



**HAL**  
open science

# Cadre unifié pour la modélisation des incertitudes statistiques et bornées : application à la détection et isolation de défauts dans les systèmes dynamiques incertains par estimation

Tuan Anh Tran

► **To cite this version:**

Tuan Anh Tran. Cadre unifié pour la modélisation des incertitudes statistiques et bornées : application à la détection et isolation de défauts dans les systèmes dynamiques incertains par estimation. Automatique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2017. Français. NNT : 2017TOU30292 . tel-01705119v2

**HAL Id: tel-01705119**

**<https://theses.hal.science/tel-01705119v2>**

Submitted on 10 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ FÉDÉRALE TOULOUSE MIDI-PYRÉNÉES

Délivré par :

*l'Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le 29/11/2017 par :

**TUAN ANH TRAN**

**Cadre unifié pour la modélisation des incertitudes statistiques et bornées – Application à la détection et isolation de défauts dans les systèmes dynamiques incertains par estimation**

---

---

### JURY

GERT DE COOMAN	Professeur des Universités	Président du Jury
CARINE JAUBERTHIE	Maître de Conférences	Directeur de thèse
FRANÇOISE LE GALL	Chargé de Recherche	Directeur de thèse
PHILIPPE BONNIFAIT	Professeur des Universités	Rapporteur
NACIM RAMDANI	Professeur des Universités	Rapporteur
LOUISE TRAVE-MASSUYES	Directeur de Recherche	Examineur

---

**École doctorale et spécialité :**

*EDSYS : Automatique 4200046*

**Unité de Recherche :**

*Laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes (LAAS-CNRS)*

**Directeurs de Thèse :**

*Carine JAUBERTHIE et Françoise LE GALL*

**Rapporteurs :**

*Philippe BONNIFAIT et Nacim RAMDANI*



# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein de l'équipe Diagnostic, Supervision et CONduite (DISCO) du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS (LAAS-CNRS).

Je voudrais en premier lieu remercier profondément mes directrices de thèse, Carine Jaubertie et Françoise Le Gall, de m'avoir proposé un sujet intéressant. Je leur témoigne toute ma reconnaissance pour les conseils qu'elles m'ont prodigués au cours de ces trois années, pour les nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues et pour m'avoir accordé leur confiance pour travailler à leurs côtés. Ce travail n'aurait pas été possible sans leur soutien, leur disponibilité, leur patience et leurs encouragements.

Je tiens à remercier particulièrement Louise Travé-Massuyès de m'avoir accueilli dans son équipe de recherche, de m'avoir soutenu et encouragé durant l'ensemble de mes travaux de recherche. Je lui exprime ma profonde gratitude pour sa haute compétence, sa disponibilité et ses précieux conseils.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Nacim Ramdani, Professeur à l'Université d'Orléans et à Monsieur Philippe Bonnifait, Professeur à l'Université Technologique de Compiègne, qui ont consacré une partie de leurs temps, malgré leurs responsabilités, à l'évaluation de mon travail. Leurs conseils et suggestions m'ont permis d'apporter les corrections nécessaires à cette thèse. Je tiens également à remercier Monsieur Gert de Cooman, Professeur à l'Université de Gent, Belgique, qui m'a fait l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Je remercie mes collègues de l'équipe DISCO : Yannick, Euriell, Pauline, Elodie, pour leur accueil chaleureux et leur gentillesse ; ainsi que mes amis doctorants : Thanh, Zukun, Gustavo, John qui ont contribué à ce que ces trois années de travail se déroulent dans un cadre très agréable.

Je ne pourrais terminer ces remerciements, sans avoir une pensée pour mes parents. Ils m'ont soutenu et encouragé moralement durant mes années d'études. Sans eux je ne serais jamais arrivé là où je suis. J'exprime également ma gratitude à ma femme pour son soutien sans condition qui m'a aidé à traverser les moments difficiles dans mon aventure en France.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Estimation d'état . . . . .	6
1.2.1 Formulation du problème . . . . .	6
1.2.2 Cas linéaire . . . . .	7
1.2.3 Cas non linéaire . . . . .	8
1.2.4 Estimation d'état ensembliste . . . . .	9
1.3 Notions de base du diagnostic à base de modèles . . . . .	10
1.3.1 Formulation du problème . . . . .	10
1.3.2 Diagnostic à base de modèles . . . . .	13
1.3.3 Analyse structurelle . . . . .	18
1.4 Conclusion . . . . .	23
<b>2 Analyse par intervalles</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Notions de base . . . . .	26
2.2.1 Intervalles . . . . .	26
2.2.2 Arithmétique par intervalles . . . . .	29
2.2.3 Fonction d'inclusion . . . . .	30
2.2.4 Convergence d'une fonction d'inclusion . . . . .	32
2.3 Inversion ensembliste par arithmétique d'intervalles . . . . .	32
2.3.1 Inversion ensembliste . . . . .	32
2.3.2 Algorithme SIVIA . . . . .	33
2.4 Problème de satisfaction de contraintes . . . . .	34
2.4.1 Introduction . . . . .	34
2.4.2 Définition et propriétés des contracteurs . . . . .	35
2.4.3 Contracteur linéaire . . . . .	36
2.4.4 Contracteur non-linéaire . . . . .	37
2.5 Conclusion . . . . .	40
<b>3 Introduction à la théorie de l'incertain</b>	<b>41</b>
3.1 Introduction . . . . .	41
3.2 Fonctions de répartition . . . . .	42
3.3 Théorie des possibilités . . . . .	42
3.4 Théorie des croyances . . . . .	45
3.4.1 Fonctions de croyance . . . . .	45
3.4.2 Théorème de Bayes généralisé . . . . .	49
3.4.3 Prise de décision : méthodes de transformation . . . . .	49

3.4.4	Fonctions de croyance dans $\mathbb{R}$ . . . . .	50
3.5	Représentations de distributions univariées . . . . .	53
3.5.1	Moyenne connue . . . . .	53
3.5.2	Médiane connue . . . . .	54
3.5.3	Mode connu . . . . .	54
3.5.4	Représentation par des distributions de possibilité continues .	56
3.5.5	Construction d'une densité de masse à partir d'une densité de probabilité continue . . . . .	57
3.6	Représentation d'une distribution gaussienne multivariée . . . . .	60
3.7	Conclusion . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Filtre de Kalman et ses extensions</b> . . . . .	<b>67</b>
4.1	Introduction . . . . .	67
4.2	Filtre de Kalman . . . . .	69
4.2.1	Principe du filtre de Kalman . . . . .	69
4.2.2	Stabilité du filtre de Kalman . . . . .	70
4.3	Filtre de Kalman étendu . . . . .	76
4.3.1	Formulation du problème . . . . .	76
4.3.2	Filtre de Kalman étendu . . . . .	76
4.4	Filtre de Kalman intervalle . . . . .	79
4.4.1	Filtre de Kalman intervalle amélioré (iIKF) . . . . .	80
4.4.2	Filtre de Kalman intervalle à borne supérieure de variance minimale (UBIKF) . . . . .	82
4.4.3	Exemples numériques . . . . .	92
4.5	Conclusion . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Filtre Particulaire et extensions ensemblistes</b> . . . . .	<b>101</b>
5.1	Introduction . . . . .	101
5.2	Filtre particulaire . . . . .	103
5.2.1	Notations . . . . .	103
5.2.2	Modèle de l'espace d'état . . . . .	103
5.2.3	Formule de Bayes récursive . . . . .	104
5.2.4	Principe du filtre particulaire . . . . .	104
5.3	Résultats de convergence du filtre particulaire . . . . .	110
5.3.1	Convergence avec distribution d'importance a priori . . . . .	110
5.3.2	Convergence de l'erreur quadratique . . . . .	113
5.3.3	Effet du choix de la distribution d'importance . . . . .	113
5.4	Filtre particulaire ensembliste . . . . .	115
5.4.1	Filtre particulaire ensembliste à erreurs bornées . . . . .	116
5.4.2	Filtre ensembliste avec des fonctions de croyance finies . . . . .	120
5.4.3	Filtre particulaire ensembliste avec des distributions gaus- siennes incertaines . . . . .	123
5.4.4	Exemples numériques . . . . .	127
5.5	Conclusion . . . . .	136

---

<b>6</b>	<b>Détection et isolation de défauts</b>	<b>139</b>
6.1	Introduction . . . . .	139
6.2	Détection de défauts à base du filtre de Kalman intervalle . . . . .	141
6.2.1	Détection de défaut par un test du $\chi^2$ . . . . .	141
6.2.2	Détection de défauts par une approche ensembliste . . . . .	143
6.3	Isolation de défauts à base de filtre de Kalman intervalle . . . . .	145
6.3.1	Isolation de défauts capteurs . . . . .	145
6.3.2	Isolation de défauts actionneurs par l'analyse structurelle . . . . .	148
6.4	Exemple numérique . . . . .	152
6.5	Conclusion . . . . .	156
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>159</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>



# Table des figures

1.1	Structure d'un système avec un observateur. . . . .	7
1.2	Décomposition d'un système en boucle ouverte et les défauts possibles. . . . .	10
1.3	L'effet des défauts capteurs sur la mesure du système. . . . .	12
1.4	Types de défauts actionneurs. . . . .	13
1.5	Schéma de principe du diagnostic à base d'observateur/filtre . . . . .	14
1.6	Schéma d'observateur dédié pour le diagnostic de défauts capteurs et actionneurs . . . . .	17
1.7	Schéma d'observateur généralisé pour le diagnostic de défauts capteurs et actionneurs . . . . .	18
1.8	La graphe biparti de l'exemple 1.1. . . . .	20
1.9	La décomposition de Dulmage-Mendelsohn . . . . .	21
1.10	La décomposition de Dulmage-Mendelsohn de la matrice d'incidence de l'exemple 1.1. . . . .	21
2.1	Un exemple de fonctions d'inclusion. . . . .	30
2.2	Ensemble des boîtes $\mathcal{S}$ (rouges), $\mathcal{N}$ (bleues), $\mathcal{E}$ (jaunes) pour l'exemple 2.3 . . . . .	35
2.3	Arbre représentant les connections de variables dans l'exemple 2.4 . . . . .	39
3.1	Distribution de possibilité . . . . .	44
3.2	Exemple d'une fonction de masse. . . . .	46
3.3	Représentation d'un intervalle $[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$ par un point $K$ dans le triangle $\mathcal{T}_{[\alpha, \beta]}$ . . . . .	51
3.4	Représentation graphique de la croyance (a), de la plausibilité (b), de la communauté (c). . . . .	51
3.5	p-box avec le support $[-4, 4]$ et $moy = 1$ . . . . .	53
3.6	Une distribution triangulaire et sa fonction de masse associée. . . . .	55
3.7	Distribution de possibilité avec $\mu = 0$ , $\sigma = 1$ utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev (B-C) et de Camp-Meidel (C-M). . . . .	56
3.8	Fonction de plausibilité induite par une densité gaussienne avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1, 2, 4$ . . . . .	58
3.9	Fonction de plausibilité associée à une densité gaussienne imprécise avec $[\mu] = [-1, 1]$ et $[\sigma] = [1.9, 2.1], [1.5, 2.5], [1, 3]$ . . . . .	60
3.10	La fonction de plausibilité et les éléments focaux de $m_{\mu, \Sigma}$ . . . . .	61
3.11	La fonction de plausibilité et les éléments focaux de $m_{[\mu], [\Sigma]}$ . . . . .	63
4.1	États réels et intervalles de confiance donnés par l'UBIKF. . . . .	93
4.2	Les éléments diagonaux de la matrice $\mathcal{P}_{k k}$ (ligne noire) et l'ensemble des éléments diagonaux des matrices de covariance de 1000 modèles choisis (bande jaune). . . . .	94

4.3	Modèle d'une pile à combustible . . . . .	95
4.4	Etats réels et intervalles de confiance de 99.7% (borne supérieure (UB) et borne inférieure (LB)) donnés par l'iIKF et l'UBIKF pour la masse d'oxygène $m_{O_2}$ et de la masse d'hydrogène $m_{H_2}$ . . . . .	98
5.1	Exemple du ré-échantillonnage multinomial. . . . .	109
5.2	État réel, intervalle de confiance de 99.7% des filtres EBPF et BPF, espérance intervalle fournie par les filtre EBPF et BSE dans le cas de l'erreur de mesure gaussienne incertaine. . . . .	129
5.3	État réel, intervalle de confiance de 99.7% des filtres EBPF et BPF, espérance intervalle fournie par les filtre EBPF et BSE dans le cas de l'erreur de mesure bornée. . . . .	130
5.4	Les boîtes de particules, les boîtes de mesure prédites, l'état réel (point bleu) et l'innovation $\mathbf{y}_k - [\mathbf{v}_k]$ (boîte rouge) dans une itération du filtre EBPF. . . . .	132
5.5	Etat réel, intervalle de confiance de 99.7% donné par le filtre EBPF et par le filtre BPF, espérance intervalle fournie par le filtre EBPF et par le filtre BSE dans le cas de l'erreur de mesure gaussienne incertaine. . . . .	135
6.1	Schéma de principe du diagnostic à base d'observateur . . . . .	140
6.2	La détection d'un défaut capteur avec un test du $\chi^2$ . . . . .	146
6.3	La détection d'un défaut capteur avec la stratégie de [Xiong 2013]. . . . .	147
6.4	GOS pour défauts capteurs . . . . .	148
6.5	Isolation d'un défaut du premier actionneur du système dans l'exemple 6.1. . . . .	151
6.6	Détection de défauts par un test du $\chi^2$ pour le système dans l'exemple 6.1. . . . .	152
6.7	Les résultats des filtres UBIKF selon le schéma GOS pour isoler les défauts capteurs. . . . .	153
6.8	Isolation de défauts actionneurs à l'aide du filtre UBIKF et de l'analyse structurelle. . . . .	154

# Liste des algorithmes

2.1	SIVIA . . . . .	34
3.1	Croyance et plausibilité d'une boîte induites par une densité gaussienne imprécise $\mathcal{N}([\mu], [\Sigma])$ . . . . .	64
4.1	Filtre de Kalman . . . . .	70
4.2	Filtre de Kalman étendu . . . . .	77
4.3	Filtre de Kalman intervalle amélioré . . . . .	82
4.4	Filtre de Kalman intervalle amélioré à borne supérieure de variance minimale . . . . .	91
5.1	Filtre particulaire . . . . .	111
5.2	Filtre particulaire ensembliste . . . . .	119
5.3	Filtre ensembliste par théorie de croyance (BSE) . . . . .	123
5.4	Filtre particulaire ensembliste avec une distribution gaussienne incertaine (EBPF) . . . . .	126
6.1	Sélection des PSOs bien définis . . . . .	150



# Introduction

Le comportement dynamique d'un procédé peut être entièrement décrit par l'évolution de ses variables d'état. Ces variables ne sont en général pas accessibles par des mesures. Ce problème peut être résolu, sous certaines conditions, en introduisant un observateur d'état ou un estimateur d'état dont la tâche sera de fournir une estimation (asymptotique ou exponentielle) du vecteur d'état du système étudié en fonction des informations disponibles sur ce système (les mesures d'entrée et de sortie et le modèle dynamique du procédé). Pour l'estimation de l'état des systèmes linéaires, Luenberger a développé un observateur dans un cadre déterministe ([Luenberger 1964], [Luenberger 1971]) et Kalman un filtre dans un cadre stochastique [Kalman 1960]. Ce dernier a eu un impact considérable dans la pratique et a été appliqué à de nombreux problèmes tels que la poursuite des cibles, le contrôle de la navigation, la détection des défauts dans l'industrie nucléaire et les études démographiques. L'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman sont largement utilisés de nos jours, mais les systèmes linéaires ne couvrant qu'un faible pourcentage des procédés industriels, des solutions spécifiques aux systèmes non linéaires ont rapidement été envisagées. Parmi ces solutions, citons le filtre de Kalman étendu. Cette solution s'appuie sur la technique de linéarisation : le filtre de Kalman peut être appliqué en linéarisant à chaque instant le système étudié le long des trajectoires estimées. Dans de nombreux cas pratiques, cette approche fournit des résultats relativement satisfaisants. Notons que malgré des conditions peu restrictives d'applicabilité, ces approches, souvent locales, souffrent cependant d'une grande sensibilité aux conditions initiales et aux erreurs de modélisation ([Reif 1999], [Kluge 2010]).

Les approches pour l'estimation d'état peuvent être classifiées en deux types selon la modélisation des incertitudes :

- L'approche stochastique dans laquelle une modélisation probabiliste des informations disponibles est adoptée pour la gestion des incertitudes. Des exemples très connus de ce type d'estimation d'état sont le filtre de Kalman et le filtre particulaire.
- L'approche à erreurs bornées (ou ensemblistes) dans laquelle une représentation par des ensembles compacts est utilisée pour la modélisation des incertitudes. Autrement dit, les variables sont supposées incluses dans des ensembles de forme connue (ellipse, zonotope, intervalle ...). Les estimateurs d'état ensemblistes fournissent en sortie une estimation garantie sous la forme d'un ensemble particulier. La difficulté majeure est la détermination des ensembles contenant les incertitudes ; cette étape a une influence importante sur la convergence et la précision des algorithmes.

Par ailleurs, les avantages des deux approches montrent qu'elles sont complémentaires plutôt qu'opposées. En ce qui concerne l'estimation, l'avantage des approches ensemblistes est de fournir des résultats garantis, c'est-à-dire des ensembles qui contiennent de manière garantie l'ensemble solution théorique ou en d'autres termes

l'ensemble de tous les vecteurs de paramètres/états consistants avec les bornes spécifiées. Cependant, elles n'apportent aucune précision sur la densité liée aux valeurs de ces ensembles et elles produisent des résultats conservateurs.

Il est reconnu que la modélisation des incertitudes par des erreurs bornées représente une alternative intéressante à l'approche stochastique. Ceci est vrai, en premier lieu, parce que les distributions de probabilité des bruits et perturbations affectant un système dynamique peuvent être difficiles à identifier et, en second lieu, parce que certains types d'incertitudes sont mieux représentés par des bornes, comme la tolérance sur certains paramètres physiques, les variations dues au vieillissement, etc.

Un outil mathématique qui permet de modéliser et gérer plusieurs types de connaissance, telles que les informations incertaines, imprécises ou incomplètes, est la théorie des fonctions de croyance. Cette théorie, connue également sous le nom de théorie de Dempster-Shafer, a d'abord été introduite dans le contexte de l'inférence statistique [Dempster 1967]. La théorie a ensuite été formalisée comme une théorie de l'évidence dans [Shafer 1976] et a été développée par Smets sous le nom de modèle de croyance transférable ([Smets 1993], [Smets 1999], [Smets 2005a], [Smets 2005b]). La théorie des fonctions de croyance peut être considérée comme une généralisation de la théorie de probabilité bayésienne et du formalisme ensembliste car elle permet d'assigner des masses de croyance aux sous-ensembles de l'espace des hypothèses [Nassreddine 2010].

Le travail présenté dans ce manuscrit de thèse se situe dans le cadre de l'estimation d'état d'un système dynamique avec l'intégration d'incertitudes statistiques et à erreurs bornées, que nous appelons des *incertitudes mixtes*. Cette voie a été peu explorée et demande des développements théoriques pour travailler avec un formalisme unifié qui permet de manipuler des variables aléatoires incertaines et/ou des lois de distribution incertaines. Partant du filtre de Kalman intervalle (en anglais : Interval Kalman filter, noté IKF) développé dans [Chen 1997] et son amélioration (improved Interval Kalman filter, notée iIKF) [Xiong 2013], nous proposons un nouveau filtre de Kalman intervalles basé sur la recherche d'une borne majorante de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (en anglais : Minimum Upper Bound of Variance Interval Kalman Filter, noté UBIKF). Cet algorithme permet de réduire à la fois le pessimisme et le temps de calcul par rapport aux filtres IKF et iIKF. Inspirés par les travaux récents sur le filtre particulaire ensembliste ([Abdallah 2008], [Blesa 2015]) et sa combinaison avec la théorie des fonctions de croyance [Nassreddine 2010], nous développons un algorithme de filtrage particulaire ensembliste pour des systèmes non linéaires. Dans ces systèmes, les bruits sur la dynamique sont bornés et les erreurs de mesure sont modélisées par une distribution gaussienne multivariée incertaine, i.e. la moyenne et la matrice de covariance sont des matrices intervalles. Grâce à une fonction de masse représentant ce type d'erreur de mesure et à la capacité de détecter le pessimisme des particules, cet algorithme peut être considéré comme une solution robuste pour l'estimation d'état avec des bruits stochastiques et des incertitudes paramétriques bornées.

Le manuscrit s'articule autour de six chapitres.

Le premier chapitre présente un état de l'art sur le problème d'estimation d'état et le diagnostic à base de modèles. Ces thèmes font l'objet d'un nombre très important de travaux et publications. L'objectif de ce chapitre est de faire un tour d'horizon en mettant l'accent sur les caractéristiques en corrélation avec nos travaux.

Dans le deuxième chapitre, les notions et outils principaux de l'analyse par intervalles sont détaillés. Des exemples sont présentés afin d'illustrer les différentes applications de l'analyse par intervalles qui sont utilisées tout au long de ce manuscrit.

Le troisième chapitre présente trois cadres permettant de représenter des connaissances incomplètes ou imprécises : les fonctions de répartition, la théorie de possibilité et la théorie des fonctions de croyance. Des exemples sur la représentation d'une distribution univariée unimodale par ces trois cadres sont introduits. Notre première contribution dans cette thèse est ensuite exposée. Il s'agit de la représentation d'une distribution gaussienne multivariée incertaine par une fonction de masse dont les éléments focaux sont des boîtes. Il est montré que cette fonction de masse satisfait le principe d'engagement minimal de la théorie de croyance. Nous développons également le calcul de la croyance et de la plausibilité d'une boîte correspondant à une fonction de masse gaussienne incertaine.

Le quatrième chapitre est consacré à l'estimation d'état par le filtre de Kalman. Après la présentation du principe et des différents résultats sur la convergence du filtre de Kalman classique et du filtre de Kalman étendu, nous présentons deux extensions du filtre de Kalman : l'iIKF et notre filtre UBIKF. Les filtres de Kalman intervalles sont comparés dans une application d'estimation d'état pour une pile à combustible à membrane d'échange de protons afin de montrer les avantages de l'UBIKF par rapport à l'iIKF.

Le cinquième chapitre se concentre sur le filtre particulaire et ses extensions ensemblistes. Nous commençons par le principe et les résultats sur la convergence du filtre particulaire. Différents algorithmes de filtrage ensemblistes sont ensuite décrits, y compris le filtre particulaire ensembliste (en anglais : Box Particle filter, noté BPF [Abdallah 2008]), la méthode crédibiliste (en anglais : Belief State Estimation, notée BSE [Nassreddine 2010]) et notre filtre particulaire ensembliste basé sur une fonction de masse gaussienne incertaine proposée dans le chapitre 4. La comparaison des filtres particuliers ensemblistes est illustrée sur un exemple non linéaire et une application de suivi d'objet en 2D.

Le sixième chapitre contient nos contributions relatives au diagnostic à base de modèles dans un contexte à incertitudes mixtes. La méthode appliquée pour la détection et l'isolation de défauts repose sur le schéma d'observateur généralisé et l'analyse structurelle présentés dans le chapitre 1.

Nous terminons ce manuscrit par une conclusion générale, dans laquelle nous évoquons en particulier les perspectives engendrées par nos travaux.

L'ensemble de ce travail a fait l'objet des articles [Tran 2016], [Tran 2017] et [Tran 2018].



# Etat de l'art

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1.2</b>	<b>Estimation d'état</b>	<b>6</b>
1.2.1	Formulation du problème	6
1.2.2	Cas linéaire	7
1.2.3	Cas non linéaire	8
1.2.4	Estimation d'état ensembliste	9
<b>1.3</b>	<b>Notions de base du diagnostic à base de modèles</b>	<b>10</b>
1.3.1	Formulation du problème	10
1.3.2	Diagnostic à base de modèles	13
1.3.3	Analyse structurelle	18
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>23</b>

## 1.1 Introduction

Associés à la demande croissante d'une performance élevée des systèmes et de la qualité des produits, la complexité et le degré d'automatisation des processus techniques augmentent continuellement. Ce développement demande plus de sécurité et de fiabilité des systèmes. De nos jours, l'un des problèmes les plus critiques liés à la conception des systèmes automatiques est la fiabilité du système.

Une façon traditionnelle d'améliorer la fiabilité d'un système est d'augmenter la qualité, la fiabilité et la robustesse des composants individuels du système, tels que les capteurs, les actionneurs, les contrôleurs ou les ordinateurs. La surveillance des processus et le diagnostic de défauts deviennent donc un ingrédient d'un système de contrôle automatique moderne, souvent prescrit par les autorités.

Depuis les années 70, le diagnostic à base de modèles se développe de façon remarquable. Son efficacité dans la détection de défauts des systèmes a été validée par un grand nombre d'applications concernant les processus industriels et les systèmes de contrôle automatique. Les systèmes de diagnostic à base de modèles sont actuellement intégrés dans des systèmes de contrôle des véhicules, de robots, de systèmes de transport, de systèmes d'alimentation, de processus de fabrication, de systèmes de contrôle des processus, etc.

Parmi les approches de diagnostic à base de modèles existantes, la technique d'estimation d'état a reçu beaucoup d'attention depuis les années 90. Cette technique est développée dans le cadre de la théorie de contrôle avancée bien établie, où sont disponibles des outils puissants pour la conception d'observateurs, des algorithmes efficaces et fiables pour le traitement de données visant à reconstruire les variables de processus.

L'objectif de ce chapitre est de décrire brièvement le problème d'estimation d'état et le diagnostic à base de modèles. Ce chapitre est donc décomposé en deux grandes parties. Les méthodes les plus souvent utilisées pour l'estimation d'état sont présentées dans la section 1.2. Différentes notions de base du diagnostic à base de modèles sont introduites dans la section 1.3.

## 1.2 Estimation d'état

Le problème d'estimation d'état joue un rôle crucial dans de nombreuses applications d'ingénierie où la valeur estimée de l'état est nécessaire pour concevoir les lois de commande ou pour surveiller la performance du système. De nombreuses approches utilisées pour concevoir des filtres ont été développées et peuvent être classifiées selon la modélisation des incertitudes. Certaines d'entre elles tiennent compte de la modélisation statistique des incertitudes ; par exemple le filtre de Kalman est applicable à des systèmes linéaires soumis à des bruits gaussiens. L'idée générale des *filtres stochastiques* est de former une approximation de la distribution de probabilité a posteriori de l'état réel à partir des mesures bruitées du système. Le deuxième groupe de méthodes repose sur la représentation des incertitudes par des ensembles compacts (intervalles, zonotopes par exemple), où aucune hypothèse sur les propriétés statistiques n'est requise. Ce groupe de méthodes est connu sous le nom des *approches ensemblistes*. Dans cette section, le problème d'estimation d'état dans un système dynamique est formulé, suivi par la présentation des méthodes classiques. Enfin, des résultats récents de l'approche ensembliste sont introduits.

### 1.2.1 Formulation du problème

Considérons un système dynamique général décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k), \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$  est le vecteur d'état,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  est le vecteur d'entrée,  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur de mesure. Les vecteurs  $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_w}$  et  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$  représentent respectivement les bruits du système et les erreurs de mesure. Les fonctions  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  et  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  sont les fonctions décrivant l'évolution de la dynamique et les mesures du système.

Une structure typique d'un observateur d'état est présentée dans la figure 1.1. Un observateur/filtre vise à corriger la différence entre la réalité et le modèle en uti-

lisant les valeurs d'entrée et de sortie disponibles. Le problème d'estimation d'état peut être transformé en un problème d'optimisation équivalent, en maximisant ou en minimisant certaines fonctions de coût. L'estimation de l'état peut être mieux résolue lorsque le nombre de mesures augmente, mais la taille du processus d'optimisation augmente en même temps dans certaines méthodes. Pour limiter l'espace mémoire requis et le temps de calcul, on peut utiliser une approximation de l'horizon glissant ([Drakunov 1992], [Puig 2003]), en particulier pour les systèmes non linéaires. Autrement dit, il existe un compromis entre la précision et le temps d'exécution.

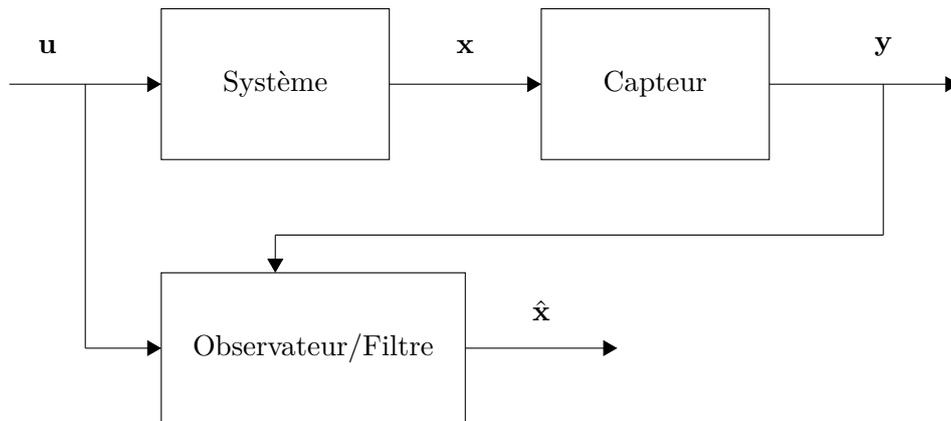


FIGURE 1.1 – Structure d'un système avec un observateur.

Dans la section suivante, différentes approches classiques pour des systèmes linéaires et non linéaires sont présentées. Elles constituent le fondement des méthodes dans le contexte à erreurs bornées.

### 1.2.2 Cas linéaire

La théorie de l'observateur d'état a tout d'abord été introduite par Kalman et Bucy pour un système linéaire dans un environnement stochastique (Filtre de Kalman-Bucy) [Kalman 1960]. Puis Luenberger a développé une théorie générale des observateurs pour les systèmes linéaires déterministes, introduisant notamment les notions d'observateur réduit et d'observateur minimal ([Luenberger 1964], [Luenberger 1971]).

#### Filtre de Kalman

L'un des filtres classiques pour les systèmes discrets linéaires est le filtre de Kalman, introduit dans [Kalman 1960]. Il fournit, à chaque instant, une estimation d'état et une matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Pour un système dynamique linéaire sous les hypothèses de bruits de dynamique et d'erreurs de mesures gaussiennes et indépendantes, le filtre de Kalman est l'estimateur non biaisé

à variance minimale. En levant ces hypothèses gaussiennes, il fournit une estimation sous optimale. Le filtre de Kalman est un estimateur récursif. Autrement dit, pour estimer l'état courant, seules l'estimation de l'état précédent et les mesures actuelles sont nécessaires. L'historique des observations et des estimations n'est ainsi pas requis.

Le filtre de Kalman a deux phases distinctes : Prédiction et Correction. La phase de prédiction produit une estimation de l'état courant en utilisant l'état estimé de l'instant précédent. Dans l'étape de correction, les mesures de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise.

### Observateurs de Luenberger

La théorie des observateurs ayant débuté avec les travaux de Luenberger ([Luenberger 1964], [Luenberger 1971]), les observateurs sont souvent appelés observateurs de Luenberger. Deux techniques principales sont disponibles pour la conception des observateurs. La première est utilisée pour la conception des observateurs d'ordre plein, i.e. un observateur ayant la même dimension que le système d'origine. La deuxième technique exploite la connaissance disponible de certaines variables de l'espace d'état à l'aide de l'équation algébrique des mesures du système de manière à construire un observateur d'ordre réduit pour estimer les variables d'état qui ne sont pas directement obtenues à partir des mesures du système.

#### 1.2.3 Cas non linéaire

Afin de résoudre le problème d'estimation d'état pour un système non linéaire, il est possible de le transformer en un problème de filtrage linéaire traditionnel en utilisant la linéarisation des équations d'origine. Une autre solution est d'utiliser une approche probabiliste pour approcher l'évolution du système.

### Filtre de Kalman étendu

Le premier filtre non linéaire utilisant la technique de linéarisation est le filtre de Kalman étendu (EKF). L'EKF applique le développement en séries de Taylor afin de linéariser le modèle autour du point de fonctionnement. On suppose que les fonctions  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$  (Equation 1.1) sont des fonctions différentiables par rapport à leurs variables. Les matrices jacobiniennes de ces deux fonctions sont nécessaires pour calculer la prédiction et l'estimation de la covariance.

Le filtre de Kalman étendu n'est pas un estimateur optimal. En outre, si l'estimation initiale de l'état est incorrecte, ou si le processus a un degré de non linéarité élevé, le filtre peut diverger rapidement à cause de sa linéarisation. D'autre part, la matrice de covariance estimée tend à sous-estimer la vraie matrice de covariance et risque donc de devenir incohérente au sens statistique [Huang 2008]. Plus précisément, la partie observable du modèle linéarisé est d'une plus grande dimension que celle du système non-linéaire considéré. Par conséquent, la matrice de covariance

du filtre EKF subit une réduction sur des directions de l'espace d'état où aucune information n'est disponible. Cela est la principale cause de l'incohérence.

### Filtre particulaire

Les filtres particuliers, aussi connus sous le nom de méthodes de Monte-Carlo séquentielles, sont des techniques d'estimation de modèles fondées sur la simulation.

L'objectif d'un filtre particulaire est d'estimer la densité a posteriori des variables d'état compte tenu des variables d'observation. Le filtre de particules est conçu pour un modèle de Markov caché, où le système se compose de variables cachées et observables. Les variables observables (processus d'observation) sont liées aux variables cachées (états du processus) par une forme fonctionnelle connue. De même, le système dynamique décrivant l'évolution des variables d'état est également connu de façon probabiliste [Doucet 2001].

Les filtres particuliers sont utilisés depuis deux décennies dans des applications réelles, en particulier depuis que le rééchantillonnage séquentiel (SIR) a été proposé en 1993 [Gordon 1993]. Des travaux récents se concentrent sur la recherche d'un compromis entre la vitesse d'algorithme et le contrôle des erreurs estimées ([Faubel 2008], [Verma 2003]). Une revue complète de ces travaux se trouve dans [Doucet 2001], [Oppenheim 2008].

Les filtres particuliers peuvent effectuer l'estimation d'état sur un large éventail de systèmes pour la détection de défauts, l'identification et le contrôle du système [Andrieu 2004]. Ils peuvent également s'adapter aux systèmes hybrides ([Funiak 2003], [Koutsoukos 2003], [Hofbauer 2004]). Des applications à l'estimation et au diagnostic de défauts des filtres particuliers se trouvent dans [Li 2001], [McIlraith 2000], [Verma 2004].

Un inconvénient du filtre particulaire est lié au coût de calcul dû au grand nombre de particules requises s'il existe un degré élevé d'imprécision. Plusieurs algorithmes ont été développés (par exemple [Soto 2005], [Zhang 2012]) pour réduire le nombre de particules nécessaires afin d'obtenir une représentation appropriée de la densité a posteriori, réduisant ainsi le temps de calcul associé.

#### 1.2.4 Estimation d'état ensembliste

Dans le contexte à erreurs bornés, les incertitudes sont supposées être bornées par des ensembles compacts, tels que ellipsoïdes ([Milanese 2002], [Zhou 2008]), zonotopes ([Combastel 2005], [Combastel 2015], [Combastel 2016]) ou intervalles ([Chen 1997], [Xiong 2013], [Abdallah 2008], [Blesa 2015]), i.e, aucune hypothèse statistique n'est requise. Les méthodes ensemblistes fournissent des ensembles contenant toutes les valeurs d'état cohérentes à la fois avec le modèle incertain et les mesures.

L'analyse par intervalle introduite dans [Sunaga 1958], [Moore 1966] est un outil pour l'estimation d'état ensembliste utilisé dans de nombreux domaines [Jaulin 2001]. Plusieurs algorithmes ensemblistes ont été développés, par exemple

le filtre de Kalman intervalle [Chen 1997] et son amélioration [Xiong 2013] qui sont les extensions du filtre de Kalman au contexte à erreurs bornées. La combinaison du filtre particulaire et de l'analyse par intervalles, appelée filtre particulaire ensembliste (BPF) ([Abdallah 2008], [Blesa 2015]) permet de traiter les incertitudes bornées et de réduire le nombre de particules. La difficulté majeure de cette approche est de déterminer des bornes pour les incertitudes. En effet, la surestimation des bornes conduit à l'imprécision de l'estimation de l'état, et la méthode devient pessimiste. Au contraire, si les bornes sont trop serrées, les données peuvent devenir incompatibles avec le modèle du système et les mesures.

### 1.3 Notions de base du diagnostic à base de modèles

#### 1.3.1 Formulation du problème

Cette section a pour objet la détection et l'isolation de défauts dans un système dynamique. Le système considéré est représenté par un modèle non linéaire (Equation 1.1).

Dans le cadre de cette thèse, le diagnostic des défauts qui se produisent dans les composants d'un système en boucle ouverte est considéré. Autrement dit, on suppose qu'aucun défaut n'apparaît dans le contrôleur du système. Les principales raisons sont : les systèmes de contrôle modernes sont commandés par ordinateurs ; les défauts qui peuvent apparaître dans ces contrôleurs sont généralement traités par les mécanismes qui sont principalement développés par la communauté des sciences informatiques.

Un système en boucle ouverte peut être décomposé en trois parties : capteurs, actionneurs et dynamique du système. Cette décomposition, montrée dans la figure 1.2, est souvent utilisée en pratique. Comme le montre cette figure, il peut se produire des défauts dans l'actionneur ( $\mathbf{f}^a$ ), dans les composants ( $\mathbf{f}^{com}$ ) et dans les capteurs ( $\mathbf{f}^c$ ). Les différentes sources de défauts dans un système en boucle ouverte sont décrites dans les sous-sections suivantes.

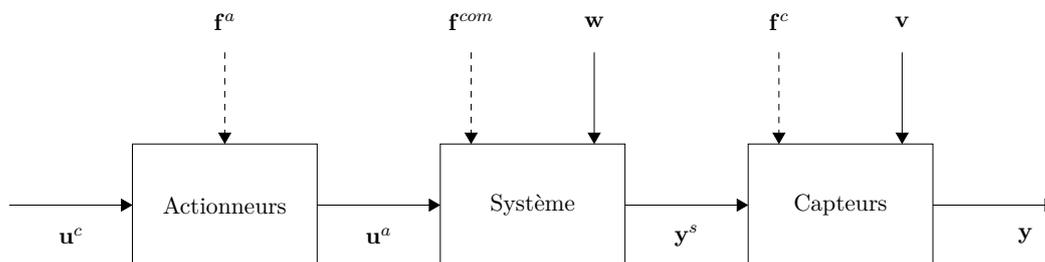


FIGURE 1.2 – Décomposition d'un système en boucle ouverte et les défauts possibles.

##### 1.3.1.1 Défauts capteurs

Les capteurs sont essentiellement l'interface entre un système et son environnement. Ils transmettent les informations concernant le comportement et les états

internes du système considéré. Les défauts capteurs peuvent donc causer une dégradation de performance substantielle de tous les systèmes de prise de décisions. De tels systèmes incluent des systèmes de contrôle en boucle fermée, systèmes de contrôle de qualité, systèmes de navigation, systèmes de surveillance et de reconnaissance, système d'estimation d'état et notamment systèmes de surveillance et de diagnostic de défauts. Par exemple, dans un système de contrôle en boucle fermée, les informations fournies par les capteurs sont utilisées pour estimer les états ou pour calculer les lois de commande. Ainsi, la présence de défauts capteurs peut détériorer l'estimation d'état et entraîner l'inefficacité et l'imprécision des lois de commande.

Les défauts capteurs sont classifiés en 4 types : (a) biais, (b) dérive, (c) blocage, (d) calibrage [Boskovic 2002]. La figure 1.3 illustre l'effet de chaque type de défauts capteurs sur les mesures du système. La représentation mathématique de ces types de défauts capteurs est donnée par :

$$y_k^c = \begin{cases} y_k & \forall k \geq k_0 \text{ Pas de défaut,} \\ y_k + b_k & \forall k \geq k_F \text{ Biais,} \\ y_k + b_k, |b_k| = c_k k, 0 < c_k \ll 1 & \forall k \geq k_F \text{ Dérive,} \\ y_{k_F} & \forall k \geq k_F \text{ Blocage,} \\ a_k y_k, 0 < \underline{a} \leq a_k \leq 1 & \forall k \geq k_F \text{ Calibrage,} \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $k_F$  indique le moment d'apparition du défaut,  $y_k$  et  $y_k^c$  sont respectivement la valeur réelle de la sortie et celle donnée par le capteur. L'influence d'un défaut capteur peut finalement se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} & = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k), \\ \mathbf{y}_k & = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k + E_k^c \mathbf{f}_k^c. \end{cases} \quad (1.3)$$

### 1.3.1.2 Défauts actionneurs

Dans de nombreux systèmes électromécaniques ou électrochimiques, les lois de commande du contrôleur (par exemple, un microprocesseur ou un micro-contrôleur) ne peuvent pas être directement appliquées au système. Des actionneurs sont nécessaires pour transformer les signaux de commande en signaux d'actionnement appropriés tels que des couples et des forces pour conduire le système. Les actionneurs sont donc les effecteurs de contrôle d'un système. Par exemple, les conséquences de l'apparition d'anomalies dans les actionneurs du système peuvent varier d'une consommation d'énergie plus élevée à une perte totale de contrôle (à cause d'une défaillance totale d'un actionneur).

Les défauts actionneurs dépendent généralement du type d'actionneur. Cependant, des types communs de défauts sont identifiés pour des types spécifiques d'actionneurs [Boskovic 2005]. Par exemple, les défauts des actionneurs de contrôle de

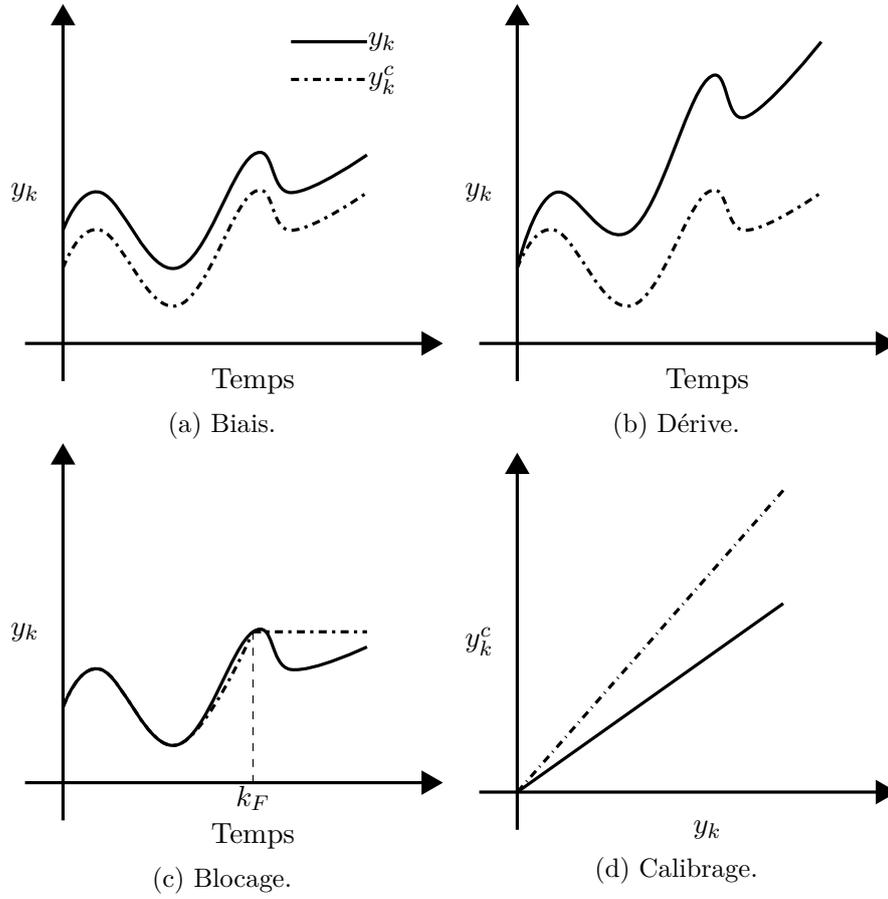


FIGURE 1.3 – L'effet des défauts capteurs sur la mesure du système.

vannes incluent des blocages et des fuites anormales. Un autre ensemble commun de défauts actionneurs, en particulier dans les servomoteurs, comprend le blocage, la saturation et la perte d'efficacité. La figure 1.4 montre l'effet de ces défauts sur le signal de commande. Dans le cas de blocage, l'actionneur ne répond plus aux commandes ultérieures. Un défaut de type saturation est caractérisé par le fait que l'actionneur se déplace vers sa borne supérieure ou inférieure indépendamment de la commande. La perte d'efficacité se caractérise par une diminution du gain de l'actionneur par rapport à sa valeur nominale. Différents types de défauts actionneurs peuvent être mathématiquement représentés par [Sobhani-Tehrani 2009] :

$$u_k^a = \begin{cases} u_k^c & \forall k \geq k_0 \text{ Pas de défaut,} \\ a_k u_k^c, & 0 < \varepsilon \leq a_k < 1 \quad \forall k \geq k_F \text{ Perte d'efficacité,} \\ u_{k_F} & \forall k \geq k_F \text{ Blocage,} \\ \underline{u} \vee \bar{u} & \forall k \geq k_F \text{ Saturation,} \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $u_k^a$  et  $u_k^c$  désignent respectivement le signal de commande (sortie de l'actionneur) et la loi de commande (entrée de l'actionneur),  $k_F$  indique le moment d'apparition

du défaut,  $a_k \in [\varepsilon, 1]$  est le coefficient d'efficacité de l'actionneur,  $\varepsilon$  étant l'efficacité minimale,  $\underline{u}$  et  $\bar{u}$  sont les bornes inférieure et supérieure du signal de commande. Les types de défauts actionneurs peuvent être représentés par le modèle commun suivant :

$$u_k^a = \delta_k a_k u_k + (1 - \delta_k) u_b, \quad (1.5)$$

où  $\delta_k = 1$  et  $a_k = 1$  en l'absence de défaut ;  $\delta_k = 1$  et  $0 < a_k < 1$  en présence de la perte d'efficacité ;  $\delta_k = 0$  pour d'autres types de défaut (blocage, saturation),  $u_b$  étant la position à laquelle l'actionneur est bloqué.

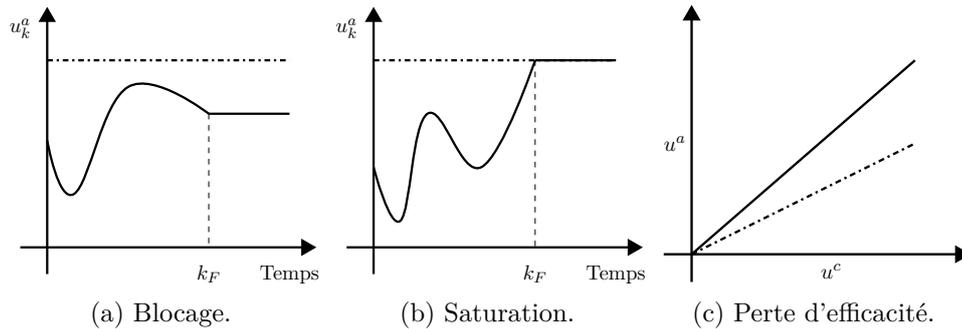


FIGURE 1.4 – Types de défauts actionneurs.

### 1.3.1.3 Défauts composants

Les défauts composants sont généralement représentés comme des cas où certaines conditions changent dans le système rendant invalide l'équation dynamique nominale du système. Les défauts composants dépendent également du système surveillé. Certains exemples incluent des défauts alimentation dans les satellites (par exemple batteries, panneaux solaires) ; des fuites dans un réservoir dans les systèmes chimiques ; des dommages dans les véhicules aériens (par exemple, dommages aux ailes, dommages à la surface de contrôle) ; des défauts dans des équipements rotatifs (par exemple, des moteurs d'avion) ; une rupture de dents et des fissures dans les engrenages d'un système de boîte de vitesses (surtout dans les hélicoptères). La représentation mathématique ou la modélisation de ces défauts est parfois très difficile et une expérimentation approfondie peut être nécessaire avant de construire un modèle de défauts. Avec une bonne connaissance du système, les défauts composants peuvent être modélisés par une modification de l'équation d'état du système (c'est-à-dire une modification de la fonction non linéaire  $\mathbf{f}$  dans l'équation 1.1).

## 1.3.2 Diagnostic à base de modèles

Le diagnostic de défaut à base de modèles peut être défini comme la détection, l'isolation et la caractérisation des défauts dans les composants d'un système à partir de la comparaison des mesures disponibles du système, avec une information a priori représentée par le modèle mathématique du système.

Les défauts sont détectés en définissant un seuil (fixe ou variable) sur une quantité résiduelle générée par la différence entre les mesures réelles et leurs estimations à l'aide du modèle mathématique. Un certain nombre de résidus peuvent être conçus tels que chacun ait une sensibilité spéciale à un unique défaut. Dès que le résidu dépasse le seuil, ce défaut est isolé.

La figure 1.5 illustre la structure générale et conceptuelle d'un système de diagnostic de défaut à base de modèles comprenant deux étapes principales : la génération résiduelle et la prise de décision. Cette structure en deux étapes a d'abord été suggérée par Chow et Willsky [Chow 1980] et est maintenant largement acceptée par la communauté de diagnostic de défauts. Ces deux étapes sont décrites comme suit :

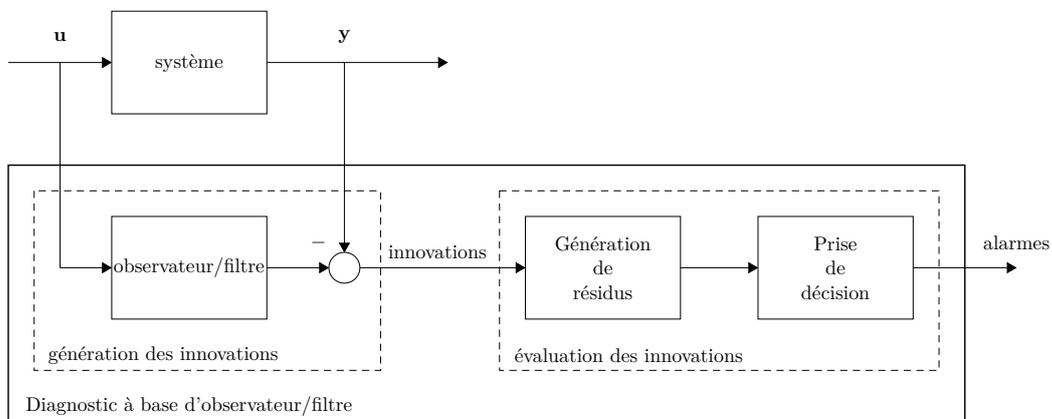


FIGURE 1.5 – Schéma de principe du diagnostic à base d'observateur/filtre

### Génération de résidus

Le but de cette étape est de générer un signal indiquant l'apparition de défauts, appelé le résidu, en utilisant les informations d'entrée et de sortie disponibles à partir du système surveillé. Le résidu est idéalement nul ou proche de zéro lorsqu'il n'y a pas de défaut. Il est différent de zéro quand il se produit un défaut. Cela signifie que le résidu est typiquement indépendant des systèmes et des sorties, dans des conditions idéales. Un algorithme utilisé pour générer des résidus est appelé un générateur de résidus. La génération de résidus est donc une procédure pour extraire les symptômes de défaut du système, avec le symptôme de défaut représenté par le résidu.

### Prise de décision

Lorsque les résidus sont disponibles, une règle de décision est ensuite appliquée pour déterminer si des défauts se produisent dans le système. Un processus de prise de décision peut consister en une comparaison entre la valeur instantanée ou les valeurs dans une fenêtre du résidu et un seuil choisi en se basant sur les

propriétés du résidu. Il s'agit de méthodes de la théorie de décision statistique, par exemple, test de taux de vraisemblance ou test de taux de probabilité séquentiel ([Willsky 1976], [Basseville 1988], [Basseville 1993]).

### 1.3.2.1 Détection de défauts

La détection de défauts est essentiellement la première étape du diagnostic. Cette étape détecte la présence de défauts dans le système. Il est important de noter que la détection de défauts naissants (ou la détection précoce de défauts) est extrêmement cruciale pour la sécurité du système ainsi qu'une mise en œuvre efficace d'un système de maintenance. La détection de défauts à base de modèles consiste à générer un résidu qui représente l'incohérence entre le comportement réel du système et le modèle mathématique du système.

Différentes méthodes de génération de résidus ont été proposées parmi lesquelles les approches à base d'observateurs. Les observateurs sont des systèmes dynamiques qui estiment les états et par conséquent les sorties d'un processus. Un résidu basé sur un observateur est simplement l'erreur d'estimation de sorties ou une combinaison des erreurs d'estimation de sorties. Diverses techniques de conception d'observateurs non linéaires ont été utilisées pour la génération de résidus, car aucun observateur non linéaire unique, universel et optimal n'existe pour tous les systèmes non linéaires. Les observateurs non linéaires existants doivent être conçus sous certaines hypothèses sur la structure, les entrées et/ou le degré de non-linéarité du système.

Dans un cadre déterministe, une étude sur l'utilisation des observateurs non linéaires pour la détection et l'isolation de défauts est présentée dans [Frank 1997]. Plus précisément, l'utilisation d'observateurs grand gain pour la détection de défauts des systèmes non linéaires dont les signaux de contrôle sont affines est discutée dans [Hammouri 1999]. Le problème de conception des observateurs en utilisant la solution de l'équation de Riccati pour les systèmes non linéaires lipschitziens est étudié dans [Besançon 1996]. Un observateur à entrées inconnues (UIO) non linéaires comme une extension de l'UIO linéaire à une classe de systèmes non linéaires est proposé dans [Seliger 1991]. Ding et Frank [Ding 1993], Yang et Saif [Yang 1995] ont proposé l'utilisation des observateurs non linéaires adaptatifs pour la détection de défauts. Sreedhar et al. [Sreedhar 1993] ont conçu la détection de défauts pour les systèmes non linéaires basée sur un observateur à mode glissant.

Dans la détection des défauts à base de observateurs stochastiques, Alessandri et al. [Alessandri 1999] ont utilisé le filtre de Kalman étendu (EKF) pour la détection de défauts de l'actionneur dans les véhicules sous-marins sans conducteur. Caliskan et Hajiyev [Caliskan 2000] ont développé un algorithme de détection de défauts basé sur l'EKF pour les défauts de surface d'avion. Okatan et al. [Okatan 2007] ont conçu un algorithme de détection de défauts pour les magnétomètres et les capteurs solaires du sous-système de détermination et de contrôle d'altitude des satellites à orbite basse en utilisant une approche pour vérifier les caractéristiques statistiques de la séquence d'innovation de l'EKF. Enfin, Li et Kadiramanathan [Li 2001] ont développé une approche par rapport à la vraisemblance basée sur les

filtres particuliers pour le diagnostic de défauts dans les systèmes stochastiques non linéaires.

### 1.3.2.2 Isolation de défauts

Une fois qu'un défaut est détecté dans un système, il doit être suivi par une isolation de défaut qui distingue (ou isole) un défaut particulier des autres ou localise le composant défectueux dans le système. Tandis qu'un seul résidu est suffisant pour la détection de défauts, l'isolation de défauts nécessite un ensemble de résidus (ou un vecteur résiduel). Si un vecteur résiduel peut isoler tous les défauts, il a la propriété d'isolabilité de défaut.

Une approche pour accomplir la tâche d'isolation de défauts consiste à concevoir un ensemble de résidus structurés, dans lequel chaque résidu est conçu pour être sensible à un sous-ensemble de défauts en restant insensible aux autres. La procédure de conception se compose de deux étapes. La première étape consiste à spécifier les relations de sensibilité et d'insensibilité entre les résidus et les défauts en fonction de la tâche d'isolation assignée et la seconde consiste à concevoir un ensemble de générateurs de résidus en fonction des relations de sensibilité et d'insensibilité souhaitées [Chen 1999].

Les résidus structurés peuvent être conçus selon deux schémas : le schéma d'observateur dédié (Dedicated Observer Scheme-DOS) et le schéma d'observateur généralisé (Generalized Observer Scheme-GOS).

#### Schéma d'observateur dédié (DOS)

Le schéma DOS est proposé dans [Clark 1978]. Dans cette approche, chaque sortie, sous couvert de l'observabilité des sorties, est utilisée pour piloter soit un observateur dédié d'ordre réduit ou plein, soit un filtre de Kalman. Ainsi, l'observateur recevant une mesure défaillante fournit une mauvaise estimation des variables estimées, tandis que les estimations des autres observateurs convergent vers les mesures des sorties correspondantes sauf sur la sortie erronée. Plus précisément, la logique suivante est utilisée afin de prendre la décision de l'apparition d'un défaut spécifique [Chen 1999] :

$$r_k^i > T_i \quad \Rightarrow \quad f_k^i \neq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, L\}, \quad (1.6)$$

où  $L$  est le nombre de défauts  $f_k^i$  à isoler ;  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) sont les seuils correspondant aux résidus  $r_k^i$ . Diverses techniques d'isolation de défauts ont été développées dans la littérature dans le cadre du schéma dédié. Clark [Clark 1978], dans son travail de pionnier, a conçu un système d'observateurs dédié pour la détection des défauts capteurs, qui a été l'inspiration originale pour le concept du schéma d'observateur dédié. Dans le DOS, un observateur reconstruit toutes les sorties du système sauf une (c'est-à-dire  $y_k^j(t), j = 1, \dots, m, j \neq i$ ) en utilisant toutes les entrées du système et la seule sortie choisie  $y_k^i$ . Ensuite, la différence entre l'estimation et la mesure indique la possibilité d'un défaut dans le  $i$ -ème capteur. Si cette technique

est appliquée pour toutes les sorties du système,  $y_k^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , alors une banque de  $m$  observateurs dédiés est obtenue pour surveiller les capteurs du système. Chen et Saif [Chen 2007] ont récemment étendu le DOS à l'isolation de défauts actionneurs. Le  $i$ -ième observateur est piloté par la  $i$ -ième entrée et toutes les sorties. Les autres entrées sont considérées comme des entrées inconnues. Ainsi la sortie de cet observateur sera insensible aux défauts affectant les entrées non utilisées.

Le DOS pour isoler des défauts capteurs et actionneurs est montré dans la figure 1.6.

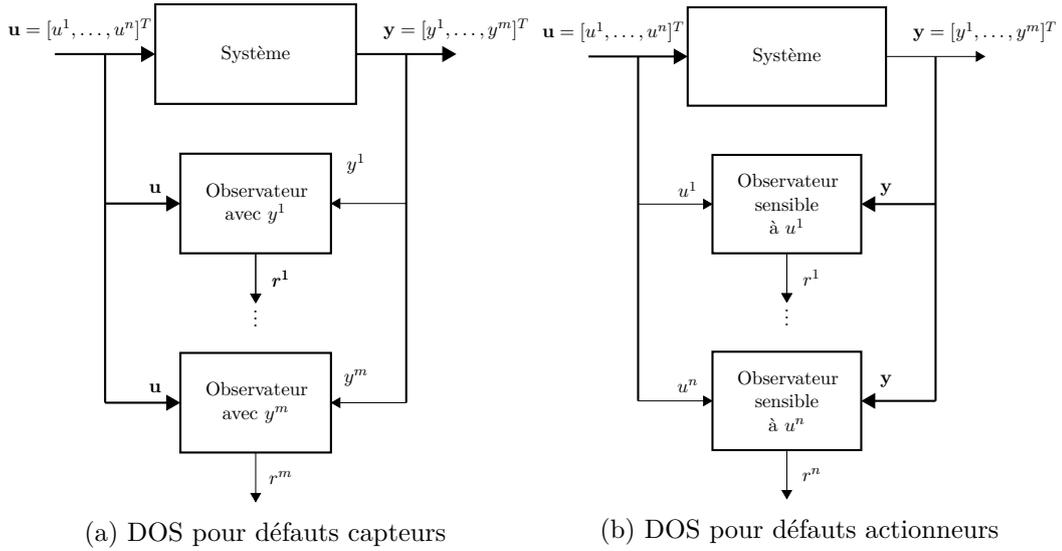


FIGURE 1.6 – Schéma d'observateur dédié pour le diagnostic de défauts capteurs et actionneurs

### Schéma d'observateur généralisé (GOS)

Le schéma d'observateur généralisé pour la conception des résidus structurés consiste à rendre chaque résidu sensible à tous les défauts sauf un [Chen 1999], i.e,

$$\left\{ \begin{array}{l} r_k^1 = R(f_k^2, \dots, f_k^L), \\ \vdots \\ r_k^i = R(f_k^1, \dots, f_k^{i-1}, f_k^{i+1}, \dots, f_k^L), \\ \vdots \\ r_k^L = R(f_k^1, \dots, f_k^{L-1}). \end{array} \right. \quad (1.7)$$

L'ensemble des résidus ci-dessus est défini comme l'ensemble de résidus généralisé. L'isolation par le GOS est effectuée en utilisant la logique suivante [Chen 1999] :

$$\left. \begin{array}{l} r_k^i \leq T_i \\ r_k^j > T_j, \forall j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, L\} \end{array} \right\} \Rightarrow f_k^i \neq 0 \quad (1.8)$$

pour  $i = 1, \dots, L$ . Le diagnostic à base de GOS, illustré dans la Figure 1.7 pour les défauts capteurs et actionneurs, est plus robuste que le DOS car les observateurs dans le GOS sont alimentés par plus d'une sortie [Sobhani-Tehrani 2009].

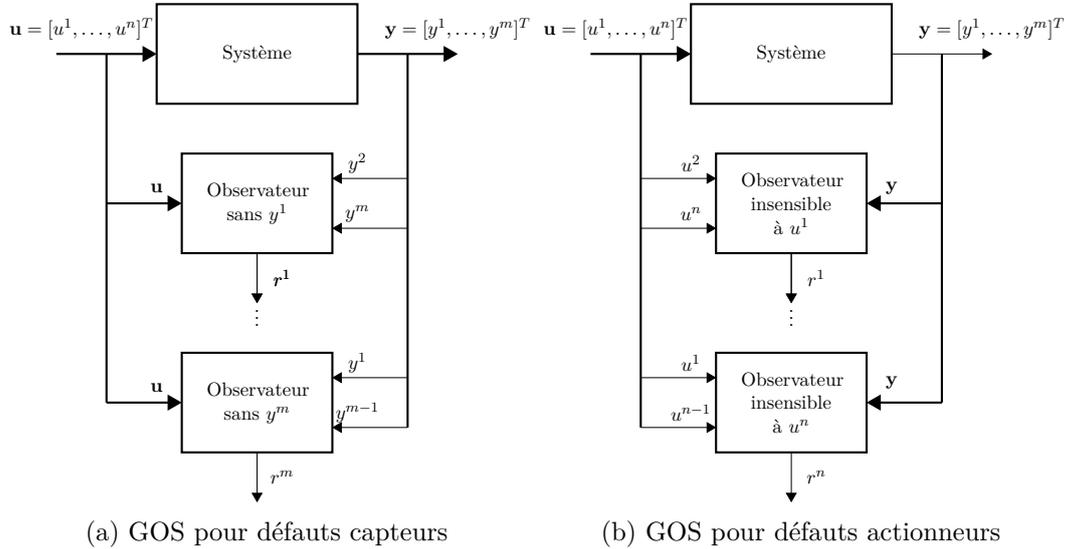


FIGURE 1.7 – Schéma d'observateur généralisé pour le diagnostic de défauts capteurs et actionneurs

### 1.3.3 Analyse structurelle

Le comportement d'un système est décrit par un modèle dont la structure représente des connections entre les équations et les variables du système. Un modèle structurel [Cassar 1997] contient la connaissance d'appartenance des variables aux équations. Ce modèle structurel contient trois différents types de variables : les variables connues  $\mathcal{Y}$ , par exemple les signaux capteurs ou actionneurs ; les variables inconnues  $\mathcal{X}$  comme les états internes ; et les défauts  $\mathcal{F}$ . Si les défauts sont découplés, ils sont également inclus dans  $\mathcal{X}$ . Les versions différenciée et non différenciée de la même variable sont considérées comme des variables différentes. Les variables décalées dans le temps en cas discret sont également représentées par des variables distinctes. Ainsi, un système est décrit par un ensemble  $\mathcal{C}$  de contraintes liant des variables entre elles, et l'ensemble de ces variables  $\mathcal{V} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ . L'ensemble des variables qui apparaissent dans un sous-ensemble d'équations  $C \subset \mathcal{C}$ , y compris les variables connues, inconnues et défauts, est noté  $var(C)$ .

Un modèle structurel est représenté sous forme d'une matrice d'incidence [Harary 1969] ou de manière équivalente sous forme d'un graphe biparti [Blanke 2006].

**Définition 1.1** (Matrice d'incidence). *La matrice d'incidence d'un modèle structurel avec un ensemble  $\mathcal{C}$  de contraintes et un ensemble  $\mathcal{V}$  de variables est la matrice*

$M$  définie par :

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_j \in \mathcal{V} \text{ apparaît dans } c_i \in \mathcal{C}, \\ 0 & \text{si } v_j \in \mathcal{V} \text{ n'apparaît pas dans } c_i \in \mathcal{C}. \end{cases} \quad (1.9)$$

**Définition 1.2** (Graphe biparti). *Un graphe biparti  $\mathcal{G}$  est un triplet  $(\mathcal{C}, \mathcal{X}, \mathcal{E})$  où  $\mathcal{C}, \mathcal{X}$  sont les ensembles des sommets du graphe et  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{E}$  est l'ensemble des arrêtes défini par :*

$$(c_i, x_j) \in \mathcal{E} \text{ si } x_j \in \text{var}(\{c_i\}).$$

**Exemple 1.1.** Considérons le modèle linéaire suivant [Krysander 2008b] :

$$\begin{aligned} e_1 : \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_5, & e_8 : \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt}, \\ e_2 : \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_3 + x_4, & e_9 : \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt}, \\ e_3 : \dot{x}_3 &= -3x_3 + x_5 + f_1 + f_2, & e_{10} : \dot{x}_3 &= \frac{dx_3}{dt}, \\ e_4 : \dot{x}_4 &= -4x_4 + x_5 + f_3, & e_{11} : \dot{x}_4 &= \frac{dx_4}{dt}, \\ e_5 : \dot{x}_5 &= -5x_5 + u + f_4, & e_{12} : \dot{x}_5 &= \frac{dx_5}{dt}, \\ e_6 : y_1 &= x_3 + f_5, \\ e_7 : y_2 &= x_4 + f_6, \end{aligned}$$

où  $x_i$  sont les variables d'état ;  $u$  et  $y_1, y_2$  sont les variables connues ;  $f_i$  sont les défauts à détecter et isoler. La matrice d'incidence est présentée par le tableau 1.1 :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$y_1$	$y_2$
$e_1$	1	1			1								
$e_2$		1	1	1									
$e_3$			1		1	1	1						
$e_4$				1	1			1					
$e_5$					1				1				
$e_6$			1							1		1	
$e_7$				1							1		1

TABLE 1.1 – Matrice d'incidence de l'exemple 1.1.

Le graphe biparti du système est montré dans la figure 1.8.

L'objectif de l'analyse structurale est de déterminer les sous-ensembles de  $\mathcal{C}$  dont la cardinalité est supérieure au nombre d'inconnues qu'ils contiennent. Ces

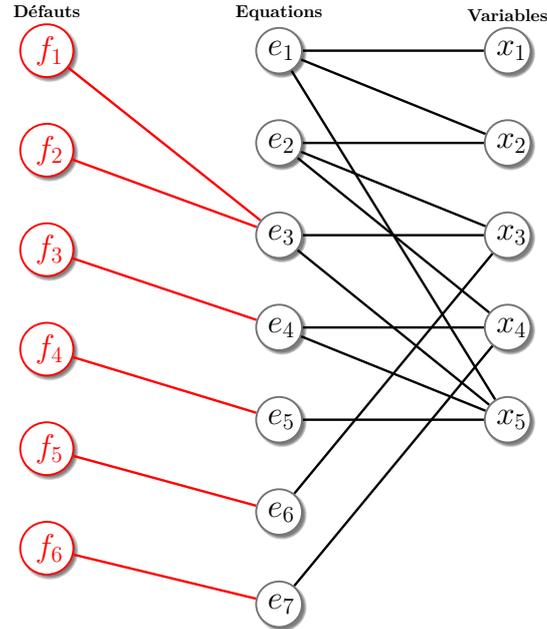


FIGURE 1.8 – La graphe biparti de l'exemple 1.1.

sous-ensembles, appelés les sous-ensembles sur-déterminés, sont les candidats à la génération de résidus. Dans [Dulmage 1958], la matrice d'incidence  $M$  d'un graphe biparti peut être mise en forme triangulaire par blocs en utilisant une permutation de lignes et de colonnes de  $M$ . Cette décomposition, connue sous le nom de décomposition de Dulmage-Mendelsohn, permet de décomposer le graphe biparti  $\mathcal{G}$  associé en trois parties :

- $\mathcal{G}^- = (\mathcal{C}^-, \mathcal{X}^-, \mathcal{E}^-)$  est la partie sous-déterminée, satisfaisant  $|\mathcal{C}^-| < |\mathcal{X}^-|$ ,
- $\mathcal{G}^0 = (\mathcal{C}^0, \mathcal{X}^0, \mathcal{E}^0)$  est la partie juste-déterminée, satisfaisant  $|\mathcal{C}^0| = |\mathcal{X}^0|$ ,
- $\mathcal{G}^+ = (\mathcal{C}^+, \mathcal{X}^+, \mathcal{E}^+)$  est la partie sur-déterminée, satisfaisant  $|\mathcal{C}^+| > |\mathcal{X}^+|$ ,

où  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^- \cup \mathcal{X}^0 \cup \mathcal{X}^+$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^+$ ;  $|S|$  est la cardinalité de l'ensemble  $S$ .

La décomposition de Dulmage-Mendelsohn est illustrée dans la figure 1.9. Elle définit une partition  $(C_0, C_1, \dots, C_N)$  de l'ensemble d'équations, une partition de l'ensemble d'inconnues  $(X_0, X_1, \dots, X_N)$  telles que la matrice d'incidence  $M$  soit triangulaire supérieure par blocs. L'ensemble  $C_0$  est la partie sous-déterminée.  $(C_i, X_i)$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  constituent la partie juste-déterminée. La partie sur-déterminée  $(C_N, X_N)$  contient plus d'équations que de variables inconnues, ce qui implique qu'il existe un certain degré de redondance.

La décomposition de Dulmage-Mendelsohn du système dans l'exemple 1.1 est présentée dans la figure 1.10. La partie sur-déterminée est l'ensemble  $(e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ . L'influence des défauts sur les équations est montrée par les lignes rouges en pointillé.

La détection de défaut est basée sur un test de compatibilité entre les signaux mesurés et le modèle  $\mathcal{C}$  du système. Ce test n'est possible que si le système considéré a plus de contraintes que de variables inconnues. L'analyse structurelle permet

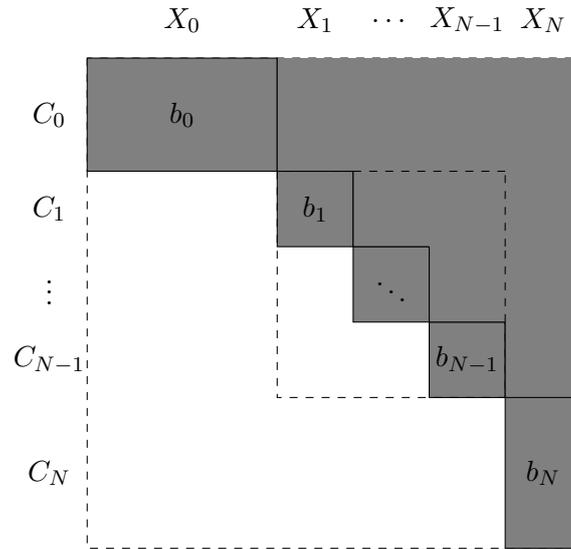


FIGURE 1.9 – La décomposition de Dulmage-Mendelsohn

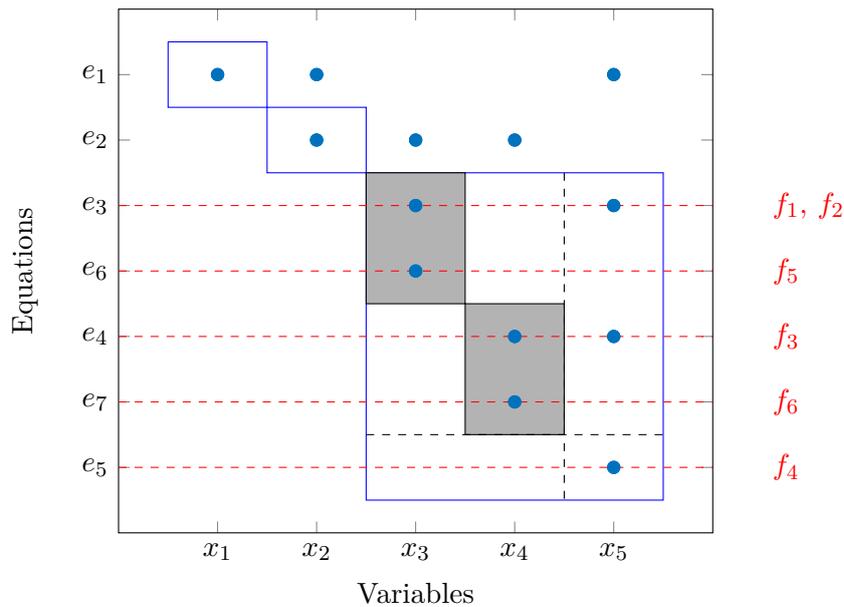


FIGURE 1.10 – La décomposition de Dulmage-Mendelsohn de la matrice d’incidence de l’exemple 1.1.

de vérifier cette condition. En conséquence, grâce à la décomposition de Dulmage-Mendelsohn, l’ensemble sur-déterminé d’équations  $\mathcal{C}^+$  représente la partie diagnosticable du système. L’analyse de la diagnosticabilité a pour but de vérifier si un défaut peut être détecté et isolé quand il survient [Zhang 2015]. La détectabilité structurelle est donnée dans la définition suivante [Lunze 2016].

**Définition 1.3** (Détectabilité structurelle). *Un défaut  $f$  est dit structurellement*

délectable dans un modèle  $\mathcal{C}$  si  $\exists c \in \mathcal{C}^+$  tel que  $f \in \text{var}(c)$ .

Afin d'analyser l'isolabilité structurelle de défaut, il est nécessaire de déterminer des parties structurellement sur-déterminées correctes (PSOs : proper structurallly over-determined set) du modèle [Krysander 2008a].

**Définition 1.4** (Partie structurellement sur-déterminée correcte). *Un ensemble d'équations  $P \subset \mathcal{C}^+$  est dit structurellement sur-déterminé correct si et seulement si  $P^+ = P$ , où  $P^+$  est la partie sur-déterminée de  $P$ .*

L'ensemble de tous les PSOs d'un système est noté  $\mathcal{P}$ . Chaque PSOs  $P_i$  sert à la génération d'un résidu qui est structurellement sensible à un certain ensemble de défauts. En outre, des parties sur-déterminées minimales (MSOs : minimal structurally overdetermined set) sont définies [Krysander 2008a].

**Définition 1.5** (Partie sur-déterminée minimale). *Un ensemble d'équations  $P$  est dit sur-déterminé minimal si  $|P| - \text{var}(P) = 1$ . Autrement dit, aucun sous-ensemble de  $P$  est un PSOs.*

Différents algorithmes pour déterminer les MSOs sont développés dans [Krysander 2008a], [Gelso 2008]. Ils sont analysés et comparés dans [Armengol Llobet 2009].

Pour l'isolation de défaut, il est nécessaire d'avoir un nombre de PSOs (ou MSOs) qui sont capables de détecter différents ensembles de défauts. L'effet des défauts sur les PSOs (ou MSOs) choisis est représenté par une matrice de signature de défauts booléenne  $S$  [Pröll 2016] :

$$\begin{array}{c|cccc}
 & f_1 & f_2 & \dots & f_l \\
 \hline
 P_1 & s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1l} \\
 P_2 & s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2l} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 P_m & s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{ml}
 \end{array} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_l). \quad (1.10)$$

Si  $f_j$  appartient à l'ensemble de défauts de  $P_i$ ,  $s_{ij}$  est égal à 1, et 0 sinon. La signature d'un défaut  $f_j$  est donnée par la  $j$ -ième colonne  $s_j$  de cette matrice.

**Définition 1.6** (Isolabilité structurelle). *Un défaut  $f_j$  est dit structurellement isolable si  $s_i \neq s_j$  pour tout  $i \neq j$ . Le nombre de colonnes non identiques de la matrice  $S$  est noté  $\rho(S)$ .*

En supposant qu'un seul défaut survienne à la fois, l'isolation de défauts est possible de la manière suivante. A partir de  $m$  PSOs, les résidus  $r_1, \dots, r_m$  peuvent être calculés. Ces résidus seront structurellement sensibles à un défaut selon sa signature. Pour chaque  $r_i$ , une norme  $\|\cdot\|$  et un seuil  $\varepsilon_i > 0$  doivent être choisis ; un vecteur booléen  $\bar{\mathbf{r}}_i = (\bar{r}_{1i}, \dots, \bar{r}_{mi})$  est défini par :

$$\bar{r}_{ji} = 0, \quad \text{si } \|r_{ji}\| < \varepsilon_i, \quad (1.11)$$

$$\bar{r}_{ji} = 1, \quad \text{si } \|r_{ji}\| \geq \varepsilon_i. \quad (1.12)$$

Le vecteur  $\bar{\mathbf{r}}_i$  est ensuite comparé avec la colonne  $\mathbf{s}_j$  de la matrice de signature et chaque colonne correspondant au vecteur résiduel fournit un candidat de défaut. Si un seul candidat est trouvé, le défaut est parfaitement isolé de tous les autres défauts. Si plus d'un candidat est trouvé, un groupe de candidats de défaut défini par :

$$\mathcal{F}^* := \{f_i \mid \mathbf{s}_i = \bar{\mathbf{r}}_i\}, \quad (1.13)$$

est déterminé par le diagnostiqueur. Puisque le vecteur résiduel  $\mathbf{r}_i$  est transformé en un vecteur binaire  $\bar{\mathbf{r}}_i$ , deux défauts ne peuvent pas être distingués s'ils ont la même signature. Ainsi,  $\mathcal{F}^*$  est le meilleur résultat possible. L'entier  $\rho(S)$  caractérise le nombre de défauts qui peuvent être isolés structurellement les uns des autres si tous les PSOs sont considérés.

Dans [Pröll 2016], une méthode d'isolation de défauts pour des systèmes dynamiques à temps continu à base de combinaisons entre des observateurs et l'analyse structurelle est présentée. L'analyse structurelle permet de déterminer les PSOs du modèle, ainsi que la détectabilité et l'isolabilité structurelle des défauts considérés. Cependant, les équations appartenant à un PSOs ne définissent pas en général un espace d'état. Un algorithme pour choisir les PSOs permettant de former un espace d'état est introduit. Ces PSOs sont dits bien définis. Puisque le nombre de PSOs dans un modèle augmente exponentiellement par rapport au nombre de capteurs [Krysander 2008a], il se peut que le nombre de PSOs bien définis soit aussi grand. Par conséquent, il est impossible de construire un générateur résiduel pour chaque PSOs bien défini. Un ensemble de PSOs bien définis est donc choisi afin de maximiser le nombre de défauts isolés et de minimiser le nombre de résidus à calculer. Le résultat de la procédure est une banque de générateurs résiduels à base d'observateurs. Le vecteur des résidus est évalué en ligne et comparé avec la matrice de signature des défauts afin de fournir un ensemble candidat de défauts qui peuvent être présents dans le système.

Fault Diagnosis Toolbox [Frisk 2017] est une boîte à outils développée en Matlab permettant d'analyser et de concevoir des systèmes de diagnostic pour des systèmes dynamiques, décrits principalement par des équations différentielles. En particulier, cet outil se concentre sur des techniques à base d'analyse structurelle. Dans cette thèse, il est utilisé pour développer un algorithme de détection et d'isolation de défauts avec notre filtre de Kalman intervalle.

## 1.4 Conclusion

Après une brève introduction dans laquelle nous avons décrit la problématique abordée et le contexte général du chapitre, le problème d'estimation d'état pour des systèmes dynamiques a été formulé. Différentes méthodes pour concevoir des observateurs/filtres dans le cas linéaire et non linéaire ont été également introduites.

Ensuite, le problème de détection et isolation de défauts dans les systèmes non linéaires a été défini. Les sources potentielles de défauts dans un système en boucle ouverte ont été introduites et suivies par des modèles mathématiques simples de

défauts capteurs et actionneurs. Différentes étapes du diagnostic à base d'observateur ont été rappelées, notamment la détection et isolation de défauts à l'aide des schémas d'observateur dédié/généralisé. Une approche de diagnostic basée sur l'analyse structurelle est également introduite. Cette approche permet de déterminer les parties sur-déterminées du modèle qui sont indispensable pour la génération de résidus.

Dans le chapitre suivant, nous présentons l'ensemble des outils mathématiques de l'analyse par intervalles utilisés tout au long de cette thèse.

# Analyse par intervalles

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Notions de base</b>	<b>26</b>
2.2.1	Intervalles	26
2.2.2	Arithmétique par intervalles	29
2.2.3	Fonction d'inclusion	30
2.2.4	Convergence d'une fonction d'inclusion	32
<b>2.3</b>	<b>Inversion ensembliste par arithmétique d'intervalles</b>	<b>32</b>
2.3.1	Inversion ensembliste	32
2.3.2	Algorithme SIVIA	33
<b>2.4</b>	<b>Problème de satisfaction de contraintes</b>	<b>34</b>
2.4.1	Introduction	34
2.4.2	Définition et propriétés des contracteurs	35
2.4.3	Contracteur linéaire	36
2.4.4	Contracteur non-linéaire	37
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>

---

## 2.1 Introduction

L'analyse par intervalles a été introduite au milieu du XX<sup>e</sup> siècle afin de représenter les erreurs de mesure [Sunaga 1958] et d'arrondi dans les calculs numériques [Moore 1966]. Les valeurs possibles d'une variable sont données par une borne inférieure et une borne supérieure. Des solutions fiables et garanties peuvent également être obtenues en utilisant l'analyse par intervalles pour des résolutions d'équations et de problèmes d'optimisation.

Plusieurs algorithmes basés sur l'analyse par intervalles ont été développés dans des domaines variés, en particulier pour la commande robuste ([Rauh 2014]) et l'estimation ([Jaulin 1993], [Chen 1997], [Poignet 2003], [Gning 2007], [Xiong 2013]). Il existe différentes bibliothèques permettant l'implantation numérique de l'analyse par intervalles. Certaines fournissent des outils complets pour résoudre des problèmes spécifiques, par exemple les contracteurs [Chabert 2008]. Dans le cadre de cette thèse, l'extension INTLAB sous MATLAB est utilisée [Rump 1998]. Ce chapitre est structuré comme suit. La section 2.2 présente les définitions et concepts de base de l'analyse par intervalles. La plupart des notions peuvent être retrouvées

dans l'ouvrage [Jaulin 2001]. Ces notions sont utilisées dans le cadre de l'inversion ensembliste (section 2.3) et dans le problème de satisfaction de contraintes (section 2.4).

## 2.2 Notions de base

### 2.2.1 Intervalles

**Définition 2.1** (Intervalle). *Un intervalle, noté  $[x]$ , est un sous-ensemble fermé, connexe de  $\mathbb{R}$  :*

$$[x] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} = [\underline{x}, \bar{x}].$$

Les nombres réels  $\underline{x}$  et  $\bar{x}$  sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle  $[x]$ . L'ensemble des intervalles de  $\mathbb{R}$  est noté  $\mathbb{IR}$ .

**Définition 2.2.** *Soit  $[x] \in \mathbb{IR}$ , on définit :*

- *sa largeur* :  $|[x]| = w([x]) = \bar{x} - \underline{x}$ ,
- *son milieu (ou centre)* :  $mid([x]) = (\bar{x} + \underline{x})/2$ ,
- *son rayon* :  $rad([x]) = (\bar{x} - \underline{x})/2$ .

La largeur d'un intervalle (ainsi que son rayon) peut être interprétée en terme d'incertitude sur la variable représentée par cet intervalle. Un intervalle  $[x]$  est dit dégénéré lorsque  $\underline{x} = \bar{x}$ . Les intervalles dégénérés permettent de représenter des nombres réels.

**Remarque 2.1** ([Moore 2009] page 15). Soit  $x \in [x]$ ,  $[x] \in \mathbb{IR}$  ; il existe un réel  $\alpha \in [-1, 1]$  tel que  $x = mid([x]) + \alpha \cdot rad([x])$ .

Les opérations booléennes peuvent être étendues aux intervalles. L'intersection entre deux intervalles  $[x]$  et  $[y]$ , définie par :

$$[x] \cap [y] = \{z \in \mathbb{R} \mid z \in [x] \text{ et } z \in [y]\}, \quad (2.1)$$

est toujours un intervalle. Cependant, ce n'est pas le cas pour l'union entre deux intervalles  $[x]$  et  $[y]$  :

$$[x] \cup [y] = \{z \in \mathbb{R} \mid z \in [x] \text{ ou } z \in [y]\}. \quad (2.2)$$

Afin d'assurer que l'union des intervalles soit toujours un intervalle, on définit l'intervalle hull d'un sous-ensemble  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{R}$  comme l'intervalle le plus petit contenant  $\mathbb{X}$ .

**Définition 2.3.** *Soit  $[x]$  et  $[y]$  deux intervalles, on définit :*

- *Intersection* :

$$[x] \cap [y] = \begin{cases} [\max(\underline{x}, \underline{y}), \min(\bar{x}, \bar{y})] & \text{si } \max(\underline{x}, \underline{y}) \leq \min(\bar{x}, \bar{y}) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3)$$

- *Intervalle hull* :

$$\text{hull}([x], [y]) = \left[ \min(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y}) \right]. \quad (2.4)$$

**Définition 2.4** (Vecteur d'intervalles (boîte)). *Un vecteur d'intervalles (ou une boîte) de  $\mathbb{R}^n$  est défini comme le produit cartésien de  $n$  intervalles :*

$$[\mathbf{x}] = [x_1] \times [x_2] \times \cdots \times [x_n].$$

L'ensemble des vecteurs d'intervalles de dimension  $n$  est noté par  $\mathbb{IR}^n$ .

Un vecteur d'intervalles peut être simplement noté  $[\mathbf{x}] = ([x_i])_{i=1, \dots, n}$ . La notation  $[x_i]$  correspond à la  $i^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $[\mathbf{x}]$ .

**Remarque 2.2.** A partir du chapitre 3, dans l'écriture  $x_k^i$ ,  $i$  désigne la  $i$ -ième composante et  $k$  l'indice temporel.

**Définition 2.5.** Soit  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n$ , on définit :

- sa borne inférieure :  $\inf([\mathbf{x}]) = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)^T$ ,
- sa borne supérieure :  $\sup([\mathbf{x}]) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ ,
- sa largeur :  $w([\mathbf{x}]) = \max_{1 \leq i \leq n} (\bar{x}_i - \underline{x}_i)$ ,
- son centre :  $\text{mid}([\mathbf{x}]) = (\inf([\mathbf{x}]) + \sup([\mathbf{x}])) / 2$ ,
- son rayon :  $\text{rad}([\mathbf{x}]) = (\sup([\mathbf{x}]) - \inf([\mathbf{x}])) / 2$ ,
- son volume :  $\text{Vol}([\mathbf{x}]) = \prod_{i=1}^n (\bar{x}_i - \underline{x}_i)$ ,

**Définition 2.6.** Soit  $[\mathbf{x}]$  et  $[\mathbf{y}]$  deux boîtes de  $\mathbb{IR}^n$ , on définit :

- *Intersection* :

$$[\mathbf{x}] \cap [\mathbf{y}] = ([x_1] \cap [y_1]) \times ([x_2] \cap [y_2]) \times \cdots \times ([x_n] \cap [y_n]), \quad (2.5)$$

- *Intervalle hull* :

$$\text{hull}([x], [y]) = \text{hull}([x_1], [y_1]) \times \text{hull}([x_2], [y_2]) \times \cdots \times \text{hull}([x_n], [y_n]). \quad (2.6)$$

**Définition 2.7** (Bissection d'une boîte). *La bissection est une opération de partitionnement d'une boîte en deux boîtes  $L([\mathbf{x}])$  et  $R([\mathbf{x}])$  telles que :*

$$L([\mathbf{x}]) = ([x_1], \dots, [\underline{x}_i, \text{mid}([x_i])], \dots, [x_n])^T, \quad (2.7)$$

$$R([\mathbf{x}]) = ([x_1], \dots, [\text{mid}([x_i]), \bar{x}_i], \dots, [x_n])^T, \quad (2.8)$$

où le  $i^{\text{ième}}$  élément de  $[\mathbf{x}]$  est bissecté.

**Définition 2.8** (Matrice intervalle). *Une matrice intervalle notée :*

$$[X] = \begin{bmatrix} [x_{11}] & \cdots & [x_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [x_{m1}] & \cdots & [x_{mn}] \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

est une matrice dont les éléments sont des intervalles. On note  $\mathbb{IR}^{m \times n}$  l'ensemble des matrices intervalles de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .

**Remarque 2.3.** Dans la continuité de la remarque 2.2,  $ij$  peut également être mis en exposant.

**Définition 2.9.** Soit  $[X] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , on définit :

- sa borne inférieure :  $\inf([X]) = \begin{bmatrix} \underline{x}_{11} & \cdots & \underline{x}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{x}_{m1} & \cdots & \underline{x}_{mn} \end{bmatrix}$ ,
- sa borne supérieure :  $\sup([X]) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \cdots & \bar{x}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{m1} & \cdots & \bar{x}_{mn} \end{bmatrix}$ ,
- son centre :  $\text{mid}([X]) = (\inf([X]) + \sup([X])) / 2$ ,
- son rayon :  $\text{rad}([X]) = (\sup([X]) - \inf([X])) / 2$ .

**Définition 2.10** (Matrice intervalle symétrique). Une matrice intervalle carrée  $[X]$  est symétrique si les matrices réelles  $\text{mid}([X])$  et  $\text{rad}([X])$  sont symétriques.

La symétrie d'une matrice intervalles  $[X]$  est équivalente à la symétrie de ses bornes supérieure  $\text{sup}([X])$  et inférieure  $\text{inf}([X])$ .

En utilisant la Remarque 2.1 pour chaque élément d'une matrice réelle  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  appartenant à une matrice intervalles  $[X] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , on obtient la proposition suivante :

**Proposition 2.1.** Soit  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  appartenant à une matrice intervalle  $[X] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ , il existe des réels  $\alpha^{ij} \in [-1, 1]$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  tels que :

$$X = \text{mid}([X]) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha^{ij} [\text{rad}([X_{ij}])], \quad (2.10)$$

où  $[\text{rad}([X^{ij})]$  est la matrice réelle de dimension  $m \times n$  dont l'élément  $ij$  est le rayon de l'élément  $ij$  de la matrice intervalle  $[X]$ , les autres éléments étant nuls.

**Exemple 2.1.** Considérons la matrice intervalle suivante :

$$[X] = \begin{bmatrix} [-5, -1] & [0, 2] \\ [-1, 1] & [4, 8] \end{bmatrix}.$$

Soit  $X \in [X]$ , il existe des réels  $\alpha^{ij} \in [-1, 1]$ ,  $1 \leq i \leq 2$ ,  $1 \leq j \leq 2$ , tels que :

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \alpha^{11} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha^{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha^{21} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha^{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dans le cas des matrices symétriques, la représentation suivante peut être considérée :

**Proposition 2.2.** Soit  $X$  une matrice réelle symétrique dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  appartenant à une matrice intervalle symétrique  $[X] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n \times n}$ ; il existe des réels  $\alpha^{ij} \in [-1, 1]$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ , tels que :

$$X = \text{mid}([X]) + \text{diag}(\text{rad}([X])) \text{diag}(\alpha^{ii}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha^{ij} \text{rad}([X^{ij}]), \quad (2.11)$$

où  $\text{diag}(\text{rad}([X]))$  est la matrice diagonale contenant les rayons des éléments diagonaux de  $[X]$ ,  $\text{rad}([X^{ij}])$  sont les matrices symétriques dont les éléments  $ij$  et  $ji$  sont les rayons de  $[X^{ij}]$  et  $[X^{ji}]$ , les autres éléments étant nuls.

### 2.2.2 Arithmétique par intervalles

Les opérations mathématiques de base  $\{+, -, \times, /\}$  sur les nombres réels sont étendues aux intervalles par la formule suivante :

$$[x] \diamond [y] = [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}], \quad (2.12)$$

avec  $\diamond \in \{+, -, \times, /\}$ . Autrement dit, le résultat d'une opération entre deux intervalles est un intervalle contenant tous les résultats possibles de cette opération de deux réels inclus dans deux intervalles. La caractérisation de  $[x] \diamond [y]$  se fait à l'aide des expressions suivantes :

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (2.13)$$

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \quad (2.14)$$

$$[x] \times [y] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}), \max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y})], \quad (2.15)$$

$$1/[y] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } [y] = [0, 0], \\ [1/\bar{y}, 1/\underline{y}] & \text{si } 0 \notin [y], \\ [1/\bar{y}, +\infty] & \text{si } \underline{y} = 0, \bar{y} > 0, \\ [-\infty, 1/\underline{y}] & \text{si } \underline{y} < 0, \bar{y} = 0, \\ [-\infty, +\infty] & \text{si } \underline{y} < 0, \bar{y} > 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

$$[x]/[y] = [x] \times (1/[y]). \quad (2.17)$$

De même, les fonctions élémentaires ( $\exp, \sin, \cos, \dots$ ) peuvent être étendues aux intervalles. L'extension intervalle d'une fonction élémentaire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie comme suit :

$$[f] : \mathbb{I}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R} \quad (2.18)$$

$$[x] \mapsto [f]([x]) = [\{f(x) \mid x \in [x]\}], \quad (2.19)$$

où  $[\{f(x) \mid x \in [x]\}]$  désigne le plus petit intervalle qui contient toutes les valeurs de  $f(x)$ ,  $x \in [x]$ .

### 2.2.3 Fonction d'inclusion

Les notions de base de l'analyse par intervalles étant définies, il est possible d'évaluer des fonctions vectorielles contenant un nombre fini d'opérations arithmétiques et de fonctions élémentaires (sin, cos, log, exp...) avec des variables intervalles.

**Définition 2.11** (Fonction d'inclusion). *Une fonction d'inclusion de la fonction vectorielle  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , notée  $[\mathbf{f}]$  est une fonction de  $\mathbb{IR}^m$  dans  $\mathbb{IR}^n$  vérifiant :*

$$\mathbf{f}([\mathbf{x}]) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]\} \subseteq [\mathbf{f}]([\mathbf{x}]), \forall [\mathbf{x}] \subseteq \mathbb{IR}^m \quad (2.20)$$

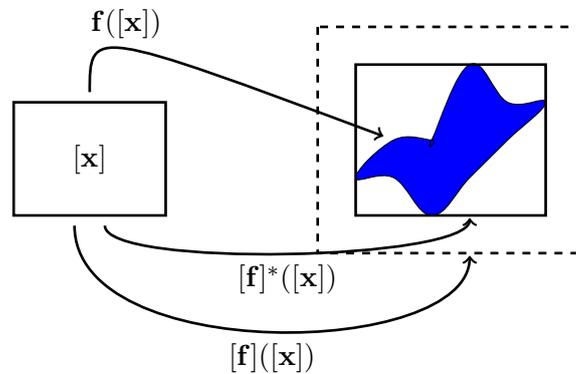


FIGURE 2.1 – Un exemple de fonctions d'inclusion.

En général, la fonction d'inclusion n'est pas unique et dépend de la manière dont  $\mathbf{f}$  est écrite. L'objectif général est donc de chercher la fonction d'inclusion minimale  $[\mathbf{f}]^*$  de  $\mathbf{f}$  qui donne la plus petite boîte englobant  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$ .

#### 2.2.3.1 Fonction d'inclusion naturelle

Lorsque la fonction considérée  $\mathbf{f}$  est construite par un ensemble de fonctions élémentaires (sin, cos, exp,...) et des opérateurs (+, -, ×, /), la méthode la plus simple pour obtenir une fonction d'inclusion consiste à remplacer les occurrences des variables scalaires par les variables intervalles correspondants, et toutes les fonctions élémentaires par leurs extensions intervalles. Cette méthode fournit la *fonction d'inclusion naturelle* de  $\mathbf{f}$ . Néanmoins, cette fonction d'inclusion n'est pas minimale lorsqu'au moins une variable intervient plusieurs fois dans l'expression de  $\mathbf{f}$ . Cela peut s'interpréter par le fait que deux occurrences d'une même variable sont considérées comme deux variables indépendantes. Ce phénomène est appelée le *phénomène de dépendance* ou *multi-occurrence*.

**Exemple 2.2.** Considérons les fonctions d'inclusion de la fonction  $f = 2x^2 + 4x$

établies à partir des quatre expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x^2 + 4x, \\ f_2(x) &= 2x(x + 2), \\ f_3(x) &= 2x \times x + 4x, \\ f_4(x) &= 2(x + 1)^2 - 2. \end{aligned}$$

L'évaluation des fonctions d'inclusion naturelles de ces quatre formulations sur l'intervalle  $[x] = [-2, 1]$  donne :

$$\begin{aligned} [f_1]([x]) &= 2[x]^2 + 4[x] = [-8, 12], \\ [f_2]([x]) &= 2[x]([x] + 2) = [-12, 6], \\ [f_3]([x]) &= 2[x] \times [x] + 4[x] = [-12, 12], \\ [f_4]([x]) &= 2([x] + 1)^2 - 2 = [-2, 6]. \end{aligned}$$

Dans cet exemple, la fonction d'inclusion  $[f_4]$  est minimale. La taille des intervalles obtenus dépend du nombre d'occurrences des variables. On peut remarquer que plus une variable intervient fréquemment dans l'expression de  $f$ , plus le pessimisme devient important.

### 2.2.3.2 Fonction d'inclusion centrée

Soit  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction différentiable sur une boîte  $[\mathbf{x}]$ . En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient :

$$\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \exists \mathbf{z} \in [\mathbf{x}] \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{m}) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{z})(\mathbf{x} - \mathbf{m}), \quad (2.21)$$

où  $\mathbf{m} = \text{mid}([\mathbf{x}])$ ,  $J_{\mathbf{f}}$  est la matrice jacobienne de la fonction  $\mathbf{f}$ . Soit  $[J_{\mathbf{f}}]$  une fonction d'inclusion de  $J_{\mathbf{f}}$ , alors :

$$\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{f}(\mathbf{m}) + [J_{\mathbf{f}}]([\mathbf{x}])(\mathbf{x} - \mathbf{m}). \quad (2.22)$$

La fonction d'inclusion centrée de  $\mathbf{f}$  est alors définie par :

$$[\mathbf{f}_c]([\mathbf{x}]) = \mathbf{f}(\mathbf{m}) + [J_{\mathbf{f}}]([\mathbf{x}])([\mathbf{x}] - \mathbf{m}). \quad (2.23)$$

La fonction d'inclusion centrée donne des résultats généralement plus précis que la fonction d'inclusion naturelle lorsque la largeur des intervalles manipulés est assez faible.

### 2.2.4 Convergence d'une fonction d'inclusion

**Définition 2.12** (Convergence). *Une fonction d'inclusion  $[f]$  de  $\mathbf{f}$  est convergente, si pour toute suite  $[\mathbf{x}](k)$  :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w([\mathbf{x}](k)) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w(f([\mathbf{x}](k))) = 0. \quad (2.24)$$

La convergence des fonctions d'inclusion peut être évaluée au sens d'un critère proposé dans [Moore 1979]. L'ordre de convergence d'une fonction d'inclusion est défini par le plus grand entier  $\alpha$  tel que :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}^+ | (w([f]([\mathbf{x}])) - w(\mathbf{f}([\mathbf{x}]))) \leq \beta w([\mathbf{x}])^\alpha. \quad (2.25)$$

L'ordre de convergence d'une fonction d'inclusion minimale est infini. Pour des intervalles de faible largeur, l'ordre de convergence de la fonction d'inclusion naturelle est au moins linéaire ( $\alpha \geq 1$ ) tandis qu'il est au moins quadratique pour la fonction d'inclusion centrée. Cependant, dans le cas des intervalles de grande largeur, il est préférable d'appliquer la fonction d'inclusion naturelle.

## 2.3 Inversion ensembliste par arithmétique d'intervalles

### 2.3.1 Inversion ensembliste

Soit  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ ,  $[\mathbf{y}] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m$  et  $\mathbf{f}$  une fonction (éventuellement non-linéaire) de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . On souhaite décrire l'ensemble  $\mathbb{S}$  :

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]\}. \quad (2.26)$$

L'ensemble  $\mathbb{S}$  des solutions de ce problème est défini par :

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in [\mathbf{y}]\} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]) \cap [\mathbf{x}]. \quad (2.27)$$

L'inversion ensembliste est le problème de caractérisation de l'ensemble  $\mathbb{S}$ . Ce problème peut être résolu d'une manière garantie en utilisant l'analyse par intervalles et l'algorithme SIVIA (*Set Inversion Via Interval Analysis*) proposé dans [Jaulin 1993]. Supposons que l'on connaisse la région initiale  $[\mathbf{x}]$  contenant au moins une solution du problème (2.26), SIVIA permet d'encadrer l'ensemble  $\mathbb{S}$  :

$$\underline{\mathbb{S}} \subseteq \mathbb{S} \subseteq \overline{\mathbb{S}}. \quad (2.28)$$

où  $\underline{\mathbb{S}}$  est l'ensemble des boîtes prouvées solutions,  $\overline{\mathbb{S}} = \underline{\mathbb{S}} \cup \Delta\mathbb{S}$ ,  $\Delta\mathbb{S}$  étant l'ensemble des boîtes pour lesquelles aucune décision ne peut être établie. Les propriétés des solutions données par SIVIA sont :

- si  $\overline{\mathbb{S}} = \emptyset$ , le problème (2.26) n'a aucune solution,
- si  $\underline{\mathbb{S}} \neq \emptyset$ , il existe au moins une solution pour (2.26).

### 2.3.2 Algorithme SIVIA

Grâce à l'analyse par intervalles et à la notion de fonction d'inclusion, SIVIA approche l'ensemble  $\mathbb{S}$  des solutions du problème (2.26) par 3 ensembles de boîtes  $(\mathcal{S}, \mathcal{N}, \mathcal{E})$  tels que :

$$\mathcal{S} = \mathbb{S}, \quad (2.29)$$

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{E} = \overline{\mathbb{S}}, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{N} \cap \mathbb{S} = \emptyset, \quad (2.31)$$

et :

$$\forall [\mathbf{x}] \in \mathcal{E}, w([\mathbf{x}]) < \varepsilon, \quad (2.32)$$

où  $\varepsilon$  est la précision fixée par l'utilisateur. On rappelle que  $w([\mathbf{x}])$  est la largeur de la boîte  $[\mathbf{x}]$ . L'algorithme SIVIA est présenté par l'Algorithme 2.1. Supposons que l'on connaisse une boîte initiale  $[\mathbf{x}_0]$  contenant l'ensemble des solutions  $\mathbb{S}$ , cette boîte est placée dans une liste  $\mathcal{L}$  et les trois ensembles  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{N}$  sont initialement vides (ligne 1). Pendant l'exécution de l'algorithme, le premier élément  $[\mathbf{x}]$  de la liste est récupéré (ligne 3) pour tester l'inclusion de son image donnée par la fonction d'inclusion  $[\mathbf{f}]$  avec la boîte  $[\mathbf{y}]$ . Si la boîte est acceptée par le test d'inclusion (lignes 4,5), elle est ajoutée à l'ensemble  $\mathcal{S}$  (ligne 5). Si le test d'inclusion est indéterminé et la largeur de la boîte  $[\mathbf{x}]$  est supérieure à une valeur  $\varepsilon$  choisie par l'utilisateur, la boîte  $[\mathbf{x}]$  est bissectée en deux boîtes  $L[\mathbf{x}]$ ,  $R[\mathbf{x}]$  qui sont ensuite placées au sommet de la liste  $\mathcal{L}$  (lignes 9,10,11). Les boîtes qui ne satisfont pas le test d'inclusion sont ajoutées à la liste  $\mathcal{N}$  (lignes 6,7). L'algorithme continue jusqu'au moment où la liste  $\mathcal{L}$  est vide.

**Propriété 2.1** ([Jaulin 1993]). La complexité de SIVIA est exponentielle par rapport à la dimension du vecteur des variables. Le nombre de bisections effectuées est borné par

$$N_b = \left( \frac{w([\mathbf{x}])}{\varepsilon} + 1 \right)^{n_x}, \quad (2.33)$$

où  $n_x$  est la dimension du vecteur  $[\mathbf{x}]$ .

**Exemple 2.3.** Soit  $\mathbb{S}$  l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  vérifiant :

$$f(\mathbf{x}) = x_1^4 - x_2^4 - x_1^3 x_2 \in [-1, 1]. \quad (2.34)$$

Le domaine de recherche initial est  $[\mathbf{x}_0] = ([-3, 3], [-3, 3])^T$ . La précision prédéfinie est 1% de la largeur du domaine de recherche initial :  $\varepsilon = 0.06$ . La figure 2.2 montre le résultat généré par SIVIA.

Le nombre de boîtes bissectées dans cet exemple est 3747 boîtes, vérifiant la Propriété 2.1 :  $N_b = (1/(1\%) + 1)^2 = 10201$  boîtes.

**Algorithme 2.1** SIVIA

**Entrées:**  $[\mathbf{y}] \in \mathbb{IR}^n$ ,  $[\mathbf{x}_0] \in \mathbb{IR}^m$ ,  $[\mathbf{f}] : \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{IR}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ .

**Sorties:**  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{E}$  tels que :  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{S} \subseteq \mathcal{S} \cup \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{N} \cap \mathbb{S} = \emptyset$ , et  $\forall [\mathbf{x}] \in \mathcal{N}$ ,  $w([\mathbf{x}]) < \varepsilon$ .

```

1: Initialisation :
   •  $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{N} \leftarrow \mathcal{E} \leftarrow \emptyset$ ,
   •  $\mathcal{L} \leftarrow \{[\mathbf{x}_0]\}$ .
2: tantque  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  faire
3:    $[\mathbf{x}] \leftarrow pop(\mathcal{L})$  {pop : récupère et enlève le premier élément d'une liste.}
4:   si  $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \subseteq [\mathbf{y}]$  alors
5:      $push(\mathcal{S}, [\mathbf{x}])$  {push : ajoute un élément à une liste.}
6:   sinon si  $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \cap [\mathbf{y}] = \emptyset$  alors
7:      $push(\mathcal{N}, [\mathbf{x}])$ 
8:   sinon si  $w([\mathbf{x}]) > \varepsilon$  alors
9:      $\{L([\mathbf{x}]), R([\mathbf{x}])\} = bissecter([\mathbf{x}])$ 
10:     $push(\mathcal{L}, L([\mathbf{x}]))$ 
11:     $push(\mathcal{L}, R([\mathbf{x}]))$ 
12:   sinon
13:      $push(\mathcal{E}, [\mathbf{x}])$ 
14:   fin si
15: fin tantque

```

## 2.4 Problème de satisfaction de contraintes

### 2.4.1 Introduction

On considère un vecteur de  $n_x$  variables  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  liées par  $n_f$  contraintes sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n_x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_f. \quad (2.35)$$

**Définition 2.13** (Problème de satisfaction de contraintes). *Un problème de satisfaction de contraintes (CSP) consiste à chercher toutes les solutions de (2.35) appartenant à un domaine de recherche initial  $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  :*

$$\mathcal{H} : (\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{X}). \quad (2.36)$$

Pour plus de simplicité, le domaine initial des variables est une boîte  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$ . L'ensemble solution de  $\mathcal{H}$  est défini par :

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}] \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.37)$$

La solution du CSP (2.36) est donnée par l'intersection des ensembles solutions de chaque sous-contrainte :

$$\mathbb{S} = \bigcap_{i=1}^{n_f} \mathbb{S}_i, \quad (2.38)$$

où  $\mathbb{S}_i$  est l'ensemble solution de la contrainte  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n_x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$ . L'utili-

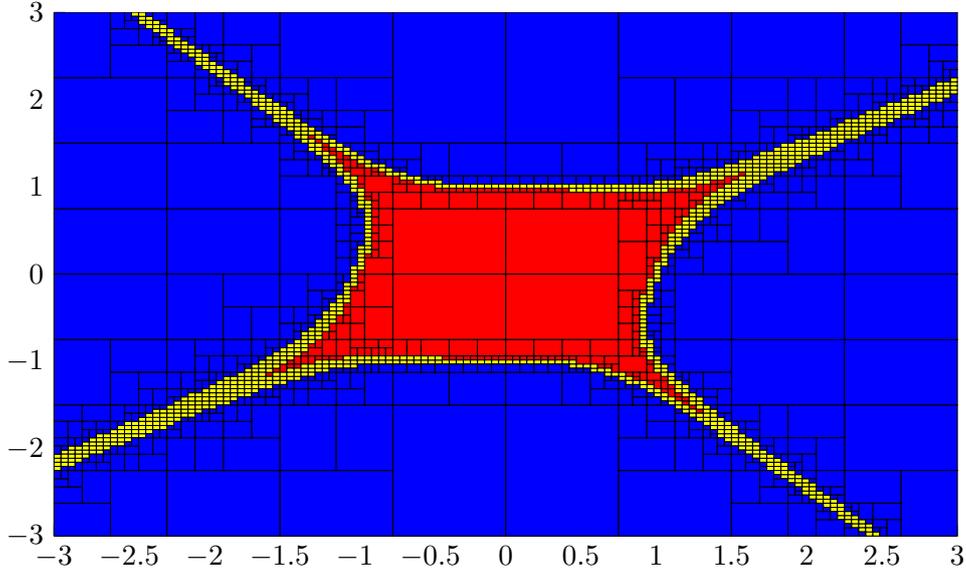


FIGURE 2.2 – Ensemble des boîtes  $\mathcal{S}$  (rouges),  $\mathcal{N}$  (bleues),  $\mathcal{E}$  (jaunes) pour l'exemple 2.3

sation de l'algorithme SIVIA présenté dans la section 2.3.2 pour résoudre un CSP est limitée aux cas où le nombre des variables est assez réduit, du fait de sa complexité exponentielle (propriété 2.1). Notons que  $\mathbb{S}$  n'est pas nécessairement une boîte. Dans le cadre des intervalles, la résolution d'un CSP est équivalente à la recherche d'une boîte minimale  $[\mathbf{x}'] \subset [\mathbf{x}]$  telle que  $\mathbb{S} \subseteq [\mathbf{x}']$ . Les opérations permettant d'atteindre cet objectif sont appelées les *contracteurs*.

Dans la section suivante, la définition et les propriétés des contracteurs sont présentées.

### 2.4.2 Définition et propriétés des contracteurs

**Définition 2.14** (Contracteur). *Un contracteur est un opérateur permettant de contracter le domaine initial d'un CSP, c'est-à-dire de fournir une nouvelle boîte  $[\mathbf{x}'] \subseteq [\mathbf{x}]$  telle que  $\mathbb{S} \subseteq [\mathbf{x}']$ , sans faire de bissection.*

Un contracteur est noté  $\mathcal{C}([\mathbf{x}], \mathbf{f})$ , où  $[\mathbf{x}]$  est le domaine de recherche initial, et  $\mathbf{f}$  sont les contraintes du CSP en considération.

Un contracteur possède les propriétés suivantes [Benhamou 1997] :

- $\forall [\mathbf{y}] \subseteq [\mathbf{x}], \quad \mathcal{C}([\mathbf{y}], \mathbf{f}) \subseteq [\mathbf{x}]$  (contractance),
- $\forall [\mathbf{y}] \subseteq [\mathbf{x}], \quad [\mathbf{y}] \cap \mathbb{S} \subseteq \mathcal{C}([\mathbf{y}], \mathbf{f})$  (complétude).

En outre, les propriétés suivantes sont tirées de [Jaulin 2001] :

- $\mathcal{C}$  est optimal si  $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{R}^{n_x}, \mathcal{C}([\mathbf{x}], \mathbf{f}) = \text{hull}([\mathbf{x}], \mathbb{S})$ ,
- $\mathcal{C}$  est monotone si  $[\mathbf{x}] \subset [\mathbf{y}], \mathcal{C}([\mathbf{x}], \mathbf{f}) \subset \mathcal{C}([\mathbf{y}], \mathbf{f})$ ,
- $\mathcal{C}$  est idempotent si  $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{R}^{n_x}, \mathcal{C}(\mathcal{C}([\mathbf{x}], \mathbf{f}), \mathbf{f}) = \mathcal{C}([\mathbf{x}], \mathbf{f})$ ,
- $\mathcal{C}_1$  est plus efficace que  $\mathcal{C}_2$  si  $\forall [\mathbf{x}] \in \mathbb{R}^{n_x}, \mathcal{C}_1([\mathbf{x}], \mathbf{f}) \subset \mathcal{C}_2([\mathbf{x}], \mathbf{f})$ ,

Les sections suivantes présentent les contracteurs linéaires et non-linéaires les plus utilisés.

### 2.4.3 Contracteur linéaire

Les systèmes d'équations d'intervalles linéaires définis par :

$$[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}], \quad (2.39)$$

forment une classe de CSP,  $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$ ,  $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^{n_x}$ . Le problème est de déterminer une boîte contenant l'ensemble des solutions du CSP (2.39) défini comme suit :

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \exists \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \exists \mathbf{b} \in [\mathbf{b}], \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}. \quad (2.40)$$

Les contracteurs permettant de fournir une approximation extérieure de  $\mathbb{S}$  sont présentés dans les sections suivantes. Ce sont des extensions des algorithmes classiques aux systèmes d'équations d'intervalles linéaires, par exemple ceux d'élimination de Gauss ou de Jacobi.

#### 2.4.3.1 Méthode d'élimination de Gauss

Le contracteur d'élimination de Gauss, dénoté par  $\mathcal{C}_{GE}$  est une extension intervalle de la méthode classique basée sur la transformation LU. Une matrice  $\mathbf{A}$  est transformée en un produit de deux matrices triangulaires  $\mathbf{L}$  (matrice triangulaire inférieure) et  $\mathbf{U}$  (matrice triangulaire supérieure). Le contracteur d'élimination de Gauss est obtenu en remplaçant dans la méthode de Gauss les variables ponctuelles par les variables intervalles correspondantes.

Puisque la méthode de Gauss requiert que  $a_{ii} \neq 0$ , le contracteur d'élimination de Gauss ne fonctionne pas si  $[a_{ii}]$  contient 0. D'autre part, le contracteur d'élimination de Gauss est bien adapté aux cas où la matrice d'intervalle  $[\mathbf{A}]$  est proche de la matrice d'identité.

#### 2.4.3.2 Méthode de Jacobi

Considérons encore le CSP (2.39). Une matrice réelle  $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$  peut être décomposée en la somme d'une matrice diagonale  $diag(\mathbf{A})$  et d'une matrice  $extdiag(\mathbf{A})$  dont les éléments diagonaux sont nuls :

$$\mathbf{A} = diag(\mathbf{A}) + extdiag(\mathbf{A}). \quad (2.41)$$

Ainsi, l'équation  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  peut s'écrire comme suit :

$$diag(\mathbf{A})\mathbf{x} + extdiag(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (2.42)$$

La solution donnée par la méthode de Jacobi est obtenue avec l'hypothèse que la matrice  $diag(\mathbf{A})$  est inversible :

$$\mathbf{x} = (diag(\mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{b} - extdiag(\mathbf{A})\mathbf{x}). \quad (2.43)$$

Le contracteur de Jacobi  $\mathcal{C}_J$  est donc donné par l'expression récursive suivante :

$$[\mathbf{x}_{k+1}] = \left( (diag([\mathbf{A}]))^{-1} ([\mathbf{b}] - extdiag([\mathbf{A}])[\mathbf{x}_k]) \right) \cap [\mathbf{x}_k]. \quad (2.44)$$

où  $k$  indique le numéro de l'itération. A noter que comme le contracteur d'élimination de Gauss, le contracteur de Jacobi est applicable tant que les éléments diagonaux de  $[\mathbf{A}]$  ne contiennent pas de zéro.

#### 2.4.4 Contracteur non-linéaire

Les contracteurs considérés dans cette section permettent de résoudre le CSP suivant :

$$\mathcal{H} : (\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]). \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$  est une fonction vectorielle non-linéaire.

Les contracteurs pour résoudre les CSP non-linéaires peuvent être basés sur des linéarisations garanties de la fonction  $\mathbf{f}$ , par exemple, les contracteurs de Krawczyk ([Neumaier 1990]) et de Newton ([Hansen 1992], [Moore 1979]). Ces méthodes ne sont applicables que si  $n_x = n_f$ . Une autre technique, connue sous le nom du contracteur *propagation-rétropropagation* ([Waltz 1972], [Davis 1987]), repose sur la propagation des contraintes ([Benhamou 1999]). Ce type de contracteur permet de résoudre en général les CSP dont le nombre de contraintes n'est pas nécessairement égal à la dimension du vecteur des variables.

##### 2.4.4.1 Contracteur de Krawczyk

Supposons que la fonction  $\mathbf{f}$  du CSP (2.45) est différentiable. L'équation  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  peut être réécrite sous la forme  $\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , où  $\mathbf{M}$  est une matrice réelle inversible. La fonction d'inclusion centrée de la fonction  $\Psi = \mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x})$  est donnée par :

$$[\Psi]([\mathbf{x}]) = \Psi(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{J}_\Psi]([\mathbf{x}])([\mathbf{x}] - \mathbf{x}_0), \quad (2.46)$$

où  $[\mathbf{J}_\Psi]$  est une fonction d'inclusion de la matrice jacobienne de  $\Psi$  et  $\mathbf{x}_0 = mid([\mathbf{x}])$ . Ainsi, le contracteur de Krawczyk est défini comme suit :

$$\mathcal{C}_K : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{x}] \cap (\Psi(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{J}_\Psi]([\mathbf{x}])([\mathbf{x}] - \mathbf{x}_0)). \quad (2.47)$$

En remplaçant  $\Psi$  par  $\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , on a :

$$\mathcal{C}_K : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{x}] \cap (\mathbf{x}_0 - \mathbf{M}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{I} - \mathbf{M}[\mathbf{J}_\mathbf{f}]([\mathbf{x}])([\mathbf{x}] - \mathbf{x}_0)), \quad (2.48)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice d'identité et  $[\mathbf{J}_f]$  est la fonction d'inclusion de la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}$ . On choisit normalement  $\mathbf{M} = \mathbf{J}_f^{-1}(\mathbf{x}_0)$ .

#### 2.4.4.2 Contracteur de Newton

Le contracteur de Newton a été développé pour les CSP dans lesquels la fonction  $\mathbf{f}$  est différentiable et  $n_x = n_f$ . La contrainte  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  peut être transformée en

$$\mathbf{x} - \mathbf{J}_f^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}. \quad (2.49)$$

En remplaçant  $\mathbf{x}$  par  $[\mathbf{x}]$  et  $\mathbf{J}_f^{-1}$ ,  $\mathbf{f}$  par leurs fonctions d'inclusion, le contracteur de Newton est défini par

$$\mathcal{C}_K : [\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{x}] \cap \left( [\mathbf{x}] - [\mathbf{J}_f^{-1}]([\mathbf{x}])[\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) \right). \quad (2.50)$$

En résumé, l'application des contracteurs basés sur des linéarisations garanties des contraintes est limitée à cause de la contrainte sur la dimension de la fonction  $\mathbf{f}$ . Ces contracteurs sont bien adaptés lorsque le domaine initial des variables est petit.

#### 2.4.4.3 Contracteur propagation-rétropropagation

Le contracteur propagation-rétropropagation, noté  $\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$ , est présenté dans [Waltz 1972], [Davis 1987], [Jaulin 2001]; il utilise le principe de contraction par propagation des contraintes ([Benhamou 1999]).

L'algorithme de  $\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$  repose sur la décomposition des contraintes en un ensemble de contraintes primitives. Une contrainte est dite primitive si elle implique une seule opération arithmétique (+, −, ×, /) entre deux variables ou une seule fonction élémentaire (sin, cos, exp, ...). Cette décomposition est suivie par l'apparition d'un ensemble de variables intermédiaires représentant les résultats des contraintes primitives. Le domaine initial d'une variable intermédiaire est  $[-\infty, \infty]$ .

Le contracteur  $\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$  est composé de deux phases : *Propagation* et *Rétropropagation*. Illustrons le principe du contracteur  $\mathcal{C}_{\downarrow\uparrow}$  sur l'exemple suivant :

**Exemple 2.4.** On cherche à contracter la boîte  $[\mathbf{x}] = [x_1] \times [x_2]$  avec deux contraintes :  $y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \in [y_1]$  et  $y_2 = \arctan(x_2/x_1) \in [y_2]$ . La décomposition de ces contraintes donne l'ensemble de contraintes primitives avec les variables intermédiaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1^2, \\ z_2 = x_2^2, \\ z_3 = z_1 + z_2, \\ y_1 = \sqrt{z_3}, \\ z_4 = x_2/x_1, \\ y_2 = \arctan(z_4). \end{array} \right. \quad (2.51)$$

L'ensemble de contraintes primitives peut être représenté par un arbre (figure 2.3)

où chaque nœud correspond à une variable et chaque arc représente une contrainte primitive liant deux variables.

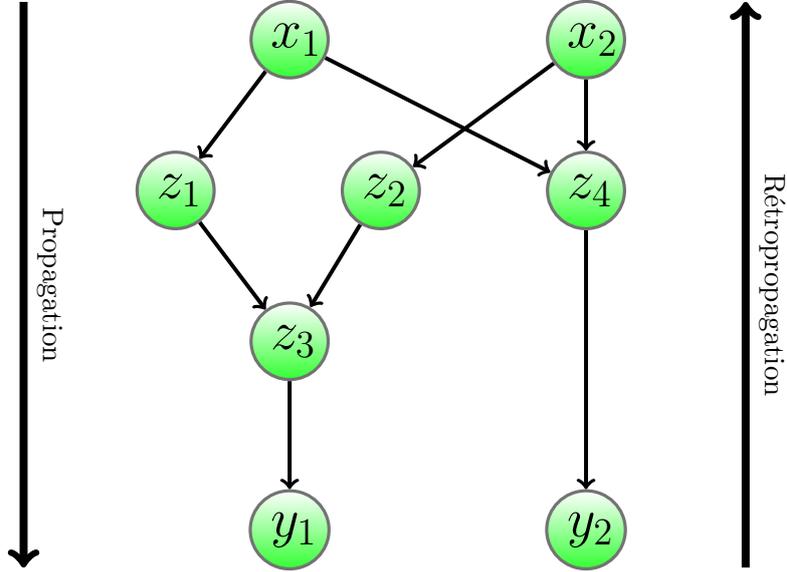


FIGURE 2.3 – Arbre représentant les connections de variables dans l'exemple 2.4

La phase propagation consiste à parcourir le graphe des entrées ( $x_1, x_2$ ) aux sorties ( $y_1, y_2$ ) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} [z_1] = [z_1] \cap [x_1]^2, \\ [z_2] = [z_2] \cap [x_2]^2, \\ [z_3] = [z_3] \cap ([z_1] + [z_2]), \\ [y_1] = [y_1] \cap \sqrt{[z_3]}, \\ [z_4] = [z_4] \cap ([x_2]/[x_1]), \\ [y_2] = [y_2] \cap [\arctan]([z_4]). \end{array} \right. \quad (2.52)$$

La phase rétropropagation consiste à parcourir le graphe dans le sens contraire en utilisant les fonctions inverses des contraintes primitives :

$$\left\{ \begin{array}{l} [z_3] = [z_3] \cap [y_1]^2, \\ [z_2] = [z_2] \cap ([z_3] - [z_1]), \\ [z_1] = [z_1] \cap ([z_3] - [z_2]), \\ [x_1] = [x_1] \cap \sqrt{[z_1]}, \\ [x_2] = [x_2] \cap \sqrt{[z_2]}, \\ [z_4] = [z_4] \cap [\tan]([y_2]), \\ [x_1] = [x_1] \cap ([x_2]/[z_4]), \\ [x_2] = [x_2] \cap ([x_1] \times [z_4]). \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Le contracteur propagation-rétropropagation présente les avantages suivants :

- indépendance par rapport à la linéarité ou non-linéarité des contraintes,
- indépendance par rapport au nombre de contraintes,
- efficacité avec des intervalles de grande largeur,
- temps de calcul raisonnable,
- facilité de mise en œuvre.

Nous l'utilisons dans la suite de cette thèse.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents éléments de l'analyse par intervalles. La notion de fonction d'inclusion constitue la base des algorithmes ensemblistes. Deux types de réalisation de fonctions d'inclusion ont été présentés : la fonction d'inclusion naturelle et la forme centrée. La fonction d'inclusion naturelle est efficace pour des pavés larges et volumineux, alors que la forme centrée retrouve sa précision sur des petits pavés. Pour tous les vecteurs issus d'un pavé, une fonction d'inclusion permet de déterminer un pavé qui contient toutes les images par une fonction vectorielle.

Nous nous sommes intéressés à l'inversion ensembliste et au problème de satisfaction de contraintes (CSP). En général, ils partagent le même objectif : la réduction du domaine initial des variables par des contraintes. Grâce à la notion de fonction d'inclusion et la bisection, l'algorithme SIVIA fournit deux encadrements intérieur et extérieur de l'ensemble de solutions de l'inversion ensembliste. Cet algorithme n'est applicable que pour la résolution d'un CSP dont le nombre de variables est assez réduit à cause de sa complexité exponentielle. En ce qui concerne les techniques de propagation de contraintes, nous avons rappelé le principe des contracteurs linéaires et non-linéaires les plus utilisés. Les contracteurs basés sur une linéarisation des contraintes sont bien adaptés au cas de petits pavés avec un nombre de contraintes égale à la dimension du vecteur de variables. Nous avons choisi le contracteur propagation-rétropropagation pour les algorithmes de filtrage ensembliste non-linéaire du fait de son efficacité pour les problèmes non-linéaires, un nombre de contraintes élevé ou une grande largeur d'intervalles.

# Introduction à la théorie de l'incertain

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>Fonctions de répartition</b>	<b>42</b>
<b>3.3</b>	<b>Théorie des possibilités</b>	<b>42</b>
<b>3.4</b>	<b>Théorie des croyances</b>	<b>45</b>
3.4.1	Fonctions de croyance	45
3.4.2	Théorème de Bayes généralisé	49
3.4.3	Prise de décision : méthodes de transformation	49
3.4.4	Fonctions de croyance dans $\mathbb{R}$	50
<b>3.5</b>	<b>Représentations de distributions univariées</b>	<b>53</b>
3.5.1	Moyenne connue	53
3.5.2	Médiane connue	54
3.5.3	Mode connu	54
3.5.4	Représentation par des distributions de possibilité continues	56
3.5.5	Construction d'une densité de masse à partir d'une densité de probabilité continue	57
<b>3.6</b>	<b>Représentation d'une distribution gaussienne multivariée</b>	<b>60</b>
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>65</b>

## 3.1 Introduction

L'incertitude est traditionnellement caractérisée par une distribution de probabilité. Cependant, l'élargissement de la théorie des probabilités est nécessaire puisque l'on ne peut pas toujours fournir une probabilité pour chaque événement, notamment lorsque peu d'informations ou de données sont disponibles. La généralisation la plus directe est de remplacer une seule mesure de probabilité par un intervalle : probabilité inférieure et supérieure.

Considérons un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $\mathcal{P}$  une famille de probabilités sur le référentiel  $\Omega$ . Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle associée à la probabilité  $P$ . Pour tout sous-ensemble mesurable  $A$  de  $\Omega$ , on définit :

- sa probabilité supérieure :  $\bar{P}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)$ ,
- sa probabilité inférieure :  $\underline{P}(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A)$ .

Autrement dit, la valeur  $P(A)$  est contenue dans l'intervalle  $[\underline{P}(A), \overline{P}(A)]$  :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad \underline{P}(A) \leq P(A) \leq \overline{P}(A).$$

Il semble naturel de considérer une famille de mesures de probabilité lorsque l'information probabiliste est incomplète ou encore quand les paramètres d'un modèle probabiliste tels que la moyenne ou la variance sont mal connus.

Ce chapitre expose trois cadres permettant de définir des familles de probabilités imprécises : fonctions de répartition, distributions de possibilité et fonctions de croyance.

## 3.2 Fonctions de répartition

On rappelle que la fonction de répartition  $F$  d'une variable aléatoire  $X$  est définie par :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Une modélisation directe d'une variable mal connue est obtenue en considérant une paire de fonctions de répartition  $\underline{F}$  et  $\overline{F}$  telles que  $\underline{F} < \overline{F}$ . L'intervalle  $[\underline{F}, \overline{F}]$  est nommé *p-box* ([Ferson 2003]). La famille de probabilités dominée par  $(\underline{F}, \overline{F})$  est définie par :

$$\mathcal{P}(\underline{F}, \overline{F}) = \left\{ P \mid \forall x \in \mathbb{R}, \underline{F}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}(x) \right\}. \quad (3.1)$$

Ainsi, une p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  fournit un encadrement d'une probabilité cumulée  $F$  mal connue et l'écart entre deux bornes  $\underline{F}, \overline{F}$  reflète l'imprécision de l'information.

## 3.3 Théorie des possibilités

La théorie des possibilités introduite par [Zadeh 1978] comme une extension de la théorie des ensembles flous et de la logique floue, est une théorie utilisée pour le traitement de la connaissance incomplète. Elle est une alternative à la théorie des probabilités et diffère de cette dernière par l'utilisation d'un couple de mesures au lieu d'une seule mesure. L'élément fondamental de la théorie des possibilités est la distribution de possibilité qui coïncide formellement avec la fonction d'appartenance d'un ensemble flou défini dans [Zadeh 1965]. Dans cette section, on rappelle les notions de base de la théorie des possibilités.

Soit  $\Omega$  l'univers contenant tous les résultats possibles de l'état d'un objet.

**Définition 3.1** (Distribution de possibilité). *La distribution de possibilité  $\pi$  est une fonction de  $\Omega$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  représentant le degré de validité de la proposition "l'état actuel de l'objet est  $x$ " pour chaque valeur  $x$  de  $\Omega$ .*

Une distribution de possibilité représente une restriction flexible sur ce qui est l'état actuel avec les conventions suivantes :

- $\pi(x) = 0$  signifie que  $x$  est impossible,

- $\pi(x) = 1$  signifie que  $x$  est totalement possible.
- $\pi(x_1) < \pi(x_2)$  signifie que  $x_2$  est plus plausible que  $x_1$ .

**Définition 3.2** (Spécificité [Dubois 2015]). *Une distribution de possibilité  $\pi_1$  sur l'univers  $\Omega$  est plus spécifique que  $\pi_2$  si et seulement si  $\pi_1(x) \leq \pi_2(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ .*

Les cas extrêmes de la spécificité sont les suivantes :

- Savoir complet :  $\pi(x^*) = 1$ ,  $\pi(x) = 0$  pour  $x \neq x^*$  (seulement  $x^*$  est possible) ; on a la spécificité maximale.
- Ignorance totale :  $\pi(x) = 1$  pour tout  $x \in \Omega$ , on a la spécificité minimale.

La théorie des possibilités est conduite par le *principe de spécificité minimale*. Étant donné un ensemble d'informations imprécises ou incertaines sur l'état actuel de l'objet, la distribution de possibilité la plus appropriée est la moins spécifique parmi celles qui valident ces informations.

Grâce à une distribution de possibilité, un couple de mesures peut être défini pour un sous-ensemble de  $\Omega$ .

**Définition 3.3** (Possibilité-Nécessité). *Soit  $\pi$  une distribution de possibilité sur l'univers  $\Omega$  et  $A$  un sous-ensemble de  $\Omega$ , on définit :*

- La mesure de possibilité de  $A$  :

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x),$$

- La mesure de nécessité de  $A$  :

$$N(A) = 1 - \Pi(A^c) = \inf_{x \notin A} (1 - \pi(x)),$$

où  $A^c$  est le complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$ .

Le degré de possibilité  $\Pi(A)$  représente le degré de cohérence entre  $A$  et les informations disponibles. Le degré de nécessité  $N(A)$  évalue le niveau de certitude de  $A$  impliqué par la distribution  $\pi$ . La dualité possibilité-nécessité est exprimée par  $N(A) = 1 - \Pi(A^c)$ . Les mesures de possibilité et nécessité satisfont les axiomes suivants :

- $0 \leq N(A) \leq \Pi(A) \leq 1$  pour tout  $A \subseteq \Omega$ ,
- $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$  pour tout  $A, B \subseteq \Omega$ ,
- $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$  pour tout  $A, B \subseteq \Omega$ .

Notons que contrairement à la théorie de probabilité, la possibilité n'est pas auto-duale, c'est-à-dire, pour tout sous-ensemble  $A$  de l'univers  $\Omega$ , la mesure de possibilité satisfait l'inégalité suivante :

$$\Pi(A) + \Pi(A^c) \geq 1. \quad (3.2)$$

Ainsi, dans le cadre de la théorie des possibilités, il est nécessaire d'évaluer un couple  $(N(A), \Pi(A))$  afin de décrire l'incertitude sur  $A$ . Grâce à ce couple de mesures, les interprétations suivantes sur un ensemble  $A \subseteq \Omega$  peuvent être obtenues :

- $N(A) = 1$  signifie que  $A$  est certainement vrai, c'est-à-dire que l'état actuel appartient à  $A$  sûrement. Cela implique que  $\Pi(A) = 1$ .
- $\Pi(A) = 0$  signifie que  $A$  est certainement faux, c'est-à-dire qu'il est impossible que l'état actuel appartienne à  $A$ . Cela implique que  $N(A) = 0$ .
- $\Pi(A) = 1$  signifie que  $A$  est possible, c'est-à-dire qu'il n'est pas surprenant du tout que l'état actuel appartienne à  $A$ .
- $N(A) = 0$  signifie que  $A$  n'est pas nécessaire, c'est-à-dire qu'il n'est pas surprenant du tout que l'état actuel n'appartienne pas à  $A$ .
- $\Pi(A) = 1$  et  $N(A) = 0$  signifie que  $A$  est indéterminé, aucune conclusion sur  $A$  n'est croyable.

Un exemple de la distribution de possibilité triangulaire est donné dans la figure 3.1.

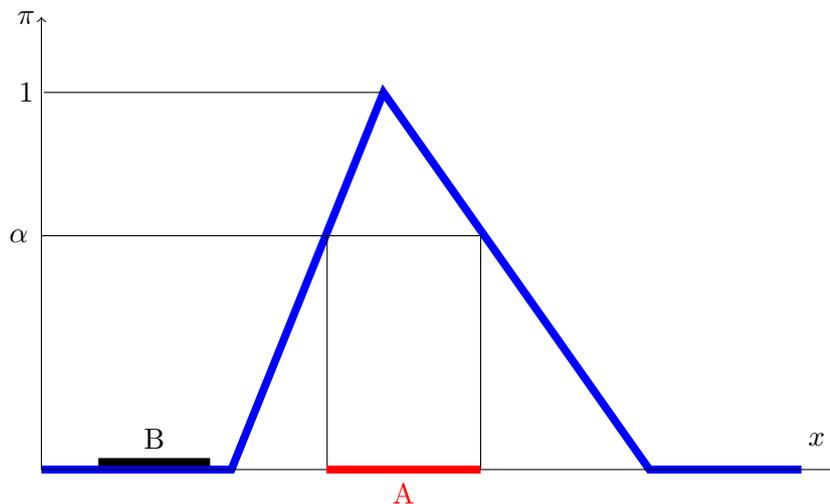


FIGURE 3.1 – Distribution de possibilité

La possibilité et la nécessité de  $A$  et celles de  $B$  sont :

$$\begin{aligned} N(A) &= 1 - \alpha & ; & & \Pi(A) &= 1, \\ N(B) &= 0 & ; & & \Pi(B) &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on peut conclure directement que la proposition " $x \in B$ " est impossible.

Dans plusieurs applications, le couple de mesures de possibilité-nécessité peut être interprété comme les probabilités inférieure et supérieure encadrant une famille de probabilités. On définit :

$$\mathcal{P}(\pi) = \{P \mid \forall A \subseteq \Omega \text{ mesurable}, N(A) \leq P(A) \leq \Pi(A)\}, \quad (3.3)$$

une famille de probabilités bornées par les fonctions  $N$  et  $\Pi$  induites par la distribution de possibilité  $\pi$  ([de Cooman 1999], [Dubois 1992]). Dans ce cas, on dit que

$\Pi$  domine  $\mathcal{P}(\pi)$  :

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(\pi)} P(A) = \Pi(A), \quad (3.4)$$

$$\inf_{P \in \mathcal{P}(\pi)} P(A) = N(A). \quad (3.5)$$

### 3.4 Théorie des croyances

La théorie des croyances, également connue sous les noms de théorie de Dempster-Shafer ou théorie de l'évidence, a été élaborée par Dempster ([Dempster 1967]) et Shafer ([Shafer 1976]) et développée par Smets ([Smets 1993], [Smets 1999], [Smets 2005a], [Smets 2005b], [Smets 2013]). Basée sur la notion de preuves, cette théorie permet de combiner des preuves à partir des sources distinctes pour exprimer le niveau de croyance d'un évènement. La théorie des croyances peut être interprétée comme une généralisation de théorie des probabilités bayésienne. Dans cette section, le formalisme mathématique de la théorie des croyances est présenté.

#### 3.4.1 Fonctions de croyance

Soit  $\Omega$  l'univers contenant toutes les valeurs possibles d'un état  $x$ . L'ensemble de ses parties, noté  $2^\Omega$ , est l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $\Omega$ , y compris l'ensemble vide  $\emptyset$ .

**Définition 3.4** (Fonction de masse). *La masse  $m$  est une fonction de  $2^\Omega$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  vérifiant la propriété de normalisation :*

$$\sum_{A \in 2^\Omega} m(A) = 1. \quad (3.6)$$

*La masse  $m(A)$  exprime la proportion de toutes les preuves disponibles allouées exactement à l'hypothèse  $x \in A$  et à aucune hypothèse plus spécifique.*

Notons que la valeur de  $m(A)$  concerne seulement l'élément  $A$  et n'apporte aucun crédit aux sous-ensembles de  $A$ . Les sous-ensembles  $A$  de  $\Omega$  tels que  $m(A) > 0$  sont appelés les *éléments focaux* de  $m$ .

Dans [Shafer 1976], une contrainte supplémentaire sur la masse de l'ensemble vide doit être satisfaite :

$$m(\emptyset) = 0. \quad (3.7)$$

Une fonction de masse satisfaisant cette propriété est appelée *normalisée*. La contrainte 3.7 signifie que l'état actuel  $x$  est toujours retrouvé dans  $\Omega$ . Dans ce chapitre, on ne considère que des fonctions de masse normalisées.

À partir d'une fonction de masse d'un état, on peut définir les représentations suivantes :

**Définition 3.5** (Croyance). *La croyance  $bel(A)$  d'un ensemble  $A$  est définie comme la somme des masses de tous ses sous-ensembles :*

$$bel(A) = \sum_{B \in 2^\Omega \mid B \subseteq A} m(B). \quad (3.8)$$

**Définition 3.6** (Plausibilité). *La plausibilité  $pl(A)$  d'un ensemble  $A$  est définie comme la somme des masses de tous les ensembles  $B$  qui intersectent  $A$  :*

$$pl(A) = \sum_{B \in 2^\Omega \mid B \cap A \neq \emptyset} m(B). \quad (3.9)$$

**Définition 3.7** (Communauté). *La communauté  $q(A)$  d'un ensemble  $A$  est définie comme la somme des masses de tous les ensembles  $B$  qui contiennent  $A$  :*

$$q(A) = \sum_{B \in 2^\Omega \mid B \supseteq A} m(B). \quad (3.10)$$

Le degré de croyance  $bel(A)$  donné à un sous-ensemble  $A$  de  $\Omega$  quantifie la proportion de toutes les preuves spécifiques justifiées à donner à  $A$ . Le degré de plausibilité  $pl(A)$  exprime la quantité maximale de support spécifique potentiel de  $A$ .

Considérons un exemple illustratif dans la figure 3.2. Une fonction de masse  $m$  est définie sur l'univers  $\Omega$  dont les éléments focaux sont  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et  $\Omega$ . Les fonctions de croyance associées au sous-ensemble  $A$  de  $\Omega$  sont :

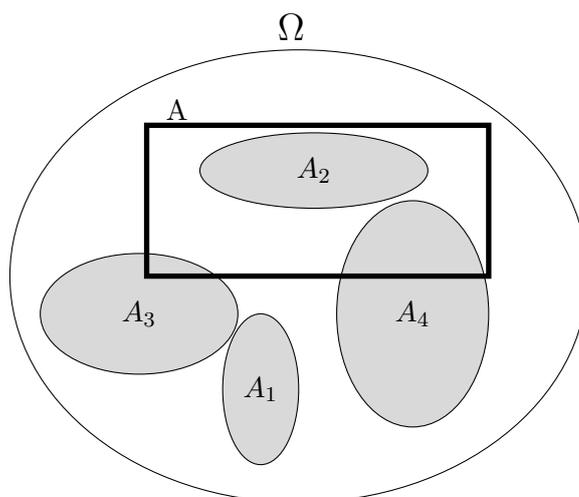


FIGURE 3.2 – Exemple d'une fonction de masse.

$$bel(A) = \sum_{B \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, \Omega\} \mid B \subseteq A} m(B) = m(A_2), \quad (3.11)$$

$$pl(A) = \sum_{B \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, \Omega\} \mid B \cap A \neq \emptyset} m(B) = m(A_2) + m(A_3) + m(A_4) + m(\Omega), \quad (3.12)$$

$$q(A) = \sum_{B \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, \Omega\} \mid B \supseteq A} m(B) = m(\Omega). \quad (3.13)$$

Les cas particuliers de fonction de masse sont les suivants :

**Définition 3.8** (Fonction de masse catégorique). *Une fonction de masse est appelée catégorique si elle est normalisée et possède un seul élément focal :*

$$\exists! A \subseteq \Omega, m(A) = 1. \quad (3.14)$$

**Définition 3.9** (Fonction de masse bayésienne). *Une fonction de masse est bayésienne si ses éléments focaux sont des singletons :*

$$\forall A \subseteq \Omega, m(A) > 0 \Rightarrow |A| = 1. \quad (3.15)$$

où  $|A|$  est la cardinalité de l'ensemble  $A$ .

Une fonction de masse bayésienne correspond à une distribution de probabilité. Dans ce cas, la fonction de croyance satisfait l'additivité :

$$bel(A \cup B) = bel(A) + bel(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset \text{ avec } A, B \subseteq \Omega. \quad (3.16)$$

En outre, il existe une distribution de probabilité  $P$  telle que :

$$P(a) = m(a) = q(a), \quad \forall a \in \Omega, \quad (3.17)$$

$$P(A) = bel(A) = pl(A), \quad \forall A \subseteq \Omega. \quad (3.18)$$

**Définition 3.10** (Fonction de masse consonante). *Une fonction de masse est consonante si ses éléments focaux sont emboîtés, c'est-à-dire il existe un ordre d'inclusion entre ses éléments focaux :*

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \text{ où } A_i \subseteq \Omega, \forall i \in \{1, \dots, k\}. \quad (3.19)$$

Les fonctions de croyance et de plausibilité induites par une fonction de masse consonante satisfont les propriétés d'une mesure de nécessité/possibilité ([Shafer 1976]) :

$$bel(A \cap B) = \min(bel(A), bel(B)), \quad (3.20)$$

$$pl(A \cup B) = \max(pl(A), pl(B)). \quad (3.21)$$

Ainsi, la plausibilité est équivalente à une mesure de possibilité, la croyance est la mesure de nécessité duale. Une fonction de masse consonante est une distribution de possibilité.

Dans le cas général, une fonction de masse peut être vue comme un ensemble généralisé [Dubois 1988] et une distribution de probabilité généralisée. La théorie des croyances englobe ainsi les formalismes ensembliste et probabiliste [Nassreddine 2010].

Les fonctions de croyance et de plausibilité peuvent être interprétées comme des encadrements d'une famille de probabilités mal connues ou imprécises. Soit  $m$  une fonction de masse induisant un couple de fonctions  $[bel, pl]$  défini sur un univers  $\Omega$  fini. On définit une famille de probabilités :

$$\mathcal{P}(m) = \{P \mid \forall A \in \Omega, bel(A) \leq P(A) \leq pl(A)\}. \quad (3.22)$$

Dans ce cas, on a :

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(m)} P(A) = pl(A), \quad (3.23)$$

$$\inf_{P \in \mathcal{P}(m)} P(A) = bel(A). \quad (3.24)$$

Lorsque plusieurs fonctions de croyance sont compatibles avec un ensemble de contraintes, la plus appropriée est la moins informative. Ce raisonnement est le noyau du *principe d'engagement minimal* qui joue un rôle crucial dans la représentation de la connaissance incomplète par les fonctions de croyance. Ce principe a été introduit dans [Yagger 1986], [Dubois 1986], [Dubois 1987] pour créer un ordre sur l'ensemble des fonctions de croyance définies sur un univers  $\Omega$ . Il stipule que l'on ne devrait pas donner plus de croyance que justifié par la source d'information disponible. La sélection d'une fonction de croyance est souvent basée sur les relations suivantes :

- $m_1$  est plus engagée que  $m_2$  au sens de la communauté  $q$  (noté  $m_1 \sqsubseteq_q m_2$ ) si  $q_1(A) \leq q_2(A)$ , pour tout  $A \subseteq \Omega$ .
- $m_1$  est plus engagée que  $m_2$  au sens de la plausibilité  $pl$  (noté  $m_1 \sqsubseteq_{pl} m_2$ ) si  $pl_1(A) \leq pl_2(A)$ , pour tout  $A \subseteq \Omega$ .

Dans le cas des fonctions de masse consonantes, ces deux relations sont équivalentes ; c'est-à-dire si  $m_1$  et  $m_2$  sont consonantes, alors :

$$m_1 \sqsubseteq_q m_2 \Leftrightarrow m_1 \sqsubseteq_{pl} m_2 \Leftrightarrow \pi_1 \leq \pi_2, \quad (3.25)$$

où  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont deux distributions de possibilité induites par  $m_1$  et  $m_2$  car une fonction de masse consonante est une distribution de possibilité. Lorsque les fonctions de masse sont normalisées,  $m_1 \sqsubseteq_{pl} m_2$  implique  $bel_1(A) \geq bel_2(A)$  pour tout  $A \subseteq \Omega$ .

### 3.4.2 Théorème de Bayes généralisé

Le théorème de Bayes généralisé a été introduit dans [Smets 1993] et est considéré comme un des principaux résultats théoriques de la théorie des croyances.

Considérons  $x$  et  $y$  deux variables avec deux univers distincts  $\Omega_X$  et  $\Omega_Y$ . Le théorème de Bayes généralisé permet de construire des fonctions de croyance sur  $\Omega_X$  à partir des fonctions de croyance conditionnelles sur  $\Omega_Y$  sachant des éléments de  $\Omega_X$ . Soit  $pl(Y|x)$  et  $bel(Y|x)$  les plausibilités et croyances conditionnelles sachant les singletons  $x$  dans  $\Omega_X$  où  $Y$  est un sous-ensemble de  $\Omega_Y$ . Les fonctions de croyance conditionnelles d'un sous-ensemble  $X$  de  $\Omega_X$  sont calculées par les équations suivantes [Smets 1993] :

$$m(X|Y) = \eta \prod_{x \in X} pl(Y|x) \prod_{x \in X^c} (1 - pl(Y|x)), \quad (3.26)$$

$$bel(X|Y) = \eta \left( \prod_{x \in X^c} bel(Y^c|x) - \prod_{x \in \Omega_X} bel(Y^c|x) \right), \quad (3.27)$$

$$pl(X|Y) = \eta \left( 1 - \prod_{x \in X} (1 - pl(Y|x)) \right), \quad (3.28)$$

$$q(X|Y) = \eta \prod_{x \in X} pl(Y|x), \quad (3.29)$$

$$\eta^{-1} = 1 - \prod_{x \in \Omega_X} (1 - pl(Y|x)), \quad (3.30)$$

$$\forall X \subseteq \Omega_X, Y \subseteq \Omega_Y, X^c = \Omega_X \setminus X, Y^c = \Omega_Y \setminus Y, X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset.$$

### 3.4.3 Prise de décision : méthodes de transformation

Afin de prendre une décision basée sur des fonctions de croyance, il est nécessaire de transformer la croyance en probabilité. Cela reflète la distinction entre deux niveaux dans la modélisation des incertitudes par des fonctions de croyance :

- le niveau crédal où sont représentées les informations disponibles par des fonctions de croyance,
- le niveau pignistique où est construite la décision.

Il existe deux méthodes permettant de convertir les fonctions de croyance en probabilité : la transformation pignistique et la transformation en plausibilité.

La transformation pignistique a été proposée dans [Smets 1994]. Soit  $m$  une fonction de masse définie sur  $\Omega$ . La probabilité  $BetP_m$  donnée par la transformation pignistique est définie comme suit :

$$BetP_m(a) = \sum_{A \subseteq \Omega | a \in A} \frac{m(A)}{|A|}, \quad \forall a \in \Omega. \quad (3.31)$$

La seconde méthode est la transformation en plausibilité introduite dans [Cobb 2003]. Soit  $pl$  une fonction de plausibilité des singletons dans un univers  $\Omega$ . La fonction de probabilité  $PIP$  donnée par la transformation plausibilité est

définie par :

$$PlP(a) = \frac{pl(a)}{\sum_{x \in \Omega} pl(x)}, \quad \forall a \in \Omega. \quad (3.32)$$

Les méthodes de transformation peuvent être appliquées au calcul de l'espérance d'une variable aléatoire réelle. Soit  $X$  une variable aléatoire définie comme une fonction d'un ensemble fini  $\Theta$  dans  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $P$  soit une fonction de probabilité donnée par la transformations pignistique ou plausibilité. Ainsi, l'espérance  $E(X)$  est définie par :

$$E(X) = \sum_{\theta \in \Theta} X(\theta)P(\theta). \quad (3.33)$$

### 3.4.4 Fonctions de croyance dans $\mathbb{R}$

La théorie des croyances sur un univers fini est étendue à l'ensemble des nombres réels  $\mathcal{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  dans [Smets 2005a]. Cette extension repose sur la représentation d'un intervalle dans  $\mathcal{R}$  par un point dans un espace de dimension 2.

**Définition 3.11.** *Les intervalles fermés contenus dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha \leq \beta$  peuvent être représentés par un ensemble de points dans un espace de dimension 2 :*

$$\mathcal{T}_{[\alpha, \beta]} = \{(a, b) \mid a, b \in [\alpha, \beta], a \leq b\}. \quad (3.34)$$

La figure 3.3 illustre graphiquement cette représentation dans le repère orthonormal. Comme on considère des points de coordonnées  $(x, y)$  tels que  $x \leq y$ , un point sur la partie située au dessus de la diagonale d'équation  $y = x$  représente un intervalle. L'ensemble des points tels que  $\alpha \leq x \leq y \leq \beta$  est encadré par le triangle  $\mathcal{T}_{[\alpha, \beta]}$  de sommets les points de coordonnées  $(\alpha, \alpha)$ ,  $(\alpha, \beta)$  et  $(\beta, \beta)$  montré dans la figure 3.3. Un intervalle  $[a, b]$  contenu dans  $[\alpha, \beta]$  est représenté par un point  $K$  dont les coordonnées sont  $(a, b)$  dans le triangle  $\mathcal{T}_{[\alpha, \beta]}$ .

Les fonctions de croyance sont ensuite définies pour deux cas : cas discret et cas continu (en fonction du nombre d'éléments focaux).

#### ■ Cas discret

Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'intervalles contenus dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  :

$$\mathcal{A} = \{[a_i, b_i] \mid \alpha \leq a_i \leq b_i \leq \beta, i = 1, \dots, n\}. \quad (3.35)$$

Grâce à la représentation d'un intervalle présentée au début de cette section, l'ensemble  $\mathcal{A}$  peut être représenté par un ensemble de points dans le triangle  $\mathcal{T}_{[\alpha, \beta]}$ .

Considérons une fonction de masse  $m^{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  dont les éléments focaux sont inclus dans  $\mathcal{A}$ . Soit  $X = [a, b]$  un intervalle dans  $[\alpha, \beta]$ . Les fonctions de croyance de  $X$  sont déterminées comme suit :

- **La croyance.**  $bel^{\mathcal{A}}(X)$  est la somme des masses des intervalles  $[a_i, b_i] \in \mathcal{A}$  tels que  $[a_i, b_i] \subseteq [a, b]$ . Ces intervalles sont représentés par les points

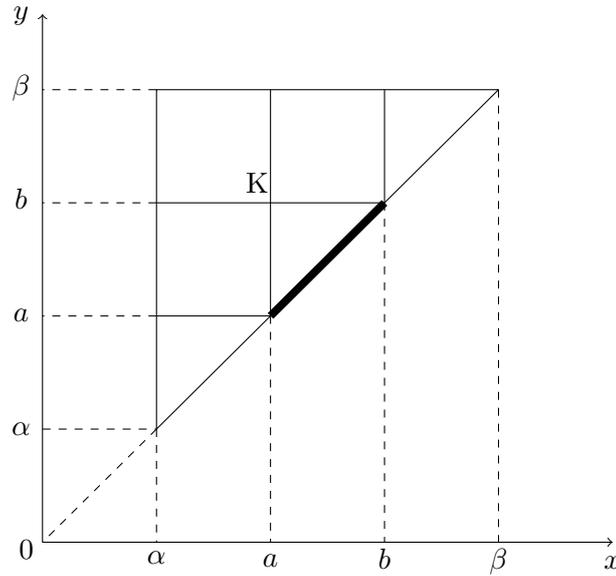


FIGURE 3.3 – Représentation d’un intervalle  $[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$  par un point  $K$  dans le triangle  $\mathcal{T}_{[\alpha, \beta]}$ .

appartenant au triangle gris dans la figure 3.4a. Ainsi, la croyance de  $X$  est obtenue par l’équation suivante :

$$bel^A(X) = \sum_{a \leq x \leq b} \sum_{x \leq y \leq b} m^A([x, y]). \quad (3.36)$$

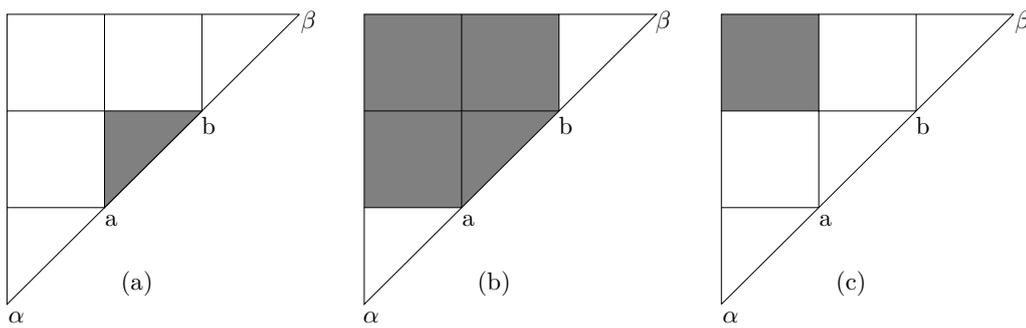


FIGURE 3.4 – Représentation graphique de la croyance (a), de la plausibilité (b), de la communauté (c).

- **La plausibilité.**  $pl^A(X)$  est la somme des masses des intervalles  $[a_i, b_i] \in \mathcal{A}$  tels que  $[a_i, b_i] \cap [a, b] \neq \emptyset$ . Ces intervalles sont représentés par les points appartenant à la région grise dans la figure 3.4b. Ainsi, la plausibilité de  $X$

est obtenue par l'équation suivante :

$$pl^A(X) = \sum_{\alpha \leq x \leq b} \sum_{\max(a,x) \leq y \leq \beta} m^A([x, y]). \quad (3.37)$$

- **La communauté.**  $q^A(X)$  est la somme des masses des intervalles  $[a_i, b_i] \in \mathcal{A}$  tels que  $[a, b] \subseteq [a_i, b_i] \neq \emptyset$ . Ces intervalles sont représentés par les points appartenant à la région grise dans la figure 3.4c. Ainsi, la communauté de  $X$  est obtenue par l'équation suivante :

$$q^A(X) = \sum_{\alpha \leq x \leq a} \sum_{b \leq y \leq \beta} m^A([x, y]). \quad (3.38)$$

### ■ Cas continu

Dans ce cas, le domaine  $[\alpha, \beta]$  est remplacé par  $\mathcal{R}$ . Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{A}$  devient l'ensemble des intervalles fermés dans  $\mathcal{R}$ , noté  $\mathbb{I}\mathbb{R}$ . Les fonctions de masse deviennent les densités de masse, les sommes deviennent les intégrales.

**Définition 3.12** (Densité de masse). *Une densité de masse  $m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}$  définie sur  $\mathbb{I}\mathbb{R}$  est une fonction non-négative telle que  $m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}(A) = 0$  si  $A$  n'est pas un intervalle fermé ou si  $A = \emptyset$ , et :*

$$INT = \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}([x, y]) dy dx \leq 1. \quad (3.39)$$

De plus, on définit :

$$m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}(\emptyset) = 1 - INT. \quad (3.40)$$

Les éléments  $A$  de  $\mathbb{I}\mathbb{R}$  tels que  $m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}(A) > 0$  sont appelés les éléments focaux de  $m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}$ .

Les fonctions de croyance  $bel^{\mathbb{I}\mathbb{R}}$ ,  $pl^{\mathbb{I}\mathbb{R}}$ ,  $q^{\mathbb{I}\mathbb{R}}$  induites par une densité de masse  $m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}$  sont définies comme suit :

**Définition 3.13** (Fonctions liées à une densité  $m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}$ ). *Pour tout  $[a, b] \in \mathbb{I}\mathbb{R}$ , on définit :*

- *La croyance*

$$bel^{\mathbb{I}\mathbb{R}}([a, b]) = \int_a^b \int_x^b m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}([x, y]) dy dx,$$

- *La plausibilité*

$$pl^{\mathbb{I}\mathbb{R}}([a, b]) = \int_{-\infty}^b \int_{\max(a,x)}^{\infty} m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}([x, y]) dy dx,$$

- *La communauté*

$$q^{\mathbb{I}\mathbb{R}}([a, b]) = \int_{-\infty}^a \int_b^{\infty} m^{\mathbb{I}\mathbb{R}}([x, y]) dy dx.$$

La transformation pignistique est également étendue. La densité de probabilité pignistique associée à une densité de masse  $m$  est définie dans le cas continu par [Smets 2005a] :

$$Betf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{m([u, v])}{v - u} dv du. \quad (3.41)$$

## 3.5 Représentations de distributions univariées

Les différentes représentations d'une distribution univariée unimodale dont la valeur des paramètres est connue (mode, moyenne, médiane, support) font l'objet de cette section.

### 3.5.1 Moyenne connue

Considérons  $\mathcal{P}_A^{moy}$  l'ensemble des probabilités de support  $A = [a, b]$  et de moyenne  $moy$ . Cette connaissance peut être encadrée par une paire de fonctions de répartition  $(\underline{F}, \overline{F})$  proposée par Ferson [Ferson 2003] :

$$\underline{F}(x) = \begin{cases} \frac{x - moy}{x - a} & \text{si } x \in [moy, b] \\ 0 & \text{si } x \in [a, moy] \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [moy, b] \\ \frac{b - moy}{b - x} & \text{si } x \in [a, moy] \end{cases} \quad (3.43)$$

Le couple  $(\underline{F}, \overline{F})$  définit la famille de probabilités  $\mathcal{P}(\underline{F}, \overline{F})$  contenant  $\mathcal{P}_A^{moy}$ . La figure 3.5 montre la p-box dans le cas du support  $[a, b] = [-4, 4]$  et de moyenne  $moy = 1$ .

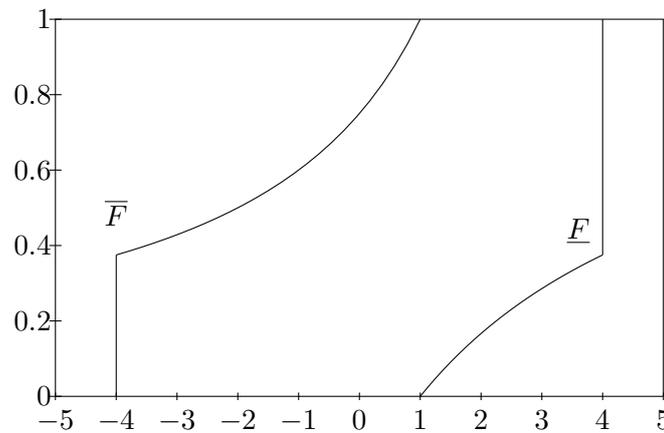


FIGURE 3.5 – p-box avec le support  $[-4, 4]$  et  $moy = 1$ .

### 3.5.2 Médiane connue

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une distribution de probabilité de support  $A = [a, b]$  et de médiane  $m$ . On note  $\mathcal{P}_A^{med}$  l'ensemble des probabilités de support  $A = [a, b]$  et de médiane  $m$ . En utilisant la définition de la médiane :  $P(X \leq m) = 0.5$ , on peut représenter cette connaissance par la fonction de masse  $m_m$  telle que :

$$m([a, m]) = m([m, b]) = 0.5. \quad (3.44)$$

La fonction de croyance induite par  $m$  rend compte de toutes les probabilités de médiane  $m$  [Baudrit 2006] :

$$\mathcal{P}_A^{med} = \{P \mid \forall C \text{ mesurable, } bel(C) \leq P(C)\}. \quad (3.45)$$

### 3.5.3 Mode connu

Considérons une variable aléatoire réelle  $X$  caractérisée par une distribution de probabilité de support connu  $A = [a, b]$  et de mode  $M \in [a, b]$ . L'ensemble des probabilités de support  $A$  et de mode  $M$ , noté  $\mathcal{P}_A^{mode}$ , est dominé par la distribution de possibilité triangulaire suivante [Baudrit 2006] :

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{M-a} & \text{si } a \leq x \leq M, \\ \frac{b-x}{b-M} & \text{si } M \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.46)$$

D'autre part, la distribution de possibilité  $\pi$  peut être approchée par une fonction de masse discrète  $m$  à  $p$  éléments focaux en utilisant les  $\alpha$ -coupes de  $m$ . Une  $\alpha$ -coupe d'une distribution de possibilité  $\pi$  est l'ensemble de valeurs  $x$  telles que  $\pi(x) \leq \alpha$ , pour  $0 < \alpha \leq 1$ . On choisit  $p$  valeurs de  $\alpha$  telles que :  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{p-1} < 1$  pour déterminer  $p$   $\alpha$ -coupes de  $\pi$  comme suit :

$$[\pi^{\alpha_i}] = [a + \alpha_i(M - a), M + (1 - \alpha_i)(b - M)], \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.47)$$

Ainsi,  $[\pi^{\alpha_0}] = [a, b]$ . Notons que  $m$  est consonante, elle est également une distribution de possibilité. Les valeurs des masses de ses éléments focaux sont données par :

$$\begin{cases} m([\pi^0]) & = \alpha_1 - \alpha_0 = \alpha_1, \\ m([\pi^{\alpha_1}]) & = \alpha_2 - \alpha_1, \\ & \vdots \\ m([\pi^{\alpha_{p-1}}]) & = 1 - \alpha_{p-1}. \end{cases} \quad (3.48)$$

Les deux représentations sont illustrées dans la figure 3.6. La distribution de possibilité  $\pi$  (ligne noire) est approchée par la fonction de masse  $m$  de 3 éléments focaux  $[\pi^{\alpha_0}]$ ,  $[\pi^{\alpha_1}]$  et  $[\pi^{\alpha_2}]$  (lignes noires en gras). La fonction de plausibilité  $pl(x)$  induite par  $m$  (ligne bleue) est équivalente à une distribution de possibilité moins

spécifique que  $\pi : pl(x) \leq \pi(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . On a donc l'inégalité suivante pour toute partie  $B$  mesurable :

$$bel(B) \leq N(B) \leq P(B) \leq \Pi(B) \leq pl(B), \quad (3.49)$$

où  $bel, pl$  sont la croyance et la plausibilité induites par  $m$  ;  $N$  et  $\Pi$  sont la nécessité et la possibilité associées à  $\pi$ .  $P$  est une distribution de probabilité incluse dans  $\mathcal{P}_A^{mode}$ .

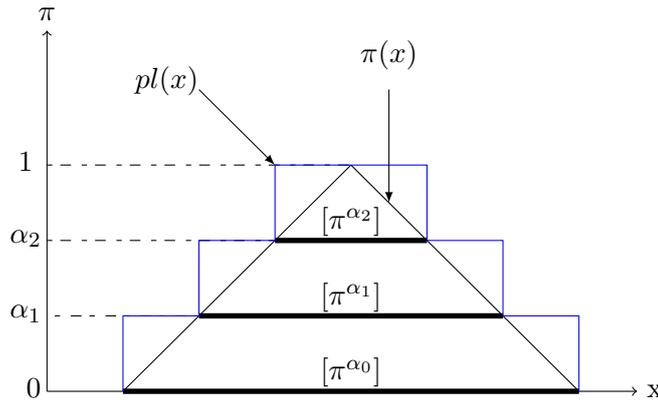


FIGURE 3.6 – Une distribution triangulaire et sa fonction de masse associée.

Dans les représentations introduites, on considère que toutes les valeurs qui n'appartiennent pas au support  $[a, b]$  sont impossibles. Afin de modifier cette condition, supposons que les valeurs à l'extérieur de  $[a, b]$  soient possibles avec une faible plausibilité. Dans ce cas, la notion d'affaiblissement est utilisée.

**Définition 3.14** (Affaiblissement d'une fonction de masse). *L'affaiblissement d'une fonction de masse  $m$  avec un coefficient  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  est donné par [Nassreddine 2010] :*

$$\varepsilon m(A) = \begin{cases} (1 - \varepsilon)m(A) & \text{si } A \subset \Omega, \\ (1 - \varepsilon)m(\Omega) + \varepsilon & \text{si } A = \Omega. \end{cases} \quad (3.50)$$

Cette transformation signifie qu'une proportion  $\varepsilon$  de masse est transférée à  $\Omega$ . On peut noter que :

$$\varepsilon bel(A) = (1 - \varepsilon)bel(A) \leq bel(A), \quad (3.51)$$

$$\varepsilon pl(A) = (1 - \varepsilon)pl(A) + \varepsilon \geq pl(A). \quad (3.52)$$

Ainsi, on obtient une fonction de masse moins engagée que  $m$  au sens de la plausibilité :  $m \sqsubseteq_{pl} \varepsilon m$ .

## 3.5.4 Représentation par des distributions de possibilité continues

La représentation d'une famille de probabilités par des distributions de possibilité continues repose sur des inégalités probabilistes [Baudrit 2006]. Par exemple, l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev permet de définir une distribution de possibilité dominant l'ensemble de probabilités de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ . L'inégalité de Bienaymé-Chebyshev peut être écrite comme suit :

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \text{pour } k \geq 1. \quad (3.53)$$

Cette inégalité permet de définir une distribution de possibilité  $\pi$  en considérant les intervalles  $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$  comme  $\alpha$ -coupes de  $\pi$  et posant  $\pi(\mu - k\sigma) = \pi(\mu + k\sigma) = 1/k^2$ . Cette distribution de possibilité domine la famille de probabilités de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  :  $\mathcal{P}^{\mu, \sigma} \subseteq \mathcal{P}(\pi)$  (figure 3.7). Dans le cas où on ne considère que des distributions de probabilité unimodales et symétriques, l'inégalité de Camp-Meidel donne une distribution de possibilité plus spécifique que celle obtenue par l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev (figure 3.7). L'inégalité de Camp-Meidel s'écrit comme suit :

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{4}{9k^2} \quad \text{pour } k \geq \frac{2}{3}. \quad (3.54)$$

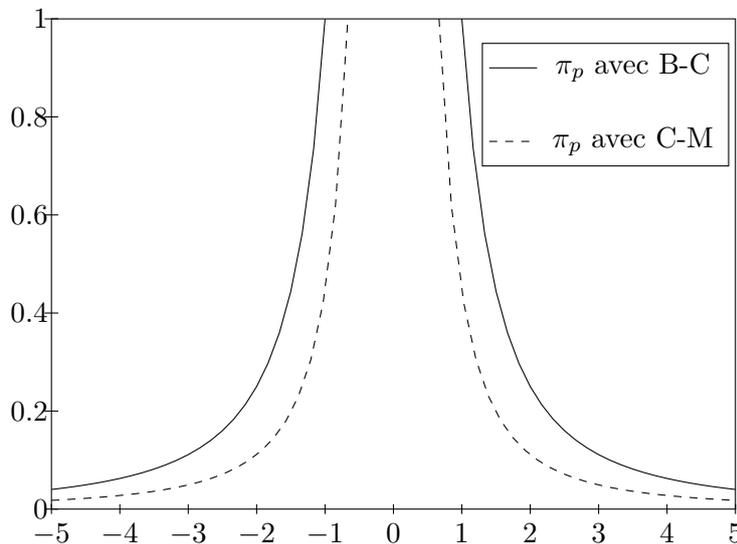


FIGURE 3.7 – Distribution de possibilité avec  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev (B-C) et de Camp-Meidel (C-M).

### 3.5.5 Construction d'une densité de masse à partir d'une densité de probabilité continue

Supposons que la connaissance considérée soit modélisée par une densité pignistique  $Betf$ . On se pose la question de la reconstruction de la densité de masse  $m$  induisant cette probabilité. Cette reconstruction génère souvent un ensemble de densités, appelées les densités isopignistiques. Dans ce cas, le principe d'engagement minimal est appliqué afin de sélectionner la densité de masse la moins informative au sens de la communauté  $q$ .

Dans [Smets 2005a], l'expression explicite de la densité isopignistique la moins engagée au sens de  $q$  pour une densité de probabilité  $Betf$  en forme de cloche est introduite. Une densité de probabilité est en forme de cloche si elle est unimodale, continue et strictement monotone croissante (décroissante) à gauche (à droite) du mode. Les éléments focaux de la densité de masse obtenue sont les intervalles  $I_\alpha = [a, b]$  qui sont également les  $\alpha$ -coupes de  $Betf$ . La masse d'un intervalle  $[a, b]$  est définie par :

$$m([a, b]) = \begin{cases} (a - b) \frac{dBetf(b)}{db} & \text{si } [a, b] \text{ est une } \alpha\text{-coupe de } Betf, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.55)$$

La plausibilité d'un point  $x \in \mathbb{R}$  est donc calculée par l'expression suivante :

$$pl(x) = \int_{\alpha_{min}}^{\infty} m(I_\alpha) d\alpha, \quad (3.56)$$

où  $\alpha_{min}$  est l'indice de l'élément focal minimal de  $m$  contenant  $x$ . Notons que la fonction  $pl(x)$  correspond à une distribution de possibilité car  $m$  est consonante. Les fonctions  $bel$  et  $pl$  d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  peuvent donc être évaluées simplement par la théorie des possibilités. Supposons que le mode de  $Betf$  soit  $M$ . La plausibilité d'un intervalle  $[a, b]$  induite par la fonction de masse  $m$  est déterminée par [Smets 2005a] :

$$pl([a, b]) = \begin{cases} pl(a) & \text{si } M \leq a \leq b, \\ 1 & \text{si } a < M < b, \\ pl(b) & \text{si } a \leq b \leq M. \end{cases} \quad (3.57)$$

et la croyance :

$$bel([a, b]) = \inf_{x \notin [a, b]} (1 - pl(x)). \quad (3.58)$$

#### ■ Application à la distribution gaussienne

Soit  $f_0$  la densité d'une distribution gaussienne  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . La densité de masse isopignistique la moins engagée au sens de  $q$  induisant  $f_0$ , notée  $m_{\mu, \sigma}$ , est définie par :

$$m_{\mu, \sigma}(I_\alpha) = \theta(\alpha), \quad \alpha \geq 0, \quad (3.59)$$

où  $I_\alpha$  sont les éléments focaux emboîtés définis par :

$$I_\alpha = [\mu - \sqrt{\alpha}\sigma, \mu + \sqrt{\alpha}\sigma], \quad (3.60)$$

et  $\theta(\alpha)$  est une densité de probabilité  $\chi^2$  à trois degrés de liberté :

$$\theta(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \quad (3.61)$$

La plausibilité d'un point  $x \in \mathbb{R}$  est donnée par [Aregui 2008] :

$$\begin{aligned} pl_{\mu,\sigma}(x) &= \int_{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}^{\infty} \theta(\alpha) d\alpha \\ &= \begin{cases} \frac{2(x-\mu)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + 2(1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)) & \text{si } x \geq \mu, \\ \frac{2(\mu-x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + 2\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.62)$$

où  $\Phi$  est la distribution cumulative gaussienne standard.

La fonction de plausibilité  $pl_{\mu,\sigma}(x)$  est illustrée dans la figure 3.8 avec  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1, 2, 4$ . Dans le cas où l'on ne connaît que les intervalles de confiance de  $\mu$

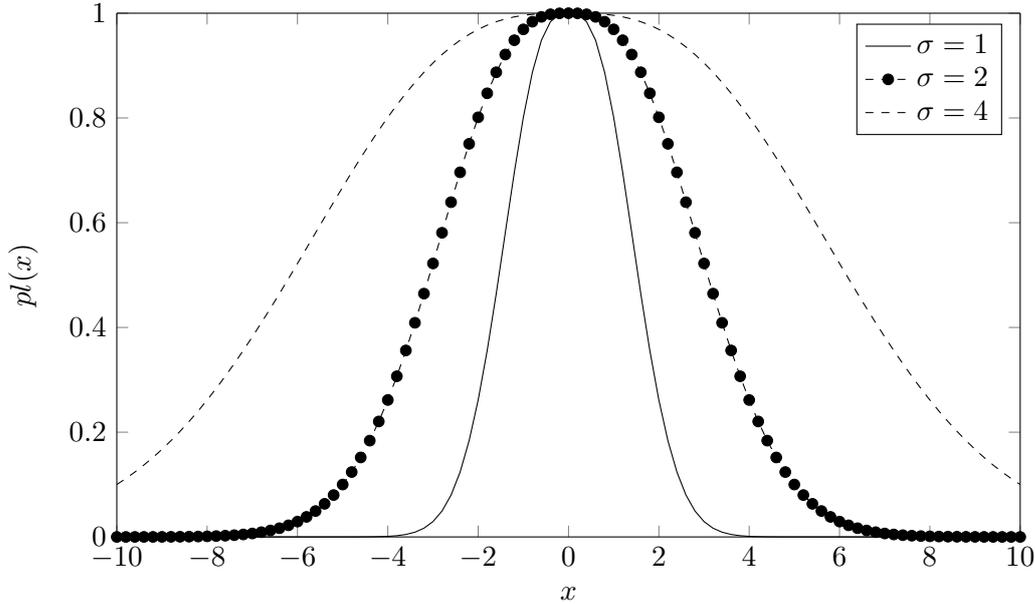


FIGURE 3.8 – Fonction de plausibilité induite par une densité gaussienne avec  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1, 2, 4$ .

et  $\sigma$ , notés  $[\mu] = [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$  et  $[\sigma] = [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ , il est nécessaire de chercher une densité de masse  $m_{[\mu],[\sigma]}$  moins engagée que n'importe quelle densité  $m_{\mu,\sigma}$ ,  $\mu \in [\mu]$ ,  $\sigma \in [\sigma]$ , i.e.  $m_{\mu,\sigma} \sqsubseteq_{pl} m_{[\mu],[\sigma]}$ . Pour cela, on constate qu'un élément focal  $I_\alpha = [\mu - \sqrt{\alpha}\sigma, \mu + \sqrt{\alpha}\sigma]$  de  $m_{\mu,\sigma}$  est toujours inclus dans l'intervalle  $[I_\alpha] = [\underline{\mu} - \sqrt{\alpha}\bar{\sigma}, \bar{\mu} + \sqrt{\alpha}\bar{\sigma}]$ , quelles que soient  $\mu \in [\mu]$ ,  $\sigma \in [\sigma]$ . Ainsi, la densité  $m_{[\mu],[\sigma]}$  peut être définie par le théorème

suivant.

**Théorème 3.1.** Soit  $m_{[\mu],[\sigma]}$  la densité définie par :

$$m_{[\mu],[\sigma]}(I_\alpha) = \theta(\alpha), \quad \alpha \geq 0, \quad (3.63)$$

où  $[I_\alpha]$  sont les éléments focaux emboîtés définis par :

$$[I_\alpha] = [\underline{\mu} - \sqrt{\alpha\bar{\sigma}}, \bar{\mu} + \sqrt{\alpha\bar{\sigma}}], \quad (3.64)$$

et  $\theta(\alpha)$  est une densité de probabilité  $\chi^2$  à trois degrés de liberté :

$$\theta(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.65)$$

Cette densité est moins engagée que l'ensemble de densités  $m_{\mu,\sigma}$ ,  $\forall \mu \in [\mu], \sigma \in [\sigma]$ .

**Preuve.** Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $\alpha_{min}$  est l'indice de l'élément focal minimal de  $m_{\mu,\sigma}$  tel que  $I_{\alpha_{min}} \cap A \neq \emptyset$ , où  $\mu \in [\mu], \sigma \in [\sigma]$ . Puisque  $I_\alpha \subseteq [I_\alpha]$  pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$ , il existe une valeur  $0 \leq \alpha'_{min} \leq \alpha_{min}$  telle que  $[I_{\alpha'_{min}}] \cap A \neq \emptyset$ . La plausibilité de  $A$  induite par  $m_{\mu,\sigma}$  est donc :

$$\begin{aligned} pl_{\mu,\sigma}(A) &= \int_{\alpha_{min}}^{\infty} \theta(u) du \\ &\leq \int_{\alpha'_{min}}^{\infty} \theta(u) du = pl_{[\mu],[\sigma]}(A), \\ &\forall \mu \in [\mu], \sigma \in [\sigma]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Autrement dit,  $m_{\mu,\sigma} \sqsubseteq_{pl} m_{[\mu],[\sigma]}$  pour tout  $\mu \in [\mu]$  et tout  $\sigma \in [\sigma]$ .  $\square$

A partir de la densité  $m_{[\mu],[\sigma]}$ , la plausibilité d'une valeur  $x \in \mathbb{R}$  est déterminée par [Aregui 2008] :

$$pl_{[\mu],[\sigma]}(x) = \begin{cases} pl_{\underline{\mu},\bar{\sigma}}(x) & \text{si } x \leq \underline{\mu}, \\ 1 & \text{si } \underline{\mu} < x < \bar{\mu}, \\ pl_{\bar{\mu},\bar{\sigma}}(x) & \text{si } x \geq \bar{\mu}, \end{cases} \quad (3.67)$$

où  $pl_{\mu,\sigma}(x)$  est la fonction de plausibilité définie dans l'équation (3.62). Un exemple illustratif de la fonction de plausibilité imprécise avec  $[\mu] = [-1, 1]$  et différents intervalles  $[\sigma]$  est montré dans la figure 3.9.

La croyance et la plausibilité d'un intervalle  $[a, b]$  sont déterminées de manière

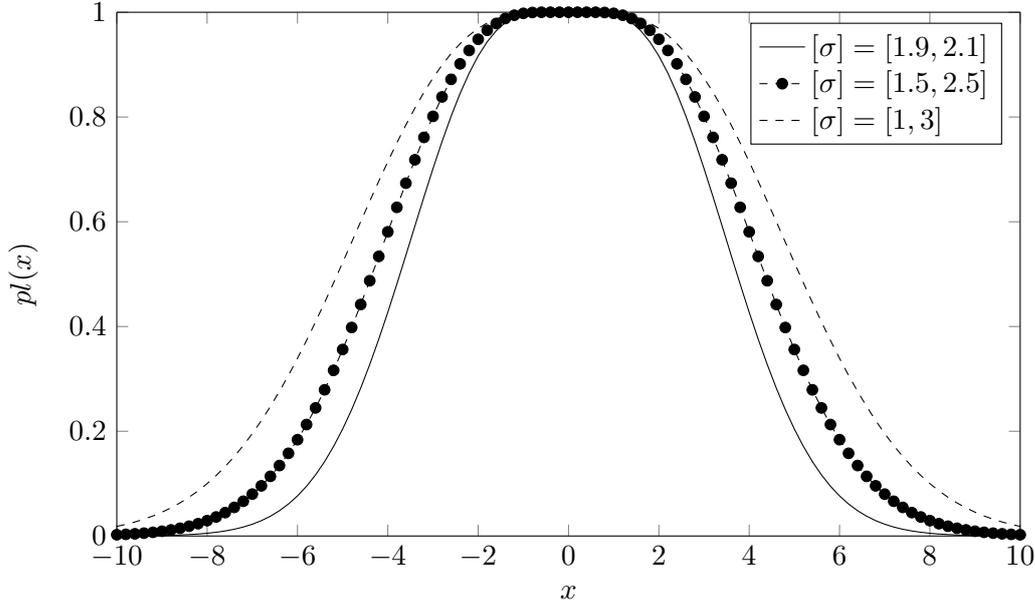


FIGURE 3.9 – Fonction de plausibilité associée à une densité gaussienne imprécise avec  $[\mu] = [-1, 1]$  et  $[\sigma] = [1.9, 2.1], [1.5, 2.5], [1, 3]$ .

similaire aux équations 3.57 et 3.58 :

$$pl_{[\mu],[\sigma]}([a, b]) = \begin{cases} pl_{[\mu],[\sigma]}(a) & \text{si } \bar{\mu} \leq a \leq b, \\ 1 & \text{si } [a, b] \cap [\mu] \neq \emptyset, \\ pl_{[\mu],[\sigma]}(b) & \text{si } a \leq b \leq \underline{\mu}. \end{cases} \quad (3.68)$$

$$bel_{[\mu],[\sigma]}([a, b]) = \inf_{x \notin [a, b]} (1 - pl_{[\mu],[\sigma]}(x)). \quad (3.69)$$

### 3.6 Représentation d'une distribution gaussienne multivariée

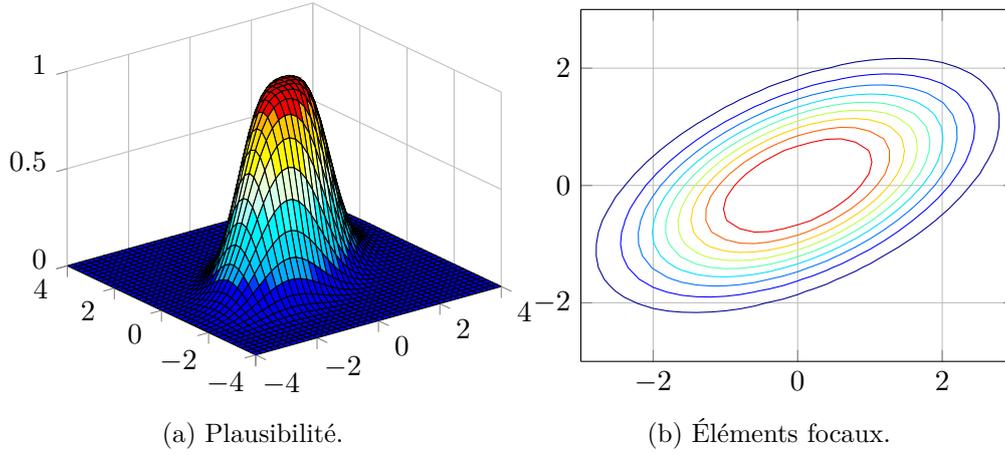
Dans cette section, les résultats présentés dans la section 3.5.4 sont étendus au cas de la distribution gaussienne de dimension  $n$ .

Considérons la distribution gaussienne  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  de moyenne  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et de matrice de covariance  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Les éléments focaux de la densité de masse associée deviennent les hypervolumes définis par :

$$HV_{\alpha} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \leq \alpha \right\}, \quad (3.70)$$

qui sont englobés par les ellipsoïdes d'iso-probabilités :

$$HC_{\alpha} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu) = \alpha \right\}. \quad (3.71)$$

FIGURE 3.10 – La fonction de plausibilité et les éléments focaux de  $m_{\mu,\Sigma}$ .

La densité de masse  $m_{\mu,\Sigma}$  est ainsi définie par [Caron 2008] :

$$m_{\mu,\Sigma}(HV_\alpha) = \theta(\alpha), \quad \alpha \geq 0, \quad (3.72)$$

où  $\theta(\alpha)$  est la densité de la distribution  $\chi^2$  à  $n + 2$  degrés de liberté :

$$\theta(\alpha) = \frac{\alpha^{\frac{n+2}{2}-1}}{2^{\frac{n+2}{2}} \Gamma(\frac{n+2}{2})} \exp(-\frac{\alpha}{2}). \quad (3.73)$$

La plausibilité d'un point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est donc définie par :

$$\begin{aligned} pl_{\mu,\Sigma}(\mathbf{x}) &= \int_{(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)}^{\infty} \theta(\alpha) d\alpha, \\ &= 1 - F_{n+2}((\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)), \end{aligned} \quad (3.74)$$

où  $F_d$  est la densité cumulative de la distribution  $\chi^2$  à  $d$  degrés de liberté. La fonction de plausibilité  $pl_{\mu,\Sigma}(\mathbf{x})$  et les éléments focaux de la densité  $m_{\mu,\Sigma}$  avec :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

sont montrés dans la figure 3.10.

**Proposition 3.1.** La plausibilité et la croyance d'une boîte  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n$  sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned} pl_{\mu,\Sigma}([\mathbf{x}]) &= \int_{\alpha_{pl}}^{\infty} \theta(\alpha) d\alpha, \\ &= 1 - F_{n+2}(\alpha_{pl}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} bel_{\mu, \Sigma}([\mathbf{x}]) &= \int_0^{\alpha_{bel}} \theta(\alpha) d\alpha, \\ &= F_{n+2}(\alpha_{bel}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

où  $\alpha_{pl}$  ( $\alpha_{bel}$ ) est l'indice de l'élément focal le plus petit (le plus grand) de  $m_{\mu, \Sigma}$  qui intersecte (contient)  $[\mathbf{x}]$  :

$$\alpha_{pl} = \max_{\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]} (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu), \quad (3.78)$$

$$\alpha_{bel} = \min_{\mathbf{x} \notin [\mathbf{x}]} (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu). \quad (3.79)$$

La recherche de  $\alpha_{pl}$  ( $\alpha_{bel}$ ) correspond à un problème d'optimisation quadratique.

Dans la suite de cette section, on s'intéresse à la représentation d'une distribution gaussienne multidimensionnelle dont les paramètres sont mal connus mais bornés, i.e.  $\mu \in [\mu]$  et  $\Sigma \in [\Sigma]$ , où  $[\mu]$  et  $[\Sigma]$  sont un vecteur et une matrice intervalles. Pour cela, on cherche une densité de masse  $m_{[\mu], [\Sigma]}$  moins engagée que l'ensemble de densités  $m_{\mu, \Sigma}$  avec  $\mu \in [\mu]$  et  $\Sigma \in [\Sigma]$ . La remarque suivante est utilisée.

**Remarque 3.1.** L'hypervolume  $HV_\alpha$  défini par l'équation (3.70) est toujours inclus dans une boîte  $[HV_\alpha]$  caractérisée par :

$$[HV_\alpha] = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \underline{\mu} - \sqrt{\alpha \cdot \text{diag}(\overline{\Sigma})} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mu} + \sqrt{\alpha \cdot \text{diag}(\overline{\Sigma})} \right\}, \quad (3.80)$$

où  $\text{diag}(A)$  représente le vecteur des éléments diagonaux d'une matrice  $A$ .

Grâce à la remarque ci-dessus, la densité  $m_{[\mu], [\Sigma]}$  est définie dans le théorème suivant.

**Théorème 3.2.** Soit  $m_{[\mu], [\sigma]}$  la densité définie par :

$$m_{[\mu], [\sigma]}([HV_\alpha]) = \theta(\alpha), \quad \alpha \geq 0, \quad (3.81)$$

où  $[HV_\alpha]$  sont les éléments focaux emboîtés définis par :

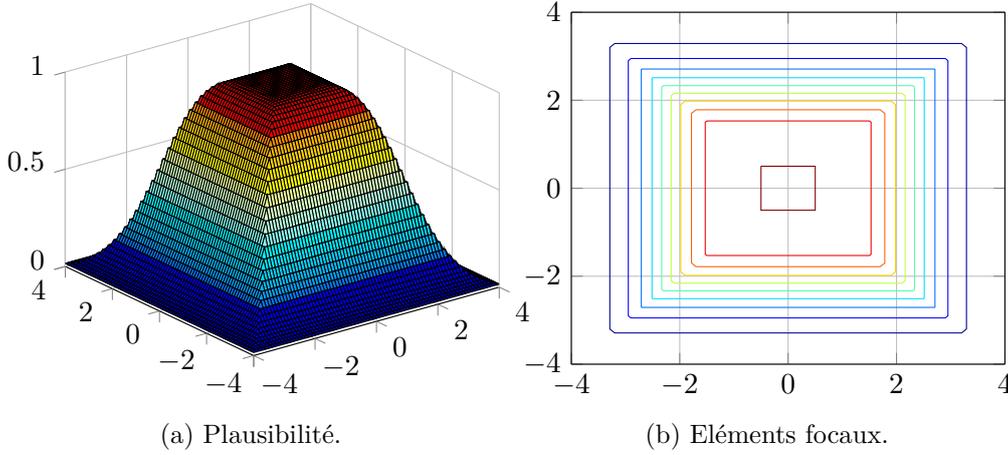
$$[HV_\alpha] = [\underline{\mu} - \sqrt{\alpha \cdot \text{diag}(\overline{\Sigma})}, \bar{\mu} + \sqrt{\alpha \cdot \text{diag}(\overline{\Sigma})}], \quad (3.82)$$

et  $\theta(\alpha)$  est la densité de la distribution  $\chi^2$  de  $n + 2$  degrés de liberté :

$$\theta(\alpha) = \frac{\alpha^{\frac{n+2}{2}-1}}{2^{\frac{n+2}{2}} \Gamma(\frac{n+2}{2})} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.83)$$

Cette densité est moins engagée que l'ensemble de densités  $m_{\mu, \sigma}$ ,  $\forall \mu \in [\mu], \sigma \in [\sigma]$ .

**Preuve.** Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que  $\alpha_{min}$  soit l'indice de l'élément focal minimal  $HV_{\alpha_{min}}$  de  $m_{\mu, \Sigma}$  tel que  $HV_{\alpha_{min}} \cap A \neq \emptyset$ , où  $\mu \in [\mu], \Sigma \in [\Sigma]$ .

FIGURE 3.11 – La fonction de plausibilité et les éléments focaux de  $m_{[\mu],[\Sigma]}$ .

Puisque  $HV_\alpha \subset [HV_\alpha]$  pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$ , il existe une valeur  $\alpha'_{min}$ ,  $0 \leq \alpha'_{min} \leq \alpha_{min}$  telle que  $[HV_{\alpha'_{min}}] \cap A \neq \emptyset$ . La plausibilité de  $A$  induite par  $m_{\mu,\Sigma}$  est donc :

$$\begin{aligned}
 pl_{\mu,\Sigma}(A) &= \int_{\alpha_{min}}^{\infty} \theta(u) du \\
 &\leq \int_{\alpha'_{min}}^{\infty} \theta(u) du = pl_{[\mu],[\Sigma]}(A), \\
 \forall \mu \in [\mu], \sigma \in [\Sigma].
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

On peut conclure que  $m_{\mu,\Sigma} \sqsubseteq_{pl} m_{[\mu],[\Sigma]}$  pour tout  $\mu \in [\mu]$  et tout  $\Sigma \in [\Sigma]$ .  $\square$

La Figure 3.11 montre la fonction de plausibilité  $pl(\mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  et les éléments focaux de la densité de masse  $m_{[\mu],[\Sigma]}$  avec :

$$\mu = \begin{pmatrix} [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} [0.5, 1] & [-0.4, 0.4] \\ [-0.4, 0.4] & [0.5, 1] \end{pmatrix}. \tag{3.85}$$

**Propriété 3.1.** Pour tout  $\mu \in [\mu]$  et  $\Sigma \in [\Sigma]$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$bel_{[\mu],[\Sigma]}(A) \leq bel_{\mu,\Sigma}(A) \leq pl_{\mu,\Sigma}(A) \leq pl_{[\mu],[\Sigma]}(A), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{3.86}$$

La détermination de l'intervalle de probabilité  $[bel_{[\mu],[\Sigma]}, pl_{[\mu],[\Sigma]}]$  induit par la densité de masse  $m_{[\mu],[\Sigma]}$  d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est plus simple que dans le cas des densités de masse certaines  $m_{\mu,\Sigma}$  puisque les éléments focaux sont des boîtes. La croyance et la plausibilité d'une boîte  $[x]$  sont calculées par l'algorithme 3.1.

Les valeurs  $\alpha_{bel}$  et  $\alpha_{pl}$  sont calculées par la proposition suivante :

**Proposition 3.2.** Soit  $m_{[\mu],[\Sigma]}$  une densité de masse et  $[x] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$ .

- L'élément focal le plus grand qui contient  $[x]$  est caractérisé par l'indice  $\alpha_{bel}$

---

**Algorithme 3.1** Croyance et plausibilité d'une boîte induites par une densité gaussienne imprécise  $\mathcal{N}([\mu], [\Sigma])$

---

**Entrées:**  $[\mu] \in \mathbb{IR}^n$ ,  $[\Sigma] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ ,  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n$ .

**Sorties:**  $bel([\mathbf{x}])$ ,  $pl([\mathbf{x}])$

1: Chercher  $\alpha_{bel}$  maximal et  $\alpha_{pl}$  minimal tels que :

- $[\mathbf{x}] \supseteq [HV_{\alpha_{bel}}([\mu], \bar{\Sigma})]$ ,
- $[\mathbf{x}] \cap [HV_{\alpha_{pl}}([\mu], \bar{\Sigma})] \neq \emptyset$ .

2: Calculer  $bel([\mathbf{x}])$  and  $pl([\mathbf{x}])$

- $bel([\mathbf{x}]) = \int_0^{\alpha_{bel}} \theta(\alpha) d\alpha = F_{n+2}(\alpha_{bel})$ ,
  - $pl([\mathbf{x}]) = \int_{\alpha_{pl}}^{\infty} \theta(\alpha) d\alpha = 1 - F_{n+2}(\alpha_{pl})$ .
- 

défini par :

$$\alpha_{bel} = \left( \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left( \min \left( \frac{\underline{\mu}^i - \underline{x}^i}{\sqrt{\bar{\Sigma}^{ii}}}, \frac{\bar{x}^i - \bar{\mu}^i}{\sqrt{\bar{\Sigma}^{ii}}} \right), 0 \right) \right)^2. \quad (3.87)$$

- L'élément focal le plus petit qui intersecte  $[\mathbf{x}]$  est caractérisé par l'indice  $\alpha_{pl}$  défini par :

$$\alpha_{pl} = \begin{cases} 0 & \text{si } [\mu] \cap [x] \neq \emptyset, \\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left( \max \left( \frac{\bar{\mu}^i - \underline{x}^i}{\sqrt{\bar{\Sigma}^{ii}}}, \frac{\underline{\mu}^i - \bar{x}^i}{\sqrt{\bar{\Sigma}^{ii}}} \right) \right)^2 & \text{si } [\mu] \cap [x] = \emptyset. \end{cases} \quad (3.88)$$

où  $\underline{\mu}^i$  et  $\bar{\mu}^i$  (ou  $\underline{x}^i$  et  $\bar{x}^i$ ) sont les bornes inférieure et supérieure du  $i$ -ième intervalle de  $[\mu]$  (ou  $[\mathbf{x}]$ ).

**Preuve.** Considérons un élément focal  $[HV_{\alpha}]$  de  $m_{[\mu], [\Sigma]}$ . Cette boîte est un sous-ensemble de la boîte  $[\mathbf{x}]$  si la condition suivante est satisfaite pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\underline{x}^i \leq \underline{\mu}^i - \sqrt{\alpha \bar{\Sigma}^{ii}} \leq \bar{\mu}^i + \sqrt{\alpha \bar{\Sigma}^{ii}} \leq \bar{x}^i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\alpha} \leq \frac{\underline{\mu}^i - \underline{x}^i}{\sqrt{\bar{\Sigma}^{ii}}} \\ \sqrt{\alpha} \leq \frac{\bar{x}^i - \bar{\mu}^i}{\sqrt{\bar{\Sigma}^{ii}}} \end{cases}. \quad (3.89)$$

Ainsi, l'élément focal le plus grand de  $m_{[\mu], [\Sigma]}$  englobé par  $[\mathbf{x}]$  est caractérisé par l'indice  $\alpha_{bel}$  défini par l'équation 3.87.

Afin de déterminer l'indice  $\alpha_{pl}$ , on considère la position relative entre deux boîtes  $[\mu]$  et  $[\mathbf{x}]$  :

- Si  $[\mu] \cap [\mathbf{x}] \neq \emptyset$ ,  $\alpha_{pl} = 0$ .
- Si  $[\mu] \cap [\mathbf{x}] = \emptyset$ , il y a deux possibilités pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

- Si  $\bar{\mu}^i < \underline{x}^i$ ,  $[HV_\alpha^i]$  intersecte  $[x^i]$  si :

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}^i + \sqrt{\alpha \bar{\Sigma}^{ii}} \geq \underline{x}^i \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\alpha} \geq \frac{\underline{x}^i - \bar{\mu}^i}{\sqrt{\bar{\Sigma}^{ii}}}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

- Si  $\underline{\mu}^i > \bar{x}^i$ ,  $[HV_\alpha^i]$  intersecte  $[x^i]$  si :

$$\begin{aligned} & \underline{\mu}^i - \sqrt{\alpha \bar{\Sigma}^{ii}} \leq \bar{x}^i \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\alpha} \geq \frac{\underline{\mu}^i - \bar{x}^i}{\sqrt{\bar{\Sigma}^{ii}}}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

En groupant (3.90) et (3.91), on obtient la formule (3.88).

### 3.7 Conclusion

Ce chapitre présente différents cadres formels de représentation de l'imprécision et de l'incertitude :

- la p-box qui fournit un encadrement de la probabilité cumulée d'une information mal connue ;
- la théorie des possibilités qui s'appuie essentiellement sur un couple de mesures de nécessité-possibilité pour décrire l'incertitude ;
- la théorie des croyances qui traite l'information à deux niveaux :
  - le niveau crédal permet de représenter, manipuler des sources d'information à l'aide de fonctions de croyance (masse, croyance, plausibilité, communauté),
  - le niveau pignistique où est prise la décision après avoir transformé les valeurs de masses en probabilité pignistique.

Nous avons ensuite rappelé les types de connaissance qui peuvent être représentés par ces trois cadres. Les p-boxes sont une représentation naturelle des modèles probabilistes paramétriques avec des connaissances imprécises sur les paramètres. Les distributions de possibilité sont bien adaptées pour représenter l'information imprécise de type avis d'expert ou les cas où la valeur modale des paramètres est connue. Les fonctions de croyance sont utilisées pour représenter l'information à la fois imprécise et aléatoire.

Enfin, nous nous sommes concentrés sur l'extension de la théorie des croyances à la représentation d'une distribution gaussienne dont les paramètres sont mal connus mais bornés. Ce type de modèle probabiliste se pose en raison du manque de données ou de l'erreur de modélisation. Les fonctions de croyance proposées non seulement satisfont le principe de moindre engagement, mais aussi facilitent le calcul de l'intervalle de probabilité d'une boîte dans l'espace d'état car les éléments focaux de la densité de masse sont également des boîtes. Cette extension est appliquée au

développement des algorithmes de filtrage ensembliste dans la suite de cette thèse.

# Filtre de Kalman et ses extensions

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>67</b>
<b>4.2</b>	<b>Filtre de Kalman</b>	<b>69</b>
4.2.1	Principe du filtre de Kalman	69
4.2.2	Stabilité du filtre de Kalman	70
<b>4.3</b>	<b>Filtre de Kalman étendu</b>	<b>76</b>
4.3.1	Formulation du problème	76
4.3.2	Filtre de Kalman étendu	76
<b>4.4</b>	<b>Filtre de Kalman intervalle</b>	<b>79</b>
4.4.1	Filtre de Kalman intervalle amélioré (iIKF)	80
4.4.2	Filtre de Kalman intervalle à borne supérieure de variance minimale (UBIKF)	82
4.4.3	Exemples numériques	92
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>99</b>

## 4.1 Introduction

En 1960, R.E. Kalman a développé un algorithme fournissant une solution récursive au problème de filtrage linéaire en temps discret [Kalman 1960]. Ce filtre baptisé filtre de Kalman (KF) est utilisé dans une large gamme de domaines technologiques (radar, vision électronique, communication ...). C'est un thème majeur de l'automatique et du traitement du signal. Le grand succès du filtre de Kalman est dû à sa simplicité et son optimalité dans le cas des systèmes linéaires avec des bruits gaussiens : il fournit l'estimateur orthogonal sans biais qui minimise la matrice de covariance de l'erreur [Jaulin 2015].

Lorsque le modèle du système est non-linéaire, les densités de probabilité conditionnelles ne sont plus gaussiennes. Différentes extensions du filtre de Kalman au cas non-linéaire ont été développées, telles que le filtre de Kalman étendu. Le filtre de Kalman étendu (EKF) repose sur la linéarisation du modèle non-linéaire autour de l'estimation d'état précédente. Cette approche permet d'obtenir un estimateur sous-optimal mais est largement utilisée en pratique.

L'extension du filtre de Kalman aux systèmes linéaires incertains est un sujet de recherche actif. Par exemple, un filtre de Kalman pour des bruits zonotopiques et/ou gaussiens est présenté dans [Combastel 2015] pour des systèmes à paramètres variables dans le temps. Cette méthode propose de minimiser une fonction d'optimisation multiobjectif qui représente un compromis entre le volume de la partie zonotopique et la covariance des bruits gaussiens. Par ailleurs, différents résultats ont été obtenus sur la conception des filtres de Kalman robustes pour des systèmes à paramètres variants avec des incertitudes de norme bornée ([Zhe 2006], [Mohamed 2012]). L'idée principale de cette approche est de déterminer une borne supérieure sur la covariance d'erreur d'estimation et de minimiser ensuite la borne trouvée. Cependant, cette approche peut être conservatrice et complexe lorsqu'il existe trop d'incertitudes dans le système. Une autre possibilité est de considérer des modèles intervalles contenant toutes les valeurs admissibles des paramètres. La singularité des matrices intervalles est l'une des principales difficultés rencontrées dans cette approche. Dans [Chen 1997], le filtre de Kalman classique est étendu à ce type de systèmes incertains. Les auteurs proposent de surmonter le problème de singularité en utilisant la borne supérieure de la matrice à inverser. Cette méthode mène à une solution sous-optimale qui ne garantit pas l'encadrement de toutes les solutions compatibles avec les incertitudes. Dans [Xiong 2013], le filtre de Kalman amélioré (*improved Interval Kalman Filter* (iIKF)) est proposé afin de résoudre l'inversion de matrices intervalles par l'algorithme SIVIA et les outils de satisfaction de contraintes présentés dans le chapitre 2. Néanmoins, ce filtre a un temps de calcul important dû à la complexité exponentielle de SIVIA [Tran 2016].

Motivé par les avantages et les inconvénients des filtres de Kalman incertains, nous proposons un nouveau filtre de Kalman intervalle dont les deux objectifs principaux sont :

- la recherche d'une borne supérieure de l'ensemble des matrices de covariance d'erreur d'estimation,
- l'encadrement de l'ensemble des estimés compatibles avec le modèle intervalle.

Cet algorithme, appelé filtre de Kalman intervalle à borne supérieure de covariance minimale (*Minimum Upper Bound of Variance Interval Kalman Filter* UBIKF) [Tran 2017], non seulement garantit l'optimalité de la matrice de gain par rapport à la borne supérieure de la matrice de covariance, mais également permet de réduire le conservatisme et la complexité de calcul en comparaison avec l'iIKF.

Ce chapitre est organisé comme suit : après la présentation du principe et des différents résultats sur la convergence du filtre de Kalman classique dans la section 4.2, le filtre de Kalman étendu est décrit dans la section 4.3. Dans la section 4.4, nous présentons et comparons les filtres de Kalman intervalle iIKF et UBIKF.

## 4.2 Filtre de Kalman

### 4.2.1 Principe du filtre de Kalman

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (4.1)$$

où :

- $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$  est le vecteur d'états ;
- $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur de mesures ;
- $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  est le vecteur d'entrées du système ;
- $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$  sont les vecteurs de bruit d'état et de mesure.

Les hypothèses suivantes sont faites :

- l'état initial  $\mathbf{x}_0$  est gaussien, d'espérance  $\hat{\mathbf{x}}_0$  et de covariance  $\mathbf{P}_0$  ;
- les matrices  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$  sont déterministes, appelées respectivement matrice d'état et de mesure.
- la séquence  $\{\mathbf{u}_k\}$  et la matrice  $\mathbf{B}_k$  sont déterministes.
- les bruits  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont des bruits blancs gaussiens de moyennes nulles et de covariances  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$  connues. Il sont supposés mutuellement indépendants et indépendants de l'état initial, i.e.

$$\mathbb{E} \left[ \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0^T & \mathbf{w}_k^T & \mathbf{v}_k^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_k & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_k \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

L'objectif du filtrage est d'estimer le vecteur  $\mathbf{x}_k$  à partir de la séquence de mesures bruitées  $\mathbf{y}_{1:k} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$ . Il s'agit de calculer la loi de probabilité conditionnelle *a posteriori*  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$  qui est gaussienne puisque le modèle considéré est linéaire et gaussien. Il suffit de calculer la moyenne et la matrice de covariance :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{0:k}] \quad ; \quad P_{k|k} = \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right)^T \right].$$

On décrit également la loi de probabilité conditionnelle *a priori*  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$  par les quantités suivantes :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}] \quad ; \quad P_{k|k-1} = \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right) \left( \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right)^T \right].$$

Le filtre de Kalman comporte deux phases :

- **Prédiction.** La phase de prédiction calcule les moments d'ordre 1 et 2 de la loi conditionnelle *a priori*  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})$ .
- **Correction.** Une fois la mesure de l'instant courant disponible, la phase de correction permet le calcul des deux premiers moments de la loi de probabilité conditionnelle *a posteriori*  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ .

**Algorithme 4.1** Filtre de Kalman**Entrées:**  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ ,  $P_{0|0}$ ,  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{y}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ **Sorties:**  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ ,  $\mathbf{P}_{k|k}$ **pour**  $k = 1, 2, \dots$  **faire****Prédiction :**

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k. \quad (4.4)$$

**Correction**

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \left( \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}, \quad (4.5)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}. \quad (4.7)$$

**fin pour**

La matrice  $\mathbf{K}_k$  est appelée le gain optimal du filtre de Kalman qui minimise la trace de la matrice de covariance  $\mathbf{P}_{k|k}$ . La formule de la covariance (4.7) est valide uniquement pour un gain de Kalman optimal. L'utilisation d'autres valeurs de gains nécessite des expressions plus complexes.

Le filtre de Kalman est un estimateur d'état à variance minimale [Anderson 1979], c'est-à-dire parmi les estimateurs sans biais des systèmes linéaires (4.1), le filtre de Kalman donne la covariance d'erreur la plus petite.

**4.2.2 Stabilité du filtre de Kalman**

Dans cette section, les résultats sur la stabilité du filtre de Kalman sont présentés. Pour cela, nous rappelons quelques concepts de la théorie du contrôle : observabilité, contrôlabilité, détectabilité et stabilisabilité. Le système considéré est linéaire à paramètres variants :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{G}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$  sont les matrices connues, bornées pour tout  $k$ . Les séquences de bruits  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  peuvent être non stationnaires, i.e. leurs matrices de covariance  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$  varient en fonction de temps. Les matrices  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$  sont supposées être connues et bornées pour tout  $k$ . On définit la matrice de transition d'état du

système (4.8) du pas de temps  $j$  à  $i$  par :

$$\Phi_{i,j} = \begin{cases} (\mathbf{A}_{i-1}) (\mathbf{A}_{i-2}) \dots (\mathbf{A}_j) & \text{si } i > j, \\ \mathbf{I} & \text{si } i = j, \\ \Phi_{j,i}^{-1} & \text{si } i < j. \end{cases} \quad (4.9)$$

**Définition 4.1** (Observabilité). *Le système (4.8) est dit observable si l'observation de ses entrées et sorties pendant un intervalle  $[0, N]$ , avec une valeur  $N$  suffisamment grande, permet de déterminer l'état initial  $\mathbf{x}_0$ , et donc de connaître  $\mathbf{x}_k$  à tout instant  $k \in [0, N]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .*

L'observabilité d'une paire  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k)$  peut être testée en utilisant le grammien d'observabilité [Anderson 1981].

**Définition 4.2** (Grammien d'observabilité). *Le grammien d'observabilité de la paire  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k)$  sur l'intervalle  $[k, k + s]$ , noté  $\mathbf{M}_{k+s,k}$ , où  $s$  est un nombre entier positif, est défini par :*

$$\mathbf{M}_{k+s,k} = \sum_{i=k}^{k+s} \Phi_{i,k}^T \mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_i \Phi_{i,k}. \quad (4.10)$$

Dans le cas du système (4.8), le grammien d'observabilité est équivalent à celui de la paire  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{R}_k^{-1/2} \mathbf{C}_k)$  :

$$\mathbf{M}_{k+s,k} = \sum_{i=k}^{k+s} \Phi_{i,k}^T \mathbf{C}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{C}_i \Phi_{i,k}, \quad (4.11)$$

où  $(\mathbf{R}_k^{1/2}) (\mathbf{R}_k^{1/2})^T = \mathbf{R}_k$ .

Dans [Kamen 1999], les hypothèses suivantes sont posées pour tester l'observabilité d'un système linéaire à paramètres variants :

- $\mathbf{A}_k$  est inversible  $\forall k$ ,
- il existe des constantes  $a_A, a_Q, a_R$  telles que :

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \succeq a_A \mathbf{I} \quad , \quad \mathbf{Q}_k \succeq a_Q \mathbf{I} \quad , \quad \mathbf{R}_k \succeq a_R \mathbf{I}.$$

- les normes des matrices  $\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k$  sont bornées supérieurement, en utilisant la *matrice d'information*. Le symbole  $\succeq$  est défini par la Définition 4.11

**Définition 4.3** (Matrice d'information). *La matrice d'information du système (4.8) sur l'intervalle  $[k, k + s]$ , notée  $\mathcal{I}_{k,k+s}$ , où  $s$  est un nombre entier positif, est définie par :*

$$\mathcal{I}_{k,k+s} = \sum_{i=k}^{k+s} \Phi_{i,k+s}^T \mathbf{C}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{C}_i \Phi_{i,k+s}. \quad (4.12)$$

La relation entre le grammien d'observabilité et la matrice d'information est donnée par :

$$\mathbf{M}_{k+s,k} = \Phi_{k+s,k}^T \mathcal{I}_{k,k+s} \Phi_{k+s,k}. \quad (4.13)$$

**Théorème 4.1.** *Le système (4.8) est observable si et seulement si il existe un nombre entier positif  $N > 0$  tel que  $\mathcal{I}_{k,k+N}$  soit définie positive.*

**Preuve.** Cf. [Kamen 1999] Section C.1.

**Définition 4.4** (Observabilité uniforme). *Le système (4.8) est uniformément observable s'il existe des réels  $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$  tels que :*

$$\beta_1 \mathbf{I} \preceq \mathcal{I}_{k,k+s} \preceq \beta_2 \mathbf{I}, \quad k > 0. \quad (4.14)$$

Grâce à la relation (4.13) et la matrice  $\mathbf{A}_k$  étant bornée pour tout  $k$ , l'équation (4.14) implique que le grammien d'observabilité de Gram est borné, i.e. il existe des réels  $0 < \beta'_1 < \beta'_2 < \infty$  tels que :

$$\beta'_1 \mathbf{I} \preceq \mathcal{M}_{k+s,k} \preceq \beta'_2 \mathbf{I}, \quad k > 0. \quad (4.15)$$

Autrement dit, l'observabilité peut être vérifiée par le grammien d'observabilité ou par la matrice d'information. Cependant, la matrice d'information n'est utilisable que si  $\mathbf{A}_k$  est inversible pour tout  $k$ .

**Définition 4.5** (Contrôlabilité). *Le système (4.8) est dit contrôlable si pour tout  $\mathbf{x}_a$  et tout  $\mathbf{x}_b$ , il existe un nombre entier  $N > 0$  et une séquence d'entrées permettant d'amener l'état initial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_a$  à l'état  $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_b$ .*

**Définition 4.6** (Grammien de Contrôlabilité). *Le grammien de contrôlabilité du système (4.8) sur l'intervalle  $[k, k+s]$ , noté  $\mathbf{C}_{k+s,k}$ , où  $s$  est un nombre entier positif, est défini par :*

$$\mathbf{C}_{k+s,k} = \sum_{i=k}^{k+s-1} \Phi_{k+s,i+1} \mathbf{G}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{G}_i^T \Phi_{k+s,i+1}^T. \quad (4.16)$$

Les propriétés d'observabilité et de contrôlabilité sont duales :  $(\mathbf{C}_k, \mathbf{A}_k)$  est observable si et seulement si  $(\mathbf{A}_k^T, \mathbf{C}_k^T)$  est contrôlable.

La condition nécessaire et suffisante d'observabilité et de contrôlabilité du système (4.8) avec  $\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k$  constantes pour tout  $k$ , appelée le *Critère de Kalman pour l'observabilité et la contrôlabilité*, est présentée par le théorème suivant [Boulès 2013] :

**Théorème 4.2.** *La paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  est uniformément observable si et seulement si :*

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n_x-1} \end{bmatrix} \right) = n_x. \quad (4.17)$$

La paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{G})$  est uniformément contrôlable si et seulement si :

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{A}\mathbf{G} & \dots & \mathbf{A}^{n_x-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \right) = n_x \quad (4.18)$$

où  $n_x$  est la dimension du vecteur d'état.

Les définitions de détectabilité et de stabilisabilité sont présentées dans [Anderson 1981].

**Définition 4.7** (Détectabilité). *La paire  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k)$  est uniformément détectable si il existe des nombres entiers  $s \geq t \geq 0$ , des constantes  $d, b$  avec  $0 \leq d < 1$ ,  $0 < b < \infty$  tels que si*

$$\|\Phi_{k+t,k}\mathbf{z}\| \geq d\|\mathbf{z}\| \quad (4.19)$$

pour quelque vecteur  $\mathbf{z}$  et  $k$ , alors

$$\mathbf{z}^T \mathbf{M}_{k+s,k} \mathbf{z} \geq b \mathbf{z}^T \mathbf{z} \quad (4.20)$$

où  $\mathbf{M}_{k+s,k}$  est le grammien d'observabilité.

Comme dans le cas de l'observabilité, la détectabilité uniforme du système (4.8) est celle de la paire  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{R}_k^{-1/2}\mathbf{C}_k)$ . En outre, l'observabilité uniforme est la condition suffisante pour la détectabilité.

**Définition 4.8** (Stabilisabilité). *La paire  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{G}_k)$  est uniformément stabilisable s'il existe des nombres entiers  $s \geq t \geq 0$  et des constantes  $d, b$  avec  $0 \leq d < 1$ ,  $0 < b < \infty$  tels que si*

$$\|\Phi_{k+1,k+1-t}\mathbf{z}\| \geq d\|\mathbf{z}\| \quad (4.21)$$

pour quelque vecteur  $\mathbf{z}$  et  $k$ , alors

$$\mathbf{z}^T \mathbf{C}_{k,k-s} \mathbf{z} \geq b \mathbf{z}^T \mathbf{z} \quad (4.22)$$

où  $\mathbf{C}_{k,k-s}$  est le grammien contrôlabilité.

La stabilisabilité signifie que tous les modes instables du système sont contrôlables par le bruit de processus  $\mathbf{w}_k$  et que les modes incontrôlables sont stables (i.e. ils sont bornés ou s'approchent du zéro). La détectabilité signifie que tous les modes non-observables sont stables. Ainsi, la détectabilité (stabilisabilité) est impliquée par l'observabilité (contrôlabilité). Les propriétés de détectabilité et de stabilisabilité sont duales dans le sens suivant :  $(\mathbf{C}_k, \mathbf{A}_k)$  est détectable si et seulement si  $(\mathbf{A}_k^T, \mathbf{C}_k^T)$  est stabilisable.

Cette section considère les conditions pour que les propriétés suivantes du filtre de Kalman soient vérifiées :

- Estimateur asymptotiquement sans biais :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) = E(\mathbf{x}_k), \quad (4.23)$$

- $\mathbf{P}_{k|k}$  est bornée pour toute condition initiale  $\mathbf{P}_{0|0}$ ,
- Indépendance de  $\mathbf{P}_{k|k-1}$  par rapport à  $\mathbf{P}_{0|0}$ .

**Théorème 4.3.** *Si la paire  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{R}_k^{-1/2} \mathbf{C}_k)$  est uniformément détectable et  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k^{1/2})$  est uniformément stabilisable, le filtre de Kalman est exponentiellement stable et la covariance d'erreur  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  est bornée.*

**Preuve.** Cf. [Anderson 1981].

**Théorème 4.4.** *Supposons que la paire  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{R}_k^{-1/2} \mathbf{C}_k)$  soit uniformément observable et  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k^{1/2})$  soit uniformément contrôlable. Soit  $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(1)}$  et  $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(2)}$  les matrices covariance du filtre de Kalman avec les conditions initiales respectives  $\mathbf{P}_{0|0}^{(1)} \succeq 0$  et  $\mathbf{P}_{0|0}^{(2)} \succeq 0$ . Alors on a :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{P}_{k+1|k}^{(1)} - \mathbf{P}_{k+1|k}^{(2)}\| = 0. \quad (4.24)$$

**Preuve.** Cf. Théorème C.4 [Kamen 1999].

Lorsque les matrices  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{G}_k$  sont constantes et les bruits sont stationnaires, la covariance et le gain du filtre de Kalman peuvent atteindre des valeurs stationnaires. Autrement dit, le filtre de Kalman devient invariant, appelé le *filtre de Kalman stationnaire*. L'existence et la stabilité du filtre de Kalman stationnaire sont présentées dans le théorème suivant :

**Théorème 4.5.** *Supposons que  $(\mathbf{A}, \mathbf{G} \mathbf{Q}^{1/2})$  soit stabilisable. Alors  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  est détectable si et seulement si :*

- le filtre de Kalman stationnaire existe,
- le filtre de Kalman stationnaire est asymptotiquement non biaisé,
- la matrice de covariance stationnaire  $\mathbf{P}_\infty^-$  est la solution définie positive unique de l'équation de Riccati :

$$\mathbf{P}_\infty^- = \mathbf{A} \left[ \mathbf{P}_\infty^- - \mathbf{P}_\infty^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_\infty^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_\infty^- \right] \mathbf{A}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T, \quad (4.25)$$

- $\mathbf{P}_\infty^-$  est indépendante de  $\mathbf{P}_{0|0} \succeq 0$ .

**Preuve.** Cf. Annexe D, [Kamen 1999].

Notons que l'observabilité implique le détectabilité et la contrôlabilité implique la stabilisabilité ; on a donc le corollaire suivant :

**Corollaire 4.5.1.** *Si  $\mathbf{Q}$  est définie positive,  $(\mathbf{A}, \mathbf{G} \mathbf{Q}^{1/2})$  est contrôlable et  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  est observable, alors :*

- le filtre de Kalman stationnaire existe,
- le filtre de Kalman stationnaire est asymptotiquement non biaisé,
- la matrice de covariance stationnaire  $\mathbf{P}_\infty^-$  est la solution définie positive unique de l'équation de Riccati (4.25).

- $\mathbf{P}_\infty^-$  est indépendante de  $\mathbf{P}_{0|0} \succeq 0$ .

Le corollaire (4.5.1) est un outil pratique car l'observabilité et la contrôlabilité d'un modèle sont déterminées plus simplement que la détectabilité et la stabilisabilité. Cependant, ce corollaire ne fournit que les conditions suffisantes pour l'existence du filtre de Kalman stationnaire non biaisé.

Une autre approche permettant d'estimer en ligne la vitesse de convergence du filtre de Kalman est présentée dans [Rhudy 2013]. Cette approche considère des systèmes linéaires à paramètres variants, et un calcul en temps réel peut être réalisé afin de surveiller la performance du filtre.

**Théorème 4.6.** *Considérons le système (4.8) et les hypothèses suivantes :*

- $\mathbf{A}_k$  est inversible pour tout  $k$ .
- La covariance d'erreur initiale est bornée par :

$$\mathbf{e}_{0|0}^T \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{e}_{0|0} \leq \nu_0 \|\mathbf{e}_{0|0}\|^2, \quad (4.26)$$

où  $\mathbf{e}_{0|0} = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0}$  est l'erreur initiale.

- La matrice de covariance d'erreur est bornée pour tout  $k$  :

$$\mathbf{e}_{k|k}^T \mathbf{P}_{k|k}^{-1} \mathbf{e}_{k|k} \leq b_k \|\mathbf{e}_{k|k}\|^2, \quad (4.27)$$

où  $\mathbf{e}_{k|k} = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  est l'erreur d'estimation au temps  $k$ .

- Les matrices de covariance du bruit de processus et de mesure ( $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$ ) sont conservatives, i.e.

$$\mathbf{Q}_k \succeq \mathbb{E} \left[ \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \right], \quad (4.28)$$

$$\mathbf{R}_k \succeq \mathbb{E} \left[ \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \right], \quad (4.29)$$

alors l'espérance de l'erreur d'estimation est bornée en moyenne quadratique avec la probabilité un et la borne est donnée par :

$$\mathbb{E} \left[ \|\mathbf{e}_{k|k}\|^2 \right] \leq \frac{\nu_0}{b_k} \mathbb{E} \left[ \|\mathbf{e}_{0|0}\|^2 \right] \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \alpha_i) + \frac{1}{b_k} \sum_{i=0}^{k-1} \left[ \mu_{k-i-1} \prod_{j=1}^i (1 - \alpha_{k-j}) \right], \quad (4.30)$$

où les paramètres  $\alpha_{k-1}$ ,  $\mu_{k-1}$  et  $b_k$  sont définis par :

$$\alpha_{k-1} = \lambda_{\min} \left[ \left( \mathbf{P}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \right)^{-1} \left( \mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \right) \right], \quad (4.31)$$

$$\mu_{k-1} = \text{trace} \left[ \left( \mathbf{P}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \right)^{-1} \left( \mathbf{Q}_{k-1} + \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \right) \right], \quad (4.32)$$

$$b_k = \lambda_{\min} \left[ \mathbf{P}_{k|k}^{-1} \right]. \quad (4.33)$$

où  $\lambda_{\min}(\mathbf{M})$  et  $\text{trace}(\mathbf{M})$  sont la valeur propre minimale et la trace de la matrice

*M.*

**Preuve.** Cf. Théorème 5 [Rhudy 2013].

## 4.3 Filtre de Kalman étendu

### 4.3.1 Formulation du problème

On considère le système non linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k), \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k), \end{cases} \quad (4.34)$$

où  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$  sont les modèles d'évolution et d'observation qui sont non-linéaires,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont des bruits blancs gaussiens de moyennes nulles et de covariances  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$  connues.

Malgré le fait que le filtre de Kalman perde son optimalité dans le cas des systèmes non linéaires, le filtre de Kalman étendu permet de résoudre le problème de filtrage non linéaire sous certaines conditions. Cette section présente le filtre de Kalman étendu et les résultats sur sa stabilité.

### 4.3.2 Filtre de Kalman étendu

Dans le calcul de l'estimation d'état du filtre de Kalman étendu (EKF), les fonctions  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$  peuvent être utilisées pour calculer l'état prédit à partir de l'état estimé précédent et l'observation prédite de l'état prédit. Les matrices des dérivées partielles des ces fonctions par rapport aux variables d'état  $\mathbf{x}_k$  et aux bruits  $\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{v}_k$  (les matrices jacobiennes) sont employées pour le calcul de la covariance. Similairement au filtre de Kalman linéaire, le filtre EKF a deux phases : Prédiction et Correction (Algorithme (4.2)).

#### Stabilité du filtre EKF

La stabilité du filtre EKF est plus difficile à étudier que celle du filtre de Kalman. Lorsque les fonctions  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$  sont différentiables autour de  $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, 0)$  et  $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, 0)$  respectivement, nous établissons les expressions suivantes en utilisant le développement de Taylor au premier ordre :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{w}_k) + \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k + \psi(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{w}_k), \quad (4.44)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}_k) + \mathbf{C}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{D}_k \mathbf{v}_k + \chi(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}_k), \quad (4.45)$$

où  $\psi$ ,  $\chi$  sont les fonctions résiduelles. En définissant les erreurs d'estimation par :

$$\mathbf{e}_{k|k} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{e}_{k+1|k} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \quad (4.47)$$

**Algorithme 4.2** Filtre de Kalman étendu**Entrées:**  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ ,  $\mathbf{P}_{0|0}$ ,  $\mathbf{Q}_k$ ,  $\mathbf{R}_k$ ,  $\mathbf{y}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ **Sorties:**  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ ,  $\mathbf{P}_{k|k}$ pour  $k = 1, 2, \dots$  faire

Prédiction :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, 0), \quad (4.35)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T, \quad (4.36)$$

où :

$$\mathbf{A}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=0}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{G}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{w}=0}. \quad (4.38)$$

Correction

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T \left( \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{D}_k \mathbf{R}_k \mathbf{D}_k^T \right)^{-1}, \quad (4.39)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, 0) \right), \quad (4.40)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}, \quad (4.41)$$

où :

$$\mathbf{C}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=0}, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{D}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}=0}. \quad (4.43)$$

fin pour

on obtient :

$$\mathbf{e}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{e}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{D}_k \mathbf{v}_k - \mathbf{K}_k \chi(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}_k), \quad (4.48)$$

$$\mathbf{e}_{k+1|k} = \mathbf{A}_k (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{e}_{k|k-1} + \mathbf{r}_k + \mathbf{s}_k, \quad (4.49)$$

où :

$$\mathbf{r}_k = \psi(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{w}_k) - \mathbf{A}_k \mathbf{K}_k \chi(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}_k), \quad (4.50)$$

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{K}_k \mathbf{D}_k \mathbf{v}_k. \quad (4.51)$$

Pour la suite, on note la norme euclidienne d'un vecteur et la norme spectrale d'une matrice  $\|\cdot\|$ ; la norme  $L_2$  d'un vecteur aléatoire est notée  $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}[\|\mathbf{v}\|^2]}$ . Dans [Reif 1999] et [Kluge 2010], il est montré que l'erreur d'estimation du filtre de Kalman étendu est bornée en moyenne quadratique dans certaines conditions en uti-

lisant les définitions de stabilité suivantes des processus stochastiques [Reif 1999] :

**Définition 4.9.** *Le processus stochastique  $\zeta_k$  est dit être borné exponentiellement en moyenne quadratique, s'il existe des réels  $\eta$ ,  $\nu$  et  $\vartheta$  tels que :*

$$\mathbb{E} \left( \|\zeta_k\|^2 \right) \leq \eta \|\zeta_0\|^2 \vartheta^k + \nu, \quad (4.52)$$

pour tout  $k \geq 0$ .

**Définition 4.10.** *Le processus stochastique  $\zeta_k$  est dit être borné avec une probabilité un, si l'inégalité :*

$$\sup_{k \leq 0} \|\zeta_k\| < \infty \quad (4.53)$$

est vérifiée avec une probabilité un.

Dans [Reif 1999] et [Kluge 2010], le résultat suivant d'un processus stochastique a été utilisé afin d'établir la stabilité du filtre de Kalman étendu :

**Lemme 4.1.** Supposons qu'il existe un processus stochastique  $V_k(\zeta_k)$  ainsi que des réels  $\underline{v}, \bar{v}, \mu > 0$  et  $0 < \alpha \leq 1$  tels que :

$$\underline{v} \|\zeta_k\|^2 \leq V_k(\zeta_k) \leq \bar{v} \|\zeta_k\|^2, \quad (4.54)$$

et

$$\mathbb{E} [V_{k+1}(\zeta_{k+1}) \mid \zeta_k] - V_k(\zeta_k) \leq \mu - \alpha V_k(\zeta_k), \quad (4.55)$$

soient vérifiées pour toute solution de l'équation 4.49. Alors le processus stochastique  $\zeta_k$  est borné exponentiellement en moyenne quadratique :

$$\mathbb{E} \left( \|\zeta_k\|^2 \right) \leq \frac{\bar{v}}{\underline{v}} \mathbb{E} \left( \|\zeta_0\|^2 \right) (1 - \alpha)^k + \frac{\mu}{\underline{v}} \sum_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha)^i, \quad (4.56)$$

pour tout  $k \geq 0$ . De plus,  $\zeta_k$  est borné avec une probabilité un.

**Théorème 4.7.** *Considérons le système (4.34) et le filtre EKF sous les hypothèses suivantes :*

– *Il existe des constantes  $\bar{a}, \bar{g}, \bar{c}, \bar{d}, \underline{p}, \bar{p}, \underline{q}, \bar{q}, \underline{r}, \bar{r} > 0$  telles que :*

$$\|\mathbf{A}_k\| \leq \bar{a}, \quad \|\mathbf{G}_k\| \leq \bar{g}, \quad \|\mathbf{C}_k\| \leq \bar{c}, \quad \|\mathbf{D}_k\| \leq \bar{d}, \quad (4.57)$$

$$\underline{p}\mathbf{I} \preceq \mathbf{P}_{k+1|k+1} \preceq \mathbf{P}_{k+1|k} \preceq \bar{p}\mathbf{I}, \quad (4.58)$$

$$\underline{q}\mathbf{I} \preceq \mathbf{Q}_k \preceq \bar{q}\mathbf{I}, \quad \underline{r}\mathbf{I} \preceq \mathbf{R}_k \preceq \bar{r}\mathbf{I}. \quad (4.59)$$

– *Pour tout  $\varepsilon_\psi > 0$  et tout  $\varepsilon_\chi > 0$ , il existe  $\delta_\psi, \delta_\chi > 0$  tels que pour tout  $\mathbf{x}_k$  et tout  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  satisfaisant  $\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\|_2 \leq \delta_\psi$  et  $\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}\|_2 \leq \delta_\chi$  :*

$$\|\psi(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{w}_k)\|_2 \leq \varepsilon_\psi \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\|_2^2, \quad (4.60)$$

$$\|\chi(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{v}_k)\|_2 \leq \varepsilon_\chi \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}\|_2^2. \quad (4.61)$$

Alors il existe une borne  $\varepsilon > 0$  pour les matrices de covariance des bruits :

$$\mathbb{E} \left[ \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \right] \leq \varepsilon I, \quad (4.62)$$

$$\mathbb{E} \left[ \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \right] \leq \varepsilon I, \quad (4.63)$$

et une borne  $\theta > 0$  de l'erreur d'estimation initiale :

$$\mathbb{E} \left[ \|\mathbf{e}_{1|0}\|^2 \right] \leq \delta, \quad (4.64)$$

telles que l'erreur  $\mathbf{e}_{k+1|k}$  soit bornée exponentiellement en moyenne quadratique.

**Preuve.** Cf. [Reif 1999], [Kluge 2010].

**Remarque 4.1.** Les inégalités (4.57) sont vérifiées pendant le processus d'estimation : si les valeurs numériques de  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{P}_{k|k-1}$ ,  $\mathbf{P}_{k|k}$  satisfont ces conditions, alors l'estimation est fiable au sens du théorème (4.7).

En résumé, le filtre EKF propage des variables aléatoires gaussiennes à travers des fonctions non-linéaires. La covariance de ces variables est déterminée en linéarisant les fonctions dynamiques et calculant la matrice de covariance du modèle linéarisé. Cependant, l'estimation fournie par le filtre EKF peut introduire une erreur importante lorsque le degré de non-linéarité est élevé. Ceci peut aboutir à une performance sous-optimale ou à la divergence du filtre.

## 4.4 Filtre de Kalman intervalle

Les équations du filtre de Kalman fournissent un estimateur sans biais à variance minimale. Dans [Chen 1997], un filtre de Kalman intervalle (IKF) basé sur l'espérance conditionnelle intervalle pour les systèmes linéaires intervalles a été développé. Les matrices  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$  du système (4.1) sont bornées par les matrices intervalles  $[\mathbf{A}_k]$ ,  $[\mathbf{B}_k]$ ,  $[\mathbf{C}_k]$ . La condition initiale  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{P}_0)$ , l'entrée  $\mathbf{u}_k$  et les mesures  $\mathbf{y}_k$  peuvent être intervalles dû aux incertitudes bornées. L'IKF possède la même structure que le filtre de Kalman classique en préservant l'optimalité statistique et le schéma de calcul récursif. Il est suggéré de s'affranchir du problème de singularité éventuelle de la matrice intervalle à inverser en utilisant la borne supérieure de cette matrice. Cela mène à une solution sous-optimale qui ne pourra pas inclure toutes les solutions optimales compatibles avec les incertitudes bornées du système.

Grâce aux avancées de l'analyse par intervalles et des techniques de satisfaction de contraintes, le filtre de Kalman intervalle amélioré (improved Interval Kalman Filter : iIKF) a été proposé dans [Xiong 2013]. L'objectif de cet algorithme est d'encadrer l'ensemble des solutions optimales compatibles avec le système intervalle et le schéma de calcul du filtre de Kalman classique. Cependant, l'application de cette approche est limitée par la complexité exponentielle du problème de satisfaction de contraintes.

Motivé par les remarques ci-dessus, nous proposons un nouvel algorithme du filtre de Kalman intervalle. Cet algorithme détermine, à chaque instant  $k$ , une borne supérieure définie positive de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Il garantit l'optimalité de la matrice de gain par rapport à la borne supérieure utilisée ; le temps de calcul est raisonnable.

#### 4.4.1 Filtre de Kalman intervalle amélioré (iIKF)

Considérons le système linéaire 4.1 sous la forme intervalle comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, & \mathbf{A}_k \in [\mathbf{A}], \mathbf{B}_k \in [\mathbf{B}], \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + v_k, & \mathbf{C}_k \in [\mathbf{C}]. \end{cases} \quad (4.65)$$

La condition initiale est supposée être bornée :  $\mathbf{x}_0 \in [\mathbf{x}_0]$  et  $\mathbf{P}_0 \in [\mathbf{P}_0]$ . Les perturbations  $\mathbf{w}_k$  et  $v_k$  sont gaussiennes de moyennes nulles avec les matrices de covariance  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  bornées :  $\mathbf{Q} \in [\mathbf{Q}]$ ,  $\mathbf{R} \in [\mathbf{R}]$ .

Le filtre de Kalman amélioré (iIKF) [Xiong 2013] a été développé dans le but d'encadrer toutes les solutions optimales possibles du filtre de Kalman. Cet algorithme conserve la structure du filtre de Kalman classique et introduit les avancées de l'analyse par intervalles. Les étapes de l'iIKF sont détaillées ci-dessous :

- **Prédiction.** Les variables réelles dans les équations du filtre de Kalman sont remplacées par les intervalles respectifs :

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] = [\mathbf{A}][\hat{\mathbf{x}}_{k|k}] + [\mathbf{B}]\mathbf{u}_{k+1}, \quad (4.66)$$

$$[\mathbf{P}_{k+1|k}] = [\mathbf{A}][\mathbf{P}_{k|k}][\mathbf{A}]^T + [\mathbf{Q}]. \quad (4.67)$$

Par ailleurs, puisque la matrice  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  doit être définie positive, ses éléments diagonaux doivent être positifs. Les contracteurs suivants sont donc proposés :

$$[\mathbf{P}_{k+1|k}^{ii}] > 0, \quad i = 1, \dots, n_x. \quad (4.68)$$

Notons que ces contracteurs ont pour but de réduire la largeur des éléments diagonaux de  $[\mathbf{P}_{k+1|k}]$ . Ils ne garantissent pas que  $[\mathbf{P}_{k+1|k}]$  soit définie positive.

- **Correction.** L'étape correction de l'iIKF a été développée afin de s'affranchir du problème de singularité dans l'inversion d'une matrice intervalle. L'expression du gain du filtre de Kalman est réécrite comme suit :

$$[\mathbf{K}_{k+1}][\mathbf{S}] = [\mathbf{P}_{k+1|k}][\mathbf{C}]^T, \quad (4.69)$$

où  $[\mathbf{S}] = [\mathbf{C}][\mathbf{P}_{k+1|k}][\mathbf{C}]^T + [\mathbf{R}]$ . Notons que  $[\mathbf{S}]$  doit être définie positive ; les contracteurs (4.68) sont appliqués aux éléments diagonaux de cette matrice. On obtient, à partir de l'équation (4.69), un système d'équations linéaires de  $n_x \times n_y$  équations dont les inconnues sont les éléments de  $[\mathbf{K}_{k+1}]$ . Une

équation de ce système peut être écrite comme suit :

$$\sum_{j=1}^{n_y} [\mathbf{K}_{k+1}^{ij}] [\mathbf{S}^{jm}] = [\mathbf{T}^{im}], \quad i = 1, \dots, n_x, m = 1, \dots, n_y, \quad (4.70)$$

où  $[\mathbf{T}] = [\mathbf{P}_{k+1|k}][\mathbf{C}]^T$ . Ce système est ensuite résolu par l'algorithme SIVIA (voir chapitre 2). Une difficulté de cette idée est de choisir les régions initiales des inconnues  $[\mathbf{K}_{k+1}^{ij}]$ . Si  $[\mathbf{S}]$  est non singulière, l'équation  $[\mathbf{K}_{k+1}] = [\mathbf{P}_{k+1|k}][\mathbf{C}]^T[\mathbf{S}]^{-1}$  donne une région initiale de la matrice  $[\mathbf{K}_{k+1}]$ . Dans le cas contraire, la solution est d'utiliser les techniques de satisfaction de contraintes et/ou l'algorithme SIVIA avec une région initiale très large. Cependant, cela augmente énormément la complexité calculatoire en augmentant le nombre nécessaire de bisections et donc le temps de calcul de l'iIKF [Tran 2016].

L'ensemble des gains  $[\mathbf{K}_{k+1}]$  donné par SIVIA est appliqué au calcul de l'état estimé et de la matrice de covariance :

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}] = [\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] + [\mathbf{K}_{k+1}] (\mathbf{y}_{k+1} - [\mathbf{C}] [\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]), \quad (4.71)$$

$$[\mathbf{P}_{k+1|k+1}] = (\mathbf{I} - [\mathbf{K}_{k+1}] [\mathbf{C}]) [\mathbf{P}_{k+1|k}]. \quad (4.72)$$

Enfin, les contracteurs définis par l'équation (4.68) sont appliqués à la matrice  $[\mathbf{P}_{k+1|k+1}]$ .

**Algorithme 4.3** Filtre de Kalman intervalle amélioré

**Entrées:**  $[\hat{\mathbf{x}}_{0|0}]$ ,  $[\mathbf{P}_{0|0}]$ ,  $[\mathbf{Q}]$ ,  $[\mathbf{R}]$ ,  $\mathbf{y}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Sorties:**  $[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}]$ ,  $[\mathbf{P}_{k|k}]$   
**pour**  $k = 1, 2, \dots$  **faire**

**Prédiction :**

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] = [\mathbf{A}] [\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}] + [\mathbf{B}] [\mathbf{u}_k], \quad (4.73)$$

$$[\mathbf{P}_{k|k-1}] = [\mathbf{A}] [\mathbf{P}_{k-1|k-1}] [\mathbf{A}]^T + [\mathbf{Q}], \quad (4.74)$$

$$[\mathbf{P}_{k|k-1}^{ii}] > 0, \quad i = 1, \dots, n_x. \quad (4.75)$$

**Correction**

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{C}] [\mathbf{P}_{k|k-1}] [\mathbf{C}]^T + [\mathbf{R}], \quad (4.76)$$

$$[\mathbf{S}^{ii}] > 0, \quad i = 1, \dots, n_y, \quad (4.77)$$

$$\text{SIVIA : } [\mathbf{K}_k] [\mathbf{S}] = [\mathbf{P}_{k|k-1}] [\mathbf{C}]^T, \quad (4.78)$$

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}] = [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] + [\mathbf{K}_k] (\mathbf{y}_k - [\mathbf{C}] [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]), \quad (4.79)$$

$$[\mathbf{P}_{k|k}] = (\mathbf{I} - [\mathbf{K}_k] [\mathbf{C}]) [\mathbf{P}_{k|k-1}], \quad (4.80)$$

$$[\mathbf{P}_{k|k}^{ii}] > 0, \quad i = 1, \dots, n_x. \quad (4.81)$$

**fin pour**

#### 4.4.2 Filtre de Kalman intervalle à borne supérieure de variance minimale (UBIKF)

Motivé par les inconvénients de l'iIKF, nous proposons un nouveau filtre de Kalman intervalle. Cet algorithme consiste à rechercher une borne supérieure de l'ensemble des matrices de covariance de l'erreur d'estimation. Un gain qui minimise la trace de cette borne est ensuite déterminé. Le nouveau filtre de Kalman intervalle, appelé en anglais *Minimum Upper Bound of Variance Kalman filter* (UBIKF), non seulement garantit l'optimalité de la matrice de gain par rapport à la borne supérieure de l'ensemble des matrices de covariance, mais encadre aussi tous les estimés compatibles avec toutes les incertitudes du système. Par ailleurs, le temps de calcul de l'UBIKF est plus raisonnable que celui de l'iIKF car l'UBIKF ne traite que des matrices ponctuelles au lieu des matrices intervalles dans l'iIKF.

Avant de décrire l'UBIKF, on considère les propriétés des matrices symétriques définies positives.

#### 4.4.2.1 Matrice symétrique semidéfinie positive

**Définition 4.11.** Une matrice symétrique réelle  $\mathbf{M}$  de dimension  $n \times n$  est semidéfinie positive, notée  $\mathbf{M} \succeq 0$ , si pour tout vecteur  $\mathbf{z}$  non nul de dimension  $n$ , le scalaire  $\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z}$  est non négatif.

Un cas particulier des matrices symétriques semidéfinies positives est donné par la remarque suivante :

**Remarque 4.2.** Pour toute matrice réelle  $\mathbf{M}$ , le produit  $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$  est une matrice symétrique semidéfinie positive.

La remarque ci-dessus est due au fait que, pour tout vecteur  $\mathbf{z}$  de dimension appropriée, le scalaire  $\mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^T \mathbf{z} = \|\mathbf{M}^T \mathbf{z}\|_2^2$  est non négatif, où  $\|\mathbf{V}\|$  est la norme euclidienne du vecteur réel  $\mathbf{V}$ .

**Définition 4.12.** Soient  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  deux matrices symétriques définies positives de même dimension,  $\mathbf{M}$  est plus grande que  $\mathbf{N}$ , noté  $\mathbf{M} \succeq \mathbf{N}$ , si  $\mathbf{M} - \mathbf{N}$  est semidéfinie positive.

**Proposition 4.1.** Soient  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  deux matrices non nulles de même dimension, et  $\beta$  un réel positif arbitraire, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathbf{M} \mathbf{N}^T + \mathbf{N} \mathbf{M}^T \preceq \beta^{-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^T + \beta \mathbf{N} \mathbf{N}^T. \quad (4.82)$$

Une valeur optimale de  $\beta$  qui minimise la trace du membre de droite de l'inégalité ci-dessus est donnée par :

$$\beta = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{M}^T) / \text{tr}(\mathbf{N} \mathbf{N}^T)}. \quad (4.83)$$

**Preuve.** En développant l'expression  $(\mathbf{M} - \beta \mathbf{N})(\mathbf{M} - \beta \mathbf{N})^T \succeq 0$ , on obtient l'inégalité 4.82. Les dérivées première et seconde de la trace du membre de droite de cette inégalité par rapport à  $\beta$  sont :

$$\frac{\partial \text{tr}(\beta^{-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^T + \beta \mathbf{N} \mathbf{N}^T)}{\partial \beta} = -\frac{1}{\beta^2} \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{M}^T) + \text{tr}(\mathbf{N} \mathbf{N}^T), \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial^2 \text{tr}(\beta^{-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^T + \beta \mathbf{N} \mathbf{N}^T)}{\partial \beta^2} = \frac{2}{\beta^3} \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{M}^T). \quad (4.85)$$

La dérivée seconde est positive pour tout  $\beta > 0$ . Le zéro positif de la dérivée première est donné par l'équation (4.83). ■

**Proposition 4.2.** Soient  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  deux matrices de dimension  $n \times n$  et  $\mathbf{M}_1 \succeq \mathbf{M}_2$ , l'inégalité suivante est vérifiée pour toute matrice  $\mathbf{N}$  de dimension  $m \times n$  :

$$\mathbf{N} \mathbf{M}_1 \mathbf{N}^T \succeq \mathbf{N} \mathbf{M}_2 \mathbf{N}^T. \quad (4.86)$$

**Preuve.** La définition d'une matrice semidéfinie positive est utilisée pour montrer que  $\mathbf{N}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)\mathbf{N}^T \succeq 0$ . Pour tout vecteur  $\mathbf{z}$  de dimension  $m$  non nul, on a :

$$\mathbf{z}^T \mathbf{N}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)\mathbf{N}^T \mathbf{z} = \mathbf{x}^T (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \mathbf{x} \geq 0, \quad (4.87)$$

où  $\mathbf{x} = \mathbf{N}^T \mathbf{z}$ . L'inégalité (4.87) est vérifiée puisque  $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \succeq 0$ . Alors,  $\mathbf{N}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)\mathbf{N}^T \succeq 0$ . ■

**Propriété 4.1.** Toute matrice réelle symétrique  $\mathbf{M}$  est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale  $\mathbf{V}$ , i.e. il existe une matrice diagonale réelle  $D$  telle que  $\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ . En plus, si  $\mathbf{M}$  est semidéfinie positive, la racine carrée de  $\mathbf{M}$  est  $\mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{V}^T$ .

**Proposition 4.3.** Soit  $[\mathbf{M}]$  une matrice symétrique intervalle, il existe une matrice symétrique semidéfinie positive  $\mathcal{M}$  qui borne l'ensemble des matrices symétriques semidéfinies positives incluses dans  $[\mathbf{M}]$ . On note  $\mathcal{M} \succeq [\mathbf{M}]$ . L'expression de  $\mathcal{M}^2$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 = & \left( 1 + \beta_{mid,ii}^{-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \beta_{mid,ij}^{-1} \right) (mid([\mathbf{M}]))^2 \\ & + \left( 1 + \beta_{mid,ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \beta_{ii,ij}^{-1} \right) (diag(rad([\mathbf{M}])))^2 \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left( 1 + \beta_{mid,ij} + \beta_{ii,ij} + \sum_{k=i}^{n-1} \sum_{l=j+1}^n \beta_{kl,ij} \right) [rad([\mathbf{M}_{ij}])]^2, \end{aligned} \quad (4.88)$$

où :

$$\begin{aligned} \beta_{mid,ii} &= \sqrt{tr\{(mid([\mathbf{M}]))^2\} / tr\{(diag(rad([\mathbf{M}])))^2\}}, \\ \beta_{mid,ij} &= \sqrt{tr\{(mid([\mathbf{M}]))^2\} / tr\{[rad([\mathbf{M}_{ij}])]^2\}}, \\ \beta_{ii,ij} &= \sqrt{tr\{(diag(rad([\mathbf{M}])))^2\} / tr\{[rad([\mathbf{M}_{ij}])]^2\}}, \\ \beta_{kl,ij} &= \sqrt{tr\{[rad([\mathbf{M}_{kl}])]^2\} / tr\{[rad([\mathbf{M}_{ij}])]^2\}}. \end{aligned}$$

La matrice  $\mathcal{M}$  est calculée en utilisant la propriété 4.1 pour  $\mathcal{M}^2$ .

**Preuve.** La représentation d'une matrice symétrique  $\mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$  dans la proposition

2.1 du chapitre 2 est utilisée pour calculer  $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}^T$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^2 &= (mid([\mathbf{M}]))^2 + diag(rad([\mathbf{M}])) (diag(\alpha_{ii}))^2 diag(rad([\mathbf{M}])) \\
&+ \{mid([\mathbf{M}])\} \{diag(\alpha_{ii}) diag(rad([\mathbf{M}]))\} \\
&+ \{diag(rad([\mathbf{M}])) diag(\alpha_{ii})\} \{mid([\mathbf{M}])\} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \{mid([\mathbf{M}])\} \{\alpha_{ij} [rad([\mathbf{M}_{ij}])]\} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \{\alpha_{ij} [rad([\mathbf{M}_{ij}])]\} \{mid([\mathbf{M}])\} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \{\alpha^{ij} [rad([\mathbf{M}_{ij}])]\} \{diag(\alpha_{ii}) diag(rad([\mathbf{M}]))\} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \{diag(rad([\mathbf{M}])) diag(\alpha_{ii})\} \{\alpha_{ij} [rad([\mathbf{M}_{ij}])]\} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \{\alpha_{ij} [rad([\mathbf{M}_{ij}])]\} \{\alpha_{kl} [rad([\mathbf{M}_{kl}])]\}.
\end{aligned}$$

En utilisant les propositions 4.1, 4.2 et du fait que  $0 \preceq (diag(\alpha_{ii}))^2 \preceq \mathbf{I}$  et  $0 \leq (\alpha_{ij})^2 \leq 1$  pour tout  $-1 \leq \alpha_{ij} \leq 1$ , on obtient l'expression (4.88). ■

**Exemple 4.1.** Soit  $[\mathbf{M}]$  une matrice intervalle symétrique de dimension 3 :

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} [m_{11}] & [m_{12}] & [m_{13}] \\ [m_{12}] & [m_{22}] & [m_{23}] \\ [m_{13}] & [m_{23}] & [m_{33}] \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

Une matrice symétrique réelle  $\mathbf{M} \in [\mathbf{M}]$  peut être représentée comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= mid([\mathbf{M}]) + \begin{pmatrix} rad([m_{11}]) & 0 & 0 \\ 0 & rad([m_{22}]) & 0 \\ 0 & 0 & rad([m_{33}]) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & rad([m_{12}]) & 0 \\ rad([m_{12}]) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{12} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & rad([m_{13}]) \\ 0 & 0 & 0 \\ rad([m_{13}]) & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{13} + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rad([m_{23}]) \\ 0 & rad([m_{23}]) & 0 \end{pmatrix} \alpha_{23}.
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) &= \begin{pmatrix} \text{rad}([m_{11}]) & 0 & 0 \\ 0 & \text{rad}([m_{22}]) & 0 \\ 0 & 0 & \text{rad}([m_{11}]) \end{pmatrix} \\ \text{diag}(\alpha_{ii}) &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \\ \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) &= \begin{pmatrix} 0 & \text{rad}([m_{12}]) & 0 \\ \text{rad}([m_{12}]) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{rad}([m_{13}]) \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{rad}([m_{13}]) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{rad}([m_{23}]) \\ 0 & \text{rad}([m_{23}]) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \text{mid}([\mathbf{M}]) + \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \text{diag}(\alpha_{ii}) + \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) \alpha_{12} + \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) \alpha_{13} + \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) \alpha_{23} \\ &= \text{mid}([\mathbf{M}]) + \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \text{diag}(\alpha_{ii}) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \text{rad}([\mathbf{M}_{ij}]) \alpha_{ij}. \end{aligned}$$

On calcule maintenant  $\mathbf{M}^2$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 &= (\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \text{diag}(\alpha_{ii}^2) \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \alpha_{ij}^2 (\text{rad}([\mathbf{M}_{ij}]))^2 + \\ &+ \text{mid}([\mathbf{M}]) \text{diag}(\alpha_{ii}) \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) + \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \text{diag}(\alpha_{ii}) \text{mid}([\mathbf{M}]) + \\ &+ \alpha_{12} \{ \text{mid}([\mathbf{M}]) \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) \text{mid}([\mathbf{M}]) \} + \\ &+ \alpha_{13} \{ \text{mid}([\mathbf{M}]) \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) \text{mid}([\mathbf{M}]) \} + \\ &+ \alpha_{23} \{ \text{mid}([\mathbf{M}]) \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) \text{mid}([\mathbf{M}]) \} + \\ &+ \alpha_{12} \{ \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \text{diag}(\alpha_{ii}) \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) \text{diag}(\alpha_{ii}) \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \} + \\ &+ \alpha_{13} \{ \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \text{diag}(\alpha_{ii}) \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) \text{diag}(\alpha_{ii}) \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \} + \\ &+ \alpha_{23} \{ \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \text{diag}(\alpha_{ii}) \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) \text{diag}(\alpha_{ii}) \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \} + \\ &+ \alpha_{12} \alpha_{13} \{ \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) \} + \\ &+ \alpha_{12} \alpha_{23} \{ \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) \text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) \} + \\ &+ \alpha_{13} \alpha_{23} \{ \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{23}]) \text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) \}. \end{aligned}$$

En appliquant la proposition 4.1, 4.2 et puisque  $\text{diag}(\alpha_{ii}^2) \preceq \mathbf{I}$ , on a :

$$\begin{aligned} & \text{mid}([\mathbf{M}])\text{diag}(\alpha_{ii})\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) + \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}]))\text{diag}(\alpha_{ii})\text{mid}([\mathbf{M}]) \\ & \preceq \beta_{\text{mid},ii}^{-1}(\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \beta_{\text{mid},ii}\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}]))\text{diag}(\alpha_{ii}^2)\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \\ & \preceq \beta_{\text{mid},ii}^{-1}(\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \beta_{\text{mid},ii}(\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])))^2. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} & \alpha_{12} \{ \text{mid}([\mathbf{M}])\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{12}])\text{mid}([\mathbf{M}]) \} \\ & \preceq \beta_{\text{mid},12}^{-1}(\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \beta_{\text{mid},12}\alpha_{12}^2(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2 \\ & \preceq \beta_{\text{mid},12}^{-1}(\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \beta_{\text{mid},12}(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2, \\ & \alpha_{12} \{ \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}]))\text{diag}(\alpha_{ii})\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{12}])\text{diag}(\alpha_{ii})\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) \} \\ & \preceq \beta_{ii,12}^{-1}\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}]))\text{diag}(\alpha_{ii}^2)\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])) + \beta_{ii,12}\alpha_{12}^2(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2 \\ & \preceq \beta_{ii,12}^{-1}(\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])))^2 + \beta_{ii,12}(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2, \\ & \alpha_{12}\alpha_{13} \{ \text{rad}([\mathbf{M}_{12}])\text{rad}([\mathbf{M}_{13}]) + \text{rad}([\mathbf{M}_{13}])\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]) \} \\ & \preceq \beta_{12,13}^{-1}\alpha_{12}^2(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2 + \beta_{12,13}^{-1}\alpha_{13}^2(\text{rad}([\mathbf{M}_{13}]))^2 \\ & \preceq \beta_{12,13}^{-1}(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2 + \beta_{12,13}^{-1}(\text{rad}([\mathbf{M}_{13}]))^2 \end{aligned}$$

car  $0 \leq \alpha_{12}^2, \alpha_{13}^2, \alpha_{23}^2 \leq 1$  et  $\text{diag}(\alpha_{ii}^2) \preceq \mathbf{I}$ . Avec un raisonnement similaire pour tous les termes restants, on obtient enfin :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 & \preceq (\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}]))^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \alpha_{ij}^2 (\text{rad}([\mathbf{M}_{ij}]))^2 + \\ & + \beta_{ii}^{-1}(\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \beta_{ii}(\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])))^2 + \\ & + \beta_{\text{mid},12}^{-1}(\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \beta_{C,12}(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2 + \\ & + \beta_{\text{mid},13}^{-1}(\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \beta_{C,13}(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2 + \\ & + \beta_{\text{mid},23}^{-1}(\text{mid}([\mathbf{M}]))^2 + \beta_{C,23}(\text{rad}([\mathbf{M}_{23}]))^2 + \\ & + \beta_{ii,12}^{-1}(\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])))^2 + \beta_{ii,12}(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2 + \\ & + \beta_{ii,13}^{-1}(\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])))^2 + \beta_{ii,12}(\text{rad}([\mathbf{M}_{13}]))^2 + \\ & + \beta_{ii,23}^{-1}(\text{diag}(\text{rad}([\mathbf{M}])))^2 + \beta_{ii,12}(\text{rad}([\mathbf{M}_{23}]))^2 + \\ & + \beta_{12,13}^{-1}(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2 + \beta_{12,13}^{-1}(\text{rad}([\mathbf{M}_{13}]))^2 + \\ & + \beta_{12,23}^{-1}(\text{rad}([\mathbf{M}_{12}]))^2 + \beta_{12,23}^{-1}(\text{rad}([\mathbf{M}_{23}]))^2 + \\ & + \beta_{13,23}^{-1}(\text{rad}([\mathbf{M}_{13}]))^2 + \beta_{13,23}^{-1}(\text{rad}([\mathbf{M}_{23}]))^2. \\ & = \mathcal{M}^2. \end{aligned}$$

On considère un exemple numérique :

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} [8, 12] & [-6, -4] & [3.2, 4.8] \\ [-6, -4] & [8, 12] & [1.6, 2.4] \\ [3.2, 4.8] & [1.6, 2.4] & [8.12] \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

La proposition 4.3 donne la borne supérieure de  $[\mathbf{M}]$  :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 14.868 & -4.3632 & 3.4422 \\ -4.3632 & 14.3955 & 1.4628 \\ 3.4422 & 1.4628 & 14.0961 \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

#### 4.4.2.2 Principe de l'UBIKF

Dans cette section, nous détaillons l'algorithme de l'UBIKF pour résoudre le problème de filtrage du système 4.65. L'UBIKF a pour objectif d'obtenir une borne supérieure de la covariance de l'erreur d'estimation, c'est-à-dire une matrice réelle symétrique définie positive  $\mathcal{P}_{k|k}$  satisfaisant l'inégalité suivante :

$$E \left[ \left( \mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k \right) \left( \mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k \right)^T \right] \preceq \mathcal{P}_{k|k}, \quad (4.92)$$

pour l'ensemble des modèles avec les paramètres bornés par les matrices intervalles  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ ,  $[\mathbf{Q}]$  et  $[\mathbf{R}]$ . Ici,  $\mathbf{x}_{k|k}$  est l'état estimé à l'instant  $k$ . Une matrice de gain  $\mathbf{K}$  est ensuite déterminée afin de minimiser la trace de la matrice  $\mathcal{P}_{k|k}$ . L'enveloppe encadrant l'ensemble des estimés correspondant au gain  $\mathbf{K}$  est ensuite calculée par l'analyse par intervalles. Cette idée est similaire à celle de l'iIKF mais elle permet de réduire le conservatisme et la complexité car on ne traite que des matrices ponctuelles.

La structure de l'UBIKF est divisée en deux étapes comme le filtre de Kalman classique : prédiction et correction.

– **Prédiction.** L'état et la matrice de covariance sont prédites par les équations 4.66, 4.67. Ensuite, une borne supérieure  $\mathcal{P}_{k|k-1}$  de la matrice intervalle  $[\mathbf{P}_{k|k-1}]$  est calculée en utilisant la proposition 4.3.

– **Correction.** L'expression de la matrice de covariance après la correction, pour  $\mathbf{C}_k \in [\mathbf{C}]$ ,  $\mathbf{R} \in [\mathbf{R}]$ , est donnée par :

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathcal{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T. \quad (4.93)$$

Afin d'obtenir une borne supérieure de  $\mathbf{P}_{k|k}$ , toute matrice  $\mathbf{C}_k$  appartenant à la matrice intervalle  $[\mathbf{C}]$  est décomposée par la proposition 2.1 du chapitre 2 :

$$\mathbf{C} = \text{mid}([\mathbf{C}]) + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_x} \alpha_{ij} [\text{rad}([\mathbf{C}_{ij}])], \quad (4.94)$$

où  $[\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})]$  est une matrice  $n_y \times n_x$  dont l'élément  $ij$  est le rayon de l'élément

$ij$  de la matrice  $[\mathbf{C}]$  et les autres sont nuls. En développant le membre de droite de l'expression 4.93 et utilisant la proposition 4.1 pour tous les couples de la forme  $\mathbf{M}\mathbf{N}^T + \mathbf{N}\mathbf{M}^T$  avec  $\beta = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \text{mid}([\mathbf{C}])) \mathcal{P}_{k|k-1} (\alpha_{ij} [\text{rad}([\mathbf{C}_{ij})])^T + (\cdot)^T \\ &= \left( (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \text{mid}([\mathbf{C}])) \mathcal{P}_{k|k-1}^{1/2} \right) \left( \alpha_{ij} [\text{rad}([\mathbf{C}_{ij})] \mathcal{P}_{k|k-1}^{1/2} \right)^T + (\cdot)^T \\ &\preceq (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \text{mid}([\mathbf{C}])) \mathcal{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \text{mid}([\mathbf{C}]))^T + [\text{rad}([\mathbf{C}_{ij})] \mathcal{P}_{k|k-1} [\text{rad}([\mathbf{C}_{ij})])^T, \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_{ij} \mathbf{K}_k [\text{rad}([\mathbf{C}_{ij})]) \mathcal{P}_{k|k-1} (\alpha_{mn} \mathbf{K}_k [\text{rad}([\mathbf{C}_{mn})])^T + (\cdot)^T \\ &= \left( \alpha_{ij} \mathbf{K}_k [\text{rad}([\mathbf{C}_{ij})] \mathcal{P}_{k|k-1}^{1/2} \right) \left( \alpha_{mn} \mathbf{K}_k [\text{rad}([\mathbf{C}_{mn})] \mathcal{P}_{k|k-1}^{1/2} \right)^T + (\cdot)^T \\ &\preceq \mathbf{K}_k [\text{rad}([\mathbf{C}_{ij})] \mathcal{P}_{k|k-1} [\text{rad}([\mathbf{C}_{ij})])^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k [\text{rad}([\mathbf{C}_{mn})] \mathcal{P}_{k|k-1} [\text{rad}([\mathbf{C}_{mn})])^T \mathbf{K}_k^T, \end{aligned} \quad (4.96)$$

où  $(\cdot)^T$  représente la transposition du terme précédent dans l'équation. Les inégalités (4.95) et (4.96) sont utilisées lorsque les éléments  $ij$  et  $mn$  de  $[\mathbf{C}]$  sont vraiment des intervalles, c'est-à-dire  $[\text{rad}([\mathbf{C}_{ij})] > 0$ ,  $[\text{rad}([\mathbf{C}_{mn})] > 0$ .

Soit  $n_0$  est le nombre d'intervalles de la matrice  $[\mathbf{C}]$  dont le rayon est non nul. Autrement dit,  $n_0$  représente le nombre d'incertitudes dans la matrice  $\mathbf{C}$  du modèle. L'expression d'une borne supérieure de  $\mathbf{P}_{k|k}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &\preceq (n_0 + 1) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \text{mid}([\mathbf{C}])) \mathcal{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \text{mid}([\mathbf{C}]))^T \\ &\quad + (n_0 + 1) \mathbf{K}_k \left( \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})] \mathcal{P}_{k|k-1} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})]^T \right) \mathbf{K}_k^T \\ &\quad + \mathbf{K}_k \mathcal{R} \mathbf{K}_k \\ &= \mathcal{P}_{k|k}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

où  $\mathcal{R} \succeq [\mathbf{R}]$  est déterminée par la proposition 4.3. La matrice  $\mathcal{R}$  peut être calculée avant de commencer l'UBIKF si l'on suppose que la matrice  $\mathbf{R}$  est toujours incluse dans  $[\mathbf{R}]$ . La variable  $T_{ij}$  indique si le rayon de l'intervalle  $[\mathbf{C}_{ij}]$  est non nul :

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{rad}([\mathbf{C}_{ij})] > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.98)$$

Après avoir obtenu l'expression de la borne supérieure de  $\mathbf{P}_{k|k}$ , le gain  $\mathbf{K}_k$  qui minimise la trace de cette borne est déterminé. Les dérivées première et seconde de

la trace de  $\mathcal{P}_{k|k}$  par rapport au gain  $\mathbf{K}_k$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}(\mathcal{P}_{k|k})}{\partial \mathbf{K}_k} &= -2\mathcal{P}_{k|k-1, n_0} \text{mid}([\mathbf{C}]) + 2\mathbf{K}_k \text{mid}([\mathbf{C}]) \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} \text{mid}([\mathbf{C}])^T \\ &\quad + 2\mathbf{K}_k \left( \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})] \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})]^T \right) + 2\mathbf{K}_k \mathcal{R} \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \text{tr}(\mathcal{P}_{k|k})}{\partial \mathbf{K}_k^2} &= 2\text{mid}([\mathbf{C}]) \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} \text{mid}([\mathbf{C}])^T \\ &\quad + 2 \left( \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})] \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})]^T \right) + 2\mathcal{R}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

avec  $\mathcal{P}_{k|k-1, n_0} = (n_0 + 1)\mathcal{P}_{k|k-1}$ . La dérivée seconde est toujours définie positive ce qui garantit l'existence d'une valeur minimale de  $\text{tr}(\mathcal{P}_{k|k})$ . Le gain  $\mathbf{K}_k$  est déterminé en annulant la dérivée première :

$$\mathbf{K}_k = \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} \text{mid}([\mathbf{C}])^T \mathbf{S}_k^{-1}, \quad (4.101)$$

où :

$$\mathbf{S}_k = \text{mid}([\mathbf{C}]) \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} \text{mid}([\mathbf{C}])^T + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})] \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})]^T + \mathcal{R}. \quad (4.102)$$

L'expression de la matrice  $\mathcal{P}_{k|k}$  devient :

$$\mathcal{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \text{mid}([\mathbf{C}])) \mathcal{P}_{k|k-1, n_0}. \quad (4.103)$$

On constate que lorsqu'il n'y a pas d'incertitude sur la matrice  $\mathbf{C}_k$ , i.e.  $n_0 = 0$  et  $T_{ij} = 0 \forall i, j$ , les calculs de  $\mathbf{K}_k$  et  $\mathcal{P}_{k|k}$  sont identiques à ceux effectués dans le filtre de Kalman.

L'ensemble des estimés correspondant au gain  $\mathbf{K}_k$  et au modèle est encadré en utilisant l'analyse par intervalles :

$$\left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \right] = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k [\mathbf{C}]) \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \right] + \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k. \quad (4.104)$$

Cette expression vient de celle du filtre de Kalman et permet d'éviter le pessimisme du calcul par intervalle lié au phénomène de multi-occurrence expliquée dans la section 2.2.3.1 du chapitre 2.

En résumé, l'UBIKF fournit à chaque instant  $k$  une matrice de gain  $\mathbf{K}_k$ , une borne supérieure  $\mathcal{P}_{k|k}$  de la matrice de covariance et un intervalle  $\left[ \mathbf{x}_{k|k} \right]$  encadrant les estimés tels que pour toutes les matrices  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{B}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  appartenant aux

matrices intervalles  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ ,  $[\mathbf{Q}]$ ,  $[\mathbf{R}]$  :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \in [\hat{\mathbf{x}}_{k|k}], \quad (4.105)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} \preceq \mathcal{P}_{k|k}, \quad (4.106)$$

où  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  et  $\mathbf{P}_{k|k}$  sont l'état estimé et la matrice de covariance donnés par la procédure du filtre de Kalman pour le modèle  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$  et le gain  $\mathbf{K}_k$  de l'UBIKF.

---

**Algorithme 4.4** Filtre de Kalman intervalle amélioré à borne supérieure de variance minimale

---

**Entrées:**  $[\hat{\mathbf{x}}_{0|0}]$ ,  $\mathcal{P}_{0|0}$ ,  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ ,  $[\mathbf{Q}]$ ,  $[\mathbf{R}]$ ,  $\mathbf{y}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Sorties:**  $[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}]$ ,  $\mathcal{P}_{k|k}$

- 1: Déterminer  $\mathcal{R} \succeq [\mathbf{R}]$  et  $n_0$ .
- 2: **pour**  $k = 1, 2, \dots$  **faire**
- 3:   **Prédiction :**

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] = [\mathbf{A}] [\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}] + [\mathbf{B}] [\mathbf{u}_k], \quad (4.107)$$

$$[\mathbf{P}_{k|k-1}] = [\mathbf{A}] \mathcal{P}_{k-1|k-1} [\mathbf{A}]^T + [\mathbf{Q}], \quad (4.108)$$

$$\mathcal{P}_{k|k-1} \succeq [\mathbf{P}_{k|k-1}], \quad (4.109)$$

$$\mathcal{P}_{k|k-1, n_0} = (n_0 + 1) \mathcal{P}_{k|k-1}, \quad (4.110)$$

où  $n_0$  : nombre d'incertitudes dans la matrice  $\mathbf{C}$ .

- 4:   **Correction**

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \text{mid}([\mathbf{C}]) \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} \text{mid}([\mathbf{C}])^T \\ &+ \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})] \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} [\text{rad}(\mathbf{C}_{ij})]^T + \mathcal{R}, \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathcal{P}_{k|k-1, n_0} \text{mid}([\mathbf{C}])^T \mathbf{S}_k^{-1}, \quad (4.112)$$

$$[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}] = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k [\mathbf{C}]) [\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] + \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k, \quad (4.113)$$

$$\mathcal{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \text{mid}([\mathbf{C}])) \mathcal{P}_{k|k-1, n_0}. \quad (4.114)$$

- 5: **fin pour**
- 

Dans la section suivante, les exemples illustratifs pour montrer les avantages de l'UBIKF par rapport à l'iIKF sont présentés.

### 4.4.3 Exemples numériques

**Exemple 4.2** (Modèle de dimension 3). Considérons le modèle de dimension 3 avec les paramètres intervalles suivants :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}] &= \begin{pmatrix} [2.45, 2.72] & [-1.41, -1.28] & [0.26, 0.28] \\ [6.32, 6.98] & [-3.56, -3.22] & [2.45, 2.72] \\ [-0.79, -0.72] & [0.30, 0.34] & [0.1, 0.11] \end{pmatrix}, \\
 [\mathbf{C}] &= \begin{pmatrix} [-8.16, -7.84] & [-4.08, -3.92] & [1.96, 2.04] \\ [-2.04, -1.96] & [1.96, 2.04] & [5.88, 6.12] \\ [-0.41, -0.39] & [15.68, 16.32] & [6.86, 7.14] \end{pmatrix}, \\
 [\mathbf{Q}] &= \begin{pmatrix} [8, 12] & [-6, -4] & [3.2, 4.8] \\ [-6, -4] & [8, 12] & [1.6, 2.4] \\ [3.2, 4.8] & [1.6, 2.4] & [8.12] \end{pmatrix}, [\mathbf{R}] = [\mathbf{Q}].
 \end{aligned}$$

A chaque instant  $k$ , chaque élément des matrices  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$  est obtenu par tirage d'une valeur aléatoire selon une loi uniforme sur l'intervalle correspondant de  $[\mathbf{A}]$  et  $[\mathbf{C}]$  afin de générer les états réels et les mesures du système. Les matrices de covariance réelles prennent pour éléments les centres des matrices intervalles  $[\mathbf{Q}]$  et  $[\mathbf{R}]$ . L'état initial du système est  $\mathbf{x}_0 = (5, -2, 6)^T$ . La condition initiale de l'UBIKF est  $[\mathbf{x}_0] = ([-2, 2], [-2, 2], [-2, 2])^T$  et  $\mathcal{P}_{0|0} = 10\mathbf{I}$ . Cet exemple est simulé pendant 1000 pas de temps.

L'intervalle de confiance de 99.7% du  $i$ -ième état donné par l'UBIKF est défini par :

$$I_i = \left[ \inf \left( [\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i] \right) - 3\sqrt{\mathcal{P}_{k|k}^{ii}}, \sup \left( [\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i] \right) + 3\sqrt{\mathcal{P}_{k|k}^{ii}} \right] \quad (4.115)$$

où  $\inf([a])$  et  $\sup([a])$  sont les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle  $[a]$ ,  $\mathcal{P}_{k|k}^{ii}$  est le  $i$ -ième élément diagonal de la matrice  $\mathcal{P}_{k|k}$ .

Les états réels et les intervalles de confiance sont montrés dans la figure 4.1. On constate que les intervalles de confiance fournis par l'UBIKF contiennent 100% les états réels.

Afin de vérifier si la matrice  $\mathcal{P}_{k|k}$  borne par valeur supérieure l'ensemble des matrices de covariance avec les paramètres bornés et le gain donné par l'UBIKF, on simule la procédure de calcul de la matrice de covariance pour 1000 couples de matrices  $\mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{C}_k$  qui sont uniformément tirées à partir des matrices intervalles  $[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ . La matrice de covariance correspondant à un couple  $(\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k)$  et au gain  $\mathbf{K}_k$  de l'UBIKF est calculée par les équations suivantes :

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_k^T + \text{sup}([\mathbf{Q}]), \quad (4.116)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \text{sup}([\mathbf{R}]) \mathbf{K}_k^T, \quad (4.117)$$

où  $\text{sup}([\mathbf{M}])$  est la borne supérieure de la matrice  $[\mathbf{M}]$ . On constate à partir de la figure 4.2 que les éléments diagonaux de la matrice  $\mathcal{P}_{k|k}$  majorent les éléments correspondants des matrices de covariance des modèles choisis.

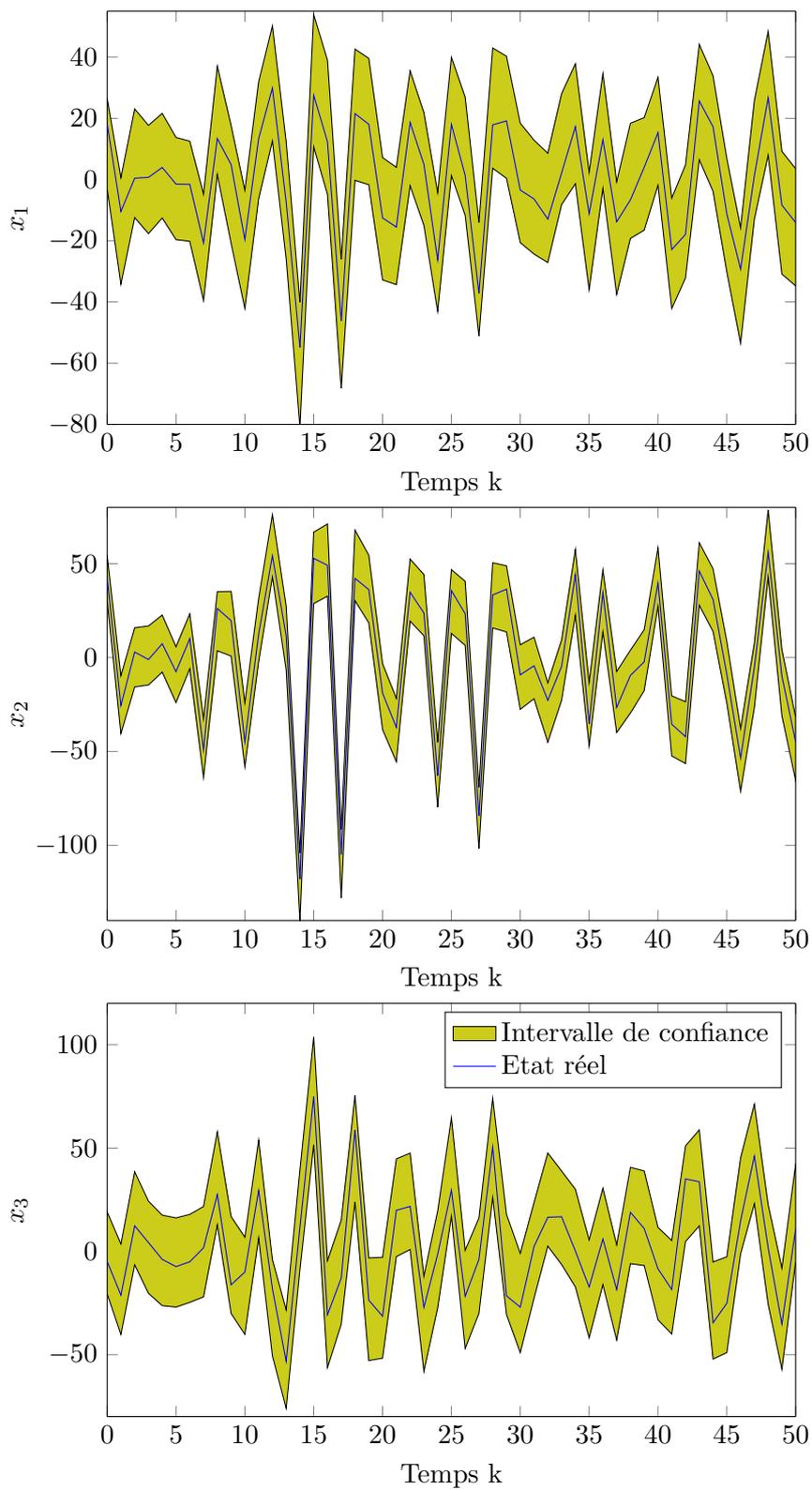


FIGURE 4.1 – États réels et intervalles de confiance donnés par l'UBIKF.

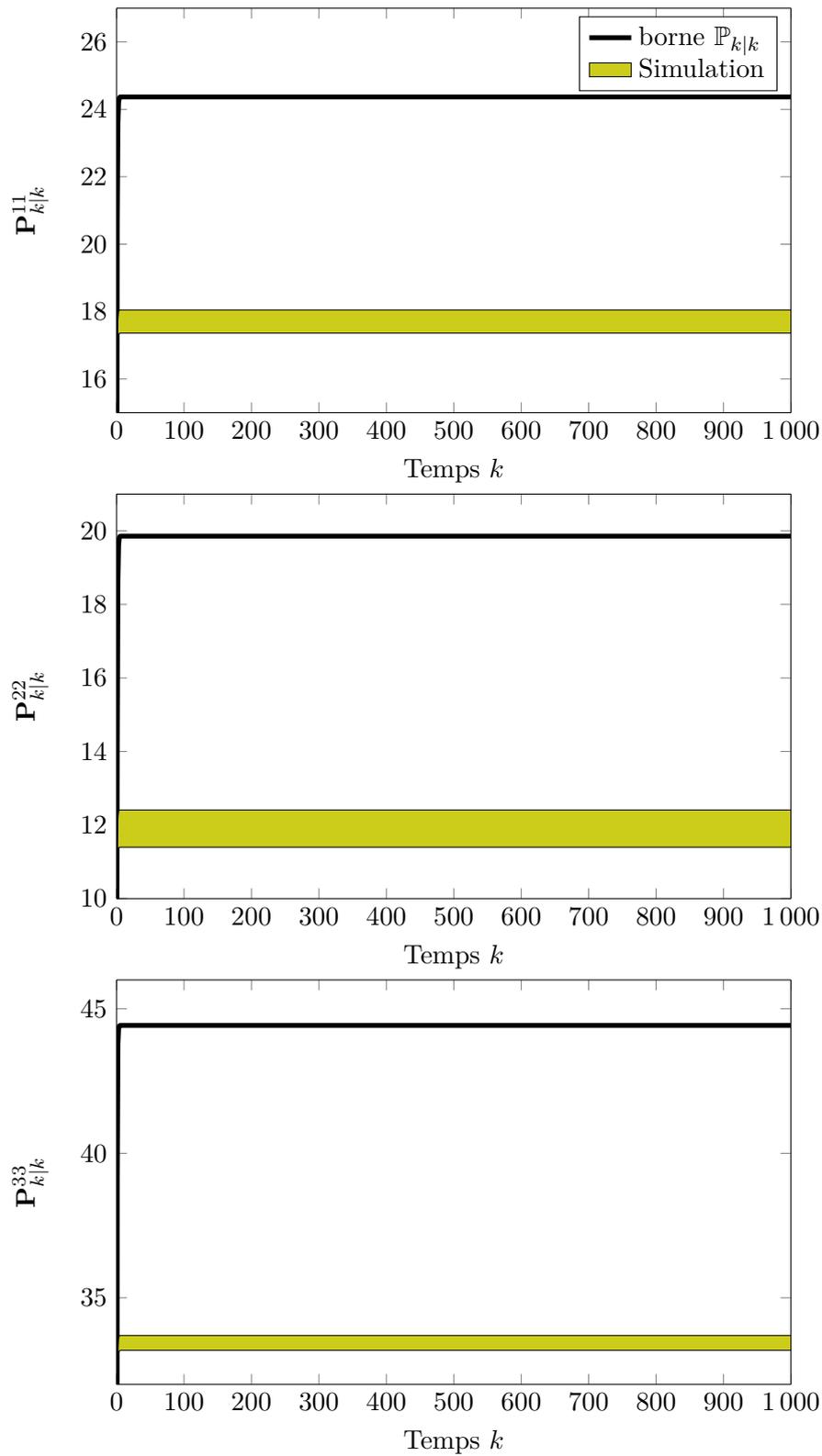


FIGURE 4.2 – Les éléments diagonaux de la matrice  $\mathcal{P}_{k|k}$  (ligne noire) et l'ensemble des éléments diagonaux des matrices de covariance de 1000 modèles choisis (bande jaune).

**Exemple 4.3 (Modèle d'une pile à combustible).** Considérons le problème d'estimation d'état pour une pile à combustible à membrane d'échange de protons (PEMFC). Les composants principaux du système sont montrés dans la figure 4.3. La pile à combustible convertit l'énergie chimique en énergie électrique en consommant l'oxygène et l'hydrogène fournis par les systèmes de distribution d'air et d'hydrogène. Le modèle linéaire utilisé dans cet exemple est présenté dans [Rotondo 2016]. Ce modèle découle du modèle non linéaire de [Pukrushpan 2004] sous les hypothèses suivantes : la température de pile  $T_{st}$  est constante, la température et l'humidité des flux de réactif sont parfaitement contrôlées, les piles multiples sont modélisées par une seule pile équivalente, tous les réactifs se comportent comme des gaz idéaux.

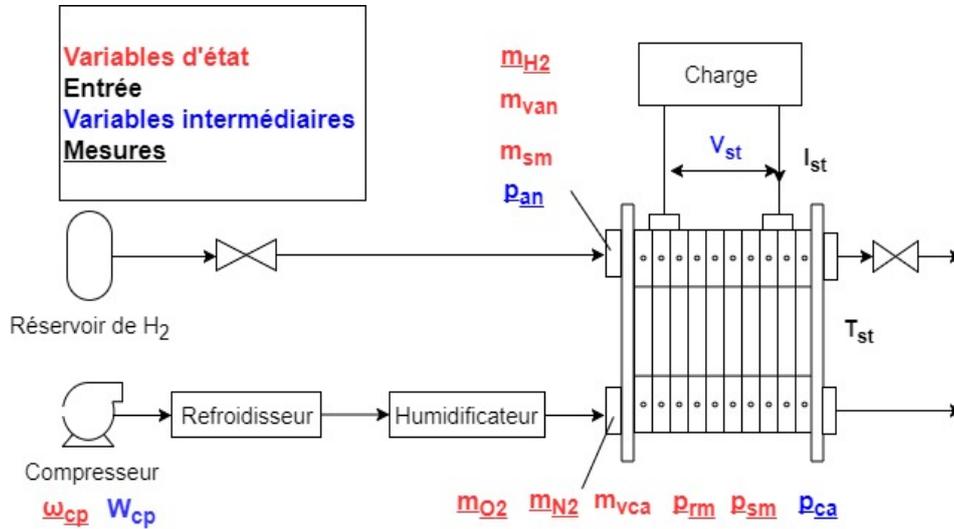


FIGURE 4.3 – Modèle d'une pile à combustible

L'entrée du modèle est le courant  $I_{st}$ . Une modélisation en espace d'états de dimension 9 est présentée dans [Rotondo 2016] avec les variables d'état suivantes : masse d'oxygène ( $m_{O_2}$ ), masse d'hydrogène ( $m_{H_2}$ ), masse d'azote ( $m_{N_2}$ ), masse d'air dans le collecteur d'alimentation ( $m_{sm}$ ), pression d'air dans le collecteur d'alimentation ( $p_{sm}$ ), pression d'air dans le collecteur de retour ( $p_{rm}$ ), vitesse du compresseur ( $\omega_{cp}$ ), masse d'eau dans l'anode ( $m_{w,an}$ ) et dans la cathode ( $m_{w,ca}$ ). Une discrétisation d'Euler est effectuée avec un temps d'échantillonnage  $T_s = 0.4s$  pour obtenir le modèle discret suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k I_{st,k} + \mathbf{D}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (4.118)$$

où  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont les bruits gaussiens de moyennes nulles. Les sorties mesurées sont : vitesse du compresseur ( $\omega_{cp}$ ), masse d'oxygène ( $m_{O_2}$ ), masse d'hydrogène ( $m_{H_2}$ ), masse d'azote ( $m_{N_2}$ ), pression d'air dans le collecteur d'alimentation ( $p_{sm}$ ), pression

d'air dans le collecteur de retour ( $p_{rm}$ ), pression d'air dans l'anode ( $p_{an}$ ), pression d'air dans la cathode ( $p_{ca}$ ). Les matrices de covariance  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  de  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont données comme suit :

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(10^{-12}; 10^{-12}; 10^{-12}; 10^{-12}; 10^2; 10^2; 10; 10^{-12}; 10^{-12}), \quad (4.119)$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}(10; 10^{-10}; 10^{-10}; 10^{-10}; 10^2; 10^2; 10^2). \quad (4.120)$$

Les filtres de Kalman intervalle iIKF et UBIKF sont testés avec le modèle dont les paramètres évoluent dans le temps. Les éléments de la première ligne, seconde ligne et septième ligne de la matrix  $\mathbf{A}_k$  oscillent selon des lois sinusoïdales d'amplitude 5% de leurs valeurs nominales. Ces lois de variation sont supposées être inconnues et sont considérées comme incertitude par les filtres. La matrice intervalle  $[\mathbf{A}_k]$  incluant tous les paramètres admissibles est choisie comme suit :

$$\text{mid}([\mathbf{A}_k]) = \mathbf{A}_k^0 \quad , \quad \text{rad}([\mathbf{A}_k]) = 0.05 \left| \mathbf{A}_k^0 \right|, \quad (4.121)$$

où  $\mathbf{A}_k^0$  est la valeur nominale de  $\mathbf{A}_k$ . De plus, l'incertitude des capteurs de la vitesse du compresseur, de la masse d'hydrogène et de la masse d'oxygène est 2%. Par conséquent, la matrice intervalle  $[\mathbf{C}_k]$  est définie par :

$$\text{mid}([\mathbf{C}_k]) = \mathbf{C}_k^0 \quad , \quad \text{rad}([\mathbf{C}_k]) = 0.02 \left| \mathbf{C}_k^0 \right|, \quad (4.122)$$

où  $\mathbf{C}_k^0$  est la valeur nominale de  $\mathbf{C}_k$ .

La matrice de covariance des bruits dynamiques est supposée être certaine, i.e.  $[\mathbf{Q}] = \mathbf{Q}$ . La matrice de covariance des erreurs de mesure est définie par :

$$\text{mid}([\mathbf{R}]) = \mathbf{R} \quad , \quad \text{rad}([\mathbf{R}]) = 0.5 \left| \mathbf{R} \right|, \quad (4.123)$$

Les critères de comparaison des algorithmes sont les suivants : l'erreur moyenne quadratique (RMSE) pour chaque état, le pourcentage de temps où les intervalles de confiance contiennent les états réels ( $O$ ) et le temps de calcul (pour 7500 itérations). La RMSE pour le  $i$ -ème état est définie par :

$$RMSE_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i - \mathbf{x}_k^i \right)^2. \quad (4.124)$$

L'intervalle de confiance de 99.7% du  $i$ -ième état donné par l'UBIKF est défini par :

$$I_i = \left[ \inf \left( \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i \right] \right) - 3\sqrt{\mathcal{P}_{k|k}^{ii}}, \sup \left( \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i \right] \right) + 3\sqrt{\mathcal{P}_{k|k}^{ii}} \right], \quad (4.125)$$

où  $\inf([a])$  et  $\sup([a])$  sont les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle  $[a]$ ,  $\mathcal{P}_{k|k}^{ii}$  est le  $i$ -ième élément diagonal de la matrice  $\mathcal{P}_{k|k}$ . De même, l'intervalle de confiance

de 99.7% du  $i$ -ième état donné par l'iIKF est défini par :

$$I_i = \left[ \inf \left( \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i \right] \right) - 3\sqrt{\sup \left( \left[ \mathbf{P}_{k|k}^{ii} \right] \right)}, \sup \left( \left[ \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^i \right] \right) + 3\sqrt{\sup \left( \left[ \mathbf{P}_{k|k}^{ii} \right] \right)} \right], \quad (4.126)$$

où  $\sup \left( \left[ \mathbf{P}_{k|k}^{ii} \right] \right)$  est la borne supérieure du  $i$ -ième élément diagonal de la matrice  $\left[ \mathbf{P}_{k|k} \right]$ .

Les intervalles de confiance donnés par l'UBIKF et l'iIKF montrés dans la figure 5.5 encadrent les états réels ( $O = 100\%$ ). Les intervalles de confiance de l'UBIKF sont plus serrés que ceux de l'iIKF. Au niveau du temps de calcul, l'UBIKF permet de réduire significativement le temps de calcul par rapport à l'iIKF (table 4.1). Les avantages de l'UBIKF viennent du fait que l'UBIKF ne traite que des matrices ponctuelles au lieu des matrices intervalles dans l'iIKF. D'autre part, l'iIKF fait appel à l'algorithme SIVIA qui est plus adapté aux systèmes de deux ou trois variables dû à sa complexité exponentielle (propriété 2.1 chapitre 2).

	$m_{O_2}$		$m_{H_2}$		$\omega_{cp}$		Temps
	RMSE	O(%)	RMSE	O(%)	RMSE	O(%)	
iIKF	$5.4 \cdot 10^{-5}$	100	$1.5 \cdot 10^{-5}$	100	156	100	511 s
UBIKF	$4.8 \cdot 10^{-5}$	100	$1.4 \cdot 10^{-5}$	100	177	100	133 s

TABLE 4.1 – Résultats de l'iIKF et de l'UBIKF

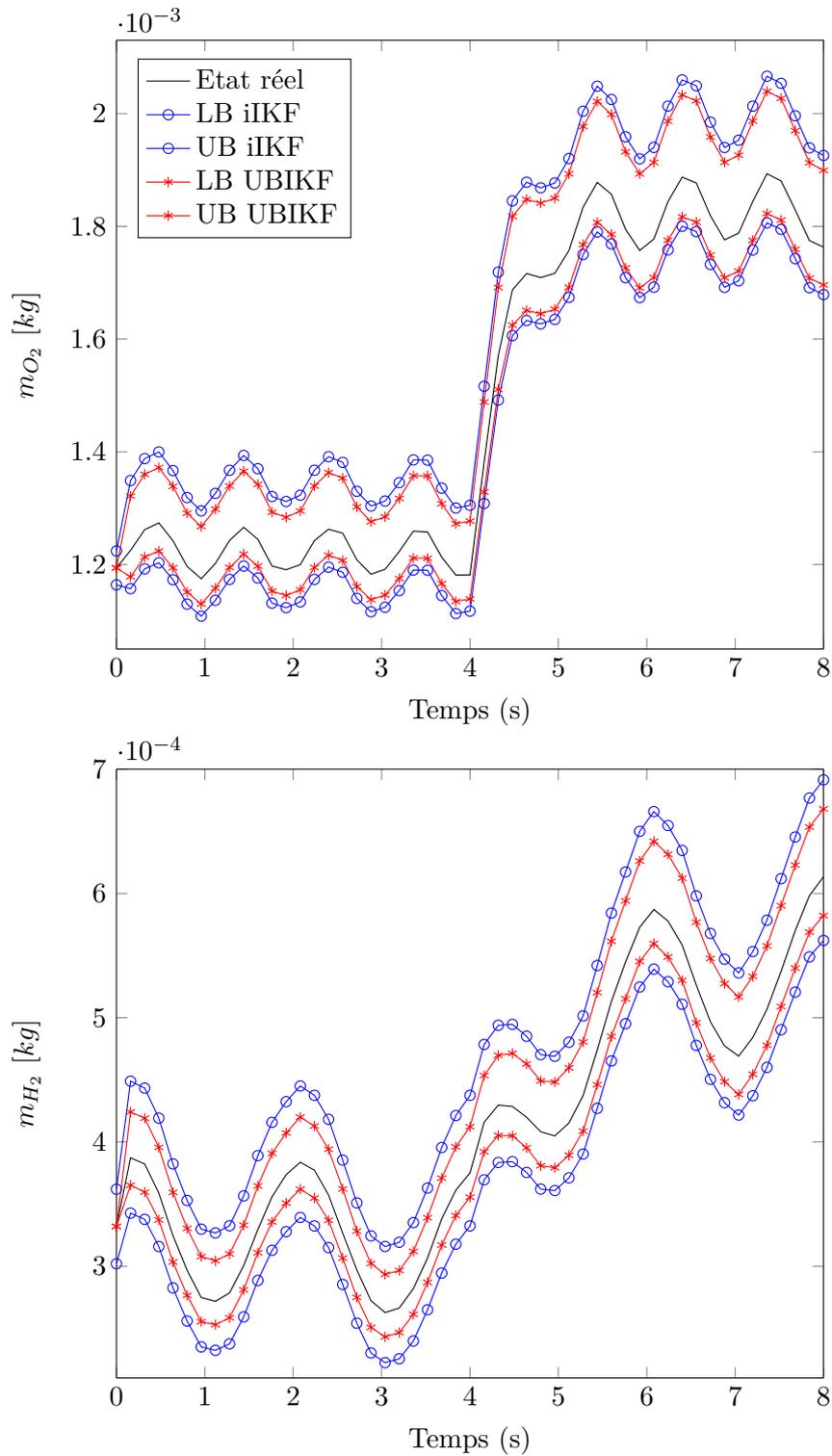


FIGURE 4.4 – Etats réels et intervalles de confiance de 99.7% (borne supérieure (UB) et borne inférieure (LB)) donnés par l'iIKF et l'UBIKF pour la masse d'oxygène  $m_{O_2}$  et de la masse d'hydrogène  $m_{H_2}$ .

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le filtre de Kalman qui est un estimateur d'état à variance minimale dans le cas des systèmes linéaires gaussiens. Les résultats de convergence du filtre de Kalman existant dans la littérature ont également été présentés. En résumé, lorsque le modèle considéré est détectable et stabilisable, le filtre de Kalman garantit les propriétés suivantes [Anderson 1981] :

- existence d'un estimateur asymptotiquement sans biais,
- $\mathbf{P}_{k|k}$  est bornée pour toute  $\mathbf{P}_{0|0}$ ,
- $\mathbf{P}_{k|k-1}$  est indépendante de  $\mathbf{P}_{0|0}$ .

Lorsque le système à résoudre est non linéaire, mais que les hypothèses sur les bruits sont conservées (bruits gaussiens, indépendants entre eux et indépendants de la condition initiale), le filtre de Kalman étendu est souvent utilisé. Ce filtre repose sur une approximation de la distribution a posteriori  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$  par une loi gaussienne. Il permet de calculer les deux premiers moments de cette approximation  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  et  $\mathbf{P}_{k|k}$  par linéarisation. L'erreur d'estimation du filtre de Kalman étendu est exponentiellement bornée en moyenne quadratique tant que les matrices jacobiniennes du modèle, les matrices de covariance des bruits, les parties résiduelles de linéarisation et l'erreur d'estimation initiale sont toutes bornées. Si les non-linéarités sont trop importantes, le filtre de Kalman étendu peut diverger. Cela est d'autant plus vrai que les équations du filtre ne prennent pas en compte l'erreur de linéarisation.

Un nouveau filtre de Kalman intervalle basé sur la recherche d'une borne supérieure de l'ensemble des matrices de covariance de l'erreur d'estimation pour le modèle intervalle considéré et sur la minimisation de la trace cette borne a été présenté. L'enveloppe des estimés est déterminée en utilisant l'analyse par intervalle. Cette approche est considérée comme une alternative du filtre de Kalman amélioré proposé dans [Xiong 2013] avec les avantages suivants :

- l'enveloppe des estimés est moins conservatrice,
- la complexité et donc le temps de calcul sont réduits.

Ces avantages viennent du fait que le nouveau filtre de Kalman intervalle ne traite que des matrices ponctuelles au lieu de matrices intervalle dans l'iIKF. Les exemples numériques ont montré que le nouveau filtre de Kalman intervalle permet d'encadrer l'ensemble des estimés et d'améliorer le temps de calcul par rapport à l'iIKF.

Bien que le filtre UBIKF réduise le conservatisme et le temps de calcul par rapport à ceux du filtre iIKF, ses résultats sont encore à améliorer. Par exemple, une inégalité matricielle proposée dans [Combastel 2016] qui fournit une borne majorante définie positive d'une matrice intervalle symétrique, peut être appliquée afin d'obtenir une borne moins conservatrice de la variance de l'erreur d'estimation. D'autre part, la convergence du filtre UBIKF devrait être étudiée. Plus précisément, il serait intéressant de déterminer des bornes des incertitudes telles que l'estimation et la matrice de covariance fournies par le filtre UBIKF soient convergentes.



# Filtre Particulaire et extensions ensemblistes

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>101</b>
<b>5.2</b>	<b>Filtre particulaire</b>	<b>103</b>
5.2.1	Notations	103
5.2.2	Modèle de l'espace d'état	103
5.2.3	Formule de Bayes récursive	104
5.2.4	Principe du filtre particulaire	104
<b>5.3</b>	<b>Résultats de convergence du filtre particulaire</b>	<b>110</b>
5.3.1	Convergence avec distribution d'importance a priori	110
5.3.2	Convergence de l'erreur quadratique	113
5.3.3	Effet du choix de la distribution d'importance	113
<b>5.4</b>	<b>Filtre particulaire ensembliste</b>	<b>115</b>
5.4.1	Filtre particulaire ensembliste à erreurs bornées	116
5.4.2	Filtre ensembliste avec des fonctions de croyance finies	120
5.4.3	Filtre particulaire ensembliste avec des distributions gaussiennes incertaines	123
5.4.4	Exemples numériques	127
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>136</b>

---

## 5.1 Introduction

Lorsque le modèle du système dynamique à estimer est hautement non linéaire et/ou non gaussien, les méthodes basées sur le filtre de Kalman peuvent ne pas donner d'approximation précise de la distribution de probabilité a posteriori. L'utilisation de l'approche séquentielle de Monte Carlo, connue sous le nom de filtre particulaire, est une alternative dont les performances se sont révélées encourageantes.

Le premier document présentant les méthodes de Monte Carlo est publié en 1949 [Metropolis 1949]. Dans les années 50-70, les méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov se sont développées dans le domaine de la physique statistique ([Metropolis 1953], [Hastings 1970]) et de l'automatique [Handschin 1970]. Au début des années 90, les méthodes de Monte Carlo ont connu un réel essor dans la

communauté du traitement du signal grâce à l'augmentation des capacités des ordinateurs. Des algorithmes récurrents ont été proposés pour résoudre les problèmes de filtrage non linéaires : filtre bootstrap (bootstrap filter) [Gordon 1993], filtre de Monte Carlo (Monte Carlo filter) [Kitagawa 1996], filtre particulaire avec interaction (interacting particle filter) [Del Moral 1996].

Les filtres particulaires ont été largement exploités dans de nombreuses applications, par exemple : traitement du signal ([Gustafsson 2002], [Hue 2002], [Ristic 2004]), traitement de la parole [Vermaak 2002], robotique mobile ([Kwok 2003], [Kwok 2004]). Afin de résoudre le problème de filtrage non linéaire, les filtres particulaires approchent la densité a posteriori par un ensemble de points de l'espace d'état, appelés *particules*. A chaque particule est associé un poids et la distribution a posteriori est approchée par une somme pondérée discrète, dont le support correspond aux particules. Les poids caractérisent la probabilité des particules. L'ensemble des particules est mis à jour récursivement à chaque itération : chaque particule évolue en utilisant le principe de l'*échantillonnage pondéré séquentiel*, et certaines sont sélectionnées par une étape de *ré-échantillonnage* en fonction de leurs poids. La connaissance des particules et de leurs poids permet d'accéder aux moments de la distribution a posteriori.

Le problème majeur des méthodes de filtrage est de trouver une représentation fiable des données disponibles en fonction des erreurs et des perturbations associées au système considéré. Selon la représentation des données, on peut distinguer deux types d'approches. La première approche, dite *bayésienne*, utilise des distributions de probabilité pour représenter les données afin de les combiner dans le cadre de la théorie de probabilité ; le filtre particulaire est un exemple de cette classe de méthodes. La seconde approche, appelée *ensembliste*, représente les incertitudes par des ensembles compacts (ellipsoïdes, intervalles, zonotopes). Une extension ensembliste du filtre particulaire est proposée dans [Abdallah 2008] en remplaçant les particules ponctuelles par un ensemble de boîtes de particules (vecteurs d'intervalles). Cette extension, connue sous le nom de *filtre particulaire ensembliste* (box particle filter) permet de réduire significativement le nombre de particules et ainsi le coût de calcul. Afin d'enrichir la représentation de l'incertitude limitée aux bornes des intervalles, la théorie des fonctions de croyance est combinée avec le filtre particulaire ensembliste dans [Nassreddine 2010]. Cette méthode est basée sur la représentation des incertitudes par des fonctions de masse dont le nombre d'éléments focaux est fini. L'inconvénient de cet algorithme est sa complexité exponentielle en fonction du nombre d'éléments focaux des fonctions de masse représentant les incertitudes.

Le contenu de ce chapitre est organisé comme suit. Après une présentation générale du filtre particulaire en section 5.2, nous détaillons des résultats de convergence existant dans la section 5.3. Le filtre particulaire ensembliste, l'algorithme proposé dans [Nassreddine 2010] et un algorithme combinant le filtre particulaire ensembliste avec la théorie de croyance pour des distributions gaussiennes incertaines (voir chapitre 3) sont présentés dans la section 5.4.

## 5.2 Filtre particulière

### 5.2.1 Notations

Soit  $\mathbb{R}^d$  l'espace euclidien de dimension  $d$ ;  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  désigne la  $\sigma$ -algèbre borélienne de  $\mathbb{R}^d$ . Les notations suivantes sont utilisées :

- $B(\mathbb{R}^d)$  : l'ensemble de fonctions boréliennes bornées mesurables définies sur  $\mathbb{R}^d$ .
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$  : l'ensemble de toutes les fonctions continues définies sur  $\mathbb{R}^d$ ,
- $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$  : l'ensemble de toutes les fonctions continues bornées définies sur  $\mathbb{R}^d$ .
- Si  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ , la norme de  $f$ , notée  $\|f\|$ , est définie par :

$$\|f\| \triangleq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|. \quad (5.1)$$

### 5.2.2 Modèle de l'espace d'état

Soit  $(\Omega, F, P)$  un espace de probabilité sur lequel sont donnés deux processus stochastiques  $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k, k \in \mathbb{N}\}$  et  $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_k, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ .

Le processus  $\mathbf{x}$  de dimension  $n_x$  décrit l'évolution de l'état caché d'un système dynamique, et le processus  $\mathbf{y}_k$  de dimension  $n_y$  désigne le processus d'observation du même système. Le processus de l'état  $\mathbf{x}$  est un processus de Markov de distribution initiale  $\pi_0(\mathbf{x}_0)$ . La dynamique décrivant l'évolution de l'état au fil du temps est modélisée par une densité de probabilité  $K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  telle que [Crisan 2002] :

$$P(\mathbf{x}_k \in A | \mathbf{x}_{k-1}) = \int_A K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_k, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_x}). \quad (5.2)$$

Conditionnellement à l'état, les observations sont indépendantes (canal sans mémoire). La loi de  $\mathbf{y}$  conditionnellement à  $\mathbf{x}$  est donnée par :

$$P(\mathbf{y}_k \in B | \mathbf{x}_k) = \int_B g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) d\mathbf{y}_k, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_y}), \quad (5.3)$$

où  $g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  est la densité de l'observation conditionnellement à l'état.

**Exemple 5.1.** On considère le système dynamique scalaire suivant :

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}) + w_k, \\ y_k &= h(x_k) + v_k, \end{aligned}$$

où  $w_k$  et  $v_k$  sont des variables indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d) et mutuellement indépendantes avec :

$$\begin{aligned} P(w_k \in C) &= \int_C p_w(w) dw, \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ P(v_k \in D) &= \int_D p_v(v) dv, \quad \forall D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} K(x_k | x_{k-1}) &= p_w(x_k - f(x_{k-1})), \\ g(y_k | x_k) &= p_v(y_k - h(x_k)), \end{aligned}$$

où  $p_w$  et  $p_v$  sont les densités de probabilité de  $w_k$  et  $v_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

### 5.2.3 Formule de Bayes récursive

On note  $\mathbf{x}_{k:l} \triangleq (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_l)$  and  $\mathbf{y}_{k:l} \triangleq (\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \dots, \mathbf{y}_l)$  la trajectoire du signal (état) et du processus d'observation. Il s'agit d'estimer  $\mathbf{x}_k$  en se fondant sur les connaissances a priori et sur les mesures  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$  ce qui consiste à déterminer la densité conditionnelle  $\pi_{k|k}(\mathbf{x}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k)$  puisque l'objectif principal est d'estimer  $E(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$  ainsi que la variance conditionnelle correspondante. En utilisant la formule des probabilités totales et la formule de Bayes,  $\pi_{k|k}$  satisfait la récursion :

$$\pi_{k|k-1}(\mathbf{x}_k) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \pi_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad \text{Prédiction} \quad (5.4)$$

$$\pi_{k|k}(\mathbf{x}_k) = \frac{g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \pi_{k|k-1}(\mathbf{x}_k)}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \pi_{k|k-1}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k} \quad \text{Correction.} \quad (5.5)$$

Soient  $\nu$  une mesure,  $\varphi$  une fonction et  $K$  une densité de probabilité, les notations suivantes sont introduites pour la suite du chapitre :

$$\begin{aligned} (\nu, \varphi) &\triangleq \int \varphi(\mathbf{x}) \nu(d\mathbf{x}), \\ K\varphi(\mathbf{x}) &\triangleq \int K(d\mathbf{z} | \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

En utilisant ces notations, pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ , la formule récursive pour  $E(\varphi(\mathbf{x}_k) | \mathbf{y}_{1:k})$  impliquée par (5.4) et (5.5) est :

$$(\pi_{k|k-1}, \varphi) = (\pi_{k-1|k-1}, K\varphi) \quad \text{Prédiction} \quad (5.6)$$

$$(\pi_{k|k}, \varphi) = \frac{(\pi_{k|k-1}, \varphi g)}{(\pi_{k|k-1}, g)} \quad \text{Correction.} \quad (5.7)$$

L'intégrale  $(\pi_{k|k-1}, g)$  doit être strictement positive, sinon le filtre optimal n'existe pas. En outre, dans la plupart des systèmes, il est impossible de donner une expression explicite pour (5.4) - (5.5) et (5.6) - (5.7). Ceci implique que l'on doit recourir aux méthodes numériques, par exemple des filtres particuliers, afin d'approcher le filtre optimal.

### 5.2.4 Principe du filtre particulaire

Le filtre particulaire, aussi connu sous le nom de méthode de Monte-Carlo séquentielle, est une technique permettant de résoudre numériquement des problèmes

de filtrages bayésiens en estimant la distribution  $\pi_{k|k}$  par une distribution empirique  $\pi_{k|k}^N$  formée par un ensemble pondéré de  $N$  échantillons  $\{\mathbf{x}_k^i, \omega_k^i\}_{i=1}^N$ , appelés *particules* [Gordon 1993] :

$$\pi_{k|k}^N(\mathbf{x}_k) \triangleq \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i),$$

où  $\delta(\cdot)$  est la distribution de Dirac. Les *poids d'importance*  $\omega_k^i$  sont des approximations des probabilités a posteriori des particules et satisfont  $\sum_{i=1}^N \omega_k^i = 1$ .

Supposons qu'à l'instant  $k-1$ , l'on ait une approximation de la densité conditionnelle  $\pi_{k-1|k-1}$  par un ensemble de particules pondérées :  $\{\mathbf{x}_{k-1}^i, \omega_{k-1}^i\}_{i=1}^N$ . Le nouvel ensemble de particules à l'instant  $t$  est généré par la technique d'*échantillonnage d'importance*. L'idée est de choisir une *distribution d'importance*  $q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)$  et de réécrire l'équation 5.4 comme suit :

$$\pi_{k|k-1}(\mathbf{x}_k) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k) \frac{K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)} \pi_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}. \quad (5.8)$$

La probabilité a posteriori d'une particule est approchée par un poids d'importance :

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \frac{g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) K(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)}, \quad (5.9)$$

La distribution d'importance dépend de l'état précédent et de l'observation actuelle. La sélection de la distribution d'importance est résumée dans [Doucet 2000].

### 5.2.4.1 Distribution d'importance

■ *Distribution d'importance par linéarisation optimale :*

Il est montré que le choix  $q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k) = p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)$  minimise la variance de poids d'importance  $\omega_k^i$ . Avec cette distribution, on obtient, à partir de la formule 5.9, le poids d'importance  $\omega_k^i = \omega_{k-1}^i p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ . On doit pour cela être capable d'échantillonner à partir de la distribution  $p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)$  et d'évaluer  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) = \int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) d\mathbf{x}_k$ . L'évaluation analytique de cette distribution est possible pour la classe de modèles non-linéaires avec des bruits gaussiens présentée dans l'exemple suivant :

**Exemple 5.2** (Modèles non linéaires gaussiens). Considérons le modèle suivant :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, Q) \quad (5.10)$$

$$\mathbf{y}_k = C\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, R), \quad (5.11)$$

où  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  est une fonction non linéaire,  $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  est la matrice d'observation,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont les bruits gaussiens mutuellement indépendants. La distribution

d'importance optimale est donnée par le filtre de Kalman :

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_k, P), \quad (5.12)$$

où :

$$P^{-1} = Q^{-1} + C^T R^{-1} C, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{m}_k = P \left( Q^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + C^T R^{-1} \mathbf{y}_k \right), \quad (5.14)$$

et on obtient :

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{y}_k - C \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}), C Q C^T + R). \quad (5.15)$$

Cependant, cette évaluation n'a généralement pas de forme analytique. On considère donc des méthodes sous-optimales permettant d'approcher la distribution d'importance optimale par linéarisation locale.

■ *Distribution d'importance par linéarisation locale :*

– *Linéarisation locale du modèle.* Cette méthode linéarise le modèle de la même manière que le filtre de Kalman étendu. Considérons le modèle suivant :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, Q), \quad (5.16)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, R), \quad (5.17)$$

où les fonctions  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  sont non linéaires,  $\mathbf{h}$  est différentiable,  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont les bruits gaussiens mutuellement indépendants. L'approximation de la distribution d'importance optimale est donnée par la formule suivante :

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_k, P), \quad (5.18)$$

où :

$$P_k^{-1} = Q^{-1} + H_k^T R^{-1} H_k, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{m}_k = P_k \left( Q^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + H_k^T R^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))) + H_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \right), \quad (5.20)$$

avec  $H_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})}$ .

– *Linéarisation locale de la distribution d'importance optimale.* Supposons que  $l(\mathbf{x}_k) \triangleq \ln p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$  soit deux fois différentiable par rapport à  $\mathbf{x}_k$ . On définit :

$$l'(\mathbf{x}) \triangleq \left. \frac{\partial l(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}}, \quad (5.21)$$

$$l''(\mathbf{x}) \triangleq \left. \frac{\partial^2 l(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k \partial \mathbf{x}_k^T} \right|_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}}. \quad (5.22)$$

Le développement de Taylor de  $l(\mathbf{x}_k)$  en  $\mathbf{x}$  s'écrit comme suit :

$$l(\mathbf{x}_k) \simeq l(\mathbf{x}) + [l'(\mathbf{x})]^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x})^T l''(\mathbf{x}) (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}). \quad (5.23)$$

Supposons que  $l''(\mathbf{x})$  soit définie négative, c'est-à-dire que  $l(\mathbf{x}_k)$  soit concave et posons :

$$P(\mathbf{x}) = -l''(\mathbf{x})^{-1}, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})l'(\mathbf{x}). \quad (5.25)$$

Alors :

$$[l'(\mathbf{x})]^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x})^T l''(\mathbf{x}) (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) = C - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x} - \mathbf{m}(\mathbf{x}))^T P^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{x}_k - \mathbf{x} - \mathbf{m}(\mathbf{x})). \quad (5.26)$$

où  $C$  est une constante. Cette expression donne la distribution d'importance suivante :

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{x}, P(\mathbf{x})). \quad (5.27)$$

Si  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$  est unimodale, il est judicieux de choisir  $\mathbf{x}$  comme le mode de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$  ; alors  $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = 0$ .

**Exemple 5.3.** Supposons que le modèle d'évolution satisfasse :

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, Q). \quad (5.28)$$

La distribution conditionnelle d'observation est donnée par :

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = \exp\left(\mathbf{y}_k^T C\mathbf{x}_k - b(C\mathbf{x}_k) + c(\mathbf{y}_k)\right) \quad (5.29)$$

où  $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ ,  $b : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}$ . On a :

$$l(\mathbf{x}_k) = cte + \mathbf{y}_k^T C\mathbf{x}_k - b(C\mathbf{x}_k) - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - A\mathbf{x}_{k-1})^T Q^{-1} (\mathbf{x}_k - A\mathbf{x}_{k-1}). \quad (5.30)$$

On obtient ainsi :

$$l''(\mathbf{x}) = -b''(\mathbf{x}) - Q^{-1}. \quad (5.31)$$

Ici,  $b''(\mathbf{x})$  est la matrice de covariance de  $\mathbf{y}_k$  pour  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ , donc  $l''(\mathbf{x})$  est définie négative. On peut déterminer le mode  $\mathbf{x}^*$  de la distribution  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$ , c'est-à-dire  $l'(\mathbf{x}^*) = 0$ , par la méthode de Newton-Raphson initialisée par  $\mathbf{x}_{(0)} = \mathbf{x}_{k-1}$  :

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j - \frac{l'(\mathbf{x}_{(j)})}{l''(\mathbf{x}_{(j)})}. \quad (5.32)$$

Dans les paragraphes suivants, deux distributions d'importance plus simples et plus courantes sont décrites.

■ *Distribution d'importance a priori :*

Un choix simple de la distribution d'importance est la distribution a priori  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ . Dans ce cas, on obtient l'expression suivante du poids d'importance :

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i). \quad (5.33)$$

Cette sélection est souvent inefficace lorsque le modèle est exploré sans aucune connaissance sur les mesures. L'utilisation de la distribution d'importance a priori est liée au filtre Bootstrap dans [Gordon 1993].

■ *Distribution d'importance fixe :*

Un choix plus simple est de fixer une distribution d'importance indépendamment des trajectoires simulées et des observations. Dans ce cas, on prend

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k) = q(\mathbf{x}_k), \quad (5.34)$$

et obtient la formule de poids d'importance comme suit :

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \frac{g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) K(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i)}. \quad (5.35)$$

Le résultat du filtre particulaire avec cette sélection peut être mauvais puisque ni la dynamique du modèle ni les observations ne sont prises en compte.

### 5.2.4.2 Ré-échantillonnage

Après un certain temps, la plupart des particules ont des poids négligeables. Le *ré-échantillonnage* permet d'éviter ce phénomène de dégénérescence. Cette étape consiste à éliminer les particules de poids négligeable et à dupliquer celles de grand poids. Le ré-échantillonnage est effectué :

- à chaque pas de temps,
- ou lorsqu'il est vraiment nécessaire pour limiter les incertitudes par l'échantillonnage aléatoire. On choisit le moment propice pour le ré-échantillonnage des particules, c'est-à-dire avant la dispersion des poids. Un indicateur de ré-échantillonnage basé sur la variance des pondérations a été proposé dans [Kong 1994]. Cet indicateur est une estimation du nombre effectif de particules :

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2}. \quad (5.36)$$

Si le nombre effectif de particules est plus petit qu'un seuil  $N_{th}$  donné, alors le ré-échantillonnage est effectué.

Les principales méthodes de sélection des particules sont résumées dans [Douc 2005] :

– **Le ré-échantillonnage multinomial :**

Le ré-échantillonnage multinomial est le plus utilisé. Les particules sont sélectionnées en fonction de l'importance de leur poids par le processus suivant :

- On génère  $N$  valeurs aléatoires  $\{U^i\}_{i=1, \dots, N}$  ordonnées dans l'intervalle

$[0, 1]$ ,  $N$  étant le nombre de particules :

$$0 < U^1 < U^2 < \dots < U^N < 1.$$

- Si la valeur  $U^i$  tirée appartient à l'intervalle  $[\sum_{j=1}^{m-1} \omega^j, \sum_{j=1}^m \omega^j]$ , la particule  $x^m$  est sélectionnée.

Le ré-échantillonnage multinomial est illustré par la figure 5.1. Soit un ensemble de 5 particules  $\{\mathbf{x}^i\}$ ,  $i = 1, \dots, 5$  auxquelles sont associés les poids  $\{\omega^i\} = \{0.105, 0.26, 0.085, 0.43, 0.12\}$ . Si l'on génère 5 valeurs aléatoires uniformes réparties dans l'intervalle  $[0, 1]$  :  $\{U^i\} = \{0.07, 0.27, 0.32, 0.68, 0.90\}$ , alors le nouvel ensemble de particules est  $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^4, \mathbf{x}^5\}$ . La particule  $\mathbf{x}^2$  est dupliquée et la particule  $\mathbf{x}^3$  est éliminée. Les poids sont réinitialisés à  $1/5$ .

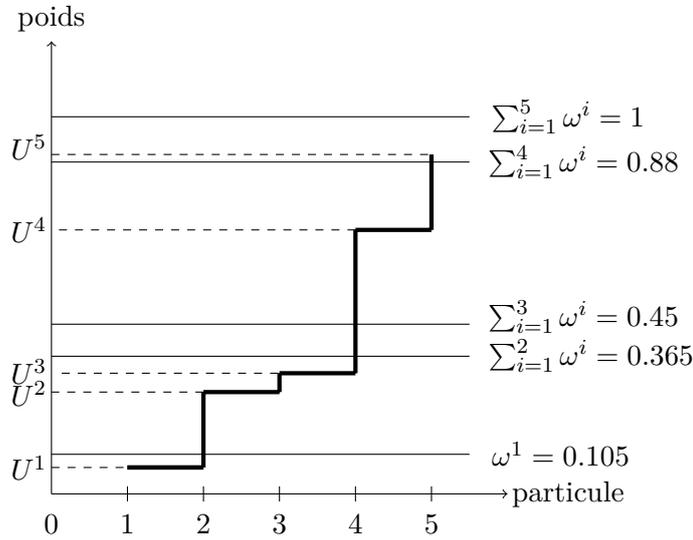


FIGURE 5.1 – Exemple du ré-échantillonnage multinomial.

– **Le ré-échantillonnage résiduel :**

Le ré-échantillonnage résiduel est présenté dans [Whitley 1994], [Liu 1998] comme une méthode pour diminuer la variance du ré-échantillonnage. Dans cette approche, pour tout  $i = 1, \dots, N$ , on crée  $\lfloor N\omega^i \rfloor$  copies de la particule  $x^i$ , où  $\lfloor \cdot \rfloor$  dénote la partie entière. Afin de garder  $N$  particules, il reste à choisir  $R = N - \sum_{i=1}^N \lfloor N\omega^i \rfloor$  particules. Pour ce faire, le ré-échantillonnage résiduel propose de sélectionner  $R$  particules de l'ensemble  $\{\mathbf{x}^i\}_{i=1, \dots, N}$  avec une probabilité :

$$\bar{\omega}^i = \frac{N\omega^i - \lfloor N\omega^i \rfloor}{N - R}, \quad i = 1, \dots, R. \quad (5.37)$$

La sélection de  $R$  particules avec les nouvelles probabilités est effectuée en utilisant le ré-échantillonnage multinomial.

On reprend l'exemple utilisé dans le ré-échantillonnage multinomial. D'abord, on crée  $\lfloor N\omega^i \rfloor$  copies de la particule  $x^i$  pour  $i = 1, \dots, 5$ . On a alors une copie de  $x^2$  et 2 copies de  $x^4$ . Ensuite, on sélectionne 2 particules de l'ensemble  $\{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$  avec les nouveaux poids  $\{0.175, 0.1, 0.142, 0.05, 0.2\}$  par le ré-échantillonnage multinomial. Enfin, les poids de particules sélectionnées sont fixées à  $1/5$ .

– **Le ré-échantillonnage stratifié :**

Le ré-échantillonnage stratifié [Kitagawa 1996] consiste à pré-partitionner l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N$  sous-intervalles disjoints  $[0, 1/N] \cup \dots \cup [(N-1)/N, 1]$ . On génère indépendamment  $N$  valeurs aléatoires  $\{U^i\}_{i=1, \dots, N}$  par les distributions uniformes sur ces  $N$  intervalles :

$$U^i \sim U([(i-1)/N, i/N]), \quad (5.38)$$

où  $U([a, b])$  est la distribution uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$ . Ensuite, le ré-échantillonnage multinomial est appliqué pour sélectionner les particules.

Le principe du filtre particulaire est présenté dans l'algorithme 5.1.

### 5.3 Résultats de convergence du filtre particulaire

Dans cette section, on se pose les questions : dans quelle mesure la densité empirique  $\pi_{k|k}^N(\mathbf{x}_k)$  approche-t-elle la densité postérieure  $\pi_{k|k}(\mathbf{x}_k)$  ? Dans quel sens et plus particulièrement, dans quelles conditions la convergence est-elle valide ? La plupart des résultats sont montrés pour le filtre particulaire avec la distribution d'importance a priori et les stratégies de ré-échantillonnage standard détaillées dans la section 5.2.4 ([Crisan 2002], [Hu 2008]). L'effet de la sélection de la distribution d'importance sur la convergence du filtre particulaire est étudié dans [Mbalawata 2014b], [Mbalawata 2014a], [Mbalawata 2016].

#### 5.3.1 Convergence avec distribution d'importance a priori

Dans cette partie, les résultats de la convergence du filtre particulaire avec la distribution d'importance a priori ([Crisan 2002], [Hu 2008]) sont présentés. Ils sont valides pour certaines fonctions  $\varphi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 5.1** (Convergence presque sûre). *Soit  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n_x})$  l'ensemble des mesures de probabilité sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n_x}$ . Si  $(\mu_N)_{N=1}^{\infty}$  est une séquence de mesures de probabilité, alors on dit que  $\mu_N$  converge presque sûrement vers  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n_x})$  et on écrit  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N = \mu$  si :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{A} \subset C(\mathbb{R}^{n_x}), \lim_{N \rightarrow \infty} (\mu_N, \varphi) = (\mu, \varphi), \quad (5.39)$$

où  $C(\mathbb{R}^{n_x})$  est l'ensemble de toutes les fonctions continues sur  $\mathbb{R}^{n_x}$  et  $\mathcal{A}$  est un ensemble dénombrable de fonctions continues sur lequel la convergence est complètement déterminée.

**Algorithme 5.1** Filtre particulaire

**Entrées:** Le modèle de transition  $K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  et la densité conditionnelle  $g(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k)$ .

**Initialisation.**  $k = 0$ , générer  $N$  particules par une distribution  $\pi_{0|0}(\mathbf{x}_0)$  choisie :  $\mathbf{x}_0^i \sim \pi_{0|0}(\mathbf{x}_0)$  et  $\omega_0^i = 1/N$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**pour**  $k = 1, 2, \dots$  **faire**

- Échantillonner  $\mathbf{x}_k^i \sim q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .
- Calculer les poids :

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \frac{g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) K(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)}.$$

- Normaliser les poids :

$$\omega_k^i = \frac{\omega_k^i}{\sum_{j=1}^N \omega_k^j}.$$

- Calculer l'espérance et la variance de l'ensemble de particules :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \mathbf{x}_k^i,$$

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^N \omega_k^i (\mathbf{x}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k)^2.$$

- Calculer le nombre effectif de particules :

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2}.$$

- Si le nombre effectif de particules est plus petit qu'un seuil donné  $N_{th}$ , alors effectuer un ré-échantillonnage.

**fin pour**

**5.3.1.1 Fonctions continues bornées  $\varphi$** 

**Théorème 5.1** ([Crisan 2002]). *Supposons que la densité  $K$  soit de Feller, i.e.*

$$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^{n_x}) \Rightarrow K\varphi \in C_b(\mathbb{R}^{n_x}) \quad (5.40)$$

*et que la densité de vraisemblance  $g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  soit bornée, continue et strictement positive, alors pour toutes les fonctions continues bornées  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^{n_x})$  :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\pi_{k|k}^N, \varphi) = (\pi_{k|k}, \varphi), \quad (5.41)$$

où  $C_b(\mathbb{R}^{n_x})$  est l'ensemble des fonctions continues bornées.

Notons que si l'on veut estimer l'état réel  $\mathbf{x}$ , i.e.  $\varphi(x) = x$ , le théorème 5.1 ne garantit pas la convergence du filtre particulaire puisque  $\mathbf{x}$  n'est pas borné.

### 5.3.1.2 Une classe de fonctions non bornées $\varphi$

Dans [Hu 2011], la convergence du filtre particulaire a été prouvée pour une classe de fonctions non bornées, applicable dans nombreuses situations pratiques. La distribution d'importance a priori est utilisée et les hypothèses suivantes sont imposées afin de montrer la convergence du filtre particulaire :

**Hypothèse 5.1.** Sachant  $\mathbf{y}_{1:k}$ , on a  $(\pi_{k|k-1}, g_k) > \gamma_k > 0$ .

**Hypothèse 5.2.** La densité  $K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  et la fonction de vraisemblance  $g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  sont bornées :

$$K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) < \infty \quad ; \quad g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) < \infty.$$

**Hypothèse 5.3.** La fonction à estimer  $\varphi(\mathbf{x})$  satisfait :

$$\sup_{\mathbf{x}} |\varphi(\mathbf{x})|^p g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) < C(\mathbf{y}_{1:k}),$$

avec  $p \geq 2$ , où  $C(\mathbf{y}_{1:k})$  est une constante finie qui dépend de  $\mathbf{y}_{1:k}$ .

L'hypothèse 5.3 signifie que la densité conditionnelle  $g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  diminue plus rapidement que la fonction  $\varphi$  augmente. La classe de fonctions satisfaisant l'hypothèse 5.3 est notée  $L_k^p(g)$ . Les hypothèses 5.2 et 5.3 impliquent que le moment d'ordre  $p$  associé à la densité  $\pi_{k|k}(\mathbf{x})$  de la fonction  $\varphi$  doit être borné :

$$\begin{aligned} |\varphi(\mathbf{x})|^p \pi_{k|k}(\mathbf{x}) &= \frac{\int |\varphi(\mathbf{x})|^p g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}) \pi_{k|k-1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{(\pi_{k|k-1}, g)} \\ &\leq \frac{C(\mathbf{y}_{1:k}) \int \pi_{k|k-1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{(\pi_{k|k-1}, g)} < \infty. \end{aligned}$$

Puisque les distributions typiques contiennent des éléments exponentiels ou ont un support borné, l'hypothèse 5.3 n'est pas une restriction forte pour  $\varphi$  [Hu 2008].

**Théorème 5.2** ([Hu 2011]). *Supposons que les hypothèses 5.1 - 5.2 - 5.3 soient satisfaites, alors pour tout  $\varphi \in L_k^p(g)$ ,  $p \geq 2$ ,  $1 \leq r \leq 2$ , et  $N$  suffisamment grand, il existe une constante  $C_{k|k}$  indépendante de  $N$  telle que :*

$$E \left[ |(\pi_{k|k}^N, \varphi) - (\pi_{k|k}, \varphi)|^p \right] \leq C_{k|k} \frac{\|\varphi\|_{k,p}^p}{N^{p-p/r}}, \quad (5.42)$$

où  $\|\varphi\|_{k,p} \triangleq \max \left\{ 1, (\pi_{k|k}, |\varphi|^p)^{1/p} \right\}$ .

On a également un corollaire associé [Hu 2011] :

**Corollaire 5.2.1.** Si les hypothèses 5.2 - 5.3 sont satisfaites et si  $p > 2$ , alors pour toute fonction  $\varphi \in L_k^p(g)$  :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\pi_{k|k}^N, \varphi) = (\pi_{k|k}, \varphi). \quad (5.43)$$

### 5.3.2 Convergence de l'erreur quadratique

Dans cette section, un autre sens de convergence est analysé.

**Définition 5.2** (Convergence en erreur quadratique). *si  $(\mu_N)_{N=1}^\infty$  est une séquence de mesures de probabilité, alors on dit que  $\mu_N$  converge vers  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n_x})$  et on écrit  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N = \mu$  si, pour toute fonction  $\varphi \in B(\mathbb{R}^{n_x})$  :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[(\mu_N, \varphi) - (\mu, \varphi)]^2 = 0. \quad (5.44)$$

**Théorème 5.3** ([Crisan 2002]). *Supposons que la fonction de vraisemblance  $g(\mathbf{y}_k | \cdot)$  soit bornée, alors pour tout  $k \geq 0$ , il existe une constante  $c_{k|k}$  indépendante de  $N$  telle que pour toute fonction  $\varphi \in B(\mathbb{R}^{n_x})$  :*

$$E[(\pi_{k|k}^N, \varphi) - (\pi_{k|k}, \varphi)]^2 \leq c_{k|k} \frac{\|\varphi\|^2}{N}, \quad (5.45)$$

où  $\|\varphi\| \triangleq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}} |\varphi(\mathbf{x})|$ .

En résumé, le théorème 5.3 est valide lorsque les poids d'importance sont bornés et on emploie une procédure de ré-échantillonnage standard (par exemple, ré-échantillonnage multinomial, résiduel ou stratifié) [Crisan 2002].

Cependant, notons que dans les techniques de Monte-Carlo séquentielles, les poids d'importance non normalisés sont calculés par la formule suivante :

$$\omega_k^i = \frac{g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) K(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)}, \quad (5.46)$$

où  $q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)$  est la distribution d'importance choisie pour générer les particules  $\{\mathbf{x}_k^i\}_{i=1}^N$ . Si on emploie  $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k) \neq K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ , alors le fait que  $g$  soit bornée n'implique pas que les poids d'importance soient bornés. Par conséquent, les théorèmes 5.1, 5.2, 5.3 ne peuvent pas être appliqués. L'effet du choix de la distribution d'importance  $q$  sur la convergence du filtre particulière a été considéré dans [Mbalawata 2016] et est résumé dans la section suivante.

### 5.3.3 Effet du choix de la distribution d'importance

Dans cette section, les résultats de convergence du filtre particulière liés au choix de la distribution d'importance et la procédure de ré-échantillonnage sont présentés.

#### 5.3.3.1 Fonctions continues bornées $\varphi$

Les hypothèses ci-dessous sont imposées [Mbalawata 2016] :

**Hypothèse 5.4.** Il existe une séquence de constantes  $c_{g,k} < \infty$ , qui peut dépendre du temps, telle que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  et  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $g_k(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \leq c_{g,k} < \infty$

**Hypothèse 5.5.** Soit

$$\omega_k = \frac{g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)}, \quad (5.47)$$

la fonction de poids d'importance non normalisée,  $\forall k \in \mathbb{N}$  et  $x_{k-1} \in \mathbb{R}^{n_x}$ . Il existe une séquence de constantes  $c_{\omega,k} < \infty$ , qui peut dépendre du temps, telle que  $E(\omega_k^2 | \mathbf{x}_{k-1}) \leq c_{\omega,k}$ , avec l'espérance appliquée à  $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$  :

$$E(\omega_k^2 | \mathbf{x}_{k-1}) = \int \omega_k^2 q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (5.48)$$

**Hypothèse 5.6.** La procédure de ré-échantillonnage satisfait :

$$E[((\pi_{k|k}^N, \varphi) - (\tilde{\pi}_{k|k}, \varphi))^2] \leq C_k \frac{\|\varphi\|^2}{N}, \quad (5.49)$$

où  $\|\varphi\| \triangleq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}} |\varphi(\mathbf{x})|$ ;  $\tilde{\pi}_{k|k}^N$  ( $\pi_{k|k}^N$ ) est la densité empirique avant (après) l'étape de ré-échantillonnage,  $C_k$  est une constante indépendante de  $N$ .

Les techniques de ré-échantillonnage de type multinomial, résiduel et stratifiés satisfont l'hypothèse ci-dessus [Douc 2005]. Notons que lorsque les hypothèses 5.4, 5.5 et 5.6 sont satisfaites, les poids d'importance ne sont pas nécessairement bornés.

**Théorème 5.4** ([Mbalawata 2016]). *Supposons que les hypothèses 5.4 - 5.5 - 5.6 soient satisfaites pour tout  $k \geq 0$ , alors il existe une constante  $c_{k|k}$  indépendante de  $N$  telle que pour toute fonction  $\varphi \in B(\mathbb{R}^{n_x})$  :*

$$E[((\pi_{k|k}^N, \varphi) - (\pi_{k|k}, \varphi))^2] \leq c_{k|k} \frac{\|\varphi\|^2}{N}. \quad (5.50)$$

Dans [Mbalawata 2016], la  $L^4$ -convergence pour toute fonction bornée  $\varphi \in B(\mathbb{R}^{n_x})$  a été montrée. Afin de garantir la  $L^4$ -convergence, l'hypothèse 5.4 est combinée avec les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 5.7.** Il existe une séquence de constantes  $c_{\omega,k} < \infty$ , qui dépend de  $k$ , telle que  $E(\omega_k^4 | \mathbf{x}_{k-1}) \leq c_{\omega,k}$ , avec l'espérance appliquée à  $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$  :

$$E(\omega_k^4 | \mathbf{x}_{k-1}) = \int \omega_k^4 q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (5.51)$$

**Hypothèse 5.8.** La procédure de ré-échantillonnage satisfait :

$$E[((\pi_{k|k}^N, \varphi) - (\tilde{\pi}_{k|k}, \varphi))^4] \leq C_k \frac{\|\varphi\|^4}{N^2}, \quad (5.52)$$

où  $C_k$  est une constante indépendante de  $N$ .

**Théorème 5.5** ([Mbalawata 2016]). *Supposons que les hypothèses 5.4 - 5.7 - 5.8 soient satisfaites pour tout  $k \geq 0$ , alors il existe une constante  $c_{k|k}$  indépendante de*

$N$  telle que pour tout  $\varphi \in B(\mathbb{R}^{n_x})$  :

$$E[(\pi_{k|k}^N, \varphi) - (\pi_{k|k}, \varphi)]^4 \leq c_{k|k} \frac{\|\varphi\|^4}{N^2}. \quad (5.53)$$

La  $L^4$ -convergence dans le théorème 5.5 implique la convergence presque sûre de la mesure empirique :

**Théorème 5.6** ([Mbalawata 2016]). *Supposons que les hypothèses 5.4 - 5.7 - 5.8 soient satisfaites pour tout  $k \geq 0$ , alors  $\lim_{N \rightarrow \infty} (\pi_{k|k}^N, \varphi) = (\pi_{k|k}, \varphi)$  presque sûrement pour toute fonction bornée  $\varphi \in B(\mathbb{R}^{n_x})$ .*

### 5.3.3.2 Une classe de fonctions non bornées $\varphi$

Le résultat de la  $L^4$ -convergence a été présenté pour la classe des fonctions  $L_k^4(g)$  qui satisfont l'hypothèse 5.3 dans [Mbalawata 2014b]. Supposons que les hypothèses 5.1, 5.2, 5.3 et 5.9 introduites ci-dessous soient satisfaites.

**Hypothèse 5.9.** Pour toute fonction de poids d'importance définie par :

$$\omega_k = \frac{g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)}, \quad (5.54)$$

le moment d'ordre 7 de cette fonction  $E(\omega_k^7 | \mathbf{x}_{k-1})$  est borné, avec l'espérance appliquée à  $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$ .

$$E(\omega_k^7 | \mathbf{x}_{k-1}) = \int \omega_k^7 q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (5.55)$$

**Théorème 5.7** ([Mbalawata 2014b]). *Supposons que les hypothèses 5.1 - 5.2 - 5.3 - 5.9 soient satisfaites, pour toute  $\varphi \in L_k^4(g)$ , il existe une constante  $C_{k|k}$  indépendante de  $N$  telle que :*

$$E \left[ |(\pi_{k|k}^N, \varphi) - (\pi_{k|k}, \varphi)|^4 \right] \leq C_{k|k} \frac{\|\varphi\|_{k,4}^4}{N^2}, \quad (5.56)$$

où  $\|\varphi\|_{k,4} \triangleq \max \left\{ 1, (\pi_{k|k}, |\varphi|^4)^{1/4} \right\}$ .

## 5.4 Filtre particulaire ensembliste

Le filtre particulaire ensembliste (ou box particle filter (BPF) en anglais) a été initialement proposé dans [Gning 2007] pour résoudre des problèmes d'estimation d'état non-linéaires à erreurs bornées. Dans cette approche, les particules ponctuelles sont remplacées par des boîtes de particules. Toutes les particules et les incertitudes bornées du système sont traitées par les notions de l'analyse par intervalles introduites auparavant. L'utilisation de données intervalles permet de réduire significativement le nombre de particules, ce qui réduit le coût de calcul. Cependant, la difficulté majeure de cette approche est la détermination des bornes des

incertitudes. En effet, si les bornes sont trop serrées, les données peuvent devenir incompatibles avec les équations du système et le filtre échoue à fournir une solution. D'autre part, si les bornes sont surestimées, l'estimation obtenue devient imprécise et la méthode devient pessimiste. Dans [Nassreddine 2010], la représentation des incertitudes par des intervalles est remplacée par un formalisme basé sur la théorie de croyance qui englobe les formalismes ensembliste et probabiliste.

### 5.4.1 Filtre particulaire ensembliste à erreurs bornées

Dans cette partie, le BPF développé dans [Gning 2007] est présenté. Considérons le modèle non linéaire décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k), \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k), \end{cases} \quad (5.57)$$

où  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  est une fonction non linéaire, qui décrit la relation entre l'état à l'instant  $k+1$ , l'état précédent, l'entrée  $\mathbf{u}_k$  et le bruit  $\mathbf{w}_k$ . La fonction  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  représente la relation entre l'observation, l'état courant et l'erreur de mesure  $\mathbf{v}_k$ . L'état initial du système  $\mathbf{x}_0$  est supposé appartenir à une boîte  $[\mathbf{x}_0] \subset \mathbb{R}^{n_x}$ . A l'instant  $k$ , l'entrée  $\mathbf{u}_k$ , le bruit  $\mathbf{w}_k$  et l'erreur de mesure  $\mathbf{v}_k$  sont représentés par les boîtes  $[\mathbf{u}_k]$ ,  $[\mathbf{w}_k]$  et  $[\mathbf{v}_k]$ .

Les étapes du BPF sont décrites comme suit :

– **Initialisation :**

La région initiale  $[\mathbf{x}_0]$  de l'espace d'état est divisée en  $N$  boîtes  $\{[\mathbf{x}_0^i]\}_{i=1,\dots,N}$  mutuellement disjointes, de même volume et de même poids  $\omega_0^i = 1/N$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ .

– **Prédiction :**

Les particules à l'instant  $k+1$  sont construites par l'équation de propagation suivante :

$$[\mathbf{x}_{k+1}^i] = [\mathbf{f}] \left( [\mathbf{x}_k^i], [\mathbf{u}_k], [\mathbf{w}_k] \right), \quad (5.58)$$

où  $[\mathbf{f}]$  est une fonction d'inclusion de  $\mathbf{f}$ .

– **Correction :**

L'observation est utilisée pour calculer les poids des particules et pour contracter les particules.

■ *Innovation* : L'innovation indique la proximité entre la valeur réelle et celle prédite. Pour tout  $i = 1, \dots, N$ , les boîtes de mesure sont prédites par l'équation suivante :

$$[\mathbf{y}_{k+1}^i] = [\mathbf{h}] \left( [\mathbf{x}_{k+1}^i], [\mathbf{v}_{k+1}] \right), \quad (5.59)$$

où  $[\mathbf{h}]$  est une fonction d'inclusion de  $\mathbf{h}$ . Les innovations  $[\mathbf{r}_{k+1}^i]$  correspondent

aux intersections entre les boîtes prédites  $[\mathbf{y}_{k+1}^i]$  et la boîte de mesure  $[\mathbf{y}_{k+1}]$  :

$$[\mathbf{r}_{k+1}^i] = [\mathbf{y}_{k+1}^i] \cap [\mathbf{y}_{k+1}]. \quad (5.60)$$

■ *Contraction* : Afin de conserver un volume judicieux pour chaque particule, un des contracteurs présentés dans le chapitre 2 est appliqué. Si l'innovation  $[\mathbf{r}_{k+1}^i]$  n'est pas vide, la boîte  $[\mathbf{x}_{k+1}^i]$  est contractée par :

$$[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i] = \mathcal{C}([\mathbf{r}_{k+1}^i], \mathbf{h}), \quad (5.61)$$

où  $\mathcal{C}$  est un contracteur de la fonction  $\mathbf{h}$ .

■ *Calcul des poids* : Il y a deux possibilités pour mettre à jour les poids des boîtes de particules. Dans [Gning 2007], la vraisemblance  $V^i$  de la particule  $[\mathbf{r}_{k+1}^i]$  est définie par le rapport de volume entre l'innovation  $[\mathbf{r}_{k+1}^i]$  et la boîte de mesure prédite  $[\mathbf{y}_{k+1}^i]$ , pour tout  $i = 1, \dots, N$  :

$$V^i = \frac{\text{Vol}([\mathbf{r}_{k+1}^i])}{\text{Vol}([\mathbf{y}_{k+1}^i])} \quad (5.62)$$

où  $\text{Vol}([\mathbf{X}])$  est le volume de la boîte  $[\mathbf{X}]$ . Le volume des boîtes de particules contractées peut être également utilisé pour calculer la vraisemblance [Gning 2012] :

$$V^i = \frac{\text{Vol}([\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i])}{\text{Vol}([\mathbf{x}_{k+1}^i])}. \quad (5.63)$$

Les poids des particules sont mis à jour en multipliant les poids précédents par les vraisemblances correspondantes :

$$\omega_{k+1}^i = \omega_k^i V^i. \quad (5.64)$$

Les poids sont ensuite normalisés :

$$\omega_{k+1}^i \leftarrow \frac{\omega_{k+1}^i}{\sum_{j=1}^N \omega_{k+1}^j} \quad (5.65)$$

– **Estimation** :

L'état estimé est calculé par la moyenne pondérée des centres des particules :

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^N \omega_k^i \mathbf{C}_k^i, \quad (5.66)$$

où  $\mathbf{C}_k^i$  est le centre de la  $i$ -ième boîte de particules. Afin de construire un intervalle de confiance pour chaque état, la variance d'estimation est définie par la somme de deux parties : la variance de l'ensemble des centres de

particules et la variance des distributions uniformes sur les particules :

$$\sigma_k^2(j) = \sum_{i=1}^N \left( \omega_k^i \left( \mathbf{C}_k^i(j) - \hat{\mathbf{x}}_k(j) \right)^2 + \frac{\|\mathbf{x}_k^i(j)\|^2}{12} \right). \quad (5.67)$$

– **Ré-échantillonnage :**

Après un certain nombre d'itérations, la plupart de particules ont un poids proche de zéro. On effectue donc un ré-échantillonnage des particules selon leur poids. Cette étape est implémentée avec l'un des algorithmes de ré-échantillonnage du filtre particulaire présentés en section 5.2. Ensuite, les particules dupliquées sont divisées en  $r$  boîtes disjointes de même largeur, où  $r$  est le nombre de réalisations indiqué par le ré-échantillonnage, afin d'obtenir des boîtes de particules de plus petit volume dans les régions de grandes probabilités.

Le BPF est résumé dans l'algorithme 5.2.

**Algorithme 5.2** Filtre particulaire ensembliste

**Initialisation.**  $k = 0$ , générer  $N$  boîtes  $[\mathbf{x}_0^i]$  mutuellement disjointes, de même largeur et de même poids  $\omega_0^i = 1/N$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**pour**  $k = 1, 2, \dots$  **faire**

**Prédiction :**

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_{k+1}^i] &= [\mathbf{f}]([\mathbf{x}_k^i], [\mathbf{u}_k], [\mathbf{w}_k]), \\ [\mathbf{y}_{k+1}^i] &= [\mathbf{h}]([\mathbf{x}_{k+1}^i], [\mathbf{v}_{k+1}]), \\ &\forall i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

**Correction :**

– Innovation :

$$[\mathbf{r}_{k+1}^i] = [\mathbf{y}_{k+1}^i] \cap [\mathbf{y}_{k+1}],$$

où  $[\mathbf{y}_{k+1}^i] = [\mathbf{h}]([\mathbf{x}_{k+1}^i], [\mathbf{v}_k])$ .

– Contraction :

Si  $[\mathbf{r}_{k+1}^i] \neq \emptyset$ , alors :

$$[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i] = \mathcal{C}([\mathbf{r}_{k+1}^i], \mathbf{h}).$$

Sinon :  $[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i] = [\mathbf{x}_{k+1}^i]$ .

– Calcul des poids :

$$\omega_{k+1}^i = \omega_k^i V^i.$$

où  $V^i = \frac{\text{Vol}([\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i])}{\text{Vol}([\mathbf{x}_{k+1}^i])}$  (formule 5.63).

– Normalisation des poids :

$$\omega_{k+1}^i \leftarrow \frac{\omega_{k+1}^i}{\sum_{j=1}^N \omega_{k+1}^j}.$$

– Estimation :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \sum_{i=1}^N \omega_{k+1}^i \mathbf{C}_{k+1}^i, \\ \sigma_{k+1}^2(j) &= \sum_{i=1}^N \left( \omega_{k+1}^i \left( \mathbf{C}_{k+1}^i(j) - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}(j) \right)^2 + \frac{|\mathbf{x}_{k+1}^i(j)|^2}{12} \right), \quad \forall j = 1, \dots, n_x. \end{aligned}$$

**Ré-échantillonnage :**

– Calculer le nombre effectif de particules :

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2}.$$

– Si le nombre effectif de particules est plus petit qu'un seuil donné  $N_{th}$ , alors effectuer un ré-échantillonnage (mutinomial, stratifié, résiduel).

**fin pour**

### 5.4.2 Filtre ensembliste avec des fonctions de croyance finies

Dans [Nassreddine 2010], une différente approche du filtre particulaire ensembliste est proposée : les données sont représentées par des fonctions de masse dont le nombre d'éléments focaux est fini. Ce type de représentation est considéré comme la généralisation de l'approche à erreurs bornées. En effet, la représentation d'une variable par un ensemble compact est équivalente à une fonction de masse catégorique, c'est-à-dire la fonction de masse avec un seul élément focal.

Le filtre particulaire ensembliste présenté dans [Nassreddine 2010] est basé sur l'extension des opérations arithmétiques aux fonctions de masse ([Yagger 1986], [Regan 2004]). Toutes les fonctions de masse utilisées dans cette section ont des éléments focaux intervalles.

Considérons deux variables  $x_1$  et  $x_2$ . Les connaissances sur ces variables sont modélisées par deux fonctions de masse  $m^{x_1}$  et  $m^{x_2}$ . On s'intéresse à la représentation de la variable  $y$  définie par  $y = x_1 * x_2$ , où  $*$  est une opération binaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dans le contexte à erreurs bornées,  $m^{x_1}$  et  $m^{x_2}$  sont catégoriques :  $\exists [x_1], [x_2] \in \mathbb{I}\mathbb{R}$  tels que  $m^{x_1}([x_1]) = 1$  et  $m^{x_2}([x_2]) = 1$ . La connaissance sur  $y$  est donc représentée par une fonction de masse catégorique  $m^y$  avec l'élément focal  $[y] = [x_1] * [x_2]$ .

Dans le cas général,  $m^{x_1}$  et  $m^{x_2}$  sont des fonctions de masse avec un nombre arbitraire d'intervalles focaux. Supposons que les intervalles focaux de  $m^{x_1}$  et  $m^{x_2}$  soient respectivement  $\{[x_1^i]\}_{i=1,\dots,n_1}$  et  $\{[x_2^i]\}_{i=1,\dots,n_2}$ . La fonction de masse  $m^y$  est définie, sous l'hypothèse d'indépendance entre  $x_1$  et  $x_2$ , comme suit :

$$m^y[y] = \sum_{\{i_1, i_2 \mid [y] = [x_1^{i_1}] * [x_2^{i_2}]\}} m_{i_1}^{x_1} m_{i_2}^{x_2}, \quad (5.68)$$

pour tout  $[y] \in \mathbb{I}\mathbb{R}$ , où  $m_{i_1}^{x_1} = m^{x_1}([x_1^{i_1}])$ .

**Exemple 5.4.** Soient  $m^{x_1}$  et  $m^{x_2}$  deux fonctions de masse définies par :

$$m^{x_1}([1, 2]) = 0.7 \quad , \quad m^{x_1}([0, 3]) = 0.3, \quad (5.69)$$

$$m^{x_2}([0, 1]) = 0.6 \quad , \quad m^{x_2}([0, 2]) = 0.4. \quad (5.70)$$

On souhaite modéliser la variable  $y = x_1 \exp(x_2)$ . La fonction de masse  $m^y$  sur  $y$  est définie par les équations suivantes :

$$m^y([1, 2] \exp([0, 1])) = m^y([1, 2e]) = 0.7 \times 0.6 = 0.42, \quad (5.71)$$

$$m^y([1, 2] \exp([0, 2])) = m^y([1, 2e^2]) = 0.7 \times 0.4 = 0.28, \quad (5.72)$$

$$m^y([0, 3] \exp([0, 1])) = m^y([1, 3e]) = 0.3 \times 0.6 = 0.18, \quad (5.73)$$

$$m^y([0, 3] \exp([0, 2])) = m^y([1, 3e^2]) = 0.3 \times 0.4 = 0.2. \quad (5.74)$$

Cette approche est facilement étendue au cas d'une fonction de  $n$  variables. Soit

$\mathbf{f}$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$y = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n). \quad (5.75)$$

Supposons que la connaissance sur la variable  $x_i$  soit représentée par une fonction de masse  $m^{x_i}$  avec  $n_i$  intervalles focaux  $\{[x_i^{j_i}]\}_{j_i=1, \dots, n_i}$ . La masse  $m^y$  de  $y$  est définie, sous l'hypothèse d'indépendance, par la formule suivante :

$$m^y[y] = \sum_{\{i_1, \dots, i_n \mid [y] = \mathbf{f}([x_1^{i_1}], \dots, [x_n^{i_n}])\}} m_{i_1}^{x_1} \dots m_{i_n}^{x_n}. \quad (5.76)$$

Un problème majeur de la théorie de croyance est sa complexité de calcul. En effet, avec l'approche présentée ci-dessus, le nombre d'éléments focaux pour représenter une fonction de  $n$  variables augmente exponentiellement en fonction de  $n$ . Une solution pour réduire cette complexité est de diminuer le nombre d'éléments focaux en groupant ceux qui sont similaires ou de petite masse. Cette stratégie est l'idée générale de la méthode de *regroupement* [Lowrance 2008]. Plus précisément, soit  $m$  une fonction de masse sur un univers  $\Omega$  avec  $p$  éléments focaux  $A_1, \dots, A_p$ ,  $p > 1$ . La masse de  $A_i$  est notée par  $m_i$ . Supposons que  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_p$ . On ne souhaite conserver que  $q$  éléments focaux, où  $1 \leq q < p$ . Une fonction de masse  $m'$  avec  $q$  éléments focaux peut être construite comme suit :

$$m'(A_i) = m_i, \quad i = 1, \dots, q-1, \quad (5.77)$$

$$m'(A_0) = \sum_{i=q}^p m_i, \quad (5.78)$$

où  $A_0$  est défini par  $\cup_{i=q}^p A_i$  si  $A_i$  sont des ensembles, ou  $\text{hull}(A_q, \dots, A_p)$  si  $A_i$  sont des intervalles ou boîtes.

Après avoir étendu l'analyse par intervalles à la théorie de croyance, [Nassreddine 2010] propose un algorithme d'estimation d'état par la croyance (Belief State Estimation (BSE) en anglais). Le système considéré est non linéaire :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k), \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k). \end{cases} \quad (5.79)$$

L'algorithme est divisé en sous-étapes comme suit :

– **Propagation :**

Soient  $p_k^{\mathbf{x}}, p_k^{\mathbf{u}}, p_k^{\mathbf{w}}, p_{k+1}^{\mathbf{y}}$  et  $p_{k+1}^{\mathbf{y}}$  les nombres d'éléments focaux des fonctions de masse  $m_k^{\mathbf{x}}, m_k^{\mathbf{u}}, m_k^{\mathbf{w}}, m_{k+1}^{\mathbf{y}}$  et  $m_{k+1}^{\mathbf{y}}$  représentant la connaissance, respectivement, sur l'état, l'entrée, le bruit de dynamique, l'erreur de mesure et la mesure. En appliquant la formule 5.76, la fonction de masse  $m_{k+1}^{\mathbf{x}}$  est définie

pour tout  $[\mathbf{x}_k^i] \in \mathbb{IR}^{n_x}$  par la formule suivante :

$$m_{k+1}^{\mathbf{x}}([\mathbf{x}_k^i]) = \sum_{i_{\mathbf{x}}, i_{\mathbf{u}}, i_{\mathbf{w}}, i_{\mathbf{v}}, i_{\mathbf{y}} | [\mathbf{x}] = \mathcal{C}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{x}_k^{i_{\mathbf{x}}}], [\mathbf{u}_k^{i_{\mathbf{u}}}], [\mathbf{w}_k^{i_{\mathbf{w}}}], [\mathbf{v}_{k+1}^{i_{\mathbf{v}}}], [\mathbf{y}_{k+1}^{i_{\mathbf{y}}}]})} m_{k, i_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{x}} \cdot m_{k, i_{\mathbf{u}}}^{\mathbf{u}} \cdot m_{k, i_{\mathbf{w}}}^{\mathbf{w}} \cdot m_{k+1, i_{\mathbf{v}}}^{\mathbf{v}} \cdot m_{k+1, i_{\mathbf{y}}}^{\mathbf{y}} \quad (5.80)$$

où  $m_{k, i_{\mathbf{a}}}^{\mathbf{a}} = m_k^{\mathbf{a}}([\mathbf{a}_k^i])$ ,  $\mathbf{a}$  représentant la variable ;  $i_{\mathbf{x}} \in \{1, \dots, p_k^{\mathbf{x}}\}$ ,  $i_{\mathbf{u}} \in \{1, \dots, p_k^{\mathbf{u}}\}$ ,  $i_{\mathbf{w}} \in \{1, \dots, p_k^{\mathbf{w}}\}$ ,  $i_{\mathbf{v}} \in \{1, \dots, p_{k+1}^{\mathbf{v}}\}$  et  $i_{\mathbf{y}} \in \{1, \dots, p_{k+1}^{\mathbf{y}}\}$ . Ici,  $\mathcal{C}$  est un contracteur de l'ensemble des contraintes  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{h}$ .

– **Normalisation :**

Lorsque la fonction de masse  $m_{k+1}^{\mathbf{x}}$  est calculée, elle est ensuite normalisée. Cette étape consiste à diviser la masse de chaque élément focal non vide par  $1 - m_{k+1}^{\mathbf{x}}(\emptyset)$  et imposer  $m_{k+1}^{\mathbf{x}}(\emptyset) = 0$ .

– **Regroupement :**

Le nombre d'éléments focaux de  $m_{k+1}^{\mathbf{x}}$  est  $p_k^{\mathbf{x}} \cdot p_k^{\mathbf{u}} \cdot p_k^{\mathbf{w}} \cdot p_{k+1}^{\mathbf{v}} \cdot p_{k+1}^{\mathbf{y}}$ . Afin de conserver un nombre d'éléments focaux  $p_{k+1}^{\mathbf{x}}$  choisi par l'utilisateur, la méthode de regroupement est appliquée.

– **Estimation :**

Dans cette étape, les espérances intervalle et pignistique de la fonction de masse  $m_{k+1}^{\mathbf{x}}$  sont déterminées (voir chapitre 3) :

$$[\mathbb{E}](m_{k+1}^{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^p m_{k+1, i}^{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{x}_{k+1}^i], \quad (5.81)$$

$$\mathbb{E}(m_{k+1}^{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^p m_{k+1, i}^{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{k+1}^i, \quad (5.82)$$

où  $m_{k+1, i}^{\mathbf{x}} = m_{k+1}^{\mathbf{x}}([\mathbf{x}_{k+1}^i])$  et  $\mathbf{C}_{k+1}^i$  est le centre de  $i$ -ième élément focal de  $m_{k+1}^{\mathbf{x}}$ .

Une itération du filtre ensembliste par la théorie de croyance (BSE) est résumée dans l'algorithme 5.3.

---

**Algorithme 5.3** Filtre ensembliste par théorie de croyance (BSE)

---

**Entrées:**  $m_k^x, m_k^u, m_k^w, m_k^v, p_k^x, p_k^u, p_k^w, p_k^v, p_{k+1}^x, p_{k+1}^u, p_{k+1}^w, p_{k+1}^v$  et  $p_{k+1}^x$

**Sorties:**  $m_{k+1}^x, [\mathbb{E}](m_{k+1}^x), \mathbb{E}(m_{k+1}^x)$

$i \leftarrow 0$ .

**Propagation :**

**pour**  $i_x = 1$  à  $p_k^x$  **faire**

**pour**  $i_u = 1$  à  $p_k^u$  **faire**

**pour**  $i_w = 1$  à  $p_k^w$  **faire**

**pour**  $i_v = 1$  à  $p_{k+1}^v$  **faire**

**pour**  $i_y = 1$  à  $p_{k+1}^y$  **faire**

$i \leftarrow i + 1$ ,

$[\mathbf{x}_{k+1}^i] = \mathcal{C}(\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{x}_k^{i_x}], [\mathbf{u}_k^{i_u}], [\mathbf{w}_k^{i_w}], [\mathbf{v}_{k+1}^{i_v}], [\mathbf{y}_{k+1}^{i_y}])$ .

$m_{k+1}^x([\mathbf{x}_{k+1}^i]) = m_{k,i_x}^x \cdot m_{k,i_u}^u \cdot m_{k,i_w}^w \cdot m_{k,i_v}^v$ .

**fin pour**

**fin pour**

**fin pour**

**fin pour**

**fin pour**

**Normalisation :** diviser la masse de chaque élément focal non vide par  $1 - m_{k+1}^x(\emptyset)$  et imposer  $m_{k+1}^x(\emptyset) = 0$ .

**Regroupement :** regrouper les éléments focaux de  $m_{k+1}^x$  pour conserver  $p_{k+1}^x$  éléments focaux.

**Estimation :**

$$[\mathbb{E}](m_{k+1}^x) = \sum_{i=1}^p m_{k+1,i}^x \cdot [\mathbf{x}_{k+1}^i],$$

$$\mathbb{E}(m_{k+1}^x) = \sum_{i=1}^p m_{k+1,i}^x \mathbf{C}_{k+1}^i.$$


---

### 5.4.3 Filtre particulière ensembliste avec des distributions gaussiennes incertaines

Dans cette section, nous proposons un algorithme de filtrage particulière ensembliste pour des systèmes non-linéaires dans lesquels les bruits dynamiques sont bornés. Les erreurs de mesure du système sont modélisées par une distribution gaussienne multivariée dont la moyenne et la matrice de covariance sont considérées comme des intervalles. L'approche proposée, appelée *Evidential Box Particle Filter* (EBPF) en anglais, se base sur la représentation d'une distribution gaussienne incertaine par une fonction de masse avec un nombre infini de boîtes focales qui satisfait le principe d'engagement minimal de la théorie de croyance (voir Chapitre 3).

Considérons le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k), \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (5.83)$$

où  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  and  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$  sont l'état, l'entrée et la mesure. Le bruit dynamique  $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$  est supposé être borné par une boîte  $[\mathbf{w}_k]$ . L'erreur de mesure  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$  est représentée par une distribution gaussienne  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , où  $\boldsymbol{\mu}$  and  $\boldsymbol{\Sigma}$  sont bornées :  $\boldsymbol{\mu} \in [\boldsymbol{\mu}]$ ,  $\boldsymbol{\Sigma} \in [\boldsymbol{\Sigma}]$ . L'état initial du système  $\mathbf{x}_0$  appartient à une boîte  $[\mathbf{x}_0]$ .

L'algorithme 5.4 présente les différentes étapes de la méthode :

– **Initialisation :**

La région initiale  $[\mathbf{x}_0]$  de l'espace d'état est divisée en  $N$  boîtes  $\{[\mathbf{x}_0^i]\}_{i=1,\dots,N}$  mutuellement disjointes, de même volume et de même poids  $\omega_0^i = 1/N$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ .

– **Prédiction :**

Dans cette étape, les particules à l'instant  $k+1$  sont construites par l'équation de propagation suivante :

$$[\mathbf{x}_{k+1}^i] = [\mathbf{f}] \left( [\mathbf{x}_k^i], [\mathbf{u}_k], [\mathbf{w}_k] \right), \quad (5.84)$$

où  $[\mathbf{f}]$  est une fonction d'inclusion de  $\mathbf{f}$ . On détermine également les boîtes de mesure correspondantes comme suit :

$$[\mathbf{y}_{k+1}^i] = [\mathbf{h}] \left( [\mathbf{x}_{k+1}^i] \right), \quad (5.85)$$

où  $[\mathbf{h}]$  est une fonction d'inclusion de  $\mathbf{h}$ .

– **Correction :**

La fonction de masse  $m(\cdot; [\boldsymbol{\mu}], [\boldsymbol{\Sigma}])$  correspondant à la distribution gaussienne multivariée incertaine des erreurs de mesure est utilisée afin de calculer, pour chaque particule  $[\mathbf{x}_k^i]$ , un intervalle de probabilité  $[\underline{P}_k^i, \overline{P}_k^i]$  de la vraisemblance  $P(\mathbf{y}_k | [\mathbf{x}_k^i])$  par les formules suivantes :

$$\underline{P}_k^i = \text{bel}(\mathbf{y}_k - [\mathbf{y}_k^i]; [\boldsymbol{\mu}], [\boldsymbol{\Sigma}]), \quad (5.86)$$

$$\overline{P}_k^i = \text{pl}(\mathbf{y}_k - [\mathbf{y}_k^i]; [\boldsymbol{\mu}], [\boldsymbol{\Sigma}]). \quad (5.87)$$

où  $\mathbf{y}_k$  est le vecteur de mesures donné par les capteurs du système à l'instant  $k$ . Les calculs de la croyance et de la plausibilité sont détaillés dans la Section 3.6 du Chapitre 3.

Afin de conserver des volumes judicieux de boîtes, l'étape de contraction du filtre particulaire ensembliste (Section 5.4) est employée. Les erreurs de mesure sont supposées être bornées par la boîte de confiance de 99.7 % de la distribution gaussienne  $\mathcal{N}([\boldsymbol{\mu}], [\boldsymbol{\Sigma}])$  :

$$[\mathbf{v}_k] = \left[ \underline{\boldsymbol{\mu}} - 3\text{diag}(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}), \overline{\boldsymbol{\mu}} + 3\text{diag}(\overline{\boldsymbol{\Sigma}}) \right]. \quad (5.88)$$

Les particules sont contractées par la formule suivante :

$$[\tilde{\mathbf{x}}_k^i] = \mathcal{C}(\mathbf{h}, [\mathbf{x}_k^i], \mathbf{y}_k - [\mathbf{v}_k] - [\mathbf{y}_k^i]), \quad (5.89)$$

où  $\mathcal{C}$  est un contracteur des contraintes  $\mathbf{h}$ . Les boîtes qui sont incompatibles avec la boîte de mesures lors de cette étape de contraction sont éliminées. Celles qui ont des plausibilités  $pl$  plus petites qu'un seuil prédéfini  $\varepsilon_d$  sont également rejetées. Ces boîtes sont remplacées par celle possédant la valeur du centre de l'intervalle de probabilité  $[\underline{P}_k^i, \overline{P}_k^i]$  la plus grande.

Afin d'évaluer les poids des particules, le théorème de Bayes généralisé et la transformation pignistique sont utilisés pour déterminer les valeurs des masses des particules  $\{m_k^i\}_{i=1,\dots,N}$  à partir de leur plausibilité (voir Chapitre 3). Les poids des particules sont mis à jour par la formule suivante :

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \cdot m_k^i, \quad (5.90)$$

pour tout  $i = 1, \dots, N$ . Ils sont ensuite normalisés.

– **Estimation :**

Les espérances pignistique et intervalle de l'ensemble des boîtes sont déterminées par les formules 5.81 et 5.82. La variance de l'estimation est calculée par l'équation 5.67.

– **Redémarrage :**

Après un certain nombre d'itérations avec la stratégie d'élimination proposée ci-dessus, les bornes supérieures des intervalles de probabilité de toutes les boîtes approchent un. Ce phénomène signifie que toutes les innovations  $\mathbf{y}_k - [\mathbf{y}_k^i]$  sont proches de la boîte  $[\boldsymbol{\mu}]$ . Ainsi, nous proposons d'effectuer une étape de *redémarrage* lorsque les plausibilités des boîtes satisfont  $pl \geq 1 - \varepsilon_{pl}$ , où  $\varepsilon_{pl}$  est un paramètre choisi par l'utilisateur. Cette étape consiste à diviser la boîte hull  $[\mathbf{X}]$  de l'ensemble des particules en  $N$  boîtes mutuellement disjointes, de même taille et de même poids  $1/N$  afin d'avoir les boîtes plus petites sur la région de grande plausibilité.

---

**Algorithme 5.4** Filtre particulaire ensembliste avec une distribution gaussienne incertaine (EBPF)

---

**Initialization**

$k = 0$  : diviser la région initiale  $[\mathbf{x}_0]$  en  $N$  boîtes mutuellement disjointes de même taille et de même poids  $\omega_0^i = 1/N$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Choisir  $\varepsilon_d$ ,  $\varepsilon_{pl}$ .

**pour**  $k = 1, 2, \dots$  **faire**

**pour**  $i = 1$  à  $N$  **faire**

**Prédiction :**

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_{k+1}^i] &= [\mathbf{f}]([\mathbf{x}_k^i], [\mathbf{u}_k], [\mathbf{w}_k]), \\ [\mathbf{y}_{k+1}^i] &= [\mathbf{h}]([\mathbf{x}_{k+1}^i]). \end{aligned}$$

**Correction :**

- Calculer les intervalles de probabilité  $[\underline{P}_k^i, \overline{P}_k^i]$  : Equations (5.86) et (5.87).
- Contraction :

$$[\tilde{\mathbf{x}}_k^i] = \mathcal{C}(\mathbf{h}, [\mathbf{x}_k^i], \mathbf{y}_k - [\mathbf{v}_k] - [\mathbf{y}_k^i]),$$

    où  $\mathcal{C}$  est un contracteur des contraintes  $\mathbf{h}$ .

- Si  $[\tilde{\mathbf{x}}_k^i] = \emptyset$  ou  $\overline{P}_k^i < \varepsilon_d$ , alors éliminer  $[\tilde{\mathbf{x}}_k^i]$ .

**fin pour**

Remplacer les boîtes éliminées par la boîte avec la plus grande valeur  $(\underline{P}_k^i + \overline{P}_k^i)/2$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ . On a un nouvel ensemble de particules  $\{[\tilde{\mathbf{x}}_k^i], \tilde{\omega}_k^i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ .

**Estimation :**

- Appliquer le théorème de Bayes généralisé et la transformation pignistique pour déterminer les masses des boîtes  $m_k^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .
- Mise à jour des poids :  $\omega_k^i = \tilde{\omega}_k^i \cdot m_k^i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .
- Normalisation :  $\omega_k^i \leftarrow \omega_k^i / \left(\sum_{j=1}^N \omega_k^j\right)$ .
- Calculer les espérances pignistique et intervalle de l'ensemble des boîtes par les formules 5.81 et 5.82, calculer la variance de l'estimation par l'équation 5.67.

**Redémarrage :**

**Si**  $\overline{P}_k^i \geq 1 - \varepsilon_{pl}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ , **alors**

- $[\mathbf{X}] = \text{hull}([\mathbf{x}_k^i])$ .
- Diviser  $[\mathbf{X}]$  en  $N$  boîtes mutuellement disjointes de même taille.
- Poids :  $\omega_k^i = 1/N$ ,  $i = \{1, \dots, N\}$ .

**Fin Si.**

**fin pour**

---

### 5.4.4 Exemples numériques

Dans cette section, le filtre EBPF est appliqué à deux systèmes non-linéaires. Ses résultats sont comparés avec ceux du filtre BPF et du filtre BSE.

#### 5.4.4.1 Exemple 1

Considérons le système non-linéaire suivant [Durola 2008] :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{pmatrix} \alpha_{k,1} & 0 \\ 1 - \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} \end{pmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{pmatrix} \beta_{k,1} & 0 \\ 0 & \beta_{k,2} \end{pmatrix} \mathbf{u}_k + \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} x_{k,1} x_{k,2} \\ x_{k,2}^2 \end{pmatrix} + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (5.91)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{k,1} &= \frac{1}{200} \left( 0.2 + \frac{\mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\delta}_k}{20} \right) (100 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_k), & \beta_{k,1} &= \frac{200 + \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_k}{400}, \\ \alpha_{k,2} &= \frac{1}{200} \left( 0.2 + \frac{\mathbf{e}_2^T \boldsymbol{\delta}_k}{20} \right) (100 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{x}_k), & \beta_{k,2} &= \frac{200 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{x}_k}{400}. \end{aligned}$$

Ici,  $\mathbf{e}_1 = [-1 \ 1]^T$  and  $\mathbf{e}_2 = [1 \ 2]^T$ . Le paramètre  $\boldsymbol{\delta}_k$ , l'entrée  $\mathbf{u}_k$  et le bruit sur la dynamique  $\mathbf{w}_k$  sont bornés par les boîtes suivantes :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\delta}_k] &= ([-0.1, 0.1], [-0.1, 0.1])^T, \\ [\mathbf{u}_k] &= ([75, 85], [-35, -25])^T, \\ [\mathbf{w}_k] &= ([-0.1, 0.1], [-0.1, 0.1])^T. \end{aligned}$$

L'état initial est  $\mathbf{x}_0 = [90 \ 80]^T$ . Le système est simulé pendant 10000 pas de temps. La région initiale de l'état est définie par

$$[\mathbf{x}_0] = ([85, 103], [75, 91])^T. \quad (5.92)$$

L'erreur de mesure  $\mathbf{v}_k$  est représentée par une distribution gaussienne  $\mathcal{N}([\boldsymbol{\mu}_v], [\boldsymbol{\Sigma}_v])$ , où

$$[\boldsymbol{\mu}_v] = \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{\Sigma}_v] = \begin{pmatrix} [90, 200] & 0 \\ 0 & [90, 200] \end{pmatrix}. \quad (5.93)$$

Le nombre de particules est  $N = 9$ . Les paramètres de seuils du filtre EBPF sont choisis  $\varepsilon_d = 0.05$ ,  $\varepsilon_{pl} = 0.001$ .

Cet exemple numérique est également testé avec le filtre BPF proposé dans [Abdallah 2008] et le filtre particulaire ensembliste combiné avec des fonctions de masse finies présenté dans [Nassreddine 2010]. L'erreur de mesure dans le filtre BPF

est bornée par :

$$[\mathbf{v}_k] = \left[ -3\sqrt{\text{diag}(\overline{\Sigma}_v)}, 3\sqrt{\text{diag}(\overline{\Sigma}_v)} \right], \quad (5.94)$$

où  $\text{diag}(\overline{\Sigma}_v)$  est le vecteur des éléments diagonaux de la matrice  $\overline{\Sigma}_v$ . Pour le filtre BSE, l'erreur de mesure est représentée par une fonction de masse de 3 boîtes focales

$$[\mathbf{v}_k^i] = \left[ -i\sqrt{\text{diag}(\overline{\Sigma}_v)}, i\sqrt{\text{diag}(\overline{\Sigma}_v)} \right], \quad (5.95)$$

avec  $m([\mathbf{v}_k^i]) = 1/3$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Le nombre de boîtes focales peut être augmenté afin d'avoir une représentation plus précise de l'erreur de mesure. Cependant, cela augmente également la complexité du filtre BSE.

La performance des algorithmes de filtrage considérés est évaluée par un ensemble de critères. Premièrement, la borne supérieure de l'erreur moyenne quadratique  $\overline{RMSE}$  est définie par

$$\overline{RMSE} = \sup \left( \sqrt{\left( \sum_{k=1}^K (\mathbf{x}_k - [\hat{\mathbf{x}}_k])^T (\mathbf{x}_k - [\hat{\mathbf{x}}_k]) \right) / K} \right). \quad (5.96)$$

Dans l'équation 5.96,  $K$  représente le nombre de pas de temps,  $[\hat{\mathbf{x}}_k]$  est l'espérance intervalle. En plus, le pourcentage de temps  $O$  où l'enveloppe contient l'état réel est calculé. Cet indice permet de déterminer le degré de confiance des enveloppes obtenues. Afin d'évaluer le conservatisme des algorithmes, la largeur moyenne des enveloppes est considérée :

$$E_d^i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\overline{x_k^i} - \underline{x_k^i}) \quad , \quad i = 1, \dots, n_x. \quad (5.97)$$

où  $[\underline{x_k^i}, \overline{x_k^i}]$  est l'enveloppe du  $i$ -ième état fournie par le filtre considéré.

La comparaison des trois algorithmes basée sur les indices  $\overline{RMSE}$ ,  $O$ ,  $E_d$  et le temps de calcul est présentée dans le tableau 5.1. Notons que deux paires d'intervalles sont comparés

- Espérance intervalle du filtre BSE et du filtre EBPF,
- Intervalle de confiance de 99.7% du filtre BPF et du filtre EBPF.

Par conséquent, dans la colonne du filtre EBPF, il y a deux colonnes pour l'espérance intervalle et une pour l'intervalle de confiance. Les lignes relatives à  $E_d$  et au temps de calcul dans le tableau 5.1 expriment le rapport entre les résultats des filtres BPF et BSE et ceux du filtre EBPF.

Les résultats des filtres considérés sont présentés dans la figure 5.2. Les intervalles de confiance de 99.7% fournis par les filtres EBPF et BPF sont respectivement les lignes rouges marquées des cercles et les lignes noires. Les espérances intervalle des filtres EBPF et BSE sont représentées par les lignes rouges marquées des croix et les lignes vertes. Les enveloppes fournies par les filtres contiennent 100% l'état

réel (les lignes bleues). Néanmoins, le filtre EBPF réduit la largeur des enveloppes (en particulier dans le cas de  $x_{k,1}$ ). Ceci s'explique notamment par le fait que l'étape correction du filtre EBPF permet d'éliminer directement les boîtes incompatibles à la fois avec les incertitudes statistiques et bornées. Par ailleurs, l'étape redémarrage basée sur la plausibilité des boîtes permet de détecter le conservatisme de l'analyse par intervalles.

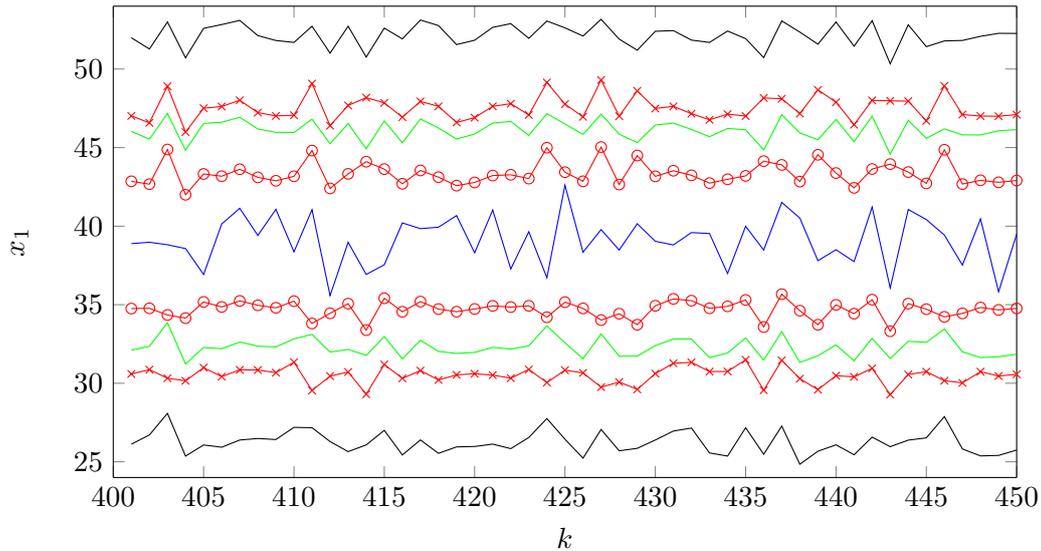
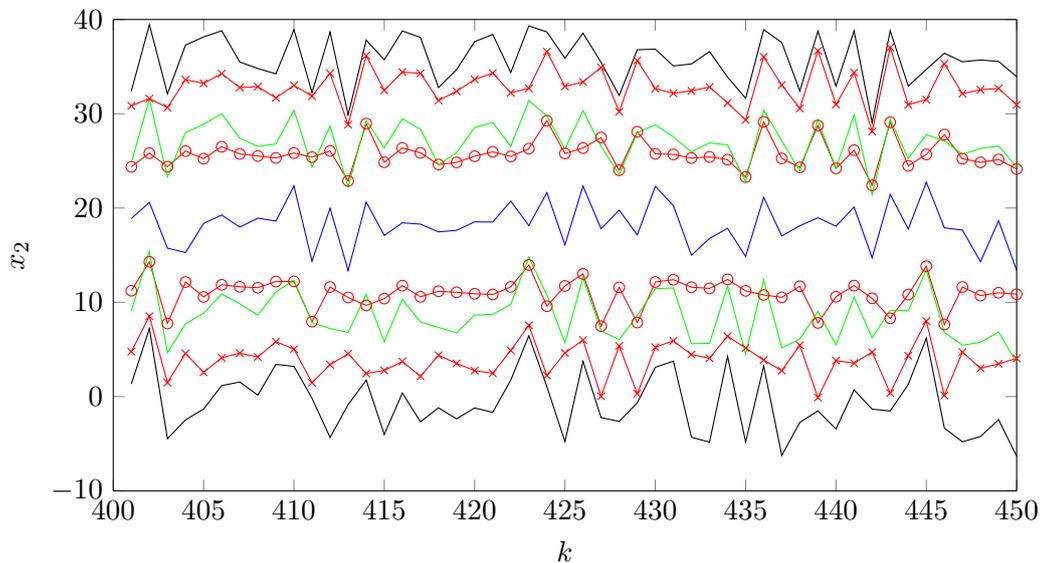
(a)  $x_1$ .(b)  $x_2$ .

FIGURE 5.2 – État réel, intervalle de confiance de 99.7% des filtres EBPF et BPF, espérance intervalle fournie par les filtre EBPF et BSE dans le cas de l'erreur de mesure gaussienne incertaine.

Afin de vérifier la robustesse du filtre EBPF, l'erreur de mesure est supposée bornée par  $[\mathbf{v}_k] = ([-10, 10], [-10, 10])^T$ . Ceci est équivalent à représenter  $\mathbf{v}_k$  par une fonction de masse  $m$  telle que  $m([\mathbf{v}_k]) = 1$ . La croyance et la plausibilité d'une boîte dans le filtre EBPF sont simplement déterminées en vérifiant l'intersection de l'innovation  $\mathbf{y}_k - [\mathbf{y}_k^i]$  et la boîte  $[\mathbf{v}_k]$ . Ainsi, le temps de calcul des filtres EBPF et BSE est plus petit que celui obtenu dans le cas de l'erreur de mesure gaussienne incertaine. Les résultats des filtres sont comparés dans la figure 5.3 et le tableau 5.2.

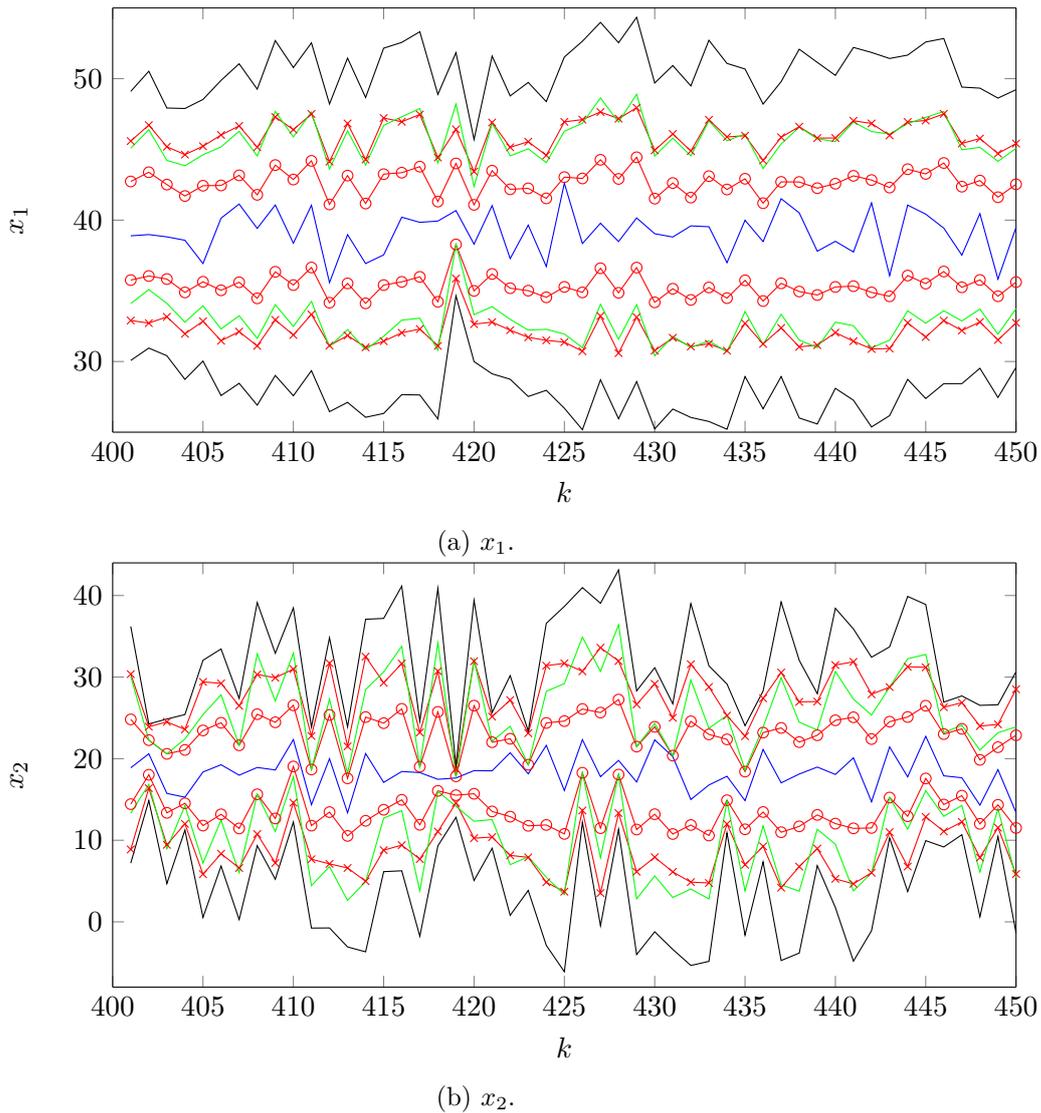


FIGURE 5.3 – État réel, intervalle de confiance de 99.7% des filtres EBPF et BPF, espérance intervalle fournie par les filtre EBPF et BSE dans le cas de l'erreur de mesure bornée.

Une itération du filtre EBPF avec l'étape redémarrage est illustrée dans la figure

TABLE 5.1 – Tableau comparatif des filtres dans le cas de l’erreur de mesure gaussienne incertaine

		EBPF		BPF	BSE
$x_1$	$\overline{RMSE}$	5.5816		8.7011	8.1197
	$O(\%)$	100	100	100	100
	$E_d(\%)$	100	196	300	160
$x_2$	$\overline{RMSE}$	8.9043		12.32556	10.9697
	$O(\%)$	100	100	100	100
	$E_d(\%)$	100	196	251	123
Temps (%)		100		73	101

TABLE 5.2 – Tableau comparatif des filtres dans le cas de l’erreur de mesure bornée

		EBPF		BPF	BSE
$x_1$	$\overline{RMSE}$	5.0988		8.3751	8.3751
	$O(\%)$	100	100	100	100
	$E_d(\%)$	100	194	318	183
$x_2$	$\overline{RMSE}$	7.3306		12.6788	12.6788
	$O(\%)$	100	100	100	100
	$E_d(\%)$	100	202	295	170
Temps (%)		100		95	95

5.4. Comme montré dans la figure 5.4b, dès que tous les boîtes de mesure prédites intersectent la boîte  $\mathbf{y}_k - [\mathbf{v}_k]$  (boîte rouge), la plausibilité de toutes les particules est égale à un. Le redémarrage est donc effectué afin d’obtenir un nouvel ensemble de boîtes de particules mutuellement disjointes dans la région de grande probabilité.

#### 5.4.4.2 Suivi d’un objet

Dans cet exemple, on considère le problème de suivi d’un objet dans l’espace de dimension 2 [Gning 2012]. Le vecteur d’état est composé des coordonnées  $(x_1, x_2)$  de l’objet et des vitesses  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ , i.e.  $\mathbf{x} = (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)^T$ . Le modèle de transition est linéaire :

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (5.98)$$

où  $A = I_2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2$  est la matrice d’identité de dimension  $2 \times 2$ ,  $\otimes$  est le produit de Kronecker,  $T = 0.1s$  est le temps d’échantillonnage. A l’instant  $k = 0$ , la position de l’objet est  $(2500, 1800)m$  et les composantes de sa vitesse sont  $(-5, -8.5)m/s$ . Le vecteur de bruits dynamiques est supposé être borné par la boîte suivante :

$$[\mathbf{w}_k] = ([-0.04, 0.04], [-0.67, 0.67], [-0.04, 0.04], [-0.67, 0.67])^T. \quad (5.99)$$

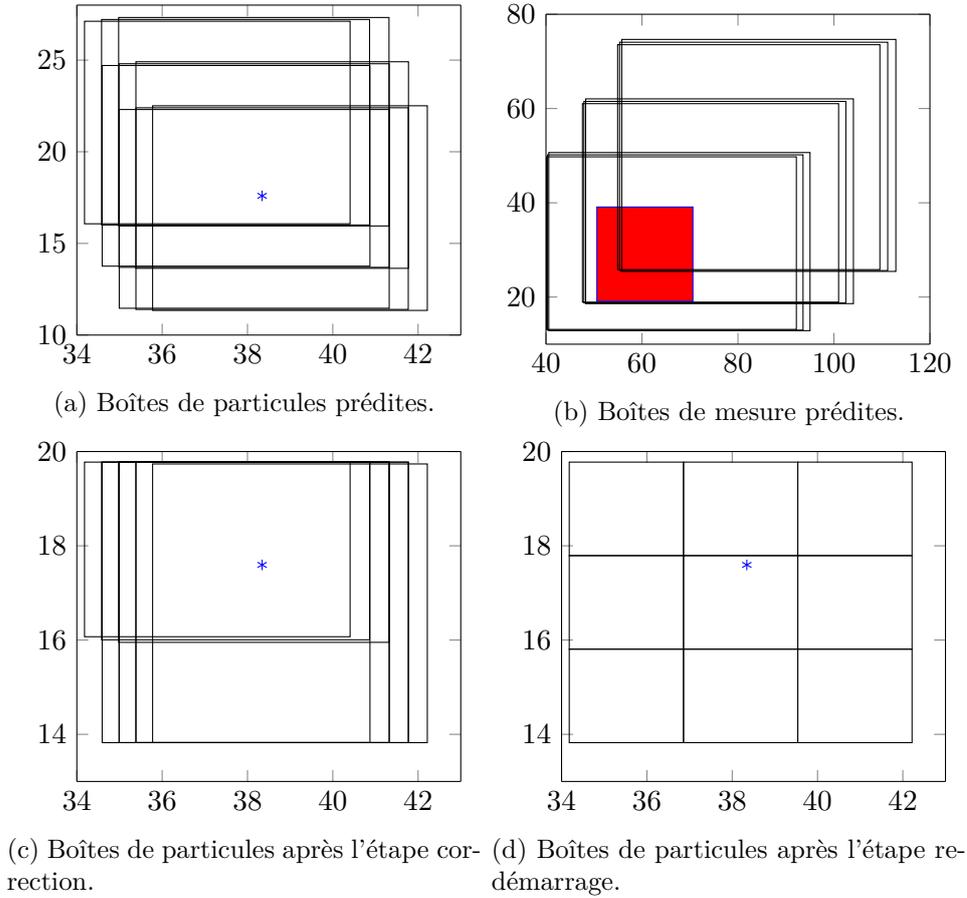


FIGURE 5.4 – Les boîtes de particules, les boîtes de mesure prédites, l'état réel (point bleu) et l'innovation  $\mathbf{y}_k - [\mathbf{v}_k]$  (boîte rouge) dans une itération du filtre EBPF.

Les mesures sont la distance entre l'objet et le capteur qui se situe à l'origine du repère, l'angle azimut et les vitesses. Les fonctions de mesure sont non-linéaires définies par :

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \arctan(x_2/x_1) \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{v}_k, \quad (5.100)$$

où les erreurs de mesure  $\mathbf{v}_k$  sont représentées par une distribution gaussienne multivariée de moyenne nulle et de matrice de covariance  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2)$ , où  $\sigma_1 = 5m$ ,  $\sigma_2 = 0.0044\text{rad}$ ,  $\sigma_3 = 1m/s$ ,  $\sigma_4 = 1m/s$ .

Afin d'illustrer les avantages de l'EBPF, supposons que la matrice de covariance des erreurs de mesure soit bornée par une matrice intervalle  $[\underline{\Sigma}, \bar{\Sigma}]$ , avec  $\underline{\Sigma} = 0.9\Sigma$  et  $\bar{\Sigma} = 5\Sigma$ , où  $\Sigma$  est la matrice de covariance réelle.

La région initiale de l'état est définie comme suit :

$$[\mathbf{x}_0] = ([2350, 2850], [-5.3, -4.3], [1692, 2052], [-9, -7.3])^T. \quad (5.101)$$

Le nombre de particules est  $N = 9$ . Les seuils d'élimination et de redémarrage du filtre  $\varepsilon_d$ ,  $\varepsilon_{pl}$  sont choisis égaux à 0.005.

Cet exemple numérique est également testé avec le filtre particulaire ensembliste (BPF) [Abdallah 2008] et le filtre s'appuyant sur la théorie de croyance (BSE) [Nassreddine 2010]. Dans BPF, les erreurs de mesure sont bornées par la boîte suivante :

$$[\mathbf{v}_k] = \left[ -3\sqrt{\mathbf{diag}(\bar{\Sigma})}, 3\sqrt{\mathbf{diag}(\bar{\Sigma})} \right], \quad (5.102)$$

où  $\mathbf{diag}(\bar{\Sigma})$  est la diagonale principale de la matrice  $\bar{\Sigma}$ . Pour l'approche BSE, les erreurs de mesure sont représentées par une fonction de masse avec 3 boîtes focales :

$$[\mathbf{v}_k^i] = \left[ -i\sqrt{\mathbf{diag}(\bar{\Sigma})}, i\sqrt{\mathbf{diag}(\bar{\Sigma})} \right], \quad (5.103)$$

où  $m([\mathbf{v}_k^i]) = 1/3$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Le nombre de boîtes focales peut être augmenté afin d'avoir une représentation plus précise, ce qui augmente la complexité du filtre.

Puisque les calculs d'intervalles d'état du BPF et de la BSE sont différents, le EBPF calcule à la fois l'intervalle de confiance comme proposé dans [Abdallah 2008] et l'espérance intervalle proposée par [Nassreddine 2010].

Les intervalles donnés par les trois approches considérées englobent les états réels, comme montré dans la figure 5.5. Les lignes bleues indiquent les états réels. Les intervalles de confiance de 99.7% fournis par les filtres EBPF et BPF sont respectivement les lignes vertes et noires. Les espérances intervalle des filtres EBPF et BSE sont représentées par les lignes rouges et roses. L'EBPF fournit des intervalles plus serrés car il combine la technique de satisfaction de contraintes et la fonction de masse qui est une meilleure représentation d'une distribution gaussienne incertaine qu'une fonction de masse finie. En outre, l'étape de ré-échantillonnage du BPF consiste en un échantillonnage aléatoire qui augmente inévitablement les incertitudes. Dans l'EBPF, les boîtes de petite plausibilité ou incompatibles avec les mesures selon la technique de satisfaction de contraintes sont remplacées directement par la boîte de particules avec la plus grande moyenne de croyance et plausibilité. En présence d'une dégénérescence d'intervalles de probabilité, c'est-à-dire lorsque toutes les bornes supérieures approchent un, l'étape de redémarrage de l'EBPF génère un nouvel ensemble de boîtes mutuellement disjointes, et cela contribue à enlever des boîtes incompatibles dans les itérations suivantes. Le redémarrage correspond dans la figure 5.5 aux moments où la largeur de l'espérance intervalle est réduite. Cela montre que cette étape permet de réduire le pessimisme du filtre.

La performance des filtres est comparée dans le tableau 5.3. Les lignes  $E_d$  et le temps de calcul exprime le rapport entre les résultats des filtres BPF et BSE et ceux du filtre EBPF. Puisque le filtre EBPF fournit les enveloppes plus serrés qui suivent

l'état réel, son erreur moyenne quadratique majorante est plus petite que celles du filtre BPF et du filtre BSE, en particulier dans les cas de  $x_1$  et  $x_2$ . Le filtre EBPF a moins besoin de temps de calcul que le filtre BSE en raison de la complexité du filtre BSE. En effet, le filtre BSE traite la combinaison entre  $N_b$  particules et  $N_v$  éléments focaux de la fonction de mass représentant l'erreur de mesure. Ceci est équivalent aux calculs pour  $N_b \times N_v$  particules dans les filtres BPF et EBPF.

TABLE 5.3 – Tableau comparatif des filtres dans l'exemple de suivi d'un objet en 2D

		EBPF		BPF	BSE
$x_1$	$\overline{RMSE}$	27.4146		260.5443	209.3072
	$O(\%)$	99	100	100	100
	$E_d(\%)$	100	323	1556	700
$x_2$	$\overline{RMSE}$	35.5835		268.7699	213.6892
	$O(\%)$	98	100	100	100
	$E_d(\%)$	100	315	1367	611
$\dot{x}_1$	$\overline{RMSE}$	22.4888		23.1896	23.1498
	$O(\%)$	100	100	100	100
	$E_d(\%)$	100	173	184	105
$\dot{x}_2$	$\overline{RMSE}$	31.9545		33.7198	33.3622
	$O(\%)$	100	100	100	100
	$E_d(\%)$	100	173	179	103
Temps (%)		100		83	185

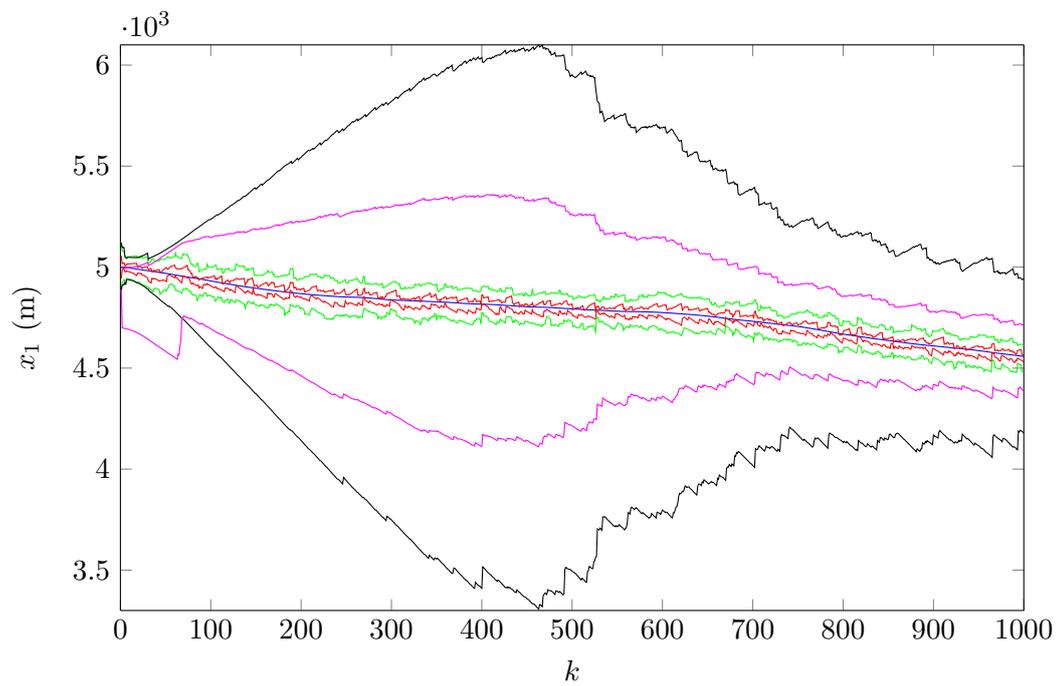
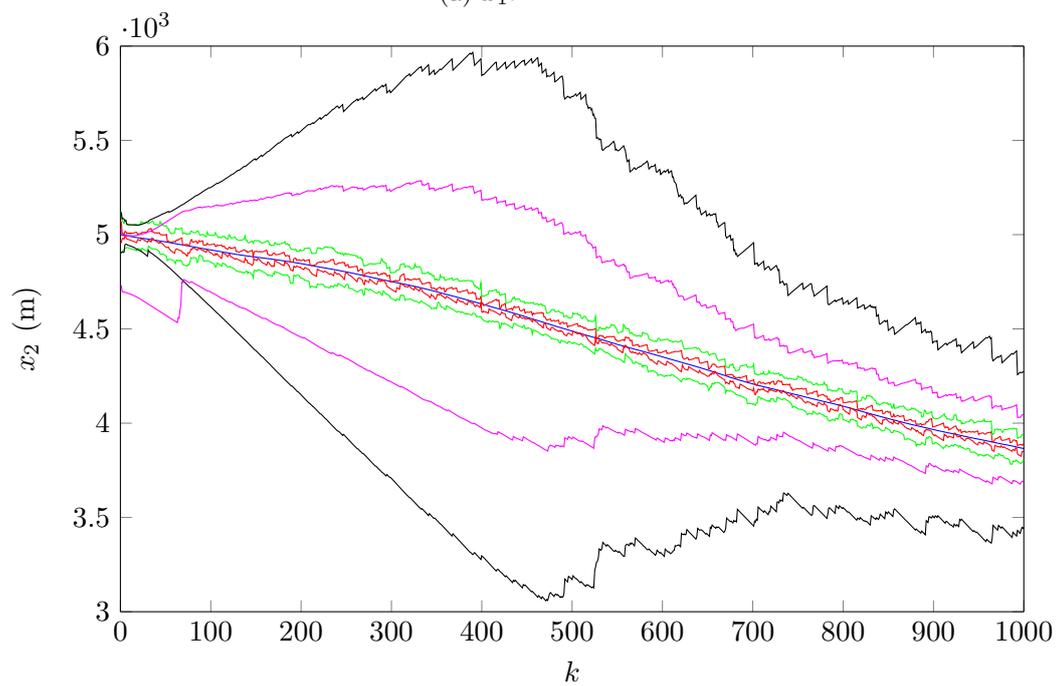
(a)  $x_1$ .(b)  $x_2$ .

FIGURE 5.5 – Etat réel, intervalle de confiance de 99.7% donné par le filtre EBPF et par le filtre BPF, espérance intervalle fournie par le filtre EBPF et par le filtre BSE dans le cas de l'erreur de mesure gaussienne incertaine.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une description théorique des filtres particulaires a été présentée. Ils sont fondés sur l'utilisation répétée de l'échantillonnage pondéré, une technique d'intégration de Monte Carlo qui permet la construction d'une estimation empirique de la loi a posteriori  $\pi_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$  à partir de tirages selon une loi d'importance  $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_k)$  choisie. Afin d'obtenir une solution séquentielle, la loi d'importance qui permet de faire évoluer les particules dans l'espace d'état, est supposée avoir une forme récursive. Cependant, cette forme particulière introduit des erreurs du fait de l'écart avec la distribution a posteriori menant à une dégénérescence des particules. L'introduction d'une étape de ré-échantillonnage permet de limiter cette dégénérescence en sélectionnant les particules de poids fort. Le ré-échantillonnage induisant une perte de diversité de particules et introduisant des incertitudes avec l'échantillonnage aléatoire, la réalisation de cette étape ne se fera que si un critère mesurant la dégénérescence de poids des particules est satisfait. Plusieurs choix de la distribution d'importance et de techniques de ré-échantillonnage ont été décrits. L'influence de ces choix et du modèle dynamique du système sur la convergence du filtre particulaire a été présentée. En résumé, lorsque la densité  $K(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  et la fonction de vraisemblance  $g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  sont bornées et qu'une des stratégies de ré-échantillonnage standard (multinomiale, résiduelle, stratifiée) est choisie, le filtre particulaire garantit la  $L^p$ -convergence de la distribution empirique  $\pi_{k|k}^N$  vers celle réelle a posteriori pour une classe de fonctions à estimer non bornées  $\varphi \in L_k^p(g)$ .

Ensuite, les extensions du filtre particulaire dans le contexte à erreurs bornées ont été considérées. Ces extensions présentent l'avantage d'estimer précisément le vecteur d'état en conservant la propriété de garantie de l'approche à erreurs bornées. Elles sont aussi indépendantes de la non linéarité du système. Le filtre particulaire ensembliste est basé sur la représentation des incertitudes par des intervalles et est une solution pour réduire significativement le nombre de particules. Afin d'éviter le pessimisme du filtre particulaire ensembliste lié à la difficulté de déterminer les bornes des incertitudes, la théorie de croyance est introduite dans l'estimation. Cette approche consiste à représenter des variables par des fonctions de masse avec un nombre fini d'éléments focaux. Ces fonctions de masse sont propagées à travers le modèle dynamique du système par les techniques de satisfaction de contraintes. L'augmentation du nombre d'éléments focaux des fonctions de masse permet de mieux représenter les variables. Cependant, elle augmente également le temps de calcul de cette approche qui a une complexité exponentielle.

Enfin, nous avons proposé un algorithme de filtrage particulaire ensembliste combiné avec une fonction de masse induite par une distribution gaussienne multivariée incertaine dont les paramètres sont bornés. La fonction de masse proposée possède un nombre infini d'éléments focaux et permet de déterminer, pour chaque particule, un intervalle de probabilité encadrant la vraisemblance  $p(\mathbf{y}_k | [\mathbf{x}_k^i])$ . Lorsque les bornes supérieures de ces intervalles de probabilité sont proches de l'unité, les boîtes de particules sont redistribuées afin d'avoir les boîtes de particules de plus

faible volume sur la région de grande plausibilité. Cette étape de redémarrage permet de réduire le pessimisme du filtre, comme montré dans un exemple non-linéaire et dans une application de suivi d'un objet dans le plan de dimension 2.



# Détection et isolation de défauts

---

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>139</b>
<b>6.2</b>	<b>Détection de défauts à base du filtre de Kalman intervalle</b>	<b>141</b>
6.2.1	Détection de défaut par un test du $\chi^2$	141
6.2.2	Détection de défauts par une approche ensembliste	143
<b>6.3</b>	<b>Isolation de défauts à base de filtre de Kalman intervalle</b>	<b>145</b>
6.3.1	Isolation de défauts capteurs	145
6.3.2	Isolation de défauts actionneurs par l'analyse structurelle	148
<b>6.4</b>	<b>Exemple numérique</b>	<b>152</b>
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>156</b>

---

## 6.1 Introduction

Depuis les premiers travaux précurseurs de Beard et Jones ([Beard 1971], [Jones 1973]) où la notion de filtre de détection a été introduite pour la première fois, de nombreuses techniques et méthodes ont été développées pour résoudre des problèmes de diagnostic à base de modèle. Le principe du diagnostic à base d'observateur consiste à évaluer les écarts entre les mesures réelles du système et les mesures prédites à l'aide d'un observateur/filtre. Ces écarts, appelées innovations, sont ensuite traités par un test de décision de façon à fournir des indicateurs de diagnostic.

La démarche du diagnostic à base d'observateur suppose la disponibilité d'une caractérisation de l'ensemble des sources d'incertitude affectant le modèle du système, généralement sous la forme stochastique ou/et bornée. Dans le cas d'une modélisation d'état, il s'agit de caractériser le bruit d'état (connaissance imparfaite du modèle), l'erreur de mesure (imperfection des chaînes de capteurs) et l'incertitude paramétrique. Lorsque la représentation stochastique des incertitudes est prise en compte, les techniques à base de filtres stochastiques (filtre de Kalman et ses variantes non-linéaires, filtre particulière) sont largement utilisées pour concevoir des méthodes de diagnostic ([Vural 2016], [Brucet 2015], [Hajiyev 2003], [Zhao 2014], [Alrowaie 2012], [Souibgui 2011]). Cette approche fournit une approximation de la densité de probabilité a posteriori de l'état sachant des mesures bruitées. La séquence des innovations donnée par un filtre stochastique doit donc satisfaire certaines propriétés probabilistes liées à cette approximation. Par conséquent, le prin-

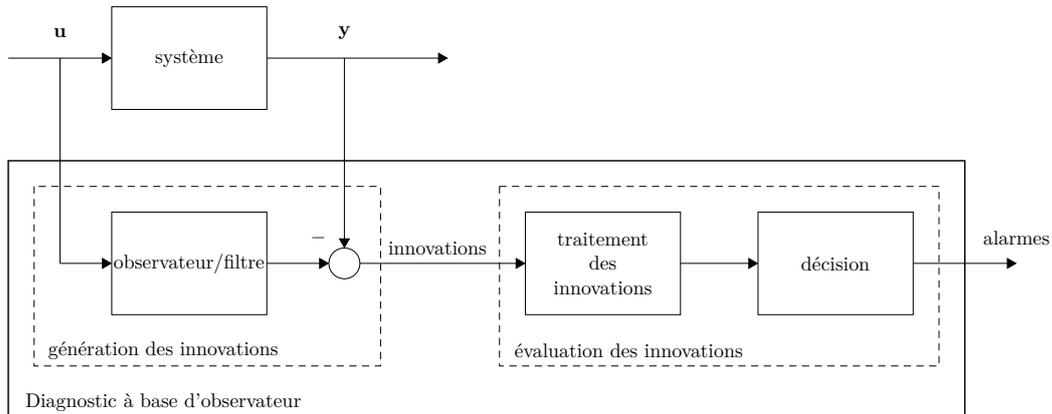


FIGURE 6.1 – Schéma de principe du diagnostic à base d'observateur

cipe du diagnostic à base de filtre stochastique est de vérifier ces propriétés afin de détecter et localiser des phénomènes anormaux dans le système.

Dans certaines conditions, la description des incertitudes en termes stochastiques pourrait s'avérer insuffisante. Par exemple, une erreur de biais, ou certaines dynamiques mal connues peuvent plus naturellement être décrites et caractérisées à partir d'une approche ensembliste. Fondamentalement, les approches ensemblistes placent le diagnostic dans un contexte à erreurs bornées, où les incertitudes sont englobées par des ensembles compacts, par exemple : intervalles ([Gning 2007]), ellipsoïdes [Milanese 2002], zonotopes ([Combastel 2005], [Combastel 2015]). Elles fournissent des ensembles compacts contenant toutes les valeurs des états compatibles avec le modèle du système et des incertitudes. Les techniques ensemblistes de diagnostic sont basées sur l'évaluation de la consistance entre l'ensemble des comportements attendus du système et les mesures prélevées à l'aide des capteurs. Cette consistance est souvent interprétée en terme d'appartenance des mesures aux domaines estimés ou observés en utilisant un modèle.

Ce chapitre a pour but de présenter l'application du filtre UBIKF à la détection et l'isolation de défauts dans un système linéaire incertain. Tout d'abord, la détection de défauts par une approche stochastique et par une méthode ensembliste est présentée et comparée dans la section 6.2. L'isolation de défauts capteurs/actionneurs est ensuite développée dans la section 6.3. Enfin, l'efficacité de l'algorithme de détection et d'isolation de défauts est illustrée et analysée au travers deux exemples dans la section 6.4.

## 6.2 Détection de défauts à base du filtre de Kalman intervalle

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= C_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$  est le vecteur d'état,  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  est le vecteur d'entrée,  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur de mesure.  $A_k, B_k, C_k$  sont les matrices de dimensions appropriées.  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont deux séquences de bruit gaussien, indépendantes, de matrices de covariance  $Q_k, R_k$  respectivement.

L'influence des défauts actionneur/capteur peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k + G_k \mathbf{f}_k^a \\ \mathbf{y}_k &= C_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k + \mathbf{f}_k^c, \end{cases} \quad (6.2)$$

où  $\mathbf{f}_k^a \in \mathbb{R}^{n_{fa}}$  et  $\mathbf{f}_k^c \in \mathbb{R}^{n_{fc}}$  sont les vecteurs de défaut actionneur et capteur,  $G_k$  est la matrice connue de dimension appropriée. Dans le cas de biais actionneur, la matrice  $G_k$  est liée à  $B_k$ . Par exemple, si chaque actionneur est affecté par un biais, alors  $\mathbf{u}_k$  devient  $\mathbf{u}_k + \boldsymbol{\theta}$ . Donc :  $B_k(\mathbf{u}_k + \boldsymbol{\theta}) = B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{f}_k^a$  avec  $G_k = B_k$ . Pour des défauts affectant les gains des actionneurs,  $G_k$  est liée à  $\mathbf{u}_k$ . Par exemple, si chaque actionneur est influencé par une perte de gain, alors  $\mathbf{u}_k$  devient  $(I - \text{diag}(\mathbf{f}_k^a))\mathbf{u}_k$ , où  $\text{diag}(\mathbf{f}_k^a)$  est la matrice diagonale formée par le vecteur  $\mathbf{f}_k^a$  et  $I$  est la matrice identité. Donc :  $B_k(I - \text{diag}(\mathbf{f}_k^a))\mathbf{u}_k = B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{f}_k^a$ , avec  $G_k = -B_k \text{diag}(\mathbf{u}_k)$  [Zhang 2014].

### 6.2.1 Détection de défaut par un test du $\chi^2$

La détection de défauts à base du filtre de Kalman est basée sur une propriété probabiliste de la séquence d'innovation. Dans le cas d'un système linéaire gaussien, la séquence d'innovation est également gaussienne. Ainsi, la moyenne et la matrice de covariance doivent être déterminées pour décrire complètement les propriétés statistiques de la séquence d'innovation [Hajiyev 2003].

**Propriété 6.1.** L'innovation du filtre de Kalman définie par :

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_k - C_k \hat{\mathbf{x}}_k^-, \quad (6.3)$$

est gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance  $S_k$  [Hajiyev 2003] :

$$S_k = C_k P_k^- C_k^T + R_k. \quad (6.4)$$

lorsque le système fonctionne normalement. Ici,  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  et  $P_k^-$  sont l'état prédit et la matrice de covariance de l'erreur de prédiction du filtre de Kalman.

Les défauts, qui changent la dynamique du système, changent également la ca-

ractéristique de l'innovation  $\mathbf{r}_k$ . Plus précisément, les défauts déplacent la moyenne de l'innovation, qui est théoriquement zéro, et changent sa matrice de covariance.

Afin de détecter un changement de la moyenne de la séquence d'innovations, la fonction statistique suivante est utilisée [Willsky 1976] :

$$\beta_k = \sum_{i=k-W+1}^k \mathbf{r}_i^T S_k^{-1} \mathbf{r}_i, \quad (6.5)$$

où  $W$  est la taille de la fenêtre. Cette fonction statistique suit la loi  $\chi^2$  à  $Wn_y$  degrés de liberté. Les deux hypothèses à considérer sont :

- $H_0$  : le système fonctionne normalement,
- $H_1$  : un défaut apparaît dans le système.

L'hypothèse  $H_1$  est vérifiée avec un niveau de confiance  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) si la valeur de  $\beta_k$  est plus grande que le seuil  $\delta$  défini par

$$P(X \leq \delta) = \alpha, \quad (6.6)$$

où  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi  $\chi_{Wn_y}^2$ . Autrement dit, les conditions à vérifier deviennent :

- $H_0$  :  $\beta_k \leq \delta$ ,
- $H_1$  :  $\beta_k > \delta$ .

Dans le cas de l'UBIKF, l'approche stochastique est applicable. Considérons le système linéaire incertain suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k + G_k \mathbf{f}_k^a \\ \mathbf{y}_k &= C_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k + E_k \mathbf{f}_k^c, \end{cases} \quad (6.7)$$

où  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont deux séquences de bruit gaussien, indépendantes, de matrices de covariance  $Q_k$ ,  $R_k$  respectivement. Les paramètres du système sont bornés par des intervalles. L'innovation donnée par l'UBIKF devient une variable intervalle et satisfait la propriété 6.2.

**Propriété 6.2.** L'innovation de l'UBIKF définie par :

$$[\mathbf{r}_k] = \mathbf{y}_k - [C_k] [\hat{\mathbf{x}}_k^-], \quad (6.8)$$

contient toutes les valeurs possibles de l'innovation  $\mathbf{r}_k$  définie par l'équation 6.3. Puisque l'innovation  $\mathbf{r}_k$  est gaussienne, sa matrice de covariance est dominée par la matrice  $\mathcal{S}_k$  :

$$\mathcal{S}_k \succeq [S_k] = [C_k] \mathcal{P}_k^- [C_k]^T + [R_k], \quad (6.9)$$

où  $[\hat{\mathbf{x}}_k^-]$  et  $\mathcal{P}_k^-$  sont l'état prédit et la matrice de covariance de l'erreur de prédiction de l'UBIKF.

La matrice  $\mathcal{S}_k$  est déterminée par le calcul d'une matrice symétrique définie positive dominant une matrice intervalle symétrique présenté dans le chapitre 4. La

propriété 6.2 permet de déterminer une borne inférieure de la fonction statistique  $\beta_k$  qui est utile pour la détection de défauts.

**Remarque 6.1.** L'intervalle  $[\beta_k]$  défini par :

$$[\beta_k] = [\mathbf{r}_k]^T \mathcal{S}_k^{-1} [\mathbf{r}_k], \tag{6.10}$$

englobe toutes les valeurs possibles de  $\beta_k$ ,  $\forall \mathbf{r}_k \in [\mathbf{r}_k]$ . D'autre part, la borne inférieure de  $[\beta_k]$  est plus petite que toutes les valeurs possibles de  $\beta_k = \mathbf{r}_k^T S_k^{-1} \mathbf{r}_k$ , pour tout  $\mathbf{r}_k \in [\mathbf{r}_k]$  et  $S_k \in [S_k]$  définie positive :

$$\inf([\beta_k]) \leq \mathbf{r}_k^T S_k^{-1} \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \in [\mathbf{r}_k], S_k \in [S_k]. \tag{6.11}$$

En effet, puisque  $S_k \preceq \mathcal{S}_k$  pour tout  $S_k$  appartenant à  $[S_k]$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathbf{r}_k^T S_k^{-1} \mathbf{r}_k \leq \mathbf{r}_k^T \mathcal{S}_k^{-1} \mathbf{r}_k. \tag{6.12}$$

Ainsi, l'inégalité 6.11 est prouvée car  $\mathbf{r}_k^T \mathcal{S}_k^{-1} \mathbf{r}_k \in [\beta_k]$ .

Grâce à la remarque 6.1, un défaut est détecté lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\inf([\beta_k]) > \delta, \tag{6.13}$$

où  $P(X \leq \delta) = \alpha$ ,  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi  $\chi_{Wn_x}^2$ ,  $\alpha$  est le niveau de confiance choisi. Un indicateur de détection de défauts permettant de prendre la décision est donc défini par :

$$\pi_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \inf([\beta_k]) > \delta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.14}$$

### 6.2.2 Détection de défauts par une approche ensembliste

Dans [Xiong 2013], un algorithme de détection de défauts capteurs basé sur le filtre de Kalman amélioré (iIKF) est présenté. Cet algorithme est détaillé dans cette section.

A partir de l'estimation et de la matrice de covariance a priori ( $[\hat{\mathbf{x}}_k^-], [P_k^-]$ ) fournies par le filtre iIKF, une boîte de confiance de  $\alpha\%$  des états peut être formée. Par exemple, une boîte de confiance de 99.7% pour tous les états est donnée par :

$$\mathbf{I}_x = \left[ \hat{\mathbf{x}}_k^- - 3\sqrt{\text{diag}(P_k^-)}, \hat{\mathbf{x}}_k^- + 3\sqrt{\text{diag}(P_k^-)} \right], \tag{6.15}$$

où  $\text{Diag}(P)$  est le vecteur des éléments diagonaux de la matrice  $P$ . Cette boîte de confiance a priori des états peut être utilisée pour prédire la mesure du pas de temps courant sans la correction du filtre iIKF :

$$[\hat{\mathbf{y}}_k^-] = [C]\mathbf{I}_x. \tag{6.16}$$

D'autre part, une boîte de confiance de 99.7% de la mesure du pas de temps courant peut être obtenue en utilisant la matrice de covariance des erreurs de mesure  $[R]$  :

$$\mathbf{I}_y = \left[ \mathbf{y}_k - 3\sqrt{\text{diag}(R)}, \mathbf{y}_k + 3\sqrt{\text{diag}(R)} \right], \quad (6.17)$$

où  $\mathbf{y}_k$  est le vecteur des mesures.

La détection de défauts dans le contexte ensembliste est basée sur la vérification de la consistance entre l'intervalle de confiance prédit  $[\hat{\mathbf{y}}_k^-]$  et celui lié à la distribution des erreurs de mesures  $\mathbf{I}_y$ . Un indicateur de détection de défauts est donc défini par :

$$\pi_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{I}_y \cap [\hat{\mathbf{y}}_k^-] = \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.18)$$

Une fois un défaut détecté, l'étape de correction du filtre l'IKF ne prend pas en compte les données à partir des capteurs. Cette stratégie a pour but d'éviter de corrompre la prédiction avec les mesures défectueuses.

Les deux stratégies de détection de défauts présentées sont appliquées avec le filtre UBIKF et comparées dans l'exemple suivant.

**Exemple 6.1.** Considérons le système linéaire intervalle d'ordre 3 :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k + G_k \mathbf{f}_k^a \\ \mathbf{y}_k &= C_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k + \mathbf{f}_k^c, \end{cases} \quad (6.19)$$

où  $A_k \in [A]$ ,  $C_k \in [C]$ . Les valeurs des matrices sont données par :

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{pmatrix} [0.5096, 0.5305] & [-0.2857, -0.2743] & [0.0587, 0.0613] \\ [1.3132, 1.3669] & [-0.6937, -0.6663] & [0.1175, 0.1225] \\ [-0.4081, -0.3919] & [0.0587, 0.0613] & [0.0196, 0.0205] \end{pmatrix}, \\ [C] &= \begin{pmatrix} [0.98, 1.02] & 0 & 0 \\ 0 & [0.98, 1.02] & 0 \\ 0 & 0 & [0.98, 1.02] \end{pmatrix}, \\ [Q] = [R] &= \begin{pmatrix} [0.98, 1.02] & 0 & 0 \\ 0 & [0.98, 1.02] & 0 \\ 0 & 0 & [0.98, 1.02] \end{pmatrix}, \\ B_k = G_k &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A chaque instant  $k$ , chaque élément des matrices  $A_k$ ,  $C_k$  est obtenu par tirage d'une valeur aléatoire selon une loi uniforme sur l'intervalle correspondant de  $[A]$  et  $[C]$  afin de générer les états réels et les mesures du système. Les matrices de covariance réelles prennent pour éléments les centres des matrices intervalles  $[Q]$  et  $[R]$ . L'état initial du système est  $\mathbf{x}_0 = (5, -2, 6)^T$ . La condition initiale de l'UBIKF

est  $[\mathbf{x}_0] = ([-2, 2], [-2, 2], [-2, 2])^T$  et  $P_{0|0} = 10I_3$ .

Supposons qu'un défaut du premier capteur  $f_k^{(c,1)} = 10$  survienne à partir de  $k = 100$  jusqu'à  $k = 300$ . La largeur de la fenêtre pour le test du  $\chi^2$  est  $W = 15$  et le degré de confiance est choisi  $\alpha = 0.999$ . Le seuil de détection est donc  $\delta = 80.7$  car  $\chi_{n_y, W}^2(80.7) = 0.999$ . La figure 6.2 montre le résultat du test du  $\chi^2$ . La borne inférieure de  $[\beta_k]$  dépasse le seuil à  $k = 106$ . Ainsi, le défaut est détecté à  $k = 106$ . Bien que l'intervalle de confiance de  $x_1$  donné par le filtre UBIKF ne puisse pas suivre la valeur réelle, il garde une largeur raisonnable. Cette remarque est importante pour maintenir un bon fonctionnement de la détection de défaut. En effet, en comparaison avec les résultats de la stratégie présentée dans [Xiong 2013], même si les mesures défectueuses ne sont pas prises en compte par le filtre UBIKF, un autre problème apparaît : le conservatisme de l'analyse par intervalles. Comme montré dans la figure 6.3, l'intervalle de confiance de l'état  $x_1$  grandit lorsqu'il n'est pas traité par l'étape de correction du filtre de Kalman. Par conséquent, l'inconsistance entre la mesure réelle et l'intervalle de mesure prédit n'est pas maintenue. Cela mène à des alarmes manquées.

## 6.3 Isolation de défauts à base de filtre de Kalman intervalle

Un algorithme de détection et d'isolation de défauts capteurs/actionneurs est proposé. Cet algorithme est développé sous l'hypothèse qu'un seul défaut survienne à chaque pas de temps.

### 6.3.1 Isolation de défauts capteurs

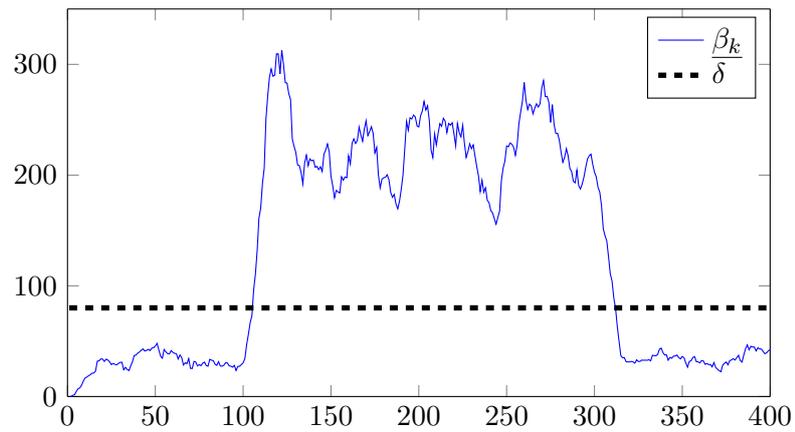
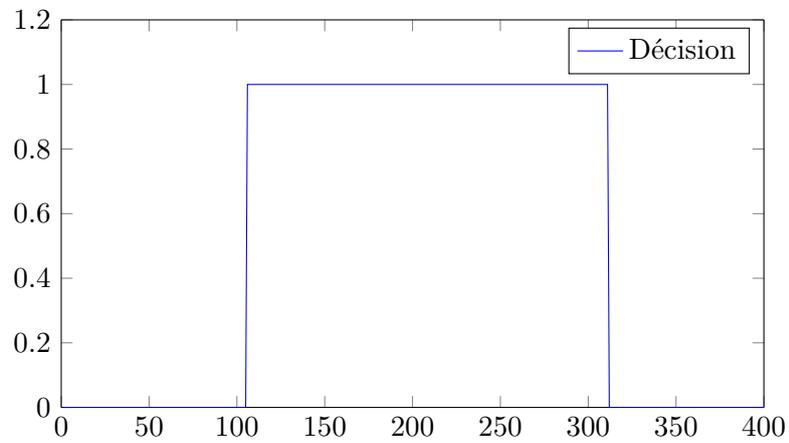
Dans cette section, l'isolation de défauts avec le filtre UBIKF à l'aide du schéma d'observateurs généralisé (GOS) est développé. Cette approche repose sur la conception d'un ensemble d'observateurs tels que les résidus soient sensibles à tous les défauts sauf un. Le schéma GOS pour isoler les défauts capteurs est illustré dans la figure 6.4.

Un observateur insensible à un défaut capteur spécifique  $f_k^{c,i}$ ,  $1 \leq i \leq n_{f_c}$ , peut être conçu par les méthodes suivantes :

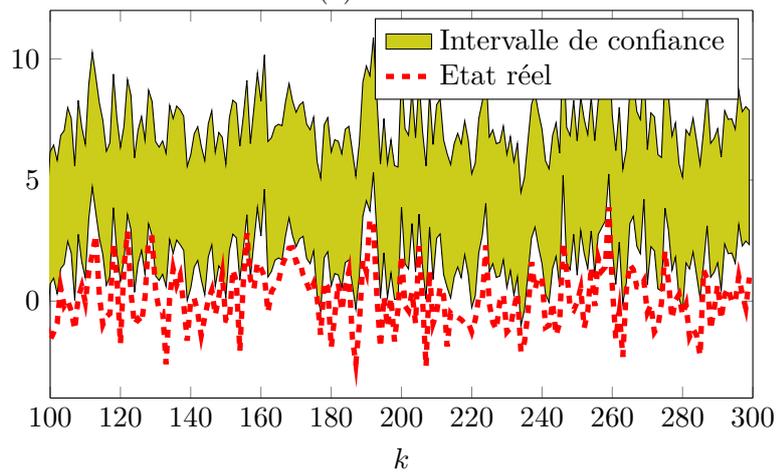
La méthode la plus simple est de *déconnecter le capteur  $i$*  de l'observateur. Autrement dit, la mesure donnée par le capteur  $i$  n'est pas prise en compte par l'observateur. Le modèle utilisé devient donc :

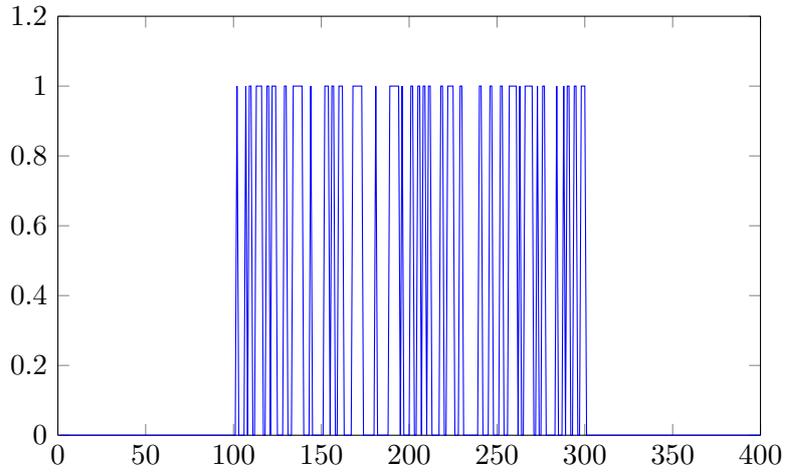
$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k^{(-i)} &= C_k^{(-i)} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^{(-i)}, \end{cases} \quad (6.20)$$

où  $C_k^{(-i)} \in \mathbb{R}^{(n_y-1) \times n_x}$  est obtenue en enlevant la ligne  $i$  de la matrice  $C_k$ . La matrice de covariance  $R_k^{(i)}$  de  $\mathbf{v}_k^{(-i)}$  est définie en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $i$  de la matrice de covariance initiale  $R_k$ .

(a) Les valeurs de  $\inf([\beta_k])$  et le seuil de détection.

(b) Décision.

(c) Intervalle de confiance et état réel de  $x_1$  dans la période de présence du défaut.FIGURE 6.2 – La détection d'un défaut capteur avec un test du  $\chi^2$ .



(a) Décision.

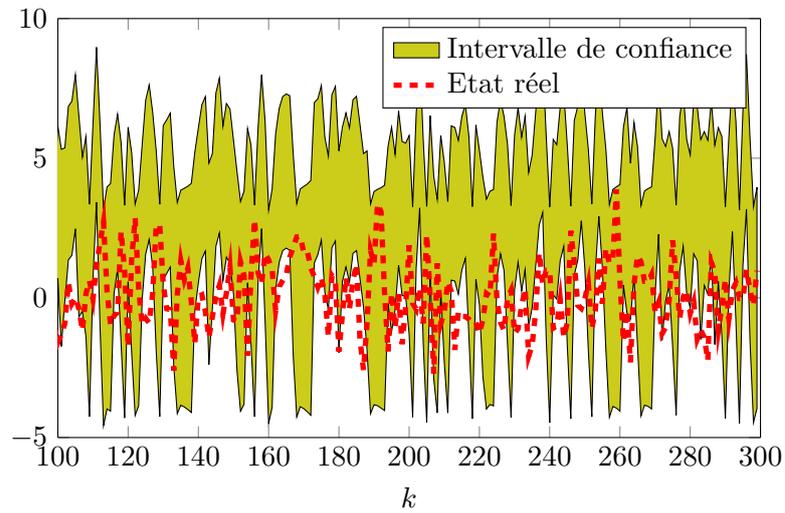
(b) Intervalle de confiance et état réel de  $x_1$  dans la période de présence du défaut.

FIGURE 6.3 – La détection d'un défaut capteur avec la stratégie de [Xiong 2013].

La deuxième solution est de *considérer un système augmenté* avec l'ajout de la dynamique du défaut  $i$ . Pour cela, la dynamique du défaut  $i$  est modélisée par

$$f_k^{c,i} = f_{k-1}^{c,i} + w_k^{c,i}, \quad (6.21)$$

où  $w_k^{c,i}$  est un bruit gaussien de moyenne zéro et de variance  $Q^{c,i}$ . Le système augmenté est écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \tilde{A}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{B}_k \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{w}}_k \\ \mathbf{y}_k &= \tilde{C}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{v}_k, \end{cases} \quad (6.22)$$

avec :

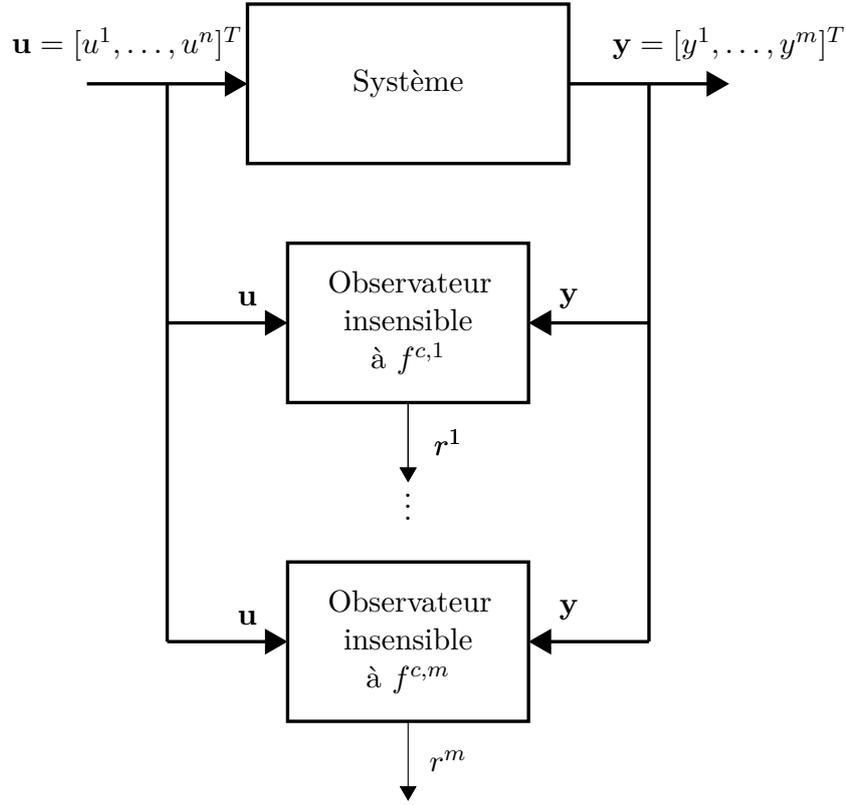


FIGURE 6.4 – GOS pour défauts capteurs

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ f_k^{c,i} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{w}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ w_k^{c,i} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{A}_k = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\tilde{B}_k = \begin{pmatrix} B_k \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \tilde{C}_k = \begin{pmatrix} C_k & C^{c,i} \end{pmatrix} .$$

Dans la matrice  $\tilde{C}_k$ , tous les éléments de la colonne  $C^{c,i}$  sont zéro sauf l'élément  $i$  qui est égal à 1. Un observateur appliqué au système augmenté permet d'estimer le défaut  $f_k^{c,i}$  lorsqu'il survient et de rester sensible aux autres défauts.

### 6.3.2 Isolation de défauts actionneurs par l'analyse structurelle

Dans cette section, un algorithme d'isolation de défauts actionneurs basé sur le filtre UBIKF et l'analyse structurelle est développé.

Tout d'abord, en remplaçant le terme  $G_k \mathbf{f}_k^a$  par un vecteur  $\tilde{\mathbf{f}}_k^a$  dans le modèle 6.2, ce dernier s'écrit :

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k + \tilde{\mathbf{f}}_k^a. \quad (6.23)$$

L'influence des éléments de  $\mathbf{f}_k^a$  sur chaque élément de  $\tilde{\mathbf{f}}_k^a$  est exprimée par la matrice d'incidence de l'équation  $G_k \mathbf{f}_k^a = \tilde{\mathbf{f}}_k^a$ . Cette matrice d'incidence, noté  $M_G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{fa}}$ , est déterminée en remplaçant les éléments non nuls de  $G_k$  par 1 (voir la définition

1.1 chapitre 1) :

$$M_G^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G^{ij} \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.24)$$

**Exemple 6.2.** Dans l'exemple 6.1, la matrice  $M_G \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  vaut :

$$M_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

Avec cette nouvelle représentation, un observateur insensible à l'élément  $i$  du vecteur de défaut  $\mathbf{f}_k^a$  doit être insensible à l'ensemble d'éléments  $j$  du vecteur  $\tilde{\mathbf{f}}_k^a$  tels que  $G^{ij} = 1$ . De cette manière, deux défauts actionneurs  $f_k^{a,m}$  et  $f_k^{a,n}$  sont isolables l'un de l'autre si les lignes  $m$  et  $n$  de la matrice  $M_G$  sont différentes.

Le modèle structurel du système est décrit par l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{cases} e_i & : \quad \mathbf{x}_{k+1} = A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{f}}_k^a, \quad i = 1, \dots, n_x \\ m_j^- & : \quad \mathbf{y}_k = C_k \mathbf{x}_k, \quad j = 1, \dots, n_y, \\ m_j^+ & : \quad \mathbf{y}_{k+1} = C_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}, \quad j = 1, \dots, n_y. \end{cases} \quad (6.26)$$

Dans cette représentation,  $e_i$  sont les équations d'état,  $m_j^-$  et  $m_j^+$  sont les équations de mesure du pas de temps précédent et courant,  $i = 1, \dots, n_x$ ,  $j = 1, \dots, n_y$ . L'ensemble des inconnues de ce modèle est donc :

$$\mathcal{X} = \{x_k^1, \dots, x_k^{n_x}, x_{k+1}^1, \dots, x_{k+1}^{n_x}\}. \quad (6.27)$$

Dans les équations du modèle, les bruits sont enlevés car ils sont traités par le filtre UBIKF. Puisque les défauts capteurs sont isolés par le schéma GOS, ils ne sont pas pris en compte dans cette section.

Grâce aux outils de l'analyse structurelle présentés dans le chapitre 1, l'ensemble des parties sur-déterminées correctes (PSOs, voir Chapitre 1) du modèle, noté  $\mathcal{P}$ , est obtenu. En général, les équations contenues dans un PSOs arbitraire  $P \in \mathcal{P}$  ne définissent pas un espace d'état. Dans [Pröll 2016], une définition d'un PSOs qui peut former un espace d'état dans le cas d'un système en temps continu est présentée. Cette définition est étendue au cas du modèle discret 6.26.

**Définition 6.1.** Soit  $P \in \mathcal{P}$  un PSOs.  $P$  est dite bien définie, c'est-à-dire pouvant former un espace d'état, si chaque  $x_k^i \in \text{var}(P)$  peut être déterminé par les équations  $m_j^-$  ou  $e_i \in P$ .

Un PSOs bien défini  $P$  peut être transformé en espace d'état en remplaçant les états  $x_k^i$  dont  $e_i \notin P$  par la valeur déterminée à partir de mesures  $y_k^j$ . L'algorithme pour obtenir tous les PSOs bien définis du modèle structurel est donné dans l'algorithme 6.1.

Ensuite, un sous-ensemble  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}^{bd}$  doit être choisi tel que le nombre de défauts actionneurs isolés est maximisé.

**Algorithme 6.1** Sélection des PSOs bien définis**Entrées:** Ensemble  $\mathcal{P}$  des PSOs**Sorties:** Ensemble  $\mathcal{P}^{bd}$  des PSOs bien définis $\mathcal{P}^{bd} = \emptyset.$ **pour tout**  $P \in \mathcal{P}$  **faire** $I := \{i \mid x_k^i \in \text{var}(P)\},$  $J := \{j \mid e_j \in P \text{ ou } x_k^j \in \text{var}(m_P^-)\},$  où  $m_P^-$  est l'ensemble d'équations  $m^-$  inclus dans  $P$ .**fin pour****Exemple 6.3.** Le modèle structurel du système dans l'exemple 6.1 s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} e_i & : \quad \mathbf{x}_{k+1} = A_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{f}}_k^a, \quad i = 1, \dots, 3 \\ m_j^- & : \quad \mathbf{y}_k = C_k \mathbf{x}_k, \quad j = 1, \dots, 3, \\ m_j^+ & : \quad \mathbf{y}_{k+1} = C_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}, \quad j = 1, \dots, 3. \end{cases} \quad (6.28)$$

En utilisant Fault Diagnosis Toolbox [Frisk 2017], un PSO bien défini est :

$$P = \{e_2, m_1^-, m_2^-, m_3^-, m_2^+\}, \quad (6.29)$$

qui est équivalent à un espace d'état :

$$\begin{cases} e_2 & : \quad x_{k+1}^{(2)} = a_k^{(21)} x_k^{(1)} + a_k^{(22)} x_k^{(2)} + a_k^{(23)} x_k^{(3)} + b_k^{(21)} u_k^{(1)} + \tilde{f}_k^{a,2}, \\ m_j^- & : \quad x_k^{(j)} = y_k^{(j)} / c_k^{(jj)}, \quad j = 1, \dots, 3, \\ m_2^+ & : \quad y_{k+1}^{(2)} = c_{k+1}^{(22)} x_{k+1}^{(2)}, \end{cases} \quad (6.30)$$

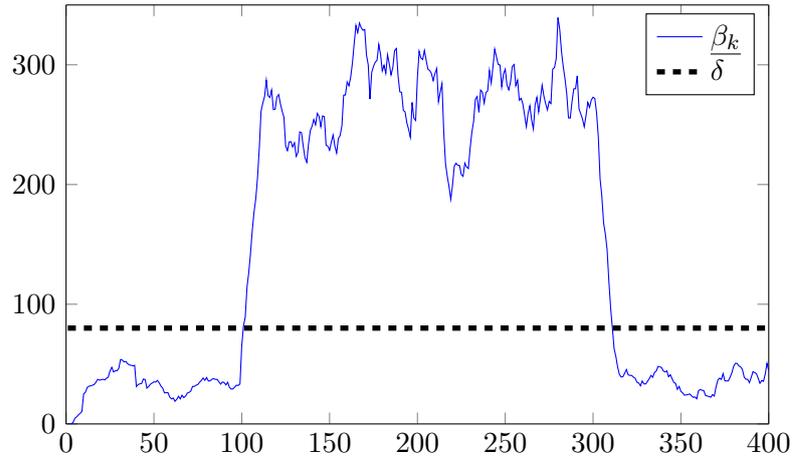
où  $a_k^{(ij)}$  est l'élément  $(i, j)$  de la matrice  $A_k$ ,  $b_k^{(21)}$  est l'élément  $(2, 1)$  de la matrice  $B_k$ . Cet espace d'état est insensible à l'ensemble  $\{\tilde{f}_k^{a,1}, \tilde{f}_k^{a,3}\}$  et sensible à  $\tilde{f}_k^{a,2}$ . En conséquence, un observateur pour cet espace d'état peut générer un résidu insensible au défaut du premier actionneur  $f_k^{a,1}$ . Afin de traiter les erreurs de mesure  $\mathbf{v}_k$ , les équations  $m_j^-$  peuvent être réécrites :

$$m_j^- : \quad x_k^{(j)} = y_k^{(j)} / c_k^{(jj)} - v_k^j / c_k^{(jj)} = y_k^{(j)} / c_k^{(jj)} + \tilde{v}_k^j, \quad j = 1, \dots, 3, \quad (6.31)$$

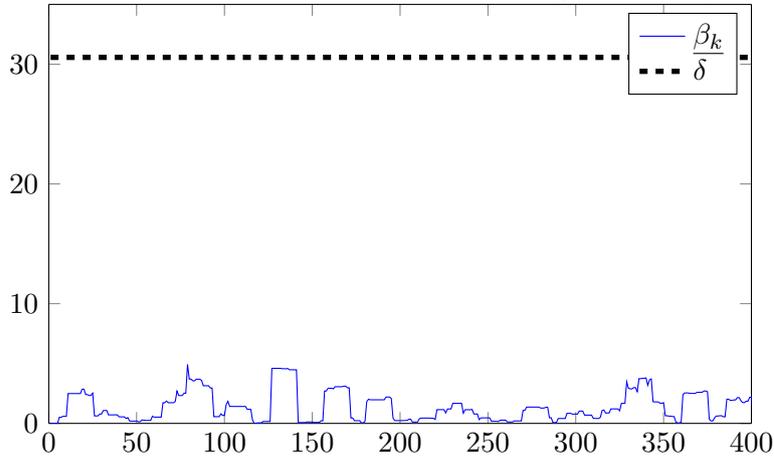
où  $\tilde{v}_k^j = -v_k^j / c_k^{(jj)}$ . Puisque  $\mathbf{v}_k$  est gaussien,  $\tilde{\mathbf{v}}_k$  est également gaussien de moyenne nulle. La matrice de covariance  $[\tilde{R}]$  de  $\tilde{\mathbf{v}}_k$  est déterminée par :

$$[\tilde{R}] = [C]^{-1} [R] ([C]^{-1})^T. \quad (6.32)$$

Supposons qu'un défaut du premier actionneur  $f_k^{a,1} = 5$  survienne à partir de  $k = 100$  jusqu'à  $k = 300$ . Ce défaut peut être détecté par un filtre UBIKF (figure 6.5a). Un filtre UBIKF conçu pour l'espace d'état (6.30) génère un résidu insensible au défaut du premier actionneur (figure 6.5b).



(a) Le résidu et le seuil de détection lorsqu'il y a  $f_k^{a,1} = 5$ ,  $k \in [100, 300]$ .



(b) Le résidu généré par un filtre UBIKF insensible au défaut du premier actionneur.

FIGURE 6.5 – Isolation d'un défaut du premier actionneur du système dans l'exemple 6.1.

Enfin, les étapes de l'algorithme de détection et d'isolation de défauts capteurs/actionneurs sont :

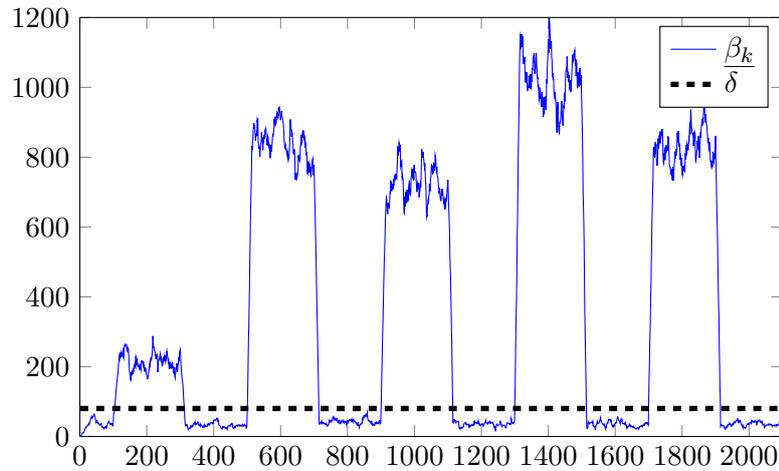
- Détection de défauts par un filtre EBPF du modèle complet.
- Isolation de défauts capteurs par  $n_y$  filtres UBIKF selon le schéma GOS.
- Isolation de défauts actionneurs par l'analyse structurée :
  - Formation d'un modèle structurel.
  - Calcul des PSOs.
  - Sélection des PSOs bien définies.
  - Sélection d'un ensemble de PSOs maximisant le nombre de défauts actionneurs isolés.
  - Construction des filtres UBIKF pour les PSOs choisis.

## 6.4 Exemple numérique

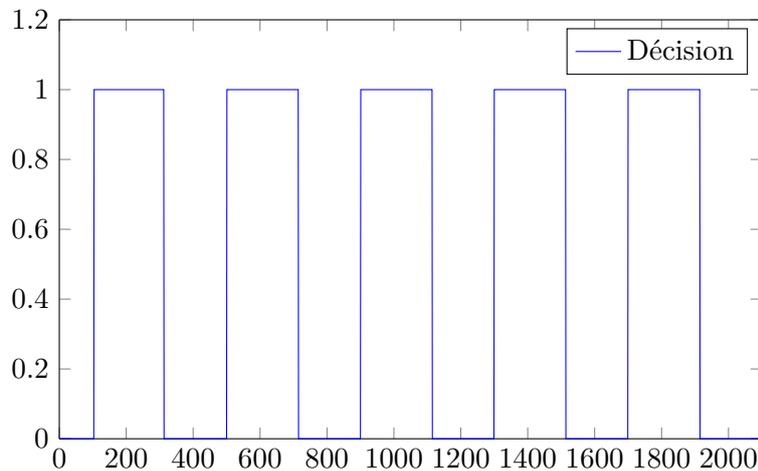
Considérons l'exemple 6.1 avec les défauts suivants :

- défaut du premier capteur  $f_k^{c,1} = 5$  avec  $k \in [100, 300]$ ,
- défaut du deuxième capteur  $f_k^{c,2} = -10$  avec  $k \in [500, 700]$ ,
- défaut du troisième capteur  $f_k^{c,3} = 10$  avec  $k \in [900, 1100]$ ,
- défaut du premier actionneur  $f_k^{a,1} = 10$  avec  $k \in [1300, 1500]$ ,
- défaut du deuxième actionneur  $f_k^{a,2} = -5$  avec  $k \in [1700, 1900]$ .

Tous ces défauts sont détectés par un test du  $\chi^2$  (figure 6.6).



(a) Le résidu et le seuil de détection.



(b) Indicateur de détection

FIGURE 6.6 – Détection de défauts par un test du  $\chi^2$  pour le système dans l'exemple 6.1.

Après avoir détecté un défaut, le schéma GOS pour isoler les défauts capteurs est appliqué. Dans cet exemple, un ensemble de  $n_y$  filtres UBIKF pour les systèmes augmentés (voir l'équation 6.22) est utilisé. Les résidus et les estimations des défauts

capteurs fournis par ces filtres sont montrés dans la figure 6.7. Notons que l'intervalle de confiance de 99.7% d'un défaut capteur fourni par un filtre UBIKF peut suivre les valeurs réelles lorsque le défaut survient.

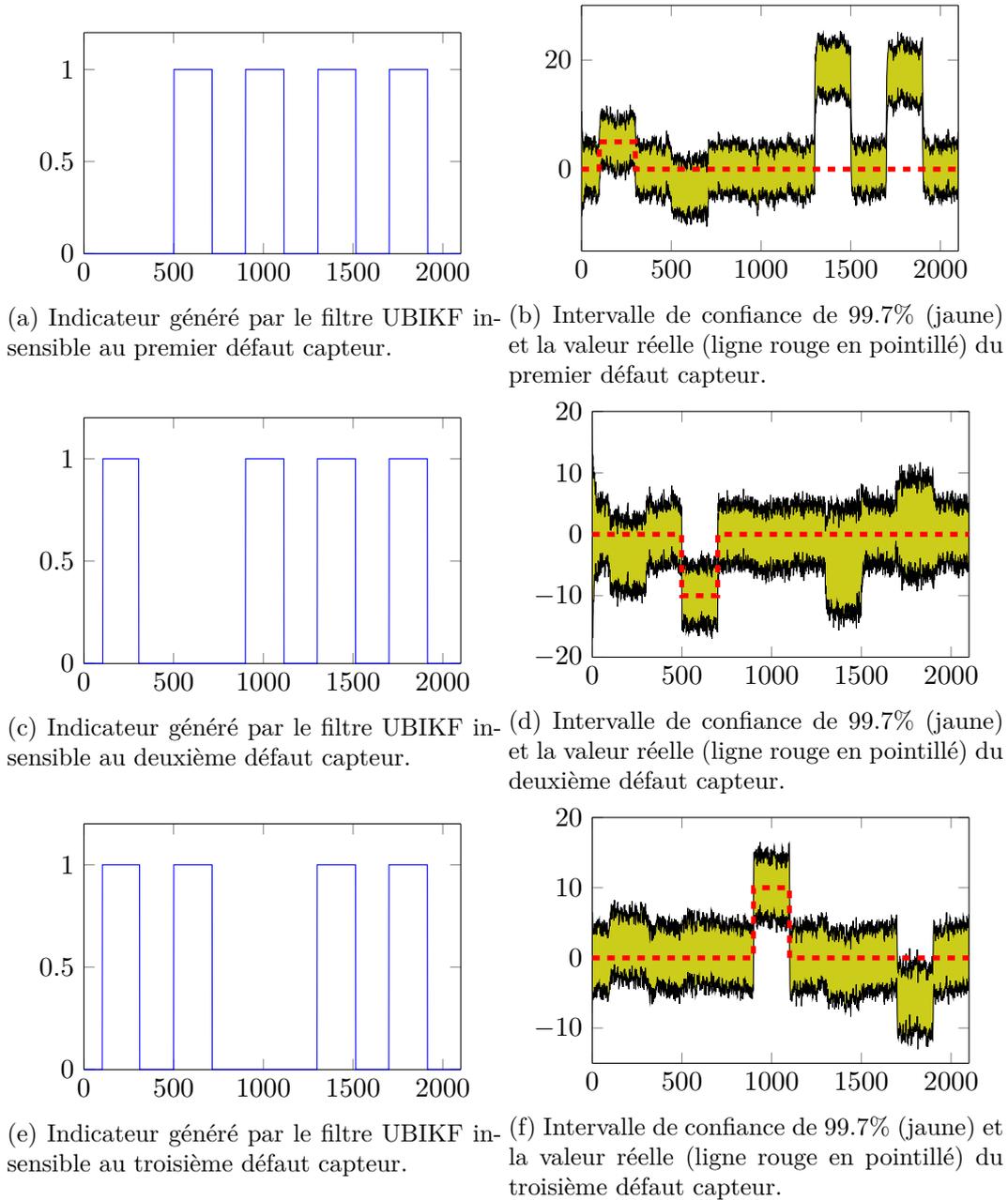


FIGURE 6.7 – Les résultats des filtres UBIKF selon le schéma GOS pour isoler les défauts capteurs.

Dès que l'ensemble des filtres UBIKF insensibles aux défauts capteurs ne peut pas localiser le défaut actuel, les filtres UBIKF pour isoler des défauts actionneurs sont utilisés. Un modèle structurel pour la construction des filtres UBIKF insen-

sibles à un de défauts actionneurs est donné par l'équation 6.28. Les PSOs de ce modèle sont déterminés à l'aide du Fault Diagnosis Toolbox [Frisk 2017]. A partir de l'ensemble de PSOs obtenu, deux PSOs bien définis sont sélectionnées pour construire deux filtres UBIKF. Le premier PSOs  $P_1$  qui est insensible à l'ensemble de défauts  $\{\tilde{f}_k^{a,1}, \tilde{f}_k^{a,2}\}$  est présenté dans l'exemple 6.3. Le deuxième PSOs  $P_2$  est :

$$P = \{e_2, m_1^-, m_2^-, m_3^-, m_2^+\}, \quad (6.33)$$

qui est équivalent à un espace d'état :

$$\begin{cases} e_3 & : & x_{k+1}^{(3)} = a_k^{(31)}x_k^{(1)} + a_k^{(32)}x_k^{(2)} + a_k^{(33)}x_k^{(3)} + B_k^{(32)}u_k^{(2)} + \tilde{f}_k^{a,3}, \\ m_j^- & : & x_k^{(j)} = y_k^{(j)} / c_k^{(jj)}, \quad j = 1, \dots, 3, \\ m_3^+ & : & y_{k+1}^{(3)} = c_{k+1}^{(33)}x_{k+1}^{(3)}, \end{cases} \quad (6.34)$$

Le filtre UBIKF pour ce modèle est donc insensible au couple  $\{\tilde{f}_k^{a,1}, \tilde{f}_k^{a,2}\}$  et ainsi insensible au défaut du premier actionneur. Les résidus et les indicateurs de défaut générés par deux filtres UBIKF correspondant aux PSOs  $P_1$  et  $P_2$  sont présentés dans la figure 6.8. Ces deux filtres permettent d'isoler deux défauts actionneurs.

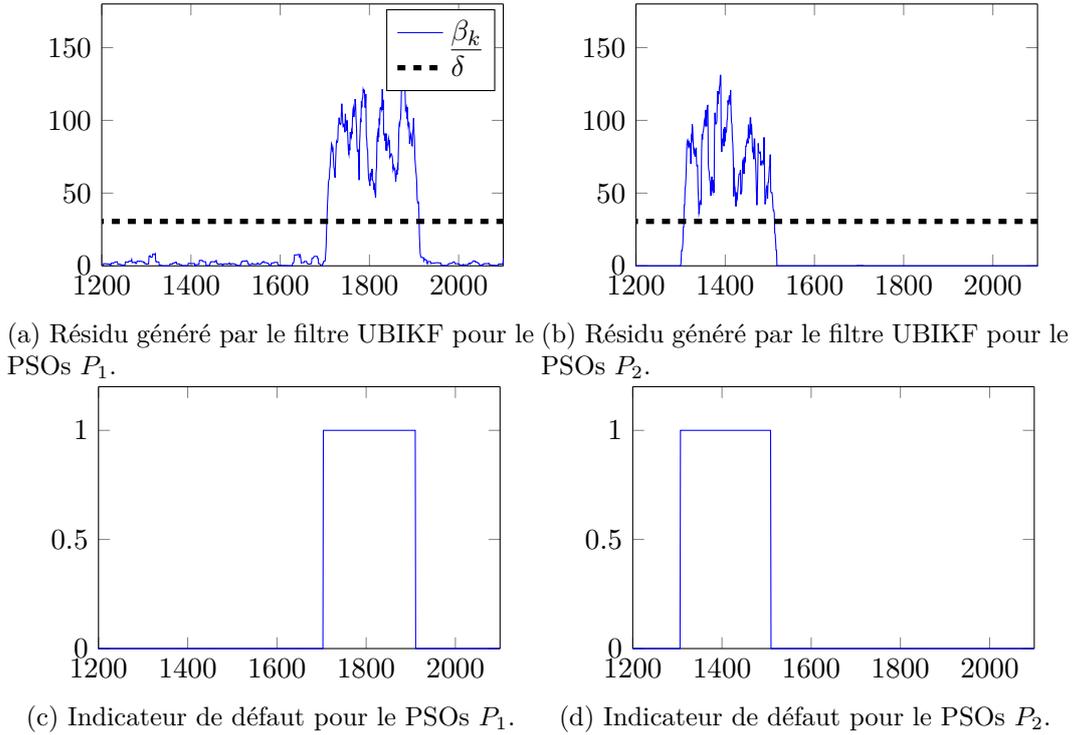


FIGURE 6.8 – Isolation de défauts actionneurs à l'aide du filtre UBIKF et de l'analyse structurale.

Une analyse extensive de la performance de l'algorithme de diagnostic proposé est ensuite effectuée. La magnitude d'un défaut capteur est exprimée en fonction

de la variance de l'erreur de mesure correspondant. Par exemple,  $|f_k^{c,1}| = 3\sqrt{\bar{R}^{11}}$  signifie que la magnitude du défaut du premier capteur est égale au triple de la racine carré de la variance de l'erreur de mesure. Les résultats de cette analyse pour trois capteurs sont présentés dans les tableaux 6.1-6.2-6.3. Pour chaque défaut capteur considéré, le pourcentage de détection et d'isolation réussies (%*FD* et %*FI* respectivement) ainsi que le temps de détection  $t_d$  sont déterminés. Il est à noter que, pour tous les défauts capteurs, il existe une magnitude critique en fonction de la variance de l'erreur de mesure : si le défaut dépasse cette magnitude, il est correctement détecté et isolé.

TABLE 6.1 – Résultats pour  $f_k^{c,1}$ 

Magnitude	% <i>FD</i>	% <i>FI</i>	$t_d$
$1\sqrt{\bar{R}^{11}}$	0.2	0	1100
$2\sqrt{\bar{R}^{11}}$	19.2	0.2	73
$3\sqrt{\bar{R}^{11}}$	90.2	8.34	4
$4\sqrt{\bar{R}^{11}}$	100	66.6	4
$5\sqrt{\bar{R}^{11}}$	100	99	2
$6\sqrt{\bar{R}^{11}}$	100	100	2

TABLE 6.2 – Résultats pour  $f_k^{c,2}$ 

Magnitude	% <i>FD</i>	% <i>FI</i>	$t_d$
$1\sqrt{\bar{R}^{22}}$	0.2	0	2498
$2\sqrt{\bar{R}^{22}}$	25.9	2.16	51
$3\sqrt{\bar{R}^{22}}$	95.4	72.42	7
$4\sqrt{\bar{R}^{22}}$	100	99.9	5
$5\sqrt{\bar{R}^{22}}$	100	100	3
$6\sqrt{\bar{R}^2}$	100	100	2

De la même manière, les résultats pour différentes magnitudes des défauts actionneurs sont montrés dans les tableaux 6.4-6.5. Ces tableaux expriment les taux de détection, d'isolation et le temps de détection en fonction de la valeur absolue du défaut actionneur considéré. On constate qu'il existe des bornes critiques sur la magnitude des défauts actionneurs. Par exemple, pour le défaut du premier actionneur, si  $|f_k^{a,1}| \geq 6$ , il est complètement détecté. Cependant, il est nécessaire que  $|f_k^{a,1}| \geq 12$  pour qu'il soit correctement isolé. Cela est dû au fait que les résidus pour isoler les défauts actionneurs sont générés pour un sous-ensemble d'équations du système. L'influence de défauts actionneurs sur certains nombres d'états ou de

TABLE 6.3 – Résultats pour  $f_k^{c,3}$ 

Magnitude	% <i>FD</i>	% <i>FI</i>	$t_d$
$1\sqrt{R^{11}}$	0	0	–
$2\sqrt{R^{11}}$	10.3	1.9	47
$3\sqrt{R^{11}}$	84.7	63.1	12
$4\sqrt{R^{11}}$	100	99.9	7
$5\sqrt{R^{11}}$	100	100	3
$6\sqrt{R^{11}}$	100	100	0

mesures est donc éliminée. Par conséquent, les résidus d'isolation de défauts actionneurs sont plus petits que celui de détection.

TABLE 6.4 – Résultats pour  $f_k^{a,1}$ 

Magnitude	% <i>FD</i>	% <i>FI</i>	$t_d$
1	0.24	0	1443
2	40	0	11
6	100	0.7	2
10	100	98.7	0
12	100	100	0
20	100	100	0

TABLE 6.5 – Résultats pour  $f_k^{a,2}$ 

Magnitude	% <i>FD</i>	% <i>FI</i>	$t_d$
1	20.28	0	50
2	100	0.32	3
3	100	30.8	3
4	100	95.3	2
5	100	100	0
6	100	100	0

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un algorithme de détection et d'isolation de défauts à l'aide du filtre UBIKF a été proposé. La détection de défauts repose sur un test d'une propriété statistique de la séquence des innovations. Une stratégie de détection de défauts basée sur une approche ensembliste a également été rappelée. Ces deux algorithmes de détection de défauts ont été comparés sur un exemple numérique afin

d'illustrer l'avantage de l'approche stochastique par rapport à l'approche ensembliste.

Un algorithme d'isolation de défauts capteurs/actionneurs a été développé sous l'hypothèse qu'un seul défaut survienne à chaque pas de temps. Tout d'abord, une banque de filtres UBIKF selon le schéma d'observateurs généralisé est réalisée. Chaque filtre UBIKF dans cette banque est insensible à un défaut capteur  $i$  en déconnectant le capteur  $i$  du filtre ou en ajoutant la dynamique du défaut capteur  $i$  dans le filtre correspondant. Lorsque tous les résidus des filtres UBIKF de la banque dépassent le seuil choisi, un défaut actionneur est détecté. Un algorithme d'isolation de défauts actionneurs à base de l'analyse structurelle est ensuite appliqué. Cet algorithme cherche l'ensemble de parties sur-déterminées correctes (PSOs) bien définies du modèle qui peuvent former une représentation d'état pour la génération de résidus. Un sous-ensemble de PSOs bien définies doit être choisi pour maximiser le nombre de défauts actionneurs isolés et pour minimiser le nombre de résidus à calculer. Un ensemble de filtres UBIKF est ensuite construit pour les PSOs choisis afin d'isoler des défauts actionneurs.



# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation d'état d'un système dynamique à temps discret avec l'intégration d'incertitudes statistiques et à erreurs bornées, que nous appelons incertitudes mixtes. Les fils conducteurs de cette thèse sont l'utilisation de l'analyse par intervalles et de la théorie des fonctions de croyance.

Après une étude bibliographique sur le problème de l'estimation d'état et son application au diagnostic d'un système dynamique, nous avons présenté les outils principaux de l'analyse par intervalles, notamment les notions de fonction d'inclusion et de problème de satisfaction de contraintes que nous avons utilisées tout au long de nos travaux.

Différents cadres permettant de représenter des connaissances incomplètes ou imprécises ont été présentés : les fonctions de répartition, la théorie de possibilité et la théorie des fonctions de croyance. L'application de ces cadres à la représentation d'une distribution univariée unimodale a été introduite. Nous avons proposé une représentation basée sur la théorie des fonctions de croyance d'une distribution gaussienne multivariée incertaine, c'est-à-dire de moyenne et matrice de covariance définies par leur appartenance à des intervalles. Cette représentation satisfait le principe d'engagement minimal de la théorie de croyance. Les calculs de la croyance et de la plausibilité d'une boîte correspondant à une fonction de masse gaussienne incertaine ont également été développés.

Nous avons ensuite abordé l'estimation d'état par le filtre de Kalman, le filtre particulière et leurs extensions ensemblistes. Tout d'abord, les résultats existants sur la convergence du filtre de Kalman et du filtre particulière ont été étudiés. Les extensions ensemblistes de ces deux filtres stochastiques développés dans la littérature ont été rappelées. Motivé par les inconvénients du filtre de Kalman intervalle ([Chen 1997], [Xiong 2013]) liés au problème d'inversion de matrices intervalles et au temps de calcul, nous avons proposé le filtre de Kalman intervalle à borne supérieure de variance minimale. Ce filtre permet de réduire à la fois la complexité calculatoire de l'inversion ensembliste des matrices intervalles et le conservatisme des estimations. Nous avons également développé un filtrage particulière ensembliste basé sur la théorie des fonctions de croyance pour des systèmes dynamiques non linéaires dans lesquels les bruits sur la dynamique sont bornés et les erreurs de mesure sont modélisées par une fonction de masse gaussienne incertaine. Cette méthode fournit des résultats moins conservatifs que ceux des filtres particulières ensemblistes existants. Cela suggère que le filtre proposé pourrait être une alternative viable au problème d'estimation d'état non linéaire à incertitudes mixtes.

Nous avons finalement abordé la détection et l'isolation de défauts d'un système linéaire incertain à base du filtre UBIKF sous l'hypothèse qu'un seul défaut survienne à chaque pas de temps. La détection de défauts se base sur un test du  $\chi^2$  de la séquence d'innovations dans une fenêtre glissante. Dès qu'un défaut est

déecté, une banque des filtres UBIKF insensibles à l'un des défauts capteurs, selon le schéma d'observateurs généralisé, est utilisée afin d'isoler les défauts capteurs. Si tous les filtres UBIKF de cette banque indiquent l'apparition d'un défaut, en utilisant l'hypothèse d'un seul défaut à chaque pas de temps, ce défaut est alors un défaut actionneur. Dans ce cas, un algorithme d'isolation de défauts actionneurs à l'aide de l'analyse structurelle est appliqué. L'analyse structurelle est un outil permettant de déterminer des parties sur-déterminées d'un système qui sont indispensables pour la génération de résidus. La condition pour une isolation réussie de deux défauts actionneurs est que les deux ensembles d'équations dans lesquels ces défauts interviennent soient différents.

Les résultats obtenus dans ce manuscrit offrent des perspectives de développements ultérieurs :

- Bien que le filtre UBIKF réduise le conservatisme et le temps de calcul par rapport à ceux du filtre iIKF, ses résultats sont encore à améliorer. Par exemple, une inégalité matricielle proposée dans [Combastel 2016] qui fournit une borne majorante définie positive d'une matrice intervalle symétrique, peut être appliquée afin d'obtenir une borne moins conservatrice de la variance de l'erreur d'estimation.
- La convergence du filtre UBIKF devrait être étudiée. Plus précisément, il serait intéressant de déterminer des bornes des incertitudes telles que l'estimation et la matrice de covariance fournies par le filtre UBIKF soient convergentes.
- L'isolation de défauts à base du filtre UBIKF devrait être développée. En effet, la méthode d'isolation de défauts actionneurs proposée dans cette thèse n'est valide que dans une condition particulière des actionneurs. Cela limite l'application de cet algorithme aux systèmes réels.
- L'application du filtre particulière ensembliste à la détection et l'isolation de défauts pour les systèmes non-linéaires devrait être envisagée.

# Bibliographie

- [Abdallah 2008] F. Abdallah, A. Gning et P. Bonnifait. *Box particle filtering for nonlinear state estimation using interval analysis*. Automatica, vol. 44, no. 3, pages 807 – 815, 2008. (Cit  en pages 2, 3, 9, 10, 102, 127 et 133.)
- [Alessandri 1999] A. Alessandri, M. Caccia et G. Veruggio. *Fault detection of actuator faults in unmanned underwater vehicles*. Control Engineering Practice, vol. 7, no. 3, pages 357 – 368, 1999. (Cit  en page 15.)
- [Alrowaie 2012] F. Alrowaie, R. B. Gopaluni et K. E. Kwok. *Fault detection and isolation in stochastic non-linear state-space models using particle filter*. Control Engineering Practice, vol. 20, pages 1016–1032, 2012. (Cit  en page 139.)
- [Anderson 1979] B. D. O. Anderson et J. B. Moore. Optimal filtering. Prentice-Hall information and system sciences series. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1979. (Cit  en page 70.)
- [Anderson 1981] B. D. O. Anderson et J. B. Moore. *Detectability and Stabilizability of Time-Varying Discrete-Time Linear Systems*. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 19, no. 1, pages 20–32, 1981. (Cit  en pages 71, 73, 74 et 99.)
- [Andrieu 2004] C. Andrieu, A. Doucet, S. S. Singh et V. B. Tadic. *Particle methods for change detection, system identification, and control*. Proceedings of the IEEE, vol. 92, no. 3, pages 423–438, 2004. (Cit  en page 9.)
- [Aregui 2008] A. Aregui et T. Dencoux. *Constructing consonant belief functions from sample data using confidence sets of pignistic probabilities*. International Journal of Approximate Reasoning, vol. 49, no. 3, pages 575 – 594, 2008. (Cit  en pages 58 et 59.)
- [Armengol Llobet 2009] J. Armengol Llobet, A. Bregon, E. Escobet, R. Gelso, M. Krysander, M. Nyberg, X. Olive, B. Pulido et L. Trave-Massuyes. *Minimal Structurally Overdetermined Sets for Residual Generation : A Comparison of Alternative Approaches*. Dans Proceedings of IFAC Safeprocess’09, pages 1480–1485, Barcelona, Spain, 2009. (Cit  en page 22.)
- [Basseville 1988] M. Basseville. *Detecting changes in signals and systems - A survey*. Automatica, vol. 24, no. 3, pages 309–326, 1988. (Cit  en page 15.)
- [Basseville 1993] M. Basseville et I. V. Nikiforov. Detection of abrupt changes : Theory and application. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1993. (Cit  en page 15.)
- [Baudrit 2006] C. Baudrit et D. Dubois. *Practical Representations of Incomplete Probabilistic Knowledge*. Computational Statistics & Data Analysis, vol. 51, no. 1, pages 86–108, novembre 2006. (Cit  en pages 54 et 56.)

- [Beard 1971] R. V. Beard. *Failure Accomodation in Linear System through Self-Reorganization*. PhD thesis, Massachussets Institute of Technologies, 1971. (Cité en page 139.)
- [Benhamou 1997] F. Benhamou et L. Granvilliers. *Automatic Generation of Numerical Redundancies for Non-linear Constraint Solving*. *Reliable Computing*, vol. 3, no. 3, pages 335–344, 1997. (Cité en page 35.)
- [Benhamou 1999] F. Benhamou, F. Goualard, L. Granvilliers et J. F. Puget. *Revising Hull and Box Consistency*. Dans *Proceedings of the International conference on logic programming*, pages 230–244. MIT press, 1999. (Cité en pages 37 et 38.)
- [Besançon 1996] G. Besançon, G. Bornard et H. Hammouri. *Observer Synthesis for a Class of Nonlinear Control Systems*. *European Journal of Control*, vol. 2, no. 3, pages 176 – 192, 1996. (Cité en page 15.)
- [Blanke 2006] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, M. Staroswiecki et J. Schröder. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006. (Cité en page 18.)
- [Blesa 2015] J. Blesa, F. Le Gall, C. Jaubertie et L. Travé-Massuyès. *State estimation and fault detection using box particle filtering with stochastic measurements*. Dans *26th International Workshop on Principles of Diagnosis (DX-15)*, pages 67–73, Paris, France, août 2015. (Cité en pages 2, 9 et 10.)
- [Boskovic 2005] J. D. Boskovic, S. E. Bergstrom et R. K. Mehra. *Retrofit reconfigurable flight control in the presence of control effector damage*. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, volume 4, pages 2652–2657, 2005. (Cité en page 11.)
- [Boskvic 2002] J. D. Boskvic et R. K. Mehra. *Stable adaptive multiple model-based control design for accommodation of sensor failures*. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, volume 3, pages 2046–2051 vol.3, 2002. (Cité en page 11.)
- [Boulès 2013] H. Boulès. *Linear systems*. John Wiley and Sons, Inc., 2013. (Cité en page 72.)
- [Brucet 2015] J. C. Brucet et C. Hajiyeu. *Robust estimation of F-16 fighter dynamics in presence of sensor faults*. Dans *International Symposium on Sustainable Aviation*, pages 40–43, 2015. (Cité en page 139.)
- [Caliskan 2000] F. Caliskan et C. Hajiyeu. *EKF based surface fault detection and reconfiguration in aircraft control systems*. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1220–1224, 2000. (Cité en page 15.)
- [Caron 2008] F. Caron, B. Ristic, E. Duflos et P. Vanheeghe. *Least committed basic belief density induced by a multivariate Gaussian : Formulation with applications*. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 48, no. 2, pages 419 – 436, 2008. (Cité en page 61.)

- [Cassar 1997] J.P. Cassar et M. Staroswiecki. *A Structural Approach for the Design of Failure Detection and Identification Systems*. volume 30, pages 841 – 846, Belfort, France, 1997. (Cit  en page 18.)
- [Chabert 2008] G. Chabert et L. Jaulin. QUIMPER : QUick Interval Modeling and Programming in a bounded-ERror context, available at <http://www.ibex-lib.org/>. ENSIETA, 2008. (Cit  en page 25.)
- [Chen 1997] G. Chen, J. Wang et S.L. Shieh. *Interval Kalman filtering*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 33, no. 1, pages 250–259, janvier 1997. (Cit  en pages 2, 9, 10, 25, 68, 79 et 159.)
- [Chen 1999] J. Chen et R. J. Patton. Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamic Systems. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1999. (Cit  en pages 16 et 17.)
- [Chen 2007] W. Chen et M. Saif. *Observer-based strategies for actuator fault detection, isolation and estimation for certain class of uncertain nonlinear systems*. IET Control Theory Applications, vol. 1, no. 6, pages 1672–1680, 2007. (Cit  en page 17.)
- [Chow 1980] E. Y. Chow et A. S. Willsky. *Issues in the development of a general design algorithm for reliable failure detection*. Dans 19th Conference on Decision and Control. Albuquerque, NM, 1980. (Cit  en page 14.)
- [Clark 1978] R. N. Clark. *Instrument Fault Detection*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-14, no. 3, pages 456–465, 1978. (Cit  en page 16.)
- [Cobb 2003] B. R. Cobb et P. P. Shenoy. *A Comparison of Methods for Transforming Belief Function Models to Probability Models*. Dans Proceedings of the ECSQARU 2003, pages 490–495, Aalborg, Denmark, July 2003. (Cit  en page 49.)
- [Combastel 2005] C. Combastel. *A State Bounding Observer for Uncertain Non-linear Continuous-time Systems based on Zonotopes*. Dans Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, pages 7228–7234. Seville, Spain, Dec 2005. (Cit  en pages 9 et 140.)
- [Combastel 2015] C. Combastel. *Merging Kalman Filtering and Zonotopic State Bounding for Robust Fault Detection under Noisy Environment*. Dans Proceedings of the 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes. Paris, France, sep 2015. (Cit  en pages 9, 68 et 140.)
- [Combastel 2016] C. Combastel. *An Extended Zonotopic and Gaussian Kalman Filter (EZGKF) merging set-membership and stochastic paradigms : Toward non-linear filtering and fault detection*. Annual Reviews in Control, vol. 42, pages 232–243, 2016. (Cit  en pages 9, 99 et 160.)

- [Crisan 2002] D. Crisan et A. Doucet. *A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, no. 3, pages 736–746, Mar 2002. (Cit  en pages 103, 110, 111 et 113.)
- [Davis 1987] E. Davis. *Constraint propagation with interval labels*. Artificial Intelligence, vol. 32, no. 3, pages 281 – 331, 1987. (Cit  en pages 37 et 38.)
- [de Cooman 1999] G. de Cooman et D. Aeyels. *Supremum Preserving Upper Probabilities*. Information Sciences, vol. 118, no. 1-4, pages 173–212, 1999. (Cit  en page 44.)
- [Del Moral 1996] P. Del Moral. *Nonlinear Filtering : Interacting Particle Solution*. Markov Processes and Related Fields, vol. 2, no. 4, pages 555–580, 1996. (Cit  en page 102.)
- [Dempster 1967] A. P. Dempster. *Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping*. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 38, no. 2, pages 325–339, 1967. (Cit  en pages 2 et 45.)
- [Ding 1993] X. Ding et R. M. Frank. *An adaptive observer-based fault detection scheme for nonlinear systems*. Dans Proceedings of the 12th IFAC World Congress, pages 307–312, 1993. (Cit  en page 15.)
- [Douc 2005] R. Douc et O. Cappe. *Comparison of resampling schemes for particle filtering*. Dans Proceedings of the 4th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA), pages 64–69. Zagreb, Croatia, 2005. (Cit  en pages 108 et 114.)
- [Doucet 2000] A. Doucet, S. Godsill et C. Andrieu. *On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering*. Statistics and Computing, vol. 10, no. 3, pages 197–208, juillet 2000. (Cit  en page 105.)
- [Doucet 2001] A. Doucet, N. de Freitas et N. Gordon, editeurs. *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer, 2001. (Cit  en page 9.)
- [Drakunov 1992] S. V. Drakunov. *Sliding-mode observers based on equivalent control method*. Dans Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control, volume 2, pages 2368–2369, 1992. (Cit  en page 7.)
- [Dubois 1986] D. Dubois et H. Prade. *A set-theoretic view of belief functions. Logical operations and approximation by fuzzy sets*. International Journal of General Systems, vol. 12, no. 3, pages 193–226, 1986. (Cit  en page 48.)
- [Dubois 1987] D. Dubois et H. Prade. *The principle of minimum specificity as a basis for evidential reasoning*. Dans B. Bouchon et R.R. Yager, editeurs, *Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pages 75–84. Springer Verlag, 1987. (Cit  en page 48.)
- [Dubois 1988] D. Dubois et H. Prade. *Possibility theory : an approach to computerized processing of uncertainty*, volume 2. Plenum press, 1988. (Cit  en page 48.)
- [Dubois 1992] D. Dubois et H. Prade. *When upper probabilities are possibility measures*. Fuzzy Sets and Systems, vol. 49, no. 1, pages 65 – 74, 1992. (Cit  en page 44.)

- [Dubois 2015] D. Dubois et H. Prade. *Possibility Theory and Its Applications : Where Do We Stand?* Dans Springer Handbook of Computational Intelligence, pages 31–60. 2015. (Cité en page 43.)
- [Dulmage 1958] A. L. Dulmage et N. S. Mendelsohn. *Coverings of bipartite graphs.* Canadian Journal of Math., vol. 10, pages 517–534, 1958. (Cité en page 20.)
- [Duroola 2008] S. Duroola, P. Danès et D. F. Coutinho. *Set-membership filtering of uncertain discrete-time rational systems through Recursive Algebraic Representations and LMIs.* Dans Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, pages 684–689, Cancun, Mexico, December 2008. (Cité en page 127.)
- [Faubel 2008] F. Faubel, H. Raja et J. McDonough. *Particle filter based soft-mask estimation for missing feature reconstruction.* Dans Proceedings of the 11th International Workshop on Acoustic Echo and Noise Control, 2008. (Cité en page 9.)
- [Ferson 2003] S. Ferson, L. Ginzburg et R. Akcakaya. *Whereof one cannot speak : When input distributions are unknown.* Risk Analysis, 2003. (Cité en pages 42 et 53.)
- [Frank 1997] P. M. Frank et X. Ding. *Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems.* Journal of Process Control, vol. 7, no. 6, pages 403 – 424, 1997. (Cité en page 15.)
- [Frisk 2017] E. Frisk, M. Krysander et D. Jung. *A Toolbox for Analysis and Design of Model Based Diagnosis Systems for Large Scale Models.* Dans IFAC World Congress, Toulouse, France, 2017. (Cité en pages 23, 150 et 154.)
- [Funiak 2003] S. Funiak et B. Williams. *Multi-modal particle filtering for hybrid systems with autonomous mode transitions.* Dans Workshop on Principles of Diagnosis, 2003. (Cité en page 9.)
- [Gelso 2008] E. R. Gelso, S. M. Castillon et J. Armengol. *An algorithm based on structural analysis for model-based fault diagnosis.* Dans CCIA, volume 184 of *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, pages 138–147. IOS Press, 2008. (Cité en page 22.)
- [Gning 2007] A. Gning, F. Abdallah et P. Bonnifait. *A New Estimation Method for Multisensor Fusion by using Interval Analysis and Particle Filtering.* Dans Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 3844–3849. Roma, Italy, April 2007. (Cité en pages 25, 115, 116, 117 et 140.)
- [Gning 2012] A. Gning, L. Mihaylova, B. Ristic et F. Abdallah. *Integrated Tracking, Classification, and Sensor Management.* Dans Integrated Tracking, Classification, and Sensor Management, chapitre 17, pages 43–74. John Wiley and Sons, New Jersey, 2012. (Cité en pages 117 et 131.)
- [Gordon 1993] N. J. Gordon, D. J. Salmond et A. F. M. Smith. *Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation.* IEE Proceedings F

- Radar and Signal Processing, vol. 140, no. 2, pages 107–113, April 1993. (Cité en pages 9, 102, 105 et 108.)
- [Gustafsson 2002] F. Gustafsson, F. Gunnarsson, N. Bergman, U. Forssell, J. Jansson, R. Karlsson et P. J. Nordlund. *Particle filters for positioning, navigation, and tracking*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, no. 2, pages 425–437, Feb 2002. (Cité en page 102.)
- [Hajiyev 2003] C. Hajiyev et F. Caliskan. Fault diagnosis and reconfiguration in flight control systems. Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 2003. (Cité en pages 139 et 141.)
- [Hammouri 1999] H. Hammouri, M. Kinnaert et E. H. El Yaagoubi. *Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no. 10, pages 1879–1884, 1999. (Cité en page 15.)
- [Handschin 1970] J. E. Handschin. *Monte Carlo techniques for prediction and filtering of non-linear stochastic processes*. Automatica, vol. 6, no. 4, pages 555–563, juillet 1970. (Cité en page 101.)
- [Hansen 1992] E. Hansen. Global optimization using interval analysis. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. M. Dekker, New York, 1992. (Cité en page 37.)
- [Harary 1969] F. Harary. Graph theory. Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison Wesley, 1969. (Cité en page 18.)
- [Hastings 1970] W. K. Hastings. *Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications*. Biometrika, vol. 57, no. 1, pages 97–109, avril 1970. (Cité en page 101.)
- [Hofbaur 2004] M. W. Hofbaur et B. C. Williams. *Hybrid estimation of complex systems*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), vol. 34, no. 5, pages 2178–2191, 2004. (Cité en page 9.)
- [Hu 2008] X. Hu, T.B. Schon et L. Ljung. *A Basic Convergence Result for Particle Filtering*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 56, no. 4, pages 1337–1348, April 2008. (Cité en pages 110 et 112.)
- [Hu 2011] X. Hu, T.B. Schon et L. Ljung. *A General Convergence Result for Particle Filtering*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 59, no. 7, pages 3424–3429, July 2011. (Cité en page 112.)
- [Huang 2008] G. P. Huang, A. I. Mourikis et S. I. Roumeliotis. *Analysis and improvement of the consistency of extended Kalman filter based SLAM*. Dans IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 473–479, 2008. (Cité en page 8.)
- [Hue 2002] C. Hue, J. P. Le Cadre et P. Perez. *Tracking multiple objects with particle filtering*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 38, no. 3, pages 791–812, Jul 2002. (Cité en page 102.)

- [Jaulin 1993] L. Jaulin et E. Walter. *Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation*. Automatica, vol. 29, no. 4, pages 1053–1064, 1993. (Cité en pages 25, 32 et 33.)
- [Jaulin 2001] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit et E. Walter. Applied Interval Analysis, with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics. Springer-Verlag, London, 2001. (Cité en pages 9, 26, 35 et 38.)
- [Jaulin 2015] L. Jaulin. Mobile Robotics. Mobile Robotics. novembre 2015. (Cité en page 67.)
- [Jones 1973] H. L. Jones. *Failure detection in Linear Systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technologies, 1973. (Cité en page 139.)
- [Kalman 1960] R.E. Kalman. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering, vol. 82, no. Series D, pages 35–45, 1960. (Cité en pages 1, 7 et 67.)
- [Kamen 1999] E. W. Kamen et J. K. Su. Introduction to optimal estimation. Springer-Verlag London Ltd, 1999. (Cité en pages 71, 72 et 74.)
- [Kitagawa 1996] G. Kitagawa. *Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models*. Journal of Computational and Graphical Statistics, vol. 5, no. 1, pages 1–25, 1996. (Cité en pages 102 et 110.)
- [Kluge 2010] S. Kluge, K. Reif et M. Brokate. *Stochastic Stability of the Extended Kalman Filter With Intermittent Observations*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 2, pages 514–518, 2010. (Cité en pages 1, 77, 78 et 79.)
- [Kong 1994] A. Kong, J. S. Liu et W. H. Wong. *Sequential Imputations and Bayesian Missing Data Problems*. Journal of the American Statistical Association, vol. 89, no. 425, pages 278–288, 1994. (Cité en page 108.)
- [Koutsoukos 2003] X. Koutsoukos, J. Kurien et F. Zhao. *Estimation of Distributed Hybrid Systems Using Particle Filtering Methods*. Hybrid Systems : Computation and Control (HSCC 2003), 2623, LNCS, pages 298–313, 2003. (Cité en page 9.)
- [Krysander 2008a] M. Krysander, J. Åslund et M. Nyberg. *An Efficient Algorithm for Finding Minimal Overconstrained Subsystems for Model-Based Diagnosis*. IEEE transactions on systems, man and cybernetics. Part A. Systems and humans, vol. 38, no. 1, pages 197–206, 2008. (Cité en pages 22 et 23.)
- [Krysander 2008b] M. Krysander et E. Frisk. *Sensor Placement for Fault Diagnosis*. IEEE transactions on systems, man and cybernetics. Part A. Systems and humans, vol. 38, no. 6, pages 1398–1410, 2008. (Cité en page 19.)
- [Kwok 2003] C. Kwok, D. Fox et M. Meila. *Adaptive real-time particle filters for robot localization*. Dans IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 2, pages 2836–2841, Sept 2003. (Cité en page 102.)
- [Kwok 2004] C. Kwok, D. Fox et M. Meila. *Real-time particle filters*. Proceedings of the IEEE (issue on State estimation), vol. 92, no. 3, pages 469–484, Mar 2004. (Cité en page 102.)

- [Li 2001] P. Li et V. Kadiramanathan. *Particle filtering based likelihood ratio approach to fault diagnosis in nonlinear stochastic systems*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews), vol. 31, no. 3, pages 337–343, 2001. (Cit  en pages 9 et 15.)
- [Liu 1998] J. S. Liu et R. Chen. *Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems*. Journal of the American Statistical Association, vol. 93, pages 1032–1044, 1998. (Cit  en page 109.)
- [Lowrance 2008] J. D. Lowrance, T. D. Garvey et T. M. Strat. *A Framework for Evidential-Reasoning Systems*. Dans R. R. Yager et L. Liu,  diteurs, Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions, pages 419–434. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008. (Cit  en page 121.)
- [Luenberger 1964] D. Luenberger. *Observing the State of a Linear System*. IEEE Transactions on Military Electronics, vol. 8, pages 74–80, 1964. (Cit  en pages 1, 7 et 8.)
- [Luenberger 1971] D. Luenberger. *An introduction to observers*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 16, no. 6, pages 596–602, 1971. (Cit  en pages 1, 7 et 8.)
- [Lunze 2016] J. Lunze, S. Pr ll et F. Jarmolowitz. *From structural analysis to observer-based residual generation for fault detection*. Dans 3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol), pages 491–498, septembre 2016. (Cit  en page 21.)
- [Mbalawata 2014a] I. S. Mbalawata et S. Sarkka. *On the  $L^4$  convergence of particle filters with general importance distributions*. Dans 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), pages 8048–8052, May 2014. (Cit  en page 110.)
- [Mbalawata 2014b] I.S. Mbalawata et S. Sarkka. *Weight moment conditions for  $L^4$  convergence of particle filters for unbounded test functions*. Dans Proceedings of the 22nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2014, pages 1207–1211, Sept 2014. (Cit  en pages 110 et 115.)
- [Mbalawata 2016] I.S. Mbalawata et S. S rkk . *Moment conditions for convergence of particle filters with unbounded importance weights*. Signal Processing, vol. 118, pages 133–138, 2016. (Cit  en pages 110, 113, 114 et 115.)
- [Mcilraith 2000] S. A. Mcilraith. *Diagnosing hybrid systems : A bayesian model selection approach*. Dans Proceedings of the 11th International Workshop on Principles of Diagnosis, pages 140–146, 2000. (Cit  en page 9.)
- [Metropolis 1949] N. Metropolis et S. M. Ulam. *The Monte Carlo Method*. Journal of the American Statistical Association, vol. 44, no. 247, pages 335–341, septembre 1949. (Cit  en page 101.)
- [Metropolis 1953] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller et E. Teller. *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*. The Journal of Chemical Physics, vol. 21, no. 6, pages 1087–1092, juin 1953. (Cit  en page 101.)

- [Milanese 2002] M. Milanese et C. Novara. *Nonlinear set-membership prediction of river flow*. Dans Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, volume 1, pages 931–936. Las Vegas, USA, Dec 2002. (Cité en pages 9 et 140.)
- [Mohamed 2012] S.M.K. Mohamed et S. Nahavandi. *Robust Finite-Horizon Kalman Filtering for Uncertain Discrete-Time Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 57, no. 6, pages 1548–1552, June 2012. (Cité en page 68.)
- [Moore 1966] R.E. Moore. Interval analysis. Prentice-Hall, 1966. (Cité en pages 9 et 25.)
- [Moore 1979] R. E. Moore et F. Bierbaum. Methods and Applications of Interval Analysis (SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics 2). Soc for Industrial & Applied Math, 1979. (Cité en pages 32 et 37.)
- [Moore 2009] R.E. Moore, R.B. Kearfott et M.J. Cloud. Introduction to interval analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2009. (Cité en page 26.)
- [Nassreddine 2010] G. Nassreddine, F. Abdallah et T. Dencœux. *State Estimation Using Interval Analysis and Belief-Function Theory : Application to Dynamic Vehicle Localization*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), vol. 40, no. 5, pages 1205–1218, Oct 2010. (Cité en pages 2, 3, 48, 55, 102, 116, 120, 121, 127 et 133.)
- [Neumaier 1990] A. Neumaier. Interval methods for systems of equations. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990. (Cité en page 37.)
- [Okatan 2007] A. Okatan, C. Hajiyev et U. Hajiyeva. *Kalman Filter Innovation Sequence Based Fault Detection in LEO Satellite Attitude Determination and Control System*. Dans 3rd International Conference on Recent Advances in Space Technologies, pages 411–416, 2007. (Cité en page 15.)
- [Oppenheim 2008] G. Oppenheim, A. Philippe et J. de Riga. *The particle filters and their applications*. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, vol. 91, no. 1, pages 87 – 93, 2008. (Cité en page 9.)
- [Poignet 2003] P. Poignet, N. Ramdani et A. Vivas. *Robust estimation of parallel robot dynamic parameters with interval analysis*. Dans Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, volume 6, pages 6503–6508, Dec 2003. (Cité en page 25.)
- [Pröll 2016] S. Pröll, F. Jarmolowitz et J. Lunze. *A Comprehensive Observer-Based Fault Isolation Method with Application to a Hydraulic Power Train*. Dans 8th IFAC International Symposium on Advances in Automotive Control - AAC 2016, pages 557–564, Norrköping, Schweden, 2016. (Cité en pages 22, 23 et 149.)

- [Puig 2003] V. Puig, J. Saludes et J. Quevedo. *Worst-Case Simulation of Discrete Linear Time-Invariant Interval Dynamic Systems*. *Reliable Computing*, vol. 9, no. 4, pages 251–290, 2003. (Cité en page 7.)
- [Pukrushpan 2004] J.T. Pukrushpan, H. Peng et A.G. Stefanopoulou. *Control-Oriented Modeling and Analysis for Automotive Fuel Cell Systems*. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 126, no. 1, page 14, 2004. (Cité en page 95.)
- [Rauh 2014] A. Rauh, L. Senkel, E. Auer et H. Aschemann. *Interval Methods for Real-Time Capable Robust Control of Solid Oxide Fuel Cell Systems*. *Mathematics in Computer Science*, vol. 8, no. 3, pages 525–542, 2014. (Cité en page 25.)
- [Regan 2004] H. M. Regan, S. Ferson et D. Berleant. *Equivalence of methods for uncertainty propagation of real-valued random variables*. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 36, no. 1, pages 1 – 30, 2004. (Cité en page 120.)
- [Reif 1999] K. Reif, S. Günther, E. Yaz et R. Unbehauen. *Stochastic Stability of the Discrete-time extended Kalman Filter*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 4, pages 714–728, 1999. (Cité en pages 1, 77, 78 et 79.)
- [Rhudy 2013] M.B. Rhudy et Y. Gu. *Online Stochastic Convergence Analysis of the Kalman Filter*. *International Journal of Stochastic Analysis*, vol. 2013, 2013. (Cité en pages 75 et 76.)
- [Ristic 2004] B. Ristic, S. Arulampalam et N. Gordon. *Beyond the Kalman filter : particle filters for tracking applications*. Artech House, Boston, London, 2004. (Cité en page 102.)
- [Rotondo 2016] D. Rotondo, R. M. Fernandez-Canti, S. Tornil-Sin, J. Blesa et V. Puig. *Robust fault diagnosis of proton exchange membrane fuel cells using a Takagi-Sugeno interval observer approach*. *International Journal of Hydrogen Energy*, vol. 41, no. 4, pages 2875 – 2886, 2016. (Cité en page 95.)
- [Rump 1998] S.M. Rump. *Intlab - interval laboratory*. *Developments in Reliable Computing*, pages 77–104, 1998. (Cité en page 25.)
- [Seliger 1991] R. Seliger et R. M. Frank. *Robust component fault detection and isolation in nonlinear dynamic systems using nonlinear unknown input observers*. Dans *Proceedings of the IFAC/IMACS Symp. SAFEPROCESS*, pages 277–282, 1991. (Cité en page 15.)
- [Shafer 1976] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, 1976. (Cité en pages 2, 45 et 47.)
- [Smets 1993] P. Smets. *Belief functions : The disjunctive rule of combination and the generalized Bayesian theorem*. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 9, no. 1, pages 1 – 35, 1993. (Cité en pages 2, 45 et 49.)
- [Smets 1994] P. Smets et R. Kennes. *The Transferable Belief Model*. *Artificial Intelligence*, vol. 66, no. 2, pages 191–234, 1994. (Cité en page 49.)

- [Smets 1999] P. Smets. *Practical Uses of Belief Functions*. Dans Proceedings of the 15th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, UAI'99, pages 612–621, San Francisco, CA, USA, 1999. Morgan Kaufmann Publishers Inc. (Cité en pages 2 et 45.)
- [Smets 2005a] P. Smets. *Belief functions on real numbers*. International Journal of Approximate Reasoning, vol. 40, no. 3, pages 181 – 223, 2005. (Cité en pages 2, 45, 50, 53 et 57.)
- [Smets 2005b] P. Smets. *Decision making in the TBM : the necessity of the pignistic transformation*. International Journal of Approximate Reasoning, vol. 38, no. 2, pages 133 – 147, 2005. (Cité en pages 2 et 45.)
- [Smets 2013] P. Smets. *Belief Induced by the Partial Knowledge of the Probabilities*. CoRR, vol. abs/1302.6844, 2013. (Cité en page 45.)
- [Sobhani-Tehrani 2009] E. Sobhani-Tehrani et K. Khorasani. Fault diagnosis of nonlinear systems using a hybrid approach. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer US, 2009. (Cité en pages 12 et 18.)
- [Soto 2005] A. Soto. *Self Adaptive Particle Filter*. Dans Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI'05, pages 1398–1403, San Francisco, CA, USA, 2005. Morgan Kaufmann Publishers Inc. (Cité en page 9.)
- [Souibgui 2011] F. Souibgui, F. BenHmida et A. Chaari. *Particle filter approach to fault detection and isolation in nonlinear systems*. Dans Eighth International Multi-Conference on Systems, Signals Devices, pages 1–6, March 2011. (Cité en page 139.)
- [Sreedhar 1993] R. Sreedhar, B. Fernandez et G. Y. Masada. *Robust fault detection in nonlinear systems using sliding mode observers*. Dans Proceedings of the IEEE Conference on Control Application, pages 716–721, 1993. (Cité en page 15.)
- [Sunaga 1958] T. Sunaga. *Theory of Interval Algebra and its applications to Numerical Analysis*. RAAG Memoirs, vol. 2, pages 29–46, 1958. (Cité en pages 9 et 25.)
- [Tran 2016] T. A. Tran, F. Le Gall, C. Jauberthie et L. Travé-Massuyès. *Two stochastic filters and their interval extensions*. Dans Proceedings of the 4th IFAC International Conference on Intelligent Control and Automation Sciences, Reims, France, June 2016. (Cité en pages 3, 68 et 81.)
- [Tran 2017] T. A. Tran, C. Jauberthie, F. Le Gall et L. Travé-Massuyès. *Interval Kalman filter enhanced by positive definite upper bounds*. Dans Proceedings of the 2017 IFAC World Congress, Toulouse, France, July 2017. (Cité en pages 3 et 68.)
- [Tran 2018] T. A. Tran, C. Jauberthie, F. Le Gall et L. Travé-Massuyès. *Evidential box particle filter using belief function theory*. International Journal of Approximate Reasoning, vol. 93, no. Supplement C, pages 40 – 58, 2018. (Cité en page 3.)

- [Verma 2003] V. Verma, S. Thrun et R. Simmons. *Variable Resolution Particle Filter*. Dans Proceedings of the 18th International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI'03, pages 976–981, San Francisco, CA, USA, 2003. Morgan Kaufmann Publishers Inc. (Cité en page 9.)
- [Verma 2004] V. Verma, G. Gordon et R. Simmons. *Particle filters for rover fault diagnosis*. IEEE Robotics and Automation Magazine Special Issue on Human Centered Robotics and Dependability, 2004. (Cité en page 9.)
- [Vermaak 2002] J. Vermaak, C. Andrieu, C. Doucet et S. J. Godsill. *Particle methods for Bayesian modeling and enhancement of speech signals*. IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, vol. 10, no. 3, pages 173–185, Mar 2002. (Cité en page 102.)
- [Vural 2016] S. Y. Vural et C. Hacizade. *Sensor/Actuator fault detection, isolation and accomodation applied to UAV model*. Journal of Aeronautics and Space Technologies, vol. 9, no. 2, pages 1–12, 2016. (Cité en page 139.)
- [Waltz 1972] D. L. Waltz. *Generating Semantic Descriptions From Drawings of Scenes With Shadows*. Rapport technique, Cambridge, MA, USA, 1972. (Cité en pages 37 et 38.)
- [Whitley 1994] D. Whitley. *A genetic algorithm tutorial*. Statistics and Computing, vol. 4, no. 2, pages 65–85, 1994. (Cité en page 109.)
- [Willsky 1976] A. S. Willsky. *A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamic Systems*. Automatica, vol. 12, no. 6, pages 601–611, novembre 1976. (Cité en pages 15 et 142.)
- [Xiong 2013] J. Xiong, C. Jauberthie, L. Travé-Massuyès et F. Le Gall. *Fault detection using interval Kalman filtering enhanced by constraint propagation*. Dans Proceedings of the 52nd IEEE Annual Conference on Decision and Control (CDC), pages 490–495, Florence, Italy, Dec 2013. (Cité en pages viii, 2, 9, 10, 25, 68, 79, 80, 99, 143, 145, 147 et 159.)
- [Yagger 1986] R. R. Yagger. *The entailment principle for Dempster-Shafer granules*. International Journal of Intelligent Systems, vol. 1, pages 247–262, 1986. (Cité en pages 48 et 120.)
- [Yang 1995] H. Yang et M. Saif. *Nonlinear adaptive observer design for fault detection*. Dans American Control Conference, volume 2, pages 1136–1139, 1995. (Cité en page 15.)
- [Zadeh 1965] L.A. Zadeh. *Fuzzy sets*. Information and Control, vol. 8, no. 3, pages 338 – 353, 1965. (Cité en page 42.)
- [Zadeh 1978] L.A. Zadeh. *Fuzzy sets as a basis for a theory de possibility*. Fuzzy Sets and Systems, vol. 1, pages 3–28, 1978. (Cité en page 42.)
- [Zhang 2012] X. Zhang, J. Peng, W. Yu et K. Lin. *Confidence-Level-Based New Adaptive Particle Filter for Nonlinear Object Tracking*. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2012. (Cité en page 9.)

- [Zhang 2014] Q. Zhang et M. Basseville. *Statistical detection and isolation of additive faults in linear time-varying systems*. Automatica, vol. 50, no. 10, pages 2527–2538, octobre 2014. (Cité en page 141.)
- [Zhang 2015] J. Zhang et G. Rizzoni. *Structural Analysis for Diagnosability and Reconfigurability, with application to Electric Vehicle Drive System*. IFAC-PapersOnLine, vol. 48, no. 21, pages 1471 – 1478, 2015. 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes SAFEPROCESS 2015. (Cité en page 21.)
- [Zhao 2014] B. Zhao et R. Skjetne. *An unified framework for Fault Detection and Diagnosis using Particle Filter*. Modeling, Identification and Control, vol. 35, no. 4, pages 303–315, 2014. (Cité en page 139.)
- [Zhe 2006] D. Zhe et Y. Zheng. *Finite-horizon robust Kalman filtering for uncertain discrete time-varying systems with uncertain-covariance white noises*. IEEE Signal Processing Letters, vol. 13, no. 8, pages 493–496, Aug 2006. (Cité en page 68.)
- [Zhou 2008] B. Zhou, J. Han et G. Liu. *A UD factorization-based nonlinear adaptive set-membership filter for ellipsoidal estimation*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 18, no. 16, pages 1513–1531, 2008. (Cité en page 9.)





# Résumé

Cette thèse porte sur l'estimation d'état des systèmes dynamiques à temps discret dans le contexte de l'intégration d'incertitudes statistiques et à erreurs bornées. Partant du filtre de Kalman intervalle (IKF) et de son amélioration (iIKF), nous proposons un algorithme de filtrage pour des systèmes linéaires dont les bruits sont gaussiens incertains, c'est-à-dire de moyenne et matrice de covariance définies par leur appartenance à des intervalles. Ce nouveau filtre de Kalman intervalle (UBIKF) repose sur la recherche d'une matrice de gain ponctuelle minimisant une borne majorante de l'ensemble des matrices de covariance de l'erreur d'estimation en respectant les bornes des incertitudes paramétriques. Un encadrement de tous les estimés possibles est ensuite déterminé en utilisant l'analyse par intervalles. Le filtre UBIKF permet de réduire à la fois la complexité calculatoire de l'inversion ensembliste des matrices intervalles présent dans le filtre iIKF et le conservatisme des estimations.

Nous abordons ensuite différents cadres permettant de représenter des connaissances incomplètes ou imprécises, y compris les fonctions de répartition, la théorie de possibilité et la théorie des fonctions de croyance. Grâce à cette dernière, un modèle sous forme d'une fonction de masse pour une distribution gaussienne multivariée incertaine est proposé. Un filtrage particulière ensembliste basé sur cette théorie est développé pour des systèmes dynamiques non linéaires dans lesquels les bruits sur la dynamique sont bornés et les erreurs de mesure sont modélisées par une fonction de masse gaussienne incertaine.

Enfin, le filtre UBIKF est utilisé pour la détection et l'isolation de défauts en mettant en œuvre le schéma d'observateurs généralisé et l'analyse structurale. Au travers de différents exemples, la capacité d'isolation de défauts capteurs/actionneurs de cet outil est illustrée et comparée à d'autres approches.

# Abstract

This thesis deals with state estimation in discrete-time dynamic systems in the context of the integration of statistical and bounded error uncertainties. Motivated by the drawbacks of the interval Kalman filter (IKF) and its improvement (iIKF), we propose a filtering algorithm for linear systems subject to uncertain Gaussian noises, i.e. with the mean and covariance matrix defined by their membership to intervals. This new interval Kalman filter (UBIKF) relies on finding a punctual gain matrix minimizing an upper bound of the set of estimation error covariance matrices by respecting the bounds of the parametric uncertainties. An envelope containing all possible estimates is then determined using interval analysis. The UBIKF reduces not only the computational complexity of the set inversion of the matrices intervals appearing in the iIKF, but also the conservatism of the estimates.

We then discuss different frameworks for representing incomplete or imprecise knowledge, including the cumulative distribution functions, the possibility theory and the theory of belief functions. Thanks to the last, a model in the form of a mass function for an uncertain multivariate Gaussian distribution is proposed. A box particle filter based on this theory is developed for non-linear dynamic systems in which the process noises are bounded and the measurement errors are represented by an uncertain Gaussian mass function.

Finally, the UBIKF is applied to fault detection and isolation by implementing the generalized observer scheme and structural analysis. Through various examples, the capacity for detecting and isolating sensor/actuator faults of this tool is illustrated and compared to other approaches.