Modélisation d'une interface rugueuse : études numériques et anaytiques

Dominique Meier

▶ **To cite this version:**

Dominique Meier. Modélisation d'une interface rugueuse : études numériques et anaytiques. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Havre, 2016. Français. NNT : 2016LEHA0027 . tel-01668472

HAL Id: tel-01668472
https://theses.hal.science/tel-01668472

Submitted on 20 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité : **ACOUSTIQUE**

Préparée au sein de l'Université du Havre

Modélisation d'une interface rugueuse : études numériques et analytiques.

Présentée et soutenue par :

Dominique MEIER

Thèse soutenue publiquement le 21 octobre 2016 devant le jury composé de :		
M. Nicolas DAUCHEZ	Professeur des Universités, Université de Technologie de Compiègne	Rapporteur
M. Nicolas WILKIE-CHANCELLIER	Maître de Conférences HDR, Université de Cergy Pontoise	Rapporteur
M. Georges ZISSIS	Professeur des Universités, Université de Toulouse III	Président
M. Mihai PREDOI	Professeur des Universités, Université Polytechnique de Bucarest	Examinateur
M. Jean Louis IZBICKI	Docteur d'état	Invité
M. Hervé FRANKLIN	Professeur des Universités, Université du Havre	Directeur de thèse

UNIVERSITÉ LE HAVRE

SPMI ECOLE DOCTORALE

LABORATOIRE ONDES et MILIEUX COMPLEXES

À mon épouse et à mon fils qui m'ont toujours soutenu dans ce travail.

Remerciements

Ce rapport est le résultat de trois années de travail en relation avec le laboratoire ondes et milieu complexe de l'Université du Havre, UMR CNRS 6234.

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement Monsieur Jean Louis IZBICKI Professeur à l'Université du Havre, de m'avoir guidé, suivi et soutenu scientifiquement ainsi que moralement, tout au long de ce travail. Je souhaite lui exprimer ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli dans son équipe. Ses conseils, ses encouragements, pour sa présence constante et sa qualité humaine ont permis de réaliser ce travail dans un climat très convivial. Je le remercie pour la confiance et l'autonomie qu'il m'a donnée.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Hervé FRANKLIN qui a accepté de diriger ma thèse, Professeur à l'Université du Havre, qui m'a conseillé judicieusement tout au long de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Mihai PREDOI, Professeur à l'Université de Bucarest pour le soutien permanent qu'il m'a apporté et pour sa contribution importante aux travaux numériques dans le cadre de l'exploitation du logiciel Comsol.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Nicolas DAUCHEZ, Professeur à l'Université Technologique de Compiègne, à Monsieur Nicolas WILKIE-CHANCELLIER Maitre de Conférence HDR à l'Université de Cergy-Pontoise et à Monsieur Georges ZISSIS Professeur à l'Université de Toulouse III de m'avoir fait l'honneur de leur participation au jury.

Je souhaite très vivement remercier Monsieur Renaud TOUSSAINT, Directeur de recherche au CNRS qui m'a permis de suivre quelques-uns de ses cours et qui m'a conseillé durant toute cette période de travail.

Je n'oublie pas toutes les personnes qui m'ont aidé, d'une façon ou d'une autre, et tout particulièrement tous les membres du laboratoire LOMC du Havre pour leur accueil et leur soutien.

Que toutes les personnes de l'E.O.S.T. à Strasbourg soient, elles aussi, remerciées pour leur accueil et pour m'avoir permis d'assister à leurs travaux.

Que Monsieur Olivier LENOIR, Professeur à l'Université du Havre, soit lui aussi remercié de m'avoir accueilli dans son cours.

Je ne pourrais pas finir sans inclure dans ces remerciements les personnes les plus chères : mes amis et tous mes proches.

Table des matières

Chapitre I : 13
I Introduction 13
Chapitre II : 19
II Propagation des ondes dans les milieux élastiques 19
II.1 Introduction 20
II.2 Rappels concernant la propagation des ondes de Lamb dans les milieux élastiques 21
II.2.1 Propagation des ondes dans un milieu élastique 21
II.2.2 Modes de Lamb 23
II.3 Expression théorique des coefficients de transmission et de réflexion 29
II.3.1 Position du problème 29
II.3.2 Condition de transmission totale 31
II.4 Étude des résonances angulaires 33
II.4.1 Position du problème 33
II.4.2 Étude analytique 33
II.4.3 Résultats numériques – Comparaison 38
II.5 Conclusion 41
Chapitre III : 42
III Simulation numérique de la diffusion acoustique par une plaque rugueuse 42
III.1 Position du problème 43
III.2 Mise en équation du problème 45
III.2.1 Domaine solide 45
III.2.2 Domaine fluide 46
III.2.3 Géométrie 46
III.2.4 Paramétrage des calculs 49
III.3 Résultats numériques 51
III.3.1 Introduction 51
III.3.2 Analyse des résultats 53
III.3.2.1 Modélisation 53
III.3.2.2 Mise en œuvre – Préliminaires 54
III.3.2.3 Résultats concernant le mode A1 58
III.3.3 Généralisation 60
III.4 Conclusion 64

Chapitre IV : ... 66
IV Modèle rhéologique ... 66
IV.1 Introduction ... 67
IV.2 Premier modèle rhéologique ... 68
IV.2.1 Mise en équation du problème ... 68
IV.2.2 Étude dans le plan complexe ... 70
IV.3 Second modèle rhéologique ... 74
IV.3.1 Introduction ... 74
IV.3.2 Nouvelle formulation résonante ... 74
IV.3.3 Détermination de K_L ... 78
IV.3.4 Détermination des paramètres du modèle rhéologique ... 80
IV.3.5 Résultats ... 81
IV.3.5.1 Ordre de grandeur ... 81
IV.3.5.2 Reconstruction d'une BW ... 82
IV.3.5.3 Vérification dans le plan complexe de k_x ... 85
IV.4 Conclusion : rugosité et résonance angulaire ... 87
Chapitre V : ... 90
V Conclusion ... 90
Bibliographie ... 94
VI Annexes ... 98
VI.1 Annexe 1 : Variations des paramètres η_θ, η_γ, η_t, pour les modes étudiés aux différentes fréquences ... 99
VI.2 Annexe 2 : Recherche dans le plan complexe, expression matricielle du système ... 105

Liste des figures

Fig. II.2-1 Géométrie de la plaque plane élastique. 22
Fig. II.2-2 Courbes de dispersion des modes de Lamb d'une plaque d'acier. 28
Fig. II.3-1 Plaque plane immergée dans un fluide. 29
Fig. II.4-1 Évolution du coefficient $|T|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 150 kHz tracé avec le formalisme résonant. 38
Fig. II.4-2 Évolution du coefficient $|T|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 150 kHz obtenu à partir de l'équation (2.20). 38
Fig. II.4-3 Évolution du coefficient $|R|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 150 kHz tracé avec le formalisme résonant. 38
Fig. II.4-4 Évolution du coefficient $|R|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 150 kHz obtenu à partir de l'équation (2.20). 38
Fig. II.4-5 Évolution du coefficient $|T|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 602 kHz tracé avec le formalisme résonant. 39
Fig. II.4-6 Évolution du coefficient $|T|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 602 kHz obtenu à partir de l'équation (2.20). 39
Fig. III.2-1 Plaque élastique plane immergée présentant un défaut périodique simple de forme triangulaire. 47
Fig. III.2-2 Géométrie de la plaque immergée en vue du calcul par la MEF 49
Fig. III.2-3 maillage d'une cellule de largeur L_x 49
Fig. III.2-4 Détail d'un maillage progressif au voisinage de la dent. 50
Fig. III.3-1 Module du coefficient de transmission t_1, pour une plaque plane, en fonction de sinθ à 600 kHz. 51
Fig. III.3-2 Module de t_1 pour le mode A1 à 600 kHz avec $hr = 50\,\mu\text{m}$ 52
Fig. III.3-3 Module du coefficient de transmission t_1 en fonction de sinθ pour quelques valeurs de hr 52
Fig. III.3-4 Détail de la hauteur moyenne de la plaque. 55
Fig. III.3-5 Image des points sélectionnés. 55
Fig. III.3-6 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 100 points. 55
Fig. III.3-7 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 300 points. 56
Fig. III.3-8 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 500 points. 56

Fig. III.3-9 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 700 points. 56
Fig. III.3-10 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 900 points. 56
Fig. III.3-11 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour une résolution de 10^{-3} degré. 57
Fig. III.3-12 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour une résolution de 5×10^{-4} degré 57
Fig. III.3-13 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour une résolution de 10^{-4} degré. 57
Fig. III.3-14 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour une résolution de 10^{-5} degré. 57
Fig. III.3-15 Évolution de l'amplitude du coefficient de transmission $|t_1|$ en fonction de hr (en µm). 58
Fig. III.3-16 Variation relative de la largeur à mi-hauteur du mode A1 à 600 kHz. 59
Fig. III.3-17 Variation relative du sinus de l'ange du maximum du pic de résonance pour le mode A1 à 600 kHz. 59
Fig. III.3-18 Variation relative de la valeur du coefficient du maximum du coefficient de transmission t_1 du mode A1 à 600 kHz. 59
Fig. III.3-19 Variation relative de la largeur angulaire en fonction de la pente moyenne de la rugosité. 60
Fig. III.3-20 Variation relative de la position angulaire en fonction de la pente moyenne de la rugosité. 60
Fig. III.3-21 Variation de maximum du coefficient de transmission en fonction de la pente moyenne de la rugosité. 60
Fig. III.3-22 Courbes de dispersion d'une plaque d'acier de 5 mm. 60
Fig. III.3-23 Variations relatives de la largeur du pic pour les différents modes à 600 kHz. .. 61
Fig. III.3-24 Variations relatives de la largeur du pic pour les différents modes à 700 kHz. .. 61
Fig. III.3-25 Variations relatives de la largeur du pic pour les différents modes à 800 kHz. .. 61
Fig. III.3-26 Variations relatives de l'amplitude du pic pour les différents modes à 600 kHz.62
Fig. III.3-27 Variations relatives de l'amplitude du pic pour les différents modes à 700 kHz.62
Fig. III.3-28 Variations relatives de l'amplitude du pic pour les différents modes à 800 kHz.62
Fig. IV.2-1 Modèle rhéologique d'une plaque immergée. 68

Fig. IV.2-2 Variations de la partie réelle $\mathrm{Re}\left(\frac{k_x}{k_F}\right)$ en fonction de K_L pour le mode A1 à 600 kHz 71
Fig. IV.2-3 Variations de la partie imaginaire $\Im\mathrm{m}\left(\frac{k_x}{k_F}\right)$ en fonction de K_L pour le mode A1 à 600 kHz 71
Fig. IV.2-4 Variations de la partie réelle $\mathrm{Re}\left(\frac{k_x}{k_F}\right)$ en fonction de K_L pour le mode S1 à 600 kHz. 72
Fig. IV.2-5 Variations de la partie imaginaire $\Im\mathrm{m}\left(\frac{k_x}{k_F}\right)$ en fonction de K_L pour le mode S1 à 600 kHz. 72
Fig. IV.3-1 Évolution de la partie imaginaire du pôle en fonction de K_L' 81
Fig. IV.3-2 Évolution de la partie imaginaire du pôle en fonction de K_L' sur un large domaine. 82
Fig. IV.3-3 Superposition des courbes obtenues par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 50µm..... 83
Fig. IV.3-4 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 100µm..... 83
Fig. IV.3-5 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 150µm..... 83
Fig. IV.3-6 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 200µm..... 83
Fig. IV.3-7 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 50µm..... 84
Fig. IV.3-8 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 150µm..... 84
Fig. IV.4-1 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de β. 87
Fig. IV.4-2 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de K_L'. 87
Fig. IV.4-3 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de β. 88
Fig. IV.4-4 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de K_L'. 88
Fig. IV.4-5 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de β. 88
Fig. IV.4-6 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de K_L'. 88

Fig. VI.1-1 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S1 à 600 kHz. 99
Fig. VI.1-2 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S1 à 600 kHz. 99
Fig. VI.1-3 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S1 à 600 kHz..... 99
Fig. VI.1-4 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A1 à 600 kHz. 99
Fig. VI.1-5 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A1 à 600 kHz. 99
Fig. VI.1-6 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A1 à 600 kHz.... 99
Fig. VI.1-7 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S0 à 600 kHz. 100
Fig. VI.1-8 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S0 à 600 kHz. 100
Fig. VI.1-9 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S0 à 600 kHz... 100
Fig. VI.1-10 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A0 à 600 kHz. 100
Fig. VI.1-11 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A0 à 600 kHz. 100
Fig. VI.1-12 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A0 à 600 kHz.100
Fig. VI.1-13 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S2 à 700 kHz. 100
Fig. VI.1-14 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S2 à 700 kHz. 100
Fig. VI.1-15 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S2 à 700 kHz. 100
Fig. VI.1-16 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S1 à 700 kHz. 101
Fig. VI.1-17 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S1 à 700 kHz. 101
Fig. VI.1-18 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S1 à 700 kHz. 101
Fig. VI.1-19 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A1 à 700 kHz. 101
Fig. VI.1-20 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A1 à 700 kHz. 101
Fig. VI.1-21 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A1 à 700 kHz.101
Fig. VI.1-22 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S0 à 700 kHz. 101
Fig. VI.1-23 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A0 à 700 kHz. 101
Fig. VI.1-24 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A0 à 700 kHz.101
Fig. VI.1-25 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A0 à 700 kHz. 102

Fig. VI.1-26 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A0 à 700 kHz. 102
Fig. VI.1-27 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A0 à 700 kHz.102
Fig. VI.1-28 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S2 à 800 kHz. 102
Fig. VI.1-29 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S2 à 800 kHz. 102
Fig. VI.1-30 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S2 à 800 kHz. 102
Fig. VI.1-31 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S1 à 800 kHz. 103
Fig. VI.1-32 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S1 à 800 kHz. 103
Fig. VI.1-33 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S1 à 800 kHz. 103
Fig. VI.1-34 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A1 à 800 kHz. 103
Fig. VI.1-35 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A1 à 800 kHz. 103
Fig. VI.1-36 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A1 à 800 kHz.103
Fig. VI.1-37 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S0 à 800 kHz. 103
Fig. VI.1-38 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S0 à 800 kHz. 103
Fig. VI.1-39 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S0 à 800 kHz. 103
Fig. VI.1-40 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A0 à 800 kHz. 104
Fig. VI.1-41 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A0 à 800 kHz. 104
Fig. VI.1-42 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A0 à 800 kHz.104

Chapitre I :

I Introduction

« God made solids, but surfaces were made by the Devil. ».

Wolfgang Pauli

Le travail présenté dans ce mémoire propose une modélisation du comportement d'une plaque élastique (dont, au moins, l'une des interfaces n'est pas parfaitement plane) insonée et immergée dans un fluide supposé parfait. Il s'agit donc d'étudier la rugosité *via* la diffusion acoustique d'une onde incidente par une plaque rugueuse.

Les surfaces et interfaces rugueuses sont rencontrées dans de nombreuses situations en mécanique et en physique des solides. Les rugosités de faible amplitude peuvent être considérées comme des perturbations locales, comparées à une surface théorique parfaitement plane et seront traitées comme telles dans ce travail. Les surfaces planes usinées présentent toujours des imperfections et l'étude des rugosités présentent de nombreuses applications comme les collages ou le contrôle non destructif par exemple. Les imperfections géométriques d'une interface entre solide et liquide suscitent un intérêt important si on s'intéresse à l'observation d'une corrosion précoce en milieu humide afin d'opérer une maintenance préventive. Par ailleurs dans de nombreux problèmes de collage de structure les surfaces en contact présentent un minimum de rugosité pour faciliter l'adhésion et un modèle de rugosité est donc un ingrédient nécessaire à une modélisation de ces structures assemblées.

L'étude des rugosités apparaît dans d'autres domaines comme par exemple celui de la médecine [1] et plus généralement dans les technologies haptiques.

Une surface rugueuse peut être caractérisée par plusieurs paramètres statistiques dont le plus usuel est R_q qui est la valeur quadratique moyenne des altitudes de la surface.

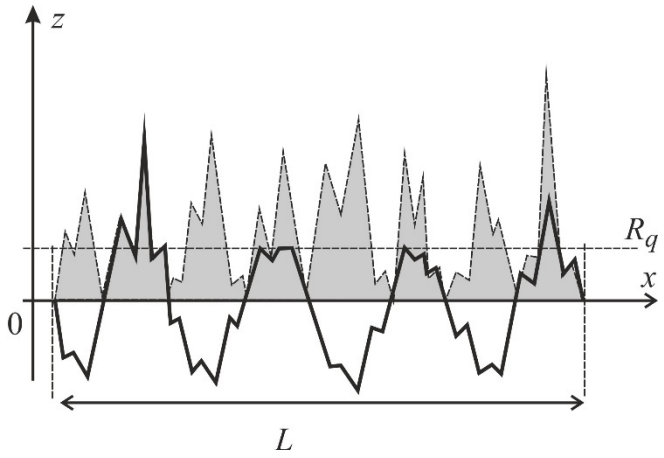

Fig. I.1-1 Interface rugueuse.

Ce paramètre est donc défini par :

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{L}\int_0^L z^2(x)\,dx}\,. \tag{1.1}$$

Pour des applications de type collage les valeurs de R_q sont généralement inférieures à 30 µm ; tandis que pour les problèmes de corrosion des valeurs de l'ordre de 100 µm peuvent être rencontrées. Dans des problèmes plus classiques de contrôle non destructif la présence de défauts correspondant à l'existence de fissures entraîne l'existence locale d'une valeur de R_q plus importante, et ces cas ne seront pas envisagés dans la suite.

La situation physique étudiée ici est un problème de diffusion acoustique car le système étudié, une plaque rugueuse immergé dans l'eau, reçoit une onde incidente se propageant dans l'eau et c'est l'étude du coefficient de transmission à travers le système qui va permettre l'analyse c'est-à-dire l'observation et l'interprétation de la rugosité.

La première analyse théorique d'une réflexion acoustique entre deux fluides par une interface sinusoïdale, donc non plane, a été proposée par Rayleigh en 1893 [2]. Miles a ensuite étudié la réflexion d'ondes planes produites par une interface rugueuse entre deux fluides [3]. Dans le cadre de l'étude des rugosités, Biot a étudié la réflexion des ondes acoustiques sur un solide plan rugueux en modélisant les imperfections par de petites hémisphères élémentaires [4] et [5]. La variation de la vitesse de phase de l'onde de Rayleigh due à une interface rugueuse a été étudiée par Sinclair [6] en la considérant comme une distribution uniforme de petites pyramides élémentaires.

Des mesures de champs acoustiques rétrodiffusés par des interfaces rugueuses périodiques et aléatoires ont été menées par Quentin *et al* [7]. Celles-ci ont été faites sur des plaques d'aluminium immergées pour des fréquences élevées (de l'ordre de 5 à 25 MHz) en détectant des pics d'intensité rétrodiffusée correspondant à celles d'un réseau (pour les rugosités périodiques). Dans ce même cadre, Chuang et Johnson [8] ont travaillé sur la diffraction des ondes ultrasonores provoquée par une interface eau-acrylique dans le sens eau vers acrylique et dont la géométrie de la rugosité est celle d'un réseau en dents de scie. Mampaert et Leroy [9] ont examiné la situation « inverse », c'est-à-dire une propagation dans le sens de l'acrylique vers l'eau.

La réflexion d'impulsions ultrasoniques par une surface rugueuse indéformable a été étudiée par Haines et Langston [10]. Cette étude a été faite en appliquant un facteur de rugosité à des surfaces planes.

Ogilvy présente dans son livre [11] les théories essentielles de la diffusion d'ondes acoustiques par des rugosités aléatoires. Il insiste sur les rugosités de faibles amplitudes pour lesquelles la théorie des perturbations et celle de Kirchhoff sont largement utilisées (il s'agit de la théorie de la diffraction). Cette théorie consiste à analyser l'expression de la phase qui

apparait dans la classique intégrale de Kirchhoff. Pour des rugosités de faibles amplitudes le déphasage entre l'onde incidente et l'onde réfléchie par un élément de la rugosité est petite devant l'unité. Il est donc possible de développer en série l'exponentielle dans laquelle apparait l'expression de ce déphasage. Le nième ordre de ce développement de l'intégrale est alors proportionnel à la transformée de Fourier de la nième puissance de la fonction hauteur $h(x)$. Ce genre de développement est appelé méthode de la petite perturbation et permet d'analyser simplement l'effet d'une rugosité de très faible amplitude.

Des méthodes numériques exploitées dans ce mémoire sont également présentées dans le livre.

Une analyse des différentes méthodes d'approximation utilisées dans le cadre des études d'ondes diffusées par des surfaces rugueuses a été menée par Elfouhaily et Guérin [12].

Nagy et Adler [13] [14] ont étudié l'atténuation des ondes réfléchies et transmises par une plaque d'aluminium rugueuse immergée dans de l'eau, mais uniquement sous incidence normale. Nagy a poursuivi l'étude en analysant, par des approches théoriques différentes, les données expérimentales obtenues avec des interfaces rugueuses diverses.

Drinkwater *et al* [15] ont étudié l'évolution du coefficient de réflexion entre deux plaques d'aluminium rugueuses insonées sous incidence normale. Leur étude faisait également intervenir un modèle rhéologique (distribution surfacique de ressorts) dans lequel la constante de raideur associée à un déplacement normal à l'interface, notée K_L, dépendait de la fréquence et du coefficient de réflexion.

Chimenti et Lobkis [16] ont traduit l'existence d'une rugosité en introduisant une épaisseur complexe de la plaque, dont la partie imaginaire est associée à la rugosité. L'atténuation ainsi estimée de l'amplitude des modes résonants a été plus ou moins confirmée par l'expérience dans un large domaine fréquentiel. Ici encore, l'onde incidente arrive sur la face plane de la plaque immergée alors que la face rugueuse est du côté opposé.

Les études portant sur les résonances des structures planes vont servir de fil conducteur dans ce travail. Parmi les très nombreux travaux consacrés à ce domaine, certains ont été particulièrement utiles, il est donc nécessaire de les mentionner ici. Fiorito *et al* [17] ont introduit le formalisme résonant dans l'étude des coefficients de réflexion et de transmission d'une plaque élastique immergée dans un fluide et recevant une onde ultrasonore incidente.

C’est l’étude des résonances fréquentielles (l’angle d’incidence sur la structure est alors fixé) qui est généralement entreprise pour les structures élastiques. Mais les résonances angulaires (la fréquence étant fixée) forment également un ensemble de données exploitables en vue de caractériser une structure et ce sont elles qui seront utilisées dans ce travail.

Duclos *et al* [18] ont utilisé le formalisme modal pour décrire la propagation de l’onde de Rayleigh à l’interface de deux milieux, l’un liquide et l’autre solide. Leur démarche est similaire à celle utilisée dans ce mémoire, mais ils se sont plus particulièrement intéressés à la propagation de cette onde le long d’une interface plane.

Une nouvelle modélisation de l’interface rugueuse a pour origine une idée donnée par Martine Rousseau, chargée de recherche CNRS à l’Institut Jean Le Rond D’Alembert (IJLRDA UMR CNRS 7190 UPMC). Vlassie et Rousseau [19] ont caractérisé le comportement de deux plaques collées en utilisant un modèle commun, associant ou non, à la couche adhésive, une distribution surfacique de ressorts. Pour permettre une meilleure adhésion, les surfaces collées sont souvent rugueuses. Ce modèle rhéologique, visant à prendre en compte les propriétés d’une interface, va être transposé ici.

Dans ce mémoire, la Méthode des Eléments Finis (MEF) a été utilisée pour simuler la diffusion acoustique par une plaque élastique immergée et rugueuse uniquement sur l’une de ses interfaces. Le coefficient de transmission obtenu dépend des paramètres géométriques de la rugosité. Dans le domaine de fréquence étudié, la longueur d’onde dans l’eau est du même ordre de grandeur que la période du motif simulant une rugosité. Dans les conditions pour lesquelles les simulations ont été effectuées, les effets dus à la diffraction sont négligeables devant les phénomènes résonnants. Les caractéristiques des pics de résonance associés au coefficient de transmission simulé, comme par exemple la largeur à mi-hauteur, sont obtenues à partir du formalisme des résonances modales [20].

La prise en compte de la rugosité est effectuée à partir d’une modification des conditions d’interface fluide-solide. Celle-ci consiste, en utilisant un modèle rhéologique de type Jones, à introduire l’existence d’un saut de déplacement entre le fluide et le solide. À partir des nouvelles conditions de frontière, un nouveau déterminant est calculé. Les angles et les largeurs correspondants aux résonances sont obtenus par résolution de la nouvelle équation de dispersion des ondes de Lamb dans la plaque. Il devient alors possible de relier caractéristique de la rugosité et résonance mesurable via le modèle proposé. L’intérêt de

disposer d'un modèle analytique, même approché, est qu'il permet des prédictions rapides, en tous cas plus rapide que l'utilisation des méthodes numériques.

Un rappel sur les résonances associée aux ondes de Lamb est donné au chapitre deux. L'analyse des résonances angulaires est particulièrement développée car c'est elle qui sera nécessaire pour la suite. Le chapitre trois décrit des « expériences numériques » qui ont été réalisées à l'aide d'un logiciel (Comsol ©) maintenant classique en sciences de l'Ingénieur. Il s'agit d'étudier la transmission d'ondes à travers une plaque élastique dont la rugosité est contrôlée géométriquement. Les caractéristiques des résonances (position et largeur) sont obtenues par des moyens simples à partir de la modélisation « Breit-Wigner ».

Le chapitre quatre présente d'abord une modélisation de la rugosité via l'introduction d'un coefficient réel rhéologique. Quand ils sont confrontés aux résultats issus de la simulation numérique, ces résultats ne sont pas satisfaisants. Une meilleure interprétation des résultats issus de la simulation numérique est obtenue en introduisant dans le modèle rhéologique une constante complexe. Il devient alors possible grâce à ce modèle de rendre compte des résultats du chapitre 3 et donc d'établir un lien entre la valeur de R_q et la constante du modèle obtenue par l' « expérience numérique ».

La conclusion reprend les résultats principaux montrés précédemment et propose quelques pistes concernant la suite à donner à ce travail.

Chapitre II :

IIPropagation des ondes dans les milieux élastiques

II.1 Introduction

Rayleigh et Lamb sont les premiers à avoir travaillé sur les ondes guidées pouvant se propager le long d'une plaque élastique infinie dans le vide [21] [22]. À partir de ces travaux, les courbes de dispersion de ces ondes donnant la vitesse de phase en fonction du produit de la fréquence par l'épaisseur ont été établies [23] [24]. Il a ensuite été prouvé que l'excitation des modes de vibration d'une plaque élastique immergée dans un fluide est provoquée par une onde incidente [25] [26] dont la composante du vecteur d'onde correspond à celle de l'onde de Lamb [27] [28] conduisant à une propagation de l'onde le long de la plaque.

Des mesures de coefficient de transmission pour une plaque élastique dense dans un fluide qui la charge faiblement [29] [30] (c'est-à-dire une situation correspondant à un rapport de l'impédance acoustique du solide élastique sur celle de l'eau qui est grand devant l'unité)) ont montré que les maxima de ce coefficient correspondent presque (mais pas parfaitement) aux points obtenus de la courbe de dispersion d'une plaque dans le vide. Les propriétés résonantes d'une plaque élastique immergée ont été étudiées de façon théorique entre autres par Osborne et Hart [31] ainsi que par Pitts *et al*. [32].

Fiorito, Madigosky et Überall ont ensuite particulièrement étudié les caractéristiques des coefficients de transmission et de réflexion d'une plaque élastique immergée [20]. Ils ont établi des expressions mathématiques de ces coefficients mettant en lumière des résonances analogues à celles qui étaient bien connues en physique nucléaire (modèle de Breit-Wigner BW). Moyennant certaines hypothèses, les pics du coefficient de transmission sont assimilables à des pics de BW ; les effets du liquide extérieur influencent la largeur des pics résonants et le maximum du pic correspond à peu près aux modes de vibrations de la plaque élastique dans le vide. Les résultats de leurs études numériques concernant le comportement des pôles et des zéros des coefficients de réflexion et de transmission sont interprétés analytiquement par leur formalisme.

II.2 Rappels concernant la propagation des ondes de Lamb dans les milieux élastiques

II.2.1 Propagation des ondes dans un milieu élastique

Dans toute cette étude, les milieux étudiés sont des solides élastiques linéaires homogènes et isotropes. Il s'agit, ici, plus particulièrement de rappeler les lois de propagation des ondes ultrasonores par une plaque plane infinie élastique homogène et isotrope. Historiquement, la plaque élastique fut le premier système à guide d'ondes élastiques à être étudié. Rayleigh et Lamb ont été les premiers à s'intéresser aux modes propres de vibration d'une plaque dans le vide. Le comportement mécanique d'un matériau élastique est déterminé par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda\, u_{k,k}\, \delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad i, j, k = x, y, z \tag{2.1}$$

où $\overline{\overline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes, $\vec{u}$ le vecteur déplacement, λ et μ les coefficients de Lamé du solide. Cette relation constitue une loi comportementale propre au milieu étudié. Elle suppose la linéarité de la relation entre contrainte et déplacement.

Le champ des déplacements $\vec{u}$ doit vérifier la deuxième loi de Newton qui s'écrit dans ce cadre, sous la forme suivante :

$$\rho_{\text{sol}} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right). \tag{2.2}$$

En combinant les deux dernières relations, on obtient l'équation suivante :

$$\rho_{\text{sol}} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \left(\lambda + \mu\right) \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div} \vec{u}\right) + \mu \Delta \vec{u}\,, \tag{2.3}$$

où $\rho_{\text{sol.}}$ est la masse volumique du solide considéré.

La décomposition de Helmholtz du champ de déplacement $\vec{u}$ se traduit selon :

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\psi}\,, \tag{2.4}$$

avec la condition de jauge suivante : $\text{div}\,\vec{\psi} = 0$. Ceci est analogue à ce qui est utilisé en électromagnétisme.

En reportant la décomposition du champ (2.4) dans l'équation (2.3) on obtient les équations de propagation des potentiels. La décomposition de Helmholtz permet de découpler les équations de propagation selon :

$$\Delta\phi - \frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0\,, \tag{2.5}$$

$$\Delta\vec{\psi} - \frac{1}{C_T^2}\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} = 0\,, \tag{2.6}$$

Avec, $C_L = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho_{\text{sol}}}}$ et $C_T = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho_{\text{sol}}}}$ qui représentent les vitesses de propagation des ondes longitudinale et transversale dans le milieu considéré.

On considère une plaque plane d'un solide élastique d'extension infinie selon Ox et Oy et d'épaisseur finie H selon Oz, la géométrie est donnée sur la Fig. II.2-1. Les caractéristiques du solide sont la masse volumique $\rho_{\text{sol.}}$, les vitesses des ondes longitudinales et transversales notées C_L et C_T.

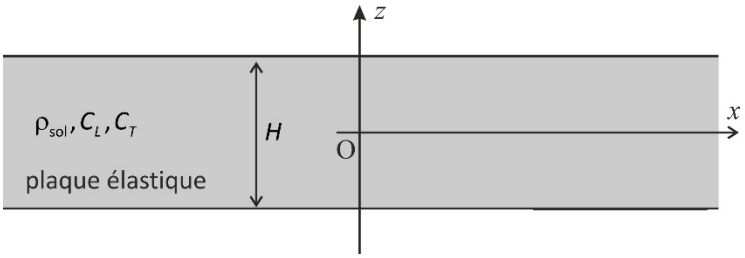

Fig. II.2-1 Géométrie de la plaque plane élastique.

Les solutions des équations de propagation (2.5) et (2.6) sont recherchées sous la forme d'ondes harmoniques, dont la direction de propagation est l'axe Ox (voir Fig. II.2-1) :

$$\begin{cases} \phi = \phi_0 \exp j\left(\overrightarrow{k_L}\cdot\vec{r} - \omega t\right), \\ \vec{\psi} = \vec{\psi}_0 \exp j\left(\overrightarrow{k_T}\cdot\vec{r} - \omega t\right), \end{cases} \tag{2.7}$$

avec, $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ qui représente le vecteur position d'un point M quelconque, ω la pulsation, t le temps, $k = \dfrac{\omega}{c}$ le module du vecteur d'onde (réel) dans le fluide. Dans le cas qui nous intéresse, le potentiel vecteur ne présente qu'une seule composante : $\vec{\psi} = \psi \vec{e_y}$.

On définit la grandeur adimensionnée $\overline{k_x} = \dfrac{k_x}{k}$ qui sera utilisée dans la suite de ce chapitre.

Les vecteurs d'onde $\vec{k_L}$ et $\vec{k_T}$ sont associés aux ondes longitudinales et transversales. Les déplacements s'en déduisent par : $\vec{u_L} = j\,\vec{k_L}\,\phi$ et $\vec{u_T} = j\,\vec{k_T} \wedge \vec{\psi}$. Le vecteur déplacement longitudinal $\vec{u_L}$ est parallèle au vecteur d'onde $\vec{k_L}$, il correspond à des compressions/détentes locales du milieu. Le vecteur déplacement transversal $\vec{u_T}$ est perpendiculaire au vecteur d'onde $\vec{k_T}$, il correspond à des cisaillements locaux du milieu. Les normes, notées k_L et k_T des vecteurs $\vec{k_L}$ et $\vec{k_T}$ vérifient respectivement les relations : $k_L = \dfrac{\omega}{C_L}$ et $k_T = \dfrac{\omega}{C_T}$.

II.2.2 Modes de Lamb

Dans tout ce travail, les déplacements sont situés dans le plan *x*Oz et sont indépendants de la coordonnée *y*. Il s'agit donc d'étudier les modes de Lamb : compte tenu des conditions de frontière, quels sont les modes pouvant se propager ?

Dans la situation qui nous intéresse, les ondes à l'intérieur de la plaque sont « piégées » et subissent une succession de réflexions et transmission sur chacune des interfaces solide-fluide. Les solutions sont recherchées sous forme de combinaison linéaire d'ondes monochromatiques. Elles sont de la forme :

$$\begin{cases} \phi(x,z,t) = \left[A_L \cos(k_{Lz} z) + B_L \sin(k_{Lz} z) \right] \mathrm{e}^{j(k_x x - \omega t)} = \phi_s(x,z,t) + \phi_a(x,z,t) \\ \psi(x,z,t) = \left[A_T \cos(k_{Lz} z) + B_T \sin(k_{Lz} z) \right] \mathrm{e}^{j(k_x x - \omega t)} = \psi_s(x,z,t) + \psi_a(x,z,t) \end{cases} \tag{2.8}$$

où, $\varphi_s(x,z,t)$ et $\psi_s(x,z,t)$ sont les formes symétriques des potentiels de l'onde par rapport à la variable *z*, $\varphi_a(x,z,t)$ et $\psi_a(x,z,t)$ les formes antisymétriques de l'onde toujours par rapport à la variable *z*. Les vecteurs d'onde $\vec{k_L}$ et $\vec{k_T}$ présentés précédemment ont pour composantes $(k_x, 0, k_{Lz})$ et $(k_x, 0, k_{Tz})$.

Les relations de dispersion correspondantes s'écrivent :

$$k_L^2 = k_x^2 + k_{Lz}^2 = \left(\frac{\omega}{C_L}\right)^2 \quad \text{et} \quad k_T^2 = k_x^2 + k_{Tz}^2 = \left(\frac{\omega}{C_T}\right)^2 \tag{2.9}$$

Dans le repère choisi, la loi de Hooke (équation (2.1)) permet d'écrire les composantes du tenseur des contraintes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \lambda\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - 2\mu\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z} \\ \sigma_{yy} = \lambda\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) \\ \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \lambda\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\mu\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z} \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x \partial z}\right) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Compte tenu de la relation (2.4) les composantes du vecteur déplacement sont données par :

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \\ u_y = 0 \\ u_z = \dfrac{\partial\phi}{\partial z} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \tag{2.11}$$

Dans le cas présent, les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = 0 \text{ en } z = \pm\dfrac{H}{2} \\ \sigma_{zz} = 0 \text{ en } z = \pm\dfrac{H}{2} \end{cases} \tag{2.12}$$

Il s'agit donc de résoudre un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues, qui, d'après les expressions, (2.11) et (2.12), se ramènent à deux sous-systèmes de deux équations à deux inconnues.

Le premier sous-système est le suivant :

$$\begin{pmatrix} 2jk_x k_{Lz}\sin\left(\frac{k_{Lz}H}{2}\right) & \left(k_T^2-2k_x^2\right)\sin\left(\frac{k_{Tz}H}{2}\right) \\ \left(k_T^2-2k_x^2\right)\cos\left(\frac{k_{Lz}H}{2}\right) & 2jk_x k_{Tz}\cos\left(\frac{k_{Tz}H}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_L \\ B_T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

La relation (2.11) montre que la partie symétrique de la fonction d'onde ϕ et la partie antisymétrique de la fonction ψ contribuent à un déplacement u_z antisymétrique et un déplacement symétrique. L'allure de la surface déformée de la couche est alors symétrique par rapport à la ligne $z=0$.

La relation de dispersion prend alors la forme suivante :

$$C_s\left(k_x,\omega\right)=4k_x^2k_{Tz}k_{Lz}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k_{Tz}H}{2}\right)+\left(2k_x^2-k_T^2\right)^2\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k_{Tz}H}{2}\right)=0. \tag{2.14}$$

Les solutions $k_x\left(\omega\right)$ de cette équation correspondent à certains modes guidés dans la couche, appelés ondes de Lamb symétriques. Ces ondes ont été étudiées pour la première fois par H. Lamb en 1917 [22].

Le second sous-système est alors le suivant :

$$\begin{pmatrix} -2jk_x k_{Lz}\cos\left(\frac{k_{Lz}H}{2}\right) & \left(k_T^2-2k_x^2\right)\cos\left(\frac{k_{Tz}H}{2}\right) \\ \left(k_T^2-2k_x^2\right)\sin\left(\frac{k_{Lz}H}{2}\right) & -2jk_x k_{Tz}\sin\left(\frac{k_{Tz}H}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_L \\ A_T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

À nouveau, la relation (2.11) montre que la partie symétrique de la fonction d'onde ϕ et la partie antisymétrique de la fonction ψ contribuent à un déplacement u_z antisymétrique et un déplacement symétrique. L'allure de la surface déformée de la couche est alors antisymétrique par rapport à la ligne $z=0$.

La relation de dispersion prend alors la forme suivante :

$$C_a\left(k_x,\omega\right)=4k_x^2k_{Tz}k_{Lz}\,\tan\left(\frac{k_{Tz}H}{2}\right)+\left(2k_x^2-k_T^2\right)^2\,\tan\left(\frac{k_{Tz}H}{2}\right)=0. \tag{2.16}$$

Les solutions $k_x\left(\omega\right)$ de cette équation correspondent à certains modes guidés dans la couche, appelés ondes de Lamb antisymétriques.

Dans cette présentation, les variables ont été volontairement adimensionnées (en prenant comme référence les caractéristiques de l'eau). Ceci permet d'étendre l'étude à toute structure immergée et de ne pas privilégier, dans les solides, une onde plutôt qu'une autre. Les grandeurs sans dimension suivantes sont définies selon :

$$\begin{aligned}
\overline{k_{Lz}} &= \frac{k_{Lz}}{k_{\text{eau}}}, \\
\overline{k_{Tz}} &= \frac{k_{Tz}}{k_{\text{eau}}}, \\
\overline{k_x} &= \frac{k_x}{k_{\text{eau}}}, \\
\overline{\omega} &= k_{\text{eau}} H, \\
k_{\text{eau}} &= \frac{\omega}{c}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Les solutions des équations (2.14) et (2.16) sont tracées dans le plan $\left(\overline{\omega}, \overline{k_x}\right)$ où l'axe des abscisses est représenté par la pulsation adimensionnée $\overline{\omega}$ et l'axe des ordonnées par $\overline{k_x}$.

Tous les programmes sont réalisés sous Matlab. Il consiste en une recherche de zéros par la méthode de Newton-Raphson. Cette méthode a été utilisée pour tracer toutes les courbes présentées dans ce travail.

À titre d'exemple, la Fig. II.2-2 représente les courbes de dispersion des modes de Lamb symétrique et antisymétrique d'une plaque d'acier dont les caractéristiques sont les suivantes : $\rho_{\text{sol.}} = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, les célérités des ondes longitudinale et transversale sont de $C_L = 6020$ m/s et $C_T = 3220$ m/s. La masse volumique du fluide (de l'eau) est prise égale à 1000 kg/m^3 et la vitesse du son dans l'eau est $c =$ 1500 m/s.

Si on pose $k_x = 0$, alors $k_{Lz} = k_L$ et $k_{Tz} = k_T$. Dans les expressions (2.16) et (2.14), les ondes longitudinales et transversales dans la couche sont découplées. En fait, les potentiels dépendent seulement de la variable *z* et les composantes du tenseur contrainte sont :

$$\begin{cases}
\sigma_{xz} = -\mu \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \\
\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.
\end{cases} \tag{2.18}$$

Les deux conditions aux limites mettent alors en jeu uniquement les ondes transversales ou les ondes longitudinales. On peut donc classer les modes de Lamb en mode « T » et « L ».

Les fréquences correspondantes à $k_x = 0$ s'appellent fréquences de coupure et sont données par les relations suivantes :

Fréquences de coupure pour les modes symétriques :

- Modes L : $\bar{\omega} = \dfrac{(2m+1)\pi}{n_L} \qquad m \geq 0.$
- Modes T : $\bar{\omega} = \dfrac{2m\pi}{n_T} \qquad m > 0.$

Fréquences de coupure pour les modes antisymétriques :

- Modes L : $\bar{\omega} = \dfrac{2m\pi}{n_L} \qquad m > 0.$
- Modes T : $\bar{\omega} = \dfrac{(2m+1)\pi}{n_T} \qquad m \geq 0.$

où, $n_L = \dfrac{c}{C_L}$ et $n_T = \dfrac{c}{C_T}$.

Il existe deux modes qui ne présentent pas de fréquence de coupure, les modes A0 (antisymétrique) et S0 (symétrique).

À hautes fréquences on constate que les courbes de dispersion des modes A0 et S0 tendent asymptotiquement vers une même valeur $k_x = \dfrac{\omega}{C_R}$ où C_R est la vitesse de l'onde de Rayleigh. Pour tous les autres modes, la limite asymptotique est $k_x = \dfrac{\omega}{C_T}$ où C_T est la vitesse de l'onde transverse.

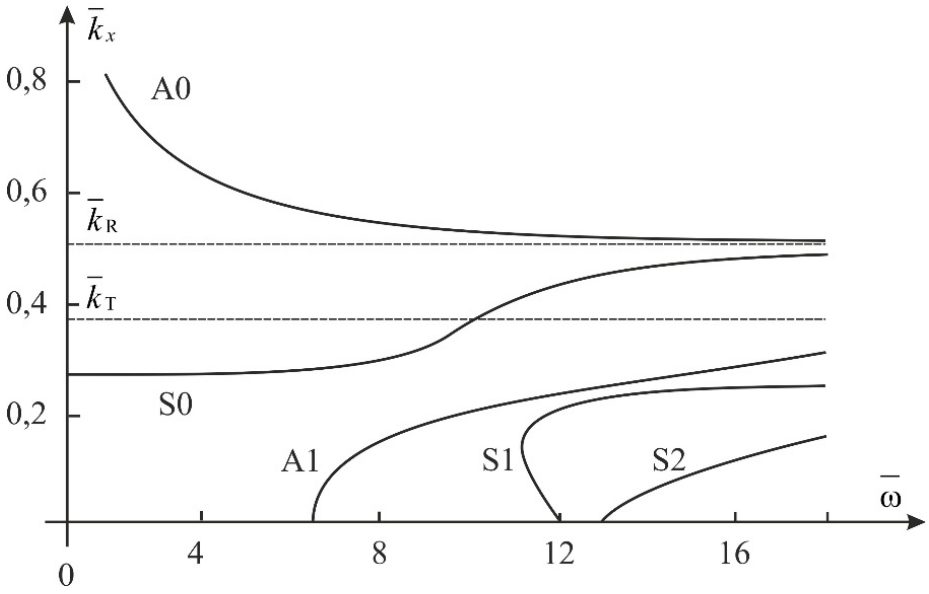

Fig. II.2-2 Courbes de dispersion des modes de Lamb d'une plaque d'acier.

II.3 Expression théorique des coefficients de transmission et de réflexion

II.3.1 Position du problème

La Fig. II.3-1 présente la situation physique. Dans la plaque, la célérité des ondes longitudinales est notée C_L et celles des ondes transverses C_T. Elle est immergée dans un fluide de masse volumique ρ et la célérité des ondes dans ce fluide est notée c.

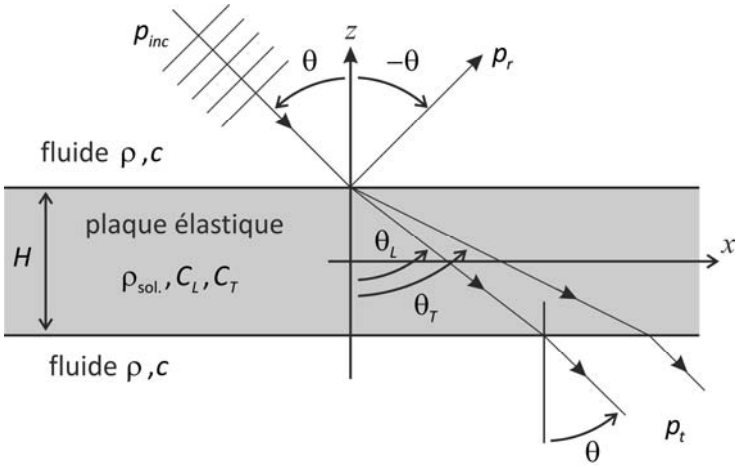

Fig. II.3-1 Plaque plane immergée dans un fluide.

Une onde plane progressive de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ se propage dans le fluide sous l'angle d'incidence θ. Elle est réfractée dans la plaque sous les angles θ_L et θ_T pour respectivement, les ondes longitudinale et transversale (voir Fig. II.3-1). Une onde transmise émerge du côté opposé de la plaque, dans le fluide sous l'angle θ égal à l'angle d'incidence.

Les conditions de frontières sont modifiées par rapport à la plaque dans le vide (2.12) et elles s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{\text{fluide, z}} & = & u_{\text{sol. z}} \\ 0 & = & \sigma_{xz} \\ -p & = & \sigma_{zz} \end{cases} \tag{2.19}$$

Ce système traduit la continuité des contraintes et des déplacements de part et d'autre de l'interface fluide – solide.

En vue de retrouver explicitement les modes précédemment obtenus, les auteurs [20] ont mis les coefficients de réflexion et de transmission sous une forme telle qu'elles fassent apparaitre les termes C_a et C_s :

$$T = \frac{p_t}{p_{inc}} = j\tau\left(\frac{1}{C_s - j\tau} - \frac{1}{C_a + j\tau}\right), \tag{2.20}$$

$$R = \frac{p_r}{p_{inc}} = \frac{C_s C_a - \tau^2}{C_s + C_a}\left(\frac{1}{C_s - j\tau} - \frac{1}{C_a + j\tau}\right), \tag{2.21}$$

avec,

$$\tau = \frac{\rho c / k_z}{\rho_{sol.} C_L / k_{Tz}} = \frac{\rho}{\rho_{sol.}} \frac{\sqrt{n_L^2 - \sin^2\theta}}{k_z}, \tag{2.22}$$

$$C_s = \cos^2 2\theta_T \cot\delta + r^2 \sin 2\theta_T \sin 2\theta_T \cot\varepsilon, \tag{2.23}$$

$$C_a = \cos^2 2\theta_T \tan\delta + r^2 \sin 2\theta_L \sin 2\theta_T \tan\varepsilon, \tag{2.24}$$

$$\delta = \frac{\omega H}{2C_L}\overline{k_{Lz}} = \frac{kH}{2}\sqrt{n_L^2 - \sin^2\theta} = \frac{x}{2}\sqrt{n_L^2 - \sin^2\theta}, \tag{2.25}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega H}{2C_T}\overline{k_{Tz}} = \frac{kH}{2}\sqrt{n_T^2 - \sin^2\theta} = \frac{x}{2}\sqrt{n_T^2 - \sin^2\theta}, \tag{2.26}$$

$$r = \frac{C_T}{C_L}, \quad n_L = \frac{c}{C_L}, \quad n_T = \frac{c}{C_T}, \tag{2.27}$$

$$x = kH \text{ et } y = \sin\theta, \tag{2.28}$$

avec, $k = \dfrac{\omega}{c}$ et, en l'absence de dissipation, $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Dans la suite, on considère le cas particulier où $C_L > C_T > c$ de telle sorte que $n_L < n_T < 1$ avec les expressions suivantes pour les angles critiques $n_L = \sin\theta_L$ et $n_T = \sin\theta_T$.

Les relations de dispersion font intervenir la vitesse de phase qui s'exprime :

$$v = \frac{c}{\sin\theta} = \frac{C_L}{\sin\theta_L} = \frac{C_T}{\sin\theta_T}, \tag{2.29}$$

Les deux dernières relations étant obtenues à partir des relations de Snell-Descartes.

II.3.2 Condition de transmission totale

La condition de transmission totale de l'onde se traduit par la condition suivante : $|T|^2 = 1$ et $|R|^2 = 0$, l'équation (1-1) conduit à :

$$C_s C_a = \tau^2 , \tag{2.30}$$

ou encore :

$$C_s + C_a \to \infty . \tag{2.31}$$

Les conditions de transmission totale sont déterminées par les relations (2.30) et (2.31) . Ce que l'on peut retrouver en écrivant l'inverse du carré du coefficient de transmission sous la forme suivante :

$$\frac{1}{|T|^2} = 1 + \frac{1}{\tau^2} \frac{\left(C_a C_s - \tau^2\right)^2}{\left(C_a + C_s\right)^2} . \tag{2.32}$$

Dans le cas d'une plaque « libre », c'est-à-dire dans le vide (non immergée dans un fluide), ces mêmes conditions s'écrivent [21] [22] (et le paragraphe II.2 ci-dessus) :

$$C_s = 0 \quad \text{ou} \quad C_a = 0 . \tag{2.33}$$

Cette dernière relation (2.33), permet de tracer les courbes de dispersion d'une plaque élastique libre dans le plan fréquence *vs* vitesse de phase. Celles-ci mettent en regard la vitesse de phase (définie par la relation (2.29) et la fréquence, ainsi par exemple, pour une plaque d'acier, la Fig. II.2-2 traduit l'évolution de $\overline{k}_x$ en fonction de la pulsation réduite d'une plaque d'acier libre d'une épaisseur de 5 mm. Ces courbes présentent deux types de mode de vibration, les modes symétriques et antisymétriques (dénommés A pour antisymétrique et S pour symétrique). Ces mêmes dénominations sont utilisées pour caractériser les modes dans les équations (2.23) et (2.24). Chaque courbe correspond à un mode de vibration différent, repéré par les indices m_s et m_a (tous deux positifs ou nuls). Les vitesses de phase des modes de Lamb A_{ma} ou S_{ms}, pour des indices strictement positifs, tendent tous vers la vitesse de phase des ondes de cisaillement C_T pour une fréquence qui tend vers l'infini.

On constate sur la courbe de la Fig. II.2-2 que les deux modes A0 et S0 existent quelle que soit la valeur de la fréquence, d'une fréquence quasi-nulle à des fréquences très élevées. La vitesse de ces deux modes tend vers $\overline{k}_R = \dfrac{c}{C_R}$ (proportionnel à l'inverse de la célérité de

l'onde de Rayleigh qui correspond à la célérité de l'onde se propageant à l'interface d'un solide élastique semi-infini et du vide :

$$f_{\text{coup. } L} = (m_s + 1/2)\frac{C_L}{H} \text{ ou } = m_a \frac{C_L}{H}, \tag{2.34}$$

$$f_{\text{coup. } T} = m_s \frac{C_T}{H} \text{ ou } = (m_a + 1/2)\frac{C_T}{H}. \tag{2.35}$$

Les indices s et a des entiers m rappellent à quel type de mode (symétrique et antisymétrique) renvoie la fréquence de coupure. Celles-ci correspondent (pour une épaisseur de plaque donné) à un nombre entier m de demi-longueur d'onde ou au nombre d'onde $k_{L,T} = m\frac{\pi}{H}$.

Ces modes s'interprètent comme la superposition d'ondes planes longitudinales se propageant suivant α ou $\pi - \alpha$ et d'ondes planes transverses se propageant suivant β ou $\pi - \beta$ comme démontré par Harrison [33].

II.4 Étude des résonances angulaires

II.4.1 Position du problème

Les termes C_s et C_a dépendent de deux variables indépendantes, la fréquence adimensionnée : x et la variable angulaire : y (grandeurs définies par l'éq (2.28)). Au voisinage de zéro, les fonctions $C_s(x,y)$ et $C_a(x,y)$ présentent de très fortes variations, que ce soit à *x* fixé et *y* variable ou le contraire.

Dès lors, la structure de l'équation (2.20) montre que chacun de deux termes présents dans l'expression de *T* (comme dans celle de *R*) traduit un comportement résonant. Des formes résonnantes explicites de *T* et de *R* peuvent être obtenues en fonction de l'une des variables *x* ou *y*, l'autre étant maintenue constante. Le cas où la fréquence *x* est fixée sera étudié dans la suite.

On considère que $\tau \ll 1$, ce qui signifie que le fluide est léger par rapport au solide et que l'on se place loin de l'incidence rasante. Mathématiquement cela veut dire que l'on ne retiendra que les termes d'ordre le plus bas en τ dans les développements qui vont suivre.

II.4.2 Étude analytique

Les parties réelles du dénominateur de l'équation (2.20) sont développées au premier ordre en *y* autour d'un zéro correspondant aux solutions de l'équation :

$$C_a = 0 \text{ ou } C_s = 0 . \tag{2.36}$$

Ceci étant fait dans le but d'apporter une signification physique au comportement de *T* égal à l'unité et *R* autour de zéro. En ne retenant que les termes du premier ordre en *y* :

$$C_s(y) \simeq C_s(y_{ms}) + \left.\frac{\partial C_s}{\partial y}\right|_{y=y_{ms}} (y - y_{ms}) + \dots \tag{2.37}$$

$$C_a(y) \simeq C_a(y_{ma}) + \left.\frac{\partial C_a}{\partial y}\right|_{y=y_{ma}} (y - y_{ma}) + \dots \tag{2.38}$$

Les dérivées s'écrivent alors :

$$\left.\frac{\partial C_s}{\partial y}\right|_{y=y_{ms}} = -4\beta_y \sin 2\theta_T \cos 2\theta_T \operatorname{cotan}\delta - \delta_y \frac{\cos^2 2\theta_T}{\sin^2 \delta}\ldots$$
$$\ldots + 2r^2\left(\alpha_y \cos 2\theta_L \sin 2\theta_T + \beta_y \sin 2\theta_L \cos 2\theta_T\right)\operatorname{cotan}\varepsilon\ldots \quad (2.39)$$
$$\ldots - \frac{r^2 \varepsilon_y \sin 2\theta_L \sin 2\theta_T}{\sin^2 \varepsilon},$$

$$\left.\frac{\partial C_a}{\partial y}\right|_{y=y_{ma}} = -4\beta_y \sin 2\theta_T \cos 2\theta_T \tan\delta + \delta_y \frac{\cos^2 2\theta_T}{\cos^2 \delta}\ldots$$
$$\ldots + 2r^2\left(\alpha_y \cos 2\theta_L \sin 2\theta_T + \beta_y \sin 2\theta_L \cos 2\theta_T\right)\tan\varepsilon\ldots \quad (2.40)$$
$$\ldots + \frac{r^2 \varepsilon_y \sin 2\theta_L \sin 2\theta_T}{\cos^2 \varepsilon},$$

avec,

$$\alpha_y = \frac{1}{\sqrt{n_L^2 - y^2}}, \quad (2.41)$$

$$\beta_y = \frac{1}{\sqrt{n_T^2 - y^2}}, \quad (2.42)$$

$$\delta_y = -\frac{xy}{2\sqrt{n_L^2 - y^2}}, \quad (2.43)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{xy}{2\sqrt{n_T^2 - y^2}}. \quad (2.44)$$

Puisque l'on développe autour d'un zéro, les relations suivantes sont vérifiées :

$$C_s\left(y_{m_s}\right) = 0 \text{ et } C_a\left(y_{m_a}\right) = 0. \quad (2.45)$$

En conséquence, le coefficient *T* s'écrit au voisinage de $y = y_{ms,a}$ sous la forme suivante :

$$T = \frac{\pm j\frac{\gamma_{ms,a}}{2}}{y - y_{ms,a} - j\frac{\gamma_{ms,a}}{2}}, \quad (2.46)$$

avec,

$$\frac{\gamma_{m_s}}{2} = +\frac{\tau_s}{\left.\frac{\partial C_s}{\partial y}\right|_{y=y_{m_s}}}, \tag{2.47}$$

$$\frac{\gamma_{m_a}}{2} = -\frac{\tau_a}{\left.\frac{\partial C_a}{\partial y}\right|_{y=y_{m_a}}}, \tag{2.48}$$

et,

$$\tau_{s,a} = \frac{\rho}{\rho_{\text{sol.}}}\sqrt{\frac{n_L^2 - y_{m_{s,a}}^2}{1 - y_{m_{s,a}}^2}}\,. \tag{2.49}$$

Le paramètre $\tau_{s,a}$ étant fonction de la variable *y*, il a été évalué aux positions angulaires $y_{m_{s,a}}$.

Le coefficient *T* passe par un maximum qui est celui obtenu dans le cadre de la transmission totale.

Un pôle du coefficient de transmission est appelé résonance. Une résonance est donc caractérisée par la partie réelle du pôle $y_{m_{s,a}}$ qui est la position de la résonance, et la partie imaginaire du pôle $\frac{\gamma_{m_{s,a}}}{2}$ positive qui est la largeur de la résonance :

$$y_{\text{pôle}} = y_{m_{s,a}} + \frac{j}{2}\gamma_{m_{s,a}}\,. \tag{2.50}$$

Il faut noter que la largeur de résonance dépend de la nature du fluide environnant. Dans notre cas, il s'agit de pôles simples (d'ordre 1). Elle est aussi directement analogue à celle obtenue dans le domaine nucléaire par la théorie de Breit-Wigner [34].

La largeur à mi-hauteur de $|T|^2$ vaut γ.

Cette dernière expression de *T* (2.46) rend parfaitement compte du phénomène résonant. Elle est similaire à celle obtenue auparavant par Flax, Dragonette et Überall [35] pour des objets diffusants de dimension 2 et 3 à laquelle s'ajoutait un fond potentiel lié à une diffusion non résonante.

La formulation complète de l'expression de *T* et de *R* à partir des développements limités précédents est la suivante :

$$T = \sum_{m_s} \frac{+\frac{j}{2}\gamma_{m_s}}{y - y_{m_s} - \frac{j}{2}\gamma_{m_s}} + \sum_{m_a} \frac{-\frac{j}{2}\gamma_{m_a}}{y - y_{m_a} - \frac{j}{2}\gamma_{m_a}}, \tag{2.51}$$

$$R = \sum_{m_s} \frac{y - y_{m_s} - \tilde{y}_{m_s}}{y - y_{m_s} - \frac{j}{2}\gamma_{m_s}} + \sum_{m_a} \frac{y - y_{m_a} + \tilde{y}_{m_a}}{y - y_{m_a} - \frac{j}{2}\gamma_{m_a}}. \tag{2.52}$$

La somme doit être interprétée comme indiquant de façon symbolique que toutes les résonances sont présentes dans les expressions de *R* et *T*. En se rappelant que chaque terme n'est strictement valable qu'au voisinage immédiat d'une résonance, cette somme symbolique devient une sommation algébrique dans la mesure où chaque résonance est isolée. Dans les équations (2.51) et (2.52) les solutions $y_{m_{s,a}}$ de l'équation (2.45) ont été utilisées. Les termes qui apparaissent dans les équations (2.51) et (2.52) sont définis comme suit :

$$\tilde{y}_{m_s} = \frac{\gamma_{m_s}\tau_s}{2C_a\left(y_{m_s}\right)}, \tag{2.53}$$

$$\tilde{y}_{m_a} = \frac{\gamma_{m_a}\tau_a}{2C_s\left(y_{m_a}\right)}. \tag{2.54}$$

Si on considère le module du coefficient de transmission au carré ($|T|^2$) le terme $\gamma_{m_{s,a}}$ apparait comme étant la largeur à mi-hauteur (lmh) de la résonance angulaire considérée.
Il faut aussi remarquer que le coefficient de réflexion *R*, présente des zéros correspondant aux valeurs réelles :

$$y = y_{m_{s,a}} \mp \tilde{y}_{m_{s,a}}. \tag{2.55}$$

Remarquons aussi que pour $\tau \ll 1$, les valeurs de $\tilde{y}_{m_{s,a}}$ sont du second ordre en τ et peuvent donc être négligées devant $y_{m_{s,a}}$ sauf lorsque les dérivés de $C_{s,a}$ sont du premier ordre en τ. Les grandeurs $y_{m_{s,a}}$, $\gamma_{m_{s,a}}$ et $\tilde{y}_{m_{s,a}}$ dépendent explicitement des expressions de

$C_{s,a}$ donnée par les équations (2.23) et (2.24). Ces dernières étant valides pour toutes les valeurs de l'angle d'incidence, seule change la forme des expressions de $C_{s,a}$.

II.4.3 Résultats numériques – Comparaison

Il s'agit maintenant de tracer les courbes de $|R|^2$ et $|T|^2$ (pour une fréquence donnée) en fonction de l'angle d'incidence, à partir des équations « exactes » ((2.20) et (2.21)) et des équations approchées précédentes (les expressions (2.51) et (2.52)). Les courbes Fig. II.4-1 jusqu'à Fig. II.4-4 ont été tracées pour une plaque d'acier de 5 mm d'épaisseur et dont les caractéristiques sont les suivantes : $C_L = 6020\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $C_T = 3220\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\rho_{sol.} = 7800\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $c = 1500\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\rho = 1000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

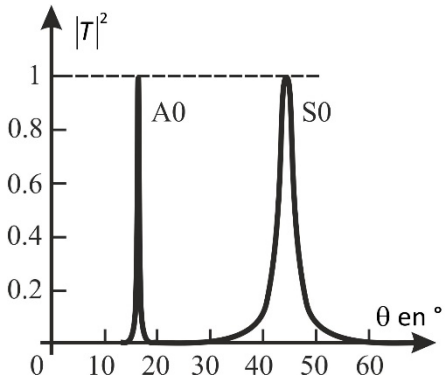

Fig. II.4-1 Évolution du coefficient $|T|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 150 kHz tracé avec le formalisme résonant.

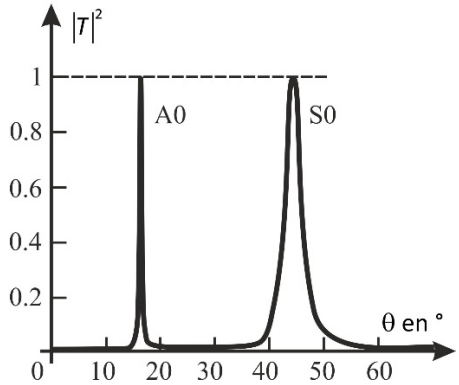

Fig. II.4-2 Évolution du coefficient $|T|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 150 kHz obtenu à partir de l'équation (2.20).

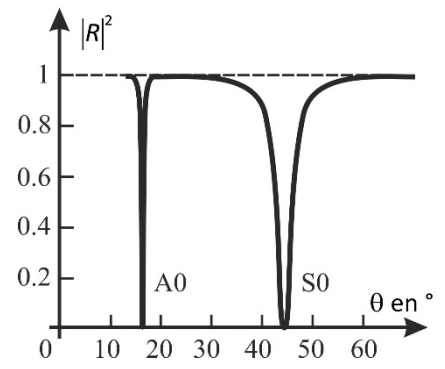

Fig. II.4-3 Évolution du coefficient $|R|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 150 kHz tracé avec le formalisme résonant.

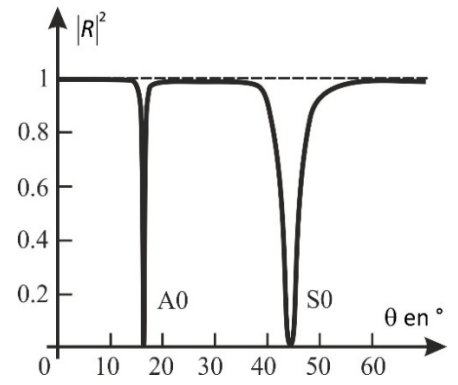

Fig. II.4-4 Évolution du coefficient $|R|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 150 kHz obtenu à partir de l'équation (2.20).

Pour le formalisme résonant (Fig. II.4-1 et Fig. II.4-3) les courbes obtenues pour chaque valeur des entiers $m_{s,a}$ sont superposées.

Si on observe chacune des courbes Fig. II.4-1 et Fig. II.4-2 entre 20° et 40°, on constate une légère différence entre le coefficient de transmission reconstitué (Fig. II.4-1) et le coefficient exact (Fig. II.4-2). Il en est de même pour le coefficient de transmission. L'approximation de BW s'applique bien au voisinage immédiat des maxima du coefficient de transmission.

Les figures obtenues par cette méthode et par la résolution exacte de l'équation (2.20) et (2.21) se superposent au niveau de chaque résonance. Seules diffèrent ici les zones où la superposition des modes existe et provoque un chevauchement au niveau des « pieds » des différents pics résonants. Ces effets restent peu significatifs tant que les pics sont suffisamment distants de sorte qu'ils présentent peu de recouvrement. Ceci implique que si on s'intéresse au coefficient de transmission afin de caractériser les résonances, il suffit de considérer les pics de transmission au voisinage immédiat de leur maximum.

Les Fig. II.4-5 et Fig. II.4-6, tracées à une fréquence de 602 kHz, pour le coefficient $|T|^2$, font apparaitre une résonance à 0°, c'est-à-dire sous incidence normale.

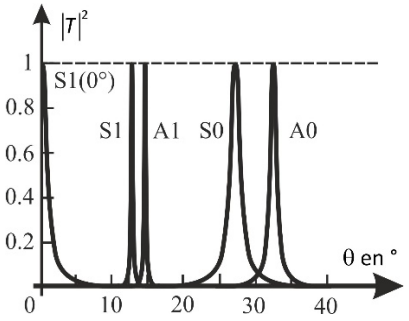

Fig. II.4-5 Évolution du coefficient $|T|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 602 kHz tracé avec le formalisme résonant.

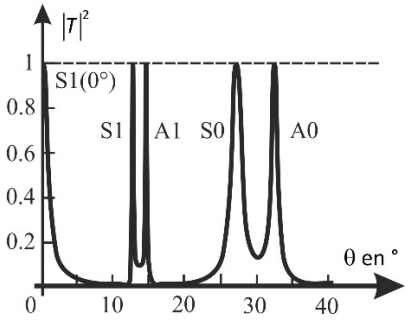

Fig. II.4-6 Évolution du coefficient $|T|^2$ en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence de 602 kHz obtenu à partir de l'équation (2.20).

Ce pic (à 0°) est tel que l'épaisseur de la plaque correspond à une demi longueur d'onde : $\frac{\lambda_L}{2} = \frac{C_L}{2f} = \frac{6020}{2 \times 602 \times 10^3} = 5 \times 10^{-3}$ m. Sous incidence normale, une caractéristique intéressante apparait : $\left.\frac{\partial C_s}{\partial y}\right|_{y=y_{m_s}} \to 0$ pour $y \to 0$. Si on reprend les équations (2.47) et (2.48) cela signifierait que la largeur des pics tendent vers l'infini, mais il faut se rappeler que ces relations ont été obtenues à partir de développements limités (voir expressions (2.37) et (2.38)).

Et, dans ce cas, le premier terme du développement limité non nul n'est plus le terme linéaire (d'ordre 1) mais le terme quadratique en *y* et les coefficients *R* et *T* prennent alors la forme suivante :

$$T = \sum_{m_s} \frac{\frac{1}{4}\overline{\Gamma}_{m_s}^2}{\left(y - y_{m_s}\right)^2 \mp \frac{j}{4}\overline{\Gamma}_{m_s}^2} + \sum_{m_a} \frac{\frac{1}{4}\overline{\Gamma}_{m_a}^2}{\left(y - y_{m_a}\right)^2 \pm \frac{j}{4}\overline{\Gamma}_{m_a}^2}, \tag{2.56}$$

où,

$$\overline{\Gamma}_{m_s}^2 = \left| 8\tau_s / \left. \frac{\partial^2 C_s}{\partial y^2} \right|_{y=y_{m_s}} \right|, \tag{2.57}$$

$$\overline{\Gamma}_{m_a}^2 = \left| 8\tau_s / \left. \frac{\partial^2 C_a}{\partial y^2} \right|_{y=y_{m_a}} \right|. \tag{2.58}$$

On remarque enfin, que pour l'incidence normale, la forme de la résonance correspondant à l'équation (2.56) n'est plus celle d'une forme de Breit-Wigner. Dans la Fig. II.4-5, la courbe correspondant à l'incidence normale a été tracée en exploitant l'équation (2.56) .

II.5 Conclusion

Dans cette partie, il a été montré que les caractéristiques des résonances d'une plaque élastique immergée dans un fluide parfait peuvent être approchées en exploitant un modèle de Breit-Wigner pour les pics de transmission. Les avantages de cette démarche sont les suivants :

- Les positions angulaires des résonances sont données par résolution d'équations dans le corps des réels, ce qui évite d'introduire des angles d'incidence complexes.
- Les largeurs des résonances peuvent être calculées explicitement, si l'on accepte de ne pas tenir compte des phénomènes de recouvrement pour des pics « isolés » évitant ainsi le calcul dans le plan complexe.
- La décomposition en termes résonants de R et T permet d'identifier facilement chaque extremum de ces coefficients et donne un sens physique à ce qu'est le coefficient de transmission (une somme de contributions de résonances).
- Comme les paramètres des résonances sont déterminés de façon explicite en fonction des constantes caractéristiques des matériaux, il est possible de faire une détermination inverse, c'est-à-dire connaitre les caractéristiques de la plaque élastique à partir de l'étude de ses résonances.

Chapitre III :

III Simulation numérique de la diffusion acoustique par une plaque rugueuse

III.1 Position du problème

La simulation numérique d'un problème physique fait partie de l'ensemble des méthodes utilisées en sciences de l'ingénieur depuis plus d'une quinzaine d'années. Plus précisément l'arrivée d'ordinateurs de table possédant une mémoire suffisante (plusieurs giga-octets) et des processeurs multi-cœurs permet, en des temps raisonnables, d'obtenir une solution à des problèmes complexes. Si, en outre, on tient compte du fait que le coût de telles machines a baissé considérablement dans le laps de temps correspondant, les méthodes de simulation numérique sont devenues particulièrement adaptées à l'étude de situations telles que celles qui sont développées ici.

Lorsque le problème physique ne présente pas de solution analytique « simple » et que les expériences sont difficiles à mettre en œuvre, la simulation numérique est un moyen d'étude particulièrement adapté. Ici, c'est la Méthode des Éléments Finis (MEF) qui va être utilisée, essentiellement parce que sa mise en œuvre peut se faire avec un logiciel que l'on peut qualifier de standard aujourd'hui. Dans tous les cas, il s'agit de passer de situations continues comme celle d'une plaque présentant des aspérités plongées dans l'eau, et de la discrétiser ensuite.

La MEF a pris une place importante dans la résolution de certains problèmes complexes d'élasticité ainsi que dans l'analyse de structures en ingénierie civile et aéronautique. Son développement remonte aux travaux d'Alexander Hrennikoff (1941) et de Richard Courant (1942) [36].

D'un point de vue pratique, la MEF a véritablement été exploitée au milieu des années 1950 pour l'analyse structurale et aéronautique. Elle a pris de l'ampleur à l'Université de Stuttgart grâce au travail de John Argyris ainsi qu'à l'Université de Berkeley grâce au travail de Ray W. Clough (dans les années 1960) pour des applications dans le domaine du génie civil. La base mathématique rigoureuse de la MEF a été consolidée en 1973 avec la publication de Strang et Fix [37].

De très nombreuses références sur la méthode sont disponibles [38] [39]. Ce travail se place dans l'optique de l'utilisateur de la MEF avec un logiciel très utilisé, donc validé, qui est Comsol ©.

Afin de comprendre la mise en place du code de calcul utilisant la MEF, il faut s'imprégner des idées mathématiques traduisant la réalité physique du problème étudiée. Dans

le cas de la diffusion ultrasonore par une plaque immergée dans l'eau (qu'il y ait des aspérités ou pas) des équations aux dérivées partielles (EDP) sont écrites. Une première décrit les ondes dans l'eau (à partir des équations de l'acoustique dans un fluide) et une seconde équation aux dérivées partielles décrivant les ondes dans le milieu élastique. Dans les deux cas une modélisation est nécessaire : le fluide peut être parfait ou visqueux, le solide peut être isotrope ou pas, absorbant ou pas… Chaque EDP est valable dans un domaine (un domaine fluide et un domaine solide) et à chaque EDP doit être associée des conditions de frontière (d'un point de vue plus physique il est d'usage d'appeler cette condition « couplage fluide-structure »), de conditions à l'infini et des conditions initiales sans quoi la solution ne peut être obtenue. Ces solutions étant obtenues, la physique du problème peut alors progresser, du moins, il est permis de l'espérer.

III.2 Mise en équation du problème

Le logiciel Comsol est également un outil de simulation numérique multi-physique permettant de résoudre, de façon couplée, des équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis. Il dispose d'une base de données d'équations permettant de modéliser différents phénomènes physiques comme l'électromagnétisme, l'électronique, l'écoulement de fluides ou encore la déformation des matériaux.

Les modules utilisés dans notre étude sont ceux de la mécanique du solide : « solid mechanics », ainsi que de l'acoustique : « Pressure Acoustics ». Dans toute cette étude, on considère un problème 2D (deux dimensions). Toutes les grandeurs physiques sont indépendantes de la troisième variable qui est traditionnellement notée *y* dans la théorie acoustique, alors que pour le logiciel elle est notée *z*. Il s'agira d'étudier un problème fréquentiel : ceci correspond à chercher des solutions sous forme d'ondes monochromatiques. Le logiciel considère des exponentielles sous la forme temporelle $e^{-j\omega t}$.

III.2.1 Domaine solide

Dans le module de mécanique du solide nous avons choisi l'étude fréquentielle, en mode linéaire, régie par l'équation :

$$-\rho_{sol.}\omega^2\vec{u} - \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\sigma}} = \rho_{sol.}\ f_{vol}\exp(-j\phi). \tag{3.1}$$

Dans cette expression : $\rho_{sol.}$, ω, $\vec{u}$, $\overline{\overline{\sigma}}$, $f_{vol.}$ et ϕ sont respectivement la masse volumique de la plaque solide, la pulsation de l'onde qui s'y propage, le champ de déplacement, le tenseur des contraintes, l'amplitude de la force volumique et sa phase. Le matériau considéré est élastique, homogène, isotrope et donc, outre sa masse volumique, deux paramètres d'élasticité sont nécessaires pour décrire son comportement : le module d'Young et le coefficient de Poisson.

III.2.2 Domaine fluide

Dans le module d'acoustique, la pression satisfait à l'équation suivante :

$$\frac{-\omega^2}{\rho c^2} p + \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \left(\vec{\nabla} p - \overrightarrow{q_d} \right) \right) = Q_m , \tag{3.2}$$

où $\overrightarrow{q_d}$ représente une éventuelle source dipolaire et Q_m une éventuelle source monopolaire. En l'absence de source, cette relation se réduit à :

$$\frac{-\omega^2}{\rho c^2} p + \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \left(\vec{\nabla} p \right) \right) = 0 , \tag{3.3}$$

avec ρ, c, p qui représentent respectivement la masse volumique du fluide, la célérité des ondes acoustiques dans l'eau et *p* la surpression qui se propage.

En fait, pour le logiciel il faut considérer deux domaines fluides car la plaque solide sépare le fluide en deux parties.

III.2.3 Géométrie

Le système étudié est une plaque dont l'interface supérieure présente une rugosité modélisée par une forme triangulaire de géométrie simple et périodique. La période est notée L_x et vaut, sauf précision contraire, 8 mm. C'est, de ce fait, la taille de la cellule de base. Cette taille a été choisie afin qu'elle soit commensurable avec la longueur d'onde des ondes de Lamb qui se propageront dans le solide. Ceci conditionne donc également une bande de fréquence ad-hoc. Un schéma de la situation physique est donné ci-dessous (Fig. III.2-1). Une onde incidente se propageant dans l'eau arrive sous l'angle θ. Une partie de l'onde incidente est réfléchie et une partie est transmise. À l'intérieur de la plaque une onde de Lamb va être générée. Cette onde va réémettre dans le fluide de part et d'autre de la plaque (d'où l'existence de deux domaines fluides).

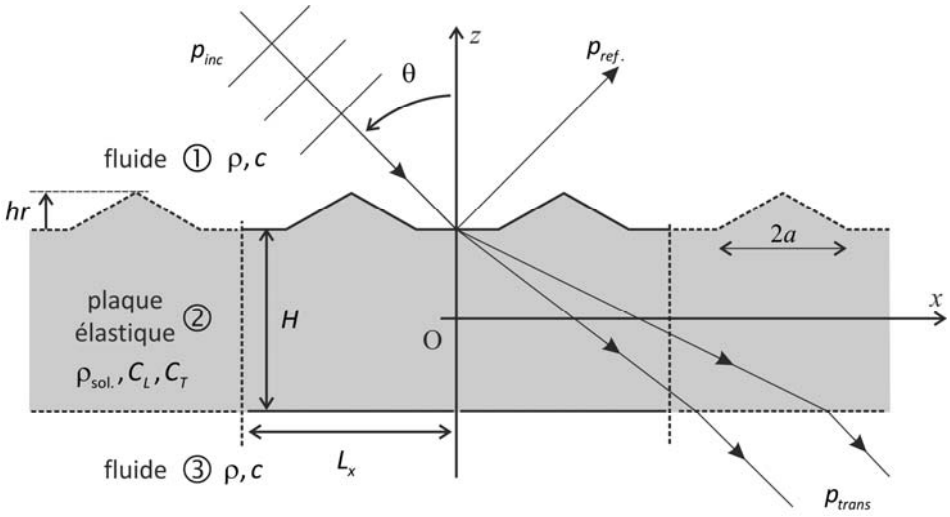

Fig. III.2-1 Plaque élastique plane immergée présentant un défaut périodique simple de forme triangulaire.

Cette plaque immergée dans de l'eau, considérée comme un fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité, est en acier de masse volumique $\rho_{sol.} = 7800$ kg/m^3, les célérités des ondes longitudinale et transversale sont alors $C_L = 6020$ m/s et $C_T = 3220$ m/s. La masse volumique de l'eau est prise égale à 1000 kg/m^3 et la vitesse du son dans l'eau est $c = 1500$ m/s. L'épaisseur de la plaque plane, en l'absence d'aspérité vaut $H = 5$ mm.

La hauteur hr (Fig. III.2-1) de l'aspérité est un paramètre ajustable, dans cette étude elle varie de 0 à 100 µm ou 200 µm suivant la nature du test. Cette valeur reste petite devant l'épaisseur moyenne de la plaque, $hr << H$. Il s'agit de rester dans un domaine de petite perturbation de façon à considérer que l'onde est réfléchie sous l'angle θ ou l'onde transmise sous le même angle (cf. Fig. III.2-1). Ces ondes emportent avec elles la majeure partie des ondes diffusées. Lorsque la hauteur de la dent varie, la valeur de *H* est recalculée pour chaque valeur de hr, de sorte que l'épaisseur moyenne de la plaque reste constante et égale à 5 mm. La relation exploitée pour ce calcul est la suivante :

$$< H > = H - \frac{a \cdot hr}{L_x}, \tag{3.4}$$

où, a représente la demi-largeur de la base de la dent triangulaire (Fig. II.2-1).

Dans le domaine de fréquence étudié, de 600 kHz à 800 kHz, la largeur L_x d'un motif est comparable à la longueur d'onde des ondes présentes dans le système. Les limites dans lesquelles la longueur d'onde évolue sont les suivantes :

- Dans l'eau :

$$1{,}875\ \text{mm} < \lambda_{\text{eau}} < 2{,}500\ \text{mm} \tag{3.5}$$

- Dans la plaque :

$$7{,}5\ \text{mm} < \lambda_L < 10\ \text{mm} \tag{3.6}$$

$$4\ \text{mm} < \lambda_T < 5\ \text{mm} \tag{3.7}$$

Dans le domaine fluide, on impose à la surpression $p(x,z)$ d'être périodique dans la direction horizontale (Ox), $\underline{p}(0,z) = p(L_x,z)e^{jk\sin\theta L_x}$, (avec $k = \frac{\omega}{c}$). On admet que cette périodicité, qui est exacte dans le cas des plaques non rugueuses, reste valable dans le cas des faibles perturbations géométriques.

Dans chaque domaine les conditions associées aux EDP correspondant aux conditions de passage imposées aux deux interfaces fluide-solide sont les suivantes :

- Continuité entre la surpression et la composante normale de la contrainte : $-p = \sigma_{zz}$.
- Continuité de la contrainte tangentielle ($\sigma_{xz} = 0$).
- Continuité des déplacements normaux : $u_{z1} = u_{z2}$.

Les deux domaines fluides sont théoriquement infinis (quand $|z|$ tend vers l'infini). Cette condition est réalisée par l'introduction de domaines absorbants, disponibles directement dans le logiciel, qui sont ajoutés aux domaines fluides et solide : Ce sont les Perfectly Matched Layers (PML) qui sont analogues à des matériaux jouant le rôle d'absorbeur (physiquement il n'y a pas d'onde à l'infini) [40].

Sur la Fig. III.2-2, il s'agit des domaines notés CO7 et CO6, CO3 et CO4 correspondant aux deux domaines fluides et CO1 le domaine solide. Ces domaines sont construits avec le logiciel. Dans chaque domaine le logiciel va calculer la solution des EDP correspondantes munies de leurs conditions de frontière.

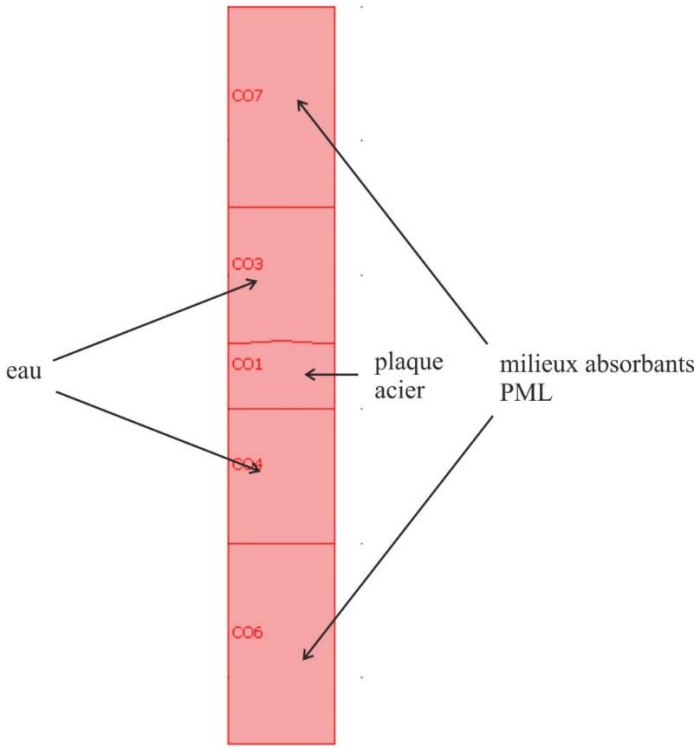

Fig. III.2-2 Géométrie de la plaque immergée en vue du calcul par la MEF

III.2.4 Paramétrage des calculs

À l'issue de quelques essais, la géométrie du maillage qui nous a paru la plus adaptée en termes de temps de calcul est la géométrie rectangulaire. Un détail du système maillé avec les éléments finis rectangulaires est présenté sur la Fig. III.2-3. La taille maximale de l'arête d'une maille est de 0,2 mm. Cette valeur est telle que toutes les longueurs d'onde sont grandes (au moins d'un facteur 10) devant l'arête d'une maille.

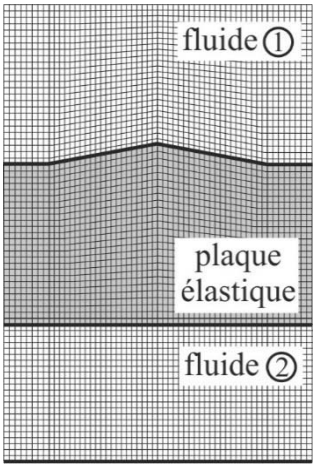

Fig. III.2-3 maillage d'une cellule de largeur L_x .

Des essais avec des éléments finis triangulaires tels que les maillages se raffinent au niveau du défaut de l'interface ont été menés (voir Fig. III.2-4), mais la précision des résultats est restée identique alors que le temps de calcul a augmenté de façon notable.

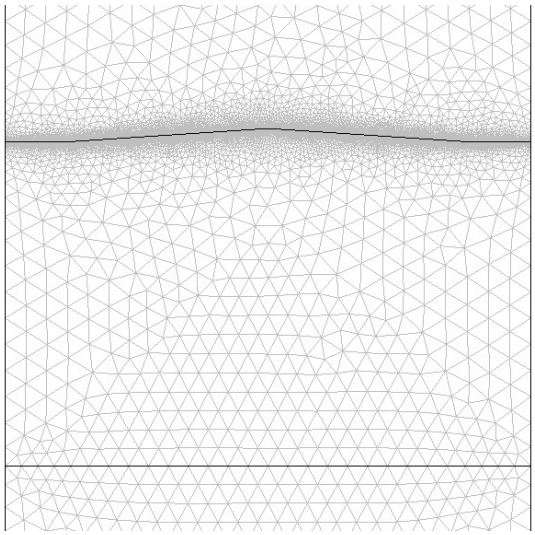

Fig. III.2-4 Détail d'un maillage progressif au voisinage de la dent.

La plaque est alors excitée par une onde plane progressive harmonique incidente $p_{inc} = p_0 e^{j\left(\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r} - \omega t\right)}$ qui se propage dans le fluide jusqu'à atteindre la plaque sous l'angle θ (Fig. III.2-1).

III.3 Résultats numériques

III.3.1 Introduction

Parmi les données obtenues après résolution du problème, les coefficients de réflexion et de transmission sont accessibles. Dans toute la suite on notera r_1 le coefficient de réflexion dans le fluide supérieur (domaine C03) et t_1 le coefficient de transmission dans le fluide inférieur (domaine C04). On ne considérera, sauf exception mentionnée, que des données issues du calcul présentant une conservation d'énergie à 5% près c'est-à-dire que :

$$r_1^2 + t_1^2 = 0.975 \pm 0.025. \tag{3.8}$$

Dans le but d'identifier les modes de Lamb générés par l'onde incidente, le coefficient de transmission en amplitude $t_1 = \frac{p_{\text{trans}}}{p_{inc}}$ (voir Fig. III.2-1) est d'abord calculé pour la plaque plane sur une large gamme angulaire [7] et pour chaque fréquence d'étude.

Par exemple, pour une plaque d'acier ne comportant pas de rugosité, de 5mm d'épaisseur, à 600 kHz l'évolution de l'amplitude du coefficient de transmission en fonction de l'angle d'incidence est donnée à la Fig. III.3-1.

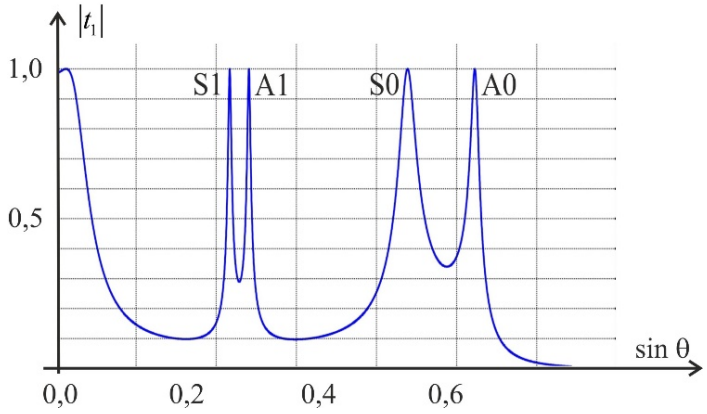

Fig. III.3-1 Module du coefficient de transmission t_1, pour une plaque plane, en fonction de sinθ à 600 kHz.

Pour chaque mode, les courbes correspondant aux différentes valeurs de hr sont tracées. Par exemple, pour le mode A_1 à 600 kHz, et pour une amplitude de la dent de $hr = 50\mu\text{m}$ le coefficient de transmission est donnée à la Fig. III.3-2.

Cette courbe a été tracée avec 1000 points de calcul.

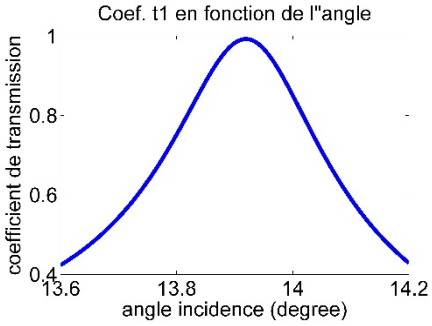

Fig. III.3-2 Module de t_1 pour le mode A1 à 600 kHz avec $hr = 50\,\mu\text{m}$.

À titre de comparaison, l'amplitude des coefficients de transmission sont tracés, sur une même figure, pour différentes valeurs de *hr* à la Fig. III.3-3.

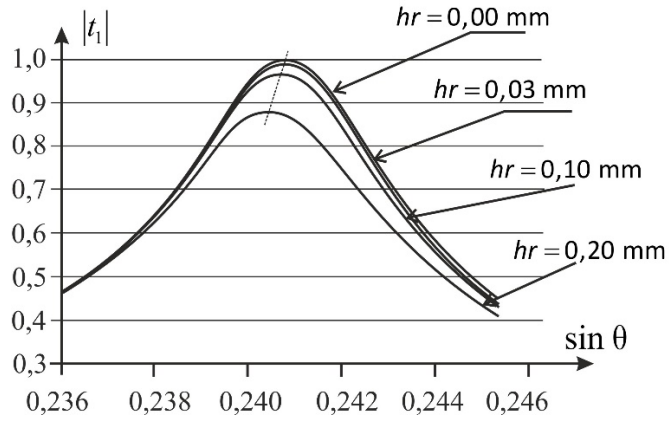

Fig. III.3-3 Module du coefficient de transmission t_1 en fonction de sinθ pour quelques valeurs de *hr*.

On constate visuellement un affaiblissement et un élargissement des pics avec la croissance de *hr*. On constate aussi un léger décalage du maximum du pic (moins de 1%). Même pour une rugosité dont l'amplitude ne représente que 2% de l'épaisseur, l'influence de la rugosité est sensible. La variation de l'amplitude du maximum du pic sera exploitée au chapitre suivant.

Le logiciel permet l'export de ces données sous forme de tableau au format information ouvert (comma-separated-values connu sous le sigle csv). Elles peuvent alors être traitées par un autre logiciel de calcul, Matlab © a été retenu dans le cadre de cette étude.

III.3.2 Analyse des résultats

Les travaux de R. Fiorito, W. Madigosky et H. Überall ont montré qu'un pic de transmission isolé peut-être décrit par un modèle résonant de Breit-Wigner (BW) comme cela a été présenté au chapitre II.A. Freedman [41] a discuté les problèmes de chevauchement des pics de résonance et la signification du caractère « isolé » d'une résonance. Le problème du chevauchement peut être évité si on ne s'intéresse qu'au voisinage immédiat du maximum du pic. Auparavant il est d'abord nécessaire de montrer qu'en présence de rugosité, un pic de transmission peut toujours être modélisé par une fonction du type Breit-Wigner. Ceci sera montré au paragraphe suivant et justifié théoriquement au chapitre suivant.

III.3.2.1 Modélisation

Autour d'un pic, le coefficient de transmission, pour une résonance considérée comme isolée, s'exprime selon une fonction du type Breit-Wigner (voir paragraphe II.4.2) par :

$$t_1 = C\,\frac{\pm\dfrac{j\,\gamma}{2}}{\left(\sin\theta-\sin\theta_{\max}\right)-\dfrac{j\,\gamma}{2}}, \tag{3.9}$$

où $\sin\theta_{\max}$ est le sinus de l'angle du maximum du pic de résonance, C une constante (qui vaut 1 pour une plaque plane) et γ sa largeur à $-3\,\mathrm{dB}$. Ces deux grandeurs caractérisent la résonance étudiée. La seule différence avec le cas étudié par Fiorito *et al* réside dans la présence du facteur C qui traduit le fait que l'amplitude maximum du pic est différente de 1.

La détermination de ces valeurs se fait par la méthode des moindres carrés (Matlab) par l'intermédiaire d'une anamorphose à partir de la sélection des points autour du maximum. La relation (3.9) est transformée selon :

$$\left|t_1\right|^2 = C^2\,\frac{\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2}{\left(\sin\theta-\sin\theta_{\max}\right)^2+\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2}, \tag{3.10}$$

Au maximum du pic, $\sin\theta=\sin\theta_{\max}$ et $\left|t_1\right|_{\max}=C$. On en déduit :

$$\frac{1}{\left|t_1\right|^2}=\frac{1}{\left|t_1\right|^2_{\max}}\left[\frac{\left(\sin\theta-\sin\theta_{\max}\right)^2}{\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2}+1\right], \tag{3.11}$$

Lorsqu'on trace la courbe $\frac{1}{|t_1|^2}$ en fonction de $\left(\sin\theta - \sin\theta_{max}\right)^2$ on obtient une droite dont la pente vaut : $\left(\frac{2}{\gamma}\right)^2 \frac{1}{|t_1|^2_{max}}$. De cette expression on déduit la valeur de γ pour chaque mode et à chaque fréquence. Dans la mesure où la résonance est isolée tout paraît simple.

III.3.2.2 Mise en œuvre – Préliminaires

Il s'agit donc d'isoler une résonance, c'est-à-dire une fraction de la courbe calculée correspondant au mieux au modèle de BW. En effet, la notion de résonance isolée suppose que les pics de transmission sont bien indépendants. Or, pour éviter tout chevauchement des pics et loin d'un maximum du coefficient de transmission l'hypothèse d'isolement est discutable. Pour chaque mode et pour différentes valeurs de hr, un programme (Matlab) permet, dans un premier temps, d'identifier la valeur maximale, $|t_1|_{max}$ de t_1 et d'en isoler une centaine de valeurs de part et d'autre de $|t_1|_{max}$.

Les fréquences des modes de Lamb varient avec l'épaisseur de la plaque. Pour cette raison, il faut garder l'épaisseur moyenne de la plaque constante quelle que soit la valeur de hr. Il est donc nécessaire de procéder à une correction de l'épaisseur de la plaque *H* (voir Fig. III.3-4). Celle-ci a été effectuée de sorte que :

$$< H > = H + \frac{hr\ a}{L_x} = Cte = 5\ \text{mm}. \tag{3.12}$$

De la sorte, seul l'effet physique de la rugosité est pris en compte. Pour ce motif, l'expression de R_q s'écrit :

$$R_q = \sqrt{\frac{2a}{3L_x}}\ hr\ , \tag{3.13}$$

R_q croît linéairement avec hr.

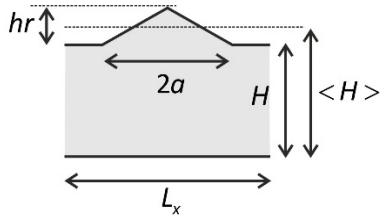

Fig. III.3-4 Détail de la hauteur moyenne de la plaque.

Deux aspects du calcul doivent être pris en compte, le nombre de points de part et d'autre du maximum et la résolution de calcul par COMSOL. Pour des raisons de temps de calcul, il n'est pas possible d'imposer une résolution de 10^{-4} degré pour l'ensemble des calculs. Afin d'établir un critère, différentes analyses ont été effectuées :

- Pour une même résolution, quelle est l'incidence du nombre de points retenus sur le calcul de la largeur d'un pic (à –3dB) ?
- Pour un même nombre de points, quelle est l'influence de la résolution sur ce même calcul ?

Une première étude en fonction du nombre de points retenus a été menée. Sur les Fig. III.3-6 à la Fig. III.3-10, le pic correspondant au mode A1, à 600 kHz, $hr = 50\ \mu m$, calculé avec une résolution de 10^{-4} degré a été modélisé en tant que BW avec respectivement 100, 300, 500, 700 et 900 points. Les valeurs obtenues pour la largeur à mi-hauteur croissent de 0,00458 à 0,00472, soit une variation relative de 3 %. Le coefficient de corrélation évolue, quant à lui, de 0,999 à 0,987 pour ces mêmes courbes. La courbe en trait plein est tracée à partir de Comsol, la courbe en pointillés à partir de la modélisation.

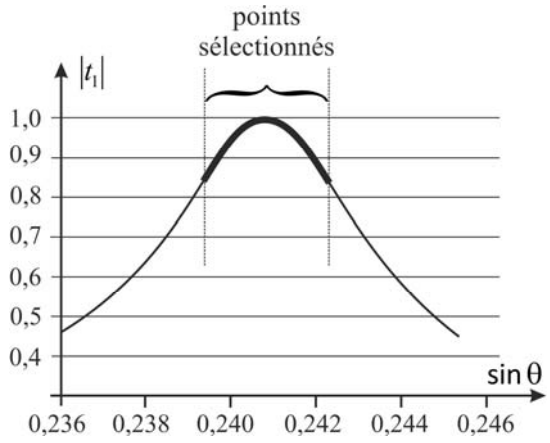

Fig. III.3-5 Image des points sélectionnés.

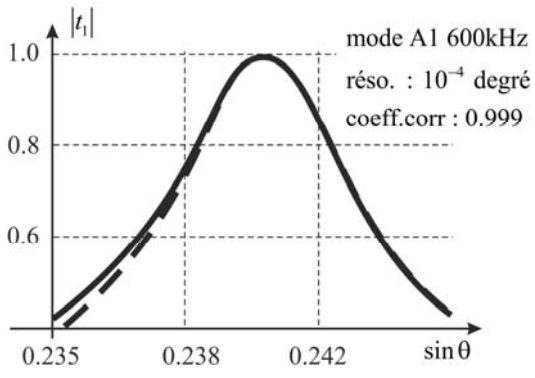

Fig. III.3-6 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 100 points.

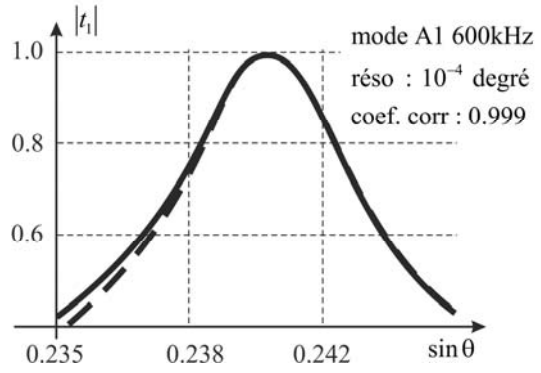

Fig. III.3-7 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 300 points.

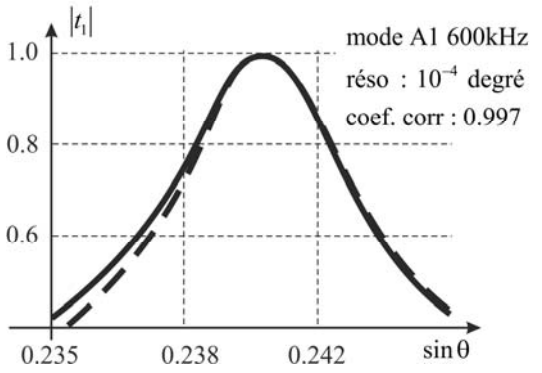

Fig. III.3-8 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 500 points.

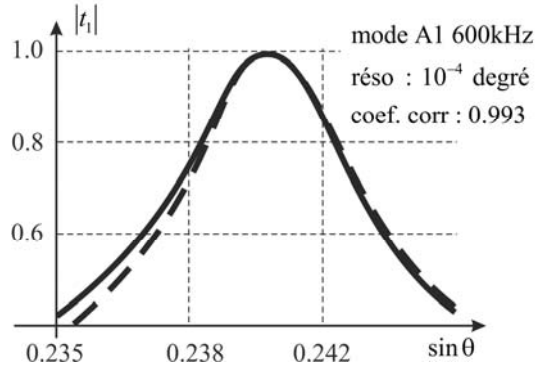

Fig. III.3-9 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 700 points.

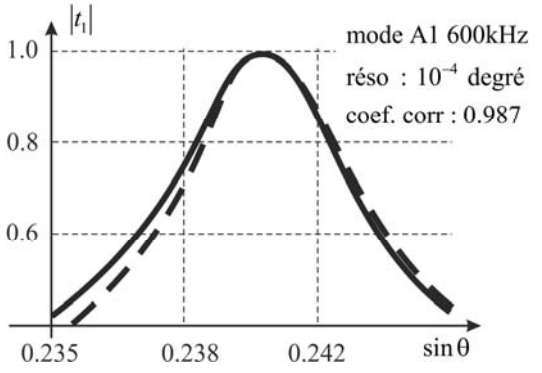

Fig. III.3-10 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour 900 points.

Une seconde étude a été menée en fonction de la résolution. Sur les Fig. III.3-11 à Fig. III.3-14, toujours pour le mode A1, à 600 kHz, $hr = 50\ \mu m$, les courbes ont été tracées avec, respectivement, une résolution de 10^{-3}, 5×10^{-4}, 10^{-4} et 10^{-5} degré. Elles ont été modélisées en tant que BW avec 500 points. Les valeurs obtenues pour la largeur à mi-hauteur évoluent de 0,00458 à 0,00475, soit une variation relative de 3 %. Le coefficient de corrélation évolue, quant à lui, de 0,999 à 0,984 pour ces mêmes courbes.

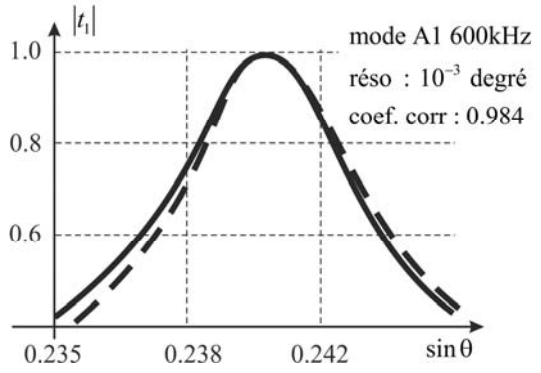

Fig. III.3-11 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour une résolution de 10^{-3} degré.

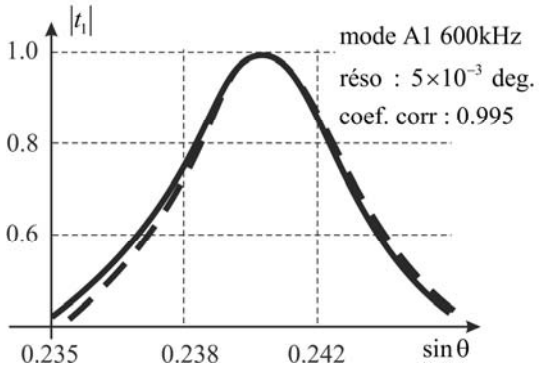

Fig. III.3-12 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour une résolution de 5×10^{-4} degré

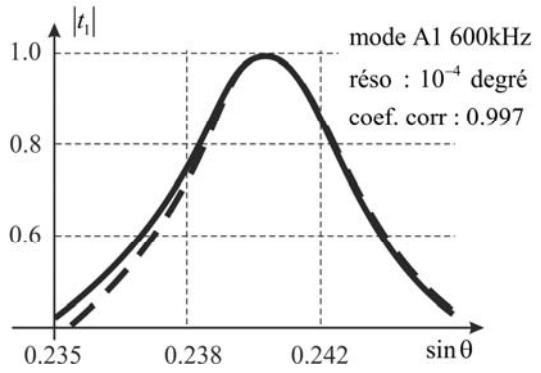

Fig. III.3-13 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour une résolution de 10^{-4} degré.

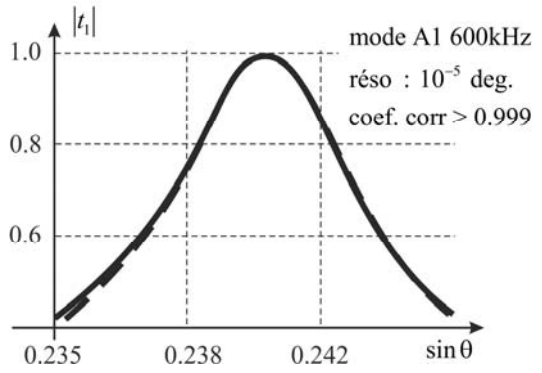

Fig. III.3-14 Superposition du pic résonant et du modèle BW pour une résolution de 10^{-5} degré.

Grâce à ces quelques essais, une résolution de 10^{-4} degré avec 500 points autour du maximum permet à la fois un temps de calcul acceptable (50 min pour l'ensemble du pic) et permet d'obtenir des résultats qui restent proches (< 1% d'écart) de ceux obtenus avec la meilleure résolution et 900 points. C'est le compromis qui a été exploité pour calculer les grandeurs étudiées dans ce mémoire.

D'autre part, on remarque que le module du coefficient de transmission est toujours inférieur à l'unité ($|t_1| \leq 1$). Pour les différentes valeurs de hr, l'amplitude maximale de ce coefficient est relevée. Cette amplitude maximale décroit lorsque hr augmente.

À titre d'exemple, pour le mode A1 à 600 kHz, la figure Fig. III.3-15 traduit cette évolution. Ces valeurs sont consignées pour chaque mode et à chaque fréquence étudiée.

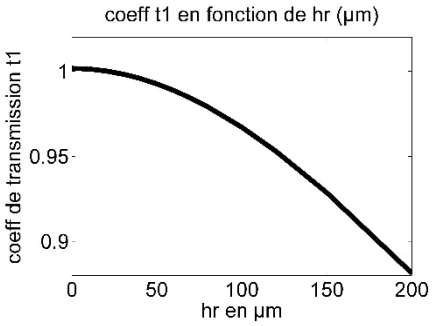

Fig. III.3-15 Évolution de l'amplitude du coefficient de transmission $|t_1|$ en fonction de hr (en µm).

Le coefficient de corrélation correspondant vaut, au minimum 0,999, pour les cas étudiés. Ce qui confirme la validité du modèle de Breit-Wigner pour les résonances prises en considération.

III.3.2.3 Résultats concernant le mode A1

Les caractéristiques des pics ont été déterminées pour chaque valeur de hr. Pour chaque mode, les valeurs de $\sin\theta_{max}$ et de γ sont relevées en fonction de hr et les grandeurs relatives suivantes en % sont déterminées :

$$\eta_\theta = \frac{\sin\theta_{max} - \sin\theta_{\text{plaque plane}}}{\sin\theta_{\text{plaque plane}}}, \tag{3.14}$$

$$\eta_\gamma = \frac{\gamma - \gamma_{\text{plaque plane}}}{\gamma_{\text{plaque plane}}}, \tag{3.15}$$

$$\eta_t = \frac{t_{1max\ \text{plaque rug.}} - t_{1max\ \text{plaque plane}}}{t_{1max\ \text{plaque plane}}}, \tag{3.16}$$

où les grandeurs indicées « plaque plane » correspondent aux mêmes grandeurs relatives à la plaque en l'absence de rugosité ($hr = 0$). L'évolution de ces trois paramètres est tracée en fonction de hr, sur les Fig. III.3-16Fig. III.3-17 et Fig. III.3-18 qui traduisent ces évolutions dans le cas particulier du mode A1 à 600 kHz.

L'évolution de ces paramètres va permettre de déterminer les paramètres du modèle rhéologique (voir chapitre IV). Mais on peut, d'ores et déjà, noter que la largeur à mi-hauteur évolue de façon notable (environ 15%, Fig. III.3-16), celle du maximum du coefficient de transmission de façon analogue (environ 15%, Fig. III.3-18) alors que la position angulaire du pic de résonance est peu affectée par la présence de la rugosité (environ 0,2% Fig. III.3-17).

Ces résultats sont conformes à ceux proposés, tant sur le plan théorique [42] qu'expérimental [43]. D'un point de vue mathématique, la partie réelle du pôle est peu affectée alors que la partie imaginaire l'est davantage. La présence de la rugosité est donc bien visible si l'on étudie les largeurs des résonances.

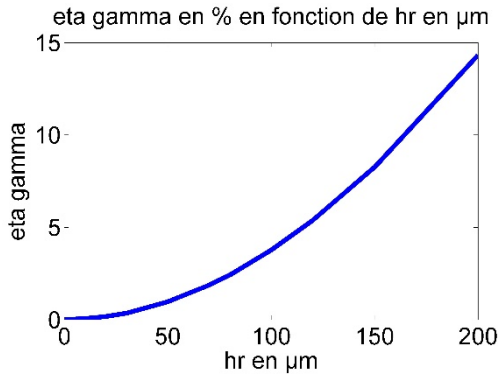

Fig. III.3-16 Variation relative de la largeur du mode A1 à 600 kHz.

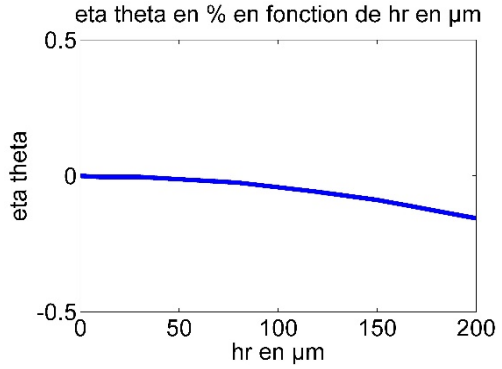

Fig. III.3-17 Variation relative du sinus de l'angle du maximum du pic de résonance pour le mode A1 à 600 kHz.

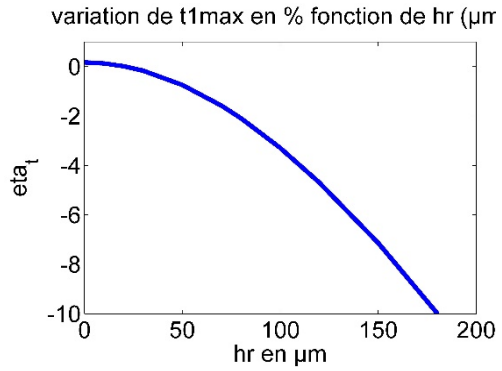

Fig. III.3-18 Variation relative de la valeur du maximum du coefficient de transmission t_1 du mode A1 à 600 kHz.

Dans ce travail, l'étude a été faite pour des valeurs de L_x et de a constantes, le paramètre hr étant la grandeur variable représentative de la hauteur de la rugosité. D'autres études ont été menées comme, par exemple, celle qui consiste à fixer la hauteur hr constante et à faire évoluer la pente, donc le rapport $\frac{a}{L_x}$. Pour le mode A1 à 600 kHz, les évolutions des paramètres η_θ, η_γ et $t_{\max}$ sont données aux Fig. III.3-19, Fig. III.3-20 et Fig. III.3-21.

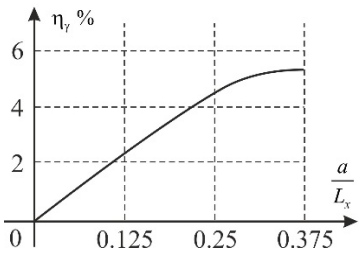

Fig. III.3-19 Variation relative de la largeur angulaire en fonction de la pente moyenne de la rugosité.

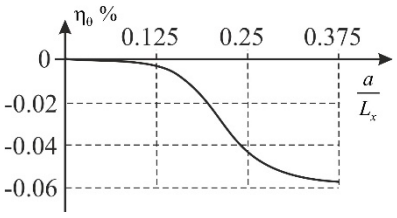

Fig. III.3-20 Variation relative de la position angulaire en fonction de la pente moyenne de la rugosité.

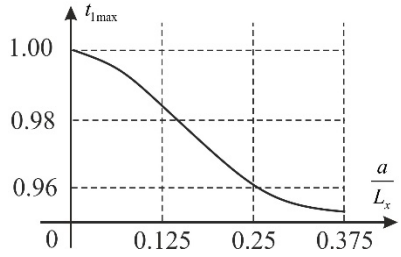

Fig. III.3-21 Variation de maximum du coefficient de transmission en fonction de la pente moyenne de la rugosité.

III.3.3 Généralisation

Conformément aux courbes de dispersion (Fig. III.3-22) d'une plaque d'acier de 5 mm d'épaisseur, aux fréquences étudiées, les modes présents sont S1, A1, S0, A0 et S2 pour les études à 700 kHz et 800 kHz.

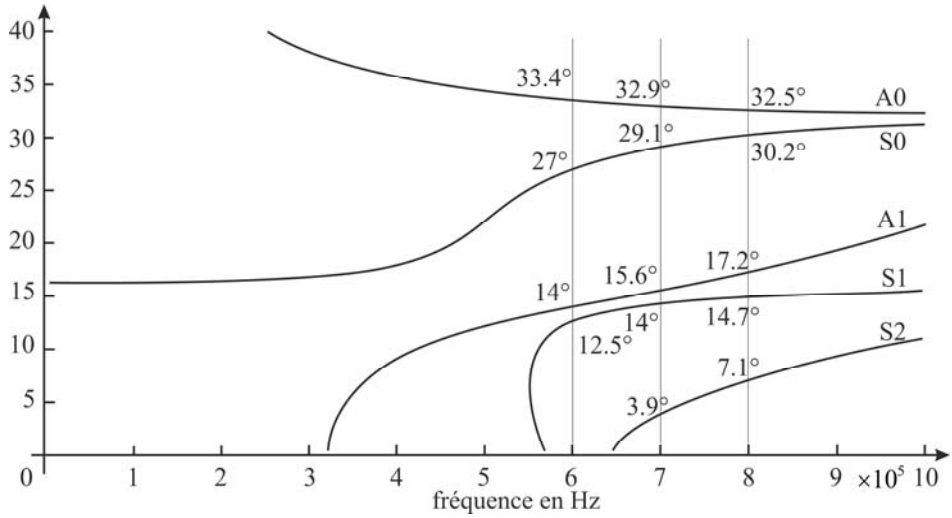

Fig. III.3-22 Courbes de dispersion d'une plaque d'acier de 5 mm.

Différents modes, à différentes fréquences ont été étudiés. Comme cela a été dit précédemment, le domaine de fréquence concerné impacte la longueur d'onde de l'onde de Lamb ; celle-ci doit être commensurable avec la dimension L_x de l'aspérité. Les figures présentées en annexe 1 (Fig. VI.1-1 à Fig. VI.1-42) correspondent à des rapports de $\frac{L_x}{\lambda_{\text{Lamb}}}$ compris entre 0,6 et 1,5.

L'étude des courbes présentées dans l'annexe 1 montre que le choix du coefficient η_θ n'est pas pertinent pour détecter la présence de rugosité. Les parties réelles des pôles des résonances de Lamb ne sont pratiquement pas affectées par la présence de rugosité.

À la vue des largeurs des résonances des modes de Lamb, il apparaît que ceux-ci ne sont pas tous sensibles à la rugosité de la même façon. Les trois figures ci-dessous, tracées pour les fréquences de 600 kHz, 700 kHz et de 800 kHz, regroupent, pour les modes excitables à ces fréquences, l'évolution des largeurs relatives (en %) de ces résonances. Ces figures permettent d'isoler facilement les modes les plus sensibles à la rugosité.

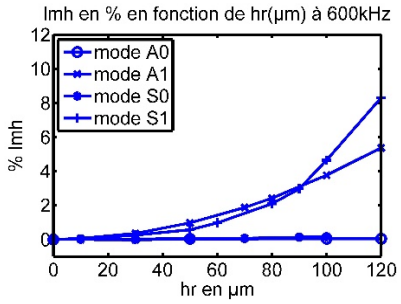

Fig. III.3-23 Variations relatives de la largeur du pic pour les différents modes à 600 kHz.

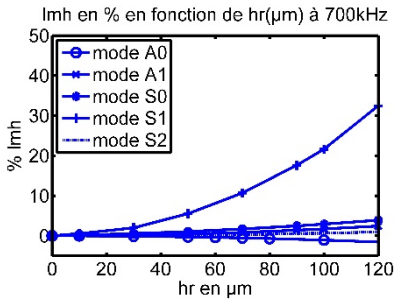

Fig. III.3-24 Variations relatives de la largeur du pic pour les différents modes à 700 kHz.

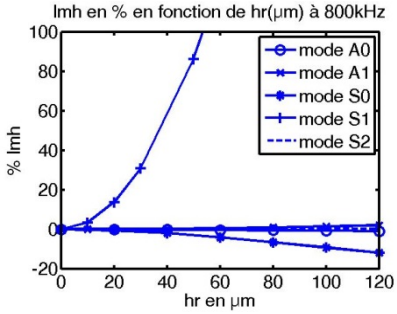

Fig. III.3-25 Variations relatives de la largeur du pic pour les différents modes à 800 kHz.

À 600 kHz, les modes S1 et dans une moindre mesure le mode A1 sont suffisamment sensibles pour être retenus. À 700 kHz, le mode S1 est le plus sensible, mais le mode A0 présente une évolution opposée de sa largeur à mi-hauteur, il sera aussi intéressant de le confronter au modèle rhéologique. À 800 kHz, le mode S1 présente une sensibilité importante, le mode S0 présente à son tour une évolution opposée à celle des autres modes.

Le mode S2 (toujours dans ce domaine fréquentiel) semble peu sensible à *hr*. Ces variations peuvent être importantes (jusqu'à 300%) pour des hauteurs de dent de quelques

centaines de µm. Cependant, dans le cadre de cette étude, le régime étudié est celui des petites perturbations et donc la hauteur de la dent (*hr*) doit rester faible vis-à-vis de l'épaisseur moyenne de la plaque.

Une hauteur de 200 µm correspond à une variation relative de 4% de l'épaisseur ce qui sera déjà considéré comme « important » tant pour les problèmes de détection de corrosion précoce que pour la rugosité provoquée avant le collage de structures.

Dans le même esprit, les variations d'amplitude des résonances des modes de Lamb ne sont pas toutes sensibles à la rugosité de la même façon. Les trois figures ci-dessous, tracées pour les fréquences de 600 kHz, 700 kHz et de 800 kHz, regroupent, pour les modes excitables à ces fréquences, l'évolution des amplitudes relatives (en %) de ces résonances. Ces figures permettent d'isoler facilement les modes les plus sensibles à la rugosité.

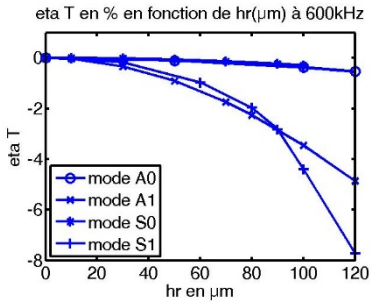

Fig. III.3-26 Variations relatives de l'amplitude du pic pour les différents modes à 600 kHz.

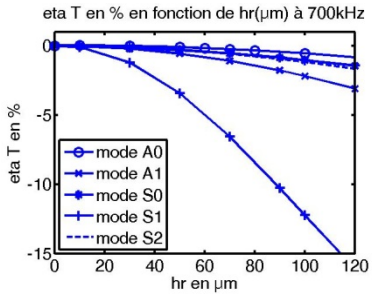

Fig. III.3-27 Variations relatives de l'amplitude du pic pour les différents modes à 700 kHz.

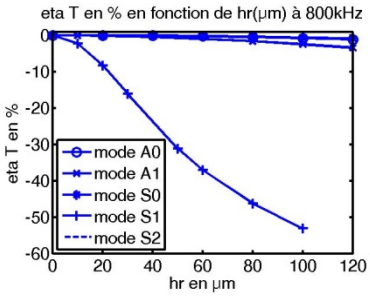

Fig. III.3-28 Variations relatives de l'amplitude du pic pour les différents modes à 800 kHz.

À 600 kHz, les modes S1 et dans une moindre mesure le mode A1 sont suffisamment sensibles pour être retenus. À 700 kHz, le mode S1 est le plus sensible. À 800 kHz, le mode S1 présente toujours une sensibilité aussi importante. Comme l'étude de la variation relative des amplitudes des modes confirme celle des variations relatives des largeurs à mi-hauteur (lmh) des pics, les modes identifiés pour les lmh seront confrontés au modèle rhéologique.

D'une façon générale, la position angulaire du pic résonant (η_θ) ne dépend pas ou très peu (< 1%) de la hauteur de la dent (*hr*), alors que la largeur (η_γ) et l'amplitude du maximum (variation de $t_{1\max}$) en dépendent de façon notable pour les modes A1, S1, A0 et S0 dans le domaine de fréquence étudié. Les valeurs numériques de *hr* utilisées correspondent à des situations physiques visées dans les applications à ce travail (cf Chapitre I, Introduction).

Pour un motif dont la valeur de *hr* serait supérieure à 200 µm, l'effet de la diffraction ne pourrait pas être négligé beaucoup d'énergie serait diffusée sous d'autres angles différents de l'angle d'incidence. Ceci est bien visible dans le bilan d'énergie qui a été fait systématiquement pour les points présentés dans ce travail.

Certains auteurs ont travaillé sur les réseaux périodiques gravés sur une plaque et ont mis en évidence, pour certaines fréquences, l'existence de phonons associés au réseau [44]. Dans les simulations ceci se traduit alors par le fait que le bilan énergétique peut être considéré comme calamiteux puisqu'on trouve des valeurs de 0.4 environ indiquant que l'énergie est partie « ailleurs ».

III.4 Conclusion

La MEF permet de simuler plusieurs situations physiques. Une rugosité est caractérisée par deux paramètres géométriques indépendants : l'un relatif à sa hauteur et l'autre à sa pente. Dans ce chapitre ont été présentés des résultats concernant des variations de *hr*. D'autres simulations faisant varier le rapport $\frac{hr}{L_x}$ ont été réalisées mais elles ne se différencient pas substantiellement des résultats montrés ici et n'ont donc pas été présentés afin de ne pas alourdir ce chapitre. Il est clair que l'obtention des résultats prend un temps relativement important (cela dépend de l'ordinateur utilisé, ici une courbe calculée sous Comsol est obtenue en 40 minutes environ, le post traitement sous Matlab est beaucoup plus rapide). Un outil analytique permettant de prendre en compte la rugosité semble donc souhaitable et c'est l'objet du chapitre suivant. Les résultats obtenus par la MEF serviront alors « d'expérience numérique ».

Chapitre IV :

IVModèle rhéologique.

IV.1 Introduction

Dans cette partie il s'agit de présenter un modèle qui permette de prendre en compte la rugosité d'une interface afin de prévoir le comportement des ondes de Lamb se propageant à l'intérieur de la plaque rugueuse. La validité du modèle sera examinée grâce aux expériences numériques rapportées précédemment. Rigoureusement, il faudrait parler d'ondes de Lamb « généralisées » car la présence de la rugosité va nécessairement modifier les propriétés symétriques et antisymétriques du système.

Le modèle proposé dans ce chapitre est issu de celui que Jones et Whittier [45] avaient établi en 1967. Il permettait de rendre compte de l'adhésion par un film de colle entre deux milieux solides élastiques en modifiant les conditions de frontière entre les deux milieux. Plus précisément, ils enlèvent la couche de colle et à l'interface entre les deux milieux, ils introduisent de nouvelles conditions de frontière. L'égalité des contraintes de part et d'autre de l'interface ne peut pas être remise en cause car l'interface n'a pas de masse inerte. Par contre l'élasticité de la colle permet des déplacements relatifs de chaque milieu différent. Ils supposent que les contraintes sont simplement proportionnelles au déplacement relatif. Il s'agit d'un modèle phénoménologique avec lequel ils espèrent décrire le comportement de l'assemblage plus ou moins bien collé.

Ce modèle introduit deux paramètres phénoménologiques réels K_L et K_T qui doivent être déterminés expérimentalement. Ce modèle va être adapté au cas de l'interface rugueuse liquide solide.

IV.2 Premier modèle rhéologique

IV.2.1 Mise en équation du problème

Il s'agit de reprendre la situation précédente, c'est-à-dire une plaque immergée dans un fluide, dont l'une des interfaces est rugueuse et l'autre plane. Lorsque le liquide est en contact avec la surface rugueuse il existe une zone de très petite taille comparée à la fois à la longueur d'onde et à l'épaisseur de la plaque, située à la cote moyenne $z = +H/2$ (Fig. IV.2-1). Dans cette zone, les choses sont très complexes et les interactions élastiques entre le fluide et le solide élastique sont délicates à expliciter.

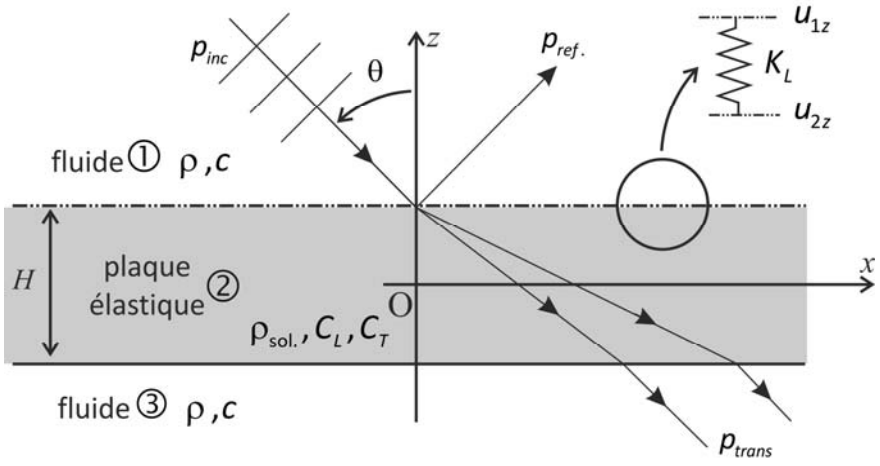

Fig. IV.2-1 Modèle rhéologique d'une plaque immergée.

Un des moyens simples de rendre compte de ces effets dans la région pariétale est de faire appel au modèle rhéologique de Voigt. Il consiste à associer des distributions de ressorts suivant O*x* pour rendre compte des actions visqueuses du fluide (amortissement) et suivant Oz pour rendre compte de la pression du fluide (contrainte normale).

Dans le but de traduire mathématiquement cette nouvelle situation, il faut réécrire les conditions aux limites selon :

$$\begin{cases} K_T\left(u_{1x} - u_{2x}\right) = \sigma_{2xz} & \text{en} \quad +H/2 \\ K_L\left(u_{1z} - u_{2z}\right) = \sigma_{2zz} & \text{en} \quad +H/2 \\ \sigma_{1xz} = \sigma_{2xz} & \text{en} \quad -H/2 \\ \sigma_{1zz} = \sigma_{2zz} & \text{en} \quad -H/2 \end{cases} \tag{4.1}$$

Dans ce système d'équations, les composantes du vecteur déplacement et du tenseur des contraintes sont habituellement considérés comme dépendant du temps et de l'espace [45]. Il est aussi habituel de considérer les constantes de raideur (surfaciques) comme réelles.

Comme cela a été fait pour la simulation numérique, il s'agit d'imposer une excitation temporelle harmonique de type : $\exp(-j\omega t)$.

Vlasie et Rousseau [19] ont étudié une structure tri-couche composé de deux plaques élastiques collées en exploitant les mêmes équations. Le modèle rhéologique avait été exploité pour rendre compte du comportement de l'adhésif : les constantes de raideur des ressorts représentent les caractéristiques de la colle.

Dans le cas qui nous intéresse la plaque est immergée dans un fluide parfait. Le contact avec la rugosité peut donc être considéré comme parfaitement glissant. Dans la mesure où la rugosité est de faible amplitude, avec des variations spatiales de périodicité comparable aux longueurs d'onde des ondes qui se propagent au sein du système. De ce fait, la distribution de ressorts associée à des contraintes de cisaillement n'a pas de raison d'être prise en considération, on va donc considérer dans ce travail, la constante de raideur K_T comme nulle. En conséquence, les conditions aux limites peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} K_L\left(u_{1z}-u_{2z}\right) &= \sigma_{2zz} \\ 0 &= \sigma_{2xz} \\ -p_1 &= \sigma_{2zz} \end{cases} \tag{4.2}$$

Lorsque $K_L \to \infty$, on retrouve la condition de continuité du déplacement normal $u_{2z} = u_{1z}$. De fait, les conditions précédentes tendent vers celles de la plaque plane et l'on retrouve les conditions aux limites classique d'une interface plane telle que celle située en $z = -H/2$ et qui s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{3z} &= u_{2z} \\ 0 &= \sigma_{2xz} \\ -p_3 &= \sigma_{2zz} \end{cases} \tag{4.3}$$

On retrouve, bien sûr, les conditions classiques d'une interface plane séparant un milieu élastique et un fluide parfait.

IV.2.2 Étude dans le plan complexe

On considère qu'une onde plane progressive harmonique excite la plaque sous l'angle d'incidence θ (Fig. IV.2-1) :

$$p_{inc} = p_1 = p_0 \exp\left[\; j\left(\underline{\vec{k}}_F \cdot \vec{r} - \omega t\right)\right], \tag{4.4}$$

avec une pulsation ω réelle et un vecteur d'onde complexe. À partir des conditions aux limites (4.2) et (4.3) on déduit un système linéaire (voir annexe 2). L'expression du déterminant de ce système dépend de la pulsation réelle ω (fixée) et de $\underline{k}_x$ composante de $\vec{k}_F$ sur l'axe des *x*. La recherche des zéros de ce déterminant, conduit aux résonances angulaires sous la forme suivante :

$$\underline{k}_x = k'_x + j\, k''_x . \tag{4.5}$$

La recherche des zéros de ce déterminant dans le plan $\underline{k}_x$ complexe est faite par la méthode de Newton-Raphson. Comme cela a été explicité dans le chapitre II, il est possible de relier les parties réelle et complexe de ce vecteur d'onde aux positions angulaires des résonances par :

$$\sin\theta_{\text{pôle}} = \sin\theta_{\max} + j\frac{\gamma}{2}, \tag{4.6}$$

avec à la résonance, $k'_x = k_F \sin\theta_{\max}$, $k''_x = k_F \dfrac{\gamma}{2}$ et $k_F = \dfrac{\omega}{c}$.

Tout calcul étant fait on trouve que, pour des valeurs de K_L (réelles dans ce paragraphe) supérieures à $10^{14}\ \mathrm{N \cdot m^{-3}}$, les zéros (complexes) de ce déterminant sont égaux à ceux obtenus pour la plaque plane. On retrouve donc, pour les modes envisagés (A0, A1, S0, S1 et S2), à la fois la position angulaire et la largeur de chaque résonance. Celles-ci sont identiques à celle obtenues par la MEF (chapitre III).

Dans le chapitre III, nous avions retenu pour chaque fréquence étudiée, un certain nombre de mode particulièrement sensible à la présence d'une rugosité sur l'interface supérieure de la plaque (Fig. III.3-26 à Fig. III.3-28). À 600 kHz, les deux modes retenus sont les modes A1 et S1.

Les figures suivantes Fig. IV.2-2 et Fig. IV.2-3 représentent les parties réelle et imaginaire de ces zéros en fonction de K_L pour les modes A1 et S1. Pour des grandes valeurs de K_L, les grandeurs représentées en ordonnée tendent vers celles obtenues pour la plaque

plane. Lorsque K_L décroît, $\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{k}_x}{k_F}\right)$ croît lentement, ce qui est contradictoire avec les courbes obtenues par simulation. Lorsque K_L décroît, $\mathrm{Im}\left(\frac{\underline{k}_x}{k_F}\right)$ décroît lentement, ce qui est contradictoire avec les courbes obtenues par simulation. Pour autant les variations des parties réelles sont faibles comparées aux variations des parties imaginaires ce qui est compatible avec les résultats obtenus en simulation numérique.

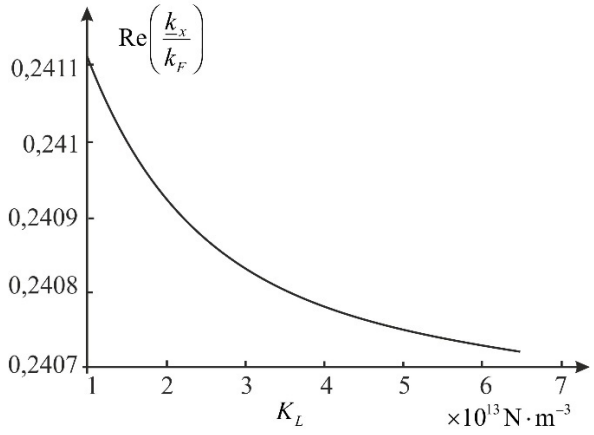

Fig. IV.2-2 Variations de la partie réelle $\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{k}_x}{k_F}\right)$ en fonction de K_L pour le mode A1 à 600 kHz

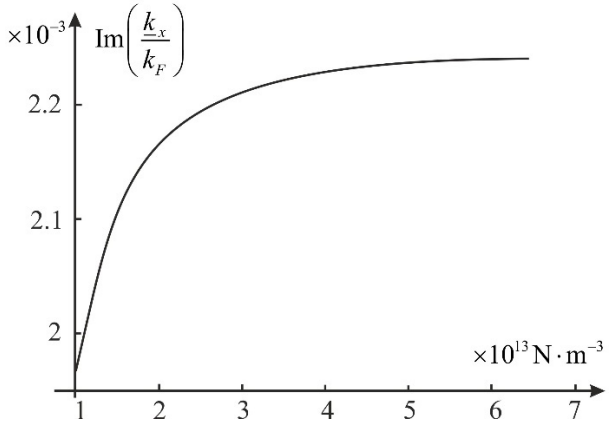

Fig. IV.2-3 Variations de la partie imaginaire $\Im\mathrm{m}\left(\frac{\underline{k}_x}{k_F}\right)$ en fonction de K_L pour le mode A1 à 600 kHz

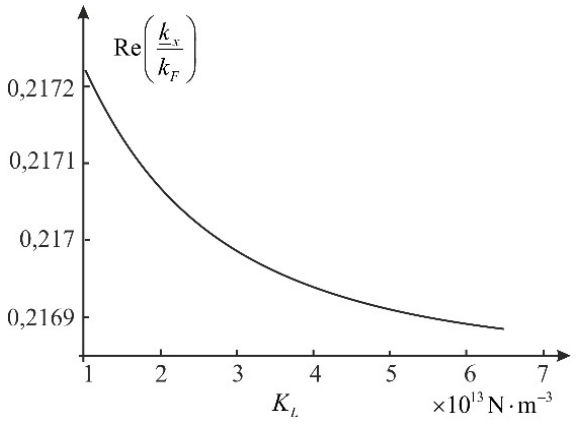

Fig. IV.2-4 Variations de la partie réelle $\mathrm{Re}\left(\frac{k_x}{k_F}\right)$ en fonction de K_L pour le mode S1 à 600 kHz.

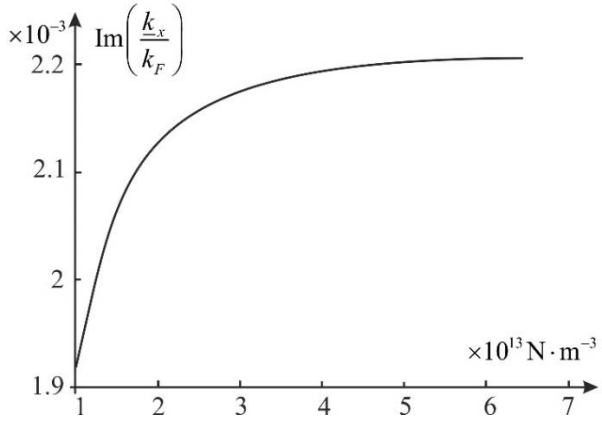

Fig. IV.2-5 Variations de la partie imaginaire $\Im\mathrm{m}\left(\frac{k_x}{k_F}\right)$ en fonction de K_L pour le mode S1 à 600 kHz.

Lors du travail de V. Vlassié et M. Rousseau, l'étude des fréquences de coupure des modes se propageant dans le système tricouche et dans le modèle rhéologique a montré que l'on obtient des résultats identiques avec les deux approches en considérant que les constantes de Jones sont fonction de la fréquence. Ici, dans la première équation du système (4.2) qui s'écrit :

$$K_L\left(u_{1z}-u_{2z}\right)=\sigma_{zz}\,. \tag{4.7}$$

Toutes les grandeurs dépendent en fait de la fréquence. En fait, il s'agit d'une relation entre transformée de Fourier de la contrainte et la transformée de Fourier du saut de déplacement. K_L apparait donc comme une fonction de transfert entre contrainte et saut de déplacement. Donc, en toute généralité, K_L doit être considéré comme complexe. De plus, une rugosité est décrite par deux paramètres géométriques indépendants (par exemple R_q et une pente

moyenne). Dans la mesure où K_L rend compte de la rugosité il est naturel d'avoir une constante complexe qui présente une partie réelle et une partie imaginaire (deux paramètres). On écrit K_L sous la forme :

$$\underline{K}_L = K'_L\left(1+ j\beta\right). \tag{4.8}$$

IV.3 Second modèle rhéologique

IV.3.1 Introduction

La prise en compte du caractère complexe de K_L ne modifie pas la démarche engagée dans le paragraphe IV.2.1, le système linéaire établi précédemment reste identique. Le coefficient de transmission est donc toujours donné par la résolution de ce système. La question cruciale est de savoir si, au voisinage d'une résonance, le coefficient de résonance est toujours du type BW. A priori, il pourrait prendre une forme différente puisque les conditions d'interface ont été modifiée par rapport à celles utilisées par FMU. Néanmoins, la simulation numérique réalisée au chapitre III a montré que c'était toujours le cas. On constate cependant une différence : le maximum du pic résonant n'a plus pour valeur l'unité.

D'un point de vue mathématique, les pôles du coefficient de transmission sont toujours des pôles simples (d'ordre 1).

Au voisinage du maximum de ce coefficient, il reste à établir sa nouvelle expression (qui sera forcément du type BW).

IV.3.2 Nouvelle formulation résonante

À partir de la résolution du système précédemment étudié (et donné dans l'annexe 2), il est possible d'obtenir l'expression analytique de ce coefficient de transmission t_1. Afin de pouvoir effectuer des développements limités au voisinage du maximum de t_1, il faut faire apparaitre les fonction (déjà utilisées) C_a et C_s. On obtient :

$$t_1 = \frac{1}{\mathcal{C}^-} \times \frac{2j\tau\left(C_a + C_s\right)}{\left(C_a + j\tau^-\right)\left(C_s - j\tau\right) + \left(C_a + j\tau\right)\left(C_s - j\tau^-\right)}, \tag{4.9}$$

où,

$$\mathcal{C}^- = 1 - j\frac{K_{L0}}{\underline{K}_L}, \tag{4.10}$$

$$K_{L0} = \frac{\rho c \omega}{\bar{k}_z}, \tag{4.11}$$

$$\tau = \frac{\rho}{\rho_{sol}} n_T^4 \frac{\bar{k}_{zL}}{\bar{k}_z}, \tag{4.12}$$

$$\tau^- = \frac{\tau}{\mathcal{C}^-}, \tag{4.13}$$

$$C_a = \left(2\bar{k}_x^2 - n_T^2\right)^2 \tan\left(\frac{\bar{k}_{zL}\, k\, H}{2}\right) + 4\bar{k}_x^2 \bar{k}_{zL} \bar{k}_{zT} \tan\left(\frac{\bar{k}_{zT}\, k\, H}{2}\right), \tag{4.14}$$

et

$$C_s = \left(2\bar{k}_x^2 - n_T^2\right)^2 \cot\left(\frac{\bar{k}_{zL} kH}{2}\right) + 4\bar{k}_x^2 \bar{k}_{zL} \bar{k}_{zT} \cot\left(\frac{\bar{k}_{zT} kH}{2}\right), \tag{4.15}$$

avec

$\bar{k}_x = \sin\theta$, $\bar{k}_z = \left(1 - k_x^2\right)^{1/2} > 0$ et $n_{L,T} = \frac{c}{c_{L,T}}$.

Le coefficient t_1 dépend non seulement de la pulsation ω et de l'angle d'incidence θ mais aussi de la rugosité par l'intermédiaire de la grandeur $\mathcal{C}^-$. Cette dernière tend vers l'unité lorsque $|K_L| \to \infty$, situation correspondant à la plaque plane. On retrouve alors l'expression de départ utilisée par FMU.

Les fonctions C_a et C_s sont des fonctions de $\bar{k}_x$ et de ω. Comme précédemment, ω est fixé. Les équations $C_a\left(\bar{k}_{x,a}\right) = 0$ et $C_s\left(\bar{k}_{x,s}\right) = 0$ correspondent aux résonances angulaires de la plaque plane. On peut remarquer que les modes A et S sont couplés (eq. (4.9)). Cependant, pour les développements limités au premier ordre considérés dans ce travail, les modes A et S restent indépendants (découplés).

Au voisinage de $\bar{k}_{x,a,s}$ on réalise un développement de Taylor à l'ordre 1 des fonctions $C_a\left(\bar{k}_{x,a}\right)$ et $C_s\left(\bar{k}_{x,s}\right)$:

$$C_a\left(\bar{k}_x\right) = C_a\left(\bar{k}_{x,a}\right) + \left(\bar{k}_x - \bar{k}_{x,a}\right) \left.\frac{dC_a}{d\bar{k}_x}\right|_{\bar{k}_{x,a}}, \tag{4.16}$$

$$C_s\left(\bar{k}_x\right) = C_s\left(\bar{k}_{x,s}\right) + \left(\bar{k}_x - \bar{k}_{x,s}\right) \left.\frac{dC_s}{d\bar{k}_x}\right|_{\bar{k}_{x,s}}, \tag{4.17}$$

On se place dans le cas où l'on est au voisinage d'un mode antisymétrique (le cas du voisinage d'une mode symétrique se traite de façon analogue), on a alors :

$$\begin{aligned} &C_a\left(\bar{k}_{x,a}\right)=0,\\ &\left|C_s\left(\bar{k}_{x,a}\right)\right| \gg |\tau|, \end{aligned} \tag{4.18}$$

et donc :

$$\begin{aligned} &C_s - j\tau \simeq C_s,\\ &C_s - j\tau^- \simeq C_s,\\ &C_a + C_s \simeq C_s, \end{aligned} \tag{4.19}$$

ceci conduit à :

$$t_1 = \frac{-\frac{j}{2}\gamma_a / \mathcal{C}^-}{\bar{k}_x - \bar{k}_{x,a} - \frac{j}{4}\left(\gamma_a^- + \gamma_a\right)}, \tag{4.20}$$

avec

$$\begin{aligned} &\gamma_a = -2\tau / C_a'\left(\bar{k}_{x,a}\right),\\ &\gamma_a^- = -2\tau^- / C_a'\left(\bar{k}_{x,a}\right), \end{aligned}$$

et τ calculé pour $\bar{k}_x = \bar{k}_{x,a}$. Puisque $\tau^- = \dfrac{\tau}{\mathcal{C}^-}$, on a alors $\gamma_a = \dfrac{\gamma_a^-}{\mathcal{C}^-}$ et :

$$t_{1,a} = \frac{-\frac{j}{2}\gamma_a / \mathcal{C}^-}{\bar{k}_x - \bar{k}_{x,a} - \frac{j}{2}\gamma_a + \frac{j}{4}\gamma_a\left(1 - 1/\mathcal{C}^-\right)}. \tag{4.21}$$

Cette expression sera discutée par la suite. Si on s'intéresse au voisinage d'une résonance symétrique, on a :

$$t_{1,s} = \frac{+\frac{j}{2}\gamma_s / \mathcal{C}^-}{\bar{k}_x - \bar{k}_{x,s} - \frac{j}{2}\gamma_s + \frac{j}{4}\gamma_s\left(1 - 1/\mathcal{C}^-\right)}, \tag{4.22}$$

avec $\gamma_s = 2\tau / C_s'\left(\bar{k}_{x,s}\right)$ et τ est calculé pour $\bar{k}_x = \bar{k}_{x,s}$.

En l'absence de rugosité, $\mathcal{C}^- = 1$ et $\gamma_{a,s}$ apparaît comme la largeur d'une résonance (antisymétrique ou symétrique) de la plaque plane. D'une façon générale, le coefficient de transmission t_1 s'écrit :

$$t_{1,a,s} = \frac{\mp\frac{j}{2}\gamma_{a,s} / \mathcal{C}^-}{\bar{k}_x - \bar{k}_{x,a,s} - \frac{j}{2}\gamma_{a,s} + \frac{j}{4}\gamma_{a,s}\left(1 - 1/\mathcal{C}^-\right)}. \tag{4.23}$$

D'une façon évidente, la présence de la rugosité affecte la position du pôle dans le plan complexe $\underline{k}_x$ (position et largeur de résonance) et l'amplitude de t_1. Dans cette expression (4.23), on retrouve la même structure que celle obtenue pour une plaque plane avec quelques termes perturbateurs dus à la rugosité. En se rappelant que $\overline{k}_x = \sin\theta$ et $\overline{k}_{x,a,s} = \sin\theta^*_{\text{plane}}$, le dénominateur de cette expression se réécrit de la façon suivante :

$$\sin\theta - \sin\theta^*_{\text{plane}} - \tfrac{j}{2}\gamma_{a,s}\underbrace{\left(1 - \frac{\mathcal{C}^- - 1}{2\mathcal{C}^-}\right)}_{\text{terme dû à la rugosité}}, \tag{4.24}$$

avec, pour alléger $\mathcal{C}^- = 1 - j\,\dfrac{K_{L0}}{\underline{K}_L}$, $K_{L0} = \dfrac{\rho\, c\, \omega}{\cos\theta}$ et $\underline{K}_L = K'_L\left(1 + j\beta\right)$.

En séparant partie réelle et partie imaginaire, l'expression (4.24) s'écrit sous la forme suivante :

$$\sin\theta - \overbrace{\left(\sin\theta^*_{\text{p.plane}} - \frac{\alpha'\gamma}{4\left(1+\left(\beta-\alpha'\right)^2\right)}\right)}^{\text{"nouveau" } \sin(\theta_{\max})} - \frac{j}{2}\,\gamma\overbrace{\left(\frac{1+\left(\beta-\frac{\alpha'}{2}\right)\left(\beta-\alpha'\right)}{1+\left(\beta-\alpha'\right)^2}\right)}^{\text{"nouvelle" largeur}}, \tag{4.25}$$

avec, $\alpha' = \dfrac{K_{L0}}{K'_L}$ et pour alléger les écritures $\gamma = \gamma_{a,s}$.

Ou encore sous la forme :

$$\sin\theta - \sin\theta^*_{\text{rug}} - \frac{j}{2}\,\gamma_{\text{rug}}, \tag{4.26}$$

avec

$$\sin\theta^*_{\text{rug}} = \sin\theta^*_{\text{plane}} - \frac{\alpha'\gamma}{4\left(1+\left(\beta-\alpha'\right)^2\right)}, \tag{4.27}$$

$$\gamma_{\text{rug}} = \gamma\left(\frac{1+\left(\beta-\frac{\alpha'}{2}\right)\left(\beta-\alpha'\right)}{1+\left(\beta-\alpha'\right)^2}\right), \tag{4.28}$$

Le terme $-\dfrac{\alpha'\gamma}{4\left(1+\left(\beta-\alpha'\right)^2\right)}$ traduit l'évolution de la position angulaire du maximum du pic constaté dans l'analyse numérique et dû à la rugosité. Le terme $\dfrac{1+\left(\beta-\dfrac{\alpha'}{2}\right)\left(\beta-\alpha'\right)}{1+\left(\beta-\alpha'\right)^2}$ traduit l'évolution de la largeur du pic résonant. Ce dernier terme dépend, lui aussi, de la rugosité à travers les variables $\alpha'\left(K_L'\right)$ et β. En l'absence de rugosité $K_L' \to \infty$, $\alpha' = 0$ et avec $\beta = 0$, on retrouve l'expression correspondant à la plaque plane (BW).

IV.3.3 Détermination de $\underline{K}_L$

Comme nous l'avions fait dans la partie II de la simulation numérique, il est alors possible de construire deux paramètres qui traduisent la variation relative de la position angulaire et de la largeur à mi-hauteur des pics de résonance. Notons $\eta_{J,\theta}$ et $\eta_{J,\gamma}$ ces deux paramètres pour le modèle de type Jones (indice *J*). Le premier paramètre $\eta_{J,\theta}$ qui traduit la variation relative de la position angulaire du maximum du pic de résonance s'exprime, dans le cas du modèle proposé, de la façon suivante :

$$\eta_{J,\theta} = \frac{\sin\theta^*_{\max,\mathrm{rug}} - \sin\theta^*_{\max,\mathrm{plane}}}{\sin\theta^*_{\max,\mathrm{plane}}}. \tag{4.29}$$

Ce qui se traduit, en fonction des paramètres introduits, par :

$$\eta_{J,\theta} = \frac{-\alpha'\gamma}{4\sin\theta^*_{\max,\mathrm{plane}}\left(1+\left(\beta-\alpha'\right)^2\right)}. \tag{4.30}$$

Pour rappel, le paramètre α' dépend, à fréquence donnée, de K_L'.

Remarquons que la valeur de $\eta_{J,\theta}$ est très petite devant l'unité puisque les résultats issus de la simulation numérique ont montré que les positions angulaires restent pratiquement inchangées en présence de rugosité. L'identification de $\underline{K}_L$ ne peut pas être réalisée avec $\eta_{J,\theta}$.

Le second paramètre $\eta_{J,\gamma}$ s'exprime par :

$$\eta_{J,\gamma} = \frac{lmh_{\mathrm{rug}} - lmh_{\mathrm{plane}}}{lmh_{\mathrm{plane}}}. \tag{4.31}$$

Ce qui se traduit en fonction des paramètres introduits par :

$$\eta_{J,\gamma} = \frac{1+\left(\beta-\frac{\alpha'}{2}\right)(\beta-\alpha')}{1+(\beta-\alpha')^2} - 1 . \tag{4.32}$$

Ce dernier paramètre sera égalé à celui obtenu dans la cadre de la simulation numérique η_γ pour les différents modes et les différentes fréquences afin de déterminer $\underline{K}_L$.

Il s'agit maintenant d'établir l'expression du paramètre qui traduit la valeur du maximum du coefficient de transmission. Celui-ci s'obtient à partir de l'expression de t_1 qui s'écrit maintenant sous la forme suivante :

$$\underline{t}_1 = \frac{\pm\frac{j}{2}\gamma/\mathcal{C}^-}{\sin\theta - \sin\theta^*_{\max,\mathrm{rug}} \pm \frac{j}{2}\gamma\left(1+\eta_{J,\gamma}\right)} . \tag{4.33}$$

À la résonance, ce coefficient s'écrit :

$$\underline{t}_{1\max} = \frac{\pm\frac{j}{2}\gamma/\mathcal{C}^-}{\pm\frac{j}{2}\gamma\left(1+\eta_{J,\gamma}\right)} = \frac{1}{\mathcal{C}^-\left(1+\eta_{J,\gamma}\right)} , \tag{4.34}$$

que l'on réécrit sous la forme suivante en fonction des grandeurs introduites :

$$t_{1\max} = \frac{1+j\beta}{\left(1+j(\beta-\alpha')\right)\left(1+\eta_{J,\gamma}\right)} , \tag{4.35}$$

et dont le module prend la forme suivante :

$$\left|t_{1\max}\right|^2 = \frac{1+\beta^2}{\left(1+(\beta-\alpha')^2\right)\left(1+\eta_{J,\gamma}\right)^2} . \tag{4.36}$$

Ce terme représente le carré de l'amplitude d'un pic de transmission à la résonance pour la plaque rugueuse dans le cadre de ce modèle, mais il représente aussi le correctif comparé à celui obtenu pour une plaque plane puisque ce dernier vaut l'unité. Il est alors possible d'exprimer, les variations relatives de l'amplitude du pic résonant dans le cadre du modèle proposé notée $\eta_{t,J}$:

$$\eta_{J,t} = \frac{t_{1\max,\mathrm{rug}} - t_{1\max,\mathrm{plane}}}{t_{1\max,\mathrm{plane}}} = t_{1\max,\mathrm{rug}} - 1 . \tag{4.37}$$

Ce coefficient s'écrit, dans le cas qui nous intéresse :

$$\eta_{J,t} = \left(\frac{1+\beta^2}{\left(1+\left(\beta-\alpha'\right)^2\right)\left(1+\eta_{J,\gamma}\right)^2} - 1 \right). \tag{4.38}$$

À partir des expressions des nouvelles largeurs des pics (4.32) et de leurs nouvelles amplitudes (4.38) il est alors intéressant de rechercher les valeurs des paramètre α' (qui donnent accès à K_L') et β grâce à celles obtenues par la simulation numérique. Il s'agit alors d'égaler les variations relatives :

$$\begin{aligned} \eta_\gamma &= \eta_{J,\gamma}, \\ \eta_t &= \eta_{J,t}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

IV.3.4 Détermination des paramètres du modèle rhéologique

Les expressions (4.32) et (4.38) ne sont pas linéaires, elles ne permettent pas de déduire des relations analytiques pour les paramètres α' et β en fonction de $\eta_{J,\gamma}$ et de $\eta_{J,t}$.

Pour un mode donné et à une fréquence donnée, afin de déterminer les valeurs des paramètres α' et β, on résout les deux équations obtenues en égalant les variations relatives obtenues dans le cadre des expériences numériques à celles obtenues dans le cadre du modèle présenté :

Il n'existe pas de solution analytique à ce système d'équations non linéaires, la détermination des paramètres α' et β doit être effectuée de façon numérique grâce à un logiciel, ici Matlab. La fonction fsolve nécessite d'écrire le système sous la forme :

$$\begin{aligned} F(1) &= 0, \\ F(2) &= 0, \end{aligned} \tag{4.40}$$

où chaque expression $F(1)$ et $F(2)$ sont des fonctions des deux variables $x(1)=\alpha'$ et $x(2)=\beta$. Les relations s'écrivent :

$$\left[1+\left(x(2)-x(1)\right)^2\right]\left(1+\eta_\gamma\right)-1-\left(x(2)-\frac{x(1)}{2}\right)\left(x(2)-x(1)\right)=0, \tag{4.41}$$

$$\left(1+\eta_\gamma\right)^2 t_{1\max}^2\left[1+\left(x(2)-x(1)\right)^2\right]-1-x(2)^2=0. \tag{4.42}$$

La fonction fsolve du logiciel nécessite également la fourniture d'un point de départ pour l'estimation de ces paramètres. Dans la plupart des cas, le logiciel ne fournit qu'un couple de valeurs approchées de la solution. La convergence n'est pas toujours totale.
Les solutions obtenues correspondent donc à :

$$\begin{aligned} F(1) &\simeq 0, \\ F(2) &\simeq 0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

À ce stade, à partir d'une résonance isolée, la constante complexe $\underline{K}_L = K'_L(1 + j \cdot \beta)$ est alors déterminée.

IV.3.5 Résultats

IV.3.5.1 Ordre de grandeur

Dans le paragraphe IV.2 où l'on considérait une constante réelle, la diminution de la valeur de la constante entraînait la diminution de la largeur de la résonance Fig. IV.2-3 et Fig. IV.2-5. À titre d'exemple, à 600 kHz pour le mode A1, on va effectuer une recherche dans le plan complexe des $\underline{k}_x$ en introduisant la constante $\underline{K}_L = K'_L(1 + j \cdot \beta)$ avec $\beta = 0.5$.

Et en faisant diminuer K'_L à partir de $10^{14}\,\mathrm{N \cdot m^{-3}}$ on va observer l'évolution de la largeur de la résonance. Pour mémoire la simulation Comsol donnait, pour ce mode et à cette fréquence, un élargissement de la résonance. La courbe obtenue est représentée sur la Fig. IV.3-1. Elle traduit bien une augmentation de la partie imaginaire du pôle dans la zone comprise (ici) entre $K'_L = 4 \times 10^{14}$ et $K'_L = 0.5 \times 10^{14}\,\mathrm{N \cdot m^{-3}}$.

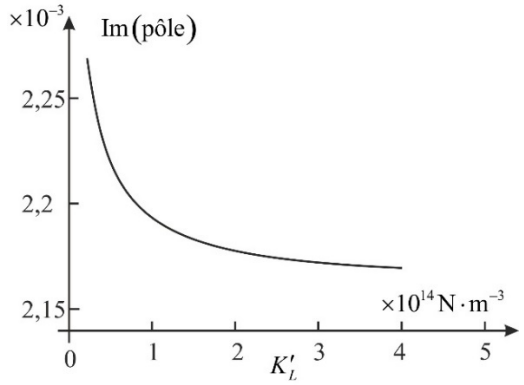

Fig. IV.3-1 Évolution de la partie imaginaire du pôle en fonction de K'_L.

Avec cette constante complexe, l'évolution de la partie imaginaire correspond à celle de la largeur de la résonance constatée dans l'expérience numérique.

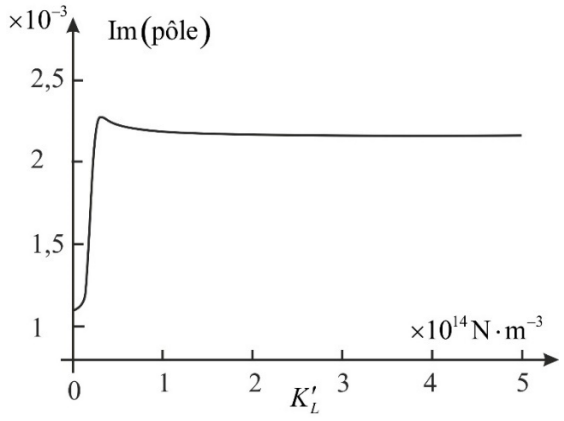

Fig. IV.3-2 Évolution de la partie imaginaire du pôle en fonction de K'_L sur un large domaine.

L'observation de la Fig. IV.3-2 permet de constater que pour une valeur suffisamment faible de K'_L (ressort de plus en plus « mou ») le fluide au-dessus de l'interface supérieure et la plaque sont découplées. Il n'y a plus de réémission d'énergie des ondes de Lamb vers le fluide supérieur. Lorsque K'_L diminue encore, on observe que la valeur de la largeur tend vers la moitié de celle obtenue pour la plaque plane immergée, ce qui est conforme à des résultats obtenus antérieurement [46].

IV.3.5.2 Reconstruction d'une BW

À partir des valeurs obtenues pour K'_L et β il est possible, grâce à l'équation (4.36), de tracer la courbe de BW généralisée et de la comparer à celle obtenue dans l'expérience numérique. À titre d'exemples, à 600 kHz, les résonances associées au mode A1 sont tracées sur les figures Fig. IV.3-3 à Fig. IV.3-6 et celles associées au mode S1 (à la même fréquence) sur les Fig. IV.3-7 à Fig. IV.3-8, pour différentes valeurs de la hauteur de rugosité. En trait plein la courbe issue de la simulation par éléments finis et en pointillés la courbe reconstruite à partir du modèle.

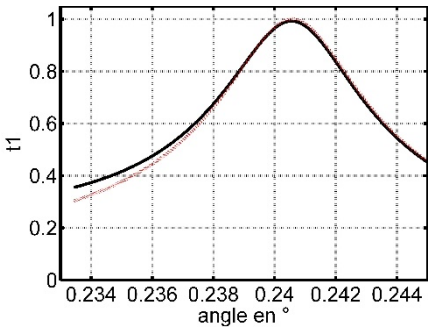

Fig. IV.3-3 Superposition des courbes obtenues par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 50µm

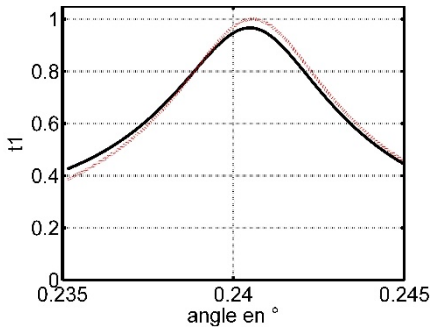

Fig. IV.3-4 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 100µm

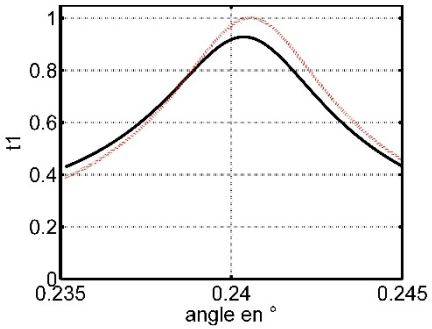

Fig. IV.3-5 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 150µm

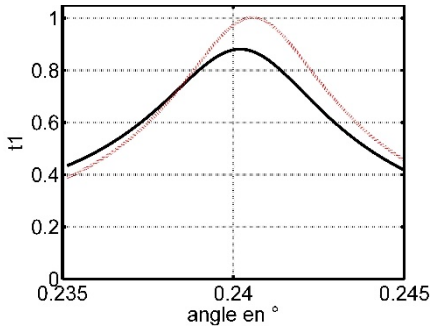

Fig. IV.3-6 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 200µm

Pour chacune de ces courbes, un calcul d'écart quadratique moyen, $\langle \varepsilon_q \rangle$, a été effectué selon la relation suivante :

$$\langle \varepsilon_q \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(|t_1|_{i,\mathrm{BW}} - |t_1|_{i,\mathrm{Comsol}} \right)^2}{N-1}}, \tag{4.44}$$

avec, N le nombre de points de la courbe, $|t_1|_{i,\mathrm{BW}}$ la valeur du module du coefficient de transmission obtenu par reconstruction selon le modèle de type BW et $|t_1|_{i,\mathrm{Comsol}}$ la valeur du module du coefficient de transmission obtenu par simulation numérique.

hauteur de rugosité	écart quadratique moyen
$hr = 50\,\mu m$	1.8×10^{-2}
$hr = 100\,\mu m$	2.0×10^{-2}
$hr = 150\,\mu m$	3.6×10^{-2}
$hr = 200\,\mu m$	6.0×10^{-2}

Tableau IV.3-1 Écart quadratique moyen correspondant à chaque hauteur de rugosité.

Pour le mode S1 à 600 kHz :

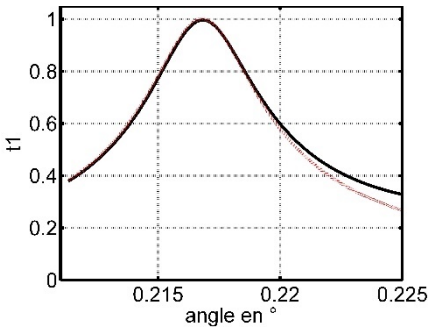

Fig. IV.3-7 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 50µm

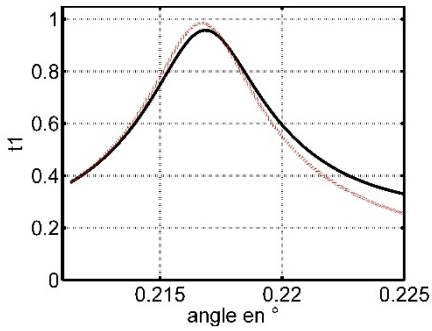

Fig. IV.3-8 Superposition de la courbe obtenue par le modèle rhéologique et par la MEF pour *hr* = 150µm

Pour chacune de ces courbes, un calcul d'écart quadratique moyen a été effectué :

hauteur de rugosité	écart quadratique moyen
$hr = 50\,\mu m$	2.2×10^{-2}
$hr = 150\,\mu m$	3.4×10^{-2}

Tableau IV.3-2 Écart quadratique moyen correspondant à chaque hauteur de rugosité.

Dans tous les cas, et pour des rugosités inférieures à la centaine de µm, les deux courbes sont similaires puisque l'écart quadratique moyen reste inférieur au ‰. Pour des valeurs de hr plus importantes, on constate visuellement un léger écart mais, même pour $hr = 200\,\mu m$ (mode A1) l'écart quadratique moyen reste inférieur au %.

De ce fait, on peut estimer d'une part, que l'identification opérée par Matlab est satisfaisante et d'autre part que la modélisation de la BW généralisée est correcte.

IV.3.5.3 Vérification dans le plan complexe de $\underline{k}_x$

Après avoir identifié les paramètres du modèle rhéologique, on va rechercher dans le plan complexe de $\underline{k}_x$ la position du pôle. Ainsi, on pourra comparer les résultats provenant de la simulation numérique par éléments finis avec le calcul exact. Cette comparaison teste la validité du modèle rhéologique. Pour les modes A1 et S1 à 600 kHz et pour le mode S1 à 700 kHz, les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux ci-dessous :

- **600 kHz**
  - mode A1

hr en µm	$\gamma(lmh)$	θ_{max}	t_{1max}	K'_L	β	Re(pôle)	Im(pôle)	$\Delta\theta_{max}$	Δlmh
50	0.0023	14.01	0.993	$2.83^{E}14$	0.12	13.92	0.00215	-	0.06
100	0.00235	13.92	0.967	$1.14^{E}14$	0.157	13.92	0.00216	-	0.08
150	0.00245	13.91	0.93	$6.85^{E}13$	0.192	13.92	0.00216	-0.0007	0.11
200	0.0026	13.90	0.881	$5.44^{E}13$	0.2	13.92	0.00216	-0.001	0.17

Tableau IV.3-3 Tableau récapitulatif pour le mode A1 à 600 kHz.

  - mode S1

hr en µm	$\gamma(lmh)$	θ_{max}	t_{1max}	K'_L	β	Re(pôle)	Im(pôle)	$\Delta\theta_{max}$	Δlmh
50	0.00225	12.5	0.997	$2.72^{E}14$	0.165	12.52	2.168^{E}-3	-	0.0364
100	0.0023	12.5	0.982	$9.75^{E}13$	-0.238	12.52	2.152^{E}-3	-	0.0643
150	0.00235	12.5	0.957	$4.87^{E}13$	-0.274	12.51	2.132^{E}-3	8^{E}-4	0.093

Tableau IV.3-4 Tableau récapitulatif pour le mode S1 à 600 kHz.

- **700 kHz**
  - Mode A1

hr en µm	$\gamma(lmh)$	θ_{max}	t_{1max}	K'_L	β	Re(pôle)	Im(pôle)	$\Delta\theta_{max}$	Δlmh
50	0.0029	15.38	0.997	$6.6^{E}14$	+0.06	15.37	0.002748	9^{E}-4	0.058
100	2.9^{E}-4	15.38	0.98	$6.4^{E}14$	-0.033	15.37	0.002748	9^{E}-4	0.068

Tableau IV.3-5 Tableau récapitulatif pour le mode A1 à 700 kHz.

A priori, il était prévisible que la position angulaire de la résonance – issue de la modélisation – corresponde bien à la partie réelle du pôle en $\underline{k}_x$, ceci est vérifié avec une excellente précision. On note que la largeur obtenue dans le modèle rhéologique et la partie imaginaire du pôle présentent des valeurs dont les écarts relatifs sont inférieurs à 8% pour des rugosités inférieures à 100 µm et de l'ordre de 10% pour des rugosités allant jusqu'à 150 µm.

IV.4 Conclusion : rugosité et résonance angulaire

La variation du paramètre caractéristique R_q obtenue par la variation de *hr* entraîne une évolution des pics de résonance. Cette évolution a été modélisée en considérant un modèle rhéologique d'interface dont les ressorts sont à rigidités complexes $\underline{K}_L = K'_L(1+j\beta)$. Le modèle utilisé pour obtenir $\underline{K}_L$ a été validé ci-dessus. Il est donc possible de relier R_q aux paramètres rhéologiques accessibles par l'étude du coefficient de transmission. Comme il a été dit précédemment, certains modes sont plus sensibles que d'autres à la rugosité. Les résultats ci-dessous représentent le lien entre R_q et paramètres rhéologiques. Il faut noter qu'aujourd'hui les mesures de R_q impliquent généralement une mesure en laboratoire à l'aide soit d'un profilomètre soit avec un microscope AFM et ce, sur une échelle restreinte.

Ici la mesure du coefficient de transmission et l'utilisation du modèle proposé permettent d'accéder également à la valeur de R_q. Les courbes Fig. IV.4-1 à Fig. IV.4-6 représentent R_q en fonction de K'_L et β pour différents modes aux fréquences de 600 kHz et 700 kHz.

- 600 kHz
  - mode A1

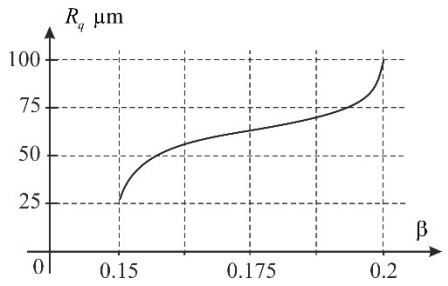

Fig. IV.4-1 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de β.

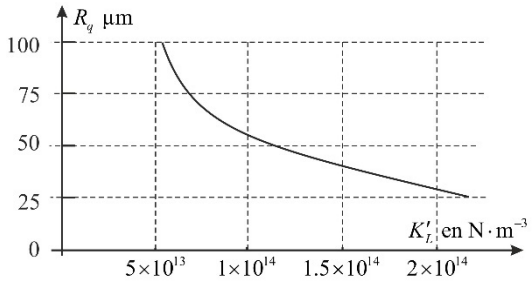

Fig. IV.4-2 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de K'_L.

- mode S1

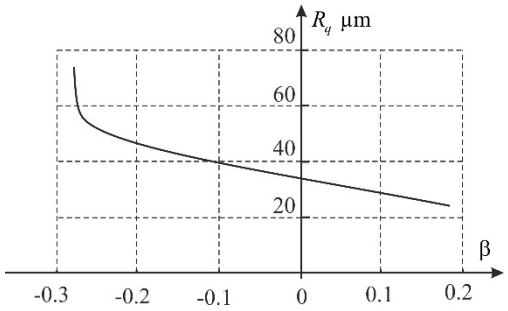

Fig. IV.4-3 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de β.

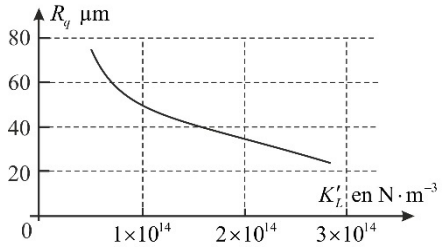

Fig. IV.4-4 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de K'_L.

- 700 kHz
  - mode A0

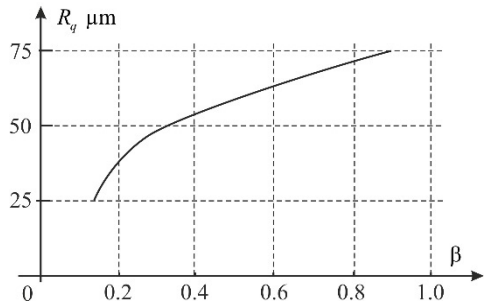

Fig. IV.4-5 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de β.

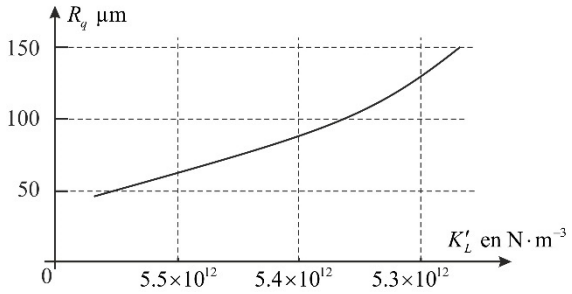

Fig. IV.4-6 Évolution de la hauteur quadratique moyenne en fonction de K'_L.

Ces courbes, déduites des tableaux précédents, permettent alors de déterminer la hauteur quadratique moyenne d'une rugosité en fonction des paramètres K'_L et β.

Chapitre V :

V Conclusion

Ce travail avait pour objectif de modéliser théoriquement une rugosité d'interface dans le cadre de l'acoustique ultrasonore. Dans tous les cas de figure les rugosités étudiées n'altèrent pas profondément les propriétés de la structure étudiée. Il s'agit de perturber légèrement le système sans introduire de défaut.

Pour réaliser cet objectif il faut d'abord disposer de résultats d'expériences mettant en jeu des interfaces rugueuses variées. On a considéré une plaque métallique immergée présentant une interface rugueuse. Dans tous les cas étudiés, le rapport entre R_q et l'épaisseur de la plaque n'excède pas 2%. Il s'agit donc bien d'une petite perturbation et non pas d'un défaut.

La simulation permet de réaliser de nombreuses « expériences numériques » en utilisant un code éléments finis. L'outil d'étude de la rugosité repose sur l'analyse du coefficient de transmission de la plaque métallique. La propagation des ondes de Lamb dans une plaque plane immergée repose sur de multiples réflexions aux interfaces liquide/solide conduisant à des interférences constructives. Il est intuitif de penser que l'altération d'une des interfaces va modifier la propagation des ondes de Lamb et va donc modifier en particulier les coefficients de diffusion (coefficient de transmission et de réflexion) de la plaque. Ici on a privilégié l'étude du coefficient de transmission.

La théorie FMU de la plaque plane immergée montre que le coefficient de transmission peut être compris comme une somme de contributions résonantes (pôles) ; chaque résonance (pôle) étant associée à un modèle de BW.

Il a été montré qu'en présence de rugosité le coefficient de transmission présentait des pics différents de ceux obtenus par la plaque plane.

La position des pics, leur amplitude et leur largeur sont affectées. Seules les largeurs et les amplitudes des pics présentent des variations exploitables. Les expériences numériques ont montré que ces pics pouvaient encore être interprétées comme des résonances *via* un modèle BW.

Une nouvelle modélisation résonante du coefficient de transmission d'une plaque rugueuse immergée a été établie. Elle repose sur la modification d'une condition de frontière liquide solide analogue à celle proposée par Jones et Whittier. La constante phénoménologique introduite dans le modèle est complexe de sorte qu'il y a deux paramètres qui vont décrire l'effet de la rugosité. Ainsi ce modèle a été étendu. Une fois le nouveau modèle établi, l'identification des paramètres est réalisée à partir des pics de transmission obtenus par simulation numérique. La validité de l'approche proposée est bien vérifiée. Un

nouveau modèle BW a été développé et validé expérimentalement. Il s'agit d'un modèle BW généralisé.

Dès lors les caractéristiques des résonnances en présence de rugosité a permis de remonter à la valeur quadratique moyenne de la rugosité.

En fait une rugosité est caractérisée par deux paramètres géométriques indépendants, par exemple la valeur quadratique moyenne de la rugosité et la pente moyenne des aspérités. Il serait donc intéressant de poursuivre ce travail par l'identification à la fois de R_q et de la pente moyenne de la rugosité. D'autres formes de rugosité périodique pourraient être envisagées mais elles ne conduiraient pas à des résultats notablement différents.

Les rugosités réelles ne sont pas périodiques et ne présentent généralement pas un spectre blanc, mais quelques longueurs caractéristiques sont prédominantes. La modélisation proposée ici est donc applicable en considérant séparément chaque longueur caractéristique.

Dans le cadre de l'étude de plaques rugueuses réelles ou de systèmes assemblés par collage où chaque système présente une rugosité, une modélisation de type Jones comme celle utilisée ici pourra être appliquée. Un relevé expérimental du coefficient de transmission permettrait d'utiliser la même méthodologie que celle employée ici (simulation numérique et modélisation de type Jones) serait valable.

Bibliographie

[1] A. M. Smith, G. Basile, J. Theriault-Groom, P. Fortier-Poisson, G. Campion et V. Hayward, «Roughness of simulated surfaces examined with a haptic tool : effects of spatial period, friction, and resistance amplitude,» *Exp. Brain Res.,* vol. 202, n° %133-43, 2010.

[2] J. W. S. Rayleigh, Theory of Sound, vol. 2, New York: Dover Publications, 1945.

[3] J. W. Miles, «On Nonspecular Reflection at a Rough Surface,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 26, n° %12, pp. 191-199, 1954.

[4] M. Biot, «Reflection on a rough surface from an acoustic point source,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 29, n° %111, pp. 1193-1200, 1957.

[5] M. Biot, «On the reflection of acoustic waves on a rough surface,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 30, n° %15, pp. 479-480, 1958.

[6] R. Sinclair, «Velocity dispersion of Rayleigh waves propagating along rough surfaces,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 50, n° %13, pp. 841-845, 1970.

[7] G. Quentin, M. de Billy, F. Cohen Tenoudji, J. Doucet et A. Jungman, «Experimental results on the scattering of ultrasound by randomly or periodically rough surfaces,» chez *IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings*, 1975.

[8] S.-L. Chuang et R. K. Johnson, «Acoustic wave scattering from a fluid/solid periodic rough surface,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 71, n° %16, pp. 1368-1376, 1982.

[9] K. Mampaert et O. Leroy, «Reflection and transmission of normally incident ultrasonic waves on periodic solid-liquid interfaces,» *J. Acoust. Soc.Am.,* vol. 83, n° %14, pp. 1390-1398, 1988.

[10] N. Haines et D. Langston, «The reflection of ultrasonic pulses from surfaces,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 67, n° %15, pp. 1443-1454, 1980.

[11] J. A. Ogilvy, Theory of wave scattering from random rough surfaces, Bristol: I.O.P., 1991.

[12] T. M. Elfouhaily et C.-A. Guérin, «A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces,» *Waves Random Media,* vol. 14, pp. 1-40, 2004.

[13] P. Nagy et L.Adler, «Surface roughness induced attenuation of reflected and

transmitted ultrasonic waves,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 82, pp. 193-197, 1987.

[14] P. B. Nagy et L. Adler, «Surface roughness induced attenuation of reflected and transmitted ultrasonic waves,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 82, n° %11, pp. 193-197, 1987.

[15] B. W. Drinkwater, R. S. Dwyer-Joice et P. Cawley, «A study of the interaction between ultrasound and partially contacting solid-solid interface,» *Proc. R. Soc. London,* vol. 452, pp. 2613-2628, 1996.

[16] D. E. Chimenti et O. I. Lobkis, «The effect of rough surfaces on guided waves in plates,» *Ultrasonics,* vol. 36, pp. 155-162, 1998.

[17] R. Fiorito, W. Madigosky et H. Überall, «Resonance theory of acoustic waves interacting with an elastic plate,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 66, n° %16, pp. 1857-1866, 1979.

[18] J. Duclos, J.-L. Izbicki, O. Lenoir et J. M. Conoir, «Resonant formalism for the liquid-solid interface Rayleigh mode,» *Acta Acoustica,* vol. 2, pp. 375-378, 1994.

[19] V. Vlasie et M. Rousseau, «Acoustical validation of the rheological models for a structural bond,» *Wave Motion,* vol. 37, n° %13, pp. 333-349, 2003.

[20] R. Fiorito, W. Madigosky et H. Überall, «Resonance theory of acoustic waves interacting with an elastic plate,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 66, pp. 1857-1866, 1979.

[21] L. Rayleigh, «On the free vibrations of an infinite plate of homogeneus isotropic elastic matter,» *Proc. London Math. Soc.,* vol. 20, p. 225, 1889.

[22] H. Lamb, «On waves in an elastic plate,» *Proc. R. Soc.,* vol. 93, p. 114, 1 mars 1917.

[23] A. Holden, «Longitudinal modes of elastic waves in isotropic cylinders and slabs,» *Bell System Tech. J.,* vol. 30, pp. 956-969, 1951.

[24] F. A. Firestone, «Tricks with the supersonic reflectoscope,» *Non-Destr. Test,* vol. 7 2, 1948.

[25] H. Reissner, «Der senkrechte und schräge Durchtritt einer in einem flüssigen Medium erzeugten ebenen Dilatations-(Longitudinal)-Welle durch eine in diesem Medium befindliche planparallele feste Platte,» *Helv. Physica Acta.,* vol. 11, p. 140, 1938.

[26] F. H. Sanders, «Tranmission of sound through thin plates,» *Can. J. Res. A,* vol. 17, p. 179, 1939.

[27] L. Cremer, «Über die analogie zwischen Einfallswinkel und frequenzproblemen,»

Arch. Elektr. Ubertr., vol. 1, p. 28, 1947.

[28] J. Götz, «Über die praktische Ausnutzung der Beugung des lichtes an Ultraschallwellen,» *Acoust. Z.,* Octobre 1943.

[29] R. D. Fay et O. V. Fortier, «Transmission of sound through steel plates immersed in water,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 23, p. 339, 1951.

[30] A. Schoch, «Multi Reflection of Lamb Wave Emission in an Acoustic Waveguide Sensor,» *Acustica,* vol. 2, pp. 18-19, 1952.

[31] M. F. M. Osborne et S. D. Hart, «Transmission, reflection and guiding of an exponential pulse by a steel plate in water,» *J. Acoustic. Soc. Am.,* pp. 1-18, 1945.

[32] Pitts, Plona et Mayer, «Ultrasonic bounded beam reflection and transmission effects at liquid/solid plate/liquid interface,» vol. 60, p. 374, 1976.

[33] M. Harrison, «The propagation of elastic waves in a plate,» Office of Technical Services, Washington DC, 1954.

[34] Breit-Wigner, «Capture of Slow Neutrons Phys. Rev.,» *Phys. Rev.,* vol. 49, pp. 519-, 1 Avril 1936.

[35] H. Überall, L. Flax et L. R. Dragonette, «Theory of elastic resonance excitation by sound scattering,» vol. 63, pp. 723-731, 1978.

[36] V. Manet, «La Méthode des éléments finis. Vulgarisation des aspects mathématiques. Illustration des capacités de la méthode,» Lyon, 2012.

[37] S. Fix, «An Analysis of the Finite Element Method,» 1973.

[38] J. L. Batoz et G. Dhatt, Modélisation des structures par éléments finis. Vol. 1 – solides élastiques, Hermes, 1995.

[39] A. Fortin et A. Gallon, «Cours_elements_finis/documents/notes_elements_finis.,» Université de Laval, 1997-2011. [En ligne]. Available: http://www.giref.ulaval.ca/~afortin/cours_elements_finis/documents/notes_elements_finis.pdf.

[40] S. G. Johnson, «Notes on Perfectly Matched Layers,» 2007. [En ligne]. Available: http://math.mit.edu/~stevenj/18.369/pml.pdf.

[41] A. Freedman, «On the overlapping resonances, concept of acoustic transmission through an elastic plate, I : An examination of properties,» vol. 82, pp. 181-195, 1982.

[42] C. Potel, D.Leduc, B. Morvan, C. Depollier, A. C. Hladky-Hennion, J. L. Izbicki, P.

Pareige et M. Bruneau, «Lamb wave attenuation in a rough plate. I. Analytical and experimental results in an anisotropic plate,» *J. Appl. Phys.,* vol. 104, 2008.

[43] C. Potel, D. Leduc, B. Morvan, C. Depollier, A. C. Hladky-Hennion, J. L. Izbicki, P. Pareige et M. Bruneau, «Lamb wave attenuation in a rough plate. II. Analytical and numerical results in a fluid plate,» *J. Appl. Phys.,* vol. 104, 2008.

[44] D. Leduc, A. Hladky, B. Morvan, J. Izbicki et P. Pareige, «Propagation of Lamb waves in a plate with a periodic grating: Interpretation by phonon,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 118, pp. 2234-2239, 2005.

[45] J. P. Jones et J. S. Whittier, «Waves at a flexibly bonded interface,» *J. Appl. Mech.,* vol. 34, pp. 905-909, 1967.

[46] L. Martinez, J. Duclos et A. Tinel, «Propagation of A-waves in a plane plate : An experimental study,» *Acoustics letters,* vol. 20, pp. 110-120, 1996.

[47] A. Freedman, «On the overlapping resonances, concept of acoustic transmission through an elastic plate, II: Numerical examples and physical implications,» vol. 82, pp. 197-213, 1982.

[48] P. Nagy et L.Adler, «Attenuation of reflected and transmitted ultrasonic waves through a rough interface,» chez *Ultrasonic Symposium*, Denver, 1987.

[49] A. Pilarski, J. L. Rose et K. Balasubramaniam, «The angular and frequency characteristics of reflectivity from a solid layer embedded between two solids with imperfect boundary conditions,» *J. Acoust. Soc. Am.,* vol. 87, n° %12, pp. 532-542, 1990.

VIAnnexes

VI.1 Annexe 1 : Variations des paramètres η_θ, η_γ, η_t, pour les modes étudiés aux différentes fréquences.

- À 600 kHz
  - Mode S1

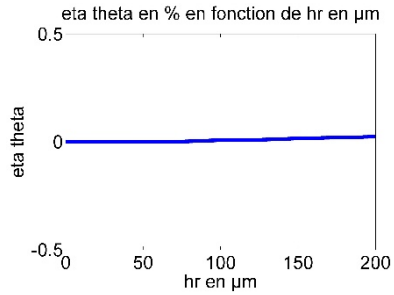

Fig. VI.1-1 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S1 à 600 kHz.

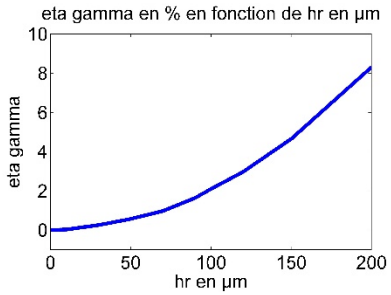

Fig. VI.1-2 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S1 à 600 kHz.

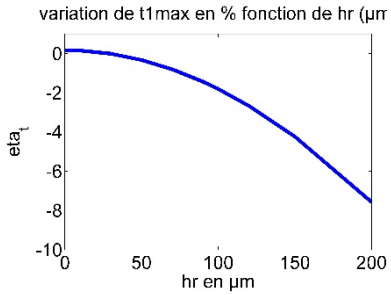

Fig. VI.1-3 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S1 à 600 kHz.

  - Mode A1

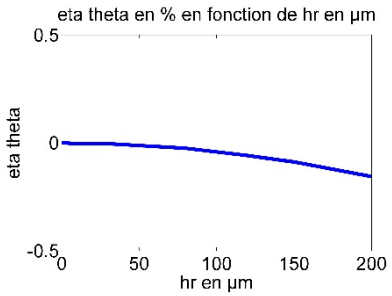

Fig. VI.1-4 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A1 à 600 kHz.

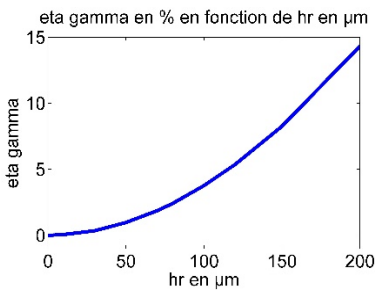

Fig. VI.1-5 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A1 à 600 kHz.

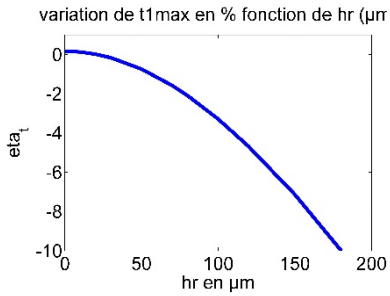

Fig. VI.1-6 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A1 à 600 kHz

- Mode S0

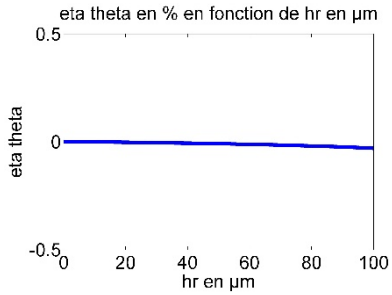

Fig. VI.1-7 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S0 à 600 kHz.

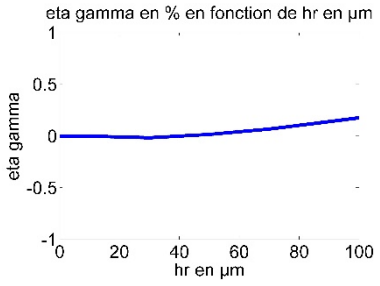

Fig. VI.1-8 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S0 à 600 kHz.

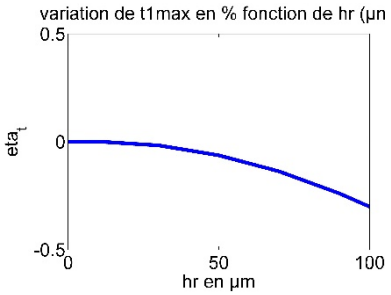

Fig. VI.1-9 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S0 à 600 kHz.

- Mode A0

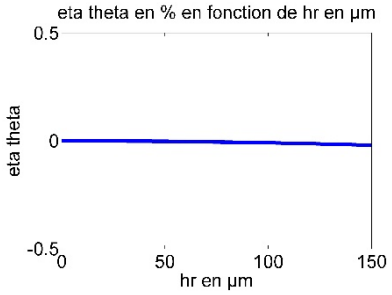

Fig. VI.1-10 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A0 à 600 kHz.

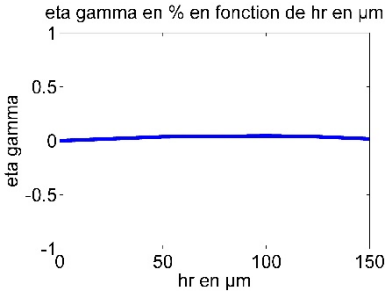

Fig. VI.1-11 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A0 à 600 kHz.

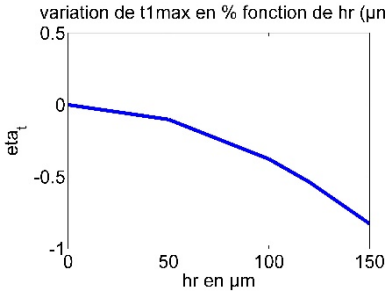

Fig. VI.1-12 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A0 à 600 kHz.

- À 700 kHz
  - Mode S2

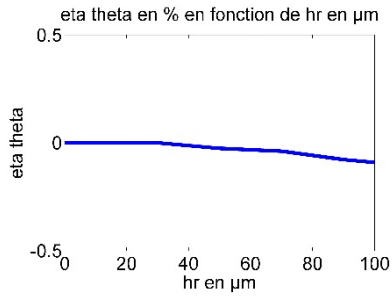

Fig. VI.1-13 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S2 à 700 kHz.

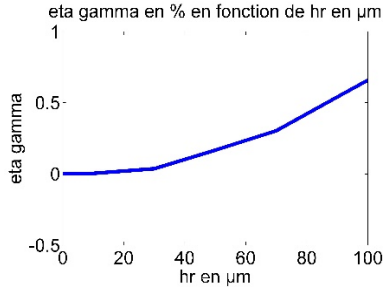

Fig. VI.1-14 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S2 à 700 kHz.

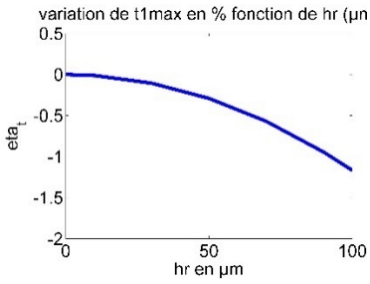

Fig. VI.1-15 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S2 à 700 kHz.

- Mode S1

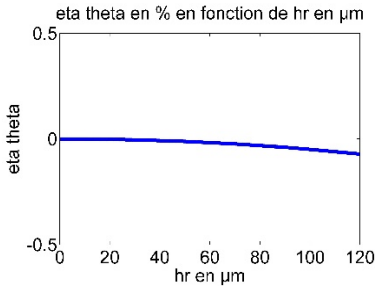

Fig. VI.1-16 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S1 à 700 kHz.

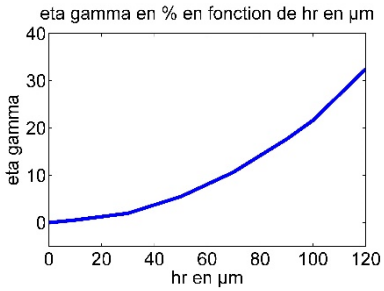

Fig. VI.1-17 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S1 à 700 kHz.

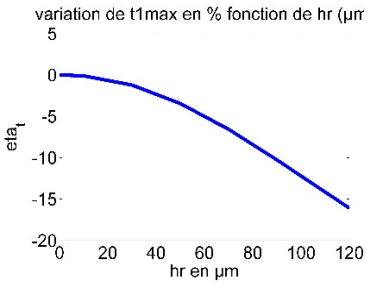

Fig. VI.1-18 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S1 à 700 kHz.

- Mode A1

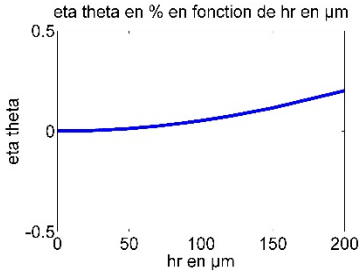

Fig. VI.1-19 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A1 à 700 kHz.

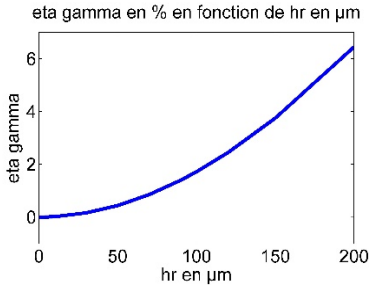

Fig. VI.1-20 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A1 à 700 kHz.

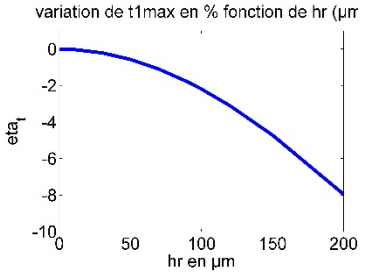

Fig. VI.1-21 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A1 à 700 kHz.

- Mode S0

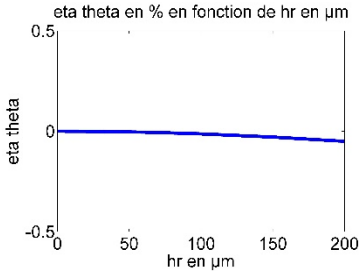

Fig. VI.1-22 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S0 à 700 kHz.

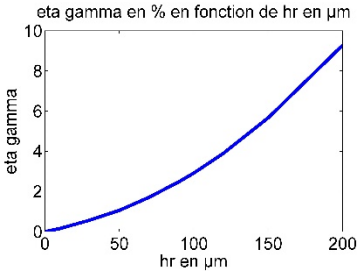

Fig. VI.1-23 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A0 à 700 kHz.

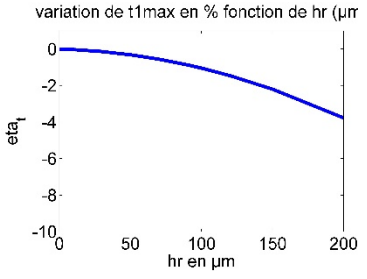

Fig. VI.1-24 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A0 à 700 kHz.

- Mode A0

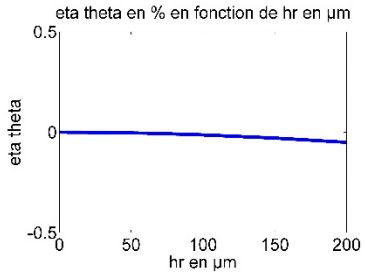

Fig. VI.1-25 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A0 à 700 kHz.

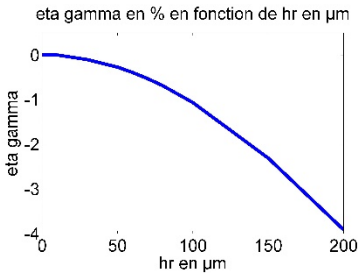

Fig. VI.1-26 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A0 à 700 kHz.

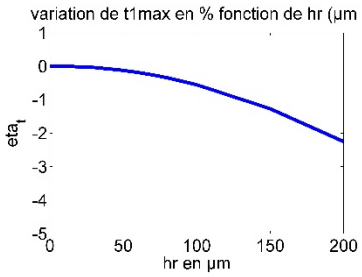

Fig. VI.1-27 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A0 à 700 kHz.

- À 800 kHz
  - Mode S2

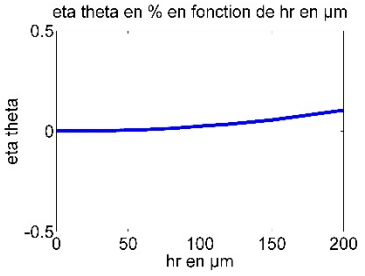

Fig. VI.1-28 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S2 à 800 kHz.

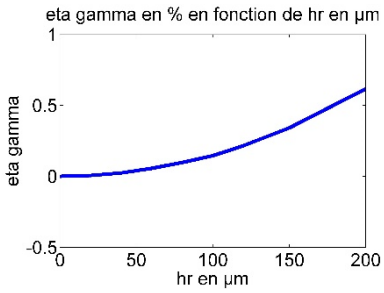

Fig. VI.1-29 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S2 à 800 kHz.

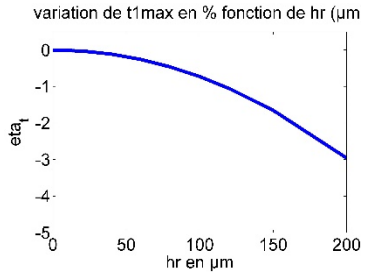

Fig. VI.1-30 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S2 à 800 kHz.

- Mode S1

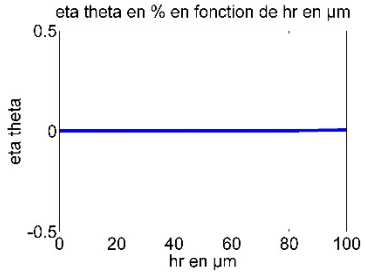

Fig. VI.1-31 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S1 à 800 kHz.

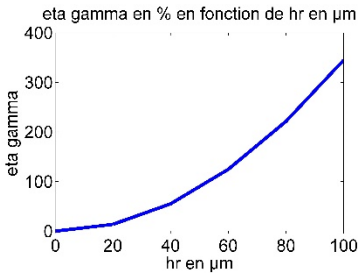

Fig. VI.1-32 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S1 à 800 kHz.

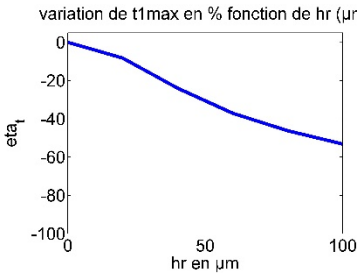

Fig. VI.1-33 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S1 à 800 kHz.

- Mode A1

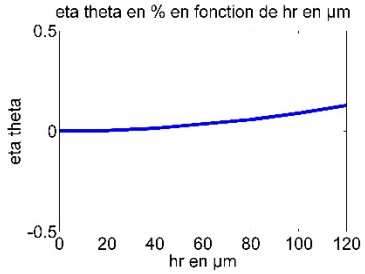

Fig. VI.1-34 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A1 à 800 kHz.

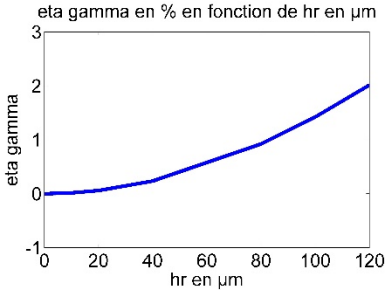

Fig. VI.1-35 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A1 à 800 kHz.

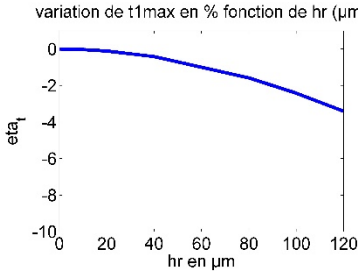

Fig. VI.1-36 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A1 à 800 kHz.

- Mode S0

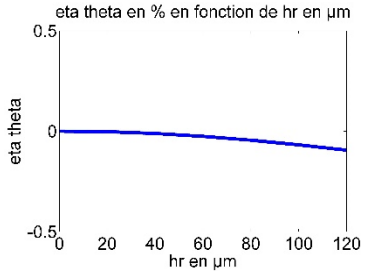

Fig. VI.1-37 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode S0 à 800 kHz.

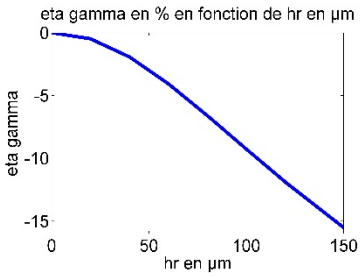

Fig. VI.1-38 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode S0 à 800 kHz.

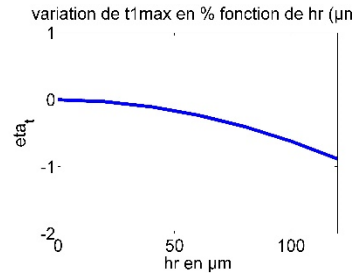

Fig. VI.1-39 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode S0 à 800 kHz.

- Mode A0

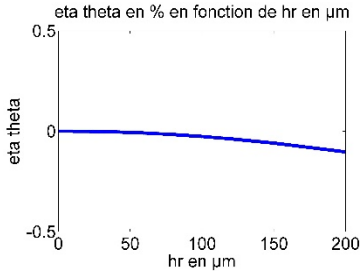

Fig. VI.1-40 Variations relatives de la position angulaire du maximum pour le mode A0 à 800 kHz.

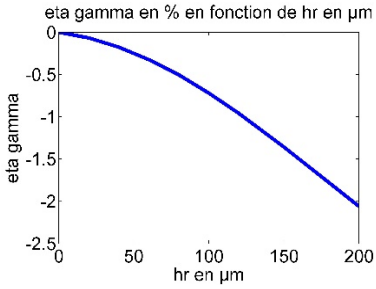

Fig. VI.1-41 Variations relatives de la largeur du pic pour le mode A0 à 800 kHz.

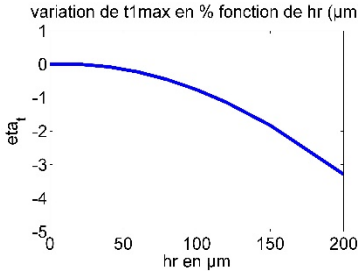

Fig. VI.1-42 Variations relatives de l'amplitude du maximum pour le mode A0 à 800 kHz.

VI.2 Annexe 2 : Recherche dans le plan complexe, expression matricielle du système

Les systèmes d'équations (4.2) et (4.3) peuvent se mettre sous forme matricielle :

$$\vec{u} = \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}(\phi(x,z)e^{-j\omega t})}_{\vec{u}_L} + \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\psi}(x,z)e^{-j\omega t})}_{\vec{u}_T},$$

avec les expressions suivantes pour les potentiels :

$$\begin{cases} \phi(x,z) = \dfrac{-1}{\rho_{\text{sol.}}\omega^2}\left[D_L \exp jk_L(\sin\theta_L x - \cos\theta_L z) + U_L \exp jk_L(\sin\theta_L x + \cos\theta_L z)\right] \\ \psi_y(x,z) = \dfrac{-1}{\rho_{\text{sol.}}\omega^2}\left[D_T \exp jk_T(\sin\theta_T x - \cos\theta_T z) + U_T \exp jk_T(\sin\theta_T x + \cos\theta_T z)\right] \end{cases}$$

Conditions aux limites :

- $\sigma_{zz2} = -p_1 \quad \text{en } z = +\dfrac{H}{2} \quad (1)$

$$\boxed{\begin{aligned} &-n_T^2 e^{+j\varphi_1} r_1 + \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right)e^{-j\varphi_L} D_L - 2b_T \sin\theta e^{-j\varphi_T} D_T \ldots \\ &\ldots + 0 + \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right)e^{+j\varphi_L} U_L + 2b_T \sin\theta e^{+j\varphi_T} U_T = n_T^2 e^{-j\varphi_1} \quad (1) \end{aligned}}$$

- $-p_1 = K_L(u_{z1} - u_{z2}) \quad \text{en } z = +\dfrac{H}{2}$ **:**

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(C - K_L\alpha b_1\right)e^{j\varphi_1} r_1 - K_L b_L e^{-j\varphi_L} D_L + K_L \sin\theta \mathrm{e}^{-j\varphi_T} D_T + 0 + K_L b_L e^{+j\varphi_L} U_L + K_L \sin\theta \mathrm{e}^{+j\varphi_T} U_T \\ &= -\left(K_L\alpha b_1 + C\right)e^{-j\varphi_1} \quad (2) \end{aligned}}$$

- $\sigma_{xz2} = 0 \quad \text{en } z = +\dfrac{H}{2} \quad \text{coté solide} \quad (3)$

$$\boxed{\begin{aligned} &0 + \left(2b_L\right)\sin\theta D_L \,\mathrm{e}^{-j\varphi_L} + \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) D_T \,\mathrm{e}^{-j\varphi_T} + 0 + \\ &\left(-2b_L\right)\sin\theta \mathrm{e}^{+j\varphi_L} U_L + \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) U_T \,\mathrm{e}^{+j\varphi_T} = 0 \quad (3) \end{aligned}}$$

- $\sigma_{zz2} = -p_3 \quad \text{en } z = -\dfrac{H}{2} \quad (4)$

$$\boxed{\begin{aligned} &0 + \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right)e^{+j\varphi_L} D_L - 2b_T \sin\theta e^{+j\varphi_T} D_T - N_T^2 e^{j\varphi_1} t_1 + \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right)e^{-j\varphi_L} U_L \ldots \\ &\ldots + 2b_T \sin\theta e^{-j\varphi_T} U_T = 0 \quad (4) \end{aligned}}$$

- $u_{z2} = u_{z3}$ en $z = -\dfrac{H}{2}$ (5)

$$\boxed{0 + b_L e^{+j\varphi_L} D_L - \sin\theta\, \mathrm{e}^{+j\varphi_T}\, D_T - \alpha b_1\, \mathrm{e}^{+j\varphi_1}\, t_1 - b_L e^{-i\varphi_L} U_L - \sin\theta\, \mathrm{e}^{-j\varphi_T}\, U_T = 0 \quad (5)}$$

- $\sigma_{xz2} = 0$ en $z = -\dfrac{H}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} &0 + 2b_L \sin\theta\, \mathrm{e}^{+j\varphi_L}\, D_L + \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) \mathrm{e}^{+j\varphi_T}\, D_T + 0 - 2b_L \sin\theta\, \mathrm{e}^{-j\varphi_L}\, U_L \\ &+ \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) \mathrm{e}^{-j\varphi_T}\, U_T = 0 \quad (6) \end{aligned}}$$

Le système s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} -n_T^2 e^{+j\varphi_1} & \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) e^{-j\varphi_L} & -2b_T \sin\theta e^{-j\varphi_T} & \cdots \\ \left(C - K_L \alpha'' b_1\right) e^{j\varphi_1} & -K_L b_L e^{-j\varphi_L} & K_L \sin\theta\, \mathrm{e}^{-j\varphi_T} & \cdots \\ \alpha'' \sin\theta\, \mathrm{e}^{+j\varphi_1} & 2b_L \sin\theta\, \mathrm{e}^{-j\varphi_L} & \left(b_T^2 - \sin^2\theta - b_T\right) \mathrm{e}^{-j\varphi_T} & \cdots \\ 0 & \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) e^{+j\varphi_L} & -\sin\theta\, \mathrm{e}^{+j\varphi_T} & \cdots \\ 0 & b_L e^{+j\varphi_L} & -\sin\theta\, \mathrm{e}^{+j\varphi_T} & \cdots \\ 0 & 2b_L \sin\theta\, \mathrm{e}^{+j\varphi_L} & \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) e^{+j\varphi_T} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & 0 & \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right)^{+j\varphi_L} & -2b_L \sin\theta\, \mathrm{e}^{-j\varphi_L} \\ \cdots & 0 & K_L b_L e^{+j\varphi_L} & K_L \sin\theta\, \mathrm{e}^{+j\varphi_T} \\ \cdots & 0 & -2b_L \sin\theta\, \mathrm{e}^{+j\varphi_L} & \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) \mathrm{e}^{+j\varphi_T} \\ \cdots & -n_T^2 e^{i\varphi_1} & \left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) e^{-j\varphi_L} & 2b_T \sin\theta e^{-j\varphi_T} \\ \cdots & -\alpha'' \sin\theta\, \mathrm{e}^{+i\varphi_1} & -b_L e^{-j\varphi_L} & -\sin\theta\, \mathrm{e}^{-j\varphi_T} \\ \cdots & 0 & -2b_L \sin\theta\, \mathrm{e}^{-j\varphi_L} & +\left(b_T^2 - \sin^2\theta\right) \mathrm{e}^{-j\varphi_T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ D_L \\ D_T \\ t_1 \\ U_L \\ U_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_T^2 e^{-j\varphi_1} \\ -\left(K_L \alpha'' \sin\theta + C\right) e^{-j\varphi_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec les notations suivantes :

$$n_L = \frac{c}{C_L} = \frac{k}{k_L},\ n_T = \frac{c}{C_T} = \frac{k}{k_T},\ \alpha'' = \frac{\rho_{sol}}{\rho},$$

$b_L = n_L \cos\theta_L$, $b_T = n_T \cos\theta_T$, $\sin\theta = n_L \sin\theta_L = n_T \sin\theta_T$, $C = j\, c\, \rho_{sol}\omega$.

C'est à partir de ce système linéaire que l'on établit l'expression des coefficients t_1 et r_1. Après plusieurs lignes de calculs fastidieux, les coefficients t_1 et r_1 s'exprime sous une forme mettant en jeu les termes C_a et C_s, obtenus lors de l'étude de la plaque dans le vide.

Dominique MEIER

Modélisation d'une interface rugueuse : études numériques et analytiques

Résumé

Une modélisation de rugosité de faible amplitude d'une rugosité d'interface, à l'aide de méthodes ultrasonores, est proposée. On examine le cas d'une plaque élastique immergée dont l'une des faces est rugueuse. L'étude de la rugosité dont la géométrie est triangulaire et périodique repose sur l'analyse du coefficient de transmission par la plaque. Une simulation numérique basée sur la Méthode des Éléments Finis est réalisée.

D'un autre côté, la théorie de Fiorito, Madigosky et Überall (FMU) de la plaque sans rugosité montre que le coefficient de transmission peut être compris comme une somme de résonances, chacune étant associée à un modèle de Breit et Wigner (BW). La position des pics de résonance, que ceux-ci soient relatifs aux modes symétriques ou antisymétriques sont peu affectées par la présence de la rugosité. Seules les largeurs et les amplitudes varient notablement. Les expériences numériques ont montré que ces pics sont interprétables comme des résonances BW.

Une nouvelle modélisation basée sur un modèle rhéologique est établie pour le coefficient de transmission. A partir de celle-ci, un nouveau modèle BW a été développé et validé par la simulation numérique. Celui-ci modèle permet de remplacer avantageusement les simulations numériques coûteuses en temps, par un modèle analytique simple.

Résumé en anglais

The modelling of roughness of small amplitude a rough interface, by using ultrasound methods is proposed. One investigates the case of an immersed elastic plate with only one corrugated face. The study of the roughness, the shape of which is triangular and periodic is based upon the analysis of the transmission coefficient. A numerical simulation using the Finite Element Method (FEM) is carried out.

On the other hand, the Fiorito, Madigosky et Überall (FMU) theory of the flat plate shows that the transmission coefficient may be seen as a sum of resonances, each being associated with a Breit-Wigner (BW) resonance shape. The location of the resonance spikes peaks, which are related to either symmetric or antisymmetric modes, are not significantly affected by the roughness ; only the half widths and the magnitudes vary notably. The numerical experiments led with FEM on the corrugated plate showed that the spikes peaks can be interpreted as BW resonances.

A new modelling based upon a rheological model is made for the transmission coefficient. From that a new BW model is developed and validated. It allows to replace with advantage the costly numerical simulations by a simple analytical model.