Théorie spectrale d’opérateurs symétrisables non compacts et modèles cinétiques partiellement élastiques

Yahya Mohamed

Année : 2015 **N° d'ordre :**

THÈSE

présentée à

L'U.F.R DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

par

Yahya MOHAMED

pour obtenir le grade de docteur de

l'Université de Franche-Comté

Discipline : **Mathématiques**

Spécialité : **Mathématiques et Applications**

Théorie spectrale d'opérateurs symétrisables non compacts et modèles cinétiques partiellement élastiques

Soutenue le : **2 Juillet 2015**

Rapporteurs

Jacek BANASIAK	Professeur, University of KwaZulu-Natal (Afrique du sud)
Stéfane MISCHLER	Professeur, Université Paris-Dauphine

Jury

F. GOLSE	Professeur, École polytechnique, Président du jury
S. MISCHLER	Professeur, Université Paris-Dauphine
M. MOKHTAR-KHARROUBI	Professeur, Université de Franche-Comté, Directeur de thèse
M. SBIHI	Maître de conférences, École Nationale de l'Aviation Civile Toulouse
N. BOUSSAID	Maître de conférences (HDR), Université de Franche-Comté
M. HARAGUS	Professeur, Université de Franche-Comté

Dédicace

Je dédie, avec respect et considération, le présent travail
À mes parents, mes frères et sœurs.
À Sabbar Ould BRAHIM ELKHALIL et Zahra Mint DALLAHI.
À Dr. Mohameden Ould MOHAMED VALL (TAHA) et Mohamed Ould SALEH Ould ABEID.

Remerciements

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à mon directeur de thèse, Mustapha MOKHTAR-KHARROUBI, pour la confiance qu'il m'a accordée, pour le sujet qu'il m'a proposé et pour l'aide inestimable pour mener ce travail à bien. Je le remercie de m'avoir transmis sa passion de la recherche.
Je tiens à remercier également messieurs Jacek BANASIAK et Stéfane MISCHLER pour avoir rapporté ce manuscrit et pour le temps qu'il y ont consacré. Je présente mes remerciements les plus distingués à monsieur François GOLSE pour m'avoir honoré de présider mon jury.
Un grand merci pour monsieur Mohammed SBIHI d'avoir accepté de faire partie du jury et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je remercie sincèrement monsieur Nabil BOUSAID et madame Mariana HARAGUS d'avoir accepté de se joindre à mon jury.
J'ai bénéficié durant mes années de thèse d'un climat propice à la recherche au sein de Laboratoire de Mathématiques de Besançon. Je tiens à remercier tous les membres du laboratoire sans exception qui entretiennent ce climat. En particulier, l'équipe d'EDP dont j'ai été membre.
Je remercie Gawtum Namah, Rachid Laydi et Philippe Borie de m'avoir permis d'enseigner à l'École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques en tant qu' ATER.
Merci pour Odile HENRY et Emilie DUPRE pour leur disponibilité et pour toutes les références qu'elles m'ont commandées à l'extérieur du laboratoire.
Merci pour Catherine Pagani, Catherine Vuillemenot et Pascaline Saire pour avoir su répondre à mes différentes questions administratives.
Merci pour Richard Ferrere et Romain Pacé pour leur aide précieuse dans mes sollicitations notamment sur le matériel informatique.
Durant ces années j'ai partagé le bureau avec des doctorants qui sont tous devenus sans exception mes amis, je tiens à les remercier pour les discusions que j'ai eues avec eux autour d'un café, notamment Hicham CHALABI, Souleiman OMAR, Youness MAZIGH, Simeng WANG, Michael ULRICH, Mathieu SOBOM SOME, Lars Eric HIENTZSCH, Adnan ALAHMAD,Abdoulkarim IBRAHIM, Cyrille MOYPEMNA.
Je remercie Quentin TAICLET et Soline BOISSERIE pour avoir pris le temps de venir m'ecouter pour mes repititions et d'avoir gentiment assisté à ma soutenance.
Je tiens à remercier la communauté mauritanienne à Besançon et en particuiler Dr. Djamal DIALLO et son épouse Aicha, Moussa KEBÉ et Céline ainsi que Dr. Mustapha MOINE, Alhousseiny PAM, Eyoub Tijani, Boukhary LAM, Mohamed ELKHOMANI, Mohamed KERIM, Hamdi MAADH, Boullaye HAMIDOU, Alassane BA, Mohamed Lemine ELHADJ, Mohamed SWEYDATT, Mohamed Salem GALAS.
En dernier, je voudrais remercier de tout mon cœur, ma famille pour m'avoir soutenu moralement durant tout mon cursus universitaire. Je tiens à remercier tout particulièrement mon grand frère Mokhtar JIDDOU pour m'avoir donné le goût et le courage pour continuer mes études jusqu'au bout et surtout pour s'être s'occupé de nous comme un père.
Je tiens à remercier chaleuresement mon épouse Fatimatou IVOCO pour s'être bien occupée de moi, de prendre soin de notre petite fille Zahra et surtout d'avoir supporté mon abscence durant la durée de cette thèse.
Mon dernier mot est pour ma mère courage, qui a permis à tous ses enfants d'être éduqués, les mots me manquent pour la remercier à sa juste valeur.

Yahya

Table des matières

Introduction générale

Résumé : *Cette thèse est composée de deux parties distinctes. La première partie est consacrée à la théorie spectrale des opérateurs symétrisables non compacts dans les espaces de Hilbert. En particulier nous analysons le spectre discret situé en dehors du disque spectral essentiel. La deuxième partie de cette thèse est consacrée entre autre au spectre discret réel d'équations neutroniques partiellement élastiques. Nous montrons comment l'étude de cette partie du spectre se ramène à l'analyse spectrale d'une classe d'opérateurs bornés non compacts et symétrisables.*

Les équations neutroniques régissent le comportement de la *densité* des neutrons dans un réacteur nucléaire. Les modèles classiques (inélastiques) sont de la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma(x,v)\varphi(x,v,t) - \int_V k_i(x,v,v')\varphi(x,v',t)dv' = 0 \tag{0.0.1}$$

avec la condition aux limites

$$\varphi(x,v,t) = 0, \text{ si } x \in \partial\Omega \text{ et } v.n(x) < 0 \tag{0.0.2}$$

et la condition initiale

$$\varphi(x,v,0) = \varphi_0 \tag{0.0.3}$$

où $(x,v,t) \in \Omega \times V \times \mathbb{R}^+$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un ouvert *borné* régulier de frontière $\partial\Omega$, $V \subset \mathbb{R}^3$ est un fermé (typiquement une couronne munie de la mesure de Lebesgue dv) qui désigne l'ensemble des vitesses admissibles et $n(x)$ est la normale extérieure en $x \in \partial\Omega$. Les paramètres physiques $\sigma(.,.)$ et k_i, sont supposés indépendants du temps et sont appelés respectivement la fréquence de collisions et le noyau de collisions.
Pour les considérations physiques sur ces modèles, on pourra consulter par exemple les ouvrages [6] et ([12], Chapitre XXI, paragraphe 1).
Il est connu que ces équations sont bien posées au sens de la théorie des semigroupes (voir par exemple [19], [53], [20]...). Le problème s'écrit sous la forme d'un *problème de Cauchy* dans l'espace $L^p(\Omega \times V; dx \otimes dv)$ $(1 \leq p < \infty)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(x,v)\varphi(x,v,t) + \int_V k_i(x,v,v')\varphi(x,v',t)dv' = T\varphi + K_i\varphi \tag{0.0.4}$$

où

$$\varphi : t \in [0,+\infty[\to \varphi(t) \in L^p(\Omega \times V; dx \otimes dv)$$

est continue et vérifie

$$\varphi(0) = \varphi_0(.,.) \tag{0.0.5}$$

et où T désigne l'opérateur d'absorption

$$T : D(T) \ni \varphi \to -v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(x,v)\varphi(x,v) \in L^p(\Omega \times V)$$

de domaine

$$D(T) = \left\{ \varphi \in L^p(\Omega \times V), v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^p(\Omega \times V),\ \varphi_{|\Gamma_-} = 0 \right\}$$

où

$$\Gamma_- := \{(x,v) \in \partial\Omega \times V;\ v.n(x) < 0\}.$$

Il existe une théorie de traces (voir [3], [8],[9],[5] et [55]) qui permet de donner un sens à $\varphi_{|\Gamma_-}$.

L'opérateur T engendre un C_0- **semigroupe d'absorption**

$$U(t)\varphi(x,v) = e^{-\int_0^t \sigma(x-sv,v)ds}\varphi(x-tv,v)\mathbb{1}_{\{t<\tau(x,v)\}}$$

où

$$\tau(x,v) := \inf\{s > 0, x - sv \notin \Omega\}$$

est le premier temps de sortie du domaine Ω. L'opérateur intégral (en vitesse),

$$K_i : L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \to \int_V k_i(x,v,v')\varphi(x,v',t)dv' \tag{0.0.6}$$

appelé l'opérateur de collision est borné dans $L^p(\Omega \times V)$ pour la plupart des modèles physiques [7],[33]. Par un théorème de perturbation classique l'opérateur de transport

$$T + K_i$$

engendre un C_0-semigroupe $(V(t))_{t\geq 0}$, dit semigroupe de transport, qui résout le problème d'évolution (0.0.1)-(0.0.3). L'étude du comportement asymptotique en temps ($t \to \infty$) de la solution du problème (0.0.4)-(0.0.5) est un sujet classique et important en théorie des réacteurs nucléaires. Cette étude fait apparaître l'importance des propriétés spectrales de ces équations.

Nous rappellons que le spectre de T est vide si les vitesses sont minorées ($0 \notin V$) (le semi groupe d'absorption est nilpotent). Par contre, si les vitesses ne sont pas minorées ($0 \in V$) le spectre de T est donné par un demi-plan

$$\{\lambda : \Re\lambda \leq -\lambda^*\}$$

où λ^* désigne un paramètre qui se calcule à partir de la fréquence de collision σ.

On a aussi

$$\sigma(U(t)) = \left\{\mu : |\mu| \leq e^{-\lambda^* t}\right\}.$$

Dans la plupart des modèles physiques, l'opérateur de collision K_i est T-compact dans $L^p(\Omega \times V)$ i.e

$$K_i : D(T) \subset L^p(\Omega \times V) \to L^p(\Omega \times V)$$

est compact (où $D(T)$ est muni de la norme du graphe) (voir par exemple [48], [16],[17] et [29] Chapitre 4). Il s'ensuit que

$$\sigma_{ess}(T+K_i) = \sigma_{ess}(T) = \{\lambda : \Re\lambda \leq -\lambda^*\}$$

et que

$$\sigma(T+K_i) \cap \{\lambda : \Re\lambda > -\lambda^*\}$$

est formé au plus des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.
L'approche classique (voir J. Lehner et M. Wing [26]) du comportement asymptotique du semigroupe de transport $(V(t))_{t\geq 0}$ consiste à l'exprimer comme une transformation de Laplace inverse de la résolvante de son générateur (voir [36] Corollary 7.5, p.29)

$$V(t)\varphi_0 = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\gamma\to\infty}\int_{\mu-i\gamma}^{\mu+i\gamma} e^{\lambda t}(\lambda - T - K_i)^{-1}\varphi_0 d\lambda \ (t>0)$$

(où μ est assez grand), à deplacer à gauche le chemin d'intégration, à récupérer les résidus (les projecteurs spectraux P_j) et obtenir une décomposition de type

$$V(t)\varphi_0 = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} e^{tD_j} P_j\varphi_0 + R(t,\varphi_0)$$

où

$$D_j = (T + K_i - \lambda_j)P_j.$$

Le reste $R(t,\varphi_0)$ est transitoire (i.e. négligeable) quand $t\to\infty$, plus précisément

$$R(t,\varphi_0) = O(e^{\beta t})$$

où

$$\beta < \min_{1\leq j\leq m}(\Re\lambda_j)$$

si la donnée initiale $\varphi_0 \in D((T+K_i)^2)$. L'inconvénient de cette approche est qu'elle impose une donnée initiale régulière pour contrôler le terme transitoire (voir par exemple ([7] , [28] et [23]). Pour s'affranchir de cette contrainte, I. Vidav [53] a montré qu'il fallait étudier les propriétés spectrales du semigroupe $V(t)_{t\geq 0}$ plutôt que celles du générateur $T+K_i$ en raison de l'absence (en général) de théorème d'application spectrale reliant le spectre continu du générateur à celui du semigroupe.
En effet, on exprime le semigroupe par une série de Dyson-Phillips

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t), \tag{0.0.7}$$

où

$$U_0(t) = U(t) \ et \ U_{j+1}(t) = \int_0^t U_0(t-s)K_iU_j(s)ds, \ j\geq 0, \ t\geq 0.$$

Si un reste

$$R_k(t) = \sum_{j=k}^{\infty} U_j(t)$$

est compact alors

$$r_{ess}(V(t)) \leq e^{-\lambda^* t}$$

(où r_{ess} désigne le rayon essentiel, c'est-à-dire le rayon du plus petit disque fermé contenant le spectre essentiel de $(V(t))_{t\geq 0}$).
Il s'ensuit que

$$\sigma(V(t)) \cap \left\{\mu : |\mu| > e^{-\lambda^* t}\right\}$$

est formé au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Alors l'estimation du terme transitoire $R(t)$ dans la décomposition

$$V(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} e^{tD_j} P_j + R(t)$$

est un $O(e^{\beta t})$ *en norme d'opérateurs* où

$$\beta < \min_{1\leq j\leq m} (\Re\lambda_j).$$

Pour la compacité d'un reste de la série de Dyson-Phillips, voir par exemple [54],[18], [28] et [32]. Ainsi les modèles neutroniques inélastiques sont bien compris à l'heure actuelle.
Des modèles neutroniques plus complexes combinant des opérateurs de collision classiques (inélastiques) et des opérateurs de collision *élastiques* sont apparus plus tardivement en 1974 [22]. (Des modèles similaires apparaissent en théorie des semiconducteurs, voir par exemple [2]). Les opérateurs de collision élastiques décrivent les chocs élastiques entre les neutrons et le milieu ambiant et sont de la forme

$$(K_e\varphi)(x,\rho,\omega) = \int_{\mathbb{S}^2} k_e(x,\rho,\omega,\omega')\varphi(x,\rho\omega')d\omega' \tag{0.0.8}$$

où $v \in V$ s'écrit sous forme polaire

$$v = |v|\,\omega = \rho\omega, \omega \in \mathbb{S}^2.$$

Ainsi les équations partiellement élastiques sont de la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= -v.\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \sigma(x,v)\varphi(x,v,t) + \int_V k_i(x,v,v')\varphi(x,v',t)dv' + \int_{\mathbb{S}^2} k_e(x,\rho,\omega,\omega',t)\varphi(x,\rho\omega',t)d\omega' \\ &= T\varphi + K_i\varphi + K_e\varphi \end{aligned}$$

La présence d'opérateurs neutroniques élastiques change complètement la structure générale du spectre du génerateur

$$T + K_e + K_i.$$

Si $0 \notin V$ alors le spectre de

$$T + K_e + K_i$$

est formé d'une réunion de *courbes* et de points isolés.
Si $0 \in V$ alors le spectre de $T + K_e + K_i$ est formé du demi-plan

$$\{\lambda, \Re\lambda \leq -\lambda^*\},$$

d'une réunion de courbes et des points isolés (voir [22]).
Contrairement à l'opérateur de collision inélastique K_i, l'opérateur de collision élastique K_e n'a pas de propriétés de "moyenne en vitesse" intéressantes. Ce qui explique le manque de compacité et pourrait "expliquer" la présence de *courbes spectrales*.
Une manière plus claire d'exprimer la présence de courbes spectrales est de noter que l'opérateur neutronique élastique

$$T + K_e$$

s'identifie à une famille d'opérateurs *monocinétiques* indexée par ρ

$$(T^\rho + K_e^\rho)_{\rho\in[a,b]}.$$

Chaque opérateur $T^\rho + K_e^\rho$ opére sur

$$L^p(\Omega \times \mathbb{S}^2).$$

Chacun de ces opérateurs *monocinétiques* a un spectre purement discret (voir par exemple [49] et [51]) et on montre que

$$\sigma(T + K_e) = \overline{\bigcup_{\rho\in[a,b]} \sigma(T^\rho + K_e^\rho)}.$$

Ce sont donc les valeurs propres de $T^\rho + K_e^\rho$ qui "bougent" avec ρ pour "décrire des courbes". La théorie spectrale du semigroupe neutronique partiellement élastique

$$(e^{t(T+K_e+K_i)})_{t\geq 0}$$

a été faite par M. Sbihi [39]. Il a montré en particulier les résultats spéctraux suivants :

$$\sigma_{ess}((e^{t(T+K_e+K_i)})_{t\geq 0}) = \sigma_{ess}((e^{t(T+K_e)})_{t\geq 0}).$$

En particulier

$$\sigma_{ess}(T + K_e + K_i) = \sigma_{ess}(T + K_e) = \sigma(T + K_e).$$

Il s'ensuit que le spectre *asymptotique*

$$\sigma_{as}(T + K_e + K_i) := \sigma(T + K_e + K_i) \cap \{\lambda, \Re\lambda > s(T + K_e)\}$$

est formé au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.
L'objectif de cette thèse est d'analyser le plus finement possible le spectre asymptotique réel i.e

$$\sigma_{as}(T + K_e + K_i) \cap \mathbb{R}.$$

La stratégie générale est la suivante :
Le problème spectral

$$T\varphi + K\varphi = \lambda\varphi, \lambda > s(T)$$

est équivalent à

$$\varphi = (\lambda - T)^{-1}K\varphi.$$

Donc λ est une valeur propre de l'opérateur de transport partiellement élastique si et seulement si 1 est une valeur propre de l'opérateur borné

$$G_\lambda := (\lambda - T)^{-1}K.$$

L'opérateur G_λ n'est pas compact (en raison de la présence de l'opérateur élastique K_e). Bien sûr cet opérateur n'est pas symétrique. Néanmoins cet opérateur est symétrisable par K i.e

$$KG_\lambda$$

est symétrique. D'où l'importance d'avoir des résultats spectraux sur les opérateurs *symétrisables non compacts* dans les espaces de Hilbert ; c'est l'objet du chapitre 2.
On dit qu'un opérateur borné G est symérisable par un opérateur auto-adjoint positif S si SG est auto-adjoint

$$SG = G^*S.$$

Il existe une littérature considérable sur les opérateurs symétrisables, en particulier sur la théorie spectrale des opérateurs pleinement symétrisables à puissance compacte. Citons par exemple W.T Reid [37], P.D. Lax [24]. L'objectif du Chapitre 2 est d'étendre la théorie de Reid [37], les résultats de Nieto [35] et des résultats récents de [27].
Détaillons à présent le contenu de chacun des chapitres :

Le CHAPITRE 1

Dans ce chapitre nous rappellons l'essentiel de notations et résultats classiques dont nous avons besoin pour la suite de la thèse. D'abord nous rappellons quelques définitions et résultats sur la théorie spectrale des opérateurs non bornés dans les espaces de Banach. Ensuite nous rappellons les résultats de compacité pour les opérateurs de transport partiellement élastiques. De plus nous donnons quelques résultats spectraux concernant les opérateurs positifs dans les espaces de L^p) (qui laissant invariant le cône des fonctions positives). Enfin nous définissons quelques classes d'opérateurs symétrisables et nous présentons quelques résultats spectraux connus les concernant.

Le CHAPITRE 2

Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $G \in \mathcal{L}(H)$, $S \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint positif. Soit

$$H_1 := Ker(S), H_2 = H_1^\perp = \overline{\Im S}$$

où $\Im S$ désigne l'image de S, et soit P la projection orthogonale sur H_2. On définit $\widehat{G} \in \mathcal{L}(H_2)$ par

$$\widehat{G} : x \in H_2 \longrightarrow PGx \in H_2.$$

Nous définissons les paramètres :

$$\alpha^+(G) := \inf \{\lambda > 0;\ \sigma(G) \cap (\lambda, +\infty) \text{ est constitué au plus de spectre discret}\},$$

$$\alpha^-(G) := \sup \{\lambda < 0;\ \sigma(G) \cap (-\infty, \lambda) \text{ est constitué au plus de spectre discret}\},$$

où le spectre discret désigne les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.
Pour tout entier n on définit le paramètre

$$\alpha_n^+ := \sup_{E_n \in \mathcal{V}_n} \inf_{x \in E_n, (Sx,x)=1} (SGx, x), \quad n \in \mathbb{N}$$

où $\mathcal{V}_n$ est la classe des sous espaces E_n de $\overline{\Im(S)}$ de dimension n.
D'abord nous donnons une méthode (inspirée du travail de W. Reid [37]) qui permet de construire toutes les valeurs propres réelles situées à l'extérieur de l'intervalle spectral essentiel

$$(\alpha^+(G), \alpha^-(G)).$$

Ensuite nous donnons des caractérisations variationnelles de ces valeurs propres de types $\sup - \inf$ et $\inf - \sup$. En particulier, nous démontrons que si pour un entier n on a

$$\alpha_n^+ > \alpha^+(G),$$

alors l'opérateur G a au moins n valeurs propres supérieures à $\alpha^+(G)$.
Si tous les α_n^+ sont strictement supérieurs à $\alpha^+(G)$ alors ils forment une suite de valeurs propres de G qui converge vers $\alpha^+(G)$. Sinon, soit $m \in \mathbb{N}$ le plus grand entier qui vérifie

$$\alpha_n^+ > \alpha^+(G);$$

si en plus G vérifie

$$|Gx| \leq c \left|\sqrt{S}x\right|, \forall x \in H \tag{0.0.9}$$

avec c une constante positive, alors nous montrons que

$$\alpha_n^+ = \alpha^+(G) \ \forall n > m.$$

Enfin nous montrons que, si l'opérateur G est fortement symétrisable (i.e $\ker(S) \subset \ker(G)$) alors G et $\widehat{G}$ ont les mêmes valeurs propres isolées, la même multiplicité de pôles correspondants et la même multiplicité des valeurs propres. On montre aussi que le spectre de Weyl de G égal à celui de $\widehat{G}$. Nous montrons également lorsque G vérifie l'inégalité (0.0.9) que le spectre essentiel de Schechter de G est égal à son spectre essentiel de Weyl.
Le CHAPITRE 3
Ce chapitre est consacré à la théorie spectrale d'opérateurs neutroniques partiellement élastiques et *isotropes* c'est-à-dire dont les sections efficaces ne dépendent pas des directions des vitesses. Cette hypothèse d'isotropie permet d'obtenir des résultats trés précis et de présenter une *théorie complète.* (Cela n'empêche pas que de nombreux résultats restent valables sans l'hypothèse d'isotropie, voir le Chapitre 4).
Nous montrons tout d'abord que l'opérateur neutronique *élastique*

$$T + K_e$$

s'identifie à une famille d'opérateurs *monocinétiques* indéxée par le module de vitesses

$$(T^\rho + K_e^\rho)_{\rho \in [a,b]}.$$

On montre alors que

$$\sigma(T + K_e) = \bigcup_{\rho \in [a,b]} \sigma(T^\rho + K_e^\rho).$$

En particulier

$$\sigma(T + K_e) = \sigma_{ess}(T + K_e).$$

Nous montrons que le spectre essentiel de l'opérateur neutronique partiellement élastique

$$T + K_e + K_i$$

coincide avec le spectre de sa partie élastique

$$\sigma_{ess}(T + K_e + K_i) = \sigma(T + K_e).$$

Cela résulte du fait que K_i est $(T + K_e)$-compact. En particulier

$$\sigma(T + K_e + K_i) \cap \{\lambda, \Re\lambda > s(T + K_e)\}$$

($s(T + K_e)$ est la borne spectrale de $T + K_e$) est formé au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Nous montrons aussi que ce spectre ponctuel est réel.
Nous montrons que $\lambda > s(T + K_e)$ est une valeur propre de l'opérateur neutronique partiellement élastique si et seulement si 1 est une valeur propre de l'opérateur

$$G_\lambda := (\lambda - T)^{-1}(K_e + K_i)$$

puis nous montrons que G_λ est symétrisable par

$$K = K_e + K_i.$$

C'est à ce niveau que se fait le lien avec la théorie spectrale des opérateurs symétrisables du Chapitre 2.
Nous montrons que le nombre de valeurs propres de l'opérateur neutronique augmente indéfiniment quand la taille du domaine spatial Ω (définie comme le rayon de la plus grande boule contenue dans Ω) augmente. Nous montrons aussi que toutes ces valeurs propres tendent vers la borne spectrale de l'opérateur neutronique partiellement élastique homogène (en espace) quand la taille de Ω tend vers l'infini. Enfin, nous donnons un critère d'existence d'au moins une valeur propre.
Une forme quadratique liée à l'opérateur symmétrisable G_λ joue un rôle essentiel dans ce travail ainsi que les principes variationnels caractérisant le spectre discret en dehors du disque spectral essentiel.

Le CHAPITRE 4

Ce chapitre complète le chapitre précédent consacré aux modèles isotropes. Nous étendons de nombreux résultats spectraux du chapitre 3 aux modèles non isotropes. On dispose aussi d'une forme quadratique dans le cas anisotrope mais qui ne permet pas d'obtenir tous les résultats du modèle isotrope.

Chapitre 1

Quelques rappels

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Tout d'abord, nous rappelons quelques définitions et résultats sur la théorie spectrale des opérateurs non bornés dans les espaces de Banach. Ensuite nous donnons quelques résultats récents de compacité pour des modèles cinétiques partiellement élastiques. En outre, nous rappellons des résultats concernant les propriétés spectrales des opérateurs *positifs* dans les espaces ordonnés (i.e laissant invariant le cône positif). Enfin nous examinons les opérateurs symétrisables et présentons leur théorie spectrale.

1.2 Théorie spectrale des opérateurs

Soit H un espace de Banach complexe et

$$T : D(T) \subset H \longrightarrow H$$

un opérateur linéaire non borné et fermé. On appelle ensemble **résolvant** de T, l'ensemble

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - T : D(T) \longrightarrow H \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle **le spectre** de T et sera noté $\sigma(T)$. On notera que si $\lambda \in \rho(T)$

$$(\lambda - T)^{-1} : H \longrightarrow D(T) \subset H$$

est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné

$$(\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

Cet opérateur est appelé la résolvante de T et est noté parfois $R(\lambda, T)$. On a alors les résultats fondamentaux suivants :
L'ensemble resolvant $\rho(T)$ est un ouvert du plan complexe et

$$\lambda \in \rho(T) \longrightarrow (\lambda - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$$

est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(T)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante*

$$R(\lambda, T) - R(\beta, T) = (\beta - \lambda) R(\lambda, T) R(\beta, T) \ \forall \lambda, \beta \in \rho(T).$$

Le spectre de T est donc un fermé de $\mathbb{C}$, et si de plus l'opérateur T est **borné**, alors $\sigma(T)$ est un compact non vide. On appelle alors son *rayon spectral* de T, le réel

$$r_\sigma(T) := \sup \{|\lambda| \, ; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

On a aussi

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Lorsque T n'est pas borné, un paramètre utile pour localiser son spectre est donné par la *borne spectrale*

$$s(T) := \sup \{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Le spectre d'un opérateur fermé est généralement décomposé de la manière suivante :

$$\sigma_p(T) := \{\lambda; \lambda - T \text{ n'est pas injectif}\}$$

qu'on appelle le *spectre ponctuel,*

$$\sigma_c(T) := \{\lambda; \lambda - T \ \text{ est injectif, non surjectif et à image dense }\}$$

qu'on appelle le *spectre continu* et

$$\sigma_r(T) := \{\lambda; \lambda - T \text{ à image non dense}\}$$

qu'on appelle le *spectre résiduel.* On note le noyau de T par

$$\ker(T) := \{x \in D(T); Tx = 0\}.$$

Le noyau d'un opérateur fermé est un sous espace fermé. Un élement de $\sigma_p(T)$ est dit *valeur propre*, il lui correspond un $0 \neq x \in D(T)$ tel que $Tx = \lambda x$ que l'on appelle *vecteur propre* correspondant à λ. Le spectre ponctuel approché

$$\sigma_{ap}(T) := \{\lambda; \ (\lambda - T) \ \text{ n'est pas injéctif ou est à image non fermée}\}.$$

On a toujours

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_r(T) \text{ et } \sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T),$$

mais les deux ensembles $\sigma_r(T)$ et $\sigma_{ap}(T)$ ne sont pas nécessairement disjoints.

La proposition suivante justifie l'appellation de spectre ponctuel approché.

Proposition. 1.2.1. *Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Alors $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n \subset D(T)$, telle que*

$$\|x_n\| = 1 \ \textit{et} \ \|(\lambda - T)x_n\| \longrightarrow 0 \ \textit{quand} \ n \longrightarrow \infty.$$

Un intérêt particulier mérite d'être accordé aux valeurs propres isolées.

Valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie

Soit $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ un point isolé de $\sigma(T)$. La fonction $\lambda \longmapsto R(\lambda, T)$ est alors définie dans un voisinage de ce point (mais privé de 0) et on peut donc la développer en série de Laurent autour de ce point :

$$R(\lambda, T) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\lambda - \lambda_0)^k T_k \tag{1.2.1}$$

pour tout $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ (δ petit de sorte que $\sigma(T) \cap D(\lambda_0, \delta) = \{\lambda_0\}$). Le coefficient $T_k \in \mathcal{L}(H)$ est donné par l'intégrale de Dunford

$$T_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{R(\lambda, T)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} d\lambda, k \in \mathbb{Z},$$

où γ est le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{\delta}{2}$ parcouru une fois dans le sens direct. Le résidu $T_{-1} \in \mathcal{L}(H)$ est une projection, notée P_{λ_0} et appelée projection spectrale associée à λ_0. S'il existe un $n > 0$ tel que $T_{-n} \neq 0$ et $T_{-k} = 0$ pour tout $k > n$ alors on dira que λ_0 est un pôle (d'ordre n) de la résolvante $R(., T)$. On montre alors que λ_0 est une valeur propre. C'est le cas lorsque P_{λ_0} est de rang fini, et alors le rang est appelée la multiplicité algébrique de λ_0. Lorsque cette dernière vaut un, la valeur propre λ_0 est dite algébriquement simple. Pour plus de détails on pourra par exemple voir ([15] p.230, Kato [21], p.180).

Spectre essentiel

Le spectre essentiel joue un rôle important en théorie spectrale mais, il n'existe pas de définition unanimement acceptée pour cette notion. De nombreuses définitions, non équivalentes (mais qui coincident pour les opérateurs auto-adjoints dans les espaces de Hilbert voir par exemple [14] Théorème 1.6, p.417) existent dans la littérature. On se bornera à la plus classique que l'on peut consulter, par exemple, dans l'ouvrage de M. Schechter ([42], p.14).

Définition. 1.2.1. *On appellera **spectre essentiel** de T l'ensemble*

$$\sigma_{ess}(T) := \bigcap_{K \in \mathcal{K}(H)} \sigma(T + K),$$

où $\mathcal{K}(H)$ désigne l'espace des opérateurs compacts de H dans H.
On constate que $\sigma_{ess}(T)$ est un sous-ensemble fermé de $\sigma(T)$. Il représente la partie de $\sigma(T)$ invariante par perturbation de T par tout opérateur compact. On a donc

$$\sigma_{ess}(T + K) = \sigma_{ess}(T), \forall K \in \mathcal{K}(H).$$

Remarque. 1.2.1. *Le complémentaire de $\sigma_{ess}(T)$ se caractérise en terme d'indice de Fredholm. En effet, $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$ si et seulement si $\lambda - T$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro ([42],Théorème 4.5, p 15).*
Lorsque H est de dimension infinie et T est un opérateur borné, $\sigma(T)$ est un compact non vide, son rayon spectral essentiel est défini alors par

$$r_{ess}(T) := \sup \{|\lambda|, \lambda \in \sigma_{ess}(T)\}.$$

Il peut être caractérisé par

$$r_{ess}(T) = \inf \{r > 0, \lambda \in \sigma(T), |\lambda| > r \text{ est un pôle de multiplicité algébrique finie}\} . \tag{1.2.2}$$

On notera que le rayon spectral essentiel est le même quel que soit le concept de spectre essentiel utilisé (voir par exemple [14] Corollaire 4.11, p.44).
On rappelle aussi que si H est un espace de Hilbert complexe et si λ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de T alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre isolée de même multiplicité algébrique de l'opérateur adjoint T^* ; en particulier $r_{ess}(T) = r_{ess}(T^*)$.
La proposition suivante peut se révéler forte utile dans la détermination du spectre essentiel.

Proposition. 1.2.2. *Soit H un espace de Banach et*

$$T : D(T) \subset H \longrightarrow H$$

un opérateur fermé et $\lambda \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_n \in D(T)$ telle que

$$\|\lambda \ x_n - Tx_n\| \longrightarrow 0, \ \ \|x_n\| = 1$$

et telle que $(x_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente en norme, alors $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$.

La suite $(x_n)_n$ de la proposition précédente s'appelle une **suite singulière** associée à la valeur spectrale $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$. Enfin, on signale le résultat de stabilité du spectre essentiel qu'on peut trouver dans M. Schechter [42].

Proposition. 1.2.3. *Soient T et S deux opérateurs fermés à domaine dense dans H. S'il existe un $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$ tel que $(\lambda - T)^{-1} - (\lambda - S)^{-1}$ soit compact, alors*

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(S).$$

1.3 Résultats de compacité

1.3.1 Introduction

L'objectif de cette section est de présenter quelques résultats de compacité de M. Sbihi [38] pour une classe d'équations neutroniques partiellement élastiques introduite par E.W. Larsen et P.F. Zweifel [22] en 1974.

1.3.2 Théorème de compacité dans la théorie de transport

On s'intéressera à l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma(x,v)\varphi(x,v,t) &= \int_V k_i(x,v,v')\varphi(x,v',t)dv' \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x,\rho,\omega,\omega')\varphi(x,\rho\omega',t)d\omega' \\ &= K_i\varphi + K_e\varphi := K\varphi \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

soumise à la condition aux limites

$$\varphi(x,v,t) = 0, \text{ si } x \in \partial\Omega \text{ et } v.n(x) < 0$$

et la condition initiale

$$\varphi(x,v,0) = \varphi_0$$

où $(x,v,t) \in \Omega \times V \times \mathbb{R}^+$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier de frontière $\partial\Omega$ et $n(x)$ la normale extérieure en $x \in \partial\Omega$. L'espace de vitesses V est composé de vitesses $v = \rho\omega$, avec $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ (la sphère unité de $\mathbb{R}^N$) et $\rho \in [a,b], a > 0$ et muni de la mesure de Lebesgue $dv = \rho^{N-1} d\omega d\rho$. On suppose que la fréquence de collision vérifie

$$0 \leq \sigma \in L^\infty(V).$$

L'équation intégro-différentielle précédente peut se mettre sous la forme d'un problème de Cauchy dans $L^p(\Omega \times V), 1 \leq p < \infty$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = (T+K)\varphi \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases}$$

où T désigne l'opérateur d'absorption

$$T : D(T) \ni \varphi \to -v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(x,v)\varphi(x,v) \in L^p(\Omega \times V)$$

de domaine

$$D(T) = \left\{ \varphi \in L^p(\Omega \times V), v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^p(\Omega \times V),\ \varphi_{|\Gamma_-} = 0 \right\}$$

où

$$\Gamma_- := \{(x,v) \in \partial\Omega \times V;\ v.n(x) < 0\}.$$

L'opérateur de collision

$$K = K_i + K_e$$

est composé de l'opérateur de collision inélastique

$$K_i\varphi(x,v) = \int_V k_i(x,v,v')\varphi(x,v')dv'$$

et de l'opérateur de collision élastique (ou "Bragg scattering" suivant la terminologie de [22])

$$K_e\varphi(x,v) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x,\rho,\omega,\omega')\varphi(x,\rho\omega')d\omega'$$

qui décrit les collisions ne faisant pas varier l'énergie cinétique des neutrons, il n'agit qu'à travers la partie angulaire ω de la variable de vitesse.
Commençons donc par rappeler la définition des opérateurs de collision réguliers. Soit $K_i(x)$ l'opérateur intégral suivant (défini pour $x \in \Omega$ fixé) :

$$K_i(x) : L^p(V) \ni \varphi \to \int_V k_i(x,v,v')\varphi(x,v')dv' \in L^p(V)$$

L'opérateur de collision K_i est dit régulier si
(H1) $\{K_i(x) : x \in \Omega\}$ est un ensemble d'opérateurs collectivement compacts, i.e

$$\Big\{K_i(x)\psi : x \in \Omega, \|\psi\|_{L^p(V)} \leq 1\Big\}$$

est relativement compact dans $L^p(V)$.
(H2) Pour tout $\psi' \in L^{p'}(V)$ l'ensemble, $\{K_i(x)\psi' : x \in \Omega\}$ est relativement compact dans $L^{p'}(V)$.
On suppose que K_e vérifie
(H3) L'ensemble

$$\left\{\int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x,\rho,\omega,\omega')\varphi(\omega')d\omega' : (x,\rho) \in \Omega \times [a,b], \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{S}^{N-1})} \leq 1\right\}$$

est relativement compact dans $L^p(\mathbb{S}^{N-1})$.
(H4) Pour tout $\psi' \in L^{p'}(\mathbb{S}^{N-1})$,

$$\left\{\int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x,\rho,\omega,\omega')\psi'(\omega)d\omega : (x,\rho) \in \Omega \times [a,b]\right\}$$

est relativement compact dans $L^{p'}(\mathbb{S}^{N-1})$.
Sous ces hypothèses, $K_e \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$ et

$$\|K_e\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega\times V))} = ess \sup_{(x,\rho)\in\Omega\times[a,b]} \|K_e(x,\rho)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{S}^{N-1}))} .$$

Théorème. 1.3.1. *([38], Théorème 5.2.1, p.140) Si les hypothèses **(H1)-(H4)** sont satisfaites, alors les opérateurs*

$$K_iR(\lambda, T + K_e) \text{ et } R(\lambda, T + K_e)K_i$$

sont compacts pour tout $\lambda \in \rho(T + K_e)$.

Corollaire. 1.3.1. *(Corollaire.5.2.1 dans [38]) Sous les hypothèses **(H1)-(H4)**, les opérateurs $T + K$ et $T + K_e$ ont le même spectre essentiel, i.e.*

$$\sigma_{ess}(T + K) = \sigma_{ess}(T + K_e).$$

Preuve On montre grâce au Théorème. 1.3.1 que

$$R(\lambda, T + K_e + K_i) - R(\lambda, T + K_e)$$

est compact et la Proposition.1.2.3 achève la preuve.

□

Remarque. 1.3.1. *Le Théorème. 1.3.1 et le Corollaire.1.3.1 ont été montrés dans [38] pour des opérateurs de collision plus généraux,*

$$K = K_e + K_i + K_d$$

où l'opérateur K_d est nilpotent (K_d est l'opérateur inélastique "downshift" qui décrit les collisions lors desquelles une quantité d'énergie fixe est perdue par les neutrons).

1.4 Propriétés spectrales des opérateurs positifs

Nous donnons dans cette section quelques résultats spectraux concernant les opérateurs *positifs* (qui laissant invariant le cône positif) que nous aurons à utiliser par la suite. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Le cône positif de $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions

$$\{\varphi \in L^p(\Omega) : \ \varphi(x) \geq 0 \ p.p \ x \in \Omega\}.$$

On le note L^p_+.

Définition. 1.4.1. *Soit* $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$.
T sera dit positif si T laisse invariant le cône positif i.e

$$T(L^p_+) \subset L^p_+.$$

On écrira $T \geq 0$.

Théorème. 1.4.1. *(H.H. Chaefer [41])*
Soit $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ un opérateur positif. Alors

$$r_\sigma(T) \in \sigma(T).$$

Théorème. 1.4.2. *(Ph. Clément [10])*
Soit $(U(t))_{t\geq 0}$ un semigroupe positif sur L^p avec un générateur T. Alors

$$s(T) \in \sigma(T)$$

où s(T) désigne la borne spectrale de T.

Définition. 1.4.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, et soit $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ un opérateur borné positif. On dit que T est irréductible si, pour tout $\varphi \in L^p_+ - \{0\}$, $\varphi' \in L^q_+ - \{0\}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$(T^n \varphi, \varphi') > 0.$$

Théorème. 1.4.3. *(B. de. Pagter [13])*
Soit $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ irréductible à puissance compacte. Alors

$$r_\sigma(T) > 0.$$

On rappelle aussi le Théorème de J. Voigt [58]

Théorème. 1.4.4. *Soit*

$$T : D(T) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

un opérateur non borné de résolvante positive, et soit $\lambda > s(T)$.
Soit

$$K : D(T) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

un opérateur positif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.
(i)

$$r_\sigma(K(\lambda - T)^{-1}) < 1.$$

(ii)

$$\lambda \in \rho(T + K) \ \textit{et} \ (\lambda - T - K)^{-1} \geq 0.$$

Remarque. 1.4.1. *Notons que les résultats mentionnés ci-dessus demeurent valables dans le contexte plus général des espaces de Banach réticulés.*

1.5 Opérateurs symétrisables

1.5.1 Introduction

Dans cette section on définit les opérateurs symétrisables, pleinement symétrisables et fortement symétrisables. Puis on présente quelques résultats spectraux de cette classe d'opérateurs. Pour plus de détails sur la théorie des opérateurs symétrisables le lecteur peut consulter A.C Zaanen [60], J.P.O Silberstein [43] [44] [45]...

1.5.2 Rappels et notations

Soit H un espace de Hilbert complexe muni du produit scalaire $(,)$ et de la norme

$$|x| := \sqrt{(x, x)}. \tag{1.5.4}$$

Pour tout opérateur linéaire borné $O \in \mathcal{L}(H)$, on note sa norme par $|O|_{\mathcal{L}(H)}$ ou par $|O|$ tout court, pour simplifier.

Définition. 1.5.1. *Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint positif (non nécessairement injectif) sur H. Un opérateur $G \in \mathcal{L}(H)$ est dit symétrisable-(à gauche) par S si SG est auto-adjoint. On dira alors que G est symétrisable par S.*

Définition de la symétrisabilité pleine. 1.5.1. *Si $G \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur symétrisable. On dira que G est pleinement symétrisable par S si de plus on a*

$$Gx = \lambda x \ (\lambda \neq 0 \ \textit{et} \ x \neq 0) \Longrightarrow Sx \neq 0.$$

Remarque. 1.5.1. *On voit facilement que les valeurs propres d'un opérateur pleinement symétrisable sont réelles puisque $Sx \neq 0$ et par suite $(Sx, x) > 0$ (S et $\sqrt{S}$ ont le même noyau).*

Définition de la symétrisabilité forte. 1.5.1. *Un opérateur symétrisable G est dit fortement symétrisable par S si $Ker(S) \subset Ker(G)$.*

Remarque. 1.5.2. *On voit facilement que tout opérateur fortement symétrisable est pleinement symétrisable.*

Remarque. 1.5.3. *Une condition suffisante de la forte symétrisabilité d'un opérateur symétrisable est l'existence d'une constante positive c tel que*

$$|Gx| \leq c \left|\sqrt{S}x\right|, x \in H. \tag{1.5.5}$$

Cette condition apparaît naturellement dans les modèles neutroniques (voir chapitre 3).

Définition. 1.5.2. *Soit $G \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur symétrisable par S. Soit*

$$H_1 := Ker(S), H_2 = H_1^{\perp} = \overline{\Im S}$$

et soit P la projection orthogonale sur H_2. On définit $\widehat{G} \in \mathcal{L}(H_2)$ par

$$\widehat{G} : x \in H_2 \longrightarrow PGx \in H_2.$$

1.5.3 Quelques résultats spectraux

Proposition. 1.5.1. *(voir la preuve du théorème 1 dans [27].) Soit $H_1 := Ker(S), H_2 = H_1^{\perp} = \overline{\Im(S)}$. Soit H_2^c le complété de H_2 pour la norme*

$$\|x\| := \sqrt{(x, Sx)}.$$

Alors, $\widehat{G}$ s'étend d'une manière unique en un opérateur auto-adjoint borné $\widehat{G}_c$ sur H_2^c.

Lemme. 1.5.1. *([37], Théorème 2.1 et Corollaire 1) Soit $G \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur symétrisable par S. Alors pour tout $x, y \in H$,*

$$|(x, SGy)| \leq |G| \sqrt{(x, Sx)}\sqrt{(y, Sy)}. \tag{1.5.6}$$

En particulier on a **l'inégalité de Reid**

$$|(x, Sx)| \leq |G| \, (x, Sx). \tag{1.5.7}$$

où $|G|$ désigne la norme d'opérateur $|G|_{\mathcal{L}(H)}$.
On rappelle

Lemme. 1.5.2. *([27] Lemme 2) Soit $G \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur symétrisable par S. Alors, G laisse invariant le noyau de S et G^* (l'opérateur adjoint de G) laisse invariant la fermeture de l'image de S.*

On déduit directement de P.D. Lax [24] la :

Proposition. 1.5.2. *Soit $G \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur symétrisable par S. Alors,*

$$\sigma(\widehat{G}_c) \subset \sigma(\widehat{G}). \tag{1.5.8}$$

De plus, $\widehat{G}$ et $\widehat{G}_c$ ont les mêmes valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.

Proposition. 1.5.3. *([27] Théorème 3 et Lemme 3) Soit $G \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur symétrisable par S. Alors, $\partial\sigma(\widehat{G})$ (la frontière topologique de $\sigma(\widehat{G})$) est inclus dans $\sigma(G)$. Si G est fortement symétrisable par S alors*

$$\sigma(\widehat{G}) - \{0\} = \sigma(G) - \{0\}\,.$$

Corollaire. 1.5.1. *([27] Corollaire 4)*

Soit $G \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif S. Si la condition (1.5.5) *est vérifiée alors*

$$\sigma(G) - \{0\} = \sigma(\widehat{G}_c) - \{0\}\,.$$

En particulier

$$r_\sigma(G) = \sup_{\{\varphi \in H, (S\varphi,\varphi)=1\}} (SG\varphi, \varphi) \tag{1.5.9}$$

Terminons cette section par le lemme suivant :

Lemme. 1.5.3. *Soit $G \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur symétrisable par S. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(G)$, $(\lambda - G)^{-1}$ est symétrisable par S. En particulier*

$$\left|(x, S(\lambda - G)^{-1}x)\right| \leq \left|(\lambda - G)^{-1}\right| (x, Sx).$$

Preuve. Nous allons montrer que $S(\lambda - G)^{-1}$ est auto-adjoint. Comme H est un espace de Hilbert complexe, cela revient à montrer que

$$(S(\lambda - G)^{-1}x, x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in H,$$

(voir [11], Proposition 2.12, p.33). Soit

$$y := (\lambda - G)^{-1}x.$$

Alors

$$\begin{aligned} (S(\lambda - G)^{-1}x, x) &= (Sy, x) \\ &= (y, Sx) \\ &= (y, S(\lambda - G)y) \\ &= (S(\lambda - G)y, y) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

car $S(\lambda - G) = \lambda S - SG$ est auto-adjoint. Enfin, on applique (1.5.7) à $(\lambda - G)^{-1}$. $\square$

Chapitre 2

Analyse spectrale des opérateurs symétrisables non compacts

2.1 Introduction

Les opérateurs de transport de neutrons sont fortement non auto-adjoints. Cependant l'étude de leurs spectres réels s'avère avoir de liens insoupçonnés avec l'analyse spectrale des opérateurs symétrisables non-compacts G dont le symétriseur S n'est pas injectif. Pour comprendre le spectre de ces derniers nous avons besoin de résultats et d'outils d'analyse fonctionnelle appropriés. Pour ce faire, nous étendons le travail de W.T Reid [37] sur l'analyse spectrale des opérateurs pleinement symétrisables **compacts** G sur les espaces de Hilbert à des opérateurs pleinement symétrisables **non compacts** sur les espaces de Hilbert. Plus précisément, nous fournissons une description complète du spectre discret (les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie) situé à l'extérieur de l'intervalle spectral essentiel (voir la définition ci-dessous). En suivant la stratégie de Reid [37], toute en faisant attention à la présence éventuelle du spectre essentiel de G. Ensuite nous établissons des développements partiels en fonctions propres associés à ce spectre discret. En outre nous donnons une caractérisation variationnelle du spectre discret par des principes des type $\sup - \inf$ et $\inf - \sup$. Nous donnons une estimation de stabilité de ce spectre discret en termes de rayon spectral de la perturbation. Nous montrons des liens spectraux entre l'opérateur symétrisable G et l'opérateur symétrique SG. Dans le cadre des opérateurs fortement symétrisables nous fournissons plusieurs résultats sur le spectre essentiel, en particulier nous analysons toutes les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie et nous caractérisons leurs complémentaire en terme de suites singulières de Weyl. Notre plan est le suivant :
Dans la Section 2.2, nous donnons diverses caractérisations variationnelles des valeurs propres situées en dehors du disque spectral essentiel. On montre comment le spectre discret de l'opérateur symétrisable G et le spectre discret de l'opérateur symétrique SG sont liés par des inégalités appropriées utiles en pratique. Dans la Section 2.3, tout d'abord nous établissons, pour des opérateurs symétrisables généraux (pas forcément pleinement

symétrisables) G que les points de $\partial(\sigma(\widehat{G}))$ (la frontière topologique du spectre de G) qui ne sont pas des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie de $\widehat{G}$ sont inclus dans le disque essentiel de G. Ensuite, nous montrons que si G est fortement symétrisable alors G et $\widehat{G}$ ont les mêmes valeurs propres isolées, la même multiplicité des pôles correspondants et la même multiplicité des valeurs propres. En outre, on montre que G et $\widehat{G}$ ont le même spectre de Weyl. Enfin, nous montrons sous la condition (1.5.5) que le spectre essentiel de Schechter de G coïncide avec celui de Weyl.

2.2 Le spectre discret

2.2.1 Spectre discret positif de G

Nous commençons cette sous section par la

Définition. 2.2.1. *Pour tout opérateur borné O défini sur un espace de Hilbert complexe H on associe*

$$\alpha^+(O) := \inf\{\lambda > 0;\ \sigma(O) \cap (\lambda, +\infty) \text{ est constitué au plus de spectre discret}\}$$

et

$$\alpha^-(O) := \sup\{\lambda < 0;\ \sigma(O) \cap (-\infty, \lambda) \text{ est constitué au plus de spectre discret}\}$$

où le spectre discret désigne les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.

Il est facile de voir en général que

$$\max\left\{\alpha^+(O), -\alpha^-(O)\right\} \leq r_{ess}(O)$$

où $r_{ess}(O)$ est *le rayon spectral essentiel* de O. Cependant, notons que si G est symétrisable et si par exemple la condition (1.5.5) est vérifié alors le spectre de G est réel (voir [27] Corollaire 4) et donc

$$\max\left\{\alpha^+(G), -\alpha^-(G)\right\} = r_{ess}(G).$$

Dans le Théorème. 2.2.1, en suivant la stratégie de Reid [37], on fournit une description systématique des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie situées à l'extérieur de l'intervalle spectral essentiel

$$\left(\alpha^-(G), \alpha^+(G)\right).$$

En fait, nous nous limitons aux valeurs propres isolées de G situées dans l'intervalle $]\alpha^+(G), +\infty[$ puisque le spectre discret négatif de G est l'opposé du spectre discret de l'opérateur pleinement symétrique $-G$. Comme nous ne pouvons pas exclure a priori l'inégalité stricte

$$\alpha^+(G) < r_{ess}(G),$$

Dans ce dernier cas, les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie de G situé dans $(\alpha^+(G), r_{ess}(G))$ sont également capturées ; notons que ces valeurs propres sont incluses dans le disque spectral essentiel de G

$$\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq r_{ess}(G)\}.$$

Notre objectif dans cette sous section est de décrire le sous ensemble spectral de G

$$\sigma(G) \cap \Big(\alpha^+(G), +\infty\Big).$$

Les énoncés sur le spectre discret positif de G peuvent facilement se traduire en énoncés sur le spectre négatif discret de G.

Théorème. 2.2.1. *Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $G \in L(H)$ un opérateur pleinement symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif $S \in L(H)$. On suppose que*

$$\beta_1^+ := \sup_{\{x \in H;\ (Sx,x)=1\}} (SGx, x) > \alpha^+(G).$$

Alors :

(i) β_1^+ est une valeur propre isolée de G associée à un vecteur propre e_1^+ tel que $(Se_1^+, e_1^+) = 1$.

(ii) Soit

$$\beta_2^+ := \sup_{\left\{x \in H;\ (Sx,x)=1, (Sx, e_1^+)=0\right\}} (SGx, x).$$

Si $\beta_2^+ > \alpha^+(G)$ alors β_2^+ est une valeur propre isolée de G associée à un vecteur propre e_2^+ tel que $(Se_2^+, e_2^+) = 1$ et $(Se_2^+, e_1^+) = 0$.
Plus généralement, si nous avons déjà construit les valeurs propres

$$\beta_1^+, \beta_2^+, ..., \beta_{n-1}^+ > \alpha^+(G)$$

dont les vecteurs propres correspondants $e_1^+, e_2^+, ..., e_{n-1}^+$ satisfont

$$(Se_i^+, e_j^+) = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., n-1$$

et si

$$\beta_n^+ := \sup_{\left\{x \in H;\ (Sx,x)=1, (Sx, e_j^+)=0\ \forall j=1,2,...,n-1\right\}} (SGx, x) > \alpha^+(G) \tag{2.2.1}$$

alors β_n^+ est aussi une valeur propre isolée de G associée à un vecteur propre e_n^+ tel que $(Se_n^+, e_n^+) = 1$ et $(Se_n^+, e_j^+) = 0,\ \forall j = 1, 2, ..., n-1$.

Preuve
On observe tout d'abord que (1.5.7) implique que

$$\beta_1^+ = \sup_{\{x \in H;\ (Sx,x)=1\}} (SGx, x) \leq |G| < +\infty.$$

Pour l'instant nous avons juste besoin que $\beta_1^+ > 0$. Nous allons montrer que $\beta_1^+ \in \sigma(G)$. On procède par l'absurde en suivant la méthode de Reid. Il existe alors une sous suite $(x_n)_n \subset H$ telle que

$$(Sx_n, x_n) = 1, \quad (SGx_n, x_n) \to \beta_1^+ \text{ quand } n \to +\infty.$$

En particulier

$$(x_n, S(\beta_1^+ - G)x_n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{2.2.2}$$

Notons que

$$\beta_1^+ = \sup_{(Sx,x)\neq 0} \frac{(SGx, x)}{(Sx, x)}$$

donc

$$\beta_1^+(Sx, x) \geqslant (SGx, x) \quad \forall x \in H$$

et

$$(x, S(\beta_1^+ - G)) \geq 0 \quad \forall x \in H. \tag{2.2.3}$$

Supposons que $\beta_1^+ \in \rho(G)$. On désigne $(\beta_1^+ - G)^{-1}$ par $R(\beta_1^+)$. Soit

$$y_n := R(\beta_1^+)x_n.$$

On a

$$\begin{aligned}
(y_n, S(\beta_1^+ - G)y_n) &= (R(\beta_1^+)x_n, Sx_n) \\
&= (SR(\beta_1^+)x_n, x_n) \\
&\leq \left|R(\beta_1^+)\right| (Sx_n, x_n) \\
&= \left|R(\beta_1^+)\right| \qquad (2.2.4)
\end{aligned}$$

par (1.5.7) puisque $R(\beta_1^+)$ est symétrisable par S (Lemme.1.5.3) et

$$1 = (x_n, Sx_n) = (x_n, S(\beta_1^+ - G)y_n) = (S(\beta_1^+ - G)x_n, y_n). \tag{2.2.5}$$

On pose

$$z_n := x_n - \frac{y_n}{\left|R(\beta_1^+)\right|} \in H$$

et on observe que $(z_n, S(\beta_1^+ - G)z_n)$ est égale à

$$(x_n, S(\beta_1^+ - G)x_n) + \frac{1}{\left|R(\beta_1^+)\right|^2}(y_n, S(\beta_1^+ - G)y_n)$$
$$-\frac{1}{\left|R(\beta_1^+)\right|}(x_n, S(\beta_1^+ - G)y_n) - \frac{1}{\left|R(\beta_1^+)\right|}(y_n, S(\beta_1^+ - G)x_n)$$

de sorte que (2.2.5) implique

$$(z_n, S(\beta_1^+ - G)z_n = (x_n, S(\beta_1^+ - G)x_n) + \frac{1}{\left|R(\beta_1^+)\right|^2}(y_n, S(\beta_1^+ - G)y_n) - \frac{2}{\left|R(\beta_1^+)\right|}$$

et par conséquent (2.2.2) et (2.2.4) impliquent

$$(z_n, S(\beta_1^+ - G)z_n \leq (x_n, S(\beta_1^+ - G)x_n) - \frac{1}{\left|R(\beta_1^+)\right|} \to -\frac{1}{\left|R(\beta_1^+)\right|} \text{ quand } n \to +\infty.$$

ce qui contredit (2.2.3) pour n assez grand et montre que $\beta_1^+ \in \sigma(G)$. Comme $\beta_1^+ > \alpha^+(G)$ alors β_1^+ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de G.
Soit e_1^+ un vecteur propre de G associé à la valeur propre β_1^+. Comme G est pleinement symétrisable, alors $(Se_1^+, e_1^+) > 0$ et donc on peut le normaliser au sens suivant

$$(Se_1^+, e_1^+) = 1.$$

Supposons que nous avons construit $(\beta_k^+, e_k^+) \in \mathbb{R}_+^* \times H \quad (k = 1, ..., n-1)$ avec

$$\beta_k^+ > \alpha^+(G)$$

et

$$Ge_k^+ = \beta_k^+ e_k^+$$

avec

$$(Se_k^+, e_j^+) = \delta_{kj}.$$

On définit

$$H_n := \left\{x \in H; (Sx, e_k^+) = 0 \ \forall k = 1, ..., n-1\right\}$$

et

$$\beta_n^+ := \sup_{\{x \in H_n;\ (Sx,x)=1\}} (SGx, x).$$

On note que $\beta_n^+ < +\infty$ grâce à l'inégalité (1.5.7). On note aussi que G laisse invariant H_n puisque pour chaque $x \in H_n$ et pour tout $k = 1, ..., n-1$

$$(Gx, Se_k^+) = (SGx, e_k^+) = (x, SGe_k^+) = \beta_k^+(x, Se_k^+) = 0.$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned} G_n x &:= Gx - \sum_{k=1}^{n-1} (Gx, Se_k^+) e_k^+ \\ &= Gx - \sum_{k=1}^{n-1} (SGx, e_k^+) e_k^+ \\ &= Gx - \sum_{k=1}^{n-1} (x, SGe_k^+) e_k^+ \\ &= Gx - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k^+ (x, Se_k^+) e_k^+. \end{aligned}$$

Alors G_n est symétrisable par S et

$$G_n(x) = G(x) \ \ \forall x \in H_n.$$

En outre,

$$\begin{aligned}(G_n x, Se_j^+) &= (Gx, Se_j^+) - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k^+ (x, Se_k^+)(e_k^+, Se_j^+) \\ &= \beta_j^+(x, Se_j^+) - \beta_j^+(x, Se_j^+)(e_j^+, Se_j^+) = 0\end{aligned}$$

montre que

$$G_n x \in H_n \ \forall x \in H.$$

Il s'ensuit que

$$G_n x = \lambda x \Rightarrow x \in H_n \text{ et } Gx = \lambda x.$$

En particulier, G_n est pleinement symétrisable par S.
On a donc à présent

$$\begin{aligned}\beta_n^+ &= \sup_{\{x \in H_n;\ (Sx,x)=1\}} (SGx, x) \\ &= \sup_{\{x \in H_n;\ (Sx,x)=1\}} (SG_n x, x) \\ &= \sup_{\{y \in H\ \ (Sy,y)=1\}} (SG_n y, y)\end{aligned}$$

et la première étape de la preuve montre que β_n^+ est une valeur propre de G_n associée à $e_n^+ \in H$. Il s'ensuit que $e_n^+ \in H_n$ et $Ge_n^+ = \beta_n^+ e_n^+$. On peut bien entendu normaliser e_n^+ par $(Se_n^+, e_n^+) = 1$ car G est pleinement symétrisable.

□

Remarque. 2.2.1. *L'algorithme décrit dans le Théorème. 2.2.1 fournit toutes les valeurs propres de G situées dans l'intervalle $(\alpha^+(G), +\infty)$. En effet, soit $Gx = \alpha x$ pour certain $x \neq 0$ et $\alpha > \alpha^+(G)$. Si $\alpha \neq \beta_n^+ \ \forall n$ alors*

$$\alpha(Sx, e_n^+) = (SGx, e_n^+) = (x, SGe_n^+) = \beta_n^+(x, Se_n^+)$$

implique que $(x, Se_n^+) = 0 \ \forall n$. Alors la symétrisabilité pleine de G et la construction du Théorème. 2.2.1 donne

$$\alpha = \frac{(SGx, x)}{(Sx, x)} \leq \beta_n^+ \ \forall n$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $\alpha > \alpha^+(G)$.

Remarque. 2.2.2. *Notons que l'alternative suivante est vérifiée :*

(i) Soit $\beta_n^+ > \alpha^+(G) \ \forall n \in \mathbb{N}$ dans ce cas, on obtient une suite infinie $\left(\beta_j^+\right)_j$ de valeurs propres β_j^+ de G qui converge vers $\alpha^+(G)$. (En effet, $\left(\beta_j^+\right)_j$ décroissante et converge donc sa limite $l \geqslant \alpha^+(G)$ devrait être une valeur spectrale non isolée G et par conséquent $l = \alpha^+(G)$ par la définition de $\alpha^+(G)$)

(ii) ou bien il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $\beta_1^+, \beta_2^+, ..., \beta_{n-1}^+ > \alpha^+(G)$ et $\beta_n^+ \leq \alpha^+(G)$ dans ce cas, G a exactement $n-1$ valeurs propres $> \alpha^+(G)$.

Remarque. 2.2.3. *Notons que*

$$H = Ker(S) \oplus \overline{\Im(S)}$$

et il est facile de voir que

$$\beta_n^+ = \sup_{\{x\in H_n;\ (Sx,x)=1\}} (SGx,x) = \sup_{\left\{x\in \widetilde{H}_n;\ (Sx,x)=1\right\}} (SGx,x)$$

où

$$\widetilde{H}_n = \left\{x \in \overline{\Im(S)},\ (Sx, e_j^+) = 0\ \forall j = 1,2,...,n-1\right\}.$$

2.2.2 Caractérisations variationnelles

Les valeurs propres construites dans le Théorème. 2.2.1 sont caractérisées par :

Théorème. 2.2.2. *Supposons que les hypothèses du Théorème. 2.2.1 soient satisfaites. Soient $\beta_1^+ \geqslant \beta_2^+ \geqslant ... \geqslant \beta_n^+ \geqslant .. > \alpha^+(G)$ les valeurs propres de G répétées selon leurs multiplicités géométriques.*
Alors

$$\beta_n^+ = \inf_{E_{n-1}\in\mathcal{V}_{n-1}} \sup_{(Sx,x)=1,\ (Sx,y)=0\ \ \forall y\in E_{n-1}} (SGx,x)$$

où $\mathcal{V}_{n-1}$ désigne la classe des sous espaces E_{n-1} de $\overline{\Im(S)}$ de dimension $(n-1)$.

Preuve La preuve est similaire au cas où l'opérateur G est symétrisable à puissance compacte (voir [27] Théorème 5). Nous la rappelons pour la commodité du lecteur.
Remarquons d'abord que si U_n un espace engendré par $e_1^+, e_2^+, ..., e_n^+$. Alors

$$\beta_n^+ = \min_{x\in U_n,(Sx,x)=1} (SGx,x). \tag{2.2.6}$$

En effet, soit $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i^+$. Alors la propriété

$$(Se_i^+, e_j^+) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} le symbole de Kronecker, implique

$$\begin{aligned}(SGx,x) &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_i\overline{c_j}(SGe_i^+, e_j^+) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_i\overline{c_j}\beta_i^+(Se_i^+, e_j^+)\\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i^+\left|c_i\right|^2 \geq \beta_n^+\sum_{i=1}^n\left|c_i\right|^2 = \beta_n^+(Sx,x).\end{aligned}$$

Soit maintenant U_n l'espace engendré par les n vecteurs propres construits dans la preuve du Théorème. 2.2.1. D'après (2.2.6),

$$\beta_n^+ = \inf_{x\in U_n,(Sx,x)=1} (SGx,x). \tag{2.2.7}$$

Soit $E_{n-1} \in \mathcal{V}_{n-1}$. Nous allons montrer que

$$\beta_n^+ \leq \sup_{(Sx,x)=1,\ (Sx,y)=0\ \forall y \in E_{n-1}} (SGx, x).$$

Notons que l'espace

$$\widehat{E}_{n-1} := \left\{ x \in \overline{\Im(S)}; (Sx, y) = 0 \forall y \in E_{n-1} \right\}$$

est de codimension $n-1$ et par conséquant $\widehat{E}_{n-1} \cap U_n$ est non triviale.
Soit

$$\overline{x} \in \widehat{E}_{n-1} \cap U_n - \{0\} \ \ \textit{tel que } (S\overline{x}, \overline{x}) = 1.$$

L'égalité (2.2.7) montre que

$$\beta_n^+ \leq (SG\overline{x}, \overline{x}) \leq \sup_{(Sx,x)=1,\ (Sx,y)=0\ \forall y \in E_{n-1}} (SGx, x).$$

D'où

$$\beta_n^+ \leq \inf_{E_{n-1} \in \mathcal{V}_{n-1}} \sup_{(Sx,x)=1,\ (Sx,y)=0\ \forall y \in E_{n-1}} (SGx, x).$$

D'autre part, par construction

$$\beta_n^+ = \sup_{(Sx,x)=1,\ (Sx,y)=0\ \forall y \in U_{n-1}} (SGx, x)$$

ce qui finit la preuve.

□

Théorème. 2.2.3. *Supposons que les hypothèses du Théorème. 2.2.1 soient satisfaites. Soient* $\beta_1^+ \geqslant \beta_2^+ \geqslant ... \geqslant \beta_n^+ \geqslant .. > \alpha^+(G)$ *les valeurs propres de* G *répétées selon leurs multiplicités géométriques finies. Alors*

$$\beta_n^+ = \sup_{E_n \in \mathcal{V}_n} \inf_{x \in E_n, (Sx,x)=1} (SGx, x)$$

où $\mathcal{V}_n$ *désigne la classe de sous espaces* E_n *de* $\overline{\Im(S)}$ *de dimension* n.

Preuve Grâce à (2.2.6), il suffit de montrer que

$$\beta_n^+ \geq \inf_{x \in E_n, (Sx,x)=1} (SGx, x).$$

Soit $E_n \in \mathcal{V}_n$. L'espace

$$\widehat{F}_{n-1} := \left\{ x \in \overline{\Im(S)}, (sx, y) = 0 \forall y \in U_{n-1} \right\}$$

est de codimension $n-1$ de sorte que $\widehat{F}_{n-1} \cap E_n$ est non triviale.
Soit

$$\overline{x} \in \widehat{F}_{n-1} \cap E_n - \{0\} \ \ \textit{tel que } (S\overline{x}, \overline{x}) = 1.$$

Alors par construction de $\beta_n^+ \leq (SG\overline{x}, \overline{x})$ ce qui finit la preuve.

□

Les preuves du Théorème. 2.2.2 et du Théorème. 2.2.3 sont basées *a priori* sur l'existence de valeurs propres $\beta_1^+ \geqslant \beta_2^+ \geqslant ... \geqslant \beta_n^+ \geqslant .. > \alpha^+(G)$.
Nous donnons maintenant des énoncés qui ont plus d'intérêt pratique et on se bornera à des énoncés de type $\sup - \inf$.
On définit

$$\alpha_n^+ := \sup_{E_n \in \mathcal{V}_n} \inf_{x \in E_n, (Sx,x)=1} (SGx, x), \quad n \in \mathbb{N}$$

où $\mathcal{V}_n$ est la classe des sous espaces E_n de $\overline{\Im(S)}$ de dimension n.

Théorème. 2.2.4. *Supposons que les hypothèses du Théorème. 2.2.1 soient satisfaites. Si G a m valeurs propres $> \alpha^+(G)$ (comptées selon leurs multiplicités) alors*

$$\alpha_n^+ \leq \alpha^+(G) \quad \forall n > m.$$

Preuve Puisque $(\alpha_n^+)_n$ est décroissante alors il suffit de montrer que $\alpha_{m+1}^+ \leq \alpha^+(G)$. Si on avait $\alpha_{m+1}^+ > \alpha^+(G)$ alors il existerait $E_{m+1} \in \mathcal{V}_{m+1}$ tel que

$$\inf_{x \in E_{m+1}, (Sx,x)=1} (SGx, x) > \alpha^+(G)$$

i.e.

$$(SGx, x) > \alpha^+(G) \quad \forall x \in E_{m+1}, (Sx, x) = 1. \tag{2.2.8}$$

Selon la Remarque.2.2.2 (ii), $\beta_{m+1}^+ \leq \alpha^+(G)$. D'autre part, par la Remarque.2.2.2

$$\beta_{m+1}^+ = \sup_{\left\{x \in \widetilde{H}_{m+1};\ (Sx,x)=1\right\}} (SGx, x)$$

de telle sorte que

$$(SGx, x) \leq \alpha^+(G) \ \forall x \in \widetilde{H}_{m+1};\ (Sx, x) = 1. \tag{2.2.9}$$

Comme $\widetilde{H}_{m+1}$ est de codimension m et E_{m+1} est de dimension $m+1$ on a

$$\widetilde{H}_{m+1} \cap E_{m+1} \neq \{0\}$$

et on voit que (2.2.8) et (2.2.9) conduisent à une contradiction.

□

Remarque. 2.2.4. *Nous conjecturons que $\alpha_n^+ = \alpha^+(G) \quad \forall n > m$; (voir le Théorème. 2.3.6 ci-dessous où cette propriété est montrée sous une hypoythèse supplementaire).*

Corollaire. 2.2.1. *Supposons que les hypothèses du Théorème. 2.2.1 soient satisfaites et soit $n \geqslant 2$. Si*

$$\alpha_n^+ > \alpha^+(G) \tag{2.2.10}$$

alors G a au moins n valeurs propres $> \alpha^+(G)$. En particulier le nombre des valeurs propres de G supérieures à $\alpha^+(G)$ est égal au plus grand n qui satisfait (2.2.10).

Preuve. Soit m le nombre de valeurs propres de G supérieur à $\alpha^+(G)$. D'après le Théorème. 2.2.4

$$\alpha_k^+ \leq \alpha^+(G)\ \forall k \geqslant m+1.$$

Si $m < n$ alors $m+1 \leq n$ et cela contredit (2.2.10).

□

Proposition. 2.2.1. ***(Les estimations de stabilité)***
Supposons que G_1 et G_2 soient pleinement symétrisables par S et si G_1 (resp. G_2) a au moins n valeurs propres $\beta_1^{1+} \geqslant \beta_2^{1+} \geqslant ... \geqslant \beta_n^{1+} > \alpha^+(G_1)$ (resp. $\beta_1^{2+} \geqslant \beta_2^{2+} \geqslant ... \geqslant \beta_n^{2+} > \alpha^+(G_2)$) alors

$$\left|\beta_j^{2+} - \beta_j^{1+}\right| \leq r_\sigma(G_2 - G_1) \quad \forall j = 1, ..., n.$$

Preuve En argumentant comme dans le cas des opérateurs symétrisables à puissance compacte (voir [27] Théorème 8), soit $E_n \subset \overline{Im(S)}$ un sous espace de dimension n et soit

$$G = G_2 - G_1.$$

D'après le Théorème. 2.2.3

$$\begin{aligned}
\beta_n^{2+} &\geq \min_{(Sx,x)=1, x\in E_n} (SG_2x, x) \\
&= \min_{(Sx,x)=1, x\in E_n} ((SGx, x) + (SG_1x, x)) \\
&\geq \min_{(Sx,x)=1, x\in E_n} (SGx, x) + \min_{(Sx,x)=1, x\in E_n} (SG_1x, x) \\
&\geq \beta_n^{1+} + \min_{(Sx,x)=1, x\in E_n} (SGx, x) \\
&\geq \beta_n^{1+} + \min_{(Sx,x)=1} (SGx, x).
\end{aligned}$$

D'une manière analogue

$$\begin{aligned}
\beta_n^{1+} &\geq \min_{(Sx,x)=1, x\in E_n} (SG_1x, x) \\
&= \min_{(Sx,x)=1, x\in E_n} (-(SGx, x) + (SG_1x, x)) \\
&\geq \min_{(Sx,x)=1, x\in E_n} (SG_2x, x) + \min_{(Sx,x)=1, x\in E_n} (-(SGx, x)) \\
&\geq \beta_n^{2+} - \max_{(Sx,x)=1, x\in E_n} (SGx, x) \\
&\geq \beta_n^{2+} - \max_{(Sx,x)=1} (SGx, x).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\left|\beta_n^{2+} - \beta_n^{1+}\right| \leq \max_{(Sx,x)=1} |(SGx, x)|\,.$$

Or G est symétrisable par S et donc

$$\max_{(Sx,x)=1,} |(SGx, x)| \leq r_\sigma(G)$$

(voir Théorème 1 dans [27]) et cela finit la preuve.

□

Nous terminons cette section par quelques développements en série concernant les valeurs propres isolées de G situées à l'extérieur de son disque essentiel.

Théorème. 2.2.5. *Supposons que les hypothèses du Théorème. 2.2.1 sont satisfaites. Soit* $\beta_1^+ \geqslant \beta_2^+ \geqslant ... \geqslant \beta_n^+ \geqslant .. > \alpha^+(G)$ *les valeurs propres de* G *(comptées selon leurs multiplicités). Alors*

(i) $(Sx, x) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|(x, Se_k^+)\right|^2$.

(ii) $(SGx, x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^+ \left|(x, Se_k^+)\right|^2 + \alpha^+(G)(Sx, x)$.

(iii) La série $\sum_{k=1}^{\infty}(x, Se_k^+)e_k^+$ *converge dans l'espace (completé)* H_2^c *pour la (semi)-norme*

$$\|x\| := \sqrt{(Sx, x)}.$$

(iv) La série $\sum_{k=1}^{\infty}(x, Se_k^+)\sqrt{S}e_k^+$ *converge dans* H.

Preuve.

(i) Soit $x \in H$ et

$$x_n := x - \sum_{j=1}^{n}(x, Se_j^+)e_j^+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors $(Sx_n, e_j^+) = 0 \;\; \forall j = 1, ..., n$ so

$$(Sx, x) = (Sx_n, x_n) + \sum_{j=1}^{n} \left|(x, Se_j^+)\right|^2 \geqslant \sum_{j=1}^{n} \left|(x, Se_j^+)\right|^2 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.2.11}$$

ce qui établit (i).

(ii) De la même manière que dans la preuve du Théorème. 2.2.1

$$\begin{aligned} Gx_n &= Gx - \sum_{j=1}^{n}(x, Se_j^+)Ge_j^+ \\ &= Gx - \sum_{j=1}^{n} \beta_j^+(x, Se_j^+)e_j^+ \\ &= Gx - \sum_{j=1}^{n}(x, SGe_j^+)e_j^+ \\ &= Gx - \sum_{j=1}^{n}(SGx, e_j^+)e_j^+ \\ &= Gx - \sum_{j=1}^{n}(Gx, Se_j^+)e_j^+ \\ &= G_n x \end{aligned}$$

donc $(SGx_n, e_j^+) = 0 \; \forall j = 1, ..., n$ et alors

$$(SGx,x) = (SGx_n,x_n) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^+ \left|(x,Se_j^+)\right|^2.$$

En outre, comme $(Sx_n, e_j^+) = 0 \ \ \forall j = 1, ..., n$, (i.e. $x_n \in H_{n+1}$) alors

$$(SGx_n, x_n) \le \beta_{n+1}^+ (Sx_n, x_n) \le \beta_{n+1}^+ (Sx, x)$$

puisque $(Sx_n, x_n) \le (Sx, x)$ (voir (2.2.11)). En faisant tendre $n \to \infty$ ce qui prouve (ii) car $\beta_n^+ \to \alpha^+(G)$, voir la Remarque.2.2.2.

(iii) Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (x, Se_k^+) e_k^+.$$

Alors pour $m > n$

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|^2 &= (S(u_n - u_m), u_n - u_m) \\
&= (S(\sum_{k=n+1}^{m} (x, Se_k^+) e_k^+), \sum_{j=n+1}^{m} (x, Se_j^+) e_j^+)) \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{j=n+1}^{m} (x, Se_k^+) \overline{(x, Se_j^+)} (Se_k^+, e_j^+) \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \left|(x, Se_k^+)\right|^2 \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

(iv) La suite $(\sqrt{S} u_n)_n$ converge dans H puisque

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{S} u_n - \sqrt{S} u_m\right|^2 &= (\sqrt{S}(u_n - u_m), \sqrt{S}(u_n - u_m)) \\
&= (S(u_n - u_m), u_n - u_m) \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \left|(x, Se_k^+)\right|^2 \to 0 \text{ quand } n \to +\infty
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

$\square$

Remarque. 2.2.5. *On observe que si* $\alpha^+(G) = 0$ *(par exemple si une certaine puissance de* G *est compacte) et si* $SG \geqslant 0$ *alors les arguments ci-dessus montrent que* $(SGx_n, x_n) \to 0$ *et que*

$$(SGx, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_j^+ \left|(x, Se_k^+)\right|^2.$$

(Si SG *n'est pas positif alors on prend en compte également les valeurs propres négatives de* G *et on trouve de nouveau le résultat de Reid [37]).*

2.2.3 Des inégalités spectrales

Nous comparons maintenant le spectre discret de l'opérateur symétrisable G à celui de l'opérateur auto-adjoint SG.

Théorème. 2.2.6. *Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $G \in L(H)$ un opérateur pleinement symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif $S \in L(H)$. On définit la suite $(\beta_n^+)_n$ par*

$$\beta_n^+ := \sup_{\left\{x\in H;\ (Sx,x)=1,(Sx,e_j^+)=0\ \forall j=1,2,\ldots,n-1\right\}} (SGx,x) > \alpha^+(G). \tag{2.2.12}$$

Alors

$$\beta_1^+ \geqslant |S|^{-1} \sup_{|x|=1} (SGx,x).$$

En particulier, si

$$\sup_{|x|=1} (SGx,x) > |S|\,\alpha^+(G)$$

alors β_1^+ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de G.
Plus généralement, soit

$$\gamma_n^+ := \sup_{E_n,\ \dim E_n=n}\ \inf_{x\in E_n,|x|=1} (SGx,x), \quad n\in\mathbb{N}$$

où E_n un sous espace de H de dimension n.
Alors

$$\beta_n^+ \geqslant |S|^{-1}\,\gamma_n^+, \quad n\in\mathbb{N}.$$

En particulier, si

$$M := \sup\left\{n;\gamma_n^+ > |S|\,\alpha^+(G)\right\}$$

alors G a au moins M valeurs propres supérieures à $\alpha^+(G)$.

Preuve

Nous observons tout d'abord que G laisse invariant le noyau de S d'après le Lemme.1.5.2 de sorte que $(SGx,x) = (SGy,y)$ où y est la projection orthogonale de x sur $\overline{\Im(S)}$. En particulier

$$\gamma_n^+ = \sup_{E_n\in\mathcal{V}_n}\ \inf_{x\in E_n,|x|=1} (SGx,x), \quad n\in\mathbb{N}$$

où $\mathcal{V}_n$ est la classe des sous espaces E_n de $\overline{\Im(S)}$ de dimension n.

Maintenant

$$\begin{aligned}
\beta_n^+ &= \sup_{E_n\in\mathcal{V}_n}\ \inf_{x\in E_n,(Sx,x)=1} (SGx,x)\\
&= \sup_{E_n\in\mathcal{V}_n}\ \inf_{x\in E_n} \frac{(SGx,x)}{(Sx,x)}\\
&= \sup_{E_n\in\mathcal{V}_n}\ \inf_{x\in E_n} \left(\frac{(SGx,x)}{|x|^2}\frac{|x|^2}{(Sx,x)}\right)\\
&\geqslant |S|^{-1} \sup_{E_n\in\mathcal{V}_n}\ \inf_{x\in E_n} \frac{(SGx,x)}{|x|^2} = |S|^{-1}\,\gamma_n^+
\end{aligned}$$

puisque $(Sx,x) \leq |S|\,|x|^2$.

$\square$

Remarque. 2.2.6. *Notons que si*

$$\alpha^+(SG) := \inf\{\lambda > 0;\ \sigma(SG)\cap(\lambda,+\infty)\ \textit{ est constitué au plus de spectre discret }\}$$

et si $\gamma_n^+ > \alpha^+(SG)$ alors γ_n^+ est la n-ième valeur propre positive de SG.

2.3 Spectre essentiel de G

2.3.1 Un résultat général

Soit G un opérateur symétrisable (pas forcément pleinement symétrisable). Nous établissons un lien entre le rayon essentiel de G et *la frontière topologique* $\partial(\sigma(\widehat{G}))$ du spectre de $\widehat{G}$.

Théorème. 2.3.1. *Soit $G \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif $S \in \mathcal{L}(H)$ et soit $\partial(\sigma(\widehat{G}))$ la frontière topologique de $\sigma(\widehat{G})$. Soit $\lambda \in \partial(\sigma(\widehat{G}))$. Si λ n'est pas une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de $\widehat{G}$ alors*

$$|\lambda| \leq r_{ess}(G). \tag{2.3.13}$$

Preuve :

On procède par l'absurde en affirmant que

$$|\lambda| > r_{ess}(G). \tag{2.3.14}$$

D'où λ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de G. Il s'ensuit que $\overline{\lambda}$ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de G^*. Alors il existe un voisinage $V(\overline{\lambda})$ de $\overline{\lambda}$ tel que $(\mu - G^*)$ est inversible pour chaque $\mu \in V(\overline{\lambda}) - \left\{\overline{\lambda}\right\}$.
Notons que

$$V(\overline{\lambda}) - \left\{\overline{\lambda}\right\} \subset \mathcal{U}$$

où $\mathcal{U}$ est une composante connexe *non borné* de $\rho(G^*)$ puisque $\left|\overline{\lambda}\right| > r_{ess}(G^*)$.
D'après Lemme.1.5.2, G^* laisse invariant H_2; (on note par G_2^* la *restriction* de G^* à H_2).
Nous allons montrer que $(\mu - G^*)^{-1}$ aussi laisse invariant H_2 pour *chaque* $\mu \in V(\overline{\lambda}) - \left\{\overline{\lambda}\right\}$ et

$$(\mu - G^*)^{-1}_{|H_2} = (\mu - G^*_{|H_2})^{-1}.$$

Soit

$$\Lambda := \left\{\mu \in \mathcal{U},\ (\mu - G^*)^{-1} \text{ laisse invariant } H_2\right\}.$$

Alors Λ est ouvert car, pour $|\alpha - \mu| < |(\mu - G^*)^{-1}|^{-1}$,

$$(\alpha - G^*)^{-1} = \sum_0^{+\infty} (\mu - \alpha)^n \left[(\mu - G^*)^{-1}\right]^{n+1}$$

et évidement Λ est fermé dans $\mathcal{U}$ puisque H_2 est un sous espace fermé. Enfin

$$\{\mu;\ |\mu| > |G^*|\} \subset \Lambda$$

car

$$(\mu - G^*)^{-1} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\mu^{n+1}} (G^*)^n$$

pour tout $|\mu| > |G^*|$. Comme Λ est non vide, ouvert et fermé à la fois, alors Λ coïncide avec $\mathcal{U}$. Ainsi $\mu - G^*_{|H_2}$ est inversible pour chaque $\mu \in V(\overline{\lambda}) - \left\{\overline{\lambda}\right\}$ et

$$(\mu - G^*)^{-1}_{|H_2} = (\mu - G^*_{|H_2})^{-1} = (\mu - G_2^*)^{-1}.$$

De l'autre côté, si $p \in \mathbb{N}^*$ est l'ordre de pôle $\overline{\lambda}$ alors

$$(\mu - G^*)^{-1} = \sum_{k=-p}^{\infty} (\mu - \overline{\lambda})^k A_k \tag{2.3.15}$$

où

$$A_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\mu - \overline{\lambda}| = \varepsilon} \frac{(\mu - G^*)^{-1}}{(\mu - \overline{\lambda})^{k+1}} d\mu$$

(avec un cercle $\left\{\mu; \left|\mu - \overline{\lambda}\right| = \varepsilon\right\}$ positivement orienté) et

$$A_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\mu - \overline{\lambda}| = \varepsilon} (\mu - G^*)^{-1} d\mu$$

est la projection spectrale (de rang fini) associée à $\overline{\lambda}$. Notons que chaque A_k laisse invariant H_2.

Rappellons finalement que G_2^* n'est rien d'autre que l'adjoint de $\widehat{G}$

$$(\widehat{G})^* = G_2^* \tag{2.3.16}$$

(voir (9) dans la preuve du Theorem 1 de [27]).

Si $\overline{\lambda}$ est dans l'ensemble résolvant de G_2^* alors par (2.3.16) λ est dans l'ensemble résolvant de $\widehat{G}$ ce qui n'est pas possible (car $\lambda \in \partial(\sigma(\widehat{G}))$). D'où $\overline{\lambda} \in \sigma(G_2^*)$ et donc la restriction de (2.3.15) à H_2 montre que $\overline{\lambda}$ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de G_2^* . Encore d'après (2.3.16),λ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de $\widehat{G}$ ce qui contredit l'hypothèse du Théorème, et termine la preuve.

□

Remarque. 2.3.1. *Sous une hypothèse supplémentaire on peut améliorer le Théorème. 2.3.1, voir le Théorème. 2.3.3 ci-dessous.*

2.3.2 Opérateurs fortement symétrisables

Rappelons tout d'abord le résultat de Nieto :

Théorème. 2.3.2. *([35] Theorem 1) Soi G un opérateur symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif **injectif** S. Alors le spectre essentiel de Schechter de G est le complémentaire (dans $\sigma(G)$) des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. De plus, les pôles correspondants sont simples (i.e. les valeurs propres sont semi-simples).*

Nous nous occupons maintenant du cas où le symétriseur S **n'est pas injectif**. Dans le cas où G est fortement symétrisable, nous étudions toutes les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie de G et une partie de $\sigma_{ess}(G)$ appelée le spectre essentiel de Weyl (voir la définition.2.3.1 ci-dessous).
On rappelle que G laisse invariant $H_1 := Ker(S)$ (Lemme.1.5.2). Il s'ensuit de la forte symétrisabilité de G (i.e. $Ker(S) \subset Ker(G)$) que

$$G = GP.$$

D'un autre côté, S laisse invariant H_2 et $\widehat{G}$ est symétrisable par S. On peut donc appliquer le Théorème. 2.3.2 sur $\widehat{G}$ (car S est injectif sur H_2) et on obtient :

Corollaire. 2.3.1. *Soit G un opérateur symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif S. Alors le spectre essentiel de Schechter de $\widehat{G}$ est le complémentaire des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie de $\widehat{G}$ dans $\sigma(\widehat{G})$. De plus, les pôles correspondants sont simples.*

On peut alors completer le résultat de Nieto par :

Théorème. 2.3.3. *Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $G \in L(H)$ un opérateur fortement symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif $S \in L(H)$. Alors G partage avec $\widehat{G}$ les mêmes valeurs propres isolées, les pôles correspondants sont simples et la multiplicité algébrique (ou géométrique) sont égales.*

Preuve D'après ([4] Théorème 9), GP et PG ont les mêmes valeurs propres isolées (non nulles) avec la même multiplicité des pôles correspondants et la même multiplicité algébrique. D'où G et PG ont les mêmes valeurs propres isolées (non nulles) avec la même multiplicité de pôles correspondante et la même multiplicité algébrique. Nous allons comparer certaines propriétés spectrales de PG et $\widehat{G}$
Soit $\lambda \in \rho(GP) - \{0\}$.
L'équation dans H_2

$$\lambda x - \widehat{G}x = y \in H_2$$

revient à chercher $x \in H_2$ tel que

$$\lambda x - PGx = y \tag{2.3.17}$$

donc x est donné par $(\lambda - PG)^{-1}y$ et appartient à H_2 puisque $y \in H_2$. Ainsi $(\lambda - \widehat{G})^{-1}$ est la restriction de $(\lambda - PG)^{-1}$ à H_2. Inversement, soit $\lambda \in \rho(\widehat{G}) - \{0\}$, et considérons le problème

$$\lambda x - PGx = y \in H.$$

Alors

$$\lambda(I - P)x = (I - P)y$$

donc

$$(I - P)x = \frac{1}{\lambda}(I - P)y.$$

D'autre part,

$$\lambda Px - PGx = Py$$

et $Gx = G(Px)$ puisque $Ker(S) \subset Ker(G)$, donc

$$\lambda Px - PG(Px) = Py$$

i.e.

$$\lambda Px - \widehat{G}(Px) = Py$$

et

$$Px = (\lambda - \widehat{G})^{-1}Py.$$

D'où $\rho(PG) - \{0\} = \rho(\widehat{G}) - \{0\}$ et

$$(\lambda - PG)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - P) + (\lambda - \widehat{G})^{-1}P. \tag{2.3.18}$$

Soit $\overline{\lambda} \neq 0$ une valeur spectrale de PG et de $\widehat{G}$. On note que l'égalité (2.3.18) montre que

$$(\lambda - PG)^{-1} \ et \ (\lambda - \widehat{G})^{-1}P$$

ont la même partie principale autour de $\overline{\lambda}$ et par conséquent l'ordre des pôles est identique. De plus si $\Gamma(\overline{\lambda}, \varepsilon)$ est un petit cercle centré en $\overline{\lambda}$, de rayon ε et positivement orienté alors le Théorème de Cauchy donne

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(\overline{\lambda},\varepsilon)} (\lambda - PG)^{-1} d\lambda &= \int_{\Gamma(\overline{\lambda},\varepsilon)} \left[\frac{1}{\lambda}(I - P) + (\lambda - \widehat{G})^{-1}P\right] d\lambda \\ &= \int_{\Gamma(\overline{\lambda},\varepsilon)} (\lambda - \widehat{G})^{-1}P d\lambda = \left[\int_{\Gamma(\overline{\lambda},\varepsilon)} (\lambda - \widehat{G})^{-1} d\lambda\right] P \end{aligned}$$

et

$$Q_{PG} = Q_{\widehat{G}}P$$

où Q_{PG} (resp. $Q_{\widehat{G}}$) est la projection spectrale du PG (resp. $\widehat{G}$) associée à $\overline{\lambda}$. D'où le rang de Q_{PG} est fini si et seulement si le rang de $Q_{\widehat{G}}$ l'est et les deux rangs ont la même dimension. Ainsi PG et $\widehat{G}$ ont les mêmes valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie non nulles, le même ordre du pôle et la même multiplicité algébrique. Il s'ensuit que G et $\widehat{G}$ ont les mêmes valeurs propres isolées (non nulles) avec la même multiplicité des pôles correspondants et la même multiplicité algébrique.

$\square$

Remarque. 2.3.2. *La Proposition.1.5.3 et le Théorème. 2.3.2 montrent en particulier que si* G *est fortement symétrisable alors* G *et* $\widehat{G}$ *ont le même rayon essentiel.*

Corollaire. 2.3.2. *Soit* H *un espace de Hilbert complexe et soit* $G \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur fortement symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif* $S \in \mathcal{L}(H)$. *Alors*

$$\alpha^+(\widehat{G}_c) \leq \alpha^+(G).$$

Preuve En combinant la Proposition.1.5.2, Proposition.1.5.3 et le Théorème. 2.3.3 on voit que

$$\sigma(\widehat{G}_c) - \{0\} \subset \sigma(G) - \{0\}$$

et G et $\widehat{G}_c$ partagent les mêmes valeurs propres isolées et la même multiplicité algébrique (ou géométrique). Ainsi pour chaque valeur spectrale $\lambda \in \sigma(\widehat{G}_c)$ telle que $\lambda > \alpha^+(G)$, λ est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de $\widehat{G}_c$ et donc $\alpha^+(\widehat{G}_c) \leq \alpha^+(G)$.

$\square$

Remarque. 2.3.3. *En général, pour un opérateur fortement symétrisable* G, *il est difficile de savoir si* $\alpha^+(\widehat{G}_c) = \alpha^+(G)$. *On note cependant que si* $\beta_n^+ > \alpha^+(G)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ *alors* $(\beta_n^+)_n$ *converge vers* $\alpha^+(G)$ *(voir la Remarque.2.2.2) ; dans ce cas, on a bien l'égalité* $\alpha^+(\widehat{G}_c) = \alpha^+(G)$.

Définition. 2.3.1. *Soit* $B \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Une suite singulière de Weyl associée à* λ *est une suite* $(x_n)_n \subset H$ *telle que* $|x_n| = 1$**,** $x_n \rightharpoonup 0$ ***(convergence faible)*** *et que*

$$|Bx_n - \lambda x_n| \to 0.$$

Nous appellons le spectre essentiel de Weyl, et on le note par $\sigma_{ess}^w(B)$, *l'ensemble de* λ *qui admet une suite singulière de Weyl.*

Remarque. 2.3.4. *Notons que, a priori* $\sigma_{ess}^w(B) \subset \sigma_{ess}(B)$ *où* $\sigma_{ess}(B)$ *désigne le spectre essentiel de Schechter de* B. *En effet, si* $|x_n| = 1$**,** $x_n \rightharpoonup 0$ *alors* $|Kx_n| \to 0$ *pour tout* $K \in \mathcal{K}(H)$ *et* $|Bx_n - \lambda x_n| \to 0$ *si et seulement si*

$$|Bx_n + Kx_n - \lambda x_n| \to 0.$$

Notons aussi que $\sigma_{ess}^w(B) = \sigma_{ess}(B)$ *si* B *est auto-adjoint, voir par exemple [14] Theorem 1.6 (i), p. 417.*

Nous complétons le Théorème. 2.3.3 par le Théorème suivant :

Théorème. 2.3.4. *Soit* H *un espace de Hilbert complexe et soit* $G \in L(H)$ *un opérateur fortement symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif* $S \in L(H)$. *Alors*

$$\sigma_{ess}^w(\widehat{G}) - \{0\} = \sigma_{ess}^w(G) - \{0\}.$$

Preuve

Soit $\lambda \in \sigma_{ess}^{w}(\widehat{G}) - \{0\}$. Alors il existe une suite $(x_n)_n \subset H_2$ telle que $|x_n| = 1$, $x_n \rightharpoonup 0$ et

$$\left|\widehat{G}x_n - \lambda x_n\right| \to 0,\ x_n \in H_2$$

i.e.

$$|PGx_n - \lambda x_n| \to 0,\ x_n \in H_2.$$

Soit

$$z_n := \frac{1}{\lambda}(I-P)Gx_n.$$

Alors

$$z_n \in Ker(S) \text{ et } z_n \rightharpoonup 0$$

puisque l'application $(I-P)G$ est faiblement continue.
Soit

$$y_n := x_n + z_n.$$

Alors $(y_n)_n$ est borné, $y_n \rightharpoonup 0$ et

$$|y_n| = \sqrt{|x_n|^2 + |z_n|^2} \geqslant |x_n| = 1$$

puisque l'image de P et $I-P$ sont orthogonales. On note que

$$Gy_n = Gx_n$$

car $(z_n)_n \subset Ker(S)$ (i.e. l'image de $I-P$) et $Ker(S) \subset Ker(G)$. Finalement

$$\begin{aligned} Gy_n - \lambda y_n &= PGx_n + (I-P)Gx_n - \lambda x_n - \lambda z_n \\ &= PGx_n - \lambda x_n \end{aligned}$$

cela montre que $|Gy_n - \lambda y_n| \to 0$ et que $\lambda \in \sigma_{ess}^{w}(G)$. Inversement, soit $\lambda \in \sigma_{ess}^{w}(G) - \{0\}$ et soit $(x_n)_n \subset H$ la suite de Weyl associée à λ. Alors

$$|Gx_n - \lambda x_n| \to 0$$

ou d'une façon équivalente

$$|GPx_n - \lambda x_n| \to 0$$

puisque $G = GP$. La suite $\{|Px_n|\}_n$ est minorée. En effet, supposons que $\{|Px_n|\}_n$ n'est pas minorée, alors il existe une sous suite $\{|Px_{n_k}|\}_k$ de $\{|Px_n|\}_n$ telle que $|Px_{n_k}| \to 0$ quand $k \to +\infty$
or

$$|\lambda| = |\lambda x_{n_k}| \leq |GPx_{n_k} - \lambda x_{n_k}| + |GPx_{n_k}| \to 0 \text{ quand } k \to +\infty.$$

ce qui est absurde.
Posons

$$t_n := \left\{\frac{Px_n}{|Px_n|}\right\}_n.$$

Alors $|t_n| = 1$, $t_n \rightharpoonup 0$ (puisque P est faiblement continue) et

$$|PGt_n - \lambda t_n| \to 0,$$

puisque

$$|PGPx_n - \lambda Px_n| \to 0.$$

D'où $\lambda \in \sigma(\widehat{G}) - \{0\}$.

$\square$

Sous l'hypothèse (1.5.5) qui est une condition *suffisante* (mais pas nécessaire) de la forte symétrisabilité, nous avons une compréhension plus précise du spectre essentiel de G.

Théorème. 2.3.5. *Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $G \in L(H)$ un opérateur symétrisable par un opérateur auto-adjoint positif $S \in L(H)$. On suppose que la condition* (1.5.5) *est vérifiée. Alors le spectre essentiel de Schechter de G est égal au spectre essentiel de Weyl*

$$\sigma_{ess}(G) = \sigma_{ess}^{w}(G). \tag{2.3.19}$$

Preuve

On a d'une part, d'après, la Proposition.1.5.3 et le Corollaire.1.5.1 que

$$\sigma(G) - \{0\} = \sigma(\widehat{G}_c) - \{0\} = \sigma(\widehat{G}) - \{0\}.$$

D'autre part, d'après la Proposition.1.5.2, $\widehat{G}_c$ et $\widehat{G}$ ont les mêmes valeurs propres isolées de multiplicité finie, donc ils ont le même complémentaire spectral (non nul) de ces valeurs propres isolées. Or d'un côté, ce complémentaire est égal au *spectre essentiel de Weyl* de $\widehat{G}_c$ puisque $\widehat{G}_c$ est auto-adjoint (voir [27], preuve du Théorème 1) et de l'autre, on a d'apès le Corollaire.2.3.1 que ce complémentaire est égal au spectre essentiel de Schechter de $\widehat{G}$.
D'où

$$\sigma_{ess}^{w}(\widehat{G}_c) = \sigma_{ess}(\widehat{G}).$$

Ainsi, $\lambda \neq 0$ appartient au spectre essentiel de Schechter de $\widehat{G}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n \subset H_2^c$ telle que

$$\|x_n\| = \sqrt{(x_n, Sx_n)} = 1, x_n \rightharpoonup 0 \textit{ (faiblement) dans } H_2^c$$

et que

$$\left\|\widehat{G}_c x_n - \lambda x_n\right\| \to 0.$$

En particulier, pour n assez grand la suite $\left(\left\|\widehat{G}_c x_n\right\|\right)_n$ *est minorée*, puisque $\lambda \neq 0$.
En outre l'application

$$\widehat{G}_c : (H_2^c, \|.\|) \to (H_2, |.|)$$

est continue puisque

$$|Gx| \leq c \left|\sqrt{S}x\right|, \ x \in H.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\widehat{G}_c\left(\widehat{G}_c x_n - \lambda x_n\right)\right| = \left|\widehat{G}_c\left(\widehat{G}_c x_n\right) - \lambda \widehat{G}_c x_n\right| \to 0.$$

On pose

$$(y_n)_n := \left(\widehat{G}_c x_n\right)_n$$

alors y_n est bornée dans H_2, $y_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H_2 puisque l'opérateur

$$\widehat{G}_c : H_2^c \to H_2$$

est faiblement continue, et

$$\left|\widehat{G}y_n - \lambda y_n\right| \to 0.$$

Notons que

$$\|y_n\| = \sqrt{(y_n, Sy_n)} \leq \sqrt{|S|}\, |y_n|$$

Comme la suite $(\|y_n\|)_n$ est *minorée* pour n assez grand alors $(|y_n|)_n$ l'est aussi et donc $\left(\frac{y_n}{|y_n|}\right)_n$ est une suite singulière de Weyl de $\widehat{G}$ associée au point spectrale λ.
Ainsi

$$\sigma_{ess}(\widehat{G}) - \{0\} = \sigma_{ess}^w(\widehat{G}) - \{0\}\,.$$

D'autre part, $\widehat{G}$ et G ont le même spectre non nul, et les mêmes valeurs propres isolées de multiplicité finie, alors ils ont le même complémentaire spectral de ces valeurs propres isolées. Donc $\lambda \neq 0$ appartient au spectre essentiel de Schechter de G si et seulement si $\lambda \in \sigma(\widehat{G})$ et λ n'est pas une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie de $\widehat{G}$ (i.e $\lambda \in \sigma_{ess}(\widehat{G}) - \{0\}$) et donc, $\lambda \in \sigma_{ess}^w(\widehat{G}) - \{0\}$ et le Théorème. 2.3.4 termine la preuve.

□

Nous avons vu dans le Théorème. 2.2.4 que si G a exactement m valeurs propres $> \alpha^+(G)$ (compté selon leurs multiplicités) alors $\alpha_n^+ \leq \alpha^+(G) \ \forall n > m$. En fait, sous une hypothèse supplémentaire nous pouvons en dire plus.

Théorème. 2.3.6. *Supposons que G a exactement m valeurs propres $> \alpha^+(G)$ (comptées selon leurs multiplicités) et la condition* (1.5.5) *soit vérifiée. Alors*

$$\alpha_n^+ = \alpha^+(G) \ \ \forall n > m.$$

Preuve

D'après, la Proposition.1.5.3, la Proposition.1.5.2 et le Corollaire.1.5.1

$$\sigma(G) - \{0\} = \sigma(\widehat{G}_c) - \{0\} = \sigma(\widehat{G}) - \{0\}$$

et G, $\widehat{G}$ et $\widehat{G}_c$ ont le même spectre essentiel (le spectre essentiel de Weyl). En particulier $\widehat{G}_c$ a exactement m valeurs propres supérieures strictement à $\alpha^+(G)$ et $\alpha^+(G) \in \sigma_{ess}(\widehat{G}_c)$. Soit $n > m$ et supposons que

$$\alpha_n^+ := \sup_{E_n \in \mathcal{V}_n} \inf_{x \in E_n, (Sx,x)=1} (SGx, x) < \alpha^+(G)$$

Où $\mathcal{V}_n$ est la classe de sous espaces E_n de H_2 de dimension n. Alors pour tout $E_n \subset H_2$ de dimension n il existe $x_n \in E_n$ tel que $(Sx_n, x_n) = 1$ et

$$(S\widehat{G}x_n, x_n) \leq \alpha_n^+ < \alpha^+(G). \tag{2.3.20}$$

Soit α tel que

$$\alpha_n^+ < \alpha < \alpha^+(G)$$

et P_α la projection spectrale associée à $\widehat{G}_c$ et à l'intervalle $[\alpha, \alpha^+(G)]$. Comme $\alpha^+(G) \in \sigma_{ess}(\widehat{G}_c)$, alors l'image de P_α est *de dimension infinie* pour chaque α (voir par exemple [47], p.145). Alors on peut construire un sous espace E_n^c de H_2^c de dimension n tel que $E_n^c \subset \Im(P_\alpha)$ et

$$((\widehat{G}_c x, x)) \geqslant \alpha((x, x)) \ \ \forall x \in E_n^c \tag{2.3.21}$$

où $((x, y))$ désigne le nouveau produit scalaire (x, Sy). Autrement dit

$$(\sqrt{S}\widehat{G}_c x, \sqrt{S}x) \geqslant \alpha \left|\sqrt{S}x\right|^2 \ \ \forall x \in E_n^c.$$

Nous allons montrer qu'on peut construire un sous espace E_n de dimension n de H_2 tel que

$$(SGx, x) \geqslant \alpha'(Sx, x) \ \ \forall x \in E_n \tag{2.3.22}$$

pour un certain α' tel que $\alpha_n^+ < \alpha' < \alpha$; cela contredira (2.3.20) finira la preuve.
Soit $(z_1, z_2, ..., z_n)$ une base orthonormale (pour le produit scalaire $((x, y))$) de E_n^c. Il existe une suite $\left(z_1^k, z_2^k, ..., z_n^k\right) \in H_2 \times ... \times H_2$ indexée par k tel que

$$\left(z_1^k, z_2^k, ..., z_n^k\right) \to (z_1, z_2, ..., z_n) \text{ quand } k \to +\infty$$

pour la norme de $H_2^c \times ... \times H_2^c$. Soit E_n^k l'espace vectoriel engendré par $\left\{z_1^k, z_2^k, ..., z_n^k\right\}$. Comme le déterminant de Gram

$$\det(((z_i^k, z_j^k))) \to \det(((z_i, z_j))) = 1$$

(où $i, j = 1, ..., n$) alors $\left\{z_1^k, z_2^k, ..., z_n^k\right\}$ sont *linéairement indépendants* pour k assez grand et E_n^k est un sous espace de H_2 de dimension n pour k assez grand. Soit x appartient à *la sphère unité* de E_n^k i.e.

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j z_j^k \text{ avec } \|x\| = 1$$

i.e.

$$1 = ((\sum_{j=1}^{n} x_j z_j^k, \sum_{i=1}^{n} x_i z_i^k)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j \overline{x_i}((z_j^k, z_i^k)).$$

On observe que

$$\underline{\alpha}_k \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j \overline{x_i}((z_j^k, z_i^k)) = 1 \leq \overline{\alpha}_k \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$$

où $\underline{\alpha}_k$ et $\overline{\alpha}_k$ sont respectivement la plus petite valeur propre et la plus grande valeur propre de la matrice de Gram $((z_j^k, z_i^k))_{1\leq i,j\leq n}$. Notons aussi que $\underline{\alpha}_k$ et $\overline{\alpha}_k$ tendent vers 1 quand $k \to +\infty$ et

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \geqslant \frac{1}{\overline{\alpha}_k}. \tag{2.3.23}$$

On décompose x comme

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} x_j z_j^k = \sum_{j=1}^{n} x_j \left[z_j^k - ((z_j^k, z_j))z_j + (z_j^k, z_j))z_j \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \left[z_j^k - ((z_j^k, z_j))z_j \right] + \sum_{j=1}^{n} x_j ((z_j^k, z_j))z_j. \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \widehat{z}_j^k + \sum_{j=1}^{n} x_j ((z_j^k, z_j))z_j \end{aligned}$$

où

$$\widehat{z}_j^k = z_j^k - ((z_j^k, z_j))z_j$$

tend vers zéro en norme $\|\|$ (où $\|\|$ désigne $\|x\| = \sqrt{(x, Sx)}$) lorsque $k \to +\infty$. On voit que la somme

$$\sum_{j=1}^{n} x_j ((z_j^k, z_j))z_j$$

est telle que

$$\begin{aligned} &((\sum_{j=1}^{n} x_j ((z_j^k, z_j))z_j, \sum_{i=1}^{n} x_i ((z_i^k, z_i))z_i)) \\ = &\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j \overline{x_i} ((z_j^k, z_j)) \overline{((z_i^k, z_i))} ((z_j, z_i)) \\ = &\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \left| ((z_j^k, z_j)) \right|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (SGx, x) &= (SG\sum_{j=1}^{n} x_j ((z_j^k, z_j))z_j, \sum_{j=1}^{n} x_j ((z_j^k, z_j))z_j) \\ &\quad + (SG\sum_{j=1}^{n} x_j \widehat{z}_j^k, \sum_{j=1}^{n} x_j \widehat{z}_j^k) \\ &\quad + (SG\sum_{j=1}^{n} x_j \widehat{z}_j^k, \sum_{j=1}^{n} x_j ((z_j^k, z_j))z_j) \\ &\quad + (SG\sum_{j=1}^{n} x_j ((z_j^k, z_j))z_j, \sum_{j=1}^{n} x_j \widehat{z}_j^k). \end{aligned}$$

Notons que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j((z_j^k, z_j))z_j \in E_n^c$$

donc

$$(SG\sum_{j=1}^{n} x_j((z_j^k, z_j))z_j, \sum_{j=1}^{n} x_j((z_j^k, z_j))z_j) \geqslant \alpha \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j((z_j^k, z_j))z_j \right\|^2 .$$

D'autre part, par l'inégalité de Reid (1.5.7)

$$\begin{aligned}
(SG\sum_{j=1}^{n} x_j\hat{z}_j^k, \sum_{j=1}^{n} x_j\hat{z}_j^k) &\leq |G|_{L(H)} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j\hat{z}_j^k \right\|^2 \\
&\leq |G|_{L(H)} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{z}_j^k \right\|^2 \\
&\leq \frac{|G|_{L(H)}}{\underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{z}_j^k \right\|^2
\end{aligned}$$

et la somme de deux derniers termes de (SGx, x) est majorée par

$$\begin{aligned}
& 2\,|G|_{L(H)} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j\hat{z}_j^k \right\| \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j((z_j^k, z_j))z_j \right\| \\
\leq\ & 2\,|G|_{L(H)} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{z}_j^k \right\|^2} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j((z_j^k, z_j))z_j \right\| \\
\leq\ & \frac{2\,|G|_{L(H)}}{\sqrt{\underline{\alpha}_k}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{z}_j^k \right\|^2} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j((z_j^k, z_j))z_j \right\|
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(SGx, x) &\geqslant \alpha \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j((z_j^k, z_j))z_j \right\|^2 \\
&\quad - \frac{|G|_{L(H)}}{\underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{z}_j^k \right\|^2 \\
&\quad - \frac{2\,|G|_{L(H)}}{\sqrt{\underline{\alpha}_k}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{z}_j^k \right\|^2} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j((z_j^k, z_j))z_j \right\| \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \left| ((z_j^k, z_j)) \right|^2 \\
&\quad - \frac{|G|_{L(H)}}{\underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{z}_j^k \right\|^2 \\
&\quad - \frac{2\,|G|_{L(H)}}{\sqrt{\underline{\alpha}_k}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{z}_j^k \right\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \left| ((z_j^k, z_j)) \right|^2}.
\end{aligned}$$

Notons que pour chaque $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
& \alpha \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \left|((z_j^k, z_j))\right|^2 - \frac{2\,|G|_{L(H)}}{\sqrt{\underline{\alpha}_k}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left\|\widehat{z}_j^k\right\|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \left|((z_j^k, z_j))\right|^2} \\
\geqslant \; & \alpha \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \left|((z_j^k, z_j))\right|^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{4\,|G|_{L(H)}^2}{\varepsilon^2 \underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\|\widehat{z}_j^k\right\|^2 + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \left|((z_j^k, z_j))\right|^2\right] \\
= \; & (\alpha - \frac{\varepsilon^2}{2}) \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \left|((z_j^k, z_j))\right|^2 - \frac{2\,|G|_{L(H)}^2}{\varepsilon^2 \underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\|\widehat{z}_j^k\right\|^2 \\
\geqslant \; & (\alpha - \frac{\varepsilon^2}{2}) \min_{1\le j\le n} \left\{\left|((z_j^k, z_j))\right|^2\right\} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 - \frac{2\,|G|_{L(H)}^2}{\varepsilon^2 \underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\|\widehat{z}_j^k\right\|^2
\end{aligned}$$

de sorte que, en utilisant (2.3.23), on a

$$\begin{aligned}
(SGx, x) \; \geqslant \; & \frac{(\alpha - \frac{\varepsilon^2}{2})}{\overline{\alpha}_k} \min_{1\le j\le n} \left\{\left|((z_j^k, z_j))\right|^2\right\} \\
& - \frac{2\,|G|_{L(H)}^2}{\varepsilon^2 \underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\|\widehat{z}_j^k\right\|^2 - \frac{|G|_{L(H)}}{\underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\|\widehat{z}_j^k\right\|^2
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

pour tout x dans *la sphère unité* de E_n^k. On *choisit* $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$\alpha - \frac{\varepsilon^2}{2} > \alpha_n^+.$$

On note que pour ε fixé,

$$\frac{2\,|G|_{L(H)}^2}{\varepsilon^2 \underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\|\widehat{z}_j^k\right\|^2 - \frac{|G|_{L(H)}}{\underline{\alpha}_k} \sum_{j=1}^{n} \left\|\widehat{z}_j^k\right\|^2 \to 0$$

et

$$\frac{1}{\overline{\alpha}_k} \min_{1\le j\le n} \left\{\left|((z_j^k, z_j))\right|^2\right\} \to 1$$

quand $k \to +\infty$. D'où le côté droit de l'inégalité (2.3.24) tend vers $(\alpha - \frac{\varepsilon^2}{2})$ lorsque $k \to +\infty$. En choisissant k assez grand et en désignant par $\alpha'(> \alpha_n^+)$ ce côté droit, on voit que

$$(SGx, x) \geqslant \alpha'$$

sur la sphère unité de E_n^k ou d'une façon équivalente

$$(SGx, x) \geqslant \alpha'(Sx, x) \quad \forall x \in E_n^k$$

ce qui montre (2.3.22).

$\square$

Chapitre 3

Modèles neutroniques isotropes

3.1 Introduction

La thèorie spectrale des équations de transport de neutrons inélastiques est un sujet classique qui remonte aux années cinquante (voir [25]) et est maintenant bien comprise (voir par exemple [19], [46], [59] [32], ([29] chapitre 5 et 6) , [28], [20], [57],[51], [52], [53] [31], [49], [48],[50], [57], [56], [1], [40] et les références qui s'y trouvent).
D'autre part, l'analyse spectrale des équations de transport de neutrons *partiellement élastiques* est un sujet relativement nouveau qui remonte juste au milieu des années 70 [22].
Les résultats spectraux importants liés aux problèmes de compacité ont été montrés par M. Sbihi [39]. La particularité de ces équations est que les deux phénomènes de collisions élastiques et inélastiques sont pris en compte, i.e l'opérateur de collision K a deux composantes de nature, différentes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma(x,v)\varphi(x,v,t) = K_i\varphi + K_e\varphi := K\varphi$$

où

$$K_i\varphi = \int_V k_i(x,v,v')\varphi(x,v')dv'$$

décrit les chocs inélastiques et

$$K_e\varphi = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x,\rho,\omega,\omega')\varphi(x,\rho\omega')d\omega'$$

décrit les chocs élastiques.
Soit $N \in \mathbb{N}$, Ω un ouvert régulier et borné de $\mathbb{R}^N$ et $v = \rho\omega \in V$ où V est l'ensemble des vitesses

$$V := \left\{\rho\omega;\ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} < +\infty,\ \omega \in \mathbb{S}^{N-1}\right\}$$

est muni de la mesure de Lebesgue usuelle dv. Cette équation est couplée à une donnée initiale

$$\varphi(x,v,0) = \varphi_0(x,v)$$

et la condition au bord homogène

$$\varphi(x, v, t)_{|\Gamma_-} = 0$$

où

$$\Gamma_- := \{(x, v) \in \partial\Omega \times V;\ v.n(x) < 0\}$$

et $n(x)$ est la normale extérieure unitaire en $x \in \partial\Omega$. Ici K_i et K_e désignent respectivement l'opérateur de collision inélastique et élastique.
Le comportement asymptotique du C_0-semigroupe qui gouverne cette équation est intimement liée à son analyse spectrale, (voir [39]). En particulier le *spectre asymptotique*

$$\sigma(T + K) \cap \{\Re\lambda > s(T + K_e)\}$$

de son générateur $T + K$ joue un rôle clé où

$$s(T + K_e) := \sup\{\Re\lambda;\ \lambda \in \sigma(T + K_e)\}$$

est la borne spectrale de $T + K_e$.
Soit T l'opérateur d'advection

$$T : D(T) \ni \varphi \to -v.\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \sigma(x, v)\varphi(x, v) \in L^2(\Omega \times V)$$

de domaine

$$D(T) = \left\{\varphi \in L^2(\Omega \times V), v.\frac{\partial\varphi}{\partial x} \in L^2(\Omega \times V),\ \varphi_{|\Gamma_-} = 0\right\}.$$

Il est connu d'après [39] que le spectre asymptotique de $T + K$ est constitué au plus des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. D'autre part, à notre connaissance, *la compréhension de ce spectre asymptotique est ouverte même pour des cas modèles où les sections efficaces sont constantes.* L'objectif de ce chapitre est de donner une description précise du spectre asymptotique pour une classe d'équations de transport de neutrons partiellement élastiques.
Ce chapitre est consacré aux modèles *isotropes* et homogènes en espace, i.e. les sections efficaces

$$\sigma(x, \rho,\ \omega),\ k_i(x, \rho,\ \omega, \rho',\ \omega') \text{ et } k_e(x, \rho, \omega, \omega')$$

sont supposées indépendantes des directions (ω et ω') des vitesses et de la variable spatiale x. L'hypothèse d'isotropie des sections efficaces permet d'obtenir des résultats très précis et de construire une théorie spectrale complète. (Nous montrons néanmoins dans le chapitre 4 comment une bonne partie de ces résultats s'étend aux modéles anisotropes). Nous indiquerons dans différentes remarques (voir la Remarque.3.3.4, la Remaraue.3.4.1 et la Remarque.3.4.2) les résultats dont la preuve dépend fortement de l'hypothèse d'isotropie. Pour la simplicité de certaines preuves (essentiellement celles qui concerne l'étude du spectre essentiel) nous nous limitons au cas des vitesses minorées

$$\rho_{\min} > 0.$$

même si cette condition ne joue aucun rôle dans la plupart des énoncés concernant le spectre ponctuel asymptotique.
Le plan de ce chapitre est le suivant :
Dans la Section 3.2 nous montrons que le spectre de l'opérateur de transport de neutrons élastique

$$T + K_e$$

est la réunion de spectres d'une famille d'opérateurs de transport monocinétiques indexée par le module des vitesses

$$\rho \in [a, b].$$

Nous montrons que le spectre de l'opérateur de transport élastique est égal à son spectre essentiel.
Dans la Section 3.3 nous montrons que le spectre essentiel de l'opérateur de transport partiellement élastique

$$T + K_e + K_i$$

est égal au spectre de l'opérateur de transport élastique $T + K_e$. Ce résultat découle de résultats de compacité [38].
D'autre part, nous montrons que les valeurs propres de l'opérateur de transport partiellement élastique dans la région

$$\{\lambda, \Re\lambda > -\inf \sigma(.)\}$$

sont réelles.
Dans la Section 3.4 nous relions le nombre de valeurs propres de l'opérateur de transport partiellement élastique $T+K_e+K_i$, qui sont supérieures à $s(T+K_e)$ au nombre de valeurs propres supérieures à 1 de l'opérateur borné symétrisable

$$G_{s(T+K_e)}.$$

Dans la Section 3.5 nous montrons que le nombre de valeurs propres réelles de l'opérateur de transport partiellement élastique augmente lorsque la taille du domaine Ω augmente (la taille du domaine désigne le rayon de la plus grande boule contenue dans Ω) et nous montrons que toutes ces valeurs propres tendent vers la valeur propre dominante de l'opérateur neutronique partiellement élastique homogène en espace (voir la définition ci-dessous). Ensuite, on montre que si l'opérateur de collision inélastique K_i est de la forme

$$c\widehat{K_i}$$

alors le nombre de valeurs propres réelles augmente également indéfiniment avec c.
Enfin nous donnons un critère explicite d'existence d'au moins une valeur propre.

3.2 Spectre de l'opérateur neutronique élastique $T + K_e$

Cette section sera consacrée à l'identification du spectre de l'opérateur de transport de neutrons *élastique*

$$T + K_e.$$

3.2.1 Spectre de l'opérateur monocinétique $T^\rho + K_e^\rho$

Soit $N \in \mathbb{N}$ $(N \geq 2)$ et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et convexe. Soit $0 < a < b < +\infty$ et

$$[a, b] \ni \rho \to k_e(\rho) \in \mathbb{R}_+$$

$$[a, b] \ni \rho \to \sigma(\rho) \in \mathbb{R}_+.$$

Pour *tout* $\rho \in [a, b]$, on définit l'opérateur non borné

$$T^\rho : D(T^\rho) \subset L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

$$T^\rho \varphi = -\rho\omega.\frac{\partial \varphi(x, \omega)}{\partial x} - \sigma(\rho)\varphi(x, \omega)$$

où

$$D(T^\rho) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) : \omega.\frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}), \varphi_{|\Gamma_-} = 0 \right\}$$

et

$$\Gamma_- = \left\{ (x, \omega) \in \partial\Omega \times \mathbb{S}^{N-1};\ \omega.n(x) < 0 \right\}$$

où $n(x)$ est la normale extérieure au point $x \in \partial\Omega$. Pour tout $\rho \in [a, b]$, par l'opérateur de transport de neutrons *monocinétique* on désigne l'opérateur non borné

$$T^\rho + K_e^\rho : D(T^\rho) \subset L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

où

$$K_e^\rho : \varphi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \to \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(\rho)\varphi(x, \omega')d\omega' \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}).$$

Soit

$$T : D(T) \subset L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b]) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b])$$

$$T\varphi = -\rho\omega.\frac{\partial \varphi(x, \rho, \omega)}{\partial x} - \sigma(\rho)\varphi(x, \rho, \omega)$$

de domaine

$$D(T) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b]);\ \rho\omega.\frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b]),\ \varphi_{|\Gamma_-} = 0 \right\}$$

où (pour la simplicité des notations, on garde les notations précédentes)

$$\Gamma_- = \left\{ (x, \rho, \omega) \in \partial\Omega \times [a, b] \times \mathbb{S}^{N-1};\ \omega.n(x) < 0 \right\}.$$

L'opérateur de transport de neutrons *élastique* est donné par

$$T + K_e : D(T) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b])$$

où l'opérateur de collision *élastique*

$$K_e : \varphi \to \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(\rho)\varphi(x, \rho, \omega')d\omega'$$

est borné sur $L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b])$.
Nous allons étudier la dépendance en ρ de l'opérateur monocinétique

$$T^\rho + K_e^\rho.$$

Lemme. 3.2.1. *Supposons que*

$$k_e : [a, b] \to \mathbb{R}_+ \ et\ \sigma : [a, b] \to \mathbb{R}_+$$

sont continues. Alors

$$\mathbb{R} \times [a, b] \ni (\lambda, \rho) \to (\lambda - T^\rho)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

et

$$\mathbb{R} \times [a, b] \ni (\lambda, \rho) \to K_e^\rho \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

sont continues.

Preuve Notons d'abord que

$$(\lambda - T^\rho)^{-1} f = \int_0^{s(x,\omega)} \frac{e^{-\left(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho}\right)s}}{\rho} f(x - s\omega, \omega)ds$$

où

$$s(x, \omega) := \inf \{s > 0;\ x - s\omega \notin \Omega\}$$

et

$$s(x, \omega) \leq d(\Omega)$$

où $d(\Omega)$ est le diamètre de Ω. Soit $(\lambda_n)_n, (\rho_n)_n$ deux suites telles que

$$\lambda_n \to \overline{\lambda} \ et\ \rho_n \to \overline{\rho}.$$

Alors pour tout $f \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$

$$(\lambda_n - T^{\rho_n})^{-1} f - \left(\overline{\lambda} - T^{\overline{\rho}}\right)^{-1} f = \int_0^{s(x,\omega)} D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s) f(x - s\omega, \omega)ds$$

où

$$D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s) = \frac{e^{-\left(\frac{\lambda_n+\sigma(\rho_n)}{\rho_n}\right)s}}{\rho_n} - \frac{e^{-\left(\frac{\overline{\lambda}+\sigma(\overline{\rho})}{\overline{\rho}}\right)s}}{\overline{\rho}}.$$

On a après l'extension triviale de f à l'extérieur de Ω

$$\left|(\lambda_n - T^{\rho_n})^{-1} f - \left(\overline{\lambda} - T^{\overline{\rho}}\right)^{-1} f\right| \leq \int_0^{d(\Omega)} \left|D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s)\right| |f(x - s\omega, \omega)| \, ds$$

et, par l'inégalité de Cauchy-Shwartz ,

$$\left|(\lambda_n - T^{\rho_n})^{-1} f - \left(\overline{\lambda} - T^{\overline{\rho}}\right)^{-1} f\right|^2 \leq \int_0^{d(\Omega)} \left|D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s)\right| ds \int_0^{d(\Omega)} \left|D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s)\right| |f(x - s\omega, \omega)|^2 \, ds.$$

En particulier

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \left|(\lambda_n - T^{\rho_n})^{-1} f - \left(\overline{\lambda} - T^{\overline{\rho}}\right)^{-1} f\right|^2 \\
\leq \;& \int_0^{d(\Omega)} \left|D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s)\right| ds \int_0^{d(\Omega)} \left\|D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s)\right\| ds \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - s\omega, \omega)|^2 \, dx \\
= \;& \left(\int_0^{d(\Omega)} \left|D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s)\right| ds\right)^2 \int_\Omega |f(x, \omega)|^2 \, ds.
\end{aligned}$$

En intégrant sur $\mathbb{S}^{N-1}$ on obtient

$$\left\|(\lambda_n - T^{\rho_n})^{-1} - \left(\overline{\lambda} - T^{\overline{\rho}}\right)^{-1} f\right\|^2 \leq \left(\int_0^{d(\Omega)} \left|D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s)\right| ds\right)^2 \|f\|^2$$

et

$$\left\|(\lambda_n - T^{\rho_n})^{-1} - \left(\overline{\lambda} - T^{\overline{\rho}}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))} \leq \int_0^{d(\Omega)} \left|D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s)\right| ds.$$

Le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{d(\Omega)} \left|D_{\rho_n,\overline{\rho},\lambda_n,\overline{\lambda}}(s)\right| ds = 0.$$

La deuxième assertion est triviale.

□

Lemme. 3.2.2. *Supposons que*

$$k_e : [a, b] \to \mathbb{R}_+ \text{ et } \sigma : [a, b] \to \mathbb{R}_+$$

sont continues. Alors l'ensemble

$$\cup_{\rho \in [a,b]} \sigma(T^\rho + K_e^\rho)$$

est fermé.

Preuve Rappelons d'abord que

$$\sigma(T^\rho) = \varnothing$$

et K_e^ρ est T^ρ-compact (voir [22]) de telle sorte que le spectre de $T^\rho + K_e^\rho$ est constitué au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Ainsi

$$\sigma(T^\rho + K^\rho) = \sigma_p(T^\rho + K^\rho)$$

(σ_p se réfère au spectre ponctuel). Soit

$$(\lambda_n)_n \subset \cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^\rho + K_e^\rho)$$

telle que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \overline{\lambda}$. Alors il existe une suite $(\rho_n)_n \subset [a,b]$ telle que

$$\lambda_n \in \sigma_p(T^{\rho_n} + K^{\rho_n})$$

et cela équivalent à l'existence d'une suite $\varphi_n \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$ telle que

$$\varphi_n = (\lambda_n - T^{\rho_n})^{-1} K_e^{\rho_n}\varphi_n, \quad \|\varphi_n\| = 1.$$

En prenant une sous suite si c'est nécessaire, on peut supposer sans perte de généralité que

$$\rho_n \to \overline{\rho}.$$

D'après Lemme.3.2.1

$$(\lambda_n - T^{\rho_n})^{-1} K_e^{\rho_n} \to \left(\overline{\lambda} - T^{\overline{\rho}}\right)^{-1} K_e^{\overline{\rho}}$$

en norme d'opérateurs. La compacité collective (une suite d'opérateurs $A_n \in \mathcal{L}(H)$ est dite collectivement compacte si l'image par A_n de tout borné de H est contenue dans un compact de H indépendant de n) de la suite

$$\left((\lambda_n - T^{\rho_n})^{-1} K_e^{\rho_n}\right)_n \subset \mathcal{L}(L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

implique que la suite $(\varphi_n)_n$ est relativement compacte. Alors il existe $\varphi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$ telle que (une sous suite de) $\varphi_n \to \varphi$ converge en norme et

$$\varphi = \left(\overline{\lambda} - T^{\overline{\rho}}\right)^{-1} K_e^{\overline{\rho}}\varphi, \quad \|\varphi\| = 1.$$

D'où

$$\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^{\overline{\rho}} + K_e^{\overline{\rho}}) \subset \cup_{\rho\in[a,b]}\ \sigma(T^\rho + K_e^\rho).$$

$\square$

Lemme. 3.2.3. *Supposons que*

$$k_e : [a,b] \to \mathbb{R}_+ \textit{ et } \sigma : [a,b] \to \mathbb{R}_+$$

sont continues.
Si $\lambda \notin \cup_{\rho\in[a,b]}\ \sigma(T^\rho + K^\rho)$ *alors il existe une constante* $C > 0$ *tel que*

$$\left\|(\lambda - T^\rho - K_e^\rho)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1}))} \leq C, \forall\ \rho.$$

Preuve Soit $\lambda \notin \cup_{\rho\in[a,b]}\ \sigma(T^\rho + K^\rho)$ et φ_ρ telle que

$$(\lambda - T^\rho - K_e^\rho)\,\varphi_\rho = \psi,\ \ \psi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}),\ \ (\|\psi\| \leq 1).$$

Nous devons montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que (*uniformément* en $\|\psi\| \leq 1$)

$$\|\varphi_\rho\| \leq C \ \ \forall\ \rho.$$

On procède par l'absurde en supposant l'existence d'une suite $(\rho_n)_n$ telle que $\rho_n \to \overline{\rho}$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{\rho_n}\| = \infty.$$

On pose

$$\theta_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}.$$

Alors

$$\lambda\theta_n - T^{\rho_n}\theta_n - K_e^{\rho_n}\theta_n = \frac{\psi}{\|\varphi_n\|}$$

et

$$\theta_n - (\lambda - T^{\rho_n})^{-1}\, K_e^{\rho_n}\theta_n = (\lambda - T^{\rho_n})^{-1}\, \frac{\psi}{\|\varphi_n\|}$$

Comme le membre de droite tend vers zéro quand $n \to \infty$ alors

$$\left|\|\theta_n\| - \left\|(\lambda - T^{\rho_n})^{-1}\, K_e^{\rho_n}\theta_n\right\|\right| \to 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(\lambda - T^{\rho_n})^{-1}\, K_e^{\rho_n}\theta_n\right\| = 1.$$

D'autre part, la suite d'opérateurs

$$\left((\lambda - T^{\rho_n})^{-1}\, K_e^{\rho_n}\right)_n$$

est collectivement compacte de sorte que (une sous suite) $\theta_n \to \overline{\theta}$ converge en norme et donc

$$\left(\lambda - T^{\overline{\rho}}\right)^{-1} K_e^{\overline{\rho}}\ \overline{\theta} = \overline{\theta}, \left\|\overline{\theta}\right\| = 1$$

ce qui implique que $\lambda \in \sigma_p(T^{\overline{\rho}} + K_e^{\overline{\rho}})$ et conduit à une contradiction.

$\square$

Nous sommes en mesure de décrire le spectre de $T + K_e$:

Théorème. 3.2.1. *Supposons que $k_e : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ et $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ sont continues. Alors*

$$\sigma(T + K_e) = \cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^\rho + K_e^\rho).$$

Preuve Nous allons d'abord montrer que

$$\cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^{\rho}+K_e^{\rho})\subset\sigma(T+K_e).$$

Soit

$$\lambda\in\cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^{\rho}+K_e^{\rho}).$$

Alors il existe $\rho_1\in[a,b]$ tel que $\lambda\in\sigma(T^{\rho_1}+K_e^{\rho_1})$ ou, d'une façon équivalente, il existe $\varphi\in L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})$ de norme 1 telle que

$$-\rho_1\omega.\frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial x}-\sigma(\rho_1)\varphi(x,\omega)+\int_{\mathbb{S}^{N-1}}k_e(\rho_1)\varphi(x,\omega')d\omega'=\lambda\varphi(x,\omega).$$

On définit

$$\phi_n\ \in L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1}\times[a,b])$$

pour n assez grand par

$$\phi_n(x,\rho,\omega)=\begin{cases}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\varphi(x,\omega) & \rho_1\leq\rho\leq\rho_1+\frac{1}{n},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}\|\phi_n\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1}\times[a,b])} &= \int_{\Omega}\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\int_a^b|\phi_n\ (x,\rho,\omega)|^2\rho^{N-1}dxd\omega d\rho\\ &= \int_{\Omega}\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\int_{\rho_1}^{\rho_1+\frac{1}{n}}\frac{n}{\rho^{N-1}}|\varphi\ (x,\omega)|^2\rho^{N-1}dxd\omega d\rho\\ &= \|\varphi\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})}=1\end{aligned}$$

et

$$(\lambda-T-K_e)\phi_n\ =-\rho\omega.\frac{\partial\phi_n\ (x,\rho,\omega)}{\partial x}-\sigma(\rho)\phi_n\ (x,\rho,\omega)+\int_{\mathbb{S}^{N-1}}k_e(\rho)\phi_n\ (x,\rho,\omega')d\omega'$$

i.e.

$$\begin{aligned}&= \lambda\mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\ \varphi(x,\omega)+\mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\ \rho\omega\frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial x}+\mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\sigma(\rho)\varphi\ (x,\omega)\\ &\quad -\mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\int_{\mathbb{S}^{N-1}}k_e(\rho)\varphi(x,\rho,\omega')d\omega'\\ &= \mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\left[-\rho_1\omega\frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial x}-\sigma(\rho_1)\varphi(x,\omega)+\int_{\mathbb{S}^{N-1}}k_e(\rho_1)\varphi(x,\omega')d\omega'\right]\\ &\quad +\mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\ \rho\omega\frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial x}+\mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\sigma(\rho)\varphi\ (x,\omega)\\ &\quad -\mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\int_{\mathbb{S}^{N-1}}k_e(\rho)\varphi(x,\rho,\omega')d\omega'\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}(\lambda-T-K_e)\phi_n &= \mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\left[\sigma(\rho)-\sigma(\rho_1)\right]\varphi\ (x,\omega)+\mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}(\rho-\rho_1)\omega\frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial x}\\ &\quad -\mathbb{1}_{[\rho_1,\rho_1+\frac{1}{n}]}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}(K_e^{\rho}-K_e^{\rho_1})\varphi\ (x,\omega).\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{16}\left\|(\lambda-T-K_e)\phi_n\right\|^2 &\leq n\int_{\rho_1}^{\rho_1+\frac{1}{n}}\int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left|\sigma(\rho)-\sigma(\rho_1)\right|^2\left|\varphi\ (x,\omega)\right|^2 d\rho dx d\omega\\
&\quad + n\int_{\rho_1}^{\rho_1+\frac{1}{n}}\int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left|(K_e^\rho-K_e^{\rho_1})\varphi\ (x,\omega)\right|^2+\frac{1}{2n}\int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left|\omega\frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial x}\right|^2\\
&= \int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left[n\int_{\rho_1}^{\rho_1+\frac{1}{n}}\left|\sigma(\rho)-\sigma(\rho_1)\right|^2 d\rho\right]\left|\varphi\ (x,\omega)\right|^2 d\rho dx d\omega\\
&\quad + \int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left|(K_e^\rho-K_e^{\rho_1})\varphi\ (x,\omega)\right|^2+\frac{1}{2n}\int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left|\omega\frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial x}\right|^2
\end{aligned}
$$

Notons que

$$
\begin{aligned}
& n\int_{\rho_1}^{\rho_1+\frac{1}{n}}\int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left|\sigma(\rho)-\sigma(\rho_1)\right|^2\left|\varphi\ (x,\omega)\right|^2 d\rho dx d\omega\\
=\ & \int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left[n\int_{\rho_1}^{\rho_1+\frac{1}{n}}\left|\sigma(\rho)-\sigma(\rho_1)\right|^2 d\rho\right]\left|\varphi\ (x,\omega)\right|^2 d\rho dx d\omega
\end{aligned}
$$

qui tend vers zéro lorsque $n\to\infty$ et

$$
\begin{aligned}
& n\int_{\rho_1}^{\rho_1+\frac{1}{n}}\int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left|(K_e^\rho-K_e^{\rho_1})\varphi\ (x,\omega)\right|^2\\
=\ & n\int_{\rho_1}^{\rho_1+\frac{1}{n}}\int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left|k_e(\rho)-k_e(\rho_1)\right|^2\left|\int_{S^{N-1}}\varphi(x,\omega')d\omega'\right|^2\\
=\ & \int_\Omega\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\left[n\int_{\rho_1}^{\rho_1+\frac{1}{n}}\left|k_e(\rho)-k_e(\rho_1)\right|^2 d\rho\right]\left|\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\varphi(x,\omega')d\omega'\right|^2
\end{aligned}
$$

qui tend aussi vers zéro lorsque $n\to\infty$. D'où

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(\lambda-T-K_e)\phi_n\right\|=0.$$

Il s'ensuit que

$$\lambda\in\sigma(T+K_e).$$

Si maintenant $\rho_1=b$, on définit $(\phi_n)_n$ par

$$
\phi_n(x,\rho,\omega)=\begin{cases}\sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\varphi(x,\omega) & \rho_1-\frac{1}{n}\leq\rho\leq\rho_1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}
$$

et on montre de la même manière que $\lambda\in\sigma(T+K_e)$.
Inversement, montrons que

$$\sigma(T+K_e)\subset\cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^\rho+K_e^\rho)$$

ou, d'une façon équivalente,

$$\lambda\notin\cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^\rho+K_e^\rho)\implies\lambda\notin\sigma(T+K_e).$$

Soit $\lambda \notin \cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^\rho + K_e^\rho)$. Considérons le problème

$$(\lambda - T - K_e)\varphi = \psi, \quad \psi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a,b])$$

Par l'hypothèse, pour *tout* $\rho \in [a,b]$, l'équation

$$(\lambda - T^\rho - K_e^\rho)\varphi(.,\rho,.) = \psi(.,\rho,.).$$

admet une unique solution $\varphi(.,\rho,.) \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$ (qui dépend du paramètre $\rho \in [a,b]$) et

$$\|\varphi(.,\rho,.)\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})} \leq \left\|(\lambda - T^\rho - K_e^\rho)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1}))} \|\psi(.,\rho,.)\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})} .$$

D'après le Lemme.3.2.3,

$$\left\|(\lambda - T^\rho - K_e^\rho)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1}))}$$

est uniformément borné en $\rho \in [a,b]$ donc

$$\|\varphi(.,\rho,.)\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})} \leq C\,\|\psi(.,\rho,.)\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})} \quad \forall\rho \in [a,b]$$

et alors en intégrant en $\rho \in [a,b]$ on obtient

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1}\times[a,b])} \leq C\,\|\psi\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1}\times[a,b])}$$

donc

$$\lambda \notin \sigma(T + K_e)$$

ce qui complète la preuve.

□

Par des arguments similaires on montre :

Théorème. 3.2.2. *Supposons que les hypothèses du Lemme.3.2.1 soit satisfaites. Alors*

$$\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) = \cup_{\rho\in[a,b]}\sigma((\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho).$$

Remarque. 3.2.1. *On peut montrer par un argument de convolution que le spectre de* $T + K_e$ *dans* $L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$ *(*$1 \leq p \leq +\infty$*) est indépendent de p.*

On termine ce paragraphe par un résultat de *réalité.*

Théorème. 3.2.3. *Soit* $\lambda^* := \inf_{\rho\in[a,b]} \sigma(\rho)$. *Supposons que* $k_e : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *et* $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *sont continues. Alors*

$$\sigma(T + K_e) \cap \{\lambda;\ \Re\lambda > -\lambda^*\} \subset \mathbb{R}.$$

Preuve Comme le spectre de l'opérateur monocinétique dans la région

$$\{\lambda;\ \Re\lambda > -\lambda^*\}$$

est réel (voir S. Ukai [49]), le Théorème. 3.2.1 achève la preuve.

□

3.2.2 Spectre essentiel de $T + K_e$

Nous montrons que le spectre de l'opérateur de transport élastique est égal à son spectre essentiel.

Théorème. 3.2.4. *Supposons que les hypothèses du Lemme.3.2.1 sont satisfaites. Alors*

$$\sigma(T + K_e) = \sigma_{ess}(T + K_e).$$

Preuve Soit $\lambda \in \cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^\rho + K_e^\rho)$. Alors il existe $\rho_1 \in [a, b]$ tel que

$$\lambda \in \sigma(T^{\rho_1} + K_e^{\rho_1}),$$

ce qui est équivalent à l'existence d'une fonction $\varphi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$, $\|\varphi\| = 1$ telle que

$$T^{\rho_1}\varphi + K_e^{\rho_1}\varphi = \lambda\varphi.$$

On peut construire pour n assez grand une suite

$$\phi_n(x, \rho, \omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{\rho^{N-1}}}\varphi(x, \omega) & \rho_1 \le \rho \le \rho_1 + \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

telle que

$$\|\phi_n\| = 1,$$

$$supp\phi_n \subset \Omega \times [\rho_1, \rho_1 + \frac{1}{n}] \times \mathbb{S}^{N-1}$$

et

$$\phi_n \rightharpoonup 0 \ (\textit{faiblement}) \text{ quand } n \to \infty$$

alors on ne peut pas extraire une sous suite de $(\phi_n)_n$ qui converge en norme. Ainsi la suite ϕ_n est une suite singulière (voir la Proposition.1.2.2) associée à λ.
D'où

$$\sigma(T + K_e) \subset \sigma_{ess}(T + K_e).$$

□

Remarque. 3.2.2. *Les théoèmes 3.2.1 et 3.2.4 ont été montré par M. Sbihi [38] dans un cadre plus général.*

De manière analogue on montre

Théorème. 3.2.5.

$$\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) = \sigma_{ess}((\lambda - T)^{-1}K_e).$$

En particulier

$$r_\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) = r_{ess}((\lambda - T)^{-1}K_e). \tag{3.2.1}$$

3.3 Spectre de l'opérateur neutronique partiellement élastique

Soit

$$k_i : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}_+$$

le noyau de collision *inélastique* et soit

$$K_i : L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b]) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b])$$

$$(K_i\ \varphi)(x, \rho) = \int_a^b \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_i(\rho, \rho')\varphi(x, \rho, \omega')d\rho' d\omega'$$

l'opérateur de collision *inélastique*. (On note que cet opérateur est *local* en $x \in \Omega$, i.e. il agit seuelement en (ρ, ω)). Soit

$$T + K_e + K_i : D(T) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b])$$

l'opérateur de transport de neutrons (*partiellement élastique*) avec l'opérateur de collision

$$K := K_e + K_i.$$

3.3.1 Le spectre essentiel de $T + K_e + K_i$

Pour la simplicité des notations, on donne le nom d'opérateur de collision inélastique aussi à sa *restriction* sur $L^2(\mathbb{S}^{N-1} \times [a, b])$

$$K_i : L^2(\mathbb{S}^{N-1} \times [a, b]) \ni \psi \to \int_a^b \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_i(\rho, \rho')\psi(\rho, \omega')d\rho' d\omega' \in L^2(\mathbb{S}^{N-1} \times [a, b])$$

Théorème. 3.3.1. *On suppose que*

$$L^2([a, b]) \ni h \to \int_a^b k_i(\rho, \rho')h(\rho')d\rho' \in L^2([a, b]) \text{ est compact.} \tag{3.3.2}$$

Alors

$$\sigma_{ess}(T + K_e + K_i) = \sigma_{ess}(T + K_e) = \sigma(T + K_e).$$

Preuve Sous l'hypothèse (3.3.2) l'opérateur

$$K_i : L^2(\mathbb{S}^{N-1} \times [a, b]) \to L^2(\mathbb{S}^{N-1} \times [a, b])$$

est compact. Par le théorème de compacité de M. Sbihi [39]

$$K_i \textit{ est } (T + K_e) - \textit{compact}$$

i.e.

$$K_i : D(T) \subset L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b]) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a, b])$$

est compact. Cela montre que

$$\sigma_{ess}(T + K_e + K_i) = \sigma_{ess}(T + K_e)$$

et enfin Théorème. 3.2.1 achève la preuve.

$\square$

Remarque. 3.3.1. *Il résulte des Théorème. 3.2.3 et Théorème. 3.2.1 que*

$$\sigma_{ess}(T + K_e + K_i) \cap \{\lambda;\ \Re\lambda > -\lambda^*\} \subset \mathbb{R}.$$

3.3.2 Équivalence spectrale

Soit

$$G_\lambda : L^2(\Omega \times [a,b]) \to L^2(\Omega \times [a,b])$$

l'opérateur défini par

$$[G_\lambda \phi](x,\rho) = \int_\Omega \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})|x-x'|}}{\rho\,|x-x'|^{N-1}} \left[k_e(\rho)\phi(x',\rho) + \int_a^b k_i(\rho,\rho')\phi(x',\rho)d\rho' \right] dx'.$$

Notons que G_λ se factorise comme

$$G_\lambda = E_\lambda S$$

où

$$(E_\lambda \phi)(x,\rho) = \int_\Omega \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})|x-x'|}}{\rho\,|x-x'|^{N-1}} \phi(x',\rho)dx'$$

$$(S\phi)(x,\rho) = k_e(\rho)\phi(x,\rho) + \int_a^b k_i(\rho,\rho')\phi(x,\rho')d\rho'.$$

Lemme. 3.3.1. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors λ est une valeur propre de $T + K_e + K_i$ si et seulement si* 1 *est une valeur propre de G_λ.*

Preuve Le problème spectral

$$T\varphi + K_e\varphi + K_i\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi \in D(T)$$

est équivalent à

$$\varphi = (\lambda - T)^{-1}(K_e + K_i)\varphi, \quad \varphi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a,b])$$

c'est-à- dire $\varphi(x,\rho,\omega)$ est donné par

$$\int_0^{s(x,\omega)} \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})s}}{\rho} \left[k_e(\rho) \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x - s\omega, \rho, \omega')d\omega' + \int_a^b k_i(\rho,\rho')d\rho' \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x - s\omega, \rho, \omega')d\omega' \right] ds$$

Posons

$$\phi(x,\rho) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x,\rho,\omega')d\omega'.$$

En intégrant sur $\mathbb{S}^{N-1}$, en faisant le changement de variables

$$x' = x - s\omega,$$

et en utilisant la convexité de Ω on voit que le problème spectral est équivalent à

$$\phi(x,\rho) = \int_\Omega \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})|x-x'|}}{\rho\,|x-x'|^{N-1}} \left[k_e(\rho)\phi(x',\rho) + \int_a^b k_i(\rho,\rho')\phi(x',\rho)d\rho' \right] dx'$$

i.e.

$$\phi = G_\lambda \phi, \quad \phi \in \; L^2(\Omega \times [a,b]).$$

□

3.3.3 Les opérateurs symétrisables en neutronique

Lemme. 3.3.2. *Supposons que*

$$K_i : \varphi \in L^2([a,b]) \to \int_a^b k_i(\rho,\rho')\varphi(\rho')d\rho' \in L^2([a,b]) \tag{3.3.3}$$

est auto-adjoint positif (au sens du produit scalaire). Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors G_λ est symétrisable par S et

$$\|G_\lambda \phi\| \leq c_\lambda \left\| \sqrt{S}\phi \right\|, \forall \phi \tag{3.3.4}$$

où $c_\lambda = \left\| E_\lambda \sqrt{S} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))}$.

Preuve Soit $\phi, \psi \in L^2(\Omega \times [a,b])$. Alors

$$\begin{aligned}
(SG_\lambda\phi,\psi) &= (E_\lambda S\phi, S\psi) = \int d\rho \int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})|x-x'|}}{\rho\,|x-x'|^{N-1}} \overline{(S\psi)}(x,\rho)(S\phi)(x',\rho)dx'dx \\
&= \int d\rho \int_\Omega (S\phi)(x',\rho)dx \overline{\int_\Omega \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})|x-x'|}}{\rho\,|x-x'|^{N-1}}(S\psi)(x,\rho)} \\
&= (S\phi, E_\lambda S\psi) = (\phi, SG_\lambda\psi)
\end{aligned}$$

donc

$$SG_\lambda = (SG_\lambda)^*.$$

Finalement

$$\|G_\lambda\phi\| = \left\| E_\lambda \sqrt{S}\sqrt{S}\phi \right\| \leq \left\| E_\lambda\sqrt{S} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))} \left\| \sqrt{S}\phi \right\|.$$

□

Remarque. 3.3.2. *L'estimation (3.3.4) a une conséquence spectrale importante sur G_λ (voir l'inégalité (1.5.5)).*

Remarque. 3.3.3. *Les hypothèses de symétrie et la positivité (au sens du produit scalaire)de K_i apparaîssent dans les modèles physiques utilisés en théorie des réacteurs nucléaires [49].*

3.3.4 La réalité du spectre ponctuel

Théorème. 3.3.2. $\sigma_p(T+K_e+K_i)\cap\{\lambda, \Re\lambda > -\inf\sigma(.)\}$ *est constitué au plus de valeurs propres réelles.*

Preuve Soit

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \sigma_p(T + K_e + K_i); \lambda_2 \neq 0.$$

Alors il existe $q \neq 0$ tel que

$$q = G_\lambda q.$$

Puisque S est auto-adjoint alors

$$(q, Sq) = (E_\lambda Sq, Sq) = (E_\lambda\Theta, \Theta) \in \mathbb{R}$$

où

$$\Theta = Sq \neq 0.$$

On note que

$$(E_\lambda\Theta, \Theta) = \int_a^b d\rho \int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})|x-x'|}}{\rho\,|x-x'|^{N-1}} \Theta(x', \rho)dx'\right] \overline{\Theta(x, \rho)}dx.$$

D'autre part, (en prolongeant Θ par zero à l'extérieur de Ω) et en utilisant la transformation de Fourier par rapport à la variable d'espace x et l'identité de Parseval

$$(E_\lambda\Theta, \Theta) = \int_a^b d\rho \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\lambda, \zeta, \rho) \left|\widehat{\Theta}\right|^2 (\zeta, \rho)d\zeta \tag{3.3.5}$$

où

$$\Delta(\lambda, \zeta, \rho) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})|z|}}{\rho\,|z|^{N-1}} e^{-i\zeta.z}dz$$

et

$$\widehat{\Theta}(\zeta, \rho) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_\Omega \Theta(x, \rho)e^{-i\zeta.x}dx$$

est la transformation de Fourier *spatiale* de Θ. D'où

$$\Im(\Delta(\lambda, \zeta, \rho)) \left|\widehat{\Theta}\right|^2 (\zeta, \rho) = 0 \quad \text{p.p.} \tag{3.3.6}$$

En outre,

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda, \zeta, \rho) &= \int_0^\infty dr \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})r}}{\rho r^{N-1}} e^{-ir\,\zeta.\omega} r^{N-1} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{d\omega}{\lambda + \sigma(\rho) + i\rho\,\zeta.\omega} \\
&= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{d\omega}{\lambda + \sigma(\rho) + i\rho\ |\zeta|\,e.\omega}
\end{aligned}$$

où $e = \frac{\zeta}{\|\zeta\|}$.
On rappelle la formule générale de F. Natterer

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} f(e.\omega)d\omega = \left|\mathbb{S}^{N-2}\right| \int_{-1}^{1} f(s)(1-s^2)^{\frac{N-3}{2}} ds \tag{3.3.7}$$

(voir [34], p.188). D'où

$$\Delta(\lambda,\zeta,\rho) = \left|\mathbb{S}^{N-2}\right| \int_{-1}^{1} \frac{(1-s^2)^{\frac{N-3}{2}} ds}{\lambda+\sigma(\rho)+i\rho\ \ |\zeta|\, s}.$$

Soit

$$P_N(s) = \left|\mathbb{S}^{N-2}\right| (1-s^2)^{\frac{N-3}{2}}$$

et

$$\beta := \lambda+\sigma(\rho) = \beta_1 + i\beta_2 \quad (\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}).$$

Comme $P_N(.)$ est paire alors

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda,\zeta,\rho) &= \int_{-1}^{1} \frac{P_N(s)}{\beta+i\rho\ \ |\zeta|\, s} ds = 2\beta \int_0^1 \frac{P_N(s)}{\beta^2+\rho^2\ \ |\zeta|^2 s^2} ds \qquad (3.3.8)\\
&= \frac{2\beta}{\rho^2\ \ |\zeta|^2} \int_0^1 \frac{P_N(s)}{\frac{\beta^2}{\rho^2\ |\zeta|^2}+s^2} ds\\
&= \frac{2}{\rho\,|\zeta|} \int_1^{\infty} \frac{P_N(\frac{1}{t})}{1+(\frac{\beta t}{\rho|\zeta|})^2} \frac{\beta}{\rho\,|\zeta|} dt. \qquad (3.3.9)
\end{aligned}$$

Par une intégration par parties, et le fait que

$$\tan^{-1}(z) = \frac{1}{2i}\log(\frac{1+iz}{1-iz}) = -\frac{i}{2}\log(\frac{1+iz}{1-iz}),$$

et en prenant la partie *imaginaire*, on voit que la partie imaginaire de $\Delta(\lambda,\zeta,\rho)$ est donnée par

$$-\frac{1}{2\rho\,|\zeta|} \int_1^{\infty} P_N'(\frac{1}{t}) \log\left[\frac{(1-\frac{\beta_2 t}{\rho|\zeta|})^2+(\frac{\beta_1 t}{\rho|\zeta|})^2}{(1+\frac{\beta_2 t}{\rho|\zeta|})^2+(\frac{\beta_1 t}{\rho|\zeta|})^2}\right] \frac{dt}{t^2}$$

Puisque $P_N'(\frac{1}{t}) < 0$ alors

$$\Im(\Delta(\lambda,\zeta,\rho)) < 0 \text{ si } \lambda_2 > 0$$

et

$$\Im(\Delta(\lambda,\zeta,\rho)) > 0 \text{ si } \lambda_2 < 0.$$

Enfin, (3.3.6) implique $\widehat{\Theta} = 0$ et $\Theta = Sq = 0$. Cela montre qu'aucune valeur propre *complexe* ne peut exister.

□

Remarque. 3.3.4. *La preuve de ce Théorème 3.3.2 dépend fortement de l'hypothèse d'isotropie des sections efficaces.*

3.4 Caractérisation du spectre ponctuel de $T+K_e+K_i$

Nous allons montrer que le nombre de valeurs propres de l'opérateur de transport partiellement élastique de neutrons supérieures à $s(T+K_e)$ égal au nombre de valeurs propres de $G_{s(T+K_e)}$ supérieures à 1. Nous commençons cette section par le résultat abstrait de continuité.

3.4.1 Résultats de continuité et de monotonie

Lemme. 3.4.1. *Soit S un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H et $(G_\lambda)_{\lambda\in I}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés symérisables par S (indexée par $\lambda \in I \subset \mathbb{R}$) et qui dépend continûment de $\lambda \in I$ en norme d'opérateurs. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier arbitraire. Nous définissons le paramètre*

$$\rho_n(\lambda) := \sup_{E_n\in\mathcal{V}_n} \inf_{\{\phi\in E_n,(S\phi,\phi)=1\}} (SG_\lambda\phi,\phi) \tag{3.4.10}$$

où $\mathcal{V}_n$ désigne la classe des sous espaces E_n de H de dimension n. Alors les courbes

$$I \ni \lambda \to \rho_n(\lambda)$$

sont continues.

Preuve On note d'abord que

$$|(SG_\lambda\phi,\phi)| \leq \|G_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))} (S\phi,\phi)$$

d'après l'inégalité de Reid (1.5.7) et alors

$$\rho_n(\lambda) \leq \|G_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))}.$$

Soit $\lambda,\lambda' \in I$. Alors

$$|(SG_\lambda\phi,\phi)-(SG_{\lambda'}\phi,\phi)| = |(S(G_\lambda-G_{\lambda'})\phi,\phi)| \leq \|G_\lambda-G_{\lambda'}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))} (S\phi,\phi)$$

encore d'après l'inégalité de Reid. Pour $(S\phi,\phi)=1$, on a

$$(SG_\lambda\phi,\phi)-(SG_{\lambda'}\phi,\phi) \leq \|G_\lambda-G_{\lambda'}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))}$$

et

$$(SG_\lambda\phi,\phi) \leq \|G_\lambda-G_{\lambda'}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))} + (SG_{\lambda'}\phi,\phi)$$

alors

$$\sup_{E_n} \inf_{\{\phi\in E_n,(S\phi,\phi)=1\}} (SG_\lambda\phi,\phi) \leq \|G_\lambda-G_{\lambda'}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))} + \sup_{E_n} \inf_{\{\phi\in E_n,(S\phi,\phi)=1\}} (SG_{\lambda'}\phi,\phi)$$

et

$$\rho_n(\lambda)-\rho_n(\lambda') \leq \|G_\lambda-G_{\lambda'}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))}.$$

On montre d'une manière analogue que

$$\rho_n(\lambda) - \rho_n(\lambda') \geq - \|G_\lambda - G_{\lambda'}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))}$$

de sorte que

$$|\rho_n(\lambda) - \rho_n(\lambda')| \leq \|G_\lambda - G_{\lambda'}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega\times[a,b]))}$$

et cela finit la preuve.

□

Lemme. 3.4.2. *Supposons que*

$$K_i : \varphi \in L^2([a,b]) \to \int_a^b k_i(\rho,\rho')\varphi(\rho')d\rho' \in L^2([a,b])$$

est auto-adjoint positif (au sens du produit scalaire). Alors les courbes

$$\lambda \in (-\inf \sigma(.), +\infty) \to \rho_n(\lambda)$$

sont décroissantes.

Preuve Il suffit de montrer que pour tout $\phi \in L^2(\Omega \times [a,b])$

$$(-\inf \sigma(.), +\infty) \ni \lambda \to (SG_\lambda\phi, \phi)$$

est décroissante.
Notons que

$$P_N(1) = 0 \text{ et } P_N(0) = \left|\mathbb{S}^{N-2}\right|$$

voir la définition dans la preuve du Théoème. 3.3.2.
Pour tout λ réel l'égalilté (3.3.9) montre que

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda,\zeta,\rho) &= \frac{2}{\rho|\zeta|}\int_1^\infty \frac{P_N(\frac{1}{t})}{1+(\frac{\beta t}{\rho|\zeta|})^2}\frac{\beta}{\rho|\zeta|}dt \\
&= \frac{2}{\rho|\zeta|}\left[\int_1^\infty P_N'(\frac{1}{t})\arctan\frac{\lambda+\sigma(\rho)t}{\rho|\zeta|}\frac{dt}{t^2} + \frac{\pi}{2}\left|\mathbb{S}^{N-2}\right|\right]
\end{aligned}$$

est décroissante en λ et cela achève la preuve car

$$(SG_\lambda\phi,\phi) = \int_a^b d\rho \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\lambda,\zeta,\rho)\left|\widehat{S\phi}\right|^2(\zeta,\rho)d\zeta.$$

□

Remarque. 3.4.1. *La preuve de ce résultat de monotonie dépend fortement de l'hypothèse d'isotropie des sections efficaces.*

Lemme. 3.4.3. *Supposons que*
(i) Les fonctions

$$k_e : [a,b] \to \mathbb{R}_+ \text{ et } \sigma : [a,b] \to \mathbb{R}_+$$

sont continues.
(ii) L'opérateur

$$K_i : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$$

est compact. Alors

$$r_{ess}(G_{\overline{\lambda}}) = 1$$

où $\overline{\lambda} = s(T + K_e)$.

Preuve Notons d'abord que

$$K_i \text{ est } T - \text{compact}$$

et donc d'après le Théorème. 1.3.1

$$\sigma_{ess}(G_{\overline{\lambda}}) = \sigma_{ess}((\overline{\lambda} - T)^{-1}(K_e + K_i)) = \sigma_{ess}((\overline{\lambda} - T)^{-1}K_e).$$

En particulier

$$r_{ess}(G_{\overline{\lambda}}) = r_{ess}((\overline{\lambda} - T)^{-1}K_e)$$

et on a par le Théorème. 3.2.2 que

$$r_{ess}((\overline{\lambda} - T)^{-1}K_e) = r_\sigma((\overline{\lambda} - T)^{-1}K_e).$$

Il est facile de démontrer que $(\lambda - T)^{-1}K_e$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ est symétrisable par K_e et vérifie (1.5.5). Il résulte de (1.5.9) que

$$r_\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) = \sup_{\{\phi, (K_e\phi, \phi) = 1\}} (K_e(\lambda - T)^{-1}K_e\phi, \phi)$$

donc, en utilisant un raisonnement similaire à celui de la preuve du Lemme. 3.4.1, on voit que

$$\mathbb{R} \ni \lambda \to r_\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e)$$

est *continue*. D'autre part, puisque $(\lambda - T)^{-1}$ et K_e laissent invariant le cône positif alors

$$r_\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) < 1 \tag{3.4.11}$$

si et seulement si $\lambda > s(T + K_e)$ (d'après le Théorème. 1.4.4). Finalement, la continuité de

$$\lambda \to r_\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e)$$

implique que

$$r_\sigma((\overline{\lambda} - T)^{-1}K_e) = 1.$$

□

Lemme. 3.4.4. *Supposons que les trois assertions sont satisfaites :*
(i) Les fonctions $k_e : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ *sont continues.*
(ii) L'opérateur

$$K_i : \varphi \in L^2([a, b]) \to \int_a^b k_i(\rho, \rho')\varphi(x, \rho')d\rho' \in L^2([a, b])$$

est auto-adjoint positif (au sens du produit scalaire).
(iii) L'opérateur

$$K_i : L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$$

est compact.
Posons

$$I_1 = \cup_{\left\{\epsilon>0: r_\sigma(G_\lambda)\ > r_\sigma((\lambda-T)^{-1}K_e),\ \lambda \in [\overline{\lambda}, \overline{\lambda}+\epsilon]\ \right\}} [\overline{\lambda}, \overline{\lambda} + \epsilon]$$

et soit

$$\alpha_1 := \sup\{\lambda; \lambda \in I_1\}.$$

Alors $r_\sigma(G_{\alpha_1}) < 1$. *Plus généralement, on pose*

$$I_n = \cup_{\left\{\epsilon>0:\ \rho_n(\lambda)\ > r_{ess}(G_\lambda),\ \lambda \in [\overline{\lambda}, \overline{\lambda}+\epsilon]\ \right\}} [\overline{\lambda}, \overline{\lambda} + \epsilon]$$

et on définit

$$\alpha_n := \sup\{\lambda; \lambda \in I_n\}.$$

Alors

$$\rho_n(\alpha_n) < 1.$$

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par l'absurde en supposant que

$$\rho_n(\alpha_n) \geq 1.$$

On a d'après le Théorème. 3.2.2 et la compacité de $(\alpha_n - T)^{-1}K_i$

$$r_{ess}(G_{\alpha_n}) = r_{ess}((\alpha_n - T)^{-1}(K_e + K_i)) = r_{ess}((\alpha_n - T)^{-1}K_e) = r_\sigma((\alpha_n - T)^{-1}K_e).$$

On a

$$r_\sigma((\alpha_n - T)^{-1}K_e) < 1$$

car $\alpha_n > s(T + K_e) = \overline{\lambda}$ d'où

$$r_{ess}(G_{\alpha_n}) < 1$$

et par conséquent

$$\rho_n(\alpha_n) > r_{ess}(G_{\alpha_n}).$$

Il résulte du Théorème. 2.2.1 que

$$\rho_1(\alpha_n), \rho_2\ (\alpha_n) ..., \rho_n(\alpha_n)$$

sont n valeurs propres isolées supérieures à 1 (comptées selon leurs multiplicités) de G_{α_n}.
Soit $\lambda > \alpha_n$ et *proche* de α_n. On a d'un côté

$$r_{ess}(G_\lambda) \leq r_{ess}(G_{\alpha_n}) \ \ \forall\lambda > \alpha_n$$

et de l'autre coté, pour λ proche de α_n, G_λ a n valeurs propres réelles (comptées selon leurs multipliciés)

$$\rho_1(\lambda), \rho_2(\lambda) ..., \rho_n(\lambda)$$

proches de

$$\rho_1(\alpha_n), \rho_2(\alpha_n) ..., \rho_n(\alpha_n)$$

puisque G_λ converge vers G_{α_n} en norme d'opérateurs lorsque $\lambda \to \alpha_n$ (voir [21], p. 213). Donc

$$\rho_n(\lambda) > r_{ess}(G_\lambda)$$

car $\rho_n(\lambda)$ est proche de $\rho_n(\alpha_n)$ et $r_{ess}(G_\lambda) \leq r_{ess}(G_{\alpha_n}) < 1$. Cela contredit le caractère *maximal* de α_n.

□

Lemme. 3.4.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les courbes*

$$\left[\overline{\lambda}, \alpha_n\right[\ni \lambda \to \rho_n(\lambda)$$

sont strictement décroissantes.

Preuve Comme

$$\rho_n(\lambda') > r_{ess}(G_{\lambda'}) \ \forall \lambda' \in \left[\overline{\lambda}, \alpha_n\right[,$$

alors $\rho_n(\lambda')$ est la $n-$ième valeur propre de $G_{\lambda'}$ et alors il existe un sous espace $E_n^{\lambda'}$ de dimension n tel que

$$\rho_n(\lambda') = \inf_{\left\{\phi \in E_n^{\lambda'}, (S\phi,\phi)=1\right\}} (SG_\lambda \phi, \phi).$$

Soit $\lambda, \lambda' \in \left[\overline{\lambda}, \alpha_n\right[$ tels que $\lambda < \lambda'$. Comme

$$\rho_n(\lambda) := \sup_{E_n} \inf_{\{\phi \in E_n, (S\phi,\phi)=1\}} (SG_\lambda \phi, \phi)$$

alors

$$\rho_n(\lambda) \geq \inf_{\left\{\phi \in E_n^{\lambda'}, (S\phi,\phi)=1\right\}} (SG_\lambda \phi, \phi).$$

Or

$$\begin{aligned}
(SG_\lambda \phi, \phi) &= \int_a^b d\rho \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\lambda, \zeta, \rho) \left|\widehat{S\phi}\right|^2 (\zeta, \rho) d\zeta \\
&> \int_a^b d\rho \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\lambda', \zeta, \rho) \left|\widehat{S\phi}\right|^2 (\zeta, \rho) d\zeta \\
&= (SG_{\lambda'} \phi, \phi) \ \ \forall \phi
\end{aligned}$$

montre que

$$\inf_{\left\{\phi \in E_n^{\lambda'}, (S\phi,\phi)=1\right\}} (SG_\lambda \phi, \phi) > \inf_{\left\{\phi \in E_n^{\lambda'}, (S\phi,\phi)=1\right\}} (SG_{\lambda'} \phi, \phi) = \rho_n(\lambda')$$

(puisque les bornes inférieures sont *atteintes*) d'où

$$\rho_n(\lambda) > \rho_n(\lambda').$$

□

Nous sommes en position de démontrer :

Théorème. 3.4.1. *Supposons que les hypothèses du Lemme.3.4.4 sont satisfaites. Alors le nombre de valeurs propres de $T + K_e + K_i$ situées dans $(\overline{\lambda}, \infty)$ est égal au nombre de valeurs propres de $G_{\overline{\lambda}}$ supérieures à 1, où $\overline{\lambda} = s(T + K_e)$.*

Preuve D'après le Lemme.3.4.3

$$r_{ess}(G_{\overline{\lambda}}) = 1.$$

et

$$r_{ess}(G_\lambda) = r_{ess}((\lambda - T)^{-1}K_e) = r_\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e)$$

puisque K_i est T-compact. D'après (3.4.11)

$$r_\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) < 1 \ \forall\lambda > \overline{\lambda}$$

donc

$$r_{ess}(G_\lambda) < 1 \ \forall\lambda > \overline{\lambda}.$$

On sait que λ est une valeur propre de $T + K_e + K_i$ si et seulement si 1 est une valeur propre de G_λ. Comme

$$r_{ess}(G_\lambda) < 1 \ \forall\lambda > \overline{\lambda}$$

alors *seules* les valeurs propres de G_λ qui sont à l'extérieur de son disque spectral essentiel sont pertinentes. Il s'ensuit que les valeurs propres de $T + K_e + K_i$, dans le demi droite $(\lambda > \overline{\lambda})$, sont caractérisées comme les solutions d'équations suivantes.

$$\rho_k(\lambda) = 1, \ (\lambda > \overline{\lambda}); \quad (k = 1, 2, ...). \tag{3.4.12}$$

Ainsi pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on considére les courbes $\rho_k(.)$ sur l'intervalle $\left[\overline{\lambda}, \alpha_k\right]$ (on note que $\rho_k(\lambda) \leq \rho_k(\alpha_k) < 1 \ \forall\lambda \geq \alpha_k$). Compte tenu du Lemme.3.4.1 et du Lemme.3.4.5 les courbes

$$\left[\overline{\lambda}, \alpha_k\right] \ni \lambda \to \rho_k(\lambda)$$

sont continues et strictement décroissantes.
Supposons que $G_{\overline{\lambda}}$ a n valeurs propres supérieures à 1

$$\rho_1(\overline{\lambda}) \geq \rho_2\,(\overline{\lambda})... \geq \rho_n(\overline{\lambda}) > 1 = r_{ess}(G_{\overline{\lambda}}).$$

Le fait que

$$\rho_k(\overline{\lambda}) > 1; \ (1 \leq k \leq n)$$

implique l'existence et l'unicité de $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_n$ telles que

$$\rho_k(\beta_k) = 1, \ \beta_k \in (\overline{\lambda}, \alpha_k).$$

Il est clair que

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_n$$

sont les n premières valeurs propres de $T + K_e + K_i$. Inversement, (3.4.12) montre que l'existence de telles valeurs propres implique que $G_{\overline{\lambda}}$ a n valeurs propres supérieures à 1.

$\square$

Remarque. 3.4.2. *Sans l'hypothèse d'isotropie des sections efficaces, on obtiendra que le nombre de valeurs propres de* $T + K_e + K_i$ *situées dans* $(\overline{\lambda}, \infty)$ *est au moins égal au nombre de valeurs propres de* $G_{\overline{\lambda}}$ *supérieures à* 1. *Cela est dû au fait qu'il n'est pas clair que les courbes* $\lambda \to \rho_k(\lambda)$ *sont strictement décroissantes (voir la Remarque. 3.4.1).*

Remarque. 3.4.3. *Bien sûr, l'opérateur* $G_{\overline{\lambda}}$ *a une infinité de valeurs supérieures à* 1 *(qui s'accumulent en* $r_{ess}(G_{\overline{\lambda}}) = 1$*) si et seulement si* $T+K_e+K_i$ *a infinité des valeurs propres dans* $(\overline{\lambda}, \infty)$ *qui s'accumulent en* $\overline{\lambda}$.

3.5 Résultats d'existence

3.5.1 L'existence pour des domaines larges

Nous allons montrer en premier lieu que le nombre de valeurs propres réelles augmente lorsque la taille du domaine augmente. De plus nous déterminons leur limite quand la taille tend vers l'infini. En second lieu nous montrons que le nombre de valeurs propres augmente indéfiniment lorsque l'opérateur de collision inélastique est de plus en plus large. Enfin nous donnons un critère d'existence d'au moins une valeur propre.

Les spectres des opérateurs homogènes en espace

Pour tout $\rho \in [a, b]$ *fixé*, on considère l'opérateur de transport élastique *monocinétique* homogène en espace

$$B_e^{\rho}\varphi = -\sigma(\rho)\varphi + \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(\rho)\varphi(\omega')d\omega', \varphi \in L^2(\mathbb{S}^{N-1}).$$

L'opérateur B_e^{ρ} est une perturbation compacte de l'opérateur de multiplication $-\sigma(\rho)Id$ de sorte que son spectre dans la région $(-\sigma(\rho), +\infty)$ est formé au plus de valeurs propres isolées. On considère le problème spectral

$$B_e^{\rho}\varphi = \lambda\varphi, \ (\lambda > -\sigma(\rho))$$

i.e.

$$k_e(\rho) \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(\omega')d\omega' = (\lambda + \sigma(\rho))\varphi.$$

Notons que $\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(\omega')d\omega' \neq 0$ (sinon $\varphi = 0$). En intégrant sur $\mathbb{S}^{N-1}$, on voit que B_e^{ρ} possède une unique valeur propre

$$\lambda(\rho) = -\sigma(\rho) + \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e(\rho).$$

L'opérateur *élastique* homogène en espace

$$B_e : L^2([a, b] \times \mathbb{S}^{N-1}) \to L^2([a, b] \times \mathbb{S}^{N-1})$$

est défini par

$$B_e\varphi = -\sigma(\rho)\varphi + \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(\rho)\varphi(\rho,\omega')d\omega'.$$

Nous montrons aisément que la borne spectrale est donnée par

$$\begin{aligned} s(B_e) &= \sup\left\{\lambda, \lambda \in \cup_{\rho\in[a,b]}\ \sigma(B_e^{\rho)})\right\} \\ &= \sup_{\rho\in[a,b]} \lambda(\rho) \\ &= \sup_{\rho\in[a,b]} \left\{-\sigma(\rho) + \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e(\rho)\right\}. \end{aligned}$$

Enfin l'opérateur *partiellement élastique* homogène en espace

$$B : L^2([a,b]\times S^{N-1}) \to L^2([a,b]\times \mathbb{S}^{N-1})$$

est donné par

$$B\varphi = B_e\varphi + \int_a^b k_i(\rho,\rho')d\rho' \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(\rho',\omega')d\omega'.$$

Observons que la restriction de B à $L^2([a,b])$ n'est rien d'autre que $\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| S$ i.e.

$$\varphi \to \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e(\rho)\phi(\rho) + \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| \int_a^b k_i(\rho,\rho')\phi(\rho')d\rho'.$$

Notons que S est auto-adjoint et positif. Explorons maintenant le spectre de B dans la demi-droite

$$\{\lambda, \lambda > s(B_e)\}.$$

Comme B est une perturbation compacte de B_e, alors le spectre de B dans $\{\lambda, \lambda > s(B_e)\}$ est constitué au plus de valeurs propres isolées. Nous considèrons le problème spectral

$$B\varphi = \lambda\varphi;\ \ \lambda > s(B_e), \varphi \in L^2([a,b]\times\mathbb{S}^{N-1})$$

i.e.

$$k_e(\rho)\int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(\rho,\omega')d\omega' + \int_a^b k_i(\rho,\rho')d\rho' \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(\rho',\omega')d\omega' = (\lambda+\sigma(\rho))\varphi.$$

On observe que φ est *indépendente* de $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ et on en déduit le problème spectral équivalent suivant

$$\widetilde{B}\varphi = (\lambda+\sigma(\rho))\varphi \tag{3.5.13}$$

où

$$\widetilde{B} : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$$

est donné par

$$\widetilde{B}\varphi = \left|\mathbb{S}^{N-1}\right|\ k_e(\rho)\varphi(\rho) + \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| \int_a^b k_i(\rho,\rho')\ \varphi(\rho')d\rho'.$$

Notons que

$$\widetilde{B} = \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| S.$$

On écrit (3.5.13) comme suit

$$\widetilde{B}_\lambda\varphi := \frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|\ k_e(\rho)}{\lambda+\sigma(\rho)}\varphi(\rho) + \frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|}{\lambda+\sigma(\rho)} \int_a^b k_i(\rho,\rho')\ \varphi(\rho')d\rho' \ \ = \varphi. \tag{3.5.14}$$

Théorème. 3.5.1. *$\sigma(B) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\}$ n'est pas vide si et seulement si*

$$\lim_{\lambda \to s(B_e)} r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) > 1.$$

Dans ce cas, il existe un unique $\overline{\lambda} > s(B_e)$ tel que

$$r_\sigma(\widetilde{B}_{\overline{\lambda}}) = 1$$

et $\overline{\lambda}$ est la valeur propre principale de B.

Preuve Notons que $\widetilde{B}_\lambda$ est une perturbation compacte de l'opérateur de multiplication

$$O_\lambda : \varphi \to \frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| \ k_e(.)}{\lambda + \sigma(.)} \varphi.$$

Il en résulte que

$$r_{ess}(\widetilde{B}_\lambda) = r_{ess}(O_\lambda) = \sup_{\rho \in [a,b]} \frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| \ k_e(\rho)}{\lambda + \sigma(\rho)}.$$

Or

$$\lambda > s(B_e) = \sup_{\rho \in [a,b]} \left\{ -\sigma(\rho) + \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e(\rho) \right\}$$

est équivalent à

$$\sup_{\rho \in [a,b]} \frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| \ k_e(\rho)}{\lambda + \sigma(\rho)} < 1$$

d'où

$$r_{ess}(\widetilde{B}_\lambda) < 1 \ \ \forall \lambda > s(B_e).$$

On observe que

$$\widetilde{B}_\lambda = \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| \frac{1}{\lambda + \sigma(\rho)} S$$

est *symétrisable* par S et vérifie l'inégalité (1.5.5) et donc

$$r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) = \sup_{\{\varphi;\ (S\varphi, \varphi) = 1\}} (S\widetilde{B}_\lambda \varphi, \varphi).$$

Par un raisonnement similaire à celui de la preuve du Lemme.3.4.1 on voit que

$$(s(B_e), +\infty) \ni \lambda \to r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)$$

est continue.
On pose

$$I = \cup_{\left\{\varepsilon > 0:\ r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) > r_{ess}(\widetilde{B}_\lambda),\ \lambda \in (s(B_e), s(B_e) + \varepsilon)\right\}} \left(s(B_e), s(B_e) + \varepsilon\right),$$

et on définit

$$\nu := \sup\{\lambda; \lambda \in I\}.$$

Par un raisonnement similaire à celui de la preuve du Lemme.3.4.4 on voit que si ν est fini alors

$$r_\sigma(\widetilde{B}_\nu) < 1. \tag{3.5.15}$$

Notons que

$$\widetilde{B}_\lambda\varphi \leq \widetilde{B}_{\lambda'}\varphi \quad \forall\lambda' > \lambda \text{ et } \varphi \geq 0$$

i.e.

$$\widetilde{B}_\lambda \leq \widetilde{B}_{\lambda'} \; \forall\lambda' > \lambda$$

et par conséquent

$$(s(B_e), +\infty) \ni \lambda \to r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)$$

est décroissante. Par un raisonnement similaire à celui de la preuve du Lemme.3.4.5 on voit que

$$(s(B_e), \nu) \ni \lambda \to r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)$$

est strictement décroissante.
Si

$$\lim_{\lambda \to s(B_e)} r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) \leq 1$$

alors $r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) < 1 \;\; \forall\lambda > s(B_e)$ et donc (3.5.14) n'a pas de solution non triviale. Inversement, on suppose que

$$\lim_{\lambda \to s(B_e)} r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) > 1.$$

Comme $(s(B_e), +\infty) \ni \lambda \to r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)$ est continue et strictement décroissante sur $(s(B_e), \nu)$, et grâce à (3.5.15) alors il existe unique $\overline{\lambda} \in (s(B_e), \nu)$ telle que

$$r_\sigma(\widetilde{B}_{\overline{\lambda}}) = 1.$$

Comme $r_{ess}(\widetilde{B}_\lambda) < 1 \;\; \forall\lambda > s(B_e)$ alors 1 est une valeur propre de $\widetilde{B}_{\overline{\lambda}}$ associée à une fonction propre positive et finalement $\overline{\lambda}$ est la valeur propre principale de B.

□

On étudie l'influence de la taille de Ω sur le spectre de $T + K_e + K_i$. Nous avons vu que G_λ est de "type convolution" en variable d'espace de sorte que le spectre est invariant par translation de Ω. De là, sans perte de généralité, on peut supposer que $0 \in \Omega$. On peut mesurer la taille de Ω par le rayon de la plus grande boule contenue dans Ω. Pour la simplicité on suppose que

$$\Omega_\alpha = \alpha\Omega_1$$

où Ω_1 est un ouvert borné convexe qui contient 0 et α est un réel positif (*destiné à tendre vers l'infini*).
Par un changement de variables (homothétie de rapport α) on montre que le problème spectral

$$G_\lambda\varphi = \mu\varphi, \;\; \varphi \in L^2(\Omega_\alpha \times [a, b])$$

est équivalent à

$$G_\lambda^\alpha \psi = \mu\psi,\ \ \psi \in L^2(\Omega_1 \times [a,b])$$

où

$$\psi(x,\rho) = \varphi(\alpha x,\rho)\ \ \ (x \in \Omega_1)$$

et α entre en tant que paramètre dans la définition d'un opérateur sur

$$L^2(\Omega_1 \times [a,b]).$$

Le spectre ponctuel de G_λ sur l'espace

$$L^2(\Omega_\alpha \times [a,b])$$

n'est rien d'autre que le spectre ponctuel de G_λ^α sur l'espace

$$L^2(\Omega_1 \times [a,b]).$$

Comme précédement on peut montrer que

$$(SG_\lambda^\alpha \psi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} d\zeta \int_a^b \left[2\int_0^1 \frac{\alpha^2(\lambda+\sigma(\rho))P_N(s)}{\alpha^2(\lambda+\sigma(\rho))^2+\rho^2\ \ \|\zeta\|^2 s^2} ds \right] \left| S\widehat{\psi}(\zeta,\rho) \right|^2 d\rho \tag{3.5.16}$$

où

$$P_N(s) = \left| \mathbb{S}^{N-2} \right| (1-s^2)^{\frac{N-3}{2}}$$

et

$$\widehat{\psi}(\zeta,\rho) = (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \int_{\Omega_1} \psi(x,\rho) e^{ix.\zeta} dx.$$

Nous donnons maintenant des résultats préliminaires clefs :

Lemme. 3.5.1. *On désigne par $\rho_m(\lambda,\alpha)$ $(m \in \mathbb{N})$ les paramètres définis dans (3.4.10) associés à l'opérateur G_λ^α. Alors*

(i) Pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\rho_m(\lambda,\alpha) \le r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda),\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall \lambda > s(B_e).$$

(ii) Pour tout $c > s(B_e)$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$\rho_m(\lambda,\alpha) \to r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)\ \ \ \textit{quand}\ \alpha \to \infty$$

uniformément en $\lambda \in [c,+\infty[$.

Preuve Notons que

$$\widetilde{B}_\lambda : L^2([a,b]) \to L^2([a,b]) \tag{3.5.17}$$

est *symétrisable* par S. Il résulte de (1.5.9) que

$$(S\widetilde{B}_\lambda\varphi,\varphi) \le r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)(S\varphi,\varphi)\ \ \forall \varphi \in L^2([a,b]).$$

Nous allons d'abord montrer que cette inégalité reste vraie si on travaille dans

$$L^2(\Omega_1 \times [a,b])$$

où $(.,.)$ désigne le produit dans $L^2(\Omega_1 \times [a,b])$ mais $r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)$ a la même signification précédente, i.e. le *rayon spectral* de l'opérateur $\widetilde{B}_\lambda$ défini dans (3.5.17). En effet, soit $\psi \in L^2(\Omega_1 \times [a,b])$ et on note par $\psi(x)$ (pour presque tout $x \in \Omega_1$) la fonction

$$\psi(x,.) : \rho \to \psi(x,\rho).$$

Alors

$$\begin{aligned}
(S\widetilde{B}_\lambda\psi,\psi) &= \int_{\Omega_1} (S\widetilde{B}_\lambda\psi(x),\psi(x))_{L^2([a,b])}dx \\
&\leq r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)\int_{\Omega_1} (S\psi(x),\psi(x))_{L^2([a,b])}dx \\
&= r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)(S\psi,\psi)
\end{aligned}$$

et nous avons fini.
Pour démontrer (i), rappelons d'abord que

$$\widetilde{B}_\lambda = \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| \frac{1}{\lambda+\sigma(\rho)}S.$$

On a d'apès (3.5.16) et l'inégalité de Parseval

$$\begin{aligned}
(SG_\lambda^\alpha\psi,\psi) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} d\zeta \int_a^b \frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|}{\lambda+\sigma(\rho)} \left|S\widehat{\psi}(\zeta,\rho)\right|^2 d\rho \\
&= \int_{\Omega_1} dx \int_a^b \frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|}{\lambda+\sigma(\rho)} \left|S\psi(x,\rho)\right|^2 d\rho \\
&= (\widetilde{B}_\lambda\psi, S\psi)_{L^2(\Omega_1\times[a,b])} \\
&= (S\widetilde{B}_\lambda\psi,\psi)_{L^2(\Omega_1\times[a,b])} \\
&\leq r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)(S\psi,\psi)_{L^2(\Omega_1\times[a,b])}.
\end{aligned}$$

ce qui finit la preuve de l'assertion (i).
(ii) Notons que (3.3.7) avec $f=1$ donne

$$\int_{-1}^1 P_N(s)ds = \left|\mathbb{S}^{N-2}\right| \int_{-1}^1 (1-s^2)^{\frac{N-3}{2}}ds = \left|\mathbb{S}^{N-1}\right|. \tag{3.5.18}$$

On choisit arbitrairement une fonction $\varphi \in L^2([a,b])$ telle que $(S\varphi,\varphi)=1$. Soit

$$F_m \subset L^2(\Omega_1)$$

un sous espace de dimension m et soit

$$E_m := F_m \otimes \varphi \subset L^2(\Omega_1 \times [a,b]).$$

Alors E_m est de dimension m et

$$\begin{aligned}\rho_m(\lambda,\alpha) &\geq \inf_{\{f\in E_m,(Sf,f)=1\}}(SG_\lambda^\alpha f,f)\\ &= (SG_\lambda^\alpha f_\lambda^\alpha, f_\lambda^\alpha)\end{aligned}$$

où

$$f_\lambda^\alpha(x,\rho)=\psi_\lambda^\alpha(x)\varphi(\rho),\ \ \psi_\lambda^\alpha\in F_m, \|\psi_\lambda^\alpha\|_{L^2(\Omega_1)}=1.$$

D'où

$$\rho_m(\lambda,\alpha)\geq \int_{\mathbb{R}^N}\left|\widehat{\psi_\lambda^\alpha}(\zeta)\right|^2 d\zeta\int_a^b\left[2\int_0^1\frac{\alpha^2(\lambda+\sigma(\rho))P_N(s)}{\alpha^2(\lambda+\sigma(\rho))^2+\rho^2\ \ \|\zeta\|^2 s^2}ds\right]|S\varphi(\rho)|^2 d\rho.$$

Nous choisissons une suite arbitraire

$$\alpha_j\to\infty.$$

La suite bornée $\left\{\psi_\lambda^{\alpha_j}; j\in\mathbb{N}\right\}\subset F_m$ est relativement compacte (l'extraction d'une sous suite s'il est nécessaire)

$$\psi_\lambda^{\alpha_j}\to\psi_\lambda\in F_m, \|\psi_\lambda\|_{L^2(\Omega_1)}=1.$$

D'où

$$\widehat{\psi_\lambda^{\alpha_j}}\to\widehat{\psi_\lambda}\ \ dans\ L^2(\mathbb{R}^N)\ \ et\ \ \left\|\widehat{\psi_\lambda}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}=1.$$

Par le Lemme de Fatou et (3.5.18)

$$\begin{aligned}\liminf_j \rho_m(\lambda,\alpha_j) &\geq \int_{\mathbb{R}^N}\left|\widehat{\psi_\lambda}(\zeta)\right|^2 d\zeta\int_a^b\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|}{\lambda+\sigma(\rho)}|S\varphi(\rho)|^2 d\rho\\ &= \int_a^b\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|}{\lambda+\sigma(\rho)}|S\varphi(\rho)|^2 d\rho.\\ &= (\widetilde{B}_\lambda\varphi,S\varphi)=(S\widetilde{B}_\lambda\varphi,\varphi).\end{aligned}$$

Comme φ est arbitraire alors

$$\lim_{j\to\infty}\inf\rho_m(\lambda,\alpha_j)\geq\sup_{\{\varphi;\ \ (S\varphi,\varphi)=1\}}(S\widetilde{B}_\lambda\varphi,\varphi)=r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda).$$

On a d'un côté, par la première assertion

$$\rho_m(\lambda,\alpha_j)\leq r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)$$

d'où

$$\lim_{j\to\infty}\rho_m(\lambda,\alpha_j)=r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda).$$

Par l'unicité de la limite

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\rho_m(\lambda,\alpha)=r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda).$$

Enfin, en prenant une suite *croissante* $\alpha_j\to\infty$ on voit que

$$j\to\rho_m(\lambda,\alpha_j)$$

est croissante (voir la forme quadratique (3.5.16)) et alors

$$\rho_m(\lambda, \alpha_j) \to r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) \text{ lorsque } j \to +\infty$$

uniformément en $\lambda \in [c, d]$ où $c > s(B_e)$ par le Théorème de Dini puisque les fonctions sont continues en λ. Puisque

$$r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) \to 0 \; quand \; \lambda \to +\infty$$

alors la convergence de

$$\rho_m(\lambda, \alpha_j) \to r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)$$

est uniforme en $\lambda \in [c, +\infty[$. Cela achève la preuve de la seconde assertion.

□

On est maintenant en mesure de prouver le résulat principal de cette section. On définit la taille de Ω comme le rayon de la plus grande boule contenue dans Ω.

Théorème. 3.5.2. *(i) Si* $\sigma(B) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\} = \varnothing$ *alors*

$$\sigma(T + K_e + K_i) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\} = \varnothing$$

indépendemment de la taille de Ω.

(ii) Inversement, let $\sigma(B) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\} \neq \varnothing$ *et soit* $\overline{\lambda}$ *la valeur propre principale de* B*. Alors pour chaque* $\beta < \overline{\lambda}$ $(\beta > s(B_e))$ *et pour chaque* $m \in \mathbb{N}$

$$\sigma(T + K_e + K_i) \cap \{\lambda, \lambda > \beta\}$$

contient au moins m *valeurs propres si la taille* Ω *suffisamment grande.*

Preuve Sans perte de généralité on suppose que $\Omega = \alpha\Omega_1$ où Ω_1 est fixé. On sait que $\lambda > s(B_e)$ est une valeur propre de $T + K_e + K_i$ si et seulement si 1 est une valeur propre de G_λ^α dans

$$L^2(\Omega_1 \times [a, b]).$$

L'opérateur G_λ^α est symétrisable par S. On note $\rho_m(\lambda, \alpha)$ son paramètre associé.

(i) Par le Théorème. 3.5.1, si

$$\sigma(B) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\} = \varnothing$$

alors

$$r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) < 1 \;\; \forall \lambda > s(B_e).$$

D'autre part, par le Lemme.4.2.4

$$r_\sigma(G_\lambda^\alpha) \leq r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda)$$

(indépendamment de la taille de Ω) et donc 1 ne peut pas être une valeur propre de G_λ^α.
(ii) Inversement, soit

$$\sigma(B) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\} = \varnothing$$

et soit $\overline{\lambda}$ la valeur propre principale de B (cf. le Théorème. 3.5.1). Alors

$$\lim_{\lambda \to s(B_e)} r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) > 1$$

et $\overline{\lambda}$ est caractérisé par

$$r_\sigma(\widetilde{B}_{\overline{\lambda}}) = 1.$$

En outre

$$r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) < 1$$

pour $\lambda > \overline{\lambda}$ et

$$r_\sigma(\widetilde{B}_\beta) > 1$$

pour tout $\beta < \overline{\lambda}$ ($\beta > s(B_e)$). D'après le Lemme.3.5.1

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \rho_m(\beta, \alpha) = r_\sigma(\widetilde{B}_\beta) > 1.$$

D'où

$$\rho_m(\beta, \alpha) > 1$$

pour α assez grand. En particulier

$$\rho_1(\beta, \alpha) \geq \rho_1(\beta, \alpha) \geq ... \geq \rho_m(\beta, \alpha) > 1.$$

Il en résulte que pour chaque $k = 1, 2, ..., n$, il existe $\lambda_k > \beta$ tel que

$$\rho_k(\lambda_k, \alpha) = 1.$$

Comme

$$r_{ess}(\widetilde{B}_\lambda) < 1 \; \forall \lambda > s(B_e)$$

alors 1 est une valeur propre de $\widetilde{B}_{\lambda_k}$ ou d'une façon équivalente λ_k est une valeur propre de

$$T + K_e + K_i.$$

Note que

$$\lambda_k \leq \overline{\lambda} \; \forall k.$$

$\square$

3.5.2 Opérateurs de collision inélastiques larges

Nous étudions maintenant les propriété spectrales pour des opérateurs de collision partiellement élastiques dont la partie inélastique est relativement importante de la forme

$$L^2(\mathbb{S}^{N-1} \times [a,b]) \ni \varphi \to \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(\rho)\varphi(\rho,\omega')d\omega' + c\int_a^b \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_i(\rho,\rho')\varphi(\rho,\omega')d\rho' d\omega'$$

où $c > 0$ est un paramètre qui sera choisi suffisamment grand.

Théorème. 3.5.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné convexe donné et $m \in \mathbb{N}$, et pour chaque $\beta > s(B_e)$, l'opérateur de transport de neutrons partiellement élastique*

$$T + K_e + cK_i$$

admet au moins m valeurs propres $\lambda_k \geq \beta$ $(k = 1, 2, ..., m)$ si c est assez grand.

Preuve Soit

$$S_c : L^2([a,b]) \ni \psi \to k_e(\rho)\psi(\rho) + c\int_a^b k_i(\rho,\rho')\psi(\rho')d\rho' \in L^2([a,b]).$$

Tout d'abord nous allons montrer l'existence d'une valeur propre principale $\lambda(c)$ de S_c telle que

$$\lambda(c) > \sup_{\rho\in[a,b]} k_e(\rho)$$

et nous étudierons le comportement de la fonction propre associée en function du paramètre c.
Soit K_i l'opérateur auto-adjoint positif et compact

$$L^2([a,b]) \ni \psi \to \int_a^b k_i(\rho,\rho')\psi(\rho')d\rho' \in L^\infty([a,b]).$$

Alors le problème spectral

$$k_e\psi + cK_i\psi = \lambda\psi \tag{3.5.19}$$

avec $\lambda > \sup_{\rho\in[a,b]} k_e(\rho)$ est équivalent à

$$H_\lambda\psi := \frac{c}{\lambda - k_e(\rho)}K_i\psi = \psi.$$

On observe que K_i laisse invariant le cône postif

$$L^2_+([a,b])$$

de sorte que H_λ est positif (i.e. laisse invariant $L^2_+([a,b])$) et compact. Il s'ensuit d'après des arguments standards que si

$$\lim_{\lambda\to\|k_e\|_{L^\infty}} r_\sigma(H_\lambda) > 1$$

alors il existe un $\lambda > \|k_e\|_{L^\infty}$ tel que

$$r_\sigma(H_\lambda) = 1$$

et alors λ résout l'équation (3.5.19) et est associé à une fonction propre positive g. Cette valeur propre est notée par $\lambda(c)$. De même on écrit g_c au lieu de g. Notons que

$$H_\lambda \psi \geq \frac{c}{\lambda - \inf k_e} K_i \psi \quad \forall \psi \in L^2_+([a,b])$$

d'où

$$r_\sigma(H_\lambda) \geq \frac{c}{\lambda - \inf k_e} r_\sigma(K_i)$$

et

$$\lim_{\lambda \to \|k_e\|_{L^\infty}} r_\sigma(H_\lambda) = \frac{c}{\sup k_e - \inf k_e} r_\sigma(K_i) > 1$$

pour c *assez grand.*
Il s'ensuit que

$$\lambda(c) \geq \inf k_e + c r_\sigma(K_i) = \inf k_e + c\,\|K_i\| \to +\infty \text{ quand } c \to +\infty. \tag{3.5.20}$$

Soit $\beta > s(B_e)$ *fixé*. On note

$$\begin{aligned}(S_c G_\beta \psi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}^N} d\zeta \int_a^b \Delta(\beta,\zeta,\rho) \left| S_c \widehat{\psi}(\zeta,\rho)\right|^2 d\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} d\zeta \int_a^b \Delta(\beta,\zeta,\rho) \left| k_e(\rho)\widehat{\psi}(\zeta,\rho) + c\int_a^b k_i(\rho,\rho')\widehat{\psi}(\zeta,\rho')d\rho'\right|^2 d\rho\end{aligned}$$

Soit $F_m \subset L^2(\Omega)$ un sous espace de dimension m

$$\psi(x,\rho) = f(x) g_c(\rho)$$

avec $f \in F_m$, $\|f\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et g_c est normalisé comme

$$(S g_c, g_c) = 1$$

i.e.

$$\lambda(c)\,\|g_c\|^2 = 1.$$

Notons que

$$(S_c G_\beta \psi, \psi) = \lambda(c) \int_{\mathbb{R}^N} \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta \int_a^b \Delta(\beta,\zeta,\rho) \left|\sqrt{\lambda(c)} g_c(\rho)\right|^2 d\rho.$$

On observe

$$\left\|\sqrt{\lambda(c)} g_c\right\| = 1.$$

Soit

$$E_m := F_m \otimes g.$$

Alors, en utlisant la compacité de la boule unité de F_m

$$\begin{aligned}
\rho_m(\lambda) &\geq \inf_{\{\psi\in E_m,(S\psi,\psi)=1\}}(S_cG_\beta\psi,\psi) \\
&= \inf_{\{f\in E_m,\|f\|=1\}}\lambda(c)\int_{\mathbb{R}^N}\left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta\int_a^b\Delta(\beta,\zeta,\rho)\left|\sqrt{\lambda(c)}g_c(\rho)\right|^2 d\rho \\
&= \lambda(c)\int_{\mathbb{R}^N}\left|\widehat{f}_c(\zeta)\right|^2 d\zeta\int_a^b\Delta(\beta,\zeta,\rho)\left|\sqrt{\lambda(c)}g_c(\rho)\right|^2 d\rho
\end{aligned}$$

pour une certaine $f_c \in \ F_m$ telle que

$$\|f_c\|_{L^2(\Omega)} = 1$$

dépend a priori de (m et) c. On note que

$$k_e(\rho)g_c + c\int_a^b k_i(\rho,\rho')g_c(\rho')d\rho' = \lambda(c)g_c$$

donc

$$\frac{k_e(\rho)\sqrt{\lambda(c)}g_c}{\lambda(c)} + \frac{c}{\lambda(c)}K_i\left(\sqrt{\lambda(c)}g_c\right) = \sqrt{\lambda(c)}g_c$$

ou

$$\frac{k_e(\rho)h_c}{\lambda(c)} + K_ih_c = h_c$$

et

$$\|h_c\| = \left\|\sqrt{\lambda(c)}g_c\right\| = 1.$$

En particulier

$$\frac{k_e(\rho)h_c}{\lambda(c)} \to 0 \text{ en norme quand } c \to +\infty.$$

Soit maintenant c_j une suite telle que $c_j \to +\infty$. L'inégalité (3.5.20) montre que

$$\frac{c_j}{\lambda(c_j)} \text{ est borné quand } j \to +\infty$$

et (par l'extraction d'une sous suite si nécessaire) on peut supposer

$$\frac{c_j}{\lambda(c_j)}$$

a une limite finie quand $j \to +\infty$. Puisque $\left\|h_{c_j}\right\| = 1$ et K_i est un opérateur compact alors

$$\left\{\frac{c_j}{\lambda(c_j)}K_ih_{c_j},\ j\in\mathbb{N}\right\}$$

est relativement compact et alors il en est de même de

$$\left\{h_{c_j},\ c>0\right\}.$$

Alors la compacité de la sphère unité de F_m montre que $(f_{c_j})_j$ admet une sous suite convergente, en norme de $L^2(\Omega)$, vers une certaine fonction

$$f\in F_m,\ \|f\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

D'autre part, $(h_{c_j})_j$ admet aussi une sous suite convergente (en norme de $L^2([a,b])$) vers une fonction $h \in L^2([a,b])$ de norme 1.
D'après le Lemme de Fatou,

$$\lim_{j\to+\infty}\inf \int_{\mathbb{R}^N} \left|\widehat{f_{c_j}}(\zeta)\right|^2 d\zeta \int_a^b \Delta(\beta,\zeta,\rho) \left|h_{c_j}(\rho)\right|^2 d\rho \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta \int_a^b \Delta(\beta,\zeta,\rho) \left|h(\rho)\right|^2 d\rho > 0.$$

En particulier

$$\lim_{j\to+\infty}\inf \lambda(c_j) \int_{\mathbb{R}^N} \left|\widehat{f_{c_j}}(\zeta)\right|^2 d\zeta \int_a^b \Delta(\beta,\zeta,\rho) \left|h_{c_j}(\rho)\right|^2 d\rho = +\infty.$$

Ainsi, pour *chaque* $m \in \mathbb{N}$,

$$\rho_m(\beta) > 1$$

pour une constante c assez grande. D'où

$$\rho_1(\beta) \geq \rho_2(\beta) ... \geq \rho_m(\beta) > 1$$

et alors il existe

$$\lambda_k \geq \beta \ (k = 1, 2, ..., m)$$

telles que

$$\rho_k(\lambda_k) = 1.$$

Puisque

$$r_{ess}(G_\lambda) < 1 \ \forall \lambda > s(B_e)$$

alors 1 est une valeur propre de G_{λ_k} et

$$\lambda_k \ (k = 1, 2, ..., m)$$

sont des valeurs propres de

$$T + K_e + cK_i.$$

□

3.5.3 Un critère d'existence

Dans ce paragarphe, nous donnons un critère pratique d'existence d'au moins une valeur propre.

Théorème. 3.5.4. *On suppose que $\sigma(.)$ et $k_e(.)$ sont constantes. Si*

$$\frac{k_e + \|K_i\|}{b\,|\Omega|} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{|\mathbb{S}^{N-1}|k_e}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dx dx' > 1 \tag{3.5.21}$$

alors $T + K_e + K_i$ admet une valeur propre dans la demi-droite $(s(B_e), +\infty)$.

Preuve Comme $k_e(.)$ est une constante k_e alors la valeur propre principale

$$S : \phi \to k_e\phi(\rho) + \int_a^b k_i(\rho, \rho')\phi(\rho)d\rho'$$

est égale à

$$\eta = k_e + \|K_i\|.$$

Soit g la fonction propre associée à la norme de K_i, i.e.

$$K_i g = \|K_i\| g.$$

On note que

$$(Sg, g) = 1$$

est équivalent à

$$\eta \|g\|^2 = (k_e + \|K_i\|) \|g\|^2 = 1$$

donc

$$\|g\|^2 = \frac{1}{(k_e + \|K_i\|)}.$$

Soit

$$\psi(x, v) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} g(\rho)$$

notons que

$$(S\psi, \psi)_{L^2(\Omega\times[a,b])} = 1.$$

Puisque le rayon spectral de G_λ est donné par

$$\sup_{\{\phi;\ (S\phi,\phi)=1\}} (SG_\lambda\phi, \phi)_{L^2(\Omega\times[a,b])}$$

alors

$$\begin{aligned}
r_\sigma(G_\lambda) &\geq (SG_\lambda\psi, \psi)_{L^2(\Omega\times[a,b])} \\
&= \frac{1}{|\Omega|}\int_a^b d\rho \left[\int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})|x-x'|}}{\rho\,|x-x'|^{N-1}} dxdx'\right] |Sg(\rho)|^2 \\
&= \frac{(k_e + \|K_i\|)^2}{|\Omega|}\int_a^b g(\rho)^2 \left[\int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma(\rho)}{\rho})|x-x'|}}{\rho\,|x-x'|^{N-1}} dxdx'\right] d\rho \\
&\geq \frac{(k_e + \|K_i\|)^2}{b\,|\Omega|}\int_a^b g(\rho)^2 \left[\int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dxdx'\right] d\rho \\
&= \frac{(k_e + \|K_i\|)^2}{b\,|\Omega|} \|g\|^2 \int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dxdx' \\
&= \frac{k_e + \|K_i\|}{b\,|\Omega|} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{\lambda+\sigma}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dxdx'.
\end{aligned}$$

Notons que

$$s(B_e) = -\sigma + \left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e$$

donc

$$\lim_{\lambda \to s(B_e)} r_\sigma(G_\lambda) \geq \frac{k_e + \|K_i\|}{b\,|\Omega|} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dx dx' > 1$$

et par conséquent il existe un $\nu > s(B_e)$ tel que

$$r_\sigma(G_\nu) = 1.$$

Comme

$$r_{ess}(G_\lambda) < 1 \;\forall \lambda > s(B_e)$$

alors 1 est une valeur propre de G_ν et donc ν est une valeur propre de $T + K_e + K_i$.

□

Nous donnons maitenant une estimation du paramètre défini dans (3.5.21).

Proposition. 3.5.1. *Soit*

$$I := \frac{k_e + \|K_i\|}{b\,|\Omega|} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dx dx'.$$

Soit R est la taille de Ω (i.e. le rayon de la plus grande boule contenue dans Ω). Alors

$$I \geq \frac{k_e + \|K_i\|}{b\,|\Omega|} \frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| (\tau R)^N}{N} \left(\int_{|y|<R(1-\tau)} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}} dy \right) \quad \forall \tau \in (0,1)\,.$$

En particulier, si Ω est une boule alors

$$I \geq \frac{(k_e + \|K_i\|)\tau^N}{b} \left(\int_{|y|<R(1-\tau)} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}} dy \right).$$

Preuve Soit R le rayon de la plus grande boule Υ contenue dans Ω. On peut supposer sans perte de généralité que Υ est centrée à *l'origine*. On a

$$\int_{\Omega\times\Omega} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dx dx' \geq \int_{\Upsilon\times\Upsilon} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dx dx'.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_{\Upsilon\times\Upsilon} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dx dx' &= \int_{\Upsilon} \left[\int_{\Upsilon} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dx' \right] dx \\
&= \int_{\Upsilon} \left[\int_{\Upsilon} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|x-x'|}}{|x-x'|^{N-1}} dx \right] dx' \\
&= \int_{\Upsilon} \left[\int_{\Upsilon - x'} \frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right| k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}} dy \right] dx'.
\end{aligned}$$

Notons que $\Upsilon - x'$ contient une boule ouverte de centre 0 et de rayon $R - |x'|$. Ainsi (pour tout $0 < \tau < 1$)

$$\begin{aligned}\int_{\Upsilon}\left[\int_{\Upsilon - x'}\frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}}dy\right]dx' &\geq \int_{|x'|\leq\tau R}\left[\int_{|y|<R(1-\tau)}\frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}}dy\right]dx' \\ &= \frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|(\tau R)^N}{N}\left(\int_{|y|<R(1-\tau)}\frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}}dy\right)\end{aligned}$$

et

$$\lim_{\lambda\to s(B_e)} r_\sigma(G_\lambda) \geq \frac{k_e + \|K_i\|}{b\,|\Omega|}\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|(\tau R)^N}{N}\left(\int_{|y|<R(1-\tau)}\frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}}dy\right).$$

En particulier si Ω est une boule alors

$$\lim_{\lambda\to s(B_e)} r_\sigma(G_\lambda) \geq \frac{(k_e + \|K_i\|)\tau^N}{b}\left(\int_{|y|<R(1-\tau)}\frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}}dy\right).$$

□

Remarque. 3.5.1. *Notons que*

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\lambda\to s(B_e)} r_\sigma(G_\lambda) \geq \frac{(k_e + \|K_i\|)\tau^N}{b}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}}dy\right)$$

et par conséquent (puisque τ est arbitrairement inférieur strictement à 1)

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\lambda\to s(B_e)} r_\sigma(G_\lambda) \geq \frac{(k_e + \|K_i\|)}{b}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{e^{-(\frac{\left|\mathbb{S}^{N-1}\right|k_e}{a})|y|}}{|y|^{N-1}}dy\right).$$

Chapitre 4

Modèles neutroniques anisotropes

L'objectif de ce chapitre est de compléter les résultats du chapitre 3 par des résultats qui ne sont pas liés à l'isotropie des sections efficaces. La plupart des preuves sont très proches de celles données dans le cas isotrope. C'est pourquoi nous ne les détaillerons pas. Comme dans le cas isotrope, on dérive une forme quadratique qui joue un rôle clé, mais donne de résultats moins précis que dans le cas isotrope.
Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\Omega \in \mathbb{R}^{N-1}$ un ouvert borné convexe. L'espace de vitesses V est composé de vitesses $v = \rho\omega$, avec $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ (la sphère unité de $\mathbb{R}^N$) et

$$\rho \in [a, b], a > 0$$

et est muni de la mesure de Lebesgue $dv = \rho^{N-1} d\omega d\rho$. On définit l'opérateur de collision partiellement élastique

$$K := K_i + K_e$$

où

$$K_i : L^2(\Omega \times V) \ni \varphi \to \int_V k_i(x, v, v')\varphi(x, v')dv' \in L^2(\Omega \times V),$$

est l'opérateur de collision inélastique et

$$K_e : L^2(\Omega \times V) \ni \varphi \to \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(x, \rho, \omega, \omega')\varphi(x, \rho\omega')d\omega'$$

est l'opérateur de collision élastique. L'opérateur d'advection

$$T : D(T) \subset L^2(\Omega \times V) \to -v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(x, v)\varphi(x, v) \in L^2(\Omega \times V)$$

de domaine

$$D(T) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega \times V), v.\frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^2(\Omega \times V),\ \varphi_{|\Gamma_-} = 0 \right\}$$

où

$$\Gamma_- := \{(x, v) \in \partial\Omega \times V;\ v.n(x) < 0\}.$$

Hypothèses générales
Supposons que les sections efficaces sont telles que

$$\textbf{(I)}\begin{cases} \sigma(x,v) = \sigma(v), \ \ et \ 0 < \sigma(.) \in L^\infty(V) \\ k_i(x,v,v') = k_i(v,v') \\ k_e(x,\rho,\omega,\omega') = k_e(\rho,\omega,\omega'). \end{cases}$$

$$\textbf{(II)}\begin{cases} \sigma(v) = \sigma(-v) \\ k_i(v,v') = k_i(-v,v') = k_i(v,-v') \\ k_e(\rho,\omega,\omega') = k_e(\rho,-\omega,\omega') = k_e(\rho,\omega,-\omega') \end{cases}$$

(III) L'opérateur

$$K_i : L^2(V) \ni \varphi \to \int_V k_i(v,v')dv' \in L^2(V)$$

est compact.
(IV) L'opérateur

$$K = K_i + K_e$$

est auto-adjoint et positif.

4.1 Modéles élastiques

4.1.1 Le spectre de $T + K_e$

Dans cette section, on décrit le spectre de $T+K_e$ sous des hypothèses que l'on précisera par la suite.

Spectre de l'opérateur monocinétique

Dans ce pragraphe on rappelle en bref quelques propriétés connues de l'opérateur monocinétique (voir par exemple [49], [51] et [19]) dont on aura besoin par la suite. On désigne par l'opérateur monocinétique l'opérateur non borné

$$T^\rho + K_e^\rho : D(T^\rho + K_e) \subset L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

où

$$K_e^\rho : \varphi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \to \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(\rho,\omega,\omega')\varphi(x,\omega')d\omega' \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}),$$

de domaine

$$D(T^\rho + K_e^\rho) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) : \omega.\frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}), \varphi_{|\Gamma_-} = 0 \right\}$$

ne dépend pas de ρ et

$$\Gamma_- = \left\{ (x,\omega) \in \partial\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}; \ \omega.n(x) < 0 \right\}.$$

Notons que

- $\sigma(T^\rho) = \emptyset$.

- Comme l'opérateur

$$K_e^\rho R(\lambda, T^\rho) : L^2(\Omega \times S^{N-1}) \to L^2(\Omega \times S^{N-1})$$

  est compact (voir par exemple [49]). Alors $\sigma(T^\rho + K_e)$ est formé au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.

Pour ρ fixé, si on suppose que

$$k_e(\rho, \omega, \omega') > 0 \text{ p.p. sur } [a,b] \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1}$$

alors

$$\sigma(T^\rho + K_e^\rho) \neq \emptyset$$

(voir [29] Théorème 5.16, P.111) et la valeur propre principale est simple.
Nous allons étudier la dépendence en ρ de l'opérateur $T^\rho + K_e^\rho$.
Montrons d'abord :

Lemme. 4.1.1. *(i) Supposons que pour tout $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ on a :*

$$\boldsymbol{(V)} : [a,b] \ni \rho \to \sigma(\rho\omega) \in \mathbb{R}_+$$

est continue. Alors

$$[a,b] \ni \rho \to R(\lambda, T^\rho) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

est continue.
(ii) Supposons que

$$\boldsymbol{(VI)} : [a,b] \ni \rho \to K_e^\rho \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

est continue et si $\lambda \notin \overline{\bigcup_{\rho\in[a,b]} \sigma(T^\rho + K_e^\rho)}$ alors

$$[a,b] \ni \rho \to R(\lambda, T^\rho + K_e^\rho) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

est continue.

Preuve

La preuve de (i) est déjà faite dans Lemme.3.2.1.
(ii) On observe que

$$\lambda \in \sigma(T^\rho + K_e^\rho) \text{ si et seulement si } 1 \in \sigma_p(\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho).$$

Considérons le problème

$$\lambda\varphi - T^\rho\varphi - K_e^\rho\varphi = \psi, \forall \psi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

ce qui est équivalent à

$$\varphi = (1 - (\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho))^{-1}(\lambda - T^\rho)^{-1}\psi$$

puisque $1 \in \rho(\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho)$.
D'où

$$R(\lambda, T^\rho + K_e^\rho) = R(1, (\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho)R(\lambda, T^\rho)$$

c'est donc la composée de deux applications continues en utilisant le premier point.

$\square$

Remarque. 4.1.1. *Une condition suffisante pour avoir la condition (ii) est que le noyau de K_e est tel que*

$$[a,b] \ni \rho \longrightarrow k_e(\rho,.,.) \in L^2(\mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1})$$

est continue.

Lemme. 4.1.2. *Supposons que **(V)** et **(VI)** sont satisfaites. Alors l'ensemble*

$$\cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^\rho + K_e^\rho)$$

est fermé.

Preuve La preuve est similaire à la preuve du cas isotrope (voir Lemme.3.2.2).

$\square$

Théorème. 4.1.1. *Supposons que pour tout $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$*

$$[a,b] \ni \rho \to \sigma(\rho\omega)$$

est continue et que

$$[a,b] \ni \rho \to K_e^\rho \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

est continue. Alors

$$(i)\ \sigma(T + K_e) = \cup_{\rho\in[a,b]}\sigma(T^\rho + K_e^\rho)$$

et

$$(ii)\ \sigma(T + K_e) = \sigma_{ess}(T + K_e).$$

Preuve La preuve de (i) est similaire à celle du Lemme. 3.2.1 et la preuve de (ii) est similaire à celle de Lemme. 3.2.4.

$\square$

Théorème. 4.1.2. *Supposons que pour tout $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$*

$$[a,b] \ni \rho \to \sigma(\rho\omega) \in \mathbb{R}_+$$

est continue et que

$$[a,b] \ni \rho \to K_e^\rho \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

est continue. Alors

$$\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) = \cup_{\rho\in[a,b]}\sigma((\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho),$$

et

$$\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) = \sigma_{ess}((\lambda - T)^{-1}K_e).$$

En particulier

$$r_\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) = r_{ess}((\lambda - T)^{-1}K_e).$$

Preuve Soit

$$\beta \in \bigcup_{\rho} \sigma((\lambda - T^{\rho})^{-1} K_e^{\rho}).$$

Alors il existe un $\rho_1 \in [a, b]$ tel que

$$\beta \in \sigma((\lambda - T^{\rho_1})^{-1} K^{\rho_1}) = \sigma_p((\lambda - T^{\rho_1})^{-1} K^{\rho_1})$$

ou d'une façon équivalente il existe $\varphi \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$ de norme 1 telle que

$$\beta \varphi(x, \omega) = (\lambda - T^{\rho_1})^{-1} K^{\rho_1} \varphi(x, \omega).$$

Nous définissons pour n assez grand la fonction $\phi_n \in L^2(\Omega \times [a, b] \times \mathbb{S}^{N-1})$ par

$$\phi_n(x, \rho, \omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{\rho_1^{N-1}}} \varphi(x, \omega) & \rho_1 \leq \rho \leq \rho_1 + \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\|\phi_n\| = 1$$

et

$$\beta \phi_n - (\lambda - T)^{-1} K_e \phi_n = \beta \sqrt{\frac{n}{\rho_1^{N-1}}} 1_{[\rho_1, \rho_1 + \frac{1}{n}]} \varphi(x, \omega) - \sqrt{\frac{n}{\rho_1^{N-1}}} 1_{[\rho_1, \rho_1 + \frac{1}{n}]} (\lambda - T)^{-1} K_e \varphi(x, \omega)$$

de sorte que

$$\beta \phi_n - (\lambda - T)^{-1} K_e \phi_n = \sqrt{\frac{n}{\rho_1^{N-1}}} 1_{[\rho_1, \rho_1 + \frac{1}{n}]} (\lambda - T^{\rho_1})^{-1} K^{\rho_1}) - \sqrt{\frac{n}{\rho_1^{N-1}}} 1_{[\rho_1, \rho_1 + \frac{1}{n}]} (\lambda - T^{\rho})^{-1} K^{\rho}).$$

D'où

$$\begin{aligned} \left\| \beta \phi_n - (\lambda - T)^{-1} K_e \phi_n \right\| \leq & \int_{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left[n \int_{\rho_1}^{\rho_1 + \frac{1}{n}} \left| (\lambda - T^{\rho_1})^{-1} K^{\rho_1} \varphi(x, \omega) - (\lambda - T^{\rho})^{-1} K^{\rho} \varphi(x, \omega) \right|^2 \right] \to 0 \\ & \text{quand } n \to \infty. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\beta \in \sigma((\lambda - T)^{-1} K_e).$$

Si maintenant $\rho_1 = b$, on définit $(\phi_n)_n$ par

$$\phi_n(x, \rho, \omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{\rho_1^{N-1}}} \varphi(x, \omega) & \rho_1 - \frac{1}{n} \leq \rho \leq \rho_1, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

et on montre de la même manière que $\beta \in \sigma((\lambda - T)^{-1} K_e)$.

Nous allons montrer que

$$\sigma((\lambda - T)^{-1} K_e) \subset \bigcup_{\rho} \sigma((\lambda - T^{\rho})^{-1} K_e^{\rho}).$$

Si $0 \in \sigma((\lambda - T)^{-1}K_e)$ $0 \in \bigcup_\rho \sigma((\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho)$ (puisque K_e^ρ est $T^\rho-$ compact).
Soit $\beta \neq 0$ on procède par l'absurde en supposant que

$$\beta \notin \bigcup_\rho \sigma((\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho).$$

D'autre part, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left\|(\beta - (\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})} \leq C, \forall \rho. \tag{4.1.1}$$

En effet, soit φ_ρ telle que

$$\beta\varphi_\rho - (\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho\varphi_\rho = \psi \ (\|\psi\| \leq 1)$$

Donc pour résoudre l'équation (4.1.1) il suffit de montrer pour $\|\psi\| \leq 1$ que

$$\|\varphi_\rho\| \leq C, \forall \rho$$

on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'une suite $(\rho_n)_n$ telle que $\rho_n \to \overline{\rho}$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{\rho_n}\| = \infty.$$

Posons

$$\theta_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}.$$

Alors

$$\beta\theta_n - (\lambda - T^{\rho_n})^{-1}K_e^{\rho_n}\theta_n = \frac{\psi}{\varphi_n}$$

comme le côté droit tend vers zéro lorsque $n \to \infty$ alors

$$\left|\|\beta\theta_n\| - \left\|(\lambda - T^{\rho_n})^{-1}K_e^{\rho_n}\theta_n\right\|\right| \to 0$$

et

$$\left\|(\lambda - T^{\rho_n})^{-1}K_e^{\rho_n}\theta_n\right\| = |\beta|.$$

Comme la suite

$$\left((\lambda - T^{\rho_n})^{-1}K_e^{\rho_n}\right)_n$$

est collectivement compacte alors il existe une sous suite de θ_n de telle sorte que $\theta_n \to \overline{\theta}$ en norme et que

$$\beta\overline{\theta} = (\lambda - T^{\overline{\rho}})^{-1}K_e^{\overline{\rho}}\overline{\theta}, \left\|\overline{\theta}\right\| = 1$$

ce qui implique que

$$\beta \in \sigma_p((\lambda - T^{\overline{\rho}})^{-1}K_e^{\overline{\rho}}) = \sigma((\lambda - T^{\overline{\rho}})^{-1}K_e^{\overline{\rho}})$$

et conduit à une contradiction.
Soit maintenant $\beta \notin \bigcup_\rho \sigma((\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho)$. Considérons le problème

$$\beta\varphi - (\lambda - T)^{-1}K_e\varphi = \psi, \psi \in L^2(\Omega \times [a,b] \times \mathbb{S}^{N-1})$$

alors pour tout $\rho \in [a,b]$ l'équation

$$(\beta - (\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho)\varphi(.,\rho,.) = \psi(.,\rho,.)$$

admet une solution unique $\varphi(.,\rho,.) \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$ (dépend de ρ) et

$$\|\varphi(.,\rho,.)\|_{(L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})} \leq \left\|(\beta - (\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})} \|\psi(.,\rho,.)\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})}$$

D'après (4.1.1)

$$\|\varphi(.,\rho,.)\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})} \leq C\,\|\psi(.,\rho,.)\|_{L^2(\Omega\times\mathbb{S}^{N-1})}.$$

En intégrant en $\rho \in [a,b]$ on obtient

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega\times[a,b]\times\mathbb{S}^{N-1})} \leq C\,\|\psi\|_{L^2(\Omega\times[a,b]\times\mathbb{S}^{N-1})}$$

de sorte que

$$\beta \notin \sigma((\lambda - T)^{-1}K_e))^{-1}).$$

Soit $\beta \in \bigcup_\rho \sigma((\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho)$.
On voit facilement que

$$\phi_n \rightharpoonup 0 \text{ (faiblement) quand } n \to \infty$$

et donc

$$\bigcup_\rho \sigma((\lambda - T^\rho)^{-1}K_e^\rho) \subset \sigma_{ess}((\lambda - T)^{-1}K_e).$$

D'où

$$\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e) = \sigma_{ess}((\lambda - T)^{-1}K_e).$$

□

4.2 Modèles partiellement élastiques

4.2.1 Le spectre essentiel de $T + K_e + K_i$

Soit

$$k_i : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1} \to \mathbb{R}_+$$

le noyau de collision inélastique, et soit

$$K_i : L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a,b]) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a,b])$$
$$K_i\varphi(v) = \int_V k_i(v,v')\varphi(x,v')dv'$$

l'opérateur de collision inélastique. Soit

$$T + K_e + K_i : D(T) \subset L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a,b]) \to L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times [a,b])$$

l'opérateur de transport de neutrons *partiellement élastique* avec l'opérateur de collision

$$K := K_e + K_i.$$

On a le :

Théorème. 4.2.1. *Supposons que l'hypothèse **(III)** soit satisfaite. Alors*

$$\sigma_{ess}(T+K_e+K_i)=\sigma_{ess}(T+K_e)=\sigma(T+K_e).$$

Preuve Notons que l'opérateur K_i est T-*compact* et donc on a d'après le Corollaire.1.3.1

$$\sigma_{ess}(T+K_e+K_i)=\sigma_{ess}(T+K_e)$$

et le Théorème. 4.1.1 finit la preuve.

$\square$

4.2.2 Le spectre ponctuel réel de $T+K_e+K_i$

On s'intéresse aux valeurs propres réelles de l'opérateur de transport partiellement élastique

$$T+K_e+K_i.$$

Considérons le problème spectral

$$T\varphi+K_e\varphi+K_i\varphi=\lambda\varphi,\varphi\in D(T)\ \lambda>s(T)$$

ce qui est équivalent à

$$\varphi=(\lambda-T)^{-1}(K_e+K_i)\varphi$$

Soit

$$G_\lambda:=(\lambda-T)^{-1}(K_e+K_i).$$

Lemme. 4.2.1. *Supposons que les hypothèses **(I), (II)** et **(IV)** soit satisfaites. Alors l'opérateur G_λ est symétrisable par K.*

Preuve. Soit $\varphi,\phi\in L^2(\Omega\times V)$

$$\begin{aligned}
(KG_\lambda\varphi,\phi) &= ((\lambda-T)^{-1}K\varphi,K\phi)\\
&= \int_{\Omega\times V}\overline{(K\phi)(x,v)}\int_0^{s(x,v)}e^{-(\lambda+\sigma(v))s}(K\varphi)(x-sv,v)ds\\
&= \int_{\Omega\times V}\overline{(K\phi)(x,-v)}\int_0^{s(x,-v)}e^{-(\lambda+\sigma(-v))s}(K\varphi)(x+sv,-v)ds\\
&= \int_{\Omega\times V}\overline{(K\phi)(x,v)}\int_0^{s(x,-v)}e^{-(\lambda+\sigma(v))s}(K\varphi)(x+sv,v)ds\\
&= \int_{\Omega\times V}\overline{(K\phi)(x,v)}(\lambda-T^*)^{-1}K\varphi\\
&= ((\lambda-T^*)^{-1}K\varphi,K\phi)=(K\varphi,(\lambda-T)^{-1}K\phi)=(\varphi,KG_\lambda\phi)
\end{aligned}$$

$\square$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset L^2(\Omega \times V)$ un sous espace de dimension n et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous définissons le paramètre

$$\rho_n(\lambda) := \sup_{E_n} \inf_{\{\phi \in E_n, (S\phi,\phi)=1\}} (SG_\lambda \phi, \phi). \tag{4.2.2}$$

Alors d'apres le Lemme.3.4.1 les courbes

$$I \ni \lambda \to \rho_n$$

sont continues.
Comme dans le Lemme.3.4.3 on montre :

Lemme. 4.2.2. *Supposons que les hypothèses **(I), (II), (III), (IV),(V)** et **(VI)** soit satisfaites. Alors on a*

$$r_{ess}(G_{\overline{\lambda}}) = 1$$

où $\overline{\lambda} = s(T + K_e)$.

Lemme. 4.2.3. *Supposons que les hypothèses **(I), (II), (III), (IV),(V)** et **(VI)** soit satisfaites.*
Soit

$$I_1 = \cup_{\left\{\epsilon > 0 : r_\sigma(G_\lambda) \; > r_\sigma((\lambda - T)^{-1}K_e), \; \lambda \in [\overline{\lambda}, \overline{\lambda}+\epsilon] \;\right\}} [\overline{\lambda}, \overline{\lambda} + \epsilon]$$

et soit

$$\alpha_1 := \sup\{\lambda; \lambda \in I_1\}.$$

Alors $r_\sigma(G_{\alpha_1}) < 1$. *Plus généralement, on pose*

$$I_n = \cup_{\left\{\epsilon > 0 : \; \rho_n(\lambda) \; > r_{ess}(G_\lambda), \; \lambda \in [\overline{\lambda}, \overline{\lambda}+\epsilon] \;\right\}} [\overline{\lambda}, \overline{\lambda} + \epsilon]$$

et on définit

$$\alpha_n := \sup\{\lambda; \lambda \in I_n\}.$$

Alors

$$\rho_n(\alpha_n) < 1.$$

Preuve La preuve est similaire à celle du Lemme.3.4.4.

□

On finit cette section par le

Théorème. 4.2.2. *Supposons que les hypothèses **(I), (II), (III),(IV), (V)** et **(VI)** soit satisfaites. Alors le nombre de valeurs propres de* $T + K_e + K_i$ *situées à* $(\overline{\lambda}, \infty)$ *est égal au moins au nombre de valeurs propres de* $G_{\overline{\lambda}}$ *supérieures à* 1 *où* $\overline{\lambda} = s(T + K_e)$.

Remarque. 4.2.1. *Contrairement au cas isotrope, on ne sait pas montrer que les courbes*

$$[s(T + K_e), \alpha_n] \ni \lambda \to \rho_n(\lambda)$$

sont décroissantes. Alors, a priori, une courbe $\rho_n(.)$ *peut couper la droite* $\rho = 1$ *plusieurs fois et donner plusieurs valeurs propres de* $T + K_e + K_i$. *C'est en ce sens que la théorie anisotrope est moins précise que la théorie isotrope.*

4.2.3 L'existence pour de domaines larges

Les résultats de cette section généralisent ceux de la section 3.5.1

Théorème. 4.2.3. *Pour tout* $\lambda > -\inf \sigma(.)$, *on a*

$$(KG_\lambda \varphi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} d\xi \int_V \frac{(\sigma(v)+\lambda)\left|K\widehat{\varphi}(\xi, v)\right|^2}{(\sigma(v)+\lambda)^2 + (v.\xi)^2}. \tag{4.2.3}$$

où $\widehat{\varphi}$ *est la transformation de Fourier de* φ *par rapport à la variable d'espace* x.

Preuve Grâce à la convexité de Ω

$$(\lambda - T)^{-1}\varphi = R_\Omega(\lambda - T_\infty)^{-1}E\varphi$$

où $E\varphi$ est l'extension triviale de φ à l'extérieur de Ω,

$$R_\Omega : L^2(\mathbb{R}^N \times V) \to L^2(\Omega \times V)$$

est l'opérateur de restriction à Ω, et

$$(\lambda - T_\infty)^{-1} : \psi \in L^2(\mathbb{R}^N \times V) \to \int_0^\infty e^{-(\lambda+\sigma(v))s}\psi(x - sv, v)ds.$$

D'où

$$\begin{aligned}
(KG_\lambda\varphi, \varphi)_{L^2(\Omega\times V)} &= (K\lambda - T)^{-1}K\varphi, \varphi)_{L^2(\Omega\times V)} \\
&= (KR_\Omega\lambda - T_\infty)^{-1}EK\varphi, \varphi)_{L^2(\Omega\times V)} \\
&= (R_\Omega K(\lambda - T_\infty)^{-1}KE\varphi, \varphi)_{L^2(\Omega\times V)} \\
&= (R_\Omega K(\lambda - T_\infty)^{-1}KE\varphi, E\varphi)_{L^2(\Omega\times V)} \\
&= (K(\lambda - T_\infty)^{-1}KE\varphi, E\varphi)_{L^2(\mathbb{R}^N\times V)} \\
&= ((\lambda - T_\infty)^{-1}KE\varphi, KE\varphi)_{L^2(\mathbb{R}^N\times V)}
\end{aligned}$$

D'autre part la transformation de Fourier (par rapport à la variable d'espace) de $(\lambda - T_\infty)^{-1}\varphi$ égale

$$\frac{1}{\lambda + \sigma(v) + iv.\xi}\widehat{\varphi}(\xi, v)$$

Enfin l'inégalité de Parseval donne

$$\begin{aligned}
((\lambda - T_\infty)^{-1}KE\varphi, KE\varphi)_{L^2(\mathbb{R}^N\times V)} &= \int_V dv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|\widehat{KE\varphi}(\xi, v)\right|^2}{\lambda + \sigma(v) + iv.\xi} \\
&= \int_V dv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\lambda+\sigma(v))\left|\widehat{KE}\varphi(\xi, v)\right|^2}{(\lambda+\sigma(v))^2 + (v.\xi)^2} \\
&- \int_V dv \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\xi.v)\left|\widehat{KE}\varphi(\xi, v)\right|^2}{(\lambda+\sigma(v))^2 + (v.\xi)^2}
\end{aligned}$$

le dernier terme est nul puisque la fonction $v \to \frac{(\xi.v)\left|\widehat{KE}\varphi(\xi,v)\right|^2}{(\lambda+\sigma(v))^2+(v.\xi)^2}$ est impaire.

$\square$

On définit l'opérateur de transport partiellement élastique homogène en espace par

$$B\varphi = -\sigma(v)\varphi(v) + \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_e(\rho, \omega, \omega')\varphi(\rho\omega')d\omega' + \int_V k_i(v, v')\varphi(v')dv' = B_e\varphi + B_i\varphi$$

et

$$s(B_e) := \sup \{\lambda, \lambda \in \sigma(B_e)\}$$

sa borne spectrale.

Théorème. 4.2.4. $\sigma(B) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\}$ *n'est pas vide si et seulement si*

$$\lim_{\lambda \to s(B_e)} r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) > 1$$

où

$$\widetilde{B}_\lambda : L^2(V) \ni \varphi \to \frac{K\varphi(.)}{\lambda + \sigma(.)}. \tag{4.2.4}$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du Théorème. 3.5.1.

$\square$

Soit

$$\Omega_\alpha = \alpha\Omega_1$$

où Ω_1 un ouvert borné convexe contient 0 et α est un réel positif.
Un changement de variables montre que le problème spectral

$$G_\lambda\varphi = \mu\varphi, \ \varphi \in L^2(\Omega_\alpha \times V)$$

est équivalent à

$$G_\lambda^\alpha\psi = \mu\psi, \ \psi \in L^2(\Omega_1 \times V)$$

où

$$\psi(x, \rho) = \varphi(\alpha x, \rho) \ \ x \in \Omega_1.$$

Le spectre ponctuel de G_λ sur l'espace

$$L^2(\Omega_\alpha \times V)$$

est égal à celui G_λ^α sur l'espace de

$$L^2(\Omega_1 \times V).$$

On peut montrer que

$$(KG_\lambda^\alpha\psi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} d\xi \int_V \frac{(\sigma(v) + \lambda)\left|K\widehat{\psi}(\xi, v)\right|^2}{(\sigma(v) + \lambda)^2 + (\frac{v.\xi}{\alpha})^2}dv. \tag{4.2.5}$$

où

$$\widehat{\psi}(\xi, v) = (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \int_{\Omega_1} \psi(x, v)e^{ix\cdot\xi}dx.$$

On a le :

Lemme. 4.2.4. *On désigne par* $\rho_m(\lambda, \alpha)$ *($m \in \mathbb{N}$) les paramètres définis dans (4.2.2) associés à l'opérateur* G_λ^α*. Alors*

(i) Pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\rho_m(\lambda, \alpha) \leq r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall \lambda > s(B_e).$$

(ii) Pour chaque $c > s(B_e)$ *et* $m \in \mathbb{N}$,

$$\rho_m(\lambda, \alpha) \to r_\sigma(\widetilde{B}_\lambda) \quad \textit{quand } \alpha \to \infty$$

uniformément $\lambda \in [c, +\infty[$.

Comme dans le cas isotrope (Théorème. 3.5.2) on montre le :

Théorème. 4.2.5. *(i) Si* $\sigma(B) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\} = \varnothing$ *alors*

$$\sigma(T + K_e + K_i) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\} = \varnothing$$

indépendemment de la taille de Ω.

(ii) Inversement, soit $\sigma(B) \cap \{\lambda, \lambda > s(B_e)\} \neq \varnothing$ *et soit* $\overline{\lambda}$ *la valeur prore principale de* B*. Alors pour chaque* $\beta < \overline{\lambda}$ *($\beta > s(B_e)$) et pour chaque* $m \in \mathbb{N}$

$$\sigma(T + K_e + K_i) \cap \{\lambda, \lambda > \beta\}$$

contient au moins m *valeures propres si la taille* Ω *suffisamment grand.*

Bibliographie

[1] S. Albertoni and B. Montagnini. On the spectrum of neutron transport equation in finite bodies. *J. Math. Anal. Appl.*, 13 :19–48, 1966.

[2] L. Arlotti, J. Banasiak, and F. L. Ciake Ciake. Conservative and non-conservative Boltzmann-type models of semiconductor theory. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 16(9) :1441–1468, 2006.

[3] Claude Bardos. Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 3 :185–233, 1970.

[4] Bruce A. Barnes. Common operator properties of the linear operators RS and SR. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(4) :1055–1061, 1998.

[5] R. Beals and V. Protopopescu. Abstract time-dependent transport equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 121(2) :370–405, 1987.

[6] G.I Bell and S Glasstone. Nuclear reactor theory. *Van Norstrandt, Reinhold*, 1970.

[7] M Borysiewicz and J Mika. Time behaviour of thermal neutrons in moderating media. *J. Math. Anal. Appl.*, 26 :461–478, 1969.

[8] Michel Cessenat. Théorèmes de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(16) :831–834, 1984.

[9] Michel Cessenat. Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 300(3) :89–92, 1985.

[10] Ph. Clément, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent, C. J. van Duijn, and B. de Pagter. *One-parameter semigroups*, volume 5 of *CWI Monographs*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.

[11] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[12] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 9.* INSTN : Collection Enseignement. [INSTN : Teaching Collection]. Masson, Paris, 1988. Évolution : numérique, transport. [Evolution : numerical methods, transport], Reprint of the 1985 edition.

[13] Ben de Pagter. Irreducible compact operators. *Math. Z.*, 192(1) :149–153, 1986.

[14] D. E. Edmunds and W. D. Evans. *Spectral theory and differential operators.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1987. Oxford Science Publications.

[15] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.

[16] François Golse, Pierre-Louis Lions, Benoît Perthame, and Rémi Sentis. Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *J. Funct. Anal.*, 76(1) :110–125, 1988.

[17] François Golse, Benoît Perthame, and Rémi Sentis. Un résultat de compacité pour les équations de transport et application au calcul de la limite de la valeur propre principale d'un opérateur de transport. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(7) :341–344, 1985.

[18] Günther Greiner. Spectral properties and asymptotic behavior of the linear transport equation. *Math. Z.*, 185(2) :167–177, 1984.

[19] Konrad Jörgens. An asymptotic expansion in the theory of neutron transport. *Comm. Pure Appl. Math.*, 11 :219–242, 1958.

[20] H. G. Kaper, C. G. Lekkerkerker, and J. Hejtmanek. *Spectral methods in linear transport theory*, volume 5 of *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1982.

[21] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[22] Edward W. Larsen and Paul F. Zweifel. On the spectrum of the linear transport operator. *J. Mathematical Phys.*, 15 :1987–1997, 1974.

[23] Khalid Latrach and Bertrand Lods. Regularity and time asymptotic behaviour of solutions to transport equations. *Transport Theory Statist. Phys.*, 30(7) :617–639, 2001.

[24] Peter D. Lax. Symmetrizable linear transformations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 :633–647, 1954.

[25] Joseph Lehner and G. Milton Wing. On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons. *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 :217–234, 1955.

[26] Joseph Lehner and G. Milton Wing. Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry. *Duke Math. J.*, 23 :125–142, 1956.

[27] Hocine Mokhtar-Kharroubi and Mustapha Mokhtar-Kharroubi. On symmetrizable operators on Hilbert spaces. *Acta Appl. Math.*, 102(1) :1–24, 2008.

[28] M. Mokhtar-Kharroubi. Time asymptotic behaviour and compactness in transport theory. *European J. Mech. B Fluids*, 11(1) :39–68, 1992.

[29] M. Mokhtar-Kharroubi. *Mathematical topics in neutron transport theory*, volume 46 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1997. New aspects, With a chapter by M. Choulli and P. Stefanov.

[30] M Mokhtar-Kharroubi and Y Mohamed. Spectral analysis of non compact symmetrizable operators on Hilbert spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.*, 38 :2316–2335, 2015.

[31] Mustapha Mokhtar-Kharroubi. On L^1-spectral theory of neutron transport. *Differential Integral Equations*, 18(11) :1221–1242, 2005.

[32] Mustapha Mokhtar-Kharroubi. Optimal spectral theory of the linear Boltzmann equation. *J. Funct. Anal.*, 226(1) :21–47, 2005.

[33] Bruno Montagnini and Maria Luisa Demuru. Complete continuity of the free gas scattering operator in neutron thermalization theory. *J. Math. Anal. Appl.*, 12 :49–57, 1965.

[34] F. Natterer. *The mathematics of computerized tomography*. B. G. Teubner, Stuttgart ; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1986.

[35] Joseph I. Nieto. On the essential spectrum of symmetrizable operators. *Math. Ann.*, 178 :145–153, 1968.

[36] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[37] William T. Reid. Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space. *Duke Math. J.*, 18 :41–56, 1951.

[38] Mohammed Sbihi. Analyse spectrale de modèles neutroniques. *Thèse de doctorat de l'université de Franche-Comté, Bésançon*, 2005.

[39] Mohammed Sbihi. Spectral theory of neutron transport semigroups with partly elastic collision operators. *J. Math. Phys.*, 47(12) :123502, 12, 2006.

[40] Mohammed Sbihi. A resolvent approach to the stability of essential and critical spectra of perturbed C_0-semigroups on Hilbert spaces with applications to transport theory. *J. Evol. Equ.*, 7(1) :35–58, 2007.

[41] Helmut H. Schaefer. *Topological vector spaces*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. Third printing corrected, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 3.

[42] Martin Schechter. *Spectra of partial differential operators*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1971. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 14.

[43] J. P. O. Silberstein. Symmetrisable operators. *J. Austral. Math. Soc.*, 2 :381–402, 1961/1962.

[44] J. P. O. Silberstein. Symmetrisable operators. II. *J. Austral. Math. Soc.*, 4 :15–30, 1964.

[45] J. P. O. Silberstein. Symmetrisable operators. III. *J. Austral. Math. Soc.*, 4 :31–48, 1964.

[46] Peter Takáč. A spectral mapping theorem for the exponential function in linear transport theory. *Transport Theory Statist. Phys.*, 14(5) :655–667, 1985.

[47] Gerald Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics. With applications to Schrödinger operators*, volume 99 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[48] Seiji Ukai. Eigenvalues of the neutron transport operator for a homogeneous finite moderator. *J. Math. Anal. Appl.*, 18 :297–314, 1967.

[49] Seiji Ukaï. *Real eigenvalues of the monoenergetic transport opertor for a homogeneous medium*, volume J.Nucl. Sci. Technol, 3. 263–266, 1966.

[50] Seiji Ukai and Toru Hiraoka. Eigenvalue spectrum of the neutron transport operator for a fast multiplying system. *J. Nuclear Sci. and Tech.*, 9 :36–46, 1972.

[51] R. Van Norton. On the real spectrum of a mono-energetic neutron transport operator. *Comm. Pure Appl. Math.*, 15 :149–158, 1962.

[52] Ivan Vidav. Existence and uniqueness of nonnegative eigenfunctions of the Boltzmann operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 22 :144–155, 1968.

[53] Ivan Vidav. Spectra of perturbed semigroups with applications to transport theory. *J. Math. Anal. Appl.*, 30 :264–279, 1970.

[54] Jürgen Voigt. A perturbation theorem for the essential spectral radius of strongly continuous semigroups. *Monatsh. Math.*, 90(2) :153–161, 1980.

[55] Jürgen Voigt. Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases. *Habilitationsschrift, Universität München*, 1981.

[56] Jürgen Voigt. Positivity in time dependent linear transport theory. *Acta Appl. Math.*, 2(3-4) :311–331, 1984.

[57] Jürgen Voigt. Spectral properties of the neutron transport equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 106(1) :140–153, 1985.

[58] Jürgen Voigt. On resolvent positive operators and positive C_0-semigroups on AL-spaces. *Semigroup Forum*, 38(2) :263–266, 1989. Semigroups and differential operators (Oberwolfach, 1988).

[59] L. W. Weis. A generalization of the Vidav-Jörgens perturbation theorem for semigroups and its application to transport theory. *J. Math. Anal. Appl.*, 129(1) :6–23, 1988.

[60] Adriaan Cornelis Zaanen. *Linear analysis. Measure and integral, Banach and Hilbert space, linear integral equations.* Interscience Publishers Inc., New York ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam ; P. Noordhoff N.V., Groningen, 1953.