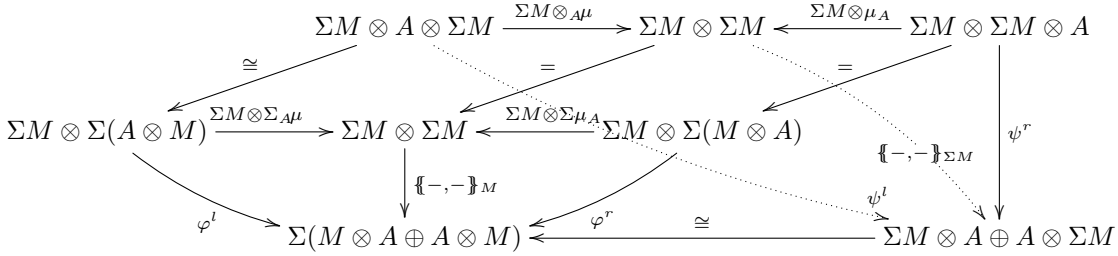
$$\{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M} = (\Sigma M \otimes A, \tau_{\Sigma,A} \otimes M) \circ \{\!\{-,-\}\!\}.$$

De plus, $\{\!\{-,-\}\!\}_M$ vérifie double-Jacobi si et seulement si $\{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M}$ également. On a le diagramme

commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma M & \xrightarrow{\rho_{\Sigma M}} & \underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, \Sigma A \otimes A) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ \Sigma M & \xrightarrow{\rho_M} & \underline{\mathrm{Der}}(A, A \otimes A) \end{array}$$

donc ρ_M vérifie la condition (ii)c de la définition 2.1.2.2 si et seulement si $\rho_{\Sigma M}$ vérifie la condition (ii)c de la définition 2.1.2.2. Reste à vérifier l'équivalence des compatibilités des ancres (cf. condition 2.1.2.2 (ii)b) en montrant que le diagramme suivant :



commute, avec

$$\begin{aligned}
\psi^l :=& (({}_A\mu, \mu) \otimes M)(A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M})(\tau_{\Sigma M, A} \otimes \Sigma M) + (A \otimes_A \mu)(\rho^*_{\Sigma M} \otimes \Sigma M) \ ; \\
\psi^r :=& (\Sigma M \otimes \mu + A \otimes \mu_A)(\{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M} \otimes A) + (\mu_A \otimes A)(\Sigma M \otimes \rho^*_{\Sigma M})(\tau_{\Sigma M, \Sigma M} \otimes A) \ ; \\
\varphi^l :=& ({}_A\mu \otimes M)(A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_M)(\tau_{\Sigma M \Sigma, A} \otimes M) + (\Sigma A \otimes_A \mu)(\rho^*_M \otimes M) \ ; \\
\varphi^r :=& (\Sigma M \otimes \mu + \Sigma A \otimes \mu_A)(\{\!\{-,-\}\!\}_M \otimes A) + (\Sigma \mu_A \otimes A)(\tau_{M,\Sigma} \otimes A \otimes A)(M \otimes \rho^*_M)(\tau_{\Sigma M \Sigma, M} \otimes A).
\end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que les carrés suivants

$$\begin{array}{ccc} \Sigma M \otimes A \otimes \Sigma M & \xrightarrow{\psi^l} & \Sigma M \otimes A \oplus A \otimes \Sigma M \\ {\scriptstyle \Sigma M \otimes \tau_{A,\Sigma} \otimes M}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}, \tau_{A,\Sigma} \otimes M)} \\ \Sigma M \otimes \Sigma(A \otimes M) & \xrightarrow[\varphi^l]{} & \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma M \otimes \Sigma M \otimes A & \xrightarrow{\psi^r} & \Sigma M \otimes A \oplus A \otimes \Sigma M \\ {\scriptstyle =}\downarrow & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{id}, \tau_{A,\Sigma} \otimes M)} \\ \Sigma M \otimes \Sigma(M \otimes A) & \xrightarrow[\varphi^r]{} & \Sigma(M \otimes A \oplus A \otimes M) \end{array}$$

commutent. On a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \Sigma M \otimes A \otimes \Sigma M & \xrightarrow{\Sigma M \otimes \tau_{A,\Sigma} \otimes M} & \Sigma M \otimes \Sigma A \otimes M \\ {\scriptstyle \rho^*_{\Sigma M} \otimes \Sigma M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^*_M \otimes M} \\ A \otimes A \otimes \Sigma M & & \Sigma A \otimes A \otimes M \\ {\scriptstyle A \otimes_A \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma A \otimes_A \mu} \\ A \otimes \Sigma M & \xrightarrow[\tau_{A,\Sigma} \otimes M]{} & \Sigma A \otimes M \end{array} \qquad ; \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma M \otimes \Sigma M \otimes A & \xrightarrow{=} & \Sigma M \otimes \Sigma M \otimes A \\ {\scriptstyle \tau_{\Sigma M, \Sigma M} \otimes A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{\Sigma M \Sigma, M} \otimes A} \\ \Sigma M \otimes \Sigma M \otimes A & & M \otimes \Sigma M \otimes \Sigma A \\ {\scriptstyle \Sigma M \otimes \rho^*_{\Sigma M}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M \otimes \rho^*_M} \\ \Sigma M \otimes A \otimes A & & M \otimes \Sigma A \otimes A \\ {\scriptstyle \mu_A \otimes A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\Sigma \mu_A \otimes A)(\tau_{M,\Sigma} \otimes A \otimes A)} \\ \Sigma M \otimes A & \xrightarrow[=]{} & \Sigma M \otimes A \end{array}$$

comme $\{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M} = (\mathrm{id}, \tau_{\Sigma,A} \otimes M) \circ \{\!\{-,-\}\!\}_M$, on a les égalités

$$(\mathrm{id}, \tau_{A,\Sigma} \otimes M)(({}_A\mu, \mu) \otimes M)(A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M})(\tau_{\Sigma M, A} \otimes \Sigma M) =$$

$$({}_A\mu \otimes M)(A \otimes \{\!\{-,-\}\!\}_M)(\tau_{\Sigma M \Sigma, A} \otimes M)(\Sigma M \otimes \tau_{A,\Sigma} \otimes M)$$

et

$$(\mathrm{id}, \tau_{A,\Sigma} \otimes M)(\Sigma M \otimes \mu + A \otimes \mu_A)(\{\!\{-,-\}\!\}_{\Sigma M} \otimes A) = (\Sigma M \otimes \mu + \Sigma A \otimes \mu_A)(\{\!\{-,-\}\!\}_M \otimes A)$$

d'où $(\mathrm{id}, \tau_{A,\Sigma} \otimes M) \circ \psi^r = \varphi^r$. □

2.1.4.2 Exemples. (i) Dans le cas où la catégorie $\mathtt{C}$ est la catégorie des complexes de chaînes $\mathtt{Ch}_k$, si, comme dans l'exemple 1.2.3.4, on considère un 0-double crochet de Poisson linéaires de $T(M)$, qui correspond toujours d'après l'exemple 1.2.3.4 à la donnée d'un produit associatif non-unitaire sur M, alors, d'après la proposition 2.1.2.5, la propriété de décalage nous dit que l'on peut munir $M[1]$ d'un produit associatif non-unitaire de degré -1. On retrouve exactement la propriété de décalage des algèbres sur l'opérade $\mathcal{A}s$ qui nous dit qu'une structure d'algèbre associative (non-unitaire) de degré -1 sur N correspond à une structure de degré 0 sur $N[-1]$.

(ii) Grâce à cette propriété de décalage, on retrouve également la construction originale du double crochet de Koszul de Van den Bergh. En effet, dans [VdB08a, Ann. A], Van den Bergh construit le double crochet de Koszul comme un double crochet de Gerstenhaber, i.e. un double crochet de Poisson de degré -1, sur $T_A(\Omega_A[1])$. La propriété de décalage 2.1.4.1, appliquée à notre construction du double crochet de Koszul (cf. section 2.1.3) nous redonne le double crochet de Gerstenhaber de Van den Bergh.

2.2 Comportement homotopique des double crochets quadratiques

On cherche à construire un double crochet de Poisson sur une résolution d'une algèbre A. Si jamais A est de Koszul, la dualité de Koszul nous fournit alors une résolution minimale explicite de l'algèbre A, qui est la construction cobar sur sa duale $A^!$. Faire une telle hypothèse sur A nous permet donc de calculer plus facilement une résolution et la minimalité de celle-ci nous permettra d'exhiber un critère assez simple pour construire des exemples de double crochets de Poisson quadratique décalés.

2.2.1 Quelques rappels sur l'homotopie des algèbres

§ 1 Modèle minimal d'une algèbre

On munit la catégorie $\mathtt{DGA}_k$ des k-algèbres différentielles graduées de sa structure de modèles où les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les applications surjectives en tout degré (le lecteur peut se référer à [Hov99, DS95] pour une définition de catégorie de modèles). On dit qu'une algèbre différentielle graduée B est *modèle de* A si B est munie d'une fibration $B \xrightarrow{\simeq} A$ qui est une équivalence faible.

Par définition, une algèbre différentielle graduée est dite *minimale* si c'est une algèbre quasi-libre $(T(V), \partial)$ telle que la différentielle ∂ augmente la longueur des tenseurs ; explicitement,

(i) la différentielle est décomposable, c'est à dire que $\partial : V \mapsto T^{\geqslant (2)}(V)$;

(ii) l'algèbre $(T(V),\partial)$ est quasi-libre, c'est à dire que le k-espace vectoriel gradué V admet une décomposition

$$V=\bigoplus_{k\geqslant 1} V^{(k)},$$

appelée *décomposition en poids*, satisfaisant

$$\partial\big(V^{(k+1)}\big)\subset T\Big(\bigoplus_{i=1}^{k} V^{(i)}\Big).$$

Finalement, on appelle *modèle minimal* de A la donnée d'une algèbre minimale $(T(V),\partial)$ munie d'une équivalence faible

$$(T(V),\partial)\xrightarrow{\simeq} A.$$

§ 2 Dualité de Koszul des algèbres

Nous commençons cette section par de brefs rappels sur la dualité de Koszul des algèbres associatives quadratiques, en suivant [LV12, Chap. 3]. Notons que la dualité de Koszul n'est qu'un cas particulier de la dualité de Koszul des (pr)opérades (cf. [LV12, Chap. 7] pour le cas des opérades) : nous rappellerons au chapitre 5 la construction de la dualité de Koszul dans ce cadre plus général. Le lecteur pourra également consulter [Val03], le travail original construisant la dualité de Koszul des propérades.

On appelle *donnée quadratique* la donnée d'une paire (V,R) avec V un k-espace vectoriel gradué et R un k-sous-espace vectoriel $R\subset V\otimes V$. Fixons (V,R) une telle donnée quadratique. On lui associe l'algèbre associative $\mathscr{P}(V,R):=T(V)/\langle R\rangle$. Une telle algèbre est dite *quadratique*. Comme l'idéal $\langle R\rangle$ est homogène, $\mathscr{P}(V,R)$ est augmentée et $\mathbb{N}$-graduée par la longueur des tenseurs ; explicitement, on a l'égalité

$$\mathscr{P}(V,R)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{P}(V,R)^{(n)}=k\oplus V\oplus(V^{\otimes 2}/R)\oplus\cdots\oplus\Big(V^{\otimes n}\Big/\sum_{i+j=n-2}V^{\otimes i}\otimes R\otimes V^{\otimes j}\Big)\oplus\cdots.$$

À une donnée quadratique (V,R), on associe également la coalgèbre $\mathscr{C}(V,R)$ qui est, par définition, la sous-coalgèbre universelle parmi les sous-coalgèbres C de $T^c(V)$ telles que la composée

$$C\hookrightarrow T^{c,(2)}(V)\twoheadrightarrow T^{c,(2)}(V)/R \tag{2.2.1}$$

est nulle. Cela veut dire que, pour toute sous-coalgèbre C de $T^c(V)$ telle que la composée (2.2.1) est nulle, il existe un unique morphisme de coalgèbre $C\to\mathscr{C}(V,R)$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathscr{C}(V,R) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & T^c(V). \end{array}$$

La coalgèbre $\mathscr{C}(V,R)$ est co-augmentée et $\mathbb{N}$-graduée par la longueur des tenseurs : on a l'égalité

$$\mathscr{C}(V,R)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{C}(V,R)^{(n)}=k\oplus V\oplus R\oplus\cdots\oplus\Big(\bigcap_{i+j=n-2}V^{\otimes i}\otimes R\otimes V^{\otimes j}\Big)\oplus\cdots.$$

À une algèbre quadratique $\mathscr{P}(V,R)$, on associe sa *coalgèbre duale*, notée $\mathscr{P}(V,R)^{\text{¡}}$, qui est définie par

$$\mathscr{P}(V,R)^{\text{¡}} := \mathscr{C}(sV, s^2R)$$

avec s, le générateur du complexe $k[1]$. Une algèbre quadratique est dite *de Koszul* si la construction cobar $\mathbf{\Omega}(-)$ de la coalgèbre duale de cette algèbre est une résolution cofibrante de l'algèbre de départ, explicitement si on a l'équivalence faible :

$$\mathbf{\Omega}\big(\mathscr{P}(V,R)^{\text{¡}}\big) \xrightarrow{\sim\!\!\!\!\rightarrow} \mathscr{P}(V,R).$$

Dans ce cas, $\mathbf{\Omega}\big(\mathscr{P}(V,R)^{\text{¡}}\big)$ nous donne un modèle minimal de $\mathscr{P}(V,R)$ (cf. [LV12, Th. 3.4.4]). En particulier, on a que $\mathbf{\Omega}\big(\mathscr{P}(V,R)^{\text{¡}}\big)$ est quasi-libre, c'est à dire de la forme $(T(W),\partial)$, avec W un k-espace vectoriel gradué homologiquement, avec $W_0 = V$ et $W_1 = R$. On a également $\mathrm{H}_0(T(W),\partial) = A = T(W_0)/\langle R\rangle$ et $\mathrm{H}_*(T(W),\partial) = 0$ pour $* > 0$.

2.2.2 Double crochet quadratique sur le modèle minimal d'une algèbre de Koszul : un critère d'existence

Dans cette section, on considère A une k-algèbre concentrée en degré 0, quadratique. On peut donc écrire $A := \mathscr{P}(W_0,R)$. On suppose de plus, que l'algèbre A est de Koszul. On note son modèle minimal $(T(W),\partial)$; rappelons que $T(W)$ possède une graduation homologique et une $\mathbb{N}$-graduation donnée par la longueur des tenseurs. On suppose que W est muni d'une application k-linéaire antisymétrique $(W\otimes W)_r \to (W\otimes W)_0 = W_0\otimes W_0$ avec $r\in\mathbb{N}$, c'est à dire d'une application $(W[r]\otimes W[r])_{-r} \overset{\{\!\{-,-\}\!\}}{\longrightarrow} \big((W\otimes W)[r]\big)_{-r}$.

On étudie la question suivante : sous quelles conditions cette application peut-elle être étendue comme un r-double crochet de Poisson sur $T(W)$? On procède en deux étapes en regardant tout d'abord les conditions pour pouvoir étendre $\{\!\{-,-\}\!\}$ en un double crochet quadratique sur $T(W)$.

§ 1 Multidérivation

On commence par étendre $f := \{\!\{-,-\}\!\}$ à certains tenseurs de $T(W)$. On note $\boxtimes$ le produit de l'algèbre tensorielle. On peut étendre f à $(W[r]\otimes(W\boxtimes W)[r])_{-r}$ par dérivation : soit $a\otimes(b\boxtimes c)\in(W[r]\otimes(W\boxtimes W)[r])_{-r}$ on a

$$\{\!\{a, b\boxtimes c\}\!\} := (-1)^{(|a|+r)|b|} b\boxtimes\{\!\{a,c\}\!\}'\otimes\{\!\{a,c\}\!\}'' + \{\!\{a,b\}\!\}'\otimes\{\!\{a,c\}\!\}''\boxtimes c \in (T(W)\otimes T(W))[r].$$

Par antisymétrie, on étend également f à $((W\boxtimes W)[r]\otimes W[r])_{-r}$. Comme $\partial(W)$ est dans $W\otimes W$, on a

$$\partial\big((W\otimes W)_{r+1}\big) \subset \big((W\boxtimes W)\otimes W \oplus W\otimes(W\boxtimes W)\big)_r$$

ce qui donne sens à $f\big(\partial((W[r]\otimes W[r])_{-r+1})\big)$.

2.2.2.1 Proposition. *Soient $A = \mathscr{P}(W_0,R)$ une algèbre de Koszul et $W := s^{-1}A^{\text{¡}}$ muni d'une application k-linéaire antisymétrique*

$$\{\!\{-,-\}\!\} =: f : (W[r]\otimes W[r])_{-r} \longrightarrow \big((W\otimes W)[r]\big)_{-r}.$$

Alors f induit un unique double crochet quadratique sur $T(W)$ qui vérifie la propriété de dérivation si et seulement si, pour tout $v \in (W[r] \otimes W[r])_{-r+1}$, la classe d'homologie $[f(\partial v)]$ est nulle ; autrement dit si

$$f\big(\partial(W[r] \otimes W[r])_{-r+1}\big) \subset (R \otimes W_0 \oplus W_0 \otimes R).$$

Démonstration. Le sens direct est trivial car un double crochet respecte la différentielle. Discutons à présent du sens réciproque. Supposons que, pour tout $v \in (W[r] \otimes W[r])_{-r+1}$, la classe d'homologie $[f(\partial v)]$ (dite classe d'obstruction) est nulle. Comme $v \in (W[r] \otimes W[r])_{-r+1}$ alors $f(\partial v) \in \big((W \boxtimes W) \otimes W \oplus W \otimes (W \boxtimes W)\big)_0$ donc $\partial f(\partial v) = 0 = (-1)^r f(\partial^2 v)$ par un argument de degré : $f(\partial v)$ est bien un cycle. Comme par hypothèse, sa classe d'homologie est nulle, c'est un bord : il existe $y \in (T(W) \otimes T(W))_1$ tel que $\partial y = f(\partial v)$. Comme $f(\partial v)$ est de longueur 3 et que ∂ augmente la longueur de 1, on a $y \in (W \otimes W)_1$.

Montrons que y est unique : soit $y' \in (W \otimes W)_1$ tel que $\partial y' = f(\partial v)$ alors $\partial(y' - y) = 0$. Par la formule de Künneth, comme $\mathrm{H}_1(T(W)) = 0$, on a que $\mathrm{H}_1(T(W) \otimes T(W)) = 0$, donc $y' - y$ est un bord : il existe donc $z \in T(W) \otimes T(W)$ tel que $\partial z = y' - y$. Or, si z est non-nul, alors z est au moins de longueur 2 donc ∂z est au moins de longueur 3, car $T(W), \partial)$ est minimale. Or $y' - y$ est de longueur 2 : on a donc que $y' - y = 0$ donc y est unique. On prolonge donc f en v par $\tilde{f}(v) := y$. Montrons que ce prolongement $\tilde{f}$ vérifie la condition d'anti-symétrie. On considère le diagramme (2.4). Les faces

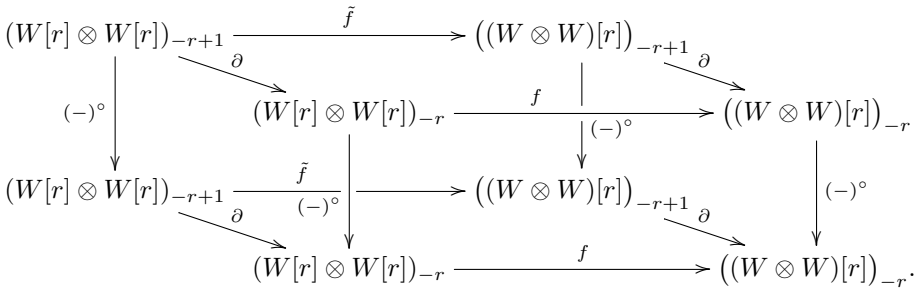


FIGURE 2.4 – Diagramme d'extension

supérieures et inférieures du cube commutent par définition du prolongement de f, les faces gauche et droite également par la définition de la catégorie monoïdale symétrique $\mathtt{Ch}_k$ et par hypothèse, la face avant anticommute donc on a

$$\partial\Big(\big(\tilde{f}(x \otimes y)\big)^\circ + (-1)^{|x||y|}\tilde{f}(y \otimes x)\Big) = 0,$$

c'est à dire que $\big(\tilde{f}(x \otimes y)\big)^\circ + (-1)^{|x||y|}\tilde{f}(y \otimes x)$ est un cycle de degré 1. Comme $\mathrm{H}_1(T(W) \otimes T(W)) = 0$, il existe $z \in T(W) \otimes T(W)$ de degré 2 tel que

$$\partial(z) = \big(\tilde{f}(x \otimes y)\big)^\circ + (-1)^{|x||y|}\tilde{f}(y \otimes x).$$

Or, si z est non-nul, z est de longueur minimale 2 ; comme $(T(W), \partial)$ est minimale, $\partial(z)$ est alors de longueur minimale 3. Or $\big(\tilde{f}(x \otimes y)\big)^\circ + (-1)^{|x||y|}\tilde{f}(y \otimes x)$ est de longueur 2 donc z est nul et donc la face du fond du diagramme (2.4) commute, d'où l'anti-symétrie du prolongement $\tilde{f}$.

On peut recommencer cet argument pour prolonger f par récurrence sur les $(W[r] \otimes W[r])_n$ avec $n > -r + 1$: il n'y a aucune classe d'obstruction, car les $\mathrm{H}_i(T(W), \partial)$ sont nuls pour $i > 0$.
Ainsi, si pour tout $v \in (W[r] \otimes W[r])_{-r+1}$, la classe d'homologie $[f(\partial v)]$ est nulle, alors f se prolonge

de manière unique en un double crochet sur $T(W)$. Comme $(T(W))_0 = T(W_0)$ et $\mathrm{H}_0(T(W), \partial) = T(W_0)/\langle R\rangle$, on a l'équivalence :

$$[f(\partial v)] = 0 \Leftrightarrow f(\partial v) \in \operatorname{Ker} p = R \otimes W_0 \oplus W_0 \otimes R$$

où p est la projection $p : T(W_0) \twoheadrightarrow T(W_0)/\langle R\rangle$. □

§ 2 Double Jacobi

Étudions maintenant la condition double Jacobi.

2.2.2.2 Proposition. *Soient A une algèbre de Koszul et $W := s^{-1}A^!$ muni d'un r-double crochet quadratique $\{\!\{-,-\}\!\}$. Alors si la restriction du double jacobiateur associé à $\{\!\{-,-\}\!\}$*

$$\{\!\{-,-,-\}\!\} : (W[r] \otimes W[r] \otimes W[r])_{-2r} \to \big((W \otimes W \otimes W)[r]\big)_{-r}$$

est triviale, alors $\{\!\{-,-\}\!\}$ définit un r-double crochet de Poisson quadratique sur $T(W)$, c'est à dire le double jacobiateur associé à $\{\!\{-,-\}\!\}$ est trivial en tout degré.

Démonstration. On note f le double jacobiateur associé à $\{\!\{-,-\}\!\}$: on a par hypothèse que

$$f\big((T(W)[r] \otimes T(W)[r] \otimes T(W)[r])_{-2r}\big) = 0,$$

donc pour $v \in (W[r] \otimes W[r] \otimes W[r])_{-2r+1}$, $f(\partial v) = 0$. Comme f est un triple crochet, il respecte la différentielle : on a que $y := f(v) \in (W \otimes W \otimes W)_1$ est un cycle. Comme $\mathrm{H}_1(T(W), \partial) = 0$, y est un bord : il existe $z \in (T(W)^{\otimes 3})_2$ tel que $y = \partial z$. Or z est de longueur minimale 3 donc ∂z est de longueur minimale 4 et y est de longueur 3 donc $y = 0$. On a donc que

$$f\big((T(W)[r] \otimes T(W)[r] \otimes T(W)[r])_{-2r+1}\big) = 0.$$

Comme les $\mathrm{H}_i(T(W), \partial) = 0$ pour $i > 0$, on montre par récurrence que le double jacobiateur associé à $\{\!\{-,-\}\!\}$ est trivial en tout degré. □

On a donc montré le résultat suivant :

2.2.2.3 Théorème. *Soient $A = T(W_0)/\langle R\rangle$ une algèbre de Koszul et $T(W) := \Omega A^!$ sa résolution minimale.*

(i) Si $T(W)$ est muni d'une application linéaire antisymétrique

$$f := \{\!\{-,-\}\!\} : (W[r] \otimes W[r])_{-r} \longrightarrow \big(W \otimes W)[r]\big)_{-r}$$

telle que $f\big(\partial(W[r] \otimes W[r])_{-r+1}\big) \subset R \otimes W_0 \oplus W_0 \otimes R$, alors $\{\!\{-,-\}\!\}$ s'étend en un unique r-double crochet quadratique sur $T(W)$.

(ii) Si, de plus, le double jacobiateur associé à cette extension est nul sur $(W[r] \otimes W[r] \otimes W[r])_{-2r}$, alors

$$\{\!\{-,-\}\!\} : T(W) \otimes T(W) \longrightarrow T(W) \otimes T(W)$$

est un r-double crochet de Poisson.

§ 3 L'exemple de l'algèbre $k[x, y]$

On étudie le cas particulier de l'algèbre de Koszul $k[x, y]$, la k-algèbre commutative libre sur deux générateurs. La résolution minimale de $k[x, y]$ est l'algèbre libre $T(V)$ avec

$$V := k \cdot x \oplus k \cdot y \oplus k \cdot \theta, \text{ avec } |x| = 0 = |y|,\ |\theta| = 1 \text{ et } d\theta = x \boxtimes y - y \boxtimes x = xy - yx.$$

Dans le reste de cette section, on va classifier les double crochets quadratiques de degré -1 sur $T(V)$. On considère donc une application antisymétrique définie sur $(V \otimes V)_1$ par

$$\begin{aligned}\{\!\{x, \theta\}\!\} &= a^x_{x,x} x \otimes x + a^x_{x,y} x \otimes y + a^x_{y,x} y \otimes x + a^x_{y,y} y \otimes y;\\ \{\!\{y, \theta\}\!\} &= a^y_{x,x} x \otimes x + a^y_{x,y} x \otimes y + a^y_{y,x} y \otimes x + a^y_{y,y} y \otimes y;\end{aligned}$$

où les $a^\alpha_{i,j}$ sont des éléments de k. L'antisymétrie nous donne :

$$\begin{aligned}\{\!\{\theta, x\}\!\} &= -a^x_{x,x} x \otimes x - a^x_{y,x} x \otimes y - a^x_{x,y} y \otimes x - a^x_{y,y} y \otimes y;\\ \{\!\{\theta, y\}\!\} &= -a^y_{x,x} x \otimes x - a^y_{y,x} x \otimes y - a^y_{x,y} y \otimes x - a^y_{y,y} y \otimes y.\end{aligned}$$

et on étend $\{\!\{-,-\}\!\}$ à $(V \otimes V)_0$ par :

$$\{\!\{x, x\}\!\} = \{\!\{x, y\}\!\} = \{\!\{y, x\}\!\} = \{\!\{y, y\}\!\} = 0.$$

La condition pour prolonger l'application $\{\!\{-,-\}\!\}$ en un double crochet donnée par le théorème 2.2.2.3 est, dans ce cas :

$$\{\!\{-,-\}\!\} \circ (\partial\theta \otimes \theta + \theta \otimes \partial\theta) \in R \otimes V_0 \oplus V_0 \otimes R.$$

On a

$$\begin{aligned}\{\!\{-,-\}\!\} \circ (\partial\theta \otimes \theta + \theta \otimes \partial\theta) &= \{\!\{\partial\theta, \theta\}\!\} + \{\!\{\theta, \partial\theta\}\!\}\\ &= \{\!\{[x, y], \theta\}\!\} - \{\!\{[x, y], \theta\}\!\}^\circ\\ &= 2a^y_{x,x}(x \otimes x^2 - x^2 \otimes x) + 2a^x_{y,y}(y^2 \otimes y - y \otimes y^2)\\ &\quad +(a^y_{x,y} - a^x_{x,x})(x \otimes xy - xy \otimes x) + (a^y_{y,x} + a^y_{x,y})(y \otimes x^2 - x^2 \otimes y)\\ &\quad +(a^y_{y,y} - a^x_{x,y})(y \otimes xy - xy \otimes y) + (a^x_{y,x} + a^x_{x,y})(y^2 \otimes x - x \otimes y^2)\\ &\quad +(a^x_{x,x} - a^y_{y,x})(yx \otimes x - x \otimes yx) + (a^x_{y,x} - a^y_{y,y})(yx \otimes y - y \otimes yx)\end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\{\!\{[x, y], \theta\}\!\} = x \star \{\!\{y, \theta\}\!\} + \{\!\{x, \theta\}\!\} \star y - y \star \{\!\{x, \theta\}\!\} - \{\!\{y, \theta\}\!\} \star x.$$

On peut donc prolonger $\{\!\{-,-\}\!\}$ si et seulement si

$$\begin{aligned}&a^y_{x,x} = a^x_{y,y} = a^x_{x,x} = a^y_{y,y} = 0\\ &a^y_{y,x} = -a^y_{x,y} \text{ et } a^x_{y,x} = -a^x_{x,y}.\end{aligned}$$

Un double crochet quadratique de degré -1 sur $T(V)$ est donc forcément de la forme :

$$\begin{aligned}
\{\!\{x,\theta\}\!\} &= \alpha(x\otimes y - y\otimes x)\ ;\\
\{\!\{y,\theta\}\!\} &= \beta(x\otimes y - y\otimes x)\ ;\\
\{\!\{\theta,\theta\}\!\} &= \beta(x\otimes\theta - \theta\otimes x) - \alpha(y\otimes\theta - \theta\otimes y),
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant donnée par l'unicité du relèvement de $\{\!\{-,-\}\!\}$.
On peut montrer que le double jacobiateur associé à un tel double crochet vérifie :

$$\begin{aligned}
\{\!\{x,\theta,\theta\}\!\} &= 0;\\
\{\!\{y,\theta,\theta\}\!\} &= 0.
\end{aligned}$$

2.2.2.4 Proposition. *Soit $T(V)$ avec*

$$V := k\cdot x \oplus k\cdot y \oplus k\cdot\theta,\ \ \textit{avec } |x| = 0 = |y|,\ |\theta| = 1 \textit{ et } d\theta = xy - yx$$

une résolution minimale cofibrante de $k[x,y]$. Alors tout (-1)-double crochet quadratique de Poisson sur R est de la forme :

$$\begin{aligned}
\{\!\{x,\theta\}\!\} &= \alpha(x\otimes y - y\otimes x);\\
\{\!\{y,\theta\}\!\} &= \beta(x\otimes y - y\otimes x);\\
\{\!\{\theta,\theta\}\!\} &= \beta(x\otimes\theta - \theta\otimes x) - \alpha(y\otimes\theta - \theta\otimes y).
\end{aligned}$$

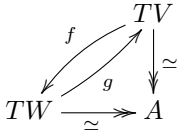
2.2.2.5 Remarque. Si l'on pose l'algèbre associative libre $A = T(x,y)$ concentré en degré 0 et $M = A\otimes\langle\theta\rangle\otimes A$ le A-bimodule libre engendré par l'élément θ de degré 1, alors, la proposition 2.2.2.4 nous donne certains des (-1)-double crochets de Poisson linéaires de $T_A(M)$, autrement dit, les structures double Lie-Rinehart de degré -1 que l'on peut définir sur la paire (A,M).

2.2.3 Double-Poisson et résolution minimale

Le but de cette section est d'étudier les conséquences de l'existence d'une structure double-Poisson sur une résolution cofibrante minimale d'une algèbre différentielle graduée A lorsqu'une telle résolution existe.

§ 1 Transport de la structure Double Poisson

On considère $\varphi : TV \overset{\simeq}{\twoheadrightarrow} A$ et $\psi : TW \overset{\simeq}{\twoheadrightarrow} A$ deux résolutions cofibrantes d'une algèbre différentielle graduée A. Par l'axiome de relèvement de la structure de modèle de la catégorie $\mathtt{DGA}_k$, il existe deux quasi-isomorphismes $f : TV \to TW$ et $g : TW \to TV$ qui font commuter le diagramme



avec $fg \sim id_{TW}$ et $gf \sim id_{TV}$. D'après [FHT95, Prop 3.5], il existe une (id_{TW}, fg)-dérivation $F : TW \to TW$ de degré 1 telle que $fg - id_{TW} = \partial F + F\partial$ et une (id_{TV}, gf)-dérivation $G : TV \to TV$ de

degré 1 telle que $gf - id_{TV} = \partial G + G\partial$.

On chercher à étudier si l'existence d'un double crochet de Poisson sur une résolution de l'algèbre A peut induire un double crochet de Poisson sur une autre résolution. Supposons donc que TV soit munie d'un double crochet de Poisson $\{\!\{-,-\}\!\}_V$. On définit alors l'application $\{\!\{-,-\}\!\}_W$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} TW^{\otimes 2} & \xrightarrow{\{\!\{-,-\}\!\}_W} & TW^{\otimes 2} \\ {\scriptstyle g\otimes g}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle f\otimes f} \\ TV^{\otimes 2} & \xrightarrow{\{\!\{-,-\}\!\}_V} & TV^{\otimes 2}. \end{array}$$

(i) Soient a et b, deux éléments de TW :

$$\begin{aligned} \{\!\{a,b\}\!\}_W &= f\otimes f\{\!\{g(a),g(b)\}\!\}_V \\ &= (-1)^{|a||b|}(f\otimes f)\sigma_{(12)}\{\!\{g(b),g(a)\}\!\}_V \\ &= (-1)^{|a||b|}\sigma_{(12)}(f\otimes f)\{\!\{g(b),g(a)\}\!\}_V \\ &= (-1)^{|a||b|}\sigma_{(12)}\{\!\{b,a\}\!\}_W \end{aligned}$$

donc $\{\!\{-,-\}\!\}_W$ est anti-symétrique (au sens des double crochets).

(ii) Soient $a,b,c \in TW$:

$$\begin{aligned} \{\!\{a,bc\}\!\}_W &= (f\otimes f)\{\!\{g(a),g(b)g(c)\}\!\}_V \\ &= (f\otimes f)\left(\{\!\{g(a),g(b)\}\!\}_V\cdot g(c) + (-1)^{|a||b|}g(b)\{\!\{g(a),g(c)\}\!\}\right) \\ &= \{\!\{a,b\}\!\}_W\cdot fg(c) + (-1)^{|a||b|}fg(b)\cdot\{\!\{a,c\}\!\}_W \\ &= \{\!\{a,b\}\!\}_W\cdot c + (-1)^{|a||b|}b\cdot\{\!\{a,c\}\!\}_W \\ &\qquad +(-1)^{|a||b|}(\partial F + F\partial)(b)\cdot\{\!\{a,c\}\!\} + \{\!\{a,b\}\!\}_W(\partial F + F\partial)(c). \end{aligned}$$

donc, en général, $\{\!\{-,-\}\!\}_W$ ne vérifie la propriété de dérivation qu'à "homotopie près".

(iii) Soient a,b et c trois éléments de TW :

$$\begin{aligned} \{\!\{a,\{\!\{b,c\}\!\}_W\}\!\}_{W,L} &= \{\!\{a,f\otimes f\{\!\{g(b),g(c)\}\!\}_V\}\!\}_{W,L} \\ &= \{\!\{a,f\left(\{\!\{g(b),g(c)\}\!\}'_V\right)\}\!\}_W\otimes f\left(\{\!\{g(b),g(c)\}\!\}''_V\right) \\ &= f^{\otimes 3}\left(\{\!\{g(a),gf\{\!\{g(b),g(c)\}\!\}'_V\}\!\}\otimes\{\!\{g(b),g(c)\}\!\}''_V\right) \\ &= f^{\otimes 3}\left(\{\!\{g(a),\{\!\{g(b),g(c)\}\!\}_V\}\!\}_{V,L}\right) \\ &\qquad +f^{\otimes 3}\left(\{\!\{g(a),(\partial G+G\partial)\{\!\{g(b),g(c)\}\!\}'_V\}\!\}\otimes\{\!\{g(b),g(c)\}\!\}''_V\right) \end{aligned}$$

donc, en général, $\{\!\{-,-\}\!\}_W$ ne vérifie pas la propriété double-Jacobi.

Ainsi, on ne peut pas transporter strictement un double crochet de Poisson d'une résolution à une autre. Cependant, si on suppose que l'une des deux est une résolution minimale, alors on conserve certaines propriétés du double crochet.

2.2.3.1 Proposition. *Soit $(A,0) \in \mathrm{Ob}\,\mathtt{DGA}_k$ de différentielle nulle. Soient $\varphi : TV \xrightarrow{\simeq} A$ et $\psi : TW \xrightarrow{\simeq} A$ deux résolutions cofibrantes de A avec TV la résolution minimale. Soient $f : TV \to TW$ et $g : TW \to TV$ deux quasi-isomorphismes tels que $gf = id_{TV}$ et $fg \sim id_{TW}$.*

(i) Supposons que TW soit munie d'une double dérivation $\{\!\{-,-\}\!\}_W$.
Alors TV est munie d'une double-dérivation $\{\!\{-,-\}\!\}_V := (g\otimes g)\{\!\{f(-),f(-)\}\!\}_W$.

(ii) Supposons que TV soit muni d'un double crochet de Lie $\{\!\{-,-\}\!\}_V$.
Alors TW est munie d'un double crochet de Lie $\{\!\{-,-\}\!\}_W := (f\otimes f)\{\!\{g(-),g(-)\}\!\}_V$.

Démonstration. Découle des calculs précédents et du fait que si $gf = id_{TV}$ alors le morphisme f est injectif. □

Nous avons donc vu que si on a deux algèbres homotopes avec l'une munie d'un double crochet de Poisson, en général, la deuxième n'hérite pas de la structure stricte mais doit hériter d'un double crochet de Poisson "à homotopie près". Reste à déterminer cette structure.

§ 2 Double-Lie "à homotopie près" : premiers calculs

Afin de simplifier la question, nous allons commencer par regarder ce que peut être une structure double-Lie "à homotopie près". Considérons $(A, \varphi := \{\!\{-,-\}\!\}_A)$ une algèbre double-Lie et H un complexe de chaînes avec :

$$h \circlearrowright A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H,$$

où i et p sont des morphismes de complexes de chaînes et où h est une application de degré 1 telle que $ip - id_A = \partial_A h + h\partial_A$. On définit un double crochet sur H par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^{\otimes 2} & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & H^{\otimes 2} \\ {\scriptstyle i\otimes i}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle p\otimes p} \\ A^{\otimes 2} & \xrightarrow{\varphi} & A^{\otimes 2}. \end{array}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, ψ est antisymétrique au sens des double crochets mais ne vérifie pas, en général, l'identité de double-Jacobi, i.e.

$$\sum_{j=0}^{2}\rho^{-j}(\psi\otimes 1)(1\otimes\psi)\rho^j = \sum_{j=0}^{2}\rho^{-j}p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)(1\otimes ip\otimes 1)(1\otimes\varphi)i^{\otimes 3}\rho^j \neq 0 \text{ dans } \left(\underline{\hom}_k(H^{\otimes 3},H^{\otimes 3}),\partial_{\hom}\right)$$

où ρ est un générateur d'ordre 3 du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Par contre, ce double-jacobiateur est un bord dans $\underline{\hom}(H^{\otimes 3},H^{\otimes 3})$. En effet, montrons que le terme

$$\sum_{j=0}^{2}\rho^{-j}p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)(1\otimes h\otimes 1)(1\otimes\varphi)i^{\otimes 3}\rho^j$$

de degré 1 est envoyé par $\partial_{\hom}$ sur le double-jacobiateur associé à ψ. On a

$$\begin{aligned}
\partial_{\hom}\left(p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)(1\otimes h\otimes 1)(1\otimes\varphi)i^{\otimes 3}\right) &= \partial_{(H^{\otimes 3})}p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)(1\otimes h\otimes 1)(1\otimes\varphi)i^{\otimes 3} \\
&\quad -(-1)^1 p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)(1\otimes h\otimes 1)(1\otimes\varphi)i^{\otimes 3}\partial_{(H^{\otimes 3})} \\
&= p^{\otimes 3}\Big(\partial_{(A^{\otimes 3})}(\varphi\otimes 1)(1\otimes h\otimes 1)(1\otimes\varphi) + \\
&\qquad (\varphi\otimes 1)(1\otimes h\otimes 1)(1\otimes\varphi)\partial_{(A^{\otimes 3})}\Big)i^{\otimes 3} \\
&= p^{\otimes 3}\Big((\varphi\otimes 1)(\partial_A\otimes h\otimes 1)(1\otimes\varphi)i^{\otimes 3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)(1\otimes \partial_A h\otimes 1)(1\otimes\varphi)\\
&\quad -(\varphi\otimes 1)(1\otimes h\otimes \partial_A)(1\otimes\varphi)\\
&\quad +(\varphi\otimes 1)(1\otimes h\otimes \partial_A)(1\otimes\varphi)\\
&\quad +(\varphi\otimes 1)(1\otimes h\partial_A\otimes 1)(1\otimes\varphi)\\
&\quad -(\varphi\otimes 1)(\partial_A\otimes h\otimes 1)(1\otimes\varphi)\Big) i^{\otimes 3}\\
=\;& p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)\,(1\otimes(\partial_A h + h\partial_A)\otimes 1)\,(1\otimes\varphi) i^{\otimes 3}\\
=\;& p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)(1\otimes ip\otimes 1)(1\otimes\varphi) i^{\otimes 3} - p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)(1\otimes\varphi) i^{\otimes 3}.
\end{aligned}
$$

Finalement, comme le double-jacobiateur associé à φ est nul, on a l'égalité suivante :

$$
\partial_{\mathrm{hom}}\left(\sum_{j=0}^{2}\rho^{-j}p^{\otimes 3}(\varphi\otimes 1)(1\otimes h\otimes 1)(1\otimes\varphi)i^{\otimes 3}\rho^{j}\right) = \sum_{j=0}^{2}\rho^{-j}(\psi\otimes 1)(1\otimes\psi)\rho^{j}. \tag{2.2.2}
$$

Afin d'étudier les algèbres double-Lie à homotopie près, le cadre d'étude adapté est celui des propérades. Les propérades sont les objets qui encodent les opérations algébriques à plusieurs entrées et plusieurs sorties : ce sont les monoïdes de la catégorie des $\mathfrak{S}$-bimodules (réduits) pour le produit de composition connexe $\boxtimes_c$ (cf. chapitre 3). Ainsi, une algèbre double-Lie est une algèbre sur la propérade $\mathcal{DL}ie$. Comprendre ce qu'est une algèbre double-Lie à homotopie près revient alors à exhiber un modèle cofibrant de la propérade $\mathcal{DL}ie$ (cf. définition 5.3.3.1). Ainsi, le but de la suite de ce travail est d'exhiber un modèle de la propérade $\mathcal{DL}ie$. Exhiber un modèle d'une propérade quelconque est une question très difficile. Cependant, si la propérade vérifie une propriété de koszulité (notion qui généralise le cadre de la dualité de Koszul des algèbres et des opérades), alors la théorie développée par Vallette dans sa thèse [Val03] nous fournit un modèle explicite.

Nous allons donc chercher à montrer que la propérade $\mathcal{DL}ie$ est de Koszul : si $\mathcal{DL}ie$ vérifie une telle propriété, on pourrait alors également exhiber un modèle de la propérade $\mathcal{DP}ois$ (cf. la proposition 5.3.1.3 et le corollaire 5.3.2.2). Une telle question reste difficile, car il n'existe pas de technique simple pour montrer qu'une propérade est de Koszul, contrairement au cas des algèbres ou des opérades où exhiber une base PBW ou de Gröbner de l'objet induit qu'il est de Koszul (cf. [LV12, Chap. 4] pour les algèbres et [LV12, Chap. 8] et [Hof10] pour les opérades). Cependant, la nature de la propérade $\mathcal{DL}ie$ est particulière : elle est dans l'image du foncteur d'induction Ind : $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \to \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}$ défini, pour P un $\mathfrak{S}$-module réduit et $s, e \in \mathbb{N}^*$, par

$$
\mathrm{Ind}\,(P)(s,e) := \begin{cases} P(e)\uparrow_{\mathfrak{S}_e^{op}}^{\mathfrak{S}_e\times\mathfrak{S}_e^{op}} & \text{si } s = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.
$$

Notre stratégie pour attaquer le problème est donc la suivante :

(i) nous allons ramener le problème au niveau des $\mathfrak{S}$-modules en définissant sur la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$ une structure monoïdale $\boxtimes_c$ qui s'envoie par le foncteur d'induction sur la structure monoïdale des propérades (cf. chapitre 3) ;

(ii) nous allons étudier les monoïdes, appelés *protopérades*, correspondant à ce nouveau produit monoïdal (cf. chapitre 4), notamment en exhibant la combinatoire du monoïde libre ;

(iii) par l'exactitude du foncteur Ind et en utilisant le travail de Vallette [Val03], on définira les constructions bar/cobar et une dualité de Koszul pour les protopérades (cf. chapitre 5) ;

(iv) enfin, on tentera de démontrer un théorème de type Critère PBW (comme celui démontrer par Hoffbeck pour les opérades, cf. [Hof10]) pour les protopérades (cf. chapitre 6).

CHAPITRE 3

STRUCTURES MONOÏDALES

On note $\mathtt{Fin}$ la catégorie des ensembles finis munis des bijections d'ensembles : $\mathtt{Fin}$ est un groupoïde ce qui nous fournit l'équivalence de catégories $\mathtt{Fin} \cong \mathtt{Fin}^{op}$ via le passage à l'inverse. L'un des points clés des constructions de ce chapitre est que $\mathtt{Fin}$ munie de la réunion disjointe $\amalg$ est monoïdale symétrique. On note $\mathfrak{S}$ son squelette, i.e. la catégorie où les objets sont les entiers naturels, i.e. $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{S} = \mathbb{N}$ et où les morphismes sont donnés par $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(n,n) = \mathfrak{S}_n$ pour $n \neq 0$ et $\mathrm{Hom}(0,0) = \{\mathrm{id}\}$ et qui lui est équivalente.

3.0.0.1 Définition. $\mathfrak{S}$*-module*
On appelle $\mathfrak{S}$*-module* (à droite) un objet de $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \overset{\text{not.}}{:=} \mathtt{Func}(\mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$, la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathtt{Fin}$ vers la catégorie des k-complexes de chaînes.

3.0.0.2 Définition. $\mathfrak{S}$*-bimodule*
On appelle $\mathfrak{S}$*-bimodule* un objet de la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k \overset{\text{not.}}{:=} \mathtt{Func}(\mathtt{Fin} \times \mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$.

3.0.0.3 Notation(s). Pour F un $\mathfrak{S}$-module, on note $F(m) := F(\llbracket 1, m \rrbracket)$ et $F(0) = F(\emptyset)$. Dans la littérature sur les opérades (par exemple, le livre de Loday et Vallette [LV12]), on ne considère que des foncteurs des catégories $\mathtt{Func}(\mathfrak{S}, \mathtt{Ch}_k)$ et $\mathtt{Func}(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$: c'est pour cela que l'on donnera pour chacune des constructions, une traduction en ces termes, d'où l'utilité d'une telle notation.

3.0.0.4 Définition. $\mathfrak{S}$*-module localement fini*
Soit V un $\mathfrak{S}$-module. On dit que V est *localement fini* si, pour tout ensemble fini S, le complexe de chaînes $V(S)$ est de dimension totale finie.

En pratique, grâce à l'équivalence de catégories $\mathtt{Fin} \cong \mathfrak{S}$, on peut voir un $\mathfrak{S}$-module M comme une collection $\big(M(n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de complexes de chaînes indexés par les entiers naturels où chaque $M(n)$, pour $n \neq 0$, est muni d'une action du groupe $\mathfrak{S}_n$ à droite. De même, un $\mathfrak{S}$-bimodule P est une collection $\big(P(m,n)\big)_{m,n \in \mathbb{N}}$ de complexes de chaînes indexés par des couples d'entiers naturels où chaque $P(m,n)$ est muni d'une action de $\mathfrak{S}_m$ à gauche et d'une action de $\mathfrak{S}_n$ à droite ou, de manière équivalente, muni d'une action de $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n^{op}$ à gauche. On introduit également la notion de $\mathfrak{S}$-module et $\mathfrak{S}$-bimodule réduit.

3.0.0.5 Définition. $\mathfrak{S}$*-module et* $\mathfrak{S}$*-bimodule réduit*
Un $\mathfrak{S}$-module (resp. $\mathfrak{S}$-bimodule) P qui vérifie $P(\emptyset) = 0$ (resp. $P(\emptyset, S) = 0$ et $P(S, \emptyset) = 0$ pour tout ensemble fini S) est *réduit*. On note respectivement $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$ et $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}$ les sous-catégories pleines de $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$ et $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$ des $\mathfrak{S}$-modules et $\mathfrak{S}$-bimodules réduits.

3.0.0.6 Remarque. Les notions de $\mathfrak{S}$-module et $\mathfrak{S}$-bimodule sont plus générales que celles présentées ici : on peut remplacer la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ par n'importe quelle catégorie $\mathtt{C}$, monoïdale symétrique pour un produit $\odot$ d'unité $\mathbb{1}$, munie des coproduits finis telle que la structure monoï-

dale soit distributive par rapport au coproduit, i.e. pour tous objets X, Y et Z de la catégorie $\mathtt{C}$, $(X \amalg Y) \odot Z = (X \odot Z) \amalg (Y \odot Z)$. Ainsi, on appelle $\mathtt{C}$-$\mathfrak{S}$-*module*, un objet de la catégorie de foncteurs $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_{\mathtt{C}} := \mathtt{Func}(\mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{C})$ et $\mathtt{C}$-$\mathfrak{S}$-*bimodule*, un objet de la catégorie de foncteurs $\mathtt{Func}(\mathtt{Fin} \times \mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{C})$. Un $\mathtt{C}$-$\mathfrak{S}$-module (resp. $\mathtt{C}$-$\mathfrak{S}$-bimodule) P est dit réduit si $P(\emptyset) = I$ (resp. $P(\emptyset, S) = I$ et $P(S, \emptyset) = I$ pour tout ensemble fini S) avec I, l'objet initial de la catégorie $\mathtt{C}$.

Toutes les structures monoïdales définient dans ce chapitre sur les catégories $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$ *et* $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$ *se définissent de la même manière sur les catégories* $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_{\mathtt{C}}$ *et* $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_{\mathtt{C}}$.

Une remarque importante. *On a l'équivalence de catégories*

$$\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \cong \mathfrak{S}^{op}\text{-}\mathtt{mod}_k,$$

induite par le passage à l'inverse dans les groupes symétriques. On utilisera parfois cette équivalence sans le préciser.

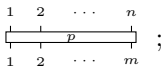
3.0.0.7 Remarque. On a les équivalences de catégories

$$\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \cong \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \times \mathtt{Ch}_k \ ;$$
$$\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k \cong \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}^{op}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \times \mathtt{Ch}_k.$$

Dans ce chapitre, nous allons décrire différentes structures monoïdales sur les catégories $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$ et $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$: ainsi, pour chacune de ces catégories, nous introduirons des produits de concaténation $\otimes^{conc}$, de composition $\square$ et de composition connexe $\boxtimes_c$. Ces objets et ces produits sont les éléments centraux de l'étude des objets qui modélisent les opérations à plusieurs entrées et sorties. Par exemple, les opérades et dualement les coopérades, qui sont respectivement les monoïdes et les comonoïdes dans la catégorie $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \circ)$ (cf. [LV12, Chap. 5]), sont les objets qui modélisent les opérations algébriques à plusieurs entrées et une seule sortie comme les produits associatifs, commutatifs, les crochets de Leibniz et de Lie, etc ... La généralisation des opérades, les propérades, introduites par Vallette dans sa thèse [Val03], sont elles, les monoïdes de $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \boxtimes_c)$ (cf. [Val03, MV09a]) et modélisent les opérations à plusieurs entrées et plusieurs sorties.

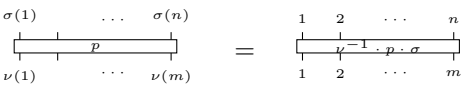
3.0.0.8 Remarque. Le produit $\circ$ est un cas particulier du produit de composition connexe $\boxtimes_c$ comme on le verra à la section 3.2.4.

On illustre ces différents produits sur la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$. On considère P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules : on peut alors voir les éléments $p \in P(m, n)$ comme des opérations à n entrées et à m sorties, que l'on représente par



;

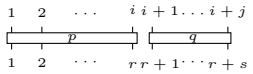
les actions des groupes symétriques sont quant à elles représentées de la manière suivante : pour deux permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\nu \in \mathfrak{S}_m$



Ainsi, on représente les éléments des différents produits de P et Q des manières suivantes.

- ▷ Les éléments du produit $P \otimes^{conc} Q$ peuvent être représentés par la concaténation de deux opérations : ainsi, pour $p \in P(r, i)$ et $q \in Q(s, j)$, on représente $p \otimes q \in \big(P \otimes^{conc} Q\big)(r + s, i + j)$

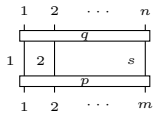
par



.

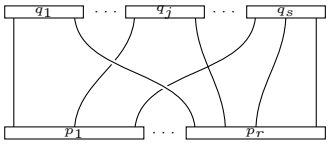
Ce produit décrit les "compositions horizontales" d'opérations.

▷ Le produit $P \square Q$ correspond aux compositions verticales d'opérations : pour $p \in P(m,s)$ et $q \in Q(s,n)$, on a $p \square q \in \big(P \square Q\big)(m,n)$ qui est représenté par le diagramme :



.

▷ Enfin, on illustre le produit $P \boxtimes_c Q$: les éléments d'un tel produit sont portés par des graphes connexes à deux niveaux, comme expliqué dans [Val03, Chap. 2] ; un monôme de $\big(P \boxtimes_c Q\big)(m,n)$ peut être représenté par exemple par :



où l'on a omis de dessiner les brins d'entrées et de sorties du diagramme afin de ne pas alourdir le diagramme.

Dans le cas de la catégorie $\mathfrak{S}$-$\mathtt{mod}_k$, on a également des représentations diagrammatiques des éléments, comme dans les cadres opéradique et coopéradiques : ainsi, pour P un $\mathfrak{S}$-module et $p \in P(m)$, on peut considérer p comme une opération algébrique à m entrées et une sortie, représentée par un arbre à m feuilles

;

cela correspond au foncteur

$$(-)^{pr} : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$$

qui envoie tout $\mathfrak{S}$-module V sur le $\mathfrak{S}$-bimodule

$$(V)^{pr}(m,n) := \begin{cases} V(n) & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{si } m \neq 1. \end{cases}$$

De même, on peut considérer p comme une opération algébrique à une entrée et m sorties, représentée par un graphe de la forme

;

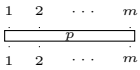
cela correspond au foncteur

$$(-)^{copr} : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$$

qui envoie tout $\mathfrak{S}$-module V sur le $\mathfrak{S}$-bimodule

$$(V)^{copr}(m,n) := \begin{cases} V(n) & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$

Nous reviendrons plus en détails sur ces foncteurs à la section 4.1.2. L'apport de ce chapitre est d'amener une nouvelle interprétation de la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$ en terme d'opérations algébriques. Ainsi, pour toute la suite, il ne faudra plus envisager les éléments d'un $\mathfrak{S}$-module P comme des arbres représentant des opérations avec m entrées et 1 sortie, mais comme des briques représentant des opérations algébriques avec m entrées et m sorties :



sur lesquelles l'action du groupe symétrique est diagonale, ce qui correspond à un foncteur

$$\mathrm{Ind} : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k.$$

On rassemble ces trois foncteurs dans le diagramme 3.1. On restreint ainsi facilement les produits

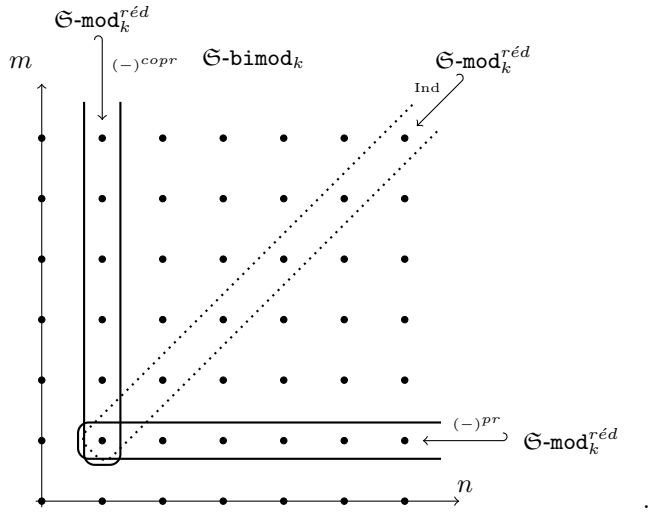


FIGURE 3.1 – les injections $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \hookrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$

de concaténation $\otimes^{conc}$ et de composition $\square$ (cf. sous-section 3.1.2). Nous commencerons donc par décrire les différentes structures monoïdales sur $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$, puis sur $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$ pour enfin faire le lien en définissant le foncteur Ind. En effet, le foncteur Ind commute aux produits $\square$ et $\otimes^{conc}$ (cf. propositions 3.3.2.1 et 3.3.2.6). On s'intéressera notamment aux monoïdes pour ces structures monoïdales. On fera ensuite la construction d'un produit de composition connexe $\boxtimes_c$ (cf. section 3.1.3) sur la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$:

$$-\boxtimes_c - : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k.$$

Ce produit correspond au produit de composition connexe $\boxtimes_c$ défini sur la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$ par Vallette dans sa thèse (cf. [Val03]). De même que pour les produits $\square$ et $\otimes^{conc}$, le foncteur d'induction

commute au produit $\boxtimes_c$ (cf. théorème 3.3.2.10), i.e.

$$\mathrm{Ind}\,(-) \boxtimes_c \mathrm{Ind}\,(-) \cong \mathrm{Ind}\,(- \boxtimes_c -).$$

Les monoïdes associatifs de $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \boxtimes_c)$ seront introduits et étudiés au chapitre 4 et seront au centre du chapitre 6.

3.1 Sur les $\mathfrak{S}$-modules

Dans cette section, on introduit la combinatoire nécessaire à la construction du produit de composition connexe $\boxtimes_c$ sur la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$. Puis dans un second temps, on définit les trois produits $\square$, $\otimes^{conc}$ et $\boxtimes_c$. Pour les deux premiers produits, on pourra se référer notamment à [AM10, Chap. 8].

3.1.1 Combinatoire pour les $\mathfrak{S}$-modules

Pour commencer, on définit deux endofoncteurs de la catégorie $\mathtt{Fin}$, $\mathcal{Y}^{ord}$ et $\mathcal{Y}$, qui à un ensemble fini associent l'ensemble de ses partitions (ordonnées ou non).

§ 1 Foncteurs

3.1.1.1 Définition. *Foncteurs $\mathcal{Y}^{ord}(-)$ et $\mathcal{Y}(-)$*
On définit les endofoncteurs de la catégorie $\mathtt{Fin}^{op}$ suivants.

(i) Pour tout entier r positif non-nul, on définit le foncteur $\mathcal{Y}_r^{ord} : \mathtt{Fin}^{op} \to \mathtt{Fin}^{op}$, le foncteur des partitions ordonnées à r éléments , donné sur les objets de $\mathtt{Fin}$ par :

$$\mathcal{Y}_r^{ord}(S) := \Big\{ I = (I_j)_{j\in[\![1,r]\!]} \mid \coprod_{j=1}^{r} I_j = S, \ \ \forall j \in [\![1,r]\!], I_j \neq \emptyset \Big\};$$

pour tout ensemble fini S, on a une action à droite de $\mathrm{Aut}(S)$ sur $\mathcal{Y}_r^{ord}(S)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_r^{ord}(S) \times \mathrm{Aut}(S) & \longrightarrow & \mathcal{Y}_r^{ord}(S) \\ \big((I_j)_{j\in[\![1,r]\!]}, \varphi\big) & \longmapsto & \big(\varphi^{-1}(I_j)\big)_{j\in[\![1,r]\!]} \end{array}.$$

Cela nous permet de définir l'endofoncteur $\mathcal{Y}^{ord}$ donné par $\mathcal{Y}^{ord}(S) := \coprod_{r\in\mathbb{N}^*} \mathcal{Y}_r^{ord}(S)$.

(ii) Pour tout entier r positif non-nul, on a la version non-ordonnée $\mathcal{Y}_r$ donnée sur les objets de $\mathtt{Fin}^{op}$ par :

$$\mathcal{Y}_r(S) := \big\{ I = \{I_\alpha\}_{\alpha\in A} \mid A \in \mathrm{Ob}\,\mathtt{Fin},\ |A| = r,\ \coprod_{\alpha} I_\alpha = S, \forall \alpha \in A, I_\alpha \neq \emptyset \big\};$$

où l'action à droite de $\mathrm{Aut}(S)$ se décrit de la même manière que précédemment : on définit l'endofoncteur $\mathcal{Y}(S) := \coprod_{r\in\mathbb{N}^*} \mathcal{Y}_r(S)$.

3.1.1.2 Remarque. Dans la définition de $\mathcal{Y}_r(-)$, l'ensemble fini qui indexe les éléments ne fait pas partie de la structure, c'est à dire que, pour deux ensembles finis non vides isomorphes $A \cong A'$, on a, pour tout $I = \{I_\alpha\}_{\alpha\in A} \in \mathcal{Y}_r(S)$, l'égalité $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A} = \{I_{\alpha'}\}_{\alpha'\in A'}$. Cette remarque vaut également pour les prochaines définitions de foncteurs basées sur des ensembles non-ordonnées.

3.1.1.3 Exemple. Pour tout ensemble S fini non vide, $\mathcal{Y}_1(S)$ et $\mathcal{Y}_1^{ord}(S)$ sont réduits au singleton $\{S\}$. Également, pour tout entier $r > |S|$, les ensembles $\mathcal{Y}_r(S)$ et $\mathcal{Y}_r^{ord}(S)$ sont vides.

3.1.1.4 Remarque. Soit S un ensemble fini.

(i) Les ensembles $\mathcal{Y}^{ord}(S)$ et $\mathcal{Y}(S)$ sont finis.

(ii) Un élément de $\mathcal{Y}_r^{\mathrm{ord}}(S)$ est une surjection $S \twoheadrightarrow [\![1, r]\!]$.

(iii) Un élément I de $\mathcal{Y}(S)$ est une partition de S, ce qui est équivalent à une relation d'équivalence $\underset{I}{\sim}$ sur S, c'est à dire à la donnée d'un sous-ensemble $\tilde{I} \subset S \times S$ (une relation binaire) satisfaisant les axiomes :

- ▷ de *réflexivité* : pour tout élément s de S, le couple (s, s) est dans $\tilde{I}$;
- ▷ de *symétrie* : pour tous éléments s' et s'' de S, si le couple (s', s'') est dans $\tilde{I}$, alors (s'', s') est également dans $\tilde{I}$;
- ▷ et de *transitivité* : pour tous éléments r, s et t de S, si les couples (r, s) et (s, t) sont des éléments de $\tilde{I}$, alors (r, t) également.

3.1.1.5 Remarque. (i) Pour tout entier naturel m non-nul, on a $\mathcal{Y}^{ord}(m)$, le $\mathfrak{S}_m^{op}$-ensemble des décompositions ordonnées de $[\![1, m]\!]$, i.e.

$$\mathcal{Y}^{ord}(m) = \coprod_{r \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Y}_r^{ord}(m) \quad \text{avec} \quad \mathcal{Y}_r^{ord}(m) = \big\{ I = (I_j)_{j \in [\![1,r]\!]} \mid \coprod_{j=1}^{r} I_j = [\![1, m]\!], I_j \neq \emptyset \big\},$$

l'action de $\mathfrak{S}_m$ étant induite par celle sur $[\![1, m]\!]$. Pour décrire plus explicitement $\mathcal{Y}_r^{ord}(m)$, on utilise le fait que, pour $I \in \mathcal{Y}_r^{\mathrm{ord}}([\![1, m]\!])$, il existe un unique isomorphisme $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ noté

$$\sigma_I : [\![1, m]\!] = \coprod_{l=1}^{r} \Big[\!\Big[\sum_{j=1}^{l-1} |I_j| + 1, \sum_{j=1}^{l} |I_j| \Big]\!\Big] \longrightarrow I = \coprod_{l=1}^{r} I_l$$

qui vérifie les propriétés de battages suivantes :

- ▷ $\sigma_I([\![\sum_{j=1}^{l-1} |I_j| + 1, \sum_{j=1}^{l} |I_j|]\!]) = I_l$;
- ▷ σ_I préserve l'ordre sur chaque composante I_l, c'est à dire que pour tout $l \in [\![1, r]\!]$, on a

$$\forall i, j \in [\![\sum_{j=1}^{l-1} |I_j| + 1, \sum_{j=1}^{l} |I_j|]\!], \text{ si } i < j, \text{ alors } \sigma_I(i) < \sigma_I(j)$$

pour la relation d'ordre induite par celle de $\mathbb{N}$.

Pour chaque entier l de $[\![1, r]\!]$, I_l peut être identifié au λ_l-uplet $(a_{1,l}, \ldots, a_{\lambda_l,l})$ où, pour tout i, $a_{i,l} \in I_l \subset [\![1, m]\!]$ et, pour tous entiers $i < j$ dans $[\![1, \lambda_l]\!]$, on a $a_{i,l} < a_{j,l}$. Ainsi, σ_I est donnée par

$$\sigma_I := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \lambda_1 & \lambda_1 + 1 & \cdots & \lambda_1 + \lambda_2 & \cdots & \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j + 1 & \cdots & \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \\ a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{\lambda_1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{\lambda_2,2} & \cdots & a_{1,r} & \cdots & a_{\lambda_r,r} \end{pmatrix}. .$$

Du fait précédent découle le monomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_r^{ord}(m) & \hookrightarrow & \mathfrak{S}_m \times \big\{ \bar{\lambda} \in (\mathbb{N}^*)^r \mid \sum_{l=1}^{r} \lambda_l = m \big\} \\ I & \longmapsto & \big(\sigma_I, ([I_1|, \ldots, |I_r|) \big) \end{array}$$

(ii) De même, on a $\mathcal{Y}(m)$, le $\mathfrak{S}_m$-ensemble des décompositions (non-ordonnées) de $[\![1,m]\!]$ qui est donné par

$$\mathcal{Y}(m) = \coprod_{r\in\mathbb{N}^*} \mathcal{Y}_r(m) \text{ avec } \mathcal{Y}_r(m) = \left\{ I = \{I_\alpha\}_{\alpha\in A} \mid A \in \operatorname{Ob}\mathtt{Fin},\ |A| = r,\ \coprod_\alpha I_\alpha = [\![1,m]\!], I_j \neq \emptyset \right\};$$

l'action à droite de $\mathfrak{S}_m$ étant induite par celle sur $[\![1,m]\!]$. Pour $I = (I_\alpha) \in \mathcal{Y}(m)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, on note $I\sigma$ l'image de I sous l'action de σ.

On a, pour tout ensemble fini S, une action libre de $\mathfrak{S}_r$ sur $\mathcal{Y}_r^{ord}(S)$ par permutation : pour toute permutation σ dans $\mathfrak{S}_r$,

$$\sigma \cdot (I_j)_{j\in[\![1,r]\!]} = (I_{\sigma^{-1}(j)})_{j\in[\![1,r]\!]},$$

donc la projection sur les coinvariants nous fournit la transformation naturelle surjective

$$\mathcal{Y}_r^{ord}(-) \twoheadrightarrow \mathcal{Y}_r(-). \tag{3.1.1}$$

§ 2 Produits

La réunion disjointe de deux ensembles nous fournit la transformation naturelle entre bifoncteurs suivante :

$$\mathcal{Y}(S') \times \mathcal{Y}(S'') \overset{\mu^{conc}_{S',S''}}{\longrightarrow} \mathcal{Y}\left(S' \amalg S''\right),$$

qui vérifie une propriété d'associativité : pour tous $R, S, T \in \operatorname{Ob}\mathtt{Fin}$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(R)\times\mathcal{Y}(S)\times\mathcal{Y}(T) & \xrightarrow{\mu^{conc}_{R,S}\times\mathrm{id}} & \mathcal{Y}\left(R\amalg S\right)\times\mathcal{Y}(T) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\mu^{conc}_{S,T}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^{conc}_{R\amalg S,T}} \\ \mathcal{Y}(R)\times\mathcal{Y}\left(S\amalg T\right) & \xrightarrow[\mu^{conc}_{R,S\amalg T}]{} & \mathcal{Y}(R\amalg S\amalg T) \end{array}$$

3.1.1.6 Exemple. Dans le cas particulier où $S' = [\![1,m]\!]$ et $S'' = [\![1,n]\!]$, on a donc le morphisme de $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$-ensembles

$$\mathcal{Y}(m) \times \mathcal{Y}(n) \overset{\mu^{conc}}{\longrightarrow} \mathcal{Y}(m+n).$$

où l'action sur le terme de droite est donnée par la restriction par l'inclusion $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{m+n}$.

3.1.1.7 Remarque. La transformation naturelle $\mu : \mathcal{Y}\times\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ respecte la graduation donnée par le nombre d'éléments dans une partition.

3.1.1.8 Définition. *Foncteur $\mathcal{X}(-)$*
On définit l'endofoncteur $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{X}^{ord}$) de la catégorie $\mathtt{Fin}^{op}$ par

$$\mathcal{X} := \mathcal{Y}\times\mathcal{Y} \ \left(\text{resp. } \mathcal{X}^{ord} := \mathcal{Y}^{ord}\times\mathcal{Y}^{ord}\right)$$

muni du produit associatif naturel *de concaténation*

$$\begin{array}{rccc} \mu^{conc}_{S',S''} : & \mathcal{X}(S')\times\mathcal{X}(S'') & \longrightarrow & \mathcal{X}\left(S'\amalg S''\right) \\ & \left(\{A_\alpha\},\{B_\beta\},\{C_\gamma\},\{D_\delta\}\right) & \longmapsto & \left(\{A_\alpha\}\amalg\{C_\gamma\},\{B_\beta\}\amalg\{D_\delta\}\right) \end{array}.$$

3.1.1.9 Définition. Soient S, un ensemble fini et $(I,J) \in \mathcal{X}(S)$. On définit sur S la relation d'équivalence $\underset{I,J}{\sim}$ comme la relation la plus fine tel que si $i \underset{I}{\sim} i'$ alors $i \underset{I,J}{\sim} i'$ et si $j \underset{J}{\sim} j'$ alors $j \underset{I,J}{\sim} j'$.

3.1.1.10 Remarque. En fait, l'ensemble des partitions d'un ensemble fini est un treillis (cf. [Sta97, Ex. 3.10.4]).

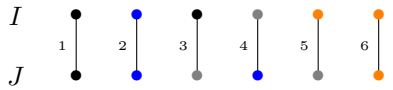
3.1.1.11 Lemme. *Soient S un ensemble fini, $(I,J) \in \mathcal{X}(S)$, $\sigma \in \mathrm{Aut}(S)$ et $i,j \in S$. Si $i \underset{I,J}{\sim} j$, alors*

$$\sigma(i) \underset{\sigma I,\sigma J}{\sim} \sigma(j).$$

3.1.1.12 Exemple. On prend $m = 6$ et les deux décompositions de $[\![1,6]\!]$ suivantes :

$$I := \big(I_\bullet := \{1,3\}\big) \amalg \big(I_\bullet := \{2\}\big) \amalg \big(I_\bullet := \{4\}\big) \amalg \big(I_\bullet := \{5,6\}\big);$$
$$J := \big(J_\bullet := \{1\}\big) \amalg \big(J_\bullet := \{2,4\}\big) \amalg \big(J_\bullet := \{3,5\}\big) \amalg \big(J_\bullet := \{6\}\big);$$

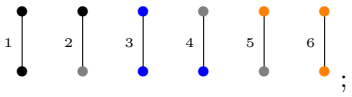
que l'on peut représenter de la manière suivante :



alors on a deux classes d'équivalences pour $\underset{I,J}{\sim}$ qui sont $\{1,3,5,6\}$ et $\{2,4\}$. Si l'on considère la permutation $\sigma = (23) \in \mathfrak{S}_6$, on a alors

$$\sigma I = \big(I_\bullet := \{1,2\}\big) \amalg \big(I_\bullet := \{3\}\big) \amalg \big(I_\bullet := \{4\}\big) \amalg \big(I_\bullet := \{5,6\}\big);$$
$$\sigma J := \big(J_\bullet := \{1\}\big) \amalg \big(J_\bullet := \{3,4\}\big) \amalg \big(J_\bullet := \{2,5\}\big) \amalg \big(J_\bullet := \{6\}\big);$$

représenté par :



on a donc les deux classes d'équivalences $\{1,2,5,6\}$ et $\{3,4\}$.

On construit sur $\mathcal{Y}(S)$ une structure de produit grâce aux relations d'équivalences $\underset{I,J}{\sim}$. C'est ce produit qui va contrôler la connexité du produit $\boxtimes_c$.

3.1.1.13 Définition/Proposition. *Produit $\mathcal{K}$*
Soient S un ensemble fini et (I,J) un élément de $\mathcal{X}(S)$. On note $\mathcal{K}_S(I,J)$ l'ensemble des classes d'équivalences de S pour la relation $\underset{I,J}{\sim}$. On a la surjection :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{K}_S : & \mathcal{X}(S) = \mathcal{Y}(S) \times \mathcal{Y}(S) & \twoheadrightarrow & \mathcal{Y}(S) \\ & (I,J) & \mapsto & \mathcal{K}_S(I,J) \end{array}$$

qui définit une transformation naturelle

$$\mathcal{K} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

compatible avec le produit de concaténation i.e. telle que pour tout couple d'ensembles finis (S', S''),

on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(S') \times \mathcal{X}(S'') & \xrightarrow{\mathcal{K}_{S'} \times \mathcal{K}_{S''}} & \mathcal{Y}(S') \times \mathcal{Y}(S'') \\ \downarrow{\scriptstyle \mu^{conc}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^{conc}} \\ \mathcal{X}(S' \amalg S'') & \xrightarrow{\mathcal{K}_S} & \mathcal{Y}(S' \amalg S''). \end{array}$$

Démonstration. La naturalité de $\mathcal{K}$ découle du lemme 3.1.1.11. Soit $I \in \mathcal{Y}(S)$, alors $\mathcal{K}_S\big((I, I)\big) = I$, donc l'application $\mathcal{K}_S$ est bien surjective, c'est à dire qu'il existe une section. Reste à montrer la compatibilité aux produits, i.e. que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(S') \times \mathcal{X}(S'') & \xrightarrow{\mathcal{K}_{S'} \times \mathcal{K}_{S''}} & \mathcal{Y}(S') \times \mathcal{Y}(S'') \ . \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mathcal{X}(S' \amalg S'') & \xrightarrow{\mathcal{K}_S} & \mathcal{Y}(S' \amalg S'') \end{array}$$

Soient $(I_1, J_1) \in \mathcal{X}(S')$ et $(I_2, J_2) \in \mathcal{X}(S'')$. $\mathcal{K}_{S'}(I_1, J_1)$ (resp. $\mathcal{K}_{S''}(I_2, J_2)$) correspond à la relation d'équivalence $\underset{I_1, J_1}{\sim}$ (resp. $\underset{I_2, J_2}{\sim}$), c'est à dire à un sous ensemble de $S' \times S'$ (resp. $S'' \times S''$). La concaténation de $\mathcal{K}_{S'}(I_1, J_1)$ et $\mathcal{K}_{S''}(I_2, J_2)$, correspond exactement à la réunion de ces 2 sous-ensembles, qui est égal au sous-ensemble de $(S' \amalg S'') \times (S' \amalg S'')$ qui correspond à $\mathcal{K}_{S' \amalg S''}(I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2)$. On a donc

$$\mathcal{K}_S(I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2) = \mu^{conc}\big(\mathcal{K}_{S'}(I_1, J_1), \mathcal{K}_{S''}(I_2, J_2)\big).$$

□

3.1.1.14 Remarque. Soient S un ensemble fini et $I = \{I_\alpha\}_{\alpha \in A}, J = \{J_\beta\}_{\beta \in B} \in \mathcal{Y}(S)$. Les éléments de $\mathcal{K}_S(I, J)$ peuvent être décrit comme réunion d'éléments de I, c'est à dire qu'il existe une partition de $A = \amalg_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ telle que

$$\mathcal{K}_S(I, J) = \big\{ \amalg_{\alpha \in A_\gamma} I_\alpha \big\}_{\gamma \in \Gamma}.$$

Par symétrie de $\mathcal{K}$, il existe également une partition $B = \amalg_{\delta \in \Delta} B_\delta$ avec $\Delta \cong \Gamma$, telle que

$$\mathcal{K}_S(I, J) = \big\{ \amalg_{\beta \in B_\delta} J_\beta \big\}_{\delta \in \Delta}.$$

3.1.1.15 Remarque. Le produit $\mathcal{K}_S$ ne préserve pas la graduation : on a $\mathcal{K}_S\big(\mathcal{Y}_r(S) \times \mathcal{Y}_s(S)\big) \subset \coprod_{d \leqslant \min(r,s)} \mathcal{Y}_d(S)$.

Commençons par énoncer quelques propriétés élémentaires de la transformation naturelle $\mathcal{K}$.

3.1.1.16 Lemme. *Soit S un ensemble fini.*

(i) Soient i un élément de $I_\alpha \in I$ et $K \in \mathcal{K}_S(I, J)$ avec $i \in K$. Alors $I_\alpha \subset K$.

(ii) Pour tous I et J dans $\mathcal{Y}(S)$, on a $\mathcal{K}_S(I, J) = \mathcal{K}_S(J, I)$.

(iii) Pour tout $I \in \mathcal{Y}(S)$, on a $\mathcal{K}_S(I, S) = S$.

3.1.1.17 Proposition. *Soit S un ensemble fini. La transformation naturelle $\mathcal{K} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est associative, c'est à dire que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(S)^{\times 3} & \xrightarrow{\mathcal{K}_S \times \mathrm{id}} & \mathcal{Y}(S)^{\times 2} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\times\mathcal{K}_S}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{K}_S} \\ \mathcal{Y}(S)^{\times 2} & \xrightarrow[\mathcal{K}_S]{} & \mathcal{Y}(S) \end{array} .$$

Démonstration. En utilisant la remarque 3.1.1.10, le résultat découle directement de l'associativité dans la structure de treillis de l'ensemble des partitions d'un ensemble fini (cf. [Sta97, Ex. 3.10.4]). □

Par la surjectivité de la transformation naturelle $\mathcal{K} : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{Y}$, on a, pour tout ensemble fini S, la décomposition

$$\mathcal{X}(S) \cong \coprod_{I \in \mathcal{Y}(S)} \mathcal{K}_S^{-1}(I). \tag{3.1.2}$$

3.1.1.18 Définition. *Foncteur $\mathcal{X}^{conn}$*
On pose le sous-foncteur $\mathcal{X}^{conn} \subset \mathcal{X}$ défini, pour tout ensemble fini S, par

$$\mathcal{X}^{conn}(S) := \mathcal{K}_S^{-1}(\{S\}) = \big\{(I, J) \in \mathcal{X}(S) \mid \mathcal{K}_S(I, J) = \{S\}\big\}.$$

Le foncteur $\mathcal{X}^{conn}$ est l'ingrédient principal de la définition du produit de composition connexe $\boxtimes_c$ pour les $\mathfrak{S}$-modules, comme nous le verrons dans la sous-section 3.1.3.

3.1.1.19 Lemme. *Soient S un ensemble fini et $I = \{I_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \mathcal{Y}(S)$. On a la bijection*

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in A} \mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(I_\alpha) & \xrightarrow{\mu^{conc}} & \mathcal{X}(S) \\ & {\scriptstyle \cong}\searrow & \uparrow \\ & & \mathcal{K}_S^{-1}(I) \end{array} .$$

Démonstration. Cela découle de la compatibilité entre $\mathcal{K}$ et le produit de concaténation (cf. définition 3.1.1.13). □

3.1.2 Produits de composition et de concaténation sur $\mathfrak{S}$-$\mathtt{mod}_k$

Dans cette sous-section, on rappelle les constructions classiques des produits de concaténation et de composition des $\mathfrak{S}$-modules.

§ 1 Produit de composition $\square$

On commence par définir le produit de composition $\square$. Dans la littérature sur les opérades (cf. [LV12, Sect. 5.1.12]), ce produit monoïdal est appelé *produit d'Hadamard* et est noté $\underset{\mathrm{H}}{\otimes}$. C'est l'avatar dans les $\mathfrak{S}$-modules, du produit de composition $\square$ des $\mathfrak{S}$-bimodules (cf. définition 3.2.2.1) ; de part ce fait, on peut se représenter le produit $\square$ comme la composition verticale de deux opérations.

3.1.2.1 Définition/Proposition. *Produit de composition* – [LV12, Sect. 5.1.13]
On appelle *produit de composition* le bifoncteur

$$-\square- : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$$

défini, pour P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits et S un ensemble fini non-vide, par

$$\big(P \square Q\big)(S) := P(S) \otimes Q(S).$$

Ce bifoncteur biadditif munit la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$ d'une structure monoïdale symétrique d'unité $I_\square$ avec pour tout ensemble S non vide, $I_\square(S) := k$ concentré en degré 0.

Démonstration. Soient M, N et P trois $\mathfrak{S}$-modules réduits et S un ensemble non vide. On a

$$\begin{aligned}\Big(\big(M \square N\big) \square P\Big)(S) =& (M \square N)(S) \otimes P(S)\\ =& \big(M(S) \otimes N(S)\big) \otimes P(S)\\ \cong& \Big(M \square \big(N \square P\big)\Big)(S).\end{aligned}$$

De plus, pour tout ensemble fini S, $\big(M \square N\big)(S) \cong \big(N \square M\big)(S)$ et $M \square I_\square \cong M \cong I_\square \square M$, d'où le résultat. □

3.1.2.2 Remarque. Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits et r un entier naturel non-nul, on a $M\square N(r) := M(r)\otimes N(r)$ où le groupe $\mathfrak{S}_r$ agit diagonalement, c'est à dire que pour τ une permutation dans $\mathfrak{S}_r$, m un élément de $M(r)$ et n un élément de $N(r)$, on a $(m \otimes n) \cdot \tau := (m \cdot \tau) \otimes (n \cdot \tau)$.

§ 2 Produit de concaténation $\otimes^{conc}$

On définit le produit de concaténation $\otimes^{conc}$: on peut représenter un élément de $P \otimes^{conc} Q$ comme la concaténation d'un élément de P et d'un élément de Q.

3.1.2.3 Définition. *Produit de concaténation* – [LV12, Sect. 5.1.13]
On appelle *produit de concaténation* le bifoncteur

$$-\otimes^{conc}- : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$$

défini, pour S un ensemble fini et P et Q, deux $\mathfrak{S}$-modules réduits, par :

$$\big(P \otimes^{conc} Q\big)(S) := \bigoplus_{\{S',S''\} \in \mathcal{Y}_2^{ord}(S)} P(S') \otimes Q(S'').$$

Ce produit est non-unitaire, car on considère des $\mathfrak{S}$-modules réduits.

3.1.2.4 Remarque. Ce produit est appelé produit de concaténation car il correspond à la concaténation d'opérations. Ce produit est bien fonctoriel : c'est un cas particulier de *produit de convolution de Day*, défini comme une extension de Kan à gauche (cf. annexe A.2.0.3) : pour P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits, on a

$$P \otimes^{conc} Q(-) := \int^{(S',S'') \in \mathrm{Ob}\,(\mathtt{Fin}^{op})^{\times 2}} k\big[\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(S' \amalg S'', -)\big] \otimes P(S') \otimes Q(S'').$$

3.1.2.5 Proposition. *Le produit de concaténation est symétrique, i.e. pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits P et Q , on a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}$-modules*

$$P \otimes^{conc} Q \cong Q \otimes^{conc} P.$$

Démonstration. Si (S', S'') est un élément de $\mathcal{Y}_2^{ord}(S)$, alors (S'', S') également. De plus, le produit monoïdal $\otimes_k$ de la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ est symétrique, d'où l'existence d'une équivalence naturelle τ : pour tout ensemble fini S,

$$\tau_S \ : \big(P \otimes^{conc} Q\big)(S) \xrightarrow{\cong} \big(Q \otimes^{conc} P\big)(S)$$

donnée par $\tau_S(p \otimes q) = (-1)^{|p||q|} q \otimes p$ pour $p \otimes q \in P(S') \otimes^{conc} Q(S'')$. □

On peut étendre le produit de concaténation :

$$- \otimes^{conc} - : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}. \tag{3.1.3}$$

Cette extension est induite par l'équivalence de catégories $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \cong \mathtt{Ch}_k \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$, par l'injection $(-)^{\mathfrak{S}} : \mathtt{Ch}_k \hookrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$ définie, pour tout complexe de chaînes C et tout ensemble fini S, par

$$(C)^{\mathfrak{S}}(S) := \begin{cases} C & \text{si } S = \emptyset, \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

et par une action de la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ sur $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$ définie pour tout complexe de chaînes C et tout ensemble fini S, par

$$\big(C \otimes^{conc} V\big)(S) := C \otimes V(S).$$

Cette extension nous permet de définir la (dé)suspension d'un $\mathfrak{S}$-module.

3.1.2.6 Définition. *Suspension et désuspension d'un $\mathfrak{S}$-module*
Soient Σ (resp. Σ^{-1}) le complexe k concentré en degré 1 (resp. en degré -1) et V un $\mathfrak{S}$-module réduit. On appelle *suspension de V* (resp. *désuspension de V*) le $\mathfrak{S}$-module réduit $\Sigma V \overset{not.}{:=} \Sigma \otimes^{conc} V$ (resp. $\Sigma^{-1} V \overset{not.}{:=} \Sigma^{-1} \otimes^{conc} V$).

On décrit le produit $P \otimes^{conc} Q$ évalué sur les ensembles $[\![1, m]\!]$, pour $m \in \mathbb{N}^*$.

3.1.2.7 Lemme. *Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}_m$-modules à droite suivant :*

$$\big(P \otimes^{conc} Q\big)([\![1, m]\!]) \cong \bigoplus_{m'+m''=m} \Big(P(m') \otimes Q(m'')\Big) \uparrow_{\mathfrak{S}_{m'}^{op} \times \mathfrak{S}_{m''}^{op}}^{\mathfrak{S}_m^{op}} = \bigoplus_{m'+m''=m} P(m') \otimes Q(m'') \underset{\mathfrak{S}_{m'} \times \mathfrak{S}_{m''}}{\otimes} k[\mathfrak{S}_m].$$

Démonstration. Découle de la remarque 3.1.1.5. □

3.1.2.8 Remarque. La symétrie est donnée par l'équivalence naturelle :

$$\begin{array}{rccc} \tau_{P(m),Q(n)} : & k[\mathfrak{S}_{m+n}^{op}] \underset{\mathfrak{S}_m^{op} \times \mathfrak{S}_n^{op}}{\otimes} P(m) \otimes Q(n) & \longrightarrow & k[\mathfrak{S}_{m+n}^{op}] \underset{\mathfrak{S}_m^{op} \times \mathfrak{S}_n^{op}}{\otimes} Q(n) \otimes^{conc} P(m), \\ & \sigma \otimes p \otimes q & \longmapsto & (-1)^{|p||q|} \sigma\big((12)^{m,n}\big)^{-1} q \otimes p \end{array}$$

où $(12)^{m,n} \in \mathfrak{S}_{m+n}^{op}$ est la permutation qui envoie le $(m+n)$-uplet $(1, 2, \ldots, m, \ldots, m+n)$ sur $(m+1, \ldots, m+n, 1, \ldots, m)$.

§ 3 Monoïdes libres associés à $\otimes^{conc}$

On définit à présent les monoïdes associatifs et commutatifs libres pour la catégorie des $\mathfrak{S}$-modules réduits munie du produit de concaténation $\otimes^{conc}$. Notons que le bifoncteur $- \otimes^{conc} -$ est linéaire en chacune de ses entrées.

3.1.2.9 Définition. *Monoïde associatif non-unitaire libre*
On a le foncteur :

$$\overline{\mathbb{T}}_{\otimes}(-) : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \longrightarrow \mathtt{As}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \otimes^{conc})$$

défini, pour tout ensemble fini S et tout $\mathfrak{S}$-module P réduit, par

$$\big(\overline{\mathbb{T}}_{\otimes}P\big)(S) := \bigoplus_{r\in\mathbb{N}^*} \big(\overline{\mathbb{T}}^r_{\otimes}P\big)(S) \quad \text{avec} \quad \big(\overline{\mathbb{T}}^r_{\otimes}P\big)(S) := P^{\otimes^{conc} r}(S) = \bigoplus_{I\in\mathcal{Y}_r^{ord}(S)} P(I_1)\otimes\ldots\otimes P(I_r).$$

3.1.2.10 Remarque. On a, pour un $\mathfrak{S}$-module P réduit et s et n deux entiers positifs non-nuls :

$$\overline{\mathbb{T}}^s_{\otimes}(P)(n) = \bigoplus_{\bar{i}\in(\mathbb{N}^*)^s, |\bar{i}|=n} k[\mathfrak{S}_n^{op}] \underset{k[\mathfrak{S}_{i_1}^{op}\times\ldots\times\mathfrak{S}_{i_s}^{op}]}{\otimes} P(i_1)\otimes\ldots\otimes P(i_s).$$

où la somme sur $\bar{i}$ parcourt l'ensemble des s-uplets d'entiers non nuls $\bar{i} \in (\mathbb{N}^*)^s$ tel que $|\bar{i}| = \sum_{j=1}^s i_j = n$.

3.1.2.11 Définition. *Monoïde commutatif non-unitaire libre*
On a le foncteur *monoïde commutatif libre*

$$\mathbb{S}(-) : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \longrightarrow \mathtt{Com}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \otimes^{conc}).$$

défini, pour tout $\mathfrak{S}$-module réduit P, par :

$$\mathbb{S}(P) := \bigoplus_{b\in\mathbb{N}^*} \mathbb{S}^b(P) \quad \text{avec} \quad \mathbb{S}^b(P) := \big(\overline{\mathbb{T}}^b_{\otimes}(P)\big)_{\mathfrak{S}_b}$$

et où l'action de $\mathfrak{S}_b$ est donnée par la symétrie τ de $\otimes^{conc}$ (cf. proposition 3.1.2.5) : explicitement, pour $p_1\otimes\cdots\otimes p_b$ un élément de $P(I_1)\otimes^{conc}\cdots\otimes^{conc} P(I_b) \subset \Big(\mathbb{T}^b_{\otimes}P\Big)(S)$ et $\sigma\in\mathfrak{S}_b$, on a

$$\sigma\cdot(p_1\otimes\cdots\otimes p_b) := (-1)^{|\sigma(m)|} p_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes p_{\sigma^{-1}(b)} \in P(I_{\sigma^{-1}(1)})\otimes^{conc}\cdots\otimes^{conc} P(I_{\sigma^{-1}(b)})$$

avec $(-1)^{|\sigma(m)|}$ le signe provenant de τ.

3.1.2.12 Notation(s). Soient S un ensemble fini et P un $\mathfrak{S}$-module réduit, comme dans [LV12, Sect. 5.1.14], on pose la notation

$$\bigoplus_{I\in\mathcal{Y}_r(S)} \bigotimes_{\alpha\in A} P(I_\alpha) \overset{not.}{:=} \Big(\bigoplus_{I\in\mathcal{Y}_r^{ord}(S)} P(I_1)\otimes\ldots\otimes P(I_r)\Big)_{\mathfrak{S}_r}.$$

3.1.2.13 Lemme. *Soient S un ensemble fini et P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits. On a les isomorphismes de $\mathfrak{S}$-modules suivants :*

(i)

$$\big(\mathbb{S}P\big)(S) \cong \bigoplus_{\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}\in\mathcal{Y}(S)} \bigotimes_{\alpha\in A} P(I_\alpha).$$

(ii)

$$\big(\mathbb{S}P \,\square\, \mathbb{S}Q\big)(S) \cong \bigoplus_{(\{I_\alpha\}_{\alpha\in A},\{J_\beta\}_{\beta\in B})\in\mathcal{X}(S)} \bigotimes_{\alpha\in A} P(I_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in B} Q(J_\beta).$$

Démonstration. (i) On a

$$\big(\mathbb{S}^r P\big)(S) := \Big(\big(\mathbb{T}^r P\big)(S)\Big)_{\mathfrak{S}_r} \cong \Big(\bigoplus_{I\in\mathcal{Y}_r^{ord}(S)} P(I_1)\otimes\ldots\otimes P(I_r)\Big)_{\mathfrak{S}_r}$$

où $\mathfrak{S}_r$ agit sur I en permutant les termes, i.e. pour σ un élément de $\mathfrak{S}_r$ et $I \in \mathcal{Y}_r^{ord}(S)$, on a $\sigma \cdot I = \big(I_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,I_{\sigma^{-1}(r)}\big)$. Donc, par la surjection (3.1.1), on a finalement que

$$\big(\mathbb{S}^r P\big)(S) \cong \bigoplus_{I\in\mathcal{Y}_r(S)} \bigotimes_{\alpha\in A} P(I_\alpha)$$

d'où le résultat. (On pourra également se référer à [LV12, Sect. 5.1.14].)

(ii) Découle de (i).

□

On énonce une dernière propriété du foncteur $\mathbb{S}(-)$, dite *propriété exponentielle*.

3.1.2.14 Proposition. *Propriété exponentielle de* $\mathbb{S}(-)$
Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits. Alors

$$\mathbb{S}(P\oplus Q) \cong \mathbb{S}(P)\oplus\mathbb{S}(Q)\oplus\mathbb{S}(P)\otimes^{conc}\mathbb{S}(Q).$$

Démonstration. Découle de la biadditivité du bifoncteur $-\otimes^{conc}-$. □

Avant d'expliciter $\mathbb{S}^b(P)(n)$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, commençons par un rappel sur le produit en couronne.

3.1.2.15 Définition. *Produit en couronne*
Soient A et H deux groupes et Ω un H-ensemble fini. On pose $K := \prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$. Alors H agit sur K en permutant les positions, i.e. $h\cdot a_\omega := a_{h^{-1}\cdot\omega}$. On définit alors *le produit en couronne* de A et H, noté $A \underset{\Omega}{\wr} H$, comme le produit semi-direct de K par H, i.e.

$$A \underset{\Omega}{\wr} H := K \rtimes H,$$

Dans la suite, on considère des produits en couronne, où $H = \mathfrak{S}_s$ agissant sur $\Omega = \underline{s}$. Dans ce cas, on adopte la notation $A\wr\mathfrak{S}_s = A^{\times s}\rtimes\mathfrak{S}_s$ en omettant de préciser Ω. Soient $j,s\in\mathbb{N}^*$, on pose $n = sj$. Le groupe $\mathfrak{S}_s$ s'injecte dans le groupe $\mathfrak{S}_n$ comme les permutations des blocs de $\underline{n}\cong\coprod_s \underline{j}$. On identifie $\mathfrak{S}_s$ et son image dans $\mathfrak{S}_n$. Le groupe $\mathfrak{S}_j^{\times s}$ agit également sur $\underline{n}$ comme les permutations par blocs. Le groupe $\mathfrak{S}_j\wr\mathfrak{S}_s$ est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ de loi de composition

$$(\sigma_1,\ldots,\sigma_j,\tau)\cdot(\eta_1,\ldots,\eta_j,\lambda) = (\sigma_1\eta_{\tau^{-1}(1)},\ldots,\sigma_j\eta_{\tau^{-1}(j)},\tau\lambda).$$

3.1.2.16 Lemme. *Pour tous entiers positifs non-nuls j et s, on a le foncteur*

$$(-)^{\otimes s} : k[\mathfrak{S}_j]\text{-}\mathtt{mod}_k \longrightarrow k[\mathfrak{S}_j\wr\mathfrak{S}_s]\text{-}\mathtt{mod}_k.$$

Démonstration. Soit P un $\mathfrak{S}_j$-module, le groupe $\mathfrak{S}_j \wr \mathfrak{S}_s$ agit sur $P^{\otimes s}$ de la manière suivante : soient $m_1 \otimes \ldots \otimes m_s \in P^{\otimes s}$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_j, \tau \in \mathfrak{S}_j \wr \mathfrak{S}_s$, alors :

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_j, \tau) \cdot (m_1 \otimes \ldots \otimes m_s) = (\sigma_{\tau^{-1}(1)} \cdot m_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, \sigma_{\tau^{-1}(s)} \cdot m_{\tau^{-1}(s)}).$$

□

Le groupe $\mathfrak{S}_s$ agit par permutation par blocs sur le $\mathfrak{S}_n$-module $k[\mathfrak{S}_n] \underset{k[\mathfrak{S}_j^{\times s}]}{\otimes} P^{\otimes s}$:

$$\sigma \cdot (\tau \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_s) := \tau\sigma^{-1} \otimes m_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes m_{\sigma^{-1}(s)},$$

avec σ une permutation de $\mathfrak{S}_s$ vu comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, τ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et $\bar{m} \in P^{\otimes s}$. Rappelons que, si on a G un groupe, $K \lhd G$ un sous-groupe distingué de G et N un G-module alors

$$N_G \cong (N_K)_{(G/K)} \,. \tag{3.1.4}$$

En effet, soit $\pi : N_K \to N_G$ la projection canonique et soient $n \in N$ et $g \in G$. On a $[g \cdot n - n] \in \operatorname{Ker} \pi$ et $[g \cdot n - n] = [g \cdot n] - [n] = \bar{g} \cdot [n] - [n]$ où $\bar{g}$ est la classe de g dans G/K. Donc π se factorise à travers $(N_K)_{(G/K)}$ et nous fournit l'isomorphisme souhaité.

3.1.2.17 Lemme. *Soient M un $\mathfrak{S}_j$-module et $s, i, j \in \mathbb{N}^*$: on pose $m = si$ et $n = sj$. On a l'isomorphisme naturel de $\mathfrak{S}_n$-modules suivant :*

$$\Big(k[\mathfrak{S}_n] \underset{k[\mathfrak{S}_j^{\times s}]}{\otimes} M^{\otimes s}\Big)_{\mathfrak{S}_s} \cong k[\mathfrak{S}_n] \underset{k[\mathfrak{S}_j \wr \mathfrak{S}_s]}{\otimes} M^{\otimes s}.$$

Démonstration. On applique (3.1.4) avec $N = k[\mathfrak{S}_n] \otimes M^{\otimes s}$, $G = \mathfrak{S}_j \wr \mathfrak{S}_s$ et $K = \mathfrak{S}_j^{\times s}$ en remarquant que $G/K = \mathfrak{S}_s$. □

On peut à présent, donner une présentation explicite du monoïde commutatif libre $\mathbb{S}(M)$. On utilise notamment le lemme technique 3.1.2.19, qui affirme la possibilité de choisir un représentant "trié par ordre croissant" pour chaque classe de coinvariant sous l'action du groupe symétrique.

3.1.2.18 Proposition. *Soit M un $\mathfrak{S}$-module réduit. Le monoïde commutatif libre non-unitaire $\mathbb{S}(M)$ vérifie, pour tous entiers naturels b et n :*

$$\mathbb{S}^b(M)(n) = \bigoplus_{\substack{j_1 > \ldots > j_r \\ \sum j_l s_l = n, \sum s_l = b}} k[\mathfrak{S}_n^{op}] \underset{k[\prod \mathfrak{S}_{j_l}^{op} \wr \mathfrak{S}_{s_l}^{op}]}{\otimes} M(j_1)^{\otimes s_1} \otimes \ldots \otimes M(j_r)^{\otimes s_r}.$$

Démonstration. Par définition, on a $\mathbb{S}^b(M) = (M^{\otimes^{conc} b})_{\mathfrak{S}_b}$ donc, pour n un entier naturel non-nul,

on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^b(M)(n) &= (M^{\otimes^{conc} b})_{\mathfrak{S}_b} \\
&= \Big(\bigoplus_{\bar{i},|\bar{i}|=n} k[\mathfrak{S}_n^{op}] \underset{k[\mathfrak{S}_{i_1}^{op}\times\ldots\times\mathfrak{S}_{i_s}^{op}]}{\otimes} M(i_1)\otimes\ldots\otimes M(i_b)\Big)_{\mathfrak{S}_b} \\
&\overset{3.1.2.19}{=} \Big(\bigoplus_{\substack{j_1>\ldots>j_r \\ \sum j_l s_l=n, \sum s_l=b}} k[\mathfrak{S}_n^{op}] \underset{k[\prod(\mathfrak{S}_{j_l}^{op})^{\times s_l}]}{\otimes} M(j_1)^{\otimes s_1}\otimes\ldots\otimes M(j_r)^{\otimes s_r}\Big)_{\prod \mathfrak{S}_{s_l}} \\
&\overset{3.1.2.17}{=} \bigoplus_{\substack{j_1>\ldots>j_r \\ \sum j_l s_k=n, \sum s_l=b}} k[\mathfrak{S}_n^{op}] \underset{k[\prod \mathfrak{S}_{j_l}^{op}\wr\mathfrak{S}_{s_l}^{op}]}{\otimes} M(j_1)^{\otimes s_1}\otimes\ldots\otimes M(j_r)^{\otimes s_r}
\end{aligned}$$

□

3.1.2.19 Lemme. *Soient $a,b,i,j\in\mathbb{N}$, M un $\mathfrak{S}_i$-module et N un $\mathfrak{S}_j$-module ; on pose $n=ai+bj$. On note Ξ l'ensemble des couples $(\bar{r},\bar{s})$ de uplets avec $\bar{r}$ et $\bar{s}$ de même longueur m, uplets d'entiers tous non-nuls sauf éventuellement r_1 et s_m, et vérifiant $|\bar{r}|=a$ et $|\bar{s}|=b$.*
On a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}_n$-modules suivant :

$$\Big(\bigoplus_{\Xi} k[\mathfrak{S}_n] \underset{k[\prod \mathfrak{S}_i^{\times r_l}\times\mathfrak{S}_j^{\times s_l}]}{\otimes} \bigotimes_l M^{\otimes r_l}\otimes N^{\otimes s_l}\Big)_{\mathfrak{S}_{a+b}} \cong \Big(k[\mathfrak{S}_n] \underset{k[\mathfrak{S}_i^{\times a}\times\mathfrak{S}_j^{\times b}]}{\otimes} M^{\otimes a}\otimes N^{\otimes b}\Big)_{\mathfrak{S}_a\times\mathfrak{S}_b}$$

Démonstration. Pour chaque $(\bar{r},\bar{s})\in\Xi$ ou $\bar{r}$ et $\bar{s}$ sont de longueur m, il existe une permutation $\eta_{(\bar{r},\bar{s})}\in\mathfrak{S}_{2m}$ telle que $\eta_{(\bar{r},\bar{s})}\cdot(r_1,s_1,\ldots,r_m,s_m)=(r_1,\ldots,r_m,s_1,\ldots,s_m)$. On note $\tilde{\eta}_{(\bar{r},\bar{s})}$ la permutation par blocs qui lui est associée dans $\mathfrak{S}_{a+b}$. Ces permutations par blocs nous induisent un morphisme surjectif de $\mathfrak{S}_n$-module :

$$\bigoplus_{\Xi} k[\mathfrak{S}_n] \underset{k[\prod \mathfrak{S}_i^{\times r_l}\times\mathfrak{S}_j^{\times s_l}]}{\otimes} \bigotimes_l M^{\otimes r_l}\otimes N^{\otimes s_l} \longrightarrow \Big(k[\mathfrak{S}_n] \underset{k[\mathfrak{S}_i^{\times a}\times\mathfrak{S}_j^{\times b}]}{\otimes} M^{\otimes a}\otimes N^{\otimes b}\Big)_{\mathfrak{S}_a\times\mathfrak{S}_b}.$$

Ce morphisme se factorise à travers $\Big(\bigoplus_{\Xi} k[\mathfrak{S}_n] \underset{k[\prod \mathfrak{S}_i^{\times r_l}\times\mathfrak{S}_j^{\times s_l}]}{\otimes} \bigotimes_l M^{\otimes r_l}\otimes N^{\otimes s_l}\Big)_{\mathfrak{S}_{a+b}}$ et induit alors l'isomorphisme recherché. □

3.1.3 Produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-modules réduits

Grâce à la sous-section 3.1.1, on introduit la notion de produit de composition connexe de deux $\mathfrak{S}$-modules.

3.1.3.1 Définition. *Produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-modules*
On appelle *produit de composition connexe* le bifoncteur

$$-\boxtimes_c - : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}\times\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}\longrightarrow\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$$

défini, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits P et Q et tout ensemble fini S, par :

$$P\boxtimes_c Q(S) := \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigotimes_\alpha P(I_\alpha)\otimes\bigotimes_\beta Q(J_\beta).$$

3.1.3.2 Remarque. On aura, par la suite, besoin d'une "description" des éléments de $P \boxtimes_c Q(S)$. Ainsi, on représentera par

$$(p_1 \otimes \ldots \otimes p_r) \otimes (q_1 \otimes \ldots \otimes q_s)$$

une classe de $\bigotimes_\alpha P(I_\alpha) \otimes \bigotimes_\beta Q(J_\beta)$ avec $(I,J) \in \mathcal{X}^{\text{conn}}(S)$ en notant bien que pour l'écriture, nous avons fait un choix d'ordre pour les éléments de P et Q. Ainsi, la notation $\bigotimes_\alpha P(I_\alpha) \otimes \bigotimes_\beta Q(J_\beta)$ précise bien que l'on fait l'identification

$$(p_1 \otimes \ldots \otimes p_r) \otimes (q_1 \otimes \ldots \otimes q_s) = (-1)^{|\sigma(p)|+|\tau(q)|}(p_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes p_{\sigma^{-1}(r)}) \otimes (q_{\tau^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes q_{\tau^{-1}(s)})$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, $\tau \in \mathfrak{S}_s$ et avec $(-1)^{|\sigma(p)|}, (-1)^{|\tau(q)|}$ les signes de Koszul induits par ces permutations.

3.1.3.3 Lemme. *Le produit $\boxtimes_c$ est associatif. De plus, pour tout couple (A,B) de $\mathfrak{S}$-modules réduits, l'endofoncteur*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{A,B} : & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} & \longrightarrow & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \\ & X & \longmapsto & A \boxtimes_c X \boxtimes_c B \end{array}$$

est analytique scindé (au sens de Vallette, cf. annexe C.1.0.3) .

Démonstration. Commençons par montrer que le produit $\boxtimes_c$ vérifie l'axiome d'associativité. L'associativité du produit découle directement de l'associativité de $\mathcal{K}_S$: soient P,Q et R trois $\mathfrak{S}$-modules réduits, montrons que $(P \boxtimes_c Q) \boxtimes_c R = P \boxtimes_c (Q \boxtimes_c R)$. Soit S un ensemble non-vide, on a les isomorphismes de complexes de chaînes :

$$\begin{aligned}
\big((P \boxtimes_c Q) \boxtimes_c R\big)(S) &= \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\text{conn}}(S)} \bigotimes_\alpha \big(P \boxtimes_c Q\big)(I_\alpha) \otimes \bigotimes_\beta R(J_\beta) \\
&= \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\text{conn}}(S)} \bigotimes_\alpha \bigoplus_{(K^\alpha,L^\alpha)\in\mathcal{X}^{\text{conn}}(I_\alpha)} \bigotimes_\gamma P(K^\alpha_\gamma) \otimes \bigotimes_\delta Q(L^\alpha_\delta) \otimes \bigotimes_\beta R(J_\beta) \\
&\cong \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\text{conn}}(S)} \bigoplus_{\{(K^\alpha,L^\alpha)\}\in\Pi_{\alpha\in A}\mathcal{X}^{\text{conn}}(I_\alpha)} \bigotimes_{\gamma,\alpha} P(K^\alpha_\gamma) \otimes \bigotimes_{\delta,\alpha} Q(L^\alpha_\delta) \otimes \bigotimes_\beta R(J_\beta) \\
&\cong \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\text{conn}}(S)} \bigoplus_{\substack{(K,L)\in\mathcal{Y}(S)\times\mathcal{Y}(S) \\ \mathcal{K}_S(K,L)=I}} \bigotimes_{\gamma,\alpha} P(K^\alpha_\gamma) \otimes \bigotimes_{\delta,\alpha} Q(L^\alpha_\delta) \otimes \bigotimes_\beta R(J_\beta) \\
&\cong \bigoplus_{\substack{(K,L,J)\in\mathcal{Y}(S)^{\times 3} \\ \mathcal{K}_S(\mathcal{K}_S(K,L),J)=(S)}} \bigotimes_\gamma P(K_\gamma) \otimes \bigotimes_\delta Q(L_\delta) \otimes \bigotimes_\beta R(J_\beta) \\
&\underset{3.1.1.17}{\cong} \bigoplus_{\substack{(K,L,J)\in\mathcal{Y}(S)^{\times 3} \\ \mathcal{K}_S(K,\mathcal{K}_S(L,J))=(S)}} \bigotimes_\gamma P(K_\gamma) \otimes \bigotimes_\delta Q(L_\delta) \otimes \bigotimes_\beta R(J_\beta) \\
&\cong \bigoplus_{(K,I)\in\mathcal{X}^{\text{conn}}(S)} \bigoplus_{\substack{(J,L)\in\mathcal{Y}(S)\times\mathcal{Y}(S) \\ \mathcal{K}_S(J,L)=I}} \bigotimes_\gamma P(K_\gamma) \otimes \bigotimes_{\delta,\alpha} Q(L^\alpha_\delta) \otimes \bigotimes_{\beta,\alpha} R(J^\alpha_\beta) \\
&\cong \bigoplus_{(K,I)\in\mathcal{X}^{\text{conn}}(S)} \bigotimes_\alpha P(K_\gamma) \otimes \bigotimes_\alpha \big(Q \boxtimes_c R\big)(I_\alpha) \\
&= \big(P \boxtimes_c (Q \boxtimes_c R)\big)(S).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits A et B, l'endofoncteur $\Phi_{A,B}$ est bien défini par

$$\begin{aligned}\Phi_{A,B}(X) &\cong \bigoplus_{\substack{(K,L,J)\in\mathcal{Y}(S)^{\times 3}\\ \mathcal{K}_S(\mathcal{K}_S(K,L),J)=(S)}} \bigotimes_{\gamma} A(K_\gamma)\otimes\bigotimes_{\delta} X(L_\delta)\otimes\bigotimes_{\beta} B(J_\beta)\\ &\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\bigoplus_{L\in\mathcal{Y}_n(S)}\bigoplus_{\substack{(K,J)\in\mathcal{Y}(S)^{\times 2}\\ \mathcal{K}_S(\mathcal{K}_S(K,L),J)=(S)}} \bigotimes_{\gamma} A(K_\gamma)\otimes\bigotimes_{\delta} X(L_\delta)\otimes\bigotimes_{\beta} B(J_\beta)\\ &=: \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\Phi_{A,B})_n(X).\end{aligned}$$

où $(\Phi_{A,B})_n$ est un foncteur polynomial homogène de degré. Donc, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits A et B, le foncteur $\Phi_{A,B}$ est analytique scindé. □

3.1.3.4 Proposition. *La catégorie $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}^{réd},\boxtimes_c,\tau,I\big)$ avec $I(S)=k$ pour $|S|=1$ et 0 sinon, est monoïdale symétrique abélienne et préserve les coégalisateurs réflexifs ainsi que les colimites séquentielles.*

Démonstration. La catégorie $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}^{réd},\boxtimes_c,I\big)$ est monoïdale abélienne et préserve les coégalisateurs réflexifs ainsi que les colimites séquentielles par le lemme précédent et la proposition [Val03, Prop. 29]. Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits, on a, pour tout ensemble S non-vide, l'isomorphisme de $\mathfrak{S}$-modules

$$\begin{aligned}P\boxtimes_c Q(S) &:= \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha)\otimes\bigotimes_{\beta} Q(J_\beta)\\ &\cong \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigotimes_{\beta} Q(J_\beta)\otimes\bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha)\end{aligned}$$

par symétrie du produit $\otimes$ de la catégorie $\mathtt{Ch}_k$; enfin, comme $(I,J)\in\mathcal{X}(S)$ implique que $(J,I)\in\mathcal{X}(S)$, on a finalement l'isomorphisme

$$P\boxtimes_c Q(S)\cong \bigoplus_{(J,I)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigotimes_{\beta} Q(J_\beta)\otimes\bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha)\cong\ Q\boxtimes_c P(S).$$

On le note $\tau_{P,Q}(S): P\boxtimes_c Q(S)\longrightarrow Q\boxtimes_c P(S)$, ce qui nous fournit la structure symétrique recherchée. □

3.1.3.5 Remarque. Le premier chapitre de la thèse de Vallette [Val03, Chap.1] et [Val09] nous donnent donc une description du (co)monoïde libre dans cette catégorie monoïdale (cf. section 4.3).

3.1.3.6 Proposition. *Soient P et Q, deux $\mathfrak{S}$-modules réduits. On a l'isomorphisme naturel de $\mathfrak{S}$-modules suivant :*

$$\mathbb{S}(P\boxtimes_c Q)\cong \mathbb{S}P\,\square\,\mathbb{S}Q.$$

Démonstration. Soit S, un ensemble fini. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{S}\big(P\boxtimes_c Q\big)(S) &= \bigoplus_{\Lambda\in\mathcal{Y}(S)}\bigotimes_{\gamma}\big(P\boxtimes_c Q\big)(\Lambda_\gamma)\\ &\underset{3.1.3.1}{=} \bigoplus_{\Lambda\in\mathcal{Y}(S)}\bigotimes_{\gamma}\bigoplus_{(I^\gamma,J^\gamma)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(\Lambda_\gamma)}\bigotimes_{\alpha} P(I^\gamma_\alpha)\otimes\bigotimes_{\beta} Q(J^\gamma_\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cong \bigoplus_{\Lambda\in\mathcal{Y}(S)} \bigoplus_{\{(I^\gamma,J^\gamma)\}\in\coprod_\gamma \mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(\Lambda_\gamma)} \Big(\bigotimes_{\alpha,\gamma} P(I^\gamma_\alpha)\otimes\bigotimes_{\beta,\gamma} Q(J^\gamma_\beta)\Big)\\
&\cong \bigoplus_{\Lambda\in\mathcal{Y}(S)} \bigoplus_{(\widetilde{I},\widetilde{J})\in\mathcal{K}_S^{-1}(\Lambda)} \Big(\bigotimes_{a} P(\widetilde{I}_a)\otimes\bigotimes_{b} Q(\widetilde{J}_b)\Big)\\
&\cong \bigoplus_{(\widetilde{I},\widetilde{J})\in X(S)} \Big(\bigotimes_{\alpha} P(\widetilde{I}_\alpha)\otimes\bigotimes_{\beta} Q(\widetilde{J}_\beta)\Big) \;=\; \Big(\mathbb{S}P\,\square\,\mathbb{S}Q\Big)(S)
\end{aligned}$$

ce qui conclut cette preuve. □

3.1.3.7 Remarque. Cette proposition permet de démontrer plus simplement l'associativité du produit connexe. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}\big((P\boxtimes_c Q)\boxtimes_c R\big) &\cong \mathbb{S}(P\boxtimes_c Q)\,\square\,\mathbb{S}R\\
&\cong \big(\mathbb{S}P\,\square\,\mathbb{S}Q\big)\,\square\,\mathbb{S}R\\
&\cong \mathbb{S}P\,\square\,\big(\mathbb{S}Q\,\square\,\mathbb{S}R\big) \quad \text{par associativité de } \square\,;\\
&\cong \mathbb{S}P\,\square\,\mathbb{S}(Q\boxtimes_c R)\\
&\cong \mathbb{S}\big(P\boxtimes_c (Q\boxtimes_c R)\big)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'associativité du produit $\boxtimes_c$ par passage aux "indécomposables".

3.2 Sur les $\mathfrak{S}$-bimodules

On reprend à présent le plan d'étude des $\mathfrak{S}$-modules que l'on applique maintenant à la catégorie $\mathfrak{S}$-$\mathtt{bimod}_k$. On donne donc dans cette section, une description de trois structures monoïdales sur la catégorie des $\mathfrak{S}$-bimodules. On commence par une section sur les foncteurs qui encodent la combinatoire de nos produits monoïdaux.

3.2.1 Combinatoire sous-jacente aux produits de $\mathfrak{S}$-bimodules

On cherche à exprimer la combinatoire des différentes structures monoïdales sur la catégorie $\mathfrak{S}$-$\mathtt{bimod}_k$, en utilisant le même formalisme que dans la section 3.1.1.

3.2.1.1 Définition. *Foncteurs $\mathbb{Y}^{ord}$ et $\mathbb{Y}$*
Soient S et E deux ensembles finis. On définit :

(i) le bifoncteur $\mathbb{Y}^{ord}(-,-) : \mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op}\to\mathtt{Fin}$ donné sur les objets par $\mathbb{Y}^{ord}(S,E)=\amalg_{r\in\mathbb{N}^*}\mathbb{Y}^{ord}_r(S,E)$, avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{Y}^{ord}_r(S,E) :=\;& \mathcal{Y}^{ord}_r(S)\times\mathcal{Y}^{ord}_r(E)\\
=\;& \big\{(I,K)=\big((I_j,K_j)\big)_{j\in[\![1,r]\!]} \mid \amalg_{j=1}^r I_j=S,\ \amalg_{j=1}^r K_j=E, \forall j\in[\![1,r]\!], I_j\neq\emptyset, K_j\neq\emptyset\big\}
\end{aligned}$$

les éléments de $\mathbb{Y}^{ord}_r(S,E)$ étant des ensembles ordonnés de couples d'ensembles.

(ii) $\mathbb{Y}(-,-) : \mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op}\to\mathtt{Fin}$ le bifoncteur donné par $\mathbb{Y}(S,E)=\amalg_{r\in\mathbb{N}^*}\mathbb{Y}_r(S,E)$ avec

$$\mathbb{Y}_r(S,E)=\left\{\{I,K\}\overset{\text{not}}{:=}\{(I_\alpha,K_\alpha)\}_{\alpha\in A}\;\middle|\; A\in\mathrm{Ob}\,\mathtt{Fin},\ |A|=r,\quad \begin{array}{l}\amalg_{\alpha\in A}I_\alpha=S,\ \amalg_{\alpha\in A}K_\alpha=E\\ \forall\alpha\in A, I_\alpha\neq\emptyset,\ K_\alpha\neq\emptyset\end{array}\right\};$$

les éléments de $\mathbb{Y}_r(S,E)$ étant des ensembles non-ordonnés de couples d'ensembles. (Comme dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules, cf. remarque 3.1.1.2, l'ensemble d'indexation ne fait pas parti de la structure.)

3.2.1.2 Remarque. Pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$ et tout foncteur $F:\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op}\to\mathtt{Fin}$, on note $F(m,n)\overset{not}{:=}F(\llbracket 1,m\rrbracket,\llbracket 1,n\rrbracket)$. On a ainsi :

(i) $\mathbb{Y}^{ord}(m,n)=\amalg_{r\in\mathbb{N}^*}\mathbb{Y}^{ord}_r(m,n)$, le $\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}$-ensemble défini par

$$\begin{aligned}\mathbb{Y}^{ord}_r(m,n)&=\left\{(I,K)=\big((I_j,K_j)\big)_{j\in\llbracket 1,r\rrbracket}\mid \amalg_{j=1}^r I_j=\llbracket 1,m\rrbracket,\ \amalg_{j=1}^r K_j=\llbracket 1,n\rrbracket\right\}\\&\cong\coprod_{\substack{\vec{i},\vec{j}\in(\mathbb{N}^*)^r\\|\vec{i}|=m,|\vec{j}|=n}}\Big(\llbracket 1,i_1\rrbracket\amalg\ldots\amalg\llbracket 1,i_r\rrbracket\amalg\llbracket 1,j_1\rrbracket\amalg\ldots\amalg\llbracket 1,j_r\rrbracket\Big)\uparrow_{\prod_{l=1}^r\mathfrak{S}_{i_l}\times\mathfrak{S}_{j_l}}^{\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}}\end{aligned}$$

les éléments de $\mathbb{Y}^{ord}_r(m,n)$ étant des ensembles ordonnés de couples d'ensembles.

(ii) $\mathbb{Y}(m,n)$, le $\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}$-ensemble défini par $\mathbb{Y}(m,n)=\amalg_{r\in\mathbb{N}^*}\mathbb{Y}_r(m,n)$ avec

$$\mathbb{Y}_r(m,n)=\left\{\{I,K\}\overset{\text{not}}{:=}\{(I_\alpha,K_\alpha)\}_{\alpha\in A}\mid A\in\mathrm{Ob}\,\mathtt{Fin},\ |A|=r,\ \amalg_\alpha I_\alpha=\llbracket 1,m\rrbracket,\ \amalg_\alpha K_\alpha=\llbracket 1,n\rrbracket\right\};$$

les éléments de $\mathbb{Y}_r(m,n)$ étant des ensembles non-ordonnés de couples d'ensembles.

Notons que $\mathbb{Y}_r(S,E)\ncong\mathcal{Y}(S)\times\mathcal{Y}(E)$. Comme dans le cas de $\mathcal{Y}^{ord}(-)$, on a une action libre de $\mathfrak{S}_r$ sur $\mathbb{Y}^{ord}_r(S,E)$ donnée, pour tout $(I,K)\in\mathbb{Y}^{\mathrm{ord}}_r(S,E)$ et toute permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_r$, par

$$\sigma\cdot(I,K)=\big((I_{\sigma^{-1}(j)},K_{\sigma^{-1}(j)})\big)_{j\in\llbracket 1,r\rrbracket}$$

qui, par le passage aux coinvariants, induit la surjection

$$\mathbb{Y}^{\mathrm{ord}}_r(S,E)\twoheadrightarrow\mathbb{Y}_r(S,E).$$

On introduit à présent le foncteur $\mathbb{X}$, qui, dans la définition du produit de composition connexe de deux $\mathfrak{S}$-bimodules, va jouer un rôle identique à celui de $\mathcal{X}$ dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules.

3.2.1.3 Notation(s). La structure cartésienne $\times$ de la catégorie but $\mathtt{Fin}$ nous fournit le produit externe de la catégorie $\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})$:

$$\begin{array}{rccc}-\times-:&\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})\times\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})&\longrightarrow&\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op}\times\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})\\&(F,G)&\longmapsto&(A,B,C,D)\mapsto F(A,B)\times G(C,D)\end{array}.$$

Par passage au coend sur les foncteurs $F(A,-)\times G(-,B):\mathtt{Fin}^{op}\times\mathtt{Fin}\to\mathtt{Fin}$ pour $A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathtt{Fin}$, on introduit donc le produit $\overset{\mathrm{diag}}{\times}$:

$$\begin{array}{rccc}-\overset{\mathrm{diag}}{\times}-:&\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})\times\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})&\longrightarrow&\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})\\&(F,G)&\longmapsto&\int^{S\in\mathtt{Fin}}F(-,S)\times G(S,-)\end{array}$$

qui, comme $\mathfrak{S}$ est un squelette de la catégorie $\mathtt{Fin}$, correspond à

$$\begin{array}{rccc}-\overset{\mathrm{diag}}{\times}-:&\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})\times\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})&\longrightarrow&\mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin})\\&(F,G)&\longmapsto&\coprod_{n\in\mathbb{N}}F(-,\llbracket 1,n\rrbracket)\underset{\mathfrak{S}_n}{\times}G(\llbracket 1,n\rrbracket,-)\end{array}$$

3.2.1.4 Définition. *Foncteur* $\mathbb{X}$
On définit le bifoncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{X} := \mathbb{Y} \overset{\text{diag}}{\times} \mathbb{Y} : & \mathtt{Fin} \times \mathtt{Fin}^{op} & \longrightarrow & \mathtt{Fin} \\ & (S,E) & \longmapsto & \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Y}(S,[\![1,n]\!]) \underset{\mathfrak{S}_n}{\times} \mathbb{Y}([\![1,n]\!],E) \end{array}.$$

On définit également les sous-bifoncteurs de $\mathbb{X}$, pour $r,s,n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{X}^n_{r,s}(-,-) : (S,E) \mapsto \mathbb{Y}_r(S,[\![1,n]\!]) \underset{\mathfrak{S}_n}{\times} \mathbb{Y}_s([\![1,n]\!],E);$$

et

$$\mathbb{X}^n(-,-) := \coprod_{r,s\in\mathbb{N}^*} \mathbb{X}^n_{r,s}(-,-).$$

De même que dans la section 3.1.1, où l'on a défini la transformation naturelle $\mathcal{K} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, on va définir une transformation naturelle

$$\mathbb{K} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}.$$

Soit (K,I,J,L) un représentant d'un élément de $\mathbb{X}^n(S,E)$ avec $(K,I) = \{(K_\alpha, I_\alpha)\}_{\alpha\in A} \in \mathbb{Y}(S,[\![1,n]\!])$, $(J,L) = \{(J_\beta, L_\beta)\}_{\beta\in B} \in \mathbb{Y}([\![1,n]\!],E)$. Par la remarque 3.1.1.14, il existe des partitions de $A = \amalg_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ et $B = \amalg_{\delta\in\Delta} B_\delta$ avec $\Gamma \cong \Delta$ telles que

$$\mathcal{K}_{[\![1,n]\!]}(I,J) = \left\{ \amalg_{\alpha\in A_\gamma} I_\alpha \right\}_{\gamma\in\Gamma} = \left\{ \amalg_{\beta\in B_\delta} J_\beta \right\}_{\delta\in\Delta}.$$

alors on associe au quadruplet (K,I,J,L), l'élément :

$$\mathbb{K}_{S,E}(K,I,J,L) := \left\{ \Big(\coprod_{\alpha\in A_\gamma} K_\alpha, \coprod_{\beta\in B_\gamma} L_\beta \Big)_\gamma \right\}_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{Y}(S,E),$$

ce qui définit la transformation naturelle $\mathbb{K}$.

3.2.1.5 Proposition. *Soient S et E deux ensembles finis. La transformation naturelle de bifoncteurs*

$$\mathbb{K} : \mathbb{Y} \overset{diag}{\times} \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Y}$$

est associative, c'est à dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Y} \overset{diag}{\times} \mathbb{Y} \overset{diag}{\times} \mathbb{Y} & & \xrightarrow{\mathbb{K}\times\mathrm{id}} & & \mathbb{Y} \overset{diag}{\times} \mathbb{Y} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\mathbb{K}} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbb{K}} \\ \mathbb{Y} \overset{diag}{\times} \mathbb{Y} & & \xrightarrow[\mathbb{K}]{} & & \mathbb{Y}. \end{array}$$

Démonstration. Soit $(A,B,B',C,C',D) \in \big(\mathbb{Y} \overset{diag}{\times} \mathbb{Y} \overset{diag}{\times} \mathbb{Y}\big)(S,E)$ avec $B,B' \in Y([\![1,m]\!])$ et $C,C' \in Y([\![1,n]\!])$. Montrons que

$$\big(\mathbb{K}(\mathbb{K}\times\mathrm{id})\big)(A,B,B',C,C',D) = \big(\mathbb{K}(\mathrm{id}\times\mathbb{K})\big)(A,B,B',C,C',D) \in \mathbb{Y}(S,E).$$

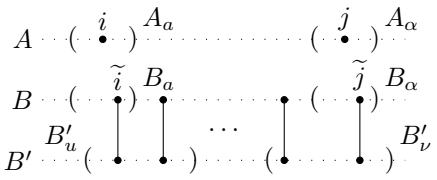
On note $\big(\{J^l_\gamma\},\{K^l_\omega\}\big) := \big(\mathbb{K}(\mathbb{K}\times\mathrm{id})\big)(A,B,B',C,C',D)$, en particulier, chaque J^l_γ (resp. K^l_ω) est

de la forme $\amalg_\rho A_\rho$ (resp. $\amalg_\tau D_\tau$). On note également $\big(\{J^r_\mu\},\{K^r_\nu\}\big) := \big(\mathbb{K}(\mathrm{id}\times\mathbb{K})\big)(A,B,B',C,C',D)$. Par symétrie du problème, il suffit de montrer que $\{J^l_\gamma\} = \{J^r_\mu\} \in \mathcal{Y}(S)$, le même raisonnement fonctionnant pour montrer que $K^l = K^r \in Y(E)$. La donnée de $\big(\mathcal{K}(\mathrm{id}\times\mathcal{K})\big)(A,B,B',C,C',D)$ fournit une relation d'équivalence $\overset{r}{\approx}$ sur S : pour $i,j\in S$

$$i \overset{r}{\approx} j \text{ si } \exists \mu \text{ tel que } \{i,j\}\subset J^r_\mu.$$

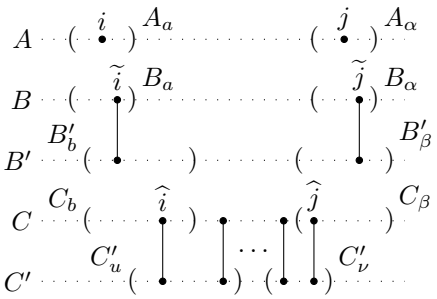
On constate que la relation $\overset{r}{\approx}$ est engendrée par :

- ▷ pour $i\in A_a$ et $j\in A_\alpha$, $i\overset{r}{\approx} j$ s'il existe $\widetilde{i}\in B_a$ et $\widetilde{j}\in B_\alpha$ tels que $\widetilde{i} \underset{B,B'}{\sim} \widetilde{j}$; on illustre cette relation par le diagramme suivant :



  où les éléments d'une partition sont représentés *de manière abusive* par des blocs $(\cdots)$;

- ▷ pour $i\in A_a$ et $j\in A_\alpha$, $i\overset{r}{\approx} j$ s'il existe $\widetilde{i}\in B_a\cap B'_b$, $\widetilde{j}\in B_\alpha\cap B'_\beta$, $\widehat{i}\in C_b$ et $\widehat{j}\in C_\beta$ tels que $\widehat{i} \underset{C,C'}{\sim} \widehat{j}$; on illustre également cette relation par un diagramme :



De même, la donnée de $\big(\mathbb{K}(\mathbb{K}\times\mathrm{id})\big)(A,B,B',C,C',D)$ fournit une relation d'équivalence $\overset{l}{\approx}$ sur S : pour $i,j\in S$

$$i \overset{l}{\approx} j \text{ si } \exists \mu \text{ tel que } \{i,j\}\subset J^l_\mu.$$

Alors, la relation d'équivalence $\overset{l}{\approx}$ est engendrée par les même relations que $\overset{r}{\approx}$, ce qui conclut la preuve de $\{J^l_\gamma\} = \{J^r_\mu\} \in \mathcal{Y}(S)$. Par un argument symétrique, on montre que $K^l = K^r \in \mathcal{Y}(E)$. □

Comme dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules, on définit un nouveau sous-foncteur de $\mathbb{X}$ qui va encoder la connexité. Pour $r,s\in\mathbb{N}^*$ et pour S et E deux ensembles finis, on pose :

$$\mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}_{r,s}(S,E) := \Big\{\big(\{I,K'\},\{K'',J\}\big)\in \mathbb{Y}_r(S,[\![1,n]\!])\times\mathbb{Y}_s([\![1,n]\!],E)\big|(K',K'')\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}([\![1,n]\!])\Big\}\Big/_{\mathfrak{S}_n},$$

où, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, par la fonctorialité de $\mathcal{X}^{conn}$, le quotient par $\mathfrak{S}_n$ qui fait l'identification

$$\big(\{I,K'\}\cdot\sigma,\{K'',J\}\big)\sim\big(\{I,K'\},\sigma^{-1}\cdot\{K'',J\}\big)$$

est bien défini. On a donc le sous-foncteur $\mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}_{r,s} \hookrightarrow \mathbb{X}^{n}_{r,s}$. On a également également les sous-foncteurs

$$\mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}(S,E) := \coprod_{r,s\in\mathbb{N}^*} \mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}_{r,s}(S,E) \quad \text{et} \quad \mathbb{X}^{\mathrm{conn}}(S,E) := \coprod_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}(S,E).$$

3.2.2 Produits de la catégorie $\mathfrak{S}$-$\mathtt{bimod}_k$

Comme dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules, on peut exprimer le produit de concaténation de deux $\mathfrak{S}$-bimodules avec ce formalisme. *On considère toujours des $\mathfrak{S}$-bimodules réduits*. On définit maintenant le produit de composition dénoté $\square$.

§ 1 Produit de composition $\square$

3.2.2.1 Définition. *Produit de composition des $\mathfrak{S}$-bimodules*
On appelle *produit de composition de $\mathfrak{S}$-bimodules* le bifoncteur

$$-\square- : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}$$

défini, pour tous $\mathfrak{S}$-bimodules réduits P et Q et tout couple d'ensembles (S,E) finis, par

$$\big(P\square Q\big)(S,E) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{(\{I,K'\},\{K'',J\})\in\mathbb{X}^n_{1,1}(S,E)} P(I,K')\otimes Q(K'',J)\Big)\Big/_{\mathfrak{S}_n} \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} P(S,[\![1,n]\!]) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} Q([\![1,n]\!],E)\,;$$

où l'action de $\mathfrak{S}_n$ est induite par l'action sur $[\![1,n]\!]$.

3.2.2.2 Remarque. Le produit de composition $\square$ est en fait défini par un coend. En effet, la structure tensoriel de la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ nous donne le produit externe

$$\begin{array}{rccc} -\circledcirc- : & \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Ch}_k)^{\times 2} & \longrightarrow & \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op}\times\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Ch}_k) \\ & (P,Q) & \longmapsto & \big\{(S_1,E_1,S_2,E_2)\mapsto P(S_1,E_1)\otimes Q(S_2,E_2)\big\} \end{array}$$

puis, par passage au coend sur les foncteurs $P(S_1,-)\otimes Q(-,E_2) : \mathtt{Fin}^{op}\times\mathtt{Fin}\to\mathtt{Fin}$ pour $S_1,E_2\in \mathrm{Ob}\,\mathtt{Fin}$

$$\begin{array}{rccc} -\square- & \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Ch}_k)^{\times 2} & \longrightarrow & \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Ch}_k) \\ & (P,Q) & \longmapsto & \int^{S\in\mathtt{Fin}} P(-,S)\otimes Q(S,-) \end{array}.$$

Comme $\mathfrak{S}$ est un squelette de la catégorie $\mathtt{Fin}$, on a finalement

$$\begin{array}{rccc} -\square- & \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Ch}_k)^{\times 2} & \longrightarrow & \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Ch}_k) \\ & (P,Q) & \longmapsto & \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} P(-,[\![1,n]\!]) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} Q([\![1,n]\!],-) \end{array}.$$

3.2.2.3 Remarque. Soient P et Q, deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits. Pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$, on a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}$-bimodules :

$$P\square Q(m,n) \cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}^*} P(m,N) \underset{k[\mathfrak{S}_N]}{\otimes} Q(N,n).$$

3.2.2.4 Proposition. *$\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \square, I_\square\big)$ avec $I_\square(S,E) = k[\mathrm{Aut}(S)]$ pour $S\cong E$ et 0 sinon, est une catégorie monoïdale.*

Démonstration. Soient P, Q et R trois $\mathfrak{S}$-bimodules réduits et S et E deux ensembles finis non-vides. On note e le cardinal de E. Par définition de $I_{\square}$, on a les isomorphismes :

$$\begin{aligned} P \,\square\, I_{\square}(S,E) &\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} P(S,[\![1,n]\!]) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} I_{\square}([\![1,n]\!],E) \\ &\cong P(S,[\![1,e]\!]) \underset{\mathfrak{S}_e}{\otimes} I_{\square}([\![1,e]\!],E) \\ &\cong P(S,[\![1,e]\!]) \underset{\mathfrak{S}_e}{\otimes} k[\mathrm{Aut}([\![1,e]\!])] \\ &\cong P(S,E). \end{aligned}$$

Par la remarque 3.2.2.2, on a également les isomorphismes :

$$\begin{aligned} \big(P \,\square\, Q\big) \,\square\, R(S,E) &= \int^{U\in\mathtt{Fin}} \big(P \,\square\, Q\big)(S,U) \otimes R(U,E) \\ &\cong \int^{U\in\mathtt{Fin}} \int^{V\in\mathtt{Fin}} P(S,V) \otimes Q(V,U) \otimes R(U,E) \\ &\underset{\text{Fubini}}{\cong} \int^{(U,V)\in\mathtt{Fin}^{\times 2}} P(S,V) \otimes Q(V,U) \otimes R(U,E) \\ &\cong P \,\square\big(\, Q \,\square\, R\big)(S,E) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

3.2.2.5 Remarque. Il est important de noter que la structure monoïdale $\square$ n'est pas symétrique. Par exemple, si l'on considère les $\mathfrak{S}$-bimodules $P = P(1,2) = k$ et $Q = Q(2,1) = k$, on a $P \,\square\, Q = \big(P \,\square\, Q\big)(1,1) = k$ alors que $Q \,\square\, P = \big(Q \,\square\, P\big)(2,2) = k$.

§ 2 Produit de concaténation $\otimes^{conc}$

Comme dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules, on définit le produit de concaténation de deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits.

3.2.2.6 Définition. *Produit de concaténation des $\mathfrak{S}$-bimodules*
On appelle *produit de concaténation* le bifoncteur

$$- \otimes^{conc} - : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd},$$

défini, pour P et Q, deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits, par

$$\big(P \otimes^{conc} Q\big)(S,E) := \bigoplus_{(I,K)\in\mathbb{Y}_2^{\mathrm{ord}}(S,E)} P(I_1,K_1) \otimes Q(I_2,K_2)$$

pour tout couples (S,E) d'ensembles finis.

3.2.2.7 Remarque. Ce produit est un cas particulier d'un produit de convolution de Day (cf. définition A.2.0.3) : soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits, on a

$$P \otimes^{conc} Q(-,-) := \int^{(I_1,I_2,J_1,J_2)\in\mathtt{Fin}^{\times 4}} k\Big[\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}^{op}\times\mathtt{Fin}}\big((I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2),(-,-)\big)\Big] \otimes P(I_1,J_1) \otimes Q(I_2,J_2).$$

3.2.2.8 Remarque. Pour P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules et pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\big(P \otimes^{conc} Q\big)(m,n) \cong \bigoplus_{\substack{m'+m''=m \\ n'+n''=n}} k[\mathfrak{S}_m] \underset{k[\mathfrak{S}_{m'} \times \mathfrak{S}_{m''}]}{\otimes} \big(P(m',n') \otimes Q(m'',n'')\big) \underset{k[\mathfrak{S}_{n'} \times \mathfrak{S}_{n''}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n].$$

On a une propriété de compatibilité entre les structures monoïdales $\square$ et $\otimes^{conc}$, appelée *loi d'inter-échange*.

3.2.2.9 Proposition. *Loi d'inter-échange*
Soient A, B, C et D des $\mathfrak{S}$-bimodules réduits. On a l'injection naturelle associative de $\mathfrak{S}$-bimodules

$$\Phi_{A,B,C,D} : (A \square B) \otimes^{conc} (C \square D) \hookrightarrow (A \otimes^{conc} C) \square (B \otimes^{conc} D).$$

Démonstration. Soient A, B, C et D des $\mathfrak{S}$-bimodules réduits. On a

$$\begin{aligned}
&(A \square B) \otimes^{conc} (C \square D)(-,-) \\
&= \int^{(I_1,I_2,J_1,J_2) \in \mathtt{Fin}^{\times 4}} k\Big[\mathrm{Hom}\big((I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2), (-,-)\big)\Big] \otimes (A \square B)(I_1,J_1) \otimes (C \square D)(I_2,J_2) \\
&= \int^{(I_1,I_2,J_1,J_2) \in \mathtt{Fin}^{\times 4}} k[\mathrm{Hom}((I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2),(-,-))] \otimes \textstyle\int^{S \in \mathtt{Fin}} A(I_1,S) \otimes B(S,J_1) \otimes \int^{T \in \mathtt{Fin}} C(I_2,T) \otimes D(T,J_2) \\
&\underset{\text{Fubini}}{\cong} \int^{(I_1,I_2,J_1,J_2,S,T) \in \mathtt{Fin}^{\times 6}} k[\mathrm{Hom}((I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2),(-,-))] \otimes A(I_1,S) \otimes C(I_2,T) \otimes B(S,J_1) \otimes D(T,J_2).
\end{aligned}$$

Les injections naturelles

$$\begin{aligned}
k\big[\mathrm{Hom}\big((I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2),(-,-)\big)\big] &\hookrightarrow \coprod_S k\big[\mathrm{Hom}\big((I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2),(-,S)\big)\big] \otimes k\big[\mathrm{Hom}\big((I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2),(S,-)\big)\big] \\
&\hookrightarrow \coprod_{\substack{S \\ U \to V \\ S \to V}} k\big[\mathrm{Hom}\big((I_1 \amalg I_2, U),(-,S)\big)\big] \otimes k\big[\mathrm{Hom}\big((V, J_1 \amalg J_2),(S,-)\big)\big] \\
A(I_1,S) \otimes C(I_2,T) \otimes B(S,J_1) \otimes D(T,J_2) &\hookrightarrow \coprod_{J_1,J_2,K_1,K_2} A(I_1,J_1) \otimes C(I_2,J_2) \otimes B(K_1,L_1) \otimes D(K_2,L_2)
\end{aligned}$$

nous donne finalement l'injection naturelle

$$\begin{aligned}
&(A \square B) \otimes^{conc} (C \square D)(-,-) \\
&\hookrightarrow \int^{(S,I_1,I_2,J_1,J_2,K_1,K_2,L_1,L_2)} k\big[\mathrm{Hom}\big((I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2),(-,S)\big)\big] \otimes k\big[\mathrm{Hom}\big((K_1 \amalg K_2, L_1 \amalg L_2),(S,-)\big)\big] \\
&\qquad\qquad \otimes A(I_1,J_1) \otimes C(I_2,J_2) \otimes B(K_1,L_1) \otimes D(K_2,L_2) \\
&\underset{\text{Fubini}}{\cong} \int^S \int^{I_i,J_i} k\big[\mathrm{Hom}\big((I_1 \amalg I_2, J_1 \amalg J_2),(-,S)\big)\big] \otimes A(I_1,J_1) \otimes C(I_2,J_2) \\
&\qquad\qquad \otimes \int^{K_i,L_i} k\big[\mathrm{Hom}\big((K_1 \amalg K_2, L_1 \amalg L_2),(S,-)\big)\big] \otimes B(K_1,L_1) \otimes D(K_2,L_2) \\
&= \int^S \big(A \otimes^{conc} C\big)(-,S) \otimes \big(B \otimes^{conc} D\big)(S,-) \\
&= \big(A \otimes^{conc} C\big) \square \big(B \otimes^{conc} D\big)(-,-).
\end{aligned}$$

ce qui nous fournit finalement la transformation naturelle injective entre bifoncteurs :

$$\Phi_{A,B,C,D} : (A \square B) \otimes^{conc} (C \square D) \hookrightarrow (A \otimes^{conc} C) \square (B \otimes^{conc} D).$$

De plus, Φ est associative, car le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\Big((A \square B) \otimes^{conc} (C \square D)\Big) \otimes^{conc} (E \square F) & \xrightarrow{\cong} & (A \square B) \otimes^{conc} \Big((C \square D) \otimes^{conc} (E \square F)\Big) \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi_{A,B,C,D} \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \Phi_{C,D,E,F}} \\
\Big((A \otimes^{conc} C) \square (B \otimes^{conc} D)\Big) \otimes^{conc} (E \square F) & \circlearrowleft & (A \square B) \otimes^{conc} \Big((C) \otimes^{conc} E) \square (D \otimes^{conc} F)\Big) \\
{\scriptstyle \Phi_{A \otimes^{conc} C, B \otimes^{conc} D, E, F}} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \Phi_{A,B,C \otimes^{conc} E, D \otimes^{conc} F}} \\
& (A \otimes^{conc} C \otimes^{conc} E) \square (B \otimes^{conc} D \otimes^{conc} F) &
\end{array}$$

□

3.2.2.10 Corollaire. *Les catégories* $\big(\mathtt{As}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}, \otimes^{conc}), \square, I_{\square}\big)$ *et* $\big(\mathtt{Com}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}, \otimes^{conc}), \square, I_{\square}\big)$ *sont des catégories monoïdales. Autrement dit, si* (P, c_P), (Q, c_Q) *sont deux monoïdes de la catégorie monoïdale (sans unité) symétrique* $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \otimes^{conc}\big)$, *alors*

(i) $(P \square Q, c_{P \square Q})$ *est un monoïde de* $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \otimes^{conc}\big)$ *;*

(ii) De plus, si P *et* Q *sont des monoïdes commutatifs, alors* $P \square Q$ *également.*

Démonstration. (i) L'injection Φ de la proposition 3.2.2.9 nous fournit le produit $c_{P \square Q}$:

$$\begin{array}{ccc}
(P \square Q) \otimes^{conc} (P \square Q) & \xrightarrow{\Phi} & (P \otimes^{conc} P) \square (Q \otimes^{conc} Q) \\
& {\scriptstyle c_{P \square Q}} \searrow & \downarrow {\scriptstyle c_P \square c_Q} \\
& & P \square Q
\end{array}$$

et l'associativité du produit $\square$ nous assure l'associativité du produit $c_{P \square Q}$.

(ii) La commutativité de $c_{P \square Q}$ découle directement de celle de c_P et c_Q.

□

§ 3 Monoïdes libres associés au produit $\otimes^{conc}$

Introduisons les monoïdes libres pour le produit de concaténation.

3.2.2.11 Définition/Proposition. *Monoïdes libres*
Soient P et Q, deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits et S et E deux ensembles finis.

(i) Le monoïde associatif libre non-unitaire sur P est défini par

$$\mathbb{T}^r P(S, E) := \bigoplus_{(I,K) \in \mathbb{Y}_r^{\mathrm{ord}}(S,E)} P(I_1, K_1) \otimes \ldots \otimes P(I_r, K_r).$$

(ii) Le monoïde commutatif libre non-unitaire sur P est défini par le quotient du monoïde associatif libre par l'action des groupes symétriques ; il vérifie l'isomorphisme suivant :

$$\mathbb{S}^r P(S, E) := \Big(\mathbb{T}^r P(S, E)\Big)_{\mathfrak{S}_r} \cong \bigoplus_{\{I,K\} \in \mathbb{Y}_r(S,E)} \bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha, K_\alpha).$$

3.2.2.12 Remarque. Pour m et n deux entiers naturels non-nuls, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{T}^r P(m,n) &\cong \bigoplus_{(I,K)\in\mathbb{Y}_r^{\mathrm{ord}}(m,n)} P(I_1,K_1)\otimes\ldots\otimes P(I_r,K_r)\\ &\underset{3.2.1.2}{\cong} \bigoplus_{\substack{\bar{i},\bar{j}\in(\mathbb{N}^*)^r\\ |\bar{i}|=m,|\bar{j}|=n}} \Big(P(i_1,j_1)\otimes\ldots\otimes P(i_r,j_r)\Big)\uparrow_{\prod_{l=1}^r \mathfrak{S}_{i_l}\times\mathfrak{S}_{j_l}^{op}}^{\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}}\\ &\cong \bigoplus_{\substack{\bar{i},\bar{j}\in(\mathbb{N}^*)^r\\ |\bar{i}|=m,|\bar{j}|=n}} k[\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}]\underset{k[\prod_{l=1}^r \mathfrak{S}_{i_l}\times\mathfrak{S}_{j_l}^{op}]}{\otimes} P(i_1,j_1)\otimes\ldots\otimes P(i_r,j_r)\end{aligned}$$

Comme dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules, le foncteur $\mathbb{S}(-)$ vérifie une propriété exponentielle

3.2.2.13 Proposition. *Propriété exponentielle de $\mathbb{S}(-)$*
Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits. Alors

$$\mathbb{S}(P\oplus Q)\cong\mathbb{S}(P)\oplus\mathbb{S}(Q)\oplus\mathbb{S}(P)\otimes^{conc}\mathbb{S}(Q).$$

Comme dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules, on explicite le monoïde commutatif libre sur un $\mathfrak{S}$-bimodule.

3.2.2.14 Lemme. *Soient P un $\mathfrak{S}_i\times\mathfrak{S}_j^{op}$-module et $s\in\mathbb{N}^*$. On pose $m=si$ et $n=sj$. On a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}$-modules suivant :*

$$\Big(k[\mathfrak{S}_m]\underset{k[\mathfrak{S}_i^{\times s}]}{\otimes} P^{\otimes s}\underset{k[\mathfrak{S}_j^{\times s}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big)_{\mathfrak{S}_s}\cong k[\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}]\underset{k[(\mathfrak{S}_i\times\mathfrak{S}_j^{op})\wr\mathfrak{S}_s]}{\otimes} P^{\otimes s}.$$

Par le même type d'argument que dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules (cf. lemme 3.1.2.17), on a le lemme suivant.

3.2.2.15 Lemme. *Soient $a,b,i,j\in\mathbb{N}$, P un $\mathfrak{S}_i\times\mathfrak{S}_p^{op}$-module et Q un $\mathfrak{S}_j\times\mathfrak{S}_q^{op}$-module et on pose $m=ai+bj$ et $n=ap+bq$. On note Ξ l'ensemble des couples $(\bar{r},\bar{s})$ de uplets avec $\bar{r}$ et $\bar{s}$ de même longueur m, uplets d'entiers tous non-nuls sauf éventuellement r_1 et s_m, et vérifiant $|\bar{r}|=a$ et $|\bar{s}|=b$. On a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}$-modules suivant :*

$$\begin{aligned}\Big(\bigoplus_{\Xi} k[\mathfrak{S}_m]\underset{k[\prod\mathfrak{S}_i^{\times r_l}\times\mathfrak{S}_j^{\times s_l}]}{\otimes}\bigotimes_l P^{\otimes r_l}\otimes Q^{\otimes s_l}\underset{k[\prod\mathfrak{S}_p^{\times r_l}\times\mathfrak{S}_q^{\times s_l}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big)_{\mathfrak{S}_{a+b}}&\\ \cong \Big(k[\mathfrak{S}_m]\underset{k[\mathfrak{S}_i^{\times a}\times\mathfrak{S}_j^{\times b}]}{\otimes} P^{\otimes a}\otimes Q^{\otimes b}\underset{k[\mathfrak{S}_p^{\times a}\times\mathfrak{S}_q^{\times b}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big)_{\mathfrak{S}_a\times\mathfrak{S}_b}&\end{aligned}$$

3.2.2.16 Proposition. *Soit P un $\mathfrak{S}$-bimodule réduit. Le monoïde commutatif libre non-unitaire $\mathbb{S}(P)$ vérifie, pour r,m et n trois entiers naturels :*

$$\mathbb{S}^r(P)(m,n)\cong\bigoplus_{\substack{(i_1,j_1)>\ldots>(i_r,j_r)\\ \sum j_l s_l=n,\sum i_l s_l=m\\ \sum s_l=r}} k[\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}]\underset{k[\prod(\mathfrak{S}_{i_l}\times\mathfrak{S}_{j_l}^{op})\wr\mathfrak{S}_{s_l}]}{\otimes} P(i_1,j_1)^{\otimes s_1}\otimes\ldots\otimes P(i_r,j_r)^{\otimes s_r}$$

où $(i_1,j_1)>\ldots>(i_r,j_r)$ est donné par l'ordre lexicographique.

Démonstration. De la même manière que dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules, le résultat découle des lemmes 3.2.2.14 et 3.2.2.15. □

3.2.2.17 Remarque. Soit P un $\mathfrak{S}$-bimodule réduit. Dans $\mathbb{S}(P)$, on a l'identification

$$\sigma \cdot (\tau \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_r \otimes \eta) = \tau\sigma_{\bar{r}}^{-1} \otimes m_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes m_{\sigma^{-1}(r)} \otimes \sigma\eta$$

avec σ une permutation de $\mathfrak{S}_r$, $\sigma_{\bar{m}}$ (resp. $\sigma_{\bar{n}}$) la permutation par blocs correspondante dans $\mathfrak{S}_m$ (resp. $\mathfrak{S}_n$), et $\tau \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_r \otimes \eta \in k[\mathfrak{S}_m] \underset{k[\mathfrak{S}_{i_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{i_r}]}{\otimes} P(i_1, j_1) \otimes \ldots \otimes P(i_r, j_r) \underset{k[\mathfrak{S}_{j_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{j_r}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n] \subset P^{\otimes^{conc} r}$ avec $\sum_{l=1}^{r} i_l = m$ et $\sum_{l=1}^{r} j_l = n$.

3.2.3 Produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-bimodules

On définit le produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-bimodules. Ce produit a été défini pour la première fois par Vallette dans sa thèse [Val03], pour l'étude du comportement homotopique de structures algébriques possédant plusieurs entrées et plusieurs sorties. Notre définition du produit $\boxtimes_c$ n'est pas la définition originale, mais on montre (cf. proposition 3.2.3.4) qu'elle lui est équivalente.

3.2.3.1 Définition. *Produit $\boxtimes_c$ de composition connexe*
On appelle *produit de composition connexe* des $\mathfrak{S}$-bimodules, le bifoncteur

$$- \boxtimes_c - : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}$$

défini, pour tous $\mathfrak{S}$-bimodules réduits P et Q et tous couples (S, E) d'ensembles finis, par :

$$\big(P \boxtimes_c Q\big)(S, E) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{(\{I, K'\}, \{K'', J\}) \in \mathbb{X}^{n, \mathrm{conn}}(S, E)} \bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha, K'_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta} Q(K''_\beta, J_\beta) \Big) \Big/_{\mathfrak{S}_n}$$

où le quotient par $\mathfrak{S}_n$ identifie, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, les termes

$$\bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha, K'_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta} Q(K''_\beta, J_\beta) \sim \Big(\bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha, K'_\alpha)\Big) \cdot \sigma^{-1} \otimes \ \sigma \cdot \Big(\bigotimes_{\beta} Q(K''_\beta, J_\beta)\Big).$$

3.2.3.2 Remarque. Cette construction est bien fonctorielle, car $(P \boxtimes_c Q)(-,-)$ est un sous-bifoncteur de $\big(\mathbb{S}P \,\square\, \mathbb{S}Q\big)(-,-)$ (cf. lemme 3.2.3.8).

3.2.3.3 Notation(s). Afin de ne pas alourdir certaines preuves, on omettra (le moins souvent possible) de préciser la subdivision par les entiers naturels du produit connexe :

$$\big(P \boxtimes_c Q\big)(S, E) := \Big(\bigoplus_{(\{I, K'\}, \{K'', J\}) \in \mathbb{X}^{\mathrm{conn}}(S, E)} \bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha, K'_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta} Q(K''_\beta, J_\beta) \Big) \Big/_{\mathfrak{S}}$$

en notant $\big/_{\mathfrak{S}}$, le quotient par le groupe symétrique approprié pour le terme.

On a le résultat central suivant, qui nous assure que le produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-bimodules ainsi défini est bien équivalent au produit défini par Vallette dans [Val03].

3.2.3.4 Proposition. *Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels non-nuls, on a l'isomorphisme de complexes :*

$$\big(P \boxtimes_c Q\big)([\![1, m]\!], [\![1, n]\!]) \cong \big(P \boxtimes_c^{Val} Q\big)(m, n).$$

La démonstration est remise à l'annexe C.3. On redémontre ensuite les résultats de Vallette [Val03, Lem. 47, Lem. 49], qui sont cruciaux pour la description du monoïde libre dans la catégorie

monoïdale $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \boxtimes_c)$.

3.2.3.5 Lemme. (cf. [Val03, Lem. 47])
Le produit $\boxtimes_c$ est associatif. De plus, pour tout couple (A, B) de $\mathfrak{S}$-bimodules réduits, l'endofoncteur

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{A,B} : & \mathrm{Func}(\mathtt{Fin} \times \mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{Ch}_k) & \longrightarrow & \mathrm{Func}(\mathtt{Fin} \times \mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{Ch}_k) \\ & X & \longmapsto & A \boxtimes_c X \boxtimes_c B \end{array}$$

est analytique scindé.

Démonstration. Commençons par montrer que le foncteur $\Phi_{A,B}$ est bien défini, c'est à dire que, pour tout triplet (P, Q, R) de $\mathfrak{S}$-bimodules réduits, on a $(P \boxtimes_c Q) \boxtimes_c R = P \boxtimes_c (Q \boxtimes_c R)$. L'associativité du produit $\boxtimes_c$ découle essentiellement de l'associativité du produit $\mathcal{K}$ (cf. proposition 3.2.1.5). On utilise la notation 3.2.3.3 ; soient S et E deux ensembles finis, on a les isomorphismes de complexes suivants :

$$\begin{aligned}
\Big((P \boxtimes_c Q) \boxtimes_c R\Big)(S,E) &= \Bigg(\bigoplus_{(\{I,K'\},\{K'',J\}) \in \mathbb{X}^{\mathrm{conn}}(S,E)} \bigotimes_{\alpha} (P \boxtimes_c Q)(I_\alpha, K'_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta} R(K''_\beta, J_\beta)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}} \\
&= \Bigg(\bigoplus_{\substack{(\{I,K'\},\{K'',J\}) \\ \in \mathbb{X}^{\mathrm{conn}}(S,E)}} \bigotimes_{\alpha} \bigoplus_{\substack{(\{A_\alpha, B'_\alpha\},\{B''_\alpha, C_\alpha\}) \\ \in \mathbb{X}^{\mathrm{conn}}(I_\alpha, K'_\alpha)}} \bigotimes_{\gamma} P(A_{\alpha,\gamma}, B'_{\alpha,\gamma}) \otimes \bigotimes_{\delta} Q(B''_{\alpha,\delta}, C_{\alpha,\delta}) \otimes \bigotimes_{\beta} R(K''_\beta, J_\beta)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}} \\
&\cong \Bigg(\bigoplus_{\substack{(\{I,K'\},\{K'',J\}) \\ \in \mathbb{X}^{\mathrm{conn}}(S,E)}} \bigoplus_{\substack{(\{\widetilde{A},\widetilde{B'}\},\{\widetilde{B''},\widetilde{C}\}) \\ \in \prod_\alpha \mathbb{X}^{\mathrm{conn}}(I_\alpha, K'_\alpha)}} \bigotimes_{\rho} P(\widetilde{A}_\rho, \widetilde{B'}_\rho) \otimes \bigotimes_{\tau} Q(\widetilde{B''}_\tau, \widetilde{C}_\tau) \otimes \bigotimes_{\beta} R(K''_\beta, J_\beta)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}} \\
&\cong \Bigg(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{\substack{(\{I,K'\},\{K'',J\}) \\ \in \mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}(S,E)}} \bigoplus_{\substack{(\{\widetilde{A},\widetilde{B'}\},\{\widetilde{B''},\widetilde{C}\}) \\ \mathcal{K}_{S,[\![1,n]\!]}(\widetilde{A},\widetilde{B'},\widetilde{B''},\widetilde{C})=(I,K')}} \bigotimes_{\rho} P(\widetilde{A}_\rho, \widetilde{B'}_\rho) \otimes \bigotimes_{\tau} Q(\widetilde{B''}_\tau, \widetilde{C}_\tau) \otimes \bigotimes_{\beta} R(K''_\beta, J_\beta)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}} \\
&\cong \Bigg(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{\substack{(\{\widetilde{A},\widetilde{B'}\},\{\widetilde{B''},\widetilde{C}\},\{K'',J\}) \\ \mathcal{K}_{S,E}\left(\mathcal{K}_{S,[\![1,n]\!]}(\widetilde{A},\widetilde{B'},\widetilde{B''},\widetilde{C}),\{K'',J\}\right)=(S,E)}} \bigotimes_{\rho} P(\widetilde{A}_\rho, \widetilde{B'}_\rho) \otimes \bigotimes_{\tau} Q(\widetilde{B''}_\tau, \widetilde{C}_\tau) \otimes \bigotimes_{\beta} R(K''_\beta, J_\beta)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}} \\
&\cong \Bigg(\bigoplus_{\substack{(\{A,B'\},\{B'',C\},\{C'',D\}) \\ \in (\mathcal{K}(\mathcal{K}\times\mathrm{id}))^{-1}(S,E)}} \bigotimes_{\rho} P(A_\rho, B'_\rho) \otimes \bigotimes_{\tau} Q(B''_\tau, C'_\tau) \otimes \bigotimes_{\beta} R(C''_\beta, D_\beta)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}} \\
&\underset{3.2.1.5}{\cong} \Bigg(\bigoplus_{\substack{(\{A,B'\},\{B'',C\},\{C'',D\}) \\ \in (\mathcal{K}(\mathrm{id}\times\mathcal{K}))^{-1}(S,E)}} \bigotimes_{\rho} P(A_\rho, B'_\rho) \otimes \bigotimes_{\tau} Q(B''_\tau, C'_\tau) \otimes \bigotimes_{\beta} R(C''_\beta, D_\beta)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}} \\
&\cong \Big(P \boxtimes_c (Q \boxtimes_c R)\Big)(S,E).
\end{aligned}$$

Le produit $\boxtimes_c$ vérifie donc bien la propriété d'associativité. On voit ensuite que le foncteur est analytique scindé :

$$\begin{aligned}
\Phi_{P,R}(X)(S,E) &= \Big(P \boxtimes_c Q \boxtimes_c R\Big)(S,E) \\
&\cong \Bigg(\bigoplus_{\substack{(\{A,B'\},\{B'',C\},\{C'',D\}) \\ \in (\mathcal{K}(\mathrm{id}\times\mathcal{K}))^{-1}(S,E)}} \bigotimes_{\rho} P(A_\rho, B'_\rho) \otimes \bigotimes_{\tau} X(B''_\tau, C'_\tau) \otimes \bigotimes_{\beta} R(C''_\beta, D_\beta)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}}
\end{aligned}$$

$$\cong \Big(\bigoplus_{r\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{\substack{(\{A,B'\},\{B'',C\},\{C'',D\}) \\ \in(\mathcal{K}(\mathrm{id}\times\mathcal{K}))^{-1}(S,E) \\ \{B''_\tau,C_\tau\}_{\tau\in T},\ |T|=r}} \bigotimes_\rho P(A_\rho,B'_\rho) \otimes \bigotimes_{\tau\in T} X(B''_\tau,C'_\tau) \otimes \bigotimes_\beta R(C''_\beta,D_\beta) \Big)\Big/_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}}$$

$$\cong \bigoplus_{r\in\mathbb{N}^*} \big(\Phi_{P,R}\big)_r(X),$$

ce qui conclut cette preuve. □

3.2.3.6 Proposition. [Val03, Lem. 49]
La catégorie $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \boxtimes_c, I\big)$ *où l'unité* I *est défini, pour tout couple* (S,E) *d'ensembles finis, par*

$$I(S,E) := \begin{cases} k & \textit{si } |S| = 1 = |E| \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases},$$

est monoïdale abélienne et préserve les coégalisateurs réflexifs ainsi que les colimites séquentielles.

Démonstration. Découle du lemme précédent et de la proposition C.1.0.7. □

Enfin, de même que dans le cas des $\mathfrak{S}$-modules, $P\boxtimes_c Q$ apparait comme les "indécomposables" pour le produit $\otimes^{conc}$ de $\mathbb{S}P\,\square\,\mathbb{S}Q$.

3.2.3.7 Proposition. *Soient* P *et* Q *deux* $\mathfrak{S}$*-bimodules réduits. On a l'isomorphisme naturel*

$$\mathbb{S}\big(P\boxtimes_c Q\big) \cong \mathbb{S}P\,\square\,\mathbb{S}Q.$$

Démonstration. Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits. Par le lemme 3.2.3.8, pour tout couple (S,E) d'ensembles finis, on a l'isomorphisme

$$\big(\mathbb{S}P\,\square\,\mathbb{S}Q\big)(S,E) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{(\{I,K'\},\{K'',J\})\in\mathbb{X}^n(S,E)} \bigotimes_\alpha P(I_\alpha,K'_\alpha) \otimes \bigotimes_\beta Q(K''_\beta,J_\beta) \Big)\Big/_{\mathfrak{S}_n}.$$

□

3.2.3.8 Lemme. *Soient* P *et* Q *deux* $\mathfrak{S}$*-bimodules réduits. On a, pour tous ensembles finis* S *et* E*, l'identification :*

$$\big(\mathbb{S}P\,\square\,\mathbb{S}Q\big)(S,E) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{(\{I,K'\},\{K'',J\})\in\mathbb{X}^n(S,E)} \bigotimes_\alpha P(I_\alpha,K'_\alpha) \otimes \bigotimes_\beta Q(K''_\beta,J_\beta) \Big)\Big/_{\mathfrak{S}_n}.$$

Démonstration. Soient S et E deux ensembles finis,

$$\begin{aligned}
\big(\mathbb{S}P\,\square\,\mathbb{S}Q\big)(S,E) &\underset{(i)}{\cong} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{(\{A,B\},\{C,D\})\in\mathbb{X}^n_{1,1}(m,n)} \mathbb{S}P(A,B)\otimes\mathbb{S}Q(C,D) \Big)\Big/_{\mathfrak{S}_n} \\
&\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{(\{A,B\},\{C,D\})\in\mathbb{X}^n_{1,1}(S,E)} \bigoplus_{\substack{\{I,K'\}\in\mathbb{Y}(A,B) \\ \{K'',J\}\in\mathbb{Y}(C,D)}} \bigotimes_\alpha P(I_\alpha,K'_\alpha) \otimes \bigotimes_\beta Q(K''_\beta,J_\beta) \Big)\Big/_{\mathfrak{S}_n} \\
&\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{(\{I,K'\},\{K'',J\})\in\mathbb{X}^n(S,E)} \bigotimes_\alpha P(I_\alpha,K'_\alpha) \otimes \bigotimes_\beta Q(K''_\beta,J_\beta) \Big)\Big/_{\mathfrak{S}_n}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

3.2.4 Aparté : au sujet du produit $\circ$

On finit cette section en évoquant le cas classique des opérades algébriques : le lecteur qui souhaiterait plus de détails à ce sujet peut se référer au livre [LV12]. On rappelle la définition du produit $\circ$ de composition classique des $\mathfrak{S}$-modules (cf. [LV12, Sect. 5.1.13]).

3.2.4.1 Définition/Proposition. *Produit de composition des opérades*
On appelle *produit de composition opéradique* le bifoncteur

$$-\circ- : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$$

défini, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits M et N et tout ensemble fini S, par

$$M \circ N(S) := \bigoplus_{\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}\in\mathcal{Y}(S)} M(A) \otimes \bigotimes_{\alpha\in A} N(K_\alpha).$$

Le produit $\circ$ munit la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$ d'une structure monoïdale $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \circ, I)$ avec $I(S) = k$ concentré en degré 0 si $|S| = 1$ et 0 sinon.

On a le foncteur

$$\begin{array}{rccc} (-)^{pr} : & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k & \longrightarrow & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k \\ & M = \{M(n)\}_{n\in\mathbb{N}^*} & \longmapsto & (M)^{pr} \end{array}$$

avec

$$M^{pr}(m,n) = \begin{cases} M(n) & \text{si } m = 1; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, ce foncteur est monoïdal. En effet, soient M et N deux $\mathfrak{S}$-modules réduits. On a

$$\begin{aligned} (M\circ N)^{pr}(1,n) &\overset{def}{=} \bigoplus_{\substack{k\in\mathbb{N}^* \\ \bar{i}\in(\mathbb{N}^*)^k, |\bar{i}|=n}} M(k) \underset{\mathfrak{S}_k}{\otimes} \Big(\big(N(i_1)\otimes\ldots\otimes N(i_k)\big) \uparrow^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{i_1}\times\ldots\times\mathfrak{S}_{i_k}} \Big) \\ &\cong \bigoplus_{\substack{k\in\mathbb{N}^* \\ \bar{i}\in(\mathbb{N}^*)^k, |\bar{i}|=n}} M^{pr}(1,k) \underset{\mathfrak{S}_k}{\otimes} \Big(\big(N^{pr}(1,i_1)\otimes\ldots\otimes N^{pr}(1,i_k)\big) \uparrow^{\mathfrak{S}_k^{op}\times\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{i_1}\times\ldots\times\mathfrak{S}_{i_k}} \Big)\Big/_{\sim}, \end{aligned}$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie en C.3.0.9 ; en reprennant les notations de [Val03] (cf. C), on a alors

$$\begin{aligned} (M\circ N)^{pr}(1,n) &\cong \bigoplus_{k\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{\Xi} M^{pr}(1,k) \underset{k[\mathfrak{S}_k]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_k] \otimes N^{pr}((1,\ldots,1),\bar{i}) \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n] \Big)\Big/_{\sim} \\ &\underset{C.3.0.6}{\cong} \bigoplus_{k\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{\Xi} M^{pr}(1,k) \underset{k[\mathfrak{S}_k]}{\otimes} k[S_c^{(k),(1,\ldots,1)}] \otimes N^{pr}((1,\ldots,1),\bar{i}) \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n] \Big)\Big/_{\sim} \\ &\cong \big(M^{pr} \boxtimes_c N^{pr}\big)(1,n). \end{aligned}$$

3.3 Foncteur d'induction

On décrit ici le foncteur Ind, et son adjoint à droite, le foncteur Res de restriction, qui va faire le lien entre les deux sections précédentes dans le sens que $\mathrm{Ind} : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \to \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$ est monoïdal strict pour les différents produits introduits dans les deux premières sections de ce chapitre.

3.3.1 Adjonction Ind-Res

Pour $\mathcal{C}$ un groupoïde, on note $\Delta_{\mathcal{C}}$ le foncteur

$$\Delta_{\mathcal{C}} := (\mathrm{inv}_{\mathcal{C}}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$$

où $\mathrm{inv}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{op}$ est l'équivalence de catégories donné par passage à l'inverse.

3.3.1.1 Définition. *Foncteur* Res
On définit le *foncteur de restriction*, noté Res par :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Res}: & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k & \longrightarrow & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \\ & P & \longmapsto & P \circ \Delta_{\mathtt{Fin}^{op}} \end{array} .$$

Le foncteur Res est exact et possède un adjoint à gauche, le foncteur d'induction.

3.3.1.2 Définition. *Foncteur* Ind
On définit le foncteur d'induction :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ind}: & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k & \longrightarrow & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k \\ & V & \longmapsto & \big(\mathrm{Ind}V\big)(S,E) := \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,S)} V(E) \end{array}$$

où $\mathrm{Aut}(S) \ni f$ agit à gauche par

$$f \cdot \Big(\bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,S)} V(E) \Big) = \bigoplus_{f\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,S)} V(E)$$

et $\mathrm{Aut}(E) \ni f$ agit à droite par

$$\Big(\bigoplus_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,S)} V(E) \Big) \cdot f = \bigoplus_{\varphi f \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,S)} V\big(f^{-1}(E)\big).$$

3.3.1.3 Remarque. Soient $V \in \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$ et S et E, deux ensembles finis. Si S et E ne sont pas isomorphes, c'est à dire si $|S| \neq |E|$, alors

$$\big(\mathrm{Ind}V\big)(S,E) = 0.$$

Finalement, on a, pour tous ensembles finis S et E :

$$\big(\mathrm{Ind}\ V\big)(S,E) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } S \ncong E \\ k[\mathrm{Aut}(S)] \otimes V(S) & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.3.1.4 Remarque. Comme pour chacune des structures précédentes, on peut faire une description "plus explicite" du foncteur Ind. Pour $V \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a par définition

$$\big(\mathrm{Ind}V\big)([\![1,m]\!],[\![1,n]\!]) := \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}([\![1,m]\!],[\![1,n]\!])} V([\![1,m]\!])$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \bigoplus\limits_{\mathfrak{S}_m} V([\![1,m]\!]) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où l'action de $\mathfrak{S}_m$ à gauche est donnée par

$$\sigma \cdot \Big(\bigoplus_{\varphi \in \mathfrak{S}_m} V([\![1,m]\!]) \Big) = \bigoplus_{\sigma\varphi \in \mathfrak{S}_m} V([\![1,m]\!]);$$

et l'action à droite de $\mathfrak{S}_m$ est donnée par

$$\Big(\bigoplus_{\varphi \in \mathfrak{S}_m} V([\![1,m]\!]) \Big) \cdot \sigma = \bigoplus_{\varphi\sigma \in \mathfrak{S}_m} V(\sigma^{-1} \cdot [\![1,m]\!])$$

donc on a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}_m$-bimodules

$$\bigoplus_{\varphi \in \mathfrak{S}_m} V(m) \cong k[\mathfrak{S}_m] \otimes V(m),$$

où le terme de droite est muni de la structure de $\mathfrak{S}_m$-bimodule suivante : l'action à gauche est donnée par $g \cdot (h \otimes m) := gh \otimes m$ et de l'action à droite par $(g \otimes m) \cdot h := gh \otimes h^{-1}m$. De plus, on a l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} k[\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n^{op}] \underset{k[\mathfrak{S}_n]}{\otimes} M(n) & \xrightarrow{\cong} & k[\mathfrak{S}_n] \otimes M(n) \\ (g,h) \otimes m & \longrightarrow & gh \otimes h^{-1}m, \end{array}$$

car, pour toutes permutations g et h dans $\mathfrak{S}_n$ et $m \in M(n)$, on a $(g,h) \otimes m = (ghh^{-1},h) \otimes m = (gh,1) \otimes h^{-1}m$ dans $k[\mathfrak{S}_n \otimes \mathfrak{S}_n^{op}] \underset{k[\mathfrak{S}_n]}{\otimes} M(n)$. Finalement,

$$\big(\mathrm{Ind}\, V\big)(m,n) \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ k[\mathfrak{S}_m] \otimes V(m) \;\cong\; k[\mathfrak{S}_m \otimes \mathfrak{S}_m^{op}] \underset{k[\mathfrak{S}_m]}{\otimes} V(m) & \text{sinon} \end{cases}$$

où le morphisme $\mathfrak{S}_m \to \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m^{op}$ est l'injection diagonale :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_m & \hookrightarrow & \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m^{op} \\ \sigma & \mapsto & (\sigma, \sigma^{-1}) \end{array}.$$

3.3.1.5 Proposition. *On a l'adjonction*

$$\mathrm{Ind} : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \rightleftarrows \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k : \mathrm{Res}.$$

Démonstration. Découle du théorème classique [Ser71, Th.13]. □

3.3.1.6 Corollaire. *Le foncteur* Ind *commute aux colimites.*

Démonstration. Le foncteur Ind possède un adjoint à droite. □

On a l'une des propriétés fondamentales du foncteur Ind, qui sera cruciale dans les chapitres 4 et 6.

3.3.1.7 Proposition. *Le foncteur* Ind *est exact. En particulier, il préserve les quasi-isomorphismes.*

Démonstration. Découle directement de la remarque 3.3.1.3 ; plus généralement, pour G un groupe fini et H un sous-groupe de G, $k[G]$ est $k[H]$-libre. □

3.3.2 Compatibilité avec les produits

Dans cette sous-section, on démontre les compatibilités du foncteur Ind avec les différents produits définis dans le début de ce chapitre. Pour commencer, le foncteur Ind respecte le produit de composition.

3.3.2.1 Proposition. *On note* $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{\mathrm{Ind}}$*, la sous-catégorie pleine des objets de la forme* $\mathrm{Ind}\,V$*. Alors* $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{\mathrm{Ind}}, \square)$ *est une catégorie monoïdale symétrique et le foncteur d'induction*

$$\mathrm{Ind} : (\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \square) \longrightarrow (\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{\mathrm{Ind}}, \square)$$

est monoïdal symétrique.

Démonstration. Soient V et W deux $\mathfrak{S}$-modules et S et E deux ensembles finis. On a

$$\big(\mathrm{Ind}\,V \square \mathrm{Ind}\,W\big)(S,E) \cong \int^{T\in\mathtt{Fin}} \mathrm{Ind}\,V(S,T) \otimes \mathrm{Ind}\,W(T,E)$$

or, par la remarque 3.3.1.3, si $S \cong E$, on a

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{Ind}\,V \square \mathrm{Ind}\,W\big)(S,E) \cong& k[\mathrm{Aut}(S)] \otimes V(S) \otimes k[\mathrm{Aut}(T)] \otimes W(T)\\ \cong& k[\mathrm{Aut}(S)] \otimes V(S) \otimes W(S)\\ \cong& \mathrm{Ind}\,\big(V \square W\big)(S,E)\end{aligned}$$

□

3.3.2.2 Corollaire. *Soit* M *un* $\mathfrak{S}$*-module réduit. On a l'isomorphisme naturel de* $\mathfrak{S}$*-bimodules suivant :*

$$\mathbb{T}_\square\big(\mathrm{Ind}(M)\big) \cong \mathrm{Ind}\big(\mathbb{T}_\square(M)\big)$$

où $\mathbb{T}_\square$ *désigne le monoïde associatif unitaire libre pour le produit monoïdal* $\square$*.*

3.3.2.3 Corollaire. *Le foncteur*

$$\mathrm{Res} : \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}, \square\big) \longrightarrow \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \square\big)$$

est lax-monoidal.

Démonstration. Par adjonction des foncteurs Ind et Res, cela découle de la propriété A.1.0.5. □

3.3.2.4 Remarque. Le foncteur Res n'est pas fortement monoïdal. Par exemple, on considère P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules définis par

$$P(S,E) := \begin{cases} k & \text{si } |S|=1 \text{ et } |E|=1 \text{ ou } 2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad Q(S,E) := \begin{cases} k & \text{si } |E|=1 \text{ et } |S|=1 \text{ ou } 2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

alors $\mathrm{Res}\,(P \square Q)(\{*\}) = k^2$ et $\big(\mathrm{Res}\,P \square \mathrm{Res}\,Q\big)(\{*\}) = k$.

3.3.2.5 Remarque. On a donc l'adjonction *monoïdale*

$$\mathrm{Ind} : \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \square\big) \rightleftarrows \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}, \square\big) : \mathrm{Res}.$$

Le foncteur Ind respecte également le produit de concaténation.

3.3.2.6 Proposition. *Le foncteur d'induction* $\mathrm{Ind} : (\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \otimes^{conc}) \to (\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}, \otimes^{conc})$ *est monoïdal symétrique.*

Démonstration. Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits et S et E deux ensembles finis. On a les isomorphismes de complexes :

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{Ind}\, P \otimes^{conc} \mathrm{Ind}\, Q\big)(S,E) &\cong \bigoplus_{(I,J)\in\mathbb{Y}_2^{ord}(S,E)} \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(J_1,I_1)\times\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(J_2,I_2)} P(J_1)\otimes Q(J_2)\\ &\cong \bigoplus_{J\in\mathcal{Y}_2^{ord}(E)} \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(J_1\amalg J_2,S)} P(J_1)\otimes Q(J_2)\\ &\cong \mathrm{Ind}\,\big(P\otimes^{conc} Q\big)(S,E).\end{aligned}$$

□

3.3.2.7 Proposition. *Le foncteur*

$$\mathrm{Res} : \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}, \otimes^{conc}\big) \longrightarrow \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \otimes^{conc}\big)$$

est lax-monoïdal.

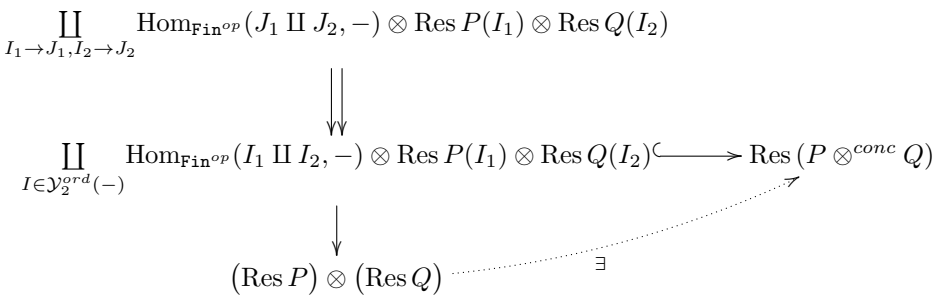
Démonstration. Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules. On a les injections naturelles

$$\begin{aligned}&\coprod_{I\in\mathcal{Y}_2^{ord}(-)} \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}^{op}}(I_1\amalg I_2,-)\otimes \mathrm{Res}\, P(I_1)\otimes \mathrm{Res}\, Q(I_2)\\ &\quad= \coprod_{I\in\mathcal{Y}_2^{ord}(-)} \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}^{op}}(I_1\amalg I_2,-)\otimes P(I_1,I_1)\otimes Q(I_2,I_2)\\ &\quad\hookrightarrow \coprod_{I\in\mathcal{Y}_2^{ord}(-)} \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}\times\mathtt{Fin}^{op}}\big((I_1\amalg I_2, I_1\amalg I_2),\Delta(-)\big)\otimes P(I_1,I_1)\otimes Q(I_2,I_2)\\ &\quad\hookrightarrow \coprod_{(I,J)\in\mathbb{Y}_2^{ord}(-)} \mathrm{Hom}_{Fin\times\mathtt{Fin}^{op}}\big((I_1\amalg I_2, J_1\amalg J_2),\Delta(-)\big)\otimes P(I_1,J_1)\otimes Q(I_2,J_2)\end{aligned}$$

ce qui implique l'injection naturelle

$$\coprod_{I\in\mathcal{Y}_2^{ord}(-)} \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}^{op}}(I_1\amalg I_2,-)\otimes \mathrm{Res}\, P(I_1)\otimes \mathrm{Res}\, Q(I_2) \hookrightarrow \mathrm{Res}\,\big(P\otimes^{conc} Q\big).$$

De plus, on a le diagramme commutatif



donc, par propriété universelle du coend, on a un morphisme naturel

$$\mathrm{Res}\, P \otimes^{conc} \mathrm{Res}\, Q \longrightarrow \mathrm{Res}\,(P \otimes^{conc} Q).$$

□

3.3.2.8 Remarque. Le foncteur Res n'est pas monoïdal strict. En effet, si l'on considère P et Q les $\mathfrak{S}$-bimodules donnés par

$$P(S,E) := \begin{cases} k & \text{si } |E| = 2 \text{ et } |S| = 1; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad Q(S,E) := \begin{cases} k & \text{si } |S| = 2 \text{ et } |E| = 1; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\mathrm{Res}\, P \otimes^{conc} \mathrm{Res}\, Q = 0$, tandis que $\mathrm{Res}\,(P \otimes^{conc} Q)(S) = k$ si le cardinal de S est 3.

On a la propriété suivante de compatibilité entre les foncteurs $\mathbb{S}(-)$ et $\mathrm{Ind}(-)$.

3.3.2.9 Proposition. *Soit P un $\mathfrak{S}$-module réduit. Alors, on a l'isomorphisme naturel de $\mathfrak{S}$-bimodules réduits :*

$$\mathrm{Ind}\big(\mathbb{S}(P)\big) \cong \mathbb{S}\big(\mathrm{Ind}(P)\big).$$

Démonstration. Le foncteur Ind commute au produit de concaténation $\otimes^{conc}$ et est compatible avec la symétrie par la proposition 3.3.2.6. On conclut alors par l'exactitude du foncteur Ind. □

Le foncteur Ind est également monoïdal pour les produits de compositions connexes : c'est l'un des résultats centraux de ce chapitre. Il motive à lui seul la définition du produit de composition connexe sur la catégorie des $\mathfrak{S}$-modules et est essentiel pour le chapitre 4.

3.3.2.10 Théorème. *Le foncteur d'induction*

$$\mathrm{Ind} : \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c\big) \longrightarrow \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}, \boxtimes_c\big)$$

est monoïdal.

Démonstration. Pour commencer, si on note I le $\mathfrak{S}$-module réduit défini par

$$I(S) := \begin{cases} k & \text{si } |S| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

alors $(\mathrm{Ind}I)(S,E) = k$ si $|S| = 1 = |E|$ et 0 sinon. Donc le foncteur Ind respecte l'unité. Soient deux

$\mathfrak{S}$-modules réduits V et W ainsi que S et E deux ensembles finis.

$$\Big(\mathrm{Ind}V \boxtimes_c \mathrm{Ind}W\Big)(S,E) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{(\{I,K'\},\{K'',J\})\in\mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}(S,E)} \bigotimes_{\alpha} \mathrm{Ind}V(I_\alpha,K'_\alpha) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} \bigotimes_{\beta} \mathrm{Ind}W(K''_\beta,J_\beta)$$
$$\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{(\{I,K'\},\{K'',J\})\in\mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}(S,E)} \bigotimes_{\alpha} \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(K'_\alpha,I_\alpha)} V(K'_\alpha) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} \bigotimes_{\beta} \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(J_\beta,K''_\beta)} W(J_\beta).$$

Notons que le terme de droite est non-nul si et seulement si $I_\alpha \cong K'_\alpha$ pour tout α et $K''_\beta \cong J_\beta$ pour tout β. Cela implique en particulier que $(\mathrm{Ind}V \boxtimes_c \mathrm{Ind}W)(S,E) = 0$ si $|S| \neq |E|$.

$$\Big(\mathrm{Ind}V \boxtimes_c \mathrm{Ind}W\Big)(S,E) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{\substack{(\{I,K'\},\{K'',J\})\\ \in\mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}(S,E)}} \prod_\alpha \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(K'_\alpha,I_\alpha)\times\prod_\beta \mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(J_\beta,K''_\beta) \bigotimes_{\alpha} V(K'_\alpha) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} \bigotimes_{\beta} W(J_\beta)$$
$$\cong \bigoplus_{r,s,n\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{\substack{I\in Y_r(S),J\in Y_s(E)\\ (K',K'')\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}_{r,s}([\![1,n]\!])\\ I_\alpha\cong K'_\alpha, K''_\beta\cong J_\beta}} \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}([\![1,n]\!],S)\times\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,[\![1,n]\!])} \bigotimes_{\alpha} V(K'_\alpha) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} \bigotimes_{\beta} W(J_\beta)$$
$$\cong \bigoplus_{r,s,n\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{\substack{I\in Y_r(S),J\in Y_s(E)\\ (K',K'')\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}_{r,s}([\![1,n]\!])\\ I_\alpha\cong K'_\alpha, K''_\beta\cong J_\beta}} \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,S)} \bigotimes_{\alpha} V(K'_\alpha) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} \bigotimes_{\beta} W(J_\beta)$$
$$\cong \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,S)} \bigoplus_{r,s,n\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{\substack{I\in Y_r(S),J\in Y_s(E)\\ (K',K'')\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}_{r,s}([\![1,n]\!])\\ I_\alpha\cong K'_\alpha, K''_\beta\cong J_\beta}} \bigotimes_{\alpha} V(K'_\alpha) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} \bigotimes_{\beta} W(J_\beta)$$
$$\cong \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,S)} \bigoplus_{r,s\in\mathbb{N}^*} \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}_{r,s}(E)} \bigotimes_{\alpha} V(I_\alpha) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} \bigotimes_{\beta} W(J_\beta)$$
$$\cong \mathrm{Ind}\,\big(V \boxtimes_c W\big)(S,E).$$

□

3.3.2.11 Corollaire. *Le foncteur*

$$\mathrm{Res} : \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}, \boxtimes_c\big) \longrightarrow \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c\big)$$

est lax-monoïdal.

Démonstration. Découle de la propriété A.1.0.5. □

3.3.2.12 Corollaire. *Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits. On a l'isomorphisme naturel de $\mathfrak{S}$-bimodules réduits :*

$$\mathrm{Ind}\,\big(\mathbb{S}P \,\square\, \mathbb{S}Q\big) \cong \mathbb{S}\big(\mathrm{Ind}\,P\big) \,\square\, \mathbb{S}\big(\mathrm{Ind}\,Q\big).$$

Démonstration. Ind est monoïdal pour $\square$ par la proposition 3.3.2.1 et commute au foncteur $\mathbb{S}(-)$ par la proposition 3.3.2.9. □

3.4 Résumé

Pour des raisons de praticité, on résume ici les principaux définitions et résultats de ce chapitre.

Sur les $\mathfrak{S}$-modules

La catégorie $\mathfrak{S}$-$\mathtt{mod}^{réd}$ est munie des structures monoïdales suivantes :

▷ le produit de composition $\square$ (voir définition 3.1.2.1 page 93) défini, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits P et Q et tout ensemble fini S, par

$$\big(P \square Q\big)(S) := P(S) \otimes Q(S).$$

et d'unité $I_\square$, donnée par

$$I_\square(S) := k\ ;$$

▷ le produit (non-unitaire) de concaténation $\otimes^{conc}$ (voir définition 3.1.2.3 page 93) défini, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits P et Q et tout ensemble fini S non-vide, par

$$\big(P \otimes^{conc} Q\big)(S) := \bigoplus_{\{S',S''\}\in\mathcal{Y}_2^{ord}(S)} P(S') \otimes Q(S'')\ ;$$

▷ le produit de composition connexe $\boxtimes_c$ (voir définition 3.1.3.1 page 98) défini, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits P et Q et tout ensemble fini S, par

$$P \boxtimes_c Q(S) := \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigotimes_\alpha P(I_\alpha) \otimes \bigotimes_\beta Q(J_\beta),$$

d'unité I, donnée par

$$I(S) := \begin{cases} k & \text{si } |S| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\ ;$$

▷ le produit de composition des opérades $\circ$ (voir définition 3.2.4.1 page 113) défini, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits P et Q et tout ensemble fini S, par

$$P \circ Q(S) := \bigoplus_{\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}\in\mathcal{Y}(S)} P(A) \otimes \bigotimes_{\alpha\in A} Q(K_\alpha).$$

d'unité I.

Sur les $\mathfrak{S}$-bimodules

La catégorie $\mathfrak{S}$-$\mathtt{bimod}^{réd}$ est munie des structures monoïdales suivantes :

▷ le produit de composition $\square$ (voir définition 3.2.2.1 page 105) défini, pour tous $\mathfrak{S}$-bimodules réduits P et Q et tout couple d'ensembles S, E, par

$$\big(P \square Q\big)(S,E) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} P(S,[\![1,n]\!]) \underset{\mathfrak{S}_n}{\otimes} Q([\![1,n]\!],E)\ ;$$

où l'action de $\mathfrak{S}_n$ est induite par l'action sur $[\![1,n]\!]$, et d'unité $I_\square$, donnée par

$$I_\square(S,E) := \begin{cases} k[\mathrm{Aut}(S)] & \text{si } S \cong E \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

▷ le produit (non-unitaire) de concaténation $\otimes^{conc}$ (voir définition 3.2.2.6 page 106) défini, pour

tous $\mathfrak{S}$-bimodules réduits P et Q et tout couple d'ensembles S, E, par

$$\big(P \otimes^{conc} Q\big)(S,E) := \bigoplus_{(I,K)\in\mathbb{Y}_2^{\mathrm{ord}}(S,E)} P(I_1,K_1)\otimes Q(I_2,K_2)$$

▷ le produit de composition connexe $\boxtimes_c$ (voir définition 3.2.3.1 page 110) défini, pour tous $\mathfrak{S}$-bimodules réduits P et Q et tout couple d'ensembles S, E, par

$$\big(P \boxtimes_c Q\big)(S,E) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{(\{I,K'\},\{K'',J\})\in\mathbb{X}^{n,\mathrm{conn}}(S,E)} \bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha,K'_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta} Q(K''_\beta,J_\beta)\Big)\Big/_{\mathfrak{S}_n}$$

d'unité I, donnée par

$$I(S,E) := \begin{cases} k & \text{si } |S| = 1 = |E| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Sur le foncteur d'induction

Le foncteur d'induction, donné par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ind}: & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k & \longrightarrow & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k \\ & V & \longmapsto & \big(\mathrm{Ind}V\big)(S,E) := \bigoplus_{\mathrm{Hom}_{\mathtt{Fin}}(E,S)} V(E) \end{array} ,$$

est exact (voir proposition 3.3.1.7). De plus, il commute aux produits $\square$ (cf. proposition 3.3.2.1), $\otimes^{conc}$ (cf. proposition 3.3.2.6), et $\boxtimes_c$ (cf. théorème 3.3.2.10).

CHAPITRE 4

PRO(TO)PÉRADES

Dans la première section de ce chapitre, on commence par faire quelques rappels sur les notions d'opérade, de propérade et de prop, puis on présente (cf. section 4.2.1) un premier résultat de transfert de structures par le foncteur Ind. Le reste du chapitre sera consacré à l'étude des (co)monoïdes de la catégorie $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \boxtimes_c)$, appelés *(co)protopérades* (cf. section 4.2) : ce sont les objets qui sont au centre de ce chapitre et du suivant. La section 4.3 a pour but de construire (en utilisant [Val09]), et de décrire explicitement en terme de briques et de murs (cf. section 4.4.1), la (co)protopérade libre sur un $\mathfrak{S}$-module.

Une remarque importante. *Dans tout le chapitre, excepté dans la section 4.2.1, on construit pour la catégorie $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \boxtimes_c)$, un monoïde libre, une adjonction bar-cobar et une dualité de Koszul à la manière de Vallette, comme il l'a développé pour les propérades dans les articles [Val03, Val08, Val09] et avec son collaborateur Merkulov [MV09a, MV09b]. La plupart des constructions sont très similaires : pour cette raison, nous nous permettrons de nous référer aux énoncés de ce chapitre que ce soit pour leur version (co)protopéradique que leur version (co)propéradique. Si le lecteur souhaite consulter la version propéradique des résultats, il pourra se référer aux travaux précédemment cités. Afin de faciliter la lecture, nous avons, autant que possible, conservé les notations et donné une référence claire pour la version propéradique des résultats.*

4.1 Rappels sur les opérades, les propérades et les props

4.1.1 Définitions équivalentes de PROP

On rappelle la notion de PROP définie par MacLane dans [ML65], et redonnée par Markl dans [Mar08].

4.1.1.1 Définition. PROP – *définition originale* – [Mar08, Def. 54]
Un PROP est une catégorie monoïdale symétrique stricte $P = (P, \odot, \tau, \underline{0})$ enrichie sur la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ vérifiant les deux assertions suivantes :

(i) les objets de P sont identifiés avec $\mathbb{N}$, c'est à dire $\mathrm{Ob}P \cong \mathbb{N}$;

(ii) le produit $\odot$ satisfait $\underline{m} \odot \underline{n} = \underline{m+n}$ pour tout $\underline{m}, \underline{n} \in \mathrm{Ob}P$.

4.1.1.2 Remarque. On peut définir un PROP dans un cadre plus général comme étant une catégorie monoïdale symétrique stricte enrichie sur $\mathtt{C}$, où $(\mathtt{C}, \otimes, \sigma)$ est une catégorie monoïdale symétrique stricte possédant des coproduits finis (pour pouvoir construire un objet $\coprod_{\mathfrak{S}_n} \mathbb{1}_{\mathtt{C}}$ qui jouerait le rôle de $k[\mathfrak{S}_n]$).

Dans la suite de cette section, on fait le lien entre la définition précédente et une définition de props qui ressemble fortement à celle que l'on peut trouver dans [JY09, Sect. 8] : on décrit les props comme des monoïdes unitaires pour le produit $\square$ dans la catégorie des monoïdes non unitaires commutatifs pour le produit $\otimes^{conc}$ (cf. définition 4.1.1.3). Pour un PROP P et pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on note

$$P(m,n) := \mathrm{Hom}_P(\underline{n}, \underline{m}).$$

Par la structure symétrique τ de P et l'identification $\underline{m} \cong \mathbb{1}^{\odot m}$, pour tout entier naturel m, donnée par l'assertion (ii) de la définition, chaque $P(m,n)$ est muni d'une structure de $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n^{op}$-module. Par la suite, on note indifféremment P comme étant soit le PROP ou bien le $\mathfrak{S}$-bimodule sous-jacent. La composition catégorique $\circ$ et la structure symétrique τ nous fournissent les morphismes

$$\circ : P(m,n) \underset{k[\mathfrak{S}_n]}{\otimes} P(n,k) \longrightarrow P(m,k)$$

qui nous donnent finalement un morphisme dit *de composition*

$$\mu : P \square P \longrightarrow P$$

qui, par l'associativité de $\circ$, l'est également. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{id}_n \in P(n,n)$ et τ induisent les morphismes de $\mathfrak{S}_n$-bimodules $\iota_n : k[\mathfrak{S}_n] \to P(n,n)$ et donc l'existence d'une unité $\iota : I_\square \longrightarrow P$ où

$$I_\square(m,n) = \begin{cases} k[\mathfrak{S}_n] & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Le morphisme unité fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} I_\square \square P & \xrightarrow{\iota \square P} & P \square P & \xleftarrow{P \square \iota} & P \square I_\square \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow{\scriptstyle \mu} & \swarrow_{\cong} & \\ & & P, & & \end{array}$$

par l'axiome d'unité d'une catégorie enrichie ([Bor94, Def. 6.2.1]). Finalement, P est un monoïde unitaire dans la catégorie monoïdale $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{Bimod}_k, \square, I_\square)$. Le bifoncteur $- \odot -$ étant enrichi, on a les morphismes de structure c (pour concaténation) :

$$c : P(m_1,n_1) \otimes P(m_2,n_2) \longrightarrow P(m_1+m_2, n_1+n_2).$$

Par l'axiome d'associativité d'une catégorie enrichie, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Big(P(m_1,n_1) \otimes P(m_2,n_2)\Big) \otimes P(m_3,n_3) & \longrightarrow & P(m_1,n_1) \otimes \Big(P(m_2,n_2) \otimes P(m_3,n_3)\Big) \\ \downarrow{\scriptstyle c \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes c} \\ P(m_1+m_2, n_1+n_2) \otimes P(m_3,n_3) & \circlearrowleft & P(m_1,n_1) \otimes P(m_2+m_3, n_2+n_3) \\ & {\scriptstyle c} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle c} & \\ & P(m_1+m_2+m_3, n_1+n_2+n_3) & \end{array}$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
P(s_1,m_1)\otimes P(s_2,m_2)\otimes P(m_1,n_1)\otimes P(m_2,n_2) & \xrightarrow{c\otimes c} & P(m_1+m_2,m_1+m_2)\otimes P(m_1+m_2,n_1+n_2) \\
\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\tau\otimes 1}\cong & & \\
P(s_1,m_1)\otimes P(m_1,n_1)\otimes P(s_2,m_2)\otimes P(m_2,n_2) & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\
\downarrow{\scriptstyle \circ\otimes\circ} & & \\
P(s_1,n_1)\otimes P(s_2,n_2) & \xrightarrow{\qquad c \qquad} & P(s_1+s_2,n_1+n_2)
\end{array}$$

commute par l'axiome de composition du bifoncteur enrichi $-\odot-$ (cf. [Bor94, Def. 6.2.3]). Ainsi, le morphisme c est un morphisme de $\mathfrak{S}_{m_1}\times\mathfrak{S}_{m_2}$-module à gauche, la structure de $\mathfrak{S}_{m_1}\times\mathfrak{S}_{m_2}$-module sur $P(m_1+m_2,n_1+n_2)$ étant induite par $\mathfrak{S}_{m_1}\times\mathfrak{S}_{m_2}\hookrightarrow\mathfrak{S}_{m_1+m_2}$. Par le même type d'argument, c est un morphisme de $\mathfrak{S}_{n_1}\times\mathfrak{S}_{n_2}$-module à droite. Finalement, on a le morphisme

$$\bigoplus_{\substack{m_1+m_2=m\\ n_1+n_2=n}} k[\mathfrak{S}_{m_1+m_2}]\underset{k[\mathfrak{S}_{m_1}\times\mathfrak{S}_{m_2}]}{\otimes} P(m_1,n_1)\otimes P(m_2,n_2)\underset{k[\mathfrak{S}_{n_1}\times\mathfrak{S}_{n_2}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_{n_1+n_2}]\longrightarrow P(m_1+m_2,n_1+n_2)$$

qui munit P d'une structure de monoïde associatif dans la catégorie $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod},\otimes^{conc})$ i.e. P est muni d'un produit dit *de concaténation*

$$c : P\otimes^{conc} P\longrightarrow P.$$

Par l'axiome d'associativité d'une catégorie monoïdale, le produit de concaténation est associatif. Par naturalité de la structure symétrique de P, on a, pour tout $m_1,n_1,m_2,n_2\in\mathbb{N}$, $m:=m_1+m_2$, $n:=n_1+n_2$, $f\in P(m_1,n_1)$ et $g\in P(m_2,n_2)$, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\underline{m_1}\odot\underline{m_2} & \xrightarrow{\tau} & \underline{m_2}\odot\underline{m_1} \\
\downarrow{\scriptstyle f\odot g} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle g\odot f} \\
\underline{n_1}\odot\underline{n_2} & \xrightarrow[\tau]{} & \underline{n_2}\odot\underline{n_1}.
\end{array}$$

Donc le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc}
P(m_1,n_1)\otimes P(m_2,n_2) & \xrightarrow{c} & P(m_1+m_2,n_1+n_2) & \xrightarrow{\left(\tau_{\underline{m_1},\underline{m_2}}\right)^*} & \\
\downarrow{\scriptstyle\tau} & \circlearrowleft & \cong\ \vdots{\scriptstyle :=(12)^{m,n}} & & P(m_2+m_1,n_1+n_2) \\
P(m_2,n_2)\otimes P(m_1,n_1) & \xrightarrow[c]{} & P(m_2+m_1,n_2+n_1) & \xleftarrow{\left(\tau_{\underline{n_1},\underline{n_2}}\right)_*} &
\end{array}$$

et le produit associatif c est commutatif, c'est-à-dire que c induit le morphisme de structure $c : \mathbb{S}(P)\longrightarrow P$. Comme le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
k[\mathfrak{S}_m]\otimes k[\mathfrak{S}_n] & \xrightarrow{\iota_m\otimes\iota_n} & P(m,m)\otimes P(n,n) \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle c} \\
k[\mathfrak{S}_{m+n}] & \xrightarrow[\iota_{m+n}]{} & P(m+n,m+n),
\end{array}$$

alors le produit de concaténation est compatible avec l'unité du produit de composition, c'est-à-dire

que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} I_\square \otimes^{conc} I_\square & \xrightarrow{\iota\otimes\iota} & P \otimes^{conc} P \\ {\scriptstyle c}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle c} \\ I_\square & \xrightarrow[\iota]{} & P. \end{array}$$

Enfin, pour finir, par l'axiome d'associativité d'une catégorie enrichie ([Bor94, Def 6.2.1]), pour tous $m_i, n_i, k_i, \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2\}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} P(m_1,k_1)\otimes P(k_1,n_1)\otimes P(m_2,k_2)\otimes P(k_2,n_2) & & \xrightarrow{1\otimes\sigma\otimes 1} & & P(m_1,k_1)\otimes P(m_2,k_2)\otimes P(k_1,n_1)\otimes P(k_2,n_2) \\ {\scriptstyle \circ\otimes\circ}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle c\otimes c} \\ P(m_1,n_1)\otimes P(m_2,n_2) & & \circlearrowleft & & P(m_1+m_2,k_1+k_2)\otimes P(k_1+k_2,n_1+n_2) \\ & {\scriptstyle c}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \circ} & \\ & & P(m_1+m_2,n_1+n_2) & & \end{array}$$

commute, donc on a le diagramme commutatif de compatibilité entre les deux structures monoïdales suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \big(P\square P\big)\otimes^{conc}\big(P\square P\big) & & \xrightarrow{\Phi} & & \big(P\otimes^{conc}P\big)\square\big(P\otimes^{conc}P\big) \\ {\scriptstyle \mu\otimes\mu}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle c\,\square\, c} \\ P\otimes^{conc}P & & \circlearrowleft & & P\square P \\ & {\scriptstyle c}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \mu} & \\ & & P & & \end{array}$$

où Φ est l'injection construite à la proposition 3.2.2.9. On appelle également cette compatibilité *loi d'inter-échange*.

4.1.1.3 Définition. PROP – *définition équivalente*
On appelle *prop* un monoïde associatif unitaire (P, μ, c, ι) dans la catégorie monoïdale $\big(\mathtt{Com}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \otimes^{conc}), \square, I_\square\big)$ i.e. P est un $\mathfrak{S}$-bimodule muni :

(i) d'une structure de monoïde unitaire (P, μ, ι) dans la catégorie $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \square, I_\square\big)$;

(ii) d'une structure de monoïde associatif commutatif non-unitaire (P, c) dans la catégorie $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \otimes^{conc}\big)$;

(iii) cette dernière étant compatible avec l'unité de la première, i.e. faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} I_\square \otimes^{conc} I_\square & \xrightarrow{\iota\otimes\iota} & P \otimes^{conc} P \\ {\scriptstyle c}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle c} \\ I_\square & \xrightarrow[\iota]{} & P\ ; \end{array}$$

(iv) ces deux structures de monoïdes vérifiant la loi d'inter-échange

$$\begin{array}{ccccc} \big(P\square P\big)\otimes^{conc}\big(P\square P\big) & & \xrightarrow{\Phi} & & \big(P\otimes^{conc}P\big)\square\big(P\otimes^{conc}P\big) \\ {\scriptstyle \mu\otimes\mu}\downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow{\scriptstyle c\,\square\, c} \\ P\otimes^{conc}P & \xrightarrow[c]{} & P & \xleftarrow[\mu]{} & P\square P\ . \end{array}$$

On note $\mathtt{Prop} := \mathtt{As}^u\big(\mathtt{Com}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \otimes^{conc}), \square, I_\square\big)$ la catégorie des PROPs.

4.1.1.4 Remarque. Les points (iii) et (iv) traduisent le fait que $\mu : P \square P \to P$ est un morphisme de la catégorie $\mathtt{Com}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \otimes^{conc})$.

Cette définition est équivalente à celle de Markl donnée à la définition 4.1.1.1. En effet, on retrouve aisément la définition de Markl à partir de la définition 4.1.1.3 : si P est un PROP au sens de la définition 4.1.1.3, on construit une catégorie $\mathtt{C}$ en posant $\mathrm{Ob}\,\mathtt{C} = \mathbb{N}$ et, pour tout entier m et n, $\mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(m,n) = P(m,n)$ est un complexe de chaînes. La composition est donnée par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(s,n) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(m,s) & \hookrightarrow & \big(P \square P\big)(m,n) \\ \downarrow{\scriptstyle \circ} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(m,n) & = & P(m,n) \end{array}$$

l'associativité de la composition découlant de l'associativité du produit μ. La structure monoïdale de $\mathtt{C}$ est donnée par $m \odot n := m + n$ et la symétrie τ par l'action à gauche de $\mathfrak{S}_2$ sur $P(2,2)$.

4.1.2 Une première classe d'exemples : les opérades

On fait ici quelques brefs rappels sur les opérades (algébriques) en utilisant comme principale référence [LV12]. Pour la définition du produit monoïdal $\circ$, on pourra également se reporter à la section 3.2.4. On donne la définition d'opérade et de co-opérade :

4.1.2.1 Définition. *Opérade / Coopérade* – [LV12, Sect. 5.2.1]
Une *opérade* (algébrique, symétrique, différentielle graduée) (resp. *coopérade*) est un monoïde associatif unitaire (resp. comonoïde co-associatif counitaire) de la catégorie $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \circ, \mathbb{1})$.

4.1.2.2 Remarque. Les exemples d'opérades suivants sont, pour la plupart, définis par générateurs et relations. Pour une définition de l'opérade libre, le lecteur peut se référer à [LV12, Sect. 5.5] ou à la section 4.3.2, dans laquelle est définie la propérade libre.

4.1.2.3 Remarque. On peut définir une opérade à l'aide de compositions partielles. Soit P un $\mathfrak{S}$-module avec $\iota : k \to P(1)$: on note id l'image de 1 par ι. Par définition, une famille de *compositions partielles* de P est une famille de morphismes

$$- \circ_i - : P(m) \otimes P(n) \longrightarrow P(m+n-1),$$

pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, telle que les morphismes vérifient les compatibilités suivantes. Pour $\mu \in P(m)$, $\nu \in P(n)$, et $\lambda \in P(l)$, les compositions partielles vérifient :

- ▷ pour σ une permutation dans $\mathfrak{S}_n$, l'égalité

  $$\mu \circ_i (\nu \cdot \sigma) = (\mu \circ_i \nu) \cdot \sigma'$$

  avec $\sigma' \in \mathfrak{S}_{m+n-1}$, la permutation qui est l'identité, exceptée sur $[\![i, i+n-1]\!]$ où elle agit via σ ;
- ▷ pour σ une permutation dans $\mathfrak{S}_m$, l'égalité

  $$(\mu \cdot \sigma) \circ_i \nu = (\mu \circ_{\sigma(i)} \nu) \cdot \sigma''$$

  avec $\sigma'' \in \mathfrak{S}_{m+n-1}$, la permutation qui agit comme σ sur $[\![1, m+n-]\!] \backslash [\![i, i+n-1]\!]$ à valeurs dans $[\![1, m+n-1]\!] \backslash [\![\sigma(i), \sigma(i)+n-1]\!]$ et qui envoie $[\![i, i+n-1]\!]$ sur $[\![\sigma(i), \sigma(i)+n-1]\!]$ en respectant l'ordre ;

▷ une première condition d'associativité : pour $i \in [\![1, l]\!]$ et $j \in [\![1, m]\!]$,

$$(\lambda \circ_i \mu) \circ_{i+j-1} \nu = \lambda \circ_i (\mu \circ_j \nu) ;$$

▷ une seconde condition d'associativité : pour $1 \leqslant i < k \leqslant l$,

$$(\lambda \circ_i \mu) \circ_{k+m-1} \nu = (\lambda \circ_k \nu) \circ_i \mu ;$$

▷ une condition de compatibilité avec l'unité : on a $\mathrm{id} \underset{1}{\circ} \nu = \nu$ et pour tout $i \in [\![1, m]\!]$,

$$\mu \underset{i}{\circ} \mathrm{id} = \mu.$$

4.1.2.4 Proposition. (cf. [LV12, Prop. 5.3.4])
Un $\mathfrak{S}$-module est muni d'une structure d'opérade si et seulement s'il est muni d'une famille de compositions partielles $\{\circ_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant les conditions d'associativité précédentes.

§ 1 Exemples

(i) Pour tout complexe de chaînes C, on a l'opérade des endomorphismes $\underline{\mathrm{End}}_C$ définie par

$$\underline{\mathrm{End}}_C(n) := \underline{\hom}_{\mathtt{Ch}_k}(C^{\otimes n}, C),$$

où $\underline{\hom}$ est le hom interne de la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ et, par convention, $C^{\otimes 0} = k$. L'action à droite de $\mathfrak{S}_n$ sur $\underline{\mathrm{End}}_C(n)$ est induite par l'action à gauche sur $C^{\otimes n}$. On note également End_C l'opérade donnée par

$$\mathrm{End}_C(n) := \mathrm{Hom}_{\mathtt{Ch}_k}(C^{\otimes n}, C).$$

Cette opérade joue un rôle fondamental dans la définition d'une algèbre sur une opérade (cf. 4.1.2.3).

(ii) L'opérade $\mathcal{A}s$, qui encode la structure d'algèbre associative, est engendrée par le $\mathfrak{S}$-module :

$$V_{As} = V_{As}(2) := \mu.k \otimes k[\mathfrak{S}_2] = \quad \otimes k[\mathfrak{S}_2]$$

et est soumise à la relation quadratique suivante :

. (associativité)

(iii) L'opérade $\mathcal{C}om$ qui encode la structure d'algèbre associative commutative, est engendrée par le $\mathfrak{S}$-module :

$$V_{Com} = V_{Com}(2) := \mu.k \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2} = \quad \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2}$$

et, comme l'opérade $\mathcal{A}s$, est soumise à la relation d'associativité.

(iv) L'opérade $\mathcal{L}ie$ qui encode la structure d'algèbre de Lie, est engendrée par le $\mathfrak{S}$-module :

$$V_{Lie} = V_{Lie}(2) := [-,-].k \otimes sgn(\mathfrak{S}_2) = \quad \otimes sgn(\mathfrak{S}_2),$$

avec $sgn(\mathfrak{S}_2)$ la représentation signature du groupe à deux éléments, et soumise à la relation (quadratique) de Jacobi :

$$+ \quad + \quad = \quad 0. \qquad \text{(Jacobi)}$$

On a la base de $\mathcal{L}ie$ suivante (cf. [HV15, Sect. 4.2.1, Lem. 4.15]) :

$$\mathcal{B}^{\mathcal{L}ie} := \left\{ \quad \middle| \quad n \geqslant 2, \ \ \sigma \in \mathrm{Aut}(\llbracket 2, n \rrbracket) \right\}$$

et la composition de deux éléments de cette base, représenté par

$$,$$

est donnée par

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{S \subset \llbracket 1,m \rrbracket \\ |S|=k}} (-1)^k \quad ,$$

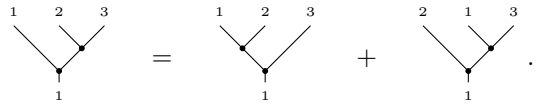
où

- ▷ les entrées entre i_0 et i_n sont dans le même ordre ;
- ▷ j_0 est à la $(n+2+k)$-ième position en partant du haut ;
- ▷ les entrées entre i_n et j_0 sont indexées par les j_l pour $l \in S$ avec l qui décroit du haut vers le bas ;
- ▷ les entrées en dessous de j_0 sont indexées par les j_l pour $l \notin S$ avec l qui croit du haut vers le bas.

(v) L'opérade $\mathcal{L}eib$ qui encode la structure d'algèbre de Leibniz (à gauche), est engendrée par le $\mathfrak{S}$-module :

$$V_{Leib} = V_{Leib}(2) := [-,-].k \otimes k[\mathfrak{S}_2] = \quad \otimes k[\mathfrak{S}_2]$$

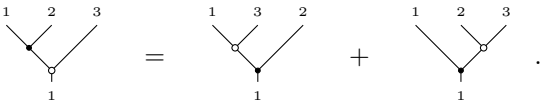
et est soumise à la relation (quadratique) de Leibniz :



(vi) L'opérade $\mathcal{P}ois$ qui encode la structure d'algèbre de Poisson, est engendrée par le $\mathfrak{S}$-module :

$$V_{\mathcal{P}ois} := V_{\mathcal{L}ie} \oplus V_{\mathcal{C}om} = \quad \otimes sgn(\mathfrak{S}_2) \quad \oplus \quad \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2}$$

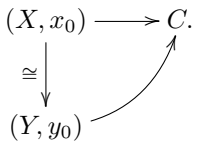
et est soumise aux relations d'associativité pour μ et de Jacobi pour le crochet $[-,-]$, ainsi qu'à la relation de dérivation :



(dérivation)

§ 2 Une généralisation : les opérades colorées

On introduit une version généralisée des opérades, les *opérades colorées*. Pour C un ensemble fini non vide, on pose la catégorie $\mathtt{Fin}^*_C$ qui a pour objets les applications d'ensembles $i_X : (X, x_0) \to C$ avec (X, x_0) un ensemble pointé (de point base x_0), et pour morphismes, les isomorphismes d'ensembles pointés faisant commuter les diagrammes



4.1.2.5 Définition. *Opérade colorée* – [VdL04, Déf. 3.2.5]
Une *opérade colorée* par C est un foncteur contravariant $\mathcal{O} : \mathtt{Fin}^*_C \longrightarrow \mathtt{Ch}_k$ muni d'une famille de compositions partielles

$$- \circ_x - : \mathcal{O}(X, x_0, i_X) \otimes \mathcal{O}(Y, y_0, i_Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X \cup_x Y, x_0, i_X \cup_x i_Y),$$

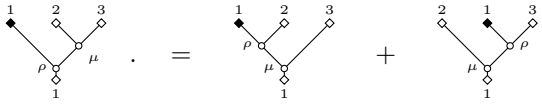
pour toute paire d'ensembles pointés (X, x_0) et (Y, y_0) et pour tout $x \in X \backslash \{x_0\}$ tel que $i_X(x) = i_Y(y_0)$, où l'application $i_X \cup_x i_Y : X \cup_x Y \to C$ est induite par les applications i_X et i_Y ; la famille de compositions partielles vérifient également les propriétés d'associativités et de compatibilités avec l'action des groupes symétriques et avec l'unité de même nature que celles des opérades (cf. remarque 4.1.2.3).

Pour une exposition (beaucoup) plus complète, le lecteur peut se référer à [VdL04, Yau16].

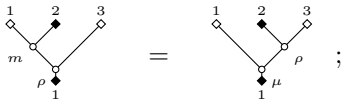
4.1.2.6 Exemple. L'opérade colorée $\mathcal{L}ie\mathcal{R}in$ qui encode la structure d'algèbre de Lie-Rinehart (cf. définition 2.1.1.1), est engendrée par le $\mathfrak{S}$-module :

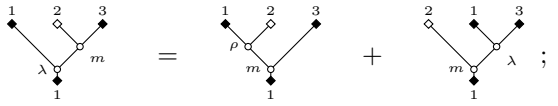
$$V_{\mathcal{L}ie\mathcal{R}in} := \quad \otimes sgn(\mathfrak{S}_2) \quad \oplus \quad \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2} \quad \oplus \quad \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2} \quad \oplus \quad \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2}$$

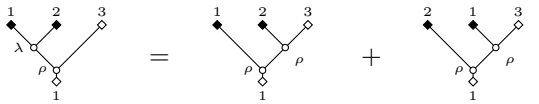
(où λ correspond au crochet de Lie, μ la structure d'algèbre, m la structure de A-module et ρ le morphisme d'ancre) et est soumise aux relations d'associativité pour μ, de Jacobi pour λ, ainsi qu'aux relations :


(dérivation)

(action d'algèbre)


(linéarité)


(règle de Leibniz)


(action d'algèbre de Lie)

§ 3 Algèbre sur une opérade

On commence par rappeler la définition du foncteur de Schur associé à un $\mathfrak{S}$-module.

4.1.2.7 Définition. *Foncteur de Schur* – [LV12, Sect. 5.1.2]
À tout $\mathfrak{S}$-module M, on associe son *foncteur de Schur* $\widetilde{M} : \mathtt{Ch}_k \to \mathtt{Ch}_k$ défini par

$$\widetilde{M}(V) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n},$$

où l'action à gauche de $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$ est donnée par

$$\sigma \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

4.1.2.8 Remarque. Soit $\mathcal{O}$ une opérade, c'est-à-dire un monoïde associatif unitaire dans la catégorie $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \circ)$. Alors l'endofoncteur de Schur $\widetilde{\mathcal{O}}$ possède une structure de *monade*, c'est-à-dire que l'endofoncteur $\widetilde{\mathcal{O}}$ est muni de deux transformations naturelles

$$\gamma : \widetilde{O} \circ \widetilde{O} \longrightarrow \widetilde{O} \quad \text{et} \quad I : \mathrm{id}_{\mathtt{Ch}_k} \longrightarrow \widetilde{O},$$

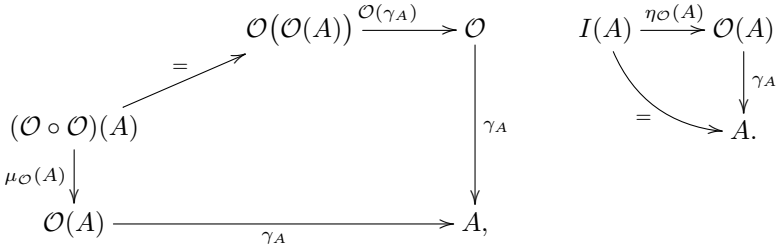
qui font commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{O}} \circ \widetilde{\mathcal{O}} \circ \widetilde{\mathcal{O}} & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{O}}\circ\gamma} & \widetilde{\mathcal{O}} \circ \widetilde{\mathcal{O}} \\ {\scriptstyle \gamma\circ\widetilde{\mathcal{O}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ \widetilde{\mathcal{O}} \circ \widetilde{\mathcal{O}} & \xrightarrow[\gamma]{} & \widetilde{\mathcal{O}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} \mathrm{id}_{\mathtt{Ch}_k} \circ \widetilde{\mathcal{O}} & \xrightarrow{I\circ\widetilde{\mathcal{O}}} & \widetilde{\mathcal{O}} \circ \widetilde{\mathcal{O}} & \xleftarrow{\widetilde{\mathcal{O}}\circ I} & \widetilde{\mathcal{O}} \circ \mathrm{id}_{\mathtt{Ch}_k}. \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow & \swarrow_{\cong} & \\ & & \widetilde{\mathcal{O}} & & \end{array}$$

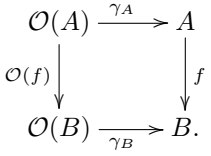
Inversement, si l'endofoncteur de Schur associé au $\mathfrak{S}$-module réduit M est muni d'une structure de

monade, alors M est muni canoniquement d'une structure d'opérade (cf. [LV12, Section 5.2]). Par la suite (notamment dans la définition suivante), on ne fera pas la différence entre une opérade et son foncteur de Schur.

4.1.2.9 Définition. *Algèbre sur une opérade* - [LV12, Sect. 5.2.3]
Soit $\mathcal{O}$ une opérade. Un complexe de chaîne A est une *algèbre sur l'opérade* $\mathcal{O}$, ou *$\mathcal{O}$-algèbre*, s'il est muni d'un morphisme de complexes $\gamma_A : \mathcal{O}(A) \to A$ tel que les diagrammes suivants commutent :



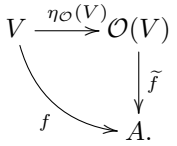
Soit B une autre $\mathcal{O}$-algèbre. Un *morphisme de $\mathcal{O}$-algèbres* est un morphisme de complexes $f : A \to B$ qui fait commuter le diagramme suivant :



On note $\mathcal{O}$-$\mathtt{Alg}_k$ la catégorie des $\mathcal{O}$-algèbres.

Pour toute opérade $\mathcal{O}$, il existe une $\mathcal{O}$-algèbre libre associée, qui est donnée par son foncteur de Schur :

4.1.2.10 Définition/Proposition. *$\mathcal{O}$-algèbre libre* – [LV12, Prop. 5.2.1]
Soit $\mathcal{O}$ une opérade. La $\mathcal{O}$-algèbre $\big(\mathcal{O}(V), \mu_{\mathcal{O}}(V)\big)$ munie de $\eta_{\mathcal{O}}(V) : V \to \mathcal{O}(V)$ est la $\mathcal{O}$-algèbre libre au dessus de V, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute $\mathcal{O}$-algèbre A et tout morphisme de complexes $f : V \to A$, il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}$-algèbre $\widetilde{f} : \mathcal{O}(V) \to A$ faisant commuter le diagramme suivant :



Autrement dit, le foncteur $\mathcal{O}(-) : \mathtt{Ch}_k \to \mathcal{O}$-$\mathtt{Alg}_k$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli : pour tout complexe de chaînes V et toute $\mathcal{O}$-algèbre A, on a la bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-}\mathtt{Alg}_k}\big(\mathcal{O}(V), A\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{Ch}_k}(V, A).$$

4.1.2.11 Exemples. (i) La catégorie $\mathcal{A}s$-$\mathtt{Alg}_k$ est équivalente à la catégorie des algèbres différentielles graduées associatives non-unitaires (cf. [LV12, Sect. 5.2.10 Ex. 1]).

(ii) La catégorie $\mathcal{C}om$-$\mathtt{Alg}_k$ est équivalente à la catégorie des algèbres différentielles graduées associatives commutatives non-unitaires (cf. [LV12, Sect. 5.2.10 Ex. 2]).

(iii) La catégorie $\mathcal{L}ie$-$\mathtt{Alg}_k$ (resp. $\mathcal{L}ieb$-$\mathtt{Alg}_k$) est équivalente à la catégorie des algèbres de Lie (resp. de Leibniz à gauche) différentielles graduées.

4.1.2.12 Proposition. [LV12, Prop. 5.2.2]
Soient $\mathcal{O}$ une opérade et A un complexe de chaînes. Une structure de $\mathcal{O}$-algèbre sur A est équivalente à un morphisme d'opérades $\mathcal{O} \to \mathrm{End}_A$.

Démonstration. Découle directement de l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k}\big(\mathcal{O}(n), \mathrm{Hom}_{\mathtt{Ch}_k}(A^{\otimes n}, A)\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{Ch}_k}\big(\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^{\otimes n}, A\big).$$

□

4.1.2.13 Proposition. [LV12, Sect. 5.2.4]
Soit $\alpha : \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ un morphisme d'opérades. Le morphisme α induit le foncteur de restriction

$$\alpha^* : \mathcal{P}\text{-}\mathtt{Alg}_k \longrightarrow \mathcal{O}\text{-}\mathtt{Alg}_k.$$

Démonstration. Soit V un complexe de chaînes. À tout morphisme d'opérades $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$, on associe de manière unique un morphisme d'opérades $\mathcal{O} \to \mathrm{End}_A$ par précomposition :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & & \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \searrow & \\ \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathrm{End}_A. \end{array}$$

□

4.1.2.14 Exemples. (i) La projection $\mathcal{A}s \twoheadrightarrow \mathcal{C}om$, qui envoie la représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$ sur sa représentation triviale, nous fournit le foncteur d'inclusion

$$\mathcal{C}om\text{-}\mathtt{Alg}_k \longrightarrow \mathcal{A}s\text{-}\mathtt{Alg}_k$$

(ii) Citons un résultat pour les opérades colorées issu de [VdL04]. L'application ensembliste $\varphi : \{B, W\} \to \{B\}$ (qui envoie les couleurs blanches et noires sur la couleur noire) permet de définir $\varphi^*\mathcal{P}ois$, l'opérade de Poisson à deux couleurs (cf. [VdL04, Ex. 3.2.7]). On a alors le résultat suivant :

4.1.2.15 Proposition. [VdL04, Prop. 3.6.2]

(i) Il existe un morphisme d'opérades à deux couleurs $\mathcal{L}ie\mathcal{R}in \to \varphi^*\mathcal{P}ois$.

(ii) Ce morphisme induit une adjonction

$$L : (\varphi^*\mathcal{P}ois)\text{-}\mathtt{Alg} \leftrightarrows \mathcal{L}ie\mathcal{R}in\text{-}\mathtt{Alg} : R,$$

avec $L(P) = (P, P)$ et son adjoint à droite $(A, M) \mapsto A \oplus M$, où la multiplication et le crochet de Lie sur $A \oplus M$ sont données par

$$(a, m) \cdot (b, n) := (ab, a \cdot n + b \cdot m) \quad \textit{et} \quad [(a, m), (b, n)] := (\rho(X)(b) - \rho(Y)(a), [X, Y]).$$

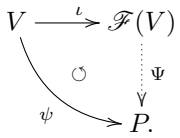
4.1.2.16 Remarque. Ce résultat montre que la propriété 2.1.1.3 est de nature opéradique.

4.1.3 Une classe d'exemples plus large : les propérades

On définit à présent les *propérades*, objets qui encodent les opérations à plusieurs entrées et plusieurs sorties comme par exemple, les algèbres de Frobenius, qui sont au centre de problèmes actuels en symétrie miroir.

4.1.3.1 Définition. *Propérade / Copropérade* – [Val03, Chap.2 Sect.3.1]
Une *propérade* (P, μ, ι) (resp. une *copropérade* (C, Δ, ν)) est un objet de la catégorie $\mathtt{As}^u(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}, \boxtimes_c, I)$ (resp. un objet de $\mathtt{coAs}^u(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}, \boxtimes_c, I)$). On note $\mathtt{properade}_k$ (resp. $\mathtt{coproperade}_k$) la catégorie des propérades (resp. copropérades).

4.1.3.2 Proposition. [Val03, Lem. 49, Thm. 23]
Pour tout $V \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$, il existe la propérade libre $\mathscr{F}(V)$ qui vérifie la propriété universelle suivante : pour toute propérade P et tout morphisme $\psi : V \to P$ de $\mathfrak{S}$-bimodules, il existe un unique morphisme de propérades Ψ qui fait commuter le diagramme suivant :



4.1.3.3 Remarque. Comme dans la section 4.1.2 sur les opérades, les exemples suivants sont, pour la plupart, définis par générateurs et relations. Pour une définition de la propérade libre, le lecteur peut se référer à [Val03], [Val09] ou à la section 4.3.2.

§ 1 Exemples

(i) Toute opérade est en particulier une propérade. On a le foncteur $(-)^{pr}$, défini en 3.2.4, qui relie opérade et propérade :

$$(-)^{pr} : \quad \mathtt{Operades} \quad \longrightarrow \quad \mathtt{properades}$$

induit par le foncteur monoïdal $(-)^{pr} : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \to \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$ qui envoie un $\mathfrak{S}$-module V sur

$$V^{pr}(m,n) = \begin{cases} V(n) & \text{si } m = 1; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(ii) On a également l'exemple dual : toute coopérade est en particulier une copropérade par le foncteur

$$(-)^{copr} : \quad \mathtt{Cooperades} \quad \longrightarrow \quad \mathtt{coproperades} \ .$$

induit par le foncteur monoïdal $(-)^{copr} : (\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \circ) \to (\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \boxtimes_c)$ qui envoie un $\mathfrak{S}$-module V sur donné par

$$V^{copr}(m,n) = \begin{cases} V(m) & \text{si } n = 1 \ ; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(iii) Pour C un complexe de chaîne, la propérade $\underline{\mathrm{End}}(C)$ est donnée par

$$\underline{\mathrm{End}}(C)(n,m) := \underline{\hom}_{\mathtt{Ch}_k}(C^{\otimes m}, C^{\otimes n}),$$

où $\underline{\hom}_{\mathtt{Ch}_k}$ est le hom-interne de $\mathtt{Ch}_k$, l'action de $\mathfrak{S}_m^{op} \times \mathfrak{S}_n$ est induite par la structure symétrique de la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ et où les morphismes de compositions sont induits par la composition catégorique de $\mathtt{Ch}_k$ enrichie.

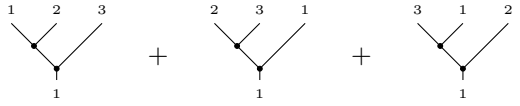
(iv) Les propérades $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie^{\diamond}$ codent respectivement les bigèbres de Lie et les bigèbres de Lie involutives. Ces propérades sont engendrées par :

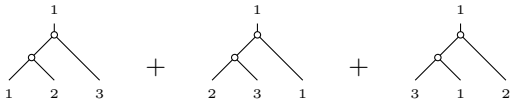
$$V_{\mathcal{B}i\mathcal{L}ie}(1,2) := \mu.k \otimes sgn(\mathfrak{S}_2) =$$ $$\otimes\, sgn(\mathfrak{S}_2)$$

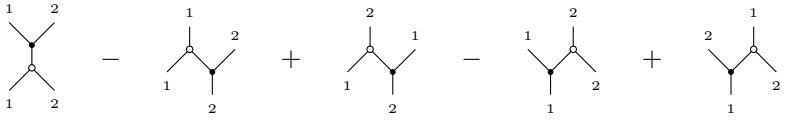
$$V_{\mathcal{B}i\mathcal{L}ie}(2,1) := \Delta.k \otimes sgn(\mathfrak{S}_2) =$$ $$\otimes\, sgn(\mathfrak{S}_2)$$

$$V_{\mathcal{B}i\mathcal{L}ie}(m,n) := 0 \quad \text{sinon}$$

et sont soumises aux relations quadratiques suivantes :

 (Jacobi)

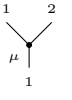
 (co-Jacobi)

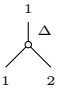
 (BiLie)

La propérade $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie^{\diamond}$ est, de plus, soumise à la relation

(Involution)

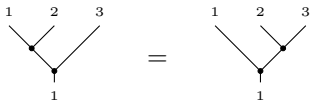
(v) Les propérades $\mathcal{F}rob$ et $\mathcal{F}rob^{\diamond}$ qui codent respectivement les algèbres de Frobenius non-unitaires et les algèbres de Frobenius non-unitaires involutives sont engendrées par le $\mathfrak{S}$-bimodule V_{Frob} défini par :

$$V_{\mathcal{F}rob}(1,2) := \mu.k \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2} =$$  $$\otimes\, \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2}$$

$$V_{\mathcal{F}rob}(2,1) := \Delta.k \otimes \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2} =$$  $$\otimes\, \mathbb{1}_{\mathfrak{S}_2}$$

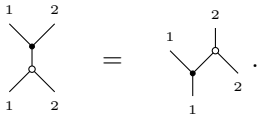
$$V_{\mathcal{F}rob}(m,n) := 0 \quad \text{sinon}$$

et sont soumises aux relations (quadratiques) suivantes :



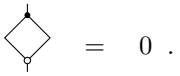
(Associativité)

(Co-associativité)



(Frobenius)

La propérade $\mathcal{F}rob^{\diamond}$ est de plus soumise à la relation



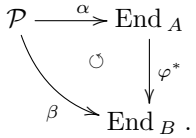
(Involution)

Pour une étude de ces propérades, le lecteur pourra se référer à [CMW16].

§ 2 Algèbre sur une propérade

Pour définir la notion d'algèbre sur une propérade, on généralise la notion d'algèbre sur une opérade.

4.1.3.4 Définition. *Algèbre sur une propérade* – [Val03, Chap.2 Sect. 3.5]
Soit $\mathcal{P}$ une propérade. Une structure d'*algèbre sur la propérade* $\mathcal{P}$, ou de $\mathcal{P}$-algèbre, sur un complexe de chaînes A, est la donnée d'un morphisme de propérades $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$. Soient $\alpha : \mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$ et $\beta : \mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$ deux $\mathcal{P}$-algèbres ; un morphisme $\varphi : A \longrightarrow B$ de complexes est un *morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres* si le morphisme induit $\varphi^* : \mathrm{End}_A \to \mathrm{End}_B$ fait commuter le diagramme suivant :



4.1.3.5 Remarque. Notons que, contrairement au cas opéradique, il n'existe pas de notion de $\mathcal{P}$-algèbre libre pour $\mathcal{P}$ une propérade.

4.1.3.6 Proposition. [Val03, Prop. 46]
Soit $\mathcal{P}$ une propérade. Un complexe de chaînes V est une $\mathcal{P}$-algèbre si et seulement s'il existe un morphisme de $\mathfrak{S}$-bimodules

$$\mu_V : \mathcal{P} \boxtimes_c V \longrightarrow T(V)$$

avec $T(V)$ est le $\mathfrak{S}$-bimodule donné par $T(V)(m,n) := V^{\otimes m}$ où l'action de $\mathfrak{S}_n$ est triviale et l'action

de $\mathfrak{S}_m$ est donné par les permutations des variables ; μ_V est tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \boxtimes_c \mathcal{P} \boxtimes_c V \arrow[r, "\mathcal{P}\boxtimes_c \mu_V"] \arrow[d, "\mu\boxtimes_c V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{P} \boxtimes_c T(V) \arrow[d, "T(\mu_V)"] \\
\mathcal{P} \boxtimes_c V \arrow[r, "\mu_V"'] & T(V),
\end{tikzcd}$$

où $T(\mu_V)$ est l'unique extension du μ_V par concaténation.

4.1.4 Les exemples centraux

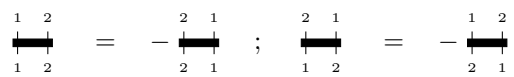
Le but de cette section est de définir la propérade $\mathcal{DL}ie$ qui encode la structure double-Lie.

§ 1 La propérade $\mathcal{DL}ie$

On pose $\mathscr{F}(V_{\mathcal{DL}ie})$ la propérade libre engendrée par le $\mathfrak{S}$-bimodule $V_{\mathcal{DL}ie} := \{V(m,n)\}_{m,n\geqslant 1}$ donné par

$$V_{\mathcal{DL}ie}(m,n) = \left\{ \begin{array}{cc} sgn(\mathfrak{S}_2) \uparrow_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_2^{op}} & \text{si } m = 2 = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right\} = \mathrm{Ind}\big(sgn(\mathfrak{S}_2)\big)(m,n)$$

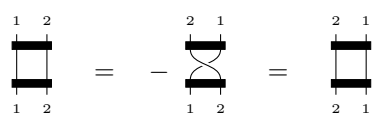
avec $sgn(\mathfrak{S}_2)$ la représentation signature de $\mathfrak{S}_2$, ce que l'on représente sous forme diagrammatique de la manière suivante

$V_{\mathcal{DL}ie} =$ span $\Big\langle$  $\Big\rangle$.

Comme $V_{\mathcal{DL}ie}$ est concentré en arité $(2,2)$, le sous-$\mathfrak{S}$-bimodule de poids $(2)_V$ (pour une définition de la graduation par le poids, on se réfère à la section 4.3.2) de $\mathscr{F}(V_{\mathcal{DL}ie})$ est donc concentré en arité $(2,2)$ et $(3,3)$:

$$\mathscr{F}_{(2)}(V_{\mathcal{DL}ie}) = \mathscr{F}_{(2)}(V_{\mathcal{DL}ie})(2,2) \oplus \mathscr{F}_{(2)}(V_{\mathcal{DL}ie})(3,3).$$

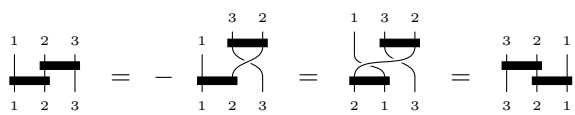
Par anti-symétrie du générateur, on a l'identité

 ; (4.1.1)

donc on a l'identité

$$\mathscr{F}_{(2)}(V_{\mathcal{DL}ie})(2,2) = \mathbb{1}(\mathfrak{S}_2) \uparrow_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_2^{op}}$$

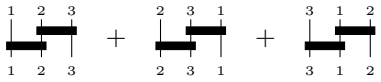
avec $\mathbb{1}(\mathfrak{S}_2)$ la représentation triviale de $\mathfrak{S}_2$. Pour le terme en aritée $(3,3)$ et en poids 2 de $\mathscr{F}(V_{\mathcal{DL}ie})$, on a, toujours par anti-symétrie du générateur de $V_{\mathcal{DL}ie}$, l'identité :

 (4.1.2)

donc le sous-$\mathfrak{S}$-bimodule de poids 2 de $\mathscr{F}(V_{\mathcal{DL}ie})$ vérifie en aritée $(3,3)$ l'identité suivante :

$$\mathscr{F}_{(2)}(V_{\mathcal{DL}ie})(3,3) \cong k[\mathfrak{S}_3^{op} \times \mathfrak{S}_3].$$

On pose également $\langle R_{\mathcal{DJ}} \rangle \subset \mathscr{F}_{(2)}(V) \subset \mathscr{F}(V)$, l'idéal engendré par la relation de double-Jacobi :

$R_{\mathcal{DJ}}$:  $= 0$.

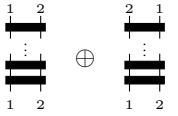
En terme de représentations, on a

$$\langle R_{\mathcal{DJ}} \rangle = \mathbb{1} \uparrow_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}^{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3^{op}} \hookrightarrow k[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}] \uparrow_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}^{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3^{op}} = k[\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3^{op}] \subset \mathscr{F}_{(2)}(V).$$

Par définition, la propérade $\mathcal{DL}ie$ est la propérade quadratique :

$$\mathcal{DL}ie := \mathscr{F}(V_{\mathcal{DL}ie}) \big/ \langle R_{\mathcal{DJ}} \rangle.$$

La propérade $\mathcal{DL}ie$ est naturellement graduée par le poids, où les éléments de $V_{\mathcal{DL}ie}$ sont de poids 1. Par définition de $R_{\mathcal{DJ}}$ et par une généralisation de l'identité (4.1.1), on a, pour tout $\rho \geqslant 1$,

$\mathcal{DL}ie_{(\rho)}(2,2) =$  $=$ $\begin{cases} sgn(\mathfrak{S}_2) \uparrow_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2^{op}} & \text{si } \rho \text{ est impair} \\ \mathbb{1} \uparrow_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2^{op}} & \text{si } \rho \text{ est pair} \end{cases}$ (4.1.3)

où chaque "colonne" est un empilement de ρ double-crochets.

4.1.4.1 Remarque. Le $\mathfrak{S}_2$-bimodule $\mathcal{DL}ie(2,2)$ n'est pas de dimension finie.

4.1.4.2 Proposition. *On a l'équivalence de catégories*

$$0\text{-}\mathtt{DLie}_k \cong \mathcal{DL}ie\text{-}\mathtt{Alg},$$

où, $0\text{-}\mathtt{DLie}_k$ *est la catégorie des algèbres double Lie de degré* 0 *dans la catégorie des complexes de chaînes (cf. définition 1.2.1.6).*

§ 2 La propérade $\mathcal{DC}om$

On a défini la propérade $\mathcal{DL}ie$ comme la propérade $\mathscr{F}(V_{\mathcal{DL}ie}) \big/ \big\langle R_{\mathcal{DJ}} \big\rangle$: on lui associe sa duale de Koszul (cf. définition 5.2.3.6), que l'on nomme $\mathcal{DC}om$:

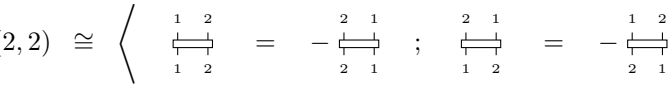
$$\mathcal{DC}om := \mathscr{F}(V_{\mathcal{DL}ie}^*) \big/ \big\langle R_{\mathcal{DJ}}^{\perp} \big\rangle \qquad (= \mathcal{DL}ie^{!} \text{ cf. section 5.2.3}),$$

où V^* est le dual linéaire de V et, pour $R \subset \mathscr{F}^{(2)}(V)$, $R^{\perp}$ est l'orthogonal de R dans $\mathscr{F}^{(2)}(V^*)$. Le $\mathfrak{S}$-bimodule $V_{\mathcal{DL}ie}^*$ s'identifie à

$$V_{\mathcal{DL}ie}^*(m,n) := \left\{ \begin{array}{cc} sgn(\mathfrak{S}_2) \uparrow_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2^{op}} & \text{si } m = 2 = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right\} = \mathrm{Ind}\big(sgn(\mathfrak{S}_2)\big)(m,n).$$

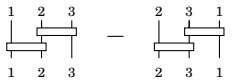
Donc finalement, comme dans le cas de la propérade $\mathcal{DL}ie$, on interprète $V^*_{\mathcal{DL}ie}(2,2)$ diagrammatiquement de la manière suivant

$$V^*_{\mathcal{DL}ie}(2,2) \cong \left\langle \quad = \; - \quad ; \quad = \; - \quad \right\rangle.$$



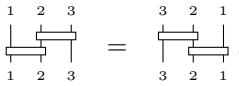
On a également les relations :

$$R^{\perp}_{\mathcal{DJ}} : \quad - \quad = 0 \; ; \quad = 0 \; .$$



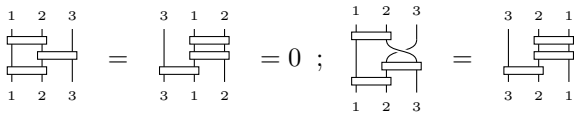
Par la deuxième relation dans $\mathcal{R}^{\perp}_{\mathcal{DL}ie}$, on a directement que $\mathcal{DC}om(2,2) = \mathcal{DC}om_{(1)}(2,2) = V^*_{\mathcal{DL}ie}$. Étudions à présent le $\mathfrak{S}$-bimodule $\mathcal{DC}om(3,3)$. Comme dans le cas de $\mathcal{DL}ie$, par l'identité (4.1.2), on a la relation :

$$= \; .$$



Si l'on regarde les élements de poids 3 dans $\mathcal{DC}om$, on a, par la première relation $R^{\perp}_{\mathcal{DL}ie}$, les deux égalités suivantes :

$$= \quad = 0 \; ; \quad = \quad = 0.$$



On en déduit que le $\mathfrak{S}$-bimodule $\mathcal{DC}om(3,3)$ est réduit à sa composante de poids deux, i.e.

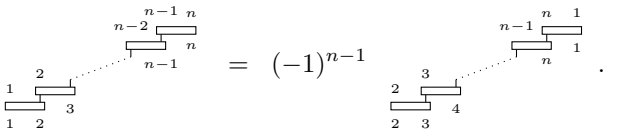
$$\mathcal{DC}om(3,3) = \mathcal{DC}om_{(2)}(3,3).$$

Le but de la suite est de montrer que ce résultat est vrai en toute arité de $\mathcal{DC}om$, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$\mathcal{DC}om(n,n) = \mathcal{DC}om_{(n-1)}(n,n).$$

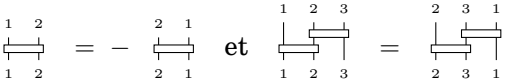
4.1.4.3 Lemme. *Tout "escalier montant" d'aritée n est invariant au signe près sous l'action diagonale de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 2$*

$$= (-1)^{n-1} \quad .$$

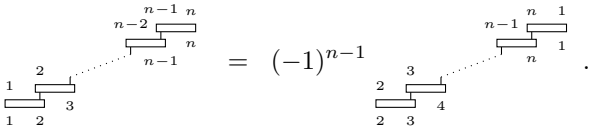


Démonstration. On raisonne par récurrence sur l'arité. On a, par définition de $\mathcal{DC}om$:

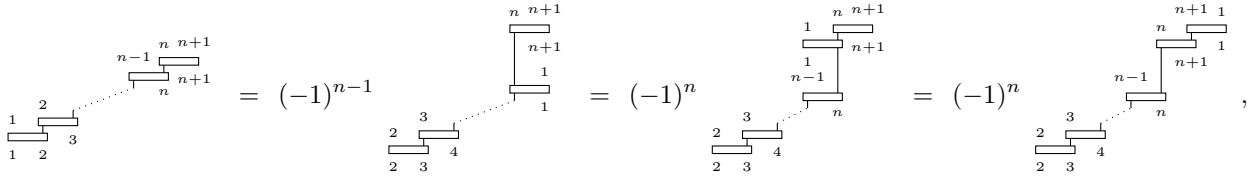
$$= - \quad \text{et} \quad = \quad .$$



Supposons que, pour n un entier naturel, on ait l'égalité suivante :

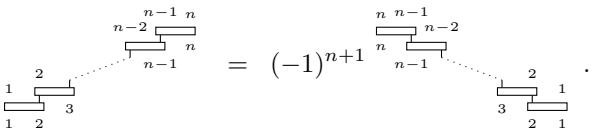


Alors on a

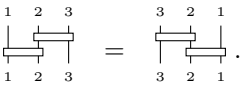


ce qu'il fallait démontrer. □

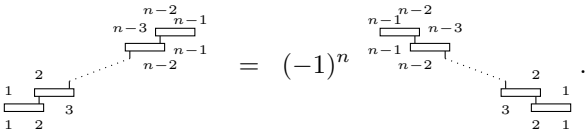
4.1.4.4 Lemme. *Tout "escalier descendant" d'arité n est égal (au signe près) à son "symétrique" : autrement dit, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a l'égalité*



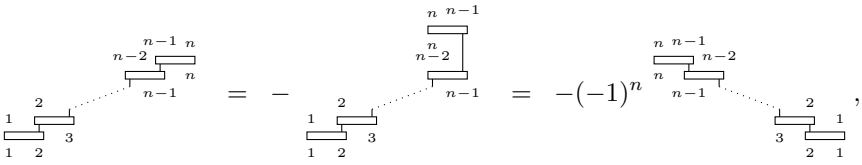
Démonstration. On raisonne par récurrence sur larité. On a déjà que



Supposons par récurrence que



On a donc



ce qu'il fallait démontrer. □

4.1.4.5 Lemme. *Tout monôme de $\mathcal{DC}om$ dont le graphe non-orienté sous-jacent ne contient pas de cycle peut s'écrire sous forme d'un "escalier".*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le poids du monôme, c'est-à-dire le nombre de sommets du graphe sous-jacent. Par le lemme 4.1.4.4, on a que le lemme est vrai pour un monôme de

poids 2. Supposons le lemme vrai pour tout monôme de poids strictement inférieur à n. On considère Φ un monôme de poids n et $\bar{\Phi}$ le graphe non-orienté sous jacent. Comme $\mathcal{DC}om$ est une propérade, $\bar{\Phi}$ est un graphe connexe à n sommets que l'on indexe par $v_1, \dots, v_n$. Il existe $\alpha \in [\![1, n]\!]$ tel que le sous-graphe $\bar{\Phi}^* := \bar{\Phi} \backslash v_\alpha$ soit connexe. Par hypothèse de récurrence, Φ^* est égal à un "escalier", donc Φ est égal à un terme d'une des deux formes suivantes :

et par invariance sous l'action du groupe cyclique des escaliers, on a le résultat. □

4.1.4.6 Lemme. *Tout monôme de $\mathcal{DC}om$ dont le graphe non-orienté sous-jacent contient un cycle est nul.*

Démonstration. Encore une fois, on raisonne par récurrence sur le poids des monômes. On se restreint à considérer que des monômes dont le graphe non orienté sous-jacent est un cycle, c'est-à-dire les monômes dont chaque bloc élémentaire est lié par deux arêtes à un autre bloc.
On a la relation

$= 0$

ce qui initialise la récurrence. Supposons que tout cycle de poids $\leqslant n-1$ est nul. On considère un cycle Φ de poids n et, comme dans la preuve précédente, on isole l'un des blocs élémentaire v_α du cycle (i.e. l'un des sommets du graphes sous-jacent) dont les deux sorties sont chacune liées à un autre bloc élémentaire. Dans un cycle, il existe toujours un tel bloc. On appelle Φ^* le monôme obtenu par oubli du bloc v_α dans le cycle initial. Φ^* n'est donc pas un cycle et donc, par le lemme 4.1.4.5, est égal à un monôme escalier. Finalement, le monôme Φ est égal à un monôme d'une des deux formes présentées en figures 4.1 et 4.2. En utilisant l'invariance des "escaliers" sous l'action diagonale du

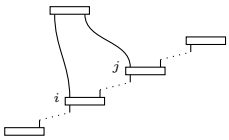


FIGURE 4.1 – Forme 1

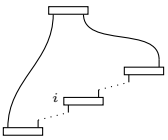


FIGURE 4.2 – Forme 2

groupe cyclique (cf. lemme 4.1.4.3), un monôme de la deuxième forme (figure 4.2) est toujours égal à un monôme de la première forme (figure 4.1). Nous avons donc fait apparaître un cycle de taille plus petite qui est nul par hypothèse de récurrence, ce qu'il fallait démontrer. □

4.1.4.7 Proposition. *Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a*

$$\mathcal{DC}om(n,n) = \mathcal{DC}om_{(n-1)}(n,n).$$

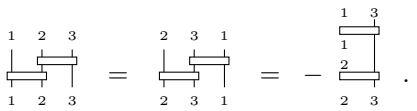
avec $\mathcal{DC}om_{(n-1)}(n,n)$ engendré par φ_n, l'escalier montant à n entrées qui est stable sous l'action du groupe cyclique. En termes de représentations, $\mathcal{DC}om(n,n)$ s'identifie à

$$\mathcal{DC}om(n,n) = sgn(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \uparrow_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}^{\mathfrak{S}_n^{op} \times \mathfrak{S}_n} .$$

Démonstration. On a déjà que $\mathcal{DC}om_{(k)}(n,n) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$. On a également que le

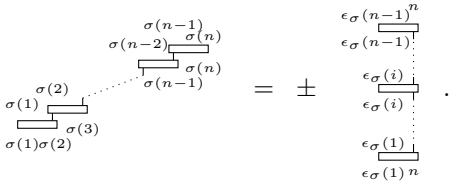
$\mathfrak{S}$-bimodule $\mathcal{DC}om_{(n-1)}(n,n)$ est engendré par l'escalier montant à n entrées. Enfin les monômes de $\mathcal{DL}ie^{!}_{(k)}(n,n)$ pour $k \geqslant n$ possède forcément un cycle donc sont nuls par le lemme 4.1.4.6. □

Pour démontrer la proposition 4.1.4.7, on a montré que les escaliers montants forment une base de $\mathcal{DC}om$ en tant que k-espace vectoriel. On exhibe également une autre base. Par exemple, on a, dans $\mathcal{DC}om_{(2)}(2,2)$, les égalités :



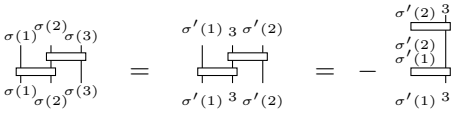
On généralise cela dans le lemme suivant.

4.1.4.8 Lemme. *Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a dans $\mathcal{DC}om(n,n)$, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, l'existence d'une permutation ϵ_σ de $\mathfrak{S}_{n-1}$ telle que :*

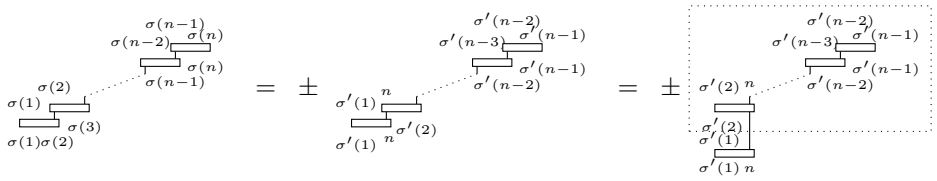


4.1.4.9 Remarque. Ainsi, une base de $\mathcal{DC}om(n,n)$ est en bijection avec $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le poids de l'escalier. Pour commencer, on a :



avec $\sigma' = (123)$ ou (132), tel que $\sigma'(\sigma(2)) = 3$. Supposons le résultat vrai pour $n-1$ avec $n-1 \in \mathbb{N}$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors par stabilité sous l'action du groupe cyclique des escaliers montants (cf. lemme 4.1.4.3), il existe $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}$ tel que :



Puis on applique l'hypothèse de récurrence sur l'escalier montant encadré à droite, d'où le résultat. □

§ 3 La propérade $\mathcal{DP}ois$

La propérade $\mathcal{DP}ois$ qui encode la structure d'algèbre double Poisson (non unitaire)

$$\mathcal{DP}ois := \mathscr{F}\big(V \oplus W\big)\big/\langle R_{As} \oplus D_\lambda \oplus R_{DJ}\rangle$$

avec les générateurs concentrés en degré homologique 0.

$$V := V_{As} = \mu.k \otimes k[\mathfrak{S}_2] = \quad \otimes k[\mathfrak{S}_2] \quad \text{et} \quad W := V_{\mathcal{DL}ie} = \quad \otimes sgn(\mathfrak{S}_2) \uparrow_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2^{op}}$$

et les relations :

▷ d'associativité pour le produit μ :

$$R_{As} := \quad - \quad ;$$

▷ double-Jacobi pour le double crochet :

$$R_{DJ} := \quad + \quad + \quad ;$$

▷ de dérivation :

$$D_\lambda := \quad - \quad - \quad .$$

4.1.4.10 Proposition. *On a l'équivalence de catégories*

$$0\text{-}\mathtt{DPois}_k \cong \mathcal{DP}ois\text{-}\mathtt{Alg},$$

où $0\text{-}\mathtt{DPois}_k$ *est la catégorie des algèbres double Poisson de degré* O *dans la catégorie des complexes de chaînes.*

4.1.4.11 Proposition. *On a le morphisme de propérades*

$$\mathcal{L}eib \longrightarrow \mathcal{DP}ois,$$

induit par

$$\quad \longmapsto \quad .$$

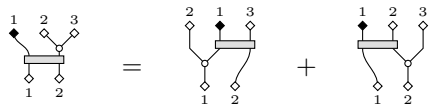
Démonstration. Découle de la proposition 1.2.1.10. □

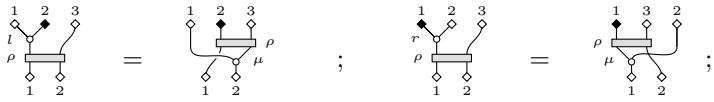
§ 4 Une version colorée de $\mathcal{DP}ois$: la propérade $\mathcal{DL}ie\mathcal{R}in$

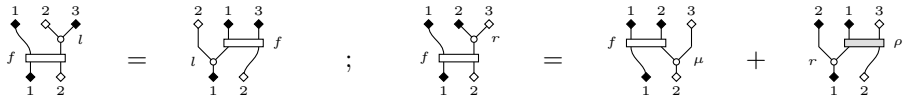
Comme pour les opérades, on peut généraliser la notion de propérade en définissant la notion de *propérade colorée*. Pour une définition de prop colorée, le lecteur pourra se référer notamment à [JY09]. La propérade colorée $\mathcal{DL}ie\mathcal{R}in$ qui encode la structure d'algèbre double Lie Rinehart (cf. définition 2.1.2.2), est engendrée par

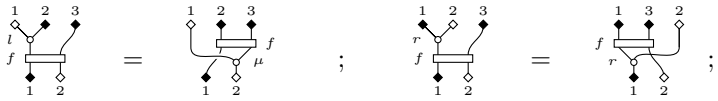
$$\otimes k \quad \oplus \quad \otimes k \quad \oplus \quad \otimes k[\mathfrak{S}_2] \quad \oplus \quad \otimes k \quad \oplus \quad \otimes k$$

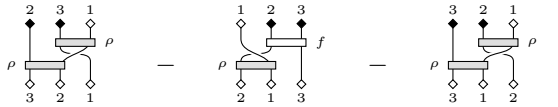
et est soumise à la relation d'associativité pour μ, ainsi qu'aux relations suivantes :

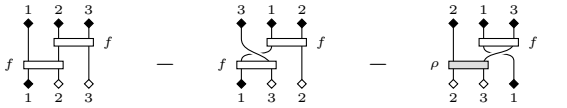

(ancre - dérivation)


(ancre - bimodule)


(dérivation droite)


(bimodule)


(ancre - double Jacobi)


(double-Jacobi)

4.2 Monoïdes diagonaux

Dans cette section, on définit les structures nécessaires sur un $\mathfrak{S}$-module pour que son image par le foncteur d'induction soit une prop (cf. section 4.2.1) ou une propérade (cf. section 4.2.2).

4.2.1 PROPs induites

Dans cette section, nous allons montrer que, si un complexe V est muni d'une structure d'algèbre commutative tordue compatible avec une structure d'algèbre associative, alors cela induit une structure de prop sur $P := \mathrm{Ind}(V)$. Commençons par rappeler la définition d'algèbre commutative tordue.

4.2.1.1 Définition. *Algèbre commutative tordue* – [LP08, Déf. 1.3.1]
Une *algèbre associative tordue* (non-unitaire) A est un objet de la catégorie $\mathtt{As}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \otimes^{conc})$, c'est-à-dire la donnée d'une famille de complexes de chaînes $A = \{A(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ munie :

(i) d'une structure d'algèbre associative graduée sur k avec un produit $\mu : A \otimes^{conc} A \to A$;

(ii) d'une structure de $\mathfrak{S}$-module, i.e. pour tout entier non-nul n, d'une action à droite de $\mathfrak{S}_n$ sur $A(n)$;

(iii) d'une compatibilité entre ces deux structures : $\mu : A(m) \otimes A(n) \to A(m+n)$ est un morphisme de $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$-modules.

On dit que A est une *algèbre commutative tordue* (non unitaire) si A est un objet de la catégorie $\mathtt{Com}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \otimes^{conc})$, c'est-à-dire si A est une algèbre associative tordue telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A(m)\otimes A(n) & \xrightarrow{\mu} & A(m+n) \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & \circlearrowleft & \cong\downarrow{\scriptstyle (12)^{m,n}} \\ A(n)\otimes A(m) & \xrightarrow[\mu]{} & A(m+n), \end{array}$$

où $(12)^{m,n}$ est la permutation par blocs de $\mathfrak{S}_{m+n}$ qui envoie $(1,2,\dots,m+n)$ sur $(m+1,m+2,\dots,m+n,1,\dots,m)$.

4.2.1.2 Remarque. Dans [LP08], Livernet et Patras introduisent la notion de $\mathcal{O}$-algèbre tordue pour $\mathcal{O}$ une opérade : les définitions précédentes sont des cas particuliers pour les opérades $\mathcal{A}s$ et $\mathcal{C}om$.

On rappelle que le produit $\square$ des $\mathfrak{S}$-modules est donné par le produit de Hadamard (cf. définition 3.1.2.1), i.e. pour tout couple (P,Q) de $\mathfrak{S}$-modules et tout ensemble fini S :

$$P\,\square\, Q(S) := P(S)\otimes Q(S).$$

4.2.1.3 Définition/Proposition. *toProp*
Soit V un monoïde associatif unitaire de la catégorie $\big(\mathtt{Com}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}, \otimes^{conc}), \square, I_\square\big)$ autrement dit V est une algèbre commutative tordue telle que

- ▷ pour tout entier m, $V(m)$ est muni d'une structure d'algèbre associative $\mu_{V,m}$;
- ▷ pour tous entiers m et n, on a les diagrammes commutatifs de compatibilité suivants

$$\begin{array}{ccccc} \Big(V(m)\otimes V(m)\otimes V(n)\otimes V(n)\Big) & \underset{\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n}{\otimes} & k[\mathfrak{S}_{m+n}] & \xrightarrow{\sigma} & \big(V\otimes^{conc} V\big)(m+n)\otimes\big(V\otimes^{conc} V\big)(m+n) \\ {\scriptstyle \mu_{V,m}\otimes\mu_{V,n}}\downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow{\scriptstyle c\otimes c} \\ \big(V(m)\otimes V(n)\big) & \underset{\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n}{\otimes} & k[\mathfrak{S}_{m+n}] & \xrightarrow[c]{} V(m+n) & \xleftarrow[\mu_{V,m+n}]{} V(m+n)\otimes V(m+n)\ ; \end{array} \tag{4.2.1}$$

$$\begin{array}{ccc} I_\square\otimes^{conc} I_\square & \xrightarrow{\iota\otimes\iota} & V\otimes^{conc} V \\ {\scriptstyle c}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle c} \\ I_\square & \xrightarrow[\iota]{} & V\ . \end{array}$$

On dit que V est une *toProp*. On note $\mathtt{toProp}$, la catégorie $\mathtt{As}^u\big(\mathtt{Com}(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}, \otimes^{conc}), \square, I_\square\big)$. Le foncteur $\mathrm{Ind} : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k \to \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$ induit le foncteur

$$\mathrm{Ind} : \mathtt{toProp} \longrightarrow \mathtt{Prop}.$$

4.2.1.4 Remarque.

Démonstration. Soit V une toProp. On définit $P \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k$ comme l'image du $\mathfrak{S}$-module V par le foncteur d'induction Ind. La structure d'algèbre commutative tordue de V nous fournit par définition le morphisme

$$c := \sum c_{i,j} : \big(V\otimes^{conc} V\big)(m) \longrightarrow V(m)$$

qui, par le foncteur Ind et la proposition 3.3.2.6, définit un produit associatif $c : P \otimes^{conc} P \to P$: on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} P \otimes^{conc} P & \xrightarrow{c} & P \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ \mathrm{Ind}\, V \otimes^{conc} \mathrm{Ind}\, V & \xrightarrow{c} & \mathrm{Ind}\, V \\ \cong\uparrow{\scriptstyle 3.3.2.6} & & \| \\ \mathrm{Ind}\big(V \otimes^{conc} V\big) & \xrightarrow[\mathrm{Ind}(c)]{} & \mathrm{Ind}\, V. \end{array}$$

La commutativité du produit $V \otimes^{conc} V \to V$ donnée par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V(m) \otimes V(n) & \xrightarrow{c} & V(m+n) \\ \sigma\downarrow & & \downarrow(12)^{m,n} \\ V(n) \otimes V(m) & \xrightarrow{c} & V(m+n) \end{array}$$

nous fournit, en appliquant le foncteur Ind, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P(m,m) \otimes P(n,n) & \xrightarrow{c} & P(m+n, m+n) \\ \sigma\downarrow & \circlearrowleft & \cong\downarrow(12) \\ P(n,n) \otimes P(m,m) & \xrightarrow[c]{} & P(m+n, m+n), \end{array}$$

donc (P, c) est un monoïde commutatif. De la même manière, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} P \square P & \xrightarrow{\mu} & P \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ \mathrm{Ind}\, V \square \mathrm{Ind}\, V & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{Ind}\, V \\ \cong\uparrow{\scriptstyle 3.3.2.1} & & \| \\ \mathrm{Ind}\big(V \square V\big) & \xrightarrow[\mathrm{Ind}(\mu)]{} & \mathrm{Ind}\, V \end{array}$$

nous fournit le produit de composition sur P. Enfin, en appliquant le foncteur Ind au diagramme 4.2.1, on obtient la *loi d'inter-échange*, le diagramme de compatibilité entre les deux produits définis sur P. Donc $P = \mathrm{Ind}(V)$ est muni d'une structure de prop. □

On vient donc d'expliciter une structure sur les $\mathfrak{S}$-modules qui induit, par le foncteur d'induction Ind , une structure de prop. On peut à présent se poser la question suivante : peut-on exhiber une structure sur un $\mathfrak{S}$-module V qui induise sur son image par le foncteur d'induction, une structure de propérade ? C'est l'objet de la section suivante.

4.2.2 Protopérade et coprotopérade

On définit dans cette section les objets centraux de cette thèse.

4.2.2.1 Définition. *Protopérade*
On appelle *protopérade* tout monoïde unitaire (P, μ, η) de la catégorie monoïdale $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c)$: on note $\mathtt{protoperades}_k := \mathtt{As}^u(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c, I)$, avec

$$I(S) := \begin{cases} k & \text{si } |S| = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

la catégorie des protopérades.

4.2.2.2 Proposition. *Le foncteur* Ind *induit le foncteur*

$$\mathrm{Ind} : \mathtt{protoperades}_k \longrightarrow \mathtt{properades}_k.$$

Démonstration. Découle directement du théorème 3.3.2.10. □

On a également la définition de l'objet dual :

4.2.2.3 Définition. *Coprotopérade*
On appelle *coprotopérade* tout comonoïde co-unitaire (Q, Δ, ϵ) de la catégorie monoïdale $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c)$: on note $\mathtt{coprotoperades}_k := \mathtt{coAs}^u(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c, I = I(*) = k)$, la catégorie des coprotopérades.

4.2.2.4 Remarque. *Question de terminologie*
Dans [Val03], Vallette appelle *propérade différentielle* les éléments de la catégorie $\mathtt{AssU}(\mathtt{dg}\text{-}\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k, \boxtimes_c, I)$ et appelle donc propérade différentielle graduée par un poids les objets de cette catégorie possédant une telle graduation. Trouvant que l'appellation induit une ambiguïté, on a décidé de faire disparaître l'adjectif différentielle. Ainsi, (co)opérades, (co)propérades et (co)protopérades désigneront toujours des objets différentiels gradués et (co)pro(to)pérade graduée par un poids désigne donc un objet bigradué.

4.2.2.5 Notation(s). On note $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{gr} := \mathrm{Func}(\mathtt{Fin}^{op}, \mathtt{Ch}_k^{gr})$, où $\mathtt{Ch}_k^{gr}$ est la catégorie des complexes de chaînes munis d'une $\mathbb{N}$-graduation. Les constructions faites au chapitre 3 s'étendent naturellement au cadre des $\mathfrak{S}$-modules gradués. Remarquons que le poids n'entraine aucun signe de Koszul.

4.2.2.6 Définition. *Protopérade / coprotopérade graduée par un poids*
On dit qu'une protopérade (resp. coprotopérade) P est *graduée par un poids* si P est un monoïde (resp. comonoïde) de la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd,gr}$ pour le produit $\boxtimes_c$. On note cette graduation $P = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} P^{[i]}$.

4.2.2.7 Définition. *Protopérade / coprotopérade connexe*
Une (co)protopérade graduée par $P = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} P^{[i]}$ est dite *connexe* si $P^{[0]} \cong I$.

4.2.3 Compositions partielles

On peut définir (cf. [LV12, Sect. 5.3.4] ou remarque 4.1.2.3) une structure d'opérade sur un $\mathfrak{S}$-module $\mathcal{O}$ en ne donnant que les compositions partielles $\circ_s : \mathcal{O}(S) \otimes \mathcal{O}(R) \to \mathcal{O}(R \amalg S\backslash\{s\})$. On montre un résultat similaire dans le cadre protopéradique.

4.2.3.1 Définition. *Composition partielle*
Soit P un $\mathfrak{S}$-module réduit, muni d'un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules $\epsilon : I \hookrightarrow P$, où $I(S) = k$ si $|S| = 1$ et 0 sinon. Soient M, N et S trois ensembles finis non-vides, munis des deux diagrammes d'injections :

$$\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big) \quad \text{et} \quad \varphi^{op} := \big(j : N \hookrightarrow S \hookleftarrow M : i\big)$$

et tels que

$$\begin{cases} \mathrm{im}(i) \cup \mathrm{im}(j) & = S \\ \mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j) & \neq \emptyset \end{cases}. \tag{4.2.2}$$

On dit que P est muni d'un *système de compositions partielles* si, pour tout diagramme tel que φ, on a un morphisme de complexes de chaînes

$$\underset{\varphi}{\circ} : P(M) \otimes P(N) \longrightarrow P(S) \ ;$$

compatible avec l'action de $\mathrm{Aut}(S)$, i.e. pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(S)$ avec

$$\sigma \cdot \varphi := \Big(i' : M' := \sigma\big(i(M)\big) \hookrightarrow S \hookleftarrow \sigma\big(j(N)\big) =: N' : j'\Big)$$

on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} P(M) \otimes P(N) \arrow[r, "P(\sigma|_M)\otimes P(\sigma|_N)", "\cong"'] \arrow[d, "\underset{\varphi}{\circ}"'] & P(M') \otimes P(N') \arrow[d, "\underset{\sigma\cdot\varphi}{\circ}"] \\ P(S) \arrow[r, "P(\sigma)"'] & P(S) \ ; \end{tikzcd} \tag{4.2.3}$$

et qui vérifie les propriétés de compatibilités suivantes. Pour tout diagramme commutatif d'injections

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr] & & N \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr] & & U \arrow[dl, "\psi"'] \\ & R \arrow[dr] & & S \arrow[dl, "\xi"'] & \\ & & T & & \end{tikzcd}$$

avec

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr] & & S \arrow[dl, "\xi_L"'] \\ & T & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} R \arrow[dr] & & U \arrow[dl, "\xi_R"'] \\ & T & \end{tikzcd}$$

tels que les quatres couples de flèches φ, ψ, ξ_L et ξ_R vérifient la propriété 4.2.2, les compositions partielles vérifient les trois axiomes d'associativités suivants :

Axiome d'associativité ( )

$$\begin{tikzcd} P(M) \otimes P(N) \otimes P(U) \arrow[r, "1\otimes \underset{\psi}{\circ}"] \arrow[d, "\underset{\varphi}{\circ}\otimes 1"'] & P(M) \otimes P(S) \arrow[d, "\underset{\xi_L}{\circ}"] \\ P(R) \otimes P(U) \arrow[r, "\underset{\xi_R}{\circ}"'] & P(T) \ ; \end{tikzcd}$$

Axiome V ( )

$$\begin{tikzcd} P(N) \otimes P(M) \otimes P(U) \arrow[r, "(\underset{\psi}{\circ}\otimes 1)(1\otimes\tau)"] \arrow[d, "\underset{\varphi^{op}}{\circ}\otimes 1"'] & P(S) \otimes P(M) \arrow[d, "\underset{\xi_L^{op}}{\circ}"] \\ P(R) \otimes P(U) \arrow[r, "\underset{\xi_R}{\circ}"'] & P(T) \ ; \end{tikzcd}$$

Axiome Λ ( )

$$\begin{tikzcd} P(M) \otimes P(U) \otimes P(N) \arrow[r, "1\otimes \underset{\psi^{op}}{\circ}"] \arrow[d, "(1\otimes\underset{\varphi}{\circ})(\tau\otimes 1)"'] & P(M) \otimes P(S) \arrow[d, "\underset{\xi_L}{\circ}"] \\ P(U) \otimes P(R) \arrow[r, "\underset{\xi_R^{op}}{\circ}"'] & P(T). \end{tikzcd} \quad .$$

Ces produits partiels vérifient également une propriété d'existence d'unité : pour tout diagramme d'injections de la forme

$$\varphi := \big(i : \{*\} \hookrightarrow M \xleftarrow{\cong} M : \mathrm{id}\big),$$

on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} I(\{*\}) \otimes P(M) & \xhookrightarrow{\epsilon\otimes\mathrm{id}} & P(\{*\}) \otimes P(M) \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow{\scriptstyle \circ_{\varphi}} \\ & & P(M) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} P(M) \otimes I(\{*\}) & \xhookrightarrow{\mathrm{id}\otimes\epsilon} & P(M) \otimes P(\{*\}) \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow{\scriptstyle \circ_{\varphi^{op}}} \\ & & P(M) \end{array} .$$

4.2.3.2 Proposition. *Un $\mathfrak{S}$-module réduit P est muni d'un système de compositions partielles si et seulement si P est muni d'une structure de protopérade.*

Démonstration. Soit (P, μ) un monoïde associatif unitaire de la catégorie $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c\big)$. Par la graduation de $\boxtimes_c$ qui découle de l'analycité scindée de $\boxtimes_c$ (cf. lemme 3.1.3.3), la restriction du produit μ à $(P \boxtimes_c P)^{(2)_P}$ nous fournit directement toutes les compositions partielles $\underset{\varphi}{\circ}$ et l'associativité et l'unité du produit nous amènent tous les diagrammes commutatifs présents dans la définition ci-dessus. Réciproquement, soit P un $\mathfrak{S}$-module réduit, muni d'une injection de $\mathfrak{S}$-modules $I \hookrightarrow P$ et d'un système de compositions partielles. Par l'associativité des compositions partielles $\underset{\varphi}{\circ}$ sur P, on définit pour tout $K \in \mathcal{Y}_m^{ord}(S)$, $L \in \mathcal{Y}_n^{ord}(S)$ avec $\mathcal{K}(K, L) = \{S\}$, un morphisme

$$\tilde{\mu}_{K,L} : \bigotimes_{i=1}^{m} P(K_i) \otimes \bigotimes_{j=1}^{n} P(L_j) \longrightarrow P(S).$$

La propriété de compatibilité des produits partiels avec l'action du groupe d'automorphismes de l'ensemble but (cf. diagramme 7.2.2) nous permet de passer le morphisme

$$\sum \tilde{\mu}_{K,L} : \bigoplus_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n} \bigotimes_{i=1}^{m} P(K_{\sigma(i)}) \otimes \bigotimes_{j=1}^{n} P(L_{\tau(j)}) \longrightarrow P(S)$$

au quotient

$$\mu_S : \bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{conn}(S)} \bigotimes_{\alpha\in A} P(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in B} P(L_\beta) \longrightarrow P(S),$$

qui définit une transformation naturelle $\mu : P \boxtimes_c P \longrightarrow P$. Cette transformation naturelle munit P d'une structure de monoïde associatif unitaire pour $\boxtimes_c$, les produits partiels vérifiant les axiomes d'associativité et d'existence d'unité. □

4.3 Description de la protopérade libre

Les travaux de Vallette [Val03, Chap. 1] et [Val09] nous donnent une construction du monoïde libre dans la catégorie monoïdale $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k, \boxtimes_c, I)$ que nous rappelons en annexe C.2. Nous décrirons ensuite plus en détails le cas de la protopérade libre en montrant qu'elle vérifie le même type de propriétés que la propérade libre : par exemple, qu'elle possède une graduation par le poids. La définition de Vallette du monoïde libre étant peu explicite, nous donnerons également une description combinatoire de la protopérade libre en termes d'empilement de briques.

4.3.1 Monoïde libre d'une catégorie monoïdale abélienne

L'objectif de cette section est de présenter brièvement la construction du monoïde libre dans une catégorie monoïdale symétrique décrite par Vallette dans [Val03] et [Val09]. On rappelle ici la construction de l'objet $\mathscr{F}(-)$ dans une catégorie monoïdale abélienne (qui est l'objet sous-jacent au monoïde libre) afin d'introduire les notations utilisées par Vallette dans [Val03, Chap. 1]. Une description plus complète du monoïde libre se situe en annexe C.2.

Soit $(\mathtt{A}, \odot, I)$ une catégorie monoïdale abélienne telle que, pour tout objet A de la catégorie $\mathtt{A}$, les foncteurs de multiplications R_A et L_A préservent les coégalisateurs réfléxifs ainsi que les colimites séquentielles (cf. annexe C). On rappelle la construction du monoïde libre dans une telle catégorie (cf. [Val09, Sect. 3]). Pour toute cette section, on fixe l'objet V de la catégorie $\mathtt{A}$. On considère l'objet augmenté associé $V_+ := I \oplus V$ et on pose les notations suivantes :

- ▷ $\eta_V : I \hookrightarrow V_+$, l'injection de I dans V_+ ;
- ▷ $\epsilon_V : V_+ \twoheadrightarrow I$, la projection de V_+ sur I ;
- ▷ $i_V : V \to V_+$, l'injection de V dans V_+ ;

que l'on résume dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\eta_V} & I \oplus V & \xleftarrow{\iota_V} & V \\ & \searrow^{=} & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_V} & & \\ & & I & & \end{array} \quad .$$

Pour tout entier n non-nul, on note également $V_n := (V_+)^{\odot n}$, la puissance n-ième de V_+ ainsi que $\lambda_A : I \odot A \xrightarrow{\cong} A$ et $\rho_A : A \odot I \xrightarrow{\cong} A$, les isomorphismes naturels de la catégorie monoïdale $(\mathtt{A}, \odot, I)$. L'injection η_V induit des morphismes de dégénérescences : pour tout entier i compris entre 1 et n, on pose

$$\eta_{V,i} : V_n \cong (V_+)^{\odot i} \odot I \odot (V_+)^{\odot(n-i)} \xrightarrow{V_i \odot \eta_V \odot V_{n-i}} (V_+)^{\odot i} \odot (V_+) \odot (V_+)^{\odot(n-i)} \cong V_{n+1} \ .$$

On définit le morphisme $\tau_V : V \to V_2$ comme la composée suivante :

$$V \xrightarrow[\lambda_V^{-1} + \rho_V^{-1}]{} (I \odot V) \oplus (V \odot I) \xrightarrow[\eta_V \odot i_V - i_V \odot \eta_V]{} (I \oplus V) \odot (I \oplus V) =: V_2 \ .$$

Pour deux objets A et B de la catégorie $\mathtt{A}$, on définit l'objet $A \odot (\underline{V} \oplus V_2) \odot B$ comme le conoyau du morphisme

$$A \odot V_2 \odot B \xrightarrow{A \odot i_{V_2} \odot B} A \odot (V \oplus V_2) \odot B \ ,$$

où le morphisme i_{V_2} est l'injection canonique $V_2 \hookrightarrow V \oplus V_2$; par [Val03, Cor. 4], $A \odot (\underline{V} \oplus V_2) \odot B$ correspond aussi au noyau de l'application

$$A \odot (V \oplus V_2) \odot B \xrightarrow{A \odot \pi_{V_2} \odot B} A \odot V_2 \odot B,$$

où π_{V_2} est la projection $V \oplus V_2 \to V_2$. On peut donc voir $A \odot (\underline{V} \oplus V_2) \odot B$ comme un sous-objet de $A \odot (V \oplus V_2) \odot B$. On définit ainsi :

▷ l'objet $R_{A,B}$ comme l'image de la composée

$$A \odot (\underline{V} \oplus V_2) \odot B \hookrightarrow A \odot (V \oplus V_2) \odot B \xrightarrow{A \odot (\tau + \mathrm{id}_{V_2}) \odot B} A \odot V_2 \odot B \ ;$$

▷ l'objet $\widetilde{V}_n$ comme le conoyau du morphisme

$$\bigoplus_{i=0}^{n-2} R_{V_i, V_{n-i-2}} \longrightarrow V_n.$$

Par [Val09, Lem. 4], les morphismes $\eta_{V,i} : V_n \to V_{n+1}$ induisent tous le même morphisme au quotient :

$$\widetilde{\eta}_V : \widetilde{V}_n \longrightarrow \widetilde{V}_{n+1}.$$

4.3.1.1 Définition. *L'objet $\mathscr{F}(V)$* – [Val09, Sect. 3]
Soit V un $\mathfrak{S}$-module réduit. L'objet $\mathscr{F}(V)$ associé à V est la colimite séquentielle suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \widetilde{V}_0 := I & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \widetilde{V}_1 = V_1 & = & V_+ & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \widetilde{V}_2 & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \cdots & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \widetilde{V}_n & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \cdots \\ & \searrow^{j_{V,0}} & & \searrow^{j_{V,1}} & & & & \searrow^{j_{V,2}} & & & & \searrow^{j_{V,n}} & \\ & & & & & & & & \mathscr{F}(V) := \operatorname*{Colim}_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{V}_n. & & & & \end{array}$$

4.3.1.2 Proposition. *Soit $V \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k$. La protopérade libre (resp. coprotopérade colibre) sur V est de la forme $(\mathscr{F}(V), \mu)$ (resp. $(\mathscr{F}^c(V), \Delta)$).*

Démonstration. Cela découle directement du théorème C.2.0.2 et de la description du produit (resp. coproduit) de $\mathscr{F}(V)$ (resp. $\mathscr{F}^c(V)$) donnée par la proposition 3.1.3.4. □

4.3.2 Une première description de la protopérade libre

On utilise les résultats de la section précédente pour décrire la protopérade libre $\mathscr{F}(V)$ sur un $\mathfrak{S}$-module V. Cette première description n'est pas vraiment explicite, dans le sens où la combinatoire sous-jacente est masquée par la lourdeur du formalisme. La remarque 4.3.2.8 et la section 4.4.1 remédieront à ce problème en explicitant cette combinatoire.

À une partition K d'un ensemble fini S, c'est-à-dire que K est un élément de $\mathcal{Y}(S)$ (en utilisant les notations de la section 3.1.1), on associe l'ensemble non ordonné $\Gamma(K)$ qui indexe cette partition : $S \cong \coprod_{\alpha \in \Gamma(K)} K_\alpha$. On rappelle également que le foncteur $\mathbb{S}(-)$ est non-unitaire et vérifie la propriété exponentielle (cf. proposition 3.1.2.14) : ainsi, pour deux $\mathfrak{S}$-modules V et W, on a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}$-modules :

$$\mathbb{S}\big(V \oplus W\big) \cong \mathbb{S}(V) \oplus \mathbb{S}(W) \oplus \mathbb{S}(V) \otimes^{conc} \mathbb{S}(W).$$

4.3.2.1 Notation(s). Pour un $\mathfrak{S}$-module V, on désigne par un exposant $(-)_V$ la graduation par le nombre de termes V.

De plus, le foncteur $\mathbb{S}(-)$ est analytique scindé (cf. définition C.1.0.3) : ainsi pour trois $\mathfrak{S}$-modules

V, W et R, on a la bigraduation

$$\begin{aligned}\mathbb{S}(V\oplus W)\square\mathbb{S}(R) &\cong \mathbb{S}V\square\mathbb{S}R\oplus\mathbb{S}W\square\mathbb{S}R\oplus\big(\mathbb{S}V\otimes^{conc}\mathbb{S}W\big)\square\mathbb{S}R\\ &\cong \bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}^*}\mathbb{S}^jV\square\mathbb{S}R\oplus\mathbb{S}^jW\square\mathbb{S}R\oplus\big(\mathbb{S}^iV\otimes^{conc}\mathbb{S}^jW\big)\square\mathbb{S}R\\ &\overset{not}{=:} \bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}^*}\big(\mathbb{S}(V\oplus W)\square\mathbb{S}(R)\big)^{(i)_V,(j)_W};\end{aligned}$$

par bi-additivité des bifoncteurs $-\square-$ et $-\otimes^{conc}-$.

Cette bigraduation induit, par l'injection $(V\oplus W)\boxtimes_c R\hookrightarrow\mathbb{S}(V\oplus W)\square\mathbb{S}(R)$ (cf. proposition 3.1.3.6), une bigraduation par les poids en V et W sur $(V\oplus W)\boxtimes_c R$ que l'on note

$$(V\oplus W)\boxtimes_c R =: \bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}^*}\big((V\oplus W)\boxtimes_c R\big)^{(i)_V,(j)_W}.$$

Par symétrie du produit $\boxtimes_c$, on a aussi la bigraduation

$$R\boxtimes_c(V\oplus W) =: \bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}^*}\big(R\boxtimes_c(V\oplus W)\big)^{(i)_V,(j)_W},$$

et dans la suite, on notera également

$$\big((V\oplus W)\boxtimes_c R\big)^{(j)_W} := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}^*}\big((V\oplus W)\boxtimes_c R\big)^{(i)_V,(j)_W}.$$

4.3.2.2 Remarque. Ces graduations sont naturelles : elles proviennent du fait que le bifoncteur $-\boxtimes_c-$ soit analytique scindé.

4.3.2.3 Remarque. Dans [MV09a] et [Val03], pour $\mathcal{M},\mathcal{P}$ deux $\mathfrak{S}$-bimodules, la graduation par le poids en $\mathcal{M}$ est notée

$$\underbrace{\mathcal{M}}_{r}\boxtimes_c\mathcal{P}.$$

Comme le foncteur Ind est monoïdal et commute à la somme directe, on a donc

$$\mathrm{Ind}\big(((V\oplus W)\boxtimes_c R)^{(r)_W}\big) = (\mathrm{Ind}(V)\oplus\underbrace{\mathrm{Ind}(W)}_{r})\boxtimes_c\mathrm{Ind}(R).$$

Comme nous l'avons vu dans la section 4.3.1 précédente, la construction du monoïde libre engendré par un $\mathfrak{S}$-module V repose sur l'ajout formel de l'unité I du produit $\boxtimes_c$ à V : nous aurons donc besoin de considérer le $\mathfrak{S}$-module $V_+ = V\oplus I$ qui vérifie $V_+(S) = V(S)$ pour $|S|\neq 1$ et $V_+(\{*\}) = V(\{*\})\oplus k$. On aura également tout particulièrement besoin de la bigraduation par le poids en V et W du $\mathfrak{S}$-module $V_+\boxtimes_c W_+$. Pour tout ensemble S fini, cette bigraduation nous permet d'écrire sous forme de somme directe le produit $V_+\boxtimes_c W_+(S)$ en séparant les termes où V apparaît i fois et W apparaît j fois. Plus précisément, par ce qui précède, le $\mathfrak{S}$-module $\mathbb{S}(V_+)\square\mathbb{S}(W_+)$ est bigradué par les poids en V et W, et donc, par l'injection

$$V_+\boxtimes_c W_+\hookrightarrow\mathbb{S}\big(V_+\boxtimes_c W_+\big)\underset{3.2.3.7}{\cong}\mathbb{S}(V_+)\square\mathbb{S}(W_+),$$

le $\mathfrak{S}$-module $V_+\boxtimes_c W_+$ hérite naturellement d'une bigraduation par les poids en V et W. Afin

d'exprimer $V_+ \boxtimes_c W_+(S)$ en somme indexée par cette bigraduation, nous aurons également besoin des notations suivantes :

4.3.2.4 Notation(s). Rappelons que, pour tout ensemble S fini non-vide et tout $(I,J) \in \mathcal{Y}_2^{ord}(S)$, on a, par définition, que I et J sont également non-vide ; dans la suite, on note :

$$\mathcal{Y}_2^{ord,+}(S) \overset{not}{:=} \mathcal{Y}_2^{ord}(S) \cup \{(S,\emptyset),(\emptyset,S)\}.$$

Comme on l'a précisé précédemment, le $\mathfrak{S}$-module V_+, associé à $\mathfrak{S}$-module V, sera crucial dans la construction du monoïde libre. Pour $K \in \mathcal{Y}_n(S)$ une partition non-ordonnée de S à n termes, afin de différencier dans $\bigotimes_{\alpha\in\Gamma(K)} V_+(K_\alpha)$ les composantes faisant intervenir V de celles issues de l'unité (où $\Gamma(K)$ est l'ensemble non-ordonné indexant la partition K), on introduit le foncteur

$$\mathfrak{Q}^V_{(R_1^K,R_2^K)} : \widetilde{\Gamma(K)} \longrightarrow \mathtt{Ch}_k,$$

où $\widetilde{\Gamma(K)}$ est la petite catégorie ayant pour objets l'ensemble $\Gamma(K)$ et n'ayant que les identités pour morphismes. À chaque élément $\alpha \in \Gamma(K)$, $\mathfrak{Q}^V_{(R_1^K,R_2^K)}$ associe un complexe de chaines de la manière suivante :

$$\mathfrak{Q}^V_{(R_1^K,R_2^K)}(K_\alpha) := \begin{cases} V(K_\alpha) & \text{si } \alpha \in R_1^K \\ I(K_\alpha) & \text{si } \alpha \in R_2^K \end{cases} .$$

Remarquons que, pour $\alpha \in R_2^K$ tel que $|K_\alpha| \geqslant 2$, alors le complexe $\mathfrak{Q}^V_{(R_1^K,R_2^K)}(K_\alpha)$ est nul.

On décompose donc $V_+ \boxtimes_c W_+$ de la manière suivante : pour S un ensemble fini

$$\begin{aligned} V_+ \boxtimes_c W_+(S) &= \big((V\oplus I)\boxtimes_c (W\oplus I)\big)(S) \\ &\overset{3.1.3.1}{:=} \bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigotimes_{\alpha\in\Gamma(K)} (V\oplus I)(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in\Gamma(L)} (W\oplus I)(L_\beta) \\ &\cong \bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigoplus_{\substack{(R_1^K,R_2^K)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(K)) \\ (R_1^L,R_2^L)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(L))}} \bigotimes_{\alpha\in\Gamma(K)} \mathfrak{Q}^V_{(R_1^K,R_2^K)}(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in\Gamma(L)} \mathfrak{Q}^W_{(R_1^L,R_2^L)}(L_\beta) . \end{aligned}$$

On peut alors rassembler les termes selon le nombre de copies de V et de W :

$$\begin{aligned} V_+ \boxtimes_c W_+(S) &\cong \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{N}^2} \bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigoplus_{\substack{(R_1^K,R_2^K)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(K)) \\ (R_1^L,R_2^L)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(L)) \\ |R_1^K|=r,|R_1^L|=s}} \bigotimes_{\alpha\in\Gamma(K)} \mathfrak{Q}^V_{(R_1^K,R_2^K)}(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in\Gamma(L)} \mathfrak{Q}^W_{(R_1^L,R_2^L)}(L_\beta) \\ &\cong I(S)\oplus W(S)\oplus V(S) \oplus \bigoplus_{(r,s)\in(\mathbb{N}^*)^2} \bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigoplus_{\substack{((R_1^K,R_2^K),(R_1^L,R_2^L))\in\Xi_{K,L} \\ |R_1^K|=r,|R_1^L|=s}} \bigotimes_{\alpha\in R_1^K} V(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in R_1^L} W(L_\beta) \end{aligned}$$

où

$$\Xi_{K,L} := \Big\{ \big((R_1^K,R_2^K),(R_1^L,R_2^L)\big) \in \big(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(K))\cup(\Gamma(K),\emptyset)\big) \times \big(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(L))\cup(\Gamma(L),\emptyset)\big) \Big| \forall\beta\in R_2^K, |K_\beta|=1, \forall\beta\in R_2^L, |L_\beta|=1 \Big\},$$

ce qui nous fournit la bigraduation attendue. Ce dernier isomorphisme est obtenu en distinguant les termes provenant des injections $I\boxtimes_c W \hookrightarrow V_+\boxtimes_c W_c$, $V\boxtimes_c I \hookrightarrow V_+\boxtimes_c W_c$ et $I\boxtimes_c I \hookrightarrow V_+\boxtimes_c W_c$. On résume le résultat obtenu dans le lemme suivant.

4.3.2.5 Lemme. *L'isomorphisme*

$$V_+ \boxtimes_c W_+(S) \cong \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{N}^2} \bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigoplus_{\substack{(R_1^K,R_2^K)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(K))\\(R_1^L,R_2^L)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(L))\\|R_1^K|=r,|R_1^L|=s}} \bigotimes_{\alpha\in\Gamma(K)} \mathfrak{Q}^V_{(R_1^K,R_2^K)}(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in\Gamma(L)} \mathfrak{Q}^W_{(R_1^L,R_2^L)}(L_\beta)$$

nous fournit une bigraduation de $V_+ \boxtimes_c W_+(S) = \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{N}^2} (V_+ \boxtimes_c W_+)^{(r)_V,(s)_W}$ *où, pour* $r, s \neq 0$ *:*

$$(V_+ \boxtimes_c W_+)^{(r)_V,(s)_W}(S) \cong \bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigoplus_{\substack{((R_1^K,R_2^K),(R_1^L,R_2^L))\in\Xi_{K,L}\\|R_1^K|=r,|R_1^L|=s}} \bigotimes_{\alpha\in R_1^K} V(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in R_1^L} W(L_\beta)$$

avec $\Xi_{K,L} := \left\{((R_1^K,R_2^K),(R_1^L,R_2^L))\in\left(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(K))\cup(\Gamma(K),\emptyset)\right)\times\left(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(L))\cup(\Gamma(L),\emptyset)\right)\middle|\forall\beta\in R_2^K,|K_\beta|=1,\forall\beta\in R_2^L,|L_\beta|=1\right\}$

$\bigoplus_{s\in\mathbb{N}^*} (V_+ \boxtimes_c W_+)^{(0)_V,(s)_W}(S) \cong (V_+ \boxtimes_c W_+)^{(0)_V,(1)_W}(S) = W(S)$;

$\bigoplus_{r\in\mathbb{N}^*} (V_+ \boxtimes_c W_+)^{(r)_V,(0)_W}(S) \cong (V_+ \boxtimes_c W_+)^{(1)_V,(0)_W}(S) = V(S)$ *et* $(V_+ \boxtimes_c W_+)^{(0)_V,(0)_W}(S) = I(S)$.

On veut notamment décrire explicitement les éléments de $(V_+ \boxtimes_c W_+)^{(1)_V,(1)_W}$.

4.3.2.6 Proposition. *Cas de* $(V_+ \boxtimes_c W_+)^{(1)_V,(1)_W}$
Soient V *et* W *deux* $\mathfrak{S}$*-modules réduits. Pour tout ensemble fini* S*, on a l'isomorphisme*

$$(V_+ \boxtimes_c W_+)^{(1)_V,(1)_W}(S) \cong \bigoplus_{\substack{K,L\subset S\\K\cup L=S\\K\cap L\neq\emptyset}} V(K)\otimes W(L).$$

Démonstration. On a l'isomorphisme

$$(V_+ \boxtimes_c W_+)^{(1)_V,(1)_W}(S) \cong \bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigoplus_{\substack{(R_1^K,R_2^K)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(K))\\(R_1^L,R_2^L)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(L))\\|R_1^K|=1,|R_1^L|=1}} \bigotimes_{\alpha\in\Gamma(K)} \mathfrak{Q}^V_{(R_1^K,R_2^K)}(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in\Gamma(L)} \mathfrak{Q}^W_{(R_1^L,R_2^L)}(L_\beta)$$

$$\cong \bigoplus_{\substack{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)\\\exists a\in A,b\in B|\forall\alpha\in\Gamma(K)\backslash\{a\},\beta\in\Gamma(L)\backslash\{b\}\\K_\alpha\cong\{*\}\cong L_\beta}} V(K_a)\otimes W(L_b)$$

car, s'il existe $\alpha \in A\backslash\{a\}$ tel que $K_\alpha \ncong \{*\}$, alors $I(K_\alpha) = 0$; de même pour $B\backslash\{b\}$. Finalement, on peut réécrire $(V_+ \boxtimes_c W_+)^{(1)_V,(1)_W}(S)$ comme suit :

$$(V_+ \boxtimes_c W_+)^{(1)_V,(1)_W}(S) \cong \bigoplus_{\substack{K,L\subset S\\K\cup L=S\\K\cap L\neq\emptyset}} V(K)\otimes W(L).$$

□

La bigraduation de $V_+ \boxtimes_c W_+$ induit, lorsque $V = W$ une graduation par le poids en V de $V_+ \boxtimes_c V_+$:

$$V_+ \boxtimes_c V_+(S) \cong \bigoplus_{\rho\in\mathbb{N}} \bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)} \bigoplus_{\substack{(R_1^K,R_2^K)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(K))\\(R_1^L,R_2^L)\in\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(L))\\|R_1^K|+|R_1^L|=\rho}} \bigotimes_{\alpha\in\Gamma(K)} \mathfrak{Q}^V_{(R_1^K,R_2^K)}(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in\Gamma(L)} \mathfrak{Q}^V_{(R_1^L,R_2^L)}(L_\beta)$$

$$\cong I(S)\oplus \underbrace{V(S)\otimes\bigotimes_S I(*)\oplus\bigotimes_S I(*)\otimes V(S)}_{\overset{not}{=:}(V_+\boxtimes_c V_+)^{(1)_V}(S)}$$
$$\oplus\bigoplus_{\rho\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}\underbrace{\bigoplus_{(K,L)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(S)}\ \bigoplus_{\substack{((R_1^K,R_2^K),(R_1^L,R_2^L))\in\Xi_{K,L}\\ |R_1^K|+|R_1^L|=\rho}}\ \bigotimes_{\alpha\in R_1^K}V(K_\alpha)\otimes\bigotimes_{\beta\in R_1^L}V(L_\beta)}_{\overset{not}{=:}(V_+\boxtimes_c V_+)^{(\rho)_V}(S)}$$

où on rappelle que $\Xi_{K,L}:=\big\{\big((R_1^K,R_2^K),(R_1^L,R_2^L)\big)\in\big(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(K))\cup(\Gamma(K),\emptyset)\big)\times\big(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(L))\cup(\Gamma(L),\emptyset)\big)\big|\forall\beta\in R_2^K,|K_\beta|=1,\forall\beta\in R_2^L,|L_\beta|=1\big\}$. De manière plus générale, $V_n:=(V_+)^{\boxtimes_c n}$ est gradué par le poids en V : pour tout ensemble fini S :

$$\begin{aligned}
V_n(S)&\overset{def}{:=}(V_+)^{\boxtimes_c n}(S)\\
&=\bigoplus_{\substack{(J^1,\dots,J^n)\in\mathcal{Y}^n(S)\\ \mathcal{K}_S^{n-1}(J^1,\dots,J^n)=S}}\ \bigoplus_{\substack{\big((R_1^{J^1},R_2^{J^1}),\dots,(R_1^{J^n},R_2^{J^n})\big)\\ \in\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(J^i))}}\ \bigotimes_{\alpha\in\Gamma(J^1)}\mathfrak{Q}^V_{(R_1^{J^1},R_2^{J^1})}(J^1_\alpha)\otimes\dots\otimes\bigotimes_{\alpha\in\Gamma(J^n)}\mathfrak{Q}^V_{(R_1^{J^n},R_2^{J^n})}(J^n_\alpha)\\
&\cong\bigoplus_{\rho\in\mathbb{N}}\ \bigoplus_{\substack{(J^1,\dots,J^n)\in\mathcal{Y}^n(S)\\ \mathcal{K}_S^{n-1}(J^1,\dots,J^n)=S}}\ \bigoplus_{\substack{\big((R_1^{J^1},R_2^{J^1}),\dots,(R_1^{J^n},R_2^{J^n})\big)\\ \in\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathcal{Y}_2^{ord,+}(\Gamma(J^i))\\ \sum_{i=1}^n|R_1^{J^i}|=\rho}}\ \bigotimes_{\alpha\in\Gamma(J^1)}\mathfrak{Q}^V_{(R_1^{J^1},R_2^{J^1})}(J^1_\alpha)\otimes\dots\otimes\bigotimes_{\alpha\in\Gamma(J^n)}\mathfrak{Q}^V_{(R_1^{J^n},R_2^{J^n})}(J^n_\alpha)\\
&\cong I(S)\oplus\bigoplus_{\rho\in\mathbb{N}^*}\underbrace{\bigoplus_{\substack{l\in[\![1,n]\!]\\ \{r_1,\dots,r_l\}\subset[\![1,n]\!]\\ r_1<r_2<\dots<r_l}}\ \bigoplus_{\substack{(J^{r_1},\dots,J^{r_l})\in\mathcal{Y}^s(S)\\ \mathcal{K}_S^{l-1}(J^{r_1},\dots,J^{r_l})=S}}\ \bigoplus_{\substack{((R_1^{J^{r_1}},R_2^{J^{r_1}}),\dots,(R_1^{J^{r_l}},R_2^{J^{r_l}}))\\ \in\Xi_{(J^{r_1},\dots,J^{r_l})}\\ \sum_{i\in\{r_1,\dots,r_l\}}|R_1^{J^i}|=\rho}}\ \bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^{r_1}}}V(J^{r_1}_\alpha)\otimes\dots\otimes\bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^{r_l}}}V(J^{r_l}_\alpha)}_{\overset{not}{=:}V_n^{(\rho)_V}},
\end{aligned}$$

où l'ensemble $\Xi_{(J^1,\dots,J^n)}$ est :

$$\Big\{\big((R_1^{J^1},R_2^{J^1}),\dots,(R_1^{J^n},R_2^{J^n})\big)\in\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\big(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(J^i))\cup(\Gamma(J^i),\emptyset)\big)\Big|\forall i\in[\![1,n]\!],\forall\beta\in R_2^{J^i},|J^i_\beta|=1\Big\}.$$

Les isomorphismes $\lambda_V : I\boxtimes_c V\to$ et $\rho_V : V\boxtimes_c I\to V$ préservent la graduation (car $V\boxtimes_c I=(V\boxtimes_c I)^{(1)_V}$), ainsi que toutes les constructions intervenant dans la construction de $\widetilde{V}_n$ (cf. annexe C.2 ou la section 4.3.1), alors la graduation de V_n se transporte sur $\widetilde{V}_n$. De plus, l'injection $\widetilde{V}_n\hookrightarrow\widetilde{V}_{n+1}$ préserve la graduation par le poids donc, finalement, le monoïde $\mathscr{F}(V)$ libre sur V est gradué par le poids en V.

4.3.2.7 Proposition. *Première description de la protopérade libre $\mathscr{F}(V)$*
Soient S un ensemble fini et V un $\mathfrak{S}$-module réduit. On a l'isomorphisme de complexes de chaînes

$$\mathscr{F}(V)(S)\cong I(S)\oplus\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*}\ \bigoplus_{\substack{(J^1,\dots,J^n)\in\mathcal{Y}^n(S)\\ \mathcal{K}_S^{n-1}(J^1,\dots,J^n)=S}}\ \bigoplus_{\widetilde{\Xi}_{(J^1,\dots,J^n)}}\ \bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^1}}V(J^1_\alpha)\otimes\dots\otimes\bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^n}}V(J^n_\alpha),$$

où

$$\widetilde{\Xi}_{(J^1,\dots,J^n)} := \left\{ \begin{array}{c} \big((R_1^{J^1},R_2^{J^1}),\dots,(R_1^{J^n},R_2^{J^n})\big) \\ \in \prod_{i\in[\![1,n]\!]} \big(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(J^i))\cup(\Gamma(J^i),\emptyset)\big) \end{array} \middle| \begin{array}{c} \forall i\in[\![1,n-1]\!], \forall \beta\in R_1^{J^{i+1}},\ J_\beta^{i+1}\cap \coprod\limits_{\alpha\in R_1^{J^i}} J_\alpha^i \neq\emptyset \\ \forall i\in[\![1,n]\!], \forall \beta\in R_2^{J^i}, |J_\beta^i|=1 \end{array} \right\}.$$

De plus, la protopérade libre est gradué par le poids

$$\mathscr{F}(V)\cong\bigoplus_{\rho\in\mathbb{N}}\mathscr{F}^{(\rho)}(V)$$

avec $\mathscr{F}^{(0)}(V)=I(V)$ *et pour* $\rho\in\mathbb{N}^*$*,*

$$\mathscr{F}^{(\rho)}(V)(S)\cong\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*}\bigoplus_{\substack{(J^1,\dots,J^n)\in\mathcal{Y}^n(S)\\ \mathcal{K}_S^{n-1}(J^1,\dots,J^n)=S}}\bigoplus_{\substack{\widetilde{\Xi}_{(J^1,\dots,J^n)}\\ \sum_{i=1}^n|R_1^{J^i}|=\rho}}\bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^1}}V(J_\alpha^1)\otimes\dots\otimes\bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^n}}V(J_\alpha^n).$$

Démonstration. Cet isomorphisme correspond au choix d'un représentant particulier lors du passage au quotient $V_n\twoheadrightarrow\widetilde{V}_n$, comme nous allons le voir ci-dessous. On utilise encore les notations de l'annexe C.2. On a défini le morphisme $\tau_V : V\to V_2$ comme la composée suivante :

$$V\xrightarrow[\lambda_V^{-1}+\rho_V^{-1}]{}I\boxtimes_c V\oplus V\boxtimes_c I\xrightarrow[\eta\boxtimes_c i_V-i_V\boxtimes_c\eta]{}(I\oplus V)\boxtimes_c(I\oplus V)=:V_2 \qquad (=:\tau)$$

avec $\eta : I\hookrightarrow I\oplus V$, qui intervient dans la définition de $R_{A,B}$ pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits A et B : le $\mathfrak{S}$-module $R_{A,B}$ a été défini comme l'image de la composée

$$A\boxtimes_c(\underline{V}\oplus V_2)\boxtimes_c B\xhookrightarrow{=:\iota_{A,B}}A\boxtimes_c(V\oplus V_2)\boxtimes_c B\xrightarrow{A\boxtimes_c(\tau+\mathrm{id}_{V_2})\boxtimes_c B}A\boxtimes_c V_2\boxtimes_c B\ .$$

On a également défini le $\mathfrak{S}$-module $\widetilde{V}_n$ comme le conoyau du morphisme

$$\bigoplus_{i=0}^{n-2}R_{V_i,V_{n-i-2}}\longrightarrow V_n.$$

Ainsi, le passage au quotient $\widetilde{V}_n$ correspond à l'identification des images des morphismes $\big(\mathrm{id}_{V_i}\boxtimes_c\eta\boxtimes_c i_V\boxtimes_c\mathrm{id}_{V_{n-i-2}}\big)\circ\iota_{V_i,V_{n-i-2}}$ et $\big(\mathrm{id}_{V_i}\boxtimes_c i_V\boxtimes_c\eta\boxtimes_c\mathrm{id}_{V_{n-i-2}}\big)\circ\iota_{V_i,V_{n-i-2}}$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, dans V_n. On fait alors le choix d'identifier chaque classe de $\widetilde{V}_n$ à un élément de l'image de $\Sigma_{i\in[\![0,n-2]\!]}\big(\mathrm{id}_{V_i}\boxtimes_c\eta\boxtimes_c i_V\boxtimes_c\mathrm{id}_{V_{n-i-2}}\big)\circ\iota_{V_i,V_{n-i-2}}$. Ainsi, pour tout ensemble fini S,

$$\widetilde{V}_n(S)\cong\bigoplus_{h\in[\![1,n]\!]}\bigoplus_{\substack{(J^1,\dots,J^h)\in\mathcal{Y}^h(S)\\ \mathcal{K}_S^{h-1}(J^1,\dots,J^h)=S}}\bigoplus\widetilde{\Xi}_{(J^1,\dots,J^h)}\bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^1}}V(J_\alpha^1)\otimes\dots\otimes\bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^h}}V(J_\alpha^h)\underbrace{\otimes\bigotimes_S I(*)\otimes\dots\otimes\bigotimes_S I(*)}_{n-h\text{ termes}}$$

où

$$\widetilde{\Xi}_{(J^1,\dots,J^h)} := \left\{ \begin{array}{c} \big((R_1^{J^1},R_2^{J^1}),\dots,(R_1^{J^h},R_2^{J^h})\big) \\ \in \prod_{i\in[\![1,h]\!]} \big(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(J^i))\cup(\Gamma(J^i),\emptyset)\big) \end{array} \middle| \begin{array}{c} \forall i\in[\![1,h-1]\!], \forall \beta\in R_1^{J^{i+1}},\ J_\beta^{i+1}\cap \coprod\limits_{\alpha\in R_1^{J^i}} J_\alpha^i \neq\emptyset \\ \forall i\in[\![1,h]\!], \forall \beta\in R_2^{J^i}, |J_\beta^i|=1 \end{array} \right\}.$$

Ainsi, on a, pour tout entier $n > 1$,

$$\widetilde{V}_n(S) \cong \widetilde{V}_{n-1}(S) \oplus \bigoplus_{\substack{(J^1,\dots,J^n)\in\mathcal{Y}^n(S)\\ \mathcal{K}_S^{n-1}(J^1,\dots,J^n)=S}} \bigoplus \bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^1}} V(J^1_\alpha)\otimes\dots\otimes \bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^n}} V(J^n_\alpha),$$

qui décrit exactement les injections $\widetilde{V}_{n-1} \hookrightarrow \widetilde{V}_n$ et qui permet donc de conclure. □

4.3.2.8 Remarque. *Description de* $\mathscr{F}^{(2)}(V)$.
On a l'isomorphisme $(V_+ \boxtimes_c V_+)^{(2)_V} \cong (V_+ \boxtimes_c V_+)^{(1)_V,(1)_V}$ et donc, d'après l'exemple 4.3.2.6 et la proposition précédente, on a une description plus explicite du sous-$\mathfrak{S}$-module de poids deux de la (co)protopérade libre :

$$\mathscr{F}^{(2)}(V) \cong \bigoplus_{\substack{K,L\subset S\\ K\cup L=S\\ K\cap L\neq\emptyset}} V(K)\otimes V(L).$$

4.3.3 Foncteur d'induction et protopérade libre

Grâce à la définition du monoïde associatif libre dans $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{r\acute{e}d}, \boxtimes_c)$, on déduit des propositions C.2.0.3 et C.2.0.4 la proposition et le corollaire suivants. Ainsi, une protopérade définie par générateurs et relations s'envoie par le foncteur Ind sur une propérade définie par générateurs et relations.

4.3.3.1 Proposition. *Le foncteur* Ind *commute avec les foncteurs* $\mathscr{F}$ *respectifs du monoïde libre, i.e.*

$$\mathscr{F}\big(\mathrm{Ind}(-)\big) \cong \mathrm{Ind}\big(\mathscr{F}(-)\big).$$

Démonstration. C'est une application directe de la proposition C.2.0.3. □

4.3.3.2 Corollaire. *Soient* V *un* $\mathfrak{S}$*-module réduit et* R *un sous-*$\mathfrak{S}$*-module du monoïde libre* $\mathcal{F}(V)$. *Alors on a l'isomorphisme*

$$\mathrm{Ind}\Big(\mathscr{F}(V)\big/\langle R\rangle\Big) \cong \mathscr{F}\big(\mathrm{Ind}(V)\big)\Big/\big\langle \mathrm{Ind}(R)\big\rangle.$$

Démonstration. Découle de la proposition précédente, de la proposition C.2.0.4 et de l'exactitude du foncteur Ind. □

4.3.3.3 Remarque. Le corollaire 4.3.3.2 précédent nous permet de dire que la théorie des protopérades est complètement compatible avec celle des propérades.

On a vu que la description de la protopérade libre est assez lourde, nous allons donc lui préférer une description combinatoire généralisant la remarque 4.3.2.8. C'est l'objet de la section suivante.

4.4 Maçonnerie de la protopérade libre

Dans cette section, on présente une nouvelle description de la protopérade libre.

4.4.1 Another brick in the wall

Dans le cadre des opérades, la combinatoire sous-jacente est décrite par les arbres. Dans cette section, on donne une description de la combinatoire des protopérades. Ainsi, on montre que l'on décrit les protopérades à l'aide, non plus d'arbres, mais de briques et de murs : cela va nous permettre de décrire plus simplement la protopérade libre.

4.4.1.1 Définition. *Poset*

(i) On appelle *poset* tout ensemble partiellement ordonné.

(ii) Un *morphisme de poset* $\varphi : (K, \leqslant_K) \to (L, \leqslant_L)$ est une application monotone, c'est-à-dire que, pour tout couple d'éléments de K tels que $k_1 \leqslant_K k_2$, on a $\varphi(k_1) \leqslant_L \varphi(k_2)$.

On note `poset` la catégorie des posets finis (non-vides).

(iii) On dit que k et l, deux éléments distincts d'un poset $(K, \leqslant)$, sont *successifs* si $k < l$ et s'il n'existe pas d'élément $t \in K\backslash\{k, l\}$ tel que $k < t < l$. On note $\mathrm{Succ}(K)$, l'ensemble des couples d'éléments successifs de K :

$$\mathrm{Succ}(K) := \big\{(k, l) \in K^2 \mid k < l, \quad \nexists t \in K \text{ t.q. } k < t < l\big\}.$$

(iv) On appelle *chaîne* toute suite croissante $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ d'éléments d'un poset $(K, \leqslant)$ et on définit la longueur d'une chaîne $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ comme le nombre d'éléments la composant (donc r) ; on la note alors $\mathrm{len}(k_1 < k_2 < \ldots < k_r)$.

(v) On appelle *hauteur* d'un élément $k \in (K, \leqslant)$, l'élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$\mathfrak{h}(k) := \max\big\{\mathrm{len}(c) \in \mathbb{N}^* \mid c = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r < k \subset K\big\}.$$

4.4.1.2 Proposition. *Soit $(K, \leqslant)$ un poset et $(k, l) \in \mathrm{Succ}(K)$. Alors la surjection*

$$\pi_k^l : K \twoheadrightarrow K/_{k\sim l}$$

induit un ordre partiel canonique sur $K/_{k\sim l}$.

Démonstration. Pour $s \in K$, on note $[s] := \pi_k^l(s)$. On pose $\leqslant$, la relation binaire de $K/_{k\sim l}$, définie, pour tous r et s dans K, par

- ▷ $[r] \leqslant [s]$ si $r \leqslant s$ et $r, s \notin \{k, l\}$
- ▷ $[s] \leqslant [k \sim l]$ (resp. $s \geqslant [k \sim l]$) si $s \leqslant k$ ou $s \leqslant l$ (resp. $s \geqslant k$ ou $s \geqslant l$).

La réflexivité de $\leqslant$ et la transitivité sont claires, par définition. De plus, l'antisymétrie de $\leqslant$ est évidente $(K/_{k\sim l})\backslash\{[k]\}$, par simple identification avec $K\backslash\{k, l\}$. Supposons qu'on ait $[s]$ tel que $[s] \leqslant [k]$ et $[s] \geqslant [k]$ dans $K/_{k\sim l}$. Cela implique que dans K, on ait : ou bien $s \leqslant k$ et $k \leqslant s$ (resp. $s \leqslant l$ et $l \leqslant s$) et dans ce cas $k = s$ (resp. $s = l$) ; ou bien $s \leqslant k$ et $l \leqslant s$ (resp. $s \leqslant l$ et $k \leqslant s$) ce qui contredit que $(k, l) \in \mathrm{Succ}(K)$. On a donc l'antisymétrie de $\leqslant$. □

4.4.1.3 Lemme. *Soient $(R, \leqslant_R)$ et $(S, \leqslant_S)$ deux posets avec deux injections $R \hookrightarrow T \hookleftarrow S$. Si pour tous $a, b \in R \cap S$, $a \leqslant_R b$ si et seulement si $a \leqslant_S b$, alors $R \cup S$ est muni d'un ordre partiel canonique qui prolonge les ordres $\leqslant_R$ et $\leqslant_S$.*

Démonstration. On a $R \cup S = (R \backslash R \cap S) \cup (R \cap S) \cup (S \backslash R \cap S)$ et est donc muni de l'ordre partiel donné par celui de R sur $(R \backslash R \cap S)$, celui de S sur $(S \backslash R \cap S)$ et enfin celui de R, qui par hypothèse est le même que celui de S sur $(R \cap S)$. □

4.4.1.4 Définition. *Foncteur des murs ordonnés $\mathcal{W}^{or}$*
Soit $n > 0$ un entier. On définit le foncteur covariant $\mathcal{W}_n^{or} : \mathtt{Fin}^{op} \longrightarrow \mathtt{Fin}^{op}$ qui est donné, pour tout ensemble fini S, par

$$\mathcal{W}_n^{or}(S) := \left\{ \big(K = (K_1, \dots, K_n), \leqslant\big) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i \in [\![1, n]\!], K_i \subset S,\ \cup_i K_i = S \\ \forall s \in S,\ \Gamma_s^K := \{K_i | s \in K_i\} \text{ est totalement ordonné par } \leqslant_s \\ \forall s, t \in S,\ \forall a, b \in \Gamma_s^K \cap \Gamma_t^K,\ \ a \leqslant_s b \Leftrightarrow a \leqslant_t b \end{array} \right\}$$

où $\leqslant$ est l'ordre partiel canonique (cf. lemme 4.4.1.3) de $\cup_{s \in S} \Gamma_s^K = \{K_1, \dots, K_n\}$. L'action de $\sigma \in \mathrm{Aut}(S)$ sur $\big((K_1, \dots, K_n), \leqslant\big) \in \mathcal{W}_n^{or}$ est induite par l'action canonique sur S, i.e.

$$\big((K_1, \dots, K_n), \leqslant\big) \cdot \sigma = \big((K_1 \cdot \sigma, \dots, K_n \cdot \sigma), \leqslant'\big)$$

où $\leqslant'$ est induit par les ordres totaux des ensembles $\Gamma_s^{K \cdot \sigma} := \{K_i \cdot \sigma | s \in K_i \cdot \sigma\}$. On définit également le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{W}^{or} : & \mathtt{Fin}^{op} & \longrightarrow & \mathtt{Fin}^{op} \\ & S & \longmapsto & \coprod_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{W}_n^{or}(S) \end{array} .$$

4.4.1.5 Remarque. Pour tout entier naturel $n > 0$, le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit librement sur $\mathcal{W}_n^{or}$ en permutant les places des termes, i.e. pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\tau \cdot \big((K_1, \dots, K_n), \leqslant\big) = \big((K_{\tau^{-1}(1)}, \dots, K_{\tau^{-1}(n)}), \leqslant\big),$$

l'ordre partiel étant identique car ne dépendant pas de l'indexation des éléments.

4.4.1.6 Remarque. Pour tout ensemble S non-vide, on a $\mathcal{W}_0^{or}(S) = \emptyset$.

4.4.1.7 Exemple. On considère $K_1 = \{1, 2\}$, $K_2 = \{3, 4\}$ et $K_3 = \{2, 3\}$, trois sous-ensembles de $S = [\![1, 4]\!]$. Alors, on a les différents éléments de $\mathcal{W}_3^{or}(S)$ suivants :

- ▷ l'élément $a = \big((K_1, K_2, K_3), \leqslant^1\big)$ avec $\leqslant^1$ donné par $K_1 \leqslant^1 K_3$ et $K_2 \leqslant^1 K_3$;
- ▷ l'élément $b = \big((K_1, K_2, K_3), \leqslant^2\big)$ avec $\leqslant^2$ donné par $K_3 \leqslant^2 K_1$ et $K_3 \leqslant^2 K_2$;
- ▷ l'élément $c = \big((K_1, K_2, K_3), \leqslant^3\big)$ avec $\leqslant^3$ donné par $K_1 \leqslant^3 K_3$ et $K_3 \leqslant^3 K_2$;
- ▷ l'élément $d = \big((K_1, K_2, K_3), \leqslant^4\big)$ avec $\leqslant^4$ donné par $K_3 \leqslant^2 K_1$ et $K_2 \leqslant^2 K_3$.

Les quatre éléments a, b, c et d de $\mathcal{W}_3^{or}(S)$ sont tous différents, en étant pourtant composé des mêmes sous-ensembles de S.

4.4.1.8 Définition/Proposition. *Produits sur $\mathcal{W}^{or}$*
On définit les *produits de compositions verticale et horizontale* sur $\mathcal{W}$.

(i) On pose $\mathcal{V}$, le produit *de composition (vertical)* sur $\mathcal{W}^{or}$, comme la transformation naturelle entre foncteurs :

$$\mathcal{V} : \big(\mathcal{W}^{or} \times \mathcal{W}^{or}\big)(-) \longrightarrow \mathcal{W}^{or}(-)$$

donnée, pour tout ensemble fini S, par $\mathcal{V}_{n,m,S} : \mathcal{W}_n^{ord}(S) \times \mathcal{W}_m^{ord}(S) \longrightarrow \mathcal{W}_{m+n}^{ord}(S)$ qui envoie le couple $\big((K, \leqslant_K), (L, \leqslant_L)\big)$ sur $\big(R = (K_1, \dots, K_n, L_1, \dots L_m), \leqslant_K^L\big)$ où, pour tout $s \in S$, l'ordre

total de l'ensemble Γ_s^R est induit par ceux de Γ_s^K, Γ_s^L et en posant que pour tout $K_i \in \Gamma_s^K$ et tout $L_j \in \Gamma_s^L$, $K_i \leqslant_K^L L_j$. Ce produit est associatif, c'est-à-dire que, pour tout ensemble fini S, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}^{or}(S) \times \mathcal{W}^{or}(S) \times \mathcal{W}^{or}(S) & \xrightarrow{\mathcal{V}\times \mathrm{id}} & \mathcal{W}^{or}(S) \times \mathcal{W}^{or}(S) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\mathcal{V}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{V}} \\ \mathcal{W}^{or}(S) \times \mathcal{W}^{or}(S) & \xrightarrow[\mathcal{V}]{} & \mathcal{W}^{or}(S). \end{array}$$

(ii) On pose $\mathcal{H}$, le produit *de concaténation (horizontal)* sur $\mathcal{W}^{or}$, comme la transformation naturelle entre bifoncteurs

$$\mathcal{H} : \mathcal{W}^{or}(-_1) \times \mathcal{W}^{or}(-_2) \longrightarrow \mathcal{W}^{or}(-_1 \amalg -_2)$$

donnée, pour tous ensembles finis S et T, par $\mathcal{H}_{n,m,S,T} : \mathcal{W}_n^{or}(S) \times \mathcal{W}_m^{or}(T) \longrightarrow \mathcal{W}_{m+n}^{or}(S \amalg T)$ qui envoie $\big((K, \leqslant_K), (L, \leqslant_L)\big)$ sur $\big(R = (K_1, \ldots, K_n, L_1, \ldots L_m), \leqslant_{K,L}\big)$ où pour tout $s \in S$ et $t \in T$, on a les égalités d'ensembles totalement ordonnés $\Gamma_s^R = \Gamma_s^K$ et $\Gamma_t^R = \Gamma_t^L$. Ce produit est associatif et commutatif, i.e. on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}^{or}(-_1) \times \mathcal{W}^{or}(-_2) \times \mathcal{W}^{or}(-_3) & \xrightarrow{\mathcal{H}\times \mathrm{id}} & \mathcal{W}^{or}(-_1) \times \mathcal{W}^{or}(-_2 \amalg -_3) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\mathcal{H}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}} \\ \mathcal{W}^{or}(-_1 \amalg -_2) \times \mathcal{W}^{or}(-_3) & \xrightarrow[\mathcal{H}]{} & \mathcal{W}^{or}(-_1 \amalg -_2 \amalg -_3) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}^{or}(-_1) \times \mathcal{W}^{or}(-_2) & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathcal{W}^{or}(-_1 \amalg -_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \cong} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ \mathcal{W}^{or}(-_2) \times \mathcal{W}^{or}(-_1) & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathcal{W}^{or}(-_2 \amalg -_1)\,. \end{array}$$

De plus, on a le diagramme de transformations naturelles commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \big(\mathcal{W}^{or} \times \mathcal{W}^{or}\big)(-_1) \times \big(\mathcal{W}^{or} \times \mathcal{W}^{or}\big)(-_2) & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\sigma\times\mathrm{id}} & \mathcal{W}^{or}(-_1) \times \mathcal{W}^{or}(-_2) \times \mathcal{W}^{or}(-_1) \times \mathcal{W}^{or}(-_2) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{V}\times\mathcal{V}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}\times\mathcal{H}} & & \\ \mathcal{W}^{or}(-_1) \times \mathcal{W}^{or}(-_2) & \circlearrowleft & \mathcal{W}^{or}(-_1 \amalg -_2) \times \mathcal{W}^{or}(-_1 \amalg -_2) & & \\ & {\scriptstyle \mathcal{H}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathcal{V}} & & & \\ & \mathcal{W}^{or}(-_1 \amalg -_2) & & & \end{array} \quad .$$

Toutes ces constructions passent au quotient sous l'action de $\mathfrak{S}_n$:

4.4.1.9 Définition. *Foncteur des murs $\mathcal{W}$*
On définit le foncteur $\mathcal{W}_n : \mathtt{Fin}^{op} \longrightarrow \mathtt{Fin}^{op}$ par $\mathcal{W}_n := \big(\mathcal{W}_n^{or}\big)_{\mathfrak{S}_n}$ qui est donné, pour tout ensemble fini S, par

$$\mathcal{W}_n(S) := \left\{ \big(K = \{K_\alpha\}_{\alpha\in A}, \leqslant\big) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \alpha \in A, K_\alpha \subset S,\ \cup_\alpha K_\alpha = S,\ |A| = n, \\ \forall s \in S,\ \Gamma_s^K := \{K_\alpha | s \in K_\alpha\} \text{ est totalement ordonné par } \leqslant_s \\ \forall s, t \in S,\ \forall a, b \in \Gamma_s^K \cap \Gamma_t^K,\ \ a \leqslant_s b \Leftrightarrow a \leqslant_t b \end{array} \right\}$$

où $\leqslant$ est l'ordre partiel canonique de $\cup_{s\in S}\Gamma_s^K = \{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$. On a la transformation naturelle

$$\mathcal{W}^{or} \longrightarrow \mathcal{W}.$$

L'action de $\sigma \in \mathrm{Aut}(S)$ sur $\big(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}, \leqslant\big) \in \mathcal{W}_n$ est induite par l'action canonique sur S, i.e.

$$\big(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}, \leqslant\big)\cdot\sigma = \big(K = \{K_\alpha\cdot\sigma\}_{\alpha\in A}, \leqslant'\big)$$

où $\leqslant'$ est induit par les ordres totaux des ensembles $\Gamma_{s\cdot\sigma}^{K\cdot\sigma} := \{K_\alpha\cdot\sigma | s\cdot\sigma \in K_\alpha\cdot\sigma\}$. On définit également le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{W}: & \mathtt{Fin}^{op} & \longrightarrow & \mathtt{Fin}^{op} \\ & S & \longmapsto & \coprod_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{W}_n(S) \end{array} .$$

On appelle *mur bâti sur* S tout élément $K \in \mathcal{W}(S)$ et on appelle *brique de* K tout élément K_α d'un mur K.

4.4.1.10 Proposition. *Produits sur $\mathcal{W}$*
Les produits $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ passent au quotient par l'action de $\mathfrak{S}_n$, autrement dit, il existe les transformations naturelles

$$\mathcal{V} : \big(\mathcal{W}\times\mathcal{W}\big)(-) \longrightarrow \mathcal{W}(-)$$
$$\mathcal{H} : \mathcal{W}(-_1)\times\mathcal{W}(-_2) \longrightarrow \mathcal{W}(-_1 \amalg -_2),$$

appelées respectivement produit de composition et de concaténation sur $\mathcal{W}$, telles qu'on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathcal{W}^{or}\times\mathcal{W}^{or}\big)(-) & \xrightarrow{\mathcal{V}} & \mathcal{W}^{or}(-) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \big(\mathcal{W}\times\mathcal{W}\big)(-) & \xrightarrow[\mathcal{V}]{} & \mathcal{W}(-) \end{array} ; \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{W}^{or}(-_1)\times\mathcal{W}^{or}(-_2) & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathcal{W}^{or}(-_1\amalg -_2) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \mathcal{W}(-_1)\times\mathcal{W}(-_2) & \xrightarrow[\mathcal{H}]{} & \mathcal{W}(-_1\amalg -_2) \end{array} ;$$

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathcal{W}\times\mathcal{W}\big)(-_1)\times\big(\mathcal{W}\times\mathcal{W}\big)(-_2) & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\sigma\times\mathrm{id}} & \mathcal{W}(-_1)\times\mathcal{W}(-_2)\times\mathcal{W}(-_1)\times\mathcal{W}(-_2) \\ {\scriptstyle\mathcal{V}\times\mathcal{V}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \\ \mathcal{W}(-_1)\times\mathcal{W}(-_2) & & \mathcal{W}(-_1\amalg -_2)\times\mathcal{W}(-_1\amalg -_2) \\ & {\scriptstyle\mathcal{H}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\mathcal{V}} & \\ & \mathcal{W}(-_1\amalg -_2) & \end{array} .$$

4.4.1.11 Remarque. La proposition 4.4.1.10 précédente nous dit que le foncteur $\mathcal{W}$ est muni d'une structure de toProp (cf. définition 4.2.1.3) en ensembles (cf. remarque 3.0.0.6), c'est-à-dire que $\mathcal{W}$ est un élément de la catégorie $\mathtt{As}\big(\mathtt{Com}(\mathtt{Func}(\mathtt{Fin}^{op},\mathtt{Fin}),\otimes^{conc}),\square\big)$.

4.4.1.12 Remarque. *Une remarque importante*
Toutes les constructions fonctorielles faites à la section 3.1.1 peuvent être vues comme des sous-foncteurs de $\mathcal{W}^{or}$. Par exemple, on a l'injection naturelle $\mathcal{Y}^{ord} \hookrightarrow \mathcal{W}^{or}$ donnée, pour tout ensemble fini S et tout entier naturel $n > 0$, par :

$$\mathcal{Y}_n^{ord}(S) = \left\{ \big(K = (K_1,\dots,K_n), \leqslant\big) \;\middle|\; \forall i \in [\![1,n]\!], K_i \subset S,\ \cup_i K_i = S, \forall s\in S,\ |\Gamma_s^K| = 1 \right\} \hookrightarrow \mathcal{W}_n^{ord}(S) .$$

On a également, pour tout ensemble fini S et tous entiers naturels non-nuls m et n, l'isomorphisme :

$$\mathcal{Y}_m^{ord}(S)\times\mathcal{Y}_n^{ord}(S) \;\cong$$

$$\left\{ \Big(R=(K_1,\dots,K_m,L_1,\dots,L_n),\leqslant\Big) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i\in[\![1,m]\!], K_i\subset S,\ \cup_i K_i=S \\ \forall j\in[\![1,n]\!], L_i\subset S,\ \cup_j L_j=S \\ \forall s\in S, \exists! i\in[\![1,m]\!], \exists! j\in[\![1,n]\!] \\ \text{ tel que } \Gamma_s^R:=\{K_i,L_j\} \text{ avec } K_i\leqslant_s L_j \\ \forall s,t\in S,\ \forall a,b\in\Gamma_s\cap\Gamma_t,\ \ a\leqslant_s b\Leftrightarrow a\leqslant_t b \end{array} \right\},$$

qui nous donne l'injection naturelle $\mathcal{Y}_m^{ord}(S)\times\mathcal{Y}_n^{ord}(S)\hookrightarrow\mathcal{W}_{m+n}^{or}(S)$, et qui induit donc l'injection naturelle

$$\mathcal{X}^{ord}\hookrightarrow\mathcal{W}^{or}.$$

La surjection naturelle $\mathcal{W}^{or}\twoheadrightarrow\mathcal{W}$ nous fournit les diagrammes commutatifs de transformations naturelles :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Y}^{ord} & \hookrightarrow & \mathcal{W}^{or} & \hookleftarrow & \mathcal{X}^{ord} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \mathcal{Y} & \hookrightarrow & \mathcal{W} & \hookleftarrow & \mathcal{X} \end{array};$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(-_1)\times\mathcal{Y}(-_2) & \hookrightarrow & \mathcal{W}(-_1)\times\mathcal{W}(-_2) \\ {\scriptstyle\mu^{conc}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{H}} \\ \mathcal{Y}(-_1\amalg-_2) & \hookrightarrow & \mathcal{W}(-_1\amalg-_2) \end{array} \quad\text{et}\quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(-_1)\times\mathcal{X}(-_2) & \hookrightarrow & \mathcal{W}(-_1)\times\mathcal{W}(-_2) \\ {\scriptstyle\mu^{conc}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{H}} \\ \mathcal{X}(-_1\amalg-_2) & \hookrightarrow & \mathcal{W}(-_1\amalg-_2) \end{array}.$$

4.4.1.13 Définition. *Connexité des murs*
Soit un élément $(K=\{K_\alpha\}_{\alpha\in A},\leqslant)$ de $\mathcal{W}(S)$. On définit sur K *la relation d'équivalence de connexité* $\overset{conn.}{\sim}$: pour deux éléments a et b de A, on pose $K_a\overset{conn.}{\sim}K_b$ s'il existe $K_a=:K_0,K_1,\dots,K_{n-1},K_n:=K_b\in K$ tels que, pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$,

$$K_i\cap K_{i+1}\neq\emptyset\quad\text{et}\quad(K_i,K_{i+1})\in\mathrm{Succ}(K)\text{ ou }(K_{i+1},K_i)\in\mathrm{Succ}(K).$$

Le passage au quotient pour la relation $\overset{conn.}{\sim}$ définit la transformation naturelle

$$\mathcal{K}:\mathcal{W}(-)\longrightarrow\mathcal{Y}(-)\subset\mathcal{W}(-).$$

On a le diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & \mathcal{W} \\ {\scriptstyle\mathcal{K}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{K}} \\ \mathcal{Y} & \hookrightarrow & \mathcal{W}, \end{array}$$

où la transformation naturelle $\mathcal{K}$ de gauche est celle définie à la définition 3.1.1.13.

4.4.1.14 Définition. *Foncteur $\mathcal{W}^{conn}$*
On définit le foncteur

$$\mathcal{W}_n^{conn,ord}:\mathtt{Fin}^{op}\longrightarrow\mathtt{Fin}^{op}$$

comme, pour tout ensemble S non-vide, comme la fibre de $\mathcal{K}_S:\mathcal{W}^{or}(S)\to\mathcal{Y}^{ord}(S)$ au dessus de $\{S\}$, c'est-à-dire comme le sous-foncteur de $\mathcal{W}_n^{or}$ donné, par

$$\mathcal{W}_n^{conn,ord}(S):=\left\{ \Big(K=(K_1,\dots,K_n),\leqslant\Big)\in\mathcal{W}_n^{ord} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\alpha,\beta\in[\![1,n]\!], \exists K_\alpha=:K_{i_0},\dots,K_{i_{m-1}},K_m:=K_\beta \\ \text{t.q. } \forall j\in[\![0,m-1]\!],\ \ K_{i_j}\in K,\ K_{i_j}\cap K_{i_{j+1}}\neq\emptyset \\ \text{ et }\ (K_{i_j},K_{i_{j+1}}) \text{ ou } (K_{i_{j+1}},K_{i_j})\in\mathrm{Succ}(K) \end{array} \right\}.$$

La surjection naturelle $\mathcal{W}^{or} \twoheadrightarrow \mathcal{W}$ nous permet de définir le sous-foncteur

$$\mathcal{W}^{conn} \hookrightarrow \mathcal{W}$$

appelé *foncteur des murs connexes* : un élément de $\mathcal{W}^{conn}(S)$ est appelé mur bâti sur S *connexe*.

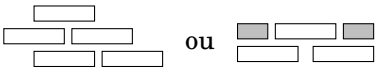
4.4.1.15 Remarque. Par les même arguments que dans la remarque 4.4.1.12, $\mathcal{X}^{conn}$ s'injecte naturellement dans $\mathcal{W}^{conn}$.

4.4.1.16 Proposition. *Soit $K \in \mathcal{W}(S)$ un mur. Alors, il existe $S_1 \amalg \ldots \amalg S_n$ une unique partition (non-ordonnée) de S telle que*

$$K \in \mathrm{im}\Big(\mathcal{H} : \prod_{i=1}^{n} \mathcal{W}^{conn}(S_i) \longrightarrow \mathcal{W}(S)\Big).$$

Démonstration. Soient S un ensemble fini et $K \in \mathcal{W}(S)$ un mur au dessus de S. On considère les classes d'équivalences de K sous la relation $\overset{conn.}{\sim}$: chacune de ces classes nous fournit un élément de $\mathcal{W}^{conn}(S_i)$, pour S_i l'ensemble obtenu par réunion des éléments de la i-ème classe. On obtient donc un antécédent de K par l'application $\mathcal{H} : \prod_{i=1}^{n} \mathcal{W}^{conn}(S_i) \longrightarrow \mathcal{W}(S)$. □

4.4.1.17 Remarque. *À propos de la représentation diagrammatique des murs*
La terminologie introduite à la définition 4.4.1.14 vient de la représentation diagrammatique que l'on peut faire des éléments de $\mathcal{W}(S)$. Ainsi, contrairement à la combinatoire des opérades qui est contrôlée par des arbres (cf. [LV12, Sect. 5.6]), les monômes d'une protopérade sont représentés par un empilement de briques, autrement dit un mur :



la couleur grise étant seulement présente pour exhiber le fait que l'une des briques est "non-connexe" dans cette représentation. On présente plusieurs exemples.

- ▷ Par exemple, on considère $S = [\![1, 4]\!]$ et le mur à trois briques $K = \{K_a, K_b, K_c\} \in \mathcal{W}([\![1, 4]\!])$ avec

  $$K_a = \{1, 2\}, K_b = \{3, 4\} \text{ et } K_c = \{1, 2\}$$

  avec l'ordre partiel $K_a < K_c$. On représente ce mur par la figure 4.3.

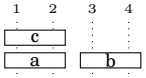
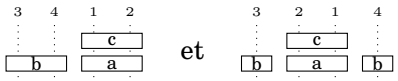


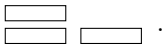
FIGURE 4.3 – une représentation du mur K

  Notons un fait important : cette représentation graphique du mur K *dépend d'un choix d'ordre sur l'ensemble* S. Ainsi, les diagrammes



  représentent également le mur K.

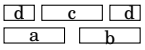
Sur le deuxième diagramme, on remarque que la brique K_b est non-connexe. Ici, on a le choix de l'ordre naturel de $[\![1,4]\!]$, qui correspond à la figure 4.3. Dans les cas où il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra omettre de préciser les éléments de S et les noms des briques pour obtenir le diagramme : ainsi, on représentera K par



▷ On considère le mur connexe à quatre briques $K = \{K_a, K_b, K_c, K_d\} \in \mathcal{W}^{conn}([\![1,4]\!])$ avec

$$K_a = \{1,2\}, K_b = \{3,4\}, K_c = \{2,3\} \text{ et } K_d = \{1,4\}$$

et l'ordre partiel $K_a < K_c$, $K_a < K_d$, $K_b < K_c$ et $K_b < K_d$. On peut représenter ce mur par le diagramme



4.4.1.18 Exemple. On considère le mur à trois briques $K = \{K_a, K_b, K_c\} \in \mathcal{W}([\![1,4]\!])$ avec

$$K_a = \{1,2\}, K_b = \{3,4\} \text{ et } K_c = \{1,2\}$$

et l'ordre partiel $K_a < K_c$. On peut représenter ce mur par le diagramme

Ce mur n'est pas connexe : K est dans l'image du produit $\mathcal{H} : \mathcal{W}^{conn}([\![1,2]\!]) \times \mathcal{W}^{conn}([\![3,4]\!]) \longrightarrow \mathcal{W}([\![1,4]\!])$.

4.4.2 Retour vers la protopérade libre

On commence par définir la catégorie $(\mathtt{Fin}^{op})_{\mathcal{W}_n^{or}}$ qui a pour objets les couples (S,x) avec S un ensemble fini et x un élément de $\mathcal{W}_n^{or}(S)$. Un morphisme de (S,x) dans (T,y) est un morphisme $\varphi : S \to T$ de la catégorie $\mathtt{Fin}^{op}$ tel que $\mathcal{W}_n^{or}(\varphi)(x) = y$. On a également les deux foncteurs canoniques :

▷ le foncteur $Oub : \left(\mathtt{Fin}^{op}\right)_{\mathcal{W}_n^{or}} \to (\mathtt{Fin}^{op})^{\times n}$ défini, sur les objet, par $Oub_n(S,x) = \bar{x}$ avec $\bar{x}$ le n-uplet d'ensembles sous-jacent à x et sur les morphismes, par $Oub_n(\varphi) = \mathcal{W}_n^{or}(\varphi)$;

▷ le foncteur de projection $\pi : \left(\mathtt{Fin}^{op}\right)_{\mathcal{W}_n^{or}} \to \mathtt{Fin}^{op}$ défini par $\pi(S,x) = S$.

On fixe P un $\mathfrak{S}$-module réduit : c'est donc un foncteur (contravariant) de la catégorie $\mathtt{Fin}$ dans la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ que l'on cherche à "étendre" à la catégorie $\left(\mathtt{Fin}^{op}\right)_{\mathcal{W}_n^{or}}$. Par produit extérieur (cf. définition A.2.0.1), on définit le foncteur

$$\begin{array}{rccc} P^{\times n} : & \left(\mathtt{Fin}^{op}\right)^{\times n} & \longrightarrow & \mathtt{Ch}_k. \\ & (A_1, \ldots, A_n) & \longmapsto & P(A_1) \otimes \ldots \otimes P(A_n) \end{array}$$

On définit alors le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \hat{P} : & \left(\mathtt{Fin}^{op}\right)_{\mathcal{W}_n^{or}} & \longrightarrow & \mathtt{Ch}_k \\ & (S,x) & \longmapsto & P^{\times n} \circ Oub_n(S,x) \end{array} ;$$

à partir duquel on définit le foncteur $P^{\mathcal{W}_n^{or}}$

$$\begin{array}{rccc} P^{\mathcal{W}_n^{or}} : & \mathtt{Fin}^{op} & \longrightarrow & \mathtt{Ch}_k \\ & S & \longmapsto & \bigoplus_{x\in\mathcal{W}_n^{or}(S)} P^{\times n}\circ Oub_n(S,x) \end{array} .$$

Finalement, pour $S \in \mathrm{Ob}\,\mathtt{Fin}$, on a

$$P^{\mathcal{W}_n^{or}}(S) = \bigoplus_{\left((K_1,\dots,K_n),\leqslant\right)\in\mathcal{W}_n^{or}(S)} P(K_1)\otimes\ldots\otimes P(K_n)\ .$$

L'action libre du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur $P^{\times n}$ se transporte sur $P^{\mathcal{W}_n^{or}}$, grâce au morphisme de symétrie de la catégorie $(\mathtt{Ch}_k,\otimes,\sigma)$: on obtient alors le foncteur

$$\begin{aligned} \left(P^{\mathcal{W}_n^{or}}\right)_{\mathfrak{S}_n}(S) &= \Big(\bigoplus_{\left((K_1,\dots,K_n),\leqslant\right)\in\mathcal{W}_n^{or}(S)} P(K_1)\otimes\ldots\otimes P(K_n)\Big)_{\mathfrak{S}_n} \\ &\cong \bigoplus_{\left(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A},\leqslant\right)\in\mathcal{W}_n(S)} \Big(\bigoplus_{(K_1,\dots,K_n)\in\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}} P(K_1)\otimes\ldots\otimes P(K_n)\Big)_{\mathfrak{S}_n} \\ P^{\mathcal{W}_n}(S) &\overset{not.}{:=} \bigoplus_{\left(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A},\leqslant\right)\in\mathcal{W}_n(S)} \bigotimes_{\alpha\in A} P(K_\alpha). \end{aligned}$$

On peut refaire cette construction en remplaçant $\mathcal{W}_n^{or}$ par le sous-foncteur $\mathcal{W}_n^{conn,ord}$ des murs connexes, ce qui nous donne le foncteur

$$P^{\mathcal{W}_n^{conn}}(S) := \bigoplus_{\left(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A},\leqslant\right)\in\mathcal{W}_n^{conn}(S)} \bigotimes_{\alpha\in A} P(K_\alpha).$$

On définit le produit de composition partiel : soient φ un diagramme d'injections $i : S \hookrightarrow R \hookleftarrow T : j$ avec $\mathrm{im}(i)\cap\mathrm{im}(j)\neq\emptyset$ et $\mathrm{im}(i)\cup\mathrm{im}(j) = R$. On a, par la proposition 4.4.1.10, le morphisme

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{W}_m^{or}}(S)\otimes P^{\mathcal{W}_n^{or}}(T) = &\Big(\bigoplus_{\left((K_1,\dots,K_m),\leqslant_K\right)\in\mathcal{W}_m^{or}(S)} P(K_1)\otimes\ldots\otimes P(K_m)\Big) \\ &\otimes\Big(\bigoplus_{\left((L_1,\dots,L_n),\leqslant_L\right)\in\mathcal{W}_n^{or}(T)} P(L_1)\otimes\ldots\otimes P(L_n)\Big) \\ \cong &\bigoplus_{\substack{\left((K_1,\dots,K_m),\leqslant_K\right)\in\mathcal{W}_m^{or}(S)\\ \left((L_1,\dots,L_n),\leqslant_L\right)\in\mathcal{W}_n^{or}(T)}} P(K_1)\otimes\ldots\otimes P(K_m)\otimes P(L_1)\otimes\ldots\otimes P(L_n) \\ \to &\bigoplus_{\left((i(K_1),\dots,i(K_m),j(L_1),\dots,j(L_n)),\leqslant_{i(K)}^{j(L)}\right)\in\mathcal{W}_{m+n}^{or}(R)} P(K_1)\otimes\ldots\otimes P(K_m)\otimes P(L_1)\otimes\ldots\otimes P(L_n), \end{aligned}$$

où $\leqslant_{i(K)}^{j(L)}$ est défini comme suit : on munit $\cup_a i(K_a)$ (resp. $\cup_b j(L_b)$) de l'ordre partiel $\leqslant_{i(K)}$ (resp.$\leqslant_{j(L)}$) induit par celui de K (resp. L), i.e. $i(K_a)\leqslant_{i(K)}^{j(L)} i(K_b)$ si $K_a\leqslant_K K_b$ (resp. $j(L_a)\leqslant_{i(K)}^{j(L)} j(L_b)$ si $L_a\leqslant_L L_b$) ce qui munit $(K_1,\dots,\mathcal{K}_m,L_1,\dots,L_n)$, par le lemme 4.4.1.3, de l'ordre canonique $\leqslant_{i(K)}^{j(L)}$.

On a alors le morphisme

$$P^{\mathcal{W}_m^{or}}(S)\otimes P^{\mathcal{W}_n^{or}}(T)\longrightarrow\ P^{\mathcal{W}_{m+n}}(R)=\bigoplus_{\left(\{H_\alpha\}_{\alpha\in A},\leqslant_H\right)\in\mathcal{W}_{m+n}(R)}\ \bigotimes_{\alpha\in A}P(H_\alpha)$$

qui se factorise par $P^{\mathcal{W}_m}(S)\otimes P^{\mathcal{W}_n}(T)$, c'est-à-dire qu'on a le produit de composition partiel

$$\underset{\varphi}{\circ}:P^{\mathcal{W}_m}(S)\otimes P^{\mathcal{W}_n}(T)\longrightarrow\ P^{\mathcal{W}_{m+n}}(R).$$

Comme $\mathrm{im}(i)\cap\mathrm{im}(j)\neq\emptyset$, ce produit de composition partiel se restreint à la version connexe : on a le produit de composition partiel

$$\underset{\varphi}{\circ}:P^{\mathcal{W}_m^{conn}}(S)\otimes P^{\mathcal{W}_n^{conn}}(T)\longrightarrow\ P^{\mathcal{W}_{m+n}^{conn}}(R).$$

Ces produits partiels munissent $P^{\mathcal{W}^{conn}}:=\coprod_n P^{\mathcal{W}_n^{conn}}$ d'une structure de protopérade par la proposition 4.2.3.2.

4.4.2.1 Théorème. *Description de la protopérade libre*
Soient V un $\mathfrak{S}$-module réduit et ρ un entier non-nul. On a, pour tout ensemble S fini, l'isomorphisme de $\mathrm{Aut}(S)$-modules à droite

$$\mathscr{F}^{\rho}(V)(S)\cong\bigoplus_{\substack{(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A},\leqslant)\\ \in\mathcal{W}_\rho^{conn}(S)}}\ \bigotimes_{\alpha\in A}V(K_\alpha).$$

Démonstration. Par la proposition 4.3.2.7, pour $\rho\in\mathbb{N}^*$, on a l'isomorphisme

$$\mathscr{F}^{(\rho)}(V)(S)\cong\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*}\ \bigoplus_{\substack{(J^1,\dots,J^n)\in\mathcal{Y}^n(S)\\ \mathcal{K}_S^{n-1}(J^1,\dots,J^n)=S}}\ \bigoplus_{\substack{\widetilde{\Xi}_{(J^1,\dots,J^n)}\\ \sum_{i=1}^n|R_1^{J^i}|=\rho}}\ \bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^1}}V(J_\alpha^1)\otimes\dots\otimes\bigotimes_{\alpha\in R_1^{J^n}}V(J_\alpha^n).$$

avec

$$\widetilde{\Xi}_{(J^1,\dots,J^n)}:=\left\{\begin{array}{c}\big((R_1^{J^1},R_2^{J^1}),\dots,(R_1^{J^n},R_2^{J^n})\big)\\ \in\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\big(\mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(J^i))\cup(\Gamma(J^i),\emptyset)\big)\end{array}\ \middle|\ \begin{array}{c}\forall i\in[\![1,n-1]\!],\forall\beta\in R_1^{J^{i+1}},\ J_\beta^{i+1}\cap\coprod\limits_{\alpha\in R_1^{J^i}}J_\alpha^i\neq\emptyset\\ \forall i\in[\![1,n]\!],\forall\beta\in R_2^{J^i},|J_\beta^i|=1\end{array}\right\}.$$

À un élément $(J^1,\dots,J^n)\in\mathcal{Y}^n(S)$ tel que $\mathcal{K}_S^{n-1}(J^1,\dots,J^n)=S$ et tel que $\widetilde{\Xi}_{(J^1,\dots,J^n)}\neq\emptyset$, on associe le mur $K\in\mathcal{W}_\rho^{conn}(S)$ d'ensemble $\big\{J_{\alpha^i}^i\subset S\mid i\in[\![1,n]\!],\ \alpha^i\in R_1^{J^i}\big\}$ et d'ordre partiel induit par les relations $J_\alpha^i<J_\beta^j$ si $J_\alpha^i\cap J_\beta^j\neq\emptyset$, $\alpha\in R_1^{J^i}$, $\beta\in R_1^{J^j}$ et $i<j$. Cela nous fournit donc un morphisme de $\mathrm{Aut}(S)$-modules :

$$\Phi:\mathscr{F}^{\rho}(V)(S)\longrightarrow\bigoplus_{\substack{(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A},\leqslant)\\ \in\mathcal{W}_\rho^{conn}(S)}}\ \bigotimes_{\alpha\in A}V(K_\alpha).$$

Réciproquement, à tout mur $K=\big(\{K_\alpha\mid\alpha\in A\},<\big)\in\mathcal{W}_\rho^{conn}(S)$ avec $\max_{\alpha\in A}\big(\mathfrak{h}(K_\alpha)\big)=n\in\mathbb{N}^*$, on associe un élément $(J^1,\dots,J^n)\in\mathcal{Y}^n(S)$ tel que $\widetilde{\Xi}_{(J^1,\dots,J^n)}\neq\emptyset$ de la manière suivante. On construit les partitions J^i comme l'ensemble $\{K_{\alpha^i}\in K\mid\mathfrak{h}(K_\alpha)=i\}$ complété en une partition de S par des singletons : ainsi, on a

$$J^i:=\big\{K_{\alpha^i}\in K\mid\mathfrak{h}(K_\alpha)=i\big\}\coprod\big\{\{s\}\ \big|\ s\notin\coprod_{\alpha^i}K_{\alpha^i}\big\}=\big\{J_\beta^i\mid\beta\in B=\Gamma(J^i)\big\}$$

et la décomposition $(R_1^{J^i}, R_2^{J^i}) \in \mathcal{Y}_2^{ord}(\Gamma(J^i)) \cup (\Gamma(J^i), \emptyset)$ est donnée directement par la définition de J^i :

$$\beta \in \begin{cases} R_1^{J^i} & \text{si } J^i_\beta \in \left\{K_{\alpha^i} \in K \mid \mathfrak{h}(K_\alpha) = i\right\} \\ R_2^{J^i} & \text{sinon} \end{cases} .$$

La connexité du mur K implique que l'élément $(J^1, \dots, J^n)$ vérifie également la propriété de connexité

$$\mathcal{K}_S^{n-1}(J^1, \dots, J^n) = S.$$

Finalement, on a un morphisme de $\mathrm{Aut}(S)$-modules :

$$\Psi : \bigoplus_{\substack{(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}, \leqslant) \\ \in \mathcal{W}_\rho^{conn}(S)}} \bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha) \longrightarrow \mathscr{F}^\rho(V)(S)$$

qui vérifie $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$, ce qu'il fallait démontrer. □

4.4.3 Représentation diagrammatique des monômes de $\mathscr{F}(V)$

§ 1 Monômes

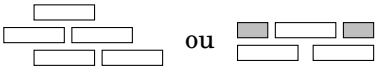
On commence par donner la définition d'un monôme de $\mathscr{F}(V)$.

4.4.3.1 Définition. *Monôme*
Soit V un $\mathfrak{S}$-module réduit et S un ensemble fini. Un monôme de $\mathscr{F}(V)(S)$ est un élément de la forme

$$\underline{m} := \underset{\alpha}{\otimes} m_\alpha \in \bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha)$$

avec $K = (\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}, \leqslant) \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ et pour tout $\alpha \in A$, $m_\alpha \in V(K_\alpha)$. On définit également *le poids* d'un monôme comme le poids du mur sous-jacent.

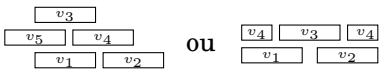
On a vu, à la remarque 4.4.1.17, que l'on représente les murs par des diagrammes de la forme



D'après la proposition 4.4.2.1, on a

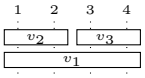
$$\mathscr{F}(V)(S) \cong \bigoplus_{K\in\mathcal{W}^{conn}(S)} \bigotimes_{K_i\in K} V(K_i) \; ;$$

on représente alors les monômes de $\mathscr{F}(V)(S)$ par des diagrammes de murs où l'on indice les briques par des éléments de V : par exemple

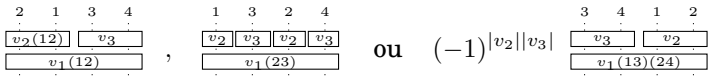


où v_i qui indice la brique K_i, est un élément de $V(K_i)$. On représente $v \in V(m) \subset \mathscr{F}(V)(m)$ un monôme de poids 1 par le diagramme suivant :

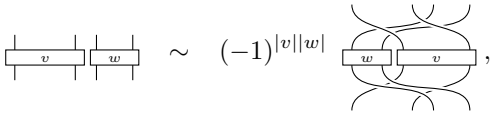
Cette représentation dépend, comme dans la remarque 4.4.1.17, d'un choix d'ordre sur l'ensemble S. Par exemple, le monôme de $\mathscr{F}(V)(\llbracket 1,4\rrbracket)$ représenté par

$\omega :=$ 

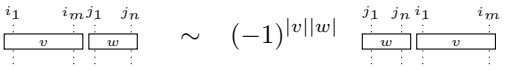
avec $v_1 \in V(\llbracket 1,4\rrbracket)$ et $v_2, v_3 \in V(\llbracket 1,2\rrbracket) \cong V(\llbracket 3,4\rrbracket)$ peut également être représenté par



Ces identifications découlent de la fonctorialité de $\mathscr{F}(V)$: on a ici des signes imposés par la règle de Koszul. Ceux-ci proviennent de la structure monoïdale symétrique $\otimes^{conc}$, comme dans le cas des propérades (cf. [Val03, Chap.3 Sect. 1.1]), que l'on représente ci-dessous :



ce qui se traduit pour les protopérades par :



§ 2 Permutation-shuffle

On rappelle à présent la définition de permutation-shuffle ou battage.

4.4.3.2 Définition. *Permutation-shuffle* [Lod98, Sect. 4.2]
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Un (p,q)-*shuffle* ((p,q)-battage) est une permutation σ de $\mathfrak{S}_{p+q}$ telle que

$$\sigma(1) < \sigma(2) \ldots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \sigma(p+2) \ldots < \sigma(p+q).$$

On note $\mathrm{Sh}(p,q)$ l'ensemble des (p,q)-shuffles.

4.4.3.3 Lemme. [LV12, Lem. 1.3.1]
Pour tous entiers p et q et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$, il existe d'uniques permutations $\alpha \in \mathfrak{S}_p$, $\beta \in \mathfrak{S}_q$ et $\omega \in \mathrm{Sh}(p,q)$ telles que

$$\sigma = \omega \cdot (\alpha \times \beta).$$

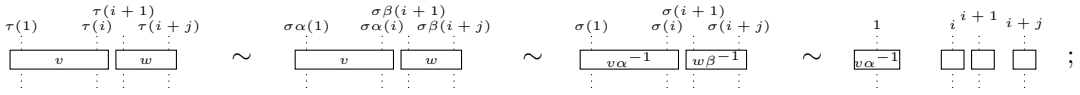
Ainsi, la composée

$$\mathrm{Sh}(p,q) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{p+q} \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_{p+q}/(\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q)$$

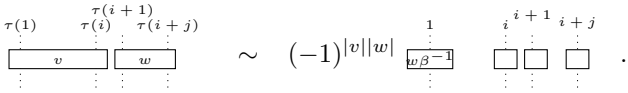
est une bijection.

4.4.3.4 Définition. *Signes de Koszul*
Pour les signes de Koszul, on adopte la convention suivante. Si on considère un élément $\tau \in \mathfrak{S}_{i+j}$, alors, par le lemme 4.4.3.3, il existe d'uniques permutations $\sigma \in \mathrm{Sh}(i,j)$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(\llbracket 1,i\rrbracket) = \mathfrak{S}_i$ et $\beta \in \mathrm{Aut}(\llbracket i+1, i+j\rrbracket) \cong \mathfrak{S}_j$ tels que $\tau = \sigma\alpha\beta$. Ainsi, on pose les signes de Koszul

▷ si $\sigma^{-1}(1) \in \{1, \dots, i\}$, alors

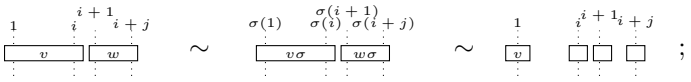


▷ si $\sigma^{-1}(1) \in \{i+1, \dots, i+j\}$, alors

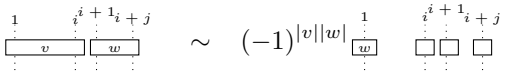


Par exemple, considérons σ un élément des permutations-shuffles $\mathrm{Sh}(i,j) \subset \mathfrak{S}_{i+j}$ que l'on fait agir sur un monôme de $\mathscr{F}(V)(\llbracket 1, i+j \rrbracket)$:

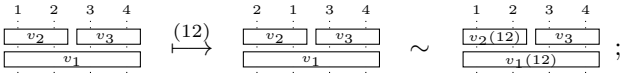
▷ si $\sigma^{-1}(1) \in \{1, \dots, i\}$, alors

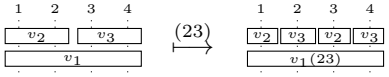


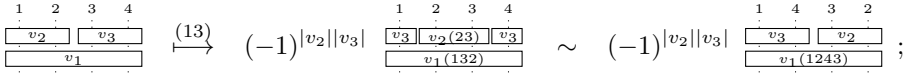
▷ si $\sigma^{-1}(1) \in \{i+1, \dots, i+j\}$, alors

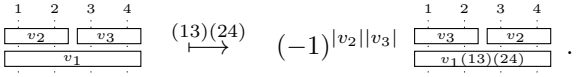


Par exemple, l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur le monôme ω entraine l'apparition de signes :

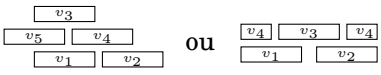








Enfin, quand l'ensemble sous-jacent S est naturellement ordonné (notamment le cas où $S = \llbracket 1, m \rrbracket$) et qu'il n'y a pas d'ambiguïté , on représente les monômes sans préciser les éléments de S comme par exemple les diagrammes ci-dessous :



CHAPITRE 5

DUALITÉ DE KOSZUL

En utilisant le fait que le foncteur Ind est exact et qu'il envoie une protopérade sur une propérade, on construit, grâce au cas propéradique décrit par Vallette dans sa thèse [Val03], une adjonction bar-cobar et une dualité de Koszul pour les protopérades (cf. section 5.2). On finira ce chapitre par des résultats sur le cas des protopérades quadratiques.

5.1 Dérivation

Après avoir défini les notions de protopérade et coprotopérade au chapitre 4, on construit ici une théorie de dualité de Koszul pour ces objets. Pour cela, comme dans le cadre propéradique, on commence par définir la notion de (co)produit infinitésimal, on définit des constructions bar et cobar qui forment un couple de foncteurs adjoints (cf. section 5.2.1), puis on définit enfin une dualité de Koszul (cf. section 5.2.2).

Pour cette section, on s'inspire très largement des idées de [Val03] et [MV09a, Sect. 3] : en effet, comme nous allons le voir dans la suite, on peut reprendre quasiment mot à mot les énoncés de [MV09a, Sect. 3], en remplaçant propérade par protopérade et ainsi construire une adjonction bar-cobar dans le cadre protopéradique. Nous allons donc présenter les résultats dans ce nouveau cadre, en utilisant des notations quasi-similaires. Cette forte ressemblance justifie notre choix de ne pas faire de rappel sur le cadre propéradique.

5.1.1 (Co)Augmentation

5.1.1.1 Définition. *Protopérade augmentée*
On appelle protopérade *augmentée* toute protopérade (P, μ, η, ϵ) munie d'un morphisme d'augmentation $\epsilon : P \to I$, où I est l'unité du produit $\boxtimes_c$. On note $\mathtt{protoperades}_k^{aug}$ la catégorie des protopérades augmentées. A une protopérade augmentée (P, μ, η, ϵ), on associe son *idéal d'augmentation* $\overline{P}$, défini comme le noyau de l'augmentation i.e. $\overline{P} := \mathrm{Ker}(\epsilon)$.

Soit (P, μ, η, ϵ) une protopérade augmentée. Alors on a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}$-modules $P \cong I \oplus \overline{P}$. De plus, par la bigraduation fournie au lemme 4.3.2.5, on peut décomposer le produit de composition connexe $\mu = \bigoplus_{(r,s)\in(\mathbb{N}^*)^2} \mu^{(r,s)}$ avec

$$\mu^{(r,s)} : \big((I \oplus \overline{P}) \boxtimes_c (I \oplus \overline{P})\big)^{(r,s)_{\overline{P}}} \longrightarrow \overline{P}.$$

5.1.1.2 Définition. *Produit de composition partiel*
Soit (P, μ, η, ϵ) une protopérade augmentée. On appelle *produit de composition partiel* la restriction du produit μ

$$\mu^{(1,1)} : \big((I \oplus \overline{P}) \boxtimes_c (I \oplus \overline{P})\big)^{(1,1)_{\overline{P}}} \longrightarrow \overline{P}.$$

On a également les définitions duales.

5.1.1.3 Définition. *Coprotopérade co-augmentée*
On appelle coprotopérade *coaugmentée* toute coprotopérade $(Q, \Delta, \epsilon, \nu)$ munie d'un morphisme de coaugmentation $\nu : I \to Q$ qui nous fournit l'isomorphisme $Q \cong I \oplus \overline{Q}$ où $\overline{Q} = \mathrm{Coker}(\nu)$. On note $\mathtt{coprotoperades}_k^{coaug}$ la catégorie des coprotopérades coaugmentées.

5.1.1.4 Définition. *Coproduit partiel*
Soit $(Q, \Delta, \epsilon, \nu)$ une coprotopérade coaugmentée. On appelle *coproduit partiel* la composition du coproduit Δ avec la projection sur $(Q \boxtimes_c Q)^{(1,1)_{\overline{Q}}}$:

$$\Delta := \pi^{(1,1)} \circ \Delta : Q \longrightarrow (Q \boxtimes_c Q)^{(1,1)_{\overline{Q}}}.$$

5.1.2 Bimodule infinitésimal sur une protopérade

Grâce à la notion de produit de composition partiel (cf. définition 5.1.1.2), on introduit la définition de bimodule infinitésimal au dessus d'une protopérade.

5.1.2.1 Définition. *Bimodule infinitésimal*
Soit (P, μ) une protopérade. Un *P-bimodule infinitésimal* est un $\mathfrak{S}$-module M muni de deux morphismes de $\mathfrak{S}$-modules, appelés respectivement action à gauche et action à droite :

$$\lambda : \big(P \boxtimes_c (P \oplus M)\big)^{(1)_M} \to M \quad \text{et} \quad \rho : \big((P \oplus M) \boxtimes_c P\big)^{(1)_M} \to M$$

tels que les diagrammes de compatibilité suivants commutent :

(i) l'associativité de l'action à gauche λ :

$$\begin{array}{ccc}
\big(P \boxtimes_c P \boxtimes_c (P \oplus M)\big)^{(1)_M} & \xrightarrow{P \boxtimes_c (\lambda + \mu)} & \big(P \boxtimes_c (P \oplus M)\big)^{(1)_M} \\
{\scriptstyle \mu \boxtimes_c (P \oplus M)} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow {\scriptstyle \lambda} \\
\big(P \boxtimes_c (P \oplus M)\big)^{(1)_M} & \xrightarrow[\lambda]{} & M\ ;
\end{array}$$

(ii) l'associativité de l'action à droite ρ :

$$\begin{array}{ccc}
\big((P \oplus M) \boxtimes_c P \boxtimes_c P\big)^{(1)_M} & \xrightarrow{(\rho + \mu) \boxtimes_c P} & \big((P \oplus M) \boxtimes_c P\big)^{(1)_M} \\
{\scriptstyle (P \oplus M) \boxtimes_c \mu} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow {\scriptstyle \rho} \\
\big((P \oplus M) \boxtimes_c P\big)^{(1)_M} & \xrightarrow[\rho]{} & M\ ;
\end{array}$$

(iii) la commutativité des actions à gauche et à droite :

$$\begin{array}{ccc} \big(P \boxtimes_c (P \oplus M) \boxtimes_c P\big)^{(1)_M} & \xrightarrow{(\lambda+\mu)\boxtimes_c P} & \big((P \oplus M) \boxtimes_c P\big)^{(1)_M} \\ \downarrow{\scriptstyle P\boxtimes_c(\rho+\mu)} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \big(P \boxtimes_c (P \oplus M)\big)^{(1)_M} & \xrightarrow[\lambda]{} & M\,. \end{array}$$

5.1.2.2 Remarque. Quand P est une protopérade augmentée, la définition précédente est équivalente à la donnée de deux actions $\lambda' : (P \boxtimes_c M_+)^{(1)_{\overline{P}},(1)_M} \to M$ et $\rho' : (M_+ \boxtimes_c P)^{(1)_M,(1)_{\overline{P}}} \to M$ où $M_+ = M \oplus I$, compatibles avec le produit de composition de la protopérade P. En effet, considérons l'action à gauche de M, alors l'injection $I \hookrightarrow P$ induit le morphisme de $\mathfrak{S}$-modules

$$\begin{array}{ccc} \big(P \boxtimes_c M_+\big)^{(1)_{\overline{P}}(1)_M} & & \\ \downarrow & \overset{\lambda'}{\searrow} & \\ \big(P \boxtimes_c (P \oplus M)\big)^{(1)_M} & \xrightarrow[\lambda]{} & M \end{array}$$

compatible avec le produit μ de P. Inversement, si l'on considère un $\mathfrak{S}$-module M muni d'un morphisme

$$\lambda' : \big(P \boxtimes_c (M_+)\big)^{(1)_{\overline{P}}(1)_M} \longrightarrow M$$

compatible avec le produit μ de P, i.e. le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \big(P \boxtimes_c P \boxtimes_c M_+\big)^{(1)_{\overline{P}},(1)_{\overline{P}},(1)_M} & \xrightarrow{P\boxtimes_c(\lambda'+\mu^{(1,1)})} & \big(P \boxtimes_c M_+\big)^{(1)_{\overline{P}},(1)_M} \\ \downarrow{\scriptstyle \mu^{(1,1)}\boxtimes_c M_+} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \lambda'} \\ \big(P \boxtimes_c M_+\big)^{(1)_{\overline{P}},(1)_M} & \xrightarrow[\lambda']{} & M\,. \end{array}$$

Cette compatibilité et l'associativité du produit μ permettent d'étendre le morphisme λ' à un morphisme $\lambda : \big(P \boxtimes_c (P \oplus M)\big)^{(1)_M} \to M$, qui est le morphisme attendu. On a une équivalence similaire pour ρ et ρ'.

5.1.2.3 Lemme. *Soient P une protopérade et M un P-bimodule infinitésimal. Alors* $\mathrm{Ind}(M)$ *est un* $\mathrm{Ind}(P)$*-bimodule infinitésimal.*

Pour la définition de bimodule infinitésimal dans un cadre propéradique, le lecteur pourra se référer à [MV09a].

Démonstration. Le foncteur Ind est monoïdal pour les produits $\boxtimes_c$ et $\otimes^{conc}$ et est additif (i.e. $\mathrm{Ind}(V \oplus W) \cong \mathrm{Ind}(V) \oplus \mathrm{Ind}(W)$) donc préserve la graduation par le poids :

$$\mathrm{Ind}\Big(\big(P \boxtimes_c (P \oplus M)\big)^{(1)_M}\Big) \cong \big(\mathrm{Ind}P \boxtimes_c (\mathrm{Ind}P \oplus \mathrm{Ind}M)\big)^{(1)_{\mathrm{Ind}M}}.$$

□

5.1.2.4 Définition. *Cobimodule infinitésimal*
Soient (C, Δ) une coprotopérade et N un $\mathfrak{S}$-bimodule. N est un *C-bimodule infinitésimal* s'il est

muni de deux morphismes :

$$\lambda : N \longrightarrow \big(C \boxtimes_c (C \oplus N)\big)^{(1)_N} \quad \text{et } \rho : N \longrightarrow \big((C \oplus N) \boxtimes_c N\big)^{(1)_N}$$

tels que les diagrammes de compatibilité suivants commutent :

(i) compatibilité entre la co-action à gauche λ et le coproduit Δ de C :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\quad\lambda\quad} & \big(C \boxtimes_c (C \oplus N)\big)^{(1)_N} \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C\boxtimes_c(\Delta+\lambda)} \\ C \boxtimes_c (C \oplus N)\big)^{(1)_N} & \xrightarrow[\Delta\boxtimes_c(C\oplus N)]{} & \big(C \boxtimes_c C \boxtimes_c (C \oplus N)\big)^{(1)_N} \end{array} ;$$

(ii) compatibilité entre la co-action à droite ρ et le produit de composition Δ de C :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad\rho\quad} & \big((C \oplus M) \boxtimes_c C\big)^{(1)_M} \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\Delta+\rho)\boxtimes_c C} \\ \big((C \oplus M) \boxtimes_c C\big)^{(1)_M} & \xrightarrow[(C\oplus M)\boxtimes_c\Delta]{} & \big((C \oplus M) \boxtimes_c C \boxtimes_c C\big)^{(1)_M} \end{array} ;$$

(iii) compatibilité entre la co-action à gauche et la co-action à droite :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad\lambda\quad} & \big(C \boxtimes_c (C \oplus M)\big)^{(1)_M} \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C\boxtimes_c(\Delta+\rho)} \\ \big((C \oplus M) \boxtimes_c C\big)^{(1)_M} & \xrightarrow[(\Delta+\lambda)\boxtimes C]{} & \big(C \boxtimes_c (C \oplus M) \boxtimes_c C\big)^{(1)_M} \end{array} .$$

5.1.3 (Co)Dérivations

5.1.3.1 Définition. *Dérivation*
Soient (P, μ) une protopérade augmentée et (M, λ, ρ) un P-bimodule infinitésimal. Une application de $\mathfrak{S}$-modules $d : P \to M$ de degré n est une *dérivation homogène* si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \big(P \boxtimes_c P\big)^{(1,1)} & \xrightarrow{\quad\mu^{(1,1)}\quad} & P \\ {\scriptstyle d\boxtimes_c P+P\boxtimes_c d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ M \boxtimes_c P \oplus P \boxtimes_c M & \xrightarrow[\rho+\lambda]{} & M \end{array}$$

autrement dit, pour tout $p, q \in P$

$$d \circ \mu^{(1,1)}(p, q) = \rho(d(p), q) + (-1)^{n|p|}\lambda(p, d(q)).$$

Une *dérivation* est une somme de dérivations homogènes. On note $\underline{\mathrm{Der}}^n(P, M)$ le k-module des dérivations de P dans M de degré n et le complexe des dérivations est noté $\underline{\mathrm{Der}}^\bullet(P, M)$, de différentielle $[\partial, -]$ qui, évaluée en $\delta \in \underline{\mathrm{Der}}^n(P, N)$, vaut $[\partial, \delta] = \partial_N \circ \delta - (-1)^{|n|}\delta \circ \partial_P$.

5.1.3.2 Définition. *Codérivation*
Soient (C, Δ) une coprotopérade co-augmentée et (N, λ, ρ) un C-cobimodule infinitésimal. Une application de $\mathfrak{S}$-modules $d : N \to C$ de degré n est une *codérivation homogène* si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\quad d \quad} & C \\ {\scriptstyle \lambda+\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta^{(1,1)}} \\ (N \boxtimes_c C) \oplus (C \boxtimes_c N) & \xrightarrow[d\boxtimes_c C + C \boxtimes_c d]{} & C \boxtimes_c C \end{array} .$$

On note $\underline{\mathrm{Coder}}^n(C, N)$ le k-module des codérivations homogènes de C dans N de degré n et $\underline{\mathrm{Coder}}^\bullet(C, N)$ le complexe des codérivations.

5.1.3.3 Proposition. *Soient P une protopérade augmentée, C une coprotopérade coaugmentée, M un P-bimodule infinitésimal et N un C-cobimodule infinitésimal. On a les isomorphismes naturels :*

$$\mathrm{Ind}\Big(\underline{\mathrm{Der}}^\bullet(P, M)\Big) \cong \underline{\mathrm{Der}}^\bullet\big(\mathrm{Ind}(P), \mathrm{Ind}(M)\big);$$

$$\mathrm{Ind}\Big(\underline{\mathrm{Coder}}^\bullet(C, N)\Big) \cong \underline{\mathrm{Coder}}^\bullet\big(\mathrm{Ind}(C), \mathrm{Ind}(N)\big).$$

Démonstration. Ind est un foncteur monoïdal additif qui respecte la graduation en M. □

5.1.3.4 Lemme. *Soit $\mathscr{F}(V)$ la protopérade libre sur le $\mathfrak{S}$-module V. Pour toute application $\theta : V \to \mathscr{F}(V)$ homogène (de degré noté $|\theta|$), il existe une unique dérivation homogène de degré $|\theta|$, $d_\theta : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V)$, telle que sa restriction à V est θ. Cette correspondance est bijective ; de plus, si $\theta(V) \subset \mathscr{F}^{(\rho)}(V)$ alors on a $d_\theta(\mathscr{F}^{(s)}(V)) \subset \mathscr{F}^{(s+\rho-1)}(V)$.*

Démonstration. Soit $\bigotimes_{j=1}^n (v_1^j \otimes \ldots \otimes v_{r_j}^j)$ un représentant d'une classe de $V_n = (V_+)^{\boxtimes_c n}$ avec chacun des $v_\lambda^j \in V_+$. On pose alors

$$d_\theta\Big(\bigotimes_{j=1}^n (v_1^j \otimes \ldots \otimes v_{r_j}^j)\Big) := \sum_{\substack{s \in [\![1,n]\!] \\ i \in [\![1, r_s]\!]}} (-1)^{\lambda_{s,i}} \Big(\bigotimes_{j=1}^{s-1} (v_1^j \otimes \ldots \otimes v_{r_j}^j)\Big) \otimes (v_1^s \otimes \ldots \otimes \theta(v_i^s) \otimes \ldots \otimes v_{r_s}^s) \otimes \Big(\bigotimes_{j=s+1}^n (v_1^j \otimes \ldots \otimes v_{r_j}^j)\Big)$$

où $\lambda_{s,i} = \big(\sum_{j=1}^{s-1} \sum_{l=1}^{r_j} |v_l^j| + |v_1^s| + \ldots + |v_{i-1}^s|\big)|\theta|$ et où l'on a étendu θ à V_+ en posant $\theta(I) = 0$. d_θ est constante sur toute la classe d'équivalence de $\bigotimes_{j=1}^n (v_1^j \otimes \ldots \otimes v_{r_j}^j)$. Il suffit de le vérifier pour $n = 1$ pour une transposition de v_j et v_{j+1} (car les transpositions de la forme $(j, j+1)$ engendrent le groupe symétrique) :

$$\begin{aligned} & d_\theta\big(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{j+1} \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_r\big) = \\ & \quad = \sum_{i \in [\![1, j-1]\!]} (-1)^{|\theta| \sum_{l=1}^{i-1} |v_l|} v_1 \otimes \ldots \otimes \theta(v_i) \otimes \ldots \otimes v_{j+1} \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_r \\ & \qquad + (-1)^{|\theta| \sum_{l=1}^{j-1} |v_l|} v_1 \otimes \ldots \otimes \theta(v_{j+1}) \otimes v_j \otimes \ldots \otimes v_r \\ & \qquad + (-1)^{|\theta| \sum_{l=1}^{j-1} |v_l| + |\theta||v_{j+1}|} v_1 \otimes \ldots \otimes v_{j+1} \otimes \theta(v_j) \otimes \ldots \otimes v_r \\ & \qquad + \sum_{i \in [\![j+2, r]\!]} (-1)^{|\theta| \sum_{l=1}^{i-1} |v_l|} v_1 \otimes \ldots \otimes v_{j+1} \otimes v_j \otimes \ldots \otimes \theta(v_i) \ldots \otimes v_r \end{aligned}$$

$$\sim (-1)^{|v_j||v_{j+1}|}\Big(\sum_{i\in[\![1,j-1]\!]} (-1)^{|\theta|\sum_{l=1}^{i-1}|v_l|} v_1\otimes\ldots\otimes\theta(v_i)\otimes\ldots\otimes v_j\otimes v_{j+1}\otimes\ldots\otimes v_r$$

$$+ (-1)^{|\theta|\sum_{l=1}^{j-1}|v_l|+|\theta||v_j|} v_1\otimes\ldots\otimes v_j\otimes\theta(v_{j+1})\otimes\ldots\otimes v_r$$

$$+ (-1)^{|\theta|\sum_{l=1}^{j-1}|v_l|} v_1\otimes\ldots\otimes\theta(v_j)\otimes v_{j+1}\otimes\ldots\otimes v_r$$

$$+ \sum_{i\in[\![j+2,r]\!]} (-1)^{|\theta|\sum_{l=1}^{i-1}|v_l|} v_1\otimes\ldots\otimes v_j\otimes v_{j+1}\otimes\ldots\otimes\theta(v_i)\ldots\otimes v_r\Big)$$

$$= (-1)^{|v_j||v_{j+1}|} d_\theta\big(v_1\otimes\ldots\otimes v_j\otimes v_{j+1}\otimes\ldots\otimes v_r\big).$$

De plus, d_θ se factorise à travers $\widetilde{V}_n$: par un calcul similaire, on montre que sur les éléments de la forme $\bar{v} := (v_1\otimes v_2\otimes v_3)\otimes(v_1'\otimes 1\otimes v_3') - (-1)^{|v_2|(|v_3|+|v_1'|)}(v_1\otimes 1\otimes v_3)\otimes(v_1'\otimes v_2\otimes v_3')$, $d_\theta(\bar{v}) = 0$. Ensuite, on utilise pour conclure les mêmes arguments que dans le cadre propéradique (cf. [Val03, Lem. 87]) : la surjectivité du produit de la protopérade libre $\mathscr{F}(V)$ nous montre l'unicité de la dérivation d_θ ainsi que le fait que toute dérivation soit de cette forme. □

De manière duale, on a le lemme suivant (qui est l'analogue protopéradique de [Val03, Lem. 88]) :

5.1.3.5 Lemme. *Soit $\mathscr{F}^c(V)$ la coprotopérade colibre connexe sur le $\mathfrak{S}$-module V. Pour toute application équivariante $\theta : \mathscr{F}^c(V) \to V$ homogène de degré $|\theta|$, il existe une unique codérivation homogène de même degré $d_\theta : \mathscr{F}^c(V) \to \mathscr{F}^c(V)$ telle que la composition*

$$\mathscr{F}^c(V) \xrightarrow{d_\theta} \mathscr{F}^c(V) \xrightarrow{\text{proj}} V$$

est égale à θ ; cette correspondance est bijective ; de plus, si θ est nulle sur toutes les composantes $\mathscr{F}^{c,(s)}(V)$ pour $s \neq r$, alors $d_\theta(\mathscr{F}^{c,(s+r-1)}(V)) \subset \mathscr{F}^{c,(s)}(V)$, pour $s > 0$.

5.1.3.6 Définition. *Protopérade / coprotopérade quasi-libre*
Une protopérade de la forme $(\mathscr{F}(V), \partial = \partial_V + d_\theta)$ (resp. coprotopérade $(\mathscr{F}^c(V), \partial = \partial_V + d_\theta)$) est dite *quasi-libre*.

5.1.3.7 Proposition. *La projection $\mathscr{F}(V) \to V$ d'une (co)protopérade quasi-libre sur ses indécomposables est un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules si et seulement si $\theta(V) \subset \bigoplus_{r\geqslant 2} \mathscr{F}^{(r)}(V)$.*

Démonstration. cf. [Val03, Prop. 89]. □

5.2 Construction (Co)Bar et dualité de Koszul des protopérades

Dans cette section, on définit les constructions bar et cobar dans le cadre protopéradique, pour ensuite introduire la notion de complexe de Koszul associé à une protopérade.

5.2.1 Adjonction bar-cobar

On peut maintenant introduire la construction bar d'une protopérade. Pour cette construction, on utilise la suspension des $\mathfrak{S}$-modules et l'on note par s le générateur du $\mathfrak{S}$-module Σ (cf. exemple

1.1.1.3). Soit (P, μ, η, ϵ) une protopérade augmentée. Le produit de composition partiel $\mu^{(1,1)}$ de P induit une application équivariante homogène de degré -1

$$s\mu_2 : \mathscr{F}^{c,(2)}(\Sigma\overline{P}) \longrightarrow \Sigma\overline{P}.$$

donnée par

$$s\mu_2\big(s.p_1 \otimes s.p_2\big) := (-1)^{|p_1|} s.\mu^{(1,1)}\big(p_1 \otimes p_2\big).$$

Par le lemme 5.1.3.5, on peut associer à $s\mu_2$ une codérivation $d_{s\mu_2} : \mathscr{F}^c(\Sigma\overline{P}) \to \mathscr{F}^c(\Sigma\overline{P})$, homogène de degré -1. On considère la codérivation $\partial := \partial_P + d_{s\mu_2} : \mathscr{F}^c(\Sigma\overline{P}) \to \mathscr{F}^c(\Sigma\overline{P})$ avec ∂_P la codérivation induite par la différentielle interne de P. Montrons que $\partial^2 = 0$, ce qui revient à montrer que $\partial_P d_{s\mu_2} + d_{s\mu_2}\partial_P + d_{s\mu_2}^2 = 0$, car ∂_P est une différentielle. Par la proposition 5.1.3.3, $\mathrm{Ind}(d_{s\mu_2})$ est une codérivation de degré -1 (au sens propéradique). Comme le foncteur $\mathrm{Ind}(-)$ commute avec le foncteur monoïde libre $\mathscr{F}(-)$, avec la suspension et est exact (donc commute avec le foncteur $\overline{(-)}$), on obtient donc

$$\mathrm{Ind}\Big(\big(\mathscr{F}^c(\Sigma\overline{P}), \partial_P + d_{s\mu_2}\big)\Big) \cong \big(\mathscr{F}^c(\Sigma\overline{\mathrm{Ind}(P)}), \partial_{\mathrm{Ind}(P)} + \mathrm{Ind}(d_{s\mu_2})\big).$$

Or la codérivation $d_{s\mu_2}$ est la suspension du produit partiel $\mu^{(1,1)}$, donc, comme le foncteur Ind est compatible à la bigraduation par le poids en P de $P \boxtimes_c P$ et commute à la suspension, on a directement que $\mathrm{Ind}(d_{s\mu_2^P})$ est égale à $d_{s\mu_2^{\mathrm{Ind}(P)}}$, la codérivation induite par le produit partiel de la propérade $\mathrm{Ind}(P)$. Finalement, on a :

5.2.1.1 Définition/Proposition. *Construction bar*
Soit (P, μ, ∂_P) une protopérade augmentée. On appelle *construction bar de* P la coprotopérade co-augmentée quasi-libre :

$$\big(\mathbf{B}(P), \partial\big) := \big(\mathscr{F}^c(\Sigma\overline{P}), \partial_P + d_{s\mu_2}\big),$$

ce qui nous donne le foncteur :

$$\mathbf{B}(-) : \mathtt{protoperades}_k^{aug} \longrightarrow \mathtt{coprotoperades}_k^{coaug}.$$

De plus, les constructions bar respectives commutent au foncteur Ind :

$$\mathrm{Ind}\big(\mathbf{B}(-)\big) \cong \mathbf{B}\big(\mathrm{Ind}(-)\big)$$

où le foncteur B de droite est la construction bar des propérades définie dans [Val03].

Par un argument dual, on a également la proposition suivante.

5.2.1.2 Définition/Proposition. *Construction cobar*
Soit (C, Δ, ∂_C) une coprotopérade co-augmentée. On appelle *construction cobar de* C la protopérade augmentée quasi-libre :

$$\big(\mathbf{\Omega}(C), \partial\big) := \big(\mathscr{F}(\Sigma^{-1}\overline{C}), \partial_C + d_{s^{-1}\Delta_2}\big),$$

ce qui nous donne le foncteur :

$$\mathbf{\Omega}(-) : \mathtt{coprotoperades}_k^{coaug} \longrightarrow \mathtt{protoperades}_k^{aug}$$

De plus, les constructions cobar respectives commutent au foncteur Ind :

$$\mathrm{Ind}\big(\mathbf{\Omega}(-)\big) \cong \mathbf{\Omega}\big(\mathrm{Ind}(-)\big),$$

où le foncteur $\mathbf{\Omega}$ de droite est la construction cobar des copropérades définie dans [Val03].

On déduit directement l'adjonction bar-cobar pour les protopérades de la propriété d'exactitude du foncteur Ind.

5.2.1.3 Proposition. *Les foncteurs $\mathbf{B}(-)$ et $\mathbf{\Omega}(-)$ forment une paire de foncteurs adjoints :*

$$\mathbf{\Omega}(-) : \mathtt{coprotoperades}_k^{coaug} \rightleftarrows \mathtt{protoperades}_k^{aug} : \mathbf{B}(-) .$$

Démonstration. Par les propriétés du foncteur Ind et la proposition [MV09a, Prop. 17]. □

5.2.2 Dualité de Koszul

On s'inspire ici très largement de [Val03, Chap. 7] : encore une fois, les résultats sont similaires au cadre propéradique, donc nous essaierons conserver au maximum les notations de [Val03].

§ 1 Définition de la duale de Koszul

Soit (P, μ) une protopérade augmentée, munie d'une graduation par le poids : on note cette graduation supplémentaire par $P =: \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} P^{[n]}$. Elle induit une graduation supplémentaire sur sa construction bar :

$$\mathbf{B}_{(r)}(P) = \bigoplus_{\rho\in\mathbb{N}} \mathbf{B}_{(r)}(P)^{[\rho]},$$

où $\mathbf{B}_{(r)}(P) = \mathscr{F}^{(r)}(\Sigma\overline{P})$ est la graduation décrite au lemme 4.3.2.7. Il faut voir ici s comme le nombre d'éléments de P et ρ le poids total induit par le poids de chaque élément de P. Comme le produit μ de P respecte sa graduation par le poids, alors $d_{s\mu_2}$ respecte la graduation induite sur $\mathbf{B}(P)$; ainsi on a

$$d_{s\mu_2}\Big(\mathbf{B}_{(r)}(P)^{[\rho]}\Big) \subset \mathbf{B}_{(r-1)}(P)^{[\rho]}.$$

On obtient le lemme suivant.

5.2.2.1 Lemme. *Soit P une protopérade (resp. Q une coprotopérade) graduée par un poids connexe, c'est-à-dire que $P^{[0]} = I$ (resp. $Q^{[0]}) = I$). Alors on a les égalités :*

$$\mathbf{B}_{(\rho)}(P)^{[\rho]} = \mathscr{F}^{c,(\rho)}(\Sigma\overline{P}^{[1]}) \quad \textit{et} \quad \mathbf{B}_{(r)}(P)^{[\rho]} = 0 \textit{ pour } r > \rho$$

$$\Big(\textit{resp. } \mathbf{\Omega}^{(\rho)}(Q)^{[\rho]} = \mathscr{F}^{(\rho)}(\Sigma^{-1}\overline{Q}^{[1]}) \quad \textit{et} \quad \mathbf{\Omega}^{(r)}(Q)^{[\rho]} = 0 \textit{ pour } r > \rho\Big) .$$

Démonstration. cf. [Val03, Chap.7 Sect. 1]. □

5.2.2.2 Définition. *Duale de Koszul*
Soit P une protopérade (resp. Q une coprotopérade) graduée par un poids connexe. On définit la *duale de Koszul* de P noté $P^{\text{¡}}$ (resp. de Q) par le $\mathfrak{S}$-module gradué par le poids :

$$P^{\text{¡}[\rho]} := H_{(\rho)}\big(\mathbf{B}_*(P)^{[\rho]}, d_{s\mu_2}\big)$$

$$\Big(Q^{\,\text{¡}[\rho]} := H_{(\rho)}\big(\mathbf{\Omega}_*(Q)^{[\rho]}, d_{s^{-1}\Delta_2}\big)\Big).$$

D'après le lemme 5.2.2.1, on a les égalités :

$$P^{\mathsf{i}[\rho]} = \mathrm{Ker}\Big(d_{s\mu_2} : \mathbf{B}_{(\rho)}(P)^{(\rho)} \to \mathbf{B}_{(\rho-1)}(P)^{(\rho)}\Big) \quad \text{et} \quad Q^{\mathsf{i}[\rho]} = \mathrm{Coker}\Big(d_{s^{-1}\Delta_2} : \mathbf{\Omega}_{(\rho-1)}(Q)^{(\rho)} \to \mathbf{\Omega}_{(\rho)}(Q)^{(\rho)}\Big).$$

De plus, si la protopérade P est concentrée en degré homologique 0, on a

$$\big(\mathbf{B}_{(r)}(P)^{[\rho]}\big)_m = \begin{cases} \mathbf{B}_{(r)}(P)^{[\rho]} & \text{si } m = r, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

ainsi, la coprotopérade duale P^{i} n'est pas concentrée en degré 0 et vérifie

$$\big(P^{\mathsf{i}[\rho]}\big)_m = \begin{cases} P^{\mathsf{i}[\rho]} & \text{si } m = \rho, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

5.2.2.3 Proposition. *Le foncteur* $(-)^i : (\mathtt{co})\mathtt{protoperades}_k^{aug} \to \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{gr}$ *commute avec le foncteur d'induction* Ind.

Démonstration. Découle de l'exactitude du foncteur Ind et de la préservation de la graduation par ce même foncteur. □

On a directement un équivalent protopéradique de [Val03, Prop. 136].

5.2.2.4 Proposition. *Soit* $P = \bigoplus_n P^{[n]}$ *une protopérade (resp.* $Q = \bigoplus_n Q^{[n]}$ *une coprotopérade), graduée par un poids et connexe. Alors, la duale de Koszul de* P *est une sous-coprotopérade augmentée graduée par un poids de* $\mathscr{F}^c(\Sigma P^{[1]})$ *(respectivement la duale de Koszul de* Q *est une protopérade augmentée graduée par un poids quotient de* $\mathscr{F}(\Sigma^{-1}Q^{[1]})$*).*

§ 2 Résolution de Koszul

5.2.2.5 Définition. *Protopérade, coprotopérade de Koszul*
Soient P et Q une protopérade et une coprotopérade, chacune graduée par un poids et connexe. P est une protopérade *de Koszul* si l'inclusion $P^{\mathsf{i}} \hookrightarrow \mathbf{B}(P)$ est un quasi-isomorphisme. De manière duale, Q est une coprotopérade *de Koszul* si la projection $\mathbf{\Omega}(Q) \twoheadrightarrow Q^{\mathsf{i}}$ est un quasi-isomorphisme.

5.2.2.6 Proposition. *Si* P *est une protopérade graduée par un poids connexe de Koszul, alors sa duale* P^{i} *est une coprotopérade de Koszul et* $P^{\mathsf{i}\mathsf{i}} = P$*.*

Démonstration. Découle des propriétés du foncteur Ind et de [Val03, Prop.141]. □

5.2.2.7 Définition. *Complexes de Koszul*
Soit P une protopérade graduée par un poids. On appelle *complexe de Koszul* de P les complexes de chaînes suivants :

(i) $\big(P^{\mathsf{i}} \boxtimes_c P, \partial = \partial_P + d^r_\Delta\big)$, où la différentielle d^r_Δ est induite par l'application homogène de degré -1 :

$$P^{\mathsf{i}} \xrightarrow{\Delta} P^{\mathsf{i}} \boxtimes_c P^{\mathsf{i}} \twoheadrightarrow (P^{\mathsf{i}} \boxtimes_c \big(I \oplus \overline{P}^{\mathsf{i}}\big)^{[1]}) \longrightarrow P^{\mathsf{i}} \boxtimes_c (I \oplus P^{[1]}) ,$$

où le morphisme de droite est induit par l'isomorphisme $(\overline{P}^{\mathsf{i}})^{[1]} \cong \overline{P}^{[1]}$;

(ii) $\big(P \boxtimes_c P^{\text{¡}}, \partial = \partial_P + d^l_\Delta\big)$, où la différentielle d^l_Δ est induite par l'application homogène de degré -1 :

$$P^{\text{¡}} \xrightarrow{\Delta} P^{\text{¡}} \boxtimes_c P^{\text{¡}} \twoheadrightarrow \big((I \oplus \overline{P}^{\text{¡}})^{[1]} \boxtimes_c P^{\text{¡}}\big) \longrightarrow (I \oplus P^{[1]}) \boxtimes_c P^{\text{¡}} .$$

5.2.2.8 Théorème. *Critère de Koszul*
Soit P une protopérade graduée par un poids connexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P est de Koszul ;

(ii) l'inclusion $P^{¡} \hookrightarrow \mathbf{B}(P)$ est un quasi-isomorphisme ;

(iii) le complexe de Koszul $\big(P^{¡} \boxtimes_c P, \partial = \partial_P + d^r_\Delta\big)$ est acyclique ;

(iv) le complexe de Koszul $\big(P \boxtimes_c P^{¡}, \partial = \partial_P + d^l_\Delta\big)$ est acyclique ;

(v) le morphismes de protopérades graduées par un poids $\mathbf{\Omega}(P^{¡}) \to P$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. Encore une fois, on utilise l'exactitude du foncteur Ind pour passer dans le monde propéradique : le résultat découle alors directement des théorèmes [Val03, Th. 144, Th. 149]. □

5.2.3 Le cas des pro(to)pérades quadratiques

Cette sous-section s'inspire très largement de [Val08, Sect. 2] qui décrit la notion de propérade quadratique : tous les résultats sont également valable dans le cadre protopéradique. Pour éviter d'alourdir les énoncés, nous ne présentons que les résultats protopéradiques, mais nous nous y référerons même pour leur utilisation dans un cadre propéradique. Soit V un $\mathfrak{S}$-(bi)module et $R \subset \mathscr{F}^{(2)}(V)$: un tel couple (V, R) est appelé *donnée quadratique*. Comme les $\mathfrak{S}$-modules sous-jacents à la pro(to)pérade libre $\mathscr{F}(V)$ et à la copro(to)pérade libre $\mathscr{F}^c(V)$ sont isomorphes, on considère la suite de $\mathfrak{S}$-(bi)modules :

$$R \hookrightarrow \mathscr{F}^{(2)}(V) \hookrightarrow \mathscr{F}(V) \cong \mathscr{F}^c(V) \twoheadrightarrow \mathscr{F}^{c,(2)}(V) \twoheadrightarrow \mathscr{F}^{c,(2)}(V)/R =: \overline{R}.$$

Avec une telle suite, on définit naturellement une protopérade quotient de $\mathscr{F}(V)$ ou une sous-coprotopérade de $\mathscr{F}^c(V)$.

5.2.3.1 Définition. *Protopérade, coprotopérade quadratique homogène*
La *pro(to)pérade quadratique homogène engendrée par V et R* est la pro(to)pérade quotient de $\mathscr{F}(V)$ par l'idéal engendré par $R \subset \mathscr{F}^{(2)}(V)$. On la note $\mathscr{P}(V, R)$. De manière duale, la *copro(to)pérade quadratique engendrée par V et $\overline{R}$* est la sous-copro(to)pérade de $\mathscr{F}^c(V)$ engendrée par $\mathscr{F}^{c,(2)}(V) \twoheadrightarrow \overline{R}$. On la note $\mathscr{C}(V, \overline{R})$.

Par la suite, on désignera seulement par (co)pro(to)pérade quadratique toute (co)pro(to)pérade quadratique homogène.

5.2.3.2 Remarque. Toute pro(to)pérade quadratique $\mathscr{P}(V, R)$ et toute copro(to)pérade quadratique $\mathcal{C}(V, \overline{R})$ est graduée par son poids en V [Val03, Prop. 55].

5.2.3.3 Théorème. *Duale de Koszul $(-)^{¡}$* – [Val08, Th. 8]
Soit (V, R) une donnée quadratique. On note par $\Sigma^2 R$ l'image de R dans $\mathscr{F}^{(2)}(\Sigma V)$ et $\Sigma^{-2}\overline{R}$ le quotient de $\mathscr{F}^{c,(2)}(\Sigma^{-1}V)$ par $\Sigma^{-2}R$. La copro(to)pérade duale de Koszul de $\mathscr{P}(V, R)$ est égale à

$$\mathscr{P}(V, R)^{¡} = \mathscr{C}(\Sigma V, \Sigma^2 \overline{R}).$$

Dualement, la pro(to)pérade duale de Koszul de $\mathscr{C}(V,\overline{R})$ est égale à

$$\mathscr{C}(V,\overline{R})^{i} = \mathscr{P}(\Sigma^{-1}V, \Sigma^{-2}R).$$

De plus, $\mathscr{P}(V,R)^{ii} = \mathscr{P}(V,R)$ et $\mathscr{C}(V,\overline{R})^{ii} = \mathscr{C}(V,\overline{R})$.

5.2.3.4 Proposition. [Val03, Cor.154] – [Val08, Prop. 9]
Soit (V,R) une donnée quadratique avec V localement fini. Le dual linéaire de la copro(to)pérade $\mathscr{C}(V,\overline{R})$ est la pro(to)pérade quadratique

$$\big(\mathscr{C}(V,\overline{R})\big)^{*} = \mathscr{F}(V^{*})/\langle R^{\perp}\rangle$$

avec $R^{\perp} \subset \mathscr{F}^{(2)}(V)^{*} \cong \mathscr{F}^{(2)}(V^{*})$. En particulier, on a

$$\big(\mathscr{P}(V,R)^{i}\big)^{*} = \mathscr{P}(\Sigma^{-1}V^{*}, \Sigma^{-2}R^{\perp}).$$

5.2.3.5 Lemme. *Soit (V,R) une donnée quadratique avec V localement fini. Alors $P = \mathscr{P}(V,R)$ est de Koszul si et seulement si $(P^{i})^{*} = \mathscr{P}(\Sigma^{-1}V^{*}, \Sigma^{-2}R^{\perp})$ est de Koszul.*

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll}
P \text{ est de Koszul} & \iff & P^{\text{¡}} \boxtimes_c P \text{ est acyclique} & \text{par le théorème 5.2.2.8} \\
& \iff & \big(P^{\text{¡}} \boxtimes_c P\big)^{*} \text{ est acyclique} & \\
& \iff & (P^{\text{¡}})^{*} \boxtimes_c P^{*} \text{ est acyclique} & \text{car } V \text{ est localement fini ;} \\
& \iff & (P^{\text{¡}})^{*} \boxtimes_c \Big(\big(P^{\text{¡}}\big)^{*}\Big)^{\text{¡}} \text{ est acyclique} &
\end{array}$$

car $\big((P^{\text{¡}})^{*}\big)^{\text{¡}} = \big(\mathscr{P}(\Sigma^{-1}V^{*}, \Sigma^{-2}R^{\perp})\big)^{\text{¡}} = \mathscr{C}(V^{*}, \overline{R}^{\perp}) = \mathscr{P}(V,R)^{*}$; ainsi, par le théorème 5.2.2.8, on a l'équivalence souhaitée. □

5.2.3.6 Définition. *Duale de Koszul* $(-)^{!}$
Soit (V,R) une donnée quadratique avec V localement fini. A toute pro(to)pérade quadratique $P = \mathscr{P}(V,R)$, on associe la pro(to)pérade appelée *duale de Koszul* de P :

$$P^{!} := \mathscr{P}(V^{*}, R^{\perp}).$$

5.2.3.7 Remarque. Il est important de noter que cette définition diffère légèrement de celle donnée par Vallette [Val03, Cor. 154], car on omet ici le décalage de degré homologique ainsi que la torsion par les représentations signatures. De même, l'absence de ces représentations signatures fait que cette définition ne correspond pas non plus au cadre opéradique (cf. [LV12]).

5.2.3.8 Proposition. *Soient (V,R) une donnée quadratique avec V localement fini. $P = \mathscr{P}(V,R)$, une pro(to)pérade quadratique de différentielle nulle, est de Koszul si et seulement si $P^{!} = \mathscr{P}(V^{*}, R^{\perp})$ est de Koszul.*

Démonstration. On considère $P = \mathscr{P}(V,R)$ une pro(to)pérade quadratique de différentielle nulle qui est de Koszul. Le complexe de Koszul associé à P est donné par $P^{\text{¡}} \boxtimes_c P$ muni de la différentielle ∂^{r}_{Δ} décrite à la définition 5.2.2.7. $P^{\text{¡}} \boxtimes_c P$ est gradué par le poids en V. De plus, par définition, la

différentielle ∂^r_Δ respecte ce poids : ainsi, le complexe de Koszul associé à P est la somme :

$$P^{\text{¡}} \boxtimes_c P = \bigoplus_{\rho\in\mathbb{N}} \big(P^{\text{¡}} \boxtimes_c P\big)^{(\rho)_V} \cong \bigoplus_{\rho\in\mathbb{N}} \bigoplus_{a+b=\rho} \big(P^{\text{¡}} \boxtimes_c P\big)^{(a,b)_V}$$

avec

$$\big(P^{\text{¡}} \boxtimes_c P\big)^{(a,b)_V} \xrightarrow{\partial^r_\Delta} \big(P^{\text{¡}} \boxtimes_c P\big)^{(a-1,b+1)_V}.$$

De plus, on a les isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\big(P^{\text{¡}} \boxtimes_c P\big)^{(a,b)_V} &= \big(\mathscr{C}(\Sigma V, \Sigma^2\overline{R}) \boxtimes_c \mathscr{P}(V,R)\big)^{(a,b)_V} \\
&\cong \big(\mathscr{C}(\Sigma V, \Sigma^2\overline{R}) \boxtimes_c \mathscr{P}(\Sigma\Sigma^{-1}V, \Sigma^2\Sigma^{-2}R)\big)^{(a,b)_V} \\
&\cong \Sigma^{a+b}\big(\mathscr{C}(V,\overline{R}) \boxtimes_c \mathscr{P}(\Sigma^{-1}V, \Sigma^{-2}R)\big)^{(a,b)_V} \\
&\cong \Sigma^{a+b}\big(\mathscr{P}(\Sigma^{-1}V, \Sigma^{-2}R)^{\text{¡}} \boxtimes_c \mathscr{P}(\Sigma^{-1}V, \Sigma^{-2}R)\big)^{(a,b)_V}.
\end{aligned}$$

On a donc l'isomorphisme de complexes :

$$\big(\mathscr{P}(V,R)^{\text{¡}} \boxtimes_c \mathscr{P}(V,R)\big)^{(\rho)_V} \cong \Sigma^\rho\big(\mathscr{P}(\Sigma^{-1}V, \Sigma^{-2}R)^{\text{¡}} \boxtimes_c \mathscr{P}(\Sigma^{-1}V, \Sigma^{-2}R)\big)^{(\rho)_V},$$

qui implique que $\mathscr{P}(V,R)$ est de Koszul si et seulement si $\mathscr{P}(\Sigma^{-1}V, \Sigma^{-2}R)$ est de Koszul. Pour finir, on a

$$\mathscr{P}(V,R) \text{ de Koszul} \overset{5.2.3.5}{\iff} \mathscr{P}(\Sigma^{-1}V^*, \Sigma^{-2}R^\perp) \text{ de Koszul} \iff \mathscr{P}(V^*, R^\perp) \text{ de Koszul,}$$

ce qui conclut cette preuve. □

5.3 Exemples de résultats de dualité

On commence cette section par rappeler la définition de *loi de remplacement* pour les propérades et les résultats de Vallette sur les propérades définies par une loi de remplacement. On applique ces résultats à la propérade $\mathcal{DP}ois$ afin de restreindre l'étude de la koszulité de $\mathcal{DP}ois$ à l'étude de $\mathcal{DL}ie$.

5.3.1 Loi de remplacement pour les propérades

Dans sa thèse [Val03, Chap. 7 Sect. 5], Vallette nous donne un critère afin de simplifier l'étude de la koszulité d'une propérade avec plusieurs générateurs. Il montre que, sous certaines conditions, l'on peut se ramener à l'étude de sous-propérades. Considérons donc une propérade quadratique $\mathcal{P}$ de la forme

$$\mathscr{F}(V,W)/\langle R \oplus D \oplus S\rangle,$$

où $R \subset \mathscr{F}_{(2)}(V)$, $S \subset \mathscr{F}_{(2)}(W)$, et

$$D \subset \big((I\oplus W) \boxtimes_c (I\oplus V)\big)^{(1)_W,(1)_V} \bigoplus \big((I\oplus V) \boxtimes_c (I\oplus W)\big)^{(1)_V,(1)_W}.$$

5.3.1.1 Définition. *Loi de remplacement* – [Val03, Chap. 7 Sect. 5.1]
Soit λ un morphisme de $\mathfrak{S}$-bimodules

$$\lambda : \big((I \oplus W) \boxtimes_c (I \oplus V)\big)^{(1)_W,(1)_V} \longrightarrow \big((I \oplus V) \boxtimes_c (I \oplus W)\big)^{(1)_V,(1)_W}.$$

(i) Lorsque le $\mathfrak{S}$-bimodule D est défini comme l'image de

$$(\mathrm{id}, -\lambda) : \big((I\oplus W)\boxtimes_c(I\oplus V)\big)^{(1)_W,(1)_V} \to \big((I\oplus W)\boxtimes_c(I\oplus V)\big)^{(1)_W,(1)_V} \bigoplus \big((I\oplus V)\boxtimes_c(I\oplus W)\big)^{(1)_V,(1)_W},$$

on dit que λ est une *loi de remplacement* et on note D par D_λ.

(ii) On dit qu'une loi de remplacement λ est compatible avec les relations R et S si les deux morphismes

$$\big(\mathcal{A} \boxtimes_c \mathcal{B}\big)^{(1)_V,(2)_W} \to \mathcal{P} \text{ et } \big(\mathcal{A} \boxtimes_c \mathcal{B}\big)^{(2)_V,(1)_W} \to \mathcal{P}$$

sont injectifs, où $\mathcal{A} := \mathscr{P}(V, R)$ et $\mathcal{B} := \mathscr{P}(W, S)$.

5.3.1.2 Lemme. [Val03, lem. 155]
Toute propérade de la forme $\mathcal{P} := \mathscr{P}(V \oplus W, R \oplus D_\lambda \oplus S)$, avec λ une loi de remplacement compatible, vérifie l'isomorphisme de $\mathfrak{S}$-bimodules

$$\mathcal{P} \cong \mathcal{A} \boxtimes_c \mathcal{B}$$

avec $\mathcal{A} := \mathscr{P}(V, R)$ et $\mathcal{B} := \mathscr{P}(W, S)$.

5.3.1.3 Proposition. [Val03, Prop. 156 et 158]
Soit $\mathcal{P}$ une propérade de la forme $\mathcal{P} := \mathscr{P}(V \oplus W, R \oplus D_\lambda \oplus S)$, avec λ une loi de remplacement compatible, telle que la somme

$$\sum_{m,n} \dim_k\big((V \oplus W)(m, n)\big)$$

soit finie et W de degré homologique nul. Alors on a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}$-bimodules $\mathcal{P}^i \cong \mathcal{B}^i \boxtimes_c \mathcal{A}^i$ avec $\mathcal{A} := \mathscr{P}(V, R)$ et $\mathcal{B} := \mathscr{P}(W, S)$. De plus, si les propérades $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont de Koszul, alors $\mathcal{P}$ est également une propérade de Koszul.

Un premier exemple d'application est donné par le théorème suivant :

5.3.1.4 Théorème. [Val03, Cor. 157]
Les propérades quadratiques $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{F}rob$ sont de Koszul.

Ce théorème s'appuie notamment sur les deux résultats classiques de dualité de Koszul pour les opérades.

5.3.1.5 Remarque. Ici, le dual de Koszul $(-)^!$ est le dual de Koszul des opérades défini dans le livre [LV12] qui ne coïncide par avec la définition donnée à la section 5.2.3. On a ici un twist par la représentation signature des groupes symétriques du générateurs (cf. la remarque 5.2.3.7).

5.3.1.6 Proposition. [LV12, Chap. 9]
L'opérade $\mathcal{A}s$ est de Koszul. De plus, elle est auto-duale i.e.

$$\mathcal{A}s^! \cong \mathcal{A}s.$$

5.3.1.7 Proposition. [LV12] *Les opérades $\mathcal{C}om$ et $\mathcal{L}ie$ sont de Koszul et sont duales l'une de l'autre :*

$$\mathcal{C}om^! = \mathcal{L}ie \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{L}ie^! = \mathcal{C}om.$$

Citons également le résultat récent de koszulité suivant. (Pour les définitions des propérades concernées, on se réfère à la section 4.1.3).

5.3.1.8 Théorème. [CMW16]
Les propérades quadratiques $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie^\diamond$ et $\mathcal{F}rob^\diamond$ sont de Koszul.

5.3.2 Le cas de la propérade $\mathcal{DP}ois$

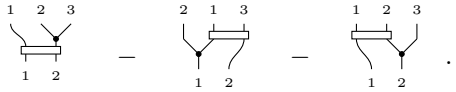
En ce qui concerne la propérade $\mathcal{DP}ois$, la proposition 5.3.1.3 justifie le fait que l'on se restreigne à la sous-propérade $\mathcal{DL}ie$. En effet, la propérade $\mathcal{DP}ois$ est de la forme

$$\mathscr{F}\big(V \oplus W\big)\backslash\langle R_{As} \oplus D_\lambda \oplus R_{DJ}\rangle$$

avec

$$\mathscr{F}(V)/\langle R_{As}\rangle = \mathcal{A}s \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(W)/\langle R_{DJ}\rangle = \mathcal{DL}ie$$

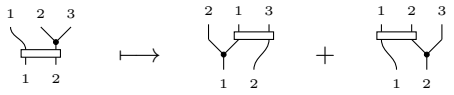
et D_λ est la relation de dérivation :

$D_\lambda :=$  .

Cette dernière est donnée par une loi de remplacement compatible, avec λ le morphisme de $\mathfrak{S}$-bimodules suivant :

$$\lambda : (I \oplus W) \boxtimes_c (I \oplus V)^{(1)w,(1)v} \longrightarrow (I \oplus V) \boxtimes_c (I \oplus W)^{(1)v,(1)w}$$

donné par

$\lambda :$  .

5.3.2.1 Lemme. *Les morphismes de $\mathfrak{S}$-bimodules*

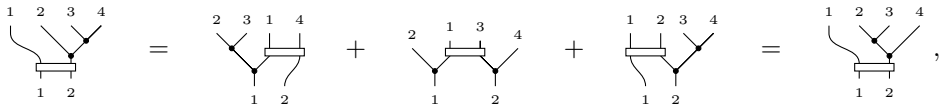
$$\mathcal{A}s \boxtimes_c \mathcal{DL}ie^{(1),(2)} \longrightarrow \mathcal{DP}ois \quad \textit{et} \quad \mathcal{A}s \boxtimes_c \mathcal{DL}ie^{(2),(1)} \longrightarrow \mathcal{DP}ois$$

sont injectifs.

Démonstration. Commençons par montrer que $\mathcal{A}s\boxtimes_c\mathcal{DL}ie^{(2),(1)} \to \mathcal{DP}ois$ est injective. On considère dans $\mathcal{DP}ois$, les termes

et .

Dans $\mathcal{DP}ois$, par la relation D_λ, on a les égalités



d'où l'injectivité de $\mathcal{A}s \boxtimes_c \mathcal{DL}ie^{(2),(1)} \to \mathcal{DP}ois$. Pour le morphisme $\mathcal{A}s \boxtimes_c \mathcal{DL}ie^{(1),(2)} \to \mathcal{DP}ois$, on a vu que le double jacobiateur est une multidérivation, d'où l'injectivité du morphisme. □

5.3.2.2 Corollaire. *Si la propérade $\mathcal{DL}ie$ est de Koszul, alors la propérade $\mathcal{DP}ois$ l'est également.*

Démonstration. Découle du lemme 5.3.2.1 et des propositions 5.3.1.6 et 5.3.1.3, la somme totale des dimensions de V et W sur k étant clairement finie. □

On a vu, par le corollaire 5.3.2.2, que, si la propérade $\mathcal{DL}ie$ est de Koszul, alors la propérade $\mathcal{DP}ois$ l'est aussi. Nous cherchons donc à étudier la koszulité de la propérade $\mathcal{DL}ie$.

La copropérade duale de $\mathcal{DL}ie$ est donnée, par le théorème 5.2.3.3, par

$$\mathcal{DL}ie^{¡} = \big(\mathscr{P}(V_{\mathcal{DL}ie}, R_{DJ})\big)^{¡} = \mathscr{C}(sV_{\mathcal{DL}ie}, s^2\overline{R_{DJ}}).$$

On a vu, à la proposition 4.1.4.7, que la propérade $\mathcal{DC}om = \mathscr{P}(V^*_{\mathcal{DL}ie}, R^\perp_{DJ})$ vérifie

$$\mathcal{DC}om(n,n) = \mathcal{DC}om^{(n-1)}(n,n) = sgn(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\uparrow^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_n^{op}}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}.$$

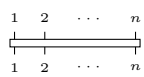
Par la proposition 5.2.3.4, on a l'isomorphisme $\mathscr{C}(sV_{\mathcal{DL}ie}, s^2\overline{R_{DJ}})^* \cong \mathscr{P}(s^{-1}V^*_{\mathcal{DL}ie}, s^{-2}R^\perp_{DJ})$, donc on a, pour tout entier naturel $n > 0$,

$$\mathcal{DL}ie^{¡}(n,n) = s^{n-1}sgn(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\uparrow^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_n^{op}}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}.$$

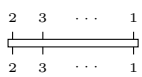
On a donc la proposition suivante.

5.3.2.3 Proposition. *La propérade $\mathbf{\Omega}(\mathcal{DL}ie^{¡})$ est la propérade libre $(\mathcal{F}(\Sigma^{-1}W), \partial_\Delta)$ avec $\Sigma^{-1}W$ le $\mathbb{S}$-bimodule défini par $\Sigma^{-1}W(m,n) = 0$ pour $m \neq n \in \mathbb{N}$ et*

$$\begin{aligned}\Sigma^{-1}W(n,n) &:= (\Sigma^{-1}W)_{n-2}(n,n) = s^{n-2}\mathrm{Ind}\big(sgn(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\uparrow^{\mathfrak{S}_n}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\big)\\ &= \mathrm{span}\Big\langle s^{-1}\varphi_n := s^{-1}$$



$$= (-1)^{n+1}s^{-1}$$



$$\Big\rangle$$

avec $\Sigma^{-1}W(n,n)$ concentré en degré homologique $n-2$ et dont la différentielle ∂_Δ est induite par le coproduit Δ de la copropérade $\mathcal{DL}ie^{¡}$.

Exhibons l'action de la différentielle sur les termes de degrés 2, 3 et 4.

▷ $\varphi_2 \in \mathcal{DL}ie^{¡}$ est un élément primitif, i.e. $\Delta(\varphi_2) = (1\otimes 1)\varphi_2 + \varphi_2(1\otimes 1)$ alors

$$\partial_\Delta(s^{-1}\varphi_2) = -\big((1\otimes 1)s^{-1}\varphi_2 + (-1)^{|\varphi_2|}s^{-1}\varphi_2(1\otimes 1)\big) = 0.$$

▷ On a vu que le $\mathbb{S}$-bimodule $\mathcal{DL}ie^{¡}(3,3)$ est engendré par φ_3, l'escalier montant d'arité 3 qui est

stable sous l'action diagonale du groupe cyclique donc

$$\Delta(\varphi_3) = \sum_{i=0}^{2} \sigma_{(123)}^{-i}(\varphi_2, 1)(1, \varphi_2)\sigma_{(123)}^{i} \ ;$$

donc

$$\partial_\Delta(s^{-1}\varphi_3) = -\big(\sum_{i=0}^{2}(-1)^{|\varphi_2|}\sigma_{(123)}^{-i}(s^{-1}\varphi_2, 1)(1, s^{-1}\varphi_2)\sigma_{(123)}^{i}\big) = \sum_{i=0}^{2}\sigma_{(123)}^{-i}(s^{-1}\varphi_2, 1)(1, s^{-1}\varphi_2)\sigma_{(123)}^{i},$$

qui est exactement la relation double-Jacobi. Notons que ce calcul est semblable à celui fait pour la relation (2.2.2).

▷ De même, $\mathcal{DL}ie^{¡}(4,4)$ est engendré par φ_4, avec

$$\Delta(\varphi_4) = \sum_{i=0}^{3}\sigma_{(1234)}^{-i}\Big((\varphi_2, 1)(1, \varphi_3) + (\varphi_3, 1)(1, \varphi_2)\Big)\sigma_{(1234)}^{i} \ ;$$

donc

$$\begin{aligned}\partial_\Delta(s^{-1}\varphi_4) = & -\sum_{i=0}^{3}\sigma_{(1234)}^{-i}\Big((-1)^{|\varphi_2|}(s^{-1}\varphi_2, 1)(1, s^{-1}\varphi_3) + (-1)^{|\varphi_3|}(s^{-1}\varphi_3, 1)(1, s^{-1}\varphi_2)\Big)\sigma_{(1234)}^{i} \\ & = \sum_{i=0}^{3}\sigma_{(1234)}^{-i}\Big((s^{-1}\varphi_2, 1)(1, s^{-1}\varphi_3) - (s^{-1}\varphi_3, 1)(1, s^{-1}\varphi_2)\Big)\sigma_{(1234)}^{i}.\end{aligned}$$

5.3.3 $\mathcal{P}$-algèbres homotopiques

On considère $\mathcal{P}$ une (pr)opérade et $\mathbf{\Omega}(\mathcal{C})$ un modèle cofibrant de $\mathcal{P}$.

5.3.3.1 Définition. *$\mathcal{P}$-algèbre homotopique*
Soit V un complexe. Une structure de *$\mathcal{P}$-algèbre homotopique* sur V est la donnée d'un morphisme de propérades $\mathbf{\Omega}(\mathcal{C}) \to \mathrm{End}_V$.

5.3.3.2 Exemple. Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre ; alors A est munie d'une structure canonique de $\mathcal{P}$-algèbre homotopique :

$$\mathbf{\Omega}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P} \longrightarrow \mathrm{End}_A.$$

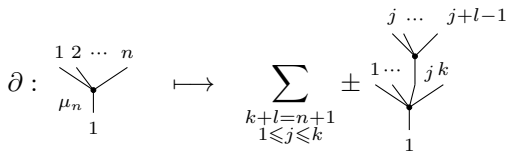
On considère les exemples des algèbres associatives et des algèbres de Lie.

§ 1 Algèbres associatives à homotopie près

5.3.3.3 Définition. *L'opérade $\mathcal{A}s_\infty$*
L'opérade $\mathcal{A}s_\infty \overset{def}{:=} \mathbf{\Omega}\mathcal{A}s^{¡}$ est l'opérade quasi-libre engendrée par

$$V := \bigoplus_{n\geqslant 1}\mu_n.k \otimes k[\mathfrak{S}_n] = \quad \overset{1\ 2\ \cdots\ n}{\underset{\mu_n \quad 1}{\curlyvee}} \quad \otimes k[\mathfrak{S}_n]$$

et munie de la différentielle donnée par



5.3.3.4 Définition. *Algèbre associative à homotopie près*
Une *algèbre associative à homotopie près*, également appelée A_∞-algèbre, est un complexe de chaînes (A, ∂) muni d'une famille d'opérations $\mu_n : A^{\otimes n} \to A$, $n \geqslant 1$, de degré $n-2$ qui vérifient les relations

$$\sum_{\substack{n=p+q+r \\ k=p+1+r \\ k>1, q>1}} (-1)^{p+qr} \mu_k \circ (\mathrm{id}^{\otimes p} \otimes \mu_q \otimes \mathrm{id}^{\otimes r}) = 0, \quad n \geqslant 1.$$

§ 2 Algèbres de Lie à homotopie près

5.3.3.5 Définition. *Algèbre de Lie à homotopie près*
Une *algèbre de Lie à homotopie près*, également appelée L_∞-algèbre, est un complexe de chaînes (A, ∂) muni d'une famille d'opérations $l_n : A^{\otimes n} \to A$, $n \geqslant 1$, de degré $n-2$ qui, pour $n \geqslant 2$, vérifient les relations

$$\sum_{\substack{p+q=n+1 \\ p>1, q>1}} \sum_{\sigma \in Sh_{p,q}^{-1}} sgn(\sigma)(-1)^{(p-1)q} (l_p \circ_1 l_q)^\sigma = \partial_{\mathrm{End}\,A}(l_n),$$

avec $\partial_{\mathrm{End}\,A}$ la différentielle de $\mathrm{End}\,A$ induite par ∂, la différentielle de A et où $Sh_{p,q}^{-1}$ est l'ensemble des permutations (p,q)-unshuffle.

§ 3 Espaces de modules

Pour finir, citons les travaux de Yalin [Yal16, GY16] sur l'étude des algèbres sur un prop. Il définit notamment l'espace de modules des structures de P-algèbres sur un complexe de chaînes, pour P une prop(érade) cofibrante. Cette définition repose notamment sur la définition et les propriétés de $\Omega^\bullet$.

5.3.3.6 Définition. *Algèbre commutative* $\Omega^\bullet$
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre différentielle graduée commutative Ω^n, donnée par

$$\Omega^n := \Big(\mathrm{Sym}_k\big(t_i, dt_i | i \in [\![1, n+1]\!]\big) / \big(1 - \textstyle\sum_i t_i, \sum_i dt_i\big), \partial(t_i) = dt_i\Big),$$

où $|t_i| = 0$ et $|dt_i| = -1$.

5.3.3.7 Proposition. [BG76]

(i) Les algèbres commutatives Ω^n forment un objet simplicial $n \mapsto \Omega^n$ de la catégorie $\mathtt{CDGA}_k$.

(ii) La catégorie $\mathtt{CDGA}_k$ est enrichie en ensembles simpliciaux par la structure suivante :

$$\mathrm{Map}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathtt{CDGA}_k}(A, B \otimes \Omega^\bullet)$$

muni de la structure simpliciale provenant de celle de $\Omega^\bullet$.

5.3.3.8 Définition. *Espace de modules des structures de P-algèbres* - (cf. [GY16, Déf. 2.8])
Soient P_∞ un prop cofibrant et X un complexe de chaînes. *L'espace de modules des structures de P-algèbres sur X* est l'ensemble simplicial défini par

$$P_\infty\{X\} := \mathrm{Hom}_{\mathtt{prop}}\big(P_\infty, \mathrm{End}_X \otimes \Omega^\bullet\big),$$

où $\mathrm{End}_X \otimes \Omega^\bullet$ est le prop donné par $(\mathrm{End}_X \otimes \Omega^\bullet)(m,n) = \mathrm{End}_X(m,n) \otimes \Omega^\bullet$, pour tous entiers m et n positifs non-nuls.

CHAPITRE 6

BASES PBW

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, on peut ramener l'étude de la Koszulité de certaines propérades à un cadre protopéradique, ce qui, par ce passage aux $\mathfrak{S}$-modules, simplifie la combinatoire et diminue la taille du complexe sous-jacent. Pour les opérades, qui ont, elles aussi, une combinatoire plus simple que les propérades, il existe diverses techniques afin de montrer qu'une opérade est de Koszul : réécriture, bases PBW, méthode des posets, bases de Gröbner, etc ... À ce sujet, on pourra consulter [LV12, Chap. 8] ou également [DK10].

Hoffbeck, dans son article [Hof10], introduit la notion de base de Poincaré-Birkhoff-Witt (ou base PBW) pour une opérade quadratique $\mathcal{O} = \mathscr{F}(V)/\langle R\rangle$. Cette notion repose essentiellement sur la définition (cf. [Hof10, Sect. 3.1 – 3.6]) d'un ordre partiel sur des arbres étiquetés par des éléments de $\mathcal{B}^V$, une base totalement ordonnée de V, qui est compatible avec les compositions shuffle des opérades. Il démontre alors un critère PBW pour les opérades de Koszul :

Théorème. [Hof10, Th. 3.10] – *Critère de Poincaré-Birkhoff-Witt*
Une opérade quadratique réduite, finiment engendrée et concentrée en degré 0 *qui est munie d'une base PBW est de Koszul.*

La preuve repose essentiellement sur l'idée suivante. Si $\mathcal{O} = \mathscr{F}(V)/\langle R\rangle$ est une opérade quadratique vérifiant les hypothèses du théorème, alors la base PBW de $\mathcal{O}$ nous permet de filtrer la construction bar $\mathrm{B}\mathcal{O}$ de l'opérade $\mathcal{O}$. Hoffbeck démontre (cf. [Hof10, Sect. 4.6]) que les termes $E^1_{p,q}$ de la première page de cette suite spectrale s'annulent quand le poids est différent du degré homologique, ce qui lui permet de conclure.

Ce chapitre est une tentative d'adapter la preuve de ce théorème au cadre protopéradique ; fixons $P = \mathscr{F}(V)/\langle R\rangle$ une protopérade avec V localement fini, munie d'une base totalement ordonnée. On commencera par définir la notion de protopérade shuffle (cf. section 6.1) et on donnera une description combinatoire, en termes de murs et de coloriages (cf. section 6.1.3), du complexe $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)$ (cf. section 6.1.4). Pour suivre la stratégie de la démonstration de Hoffbeck pour la cas opéradique, on définit un ordre sur les murs étiquetés par les éléments de V, ordre compatible avec les compositions shuffles (cf. section 6.2.1) ce qui nous permet de définir la notion de base PBW pour une protopérade. En utilisant la description combinatoire de $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)$ et l'ordre induit par la base PBW de P, on filtre le complexe $\mathbf{B}P$: on associe donc au complexe $\mathbf{B}P$ une suite spectrale.

Malheureusement la combinatoire des briques, notamment l'apparition de genre dans les graphes sous-jacents aux murs, complique la suite spectrale : contrairement au cas opéradique, il reste des cycles de poids plus petit que le degré homologique à la page E^1. On étudiera dans la section 6.2.3 où apparaissent (ou non) ces cycles.

6.1 Protopérade-shuffle

Pour étudier la Koszulité d'une opérade $\mathcal{O}$, on peut par exemple montrer l'existence d'une base PBW pour celle-ci (cf. [LV12, Hof10]). La notion de base PBW repose très fortement sur la notion d'opérade-shuffle. À toute opérade $\mathcal{O}$, on associe une opérade shuffle $\mathcal{O}^f$, qui lui est isomorphe en tant que complexe de chaînes, mais qui est plus rigide, dans le sens où l'on a oublié la structure de $\mathfrak{S}$-module en choisissant un représentant canonique (grâce à l'ordre) de chaque élément. Copiant le cadre opéradique, nous allons dans un premier temps, développer la notion de protopérade-shuffle avant ensuite de définir la notion de base PBW.

On pose $\mathtt{Ord}$ la sous-catégorie de $\mathtt{poset}$ où les objets sont les ensembles finis totalement ordonnés (donc en particulier sont des ensembles non-vides) et les morphismes sont les bijections qui préservent les ordres. On a le foncteur oubli $(-)^f$ vers la catégorie $\mathtt{Fin}$:

$$(-)^f : \mathtt{Ord} \longrightarrow \mathtt{Fin}.$$

6.1.0.1 Remarque. Si S et T sont deux ensembles totalements ordonnés tels que $S^f \cong T^f$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathtt{Ord}}(S,T)$ contient un unique élément. Tout foncteur $P : \mathtt{Fin} \to \mathtt{Ch}_k$ induit un foncteur $P^f : \mathtt{Ord} \to \mathtt{Ch}_k$

6.1.1 Produit shuffle

On va décrire un nouveau produit monoïdal, équivalent dans le monde shuffle du produit $\boxtimes_c$. On reprend donc la terminologie introduite en 3.1.3 et on pose les foncteurs $\mathcal{Y}^{sh} : \mathtt{Ord}^{op} \to \mathtt{Fin}^{op}$ et $\mathcal{X}^{sh} : \mathtt{Ord}^{op} \to \mathtt{Fin}^{op}$ définis de la manière suivante : pour S, un ensemble fini totalement ordonné

$$\mathcal{Y}_r^{sh}(S) := \big\{ I = (I_j)_{j\in R} \in Y_r^{ord}(S^f) \mid \min(I_1) < \min(I_2) < \ldots < \min(I_r) \big\}.$$

et $\mathcal{Y}^{sh}(S) := \coprod_{r\in\mathbb{N}^*} \mathcal{Y}_r^{sh}(S)$. On pose également

$$\mathcal{X}_r^{sh}(S) := \mathcal{Y}_r^{sh}(S)^{\times 2} \quad \text{et} \quad \mathcal{X}^{sh}(S) := \coprod_{r\in\mathbb{N}^*} \mathcal{X}_r^{sh}(S).$$

6.1.1.1 Remarque. L'ordre de S nous fournit, pour tout entier naturel r non-nul, une section canonique du passage au quotient $\mathcal{Y}_r^{ord}(S) \twoheadrightarrow \mathcal{Y}_r(S)$ par l'action du groupe $\mathfrak{S}_r$.

On a le lemme trivial, mais pourtant essentiel, suivant :

6.1.1.2 Lemme. *On a les diagrammes commutatifs de foncteurs suivants*

$$\begin{array}{ccc} \mathtt{Ord}^{or} & \xrightarrow{(-)^f} & \mathtt{Fin}^{or} \\ & {\scriptstyle \mathcal{Y}^{sh}(-)} \searrow \quad \circlearrowleft \quad \swarrow {\scriptstyle \mathcal{Y}(-)} & \\ & \mathtt{Fin}^{or} & \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathtt{Ord}^{or} & \xrightarrow{(-)^f} & \mathtt{Fin}^{or}. \\ & {\scriptstyle \mathcal{X}^{sh}(-)} \searrow \quad \circlearrowleft \quad \swarrow {\scriptstyle \mathcal{X}(-)} & \\ & \mathtt{Fin}^{or} & \end{array}$$

où $\mathcal{X}(-)$ et $\mathcal{Y}(-)$ sont les foncteurs définis à la section 3.1.1.

Démonstration. La commutativité correspond au choix d'un représentant particulier pour les éléments de $\mathcal{Y}(-)$. □

On a, pour tout ensemble fini S totalement ordonné, le produit

$$\mathcal{K}_S^{sh} : \mathcal{Y}^{sh}(S) \times \mathcal{Y}^{sh}(S) \longrightarrow \mathcal{Y}^{sh}(S)$$

avec $\mathcal{K}_S^{sh}(I,J)$ l'ensemble ordonné des classes d'équivalences pour la relation $\underset{I,J}{\sim}$ (cf. définition 3.1.1.9). Comme $\mathcal{K}$ (cf. définition 3.1.1.13), le produit $\mathcal{K}^{sh}$ est associatif. Soient M et S deux ensembles finis totalement ordonnés ; toute injection monotone $j : M \hookrightarrow S$ induit un morphisme

$$\iota_j : \mathcal{Y}^{sh}(M) \longrightarrow \mathcal{Y}^{sh}(S)$$

tel que, pour $K = \{K_a\}_{a\in[\![1,r]\!]} \in \mathcal{Y}_r^{sh}(M)$,

$$\iota_j(K) = \big\{j(K_a)\big\}_{a\in[\![1,r]\!]} \amalg \coprod_{s\in S\setminus j(M)} \{s\}.$$

Soient M, N et S trois ensembles finis totalement ordonnés et le diagramme d'injections monotones $\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$ telles que

$$\begin{cases} \mathrm{im}(i) \cup \mathrm{im}(j) & = S \\ \mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j) & \neq \emptyset \end{cases}$$

alors on a le produit

$$\mu_\varphi : \mathcal{Y}^{sh}(M) \times \mathcal{Y}^{sh}(N) \longrightarrow \mathcal{Y}^{sh}(S),$$

donné par la réunion des images des partitions de M et N par i et j, complétée par des singletons, i.e. défini par la composée suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}^{sh}(M) \times \mathcal{Y}^{sh}(N) & \xrightarrow{\iota_i \times \iota_j} & \mathcal{Y}^{sh}(S) \times \mathcal{Y}^{sh}(S) \\ & \searrow^{\mu_\varphi :=} & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{K}_S} \\ & & \mathcal{Y}^{sh}(S) \end{array} .$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^{sh}(M) \times \mathcal{X}^{sh}(N) & \xrightarrow{\mathcal{K}_M^{sh} \times \mathcal{K}_N^{sh}} & \mathcal{Y}^{sh}(M) \times \mathcal{Y}^{sh}(N) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_\varphi^{\times 2}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_\varphi} \\ \mathcal{X}^{sh}(S) & \xrightarrow[\mathcal{K}_S^{sh}]{} & \mathcal{Y}^{sh}(S) \end{array} .$$

Finalement, on pose le foncteur $\mathcal{X}^{conn,sh}(-) : \mathtt{Ord}^{op} \to \mathtt{Fin}^{op}$, donné, pour S un ensemble fini totalement ordonné, par

$$\mathcal{X}^{conn,sh}(S) := \Big\{(I,J) \in \mathcal{X}^{sh}(S) \;\Big|\; \mathcal{K}_S^{sh}(I,J) = \{S\}\Big\}.$$

6.1.1.3 Définition/Proposition. *Produit shuffle connexe*

On appelle *produit shuffle connexe* le bifoncteur

$$- \boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup} - : \mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k) \times \mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k) \longrightarrow \mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$$

défini, pour P et Q deux objets de $\mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{or}, \mathtt{Ch}_k)$ et S un ensemble fini totalement ordonné, par

$$\big(P \boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup} Q\big)(S) := \bigotimes_{(K,L)\in\mathcal{X}^{conn,sh}(S)} \bigotimes_{i=1}^{m} P(K_i) \otimes \bigotimes_{j=1}^{n} Q(L_j).$$

6.1.1.4 Lemme. *Le produit $\boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup}$ est associatif. De plus, pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$, l'endofoncteur*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{A,B} : & \mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k) & \longrightarrow & \mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k) \\ & X & \longmapsto & A \boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup} X \boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup} B \end{array}$$

est analytique scindé.

Démonstration. Il suffit d'adapter la démonstration du lemme 3.1.3.3, en remplaçant le produit $\boxtimes_c$ par le produit $\boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup}$. □

6.1.1.5 Proposition. *La catégorie $\big(\mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k), \boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup}, \tau, I = I(*) = k\big)$ est monoïdale **symétrique** abélienne et préserve les coégalisateurs réflexifs ainsi que les colimites séquentielles.*

Démonstration. Il suffit d'adapter la démonstration de la proposition 3.1.3.4. □

6.1.1.6 Définition. *Protopérade shuffle*
On appelle *protopérade shuffle* tout monoïde unitaire de la catégorie $\big(\mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k), \boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup}, I\big)$.

Enfin, on a le résultat de compatibilité suivant, qui est central dans la suite de cette section.

6.1.1.7 Proposition. *Le foncteur*

$$(-)^f : \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c\big) \longrightarrow \big(\mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k), \boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup}\big)$$

est monoïdal symétrique.

Démonstration. Soient S un ensemble fini totalement ordonné et P et Q deux $\mathfrak{S}$-modules réduits. On a les isomorphismes :

$$\begin{array}{rcl} \big(P \boxtimes_c Q\big)^f(S) & = & \big(P \boxtimes_c Q\big)(S^f) \\ & \cong & \displaystyle\bigoplus_{(K,L)\in X^{conn}(S^f)} \bigotimes_{\alpha\in A} P(K_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta\in B} Q(L_\beta) \\ & \underset{\text{lem.6.1.1.2}}{\cong} & \displaystyle\bigoplus_{(\widetilde{K},\widetilde{L})\in\mathcal{X}^{conn,sh}(S)} P(\widetilde{K}_1) \otimes \ldots \otimes P(\widetilde{K}_m) \otimes Q(\widetilde{L}_1) \otimes \ldots \otimes Q(\widetilde{L}_n) \\ & \cong & \big(P^f \boxtimes_c^{\sqcup\!\sqcup} Q^f\big)(S), \end{array}$$

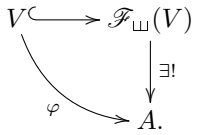
ce qu'il fallait démontrer. □

Comme dans le cas des protopérades, on a, grâce aux résultats de [Val09] et au lemme 6.1.1.4, une description de la protopérade shuffle libre.

6.1.1.8 Définition/Proposition. Soit V un foncteur de $\mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$. On note $\mathcal{F}_{\sqcup\!\sqcup}(V)$ la protopérade shuffle libre décrite, pour tout ensemble S fini totalement ordonné, par :

$$\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}(V)(S) \cong \bigoplus_{K \in \mathcal{W}^{conn}(S)} \bigotimes_{i=1}^{n} V(K_i).$$

6.1.1.9 Remarque. Comme dans le cas pro(to)péradique, la description de l'objet libre dans une catégorie monoïdale symétrique abélienne préservant les coégalisateurs réfléxifs et les colimites séquentielles faite par Vallette justifie la terminologie libre dans la définition précédente ; ainsi, pour A une protopérade shuffle et $\varphi : V \to A$ un morphisme de la catégorie $\mathtt{Func}(\mathtt{Ord}^{or}, \mathtt{Ch}_k)$, il existe un unique morphisme de protopérade shuffle qui fasse commuter le diagramme



Par la proposition 6.1.1.7, on a l'énoncé suivant.

6.1.1.10 Corollaire. *Soit V un $\mathfrak{S}$-module réduit. Alors on a l'isomorphisme de protopérade shuffle*

$$\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}(V^f) \cong \big(\mathscr{F}(V)\big)^f.$$

De plus, pour $\langle R\rangle \subset \mathscr{F}(V)$ un idéal, alors $\langle R\rangle^f$ est un idéal de $\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}(V^f)$, et on a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}$-modules

$$\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}(V^f)/\langle R\rangle^f \cong \big(\mathscr{F}(V)/\langle R\rangle\big)^f.$$

6.1.2 Définition par les compositions partielles

Comme dans le cas opéradique et protopéradique (cf. section 4.2.3), on peut décrire une structure de protopérade shuffle comme la donnée d'un ensemble de compositions partielles avec certaines compatibilités. C'est l'objet de cette section.

6.1.2.1 Définition. *Compositions shuffle partielles*
Soit P un foncteur de $\mathrm{Func}(\mathtt{Ord}^{op}, \mathtt{Ch}_k)$ muni d'un morphisme $\epsilon : I \hookrightarrow P$ avec $I(S) = k$ si $|S| = 1$ et 0 sinon. Soient M, N et S trois ensembles finis totalement ordonnés munis des diagrammes d'injections monotones :

$$\varphi := \quad \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big) \quad \text{et} \quad \varphi^{op} := \quad \big(j : N \hookrightarrow S \hookleftarrow M : i\big)$$

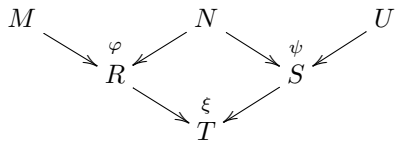
et telles que

$$\begin{cases} \mathrm{im}(i) \cup \mathrm{im}(j) & = S \\ \mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j) & \neq \emptyset \end{cases} . \tag{6.1.1}$$

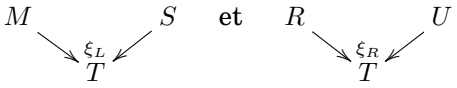
On dit que P est muni d'un *système de compositions shuffle partielles* si, pour tout diagramme d'injections monotones tel que φ, on a un morphisme de complexes de chaînes

$$\underset{\varphi}{\circ} : P(M) \otimes P(N) \longrightarrow P(S) \ ,$$

qui vérifie les propriétés de compatibilités suivantes. Pour tout diagramme commutatif d'injections



avec



tels que les quatres couples de flèches φ, ψ, ξ_L et ξ_R vérifient la propriété 4.2.2, les compositions partielles vérifient les trois axiomes d'associativités suivants :

Axiome d'associativité $\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\square\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{array}{ccc} P(M)\otimes P(N)\otimes P(U) & \xrightarrow{1\otimes \underset{\psi}{\circ}} & P(M)\otimes P(S) \\ {\scriptstyle \underset{\varphi}{\circ}\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underset{\xi_L}{\circ}} \\ P(R)\otimes P(U) & \xrightarrow[\underset{\xi_R}{\circ}]{} & P(T)\ ; \end{array}$$

Axiome V $\left(\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{array}{ccc} P(N)\otimes P(M)\otimes P(U) & \xrightarrow{(\underset{\psi}{\circ}\otimes 1)(1\otimes\tau)} & P(S)\otimes P(M) \\ {\scriptstyle \underset{\varphi^{op}}{\circ}\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underset{\xi_L^{op}}{\circ}} \\ P(R)\otimes P(U) & \xrightarrow[\underset{\xi_R}{\circ}]{} & P(T)\ ; \end{array}$$

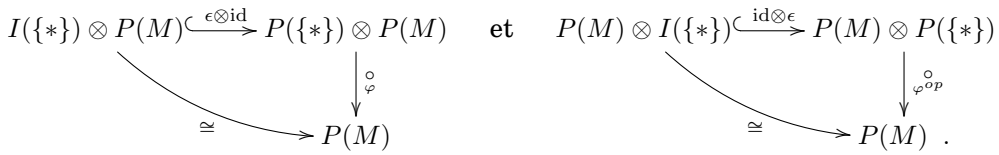
Axiome Λ $\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\square\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{array}{ccc} P(M)\otimes P(U)\otimes P(N) & \xrightarrow{1\otimes \underset{\psi^{op}}{\circ}} & P(M)\otimes P(S) \\ {\scriptstyle (1\otimes \underset{\varphi}{\circ})(\tau\otimes 1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underset{\xi_L}{\circ}} \\ P(U)\otimes P(R) & \xrightarrow[\underset{\xi_R^{op}}{\circ}]{} & P(T). \end{array}\quad .$$

Ces compositions shuffle partielles vérifient également une propriété d'existence d'unité : pour tout diagramme d'injections de la forme

$$\varphi := \big(i : \{*\} \hookrightarrow M \overset{\cong}{\hookleftarrow} M : \mathrm{id}\big),$$

on a les diagrammes commutatifs



6.1.2.2 Proposition. *Un foncteur covariant $P : \mathtt{Ord}^{op} \to \mathtt{Ch}_k$ est muni d'un système de compositions shuffle partielles si et seulement si P est muni d'une structure de protopérade shuffle.*

Démonstration. Encore une fois, on adapte juste la preuve de la proposition 4.2.3.2 au cadre shuffle.

□

Une remarque importante. *Dans la suite, lorsque l'on considérera un diagramme d'injection monotones $\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$, ou que l'on considérera un produit shuffle $\underset{\varphi}{\circ}$ associé, on supposera toujours, même si cela n'est pas précisé, qu'il vérifie la condition* (6.1.1).

6.1.3 Le complexe du Lego®

§ 1 Un peu de couleur

Dans cette sous-section, on définit la notion de coloriage d'un mur. Comme cette notion n'est pas propre au monde shuffle, i.e. l'ordre n'intervient pas, on considère donc S, un ensemble fini non-vide.

6.1.3.1 Définition. *Coloriage*

Soit $(K, \leqslant_K) \in \mathcal{W}(S)$ un mur au dessus de S. On appelle *coloriage* (connexe) de K la donnée d'un morphisme surjectif d'ensembles finis $\varphi : K \twoheadrightarrow C$, où C est appelé *l'ensemble de couleurs*, vérifiant les conditions suivantes :

(i) la relation binaire $\leqslant_\varphi$ induite sur C par l'ordre partiel de K, définie, pour tout $c_1, c_2 \in C$, par

$$c_1 \leqslant_\varphi c_2 \text{ si } \exists k_1 \in \varphi^{-1}(c_1), k_2 \in \varphi^{-1}(c_2) \text{ tel que } k_1 \leqslant_K k_2;$$

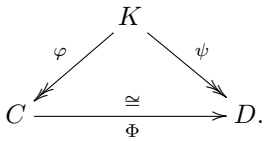
est un ordre partiel ;

(ii) les fibres de φ sont connexes, c'est-à-dire que pour toute couleur $c \in C$, on a

$$\varphi^{-1}(c) \in \mathcal{W}^{conn}(S_c)$$

avec $S_c := \bigcup_{K_\alpha \in \varphi^{-1}(c)} K_\alpha$.

On note $\mathrm{Succ}(\varphi)$ ou $\mathrm{Succ}(C)$ l'ensemble des couleurs successives. Deux coloriages $\varphi : K \twoheadrightarrow C$ et $\psi : K \twoheadrightarrow D$ d'un mur K sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\Phi : (C, \leqslant_\varphi) \to (D, \leqslant_\psi)$ de posets faisant commuter le diagramme



On note $\mathcal{C}\mathrm{ol}(K)$ l'ensemble des coloriages du mur K à isomorphisme près :

$$\mathcal{C}\mathrm{ol}(K) := \big\{\varphi : K \to C | \varphi \text{ un coloriage}\big\}/_{\cong},$$

qui est gradué par le nombre de couleurs :

$$\mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet(K) = \coprod_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}\mathrm{ol}_n(K) \text{ avec } \mathcal{C}\mathrm{ol}_n(K) := \big\{\varphi \in \mathcal{C}\mathrm{ol}(K) \mid \#\varphi(K) = n\big\}.$$

6.1.3.2 Remarque. (i) Comme tout coloriage $\varphi : K \to C$ est une application surjective, on a que pour toute couleur $c \in C$, l'ensemble des briques coloriées par c est non-vide, c'est-à-dire

$\varphi^{-1}(c) \neq \emptyset$. De plus, comme $K \in \mathcal{W}(S)$, on a $\bigcup_{c\in C} S_c = S$ avec

$$S_c := \bigcup_{K_\alpha \in \varphi^{-1}(c)} K_\alpha.$$

(ii) Notons que $\mathcal{C}\mathrm{ol}_n(K) = \emptyset$ si $n > |K|$ et $\mathcal{C}\mathrm{ol}_{|K|}(K)$ est réduit à un seul élément (voir l'exemple 6.1.3.3).

(iii) Soit $K \in \mathcal{W}(S)$ un mur non-connexe. La décomposition en composantes connexes (cf. proposition 4.4.1.16) de $K = K^1 \amalg \ldots \amalg K^n$ implique qu'on a le produit gradué :

$$\mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet(K) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet(K^i).$$

6.1.3.3 Exemple. *Top-Coloriage*
Pour tout mur K, l'identité $K \to K$ définit un coloriage appelé *top-coloriage*, qui colore chaque brique de K en une couleur différente. Par exemple, on représente le top-coloriage du mur suivant

par le diagramme coloré :

.

6.1.3.4 Exemple. *Bot-Coloriage*
Pour tout mur K connexe, la projection sur un point $K \to \{*\}$ définit un coloriage appelé *bot-coloriage*, qui colore toutes les briques de K d'une seule couleur. Par exemple, on représente le bot-coloriage du mur suivant par :

.

Si $K \in \mathcal{W}(S)$ est un mur non connexe, alors, par la proposition 4.4.1.16, on a $K^1 \amalg \ldots \amalg K^n$ sa décomposition en composantes connexes, et le *bot-coloriage* de K noté bot_K est donné par $bot_K = bot_{K_1} \amalg \ldots \amalg bot_{K_n}$; par exemple :

.

6.1.3.5 Non-exemple. On considère le mur à quatre briques $K = \{K_a, K_b, K_c, K_d\} \in \mathcal{W}^{conn}([\![1,4]\!])$ avec

$$K_a = \{1,2\}, K_b = \{3,4\}, K_c = \{2,3\} \text{ et } K_d = \{1,4\}$$

et l'ordre partiel $K_a < K_c$, $K_a < K_d$, $K_b < K_c$ et $K_b < K_d$. On considère l'application surjective $f : K \to \{N, B\}$ qui envoie K_a et K_c sur N ainsi que K_b et K_d sur B : on représente f diagrammatiquement par

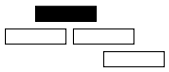
.

L'application f ne définit pas un coloriage, car la relation binaire $\leqslant_f$ induite par l'ordre de K n'est pas un ordre partiel.

6.1.3.6 Non-exemple. Pour la même raison que dans le non-exemple 6.1.3.5, le diagramme

n'est pas le diagramme d'un coloriage.

6.1.3.7 Non-exemple. Le diagramme



n'est pas le diagramme d'un coloriage, car le mur blanc n'est pas connexe.

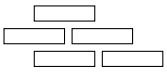
6.1.3.8 Lemme. *Soient S un ensemble fini non-vide, $K \in \mathcal{W}(S)$ un mur au dessus de S et $\varphi : K \twoheadrightarrow C$ un coloriage de K avec $\mathrm{Succ}(C) \neq \emptyset$ (ce qui implique $|C| > 1$). Pour $(c_1 < c_2) \in \mathrm{Succ}(C)$ deux couleurs successives, on a le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & C \\ & \searrow^{\exists ! \tilde{\varphi}} & \downarrow \pi_{c_1}^{c_2} \\ & & C/_{c_1 \sim c_2} \end{array}$$

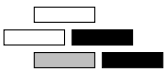
où $\pi_{c_1}^{c_2}$ fait l'identification des deux couleurs c_1 et c_2 de C et l'application $\tilde{\varphi}$ définit un coloriage de K.

Démonstration. Découle de la proposition 4.4.1.2. □

6.1.3.9 Exemple. Si on considère le mur K à cinq briques et $\varphi : K \twoheadrightarrow \{B, N, G\}$ (avec B pour blanc, G pour gris et N pour noir) représenté par

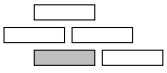


on a le coloriage à trois couleurs de K donné par la représentation diagrammatique



avec $G \leqslant N \leqslant B$; alors, comme G et N sont deux couleurs successives du coloriage, φ induit un coloriage $\tilde{\varphi} : K \twoheadrightarrow C/_{G \sim N}$ à deux couleurs que l'on représente diagrammatiquement par :

De même, φ induit un coloriage $\widehat{\varphi} : K \twoheadrightarrow C/_{N \sim B}$ à deux couleurs, représenté par



Par contre, comme G et B ne sont pas des couleurs successives, l'application $\bar{\varphi} : K \twoheadrightarrow C/_{G \sim B}$ ne définit pas un coloriage de K, car

n'est pas un coloriage.

6.1.3.10 Lemme. *Soient S un ensemble fini non-vide, $K \in \mathcal{W}(S)$ un mur (resp. $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ un mur connexe) au dessus de S et $\varphi : K \twoheadrightarrow C$ un coloriage de K. On note $\sim_\varphi$ la relation d'équivalence induite sur K par φ, i.e. pour k et l deux éléments de K, on a $k \sim_\varphi l$ si $\varphi(k) = \varphi(l)$. Alors $K/_{\sim_\varphi}$ est un mur (resp. $K/_{\sim_\varphi}$ est un mur connexe) au dessus de S.*

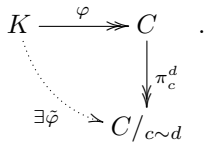
Démonstration. Découle de la proposition 4.4.1.2 et de la définition de coloriage. □

6.1.3.11 Lemme. *Soit $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ un mur connexe et $\varphi : K \to C$ un coloriage de K avec $|C| > 1$. Alors l'ensemble $\mathrm{Succ}(\varphi)$ est de cardinal $|C| - 1$.*

Démonstration. Soient c et d deux couleurs différentes de C et (K_α, K_β), un couple d'éléments d'un mur $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ tels que $\varphi(K_\alpha) = c$ et $\varphi(K_\beta) = d$. Par la propriété de connexité, il existe une suite d'éléments $K_\alpha = K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}, K_n = K_\beta$ tels que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, l'intersection $K_i \cap K_{i+1}$ est non-vide. Quitte à ajouter des éléments de K dans cette suite, on peut supposer que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, ou bien $(K_i, K_{i+1}) \in \mathrm{Succ}(K)$ ou bien $(K_{i+1}, K_i) \in \mathrm{Succ}(K)$. De plus, comme les couleurs c et d sont différentes, il existe une couleur e différente de c, i.e. $e \in C \backslash \{c\}$ et $r \in [\![1, n]\!]$ tels que

$$\varphi(K_i) = \begin{cases} c & \text{si } i \in [\![0, r-1]\!] \\ e & \text{si } i = r \end{cases} .$$

Ainsi, on a que les couleurs c et e sont successives donc $(c, e) \in \mathrm{Succ}(\varphi)$ ou $(e, c) \in \mathrm{Succ}(\varphi)$. En particulier, si le nombre de couleurs est de $|C| = 2$ alors les couleurs e et d sont les mêmes et donc le nombre de couleurs successives est réduit à $|\mathrm{Succ}(\varphi)| = 1$. Supposons par récurrence que, pour tout coloriage $\varphi : K \longrightarrow C$ à n couleurs, i.e. $|C| = n$, alors le nombre de couleurs successives est de $|\mathrm{Succ}(\varphi)| = n - 1$. Soit $\varphi : K \to C$ un coloriage à $n + 1$ couleurs. D'après ce qui précède, il existe au moins une paire de couleurs successives, i.e. $\mathrm{Succ}(\varphi) \neq \emptyset$: on considère donc $(c, d) \in \mathrm{Succ}(\varphi)$. Par le lemme 6.1.3.8, on associe le coloriage $\tilde{\varphi}$ à la paire (c, d) :



Par récurrence, comme $|C/_{c\sim d}| = n$, on a que $|\mathrm{Succ}(\widetilde{\varphi})| = n - 1$. De plus, on a la bijection $\mathrm{Succ}(\varphi) \cong \mathrm{Succ}(\widetilde{\varphi}) \amalg \{(c, d)\}$, ce qui conclut cette preuve. □

§ 2 Le complexe des coloriages

On considère de nouveau S un ensemble fini totalement ordonné : pour tout mur $(K, \leqslant_K) \in \mathcal{W}(S)$ au dessus de S, il existe un ordre total canonique $\prec_K$ sur K, induit par celui de S, qui prolonge l'ordre partiel de K. Pour K_a et K_b dans K, on a $K_a \prec_K K_b$, si :

- ▷ $K_a \cap K_b \neq \emptyset$ et $K_a <_K K_b$ (car $K_a \cap K_b \neq \emptyset$ implique que K_a et K_b sont comparable pour $\leqslant_K$) ;
- ▷ $K_a \cap K_b = \emptyset$ et $\mathfrak{h}(K_a) <_{\mathbb{N}} \mathfrak{h}(K_b)$ avec $\mathfrak{h}(K_\alpha)$ la hauteur de la brique K_α dans le mur K (cf. définition 4.4.1.1 (v)) ;
- ▷ $K_a \cap K_b = \emptyset$, $\mathfrak{h}(K_a) = \mathfrak{h}(K_b)$ et $\min(K_a) <_S \min(K_b)$.

6.1.3.12 Lemme. *Pour tout mur connexe $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ et tout coloriage $\varphi \in \mathcal{C}\mathrm{ol}(K)$, l'ensemble des paires de couleurs successives $\mathrm{Succ}(\varphi)$ est muni d'un ordre total $\prec_\varphi$ défini de la manière suivante : pour $c = (c_1, c_2)$ et $d = (d_1, d_2)$, deux éléments de $\mathrm{Succ}(\varphi)$, on a $c \prec_\varphi d$ si*

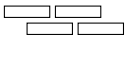
$$\min_{\prec_K}\Big(\varphi^{-1}(c_1) \cup \varphi^{-1}(c_2)\Big) \prec_K \min_{\prec_K}\Big(\varphi^{-1}(d_1) \cup \varphi^{-1}(d_2)\Big).$$

On numérote ainsi les projections π_c^d : si $(c < d) \in \mathrm{Succ}(\varphi)$ est le i-ème élément (pour l'ordre total $\prec_\varphi$), on note $\partial_i := \pi_c^d$. De plus, on remarque que $\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i$ pour $i <_{\mathbb{N}} j$. On a donc la proposition suivante.

6.1.3.13 Proposition. *Soit S un ensemble totalement ordonné. Pour tout mur $K \in \mathcal{W}_\rho(S)$ à ρ briques au dessus de S, l'ensemble $\mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet(K)$ est un ensemble pré-simplicial augmenté*

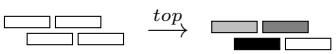
$$\mathcal{C}\mathrm{ol}_\rho(K) \;\substack{\longrightarrow\\ \vdots \\ \longrightarrow}\; \cdots \qquad \mathcal{C}\mathrm{ol}_4(K) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \mathcal{C}\mathrm{ol}_3(K) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \mathcal{C}\mathrm{ol}_2(K) \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{ol}_1(K)$$

avec $\mathcal{C}\mathrm{ol}_\rho(K) = \{top_K\}$ et $\mathcal{C}\mathrm{ol}_1(K) = \{bot_K\}$.

6.1.3.14 Exemple. On étudie en détails l'ensemble pré-simplicial augmenté des coloriages du mur $K \in \mathcal{W}^{conn}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$ représenté par  . Comme K n'a que 4 briques, il est réduit à

$$\mathcal{C}\mathrm{ol}_4(K) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \mathcal{C}\mathrm{ol}_3(K) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; \mathcal{C}\mathrm{ol}_2(K) \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{ol}_1(K) \quad .$$

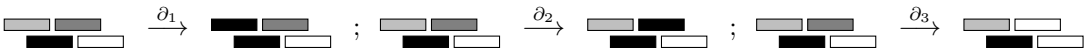
▷ $\mathcal{C}\mathrm{ol}_4(K)$ ne contient que le top-coloriage de K :



$\mathrm{Succ}(top)$ muni de son ordre total $\prec_{top}$ est donc donné par :

$$\mathrm{Succ}(top) = \left\{ \; \prec_{top} \; \prec_{top} \; \right\}$$

où chaque diagramme représente une paire de briques successives, ce qui nous donne les trois flèches $\mathcal{C}\mathrm{ol}_4(K) \;\substack{\xrightarrow{\partial_i}\\ \xrightarrow{\partial_i}\\ \xrightarrow{\partial_i}}\; \mathcal{C}\mathrm{ol}_3(K)$ représentées par :



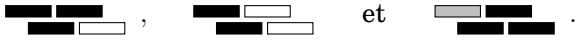
▷ $\mathcal{C}\mathrm{ol}_3(K)$ est composé des trois coloriages représentés par

De même, on a les ensembles de couleurs successives associés :

$$\mathrm{Succ}\left(\right) = \left\{ \prec \right\} \;;$$
$$\mathrm{Succ}\left(\right) = \left\{ \prec \right\} \;;$$
$$\mathrm{Succ}\left(\right) = \left\{ \prec \right\} \;;$$

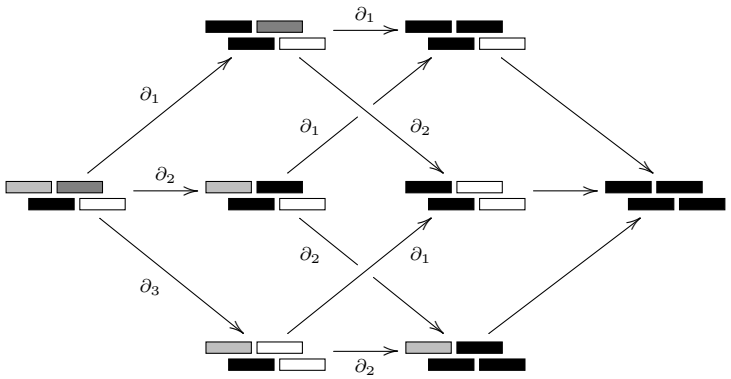
ce qui nous permet également de donner les différentes flèches de l'ensemble pré-simplicial.

▷ $\mathcal{C}\mathrm{ol}_2(K)$ est également composé de trois coloriages, représentés par



Comme ces coloriages n'ont que deux couleurs, les ensembles de couleurs successives associés sont réduits à un seul élément.

Finalement, on a une description complète de l'ensemble pré-simplicial augmenté :

$\mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet(K) :=$ 

.

6.1.3.15 Définition. *Complexe des coloriages*
Soient S un ensemble fini totalement ordonné et $K \in \mathcal{W}(S)$. On appelle *complexe des coloriages* de K le complexe de chaine :

$$C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K) := N\big(\mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet(K)\big)$$

où N est le foncteur (cf. [Wei94, Sect. 8.2]) qui associe un complexe à un ensemble pré-simplicial. La différentielle du complexe de chaînes est donnée par

$$(K,\varphi) \overset{\partial^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}}{\longmapsto} \sum_{(c<d)\in \mathrm{Succ}(\varphi)} (-1)^{\Lambda}(K, \pi_c^d \circ \varphi)$$

avec $\Lambda := \#\big\{(a<b) \in \mathrm{Succ}(\varphi) \mid (a<b) \prec_\varphi (c<d)\big\}$.

6.1.3.16 Remarque. D'après la remarque 6.1.3.2 (iii), comme le foncteur N préserve les produits, si $K \in \mathcal{W}(S)$ est un mur non-connexe au dessus de S un ensemble totalement ordonné, et $K = K^1 \amalg \ldots \amalg K^n$ est sa décomposition en composantes connexes, on a

$$C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K) \cong \bigotimes_{i=1}^{n} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K^i).$$

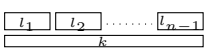
6.1.3.17 Proposition. *Soient S un ensemble fini totalement ordonné et un mur $K \in \mathcal{W}(S)$. Si l'ensemble $\mathrm{Succ}(K)$ des paires de briques successives est non-vide, alors le complexe $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)$ des coloriages est acyclique.*

Démonstration. Soient S un ensemble fini totalement ordonné et $K \in \mathcal{W}(S)$ avec $\mathrm{Succ}(K) \neq \emptyset$. On raisonne par récurrence sur le nombre de briques de K. Si K n'a qu'un seul élément alors l'ensemble $\mathrm{Succ}(K)$ est vide. Si $\#K = 2$ alors le complexe $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)$ est de la forme

$$C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K) = \quad 0 \longrightarrow \blacksquare\!\square \xrightarrow{\partial} \square\!\square \longrightarrow 0,$$

qui est acyclique. Supposons par récurrence que, pour tout mur $K \in \mathcal{W}(S)$ tel que $2 < \#K < n$, $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)$ est un complexe acyclique. Si K est un mur non-connexe à n briques, par la remarque 6.1.3.16 et l'hypothèse de récurrence, le complexe $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)$ est acyclique. Soit $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ avec $\#K = n$, on peut supposer $n > 2$.

On commence par traiter le cas exceptionnel où K est de la forme suivante :



. (6.1.2)

Montrons que $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)$ est acyclique. On considère le sous-complexe $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l_1}(K)$ qui est isomorphe à $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K/_{k\sim l_1})$: ce dernier est acyclique par récurrence. On considère alors la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l_1}(K) \longrightarrow C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K) \longrightarrow C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)/C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l_1}(K) \longrightarrow 0\ ;$$

on a l'isomorphisme de complexes $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)/C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l_1}(K) \cong C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K\backslash\{l_1\})$, donc le terme de droite de la suite exacte courte est également acyclique, ce qui implique que le complexe $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)$.

On suppose que K n'est pas de la forme exceptionnelle (6.1.2). On choisit $(k<l) \in \mathrm{Succ}(K)$ avec $\mathfrak{h}(k)=1$ et on considère le sous-complexe $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},(k<l)}(K) \subset C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)$ des coloriages φ de K tels que $\varphi(k)=\varphi(l)$.

- ▷ $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},(k<l)}(K)$ est bien un complexe de chaînes car $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},(k<l)}(K) = N\big(\mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet^{(k<l)}(K)\big)$ avec $\mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet^{(k<l)}(K)$ le sous-ensemble pré-simplicial des coloriages φ tels que $\varphi(k)=\varphi(l)$.
- ▷ On considère $K/_{k\sim l}$, le poset d'ensemble sous-jacent $\big(K\backslash\{k,l\}\big)\cup\{k\cup l\}$. Son ordre partiel est induit par celui de K : pour $j\in K$ tel que $j>k$ ou $j>l$ (resp. $j<k$ ou $j<l$) alors on a $j>(k\cup l)$ (resp. $j<(k\cup l)$). On a un isomorphisme canonique d'ensembles pré-simpliciaux

  $$\mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet^{(k<l)}(K) \cong \mathcal{C}\mathrm{ol}_\bullet(K/_{k\sim l})$$

  qui induit l'isomorphisme de complexe de chaînes :

  $$C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K) \cong C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}\big(K/_{k\sim l}\big).$$

  Comme $|K/_{k\sim l}| = |K|-1$, alors $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)$ est acyclique par l'hypothèse de récurrence.
- ▷ On note $\mathrm{Succ}_K(k) = \big\{l\in K \mid (k<l)\in\mathrm{Succ}(K)\big\}$. On considère le complexe

  $$\sum_{l\in\mathrm{Succ}_K(k)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K).$$

  Par un argument de type Mayer-Vietoris (cf. proposition 6.1.3.18), ce complexe est acyclique si et seulement si, pour tout sous-ensemble non-vide $\widetilde{\mathrm{Succ}}(k)\subset\mathrm{Succ}_K(k)$, le complexe

  $$\bigcap_{l\in\widetilde{\mathrm{Succ}}(k)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)$$

  est acyclique. Soit $\widetilde{\mathrm{Succ}}(k)$ un sous-ensemble non-vide $\mathrm{Succ}_K(k)$, on a l'isomorphisme de complexes

  $$\bigcap_{l\in\widetilde{\mathrm{Succ}}(k)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K) \cong C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K/_{\widetilde{\mathrm{Succ}}(k)})$$

  Deux cas de figure se présentent alors. Ou bien $|K/_{\widetilde{\mathrm{Succ}}(k)}|=1$, ce qui signifie que $\widetilde{\mathrm{Succ}}(k) = \mathrm{Succ}_K(k)$ et K est de la forme (6.1.2), ce qui est exclu par hypothèse. Ou bien $|K/_{\widetilde{\mathrm{Succ}}(k)}|>1$ et dans ce cas, $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K/_{\widetilde{\mathrm{Succ}}(k)})$ est acyclique par hypothèse de récurrence.

▷ On considère le complexe

$$C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)\Big/\Big(\sum_{l\in \mathrm{Succ}_K(k)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)\Big).$$

qui est isomorphe au complexe

$$C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}\big(K\backslash\{k\}\big).$$

Notons que, en général, ce dernier complexe est un produit de complexes de coloriages car le mur $K\backslash\{k\}$ n'est pas forcement connexe. Par hypothèse de récurrence, ce complexe est acyclique. Comme on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \sum_{l\in \mathrm{Succ}_K(k)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K) \longrightarrow C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K) \longrightarrow C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)\Big/\Big(\sum_{l\in \mathrm{Succ}_K(k)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)\Big) \longrightarrow 0 \ ,$$

avec les termes de gauche et de droite acycliques, alors le complexe $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)$ est acyclique, ce qu'il fallait démontrer.

□

Dans la démonstration précédente, on utilise notamment la proposition suivante.

6.1.3.18 Proposition. *Mayer-Vietoris algébrique*

(i) Soient A et B deux complexes de chaînes acycliques. Si le complexe $A\cap B$ est acyclique, alors le complexe $A+B$ est acyclique.

(ii) Plus généralement, soient m un entier naturel non-nul et $\{A_i\}_{i\in[\![1,m]\!]}$ une famille de m complexes acycliques. Si, pour tout sous-ensemble $J\subset[\![1,m]\!]$, le complexe $\bigcap_{j\in J} A_j$ est acyclique, alors le complexe $\sum_{j=1}^m A_j$ est acyclique.

Démonstration. (i) On a le carré

$$\begin{array}{ccc} A\cap B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A+B \end{array}$$

qui induit la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A\cap B \longrightarrow A\oplus B \longrightarrow A+B \longrightarrow 0,$$

ce qui, par la suite exacte longue associée et l'additivité du foncteur $\mathrm{H}_\bullet(-)$, permet de conclure.

(ii) On raisonne par récurrence sur m, le nombre de termes, en remarquant que le point (i) initialise la récurrence. Fixons m, un entier naturel non-nul et supposons par récurrence que toute famille $A_1,\dots,A_m$ de m complexes acycliques telle que, pour tout sous-ensemble $J\subset[\![1,m]\!]$, le complexe $\bigcap_{j\in J} A_j$ est acyclique, alors le complexe $\sum_{j=1}^m$ est acyclique. Soit $A_0,\dots,A_m$, une famille de $m+1$ complexes acycliques telle que, pour tout sous-ensemble $J\subset[\![0,m]\!]$, le complexe $\bigcap_{j\in J} A_j$ est acyclique, alors le complexe $\sum_{j=1}^m$ est acyclique. Alors, on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^m A_j\cap A_0 & \longrightarrow & A_0 \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \sum_{j=1}^m A_j & \longrightarrow & \sum_{j=0}^m A_j \end{array}$$

avec A_0 acyclique, $\sum_{j=1}^{m} A_j$ et $\sum_{j=1}^{m} A_j \cap A_0$ acycliques par hypothèse de récurrence, d'où le résultat par (i).

□

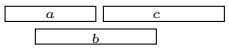
6.1.4 Construction bar de la protopérade libre

On rappelle que, par définition, $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)$ est égal à $\mathscr{F}^c\big(\Sigma\overline{\mathscr{F}(V)}\big)$. Donc, par la proposition 4.4.2.1, on a, pour tout ensemble fini S non-vide, l'isomorphisme de complexe de chaînes :

$$\mathbf{B}\mathscr{F}(V)(S) \cong \bigoplus_{K\in\mathcal{W}^{conn}(S)} \bigotimes_{\alpha\in A} \big(\Sigma\overline{\mathscr{F}(V)}\big)(K_\alpha).$$

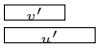
Ainsi, un monôme $\underline{m}$ de $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)(S)$ est la donnée d'un mur $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ pour lequel chaque brique K_α est étiqueté d'une suspension s et d'un mur $L^\alpha \in \mathcal{W}^{conn}(K_\alpha)$, lui-même étiqueté par des éléments de V.

6.1.4.1 Exemple. On considère le mur $K \in \mathcal{W}^{conn}\big([\![1,6]\!]\big)$ défini par $K_a = \{1,2,3\}$, $K_b = \{2,3,4,5\}$ et $K_c = \{4,5,6\}$ avec l'ordre $K_b < K_a$ et $K_b < K_a$, que l'on représente par :

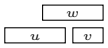


On pose également :

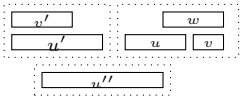
- ▷ $L^a \in \mathcal{W}^{conn}(K_a)$ définit par $\{1,2,3\} < \{1,2\}$ et étiqueté par des éléments u' et v' de V :



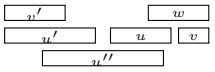
- ▷ $L^b \in \mathcal{W}^{conn}(K_b)$ qui est le mur à une brique $\{2,3,4,5\}$ étiqueté par $u'' \in V$;
- ▷ $L^c \in \mathcal{W}^{conn}(K_c)$ définit par $L^c_a = \{4,5\}$, $L^c_b = \{5,6\}$ et $L^c_c = \{6\}$ avec l'ordre partiel $L^c_a < L^c_b$ et $L^c_c < L^c_b$ et étiqueté par $u, v, w \in V$ de la manière suivante :



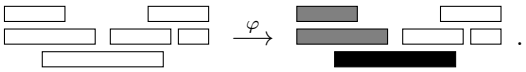
On représente alors le monôme associé par



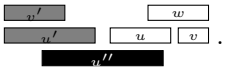
Ce monôme est en fait la donnée d'un monôme $\underline{m}$ de $\mathscr{F}(V)$, i.e. d'un mur étiqueté que l'on représente par



muni d'un coloriage φ représenté par :



Finalement, on représente ce monôme par :

$(\underline{m}, \varphi) :=$ 

Cet exemple illustre un fait général, qui est décrit par la proposition suivante.

6.1.4.2 Proposition. *Description combinatoire de* $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)$
Soit V *un* $\mathfrak{S}$*-module réduit concentré en degré* 0*. On a, pour tout ensemble fini* S *totalement ordonné, l'isomorphisme de complexes de chaines suivant :*

$$\big(\mathbf{B}\mathscr{F}(V)\big)(S) \cong \bigoplus_{K\in\mathcal{W}^{conn}(S)} \bigoplus_{\varphi\in Col(K)} \Sigma^{\#\varphi(K)}\Big(\bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha), \varphi\Big).$$

où Σ *est la suspension de degré homologique* 1*.*

6.1.4.3 Corollaire. *Pour tout* $\mathfrak{S}$*-module réduit* V *de dimension finie concentré en degré homologique nul, le morphisme naturel de* $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)$ *vers* ΣV *est un quasi-isomorphisme :*

$$\mathbf{B}\mathscr{F}(V) \xrightarrow{\simeq} \Sigma V.$$

Démonstration. Soit S un ensemble fini totalement ordonné. Par la proposition 6.1.4.2, on a les isomorphismes de complexes

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{B}\mathscr{F}(V)\big)(S) &\cong \bigoplus_{K\in\mathcal{W}^{conn}(S)} \bigoplus_{\varphi\in Col(K)} \Sigma^{\#\varphi(K)}\Big(\bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha), \varphi\Big)\\ &\cong \Sigma V \oplus \bigoplus_{\substack{K\in\mathcal{W}^{conn}(S)\\ \#K\geqslant 2}} \bigoplus_{\varphi\in Col(K)} \Sigma^{\#\varphi(K)}\Big(\bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha), \varphi\Big)\\ &\cong \Sigma V \oplus \bigoplus_{\substack{K\in\mathcal{W}^{conn}(S)\\ \#K\geqslant 2}} \big(C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)\big)^{\oplus(\#K)\cdot\dim_k V}\end{aligned}$$

donc par la proposition 6.1.3.17, $\mathbf{B}\mathscr{F}(V) \simeq \Sigma V$. □

6.2 Suite spectrale de Poincaré-Birkhoff-Witt

Le but de cette section est d'introduire la notion de base PBW pour les protopérades en suivant la même stratégie que Hoffbeck dans le cas opéradique (cf. [Hof10, Sect. 3 et 4]). Dans toute cette section, on considère donc S un ensemble fini totalement ordonné, V un $\mathfrak{S}$-module réduit concentré en degré 0 et P une protopérade quadratique de la forme $\mathscr{F}(V)/\langle R\rangle$ (de différentielle nulle, car concentrée en degré 0), avec donc $R \subset (V \boxtimes_c V)^{(2)_V}$.

6.2.0.1 Remarque. Dans cette section, on suit de près le plan de [Hof10, Sect. 3 et 4]. Ainsi, pour tout résultat similaire démontré dans le cadre protopéradique, on fera référence à son homologue opéradique.

6.2.1 Bases PBW

Pour toute cette section, on suppose que V est de dimension totale finie n et qu'il est muni d'une base $\mathcal{B}^V$ (en tant que k-module), totalement ordonnée. Soit $S \in \mathrm{Ob}\,\mathtt{Ord}$ un ensemble fini totalement ordonné, on va définir un ordre partiel sur l'ensemble des monômes de $\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}(V)(S)$ induit par celui de S. On rappelle (cf. définition 4.4.3.1) qu'un monôme de $\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}(V)(S)$ est un élément de la forme

$$\underline{m} := \bigotimes_\alpha m_\alpha \in \bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha)$$

avec $(K = \{K_\alpha\}_{\alpha\in A}, \leqslant) \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ et pour tout $\alpha \in A$, $m_\alpha \in V(K_\alpha)$; son poids est le poids du mur sous-jacent. La base $\mathcal{B}^V$ induit une base (en tant que k-module) $\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$ de $\mathscr{F}(V)$ comme suit.

6.2.1.1 Définition. *Base monômiale $\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$*
Soit $(K = \{K_\alpha\}_{\alpha\in A}, \leqslant) \in \mathcal{W}^{conn}(S)$. Un monôme $\underline{m} := \underset{\alpha}{\otimes} m_\alpha \in \bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha)$ de $\mathscr{F}(V)(S)$ est dans l'ensemble $\mathcal{B}_K^{\mathscr{F}(V)(S)}$ si, pour tout $\alpha \in A$, $m_\alpha \in \mathcal{B}^V$. L'ensemble

$$\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)} := \coprod_{n\in\mathbb{N}^*} \coprod_{K\in\mathcal{W}^{conn}(\llbracket 1,n\rrbracket)} \mathcal{B}_K^{\mathscr{F}(V)(\llbracket 1,n\rrbracket)}$$

est la *base monomiale* de $\mathscr{F}(V)$ associée à $\mathcal{B}^V$.

6.2.1.2 Lemme. (cf. [Hof10, Obs. 3.2])

(i) $\mathcal{B}_K^{\mathscr{F}(V)} = \mathcal{B}^{V(S)}$ *si* $\{K_\alpha\} = \{S\}$.

(ii) Soient M, N et S trois ensembles finis totalement ordonnés munis d'un diagramme d'injections monotones $\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$ vérifiant la condition (6.1.1)*, soient deux murs connexes $(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}, \leqslant) \in \mathcal{W}^{conn}(M)$ et $(\{L_\beta\}_{\beta\in B}, \leqslant) \in \mathcal{W}^{conn}(N)$, et soient $\underline{a}$ un monôme de $\bigotimes_\alpha V(K_\alpha)$ et $\underline{b}$ un monôme de $\bigotimes_\beta V(L_\beta)$. Alors, on a l'équivalence suivante :*

$$\underline{a} \underset{\varphi}{\circ} \underline{b} \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)} \iff \underline{a} \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)} \text{ et } \underline{b} \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}.$$

La notion de base PBW repose sur un ordre partiel de l'ensemble des monômes, ordre qui doit être compatible, dans le sens suivant, avec les produits shuffles.

6.2.1.3 Définition. *Ordre shuffle-compatible*
Un *ordre shuffle-compatible* sur la base monômiale de $\mathscr{F}_{ш}V$ est un ordre partiel vérifiant la condition de compatibilité avec les produits shuffles suivante : pour tous monômes $\alpha \leqslant \alpha' \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}_{ш}V(M)}$ et tous monômes $\beta \leqslant \beta' \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}_{ш}V(N)}$, alors, pour tout diagramme φ d'injections monotones $\big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$ vérifiant la condition (6.1.1), on a

$$\alpha \underset{\varphi}{\circ} \beta \leqslant \alpha' \underset{\varphi}{\circ} \beta'.$$

On cherche à présent à construire un tel ordre shuffle-compatible. Rappelons que V est de dimension totale finie n et est muni d'une base $\mathcal{B}^V$ totalement ordonnée que l'on note $v^1 < v^2 < \ldots < v^n$. Soit S, un ensemble fini totalement ordonné de cardinal s. On va définir un ordre sur $\mathcal{B}^{\mathscr{F}_{ш}V(S)}$. Pour cela, on définit un alphabet $\{v_\varphi^h\}$: chaque lettre notée v_φ^h de cet alphabet est donnée par un élément $v^h \in \mathcal{B}^{V(T)}$ indicé par une injection monotone $\varphi : T \hookrightarrow S$. On ordonne cet alphabet de la manière suivante :

- ▷ on a $v_\varphi^g < v_\psi^h$ si $g < h$;
- ▷ si $g = h$, alors on a que φ et ψ sont deux injections monotones de T dans S, qui envoie T sur $\varphi(T) = \{s_1^\varphi < \ldots < s_{|T|}^\varphi\}$ et $\psi(T) = \{s_1^\psi < \ldots < s_{|T|}^\psi\}$ respectivement. On compare alors ces images grâce à l'ordre lexicographique : soit $i \in \llbracket 1, |T|\rrbracket$ l'indice le plus petit tel que $s_i^\varphi \neq s_i^\psi$, si $s_i^\varphi < s_i^\psi$ alors $v_\varphi^g < v_\psi^g$ et $s_i^\varphi > s_i^\psi$ alors $v_\varphi^g > v_\psi^g$.

On associe à chaque monôme $\underline{m} \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}_{ш}V(S)}$ de mur sous-jacent $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$, un s-uplet de mots, où la i-ème composante du s-uplet est donnée comme suit : on considère $K_1^i < \ldots < K_p^i$ l'ensemble (non-vide, par définition d'un mur) totalement ordonné des éléments du mur K qui contiennent i

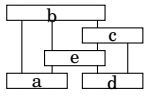
(rappelons que les éléments d'un mur K sont des sous-ensembles de S). À chacune des briques K_l^i est associé un terme $v_\varphi^g \in \mathcal{B}^V$ indicé par l'injection monotone $\varphi : K_l^i \hookrightarrow S$.

Pour résumer, à tout monôme $\underline{m} \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}_\sqcup V(S)}$, on associe un s-uplet de mots :

$$\underline{m} \rightsquigarrow (w_1, \dots w_s),$$

avec chaque mot w_i de la forme $v_{T_1 \hookrightarrow S}^{h_1} v_{T_2 \hookrightarrow S}^{h_2} \dots v_{T_{r_i} \hookrightarrow S}^{h_{r_i}}$.

6.2.1.4 Exemple. Au monôme $\underline{m} \in \mathscr{F}(V)([\![1,4]\!])$ représenté par le diagramme



,

avec $a, b, c, d, e \in \mathcal{B}^V$, on associe le quadruplet

$$(a_{\{1,2\}} b_{\{1,2,3\}}, a_{\{1,2\}} e_{\{2,3\}} b_{\{1,2,3\}}, d_{\{3,4\}} e_{\{2,3\}} c_{\{3,4\}} b_{\{1,2,3\}}, d_{\{3,4\}} c_{\{3,4\}}).$$

A présent, on construit notre ordre sur les monômes de $\mathcal{B}^{\mathscr{F}_\sqcup V(S)}$.

6.2.1.5 Définition/Proposition. On définit la relation binaire sur $\mathcal{B}^{\mathscr{F}_\sqcup V(S)}$ en comparant les s-uplets de mots de la manière suivante. Soient $\underline{m}$ et $\underline{n}$ deux monômes de $\mathcal{B}^{\mathscr{F}_\sqcup V(S)}$ à qui on associe respectivement les s-uplets de mots $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_s)$ et $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_s)$. On note $l(a_i)$ le nombre de lettres du mot $\underline{a}_i$;

- ▷ On commence par comparer les s-uplets des longueurs des mots avec l'ordre lexicographique. Si $\big(l(\underline{a}_1), \dots, l(\underline{a}_s)\big) <_{lex} \big(l(\underline{b}_1), \dots, l(\underline{b}_s)\big)$, alors $\underline{m} < \underline{n}$. Par exemple, si $l(\underline{a}_1) < l(\underline{b}_1)$, alors $\underline{m} < \underline{n}$; si $l(\underline{a}_1) = l(\underline{b}_1)$ et $l(\underline{a}_2) < l(\underline{b}_2)$ alors $\underline{m} < \underline{n}$; etc ...
- ▷ Si $\big(l(\underline{a}_1), \dots, l(\underline{a}_s)\big) = \big(l(\underline{b}_1), \dots, l(\underline{b}_s)\big)$, alors on compare les s-uplets de mots avec l'ordre lexicographique inverse sur les mots et les s-uplets : ainsi, si $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_s) <_{lexinv} (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_s)$, alors $\underline{m} < \underline{n}$. Par exemple , si $\underline{a}_s < \underline{b}_s$, alors $\underline{m} < \underline{n}$; si $\underline{a}_s = \underline{b}_s$ et $\underline{a}_{s-1} < \underline{b}_{s-1}$, alors $\underline{m} < \underline{n}$; etc ...

Ceci définit un ordre partiel sur $\mathcal{B}^{\mathscr{F}_\sqcup V(S)}$ que l'on note $\leqslant_\sqcup$. On étend cet ordre à tout $\mathcal{B}^{\mathscr{F}_\sqcup V}$ en posant, pour $\underline{m} \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}_\sqcup V(S)}$ et $\underline{n} \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}_\sqcup V(T)}$,

$$\text{si } |S| < |T|, \quad \text{alors } \ \underline{m} <_\sqcup \underline{n}.$$

La base monômiale $\mathcal{B}^{\mathscr{F}_\sqcup V}$ de $\mathscr{F}_\sqcup V$ est partiellement ordonnée par $<_\sqcup$.

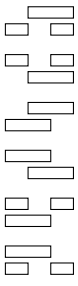
6.2.1.6 Exemple. On considère la protopérade-shuffle quadratique $P = \mathscr{F}_\sqcup(V)$ avec V concentré en arité 2 avec un unique générateur :

$$V = V([\![1,2]\!]) = k \cdot \boxed{} \ .$$

On ordonne avec l'ordre $<_\sqcup$, la base monomiale de $\big(\mathscr{F}_\sqcup V([\![1,3]\!])\big)^{(2)_V}$, où l'exposant $(2)_V$ désigne la partie de poids 2 de $\mathscr{F}_\sqcup V([\![1,3]\!])$ c'est-à-dire les monômes n'étant composés que deux éléments de V :

.

En effet, on associe à chacun des éléments $\big(\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}V([\![1,3]\!])\big)^{(2)_V}$ son 3-uplet, en notant μ le générateur :



$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow (\mu_{\{1,3\}}, \mu_{\{2,3\}}, \mu_{\{1,3\}}\mu_{\{2,3\}})\\
&\rightsquigarrow (\mu_{\{1,3\}}, \mu_{\{2,3\}}, \mu_{\{2,3\}}\mu_{\{1,3\}})\\
&\rightsquigarrow (\mu_{\{1,2\}}, \mu_{\{1,2\}}\mu_{\{2,3\}}, \mu_{\{2,3\}})\\
&\rightsquigarrow (\mu_{\{1,2\}}, \mu_{\{2,3\}}\mu_{\{1,2\}}, \mu_{\{2,3\}})\\
&\rightsquigarrow (\mu_{\{1,2\}}\mu_{\{1,3\}}, \mu_{\{1,2\}}, \mu_{\{1,3\}})\\
&\rightsquigarrow (\mu_{\{1,3\}}\mu_{\{1,2\}}, \mu_{\{1,2\}}, \mu_{\{1,3\}})\ .
\end{aligned}$$

6.2.1.7 Lemme. *L'ordre partiel $\leqslant_{\sqcup\!\sqcup}$ est shuffle-compatible. c'est-à-dire que pour M N et S, trois ensembles finis totalement ordonnés, pour $\alpha \leqslant_{\sqcup\!\sqcup} \alpha'$ deux monômes de $\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}V(M)$ et $\beta \leqslant_{\sqcup\!\sqcup} \beta'$ deux monômes de $\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}V(N)$ et pour tout produit shuffle $\underset{\varphi}{\circ}$ associé au diagramme shuffle $\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$ vérifiant la condition* (6.1.1)*, on a*

$$\alpha \underset{\varphi}{\circ} \beta \leqslant_{\sqcup\!\sqcup} \alpha' \underset{\varphi}{\circ} \beta'.$$

Démonstration. Soient M, N et S trois ensembles finis totalement ordonnés, $\alpha \leqslant_{\sqcup\!\sqcup} \alpha'$ deux monômes de $\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}V(M)$ et $\beta \leqslant_{\sqcup\!\sqcup} \beta'$ deux monômes de $\mathscr{F}_{\sqcup\!\sqcup}V(N)$ et $\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$ un diagramme d'injections monotones vérifiant la condition (6.1.1).

On associe respectivement à $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \alpha\underset{\varphi}{\circ}\beta$ et $\alpha'\underset{\varphi}{\circ}\beta'$ les uplets de mots $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{|M|})$, $(\underline{a}'_1, \dots, \underline{a}'_{|M|})$, $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{|N|})$, $(\underline{b}'_1, \dots, \underline{b}'_{|N|})$, $(\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_{|S|})$ et $(\underline{c}'_1, \dots, \underline{c}'_{|S|})$. Comme M, N et S sont totalement ordonnés, ils sont en bijection naturelle avec les posets $[\![1, |M|]\!]$, $[\![1, |N|]\!]$ et $[\![1, |S|]\!]$. Par définition du produit shuffle $\underset{\varphi}{\circ}$, les mots $\underline{c}_\lambda$ (resp. $\underline{c}'_\lambda$) sont de la forme :

- $\underline{c}_\lambda = \underline{a}_\gamma$ (resp. $\underline{c}'_\lambda = \underline{a}'_\gamma$) si $\lambda \in i(M)\backslash(i(M) \cap j(N))$;
- $\underline{c}_\lambda = \underline{b}_\gamma$ (resp. $\underline{c}'_\lambda = \underline{b}'_\gamma$) si $\lambda \in j(M)\backslash(i(M) \cap j(N))$;
- $\underline{c}_\lambda = \underline{a}_\gamma\underline{b}_\gamma$ (resp. $\underline{c}'_\lambda = \underline{a}'_\gamma\underline{b}'_\gamma$) si $\lambda \in i(M) \cap j(N)$ où $\underline{a}_\gamma\underline{b}_\gamma$ est la concaténation des mots $\underline{a}_\gamma$ et $\underline{b}_\gamma$.

On considère $r \in [\![1, |S|]\!]$, le plus grand indice tel que $\underline{c}_r \neq \underline{c}'_r$. Trois cas s'offrent donc à nous :

- Si $r \in i(M)\backslash(i(M) \cap j(N))$, $r = i(\lambda)$ et $\lambda \in [\![1, |M|]\!]$ est donc le plus grand indice tel que $\underline{a}_\lambda \neq \underline{a}'_\lambda$. Comme $\alpha \leqslant_{\sqcup\!\sqcup} \alpha'$, on a que $\underline{a}_\lambda \leqslant \underline{a}'_\lambda$ donc $\underline{c}_r \leqslant \underline{c}'_r$.
- Si $r \in j(N)\backslash(i(M) \cap j(N))$, alors $r = j(\lambda)$ avec $\lambda \in [\![1, |N|]\!]$, et λ est donc le plus grand indice tel que $\underline{b}_\lambda \neq \underline{b}'_\lambda$. Comme $\beta \leqslant_{\sqcup\!\sqcup} \beta'$, on a $\underline{b}_\lambda \leqslant \underline{b}'_\lambda$ donc $\underline{c}_r \leqslant {}'_r$.
- Si $r \in (i(M) \cap j(N))$, alors on refait le même raisonnement en distinguant les cas ou $\underline{a}_\lambda = \underline{a}'_\lambda$ et $\underline{a}_\lambda \neq \underline{a}'_\lambda$.

Finalement, on a donc bien que

$$\alpha \underset{\varphi}{\circ} \beta \leqslant_{\sqcup\!\sqcup} \alpha' \underset{\varphi}{\circ} \beta'.$$

□

On définit à présent la notion de base PBW pour une protopérade. L'existence d'une base PBW sur la protopérade P nous permettra, à l'aide de l'ordre partiel, de filtrer le complexe sous-jacent à $\mathbf{B}P$.

6.2.1.8 Définition. *Base PBW*
Soit P une protopérade réduite quadratique, donnée par $P = \mathscr{F}(V)/\langle R\rangle$. Une *base PBW* de P est un ensemble $\mathcal{B}^P \subset \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$, tel que son image par l'application ι définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^P \subset \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)} & \hookrightarrow & \mathscr{F}(V) \\ & \searrow^{\iota} & \downarrow \\ & & P \end{array}$$

soit une base du k-module P, contenant 1, tel que l'injection de $\mathcal{B}^V$ dans $\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$ se factorise à travers $\mathcal{B}^P$ et contenant, pour tout $K \in \mathcal{W}^{conn}$, un sous-ensemble

$$\mathcal{B}^P_K \subset \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}_K$$

satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(i) pour $a \in \mathcal{B}^{P(M)}_K$ et $b \in \mathcal{B}^{P(N)}_L$ et pour tout produit shuffle $\underset{\varphi}{\circ}$, défini par le diagramme d'injections monotones $\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$ vérifiant (6.1.1) :
- ▷ ou bien $a \underset{\varphi}{\circ} b$ est un élément de $\mathcal{B}^{P(S)}_{i(K)\cup j(L)}$;
- ▷ ou bien $a \underset{\varphi}{\circ} b$ est égale à $\sum_\gamma c_\gamma \gamma$, son écriture dans la base $\mathcal{B}^{P(S)}$, avec $\gamma >_{\sqcup\!\sqcup} a \underset{\varphi}{\circ} b$.

(ii) tout élément $\underline{m} = \otimes_\alpha m_\alpha$ de $\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}_K$ est un élément de $\mathcal{B}^P_K$ si et seulement si pour toutes briques successives $K_a < K_b$ de K (i.e. il n'existe pas $K_c \in K$ tel que $K_a < K_c < K_b$), $m_a \otimes m_b$ est un élément de $\mathcal{B}^P_{K_a<K_b}$.

6.2.1.9 Lemme. (cf. [Hof10, Obs. 3.8])
L'assertion (i) est équivalente à l'assertion (i') :

(i') Pour tout $a \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$:
- ▷ ou bien a est un élément de $\mathcal{B}^P$;
- ▷ ou bien a s'écrit $\sum_\gamma c_\gamma \gamma$ dans la base $\mathcal{B}^P$ et tous les éléments $\gamma \in \mathcal{B}^P$ qui apparaissent dans cette décomposition satisfont $\gamma > a$ dans $\mathscr{F}(V)$.

Démonstration. La condition (i') implique la condition (i). Réciproquement, on raisonne par récurrence sur le poids des monômes. Pour un monôme a de poids 1 dans $\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$, alors $a \in \mathcal{B}^V$ par le lemme 6.2.1.2 (i) donc $a \in \mathcal{B}^P$ par définition.

Supposons par récurrence que l'assertion (i) implique l'assertion (i') pour tous les monômes de poids strictement inférieur à $n+1$. Soit $a \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$ un monôme de poids $m \geqslant 2$. On peut écrire a sous la forme d'un produit shuffle, i.e. il existe b et $c \in \mathscr{F}(V)$ et un diagramme shuffle φ tels que $a = b \underset{\varphi}{\circ} c$. De plus, par le lemme 6.2.1.2, b et c sont des éléments de $\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$. Alors

- ▷ ou bien b et c sont dans $\mathcal{B}^P$, donc par (i), a vérifie l'assertion (i') ;
- ▷ ou bien l'un des éléments b et c n'est pas dans $\mathcal{B}^P$, mettons c. Alors, par hypothèse de récurrence, c s'écrit $\sum_\gamma c_\gamma \gamma$ dans la base $\mathcal{B}^P$ avec $\gamma > c$. Ainsi, on a $a = \sum_\gamma c_\gamma b \underset{\varphi}{\circ} \gamma$. Alors, si $b \in \mathcal{B}^P$, alors par (i), a vérifie l'assertion (i'). Sinon, toujours par hypothèse de récurrence, b s'écrit $\sum_\lambda b_\lambda \lambda$ dans la base $\mathcal{B}^P$ avec $b > \lambda$: a s'écrit alors $\sum_{\gamma,\lambda} c_\gamma b_\lambda \lambda \underset{\varphi}{\circ} \gamma$ dans la base $\mathcal{B}^P$ ce qui implique, par (i), que a vérifie l'assertion (i').

On a donc démontré que l'assertion (i) implique l'assertions (i') pour les monômes de poids $n+1$. □

6.2.1.10 Proposition. (cf. [Hof10, Prop. 3.9]) *Soient V un $\mathfrak{S}$-module réduit finiment engendré et $P = \mathscr{F}(V)/\langle R\rangle$ une protopérade quadratique réduite. Soit $\mathcal{B}^P$ une base du k-module P telle que la condition (i) soit vérifiée pour tout couple de briques et la condition (ii) soit vraie. Alors la condition (i) est vraie pour tout couple de monômes.*

Démonstration. Soit V un $\mathfrak{S}$-module réduit finiment engendré muni d'une base $\mathcal{B}^V$ totalement ordonnée. Si l'assertion (i') est vraie pour tout monôme de poids 2 et l'assertion (ii) est vraie, alors l'assertion (i') est vraie pour tout monôme par compatibilité de l'ordre avec les compositions shuffle partielles.

Soient S un ensemble totalement ordonné et $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$. On considère un monôme $\underline{m} = \otimes_\alpha m_\alpha \in \mathcal{B}_K^{\mathscr{F}(V)} \backslash \mathcal{B}_K^P$. Par la condition (ii), il existe un couple de briques successives $K_a < K_b$ tel que $m_a \otimes m_b \notin \mathcal{B}^P_{K_a<K_b}$. Par la condition (i'), on a $\sum_\gamma c_\gamma \gamma$, la décomposition de $m_a \otimes m_b$ dans la base $\mathcal{B}^P$ avec, pour tout γ, $m_a \otimes m_b > \gamma$. On remplace $m_a \otimes m_b$ par $\sum_\gamma c_\gamma \gamma$ dans $\underline{m}$. Cela donne un nouveau représentant de $\underline{m} = \sum_{\gamma'} c_{\gamma'} \gamma'$ dans P, tel que $\gamma' > \underline{m}$ car la relation d'ordre est compatible avec le produit (cf. lemme 6.2.1.7). Si tous les γ' sont dans $\mathcal{B}^P$, alors on a le résultat voulu. Sinon, on réitère la procédure : comme V est dimension finie, que les monômes sont de poids finis, et que la décomposition dans la base $\mathcal{B}^P$ respecte le poids, la procédure termine en un nombre fini d'étapes et le dernier monôme obtenu est un élément de $\mathcal{B}^P$. □

6.2.2 Suite spectrale

Dans cette section, on se place sous les conditions suivantes. On considère $P = \mathscr{P}(V, R)$ une protopérade quadratique, réduite, avec V un $\mathfrak{S}$-module localement fini et concentré en degré homologique nul. On suppose de plus que la protopérade P est munie d'une base PBW, c'est-à-dire d'une famille de monômes $\mathcal{B}^P \subset \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$ qui, par le morphisme $\mathscr{F}(V) \to P$, induit une base de P en tant que k-module, et qui vérifie les conditions de compatibilité avec l'ordre (cf. définition 6.2.1.8).

En utilisant cette base PBW et son ordre, nous allons filtrer le complexe bar $\mathrm{B}P$ afin d'obtenir des complexes $E^0\mathrm{B}P_{\underline{m}}$, complexes qui compose la page E^0 de la suite spectrale de Poincaré Birkhoff Witt.

§ 1 Base $\mathcal{B}^{\mathrm{B}P}$ de $\mathrm{B}P$

La protopérade P est de la forme $\mathscr{F}(V)/\langle R\rangle$ donc $\mathrm{B}P$ est un quotient de $\mathrm{B}\mathscr{F}(V)$. On rappelle que, par la proposition 6.1.4.2, un monôme $\tilde{\underline{m}}$ de $\mathrm{B}\mathscr{F}(V)$ est donné par son monôme sous-jacent $\underline{m} \in \mathscr{F}(V)$ et son coloriage $\varphi : K \twoheadrightarrow C$. Deux monômes $(\underline{m}, \varphi : K \to C)$ et $(\underline{n}, \psi : L \to D)$ de $\mathrm{B}\mathscr{F}(V)$ sont identifiés dans $\mathrm{B}P$ si on a un isomorphisme de posets $C \cong D$ et que les fibres des coloriages s'identifient dans P, i.e. si pour toute couleur c de $C \cong D$, on a

$$\otimes_\alpha m_\alpha = \otimes_\beta n_\beta \bmod R$$

avec $\otimes_\alpha m_\alpha \in \bigotimes_{K_\alpha \in \varphi^{-1}(c)} V(K_\alpha)$ et $\otimes_\beta n_\beta \in \bigotimes_{L_\beta \in \psi^{-1}(c)} V(L_\beta)$, qui sont des sous-monômes de $\underline{m}$ et $\underline{n}$.

La différentielle ∂_{B} de $\mathrm{B}P$ se décrit en termes de coloriages : pour un monôme $(\underline{m}, \varphi) \in \mathrm{B}P$, on a

$$(\underline{m}, \varphi) \xmapsto{\partial_{\mathrm{B}}} \sum_{(c<d)\in \mathrm{Succ}(\varphi)} (-1)^\Lambda \partial_c^d (\underline{m}, \varphi)$$

où $\partial_c^d(\underline{m},\varphi) := (\widetilde{\underline{m}}, \pi_c^d \circ \varphi)$, $\Lambda := \#\big\{(a<b)\in \mathrm{Succ}(\varphi) \mid (a<b) \prec_\varphi (c<d)\big\}$ et $\widetilde{\underline{m}}$, le monôme induit par $\underline{m}$ où le sous-monôme $\otimes_{\lambda_{c,d}} \tilde{m}_{\lambda_{c,d}} \in \bigotimes_{K_\beta\in\varphi^{-1}(c\cup d)} V(K_\beta)$ est réduit modulo R.

6.2.2.1 Définition. *Base $\mathcal{B}^{\mathbf{B}P}$ associée à $\mathcal{B}^P$*
Soit $\mathcal{B}^P$ une base PBW de la protopérade P. On définit $\mathcal{B}^{\mathbf{B}P} \subset \mathcal{B}^{\mathbf{B}\mathscr{F}(V)}$ le sous-ensemble tel que :

- ▷ $\mathcal{B}^P \subset \mathcal{B}^{\mathbf{B}P}$;
- ▷ un monôme $(m,\varphi : K \to C) \in \bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha)$ est dans $\mathcal{B}_K^{\mathbf{B}P}$ si, pour toute couleur $c\in C$, le sous-monôme $\otimes_v m_v \in \bigotimes_{K_v\in\varphi^{-1}(c)} V(K_v)$ est un élément de $\mathcal{B}^P$.

On pose alors $\mathcal{B}^{\mathbf{B}P} := \coprod_K \mathcal{B}_K^{\mathbf{B}P}$, qui forme une base de $\mathbf{B}P$ en tant que k-module.

6.2.2.2 Définition. *Briques admissibles pour la base $\mathcal{B}^P$*
Soient $P=\mathscr{P}(V,R)$ une protopérade quadratique munie d'une base PBW notée $\mathcal{B}^P$ et $\underline{m}\in\bigotimes_\alpha V(K_\alpha)$ un monôme de $\mathscr{F}(V)$. Un couple de briques successives $K_a<K_b$ du mur sous-jacent à $\underline{m}$ est dit *admissible pour la base $\mathcal{B}^P$* (pour $\underline{m}$) si le sous-monôme $m_a\otimes m_b \in V(K_a)\otimes V(K_b)$ est un élément de $\mathcal{B}^P$. On note $\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Succ}(K)$ des couples de briques admissibles de K pour le monôme $\underline{m}$.

6.2.2.3 Lemme. (cf. [Hof10, Obs. 4.3])
Soit $(\underline{m},\varphi : K\to C)$ un monôme de $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)$. On a l'équivalence suivante :

$$(\underline{m},\varphi)\in\mathcal{B}^{\mathbf{B}P} \iff \coprod_{c\in C} \mathrm{Succ}\big(\varphi^{-1}(c)\big) \subset \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K).$$

Démonstration. Un monôme $(m,\varphi : K\to C)\in\bigotimes_{\alpha\in A}V(K_\alpha)$ est dans $\mathcal{B}_K^{\mathbf{B}P}$ si, pour tout $c\in C$, le sous-monôme $\otimes_v m_v\in\bigotimes_{K_v\in\varphi^{-1}(c)}V(K_v)$ est un élément de $\mathcal{B}^P$, donc, par définition d'une base PWB, si, pour toute couleur $c\in C$ et toute paire de briques successives $(K_v,K_w)\in\mathrm{Succ}\big(\varphi^{-1}(c)\big)$, le monôme $m_v\otimes m_w$ est un élément de $\mathcal{B}^P$. Autrement dit, le monôme $(m,\varphi : K\to C)$ est dans $\mathcal{B}_K^{\mathbf{B}P}$ si et seulement si, pour toute couleur $c\in C$, toute paire de briques successives $(K_v,K_w)\in\mathrm{Succ}\big(\varphi^{-1}(c)\big)$ est admissible. □

§ 2 Filtration de $\mathbf{B}P$

Le but de cette section est de filtrer le complexe $\mathbf{B}P$ en utilisant l'ordre partiel de $\mathscr{F}(V)$ défini à la section 6.2.1. Soit S un ensemble fini totalement ordonné, pour λ un monôme de $\mathscr{F}(V)(S)$, on pose $\mathbf{B}\mathscr{F}(S)_\lambda$, le sous-$k$-module de $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)$:

$$\mathbf{B}\mathscr{F}(S)_\lambda := \big\{(m,\varphi)\in\mathbf{B}\mathscr{F}(V) \mid m \text{ un monôme de } \mathscr{F}(V) \text{ avec } \lambda\leqslant_{\sqcup\!\sqcup} m \text{ et } \varphi \text{ un coloriage de } m\big\},$$

où , $\leqslant_{\sqcup\!\sqcup}$ est l'ordre donné à la définition 6.2.1.5. On a, pour $\lambda\leqslant_{\sqcup\!\sqcup}\mu$, deux monômes de $\mathscr{F}(V)(S)$, l'inclusion $\mathbf{B}\mathscr{F}(S)_\mu\subseteq\mathbf{B}\mathscr{F}(S)_\lambda$. Ainsi, on a

$$\mathbf{B}\mathscr{F}(S) = \bigcup_{\lambda\in\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)(S)}} \mathbf{B}\mathscr{F}(S)_\lambda$$

avec $\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)(S)}$ la base monômiale de $\mathscr{F}(V)(S)$.

6.2.2.4 Lemme. *Soit S un ensemble non-vide totalement ordonné. La filtration*

$$\mathbf{B}\mathscr{F}(S) = \bigcup_{\lambda\in\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)(S)}} \mathbf{B}\mathscr{F}(S)_\lambda$$

de $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)(S)$ *induit une filtration de* $\mathbf{B}P(S)$ *:*

$$\mathbf{B}P(S) = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)(S)}} \mathbf{B}P(S)_\lambda$$

avec

$$\mathbf{B}P(S)_\lambda := \big\{(m,\varphi) \in \mathbf{B}P(S) \mid m \textit{ un monôme de } \mathscr{F}(V) \textit{ avec } \lambda \leqslant_{\sqcup\!\sqcup} m \textit{ et } \varphi \textit{ un coloriage de } m\big\}.$$

6.2.2.5 Lemme. *(i) Si* $\lambda \leqslant \mu \in \mathscr{F}(V)(S)$*, alors* $\mathbf{B}P(S)_\mu \subseteq \mathbf{B}P(S)_\lambda$*.*

(ii) $\big(\mathbf{B}P(S)_\lambda, \partial_{\mathbf{B}}\big)$ *est un sous-complexe du complexe bar* $\mathbf{B}P(S)$*.*

Démonstration. (i) Clair.

(ii) Par la proposition 6.1.4.2, la différentielle $\partial_{\mathbf{B}}$, qui découle du produit protopéradique de $\mathscr{F}(V)$, modifie le coloriage des monômes et la condition (i) d'une base PBW nous assure que son image est dans $\mathbf{B}P(S)_\lambda$.

□

Pour $\underline{m}$ un monôme de $\mathscr{F}(V)$, on définit alors le complexe gradué associé

$$E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}} := \mathbf{B}P(S)_{\underline{m}} / \Big(\sum_{\mu >_{\mathscr{F}(V)} \underline{m}} \mathbf{B}P(S)_\mu \Big).$$

Par la condition (i) des bases PBW, $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ est engendré par les coloriages de $\underline{m}$ avec $(\underline{m},\varphi)$ dans $\mathcal{B}^{\mathbf{B}P}$ et la différentielle ∂^0 est induite par la différentielle de $\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$:

$$\partial^0(\underline{m},\varphi) = \sum_{(c<d)\in \mathrm{Succ}(\varphi)} \pm \partial_c^{d,0}(\underline{m},\varphi).$$

On peut donner une description plus précise de la différentielle du complexe. Pour cela, on doit introduire la notion de couleurs admissibles.

6.2.2.6 Définition. *Couleurs admissibles*
Soit $(\underline{m},\varphi)$ un monôme de $\mathbf{B}\mathscr{F}(V)$. Deux couleurs successives $(c<d) \in \mathrm{Succ}(\varphi)$ sont dites *admissibles* pour $\underline{m}$ si

$$\mathrm{Succ}\big(\varphi^{-1}(\{c,d\})\big) \subset \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K).$$

On note $\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(\varphi)$, l'ensemble des couleurs de φ admissibles pour $\underline{m}$.

6.2.2.7 Lemme. (cf. [Hof10, Lem. 4.5])
Soit $(\lambda,\varphi) \in \mathcal{B}^{\mathbf{B}P}$*. Alors* $(c<d) \in \mathrm{Succ}(\varphi)$ *est admissible si et seulement si* $\partial_c^{d,0}(\lambda,\varphi) \neq 0$*.*

Démonstration. Supposons que $\partial_c^{d,0}(\lambda,\varphi) = 0$. Alors $\otimes_v \lambda_v \in \bigotimes_{K_v \in \varphi^{-1}\{c,d\}} V(K_v)$ n'est pas un élément de $\mathcal{B}^P$. Donc par la (contraposée de la) condition (ii) des bases PBW, il existe $(K_a < K_b) \in \mathrm{Succ}(K)$, avec $K_a \in \varphi^{-1}(c)$ et $K_b \in \varphi^{-1}(d)$ tels que $\lambda_a \otimes \lambda_b \notin \mathcal{B}^P$, autrement dit, la paire $(K_a < K_b) \notin \mathrm{Adm}_\lambda(K)$ n'est pas admissible. Donc le couple de couleurs $(c<d)$ n'est pas admissible.

Supposons à présent que $(c<d)$ soit non-admissible, c'est-à-dire qu'il existe $K_a \in \varphi^{-1}(c)$ et $K_b \in \varphi^{-1}(d)$ tel que le sous-monôme $\lambda_a \otimes \lambda_b \in V(K_a) \otimes V(K_b)$ n 'est pas dans $\mathcal{B}^P$. Par la condition (ii) des bases PBW, $\lambda_a \otimes \lambda_b$ s'écrit $\sum_\gamma c_\gamma \gamma$ dans la base $\mathcal{B}^P$ avec $\gamma > \lambda_a \otimes \lambda_b$, ce qui implique, par définition de $E^0\mathbf{B}P(S)_\lambda$, que $\partial_c^{d,0}(\lambda,\varphi) = 0$. □

Finalement, on a la proposition suivante.

6.2.2.8 Proposition. *La différentielle de $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ est donnée par*

$$\partial^0(\underline{m},\varphi) = \sum_{(c<d)\in \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(\varphi)} \pm\partial_c^{d,0}(\underline{m},\varphi).$$

Jusqu'à présent, l'étude de $\mathbf{B}P$ se comporte de la même manière que dans l'article de Hoffbeck. On a filtré le complexe $\mathbf{B}P$ à l'aide de la base PWB de P, exactement comme dans le cas des opérades. Cependant, comme nous allons le voir dans la section suivante, la présence de genre dans les graphes sous-jacents à nos monômes complique la situation : la filtration décrite précédemment ne nous permettra pas de conclure sur la koszulité de P.

6.2.3 Homologie du complexe filtré

Notons que la différentielle ∂^0 dans le gradué associé, ne modifie pas le monôme $\underline{m}$ mais seulement le coloriage : le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ est donc un complexe combinatoire comme la proposition suivante le montre.

6.2.3.1 Proposition. *Soient S un ensemble fini totalement ordonné et $\underline{m}$ un monôme de $\mathscr{F}(V)(S)$ de mur sous-jacent $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$. On a l'isomorphisme de complexes de chaînes :*

$$\Big(E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}, \partial^0\Big) \cong \Big(C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)\Big/\big(\sum_{(k<l)\in \mathrm{Succ}(K)\setminus \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)\big), \partial^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}\Big).$$

On étudie à présent l'homologie du complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$: on note $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ le mur sous-jacent à $\underline{m}$. Si K n'a pas de couple de briques admissibles pour $\underline{m}$, i.e. si $\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K) = \emptyset$, alors l'homologie du complexe est donnée par $(\underline{m}, \varphi^{top})$.

On souhaite montrer que pour tout monôme $\underline{m}$ tel que $\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K) \neq \emptyset$, l'homologie de $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ est triviale. Par la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \sum_{(k<l)\in \mathrm{Succ}(K)\setminus \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K) \longrightarrow C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K) \longrightarrow E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}} \longrightarrow 0, \tag{6.2.1}$$

cela est équivalent à montrer que le complexe

$$\sum_{(k<l)\in \mathrm{Succ}(K)\setminus \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K) \tag{6.2.2}$$

est acyclique, ce qui, par un argument à la Mayer Vietoris (cf. proposition 6.1.3.18 (ii)), est également équivalent à montrer que, pour tout sous ensemble I de $\mathrm{Succ}(K)$, le complexe

$$\bigcap_{(k<l)\in \mathrm{I}} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K) \tag{6.2.3}$$

est acyclique. Commençons par traiter les "petits cas" :

- ▷ si toutes les paires de briques successives sont admissibles, donc que $|\mathrm{Succ}(K)\setminus \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)| = 0$, alors $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ est isomorphe au complexe de coloriage $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K)$, qui est acyclique si le nombre de briques $|K|$ est strictement supérieur à 1 ;

▷ de même, s'il n'y a qu'une paire (k,l) de briques de K non-admissible, i.e. $|\mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)| = 1$, alors le complexe (6.2.2) est égale à $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)$ qui est isomorphe au complexe de coloriage $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K/_{k\sim l})$ (cf. preuve de la proposition 6.1.3.17), donc est acyclique. Par ce qui précède, $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ est donc acyclique.

6.2.3.2 Lemme. *Soit $\underline{m}$ un monôme de $\mathscr{F}(V)$ de mur sous-jacent K tel que $\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K) \neq \emptyset$ et $|\mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)| \geqslant 1$. Tout complexe de la forme* (6.2.3) *est isomorphe à un complexe de coloriage.*

Démonstration. Soit $\underline{m}$ un monôme de $\mathscr{F}(V)$ de mur sous-jacent K. On considère le coloriage $\varphi_I : K \twoheadrightarrow C$ le plus fin (i.e. ayant le plus de couleurs) pour lequel il existe une couleur $c \in C$ telle que, pour tout couple (k,l) de I un sous-ensemble non vide $\mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)$, $\varphi_I(k) = c = \varphi_I(l)$. Par le lemme 6.1.3.10, $K/_{\sim_{\varphi_I}}$ est un mur connexe et on a l'isomorphisme de complexes

$$\bigcap_{(k<l)\in \mathrm{I}} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K) \cong C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K/_{\sim_{\varphi_I}}).$$

□

6.2.3.3 Remarques. (i) Pour I un sous-ensemble non-vide de $\mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)$, on note φ_I le coloriage le plus fin pour lequel il existe une couleur $c \in C$ telle que, pour tout couple (k,l) de I un sous-ensemble non vide $\mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)$, $\varphi_I(k) = c = \varphi_I(l)$. Si le mur $K/_{\sim_{\varphi_I}}$ possède au moins deux briques, alors le complexe

$$\bigcap_{(k<l)\in \mathrm{I}} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)$$

est acyclique.

(ii) De plus, si on note ψ le coloriage le plus fin pour lequel il existe une couleur $c \in C$ telle que, pour tout couple (k,l) de $\mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)$, alors $\psi(k) = c = \psi(l)$ et si le mur $K/_{\sim_\psi}$ possède au moins deux briques, alors le complexe

$$\bigcap_{(k<l)\in \mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)$$

est acyclique et, pour tout sous-ensemble non-vide I de $\mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)$, le mur $K/_{\sim_{\varphi_I}}$ possède au moins deux briques. Ainsi, si le mur $K/_{\sim_\psi}$ possède au moins deux briques, alors pour tout sous-ensemble non-vide I de $\mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)$, le complexe

$$\bigcap_{(k<l)\in \mathrm{I}} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)$$

est acyclique : ainsi, par la propriété de Mayer-Vietoris 6.1.3.18, le complexe

$$\sum_{(k<l)\in \mathrm{Succ}(K)\backslash\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)} C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol},k<l}(K)$$

est acyclique, et par la suite exacte (6.2.1), le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ est acyclique.

6.2.3.4 Proposition. *Soit un monôme $\underline{m}$ de $\mathscr{F}(V)$, avec*

$$|\mathrm{Succ}(K)\backslash \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)| \geqslant 2 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K) \neq \emptyset$$

(i) Supposons qu'il existe une brique k de K avec $\mathfrak{h}(k) = 1$ telle que, pour tout $l \in \{l \in K \mid (k,l) \in \mathrm{Succ}(K)\}$, (k,l) est admissible. Alors le complexe (6.2.2) est acyclique.

(ii) Supposons qu'il existe une brique k de K de hauteur maximale telle que, pour tout $l \in \{l \in K \mid (l,k) \in \mathrm{Succ}(K)\}$, (l,k) est admissible. Alors le complexe (6.2.2) est acyclique.

Démonstration. On pose $\varphi : K \twoheadrightarrow C$ le coloriage le plus fin tel qu'il existe une couleur c dans C telle que, pour tout couple (k,l) de $\mathrm{Succ}(K)\backslash \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)$, $\varphi(k) = c = \varphi(l)$.

(i) Par hypothèse, le mur $K/_{\sim_\varphi}$ possède au moins deux briques : k et au moins une autre par définition de $\varphi : K \to C$; donc il existe une couleur $c' \in C$ différente de c telle que $\varphi^{-1}(c') = \{k\}$, d'où le résultat, par la remarque 6.2.3.3 (ii).

(ii) On utilise un argument similaire à (i).

□

On se place à présent dans le cas où $\mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K) \neq \emptyset$ et $|\mathrm{Succ}(K)\backslash \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)| \geqslant 2$. Pour étudier ce cas, nous avons besoin de regarder la "topologie du monôme" $\underline{m}$: on lui associe son graphe sous-jacent.

6.2.3.5 Définition. *Graphe sous-jacent à un monôme*
À un monôme $\underline{m}$ de $\mathscr{F}(V)$, on associe le graphe marqué dit *graphe sous-jacent* défini comme suit : les sommets du graphe correspondent aux briques du mur sous-jacent à $\underline{m}$; deux sommets sont liés par une arête si les briques sont successives et si les deux briques successives ne sont pas admissibles pour $\underline{m}$, on marque alors l'arête correspondante. On note alors $\Gamma_{\underline{m}}$ le graphe sous-jacent à $\underline{m}$ et $\Gamma^{\times}_{\underline{m}}$ le sous-graphe de $\Gamma_{\underline{m}}$ composé des arêtes marquées.

6.2.3.6 Remarque. Le graphe associé à un monôme $\underline{m}$ de $\mathscr{F}(V)$ ne dépend que du mur sous-jacent au monôme, tandis que le marquage des arêtes dépend des labels des briques par des éléments de V et de la base PBW $\mathcal{B}^P$ de P.

6.2.3.7 Remarque. Notons que $\Gamma^{\times}_{\underline{m}}$ n'est pas forcément connexe.

6.2.3.8 Proposition. *Soit un monôme $\underline{m}$ de $\mathscr{F}(V)$ de graphe sous-jacent $\Gamma_{\underline{m}}$, avec*

$$|\mathrm{Succ}(K)\backslash \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K)| \geqslant 2 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Adm}_{\underline{m}}(K) \neq \emptyset.$$

Supposons que $\Gamma^{\times}_{\underline{m}}$ ne soit pas connexe et qu'il existe $\Gamma^{\times}_1$ et $\Gamma^{\times}_2$, deux sous-graphes de $\Gamma^{\times}_{\underline{m}}$ tels que $\Gamma^{\times}_{\underline{m}} \cong \Gamma^{\times}_1 \coprod \Gamma^{\times}_2$, et un coloriage $\varphi : K \twoheadrightarrow C$ à au moins deux couleurs $c_1 \neq c_2$ tels que $\Gamma^{\times}_1 \subset \varphi^{-1}(c_1)$ et $\Gamma^{\times}_2 \subset \varphi^{-1}(c_2)$. Alors le complexe (6.2.2) est acyclique.

Démonstration. Soit un monôme m de $\mathscr{F}(V)$ de mur sous-jacent $K \in \mathcal{W}^{conn}(S)$ et de graphe sous-jacent Γ_m, avec par hypothèse

$$|\mathrm{Succ}(K)\backslash \mathrm{Adm}_m(K)| \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Adm}_m(K) \neq \emptyset.$$

Par hypothèse, on a un coloriage $\varphi : K \twoheadrightarrow C$ à au moins deux couleurs $c_1 \neq c_2$ tel que $\Gamma^{\times}_1 \subset \varphi^{-1}(c_1)$ et $\Gamma^{\times}_2 \subset \varphi^{-1}(c_2)$. On considère les sous-monômes u et v de m donnés respectivement par les couleurs

c_1 et c_2 du coloriage φ, c'est-à-dire

$$u := \otimes_\alpha m_\alpha \in \bigotimes_{K_\alpha \in \varphi^{-1}(c_1)} V(K_\alpha) \quad \text{et} \quad v := \otimes_\beta m_\beta \in \bigotimes_{K_\beta \in \varphi^{-1}(c_2)} V(K_\beta).$$

On leur associe leurs graphes marqués sous-jacent Γ_u et Γ_v qui sont des sous-graphes de Γ_m. On raisonne par (double) récurrence sur les nombres d'arêtes non-marquées de Γ_u et Γ_v. On note, par abus, $|\mathrm{Adm}_u|$ (resp. $|\mathrm{Adm}_u|$) le nombre d'arêtes non-marquées de Γ_u (resp. Γ_v). On a notamment $\Gamma_1^\times \subset \Gamma_u$ et $\Gamma_2^\times \subset \Gamma_v$.

- ▷ Supposons que $|\mathrm{Adm}_u| = 0$ et $|\mathrm{Adm}_v| = 0$. Alors $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est isomorphe au complexe de coloriage $C_\bullet^{\mathcal{C}\mathrm{ol}}(K/_{\sim_\varphi})$ avec $K/_{\sim_\varphi}$, le mur où l'on a identifié les briques de couleurs c_1 et les briques de couleurs c_2. Par hypothèse, $K/_{\sim_\varphi}$ a au moins deux briques, donc $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est acyclique.

- ▷ Supposons par récurrence que, pour tout monôme m tel que $|\mathrm{Adm}_u| = 0$ et $|\mathrm{Adm}_v| \leqslant n$ avec $n \in [\![1, N]\!]$, le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est acyclique. Soit un monôme m qui vérifie les conditions de la proposition, tel que $|\mathrm{Adm}_u| = 0$ et $|\mathrm{Adm}_v| = N+1$. On choisit alors deux briques successives $(k, l) \in \mathrm{Adm}_v$. On considère le sous-complexe C de $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ où les briques k et l sont de la même couleur. Par hypothèse de récurrence, ce sous-complexe est acyclique. On considère le complexe quotient $E^0\mathbf{B}P(S)_m/C$ qui est isomorphe au complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_{m'}$ avec m' de graphe marqué sous-jacent $\Gamma_{m'}$ identique à Γ_m sauf que l'arête reliant les briques k et l est marquée. Donc par hypothèse de récurrence, le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_{m'}$ est acyclique. Ainsi, par la suite exacte courte
$$0 \longrightarrow C \longrightarrow E^0\mathbf{B}P(S)_m \longrightarrow E^0\mathbf{B}P(S)_m/C \longrightarrow 0,$$
le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est acyclique. En conclusion, pour tout monôme m vérifiant les hypothèses de la proposition, avec $|\mathrm{Adm}_u| = 0$, le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est acyclique.

- ▷ On réutilise le même type d'argument pour faire la récurrence sur le nombre d'arêtes non-marquées de Γ_u et ainsi conclure.

□

De la même manière, on démontre la proposition suivante.

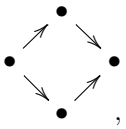
6.2.3.9 Proposition. *Soit un monôme m de $\mathscr{F}(V)$ de graphe sous-jacent Γ_m, avec*

$$|\mathrm{Succ}(K) \backslash \mathrm{Adm}_m(K)| \geqslant 2 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Adm}_m(K) \neq \emptyset.$$

Supposons que $\Gamma_m \backslash \Gamma_m^\times$, le graphe Γ_m duquel on a retiré les arêtes marquées, ne soit pas connexe et qu'il existe Γ_1 et Γ_2, deux sous-graphes de $\Gamma_m \backslash \Gamma_m^\times$ possédant chacun au moins une arête, tels que $\Gamma_m \backslash \Gamma_m^\times \cong \Gamma_1 \coprod \Gamma_2$, et un coloriage $\varphi : K \twoheadrightarrow C$ à au moins deux couleurs $c_1 \neq c_2$ tels que $\Gamma_1 \subset \varphi^{-1}(c_1)$ et $\Gamma_2 \subset \varphi^{-1}(c_2)$. Alors le complexe (6.2.2) est acyclique.

Démonstration. On raisonne par double récurrence sur le nombre d'arêtes de Γ_1 et Γ_2 que l'on note respectivement N_1 et N_2.

▷ Si $N_1 = 1$ et $N_2 = 1$ alors le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est de la forme



donc est acyclique.

▷ Supposons par récurrence que, si $N_1 = 1$ et $N_2 \in [\![1, n]\!]$, alors le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est acyclique. On considère un monôme m qui vérifie les hypothèses de la proposition, avec $N_1 = 1$ et $N_2 = n+1$. On choisit une arête de Γ_2 qui correspond à la paire de briques (k, l). On considère le sous-complexe $E^{0,(k,l)}\mathbf{B}P(S)_m$ de $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ qui est le complexe où les briques k et l sont de la même couleur. Par hypothèse de récurrence, le complexe $E^{0,(k,l)}\mathbf{B}P(S)_m$ est acyclique. On considère le complexe quotient $E^0\mathbf{B}P(S)_m/E^{0,(k,l)}\mathbf{B}P(S)_m$ qui est isomorphe au complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_{m'}$ avec m' de graphe marqué sous-jacent $\Gamma_{m'}$ identique à Γ_m sauf que l'arête reliant les briques k et l est marquée. Donc par hypothèse de récurrence, le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_{m'}$ est acyclique. Ainsi, par la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow E^0\mathbf{B}P(S)_m \longrightarrow E^0\mathbf{B}P(S)_m/C \longrightarrow 0,$$

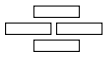
le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est acyclique. Donc, en conclusion, pour tout monôme m vérifiant les hypothèses de la proposition, tel que $N_1 = 1$, alors le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est acyclique.

▷ On recommence un raisonnement par récurrence sur N_1, pour finalement conclure la démonstration.

□

On considère à présent $\underline{m}$, un monôme de $\mathscr{F}(V)$, de mur sous-jacent K, de graphe sous-jacent $\Gamma_{\underline{m}}$ ayant au moins une arête non marquée, tel que $\Gamma^{\times}_{\underline{m}}$ soit connexe et que le seul coloriage qui colore les briques de $\Gamma^{\times}_{\underline{m}}$ soit le bot-coloriage (cf. exemple 6.1.3.4).

6.2.3.10 Exemple. Par exemple, on peut considérer un monôme à 4 briques

 de graphe sous-jacent .

Le complexe des coloriages associé à $\underline{m}$ est donné par le diagramme (6.1a), et le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ est donné par le diagramme (6.1b).

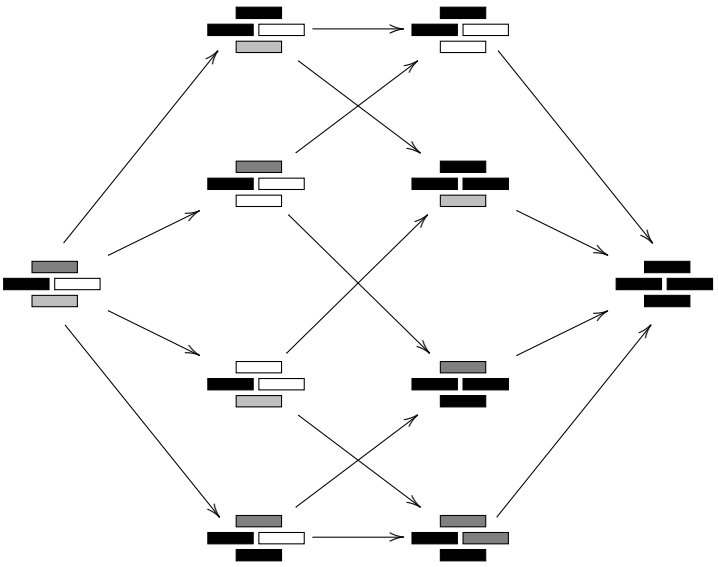
On voit clairement sur cet exemple que $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ n'est pas acyclique.

C'est là, la différence fondamentale avec le cadre opéradique : l'apparition de genre dans la combinatoire fait donc apparaître des classes d'homologie non triviales à la page E^1 de la suite spectrale. Plusieurs possibilités s'offrent à nous pour parer à ce problème :

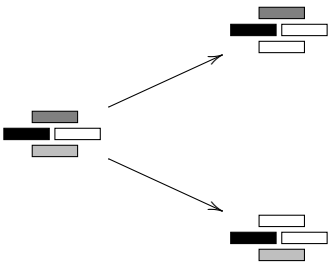
(i) une solution pourrait être de rigidifier la définition de base PBW en ajoutant une condition pour que ces classes s'annulent à la page E^1 de la suite spectrale ;

(ii) une autre idée pourrait être d'étudier la page E^2 de la suite spectrale, pour analyser si ces classes de la page E^1 ne sont pas tuées par l'image de la différentielle ∂^2.

Dans la section suivante, on étudie le cas particulier de la protopérade associée à la propérade $\mathcal{DC}om$ (cf. section 4.1.4 §2).



(a) Complexe de coloriages



(b) Page $E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}$ de la suite spectrale

FIGURE 6.1 – Exemple

6.2.4 Le cas $\mathcal{DC}om^{proto}$

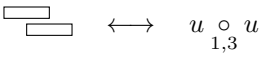
Dans cette section, on étudie le cas de la protopérade $\mathcal{DC}om^{proto}$, l'antécédent de la propérade $\mathcal{DC}om$ par le foncteur d'induction.

6.2.4.1 Définition. *La protopérade $\mathcal{DC}om^{proto}$*
On définit la protopérade $\mathcal{DC}om^{proto}$ comme la protopérade quadratique $\mathcal{F}(V)/\langle R\rangle$ avec V concentré en arité 2

$$V = V(\llbracket 1,2\rrbracket) = sgn(\mathfrak{S}_2) = k \cdot \boxed{}$$

et avec $R \in \big(\mathscr{F}(V)\big)^{(2)_V}$:

6.2.4.2 Remarque. Explicitons les relations de $\mathcal{DC}om^{proto}$ en terme d'éléments : on note u le générateur de V et on considère les injections monotones $\delta_i : \llbracket 1,2\rrbracket \hookrightarrow \llbracket 1,3\rrbracket$ avec $i \in \{1,2,3\}$ avec $\mathrm{im}(\delta_i) = \llbracket 1,3\rrbracket\backslash\{i\}$. Chaque couple (δ_i, δ_j) avec $i \neq j$ définit un diagramme de composition shuffle $\varphi_{i,j}$ et on note $\underset{i,j}{\circ}$ la composition correspondante. Par exemple, on a la correspondance



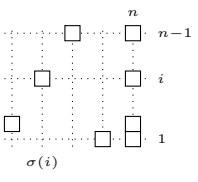
Ainsi, R est induit par

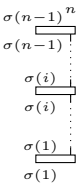
$$u \underset{2,1}{\circ} u = u \underset{1,3}{\circ} u = u \underset{3,2}{\circ} u \qquad \text{et} \qquad u \underset{1,2}{\circ} u = u \underset{3,1}{\circ} u = u \underset{2,3}{\circ} u.$$

6.2.4.3 Proposition. *Le foncteur* Ind *envoie la protopérade $\mathcal{DC}om^{proto}$ sur $\mathcal{DC}om$, i.e.*

$$\mathrm{Ind}\big(\mathcal{DC}om^{proto}\big) = \mathcal{DC}om.$$

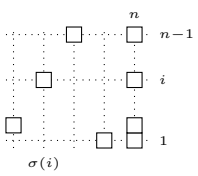
On cherche à exhiber une base PBW de cette protopérade. On a vu à la proposition 4.1.4.7 que les escaliers montants, qui sont stables sous l'action diagonale du groupe cyclique, engendrent la propérade $\mathcal{DC}om$. Ainsi, par la proposition 6.2.4.3 et le lemme 3.3.1.4, le lemme 4.1.4.8 nous fournit une base $\mathcal{B}^{\mathcal{DC}om^{proto}}$ du complexe de chaînes sous-jacent à la protopérade $\mathcal{DC}om^{proto}$. Cette base monomiale est en correspondance avec $\mathfrak{S}_{n-1}$: à $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$, on associe un monôme de $\mathcal{DC}om^{proto}(\llbracket 1,n\rrbracket)$ de poids $n-1$ et du mur sous-jacent K^σ de hauteur $n-1$:



qui correspond, au niveau des propérades, à 

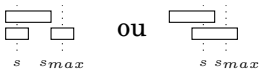
.

Ainsi, on a

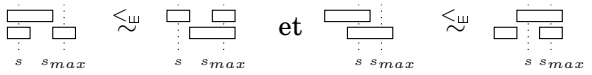
$$\mathcal{B}^{\mathcal{DC}om^{proto}}(\llbracket 1,n\rrbracket) = \left\{ \square(\sigma) := \right.$$  $$\left. \;\middle|\; \sigma \in \mathfrak{S}_{n-1} \right\}.$$

6.2.4.4 Lemme. *Soient M, N et S trois ensembles totalement ordonnés, $\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$ un produit shuffle, $a \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(M)}$ et $b \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(N)}$. On note s_{max} l'élément maximal de S; si $\big|\mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j)\big| = 1$ et $\mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j) \in S\backslash\{s_{max}\}$, alors $a \underset{\varphi}{\circ} b = \gamma$ avec $\gamma \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(S)}$ et $\gamma >_{\sqcup\!\sqcup} a \underset{\varphi}{\circ} b$.*

Démonstration. On note $s := \mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j)$. On raisonne par récurrence sur le poids de b. Pour commencer, supposons que b est de poids 1. Comme $a \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(M)}$, il existe une unique brique K^a_α de K^a, le mur sous-jacent à a, tel que $s \in K^a_\alpha$. Alors le sous-monôme $a_\alpha \otimes b$ de $a \underset{\varphi}{\circ} b$ possède un mur sous-jacent de la forme



et par définition de $\mathcal{DC}om$ et par la définition de $<_{\sqcup\!\sqcup}$ (on pourra se référer à l'exemple 6.2.1.6), on a



d'où le résultat pour b de poids 1. Ensuite, on conclut par récurrence en appliquant le même type de disjonction de cas que dans la preuve du lemme 6.2.4.6 : on distingue si la brique $\{j^{-1}(s), n_{max}\}$ est de hauteur maximale ou non dans K^b. Si elle ne l'est pas, on applique l'hypothèse de récurrence ; sinon, on utilise les relations de $\mathcal{DC}om$ pour "descendre" la brique. □

6.2.4.5 Lemme. *Soient M, N et S trois ensembles finis totalement ordonnés, $\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$ un produit shuffle, $a \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(M)}$ et $b \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(N)}$. On note s_{max} l'élément maximal de S. Si $\big|\mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j)\big| = 1$ et $\mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j) = s_{max}$, alors $a \underset{\varphi}{\circ} b \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(S)}$.*

Démonstration. Découle directement de la définition de $\mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(S)}$. □

Le lemme suivant est l'avatar protopéradique du lemme 4.1.4.6.

6.2.4.6 Lemme. *Soient M, N et S trois ensembles totalement ordonnés, $\varphi := \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big)$ un produit shuffle, $a \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(M)}$ et $b \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(N)}$. Si $\big|\mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j)\big| > 1$, alors $a \underset{\varphi}{\circ} b = 0$.*

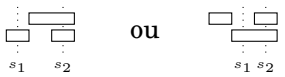
Démonstration. On raisonne par récurrence sur la somme des poids de $a \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(M)}$ et $b \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(N)}$. Si a et b sont chacun de poids 1, alors

$$a \underset{\varphi}{\circ} b = \boxed{}\!\!\boxed{} = 0$$

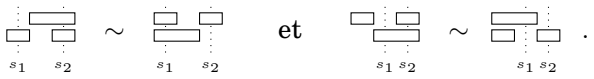
par définition de $\mathcal{DC}om^{proto}$. Supposons que, pour tout a, b tels que la somme de leurs poids soit inférieur ou égale à $n-1$, alors pour tout produit shuffle φ tel que $\big|\mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j)\big| > 1$, $a \underset{\varphi}{\circ} b = 0$. On considère à présent a, b tels que la somme de leurs poids soit égale à n. On note $K^a \in \mathcal{W}^{conn}(M)$ (resp. $K^b \in \mathcal{W}^{conn}(N)$, $K^\varphi \in \mathcal{W}^{conn}(S)$) le mur sous-jacent à a (resp. b, $a \underset{\varphi}{\circ} b$). Soient $s_1 \neq s_2 \in \mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j)$. On note $K^a_1 \in K^a$ (resp. $K^a_2 \in K^a$, $K^b_1 \in K^b$ et $K^b_2 \in K^b$) la brique qui contient $i^{-1}(s_1)$ (resp. $i^{-1}(s_2)$, $j^{-1}(s_1)$ et $j^{-1}(s_2)$). Remarquons que l'on peut avoir $K^a_1 = K^a_2$ ou $K^b_1 = K^b_2$. On fait alors une disjonction de cas.

- ▷ Si les briques K^a_1 et K^a_2 ne sont pas de hauteur minimale dans K^a ou si les briques K^b_1 et K^b_2 ne sont pas de hauteur maximale dans K^b, *i.e.* si $\{\mathfrak{h}(K^a_1), \mathfrak{h}(K^a_2)\} \neq \{1, 2\}$ ou $\mathfrak{h}(K^a_1 = K^a_2) \neq 1$ ou $\{\mathfrak{h}(K^b_1), \mathfrak{h}(K^b_2)\} \neq \{|N|-1, |N|\}$ ou $\mathfrak{h}(K^b_1 = K^b_2) \neq |N|$, alors, on a $a \underset{\varphi}{\circ} b = a \underset{\varphi'}{\circ} b' \underset{\psi}{\circ} c$ ou $a \underset{\varphi}{\circ} b = c \underset{\psi}{\circ} a' \underset{\varphi'}{\circ} b$ avec par récurrence $a' \underset{\varphi'}{\circ} b = 0$ ou $a \underset{\varphi'}{\circ} b' = 0$, d'où le résultat.

▷ Si $K_1^a = K_2^a$ avec $\mathfrak{h}(K_1^a) = 1$ et $\{\mathfrak{h}(K_1^b), \mathfrak{h}(K_2^b)\} = \{|N|-1, |N|\}$ ou $\mathfrak{h}(K_1^b = K_2^b) = |N|$, alors comme $a \in \mathcal{B}^{\mathcal{DC}om(M)}$, il existe une unique brique $K_\alpha^a \in K^a$ telle que $(K_1^a, K_\alpha^a) \in \mathrm{Succ}(K^a)$. Le sous-monôme $a_1 \otimes a_\alpha$ de a est donc de la forme :

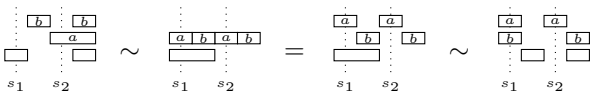


qui, par définition de $\mathcal{DC}om^{proto}$, sont chacun équivalents à



Alors, on a $a \underset{\varphi}{\circ} b = c \underset{\psi}{\circ} a' \underset{\varphi'}{\circ} b$ avec par récurrence $a' \underset{\varphi'}{\circ} b = 0$.

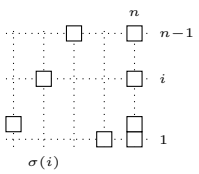
▷ Si $K_1^a \neq K_2^a$ avec $\{\mathfrak{h}(K_1^a), \mathfrak{h}(K_2^a)\} = \{1, 2\}$ et $\{\mathfrak{h}(K_1^b), \mathfrak{h}(K_2^b)\} = \{|N|-1, |N|\}$ ou $\mathfrak{h}(K_1^b = K_2^b) = |N|$, alors on fait le même type de raisonnement avec le sous-monôme de poids 3 de mur sous-jacent K_1^a, K_2^a et K_3^a avec $\mathfrak{h}(K_3^a) = 3$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $K_1^a < K_2^a$. En utilisant l'invariance sous l'action du groupe cyclique des (sous)-monômes de $\mathcal{DC}om^{proto}$, on se ramène à un sous-monôme équivalent, de mur sous-jacent $\widetilde{K_1^a} < \widetilde{K_2^a} < \widetilde{K_3^a}$ tel que $\{s_1, s_2\} \subset \widetilde{K^a}_2 \cup \widetilde{K^a}_3$. Puis on applique l'hypothèse de récurrence. Par exemple, en utilisant les relations de $\mathcal{DC}om^{proto}$ sur les deux briques les plus basses :



□

6.2.4.7 Remarque. Ce lemme implique que la base $\mathcal{B}^{\mathcal{DC}om^{proto}}$ de $\mathcal{DC}om^{proto}$ en tant que k-module, donnée par

$$\mathcal{B}^{\mathcal{DC}om^{proto}}(\llbracket 1,n \rrbracket) = \left\{ \square(\sigma) := \quad \middle| \quad \sigma \in \mathfrak{S}_{n-1} \right\},$$



n'est pas une base PBW de la protopérade $\mathcal{DC}om^{proto}$. En effet, il existe éléments de $\mathcal{B}^{\mathscr{F}(V)}$, comme par exemple,

tel que chaque couple de briques successives soit admissible, mais qui n'appartient pas à $\mathcal{B}^{\mathcal{DC}om^{proto}}$, car ce terme est nul dans $\mathcal{DC}om^{proto}$ par le lemme 6.2.4.6.

Ainsi, on a vu, à l'exemple 6.2.3.10 et à la remarque 6.2.4.7, que le genre des diagrammes posent problème pour pouvoir aussi bien pour la koszulité d'une protopérade munie d'une base PBW que pour l'existence d'une base PBW pour la protopérade $\mathcal{DC}om^{proto}$. Dans la section suivante, nous allons donc nous restreindre à la partie de genre 0 des protopérades. Nous nous appuierons notamment sur la définition de diopérade par Gan dans [Gan03] et de sa définition de dualité de Koszul dans le cadre diopéradique.

CHAPITRE 7

UNE APPROCHE DIOPÉRADIQUE

On a donc vu que le genre des graphes sous-jacent pose problème pour avoir un théorème de base PBW, mais également pour définir une base PBW de la protopérade $\mathcal{DC}om^{proto}$. Pour pallier ce problème, on s'inspire alors des constructions diopéradiques de Gan dans [Gan03], qui définit une dualité de Koszul pour les diopérades.

On reprend la stratégie adoptée précédemment en se limitant à la partie de genre 0. On va donc définir un nouveau produit monoïdal (cf. section 7.2) sur la catégorie des $\mathfrak{S}$-modules réduits qui sera compatible, à travers le foncteur d'induction, au produit monoïdal $\boxtimes_c^{\varnothing}$ (cf. définition 7.1.0.2) de la catégorie des $\mathfrak{S}$-bimodules réduits dont les monoïdes sont les diopérades. Cela implique notamment de définir de nouveaux foncteurs encodant la combinatoire (cf. sous-section 7.1).

7.1 Combinatoire de genre 0

On commence par définir de nouveaux foncteurs $\mathcal{X}^{\varnothing,conn}$ et $\mathbb{X}^{\varnothing,conn}$, les versions de genre 0 des foncteurs $\mathcal{X}^{conn}$ et $\mathbb{X}^{conn}$

7.1.0.1 Définition. *Foncteur $\mathcal{X}^{\varnothing,conn}$*
On définit les versions "de genre 0" des foncteurs $\mathcal{X}^{conn}$ et $\mathbb{X}^{conn}$.

(i) On pose le sous foncteur $\mathcal{X}^{\varnothing,conn} \subset \mathcal{X}^{conn}$ défini par

$$\mathcal{X}^{\varnothing,conn}(S) := \big\{(I,J) \in \mathcal{X}^{conn}(S) \mid \forall I_\alpha \in I, \forall J_\beta \in J, |I_\alpha \cap J_\beta| = 0 \text{ ou } 1\big\}.$$

(ii) Pour $r,s,n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathbb{X}_{r,s}^{\varnothing,n,\mathrm{conn}}$, le sous foncteur de $\mathbb{X}_{r,s}^{n,\mathrm{conn}}$, donné, pour S et E deux ensembles finis non-vides, par

$$\mathbb{X}_{r,s}^{\varnothing,n,\mathrm{conn}}(S,E) := \left\{ \big(\{I,K'\},\{K'',J\}\big)\in \mathbb{Y}_r(S,[\![1,n]\!])\times \mathbb{Y}_s([\![1,n]\!],E) \;\middle|\; (K',K'')\in \mathcal{X}^{\varnothing,\mathrm{conn}}([\![1,n]\!]) \right\} \Big/ \mathfrak{S}_n .$$

On pose également

$$\mathbb{X}^{\varnothing,\mathrm{conn}} := \coprod_{r,s,n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{X}_{r,s}^{\varnothing,n,\mathrm{conn}},$$

qui est un sous foncteur de $\mathbb{X}^{\mathrm{conn}}$.

En reprenant l'approche utilisée au chapitre 3 pour définir des structures monoïdales associées aux foncteurs $\mathcal{X}^{conn}$ et $\mathbb{X}^{conn}$, on définit des produits monoïdaux associés à leur version de genre 0, $\mathcal{X}^{conn}$ et $\mathbb{X}^{conn}$.

7.1.0.2 Définition/Proposition. (i) Le produit de composition connexe de genre 0 des $\mathfrak{S}$-modules est le bifoncteur

$$(-_1) \boxtimes_c^{\varnothing} (-_2) : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$$

défini, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits P et Q et tout ensemble fini S non-vide, par :

$$P \boxtimes_c^{\varnothing} Q(S) \overset{def}{:=} \bigoplus_{(I,J)\in\mathcal{X}^{\varnothing,\mathrm{conn}}(S)} \bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta} Q(J_\beta).$$

C'est un sous-bi-foncteur du produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-modules $- \boxtimes_c -$, qui munit la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}$ d'une structure monoïdale, ayant pour unité I. En particulier, le produit $\boxtimes_c^{\varnothing}$ est associatif.

(ii) Le produit de composition connexe de genre 0 des $\mathfrak{S}$-bimodules est le bifoncteur

$$(-_1) \boxtimes_c^{\varnothing} (-_2) : \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd} \times \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd} \longrightarrow \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}$$

défini, pour tous $\mathfrak{S}$-bimodules réduits P et Q et tout couple d'ensembles finis S, E non-vides, par

$$\big(P \boxtimes_c^{\varnothing} Q\big)(S,E) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\bigoplus_{(\{I,K'\},\{K'',J\})\in\mathbb{X}^{n,\varnothing,\mathrm{conn}}(S,E)} \bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha, K'_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta} Q(K''_\beta, J_\beta) \Big) \Big/ {}_{\mathfrak{S}_n}$$

où le quotient par $\mathfrak{S}_n$ identifie, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, les termes

$$\bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha, K'_\alpha) \otimes \bigotimes_{\beta} Q(K''_\beta, J_\beta) \sim \Big(\bigotimes_{\alpha} P(I_\alpha, K'_\alpha)\Big) \cdot \sigma^{-1} \otimes \ \sigma \cdot \Big(\bigotimes_{\beta} Q(K''_\beta, J_\beta)\Big).$$

C'est un sous-bi-foncteur du produit de composition connexe des $\mathfrak{S}$-bimodules $- \boxtimes_c -$, qui munit la catégorie $\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}$ d'une structure monoïdale, ayant pour unité I. En particulier, le produit $\boxtimes_c^{\varnothing}$ est associatif.

7.1.0.3 Remarque. On a bien un produit "de genre 0". En effet, pour P, Q et R trois $\mathfrak{S}$-modules, et $p \in P$, $q \in Q$ et $r \in R$, une composition du type

n'est pas un élément de $P \boxtimes_c^{\varnothing} Q \boxtimes_c^{\varnothing} R$. En effet, la composition

est un élément de $P \boxtimes_c^{\varnothing} Q$ mais l'élément

n'est pas dans $(P \boxtimes_c^{\varnothing} Q) \boxtimes_c^{\varnothing} R$.

7.1.0.4 Définition. *Foncteur $\mathcal{W}^{\varnothing}$*
On définit le foncteur

$$\mathcal{W}_n^{\varnothing,conn,or} : \mathtt{Fin}^{op} \longrightarrow \mathtt{Fin}^{op}$$

comme, pour tout ensemble S non-vide, comme la fibre de $\mathcal{K}_S : \mathcal{W}^{\varnothing,or}(S) \to \mathcal{Y}^{ord}(S)$ au dessus de $\{S\}$, c'est-à-dire comme le sous-foncteur de $\mathcal{W}_n^{or}$ donné, par

$$\mathcal{W}_n^{\varnothing,conn,or}(S) := \left\{ {}_{(K=(K_1,\dots,K_n),\leqslant)\in\mathcal{W}_n^{or}(S)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \alpha,\beta \in [\![1,n]\!], \exists! K_\alpha =: K_{i_0},\dots,K_{i_{m-1}}, K_m := K_\beta \\ \text{t.q. } \forall j \in [\![0,m-1]\!],\ \ K_{i_j} \in K,\ |K_{i_j} \cap K_{i_{j+1}}| = 1 \\ \text{et}\ \ (K_{i_j}, K_{i_{j+1}}) \text{ ou } (K_{i_{j+1}}, K_{i_j}) \in \mathrm{Succ}(K) \end{array} \right\}.$$

La surjection naturelle $\mathcal{W}^{\varnothing,or} \twoheadrightarrow \mathcal{W}^{\varnothing}$ donnée par le passage au quotient par l'action des groupes symétriques nous permet de définir le sous-foncteur

$$\mathcal{W}^{\varnothing,conn} \hookrightarrow \mathcal{W}^{\varnothing,conn}.$$

7.1.0.5 Remarque. $\mathcal{X}^{\varnothing,conn}$ est un sous-foncteur de $\mathcal{W}^{\varnothing,conn}$.

7.2 Monoïdes

7.2.1 Compositions partielles et monoïde libre

De manière directe, à la manière de la description d'une protopérade en terme de $\mathfrak{S}$-module muni d'une famille de compositions partielles, on peut décrire les monoïdes de la catégorie des $\mathfrak{S}$-modules réduits pour le produit $\boxtimes_c^{\varnothing}$ en termes de compositions partielles.

7.2.1.1 Définition. *Compositions partielles de genre* 0 *pour les* $\mathfrak{S}$*-modules*
Soit P un $\mathfrak{S}$-module réduit, muni d'un morphisme de $\mathfrak{S}$-modules $\epsilon : I \hookrightarrow P$ avec $I(S) = k$ si $|S| = 1$ et 0 sinon. Soient M, N et S trois ensembles finis non-vides, munis des deux diagrammes d'injections :

$$\varphi := \ \big(i : M \hookrightarrow S \hookleftarrow N : j\big) \ \text{ et } \ \varphi^{op} := \ \big(j : N \hookrightarrow S \hookleftarrow M : i\big)$$

et tels que

$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathrm{im}(i) \cup \mathrm{im}(j) & = S \\ |\mathrm{im}(i) \cap \mathrm{im}(j)| & = 1 \end{array} \right. . \tag{7.2.1}$$

On dit que P est muni d'un *système de compositions partielles de genre* 0 si, pour tout diagramme tel que φ, on a un morphisme de complexes de chaînes

$$\underset{\varphi}{\circ} : P(M) \otimes P(N) \longrightarrow P(S)\ ;$$

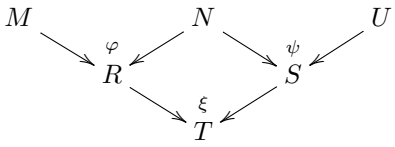
compatible avec l'action de $\mathrm{Aut}(S)$, i.e. pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(S)$ avec

$$\sigma \cdot \varphi := \Big(i' : M' := \sigma\big(i(M)\big) \hookrightarrow S \hookleftarrow \sigma\big(j(N)\big) =: N' : j'\Big)$$

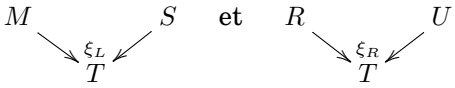
on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P(M) \otimes P(N) & \xrightarrow[\cong]{P(\sigma|_M)\otimes P(\sigma|_N)} & P(M') \otimes P(N') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \underset{\varphi}{\circ}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \underset{\sigma\cdot\varphi}{\circ}} \\ P(S) & \xrightarrow[P(\sigma)]{} & P(S)\ ; \end{array} \tag{7.2.2}$$

et qui vérifie les propriétés de compatibilités suivantes. Pour tout diagramme commutatif d'injections



avec



tels que les quatres couples de flèches φ, ψ, ξ_L et ξ_R vérifient la propriété 4.2.2, les compositions partielles vérifient les trois axiomes d'associativités suivants :

Axiome d'associativité $\left(\begin{smallmatrix}\square\square\\ \square\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{array}{ccc} P(M)\otimes P(N)\otimes P(U) & \xrightarrow{1\otimes \underset{\psi}{\circ}} & P(M)\otimes P(S) \\ {\scriptstyle \underset{\varphi}{\circ}\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underset{\xi_L}{\circ}} \\ P(R)\otimes P(U) & \xrightarrow[\underset{\xi_R}{\circ}]{} & P(T)\,; \end{array}$$

Axiome V $\left(\begin{smallmatrix}\square\square\\ \square\square\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{array}{ccc} P(N)\otimes P(M)\otimes P(U) & \xrightarrow{(\underset{\psi}{\circ}\otimes 1)(1\otimes\tau)} & P(S)\otimes P(M) \\ {\scriptstyle \underset{\varphi^{op}}{\circ}\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underset{\xi_L^{op}}{\circ}} \\ P(R)\otimes P(U) & \xrightarrow[\underset{\xi_R}{\circ}]{} & P(T)\,; \end{array}$$

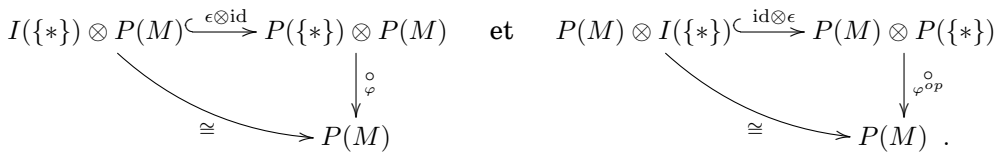
Axiome Λ $\left(\begin{smallmatrix}\square\\ \square\square\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{array}{ccc} P(M)\otimes P(U)\otimes P(N) & \xrightarrow{1\otimes {}_{\psi^{op}}\underset{}{\circ}} & P(M)\otimes P(S) \\ {\scriptstyle (1\otimes \underset{\varphi}{\circ})(\tau\otimes 1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underset{\xi_L}{\circ}} \\ P(U)\otimes P(R) & \xrightarrow[\underset{\xi_R^{op}}{\circ}]{} & P(T). \end{array}$$

Ces produits partiels vérifient également une propriété d'existence d'unité : pour tout diagramme d'injections de la forme

$$\varphi := \big(i : \{*\} \hookrightarrow M \xleftarrow{\cong} M : \mathrm{id}\big),$$

on a les diagrammes commutatifs



7.2.1.2 Proposition. *Un $\mathfrak{S}$-module réduit P est muni d'un système de compositions partielles de genre 0 si et seulement si P est muni d'une structure de monoïde pour le produit $\boxtimes_c^{\varnothing}$.*

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve de la proposition 4.2.3.2. □

Comme dans le cas de la protopérade libre, il existe un monoïde libre pour le produit $\boxtimes_c^{\varnothing}$ que l'on décrit complètement de manière combinatoire à l'aide du foncteur $\mathcal{W}^{\varnothing,conn}$, comme on l'énonce dans la proposition suivante.

7.2.1.3 Proposition. *Soit V un $\mathfrak{S}$-module réduit. Le monoïde libre sur V associé au produit $\boxtimes_c^{\varnothing}$, que l'on note $\mathscr{F}_{\varnothing}(V)$, vérifie l'isomorphisme de $\mathfrak{S}$-modules*

$$\mathscr{F}_{\varnothing}(V)(S) \cong \bigoplus_{\substack{(\{K_\alpha\}_{\alpha\in A},\leqslant)\\ \in\mathcal{W}^{\varnothing,conn}(S)}} \bigotimes_{\alpha\in A} V(K_\alpha).$$

Démonstration. De même que pour la proposition, en adaptant les démonstrations, on montre que, pour tous $\mathfrak{S}$-modules réduits A et B, l'endofoncteur

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{A,B}: & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} & \longrightarrow & \mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd} \\ & X & \longmapsto & A\boxtimes_c^{\varnothing} X\boxtimes_c^{\varnothing} B \end{array}$$

est analytique scindé (au sens de Vallette, cf. définition C.1.0.3) : on a donc un description du monoïde associatif unitaire libre de la catégorie $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}, I)$. En adaptant la démonstration de la proposition 3.1.3.3, on obtient l'isomorphisme voulu. □

7.2.2 Intermède - les diopérades

On rappelle ici la définition de diopérade faite par Gan dans [Gan03].

7.2.2.1 Définition. *Diopérade* – (cf. [Gan03, Sect. 1])
On appelle *diopérade*, un $\mathfrak{S}$-bimodule réduit P muni d'un morphisme de $\mathfrak{S}$-bimodules $\iota : I \hookrightarrow P$ et d'une famille de morphismes de complexes de chaînes

$$-_i\circ_j - : P(m_1,n_1)\otimes P(m_2,n_2) \longrightarrow P(m_1+m_2-1, n_1+n_2-1)$$

pour tout quadruplets d'entiers positifs non-nuls m_1, m_2, n_1 et n_2 et pour tous $i \in [\![1,n_1]\!]$ et $j\in[\![1,m_2]\!]$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) le morphisme ι induit, pour tous entiers positifs non-nuls m et n et pour tous $i\in[\![1,m]\!]$ et $j\in[\![1,n]\!]$, les isomorphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} I(1,1)\otimes P(m,n) & \xrightarrow{\iota\otimes P} & P(1,1)\otimes P(m,n) \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow{\scriptstyle -_1\circ_i -} \\ & & P(m,n) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} P(m,n)\otimes I(1,1) & \xrightarrow{P\otimes\iota} & P(m,n)\otimes P(1,1) \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow{\scriptstyle -_i\circ_1 -} \\ & & P(m,n)\ ; \end{array}$$

(ii) pour tous les entiers m_1, m_2, m_3, n_1, n_2 et n_3 positifs non-nuls et pour tous les entiers $i\in[\![1,n_1+n_2-1]\!]$, $j\in[\![1,m_3]\!]$, $k\in[\![1,n_1]\!]$ et $l\in[\![1,m_2]\!]$, le morphisme

$$-_i\circ_j -(-_k\circ_l -\otimes P) : P(m_1,n_1)\otimes P(m_2,n_2)\otimes P(m_3,n_3) \longrightarrow P(m_1+m_2+m_3-2, n_1+n_2+n_3-2)$$

est égal à

$$\begin{cases} (\sigma\cdot(-))(-_{k+n_3-1}\circ_l -)(-_i\circ_j -\otimes P)(P\otimes\tau_{P(m_2,n_2),P(m_3,n_3)}) & \text{si } i\leqslant k-1 \\ (-_k\circ_{j+l-1}-)(P\otimes -_{i-k+1}\circ_j -) & \text{si } k\leqslant i\leqslant k+n_2-1 \\ (\sigma\cdot(-))(-_k\circ_l -)(-_{i-n_2+1}\circ_j -\otimes P)(P\otimes\tau_{P(m_2,n_2),P(m_3,n_3)}) & \text{si } k+n_2\leqslant i \end{cases},$$

avec $\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1+n_2+n_3-2}$, la permutation par blocs

$$\big((12)(45)\big)_{l-1,j-1,m_1,m_3-j,m_2-l}\ ;$$

(iii) pour tous les entiers m_1,m_2,m_3,n_1,n_2 et n_3 positifs non-nuls et pour tous les entiers $i\in[\![1,n_1+n_2-1]\!]$, $j\in[\![1,m_3]\!]$, $k\in[\![1,n_1]\!]$ et $l\in[\![1,m_2]\!]$, le morphisme

$$-_i\circ_j-(P(m_1,n_1)\otimes-_k\circ_l-):P(m_1,n_1)\otimes P(m_2,n_2)\otimes P(m_3,n_3)\longrightarrow P(m_1+m_2+m_3-2,n_1+n_2+n_3-2)$$

est égal à

$$\begin{cases} ((-)\cdot\sigma)(-_k\circ_{l+m_1-1}-)(P\otimes -_i\circ_j -)(\tau_{P(m_1,n_1),P(m_2,n_2)}\otimes P(m_3,n_3)) & \text{si } j\leqslant l-1 \\ (-_{k+i-1}\circ_l -)(-_i\circ_{j-l+1}-\otimes P) & \text{si } l\leqslant j\leqslant l+m_2-1 \\ ((-)\cdot\sigma)(-_k\circ_l -)(P\otimes -_i\circ_{j-m_2+1}-\otimes P)(\tau_{P(m_1,n_1),P(m_2,n_2)}\otimes P(m_3,n_3)) & \text{si } l+m_2\leqslant j \end{cases},$$

avec $\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1+n_2+n_3-2}$, la permutation par blocs

$$\big((12)(45)\big)_{i-1,k-1,n_3,n_2-k,n_1-i}\ ;$$

(iv) pour tous les entiers m_1,m_2,n_1 et n_2 positifs non-nuls, pour tous les entiers $i\in[\![1,n_1]\!]$ et $j\in[\![1,m_2]\!]$, et toutes permutations $\pi_1\in\mathfrak{S}_{m_1}$, $\sigma_1\in\mathfrak{S}_{n_1}$, $\pi_2\in\mathfrak{S}_{m_2}$ et $\sigma_2\in\mathfrak{S}_{n_2}$, le morphisme

$$-_i\circ_j-\big((\pi_1\cdot(-)\cdot\sigma_1)\otimes(\pi_2\cdot(-)\cdot\sigma_2)\big):P(m_1,n_1)\otimes P(m_2,n_2)\longrightarrow P(m_1+m_2-1,n_1+n_2-1)$$

est égal au morphisme

$$(\pi_2\circ_{\pi_2^{-1}(j)}\pi_1\cdot(-)\cdot\sigma_1\circ_i\sigma_2)(-_{\sigma_1(i)}\circ_{\pi_2^{-1}(j)}-),$$

avec $\sigma_1\circ_i\sigma_2$, la permutation par blocs de $\mathfrak{S}_{n_1+n_2-1}$ donnée par

$$\sigma_1\circ_i\sigma_2:=(\sigma_1)_{1,\dots,1,n_2,1,\dots,1}\circ(\mathrm{id}\times\dots\times\sigma_2\times\dots\times\mathrm{id}),$$

où σ_2 est à la i-ème place.

7.2.2.2 Proposition. *Un $\mathfrak{S}$-bimodule réduit P est un monoïde associatif unitaire pour le produit $\boxtimes_c^{\varnothing}$ si et seulement si P est muni d'une structure de diopérade.*

Démonstration. Montrons qu'une diopérade P est un monoïde associatif unitaire pour le produit $\boxtimes_c^{\varnothing}$. On note $\iota:I\hookrightarrow P$, l'unité de la diopérade. Soient m,n,e,s,i et $j\in\mathbb{N}^*$ avec $i\in[\![1,n]\!]$, $j\in[\![1,m]\!]$, on pose $r=m+n-1$, $\mathfrak{s}=n+s-1$ et $\mathfrak{e}=m+e-1$. Rappelons que, pour Q un $\mathfrak{S}$-bimodule, on note $Q(m,n):=Q\big([\![1,m]\!],[\![1,n]\!]\big)$. On a le diagramme 7.1 avec $\widetilde{\iota}$ induite par l'unité ι de P. Le morphisme φ est induit par un choix (non-unique) d'élément de $\mathbb{X}^{r,\varnothing,\mathrm{conn}}(\mathfrak{s},\mathfrak{e})$, choix que l'on peut représenter

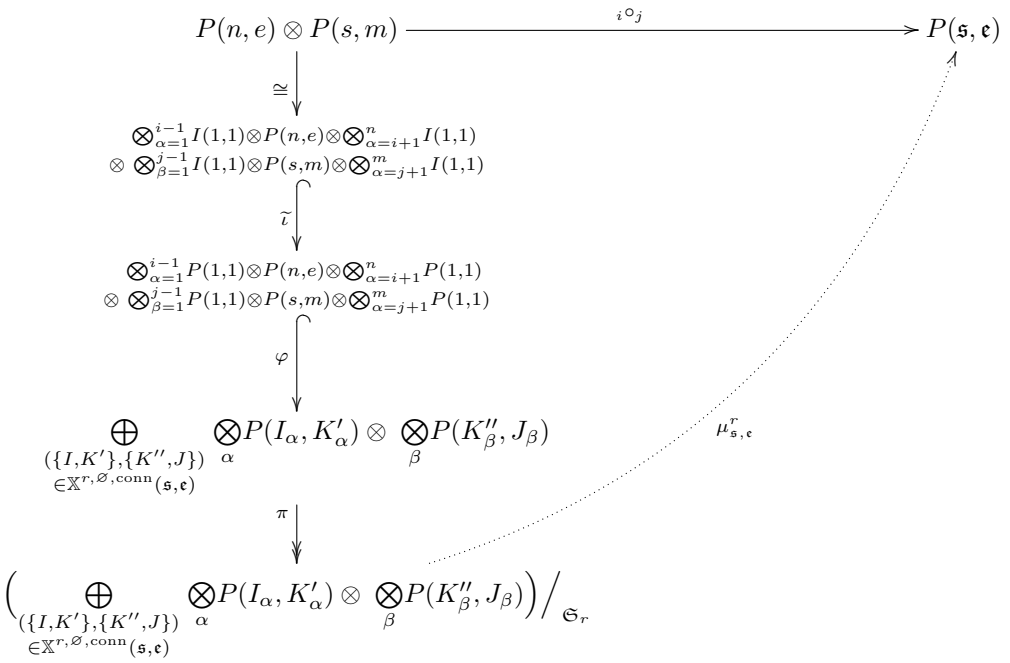
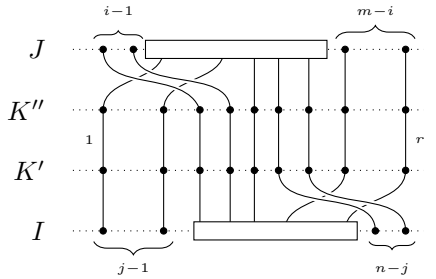


FIGURE 7.1 – Diopérade vs. monoïde pour $\boxtimes_c^{\varnothing}$

de la manière suivante :



avec

$$K'' := \big\{\{1,\dots,j-1,i+j-1,\dots,n+i-1\},\{j\},\dots,\{j+i-2\},\{n+i\},\dots,\{n+m\}\big\}$$
$$K' := \big\{\{1\},\dots,\{j-1\},\{j,\dots,i+j-1,n+i,\dots,n+m\},\{i+j\},\dots,\{n+i-1\}\big\}$$

ce choix est unique à l'action de $\mathfrak{S}_r$ près. Par l'associativité des produits ${}_i\circ_j$, on définit le produit associatif $\mu^r_{\mathfrak{s},\mathfrak{e}}$ et, en posant $\mu_{\mathfrak{s},\mathfrak{e}} := \sum_r \mu^r_{\mathfrak{s},\mathfrak{e}}$, on obtient le produit associatif

$$\mu_{\mathfrak{s},\mathfrak{e}} : \big(P \boxtimes_c^{\varnothing} P\big)(\mathfrak{s},\mathfrak{e}) \longrightarrow P(\mathfrak{s},\mathfrak{e}).$$

Réciproquement, si (P,μ) est un monoïde associatif unitaire de $(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{r\acute{e}d}, \boxtimes_c^{\varnothing})$, alors, la restriction de μ à l'image du morphisme $\pi\circ\varphi\circ\widetilde{\iota}$ nous fournit un morphisme ${}_i\circ_j : P(n,e)\otimes P(s,m)\to P(\mathfrak{s},\mathfrak{e})$ qui, par associativité du produit μ, vérifie les propriétés d'associativité des compositions partielles des diopérades et respectent les actions. □

Encore une fois, le foncteur d'induction fait le lien entre les catégories monoïdales $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{r\acute{e}d}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)$ et $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{r\acute{e}d}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)$.

7.2.2.3 Proposition. *Le foncteur d'induction*

$$\mathrm{Ind} : \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big) \longrightarrow \big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)$$

est monoïdal.

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve du théorème 3.3.2.10. □

7.3 Dualité de Koszul et bases PBW

De la même manière que pour les propérades, on a le résultat suivant.

7.3.0.1 Théorème. [Gan03] [Val08, Sect. 2]
Il existe une adjonction bar-cobar et une dualité de Koszul pour les diopérades. Celles-ci se transfèrent, via le foncteur d'induction, aux monoïdes de la catégorie $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)$*, c'est-à-dire qu'on a l'adjonction bar-cobar*

$$\mathbf{\Omega} : \mathtt{As}^u\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)^{aug} \rightleftarrows \mathtt{coAs}^u\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)^{coaug} : \mathbf{B}.$$

De plus, pour $P = \mathscr{P}(V, R)$ *un élément de* $\mathtt{As}^u\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)^{aug}$ *quadratique,* P *est dit de Koszul si le morphisme*

$$P^{¡} := \mathscr{C}(sV, s^2\overline{R}) \hookrightarrow \mathbf{B}(P)$$

induit un isomorphisme en homologie.

7.3.0.2 Remarque. Notons que Katz a, dans sa thèse [Kat12], définit la notion de base PBW pour les diopérades et montrer qu'une diopérade munie d'une base PBW est de Koszul (cf. [Kat12, Th. 3.4]).

En adaptant les technologies développées aux sections 6.1 et 6.2, on définit la notion de base PBW pour un élément de $\mathtt{As}^u\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)^{aug}$, et on a un théorème PBW.

7.3.0.3 Théorème. *Soit* $P = \mathscr{P}(V, R)$ *un objet de* $\mathtt{As}^u\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}\big)^{aug}$*, avec* V *de dimension finie, munie d'une base PBW. Alors* P *est de Koszul.*

Démonstration. On reprend les notations de la section 6.2.2. Il suffit de reprendre la sous-section 6.2.3 : comme, dans la combinatoire sous-jacente à nos monômes, nous n'avons pas de genre, alors, pour m un monôme de $\mathbf{B}P(S)$, le complexe $E^0\mathbf{B}P(S)_m$ est acyclique si le poids de m est différent de son degré homologique. Finalement, on a montré que $\mathrm{H}_\bullet\big(E^0\mathbf{B}P(S)_{\underline{m}}\big) = 0$ si le nombre de couleurs est différent du nombre de briques de K i.e. si le degré homologique est différent du poids. Par un argument de suite spectrale similaire à celui donné par Hoffbeck dans [Hof10, Sect. 4.6] pour le cas opéradique, on peut étendre le résultat à $\mathbf{B}P(S)$. On fixe un ordre total $\trianglelefteq$ qui raffine l'ordre partiel $\leqslant_{\mathscr{F}(V)}$ de la base monomiale, ce qui nous fournit la filtration de $\mathbf{B}P(S)$

$$F_\lambda\mathbf{B}P(S) = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} \mathbf{B}P(S)_\mu \ ;$$

notons au passage que le quotient $F_\lambda\mathbf{B}P(S)/F_{\lambda+1}\mathbf{B}P(S)$ (où $\lambda+1$ désigne le successeur de λ pour l'ordre total $\trianglelefteq$) est $E^0\mathbf{B}P(S)_\lambda$. Cette filtration est compatible avec le poids donc la suite spectrale associée se scinde. Pour un poids ω fixé, la suite spectrale associée est bornée. En effet, l'ensemble

des monômes de $\mathscr{F}(V)(S)$ de poids ω est fini car la dimension de V est fini : on a donc une suite décroissante de monômes $\mu_1 \trianglerighteq \mu_2 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq \mu_n$ qui induit la suite

$$\{0\} \subset F_{\mu_1}\mathbf{B}P^{(\omega)_V}(S) \subset F_{\mu_2}\mathbf{B}P^{(\omega)_V}(S) \subset \ldots \subset F_{\mu_n}\mathbf{B}P^{(\omega)_V}(S) = \mathbf{B}P^{(\omega)_V}(S)\,;$$

on a donc bien que la suite spectrale associée au poids ω est bornée. Donc par [Wei94, Th.5.5.1], cette suite spectrale converge vers $\mathrm{H}_\bullet\big(\mathbf{B}P^{(\omega)_V}(S)\big)$. Or, l'homologie de $\mathbf{B}P^{(\omega)_V}(S)$ est un sous-quotient de la page $E^{(\omega),1}$, qui est nulle quand le poids est différent du degré. Ainsi, $\mathrm{H}_\bullet\big(\mathbf{B}P\big) = 0$ quand le poids est différent du degré, ce qui achève la preuve du théorème. □

7.3.0.4 Corollaire. *(i)* $\mathcal{DC}om^{\varnothing,proto} := \mathscr{F}_{\varnothing}(V_{\mathcal{DC}om^{proto}})/\langle R_{\mathcal{DC}om^{proto}}\rangle$ *possède une base PBW, donc est de Koszul.*

(ii) Par dualité, $\mathscr{F}_{\varnothing}(V_{\mathcal{DL}ie^{proto}})/\langle R_{\mathcal{DL}ie^{proto}}\rangle$ *est de Koszul.*

Démonstration. (i) Découle directement des résultats de la section 6.2.4.

(ii) Découle des résultats de la section 5.2.3.

□

On remonte alors ce résultat de koszulité au niveau diopéradique.

7.3.0.5 Corollaire. *La diopérade* $\mathscr{F}_{\varnothing}(V_{\mathcal{DL}ie})/\langle R_{\mathcal{DL}ie}\rangle$ *est de Koszul.*

Démonstration. Le foncteur d'induction $\mathrm{Ind} : (\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing}) \to (\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing})$ est monoïdal et exact. □

La question qui reste à présent en suspens : peut-on remonter ce résultat au niveau propéradique ?

PERSPECTIVES

Des diopérades aux propérades

Une première idée pour montrer que la propérade $\mathcal{DL}ie$ est de Koszul serait de montrer qu'elle est *contractile*, propriété définie par Merkulov et Vallette dans [MV09a]. On rappelle ici les résultats essentiels de [MV09a, Sect. 5.6] qui permettent, sous certaines conditions, de remonter au niveau propéradique, une résolution cofibrante d'une diopérade.

7.3.0.6 Proposition. ([MV09a, Prop. 44, Cor. 45])
On a l'adjonction

$$\mathscr{U} : \mathtt{dioperades}_k \rightleftarrows \mathtt{properades}_k : \mathscr{F}\mathrm{or}$$

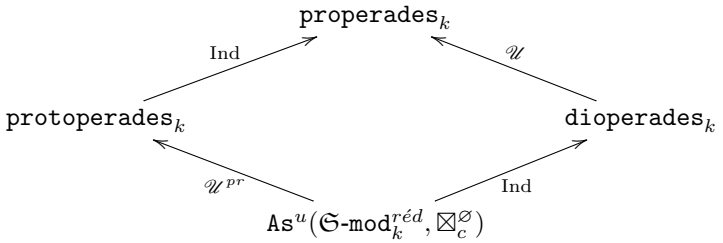
avec $\mathscr{F}\mathrm{or}$ le foncteur oubli et $\mathscr{U}$ le foncteur propérade enveloppante. Pour $\mathcal{D}$, une diopérade définie par générateurs et relations, c'est-à-dire $\mathcal{D} := \mathscr{F}_{\varnothing}(V)/\langle R\rangle_{\varnothing}$, avec $\langle R\rangle_{\varnothing}$ l'idéal diopéradique engendré par les relations R de genre 0, on a

$$\mathscr{U}(\mathcal{D}) = \mathscr{F}(V)/\langle R\rangle,$$

avec $\langle R\rangle$, l'idéal propéradique engendré par R.

7.3.0.7 Remarque. On n'utilise pas ici les mêmes notations que Merkulov et Vallette : notamment, on inverse les noms des foncteurs oubli et enveloppant.

Pour résumer, on a le diagramme commutatif de foncteurs suivants



où le foncteur $\mathscr{U}^{pr}$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathscr{F}or : \mathtt{protoperades}_k \to \mathtt{As}^u(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{mod}_k^{réd}, \boxtimes_c^{\varnothing})$. Le foncteur $\mathscr{U}$ n'est pas exact, comme le montre Merkulov et Vallette dans [MV09a, Th. 47]. Cependant, le foncteur préserve les résolutions minimales de certaines diopérades.

7.3.0.8 Définition/Proposition. *Propérade contractile* – ([MV09a, Prop. 48])
On dit qu'une propérade $P = \mathscr{F}(V)/\langle R\rangle$ avec des relations de genre 0, c'est-à-dire $R \subset \mathscr{F}_{\varnothing}(V)$, est *contractile* si elle admet un modèle $(\mathscr{F}(C), \partial^0) \xrightarrow{\sim} P$ avec $\partial^0|_C : C \to \mathscr{F}_{\varnothing}(C)$, c'est-à-dire si la différentielle évaluée sur C est à valeurs dans la partie de genre 0 de la propérade libre sur C.

De plus, P est contractile si et seulement si la diopérade associée $D = \mathscr{F}_{\varnothing}(V)/\langle R\rangle_{\varnothing}$ admet une résolution quasi-libre $(\mathscr{F}_{\varnothing}(C), \partial^0) \xrightarrow{\sim} D$, qui est un quasi-isomorphisme préservé par le foncteur $\mathscr{U}(-)$.

Enfin, on rappelle un critère simple pour qu'une propérade soit contractile.

7.3.0.9 Proposition. [MV09a, Prop. 49]
Soit $P = \mathscr{F}(V)/\langle R\rangle$ une propérade de Koszul *définie par un $\mathfrak{S}$-bimodule V de dimension totale finie et par des relations de genre 0, i.e. $R \subset \mathscr{F}_{\varnothing}(V)$. Si la copropérade duale de P est égale à la codiopérade duale de $D = \mathscr{F}_{\varnothing}(V)/\langle R\rangle_{\varnothing}$ en tant que complexe de chaînes, c'est-à-dire que, pour tous entiers naturels non-nuls m et n, on a l'isomorphisme de complexes*

$$D^{\text{¡}}(m,n) \cong P^{\text{¡}}(m,n),$$

alors, la propérade P est contractile.

Démonstration. Dans ce cas, le coproduit infinitésimal (cf. section 5.1.1.4) de $P^{\text{¡}}$, $\Delta^{(1,1)} : P^{\text{¡}} \to P^{\text{¡}} \boxtimes_c P^{\text{¡}}$, est à valeurs dans $P^{\text{¡}} \boxtimes_c^{\varnothing} P^{\text{¡}}$. □

Dans cette proposition, on suppose notamment que la propérade P soit de Koszul : on ne peut donc pas utiliser un tel résultat pour montrer que P est de Koszul. Pourtant, dans le cas de la propérade $\mathcal{DL}ie$, on a montré, au lemme 4.1.4.6, que la propérade duale $\mathcal{DC}om = \mathscr{F}(V_{\mathcal{DC}om})/\langle R_{\mathcal{DC}om}\rangle$ vérifie, pour tous entiers naturels non-nuls m et n, l'isomorphisme de complexes de chaînes :

$$\mathcal{DC}om(m,n) \cong \Big(\mathscr{F}_{\varnothing}(V_{\mathcal{DC}om})/\langle R_{\mathcal{DC}om}\rangle_{\varnothing}\Big)(m,n).$$

Un espoir à court terme est de pouvoir conclure la question de la koszulité de $\mathcal{DL}ie$ en explorant cette voie. On étudiera également l'exactitude du foncteur $\mathscr{U}^{pr}$.

Par la suite

Si nous arrivons à montrer que la propérade $\mathcal{DL}ie$ est de Koszul, alors on aurait montré que la propérade $\mathcal{DP}ois$ est de Koszul (cf. corollaire 5.3.2.2). Plusieurs questions naturelles se poseraient alors :

(i) Expliciter la structure d'algèbre double Poisson à homotopie près, notamment le comportement de la relation de dérivation et les liens avec les algèbres de Leibniz à homotopie près (cf. [Liv97]). En effet, on a un morphisme de propérades

$$\mathcal{L}eib \longrightarrow \mathcal{DP}ois$$

qui induit donc, au niveau des résolutions cofibrantes, le morphisme de propérades

$$\mathcal{L}eib_{\infty} \longrightarrow \mathcal{DP}ois_{\infty}.$$

On pourrait commencer par se demander quelle est l'image de ce morphisme.

(ii) Étudier l'espace de module des structures double Poisson à homotopie près sur un complexe de chaînes X qui possède un produit strictement associatif, c'est-à-dire le pullback homotopique

suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{DP}ois^{\mu}_{\infty}\{X\} & \longrightarrow & \{\mu\} \\ \downarrow & \lrcorner h & \downarrow \\ & & \mathcal{A}s\{X\} \\ & & \downarrow \\ \mathcal{DP}ois_{\infty}\{X\} & \longrightarrow & \mathcal{A}s_{\infty}\{X\}. \end{array}$$

(iii) Si on a une $\mathcal{DP}ois_{\infty}$-algèbre A, telle que le produit μ de A soit strictement associatif (et non pas associatif à homotopie près), c'est-à-dire un point de $\mathcal{DP}ois^{\mu}_{\infty}\{A\}$, que devient la structure quand on passe aux schémas de représentations associés. c'est-à-dire, si A est une telle algèbre, de quelle structure est munie l'algèbre différentielle graduée commutative $(A)_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

(iv) De la même manière, comme l'homologie cyclique est donnée par le foncteur dérivé de $(-)_\natural$, on peut se demander de quelle structure hérite l'homologie cyclique d'une algèbre double Poisson à homotopie près et ainsi faire le lien avec les structures NC-Poisson dérivées de [BCER12].

(v) Enfin, on espère qu'à l'aide des schémas de représentations, on puisse faire le lien entre l'espace de module des structures double Poisson sur un complexe de chaînes A et l'espace de modules des structures de Poisson sur $(A)_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace de modules des structures de Poisson sur un complexe de chaînes a notamment été décrit par Melani et Safronov dans [MS16, MS17]. On aimerait également faire le lien entre les schémas de représentations et les travaux récents de Toën et ses co-auteurs sur la géométrie algébrique dérivée, citons par exemple [TV05, TV08, PTVV13, CPT$^+$15].

Si jamais, on concluait par la négative à la question de la koszulité de la propérade $\mathcal{DL}ie$, pourrait-on corriger le défaut de koszulité pour déterminer une résolution cofibrante de $\mathcal{DL}ie$ qui soit plus petite que celle donnée par l'adjonction bar-cobar ?

ANNEXE A

ALGÈBRE CATÉGORIQUE

On donne, dans cette première annexe, un rappel sur les catégories monoïdales.

A.1 Catégorie monoïdale

A.1.0.1 Définition. *Catégorie monoïdale*
Soit $\mathtt{C}$ une catégorie. On dit que $\mathtt{C}$ est une *catégorie monoïdale* si $\mathtt{C}$ est munie d'un bifoncteur appelé produit tensoriel

$$\otimes : \mathtt{C} \times \mathtt{C} \longrightarrow \mathtt{C}$$

et d'un objet $\mathbb{1}$ appelé *unité* tels que les axiomes suivants soient vérifiés :

(i) pour tous objets A, B et C de la catégorie $\mathtt{C}$, il existe un isomorphisme d'associativité naturel

$$a_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\cong} A \otimes (B \otimes C) \ ;$$

(ii) pour tout objet A de $\mathtt{C}$, il existe un isomorphisme d'unité à gauche naturel

$$l_A : \mathbb{1} \otimes A \xrightarrow{\cong} A;$$

(iii) Pour tout objet A de $\mathtt{C}$, il existe un isomorphisme d'unité à droite naturel

$$r_A : A \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{\cong} A;$$

(iv) *Axiome du pentagone* – pour tous objets A, B, C et D de $\mathtt{C}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\big((A \otimes B) \otimes C\big) \otimes D & & \xrightarrow{a_{A\otimes B,C,D}} & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle a_{A,B,C}\otimes 1} & & & & \\
\big(A \otimes (B \otimes C)\big) \otimes D & & \circlearrowleft & & \Big\downarrow{\scriptstyle a_{A,B,C\otimes D}} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle a_{A,B\otimes C,D}} & & & & \\
A \otimes \big((B \otimes C) \otimes D\big) & & \xrightarrow[1\otimes a_{B,C,D}]{} & & A \otimes \big(B \otimes (C \otimes D)\big)
\end{array}$$

(v) *Axiome de l'unité* – pour tous objets A et B de $\mathtt{C}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes \mathbb{1}) \otimes B & \xrightarrow{a_{A,\mathbb{1},B}} & A \otimes (\mathbb{1} \otimes B) \\ & \searrow^{r_A \otimes 1} & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes l_B} \\ & & A \otimes B. \end{array}$$

A.1.0.2 Définition. *Catégorie monoïdale symétrique*
La catégorie monoïdale $\mathtt{C}$ est de plus dite *symétrique* si elle vérifie :

(i) Pour tous objets A et B de $\mathtt{C}$, il existe un isomorphisme naturel

$$s_{A,B} : A \otimes B \xrightarrow{\cong} B \otimes A;$$

(ii) Pour tous objets A, B et C de $\mathtt{C}$, les diagrammes suivant commutent :

▷ *Axiome de cohérence de l'unité*

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{s_{A,B} \otimes 1} & (B \otimes A) \otimes C \\ \downarrow{\scriptstyle a_{A,B,C}} & & \downarrow{\scriptstyle a_{B,A,C}} \\ A \otimes (B \otimes C) & & B \otimes (A \otimes C) \\ \downarrow{\scriptstyle s_{A,B \otimes C}} & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes s_{A,C}} \\ (B \otimes C) \otimes A & \xrightarrow[a_{B,C,A}]{} & B \otimes (C \otimes A); \end{array}$$

▷ *Axiome de symétrie*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{s_{A,\mathbb{1}}} & \mathbb{1} \otimes A \\ & \searrow^{r_A} & \downarrow{\scriptstyle l_A} \\ & & A; \end{array}$$

▷ *Axiome de cohérence de l'associativité*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{s_{A,B}} & B \otimes A \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle s_{B,A}} \\ & & A \otimes B. \end{array}$$

A.1.0.3 Définition. *Foncteur Lax-monoïdal*
Soient $(\mathtt{C}, \otimes, \mathbb{1}_{\mathtt{C}})$ et $(\mathtt{D}, \odot, \mathbb{1}_{\mathtt{D}})$ deux catégories monoïdales. Un foncteur F est dit *Lax-monoïdal* s'il est muni d'un morphisme

$$\epsilon : \mathbb{1}_{\mathtt{D}} \longrightarrow F(\mathbb{1}_{\mathtt{C}})$$

et d'une transformation naturelle

$$\mu_F : F(-_1) \odot F(-_2) \xrightarrow{\cong} F(-_1 \otimes -_2).$$

qui satisfont les conditions suivantes :

(i) la condition d'associativité : le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
\big(F(-_1)\odot F(-_2)\big)\odot F(-_3) & \xrightarrow{\cong} & F(-_1)\odot\big(F(-_2)\odot F(-_3)\big) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu\odot\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\odot\mu} \\
F(-_1\otimes -_2)\odot F(-_3) & & F(-_1)\odot F(-_2\otimes -_3) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
F\big((-_1\otimes -_2)\otimes -_3\big) & \xrightarrow{\cong} & \big(-_1\otimes(-_2\otimes -_3)\big)\ ;
\end{array}$$

(ii) les conditions d'unités : les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc}
F(-)\odot \mathbb{1}_{\mathtt{D}} & \xrightarrow{\mathrm{id}\odot\epsilon} & F(-)\otimes F(\mathbb{1}_{\mathtt{C}}) \\
\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
F(-) & \xleftarrow[\cong]{} & F(-\otimes \mathbb{1}_{\mathtt{C}})
\end{array}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{1}_{\mathtt{D}}\odot F(-) & \xrightarrow{\epsilon\odot\mathrm{id}} & F(\mathbb{1}_{\mathtt{C}})\otimes F(-) \\
\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
F(-) & \xleftarrow[\cong]{} & F(-\otimes \mathbb{1}_{\mathtt{C}}).
\end{array}$$

A.1.0.4 Définition. *Foncteur (fortement) monoïdal*
Soient $(\mathtt{C},\otimes,\mathbb{1}_{\mathtt{C}})$ et $(\mathtt{D},\odot,\mathbb{1}_{\mathtt{D}})$ deux catégories monoïdales. Un foncteur $F:\mathtt{C}\to\mathtt{D}$ est dit *monoïdal* (ou *fortement monoïdal*) si (F,μ,ϵ) est Lax-monoïdal et que ϵ est un isomorphisme et μ est une équivalence naturelle.

Si un foncteur monoïdal possède un adjoint à droite, alors celui-ci hérite d'une compatibilité avec les produits monoïdaux, comme le montre la proposition suivante.

A.1.0.5 Proposition. *Soient $(\mathtt{C},\otimes,\mathbb{1}_{\mathtt{C}})$ et $(\mathtt{D},\odot,\mathbb{1}_{\mathtt{D}})$ deux catégories monoïdales avec l'adjonction suivante :*

$$L:\mathtt{C}\rightleftarrows\mathtt{D}:R$$

telle que l'adjoint à gauche est un foncteur (fortement) monoïdal par l'équivalence naturelle

$$\mu_L : L(-_1)\odot L(-_2)\xrightarrow{\cong} L(-_1\otimes -_2)$$

et l'isomorphisme naturel

$$e_L : \mathbb{1}_{\mathtt{D}}\xrightarrow{\cong} L(\mathbb{1}_{\mathtt{C}}).$$

Alors l'adjoint à droite est un foncteur lax-monoïdal avec la transformation naturelle μ_R et le morphisme ϵ_R donnés par

$$\begin{array}{ccc}
R(-_1)\otimes R(-_2) & \xrightarrow{\eta(R(-_1)\otimes R(-_2))} & RL\big(R(-_1)\otimes R(-_2)\big) \\
{\scriptstyle \mu_R:=}\ \vdots & & \downarrow{\scriptstyle R\left(\mu_L^{-1}(R(-_1),R(-_2))\right)} \\
R(-_1\otimes -_2) & \xleftarrow[R(\epsilon(-_1)\odot\epsilon(-_2))]{} & R\big(LR(-_1)\odot LR(-_2)\big)
\end{array}$$

et

$$e_R : \mathbb{1}_{\mathtt{C}}\xrightarrow{\eta(\mathbb{1}_{\mathtt{C}})} RL(\mathbb{1}_{\mathtt{C}})\xrightarrow{R(e_L^{-1})} R(\mathbb{1}_{\mathtt{D}}).$$

A.2 Produit de convolution de Day

A.2.0.1 Définition. *Produit extérieur*
Soient $\mathtt{A}$ et $\mathtt{C}$ deux catégories, avec $(\mathtt{A}, \odot)$ monoïdale. On définit *le produit extérieur* de la catégorie $\mathrm{Func}(\mathtt{C}, \mathtt{A})$ comme le bifoncteur

$$\begin{array}{rccc} - \odot^{ext} - : & \mathrm{Func}(\mathtt{C}, \mathtt{A}) \times \mathrm{Func}(\mathtt{C}, \mathtt{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Func}(\mathtt{C} \odot^{ext} \mathtt{C}, \mathtt{A}) \\ & (F, G) & \longmapsto & F \times G : (c_1, c_2) \mapsto F(c_1) \odot G(c_2) \end{array} .$$

A.2.0.2 Définition. *Coend*
Soient $(\mathtt{V}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique possédant les colimites finies, $\mathtt{C}$ une catégorie $\mathtt{V}$-enrichie et $F : \mathtt{C}^{op} \times \mathtt{C} \to V$ un foncteur $\mathtt{V}$-enrichi. Le *coend* de F est le coégalisateur

$$\coprod_{c_2 \xrightarrow{\varphi} c_1} F(c_1, c_2) \underset{F(c_1, \varphi)}{\overset{F(\varphi, c_2)}{\rightrightarrows}} \coprod_{c \in \mathrm{Ob}\, \mathtt{C}} F(c, c) \longrightarrow \int^{c \in \mathrm{Ob}\, \mathtt{C}} F(c, c) \quad .$$

Rappelons à présent la définition du produit de convolution de Day

A.2.0.3 Définition. *Produit de convolution de Day*
Soient $(\mathtt{V}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique fermée avec toutes les petites limites et colimites et $(\mathtt{C}, \odot, I)$ une petite catégorie monoïdale $\mathtt{V}$-enrichie. On note $[\mathtt{C}, \mathtt{V}]$ la catégorie $\mathtt{V}$-enrichie des foncteurs de $\mathtt{C}$ dans $\mathtt{V}$. Le *produit de convolution de Day* sur $[\mathtt{C}, \mathtt{V}]$

$$\odot_{\mathrm{Day}} : [\mathtt{C}, \mathtt{V}] \times [\mathtt{C}, \mathtt{V}] \longrightarrow [\mathtt{C}, \mathtt{V}]$$

est donné par le coend du foncteur

$$F_\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(- \odot -, \bullet) \otimes^{ext} X(-) \otimes^{ext} Y(-) : (\mathtt{C} \times \mathtt{C}) \times (\mathtt{C} \times \mathtt{C})^{op} \to \mathtt{V},$$

c'est à dire

$$X \odot_{\mathrm{Day}} Y : c \longmapsto \int^{(c_1, c_2) \in \mathtt{C} \times \mathtt{C}} \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(c_1 \odot c_2, c) \otimes^{ext} X(c_1) \otimes^{ext} Y(c_2).$$

ANNEXE B

Σ-ALGÈBRE NC-POISSON

Dans cette annexe, on présente un travail similaire à celui effectué au chapitre 1. On généralise à toute catégorie monoïdale symétrique abélienne, la définition de structure NC-Poisson (également appelée structure H_0-Poisson) posée par Crawley-Boevey dans [CB11], en proposant une version décalée. On exhibe un exemple de structure NC-Poisson de degré 1 sur la résolution cofibrante minimale de $k[x, y]$.

B.1 Dérivation II

Dans cette section, on considère $(\mathtt{C}, \otimes)$, une catégorie monoïdale symétrique fermée abélienne. Pour cette annexe, on utilisera les notations introduites au chapitre 1.

B.1.0.1 Définition/Proposition. *Endomorphismes internes* $\underline{\mathrm{End}}(A)$
Soit A un objet de la catégorie $\mathtt{C}$. On définit $\underline{\mathrm{End}}(A) := \underline{\hom}(A, A)$.

(i) $\underline{\mathrm{End}}(A)$ est un monoïde unitaire pour le produit

$$\mu := c_{A,A,A} : \underline{\mathrm{End}}(A) \otimes \underline{\mathrm{End}}(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(A)$$

induit par la composition des morphismes de $\mathtt{C}$, ayant pour unité

$$\mathbb{1} \to \underline{\mathrm{End}}(A).$$

(ii) $\underline{\mathrm{End}}(A)$ est une algèbre de Lie pour $[-,-] := \mu - \mu \circ \tau_{\underline{\mathrm{End}}(A),\underline{\mathrm{End}}(A)}$.

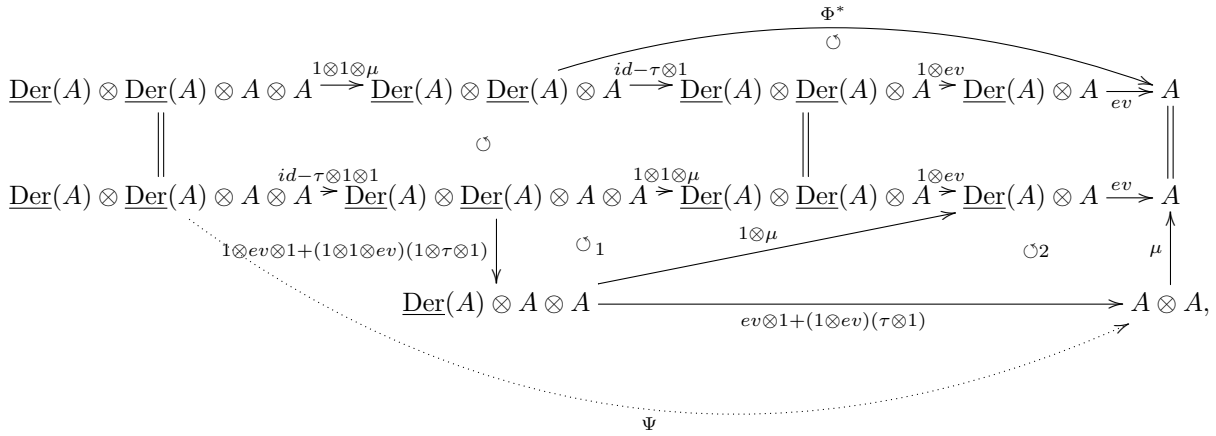
Démonstration. L'associativité du produit provient directement de la structure monoïdale symétrique de la catégorie $\mathtt{C}$ et l'identité de Jacobi pour le crochet est équivalente à la condition d'associativité du produit. □

B.1.0.2 Proposition. *Soit (A, μ) un monoïde de $\mathtt{C}$. Le crochet de Lie de $\underline{\mathrm{End}}(A)$ se restreint à $\underline{\mathrm{Der}}(A)$ où $\underline{\mathrm{Der}}(A)$ est le k-module des dérivations défini en 1.1.4.1.*

Démonstration. On doit montrer qu'il existe la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Der}}(A) \otimes \underline{\mathrm{Der}}(A) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{End}}(A) \otimes \underline{\mathrm{End}}(A) \\ \exists \big\downarrow & \overset{\Phi}{\searrow} & \big\downarrow [-,-] \\ \underline{\mathrm{Der}}(A) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{End}}(A), \end{array}$$

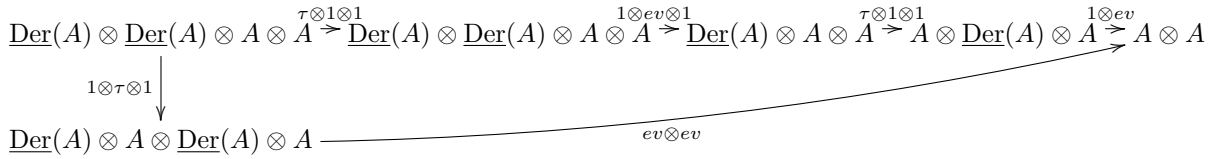
où Φ est défini comme la composition de l'inclusion et du crochet de Lie de $\underline{\mathrm{End}}(A)$. On note $\Phi^* : \underline{\mathrm{Der}}(A) \otimes \underline{\mathrm{Der}}(A) \otimes A \to A$ son image par l'adjonction entre le produit tensoriel et le hom-interne. On considère le diagramme :



où les petits diagrammes internes 1 et 2 commutent par définition de $\underline{\mathrm{Der}}(A)$. On définit le morphisme Ψ par :

$$
\begin{aligned}
\Psi :=& (ev \otimes 1)(1 \otimes ev \otimes 1) \\
&+ (ev \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes ev)(1 \otimes \tau \otimes 1) && \text{(B.1.1)} \\
&+ (1 \otimes ev)(\tau \otimes 1)(1 \otimes ev \otimes 1) && \text{(B.1.2)} \\
&+ (1 \otimes ev)(\tau \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes ev)(1 \otimes \tau \otimes 1) \\
&- (ev \otimes 1)(1 \otimes ev \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1) \\
&- (ev \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes ev)(1 \otimes \tau \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1) && \text{(B.1.3)} \\
&- (1 \otimes ev)(\tau \otimes 1)(1 \otimes ev \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1) && \text{(B.1.4)} \\
&- (1 \otimes ev)(\tau \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes ev)(1 \otimes \tau \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1).
\end{aligned}
$$

Or, le diagramme suivant est commutatif :



donc, dans l'expression de Ψ, les lignes (B.1.1) et (B.1.4) se simplifient. Par un argument du même type, il en est de même pour les ligne (B.1.2) et (B.1.3). Donc, on a finalement que :

$$
\begin{aligned}
\Psi =& \big(ev(1 \otimes ev) - ev(1 \otimes ev)(\tau \otimes 1)\big) \otimes 1 \\
&+ \Big(1 \otimes \big(ev(1 \otimes ev) - ev(1 \otimes ev)(\tau \otimes 1)\big)\Big)(\tau \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1) \\
=& \Phi^* \otimes 1 + (1 \otimes \Phi^*)(\tau \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1)
\end{aligned}
$$

et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Der}}(A)\otimes\underline{\mathrm{Der}}(A)\otimes A\otimes A & \xrightarrow{1\otimes 1\otimes\mu} & \underline{\mathrm{Der}}(A)\otimes\underline{\mathrm{Der}}(A)\otimes A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi^*\otimes 1+(1\otimes\Phi^*)(\tau\otimes 1\otimes 1)(1\otimes\tau\otimes 1)} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi^*} \\ A\otimes A & \xrightarrow[\mu]{} & A, \end{array}$$

ce qui conclut cette preuve. □

B.1.0.3 Définition. *Commutateur d'un monoïde*
Soit (A,μ) un monoïde de $\mathtt{C}$. On appelle *commutateur de* A l'image dans A du morphisme $\mu-\mu\tau_{A,A}$: $A\otimes A\to A$ et on la note $[A,A]$. On note $A_\natural := A/[A,A]$ le conoyau de ce morphisme, donc on a la suite exacte courte :

$$0\longrightarrow [A,A]\longrightarrow A\longrightarrow A_\natural\longrightarrow 0.$$

De même, on nomme commutateur de ΣA l'image dans ΣA du morphisme $\Sigma(\mu-\mu\tau_{A,A}) : \Sigma A\otimes A\to \Sigma A$ et on note $\Sigma[A,A]$. Comme Σ est un élément de $\mathrm{Pic}^{\otimes}(\mathtt{C})$, le foncteur $\Sigma\otimes -$ est exact. Donc, d'après la définition de $[\Sigma A,\Sigma A]$, on a la suite exacte courte :

$$0\longrightarrow \Sigma[A,A]\longrightarrow \Sigma A\longrightarrow (\Sigma A)_\natural\longrightarrow 0\ ;$$

où $(\Sigma A)_\natural := \Sigma(A_\natural)$.

B.1.0.4 Définition/Proposition. $\underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural$
On définit $\underline{\mathrm{Der}}(A)^\natural$ comme étant le pullback, dans la catégorie $\mathtt{C}$, suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Der}}(A)^\natural & \xrightarrow{\iota} & \underline{\mathrm{Der}}(A) \\ \Big\downarrow & \lrcorner & \Big\downarrow \\ \underline{\hom}(A,[A,A]) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{End}}(A). \end{array}$$

C'est un idéal de Lie de $\underline{\mathrm{Der}}(A)$, i.e. on a la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Der}}(A)^\natural\otimes\underline{\mathrm{Der}}(A) & \xrightarrow{\iota\otimes 1} & \underline{\mathrm{Der}}(A)\otimes\underline{\mathrm{Der}}(A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exists} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle [-,-]} \\ \underline{\mathrm{Der}}(A)^\natural & \xrightarrow[\iota]{} & \underline{\mathrm{Der}}(A). \end{array}$$

Ainsi, on note $\underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural := \underline{\mathrm{Der}}(A)/\underline{\mathrm{Der}}(A)^\natural$, qui est muni d'une injection $\underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural\hookrightarrow \underline{\mathrm{End}}(A_\natural)$.

Démonstration. Montrons qu'on a l'injection $\underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural\hookrightarrow \underline{\mathrm{End}}(A_\natural)$.

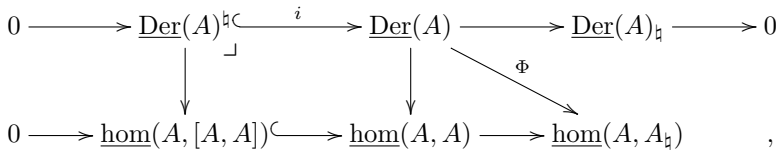
(i) Dans la catégorie $\mathtt{C}$, on a la suite exacte courte

$$0\to [A,A]\to A\xrightarrow{\pi} A_\natural\to 0,$$

à laquelle on applique le foncteur $\underline{\hom}(A,-)$: on a, par exactitude à gauche du foncteur $\underline{\hom}(A,-)$, la suite exacte

$$0\to \underline{\hom}(A,[A,A])\to \underline{\hom}(A,A)\to \underline{\hom}(A,A_\natural).$$

Comme $\underline{\mathrm{Der}}(A)$ est un sous objet de $\underline{\hom}(A,A)$ et que le pullback préserve les injections, on a le diagramme suivant



où $\underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural$ désigne le conoyau de i.

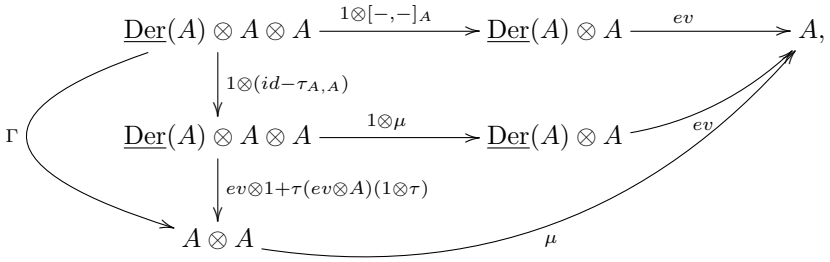
(ii) L'inclusion

$$\underline{\mathrm{End}}(A_\natural) \quad \overset{\rho}{\hookrightarrow} \quad \underline{\hom}(A, A_\natural)$$

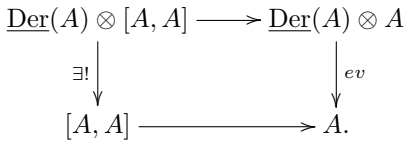
est induite par la surjection $A \longrightarrow A_\natural$ et on a défini le morphisme

$$\Phi : \quad \underline{\mathrm{Der}}(A) \quad \longrightarrow \quad \underline{\hom}(A, A_\natural)$$

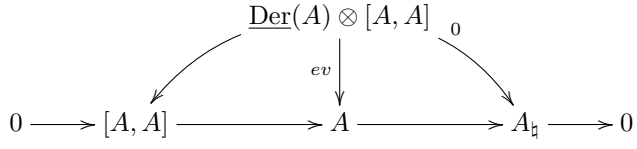
dans le diagramme précédent. On a également le diagramme :



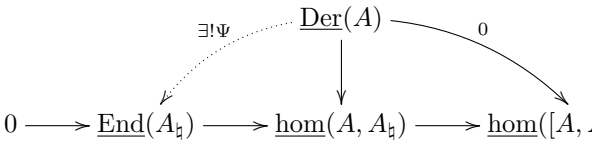
où on note Γ la composée des deux morphismes verticaux : on a $\Gamma = (id - \tau)\big((ev \otimes 1) + \tau(ev \otimes A)(1 \otimes \tau)\big)$ qui induit la factorisation suivante :



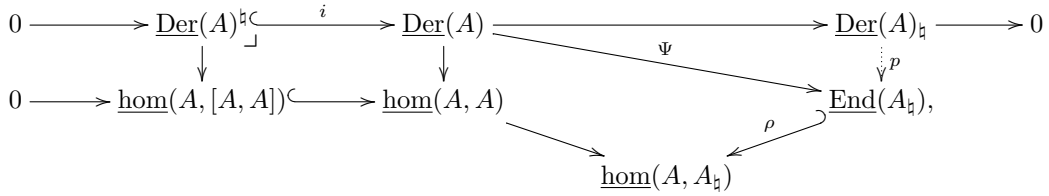
Finalement, on a



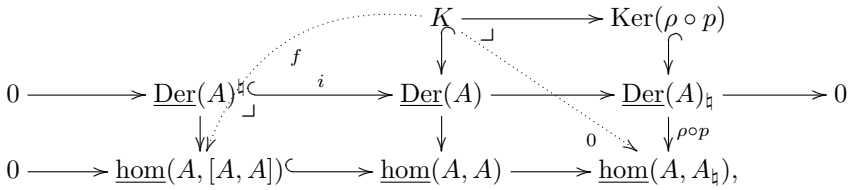
et donc, par adjonction, le morphisme $\underline{\mathrm{Der}}(A) \to \underline{\hom}([A,A], A_\natural)$ est nul. Par la propriété universelle du noyau, le morphisme Ψ suivant existe :



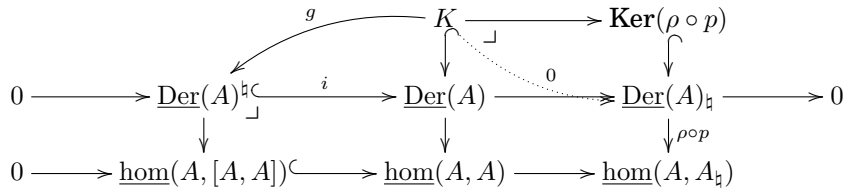
(iii) On obtient alors le diagramme suivant :



où p est donné par la propriété universelle du conoyau. Comme $\rho \circ \Psi \circ i = 0$ par commutativité du diagramme et que ρ est injective, on a que $\Psi \circ i = 0$ d'où l'existence de p. Le diagramme suivant commute :



où l'existence de f découle de la propriété universelle du noyau appliquée à la seconde ligne. Par la commutativité du diagramme et la propriété du pullback, on a alors l'existence de g :



ainsi, on a que $\mathrm{Ker}(\rho \circ p) = 0$ et donc, comme ρ est injective, p est injective. On a donc l'injection

$$\gamma : \underline{\mathrm{Der}}(A)_{\natural} \hookrightarrow \underline{\mathrm{End}}(A_{\natural}). \tag{B.1.5}$$

□

B.2 Définitions

B.2.1 à la Crawley-Boevey

On se place dans une catégorie $\mathtt{C}$ monoïdale symétrique fermée *abélienne* avec $\Sigma \in \mathrm{Pic}^{\otimes}(\mathtt{C})$.

B.2.1.1 Définition. *Morphisme ad associé à un Σ-crochet*
Soit C, un objet de la catégorie $\mathtt{C}$ muni d'un morphisme $f : \Sigma C \otimes \Sigma C \to \Sigma C$. On définit le morphisme

$$ad := f^* : \Sigma C \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\Sigma C)$$

comme l'adjoint de f.

B.2.1.2 Définition. *Structure de Σ-algèbre de Poisson non-commutative*
Soit A un monoïde de $\mathtt{C}$. Une *structure de Σ-algèbre de Poisson non-commutative* ou *structure de Σ-*

algèbre NC-Poisson sur A est la donnée d'une structure de Σ-algèbre de Lie sur $A_\natural$ telle qu'il existe la factorisation suivante ·

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma A)_\natural & \xrightarrow{ad} & \underline{\mathrm{End}}\big((\Sigma A)_\natural\big) \\ & \overset{\exists! i}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle \gamma} \\ & & \big(\underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A)\big)_\natural \end{array} .$$

où γ est l'injection donnée en (B.1.5).

Soient A et B deux Σ-algèbres de Poisson non-commutatives. Un morphisme $\varphi : A \to B$ de Σ-algèbres de Poisson non-commutative est un morphisme de monoïdes $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{C}}(A, B)$ tel que $(\Sigma\varphi)_\natural : (\Sigma A)_\natural \to (\Sigma B)_\natural$ est un morphisme d'algèbres de Lie. On note $\Sigma\text{-}\mathtt{NCPoiss}_{\mathtt{C}}$ la catégorie des Σ-algèbres de Poisson non-commutative dans $\mathtt{C}$.

B.2.2 Définition équivalente

On va maintenant exprimer différemment la définition de Crawley-Boevey précédente. Afin d'alléger les notations, on se permet de ne considérer que la version non-suspendue, c'est-à-dire pour $\Sigma = \mathbb{1}$, le cas général se traitant de la même manière.

Considérons A un monoïde de la catégorie $\mathtt{C}$, tel que $A_\natural$ est muni d'un crochet de Lie. L'existence d'une factorisation du morphisme $ad : A_\natural \to \underline{\mathrm{End}}(A_\natural)$ à travers $\underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural$ est en fait une propriété d'annulation de deux morphismes induits par ad comme nous allons le montrer ci-dessous. Commençons par montrer l'existence d'un diagramme 3×3 commutatif exact. D'après la preuve de B.1.0.4, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(A)^\natural & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(A) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\hom}(A,[A,A]) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{End}}(A) & \xrightarrow{\rho} & \underline{\hom}(A, A_\natural) & & \\ & & \downarrow & \overset{\psi}{\searrow} & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{im}(\psi) & \hookrightarrow & \underline{\hom}(A \otimes A, A) & & & & \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \end{array}$$

avec toutes les lignes et la deuxième colonne exactes. L'argument, utilisé dans la preuve de B.1.0.4 pour montrer que la première ligne est exacte avec une injection $\underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural \hookrightarrow \underline{\hom}(A, A_\natural)$, nous dit que la première colonne est exacte. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(A)^\natural & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(A) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \searrow & & \\ & & & & & & & \underline{\hom}(A, A_\natural) & \hookleftarrow \underline{\mathrm{End}}(A_\natural) \\ & & & & & \overset{\rho}{\nearrow} & & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\hom}(A,[A,A]) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{End}}(A) & \longrightarrow & \mathrm{im}(\rho) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \overset{\psi}{\searrow} & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{im}(\psi) & \hookrightarrow & \underline{\hom}(A \otimes A, A) & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\psi) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \end{array}$$

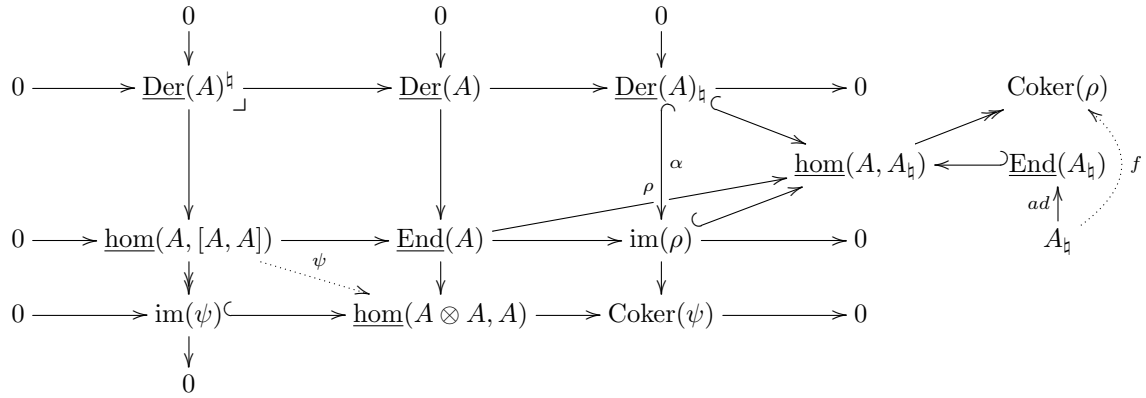
avec ses lignes et colonnes exactes. Par [FHH89, Lem. 2], on a l'existence de deux morphismes uniques qui forment la suite exacte :

$$\underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural \xrightarrow{\alpha} \mathrm{im}(\rho) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Coker}(\psi)$$

et qui font commuter le diagramme exact

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{\mathrm{Der}}(A)^\natural & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(A) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\
\underline{\mathrm{hom}}(A,[A,A]) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{End}}(A) & \longrightarrow & \mathrm{im}(\rho) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\
\mathrm{im}(\psi) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{hom}}(A\otimes A, A) & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\psi) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & & & & & \\
0 & & & & & &
\end{array} .$$

Finalement, on a le diagramme commutatif suivant avec les lignes et les colonnes exactes, la commutativité entrainant l'injectivité du morphisme α :



la flèche f étant définie par la composée des trois flèches. En ne conservant que l'information de la droite du diagramme, on a le diagramme B.1, où g est défini (de manière unique) et fait commuter

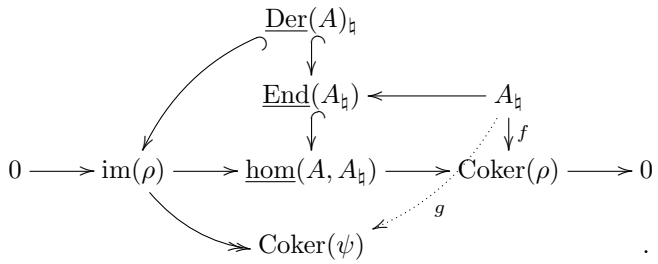


FIGURE B.1 – Structure NC-Poisson

le diagramme si et seulement si le morphisme f est nul (par la propriété universelle du noyau). Si un tel g existe et est nul, alors par propriété universelle du noyau, on a l'existence d'un morphisme $\iota : A_\natural \to \underline{\mathrm{Der}}(A)_\natural$ qui fait commuter le diagramme, ce qui est exactement la donnée d'une structure NC-Poisson sur A. On a donc démontré l'équivalence suivante :

B.2.2.1 Proposition. *Soit A une algèbre de $\mathtt{C}$ telle que $A_\natural$ est une algèbre de Lie. Cette structure munit A d'une structure NC-Poisson si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) le morphisme $f : A_\natural \to \mathrm{Coker}(\rho)$ est nul ;

(ii) le morphisme ainsi existant $g : A_\natural \to \mathrm{Coker}(\psi)$ est également nul ;

où f et g sont les morphismes du diagramme B.1.

B.3 Lien avec les Σ-algèbres double Poisson

On considère dans cette sous-section une catégorie $\mathtt{C}$ monoïdale symétrique fermée *abélienne*. Le résultat suivant montre que, dans une telle catégorie, une structure de Σ-algèbre double-Poisson sur A implique l'existence d'une structure naturelle de Σ-algèbre NC-Poisson.

B.3.0.1 Théorème. *Soit (A, μ, f) une Σ-algèbre double-Poisson dans $\mathtt{C}$. Alors le morphisme*

$$\Sigma\mu f : \Sigma A \otimes \Sigma A \longrightarrow \Sigma A$$

induit une structure de Σ-algèbre NC-Poisson sur A. Autrement dit, on a l'existence d'un foncteur

$$(-)_\natural : \Sigma\text{-}\mathtt{DPoiss}_\mathtt{C} \longrightarrow \Sigma\text{-}\mathtt{NCPoiss}_\mathtt{C} \ .$$

Démonstration. Dans la preuve de B.1.0.4, on a montré l'existence, pour tout monoïde A dans $\mathtt{C}$, de la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Der}}(A) \otimes [A,A] & \xrightarrow{\iota} & \underline{\mathrm{Der}}(A) \otimes A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ev} \\ [A,A] & \xrightarrow[\iota]{} & A \ . \end{array}$$

Comme on a le diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A \otimes \Sigma A & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(\Sigma A, \Sigma A \otimes A) \otimes \Sigma A \\ \downarrow{\scriptstyle \Sigma\mu f} & \swarrow{\scriptstyle \pi\circ\Sigma\mu\circ ev} & \\ \Sigma A & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ (\Sigma A)_\natural & & \end{array}$$

donné par le fait que $\Sigma\mu f$ soit un Σ-crochet de Leibniz, par la propriété universelle du conoyau, on a

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma A \otimes \Sigma[A,A] & \longrightarrow & \Sigma A \otimes \Sigma A & \longrightarrow & \Sigma A \otimes (\Sigma A)_\natural \\ & \searrow^{0} & \downarrow{\scriptstyle f} & \swarrow_{\exists} & \\ & & (\Sigma A)_\natural & & \end{array} \ .$$

Comme f est une dérivation en sa première variable pour la structure interne de A-bimodule de

$\Sigma A \otimes A$ et qu'on a les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (\Sigma A \otimes \Sigma A) & \xrightarrow{1\otimes(\pi\mu)} & \Sigma A \otimes (\Sigma A)_\natural \\ {\scriptstyle {}_A\mu^i}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle {}_A\mu} \\ (\Sigma A \otimes \Sigma A) & \xrightarrow[\pi\mu]{} & A_\natural \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\Sigma A \otimes \Sigma A) \otimes A & \xrightarrow{(\pi\mu)\otimes 1} & (\Sigma A)_\natural \otimes A \\ {\scriptstyle \mu^i_A}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ (\Sigma A \otimes \Sigma A) & \xrightarrow[\pi\mu]{} & A_\natural \end{array}$$

on a finalement l'existence d'un morphisme naturel

$$(\Sigma A)_\natural \otimes (\Sigma A)_\natural \longrightarrow (\Sigma A)_\natural$$

qui est antisymétrique car f est antisymétrique au sens des double crochets. Ce qui conclut cette preuve. □

B.3.0.2 Remarque. Ce résultat justifie en quelque sorte la définition des algèbres Σ-double Poisson.

B.4 Algèbres NC-Poisson libres dans $\mathtt{C} = \mathtt{DGA}_k$

B.4.0.1 Définition. *Structure de r-Poisson non-commutative*
Soit A une algèbre différentielle graduée. Une *structure de r-Poisson non-commutative* ou *structure de r-NC-Poisson* sur A est la donnée d'une structure de r-algèbre de Lie différentielle graduée sur $A_\natural[r]$ telle qu'il existe la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc} A_\natural[r] & \xrightarrow{ad} & \underline{\mathrm{End}}_k(A_\natural[r]) \\ & \overset{\exists! i}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle \gamma} \\ & & \underline{\mathrm{Der}}(A[r])_\natural, \end{array}$$

où i est un morphisme d'algèbre de Lie. Soient A et B deux algèbres de r-Poisson non-commutatives, i.e. des objets de $\mathtt{DGA}_k$ munis d'une structure de r-NC-Poisson. Un morphisme $\varphi : A \to B$ de r-dg-algèbres de Poisson non-commutatives est un morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{DGA}_k}(A, B)$ tel que $\varphi_\natural : A_\natural[r] \to B_\natural[r]$ est un morphisme de dg-algèbres de Lie. On note r-$\mathtt{NCPoiss}_k$ la catégorie des r-dg-algèbres de Poisson non-commutative.

Dans cette section, on considère $(TV, \partial) \in \mathtt{DGA}_k$ muni d'un *r-crochet non-commutatif* (ou *r-NC-crochet*), c'est-à-dire d'un crochet antisymétrique

$$\{-,-\} : (TV)_\natural \otimes (TV)_\natural \longrightarrow (TV)_\natural$$

n'étant pas, a priori compatible avec la différentielle et ne vérifiant pas la condition de Jacobi mais satisfaisant la condition que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (TV)_\natural[r] & \xrightarrow{ad} & \underline{\mathrm{End}}_k((TV)_\natural[r]) \\ & \overset{\exists i}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle \gamma} \\ & & \underline{\mathrm{Der}}((TV)[r])_\natural. \end{array}$$

On note

$$\begin{array}{rccc} i: & (TV)_\natural & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(TV)_\natural \\ & a & \longmapsto & \varphi_a. \end{array}$$

On note également le jacobiateur associé à $\{-,-\}$ par :

$$\begin{array}{rccc} J: & (TV)_\natural \otimes (TV)_\natural \otimes (TV)_\natural & \longrightarrow & (TV)_\natural \\ & a \otimes b \otimes c & \longmapsto & J(a,b,c) \end{array}$$

avec

$$J(a,b,c) := \big\{a,\{b,c\}\big\} - \big\{\{a,b\},c\big\} - (-1)^{(|a|+r)(|b|+r)}\big\{b,\{a,c\}\big\} = \big([\varphi_a,\varphi_b] - \varphi_{\{a,b\}}\big)(c),$$

qui nous fournit, par adjonction, un morphisme $J^* : TV_\natural[r] \otimes TV_\natural[r] \to \underline{\mathrm{End}}_k(TV_\natural[r])$. On a donc la factorisation

$$\begin{array}{ccc} (TV)_\natural[r] \otimes (TV)_\natural[r] & \xrightarrow{J^*} & \underline{\mathrm{End}}_k((TV)_\natural[r]) \\ & \searrow^{j} & \uparrow{\scriptstyle \gamma} \\ & & \underline{\mathrm{Der}}(TV[r])_\natural \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rccc} j: & (TV)_\natural \otimes (TV)_\natural & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Der}}(TV)_\natural \\ & a \otimes b & \longmapsto & [\varphi_a,\varphi_b] - \varphi_{\{a,b\}}. \end{array}$$

De plus, on montre facilement que, pour tous éléménts α,β et $\gamma \in (TV)_\natural$,

$$J(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{(|\alpha|+r)(|\beta|+|\gamma|)}J(\beta,\gamma,\alpha). \tag{B.4.1}$$

Supposons que pour tous a,b et $c \in V$, on a $J(a,b,c) = 0 \in (TV)_\natural$. Soient a,b,c et $d \in V$, avec $cd \in (TV)_\natural$. On a alors

$$\begin{aligned} J(a,b,cd) =& \big([\varphi_a,\varphi_b] - \varphi_{\{a,b\}}\big)(cd) \\ =& (-1)^{(|c|+r)(|a|+|b|)}c \otimes J(a,b,d) + J(a,b,c) \otimes d \in (TV)_\natural \\ =& 0, \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

Soit $\gamma \in (TV)_\natural$, alors par une récurrence sur la longueur de γ, on montre que si, pour tous a,b et c dans V, $J(a,b,c) = 0$, alors, pour tous a et b dans V et pour tout γ dans $(TV)_\natural$, alors $J(a,b,\gamma) = 0$. Or, par l'égalité (B.4.1), on a également que si, pour tous a,b et c dans V, $J(a,b,c) = 0$, alors, pour tous a et b dans V et pour tout γ dans $(TV)_\natural$, alors $J(\gamma,a,b) = 0$. En raisonnant de la même manière que précédemment, on arrive finalement à montrer que si, pour tous a,b et c dans V, $J(a,b,c) = 0$, alors, pour tous α,β et $\gamma \in (TV)_\natural$, $J(\alpha,\beta,\gamma) = 0$.

B.4.0.2 Remarque. Cette implication est importante : elle nous assure que vérifier la condition Jacobi sur les générateurs de l'algèbre est suffisant.

On peut montrer le même type de résultat concernant la compatibilité avec la différentielle. Supposons que pour tous a et $b \in V$:

$$\partial\{a,b\} = \{\partial a,b\} + (-1)^{|a|+r}\{a,\partial b\}.$$

Soient a et $b \in (TV)_\natural$, on a :

$$\begin{aligned}\partial\{a,b\} - \{\partial a, b\} - (-1)^{|a|+r}\{a, \partial b\} =& \partial \circ \varphi_a(b) - \varphi_{\partial a}(b) - (-1)^{|a|+r}\varphi_a \circ \partial(b) \\ =& \big([\partial, \varphi_a] - \varphi_{\partial a}\big)(b).\end{aligned}$$

Comme ∂ est une dérivation de TV, on $\psi_a := [\partial, \varphi_a] - \varphi_{\partial a} \in \underline{\mathrm{Der}}(TV)_\natural$. Ainsi, pour $a, b, c \in V$, on a $\psi_a(bc) = psi_a(b) \cdot c + (-1)^{(|a|+r+1)(|b|+r)} b \cdot \psi_a(c) = 0$. Un raisonnement par récurrence sur la longueur et l'antisymétrie du crochet nous donne finalement que si, pour tous a et b dans V, $\partial\{a,b\} = \{\partial a, b\} + (-1)^{|a|+r}\{a, \partial b\}$, alors pour tous α et β dans V,

$$\partial\{\alpha, \beta\} = \{\partial\alpha, \beta\} + (-1)^{|\alpha|+r}\{\alpha, \partial\beta\}.$$

On a donc montré la proposition suivante :

B.4.0.3 Proposition. *Soit (TV, ∂), une algèbre différentielle graduée quasi-libre, munie d'un r-crochet antisymétrique $\{-,-\} : (TV)_\natural \otimes (TV)_\natural \longrightarrow (TV)_\natural$ tel que, pour tous a, b et $c \in V$*

(i) $\partial\{a,b\} = \{\partial a, b\} + (-1)^{|a|+r}\{a, \partial b\}$*;*

(ii) $\big\{a, \{b,c\}\big\} - \big\{\{a,b\}, c\big\} - (-1)^{(|a|+r)(|b|+r)}\big\{b, \{a,c\}\big\} = 0$*,*

alors $\{-,-\}$ munit TV d'une structure de r-Poisson non commutative.

B.5 Double crochet induisant une structure 1-NCPoiss

On va, à présent, considérer certaines structures de Poisson non-commutative de degré 1 sur $T(V)$. On considère donc les 1-double crochets anti-symétriques quadratiques définis comme précédemment :

$$\begin{aligned}\{\!\{x, \theta\}\!\} &= a^x_{x,x} x \otimes x + a^x_{x,y} x \otimes y + a^x_{y,x} y \otimes x + a^x_{y,y} y \otimes y; \\ \{\!\{y, \theta\}\!\} &= a^y_{x,x} x \otimes x + a^y_{x,y} x \otimes y + a^y_{y,x} y \otimes x + a^y_{y,y} y \otimes y;\end{aligned}$$

mais *qui ne vérifient pas directement de compatibilité avec la différentielle* de $T(V)$ mais seulement au niveau du passage au quotient par les commutateurs, i.e. on veut que $\mu\{\!\{-,-\}\!\} =: \{-,-\} : T(V)_\natural \otimes T(V)_\natural \longrightarrow T(V)_\natural$ soit un 1-crochet de Lie faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T(V)_\natural[r] & \xrightarrow{\quad ad \quad} & \underline{\mathrm{End}}_k(T(V)_\natural[r]) \\ & \searrow^{\exists! i} & \uparrow \gamma \\ & & \underline{\mathrm{Der}}(T(V)[r])_\natural, \end{array}$$

avec $r = 1$. On doit avoir $\{\theta, \theta\} = -(-1)^{(|\theta|+r)(|\theta|+r)}\{\theta, \theta\}$, ce qui implique que $\{\theta, \theta\}$ est un commutateur. La compatibilité avec la différentielle de la structure NC-Poisson est :

$$\begin{aligned}\partial\{\theta, \theta\} &= \{\partial\theta, \theta\} + (-1)^{|\theta|}\{\theta, \partial\theta\} \\ &= \{\partial\theta, \theta\} + (-1)^{|\theta|+(|\theta|+r)(|\theta|+r+1)}\{\partial\theta, \theta\} = 0\end{aligned}$$

donc cette compatibilité n'impose aucune relation sur les coefficients. On a donc, que

$$\{\!\{\theta,\theta\}\!\} = \alpha(y\otimes\theta - \theta\otimes y) - \beta(x\otimes\theta-\theta\otimes x).$$

Il ne reste qu'à étudier la relation de Jacobi. On a :

$$\begin{aligned} J(x,\theta,\theta) &:= \big\{x\{\theta,\theta\}\big\} + (-1)^{(|x|+r)(|\theta|+|\theta|)}\big\{\theta,\{\theta,x\}\big\} + (-1)^{(|\theta|+r)(|x|+|\theta|)}\big\{\theta,\{x,\theta\}\big\} \\ &= 0 + \big\{\theta,\{\theta,x\}\big\} + (-1)^{(|\theta|+r)(|x|+r)}\big\{\theta,\{\theta,x\}\big\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, $J(y,\theta,\theta)=0$.

B.5.0.1 Proposition. *Soit $T(V)$ avec*

$$V := k\cdot x \oplus k\cdot y \oplus k\cdot\theta, \ \ \textit{avec } |x|=0=|y|,\ |\theta|=1 \textit{ et } d\theta = x\boxtimes y - y\boxtimes x = xy-yx$$

une résolution minimale cofibrante de $k[x,y]$. Alors tout 1-double crochet quadratique anti-symétrique défini par

$$\begin{aligned} \{\!\{x,\theta\}\!\} &= a^x_{x,x}x\otimes x + a^x_{x,y}x\otimes y + a^x_{y,x}y\otimes x + a^x_{y,y}y\otimes y; \\ \{\!\{y,\theta\}\!\} &= a^y_{x,x}x\otimes x + a^y_{x,y}x\otimes y + a^y_{y,x}y\otimes x + a^y_{y,y}y\otimes y; \\ \{\!\{\theta,\theta\}\!\} &= a(y\otimes\theta-\theta\otimes y) + b(x\otimes\theta-\theta\otimes x) \end{aligned}$$

induit une structure de 1-NC-Poisson sur $T(V)$.

On se pose alors la question suivante : en utilisant la construction de Van den Bergh (cf. [VdB08a, Ex. 2.5.5 (2.20)]), lesquels de ces crochets induisent une structure NC-Poisson sur $\sqrt[n]{TV}$ (avec $\sqrt[n]{-}$ le foncteur représentant le schéma de représentations non-commutatif (pour une définition de ce foncteur, on se reporte à [BKR13])? Pour commencer, on étudie la compatibilité avec la différentielle de $\big(\sqrt[n]{TV}\big)_\natural$, i.e. les relations sur les coefficients qu'implique la relation :

$$\partial\{\theta_{ij},\theta_{uv}\} = \{\partial\theta_{ij},\theta_{uv}\} + (-1)^{|\theta|+r}\{\theta_{ij},\partial\theta_{uv}\}\ . \tag{B.5.1}$$

On a, dans $(\sqrt[n]{TV})_\natural$:

$$\begin{aligned} \partial\{\theta_{ij},\theta_{uv}\} &= a\big(x_{uj}([x,y])_{iv} - ([x,y])_{uj}x_{iv}\big) + b\big(y_{uj}([x,y])_{iv} - ([x,y])_{uj}y_{iv}\big)\ ; \\ \{\partial\theta_{ij},\theta_{uv}\} &= \mu(1_{uj}\otimes 1_{iv})\big(x\star\{\!\{y,\theta\}\!\} + \{\!\{x,\theta\}\!\}\star y - y\star\{\!\{x,\theta\}\!\} - \{\!\{y,\theta\}\!\}\star x\big)\ ; \\ \{\theta_{ij},\partial\theta_{uv}\} &= -\mu(1_{uj}\otimes 1_{iv})\{\!\{\partial\theta,\theta\}\!\}^\circ. \end{aligned}$$

La relation (B.5.1) nous implique les relations suivantes sur les coefficients :

$$\begin{array}{ccccc} a^y_{x,x} & = & 0 & = & a^x_{y,y} \\ a & = & a^y_{x,y} - a^x_{x,x} & = & -a^y_{y,x} + a^x_{x,x} \\ b & = & a^y_{y,y} - a^x_{x,y} & = & a^y_{y,x} - a^y_{y,y} \\ a^y_{x,y} & = & -a^y_{y,x} & & \\ a^x_{x,y} & = & -a^x_{y,x} & & \end{array}$$

et on a donc un double-crochet de la forme

$$\begin{aligned}
\{\!\{x,\theta\}\!\} &= \alpha(x\otimes y - y\otimes x);\\
\{\!\{y,\theta\}\!\} &= \beta(x\otimes y - y\otimes x);\\
\{\!\{\theta,\theta\}\!\} &= \beta(x\otimes\theta - \theta\otimes x) - \alpha(y\otimes\theta - \theta\otimes y).
\end{aligned}$$

On retrouve donc exactement les double crochets de Poisson vu en section 2.2.2.3 : ils vérifient la condition double-Jacobi et sont compatibles avec la différentielle de TV.

B.5.0.2 Proposition. *Soit $T(V)$ avec*

$$V := k\cdot x \oplus k\cdot y \oplus k\cdot\theta,\ \ \textit{avec } |x| = 0 = |y|,\ |\theta| = 1 \textit{ et } d\theta = x\otimes y - y\otimes x$$

une résolution minimale cofibrante de $k[x,y]$. Tout 1-double crochet quadratique anti-symétrique qui induit une structure 1-NC-Poisson sur $\sqrt[n]{TV}$ est un 1-double-crochet de Poisson sur $T(V)$.

ANNEXE C

RAPPELS DE VALLETTE

On rappelle ici quelques résultats du premier chapitre de la thèse de Vallette [Val03], contenu dans l'article [Val09]. Les deux premières sections rappellent la construction du monoïde libre dans une catégorie monoïdale dont le produit vérifie deux hypothèses techniques. La troisième section établie la correspondance entre le produit monoïdal $\boxtimes_c^{Val}$ défini dans [Val03] et le produit de composition connexe défini au chapitre 3. La quatrième section évoque le bifoncteur $-\boxtimes-$ de composition non-connexe défini par Vallette dans [Val03]. On finit par une section où l'on rappelle les structures de catégories de modèles des catégories des opérades, propérades et props réduites.

C.1 Foncteurs polynomiaux et analytiques

Soit $\mathtt{A}$ une catégorie abélienne, on note $\Delta_n : \mathtt{A} \to \mathtt{A}^{\times n}$ le foncteur diagonal.

C.1.0.1 Définition. *Foncteur polynomial homogène* – [Val03, Chap. 1 Sect. 8]
On appelle *foncteur polynomial homogène de degré* n, tout endofoncteur $F : \mathtt{A} \to \mathtt{A}$ qui s'écrit sous la forme $F_{(n)} = F_n \circ \Delta_n$ avec $F_n : \mathtt{A}^{\times n} \to \mathtt{A}$ un foncteur additif en chacune de ses entrées.

C.1.0.2 Exemple. Soient X et Y, deux ensembles et une application $g : X \to Y$, . On associe à g le foncteur polynomial (non-homogène)

$$\begin{array}{rccc} P_g : & \mathtt{Set} & \longrightarrow & \mathtt{Set} \\ & S & \longmapsto & \coprod_{y\in Y} S^{X_y} \end{array}$$

où X_y est la fibre de g au dessus de $y \in Y$ et $S^{X_y} = \mathrm{Hom}_{\mathtt{Set}}(X_y, S)$. En particulier, on a

$$|P_g(S)| = \sum_{y\in Y} |S|^{|X_y|}$$

qui est donc polynomial en $|S|$: en ce sens, le concept de foncteur polynomial est une catégorification du concept de polynôme.

C.1.0.3 Définition. *Foncteur analytique scindé*
On appelle *foncteur analytique scindé*, tout endofoncteur $F : \mathtt{A} \to \mathtt{A}$ qui s'écrit sous la forme $F = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} F_{(n)}$ où $F_{(n)}$ est un foncteur polynomial homogène de degré n.

C.1.0.4 Exemple. On se rapportera aux lemmes 3.1.3.3 et 3.2.3.5.

C.1.0.5 Définition. *Coégalisateur réfléxif*
Une paire de morphismes

$$M_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} M_0$$

est dite *réfléxive* s'il existe un morphisme $s_0 : M_0 \to M_1$ tel que $d_0 \circ s_0 = \mathrm{id}_{M_0} = d_1 \circ s_0$. Le coégalisateur d'une paire réfléxive est dit *réfléxif*.

C.1.0.6 Définition. On dit d'une structure monoïdale sur $(\mathtt{A}, \odot)$ qu'il *préserve les coégalisateurs réfléxifs* si, pour tout objet A de la catégorie $\mathtt{A}$, les foncteurs de multiplications à gauche et à droite par A :

$$L_A : \begin{array}{ccc} \mathtt{A} & \longrightarrow & \mathtt{A} \\ X & \longmapsto & A \odot X \end{array} \quad \text{et} \quad R_A : \begin{array}{ccc} \mathtt{A} & \longrightarrow & \mathtt{A} \\ X & \longmapsto & X \odot A \end{array}$$

préservent les coégalisateurs réfléxifs.

C.1.0.7 Proposition. [Val03, Prop. 29]
Tout foncteur analytique scindé préserve les coégalisateurs réfléxifs.

C.1.0.8 Proposition. [Val03, Prop. 16]
Soit $(\mathtt{A}, \odot, I)$ une catégorie monoïdale abélienne dont le produit préserve les coégalisateurs réfléxifs. Soient

$$M_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\rightarrow}{\rightrightarrows}}}} M_0 \overset{\pi_M}{\twoheadrightarrow} M \qquad \textit{et} \qquad N_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\rightarrow}{\rightrightarrows}}}} N_0 \overset{\pi_N}{\twoheadrightarrow} N,$$

deux coégalisateurs réfléxifs. Alors $M \odot N$ est le coégalisateur réflexif de

$$M_1 \odot N_1 \underset{d_0 \odot d_0}{\overset{d_1 \odot d_1}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\rightarrow}{\rightrightarrows}}}} M_0 \odot N_0 \overset{\pi_M \odot \pi_N}{\twoheadrightarrow} M \odot N \quad .$$

C.2 Monoïde libre dans une catégorie monoïdale abélienne

On suppose à présent que $(\mathtt{A}, \odot, I)$ est une catégorie monoïdale abélienne telle que, pour tout objet A de la catégorie $\mathtt{A}$, les foncteurs de multiplications R_A et L_A préservent les coégalisateurs réfléxifs ainsi que les colimites séquentielles (cf. définition C.1.0.6). On rappelle la construction du monoïde libre dans une telle catégorie (cf. [Val09, Sect. 3]). Pour toute cette section, on fixe l'objet $V \in \mathrm{Ob}\,\mathtt{A}$. On considère l'objet augmenté associé $V_+ := I \oplus V$ et on pose les notations suivantes :

- ▷ $\eta_V : I \hookrightarrow V_+$, l'injection de I dans V_+ ;
- ▷ $\epsilon_V : V_+ \twoheadrightarrow I$, la projection de V_+ sur I ;
- ▷ $i_V : V \to V_+$, l'injection de V dans V_+ ;
- ▷ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $V_n := (V_+)^{\odot n}$, la puissance $\odot$ n-ième de V_+ ;
- ▷ $\lambda_A : I \odot A \overset{\cong}{\to} A$ et $\rho_A : A \odot I \overset{\cong}{\to} A$, les isomorphismes naturels de la catégorie monoïdale $(\mathtt{A}, \odot, I)$.

L'injection η_V induit des morphismes de dégénérescences : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$\eta_{V,i} : V_n \cong (V_+)^{\odot i} \odot I \odot (V_+)^{\odot(n-i)} \xrightarrow{V_i \odot \eta_V \odot V_{n-i}} (V_+)^{\odot i} \odot (V_+) \odot (V_+)^{\odot(n-i)} \cong V_{n+1} \ .$$

On définit le morphisme $\tau_V : V \to V_2$ comme la composée suivante :

$$V \xrightarrow[\lambda_V^{-1}+\rho_V^{-1}]{} I \odot V \oplus V \odot I \xrightarrow[\eta\odot i_V - i_V \odot \eta]{} (I \oplus V) \odot (I \oplus V) =: V_2 \ .$$

Pour deux objets A et B de la catégorie $\mathtt{A}$, on définit l'objet $A \odot (\underline{V} \oplus V_2) \odot B$ comme le conoyau du morphisme

$$A \odot V_2 \odot B \xrightarrow{A \odot i_{V_2} \odot B} A \odot (V \oplus V_2) \odot B$$

où le morphisme i_{V_2} est l'injection canonique $V_2 \hookrightarrow V \oplus V_2$; par [Val03, Cor. 4], l'objet $A \odot (\underline{V} \oplus V_2) \odot B$ correspond aussi au noyau de l'application

$$A \odot (V \oplus V_2) \odot B \xrightarrow{A \odot \pi_{V_2} \odot B} A \odot V_2 \odot B$$

où π_{V_2} est la projection $V \oplus V_2 \to V_2$. On peut donc voir l'objet $A \odot (\underline{V} \oplus V_2) \odot B$ comme un sous-objet de $A \odot (V \oplus V_2) \odot B$. On définit ainsi :

▷ l'objet $R_{A,B}$ comme l'image de la composée

$$A \odot (\underline{V} \oplus V_2) \odot B \hookrightarrow A \odot (V \oplus V_2) \odot B \xrightarrow{A \odot (\tau + \mathrm{id}_{V_2}) \odot B} A \odot V_2 \odot B \quad ;$$

▷ l'objet $\widetilde{V}_n$ comme le conoyau du morphisme

$$\bigoplus_{i=0}^{n-2} R_{V_i, V_{n-i-2}} \longrightarrow V_n.$$

Par [Val09, Lem. 4], les morphismes $\eta_{V,i} : V_n \to V_{n+1}$ induisent tous le même morphisme au quotient :

$$\widetilde{\eta}_V : \widetilde{V}_n \longrightarrow \widetilde{V}_{n+1}.$$

C.2.0.1 Définition. *L'objet $\mathscr{F}(V)$* – [Val09, Sect. 3]
L'objet $\mathscr{F}(V)$ associé à l'objet V est défini par la colimite séquentielle suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\widetilde{V}_0 := I & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \widetilde{V}_1 = V_1 & = & V_+ & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \widetilde{V}_2 & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \cdots & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \widetilde{V}_n & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_V} & \cdots \\
& {\scriptstyle j_{V,0}} \searrow & & {\scriptstyle j_{V,1}} \searrow & & & {\scriptstyle j_{V,2}} \searrow & & & & {\scriptstyle j_{V,n}} \searrow & & \\
& & & & & & & \mathscr{F}(V) := \operatorname*{Colim}_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{V}_n & & & &
\end{array}$$

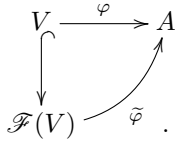
On munit $\mathscr{F}(V)$ d'une structure de monoïde, où l'unité est donnée par $\bar{\eta}_V := j_{V,0} : I \to \mathscr{F}(V)$ et le produit est induit par la concaténation $V_n \odot V_m \to V_{n+m}$. On considère le morphisme

$$\mu_{V,(m,n)} : V_m \odot V_n \xrightarrow{\cong} V_{m+n} \twoheadrightarrow \widetilde{V}_{m+n} \xrightarrow{j_{V,m+n}} \mathscr{F}(V) \ ;$$

par [Val09, Prop. 6], ce morphisme induit un (unique) morphisme $\widetilde{\mu}_{V,(m,n)} : \widetilde{V}_m \odot \widetilde{V}_n \to \mathscr{F}(V)$, qui par, [Val09, Lem. 7, 8], induit le produit

$$\bar{\mu}_V : \mathscr{F}(V) \odot \mathscr{F}(V) \longrightarrow \mathscr{F}(V).$$

C.2.0.2 Théorème. Monoïde libre – [Val09, Th. 10]
Dans une catégorie monoïdale abélienne $(\mathtt{A}, \odot, I)$ *qui admet des colimites séquentielles et telle que le produit monoïdal préserve les colimites séquentielles et les coégalisateurs réfléxifs, pour tout objet* V *de* $\mathtt{A}$*, le monoïde* $(\mathscr{F}(V), \bar{\mu}_V, \bar{\eta}_V)$ *est libre sur* V*, i.e. pour tout objet* V *et tout monoïde* A *avec un morphisme* $\varphi : V \to A$*, il existe un unique morphisme* $\widetilde{\varphi}$ *faisant commuter le diagramme suivant.*



C.2.0.3 Proposition. *Soient* $(\mathtt{C}, \odot_{\mathtt{C}}, I_{\mathtt{C}})$ *et* $(\mathtt{D}, \odot_{\mathtt{D}}, I_{\mathtt{D}})$*, deux catégories monoïdales abéliennes qui admettent des colimites séquentielles et telles que le produit monoïdal préserve les colimites séquentielles et les coégalisateurs réfléxifs. Soit* $G : \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ *un foncteur monoïdal commutant aux colimites. Alors* G *commute aux foncteurs monoïdes libres, i.e.*

$$G\big(\mathscr{F}_{\mathtt{C}}(-)\big) = \mathscr{F}_D\big(G(-)\big).$$

Démonstration. Soit V un objet de la catégorie $\mathtt{C}$. Par hypothèse, G commute aux colimites donc en particulier aux coproduits : on a donc

$$G(V_+) \cong G(V) \oplus G(I_{\mathtt{C}}) \cong G(V) \oplus I_{\mathtt{D}} = G(V)_+$$

et, comme G est monoïdal, on a que, pour tout tout entier naturel n

$$G(V_n) \cong G(V)_n.$$

Par hypothèse, G commute aux colimites donc en particulier, l'image par G d'un conoyau est un conoyau : pour tous objets A et B de la catégorie $\mathtt{A}$, on a donc

$$G(R_{A,B}) \cong R_{G(A),G(B)}$$

et pour tout entier naturel n, on a $G(\widetilde{V}_n) \cong \widetilde{G(V)}_n$. Finalement, comme G commute aux colimites, on a donc

$$G\big(\mathscr{F}_{\mathtt{C}}(V)\big) \cong \mathscr{F}_D\big(G(V)\big)$$

d'où le résultat. □

On rappelle une dernière proposition de la thèse de Vallette qui décrit l'idéal engendré par un sous-objet R d'un monoïde M d'une catégorie monoïdale abélienne $(\mathtt{C}, \odot_{\mathtt{C}}, I_{\mathtt{C}})$.

C.2.0.4 Proposition. [Val03, Prop. 28]
Soit $R \overset{i}{\hookrightarrow} M$ un sous-objet d'un monoïde M de $(\mathtt{C}, \odot, I)$. Alors l'idéal engendré par R correspond à l'image du morphisme

$$\mathrm{Coker}\Big(M^{\odot 3} \to M \odot (M \oplus R) \odot M\Big) \xrightarrow{\mu^2(M\odot(M+i)\odot M)} M$$

que l'on notera $\langle R \rangle$.

Pour plus de détails, on pourra consulter [Val08, Appendix B].

C.3 Correspondance des produits $\boxtimes_c$ et $\boxtimes_c^{Val}$

Dans sa thèse [Val03], Vallette définit le produit de composition connexe de deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits en s'appuyant la définition de graphe de permutation. Après avoir redonner les différentes définitions nécessaires, on démontre l'équivalence de notre définition de produit connexe (cf. définition 3.2.3)avec celle initialement donnée par Vallette (cf. définition C.3.0.9).

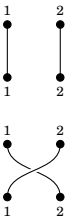
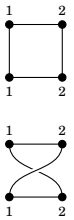
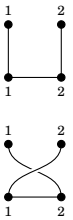
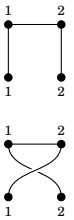
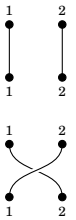
C.3.0.1 Définition. *Graphe d'une permutation*
Soit un entier naturel N. A chaque élément du groupe $\mathfrak{S}_N$, on associe *de manière unique* son graphe de permutation donné par la "tresse" à N brins correspondante. On note Γ_N l'ensemble de ces graphes.

C.3.0.2 Exemple.

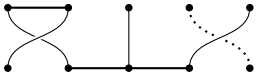
$(12)(45) \in \mathfrak{S}_5$ a pour représentation géométrique

C.3.0.3 Définition. *Permutation connexe "à la Vallette"* – [Val03, Chap 2 1.2]
Soient a, b et N trois entiers naturels avec a et b non-nuls, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_a) \in (\mathbb{N}^*)^a$ et $\bar{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_b) \in (\mathbb{N}^*)^b$ tels que $|\bar{\alpha}| = N = |\bar{\beta}|$.
On définit les permutations $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-connexes de $\mathfrak{S}_N$ comme l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_N$ dont le graphe est connexe, si on relie les sorties indicées par $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_1 + \ldots + \alpha_i + \alpha_{i+1}$ pour $0 \leqslant i \leqslant a-1$, et les entrées indicées par $\beta_1 + \ldots + \beta_i + 1, \ldots, \beta_1 + \ldots + \beta_i + \beta_{i+1}$ pour $0 \leqslant i \leqslant b-1$.
On note cet ensemble $S_c^{\bar{\beta},\bar{\alpha}}$.

C.3.0.4 Exemple. Les permutations $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-connexes de $\mathfrak{S}_2$

$\mathfrak{S}_2$	$(2),(2)$	$(2),(1,1)$	$(1,1),(2)$	$(1,1),(1,1)$
				
	$\#S_c^{(2),(2)} = 2$	$\#S_c^{(2),(1,1)} = 2$	$\#S_c^{(1,1),(2)} = 2$	$\#S_c^{(1,1),(1,1)} = 0$

C.3.0.5 Non-exemple. Par contre, la permutation $(12)(45)$ n'est pas dans $S_c^{(1,3,1),(2,1,1,1)}$. En effet, on a le graphe


,

le brin en pointillé formant une première composante connexe et le graphe noir une seconde.

C.3.0.6 Proposition. [Val03, Prop. 30]
Toute permutation de $\mathfrak{S}_N$ est $((N),\bar{j})$-connexe avec $\bar{j}\in(\mathbb{N}^*)^k$ avec $|\bar{j}|=N$, c'est à dire

$$S_c^{(N),\bar{j}}=\mathfrak{S}_N.$$

De plus, si $\bar{j}\neq(N)$, alors $S_c^{\bar{j},(1,\dots,1)}=\emptyset$.

On cherche à exprimer dans le formalisme introduit au chapitre 3 la notion de permutation connexe. Soient $I\in\mathcal{Y}_r^{\mathrm{ord}}(\llbracket 1,N\rrbracket)$ et $J\in\mathcal{Y}_r^{\mathrm{ord}}(\llbracket 1,N\rrbracket)$; au couple (I,J), on peut associer l'élément $\sigma_{(I,J)}\in\mathfrak{S}_N$ donné par :

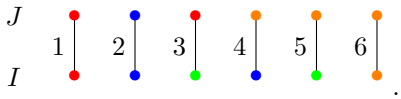
$$\sigma_{(I,J)}:=\sigma_I^{-1}\sigma_J;$$

où les permutations σ_I,σ_J sont les permutations associées aux partitions I,J comme défini à l'exemple 3.1.1.5.

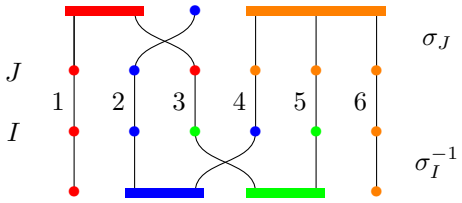
C.3.0.7 Exemple. On considère les deux décompositions ordonnées de $\llbracket 1,6\rrbracket$ suivantes :

$$\begin{aligned}I:=&\big(I_\bullet:=\{1\}\big)\amalg\big(I_\bullet:=\{2,4\}\big)\amalg\big(I_\bullet:=\{3,5\}\big)\amalg\big(I_\bullet:=\{6\}\big);\\ J:=&\big(J_\bullet:=\{1,3\}\big)\amalg\big(J_\bullet:=\{2\}\big)\amalg\big(J_\bullet:=\{4,5,6\}\big);\end{aligned}$$

et l'on représente le couple $(I,J)\in X(N)$ par le diagramme :



On vérifie que $(J,I)\in\mathcal{X}^{\mathrm{conn}}(\llbracket 1,6\rrbracket)$. On représente $\sigma_I\sigma_J^{-1}$ de la manière suivante :



et on constate que $\sigma_I^{-1}\sigma_J=(243)$ est un élément de $S_c^{(1,2,2,1),(2,1,3)}$.

C.3.0.8 Lemme. *Soient $r,s,N\in\mathbb{N}^*$, et soient $\bar{k}\in(\mathbb{N}^*)^r$ et $\bar{j}\in(\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\sum_{\alpha=1}^r k_\alpha=N=\sum_{\beta=1}^s j_\beta$. L'application*

$$\begin{array}{rccc}\varphi:&\big\{(K,J)\in X_{r,s}^{\mathrm{conn,ord}}(N)\mid(|K_1|,\dots,|K_r|)=\bar{k},(|J_1|,\dots,|J_s|)=\bar{j}\big\}&\longrightarrow&S_c^{\bar{k},\bar{j}}\\ &(K,J)&\longmapsto&\sigma_K^{-1}\sigma_J\end{array}$$

est surjective.

Démonstration. Par définition de la connexité d'un couple $(K,J)\in\mathcal{X}_{r,s}^{\mathrm{conn,ord}}(N)$, si l'on considère le graphe de la permutation $\sigma_K^{-1}\sigma_J$ dont on a relié les entrées et les sorties comme dans la définition de permutation connexe, il existe un chemin joignant toute entrée i et toute sortie j de ce graphe.

Ainsi, on a bien $\sigma_K^{-1}\sigma_J \in S_c^{\bar{k},\bar{j}}$. Soit $\sigma \in S_c^{\bar{k},\bar{j}}$, alors on considère

$$[\![1,N]\!]_{\bar{j}} \overset{not}{:=} \Big\{[\![1,j_1]\!],[\![j_1+1,j_1+j_2]\!],\ldots,[\![j_1+\ldots+j_{s-1}+1,j_1+\ldots+j_s]\!]\Big\},$$

et

$$\Big([\![1,N]\!]\cdot\sigma\Big)_{\bar{k}} \overset{not}{:=} \Big\{\{\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(2),\ldots\sigma^{-1}(k_1)\},\ldots,\{\sigma^{-1}(k_1+\ldots+k_{r-1}+1),\ldots,\sigma^{-1}(k_1+\ldots+k_r)\}\Big\};$$

le couple $([\![1,N]\!]\cdot\sigma)_{\bar{k}},[\![1,N]\!]_{\bar{j}})$ est bien un élément de $\mathcal{X}_{r,s}^{\mathrm{conn,ord}}(N)$ par connexité de la permutation σ. On a donc défini une application

$$\begin{array}{rccc}\psi: & S_c^{\bar{k},\bar{j}} & \longrightarrow & \big\{(K,J)\in\mathcal{X}_{r,s}^{\mathrm{conn,ord}}(N)\mid(|K_1|,\ldots,|K_r|)=\bar{k},(|J_1|,\ldots,|J_s|)=\bar{j}\big\}\\ & \sigma & \longmapsto & \big(([\![1,N]\!]\cdot\sigma)_{\bar{k}},[\![1,N]\!]_{\bar{j}}\big)\end{array}$$

qui fournit une section de φ et donc φ est surjective, d'où le résultat. □

Rappelons à présent la définition du produit connexe de Vallette.

C.3.0.9 Définition/Proposition. *Produit $\boxtimes_c^{Val}$ "à la Vallette"* – [Val03, Chap. 2 Sect. 1.3, Prop. 33] Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits. On définit le produit $P\boxtimes_c Q$ par

$$P\boxtimes_c^{Val}Q(m,n):=\bigoplus_{N\in\mathbb{N}}\Bigg(\bigoplus_{\Xi}k[\mathfrak{S}_m]\underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{l}}]}{\otimes}P(\bar{l},\bar{k})\underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{k}}]}{\otimes}k[S_c^{\bar{k},\bar{j}}]\underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{j}}]}{\otimes}Q(\bar{j},\bar{i})\underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}]}{\otimes}k[\mathfrak{S}_n]\Bigg)\Big/_{\sim}$$

où la relation d'équivalence $\sim$ est $\theta\otimes p_1\otimes\ldots\otimes p_a\otimes\eta\otimes q_1\otimes\ldots\otimes q_b\otimes\omega\sim\theta\sigma_{\bar{l}}^{-1}\otimes p_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes p_{\sigma^{-1}(a)}\otimes\sigma_{\bar{k}}\eta\nu_{\bar{j}}\otimes q_{\nu(1)}\otimes\ldots\otimes q_{\nu(b)}\otimes\nu_{\bar{n}}^{-1}\omega$ avec $\theta,\eta,\omega,\sigma$ et ν des permutations et $\bar{l}$, $\bar{k}$ (resp. $\bar{j}$, $\bar{i}$) des a-uplets (resp. b-uplets) d'entiers. On définit le $\mathfrak{S}$-bimodule I donné par

$$I:=\begin{cases}I(1,1) & =k,\\ I(m,n) & =0\ \text{ sinon.}\end{cases}$$

La catégorie $\big(\mathfrak{S}\text{-}\mathtt{bimod}_k,\boxtimes_c^{Val},I\big)$ est une catégorie monoïdale.

On démontre ici que la produit de composition connexe défini à la section 3.2.3 est identique au produit de composition connexe défini par Vallette.

C.3.0.10 Proposition. *Pour tous $\mathfrak{S}$-bimodules réduits P et Q et pour tous entiers naturels m et n non-nuls, on a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n^{op}$-modules :*

$$\big(P\boxtimes_c Q\big)([\![1,m]\!],[\![1,n]\!])\cong\big(P\boxtimes_c^{Val}Q\big)(m,n).$$

Démonstration. Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\big(P\boxtimes_c Q\big)([\![1,m]\!],[\![1,n]\!]):=\Bigg(\bigoplus_{N,r,s\in\mathbb{N}}\ \bigoplus_{\substack{(\{I,K'\},\{K'',J\})\\ \in\mathbb{X}^{N,\mathrm{conn}}([\![1,m]\!],[\![1,n]\!])}}\ \bigotimes_{\alpha}P(I_\alpha,K'_\alpha)\otimes\bigotimes_{\beta}Q(K''_\beta,J_\beta)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}}.$$

$$\cong\Bigg(\bigoplus_{N\in\mathbb{N}}\Bigg(\bigoplus_{\substack{\{I,K'\}\in\mathbb{Y}_r^{ord}([\![1,m]\!],[\![1,N]\!])\\ \{K'',J\}\in\mathbb{Y}_s^{ord}([\![1,N]\!],[\![1,n]\!])\\ (K',K'')\in\mathcal{X}_{r,s}^{\mathrm{conn}}([\![1,N]\!])}}\Big(\bigotimes_{\alpha=1}^{r}P(I_\alpha,K'_\alpha)\Big)_{\mathfrak{S}_r}\otimes\Big(\bigotimes_{\beta=1}^{s}Q(K''_\beta,J_\beta)\Big)_{\mathfrak{S}_s}\Bigg)\Bigg)\Big/_{\mathfrak{S}}$$

$$\cong \Big(\bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\bigoplus_{\substack{\{I,K'\}\in\mathbb{Y}_r^{ord}([\![1,m]\!],[\![1,N]\!])\\ \{K'',J\}\in\mathbb{Y}_s^{ord}([\![1,N]\!],[\![1,n]\!])\\ (K',K'')\in\mathcal{X}_{r,s}^{\mathrm{conn}}([\![1,N]\!])}} \bigotimes_{\alpha=1}^{r} P(I_\alpha,K'_\alpha)\otimes \bigotimes_{\beta=1}^{s} Q(K''_\beta,J_\beta)\Big)_{\mathfrak{S}_r\times\mathfrak{S}_s}\Big)\Big/_{\mathfrak{S}}$$

$$\cong \Big(\bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\bigoplus_{\substack{\bar{l}\in(\mathbb{N}^*)^r,|\bar{l}|=m\\ \bar{i}\in(\mathbb{N}^*)^s,|\bar{i}|=n\\ (K',K'')\in X_{r,s}^{\mathrm{conn,ord}}([\![1,N]\!])}} k[\mathfrak{S}_m]\underset{\prod\mathfrak{S}_{l_\alpha}}{\otimes} \bigotimes_{\alpha=1}^{r} P(l_\alpha,K'_\alpha)\otimes \bigotimes_{\beta=1}^{s} Q(K''_\beta,i_\beta)\underset{\prod\mathfrak{S}_{i_\beta}}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big)_{\mathfrak{S}_r\times\mathfrak{S}_s}\Big)\Big/_{\mathfrak{S}}$$

$$\xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\bigoplus_{\substack{\bar{l},\bar{k}\in(\mathbb{N}^*)^r,|\bar{l}|=m\\ \bar{i},\bar{j}\in(\mathbb{N}^*)^s,|\bar{i}|=n\\ |\bar{k}|=N=|\bar{j}|}} k[\mathfrak{S}_m]\underset{\prod\mathfrak{S}_{l_\alpha}}{\otimes} \Big(\bigotimes_{\alpha=1}^{r} P(l_\alpha,k_\alpha)\Big)\underset{\mathfrak{S}_{\bar{k}}}{\otimes} k[S_c^{\bar{k},\bar{j}}]\underset{\mathfrak{S}_{\bar{j}}}{\otimes} \Big(\bigotimes_{\beta=1}^{s} Q(j_\beta,i_\beta)\Big)\underset{\prod\mathfrak{S}_{i_\beta}}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big)_{\mathfrak{S}_r\times\mathfrak{S}_s}$$

où φ envoie, pour $(K',K'')\in\mathcal{X}_{r,s}^{\mathrm{conn}}([\![1,N]\!])$ fixé, la composante

$$\Big(k[\mathfrak{S}_m]\underset{\prod\mathfrak{S}_{l_\alpha}}{\otimes} \bigotimes_{\alpha=1}^{r} P(l_\alpha,K'_\alpha)\otimes \bigotimes_{\beta=1}^{s} Q(K''_\beta,i_\beta)\Big)\underset{\prod\mathfrak{S}_{i_\beta}}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big/_{\mathfrak{S}_N}$$

sur

$$k[\mathfrak{S}_m]\underset{\prod\mathfrak{S}_{l_\alpha}}{\otimes} \bigotimes_{\alpha=1}^{r} P\big(l_\alpha,[\![\sum_{j=1}^{\alpha-1}|K'_j|+1,\sum_{j=1}^{\alpha}|K'_j|]\!]\big)\underset{\mathfrak{S}_{\bar{k}}}{\otimes}\sigma_{K'}^{-1}\underset{\mathfrak{S}_N}{\otimes}\sigma_{K''}\underset{\mathfrak{S}_{\bar{j}}}{\otimes} \bigotimes_{\beta=1}^{s} Q\big([\![\sum_{j=1}^{\beta-1}|K''_j|+1,\sum_{j=1}^{\beta}|K''_j|]\!],i_\beta\big)\underset{\prod\mathfrak{S}_{i_\beta}}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]$$

$$\cong k[\mathfrak{S}_m]\underset{\prod\mathfrak{S}_{l_\alpha}}{\otimes} \bigotimes_{\alpha=1}^{r} P\big(l_\alpha,[\![\sum_{j=1}^{\alpha-1}|K'_j|+1,\sum_{j=1}^{\alpha}|K'_j|]\!]\big)\underset{\mathfrak{S}_{\bar{k}}}{\otimes}\sigma_{K'}^{-1}\sigma_{K''}\underset{\mathfrak{S}_{\bar{j}}}{\otimes} \bigotimes_{\beta=1}^{s} Q\big([\![\sum_{j=1}^{\beta-1}|K''_j|+1,\sum_{j=1}^{\beta}|K''_j|]\!],i_\beta\big)\underset{\prod\mathfrak{S}_{i_\beta}}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]$$

Or, d'après le lemme C.3.0.8, le morphisme φ est surjectif, et le quotient par le groupe $\mathfrak{S}_{\bar{k}}\times\mathfrak{S}_{\bar{j}}$ nous donne l'injectivité, d'où le résultat. □

C.4 Le produit de composition non-connexe ⊠ *"à la Vallette"*

On rappelle dans cette section la définition du produit de composition non-connexe ⊠ de [Val03].

C.4.0.1 Définition. *Produit ⊠ de composition "à la Vallette"* – [Val03, Sect 1.5]
Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits. On définit le produit $P\boxtimes Q$ par

$$P\boxtimes Q(m,n):=\bigoplus_{N\in\mathbb{N}}\Big(\bigoplus_{\Xi} k[\mathfrak{S}_m]\underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{l}}]}{\otimes}P(\bar{l},\bar{k})\underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{k}}]}{\otimes}k[\mathfrak{S}_N]\underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{j}}]}{\otimes}Q(\bar{j},\bar{i})\underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}]}{\otimes}k[\mathfrak{S}_n]\Big)\Big/_{\sim}$$

où la relation d'équivalence $\sim$ est $\theta\otimes p_1\otimes\ldots\otimes p_a\otimes\eta\otimes q_1\otimes\ldots\otimes q_b\otimes\omega\sim\theta\sigma_{\bar{l}}^{-1}\otimes p_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes p_{\sigma^{-1}(a)}\otimes\sigma_{\bar{k}}\eta\nu_{\bar{j}}\otimes q_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes q_{\sigma(b)}\otimes\nu_{\bar{n}}^{-1}\omega$ avec $\theta,\eta,\omega,\sigma$ et ν des permutations et $\bar{l}$, $\bar{k}$ (resp. $\bar{j}$, $\bar{i}$) des a-uplets (resp. b-uplets) d'entiers.

Notons que le produit ⊠ n'est pas monoïdal, ceci pour deux raisons.

(i) Ce produit ne possède pas d'unité.

(ii) Il n'est pas associatif, comme le montre le contre-exemple suivant. On considère les 3 $\mathfrak{S}$-

bimodules suivants, chacun concentré en une seule arité :

$$P = P(1,1) = k, \;\; Q = Q(1,1) = k \text{ et } R = R(2,2) = k.$$

Comparons les deux termes $\big(P \boxtimes Q\big) \boxtimes R(2,2)$ et $P \boxtimes \big(Q \boxtimes R\big)(2,2)$.

▷ Par définition, on a

$$\begin{aligned}(P \boxtimes Q) \boxtimes R(2,2) &= \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\bigoplus_{\Xi} k[\mathfrak{S}_m] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{l}}]}{\otimes} \big(P \boxtimes Q\big)(\bar{l},\bar{k}) \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{k}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_N] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{j}}]}{\otimes} R(\bar{j},\bar{i}) \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n] \Big) \Big/ _{\sim} \\ &= \Big(k[\mathfrak{S}_2] \otimes \big(P \boxtimes Q\big)(1,1)^{\otimes 2} \otimes k[\mathfrak{S}_2] \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} R(2,2) \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_2] \\ &\qquad \oplus k[\mathfrak{S}_m] \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} \big(P \boxtimes Q\big)(2,2) \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_2] \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} R(2,2) \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_2] \Big) \Big/ _{\sim}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\big(P \boxtimes Q\big)(1,1) &= \Big(P(1,1) \otimes k[\mathfrak{S}_1] \otimes Q(1,1) \Big) \Big/ _{\sim} \quad \cong k \\ \big(P \boxtimes Q\big)(2,2) &= \Big(k[\mathfrak{S}_2] \otimes P(1,1)^{\otimes 2} \otimes k[\mathfrak{S}_2] \otimes Q(1,1)^{\otimes 2} \otimes k[\mathfrak{S}_2] \Big) \Big/ _{\sim} \quad \cong k[\mathfrak{S}_2]\end{aligned}$$

donc finalement

$$\big(P \boxtimes Q\big) \boxtimes R(2,2) \cong \Big(k[\mathfrak{S}_2] \otimes \big(P \boxtimes Q\big)(1,1)^{\otimes 2} \otimes R(2,2) \oplus \big(P \boxtimes Q\big)(2,2) \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} R(2,2) \Big) \Big/ _{\sim}$$

$$\Big(\big(P \boxtimes Q\big) \boxtimes R \Big)(2,2) \cong k^2.$$

▷ Pour l'autre terme, on a

$$P \boxtimes \big(Q \boxtimes R\big)(2,2) \cong \Big(k[\mathfrak{S}_2] \otimes P(1,1)^{\otimes 2} \otimes k[\mathfrak{S}_2] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{j}}]}{\otimes} \big(Q \boxtimes R\big)(\bar{j},\bar{i}) \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_2] \Big) \Big/ _{\sim}$$

avec

$$\begin{aligned}\big(Q \boxtimes R\big)(1,1) &= 0 \\ \big(Q \boxtimes R\big)(2,2) &= \Big(k[\mathfrak{S}_2] \otimes Q(1,1)^{\otimes 2} \otimes k[\mathfrak{S}_2] \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} R(2,2) \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_2] \Big) \Big/ _{\sim} \cong k\end{aligned}$$

donc

$$P \boxtimes \big(Q \boxtimes R\big)(2,2) = \Big(k[\mathfrak{S}_2] \otimes P(1,1)^{\otimes 2} \otimes k[\mathfrak{S}_2] \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} \big(Q \boxtimes R\big)(2,2) \underset{k[\mathfrak{S}_2]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_2] \Big) \Big/ _{\sim} \cong k.$$

On a donc que

$$\big(P \boxtimes Q\big) \boxtimes R(2,2) \ncong P \boxtimes \big(Q \boxtimes R\big)(2,2),$$

ce qui conclut notre contre-exemple.

La proposition suivante fait le lien entre les produits monoïdaux $\square$ et $\otimes^{conc}$ et le produit de composition non connexe $\boxtimes$.

C.4.0.2 Proposition. *Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits. On a l'isomorphisme de $\mathfrak{S}$-bimodules suivant :*

$$P \boxtimes Q \cong \mathbb{S}P \square \mathbb{S}Q.$$

Démonstration. Soient P et Q deux $\mathfrak{S}$-bimodules réduits, et m et n deux entiers naturels. On a

$$\big(\mathbb{S}(P) \square \mathbb{S}(Q)\big)(m,n) = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{S}(P)(m,N) \underset{k[\mathfrak{S}_N]}{\otimes} \mathbb{S}(Q)(N,n)$$
$$= \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \bigoplus_{\Xi_P \coprod \Xi_Q} \Big(k[\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_N^{op}] \underset{k[\prod(\mathfrak{S}_{l_\alpha} \times \mathfrak{S}_{k_\alpha}^{op}) \wr \mathfrak{S}_{r_\alpha}]}{\otimes} P(\bar{l},\bar{k})^{\otimes \bar{r}}\Big) \underset{k[\mathfrak{S}_N]}{\otimes} \Big(k[\mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_n^{op}] \underset{k[\prod(\mathfrak{S}_{j_\beta} \times \mathfrak{S}_{i_\beta}^{op}) \wr \mathfrak{S}_{s_\beta}]}{\otimes} Q(\bar{j},\bar{i})^{\otimes \bar{s}}\Big)$$

où Ξ_P (resp. Ξ_Q) est l'ensemble des triplets $(\bar{k},\bar{l},\bar{s})$ de uplets tels que $\bar{k}$, $\bar{l}$ et $\bar{r}$ ont la même longueur m et vérifient $(l_1,k_1) > (l_2,k_2) > \ldots > (l_m,k_m)$ pour $>$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$, $\sum l_\alpha r_\alpha = m$ (resp $\sum l_\alpha r_\alpha = N$) et $\sum k_\alpha r_\alpha = N$ (resp. $\sum k_\alpha r_\alpha = n$) ;

$$= \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\bigoplus_{\Xi_P} k[\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_N^{op}] \underset{k[\prod(\mathfrak{S}_{l_\alpha} \times \mathfrak{S}_{k_\alpha}^{op}) \wr \mathfrak{S}_{r_\alpha}]}{\otimes} P(\bar{l},\bar{k})^{\otimes \bar{r}}\Big) \underset{k[\mathfrak{S}_N]}{\otimes} \Big(\bigoplus_{\Xi_Q} k[\mathfrak{S}_N \times \mathfrak{S}_n^{op}] \underset{k[\prod \mathfrak{S}_{j_\beta} \wr \mathfrak{S}_{s_\beta}]}{\otimes} Q(\bar{j},\bar{i})^{\otimes \bar{s}}\Big)$$

qui, par le lemme 3.2.2.14, est isomorphe à

$$\cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\Big(\bigoplus_{\Xi_P} k[\mathfrak{S}_m] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{l}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} P(\bar{l},\bar{k})^{\otimes \bar{r}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{k}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_N]\Big)\Big/_{\prod \mathfrak{S}_{r_\alpha}}\Big) \underset{k[\mathfrak{S}_N]}{\otimes} \Big(\Big(\bigoplus_{\Xi_Q} k[\mathfrak{S}_N] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{j}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} Q(\bar{j},\bar{i})^{\otimes \bar{s}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big)\Big/_{\prod \mathfrak{S}_{s_\beta}}\Big)$$

et par le lemme 3.2.2.15, est isomorphe à

$$\cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\Big(\bigoplus_{\overline{\Xi_P}} k[\mathfrak{S}_m] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{l}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} P(\bar{l},\bar{k})^{\otimes \bar{r}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{k}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_N]\Big)\Big/_{\mathfrak{S}_{|\bar{r}|}}\Big) \underset{k[\mathfrak{S}_N]}{\otimes} \Big(\Big(\bigoplus_{\overline{\Xi_Q}} k[\mathfrak{S}_N] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{j}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} Q(\bar{j},\bar{i})^{\otimes \bar{s}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big)\Big/_{\mathfrak{S}_{|\bar{s}|}}\Big)$$

où $\overline{\Xi_P}$ (resp. $\overline{\Xi_Q}$) est le même ensemble que Ξ_P (resp. Ξ_Q) mais où l'on ne suppose plus $(\bar{l},\bar{k})$ ordonné ; par définition, c'est isomorphe à

$$\cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\Big(\bigoplus_{\Xi_P} k[\mathfrak{S}_m] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{l}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} P(\bar{l},\bar{k})^{\otimes \bar{r}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{k}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_N]\Big)\Big/_{\underset{P}{\sim}}\Big) \underset{k[\mathfrak{S}_N]}{\otimes} \Big(\Big(\bigoplus_{\Xi_Q} k[\mathfrak{S}_N] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{j}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} Q(\bar{j},\bar{i})^{\otimes \bar{s}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big)\Big/_{\underset{Q}{\sim}}\Big)$$

où la relation d'équivalence $\underset{P}{\sim}$ est $\theta \otimes p_1 \otimes \ldots \otimes p_{|\bar{r}|} \otimes \eta \underset{P}{\sim} \theta\sigma_{\bar{l}}^{-1} \otimes p_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes p_{\sigma^{-1}(|\bar{r}|)} \otimes \sigma_{\bar{k}}\eta$ avec $\theta \in \mathfrak{S}_m$, $\eta \in \mathfrak{S}_N$, $\sigma \in \mathfrak{S}_{|\bar{r}|}$, $\sigma_{\bar{l}}$ (resp $\sigma_{\bar{k}}$) la permutation par blocs correspondante à σ dans $\mathfrak{S}_m$ (resp. $\mathfrak{S}_N$) et la relation d'équivalence $\underset{Q}{\sim}$ est $\tau \otimes q_1 \otimes \ldots \otimes q_{|\bar{s}|} \otimes \omega \underset{Q}{\sim} \tau\nu_{\bar{j}} \otimes q_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes q_{\sigma(|\bar{s}|)} \otimes \nu_{\bar{n}}^{-1}\omega$ avec $\tau \in \mathfrak{S}_N$, $\omega \in \mathfrak{S}_n$, $\tau \in \mathfrak{S}_{|\bar{s}|}$, $\tau_{\bar{j}}$ (resp $\tau_{\bar{i}}$) la permutation par blocs correspondante à τ dans $\mathfrak{S}_N$ (resp. $\mathfrak{S}_n$)

$$\cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Big(\Big(\bigoplus_{\Xi_P} k[\mathfrak{S}_m] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{l}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} P(\bar{l},\bar{k})^{\otimes \bar{r}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{k}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_N]\Big) \underset{k[\mathfrak{S}_N]}{\otimes} \Big(\bigoplus_{\Xi_Q} k[\mathfrak{S}_N] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{j}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} Q(\bar{j},\bar{i})^{\otimes \bar{s}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n]\Big)\Big)\Big/_{\approx}$$

où la relation d'équivalence $\approx$ est $\theta \otimes p_1 \otimes \ldots \otimes p_{|\bar{r}|} \otimes \eta \otimes \tau \otimes q_1 \otimes \ldots \otimes q_{|\bar{s}|} \otimes \omega \approx \theta\sigma_{\bar{l}}^{-1} \otimes p_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes p_{\sigma^{-1}(|\bar{r}|)} \otimes \sigma_{\bar{k}}\eta \otimes \tau\nu_{\bar{j}} \otimes q_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes q_{\sigma(|\bar{s}|)} \otimes \nu_{\bar{n}}^{-1}\omega$ avec $\theta, \eta, \tau, \omega, \sigma$ et ν comme précédemment

$$\cong \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \Bigg(\bigoplus_{\Xi} k[\mathfrak{S}_m] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{l}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} P(\bar{l},\bar{k})^{\otimes \bar{r}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{k}}^{\times \bar{r}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_N] \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{j}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} Q(\bar{j},\bar{i})^{\otimes \bar{s}} \underset{k[\mathfrak{S}_{\bar{i}}^{\times \bar{s}}]}{\otimes} k[\mathfrak{S}_n] \Bigg) \Bigg/ \underset{\sim}{} = P \boxtimes Q(m,n)$$

où la relation d'équivalence $\sim$ est $\theta \otimes p_1 \otimes \ldots \otimes p_{|\bar{r}|} \otimes \eta \otimes q_1 \otimes \ldots \otimes q_{|\bar{s}|} \otimes \omega \sim \theta\sigma_{\bar{l}}^{-1} \otimes p_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes p_{\sigma^{-1}(|\bar{r}|)} \otimes \sigma_{\bar{k}}\eta\nu_{\bar{j}} \otimes q_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes q_{\sigma(|\bar{s}|)} \otimes \nu_{\bar{n}}^{-1}\omega$ avec $\theta, \eta, \omega, \sigma$ et ν des permutations. On retrouve bien la définition du produit $\boxtimes$ donnée dans [Val03, Sect. 1.5]. □

C.4.0.3 Remarque. La proposition C.4.0.2 explique pourquoi le produit $\boxtimes$ n'est pas associatif : pour P, Q et R, trois $\mathfrak{S}$-bimodules réduits, les $\mathfrak{S}$-bimodules $\mathbb{S}\big(\mathbb{S}P \square \mathbb{S}Q\big) \square \mathbb{S}R$ et $\mathbb{S}P \square \mathbb{S}\big(\mathbb{S}Q \square \mathbb{S}R\big)$ ne sont pas isomorphes en général.

C.5 Structures de catégorie de modèles

Dans cette section, on rappelle la structure de modèles pour les catégories des opérades, propérades et props. On munit la catégorie $\mathtt{Ch}_k$ de sa structure de modèles cofibrement engendrée pour laquelle les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les applications surjectives en tout degré. Cette structure de modèles induit sur les catégories des opérades, propérades et props réduites une structure de catégorie de modèles. Notons ici l'importance que k soit de caractéristique nulle.

Théorème. [LV12, Prop. B.6.3] [MV09b, Th. 36] [Fre10]
La catégorie des opérades (resp. propérades, props) réduites (i.e. sans entrées et sorties nulles) possède une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée pour les trois classes de morphismes suivantes. Un morphisme $f : P \to Q$ est

- ▷ *une équivalence faible si et seulement si c'est un quasi-isomorphisme en toute arité ;*
- ▷ *une fibration si et seulement si c'est une surjection en tout degré pour toute arité ;*
- ▷ *une cofibration si et seulement si f vérifie la propriété de relèvement par rapport aux fibrations acycliques.*

ANNEXE D

UTILISATION DE SINGULAR

Le but de cette annexe est de présenter un code Singular permettant de tester, pour TV une algèbre différentielle graduée quasi-libre avec V de dimension finie, si une application

$$\{\!\{-,-\}\!\} : TV \otimes TV \longrightarrow TV \otimes TV$$

donnée par l'image d'une base de V, est un double crochet de Poisson de degré r.

```
int taille_generateurs = 1;
string unite = "1"; // l'unite doit être de la bonne taille
int deg_unite = 0;

list generateurs = unite,"x","y","z"; // Attention, l'ordre est important, la longueur des
    chaines.
list degres = deg_unite,0,0,1 ;
list gr_generateurs = generateurs,degres ;
```

D.1 Procédures de bases

```
proc extraire_souschaine(string chaine, int debut, int fin)
{
  int k;
  string sortie;
  for(k=debut;k<=fin;k=k+1)
  {
    sortie = sortie+chaine[k];
  }
  return(sortie)
}

proc find_list(list L, string S) // cherche dans une liste de chaines de caractères
{
  int size_L=size(L);
  int compt=0;
  int i=1;

  while((i<=size_L) and (compt==0))
  {
    if(L[i]==S){compt=i;}
    i=i+1;
  }
```

```
  return(compt); // renvoie la position de S dans L ou renvoie 0 si S n'est pas dans L
}

proc vect_pos( string S , string c) // sort le vecteur des positions d'un caractère dans
    une chaine
{
  if(size(c)<>1){ERROR("Le deuxième argument doit être un unique caractère");}
  intvec sortie ;
  int compt = find(S,c) ;
  int d=0;

  while((compt>0)and(d<>size(S)))
    {
      sortie = sortie,compt;
      d=compt;
      if (d<size(S))
      {
      compt= find(S,c,compt+1);
      }
    }
  if(size(sortie)>1){sortie = sortie[2..size(sortie)];}
  return(sortie); // retourne 0 si c n'est pas dans S
}

proc clean_list(list liste)
{
  list sortie;
  if(size(liste)<>0)
  {
    for(int i=1;i<=size(liste);i=i+1)
    {
      if(size(liste[i])>0){sortie=sortie+list(liste[i]);}
    }
  }
  return(sortie);
}
```

On définit une procédure qui prend en entrée une variable et la liste des variables et qui retourne sa position dans la liste.

```
proc pos_variable(string variable, list gr_var)
{
  int sortie=-1;
  list generators = gr_var[1];
  int nb_gen = size(generators);

  for(int i=1; i<=nb_gen; i=i+1)
  {
    if(variable==generators[i]){sortie=i;}
  }
  if(sortie==-1){ERROR("la variable n'est pas dans la liste des générateurs");}
  return(sortie);
}
```

D.2 Calcul tensoriel

D.2.1 Unité

On définit une procédure nous renvoyant un vecteur d'entiers contenant les positions des variables d'un monôme de la forme $x * y * z * z * x$.

```
proc pos_var(string monome)
{
  intvec pos;
  if(size(monome)<>0)
  {
    pos = vect_pos(monome,"*")+1 ;  // soit un vecteur, soit 1.
    if(pos[1]>1){pos=1,pos;}    // On ajoute la position de la première variable
  }
  return(pos);  // retourne 0 si le monome est vide
}
```

On définit ensuite des procédures qui simplifient les multiplications par l'unité dans les expressions.

```
proc clean_unite_monome(string monome)
{
  intvec pos;
  string interm ;
  int R = taille_generateurs; int i;

  if(size(monome)>R)
  {
    for(i=1;i<=size(monome);i=i+R+1)
    {
      if(extraire_souschaine(monome,i,i+R-1)<>unite){interm=interm+extraire_souschaine(
          monome,i,i+R);};
    }
  }
  else
  {
    interm=monome;
  }
  if(interm[size(interm)]=="*"){interm[size(interm)]="";}; // supprime le dernier caractère
       si c'est *
  return(interm);
}
proc clean_unite_tenseur(list tenseur) // ex : tenseur = list(1,"x*y","x*1*z");
{
  list sortie; list interm ;
  string chaine_inter;
  int taille = size(tenseur);
  int i; int j;

  if(size(tenseur)>0)
  {
    interm=tenseur[1];
    for(j=2;j<=size(tenseur);j=j+1)
    {
      interm = interm + list(clean_unite_monome(tenseur[j]));
    }
```

```
    sortie = sortie+interm;
  }
  return(sortie);
}
proc clean_unite_poly(list poly_tenseur)
{
  list sortie;
  list interm;
  string chaine_inter;
  int taille = size(poly_tenseur);
  int i;  int j;

  for(i=1;i<=taille;i=i+1)
  {
    interm = poly_tenseur[i][1];
    for(j=2;j<=size(poly_tenseur[i]);j=j+1)
    {
      interm = interm + list(clean_unite_monome(poly_tenseur[i][j]));
    }
    sortie = sortie+list(interm);
  }
  return(sortie);
}
```

D.2.2 Degré

On définit une procédure qui permet de calculer le degré d'un monôme de la forme $x * y * z$.

```
proc deg_monome(string monome,list gr_var)
{
  list generators = gr_var[1];  // liste des générateurs
  int nb_gen = size(generators);  // nombre de générateurs
  int R = taille_generateurs; // taille_generateurs est une variable globale définie au dé
      but du programme
  list deg_gen = gr_var[2]; // liste des degrés
  int taille_mon = size(monome); // taille du monome
  intvec position = pos_var(monome); // position des variables dans le monome
  int size_pos = size(position); // taille du vecteur de position

  int compt_pos = 1;  int deg_total = 0; int deg_var_loc = -1; string var_loc; int i; int j
      ;

  for(i=1; i<=taille_mon; i=i+1) // on parcours le monome de générateur en générateur
  {
    if(i<>position[compt_pos]){compt_pos = compt_pos+1;i=position[compt_pos]; continue;} //
        permet que i parcourt le vecteur position

    deg_var_loc = -1;
    var_loc=monome[i..i+R-1]; // ieme variable du monome

    for(j=1; j<=nb_gen ;j=j+1) // on parcours l'ensemble des générateurs afin de récupérer
        le degré de var_loc
    {
      if(generators[j]==var_loc){deg_var_loc=deg_gen[j];} // On récupère le degré de la
          ieme variable du monome dans deg_gen
    }
```

```
    if(deg_var_loc==-1){ERROR("Une variable du monome n'est pas dans la liste des géné
        rateurs de l'algèbre");}
    deg_total= deg_total+deg_var_loc;
  }
  return(deg_total);
}
```

D.2.3 Comparaison/simplification

On définit une fonction qui revoie 0 si les deux tenseurs sont opposés.

```
proc compare_tenseur_op(list tenseur_gauche, list tenseur_droit) // retourne 1 si
    tenseur_gauche et tenseur_droit sont opposés, 0 sinon
{
  int sortie = 1; // Par défaut, tens_g et tens_d sont égaux.
  list tens_g = clean_unite_tenseur(tenseur_gauche);
  list tens_d = clean_unite_tenseur(tenseur_droit);

  if((size(tens_g)<>size(tens_d)) or (size(tens_g)==0) or (size(tens_d)==0))
  {
    sortie = 0;
  }
  else
  {
    if(tens_g[1]<>(-1)*tens_d[1]){sortie = 0;}
    for(int i=2;i<=size(tens_g);i=i+1)
    {
    if(tens_g[i]<>tens_d[i]){sortie = 0;}
    }
  }
  return(sortie);
}
proc simplify_poly_tensor(list poly_tenseur)
{
  list tenseur = clean_unite_poly(poly_tenseur);
  int taille_L=size(tenseur);
  list monome_g; list monome_d;
  int i; int j;

  for(i=1;i<=taille_L;i=i+1)
  {
    if(size(tenseur[i])<>0)
    {
      for(j=i;j<=taille_L;j=j+1)
      {
        if((compare_tenseur_op(tenseur[i],tenseur[j])) and i<>j )
        {
          tenseur[i]=list();
          tenseur[j]=list();
        }
      }
    }
  }
  tenseur=clean_list(tenseur);
  return(tenseur)
}
```

D.2.4 Bimodule

On définit une procédure pour la multiplication de la structure interne de A-bimodule de $A \otimes A$. gauche et droit de la forme `"x*y*z"`, tenseur de la forme `list(2,"x*y","y*z")`.

```
proc mu_interne(string gauche, string droit, list tenseur, list gr_var)
{
  list centre = clean_unite_tenseur(tenseur);
  int deg_g = 0;
  if(gauche<>""){deg_g=deg_monome(gauche,gr_var);}
  int deg_d = 0;
  if(droit<>""){deg_d=deg_monome(droit,gr_var);}
  int deg_c_g = 0; int deg_c_d = 0; int signe = 1;

  if(size(centre)==3)
  {
    deg_c_g = deg_monome(centre[2],gr_var);
    deg_c_d = deg_monome(centre[3],gr_var);
    signe = (-1)^(deg_g*deg_c_g+deg_g*deg_d+deg_d*deg_c_d);
    centre[1]=centre[1]*signe;
    if(droit<>""){centre[2]=centre[2]+"*"+droit;}
    if(gauche<>""){centre[3]=gauche+"*"+centre[3];}
  }
  return(centre);
}
```

D.2.5 Symétrie

On définit les procédures qui codent l'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur $TV \otimes TV \otimes TV$. On doit avoir

```
proc sigma_123(list tenseur,list gr_var)
{
  list sortie; list mono_inter; int coeff_inter;  int i;
  string A_1; int signeA_1;
  string A_2; int signeA_2;
  string A_3; int signeA_3;

  for(i=1;i<=size(tenseur);i=i+1)
  {
    mono_inter=list();
    signeA_1 = deg_monome(tenseur[i][2],gr_var);
    signeA_2 = deg_monome(tenseur[i][3],gr_var);
    signeA_3 = deg_monome(tenseur[i][4],gr_var);
    coeff_inter=(-1)^(signeA_3*(signeA_1+signeA_2))*tenseur[i][1];
    mono_inter = list(list(coeff_inter,tenseur[i][4],tenseur[i][2],tenseur[i][3]));
    sortie = sortie+mono_inter;
  }
  return(sortie);
}

proc sigma_132(list tenseur,list gr_var)
```

```
{
  list sortie;list mono_inter; int coeff_inter; int i;
  string A_1; int signeA_1;
  string A_2; int signeA_2;
  string A_3; int signeA_3;

  for(i=1;i<=size(tenseur);i=i+1)
  {
    mono_inter=list();
    signeA_1 = deg_monome(tenseur[i][2],gr_var);
    signeA_2 = deg_monome(tenseur[i][3],gr_var);
    signeA_3 = deg_monome(tenseur[i][4],gr_var);
    coeff_inter=(-1)^(signeA_1*(signeA_2+signeA_3))*tenseur[i][1];
    mono_inter = list(list(coeff_inter,tenseur[i][3],tenseur[i][4],tenseur[i][2]));
    sortie = sortie+mono_inter;
  }
  return(sortie);
}
```

D.3 Anti-symétrie

On définit la procédure `Test_antisymetrie` qui teste si une application k-linéaire

$$\{\!\{-,-\}\!\} : TV \otimes TV \longrightarrow TV \otimes TV$$

est anti-symétrique au sens des double crochets.

```
proc sigma_12(list tenseur,list gr_var)
{
  list sortie;

  string A_1;
  int signeA_1;

  string A_2;
  int signeA_2;

  list mono_inter;
  int coeff_inter;

  int i;
  for(i=1;i<=size(tenseur);i=i+1)
  {
    mono_inter=list();

    signeA_1 = deg_monome(tenseur[i][2],gr_var);
    signeA_2 = deg_monome(tenseur[i][3],gr_var);

    coeff_inter=(-1)^(signeA_1*signeA_2)*tenseur[i][1];

    mono_inter = list(list(coeff_inter,tenseur[i][3],tenseur[i][2]));
    sortie = sortie+mono_inter;
  }
  return(sortie);
```

```
}

proc Test_antisymetrie(list gr_var,list DBracket,int deg_DB)
{
  list sortie;
  int int_test;
  list pol_A ;     // générateur x
  int deg_A;       // degré de x
  list pol_B ;     // générateur y
  int deg_B ;      // degré de y


  list DB_gauche;    // terme {{x,y}}

  list DB_droit;     // terme (-1)^{(|x|+r)(|y|+r)} {{y,x}}^o
  list interm;     // terme {{x,y}} + (-1)^{(|x|+r)(|y|+r)} {{y,x}}^o

  int i;
  int j;
  int k;

  for(i=1;i<=size(gr_var[2]);i=i+1) // On parcourt la liste gr_var
  {
    pol_A = list(list(1,gr_var[1][i]));
    deg_A = deg_monome(pol_A[1][2],gr_var);


    for(j=1;j<=size(gr_var[2]);j=j+1) // On parcourt la liste gr_var
    {
      pol_B = list(list(1,gr_var[1][j]));
      deg_B = deg_monome(pol_B[1][2],gr_var);

      DB_gauche = DoubleBracket(pol_A, pol_B, gr_var, DBracket, deg_DB);
      DB_droit = DoubleBracket(pol_B, pol_A, gr_var, DBracket, deg_DB);
      DB_droit = sigma_12(DB_droit,gr_var);
      for(k=1;k<=size(DB_droit);k=k+1)
      {
        DB_droit[k][1] = (-1)^((deg_A+deg_DB)*(deg_B+deg_DB))*DB_droit[k][1];
      }

      interm = DB_gauche+DB_droit;

      interm = simplify_poly_tensor(interm,gr_var);
      interm = clean_list(interm);

      if(size(interm)>0)
      {
        sortie = sortie+list(list(pol_A[1][2],pol_B[1][2]));
      };
    }
  }

  if(size(sortie)==0)
  {
    int_test=1;   // retourne 1 si le double crochet et la différentielle sont compatibles
  }
```

```
  else
  {
    print(sortie); // affiche le couple de variable qui pose problème sinon.
    int_test=0;
  }
  return(int_test);
}
```

D.4 Compatibilité du double crochet avec la différentielle

D.4.1 Différenciation

On définit la différentielle de l'algèbre TV

```
list D_1 = list(); list D_x = list(); list D_y = list();
list D_z = list(list(1,"x*y"),list(-1,"y*x"));
list Dronde = list(D_1,D_x,D_y,D_z);
```

On définit une procédure qui renvoie l'image d'un tenseur de longueur n par la différentielle de $TV^{\otimes n}$. La variable `tenseur` doit être de la forme `list(2,"x*y","z",...,"x*x")`.

```
proc diff_tenseur(list tenseur, list Diff, list gr_var) // tenseur de la forme list(1,"x","
    y","z*y")
{
  list sortie; list interm; list interm_2;
  list gauche = list(); list droite = list();
  int signe_loc = 1;  int coeff = tenseur[1]; int coeff_loc = 1;
  int i; int j; int k;

  for(i=2;i<=size(tenseur);i=i+1)
  {
    // On récupère les tenseurs à gauche de la position i
    if(i>2)
    {
      signe_loc=1;
      for(k=2;k<=i-1;k=k+1)
      {
        gauche = gauche+list(tenseur[k]);
        signe_loc=signe_loc*(-1)^(deg_monome(tenseur[k],gr_var));
      }

    }
    // On récupère les tenseurs à droite de la position i
    if(i==size(tenseur))
    {
      droite = list();
    }
    else
    {
      for(k=i+1;k<=size(tenseur);k=k+1)
      {
        droite = droite+list(tenseur[k]);
      }
    }
    // On différencie le ieme tenseur
```

```
    interm = diff_monome(list(1,tenseur[i]),Diff,gr_var);
    // On "rassemble" le tout en tenant compte des signes.
    for(j=1;j<=size(interm);j=j+1)
    {
      coeff_loc=signe_loc*coeff*interm[j][1];
      interm_2 = list(coeff_loc)+gauche+list(interm[j][2])+droite;
      interm_2 = clean_list(interm_2);
      sortie =sortie+list(interm_2);
    }
  }
  sortie = simplify_poly_tensor(sortie);
  sortie = clean_list(sortie);
  return(sortie);
}
```

On définit une procédure qui permet de différencier un élément de TA avec $A = TV$.

```
proc diff_poly_tenseur(list poly_tenseur, list Diff, list gr_var)
{
  list sortie; int i;
  for(i=1; i<=size(poly_tenseur);i=i+1)
  {
    sortie= sortie+diff_tenseur(poly_tenseur[i],Diff,gr_var);
  }
  return(sortie);
}
```

D.4.2 Différentielle v.s. double crochet

On définit une procédure qui teste la compatibilité de la différentielle avec le double crochet i.e. l'égalité $d\{\!\{x,y\}\!\} = \{\!\{dx,y\}\!\} + (-1)^{|x|+r}\{\!\{x,dy\}\!\}$ pour tout x, y générateurs de TV.

```
proc Compatible_Diff_DBracket(list Diff, list gr_var, list DBracket, int deg_DB)
{
  list sortie; int int_test;
  list pol_A ; int deg_A; list pol_B ; list dpol_A; list dpol_B;
  list DB_gauche;   // terme d {{x,y}}
  list DB_droit_1;  // -{{dx,y}}
  list DB_droit_2;  // -(-1)^{|x|+r} {{x,dy}}
  list DB_droit; list interm; //d {{x,y}} -{{dx,y}}-(-1)^{|x|+r} {{x,dy}}
  int i;  int j;  int k;

  for(i=1;i<=size(gr_var[2]);i=i+1) // On parcourt la liste gr_var
  {
    pol_A = list(list(1,gr_var[1][i]));
    deg_A = deg_monome(pol_A[1][2],gr_var);
    dpol_A = diff_poly_tenseur(pol_A, Diff, gr_var);
    for(j=1;j<=size(gr_var[2]);j=j+1) // On parcourt la liste gr_var
    {
      pol_B = list(list(1,gr_var[1][j]));
      dpol_B = diff_poly_tenseur(pol_B, Diff, gr_var);
      DB_gauche = DoubleBracket(pol_A, pol_B, gr_var, DBracket, deg_DB);
      DB_gauche = diff_poly_tenseur(DB_gauche, Diff, gr_var);
      DB_droit_1 = DoubleBracket(dpol_A, list(list(-1,gr_var[1][j])), gr_var, DBracket,
          deg_DB);
```

```
      DB_droit_2 = DoubleBracket(list(list((-1)^(deg_A+deg_DB+1),gr_var[1][i])), dpol_B,
          gr_var, DBracket, deg_DB);
      DB_droit = DB_droit_1+DB_droit_2;
      DB_droit = simplify_poly_tensor(DB_droit);
      DB_droit = clean_list(DB_droit);
      interm = DB_gauche+DB_droit_1+DB_droit_2;
      interm = simplify_poly_tensor(interm);
      interm = clean_list(interm);
      if(size(interm)>0)
      {
        sortie = sortie+list(list(pol_A[1][2],pol_B[1][2]));
      };
    }
  }
  if(size(sortie)==0)
  {
    int_test=1;   // retourne 1 si le double crochet et la différentielle sont compatibles
  }
  else
  {
    print(sortie); // affiche le couple de variable qui pose problème sinon.
    int_test=0;
  }
  return(int_test);
}
```

D.5 Double Jacobi

D.5.1 Double crochet

```
proc DB_monome(list gauche,list droit,list gr_var,list DBracket, int deg_DB)
{
  list sortie;  // La procédure retourne une liste
  int R = taille_generateurs; // taille_generateurs est une variable globale définie au dé
      but du programme
  list generators = gr_var[1];  // liste des générateurs de l'algèbre
  int nb_gen = size(generators);  // nombre de générateurs
  list deg_gen = gr_var[2]; string mono_g = gauche[2];
  int deg_mono_g =  deg_monome(mono_g,gr_var); string mono_d = droit[2];
  int deg_mono_d =  deg_monome(mono_d,gr_var); int coeff = gauche[1]*droit[1];  //
      coefficient
  // On récupère les positions des variables dans les monomes.
  intvec pos_g = pos_var(mono_g); intvec pos_d = pos_var(mono_d);
  /*
   Variables locales pour les boucles : on va "découper" les monomes de la manière suivante
        :
   mono_g = terme_gg * var_g * terme_gd
   mono_d = terme_dg * var_d * terme_dd
   et on déclare des variable pour retenir les différents degrés.
  */
  string var_g ;  int deg_var_g ; int nb_var_g ;
  string var_d ;  int nb_var_d ;  int deg_var_d ;
  string terme_gg; int deg_gg; string terme_gd; int deg_gd;   string terme_dg; int deg_dg;
```

```
string terme_dd; int deg_dd; list DB_loc; // Pour stocker la liste correspondant à "{{
    var_g,var_d}}"
// Compteurs pour les différentes boucles For
int i;  int j;  int k;  int compt_g=1;  int compt_d=1;

for(i=1; i<= pos_g[size(pos_g)];i=i+1)
{
  if(i<>pos_g[compt_g]){compt_g = compt_g+1;i=pos_g[compt_g]; continue;} // permet que i
      parcourt le vecteur pos_g
  var_g = extraire_souschaine(mono_g,i,i+R-1);            // on récupère la variable
      gauche
  nb_var_g=pos_variable(var_g,gr_var);    // on récupère sa position
  deg_var_g = deg_gen[nb_var_g];        // on  récupère son degré
  // On récupère terme_gg
  if(i==1)
  {
    terme_gg = "";
    deg_gg = 0;
  }
  else
  {
    terme_gg = extraire_souschaine(mono_g,1,i-R-1);
    deg_gg = deg_monome(terme_gg,gr_var);
  }

  // On récupère terme_gd
  if(i==pos_g[size(pos_g)])
  {
    terme_gd = "";
    deg_gd = 0 ;
  }
  else
  {
    terme_gd = extraire_souschaine(mono_g,i+R+1,size(mono_g));
    deg_gd = deg_monome(terme_gd,gr_var);
  }
  compt_d=1;
  for(j=1; j<= pos_d[size(pos_d)];j=j+1)
  {
    if(j<>pos_d[compt_d]){compt_d = compt_d+1;j=pos_d[compt_d]; continue;} // permet que
        j parcourt le vecteur pos_d
    var_d = extraire_souschaine(mono_d,j,j+R-1);  // on récupère la variable droite
    nb_var_d=pos_variable(var_d,gr_var);  // on récupère sa position
    deg_var_d = deg_gen[nb_var_d];  // on  récupère son degré
    // On récupère terme_dg
    if(j==1)
    {
      terme_dg = "" ;
      deg_dg = 0 ;
    }
    else
    {
      terme_dg = extraire_souschaine(mono_d,1,j-R-1);
      deg_dg = deg_monome(terme_dg,gr_var);
    }
    // On récupère terme_dd
```

```
      if(j==pos_d[size(pos_d)])
      {
        terme_dd = "";
        deg_dd = 0 ;
      }
      else
      {
        terme_dd = extraire_souschaine(mono_d,j+R+1,size(mono_d));
        deg_dd = deg_monome(terme_dd,gr_var);
      }
      // On récupère la liste correspondant à "{{var_g,var_d}}"
      DB_loc=DBracket[nb_var_g][nb_var_d] ;
      for(k=1;k<=size(DB_loc);k=k+1)
      {
        // On utilise la propriété que le double crochet est une dérivation en son terme de
            droite pour la structure externe de A-bimodule
        DB_loc[k][1]=DB_loc[k][1]*coeff*(-1)^((deg_mono_d+deg_DB)*deg_gd+(deg_var_g+deg_DB)
            *deg_dg);
        if(terme_dg<>""){DB_loc[k][2]=terme_dg+"*"+DB_loc[k][2];}
        if(terme_dd<>""){DB_loc[k][3]=DB_loc[k][3]+"*"+terme_dd;}
        // On utilise la propriété que le double crochet est une dérivation en son terme de
            gauche pour la structure interne de A-bimodule
        DB_loc[k]=mu_interne(terme_gg,terme_gd,DB_loc[k],gr_var);
      }
      sortie=sortie+DB_loc;
    }
  }
  sortie = clean_unite_poly(sortie);
  return(sortie);
}
```

On définit à présent la fonction qui calcule le double crochet de deux polynômes. On rappelle que l'on stocke les polynômes sous forme de liste (pour éviter d'avoir à gérer les signes somme) de la forme `coef,"monome"`. Exemple : $P = 2xy - 3yzx$ est stocké de la manière suivante `list P = list(list(2,"x*y"),list(-3,"y*z*x"));` .

```
proc DoubleBracket(list polynome_gauche, list polynome_droit, list gr_var,list DBracket,
    int deg_DB)
{
  int taille_pol_g = size(polynome_gauche); int taille_pol_d = size(polynome_droit); list
      sortie;
  int i;  int j;
  for(i=1;i<=taille_pol_g; i=i+1)
  {
    for(j=1;j<=taille_pol_d;j=j+1)
    {
      //print(polynome_gauche[i]);print(polynome_droit[j]);
      sortie=sortie+DB_monome(polynome_gauche[i],polynome_droit[j],gr_var,DBracket,deg_DB);
    }
  }
  if(size(sortie)<>0){sortie=clean_list(sortie);}
  return(sortie);
}
```

D.5.2 Double Jacobiateur

On définit pour commencer une procédure `Left_DB` calculant $\{\{A,\{\{B,C\}\}\}\}_L$.

```
proc Left_TB(list polynome_A, list polynome_B, list polynome_C, list gr_var, list DBracket,
     int deg_DB)
{
  list sortie; list DB_inter; int i; int j;
  list DB_BC = DoubleBracket(polynome_B,polynome_C,gr_var,DBracket,deg_DB); // Calcule le
      double crochet {{B,C}}

  for(i=1;i<=size(DB_BC);i=i+1)
  {
    DB_inter = DoubleBracket(polynome_A,list(list(DB_BC[i][1],DB_BC[i][2])),gr_var,DBracket
        ,deg_DB); // calcule {{A, {{B,C}}' }}
    for(j=1;j<=size(DB_inter);j=j+1)
    {
      DB_inter[j]=DB_inter[j]+list(DB_BC[i][3]);    // ajoute le troisième terme {{B,C}}''
    }
    sortie = sortie+DB_inter;
  }
  sortie = clean_list(sortie);
  return(sortie);
}
```

On définit la procédure pour calculer $(-1)^{(|a|+r)(|b|+|c|)}\sigma_{123}\{\{B,\{\{C,A\}\}\}\}_L$. Pour récupérer le signe, on doit travailler au niveau des monômes.

```
proc Left_TB_123(list polynome_A, list polynome_B, list polynome_C, list gr_var, list
    DBracket, int deg_DB)
{
  list sortie; int deg_A; int deg_B; int deg_C;
  // Variables intermédiaires
  int signe_loc;  list DB_inter;  list DB_CA;
  // Compteurs
  int i;  int j;  int k;  int l;  int m;  intvec V;

  for(i=1;i<=size(polynome_A);i=i+1) // On parcourt la liste polynome_A
  {
    for(j=1;j<=size(polynome_B);j=j+1) // On parcourt la liste polynome_B
    {
      for(k=1;k<=size(polynome_C);k=k+1) // On parcourt la liste polynome_C
      {
        deg_A = deg_monome(polynome_A[i][2],gr_var);
        deg_B = deg_monome(polynome_B[j][2],gr_var);
        deg_C = deg_monome(polynome_C[k][2],gr_var);
        // signe_loc contient le signe qui correspont à (-1)^{(|a|+r)(|b|+|c|)} au niveau
            des monomes considérés
        signe_loc = (-1)^((deg_A+deg_DB)*(deg_B+deg_C)) ;
        DB_CA = DoubleBracket(list(polynome_C[k]),list(polynome_A[i]),gr_var,DBracket,
            deg_DB);

        for(l=1;l<=size(DB_CA);l=l+1)
        {
          // On ajoute le signe (-1)^{(|a|+r)(|b|+|c|)}
          DB_inter = DoubleBracket(list(polynome_B[j]),list(list(DB_CA[l][1]*signe_loc,
              DB_CA[l][2])),gr_var,DBracket,deg_DB);
```

```
          for(m=1;m<=size(DB_inter);m=m+1)
          {
            DB_inter[m]=DB_inter[m]+list(DB_CA[l][3]);
          }
          sortie = sortie+DB_inter;
        }
      }
    }
  }
  sortie = sigma_123(sortie,gr_var);
  return(sortie);
}

proc Left_TB_132(list polynome_A, list polynome_B, list polynome_C, list gr_var, list
    DBracket, int deg_DB)
{
  list sortie; int deg_A; int deg_B; int deg_C;
  // Variables intermédiaires
  int signe_loc;  list DB_inter;  list DB_AB;
  // Compteurs
  int i;  int j; int k; int l; int m; intvec V;

  for(i=1;i<=size(polynome_A);i=i+1) // On parcourt la liste polynome_A
  {
    for(j=1;j<=size(polynome_B);j=j+1) // On parcourt la liste polynome_B
    {
      for(k=1;k<=size(polynome_C);k=k+1) // On parcourt la liste polynome_C
      {
        deg_A = deg_monome(polynome_A[i][2],gr_var);
        deg_B = deg_monome(polynome_B[j][2],gr_var);
        deg_C = deg_monome(polynome_C[k][2],gr_var);
        // signe_loc contient le signe qui correspont à (-1)^{(|a|+r)(|b|+|c|)} au niveau
            des monomes considérés
        signe_loc = (-1)^((deg_C+deg_DB)*(deg_A+deg_B)) ;
        DB_AB = DoubleBracket(list(polynome_A[i]),list(polynome_B[j]),gr_var,DBracket,
            deg_DB);
        for(l=1;l<=size(DB_AB);l=l+1)
        {
          // On ajoute le signe (-1)^{(|a|+r)(|b|+|c|)}
          DB_inter = DoubleBracket(list(polynome_C[k]),list(list(DB_AB[l][1]*signe_loc,
              DB_AB[l][2])),gr_var,DBracket,deg_DB);
          for(m=1;m<=size(DB_inter);m=m+1)
          {
            DB_inter[m]=DB_inter[m]+list(DB_AB[l][3]);
          }
          sortie = sortie+DB_inter;
        }
      }
    }
  }
  sortie = sigma_132(sortie,gr_var);
  return(sortie);
}
```

On définit les fonctions `DoubleJacobiator` qui calcule le double-jacobiateur associé à un double crochet et `Test_DoublePoisson` qui teste si le double crochet est de Poisson.

```
proc DoubleJacobiator(list polynome_A, list polynome_B, list polynome_C, list gr_var, list
    DBracket, int deg_DB)
{
  list sortie;
  sortie = Left_TB(polynome_A,polynome_B,polynome_C,gr_var,DBracket,deg_DB)+Left_TB_123(
      polynome_A,polynome_B,polynome_C,gr_var,DBracket,deg_DB)+Left_TB_132(polynome_A,
      polynome_B,polynome_C,gr_var,DBracket,deg_DB) ;
  return(sortie);
}

proc Test_DoublePoisson(list gr_var, list DBracket, int deg_DB)
{
  list sortie; list pol_A ; list pol_B ; list pol_C ;
  list TB_loc; list interm; int i; int j; int k;

  for(i=1;i<=size(gr_var[2]);i=i+1) // On parcourt la liste gr_var
  {
    pol_A = list(list(1,gr_var[1][i]));
    for(j=1;j<=size(gr_var[2]);j=j+1) // On parcourt la liste gr_var
    {
      pol_B = list(list(1,gr_var[1][j]));
      for(k=1;k<=size(gr_var[2]);k=k+1) // On parcourt la liste gr_var
      {
        pol_C = list(list(1,gr_var[1][k]));
        // On calcule le double-jacobiateur en les variables gr_var[i],gr_var[j],gr_var[k].
        TB_loc = DoubleJacobiator(pol_A,pol_B,pol_C,gr_var,DBracket,deg_DB);
        TB_loc = simplify_poly_tensor(TB_loc);
        TB_loc = clean_list(TB_loc);
        // Si le double jacobiateur est non-nul, alors on retient quelles sont les
            variables qui font défaut.
        if(size(TB_loc)<>0)
        {
          interm=list(pol_A[1][2],pol_B[1][2],pol_C[1][2]);
          sortie = sortie+list(interm);
        }
      }
    }
  }
  if(size(sortie)==0)
  {
    // Retourne vrai si le double crochet vérifie double Jacobi
    return(1);
  }
  else
  {
    // Retourne faux si le double crochet ne vérifie pas double Jacobi et affiche les
        termes qui ne s'annulent pas.
    print(sortie);
    return(0);
  }
}
```

D.6 NC-Poisson

Dans cette section, on présente dune série de procédure qui teste si une application k-linéaire

$$\{\!\{-,-\}\!\} : TV \otimes TV \longrightarrow TV \otimes TV$$

induit une structure NC-Poisson sur TV.

D.6.1 Calcul tensoriel

On définit la procédure `compare_monome_mod_op` qui détermine si deux monômes `mono_gauche` et `(-1)*mono_droit` sont égaux modulo $[TV, TV]$.

```
proc compare_monome_mod_op(list mono_gauche, list mono_droit, list gr_var)// retourne 0 si
    mono_gauche et (-1)*mono_droit sont différents, 1 sinon.
{
  // Mono_gauche et mono_droit de la forme list(2,"x*y*z*y");

  int sortie = 0; // mono_gauche et mono_droit sont différents de base

  int int_test = compare_tenseur_op(mono_gauche,mono_droit);

  int taille_g ;

  string mono_g ;
  string mono_d ;
  string mono_dg;
  string mono_dd;
  int taille_d ;
  intvec pos ;

  int coeff_inter ;

  string interm ;

  int i;
  int compt = 1;

  if((size(mono_gauche)<>0) and (size(mono_droit)<>0))
  {
    mono_g = clean_unite_monome(mono_gauche[2]);
    taille_g = size(mono_g);

    mono_d = clean_unite_monome(mono_droit[2]);
    taille_d = size(mono_d);
    pos = pos_var(mono_d);

    if(taille_g==taille_d)
    {

      for(i=1;i<=size(mono_d);i=i+1)
        {
        if(i<>pos[compt]){compt = compt+1;i=pos[compt]; continue;} // permet que i parcourt
             le vecteur pos
        interm = mono_d;
```

```
        if(i>1)
        {

          mono_dg = extraire_souschaine(mono_d,1,i-2);
          mono_dd = extraire_souschaine(mono_d,i,taille_d);
          interm = mono_dd+"*"+mono_dg;
          coeff_inter=(-1)^(deg_monome(mono_dd,gr_var)*deg_monome(mono_dg,gr_var))*
              mono_droit[1];
          int_test = compare_tenseur_op(mono_gauche,list(coeff_inter,interm));
        }

       if(int_test==1){sortie=1;}; // Si pour un i donné, compt=1, alors mono_gauche et
           mono_droit sont égaux mod [TV,TV];

      }
    }
  }

  return(sortie);
}
```

On définit la procédure `simplify_poly_tensor_mod` qui simplifie un polynôme de TV modulo le commutateur $[TV, TV]$.

```
proc simplify_poly_tensor_mod(list tenseur, list gr_var)
{
  list L = tenseur;
  int nb_mono =size(L);
  list monome_g;
  list monome_d;

  int i;
  int j;

  for(i=1;i<=nb_mono;i=i+1)
  {
    if(size(tenseur[i])<>0)
    {
      for(j=i;j<=nb_mono;j=j+1)
      {
        if((compare_monome_mod_op(tenseur[i],tenseur[j],gr_var)) and (i<>j) )
        {
          tenseur[i]=list();
          tenseur[j]=list();
        }
      }
    }
  }
  tenseur=clean_list(tenseur);
  return(tenseur)
}
```

On définit la procédure `mu_poly_tens` qui encode le produit de TV.

```
/*
  multiplication de (TV)^{\otimes n} dans TV
```

```
*/

proc mu_tenseur(list tenseur)
{
  list sortie ;
  int taille = size(tenseur);
  string stock;

  int i;
  if(taille>2)
  {
    stock = tenseur[2];
    for(i=3;i<=taille;i=i+1)
    {
      stock = stock + "*" + tenseur[i];
    }
    sortie=list(tenseur[1],stock);
  }
  sortie = clean_unite_tenseur(sortie);
  return(sortie);
}
// poly_tenseur de la forme list(list(2,"x*y"),list(3,"z","x*x"))
proc mu_poly_tens(list poly_tenseur)
{
  list interm = poly_tenseur;
  int taille = size(poly_tenseur);

  int i;
  for(i=1;i<=taille;i=i+1)
  {
    interm[i]=mu_tenseur(interm[i]);
  }
  interm = simplify_poly_tensor(interm);
  interm = clean_list(interm);
  return(interm);
}
```

D.6.2 Anti-symétrie

On définit la procédure `Test_antisymetrie_mod` qui teste si une application k-linéaire

$$\{\!\{-,-\}\!\} : TV \otimes TV \longrightarrow TV \otimes TV$$

induit un crochet $\{-,-\} : TV \otimes TV \to (TV)_\natural$ anti-symétrique.

```
proc Test_antisymetrie_mod(list gr_var,list DBracket,int deg_DB)
{
  list sortie;
  int int_test;
  list pol_A ;     // générateur x
  int deg_A;       // degré de x
  list pol_B ;     // générateur y
  int deg_B ;      // degré de y
```

```
  list DB_gauche;   // terme {{x,y}}

  list DB_droit;    // terme (-1)^{(|x|+r)(|y|+r)} {{y,x}}^o
  list interm;    // terme {{x,y}} + (-1)^{(|x|+r)(|y|+r)} {{y,x}}^o

  int i;
  int j;
  int k;

  for(i=1;i<=size(gr_var[2]);i=i+1) // On parcourt la liste gr_var
  {
    pol_A = list(list(1,gr_var[1][i]));
    deg_A = deg_monome(pol_A[1][2],gr_var);


    for(j=1;j<=size(gr_var[2]);j=j+1) // On parcourt la liste gr_var
    {
      pol_B = list(list(1,gr_var[1][j]));
      deg_B = deg_monome(pol_B[1][2],gr_var);

      DB_gauche = DoubleBracket(pol_A, pol_B, gr_var, DBracket, deg_DB);
      DB_droit = DoubleBracket(pol_B, pol_A, gr_var, DBracket, deg_DB);
      DB_droit = sigma_12(DB_droit,gr_var);
      for(k=1;k<=size(DB_droit);k=k+1)
      {
        DB_droit[k][1] = (-1)^((deg_A+deg_DB)*(deg_B+deg_DB))*DB_droit[k][1];
      }

      interm = DB_gauche+DB_droit;
      interm = mu_poly_tens(interm);
      interm = simplify_poly_tensor_mod(interm,gr_var);
      interm = clean_list(interm);

      if(size(interm)>0)
      {
        sortie = sortie+list(list(pol_A[1][2],pol_B[1][2]));
      };
    }
  }

  if(size(sortie)==0)
  {
    int_test=1;   // retourne 1 si le double crochet est antisymétrique modulo les
        commutateurs.
  }
  else
  {
    print(sortie); // affiche le couple de variable qui pose problème sinon.
    int_test=0;
  }
  return(int_test);
}
```

D.6.3 Compatibilité avec la différentielle

On définit la procédure `Compatible_Diff_DBracket_mod` qui teste si une application k-linéaire

$$\{\!\{-,-\}\!\} : TV \otimes TV \longrightarrow TV \otimes TV$$

induit un crochet $\{-,-\} : TV \otimes TV \to (TV)_\natural$ compatible avec la différentielle.

```
proc Compatible_Diff_DBracket_mod(list Diff, list gr_var, list DBracket, int deg_DB)
{

  list sortie;
  int int_test;
  list pol_A ;     // générateur x
  int deg_A;       // degré de x
  list pol_B ;     // générateur y
  list dpol_A;     // dx
  list dpol_B;     // dy

  list DB_gauche;   // terme d {{x,y}}
  list DB_droit_1;  // -{{dx,y}}
  list DB_droit_2;  // -(-1)^{|x|+r} {{x,dy}}
  list DB_droit;
  list interm;     // d {{x,y}} -{{dx,y}}-(-1)^{|x|+r} {{x,dy}}

  int i;
  int j;
  int k;

  for(i=1;i<=size(gr_var[2]);i=i+1) // On parcourt la liste gr_var
  {
    pol_A = list(list(1,gr_var[1][i]));
    //print(pol_A);
    deg_A = deg_monome(pol_A[1][2],gr_var);
    dpol_A = diff_poly_tenseur(pol_A, Diff, gr_var);

    for(j=1;j<=size(gr_var[2]);j=j+1) // On parcourt la liste gr_var
    {
      pol_B = list(list(1,gr_var[1][j]));
      dpol_B = diff_poly_tenseur(pol_B, Diff, gr_var);

      DB_gauche = DoubleBracket(pol_A, pol_B, gr_var, DBracket, deg_DB);
      DB_gauche = diff_poly_tenseur(DB_gauche, Diff, gr_var);

      DB_droit_1 = DoubleBracket(dpol_A, list(list(-1,gr_var[1][j])), gr_var, DBracket,
          deg_DB);
      DB_droit_2 = DoubleBracket(list(list((-1)^(deg_A+deg_DB+1),gr_var[1][i])), dpol_B,
          gr_var, DBracket, deg_DB);
      DB_droit = DB_droit_1+DB_droit_2;
      DB_droit = simplify_poly_tensor(DB_droit);
      DB_droit = clean_list(DB_droit);


      interm = DB_gauche+DB_droit_1+DB_droit_2;
      interm = mu_poly_tens(interm);
      interm = simplify_poly_tensor_mod(interm,gr_var);
```

```
      interm = clean_list(interm);

      if(size(interm)>0)
      {
        sortie = sortie+list(list(pol_A[1][2],pol_B[1][2]));

      };
    }
  }

  if(size(sortie)==0)
  {
    int_test=1;   // retourne 1 si le double crochet et la différentielle sont compatibles
        modulo les commutateurs
  }
  else
  {
    print(sortie); // affiche le couple de variable qui pose problème sinon.
    int_test=0;
  }
  return(int_test);
}
```

D.6.4 NC-Jacobi

On définit une procédure qui teste la condition NC-Jacobi sur les générateurs, i.e. qui teste si $mu(1 \otimes mu)(\{\!\{a,b,c\}\!\} - (-1)^{(|a|+r)(|b|+r)}\{\!\{b,a,c\}\!\})$ est égal à 0.

```
proc NCJacobi(list gr_var, list DBracket, int deg_DB)
{
  int sortie = 1; // Au départ, le crochet est considérer comme étant NCJacobi
  list affichage;

  list pol_A ;
  int deg_A;
  list pol_B ;
  int deg_B;
  list pol_C ;

  list TB_gauche;
  list TB_droit;

  list interm;
  int signe_inter;

  list variables_loc;

  int i;
  int j;
  int k;
  int m;

  for(i=1;i<=size(gr_var[2]);i=i+1) // On parcourt la liste gr_var
  {
    pol_A = list(list(1,gr_var[1][i]));
```

```
    deg_A = deg_monome(gr_var[1][i],gr_var);
    for(j=1;j<=size(gr_var[2]);j=j+1) // On parcourt la liste gr_var
    {
      pol_B = list(list(1,gr_var[1][j]));
      deg_B = deg_monome(gr_var[1][j],gr_var);

      signe_inter=(-1)^((deg_A+deg_DB)*(deg_B*deg_DB)+1);

      for(k=1;k<=size(gr_var[2]);k=k+1) // On parcourt la liste gr_var
      {
        pol_C = list(list(1,gr_var[1][k]));
        // On calcule mu(1\otimes mu)( {{a,b,c}}-(-1)^(|a|+r)(|b|+r){{b,a,c}} ).

        //  Terme de gauche dans l'expression
        TB_gauche = DoubleJacobiator(pol_A,pol_B,pol_C,gr_var,DBracket,deg_DB); //{{a,b,c}}
        TB_gauche = mu_poly_tens(TB_gauche); // {a,b,c}

        // Terme de droite dans l'expression
        TB_droit = DoubleJacobiator(pol_B,pol_A,pol_C,gr_var,DBracket,deg_DB); //{{b,a,c}}
        for(m=1;m<=size(TB_droit);m=m+1)
        {
          TB_droit[m][1]=signe_inter*TB_droit[m][1];
        }
        TB_droit = mu_poly_tens(TB_droit); //-(-1)^(|a|+r)(|b|+r){b,a,c}

        // Somme des deux termes et simplification
        interm=TB_gauche+TB_droit;
        interm=simplify_poly_tensor_mod(interm,gr_var);
        interm=clean_list(interm);

        // si non-nul modulo [TV,TV], alors on affiche les variables qui font défaut
        if(size(interm)>0)
        {
          affichage = affichage+list(pol_A[1][2],pol_B[1][2],pol_C[1][2]);
          sortie=0;
        }

      }
    }
  }
  if(sortie==1){return(sortie);}
  else{print(affichage);return(sortie);}
}
```

D.7 Un exemple d'utilisation

On présente un exemple d'utilisation de ces procédures sur un des double crochets exhiber par Rubstov et ses co-auteurs dans [ORS13].

```
/*   Définition de l'algèbre graduée    */

int taille_generateurs = 1; //
string unite = "1"; // l'unité doit être de la bonne taille
int deg_unite = 0;
```

```
list generateurs = unite,"x","y"; // Attention, l'ordre est important, la longueur des
    chaines.
list degres = deg_unite,0,0 ;
list gr_generateurs = generateurs,degres ;

/*   Définition de la différentielle    */

D_1 = list();
D_x = list();
D_y = list();

Dronde = list(D_1,D_x,D_y);

/*      Définition du dcrochet 1      */
list DB_11 = list();
list DB_1x = list();
list DB_1y = list();


list DB_x1 = list();
list DB_xx = list();
list DB_xy = list();


list DB_y1 = list();
list DB_yx = list();
list DB_yy = list(list(1,"y","x"),list(-1,"x","y"));


list DB_1 = DB_11,DB_1x,DB_1y ;
list DB_x = DB_x1,DB_xx,DB_xy ;
list DB_y = DB_y1,DB_yx,DB_yy ;


list Dcrochet = DB_1,DB_x,DB_y;
int deg_DB = 0 ;

print(" TESTS CONCERNANT LES GENERATEURS ");
print(" ");

verif_gen(gr_generateurs); // Vérifie la cohérence des variables et des degrés

print(" ");
print(" TESTS CONCERNANT LA STRUCTURE DOUBLE POISSON ");
print(" ");

if(Test_antisymetrie(gr_generateurs,Dcrochet,deg_DB))
{print("Le double crochet est antisymétrique.");}
else{print("Le double crochet n'est pas antisymétrique pour le(s) couples(s) de générateurs
     précédent(s).");}

print(" ");

if(Compatible_Diff_DBracket(Dronde,gr_generateurs,Dcrochet,deg_DB))
{print("Le double crochet est compatible avec la différentielle.");}
```

```
else{print("Le double crochet n'est pas compatible avec la différentielle pour le(s) couple
    (s) de générateurs précédent(s).");}

print(" ");

if(Test_DoublePoisson(gr_generateurs,Dcrochet,deg_DB))
{print("Le double crochet vérifie double Jacobi.");}
else{print("Le double crochet ne vérifie pas double Jacobi pour le(s) triplet(s) de géné
    rateurs précédent(s).");}

print(" ");
print(" TESTS CONCERNANT LA STRUCTURE DOUBLE POISSON ");
print(" ");

if(Test_antisymetrie_mod(gr_generateurs,Dcrochet,deg_DB))
{print("Le double crochet est antisymétrique modulo les commutateurs.");}
else{print("Le double crochet n'est pas antisymétrique modulo les commutateurs pour le(s)
    couples(s) de générateurs précédent(s).");}

print(" ");

if(Compatible_Diff_DBracket_mod(Dronde,gr_generateurs,Dcrochet,deg_DB))
{print("Le double crochet est compatible avec la différentielle modulo les commutateurs.")
    ;}
else{print("Le double crochet n'est pas compatible avec la différentielle modulo les
    commutateurspour le(s) couple(s) de générateurs précédent(s).");}

print(" ");

if(NCJacobi(gr_generateurs,Dcrochet,deg_DB))
{print("Le double crochet vérifie NCJacobi.");}
else{print("Le double crochet ne vérifie pas NCJacobi pour le(s) triplet(s) de générateurs
    précédent(s.");}
```

BIBLIOGRAPHIE

[ACF15] Luis Álvarez-Cónsul and David Fernández. Noncommutative bi-symplectic $\mathbb{N}Q$-algebras of weight 1. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, (Dynamical systems, differential equations and applications. 10th AIMS Conference. Suppl.) :19–28, 2015.

[AKKN17] Anton Alekseev, Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno, and Florian Naef. Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 355(2) :123–127, 2017.

[AM10] Marcelo Aguiar and Swapneel Mahajan. *Monoidal functors, species and Hopf algebras*, volume 29 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. With forewords by Kenneth Brown and Stephen Chase and André Joyal.

[Art15] Semeon Arthamonov. Noncommutative inverse scattering method for the kontsevich system. *Letters in Mathematical Physics, Volume 105, Issue 9, pp.1223-1251*, 105 :1223–1251, 2015.

[Art16] S. Arthamonov. Modified Double Poisson Brackets. *ArXiv e-prints*, August 2016.

[BCER12] Yuri Berest, Xiaojun Chen, Farkhod Eshmatov, and Ajay Ramadoss. Noncommutative Poisson structures, derived representation schemes and Calabi-Yau algebras. In *Mathematical aspects of quantization*, volume 583 of *Contemp. Math.*, pages 219–246. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[BFP+14] Y. Berest, G. Felder, S. Patotski, A. C. Ramadoss, and T. Willwacher. Representation Homology, Lie Algebra Cohomology and Derived Harish-Chandra Homomorphism. *ArXiv e-prints 1410.0043*, September 2014.

[BFR14] Yuri Berest, Giovanni Felder, and Ajay Ramadoss. Derived representation schemes and noncommutative geometry. In *Expository lectures on representation theory*, volume 607 of *Contemp. Math.*, pages 113–162. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

[BG76] A. K. Bousfield and V. K. A. M. Gugenheim. On PL de Rham theory and rational homotopy type. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 8(179) :ix+94, 1976.

[BKR13] Yuri Berest, George Khachatryan, and Ajay Ramadoss. Derived representation schemes and cyclic homology. *Adv. Math.*, 245 :625–689, 2013.

[Bor94] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 2*, volume 51 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Categories and structures.

[CB11] William Crawley-Boevey. Poisson structures on moduli spaces of representations. *J. Algebra*, 325 :205–215, 2011.

[CEG05] W. Crawley-Boevey, P. Etingof, and V. Ginzburg. Noncommutative Geometry and Quiver algebras. *ArXiv Mathematics e-prints*, February 2005.

[CHSY15] X. Chen, H.-L. Her, S. Sun, and X. Yang. A double Poisson algebra structure on Fukaya categories. *Journal of Geometry and Physics*, 98 :57–76, December 2015.

[CMW16] Ricardo Campos, Sergei Merkulov, and Thomas Willwacher. The Frobenius properad is Koszul. *Duke Math. J.*, 165(15) :2921–2989, 2016.

[Cov10] Simon Covez. *L'intégration locale des algèbres de Leibniz*. PhD thesis, Université de Nantes, 2010. Thèse de Doctorat.

[CPT$^+$15] D. Calaque, T. Pantev, B. Toen, M. Vaquie, and G. Vezzosi. Shifted Poisson Structures and Deformation Quantization. *ArXiv e-prints*, June 2015.

[DK10] Vladimir Dotsenko and Anton Khoroshkin. Gröbner bases for operads. *Duke Math. J.*, 153(2) :363–396, 2010.

[DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. North-Holland, Amsterdam, 1995.

[DSKV15] Alberto De Sole, Victor G. Kac, and Daniele Valeri. Double Poisson vertex algebras and non-commutative Hamiltonian equations. *Adv. Math.*, 281 :1025–1099, 2015.

[DSKV16] Alberto De Sole, Victor G. Kac, and Daniele Valeri. A new scheme of integrability for (bi)Hamiltonian PDE. *Comm. Math. Phys.*, 347(2) :449–488, 2016.

[FA15] David Fernández Álvarez. *Non-commutative symplectic $\mathbb{N}Q$-geometry and Courant algebroids*. PhD thesis, Instituto de Ciencias Matemáticas y Departamento de Matemáticas,Universidad Autónoma de Madrid, 2015. Memoria de Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid.

[FgT85] B. L. Feĭ gin and B. L. Tsygan. Additive K-theory and crystalline cohomology. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 19(2) :52–62, 96, 1985.

[FgT87] B. L. Feĭ gin and B. L. Tsygan. Additive K-theory. In *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, volume 1289 of *Lecture Notes in Math.*, pages 67–209. Springer, Berlin, 1987.

[FHH89] T. H. Fay, K. A. Hardie, and P. J. Hilton. The two-square lemma. *Publicacions Matemàtiques*, 33 :133–137, jan 1989.

[FHT95] Yves Félix, Steve Halperin, and Jean-Claude Thomas. Differential graded algebras in topology. In *Handbook of algebraic topology*, pages 829–865. North-Holland, Amsterdam, 1995.

[FL98] Daniel R. Farkas and Gail Letzter. Ring theory from symplectic geometry. *J. Pure Appl. Algebra*, 125(1-3) :155–190, 1998.

[Fre10] Benoit Fresse. Props in model categories and homotopy invariance of structures. *Georgian Math. J.*, 17(1) :79–160, 2010.

[Gan03] Wee Liang Gan. Koszul duality for dioperads. *Math. Res. Lett.*, 10(1) :109–124, 2003.

[Gin05] V. Ginzburg. Lectures on Noncommutative Geometry. *ArXiv Mathematics e-prints*, June 2005.

[GJ94] E. Getzler and J. D. S. Jones. Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces. *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, March 1994.

[GY16] G. Ginot and S. Yalin. Deformation theory of bialgebras, higher Hochschild cohomology and formality. *ArXiv e-prints*, June 2016.

[Hof10] Eric Hoffbeck. A Poincaré-Birkhoff-Witt criterion for Koszul operads. *Manuscripta Math.*, 131(1-2) :87–110, 2010.

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[HV15] Eric Hoffbeck and Christine Vespa. Leibniz homology of Lie algebras as functor homology. *J. Pure Appl. Algebra*, 219(9) :3721–3742, 2015.

[JY09] Mark W. Johnson and Donald Yau. On homotopy invariance for algebras over colored PROPs. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 4(1) :275–315, 2009.

[Kap07] Mikhail Kapranov. Free Lie algebroids and the space of paths. *Selecta Math. (N.S.)*, 13(2) :277–319, 2007.

[Kat12] Adam Robert Katz. *Poincare-Birkhoff-Witt Bases for Dioperads*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2012. Thesis (Ph.D.)–University of California, Riverside.

[Liv97] Muriel Livernet. Homotopie rationnelle des algèbres de Leibniz. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(8) :819–823, 1997.

[Lod98] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998. Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.

[LP08] Muriel Livernet and Frédéric Patras. Lie theory for Hopf operads. *J. Algebra*, 319(12) :4899–4920, 2008.

[LV12] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette. *Algebraic operads*, volume 346 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2012.

[Mar08] Martin Markl. Operads and PROPs. In *Handbook of algebra. Vol. 5*, volume 5 of *Handb. Algebr.*, pages 87–140. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008.

[ML65] Saunders Mac Lane. Categorical algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71 :40–106, 1965.

[MS16] V. Melani and P. Safronov. Derived coisotropic structures I : affine case. *ArXiv e-prints*, August 2016.

[MS17] V. Melani and P. Safronov. Derived coisotropic structures II : stacks and quantization. *ArXiv e-prints*, April 2017.

[MT14] Gwénaël Massuyeau and Vladimir Turaev. Quasi-Poisson structures on representation spaces of surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (1) :1–64, 2014.

[MV09a] Sergei Merkulov and Bruno Vallette. Deformation theory of representations of prop(erad)s. I. *J. Reine Angew. Math.*, 634 :51–106, 2009.

[MV09b] Sergei Merkulov and Bruno Vallette. Deformation theory of representations of prop(erad)s. II. *J. Reine Angew. Math.*, 636 :123–174, 2009.

[NSS16] Rohit Nagpal, Steven V. Sam, and Andrew Snowden. Noetherianity of some degree two twisted commutative algebras. *Selecta Math. (N.S.)*, 22(2) :913–937, 2016.

[ORS13] Alexander Odesskii, Vladimir Rubtsov, and Vladimir Sokolov. Double Poisson brackets on free associative algebras. In *Noncommutative birational geometry, representations and combinatorics*, volume 592 of *Contemp. Math.*, pages 225–239. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[Pow16] Geoffrey Powell. On double Poisson structures on commutative algebras. *J. Geom. Phys.*, 110 :1–8, 2016.

[Pri70] Stewart B. Priddy. Koszul resolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 152 :39–60, 1970.

[Pro76] C. Procesi. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Advances in Math.*, 19(3) :306–381, 1976.

[PTVV13] Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, and Gabriele Vezzosi. Shifted symplectic structures. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 117 :271–328, 2013.

[PVdW08] Anne Pichereau and Geert Van de Weyer. Double Poisson cohomology of path algebras of quivers. *J. Algebra*, 319(5) :2166–2208, 2008.

[Ser71] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, 1971. Deuxième édition, refondue.

[Sok13] V. V. Sokolov. Classification of constant solutions of the associative Yang-Baxter equation on Mat_3. *Theoret. and Math. Phys.*, 176(3) :1156–1162, 2013. Russian version appears in Teoret. Mat. Fiz. **1**76(2013), no. 3, 385–392.

[SS12] S. V Sam and A. Snowden. Introduction to twisted commutative algebras. *ArXiv e-prints*, September 2012.

[SS15] Steven V. Sam and Andrew Snowden. Stability patterns in representation theory. *Forum Math. Sigma*, 3 :e11, 108, 2015.

[Sta97] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.

[TV05] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory. *Adv. Math.*, 193(2) :257–372, 2005.

[TV08] Bertrand Toën and Gabriele Vezzosi. Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 193(902) :x+224, 2008.

[Val03] Bruno Vallette. *Dualité de Koszul des PROPs*. Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée [Prepublication of the Institute of Advanced Mathematical Research], 2003/30. Université Louis Pasteur, Département de Mathématique, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 2003. Dissertation, Université de Strasbourg I, Strasbourg, 2003.

[Val08] Bruno Vallette. Manin products, Koszul duality, Loday algebras and Deligne conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 620 :105–164, 2008.

[Val09] Bruno Vallette. Free monoid in monoidal abelian categories. *Appl. Categ. Structures*, 17(1) :43–61, 2009.

[Val14] Bruno Vallette. Algebra + homotopy = operad. In *Symplectic, Poisson, and noncommutative geometry*, volume 62 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 229–290. Cambridge Univ. Press, New York, 2014.

[VdB08a] Michel Van den Bergh. Double Poisson algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(11) :5711–5769, 2008.

[VdB08b] Michel Van den Bergh. Non-commutative quasi-Hamiltonian spaces. In *Poisson geometry in mathematics and physics*, volume 450 of *Contemp. Math.*, pages 273–299. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[VdL04] Pepijn Van der Laan. *Operads - Hopf algebras and coloured Koszul duality*. PhD thesis, Utrecht University, 2004. Ph.D. thesis.

[VdW08] Geert Van de Weyer. Double Poisson structures on finite dimensional semi-simple algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 11(5) :437–460, 2008.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Yal16] Sinan Yalin. Function spaces and classifying spaces of algebras over a prop. *Algebr. Geom. Topol.*, 16(5) :2715–2749, 2016.

[Yau16] Donald Yau. *Colored operads*, volume 170 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

INDEX

A

Algèbre
- A_∞ ... 187
- L_∞ ... 187
- Σ-NC-Poisson ... 243
- à homotopie près ... 186
- commutative tordue ... 144
- de Leibniz ... 34
- de Lie ... 34
- de Lie-Rinehart ... 59
- de Poisson ... 34
- double Lie ... 47
- double Lie-Rinehart ... 61
- double Poisson ... 48
- double Poisson constant ... 55
- double Poisson linéaire ... 55
- double Poisson quadratique ... 57
- libre sur une opérade ... 132
- sur une opérade ... 132
- sur une propérade ... 136

B

Base PBW ... 208
Bidérivation ... 45
Bimodule infinitésimal ... 172
Briques admissibles ... 210

C

Catégorie
- $\mathtt{Ch}_k$ ... 34
- Σ-$\mathtt{DPoiss}_{\mathtt{C}}$ ... 49
- $\mathtt{DLie}_{\mathtt{C}}$ ... 48
- $\mathtt{DPoiss}_{\mathtt{C}}$ ... 48
- monoïdale ... 235
- monoïdale symétrique ... 236

Coégalisateur réfléxif ... 254
Cobimodule infinitésimal ... 173
Coend ... 238
Coloriage ... 195
Complexe de Koszul ... 179
Complexe des coloriages ... 200
Composition partielle ... 147
Coprotopérade ... 147
- co-augmentée ... 172
- Codérivation ... 175
- Coproduit partiel ... 172

Couleurs admissibles ... 211

D

Dérivation ... 42
Diopérade ... 225
Double crochet décalé ... 45
Double Jacobiateur ... 48
Duale de Koszul
- Coprotopérade ... 178
- Protopérade ... 181

E

Esp. de modules des struct. de P-alg. ... 188

F

Foncteur
- $\mathbb{X}$ ... 103
- $\mathbb{Y}^{ord}$ ... 101
- $\mathbb{Y}$ ... 101
- $\mathcal{K}$ ... 90
- $\mathcal{W}$ ... 160
- $\mathcal{W}^{conn}$ ... 162

$\mathcal{W}^{or}$ 159
$\mathcal{X}(-)$ 89
$\mathcal{X}^{conn}$ 92
$\mathcal{Y}^{ord}(-)$ 87
$\mathcal{Y}(-)$ 87
Ind 114
Res 114
$\mathscr{F}(-)$ 151
analytique scindé 253
de Schur 131
Lax-monoïdal 236
monoïdal 237
polynomial homogène 253
produit de convolution de Day 238
produit extérieur $\otimes^{ext}$ 238
Forme non-commutative 44

G

Graphe d'une permutation 257
Groupe de Picard 33

M

Modules 38
Morphisme ad associé à un Σ-crochet 243

O

Opérade 127
$\mathcal{A}s$ 128
$\mathcal{C}om$ 128
$\mathcal{L}ie$ 129
$\mathcal{A}s_\infty$ 186
$\mathcal{L}ie\mathcal{R}in$ 130
$\mathcal{L}ieb$ 129
$\mathcal{P}ois$ 130
colorée 130
Ordre shuffle-compatible 205

P

Permutation connexe 257
Permutation-shuffle 168
Poset 158
$\mathfrak{h}(-)$ 158
Succ$(-)$ 158
Produit en couronne 96
Produit shuffle connexe 191
PROP
à la Markl 123
définition 126
Propérade 134
$\mathcal{B}i\mathcal{L}ie$ 135
$\mathcal{B}i\mathcal{L}ie^\diamond$ 135
$\mathcal{D}\mathcal{C}om$ 138
$\mathcal{D}\mathcal{L}ie$ 138
$\mathcal{F}rob$ 135
$\mathcal{F}rob^\diamond$ 135
$\mathcal{D}\mathcal{P}ois$ 142
contractile 231
Loi de remplacement 183
Protopérade 146
$\mathcal{D}\mathcal{C}om^{proto}$ 218
augmentée 171
composition shuffle partielle 193
connexe 147
construction bar $\mathbf{B}(-)$ 177
construction cobar $\mathbf{\Omega}(-)$ 177
de Koszul 179
Dérivation 174
graduée par le poids 147
Monôme 167
Produit partiel 172
quadratique 180
quasi-libre 176
shuffle 192

S

$\mathfrak{S}$-bimodule 83
produit de composition $\boxtimes$ 260
produit de composition $\square$ 105
produit de composition connexe $\boxtimes_c$ 110
produit de concaténation $\otimes^{conc}$ 106
$\mathfrak{S}$-module 83
localement fini 83
produit $\circ$ 113
produit de composition $\square$ 93
produit de composition connexe $\boxtimes_c$ 98
produit de concaténation $\otimes^{conc}$ 93
réduit 83
suspension 94

T

toProp 145

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

Région PAYS DE LA LOIRE

université angers

Thèse de Doctorat

Johan LERAY

Approche fonctorielle et combinatoire de la propérade des algèbres double Poisson

A functorial and combinatorial approach to double Poisson algebras and their properad

Résumé

On construit et étudie la généralisation des algèbres double Poisson décalées à toute catégorie monoïdale symétrique additive. On s'interesse notamment aux algèbres double Poisson linéaires et quadratiques. Dans un second temps, on étudie la koszulité des propérades $\mathcal{DL}ie$ et $\mathcal{DP}ois = \mathcal{A}s \boxtimes_c \mathcal{DL}ie$ qui encodent respectivement les algèbres double Lie et les algèbres doubles Poisson. On associe à chacune de ces propérades, un $\mathfrak{S}$-module muni d'une structure de monoïde pour un nouveau produit monoïdal dit de composition connexe : on appelle de tels monoïdes protopérades. On montre notamment l'existence, pour tout $\mathfrak{S}$-module, d'une protopérade libre associée et l'on explicite la combinatoire sous-jacente en terme de briques et de murs. On définit une adjonction bar-cobar, une dualité de Koszul et une notion de base PBW pour les protopérades. On présente également une tentative de théorème PBW à la Hoffbeck pour les protopérades, de laquelle on déduit la koszulité de la diopérade associée à la propérade $\mathcal{DL}ie$.

Mots clés

Algèbre double Poisson, algèbre double Lie, algèbre double Lie-Rinehart, diopérade, propérade, adjonction bar-cobar, dualité de Koszul, combinatoire.

Abstract

We construct and study the generalization of shifted double Poisson algebras to all additive symmetric monoidal categories. We are especially interested in linear and quadratic double Poisson algebras. We then study the koszulity of the properads $\mathcal{DL}ie$ and $\mathcal{DP}ois = \mathcal{A}s \boxtimes_c \mathcal{DL}ie$ which encode double Lie algebras and double Poisson algebras respectively. We associate to each, a $\mathfrak{S}$-module with a monoidal structure for a new monoïdal product call the connected composition product : we call such monoids protoperads. We show, for any $\mathfrak{S}$-module, the existence of the associated free protoperad and we make explicit the underlying combinatorics. We define a bar-cobar adjunction, the notion of Koszul duality and PBW bases for protoperads. We present an attempt of prove a PBW theorem à la Hoffbeck for protoperads, and prove the koszulity of the dioperad associated to the properad $\mathcal{DL}ie$.

Key Words

Double Poisson algebra, double Lie algebra, double Lie-Rinehart algebra, dioperad, properad, bar-cobar adjunction, Koszul duality, combinatorics.