Règles de quantification semi-classique pour une orbite périodique de type hyberbolique

Hanen Louati

THESE DE DOCTORAT

sous la direction de Michel ROULEUX et Noureddine M'HADHBI

présentée par

Hanen LOUATI

Pour obtenir le grade de DOCTEUR

de

l'**Université de Tunis El Manar** et de l' **Université de Toulon**

RÈGLES DE QUANTIFICATION SEMI-CLASSIQUE POUR UNE ORBITE PÉRIODIQUE DE TYPE HYPERBOLIQUE

Soutenue le 27 Janvier 2017 devant le Jury composé de :

M. Sami BARAKET: Professeur, Faculté des Sciences de Tunis, Président du Jury
M. Maher MNIF: Professeur, Faculté des Sciences de Sfax, Rapporteur
M. Konstantin PANKRASHKIN: Maitre de Conférences, Université Paris-Sud, Rapporteur
M. Philippe BRIET: Professeur, Université de Toulon, Examinateur
M. Michel ROULEUX: Maitre de Conférences, Université de Toulon, Directeur de thèse
M. Noureddine M'HADHBI: Professeur, Faculté des Sciences de Tunis, Directeur de thèse.

REMERCIEMENTS

Bien évidemment, c'est à Michel ROULEUX et Noureddine M'HADHBI, qui m'ont suivie tout au long de cette thèse en cotutelle, que vont mes premiers remerciements. A leur côté, j'ai appris comment construire mon intuition mathématique, prendre du recul, rédiger de manière lisible...

Bref, un énorme merci!

Maher MNIF et Konstantin PANKRASHKIN ont accepté d'étre rapporteurs de ma Thèse. Je souhaite les remercier vivement pour le temps passé et pour avoir accepté de venir à Tunis pour la soutenance.

Je remercie Philippe BRIET d'avoir bien voulu me faire l'honneur d'être Examinateur et Sami BARAKET de présider à mon Jury de Thèse.

Un merci spécial à Johannes SJÖSTRAND pour avoir lu mon manuscrit et prodigué ses encouragements.

Merci à toute l'équipe "Equations aux Dérivées Partielles" de la Faculté des Sciences de Tunis El-Manar, qui a été ma maison mathématique pendant ces années de thèse; en particulier,un grand merci à Mohamed MAJDOUB et Slim TAYACHI pour rendre la vie pratique accessible à des matheux.

Je remercie aussi toute l'équipe DQAS au Centre de Physique Théorique (CPT), et l'Universite de Toulon, qui m'ont accueillie régulierement, et le personnel du CPT de m'avoir assistée dans les moments difficiles.

Merci aussi à toute ma famille, en particulier mon agréable soeur LOBNA et mon frère ABDELWAHEB pour leur amour et leur attention constants.

Je suis profondement reconnaissante à mes parents pour leur soutien sans faille et leurs prières.

Merci à mes amis matheux, qui m'ont aidée chacun à leur manière, dans le cadre mathématique ou la vie de tous les jours.

Enfin, je remercie mon Papa et ma Maman qui m'ont envoyée à l'école. A tous, merci!

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES (suite)

1. H.Fadhlaoui, H.Louati, M.Rouleux. Hyperbolic Hamiltonian flows and the semiclassical Poincaré map. Proceedings "Days of Diffraction 2013", Saint-Petersburg, IEEE 10.1109/DD.2013.6712803, p.53-58. (arxiv.org/abs/1307.2107)

2. H.Louati, M.Rouleux. Semi-classical quantization rules for a periodic orbit of hyperbolic type. http://arxiv.org/abs/1607.05057 Proceedings "Days of Diffraction 2016", Saint-Petersburg, IEEE.

3. H.Louati, M.Rouleux. Semi-classical resonances associated with a periodic orbit. Math. Notes, Vol. 100, No.5, p.724-730, 2016.

Chapitre I

INTRODUCTION

La détermination des orbites périodiques d'un hamiltonien et leur quantification est un problème lié à la Mécanique Céleste (problème à N corps), à la Géométrie Différentielle, et à la Théorie spectrale. Citons deux exemples:

1) Soit (M,g) une variété Riemanienne compacte, le flot géodésique est donné par un hamiltonien $H \in C^\infty(T^*M)$, "quantifié" par l'opérateur de Laplace-Beltrami $H_g(x,D_x) = -\Delta_g$. Il existe généralement des orbites périodiques pour H, qui sont associées à une suite de quasi-modes pour $H_g(x,D_x)$, et aussi à l'opérateur $H_{g,V}(x,D_x) = -\Delta_g + V$ où V est un potentiel régulier sur M (voir par exemple [We2]).

2) Soit $M = \mathbf{R}^n$ et $H^w(x,hD_x) = -h^2\Delta + V(x)$ l'opérateur de Schrödinger semi-classique quantifié de Weyl du hamiltonien $H(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$. Considérons une couche d'énergie $H^{-1}(E_0)$ compacte et régulière pour H, et $\gamma = \gamma_{E_0}$ une orbite périodique sur $H^{-1}(E_0)$. Il est bien connu ([Ba],[Ra]) qu'on peut construire des quasi-modes pour $H^w(x,hD_x)$ microlocalisés sur une orbite stable (voir la discussion apres le Théorème 1.2); on sait par ailleurs calculer des formules de trace ([Vo], [SjZw]) associées à des orbites instables; ou encore ([Chr]) estimer la concentration des fonctions propres de $H^w(x,hD_x)$ d'énergie E voisine de E_0 près d'une orbite instable. Si $H^{-1}(E_0)$ n'est plus compacte, et si γ est instable, on peut encore étudier les *résonances* de $H^w(x,hD_x)$ au voisinage de E_0 ([GeSj], [NoSjZw]).

Notons que le second exemple est une généralisation du premier au sens où l'équation aux valeurs propres $H(x,D_x)u_k = E_k u_k$ ($E_k \to \infty$) s'écrit encore $\widetilde{H}(x,h_kD_x)u_k = u_k$, avec $\widetilde{H}(x,hD_x) = -h^2\Delta + h^2V(x)$, $h_k = E_k^{-1/2}$. On s'intéressera donc au cas semi-classique.

L'objectif de cette Thèse est l'étude, dans le cadre des résonances, de la quantification des orbites instables (dites de type hyperbolique). On considère en particulier les règles de Bohr-Sommerfeld (BS) pour les résonances $E(h)$ de $H^w(x,hD_x)$ près de E_0, généralisant la formule en dimension 1

$$\frac{1}{2\pi h}\oint_{\gamma_E} \xi\,dx = n + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(h),\ n \in \mathbf{Z} \tag{1.1}$$

1. Orbites périodiques

a) Détermination des orbites périodiques

La situation standard est celle d'un hamiltonien non-autonome de la forme $H(t,x,\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}\times T^*\mathbf{R}^d)$, qui dépend de façon périodique de t: $H(t+T,\cdot) = H(t,\cdot)$ pour un $T>0$. On note X_H le champ hamiltonien dans les variables $\rho = (x,\xi)$, i.e. $X_H = {}^t\big(\partial_\xi H, -\partial_x H\big)$.

On cherche donc des solutions périodiques de

$$\dot{\rho} = X_H(\rho) \tag{1.2}$$

qui ont la période T. Notons qu'on s'intéressera plutôt dans cette Thèse au cas autonome, $H(y,\eta) \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$, $n = d+1$, tout en supposant déjà l'existence d'une orbite périodique; on peut se ramener alors localement au cas non-autonome par un changement de coordonnées symplectiques (voir [ArKoNe,p.417]).

La détermination de ces solutions donne lieu à un problème variationnel pour l'action lagrangienne

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T \big(\frac{1}{2}\langle\dot{\gamma}(t), J\gamma(t)\rangle - H(t,\gamma(t))\big)\, dt \tag{1.3}$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice symplectique standard, avec conditions périodiques $\gamma(T) = \gamma(0)$. Ici $\gamma : [0,T] \to T^*\mathbf{R}^n$ désigne un chemin (fonction test) dans l'espace de Sobolev $H^1_{\text{per}}([0,T])$. L'étude des variations de $\mathcal{L}$ donne une forme bilinéaire sur $H^1_{\text{per}}([0,T])$, associée à un opérateur auto-adjoint dont le spectre discret est non borné (dans les deux directions).

Ce problème a fait l'objet de beaucoup d'attention ([We], [Gu-We], [Rab], [BahBer], [Bol], [Ek], [A], [CdV3]...) Génériquement, à moins d'une hypothèse de symétrie (comme pour le flot géodésique sur la sphère), il n'existe qu'un nombre fini de telles orbites.

C.Conley et E.Zehnder ont proposé une démonstration qui a l'avantage de ne pas supposer la convexité de H, et qui fournit aussi le cadre variationnel pour calculer l'indice de l'orbite, moyennant certaines hypothèses de non-dégénérescence. Voir aussi [CdV2,Sect.1.8 et Sect.6], [SjZw,Sect.7].

Pour faire le lien entre les points critiques de (1.3) et les solutions de (1.2) on introduit pour une solution périodique de (1.2) un indice "géométrique" (indice de Gelfand-Lidskii ou Conley-Zehnder) qui s'interprète aussi essentiellement comme la signature du "Hessien" au point critique de (1.3). Pour cela on étudie le système variationnel le long d'une solution de (1.2)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta x \\ \delta\xi\end{pmatrix} = JH''(\rho(t))\begin{pmatrix}\delta x \\ \delta\xi\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Rappelons de la théorie de Floquet que la matrice fondamentale associée à l'équation

$$\dot{Z}(t) = JA(t)Z(t), \quad Z(0) = \mathrm{Id} \tag{1.5}$$

vérifie $Z(t+T) = Z(t)N$ où $N = \exp[2\pi JL]$, L symétrique, est une matrice symplectique. Les valeurs propres de N sont appelées exposants de Floquet et joueront un rôle fondamental dans toute notre analyse.

Définition 1.1: On dira que la solution périodique $\rho(t)$ de (1.2) est *non dégénérée* si 1 n'est pas un exposant de Floquet.

Dans ces conditions, on voit facilement que (1.4) n'admet pas d'autre solution de période T que la solution triviale. Conley et Zehnder [CoZe] ont montré essentiellement que les points critiques γ de (1.3) sont bien des solutions ρ de (1.2).

Il est important de savoir calculer l'indice de Conley-Zehnder, qui apparait dans la condition de quantification. On donnera notamment dans cette Thèse une méthode de calcul, utilisant la classe universelle de Maslov ([Hö], [DoRo]), et basée sur le théorème de la variété stable/instable (Théorème 1.2 ci-dessous) et la forme normale de Birkhoff.

Rappelons également que sous la condition de non dégénérescence de la Définition 1.1, il n'existe génériquement qu'un nombre fini d'orbites de periode T. Toutefois les orbites périodiques n'ont pas de raison d'être isolées. Supposons par exemple que (1.2) ait une solution $\gamma = \gamma_0$ périodique de période T, stable au sens où tous les exposants de Floquet sont imaginaires (voir ci-dessous); si ces exposants satisfont une condition de non-résonance et si de plus les invariants non linéaires de Birkhoff de cette solution sont non dégénérés, alors le Théorème local de Birkhoff-Lewis garantit l'existence d'une infinité de solutions γ_k, de période kT, $k \to \infty$ au voisinage de γ_0. On a une conclusion similaire [SaZe,p.1305] s'il existe au moins un exposant de Floquet imaginaire, i.e. dans le cas semi-hyperbolique.

Dans le cas autonome, le Théorème de Prolongement de Poincaré montre que s'il existe une orbite périodique γ_0 non dégénérée à l'énergie E_0, alors il en est de même pour E assez petit, et γ_E, de période T_E, dépend continûement de E. La famille $\overline{\gamma} = \bigcup_{|E-E_0|<\varepsilon} \gamma_E$ est contenue dans la variété centre (voir le Théorème 1.2).

Comme plus haut, si les exposants de Floquet sont non-résonants, et les invariants non linéaires de Birkhoff non dégénérés, l'existence des orbites périodiques voisines, et de période kT_E, $k \to \infty$, est garantie par le Théorème local de Birkhoff-Lewis iso-énergétique. Faisant varier E, on peut voir apparaitre d'autres orbites périodiques au voisinage de γ_0. Génériquement, l'ensemble des orbites périodiques près de γ_0 est un ensemble de Cantor de mesure non nulle dans la variété centre (Théorème KAM). Dans le cas semi-hyperbolique, c'est toutefois un ensemble négligeable dans tout l'espace de phases; voir [Graff] pour le cas lagrangien. Les orbites périodiques correspondantes (de période proches de kT_E, k entier) n'ont plus de raison d'être non-dégénérées au sens de la Définition 1.1, et la structure du flot devenir très compliquée. La quantification une à une de telles orbites est bien sûr impossible, mais on peut toujours espérer des formules de trace “à la Guzwiller”.

Toutefois dans le cas complètement hyperbolique, les orbites périodiques sont généralement isolées [Bo]. Il en est aussi de même dans l'exemple [Chr2] ci-dessous, et peut-être génériquement pour les flots géodésiques.

On se limite dans cette Thèse au cas le plus simple d'une orbite isolée, et même, pour éviter le phénomène d'effet tunnel, au cas d'une seule orbite sur la couche d'énergie $H = E$.

b) Classification.

On considère comme ci-dessus un hamiltonien autonome $H \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$. Rappellons d'abord le Théorème de la variété stable/instable [AbMa], dans le cas d'une orbite périodique (mais valable dans un cadre plus général, cf. [GéSj2]):

Théorème 1.2: Soit γ_0 une orbite périodique comme dans la Définition 1.1, et γ_E la famille d'orbites d'énergie E. Alors il existe une sous-variété fermée symplectique C (*variété centre*), contenant γ_0 et telle que X_H soit tangent à C en tout point. Il existe aussi deux sous-fibrés vectoriels $N^\pm$, tels que pour tout $\rho \in \Sigma$, $T_\rho C^\sigma = N_\rho^+ \oplus N_\rho^-$ (ici $T_\rho C^\sigma$ désigne l'orthogonal symplectique de $T_\rho C$). De plus, $N^\pm|_{\gamma_E}$ sont invariants par le flot hamiltonien, qui est contractant sur $N^-|_{\gamma_E}$ et expansif sur $N^+|_{\gamma_E}$.

On dira ici que γ_0 (et donc aussi la famille γ_E) est *stable* si $N^\pm = 0$.

Les orbites périodiques sont classifiées selon leurs exposants de Floquet. Les exposants de Floquet, s'ils sont réels, sont de la forme $\mu, -\mu$ (on parle du cas hyperbolique réel, ou hr), s'ils sont imaginaires de la forme $i\omega, -i\omega$ (cas elliptique, ou ee), s'ils sont complexes de la forme $\mu, -\mu, \overline{\mu}, -\overline{\mu}$ (cas hyperbolique complexe ou hc). On ne discutera que des orbites non-dégénérées au sens de la Définition 1.1. L'espace tangent à variété centre, outre $\mathbf{R}X_H$, comprend les sous-espaces associés aux exposants ee.

Les orbites dont tous les exposants de Floquet sont imaginaires sont appellées elliptiques. Ce sont des orbites stables au sens ci-dessus. Par exemple, pour le flot géodésique sur la sphère standard $\mathbf{S}^2$, toutes les orbites périodiques ("grand cercles") sont elliptiques; sur la sphère de Katok [Zi], [DoRo2], les deux seules orbites périodiques sont l'équateur (parcouru dans les 2 sens); ce sont aussi des orbites elliptiques.

S'il existe un exposant de Floquet hyperbolique (he) on dit que γ est (semi-) hyperbolique. Poincaré a montré que dans le cas de systèmes lagrangiens (ou hamiltoniens) à deux degrés de liberté, une solution périodique minimisant l'action est nécessairement instable (hyperbolique). Comme exemple de géodésiques périodiques minimisantes sur une surface, on peut penser au cercle de gorge d'un hyperboloide. Cet exemple se généralise à la dimension 3 [Chr2] à une variété axi-symétrique: pour une énergie E_1 on trouve deux orbites hyperboliques symétriques par rapport à l'hyperplan $z = 0$ (avec deux paires d'exposants de Floquet réels), et pour une energie $E_2 < E_1$ une orbite semi-hyperbolique sur $z = 0$ (avec une paire d'exposants réels, l'autre imaginaire).

En effet, la plupart des orbites sont linéairement instables dans certaines directions, sans être complètement hyperboliques [A]. Ceci motive notre étude, où l'on autorise des exposants de Floquet elliptiques et hyperboliques.

Si les exposants de Floquet vérifient une condition de non-resonance on peut réduire microlocalement le hamiltonien H à sa forme normale de Birkhoff (BNF) [Br]; cette forme s'étend au cas semi-classique (cf. [GuPa] dans le cas elliptique).

c) Cas d'une orbite non dégénérée: variétés stable/instable et germe complexe de Maslov.

Soit une orbite périodique non dégénérée γ_0 au sens de la Définition 1.1 et telle que $\operatorname{Re}\mu_j > 0$, $1 \leq j \leq d$ (cas complètement hyperbolique). Il est classique (théorème des variétés stable/instable, [AbMa]) que pour les ensembles $\Gamma_\pm$ et $\overline{\gamma}$ definis precédemment au voisinage de γ_0, en tout point $\rho \in \overline{\gamma}$, on a la décomposition

$$T_\rho\Gamma_+ + T_\rho\Gamma_- + T_\rho\overline{\gamma} = T^*\mathbf{R}^n \tag{2.6}$$

($T_\rho\Gamma_\pm = N^\pm$ avec les notations du Théorème 1.2). Les $\Gamma_\pm$ sont des variétés involutives, $\overline{\gamma} = \Gamma_+ \cap \Gamma_-$ une variété symplectique, et $\dim \Gamma_\pm = n+1$, $\dim \overline{\gamma} = 2$.

La décomposition (2.6) est préservée sous la fibration par les surfaces d'énergie $H^{-1}(E)$ de H, au sens où

$$\Gamma_\pm = \bigcup_{|E-E_0|<\varepsilon_0} \Gamma_\pm(E), \quad \overline{\gamma} = \bigcup_{|E-E_0|<\varepsilon_0} \gamma(E)$$

avec $\Gamma_+(E), \Gamma_-(E) \subset H^{-1}(E)$ sous-variétés lagrangiennes invariantes par X_H, et $\gamma(E) = \Gamma_+(E) \cap \Gamma_-(E)$ est l'orbite périodique à l'énergie E. On a donc

$$T_\rho\Gamma_+(E) + T_\rho\Gamma_-(E) + T_\rho\gamma(E) = T_\rho^* H^{-1}(E), \quad \rho \in \gamma_E$$

Les dimensions de toutes les sections sont diminuées d'une unité, i.e. $\dim \Gamma_\pm(E) = n$ et $\dim \gamma(E) = 1$.

Dans le cas où il existe des exposants de Floquet elliptiques (et si le hamiltonien est une fonction analytique) on peut introduire une géométrie complexe (germe complexe de Maslov). Pour cette géométrie, on "extrait" les sous-espaces associés aux exposants ee de la variété centre, que l'on "distribue" dans les variétés stable/instable. La variété centre se réduit alors à $\overline{\gamma}$.

d) Quantification semi-classique des orbites périodiques

La quantification des orbites elliptiques dans le cas semi-classique a été étudiee dans [Ba], [BaLaz], [Ra], [Vo1]...Elle utilise la construction de quasi-modes à l'aide d'intégrales oscillantes à phase complexe (méthode du "germe complexe de Maslov", ou des "gaussian beams"). Rappelons que dans le cas auto-adjoint on peut utiliser le principe variationnel selon lequel s'il existe un quasi-mode $(u_k(h), E_k(h)$ d'ordre 2, i.e. $\lim_{h\to 0} E_k(h) = E$ et $(H^w(x, hD_x) - E_k(h))u_k(h) = \mathcal{O}(h^2)$, alors $\operatorname{dist}(E_k(h), \operatorname{Spec} H^w) = \mathcal{O}(h^2)$.

Il existe aussi de tels résultats dans le cas du flot géodesique sur une variété riemanienne orientable (M, g) ([GuWe]) basés sur la construction d'une isométrie $L^2(\mathbf{S}^1) \to L^2(M)$ qui entrelace approximativement $d^2/d\theta^2$ et $-\Delta_g$. Cette isométrie est donnée par un Opérateur Integral de Fourier (OIF) d'un type particulier dû à Guillemin [Gu3].

Il a été remarqué d'autre part par Duistermaat [Du1] qu'il n'est pas possible de construire des quasi-modes associés aux variétés stable/instable d'une orbite de type hyperbolique, car ces variétés ne supportent pas de demi-densité invariante par le flot de X_H. D'autre part, la construction de quasi-modes microlocalisés près de l'orbite périodique donnerait lieu à des valeurs propres complexes. Gérard et Sjöstrand [GeSj] ont montré qu'on peut contourner ces difficultés dans le cadre des resonances, et donné la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld généralisée (BS) pour calculer (dans le cas complètement hyperbolique) les résonances associées à une orbite périodique d'énergie E_0 et proches de l'axe réel (d'une largeur $\mathcal{O}(h)$). La formule de Baker-Campbell-Hausdorff (cf. [NoSjZw]) permet sans trop de difficultés d'agrandir la largeur de ce voisinage à $\mathcal{O}(h \log 1/h)$. Une BNF partielle en dimension $n = 2$, permet encore d'atteindre $\mathcal{O}(h^\delta)$ pour tout $0 < \delta < 1$ (sans toutefois prendre en compte tous les nombres quantiques "longitudinaux", cf. [Sj4]). Précisant BNF, on montrera essentiellement dans cette Thèse que BS, *mutatis mutandis*, décrit toutes les résonances dans une "fenêtre" du type $W_h = [E_0 - \varepsilon_0, E_0 + \varepsilon_0] - i]0, h^\delta]$, et aussi pour des orbites semi-hyperboliques.

2. Résonances.

On présente ici l'essentiel de la théorie des résonances, telle qu'elle sera utilisée dans ce travail. Sa formulation initiale (aspect "dilatations analytiques") est dûe à Aguilar-Combes, Balslev-Combes (cf. [ReSi] pour une présentation générale), et plus tard (aspect "déformations lagrangiennes") à Helffer et Sjöstrand [HeSj]. Sous certaines hypothèses, Helffer et Martinez ont montré l'équivalence des différents points de vue [HeMa].

La difficulté provient du fait que l'on travaille avec un opérateur non auto-adjoint: étudier son spectre discret ne se ramène plus seulement à construire des quasi-modes, il faut encore étudier ses propriétés de Fredholm près de E. Dans cette Thèse, on ne justifiera pas en détail le procédé permettant de caractériser les résonances dans W_h dans le cas particulier d'une orbite périodique, et basé sur l'étude d'un *problème de Grushin* ([GeSj1], [SjZw]). Toutefois si l'on autorisait un nombre fini d'orbites périodiques de même énergie (par exemple dans le cas d'une symétrie), en vue notamment d'étudier leur interaction ("effet tunnel"), il serait nécessaire de reconsidérer precisément le problème de Grushin associé. On discutera ci-dessous surtout de la règle de quantification, renvoyant par exemple aux reférences ci-dessus pour une théorie générale.

a) Fonctions fuite.

On s'inspire ici de [GeSj]. Soit $H(x,\xi) \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n)$ un hamiltonien. On supposera $H \in S(m)$, où $m(x,\xi) \geq 1$ est une *fonction d'ordre*, vérifiant en particulier $m \in S(m)$.

Dans l'étude du scattering, ou des résonances associés à H, on est conduit à considérer des *fonctions fuite*.

Définition 2.1: Une fonction fuite $G_E : T^*\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ à énergie $E \in \mathbf{R}$ est une fonction regulière qui croit en dehors d'un compact le long des courbes intégrales $\Phi^t(\rho) = \exp tX_p(\rho)$ de X_H sur la surface d'énergie $H = E$, i.e.

$$X_H G_E(x,\xi) \geq \text{const. sur } H^{-1}(E) \setminus K \tag{2.1}$$

où K est un compact de $T^*\mathbf{R}^n$ (localement constant par rapport à E).

Exemples:

1) Soit $H(x,\xi) = \xi^2$. Pour $m(x,\xi) = 1 + \xi^2$, $H \in S(m)$. Soit $G_E(x,\xi) = G(x,\xi) = x\xi$, sur la surface d'énergie $\xi^2 = E > 0$, on a $X_H G = 2\xi^2 = 2(\xi^2 - E) + 2E$. Donc $X_H G \geq E$ si $|\xi^2 - E| \leq E/2$. Il en résulte facilement que G est une fonction de fuite pour tout $E > 0$: il suffit de prendre $K = \{(0,0)\}$.

2) Soit $p(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$ où $V \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ vérifie la *condition du viriel*

$$2V + x \cdot \nabla V \leq -\delta \tag{2.2}$$

pour un $\delta > 0$. Comme $X_p(x\xi) = 2\xi^2 - x \cdot \nabla V = 2(\xi^2 + V - E) + 2E - 2V - x \cdot \nabla V \geq 2E - 2\delta$ quand $2|\xi^2 + V - E| \leq \delta$, on a $X_p G(x\xi) > 0$ pour $E > \delta$. Il en résulte encore que G est une fonction de fuite pour tout $E > 0$.

Il n'est pas toujours possible de vérifier partout la condition du viriel: c'est le cas si $V(x) = -x^2$ et $E = 0$, puisque $2V + x \cdot \nabla V = 0$. Ici encore, $K = \{(0,0)\}$.

On remarque que l'ensemble des $E \in \mathbf{R}$ pour lesquels il existe une fonction fuite à énergie E est un ouvert, dont le complémentaire peut être défini comme l'ensemble des *seuils*. Dans la Définition 2.1, on peut remplacer E par E_0 (normalisé par $E_0 = 0$), puis choisir une fonction fuite $G_E = G$ indépendante de E pour $|E| < \varepsilon$ assez petit.

Si $K = \emptyset$, il existe donc une fonction fuite *globale*, i.e. telle que $X_H G \geq \delta > 0$ près de $H = E$.

Dans les exemples ci-dessus (avec $V(x) = -x^2$), le compact $K = \{(0,0)\}$ se réduit à l'ensemble des *points d'équilibre* de H, i.e. $\rho = (x,\xi)$ tels que $X_H(\rho) = 0$. Quitte à changer X_H en $v = \frac{1}{m} X_H$ dans la Définition 2, auquel cas (2.1) prend la forme

$$v(G_E) \geq \text{const.}\, m^{-1} \text{ sur } H^{-1}(E) \setminus K \tag{2.3}$$

on peut supposer que le champ hamiltonien X_H est intégrable pour tout $t \in \mathbf{R}$. On définit alors l'ensemble des trajectoires captées de H à l'energie E, par

$$K_E = \{\rho \in T^*\mathbf{R}^n : H(\rho) = E, \Phi^t(\rho) \text{ ne tend pas vers l'infini quand } |t| \to \infty\} \tag{2.4}$$

et $\widetilde{K} = \bigcup_{|E|<\varepsilon} K_E$.

Exemples:

1) Dans les Exemples 1 et 2 ci-dessus (avec $V(x) = -x^2$), $\widetilde{K} = K = \{(0, 0)\}$.

2) Dans le cas où $K_E = \gamma_E$ est une orbite périodique vérifiant la Définition 1, $\widetilde{K} = \overline{\gamma}$ est la variété centre.

Une observation importante (dûe au fait que Φ^t est un flot hamiltonien) est qu'on peut remplacer dans (2.4) $|t| \to \infty$ par "$t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$".

Plus précisement, définissons

$$\Gamma_+ = \{\rho = (x, \xi) \in H^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]), \Phi^t(\rho) \text{ ne tend pas vers l'infini quand } t \to -\infty\} \tag{2.5}$$

comme la *queue sortante* pour X_H; c'est un ensemble fermé invariant par le flot de X_H. On définit de façon similaire la *queue entrante* pour X_H en prenant $t \to +\infty$. On a donc $\widetilde{K} = \Gamma_+ \cap \Gamma_-$ et on peut montrer que $\widetilde{K} = K$ au sens de la Définition 2.1. Si $\Gamma_+ \neq \emptyset$ ou $\Gamma_- \neq \emptyset$, alors $K \neq \emptyset$, ce qui permet de définir les ensembles $\mathcal{J}_\pm = \Gamma_\pm \setminus K$ comme les queues sortante/entrante *réduites* pour X_H près de $E = 0$. Utilisant que Φ^t préserve le volume symplectique Vol, on trouve $\mathrm{Vol}(\mathcal{J}_\pm) = 0$. De plus $\mathcal{J}_+ \neq \emptyset \iff \mathcal{J}_- \neq \emptyset$.

Pour tenir compte des trajectoires captées, on dira que $\widetilde{G}$ est une fonction fuite *au sens faible* si $\widetilde{G} = G$ en dehors d'un voisinage compact K' de K, et si $X_H \widetilde{G} \geq 0$ pour $\rho \in H^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$, avec inégalite stricte en dehors de K'. La Proposition A.6 de [GeSj1] montre qu'il existe toujours des fonctions fuite au sens faible. Dans le cas où K_E est une orbite périodique vérifiant la Définition 1.1, on verra qu'on peut choisir $\widetilde{G}$ telle qu'elle s'annule exactement sur K (la variéte centre). C'est vrai aussi dans le cas d'un point d'équilibre.

b) Déformations lagrangiennes

Si G est de la forme $G(x, \xi) = x\xi$, on l'appele "générateur des dilatations"

$$x \mapsto e^t x = e^t \partial_\xi G(x, \xi)$$

qui s'implémente donc en un groupe de transformations unitaires sur L^2

$$T_t \phi(x) = e^{nt/2} \phi(e^t x) \tag{2.8}$$

On peut garder uniquement le premier terme de e^t (t petit) et considérer $x \mapsto x + tx$. Plus généralement, $G(x,\xi) = \chi_R(x)x\xi$, où $\chi_R \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ s'annule dans la boule $\{|x| \leq R\}$ contenant la projection sur l'espace des x de K_E, est appelé "générateur des distorsions"

$$x \mapsto x + t\chi_R(x)x = x + t\partial_\xi G(x,\xi) \tag{2.9}$$

Il s'implémente en un opérateur unitaire sur L^2

$$T_t\phi(x) = \big(\det(1 + t\nabla\chi_R(x))\big)^{n/2}\phi(x + t\chi_R(x)x),\ \phi \in L^2(\mathbf{R}^n) \tag{2.10}$$

Plus généralement, étant donnée une fonction fuite G, il existe toujours un difféomorphisme de l'espace des phases de la forme

$$(x,\xi) \mapsto \big(x + t\partial_\xi G(x,\xi), \xi - t\partial_x G(x,\xi)\big) = (x,\xi) + tX_G(x,\xi) \tag{2.11}$$

(déformation lagrangienne) qui s'implémente en une transformation unitaire sur les fonctions L^2.

c) Les résonances comme valeurs propres d'un opérateur non auto-adjoint.

Les dilatations, ou plus généralement les distorsions, peuvent se faire à t complexe, sous des hypothèses d'analyticité sur les coefficients de l'opérateur. Supposons pour se fixer les idées $H(x, hD_x) = -h^2\Delta + V(x)$ avec V *analytique par dilatation*, i.e. se prolongeant analytiquement à un secteur dans le domaine complexe de la forme $\Gamma_0 = \{x \in \mathbf{C}^n : |\operatorname{Im} x| \leq \text{const.}\langle \operatorname{Re} x\rangle\}$. Pour $t = i\theta$, la formule (2.8) est toujours valable (au moins sur un ensemble de *vecteurs analytiques* ϕ), et pour $U_\theta = T_{i\theta}$

$$H_\theta = U_\theta H U_\theta^{-1} = -h^2 e^{-2i\theta}\Delta + V(e^{i\theta}x) \tag{2.12}$$

On définit les résonances comme les valeurs propres complexes, dans le demi-plan inférieur $\operatorname{Im} E < 0$, pour $\theta > 0$, de l'opérateur non auto-adjoint H_θ.

Par exemple, si $V(x) = -x^2$, et $\theta = \pi/4$, on trouve $H_{\pi/4} = -i(-h^2\Delta + x^2)$. L'opérateur $H_{\pi/4}$ est microlocalement elliptique en dehors de (0,0), i.e. son symbole $-i(\xi^2 + x^2)$ est elliptique en dehors de ce point, ce qui n'était pas le cas pour $H = -h^2\Delta - x^2$. Les résonances de H sont les valeurs propres de H_θ, de la forme $-ih(n + \frac{1}{2})$.

Plus généralement si V a un maximum quadratique en 0 et vérifie la condition du viriel pour $x \neq 0$, on obtient une distorsion de la façon suivante: au voisinage de 0 on utilise la dilatation (2.8) $x \mapsto e^{i\pi/4}x$ et en dehors d'un voisinage de 0 la distorsion (2.12). Les résonances de H sont alors calculées à partir de celles de l'approximation quadratique $H^0 = -h^2\Delta + \frac{1}{2}V''(0)x^2$ de H en (0,0), ce qui donne la condition de quantification "au premier ordre" comme en (1.1), cf. [BrCoDu]. Les corrections en puissances de h sont obtenues en utilisant BNF au voisinage du point d'équilibre comme dans [Sj2], [KaKe], [MeSj3].

Ces exemples s'étendent aux déformations lagrangiennes, à condition toutefois de microlocaliser le problème dans le domaine complexe, par exemple à l'aide d'une transformation de FBI, dont il sera question plus loin. Cela permet d'adapter la stratégie à l'ensemble capté K. Le principal résultat de cette Thèse est de caractériser les résonances de H dans la fenêtre W_h, associées à une orbite périodique hyperbolique vérifiant la Definition 1.1, en utilisant la forme normale de Birkhoff au voisinage de cette orbite, comme dans le cas du point d'équilibre.

Chapitre II

REGLES DE QUANTIFICATION SEMI-CLASSIQUE POUR UNE ORBITE PERIODIQUE DE TYPE HYPERBOLIQUE

0. Principales hypothèses et énoncé du résultat

a) Hypothèses

Soit $H^w(y, hD_y; h)$ un Opérateur h-Pseudo-différentiel (h-OPD) auto-adjoint sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ donné par la quantification de Weyl

$$H^w(y, hD_y; h)u(y, h) = (2\pi h)^{-n} \int\int e^{i(y-y')\eta'/h} H(\frac{y+y'}{2}, \eta', h)u(y')\, dy'\, d\eta'$$

Nous supposons que son symbole $H(y, \eta; h)$ appartient à $S^0(m)$ avec

$$S^N(m) = \{H \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n) : \forall \alpha \in \mathbf{N}^{2n}, \exists C_\alpha > 0, |\partial^\alpha_{(y,\eta)} H(y, \eta; h)| \leq C_\alpha h^N m(y, \eta)\}$$

[ici m est une fonction d'ordre, par exemple $m(y, \eta) = (1+|\eta|^2)^M$], et admet un développement asymptotique de la forme:

$$H(y, \eta; h) \sim H_0(y, \eta) + hH_1(y, \eta) + \cdots, h \to 0$$

Le symbole principal H_0 est le Hamiltonien classique, H_1 le symbole sous-principal. Dans le cas de l'opérateur de Schrödinger $H^w(y, hD_y) = -h^2\Delta + V(y)$, on a $H_1 = 0$. On fait les hypothèses standard d'ellipticité et d'analyticité à l'infini qui permettent de définir les résonances:

• **Hypothèse 1** (Ellipticité de l'opérateur et régularité des coefficients).

On suppose que $H^w(y, hD_y; h) + i$ est un h-OPD elliptique (i.e. $|H(y, \eta; h) + i| \geq \text{const.}\, m(y, \eta)$) dont le symbole $H(y, \eta; h) \in S^0(M)$ admet un prolongement analytique dans un voisinage de $T^*\mathbf{R}^n$ de la forme

$$\Gamma_0 = \{(y, \eta) \in T^*\mathbf{C}^n : |\operatorname{Im}(y, \eta)| \leq (1 + |\operatorname{Re}(y, \eta)|)/C_0\} \qquad (H.1)$$

On fixe un niveau d'énergie E_0, et on s'intéresse aux résonances de H près d'un intervalle I contenant E_0. Les propriétés spectrales d'un Hamiltonien semi-classique sont liées aux propriétés dynamiques du Hamiltonien classique. On fait l'hypothèse:

• **Hypothèse 2** (Régularité de la surface d'énergie $\{H_0(y, \eta) = E_0\}$).

$$dH_0 \neq 0 \text{ sur } H_0(y, \eta) = E_0 \qquad (H.2)$$

De façon équivalente, le champ de vecteur Hamiltonien X_{H_0} n'admet pas de point fixe sur $\{H_0(y,\eta) = E_0 = 0\}$, et donc sur les surfaces d'énergie voisines $\{H_0(y,\eta) = E\}$. Soit $\Phi^t = \exp(tX_{H_0}) : T^*\mathbf{R}^n \to T^*\mathbf{R}^n$ le flot Hamiltonien, et K_E l'ensemble des trajectoires captées à l'énergie E:

$$K_E = \{\rho \in T^*\mathbf{R}^n, H_0(\rho) = E, \Phi^t(\rho) \text{ ne tend pas vers l'infini quand } |t| \to \infty\} \tag{0.1}$$

De façon equivalente, $\Phi^t(\rho) \to \infty$ pour $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$ en dehors de K_E, et il est classique [GeSj] qu'on peut construire une "fonction fuite" pour X_H, i.e. $G : T^*\mathbf{R}^n \backslash K_E \to \mathbf{R}$ telle que $\mathbf{R}_+ \ni t \mapsto G \circ \Phi^t(\rho)$ soit croissante. Pour l'opérateur de Schrödinger, si V est analytique et tend vers 0 dans le secteur Γ_0 quand $|x| \to \infty$, et $E_0 > 0$, alors la fonction fuite "naturelle" pour $\rho = (y,\eta)$, $|y| >> 0$, est de la forme $G(y,\eta) = y \cdot \eta$.

• **Hypothèse 3** (L'ensemble des trajectoires captées à l'energie E_0 est une orbite périodique).

$$K_0 = \gamma_0 \text{ est une orbite périodique de période } T_0 \tag{$H.3$}$$

Cette hypothèse est un peu restrictive, car il existe généralement plusieurs orbites iso-énergétiques: cf. l'Exemple 4 ci-dessous. Si toutefois elles sont en nombre fini, donc isolées, on peut facilement les prendre en compte en modifiant le problème de Grushin définissant les résonances. Cela permet aussi de décrire leur interaction (effet tunnel) en présence de symétries. On exclut ici le cas de la "limite infra-rouge", où il existe au voisinage de γ_0 une famille d'orbites périodiques, de période proche d'un multiple de T_0 tendant vers l'infini [Vo], [SaZe]. Ces orbites ne sont pas quantifiables une à une.

Soit $\mathcal{P}_0$ l'application de Poincaré (ou application de premier retour); elle agit sur une *section de Poincaré* $\Sigma \subset T^*\mathbf{R}^n$. Si 1 n'est pas valeur propre de la différentielle $d\mathcal{P}_0$, il en est de même de $d\mathcal{P}_E$ pour $|E| < \varepsilon_0$ assez petit, Σ est transverse à γ_0 dans $T^*\mathbf{R}^n$, et $K_E = \gamma_E$ est une orbite périodique de période T_E. Soit aussi $\overline{\gamma} = \bigcup_{|E|<\varepsilon_0} \gamma_E$ la variété centre. Alors Σ et $\overline{\gamma}$ sont des variétés symplectiques.

On s'intéressera au cas où le flot Hamiltonien a une structure hyperbolique au voisinage de K_0. Rappelons (cf. [Br], [IaSj]) la décomposition de Cartan de $d\mathcal{P}_0$.

Soient λ_j les valeurs propres de l'application $A(\rho) = d\mathcal{P}_0(\rho) : \mathbf{C}^{2d} \to \mathbf{C}^{2d}$, qui ne dépend pas du point ρ choisi sur γ_0. Les λ_j (appelées multiplicateurs de Floquet) apparaissent avec leurs inverses et leur complexes conjugués, y compris éventuellement ± 1: Si $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ et $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, on a $\lambda \in \mathrm{Spec}(A_0) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \mathrm{Spec}(A_0), 1/\lambda \in \mathrm{Spec}(A_0)$, $1/\overline{\lambda} \in \mathrm{Spec}(A_0)$. L'espace $\mathbf{C}^{2d}$ admet une décomposition symplectique orthogonale:

$$\mathbf{C}^{2d} = F_1 \oplus F_{-1} \bigoplus_{\lambda \notin \mathbf{R}, |\lambda| \neq 1} (F_\lambda \oplus F_{1/\lambda} \oplus F_{\overline{\lambda}} \oplus F_{1/\overline{\lambda}}) \bigoplus_{\pm 1 \neq \lambda \in \mathbf{R}} (F_\lambda \oplus F_{1/\lambda}) \bigoplus_{\lambda \notin \mathbf{R}, |\lambda| = 1} (F_\lambda \oplus F_{\overline{\lambda}}) \tag{0.2}$$

• **Hypothèse 4** (Non dégénérescence de l'application de Poincaré).

On supposera ici que $\det(\mathrm{Id} - d\mathcal{P}_0) \neq 0$. Plus généralement, comme nous aurons besoin de définir le logarithme de A, nous supposerons:

$$F_{\pm 1} = \{0\}, \quad F_\lambda = \{0\}, \ \forall \lambda \leq 0 \tag{$H.4$}$$

On dit que $\lambda \in \mathbf{C}$ est elliptique (ee) si $|\lambda| = 1$ ($\lambda \neq \pm 1$) et hyperbolique (he) si $|\lambda| \neq 1$. Une valeur propre hyperbolique est dite réel-hyperbolique (hr) si $\lambda \in \mathbf{R}$, et complexe-hyperbolique (hc) sinon.

Sous l'hypothèse (H.4) nous pouvons définir $B = \log A$ comme une matrice réelle et anti-symétrique par rapport à la 2-forme symplectique. Les valeurs propres $\mu = \mu(\lambda)$ de B vérifient $\mu(\overline{\lambda}) = \overline{\mu(\lambda)}$, et sont appelées exposants de Floquet: $\mu = \log \lambda$, cf. [IaSj,Proposition 1.2]. Un exposant μ sera dit encore elliptique (ee) si $\mathrm{Re}\, \mu = 0$, et hyperbolique (he) si $\mathrm{Re}\, \mu \neq 0$.

D'après (H.4), les valeurs propres de B sont de la forme $\mu_j, -\mu_j, \overline{\mu_j}, -\overline{\mu_j} \neq 0$, $\mathrm{Re}\, \mu_j \geq 0$, avec la même multiplicité.

Si $\mu_j \notin \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}$, on convient de compter séparément μ_j et $\overline{\mu_j}$ (provenant de λ et de $\overline{\lambda}$; leurs opposés $-\mu_j$ et $-\overline{\mu_j}$ provenant de $1/\lambda_j$ et de $1/\overline{\lambda}_j$). Dans ces conditions, soit $r \leq d$ le nombres de μ_j distincts, et b la forme quadratique $b(\rho) = \frac{1}{2}\sigma(\rho, B\rho)$. Pour simplifier la forme normale de Birkhoff, on supposera

$$r = d \tag{$H.4.1$}$$

donc que b est diagonalisable. Une forme plus générale, incluant les blocs de Jordan, est considérée dans [IaSj].

Dans une base réelle adaptée a (0.2), $b(\rho)$ est une combinaison linéaire de polynômes quadratiques élémentaires Q_j. Si $\mu_j \in \mathbf{R}$ (composante hyperbolique réelle, ou hr), alors

$$Q_j(x,\xi) = x_j \xi_j \text{ ou } Q_j = \frac{1}{2}(\xi_j^2 - x_j^2) \tag{0.3}$$

Si μ_j est sur l'axe imaginaire on peut choisir dans $F_{\mu_j} \oplus F_{-\mu_j}$ des coordonnées symplectiques réelles, appelées coordonnées de Poincaré, ou encore "coordonnées de l'oscillateur harmonique", telles que $b(\rho)$ restreint à cet espace soit un polynôme élémentaire de la forme (composante elliptique, ou ee)

$$Q_j = \frac{1}{2}(x_j^2 + \xi_j^2) \tag{0.4}$$

et on a une expression analogue si μ_j est hc, voir (1.11). Après transformation canonique complexe, ils sont tous de la forme $Q_j = x_j \xi_j$ [Br], [IaSj], ce qui simplifie beaucoup les calculs.

Toutefois pour la quantification semi-classique de ces transformations se pose le problème du choix des contours intervenant dans les OIF.

Les Q_j jouent un rôle important car ce sont formellement des vecteurs propres "transverses" de H, microlocalisés près de γ_0, ou encore ceux de la matrice de monodromie.

• **Hypothèse 5**: (Hyperbolicité).

On suppose que γ_0 est de type hyperbolique i.e. $d\mathcal{P}_0$ a au moins une valeur propre de module supérieur à 1, ce qui permet d'étudier les résonances.

Le cas le plus simple est le cas *hyperbolique* (he):

$$\forall j \in \{1, ..., r\},\ \operatorname{Re} \mu_j > 0 \qquad (H.5.1)$$

Le cas hyperbolique réel ($\mu_j > 0$) est considéré dans [GeSj1], et une situation plus générale dans [GeSj2].

Soit F_{μ_j}, l'espace propre associé à μ_j. Alors sous (H.5.1), il est possible de recombiner la décomposition (0.2) de $\mathbf{C}^{2d}$ en la somme de l'espace instable F^+ et de l'espace stable F^- :

$$F^+ = \bigoplus_{j=1}^{r=d} F_{\mu_j}, \quad F^- = \bigoplus_{j=1}^{r=d} F_{-\mu_j} \qquad (0.8)$$

et $F^\pm \simeq \mathbf{C}^d$ deviennent des sous-espaces (complexes) Lagrangiens de $\mathbf{C}^{2d}$ invariants sous le flot (à temps réel) de X_b.

On est dans l'hypothèse d'*hyperbolicité partielle* quand il existe aussi des éléments elliptiques ($\operatorname{Re} \mu_k = 0$), elle se traduit par

$$\exists j \in \{1, ..., r\},\ \operatorname{Re} \mu_j > 0 \qquad (H.5.2)$$

Pour des systèmes dynamiques hyperboliques génériques, une seule des μ_j satisfait (H.5.2), cf [A].

Soit F_{μ_j}, $\operatorname{Re} \mu_j = 0$ l'espace propre associé à μ_j comme dans la décomposition (0.2). Il est possible d'ordonner la paire d'exposants de Floquet $(-\mu_j, \mu_j)$ (ou celle des multiplicateurs de Floquet $(\lambda_j, \overline{\lambda}_j)$ correspondants) en utilisant la structure symplectique. En effet on observe que $0 \neq \sigma(\overline{u}, u) \in i\mathbf{R}$ si u est un vecteur propre correspondant à une valeur propre simple $\lambda \in \mathbf{S}^1$. Donc le signe de $\operatorname{Im} \sigma(\overline{u}, u)$ est indépendant du choix de u et suivant [CoZe], [SaZe], on appelle $\lambda \in \mathbf{S}^1$ *valeur propre de première espèce* si $\operatorname{Im} \sigma(\overline{u}, u) > 0$. Si λ est une valeur propre de première espèce, l'exposant de Floquet correspondant vérifie $\operatorname{Re} \mu > 0$. Il est facile de voir aussi que pour $\theta > 0$, $e^{-i\theta} X_b$ est "expansif" sur le vecteur propre associé u, et "contractif" sur $\overline{u}$ [Sj]. On est donc ramene à étudier le flot Hamiltonien pour des temps complexes, ce qui se fait dans le cadre des résonances.

Remarque: Variété centre. On pourrait encore affaiblir (H.5) en autorisant que $\mu = 0$ figure parmi les exposants de Floquet (i.e. 1 valeur propre de la différentielle de l'application de Poincaré), contribuant à la variete centre C; on dira alors que b est *non-effectivement hyperbolique* cf. [Iv], [LasSj]. Par exemple $b(x,\xi) = \sum_{j=1}^{q} \mu_j x_j \xi_j + b''(x'',\xi'')$ ou $x = (x', x'') \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{d-q}$, et b'' satisfait aux hypotheses de [LasSj1]. Ceci conduit au phenomène de la "réfraction conique" pour le Hamiltonien $H|_C$; son symbole sous-principal joue alors un rôle crucial. Cette situation correspond à un ensemble capté (0.1) d'un type plus général que l'orbite périodique, et C n'est plus nécessairement symplectique en tout point [GeSj2].

• **Hypothèse 6**: (Non-résonance des exposants de Floquet).

Afin de mettre le Hamiltonien sous la forme normale de Birkhoff (BNF) on suppose d'abord:

$$r = d \text{ et } \forall k_1, \cdots, k_r \in \mathbf{Z}: \ \sum_{j=1}^{r} k_j \mu_j \in 2i\pi\mathbf{Z} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{r} k_j \mu_j = 0 \qquad (H.6.1)$$

Exemple: Lorsque $n = 2$ et μ_1 est elliptique ($\mu_1 = i\omega_1$), $k_1 i\omega_1 \in 2i\pi\mathbf{Z}$, soit $k_1\omega_1 \in 2\pi\mathbf{Z}$ ssi $k_1\omega_1 = 0$. Donc dans le cas non-résonant, le nombre de rotation est irrationnel.

On fait aussi l'hypothèse de non-résonance forte des exposants de Floquet:

$$r = d \text{ et } \forall k_1, \cdots, k_r \in \mathbf{Z}: \ \sum_{j=1}^{r} k_j \mu_j \in 2i\pi\mathbf{Z} \Longrightarrow k_j = 0, \ j = 1, \cdots, d \qquad (H.6.2)$$

Notons que cette Hypothèse risque de rentrer en conflit avec (H.3). Supposons par exemple que tous les exposants de Floquet de γ_0 soient imaginaires; sous (H.6), et si de plus les invariants non linéaires de Birkhoff de cette solution sont non dégénérés, alors le Théorème local de Birkhoff-Lewis garantit l'existence d'une infinité de solutions γ_k, de même énergie, et de période kT_0, $k \in \mathbf{N}^*$, au voisinage de γ_0. On a une conclusion similaire [SaZe,p.1305] s'il existe au moins un exposant de Floquet imaginaire, i.e. dans le cas semi-hyperbolique. En variant E, on verra encore apparaitre d'autres orbites périodiques au voisinage de γ_0. Génériquement, l'ensemble des orbites périodiques près de γ_0 est un ensemble de Cantor de mesure non nulle (Théorème KAM). Donc γ_0 n'a pas de raison d'être isolée. Toutefois l'Exemple 4 ci-dessous satisfait (H.3) et (H.6).

Notons que (H.6.1) et (H.6.2) permettent d'étudier les résonances de H dont la partie imaginaire est $|\operatorname{Im} z| = \mathcal{O}(h \log \frac{1}{h})$, et même au-dela, $|\operatorname{Im} z| = \mathcal{O}(h^\delta)$, $0 < \delta < 1$.

Sous les hypothèses (H.5.1) et (H.6.2) on peut aussi rendre "convergente" la forme normale de Birkhoff, ce qui permet de donner à certains énonces une forme plus agréable. On renvoie à [Ro1] et ses références pour une étude de la "convergence" de la forme normale de Birkhoff près d'un point fixe. Le cas de l'orbite périodique hyperbolique est similaire.

Remarque: Symétries. On peut faire des hypothèses de symétrie, par exemple H vérifie la symétrie T $H(y, \eta; h) = H(y, -\eta; h)$ (renversement du temps) ou la symétrie PT $H(y, \eta; h) = H(-y, \eta; h)$, qui simplifent certains calculs.

b) Exemples:

1) Le Hamiltonien modèle (exemple technique), sur lequel est basé tout notre argument, est de la forme

$$H_{\text{mod}}(hD_t, x, hD_x; h) = -hD_t + \sum_{j=1}^{d} \mu_j Q_j^w(x, hD_x) \tag{0.9}$$

où $Q_j^w(x, hD_x) = \frac{1}{2}(x_j hD_{x_j} + hD_{x_j} x_j)$, avec conditions au bord périodiques sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^d$.

2) Un exemple physique est donné par $H(y, hD_h) = -h^2\Delta_y + |y|^{-1} + ay_1$ on $\mathbf{R}^n$ (potentiel de Coulomb repulsif perturbé par effet Stark) près d'un niveau d'énergie $E > 2/\sqrt{a}$. D'autres exemples, analogues au scattering par des obstacles convexes sont donnés par des potentiels à 2 ou 3 "bosses" (la "Selle de Singe") cf. [Sj3]. Une telle orbite périodique est parfois appelée *libration*; les librations ont été étudiées dans le cas d'une surface d'énergie compacte [We], [Bol].

3) Le flot géodesique sur l'hyperboloide à une nappe de $\mathbf{R}^3$ admet une orbite périodique instable (le cercle de gorge) de type hyperbolique (exemple de Poincaré). Notre résultat se généralise à une telle sous-variété. En fait Poincaré a montre que, dans le cas de systèmes Lagrangiens à 2 degrés de liberté, une solution périodique minimisant l'action est nécessairement instable (réel-hyperbolique).

4) Les géodesiques partiellement hyperboliques en 3-D [Chr2,App.C] sur une surface de révolution

$$M = \mathbf{R}_x/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}_y \times \mathbf{R}_z \subset \mathbf{R}^4$$

d'axe Oz, généralisant l'exemple de Poincaré à la dimension 4. La projection de M dans les variables x, z est homéomorphe à l'hyperboloide à une nappe de $\mathbf{R}^3$, mais présente 2 cercles de gorge, séparés par un cercle de crête. Le Hamiltonien effectif a pour symbole principal

$$H_0 = \eta^2 + \zeta^2 + \big((2z^4 - z^2 + 1)\cosh y\big)^{-2} - 1$$

avec (x, ξ) comme variables cycliques. Pour une énergie E_1 on trouve deux orbites hyperboliques symétriques situées sur les hyperplans $z = \pm\frac{1}{4}$ (avec deux paires d'exposants de Floquet réels), et pour une énergie $E_2 < E_1$ une orbite semi-hyperbolique sur $z = 0$ (avec une paire d'exposants réels, l'autre imaginaire).

Dans ce cas, il existe des éléments elliptiques. Le résultat de Poincaré tombe donc en défaut pour les dimensions supérieures (voir Marie-Claude Arnaud [A] pour l'existence générique d'éléments elliptiques).

5) Le modèle de Tip [Tip], décrivant un atome soumis à un champ électrique polarisé circulairement et dépendant périodiquement du temps. On reviendra ultérieurement sur ce modèle, dont l'avantage est de fournir directement l'opérateur de monodromie.

6) L'orbite de Langmuir [RiWi].

On rencontre des exemples d'orbites hyperboliques pour le problème à N corps avec potentiel Newtonien (orbite "Hip-Hop" de [LeOffBuCo] et [Ch]), qui ne peuvent malheureusement pas s'étendre de façon directe au cas Coulombien des que $N \geq 3$.

c) L'indice de Conley-Zehnder:

On rappelle brièvement l'indice d'un arc symplectique, appelé encore indice de Gelfand-Lidskii ou de Conley-Zehnder. L'indice standard de Maslov associe un entier $g \in \mathbf{Z}$ à chaque lacet dans $\mathrm{Sp}(2n; \mathbf{R})$. On utilise une version modifiée de cet indice dûe à [CoZe] et définie pour tout chemin $\Psi : [0, \tau] \to \mathrm{Sp}(2d; \mathbf{R})$ de classe C^1 tel que $\Psi(0) = \mathrm{Id}$ et $\det(\mathrm{Id} - \Psi(\tau')) \neq 0$ pour un $\tau' \in]0, \tau[$. On l'appliquera en particulier au cas où Ψ est tracé sur la (famille des) section(s) de Poincaré, et $\Psi(\tau') = d\mathcal{P}$ vérifie (H.4). On définit alors l'indice de Conley-Zehnder de Ψ (ce qui sera precisé plus loin, cf. Sect.6), comme la moyenne des nombres de rotation des valeurs propres de première espèce. On calcule ici g assez facilement à l'aide de la forme normale de Birkhoff, et de la classe universelle de Maslov.

d) Résultat principal.

On énonce alors la condition de quantification de Bohr-Sommerfeld (BS) généralisée pour les résonances de H près de E_0.

Théorème 0.1 *Supposons (H.1) to (H.6) (notamment l'hyperbolicité partielle (H.5.2)). On rappelle que H_1 désigne le sous-principal de H, et $H_1(y(t), \eta(t))\, dt$ la 1-forme sous-principale. On définit l'action semi-classique le long de γ_E, par $\mathcal{S}(E; h) = S_0(E) + hS_1(E) + \mathcal{O}(h^{3/2})$, avec*

$$S_0(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \xi \, dx \tag{0.10}$$

$$S_1(E) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{T(E)} H_1(y(t), \eta(t))\, dt + \frac{1}{4i\pi} \sum_{j=1}^{d} \mu_j(E) + \frac{g_\ell}{4} \tag{0.11}$$

Ici $\mu_j(E) = \mu_j + \mathcal{O}(E)$, sont les exposants de Floquet à énergie E, et $g_\ell \in \mathbf{Z}$ l'indice de Cohnley-Zehnder de γ_E (dépendant seulement des éléments elliptiques). Alors pour tout

$0 < \delta < 1$, les résonances de H dans la "fenêtre" $W_h = [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] - i]0, h^\delta]$ près de 0 sont données (au premier ordre en h) par la règle de quantification généralisée de BS :

$$\mathcal{S}(E;h) + \frac{1}{2i\pi}\Big(\sum_{j=1}^{d} hk_j\mu_j(E) + \mathcal{O}(h^2|k|^2)\Big) = mh \in \mathbf{Z} \tag{0.12}$$

avec $m \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}^d$, pourvu que $|m|h \leq \varepsilon_0$, $|k|h \leq h^\delta$.

Remarques:

1) Dans le cas elliptique, un théorème semblable a été montré par Babich et Lazutkin [BaLa], et Ralston [Ra]. Dans le cas complètement hyperbolique, par Gérard et Sjöstrand [GeSj] pour des résonances de partie imaginaire $\mathcal{O}(h)$, puis [Sj4] en dimension 2 où l'on utilise les séries de Birkhoff en un sens restreint pour déterminer les résonances de partie imaginaire $\mathcal{O}(h^\delta)$ (ou même $\mathcal{O}(\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit indépendant de h) mais associées à un même nombre quantique longitudinal, par sélection du paramètre de Floquet. Pour des résultats liés aux formules de trace ou la concentration des fonctions propres, cf. Voros [Vo], Sjöstrand et Zworski [SjZw], [NoSjZw], Christianson [Chr]. Pour l'équation des ondes à l'extérieur d'obstacles convexes, cf. Ikawa [Ik], et Gérard [Gé].

2) Les éléments elliptiques dans (0.11) contribuent comme

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{\ell}\omega_j(E) + \frac{g_\ell}{4} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{T(E)} d(\arg\det \mathcal{U}_t(E)^2)$$

où $\mathcal{U}_t(E)$ est la famille des opérateurs unitaires définissant la classe universelle de Maslov associée à $\gamma(E)$ [Ar], [So], [BaWe], [CoZe], [SaZe], [DoRo].

3) BS est donné en fait par les zéros d'une fonction ζ

$$\zeta(z,h) = \det(\mathrm{Id} - N(z;h))$$

où $N(z;h) = \Pi_N(h)M(z;h)^*\Pi_N(h) + \mathcal{O}(h^N)$ est l'approximation à l'ordre N de l'opérateur de monodromie $M(z;h)^*$ dans une base (diagonale) convenable de polynomes homogènes [NoSjZw], [FaLoRo]. Pour tenir compte des valeurs complexes du paramètre d'énergie z dans $M(z;h)$, la borne $|k|h \leq h^\delta$ dans (0.12) nécessite la méthode des déformations Lagrangiennes. Si l'on restreint les nombres quantiques k_j à $|k|h \leq h \log\frac{1}{h}$, on a une preuve plus simple, basée sur la formule de Baker-Campbell-Hausdorff [NoSjZw].

e) Plan de l'article et repères bibliographiques:

Dans la Sect.1 on rappelle la forme normale du Hamiltonien près de l'orbite périodique. Notre argument repose de façon essentielle sur la BNF semi-classique, qui réduit H à une série formelle en (hD_t, Q) (i.e. un opérateur à coefficients constants) où $Q = (Q_1, \cdots, Q_d)$ sont les polynômes élémentaires de Williamson.

Sa partie linéaire (l'opérateur modèle) contient dejà beaucoup d'information. La BNF classique, basée sur la réduction iso-énergétique, est traitee même au-delà du cadre de nos hypotheses dans [Br] (voir aussi [ArKoNe] pour une présentation générale et diverses applications). La BNF et la forme normale de Sternberg semi-classiques près d'un point fixe sont détaillées dans [IaSj]; la BNF relative à une orbite de type elliptique est donnée dans [Gu] pour la limite des hautes énergies, et dans [GuPa] pour la limite semi-classique.

Dans la Sect.2 on aborde le problème des déformations Lagrangiennes, intervenant dans la définition des résonances, et préalables à l'étude du groupe d'évolution. Dans le calcul du propagateur (ou de l'opérateur de Poisson), on se heurte en effet à deux difficultes: (1) contrairement au cas elliptique [Ra], on ne peut pas construire de "quasi-mode" de type WKB pour $H^w(y, hD_y)$ pres de γ_0 dans les variables (réelles) à cause des éléments hyperboliques; en effet il n'existe pas de demi-densité regulière sur les variétés sortantes et entrantes $\Gamma_\pm(E)$ qui soit invariante par le flot X_H, cf. [Du,p.232]. (2) l'obstruction des caustiques pour des temps grands à cause des éléments elliptiques. Ces difficultés disparaissent naturellement dans le cadre des résonances. En contrepartie, l'étude doit se faire dans le cadre des OPD et OIF à phase complexe de [Sj] et [MeSj].

On exploite la condition de non-capture en dehors de l'orbite périodique, qui se traduit par l'existence d'une "fonction fuite" G. Les transformations $\exp\theta X_G$ se font en plusieurs étapes, en partant de $\overline{\gamma}$.

On s'inspire ici de [Sj2], et de la méthode du "complex scaling" qui consiste à deformer l'opérateur $H^w(y, hD_y; h)$ ou l'espace de phase sur lequel il est microlocalement défini (déformations Lagrangiennes), de façon à le rendre elliptique: [ReSi,Sect.XII], [BrCoDu], [HeSj], [HeMaRo]. Ainsi on conjugue d'abord $H^w(y, hD_y; h)$ par des transformations unitaires quantifiant $\exp\theta X_G$ pour θ réel, que l'on étend analytiquement à θ complexe. Au voisinage de $\overline{\gamma}$, le problème est microlocalisé dans le domaine complexe au moyen d'une transformation de FBI à phase quadratique.

La Sect.3 est consacrée à l'opérateur de Poisson $K(t, E)$ (solution du problème de Cauchy dans les variables (t, x) ci-dessus), et son adjoint $K^*(E)$. On s'inspire ici de [SjZw], tout en travaillant dans les coordonnées de BNF, définies microlocalement près de $\overline{\gamma}$. Pour simplifier l'exposé, on se limitera à l'étude de $K(t, E)$ et $K^*(E)$ dans la "phase d'inflation".

La "norme de flux" ([Sj], [HeSj], [SjZw], [IfaRo]) est introduite dans la Section 4, on l'exprime sous la forme normale de Birkhoff. Le "problème de Grushin" utilisé traditionnellement pour montrer les propriétés de Fredholm de $H^w(y, hD_y; h)$ ([NoSjZw], [SjZw], [FaLoRo]) n'est pas rappelé ici.

On se concentre plutôt dans la Section 5, sur l'"opérateur effectif" ou "opérateur de monodromie" qui permet le calcul des résonances. On montre qu'il est unitaire en utilisant un noyau reproduisant (résolution de l'identité).

1. La forme normale de Birkhoff.

On réduit ici l'étude de $H^w(y, hD_y; h)$ microlocalement près de γ_0 à celle d'un opérateur à coefficients 2π-périodiques, que l'on met ensuite sous la forme normale de Birkhoff (BNF). Dans ce paragraphe, on notera pour simplifier H son symbole principal plutôt que H_0 quand aucune confusion n'est à craindre.

a) Préliminaires géométriques.

On commence par supposer (H.5.1) selon laquelle $\mathrm{Re}\,\mu_j > 0$, $1 \leq j \leq d$ (cas complètement he). Il est classique [AbMa] que les hypothèses ci-dessus garantissent l'existence de variétés $\Gamma_\pm$ et $\overline{\gamma}$ dans un voisinage de γ_0; i.e. en tout point $\rho \in \overline{\gamma}$, on a la décomposition

$$T_\rho \Gamma_+ + T_\rho \Gamma_- + T_\rho \overline{\gamma} = T^*\mathbf{R}^n \tag{1.1}$$

où $\Gamma_\pm$ sont les variétés sortante/entrante pour X_H (variétés involutives), et $\overline{\gamma} = \Gamma_+ \cap \Gamma_-$ la variété centre (variété symplectique), $\dim \Gamma_\pm = n+1$, $\dim \overline{\gamma} = 2$.

On note par (y, η) des coordonnées globales dans $T^*\mathbf{R}^n$. Suivant [GeSj1] on commence par trouver des coordonnées locales symplectiques adaptées au problème.

Au voisinage de γ_0 il existe un système de coordonnées symplectiques $(t, \tau, x, \xi) \in T^*\mathbf{S}^1 \oplus^\sigma T^*\mathbf{R}^d$ (où $\oplus^\sigma$ désigne l'orthogonal symplectique pour la 2-forme standard) telles que $\xi = 0$, $d\xi \neq 0$ sur Γ_+, resp. $x = 0$, $dx \neq 0$ sur Γ_-, et (t, τ) parametrisent $\overline{\gamma}$. On considère plutôt l'ensemble des (τ, x, ξ) comme un espace fibré de base $\mathbf{S}^1$. Plus précisément, on peut trouver des coordonnées symplectiques (x, ξ) sur la section de Poincaré, telles que $\xi = 0$, $d\xi \neq 0$ sur la variété sortante (instable), puis par le théorème de Darboux $x = 0$, $dx \neq 0$ sur la variété entrante (stable), enfin des coordonnées symplectiques (t, τ) sur la variété centre de γ_0. La coordonnée t est multivaluée, ce qu'on note par $\mathrm{ext}(t) = t + 2\pi$, où ext désigne l'opérateur de prolongement (ou de monodromie) le long des courbes Hamiltoniennes voisines de $\overline{\gamma}$ (pour chaque valeur de E, l'une d'entre elles, notée γ_E, est périodique).

La section de Poincaré à l'énergie E est l'intersection de la variété de contact $\{t = 0\}$ par $H^{-1}(E)$. On identifie localement toutes les sections de Poincaré à $T^*\mathbf{R}^d$, par l'intermédiaire des coordonnées (x, ξ).

La décomposition (1.1) est préservée sous la fibration par les surfaces d'énergie $H^{-1}(E)$ de H (réduction iso-énergetique), au sens où

$$\Gamma_\pm = \bigcup_{|E-E_0|<\varepsilon_0} \Gamma_\pm(E), \quad \overline{\gamma} = \bigcup_{|E-E_0|<\varepsilon_0} \gamma(E)$$

avec $\Gamma_+(E), \Gamma_-(E) \subset H^{-1}(E)$ sous-variétés lagrangiennes invariantes par X_H, et $\gamma(E) = \Gamma_+(E) \cap \Gamma_-(E)$ est l'orbite périodique à l'énergie E. On a donc

$$T_\rho \Gamma_+(E) + T_\rho \Gamma_-(E) + T_\rho \gamma(E) = T^*_\rho H^{-1}(E), \quad \rho \in \gamma_E \tag{1.2}$$

Les dimensions de toutes les sections sont diminuées d'une unité, i.e. $\dim \Gamma_\pm(E) = n$ et $\dim \gamma(E) = 1$.

Remarque: Si les variétés $\Gamma_\pm$ sont orientables, les coordonnées (x, ξ) ci-dessus sont uni-valuées. Il en est de même pour les $\Gamma_\pm(E)$ qui sont (localement) isomorphes à des cylindres de base $\gamma(E)$. Sinon par exemple pour $d = 1$, on a $\mathrm{ext}(x) = -x$, $\mathrm{ext}(\xi) = -\xi$. Remarquons toutefois que le produit $x\xi$ reste univalué. Dans ce cas, les $\Gamma_\pm(E)$ sont (localement) isomorphes à des rubans de Möbius de base $\gamma(E)$. L'hypothèse (H.4) (-1 n'est pas un multiplicateur de Floquet), assure que $\Gamma_\pm$ sont orientables, cf. [Sj2].

b) Réduction iso-énergetique.

On suppose encore (H.5.1), i.e. $\mathrm{Re}\, \mu_j > 0$ pour tout $1 \leq j \leq d$. Dans les coordonnées $\kappa(t, \tau, x, \xi) = (y, \eta)$ ci-dessus, on voit que

$$\partial_t H(t, \tau, x, 0) = \partial_t H(t, \tau, 0, \xi) = 0$$
$$\partial_x H(t, \tau, x, 0) = 0, \quad \partial_\xi H(t, \tau, 0, \xi) = 0$$

d'où l'existence d'une fonction $f \in C^\infty$ telle que

$$H(t, \tau, x, 0) = H(t, \tau, 0, \xi) = f(\tau)$$

Ici f paramétrise l'énergie $f(\tau) = E$, et est reliée à la periode $T(E)$ de $\gamma(E)$ par

$$f'(\tau) = \frac{2\pi}{T \circ f(\tau)} \tag{1.3}$$

Par hypothèse, $T(0) = 2\pi$, $f(0) = 0$ donc $f'(0) = 1$. On peut donc écrire H sous la forme

$$H(y, \eta) = f(\tau) + \langle B(t, \tau, x, \xi)x, \xi \rangle \tag{1.4}$$

et $B(t, \tau, x, \xi) \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbf{R})$ est 2π-periodique en t. Notons [GeSj1] que l'application symplectique $\kappa = \exp[T(0)X_H] = \exp[2\pi X_H]$ a pour différentielle en un point $\rho \in \overline{\gamma}$ la matrice diagonale par blocs

$$N = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f'(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & {}^tA_0^{-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

le bloc $\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & {}^tA_0^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[2\pi B_0] & 0 \\ 0 & \exp[-2\pi B_0] \end{pmatrix}$ étant la différentielle de l'application de Poincaré. La valeur propre 1 est de multiplicité algébrique 2: un vecteur cotangent à l'orbite $\gamma_0 = \{\tau = 0, x = \xi = 0\}$ est évidemment vecteur propre, on le complète en une base de $T_\rho\overline{\gamma}$

en utilisant les variations (champ de Jacobi) de γ_0, associées à la famille d'orbites périodiques paramétrées par τ.

On commence par le cas hr. Supposons donc pour simplifier que $2\pi B(t,\tau,0,0)$ soit déjà diagonale, avec les valeurs propres $\mu_1(t,\tau),\cdots,\mu_d(t,\tau)$, et suivant [Sj4] montrons qu'on peut trouver une transformation canonique $\exp X_G$, avec G de la forme

$$G(t,\tau,x,\xi)=\sum_{j=1}^{d} f_j(t,\tau)x_j\xi_j$$

$t\mapsto f_j(t,\tau)$ 2π-périodique, de façon que les nouveaux μ_j ne dépendent plus de t. En effet, au sens des développements de Taylor formels en (x,ξ):

$$H\circ\exp X_G=\sum_k \frac{1}{k!}X_G^k H = H + X_G H+\frac{1}{2}X_G^2H+\mathcal{O}(|x,\xi|^3) \tag{1.6}$$

avec

$$\begin{aligned}
&X_G=\sum_j x_j\xi_j\big(\frac{\partial f_j}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial f_j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}\big)+\sum_j f_j(t,\tau)\big(x_j\frac{\partial}{\partial x_j}-\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\big)\\
&X_GH=-\sum_j(\partial_t f_j)f'(\tau)x_j\xi_j+\mathcal{O}(|x,\xi|^3)\\
&X_G^2H=\mathcal{O}(|x,\xi|^3)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

si bien que

$$H\circ\exp X_G(t,\tau,x,\xi)=f(\tau)+\sum_j\big(\mu_j(t,\tau)-f'(\tau)\partial_t f_j(t,\tau)\big)x_j\xi_j+\mathcal{O}(|x,\xi|^3)$$

On peut choisir les $f_j(t,\tau)$, 2π-périodiques, et telles que $\mu_j(t,\tau)-f'(\tau)\partial_t f_j(t,\tau)$ ne dépende plus de t, il suffit de résoudre

$$\mu_j(t,\tau)-f'(\tau)\partial_t f_j(t,\tau)=\langle\mu_j(\cdot,\tau)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_j(t,\tau)\,dt$$

Donc après un changement de coordonnées symplectiques dans les variables (x,ξ), on est réduit au cas où $B(t,\tau,x,\xi)=B_0(\tau)+\mathcal{O}(|\tau,x,\xi|)$, avec $B_0(\tau)=B_0+\mathcal{O}(\tau)$, où $2\pi B_0$ est une matrice (réelle) diagonalisable qui a pour valeurs propres les exposants de Floquet à partie réelle positive, vérifiant $\exp[2\pi B_0]=A_0$ comme en (1.6). On fait une transformation canonique dans les variables (t,τ) de la forme $(t,\tau)\mapsto(t',\tau')$, $\tau'=-f'(0)\tau=-\tau$, $t'=-\frac{t}{f'(0)}=-t$ (le signe moins est introduit par commodité pour la suite, comme dans [Br]). Ainsi (omettant le prime)

$$H(y,\eta)=-\tau+\langle B_0x,\xi\rangle+g(\tau)+\mathcal{O}(|\tau,x,\xi|^3) \tag{1.9}$$

où $g(\tau) = \tau + f(-\tau) = \mathcal{O}(\tau^2)$ ne dépend que de τ et $\mathcal{O}(|\tau, x, \xi|^3)$ est une fonction 2π-périodique de t, dont la partie homogène de degre 3 ne contient effectivement que des termes en $\tau(x,\xi)^2$ et $(x,\xi)^3$.

Dans le cas hr, on a donc éliminé la dépendance en t de B au premier ordre en τ et $x_j\xi_j$, comme en (1.9). Toujours dans le cas he, on peut supposer comme dans l'Introduction B_0 diagonale par blocs, avec une composante hr, une composante hc. La composante hc se scinde à son tour en blocs 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} c_j & d_j \\ -d_j & c_j \end{pmatrix}$ avec $\mu_j = c_j + id_j$. Dans ces coordonnées (réelles) la partie hc s'écrit

$$\langle B_0 x, \xi\rangle = \sum c_j Q'_j(x,\xi) - d_j Q''_j(x,\xi) \tag{1.10}$$

avec

$$Q'_j(x,\xi) = x_{2j-1}\xi_{2j-1} + x_{2j}\xi_{2j}, \quad Q''_j(x,\xi) = x_{2j-1}\xi_{2j} - x_{2j}\xi_{2j-1} \tag{1.11}$$

ou encore, dans les coordonnées symplectiques complexes $z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j-1} - ix_{2j})$, $\zeta_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_{2j-1} + i\xi_{2j})$, $u_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j-1} + ix_{2j})$, $\upsilon_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_{2j-1} - i\xi_{2j})$, sous la forme $\sum(c_j + id_j)z_j\zeta_j + (c_j - id_j)u_j\upsilon_j$. Cf. [IaSj], [Br], et [Chr1,Sect.3-4]. Dans le cas hc, on voit qu'on peut encore éliminer la dépendance en t de B au premier ordre, comme en (1.9).

On suppose maintenant (H.5.2), autorisant des éléments elliptiques. Reprenant la discussion du a) sur la construction de coordonnnées (complexes) adaptées, on commence par le cas du hamiltonien quadratique b defini avant (0.3). Sous l'hypothèse (H.5.2), il est encore possible de recombiner comme en (0.2) la décomposition de $\mathbf{C}^{2d}$ en la somme de l'espace instable F^+ et de l'espace stable F^- :

$$F^+ = \bigoplus_{j=1}^{r=d} F_{\mu_j}, \quad F^- = \bigoplus_{j=1}^{r=d} F_{-\mu_j} \tag{1.12}$$

où $F^\pm \simeq \mathbf{C}^d$ sont des sous-espaces (complexes) Lagrangiens de $\mathbf{C}^{2d}$ invariants sous le flot de X_b, avec la propriété que pour $\theta > 0, e^{-i\theta}X_b$ est expansif sur F^+, contractif sur F^- (cf. la discussion après (H.5.2)). De plus, les coordonnées canoniques complexes $(t,\tau;x,\xi)$ déterminées à l'aide de la transformation $\widetilde{\kappa}_0$ sont toujours adaptées à $F^\pm$. On voit alors que les décompositions (1.1) et (1.2) sont valables, à condition de prendre pour $\Gamma_\pm$ les variétés intégrales de $F^\pm$ sous l'action de X_H. La situation est la meme dans le cas general, i.e. avec H au lieu de b.

Dans des coordonnées réelles, $(t,\tau;x,\xi) = \kappa_0(y,\eta)$, $(y,\eta) \in T^*\mathbf{R}^n$, H_0 s'écrit, de façon analogue à (1.4)

$$H(y,\eta) = f(\tau) + \langle B_{he}(t,\tau,x,\xi)x'', \xi''\rangle + B_{ee}(t,\tau,x,\xi) \tag{1.13}$$

pour une décomposition $(x,\xi)=(x',x'',\xi',\xi'')$, en variables ee

$$(x',\xi')=(x_1,\cdots,x_\ell;\xi_1,\cdots,\xi_\ell)$$

resp. he

$$(x'',\xi'')=(x_{\ell+1},\cdots,x_d;\xi_{\ell+1},\cdots,\xi_d)$$

avec

$$B_{ee}(t,\tau,x,\xi)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell}B_{ee,j}(t,\tau)(x_j^2+\xi_j^2)+\mathcal{O}(|x,\xi|)^3)$$

$B_{he}(t,\tau,x,\xi)\in\mathcal{M}_{d\times d}(\mathbf{R})$ comme en (1.9), B_{ee} et $B_{ee,j}$ étant 2π-périodiques en t. Ici f vérifie encore (1.3).

Puisqu'on peut toujours trouver des coordonnées symplectiques complexes pour lesquelles les polynômes élémentaires (ou résonants) sont de la forme $Q_j(x,\xi)=x_j\xi_j$, on peut répéter le calcul conduisant à (1.9), donc éliminer la dépendance en t dans les termes linéaires en τ et $Q_j(x,\xi)$. Notons que sous l'hypothèse (H.1) toutes les transformations ci-dessus sont analytiques.

Remarque: Citons pour mémoire la réduction iso- énergetique de [ArKoNe,Prop.8.1], remplaçant la variable τ par E. Ici on doit procéder un peu différemment puisqu'il faut quantifier toutes les variables de phase. La variable τ est constante du mouvement dans la limite $N\to\infty$ (BNF exacte). Cependant τ et E sont relies par (1.3).

c) La forme normale de Birkhoff.

Appelons résonant à l'ordre k un polynôme en $(\tau,Q)=(\tau,Q_1,\cdots,Q_d)$ de degré k. BNF réduit H à une suite de polynômes en (τ,x,ξ) résonants à l'ordre $k=1,2,3,\cdots$. Plus précisément, en composant H (ici H désigne toujours le symbole principal de l'opérateur) par des symplectomorphismes comme en (1.6), on va faire en sorte que H ne dépende plus de t ni des termes non-résonants en (x,ξ). On s'inspire encore de [Sj4], Soit $G=G_3=G(t,\tau,x,\xi)$ un polynôme homogène de degre 3 en (τ,x,ξ) à coefficients 2π-périodiques en t, de la forme

$$G(t,\tau,x,\xi)=\sum_{k\ell\alpha\beta}c_{k\ell\alpha\beta}e^{ikt}\tau^\ell x^\alpha\xi^\beta,\quad k\in\mathbf{Z},\ell+|\alpha|+|\beta|=3,\ \ell=0,1$$

On calcule

$$H\circ\exp X_G=\sum_k\frac{1}{k!}X_G^kH=H+X_GH+\frac{1}{2}X_G^2H+\mathcal{O}(|\tau,x,\xi|^4) \tag{1.15}$$

où, avec des notations évidentes

(1.16)

$$X_G H = \frac{\partial}{\partial t} G - \sum_j \mu_j (x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}) G +$$

$$(\tau)\frac{\partial G}{\partial t} + (x,\xi)^2 \frac{\partial G}{\partial t} + \tau(x,\xi)^2 \frac{\partial G}{\partial \tau} + (x,\xi)^3 \frac{\partial G}{\partial \tau} + \tau(x,\xi)(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \xi}) G + (x,\xi)^2 (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \xi}) G$$

$$X_G^2 H = \mathcal{O}(|\tau, x, \xi|^4)$$

Par exemple $(x,\xi)^2$ désigne un polynôme homogène de degré 2 en (x,ξ) à coefficients périodiques en t, et $\tau(x,\xi)(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \xi})$ un champ de vecteurs en $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, $1 \leq i,j \leq d$, à coefficients dans les polynômes homogènes de degré 1 en $(\tau x_k, \tau \xi_\ell)$, $1 \leq k, \ell \leq d$, et à coefficients 2π-périodiques en t.

On veut donc que la partie non-linéaire en (τ, Q) de $H - f(-\tau) + X_G H$ soit résonante à l'ordre 2, ce qui sera vrai si elle s'écrit comme combinaison linéaire des τQ_j, $1 \leq j \leq d$. La première ligne de (1.16) s'écrit

$$A = \sum_{k\ell\alpha\beta} c_{k\ell\alpha\beta} (ik - \langle \frac{\mu}{2\pi}, \alpha - \beta \rangle) e^{ikt} \tau^\ell x^\alpha \xi^\beta$$

donc modulo le terme résonant $\langle B_0 x, \xi \rangle$

$$H - f(-\tau) + A \equiv \sum_{k\ell\alpha\beta} c_{k\ell\alpha\beta} (ik - \langle \frac{\mu}{2\pi}, \alpha - \beta \rangle) e^{ikt} \tau^\ell x^\alpha \xi^\beta + \mathcal{O}(|\tau, x, \xi|^3)$$

où l'on rappelle que la partie homogène de degré 3 de $\mathcal{O}(|\tau, x, \xi|^3)$ ne contient en fait que des termes en $\tau(x,\xi)^2$ et $(x,\xi)^3$, i.e. est de la forme $\sum_{k\ell\alpha\beta} a_{k\ell\alpha\beta} e^{ikt} \tau^\ell x^\alpha \xi^\beta$, avec $k \in \mathbf{Z}$, $\ell + |\alpha| + |\beta| = 3$, $\ell = 0, 1$. En identifiant les coefficients on trouve

$$c_{k\ell\alpha\beta} = \frac{-a_{k\ell\alpha\beta}}{ik - \langle \frac{\mu}{2\pi}, \alpha - \beta \rangle} \tag{1.17}$$

Or l'hypothèse de non-résonance forte (H.6.2) montre que $ik - \langle \frac{\mu}{2\pi}, \alpha - \beta \rangle = 0$ ssi $k = 0$, $\alpha = \beta$, donc on peut déterminer $c_{k\ell\alpha\beta}$ si le terme en k, ℓ, α, β est non-résonant. On n'a donc gardé (à l'ordre 3) de $H - f(-\tau) + A$ que les termes résonants. On voit que les termes de la deuxième ligne de (1.16) donnent des contributions d'ordre supérieur, si bien que $H \circ \exp X_G$ est résonant à l'ordre 2 pour ce choix de $c_{k\ell\alpha\beta}$. On remarque que le reste $\mathcal{O}(|\tau, x, \xi|^4)$ en (1.15) ne contient pas de terme en τ^4, plus généralement la série définissant $H \circ X_G$ n'a pas de monômes en τ autres que ceux qui proviennent de $f(-\tau)$. La série en k est absolument convergente, puisque H est analytique en t. On a donc déterminé G_3.

On note désormais H pour $H \circ \exp X_{G_3}$ Poursuivant l'argument comme dans [Sj2], on détermine ensuite G_4 un polynôme homogène de degré 4 en (τ, x, ξ)

$$G_4(t,\tau,x,\xi) = \sum_{k\ell\alpha\beta} c_{k\ell\alpha\beta} e^{ikt} \tau^\ell x^\alpha \xi^\beta, \quad k \in \mathbf{Z}, \ell + |\alpha| + |\beta| = 4, \ \ell = 0,1,2$$

à coefficients 2π-périodiques en t, de sorte que $H \circ \exp X_{G_4}$ soit résonant à l'ordre 3, ce qui est sûrement le cas s'il s'écrit comme combinaison linéaire des $\tau^2 Q_j$, et $Q_i Q_j$, $1 \leq i,j \leq d$. Plus généralement, on montre ainsi la:

Proposition 1.1 [Br],[GuPa]: *Supposons que les exposants de Floquet vérifient l'hypothèse de non-résonance forte (H.6.2). Alors dans les coordonnées (t,τ,x,ξ) ci-dessus, pour tout entier $N_0 \geq 1$, il existe une transformation canonique κ_N telle que le Hamiltonien ait la forme*

$$H_0 \circ \kappa_N = -\tau + \sum_{j=1}^d \mu_j Q_j(x,\xi) + H_0^{(N_0)}(\tau; Q_1, \cdots, Q_n) + \mathcal{O}\big(|\tau, |x,\xi|^2|^{N_0+1}\big) \tag{1.18}$$

où $H_0^{(N_0)}(\tau; Q_1, \cdots, Q_d) = \mathcal{O}(|\tau, Q|^2)$ est un polynôme de degré N_0 et le reste

$$\mathcal{O}\big(|\tau, |x,\xi|^2|^{N_0+1}\big)$$

dépend de t de façon 2π-périodique. Ici $Q_j(x,\xi)$ est l'un des polynômes réels $\frac{1}{2}(\xi_j^2 - x_j^2)$ (ou $x_j\xi_j$), $\frac{1}{2}(\xi_j^2 + x_j^2)$, un élément hc Q_j' et Q_j'' comme en (0.5), ou bien encore un polynôme complexe $x_j\xi_j$.

Pour simplifier les notations on a changé $\mu_j/2\pi$ en μ_j. Comme plus haut, la série de Birkhoff définissant $H_0 \circ \kappa_N - f(-\tau)$ ne contient pas de monômes en τ.

Remarques:

1) BNF préserve les variétés invariantes $\Gamma_\pm(E)$ seulement de façon asymptotique.

2) Dans le cas des symétries T et PT, on peut montrer qu'alors la fonction $\tau \mapsto f(\tau)$ (1.3) est impaire, et donc la période $T(E)$ (1.3) impaire (cf. [HeSj3,App.b]). De plus les transformations de Birkhoff commutent avec ces symétries. L'opérateur modèle (0.4) vérifie ces symétries.

On généralise ensuite la BNF semi-classique pour une orbite elliptique de [GuPa], au cas d'une orbite satisfaisant nos hypothèses. Voir aussi [IaSj] près d'un point d'équilibre.

Pour simplifier l'exposé, on va d'abord faire une réduction formelle du symbole de l'opérateur $H(y, hD_y; h) - E$. Par la suite, on donnera un sens, dans le cadre de la théorie des dilatations analytiques et ses diverses généralisations, à $H(y, hD_y; h) - E$ microlocalisé près de γ_0.

Conjuguant l'opérateur $H^w(y, hD_y; h)$ par un h-OIF et des h-OPD (microlocalement) unitaires, on parvient en fait à mettre son symbole sous la forme de Birkhoff comme dans [GuPa]. Plus précisement, on a :

Proposition 1.2 [GuPa]: *Sous les hypothèses ci-dessus, $H^w(y, hD_y; h)$ s'écrit au niveau formel (après conjugaison par un unitaire U_N, et microlocalement près de γ_0)*

$$\begin{aligned} H^{(N)}(hD_t, x, hD_x; h) = -hD_t + \sum_{j=1}^{d} \mu_j Q_j^w + H_0^{(N_0)}\big(hD_t; Q_1^w, \cdots, Q_d^w\big) + \\ + hH_1^{(N_1)}\big(hD_t; Q_1^w, \cdots, Q_d^w\big) + \cdots \end{aligned} \tag{1.19}$$

comme polynôme en les n "variables" (hD_t, Q_j^w), avec par exemple, pour μ_j réel,

$$Q_j^w = \frac{1}{2}(x_j hD_{x_j} + hD_{x_j} x_j) = \mathrm{Op}^w\, Q_j$$

et où les $\ldots$ désignent des termes d'ordre h^2, ainsi que des opérateurs à coefficients périodiques en temps, mais d'ordre h^M, M arbitrairement grand. Les indices N_j représentent l'ordre du dévelop- pement de la série de Birkhoff pour le Hamiltonien $H_j^{(N_j)}$, et $N = (N_0, N_1, \cdots)$ une suite quelconque.

De plus, si l'on autorise des coordonnées complexes, on peut toujours supposer, formellement $Q_j^w = \frac{1}{2}(x_j hD_{x_j} + hD_{x_j} x_j)$ pour tous types d'éléments (elliptiques ou hyperboliques).

L'unitaire U_N est la composée d'un h-OIF quantifiant κ_N et d'une correction pseudo-différentielle. Pour simplifier on notera $N_j = N$ pour tout j. Par suite on omettra parfois l'indice N, ce qui sous-entend qu'on néglige (dans un premier temps) les restes dans la forme normale de Birkhoff.

L'approximation (1.19) s'entend au sens où les M premiers termes du développement du symbole de Weyl en puissances de h des deux membres de l'équation (1.19) coincident à l'ordre N sur $\tau = Q = 0$.

Remarque: Dans [GuPa,Thm 4.8] on montre que (1.19) est aussi une approximation "au sens fort", i.e. lorsque l'on teste la différence entre H^w et sa BNF sur des fonctions d'Hermite d'ordre $\mathcal{O}(1/h)$.

On restaure à ce stade la variable d'energie E.

Appendice 1.A

a) OIF à phase complexe.

On commence par quelques rappels sur les OIF à phase complexe, d'après [MeSj1,2,3], [Sj1,2,5], [BdMSj], [BdM].

On discute d'abord des fonctions poids associées à certaines transformations sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Rappelons [Sj1,Sect.3] qu'une forme quadratique réelle $q(x)$ sur $\mathbf{C}^n$ se décompose comme $q = h + \ell$ suivant l'involution complexe définie par $\mathcal{I}q(x) = q(ix)$; ici $h = (q - \mathcal{I}q)/2$ est une forme pluri-harmonique (plh, soit harmonique sur toute droite complexe), dont la matrice est celle des dérivées holomorphes $\mathcal{H} = \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_j \partial x_k}\right)$, et $\ell = (q + \mathcal{I}q)/2$ la forme de Levi, dont la matrice est celle des dérivées mixtes $\mathcal{L} = \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_j \partial \overline{x}_k}\right)$. On dit que q est plsh ssi $\ell \geq 0$. On dit aussi que q est strictement pluri-sous-harmonique (s.plsh) ssi $\ell > 0$. En particulier une forme quadratique convexe $q(x)$ sur $\mathbf{C}^n$ est plsh.

Soit alors T la transformation de FBI (opérateur métaplectique)

$$Tu(x; h) = \int e^{i\varphi(x,y)/h} u(y)\, dy$$

(convenablement normalisée) paramétrée par une fonction phase quadratique $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^n$, verifiant les hypotheses usuelles [Sj1]. Il lui correspondante une application canonique κ, telle que $\kappa : (y, -\partial_y \varphi) \mapsto (x, \partial_x \varphi)$.

L'exemple standard est $\varphi(x, y) = (x-y)^2/2$, la fonction poids (s.plsh) associée est donnee par $\Phi(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^d}(-\operatorname{Im} \varphi(x, y)) = (\operatorname{Im} x)^2/2$.

La transformation de Bargman est $\varphi(x, y) = \frac{i}{2}\left[(x-y)^2 - \frac{1}{2}x^2\right]$, la fonction poids (s.plsh) associée est donnée par $\Phi(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^d}(-\operatorname{Im} \varphi(x, y)) = |x|^2/4$.

On rappelle de [Sj1] la définition de l'espace à poids $L^2_\Phi(\mathbf{C}^n)$ et du sous-espace $H_\Phi(\mathbf{C}^n)$ des fonctions holomorphes de carré sommable pour le poids $e^{-2\Phi/h}$. On rappelle aussi que $T : L^2(\mathbf{R}^n) \to H_\Phi(\mathbf{C}^n)$ est une isométrie.

On peut aussi définir [Sj1,Sect.7], au moins localement, des transformation de FBI a phase non quadratique. Soit donc Φ une fonction poids C^∞ réelle, strictement plsh définie sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$. Alors

$$\Lambda_\Phi = \{(x, \frac{2}{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x}); x \in \Omega\}$$

est I-Lagrangienne et R-symplectique, et s'identifie localement à l'espace des phases $T^*\mathbf{R}^n$.

Suivant ici [MeSj3,Sect.2], on examine la transversalité de certaines variétés lagrangiennes complexes. Soit $\Lambda \subset \Lambda_\Phi$ une sous-variété Lagrangienne C^∞, i.e. Lagrangienne pour la forme symplectique réelle $\sigma|_{\Lambda_\Phi}$.

Exemples: Dans notre situation, on peut prendre pour Λ la variété Lagrangienne sortante/ entrante $\Gamma_\pm(E)$ donnée par (1.2) (incluant le germe complexe de Maslov, i.e. dont l'espace tangent contient aussi les espaces associés aux exposants de Floquet de première espèce).

On se propose de paramétrer Λ par une fonction phase ϕ à valeurs complexes, de "partie imaginaire positive". Si on identifie Λ avec sa projection $\pi_x\Lambda$ dans $\mathbf{C}^n$, alors sur Λ la 1-forme

$\xi\, dx$ s'identifie avec $\omega = \frac{2}{i}\partial\Phi|_\Lambda$, c'est donc une forme fermée. Sur Λ on a:

$$\operatorname{Im}\omega = -d\Phi$$

si bien que $\operatorname{Im}\omega$ est exacte. On a noté $d\Phi = \partial\Phi + \overline{\partial}\Phi$. On remarque que $\pi_x\Lambda$ est totalement réel. Localement dans $\pi_x\Lambda$ on peut alors trouver une primitive ϕ de ω, qu'on prolonge à $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ en une fonction presque analytique telle que $\overline{\partial}\phi(x) = \mathcal{O}(\operatorname{dist}(x, \pi_x\Lambda)^\infty)$. Alors en un point de $\pi_x\Lambda$, on a $d\phi = \frac{2}{i}\partial\Phi$, et donc

$$d\operatorname{Im}\phi = \frac{1}{2i}\big(\frac{2}{i}\partial\Phi + \frac{2}{i}\overline{\partial}\Phi\big) = -d\Phi$$

(où on a utilisé que Φ est réelle sur Λ). Modifiant éventuellement ϕ par une constante imaginaire, on trouve que $\operatorname{Im}\phi + \Phi$ s'annule à l'ordre 2 sur Λ. Cette fonction étant s.pl.s.h. il vient

$$(1.A.3) \qquad \Phi(x) + \operatorname{Im}\phi(x) \sim \operatorname{dist}(x, \pi_x(\Gamma))^2 \text{ près de } \pi_x(\Lambda)$$

ce qui exprime la transversalité entre Λ_Φ et l'extension presque holomorphe de Λ, comme sous-variétés de $T^*\mathbf{C}^n$. Voir aussi [BdM].

Exemples:

1) Soit $\Phi(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{Im} x)^2$, $\Lambda = \{\operatorname{Re} x = y_0\}$ est l'image par la transformation canonique $\kappa(y, \eta) = (y - i\eta, \eta)$ de la fibre $y = y_0$ de $T^*\mathbf{R}^n$ (variété lagrangienne), on trouve $\omega = -i\operatorname{Im} x \cdot d\operatorname{Im} x = \frac{1}{2i}d(\operatorname{Im} x)^2$, les primitives ϕ de ω sont donc de la forme $\phi(x) = \frac{1}{2i}(\operatorname{Im} x)^2 + c$, et donc pour c réel, $\operatorname{Im}\phi(x) = -\Phi(x)$ sur Λ.

2) On prend $\Lambda = \Lambda_\pm$ l'image par T_0 de $\Gamma_\pm(E)$ comme dans (1.2), avec les coordonnées symplectiques (t, x, τ, ξ) ci-dessus. La transformation T_0 est définie en (2.19), associée au poids $\Phi_0(t, x) = \Phi_1(t) + \Phi_2(x)$, $\Phi_1(t) = (\operatorname{Im} t)^2/2$, $\Phi_2(x) = |x|^2/4$. Les variétés $\Lambda_\pm$ sont alors de la forme $\xi = \partial_x\phi_\pm$, tandis que $\operatorname{Im}\phi_+(x) + \Phi_2(x) \sim |x|^2$, et $\operatorname{Im}\phi_-(x) + \Phi_2(x) \sim -|x|^2$ sur un espace totalement réel L de $\mathbf{C}^n$ (cf.[Sj2]).

Poursuivant cet argument, on peut définir l'action d'un h-OIF sur les distributions Lagrangiennes. Soit en effet $\widetilde{\Phi}$ une autre fonction poids s.plsh définie sur un ouvert $\widetilde{\Omega}$ de $\mathbf{C}^n$, et $\Lambda_{\widetilde{\Phi}} = \{(y, \frac{2}{i}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial y}); y \in \widetilde{\Omega}\}$. Sur $T^*\mathbf{C}^n \times T^*\mathbf{C}^n$ on choisit la structure complexe pour laquelle les fonctions sont holomorphes en $(x, \xi, \overline{y}, \overline{\eta})$ au sens usuel. Les formes symplectiques $d\xi \wedge dx - d\overline{\eta} \wedge d\overline{y}$ et $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$ ont même restriction sur $\Lambda_\Phi \times \Lambda_{\widetilde{\Phi}}$, qui est une variété IR associée au poids $F(x, y) = \Phi(x) + \widetilde{\Phi}(y)$.

Soit maintenant $\kappa : \Lambda_{\widetilde{\Phi}} \times \Lambda_\Phi$ une application canonique associée à un h-OIF A transformant une distribution semi-classique microlocalisée sur Λ_Φ en une distribution semi-classique microlocalisée sur $\Lambda_{\widetilde{\Phi}}$ (avec $\Lambda_\Phi, \Lambda_{\widetilde{\Phi}}$ considérées comme des variétés symplectiques réelles), on applique la discussion précédente à la variété Lagrangienne $\Lambda = \mathrm{graph}(\kappa)$ si bien qu'il existe $\psi(x,y)$ définie sur $\Omega \times \widetilde{\Omega}$, telle que

$$(1.A.4) \qquad \partial_{\overline{x},y}\psi \text{ s'annule à l'ordre infini sur } \pi_{x,y}(\Lambda)$$

$$(1.A.5) \qquad \partial_x\psi(x,y) = \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x),\ \partial_{\overline{y}}\psi(x,y) = \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{y}} \text{ pour } (x,y) \in \pi_{x,y}(\Lambda)$$

$$(1.A.6) \qquad \Phi(x) + \widetilde{\Phi}(y) + \operatorname{Im}\psi(x,y) \sim \mathrm{dist}\big((x,y), \pi_{x,y}(\Lambda)\big)^2 \text{ près de } \pi_{x,y}(\Lambda)$$

Quand $\widetilde{\Phi} = \Phi$ et $\kappa = \mathrm{Id}$ (donc A un h-PDO), on peut choisir pour $\psi(x,y)$ l'unique fonction mod $\mathcal{O}(|x-y|^\infty)$, qui satisfait (1.A.4) et $\psi(x,x) = \frac{2}{i}\Phi(x)$.

La propriété de transversalité (1.A.6) des sous-variétés Lagrangiennes "positives" permet de déterminer de "bons contours" dans le calcul des OPD et OIF. Voir aussi de la construction des projecteurs de Toeplitz et de Bergman, associés à un noyau de Poisson [BdMSj].

b) BNF dans le domaine complexe.

On cherche à donner un sens à (1.19), en déterminant de "bons contours" pour les opérateurs qui interviennent dans BNF.

Dans la Section 2, on montre qu'on peut construire, dans la "zône d'inflation" un poids plsh quadratique de la forme $\Phi(t,x) = \Phi_0(t,x) = \Phi_1(t) + \Phi_2(x)$, ou $\Phi_1(t) = \frac{1}{2}|\operatorname{Im} t|^2$ et $\Phi_2(x) = |x|^2/4$, de sorte que l'opérateur dans le domaine complexe THT^{-1}, linéarisé le long de $t = Q = 0$, soit l'opérateur modèle $-hD_t + \sum_{j=1}^{d} \mu_j Q_j^w$. Pour simplifier, on ne considèrera ici que la "zone d'inflation".

Rappelons que si $A^w u(x,h) = \int\int dy\, d\eta\, e^{i(x-y)\eta/h} a(\frac{x+y}{2}, \eta; h) u(y)$ avec $a \in S^0(m)$, est un h-OPD dans le domaine réel, alors [Hö,Theorem 18-5-9] TAT^{-1} est encore un h-PDO dans le domaine complexe, et

$$(1.A.11) \qquad TAT^{-1}v(z,h) = \int_{\mathcal{C}(z)} e^{i(z-y)\theta/h} a((z+y)/2, \theta, h) v(y)\, dy \wedge d\theta$$

avec $\mathcal{C}(z) = \{\theta = \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi}{\partial z}(\frac{z+y}{2}); y \in \mathbf{C}^n\}$ (formule exacte).

Soit $\widetilde{U}_N$ un OIF dans le domaine complexe associé à la transformation canonique $\kappa = \kappa_N$, on cherche à donner un sens, modulo des termes $\mathcal{O}(h^N)$, à $\widetilde{U}_N$ et son inverse, où

$$(1.A.12) \quad \widetilde{U}_N v(t,x;h) = \int\int_{\mathcal{C}_{t,x}} e^{i(\psi(t,\tau,x,\eta) - s\sigma - y\eta)/h} a(t,x,s,y,\sigma,\eta,h) v(s,y)\, ds \wedge d\sigma \wedge dy \wedge d\eta$$

pour $v \in H_{\Phi_0}$.

Ici la phase $\psi = \psi_N(t,\tau,x,\eta)$ est la fonction génératrice de $\kappa = \kappa_N$, $a = a_N(t,x,\eta,h)$ une amplitude qu'on peut prendre égale à 1, et $\mathcal{C}(t,x)$ (dependant de l'ordre N de BNF) est un bon contour d'integration pour $\widetilde{U}_N$ que l'on détermine comme dans [LasSj1, Formule (2.15)], i.e. tel que

$$\text{(1.}A\text{.13)}\quad \mathrm{Im}\big(\psi(t,\tau,x,\eta)-s\sigma-y\eta\big)+\Phi_0(s,y)-\Phi_0(t,x) \geq c\big(|\eta-\frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}(y)|^2+|\sigma-\frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}(s)|^2\big)$$

On corrige $\widetilde{U}_N$ par un h-OPD unitaire dans le domaine complexe de la forme $e^{i\widetilde{Q}_N}$,

$$\text{(1.}A\text{.14)}\qquad \begin{aligned} e^{i\widetilde{Q}_N}v(t,x,h) = \int\int_{\widetilde{\mathcal{C}}(t,x)} & e^{i((x-y)\theta+(t-s)\sigma)/h}\times \\ & \exp[i\widetilde{Q}_N((t+s)/2,\sigma,(x+y)/2,\theta;h)]v(s,y)\,ds\wedge d\sigma\wedge dy\wedge d\theta \end{aligned}$$

on trouve aussi un bon contour $\widetilde{\mathcal{C}}(t,x)$, de la forme

$$\text{(1.}A\text{.15)}\qquad \widetilde{\mathcal{C}}(t,x) = \{\sigma = -\,\mathrm{Im}(t+s), \theta = \frac{1}{4i}\overline{x+y}; (s,y)\in\mathbf{C}^n\}$$

Le symbole $\widetilde{Q}_N$ est solution d'une équation homologique. Les opérateurs $\widetilde{U}_N$ et $e^{i\widetilde{Q}_N}$ sont donc bornés $H_{\Phi_0}\to L^2_{\Phi_0}$. En fait pour connaitre la condition de quantification au premier ordre telle qu'elle est énoncée au Théorème 0.1 il suffit de déterminer BNF à l'ordre 1, i.e. le symbole principal de $\widetilde{Q}_N$.

2. Déformations Lagrangiennes et résonances.

Examinant à présent le problème des résonances, on détermine une certaine "fonction de fuite" $G(y,\eta)$, qui s'interprète comme le symbole d'un opérateur conjugué à H en dehors de $\overline{\gamma}$. La condition de non-capture (H.3) assure l'existence globale d'une telle fonction, cf. par ex. [GeSj1]; près de $\overline{\gamma}$ c'est le générateur des dilatations en la variable θ, convenablement modifié pour les hc.

Les applications canoniques $\exp \theta X_G$, avec θ réel assez petit, sont quantifiées par des h-FIO unitaires. On s'intéresse d'abord à une "théorie locale" approchée des résonances au voisinage de $\overline{\gamma}$, où la fonction G est quadratique. Bien qu'à proprement parler un tel opérateur, proche de l'opérateur modèle (0.9), n'ait pas de spectre discret, on voudrait ainsi définir (formellement) les résonances comme les valeurs propres de $H(x,hD_x;h)$ "microlocalisé" sur une variété IR linéaire $\Lambda_{\Phi_1}\oplus\Lambda_{\Phi_{i\theta}}$. On appelle cette dilatation complexe la "phase linéaire".

On effectue aussi une transformation canonique associée à une transformation de FBI T_0 (de type Bargman). Le poids pluri-sous-harmonique (plsh) correspondant à T_0 est $\Phi_0(t,x)=\Phi_1(t)+\Phi_2(x)$.

Suivant la méthode des déformations Lagrangiennes [HeSj], on adapte le poids $\Phi_1(t)+\Phi_{i\theta}(x)$ à divers domaines de $T^*\mathbf{C}^n$. La déformation principale (car c'est elle qui permet de calculer effectivement les résonances), et qu'on appelle "phase d'inflation", s'opère au voisinage immédiat de $\overline{\gamma}$. Elle consiste (formellement) à prendre $\theta=-\pi/4$, ce qui ramène $\Phi_1+\Phi_{i\theta}$ à Φ_0, et H à l'opérateur modèle. Le raccordement de la "phase linéaire" à la "phase d'inflation" se fait dans une phase intermédiaire, et on utilise pour cela des extensions quasi-analytiques et la formule de Stokes.

On effectue aussi, un peu plus loin, des déformations dépendant du temps, puis enfin, des déformations que permet l'hypothèse de non capture (H.3), ce qu'on appelle la "phase géometrique", de façon à ce que H devienne elliptique partout en dehors de K_E. Ce n'est qu'à cette étape qu'on sait définir proprement les résonances [HeSj]; mais pour simplifier on ne considère ici que la "phase linéaire" et la "phase d'inflation".

a) Fonctions de fuite et conjugaisons unitaires

On commence par des dilatations réelles près de $\overline{\gamma}$, i.e. dans le domaine de définition de BNF. On fera dépendre plus tard leur amplitude de h, avec plusieurs facteurs d'échelle convenablement choisis.

Lemme 2.1: *Soient (y,η) (après changement de notation) les coordonnées symplectiques réelles de la Proposition 1.1. Alors pour θ réel il existe une transformation canonique κ_θ : $T^*\mathbf{R}^d\mapsto T^*\mathbf{R}^d$, $\kappa_\theta(y,\eta)=(x,\xi)$ telle que:*

(i) Si μ_j est ee, $Q_j(y,\eta)=\frac{1}{2}(\eta_j^2+y_j^2)$, alors $Q_j=P_j\circ\kappa_\theta$, $(x_j,\xi_j)=(y_j,\eta_j)$, $P_j=Q_j$.

(ii) Si μ_j est hr, $Q_j(y,\eta)=\frac{1}{2}(\eta_j^2-y_j^2)$, alors $Q_j=P_j\circ\kappa_\theta$, avec $(x_j,\xi_j)=(e^\theta y_j,e^{-\theta}\eta_j)$, et

$$P_j(x,\xi)=e^{2\theta}\frac{1}{2}(\xi_j^2-e^{-4\theta}x_j^2) \tag{2.1}$$

(iii) Si μ_j est hc,

$$Q'_j(y,\eta)=y_{2j-1}\eta_{2j-1}+y_{2j}\eta_{2j},\quad Q''_j(y,\eta)=y_{2j-1}\eta_{2j}-y_{2j}\eta_{2j-1}$$

alors $Q'_j=P'_j\circ\kappa_\theta$, $Q''_j=P''_j\circ\kappa_\theta$

$$(x_{2j-1},\xi_{2j-1})=(e^\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2j-1}-\eta_{2j-1}),e^{-\theta}\frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2j-1}+\eta_{2j-1})) \tag{2.2}$$

$$(x_{2j},\xi_{2j})=(e^\theta\frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2j}-\eta_{2j}),e^{-\theta}\frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2j}+\eta_{2j})) \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}P'_j(x,\xi)&=e^{2\theta}\frac{1}{2}(\xi_{2j-1}^2-e^{-4\theta}x_{2j-1}^2)+e^{2\theta}\frac{1}{2}(\xi_{2j}^2-e^{-4\theta}x_{2j}^2)\\ P''_j(x,\xi)&=x_{2j-1}\xi_{2j}-x_{2j}\xi_{2j-1}\end{aligned} \tag{2.4}$$

Pour θ réel, la transformation κ_θ s'implémente par un opérateur métaplectique unitaire U_θ, de telle sorte que (par une version exacte du théorème d'Egorov pour les opérateurs métaplectiques cf. [Hö,Theorem 18-5-9])

(2.5)

(i) Si μ_j est ee, $U_\theta^*(\frac{1}{2}(hD_{y_j}^2+y_j^2)U_\theta=\frac{1}{2}(hD_{x_j}^2+x_j^2)$

(ii) Si μ_j est hr, $U_\theta^*(\frac{1}{2}(hD_{y_j}^2-y_j^2)U_\theta=e^{2\theta}\frac{1}{2}(hD_{x_j}^2-e^{-4\theta}x_j^2)$

(iii) Si μ_j est hc, $U_\theta^*(\frac{1}{2}(y_khD_{y_k}+hD_{y_k}y_k)U_\theta=e^{2\theta}\frac{1}{2}(hD_{x_k}^2-e^{-4\theta}x_k^2)$, $k=2j-1,2j$

$U_\theta^*(y_{2j-1}hD_{y_{2j}}-y_{2j}hD_{y_{2j-1}})U_\theta=x_{2j-1}hD_{x_{2j}}-x_{2j}hD_{x_{2j-1}}$

Combinant avec BNF, on obtient donc formellement, grâce à la Proposition 1.2, après conjugaison, et microlocalement près de γ_0,

$$\begin{aligned}U_\theta^*H^{(N)}U_\theta(hD_t,x,hD_x;h)&=-hD_t+\sum_{j=1}^d\mu_jP_j^w+H_0^{(N_0)}\big(hD_t;P_1^w,\cdots,P_d^w)\big)+\\&+hH_1^{(N_1)}\big(hD_t;P_1^w,\cdots,P_d^w\big)+\cdots\end{aligned} \tag{2.7}$$

comme polynôme en les n "variables" (hD_t,P_j^w), avec par exemple, P_j^w donné par (2.5) si μ_j est réel. (On a noté pour simplifier P_j tous les polynômes intervenant dans le Lemme 1.1.)

Pour θ petit, on identifie ensuite κ_θ au flot Hamiltonien $\exp\theta X_G$, avec G une fonction fuite au sens de [HeSj], [GeSj],…i.e. $G \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$ satisfait

$$X_{H_0}G > 0 \text{ in } H_0^{-1}(I)\setminus\overline{\gamma} \tag{2.8}$$

$$X_{H_0}G \sim \operatorname{dist}((y,\eta),\overline{\gamma})^2 \text{ près de } \overline{\gamma} \text{ in } H_0^{-1}(I) \tag{2.9}$$

où I est un voisinage de E_0.

Lemme 2.2: *Près de $\overline{\gamma}$, on peut trouver une fonction de fuite quadratique $G = G_{ee} + G_{hr} + G_{hc}$, telle que, avec les coordonnées du Lemme 2.1, $\kappa_\theta(y,\eta) = (x,\xi)$ et:*

(i) Si μ_j est ee, $Q_j(y,\eta) = \frac{1}{2}(\eta_j^2 + y_j^2)$, alors $G_{ee} = 0$.

(ii) Si μ_j est hr, $Q_j(y,\eta) = \frac{1}{2}(\eta_j^2 - y_j^2)$, alors G_{hr} est de la forme $G_j(y,\eta) = y_j\eta_j$, $(e^\theta y_j, e^{-\theta}\eta_j) = \exp\theta X_{G_j}(y,\eta)$.

(iii) Si μ_j est hc, G_{hc} est de la forme $\widetilde{c}(\rho) = \widetilde{c}(\rho_{2j-1}) + \widetilde{c}(\rho_{2j})$, avec $\widetilde{c}(\rho_j) = -y_j\eta_j + k\frac{1}{2}(y_j^2 - \eta_j^2)$, $k > 0$ arbitraire.

Preuve: Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie des matrices réelles B de trace nulle, et anti-symétriques par rapport à la 2-forme symplectique, $B + {}^\sigma B = 0$, ou encore $JB(\theta)$ symétrique par rapport au produit hermitien usuel. Le groupe de Lie de $\mathcal{G}$ est le groupe des matrices symplectiques réelles.

La transformation κ_θ, restreinte à une composante ee, est égale à l'identité, ce qui donne (i). Celle restreinte à une composante hr, s'écrit $(e^\theta y_j, e^{-\theta}\eta_j) = \exp\theta X_{G_j}(y,\eta)$, où $G_j(y,\eta) = y_j\eta_j$ est la "fonction fuite" locale. Ceci résulte du fait bien connu que $y\eta$ est le générateur des dilatations. [Si l'on préfère utiliser des coordonnées (y,η) dans lesquelles l'élément hr est de la forme $Q_j(y,\eta) = y_j\eta_j$, alors $G_j(y,\eta) = \frac{1}{2}(y_j^2 - \eta_j^2)$]. Cela montre (ii). Montrons enfin (iii) pour les éléments hc. Pour $\rho = (y_{2j-1}, y_{2j}; \eta_{2j-1}, \eta_{2j})$ on cherche G_{hc} sous la forme

$$\widetilde{c}(\rho) = -y\eta + k\frac{1}{2}(y^2 - \eta^2),\ k > 0$$

et si $Q_j = cQ_j' - dQ_j''$ comme dans (1.10) et (1.11) on vérifie

$$X_{\widetilde{c}}Q_j(\rho) = ck\big(y_{2j-1}^2 + \eta_{2j-1}^2 + y_{2j}^2 + \eta_{2j}^2\big) \tag{2.13}$$

qui s'annule à l'ordre 2 sur $\rho = 0$ (bicaractéristique double de Q_j). ♣

Contrairement au cas hr, G_{hc} n'est pas génératrice de la transformation κ_θ donnée par (2.2) et (2.3). Cherchons alors la transformation canonique $\exp\theta X_{\widetilde{c}}$ dans le cas hc. On a $X_{\widetilde{c}}(\rho) = C\rho$, avec $C = \begin{pmatrix} -1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ (en une variable), et un calcul simple montre que

$$\exp\theta C = \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} \begin{pmatrix} -k\sinh(\theta\sqrt{k^2+1}) + k\sqrt{k^2+1}\cosh(\theta\sqrt{k^2+1}) & -k^2\sinh(\theta\sqrt{k^2+1}) \\ -k^2\sinh(\theta\sqrt{k^2+1}) & k\sinh(\theta\sqrt{k^2+1}) + k\sqrt{k^2+1}\cosh(\theta\sqrt{k^2+1}) \end{pmatrix}$$

et donc

$$
\exp i\theta C = \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}
$$
$$
\begin{pmatrix} -ik\sin(\theta\sqrt{k^2+1}) + k\sqrt{k^2+1}\cos(\theta\sqrt{k^2+1}) & -ik^2\sin(\theta\sqrt{k^2+1}) \\ -ik^2\sin(\theta\sqrt{k^2+1}) & ik\sin(\theta\sqrt{k^2+1}) + k\sqrt{k^2+1}\cos(\theta\sqrt{k^2+1}) \end{pmatrix}
$$

Comme dans [Sj4], on vérifie que la variété $\Lambda_{i\theta}^{hc}$ IR de $T^*\mathbf{C}$ (en une variable)

$$
(x,\xi) = (\exp i\theta X_{\tilde{c}})(y,\eta), \quad (y,\eta) \in T^*\mathbf{R}
$$

s'écrit encore $\xi = \frac{2}{i}\frac{\partial \Phi_\theta^{hc}}{\partial x}$, avec
(2.14)
$$
\Phi_\theta^{hc}(x) = \frac{\sqrt{k^2+1}}{2k}\tan(\theta\sqrt{k^2+1})(\operatorname{Re} x)^2 + \frac{1}{k}(\operatorname{Re} x)(\operatorname{Im} x) + \frac{\sqrt{k^2+1}}{2k}\cot(\theta\sqrt{k^2+1})(\operatorname{Im} x)^2
$$

et cette forme est plsh (convexe) quel que soit k. On sait par ailleurs [Sj4] (et on verifie comme plus haut) que dans un secteur hr, le poids associé à la variété $\Lambda_{i\theta}^{hr}$ IR de $T^*\mathbf{C}$ (en une variable)

$$
\Phi_\theta^{hr}(x) = \frac{1}{2}\tan(\theta)(\operatorname{Re} x)^2 + \frac{1}{2}\cot(\theta)(\operatorname{Im} x)^2 \tag{2.15}
$$

Soit $G(x,\xi)$ la fonction de fuite obtenue en additionnant les fonctions de fuite dans chaque secteur obtenues comme ci-dessus. Cette fonction de fuite est indépendante de (t,τ). Elle vérifie

$$
X_H G(x,\xi) \sim |(x'',\xi'')|^2 + \mathcal{O}(|(x,\xi)|^3) \tag{2.16}
$$

où l'on rappelle de (1.13) la décomposition $(x,\xi) = (x',x'',\xi',\xi'')$, et où (x'',ξ'') désigne le secteur he, et (x',ξ') le secteur ee. Pour θ réel, $|\theta|$ assez petit, on peut donc définir $\kappa_\theta = \exp(\theta X_G)$ sur $H^{-1}(I)\setminus\overline{\gamma}$, puis un OIF V_θ microlocalement unitaire tel que $V_\theta^* H^w(y,hD_y)V_\theta$ ait pour symbole principal $H_0 \circ \exp(\theta X_G)$ (théorème d'Egorov).

b) Transformation de FBI

Le point de vue ci-dessus n'est pas encore bien adapté au formalisme des résonances. On va donc faire une microlocalisation dans le domaine complexe. Près de γ_0, on considère la transformation métaplectique complexe T_0 (transformation de FBI) dans les coordonnées (x,ξ) du Lemme 2.1, paramétrée par une fonction phase $\varphi_0(t,s;x,y) = \varphi_1(t,s) + \varphi_2(x,y)$, $(t,s) \in \mathbf{C}\times\mathbf{R}$, $(x,y) \in \mathbf{C}^d \times \mathbf{R}^d$, avec

$$
\varphi_1(t,s) = \frac{i}{2}(t-s)^2, \quad \varphi_2(x,y) = \frac{i}{2}\big[(x-y)^2 - \frac{1}{2}x^2\big] \tag{2.19}
$$

La transformation canonique correspondante est $\kappa_0 = (\kappa_1, \kappa_2)$, avec

$$\kappa_1 : (s, -\partial_s \varphi_1) \mapsto (t, \partial_t \varphi_1), \quad \kappa_2 : (y, -\partial_y \varphi_2) \mapsto (x, \partial_x \varphi_2)$$

ou encore

$$\kappa_1(s,\sigma) = (s - i\sigma, \sigma), \quad \kappa_2(y,\eta) = \big(y - i\eta, \frac{1}{2i}(y + i\eta)\big)$$

On remarque que $\kappa_1(s + 2\pi, \sigma) = \kappa_1(s,\sigma) + (2\pi, 0)$, donc κ_1 s'étend en une transformation canonique $(\mathbf{S}^1 + i\mathbf{R}) \times \mathbf{C} \to (\mathbf{S}^1 + i\mathbf{R}) \times \mathbf{C}$. Les poids (s.plsh) associés sont $\Phi_1(t) = \sup_{s\in\mathbf{R}}(-\operatorname{Im}\varphi_1(t,s)) = (\operatorname{Im} t)^2/2$ pour κ_1, et $\Phi_2(x) = \sup_{y\in\mathbf{R}^d}(-\operatorname{Im}\varphi_2(x,y)) = |x|^2/4$ pour κ_2, donc $\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2$ pour κ_0.

Sous l'action de κ_2, les polynômes élémentaires se transforment de la façon suivante:

Lemme 2.3: *Soient (y,η) (après changement de notation (x,ξ) en (y,η)) les coordonnées symplectiques réelles du Lemme 2.1, et $\kappa_2 : T^*\mathbf{R}^d \mapsto T^*\mathbf{C}^d$, $\kappa_2(y,\eta) = (x,\xi)$ comme ci-dessus. On a:*

(i) Si μ_j est hr, $P_j(y,\eta) = e^{2\theta}\frac{1}{2}(\eta_j^2 - e^{-4\theta}y_j^2)$ alors $P_j = \widetilde{P}_j \circ \kappa_2$, avec

$$\widetilde{P}_j(x,\xi) = e^{2\theta}\frac{1}{2}\big[(1 + e^{-4\theta})(\xi_j^2 - \frac{1}{4}x_j^2) + ix_j\xi_j(1 - e^{-4\theta})\big] \tag{2.20}$$

(ii) Si μ_j est ee, $P_j(y,\eta) = \frac{1}{2}(\eta_j^2 + y_j^2)$, alors $P_j = \widetilde{P}_j \circ \kappa_2$, avec

$$\widetilde{P}_j(x,\xi) = ix_j\xi_j \tag{2.21}$$

(iii) Si μ_j est hc, alors $P'_j = \widetilde{P}'_j \circ \kappa_2$, $P''_j = \widetilde{P}''_j \circ \kappa_2$

$$\begin{aligned}\widetilde{P}'_j(x,\xi) = e^{2\theta}\frac{1}{2}\big[(1 + e^{-4\theta})(\xi_{2j-1}^2 - \frac{1}{4}x_{2j-1}^2) + ix_{2j-1}\xi_{2j-1}(1 - e^{-4\theta})\big] + \\ e^{2\theta}\frac{1}{2}\big[(1 + e^{-4\theta})(\xi_{2j}^2 - \frac{1}{4}x_{2j}^2) + ix_{2j}\xi_{2j}(1 - e^{-4\theta})\big]\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\widetilde{P}''(x,\xi) = x_{2j-1}\xi_{2j} - x_{2j}\xi_{2j-1} \tag{2.23}$$

De plus T_0 "commute" avec BNF, i.e. la forme normale de Birkhoff $\widetilde{H}_\theta$ de

$$T_0 U_\theta H^w(y, hD_y) U_\theta^{-1} T_0^{-1}$$

dans les variables (x,ξ), et avec les polynômes $\widetilde{P}_j, \widetilde{P}'_j, \widetilde{P}''_j$, coincide avec celle de $H^w(y,hD_y)$ dans les variables (y,η), et avec les polynômes Q_j, Q'_j, Q''_j.

c) Dilatations analytiques dans la "phase d'inflation".

La transformation T_0 et le poids correspondant sont fixés ci-dessus. Compte-tenu de (H.1), si $\theta \in \mathbf{C}$ alors κ_θ est toujours définie (près de γ_0), et on peut donner un sens à $\widetilde{H}_\theta$, qui est sous la forme normale de Birkhoff.

La première étape, ou "phase d'inflation", consiste à dilater d'un facteur constant ($= e^{\pm i\pi/4}$) les variables de phase. Cela permet de "changer les éléments hyperboliques en éléments elliptiques". Si $\theta = -i\pi/4$ (contrairement aux conventions usuelles [BrCoDu], on choisit ici $\theta < 0$ ce qui resulte du changement d'orientation $t \mapsto -t$ réalisé dans la discussion avant (1.9)), on obtient d'après le Lemme 2.3 les polynômes

$$\begin{aligned}
&hr: \ \widetilde{P}_j(x,\xi) = x_j\xi_j \\
&ee: \ \widetilde{P}_j(x,\xi) = ix_j\xi_j \\
&hc: \ \widetilde{P}_j'(x,\xi) = x_{2j-1}\xi_{2j-1} + x_{2j}\xi_{2j}, \quad \widetilde{P}_j''(x,\xi) = x_{2j-1}\xi_{2j} - x_{2j}\xi_{2j-1}
\end{aligned}$$

comme en (1.11). Enfin, suivant [Br], [IaSj], on fait une dernière transformation canonique complexe dans la composante hc,

$$(x_{2j-1}, x_{2j}, \xi_{2j-1}, \xi_{2j}) \mapsto (z_j, u_j, \zeta_j, \upsilon_j)$$

avec:

$$\begin{aligned}
z_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j-1} - ix_{2j}), \quad \zeta_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_{2j-1} + i\xi_{2j}) \\
u_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{2j-1} + ix_{2j}), \quad \upsilon_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_{2j-1} - i\xi_{2j})
\end{aligned}$$

implementée par un opérateur métaplectique V, si bien que

$$c_jQ_j' - d_jQ_j'' = c_j\widetilde{P}_j' - d_j\widetilde{P}_j'' = \mu_j(z_j\zeta_j + u_j\upsilon_j)$$

avec $\mu_j = c_j + id_j$, et le poids est conservé:

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 = |z|^2 + |u|^2$$

Finalement on a montré que $VT_0U_\theta H^w(y, hD_y)U_\theta^{-1}T_0^{-1}V^{-1}$, lorsque $\theta = -i\pi/4$, a pour BNF, au premier ordre et dans le domaine complexe, "l'opérateur modèle "$H_{\mathrm{mod}} = -hD_t + \sum_{j=1}^{d} \mu_j Q_j^w$. Appliquant les transformations de Birkhoff après FBI comme dans la Sect.1, on trouve comme dans (2.7) avec Q a la place de P:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}^{(N)}(hD_t, x, hD_x; h) = &-hD_t + \sum_{j=1}^{d} \mu_j Q_j^w + H_0^{(N_0)}\big(hD_t; Q_1^w, \cdots, Q_d^w)\big) + \\
&+ hH_1^{(N_1)}\big(hD_t; Q_1^w, \cdots, Q_d^w\big) + \cdots
\end{aligned} \tag{2.25}$$

comme polynôme en les n "variables" (hD_t, Q_j^w) avec, en reprenant les notations de la Proposition 1.2 $Q_j^w = \frac{1}{2}(x_j hD_{x_j} + hD_{x_j} x_j) = \mathrm{Op}^w Q_j$. On a donc réalisé BNF dans la "phase d'inflation", qui contient l'essentiel de l'information.

d) Déformations Lagrangiennes dans la "phase linéaire"

Toujours dans le domaine de definition de BNF, on peut considérer pour θ assez petit, la transformation canonique $\kappa_{i\theta} = \exp(i\theta X_G) : T^*\mathbf{C}^d \to T^*\mathbf{C}^d$ (dans les variables d'espace), construite à l'aide de la fonction de fuite $G(y,\eta)$ du Lemme 2.2 associée au poids $\Phi_\theta = \Phi_\theta^{ee} + \Phi_\theta^{hr} + \Phi_\theta^{hc}$, et dont l'image est la variete IR (linéaire) $\Lambda_{i\theta} = \Lambda_{i\theta}^{ee} \oplus \Lambda_{i\theta}^{hr} \oplus \Lambda_{i\theta}^{hc}$, avec $\Phi_\theta^{ee} = 0, \Lambda_{i\theta}^{ee} = T^*\mathbf{R}^\ell$. Notons $H|_{\Lambda_{i\theta}} = H \circ \kappa_{i\theta}$.

Quant aux opérateurs, il revient au même de considérer le quantifié du symbole $H \circ \kappa_{i\theta}$, ou l'opérateur $H(x, hD_x; h)$ agissant sur des fonctions holomorphes microlocalisées sur $\Lambda_{i\theta}$. Dans les coordonnées complexes ci-dessus (après transformation de Bargman et dilatation complexe de $-\pi/4$), on a $Q_j(x,\xi) = x_j\xi_j$, $\xi = \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}$, et $\tau = \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = -\operatorname{Im} t$. On note alors $H_\theta = H|_{\Lambda_{i\theta}}$.

Sur $\Lambda_{i\theta}$, on a $\xi = \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial x}$, et

$$H|_{\Lambda_{i\theta}} = -\tau + \sum_{j=1}^d \mu_j Q_j(x, \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial x}) + H_0^{(N)}(\tau; Q(x, \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial x})) \tag{2.30}$$

avec $\tau = -\operatorname{Im} t$.

Comme dans [KaKe], [MeSj3], [Sj4] (voir aussi [Sj2]), on détermine d'abord une variété $\Lambda \subset T^*\mathbf{C}^d$ qui coincide avec Λ_2 dans la "phase d'inflation" $|x| \le c_2$, et avec $\Lambda_{i\theta}$ pour $|x| \ge c_\theta$; ou encore un poids pl.s.h ϕ qui coincide avec $\Phi_2(x)$ dans $|x| \le c_2$ et avec $\Phi_\theta(x)$ dans $|x| \ge c_\theta$.

Les deformations en θ (avec θ petit) n'interviennent que dans le secteur hyperbolique, donc (au moins pour la situation lineaire) dans les variables x''. Pour simplifier les notations, on omet pour l'instant le prime.

On cherche ϕ sous la forme d'une combinaison convexe $\phi(x) = (1-u(x))\Phi_2(x) + u(x)\Phi_\theta$, avec $u(x) = \chi_2(\varepsilon \log |x|)$, le profil χ_2 étant une fonction C^∞ croissante, définie sur $\mathbf{R}$, égale à 0 près de $-\infty$, à 1 près de $+\infty$; utilisant la convexité de $\Phi_2(x)$ et $\Phi_\theta(x)$, on montre que si l'on choisit $\varepsilon > 0$ assez petit, alors ϕ est strictement convexe, donc aussi pl.s.h. Puis on remplace $\phi(x)$ par $\phi_\alpha(x) = \alpha^2\phi(x/\alpha)$, de sorte à decroitre le voisinage de 0 où $\phi \ne \Phi_\theta$, tout en garantissant que ϕ_α soit borné dans C^2, et $\phi - \Phi_\theta \to 0$ dans la norme C^1 quand $\alpha \to 0$. La variété $\Lambda = \Lambda_\phi = \{(x, \frac{2}{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}), x \in \mathrm{neigh}(0, \mathbf{C}^d)\}$ est une variété IR, i.e. symplectique pour $\operatorname{Re}\sigma$, et Lagrangienne pour $\operatorname{Im}\sigma$, σ étant la 2-forme complexe. On peut montrer [Sj4] que Λ est de la forme $(x,\xi) = \exp\big(\theta X^{\operatorname{Im}\sigma}_{\operatorname{Re}\widetilde{G}(\theta)}\big)(y,\eta)$ pour une extension presque analytique $\widetilde{G}(y,\eta;\theta)$ de la fonction fuite G, et où $X^{\operatorname{Im}\sigma}_{\operatorname{Re}\widetilde{G}(\theta)}$ désigne le champ hamiltonien de $\operatorname{Re}\widetilde{G}$ pour la forme symplectique réelle $\operatorname{Im}\sigma$.

Les poids $\phi(x) = \phi_\alpha(x)$ et Φ_θ ci-dessus ne sont valables à proprement parler que pour $\tau = 0$. On rajoute alors le poids $\Phi_1(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{Im} t)^2$ dans la variable t, et pour θ petit, on pose $\widetilde{\Phi}_\theta(t,x) = \Phi_1(t) + \Phi_\theta(x)$. D'autre part pour $\theta = -\pi/4$, $\widetilde{\Phi}_\theta(t,x)$ n'est autre que $\Phi_0(t,x) = \Phi_1(t) + \Phi_2(x)$.

Comme dans [Sj4], formule (2.11), on pose (rappelons qu'on a note x a la place de x'')

$$\widetilde{\Phi}^{he}(t,x) = \frac{1}{2}(\operatorname{Im} t)^2 + \chi(\operatorname{Im} t)\phi(x) + (1-\chi(\operatorname{Im} t))\Phi_\theta(x) \tag{2.32}$$

où $\chi \in C_0^\infty$ est une fonction troncature égale à 1 près de 0, $0 \leq \chi \leq 1$, de sorte que

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}^{he}(t,x) &= \widetilde{\Phi}_\theta(t,x), \quad |\operatorname{Im} t| + |x| \geq \text{Const.} \\ \widetilde{\Phi}^{he}(t,x) &= \Phi_0(t,x), \quad |\operatorname{Im} t| + |x| \leq \text{const.} \end{aligned}$$

On calcule sa matrice Hessienne dans les variables $(\operatorname{Im} t, \operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x)$

$$\begin{pmatrix} 1+\chi'(\phi-\Phi_\theta) & \chi'\big(\frac{\partial\phi}{\partial \operatorname{Re} x} - \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \operatorname{Re} x}\big) & \chi'\big(\frac{\partial\phi}{\partial \operatorname{Im} x} - \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \operatorname{Im} x}\big) \\ * & \chi\frac{\partial^2\phi}{(\partial \operatorname{Re} x)^2} + (1-\chi)\frac{\partial^2\Phi_\theta}{(\partial \operatorname{Re} x)^2} & \chi\frac{\partial^2\phi}{\partial \operatorname{Re} x\partial \operatorname{Im} x} + (1-\chi)\frac{\partial^2\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Re} x\partial \operatorname{Im} x} \\ * & * & \chi\frac{\partial^2\phi}{(\partial \operatorname{Im} x)^2} + (1-\chi)\frac{\partial^2\Phi_\theta}{(\partial \operatorname{Im} x)^2} \end{pmatrix}$$

Comme $\phi - \Phi_\theta \to 0$ dans la norme C^1 pour $\alpha \to 0$, et que la matrice 2×2 en bas à droite est une combinaison convexe de deux matrices définies positives, on voit que $\widetilde{\Phi}(t,x)$ est une fonction strictement convexe de $(\operatorname{Im} t, \operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x)$ pour $\alpha > 0$ assez petit, et donc en particulier strictement pl.s.h. Soit $\Lambda_{\widetilde{\Phi}}$ la variété IR correspondante.

On regarde alors l'ellipticité de $H|_{\Lambda_{\widetilde{\Phi}}}$ en dehors de $\gamma_0 = \{\tau = x = \xi = 0\}$. On commence par le cas modèle $H_{\text{mod}} = -\tau + \sum_{j=1}^d \mu_j Q_j(x,\xi)$, $Q_j(x,\xi) = x_j\xi_j$, avec

$$\xi = \frac{2}{i}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x}(t,x) = \chi(\operatorname{Im} t)\frac{2}{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + (1-\chi)\frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial x}$$

et on étudie séparément chaque secteur. On omet pour simplifier les indices j.

•. Dans le secteur hr, notant toujours pour simplifier x à la place de x''

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re} Q &= \operatorname{Re} x\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Im} x} + \chi(\operatorname{Im} t)\frac{\partial(\phi-\Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Im} x}\big) - \operatorname{Im} x\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Re} x} + \chi(\operatorname{Im} t)\frac{\partial(\phi-\Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Re} x}\big) \\ -\operatorname{Im} Q &= \operatorname{Re} x\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Re} x} + \chi(\operatorname{Im} t)\frac{\partial(\phi-\Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Re} x}\big) + \operatorname{Im} x\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Im} x} + \chi(\operatorname{Im} t)\frac{\partial(\phi-\Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Im} x}\big) \end{aligned}$$

où on rappelle $\Phi_\theta = \Phi_\theta^{hr}$ de (2.15). Dans la "phase d'inflation", $\phi(x) = |x|^2/4$ et on récrit $-\operatorname{Im} Q$ comme

$$-\operatorname{Im} Q = (1-\chi(\operatorname{Im} t))\big(\tan\theta(\operatorname{Re} x)^2 + \cot\theta(\operatorname{Im} x)^2\big) + \chi(\operatorname{Im} t)|x|^2/2$$

qui est convexe en x et $\sim |x|^2$. Sur le support de $\phi - \Phi_\theta$, on utilise que $\langle(\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x), \nabla(\phi - \phi_\theta)\rangle = o(1)|x|^2$ pour $\alpha \to 0$, donc on a encore

$$-\operatorname{Im} Q = \tan\theta(\operatorname{Re} x)^2 + \cot\theta(\operatorname{Im} x)^2 + \chi(\operatorname{Im} t)o(1)|x|^2$$

qui est convexe en x et $\sim |x|^2$. La partie réelle

$$-\operatorname{Re} Q = (\cot\theta - \tan\theta)\operatorname{Re} x \operatorname{Im} x + \chi(\operatorname{Im} t)\big(\operatorname{Re} x\frac{\partial(\phi - \Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Im} x} - \operatorname{Im} x\frac{\partial(\phi - \Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Re} x}\big)$$

n'a pas de signe près de $x = 0$.

• Dans le secteur hc, on considère $\mu_j = c_j + id_j$ et on omet l'indice j

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Re}(c+id)Q = (c\operatorname{Re} x - d\operatorname{Im} x)\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Im} x} + \chi(\operatorname{Im} t)\frac{\partial(\phi - \Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Im} x}\big) - \\
(c\operatorname{Im} x + d\operatorname{Re} x)\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Re} x} + \chi(\operatorname{Im} t)\frac{\partial(\phi - \Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Re} x}\big) \\
-\operatorname{Im}(c+id)Q = (c\operatorname{Re} x - d\operatorname{Im} x)\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Re} x} + \chi(\operatorname{Im} t)\frac{\partial(\phi - \Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Re} x}\big) + \\
(c\operatorname{Im} x + d\operatorname{Re} x)\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Im} x} + \chi(\operatorname{Im} t)\frac{\partial(\phi - \Phi_\theta)}{\partial \operatorname{Im} x}\big)
\end{aligned}$$

On rappelle $\Phi_\theta = \Phi_\theta^{hc}$ de (2.14), où l'on posera $\langle k\rangle = \sqrt{k^2+1}$ et $\theta' = \theta\langle k\rangle$. Pour $\operatorname{Im}(c+id)Q$, on considère d'abord le terme independant de $\chi(\operatorname{Im} t)$, soit

$$\begin{aligned}
R(x) = (c\operatorname{Re} x - d\operatorname{Im} x)\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Re} x}\big) + (c\operatorname{Im} x + d\operatorname{Re} x)\big(\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial \operatorname{Im} x}\big) = \\
\frac{1}{k}\big[\big(c\langle k\rangle\tan\theta' + d\big)(\operatorname{Re} x)^2 + 2\big(\frac{1}{2}d\langle k\rangle(\cot\theta' - \tan\theta') + c\big)\operatorname{Re} x\operatorname{Im} x + \\
\big(c\langle k\rangle\cot\theta' - d\big)(\operatorname{Im} x)^2\big]
\end{aligned}$$

Le discriminant de $R(x)$ comme trinôme en $\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x$ vaut

$$\Delta' = \frac{1}{2}(1-k^2)d^2 - k^2c^2 + d^2(1+k^2)\frac{1}{4}(\cot^2\theta' + \tan^2\theta')$$

on choisit $\theta' = -\pi/4$, de sorte que $\Delta' = c^2(\frac{d^2}{c^2} - k^2)$ est negatif si $k > d/c$, et donc $R(x)$ est convexe et $|x|^2$. On a donc dans la zone d'inflation, où $\phi(x) = |x|^2/4$

$$-\operatorname{Im}(c+id)Q = R(x)(1-\chi(\operatorname{Im} t)) + c\chi(\operatorname{Im} t)|x|^2/2 \geq \text{const.}\,|x|^2$$

Sur le support de $\phi - \Phi_\theta$, on vérifie encore que $-\operatorname{Im}(c+id)Q$ est convexe et $\sim |x|^2$.

• On prend maintenant en compte le secteur elliptique. La variable est notee x', on rappelle $\Phi_\theta^{ee}(x') = 0$, et $Q = x'\xi'$. Comme en (2.32) on pose

$$\widetilde{\Phi}(t,x) = \widetilde{\Phi}^{he}(t,x'') + \Phi_2(x') \tag{2.33}$$

On a $\xi' = \frac{2}{i}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x'}$, donc

$$\operatorname{Re} iQ(x',\xi') = \chi(\operatorname{Im} t)\big(\operatorname{Im} x' \frac{\partial\phi}{\partial \operatorname{Im} x'} + \operatorname{Re} x' \frac{\partial\phi}{\partial \operatorname{Re} x'}\big)$$
$$\operatorname{Im} iQ(x',\xi') = \chi(\operatorname{Im} t)\big(\operatorname{Im} x' \frac{\partial\phi}{\partial \operatorname{Re} x'} - \operatorname{Re} x' \frac{\partial\phi}{\partial \operatorname{Im} x'}\big)$$

Donc $\operatorname{Im} iQ = 0$ et $\operatorname{Re} iQ = |x'|^2/2$.

En additionnant toutes les inégalites ci-dessus, on a montré, que pour $\theta > 0$ fixé assez petit et $\alpha \to 0$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\big(\sum_{ee} \mu_j Q_j + \sum_{he} \mu_j Q_j\big)|_{\Lambda_{\widetilde{\Phi}}} \geq \text{const.}\,|x'|^2 - \text{Const.}\,|x''|^2 \\ &-\operatorname{Im}\big(\sum_{ee} \mu_j Q_j + \sum_{he} \mu_j Q_j\big)|_{\Lambda_{\widetilde{\Phi}}} \geq \text{const.}\,|x''|^2 - o(1)|x'|^2 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Reste à estimer le terme non linéaire

$$H_0^{(N)}(\tau; Q(x, \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial x})$$

de (2.30), où $H_0^{(N)}(\tau, Q) = \mathcal{O}(|\tau, Q|^2)$. On obtient facilement à partir de (2.34), par perturbation de la partie linéaire

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(H - f(\operatorname{Im} t))|_{\Lambda_{\widetilde{\Phi}}} \geq \text{const.}\,|x'|^2 - \text{Const.}\,|x''|^2 \\ &-\operatorname{Im}\big(H - f(\operatorname{Im} t)\big)|_{\Lambda_{\widetilde{\Phi}}} \geq \text{const.}\,|x''|^2 - o(1)|x'|^2 - C|x'|^3 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Comme dans [Sj2,4] on en déduit la propriété “d'ellipticité transversale”

Proposition 2.4: Sous les hypothèses ci-dessus, et avec $\widetilde{\Phi}(t,x)$ comme en (2.33), on a

$$|(H - f(\operatorname{Im} t))|_{\Lambda_{\widetilde{\Phi}}} \sim |x|^2 \tag{2.37}$$

Appendice 2.A

On quantifie ces déformations dans le domaine complexe.

Considèrons l'opérateur $H(hD_t, x,\ hD_x; h)$ (apres BNF) microlocalisé sur la variété linéaire $\Lambda_{\Phi_1} \oplus \Lambda_{\Phi_\theta}$, soit

$$H(hD_t, x, hD_x; h)|_{\Lambda_{\Phi_1} \oplus \Lambda_{\Phi_\theta}}$$

On va montrer

$$H(hD_t, x, hD_x; h)|_{\Lambda_{\Phi_1} \oplus \Lambda_{\Phi_\theta}} \equiv H(hD_t, x, hD_x; h)|_{\Lambda_{\widetilde{\Phi}}}$$

modulo un opérateur régularisant, de façon à exploiter la forme très simple de cet opérateur dans la "phase d'inflation". La difficulté provient de l'utilisation de fonctions troncature (intervenant par exemple dans ϕ) qui brisent l'invariance du spectre par l'action d'OIF analytiques, microlocalement unitaires. Suivant [Ro1], on va utiliser la formule de Stokes pour montrer que $H(hD_t, x, hD_x; h)$ agit également sur d'autres espaces à poids.

Puisque $\Lambda_{\Phi_1} \oplus \Lambda_{\Phi_\theta}$ est une sous-variété IR linéaire, on peut adopter la quantification de Weyl exacte pour $B = T_\theta H(hD_t, x, hD_x; h)T_\theta^{-1}$, T_θ étant l'opérateur métaplectique associé au poids $\Phi_1(t) + \Phi_\theta(x)$, soit

(2.A.1)

$$Bu(t, x, h) = \int_{\mathcal{C}_\theta(t,x)} e^{i((t-s)\tau+(x-y)\xi)/h} b((t+s)/2, (x+y)/2, \tau, \xi; h)u(s, y)\, d(s, y) \wedge d(\tau, \xi)$$

pour $u \in H_{\Phi_1+\Phi_\theta}$, avec

$$\mathcal{C}_\theta(t, x) = \{\xi = \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial x}(\widehat{x}),\ \tau = \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}(\widehat{t}); (s, y) \in \mathbf{C}^n\}$$

On a noté $\widehat{x} = \frac{x+y}{2}, \widehat{t} = \frac{t+s}{2}$. On remplace alors $\mathcal{C}_\theta(t, x)$ par

$$\widetilde{\mathcal{C}}_\theta(t, x) = \{\xi = \frac{2}{i}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x}(\widehat{t}, \widehat{x}) + ic\overline{x-y},\ \tau = \frac{2}{i}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial t}(\widehat{t}, \widehat{x}) + ic\overline{t-s}; (s, y) \in \mathbf{C}^n\}$$

où on rappelle $\widetilde{\Phi}(t, x)$ de (2.33), et $c > 0$ est choisi de façon que $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta(t, x)$ soit un bon contour. Soit $\widetilde{B}$ l'opérateur correspondant à (2.A.1) avec $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta(t, x)$ à la place de $\mathcal{C}_\theta(t, x)$. On considère l'homotopie

$$\gamma_{t,x}(v) = (1 - v)\widetilde{\mathcal{C}}_\theta(t, x) + v\mathcal{C}_\theta(t, x),\ v \in [0, 1]$$

Par la formule de Stokes

$$Bu(t, x; h) = \widetilde{B}u(t, x; h) - (2\pi h)^{-n} \int_{[0,1]\times\mathbf{C}^n} e^{i((t-s)\tau+(x-y)\xi)/h} u\gamma^*_{t,x}(d\omega) \tag{2.A.2}$$

où $\omega = b(\widehat{x}, \widehat{s}, \tau, \xi; h)\, d(s, y) \wedge d(\tau, \xi)$ (ici on a utilisé que u est holomorphe). Le symbole b n'est pas analytique, car il est construit à partir des séries de Birkhoff; toutefois en choisissant N assez grand (en fonction de h) et en considérant des extensions presque analytiques, on sait que le terme contenant $d\omega$ peut être rendu (uniformément) négligeable dans les espaces à poids intermédiaires $(1 - v)\widetilde{\Phi}_\theta(t, x) + v\Phi_\theta(t, x)$. En estimant finalement le noyau réduit de $\widetilde{B}$ dans l'espace à poids $\widetilde{\Phi}_\theta(t, x)$, on a montré la

Proposition 2.A.1: Sous les hypothèses ci-dessus, et avec $\widetilde{\Phi}(t, x)$ comme en (2.32), le Hamiltonien $B = T_\theta H(hD_t, x, hD_x; h)T_\theta^{-1}$ s'étend en un opérateur continu $H_{\widetilde{\Phi}_\theta} \to L^2_{\widetilde{\Phi}_\theta}$ et $B = \widetilde{B} + R$, avec

$$\widetilde{B}u(t, x, h) = \int_{\widetilde{\mathcal{C}}_\theta(t,x)} e^{i((t-s)\tau+(x-y)\xi)/h} b((t+s)/2, (x+y)/2, \tau, \xi; h)u(s, y)\, d(s, y) \wedge d(\tau, \xi)$$

et $R = \mathcal{O}(h^\infty) : H_{\widetilde{\Phi}_\theta} \to L^2_{\widetilde{\Phi}_\theta}$

3. L'opérateur de Poisson.

Pour l'instant on fait des calculs formels dans le domaine réel, en ignorant les contours d'inté- gration dans le complexe, leur justification (pour tenir compte des termes elliptiques) étant faite dans l'Appendice 3.A.

On considère ici le "problème de Cauchy" pour l'opérateur (1.19) ou plus généralement pour un opérateur de la forme $H^w(hD_t, x, hD_x; h)$, tel que l'hypersurface $t = 0$ est non caractéristique:

$$(H^w(hD_t, x, hD_x; h) - E)K(t, E) = 0, \quad K(t, E)|_{t=0} = \mathrm{Id} + \mathcal{O}(h) \tag{3.1}$$

On cherche la solution $K(t, E)$ de (3.1) comme h-OIF de la forme

$$K(t, E)v(x; h) = \int\int e^{i(S(t,x,\eta)-y\eta)/h} a(t, x, \eta; E, h)v(y)\, dy\, d\eta, \quad v \in L^2(\mathbf{R}^d) \tag{3.2}$$

où la phase $S(t, x, \eta) = S(t, x, \eta; E)$ vérifie l'équation eikonale

$$H(\partial_t S, x, \partial_x S) = E, \quad S(0, x, \eta) = x\eta \tag{3.3}$$

Posons $\kappa_t(E) = \exp tX_{H_0}|_{H_0^{-1}(E)}$. On voit que $K(t, E)$ est un h-OIF associé au graphe

$$\{(\kappa_t(E)(y, \eta), y, \eta), (y, \eta) \in T^*\mathbf{R}^d, E = f(\tau)\}$$

Remarque: Dans la limite $N \to \infty$ (BNF exacte) τ est une intégrale du mouvement, i.e. $\frac{\partial S}{\partial t} = \tau = f^{-1}(E)$ constante. Tous les calculs ci-dessous sur $K(t, E)$ sont valables pour l'opérateur initial $H^w(y, hD_y)$ modulo cette approximation.

Pour tout t fixé, la variété lagrangienne de $T^*\mathbf{R}^d \times T^*\mathbf{R}^d$

$$\Lambda(t, E) = \{(x, \partial_x S(t, x, \eta; E); y, \eta); (x, y, \eta) \in C_t\} \tag{3.4}$$

est le graphe de $\kappa_t(E)$, l'ensemble critique C_t étant défini par $\partial_\eta S(t, x, \eta) = y$. Soit aussi $\Lambda(\eta) = \mathbf{R}^d_x \times \{\eta\}$ et $\Lambda(t, E; \eta)$ la variété intégrale de X_{H_0} dans $H_0^{-1}(E)$ issue de $\mathbf{R}^d_x \times \{\eta\}$.

Rappelons que les sous-variétés lagrangiennes $\Gamma_\pm(E)$ (avec la notation de (1.2)) sont invariantes par $\kappa_t(E)$, et pour $(y, \eta) \in T^*\mathbf{R}^d$ assez petit, $\mathrm{dist}\big(\kappa_t(E)(y, \eta), \Gamma_\pm(E)\big) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$ (avec une vitesse exponentielle dont le taux est donné par un exposant de Lyapunov).

Quant au symbole $a(t, x, \eta; E, h) = a_0(t, x, \eta; E) + ha_1(t, x, \eta; E) + \cdots$ il vérifie des équations de transport, en particulier

$$\frac{1}{2i}\mathcal{L}_{X_{H_0^{(t,x)}}}(a_0^2|dx \wedge dt|) + \widehat{H}_1 a_0^2|dx \wedge dt| = 0, \quad a_0|_{t=0} = 1 \tag{3.5}$$

où $X_{H_0^{(t,x)}}$ est la projection de $X_{H_0}|_{\Lambda(t,E;\eta)}$ sur $\mathbf{R}^n_{(t,x)}$, $\mathcal{L}_X$ désigne la dérivée de Lie, et $\widehat{H}_1$ le symbole "sous-principal" de H. On sait que ce problème admet une solution unique, et qu'on obtient ainsi un h-OIF défini microlocalement près du revêtement (dans la variable t) de l'orbite périodique γ_E.

Remarque: Rappelons ([Gutz], [CdV2,Sect.9, Théorème 59]) la formule de Van Vleck qui contient le terme principal du développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy $(hD_t + H(x, hD_x; h))u(t, x) = 0$, $u(0, x) = u_0$ (donc d'un type moins général que $K(t, E)v(x; h)$). Supposons que la donnée de Cauchy est une semi-densité, conormale au sous-espace $\{y = y_0\}$ de $T^*\mathbf{R}^d$ (i.e. une masse de Dirac, tronquée en fréquences au point y_0), de la forme

$$u_0(y) = \chi(y)(2\pi h)^{-n} \int e^{i(y-y_0)/h} A(\xi)\, d\xi \sqrt{dy}$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ égale 1 près de y_0, et $A(\xi)$ est à support compact. Alors la formule de Van Vleck s'écrit comme superposition, sur toutes les courbes hamiltoniennes $\gamma = \gamma_\alpha$ (en nombre fini) joignant y_0 à x, de termes contenant une demi-densité $\frac{A(\eta)}{\sqrt{J_{y_0}(\eta)}}$, et un facteur phase qui fait intervenir l'action lagrangienne $\int_\gamma L\, ds$, l'intégrale $B(t, \eta) = \int_0^t H_1 \circ \kappa_t(y_0, \eta)\, ds$ du sous-principal de H, et l'indice de Morse (qui se confond avec celui de Conley-Zehnder) de γ [CdV,Sect.1.10]:

$$u(t, x; h) = (2i\pi h)^{-d/2} \sum_\alpha \frac{A(\eta_\alpha)}{\sqrt{J_{y_0}(\eta_\alpha)}} \exp\bigl[i\bigl(\frac{1}{h}\int_{\gamma_\alpha} L\, ds - B(t, \eta_\alpha) - \frac{\pi}{2}\operatorname{ind}(\gamma_\alpha)\bigr)\bigr] \sqrt{dx}$$

avec $\pi_x(\kappa_t(y_0, \eta_\alpha)) = x$. On propose ici une variante cette formule adaptée à notre problème. Dans le cas de $K(t, E)v(x; h)$, seule la trajectoire $\gamma = \gamma_E$ contribue à l'asymptotique.

a) Un théorème de type Egorov.

Dans cette section on fait une étude générale de $K(t, E)$ et de son adjoint, toujours au niveau des calculs formels, et dans le domaine réel. Pour $K(t, E)$ comme dans (3.3) considérons

$$(3.6) \qquad K^*(t, E)u(t, x) = \int\int e^{-i(S(t,y,\eta)-x\eta)/h} a^*(t, y, \eta; E, h)u(t, y)\, dy\, d\eta, \quad u \in L^2(\mathbf{R}^n)$$

Avec la notation de (3.4) on a $\Lambda^*(t, E) = \Lambda(-t, E)$. Pour tous $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $v \in L^2(\mathbf{R}^d)$

$$\int (K^*(t, E)u|v)_{L^2(\mathbf{R}^d)}\, dt = (u|K(\cdot, E)v)_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

ce qui permet de définir l'adjoint de $K(t, E) : L^2(\mathbf{R}^d) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ comme

$$(3.7) \qquad K^*(E) = \int dt\, K^*(t, E) : \int^\oplus dt L^2(\mathbf{R}^d) \to L^2(\mathbf{R}^d)$$

Proposition 3.1: *Soit $C \in S^0(T^*\mathbf{R}^n)$, et $C^w(s, hD_s, x, hD_x; h)$ l'opérateur de Weyl associé. Si $\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(t, x, \eta)$ (S comme en (3.3)) reste dans la composante connexe de l'identité, i.e.* $\det \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta} > 0$, *pour $|t| \le T$, et $(x, \eta) \in \operatorname{neigh} 0$, alors $K^*(t, E) C^w(t, hD_t, x, hD_x; h) K(\cdot, E)$ est un h-OPD, dont le symbole est dans $S^0(T^*\mathbf{R}^n)$, et le symbole principal donné par*

$$\widetilde{c}_0(t, y, \eta') = \big(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(t, y', \eta')\big)^{-1} c_0(t, \tau, y', \xi)|_{(\tau,\xi)=\frac{\partial S}{\partial(t,x)}(t,y',\eta')} |a_0(t, y', \eta)|^2$$

où y et y' sont reliés par $\frac{\partial S}{\partial \eta}(t, y', \eta') = y$.

Preuve: On voit facilement, en testant sur une fonction $v(y)$, que le noyau de

$$K^*(t, E) C^w(t, hD_t, x, hD_x; h) K(\cdot, E)$$

est une intégrale oscillante qu'on détermine par la phase stationnaire. La phase est donnée par

$$\Phi(t, x, s, \tau, z, \xi, y', \eta, y, \eta') = -S(t, y', \eta') + x\eta' + (y' - z)\xi + (t - s)\tau + S(s, z, \eta) - y\eta$$

Ici (t, x, y, η') sont considérés comme paramètres et $(s, \tau, z, \xi, y', \eta)$ comme 6 variables de phase (on a supposé pour simplifier les calculs que $d = 1$). Le point critique de Φ est déterminé par le système

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial \eta}(t, y', \eta) - y = 0 \\ &\xi = \frac{\partial S}{\partial y'}(t, y', \eta) = \frac{\partial S}{\partial y'}(t, y', \eta') \\ &\tau = \frac{\partial S}{\partial t}(t, y', \eta), \quad y' = z, \quad t = s \end{aligned}$$

soit compte-tenu de ce que la phase S est non dégénérée, par

$$\begin{aligned} &\eta = \eta', \quad \frac{\partial S}{\partial \eta}(t, y', \eta') = y \\ &\xi = \frac{\partial S}{\partial y'}(t, y', \eta'), \quad \tau = \frac{\partial S}{\partial t}(t, y', \eta'), z = y', \quad s = t \end{aligned}$$

et valeur critique de Φ est simplement la phase pseudo-différentielle $\Phi_c = (x - y)\eta'$. Enfin la matrice Hessienne

$$\Phi'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} & -1 & \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \eta} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x} & 0 & \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} & -1 & 0 & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \eta} & 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \eta} & 0 & \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} \end{pmatrix}$$

est telle que

$$\big(\det \frac{\Phi''}{2i\pi h}\big)^{-1/2} = (2\pi h)^3 \big(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(t, y', \eta')\big)^{-1} \tag{3.11}$$

pourvu que $|t| \leq T$ soit assez petit et donc $\det \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \xi}(t, y', \eta') > 0$. ♣

b) L'équation eikonale et la fonction phase sous la forme normale de Birkhoff.

On travaille ici dans la "phase d'inflation", où le Hamiltonien a une forme très simple. Pour alléger les notations, on pose $\widetilde{H}(\tau; Q) = H_0^{(N_0)}(\tau; Q_1, \cdots, Q_n)$, avec $Q_j(x, \eta) = x_j \eta_j$. On rappelle que $\widetilde{H}(\tau, Q)$ est un polynôme en (τ, Q) de degré N_0, et $\widetilde{H}(\tau, Q) = \mathcal{O}(|\tau, Q|^2)$. On commence par déterminer une solution formelle de (3.3). Les conditions de non-résonance sur le vecteur de fréquences $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_d)$ permettent de résoudre ce problème. De façon plus précise, on cherche une solution de

$$H(\partial_t S, Q(x, \partial_x S)) = -\partial_t S + \sum_{i=1}^{d} \mu_j x_j \partial_{x_j} S + \widetilde{H}(\partial_t S, Q(x, \partial_x S)) = E \tag{3.12}$$

Si $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_d) \in \mathbf{N}^d$ est un multi-indice on note comme d'habitude

$$Q^\ell(x, \eta) = Q_1^{\ell_1}(x, \eta) \cdots Q_d^{\ell_d}(x, \eta)$$

On cherche $S \sim S_0 + S_1 + \cdots$, avec S_j polynômiale de degré $j+1$ en (τ, Q). On trouve d'abord pour S_0 l'équation homogène associée à l'opérateur modèle (0.9), partie principale de (1.19):

$$-\partial_t S_0 + \sum_{j=1}^{d} \mu_j x_j \partial_{x_j} S_0 = E \tag{3.13}$$

qui s'intègre, compte-tenu de la condition initiale $S|_{t=0} = x\eta$, comme

$$S_0(t, x; \eta) = -Et + \sum_{j=1}^{d} x_j \eta_j e^{\mu_j t}$$

Pour déterminer S_1 (ainsi que les termes successifs $S_2, \ldots$), on a besoin de résoudre une équation du type

$$-\partial_t S_1 + \sum_{j=1}^{d} \mu_j x_j \partial_{x_j} S_1 = f_1(Q(x, \eta), E; t), \ S_1|_{t=0} = 0 \tag{3.14}$$

où $f_1(Q,E;t)$, provenant du terme $-\widetilde{H}(\partial_t S_0, Q(x,\partial_x S_0))$, est un polynôme en (Q,E) de degré 2 dont les coefficients dépendent de façon harmonique (mais non périodique) en temps et qu'on écrit sous la forme :

$$f_1(Q,E;t) = \sum_{\alpha,\ell,m} d_{\alpha,\ell,m}(\mu) E^\alpha Q^\ell(x,\eta) e^{\langle m,\mu\rangle t} \tag{3.15}$$

avec $\alpha \in \mathbf{N}$, $m,\ell \in \mathbf{N}^d$ multi-indices, $|\ell|+\alpha = 2$. Les coefficients $c_{\alpha,\ell,m}(\mu) \in \mathbf{C}$ seront choisis pour que la solution de (3.14) s'annule en $t=0$. Plus précisement:

Lemme 3.2: *L'équation (3.14) admet une solution formelle, de la forme*

$$S_1(t, Q(x,\eta), E) = -ts_2E^2 + \sum_{\alpha,l,m} c_{\alpha,\ell,m}(\mu) E^\alpha Q^\ell(x,\eta) e^{\langle m,\mu\rangle t} \tag{3.16}$$

mod $\mathcal{O}(|E,Q|^3)$, *avec* $\alpha \in \mathbf{N}$, $m,\ell \in \mathbf{N}^d$ *multi-indices,* $|\ell|+\alpha = 2 \geq |m|$. *En particulier,* $S_1(t,x;\eta,\tau)$ *s'écrit sous la forme normale de Birkhoff en* $x_1\eta_1,\cdots,x_d\eta_d$. *De plus,* $c_{20m}(\mu) = 0, |m| = 0,1,2$.

Preuve: Pour simplifier, on suppose $d=1$, et on omet μ dans l'argument de $d_{\alpha,\ell,m}$. On trouve: $s_2 = d_{200}$, puis pour les termes en $\alpha=2, \ell=0$

$$c_{20m} = -\frac{d_{20m}}{\langle \mu, m\rangle}, \quad m \neq 0$$
$$c_{200} = \sum_{m'\neq 0} \frac{d_{20m'}}{\langle \mu, m'\rangle}$$

pour les termes en $\alpha=1, \ell=1$

$$c_{11m} = -\frac{d_{11m}}{\langle \mu, m-1\rangle}, \quad m \neq 1$$
$$c_{111} = \sum_{m'\neq 1} \frac{d_{11m'}}{\langle \mu, m'-1\rangle}$$

et pour les termes en $\alpha=0, \ell=2$

$$c_{02m} = -\frac{d_{02m}}{\langle \mu, m-2\rangle}, \quad m \neq 2$$
$$c_{022} = \sum_{m'\neq 2} \frac{d_{02m'}}{\langle \mu, m'-2\rangle}$$

Vérifions enfin que $c_{20m}(\mu) = 0$. Ecrivons $-\widetilde{H}_2(\tau,Q) = a_2\tau^2 + 2\sum_j a_{1j}\tau Q_j + \sum_{|\ell|=2} a_{0\ell}Q^\ell$, on trouve en posant $Q_j^t(y,\eta) = Q_j(y, e^{\mu t}\eta)$, $f_1 = -\widetilde{H}(\partial_t S_0, Q(x,\partial_x S_0))$

$$f_1 = \sum_{\alpha\ell m} d_{\alpha,\ell,m} E^\alpha Q^\ell e^{\langle m,\mu\rangle} = a_2E^2 - 2E\sum_j (a_2\mu_j + a_{1j})Q_j^t +$$
$$\sum_j (Q_j^t)^2(a_2\mu_j^2 + 2a_{1j}\mu_j + a_{0jj}) + 2\sum_{j<k} Q_j^tQ_k^t(a_2\mu_j\mu_k + a_{1k}\mu_j + a_{1k}\mu_k + a_{0jk})$$

d'où $d_{200}=a_2$, $d_{201}=d_{202}=0$, et donc $c_{20m}(\mu)=0$. ♣

De plus, $\widetilde{H}(\partial_t S_0, Q(x,\partial_x S_0))$ est une fonction réelle, et S_1 est encore réelle. On détermine de façon analogue $S_2, S_3\cdots$. Finalement on a montré:

Proposition 3.3: *Supposons (H.5.1). L'equation (3.12) admet une solution formelle telle que*

$$S(0,Q(x,\eta),E)=x\eta$$

de la forme $S=S_0+\widetilde{S}$,

$$\widetilde{S}(t,Q(x,\eta),E)=-t\sum_{k\geq 2}s_kE^k+\sum_{\alpha,\ell,m}c_{\alpha,\ell,m}(\mu)E^\alpha Q^\ell(x,\eta)e^{\langle m,\mu\rangle t} \tag{3.17}$$

avec les conditions sur les indices α,ℓ,m*:* $\alpha\in\mathbf{N}$, $m,\ell\in\mathbf{N}^d$ *multi-indices; et* $|m|\leq k$ *pour tout degré d'homogénéité* $k\geq 2$, $k=|\ell|+\alpha$. *Dans le cas hr, les coefficients* $c_{\alpha,\ell,m}(\mu)$ *sont réels, et dans les cas hc ou ee,* $c_{\alpha,\ell,m}(\mu)=\overline{c_{\alpha,\ell,m}(\overline{\mu})}$, *si bien que* S_1 *est toujours réelle. De plus,* $c_{k0m}(\mu)=0$ *pour* $|m|\leq k$. *Enfin* $S(t,x;\eta,\tau)$ *s'écrit sous la forme normale de Birkhoff.*

On s'intéresse maintenant au symbole a de (3.2).

c) L'équation de transport et l'amplitude sous la forme normale de Birkhoff.

L'amplitude (ou le symbole) a, dont la partie principale vaut 1, est plus délicate à calculer, cf. par exemple [LasSj,Sect.III]. Regardons d'abord le cas modèle, i.e. $H=-hD_t+\sum_{j=1}^d\mu_jQ_j^w(x,hD_x)$, $Q_j^w(x,hD_x)=\frac{1}{2}(x_jhD_{x_j}+hD_{x_j}x_j)$. L'équation de transport (3.5) correspondant au terme principal de l'amplitude a_0 dans l'opérateur de Poisson, compte-tenu de

$$e^{-iS/h}Q_j^w(x,hD_x)e^{iS/h}a=x_j\frac{\partial S}{\partial x_j}a+\frac{h}{i}x_j\frac{\partial a}{\partial x_j}+\frac{1}{2}a$$

s'écrit

$$-\frac{\partial a_0}{\partial t}+\sum_{j=1}^d\mu_jx_j\frac{\partial a_0}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d\mu_ja_0=0,\quad a_0|_{t=0}=1 \tag{3.20}$$

qui est de la forme (3.5) avec $\widehat{H}_1=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d\mu_j=_{\mathrm{def}}\frac{1}{2}\widetilde{\mu}$ comme symbole sous-principal. On fait le changement de variables $s=t, u_j=\log|x_j|+\mu_jt$, ce qui donne $-\frac{\partial a_0}{\partial s}+\frac{1}{2}\widetilde{\mu}a_0=0$, soit $a_0=f(u_1,\cdots,u_d)e^{\widetilde{\mu}t/2}$ et compte tenu de la condition initiale, $f=1$. En résumé, l'opérateur de Poisson s'écrit (exactement) dans le cas modèle

$$\begin{aligned}K(t,E)v(x,h)&=(2\pi h)^{-d}\int\int e^{i(-Et+\sum x_j\eta_je^{\mu_jt}-y\eta)/h}e^{\widetilde{\mu}t/2}v(y)\,dy\,d\eta\\ K^*(t,E)v(x,h)&=(2\pi h)^{-d}\int\int e^{i(Et-\sum y_j\eta_je^{\mu_jt}+x\eta)/h}e^{\widetilde{\mu}t/2}v(y)\,dy\,d\eta\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dans le cas général du Hamiltonien (1.16) on construit le symbole a_0 comme pour la phase S, asymptotiquement par rapport à (E, Q), On calcule d'abord le terme sous-principal $\widehat{H}_1$ dans (3.5), au sens de la quantification standard, en supposant pour simplifier que dans (1.16) le sous-principal

$$H_1^{(N_1)}\big(hD_t; Q_1^w, \cdots, Q_d^w\big)$$

(pour la quantification de Weyl) est nul. Comme $\widetilde{H}^w = H_0^{(N_0)}\big(hD_t; Q_1^w, \cdots, Q_d^w)\big)$ est un polynôme, on commence par déterminer comme dans le cas linéaire le symbole sous-principal d'un opérateur du type $e^{-iS/h}(hD_t)^m(Q_j^w(x, hD_x))^\ell e^{iS/h}$, avec $Q_j^w(x, hD_x) = \frac{1}{2}(x_j hD_{x_j} + hD_{x_j} x_j)$. Pour simplifier, on suppose toujours $d = 1$.

Lemme 3.4: *On a*

$$e^{-iS/h} hD_t e^{iS/h} a = (\partial_t S)a + \frac{h}{i}\partial_t a \tag{3.23}$$

et pour $m \geq 2$

$$e^{-iS/h}(hD_t)^m e^{iS/h} a = (\partial_t S)^m a + \frac{h}{i}\big[m(\partial_t S)^{m-1}\partial_t a + \alpha_m(S)a\big] + \mathcal{O}(h^2) \tag{3.24}$$

avec

$$\alpha_m(S) = \frac{m(m-1)}{2}(\partial_t S)^{m-2}(\partial_t^2 S)$$

De meme,

$$e^{-iS/h} Q_j^w(x, hD_x)) e^{iS/h} a = (x\partial_x S)a + \frac{h}{i} x\partial_x a + \frac{h}{2i} a = (x\partial_x S)a + Q^w(x, hD_x)a \tag{3.25}$$

et pour $\ell \geq 2$

$$e^{-iS/h}(Q^w(x, hD_x))^\ell e^{iS/h} a = (Q(x, \partial_x S))^\ell a + \frac{h}{i}\big[\ell(x\partial_x S)^{l-1} x\partial_x a + \beta_\ell(S)a\big] + \mathcal{O}(h^2) \tag{3.26}$$

avec

$$\beta_\ell(S) = \frac{\ell(\ell-1)}{2}(x\partial_x S)^{\ell-2}(x\partial_x)^2 S + \frac{\ell}{2}(x\partial_x S)^{\ell-1}$$

On cherche donc à resoudre l'équation de transport (3.5) et pour commencer on suppose que $\widetilde{H} = \nu(hD_t)^m(Q^w(x, hD_x))^\ell$ avec $m + |\ell| = 2$, comme dans la preuve du Lemme 3.2, où $m + |\ell| = 3$, avec ν constante réelle.

D'après la Proposition 3.3, posant $b = e^{-iS/h}(Q^w(x, hD_x))^\ell e^{iS/h} a$, on a mod $\mathcal{O}(h^2)$

$$\begin{aligned} &e^{-iS/h}(hD_t)^m (Q_j^w(x, hD_x))^\ell e^{iS/h} a = e^{-iS/h}(hD_t)^m e^{iS/h} b \equiv \\ &\quad \widetilde{H}(\partial_t S, Q(x, \partial_x S))a + \frac{h}{i}\big[d_{(\tau,\xi)}\widetilde{H}(\partial_t S, Q(x, \partial_x S)) \cdot (\partial_t, x\partial_x)a + \gamma_{m\ell}(S)a\big] \end{aligned} \tag{3.27}$$

avec

$$\gamma_{m\ell}(S)=(\partial_t S)^m\beta_\ell(S)+m\ell(\partial_t S)^{m-1}(x\partial_x S)^{\ell-1}(\partial_t x\partial_x S)+(x\partial_x S)^\ell\alpha_m(S)$$

Incluant aussi la partie linéaire de H et utilisant l'équation eikonale, on récrit l'équation de transport (3.20) sous la forme

$$(3.28)\quad -\frac{\partial a_0}{\partial t}+\sum_{j=1}^d\mu_j x_j\frac{\partial a_0}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\widehat{\mu}a_0+\nu d_{(\tau,\xi)}\widetilde{H}(\partial_t S,Q(x,\partial_x S))\cdot(\partial_t,x\partial_x)a_0+\gamma_{m,\ell}(S)a_0=0$$

avec la condition initiale $a_0|_{t=0}=1$. Pour résoudre (2.28) perturbativement, on part de (3.20) et on cherche $a_0=a$ sous la forme

$$(3.29)\qquad a=\exp\big[t\big(\frac{\widehat{\mu}}{2}+\sum_{k\geq 1}r_kE^k+\sum_{\alpha',\ell'm',\alpha'+|\ell'|\geq 1}b_{\alpha',\ell',m'}E^{\alpha'}Q^{\ell'}(x,\eta)e^{\langle\mu,m'\rangle t}\big)\big]$$

L'argument de l'exponentielle diffère légèrement de (3.16) par le fait que t est en facteur de toute l'expression. Calculons les termes d'ordre 1 en (E,Q) dans le cas particulier où $\widetilde{H}=\nu\tau^2$, $\widetilde{H}^w=\nu(hD_t)^2$. De S, on ne garde que le terme S_0. Substituant (3.29) dans (3.28), on trouve d'abord (termes en E) $r_1=-\nu\mu$, $b_{10m'}=0$ ($m'\geq 1$), puis (termes en $x\eta$), $b_{010}=0$ ($m'=0$), $b_{011}=2\nu\mu^2$ ($m'=1$), et $b_{01m'}=0$ ($m'\geq 2$). A l'ordre 1, on a donc $a=a_1=\exp\big[t\big(\widehat{\frac{\mu}{2}}+r_1E+b_{011}Q(x,\eta)e^{\mu t}\big)\big]$. Pour déterminer les termes d'ordre 2 en (E,Q), il est commode de chercher a sous la forme $a=a_1a_2$, l'équation pour a_2 s'écrit simplement

$$(-\partial_t+\mu x\partial_x+2\nu(\partial_t S)\partial_t)a_2=f(a_1)=\mathcal{O}(|E,Q|^2)$$

et on trouve encore a_2 sous la forme (3.29), etc...Résumons cette discussion dans la Proposition suivante:

Proposition 3.5: *Le symbole principal a_0 de l'amplitude a intervenant dans la définition des para- métrixes $K(t,E)$ est de la forme (3.29) et s'écrit donc sous la forme normale de Birkhoff. Il en est de même des termes d'ordre inférieur a_1, etc... en résolvant des équations de transport inhomogènes.*

La transformation canonique associée à l'OIF $K(2\pi,E)$ est égale à l'application de Poincaré. Remarquons toutefois que la phase (ou l'amplitude) associée à $K(2\pi+t,E;h)$ n'est reliées simplement à celle de $K(t,E)$, par exemple ni $S(t,x,\eta,E)$, ni $\partial_x S(t,x,\eta,E)$ ne sont 2π-périodiques en t. Cela ne contredit pas le fait que les solutions de l'équation eikonale $H(y,\frac{\partial}{\partial y}\phi_\pm(y;E))=E$, microlocalisees sur $\Gamma_\pm(E)$, sont grad-periodiques dans la direction γ_E, i.e. $\phi_\pm(\mathcal{J}y;E))=\phi_\pm(y;E)+C(E)$, de même que la solution de la première équation de transport vérifie $a_0^\pm(\mathcal{J}y;E)=\rho(E)a_0^\pm(y;E)$, où $\mathcal{J}$ est l'application de premier retour le long de γ_E, cf. [GeSj1], formules (1.7) et (1.15).

Appendice 3.A

On examine à present la situation sous un angle moins formel, en justifiant les intégrales de contour. Après transformation de FBI, $K(t,E)$ s'écrit comme un h-OIF à phase complexe, qui définit une fonction holomorphe dans un domaine pseudo-convexe Ω de $\mathbf{C}^n$, cf. par exemple la construction de [Hö2,Thm.8.4.11] d'un noyau reproduisant holomorphe dans $\Omega = \{|\operatorname{Im} z|^2 < 1 + |\operatorname{Re} z|^2\}$ dont on s'inspire ici. Des considérations analogues interviennent pour le propagateur de Feyman.

Dans ce contexte, $K(t,E)$ et son adjoint s'interprètent comme des noyaux de Poisson microlocaux au sens de [BdMSj], [Hö2,Sect.8.4] sur un ouvert pseudo-convexe Ω de $\mathbf{C}^n$. On va montrer qu'une certaine composante de $X = \partial\Omega$ ("frontières naturelles en t") de Ω, est de la forme $\operatorname{Im} t = 0$ ou $\operatorname{Im} t = F(E)$, et comment BNF permet de récupérer le développement de F autour de $E = 0$ dans la "phase d'inflation".

On remarque d'abord que les Propositions 3.3 et 3.5, de nature algébrique, sont toujours vraies. De même la Proposition 3.1 qui ne fait intervenir que le théorême de la phase stationnaire.

On cherche encore $K(t,E)$ comme h-OIF de la forme

$$K(t,E)v(x;h) = \int\int_{\mathcal{C}(t;E)} e^{i(S(t,x,\eta)-y\eta)/h} a(t,x,\eta;E,h)v(y)\, dy \wedge d\eta \tag{3.A.10}$$

où le contour $\mathcal{C}(t;E)$ est déterminé de sorte que $K(t,E)$ soit borné $H_{\Phi_2}(\mathbf{C}^d) \to H_{\Phi_2\circ\kappa_t(E)}(\mathbf{C}^d)$ pour tout t, le poids plsh $\Phi_2(y) = \frac{1}{4}|y|^2$ étant défini après (2.19), et $\kappa_t(E) = \exp tX_{H_0}|_{H_0^{-1}(E)}$ admet $S(t,x,\eta;E)$ comme fonction génératrice. On commence par déterminer un "bon contour" $\mathcal{C}(t;E)$ dans (3.A.10).

On a encore (3.4) avec cette fois $\Lambda(t,E) \subset \mathbf{C}^{2d}_{(x,\xi)} \times \mathbf{C}^{2d}_{(y,\eta)}$ variété Lagrangienne pour la 2-forme complexe. Rappelons de la discussion menant à (1.A.4)-(1.A.6) (cf. aussi [Sj1,Sect.11], [HeSj3, App.a.1]) que la variété Lagrangienne complexe $\Lambda(t,E) \subset H^{-1}(E)$ de $T^*\mathbf{C}^n$ est transverse dans $T^*\mathbf{C}^n$ à la variété I-Lagrangienne, R-symplectique Λ_{Φ_0}. Alors $\kappa_t(\Lambda_{\Phi_2})$ est de la forme Λ_{Ψ_t}. On a

Lemme 3.A.1: *Pour tout t, $\Psi_t(E) = \Phi_2 \circ \kappa_t(E)$, identifiant x avec $(x, \xi = \frac{2}{i}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x})$. La fonction $x \mapsto \Psi_t(E)$ définie par*

$$\Psi_t(x;E) = \text{v.c.}_{(y,\eta)}(-\operatorname{Im}(S(t,x,\eta;E) - y\eta) + \Phi_2(y))$$

le point critique étant de signature 0 (point selle), est plsh.

Preuve: On rappelle que Ψ_t est plsh ssi la matrice de Levi $\left(\frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial x_j \partial \overline{x}_k}\right)_{j,k}$ est positive. Comme $\Psi_{t=0}(x) = \Phi_2(x) = \frac{1}{4}|x|^2$, c'est vrai pour $t = 0$. Dans le cas modèle, soit $G_0(t,x,y,\eta) =$

$\operatorname{Im}(S_0(t,x,\eta)-y\eta)-\Phi_2(y)$, le point critique de $(y,\eta)\mapsto G_0(t,x,y,\eta)$ est donné par

$$(3.A.13)\qquad \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\eta}(S_0(t,x,\eta)-y\eta)=0,\quad -\frac{1}{2i}\eta-\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}(y)=0$$

soit $y=xe^{\mu t}$, $\eta=\frac{1}{2i}\overline{y}=\frac{1}{2i}\overline{xe^{\mu t}}$, et la valeur critique $-E\operatorname{Im}t-\frac{1}{4}|xe^{\mu t}|^2$. Donc $\Psi_t(x)=E\operatorname{Im}t+\frac{1}{4}|xe^{\mu t}|^2=E\operatorname{Im}t+\Phi_2\circ\kappa_t(x)$ qui est plsh. Dans le cas général, les propriétés de sous harmonicité se vérifiant au niveau des jets d'ordre 2, on utilise BNF; il suffit alors d'appliquer le "Lemme fondamental" (3.2) de [Sj1] pour conclure comme dans le cas modèle. ♣

En particulier, il existe un bon contour d'intégration $\mathcal{C}(t;E)$ pour (3.A.10). Soit $\widetilde{\omega}$ un ouvert convexe de $\mathbf{C}^d$ contenant 0. On voit donc que $K(t,E)$ est continu $H_{\Phi_2}(\widetilde{\omega})\to H_{\Phi_2\circ\kappa_t(E)}(\widetilde{\omega})$, où on rappelle que $\Psi_t=\Phi_2\circ\kappa_t(E)$.

On définit aussi

$$K^*(t,E)u(x;h)=\int\int_{\mathcal{C}^*(t;E)}e^{-i(S(t,y,\eta;E)-x\eta)/h}a^*(t,y,\eta;E,h)u(t,y)\,dy\wedge d\eta$$

où $\mathcal{C}^*(t;E)$ est de nouveau un bon contour. Le point critique vérifie

$$(3.A.15)\qquad \frac{1}{2i}\partial_\eta(S(t,y,\eta)-x\eta)=0,\quad \frac{1}{2i}\partial_y S(t,y,\eta)+\frac{1}{4}\overline{y}=0$$

On remarque que la relation canonique de $K^*(t,E)$ est l'inverse de celle de $K(t,E)$.

Dans le cas modèle, le poids correspondant

$$\Psi_t^*(x)=\text{v.c.}_{y,\eta}\big[\operatorname{Im}(S(t,y,\eta)-x\eta)+\Phi_2(y)\big]=-E\operatorname{Im}t+\frac{1}{4}e^{-2\operatorname{Re}\mu t}|x|^2$$

vérifie $\Psi_t^*=\Psi_{-t}$. Cette propriété se généralise.

Etudions à présent les propriétés de continuité de $K^*(E)$, pour cela on a besoin de contrôler la dépendance en t. Soit l'ouvert pseudo-convexe (tube de base $\widetilde{\omega}$):

$$(3.A.16)\qquad \Omega=\Omega(E)=\{(t,x)\in\mathbf{C}^n,\ x\in\widetilde{\omega}:\Psi_t^*(x)+\Phi_1(t)<\Phi_2(x)\}$$

Lemma 3.A.2: Il existe une fonction $F(E)$ définie pour $0<E<\varepsilon_0$, admettant le développement asymptotique $F(E)=2(E+s_2E^2+\cdots)$ où s_2 est comme dans la Proposition 3.3, telle que la "frontière naturelle" en t de $\Omega(E)$ est de la forme $\{\operatorname{Im}t=0\}\cup\{\operatorname{Im}t=F(E)\}$. On a un énoncé analogue pour $-\varepsilon_0<E<0$.

Preuve: Examinons d'abord le cas modèle, et pour simplifier supposons que $d=2$ et que la décompo- sition de JH'' contienne un élément hyperbolique $\mu_1x_1\xi_1$ et un élément elliptique

$\mu_2 x_2\xi_2 = i\omega_2 x_2\xi_2$, avec $\mu_1, \omega_2 > 0$ (λ_2 valeur propre de 1:ère espèce). La condition (3.A.16), s'écrit encore

$$(\mathrm{Im}\, t - E)^2 + \frac{1}{2}|x_1|^2(e^{-2\mu_1 \mathrm{Re}\, t} - 1) + \frac{1}{2}|x_2|^2(e^{2\omega_2 \mathrm{Im}\, t} - 1) < E^2 \tag{3.A.17}$$

définissant le domaine pseudo-convexe $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ (comme pour le noyau reproduisant $K(z)$ de [Hö2]), dont on va chercher la "frontière naturelle" en t. Soit $\Omega_t \subset \mathbf{C}^d$ la section de Ω à l'instant t, on remarque que $\mathrm{Re}\, t \mapsto \Omega_t$ est croissante.

Supposons $E > 0$. On va d'abord montrer que pour tout $t \in \mathbf{C}$ tel que $0 < \mathrm{Im}\, t < 2E$, (3.A.17) est satisfaite pour x dans un voisinage de 0. Posons en effet $f(t) = 2\,\mathrm{Im}\, t(2E - \mathrm{Im}\, t)$, on a $f(t) > 0$ pour $0 < \mathrm{Im}\, t < 2E$, donc (3.A.17) s'ecrit

$$|x_1|^2(e^{-2\mu_1 \mathrm{Re}\, t} - 1) + |x_2|^2(e^{2\omega_2 \mathrm{Im}\, t} - 1) \le f(t) \tag{3.A.18}$$

Pour tout $\mathrm{Re}\, t < 0$, (3.A.18) est vérifiée pour x dans un voisinage (compact) de (0,0).

Lorsque $\mathrm{Im}\, t \to 0^+$, Ω_t contient un ouvert de $\mathbf{C}^2$ tel que $|x_2|^2 < cE$,

$$|x_1|^2 < c\,\mathrm{Im}\, t(e^{-2\mu_1 \mathrm{Re}\, t} - 1)^{-1}$$

avec $c > 0$.

A fortiori ($\mathrm{Re}\, t \mapsto \Omega_t$ croissante), pour tout $\mathrm{Re}\, t > 0$, Ω_t contient aussi un voisinage de ce type, et même un voisinage non compact.

Par contre, $f(t) < 0$ pour $\mathrm{Im}\, t < 0$, et Ω_t ne contient aucun voisinage de (0,0), et $K^*(t, E)$ n'est pas défini. Il en est de même pour $\mathrm{Im}\, t > 2E$. On raisonne de même pour $E < 0$.

Considérons maintenant le cas général; d'après la Proposition 3.3, il suffit de changer dans S le terme $-Et$ en $-(E + \sum_{k\ge 2} s_k E^k)t$, et $\sum_j Q_j(y,\eta)e^{\mu_j t}$ en

$$\sum_j Q_j(y,\eta)e^{\mu_j t} + \sum_{\alpha,\ell,m} c_{\alpha,l,m} E^\alpha Q^\ell(y,\eta)e^{\langle m,\mu\rangle t}, \quad |\ell| + \alpha \ge |m|$$

On inclut les termes correspondant à $|m| = 0, 1, 2$ et $\alpha + |\ell| = 2$. Les èquations (3.A.15) s'écrivent

$$e^{\mu t} y = x - \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \eta}(t, y, \eta) \tag{3.A.20}$$

$$e^{\mu t}\eta = \frac{1}{2i}\overline{y} - \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}(t, y, \eta) \tag{3.A.21}$$

ce qu'on résout par le théorême des fonctions implicites; on trouve à la première itération $e^{\mu t} y = x$, $e^{\mu t}\eta = \frac{1}{2i}\overline{y}$, soit $\eta = \frac{1}{2i}e^{-2\,\mathrm{Re}\,\mu t}\overline{x}$, et $Q(y,\eta) = \frac{1}{2i}e^{-\mu t}e^{-2\,\mathrm{Re}\,\mu t}|x|^2$. A la deuxième itération, utilisant $c_{20m} = 0$ (Lemme 3.2)

$$e^{\mu_j t} y_j = x_j - y_j E \sum_m c_{1,\widehat{j},m} e^{\langle m,\mu\rangle t} - \sum_{\widehat{k},m} c_{0,\widehat{j},\widehat{k},m} y_j Q_{\widehat{k}}(y,\eta) e^{\langle m,\mu\rangle t}$$
$$= x_j(1 - \sum_m c_{1,\widehat{j},m} E e^{-\mu_j t} - \sum_{\widehat{k},m} c_{0,\widehat{j},\widehat{k},m} Q_{\widehat{k}}(y,\eta) e^{\langle m,\mu\rangle t})$$

et l'on remplace $Q_k(y,\eta)$ par

$$Q_k(e^{-\mu t}x, e^{-\mu t}\frac{1}{2i}\overline{y}) = Q_k(e^{-\mu t}x, e^{-2\,\mathrm{Re}\,\mu t}\frac{1}{2i}\overline{x}) = e^{-2\,\mathrm{Re}\,\mu_k t}\frac{1}{2i}Q_k^t(x,\overline{x})$$

On constate alors que (3.A.16) est satisfaite si $t \in \{0 < \mathrm{Im}\, t < 2(E + s_2E^2) + \mathcal{O}(E^3)\}$. On peut calculer de même la correction en E^3, etc..., ce qui donne le Lemme. ♣

Proposition 3.A.3: *On peut définir $K^*(E) = \int_{c^*(E)} dt\, K^*(t,E)$ où $c^*(E) \subset \mathbf{C}$ est un contour d'intégration (par exemple par $\mathrm{Im}\, t = \varepsilon$), comme opérateur borné $\int^{\oplus} H_{\Psi_t^*}(\mathbf{C}^d)\, dt \to H_{\Phi_2}(\mathbf{C}^d)$, ou encore $H_{\Phi_0}(\Omega) \to H_{\Phi_2}(\widetilde{\omega})$, pourvu que $c^*(E) \subset \{0 < \mathrm{Im}\, t < F(E)\}$ (si $E > 0$), resp. $c^*(E) \subset \{F(E) < \mathrm{Im}\, t < 0\}$ (si $E < 0$).*

Remarque: On peut sans doute aussi montrer, suivant [BdMSj], que $K^*(E)$ est encore continu pour $E = 0$: il suffit de prendre pour $c^*(E)$ un contour de la forme $c^*(E) = c^*_\varepsilon = \{\mathrm{Im}\, t = \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ assez petit, et montrer que les valeurs au bord $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{c^*} dt\, K^*(t,E)$ définies comme intégrales oscillantes, sont continues $\int^{\oplus} H_{\Psi_t^*}(\mathbf{C}^d) \to H_{\Phi_2}(\mathbf{C}^d)$, avec un énoncé analogue pour $E < 0$. Ceci serait cohérent avec le fait que $E = 0$ n'est pas une valeur spéciale de l'énergie, puisque les orbites périodiques non dégénérées font partie d'une famille à un paramètre.

4. La "norme de flux".

Soit $H^w(hD_t, x, hD_x)$ un opérateur auto-adjoint indépendant du temps, défini microlocalement près de $(x,\xi) = 0$, $\tau = 0$, $t \in \mathbf{R}$, et pour lequel la surface $t = 0$ est non caractéristique. On supposera, comme à la Sect.2, que $H^w(hD_t, x, hD_x)$ est de la forme $H^w(hD_t, x, hD_x) = hD_t + A^w(hD_t, x, hD_x)$.

a) Une propriété d'invariance.

On va appliquer la Proposition 3.3 à $C = \frac{i}{h}[H, \chi]$.

Lemme 4.1: Soit $S(t, x, \eta)$ la solution de l'équation eikonale (3.3) avec $S(0, x, \eta) = x\eta$. Supposons que $\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(t, x, \eta)$ reste dans la composante connexe de l'identité pour $|t| \leq T$, et $(x, \eta) \in \operatorname{neigh} 0$. Alors la solution de l'équation de transport (3.5) définissant le symbole principal $a_0(t, x, \eta)$ dans l'amplitude de $K(t, E)$ verifie

$$a_0^2 = M(t, x, \eta)\widetilde{a}_0^2$$

où $\widetilde{a}_0$ ne dépend pas de $t \in [-T, T]$, et

$$M(t, x, \eta) = \big(-\partial_\tau H(\tau, x, \xi)|_{(\tau,\xi)=\partial_{t,x} S}\big)^{-1} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(t, x, \eta)$$

Preuve: On procède par un argument de dualité. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. On définit une forme sesquilineaire (associée à la norme de flux) sur les fonctions $u, v \in L^2(\mathbf{R}^d)$ définies microlocalement près de 0, par

$$(u|v)_\chi = \big(\frac{i}{h}[H, \chi(t)]K(t; h)u | K(t, h)v\big) \tag{4.4}$$

le produit scalaire étant calculé dans $L^2(\mathbf{R}^n_{t,x})$. En utilisant que H est auto-adjoint, et le fait qu'on peut développer le commutateur car $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, on voit facilement que $(u|v)_\chi$ est indépendante du choix de χ modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$. Donc $(u|v)_\chi \equiv 0$ pour tout χ à support compact. On calcule par ailleurs directement (4.4) en explicitant l'opérateur $K(t, E)^* \frac{i}{h}[H, \chi(t)]K(t, E)$. Dans le cas modèle on trouve simplement $K(t, E)^* \frac{i}{h}[H, \chi(t)]K(t, E) = \chi'(t)$. En général le calcul se fait suivant la preuve de la Proposition 3.1. Le symbole principal de H ne dépendant pas de t, $\frac{i}{h}[H, \chi(t)]$ a pour symbole principal $-\chi'(t)\partial_\tau H(\tau, x, \xi)$, si bien que d'après (4.4) le symbole principal de l'OPD $K(t; h)^* \frac{i}{h}[H, \chi(t)]\ K(t; h)$, évalué au point critique, est donné par

$$\chi'(t)\big(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(t, x, \eta)\big)^{-1} |a_0(t, y', \eta')|^2 \partial_\tau H(\tau, x, \xi)|_{(\tau,\xi)=\partial_{t,x} S(t, y', \eta'} \tag{4.6}$$

On sait aussi que a_0 est réel, donc $|a_0|^2 = a_0^2$. Le facteur de $\chi'(t)e^{i(x-y)\eta'/h}u(y)\overline{v}(x)$ dans l'intégrale donnant $(u|v)_\chi$ est donc, d'après (4.6)

$$D(t,y,\eta') = \big(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(t,y',\eta')\big)^{-1} a_0(t,y',\eta')^2 \partial_\tau H(\tau,x,\xi)|_{\tau=\partial_t S, \xi=\partial_x S} \tag{4.8}$$

où y et y' sont reliés par $y = \frac{\partial S}{\partial \eta}(t,y',\eta')$. Donc modulo $\mathcal{O}(h)$

$$(u|v)_\chi = \int_{\mathbf{R}} dt\, \chi'(t) \int dx \int dy \int d\eta'\, e^{i(x-y)\eta'/h} D(t,y,\eta') u(y)\overline{v}(x) \equiv 0 \tag{4.9}$$

et pour cette intégrale oscillante, on a au sens des distributions:

$$-\int_{\mathbf{R}} dt\, \chi(t) \int dx\, \overline{v}(x) \int \int dy\, d\eta'\, e^{i(x-y)\eta'/h} \partial_t D(t,y,\eta') u(y) \equiv 0$$

En faisant varier χ et v, il vient

$$\int \int e^{i(x-y)\eta'/h} \partial_t D(t,y,\eta') u(y) dy\, d\eta' \equiv 0$$

pour tout u, donc $\partial_t D(t,y,\eta') = 0$ et $D(t,y,\eta') = D(0,y,\eta') = D(0,y',\eta')$ ne dépend pas de t.

D'autre part $\partial_\tau H(\tau,x,\xi)|_{(\tau,x,\xi)=0} < 0$ près de 0, et quitte à diminuer T, on peut écrire $D(y,\eta') = -\widetilde{a}_0^2(y,\eta') > 0$, donc (4.8) montre que, pour $y = \frac{\partial S}{\partial \eta}(t,y',\eta')$

$$a_0^2(t,y',\eta') = \widetilde{a}_0^2(y,\eta') \big(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(t,y',\eta')\big) \big(-\partial_\tau H(\tau,x,\xi)|_{(\tau,\xi)=\partial_{(t,x)}S}\big)^{-1} \tag{4.10}$$

ce qui prouve le Lemme. ♣

Posons $t = 0$ dans (4.10); de par la condition initiale $a_0|_{t=0} = 1$ vérifiée par l'opérateur de Poisson, et compte-tenu aussi de ce que $\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}(t,y',\eta')|_{t=0} = \mathrm{Id}$, on trouve

$$\widetilde{a}_0^2(y,\eta') = \partial_\tau H(\tau,x,\xi)|_{\tau=\partial_t S, \xi=\partial_x S} \tag{4.11}$$

que l'on calcule en substituant les dérivées de (3.17) en $t = 0$ dans $\partial_\tau H$. Rappelons que le second membre de (4.11) est évalué en y' tel que $\partial_\eta S(t,y',\eta') = y$, soit $y' = y$ pour $t = 0$. On trouve $\widetilde{a}_0^2(y,\eta') = \widetilde{a}_0^2(Q(y,\eta'),E)$ sous la forme normale de Birkhoff. On a un résultat analogue pour les termes d'ordre inférieur a_1, etc..., voir [IfaRo] dans le cas uni-dimensionnel.

b) La normalisation.

On procède maintenant à la normalisation de l'opérateur de Poisson, en utilisant la "norme de flux" de Helffer et Sjöstrand. Choisissons comme dans la preuve du Lemme 4.1

$\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ à support dans $t \geq \varepsilon_0$, égale à 1 pour $t \geq 2\,\varepsilon_0$. Pour $u = v$, (4.4) définit la norme de flux de u, que l'on calcule en suivant la preuve du Lemme 4.1 (jusqu'à la formule (4.9)), si bien qu'en intégrant par rapport à t on trouve

$$\|u\|_\chi^2 = (A(x, hD_x, E)u|A(x, hD_x, E)u) + \mathcal{O}(h)\|u\|^2 \tag{4.12}$$

où $A(x, hD_x, E)$ est un h-OPD de symbole principal $\widetilde{a}_0(Q(y, \eta'), E) > 0$. On peut corriger $A(x, hD_x; E)$ par un terme $\mathcal{O}(h)$ de façon que (4.12) soit satisfait mod $\mathcal{O}(h^2)$, etc... On en déduit:

Proposition 4.2: *On peut composer $K(t, E)$ par $B(E) = A(x, hD_x; E, h)^{-1}$, comme en (4.12) agissant dans les variables transverses, et de symbole principal $\widetilde{a}_0^{-1}(Q(y, \eta'), E)$, de sorte que l'opérateur $L(t, E) = K(t, E)B(E)$ soit isométrique $L^2(\mathbf{R}^d_x) \to L^2(\mathbf{R}^n_{t,x})$, i.e.*

$$\left(\frac{i}{h}[H, \chi(t)]K(t, E)B(E)v^+|K(t, E)B(E)v^+\right) = \left(v^+|v^+\right) \tag{4.13}$$

De plus, $B(E)$ (et donc $L(t, E)$) peut être mis sous la forme normale de Birkhoff.

Notons que dans le cas modèle, $L(t, E) = K(t, E)$ est donné par (3.21). On a donc

$$\int dt\, L(t, E)^* \frac{i}{h}[H, \chi(t)]L(t, E) = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbf{R}^d_x)} \tag{4.14}$$

ce qui permet de définir les opérateurs $R_+(t, E) = L(t, E)^* \frac{i}{h}[H, \chi_f(t)]$, resp. comme inverse à gauche de $L(t, E)$, et $R_-(t, E) = \frac{i}{h}[H, \chi_b(t)]L(t, E)$, resp. comme inverse à droite de $L(t, E)^*$ (Ici $\chi_f = \chi$ et χ_b est défini de façon analogue, égal à 1 sur le support de χ_f).

La norme de flux munit donc l'espace fibré des solutions microlocales de $(H(y, hD_y) - E)u = 0$, définies au voisinage de γ_0, d'une structure hermitienne; sur ce fibré agit naturellement le groupe de jauge $\mathrm{U}(1)$.

c) Les opérateurs $L(s, E)L^*(E)$.

On commence par l'opérateur modèle $H_0 = -\tau + \mu x\eta$ pour lequel $L(t, E) = K(t, E)$. Calculons d'abord le noyau de $L(t, E)L^*(s, E) = K(t, E)K^*(s, E)$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(t, x; s, y; E) = \int\!\!\int dy'\, d\eta'\, e^{i(S(t,x,\eta') - y'\eta')/h} a(t, x, \eta'; E, h) \\ \times \int d\eta\, e^{-i(S(s,y,\eta) - y'\eta)/h}\overline{a(s, y, \eta; E, h)}\end{aligned} \tag{4.20}$$

est une intégrale oscillante (agissant sur $u(s, y)$) qu'on détermine par la phase stationnaire en (y', η'). La phase

$$\Psi(t, x, s, y, \eta; , y', \eta') = S(t, x, \eta') - S(s, y, \eta) + y'(\eta - \eta')$$

a pour point critique en (y',η'): $\eta'=\eta$, $y'=\partial_{\eta'}S(t,x,\eta')=y'_c$. la valeur critique $\Psi_c(t,s,x;y,\eta)=S(t,x,\eta)-S(s,y,\eta)$, et le Hessien egal a -1. Intégrons aussi en E. On rappelle $L(t,E)=K(t,E)$ et $L^*(t,E)=K^*(t,E)$ de (3.21) d'où

$$L(s,E)L^*(E)u(s,x)=(2\pi h)^{-2d}\int dt\int\int e^{i(E(t-s)+\sum(x_j\eta_je^{\mu_js}-y_j\eta_je^{\mu_jt})/h}$$
$$\times\, e^{\widetilde{\mu(t+s)/2}}u(t,y)\,dy\,d\eta$$

On fait la phase stationnaire en (z,ξ), le det du Hessien vaut 1 et la phase critique $E(t-s)+\sum(x_je^{\mu_js}-y_je^{\mu_jt})\eta_j$, puis on intègre la formule obtenue au moyen du changement de variables $y_j=y'_je^{\mu_j(s-t)},\eta_j=\eta'_je^{-\mu_js}$, ce qui donne encore, par la formule de la phase stationnaire, pour $v(s,t,y')=e^{\widetilde{\mu(s-t)/2}}u(t,y'e^{\mu(s-t)})$

$$\int dE\,L(s,E)L^*(E)u(s,x)=\int\int e^{i(E(t-s)+(x-y')\eta')/h}v(t,s,y')\,dy'\,d\eta'\,dt\,dE\equiv u(s,x)$$

mod $\mathcal{O}(h^\infty)\|u\|$. En effet, comme $v(t,s,y')|_{s=t}=u(t,y')$, le premier terme est $u(t,x)$, puis comme $v(s,t,y')$ est indépendant de E, les termes suivants sont nuls. Donc

$$\int dE\,L(s,E)L^*(E)=\mathrm{Id}+\mathcal{O}(h^\infty) \tag{4.22}$$

Vérifions à present cette formule dans le cas général.

Proposition 4.3: Il existe $P(s,E)=\mathrm{Id}_{L^2(\mathbf{R}^n)}+\mathcal{O}(h)$ tel que mod $\mathcal{O}(h^\infty)$

$$\int dE\,L(\cdot,E)P(\cdot,E)L^*(E)=\mathrm{Id}_{L^2(\mathbf{R}^n)},\quad \int dE\,L^*(E)L(s,E)P(s,E)=\mathrm{Id}_{L^2(\mathbf{R}^n_s)} \tag{4.24}$$

5. L'opérateur de monodromie.

Adaptant des arguments de [Bog], [SjZw], [NoSjZw] et [FaLoRo], on construit un opérateur de monodromie $\mathcal{M}^*(E) : L^2(\Sigma) \to L^2(\Sigma)$, et on identifiera Σ à $\mathbf{R}^d$. On pose $K_{2\pi}(t,E) = K_0(t-2\pi,E)$, et $L_{2\pi}(t,E) = L_0(t-2\pi,E)$. On note aussi $S_{2\pi}(t,x,\eta) = S_0(t-2\pi,x,\eta)$ et $a_{2\pi}(t,x,\eta) = a_0(t-2\pi,x,\eta)$. L'opérateur de monodromie (ou application de Poincaré semi-classique) est un opérateur unitaire défini par

$$M^*(E) = L_{2\pi}^*(E)\frac{i}{h}[H,\chi]L_0(\cdot,E) \tag{5.1}$$

En fait on va montrer que l'opérateur défini par l'expression (5.1), comme fonction de χ, suit une "loi de 0-1": Il vaut 0 si χ est à support compact; il est unitaire si χ est égal à 0 près de 0, et 1 sur $[2\pi,+\infty[$.

Notons déjà dans le cas modèle que la phase définissant le noyau de (5.1) a pour valeur critique $-2\pi E - y\eta + x\eta e^{2\pi\mu}$ donc, en tenant compte de (3.21)

$$\begin{aligned} M^*(E)v(x) &= e^{-2i\pi E/h}\int dt\,\chi'(t)\int\int \exp[i(xe^{2\pi\mu}-y)\eta/h]v(y)\,dy\,d\eta \\ &= e^{-2i\pi E/h}e^{\pi\mu}v(xe^{2\pi\mu}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

puisque $\int \chi'(t)\,dt = 1$. Donc dans ce cas, le Théorème 0.1 est vérifié.

a) Etude du noyau de $M^*(E)$.

En général, le noyau de (5.1) est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*(t,x,z) = \chi'(t)\int\int & dy''\,d\xi'\,dy'\,d\eta\,dx'\,d\xi\,d\theta\,dy\,d\eta' e^{i(x-x')\xi/h}b(\frac{x+x'}{2},\xi;E,h) \\ & e^{-i(S_{2\pi}(t,y'',\eta')-x'\eta')/h}\overline{a_{2\pi}(t,y'',\eta';E,h)}e^{i(y'-y'')\xi'/h}H_\chi(\frac{y'+y''}{2},\xi';h) \\ & e^{i(S_0(t,y',\eta)-y\eta+(y-z)\theta)/h}a_0(t,y',\eta)b(\frac{y+z}{2},\theta;E,h) \end{aligned}$$

ou après une première phase stationnaire (contraction) sur les variables (y'',ξ') qui donne le point critique $(y'',\xi') = (y',\eta')$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*(t,x,z) = \chi'(t)\int\int & dy'\,d\eta\,dx'\,d\xi\,d\theta\,dy\,d\eta' e^{i(x-x')\xi/h}b(\frac{x+x'}{2},\xi;E,h) \\ & e^{-i(S_{2\pi}(t,y',\eta')-x'\eta')/h}\overline{a_{2\pi}(t,y',\eta';E,h)}H_\chi(y',\eta';h) \\ & e^{i(S_0(t,y',\eta)-y\eta+(y-z)\theta)/h}a_0(t,y',\eta;E,h)b(\frac{y+z}{2},\theta;E,h) \end{aligned} \tag{5.3}$$

où H_χ est le facteur de $\chi'(t)$ dans le symbole de $\frac{i}{h}[H,\chi]$. C'est une intégrale oscillante (agissant sur $v(z)$) qu'on détermine par la phase stationnaire en $(y,y',\eta,x',\xi,\theta)$. La phase est définie par

$$\Psi(t,x,z,\eta',\ldots) = (x-x')\xi - S_{2\pi}(t,y',\eta') + x'\eta' + S_0(t,y',\eta) - y\eta + (y-z)\theta \tag{5.4}$$

et le point critique de $(y,y',\eta,x',\xi,\theta)\mapsto \Psi(t,x,z,\eta',...)$ donné par:

$$\xi=\eta',\quad x'=x,\quad y=z,\quad \theta=\eta \tag{5.5}$$

$$z=\partial_\eta S_0(t,y',\eta),\quad -\frac{\partial S_{2\pi}}{\partial y'}(t,y',\eta')+\frac{\partial S_0}{\partial y'}(t,y',\eta)=0 \tag{5.6}$$

On élimine d'abord les variables ξ,x',y,θ par la phase stationnaire à l'aide de (5.5), on trouve comme valeur critique de $\Psi(t,x,z,\eta',...)$:

$$\Psi_1(t,x,z,\eta';y',\eta)=-S_{2\pi}(t,y',\eta')+S_0(t,y',\eta)+x\eta'-z\eta \tag{5.7}$$

On applique de nouveau la phase stationnaire par rapport à (y',η), et on cherche le point critique $(y',\eta)=(Y',N)=\big(Y'(t,z,\eta',E),N(t,z,\eta',E)\big)$ (independant de x).

Les deux equations (5.6) sont découplées. On cherche d'abord $y'=y'(t,z,\eta)$ solution de la première equation (5.6) à l'aide de (3.17):

$$z=y'e^{\mu t}\big[1+\sum_{\alpha+\ell\geq m,\ell\geq 1}\ell c_{\alpha,\ell,m}E^\alpha Q^{\ell-1}(y',\eta)e^{(m-1)\mu t}\big]$$

soit en posant $s=y'e^{\mu t},u=Ee^{\mu t},v=e^{-\mu t}$ et en utilisant $\alpha+\ell\geq m$,

$$z=s\big[1+\sum_{\alpha+\ell+1\geq m,\ell\geq 0}(\ell+1)c_{\alpha,\ell+1,m}u^\alpha\eta^\ell s^\ell v^{\ell+\alpha+1-m}\big]$$

(apres changement d'indice ℓ), on résout cette équation comme série formelle en (s,η,u,v) en supposant v petit, i.e. dans la limite $t\to+\infty$.

L'équation $z=\partial_\eta S_0(t,y',\eta)$ est donc équivalente à $G_w(z,s)=0$, avec $w=(u,v,\eta)$ et

$$G_w(z,s)=s-z+\sum_{\alpha+\ell\geq m,\ell\geq 1}s^\ell\big[\ell c_{\alpha,\ell,m}u^\alpha\eta^{\ell-1}v^{\ell+\alpha-m}\big]$$

On a d'abord $\partial_s G_w(0,0)=1+C_1(w)$, avec $C_1(w)=\sum_{\alpha+1\geq m}c_{\alpha,1,m}u^\alpha v^{1+\alpha-m}$, $C_1(w)=o(1)$. Donc le théorème des fonctions implicites donne $s=\varphi_w(z)$ avec

$$\varphi'_w(0)=(1+C_1(w))^{-1}$$

A l'ordre suivant on a $\partial_s^2G_w(z,s)(\varphi'_w(z))^2+\partial_sG_w(z,s)\varphi''_w(z)=0$ d'où

$$\varphi''_w(0)=-\frac{2C_2(w)}{(1+C_1(w))^3}$$

avec $C_2(w) = 2\eta \sum_{\alpha+2\geq m} c_{\alpha,2,m} u^\alpha v^{2+\alpha-m}$, on a donc $\varphi''_w(0) = \eta\Phi(u,v)$, avec $\Phi(0,0) = 0$. Itérant ce procédé, on trouve finalement s sous la forme

$$s = y' e^{\mu t} = z\big(1 - \sum_{\alpha,\beta,\ell\geq 0} \gamma'_{\alpha,\beta,\ell} u^\alpha Q(z,\eta)^\ell v^\beta\big) \tag{5.8}$$

soit la composante $y' = y'(t,z,\eta)$ du point critique de Ψ en (y',η), avec

$$y'(t,z,\eta) = z e^{-\mu t}\big(1 - \sum_{\alpha,\beta,\ell\geq 0} \gamma'_{\alpha,\beta,\ell} E^\alpha Q(z,\eta)^\ell e^{(\alpha-\beta)\mu t}\big) \tag{5.9}$$

i.e. $\frac{1}{z} y'(t,z,\eta)$ est dans la forme normale de Birkhoff (ne dépend de (z,η) que par $Q(z,\eta)$), mais son dévéloppement en série contient aussi à présent des puissances négatives de $e^{\mu t}$ (???)

On substitue alors $y' = y'(t,z,\eta)$ dans la deuxième equation (5.6), d'inconnue η. Posons de nouveau $u = Ee^{\mu t}, s = y'e^{\mu t} = s(\eta), v = e^{-\mu t}$, puis $w = (u,v)$, et

$$\begin{aligned} F_w(\eta',\eta) = \eta\big[1 + \sum_{\alpha+\ell\geq m,\ell\geq 1} \ell c_{\alpha,\ell,m} u^\alpha Q^{\ell-1}(s,\eta) v^{\ell+\alpha-m}\big] - \\ \eta' e^{-2\pi\mu}\big[1 + \sum_{\alpha+\ell\geq m,\ell\geq 1} \ell e^{-2(m-1)\pi\mu} c_{\alpha,\ell,m} u^\alpha Q^{\ell-1}(s,\eta') v^{\ell+\alpha-m}\big] \end{aligned}$$

ce qu'on ècrit

$$F_w(\eta',\eta) = \eta\big(1 + g_w \circ Q(s,\eta)\big) - c\eta'\big(1 + \widetilde{g}_w \circ Q(s,\eta')\big) \tag{5.10}$$

avec $c = e^{-2\pi\mu}$. On a d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_w}{\partial \eta'}(\eta',\eta) &= -c\big(1 + \widetilde{g}_w \circ Q(s,\eta') + Q(s,\eta')\widetilde{g}'_w \circ Q(s,\eta')\big) \\ \frac{\partial F_w}{\partial \eta}(\eta',\eta) &= 1 + g_w \circ Q(s,\eta) + Q(s,\eta) g'_w \circ Q(s,\eta) + \\ &\quad \frac{\partial s}{\partial \eta}\big(g'_w \circ Q(s,\eta)\eta^2 - c\widetilde{g}'_w \circ Q(s,\eta')\eta'^2\big) \end{aligned}$$

Donc le théorème des fonctions implicites donne $\eta = \psi_w(\eta')$ avec $\psi_w(0) = 0$,

$$\psi'_w(0) = e^{-2\pi\mu}(1 + \widetilde{g}_w(0))(1 + g_w(0))^{-1}$$

avec $\widetilde{g}_w(0), g_w(0) = o(1)$ quand $w \to 0$. On en déduit $\eta = e^{-2\pi\mu}(1 + o(1))\eta' + \mathcal{O}(\eta'^2)$. On calcule de même le terme quadratique. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_w}{\partial \eta'^2}(\eta',\eta) &= -cs\big(2\widetilde{g}'_w\circ Q(s,\eta')+Q(s,\eta')\widetilde{g}''_w\circ Q(s,\eta')\big)\\
\frac{\partial^2 F_w}{\partial \eta'\partial\eta}(\eta',\eta) &= -c\eta'\frac{\partial s}{\partial \eta}\big(2\widetilde{g}'_w\circ Q(s,\eta')+\widetilde{g}''_w\circ Q(s,\eta')\big)Q(s,\eta')\\
\frac{\partial^2 F_w}{\partial \eta^2}(\eta',\eta) &= \big(2g'\circ Q+Qg''\circ Q\big)(s,\eta)\big(s+2\eta\frac{\partial s}{\partial \eta}\big)+\\
&\big(\frac{\partial s}{\partial \eta}\big)^2\big(\eta^3 g''\circ Q(s,\eta)-c\eta'^3\widetilde{g}''\circ Q(s,\eta')\big)+\\
&\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}\big(\eta^2 g'\circ Q(s,\eta)-c\eta'^2\widetilde{g}'\circ Q(s,\eta')\big)
\end{aligned}$$

Evaluant en $(\eta',\eta)=0$ l'expression

$$\frac{\partial^2 F_w}{\partial \eta'^2}(\eta',\eta)+2\frac{\partial^2 F_w}{\partial \eta'\partial\eta}(\eta',\eta)\psi'_w(\eta')+\frac{\partial^2 F_w}{\partial \eta^2}(\eta',\eta)\big(\psi'_w(\eta')\big)^2+\frac{\partial F_w}{\partial \eta}(\eta',\eta)\psi''_w(\eta')=0$$

on trouve

$$\psi''_w(0)=2cs(0)\frac{\widetilde{g}'_w(0)-cg'_w(0)+\widetilde{g}'_w(0)g'_w(0)-cg'_w(0)\widetilde{g}_w(0)}{(1+g_w(0))^2}$$

ou l'on rappelle de (5.8)

$$s(0)=e^{\mu t}y'(t,z,0)=y\big(1-\sum_{\alpha,\beta,\ell\geq 0}\gamma'_{\alpha,\beta,\ell}u^\alpha Q(z,\eta)^\ell v^\beta\big)$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\eta =&e^{-2\pi\mu}\eta'\big[1+o(1)+\\
&e^{\mu t}(1+o(1))Q(z,\eta')\frac{\widetilde{g}'_w(0)-cg'_w(0)+\widetilde{g}'_w(0)g'_w(0)-cg'_w(0)\widetilde{g}_w(0)}{(1+g_w(0))^2}+\mathcal{O}(\eta'^3)
\end{aligned}$$

Il est clair que le développement ci-dessus se généralise et que l'on obtient ainsi

$$e^{2\pi\mu}\eta=\eta'\big[1+\sum_{\alpha,\beta,\ell\geq 0}\delta_{\alpha,\beta,\ell}u^\alpha Q(z,\eta')^\ell v^\beta\big] \tag{5.12}$$

Il ne reste plus qu'à substituer (5.12) dans (5.8) pour exprimer $y'(t,z,\eta)$ en fonction de (t,z,η'). On a ainsi montré le:

Lemme 5.1: *Le point critique $(Y'(t,z,\eta',E),N(t,z,\eta',E))$ s'écrit sous la forme normale de Birkhoff:*

$$\begin{aligned}
e^{2\pi\mu}\eta &= e^{2\pi\mu}N(t,z,\eta',E)=\eta'\big[1+\sum_{\alpha,\beta,\ell\geq 0}\delta_{\alpha,\beta,\ell}u^\alpha Q(z,\eta')^\ell v^\beta\big]\\
e^{\mu t}y' &= e^{\mu t}Y'(t,z,\eta',E)=z\big(1-\sum_{\alpha,\beta,\ell\geq 0}\gamma_{\alpha,\beta,\ell}u^\alpha Q(z,\eta')^\ell v^\beta\big)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

La valeur critique de $(y', \eta) \mapsto \Psi_1(t, x, z, \eta', y', \eta)$ donnée en (5.6) est donc

(5.14)
$$\Psi_2(t, x, z, \eta') = \Psi_1(t, x, z, \eta', Y'(t), N(t)) = -S_{2\pi}(t, Y'(t), \eta') + S_0(t, Y'(t), N(t)) - zN(t) + x\eta'$$

ou l'on a noté $Y'(t) = Y'(t, z, \eta', E)$, $N(t) = N(t, z, \eta', E)$. On en déduit facilement le:

Lemme 5.2: *La valeur critique $\Psi_2(t, x, z, \eta')$ s'écrit sous la forme normale de Birkhoff:*

$$S_{2\pi}(t, Y'(t), \eta') - S_0(t, Y'(t), N(t)) + zN(t) = \psi(t, Q(z, \eta'), E)$$

où $\psi(t, Q(z, \eta'), E)$ admet le developpement ???? De plus, le noyau de M^* est de la forme

$$\mathcal{M}^*(t, x, z) = \chi'(t) \int e^{i\Psi_2(t,x,z,\eta')/h} B(t, x, z, \eta'; h)\, d\eta'$$

On étudie maintenant la dépendance en t de $\Psi_2(t, x, z, \eta')$, en procédant comme dans la Proposition 3.1 par un argument de dualité. Soit χ à support compact en t, on a

$$(L_{2\pi}^*(E) \frac{i}{h} [H, \chi] L_0(t, E) u | v)_{L^2(\mathbf{R}^d)} = \mathcal{O}(h^\infty) \tag{5.15}$$

pour tous $u, v \in L^2(\mathbf{R}^d)$, d'autre part $\frac{i}{h}[H, \chi]$ a pour symbole principal $\chi'(t)\partial_\tau H(\tau, x, \xi)$; dans l'intégrale oscillante définissant (5.15) avec un symbole de la forme $\chi'(t)A(...; h)$ on a au sens des distributions (après contraction sur les variables (x, ξ, y, θ) par la phase stationnaire):

$$\partial_t \int\int e^{i(-S_{2\pi}(t,y',\eta') + x\eta' + S_0(t,y',\eta) - z\eta)/h} A(...; h) dy'\, d\eta\, d\eta' = \partial_t I(t, x, z; h) = 0$$

pour tous (t, x, z). On applique la phase stationnaire en (y', η), on trouve l'intégrale calculée précédem- ment (au facteur $\chi'(t)$ près)

$$I(t, x, z; h) = (2\pi h)^d \int e^{i\Psi_2(t,x,z,\eta')/h} B(...)\, d\eta'$$

indépendante de t.

L'opérateur de monodromie est un OIF qui quantifie l'application de Poincaré. Or cette application est indépendante du choix de la section, donc du paramètre t, et il en résulte que sa fonction génératrice Ψ_2 n'en dépend pas. On a donc

$$\Psi_2(t, x, z, \eta') = \Psi_3(x, z, \eta') = -S_0(-2\pi, Y'(0), \eta') + x\eta' + S_0(0, Y'(0), N(0)) - zN(0)$$

ou l'on a notè $Y'(t) = Y'(t, z, \eta', E)$, $N(t) = N(t, z, \eta', E)$, ou encore

$$\Psi_2(t, x, z, \eta') = \Psi_3(x, z, \eta') = -S_0(0, Y'(2\pi), \eta') + x\eta' + S_0(2\pi, Y'(2\pi), N(2\pi)) - zN(2\pi)$$

Il en va de même pour le symbole B.

b) Unitarité de $M^*(E)$.

On montre l'unitarité de $M^*(E)$ comme suit: par la première égalité (4.24)

$$\begin{aligned}M^*(E)M(E) &= L^*_{2\pi}(E)\frac{i}{h}[H,\chi]L_0(\cdot,E)L^*_0(E)\frac{i}{h}[H,\chi]L_{2\pi}(\cdot,E)\\ &= L^*_{2\pi}(E)\big(\int dE'\, L_0(\cdot,E')P_0(\cdot,E')L^*_0(E')\big)\frac{i}{h}[H,\chi]L_0(\cdot,E)L^*_0(E)\\ &\big(\int dE''\, L_{2\pi}(\cdot,E'')P_{2\pi}(\cdot,E'')L^*_{2\pi}(E'')\big)\frac{i}{h}[H,\chi]L_{2\pi}(\cdot,E)\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}M^*(E)M(E) = L^*_{2\pi}(E)\int dE'\, L_0(\cdot,E')P_0(\cdot,E')\big(L^*_0(E')\frac{i}{h}[H,\chi]L_0(\cdot,E)\big)L^*_0(E)\\ \int dE''\, L_{2\pi}(\cdot,E'')P_{2\pi}(\cdot,E'')\big(L^*_{2\pi}(E'')\frac{i}{h}[H,\chi]L_{2\pi}(\cdot,E)\big)\end{aligned}$$

En développant les noyaux par la phase stationnaire, on prend en compte (4.13) pour estimer les contributions de $L^*_0(E')\frac{i}{h}[H,\chi]L_0(\cdot,E)$ et $L^*_{2\pi}(E'')\frac{i}{h}[H,\chi]L_{2\pi}(\cdot,E)$ puis on utilise la deuxième égalite (4.24). Donc $M^*(E)M(E)=\mathrm{Id}$, et de façon similaire $M(E)M^*(E)=\mathrm{Id}$.

En fait $M^*(E)=e^{iR^w(x,hD_x;E,h)/h}$, où R est un h-PDO dans la forme normale de Birkhoff, formellement auto-adjoint pour E reel.

c) Le problème de Grushin.

Suivant [SjZw], on peut alors définir l'opérateur de Grushin $\mathcal{P}(E)$ et calculer son inverse $\mathcal{E}(E)$.

Rappelons que l'opérateur $R_+(t,E)=L(t,E)^*\frac{i}{h}[H,\chi_f(t)]$ est un inverse à gauche de $L(t,E)$, et $R_-(t,E)=\frac{i}{h}[H,\chi_b(t)]L(t,E)$, un inverse à droite de $L(t,E)^*$, où χ_b est égal à 1 sur le support de χ_f.

Toutes les constructions jusqu'a present dependent analytiquement de E, desormais on denote par z la variable d'energie. On appelle operateur de Grushin $\mathcal{P}(z)$ the operator defined by the linear system

$$\begin{pmatrix}\frac{i}{h}(P-z) & R_-(z)\\ R_+(z) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ u_-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\ v_+\end{pmatrix} \tag{5.20}$$

On sait [SjZw], [Chr2,Sect.6], [NoSjZw], [FaLoRo] que le problème (5.20) est bien pose, et $\mathcal{P}(z)^{-1}=\begin{pmatrix}E(z) & E_+(z)\\ E_-(z) & E_{-+}(z)\end{pmatrix}$, avec $(P-z)^{-1}=E(z)-E_+(z)E_{-+}(z)^{-1}E_-(z)$, et où $E_{-+}(z)=\mathrm{Id}-M^*(E)$ est le Hamiltonien effectif.

Il en résulte que les résonances de H dans W_h sont precisement les $z \in W_h$ tels que $E_{-+}(z)$ est non-inversible.

d) Action de $M^*(E)$ sur les polynômes homogènes.

On calcule à present $M^*(E)P$ où P est un polynôme homogène de la forme $P(y) = y^\alpha$.

6. La condition de quantification

a) Indice d'un arc symplectique

Suivant [GeLi], [CoZe], [Ral], [SaZe], on commence par faire quelques rappels sur l'indice d'un arc symplectique, tel qu'il apparait dans la condition de quantification en présence d'éléments elliptiques. L'indice de Maslov standard est associé à un lacet différentiable dans $\mathrm{Sp}(2n;\mathbf{R})$. Suivant ici [SaZe], on définit ici plutôt l'indice de Gelfand-Lidskii (ou Conley-Zehnder) d'un arc paramétré $\Psi:[0,T]\to\mathrm{Sp}(2d;\mathbf{R})$ de classe C^1 tel que

$$\Psi(0)=\mathrm{Id},\quad \det(\mathrm{Id}-\Psi(1))\neq 0 \tag{6.1}$$

Dans le cas présent on peut supposer $T=1$, période de γ_0 (ou $T=2\pi$). Soit $Z(s)$ la solution du système variationnel le long d'une orbite périodique γ_E, i.e. $\dot Z(s)=JH_0''(\Phi^s(\rho))Z(s)$, $Z(0)=\mathrm{Id}$, où l'on rappelle que $\Phi^s(\rho)$ désigne le flot Hamiltonien issu de $\rho\in\gamma_E$. On definit $\Psi(s)=d\mathcal{P}_E(s)$ comme la co-restriction de $Z(s)$ aux sections de Poincaré, i.e. $\Psi:[0,T]\to\mathrm{Sp}(2d;\mathbf{R})$. Alors l'indice de Conley-Zehnder s'interprète comme le degré topologique (ou nombre de rotation) des valeurs propres de premiére espece le long de γ_E, ou de façon equivalente, le nombre de coincidences, le long du chemin, de ces valeurs propres avec la valeur propre 1.

Nous exploitons la décomposition de $T^*\mathbf{R}^d$ en les variétés lagrangiennes sortante/ entrante, ainsi la forme normale de Birkhoff, pour simplifier encore l'argument de [SaZe].

Rappelons d'abord de [BaWe] la construction de la classe universelle de Maslov. On commence par la situation linéaire. L'espace de phase réel $T^*\mathbf{R}^d$, vu aussi comme un espace symplectique et euclidien, est muni de la structure complexe $\mathcal{J}(x,\xi)=(\xi,-x)$ donné par la matrice $J=\begin{pmatrix}0&\mathrm{Id}\\-\mathrm{Id}&0\end{pmatrix}$; on identifie $T^*\mathbf{R}^d$ avec $\mathbf{C}^d$ et la section nulle $\mathbf{R}^d_x\oplus 0$ au sous-espace totalement réel $\mathbf{R}^d_x$. Soit $\mathcal{L}(2d)$ la Grassmannienne Lagrangienne de $T^*\mathbf{R}^d$, on sait que $U(d)$ (groupe unitaire sur $\mathbf{C}^d$) préserve toutes ces structures et agit transitivement sur $\mathcal{L}(2d)$. On identifie $\mathcal{L}(2d)$ avec $U(d)/O(d)$, $O(d)$ (groupe orthogonal sur $\mathbf{R}^d$) etant le stabilisateur d'un espace lagrangien $\Lambda\in\mathcal{L}(2d)$ donné, $\Lambda\approx\mathbf{R}^d$, sous l'action de $U(d)$. De façon équivalente, si $\Lambda=\mathcal{U}_1(\mathbf{R}^d)=\mathcal{U}_2(\mathbf{R}^d)$ (via l'identification ci-dessus avec la section nulle,) $\mathcal{U}_j\in U(d)$, alors $\mathcal{U}_2=\mathcal{U}_1\mathcal{O}$, $\mathcal{O}\in O(d)$. Comme $\det^2\mathcal{O}=1$, $\det^2\mathcal{U}_1=\det^2\mathcal{U}_2$ dépend seulement de Λ. L'application $\det^2:U(d)\to\mathbf{S}^1$ induit une fibration $\mathcal{L}(2d)\to\mathbf{S}^1$, et donne lieu à l'isomorphisme entre les groupes fondamentaux $\pi_1(\mathcal{L}(2d))\approx\pi_1(\mathbf{S}^1)\approx\mathbf{Z}$. Passant aux classes d'homologie, on obtient un homomorphisme naturel : $H^1(\mathbf{S}^1;\mathbf{Z})\to H^1(\mathcal{L}(2d);\mathbf{Z})$. L'image m du générateur canonique de $H^1(\mathbf{S}^1;\mathbf{Z})$ par cette application s'appelle classe universelle de Maslov. De façon explicite, le long du chemin $\mathbf{S}^1\to\mathcal{L}(2d), t\mapsto\Lambda_t=\mathcal{U}_t(\mathbf{R}^d)$, $\mathcal{U}_t\in U(d)$, on a

$$dm(\Lambda_t)=dm_t=\frac{1}{4\pi}d(\arg\det\mathcal{U}_t^2) \tag{6.4}$$

Quittons à présent la situation linéaire: soit $\iota : \Lambda \to T^*\mathbf{R}^d$ une immersion lagrangienne ($\Lambda \subset T^*\mathbf{R}^d$), L_2 le fibré "vertical", i.e. dont la fibre au dessus de la projection x d'un point $\rho = (x,\xi) \in \Lambda$ est $\mathbf{R}^d_\xi$, et L le fibré lagrangien, i.e. dont la fibre au dessus de la projection x de $\rho \in \Lambda$ est $T_\rho\Lambda$. On définit alors la classe de Maslov $\alpha = m_{\Lambda,\iota}$ de (Λ,ι) comme $m_{\Lambda,\iota} = m(L, L_2) \in H^1(\Lambda;\mathbf{Z})$, "pull-back" de la classe universelle de Maslov m par l'application de Gauss $G : \Lambda \to \mathcal{L}(2d)$, $\rho \mapsto G(\rho) = \iota_* T_\rho\Lambda$.

On revient alors au calcul de l'indice de Cohnley-Zehnder de γ_E. Commençons par le cas modèle: pour se fixer les idées on considère le Hamiltonien sur $T^*\mathbf{R}^3$

$$H_{\mathrm{mod}} = -\tau + \mu_1 x_1\xi_1 + \frac{\omega_2}{2}(\xi_2^2 + x_2^2)$$

avec un élément ee $\mu_2 = i\omega_2$, et un élément hr μ_1. Notant H a la place de H_{mod}, le système variationnel est de la forme

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\delta(t,x)\\ \delta(\tau,\xi)\end{pmatrix} = JH''\big(x(s),\xi(s)\big)\begin{pmatrix}\delta(t,x)\\ \delta(\tau,\xi)\end{pmatrix} \tag{6.5}$$

avec $x(s) = X(x,\xi,s), \xi(s) = \Xi(x,\xi,s)$ solution des equations d'Hamilton

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(s)\\ \dot{\xi}(s)\end{pmatrix} = X_H(x(s),\xi(s)),\ x(0) = x, \xi(0) = \xi$$

soit ici

$$JH'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 & 0\\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice JH'' se diagonalise sous la forme $\mathrm{diag}(1, e^{\mu_1 s}, e^{i\omega_2 s}, 1, e^{-\mu_1 s}, e^{-i\omega_2 s})$, ce qui donne, par intégration, une base symplectique de $T^*\mathbf{R}^3$:

$$Z(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{\mu_1 s} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\omega_2 s & 0 & 0 & \sin\omega_2 s\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\mu_1 s} & 0\\ 0 & 0 & -\sin\omega_2 s & 0 & 0 & \cos\omega_2 s \end{pmatrix}$$

Se restreindre à la section de Poincaré revient à oublier les variables $\delta t, \delta\tau$, ou encore effacer les premières et quatriemes lignes et colonnes de $Z(s)$, d'où la base symplectique de $T^*\mathbf{R}^2$

$$\widetilde{Z}(s) = \begin{pmatrix} e^{\mu_1 s} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\omega_2 s & 0 & \sin\omega_2 s\\ 0 & 0 & e^{-\mu_1 s} & 0\\ 0 & -\sin\omega_2 s & 0 & \cos\omega_2 s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & B(s)\\ B(-s) & C(-s) \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

où $\binom{C(s)}{B(s)}$, $C(s), B(s)$ symétriques, est une base de l'espace Lagrangien

$$\Lambda_+(s) = \exp sX_H(\Gamma_+(0))$$

($\widetilde{Z}(s)$ n'est pas orthogonale). Pour $s = 1$ les valeurs propres de $\widetilde{Z}(s)$ sont celles de $d\mathcal{P}_0$ ("time-one map"), ce qui légitime la définition (6.1). La transformation de Fourier échangeant les variables x et ξ, $\binom{B(-s)}{C(-s)}$ est une base de l'espace Lagrangien $\Lambda_-(s) = \exp sX_H(\Gamma_-(0))$.

Pour un élément hc, $\mu = c + id$, on a dans une base réelle (cf. [CoZe,Sect.1.5])

$$C(s) = e^{cs}R(s), \quad B(s) = e^{-cs}R(s), \quad R(s) = \begin{pmatrix} \cos(ds) & \sin(ds) \\ -\sin(ds) & \cos(ds) \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

Dans le cas général on obtient $C(s)$ (resp. $B(s)$) comme une matrice diagonale par blocs, constituée de blocs $C_j(s)$ (resp. $B_j(s)$) du type ci-dessus.

Par analogie avec [DoRo] dans le cas d'une variété lagrangienne compacte Λ, on introduit la transformation de Cayley

$$\mathcal{U}(s) = (C(s) + iB(s))(C(s) - iB(s))^{-1} \tag{6.9}$$

qui paramétrise $\Lambda_+(s)$ au sens ci-dessus: c'est une transformation unitaire de $T^*\mathbf{R}^d$, sauf en un nombre fini de valeurs de $s \in [0, 1]$, verifiant $s\omega_k \in 2\pi\mathbf{Z}$ pour un indice k, correspondant aux "sauts" de $dm(\Lambda(s))$, donnee par (6.4), au passage des caustiques.

Les matrices ${}^tC(s)B(s)$, $B(s)C^{-1}(s)$ et $C(s)B^{-1}(s)$, lorsqu'elles sont bien définies, sont symé- triques. Remarquons qu'ici $B(s)$ restreint à $\Lambda_+(s)$ est toujours de rang $\leq d - 1$, donc $C(s)B^{-1}(s)$ n'est jamais définie, contrairement au cas des variétés lagrangiennes compactes.

• Calculons donc pour commencer la partie réguliere $d\widetilde{m}(s)$ de $dm(s)$, i.e. $\int dm(\Lambda(s))$ mod $\mathbf{Z}$.

Pour un bloc ee+hr comme en (6.6), avec

$$\widetilde{\mathcal{U}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\omega_2 s} \end{pmatrix}, \quad \det \widetilde{\mathcal{U}}(s)^2 = e^{4i\omega_2 s}$$

on trouve par integration $\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\widetilde{m}(\Lambda(s)) = 2\omega_2$.

Pour un bloc hc comme en (6.7), on a $C(s) + iB(s) = (e^{cs} + ie^{-cs})R(s)$ d'où

$$\widetilde{\mathcal{U}}(s) = \frac{e^{cs} + ie^{-cs}}{e^{-cs} - ie^{cs}} \mathrm{Id}, \quad \det \widetilde{\mathcal{U}}(s)^2 = 1$$

et $\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\widetilde{m}(\Lambda(s)) = 0$. Plus generalement on trouve

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\widetilde{m}(\Lambda(s)) = 2\sum_{k=1}^{\ell} \omega_k \tag{6.10}$$

où la somme ne fait intervenir que les éléments ee.

•. Tenons compte à present de la variation de l'indice au passage d'une caustique: pour étudier la partie singulière de $dm(s)$. La variation de dm_s au voisinage d'une caustique se calcule comme dans [Hö,Sect.3.3], [DoRo], mais de façon plus simple car il suffit seulement d'etudier la singularite de matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tan\omega s \end{pmatrix}$. Pour un bloc ee+hr comme en (6.6), on a $\mathcal{U}(s) = (I + iB(s)C^{-1}(s))(I - iB(s)C^{-1}(s))^{-1}$, matrice unitaire, avec $B(s)C^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tan\omega_2 s \end{pmatrix}$. La variation de la mesure au passage d'un pôle est égale à l'unité.

Plus généralement on considère la forme normale de Birkhoff H de partie linéaire H_0. Par un argument de déformation, on voit que l'indice des orbites périodiques γ_E de H est le même que pour le cas modèle.

Notons que le calcul de $M^*(E)f_k$ par la phase stationnaire donne deja g_ℓ mod 4.

Références

[AbMar] R.Abraham, J.Marsden. *Foundations of mechanics.* New-York: Benjamin/Cummings, 1978.

[A] M.-C.Arnaud. On the type of certain periodic orbits minimizing the Lagrangian action. Nonlinearity 11, p.143-150, 1998.

[Ar] V.Arnold. **1**. *Methodes mathematiques de la Mecanique classique. MIR, Moscou.* **2**. On a characteristic class entering in quantization conditions, Funct. Anal. Appl.p.1-13, 1967.

[ArKoNe] V.Arnold, V.Kozlov, A.Neishtadt. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics.* Encyclopaedia of Math. Sci., Dynamical Systems III, Springer, 2006.

[Au] M. Audin. **1**. The topology of torus action on symplectic manifolds, Progress in Math, Birkhuser, 1991. **2**. Les systmes hamiltoniens er leurs intégrabilit, Cours spécialisés 8, SMF, 2001.

[Ba] V.Babich Eigenfunctions concentrated near a closed geodesic [in Russian], Vol.9, Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI, Leningrad, 1968.

[BaLaz] V.M.Babich, V.Lazutkin. Eigenfunctions concentrated near a closed geodesic. Topics in Math. Phys., Vol.2, M.Birman, ed. Consultants' Bureau, New York, 1968, p.9-18

[BahBer] A.Bahri, H.Beresticki. Forced vibrations of superquadratic Hamiltonian systems.

[BatWe] S.Bates, A.Weinstein. Lectures on the geometry of quantization. Berkeley Math. Lect. Notes 88, American Math. Soc. 1997

[Bi] G.D.Birkhoff. *Dynamical Systems*, Vol.IX. AMS Colloquium Publ., New York, 1927.

[Bog] E.B.Bogomolny. Semi-classical quantization of multi-dimensional systems. IPNO/TH 91-17, 1991.

[Bol] S.Bolotin, Libration motions of natural dynamical systems. Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Prikl. Mat. Mekh. no. 6, p.7277, 1978.

[BdM] L.Boutet de Monvel. Symplectic cones and Toeplitz operators.

[BdMSj] L.Boutet de Monvel, J.Sjöstrand. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö. Asterisque 34-35, p.123-164, 1976.

[BrCoDu] P.Briet, J.M.Combes, P.Duclos. On the location of resonances for Schrödinger operators in the semi-classical limit. **1**. I. Resonance free domains, J.Math .Anal. Appl., 126, p.90-99, 1987. **2** II. Barrier top resonances. Comm. Part. Diff. Eq., 12, p.201-222, 1987.

[Br] A.D.Bryuno. **1**. The normal form of an Hamiltonian system. Russian Math. Surveys 43:1, p.25-66, 1988. **2**. Normalization of a Hamiltonian system near an invariant cycle or torus. Russian Math. Surveys 44:2, p.53-89, 1991.

[CaKeToBr] A. Cattaneo, B. Keller, C. Torosian, A.Bruguières, Déformation, Quantification, Théorie de Lie, Panoramas et synthèses 20, SMF, 2005.

[Cha] J. Chazarain. Spectre d'un Hamiltonien quantique et Mécanique classique. Comm. Part. Diff. Eq. No6, p.595-644, 1980.

[Chr] H.Christianson. **1**. Semiclassical non-concentration near hyperbolic orbits. J.Funct. Anal. 246, p.145-195, 2007. **2**. Quantum monodromy and non-concentration near a closed semi-hyperbolic orbit. Trans. Amer. Math. Soc. 363, No.7, p.33733438, 2011.

[CdV] Y.Colin de Verdière. **1**. Modes et quasi-modes sur les variétés riemanniennes. **2**. Méthodes semi-classiques et théorie spectrale. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ ycolver/ All-Articles/93b.pdf **3**. Spectrum of the Laplace operator and periodic geodesics: 30 years after. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 57, 7, p.2429-2463, 2007.

[CoZe] C.Conley, E.Zehnder. **1**. Morse-type Index Theory for Flows and Periodic Solutions for Hamiltonian Equations. Comm. Pure Appl. Maths, Vol. XXXVII, 207-253, 1984. **2**. A global fixed point theorem for symplectic maps and sub- harmonic solutions of Hamiltonian equations on tori, Proc. Symp. Pure Math. 45, p.283-299, 1986.

[DiSj] M.Dimassi, J.Sjöstrand. Spectral Asymptotics in the semi-classical limit. Cambridge Univ. Press, 1999.

[DoRo] S.Dobrokhotov, M.Rouleux. **1**. The semi-classical Maupertuis-Jacobi correspondence for quasi-periodic Hamiltonian flows with applications to linear water waves theory. Asympt. Analysis, Vol.74 (1-2), p.33-73, 2011. **2**. The semi-classical Jacobi-Maupertuis correspondence: stable and unstable spectra. Proceedings "Days of Diffraction 2012", Saint-Petersburg. IEEE 10.1109/ DD.2012.6402752, p.59-64.

[McDuSa] D. McDuff, D. Salamon, Introduction to symplectic topology, Oxford Mathematical Monograph, 1995.

[Du] J.J.Duistermaat. **1**. Oscillatory integrals, Lagrangian immersions and unfolding of singularities. Comm. Pure Appl. Math. 27, p.207-281, 1974. **2**. On the Morse index in variational calculus, Adv.in Math. 21, p.173-195., 1976.

[DuGu] J.J.Duistermaat, V.Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic geo-desics, Invent. Math,

[Ek] I.Ekeland.

[FaLoRo] H.Fadhlaoui, H.Louati, M.Rouleux. Hyperbolic Hamiltonian flows and the semi-classical Poincaré map. Proceedings "Days of Diffraction 2013", Saint-Petersburg, IEEE 10.1109/ DD.2013. 6712803, p.53-58.

[Fo] A.T Fomenko, Symplectic Geometry, Gordon and Breach Publishers, 1995.

[Ge] C.Gérard. Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour 2 obstacles strictement convexes. Mémoire Soc. Math. France, Sér.2 (31), p.1-146, 1988.

[GeSj] C.Gérard, J.Sjöstrand. **1**. Semiclassical resonances generated by a closed trajectory of hyperbolic type. Comm. Math. Phys. 108, p.391-421, 1987. **2**. Resonances en limite

semiclassique et exposants de Lyapunov. Comm. Math. Phys. 116, p.193-213, 1988.
[GelLi] I.M.Gelfand, V.M.Lidskii. On the structure of stability of linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients. Trans. A.M.S. (2), 8, 1958, pp. 143-181.
[Gr] S.Graff. On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems, J. Diff.Eqs, 15, p.1-69, 1974.
[Gu] V.Guillemin. **1**. Wave-trace invariants and a theorem of Zelditch. Int. Math. Research Not. No.12, p.303-308, 1993. **2**. Wave-trace invariants. Duke Math. J. 83 (1996), no. 2, 287352. **3**. Symplectic spinors and PDE's. CNRS. Aix en Provence,1974.
[GuPa] V.Guillemin, T.Paul, Some remarks about semiclassical trace invariants and quantum normal forms. Comm. Math. Phys. 294 (2010), no. 1, 119.
[GuWe] V.Guillemin, A.Weinstein. Eigenvalues associated with a closed geodesic. Bull. AMS 82, p.92-94, 1976.
[GusSi] S.J Gustafson, I.M Sigal, Mathematical Concepts of Quantum Mechanics, Springer, 2003
[Gut] M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Interdisciplinary Applied Mathematics 1, Springer Verlag (1990)
[HeSj] B.Helffer, J.Sjöstrand. Resonances en limite semi-classique. Mémoires S.M.F. 114(3), 1986.
[HeMa] B.Helffer, A.Martinez. Comparaison entre les diverses notions de resonances. Helv. Physica Acta, 60, p.992-1008, 1987.
[HeRo] B.Helffer, D.Robert. **1** Comportement semi-classique du spectre des Hamiltoniens quantiques elliptiques. Ann. Institut Fourier, Grenoble, t.31(3), p.169-223 (1981). **2**. Puits de potentiel generalisés et asymptotique semi-classique. Annales Inst. H.Poincaré (Physique Théorique), Vol.41, No 3, p.291-331 (1984)
[Hö] L.Hörmander. **1** Fourier Integral Operators I. Acta Math. 127, p.79-183, 1971. **2**. The Analysis of Partial Differential Operators I,III, Springer, 1983.
[IaSj] A.Iantchenko, J.Sjöstrand. Birkhoff normal forms for Fourier integral operators II. American J. of Math., 124(4), p.817-850, 2002.
[IfaRo] A.Ifa, M.Rouleux. Regular Bohr-Sommerfeld quantization rules for a h-pseudo-differential operator: the method of positive commutators. Int. Conference Euro-Maghreb Laboratory of Math. and their Interfaces. LEM21-2016, Hammamet (Tunisie). ARIMA.
[I] M.Ikawa. On the existence of poles of the scattering matrix for several convex bodies. Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sc., 64, p.91-93, 1988.
[Iv] V.Ivrii. **1**. Wave front sets of solutions of some hyperbolic pseudo-differential equations (en Russe). Trudi. Msk., 39-83-112 (1979) et 39-49-82 (1979). **2**. Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[KaKe] N.Kaidi, Ph.Kerdelhue. Forme normale de Birkhoff et résonances. Asympt. Analysis 23, p.1-21, 2000.

[KaRo] N. Kaidi, M.Rouleux. Quasi-invariant tori and semi-excited states for Schrödinger operators I. Asymptotics. Comm. in Part. Diff. Equations 27(9 and 10), p.1695-1750, 2002.

[K] T. Kato, Pertubation theory for linears operators, Springer, 1980 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 142).

[LasSj] B.Lascar, J.Sjöstrand. Equation de Schrodinger et propagation des singularités pour des OPD à caractéristiques de multiplicité variable, I (Astérisque No.95, 1982), and II (Comm. PDE's, 1985).

[Leb] G.Lebeau. Notes d'un Cours à Orsay, 1988.

[Lev-Br] P. Levy-Bruhl, Introduction à la théorie spectrale, Dunod, 2003

[Lo] Yiming Long. *Index theory for symplectic paths with applications.* Progress in Maths. Springer Basel AG. 2001

[LeOffBuKo] M.Lewis, D.Offin, P.-L.Buono, M.Kovacic. Instability of the periodic hip-hop orbit in the $2N$-body problem with equal masses. Disc. Cont. Dyn. Syst. Vol.33(3), p. 1137-1155, 2013.

[Ma] A.Martinez, An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis, Springer, 2001.

[MeSj] A.Melin, J.Sjöstrand. **1**. Fourier Integral Operators with complex valued phase functions, *in* Springer Lect. Notes in Math., No.459, p.120-223, 1974. **2**. Determinants of pseudodifferential operators and complex deformations of phase space. 2001. **3**. Bohr-Sommerfeld quantization condition for non-self-adjoint operators in dimension 2. Astérisque 284, p.181-244, 2003.

[MoZh] J.Moser, E.Zehnder. Notes on Dynamical systems. American Math. Soc., Courant Inst. Math. Sci. Vol.12, 2005.

[NoSjZw] S.Nonnenmacher, J.Sjöstrand, M.Zworski. From Open Quantum Systems to Open Quantum maps. Comm. Math. Phys. 304, p.1-48, 2011

[Rab] P.Rabinowitz. On subharmonic solutions of Hamiltonian systems, Commun. Pure Appl. Math. 33, 1980, pp. 609-633.

[Ra] J.V.Ralston. On the construction of quasi-modes associated with periodic orbits. Comm. Math. Phys. 51(3) p.219-242, 1976.

[ReSi] M.Reed, B.Simon. Methods of modern mathematical physics IV, Academic Press, 1975.

[RiWi] K.Richtert, D.Wintgent. Analysis of classical motion on the Wannier ridge. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 23, L197-L201, 1990.

[Rob] D. Robert, Autour de lapproximation semi-classique, volume 68 of Progress in Mathematics, Birkhuser, 1987

[Ro] M.Rouleux. **1**. Resonances for semi-classical Schrödinger operators of Gevrey type. Hokkaido Math. J., Vol.30 p.475-517, 2001. **2**. Semiclassical integrability, hyperbolic flows, and the Birkhoff normal form. Canadian J. of Math. Vol.56 (5), p.1034-1067, 2004.

[SaZe] D.Salamon, E.Zehnder. Morse Theory for Periodic Solutions of Hamiltonian Systems and the Maslov Index. Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. XLV, p.1303-1360, 1992.

[Sj] J.Sjöstrand. **1**. Singularites analytiques microlocales. Astérisque No 95, 1982. **2**. Semi-classical resonances generated by a non-degenerate critical point, *in* Lect.Notes in Math. Vol.1256, Springer, p.402-429, 1986. **3**. Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems. Duke Math. J. Vol.60, No.1, p.1-57, 1990. **4**. Resonances associated to a closed hyperbolic trajectory in dimension 2. Asympt. Analysis 36, p.93-113, 2003. **5**. Analytic wave front sets and operators with multiple characteristics. Hokkaido Math. J., Vol.12, p.392-433,1983.

[SjZw] J. Sjöstrand and M. Zworski. Quantum monodromy and semi-classical trace formulae, J. Math. Pure Appl. 81(2002), 1-33. Erratum: http://math.berkeley.edu/ zworski/qmr.pdf

[So] J.-M. Souriau. Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications, *in*: Group theoretical methods in Physics, Nijmegen. Lect. Notes in Physics 50, Springer, 1976.

[Tip] A.Tip. Atoms in circularly polarized fields: the dilation-analytic approach. J.Phys. A Math. Gen. Phys. 16, p.3237-3259 (1983)

[Vo] A.Voros. **1**. Semi-classical approximations. Ann. Inst. H.Poincaré, 24, p.31-90, 1976. **2**. Unstable periodic orbits and semiclassical quantization. J.Phys. A(21), p.685-692, 1988.

[We] A.Weinstein. **1**. Lagrangian submanifolds and Hamiltonian system. Annals of Maths, P.377-410, 1972. **2**. Asymptotics of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential. Duke Math.J. 44, p.883-892, 1977.

[Zi] W.Ziller. Geometry of the Katok examples. Ergod. Theor. Dyn. Sys. 3, p.135-157, 1982.

Appendice

Dans cet Appendice, on présente un rapide survol de l'analyse semi-classique. Cette théorie mathématique est un carrefour entre la géométrie et la théorie spectrale.

Pour plus de détails sur la géométrie symplectiques voir par exemple [Au], [Fo], [McDuSa]. Pour les généralités sur le formalisme mathématique de la Mécanique Quantique on peut se reporter à [GusSi]. Pour la partie théorie spectrale, voir par exemple [Lev-Br], [Ka], [ReSi]. En ce qui concerne la quantification voir par exemple [CaKeToBr]. Enfin, pour l'analyse semi-classique voir [BaWe], [Rob], [Iv], [Ma], [CdV].

1. Géométrie symplectique et mécanique Hamiltonienne.

Géométrie symplectique est le nom moderne de ce qu'on appelait formalisme hamiltonien de la Mécanique classique.

Si on s'intéresse aux trajectoires d'une particule de masse m dans un champ de force $F = -\operatorname{grad} V$, dans $\mathbf{R}^n$ qui dérive du potentiel V, on a les équations de Newton:

$$m\frac{d^2x_j}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$$

Introduisant les impulsions $\xi_j = m\frac{dx_j}{dt}$ et l'énergie $H = \frac{\xi^2}{2m} + V(x)$ on peut réécrire ce système de n équations différentielles du second ordre comme un système de $2n$ équations du premier ordre

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{dH}{\partial \xi},\ \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$$

Ces équations ressemblent à celles d'un champ de gradient sur $\mathbf{R}^{2n}$, il s'agit bien d'un gradient, mais par rapport à la forme antisymétrique $\sigma = \sum d\xi_j \wedge dxj$; si X est le champ de vecteurs considéré sur $\mathbf{R}^{2n}$, on a:

$$\iota(X)\sigma = -dH$$

On en déduit immédiatement la conservation de l'énergie et de σ (Théorème de Liouville). De plus, la dynamique est entièrement déterminée par la donnée du triplet $(\mathbf{R}^{2n}, \sigma, H)$. Le couple $(\mathbf{R}^{2n}, \sigma)$ s'appelle espace des phases. L'intérêt est d'avoir géométrisé les équations du mouvement et de pouvoir faire des changements de coordonnées comme on peut en faire en géométrie riemannienne.

Un autre intérêt de ce formalisme est qu'il donne un acccès à la Mécanique Quantique: on verra comment fabriquer l'équation de Schrödinger $\widehat{H}$ correspondant à H. Grosso-modo, $\widehat{H}$ est l'opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ obtenu en remplaçant, dans $H(x, \xi)$, x_j par l'opérateur de multiplication par x_j et ξ_j par $\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. La non commutation de ces 2 opérateurs pose quelques problèmes que l'on traitera plus bas (choix de la quantification) en abandonnant l'idée qu'à une Mécanique classique correspond une unique Mécanique quantique; c'est plutôt le contraire, la Mécanique classique est déterminée comme limite quand $h \to 0$ de la Mécanique quantique (limite appelée semi-classique).

a) Les variétés symplectiques.

A la différence de la Géométrie riemannienne dont le premier objet est la mesure des longueur, courbure, torsion, etc…d'un arc parametre, la Géométrie symplectique est une géométrie de mesure des surfaces.

Définition A1.1: Une structure symplectique sur une variété différentiable P est la donnée d'une forme différentielle antisymétrique σ, de degré 2, non dégénérée et fermée. On dit alors que (P, σ) est une variété symplectique.

En chaque point $x \in P$, $\sigma(x)$ est donc une forme bilinéaire qui, à tout couple (u, v) de vecteurs tangents en x à M fait correspondre un nombre réel $\sigma(x)(u, v)$, qui pour x fixé, dépend linéairement de chacune des variables u et v.

L'antisymétrie de σ signifie que $\sigma(x)(v, u) = -\sigma(x)(u, v)$.

La non dégénérescence de σ signifie que pour tout $x \in M$ et tout vecteur u non nul tangent en x à M, il existe un autre vecteur v tangent en x à M tel que $\sigma(x)(u, v) \neq 0$.

Dire que σ est fermée signifie que sa différentielle extérieure $d\sigma$ est identiquement nulle.

Une variété symplectique (P, σ) est naturellement munie d'une forme volume $\tau = \frac{1}{n!}\sigma^n$, où $\sigma^n = \sigma \wedge \sigma \wedge \cdots \wedge \sigma$, on a donc à disposition une orientation et une mesure de Lebesgue sur la variété P.

La dimension de P est nécessairement paire.

Donnons quelques exemples standards de variétés symplectiques :

Exemples:

1) L'espace $P = \mathbf{R}^{2n}$: en notant par $(x_1, x_2, ...x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ les coordonnées sur $\mathbf{R}^{2n}$, la 2-forme $\sigma_0 = \sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx_i$ munit P d'une structure symplectique. Si en particulier $n = 1$, σ_0 est un déterminant 2×2, c'est alors une mesure d'aire algébrique sur le plan.

2) Si M est une variété différentiable, on munit $P = T^*M$ (espace cotangent) d'une structure symplectique définie par la différentielle extérieure $\sigma = d\alpha$ de la 1-forme de Liouville α.

3) La sphère $\mathbf{S}^2$ est munie d'une structure symplectique: plongeant de $\mathbf{S}^2$ dans $\mathbf{S}^2$, il suffit de prendre $\sigma(x)(u, v) = \det(x, u, v)$. On a aussi $\sigma(x) = \sqrt{|g(x)|}dq \wedge dp$ où $|g(x)| = \det(g_{i,j})$ dans la carte de coordonnées locales (p, q). Ceci se généralise à une surface.

Si $u = (x, \xi)$ et $v = (y, \eta)$ sont des vecteurs sur $\mathbf{R}^{2n}$ on définit leur produit symplectique par

$$\sigma(u, v) = \langle \xi, y \rangle - \langle x, \eta \rangle$$

Soit $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbf{R})$, on a alors

$$\sigma(u, v) = \langle u, Jv \rangle$$

Remarque: Il est bon de noter que la géométrie symplectique ne donne que des notions d'aire, il n'y a pas de notions de longueurs, encore moins de notions d'angles, en effet, tout vecteur est orthogonal à lui même!

b) Premiers résultats et applications.

Rappelons d'abord une notion importante : celle de symplectomorphisme, ou *application canonique.*

Définition A1.2: Soient (M_1, σ_1) et (M_2, σ_2) deux variétés symplectique de même dimension, un symplectomorphisme de M_1 sur M_2 est un difféomorphisme $\kappa : M_1 \to M_2$ tels que :

$$\kappa^* \sigma_2 = \sigma_1$$

Un symplectomorphisme est donc un difféomorphisme qui préserve la forme symplectique σ.

Ici le "pull-back" κ^* de la forme symplectique σ est défini par

$$\kappa^* \sigma(u, v) := \sigma(\kappa_*(u), \kappa_*(v))$$

oú κ_* désigne le "push-forward" des vecteurs:

$$(\kappa_* u)_{\kappa(x)} = \kappa'(x) \cdot u \in T_{\kappa(x)} M_2, \;\; u \in T_x M_1$$

Au moins localement, on peut construire une transformation symplectique à partir d'une fonction génératrice réelle :

Théorème A1.3: Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}; (x, y) \to \varphi(x, y)$ une fonction régulière telle que

$$\det(\partial^2_{xy} \varphi(x_0, y_0)) \neq 0$$

On définit $\xi = \partial_x \varphi, \;\; \eta = -\partial_y \varphi$. Alors l'application $\kappa(x, \xi) = (y, \eta)$ est un symplectomorphisme près du point (x_0, ξ_0).

Preuve : Le théorème des fonctions implicites affirme que (y, η) est une fonction régulière de (x, ξ) près de $(x_0, \partial_x \varphi(x_0, y_0))$. On a

$$\begin{aligned} d\eta \wedge dy &= d(-\partial_y \varphi) \wedge dy \\ &= (-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy) \wedge dy \\ &= -(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}) dx \wedge dy \end{aligned}$$

et ceci grâce au fait que la matrice $(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y})_{n \times n}$ est symétrique. D'autre part

$$\begin{aligned} d\xi \wedge dx &= d(-\partial_x \varphi) \wedge dx \\ &= (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} dy) \wedge dx \\ &= (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}) dy \wedge dx \end{aligned}$$

Comme φ est C^∞ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, le théorème de Schwarz permet de conclure. ♣

Sur les variétés symplectiques, le premier résultat gèométrique majeur est le théorme de Darboux qui donne la "géométrie" locale des ces variétés.

Théorème A1.4 (Darboux): Toute variété symplectique (P, σ) de dimension $2n$ est localement symplectomorphe à $(\mathbf{R}^{2n}, \sigma_0)$.

Ceci signifie que pour tout point $\rho_0 \in P$, il existe un ouvert U de P contenant ρ_0 et il existe un systme $(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ de coordonnées locales tels que sur l'ouvert U on ait l'expression :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx_j$$

Le théorème de Darboux établit une différence majeure entre les géométries riemannienne et symplectique, en effet : dans le premier cas, il y a un invariant local: la courbure, alors que dans le second cas (P, σ) est localement isomorphe à $(\mathbf{R}^{2n}, \sigma_0)$.

c) Flot hamiltonien.

Comme la 2-forme σ est non-dégénérée, pour tout point ρ_0 de P, on peut avec la 2-forme σ, identifier les deux espaces vectoriels $T^*_{\rho_0}P$ et $T_{\rho_0}P$. Ainsi pour $H \in C^\infty(P)$ par dualité il existe un unique vecteur $X_H(\rho_0) \in T_{\rho_0}M$ tel que pour tout $v \in T_{\rho_0}M$ on ait :

$$\sigma(\rho_0)(X_H(\rho_0), v) = -dH(\rho_0).v$$

Ensuite, pris fibre par fibre, nous avons l'existence et l'unicité d'un champ de vecteur $X_H \in \Gamma(P)$ tel que pour tout champ de vecteur $v \in \Gamma(P)$ on ait $\sigma(X_H, v) = -dH.v$, c'est-à-dire :

$$\iota_{X_H}(\sigma) = -df$$

En coordonnées locales de Darboux on a alors l'écriture:

$$X_H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

On note alors par Φ_t le flot associé au champ de vecteur X_H par: $\Phi_t : \rho \to \Phi_t(\rho)$. Ce flot est donné comme étant la trajectoire associé au champ de vecteurs X_H passant par ρ, c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(\rho) = X_H(\Phi_t(\rho)),\ \Phi_0(\rho) = \rho$$

où $\frac{d}{dt}(\Phi_t(\rho)) \in T_{\Phi_t(\rho)}M$.

En coordonnés de Darboux on a l'expression familière des équations de Hamilton :

$$\dot{\xi_j} = -\frac{\partial f}{\partial x_j},\ \dot{x_j} = \frac{\partial f}{\partial \xi_j}$$

Revenons maintenant à un fait important, qui justifie que la 2-forme doit être fermée : la forme σ (ainsi que la forme volume associée) est conservée par le flot hamiltonien $(\Phi_t)^*\sigma = \sigma$. Pour le voir il suffit d'écrire la définition de la dérivée de Lie : $\mathcal{L}_{X_H}(\sigma) = \frac{d}{dt}(\Phi_t)^*$ et d'utiliser la formule de Cartan pour voir que $\mathcal{L}_{X_H}(\sigma) = 0$.

d) Crochet de Poisson.

A partir du champ X on peut munir $C^\infty(P)$ d'une structure d'algèbre de Lie, savoir une application à valeurs dans $C^\infty(P)$, bilinéaire, alternée et vérifiant l'identité de Jacobi. Pour toutes fonctions $f, g \in C^\infty(P)$ on définit le crochet de Poisson :

$$C^\infty(P) \times C^\infty(P) \to C^\infty(P), \quad (f,g) \mapsto \{f,g\} = \omega(X_f, X_g)$$

En fait l'application : $X : C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\} \mapsto \Gamma(P), [\cdot,\cdot]$ est un homéomorphisme d'algèbre de Lie. En coordonnées de Darboux, le crochet de Poisson de deux fonctions f et g s'écrit simplement :

$$\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}$$

Soient f et g deux fonctions de $C^\infty(P)$, notons par Φ_t le flot hamiltonien associé à f, alors pour tout point $\rho \in P$ on a:

$$\frac{d}{dt}(g \circ \Phi_t(\rho)) = \{g,f\} \circ \Phi_t(\rho).$$

Ainsi la fonction g est constante le long des trajectoires du flot hamiltonien associé à f , si et seulement si $\{g,f\} = 0$

e) Sous-variété Lagrangienne.

Cette partie fournit quelques autres interprétations géométriques des fonctions génératrices.

Définition A1.5: Supposons $P = T^*M$. Une sous-variété $\Lambda \subset T^*M$ est dite variété lagrangienne si on a $\sigma_\Lambda = d\alpha_\Lambda = 0$ et $\dim \Lambda = \dim M$.

Ainsi, nous pouvons trouver localement une fonction lisse φ avec $\alpha = d\varphi$. En pratique, on obtient des sous-variétés lagrangiennes à partir de fonctions génératrices, comme dans le Théorème A.3 de la façon suivante.

Définition A1.6: (Fonction de phase non dégénérée) Soit $N \in \mathbf{N}$, on dit que $\varphi(x,\theta) \in C^\infty(M \times \mathbf{R}^N)$ est une fonction de phase non dégénérée si (1) $d_{(x,\theta)}\varphi \neq 0$, et (2) si $d_\theta\varphi(x,\theta) = 0$, alors en ce point les différentielles $d\partial_{\theta_1}\varphi, d\partial_{\theta_2}\varphi, \cdots, d\partial_{\theta_N}\varphi$ sont indépendantes.

L'ensemble critique $C_S = \{(x,\theta) : \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0\}$ est une sous-variété de dim n de $M \times \mathbf{R}^N$. On introduit $j_S : C_S \to T^*M$, définie par $j_S(x,\theta) = (x, \partial_x S)$. Alors j_S est une immersion de C_S dans T^*M dont l'image est une variété lagrangienne Λ_S de T^*M. De plus, $j_S^*(\xi\, dx) = dS|_{C_S}$.

On n'a besoin (au maximum) que de n variables θ pour paramétrer une sous-variété lagrangienne. Le résultat suivant montre aussi qu'elle admet toujours une fonction génératrice d'un type particulier (représentation de Fourier partielle) :

Théorème A1.7: On suppose que $\Lambda \subset \mathbf{R}^{2n}$ est une sous-variété lagrangienne régulière et que $(x_0, \xi_0) \in \Lambda$. Alors, il existe un voisinage $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ de (x_0, ξ_0), une division des coordonnées $x = (x', x''), \xi = (\xi', \xi'')$, où $x', \xi' \in \mathbf{R}^k$ et $x'', \xi'' \in \mathbf{R}^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ et une fonction régu- lière $\varphi = \varphi(x', \xi'')$ telle que

$$\Lambda \cap U = \left\{(x', -\partial_{\xi''}\varphi, \partial_{x'}\varphi, \xi'') \mid x' \in \mathbf{R}^k, \;\; \xi'' \in \mathbf{R}^{n-k}\right\}$$

$\varphi = \varphi(x', \xi'')$ s'appelle fonction génératrice locale près du point (x_0, ξ_0).

2. Calcul pseudo-différentiel semi-classique.

On va rappeler brièvement une des définitions des opérateurs pseudo-différentiels (celle de la quantification de Weyl) sur $T^*\mathbf{R}^n$ et en donner les principales propriétés.

a) Symboles et quantification de Weyl.

De manière formelle, la quantification de Weyl consiste à associer à un "symbole" $a \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ un opérateur linéaire $\mathrm{Op}^w(a)$ de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même, tel que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$:

$$(\mathrm{Op}^w(a)(u)(x) = (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle} a(\frac{x+y}{2}, \xi; h) u(y) dy d\xi$$

a est appelé symbole de Weyl de A, ou encore A le quantifié de Weyl de a.

Une des premières difficulté dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels (OPD) est de donner un sens à ce type de formule. Bien sûr pour des symboles $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ c'est plutôt facile à dèfinir, mais on voudrait aussi se servir de symboles polynomiaux en x et ξ. Soit $m \geq 1$ est une fonction d'ordre, par exemple $m(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^\alpha$, on suppose $a(x,\xi;h) \in S^0(m)$, avec

$$S^N(m) = \{a \in C^\infty(T^*\mathbf{R}^n) : \forall \alpha \in \mathbf{N}^{2n}, \exists C_\alpha > 0, |\partial^\alpha_{(y,\eta)} H(y,\eta;h)| \leq C_\alpha h^N m(y,\eta)\}$$

(une fonction d'ordre vérifie $m \in S^0(m)$). L'ensemble de ces operateurs sera parfois note $\Psi^N(\mathbf{R}^n)$. Par des intégrations par parties (technique des intégrales oscillantes), on montre:

Théorème A2.1: Soit $a \in S^N(m)$, alors $\mathrm{Op}^w(a)$ est un opérateur linéaire de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans lui même.

En analyse semi-classique, on est aussi amené à considérer des symboles ayant des développements asymptotiques en puissance de h de la forme:

$$a(y,\eta;h) \sim a_0(y,\eta) + h a_1(y,\eta) + \cdots, h \to 0$$

Donnons un exemple très important du calcul de Weyl, la quantification des variables canoniques:

Exemple: Le quantifié de Weyl de la fonction $(x,\xi) \mapsto 1$ est l'opérateur identité. Le quantifié de Weyl de la fonction $(x,\xi) \mapsto x_j$ est l'opérateur de multiplication par la variable x_j. Le quantifié de Weyl de la fonction $(x,\xi) \to \xi_j$ est l'opérateur de dérivation $hD_{x_j} = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial_{x_j}}$.

b) Quelques propriétés.

Si on fait le produit de deux OPD de symboles a et b, alors l'opérateur produit est encore un OPD:

Thórème A2.2: Quels que soient les symboles $(a,b) \in S^0(\langle\xi\rangle^m) \times S^0(\langle\xi\rangle^{m'})$, il existe un symbole $c \in S^0(\langle\xi\rangle^{m+m'})$ tels que

$$\mathrm{Op}^w(a) \circ \mathrm{Op}^w(b) = \mathrm{Op}^w(c)$$

De plus un choix possible pour le symbole c est donné par la formule de Moyal:

$$c = a \star b := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^j}{j!(2i)^j} a \left(\sum_{p=1}^{n} \overleftarrow{\partial_{\xi_p}} \overrightarrow{\partial_{x_p}} - \overleftarrow{\partial_{x_p}} \overrightarrow{\partial_{\xi_p}} \right)^j b$$

où la flèche indique sur quelle fonctions, a ou b la dérivée doit opérer.

Citons maintenant un théorème de continuité L^2:

Théorème A2.3: (Calderòn-Vaillancourt): Si le symbole $a \in S^N(1)$, $N \geq 1$, alors l'opérateur $\mathrm{Op}^w(a)$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$\exists\, c, d > 0, \ \ || \, Op^w(a) \, || \leq c \sum_{|\alpha| \leq d} || \, \partial^\alpha a \, ||_{L^\infty(\mathbf{R}^{2n})}$$

Une des principales applications de ce théorème de continuité est l'inversion des opérateurs pseudo-différentiels : on dit que le symbole $a \in S(M, \langle\xi\rangle^m)$ elliptique en $(x_0, \xi_0) \in T^*M$ si $a(x_0, \xi_0) \neq 0$.

Théorème A2.4: Soit $m \in \mathbf{R}$ et $a \in S(M, \langle\xi\rangle^m)$ elliptique sur T^*M, alors il existe un symbole $b \in S(M, \langle\xi\rangle^{-m})$ tels que:

$$\mathrm{Op}^w(a) \circ \mathrm{Op}^w(b) = \mathrm{Id} + R_1 \ \text{ et } \ \mathrm{Op}^w(b) \circ \mathrm{Op}^w(a) = \mathrm{Id} + R_2$$

où R_1, R_2 sont des operateurs lineaire continus de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ et vérifiant $\|R_1\|$, $\|R_2\| = \mathcal{O}(h^\infty)$.

3. Microlocalisation et front d'onde.

Toute théorie pseudo-différentielle va de pair avec une notion de microlocalisation, c'est-à-dire de localisation dans l'espace des phases $P = T^*M$.

b) Front d'onde semi-classique.

Considérons une famille (u_h) de distributions sur $\mathbf{R}^n$.

Définition A3.1: la famille (u_h) est *h-admissible* si, pour tout compact $K \subset \mathbf{R}^n$, il existe s et N tels que:

$$\|u_h\|_{H^s(K)} = \mathcal{O}(h^{-N})$$

où H^s désigne l'espace de Sobolev.

La famille h-admissible (u_h) est dite *négligeable* dans le compact K si chaque u_h est C^∞ et si et pour tous $N, k \in \mathbf{N}$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tels que $\|u_h\|_{C^k(K)} \leq Ch^N$ pour $0 < h \leq h_0$. On notera $u_h = \mathcal{O}(h^\infty)$ sur K.

Une distribution est donc négligeable si elle est régulière et petite par rapport à h, ainsi que toutes ses dérivées.

Définition A3.2: (Front d'onde semi-classique) Soit $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbf{R}^n$, on dira que $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_h(u_h)$, s'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ non nulle en x_0, et un voisinage compact V de ξ_0 tels que $\mathcal{F}_h(\varphi\, u_h)(\xi) = \mathcal{O}(h^\infty)$ uniformément sur V.

Le front d'onde semi-classique est défini même pour $\xi_0 = 0$ (sur la section nulle), contrairement au front d'onde C^∞, noté WF, qui ne prend en compte que la régularité des distributions.

Examples:

1) "Fonction WKB": $u_h(x) = a(x)\, e^{i\varphi(x)/h}$ avec $a, \varphi \in C^\infty$, φ à valeurs réelles. On a $\mathrm{WF}_h(u_h) = \Lambda = \big\{(x, \varphi'(x) : x \in \mathrm{supp}(a)\big\}$.

2) $u(x) = Y(x)$ (fonction d'Heaviside indépendante de h), alors

$$\mathrm{WF}_h(u) = (\{0\} \times \mathbf{R}) \cup ([0, +\infty[\times \{0\})$$

tandis que $\mathrm{WF}(u) = \{0\} \times (\mathbf{R} \setminus 0)$.

Proposition A3.3: Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert, une famille h-admissible (u_h) est négligeable dans U ssi $\pi_x(\mathrm{WF}(u_h)) \cap U = \emptyset$, où π_x désigne la projection sur $\mathbf{R}^n_x$.

b) Distributions lagrangiennes.

Définition A3.4: On appelle distribution lagrangienne ou "intégrale oscillante" toute intégrale de la forme:

$$u_h(x) = I(\varphi, a)(x) := \int_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{i}{h}\,\varphi(x,\theta)}\, a_h(x,\theta)\, d\theta$$

où φ est une fonction de phase non dégénérée au sens de la Definition A1.6, et a_h est un symbole à support compact en θ (localement en x), classique en h, i.e:

$$a_h(x,\theta) \sim a_0(x,\theta) + h\, a_1(x,\theta) + \cdots$$

On voit facilement que $\mathrm{WF}_h(u_h) \subset \Lambda_\varphi = \{(x, \partial_x\varphi(x,\theta)) : \partial_\theta\varphi(x,\theta) = 0\}$ (variete lagrangienne). Par exemple, la "fonction WKB" $u_h(x) = a(x)\, e^{i\varphi(x)/h}$ est une distribution lagrangienne, et $\mathrm{WF}_h(u_h) = \Lambda_\varphi$ si $a(x) \neq 0$.

Soit $\Lambda = \Lambda_\varphi$, on note aussi $O^m(M, \Lambda_\varphi)$ l'espace des fonctions (oscillantes) de la forme

$$u_h(x) = e^{i\alpha(h)} \frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{(2\pi h)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\varphi(x,\theta)/h} a_h(x,h) |d\theta|,$$

où $a \in S^m(M \times \mathbf{R}^n)$ est supposé à support compact en θ et $\alpha(h)$ est un réel dépendant de h.

c) Front d'onde semi-classique et OPD.

Une des propriétés importantes lié au front d'onde semi-classique est la suivante: si A est un OPD de symbole $a \in S^0(m)$, et u_h une famille h-admissible, alors

$$\mathrm{WF}_h\, Au_h \subset \mathrm{WF}_h\, u_h \subset \mathrm{WF}_h\, Au_h \cup a_0^{-1}(0)$$

Soit A un h-OPD et (u_h) une famille h-admissible de distributions. On dit que u_h est solution microlocale de $Au_h = 0$ sur U ssi $\pi_x(WF(Au_h)) \cap U = \emptyset$. On notera $Au_h \sim_U 0$. En particulier,

$$Au_h = \mathcal{O}(h^\infty) \Longrightarrow \mathrm{WF}_h(u_h) \subset a_0^{-1}(0)$$

Ainsi, une fonction propre d'un opérateur de Schrödinger d'énergie E est localisée dans la limite semi-classique sur la couche d'énergie $a_0^{-1}(E) = \{a_0(x,\xi) = E\}$, où a_0 est le symbole principal du hamiltonien.

4. Opérateurs intégraux de Fourier et Théorème d'Egorov.

L'idée de Maslov-Hörmander est d'utiliser le principe de Huyghens et de représenter les fonctions associées à une variété lagrangienne comme superpositions continues de fonctions oscillantes simples.

a) Opérateurs intégraux de Fourier (OIF).

Soient X et Y des ouverts de $\mathbf{R}^n$ et χ un difféomorphisme canonique de T^*X dans T^*Y.

On va associer à χ une classe d'opérateurs de $C_0^\infty(X)$ dans $C^\infty(Y)$ qui, lorsque $\chi = \mathrm{Id}$, $M = N$, coïncide avec $\Psi^m(X)$. L'ensemble $\Gamma'_\chi = \{(x,\xi;y,-\eta) \mid (x,\xi) = \chi(y,\eta)\}$ est une sous-variété lagrangienne de $T^*(X \times Y)$.

Définition A4.1: Un OIF (Hörmander) ou transformation canonique quantifiée (Maslov) d'ordre m est un opérateur linéaire de $C_0^\infty(X)$ dans $\mathcal{D}'(Y)$ dont le noyau de Schwartz est dans $O^m(X \times Y, \Gamma'_\chi)$ (intégrales oscillantes comme dans A2.5). On note $\Psi^m(X,Y;\chi)$ l'ensemble de ces opérateurs.

L'opérateur A est dit elliptique en $(y_0,\eta_0) \in T^*Y$ si son symbole principal ne s'y annule pas. Lorsque $\chi = \mathrm{Id}$, on peut prendre $\varphi = (x-y|\xi)$ et on a $\Psi^m(X,X;\mathrm{Id}) = \Psi^m(X)$. On a de plus le théorème de composition suivant:

Théorème A4.2: Si $A_h \in \Psi^m(X,Y;\chi), B_h \in \Psi^\ell(Y,Z;\chi_1)$, alors

$$A_h \circ B_h \in \Psi^{m+\ell}(X,Z;\chi\circ\chi_1)$$

Plus précisément $\varphi(x,y,\theta)+\varphi_1(y,z,\theta_1)$ est une fonction génératrice pour $\chi_1\circ\chi$ et le symbole principal s'obtient par produit.

La preuve est immédiate, une fois vérifié que $\varphi(x,y,\theta) + \varphi_1(y,z,\theta_1)$, vue comme une fonction des variables oscillantes (θ,y,θ_1) est une fonction génératrice non dégénérée de $\chi_1\circ\chi$.

b) Enoncé du théorème d'Egorov.

Un OIF $U \in \Psi^0(M,N;\chi)$ elliptique en (y_0,η_0) est microlocalement inversible près de ce point; son inverse étant associé à χ^{-1} (la preuve est la même que pour les OPD). On a le Théorème d'Egorov:

Théorème A4.3 Si A est un OPD sur X de symbole principal a et U un OIF elliptique d'ordre 0 associé à χ, $B = U^{-1}AU$ est près de $z_0 = (y_0,\eta_0)$ un OPD sur n de symbole principal $a\circ\chi$.

c) La méthode de la phase stationnaire

La phase stationnaire est l'outil de base d'analyse des limites semi-classiques. Il donne une base solide au principe de superposition de Huygens.

Théorème A4.4 Soit

$$I(h) = \frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{(2\pi h)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{if(x)/h} a(x) |dx|,$$

où $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

• Lorsque f n'a pas de point critique dans le support de a, $I(h) = \mathcal{O}(h^\infty)$.

• Si f admet un seul point critique x_0 non dégénéré dans le support de a, on a un développement asymptotique de la forme:

$$I(h) \sim e^{if(x_0)/h} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j h^j \right),$$

avec

$$a_0 = e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} |\det(f''(x_0))|^{-\frac{1}{2}} \, a(x_0),$$

où ν est l'indice de Morse (nombre de carrés négatifs) de $Q = f''(x_0)$, les autres a_j ne dépendent (polynômialement) que des dérivées de a en x_0 (à f fixée).

• Le cas général où f est de Morse dans le support de a se réduit aux 2 cas précédents par une partition de l'unité.

ABSTRACT

In this Thesis we consider semi-excited resonances for a h-Pseudo-Differential Operator (h-PDO for short) $H(x, hD_x; h)$ on $L^2(M)$ induced by a periodic orbit of hyperbolic type at energy $E = 0$, as arises when $M = \mathbf{R}^n$ and $H(x, hD_x; h)$ is Schrödinger operator with AC Stark effect, or $H(x, hD_x; h)$ is the geodesic flow on an axially symmetric manifold M, extending Poincaré example of Lagrangian systems with 2 degree of freedom. We generalize the framework of Gérard and Sjöstrand, in the sense that we allow for hyperbolic and elliptic eigenvalues of Poincaré map, and look for (excited) resonances with imaginary part of magnitude h^s, with $0 < s < 1$,

It is known that these resonances are given by the zeroes of a determinant associated with Poincaré map. We make here this result more precise, in providing a first order asymptotics of Bohr-Sommerfeld quantization rule in terms of the (real) longitudinal and (complex) transverse quantum numbers, including the action integral, the sub-principal 1-form and Gelfand-Lidskii index.

RESUME

On étudie les résonances semi-excitées pour un Opérateur h-Pseudo-différentiel (h-PDO) $H(x, hD_x)$ sur $L^2(M)$ induites par une orbite périodique de type hyperbolique à l'energie $E = 0$. Par exemple $M = \mathbf{R}^n$ et $H(x, hD_x; h)$ est l'opérateur de Schrödinger avec effet Stark, ou $H(x, hD_x; h)$ est le flot géodesique sur une variété axi-symétrique M, généralisant l'exemple de Poincaré de systèmes Lagrangiens à 2 degrés de liberté. On étend le formalisme de Gérard and Sjöstrand, au sens où on autorise des valeurs propres hyperboliques et elliptiques de l'application de Poincare, et où l'on considère des résonances dont la partie imaginaire est de l'ordre de h^s, pour $0 < s < 1$.

On établit une règle de quantification de type Bohr-Sommerfeld au premier ordre en fonction des nombres quantiques longitudinaux (réels) et transverses (complexes), incluant l'intégrale d'action le long de l'orbite, la 1-forme sous-principale, et l'indice de Conley-Zehnder.