Dynamique interne au front d'écoulements à surface libre. Application aux laves torrentielles

Perrine Freydier

▶ **To cite this version:**

Perrine Freydier. Dynamique interne au front d'écoulements à surface libre. Application aux laves torrentielles. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAU010 . tel-01666139

HAL Id: tel-01666139
https://theses.hal.science/tel-01666139

Submitted on 18 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Communauté
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Sciences de la Terre et de l'Univers, Environnement**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Perrine FREYDIER

Thèse dirigée par **Guillaume CHAMBON**

préparée au sein du **Laboratoire Irstea Grenoble – Unité ETNA : Erosion Torrentielle, Neige et Avalanches**
dans **l'École Doctorale Terre Univers Environnement**

Dynamique interne au front d'écoulements à surface libre. Application aux laves torrentielles.

Thèse soutenue publiquement le **30 mars 2017,** devant le jury composé de :

Anne MANGENEY
Professeur, Université Paris Diderot, IPGP, Rapporteur
Yoël FORTERRE
Directeur de recherche, IUSTI, Université Aix-Marseille, Rapporteur
Philippe COUSSOT
IGPEF, Université Paris-Est, Laboratoire Navier, IFFSTAR, Président du jury
Pierre SARAMITO
Directeur de recherche, LJK, Université Grenoble Alpes, Examinateur
Mohamed NAAIM
Directeur de recherche, Irstea, Université Grenoble Alpes, Examinateur
Guillaume CHAMBON
Directeur de recherche, Irstea, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

Remerciements

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à Guillaume Chambon, mon directeur de thèse. Son encadrement efficace et sa disponibilité m'ont facilité la réussite de ce travail. Sa rigueur scientifique m'a permis de beaucoup apprendre à ses côtés. Je le remercie pour ses discussions instructives et ses idées lumineuses, mais aussi pour la patience dont il a su faire preuve.

J'adresse aussi mes remerciements à Anne Mangeney, Yoël Forterre, Philippe Coussot, Pierre Saramito et Mohamed Naaim de m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury.

Mes remerciements vont également aux membres de mon comité de thèse, Valéry Botton, Jean-Paul Vila, Philippe Coussot et Mohamed Naaim, pour leur disponibilité et leurs conseils.

Je tiens à remercier le personnel technique du laboratoire Irstea, Fred Ousset, Hervé Bellot, Christian Eymond-Gris et Xavier Ravanat. Leur savoir-faire m'a souvent été indispensable, et leur disponibilité n'a jamais manqué. Mon travail expérimental a été facilité par leurs réactions rapides et efficaces face aux nombreuses facéties du canal.

Travailler au sein de l'unité Etna fut très enrichissant et agréable. Je voudrais remercier tous ceux qui créent cette belle ambiance dont j'ai pu profiter et qui n'hésitent pas à user de leur temps pour les autres, je pense à Fred, Xav, Bertrand, Cora, Nicolle... Je pense aussi à Martine Girier qui m'a tellement simplifiée la gestion administrative que j'ai presque eu l'impression que c'était simple.

Merci à mes co-bureaux, Hugo Lafaye qui m'a bien aidé par sa culture informatique et Simon Carladous pour m'avoir fait partager ses connaissances dans le domaine des laves torrentielles et avec qui j'ai eu l'occasion d'aller sur le terrain.

Je remercie mes compagnons de cafet', Coraline Bel, Gaëtan Pulfer, et Gilles Nicolet, parce-que la rédaction était tellement plus agréable comme ça. Merci pour ces moments de convivialité et d'amitié que nous avons eu.

Un merci particulier à Hervé Bellot et Guillaume Piton, parce qu'ils ont contribué à me faire découvrir leur belle région, sous terre, sur un vélo, sur un caillou... maintenant je vais m'ennuyer en quittant Grenoble !

C'est avec joie que je termine cette thèse en remerciant tous ceux avec qui j'ai eu la chance de travailler et de discuter.

A tous, merci.

Résumé

Le modèle de couche mince intégré sur l'épaisseur, **Saint-Venant**, utilisé classiquement pour simuler la propagation de laves torrentielles et coulées boueuses, repose sur plusieurs approximations concernant la forme des profils de vitesse en zones **non-uniformes**. Il est pourtant nécessaire d'utiliser ce type de modélisation, comme outil d'aide à la gestion des risques liés aux laves torrentielles. Nous proposons d'éprouver ce modèle, en étudiant une zone fortement non-uniforme, le front de coulées à surface libre et le champ de vitesse à l'intérieur de cette zone. Cette thèse porte donc sur l'étude de la **dynamique interne au front d'écoulements à surface libre de fluides viscoplastiques**.

Nous avons utilisé le dispositif du **canal à fond mobile** qui permet de générer des coulées stationnaires dans le référentiel de l'observateur au moyen d'un fond mobile remontant vers l'amont. Nous avons réalisé un travail technique sur ce canal et sur l'analyse des images pour pouvoir mesurer les **champs de vitesse à haute résolution spatiale** (38μm.px^{-1}) aux fronts de coulées à surface libre de fluides viscoplastiques. L'étude des fluides newtoniens a aussi été réalisée afin de valider les modèles et éprouver le dispositif expérimental.

Nous avons comparé les résultats expérimentaux aux solutions théoriques pour le profil de vitesse de deux modèles de **couche mince** adaptés à la rhéologie de **Herschel-Bulkley** : le modèle classique de la **lubrification**, à la base du modèle de Saint-Venant et un modèle **consistant d'ordre 1** développé dans cette thèse. Nous avons choisi l'échelle qui nous permet de calculer la forme d'un front et qui correspond à ce qui est observé dans nos expériences, soit $\epsilon \frac{Re}{Fr^2} \approx 1$. Le modèle consistant d'ordre 1 est la somme du modèle à l'ordre 0 (la lubrification) et de **termes correctifs** qui proviennent des contraintes normales et des termes d'inertie. Dans le cadre de notre configuration du fond mobile remontant vers l'amont, il est possible de déduire la forme du front en cherchant une solution de type onde progressive, sans passer par un modèle intégré dans l'épaisseur.

Pour les fluides viscoplastiques, la structure classique du profil de vitesse, avec une **zone cisaillée surmontée d'un plug non cisaillé** est bien reconnaissable sur nos profils de vitesse en zone uniforme, et en zone faiblement variée. Mais **à l'approche du front**, cependant, la vitesse de surface augmente, les profils de vitesse expérimentaux deviennent **cisaillés sur toute l'épaisseur**, conduisant à la **disparition du plug** à proximité de la ligne de front. Le modèle de lubrification prédit l'existence d'un plug dans le front jusqu'à la ligne de contact, ce qui n'est pas observé expérimentalement. La vitesse de surface du modèle de lubrification augmente à l'approche du front, mais est largement sous-estimée par rapport à la vitesse de surface mesurée. Les vitesses de surface prédites par le modèle d'ordre 1 augmentent plus drastiquement au front, en meilleur accord avec les mesures que le modèle de lubrification. Pour certaines configurations expérimentales l'accord est même très bon. Remarquablement, le cisaillement des profils de vitesse à l'approche du front, observé expérimentalement, est aussi prédit par le modèle d'ordre 1.

Un modèle intégré dans l'épaisseur de type **Saint-Venant** basé sur les développements consistants d'ordre 1 pour le profil de vitesse est alors calculé, car il constitue l'étape nécessaire avant d'être intégré dans un **outil de simulation opérationnel**.

Table des matières

1 Introduction : Les laves torrentielles, des fluides à seuil **1**

1.1 Les laves torrentielles . . . 1
1.2 Besoins opérationnels . . . 3
1.3 Différents types de laves torrentielles . . . 5
1.3.1 Analyse dimensionnelle . . . 6
1.3.2 Rôle de la granulométrie . . . 7
1.4 Modèles biphasiques vs monophasiques . . . 9
1.5 Propriétés des laves torrentielles boueuses . . . 10
1.5.1 L'existence d'un seuil d'écoulement . . . 11
1.5.2 L'existence d'un plug . . . 12
1.6 Modélisation opérationnelle des laves torrentielles . . . 12
1.6.1 Équations de Saint-Venant . . . 12
1.6.2 Exemples de modèles opérationnels . . . 13
1.6.3 Approximations réalisées . . . 15
1.7 Objectifs et organisation du manuscrit . . . 16

2 État de l'art **19**

2.1 Les fluides à seuil . . . 19
2.1.1 Généralités sur les fluides à seuil . . . 19
2.1.2 Écoulements de fluide à seuil : existence de plugs . . . 21
2.2 Rhéologie des fluides à seuil . . . 22
2.2.1 Loi de comportement de Herschel-Bulkley . . . 22
2.2.2 Controverse sur l'existence d'un seuil . . . 24
2.2.3 La transition solide-fluide . . . 25
2.2.4 La thixotropie . . . 27
2.2.5 Les effets élastiques . . . 28
2.3 La modélisation des écoulements à surface libre . . . 29
2.3.1 Les équations primitives . . . 29
2.3.2 Les modèles intégrés sur l'épaisseur . . . 30
2.3.2.1 Forme générale . . . 30
2.3.2.2 Les équations de Saint-Venant . . . 31
2.3.3 Les modèles intégrés : évolutions de Saint-Venant à nos jours au travers d'exemples de relations de fermeture . . . 32
2.3.3.1 Lois de résistance empiriques . . . 32

2.3.3.2 Loi de résistance de Hunt . . . 33
2.3.3.3 Loi de résistance de Coussot . . . 33
2.3.3.4 Loi de résistance de Pastor . . . 34
2.3.4 Le paradoxe du plug . . . 34
2.3.5 Vers des modèles consistants . . . 36
2.3.6 Cas particuliers . . . 37
2.3.6.1 Le modèle d'onde cinématique . . . 38
2.3.6.2 Le modèle de lubrification . . . 38
2.3.6.3 Les modèles bicouches . . . 39
2.3.6.4 Les modèles incluant une rhéologie plus complexe . . . 39
2.4 Résultats expérimentaux sur les écoulements à surface libre . . . 39
2.4.1 Aperçu des dispositifs existants . . . 39
2.4.2 Relation vitesse-hauteur en régime permanent uniforme . . . 42
2.4.3 Position et forme du front . . . 43
2.4.4 Dynamique interne en zone uniforme . . . 45
2.4.5 Dynamique interne au front . . . 45
2.5 Conclusion du chapitre . . . 46

3 Modélisation des écoulements à surface libre 49
3.1 Équations Primitives . . . 49
3.2 Conditions aux limites . . . 50
3.3 Loi de comportement . . . 51
3.4 Régime de lubrification . . . 52
3.5 Adimensionnalisation des équations primitives . . . 54
3.5.1 Séparation de la contribution plastique et visqueuse des contraintes . . . 54
3.5.2 Variables sans dimension . . . 55
3.5.3 Loi de comportement adimensionnée . . . 56
3.5.4 Conditions aux limites . . . 56
3.5.5 Équations du mouvement adimensionnées . . . 57
3.5.6 Choix d'échelle . . . 57
3.6 Expression de la vitesse et du débit à l'ordre 0 en ϵ . . . 58
3.6.1 Ordre 0 avec $\epsilon \frac{Re}{Fr^2} \approx \epsilon$: le régime permanent uniforme . . . 58
3.6.2 Ordre 0 en ϵ avec $\epsilon \frac{Re}{Fr^2} \approx 1$: le régime de lubrification . . . 59
3.6.3 Contribution des contraintes normales . . . 61
3.7 Expression de la vitesse et du débit à l'ordre 1 en ϵ . . . 63
3.7.1 Identité différentielle à l'ordre 0 . . . 63
3.7.2 Conditions aux limites . . . 64
3.7.3 Pression . . . 64
3.7.4 Contraintes de cisaillement . . . 64
3.7.4.1 Dans la zone cisaillée . . . 64
3.7.4.2 Dans le pseudo-plug . . . 66
3.7.5 Vitesse longitudinale . . . 66
3.7.5.1 Dans la zone cisaillée . . . 66
3.7.5.2 Dans le pseudo-plug . . . 67
3.7.6 Débit . . . 68

3.7.6.1 Dans la zone cisaillée . . . 68
3.7.6.2 Dans le pseudo-plug . . . 69
3.8 Solution onde progressive . . . 70
3.8.1 Choix d'échelle . . . 70
3.8.2 Modèle à l'ordre 0 en ϵ . . . 71
3.8.2.1 Forme du front . . . 71
3.8.2.2 Profils de vitesse . . . 72
3.8.3 Modèle à l'ordre 1 en ϵ . . . 73
3.8.3.1 Forme de front . . . 73
3.8.3.2 Profils de vitesse . . . 73
3.8.4 Modèle à l'ordre 1 sans terme d'inertie . . . 75
3.8.5 Comparaison des modèles . . . 76
3.9 Conclusion du chapitre . . . 79

4 Dispositif expérimental et méthodes de mesure 81
4.1 Le canal à fond mobile . . . 81
4.1.1 Principe de fonctionnement . . . 81
4.1.2 État de l'art sur les expériences réalisées avec le canal à fond mobile . . . 83
4.1.2.1 Les mesures en zone uniforme : la relation *vitesse-hauteur* et les champs de vitesse . . . 84
4.1.2.2 La forme du front . . . 84
4.1.3 L'étude du front : résultats préliminaires . . . 85
4.2 Le canal à fond mobile : solutions techniques pour des mesures à haute résolution 86
4.2.1 Le dispositif utilisé dans le cadre de cette étude . . . 86
4.2.2 Acquisition des images par prises de vues successives . . . 86
4.2.3 Mesure du rapport pixel-mètre . . . 88
4.2.4 Prise de vue inclinée . . . 88
4.2.5 Mesure de la vitesse moyenne . . . 90
4.2.6 Mesure de la hauteur et de la pente de la surface libre . . . 91
4.2.7 L'existence du point de rebroussement . . . 93
4.2.8 Protocole expérimental . . . 93
4.3 Les traceurs . . . 95
4.4 Vélocimétrie . . . 95
4.4.1 Vélocimétrie : Méthode PIV . . . 96
4.4.2 Vélocimétrie : Méthode de l'analyse spatio-temporelle . . . 97
4.4.3 Vélocimétrie : Comparaison des deux méthodes . . . 99
4.5 Caractéristiques des expériences réalisées . . . 101
4.5.1 Le Carbopol . . . 101
4.5.2 Le glucose . . . 103

5 Matériaux et rhéologie 105
5.1 Les matériaux utilisés . . . 105
5.1.1 Le gel de Carbopol . . . 105
5.1.2 Le glucose . . . 106
5.2 Le mode de préparation des matériaux utilisés . . . 106

5.2.1 Le gel de Carbopol . . . 106
5.2.2 Le glucose . . . 107
5.3 Caractérisation rhéologique des gels de Carbopol . . . 108
5.3.1 Protocole de détermination de la courbe d'écoulement . . . 108
5.3.1.1 L'outil : le rhéomètre en configuration plan-plan . . . 108
5.3.1.2 Les courbes d'écoulement . . . 109
5.3.2 Établissement du protocole . . . 109
5.3.2.1 Influence du glissement . . . 109
5.3.2.2 Influence du sens d'application des paliers de taux de déformation 110
5.3.2.3 Influence du temps d'application des paliers . . . 110
5.3.2.4 Influence de la taille de l'entrefer . . . 112
5.3.3 Résultats sur la rhéologie . . . 113
5.3.3.1 Courbes d'écoulement . . . 113
5.3.3.2 Comportement autour du seuil : la transition solide-fluide . . . 113
5.4 Caractérisation rhéologique des sirops de glucose . . . 116
5.4.1 Protocole de détermination de la courbe d'écoulement . . . 116
5.4.1.1 L'outil : le rhéomètre en configuration cône-plan . . . 116
5.4.1.2 Les courbes d'écoulement . . . 117
5.4.2 Établissement du protocole . . . 117
5.4.2.1 La déshydratation durant l'essai rhéométrique . . . 117
5.4.2.2 Les différents outils . . . 118
5.4.3 Résultats sur la rhéologie : courbes d'écoulement . . . 118
5.5 La rhéologie à l'échelle de l'écoulement . . . 119
5.5.1 Les courbes vitesse-hauteur . . . 119
5.5.2 Correction des paramètres rhéologiques . . . 122
5.5.3 Les profils de vitesse en zone uniforme . . . 123
5.6 Conclusion du Chapitre . . . 126

6 Dynamique interne au front d'écoulement à surface libre de fluides newtoniens : Comparaison au modèle de lubrification 127
6.1 Description qualitative des champs de vitesse . . . 127
6.2 Comparaison au modèle de lubrification . . . 129
6.2.0.1 Cadre théorique . . . 129
6.2.1 Comparaison directe . . . 130
6.2.2 Comparaison en grandeurs adimensionnées . . . 132
6.2.2.1 Vitesses longitudinales et verticales . . . 132
6.2.2.2 Forme de front . . . 132
6.3 Courbes d'écoulement . . . 135
6.4 Présence d'effets 3D dans le canal ? . . . 136
6.5 Conclusion du chapitre . . . 138

7 Dynamique interne au front d'écoulements à surface libre de fluides viscoplastiques : Comparaison au modèle de lubrification 139
7.1 Etude des champs de vitesse et des zones de plug : comparaison au modèle de lubrification . . . 139

7.2 Introduction . . . 141
7.3 Viscoplastic lubrication model . . . 144
7.4 Experimental methods . . . 146
7.4.1 Model viscoplastic material . . . 146
7.4.2 Experimental setup . . . 146
7.4.3 Flow height measurements . . . 148
7.4.4 Velocimetry . . . 148
7.4.5 Overview of experimental results . . . 150
7.5 Comparison with lubrication model . . . 153
7.5.1 Direct comparison . . . 153
7.5.2 Non-dimensional comparison . . . 154
7.5.2.1 Velocity profiles . . . 155
7.5.2.2 Plug layer thickness . . . 155
7.5.2.3 Free-surface shape . . . 158
7.6 Discussion . . . 158
7.6.1 Experimental limitations . . . 158
7.6.2 Good performance of lubrication model . . . 159
7.6.3 Discrepancies in the tip . . . 161
7.6.4 Apparent flow curves . . . 162
7.6.5 Comparison with previous results . . . 163
7.7 Conclusion and outlook . . . 165
7.8 Appendix : Automatic angle detection in STV . . . 166
7.9 Appendix : Expression of vertical velocity . . . 167
7.10 Appendix : Non-dimensional stationary-wave solutions . . . 167
7.11 Supplementary material . . . 168
7.12 Complément 1 . . . 172
7.13 Complément 2 . . . 181
7.13.1 Profils de vitesse . . . 181
7.13.2 Forme du front . . . 181
7.13.3 Pente de la surface libre . . . 182
7.13.4 Tableau de synthèse . . . 182
7.14 Complément 3 . . . 183
7.14.1 Le point de rebroussement . . . 183
7.14.2 Les courbes d'écoulement . . . 183
7.15 Complément 4 . . . 185
7.15.1 Détermination de $x_{fc,f}$ . . . 185
7.15.2 Détermination de $x_{fc,u}$ . . . 186
7.15.3 Épaisseur du plug : méthode de l'ajustement des profils de vitesse . . . 187

8 Dynamique interne au front d'écoulements à surface libre : Comparaison au modèle consistant à l'ordre 1 191
8.1 Forme de front . . . 192
8.2 Vitesse de surface . . . 194
8.3 Profils de vitesse . . . 197
8.4 Discussion et conclusion du chapitre . . . 199

9 Conclusions générales et perspectives **201**
9.1 Conclusions . . . 202
9.1.1 Développements techniques . . . 202
9.1.2 Développements théoriques . . . 203
9.1.3 Comparaisons modèles-expériences . . . 203
9.2 Formulation d'un modèle intégré d'ordre 1 . . . 205
9.2.1 Identités différentielles à l'ordre 0 . . . 206
9.2.2 Le terme de pression à l'ordre 1 . . . 206
9.2.2.1 Le terme de contrainte normale plastique à l'ordre 0 . . . 207
9.2.2.2 Le coefficient β du terme d'inertie . . . 207
9.2.2.3 Relation de fermeture pour la contrainte basale . . . 208
9.2.2.4 Expression complète . . . 209
9.3 Perspectives . . . 210
9.4 Suggestions pour de futures études . . . 213

Références **215**

A Étude du front : résultats préliminaires publiés dans *International Journal of Erosion Control Engineering* **227**

Chapitre 1

Introduction : Les laves torrentielles, des fluides à seuil

Cette thèse est consacrée à l'étude de coulées viscoplastiques, dans le but d'améliorer la compréhension que nous avons des phénomènes de type laves torrentielles. Nous proposons d'introduire le sujet par la présentation des laves torrentielles, leur composition et les différentes façons de les modéliser en écoulement. Comme nous nous intéressons plus spécifiquement dans cette thèse aux laves torrentielles boueuses, qui possèdent une forte fraction fine, nous présenterons les propriétés de ce type de fluide.

1.1 Les laves torrentielles

Les laves torrentielles sont des coulées d'éléments rocheux et d'eau pouvant se déclencher dans les torrents de montagne sous l'action de précipitations intenses. Elles entraînent les matériaux naturellement présents sur leur passage, de tailles très hétérogènes, allant de particules argileuses, à des blocs grossiers de plusieurs mètres cubes [Hungr et al., 2005; Chambon and Laigle, 2013]. La composition des laves torrentielles varie alors selon les matériaux présents dans le bassin versant, comme nous pouvons le voir sur la figure 1.1, elles peuvent être à forte composante granulaire ou d'aspect plutôt boueux [Coussot and Ancey, 1999a].

Les laves torrentielles se produisent en bouffées successives dans lesquelles plusieurs entités peuvent généralement être distinguées (Fig.1.2) [Bardou, 2002] :
- un **front**, constitué de blocs grossiers à l'image de la figure 1.1f, formé par des processus de migration et de ségrégation des éléments rocheux [Gray and Ancey, 2009; Johnson et al., 2012; Leonardi et al., 2015].
- un **corps**, relativement homogène, dans lequel est situé l'essentiel du volume de la coulée.
- une queue, plus fluide que le corps et qui érode les derniers dépôts.

On observe généralement aussi des bourrelets latéraux ou levées, parallèles à l'axe d'écoulement de la coulée. Ils sont constitués de matériaux grossiers perdus par le front au cours de l'écoulement [Baker et al., 2016] et tendent à canaliser naturellement la coulée (exemple Fig.1.3b).

Figure 1.1 Exemples de phénomènes de type lave torrentielle à travers le monde. a) Californie, 2014 ©J.A. Garcia, b) Chine, 2015, ©Le monde, AP, c) Japon, 1997, ©Sabo Dep, d) Afganistan, 2014, ©AFP, S. Marai, e) Venezuela (Vargas), décembre 1999, ©USGS, f) Suisse, Illgraben, juillet 2016,©Pierre Zufferey.

Le déclenchement des laves torrentielles est contrôlé par des facteurs d'ordre météorologique et une série de facteurs géomorphologiques. Les bassins versants susceptibles de générer des laves torrentielles doivent disposer de suffisamment de matériaux à mobiliser, que ce soit dans leur lit ou par l'apport des versants, et d'une pente relativement élevée : ce sont des facteurs de prédisposition [Bertrand et al., 2013]. Ensuite, c'est généralement un événement pluvieux suffisamment intense qui va entraîner : le ruissellement de surface à l'origine de certaines laves torrentielles [Berti and Simoni, 2005], mais aussi la saturation en eau du substrat, pouvant provoquer sa liquéfaction et la mise en mouvement sous l'action de la gravité [Iverson, 2000]. A ce jour, différentes études ont cherché à déterminer sur un bassin versant donné, un seuil de déclenchement de lave torrentielle basé uniquement sur la pluviométrie [Marchi et al., 2002; Berti et al., 2012; Navratil et al., 2013]. Cependant ces méthodes sont à prendre avec précaution puisqu'une même pluie peut déclencher ou pas une lave torrentielle sur un même bassin versant [Bel et al., 2016].

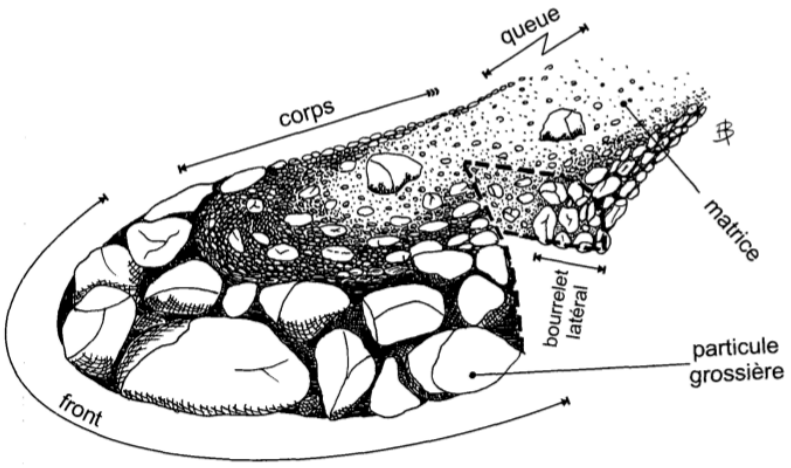

Figure 1.2 Représentation schématique de la structure d'une lave torrentielle, par Bardou [2002].

Les laves torrentielles sont donc des phénomènes difficilement prévisibles. Pour autant, elles sont observées dans de nombreuses régions montagneuses du monde. Ainsi, l'une d'elle a été particulièrement virulente, au Vénézuela, en 1999, en provoquant la mort de 20 000 personnes (Fig.1.1e). En mai 2014, une coulée de boue provoquée par la liquéfaction d'un pan de terrain s'est produite en Afghanistan (Fig.1.1d) et a enseveli plusieurs centaines de personnes. Enfin, la prédisposition à ce type de phénomène n'est pas toujours naturelle, puisqu'en décembre 2015, en Chine, un talus artificiel de près de 100 mètres de hauteur, construit avec les matériaux excavés d'une mine, s'est écroulé, peut être en se liquéfiant à la faveur d'événements pluviométriques intenses, rasant plusieurs bâtiments situés en aval (Fig.1.1b). Les régions volcaniques du monde sont sujettes à un cas particulier de coulées, nommées lahars, composées d'un mélange d'eau et de cendre [Vasquez et al., 2016]. Un lahar déclenché à la suite de fortes pluies, juste après l'éruption du Mont Saint-Helens, en 1980 aux Etats-Unis, parcourut ainsi 22 kilomètres et détruisit ponts, routes et bâtiments. Le Japon est aussi régulièrement touché par des laves torrentielles virulentes (exemple Fig.1.1c) [Takahashi, 2009]. En Europe, les laves torrentielles ont généralement moins d'ampleur que les exemples sus-cités, et leurs dégâts sont le plus souvent causés aux infrastructures (Fig.1.3 et 1.4).

1.2 Besoins opérationnels

Les bassins versant sujets aux laves torrentielles peuvent êtres urbanisés et habités, comme l'ont bien illustré les exemples précédents. Il existe donc concrètement un besoin de se protéger de ce type d'événements.

Les mesures de protection classiques, pour prévenir du risque qui pourrait être causé par l'aléa lave torrentielle et gérer les territoires, sont de deux ordres :
- les mesures structurelles, comme la construction d'ouvrages de protection (seuils, plages de dépôt) correctement dimensionnés pour accomplir leur rôle. De plus les ouvrages de franchissement classiques, comme les ponts, doivent aussi être dimensionnés dans le but d'assurer le transit d'écoulements de laves torrentielles sans mise en charge.

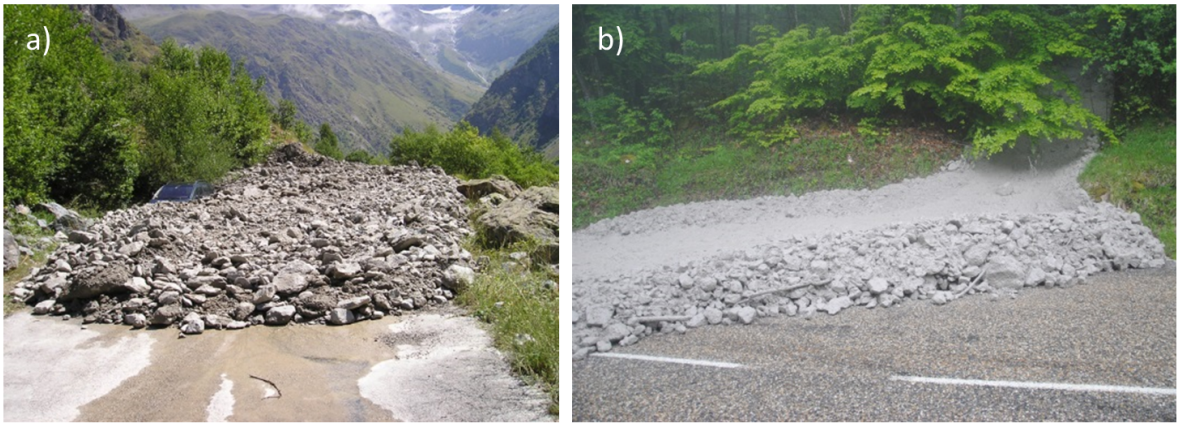

Figure 1.3 a) Laisse de crue d'une lave torrentielle, Valgaudemar (Hautes-Alpes) ©Irstea. b) Lave torrentielle du mont Granier (Isère), 13 mai 2016 ©Irstea.

- les mesures non structurelles, comme la cartographie des zones potentiellement impactées par ce type d'écoulements (Plan de Prévention des Risques) qui sert à réglementer les implantations humaines et les aménagements dans les zones exposées.

Afin de mettre en place ces mesures, les ingénieurs doivent connaître :
- l'extension et l'épaisseur de la lave torrentielle pour établir des cartes de risque (Fig.1.8) et dimensionner des ouvrages.
- la vitesse de l'écoulement, qui influence notamment les forces d'impact sur les ouvrages.

Pour déterminer ces caractéristiques et fournir des outils d'aide à la décision, les méthodes sont diverses : avis d'experts, modèles empiriques, modèles à base physique etc... Les modèles à base physique prennent aujourd'hui une place de plus en plus importante car ils peuvent fournir des informations complémentaires dans l'aide à la décision tout en reposant sur les principes de conservation universels (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie). Ces modèles physiques tiennent compte de la déformation du matériau en écoulement et doivent alors être alimentés par les lois de comportement (la rhéologie) qui permettent de prendre en compte la spécificité du matériau étudié.

Pour formuler des modèles capables de représenter le plus fidèlement possible les écoulements de laves torrentielles, les questions préliminaires suivantes se posent : Quels sont les mécanismes physiques qui gouvernent les écoulements de laves torrentielles ? Comment prendre en compte l'hétérogénéité apparente de ces phénomènes ? Quelle est la rhéologie des écoulements de laves torrentielles ?

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons les éléments de la littérature permettant de répondre à ces questions. Nous verrons qu'il existe différents types de laves torrentielles qui peuvent être associées à différents mécanismes. Nous nous intéressons plus spécifiquement dans cette thèse aux laves torrentielles boueuses, qui possèdent une forte fraction fine et nous verrons qu'elles peuvent être représentées par la catégorie des fluides à seuil, de rhéologie viscoplastique. Nous présenterons ainsi la loi de comportement correspondante et les particularités associées, notam-

Figure 1.4 Lave torrentielle du torrent Saint-Antoine à Modane (Savoie) le 5 août 2014. a) Vue du Saint-Antoine en direction de l'amont. b,c,d) Dégâts causés par la lave torrentielle.

ment la coexistence de zones liquides et solides dans l'écoulement. Enfin, nous verrons quels sont les modèles à base physique actuellement opérationnels utilisés pour simuler les écoulements de lave torrentielles et quelles sont les approximations qu'ils utilisent. Nous pourrons alors formuler les problématiques auxquelles nous chercherons à répondre dans cette étude.

1.3 Différents types de laves torrentielles

Pour concevoir des modèles à l'échelle de la lave torrentielle, il est nécessaire de représenter le matériau naturel par un milieu continu. Il existe aussi des modèles de type éléments discrets, qui séparent le milieu en une multitudes d'éléments distincts et calculent les contacts entre eux, dans le but de simuler la dynamique de la structure globale dans le temps [Renouf et al., 2006]. Mais ces modèles ne sont pas applicables à des phénomènes de grande échelle, comme les laves torrentielles, dont le volume typique varie dans la gamme [1000-10^6]m^3 [Chambon and Laigle, 2013].

Comme on peut le voir sur les différentes photographies (Fig 1.1), les laves torrentielles ont des compositions très diverses et contiennent plus ou moins d'éléments grossiers. Des processus

mécaniques différents gouvernent alors la rhéologie de ces mélanges d'eau et de particules [Coussot and Ancey, 1999a]. Les forces visqueuses, la turbulence, les collisions interparticulaires et les forces de frictions peuvent contribuer à la dynamique de ces écoulements [Berzi and Larcan, 2013]. Quels sont les effets prépondérants ? Comment quantifier ces différentes contributions ? Quels types de modèles correspondent à ces différents cas ?

1.3.1 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet de quantifier la contribution relative des différentes forces présentes dans l'écoulement. Schématiquement, on peut distinguer le régime visqueux, contrôlé par le fluide interstitiel qui lubrifie les contacts, du régime inertiel, correspondant au comportement granulaire, contrôlé par les interactions directes entre les grains (collision et friction) [Bagnold, 1954; Denlinger and Iverson, 2001; Coussot and Ancey, 1999a; Berzi and Larcan, 2013]. On propose de présenter 3 approches différentes pour distinguer ces deux régimes.

Pour Bagnold [1954], le régime inertiel se produit pour des taux de cisaillement ou des concentrations solides suffisamment importants pour que le phénomène de choc interparticulaire prédomine sur la viscosité interstitielle. Il propose alors de comparer la part d'énergie dissipée par les frottements visqueux, à la part d'énergie dissipée par les collisions entre les grains, sous forme d'un ratio (nommée par la suite nombre de Bagnold) :

$$Ba = \frac{\rho_p D^2 \dot{\gamma} \sqrt{\lambda}}{\eta}, \tag{1.1}$$

avec ρ_p la masse volumique des particules, D leur diamètre, η la viscosité dynamique du fluide interstitiel, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement et λ le rapport entre le diamètre des particules et la distance qui les sépare. La concentration est prise en compte indirectement dans le nombre de Bagnold au travers du terme λ. Lorsque le nombre de Bagnold est petit, cela signifie que les contacts entre particules sont négligés face à la viscosité du fluide interstitiel, le comportement est "visqueux". Inversement, le régime est inertiel lorsque le nombre de Bagnold est grand devant 1.

Berzi and Larcan [2013] proposent une autre définition du régime inertiel. Ils se basent sur le fait que le fluide interstitiel affecte le mouvement des particules de façon significative si le nombre de Stokes, qui compare l'énergie cinétique particulaire à l'énergie dissipée par le fluide, est faible [Berzi, 2011] :

$$St = \frac{d_p \sqrt{T} Re}{9} \tag{1.2}$$

avec Re le nombre de Reynolds particulaire, un autre nombre sans dimension, qui définit le ratio entre l'énergie cinétique et les dissipations visqueuses ($Re = \rho_f D \sqrt{gD}/\eta$), T la température granulaire qui représente l'énergie cinétique fluctuante des particules, assimilées à la pression effective des particules, et d_p la densité relative des particules. Ils en déduisent de cette façon que le comportement est granulaire dès que le diamètre des particules est grand devant 10^{-3}mm (d'après les valeurs caractéristiques de coulées naturelles données par Iverson [1997] et en prenant la viscosité de l'eau pour la matrice interstitielle). Le régime est visqueux lorsque le diamètre des particules est plus petit que 10^{-3}mm.

Dans ces nombres sans dimension, la concentration solide ou le taux de cisaillement sont pris en compte, directement ou indirectement, par exemple dans le paramètre λ du nombre de Bagnold ou dans la température granulaire dans l'étude de Berzi and Larcan [2013].

Coussot and Ancey [1999a] proposent d'utiliser ces deux grandeurs, la concentration solide et le taux de cisaillement, pour distinguer les différents régimes d'écoulement (Fig.1.5). Dans ce diagramme de phase, le régime inertiel peut être obtenu aux fortes concentrations pour un taux de cisaillement faible (E) ou fort (G). Le régime visqueux est obtenu lorsque le taux de cisaillement est faible, et que la concentration n'est pas trop élevée (C), ou que le taux de cisaillement augmente avec une forte concentration (F).

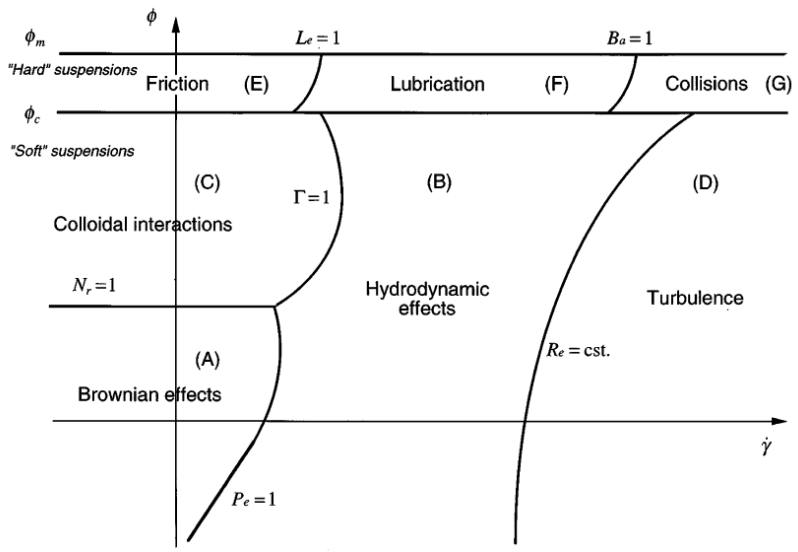

Figure 1.5 Classification des régimes rhéophysiques d'une suspension, en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ et de la fraction solide ϕ, par [Coussot and Ancey, 1999a].

L'analyse dimensionnelle permet effectivement de distinguer différents types de comportements mécaniques, comme le comportement visqueux correspondant à un régime lubrifié, ou le comportement granulaire correspondant à un régime inertiel. Mais les matériaux réels ont une granulométrie très étendue, qui n'est pas prise en compte par les divers nombres sans dimension. En définissant la valeur de la granulométrie coupure entre grains "grossiers" et grains "fins", on peut considérer un matériau hétérogène comme un mélange de particules grossières dans un fluide interstitiel, lui-même constitué de particules fines en interaction colloïdale. La viscosité interstitielle n'est plus celle de l'eau mais celle du mélange de particules fines, plus forte, et le régime visqueux est favorisé. La proportion en particules fines a un rôle clef que nous présentons ensuite.

1.3.2 Rôle de la granulométrie

Les critères opérationnels pour distinguer le comportement des laves torrentielles privilégient l'étude de la granulométrie, qui peut être réalisée en laboratoire à partir de prélèvements sur le terrain.

En étudiant un grand nombre de laves torrentielles naturelles du massif des Alpes, Coussot [1992] propose d'identifier le régime visqueux lorsque la fraction granulométrique de taille inférieure à $40\mu m$ est supérieure à 10% de l'ensemble du volume de la lave torrentielle. Cela revient à considérer que les particules fines contrôlent le comportement global du matériau et que les grains grossiers ne le modifient pas. Ce type de lave torrentielle est dit boueux ou à comportement viscoplastique.

Ancey [1999] propose de classer les laves torrentielles en fonction de leur granulométrie, en 3 modèles mécaniques représentatifs (Tab.1.1). Ce sont des modèles rhéologiques, qui expliquent comment les matériaux se déforment sous l'action de contraintes, à travers une loi de comportement locale. Les 3 modèles proposés sont :

- laves torrentielles *viscoplastiques*, composées d'une matrice fine avec une grande quantité d'argiles (les argiles sont définies comme des particules de diamètre inférieur à $2\mu m$). Ces laves torrentielles à matrice boueuse sont représentées par un modèle rhéologique viscoplastique, utilisé par exemple pour les pâtes et les suspensions concentrées [Bingham, 1922; Coussot, 2005].

- laves torrentielles à comportement *frictionnel-collisionnel* composées d'éléments plus grossiers. Ce type de laves est représenté par le modèle de Coulomb qui caractérise les forces de frottements qui s'exercent entre les grains au sein de l'écoulement, utilisé notamment pour les écoulements purement granulaires [Savage and Hutter, 1989, 1991; Jenkins, 1992]. L'approche de type Coulomb avec un coefficient de frottement constant est aujourd'hui remise en cause au profit d'un coefficient dépendant du taux de cisaillement [Berzi and Larcan, 2013] : c'est l'approche appelée "rhéologie $\mu(I)$" [GDR. Midi, 2004]. Cette approche rhéologique, plus aboutie que la loi de Coulomb, réussit à reproduire correctement différents aspects des écoulements granulaires secs rapides [Jop et al., 2006; Forterre and Pouliquen, 2008], mais également des écoulements granulaires avec un fluide interstitiel [Boyer et al., 2011].

- laves torrentielles à comportement *frictionnel-visqueux*, de type lahar, composées d'une matrice fine importante mais contenant principalement des silts (les silts ou limons, sont définis comme des particules de diamètres compris entre 2 et 50 μm) et peu d'argile. Ces laves sont représentées par un modèle granulaire de Coulomb aux faibles vitesses et leur comportement est supposé newtonien aux fortes vitesses.

Bardou [2002] représente les trois types de comportements présentés au tableau 1.1 sous forme de fuseaux granulométriques (Fig. 1.6), ce qui permet d'étendre le classement de Coussot [1992]. L'identification est réalisée sur la granulométrie d'échantillons prélevés sur des laves torrentielles naturelles. La fraction granulométrique étudiée s'étend à 20 mm, ce qui permet le prélèvement de petits volumes de matériau et l'analyse en laboratoire.

Dans la suite de cette étude, nous nous intéressons essentiellement aux laves torrentielles boueuses, composées d'une forte fraction d'argile, qui peuvent être représentées par un modèle rhéologique de type viscoplastique. Nous préciserons au §1.5 les propriétés de tels écoulements. Mais avant cela, il est important de mentionner qu'il existe aussi des modèles biphasiques dont le principe s'oppose à l'approche du fluide homogène.

Nom scientifique proposé	Lave torrentielle à comportement viscoplastique	Lave torrentielle à comportement frictionnel-collisionnel	Lave torrentielle à comportement frictionnel-visqueux
Caractéristiques mises en évidence en laboratoire :			
Rhéologie (Loi de comportement)	Viscoplastique (Bingham, Herschel-Bulkley)	Coulomb	Coulomb aux faibles vitesses et newtonienne aux fortes vitesses
Granulométrie	Matrice fine importante forte quantité d'argiles	Matrice fine faible, peu d'argiles	Matrice fine importante, peu d'argiles et beaucoup de silts
Essais d'identification des sols	Sols argileux	Sols grossiers	Sols limoneux, le plus souvent d'origine volcanique

Table 1.1 Résumé de la classification des laves torrentielles proposée par [Ancey, 1999].

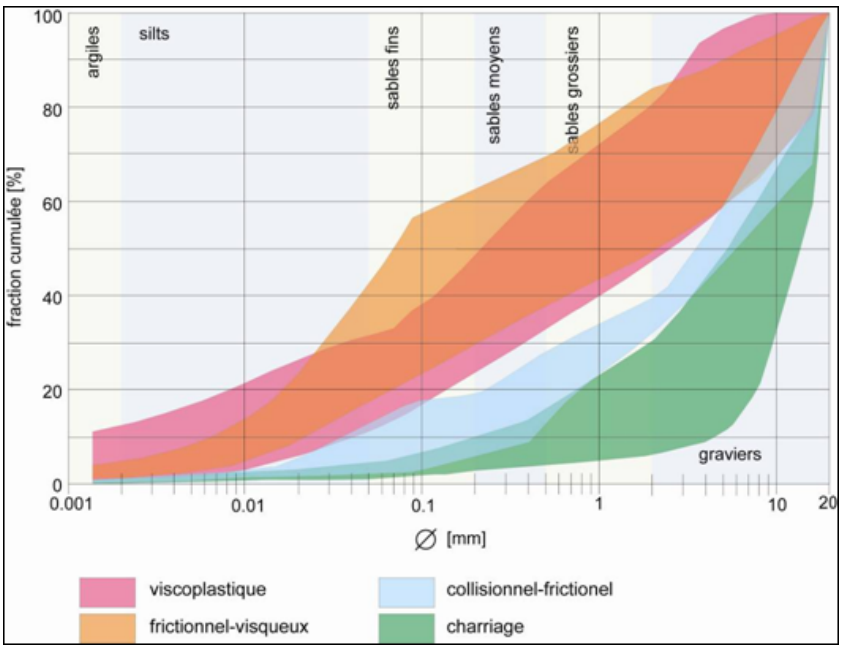

Figure 1.6 Fuseaux granulométriques en fonction du type de comportement rhéologique, par [Bardou, 2002].

1.4 Modèles biphasiques vs monophasiques

Lorsque le régime est dominé par les collisions et la friction entre les particules, Iverson [1997, 2003]; Iverson and George [2014] montrent que la pression interstitielle, liée à la force d'interaction interparticulaire, joue un rôle important. Le mécanisme des laves torrentielles est alors trop com-

plexe pour être représenté par un modèle de type monophasique comme si le fluide était homogène [Iverson, 2003, 1997].

Iverson [2003] s'oppose ainsi à l'approche monophasique, et propose de séparer les contributions de la phase fluide des contributions solides dans les équations de la dynamique de l'écoulement, notamment pour faire ressortir l'importance de la pression interstitielle. Cette dernière, si elle est suffisamment forte, tend à liquéfier la coulée, et devient alors responsable de la mobilité des laves torrentielles. Iverson [1997] propose donc un modèle appelée biphasique (ou *mixture theory*), et s'appuie notamment sur les travaux de Takahashi [1991]. Dans ces modèles biphasiques, la dynamique de l'écoulement d'une lave torrentielle est déterminée par un couplage entre l'évolution de la pression interstitielle et le mouvement relatif des constituants granulaires de l'écoulement [Iverson, 1997; Gray and Thornton, 2005; Tunuguntla et al., 2014; Bouchut et al., 2016].

Mais, dans les études d'Iverson, la matrice fine des laves torrentielles observées est constituée principalement de silts et constitue moins de 10 % de la masse totale [Iverson, 1997]. D'ailleurs, la plupart des études Américaines et Japonaises au sujet des laves torrentielles reportent des matériaux essentiellement granulaires (sables, graviers et blocs), avec une matrice interstitielle composée d'eau et d'une très faible quantité d'argile, [Daido, 1971; Takahashi, 1991; Pierson, 1995; Major, 1997]. Le régime inertiel (collision et friction prédominent) est effectivement représentatif de ces laves torrentielles naturelles à forte concentration en éléments grossiers [Berzi and Larcan, 2013]. L'objet d'étude est donc différent des laves torrentielles boueuses, observées par exemple par Bardou [2002] et Coussot [1992], qui possèdent une forte fraction fine (*cf.* § 1.3.2).

Coussot [1992] estime que les chocs et la friction ne sont pas prédominants dans les mélanges avec une forte fraction fine tels que ceux qu'il a prélevé dans le massif des Alpes, puisque la forte viscosité de la matrice interstitielle empêche les mouvements d'agitation nécessaires au régime inertiel de Bagnold et la friction entre les grains n'a pas lieu.

Finalement, il apparaît que les laves torrentielles sont hétérogènes, et présentent souvent des zones granulaires et liquéfiées [Hungr et al., 2005; Iverson, 2013]. L'approche biphasique nous permettrait de rendre compte des processus de migration et de ségrégation responsable de la formation d'un front granulaire [Iverson, 1997]. Mais s'agissant de laves torrentielles à forte fraction fine, la friction entre les grains n'est pas dominante et on peut légitimement utiliser un modèle monophasique [Coussot, 1992; Ancey, 2001; Bardou, 2002].

1.5 Propriétés des laves torrentielles boueuses

Comme nous l'avons vu précédemment, une certaine catégorie de lave torrentielle peut être représentée par un comportement rhéologique viscoplastique, ce sont les laves torrentielles de type "boueux". Nous nous intéressons spécifiquement à ce type de laves torrentielles dans le cadre de cette thèse. Nous allons voir comment l'existence d'une loi de comportement locale (la variation de la contrainte en fonction du taux de déformation) de type viscoplastique dans ces écoulements a été mise en évidence et quelles en sont les conséquences.

1.5.1 L'existence d'un seuil d'écoulement

Des mesures de courbes d'écoulement (évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement appliqué) sur des échantillons de laves torrentielles naturelles dont la fraction fine ($< 40\mu m$) a été estimée à environ 10% ont été présentées par Coussot et al. [1998]. Pour mesurer les courbes d'écoulement en laboratoire, les auteurs se sont servi d'un rhéomètre classique, en écrêtant les particules de diamètre supérieur à $40\mu m$ dans l'échantillon. Ils montrent que ces échantillons peuvent être représentés par le modèle rhéologique viscoplastique de Herschel-Bulkley (Fig.1.7a). Ce modèle représente un matériau possédant un seuil de contrainte (τ_c), en dessous duquel le taux de déformation est nul ($\dot{\gamma} = 0$), et au dessus duquel la contrainte varie non linéairement en fonction du taux de déformation ($\tau = \tau_c + K\dot{\gamma}^n$), avec K la consistance et n l'indice d'écoulement. Au dessus du seuil, la viscosité apparente diminue (le matériau se "fluidifie") avec l'augmentation du taux de déformation.

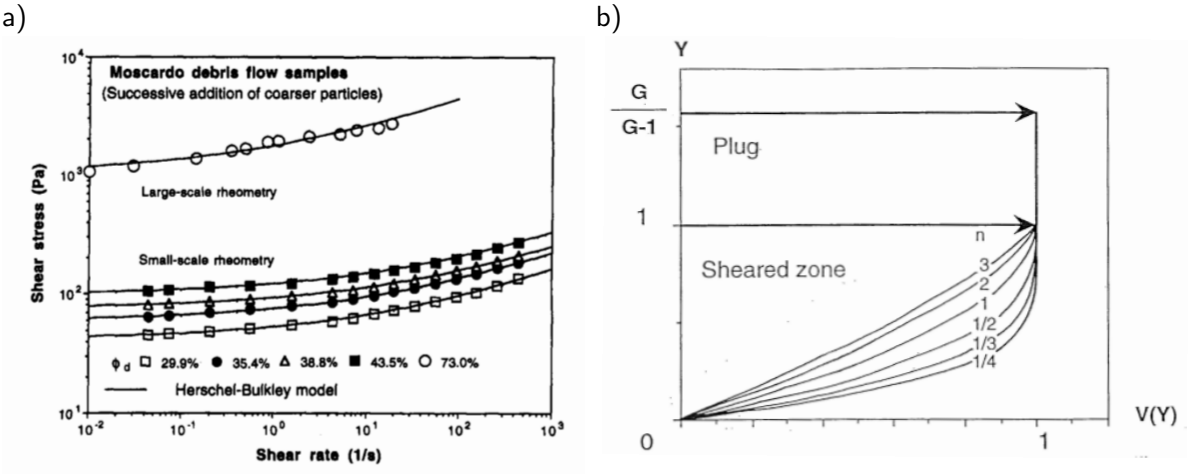

Figure 1.7 a) Mesures de courbes d'écoulement et ajustement par un modèle de Herschel-Bulkley, Coussot et al. [1998]. b) Forme du profil de vitesse dans l'épaisseur d'un écoulement uniforme de fluide de Herschel-Bulkley pour différentes valeurs d'indice d'écoulement, Coussot [1994].

D'après les courbes d'écoulement de Coussot et al. [1998], l'ajout de grains grossiers et l'augmentation de la concentration en sédiment ne modifie pas le bon accord avec un modèle rhéologique de Herschel-Bulkley, mais provoque simplement l'augmentation du seuil et de la consistance (Fig.1.7a). D'autres expériences, mettant en jeu des mélanges d'eau et de grains de tailles différentes, ont montré que le comportement de l'ensemble du matériau peut être considéré comme viscoplastique, si la fraction fine est suffisamment importante [Ancey, 2001; Pierson and Costa, 1987].

Plus récemment, Ovarlez et al. [2015] ont montré, avec des techniques de mesures parmi les plus performantes à ce jour (Imagerie par Résonance Magnétique), que les suspensions de particules dans un fluide à seuil pouvaient effectivement être approchées par la loi de comportement viscoplastique de Herschel-Bulkley. L'augmentation de la concentration en particules, jusqu'à 50% en concentration volumique, provoque l'augmentation de la consistance et de la contrainte seuil. La transition entre le régime d'écoulement visqueux (les forces de viscosité de la phase fluide

dominent) à inertiel (les forces de collision et de friction entre les particules dominent) se produirait pour des concentrations plus élevées.

En résumé, le modèle viscoplastique de Herschel-Bulkley convient, en première approximation, pour modéliser la loi de comportement des laves torrentielles boueuses.

1.5.2 L'existence d'un plug

L'existence d'un seuil d'écoulement implique qu'il peut exister au sein de ces écoulements, là où la contrainte est inférieure à la contrainte seuil, des zones à l'état solide, non cisaillées : des zones mortes ou plugs. Dans un écoulement à surface libre de fluide de Herschel-Bulkley, une telle zone de plug se situe sous la surface libre, au dessus d'une zone cisaillée, comme on peut le voir sur la figure 1.7b, [Coussot, 1994; Lipscomb and Denn, 1984]. Balmforth and Craster [1999] ont montré que la région du plug est en réalité légèrement cisaillée dès que l'écoulement n'est pas parfaitement uniforme, et devrait donc plus précisément être nommée pseudo-plug. C'est peut être ce pseudo-plug qui confère aux laves torrentielles la capacité de transporter des éléments flottants lourds (graviers, troncs d'arbres, blocs rocheux) en surface.

1.6 Modélisation opérationnelle des laves torrentielles

1.6.1 Équations de Saint-Venant

Les célèbres équations de Navier et Stokes, établies au milieu du XIX^e siècle, permettent de décrire le mouvement des fluides, en exprimant la vitesse et la pression en tout point de l'écoulement. Notons qu'elles ont été établies initialement pour un fluide newtonien, mais il est courant pour les auteurs travaillant avec une rhéologie plus complexe de garder le nom d'équations de Navier-Stokes.

Certaines méthodes de calcul numérique performantes (Computational Fluid Dynamics) permettent aujourd'hui de résoudre numériquement ces équations [Yu and Wachs, 2007]. Cependant, avec la présence d'une surface libre et d'une rhéologie complexe, elles nécessitent des temps de calculs très grands, et sont donc difficiles à utiliser opérationnellement [Balmforth et al., 2014]. Pour les fluides à seuil, la difficulté est notamment de reproduire correctement le plug solide sous la surface libre, et de suivre l'évolution de l'interface qui le sépare de la zone cisaillée [Balmforth et al., 2006, 2014].

Les difficultés à résoudre les équations de Navier-Stokes ont poussé les scientifiques à établir des modèles de complexité réduite mais capable de représenter les écoulements qui les intéressent de façon pertinente, comme les équations de Saint-Venant dans le cas d'écoulements à surface libre [Gerbeau and Perthame, 2001; Paquier, 2002].

Les équations de Saint-Venant (ou *shallow water*), établies dès 1871 par Barré de Saint-Venant, s'appliquent aux écoulements qui ont une longueur importante devant leur épaisseur caractéristique. C'est un modèle dit de couche mince, intégré dans l'épaisseur, qui propose un jeu d'équations reliant la hauteur h à la vitesse moyenne $\bar{u}$ de l'écoulement.

Les équations du modèle de Saint-Venant classique en 1D (sans extension latérale), avec x la direction longitudinale et θ l'angle de la pente, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} &= 0 \\ \rho\left(\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x}\right) &= \rho g h \sin\theta - \rho g h \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_b \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pour fermer le système, ce modèle doit être complété par une loi de fermeture exprimant la contrainte basale τ_b (appelée souvent loi de résistance, de friction ou de frottement). La spécificité du matériau étudié (*i.e.* sa rhéologie et donc la forme du profil de vitesse dans l'écoulement), est prise en compte au travers de cette contrainte basale uniquement.

En pratique, les lois de résistance reposent sur des modèles de rhéologie locale (newtonienne, viscoplastique type Bingham, viscoplastique type Herschel-Bulkley,...), ou des lois *ad-hoc* empiriques calées à partir de données de références (Voellmy, Chezy,...).

Un grand nombre d'écoulements peuvent être considérés comme étant de couche mince, comme les écoulements des rivières, les mascarets ou encore les tsunamis. Les évolutions industrielles de notre époque ont aussi fait apparaître un grand nombre de ces configurations comme le coulage du béton, la peinture ou les films ruisselants. Bien sûr, les phénomènes de coulées de boue ou laves torrentielles, de hauteur caractéristique 1 m pour une longueur typique souvent supérieure à 1000 m [Iverson, 1997; Rickenmann et al., 2006] entrent aussi dans le cadre des écoulements de couche mince, et sont modélisables par les équations de Saint-Venant [Iverson, 1997; Mangeney-Castelnau et al., 2003; Ancey, 2007].

La simulation de ces phénomènes naturels est un enjeu important dans la prise de décision, pour la gestion des territoires et des ouvrages. Des modèles opérationnels pour les laves torrentielles ont alors été développés dans le but d'apporter une aide à la décision. Ils reposent tous sur la résolution numérique des équations de Saint-Venant.

1.6.2 Exemples de modèles opérationnels

Nous présentons ici 3 outils numériques utilisant le modèle Saint-Venant, couramment utilisés pour simuler les écoulements de laves torrentielles : Lave2D, Ramms et Flo2D.

• Lave 2D : approche rhéologique

Lave 2D est un modèle développé à Irstea qui est fondé sur une loi de comportement de Herschel-Bulkley. La contrainte basale est calculée comme la somme d'une contribution de la contrainte seuil et d'une contribution visqueuse, en utilisant une expression semi-empirique [Coussot, 1994]. Cette expression semi-empirique consiste en une approximation de la formulation complète basée sur la rhéologie de Herschel-Bulkley. C'est un modèle plutôt adapté aux laves torrentielles boueuses

qui a été mis en œuvre dans des cas concrets d'expertises (Fig1.8). Il est utilisé notamment par le service de Restauration des Terrains de Montagne de l'Office National de Forêts (RTM).

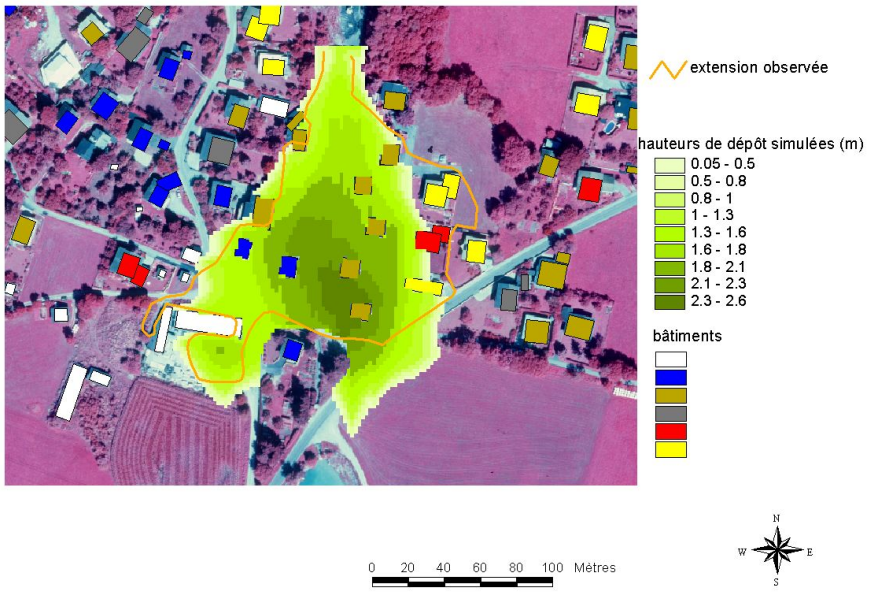

Figure 1.8 Extensions réelles et simulées avec Lave 2D de la lave torrentielle du Wartschenbach (Autriche) de volume 23 000 m^3, d'après Rickenmann et al. [2006].

- Ramms : approche empirique de type loi de Voellmy

Le modèle Ramms utilise une loi de comportement empirique de type Voellmy. Ainsi, dans ce modèle, la contrainte basale est la somme d'une contribution frictionnelle de type Coulomb et d'une contribution turbulente de type Chézy. Le modèle de Voellmy a été initialement développé pour calculer les distances de parcours et la vitesse des avalanches [Voellmy, 1955]. Les paramètres de la loi de comportement sont déterminés de façon à convenir à ce qui est observé (par rétro-calage), sans rendre compte des phénomènes qui se produisent à l'échelle locale, comme le fait l'approche rhéologique. Ce modèle fut d'abord utilisé pour les avalanches de neige, mais est aussi appliqué au cas des laves torrentielles plutôt granulaires (http ://ramms.slf.ch/ramms/).

- Flo2D : approche mixte, empirique-rhéologique

Le modèle Flo2D ($http://www.flo-2d.com/$) repose sur une loi de comportement de Bingham (la somme d'une contrainte seuil et d'une contribution visqueuse newtonienne), à laquelle s'ajoute une contribution turbulente empirique de type Chézy. Contrairement au modèle de Herschel-Bulkley, le modèle de Bingham n'est généralement pas représentatif de la courbe d'écoulement des laves torrentielles naturelles lorsqu'elle couvre plusieurs ordres de grandeur de taux de déformation. Concrètement, ce modèle a fait l'objet de nombreuses études par le RTM pour modéliser les laves torrentielles de type granulaires ou bouseuses du massif des Alpes françaises et des Pyrénées.

1.6.3 Approximations réalisées

Comme nous l'avons dit, les modèles Saint-Venant reposent sur l'hypothèse de couche mince, dans laquelle l'épaisseur de l'écoulement est considérée comme faible devant sa longueur ($\epsilon = H/L \ll 1$). Par définition, cette hypothèse n'est plus physiquement valable lorsque les variations de hauteurs sont importantes, comme au front de coulées, mais aucune étude expérimentale à notre connaissance ne propose de quantifier à quel endroit exactement cette hypothèse cesse d'être valide.

En plus de l'approximation de couche mince, les modèles Saint-Venant classiques reposent sur plusieurs autres approximations qu'il faut garder en mémoire lors des utilisations opérationnelles (*cf* § 2.3.2.2 pour les détails sur les approximations réalisées).

Le terme d'inertie des équations de Saint-Venant classiques $\partial_x \bar{u}^2$, devrait être multiplié par un coefficient de forme (souvent appelé coefficient β). Ce coefficient pourrait être calculé à partir de la connaissance de la loi de comportement, mais en pratique, il est souvent choisi égal à 1 (Lave2D, Ramms, Flo2D, [Iverson, 1997; Rickenmann et al., 2006]), ce qui revient à considérer un profil de vitesse uniforme dans l'épaisseur. Cette hypothèse est arbitraire, elle est appliquée pour faciliter le développement des équations en faisant apparaître la variable $\bar{u}$, mais ne correspond pas à la réalité de l'écoulement.

La loi de fermeture pour le calcul de la contrainte basale est couramment calculée en se basant sur l'expression du profil de vitesse du régime permanent uniforme, et ce même en régime non uniforme. L'évolution de la forme du profil de vitesse dans les zones non-uniformes (au droit de variations de topographie basale, au front de la coulée,..) n'est alors pas prise en compte dans les modèles de Saint-Venant. C'est une hypothèse courante en hydraulique à surface libre [Chow, 1959], alors que des corrections du profil de vitesse devraient être prises en compte [Ruyer-Quil and Manneville, 1998; Fernandez-Nieto et al., 2010]. De plus, dans le cas d'un fluide possédant un seuil d'écoulement, comme les laves torrentielles boueuses, le profil de vitesse est constitué d'une zone cisaillée et d'un plug. Le calcul de l'épaisseur de la zone de plug ajoute une complexité supplémentaire dans la formulation de la relation de fermeture. Les expressions généralement employées en pratique reviennent à faire l'hypothèse que l'épaisseur du plug s'amincit à mesure que la hauteur diminue, à l'approche du front d'une coulée par exemple, en ne disparaissant qu'à la ligne de front (*cf* §2.3.3.3) [Coussot, 1994].

Signalons que les modèles de Saint-Venant classiques, utilisés opérationnellement dans les outils présentés précédemment, ne sont en fait pas consistants mathématiquement, ce qui signifie qu'ils ne sont pas issus de développements asymptotiques rigoureux et ne tendent donc pas, lorsque ϵ tend vers 0, vers la solution exacte du modèle complet des équations primitives [Piau, 1996; Ruyer-Quil and Manneville, 1998; Fernandez-Nieto et al., 2010].

Afin d'améliorer les modèles, il y a donc un réel besoin de connaître les évolutions du profil de vitesse en zones non-uniformes, en disposant de mesures expérimentales pour la documenter, et d'établir des relations de fermetures consistantes d'un point de vue mathématique qui prennent en compte ces évolutions.

1.7 Objectifs et organisation du manuscrit

Le modèle de couche mince intégré sur l'épaisseur, **Saint-Venant**, utilisé classiquement pour simuler la propagation de laves torrentielles et coulées boueuses, repose sur plusieurs approximations concernant la forme des profils de vitesse en zones **non-uniformes**. Il est pourtant nécessaire d'utiliser ce type de modélisation, comme outil d'aide à la gestion des risques liés aux laves torrentielles. Nous proposons d'éprouver le modèle de Saint-Venant et ses hypothèses, en observant une zone fortement non-uniforme, le front de coulées à surface libre et le champ de vitesse à l'intérieur de cette zone. D'une part, nous avons besoin de documenter expérimentalement l'évolution des **profils de vitesse** (de la **dynamique interne**) au front de ces coulées. D'autre part, c'est en améliorant notre connaissance de l'évolution de la forme des profils de vitesse au front de ces coulées que nous pourrons améliorer les modèles de couche mince.

L'objectif de cette thèse est de **caractériser la dynamique interne au front d'écoulements à surface libre de fluides viscoplastiques**, dans le contexte opérationnel de l'amélioration des outils de simulation de la propagation des laves torrentielles. L'acquisition d'une **base de données expérimentales** bien contrôlée, qui permettra de documenter la dynamique interne au front de coulées à surface libre, constitue le premier enjeu de cette étude. La comparaison des résultats expérimentaux aux modèles de couches minces, existants mais aussi développés de façon originale dans cette étude en constitue un second. L'utilisation d'un modèle de **lubrification**, à la base du modèle de Saint-Venant, permettra de tester la validité et la performance de celui-ci. Le développement théorique et l'utilisation d'un **modèle à l'ordre 1**, qui inclue des contributions alors négligées dans le modèle de Saint-Venant, permettra de tester l'influence des hypothèses de ce dernier.

Les travaux présentés reposent sur des mesures expérimentales réalisées en laboratoire visant à caractériser les champs de vitesse à l'intérieur de coulées à surface libre de fluides à seuil. L'étude du front est particulièrement importante, l'exploration des profils de vitesse à cet endroit permettra d'observer leur évolution et celle du plug dans une zone fortement non-uniforme. De plus, au front, les limites de validité des modèles de couches minces pourront être éprouvées.

Les mesures ont été effectuées sur un canal à fond mobile, développé au sein du laboratoire Irstea [Chambon et al., 2009; Ghemmour, 2011; Chambon et al., 2014]. Ce canal présente l'avantage de générer des coulées stationnaires dans le référentiel de l'observateur, facilitant les mesures d'un phénomène normalement transitoire sur un plan incliné classique. Au cours de cette thèse, différentes solutions techniques ont dû être développées pour permettre la mesure du champ de vitesse à haute résolution à l'intérieur de l'écoulement, de la zone uniforme au front. Une série d'expériences a été réalisée sur un fluide à seuil modèle, le gel de Carbopol. Des expériences ont aussi été conduites sur un fluide newtonien, le sirop de glucose, afin de valider les modèles théoriques utilisés et les techniques expérimentales. Deux modèles théoriques ont été confrontés à ces mesures : le modèle de lubrification, qui est à la base du modèle de Saint-Venant classique, et un modèle de couche mince consistant à l'ordre 1 développé dans cette thèse.

• Dans le **chapitre 1** nous avons introduit les laves torrentielles et coulées boueuses. Nous avons vu qu'elles sont composées d'un mélange hétérogène de sédiments dans une matrice interstitielle. Les laves torrentielles de type "boueux" (à forte fraction argileuse) peuvent être représentées, en première approximation, par un comportement viscoplastique de type Herschel-Bulkley. Enfin nous avons présenté les modèles opérationnels utilisés pour modéliser l'écoulement des laves torrentielles. Nous avons expliqué les approximations sur lesquelles ils reposent, et la complexité apportée par la rhéologie viscoplastique.

• Le **chapitre 2** est consacré à un état de l'art concernant la rhéologie des fluides à seuil et son intégration dans les modèles d'écoulement. Nous présenterons une description des recherches menées récemment sur les fluides à seuils. Nous verrons quelles ont été les différentes contributions scientifiques utilisant le modèle de Saint-Venant dans le but de simuler les écoulements à surface libre de ce type de fluides. Nous présenterons la forme générale des modèles intégrés sur l'épaisseur et nous pourrons présenter plus en détail les approximations sur lesquelles le modèle de Saint-Venant classique repose. Enfin, nous réaliserons un état des lieux concernant les expériences réalisées sur les écoulements gravitaires à surface libre dans le contexte de la validation des modèles de couche mince.

• Le développement des modèles théoriques sera détaillé au **chapitre 3**. Nous avons réalisé un travail théorique original, et obtenu les expressions de la vitesse et du débit à **l'ordre 1 en** ϵ pour des fluides de Herschel-Bulkley. Ce modèle à l'ordre 1 est développé avec le choix d'échelle $\epsilon Re/Fr^2 \approx 1$, c'est à dire autour d'une solution de base (l'ordre 0) qui correspond au régime de lubrification. Ce modèle consistant inclue des corrections provenant des contraintes normales, négligées dans le modèle de Saint-Venant classique, et des corrections inertielles. Nous pourrons alors décrire les solutions du modèle à l'ordre 1, les comparer aux résultats du modèle de lubrification, et tester l'influence de ces deux corrections.

• Dans le **chapitre 4** nous ferons la description du dispositif expérimental et de l'instrumentation associée. Nous verrons quelles ont été les solutions techniques que nous avons mises en œuvre pour obtenir des champs de vitesse à haute résolution spatiale. Nous détaillerons les expériences déjà réalisées par le passé avec ce dispositif pour mettre en lumière les évolutions de notre expérience et l'originalité des résultats présentés ensuite. Nous comparerons les champs de vitesses obtenus avec une méthode PIV et avec une méthode spatio-temporelle et nous verrons que cette dernière fournit de meilleures performances.

• Les matériaux utilisés dans nos expériences et leur rhéologie sont étudiés au **chapitre 5**. Nous avons utilisé dans nos expérimentations, un matériau modèle au comportement similaire à celui de la matrice des laves torrentielles boueuses : le **gel de Carbopol**, et un matériau newtonien : le **sirop de glucose**. Nous verrons que le gel de Carbopol possède bien un comportement de Herschel-Bulkley. Nous détaillerons le protocole mis en œuvre pour mesurer les courbes d'écoulement, montrer que les effets thixotropes restent négligeables et qu'il existe toutefois un régime élastique aux petites déformations dans nos échantillons. Avec les mêmes méthodes, nous montrerons que le sirop de glucose présente un comportement newtonien. Enfin nous présenterons les

champs de vitesse obtenus en zone uniforme. Nous verrons que la rhéologie de type Herschel-Bulkley (newtonienne) caractérise bien les propriétés des écoulements de gel de Carbopol (sirop de glucose) en zone uniforme.

• Le **chapitre 6** est consacré à l'étude expérimentale des champs de vitesse à l'intérieur de coulées gravitaires de fluides **newtoniens**, ainsi qu'à la forme des fronts, et à la comparaison avec un modèle de **lubrification**. Cette étude permet de valider nos protocoles expérimentaux et le modèle de lubrification dans un cas de loi de comportement simple.

• Le **chapitre 7** est consacré à l'étude expérimentale des champs de vitesse à l'intérieur de coulées gravitaires de fluides **viscoplastiques**, ainsi qu'à la forme des fronts, et à la comparaison à un modèle de **lubrification**. Ces résultats ont été publiés par le journal *"Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics"* et sont donc reportés tels qu'ils ont été publiés, sous forme d'un article rédigé en anglais. Nous verrons que des désaccords entre les données expérimentales et les prédictions du modèle apparaissent proche du front. Nous avons ensuite ajouté des compléments, permettant de présenter l'ensemble des expériences réalisées durant cette thèse.

• Le **chapitre 8** est consacré à la comparaison entre les résultats expérimentaux et les prédictions théoriques à l'**ordre 1 en** ϵ des champs de vitesse et des formes de fronts. Nous verrons que les prédictions du modèle à l'ordre 1 permettent d'améliorer l'accord avec les mesures expérimentales.

Enfin, nous présenterons nos conclusions et perspectives. Nous pourrons dresser un bilan sur l'évolution des profils de vitesse au front d'écoulements à surface libre, et les divergences qu'il existe avec les hypothèses du modèle de Saint-Venant. Nous présenterons un modèle intégré dans l'épaisseur de type Saint-Venant basé sur les développements consistants d'ordre 1 que nous avons effectué, comme une première étape avant d'être intégré dans un **outil de simulation opérationnel**.

Chapitre 2

État de l'art

Dans ce chapitre, nous présentons un état des connaissances en trois parties. D'abord, nous proposons une revue concernant la rhéologie des fluides à seuil, notamment le modèle rhéologique de Herschel-Bulkley, et les problématiques de recherche récentes autour de la transition *solide-fluide* de ces matériaux. Nous présenterons ensuite la forme générale des modèles intégrés sur l'épaisseur et les approximations sur lesquelles le modèle de Saint-Venant classique repose. Nous verrons comment le modèle de Saint-Venant a été appliqué aux fluides viscoplastiques au travers plusieurs exemples de loi de fermeture. Nous présenterons ensuite l'approche que certains auteurs ont adoptée pour élaborer des modèles de type Saint-Venant consistants. Nous terminerons en présentant les principales études expérimentales réalisées avec des fluides à seuil dans le but d'étudier les laves torrentielles et de tester des modèles de couche mince. Nous pourrons alors positionner l'apport de notre étude.

2.1 Les fluides à seuil

2.1.1 Généralités sur les fluides à seuil

Comme nous l'avons vu précédemment, le matériau constituant les laves torrentielles boueuses présente un seuil de contrainte, c'est à dire qu'il faut lui imposer une contrainte minimum pour déclencher l'écoulement. D'autres matériaux de notre environnement possèdent des propriétés similaires. Par exemple, les laves volcaniques, les avalanches de neige dense, le sang, le mucus d'escargot ou le liquide synovial ont des propriétés de fluide à seuil. Dans notre vie courante, nous manipulons des fluides à seuil comme le dentifrice, la mayonnaise, la peinture, le béton ou les gels (Fig.2.1). Le seuil de contrainte confère par exemple à la peinture, l'avantage d'être étalée facilement (peinture à l'état fluide), mais empêche les coulures (peinture à l'état solide). Le dentifrice, s'écoule sous l'action d'une contrainte, pour sortir de son tube, mais reste solide lorsque qu'il est déposé sur la brosse à dent. Enfin, les crèmes cosmétiques présentent un régime solide pour tenir sur le doigt, mais aussi un régime liquide pour pénétrer dans la peau.

Pour les laves torrentielles, l'existence d'un seuil leur confère la possibilité de s'arrêter sur des pentes non nulles. On peut alors parfois retrouver la forme d'une bouffée dans les laisses de crue déposées à la suite d'une lave torrentielle (exemple Fig. 1.3a).

Figure 2.1 Exemples de matériaux présentant des propriétés de fluides à seuil : a) dentifrice, b) mucus d'escargot, projet de robot-escargot par [Chan et al., 2007], c) béton ©Tekla, d) lave volcanique ©Loïc Jaffro, e) lave torrentielle boueuse à Pontamafrey (France, 73) ©Laurent Desvigne, f) peinture ©Orédia.

Les fluides à seuil sont constitués d'éléments relativement grands (nm-mm typiquement) tels que des bulles, des pigments, des cristaux ou des argiles dans un fluide (matrice) interstitiel. Si la concentration en éléments reste faible, le matériau est homogène et possède un comportement newtonien dont la viscosité augmente avec l'augmentation de la concentration [Einstein, 1956; Metzner, 1985]. Lorsque la concentration est grande et dépasse une valeur seuil, les éléments entrent en interaction (forces colloïdales, contacts mécaniques ou forces hydrodynamiques) et "bloquent" le système, un seuil de contrainte apparaît [Pierson and Costa, 1987; Coussot and Ancey, 1999a]. A l'échelle microscopique, les particules en interaction forment une structure tridimensionnelle à travers l'ensemble du matériau [Putz and Burghelea, 2009]. L'énergie due à ces interactions est bien supérieure à l'agitation thermique, les mouvements browniens ne peuvent pas déconstruire le réseau de particules et le matériau ne peut donc pas s'écouler [Coussot and Ancey, 1999b,a].

On peut représenter ces particules, au repos, comme piégées dans des minimums locaux d'énergie (métastabilité) [Sollich et al., 1997; Coussot and Ancey, 1999b; Bonn et al., 2002; Putz and Burghelea, 2009]. Pour provoquer l'écoulement, l'énergie appliquée au matériau doit dépasser la barrière d'énergie de la structure qui maintient le matériau solide (Fig.2.2). A l'échelle macroscopique, il faut appliquer une contrainte suffisamment forte au matériau pour démarrer l'écoulement. La contrainte seuil est la contrainte minimum à appliquer pour provoquer la transition *solide/fluide*.

Bien sûr, la rhéologie des matériaux, notamment naturels, est souvent plus complexe que la seule viscoplasticité, et comprend des effets comme l'élasticité (la structure se déforme et peut retourner à son état initial sans être endommagée), la thixotropie (propriété souvent indissociable de l'existence d'un seuil d'écoulement [Coussot et al., 2002a], qui rend la viscosité dépendante du temps et de l'histoire du matériau, voir la revue [Barnes, 1997]), ou encore des variations de ces propriétés en fonction des conditions de température, pression, pH, concentration etc... Le magma

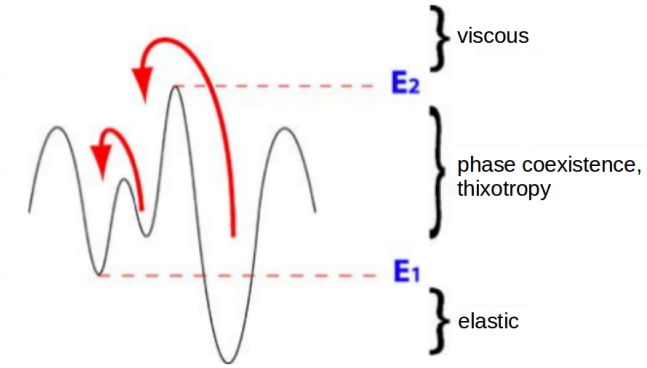

Figure 2.2 Schéma d'un spectre possible des énergies de liaisons d'un fluide à seuil de type gel, par Putz and Burghelea [2009], inspiré de Sollich et al. [1997]. Les éléments sont prisonniers dans des puits de potentiels de différentes profondeurs. Si une énergie E inférieure à E_1 est appliquée, la structure se déforme, et lorsque la sollicitation est relâchée, le matériau retrouve son état structural initial (comme un solide élastique). Lorsque $E > E_2$, la structure est brisée le fluide s'écoule, c'est le régime visqueux.

peut être par exemple considéré comme un fluide à seuil [Blake, 1990], dont la structure est bloquée par la présence de cristaux et de bulles, mais par ailleurs sa composition en cristaux se modifie en fonction de la température. De même, le sang, composé de globules rouges, peut être considéré comme un fluide à seuil [Rodkiewicz et al., 1990], mais en pratique la concentration d'agrégats de globules rouges varie selon les vaisseaux et l'état de santé du patient, modifiant sa rhéologie [Baskurt and Meiselman, 2003]. Certains mélanges d'eau et d'argile peuvent aussi présenter des comportements complexes, comme la thixotropie [Coussot and Ancey, 1999b; Coussot et al., 2002a]. Dans ces mélanges argileux, le seuil de mise en écoulement diffère selon l'histoire du matériau, par exemple selon la durée pendant laquelle il a été laissé au repos [Huynh et al., 2005].

2.1.2 Écoulements de fluide à seuil : existence de plugs

Comme nous l'avions présenté au §1.5.2, l'existence d'un seuil de contrainte implique souvent la coexistence de zones liquides et solides dans l'écoulement. L'écoulement est alors composé de zones cisaillées et de zones non-cisaillées appelées zones mortes ou plugs dans lesquelles la contrainte est inférieure à la contrainte seuil du matériau.

Comprendre les mécanismes liés au seuil est d'une grande importance dans tous les phénomènes impliquant ces types de fluides, dans le but de prévoir l'apparition et l'évolution des zones solides avec la variation des propriétés du matériau et des caractéristiques de l'écoulement.

Par exemple, la caractérisation des zones mortes à un intérêt particulier dans certains processus industriels, tels que l'écoulement des boues de forage [Mitsoulis and Huilgol, 2004], l'extrusion de pâtes cosmétiques, les produits agroalimentaires, ou encore les matériaux de construction [Rabideau et al., 2010; Barnes et al., 2006]. Quant aux écoulements à surface libre comme les coulées de boue, une certaine épaisseur de matériau à l'état solide est situé juste sous la surface libre [Lipscomb and Denn, 1984; Coussot, 1994]. Le profil de vitesse est donc composé d'une partie cisaillée surmontée d'un plug (Fig.1.7b) qu'il faut pouvoir correctement prendre en compte dans les modèles.

La présence dans l'environnement de matériaux possédant des propriétés de fluides à seuil et l'utilisation de ce type de fluide dans l'industrie en font des thèmes de recherche en plein essor. Nous allons voir ensuite comment s'expriment les modèles rhéologiques qui caractérisent les fluides à seuil.

2.2 Rhéologie des fluides à seuil

La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière solide ou liquide. Plus particulièrement, la rhéométrie s'attache à mesurer un certain nombre de grandeurs physiques caractérisant le comportement mécanique des différents matériaux, comme la viscosité. La viscosité représente la résistance au cisaillement et on peut la définir généralement comme le rapport de la contrainte sur le taux de cisaillement résultant. Ainsi plus le matériau est "fluide" plus le taux de cisaillement (ou taux de déformation) sera important à contrainte égale, et plus la viscosité sera faible. La relation entre la contrainte et le taux de cisaillement est appelée loi de comportement, ou équation constitutive. Pour un liquide Newtonien, comme l'eau, le taux de cisaillement est proportionnel à la contrainte qui lui est appliquée (la viscosité est constante). Mais la rhéologie s'intéresse surtout aux matériaux présentant des propriétés mécaniques plus complexes comme les fluides à seuil, possédant à la fois un seuil d'écoulement séparant un régime solide et liquide, et une viscosité qui diminue généralement avec l'augmentation du taux de déformation dans le régime liquide (rhéofluidification).

C'est à partir de données expérimentales, que les différents paramètres des lois de comportement sont déduits. L'établissement d'une loi de comportement permet par exemple la modélisation de l'écoulement et de la propagation du matériau étudié, en étant intégrée dans un modèle physique fondé sur la dynamique des fluides [Balmforth et al., 2006; Hewitt and Balmforth, 2013]. Réciproquement, les écoulements peuvent aussi être utilisés pour remonter aux propriétés rhéologiques des fluides. Dans ce cas, l'étude de configurations expérimentales complexes (mettant en jeu des zones fluides et solides par exemple) peut servir à sonder le comportement rhéologique à l'intérieur d'écoulements complexes, notamment par la mesure des champs de vitesse [Ovarlez et al., 2009; Gurung et al., 2016].

Afin de pouvoir relier le comportement macroscopique d'un matériau à sa structure à l'échelle microscopique, l'étude de la rhéologie est de plus en plus souvent couplée à d'autres techniques expérimentales, comme la microscopie [Piau, 2007], la micro-rhéologie par diffusion [Oppong et al., 2006] ou la résonance magnétique nucléaire [Rodts et al., 2004; Ovarlez et al., 2015].

2.2.1 Loi de comportement de Herschel-Bulkley

La modélisation la plus simple et la plus couramment utilisée pour décrire le comportement des fluides à seuil est le modèle viscoplastique de Bingham [Bingham, 1922] et sa généralisation, le modèle de Herschel-Bulkley [Herschel and Bulkley, 1926]. Ces modèles permettent de décrire l'existence d'un seuil de contrainte et le comportement rhéofluidifiant de ce type de fluide. En

cisaillement simple, la loi de Herschel-Bulkley s'écrit :

$$\begin{cases} \tau = \tau_c + K\dot{\gamma}^n & \text{si } \tau > \tau_c \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_c \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement (s^{-1}), τ la contrainte (Pa), τ_c la contrainte seuil (Pa), K la consistance du fluide (Pa.s^n) et n un paramètre sans dimension appelé indice d'écoulement (en pratique, $n < 1$ pour la plupart des matériaux). Le modèle de Herschel-Bulkley décrit le comportement d'un solide rigide en dessous d'une contrainte tangentielle seuil τ_c. Au-dessus, le matériau s'écoule, et la relation entre la contrainte et le taux de cisaillement est en loi puissance (Fig.2.3). C'est une loi macroscopique, puisque l'état de la microstructure du matériau n'entre pas en jeu.

Lorsque $n = 1$, on retrouve le modèle de Bingham. Pour un fluide viscoplastique, le modèle de Bingham est valable lorsqu'une gamme restreinte de taux de déformation est étudiée [Barnes and Walters, 1985]. Mais si l'étude porte sur plusieurs décades de taux de déformation, il ne reflète généralement plus l'observation [Coussot and Piau, 1994; Coussot, 2014].

Lorsque $n = 1$ et $\tau_c = 0$, on retrouve la loi de comportement d'un fluide newtonien (Fig.2.3).

Lorsque $\tau_c = 0$ on obtient le modèle d'Ostwald, aussi appelé loi-puissance, valable pour les fluides sans seuil de contrainte.

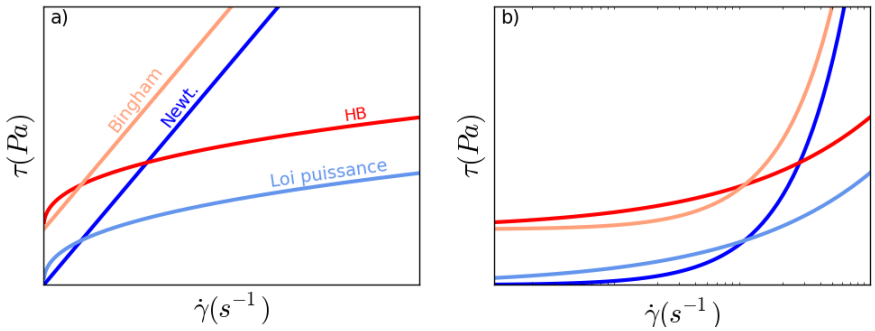

Figure 2.3 Allures des lois de comportement d'Herschel-Bulkley (HB), de Bingham, de type loi puissance (n=0.4) et newtonienne, a) échelle linéaire, b) échelle semi-logarithmique.

Le modèle de Herschel-Bulkley est utilisé dans de nombreuses études pour la modélisation des fluides à seuil ([Ovarlez et al., 2013; Piau, 2007; Oppong et al., 2006; Chambon et al., 2014; Coussot, 2014], voir aussi les revues de Ancey [2007], Balmforth et al. [2014] et Coussot [2014]). Il peut être généralisé en 3D pour les écoulements cisaillés dans plusieurs directions par son écriture tensorielle suivante [Coussot and Ancey, 1999b; Piau, 1996] :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = (\frac{\tau_c}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1})\dot{\gamma}_{ij} & \text{si } \tau > \tau_c, \\ \dot{\gamma}_{ij} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_c \; avec \; \tau = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{ij}\sigma_{ij}\sigma_{ij}} \; et \; \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{ij}\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}} \end{cases} \tag{2.2}$$

ou τ et $\dot{\gamma}$ représentent respectivement le second invariant du tenseur des extra-contraintes et du taux de déformation.

Remarque :

La loi de comportement de Herschel Bulkley (Eq. 2.2) introduit une discontinuité lorsque le

taux de déformation tend vers zéro puisque le modèle prescrit une viscosité effective qui tend vers l'infini. L'implémentation de la rhéologie viscoplastique dans les équations de Navier-Stokes (dans le terme $\partial_{x_i}\sigma_{ij}$ des équations (2.6) et (2.7)) pour le calcul numérique est donc difficile [Roussel and Gram, 2014]. Un certain nombre d'auteurs ont proposé une loi de comportement dite régularisée de façon à éviter la discontinuité du modèle (E2.2), en seuillant la viscosité effective lorsque le taux de déformation tend vers zéro (voir [Frigaard and Nouar, 2005] pour une analyse détaillée des différentes régularisations existantes et [Papanastasiou, 1987; Souza Mendes and Dutra, 2004] pour des exemples).

2.2.2 Controverse sur l'existence d'un seuil

L'existence du seuil d'écoulement a été questionnée par plusieurs études depuis la publication en 1985 de l'article "*The yield stress myth ?*" par Barnes et Walter [Barnes and Walters, 1985] et de la revue sur le sujet *The yield stress — a review or "παντα ρει"—everything flows ?* [Barnes, 1999].

Barnes et Walter suggèrent que les fluides à seuil peuvent s'écouler même lorsqu'ils sont soumis à des contraintes inférieures au seuil. L'état solide apparent des fluides à seuil n'est, selon eux, qu'un artefact expérimental et représente une transition entre deux régimes de viscosités très différentes, et c'est pourquoi la mesure de la contrainte critique n'est pas reproductible. Ils observent dans leurs expériences un palier Newtonien de viscosité pour les faibles taux de déformation (jusqu'à $10^{-6}s^{-1}$). Pour eux, la viscosité, même grande, est donc toujours finie lorsque $\dot{\gamma} \mapsto 0$.

Cependant, il est difficile d'obtenir des mesures rhéométriques fiables pour des taux de déformation si faibles à cause de limitations technologiques. D'autre part, pour les taux de déformation très petits imposés par Barnes and Walters [1985] (10^{-6} s^{-1}), il faudrait attendre un temps très grand pour atteindre l'état stationnaire (par exemple, pour atteindre une déformation de 100% caractéristique du régime stationnaire, il faudrait attendre plus de 10 jours). Cette échelle de temps est très longue relativement aux matériaux étudiés, pour lesquels la rhéologie est sensible à d'autres effets comme l'évaporation, les réactions chimiques des constituants, la pollution de l'échantillon par le milieu extérieur etc...

Le débat sur l'existence du régime solide pour les fluides à seuil semble aujourd'hui clôt pour certains matériaux, l'amélioration de la sensibilité des rhéomètres ayant permis à différentes études de montrer l'existence d'un régime solide [Piau, 2007; Bonn et al., 2015]. Les mesures présentant l'existence d'un plateau newtonien pour les faibles taux de déformation, comme celles de Barnes et Walter par exemple, sont un artefact expérimental selon Møller et al. [2009] car elles n'ont pas été effectuées en régime stationnaire. Ces derniers montrent expérimentalement qu'en dessous de la contrainte seuil, la viscosité ne cesse d'augmenter, même après que le test ait dépassé le temps nécessaire à l'établissement du régime stationnaire. La contrainte seuil existe donc, et sépare l'écoulement fluide du régime solide, de viscosité "infinie".

En revanche, la difficulté à mesurer de façon reproductible la contrainte seuil, [James et al., 1987; Nguyen and Boger, 1992; Barnes, 1999; Bonn et al., 2015] pourrait être en partie liée à l'existence d'hystérésis de la relation contrainte de cisaillement-taux de déformation, c'est à dire des effets thixotropes, lors de la transition solide-fluide [Putz and Burghelea, 2009].

2.2.3 La transition solide-fluide

Des tests rhéométriques en contraintes imposées, pour différents fluides à seuil (bentonite, laponite et gel commercial [Coussot et al., 2002b] mais aussi émulsion, mousse et matériaux granulaires secs [Da Cruz et al., 2002]), montrent que lorsque la contrainte appliquée est inférieure à la contrainte seuil, la viscosité augmente avec le temps, elle diverge (état solide). Pour des contraintes appliquées supérieures à la contrainte seuil, la viscosité diminue avec le temps, et prend une valeur finie, le fluide s'écoule (Fig.2.4). Cette observation est conforme à ce que l'on attend du comportement d'un fluide possédant un seuil de contrainte. Mais dans ces expériences, on peut

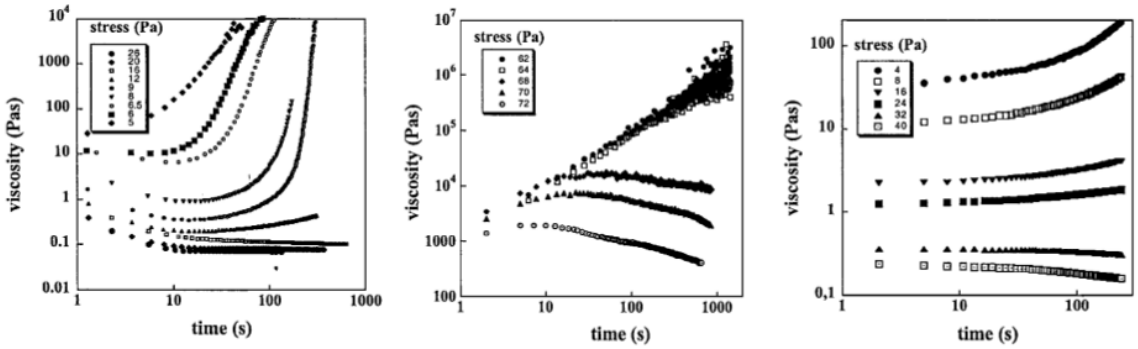

Figure 2.4 Mise en évidence de la bifurcation de la viscosité. Viscosité en fonction du temps pour différents systèmes. De gauche à droite, suspension de bentonite dans l'eau, gel commercial (Vivelle Dop) et suspension de laponite dans l'eau [Coussot et al., 2002a].

voir (Fig.2.4) que la viscosité "saute" d'une valeur infinie à une valeur finie faible, la transition est alors discontinue. Ce phénomène s'appelle la bifurcation de la viscosité. Il implique qu'il existe un taux de cisaillement critique ($\dot{\gamma}_c$) qui est le plus petit taux de cisaillement auquel l'échantillon peut s'écouler [Coussot et al., 2002a,b]. Une fois l'écoulement initié, il ne peut perdurer que lorsque le taux de cisaillement est plus grand que $\dot{\gamma}_c$. En dessous de $\dot{\gamma}_c$ la microstructure se reconstruit et le système se "bloque" (voir le schéma Fig. 2.5).

Un phénomène intéressant qui se produit pour les fluides à seuil présentant une bifurcation de la viscosité est l'apparition de bandes de cisaillement (*shear localization* ou *shear banding*) lorsque le comportement est étudié autour du seuil (pour $\dot{\gamma} > 0$ et $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c$) [Pignon et al., 1996; Ovarlez et al., 2009; Coussot and Ovarlez, 2010]. La bande de cisaillement fait apparaître une discontinuité du taux de déformation à l'interface des zones liquides et solides (Fig.2.6a). Ce phénomène est à différencier de la transition entre une zone liquide et solide, entre lesquelles le taux de déformation est continu, comme prédit par le modèle de Herschel-Bulkley (Fig.2.6b). A l'interface d'une bande de cisaillement, le taux de déformation prend une valeur seuil dans la zone liquide ($\dot{\gamma}_c$) et vaut zéro dans la région solide [Ovarlez et al., 2009].

La bifurcation de viscosité est aussi illustrée par l'exemple de l'expérience du plan incliné, sur lequel est déposé un échantillon de suspension argileuse (Fig.2.7). Coussot et al. [2002a] montrent qu'il existe une pente, correspondant à une contrainte critique, en dessous de laquelle le monticule est dans son état solide et au dessus de laquelle le monticule s'écoule rapidement (effet avalanche). En augmentant l'angle de la pente, le monticule d'argile passe de l'état solide à l'état liquide avec une vitesse relativement élevée, sans passer par des "petites" vitesses : c'est une illustration de

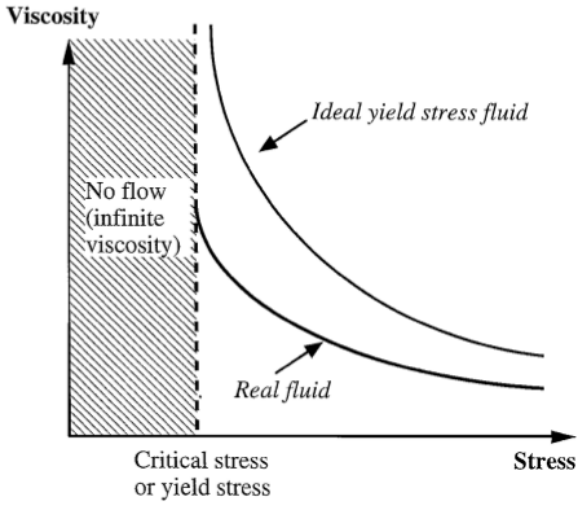

Figure 2.5 Schéma d'une courbe d'écoulement (viscosité en fonction de la contrainte) typique d'un fluide à seuil présentant une bifurcation de la viscosité et d'un fluide à seuil *idéal* (pas de bifurcation de viscosité) par [Coussot et al., 2002a]. Pour un fluide à seuil *idéal* il est possible d'atteindre tous les taux de déformation, en s'approchant de la contrainte. Mais pour une fluide présentant une bifurcation de la viscosité, si le matériau est soumis à une contrainte supérieure à sa contrainte seuil, le taux de déformation local est nécessairement au dessus de $\dot{\gamma}_c$.

a) b)

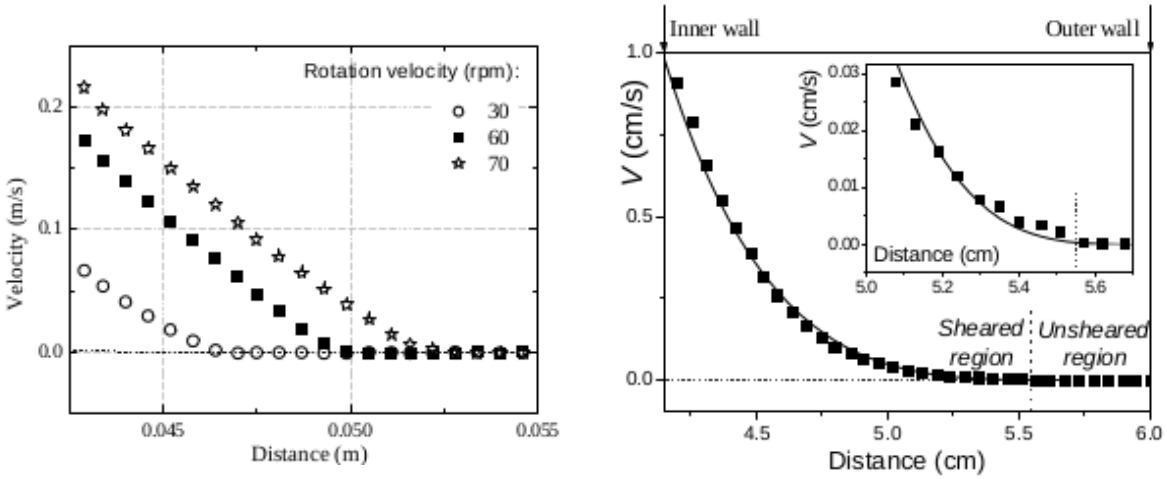

Figure 2.6 Profils de vitesse en géométrie de Couette, pour un gel de Carbopol et une pâte de ciment, images et explications par [Ovarlez et al., 2009]. a) Pâte de ciment. La pente de la courbe de vitesse chute abruptement à environ zéro. Coexistence de la zone solide et liquide mais discontinuité du taux de cisaillement à l'interface entre les deux régions : il vaut $\dot{\gamma}_c$ dans la région liquide et il est nul dans la région solide. C'est un comportement de bande de cisaillement. b) Gel de Carbopol. Continuité de la courbe de vitesse. Le taux de cisaillement décroit progressivement vers zéro dans la zone cisaillée et reste constant autour de zéro dans la zone non cisaillée. Coexistence de la zone solide et liquide mais pas de bande de cisaillement.

la bifurcation de la viscosité. Dans cette expérience, on remarque aussi que l'angle de la pente critique (qui représente une contrainte critique) dépend du temps pendant lequel le matériau est au repos [Huynh et al., 2005] : c'est un effet thixotrope.

Figure 2.7 Avalanche d'une suspension d'argile sur un plan incliné rugeux. La suspension est précisaillée et posée sur le plan (inclinaison nulle au départ), puis laissé au repos pendant une heure. Les images sont prises pour une inclinaison du plan correspondant à l'angle critique pour lequel l'écoulement démarre [Coussot et al., 2002a].

2.2.4 La thixotropie

Dans les fluides à seuil thixotropes, la viscosité et la contrainte seuil augmentent lorsque le matériau est au repos, la microstructure se reforme (vieillissement ou "aging"), mais diminuent avec le temps lorsque le matériau est cisaillé, la microstructure est détruite (rajeunissement ou "rejuvenation") (voir [Møller et al., 2006; Barnes, 1997] pour une revue). De nombreuses études ont reporté l'existence d'effets thixotropes dans les fluides à seuil [Putz and Burghelea, 2009; Barnes, 1997; Coussot et al., 2002a,b; Da Cruz et al., 2002].

Comme il est difficile de développer une approche microstructurelle qui consisterait à détailler les phénomènes physiques à l'échelle des particules, les auteurs Coussot et al. [2002a,b] ont proposé un modèle phénoménologique prenant en compte les effets du temps (la thixotropie). Pour prendre en compte les deux effets antagonistes de rajeunissement et de vieillissement, Coussot et al. [2002a] proposent un paramètre λ qui représente le "degré de blocage" du système. λ augmente lors du vieillissement et diminue lors du rajeunissement, il est régi par l'équation suivante :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\delta} - \alpha\lambda\dot{\gamma} \tag{2.3}$$

avec δ le temps caractéristique de l'évolution de la microstructure et α une constante qui dépend du matériau considéré. Pour relier l'écoulement à la structure, cette approche définit uniquement une viscosité apparente avec la forme suivante [Coussot et al., 2002a] :

$$\eta = \eta_0(1 + \lambda^m) \tag{2.4}$$

avec $m \geq 1$ pour un fluide à seuil. Lorsque la structure est détruite complètement, la viscosité tend vers une valeur asymptotique finie η_0, mais elle diverge pour des contraintes inférieures à τ_c.

Il est remarquable que l'existence du seuil de contrainte, qui n'est pas imposé au départ, soit une conséquence du modèle. De plus, il existe un taux de cisaillement critique $\dot{\gamma}_c$ prédit par ce modèle, pour lequel un régime stable est possible, et qui s'exprime $\dot{\gamma}_c = (m-1)^{1/m}/\alpha\delta$. La bifurcation de la viscosité observée expérimentalement est donc correctement reproduite par ce modèle rhéologique incluant la thixotropie. En fait, cela signifie pour Coussot et al. [2002a,b] que le phénomène de bifurcation de la viscosité prend son origine dans la compétition entre le rajeunissement et le vieillissement de la microstructure : c'est donc un marqueur des fluides thixotropes.

Les fluides testés par ces différentes études couvrent une large gamme de fluides à seuil (mousses, émulsions, gels, matériaux granulaires), et pour chacun des propriétés thixotropiques ont été mesurées. Pour autant la thixotropie ne semble pas une propriété indissociable des fluides à seuil [Møller et al., 2009]. En effet, une séparation de ces fluides par rapport à leur comportement au dessus du seuil a été proposée récemment, on peut distinguer [Bécu et al., 2006; Coussot et al., 2009; Coussot and Ovarlez, 2010] :

- les fluides à seuil thixotropes, qui présentent une bifurcation de la viscosité et peuvent développer des bandes de cisaillement dans l'écoulement. On peut noter que certaines études ont cherché à relier le comportement macroscopique de ces fluides aux interactions physiques des constituants de la microstructure et ont montré que ce comportement thixotropique semble se produire pour des interactions de type "*attractif*" [Ovarlez et al., 2013; Bonn et al., 2015],

- les fluides à seuil *idéaux*, qui ne présentent pas de thixotropie, pas de bifurcation de la viscosité et donc pas de taux de cisaillement critique. Ils sont bien représentés par la loi de comportement de Herschel-Bulkley et peuvent être parfois caractérisés de fluides à seuil de type "*répulsifs*". Le gel de Carbopol semble être par exemple, un bon modèle de fluide à seuil *idéal*, si on exclue toutefois les effets élastiques (*cf.* §2.2.5) [Coussot et al., 2009; Piau, 2007].

2.2.5 Les effets élastiques

En étudiant le champ de vitesse d'un fluide à seuil (gel de Carbopol) autour d'un objet (Putz et al. [2008] autour de sphères et Tokpavi et al. [2009] autour de cylindres), il apparaît une asymétrie amont-aval de celui ci, non prédite par le modèle rhéologique de Herschel-Bulkley. Les auteurs ont attribué ce phénomène aux effets élastiques présents proche du seuil de contrainte .

Luu and Forterre [2009] ont montré qu'en considérant des régimes fortement non permanents (en étudiant l'impact de gouttes de fluide à seuil sur une surface solide), l'élasticité du matériau peut se maintenir aussi au dessus de la contrainte seuil. En effet ils observent que lors de l'impact d'une goutte de Carbopol, l'étalement sur la surface solide est suivi d'un rappel rapide et parfois même d'un rebond complet (Fig.2.8), l'étalement rapide empêchant en fait le matériau de se relaxer. Ils n'observent pas ce phénomène de rappel pour des suspensions argileuses : pour celles ci, une fois que l'étalement maximum est atteint, la goutte étalée maintient une forme constante.

Les fluides à seuil peuvent donc présenter des effets élastiques autour du seuil et même au delà dans le cas du régime non-permanent, ayant des conséquences sur la dynamique de l'écoulement.

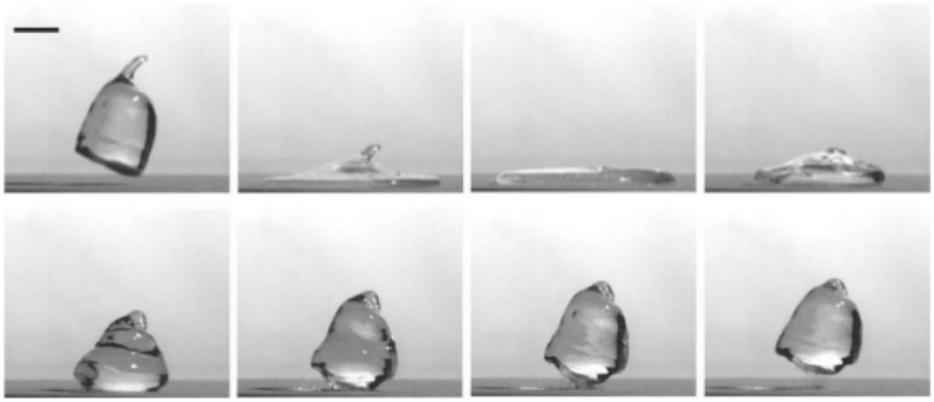

Figure 2.8 Rebond d'une goutte de gel de Carbopol sur une surface hydrophobe, intervalle entre les images de 8 ms, barre d'échelle 10 mm, [Luu and Forterre, 2009].

2.3 La modélisation des écoulements à surface libre

Nous allons voir maintenant comment prendre en compte la rhéologie des fluides à seuil dans des modèles de la dynamique des fluides.

2.3.1 Les équations primitives

Les équations primitives traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. En considérant un fluide incompressible s'écoulant sur une pente, les équations primitives, aussi appelées équations de Navier-Stokes (historiquement développées pour les fluides newtoniens) s'écrivent en deux dimensions :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.5}$$

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = \rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \tag{2.6}$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}) = -\rho g \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \tag{2.7}$$

avec x l'axe longitudinal, y l'axe perpendiculaire à l'axe x dirigé vers le haut, $u(x, y, t)$ la vitesse longitudinale, $v(x, y, t)$ la vitesse verticale, $p(x, y, t)$ la pression, θ l'angle de la pente, ρ la masse volumique, σ le tenseur des extra-contraintes et g l'accélération de la pesanteur.

Dans ces équations, la rhéologie du matériau est prise en compte dans l'expression des contraintes (à travers la loi de comportement de Herschel-Bulkley par exemple).

2.3.2 Les modèles intégrés sur l'épaisseur

Les écoulements qui ont une longueur importante devant leur épaisseur caractéristique sont dits de couche mince et généralement modélisés par des modèles intégrés sur l'épaisseur. Pour ces écoulements, comme le décrivent [Savage and Hutter, 1989], deux échelles de longueur existent, la longueur caractéristique dans la direction de l'écoulement L, et l'épaisseur caractéristique H. Le paramètre $\epsilon = H/L$ décrit la relation entre ces deux échelles et l'hypothèse de couche mince se traduit donc par $\epsilon \ll 1$. Cette hypothèse prescrit que la vitesse verticale est petite devant la vitesse longitudinale ($v \approx \epsilon u$). On peut intégrer les équations de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans la direction verticale et réduire d'une unité le nombre de dimension du problème en faisant disparaître la contribution des vitesses verticales. On obtient un système d'équations différentielles décrivant l'écoulement au travers sa hauteur h et sa vitesse moyenne $\bar{u}$. Les équations de Saint-Venant sont l'expression la plus classique de ce système d'équation. Nous présentons ici la forme complète d'un modèle intégré dans l'épaisseur, ainsi que le modèle Saint-Venant classique, de façon à bien détailler les approximations permettant d'obtenir ce dernier.

2.3.2.1 Forme générale

Pour présenter le modèle complet, nous procédons ici à l'adimensionnalisation des variables. Le choix des échelles est arbitraire, et permet de faire apparaître le paramètre d'aspect $\epsilon = H/L$ et des nombres sans dimension représentatifs de la physique de l'écoulement. L'objectif de l'adimensionnalisation est de comparer l'ordre de grandeur des différentes contributions, de façon à pouvoir simplifier les équations en négligeant les contributions faibles.

On utilise pour la pression une échelle hydrostatique et pour les contraintes une échelle visqueuse (le détail est présenté au chapitre 3). En intégrant sur l'épaisseur chacun des membres des équations primitives, on obtient [Iverson, 1997; Ancey, 2007] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} &= 0 \\ \epsilon Re\left(\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \partial_x \int_0^h u^2 dy\right) &= \frac{Re}{Fr^2}\tan\theta\, h - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\partial_x \int_0^h p dy - \tau_b + \epsilon^2 \partial_x \int_0^h \sigma_{xx} dy \end{aligned} \tag{2.8}$$

avec $\bar{u}$ la vitesse moyenne et τ_b la contrainte basale ($\tau_b = \sigma_{xy,(y=0)}$). La première équation représente la conservation de la masse. Dans la seconde, nous trouvons à gauche de l'égalité les termes d'inertie, et à droite l'accélération gravitaire due à la pente, le gradient de pression, le terme de frottement et les contraintes normales respectivement.

Dans ce système nous avons introduit les nombres sans dimensions suivants :

$$Re = \frac{\rho U^{2-n} H^n}{K};\ Fr = \frac{U}{\sqrt{gH\cos\theta}} \tag{2.9}$$

soit respectivement :

- le nombre de Reynolds, qui représente la compétition entre le forces d'inertie et les forces visqueuses,
- le nombre de Froude, qui représente l'importance de l'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle.

2.3.2.2 Les équations de Saint-Venant

Les équations du modèle classique de Saint-Venant sont obtenues par approximation "à vue" des équations adimensionnalisées (2.8), en négligeant les contributions les plus faibles.
On rappelle que les équations du modèle classique de Saint-Venant, en écriture dimensionnée, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} &= 0 \\ \rho\left(\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta h\bar{u}^2}{\partial x}\right) &= \rho g h\sin\theta - \rho g h\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} - \tau_b, \quad \beta = 1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

avec β le coefficient de Boussinesq, pris égal à 1 dans le modèle classique, et g l'accélération gravitaire. Ces équations doivent être complétées par une relation explicitant la contrainte au fond. Dans le modèle classique τ_b est calculé soit par une relation empirique, soit par la loi de comportement (la rhéologie) du matériau.

Nous pouvons maintenant comparer le modèle classique au modèle complet intégré dans l'épaisseur (2.8) et préciser les hypothèses et les simplifications appliquées pour produire le modèle classique. La conservation de la masse intégrée est exacte et ne dépend que de la condition d'incompressibilité du fluide, elle n'est pas liée à l'hypothèse de couche mince. En revanche pour obtenir la deuxième équation de Saint-Venant, plusieurs approximations, listées ci dessous, ont été réalisées.

• Couche mince :
Nous rappelons en premier lieu que le modèle de Saint-Venant est obtenu avec l'hypothèse de couche mince, $\epsilon << 1$. Sous cette hypothèse, la seconde équation de la quantité de mouvement adimensionnée nous indique, à l'ordre 0, que la pression est hydrostatique (*cf.* chapitre 3 pour le détail des équations), et le gradient de pression s'exprime alors comme un gradient de hauteur dans (2.10).

• Contrainte normale :
La contribution des contrainte normales (dont nous n'avions pas parlé au chapitre 1), en facteur de ϵ^2 dans les équations adimensionnalisées (2.8), a été négligée. Nous verrons au §2.3.4 et au chapitre 3 que les contraintes normales plastiques doivent pourtant être prises en compte dans le plug et dépendent de l'expression du profil de vitesse.

• Contrainte basale :
Une hypothèse classique en hydraulique est invoquée pour calculer la contrainte basale [Chow, 1959] : la vitesse s'adapte instantanément à toutes les variations basales, et l'écoulement est localement identique au régime permanent uniforme. Le profil de vitesse en zone non-uniforme a alors la même forme qu'en zone uniforme. Cette hypothèse s'appelle aussi auto-similarité du profil de vitesse, ou solution du régime permanent uniforme. La contrainte basale est alors calculée en tout point de l'écoulement à partir de l'expression du profil de vitesse du régime permanent uniforme [Hunt, 1994; Coussot, 1994]. Pourtant nous verrons que des termes de correction doivent être pris en compte pour calculer le profil de vitesse en régime non-uniforme [Ruyer-Quil and Manneville, 1998].

• Forme du profil de vitesse :
Dans le modèle Saint-Venant classique, le paramètre β est un coefficient qui relie $\bar{u^2}$ à $\bar{u}^2$ par la

relation $\frac{1}{h}\int_0^h u^2 dy = \bar{u^2} = \beta \bar{u}^2$ [Carlier, 1972]. Il est donc directement lié à la forme du profil de vitesse, et dépend de la rhéologie du matériau. Dans le modèle classique il a été considéré que $\beta = 1$, autrement dit, $\bar{u}^2 = \bar{u^2}$. Cette simplification drastique implique que le profil de vitesse est uniforme dans l'épaisseur, et que la rhéologie du fluide (l'existence de la contrainte seuil par exemple) ne joue pas de rôle dans le calcul de β. Pour un fluide de Herschel-Bulkley par exemple, ce coefficient devrait pourtant être une fonction de la hauteur h et de l'épaisseur du plug h_p [Fernandez-Nieto et al., 2010].

En fait, tous les termes de fermetures (l'expression de la contrainte normale, de la contrainte basale et du coefficient β) dépendent de la distribution des vitesses dans l'écoulement, que l'on appelle la dynamique interne.

Dans la suite, le terme *modèle Saint-Venant classique* référera aux équations de Saint-Venant (2.10), tandis que le terme *modèle de type Saint-Venant* désignera un modèle intégré dans l'épaisseur (exemple Eq.2.8).

2.3.3 Les modèles intégrés : évolutions de Saint-Venant à nos jours au travers d'exemples de relations de fermeture

Afin de fermer les équations de Saint-Venant présentées ci-dessus, la contrainte au fond τ_b, doit être exprimé en fonction des variables hydrauliques $\bar{u}$ et h. Cette relation de fermeture, une fois injectée dans les équations complètes, doit notamment permettre de retrouver le régime permanent uniforme, puisqu'il est la solution exacte des équations primitives lorsque les variations longitudinales et temporelles sont négligées. De plus, c'est dans cette relation de fermeture qu'intervient la rhéologie et donc la spécificité du fluide étudié.

Dans la suite, nous détaillons les différentes contributions apportées sur les modèles appliqués aux phénomènes qui nous intéressent, les mouvements gravitaires rapides de type laves torrentielles boueuses. Nous présentons les différents modèles dans l'ordre historique dans lequel ils ont été développés, dans le but de mettre en lumière l'apport de chaque contribution à l'amélioration générale des modèles. Nous verrons comment la rhéologie viscoplastique a été intégrée aux modèles. Enfin, nous verrons que le modèle Saint-Venant n'est pas consistant mais que des nouveaux développements ont été réalisés dans le but d'obtenir des modèles de type Saint-Venant consistants.

2.3.3.1 Lois de résistance empiriques

Les équations de Saint-Venant ont d'abord été utilisées dans le cadre d'écoulements newtoniens. Dans ce cadre, la relation de fermeture est souvent issue d'une relation empirique qui dépend de la nature de l'écoulement. La plus utilisée est la relation de Chézy, valable pour les écoulements turbulents sur fond rugueux. Cette relation suppose que la contrainte au fond est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne via un coefficient de résistance :

$$\tau_b(\bar{u}, h) = \rho g \cos\theta \left(\frac{\bar{u}}{C}\right)^2 \tag{2.11}$$

avec C le coefficient de résistance de Chézy ($m^{1/2}.s^{-1}$). Des expériences ont étés mises au point afin de déterminer le coefficient de Chézy, et différentes formules empiriques ont été déduites. La formule de Manning-Strickler par exemple, relie le coefficient de Chézy à la rugosité du fond de l'écoulement par le coefficient de Strickler K_s généralement lu dans une table, ($C = K_s R_H^{1/6}$).

Des lois de résistance empiriques ont aussi été mises au point pour les écoulements de fluides complexes. La loi de Voellmy est utilisée par exemple dans l'étude des avalanches de neige [Voellmy, 1955; Naaim et al., 2013]. Il s'agit d'ajouter à la contribution turbulente de type Chézy une contribution frictionnelle de type Coulomb :

$$\tau_b(\bar{u}, h) = \rho g \cos\theta \left(\frac{\bar{u}}{C}\right)^2 + \mu_0 \rho g h \cos\theta \tag{2.12}$$

2.3.3.2 Loi de résistance de Hunt

Rigoureusement, pour les fluides newtoniens, on peut montrer qu'en zone uniforme, de hauteur h_N, on a [Hunt, 1994] :

$$\tau_b = \frac{3\eta\bar{u}}{h_N} \tag{2.13}$$

Pour pouvoir modéliser un écoulement en tout point, cette relation, valable en zone uniforme, est extrapolée aux zones non uniforme (*cf.* auto-similartité). La mise en œuvre de cette hypothèse, appliquée au cas d'écoulements gravitaires, a été proposée par Hunt [1994], qui utilise alors la loi de résistance 2.13, même lorsque $\bar{u}$ et h dépendent de l'espace et du temps.

2.3.3.3 Loi de résistance de Coussot

Coussot [1994] propose une extension du modèle de Hunt [1994] pour les fluides de Herschel-Bulkley, dans le contexte de l'étude des coulées de boue. Pour cela, il étend l'hypothèse classique d'auto-similarité de l'hydraulique au cas des fluides à seuil. Mais dans le cas des fluides à seuil, une inconnue supplémentaire, l'épaisseur du plug h_p, apparaît. Coussot [1994] propose alors de calculer l'épaisseur du plug en tout point de l'écoulement en extrapolant l'expression du régime permanent uniforme. En régime permanent uniforme de hauteur h_N, on a $\tau_b = \rho g h_N \sin\theta$ et $\tau_c = \rho g h_p \sin\theta$, soit $h_N/h_p = \tau_b/\tau_c$. Coussot [1994] fait alors l'hypothèse que cette relation est valable même en zone non uniforme :

$$\frac{h}{h_p} = \frac{\tau_b}{\tau_c} \tag{2.14}$$

Cette hypothèse supplémentaire propre aux fluides à seuil impose que le plug s'amincisse à l'approche du front (comme sur la Fig.2.9) pour ne disparaître qu'à la ligne de contact, où la hauteur est nulle.

Avec cette hypothèse, Coussot [1994] a établi une relation de fermeture du modèle Saint-Venant classique, adaptée aux fluides de Herschel-Bulkley :

$$\left(\frac{K}{\tau_c}\right)^{1/n} \frac{\bar{u}}{h} = M \left(\frac{\tau_b}{\tau_c}\right)^{-2} \left(\frac{\tau_b}{\tau_c} - 1\right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\tau_b}{\tau_c}\frac{n+1}{n} + 1\right) \tag{2.15}$$

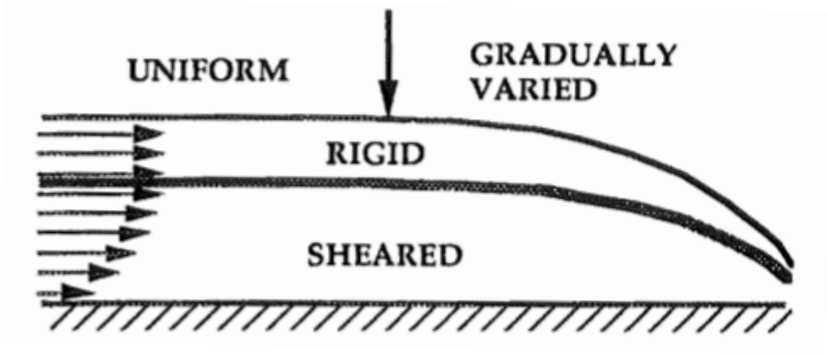

Figure 2.9 Évolution du plug dans une coulée à surface libre de fluide de Herschel-Bulkley, de la zone uniforme au front, en considérant l'hypothèse (2.14), d'après Piau [1996].

avec $M = n^2/((n+1)(2n+1))$.

Cette expression étant impossible à résoudre analytiquement, il propose dans son étude une approximation de l'expression complète, adaptée aux coulées boueuses d'indice d'écoulement n=1/3 et pour des nombres G variant dans la gamme [0.09,0.9] (avec $G = \tau_c/\tau_b = \tau_c/(\rho g h_N \sin\theta)$).

$$\tau_b = \tau_c \left[1 + 1.93 \left(\frac{\tau_c}{K} \left(\frac{h}{\bar{u}} \right)^{1/3} \right)^{-0.9} \right] \tag{2.16}$$

Des tests expérimentaux en régime permanent ont permis de valider cette approximation semi-empirique [Coussot, 1994].

2.3.3.4 Loi de résistance de Pastor

Pastor et al. [2004] proposent d'étudier le cas où l'indice d'écoulement vaut 1 (fluide de Bingham). Dans cette configuration, la relation de fermeture devient alors un polynôme en τ_b d'ordre 3 et peut être résolue analytiquement. Elle s'écrit :

$$\zeta^3 - \left(3 + \frac{6K\bar{u}}{h\tau_c} \right) \zeta + 2 = 0 \tag{2.17}$$

avec $\zeta = h_p/h = \tau_c/\tau_b$. Ainsi, une fois que la valeur de ζ est obtenue, la contrainte basale est calculée directement par $\tau_b = \tau_c/\zeta$.

2.3.4 Le paradoxe du plug

Proche de la surface libre, l'hypothèse du plug localement uniforme utilisée par Coussot [1994] pour fermer le modèle de Saint-Venant assure l'existence d'un plug rigide jusqu'au front (Fig.2.9). Pourtant, le fluide est nécessairement déformé proche du front sinon il ne pourrait pas y avoir une variation de hauteur. L'épaisseur du plug elle-même varie avec x. Nous pouvons nous demander si l'évolution du plug au front, obtenue à partir de cette hypothèse, est physiquement admissible ? C'est ce paradoxe que souligne Piau [1996], et qui l'a conduit à mettre en évidence le rôle des

contraintes normales dans l'écoulement. Piau [1996] propose de distinguer la contribution plastique et visqueuse des contraintes :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^p + \sigma_{ij}^v \tag{2.18}$$

En s'inspirant de la démarche de Piau [1996], on peut adimensionnaliser les contraintes plastiques par τ_c et les contraintes visqueuses par une échelle visqueuse. On obtient un modèle intégré dans l'épaisseur qui s'écrit comme :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0 \tag{2.19}$$

$$\epsilon Re\left(\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \partial_x \int_0^h u^2 dy\right) = \lambda h - \epsilon \frac{Re}{Fr^2}\partial_x \int_0^h p dy - \tau_b + \epsilon Bi \partial_x \int_0^h \sigma_{xx}^p dy + \epsilon^2 \partial_x \int_0^h \sigma_{xx}^v dy \tag{2.20}$$

avec $\tau_b = (\sigma_{xy}^v + Bi\sigma_{xy}^p)_{y=0}$ et $\lambda = \frac{Re}{Fr^2}\tan\theta$. Dans cette expression, nous avons fait intervenir le nombre de Bingham, appelé aussi nombre de Herschel-Bulkley, qui représente le ratio entre les effets plastiques et les effets visqueux :

$$Bi = \frac{\tau_c}{K}\left(\frac{h}{\bar{u}}\right)^n \tag{2.21}$$

De cette façon, Piau [1996] montre que les contraintes normales plastiques, en facteur de ϵBi, sont du même ordre que les autres termes classiquement conservés dans le modèle de Saint-Venant (si $Bi = O(1)$, ce qui est l'ordre de grandeur approprié pour les écoulements de fluides à seuil étudiés). En conséquence, pour Piau, le plug disparaît au front, là où les contraintes normales jouent un rôle important dans les équations (Fig.2.10) et le modèle de Saint-Venant n'est donc pas compatible avec l'hypothèse du plug localement uniforme.

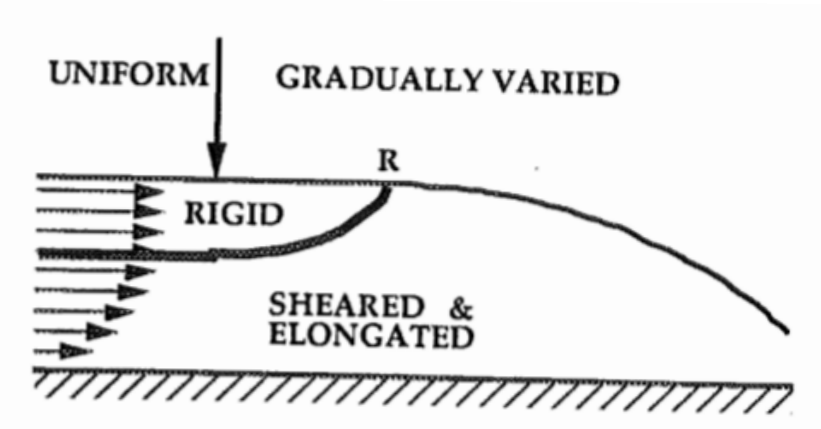

Figure 2.10 Evolution du plug, de la zone uniforme au front, suggérée par Piau [1996].

Plus tard, c'est Balmforth and Craster [1999] qui ont finalement résolu ce paradoxe en montrant qu'il n'y avait en fait pas de contradiction à utiliser l'hypothèse que le plug s'amincit sans disparaître au front, comme sur la figure 2.9. Balmforth and Craster [1999] constatent qu'à l'ordre le plus bas, le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ vaut $\partial_y u$ et les contraintes normales deviennent :

$$\sigma_{xx} = 2\left(\frac{Bi}{\partial_y u} + \partial_y u^{n-1}\right)\partial_x u \ ; \ \sigma_{yy} = -\sigma_{xx} \tag{2.22}$$

Ainsi, σ_{xx} et σ_{yy} divergent dans le plug, où le terme $\partial_y u$ est nul. On retrouve à nouveau le fait que les contraintes normales jouent un rôle important dans ces fluides. La démarche de Balmforth and Craster [1999] est alors de considérer que $\dot{\gamma}$ est d'ordre de grandeur de ϵ dans le plug ($\dot{\gamma} = O(\epsilon)$). De cette façon la contrainte est une combinaison entre la contrainte cisaillante et la contrainte normale qui ne diverge plus dans le pseudo-plug. A l'ordre le plus bas elle est égale à la contrainte seuil et à l'ordre supérieur, elle est en fait la somme de la contrainte seuil et d'une petite contribution d'ordre de grandeur de ϵ. Le plug a alors été requalifié de pseudo-plug et l'hypothèse que le (pseudo-)plug s'amincit au front est compatible avec l'ordre le plus bas du modèle de Saint-Venant. En revanche, aux ordres supérieurs, le modèle de Saint-Venant doit être modifié pour laisser place à l'existence de contraintes normales dans le pseudo-plug, et Balmforth and Liu [2004] proposent un modèle développé de cette façon.

2.3.5 Vers des modèles consistants

Lorsque nous regardons les équations du modèle complet intégré sur l'épaisseur (Eq. 2.8 ou 2.20) et du modèle Saint-Venant classique (Eq. 2.10) on remarque que ce dernier garde certains termes d'ordre 1 en ϵ (les termes d'inertie par exemple qui sont multipliés par ϵ, avec $Re = O(1)$ ce qui est représentatif des écoulements de laves torrentielles). Mais pour que le modèle Saint-Venant classique soit consistant, il faudrait que toutes les contributions soient exprimées à l'ordre 1 (c'est à dire qu'elles s'expriment comme la somme d'un terme d'ordre 0 en ϵ *ie O(1)* et d'un terme d'ordre 1 en ϵ *ie O(ϵ)*), ce qui n'est pas le cas [Balmforth and Craster, 1999; Ruyer-Quil and Manneville, 1998; Fernandez-Nieto et al., 2010; Bernabeu et al., 2014]. On peut en effet dire que ce modèle n'est pas consistant mathématiquement puisque :

- La contribution des contraintes normales plastiques n'est pas prise en compte dans le modèle de Saint-Venant, alors qu'elle est d'ordre 1 en ϵ [Balmforth and Craster, 1999].

- Dans les équations adimensionnées (Eq. 2.8) le terme de contrainte basale est à l'ordre 0 en ϵ. La contrainte basale devrait donc être exprimée à l'ordre 1 dans un modèle à l'ordre 1 en ϵ. Pourtant, elle est généralement calculée par son expression en régime permanent uniforme [Hunt, 1994; Coussot, 1994], ce qui correspond à l'ordre 0 en ϵ (*cf.* §2.3.6.2).

- Le coefficient β devrait être exprimé rigoureusement à partir du profil de vitesse. Étant donné que le terme $\frac{1}{h}\int_0^h u^2 dy$ est en facteur de ϵ dans les équations adimensionnées (Eq. 2.8), la vitesse u devrait être exprimée à l'ordre 0 en ϵ, et le coefficient β devrait en être déduit.

Une des conséquences de la non consistance est que le modèle ne prédit pas correctement le critère de stabilité calculé par une analyse de stabilité linéaire des équations primitives (équation de Orr-Sommerfeld) [Ruyer-Quil and Manneville, 1998, 2000; Forterre, 2006]. Ce critère de stabilité est pourtant important pour prédire correctement l'apparition des phénomènes d'instabilités hydrodynamiques comme les *roll waves* qui se manifestent sous la forme d'une succession d'ondulations de la surface libre [Ng and Mei, 1994].

Des nouveaux modèles ont alors été développés. Pour les fluides newtoniens, Ruyer-Quil and Manneville [1998, 2000] introduisent une correction du profil de vitesse par rapport au profil de vitesse du régime permanent uniforme semi parabolique. Cela permet de calculer des expressions dites corrigées de τ_b et β. Ils obtiennent un modèle intégré sur l'épaisseur consistant qui permet de retrouver le seuil d'instabilité de l'équation d'Orr-Sommerfeld pour les fluides newtoniens. La méthodologie introduite par Ruyer-Quil and Manneville [1998, 2000] a été reprise par Balmforth et Liu [Balmforth and Liu, 2004] pour obtenir un modèle de Saint-Venant appliqué aux fluides de Bingham. Ils ont introduit un terme correctif du profil de vitesse dans la partie cisaillée du profil. Mais leur modèle échoue à reproduire les propriétés de stabilité des équations primitives complètes. C'est parce qu'ils n'ont pas appliqué de terme correctif dans le pseudo-plug, que leur modèle n'est pas complètement consistant [Fernandez-Nieto et al., 2010].

Fernandez-Nieto et al. [2010] proposent le développement rigoureux d'équations complètement consistantes pour les fluides en loi-puissance et les fluides de Bingham. Ils effectuent un développement asymptotique des équations primitives autour de la solution du régime permanent uniforme. En développant le champ de vitesse et la pression à l'ordre 1 en ϵ et en insérant ces expansions dans les équations intégrées, ils obtiennent un système intégré dans l'épaisseur consistant à l'ordre 1 en ϵ. Ce système revient à ajouter des termes au modèle classique, appelés termes de corrections. Noble and Vila [2013] utilisent aussi la méthodologie du développement asymptotique, et obtiennent un modèle d'ordre 2 en ϵ pour les fluides en loi-puissance. Ils obtiennent un modèle invariant par transformation galiléenne, contrairement au modèle de Fernandez-Nieto et al. [2010]. Cette propriété est physiquement importante car c'est aussi celle des équations primitives. De plus, ils montrent qu'il existe différentes connexions possibles entre le terme de friction basale τ_b et la vitesse moyenne $\bar{u}$. Ils obtiennent donc théoriquement une famille de modèles (un seul modèle est présenté dans [Fernandez-Nieto et al., 2010]) tous équivalents du point de vue mathématique. La sélection d'une formulation plutôt qu'une autre est arbitraire, et ce choix n'est pas comparé à des résultats expérimentaux. D'ailleurs, en réalisant une extension de ce modèle aux fluides de Herschel-Bulkley, à l'ordre 1 et autour du régime permanent uniforme, Chambon [2014] montre que les différentes formulations mathématiques obtenues prédisent par exemple des formes de front sensiblement différentes. La confrontation avec des données expérimentales pourrait alors fournir des critères de sélection parmi les différents modèles.

Enfin, signalons que dans tous ces modèles et dans le cas des fluides à seuil, le choix de développer le modèle autour du régime permanent uniforme revient à supposer que l'épaisseur du plug est constante (*cf.* chapitre 3 pour le détail des équations). Ce choix n'est donc pas adapté pour le calcul de fronts ou de toutes variations de hauteurs importantes par rapport à l'épaisseur de l'écoulement. Nous verrons au chapitre 3 que pour considérer une épaisseur du plug qui peut varier dans les modèles, il faudra les développer autour du régime de lubrification.

2.3.6 Cas particuliers

Nous mentionnons ici des modèles basés sur l'approximation de couche-mince utilisés dans la littérature.

2.3.6.1 Le modèle d'onde cinématique

Le modèle d'onde cinématique (*kinematic wave model*) a été pour la première fois introduit par Lighthill and Whitham [1955], il est équivalent à une simplification des équations de Saint-Venant et permet de se ramener à un système à une équation. Si on peut considérer que l'écoulement est régi par un équilibre entre la force motrice et les frottements (comme le régime permanent uniforme), alors on se situe dans le cas de l'approximation d'onde cinématique. L'écoulement est modélisé avec l'hypothèse qu'en toute section il existe une unique équation reliant la hauteur de l'écoulement à la vitesse moyenne du régime uniforme $\bar{u} = f(h)$ (exemple dans le cas d'une crue lente [Weinmann and Laurenson, 1979]). En utilisant uniquement la conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur, et la conservation de la quantité de mouvement du régime permanent uniforme, il donne :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h f(h)}{\partial x} = 0 \tag{2.23}$$

Ce modèle a été utilisé pour un fluide à seuil [Ancey et al., 2012]. Connaissant l'expression de la vitesse moyenne du régime permanent uniforme, Ancey et al. [2012] ont obtenu une équation pour la hauteur h, qui peut être résolue analytiquement dans le cas d'un fluide de Bingham et numériquement seulement dans le cas d'un fluide de Herschel-Bulkley.

Dans le modèle d'onde cinématique, la condition aux limites de hauteur nulle au front de l'écoulement ne peut pas être imposée. Cette condition imposerait une vitesse de propagation du front nulle, d'après la relation $\bar{u} = f(h)$, ce qui n'est pas physiquement possible dans le cas de l'étude de la propagation d'un écoulement sur un plan incliné [Chambon and Naaim, 2010]. Ce modèle ne permet donc pas de prédire la forme du front d'un écoulement, mais impose une discontinuité de hauteur, ou choc (*shock wave*) [Ancey et al., 2012; Arattano and Savage, 1994; Arattano and Franzi, 2010; Chambon and Naaim, 2010].

De fait, ce modèle n'est plus valide au front d'un écoulement, puisque le gradient de pression ne peut plus être négligé dans les équations de conservation de la quantité de mouvement [Hogg and Pritchard, 2004; Ancey et al., 2012]. Le modèle peut être cependant généralisé en intégrant le terme de pression [Ancey and Cochard, 2009].

2.3.6.2 Le modèle de lubrification

Le modèle de lubrification consiste à négliger dans les équations primitives, les termes d'inertie, de contraintes normales et à considérer une pression hydrostatique. Il est le plus simple capable de prédire la forme du front d'une coulée. Il peut être aussi obtenu dans le cadre du développement asymptotique des équations primitives en simplifiant les termes d'ordre supérieur ou égal à ϵ. Dans ce cadre, on peut rigoureusement démontrer que le profil de vitesse à la même forme qu'en régime permanent uniforme [Chambon et al., 2014]. Ainsi, il n'est pas nécessaire de faire une hypothèse quant à sa forme. Les relations de fermeture déduites des lois de comportement locales comme celle de Coussot [1994] et de Hunt [1994] et basées sur l'hypothèse d'auto-similarité sont donc exactes. L'hypothèse de Coussot (Eq. 2.14) sur l'évolution du plug au front est alors exacte aussi dans le régime de lubrification (démonstration au §3.4).

De nombreuses études se placent dans cette configuration [Liu and Mei, 1989; Huppert, 1982; Huang and Garcia, 1998; Mei et al., 2001; Balmforth et al., 2006; Ancey and Cochard, 2009]. Pour

les écoulements newtoniens, ce modèle a été utilisé pour représenter l'étalement des écoulements à surface libre de fluides visqueux sur un plan incliné [Huppert, 1982]. Pour les écoulements viscoplastiques, ce modèle a été utilisé pour la première fois par [Liu and Mei, 1989] dans le cas Bingham pour l'étude de la dynamique d'écoulements de boue. Balmforth et Craster ont revisité ce modèle [Balmforth and Craster, 1999] et l'ont utilisé pour modéliser l'extrusion de fluide de Herschel-Bulkley à travers une ouverture [Balmforth et al., 2002]. Ce modèle a aussi été étendu en 3 dimensions [Balmforth and Craster, 1999; Mei and Yuhi, 2001].

2.3.6.3 Les modèles bicouches

Nous pouvons aussi mentionner qu'il existe des modèles intégrés dans l'épaisseur appliqués au cas des fluides à seuil, qui traitent l'épaisseur du plug h_p, comme variable additionnelle [Huang and Garcia, 1998; Balmforth and Liu, 2004]. De ce fait, la contrainte basale qui est exprimée en fonction de h, u et h_p, est exprimée complètement en fonction des inconnues du problème, et aucune hypothèse supplémentaire sur h_p n'est nécessaire pour calculer la loi de résistance. Toutefois, cela introduit une équation supplémentaire régissant la dynamique de h_p. La structure mathématique est différente, mais ces modèles reposent sur les mêmes approximations que le modèle Saint-Venant (voir §2.3.2.2).

2.3.6.4 Les modèles incluant une rhéologie plus complexe

Hewitt and Balmforth [2013] proposent un modèle de lubrification, en prenant en compte un comportement thixotropique. L'état de la microstructure, *i.e.* la compétition entre vieillissement et rajeunissement, est introduit à travers une relation qui autorise une bifurcation de viscosité (*cf.* §2.2.3), pour deux seuils différents. L'un est un seuil de contrainte (τ_A), qui permet de passer de l'état solide à l'état déstructuré liquide, il dépend d'un paramètre représentant le temps de vieillissement (le temps de repos). L'autre est un seuil de taux de déformation critique ($\dot{\gamma}_c$) qui permet de passer de l'état liquide à solide, lorsque le taux de déformation passe au dessous de $\dot{\gamma}_c$. La contrainte critique τ_c correspondant à $\dot{\gamma}_c$ est plus petite que τ_A. Ils reproduisent ainsi ce qui est observé sur l'expérience du plan incliné (voir §2.2.3), comme le fait que l'angle nécessaire pour provoquer l'écoulement augmente lorsque le temps de vieillissement augmente.

2.4 Résultats expérimentaux sur les écoulements à surface libre

Dans cette section, nous décrivons (de façon non exhaustive) quelques expériences décrites dans la littérature pour tester des modèles d'écoulement à surface libre, et leurs principaux résultats. Nous nous concentrons essentiellement sur le cas des écoulements viscoplastiques. Un tableau récapitulatif (Tab.2.1) est proposé en premier lieu afin de rappeler les expériences présentées, ainsi que les types de modèles utilisés pour comparer les résultats.

2.4.1 Aperçu des dispositifs existants

La configuration *dam-break* qui consiste à lâcher un volume de fluide sur un plan horizontal ou incliné est une expérience classique en mécanique des fluides expérimentale (Fig.2.11). Ces

Références	Expériences	Modèles
[Chambon et al., 2009] [Chambon et al., 2014]	Relation vitesse-hauteur, forme du front (épaisseur), champ de vitesse en ZU kaolin et Carbopol	Saint-Venant classique sans inertie Fermeture de HB (Eq. 2.15)
[Ancey et al., 2012]	Position du front, forme du front (épaisseur) Carbopol, glycerol	Onde cinématique, lubrification et Saint Venant classique fermeture semi-empirique de Coussot Eq. (2.16) HB + newtonien
[Balmforth et al., 2006] [Cochard and Ancey, 2009]	Forme du front au cours de la propagation en 2D ou 3D kaolin et Carbopol	Modèle de lubrification et extension 3D [Bernabeu et al., 2014] HB
[Andreini et al., 2012]	Champs de vitesse en ZU et au front glycerol, triton, Carbopol	Lubrification avec $(h, \partial_x h)$ mesurés expérimentalement HB + newtonien
[Iverson, 1997]	Épaisseur et vitesse du front mixture sable, gravier, eau	Saint-Venant avec contraintes normales, loi de résistance Coulomb + newtonien, $\beta = 1$
[Kaitna et al., 2014]	Profils de vitesse mixture sable et boue	
[Hewitt and Balmforth, 2013]	Forme surface libre (épaisseur) dépôt suspension de bentonite	Lubrification et loi de comportement avec thixotropie
[Longo et al., 2016]	Plan incliné, position du front, épaisseur, vitesse de surface Carbopol	Lubrification HB

Table 2.1 Tableau récapitulatif des expériences présentées dans ce chapitre. Ce tableau est non exhaustif mais représente un panel des configurations expérimentales permettant la validation des modèles. HB (newtonien) signifie que la loi de comportement est de type Herschel-Bulkley (newtonienne), ZU signifie zone uniforme.

expériences permettent d'obtenir un grand nombre de données en configuration contrôlée comme la vitesse de propagation du front, la forme de la coulée, la forme de la ligne de contact ou la dynamique interne. Elles constituent souvent des références expérimentales pour évaluer les modèles de couches minces [Cochard and Ancey, 2006, 2008; Ancey et al., 2012; Andreini et al., 2012; Ancey and Cochard, 2009; Cochard and Ancey, 2009; Ancey et al., 2009; Dubash et al., 2009; Chanson et al., 2006; Saramito et al., 2013].

L'expérience du *slump test* constitue une variante de l'expérience *dam-break*. Elle permet

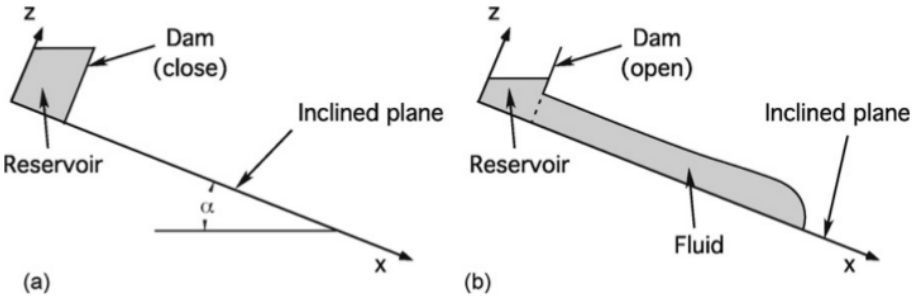

Figure 2.11 Illustration du principe du *dam-break*, par [Cochard and Ancey, 2009].

d'observer l'évolution de la forme d'un fluide de géométrie initiale connue [Roussel and Coussot, 2005; Balmforth et al., 2006], soit en inclinant le plan sur lequel le matériau repose initialement, soit en retirant rapidement un moule (généralement une colonne) dans lequel le matériau a été placé au préalable. Le *slump test* est par exemple largement utilisé pour évaluer la contrainte seuil du béton, et constitue une méthode standardisée [Roussel and Coussot, 2005]. L'évolution de la forme d'une coulée et de la position d'un front peut être aussi mesurée par une expérience d'injection à débit contrôlé [Liu and Mei, 1989; Longo et al., 2016]. Dans ces deux dernières configurations, la mesure est souvent à 2D (Fig.2.12) et donc plus élaborée que des mesures de vitesses de propagation du front de la coulée.

Notons que l'expérience de dam-break sur un plan incliné du groupe USGS aux États-Unis (http ://pubs.usgs.gov/of/2007/1315/), constitue la plus grande jamais construite (95 mètres de long pour une pente de 31°) et permet d'étudier des échelles réalistes de laves torrentielles avec des matériaux naturels [Iverson et al., 1992]. Malgré la configuration confinée et relativement contrôlée, ils observent des phénomènes difficiles à reproduire par les modèles (séparation de la coulée en plusieurs parties, changement de lit).

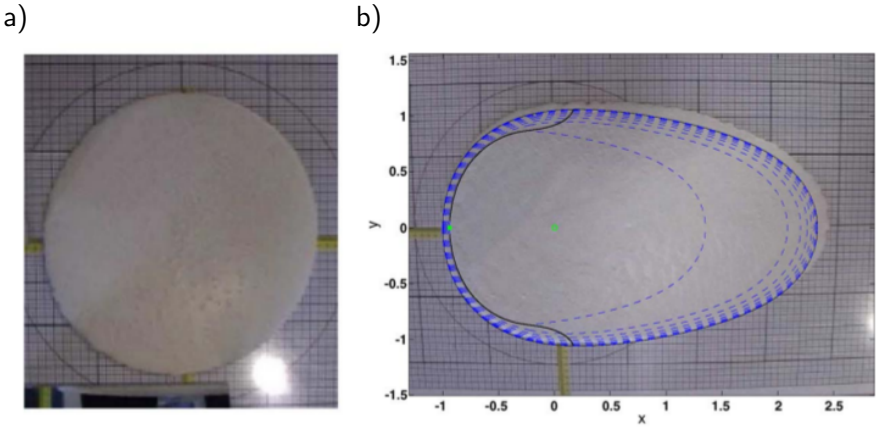

Figure 2.12 Exemple de test de type *slump*, par [Balmforth et al., 2006]. a) Dôme de kaolin au repos, de géométrie connue. b) Forme de la coulée après inclinaison du plan d'un angle prédéfini (ici 9.6°).

Les dispositifs générant des coulées stationnaires ont aussi été développés. Leur but est d'observer des écoulements à surface libre stationnaires dans le référentiel de l'observateur, et de s'affranchir ainsi des difficultés expérimentales à mesurer un mouvement transitoire bref tel que

dans les configurations dam-break. Le canal à fond mobile, proposé par Chambon et al. [2009, 2014] est équipé d'un fond mobile remontant vers l'amont qui permet de générer des coulées stationnaires (Fig.2.13a). Un tel dispositif avait été déjà utilisé par Davies [1990] dans le but d'observer qualitativement la dynamique des écoulements granulaires, notamment la forme du front et la formation de trains d'onde. Des coulées stationnaires peuvent aussi être générées dans un dispositif de tambour tournant (*rotating drum*) [Bowman et al., 2010; Kaitna and Rickenmann, 2007; Kaitna et al., 2014; Leonardi et al., 2015] (Fig.2.13b), mais ce dispositif présente l'inconvénient d'une surface libre courbée, même loin du front, là où l'écoulement est supposé uniforme.

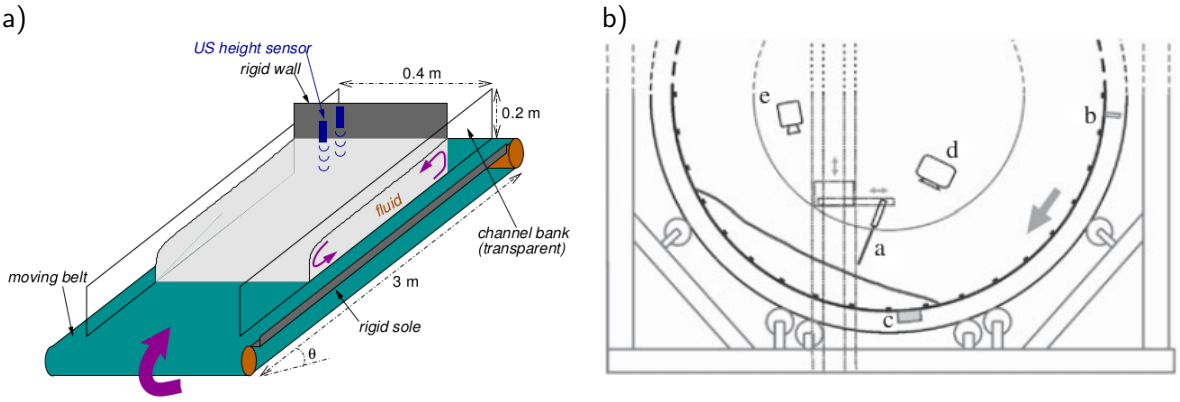

Figure 2.13 Exemple de dispositifs générant des coulées stationnaires dans le référentiel de l'observateur : a) Schéma du dispositif du canal à fond mobile [Chambon et al., 2014]. b) Schéma du dispositif du tambour tournant [Kaitna et al., 2014].

Nous allons ensuite décrire les résultats de quelques expériences, en commençant par celles qui se sont attachées à mesurer la relation entre la vitesse de la coulée et la hauteur de la zone uniforme.

2.4.2 Relation vitesse-hauteur en régime permanent uniforme

Le dispositif de canal à fond mobile a permis à deux études de mesurer l'épaisseur d'écoulements de kaolin [Chambon et al., 2009] et de Carbopol [Chambon et al., 2014] en zone uniforme pour différentes vitesses moyennes imposées au fluide. La prédiction théorique de la vitesse moyenne d'un fluide en fonction de sa hauteur en zone uniforme ne dépend que des paramètres rhéométriques et de l'angle de la pente. Des tests rhéométriques indépendants ont été effectués afin de mesurer les paramètres de Herschel-Bulkley des matériaux. Un très bon accord est obtenu pour l'écoulement de kaolin, pour les faibles et fortes vitesses. Pour le Carbopol, un désaccord systématique est observé : les prédictions théoriques sous-estiment systématiquement et toujours dans les mêmes proportions les mesures expérimentales de hauteur. Ce désaccord n'est pas totalement expliqué mais les auteurs pensent qu'il pourrait s'agir d'effets de confinement lors de la mesure des paramètres rhéologiques au rhéomètre. En corrigeant les paramètres rhéologiques (en augmentant τ_c et K mesurés au rhéomètre de 11% et 19% respectivement) l'accord est excellent avec les mesures expérimentales. Notons qu'avec du Carbopol, Longo et al. [2016] observent

aussi une différence entre la contrainte seuil mesurée au rhéomètre et celle mesurée à l'échelle de l'écoulement de leur canal incliné (en mesurant l'épaisseur de fluide après l'arrêt complet). La mesure des paramètres rhéologiques à l'échelle de l'écoulement est donc un point important, qui sera étudié et discuté dans le cadre de notre expérience (*cf.* §5.5.2, chapitre 6 et 7) .

2.4.3 Position et forme du front

L'évolution de la position du front d'un écoulement en fonction du temps a été mesurée, notamment en configuration dam-break, slump-test ou débit contrôlé. Des études reportent aussi la mesure de la forme des fronts de coulées viscoplastiques, et l'évolution de la ligne de contact au cours de la propagation.

En configuration de débit constant, Longo et al. [2016] mesurent la vitesse de propagation du front d'un gel de Carbopol et valident les prédictions d'un modèle de lubrification basé sur une loi de comportement de Herschel-Bulkley.

En revanche, en configuration de dam-break, Ancey et al. [2012], qui ont observé la propagation d'une coulée de gel de Carbopol (d'indice n=0.33) sur une pente de 15° et 25°, reportent des désaccords avec des modèles de couche mince adaptés aux fluides de Herschel-Bulkley. Ces désaccords augmentent même avec la complexité du modèle de couche mince considéré. Un modèle d'onde cinématique permet de capturer l'évolution de la position du front, après la phase de propagation initiale. Un modèle de lubrification, qui contrairement au modèle d'onde cinématique, prend en compte le gradient de pression, ne permet pas de meilleure comparaison, sa prédiction est même moins bonne pour la pente de 15°. Enfin, le modèle Saint-Venant classique, calculé avec la loi de fermeture de Coussot (Eq. 2.16), n'a été concluant pour aucune des 2 pentes testées.

L'échec du modèle Saint-Venant, face aux modèles simplifiés, est expliqué par les auteurs comme étant la combinaison de trois difficultés : l'hypothèse de couche mince n'est plus valable au front ; les variations de vitesse verticale selon l'axe vertical sont négligées alors que lors de l'effondrement d'une colonne de matériau, une partie du mouvement est dirigé vers le bas selon l'axe vertical ; et enfin l'expression de la contrainte basale donnée par Coussot (Eq. 2.16) est trop simplifiée pour les écoulements fortement non-uniformes.

En revanche dans le cas d'un fluide newtonien (glycérol) cette étude montre que le modèle Saint-Venant permet les meilleures prédictions. Les auteurs n'expliquent pas pourquoi le modèle Saint-Venant est moins performant que les modèles simplifiés dans le cas des fluides viscoplastiques, ni pourquoi il est plus performant dans le cas des fluides newtoniens. Cependant nous rappelons que dans l'étude de Coussot [1994], la loi de fermeture semi-empirique proposée (Eq. 2.16) est valable dans une certaine gamme de paramètres (indice d'écoulement $n = 1/3$, $G = \tau_c/(\rho g h_N \sin\theta)$ variant dans la gamme [0.09,0.9]). Il serait donc utile d'étudier si cette loi de fermeture représente correctement le comportement du gel de Carbopol dans l'expérience de Ancey et al. [2012]. Finalement, le fait que Ancey et al. [2012] observent le meilleur accord avec le modèle le plus simple suggère surtout que la prise en compte du seuil d'écoulement dans les modèles n'est pas clarifiée [Coussot, 2014].

Dans une autre étude, un modèle Saint-Venant sans inertie, combiné à une rhéologie de Herschel-Bulkley, est capable de prédire correctement la forme du front de coulées d'argile (kaolin)

générées par un canal incliné à fond mobile [Chambon et al., 2009]. Ce modèle est d'ailleurs équivalent dans le cadre de cette configuration expérimentale (coulées stationnaires) à un modèle de lubrification. Plusieurs vitesses ont été appliquées au fond mobile afin de produire des mesures dans différentes conditions d'écoulement (nombre de Froude entre 0.17 et 0.9), et les prédictions théoriques s'avèrent en bon accord avec les formes de fronts expérimentales (Fig.2.14). Une tendance à une légère surestimation de la hauteur par le modèle, inférieure aux barres d'erreur, se produit toutefois.

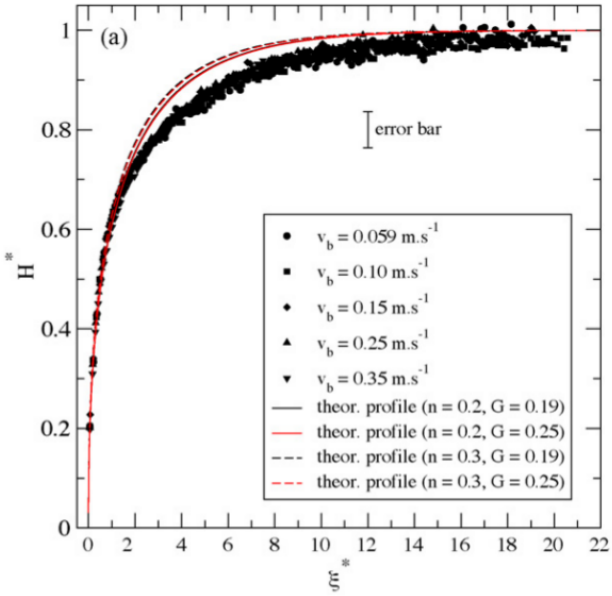

Figure 2.14 Hauteur de la surface libre d'un écoulement de suspension argileuse (kaolin) sur un canal incliné à fond mobile, en fonction de la distance du front (grandeurs adimensionnées). Comparaison à un modèle de lubrification, [Chambon et al., 2009].

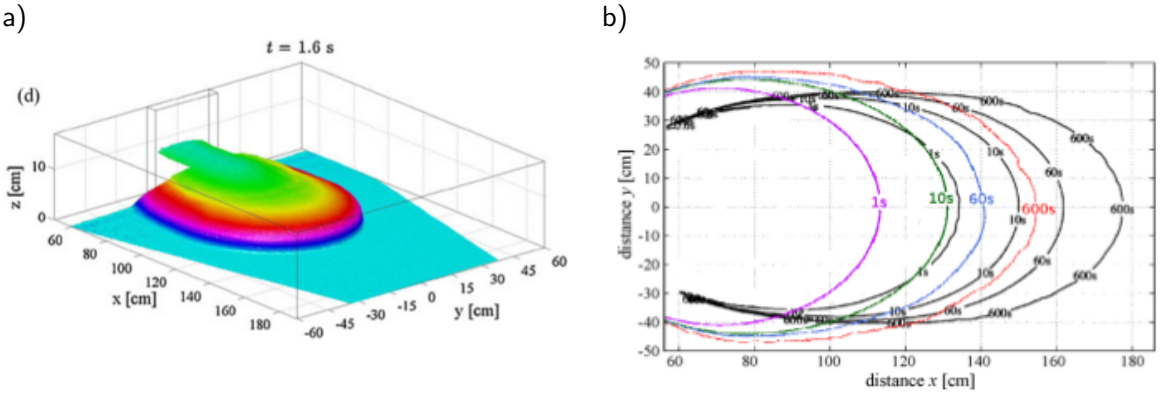

Figure 2.15 Coulée de gel de carbopol en configuration *dam-break*. a) Forme d'une coulée de gel de Carbopol 1.6 s après la rupture de vanne [Cochard and Ancey, 2009]. b) Position du front en 2D à différents moments [Cochard and Ancey, 2009] (noir) et comparaison au modèle de Bernabeu et al. [2014] (couleur), d'après Bernabeu et al. [2014].

De même, deux modèles de couches minces (lubrification et modèle 3D) adaptés à la loi de comportement de Herschel-Bulkley reproduisent correctement l'évolution de la ligne de contact (vue d'en haut) dans le cadre d'un slump-test avec du kaolin [Balmforth et al., 2006; Bernabeu et al., 2014].

Dans une autre configuration, en *dam-break*, le modèle 3D de Bernabeu et al. [2014] présente des désaccords sur la prédiction de la propagation d'une coulée de gel de Carbopol, mesurée par Cochard and Ancey [2009] (Fig.2.15a,b). Mais comme le souligne les auteurs, dans ces expériences de dam-break, l'ouverture de la vanne n'est pas instantané (environ 0.19 s) alors que dans la simulation numérique, la masse de Carbopol est relâchée instantanément. Bernabeu et al. [2014] expliquent aussi que ce désaccord pourrait être aussi du à la perte de la validité de l'hypothèse de couche mince et la non prise en compte des propriétés élastiques du Carbopol dans le modèle.

2.4.4 Dynamique interne en zone uniforme

Peu d'études sont consacrées à l'étude du champ de vitesse à l'intérieur d'écoulements à surface libre. Nous décrivons ici les résultats obtenus en zone uniforme, qui peuvent alors être comparés à des prédictions exactes basées sur la rhéologie de Herschel-Bulkley.

Kaitna et al. [2014] ont mesuré des profils de vitesse à l'aide d'un tambour tournant, dans un mélange de gravier et de matrice argileuse, afin d'obtenir un base de donnnée. Mais la complexité du matériau rend les mesures difficiles, la résolution verticale obtenue est assez faible (10 points de mesures par profil), et les mesures n'ont pu être réalisées qu'à la paroi.

En utilisant la méthode PIV, Andreini et al. [2012] ont mesuré des profils de vitesse dans des coulées en configuration dam-break, avec du gel de Carbopol. De très bons accords ont été obtenus entre les prédictions du modèle et les profils de vitesse expérimentaux, en zone uniforme et en zone de hauteur faiblement variée.

Chambon et al. [2014] ont étudié les champs de vitesse en zone uniforme d'une coulée de gel de Carbopol grâce au canal à fond mobile. Il ont pour cela développé une méthode PIV 1D consistant à étudier des lignes fines (à la place des boites carrées utilisées classiquement en PIV) sur toute la longueur de l'image pour exploiter le caractère uniforme de l'écoulement. Les profils de vitesse expérimentaux sont alors obtenus avec une très grande résolution spatiale. Les prédictions théoriques (moyennant la correction des paramètres rhéologiques de Herschel-Bulkley mesurés au rhéomètre mentionnée au §2.4.2) sont en très bon accord avec les mesures expérimentales.

Ces études démontrent la capacité de la rhéologie de Herschel-Bulkley à correctement prédire les caractéristiques de l'écoulement en zone uniforme.

2.4.5 Dynamique interne au front

En plus de la zone uniforme, Andreini et al. [2012] ont mesuré les champs de vitesse au front des coulées de gel de Carbopol générées dans leurs expériences, jusqu'à des distances inférieures à 1 mm de la ligne de contact. Cette étude est, à notre connaissance, la seule étude existante de dynamique interne du front de coulées à surface libre. Ils ont réalisé des expériences sur deux pentes différentes, correspondant à des nombres de Froude de l'ordre de 7.10^{-2}. Les prédictions théoriques sont basées sur le modèle de lubrification, la hauteur ainsi que la pente sont mesurées expérimentalement et

injectées dans le modèle. L'accord se dégrade en approchant le front, et devient très mauvais proche de la ligne de contact (Fig.2.16). Un point important de ces expériences est que l'on peut observer un changement de forme du profil de vitesse expérimental entre la zone uniforme et le front, où il devient entièrement cisaillé. La position dans la coulée de la zone dans laquelle l'accord se dégrade n'est pas reportée, mais elle se situe autour de 20-70 mm de la ligne de contact. Les auteurs n'indiquent pas comment ils ont mesuré l'épaisseur du plug, mais ils reportent une disparation de ce dernier à quelques millimètres de la ligne de contact. Enfin, ils reportent l'existence de glissement, qui pour l'expérience de pente 15° est du même ordre de grandeur que la vitesse de surface, et rend l'interprétation difficile.

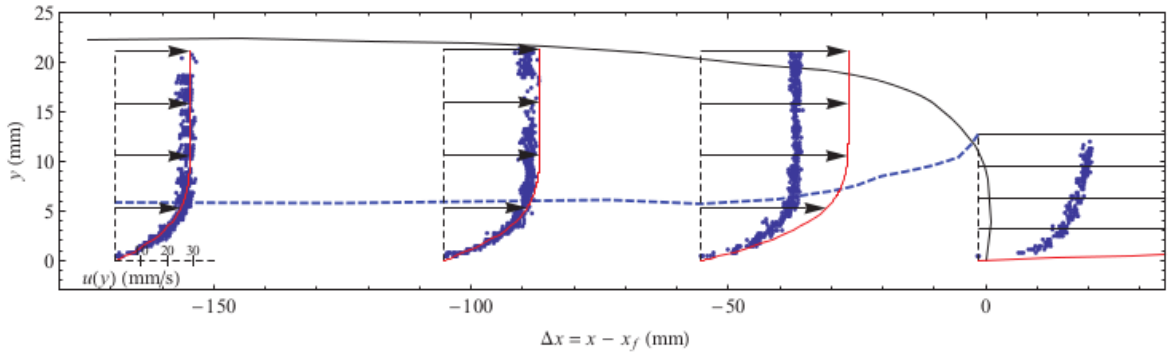

Figure 2.16 Hauteur de la surface libre d'un écoulement de gel de Carbopol, et profils de vitesse à différentes positions du front, en configuration dam break ($\theta = 25°$), [Andreini et al., 2012]. La ligne pointillée représente la position mesurée de l'interface entre le plug et la zone cisaillée. Comparaison à un modèle de lubrification (rouge).

2.5 Conclusion du chapitre

Les laves torrentielles et plus généralement les écoulements à surface libre de fluides à seuil sont naturellement présents dans notre environnement. La capacité des modèles viscoplastiques à prédire le comportement d'écoulement à surface libre est un sujet d'étude récent, et relativement peu documenté. Dans les écoulements à surface libre, la coexistence d'un plug sous la surface libre, de contrainte inférieure au seuil, et d'une zone cisaillée, de contrainte supérieure au seuil, ajoute de la complexité aux modèles [Balmforth et al., 2006, 2014]. Enfin, la prise en compte du comportement viscoplastique nécessite la prise en compte de contraintes normales, qui remettent en question l'existence de plugs rigides [Piau, 1996; Balmforth and Craster, 1999].

• Dans le modèle Saint-Venant, dont l'objectif et de prédire l'étalement et la propagation de coulées à surface libre comme les laves torrentielles, plusieurs hypothèses et approximations sont utilisées pour calculer les solutions théoriques. Les modèles Saint-Venant, utilisés opérationnellement, ne sont pas consistants mathématiquement [Piau, 1996; Balmforth and Craster, 1999; Fernandez-Nieto et al., 2010].

Plusieurs études sont parvenues à obtenir des modèles intégrés dans l'épaisseur consistants Fernandez-Nieto et al. [2010]; Chambon [2014]; Noble and Vila [2013] Cependant, ces différentes

études ont montré la non unicité du modèle à l'ordre 1 [Fernandez-Nieto et al., 2010; Noble and Vila, 2013; Chambon, 2014]. En effet, le développement de modèles complètement consistants fait en fait apparaître une famille de modèles, tous équivalents et le choix de sélection parait arbitraire. Les modèles de types Saint-Venant complètement consistants, n'ont à ce jour jamais fait l'objet de comparaison avec des mesures expérimentales. De plus, ces modèles ont été développés en considérant l'épaisseur du plug comme constante et ne permettent pas de calculer des solutions dans des zones fortement non uniformes comme au front.

• Les expériences mettant en jeu des écoulements gravitaires de fluides à seuil, s'attachent généralement à mesurer la propagation des écoulements en configuration dam-break (position en fonction du temps). La vitesse du front fournit des indications sur le comportement global de la coulée, mais lorsqu'un désaccord est observé, il est difficile de savoir s'il vient des hypothèses du modèle, de la rhéologie, ou des conditions initiales (l'influence du temps d'ouverture de la vanne par exemple).

En régime uniforme, des expériences ont montré l'aptitude de la rhéologie de Herschel-Bulkley à correctement prédire les profils de vitesse à l'intérieur de coulée de Carbopol [Andreini et al., 2012; Chambon et al., 2014].

Dans le front d'une coulée en revanche, des désaccords proches du front ont été observés avec le modèle de lubrification. Une seule étude à notre connaissance s'est consacrée à la mesure des champs de vitesse [Andreini et al., 2012], dans une gamme restreinte de nombre de Froude. Des difficultés expérimentales ont empêché l'étude et l'interprétation des données dans certaines configurations.

En marge de l'étude des écoulements en couche mince, deux études ont reporté des désaccords entre les paramètres rhéologiques mesurés au rhéomètre et à l'échelle de l'écoulement en canal incliné [Chambon et al., 2009; Longo et al., 2016]. Nous serons attentifs à cela et consacrerons une partie du chapitre 5 à cette vérification (§5.5.2).

Nous avons vu que pour obtenir des modèles de type Saint Venant et consistants, il faut connaître la forme des profils de vitesse. Nous proposons d'étudier expérimentalement les champs de vitesse à l'intérieur de coulées viscoplastiques (et newtoniennes) à surface libre et en zones non uniformes, comme au front. Nous pourrons alors observer l'évolution des profils de vitesse lorsque la hauteur varie, à l'approche du front. L'étude expérimentale d'un front sera pertinente pour pouvoir différencier l'apport des différents modèles, tester leurs résultats, et opérer une sélection parmi eux. Nous utiliserons le dispositif du canal à fond mobile, puisqu'il est approprié pour étudier la dynamique interne d'une coulée à surface libre, créer des configurations d'écoulement variées (vitesse moyenne, pente, rhéologie) et fournir une base de données importante.

Dans un premier temps, le modèle de lubrification, qui est le plus simple capable de prédire la forme d'un front sera testé. D'autre part, nous avons développé un modèle original, consistant à l'ordre 1 capable de calculer un front pour les fluides de Herschel-Bulkley. Nous détaillerons quelles sont les contributions qui ne sont pas prises en compte dans le modèle Saint-Venant classique, mais qui apparaissent dans le modèle d'ordre 1 consistant, et quelles sont leurs influences sur les prédictions.

Chapitre 3

Modélisation des écoulements à surface libre

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir des modèles mathématiques pour les écoulements à surface libre de fluides viscoplastiques, de rhéologie Herschel-Bulkley. Nous proposons de détailler les développements théoriques qui amènent à l'expression du profil de vitesse et du débit à l'ordre 1 en ϵ, dans le cadre de l'hypothèse de couche mince ($\epsilon = H/L << 1$). Nous suivrons l'approche de Fernandez-Nieto et al. [2010], basée sur un développement asymptotique de chacune des variables du modèle. Mais contrairement à l'étude de Fernandez-Nieto et al. [2010], qui se place dans le cas où $n = 1$ (Bingham) et $\epsilon Re/Fr^2 << 1$, nous considérons un fluide de Herschel-Bulkley et le cas où $\epsilon Re/Fr^2 \approx 1$. Ce cadre nous permettra de développer les équations autour du régime de lubrification, de considérer l'épaisseur du plug comme variable et de calculer la forme d'un front. A l'ordre 1, des termes correctifs liés aux contraintes normales et aux termes d'inertie apparaissent. Nous distinguerons alors l'apport de ces deux différentes corrections. Pour établir le système permettant de calculer la hauteur de l'écoulement à l'ordre 0 et à l'ordre 1, nous chercherons une solution de type onde progressive, justifiée par notre configuration expérimentale de fond mobile.

Nous commençons par rappeler le cadre théorique, puis par détailler le régime dit de lubrification, établi classiquement à partir de la simplification des équations de Navier-Stokes [Andreini et al., 2012; Huang and Garcia, 1998].

3.1 Équations Primitives

Nous considérons l'écoulement d'une couche de fluide sur un plan incliné d'angle θ par rapport à l'horizontale (Fig.3.1). La hauteur de l'écoulement est notée h. L'axe longitudinal, dans la direction de l'écoulement est noté x. L'axe y, perpendiculaire à l'axe x est dirigé vers le haut. Ainsi le fond de l'écoulement représente la droite d'équation $y = 0$. Nous nous limitons à un écoulement en deux dimensions. L'écoulement est gravitaire, $\mathbf{g}$=$(g\sin\theta, -g\cos\theta)$.

La vitesse d'une particule de fluide à l'intérieur de l'écoulement est caractérisée par sa composante longitudinale u, et verticale v. La vitesse moyenne du fluide, définie comme $(1/h)\int_0^h u dy$,

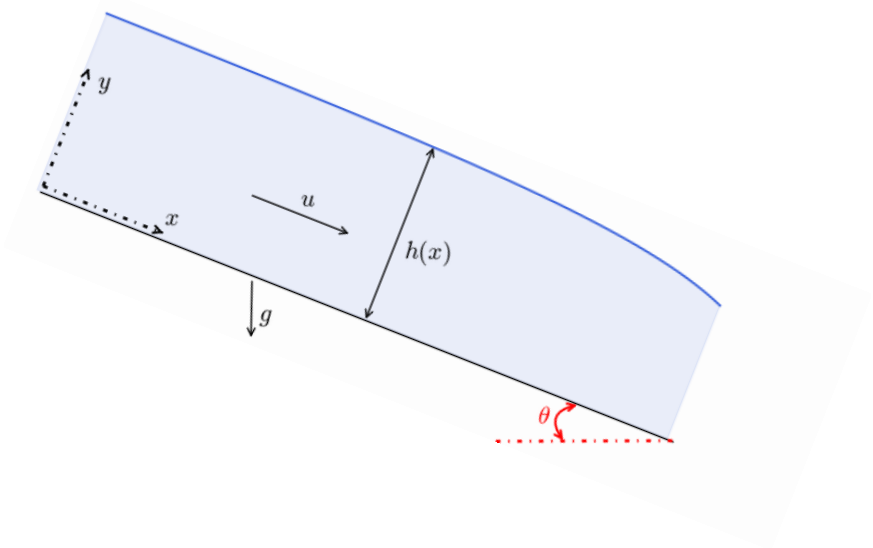

Figure 3.1 Représentation schématique d'un écoulement à surface libre en deux dimensions.

est notée $\bar{u}$. Le champ de pression à l'intérieur de l'écoulement est noté p. Le tenseur des extra-contraintes est noté σ_{ij}. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement selon x et y sont respectivement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho g \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \tag{3.2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\rho g \cos\theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \tag{3.3}$$

3.2 Conditions aux limites

Condition cinématique à la surface libre :
La surface libre est une surface matérielle, cette condition se traduit par :

$$v_{y=h} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_{y=h}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{3.4}$$

Condition cinématique au fond :
Nous considérons que les vitesses sont nulles au fond, c'est la condition d'adhérence. Nous avons :

$$u_{y=0} = 0 \; et \; v_{y=0} = 0 \tag{3.5}$$

Condition dynamique en surface libre :
La surface libre est l'interface qui sépare deux fluides, en l'ocurrence le fluide considéré et l'air

(Fig.3.1). On considère, à la surface libre, que la traction exercée par le fluide sur l'air est égale à l'opposé de la traction exercée par l'air sur le fluide.

En négligeant la pression atmosphérique et la tension de surface, ce qui est courant dans l'étude d'écoulements géophysiques, on obtient :

$$\sigma_{tot,xy,y=h}.n = 0 \tag{3.6}$$

avec n la normale à la surface libre. Soit,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - p \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\partial_x h \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} p_{y=h} &= \frac{1}{1-\partial_x h^2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\partial_x h^2)_{y=h} \\ \sigma_{xy,y=h} &= \frac{\partial_x h}{1-\partial_x h^2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_{y=h} \end{aligned} \tag{3.8}$$

En régime permanent uniforme, de hauteur h_N, la surface libre est libre de contraintes, les conditions aux limites donnent :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy,(y=h_N)} &= 0 \\ p_{(y=h_N)} &= 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.3 Loi de comportement

Nous considérons l'étude d'un fluide viscoplastique, dont la loi de comportement est représentée par un modèle de Herschel-Bulkley.

On rappelle que de façon générale, cette loi peut s'écrire sous forme tensorielle [Piau, 1996] de la façon suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = (\frac{\tau_c}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1})\dot{\gamma}_{ij} & \text{si } \tau > \tau_c, \\ \dot{\gamma}_{ij} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_c \; avec \; \tau = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{ij}\sigma_{ij}\sigma_{ij}} \; et \; \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{ij}\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}} \end{cases} \tag{3.10}$$

où τ_c est la contrainte seuil, K la consistance, et n l'indice d'écoulement. Ici, τ est le deuxième invariant du tenseur des extra-contraintes. $\dot{\gamma}$ est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation. Nous retrouvons le cas d'un fluide Newtonien en considérant n=1 et $\tau_c = 0$.

En cisaillement simple, $\dot{\gamma} = \partial_y u$ et la loi de comportement s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \tau_c + K\,(\partial_y u)^n & \text{si } \sigma_{xy} > \tau_c, \\ \partial_y u = 0 & \text{si } \sigma_{xy} \leq \tau_c, \end{cases} \tag{3.11}$$

3.4 Régime de lubrification

Dans cette section nous détaillons les solutions du régime de lubrification, qui permet de calculer le champ de vitesse et la forme d'un front (Fig.3.2). Dans ce régime, la dynamique de l'écoulement est dominée par l'équilibre entre la gravité g, la pression p, et les frottements représentés par la contrainte de cisaillement σ_{xy}.

Les équations de la conservation de la quantité de mouvement selon x et y se réduisent à :

$$\rho g \sin\theta - \partial_x p + \partial_y \sigma_{xy} = 0 \tag{3.12}$$

$$0 = -\rho g \cos\theta - \partial_y p \tag{3.13}$$

En intégrant cette dernière, on obtient $p = \rho g h \cos\theta \ (h - y)$ que l'on injecte dans (3.12). En intégrant l'équation ainsi obtenue, et en rappelant que h dépend x, il vient :

$$\sigma_{xy} = \rho g \sin\theta (1 - \cot\theta \partial_x h)(h - y). \tag{3.14}$$

D'après l'équation (3.14), il existe une couche non cisaillée au voisinage de la surface libre lorsque $\sigma_{xy} \leq \tau_c$, le plug. Son épaisseur est notée h_p, elle s'exprime :

$$h_p = \frac{\tau_c}{\rho g \sin\theta \ (1 - \cot\theta \partial_x h)}. \tag{3.15}$$

En écrivant l'équation (3.15) en $y = 0$, on obtient l'expression de la contrainte basale :

$$\tau_b = \rho g h \sin\theta (1 - \cot\theta \partial_x h) \tag{3.16}$$

On remarque qu'en écrivant τ_c/τ_b , il vient $h_p/h = \tau_c/\tau_b$, la formule présentée (Eq. 2.14), utilisée pour calculer la solution de modèles intégrés dans l'épaisseur [Coussot, 1994]. L'hypothèse de Coussot est donc exacte dans le cadre du régime de lubrification.

Puisque pour une pente θ donnée, il existe une couche d'épaisseur h_p non cisaillée (lorsque $\sigma_{xy} \leq \tau_c$), alors l'écoulement n'est possible sur cette pente que lorsque $h > h_p$. Sous cette condition, l'expression de la vitesse longitudinale u provient directement de l'égalité entre la loi de comportement de Herschel-Bulkley en cisaillement simple (Eq. 3.11) et l'expression de la contrainte σ_{xy} (Eq. 3.14) :

$$u = \begin{cases} u_p \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h - h_p} \right)^{(n+1)/n} \right] & \text{si } y < h - h_p \\ u_p & \text{si } y \geq h - h_p \end{cases} \tag{3.17}$$

avec u_p la vitesse du plug (la vitesse de surface) notée :

$$u_p = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin\theta}{K} \right)^{1/n} (1 - \cot\theta \partial_x h)^{1/n} \, (h - h_p)^{(n+1)/n} \tag{3.18}$$

D'après l'équation (3.17), l'expression du débit $q = \int_0^h u dy = h\bar{u}$ s'exprime :

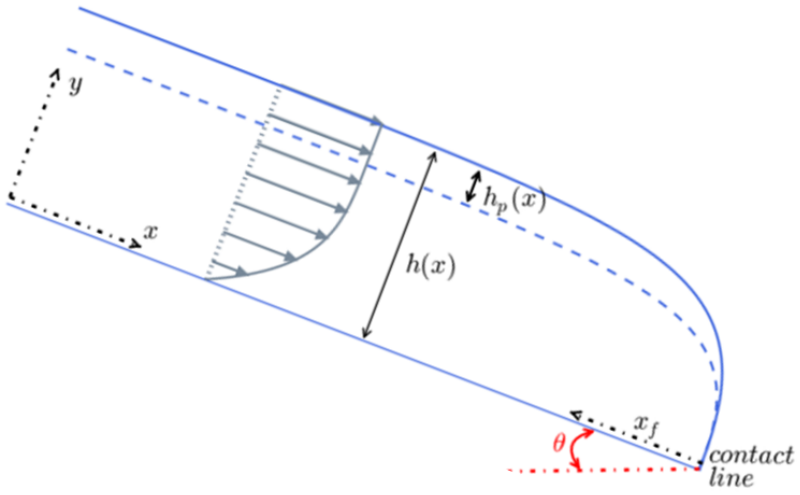

Figure 3.2 Écoulement à surface libre de fluide de Herschel-Bulkley. Profil de vitesse u, hauteur h et épaisseur du plug h_p calculés par les équations du régime de lubrification. (h, h_p) calculés par le système (3.123) et u calculée par (3.125, 3.126).

$$q = \frac{n}{2n+1}\lambda^{1/n}\left(1-\cot\theta\partial_x h\right)^{1/n}\left(h-h_p\right)^{(n+1)/n}\left(h+\frac{n}{n+1}h_p\right), \tag{3.19}$$

avec $\lambda = \rho g \sin\theta/K$. La vitesse moyenne s'exprime donc :

$$\bar{u} = \frac{1}{h}\frac{n}{2n+1}\lambda^{1/n}\left(1-\cot\theta\partial_x h\right)^{1/n}\left(h-h_p\right)^{(n+1)/n}\left(h+\frac{n}{n+1}h_p\right), \tag{3.20}$$

En paramétrant maintenant l'équation (3.17) par $\bar{u}$, on obtient une autre expression pour la vitesse u :

$$u = \begin{cases} \bar{u}\frac{(2n+1)h}{(n+1)h+nh_p}\left(1-\left(1-\frac{y}{h-h_p}\right)^{(n+1)/n}\right) & \text{si } y < h-h_p \\ \bar{u}\frac{(2n+1)h}{(n+1)h+nh_p} & \text{si } y \geq h-h_p \end{cases} \tag{3.21}$$

Remarque, lien avec le modèle Saint-Venant classique :

On montre ici que c'est à partir de la lubrification que l'on obtient la relation de fermeture du modèle Saint-Venant classique.

En exprimant la contrainte basale grâce à la loi de comportement de Herschel-Bulkley $\tau_b = \tau_c + K[du/dy_{(y=0)}]^n$, et avec l'expression du profil de vitesse u du régime de lubrification (Eq.3.21), on obtient alors :

$$\tau_b = \tau_c + K\left[\frac{2n+1}{n}\frac{\bar{u}}{h-h_p}\frac{h}{h+\frac{n}{n+1}h_p}\right]^n \tag{3.22}$$

En injectant la relation $\tau_b/\tau_c = h/h_p$ (avec $h_p = \tau_c/\rho g \sin\theta\,(1-\cot\theta\partial_x h)$) qui est issue de la lubrification, dans l'expression précédente pour τ_b, on obtient la relation suivante :

$$\tau_c \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_c}\right)^{n+1} \left(n + 1 + n\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{(2n+1)(n+1)}{n}\right)^n \left(\frac{\bar{u}}{h}\right)^n \tag{3.23}$$

ou encore en la ré-écrivant

$$\left(\frac{K}{\tau_c}\right)^{1/n} \frac{\bar{u}}{h} = \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)} \left(\frac{\tau_b}{\tau_c}\right)^{-2} \left(\frac{\tau_b}{\tau_c} - 1\right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\tau_b}{\tau_c}\frac{n+1}{n} + 1\right) \tag{3.24}$$

qui est la relation de fermeture du modèle de Saint-Venant dans le cadre de la rhéologie de Herschel-Bulkley, exprimée par Coussot [1994] ou encore Chambon et al. [2009] (*cf.* §2.3.3.3). Le modèle de lubrification est donc à la base du modèle Saint-Venant classique.

Remarque, cas du régime uniforme :

La solution du régime permanent uniforme peut être obtenue en appliquant $\partial_x h = 0$ aux équations du régime de lubrification. Cependant, la solution du régime permanent uniforme est exacte, elle ne dépend pas de l'hypothèse de couche mince, puisque nous pouvons l'obtenir directement des équations primitives (Eq. 3.1, 3.2 et 3.3) en éliminant les variations en t et en x.

3.5 Adimensionnalisation des équations primitives

Nous procédons ici à l'adimensionnalisation des équations primitives. Le choix des échelles est arbitraire, et permet de faire apparaître le paramètre d'aspect $\epsilon = H/L$ et des nombres sans dimension représentatifs de la physique de l'écoulement. L'objectif de l'adimensionnalisation est de comparer l'ordre de grandeur des différentes contributions, de façon à pouvoir simplifier rigoureusement les équations en négligeant les contributions les plus faibles.

3.5.1 Séparation de la contribution plastique et visqueuse des contraintes

Nous considérons une mise à l'échelle mixte des termes de contraintes, qui fait apparaître la composante visqueuse et plastique du tenseur des extra-contraintes. Ce raisonnement est inspiré de Piau [1996], qui montra que les contraintes normales visqueuses et plastiques ne sont pas du même ordre de grandeur (*cf.* §2.3.4). La contrainte est alors exprimée en fonction de sa contribution plastique et visqueuse :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^p + \sigma_{ij}^v \tag{3.25}$$

La loi de comportement de Herschel-Bulkley en zone cisaillée s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^p &= 2\frac{\tau_c}{\dot{\gamma}}\frac{\partial u}{\partial x} \\
\sigma_{xx}^v &= 2K\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x} \\
\sigma_{xy}^p &= \frac{\tau_c}{\dot{\gamma}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\sigma_{xy}^v &= K\dot{\gamma}^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
et \;\; \sigma_{yy}^p &= -\sigma_{xx}^p, \;\; \sigma_{yy}^v = -\sigma_{xx}^v
\end{aligned} \tag{3.26}$$

et s'écrit de cette façon sinon :

$$\tau = \sqrt{(\sigma^p_{xy} + \sigma^v_{xy})^2 + (\sigma^p_{xx} + \sigma^v_{xx})^2} \; et \; \dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \tag{3.27}$$

3.5.2 Variables sans dimension

Nous exprimons maintenant les variables du système (3.1), (3.2), (3.3), sans dimension. Par la suite, les variables sans dimension seront exprimées par la notation $\hat{o}$.

Les longueurs et la vitesse de l'écoulement sont adimensionnées en utilisant les échelles caractéristiques de la façon suivante :

$$x = L\hat{x};\; y = H\hat{y};\; u = U\hat{u} \tag{3.28}$$

D'après la conservation de la masse, la relation suivante doit être vérifiée :

$$V = \frac{H}{L}U \tag{3.29}$$

La pression p est adimensionnée par le champ de pression hydrostatique :

$$p = \rho g H \cos\theta \hat{p} \tag{3.30}$$

Le taux de cisaillement est adimensionnée par :

$$\dot{\gamma} = \frac{U}{H}\hat{\dot{\gamma}} \tag{3.31}$$

Nous introduisons les nombres sans dimension suivants, que nous avions déjà vu dans le chapitre 2 :

$$Re = \frac{\rho U^{2-n} H^n}{K};\; Fr = \frac{U}{\sqrt{gH\cos\theta}};\; Bi = \frac{\tau_c}{K}\left(\frac{H}{U}\right)^n \tag{3.32}$$

soit respectivement :
- le nombre de Reynolds, qui représente la compétition entre les forces d'inertie et les forces visqueuses,
- le nombre de Froude, qui représente l'importance de l'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle,
- et le nombre de Bingham appelé aussi nombre de Herschel-Bulkley, qui représente le ratio entre les effets plastiques et les effets visqueux.

La partie plastique des contraintes est adimensionnée par la contrainte seuil, et la partie visqueuse est mise à l'échelle "visqueuse". Cette échelle visqueuse a déjà été utilisée par Fernandez-Nieto et al. [2010] dans le cas ou $n = 1$.

$$\sigma^p_{xx} = \tau_c \hat{\sigma}^p_{xx};\; \sigma^p_{yy} = \tau_c \hat{\sigma}^p_{yy};\; \sigma^p_{xy} = \tau_c \hat{\sigma}^p_{xy} \tag{3.33}$$

$$\sigma^v_{xx} = K\frac{U^n}{H^{n-1}L}\hat{\sigma}^v_{xx};\; \sigma^v_{yy} = K\frac{U^n}{H^{n-1}L}\hat{\sigma}^v_{yy};\; \sigma^v_{xy} = K\left(\frac{U}{H}\right)^n \hat{\sigma}^v_{xy} \tag{3.34}$$

On remarque notamment que :

$$\sigma_{xy} = \sigma^v_{xy} + \sigma^p_{xy} = K\left(\frac{U}{H}\right)^n (\hat{\sigma}^v_{xy} + Bi\hat{\sigma}^p_{xy}) \tag{3.35}$$

3.5.3 Loi de comportement adimensionnée

La loi de comportement de Herschel-Bulkley, en écriture adimensionnée devient :

Si $\hat{\tau} > Bi$:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^p_{xx} &= 2\frac{\epsilon}{\dot{\gamma}}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \\
\hat{\sigma}^p_{yy} &= -\hat{\sigma}^p_{xx} \\
\hat{\sigma}^v_{xx} &= 2\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \\
\hat{\sigma}^v_{yy} &= -\hat{\sigma}^v_{xx} \\
\hat{\sigma}^p_{xy} &= \frac{1}{\hat{\dot{\gamma}}}(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \epsilon^2\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}) \\
\hat{\sigma}^v_{xy} &= \hat{\dot{\gamma}}^{n-1}(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \epsilon^2\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Si $\hat{\tau} \leq Bi$: $\hat{\dot{\gamma}}_{ij} = 0$, avec :

$$\hat{\tau} = \sqrt{(Bi\hat{\sigma}^p_{xy} + \hat{\sigma}^v_{xy})^2 + (Bi\hat{\sigma}^p_{xx} + \epsilon\hat{\sigma}^v_{xx})^2}\ et\ \hat{\dot{\gamma}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \epsilon^2\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}\right)^2 + 4\epsilon^2\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}\right)^2} \tag{3.37}$$

En zone cisaillée, la loi de comportement de Herschel-Bulkley s'exprime alors :

$$\hat{\sigma}^v_{xy} + Bi\hat{\sigma}^p_{xy} = Bi + \hat{\dot{\gamma}}^n + O(\epsilon^2) \tag{3.38}$$

On remarque qu'elle s'exprime de la même façon à l'ordre 0 et 1 en ϵ.

3.5.4 Conditions aux limites

Les conditions dynamiques à la surface libre s'écrivent maintenant :

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{\hat{y}=\hat{h}} &= \epsilon\frac{Fr^2}{Re}\frac{1}{1-\epsilon^2\partial_x\hat{h}^2}\left(\hat{\sigma}^v_{yy} + \frac{Bi}{\epsilon}\hat{\sigma}^p_{yy} - \epsilon^2\partial_x\hat{h}^2(\hat{\sigma}^v_{xx} + \frac{Bi}{\epsilon}\hat{\sigma}^p_{xx})\right)_{\hat{y}=\hat{h}} \\
(\hat{\sigma}^v_{xy} + Bi\hat{\sigma}^p_{xy})_{\hat{y}=\hat{h}} &= \frac{\epsilon^2\partial_x\hat{h}}{1-\epsilon^2\partial_x\hat{h}^2}\left(\hat{\sigma}^v_{xx} + \frac{Bi}{\epsilon}\hat{\sigma}^p_{xx} - \hat{\sigma}^v_{yy} - \frac{Bi}{\epsilon}\hat{\sigma}^p_{yy}\right)_{\hat{y}=\hat{h}}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

3.5.5 Équations du mouvement adimensionnées

On injecte les variables adimensionnées dans l'équation de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. On obtient le système suivant :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0 \tag{3.40}$$

$$\epsilon Re(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}}) = \frac{Re}{Fr^2}\tan\theta - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\sigma}^v_{xy}}{\partial \hat{y}} + Bi\frac{\partial \hat{\sigma}^p_{xy}}{\partial \hat{y}} + \epsilon^2\frac{\partial \hat{\sigma}^v_{xx}}{\partial \hat{x}} + \epsilon Bi\frac{\partial \hat{\sigma}^p_{xx}}{\partial \hat{x}} \tag{3.41}$$

$$\epsilon^3 Re(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}) = -\epsilon\frac{Re}{Fr^2} - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \epsilon^2\frac{\partial \hat{\sigma}^v_{xy}}{\partial \hat{x}} + \epsilon^2 Bi\frac{\partial \hat{\sigma}^p_{xy}}{\partial \hat{x}} + \epsilon^2\frac{\partial \hat{\sigma}^v_{yy}}{\partial \hat{y}} + \epsilon Bi\frac{\partial \hat{\sigma}^p_{yy}}{\partial \hat{y}} \tag{3.42}$$

L'écriture adimensionnée développée en fonction de ϵ nous permet d'évaluer l'ordre de grandeur de la contribution de chacun des termes des équations. On remarque que les contraintes visqueuses et plastiques ne sont pas du même ordre de grandeur, elles ne contribuent donc pas de la même façon dans la dynamique de l'écoulement. C'est pourquoi il est judicieux de les prendre en compte séparément.

Dorénavant, et sauf mention contraire, toutes les variables exprimées seront adimensionnées, et la notation $\hat{o}$ qui les désignait est abandonnée.

3.5.6 Choix d'échelle

Les modèles de couche mince, comme le modèle de Saint-Venant, sont issus de l'approximation de couche mince, $\epsilon << 1$. Comme ϵ est en facteur de Re, Re/Fr^2 et Bi, dans les équations (3.40), (3.41) et (3.42), un choix s'impose aussi sur la valeur de ces nombres sans dimension.

Généralement, et notamment dans l'étude de Fernandez-Nieto et al. [2010], c'est l'hypothèse suivante qui est faite :

$$Re, Fr^2, Bi \approx 1, \Rightarrow \epsilon\frac{Re}{Fr^2} \approx \epsilon \tag{3.43}$$

Mais comme nous le verrons au §3.6.1, cette hypothèse, qui correspond au régime uniforme à l'ordre 0, ne permet pas de calculer la forme d'un front, car elle impose que l'épaisseur du plug h_p soit constante à l'ordre 0.

Pour pouvoir calculer la forme d'un front à l'ordre 0 en ϵ, nous devons considérer un modèle qui permet de prendre en compte des variations de l'épaisseur du plug. Nous verrons au §3.6.2 que ce régime est obtenu en considérant un modèle qui permet de retrouver le régime de lubrification, soit en faisant l'hypothèse :

$$Re, Bi \approx 1, Fr^2 \approx \epsilon, \Rightarrow \epsilon\frac{Re}{Fr^2} \approx 1 \tag{3.44}$$

et par conséquent, $\epsilon Re \approx \epsilon$ et $Re/Fr^2 >> 1$. De plus, ce régime correspond généralement à ce qui est observé dans nos expériences (Re/Fr$^2\in$ [9-15] voir Tab.7.2) et sur les coulées naturelles (Re/Fr$^2\in$ [3-40] d'après les paramètres τ_c, K, $\bar{u}$ et h estimés par Bardou [2002]).

Pour développer les modèles, nous nous plaçons dans le cadre d'un développement asymptotique formel en ϵ, comme l'ont fait [Balmforth and Craster, 1999; Fernandez-Nieto et al., 2010]. Nous notons alors les différentes variables comme :

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} + \epsilon u^{(C_1)} + O(\epsilon^2) = u^{(1)} + O(\epsilon^2) \\ p &= p^{(0)} + \epsilon p^{(C_1)} + O(\epsilon^2) = p^{(1)} + O(\epsilon^2) \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.45}$$

La vitesse à l'ordre 1 en ϵ, par exemple, et la somme d'une contribution à l'ordre 0 ($u^{(0)}$), et d'un terme à l'ordre 1 qui joue le rôle d'un terme correctif ($\epsilon u^{(C_1)}$). Par la suite nous noterons, par exemple pour la vitesse, $u^{(C_1)}$ comme étant la correction d'ordre 1.

3.6 Expression de la vitesse et du débit à l'ordre 0 en ϵ

3.6.1 Ordre 0 avec $\epsilon\frac{Re}{Fr^2} \approx \epsilon$: le régime permanent uniforme

Sous l'hypothèse d'un développement à l'ordre 0 en ϵ, avec $\epsilon\frac{Re}{Fr^2} \approx \epsilon$, la première equation de la conservation de la quantité de mouvement nous indique de ne garder que les contributions du terme de gravité et des termes de frottement. La solution à l'ordre 0 correspond donc au régime permanent uniforme.

La première équation de la conservation de la quantité de mouvement donne :

$$0 = \frac{Re}{Fr^2}\tan\theta + \frac{\partial \sigma_{xy}^{v(0)}}{\partial y} + Bi\frac{\partial \sigma_{xy}^{p(0)}}{\partial y} \tag{3.46}$$

La condition à la surface libre prescrit $(\sigma_{xy}^{v} + Bi\sigma_{xy}^{p})_{y=h} = 0$.

Par intégration, on obtient :

$$\sigma_{xy}^{v,(0)} + Bi\sigma_{xy}^{p,(0)} = \epsilon\frac{Re}{Fr^2}(h-y). \tag{3.47}$$

En repassant en écriture dimensionnée, nous obtenons donc :

$$\sigma_{xy} = \rho g \sin\theta (h-y). \tag{3.48}$$

En remplaçant y par la position de l'interface entre le plug et la zone cisaillée on obtient :

$$\tau_c = \rho g h_p \sin\theta \tag{3.49}$$

ou encore, pour l'expression du l'épaisseur du plug, $h_p = \frac{\tau_c}{\rho g \sin\theta}$.

Pour un fluide de Herschel-Bulkley, et contrairement au régime de lubrification (Eq 3.14, 3.15), la hauteur h ainsi que l'épaisseur du plug h_p sont constantes. La contrainte de cisaillement ne

dépend que de la position verticale dans l'écoulement. Ce régime d'écoulement, ne permet pas de calculer une solution lorsque la hauteur h est inférieure à h_p. Cette hypothèse ne correspond donc pas au cas de l'étude du front d'un écoulement. Nous ne nous placerons donc pas dans le cadre $\epsilon\frac{Re}{Fr^2} \approx \epsilon$ pour développer un modèle à l'ordre 1.

Remarque :

A l'ordre 0, la deuxième équation primitive adimensionnée (Eq.3.42), simplifiée par ϵ indique que la pression n'est pas hydrostatique, puisque le terme $Bi\partial_{\hat{y}}\hat{\sigma}^p_{yy}$ ne peut pas être négligé.

3.6.2 Ordre 0 en ϵ avec $\epsilon\frac{Re}{Fr^2} \approx 1$: le régime de lubrification

Au front d'un écoulement, l'épaisseur diminue jusqu'à ce que la hauteur devienne nulle, le gradient de pression ne peut donc pas être négligé dans les équations de conservation de la quantité de mouvement [Hogg and Pritchard, 2004; Ancey et al., 2012]. Nous souhaitons donc faire apparaître le terme de gradient de pression, en plus de la contribution des termes de gravité et de frottement dans la première équation de la quantité de mouvement. Nous procédons alors à l'analyse des équations du mouvement, développées à l'ordre 0 en ϵ, sous l'hypothèse $\epsilon\frac{Re}{Fr^2} \approx 1$.

D'après la deuxième equation de la quantité de mouvement adimensionnée les seuls termes exprimés à l'ordre 0 en ϵ sont le terme de gravité et le terme de pression. Et l'équation (3.42) est remplacée par :

$$0 = -\epsilon\frac{Re}{Fr^2} - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial y} \tag{3.50}$$

La condition à la surface libre prescrit $p^{(0)}_{y=h} = 0$. Par intégration, nous obtenons donc l'expression de la pression :

$$p^{(0)} = h - y. \tag{3.51}$$

On constate que la pression est hydrostatique.

D'après la première équation de la quantité de mouvement les seuls termes à l'ordre 0 en ϵ sont le terme de gravité, le terme de pression et la contrainte de cisaillement. Et l'équation (3.41) se réduit à :

$$0 = \frac{Re}{Fr^2}\tan\theta - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial {\sigma^v_{xy}}^{(0)}}{\partial y} + Bi\frac{\partial {\sigma^p_{xy}}^{(0)}}{\partial y} \tag{3.52}$$

La condition à la surface libre prescrit $(\sigma^v_{xy} + Bi\sigma^p_{xy})_{y=h} = 0$. En injectant l'expression de la pression (Eq.3.51) nous obtenons :

$${\sigma^v_{xy}}^{(0)} + Bi{\sigma^p_{xy}}^{(0)} = (\frac{Re}{Fr^2}\tan\theta - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\partial_x h)(h-y) = \Lambda(h-y). \tag{3.53}$$

avec $\Lambda = (\frac{Re}{Fr^2}\tan\theta - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\partial_x h)$ qui s'écrit aussi $\Lambda = Bi/hp$ d'après l'équation (3.53) écrite à l'interface entre la zone cisaillée et le plug. Notons qu'en repassant en écriture dimensionnée, on retrouve l'équation du régime de lubrification (Eq.3.14) :

$$\sigma^v_{xy} + \sigma^p_{xy} = \sigma_{xy} = \rho g\sin\theta(1 - \cot\theta\partial_x h)(h-y). \tag{3.54}$$

On peut donc rigoureusement montrer que le régime de lubrification, est obtenu dans le cadre du développement des équations du mouvement à l'ordre 0 en ϵ, sous l'hypothèse $\epsilon \frac{Re}{Fr^2} \approx 1$.

On cherche maintenant à obtenir l'expression de la vitesse verticale dans l'écoulement, qui n'est pas habituellement calculée dans la littérature sur la lubrification dans le cas d'une rhéologie de Herschel-Bulkley.

La vitesse verticale peut être calculée à partir de l'équation de la conservation de la masse : $\partial_x u + \partial_y v = 0$. Sachant que $v_{y=0} = 0$, la vitesse verticale dans l'écoulement s'exprime $v = -\int_0^y \partial_x u \, dy$. Nous introduisons la variable $\zeta = 1 - y/(h(x) - h_p(x))$, qui permet de simplifier les notations. Avec ce changement de variable, la vitesse v s'exprime :

$$v = (h - h_p) \int_1^\zeta \frac{\partial u}{\partial x} \, d\zeta \tag{3.55}$$

Nous exprimons alors la vitesse longitudinale u en fonction de ζ :

$$u^{(0)} = \begin{cases} \frac{n}{n+1} \Lambda^{1/n} (h - h_p)^{(n+1)/n} \left(1 - \zeta^{(n+1)/n}\right) & \text{si } y < h - h_p \\ \frac{n}{n+1} \Lambda^{1/n} (h - h_p)^{(n+1)/n} = u_p^{(0)} & \text{si } y \geq h - h_p \end{cases} \tag{3.56}$$

Le débit correspondant, $q^{(0)} = \int_0^h u^{(0)} dy = (h - h_p) \int_0^1 u^{(0)} d\zeta + h_p u_p^{(0)}$ est donné par :

$$q^{(0)} = \frac{n}{2n+1} \Lambda^{1/n} \, (h - h_p)^{(n+1)/n} \left(h + \frac{n}{n+1} h_p\right) \tag{3.57}$$

L'expression de la vitesse u nous permet de calculer sa dérivée :

$$\frac{\partial u}{\partial x}^{(0)} = \begin{cases} \Lambda^{\frac{1-n}{n}} \partial_x \Lambda (h - h_p)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{1}{n+1}(1 - \zeta^{\frac{n+1}{n}}) + \frac{h_p}{h - h_p}(1 - \zeta^{\frac{1}{n}}\right] \\ + \Lambda^{\frac{1}{n}} (h - h_p)^{\frac{1}{n}} \partial_x h \left[1 - \zeta^{\frac{1}{n}}\right] & \text{si } y < h - h_p \\ \Lambda^{\frac{1-n}{n}} \partial_x \Lambda (h - h_p)^{\frac{n+1}{n}} (\frac{1}{n+1} + \frac{h_p}{h - h_p}) + \Lambda^{\frac{1}{n}} (h - h_p)^{\frac{1}{n}} \partial_x h & \text{si } y \geq h - h_p \end{cases} \tag{3.58}$$

Nous rappelons que dans ce modèle, l'épaisseur du plug n'est pas constante, des dérivées de h_p sont alors prises en compte, ici à travers l'expression $\partial_x \Lambda$. En effet on a :

$$h_p = \frac{1}{\Lambda} \frac{\tau_c}{K} \quad \Rightarrow \quad \partial_x h_p = -\partial_x \Lambda \frac{h_p}{\Lambda} \tag{3.59}$$

Un long calcul amène alors à l'expression de v :

$$v^{(0)} = -\Lambda^{1/n} \, (h - h_p)^{(n+1)/n} \, \mathcal{V}_1(\zeta) \, \partial_x h - \Lambda^{(1-n)/n} \, (h - h_p)^{(2n+1)/n} \, \mathcal{V}_2(\zeta, w_p) \, \partial_x \Lambda \tag{3.60}$$

où $\mathcal{V}_1(\zeta)$ et $\mathcal{V}_2(\zeta)$ s'expriment :

$$\mathcal{V}_1(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} - \zeta + \frac{n}{n+1} \zeta^{(n+1)/n} & \text{si } \zeta > 0 \\ \frac{1}{n+1} - \zeta & \text{si } \zeta \leq 0 \end{cases} \tag{3.61}$$

$$\mathcal{V}_2(\zeta, w_p) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{2n+1} - \zeta + \frac{n}{2n+1} \zeta^{(2n+1)/n}\right) + w_p \left(\frac{1}{n+1} - \zeta + \frac{n}{n+1} \zeta^{(n+1)/n}\right) & \text{si } \zeta > 0 \\ \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{2n+1} - \zeta\right) + w_p \left(\frac{1}{n+1} - \zeta\right) & \text{si } \zeta \leq 0 \end{cases} \tag{3.62}$$

avec $w_p = h_p/(h - h_p)$.

Notons que dans le cadre de l'hypothèse de couche mince, v est petite par rapport à u, puisque la conservation de la masse indique $v \sim \epsilon u$.

3.6.3 Contribution des contraintes normales

Nous montrons dans cette section, comme l'ont déjà démontré Balmforth and Craster [1999], qu'il existe des contraintes normales plastiques à l'ordre 0, dans le pseudo-plug. L'existence de ces contraintes nous amène à réécrire la loi de comportement du régime de lubrification à l'ordre 0. En revanche, l'apparition de contraintes normales dans le pseudo-plug ne modifiera pas les équations du mouvement du régime le lubrification, puisqu'à l'ordre 0 les termes $\epsilon Bi \partial_x \sigma_{xx}^{p(0)}$ et $\epsilon^2 \partial_x \sigma_{xx}^{v(0)}$ seront quand même négligés.

Contraintes normales plastiques dans la zone cisaillée L'adimensionnalisation introduite (*cf.* §3.5.2) repose sur l'hypothèse que $\dot{\gamma}$ est d'ordre 0 en ϵ.

En examinant l'expression de la loi de comportement dans la zone cisaillée (Eq.3.36) on remarque donc qu'à l'ordre 0 en ϵ, les contraintes normales plastiques sont nulles.

$$\sigma_{xx}^{p(0)},\ \sigma_{yy}^{p(0)} = 0 \tag{3.63}$$

Contraintes normales plastiques dans le pseudo-plug Dans l'écoulement à surface libre de fluide à seuil, la hauteur h varie avec x, ce qui parait incompatible avec l'existence d'un plug rigide [Piau, 2007]. Balmforth and Craster [1999] ont résolu rigoureusement ce paradoxe en supposant plutôt que dans le pseudo-plug, le taux de cisaillement est d'ordre 1 en ϵ. De cette façon la contrainte dans le pseudo-plug est juste au-dessus de la contrainte seuil, même à l'ordre 0. En suivant les travaux de Balmforth and Craster [1999] on considère donc que $\dot{\gamma}$ est d'ordre de grandeur de ϵ dans le pseudo-plug. On exprime la vitesse dans le pseudo-plug comme étant la somme d'une contribution d'ordre 0 ne dépendant que de x et d'une contribution d'ordre 1 dépendant de x et y.

$$u_p = u_p(x,y,t)^{(1)} + O(\epsilon^2) = u_p(x,t)^{(0)} + \epsilon u_p(x,y,t)^{(C_1)} + O(\epsilon^2) \tag{3.64}$$

avec $u_p(x,y,t)^{(C_1)}$ la correction d'ordre 1.

Le taux de cisaillement (Eq.3.37) devient alors :

$$\dot{\gamma}^{(1)} = \epsilon \sqrt{(\partial_y u_p^{(C_1)})^2 + 4(\partial_x u_p^{(0)})^2} + O(\epsilon^2) = \epsilon \dot{\gamma}^{(C_1)} + O(\epsilon^2) \tag{3.65}$$

avec $\dot{\gamma}^{(C_1)}$ la correction d'ordre 1.

La loi de comportement d'un fluide de Herschel-Bulkley en régime de lubrification doit être reconsidérée dans le pseudo-plug à l'ordre 0 en ϵ de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
{\sigma_{xx}^{p}}^{(0)} &= \frac{2\partial_x \hat{u}_p^{(0)}}{\dot{\gamma}^{(C_1)}} \\
{\sigma_{yy}^{p}}^{(0)} &= -{\sigma_{xx}^{p}}^{(0)} \\
{\sigma_{xy}^{p}}^{(0)} &= \frac{2\partial_y u_p^{(C_1)}}{\dot{\gamma}^{(C_1)}} \\
\sigma_{xy}^{v} &= O(\epsilon^n) \\
\sigma_{xx}^{v} &= O(\epsilon^{n-1}) \\
\sigma_{yy}^{v} &= -\sigma_{xx}^{v} \\
et \quad \tau^{(0)} &= Bi\sqrt{(\sigma_{xy}^{p(0)})^2 + (\sigma_{xx}^{v(0)})^2} = Bi,
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

Les contraintes normales plastiques sont donc non nulles à l'ordre 0 dans le pseudo-plug. Comme on peut le remarquer les contraintes normales visqueuses deviennent importantes dans le pseudo-plug lorsque $n < 1$, mais elles sont en facteur de ϵ^2 dans les équations de conservation du mouvement et leur contribution est donc quand même négligeable à l'ordre 0 (et 1) en ϵ (*cf.* 9.3).

Etant donné que $\dot{\gamma} \approx \epsilon$, la contrainte s'exprime alors, comme l'ont montré Balmforth and Craster [1999], comme la somme de la contrainte seuil, et d'une contribution en ϵ :

$$\tau = Bi + O(\epsilon^n) \tag{3.67}$$

D'après l'équation (3.53) et la loi de comportement dans le pseudo-plug (3.65 et 3.66), on a l'égalité suivante :

$$Bi\sigma_{xy}^{p(0)} = Bi\frac{\partial_y u_p^{(C_1)}}{\sqrt{(\partial_y u_p^{(c_1)})^2 + 4(\partial_x u_p^{(0)})^2}} = \Lambda(h-y) \tag{3.68}$$

et on déduit de cette dernière égalité que :

$$\partial_y u_p^{(c_1)} = \frac{2\Lambda(h-y)}{\sqrt{Bi^2 - \Lambda^2(h-y)^2}} |\partial_x u_p^{(0)})| \tag{3.69}$$

On peut donc exprimer la contribution de la contrainte normale plastique à l'ordre 0 à partir de l'équation précédente et de la loi de comportement (Eq. 3.66) :

$$\sigma_{xx}^{p(0)} = 2\frac{\partial_x u_p^{(0)}}{\sqrt{(\partial_y u_p^{(c_1)})^2 + 4(\partial_x u_p^{(0)})^2}} = \mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)})\sqrt{1 - \left(\frac{h-y}{h_p}\right)^2} \tag{3.70}$$

A l'ordre 0, les équations de conservation de la quantité de mouvement sont inchangées et l'apparition de contraintes normales plastiques dans le pseudo plug n'influe pas les résultats du régime de lubrification établis au §3.4 et au §3.6.2. Comme l'équation (3.14) est inchangée, l'expression des profils de vitesse u et v (Eq. 3.17 ou 3.56 et 3.60) est aussi inchangée.

3.7 Expression de la vitesse et du débit à l'ordre 1 en ϵ

Dans cette section, nous cherchons à établir à l'ordre 1, l'expression des profils de vitesse et du débit. Ce dernier nous permettra d'obtenir l'équation exprimant la forme du front.

Nous procédons à l'analyse des équations du mouvement développées à l'ordre 1 en ϵ. le développement sera effectué sous l'hypothèse $\epsilon\frac{Re}{Fr^2} \approx 1$ puisque c'est la condition qui permet de retrouver l'équation de lubrification à l'ordre 0 en ϵ et ainsi de calculer la forme d'un front (voir §3.6.2). Ainsi, dans ce cadre, les termes en facteur de ϵ^2 sont négligés.

La première équation de la quantité de mouvement donne :

$$\epsilon Re(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)}\frac{\partial u^{(0)}}{x} + v^{(0)}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial y}) = \lambda - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\frac{^{(1)}}{\partial x} + \epsilon Bi\frac{\partial \sigma^{p}_{xx}{}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{v}_{xy}{}^{(1)}}{\partial y} + Bi\frac{\partial \sigma^{p}_{xy}{}^{(1)}}{\partial y} \quad (3.71)$$

avec $\lambda = Re/Fr^2 \tan\theta$. D'après la deuxième équation de la conservation de la quantité de mouvement, les seuls termes exprimés à l'ordre 1 en ϵ sont le terme de gravité, le terme de pression et la contrainte normale plastique. Et l'équation (3.42) devient :

$$0 = -\epsilon\frac{Re}{Fr^2} - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y} + \epsilon Bi\frac{\partial \sigma^{p}_{yy}{}^{(0)}}{\partial y} \quad (3.72)$$

La différence avec le régime de lubrification, hors la considération des termes d'inertie, est l'apparition de contraintes normales plastiques.

Pour les termes en facteur de ϵ, il suffit de les exprimer à l'ordre 0 en ϵ pour être dans le cadre d'un développement à l'ordre 1 en ϵ. Étant donné le choix d'échelle (Eq.3.44), ce modèle doit donc faire intervenir :
-la vitesse horizontale u et verticale v à l'ordre 0 dans le terme d'inertie, $u^{(0)}$ et $v^{(0)}$.
-la contrainte normale plastique à l'ordre 0, $\sigma^{p(0)}_{xx}$
-la pression à l'ordre 1, $p^{(1)}$.
-les contraintes de cisaillement à l'ordre 1, ($\sigma^{v(1)}_{xy}$, $\sigma^{p(1)}_{xy}$) et donc la vitesse horizontale u à l'ordre 1, $u^{(1)}$.

Pour les calculs particulièrement longs, nous avons utilisé un logiciel de calcul formel (Maxima).

3.7.1 Identité différentielle à l'ordre 0

La conservation de la masse et l'expression du débit $q^{(0)} = h\bar{u}^{(0)}$, nous donnent l'expression d'une identité différentielle à l'ordre 0. Cela nous permet d'exprimer les dérivées temporelles de h par des dérivées spatiales ce qui sera utile par la suite.

Avec la conservation de la masse, on a :

$$\partial_t h = -\partial_x q^{(0)} + O(\epsilon) \quad (3.73)$$

Or, nous avons calculé l'expression du débit à l'ordre 0 en écriture adimensionnée (3.57). Avec la conservation de la masse, et la dérivée du débit $\partial_x q$ issue de l'équation (3.57), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\partial_t h = &-\Lambda^{1/n}\,(h-h_p)^{(n+1)/n}(1+w_p)\partial_x h \\ &-\Lambda^{(1-n)/n}\,(h-h_p)^{(2n+1)/n}\left(\tfrac{1}{2n+1}+\tfrac{2}{n+1}w_p+w_p^2\right)\partial_x\Lambda+\mathcal{O}(\epsilon),\end{aligned} \quad (3.74)$$

avec $w_p = h_p/(h-h_p)$.

3.7.2 Conditions aux limites

Avec le choix d'échelle (Eq. 3.44), les conditions dynamiques en surface libre s'écrivent :

$$\begin{aligned} p_{y=h} &= Bi\frac{Re}{Fr^2}{\sigma^p_{yy}}^{(0)}_{(y=h)} \\ (\sigma^v_{xy}+Bi\sigma^p_{xy})_{y=h} &= \epsilon Bi\partial_x h({\sigma^p_{xx}}^{(0)}-{\sigma^p_{yy}}^{(0)})_{(y=h)}\end{aligned} \quad (3.75)$$

3.7.3 Pression

L'intégration de l'équation (3.71) nous permet de calculer l'expression de la pression :

$$p^{(1)} = h - y + Bi\frac{Fr^2}{Re}{\sigma^p_{yy}}^{(0)} \quad (3.76)$$

La pression à l'ordre 1 n'est donc plus hydrostatique, elle est la somme de la pression hydrostatique plus une contribution liée à l'existence de la contrainte normale plastique. La contrainte normale plastique à l'ordre 0 a déjà été exprimée dans le paragraphe 3.6.2, (Eq. 3.70), on rappelle qu'elle est non-nulle uniquement dans le pseudo-plug.

3.7.4 Contraintes de cisaillement

Nous cherchons à exprimer les contraintes de cisaillement à l'ordre 1, dans le but ensuite d'en déduire l'expression de la vitesse longitudinale u à l'ordre 1.

3.7.4.1 Dans la zone cisaillée

En injectant l'expression de la pression (3.76) dans l'équation (3.71) et en utilisant l'égalité $\sigma^p_{yy} = -\sigma^p_{xx}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\partial_y(\sigma^{v(1)}_{xy}+Bi\sigma^{p(1)}_{xy}) &= \epsilon ReM(y)-\tan\theta\frac{Re}{Fr^2}+\epsilon\frac{Re}{Fr^2}\partial_x h+\epsilon Bi\frac{\partial\sigma^{p(0)}_{yy}}{\partial x}-\epsilon Bi\frac{\partial\sigma^{p(0)}_{xx}}{\partial x} \\ \Rightarrow \partial_y(\sigma^{v(1)}_{xy}+Bi\sigma^{p(1)}_{xy}) &= \epsilon ReM(y)-\tan\theta\frac{Re}{Fr^2}+\epsilon\frac{Re}{Fr^2}\partial_x h-2\epsilon Bi\frac{\partial\sigma^{p(0)}_{xx}}{\partial x}\end{aligned} \quad (3.77)$$

avec $M(y) = \left(\partial_t u^{(0)} + u^{(0)}\partial_x u^{(0)} + v^{(0)}\partial_y u^{(0)}\right)$.
L'intégration de (3.77) entre y et h avec $y < h - h_p$, et en sachant que les contraintes normales plastiques sont nulles dans la zone cisaillée (Eq.3.63), donne alors :

$$\sigma_{xy}^{(1)} - \sigma_{xy}^{(1)}{}_{y=h} = \epsilon Re I(y) + (\tan\theta \frac{Re}{Fr^2} + \epsilon \frac{Re}{Fr^2}\partial_x h)(h-y) + 2\epsilon Bi \int_{h-h_p}^{h} \partial_x \sigma_{xx}^{p(0)} dy \quad (3.78)$$

avec $I(y) = -\int_y^h \left(\partial_t u^{(0)} + u^{(0)}\partial_x u^{(0)} + v^{(0)}\partial_y u^{(0)}\right) dy$.

D'après les conditions aux limites à la surface libre (Eq.3.75) et l'expression de la contrainte normale plastique dans le pseudo-plug (Eq3.70), on peut écrire :

$$\sigma_{xy}^{(1)}{}_{y=h} = 2\epsilon Bi \partial_x h \sigma_{xx}^{p(0)}{}_{y=h} = 2\epsilon Bi \partial_x h \ \mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)}) \quad (3.79)$$

De plus, la dérivée de la contrainte normale plastique dans le pseudo-plug peut être calculée à partir de l'équation (3.70) :

$$\partial_x \sigma_{xx}^{p(0)} = -\mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)}) \left(\partial_x h \frac{h-y}{\sqrt{1-(\frac{h-y}{h_p})^2}} + \frac{\partial_x \Lambda}{\Lambda} \frac{(h-y)^2}{\sqrt{1-(\frac{h-y}{h_p})^2}} \right) \quad (3.80)$$

Et son intégrale :

$$\int_{h-h_p}^{h} \partial_x \sigma_{xx}^{p(0)} dy = -\mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)}) \left(\partial_x h + \frac{\partial_x \Lambda}{\Lambda} h_p \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.81)$$

Dans l'équation 3.78, le terme provenant de la condition-limite se simplifie avec le premier terme de la contribution de la contrainte normale plastique, et l'expression de la contrainte de cisaillement devient alors :

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \Lambda(h-y) + \epsilon Re I(y) - \epsilon Bi \ \mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)}) \frac{\partial_x \Lambda}{\Lambda} h_p \frac{\pi}{2} \quad (3.82)$$

avec, pour rappel, $\Lambda = (\frac{Re}{Fr^2}\tan\theta - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\partial_x h)$.

Les termes $I(y)$ et $\epsilon Bi \,\mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)}) \frac{\partial_x \Lambda}{\Lambda} h_p \frac{\pi}{2}$ jouent le rôle de termes correctifs provenant de l'inertie et des contraintes normales, respectivement. Ils n'apparaissent pas dans les développements à l'ordre 0, qui donnent $\sigma_{xy}^{(0)} = \Lambda(h-y)$ uniquement. Le terme $I(y)$ est calculé à partir des développements à l'ordre 0 de la vitesse. La dérivée de la vitesse longitudinale dans le plug fait apparaître la dérivée de la hauteur h par rapport au temps, que l'on remplace par des dérivées spatiales grâce à l'identité différentielle obtenue au §3.7.1 (Eq.3.74). Ce remplacement est un choix, dans le but d'éviter les dérivées temporelles de h dans les termes correctifs. Ensuite, le calcul du terme $u^{(0)}\partial_x u^{(0)} + v^{(0)}\partial_y u^{(0)}$ est long, mais plusieurs termes se simplifient.

On trouve finalement l'expression suivante :

$$\mathcal{I}(\zeta) = \Lambda^{2/n} \ (h-h_p)^{(2n+2)/n} p_{\mathcal{I},1}(\zeta, w_p) \ \partial_x h + \Lambda^{(2-n)/n} \ (h-h_p)^{(3n+2)/n} p_{\mathcal{I},2}(\zeta, w_p) \ \partial_x \Lambda - \Lambda^{(1-n)/n} \ (h-h_p)^{(2n+1)/n} p_{\mathcal{I},1}(\zeta, w_p) \ \partial_t \Lambda \quad (3.83)$$

avec

$$p_{\mathcal{I},1}(\zeta, w_p) = \left(\tfrac{1}{n+1}\zeta - \tfrac{n}{(n+1)(2n+1)}\zeta^{(2n+1)/n}\right) + w_p\left(\tfrac{1}{n+1} + \zeta - \tfrac{n}{n+1}\zeta^{(n+1)/n}\right) + w_p^2 \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{I},2}(\zeta, w_p) = &\left(\tfrac{1+n-n^2}{(n+1)^2(2n+1)}\zeta + \tfrac{n(n-1)}{(n+1)^2(2n+1)}\zeta^{(2n+1)/n} - \tfrac{n^3}{(n+1)^2(2n+1)(3n+2)}\zeta^{(3n+2)/n}\right) \\ &+ w_p\left(\tfrac{1+n-n^2}{(n+1)^2(2n+1)} + \tfrac{2-n}{n+1}\zeta - \tfrac{n(1-n)}{(n+1)^2}\zeta^{(n+1)/n} - \tfrac{n}{(n+1)(2n+1)}\zeta^{(2n+1)/n}\right) \\ &+ w_p^2\left(\tfrac{2-n}{n+1} + \zeta - \tfrac{n}{n+1}\zeta^{(n+1)/n}\right) + w_p^3 \end{aligned} \quad (3.85)$$

3.7.4.2 Dans le pseudo-plug

Il n'est pas nécessaire de calculer les contraintes de cisaillement dans le pseudo-plug pour en déduire $u^{(1)}$, car $u^{(1)}$ provient de $\sigma_{xy}^{(0)}$ dans le pseudo-plug (voir §3.6.3).

3.7.5 Vitesse longitudinale

3.7.5.1 Dans la zone cisaillée

Le gradient de vitesse à l'ordre 1 dans la zone cisaillée est obtenu grâce à la loi de comportement de Herschel-Bulkley par la relation suivante :

$$\partial_y u^{(1)} = \left(\sigma_{xy}^{(1)} - Bi\right)^{1/n} \quad (3.86)$$

La vitesse à l'ordre 1 peut alors être déduite grâce à l'expression de la contrainte de cisaillement à l'ordre 1 (Eq. 3.82). Moyennant un développement limité si $n \neq 1$ et en utilisant la relation $Bi = \Lambda h_p$, on obtient :

$$\partial_y u^{(1)} = [\Lambda(h-h_p)\zeta]^{1/n} - \tfrac{1}{n}[\Lambda(h-h_p)\zeta]^{(1-n)/n}\left(\epsilon Bi\,\frac{\pi}{2}\frac{h_p}{\Lambda}\,\mathrm{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right)\partial_x\Lambda - \epsilon Re\,\mathcal{I}(y)\right) \quad (3.87)$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} u^{(1)} = &\frac{n}{n+1}\Lambda^{1/n}(h-h_p)^{(n+1)/n}\left(1-\zeta^{(n+1)/n}\right) \\ &- \epsilon Bi\,\frac{\pi}{2}\Lambda^{(1-2n)/n}\,h_p(h-h_p)^{1/n}(1-\zeta^{1/n})\,\mathrm{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right)\,\partial_x\Lambda + \epsilon Re\,\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta) \end{aligned} \quad (3.88)$$

avec

$$\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta) = \tfrac{1}{n}\Lambda^{(1-n)/n}(h-h_p)^{1/n}\int_\zeta^1 \zeta'^{(1-n)/n}\,\mathcal{I}(\zeta')d\zeta' \quad (3.89)$$

On peut aussi écrire

$$u^{(1)} = \frac{n}{n+1}\Lambda^{1/n}(h-h_p)^{(n+1)/n}\left(1-\zeta^{(n+1)/n}\right) + \epsilon Bi\,\mathcal{U}_{\mathcal{N}}(\zeta) + \epsilon Re\,\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta) \quad (3.90)$$

avec le premier terme que l'on reconnaît comme étant l'expression de la vitesse à l'ordre 0 (Eq.3.56), et $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}(\zeta)$ et $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta)$ les corrections provenant des contraintes normales et des termes d'inertie.

La correction des contraintes normales s'exprime :

$$\mathcal{U}_{\mathcal{N}}(\zeta) = -\frac{\pi}{2}\Lambda^{(1-2n)/n}\, h_p(h-h_p)^{1/n}(1-\zeta^{1/n})\,\mathrm{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right)\,\partial_x\Lambda \tag{3.91}$$

Pour l'évaluation de $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta) = \Lambda^{(3-n)/n}\,&(h-h_p)^{(2n+3)/n} p_{\mathcal{U},1}(\zeta,w_p)\,\partial_x h\\ &+\Lambda^{(3-2n)/n}\,(h-h_p)^{(3n+3)/n} p_{\mathcal{U},2}(\zeta,w_p)\,\partial_x\Lambda\\ &-\Lambda^{(2-2n)/n}\,(h-h_p)^{(2n+2)/n} p_{\mathcal{U},1}(\zeta,w_p)\,\partial_t\Lambda\end{aligned} \tag{3.92}$$

avec

$$\begin{aligned}p_{\mathcal{U},1}(\zeta,w_p) = &\left(\tfrac{3n+2}{2(n+1)^2(2n+1)} - \tfrac{1}{(n+1)^2}\zeta^{(n+1)/n} + \tfrac{n}{2(n+1)^2(2n+1)}\zeta^{(2n+2)/n}\right)\\ &+ w_p\left(\tfrac{n+4}{(n+1)(n+2)} - \tfrac{1}{n+1}\zeta^{1/n} - \tfrac{1}{n+1}\zeta^{(n+1)/n} + \tfrac{n}{(n+1)(n+2)}\zeta^{(n+2)/n}\right)\\ &+ w_p^2\left(1-\zeta^{1/n}\right)\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}p_{\mathcal{U},2}(\zeta,w_p) = &\left(\tfrac{12+24n+3n^2-11n^3}{6(n+1)^3(2n+1)(3n+2)} - \tfrac{1+n-n^2}{(n+1)^3(2n+1)}\zeta^{(n+1)/n} + \tfrac{n(1-n)}{2(n+1)^3(2n+1)}\zeta^{(2n+2)/n}\right.\\ &\qquad\left.+\tfrac{n^3}{3(n+1)^3(2n+1)(3n+2)}\zeta^{(3n+3)/n}\right)\\ &+ w_p\left(\tfrac{12+18n-7n^2-2n^3}{2(n+1)^2(n+2)(2n+1)} - \tfrac{1+n-n^2}{(n+1)^2(2n+1)}\zeta^{1/n} - \tfrac{2-n}{(n+1)^2}\zeta^{(n+1)/n}\right.\\ &\qquad\left.+\tfrac{n(1-n)}{(n+1)^2(n+2)}\zeta^{(n+2)/n} + \tfrac{n}{2(n+1)^2(2n+1)}\zeta^{(2n+2)/n}\right)\\ &+ w_p^2\left(\tfrac{6-n^2}{(n+1)(n+2)} - \tfrac{2-n}{n+1}\zeta^{1/n} - \tfrac{1}{n+1}\zeta^{(n+1)/n} + \tfrac{n}{(n+1)(n+2)}\zeta^{(n+2)/n}\right)\\ &+ w_p^3\left(1-\zeta^{1/n}\right)\end{aligned} \tag{3.94}$$

On peut vérifier que $p_{\mathcal{U},1}(1,w_p)$ et $p_{\mathcal{U},2}(1,w_p)$ sont bien nulles en $\zeta = 1$, comme l'impose la condition de vitesse nulle au fond (pour rappel, $\zeta = 1 - y/(h-h_p)$).

3.7.5.2 Dans le pseudo-plug

La vitesse longitudinale dans le pseudo-plug peut être déduite de l'équation (3.69). Sachant que $\Lambda = Bi/h_p$, et que $|\partial_x u_p^{(0)}| = \partial_x u_p^{(0)}\,\mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)})$ on exprime l'équation (3.69) comme :

$$\partial_y u_p^{(c_1)} = \frac{2(h-y)/h_p}{\sqrt{1-(h-y)^2/h_p^2}}\partial_x u_p^{(0)}\,\mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)}) \tag{3.95}$$

L'intégration de cette équation de $h-h_p$ à y donne :

$$\begin{aligned}u_p^{(c_1)} = u_+(x,t) + 2h_p&\sqrt{1-\left(\frac{h-y}{h_p}\right)^2}\times\\ &\left[\Lambda^{1/n}(h-h_p)^{1/n}\partial_x h + \Lambda^{(1-n)/n}(h-h_p)^{(n+1)/n}\left(\tfrac{1}{n+1}+w_p\right)\partial_x\Lambda\right]\mathrm{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right),\end{aligned} \tag{3.96}$$

avec u_+ un facteur d'intégration ne dépendant que de x et de t, choisi pour assurer la continuité de la vitesse à l'interface plug/zone-cisaillée.

Une identification entre les équations (3.88) et (3.96) à $y = h - h_p \Leftrightarrow \zeta = 0$, pour assurer la continuité de la vitesse, amène :

$$\epsilon u_+ = -\epsilon Bi\, \frac{\pi}{2} \Lambda^{(1-2n)/n}\, h_p (h-h_p)^{1/n} \operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) \partial_x \Lambda + \epsilon Re\, \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(0) \tag{3.97}$$

Comme nous avons déjà évalué $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta)$, nous pouvons en déduire l'expression de la correction provenant des termes d'inertie :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(0) = \Lambda^{(3-n)/n}\, (h-h_p)^{(2n+3)/n} p_{\mathcal{U},1}(0,w_p)\, \partial_x h + \Lambda^{(3-2n)/n}\, (h-h_p)^{(3n+3)/n} p_{\mathcal{U},2}(0,w_p)\, \partial_x \Lambda \\ - \Lambda^{(2-2n)/n}\, (h-h_p)^{(2n+2)/n} p_{\mathcal{U},1}(0,w_p)\, \partial_t \Lambda\end{aligned} \tag{3.98}$$

avec :

$$p_{\mathcal{U},1}(0,w_p) = \tfrac{3n+2}{2(n+1)^2(2n+1)} + \tfrac{n+4}{(n+1)(n+2)} w_p + w_p^2 \tag{3.99}$$

$$p_{\mathcal{U},2}(0,w_p) = \tfrac{12+24n+3n^2-11n^3}{6(n+1)^3(2n+1)(3n+2)} + \tfrac{12+18n-7n^2-2n^3}{2(n+1)^2(n+2)(2n+1)} w_p + \tfrac{6-n^2}{(n+1)(n+2)} w_p^2 + w_p^3 \tag{3.100}$$

On peut alors rassembler les termes obtenus pour le calcul de $u_p^{(C_1)}$ et écrire l'expression de la vitesse dans le plug à l'ordre 1 de la façon suivante (avec pour rappel $h_p = Bi/\Lambda$) :

$$u_p^{(1)} = \tfrac{n}{n+1}\, \Lambda^{1/n} (h-h_p)^{(n+1)/n} + \epsilon Bi\, \mathcal{U}_{ns}(y) + \epsilon Bi\, \mathcal{U}_{\mathcal{N}}(0) + \epsilon Re\, \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(0), \tag{3.101}$$

avec le premier terme que l'on reconnaît comme étant l'expression de la vitesse du plug à l'ordre 0 (Eq.3.56), $\mathcal{U}_{ns}(y)$ représente la contribution des contraintes normales dans le plug, $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}(0)$ la contribution des contraintes normales provenant de la zone cisaillée et $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(0)$ la correction inertielle.

3.7.6 Débit

En distinguant les contributions de la vitesse dans le plug et dans la zone cisaillée, le débit à l'ordre 1 s'exprime : $q^{(1)} = \int_0^{h-h_p} u^{(1)} dy + \int_{h-h_p}^{h} u_p^{(1)} dy$, avec $u_p^{(1)} = u_p^{(0)} + \epsilon u_p^{(C_1)}$.

3.7.6.1 Dans la zone cisaillée

En utilisant l'expression de la vitesse dans la zone cisaillée à l'ordre 1 (Eq.3.88), le débit dans cette zone, $q_{sl}^{(1)} = (h-h_p) \int_0^1 u^{(1)} d\zeta$, s'écrit :

$$\begin{aligned}q_{sl}^{(1)} = \tfrac{n}{2n+1} \Lambda^{1/n} (h-h_p)^{(2n+1)/n} \\ - \epsilon Bi\, \frac{\pi}{2} \tfrac{1}{n+1} \Lambda^{(1-2n)/n}\, h_p (h-h_p)^{(n+1)/n} \operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right)\, \partial_x \Lambda + \epsilon Re \mathcal{Q}_1\end{aligned} \tag{3.102}$$

avec

$$\mathcal{Q}_1 = \tfrac{1}{n} \Lambda^{(1-n)/n}\, (h-h_p)^{(n+1)/n} \int_0^1 d\zeta \int_\zeta^1 \zeta'^{(1-n)/n}\, \mathcal{I}(\zeta') d\zeta'. \tag{3.103}$$

Une intégration explicite de $\mathcal{Q}_1$ donne :

$$\mathcal{Q}_1 = \Lambda^{(3-n)/n}\,(h-h_p)^{(3n+3)/n} r_{\mathcal{Q},1}(_p)\;\partial_x h + \Lambda^{(3-2n)/n}\,(h-h_p)^{(4n+3)/n} r_{\mathcal{Q},2}(w_p)\;\partial_x\Lambda \\ - \Lambda^{(2-2n)/n}\,(h-h_p)^{(3n+2)/n} r_{\mathcal{Q},1}(w_p)\;\partial_t\Lambda \quad (3.104)$$

avec

$$r_{\mathcal{Q},1}(w_p) = \tfrac{2}{(2n+1)(3n+2)} + \tfrac{7n+4}{2(n+1)^2(2n+1)} w_p + \tfrac{1}{n+1} w_p^2 \quad (3.105)$$

$$r_{\mathcal{Q},2}(w_p) = \tfrac{2(3+4n-3n^2)}{(2n+1)^2(3n+2)(4n+3)} + \tfrac{12+30n+11n^2-11n^3}{2(n+1)^3(2n+1)(3n+2)} w_p + \tfrac{6+9n-4n^2}{2(n+1)^2(2n+1)} w_p^2 + \tfrac{1}{n+1} w_p^3 \quad (3.106)$$

3.7.6.2 Dans le pseudo-plug

Dans le pseudo-plug, le débit s'écrit $q_p = \int_{h-h_p}^{h} u_p^{(1)} dy = \int_{h-h_p}^{h} (u_p^{(0)} + \epsilon u_p^{(C_1)}) dy$

On trouve alors :

$$q_p^{(1)} = \tfrac{n}{n+1}\Lambda^{1/n} h_p (h-h_p)^{(n+1)/n} \\ + \epsilon\frac{\pi}{2} h_p^2 \left[\Lambda^{1/n}(h-h_p)^{1/n}\partial_x h + \Lambda^{(1-n)/n}(h-h_p)^{(n+1)/n}\left(\tfrac{1}{n+1} + w_p\right)\partial_x\Lambda\right] \operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) \\ - \epsilon Bi\;\frac{\pi}{2}\Lambda^{(1-2n)/n}\partial_x\Lambda\; h_p^2 (h-h_p)^{1/n} \operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) + \epsilon Re\;\mathcal{Q}_2 \quad (3.107)$$

avec $\mathcal{Q}_2 = h_p\,\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(0)$. Toujours en utilisant l'identité $h_p = Bi/\Lambda$, on remarque que les deux termes en $\partial_x\Lambda$, provenant de la contribution des contraintes normales plastiques dans le pseudo-plug, se simplifient partiellement. La dernière expression devient :

$$q_p^{(1)} = \tfrac{n}{n+1}\Lambda^{1/n} h_p (h-h_p)^{(n+1)/n} \\ + \epsilon Bi\;\frac{\pi}{2}\left[\Lambda^{(1-n)/n}\;h_p(h-h_p)^{1/n}\partial_x h + \tfrac{1}{n+1}\Lambda^{(1-2n)/n}\;h_p(h-h_p)^{(n+1)/n}\partial_x\Lambda\right]\operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) \\ + \epsilon Re\;\mathcal{Q}_2 \quad (3.108)$$

Expression complète En ajoutant la contribution du débit dans la zone cisaillée et dans le plug, on remarque que deux termes en facteur de $\partial_x\Lambda$ s'annulent. On obtient :

$$q^{(1)} = \tfrac{n}{2n+1}\Lambda^{1/n}(h-h_p)^{(n+1)/n}(h + \frac{n}{n+1}h_p) + \epsilon Bi\;\mathcal{Q}_{\mathcal{N}} + \epsilon Re\;\mathcal{Q}_{\mathcal{I}} \quad (3.109)$$

où

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{N}} = \frac{\pi}{2}\Lambda^{(1-n)/n}\;h_p(h-h_p)^{1/n}\operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right)\partial_x h \quad (3.110)$$

et $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$, donné par :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{I}} = \Lambda^{(3-n)/n}\,(h-h_p)^{(3n+3)/n} p_{\mathcal{Q},1}(w_p)\;\partial_x h + \Lambda^{(3-2n)/n}\,(h-h_p)^{(4n+3)/n} p_{\mathcal{Q},2}(w_p)\;\partial_x\Lambda \\ - \Lambda^{(2-2n)/n}\,(h-h_p)^{(3n+2)/n} p_{\mathcal{Q},1}(w_p)\;\partial_t\Lambda \quad (3.111)$$

avec

$$p_{\mathcal{Q},1}(w_p) = \tfrac{2}{(2n+1)(3n+2)} + \tfrac{5n+3}{(n+1)^2(2n+1)} w_p + \tfrac{2(n+3)}{(n+1)(n+2)} w_p^2 + w_p^3 \quad (3.112)$$

$$p_{\mathcal{Q},2}(w_p) = \tfrac{2(3+4n-3n^2)}{(2n+1)^2(3n+2)(4n+3)} + \tfrac{24+57n+18n^2-22n^3}{3(n+1)^3(2n+1)(3n+2)} w_p + \tfrac{3(4+7n-n^2-n^3)}{(n+1)^2(n+2)(2n+1)} w_p^2 + \tfrac{8+n-n^2}{(n+1)(n+2)} w_p^3 \\ + w_p^4 \quad (3.113)$$

3.8 Solution onde progressive

En général, afin de prédire la propagation d'une coulée, on cherche à prédire l'évolution de la hauteur h et de la vitesse moyenne $\bar{u}$ à partir d'un modèle intégré sur l'épaisseur de type Saint-Venant [Ancey, 2007; Ancey et al., 2012].

Dans le cas particulier de notre configuration expérimentale du fond mobile remontant vers l'amont (*cf.* chapitre 4), on s'intéresse aux solutions de type ondes progressives, de la forme $h(x,t) = H(x_f)$, $\bar{u}(x,t) = U(x_f)$ et $h_p(x,t) = H_p(x_f)$ où $x_f = x - u_b t$ représente la distance à la ligne de front et u_b est la vitesse imposée par le fond mobile. Les coulées stationnaires dans le référentiel de l'observateur, générées par notre dispositif à fond mobile, correspondent à des ondes progressives de la forme $H(x_f)$ dans un référentiel attaché au fond mobile, de vitesse u_b. Avec des solutions de ce type, la conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur devient $-u_b \partial_{x_f} H + \partial_{x_f} HU = 0$, soit $\partial_{x_f} \left[H(U - u_b\right] = 0$. Cela signifie que $H(U - u_b)$ est une expression constante, nulle, puisque la hauteur est nulle au front. Cela implique nécessairement $U = u_b$ c'est à dire que la vitesse moyenne est constante dans l'écoulement, partout égale à u_b. Ainsi, l'équation du débit, qui s'écrit maintenant $q = u_b h$, suffit pour résoudre la forme du front, sans passer par un modèle de type Saint-Venant.

On considère que la position de la ligne de front est située en $x_f = 0$ et la solution doit remplir la condition aux limites $H(0) = 0$. Nous verrons par la suite comment s'exprime le système permettant de résoudre la hauteur H.

3.8.1 Choix d'échelle

Pour calculer l'évolution de la hauteur de l'écoulement, nous choisissons comme échelle de hauteur et de longueur l'échelle du régime permanent uniforme. Les longueurs, longitudinales ou verticales, sont adimensionnées par la hauteur de la zone uniforme, de vitesse moyenne U. De cette façon, lorsque $|x_f| \longrightarrow \infty$ (loin du front), on a $H \longrightarrow 1$ et $H_p \longrightarrow Bi/\lambda$ (voir §3.6.2 avec $\partial_x h$=0) avec, pour rappel $\lambda = \tan\theta \; Re/Fr^2$. Nous choisissons d'adimensionner les vitesses par la vitesse moyenne, et de cette façon $U = 1$.

On pose alors :

$$G = \frac{Bi}{\lambda} \tag{3.114}$$

qui représente une contrainte seuil adimensionnée et correspond à l'épaisseur du plug en zone uniforme ($G = \tau_c/(\rho g h_N \sin\theta)$). En régime permanent uniforme, l'expression du débit (3.19) devient alors :

$$\lambda = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n (1-G)^{-(n+1)} \left(1 + \frac{n}{n+1} G\right)^{-n} = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n P_G^n \tag{3.115}$$

où

$$P_G = (1-G)^{-(n+1)/n} \left(1 + \frac{n}{n+1} G\right)^{-1} \tag{3.116}$$

Comme on a $G = Bi/\lambda$ et $\lambda = \tan\theta Re/Fr^2$ avec l'échelle que nous avons choisie, le nombre de Bingham en facteur des corrections des contraintes normales est relié au nombre G et le nombre Reynolds en facteur des corrections inertielles est relié au nombre de Froude par :

$$Bi = G\lambda, \quad Re = \lambda Fr^2 cot\theta \tag{3.117}$$

Pour décrire les solutions par la suite, nous avons choisi d'utiliser le nombre G et le nombre Fr. Mais pour l'ensemble des expériences que nous avons réalisées, les 4 nombres sans dimension (G, Fr, Bi, Re) sont calculés et reportés dans le tableau 7.2.

3.8.2 Modèle à l'ordre 0 en ϵ

3.8.2.1 Forme du front

Étant donnée l'échelle considérée, le débit ($q = h\bar{u}$) adimensionné vaut H. On peut alors écrire le débit (3.57) de cette façon :

$$q^{(0)} = H = \frac{n}{2n+1}\Lambda^{1/n}(H - H_p)^{(n+1)/n} \left(H + \frac{n}{n+1}H_p\right), \tag{3.118}$$

avec $w_p = H_p/(H - H_p)$. et $\Lambda = \lambda - \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\frac{dH}{dx_f}$, que l'on peut aussi exprimer comme :

$$\Lambda = \lambda\left(1 - cot\theta\frac{dH}{dx_f}\right) \tag{3.119}$$

que l'on peut remplacer dans (3.118), puis en utilisant la relation entre λ et G (3.115), on obtient :

$$1 - cot\theta\frac{dH}{dx_f} = P_G^{-n}\frac{H^n}{(H - H_p)^{n+1}\,(H + \frac{n}{n+1}H_p)^n} \tag{3.120}$$

De plus, l'épaisseur du plug $H_p = Bi/\Lambda$, s'écrit maintenant :

$$H_p = \frac{Bi}{\lambda(1 - cot\theta\frac{dH}{dx_f})} = \frac{G}{(1 - cot\theta\frac{dH}{dx_f})} \tag{3.121}$$

L'équation (3.118) peut alors s'écrire :

$$\frac{G}{H_p} = P_G^{-n}\frac{H^n}{(H - H_p)^{n+1}\,(H + \frac{n}{n+1}H_p)^n} \tag{3.122}$$

Les équations (3.122) et (3.121) forment alors un système qui peut être récrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} cot\theta\frac{dH}{dx_f} = 1 - \frac{G}{H_p} \\ P_G^n\, G(H - H_p)^{n+1}\,(H + \frac{n}{n+1}H_p)^n - H_p H^n = 0 \end{cases} \tag{3.123}$$

La première équation est une équation différentielle ordinaire pour H, dans laquelle la valeur de H_p est une fonction de H. H_p est calculée numériquement par la deuxième équation, puis l'équation différentielle pour H est intégrée numériquement. Ce système permet d'accéder à l'évolution de la hauteur et de l'épaisseur du plug (Fig.3.6). En pratique, H_p est calculée numériquement par la fonction python *scipy.optimize.brentq*, puis l'équation sur H est intégrée numériquement par la fonction python *scipy.integrate.odeint*.

Remarque, lien avec Saint-Venant classique :

Les termes d'inertie du modèle Saint-Venant classique (Eq.2.10) s'expriment $\partial_{x_f}[U(U-u_b)]$ dans le cas des ondes progressives. Or comme $U = u_b$, on voit que les termes d'inertie du modèle Saint-Venant classique sont rigoureusement nuls dans le cas des ondes progressives. On obtiendrait donc la même forme de front en résolvant la solution issue de la lubrification ($q^{(0)} = H$, Eq.3.118), ou le modèle classique Saint-Venant.

3.8.2.2 Profils de vitesse

Avec les valeurs de H et H_p obtenues par le système d'équation précédent, on peut calculer le profil de la vitesse longitudinale u et verticale v à partir des équations déjà présentées au §3.4 (Eq.3.17 et 3.60).

D'après les équations (3.115 et 3.122), nous avons :

$$\Lambda = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \frac{H^n}{(H-H_p)^{n+1}\,(H+\frac{n}{n+1}H_p)^n} \tag{3.124}$$

Alors, l'expression de la vitesse longitudinale dans le plug (Eq. 3.17 ou 3.21 ou 3.56) adimensionnée par le choix d'échelle retenu ici s'exprime :

$$U_p^{(0)} = \frac{(2n+1)H}{(n+1)H+nH_p} \tag{3.125}$$

et dans la zone cisaillée :

$$U^{(0)} = \frac{(2n+1)H}{(n+1)H+nH_p}\left(1-(1-\frac{y}{H-H_p})^{(n+1)/n}\right) \tag{3.126}$$

Pour la vitesse verticale nous remplaçons les termes $\partial_x\Lambda$ en fonction de la dérivée de H_p, puisque pour rappel, ces deux grandeurs sont reliées par la relation $\partial_x\Lambda = -\partial_x H_p\Lambda/H_p$. Nous pouvons alors réécrire la vitesse verticale :

$$V^{(0)} = -\Lambda^{\frac{1}{n}}(h-h_p)^{(n+1)/n}\left(\frac{dH}{dx_f}\mathcal{V}_1(\zeta) - \frac{H-H_p}{H_p}\frac{dH_p}{dx_f}\mathcal{V}_2(\zeta,w_p)\right) \tag{3.127}$$

où $\mathcal{V}_1(\zeta)$ et $\mathcal{V}_2(\zeta,w_p)$ s'expriment de la même façon que dans l'équation (3.60).

En remplaçant Λ par son expression (3.124), la vitesse verticale devient :

$$V^{(0)} = -\frac{2n+1}{n}\frac{H}{H+\frac{n}{n+1}H_p}\left(\frac{dH}{dx_f}\mathcal{V}_1(\zeta) - \frac{1}{w_p}\frac{dH_p}{dx_f}\mathcal{V}_2(\zeta)\right) \tag{3.128}$$

Dans l'expression de $V^{(0)}$, $\frac{dH}{dx_f}$ est obtenue par le système (3.123). La différenciation du système (3.123) permet aussi d'obtenir l'expression de $\frac{dH_p}{dx_f}$ en fonction de $\frac{dH}{dx_f}$:

$$\frac{dH_p}{dx_f} = \frac{dH}{dx_f}\frac{H_p}{H}\frac{(n+1)^2H^2+n^2p^2+nHH_p}{(n+1)H^2+2n^2H_p^2+2nHH_p} \tag{3.129}$$

3.8.3 Modèle à l'ordre 1 en ϵ

3.8.3.1 Forme de front

Le débit à l'ordre 1 dont le calcul est présenté au §3.7, permet d'obtenir l'équation pour l'évolution de la hauteur suivante :

$$q^{(1)} = H = \tfrac{n}{2n+1}\Lambda^{1/n}(H-H_p)^{(n+1)/n}\,(H+\frac{n}{n+1}H_p) + \epsilon Bi\;\mathcal{Q}_{\mathcal{N}} + \epsilon Re\;\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}, \tag{3.130}$$

Pour rappel, nous avons pour l'épaisseur du plug :

$$H_p = \frac{G}{(1-cot\theta\frac{dH}{dx_f})} \tag{3.131}$$

Le système permettant d'accéder à la hauteur de l'écoulement se note alors :

$$\begin{cases} cot\theta\frac{dH}{dx_f} = 1-\frac{G}{H_p} \\ H = \frac{n}{2n+1}\Lambda^{1/n}(H-H_p)^{n+1}\,(H+\frac{n}{n+1}H_p)^{n} + \epsilon Bi\;\mathcal{Q}_{\mathcal{N}} + \epsilon Re\;\mathcal{Q}_{\mathcal{I}} \end{cases} \tag{3.132}$$

La différence avec la solution de l'ordre 0 est qu'il apparaît ici la dérivée de l'épaisseur du plug $\partial_{x_f}H_p$ dans la correction du terme d'inertie $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}$, c'est à dire une dérivée seconde de la hauteur (Eq. 3.131). Nous ne pouvons donc pas utiliser la même méthode de résolution car la deuxième équation ne permet pas de calculer H_p directement. La deuxième équation est alors résolue par la méthode des différences finies, en posant $L = (1-cot\theta\frac{dH}{dx_f})$ et avec le schéma suivant :

$$\begin{aligned} L &= 1-cot\theta\left(\frac{H_{i+1}-H_{i-1}}{2\delta x_f}\right) \\ \frac{dL}{dx_f} &= -cot\theta\;\frac{H_{i+1}-2H_i+H_{i-1}}{\delta x_f^2} \end{aligned} \tag{3.133}$$

avec δx_f le pas de discrétisation.

3.8.3.2 Profils de vitesse

La vitesse à l'ordre 0

Dans le plug Le calcul de la correction provenant des contraintes normales fait apparaître le terme $\mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)})$ qu'il faut calculer. Afin de vérifier que le signe imposé pour le calcul soit bien le signe de la solution, nous calculons ici la vitesse du plug à l'ordre 0. Cette vitesse n'est pas la même que la vitesse du régime de lubrification, puisqu'elle est calculée à partir de la forme du front de l'ordre 1. L'expression (3.124) n'est alors plus valide. Nous avons par définition de Λ :

$$\Lambda = \lambda(1-cot\theta\frac{dH}{dx_f}) = \lambda\frac{G}{H_p}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n P_G^n\,\frac{G}{H_p} \tag{3.134}$$

L'expression de la vitesse du plug (Eq. 3.56), avec l'échelle retenue est donc :

$$U_p^{(0)} = \tfrac{2n+1}{n+1} P_G \left(\frac{G}{H_p}\right)^{1/n} (H - H_p)^{(n+1)/n} \tag{3.135}$$

Dans la zone cisaillée En réécrivant de la même façon la vitesse à l'ordre 0 (Eq. 3.56) dans la zone cisaillée avec l'échelle retenue, nous obtenons :

$$U^{(0)} = \tfrac{2n+1}{n+1} P_G \left(\frac{G}{H_p}\right)^{1/n} (H - H_p)^{(n+1)/n} \left(1 - \zeta^{(n+1)/n}\right) \tag{3.136}$$

La vitesse à l'ordre 1

Dans le plug Nous présentons ici l'expression du profil de vitesse longitudinale du modèle consistant. A partir de l'équation (3.101) nous pouvons écrire :

$$U_p^{(1)} = U_p^{(0)} + G\,\mathcal{U}_{ns}(y) + G\,\mathcal{U}_{\mathcal{N}}(0) + \cot\theta Fr^2\,\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(0). \tag{3.137}$$

Les corrections des contraintes normales s'expriment :

$$G\mathcal{U}_{ns}(y) = 2H_p\,\Lambda^{1/n}\,(H - H_p)^{1/n}\sqrt{1 - \left(\frac{H-y}{H_p}\right)^2} \times \left[\frac{dH}{dx_f} + \hat{\Lambda}^{-1}\,(H - H_p)\left(\tfrac{1}{n+1} + w_p\right)\frac{d\hat{\Lambda}}{dx_f}\right] \operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) \tag{3.138}$$

En sachant que dans l'échelle retenue, $H_p\Lambda/\lambda = G$ on a :

$$\mathcal{U}_{ns}(y) = \tfrac{2(2n+1)}{n} P_G\,\hat{\Lambda}^{(1-n)/n}\,(H - H_p)^{1/n}\sqrt{1 - \left(\frac{H-y}{H_p}\right)^2} \times \left[\frac{dH}{dx_f} + \hat{\Lambda}^{-1}\,(H - H_p)\left(\tfrac{1}{n+1} + w_p\right)\frac{d\hat{\Lambda}}{dx_f}\right] \operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) \tag{3.139}$$

avec $\hat{\Lambda} = \frac{G}{H_p} = \frac{\Lambda}{\lambda}$, et

$$\mathcal{U}_{\mathcal{N}}(0) = -\tfrac{(2n+1)\pi}{2n} P_G\,\hat{\Lambda}^{(1-2n)/n}\,H_p(H - H_p)^{1/n}\,\operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right)\frac{d\hat{\Lambda}}{dx_f}. \tag{3.140}$$

Comme nous pouvons le remarquer, la vitesse à l'ordre 1 dans le plug dépend de y, dans le terme $\mathcal{U}_{ns}(y)$, et ne peut donc pas être uniforme sur l'épaisseur. Le profil de vitesse à l'ordre 1 est donc cisaillé dans le plug. Si l'on se place à l'interface entre le plug et la zone cisaillée (y=

$H - H_p$) on retrouve bien $\mathcal{U}_{ns}(H - H_p) = 0$ et les corrections provenant des contraintes normales proviennent alors uniquement de $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}(0)$.

La correction inertielle s'exprime quant à elle :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(0) = &\left(\tfrac{2n+1}{n}\right)^3 \; P_G^3 \; \hat{\Lambda}^{(3-n)/n} \; (H - H_p)^{(2n+3)/n} \; p_{\mathcal{U},1}(0, w_p) \; \frac{dH}{dx_f} \\ &+ \left(\tfrac{2n+1}{n}\right)^3 \; P_G^3 \; \hat{\Lambda}^{(3-2n)/n} \; (H - H_p)^{(3n+3)/n} \; p_{\mathcal{U},2}(0, w_p) \; \frac{d\hat{\Lambda}}{dx_f} \\ &+ \left(\tfrac{2n+1}{n}\right)^2 \; P_G^2 \; \hat{\Lambda}^{(2-2n)/n} \; (H - H_p)^{(2n+2)/n} \; p_{\mathcal{U},1}(0, w_p) \; \frac{d\hat{\Lambda}}{dx_f} \quad (3.141)\end{aligned}$$

avec $p_{\mathcal{U},1}$ et $p_{\mathcal{U},2}$ déjà calculés au § 3.7.5.2.

Dans la zone cisaillée L'expression de la vitesse à l'ordre 1 (Eq. 3.90) s'écrit :

$$U^{(1)} = U^{(0)} + \Gamma \, \mathcal{U}_{\mathcal{N}}(\zeta) + \cot\theta Fr^2 \, \mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta). \quad (3.142)$$

avec :

$$\mathcal{U}_{\mathcal{N}}(\zeta) = -\tfrac{(2n+1)\pi}{2n} \mathcal{P}_\Gamma \; \hat{\Lambda}^{(1-2n)/n} \; H_p (H - H_p)^{1/n} \; \left(1 - \zeta^{1/n}\right) \; \mathrm{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) \frac{d\hat{\Lambda}}{dx_f}, \quad (3.143)$$

et les termes d'inertie déjà présentés au §3.7.5.1 s'expriment avec l'échelle retenue :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta) = &\left(\tfrac{2n+1}{n}\right)^3 {\mathcal{P}_\Gamma}^3 \; \hat{\Lambda}^{(3-n)/n} \; (H - H_p)^{(2n+3)/n} p_{\mathcal{U},1}(\zeta, w_p) \; \frac{dH}{dx_f} \\ &+ \left(\tfrac{2n+1}{n}\right)^3 {\mathcal{P}_\Gamma}^3 \; \hat{\Lambda}^{(3-2n)/n} \; (H - H_p)^{(3n+3)/n} p_{\mathcal{U},2}(\zeta, w_p) \; \frac{d\hat{\Lambda}}{dx_f} \\ &+ \left(\tfrac{2n+1}{n}\right)^2 {\mathcal{P}_\Gamma}^2 \; \hat{\Lambda}^{(2-2n)/n} \; (H - H_p)^{(2n+2)/n} p_{\mathcal{U},1}(\zeta, w_p) \; \frac{d\hat{\Lambda}}{dx_f}, \quad (3.144)\end{aligned}$$

3.8.4 Modèle à l'ordre 1 sans terme d'inertie

Nous présentons ici une version simplifiée du modèle complet, dans laquelle les termes de corrections provenant des contraintes normales seulement sont pris en compte. La correction provenant des termes d'inertie n'est pas prise en compte. Les différences entre le modèle complet et sans inertie nous permettrons de tester l'influence des contraintes normales.

Dans l'expression du débit à l'ordre 1 (Eq. 3.109), nous ne gardons alors que le terme correctif $\mathcal{Q}_{\mathcal{N}}$.

$$q^{(1)} = H = \tfrac{n}{2n+1} \Lambda^{1/n} (H - H_p)^{(n+1)/n} \; (H + \frac{n}{n+1} H_p) + \epsilon Bi \; \mathcal{Q}_{\mathcal{N}}, \quad (3.145)$$

En suivant la même démarche que pour le modèle d'ordre 0, et en remplaçant Bi par λG nous avons ici :

$$\begin{cases} cot\theta \frac{dH}{dx_f} = 1 - \frac{G}{H_p} \\ P_G\, G^{1/n} (H - H_p)^{(n+1)/n}\, (H + \frac{n}{n+1} H_p) - H H_p^{1/n} + G\mathcal{K}_\mathcal{N} = 0 \end{cases} \tag{3.146}$$

avec la contribution des contraintes normales :

$$\mathcal{K}_\mathcal{N} = \frac{(2n+1)\pi}{2n} P_G\, G^{(1-n)/n} H_p (H - H_p)^{1/n} \operatorname{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) \tan\theta (H_p - G) \tag{3.147}$$

Ce modèle a la même structure que le modèle de lubrification, car les termes en $\partial_{x_f} H_p$ présents dans la correction inertielle ont été supprimés. On peut donc le résoudre de la même façon, en calculant H_p par la seconde équation, que l'on injecte dans la première pour résoudre la hauteur H.

3.8.5 Comparaison des modèles

Nous décrivons ici les solutions des différents modèles présentés. Nous comparons d'abord la forme de front entre un modèle de lubrification et d'ordre 1, pour les fluides newtonien ($G = 0$, $n = 1$) et les fluides en loi-puissance ($G = 0$). La figure 3.3 montre que pour un Froude de 0.4, il y a très peu d'écart entre les résultats du régime de lubrification et du modèle d'ordre 1, que ce soit avec un modèle newtonien, ou en loi puissance. L'écart augmente légèrement pour un nombre de Froude de 1.5, mais n'est presque pas visible pour les fluides en loi-puissance.

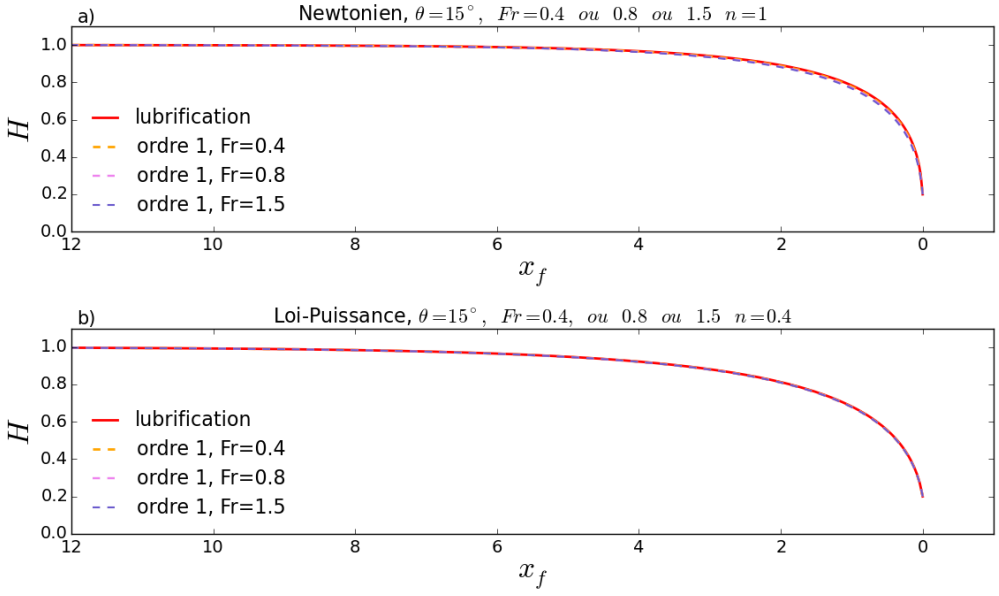

Figure 3.3 Prédictions théoriques de la forme du front pour : a) un fluide newtonien (τ_c=0, $n = 1$), b) un fluide en loi puissance (τ_c=0, n=0.4). Fr=0.4, 0.8 ou 1.5, $\theta = 15°$.

Nous nous concentrons maintenant sur les modèles adaptés aux fluides à seuil de Herschel-Bulkley. Les figures 3.4 et 3.5 présentent la forme du front prédite par le modèle à l'ordre 0, par le modèle consistant à l'ordre 1 et par le modèle à l'ordre 1 sans inertie. Dans le calcul des contraintes

normales plastiques dans le pseudo-plug (*cf.* §3.6.3), le signe de $\partial_x U_p^{(0)}$ est pris en compte et un choix s'impose alors dans le modèle d'ordre 1. Dans la gamme de G et Froude testés ([0-1]), le choix positif amène toujours une solution $U_p^{(0)}$ croissante, tandis que le choix négatif amène une solution $U_p^{(0)}$ décroissante. On ne peut donc pas discriminer un choix à priori. On distingue alors pour chaque modèle, les deux prédictions possibles selon le choix d'un signe positif ou négatif.

Dans la première figure, pour $G = 0.2$, on voit que les 3 modèles se superposent, peu importe le signe de $\partial_x U_p^{(0)}$ ou la valeur de Froude choisie, dans la gamme [0.2-0.8]. En effet le nombre G est insuffisant pour laisser apparaître des écarts importants entre les modèles et pour que les termes d'inertie influencent la solution. Cet écart s'exprime donc davantage pour un fluide à seuil que pour un fluide newtonien ou en loi-puissance. Dans la figure 3.5, le nombre G est deux fois plus grand et des écarts se produisent selon le nombre de Froude, à la fois entre les modèles mais aussi selon le choix du signe de $\partial_x U_p^{(0)}$. En fait, l'écart entre le modèle à l'ordre 0 et à l'ordre 1 est d'autant plus grand que le nombre G est grand. Mais l'élévation du nombre de Froude tend à rapprocher la solution du modèle à l'ordre 1 vers la solution de lubrification.

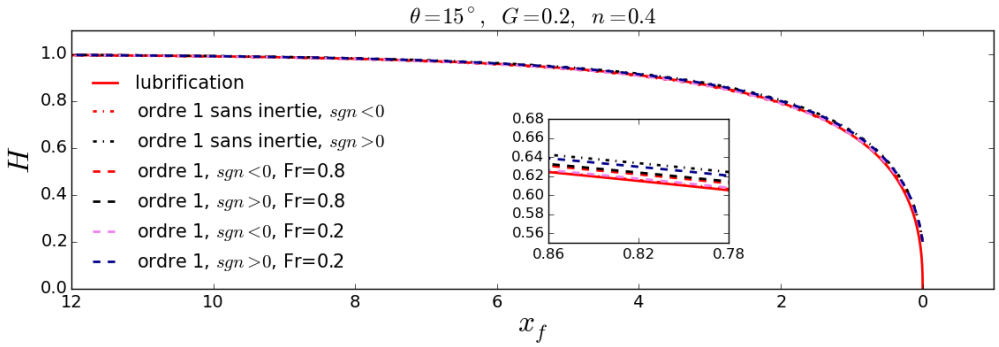

Figure 3.4 Prédiction théorique de la forme du front. L'encart présente un zoom. Choix $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ ou $\partial_x U_p^{(0)} > 0$. G=0.2, Fr=0.8 ou 0.2, $\theta = 15°$. Fluide de Herschel-Bulkley.

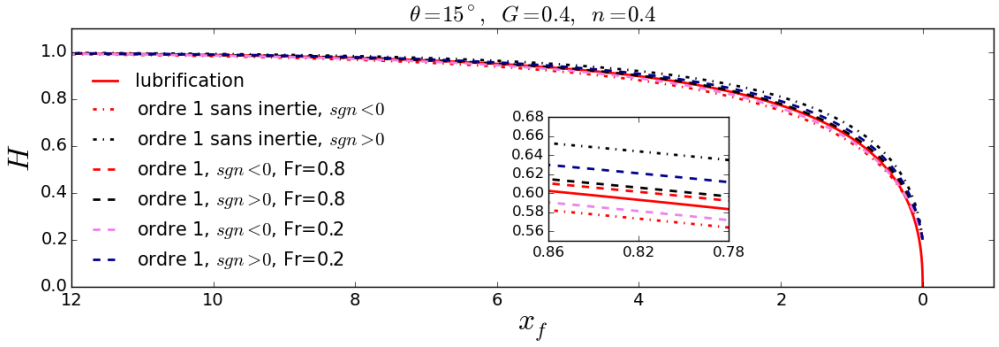

Figure 3.5 Même légende que pour Fig.3.6. L'encart présente un zoom. G=0.4, Fr=0.8 ou 0.2, $\theta = 15°$. Fluide de Herschel-Bulkley.

La figure 3.6 présente la vitesse de surface prédite par le modèle à l'ordre 0 (dans ce cas là cela représente la vitesse du plug U_p), du modèle consistant à l'ordre 1 (G=Fr=0.4) et du modèle à

l'ordre 1 sans terme d'inertie. On constate que la vitesse de surface à l'ordre 0 augmente légèrement à l'approche du front, et brusquement très proche du front. Pour les modèles à l'ordre 1, la vitesse de surface augmente au front à partir de valeurs de x_f plus grandes, c'est à dire qu'elle augmente plus en amont de la ligne de front. Entre le modèle à l'ordre 1 simplifié et complet, et avec cette configuration choisie (G=Fr=0.4), il apparaît que la contribution des contraintes normales tend à augmenter la vitesse de surface par rapport aux prédictions de l'ordre 0, mais l'ajout des termes d'inertie réduit cet écart. Selon le couple choisi pour G et Fr, la vitesse de surface à l'ordre 1 peut être inférieure à la vitesse à l'ordre 0 (Fig.3.7 avec G=0.2, Fr=0.4).

La comparaison des résultats des modèles aux données expérimentales sera une étape nécessaire pour choisir le signe de $\partial_x U_p^{(0)}$. Il semble que la comparaison avec les mesures de vitesse de surface plutôt que de formes du front sera plus discriminante pour la comparaison avec les modèles, étant donné que les écarts entre les modèles sont plus importants pour la prédiction des vitesses de surface. De plus, pour différencier suffisamment les prédictions théoriques de l'ordre 1 avec celles du modèle de lubrification, nous nous attacherons alors à les comparer avec des expériences à fort nombre G (chapitre 8).

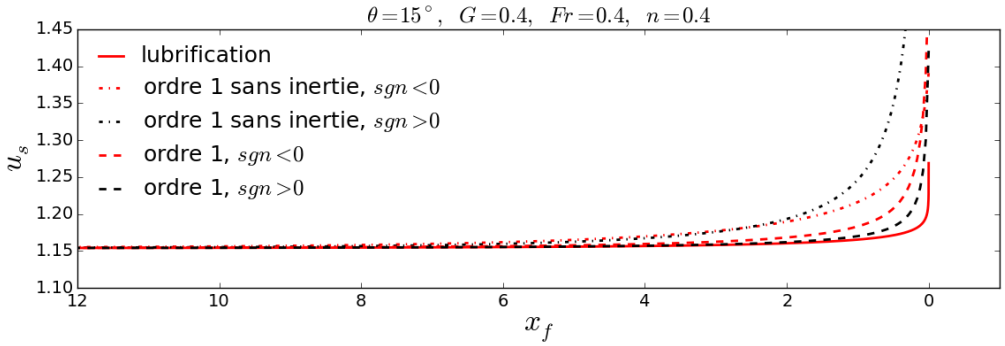

Figure 3.6 Vitesse de surface en fonction de la distance au front, adimensionnées par $\bar{u}$ et h_N, respectivement. Comparaison des prédictions théoriques du modèle de lubrification (traits pleins), du modèle à l'ordre 1 (trait pointillés) et du modèle à l'ordre 1 simplifié (tirets). Choix $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ (rouge) ou $\partial_x U_p^{(0)} > 0$ (noir). G=0.4, Fr=0.4, $\theta = 15°$. Fluide de Herschel-Bulkley.

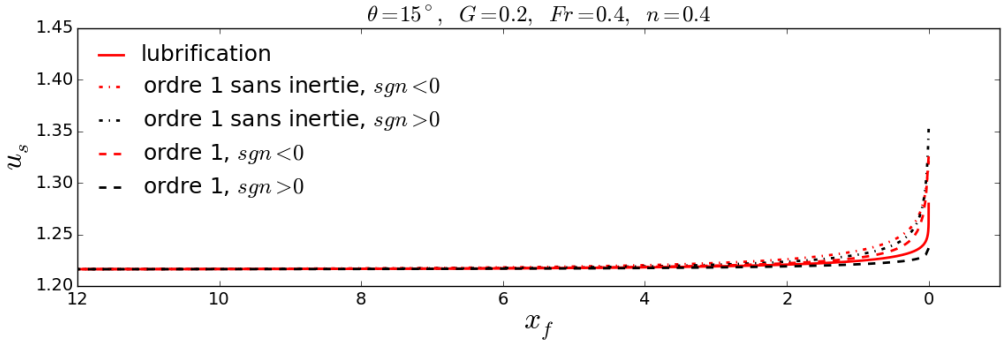

Figure 3.7 Même légende que pour Fig.3.6. G=0.2, Fr=0.4, $\theta = 15°$. Fluide de Herschel-Bulkley.

La figure 3.8 présente l'évolution de l'épaisseur du plug au front d'une coulée. L'évolution du plug (tiret) représente l'interface entre la zone cisaillée et non cisaillée au sens de la lubrification. Les profils de vitesse du régime de lubrification sont cisaillés sous cette interface, et présentent un plug au-dessus, avec un taux de cisaillement nul. Comme nous l'avons vu au § 3.4, l'épaisseur du plug du modèle de lubrification diminue au front, et le plug s'amincit progressivement. Mais à l'ordre 1, le plug est faiblement cisaillé. Nous l'avons vu théoriquement (*cf.* §2.3.4 et 3.6.3) et nous l'illustrons ici. Il est important de noter qu'à l'ordre 1, on peut définir une zone faiblement cisaillée (un plug effectif) à l'intérieur du plug, moyennant le choix d'un seuil de taux de cisaillement. Plus le seuil choisi est faible, et plus cette zone disparaît au front pour laisser place à des profils de vitesse entièrement cisaillés. A l'approche du front, les profils de vitesse à l'ordre 1 deviennent cisaillés sur toute l'épaisseur. Il sera intéressant d'observer dans nos expériences comment évolue le taux de cisaillement dans le front de coulées viscoplastiques.

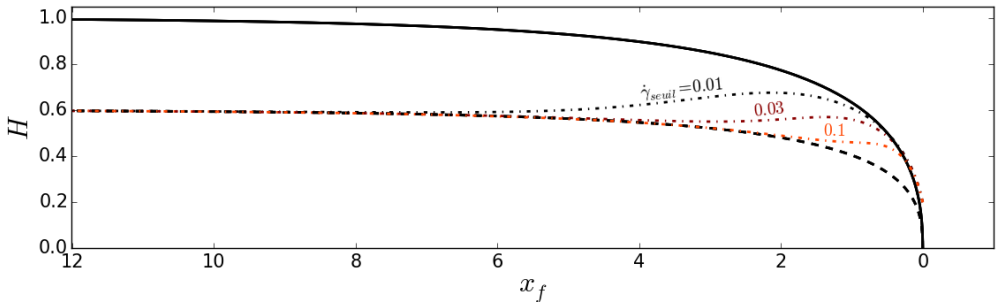

Figure 3.8 Front d'une coulée de fluide de Herschel-Bulkley. La forme du front est prédite par le modèle de lubrification. Evolution du (pseudo-)plug prédite par le modèle de lubrification (tirets), et du plug effectif (pointillés) prédit par le modèle à l'ordre 1, défini comme la partie du plug dans laquelle le taux de cisaillement est inférieur à un seuil (valeurs du seuil adimensionnées, choisies arbitrairement pour l'illustration). Proche de la ligne de contact, la forme du front prédite par le modèle d'ordre 1 (non montrée) est différente de celle du modèle de lubrification, d'où le léger faux raccord entre le plug effectif d'ordre 1 et la hauteur de l'écoulement à cet endroit.

Remarque :

Notons que nous avons défini le plug effectif comme étant borné par le plug de la lubrification, donc par construction, son épaisseur ne peut pas dépasser celle du plug. En zone uniforme, son épaisseur tend alors vers celle du régime de lubrification.

3.9 Conclusion du chapitre

Nous avons développé les expressions consistantes de la vitesse longitudinale et du débit, dans le cadre d'un modèle de couche mince à l'ordre 1 en ϵ, pour un fluide de Herschel-Bulkley. Notre modèle à l'ordre 1 est développé avec le choix d'échelle $\epsilon Re/Fr^2 \approx 1$, c'est à dire autour d'une solution de base (l'ordre 0) qui correspond au régime de lubrification. Ce choix nous permet de prendre en compte une épaisseur de plug variable dans l'écoulement, ce qui est nécessaire pour calculer la forme d'un front. De plus, ce choix correspond à la configuration de nos expériences

(Tab.7.2). Le modèle consistant à l'ordre 1 est la somme du modèle à l'ordre 0 et de termes correctifs qui proviennent des contraintes normales et des termes d'inertie.

Ce modèle se différencie de celui : (i) de Ruyer-Quil and Manneville [1998] consistant à l'ordre 1 et à l'ordre 2 mais appliqué au fluides newtoniens, (ii) de Fernandez-Nieto et al. [2010]; Noble and Vila [2013] consistant à l'ordre 1 mais appliqué aux fluides en loi-puissance et aux fluides de Bingham avec une épaisseur de plug constante ($\epsilon \frac{Re}{Fr^2} \approx \epsilon$), (iii) de Balmforth and Liu [2004] développé à l'ordre 1 sans inertie pour les fluides de Bingham, et en n'appliquant pas les corrections dans le pseudo-plug, (iv) et de Chambon [2014] consistant à l'ordre 1 pour les fluides de Herschel-Bulkley mais avec une épaisseur de plug constante, ne permettant pas de calculer la forme d'un front.

Dans le cadre spécifique de notre configuration expérimentale, nous pouvons démontrer d'après la conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur, que la vitesse moyenne est constante, égale à la vitesse du tapis u_b. L'équation du débit fournit alors une équation en h et h_p qui suffit à calculer l'évolution de la hauteur.

Nous avons comparé les prédictions du modèle à l'ordre 1 complet et sans inertie, avec celles du modèle d'ordre 0. Dans le modèle sans inertie, des différences significatives avec le modèle à l'ordre 0 sont observées. L'ajout des termes d'inertie dans le modèle consistant d'ordre 1 a tendance à réduire ces écarts avec le modèle de lubrification.

La hauteur au front prédite par le modèle à l'ordre 1 présente des écarts positifs ou négatifs avec la hauteur prédite par le modèle à l'ordre 0 selon le choix du couple (G, Fr) et du signe choisi pour $\partial_x U_p^{(0)}$. La vitesse de surface prédite par le modèle à l'ordre 1 augmente à l'approche du front, mais généralement plus en amont que celle prédite par le modèle à l'ordre 0, et plus fortement. Pour certaines configurations $(G, Fr, \partial_x U_p^{(0)})$, la vitesse de surface prédite par le modèle à l'ordre 1 est inférieure à celle de la lubrification. Que ce soit pour les vitesses ou la forme du front, les prédictions du modèle à l'ordre 1 présentent d'autant plus de différences avec celle du modèle à l'ordre 0 que le nombre G (la contrainte seuil adimensionnée) est grand.

Dans la suite, nous comparerons les résultats expérimentaux obtenus avec un fluide de Herschel-Bulkley, au modèle de lubrification (chapitre 7) et au modèle d'ordre 1 (chapitre 8).

Chapitre 4

Dispositif expérimental et méthodes de mesure

Ce chapitre présente le dispositif expérimental utilisé afin de générer des écoulements stationnaires à surface libre. Nous présenterons les résultats expérimentaux obtenus avec ce dispositif lors d'études antérieures, ainsi que les résultats préliminaires sur la dynamique interne du front que nous avons obtenu. Ces derniers permettent de valider le dispositif mais insistent aussi sur la nécessité de l'améliorer. Dans le cadre de cette thèse, nous avons alors complété le dispositif expérimental, les améliorations seront présentées dans ce chapitre. Nous terminerons en présentant les caractéristiques des expériences réalisées dans notre étude.

4.1 Le canal à fond mobile

4.1.1 Principe de fonctionnement

Le schéma du dispositif du canal à fond mobile est présenté figure 4.1. Ce dispositif est un canal incliné dont le fond est mobile, se déplaçant vers l'amont. La pente d'inclinaison, et la vitesse du tapis sont variables dans la gamme [0-30°] et [0-350 mm.s^{-1}] respectivement. Les deux rives latérales et la rive amont sont tangentes au fond mobile au moyen d'un joint gore-tex, afin de limiter les fuites de matériaux sans perturber le déplacement du tapis.

Lorsque le fluide étudié est placé entre les deux rives latérales du canal, sa hauteur s'adapte spontanément à la vitesse du tapis de façon à former une coulée stationnaire, dont le front est immobile dans le référentiel de l'observateur. La recirculation du fluide est assurée par la présence de la rive amont qui permet de maintenir la totalité du volume déposé, confiné entre les deux rives. En réalité, un petit volume de matériau s'échappe en permanence par la rive amont, au niveau du joint, si bien que le front recule à une vitesse très faible dans la gamme [0.01-0.1] mm.s^{-1}.

Avec le changement de référentiel imposé par le fond mobile, par rapport au cas d'un plan incliné classique, les particules de fluide en surface se déplacent vers l'aval tandis qu'au fond elles se déplacent vers l'amont (Fig.4.1). De cette façon, la vitesse moyenne de la coulée dans le

référentiel de l'observateur est nulle. La figure 4.2 présente le profil de vitesse théorique d'un fluide viscoplastique dans le cas d'un plan incliné simple (Fig.4.2a) et dans le cas de notre dispositif avec un fond mobile se déplaçant vers l'amont à la vitesse u_b (Fig.4.2b). Une simple translation d'une valeur de u_b nous permet, avec ce dispositif, de retrouver la configuration d'un profil de vitesse classique.

Les coulées ainsi générées ont une longueur typique d'1 m pour une hauteur de 10-30 mm. La ligne de front est suivie d'une zone d'épaisseur fortement puis faiblement variée jusqu'à devenir uniforme en amont (Fig.4.3). Par la suite, la zone d'épaisseur croissante sera appelée front, ou zone de front et la zone d'épaisseur constante sera appelée zone uniforme.

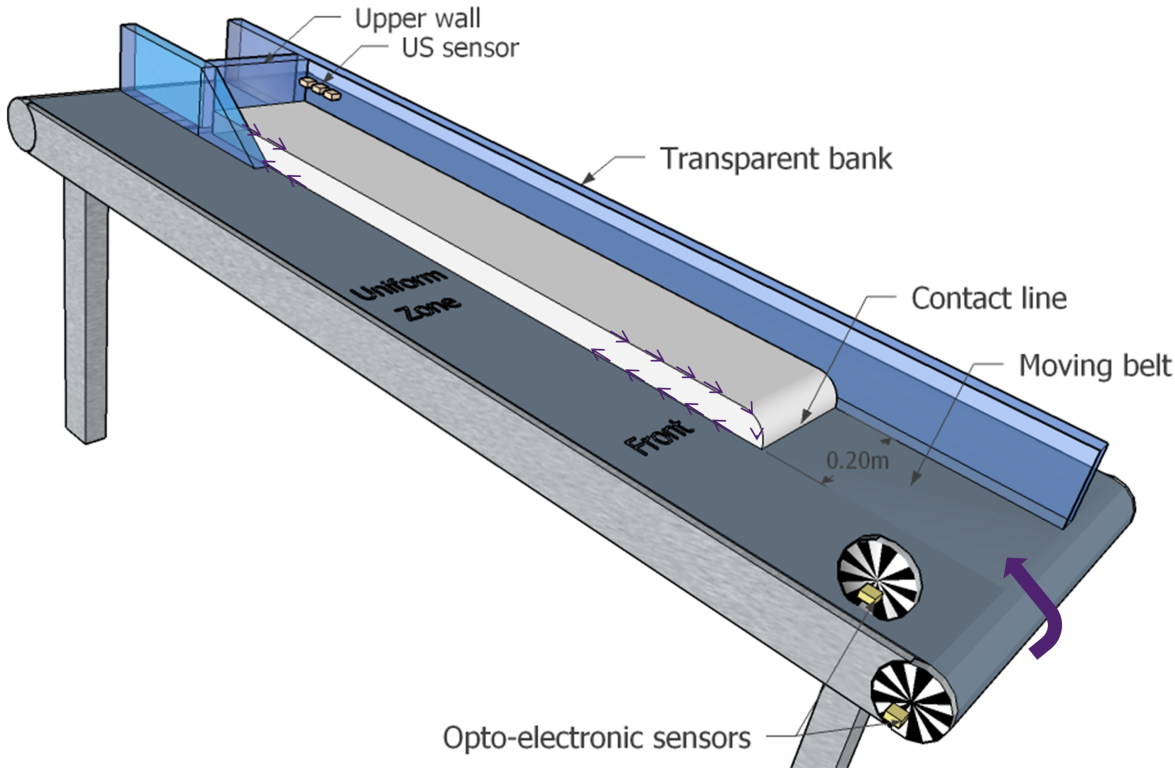

Figure 4.1 Vue schématique du dispositif expérimental en configuration initiale. Rive transparente droite non-représentée.

La vitesse du fond mobile, u_b, est mesurée par deux capteurs opto-électroniques de déplacement angulaire. Cela consiste en un disque fixé sur l'axe de rotation du tapis, comportant 32 secteurs angulaires noirs. Un couple photodiode-phototransistor fixe est placé à environ 2 mm du disque. Un faisceau infrarouge est généré par une diode et le faisceau retourné est capté par un phototransistor. Chaque passage sur un secteur angulaire noir, coupe le signal électrique recueilli, et créé un décompte, géré par un système électronique relié à un PC. Un traitement du signal permet de transformer cette information en vitesse de rotation et la connaissance du périmètre du disque permet alors de connaître la vitesse linéaire. Ce dispositif permet de mesurer les vitesses du tapis avec une incertitude typique de 2%. Un dispositif est placé sur l'axe de rotation, un autre

directement sur le tapis, afin de vérifier qu'il n'y a pas de glissement de ce dernier. La vitesse est aussi mesurée manuellement à l'aide d'un tachymètre afin de contrôler les résultats des capteurs opto-électroniques.

La hauteur est mesurée en zone uniforme (appelée h_N) à l'aide de 3 capteurs de hauteur à ultrasons, placés au milieu de l'écoulement, en aval de la paroi amont (Fig.4.1).

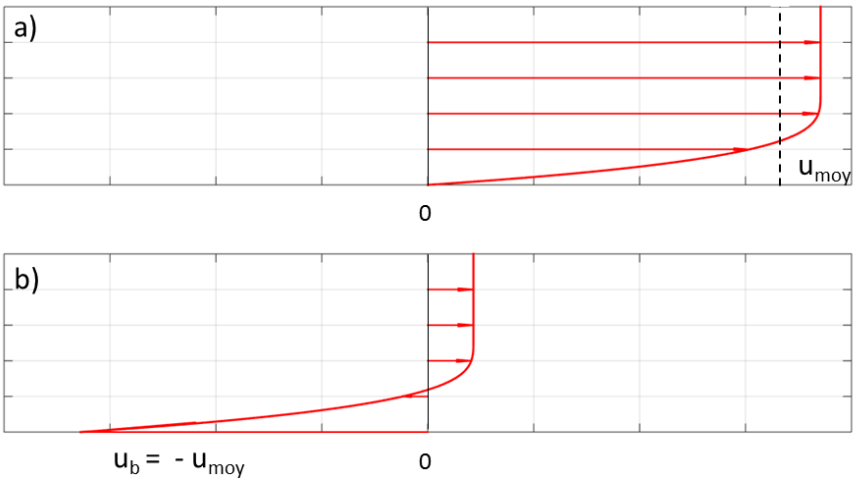

Figure 4.2 Forme d'un profil de vitesse d'un fluide de Herschel-Bulkley : a) sur un plan incliné, b) sur le canal à fond mobile.

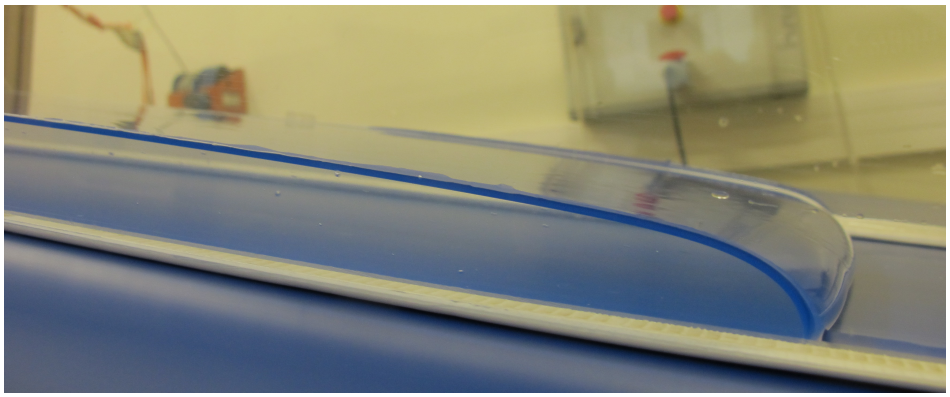

Figure 4.3 Exemple de la forme d'une coulée de gel de Carbopol de hauteur d'environ 20 mm, générée par le dispositif expérimental.

4.1.2 État de l'art sur les expériences réalisées avec le canal à fond mobile

Ce dispositif, tel qu'il est présenté ci dessus, a été utilisé dans le cadre de trois études antérieures à ce travail de thèse et la section suivante vise à rappeler les principaux résultats. Ces études ont déjà été présentées dans le chapitre 2, mais leurs conclusions sont ici davantage développées.

4.1.2.1 Les mesures en zone uniforme : la relation *vitesse-hauteur* et les champs de vitesse

Des études en zone uniforme ont été réalisées antérieurement avec des matériaux de Herschel-Bulkley. Leur objectif était d'étudier la comparaison des hauteurs mesurées pour différentes vitesses de tapis imposées (relation *vitesse-hauteur*) aux prédictions théoriques [Ghemmour, 2011; Chambon et al., 2009, 2014], et de mesurer les champs de vitesse en zone uniforme [Chambon et al., 2014].

La première est un travail de thèse, qui a permis de valider les différents outils expérimentaux et qui présente les relations *vitesse-hauteur* pour un gel de Carbopol. La seconde a permis d'étudier la relation entre la vitesse imposée et la hauteur en zone uniforme d'une suspension argileuse de kaolin. L'opacité du kaolin ne permet pas en revanche d'étudier les champs de vitesse en zone uniforme. La dernière étude, présente des mesures *vitesse-hauteur* pour un gel de Carbopol, ainsi que des mesures des champs de vitesse en zone uniforme. Pour cela un dispositif de vélocimétrie a été installé temporairement (laser éclairant l'écoulement en son centre dans la zone uniforme et caméra rapide filmant sur le côté). Les images obtenues ont été analysées par PIV linéaire pour bénéficier du régime permanent et uniforme de l'écoulement. A la place des fenêtres carrées classiques de calcul de la méthode PIV, ce sont les lignes de l'image qui ont été traitées.

Dans le cas de la suspension argileuse, l'évolution de la hauteur en fonction des différentes vitesses de tapis imposées est correctement reproduite par la prédiction théorique basée sur un modèle de Herschel-Bulkley dont les paramètres rhéologiques ont été mesurés au rhéomètre. [Chambon et al., 2009]. Cependant dans le cadre du gel de Carbopol, il existe une différence systématique entre les mesures expérimentales et les prédictions théoriques basées sur les paramètres rhéologiques mesurés indépendamment à l'aide du rhéomètre [Chambon et al., 2014].

L'étude des champs de vitesse en zone uniforme, pour différentes vitesses de tapis imposées, dans un gel de Carbopol a permis de vérifier qu'il présentait bien un profil de Herschel-Bulkley [Chambon et al., 2014]. De nouveau, une différence systématique est observée entre les profils de vitesses mesurés et prédits. L'origine des différences est discutée, mais il semble que les mesures issues du rhéomètre ne soient pas représentatives de la rhéologie du gel de Carbopol. Le rhéogramme apparent est extrait du profil de vitesse par une différenciation directe, il a bien la forme d'un rhéogramme de Herschel-Bulkley. L'ajustement des rhéogrammes par un modèle de Herschel-Bulkley de l'ensemble des expériences permet alors de proposer une correction des paramètres rhéologiques τ_c et K mesurés au rhéomètre. Il s'agit d'augmenter τ_c et K mesurés au rhéomètre de respectivement 11% et 19% [Chambon et al., 2014]. Remarquablement, cette correction est unique, elle est la même pour tous les gels de Carbopol testés. En considérant cette correction, la relation *vitesse-hauteur* et le profil en zone uniforme sont correctement reproduits par le modèle théorique. Cette correction sera discutée dans le cadre de notre étude au §5.5.

4.1.2.2 La forme du front

La forme de la surface libre a été étudiée sur un écoulement de kaolin, par imagerie, sur une image prise à travers la rive transparente et couvrant la zone de front dans sa totalité [Chambon

et al., 2009]. Afin d'exploiter les mesures, un modèle théorique particulier a été développé, en se basant sur l'approximation de couche mince dans le cadre de coulées stationnaires, telles qu'elles sont observées dans le dispositif expérimental.

Les prédictions sont en bon accord avec les mesures expérimentales. En zone uniforme, la hauteur est bien reproduite, et au front, les prédictions ont tendance à surestimer les hauteurs, mais la différence est comprise dans l'erreur de mesure. Le modèle est donc suffisant pour prédire les hauteurs au front. Les auteurs auraient pu s'attendre à des différences importantes à proximité du front puisque la condition de couche mince n'y est plus respectée, mais si elles existent, elles ne sont pas observées.

4.1.3 L'étude du front : résultats préliminaires

Nous avons réalisé dans cette thèse une étude préliminaire de vélocimétrie au front d'un écoulement de Carbopol. Des images de la zone de front de coulées générées sur le canal à fond mobile ont été prises à la paroi de l'écoulement (sur l'une des deux rives), avec un éclairage de type projecteur provenant de l'autre rive. Ces images ont été obtenues lors d'expériences précédant cette thèse et elles ont été analysées dans le cadre de cette étude.

Nous avons obtenu les champs de vitesse par analyse PIV en utilisant le logiciel DPIVsoft. Étant donné la résolution des images et la taille des fenêtres de calcul, cette méthode permet le calcul d'une dizaine de vitesses dans la verticale de l'écoulement. Les expressions théoriques nécessaires à la comparaison de ces résultats sont celles du régime de lubrification. Nous pouvons donc, conformément à l'objectif de cette thèse, comparer des premières mesures de dynamique interne aux expressions théoriques. Ces résultats constituent des développements préliminaires, ils ont été publiés à la suite de la conférence *"Debris Flow Hazard and mitigation, 2015"* dans un numéro du journal *"Journal of Erosion Control Engineering"* sous la forme suivante :

Freydier, P., Chambon, G., Naaim, M., Internal dynamics of a free-surface viscoplastic flow down an inclined channel, International Journal of Erosion Control Engineering Vol. 9, No. 3, 2016.

L'article complet est présenté en Annexe A, nous en résumons ci-dessous les conclusions :

- Malgré le bruit sur les images, et la faible résolution verticale due à la taille relativement importante des boites d'interrogation PIV par rapport à l'épaisseur de l'écoulement, les profils de vitesse longitudinale sont calculés jusqu'à 3.6 mm de la ligne de front.

- Relativement loin du front, à plus de 60 mm de la ligne de contact, le modèle théorique de la lubrification reproduit correctement les mesures expérimentales (profil de vitesse et épaisseur du plug) moyennant la correction des paramètres rhéologiques proposés par Chambon et al. [2014].

- A proximité du front, à moins de 10 mm de la ligne de contact, le modèle surestime nettement les mesures de vitesse.

- La résolution des images ne permet pas d'accéder à la mesure de l'épaisseur du plug à proximité de la ligne de contact.

Finalement, ces résultats nous ont permis de mettre en avant les performances prometteuses du dispositif à fond mobile à mesurer la dynamique interne d'écoulements à surface libre. La qualité

des champs de vitesse expérimentaux est le facteur limitant de cette étude. Il faut envisager une méthode de vélocimétrie performante sur des fenêtres de calcul de tailles plus petites pour obtenir une meilleure résolution des champs de vitesse. Nous allons voir par la suite quelles ont été les améliorations réalisées.

4.2 Le canal à fond mobile : solutions techniques pour des mesures à haute résolution

Plusieurs modifications ont été effectuées dans le but d'améliorer les mesures de champs de vitesse. L'objectif est de pouvoir imager l'écoulement depuis la zone uniforme jusqu'à la ligne de contact, tout en améliorant la résolution des images. Ces améliorations ont porté sur la méthode de prise de vue, le choix des traceurs, et l'adoption d'une méthode de traitement d'image performante. De plus, nous détaillerons les différentes sources d'incertitudes et leur quantification.

4.2.1 Le dispositif utilisé dans le cadre de cette étude

Le dispositif expérimental est présenté figure 4.4. La coulée est illuminée dans le sens de la longueur par une nappe laser d'une puissance variable entre 0.1 et 5W et de longueur d'onde 532 nm (vert). La prise de vue est effectuée par le coté (à travers l'une des rives) au moyen d'une caméra Beaumer HXC13 équipée d'un objectif 100 mm macro. Cet équipement permet de prendre jusqu'à 500 images par secondes et l'objectif possède une profondeur de champ très fine (de l'ordre du mm) adaptée à la mesure de déplacements de traceurs sur un plan (en l'occurrence le plan laser). La nomenclature de l'ensemble des expériences réalisées est reportée dans le tableau 4.1 et 4.2.

4.2.2 Acquisition des images par prises de vues successives

L'objectif est de pouvoir visualiser sur les images à la fois la surface libre et les traceurs, de la zone uniforme jusqu'à la ligne de contact du front. Afin d'obtenir des images haute résolution sur toute la longueur, la coulée est imagée en plusieurs parties. La caméra est alors montée sur un rail (Fig.4.4a,b) et déplacée par pas de 5 cm. Des séries d'images sont prises à chaque position (Fig.4.5). Entre 5 et 9 positions suffisent généralement pour atteindre la zone uniforme. Ainsi la coulée est imagée sur toute sa longueur, à une résolution de 37-39 μ.px^{-1}.

La concaténation des différentes positions permet de reconstituer l'ensemble de la coulée (exemple Fig.4.5 et 4.6). Le recoupement entre chaque position est mesuré à l'aide d'une mire à damier avant chaque expérience. Pour perfectionner la connaissance du recoupement nous prenons en compte la vitesse de recul du front (*cf.* §4.1), qui est calculée en mesurant plusieurs fois la position de la ligne de contact au cours d'une expérience. La ligne de front recule, à une vitesse de l'ordre de quelques pixels par seconde. Comme la ligne de fond varie de quelques pixels entre les positions (à cause des variations de forme du châssis en métal), un ajustement vertical est aussi pris en compte lors de la concaténation.

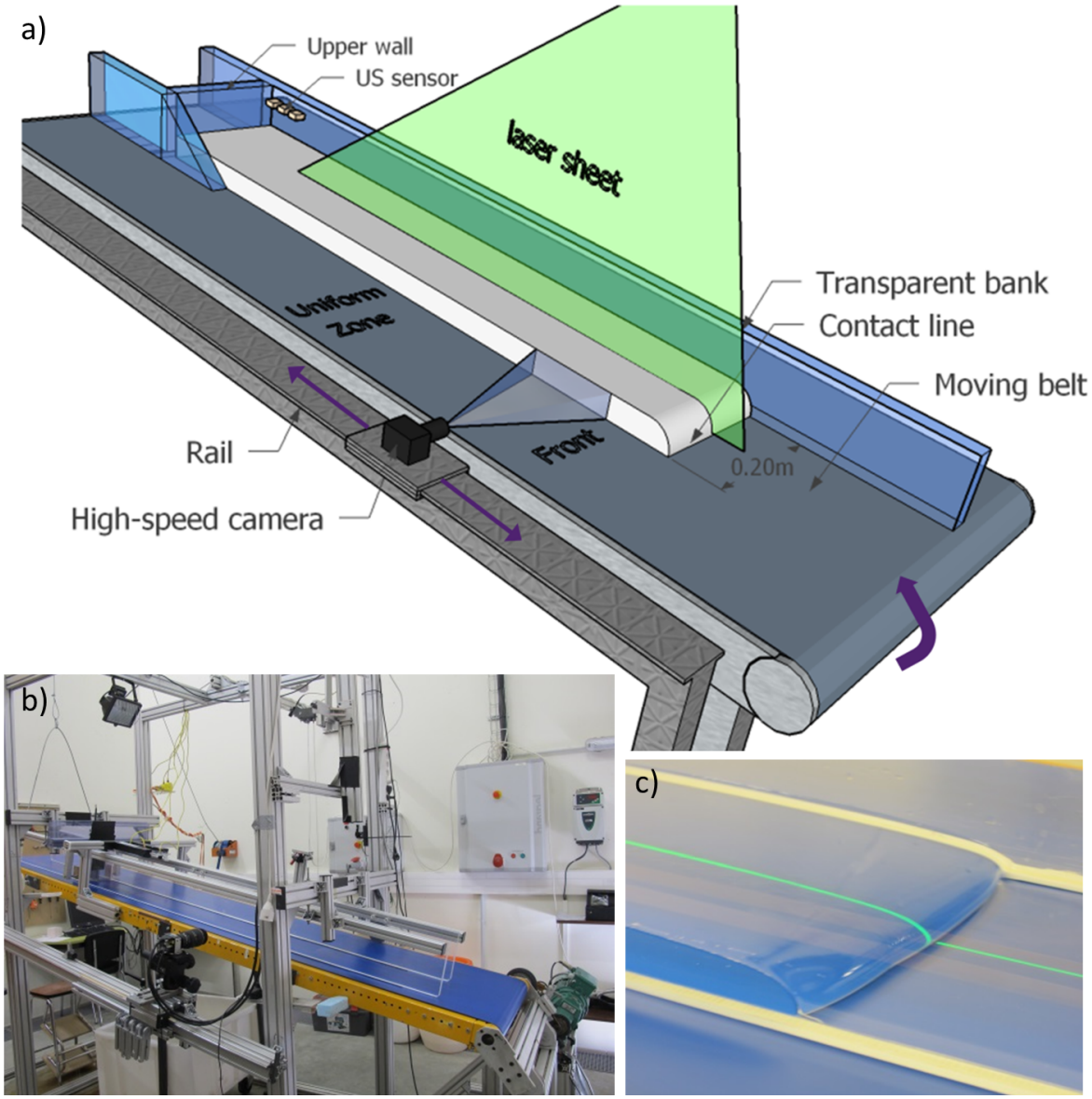

Figure 4.4 a) Vue schématique du dispositif expérimental utilisé dans le cadre de cette étude. Capteurs de vitesse opto-électroniques non représentés. b) Dispositif expérimental. Le fond mobile est constitué d'un tapis alimentaire en PVC de 2 mm d'épaisseur. Les rives sont en plexiglas transparent. L'assemblage et la mobilité relative des différents éléments sont effectués au moyen de profilés Elcom. c) Exemple d'une coulée de gel de Carbopol illuminée en son centre par la nappe laser. Hauteur de l'écoulement de 20 mm environ.

.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.6, les traceurs situés très proche de la ligne de front (dans les 10 premiers mm typiquement) ne sont pas visibles. Cette opacité provient de la légère courbure dans la direction transverse de la ligne de front (visible sur Fig.4.4c et 6.8) qui empêche la visibilité des traceurs lorsque le front est imagé par le côté, et donc le calcul du champ de vitesse dans cette zone.

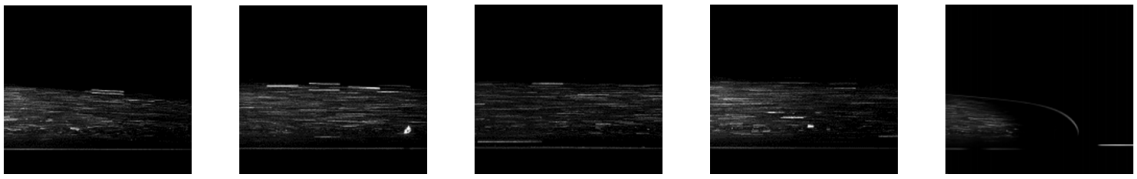

Figure 4.5 Prise de vue à des positions successives, de la ligne de front vers la zone uniforme pour l'expérience 150504. A chaque position, une série de 500 images a été prise, et le maximum d'intensité a été représenté, dans le but de mettre en lumière la trajectoire des traceurs.

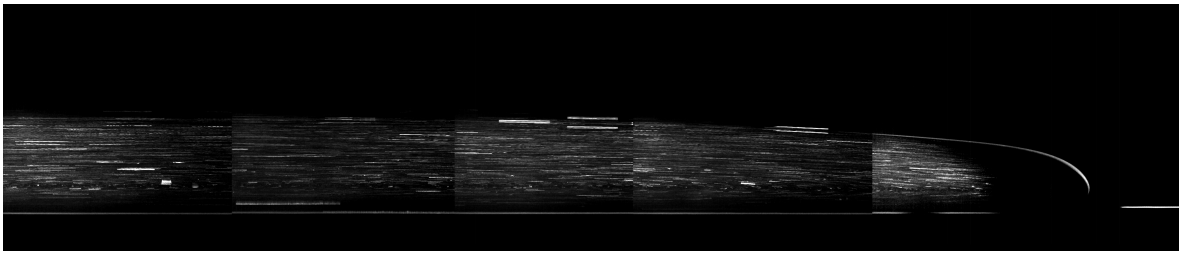

Figure 4.6 Exemple de la concaténation des images prises à des positions successives (avec un ajustement des contrastes), de la ligne de front vers la zone uniforme pour l'expérience 150504. La longueur est environ de 170 mm (4500 px) pour une hauteur de 15.5 mm (400 px). A chaque position, une série de 500 images a été prise, et le maximum d'intensité, a été représenté, dans le but de mettre en lumière la trajectoire des traceurs.

4.2.3 Mesure du rapport pixel-mètre

Le rapport pixel-mètre (R) est mesuré de deux façons indépendantes. D'abord en prenant une image d'une mire à damier dans l'écoulement, positionnée sur le tracé de la nappe laser. Mais aussi en comparant, en zone uniforme, la mesure de la hauteur des capteurs ultrason, à la hauteur en pixel sur les images. En pratique, grâce aux réglages fins réalisés à chaque expérience, la différence entre les deux rapports pixel-mètre est faible, elle est similaire à l'incertitude de la détection de la surface libre de la zone uniforme sur les images. En pratique le rapport pixel-mètre retenu est la moyenne des deux rapport pixel-mètre mesurés ; l'erreur relative considérée est située entre 0.3% et 1.8% selon les expériences.

4.2.4 Prise de vue inclinée

Pour pallier l'opacité des images dans la zone proche de la ligne de front (Fig.4.6), une prise de vue du front avec l'axe de la caméra incliné (rotation selon l'axe y) pour visualiser légèrement par derrière est effectuée. Les images sont ensuite corrigées par une méthode de transformée

spatiale appelée transformation projective, applicable lorsqu'il n'y a pas de distorsion ou de fortes aberrations optiques de type fisheye [Fujita et al., 1998].

Les coordonnées métriques (X,Y) s'écrivent en fonction des coordonnées pixel images (x,y) de cette façon :

$$X = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{b_7 x + b_8 y + 1}, \quad Y = \frac{b_4 x + b_5 y + b_6}{b_7 x + b_8 y + 1} \tag{4.1}$$

Pour inverser les équations et obtenir les coefficients b_i, 4 bi-couples de points connus sont nécessaires. On image donc une mire à damier de taille de carreau connue, en repérant les coordonnées de 4 bi-couples facilement identifiables (4 coins). On résout le système $TB = Z$ avec :

$$Z = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ Y1 \\ Y2 \\ Y3 \\ Y4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \\ b4 \\ b5 \\ b6 \\ b7 \\ b8 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} x1 & y1 & 1 & -x1X1 & -y1Y1 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ x4 & y4 & 1 & -x4X4 & -y4Y4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x1Y1 & -y1Y1 & x1 & y1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -x4Y4 & -y4Y4 & x4 & y4 & 1 \end{pmatrix}$$

Les couples (X_i, Y_i) représentent les positions métriques de 4 points repérés sur la mire, et les couples (x_i, y_i) représentent les coordonnées image en pixels de ces points.

On peut optimiser les paramètres b_i en ajoutant aux 4 points nécessaires, tous les coins de la mire (soit 126 couples (x_i, y_i) typiquement), et en minimisant la somme des différences entre le résultat du modèle et des mesures connues. Pour cela :
1 - On extrait les coordonnées en pixel des coins de la mire par double dérivée de l'image de la mire (Fig.4.7a) et seuillage
2 - On convertit les coordonnées pixels en données métriques, connaissant la taille des carreaux de la mire $(X_{m,i}, Y_{m,i})$
3 - On entre dans le modèle les couples (x_i, y_i) représentant les coordonnées pixels des coins de la mire
4 - On compare le résultat du modèle (X_i, Y_i) aux couples $(X_{m,i}, Y_{m,i})$
5 - On optimise les paramètres b_i en minimisant la distance euclidienne pour chaque couple, qui se note $d_i = \sqrt{(X_i - X_{m,i})^2 + (Y - Y_{m,i})^2}$

Voici un exemple de jeu de paramètres, calculé pour l'expérience 150504 :

$$B = \begin{pmatrix} 0.0403783470272 \\ 6.70193923643e-05 \\ -0.0450499151182 \\ 1.61300023212e-05 \\ 2.28295590228e-06 \\ -1.84132831916e-05 \\ 0.0394935175347 \\ 0.0314491954214 \end{pmatrix}$$

La figure 4.7 permet de visualiser les cordonnées métriques des coins de la mire ainsi que la prédiction du modèle à 4 bicouples et du modèle optimisé (126 bicouples). L'optimisation des paramètres permet de réduire l'erreur. Dans cet exemple, avec les paramètres du modèle calculé à partir de la connaissance de 4 bicouples, la somme des erreurs sur 126 mesures vaut 5.9 mm. Avec les paramètres du modèle optimisé, elle vaut 4.1 mm.

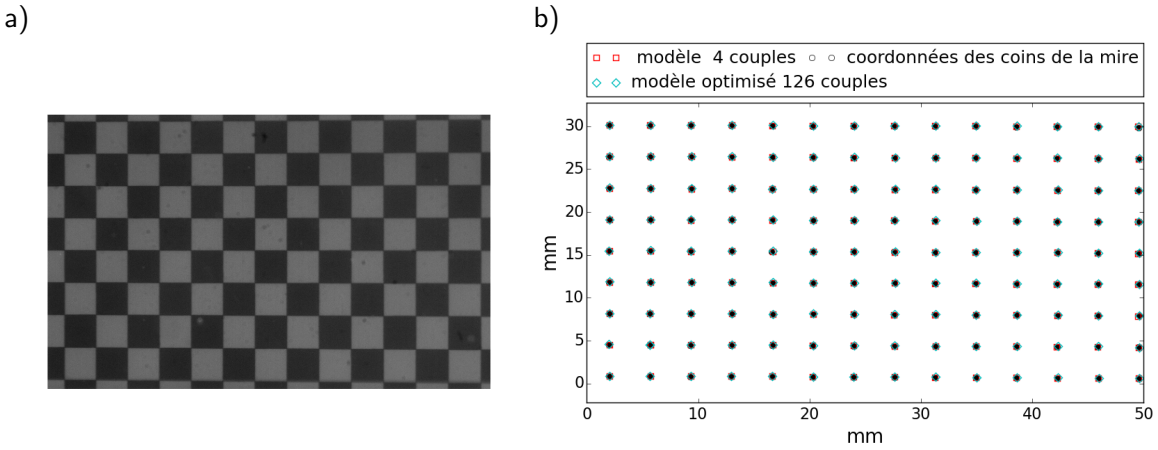

Figure 4.7 a) Mire plongée dans du gel de Carbopol. b) Coordonnées métriques des repères de la mire (position des coins) et prédiction du modèle à 4 couples et du modèle optimisé à 126 couples. Expérience 150504.

Si l'on compare les images de la coulée avec une prise de vue inclinée au front (Fig.4.8) avec celles prises dans la configuration perpendiculaire classique (Fig.4.6), on constate qu'il est possible de visualiser des traceurs situés plus proches de la ligne de front. Mais malgré tout, les images restent inexploitables dans les premiers millimètres après la ligne de front ($\sim$2 mm sur l'exemple présenté figure 4.8).

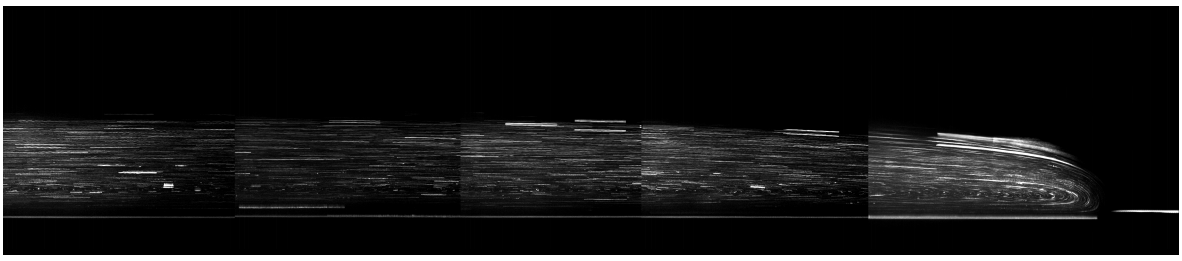

Figure 4.8 Exemple de la concaténation des images prises à des positions successives (contraste ajusté), de la ligne de front vers la zone uniforme pour l'expérience 150504. L'image la plus proche du front a été prise en caméra inclinée puis corrigée. A chaque position, une série de 500 images a été prise, et le maximum d'intensité a été représenté, dans le but de mettre en lumière la trajectoire des traceurs.

4.2.5 Mesure de la vitesse moyenne

La vitesse du tapis u_b est mesurée par deux capteurs opto-électroniques présentés au §4.1 et par un tachymètre manuel au cours de l'expérience. En complément, la vitesse moyenne est aussi mesurée par l'intégration des profils de vitesse expérimentaux par la méthode des trapèzes. Si les

points de mesure au fond ($u = -u_b$, $y = 0$) ou à la surface libre ($u{=}u_s$, $y = h$) n'ont pas pu être mesurés, ils sont ajoutés artificiellement (la vitesse de fond est alors la vitesse du tapis u_b et la vitesse de surface u_s est la première mesure de vitesse sous la surface libre). La vitesse moyenne est aussi mesurée sur les profils de vitesse de type Herschel-Bulkley ajustés aux profils mesurés, afin de s'affranchir d'éventuels manque de mesure. Comme les deux mesures correspondent, la vitesse moyenne retenue est celle mesurée directement à partir des profils de vitesse mesurés.

4.2.6 Mesure de la hauteur et de la pente de la surface libre

La hauteur de la coulée est directement mesurée sur les images en extrayant la position de la surface libre et du fond sur les images. En effet les contours de l'écoulement sont visibles sur les images par la présence d'une ligne lumineuse (voir Fig.4.9). L'épaisseur de la surface libre varie entre 3 et 10 pixels (0.12–0.39 mm) et augmente à proximité de la ligne de front, où elle peut atteindre 30 px. Le fond présente sur les images une épaisseur variant entre 5 et 15 pixels. L'épaisseur de la surface et du fond dépendent de l'intensité lumineuse du laser, mais aussi du réglage de la perpendicularité de la caméra par rapport à l'écoulement. De cette façon, la hauteur de l'écoulement mesurée par cette méthode est caractérisée par une incertitude qui varie entre $\pm$0.16 et $\pm$ 0.9 mm et qui dépend de l'expérience et de la position de l'image par rapport à la ligne de front.

A cause de la variation en intensité lumineuse sur les images et de la présence de reflets en dehors des limites de l'écoulement (Fig.4.9), la détection de la surface libre est faite manuellement en créant un masque avec le logiciel ImageJ dont le contour est ensuite extrait sous python par la commande $cv2.Canny$. Le caractère stationnaire de l'écoulement permet de ne créer qu'un masque par position et par expérience. Après avoir réalisé une première détection de contour, le contour est filtré par un polynôme de degré 2 (filtre de Savitzky-Golay) sur des fenêtres glissantes de taille variable de façon à ce que le dénivelé vertical soit de 5 px minimum sur chaque fenêtre (exemple Fig.4.10a). La pente de la surface libre est obtenue sur les mêmes fenêtres par la dérivée du filtre de Savitzky-Golay de degrés 2 (exemple Fig.4.10b).

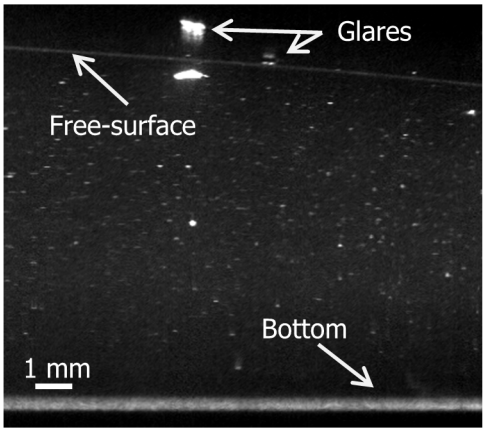

Figure 4.9 Exemple d'une image prise à environ 40 mm de la ligne de contact. On observe la surface libre et le fond sous la forme d'une ligne lumineuse, et quelques reflets.

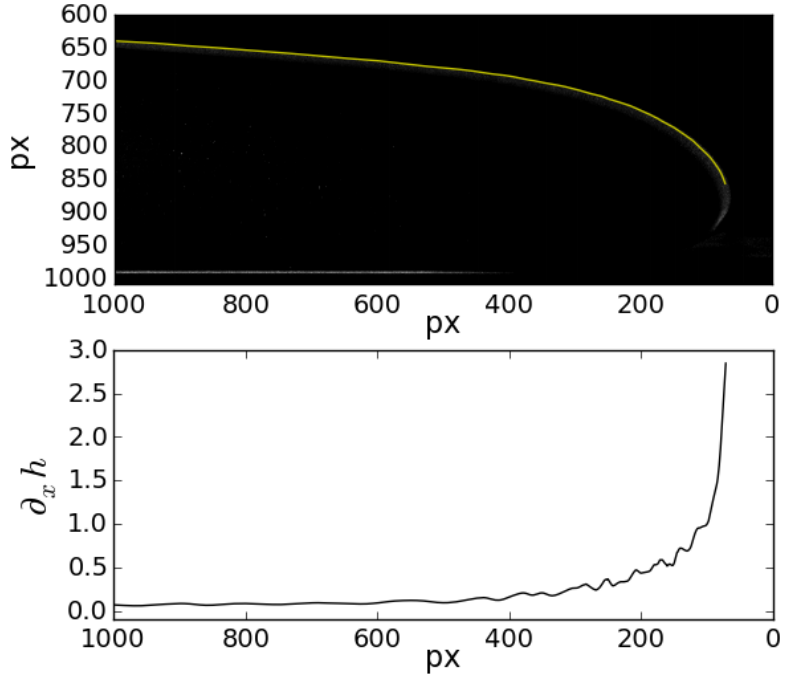

Figure 4.10 a) Image du front, de longueur environ 5 cm, la position de la surface libre (sans la zone de rebroussement) détectée est représentée en jaune. b) Pente de la surface libre associée. Expérience 160113v1 carbopol.

De plus, 3 capteurs de hauteurs (Ultrason Turck Banner Q45UR) dont le fonctionnement et le processus de calibration ont été explicités par Ghemmour [2011], fournissent une mesure de hauteur indépendante dans la zone uniforme. L'incertitude relative des capteurs est de ± 0.7 mm, [Ghemmour, 2011].

Pour le glucose, la détermination de la position de surface libre est plus difficile que pour le gel de Carbopol, à cause de difficultés expérimentales (trace sur les rives, forte réverbération de la lumière) et les barres d'erreur associées sont donc plus importantes.

Remarque :

Sur certaines expériences, la surface libre au front, en prise de vue inclinée, est visible jusqu'au fond ; la position de la ligne de contact est alors connue précisément. Mais parfois, même l'ajustement du contraste ou l'étude des lignes de courant ne permettent pas de positionner la ligne de front sur les images inclinées. La surface libre au front de la position perpendiculaire, qui est, elle, toujours visible jusqu'au fond, est alors superposée à l'image inclinée et corrigée (Fig.4.11). La partie visible de la surface libre de la position inclinée corrigée doit se superposer à une portion de la surface libre de la position perpendiculaire. De cette façon, la position de la ligne de contact de l'image inclinée corrigée est toujours connue. Cela permet aussi de valider la correction appliquée aux images en prise de vue inclinée.

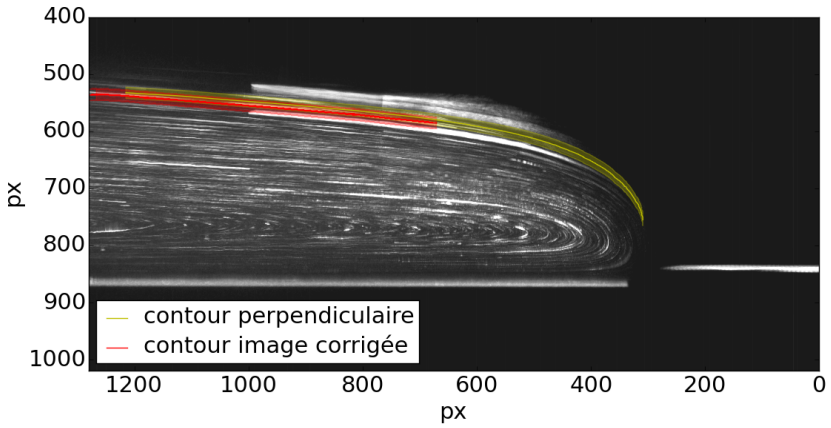

Figure 4.11 Maximum d'intensité sur 500 images au front de l'image en prise de vue inclinée et corrigée. En rouge, le contour visible de l'image inclinée corrigée (et barres d'erreur), en jaune le contour visible de l'image de la même coulée en prise de vue perpendiculaire (et barres d'erreur).

4.2.7 L'existence du point de rebroussement

Le front des coulées de Carbopol présente une forme ré-entrante, avec un point de rebroussement. L'origine du repère est choisie comme étant le point de rebroussement, là où la pente est verticale, comme le présente la figure 4.12. La distance à la ligne de contact est notée x_f. La position $x_f = 0$ est généralement appelée ligne de contact ou ligne de front dans cette étude.

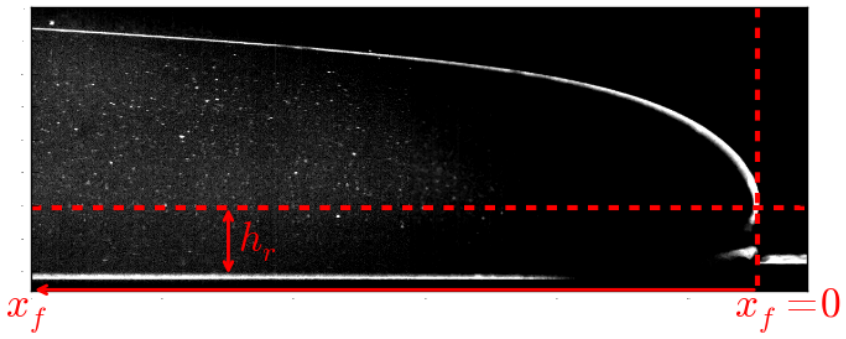

Figure 4.12 Exemple de prise de vue du front d'un gel de Carbopol. Contraste ajusté. La ligne de contact est pointée par un trait pointillé vertical. La position du point de rebroussement est pointée par un trait pointillé horizontal.

4.2.8 Protocole expérimental

Chaque expérience se déroule comme suit :

1 - Des mesures de calibration des capteurs de hauteurs à ultrason sont effectuées à l'aide de cales de précision (pour connaître la relation linéaire entre le signal du capteur et la hauteur mesurée correspondante).

2 - Le plan laser est réglé de façon à toucher perpendiculairement le fond, sur une ligne longitudinale à égale distance des deux rives.

3 - La position du rail est ajustée de façon à être parallèle au fond du canal. La caméra est réglée à l'aide d'une mire ronde de façon à être perpendiculaire au plan de prise de vue et parallèle au fond du canal. La position du rail est ensuite ajustée finement de façon à être parfaitement parallèle au fond du canal, du front à la zone uniforme (à l'aide de la caméra et d'une mire à damier).

4 - La mire à damier est imagée par déplacements successifs de la caméra en respectant les paliers prédéfinis, imposés par des cales. Cela permet de connaître le recoupement entre les positions.

5 - Le fond mobile est activé à la vitesse voulue, et le matériau est déposé entre les deux rives jusqu'à ce que la longueur atteigne environ 1 m. La hauteur des rives est ajustée afin d'assurer l'étanchéité du dispositif.

6 - Une mire à damier est plongée dans l'écoulement pour connaître le rapport pixel-mètre dans le fluide.

7 - Des séries d'images sont prises du front (position 0) à la zone uniforme (position 9) en déplaçant manuellement la caméra sur le rail. Il faut compter environ 10 secondes par position (1 seconde pour l'acquisition et quelques secondes pour manœuvrer la caméra et la déplacer à la position suivante).

8 - Le front (position 0) est imagé de nouveau pour connaître sa vitesse de recul.

9 - *facultatif* La caméra est inclinée pour prendre le front légèrement par derrière et une mire à damier est plongée dans l'écoulement pour connaître la correction à appliquer aux images prises en configuration de caméra inclinée.

10 - La température du fluide est mesurée à l'aide d'une sonde (afin de reproduire la même température lors des essais rhéométriques).

11 - L'expérience se termine par la mesure de la hauteur en zone uniforme pour différentes vitesses de tapis imposées, ce qui représente une dizaine de couples h_N-u_b à mesurer et environ 30 minutes de manipulation.

12 - Des tests rhéométriques sont effectués avec le rhéomètre, sur les échantillons de matériaux pris avant, pendant (si l'expérience est longue) et après l'expérience.

13 - Des mesures de calibration des capteurs de hauteur sont effectuées à nouveau pour contrôler la stabilité de leur position par rapport au fond de l'écoulement.

En général le temps pendant lequel le matériau s'écoule sur le canal doit être minimisé pour éviter les pollutions extérieures (ajout de poussière). Avant l'expérience, 2 jours sont nécessaires pour préparer le matériau, et une journée pour préparer l'expérience. Après l'expérience, une journée est nécessaire pour nettoyer le dispositif, calibrer les capteurs de hauteur et extraire les données brutes des capteurs de hauteurs et de vitesse du tapis. Finalement, une expérience (1 matériau) nécessite environ 5 jours de travail. Durant l'expérience, où le matériau est mis en jeu sur le canal, seulement une minute est nécessaire à l'acquisition des images en caméra rapide.

Pour les expériences mettant en jeu du glucose, les difficultés expérimentales sont plus importantes (séchage du matériau, opacification au bout de quelques dizaines de minutes, cristallisation sur les rives, blocage de l'entraînement du moteur, fuites). La durée totale de l'expérience est en

moyenne plus importante qu'avec du Carbopol. La minimisation du temps passé sur les étapes 7, 8 et 9 est essentielle pour ne pas laisser le temps au matériau de s'opacifier.

La vérification de la calibration des capteurs de hauteur en fin d'expérience permet de vérifier la stabilité du dispositif. La double mesure du rapport pixel-mètre permet de contrôler les capteurs de hauteurs et de vérifier la finesse des réglages. La mesure de la vitesse moyenne par intégration des profils de vitesse permet de l'estimer précisément et de contrôler les capteurs opto-électroniques. Ces contrôles permettent de limiter les sources d'erreur de mesure et de quantifier l'incertitude.

4.3 Les traceurs

La qualité des traceurs et le bon ensemencement du matériau sont essentiels pour obtenir des images exploitables, et de fait la qualité des mesures en dépend. Par conséquent, le choix des particules et de leur concentration a été une étape importante pour assurer le bon fonctionnement du dispositif de vélocimétrie. Des essais ont été effectués avec des traceurs fluorescents dans le rouge et un filtre (coupant toutes les autres longueurs d'onde) sur l'objectif permettant de ne visualiser que les traceurs. Cependant ces traceurs, trop polluants en tapissant le reste du dispositif, ont été abandonnés.

Le choix s'est finalement porté sur des billes creuses de verre (Hollow Glass Spheres, Noveon) de 10 μm de diamètre et de densité 1.1 g/mL. La concentration en traceurs adoptée est de 10^{-5}g/g pour le gel de Carbopol et le Glucose, elle permet d'obtenir une bonne densité de traceurs sur les images sans opacifier le matériau.

4.4 Vélocimétrie

Le déplacement du fluide est rendu visible par la présence de traceurs en suspension dans l'écoulement, illuminés par le plan laser. La prise d'images successives à intervalle de temps connu permet de visualiser le déplacement des traceurs, tout en connaissant le temps de déplacement : on peut donc en déduire le champ de vitesse à l'intérieur de l'écoulement. Parce qu'il est difficile de suivre chaque particule individuellement, l'espace est divisé en fenêtres de petite taille. Plus les fenêtres sont petites, plus les points de mesures sont nombreux et plus le champ de vitesse local est détaillé. Dans le cas d'une coulée à surface libre, de faible épaisseur comparée à la longueur, l'enjeu est d'avoir suffisamment de mesures dans l'épaisseur de l'écoulement.

Plusieurs méthodes de vélocimétrie permettent l'analyse des images et l'extraction des vitesses des particules. Deux de ces méthodes ont été effectuées (vélocimétrie PIV et spatio-temporelle), elles sont présentées ci-après. Nous avons utilisé un outil déjà existant pour la méthode PIV. En revanche, la méthode spatio-temporelle a été développée spécialement dans cette étude. Comme nous le verrons, la méthode de l'analyse spatio-temporelle, plus performante dans le cas de notre application, a été préférée à la méthode PIV.

4.4.1 Vélocimétrie : Méthode PIV

Nous utilisons un outil de PIV (*Particule Image Velocimetry*) optimisé pour les champs de vitesse présentant des forts gradients, appelé DPIVsoft. L'algorithme, codé en Matlab, calcule la fonction de corrélation entre deux boites d'interrogation situées sur 2 images successives au même emplacement. La position du pic de corrélation (le maximum de la fonction de corrélation) dans la boite indique le déplacement horizontal et vertical. La boite d'interrogation est translatée selon une première estimation du déplacement. Elle est aussi déformée en s'adaptant au gradient de vitesse présent dans l'écoulement (Fig.4.13), comme proposé pour la première fois par Huang et al. [993b]. De cette façon, le nombre de traceurs qui quittent la boite d'interrogation à l'image suivante est minimisé.

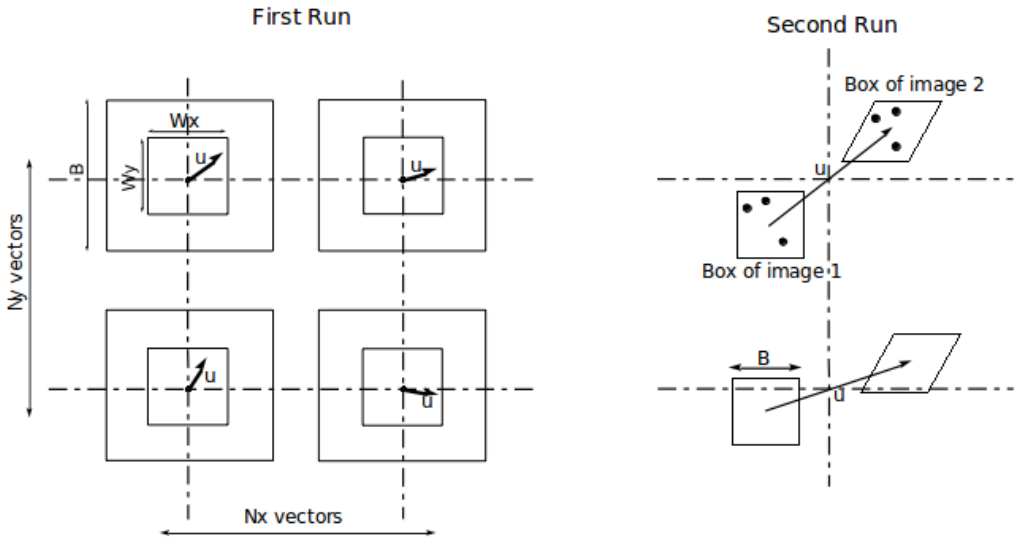

Figure 4.13 Principe de fonctionnement de la méthode DPIVsoft. Un premier calcul est effectué pour connaître le déplacement des traceurs, un deuxième calcul est effectué en ayant optimisé l'emplacement et la forme des boites, d'après [Meunier et al., 2004].

Un certain nombre de conditions doivent être remplies pour se trouver dans une configuration optimal [Meunier et al., 2004]. Les traceurs doivent faire au moins 2 pixels, il doit y avoir au moins 4 traceurs par boite, le déplacement des traceurs est inférieur au tiers de la taille de la boite et le gradient de déplacement dans la boite est typiquement inférieur à 0.2 px/px. Ce dernier point ne peut pas être respecté dans notre configuration, puisque, proche du fond de l'écoulement, le gradient typique de déplacement est de l'ordre de 30 px/px.

Étant donné les caractéristiques des images, la taille la plus petite possible pour les boites d'interrogation avec cette méthode est de $32\times32\text{px}^2$. Dans notre configuration, l'épaisseur d'un écoulement au front étant d'environ 300 pixels, cette méthode permet d'obtenir une dizaine de points de mesures par profil de vitesse.

La figure 4.16c-e présente des profils de vitesse obtenus avec cette méthode (points bleus), au front d'une coulée de gel de Carbopol. La corrélation est moins bonne dans les zones de fort

gradient (près du fond) et proche de la surface libre. Proche du front, les traceurs sont moins visibles, le gradient de vitesse augmente, et cette méthode ne permet plus de mesurer un champ de vitesse (Fig.4.16c).

Afin d'améliorer la résolution spatiale et la précision des champs de vitesse mesurés, des méthodes dites de super-résolution PIV ont été développées [Keane et al., 1995; Hart, 2000]. Elles consistent à réduire la taille des boites d'interrogation, par corrélations successives, jusqu'à obtenir, au mieux, un seul traceur par boite. Mais les méthodes de PIV n'exploitent pas le caractère permanent de notre configuration, contrairement à la méthode de vélocimétrie spatio-temporelle, présentée ci-après.

4.4.2 Vélocimétrie : Méthode de l'analyse spatio-temporelle

La méthode d'analyse spatio-temporelle, appelée ici STV (pour *Space-Time Velocimetry*) est basée sur l'analyse en temps et en espace des images étudiées [Fujita et al., 2007]. Elle permet de générer une image spatio-temporelle de la zone étudiée pour extraire la vitesse de déplacement des traceurs.

Commençons d'abord par le principe de la méthode STV en deux dimensions (temps + 1 direction). Prenons l'exemple de la zone uniforme d'une coulée à surface libre où la vitesse verticale est nulle. Une série d'image est capturée à intervalle d'acquisition régulier. La zone de l'écoulement est découpée virtuellement par ligne dans la direction des vitesses longitudinales (x). Pour chacune de ces lignes, une image spatio-temporelle est générée en superposant les valeurs de chaque pixel de la ligne (un chiffre entre 0 et 255 représentant le niveau de gris) à des instants successifs, de la première image à la dernière (Fig.4.14). Puisque la vitesse est constante sur chaque ligne, et que les intervalles successifs de prise de vue aussi, les traceurs (de couleur claire) se déplacent toujours de la même distance entre deux images. Ainsi, l'image spatio-temporelle générée présente des lignes claires inclinées d'un angle α. Plus la vitesse de déplacement est importante, plus l'angle α sera important. En fait, la vitesse de déplacement u est directement proportionnelle à la tangente de l'angle α selon :

$$tan\ \alpha = \frac{R}{f} u \tag{4.2}$$

où R représente le nombre de pixels dans un mètre (px.m^{-1}) sur les images considérées, et f la fréquence d'acquisition des images en Hz.

C'est la détermination de l'angle α qui permet de déduire la vitesse, sur chaque ligne de l'image. La figure 4.14 présente le schéma illustrant cette démarche, à gauche les images de la zone uniforme sont représentées, les traceurs de couleur claire sont visibles. Une ligne de calcul est représentée en rouge, à cet endroit les traceurs se déplacent vers la droite de l'image. A gauche, l'image spatio-temporelle générée par 500 images prises à des intervalles de temps identiques est représentée. En haut de l'image spatio-temporelle (à l'ordonnée $t = 0$), c'est la ligne à l'instant $t = 0$ qui a été représentée, et ainsi de suite jusqu'à superposer les 500 lignes. On observe bien les stries formées par les traceurs, ainsi que l'angle α, proportionnel à la vitesse de déplacement des traceurs. La détection de l'angle α, sur chacune des lignes, est effectuée automatiquement, grâce à un développement original conçu spécialement pour cette étude, capable de mesurer l'orientation des stries en utilisant une analyse des vecteurs propres de l'image spatio-temporelle.

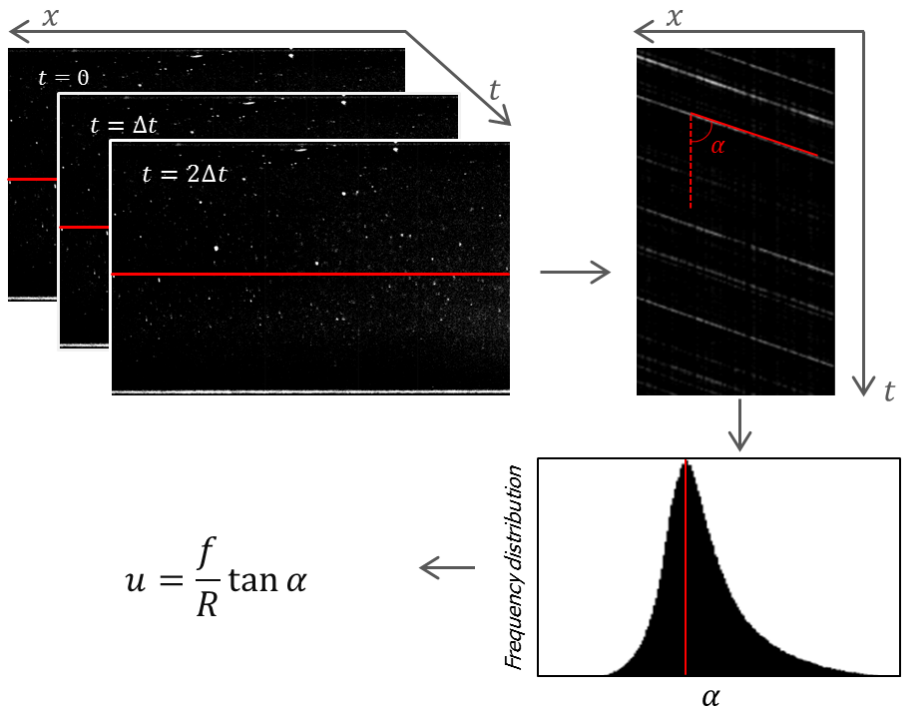

Figure 4.14 Schéma illustratif du fonctionnement de la méthode STV dans le cas de 2 dimensions (temps + 1 direction).

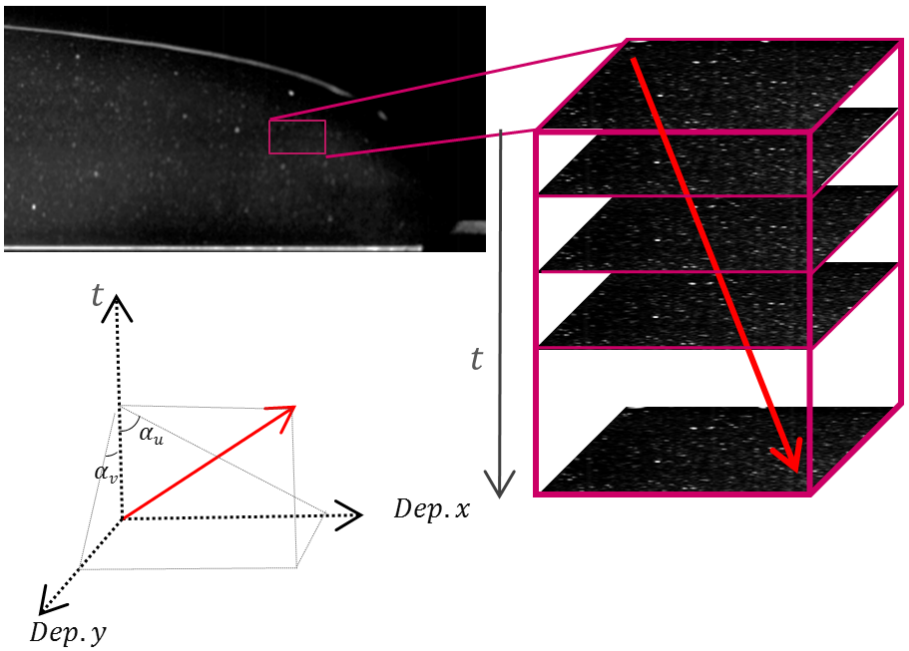

Figure 4.15 Schéma illustratif du fonctionnement de la méthode STV dans le cas de 3 dimensions (temps + 2 directions).

De la même façon, si l'on souhaite mesurer la vitesse d'un champ à deux dimensions (au front d'une coulée par exemple), les lignes sont remplacées par des boites, dans lesquelles le couple de vitesse (u, v) est supposé constant. Les boites sont superposées au cours des images successives, et les lignes formées par les traceurs forment, une fois projetées, deux angles qui sont utilisés pour calculer le couple de vitesse (u,v) de la même façon qu'en 2D (Fig.4.15).

La détection de l'angle α, sur chacune des fenêtres, est effectuée automatiquement grâce à un développement original conçu spécialement pour cette étude. La dispersion de la mesure des angles donne l'écart-type typique de la mesure de vitesse de cette méthode.

La taille des boites d'interrogation doit être suffisamment grande pour contenir assez de traceurs, et suffisamment petite pour obtenir une bonne résolution spatiale et éviter les forts gradients de vitesse. La taille retenue est de 32×16px^2 dans la direction (x, y), soit une résolution verticale deux fois supérieure à celle obtenue par la méthode PIV.

4.4.3 Vélocimétrie : Comparaison des deux méthodes

La figure 4.16c-e présente la comparaison de la méthode PIV (points vert) à la méthode STV (points noirs), dans le cas de la mesure du champ de vitesse au front d'une coulée de gel de Carbopol. La figure 4.16a-b présente le champ de vitesse obtenu au front par ces deux méthodes. Globalement l'accord entre les deux méthodes est bon, et nous permet de valider la méthode STV (certaines expériences comme la 150327v4 et la 150504 ont été entièrement traitées en méthode PIV et STV, et constituent aussi une validation de la méthode STV). Cependant :

- la méthode STV permet d'obtenir une plus grande résolution verticale.
- la méthode STV permet de mesurer les vitesses au fond et proche de la surface libre, là où la méthode PIV échoue.

Au fond et proche de la ligne de contact, la méthode STV est aussi affectée par : le manque de luminosité, le manque de traceurs visibles, la proximité avec les frontières de l'écoulement, les gradients de vitesse. Les barres d'erreur des profils de vitesse de la méthode STV sont plus larges en approchant le front et au fond mais la méthode STV produit néanmoins des mesures de vitesse. A certains endroits, la méthode STV ne permet pas non plus de mesurer une vitesse, c'est le cas dans cet exemple (Fig.4.16b) proche du fond à 30 mm du front.

Il en résulte que le champ de vitesse issu du traitement STV (Fig.4.16b) est plus abouti que celui issu du traitement PIV (Fig.4.16a). Dans le reste de cette étude, les mesures de vitesse seront effectuées par méthode STV. La figure 4.16b présente l'exemple du champ de vitesse au front d'une coulée de gel de Carbopol, mesuré par la méthode STV où l'on observe bien la zone de recirculation au front.

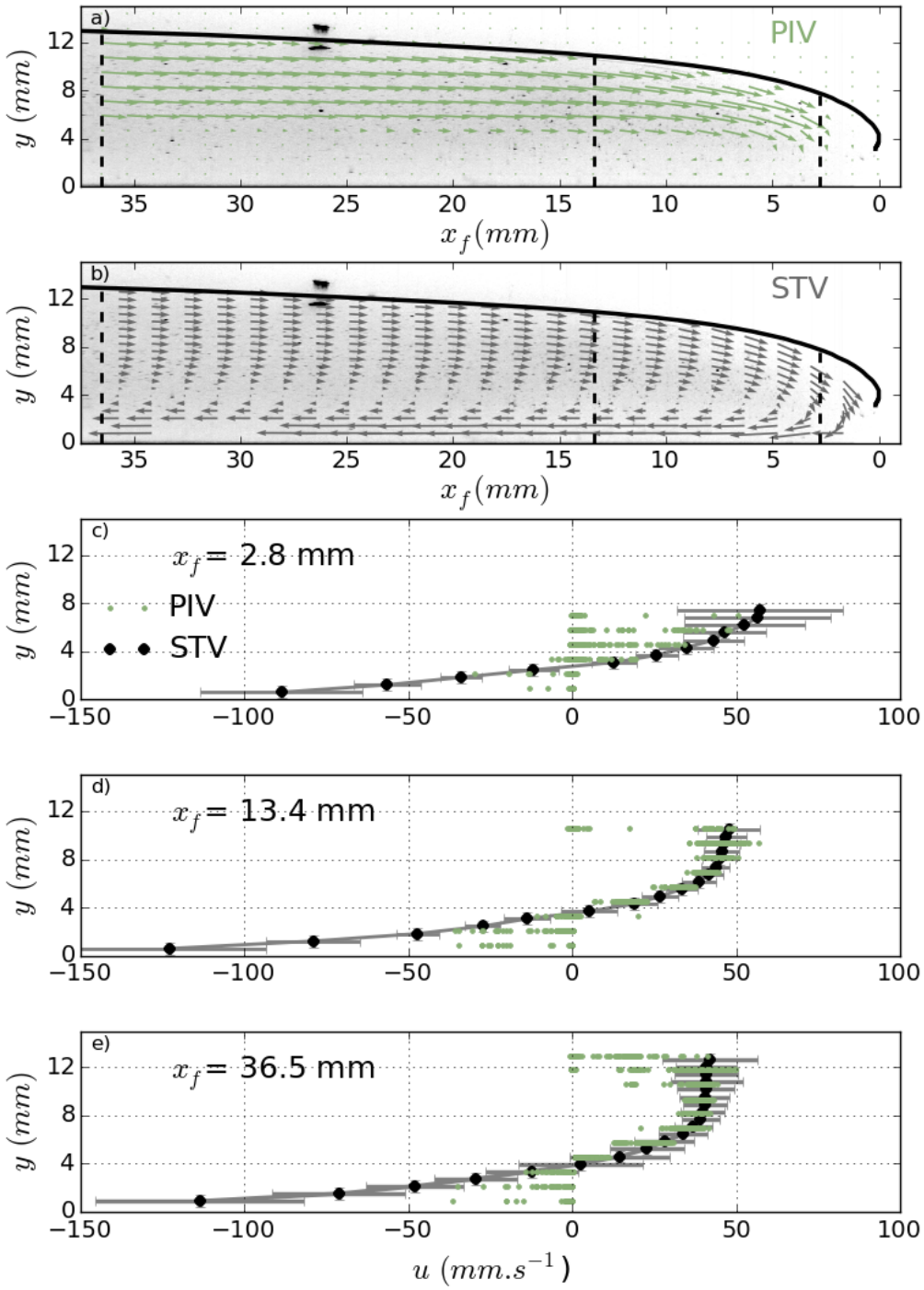

Figure 4.16 a) Champs de vitesse mesurés par la méthode PIV. b) Champs de vitesse mesurés pas la méthode STV. c-e) Profils de vitesse mesurés par la méthode PIV (vert) et STV (noir). Pour la méthode STV la demi-barre d'erreur représente l'écart type des mesures. La distance de la ligne de front à laquelle ils ont été calculés est reportée en a-b) par un marquage pointillé. Expérience 150504, gel de Carbopol.

4.5 Caractéristiques des expériences réalisées

Nous présentons ici, en conclusion de ce chapitre, la configuration de toutes les expériences réalisées durant cette thèse. Parfois, la relation vitesse-hauteur était l'unique but de l'expérience, mais parfois, les mesures de forme de front et de vélocimétrie ont échoué à cause de difficultés expérimentales. Sur d'autres expériences, alors que la surface libre est bien visible et exploitable, les images ne permettent pas d'analyser les champs de vitesse correctement. Nous précisons alors pour chaque expérience quels sont les types de résultats disponibles : relation *vitesse-hauteur*, mesures de la forme du front ou mesures de vélocimétrie.

On rappelle que les nombres sans dimension reportés sont le nombre de Froude, le nombre de Reynolds et G que l'on peut considérer comme une contrainte seuil sans dimension. Ils s'expriment :

$$Re = \frac{\rho {u_b}^{2-n} {h_N}^n}{K};\ Fr = \frac{u_b}{\sqrt{g h_N \cos\theta}};\ G = \frac{\tau_c}{\rho g h_N \sin\theta}, \tag{4.3}$$

où h_N est la hauteur de la zone uniforme.

4.5.1 Le Carbopol

Le tableau suivant (Tab.4.1) récapitule les caractéristiques des expériences conduites avec du gel de Carbopol. Au cours de l'expérience, des échantillons de matériau sont prélevés au début, en cours et à la fin de l'expérience. Les essais rhéométriques (voir § 5.3 pour la détermination des courbes d'écoulement) sont effectués à l'aide d'un rhéomètre, directement après l'expérience sur l'ensemble des échantillons, à mesure de 2 ou 3 essais de courbes d'écoulement par échantillon. En général, l'évolution des paramètres rhéologiques entre les échantillons ne diffère pas plus que l'incertitude de la mesure. Si ce n'est pas le cas, comme pour le cas de l'expérience 150504 ($\tau_c = 6.5$, $K = 4.4$ avant l'expérience, $\tau_c = 7.2$, $K = 5$ en cours d'expérience et enfin $\tau_c = 7.7$, $K = 5.3$ après les dernières mesures) alors les paramètres rhéologiques retenus sont ceux issus d'un échantillon prélevé le plus proche possible dans le temps des mesures faites sur le canal.

exp.	C	τ_c	K	n	θ	u_b	h_N	G	Fr	Re	uh	SL	DI
140221	0.1	6.9	6.5	0.42	15	26-250	10-18.6	0.26-0.14	0.08-0.6	0.07-3.3	✓		
140306	0.1	6.6	6.1	0.42	15	27-172	10-16.6	0.25-0.15	0.088-0.43	0.08-1.8	✓		
140313	0.1	12.2	8.1	0.41	15	21-326	15-27	0.31-0.18	0.06-0.7	0.05-6	✓		
150324	0.1	9.8	6.2	0.42	15.3	17-147	11-19	0.35 -0.20	0.05-0.35	0.04-1.5	✓		
$150309C1v3$	0.1	9.1	6.5	0.41	15.3	97	17	0.21	0.24	0.7	✓	✓	
$150309C1$	0.1	9.1	6.5	0.41	15.3	22-97	12.7-17	0.27-0.21	0.06-0.24	0.06 -0.7	✓		
$150309v1$	0.1	12	8.2	0.40	15.3	22.6	14.6	0.35	0.061	0.044	✓	✓	✓
$C_1 - 160113v1$	0.2	9.6	8.8	0.42	11.9	26	17	0.31	0.064	0.053	✓	✓	✓
$150309v2$	0.1	12	8.2	0.40	15.3	37	16.2	0.32	0.095	0.10	✓	✓	✓
$150309v3$	0.1	12	8.2	0.40	15.3	53	17.5	0.29	0.13	0.19	✓	✓	✓
$150327v1$	0.1	8.1	5.8	0.42	15.3	46	12.4	0.28	0.13	0.18	✓	✓	✓
$150327v2$	0.1	8.1	5.8	0.42	15.3	64	13.6	0.26	0.18	0.31	✓	✓	✓
$150309v4$	0.1	12	8.2	0.40	15.3	78	19	0.27	0.18	0.36	✓	✓	✓
$C_2 - 160127$	0.08	7.2	5.1	0.41	11.9	73	16.1	0.24	0.18	0.47	✓	✓	✓
$150309v5$	0.1	12	8.2	0.40	15.3	128	21.6	0.24	0.28	0.82	✓	✓	✓
$C_3 - 160113v5$	0.2	9.6	8.8	0.42	11.9	153	26.4	0.20	0.30	1.05	✓	✓	✓
$150327v3$	0.1	8.1	5.8	0.42	15.3	123	15.9	0.22	0.32	0.93	✓	✓	✓
$C_4 - 150612$	0.1	5	4.8	0.41	11.9	151	16.2	0.17	0.38	1.6	✓	✓	✓
$C_5 - 150504$	0.1	7.2	5.0	0.43	15.3	148	15.5	0.20	0.39	1.4	✓	✓	✓
$150327v4$	0.1	8.1	5.8	0.42	15.3	171	17.2	0.20	0.42	1.6	✓	✓	✓

Table 4.1 Caractéristiques des expériences réalisées avec du gel de Carbopol : concentration massique en poudre de Carbopol (%), contrainte seuil, τ_c (Pa), consistance K $(Pa.s^n)$, indice d'écoulement n (paramètres mesurés au rhéomètre), angle de la pente du canal θ (°), vitesse du tapis mobile u_b (mm.s^{-1}), hauteur de la zone uniforme h_N (mm) nombre G, nombre de Froude Fr, nombre de Reynolds Re. Les 3 dernières colonnes représentent la disponibilité ou non de la mesure de la relation vitesse-hauteur (uh), de la forme de la surface libre (SL) et des mesures de dynamique interne (DI). Certaines expériences, comme 150504, ont été renommées pour être utilisées dans un article (*cf.* chapitre 7) et possèdent alors 2 noms.

4.5.2 Le glucose

Le tableau suivant (Tab.4.2) récapitule les caractéristiques des expériences conduites avec du sirop de glucose. Le protocole des essais rhéométriques est le même que pour le gel de Carbopol (voir §5.4 pour la détermination des courbes d'écoulement).

exp.	ρ	η	θ	u_b	Fr	Re	uh	SL	DI
150205	1360	6.0	15	13-58	0.046-0.14	0.02-0.25	✓		
150212	1392	11.7	15	14-56	0.04-0.17	0.02-0.09	✓		
$150212v1$	1392	11.7	15	22	0.06	0.04		✓	
$150212v2$	1392	11.7	15	32	0.078	0.068		✓	
$150304v4^*$	1383	8.1	15.3	63	0.14	0.22		✓	✓
$150304v3^*$	1383	8.1	15.3	53	0.13	0.17		✓	✓
$150304v2^*$	1383	8.1	15.3	37	0.098	0.095		✓	✓
$150304v1^*$	1383	8.1	15.3	25	0.075	0.050		✓	✓
150506	1383	5.6	15.3	75	0.18	0.34	✓	✓	✓
160831	1380	4.9	11.9	164	0.32	1.3	✓	✓	✓

Table 4.2 Caractéristiques des expériences réalisées avec du sirop de glucose : masse volumique (kg.m^{-3}) mesurée à la température de l'expérience, viscosité (Pa.s) mesurée à la température de l'expérience, angle de la pente du canal θ (°), vitesse du tapis mobile u_b (mm.s^{-1}), nombre de Froude Fr, nombre de Reynolds Re. Les 3 dernières colonnes représentent la disponibilité ou non de la mesure de la relation vitesse-hauteur (uh), de la forme de la surface libre jusqu'au front (SL), et des mesures de dynamique interne (DI). Les mesures de l'expérience 150304 n'ont pas été prises au centre mais à 4 cm du bord (la largeur du canal est de 20 cm).

Chapitre 5

Matériaux et rhéologie

Dans ce chapitre, les matériaux utilisés et leur processus de fabrication sont détaillés. Nous présenterons les essais rhéométriques effectués qui ont permis de les caractériser. Nous utiliserons les propriétés des écoulements générés dans le canal expérimental pour remonter aux propriétés rhéologiques des matériaux. Comme nous l'avions aperçu dans l'état de l'art (§2.4.2), nous verrons que la caractérisation rhéométrique du gel de Carbopol issue du rhéomètre n'est pas suffisante pour représenter son comportement macroscopique.

5.1 Les matériaux utilisés

5.1.1 Le gel de Carbopol

Le Carbopol se présente sous la forme d'une poudre blanche de polymère d'acide acrylique. Le gel de Carbopol est obtenu par la neutralisation du mélange de poudre de Carbopol à l'eau. La condition de pH adéquat entraîne le gonflement des chaînes, qui, entremêlées provoquent l'apparition d'un seuil de contrainte, même pour des concentrations en poudre de Carbopol inférieures à 0.1% en masse [Piau, 2007]. La structure du gel ainsi obtenue se présente comme une dispersion de micro-gels dans l'eau. La figure 5.1 permet de visualiser un gel de Carbopol par microscopie. Il semble qu'il soit composé de particules dites molles car capables d'adapter leur forme extérieure et leur taille à l'espace disponible dans le solvant [Piau, 2007]. Il en résulte une polydispersité de la taille des particules, en l'occurrence dans la gamme 2-20 μm dans l'étude de Piau [2007].

Le Carbopol est très couramment utilisé dans l'industrie pharmaceutique et cosmétique comme agent épaississant. C'est parce qu'il est facile à préparer, stable, transparent et présentant peu de thixotropie qu'il a été choisi comme fluide à seuil pour cette étude. Nous avons choisi d'employer du Carbopol EDT2623 fourni par Novéon. Ce type de Carbopol, contrairement à l'Ultrez couramment utilisé dans la littérature, présente l'avantage de posséder un plateau de viscosité en fonction du pH plus large ([Noveon, 2002] et voir [Di Giuseppe et al., 2015] pour un ensemble de tests sur les propriétés du Carbopol). Ainsi, ses propriétés rhéologiques sont moins sensibles aux changements de pH, qui, même minimes peuvent se produire durant une expérience (ajout de poussières par exemple).

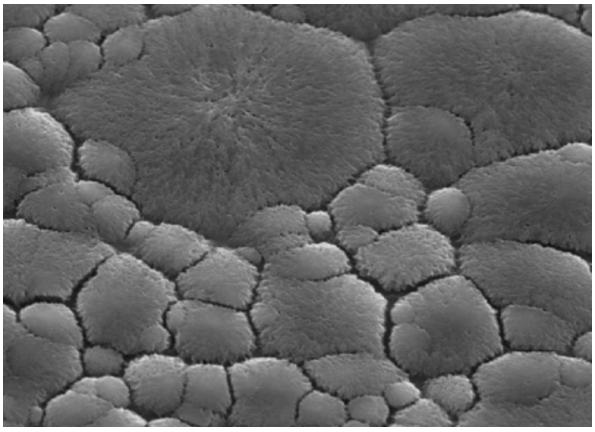

Figure 5.1 Imagerie par microscopie électronique à balayage (SEM) d'un gel Carbopol 940 obtenu à la concentration massique 0.04% par [Piau, 2007]. La taille totale de l'image est de 46 μm.

5.1.2 Le glucose

Le sirop de glucose est un mélange d'eau et de glucose, lui-même issu le plus souvent de l'hydrolyse d'amidon de maïs. Ce matériau a été peu utilisé en géosciences. Des sirops ont été utilisés dans des expériences de subduction, ou lors d'expériences de convection thermique mais leurs rhéologies n'ont pas été étudiées en détail, la viscosité étant souvent estimée grossièrement [Schellart, 2011]. Schellart [2011] propose une étude détaillée de plusieurs sirops de glucose commerciaux afin de déterminer la pertinence de ce fluide en tant que matériau modèle. Les résultats principaux de cette étude montrent que la viscosité :
- ne dépend pas de la déformation ni du taux de déformation.
- dépend de la température (elle augmente de 14% lorsque la température augmente de 1°).
- dépend de la dilution du glucose dans l'eau (elle diminue de 30% lorsque la teneur en eau augmente de 1%)
- dépend du temps (elle augmente de plusieurs ordres de grandeur en quelques heures).
Enfin, Schellart [2011] montre aussi que le sirop de glucose ne présente pas de caractère élastique pour des taux de déformation appartenant à $[10^{-4}, 10^{2}]\text{s}^{-1}$. Le sirop de glucose a donc été choisi dans cette étude pour son comportement Newtonien et sa transparence, mais nous nous attendons à des incertitudes importantes sur les mesures rhéologiques.

5.2 Le mode de préparation des matériaux utilisés

5.2.1 Le gel de Carbopol

La poudre de Carbopol est dispersée dans une solution de 12L d'eau distillée à la concentration massique de 0.1% (des expériences ont aussi été réalisées à 0.08% et 0.2% dans cette étude) à forte vitesse de rotation durant 30 minutes. Cette première phase est réalisée à l'aide d'un mélangeur plongeant équipé d'un outil adapté à la dispersion de particules (phase 1, Fig.5.2). Les traceurs sont aussi ajoutés durant cette phase. Après avoir laissé la solution au repos pendant une journée,

elle est neutralisée par une solution de soude injectée à l'aide d'une seringue, à faible vitesse de rotation (100 rpm), pendant quelques heures (phase 2, Fig.5.2).

D'après Novéon, la neutralisation à un pH de 7 est obtenue par le respect du ratio 2.3/1 avec une solution de NaOH à 18%, sachant que la masse molaire de la soude est de 40 g/mol. Ainsi, pour 12 g de Carbopol, dans 12 L de solution d'eau distillée, on ajoute 27.6 mL de NaOH à 18% (i.e. 4.5 mol/L), soit 5 g de soude pure (*i.e.* 0.414 g de soude pure pour 1 g de Carbopol).

Enfin, pour éliminer les bulles, le récipient cylindrique qui contient le gel de Carbopol est installé sur un axe tournant (30 rpm) durant 24h (Fig.5.2). Ce processus d'élimination des bulles est important et doit permettre d'en éliminer le plus possible. En effet, dans le gel de Carbopol, les bulles se forment au moment de la phase de neutralisation, malgré l'agitation faible du mélangeur. Elles restent ensuite prisonnières et ne s'échappent pas naturellement, même lors de l'écoulement sur le canal. Or leur présence diminue la qualité des images, et peut perturber l'écoulement.

Les échantillons de gel de Carbopol ainsi préparés présentent des propriétés rhéologiques variables (Tab.4.1) probablement à cause de légères variations du pH de l'eau utilisée, de l'ajout non contrôlé de poussières, de la précision des balances ou du temps d'agitation de la phase 1 et 2 qui n'est pas précisément contrôlé. La densité des gels ainsi préparés est identique à celle de l'eau [Ghemmour, 2011].

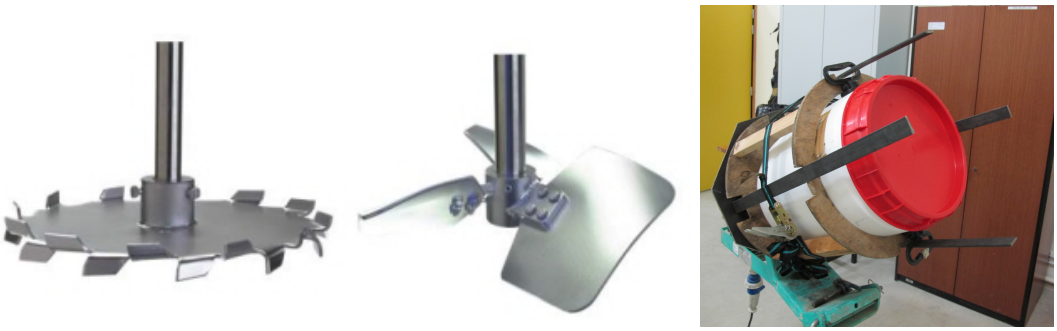

Figure 5.2 De gauche à droite, mobile d'agitation AxFlow R500 dédié à la phase 1, mobile d'agitation AxFlow A320 dédié à la phase 2 et axe tournant permettant l'élimination des bulles.

5.2.2 Le glucose

Le sirop utilisé est un sirop de glucose commercial de marque "Black Europ" contenant un conservateur E222, qui agit contre les moisissures et les bactéries et opère en tant que blanchissant. Il est dilué dans de l'eau pour obtenir une viscosité autour de 10 Pa.s (environ 1.7 L d'eau pour 20 kg de sirop commercial). Les traceurs sont ajoutés durant cette phase. De même que pour le gel de Carbopol, le récipient cylindrique qui contient le sirop de glucose est installé sur un axe tournant durant 24h, pour homogénéiser l'échantillon et éliminer les bulles. La densité est déterminée à l'aide d'un pycnomètre et d'une balance de précision.

5.3 Caractérisation rhéologique des gels de Carbopol

5.3.1 Protocole de détermination de la courbe d'écoulement

5.3.1.1 L'outil : le rhéomètre en configuration plan-plan

La caractérisation rhéologique du gel de Carbopol est réalisée à l'aide d'un rhéomètre Bohlin CVOR équipé de plans-parallèles (Fig.5.3). L'outil inférieur est fixe et l'outil supérieur est relié à un moteur, qui lui impose un couple. Un système d'asservissement permet de contrôler le déplacement angulaire du plan supérieur imposé au matériau.

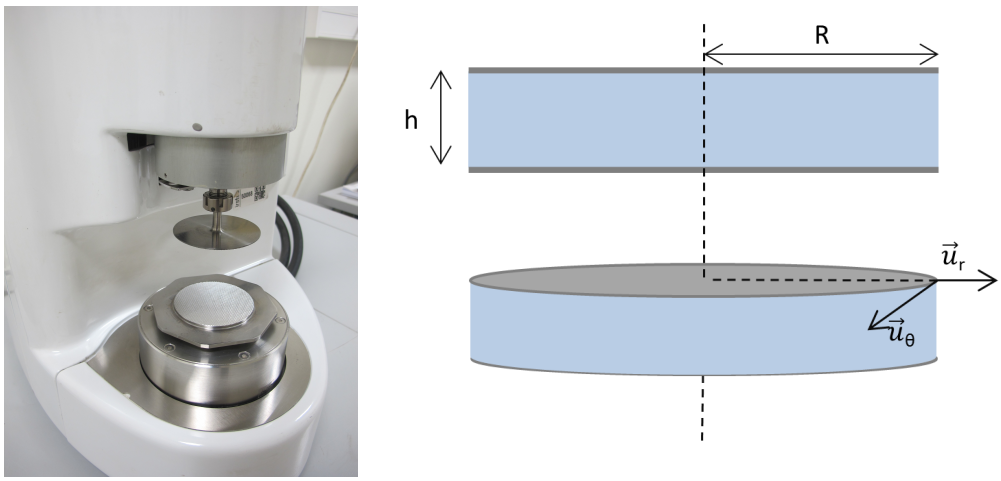

Figure 5.3 Rhéomètre Bohlin CVOR équipé de plans parallèles rugueux et vue schématique des deux plans parallèles.

La géométrie en plans-parallèles (appelée aussi plan-plan) induit des variations du gradient de vitesse au sein de l'échantillon par rapport à la distance à l'axe central. Le taux de déformation $\dot{\gamma}$ dépend de la vitesse de rotation du plan supérieur Ω, de l'épaisseur de l'entrefer h et de la distance à l'axe central r. Il est nul au centre ($r = 0$) et maximum sur les bords ($r = R$). Il s'exprime :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega r}{h} \tag{5.1}$$

Le couple élémentaire dC, appliqué sur une particule fluide, s'écrit :

$$dC = r\vec{u_r} \wedge d\vec{F} \tag{5.2}$$

avec $\vec{u_r}$ la direction d'un diamètre du plan, dF la force élémentaire exercée sur chaque particule de fluide, s'exprimant $d\vec{F} = \tau(r)dS\vec{u_\theta}$ et $\vec{u_\theta}$ la direction perpendiculaire à $\vec{u_r}$ (Fig.5.3).

On obtient par intégration et sachant que $dS = 2\pi r dr$, l'expression du couple transmis à l'échantillon par le disque supérieur :

$$C = \int_0^R \tau(r) 2\pi r^2 dr \tag{5.3}$$

Un changement de variable avec $r = \dot{\gamma}\frac{H}{\Omega}$, $dr = d\dot{\gamma}\frac{H}{\Omega}$, $\dot{\gamma}_{(r=0)} = 0$, $\dot{\gamma}_{(r=R)} = \dot{\gamma}_R = \frac{\Omega R}{h}$ nous donne :

$$C = \int_0^{\dot{\gamma}_R} \tau(\dot{\gamma}) 2\pi \left(\dot{\gamma}\frac{H}{\Omega}\right)^2 \frac{H}{\Omega} d\dot{\gamma} = 2\pi \frac{R^3}{\dot{\gamma}_R^3} \int_0^{\dot{\gamma}_R} \tau(\dot{\gamma})\dot{\gamma}^2 d\dot{\gamma} \tag{5.4}$$

On différencie ensuite l'équation (5.4) par $\dot{\gamma}_R$ et on utilise la règle d'intégration de Leibniz pour obtenir l'expression complète de la contrainte (en r=R) [Coussot and Ancey, 1999b; Coussot, 2005] :

$$\tau(\dot{\gamma}_R) = \frac{3C}{2\pi R^3} + \frac{\dot{\gamma}_R}{2\pi R^3}\frac{dC}{d\dot{\gamma}_R} \tag{5.5}$$

En pratique, un ensemble de mesures (C, Ω) est obtenu lors d'un essai rhéométrique. Le couple $(\tau(\dot{\gamma}_R), \dot{\gamma}_R)$ est déterminé ensuite en considérant les expressions (5.1) et (5.5). Le terme correctif, $\frac{dC}{d\dot{\gamma}_R}$, est calculé par la méthode des différences finies. Dans le cadre de nos expériences, il est de l'ordre de 1% de la contrainte pour les plus petits $\dot{\gamma}$ et de l'ordre de 10% pour les plus grands, typiquement lorsque la contrainte appliquée à l'échantillon est 10 fois supérieure à la contrainte seuil.

5.3.1.2 Les courbes d'écoulement

Les courbes d'écoulement (la contrainte τ en fonction du taux de déformation $\dot{\gamma}$) sont obtenues en utilisant les outils en configuration plans-parallèles avec un diamètre de 60 mm. Un volume de matériau est déposé sur le plan inférieur du rhéomètre. Le plan supérieur est abaissé jusqu'à la taille d'entrefer souhaitée, il pousse alors l'excédent de matériau au dehors, que l'on nettoie minutieusement avant l'essai. Les plans sont rugueux (de taille de rugosité 0.5 mm), de façon à éviter le glissement aux parois [Magnin and Piau, 1987].

Les tests rhéométriques sont effectués en cisaillant le matériau depuis les taux de cisaillement élevés (100 s^{-1}) vers les taux de cisaillement faibles (0.001 s^{-1}). Le passage d'un palier à l'autre est déclenché automatiquement toutes les 15 secondes, les mesures s'effectuent les 5 dernières secondes de façon à ce que le régime permanent soit atteint. La taille de l'entrefer entre les deux plans du rhéomètre (gap) est généralement comprise en 1 mm et 2 mm. Les tests sont toujours précédés d'un précisaillement identique de 50 s^{-1} pendant 20 s afin de déstructurer le matériau de façon reproductible, suivi d'un repos, toujours identique, de 10 s.

Nous nous sommes attachés à valider ce protocole, afin de vérifier qu'il est adapté, que les paliers de 15 secondes suffisent à atteindre le régime établi ou encore que la taille de l'entrefer n'influe pas sur la courbe d'écoulement.

5.3.2 Établissement du protocole

5.3.2.1 Influence du glissement

La figure 5.4 présente des courbes d'écoulement obtenues avec un échantillon de gel de Carbopol dans des configurations géométriques différentes (plan-plan rugueux, plan-plan lisse et cône-plan lisse). Les deux courbes d'écoulement obtenues en configuration plan-plan lisses

(Fig.5.4a) présentent un artefact du glissement pour les taux de déformation inférieurs à $1s^{-1}$. De la même façon, du glissement se produit lors de l'utilisation d'outils en configuration cône-plan lisses (Fig.5.4b). L'utilisation de plans lisses qu'ils soient parallèles ou en géométrie cône-plan s'avère inadaptée à la mesure de courbes d'écoulement, ils engendrent en effet du glissement aux parois. C'est donc en utilisant des plans rugueux que les courbes d'écoulement sont déterminées par la suite.

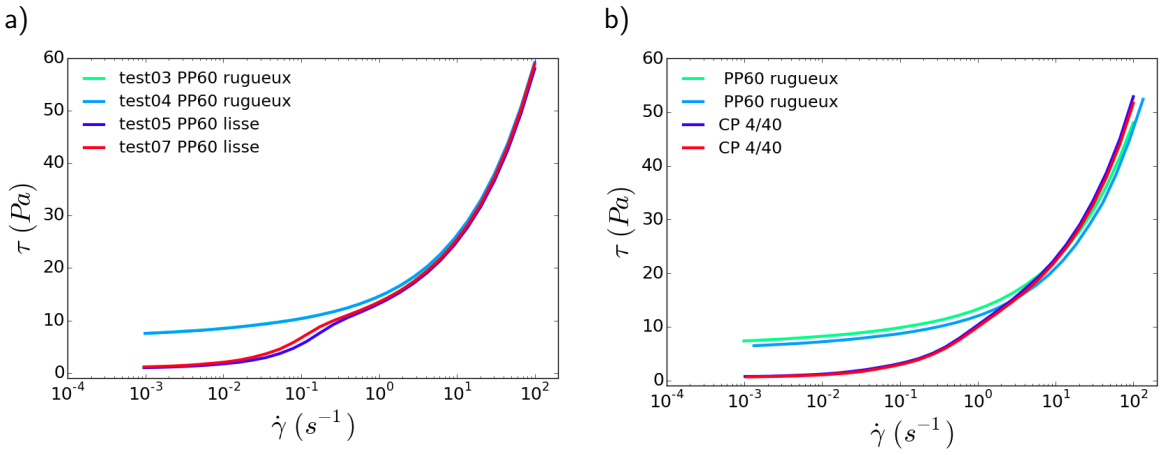

Figure 5.4 Courbes d'écoulement obtenues sur deux gels de Carbopol différents. Précisaillement de $50s^{-1}$ pendant 20s et repos de 10 s. a) Géométrie plan-plan (PP) de diamètre 60 mm rugueux ou lisses. b) Géométrie plan-plan (PP) de diamètre 60 mm rugueux ou cône-plan (CP) de diamètre 40 mm et d'angle 4°.

5.3.2.2 Influence du sens d'application des paliers de taux de déformation

La propriété de thixotropie d'un matériau est généralement testée en imposant successivement des paliers croissants puis décroissants de taux de déformation, et en mesurant la contrainte de cisaillement résultante. Si le matériau testé lors de ces essais rhéométriques est thixotropique, alors il y aura une hystérésis entre la relation contrainte-taux de déformation : les courbes de paliers croissants et décroissants ne se superposeront pas [Møller et al., 2009].

La figure 5.5 présente deux mesures de courbes d'écoulement du même gel de Carbopol, l'une est obtenue en appliquant les taux de déformation dans le sens croissant l'autre dans le sens décroissant. Le fait que les courbes d'écoulement obtenues par des sollicitations initiales différentes du matériau se superposent est un indicateur qui montre que le gel de Carbopol ne présente pas ou peu de thixotropie.

5.3.2.3 Influence du temps d'application des paliers

Lors de l'établissement de la courbe d'écoulement du matériau, les paliers imposés de taux de déformation doivent être suffisamment longs afin d'atteindre le régime permanent au moment de la mesure. La figure 5.6 présente des essais d'écoulement avec des temps d'application des paliers de taux de déformation de 15 à 105 secondes. Les courbes d'écoulement se superposent, signifiant

que pour un taux de déformation appliqué dans la gamme [0.001-100] s^{-1}, la contrainte atteinte en 15 ou 105 secondes est la même. A priori, les paliers d'application du taux de déformation de 15 secondes sont donc suffisants pour permettre au régime d'écoulement de s'établir. Notons qu'en sollicitant le matériau à partir de son régime solide (par exemple s'il y avait un temps de repos entre chaque palier de taux de déformation appliqué), le temps de stabilisation de la contrainte peut être plus long que 15 secondes (voir §5.3.3.2).

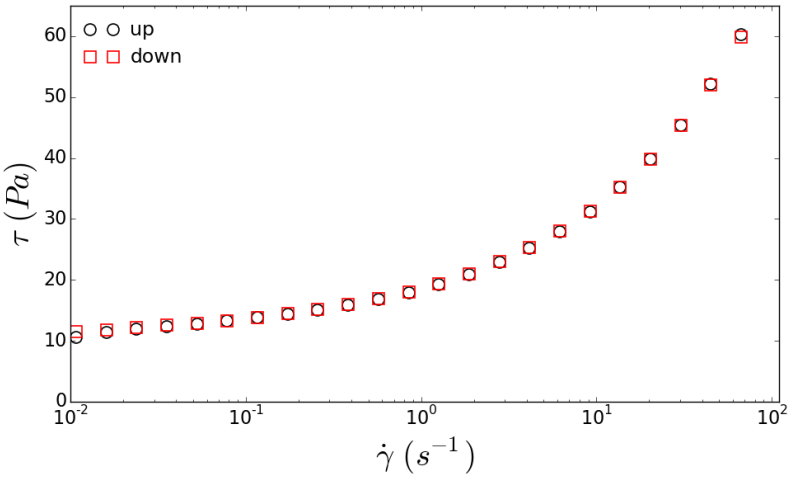

Figure 5.5 Courbes d'écoulement obtenues en géométrie plan-plan rugueux en appliquant les taux de déformation dans le sens croissant (up) et décroissant (down). Gel de carbopol. Précisaillement de 50s^{-1} pendant 20s et repos de10s.

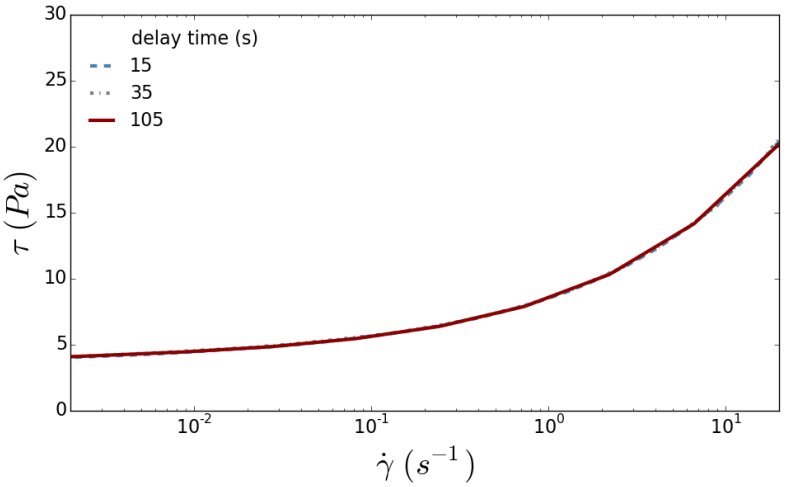

Figure 5.6 Courbes d'écoulement obtenues en géométrie plans-parallèles (PP) rugueux, mesurées par l'application de paliers de taux de déformations décroissants de 100s^{-1} à 0.001s^{-1}. Durée des paliers de de 15s, 35s ou 105s (les mesures s'effectuent les 5 dernières secondes). Précisaillement de 50s^{-1} pendant 20s et repos 10s.

5.3.2.4 Influence de la taille de l'entrefer

Nous avons réalisé plusieurs courbes d'écoulement en modifiant la taille de l'entrefer du rhéomètre (Fig.5.7a) afin d'étudier son influence. Il n'est pas possible d'augmenter la taille de l'entrefer au-delà de 4 mm à cause du creusement qui se produit pour les gels de Carbopol testés. La figure 5.7b présente les paramètres de Herschel-Bulkley ajustés sur les courbes d'écoulement et leur évolution en fonction de la taille d'entrefer appliquée. Les courbes d'écoulement obtenues

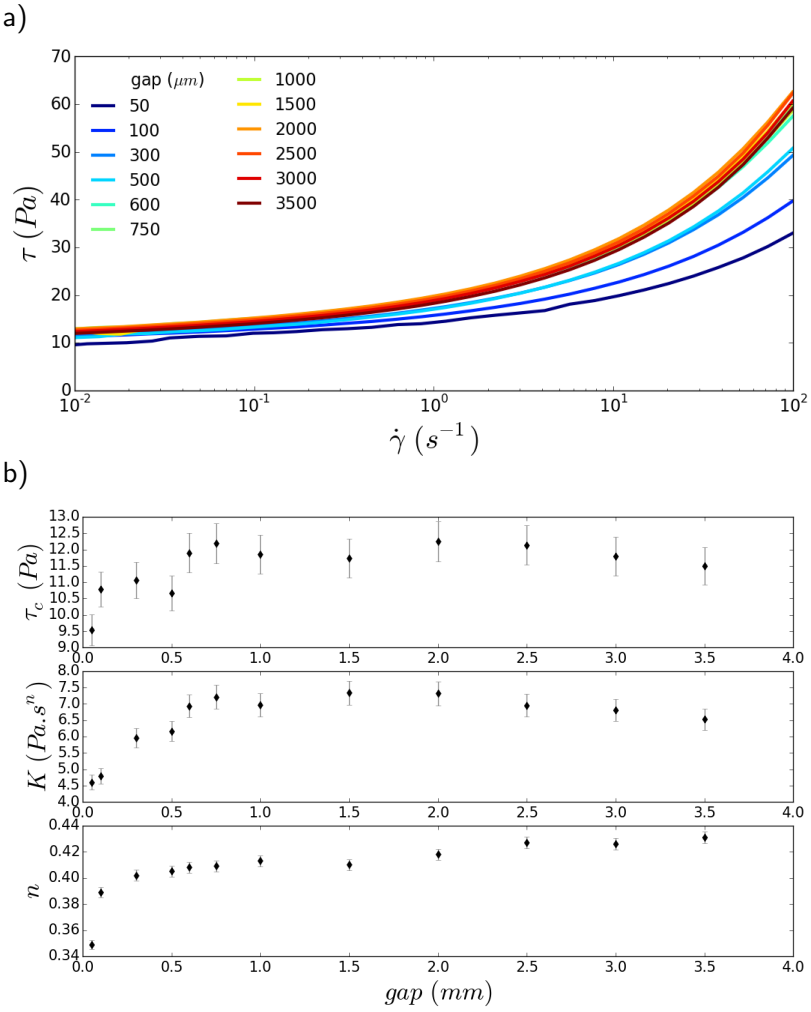

Figure 5.7 Courbes d'écoulement obtenues sur un gel de Carbopol en géométrie plan-plan rugueux pour plusieurs tailles d'entrefer. Précisaillement de 50s^{-1} pendant 20s et repos de 10s. b) Evolution des paramètres rhéologiques de Herschel-Bulkley issus des courbes d'écoulement en fonction de la taille d'entrefer.

avec des gaps compris entre 0.6 et 3.5 mm coïncident, et les paramètres rhéologiques de Herschel-Bulkley ne varient pas significativement. Pour des gaps plus petits que 0.6 mm les courbes ne coïncident plus, leur consistance, contrainte critique et indice d'écoulement diminuent (Fig.5.7b). Mais l'échelle d'observation de l'écoulement (la taille d'entrefer) est, dans ces cas là, du même ordre de grandeur ou plus petite que l'épaisseur de matériau contenu par les rugosités. La différence de comportement pour les courbes d'écoulement dont la taille d'entrefer est inférieure à 0.6 mm

pourrait donc provenir d'un effet perturbateur des rugosités qui influe sur l'écoulement principal. Une étude montre que des effets d'échelle existent pourtant dans le gel de Carbopol, [Geraud et al., 2013]. Notre étude ne nous permet pas de les observer : s'ils existent pour les tailles d'entrefer que nous avons appliquées, alors ils sont compris dans le bruit de mesure des courbes d'écoulement.

5.3.3 Résultats sur la rhéologie

5.3.3.1 Courbes d'écoulement

Les courbes d'écoulement des gels de Carbopol peuvent être représentées par le modèle viscoplastique de Herschel Bulkley, faisant intervenir la contrainte seuil τ_c, la consistance K et l'indice de rhéofuidification n. La figure 5.8 représente un exemple de courbe d'écoulement d'un échantillon de Carbopol, dont les paramètres rhéologiques sont déterminés en l'ajustant par le modèle de Hershel-Bulkley. Les incertitudes sur les paramètres de Herschel-Bulkley, résultantes de la variabilité des mesures sur un jeu d'échantillons identiques, sont de 5% sur K et τ_c et de moins de 1% sur n [Chambon et al., 2014].

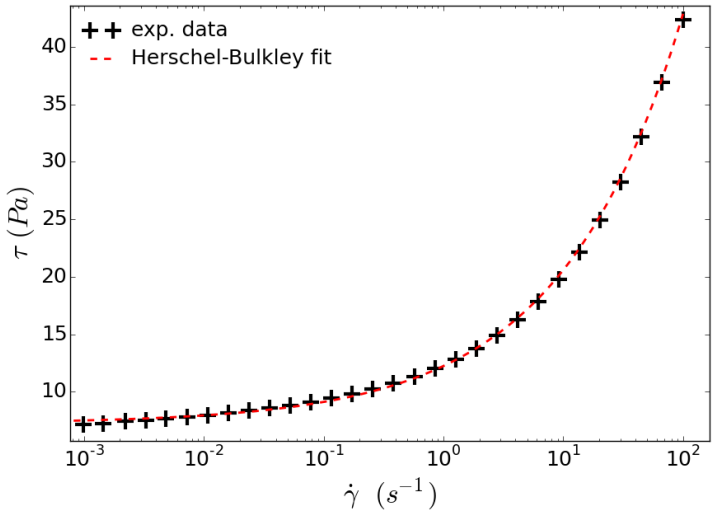

Figure 5.8 Courbes d'écoulement obtenues en géométrie plan-plan rugueux de diamètre 60 mm. Gel de Carbopol de l'expérience 150504. Contrainte seuil $\tau_c = 7.2$ Pa. Précisaillement de 50 s^{-1} pendant 20 s et repos de 10 s. Toutes les courbes d'écoulement des gels de Carbopol utilisés lors d'expérience seront mesurées, sauf mention contraire, dans cette configuration.

5.3.3.2 Comportement autour du seuil : la transition solide-fluide

Les courbes d'écoulement du gel de Carbopol suggèrent que la transition solide-fluide s'opère par le passage de la contrainte au-delà de la contrainte seuil. C'est cette première propriété qui sera investiguée. Ensuite, la transition lors du passage par une déformation critique sera aussi étudiée.

Essai de fluage Nous avons mené des essais d'écoulement à contrainte imposée de façon à observer le comportement du Carbopol autour du seuil. D'après les courbes d'écoulement du gel de Carbopol, ce matériau se comporte comme un solide lorsque soumis à une contrainte inférieure à la contrainte seuil, et s'écoule lorsque la contrainte appliquée est supérieure à la contrainte seuil. Un essai de fluage (observation de la déformation en fonction du temps) devrait donc mettre en évidence que : (i) la déformation tend vers une constante lorsque $\tau < \tau_c$, (ii) la déformation tend vers une valeur infinie lorsque $\tau > \tau_c$.

La figure 5.9 présente le taux de déformation et la viscosité apparente pour différentes contraintes imposées à un gel de Carbopol de contrainte seuil 11.9 Pa. Lorsque la contrainte appliquée est inférieure à la contrainte seuil du matériau, le taux de déformation diminue avec le temps et la viscosité augmente. Lorsque la contrainte appliquée est supérieure à la contrainte seuil, le taux de déformation prend une valeur finie, après un certain temps de stabilisation.

Le gel de Carbopol ne semble pas présenter d'écart de comportement lors du passage de la contrainte par la contrainte critique. L'évolution du taux de déformation en fonction de la contrainte imposée est continue (Fig.5.9). Le Carbopol ne présente donc pas de bifurcation de la viscosité qui est une caractéristique des matériaux thixotropes [Coussot et al., 2002a] (voir §2.2.3. C'est un indice supplémentaire qui suggère que le gel de Carbopol ne présente pas de thixotropie dans nos configurations. Ces résultats sont cohérents avec l'étude de Ovarlez et al. [2013] qui montre que le Carbopol est un fluide à seuil idéal qui ne présente pas de bande de cisaillement.

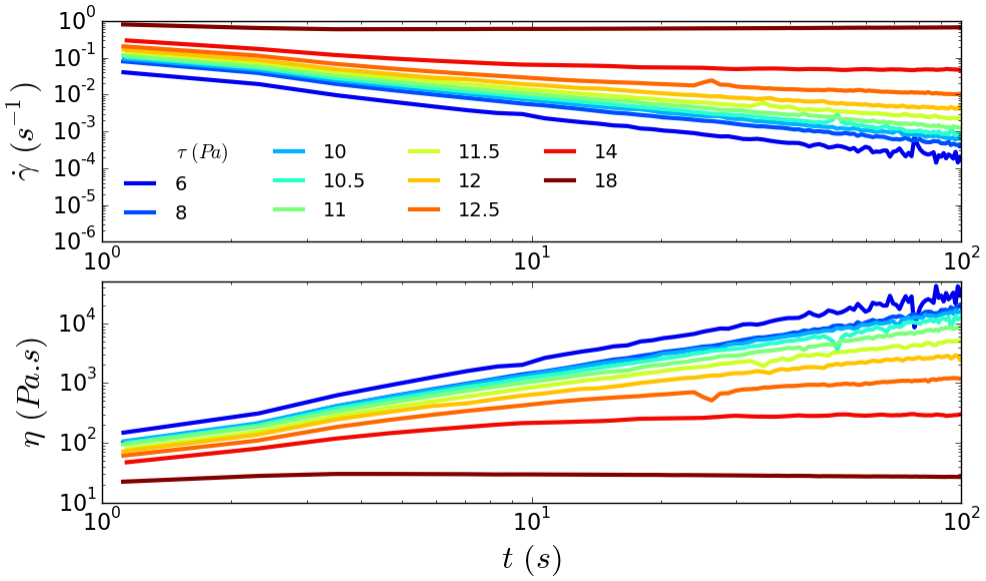

Figure 5.9 Taux de déformation ($\dot{\gamma}$) en fonction du temps pour différentes valeurs de contraintes imposées, et viscosité apparente (η) correspondante. Gel de Carbopol de contrainte seuil $\tau_c = 11.9$ Pa (déterminée par l'ajustement de la courbe d'écoulement par un modèle de Herschel Bulkley). Précisaillement de $50s^{-1}$ pendant 20s et repos de 10s.

Cependant, pour des contraintes appliquées entre 12.5 et 14 Pa (légèrement supérieures à la contrainte seuil de 11.9 Pa), le temps de stabilisation devient important, dépassant la dizaine de secondes. Cette réponse retardée du taux de déformation à une contrainte imposée pourrait être

le signe d'un comportement visco-élastique.

Essais en taux de cisaillement imposé Nous avons observé la transition solide-fluide lors du passage du matériau par la contrainte critique τ_c. Ici, nous montrons que la transition s'effectue aussi par le passage d'une déformation appelée déformation critique, séparant le domaine solide du domaine liquide.

La figure 5.10 présente la contrainte (σ) mesurée en fonction de la déformation (γ) pour différents taux de déformation imposés à un même gel de Carbopol. Le matériau est d'abord mis au repos avant chaque sollicitation par une vitesse de déformation.

On peut modéliser la relation de la contrainte en fonction de la déformation par une exponentielle de type $\sigma = \sigma_m - m * e^{-\frac{\gamma}{\gamma_c}}$. La déformation γ_c en fonction de la vitesse de déformation ainsi calculée est reportée dans l'encart (Fig 5.10). On remarque que γ_c est une déformation constante, qui vaut environ 0.325. La transition solide-fluide est ici liée à une déformation critique, caractéristique du matériau. L'existence d'une déformation critique unique dans le Carbopol est déjà connue et est compatible avec l'existence d'un régime solide élastique pour les petites déformations [Boujlel, 2013]. Cela semble cohérent, puisque si le gel au repos est composé de micro-éléments formant une structure [Putz and Burghelea, 2009], alors elle doit pouvoir se déformer jusqu'à la rupture.

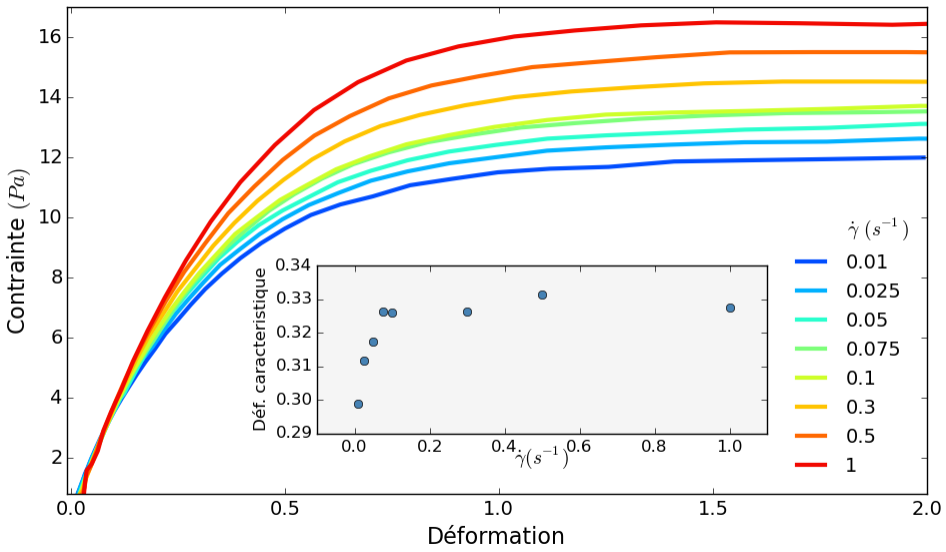

Figure 5.10 Mesure de la contrainte en fonction de la déformation, pour différentes valeurs de taux de déformation. Gel de Carbopol de contrainte seuil $\tau_c = 11.9$ Pa. Précisaillement de 50 s^{-1} pendant 20 s et repos 10 s. L'encart représente la déformation caractéristique γ_c en fonction du taux de déformation imposé.

Remarque :

En effectuant des tests indépendants en oscillation, on remarque qu'à une certaine fréquence, autour de 5Hz, le module élastique mesuré se stabilise. Si l'on applique la loi de Hooke à la contrainte critique, ($\tau_c = G\gamma_c$ avec G le module élastique), alors on retrouve le même ordre de

grandeur pour la déformation critique ($\gamma_c = 0.20 - 0.25$). Cette expérience va donc aussi dans le sens de considérer le Carbopol comme élastique pour les petites déformations, et par ailleurs justifie l'utilisation de modèles élasto-visco-plastiques [Saramito, 2009].

5.4 Caractérisation rhéologique des sirops de glucose

Pour obtenir les courbes d'écoulement des sirops de glucose, il faut s'affranchir des difficultés propres à ce matériau, que nous allons détailler.

5.4.1 Protocole de détermination de la courbe d'écoulement

5.4.1.1 L'outil : le rhéomètre en configuration cône-plan

La géométrie cône-plan est constituée d'une embase inférieure fixe lisse et d'un outil supérieur conique, d'angle α, tronqué en son sommet (le sommet fictif est situé sur l'embase) (Fig.5.11).

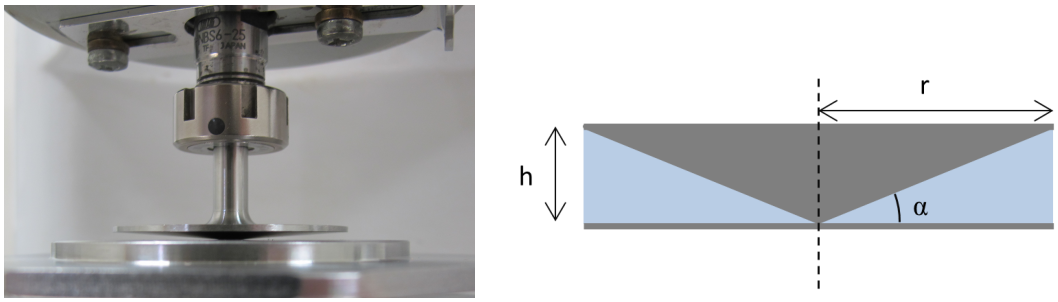

Figure 5.11 Rhéometre Bohlin CVOR équipé d'outil cône-plan et vue schématique.

Contrairement à la géométrie plan-plan, le gradient de vitesse est, dans cette configuration, indépendant de la distance à l'axe central. La géométrie cône-plan permet de calculer le couple (τ, $\dot{\gamma}$) exacte, grâce à l'homogénéité du gradient de vitesse et de la contrainte tangentielle, si l'angle α est petit [Coussot and Ancey, 1999b]. En fait, la variation du gradient de vitesse par rapport à l'axe central est compensée par la hauteur variable au sein de l'échantillon.

En reprenant les mêmes notations qu'au §5.3.1.1, on a :

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega r}{h(r)} = \frac{\Omega}{tan\alpha} \tag{5.6}$$

La contrainte est donc indépendante de la distance r à l'axe centrale. Le couple s'écrit :

$$C = \tau \int_0^R 2\pi r^2 dr \tag{5.7}$$

On peut donc écrire une relation directe entre la contrainte est le couple.

$$\tau(\dot{\gamma}) = \frac{3C}{2\pi R^3} \tag{5.8}$$

Dans cette configuration, la connaissance du couple (Ω, C) permet d'accéder directement au couple $(\tau, \dot{\gamma})$.

5.4.1.2 Les courbes d'écoulement

Les courbes d'écoulement sont mesurées en utilisant l'outil cône-plan (40 mm de diamètre, 4 °). Comme pour le gel de Carbopol, les tests rhéométriques sont effectués en cisaillant le matériau depuis les taux de cisaillement élevés (100 s^{-1}) vers les taux de cisaillement faibles (0.001 s^{-1}). Le passage d'un palier à l'autre est déclenché automatiquement toutes les 15 secondes, les mesures s'effectuent les 5 dernières secondes. Les tests sont toujours précédés d'un précisaillement identique de 50 s^{-1} suivi d'un repos, toujours identique, de 10 s .

Pour s'affranchir du problème de déshydration au cours de l'essai rhéométrique, nous avons développé une méthode consistant à badigeonner de l'huile minérale newtonienne de faible viscosité sur la surface libre du sirop de glucose avant chaque essai rhéométrique.

5.4.2 Établissement du protocole

5.4.2.1 La déshydratation durant l'essai rhéométrique

La figure 5.12a présente la mesure de viscosité d'un échantillon de sirop de glucose lors d'un essai rhéométrique. On voit que la viscosité augmente de près de 20% au cours de l'essai, soit en en 5 minutes environ. Visuellement, on observe le séchage du sirop de glucose sur ses bords en contact avec l'air. Durant le temps d'un essai, la surface libre de l'échantillon de glucose confiné entre les deux plans du rhéomètre cristallise et tend à freiner le mouvement de rotation du plan supérieur du rhéomètre. Pour pallier cet artefact, nous badigeonnons la surface libre du volume de

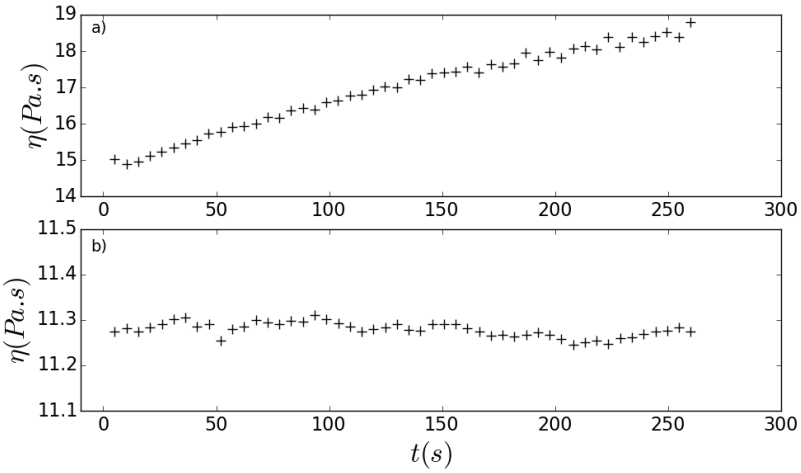

Figure 5.12 Mesure de viscosité issue de la courbe d'écoulement d'un sirop de glucose avec une géométrie cône-plan, a) en configuration classique d'un essai rhéométrique, b) en badigeonnant la surface libre de l'échantillon avec de l'huile à l'aide d'un pinceau. Précisaillement de 50s^{-1} pendant 20s et repos de 10s.

glucose avec de d'huile de très faible viscosité à l'aide d'un pinceau. L'huile recouvre l'échantillon et empêche le vieillissement de ses bords externes au cours de l'essai rhéométrique. La figure 5.12b présente la mesure de viscosité du même échantillon de sirop de glucose lors d'un essai rhéométrique, en ayant badigeonnée ses bords d'huile minérale. De cette façon la viscosité est constante au cour de l'essai.

5.4.2.2 Les différents outils

Afin de tester l'influence des différentes géométries, un échantillon a été testé avec la géométrie cône-plan, plan-plan lisse, rugueux et couette. Les résultats obtenus avec l'outil cône-plan sont équivalents à ceux obtenus en géométrie de couette ou en plans parallèles lisses (Fig.5.13). La géométrie cône-plan est la plus simple mettre en place, et sera donc utilisée pour déterminer les courbes d'écoulement.

On remarque néanmoins que la configuration en plan-parallèle rugueux sous-estime la mesure de la viscosité du glucose (la pente de la courbe est plus faible). La sous-estimation de la viscosité par cette configuration survient de façon plus générale avec tous les fluides newtoniens testés comme le montre la figure 5.13b avec de la glycérine et la figure 5.13c avec de l'huile de référence. Elle est peut être due à des écoulements secondaires entre les rugosités, dans le cas où le liquide ne remplirait que partiellement la surface solide [Cottin-Bizonne et al., 2005]. Il semble en revanche que ces rugosités n'affectent pas l'écoulement d'un fluide à seuil, puisque les courbes d'écoulement obtenues sur un gel de Carbopol par une géométrie cône-plan et plan-plan se superposent (sauf sur la zone de glissement de la géométrie cône-plan), (Fig.5.4b).

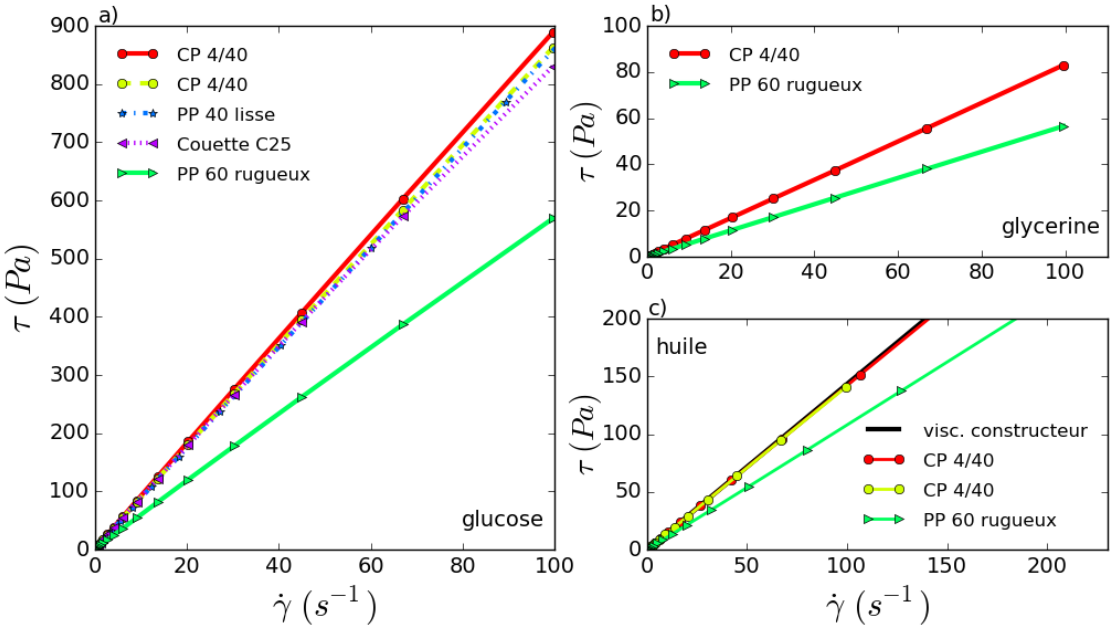

Figure 5.13 Courbes d'écoulement mesurées pour différents matériaux newtoniens, avec une géométrie cône-plan (CP), plan-plan rugueux (PP) de diamètre 60 mm et de taille de rugosité 0.5 mm, et couette de diamètre extérieur 27 mm et intérieur 25 mm. Précisaillement de 50s^{-1} pendant 20s et repos de 10s. a) Sirop de glucose, b) glycérine Rectapur à 98%, c) huile de Calibration Malvern.

5.4.3 Résultats sur la rhéologie : courbes d'écoulement

Les courbes d'écoulement sont donc mesurées en géométrie cône-plan, et en badigeonnant la surface libre avec de l'huile. On remarque que les courbes d'écoulement peuvent être représentées par un comportement de type newtonien (Fig.5.14). Des essais d'écoulement sur un même

échantillon ont permis de quantifier les incertitudes relatives à la mesure de la viscosité du sirop de glucose utilisé dans cette étude. Les incertitudes résultantes de la variabilité des résultats sur un jeu d'échantillons identiques sont de $\pm$ 8.5% sur la viscosité (Fig.5.14).

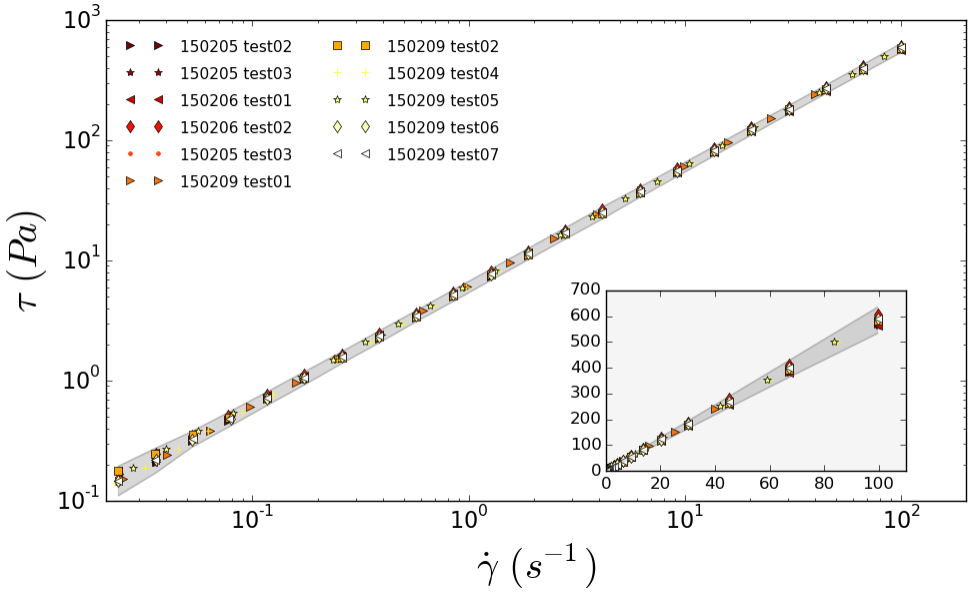

Figure 5.14 Courbes d'écoulement obtenues à partir du même sirop de glucose, échelle log-log. 11 essais à la suite. Configuration cône-plan 4/40. Précisaillement de 50s^{-1} pendant 20s et repos de 10s. Voir l'encart pour l'échelle linéaire.

5.5 La rhéologie à l'échelle de l'écoulement

Dans cette section, nous exploiterons le fait que le canal joue le rôle d'un rhéomètre, en permettant d'obtenir le rhéogramme du matériau à l'échelle de l'écoulement mis en jeu. Ce dernier est obtenu par deux mesures indépendantes : la relation *vitesse hauteur*, et le profil de vitesse à l'intérieur de l'écoulement. Ainsi nous montrerons pourquoi, avec le Carbopol, nous avons besoin de corriger les paramètres mesurés au rhéomètre, comme dans l'étude de [Chambon et al., 2014].

5.5.1 Les courbes vitesse-hauteur

Nous présentons ici quelques résultats sur la relation entre la vitesse de tapis imposée et la hauteur mesurée en zone uniforme.

Pour un écoulement de fluide de Herschel-Bulkley en zone uniforme et en régime permanent, la relation liant la hauteur normale et la vitesse moyenne ne traduit que la condition exacte d'équilibre entre la gravité et les frottements. En effet, elle ne dépend d'aucune hypothèse, mis à part le caractère uniforme et permanent du fluide. Elle est obtenue après simplification des équations primitives, par l'intégration du profil de vitesse.

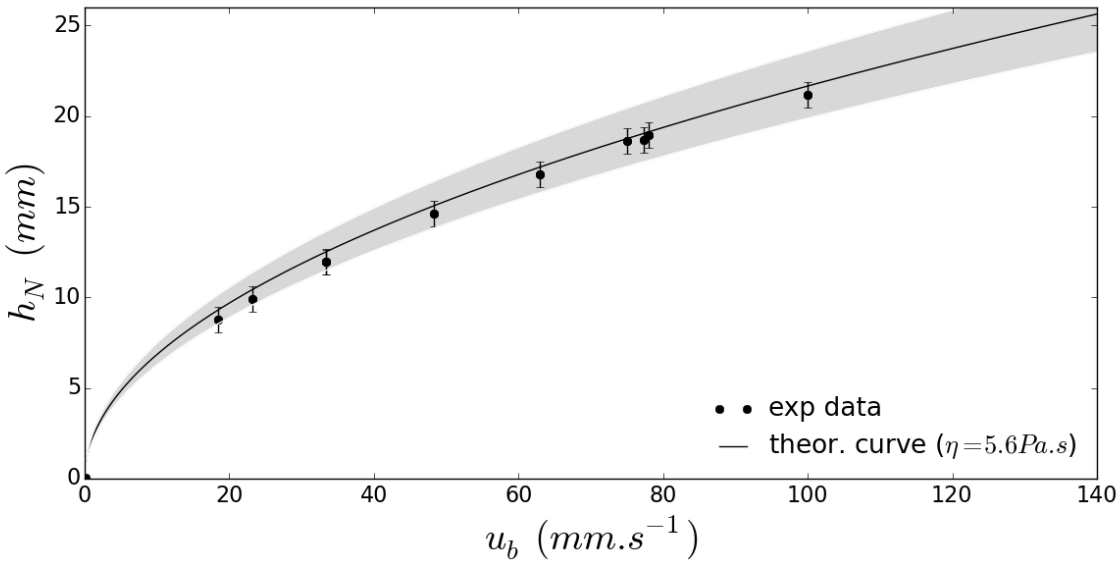

Figure 5.15 Hauteur de la zone uniforme en fonction de la vitesse de tapis imposée à la coulée. Mesures expérimentales et barres d'erreur correspondantes à la précision des capteurs de hauteur. Prédiction théorique basée sur les paramètres rhéologiques mesurés au rhéomètre (ligne noir) et enveloppe d'incertitude associée à la mesure de la viscosité et de la densité. Expérience 150506, sirop de glucose.

En considérant une vitesse basale imposée par le tapis, elle s'écrit :

$$\bar{u} = -u_b + \frac{n+1}{n}\left(\frac{\rho g sin\theta}{K}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{n}{2n+1}\frac{h_N - h_p}{h_n}\right)(h_N - h_p)^{\frac{n+1}{n}} \tag{5.9}$$

où $h_p = \tau_c/\rho g sin\theta$ représente l'épaisseur du plug et h_N la hauteur en zone uniforme.

Dans notre dispositif expérimental, la vitesse moyenne est nulle, on en déduit donc la relation entre la vitesse du tapis et la hauteur en zone uniforme suivante :

$$u_b = \frac{n+1}{n}\left(\frac{\rho g sin\theta}{K}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{n}{2n+1}\frac{h_N - h_p}{h_N}\right)(h_N - h_p)^{\frac{n+1}{n}} \tag{5.10}$$

De même, pour un écoulement de fluide newtonien, cette relation s'écrit :

$$u_b = \frac{1}{3}\frac{\rho g sin\theta}{\eta}h_N^2 \tag{5.11}$$

La figure 5.15 présente les mesures de vitesse du tapis et de hauteur normale pour une expérience réalisée avec du sirop de glucose, ainsi que la prédiction théorique calculée à partir des mesures des paramètres rhéologiques. La prédiction théorique prédit correctement les observations expérimentales.

En revanche, pour le gel de Carbopol, on observe une sous-estimation systématique des prédictions théoriques dans toutes les expériences. La figure 5.16 présente les mesures de vitesse du tapis et de hauteur normale pour l'expérience 150504, ainsi que la prédiction théorique calculée à partir des mesures des paramètres de Herschel Bulkley au rhéomêtre. Pour une vitesse donnée,

l'écart entre la prédiction et la donnée expérimentale, de l'ordre de 10–15%, est supérieur aux barres d'erreur des mesures. Cet écart systématique a déjà été observé auparavant, dans les mêmes configurations expérimentales [Chambon et al., 2014]. L'origine de ces différences est incertaine, mais nous pouvons émettre des hypothèses.

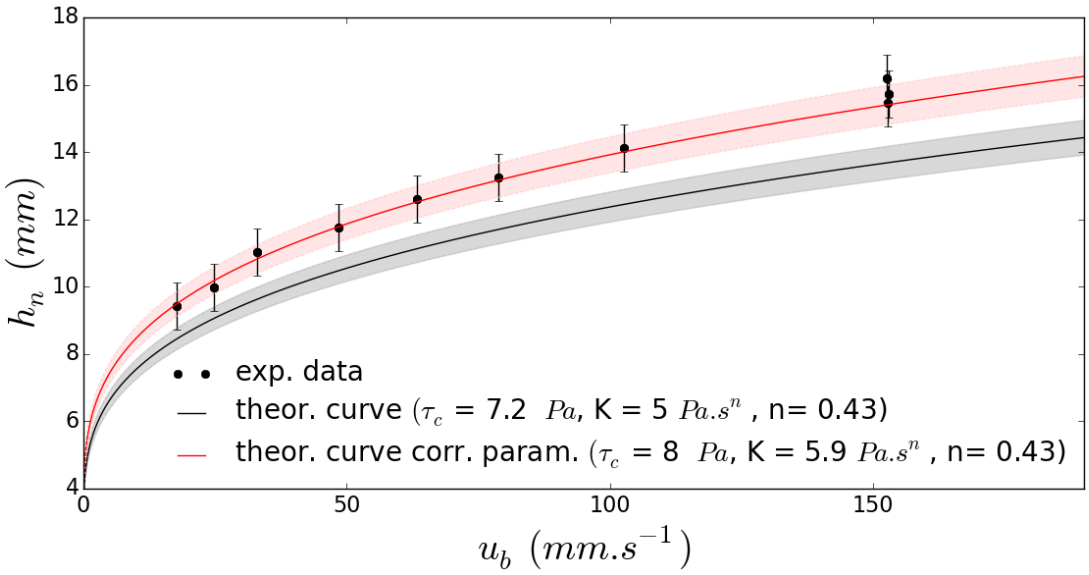

Figure 5.16 Hauteur de la zone uniforme en fonction de la vitesse de tapis imposée à la coulée. Mesures expérimentales et barres d'erreur correspondantes à la précision des capteurs de hauteur. Prédiction théorique basée sur les paramètres rhéologiques mesurés au rhéomètre (noir) et corrigés par Eq.5.12 (rouge), courbe enveloppe correspondante aux incertitudes de mesures sur τ_c et K. Expérience 150504, Carbopol.

Le caractère systématique du désaccord, associé à une amplitude qui excède ici aussi légèrement les barres d'erreur expérimentales, indique qu'il ne peut pas être attribué uniquement à des erreurs de mesure.

Cette erreur ne provient pas d'un dysfonctionnement du rhéomètre, qui est calibré régulièrement et testé avec des huiles de référence.

Les paramètres rhéologiques ont tendance à évoluer au cours du temps lors des expériences sur le canal. Mais l'influence de cette variation rhéologique ne suffit pas à expliquer la différence entre les données observées et théoriques. L'évolution des paramètres rhéologiques au cours de l'expérience, de l'ordre de quelques pour cent est déjà comprise dans l'incertitude de mesure. De plus, les points expérimentaux obtenus en début et fin d'expérience pour une même vitesse de tapis se superposent (par exemple Fig.5.16, 3 points de mesures ont été obtenus à quelques dizaines de minutes d'intervalle pour une même de vitesse imposée de 153 mm.s^{-1} et se superposent).

Si ces erreurs étaient dues à des effets transitoires dans le canal (si le fluide n'était pas en régime permanent au moment de l'acquisition des mesures), il y aurait une différence entre les écarts à faibles vitesses et hautes vitesses. Les points expérimentaux auraient tendance à s'éloigner de la courbe théorique pour les fortes vitesses. Cette tendance n'est pas observée, en tout cas dans la gamme de vitesse étudiée.

Enfin, cette différence systématique n'est pas observée pour le sirop de glucose (Fig5.15) ni pour une suspension argileuse de kaolin [Chambon et al., 2014]. Elle ne peut donc pas être attribuée à un dysfonctionnement systématique des capteurs de hauteur ou de vitesse.

5.5.2 Correction des paramètres rhéologiques

Une correction des paramètres de Herschel-Bulkley mesurés au rhéomètre a été proposée par Chambon et al. [2014] à la suite de l'étude de la zone uniforme de coulées de gel de Carbopol dans les même conditions expérimentales (type et processus de fabrication du Carbopol identique, concentration en Carbopol de 0.1%). Elle est la suivante :

$$\begin{cases} \tau_{c,corr} = 1.11\ \tau_c \\ K_{corr} = 1.19\ K \end{cases} \tag{5.12}$$

On note $\epsilon_{\tau_c} = 0.11$ et $\epsilon_{\tau_c} = 0.19$ en référence à une augmentation de 11% de τ_c et de 19% de K. En corrigeant les paramètres de Herschel-Bulkley avec la correction proposée par Chambon et al. [2014] dans le modèle théorique nous obtenons un très bon accord avec les mesures (Fig.5.16, courbe rouge).

Puisque les résultats sont cohérents avec un modèle de Herschel Bulkley (voir aussi les courbes d'écoulement en zone uniforme, §5.5.3), il ne semble pas que les erreurs puissent provenir d'un comportement rhéologique du Carbopol non pris en compte dans ce modèle. Il semblerait plutôt qu'il y ait une différence systématique entre les paramètres mesurés au rhéomètre, et les paramètres rhéologiques correspondants à l'échelle de l'écoulement du canal.

L'origine de ces différences pourrait s'expliquer par le fait que les tests rhéométriques mettent en jeu des écoulements d'épaisseur de l'ordre du millimètre, soit un ordre de grandeur inférieur à l'épaisseur de l'écoulement sur le canal. Alors, la rhéologie d'un tel échantillon ne serait peut être pas représentative de l'ensemble de l'échantillon mis en jeu sur le canal.

Une étude récente suggère que pour un Carbopol EDT2050 de taille de microstructure de 15 μm des effets de confinements existent mais ne sont plus visibles au-delà d'une taille d'entrefer de 250 μm [Geraud et al., 2013]. En revanche, Oppong et al. [2006] utilisent des gels de Carbopol EDT2050 dont la microstructure fait apparaître des chaînes de polymères de diamètre de 20 μm, ce qui suggérerait que les effets de confinement puissent être visibles pour une taille d'entrefer supérieure à 250 μm. De plus, la taille des microstructures du gel de Carbopol est dépendante du protocole de fabrication [Geraud et al., 2013]. La microstructure du Carbopol utilisé dans le cadre des expériences sur le canal à fond mobile n'a jamais été étudiée. Il est possible que les gels de Carbopol que nous utilisons possèdent des microstructures de tailles plus grandes que celles de l'étude de [Geraud et al., 2013]. Il serait possible alors, sous cette hypothèse, qu'il existe des effets d'échelle au-delà de 250 μm, suffisamment petits pour que l'on ne puisse pas les mesurer au rhéomètre avec les tailles d'entrefer permises et avec la précision des mesures des courbes d'écoulement (voir § 5.3.2.4, Fig.5.7).

La figure 5.17 présente les mesures de vitesse du tapis et de hauteur normale pour une expérience dont le gel de Carbopol a été préparé à la concentration de 0.08%, ainsi que la prédiction

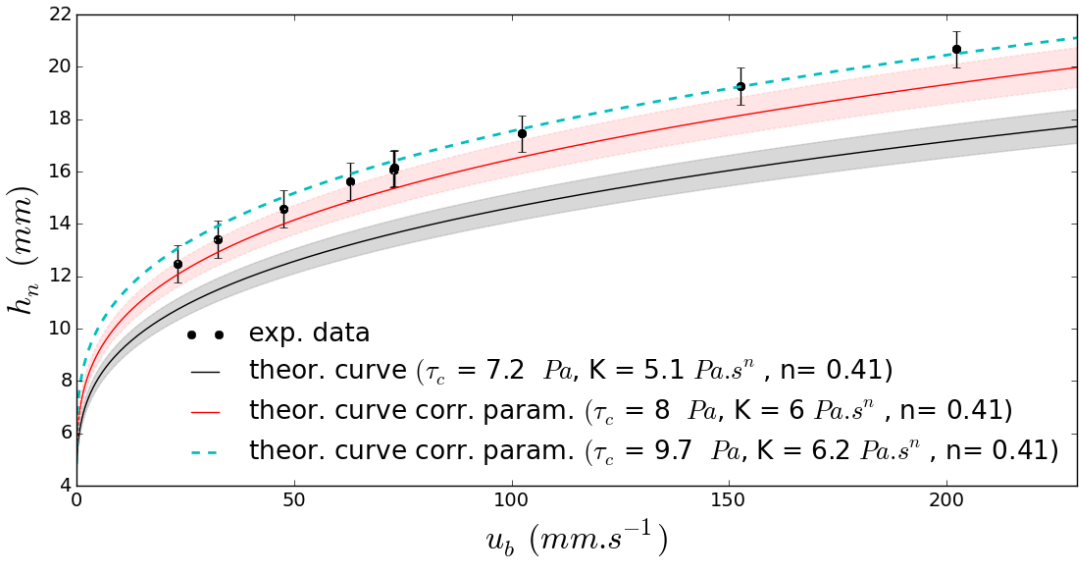

Figure 5.17 Relation *vitesse-hauteur* mesurée, barres d'erreur correspondantes à la précision des capteurs de hauteur, et prédiction théorique basée sur les paramètres rhéologiques mesurés au rhéomètre (noir), corrigés par Eq.5.12 (rouge) et par Eq.5.13 (bleu pointillé), courbe enveloppe correspondante aux incertitudes de mesures sur τ_c et K. Expérience 160127. Protocole de fabrication classique (voir §5.2.1), sauf la concentration massique en Carbopol de 0.08% au lieu de de 0.1%.

théorique calculée à partir des paramètres de Herschel Bulkley mesurés au rhéomètre (courbe noir) et corrigés selon l'équation (5.12) (courbe rouge).

De même, les résultats sont cohérents avec un modèle de Herschel Bulkley. En considérant les barres d'erreur associées aux mesures expérimentales, la correction proposée des paramètres de Hershel-Bulkley suffit à expliquer les mesures de hauteurs en zone uniforme.

Finalement, la connaissance de la relation *vitesse-hauteur* pour un matériau donné nous permet d'accéder à sa rhéologie à l'échelle de l'écoulement sur le canal. La relation vitesse-hauteur joue le rôle d'un rhéogramme à l'échelle macroscopique, et le canal celui d'un rhéomètre. Pour l'ensemble de nos expériences, l'ajustement (5.12) est suffisant pour prédire correctement l'évolution des hauteurs normales en fonction de la vitesse de la coulée. Cependant, l'absence de mesure de hauteur pour les très petites vitesses (typiquement inférieures à 20 mm.s^{-1}) dans cette configuration expérimentale ne permet pas de tendre vers des taux de déformation macroscopiques faibles. L'ajustement de la relation théorique Eq.5.10 sur les mesures expérimentales, bien que possible, sera fortement instable (une faible variation de hauteur mesurée pour une petite vitesse impliquera une forte variation de la contrainte seuil ainsi ajustée, typiquement $\pm$ 30%).

5.5.3 Les profils de vitesse en zone uniforme

Nous présentons ici les profils de vitesse longitudinale en zone uniforme, ainsi que les rhéogrammes apparents qui en sont déduits.

Les figures 5.18 et 5.19 présentent le profil de vitesse expérimental–théorique en zone uniforme ainsi que la courbe d'écoulement déduite du profil de vitesse pour les expériences 150504 et 160127

respectivement.

Conformément à l'allure d'un profil théorique de Herschel Bulkley, on observe une zone non cisaillée (plug) au-dessous de la surface libre, suivie en dessous d'une zone cisaillée et enfin, au fond, d'un point de vitesse et hauteur nulle (moyennant les barres d'erreur horizontales et verticales associées aux mesures de vitesse) (Fig 5.18b, 5.19b).

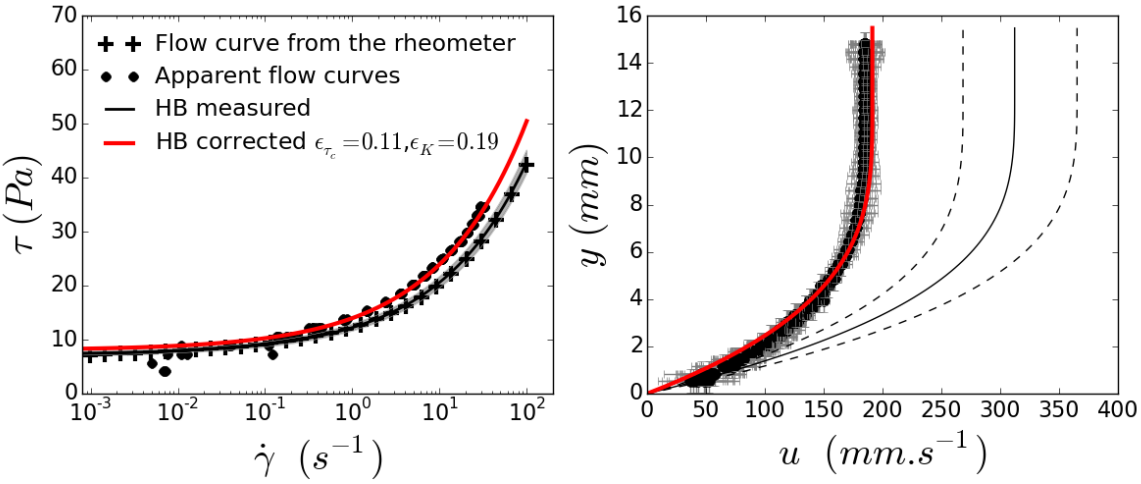

Figure 5.18 a) Rhéogramme apparent dans la zone uniforme, courbe d'écoulement mesurée au rhéomètre (noir avec sa courbe enveloppe représentant les incertitudes) et corrigée par Eq.5.12 (rouge). b) Profils de vitesse mesurés dans la zone uniforme et prédictions théoriques basées sur les paramètres rhéologiques mesurés au rhéomètre (noir) et corrigés par Eq.5.12 (rouge). Expérience 150504. Protocole de fabrication classique (voir § 5.2.1).

Pour accéder à la courbe d'écoulement apparente, le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ est calculé par une différenciation verticale des mesures du profil de vitesse (dérivée polynomiale d'ordre 2 glissante sur 5 points de mesure). La contrainte τ provient de la simplification des équations de la conservation de la quantité de mouvement en considérant le régime permanent uniforme ($\tau = \rho g sin\theta(h_n - y)$). Les courbes d'écoulement ainsi déduites (Fig 5.18a, 5.19a, points noirs), présentent des gammes de forts à faibles gradients de vitesse, qui correspondent sur le profil de vitesse à, respectivement, la zone cisaillée (au fond), et faiblement ou non cisaillée (au voisinage de la surface libre). Contrairement à la relation *vitesse-hauteur*, l'étude des profils de vitesse permet d'explorer une gamme de taux de déformation étendue.

Ces courbes d'écoulement sont parfois bruitées pour les faibles gradients de vitesse, correspondants à la zone du plug. A cet endroit, la pente du profil de vitesse théorique est nulle, mais expérimentalement, elle possède quelques variations fortement visibles sur les rhéogrammes apparents, dues au bruit de mesure des vitesses. Cependant, les courbes d'écoulement ont bien l'allure d'un rhéogramme de Herschel Bulkley.

Sur chacune des figures 5.18 et 5.19, les courbes théoriques ont été calculées à partir des paramètres rhéologiques mesurés au rhéomètre (courbes noires) et corrigés par la relation (5.12) (courbes rouges). De même que pour les courbes *vitesse-hauteur*, on observe encore une différence significative entre les profils mesurés et prédits à partir des paramètres rhéologiques mesurés au rhéomètre. Là encore, la correction proposée (5.12) suffit à prédire correctement le rhéogramme

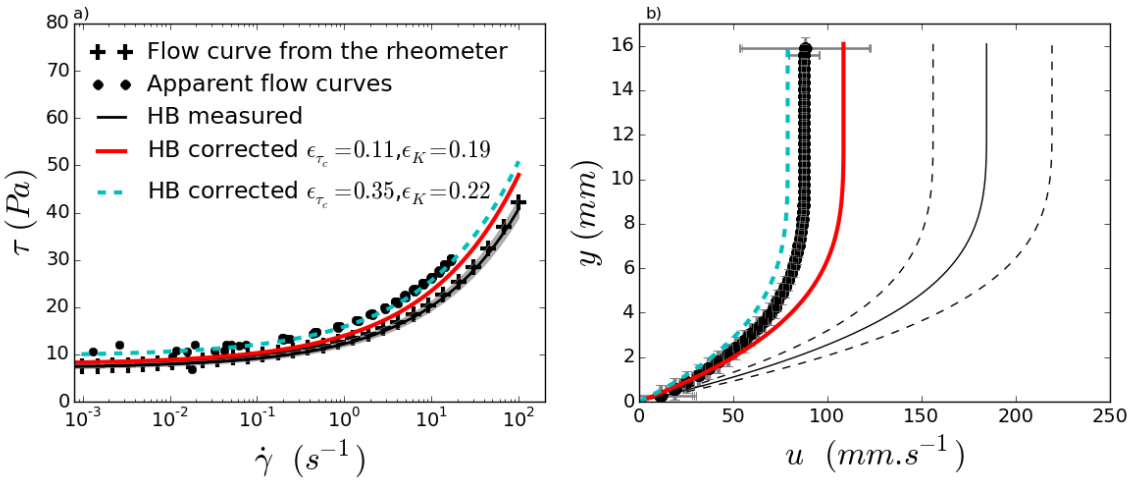

Figure 5.19 a) Rhéogramme apparent dans la zone uniforme, courbe d'écoulement mesurée au rhéomètre (noir avec sa courbe enveloppe représentant les incertitudes), corrigée par Eq.5.12 (rouge) et par Eq.5.13 (bleu pointillé). b) Profils de vitesse mesurés dans la zone uniforme et prédictions théoriques basées sur les paramètres rhéologiques mesurés au rhéomètre (noir), corrigés par Eq.5.12 (rouge) et par Eq.5.13 (bleu pointillé). Expérience 160127. Protocole de fabrication classique (voir § 5.2.1) , sauf concentration massique en Carbopol de 0.08% au lieu de 0.1%.

apparent ainsi que le profil de vitesse.

Cependant pour l'expérience 160127 (Fig.5.19), cette correction n'est pas optimale et pourrait être améliorée. En ajustant le modèle de Herschel-Bulkley sur le rhéogramme apparent (dans la gamme $\dot{\gamma} > 0.1$), nous pouvons proposer l'ajustement des paramètres rhéologiques suivants :

$$\begin{cases} \tau_{c,corr} = 1.35\ \tau_c \\ Kcorr = 1.22\ K \end{cases} \tag{5.13}$$

Les courbes théoriques résultantes corrigées par cet ajustement sont représentées figure 5.17 pour la relation *vitesse-hauteur* et figure 5.19 pour le profil en zone uniforme (courbes bleues pointillées). Effectivement, la prédiction théorique est améliorée que ce soit pour le profil de vitesse, dont l'ajustement est issu, ou pour la relation *vitesse-hauteur*.

La connaissance du profil de vitesse en zone uniforme permet donc d'accéder à la rhéologie du matériau indépendamment de la mesure au rhéomètre. Pour le gel de Carbopol, la connaissance de cette relation est même nécessaire afin de caractériser sa rhéologie, quelque que soit la cause des effets perturbateurs de la mesure au rhéomètre.

Dans le reste de cette étude nous continuerons d'utiliser la correction proposée par Chambon et al. [2014] (Eq. 5.12) pour le gel de Carbopol, qui suffit à prédire correctement la rhéologie à l'échelle de l'écoulement sur le canal de l'ensemble des expériences.

5.6 Conclusion du Chapitre

Nous avons établi un protocole permettant de mesurer de façon reproductible les paramètres rhéologiques du Carbopol et du sirop de glucose à l'aide d'un rhéomètre. Nous ne mesurerons pas de thixotropie ni de bifurcation de viscosité dans le gel de Carbopol. Il peut être considéré comme un fluide à seuil idéal, principalement viscoplastique, pouvant être modélisé par la loi de comportement de Herschel-Bulkley. L'évolution de la contrainte en fonction de la déformation, pour différents taux de déformation imposés, montre l'existence d'une déformation caractéristique, compatible avec l'existence d'un régime solide élastique aux petites déformations. Pour le sirop de glucose, nous observons un effet de séchage qui nous empêche de mesurer sa viscosité. En badigeonnant d'huile minérale les bords de la surface libre nous pouvons assurer des tests rhéométriques sans artefact de séchage et reproductibles. La loi de comportement du sirop de glucose est bien newtonienne, la viscosité est mesurée avec une incertitude relative de 8.5%.

Nous utilisons le canal à fond mobile comme un outil permettant, comme le rhéomètre, d'accéder à la rhéologie des matériaux. Nous remarquons, comme Chambon et al. [2014], que la rhéologie du gel de Carbopol à l'échelle de l'écoulement sur le canal est différente de la rhéologie mesurée au rhéomètre. Il existe peut-être des effets d'échelle dans la configuration de mesure confinée du rhéomètre, mais cette hypothèse reste à confirmer. Cependant, la connaissance des profils de vitesse et de la hauteur dans la zone uniforme de la coulée permet d'accéder aux mesures des paramètres rhéologiques, indépendamment de la mesure au rhéomètre. On peut alors proposer une correction des paramètres mesurés au rhéomètre. Il s'avère que la correction déjà proposée par Chambon et al. [2014], soit une augmentation de τ_c et K de respectivement 11% et 19% est cohérente avec l'ensemble de nos mesures. Dans le reste de cette étude, nous calculerons les modèles théoriques à partir des paramètres rhéologiques corrigés.

Chapitre 6

Dynamique interne au front d'écoulement à surface libre de fluides newtoniens : Comparaison au modèle de lubrification

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des expériences conduites sur le canal à fond mobile, avec un matériau newtonien, le sirop de glucose. Nous avons souhaité mener des expériences avec un matériau possédant la loi de comportement la plus simple, un fluide newtonien, pour valider le modèle théorique et la démarche expérimentale. Nous comparerons les mesures à un modèle de couche mince : le modèle de lubrification qui est à la base du modèle Saint-Venant classique. C'est un modèle à l'ordre 0, en référence à l'ordre des développements asymptotiques en ϵ des équations primitives. Le tableau 4.2 présente la nomenclature ainsi que les caractéristiques des différentes expériences présentées dans ce chapitre.

6.1 Description qualitative des champs de vitesse

La figure 6.1 présente les champs de vitesse longitudinale et verticale de l'expérience 150506 mettant en jeu du sirop de glucose de viscosité 5.6 Pa.s pour une pente de 15.3°. La figure 6.2 présente les champs de vitesses longitudinale et verticale de l'expérience 160831 mettant en jeu du sirop de glucose de viscosité 5.4 Pa.s pour une pente de 11.9°. La position de la surface libre est aussi reportée, l'incertitude sur son positionnement est représentée par l'épaisseur du trait. La ligne de front ($x_f = 0$) est positionnée au niveau du point de rebroussement (voir § 4.2.7). Les vitesses ont été mesurées par la méthode STV avec des fenêtres de calcul de 32×16 px^2. Afin de représenter le champ de vitesse, elles ont été interpolées par filtre gaussien de taille $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 0.5$.

Le champ de vitesse longitudinale ainsi obtenu semble cisaillé sur toute l'épaisseur de l'écoulement (Fig.6.1a et 6.2a). On observe bien une structuration horizontale, allant des vitesses de

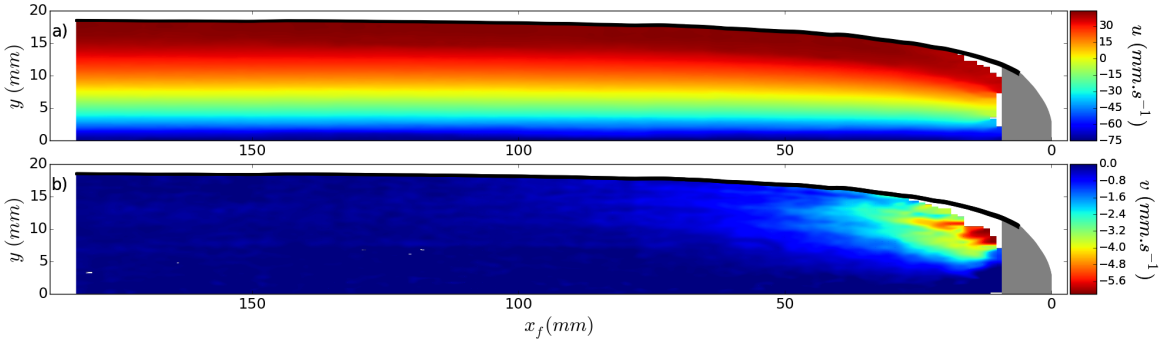

Figure 6.1 Champs de vitesse de l'expérience 150506 calculé par interpolation (filtre gaussien) des mesures ponctuelles de vitesses obtenues par la méthode STV avec des fenêtres de calcul de 32×16 px^2 (soit 1.2×0.6 mm^2) et un recoupement vertical de 50%. a) Champs des vitesses longitudinales, b) Champs des vitesses verticales.

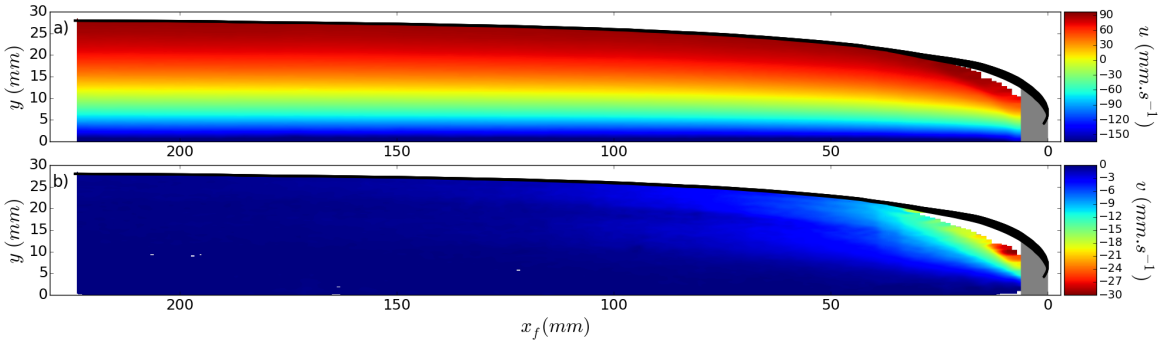

Figure 6.2 Champs de vitesse de l'expérience 160831 calculé par interpolation (filtre gaussien) des mesures ponctuelles de vitesses obtenues par la méthode STV avec des fenêtres de calcul de 32*16 px^2 (soit 1.2*0.6mm^2) et un recoupement vertical de 50%. a) Champs des vitesses longitudinales, b) Champs des vitesses verticales .

surface dirigées vers l'aval (rouge) aux vitesses du fond dirigées vers l'amont (bleu). La vitesse de surface semble constante de la zone uniforme au front.

Pour les vitesses verticales (Fig.6.1b et 6.2b), on constate qu'elles sont nulles en zone uniforme et augmentent à mesure du rapprochement avec la ligne de front. Elles sont maximales au front, sous la surface libre, et nulles au fond. Au front, pour $x_f < 10mm$ typiquement, elles sont du même ordre de grandeur que la vitesse longitudinale.

Sur les cartes de champ de vitesse (Fig. 6.1 et 6.2), les zones grisées proches du front, représentent l'endroit où la mesure des vitesses n'a pas abouti, la zone étant opacifiée par l'inclinaison transversale du front (visible sur la figure 4.3).

Pour l'expérience 150506, la ligne de contact est visible mais une partie de la surface libre ne l'est pas, et n'est donc pas tracée dans la figure 6.1. Cette partie manquante est reconstituée (zone grisée) uniquement pour guider l'œil jusqu'à la ligne de contact.

6.2 Comparaison au modèle de lubrification

Nous présentons ici la comparaison des résultats expérimentaux au modèle de lubrification développé au § 3.4. Afin de comparer les profils de vitesse longitudinale u aux profils théoriques, nous translatons les vitesses expérimentales par la valeur imposée au fond, u_b. De cette façon, les vitesses expérimentales sont exprimées dans le référentiel mobile. Le terme u désigne alors par la suite la vitesse mesurée à laquelle s'ajoute u_b. Par exemple, si la vitesse mesurée vaut $-u_b$, comme au fond, elle est alors nulle dans le référentiel mobile.

Dans le référentiel de l'observateur, la vitesse moyenne est nulle, donc dans le référentiel mobile elle vaut u_b. Ainsi, la coulée expérimentale est une coulée de fluide newtonien se déplaçant à la vitesse moyenne constante u_b.

6.2.0.1 Cadre théorique

Les équations du modèle théorique sont développées dans le chapitre 3 pour un fluide de Hershel-Bulkley. Nous donnons ici les expressions directes et adimensionnées, adaptées à un fluide newtonien.

À partir des équations de Navier-Stokes, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \rho g sin\theta - \rho g cos\theta \partial_x h + \partial_y \sigma_{xy} \\ p &= \rho g cos\theta (h - y) \end{aligned} \tag{6.1}$$

avec $\sigma_{xy} = \eta \partial_y u$, η la viscosité du fluide et θ l'angle de la pente. On obtient alors l'expression de la vitesse longitudinale,

$$u(y) = \frac{\rho g sin\theta}{\eta}(1 - cot\theta \partial_x h)(2hy - y^2) \tag{6.2}$$

et de la vitesse moyenne,

$$\bar{u} = \frac{1}{3}\frac{\rho g sin\theta}{\eta} h^2 \,(1 - cot\theta \partial_x h) \tag{6.3}$$

On obtient l'expression de la vitesse verticale v par la conservation de la masse, $v = -\int_0^y \partial_x u \, dy$:

$$v(y) = \frac{1}{2}\frac{\rho g sin\theta}{\eta} y^2 \left(cot\theta \frac{\partial h^2}{\partial x^2}(h - \frac{y}{3}) - \frac{\partial h}{\partial x}(1 - cot\theta \frac{\partial h}{\partial x}) \right) \tag{6.4}$$

Notons que l'on peut aussi exprimer la vitesse longitudinale en fonction de la vitesse moyenne :

$$u(y) = \frac{3}{2}\bar{u}(2\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2}) \tag{6.5}$$

En écriture adimensionnée (et sans les notations $\hat{o}$),(*cf.* §3.6.2), on obtient, :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \Lambda(h - y) \\ p &= h - y \end{aligned} \tag{6.6}$$

où nous avons introduit

$$\Lambda = \lambda - \epsilon \frac{Re}{Fr^2}\partial_x h, \;\; et \;\; \lambda = \frac{Re}{Fr^2} tan\theta \tag{6.7}$$

On obtient alors pour la vitesse longitudinale,

$$u(y) = \frac{\Lambda}{2}(2hy - y^2) \tag{6.8}$$

et pour la vitesse moyenne,

$$\bar{u} = \frac{\Lambda}{3}h^2 \tag{6.9}$$

La vitesse verticale s'écrit :

$$v = -\frac{1}{2}\partial_x h\Lambda y^2 - \frac{1}{2}\partial_x \Lambda(hy^2 - \frac{y^3}{3}) \tag{6.10}$$

Dans le cas particulier de notre configuration expérimentale, nous cherchons des solutions ondes progressives (*cf.* §3.8). Les variables sont adimensionnées par des échelles basées sur le régime permanent uniforme, de la façon suivante (notation différente du chapitre 3, *cf.*§3.8.1) : $h^* = h/h_N, y^* = y/h_N, x_f^* = x_f/h_N, u^* = u/\bar{u}, v^* = v/\bar{u}$, $p^* = p/(\rho g h_N cos\theta)$. On note qu'on obtient donc $\bar{u} = 1$ et $h_N = 1$ en zone uniforme. On rappelle que l'on note $Re = \rho\bar{u}h_N/\eta$ et $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh_N\cos\theta}$. Avec cette échelle, on a $\lambda = 3$.

L'équation (6.9) qui s'écrit :

$$1 = (\lambda - \lambda\ cot\theta\frac{\partial h^*}{\partial x_f^*})\frac{1}{3}h^{*2} \tag{6.11}$$

devient alors l'équation qui permet de résoudre l'évolution de la hauteur suivante :

$$cot\theta\frac{\partial h^*}{\partial x_f^*} = \frac{1}{h^{*2}} - 1 \tag{6.12}$$

On remarque qu'en écriture adimensionnée, les prédictions théoriques des profils de vitesse u, et v et de la forme du front ne dépendent plus ni des paramètres rhéologiques, ni de la vitesse basale u_b.

6.2.1 Comparaison directe

La figure 6.3a présente l'évolution de la surface libre expérimentale et théorique de l'expérience 150506. La hauteur prédite en zone uniforme (h_N) est uniquement dépendante des paramètres rhéologiques mesurés et de u_b. La hauteur en zone uniforme est correctement prédite par le modèle et globalement cet accord reste valable au front. Il semble que la surface libre expérimentale soit légèrement en dessous de la prédiction théorique au front, pour $x_f < 40mm$, mais cet écart reste compris dans le domaine des incertitudes.

La figure 6.3a montre aussi les profils de vitesse longitudinale mesurés à différentes positions, de 180mm à 14mm de la ligne de front (noirs) et les profils de vitesse théoriques correspondants calculés avec la hauteur et la pente de surface libre théorique (rouge). On peut observer un bon accord global entre les mesures et les prédictions théoriques. Cependant, on remarque sur les profils de vitesse que la vitesse moyenne expérimentale est toujours, dès la zone quasi-uniforme ($x_f > 160mm$), légèrement supérieure à la vitesse moyenne théorique (et donc supérieure à

u_b). Ceci apparaît clairement en représentant la vitesse moyenne expérimentale en fonction de la distance au front (Fig.6.3b), on montre effectivement qu'elle est toujours légèrement supérieure de 5% à la vitesse imposée au fond u_b. Un comportement similaire est observé pour l'expérience 160831, avec un écart de la vitesse moyenne expérimentale de 1.8% constant lui aussi dans la coulée. Cet écart, même assez faible, a tendance à décaler les profils expérimentaux "à droite" des profils théoriques sur la figure 6.3a et complique la comparaison.

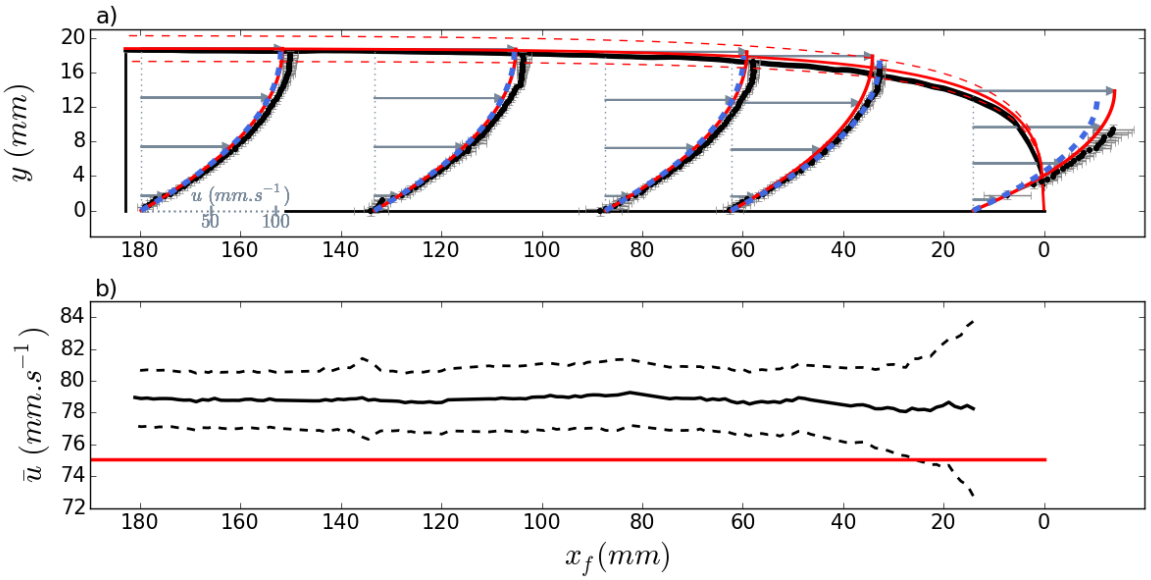

Figure 6.3 Forme de la surface libre et profil de vitesse longitudinale u à différentes positions de la coulée pour l'expérience 150506. a) Forme de la surface libre expérimentale (ligne noire, barre d'erreur comprise dans l'épaisseur du trait), forme de la surface libre théorique (rouge, courbe enveloppe en pointillés, basée sur une incertitude relative de 8.5 % sur la viscosité et la masse volumique). Profils de vitesse expérimentaux (noir et barres d'erreur en gris), théoriques avec h et $\partial_x h$ théorique aussi (rouge), et théoriques calculés à partir h et $\partial_x h$ mesurés. La viscosité et la masse volumique injectées dans le modèle sont mesurées avec un rhéomètre et un pycnomètre (*cf.* chapitre 5). b) Vitesse longitudinale moyenne $\bar{u}$ mesurée (intégration des profils de vitesse expérimentaux par méthode des trapèzes) et courbe enveloppe (pointillée) des incertitudes comprenant incertitude sur u_b, sur la position de la surface libre et sur les vitesses mesurées. La vitesse imposée au fond, u_b est reportée en rouge.

Les profils de vitesse théoriques calculés à partir de la hauteur h et de la pente de la surface libre $\partial_x h$ mesurés sur la surface libre expérimentale sont représentés sur la figure 6.3a (pointillés bleus). Loin du front, là où la pente de la surface libre est quasi-nulle, ils se superposent aux profils purement théoriques. Globalement, les prédictions basées sur la mesure de la hauteur h et de la pente de la surface libre $\partial_x h$ ne sont pas éloignées des prédictions purement théoriques, puisque la forme de front expérimentale est proche de sa prédiction théorique. En approchant le front, on remarque des fluctuations sur ces profils théoriques, provenant surtout de la difficulté à mesurer $\partial_x h$.

Dans le but de s'affranchir, à la fois de l'incertitude liée à la mesure des paramètres rhéologiques, de la vitesse moyenne, et de la mesure de la pente de la surface libre expérimentale, la comparaison avec le modèle de lubrification sera effectuée avec des variables adimensionnées, sur la base de la hauteur en zone uniforme mesurée h_N et de la vitesse moyenne mesurée sur les profils de vitesse $\bar{u}$.

6.2.2 Comparaison en grandeurs adimensionnées

Dans la suite, les mesures expérimentales seront comparées aux prédictions théoriques du profil de vitesse (Eq. 6.8 et 6.10), et de la forme du front (Eq. 6.12).

Les figures 6.4 et 6.5 présentent, pour les expériences 150506 et 160831, la comparaison des résultats expérimentaux et théoriques, dont les variables sont adimensionnées par la hauteur de la zone uniforme h_N et la vitesse moyenne $\bar{u}$ mesurées. Les mesures sont présentées de la zone uniforme, où la hauteur adimensionnée vaut 1, jusqu'au front.

6.2.2.1 Vitesses longitudinales et verticales

Les figures 6.4d-i et 6.5d-i présentent les profils expérimentaux des vitesses longitudinales (axe du bas) et verticales (axe du haut), à différentes distances du front, pour l'expérience 150506 et 160831 respectivement. Pour les deux expériences présentées, le profil expérimental présente une forme parabolique de la zone uniforme au front, en bon accord avec les prédictions théoriques du modèle de lubrification.

Pour l'expérience 150506, l'accord avec les profils théoriques est très bon, que ce soit sur les vitesses verticales ou longitudinales, de la zone uniforme, jusqu'au front. Proche du front, pour $x_f^* < 1^*$ typiquement, il est difficile de mesurer les vitesses juste en dessous la surface libre (matérialisée par une ligne grise), et le dernier point de mesure s'arrête généralement quelques millimètres en dessous de la surface libre. Par conséquent, la vitesse de surface (représentée Fig.6.4c), choisie comme étant le premier point de mesure du profil de vitesse u sous la surface libre, n'est pas tout à fait représentative de la vraie vitesse de surface expérimentale pour $x_f^* < 1$. Malgré cela, la vitesse de surface expérimentale, moyennant les barres d'erreur, est en bon accord avec la prédiction théorique du modèle de lubrification. On remarque que dans la solution de lubrification, la vitesse de surface (Eq. 6.8) est constante le long de la coulée, et vaut $3/2$. Pour l'expérience 160831, l'accord avec les profils de vitesse est similaire, (Fig.6.5d-i).

Les figures 6.4b et 6.5b représentent la pente de la surface libre mesurée expérimentalement, en dérivant le contour expérimental par un polynôme d'ordre 2 glissant (filtre de Savitzky-Golay). Pour des pentes de surface libre allant jusqu'à 0.2 (Fig.6.4b) pour l'expérience 150506 et 0.5 pour l'expérience 160831 (Fig.6.5b), les profils de vitesse verticale et longitudinale sont en bon accord avec les prédictions théoriques Cette valeur est relativement élevée, puisque le modèle de lubrification est un modèle basé sur l'hypothèse de couche mince ($\epsilon \ll 1$).

6.2.2.2 Forme de front

Les figures 6.4a et 6.5a représentent la comparaison entre la forme de front expérimentale et théorique. Pour les deux expériences, l'accord en considérant les barres d'erreur, est très bon. Il semble que la hauteur théorique soit légèrement surestimée autour de $x_f^* = 1$, mais ce désaccord est rattrapé dans l'extrême front. La figure 6.6 présente la comparaison entre la forme de front expérimentale et théorique pour l'ensemble des expériences mettant en jeu du sirop de glucose.

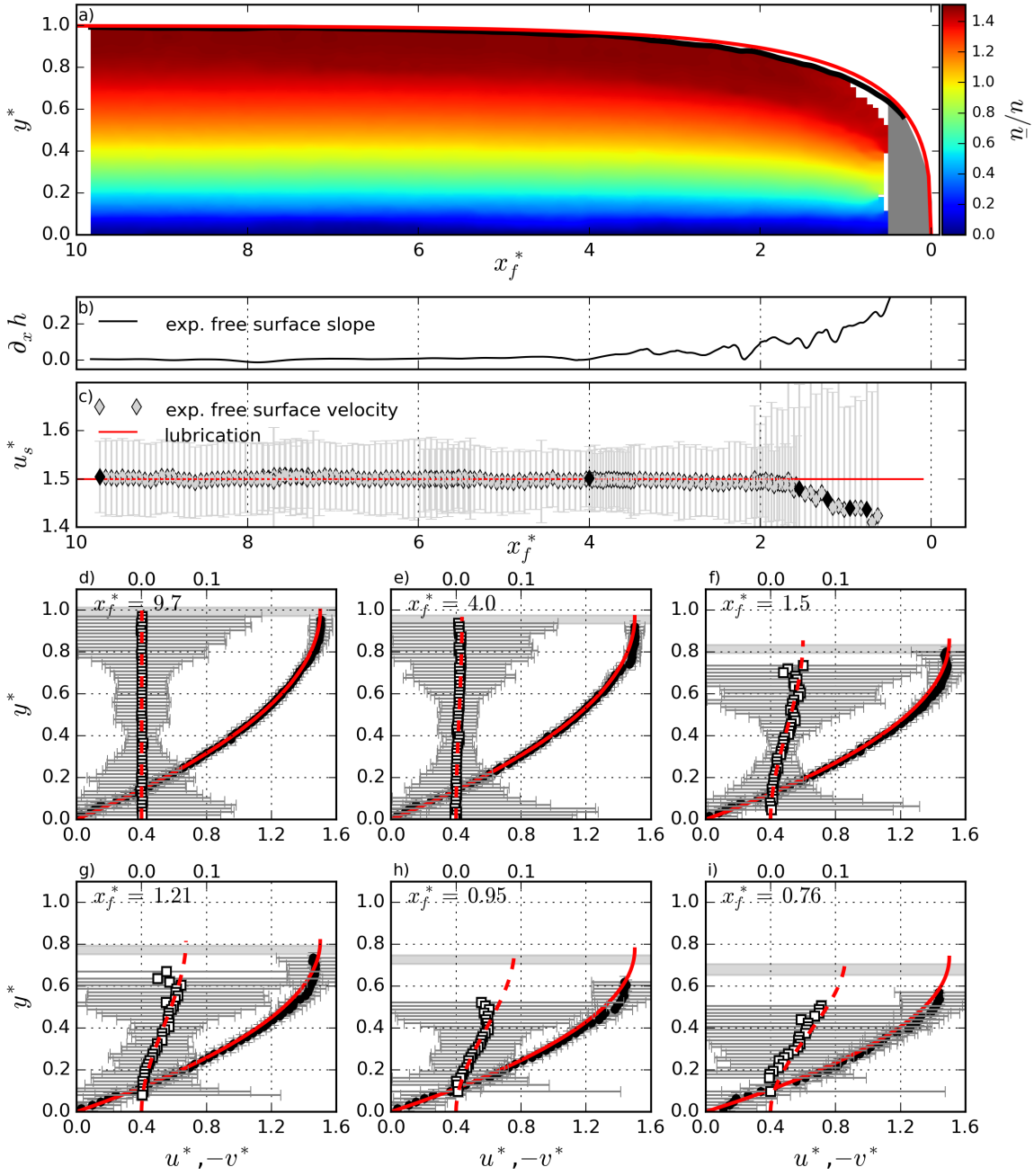

Figure 6.4 Comparaison des résultats expérimentaux aux prédictions théoriques du modèle de lubrification, de l'expérience 150506. a) Contour expérimental (noir) et théorique (rouge). La carte en fond représente le champ de vitesse u dimensionnée par la vitesse moyenne $\bar{u}$. b) Évolution de la pente expérimentale $\partial h/\partial x$ en fonction de la distance à la ligne de front $x_f^* = x_f/h_n$. c) Évolution de la vitesse de surface expérimentale adimensionnée par la vitesse moyenne et de la vitesse de surface théorique en fonction de x_f^*. d) a i) Profils expérimentaux de vitesse longitudinale (ronds noirs, axe du bas), et verticale (carré, axe du haut) à différentes distances du front, et profil théoriques (trait continu et pointillé respectivement). Les 6 positions sont reportées sur la figure c) par des symboles grisés. A chaque position x_f^*, la bande grise horizontale représente la position de la surface libre expérimentale et l'incertitude associée.

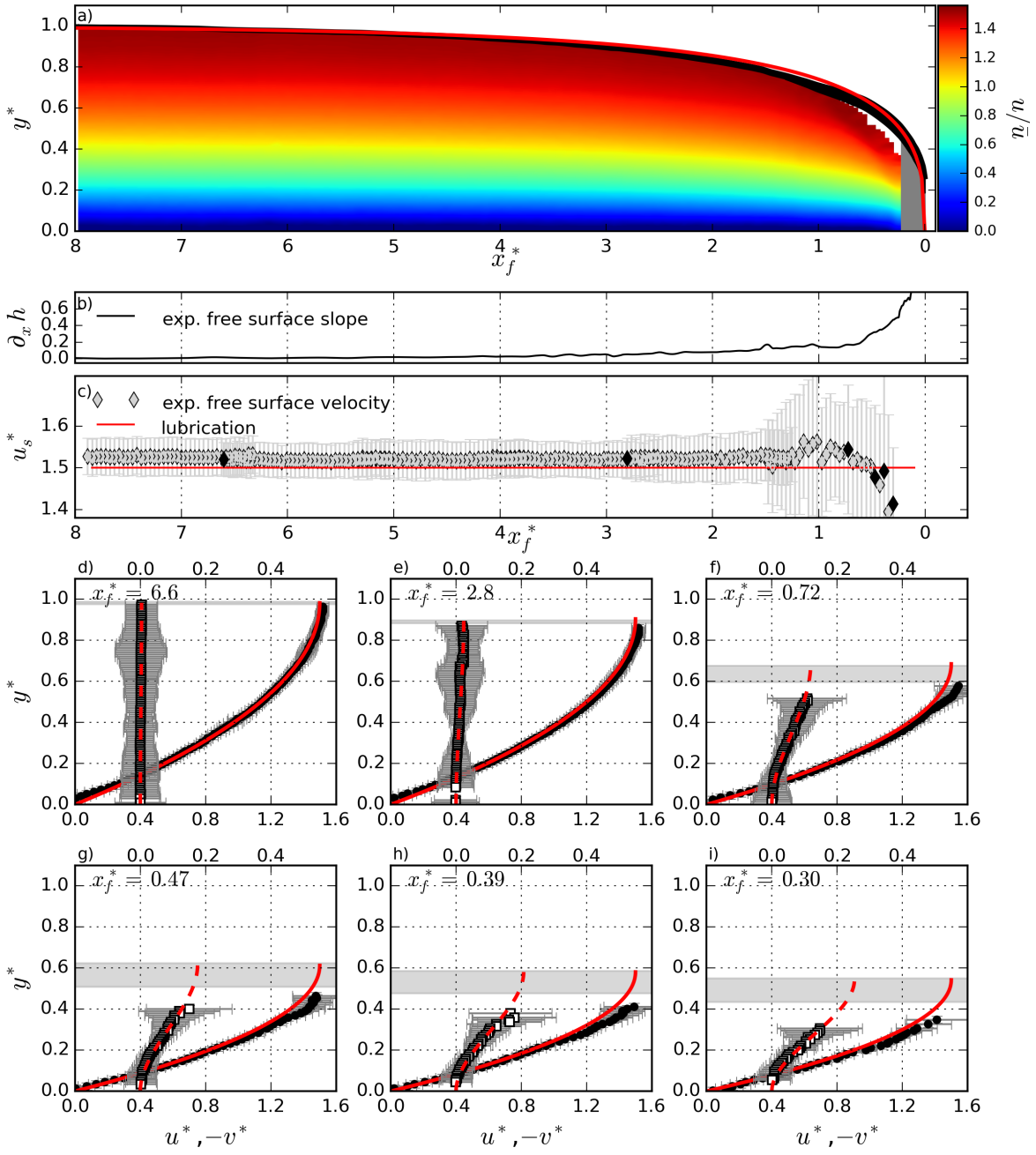

Figure 6.5 Expérience 160831. Même légende que Fig. 6.4

Encore une fois, l'accord entre la forme de front expérimentale et théorique est bon. Pour $1 < x_f^* < 2$, il semble là encore que les prédictions théoriques soient légèrement supérieures au mesures expérimentales, mais ce désaccord est du même ordre de grandeur que l'incertitude des mesures. La diminution de l'angle de la pente du canal inclinée provoque un aplanissement de la forme du front théorique, bien suivi par la mesure expérimentale.

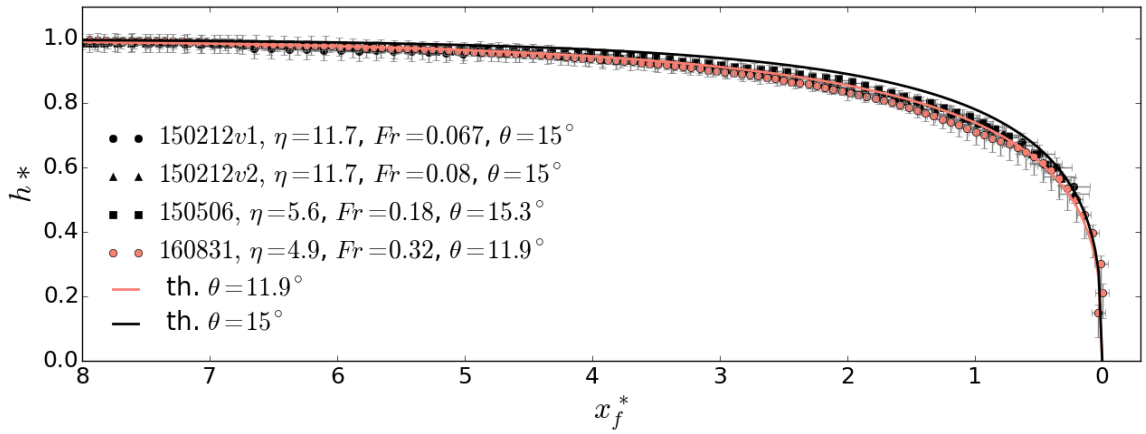

Figure 6.6 Formes de fronts expérimentales et théoriques, pour 4 expériences différentes. Les marqueurs représentent les mesures expérimentales et les lignes continues les prédictions théoriques, pour des pentes de 15° (noir) et 11.9° (orange). (h^* est noté H dans le chapitre 3).

6.3 Courbes d'écoulement

Nous présentons ici les courbes d'écoulement apparentes, dont le taux de déformation est issu de la différenciation verticale ($\dot{\gamma} = |\partial_y u|$) des profils de vitesse mesurées sur toute la longueur de l'écoulement (Fig.6.7). Nous avons vérifié que le gradient $\partial_y u$ est une bonne approximation du taux de déformation total lorsque x_f n'est pas trop petit (dans le cas viscoplastique ce sera montré au § 7.1). La contrainte de cisaillement τ_{xy} est calculée à chaque position de l'écoulement par son expression issue de l'approximation de lubrification (Eq.3.14), rappelée ici :

$$\sigma_{xy} = \rho g \sin\theta (1 - \cot\theta \partial_x h)(h - y) \tag{6.13}$$

Les valeurs de la hauteur de l'écoulement et de la pente (h, $\partial_x h$) sont mesurées expérimentalement, dans le but d'obtenir des courbes d'écoulement expérimentales, représentatives de la rhéologie locale.

On remarque, pour l'expérience présentée (Fig.6.7), que les courbes d'écoulement apparentes obtenues à partir des différents profils de vitesse se superposent de la zone uniforme au front. Ces courbes d'écoulement apparentes sont bien représentées par une loi newtonienne, dont la viscosité est en bon accord avec celle mesurée par un rhéomètre indépendant. Ceci confirme que le sirop de glucose, est alors bien représenté par un modèle newtonien, de la zone uniforme, au front.

En approchant le front, pour $x_f < 30mm$ environ, les courbes d'écoulement sont davantage dispersées, probablement parce qu'à cet endroit-là le bruit de mesure sur la vitesse u augmente

(Fig.6.4h-i). Pour les taux de déformation les plus importants, qui correspondent à la partie fortement cisaillée du profil de vitesse ($\dot{\gamma} > 12s^{-1}$), les courbes d'écoulement apparentes s'éloignent légèrement de la courbe d'écoulement mesurée au rhéomètre. Là encore, cet écart peut s'expliquer par le bruit de mesure sur la vitesse proche du fond de l'écoulement, visible sur les champ de vitesse (Fig.6.4i par exemple).

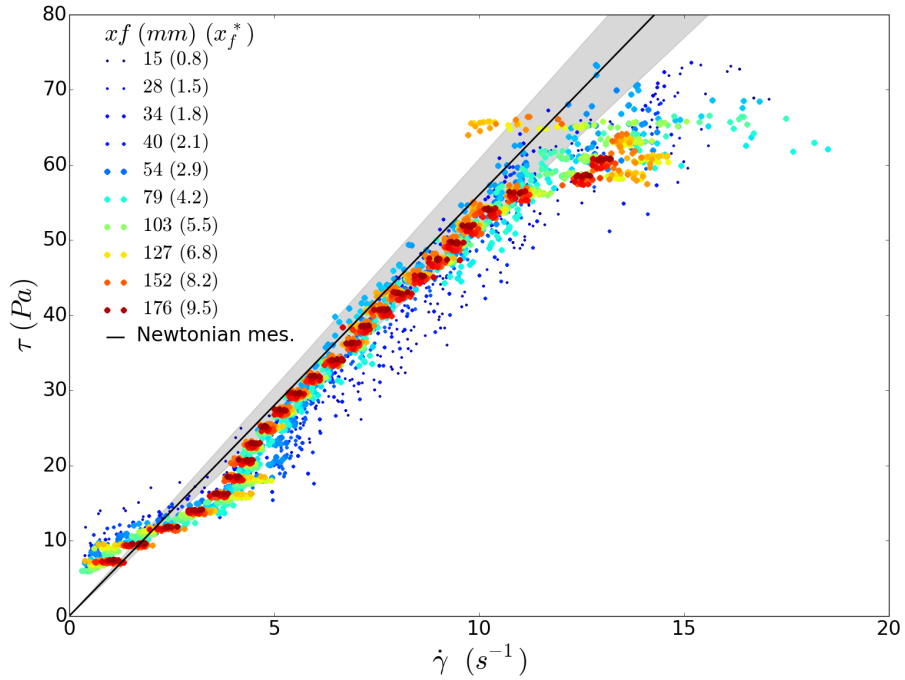

Figure 6.7 Courbes d'écoulement apparentes calculées à partir des profils de vitesse (la couleur et la taille des points réfèrent à la position correspondante dans la coulée). Le taux de déformation est calculé par dérivation verticale du champ de vitesse longitudinale ($\dot{\gamma} = \partial_y u$). La contrainte de cisaillement est calculée par l'équation 6.13. Courbe d'écoulement mesurée au rhéomètre et son enveloppe d'incertitude (noir). Expérience 150506.

6.4 Présence d'effets 3D dans le canal ?

Nous avons vu précédemment que la vitesse moyenne obtenue par intégration des profils de vitesse mesurés était toujours légèrement supérieure à la vitesse de tapis imposée. Ce décalage varie selon les expériences, il est de l'ordre de quelques pour cent de la vitesse imposée (il est de 4 mm.s^{-1} pour l'expérience 150506 par exemple, voir Fig.6.3b).

Nous pouvons émettre l'hypothèse que cette différence provient de l'existence d'une vitesse transversale dans le canal. La vitesse transversale viendrait, elle, d'une légère asymétrie du front dans la direction transverse. En effet, un décalage même minime de l'inclinaison transverse du canal autour de 0° provoque une légère asymétrie du front (par rapport à la direction longitudinale, voir Fig.6.8). Des prises de vues en caméra rapide, par le haut, ont permis de montrer que cette asymétrie, même légère ($\approx 1°$), suffit à générer des vitesses transversales de l'ordre de

quelques pour cent de la vitesse imposée u_b, soit quelques millimètres par seconde.

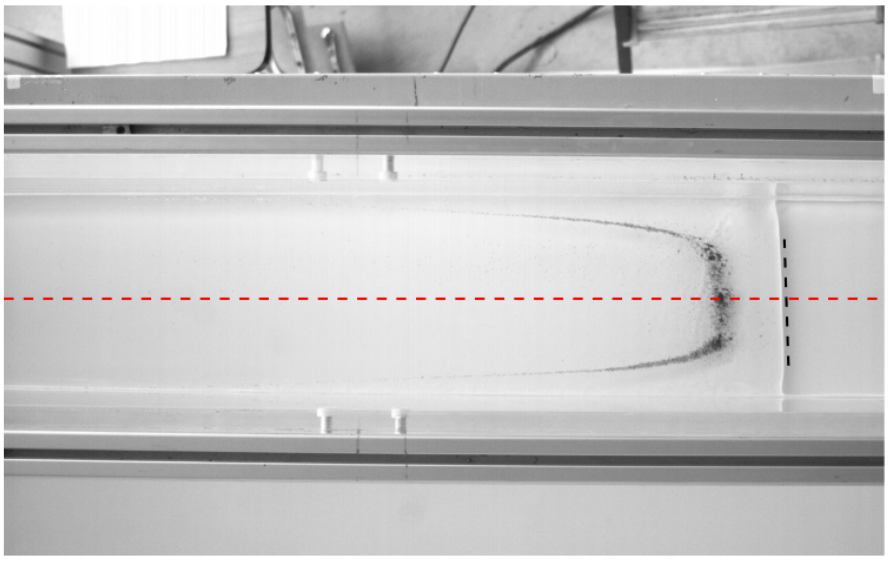

Figure 6.8 Écoulement de gel de Carbopol généré par le canal à fond mobile (largeur 20cm), vue de dessus. Traceurs grossiers de surface. Direction longitudinale (ligne horizontale en pointillés rouges). On peut observer que le front, en son centre, peut être légèrement asymétrique par rapport à la direction longitudinale (pointillés noirs).

Ces valeurs de vitesses transversales sont du même ordre que le décalage observé entre la vitesse moyenne mesurée et la vitesse u_b dans les expériences 150506 et 160831. La valeur variable de ce décalage selon les expériences s'expliquerait alors par l'asymétrie plus ou moins forte du front dans la direction transverse.

Des mesures du champ de vitesse à seulement 4 cm du bord de la rive (contrairement aux 10 cm habituels pour être au milieu du canal) ont été effectuées dans des écoulements de sirop de glucose, pour plusieurs vitesses de tapis imposées. La figure 6.9 présente les vitesse moyennes obtenues par intégration des profils de vitesse le long de la coulée. On remarque que les vitesses moyennes sont davantage écartées de la vitesse du tapis u_b (34% et 35%) que lorsqu'elles sont classiquement mesurées au centre de l'écoulement (1% et 5%). Ces mesures viennent corroborer l'hypothèse de l'influence des vitesses transversales, qui seraient alors d'autant plus importantes à mesure que l'on s'approche du bord, là où la circulation transversale augmente.

La vitesse moyenne réellement imposée par le dispositif serait alors composée de la vitesse du tapis mobile et d'une contribution de la vitesse transversale ($\bar{u} = u_b + u_t$). Ces vitesses transversales sont contrôlables et corrigeables, puisque nous pouvons les mesurer en intégrant les profils de vitesse longitudinale (Fig. 6.3). Exprimer les résultats en grandeurs adimensionnées est une façon de faire cette correction.

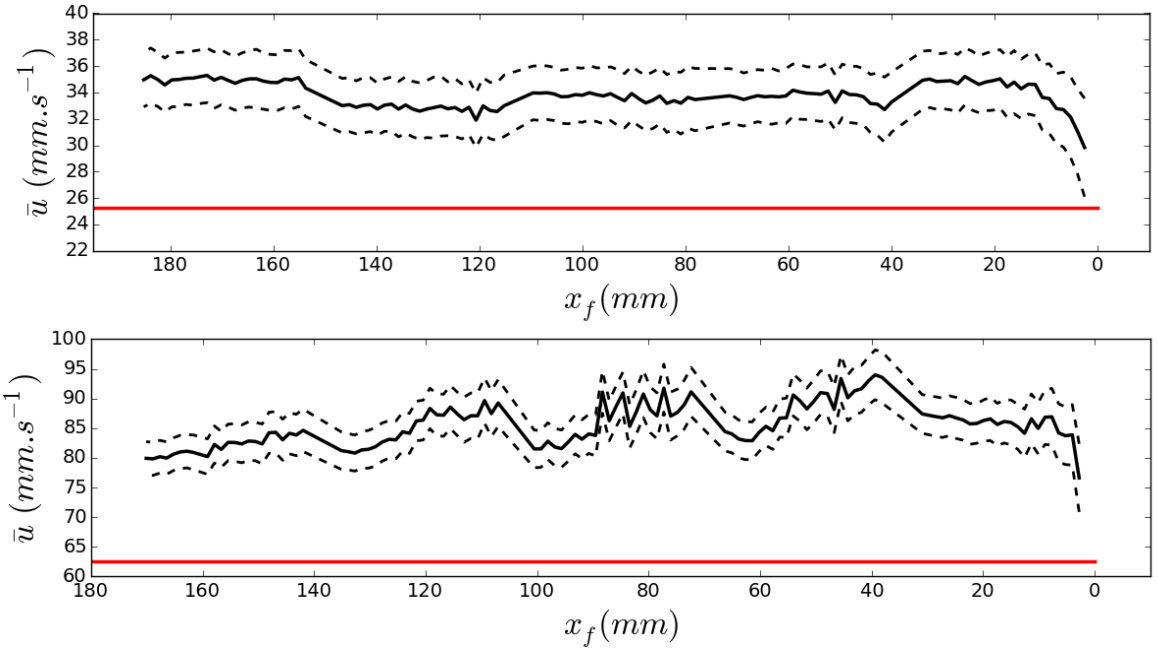

Figure 6.9 Vitesses moyennes calculées par intégration des profils de vitesse longitudinale mesurés dans deux coulées de sirop de glucose, en fonction de la distance au front (expérience $150304v1$, $u_b = 25mm.s^{-1}$ et $150304v4$, $u_b = 63mm.s^{-1}$). Les incertitudes sont représentées par les courbes pointillées. Les mesures n'ont pas été effectuées au centre de l'écoulement, mais à 4 cm du bord. La vitesse imposée par le tapis est reportée en rouge.

6.5 Conclusion du chapitre

L'étude d'un fluide newtonien nous permet de valider les performances du dispositif expérimental à produire des mesures à haute résolution à l'intérieur d'un écoulement à surface libre. Le canal incliné à fond mobile permet ainsi la mesure du champ des vitesses longitudinales et verticales et des courbes d'écoulement locales jusqu'au front des coulées à surface libre générées, mais aussi la forme du front et la pente de la surface libre.

Le modèle de lubrification prédit correctement toutes les caractéristiques mesurées, de la zone uniforme au front, il est donc validé dans toute la longueur de la coulée pour un fluide newtonien. Même si l'hypothèse de couche mince sur laquelle il repose est discutable dans le front, là où la pente de la surface libre devient importante (0.2-0.5 typiquement dans les expériences présentées), les prédictions du modèle de lubrification sont en accord avec les mesures.

Pour tester les performances du modèle de lubrification dans le cas d'une rhéologie plus complexe, nous présenterons par la suite l'étude de la dynamique interne de coulées à surface libre de fluides à seuil.

Chapitre 7

Dynamique interne au front d'écoulements à surface libre de fluides viscoplastiques : Comparaison au modèle de lubrification

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des expériences conduites sur le canal à fond mobile, avec un matériau viscoplastique, le gel de Carbopol. Nous comparerons les mesures à un modèle de lubrification appelé aussi modèle à l'ordre 0 en ϵ. Cette première étape a fait l'objet d'une publication et sera exposée telle qu'elle a été publiée. Des compléments sont ensuite apportés, dans le but de présenter les expériences qui n'ont pas été présentées dans l'article, d'apporter des compléments d'analyse et des compléments techniques.

7.1 Etude des champs de vitesse et des zones de plug : comparaison au modèle de lubrification

Préambule - apport de l'article présenté dans ce chapitre

Cette étude présente des mesures haute résolution du champ de vitesse au front d'écoulements viscoplastiques générés par le canal à fond mobile. La forme de la surface libre, les champs de vitesse et la position de l'interface entre la zone cisaillée et le plug sont mesurés et reportés de la zone uniforme au front.

Les résultats expérimentaux sont comparés aux prédictions d'un modèle de couche mince basé sur l'approximation de lubrification. Ce modèle est le plus simple capable de prédire la forme d'un front qui ne soit pas un "choc". Nous choisissons de comparer les résultats expérimentaux à un modèle purement théorique, basé sur les valeurs prédites de la hauteur et de la pente de la surface libre. Malgré sa simplicité, les prédictions théoriques correspondent bien aux mesures expérimentales dans la plus grande partie de la coulée. La structure théorique classique en deux couches, l'une cisaillée surmontée du plug est bien observée. L'amincissement du plug en direction du front

est aussi mesuré. Cependant, au front, à proximité de la ligne de contact, des différences avec le modèle sont observées. D'abord, la forme du front mesurée diffère de la prédiction du modèle : la hauteur expérimentale est plus épaisse. Ensuite, on observe que la forme du profil de vitesse longitudinal s'écarte de la prédiction théorique. Contrairement aux prédictions théoriques, le plug expérimental disparaît au front, là où le profil de vitesse est complètement cisaillé.
Les prédictions théoriques sont aussi calculées avec la mesure expérimentale du couple *(hauteur, pente de la surface libre)*. Au front, proche de la ligne de contact, ce dernier modèle prescrit une vitesse moyenne qui augmente brutalement, contrairement à la condition de vitesse moyenne constante imposée par le dispositif. Les résultats aberrants produits par le modèle de lubrification basé sur la mesure expérimentale du couple *(hauteur, pente de la surface libre)* dans le front, sont aussi un indice qui montre que le modèle n'est plus valide à proximité de la ligne de front.

Finalement, les différences observées avec le modèle de lubrification proche de la ligne de front, sont attribuées à la perte de validité de l'hypothèse de couche mince. Ce qui suggère par la suite d'utiliser le jeu de données pour une comparaison avec des modèles plus complexes.

Ces résultats sont en cours de publication dans *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* sous la forme suivante :

Freydier, P., Chambon, G., Naaim, M.,Experimental characterization of velocity fields within the front of viscoplastic surges down an incline, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, (2017), vol 240, pp 56-69.

Dans cette étude, nous avons présenté cinq expériences, il s'agit de $160113v1$, 160127, $160113v5$, 150612 et 150504 (voir Tab.4.1). Elles ont été renommées pour les besoins de l'article respectivement C_1, C_2, C_3, C_4, et C_5. Parmi ces cinq expériences, trois ont été initialement présentées en supplément de l'article (C_1, C_3 et C_4).
Nous avons choisi de présenter cette étude telle qu'elle a été publiée. Le lecteur percevra alors quelques redondances sur la présentation du dispositif expérimental, des méthodes de mesures et du modèle théorique, qu'il pourra choisir de ne pas lire (en commençant alors au §7.4.5) sans entraver la compréhension de la suite.

Experimental characterization of velocity fields within the front of viscoplastic surges down an incline

Perrine FREYDIER[1], Guillaume CHAMBON[1] and Mohamed NAAIM[1]

Université Grenoble Alpes, Irstea, UR ETGR, 2 rue de la Papeterie, BP-76, F-38402 St-Martin-d'Hères, France
E-mail : perrine.freydier@irstea.fr

Abstract :
This paper reports on high-resolution measurements of the velocity field within the front of free-surface viscoplastic surges in an inclined channel. Free-surface shape and position of the unyielded plug layer inside the surges are also monitored. The experimental results are compared to the predictions of a thin-layer model based on lubrication approximation. Despite its simplicity, the model appears to provide an accurate description of the flow in most of the surge. As predicted, a 2-layer flow structure is clearly observed, with an upper plug layer progressively thinning towards the front. It is only in the tip of the flow, close to the contact line, that discrepancies with the model are observed. The plug layer completely disappears, and velocity profiles become sheared across the whole flow depth. The experimental free-surface shape also deviates from its theoretical counterpart. The distance from the contact line at which lubrication model fails, has been quantified for each experiment, and varies between 1 and 2 times the maximum height of the flow. In the future, this experimental dataset shall provide a unique benchmark to assess the predictive capabilities of more sophisticated flow models.

7.2 Introduction

Free-surface flows of yield-stress fluids are encountered in numerous settings including civil engineering (paints, cement slurries) Roussel and Coussot [2005]; Boujlel et al. [2012], petroleum industry (drilling muds, heavy oils), food and cosmetics industries (creams, pastes), and geophysical processes (mudflows, debris flows, lava flows) Coussot et al. [1998]; Ancey [2007]. In all these examples, the materials involved are characterized by the existence of a stress threshold, called yield stress, above which they flow as viscous fluids and below which they behave as more or less soft solids Bird et al. [1982]; Balmforth et al. [2014]. In most flow configurations, this viscoplastic character results in a strong coupling between flow structure and the state (yielded / unyielded) of the material. For instance, through the formation of solid dead zones along the basal topography or around obstacles, these flows have the capacity to partially smooth out sharp variations in the imposed boundary conditions Roustaei and Frigaard [2013]; Luu et al. [2015]. Similarly, solid or quasi-solid zones tend to develop close to the free-surface, where the shear stress is low Piau [1996]; Balmforth and Craster [1999]. Understanding and correctly predicting the location and evolution of these unyielded zones is of major importance to develop models capable of accurately predicting the velocities, depths, shapes, runout distances, deposits, etc., of the flows.

The simplest and most-commonly used constitutive laws to describe the rheological behavior of yield-stress fluids are the viscoplastic Bingham and Herschel-Bulkley laws Balmforth et al. [2014];

Coussot [2014]. These laws postulate a rigid behavior below the yield stress, and the existence of a univocal linear (Bingham) or non-linear (Herschel-Bulkley) relation among stress and strain-rate tensors above the yield stress. It should be noted that, in practice, most real yield-stress fluids display additional rheological trends that are not accounted for by these purely viscoplastic laws. In particular, close to the flow threshold, thixotropic effects may induce hysteresis in the stress – strain-rate relation Putz and Burghelea [2009], discontinuous transitions Coussot et al. [2002a,b], and the formation of shear bands Ovarlez et al. [2009]; Coussot and Ovarlez [2010]. Elastic effects, in both the solid and fluid regimes, may also play important roles, *e.g.* in unsteady flows Luu and Forterre [2009] or when considering flows around obstacles de Souza Mendes et al. [2007]; Putz et al. [2008]; Tokpavi et al. [2009]. However, the existence and magnitude of these complex rheological features is strongly dependent on the particular material considered. In this study, we will remain in the frame of a pure viscoplastic (Herschel-Bulkley) description, which can be viewed as a generic, lowest-order simplification of the behavior of real yield-stress materials. This choice is also motivated by the fact that, to date, almost all free-surface flow models developed for yield-stress fluids are based on viscoplastic constitutive laws. The inclusion of additional, time-dependent, rheological trends in these models remains essentially untackled Chanson et al. [2006]; Hewitt and Balmforth [2013].

In the context of geophysical applications, free-surface flows are generally modelled in the frame of a thin-layer assumption (flow length much larger than its thickness) Ancey [2007]; Iverson [2013]. Restricting references to the case of viscoplastic fluids, models of this type encompass kinematic-wave models Huang and Garcia [1998], lubrication models Liu and Mei [1989]; Mei et al. [2001]; Balmforth et al. [2006]; Ancey and Cochard [2009]; Bernabeu et al. [2014], and depth-averaged Saint-Venant models Liu and Mei [1994]; Laigle and Coussot [1997]; Balmforth and Liu [2004]; Fernandez-Nieto et al. [2010]. In essence, all these models, be they derived from heuristic simplifications or through asymptotic developments of the primitive conservation equations, assume that the flow structure remains close (in a model-dependent sense) to the solution obtained in a purely steady and uniform regime. In the case of viscoplastic fluids, this approach implies in particular the existence of a solid plug layer in the vicinity of the free surface, even in zones where the flow is non uniform and where, therefore, longitudinal strains develop. This paradox led some authors to question the consistency of thin-layer models for viscoplastic fluids Piau [1996]. Balmforth & Craster Balmforth and Craster [1999] showed, however, that this issue can be overcome by considering that the plug, called pseudo-plug in this case, is in fact just at the verge of yielding, and can thus accommodate small strain rates. Nowadays, viscoplastic thin-layer models are routinely used in operational context to evaluate hazards and risks induced by geophysical flows, and to assess the efficiency of protective measures Coussot [1994]; McDougall and Hungr [2005]; Rickenmann et al. [2006].

Strikingly, however, viscoplastic thin-layer models have seldom been tested against finely-documented experimental data. When attempted, comparisons with experiments mainly focused on front position and free-surface shapes in transient flow configurations. Furthermore, untangling the relative contributions of measurement errors, uncertainties on the rheological parameters, and model performances, generally appears difficult in these studies. Hence, in an early work Laigle and Coussot [1997], errors ranging between 20 and 40% were reported between the predictions of a Saint-Venant model and the values of front velocity and flow height measured in dam-break experiments with water-clay mixtures. More recently, again in a dam-break configuration

but with a different viscoplastic fluid (Carbopol), two studies Ancey and Cochard [2009]; Ancey et al. [2012] compared different thin-layer models to high-resolution measurements of the free surface. Except during an initial phase, both kinematic-wave and lubrication models were shown to predict front velocity relatively well, whereas the results obtained with a Saint-Venant model were less satisfactory. The lubrication model also best captured experimental free-surface shapes, but discrepancies up to 25% on flow height were nevertheless observed.

A few years ago, our group developped a particular experimental setup (conveyor belt channel) in which gravity-driven surges that remain stationary in the laboratory frame can be generated, thereby providing enhanced observation possibilities and reduced measurement errors compared to transient experiments. Using kaolin slurries, we showed that free-surface shapes measured in this setup are in excellent agreement with the predictions of a viscoplastic lubrication model, except in the vicinity of surge tip Chambon et al. [2009]. Through high-resolution optical velocimetry (1D PIV), we could also obtain measurements of longitudinal velocity profiles in the uniform zone of Carbopol surges Chambon et al. [2014]. These experiments clearly revealed the existence of a plug zone close to the free surface, and the velocity profiles were shown to be in excellent agreement with theoretical predictions based on a Herschel-Bulkley rheology.

To further assess the predictive capabilities of viscoplastic thin-layer models, better insight into the internal structure of the surges in non-uniform regions is now needed. To date, only one experimental study tackled this issue Andreini et al. [2012]. Through sophisticated measurement techniques, these authors were able to document velocity profiles in the front region of Carbopol surges in a dam-break configuration. The study investigated two slope angles (15° and 25°) and was restricted to creeping flow regimes characterized by low values of the Froude and Reynolds numbers ($Fr < 7 \times 10^{-2}$, $Re < 3 \times 10^{-2}$). Far from the surge tip, the measurements were shown to be in good agreement with the predictions of a lubrication model, with here also clear experimental evidence of the existence of a plug layer close to the free-surface. Discrepancies with the model arose in the tip, where the plug layer apparently subsided. However, due to measurement noise, the onset of these discrepancies remained difficult to determine. Basal slip in the tip also tended to blur the results for the lower slope angle.

In this context, the main objective of the present work is to provide benchmark experimental data on the internal dynamics of free-surface viscoplastic surges. Specific aims are to focus on the surge tip region, where existing results are scarce and incompletely conclusive, and to explore a wider range of flow conditions in terms of Froude and Reynolds numbers. Our experiments were performed with the conveyor-belt channel, where the stationary character of the surges is particularly well-suited to achieving high-resolution measurements of the velocity field in the whole flow, from the uniform zone to the tip. As will be explained, the zero average velocity imposed to the surges by the mobile belt is equivalent, in a reference frame attached to channel bottom, to imposing a constant depth-averaged velocity. Our newly-acquired dataset shall then become a reference to test the performances of viscoplastic thin-layer models. For a first comparison, we considered here the simplest model capable of representing a surge with a (non-shocked) front, namely a lubrication model in which flow dynamics is governed by a balance between gravity, pressure gradient, and shear stress.

The outline of the paper is as follows. In section 7.3, the lubrication model is recalled and particular solutions, specific to our experimental configuration, are worked out. Section 7.4 de-

scribes the experimental setup and specific velocimetry techniques, and provides an overview of the experimental results. The main content of the paper, namely the detailed comparisons between experimental data and model predictions, is explained and discussed in sections 7.5 and 7.6, respectively. Final conclusions are drawn in section 7.7.

7.3 Viscoplastic lubrication model

Let us consider a free-surface surge propagating down a plane forming an angle θ with respect to the horizontal (Fig. 7.1). The x-axis (hereafter called *longitudinal*) coincides with the plane bed in the streamwise direction, while the y-axis (hereafter called *vertical*) is orthogonal to the bed, pointing upwards. The flow is assumed to be 2D, *i.e.* independent of the spanwise direction. Fluid density is denoted ρ, local flow thickness is denoted $h(x,t)$, and the longitudinal and vertical velocity components are denoted $u(x,y,t)$ and $v(x,y,t)$, respectively. We assume that thin-layer (or long-wave) approximation holds, *i.e.* that $\epsilon = H/L \ll 1$, where H (resp. L) represents a typical lengthscale of the flow in the vertical (resp. longitudinal) direction. At lowest-order in ϵ, the pressure p in the fluid layer is then hydrostatic :

$$p = \rho g \cos\theta \ (h-y), \tag{7.1}$$

while flow dynamics is governed by the balance between gravity g, gradient of pressure p, and shear stress τ_{xy} :

$$\rho g \sin\theta - \partial_x p + \partial_y \tau_{xy} = 0. \tag{7.2}$$

Straightforward integration leads to the following evolution of τ_{xy} in the layer :

$$\tau_{xy} = \rho g \sin\theta \ (1 - \cot\theta \ \partial_x h)(h-y). \tag{7.3}$$

The formal asymptotic derivation of these lubrication approximations can be found in numerous studies, *e.g.* Balmforth and Craster [1999]; Mei et al. [2001]; Ancey [2007]. Neglecting inertia terms in Eq. (7.2) is justified as long as the Reynolds number of the flow, Re, is at most of order unity.

The fluid is assumed to obey a Herschel-Bulkley constitutive law, which can be written here under the following form :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_c + K\left(\partial_y u\right)^n & \text{if } \tau_{xy} > \tau_c, \\ \partial_y u = 0 & \text{if } \tau_{xy} \leq \tau_c, \end{cases} \tag{7.4}$$

where τ_c is the yield stress, K is the consistency, and n is the flow index. From Eq. (7.3), it is seen that an unyielded plug layer, where $\tau_{xy} \leq \tau_c$, exists near the free surface of the fluid. The thickness h_p of this plug layer depends on the local free-surface slope $\partial_x h$ according to :

$$h_p = \frac{\tau_c}{\rho g \sin\theta \ (1 - \cot\theta \ \partial_x h)}. \tag{7.5}$$

Flow is possible only if $h > h_p$. Under this condition, and assuming no-slip ($u = 0$) at the base ($y = 0$), the expression for the longitudinal velocity profile directly derives from Eqs. (7.3) and

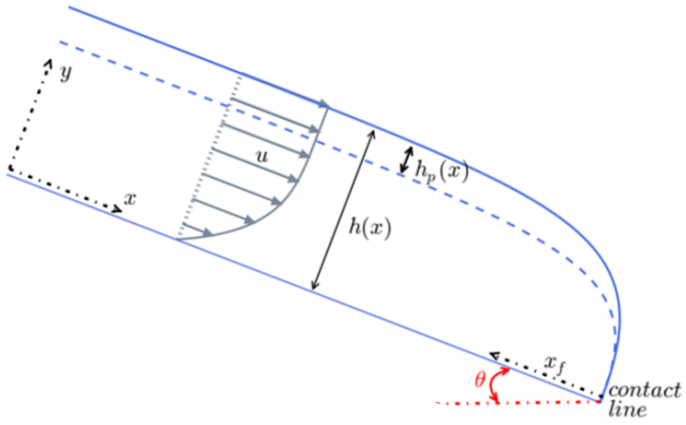

Figure 7.1 Schematic representation of the flow configuration. Notations are explained in text. The typical 2-layer structure of the longitudinal velocity profile in the surge is shown (dashed curve represents the yield surface).

(7.4) :

$$u = \begin{cases} u_p \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h - h_p} \right)^{(n+1)/n} \right] & \text{if } y < h - h_p \\ u_p & \text{if } y \geq h - h_p \end{cases} \tag{7.6}$$

with u_p the velocity of the plug layer :

$$u_p = \frac{n}{n+1} \lambda^{1/n} \left(1 - \cot\theta \, \partial_x h\right)^{1/n} (h - h_p)^{(n+1)/n}, \tag{7.7}$$

and $\lambda = \rho g \sin\theta / K$. These velocity profiles present the same 2-layer structure (Fig. 7.1) as the profiles obtained in steady uniform regime Chambon et al. [2014], this latter case being exactly recovered when setting $\partial_x h = 0$ in the above expressions. Hence, in the frame of lubrication approximation, the role of free-surface variations is only to modulate the effective gravity term by a factor $(1 - \cot\theta \, \partial_x h)$.

From the expression of longitudinal velocity u, vertical velocity v can be computed through the local mass conservation equation, $\partial_x u + \partial_y v = 0$: see 7.9. Note that, in the frame of thin-layer assumption, v is necessarily much smaller than u since mass conservation implies $v \sim \epsilon u$.

From Eq. (7.6), the expression of unit discharge $q = \int_0^h u dy$ can also be derived :

$$q = m\lambda^{1/n} \left(1 - \cot\theta \partial_x h\right)^{1/n} (h - h_p)^{(n+1)/n} \left(h + \frac{n}{n+1} h_p \right), \tag{7.8}$$

with $m = n/(2n+1)$. Plugging this expression into the depth-averaged mass conservation equation, $\partial_t h + \partial_x q = 0$, yields a general non-linear advection-diffusion equation for flow depth $h(x,t)$ Ancey [2007]; Ancey et al. [2012]. In this study, for the purpose of comparison with our experimental results, we are interested in stationary-waves solutions of the form $h(x,t) = h(x_f)$, where $x_f = x - u_b t$ and u_b represents the tip propagation velocity (equivalent to the basal velocity of our conveyor belt channel). In that case, mass conservation directly implies that $q = u_b h$ for all values of x and t. Hence, the depth-averaged longitudinal velocity of the flow $\bar{u} = q/h$ is uniform in the surge, and everywhere equal to u_b. Eq. (7.8), together with Eq. (7.5), then provides an

ordinary differential equation for the free-surface shape $h(x_f)$. This differential equation can be written under the following autonomous form :

$$\cot\theta \, \frac{dh}{dx_f} = 1 - \frac{\tau_c}{\rho g h_p \sin\theta}, \tag{7.9}$$

where plug thickness h_p is related to h through the following algebraic equation :

$$m \left(\frac{\tau_c}{K}\right)^{1/n} (h - h_p)^{(n+1)/n} \left(h + \frac{n}{n+1} h_p\right) - u_b \, h h_p^{1/n} = 0. \tag{7.10}$$

This system can be solved numerically for $h(x_f)$ and $h_p(x_f)$, enforcing the boundary condition $h(0) = 0$ at the front. A typical solution is shown in Figure 7.1. It is seen in particular that the free-surface becomes very steep in the vicinity of the contact line. Accordingly, the thickness of the plug layer progressively decreases in the tip, but does not completely vanishes until the contact line.

7.4 Experimental methods

7.4.1 Model viscoplastic material

Our experiments are performed with Carbopol (EDT 2623 provided by Noveon), a polymeric micro-gel Piau [2007] already used as a model viscoplastic fluid in numerous previous studies. This material presents the advantage of being transparent and relatively easy to prepare in large volumes. Our samples (10 L) were prepared at concentrations ranging between 0.1 and 0.2% in mass, by slowly adding the polymeric powder in deionized water under vigorous stirring (700 rpm). After leaving the solution at rest for several hours, pH neutralization was performed with a NaOH solution at 1 mol.L^{-1} under slow stirring (100 rpm). Very slow stirring (30 rpm) was then continued during 24 h for homogenization and elimination of bubbles.

Besides viscoplasticity, Carbopol has been reported to display complex rheological trends such as thixotropy or elasticity Putz et al. [2008]; Putz and Burghelea [2009]; Luu and Forterre [2009]. As already mentioned, we consider here these properties as being second-order, and focus exclusively on the steady-state viscoplastic behavior of the material. The flow curves of the samples (shear-stress versus strain-rate relation) are determined using a laboratory rheometer (Bohlin CVOR) equipped with roughened parallel-plate tools to avoid slip. Decreasing strain-rate steps are imposed, and the resulting shear stress is recorded. As shown in Figure 7.2, the measured flow curves are well represented by a Herschel-Bulkley law [Eq. (7.4)], with uncertainties (measurement repeatability) on the order of $\pm 5\%$ for the yield stress τ_c and consistency K, and of $\pm 1\%$ for the flow index n Chambon et al. [2014]. Parameters τ_c and K increase with polymer concentration, but flow index assumes an approximately constant value, $n \approx 0.4$, for all our samples.

7.4.2 Experimental setup

Our experimental setup was described in detail in previous papers Chambon et al. [2009, 2014]. It consists of a 3-m–long inclined channel, closed on its upper extremity, and with transparent

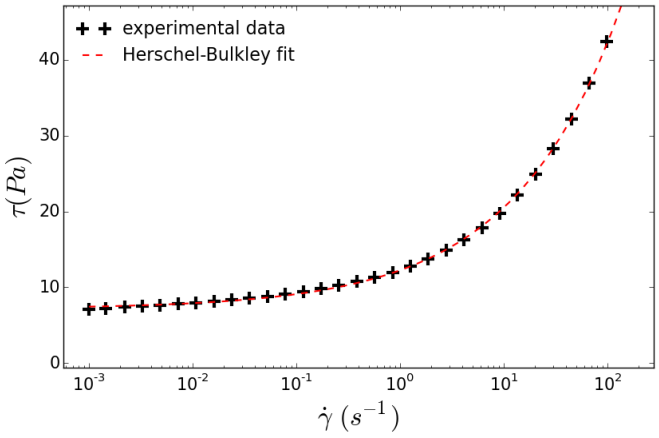

Figure 7.2 Steady-state flow curve of Carbopol sample used in experiment C_5 : shear stress τ versus shear rate $\dot{\gamma}$. Symbols represent rheometric data ; red curve represents the best-fitting Herschel Bulkley law ($\tau_c = 7.2$ Pa, $K = 5.0$ Pa.s^n, $n = 0.43$).

sides (Fig. 7.3a). The mobile bottom is constituted by an upward-moving PVC conveyor belt with controlled velocity. In this study, channel width was set to 0.2 m, and channel slope angle was varied between 11.9° and 15.3°. When a given volume of fluid is placed in the setup, the height of the flow spontaneously adapts to the fixed bottom velocity and a stationary surge, with a constant shape, forms. In our experiments, the surges have a typical length of 1 m and a typical height of 10-30 mm, thereby complying with thin-layer assumption. As shown in Figure 7.3b, the surge tip is nose-shaped, with a reentrant zone (obtuse contact angle) in the vicinity of the contact line with the mobile bed. Behind the tip, flow height gradually increases until eventually becoming uniform upwards. In the following, we specifically focus on this zone of increasing flow height, which is called the front zone of the surge. The length of this front zone typically is on the order of $10\times$ the flow height in the uniform zone. Another interesting specificity of our setup is that side-wall effects remain limited. Hence, along the centerline of the surges, and except in the close vicinity of the tip (see discussion in 7.6.1), transverse velocities are negligible and the flow can be regarded as effectively 2D Chambon et al. [2014].

The imposed bottom belt velocity u_b is measured by an optical sensor with a relative accuracy of 2%. The flow itself is mainly monitored by optical imaging. The centerplane of the surges is illuminated by a laser sheet (5 W laser supplied by Coherent, wavelength 532 nm ; Fig. 7.3a). Image acquisition is performed from the side with an 8-bits fast camera (Baumer HXC13 equipped with a 105 mm macro Nikon lens) at a framerate of 500 Hz. To achieve a high spatial resolution in spite of flow thinness, the camera is mounted on a rail and displaced by steps of 5 cm. Hence, the front zone is split into 5 to 9 parts, from the tip to the uniform zone upwards. Series of 500 images are taken at each of these positions. In addition, since the slight transverse curvature of the contact line (visible in Fig. 7.3b) hinders visualization of the flow in the first 5 – 10 mm of the surge, a supplementary image series is taken at this location with a slightly rotated camera in order to observe the contact line "from behind". The slight distortion of these latter images is corrected according to a projective transformation method Fujita et al. [1998]. On average, this imaging setup provides us with a spatial resolution of 38 – 39 μm.px^{-1} over the whole front zone

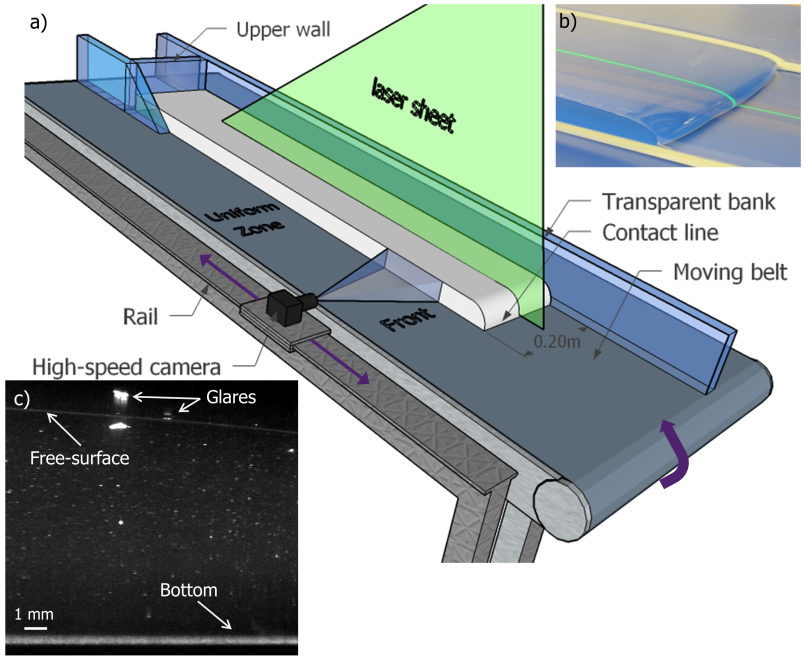

Figure 7.3 a) Conveyor-belt channel (ultrasonic height sensors not shown). b) Close-up on surge tip. c) Typical image taken during an experiment at a distance to the contact line $x_f \approx 40$ mm. Bright dots correspond to the tracers used to derive fluid velocity. Artificial dots (glares) sometimes appear above the free surface.

of the surges. We note however that, despite our best efforts, the images remain unusable in the first 2 – 5 mm close to the contact line, as well as in a 2 mm layer close to channel bottom (due to the presence of a seal below the side walls).

7.4.3 Flow height measurements

Local flow height h along the surge is measured on the images by extracting the positions of free surface and channel bottom (Fig. 7.3c). Due to variations in lighting intensity and the presence of glares outside flow boundaries, the detection of the free surface had to be performed manually. Thickness of the apparent free surface in the images varies between 3 and 10 px (0.12 – 0.39 mm), and generally increases in the tip where it may reach 30 px. Similarly, the line representing channel bottom has a thickness of about 5 – 15 px (0.19 – 0.58 mm) in the images. Accordingly, flow height measurements provided by this technique are characterized by uncertainties in the range ± 0.2 – 0.9 mm, depending on the experiment and the considered location in the surge. In the uniform zone, three ultrasonic sensors (Turck Banner Q45UR) provide an independent control of this flow height.

7.4.4 Velocimetry

Carbopol samples are seeded with micro-tracers (Hollow Glass Spheres of diameter 10 μm) visible in the images (Fig. 7.3c). From displacements of these tracers, the local velocity field can

be recovered through different techniques. The most classical approach, PIV, is based on the cross-correlation of sub-images taken at successive times. We applied this technique using DPIV software Meunier and Leweke [2003], which is optimized for velocity fields presenting zones of large gradients. Given the characteristics of our image series (frame rate, tracer density, etc.), the minimum possible size for the interrogation sub-images is 32×32 px^2. Hence, in spite of the high spatial resolution of the images, PIV yields, at most, 10 independent velocity measurements across flow depth. Besides, as is customary with this technique, correlations tend to be insufficient, and therefore result quality to be poor, in regions where velocity gradients are maximum (*i.e.* close to channel bottom) or in the vicinity of flow boundaries (*i.e.* close to the free surface).

To improve spatial resolution and accuracy of the measured velocity fields, enhanced PIV methods, such as super-resolution PIV Keane et al. [1995]; Hart [2000], can be used. Here, in order to take advantage of the stationary character of the flows in our experiments, we employed an alternative technique, henceforth called STV (spatio-temporal velocimetry), based on a spatio-temporal analysis of the image series Fujita et al. [2007]. The principle is best explained in 2D (one spatial dimension + time), although extension of the technique to 3D (two spatial dimensions + time) is straightforward. Hence, let us first consider a region where the velocity is unidirectional, as in the uniform zone of the surges. For each line along x of the images, a spatio-temporal diagram is constructed by stacking the gray levels recorded along this line at successive instants (Fig. 7.4). Since their velocity u is constant, tracers moving along this line define parallel inclined streaks in the spatio-temporal diagram. The angle α of these streaks is related to u according to :

$$\tan \alpha = \frac{u}{Rf} \tag{7.11}$$

with R the image resolution (in m.px^{-1}) and f the framerate (in s^{-1}). Determining α thus provides a direct measurement of tracers' velocity. Similarly, velocity fields with two components u and v can be recovered by replacing image lines with 2D sub-images in which the velocity is assumed to be homogeneous. This leads to 3D spatio-temporal diagram, in which tracers also define inclined streaks whose angle projected along the (x,t)-plane (resp. (y,t)-plane) is proportional to u (resp. v). In practice, automatic determination of the streak angles is performed through a detection method based on the definition of a local structure tensor (see 7.8). From the dispersion (standard deviation) of local angle values in each spatio-temporal diagram, typical error bars on the velocity measurements can also be obtained. To provide reliable data, STV sub-images have to be large enough to contain tracers for a sufficient amount of time, so that sufficiently "long" streaks are produced in the spatio-temporal diagram. In our case, we could use sub-windows sizing 32 px in the streamwise direction but only 16 px in the vertical direction, thereby achieving a two-fold increase in spatial resolution compared to PIV.

Figures 7.5b-d present comparisons between longitudinal velocity profiles determined by PIV and STV. Globally, the values obtained with the two methods are in good agreement, which constitutes a cross-validation of both techniques. The enhanced spatial resolution achieved with STV is clearly observable. STV also appears to be more robust, since it generally provides consistent velocity values even in zones where PIV yields numerous false measurements. This is particularly evident close to channel bottom or in the vicinity of the free surface. In these regions, besides the reasons already mentioned (high gradients, presence of interfaces in the interrogation sub-images), the poor performances of PIV are also due to a weaker light intensity and a decreased quantity of

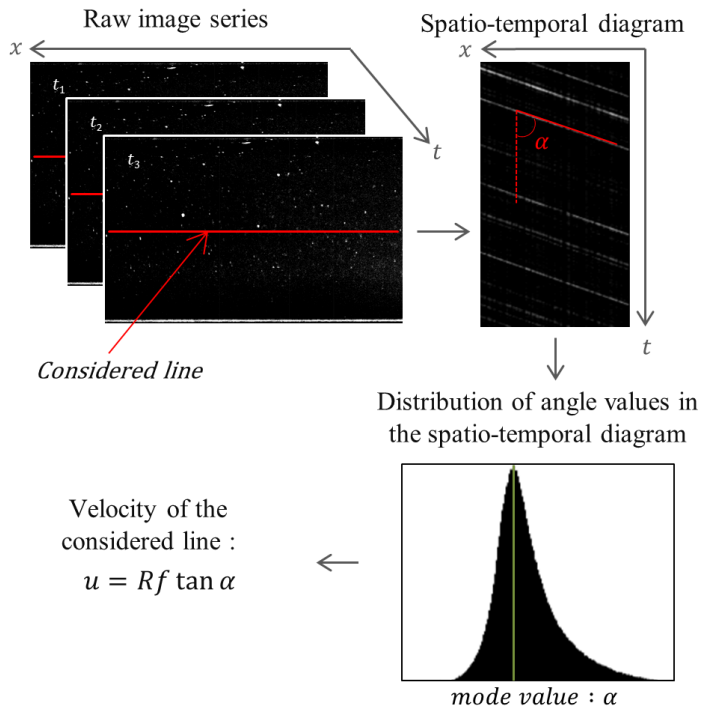

Figure 7.4 Illustration of the spatio-temporal velocimetry (STV) technique in the 2D case (one spatial dimension + time) : see explanations in text.

visible tracers. STV is less affected by these artifacts, since a representative streak angle can still be determined in the spatio-temporal diagram. (Situations where even STV fails to provide reliable measurements do nevertheless exist : see Fig. 7.5a close to channel bottom at $x_f \approx 30$ mm.)

In the following, presented velocity data come from STV, although a PIV analysis was also systematically performed for validation. As shown in Figure 7.5a, the raw results provided by STV are sufficiently well-resolved to offer a clear view of the flow recirculation pattern in the front zone of the surges. In physical units, the spatial resolution achieved with this technique is $r_x = 1.24$ mm in the longitudinal direction and $r_y = 0.62$ mm in the vertical direction. For color plotting or further processing (*e.g.*, differentiation to compute shear rates), the raw velocity values provided by STV are filtered and interpolated by convolution with a 2D Gaussian kernel.

7.4.5 Overview of experimental results

In total, 14 experiments were performed with different belt velocities (u_b ranging between 23 and 171 mm.s^{-1}), different slope angles (θ ranging between 11.9° and 15.3°), and different Carbopol samples (yield stress τ_c ranging between 5 and 12 Pa). Only five representative experiments, whose characteristics are summarized in Table 7.1, will be presented in detail. The flows are described by their non-dimensional Froude (Fr), and yield (G) numbers defined as :

$$Fr = \frac{u_b}{\sqrt{g h_N \cos\theta}};\ G = \frac{\tau_c}{\rho g h_N \sin\theta}, \tag{7.12}$$

where h_N denotes flow height in the uniform zone. Note that, even if G and Fr are in principle independent, their actual values in our experiments tend to be anti-correlated (Tab. 7.1). In

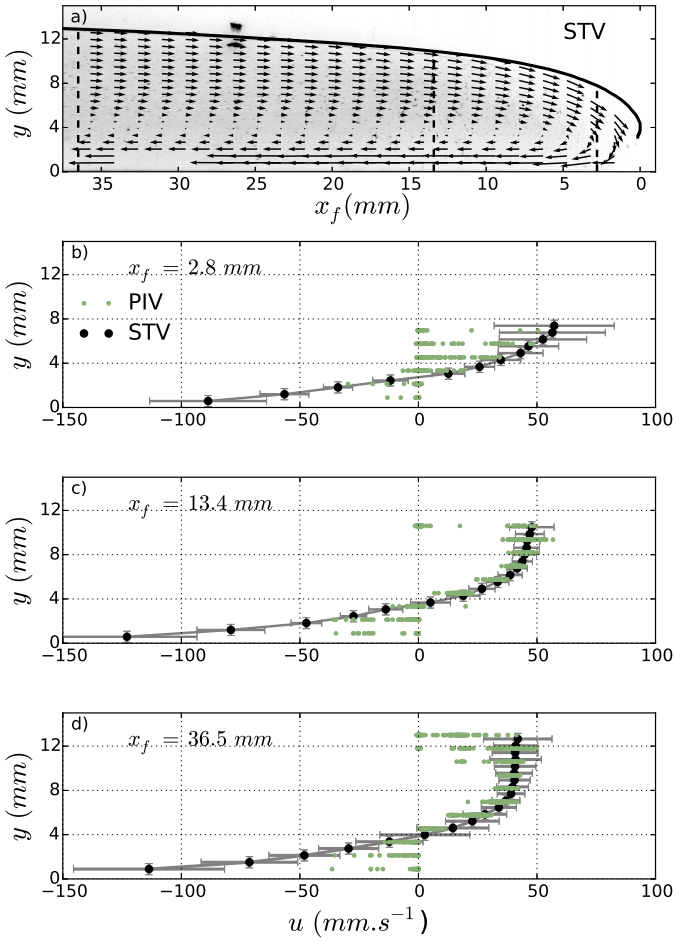

Figure 7.5 a) : Typical velocity field (vector plot) measured with STV technique. The thick black curve represents the measured free surface of the surge. b) to d) Vertical profiles of longitudinal velocity u obtained with PIV (green dots, each dot representing the result provided by a pair of successive images in the series) and STV (black circles) for three values of the distance to the tip x_f. The respective positions of these 3 profiles are indicated in a) (dashed lines).

addition, since these non-dimensional numbers are defined on the base of the steady uniform regime, a one-to-one relation exists between the yield number G and the more classical Herschel-Bulkley number $Hb = (\tau_c/K)(h_N/u_b)^n$ Coussot [1994]; Chambon et al. [2014] (see also 7.10). Lastly, the Reynolds number $Re = (\rho {u_b}^{2-n} {h_N}^n)/K$ can also be obtained as :

$$Re = \cot\theta \, \frac{Hb}{G} \, Fr^2. \tag{7.13}$$

Values of Hb (Re) range between 0.4 and 1.2 (0.04 and 1.6), in our experiments.

Experiments C_2 and C_5, which are characterized by similar rheological parameters but different slope angles and different G and Fr numbers, will serve as the main basis for the upcoming discussions. Results of experiments C_1, C_3 and C_4 are presented in supplementary material.

The general aspect of the velocity field inside the flow is illustrated in Figures 7.6. In most of the surge, longitudinal velocity u displays a layered structure, with strong gradients near the bottom

exp.	τ_c	K	n	θ	u_b	h_N	G	Fr	$x^*_{fc,f}$	$x^*_{fc,u}$	$\partial_x h_c$
C_1	9.6	8.8	0.42	11.9	26	16.9	0.31	0.064	2.2	0.75	0.07
C_2	7.2	5.1	0.41	11.9	73	16.1	0.24	0.18	1.9	0.74	0.07
C_3	9.6	8.8	0.42	11.9	153	26.4	0.20	0.30	1.25	0.71	0.11
C_4	5	4.8	0.41	11.9	151	16.2	0.17	0.38	1.7	0.54	0.09
C_5	7.2	5.0	0.43	15.3	148	15.5	0.20	0.39	1.3	0.73	0.09

Table 7.1 Characteristics of the 5 experiments presented : yield stress τ_c (Pa), consistency K $(Pa.s^n)$, flow index n, channel slope angle θ (°), imposed belt velocity u_b (mm.s^{-1}), flow height in the uniform zone h_N (mm), yield number G, Froude number Fr, onset of discrepancy with the model concerning free-surface shape $x^*_{fc,f}$, onset of discrepancy with the model concerning longitudinal velocity profiles $x^*_{fc,u}$, experimental free-surface slope $\partial_x h_c$ measured at $x^*_{fc,f}$.

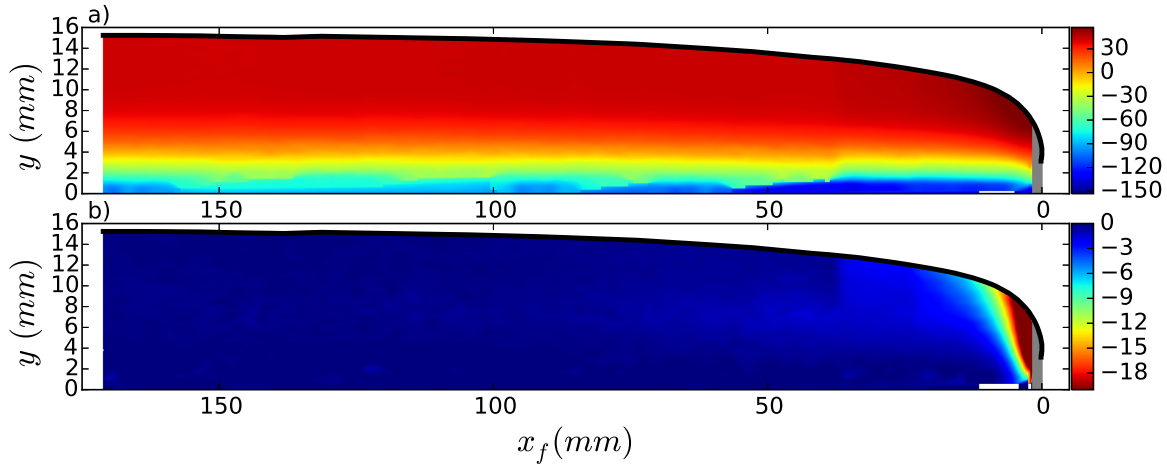

Figure 7.6 Interpolated colormaps of a) longitudinal (u) and b) vertical (v) velocities for experiment C_5 (colorbars in mm.s^{-1}). Thick black curve represents the measured free surface. Grayed area near the tip corresponds to the zone where no velocity measurements are available. For the sake of visualization, vertical velocity colorscale has been truncated (minimum measured value : -70 mm.s^{-1}).

(Fig. 7.6a). Although the first 2 mm near the mobile bed are not amenable to vizualization, no evidence of basal slip is detected. A progressive increase of surface longitudinal velocity (herafter called surface velocity) when approaching surge tip is also apparent. Vertical velocities v are generally much smaller than longitudinal ones, and essentially null above a certain distance from the contact line (Fig. 7.6b). These vertical velocities rapidly increase close to the contact line, and reach values that are on the same order as those of u for $x_f < 10$ mm, typically.

A useful quantity to characterize the possible existence of unyielded plug layers inside the flow is the shear rate. The high spatial resolution of STV measurements allows us to compute the local, total shear rate $\dot{\gamma}_{total} = \sqrt{(\partial_y u + \partial_x v)^2 + 4\partial_x u^2}$ by direct differentiation of the velocity field . An approximate shear rate $\dot{\gamma} = |\partial_y u|$ can also be computed, with the advantage of a reduced noise level since only y-differentiations are involved. As shown in Figure 7.7b, it appears that the contributions of the longitudinal derivatives $\partial_x u$ and $\partial_x v$ in $\dot{\gamma}_{total}$ are in fact negligible, such that $\dot{\gamma}_{total} \approx \dot{\gamma}$, except very close to the tip. In the following, we thus focus on $\dot{\gamma}$ to discuss the evolution

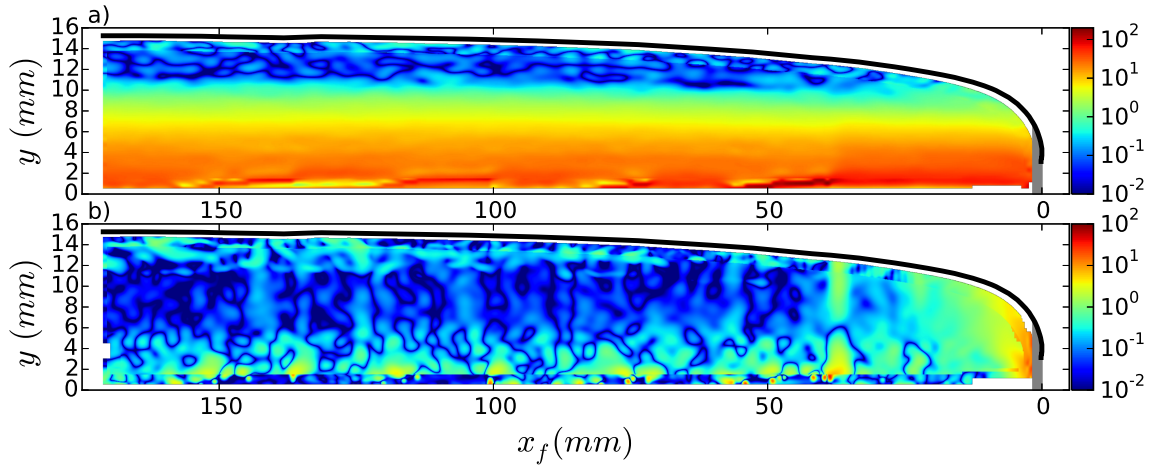

Figure 7.7 a) Interpolated colormap of the approximate shear rate $\dot{\gamma}$ for experiment C_5. b) Difference between the total and approximate shear rate, $\dot{\gamma}_{total} - \dot{\gamma}$ (see definitions in text). Note the logarithmic colorscales (colorbars in s^{-1}).

of shear rate in the flow. Figure 7.7a shows that $\dot{\gamma}$ varies in a wide range, from effectively zero close to the free surface to values typically exceeding 100 s^{-1} close to the bottom. The logarithmic colorscale highlights the existence of an apparent plug layer, characterized by very low shear-rate values, close to the free surface. This unsheared layer seems to disappear in the vicinity of the tip, where shear rate values exceeding 1 s^{-1} are observed close to the free surface.

7.5 Comparison with lubrication model

This section is devoted to comparing our experimental results with the predictions of the lubrication model presented in section 7.3. For that purpose, and from now on, the velocity fields will be expressed in the reference frame attached to channel bottom, shifting the measured values of longitudinal velocity u by the imposed basal velocity u_b. For the sake of simplicity, the notation for u will be kept the same. In this new reference frame, the stationary surges generated in our channel effectively correspond to the stationary waves moving at velocity u_b described by Eqs. (7.9) and (7.10). Recall that mass conservation and 2D flow condition imply that the depth-averaged velocity of these waves is constant and equal to u_b. In practice, our setup thus provides a mean to generate gravity-driven surges with an imposed depth-averaged velocity.

7.5.1 Direct comparison

Theoretical free-surface shape and plug thickness are computed by solving the coupled equations (7.9) and (7.10). From this solution, theoretical longitudinal velocity profiles can then be computed through Eqs. (7.6) and (7.7). Figure 7.8 shows an example of direct comparison between these theoretical predictions and experimental data. Note that the position $x_f = 0$ in the experiments is defined as the point where free surface becomes vertical. Due to the reentrant shape of the tip, this position does not exactly correspond to the contact line (not visible in the images),

explaining the non-zero value of experimental flow height at $x_f = 0$. Apart from this issue, the most apparent trend in Figure 7.8a is a systematic underestimation of measured flow height by the theoretical prediction. A discrepancy of a few mm, larger than measurement uncertainties, is visible over the whole length of the surge and was observed for all experiments. In contrast, longitudinal velocity profiles appear to be in good agreement with theoretical predictions, except very close to the contact line (Fig. 7.8a). In detail, however, it can be observed that the depth-averaged velocity $\bar{u}$ obtained from the measured profiles is systematically slightly larger than the expected value u_b (Fig. 7.8b). This mismatch is constant along the surge, with a magnitude ranging from 0.6 to 4% of u_b among the experiments.

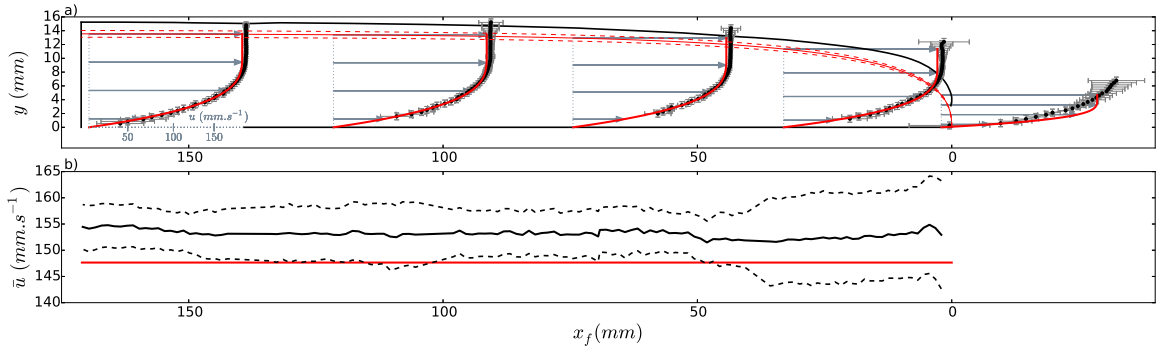

Figure 7.8 a) Free-surface shape and profiles of longitudinal velocity u at different positions x_f along the surge for experiment C_5. Black curves and symbols represent experimental measurements, red curves represent theoretical predictions. Influence of rheometrical uncertainties on the theoretical free surface is also illustrated (red dashed curves). Corresponding uncertainties on computed velocity profiles are smaller than curve thickness. b) Depth-averaged longitudinal velocity $\bar{u}$ obtained from measured velocity profiles (solid black curve) and associated uncertainty (dashed curves) as a function of x_f. The value of imposed belt velocity u_b is also indicated (red line).

That these two systematic discrepancies on flow height and flow average velocity are observed everywhere in the surge, including in the uniform zone where theoretical prediction is expected to be exact, indicates that they are independent of lubrication approximation. As will be discussed later (section 7.6.1), these discrepancies can actually be attributed to : (1) a systematic error on the rheological parameters of the fluids, and (2) slight variations of the imposed depth-averaged velocity linked to flow conditions in the surge tip. In the following, in order to get rid of these artefacts, comparisons with lubrication model will be discussed in terms of rescaled data defined on the base of the actual, measured values of uniform flow height h_N and depth-averaged velocity $\bar{u}$.

7.5.2 Non-dimensional comparison

Figures 7.9 and 7.10 thus present, for the two experiments C_5 and C_2, detailed comparisons between experimental and theoretical results in terms of the following non-dimensional variables : $h^* = h/h_N$, $h_p^* = h_p/h_N$, $x_f^* = x_f/h_N$, $y^* = y/h_N$, $u^* = u/\bar{u}$, $v^* = v/\bar{u}$. Note that, by definition, the non-dimensional plug thickness h_p^* in the uniform zone is equal to yield number G. As explained in 7.10, the theoretical model is directly re-written, and solved, in terms of these non-dimensional variables.

7.5.2.1 Velocity profiles

Starting with experiment C_5, Figures 7.9d-f show that measured and predicted longitudinal velocity profiles are in excellent agreement for $x_f^* > 1$, typically. In this zone, the experimental profiles clearly display the characteristic 2-layer structure predicted by the lubrication solution, with constant values close to the free surface and a sheared layer underneath. Closer to surge tip, the shape of experimental longitudinal velocity profiles then begins to differ from the theoretical prediction (Figs. 7.9g-i). The 2-layer structure tends to disappears, and the profiles display shear across the whole depth of the flow. In this tip region, surface velocity also appears to increase faster than its theoretical counterpart, although the difference remains within the range of experimental uncertainties (Fig. 7.9c). Regarding vertical velocities (Figs. 7.9d-i, top axes), it is remarkable that, in spite of the small values involved, the order of magnitude of experimental data is systematically in good agreement with the model. Similarly as for longitudinal velocity, the shape of vertical velocity profiles begins to differ from theoretical predictions for $x_f^* < 1$, typically, although a probably fortuitous agreement is recovered very close to the contact line (Fig. 7.9i) in this particular experiment.

Globally, similar trends are observed for experiment C_2. Here also, the onset of discrepancy with theoretical predictions occurs for $x_f^* \approx 1$ (Figs. 7.10d-i). Only longitudinal velocity components are exploitable in this experiment, since vertical velocities are too small, and the signal-to-noise ratio too large, to allow for a relevant comparison with theoretical predictions. We also observe that, within the range of experimental uncertainties, surface velocities remain here in good agreement with the predictions for all x_f^*-values at which measurements are available (Fig. 7.10c). Note however that velocity data near the free-surface are missing in this experiment, which may skew the values of surface velocity (defined as the first available datapoint below the free surface) in the tip region.

To define an objective criterion for the onset of discrepancy with the model, we computed the position $x_{fc,u}^*$ at which the RMSE between experimental and predicted longitudinal velocity profiles exceeds a threshold value of 0.07. This threshold was chosen as representative of the average uncertainty on velocity measurements. Obtained values of $x_{fc,u}^*$ are reported in Table 7.1. We find $x_{fc,u}^* = 0.73$ for experiment C_5 and $x_{fc,u}^* = 0.74$ for experiment C_2, slightly below the typical value of 1 inferred visually.

7.5.2.2 Plug layer thickness

In the model, the plug layer is characterized by a null (or, more precisely, infinitesimal as soon as $\partial_x h \neq 0$) shear rate. Experimentally, due to the noisy values of $\dot{\gamma}$ (see Fig. 7.7), attempts at measuring plug thickness h_p directly from the data turned out unsuccessful. Instead, we define, for each experiment, an apparent plug layer based on a shear-rate threshold $\dot{\gamma}_c$ representative of measurement errors. This threshold, taken as twice the standard deviation of shear-rate values obtained close to the free surface, is equal to 0.38 and 0.26 s^{-1} for experiment C_5 and C_2, respectively. The thickness of the so-defined apparent plug is larger than the thickness h_p of the "true" unsheared plug. Hence, for comparison, we also calculate, from the model, a predicted apparent plug thickness based on the same shear-rate threshold.

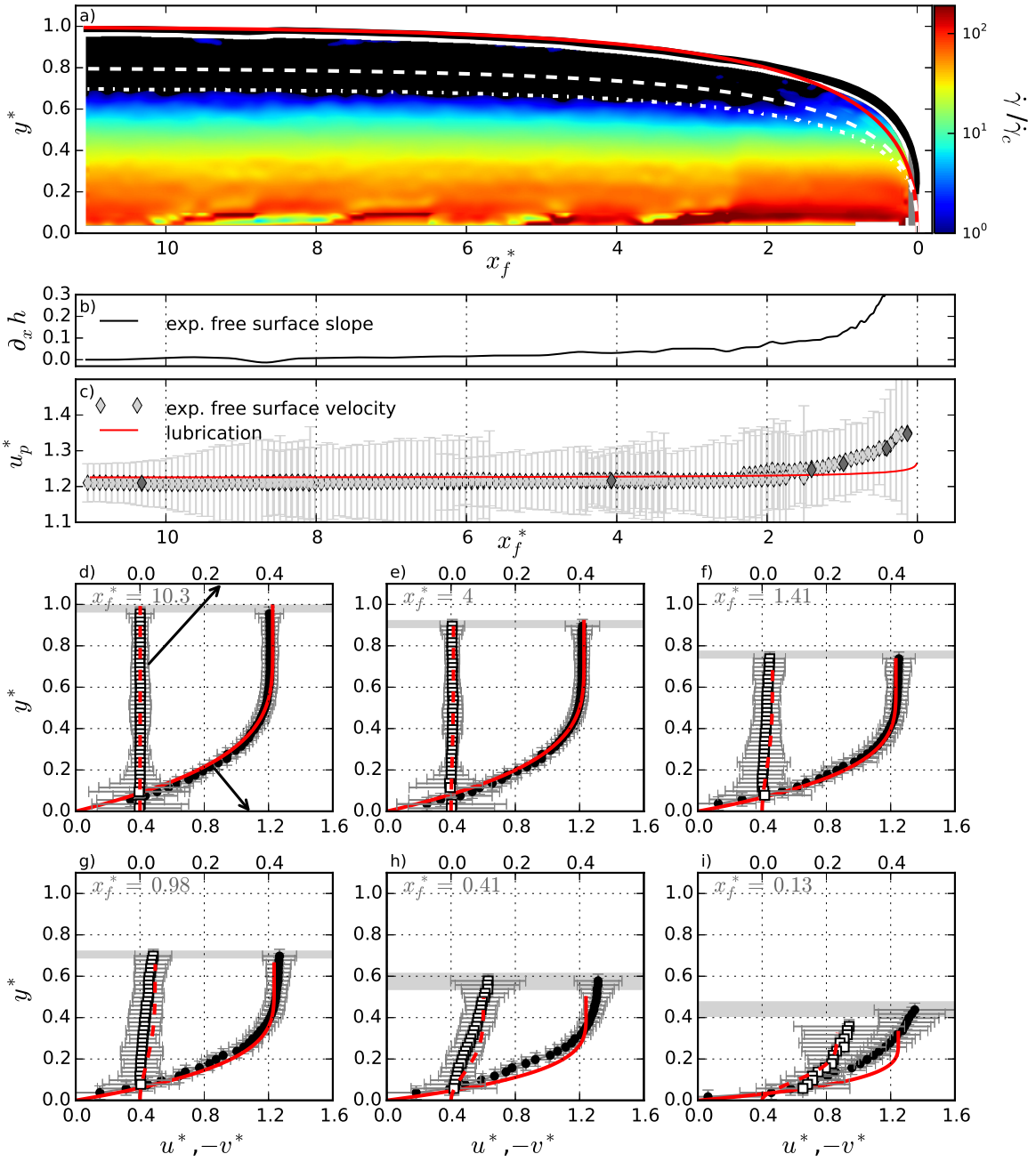

Figure 7.9 Non-dimensional experimental – theoretical comparison for experiment C_5. a) Experimental (black) and theoretical (red) free-surface shape. The colormap in background represents the thresholded shear rate $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c$ (see text). Theoretical yield surface (dashed white curve) as well as apparent yield surface predicted by the model (dot-dashed white curve) are also represented. b) Evolution of experimental free-surface slope $\partial_x h$ along the surge. c) Evolution of experimental (symbols) and theoretical (red curve) surface velocity u_p^* along the surge. Dark symbols correspond to the positions represented in panels d) to i). d) to i) Experimental profiles of longitudinal (u^* : black circles, bottom axis) and vertical (v^* white squares, top axis) velocity for decreasing values of the distance to the tip x_f^*, and corresponding theoretical predictions (solid and dashed red curves, respectively). Thick gray lines represent the positions of the experimental free surface (and associated uncertainty).

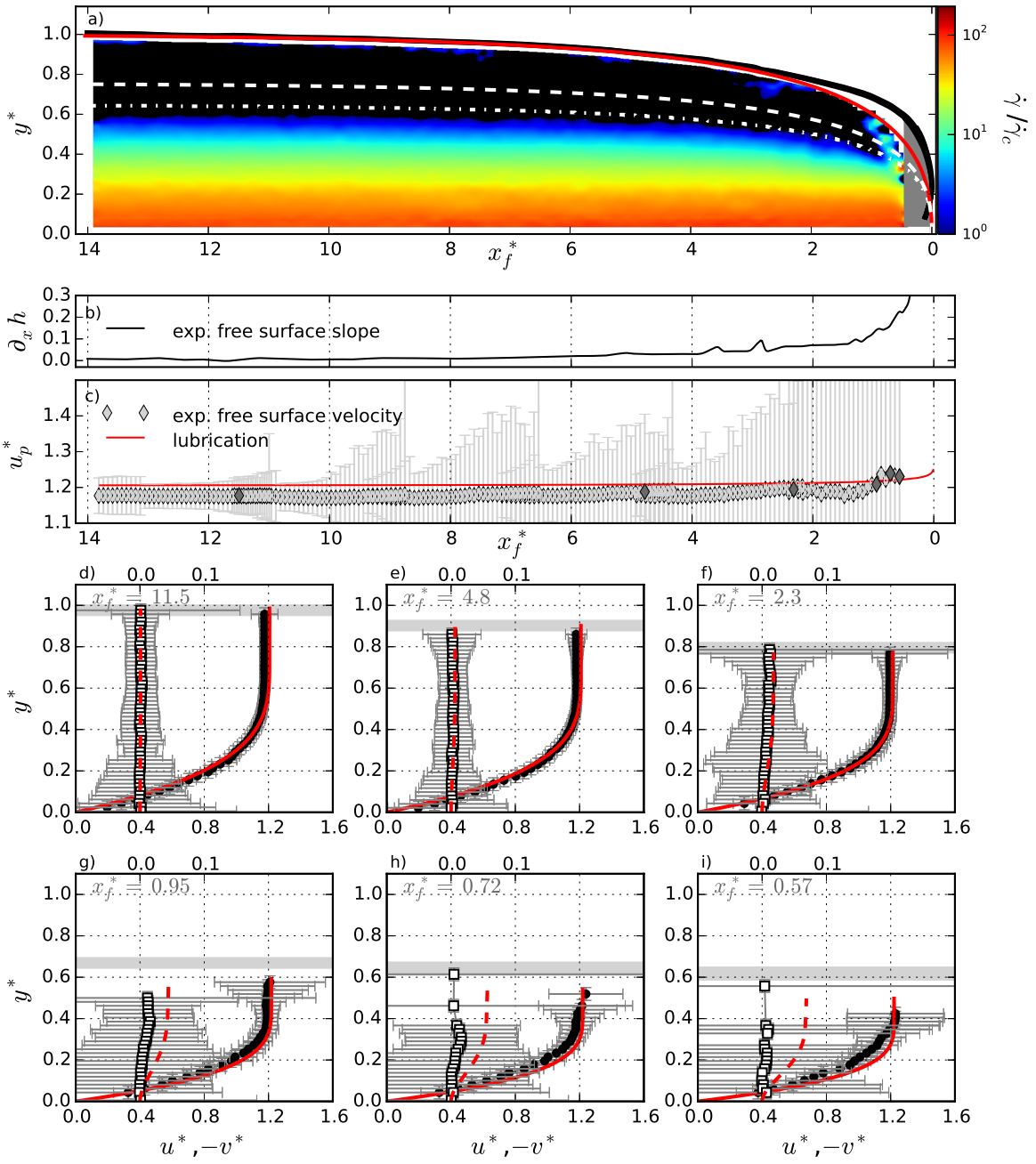

Figure 7.10 Non-dimensional experimental – theoretical comparison for experiment C_2. Same legend as Fig. 7.9.

As shown in Figures 7.9a and 7.10a, sufficiently far from the contact line, experimental and predicted apparent plug layers are in excellent agreement. The progressive thinning of the plug towards the tip, predicted by the model, is well observed in the data. Again, discrepancies with the lubrication solution begin to arise at $x_f^* \approx 1$, typically. At this point, the apparent plug layer rapidly shrinks and disappears ($\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c > 1$ across the whole flow depth) in both experiments. In detail, disappearance of the plug seems to occur slightly earlier (*i.e.* for larger x_f^*-values), and to be more progressive, in experiment C_5. However, these nuances are strongly sensitive to the noise on shear rate values, and we were not able to exhibit a reliable quantitative indicator of the position at which the plug layer effectively vanishes.

7.5.2.3 Free-surface shape

Following the rescaling applied to the data, experimental and theoretical flow heights now obviously agree in the uniform zone far from the contact line (Figs. 7.9a and 7.10a). This good agreement with the lubrication solution remains in effect in most of the front zone. Again, a discrepancy appears in the vicinity of the tip, where theoretical predictions systematically underestimate measured flow heights. The onset of this discrepancy is quantified by computing the position $x_{fc,f}^*$ at which the difference between experimental and predicted flow heights exceeds a threshold of 0.58 mm (representative of the maximum uncertainties on free-surface position in the considered zone). As shown in Table 7.1, this criterion yields values of $x_{fc,f}^* = 1.3$ and 1.9 for experiments C_5 and C_2, respectively. Hence, as can effectively be noticed in the figures, discrepancy onset is located slightly farther from the contact line for experiment C_2 than for experiment C_5.

7.6 Discussion

7.6.1 Experimental limitations

In principle, the lubrication model presented in section 7.3 can be compared to our experimental data without any adjustment parameter, since it only depends on quantities that are measured independently : slope angle θ, belt velocity u_b, and the rheological characteristics of the fluid τ_c, K and n. In practice, however, these direct comparisons revealed systematic discrepancies that can be regarded as experimental artifacts.

The first discrepancy concerns flow height, for which theoretical predictions systematically underestimate measurements. Height differences of 10-15%, typically, are observed both in the uniform and front zones of the surges (Fig. 7.8). Comparable discrepancies, with the same setup and similar Carbopol samples, were reported in our previous study synthesizing a large number of flow height measurements in the uniform zone Chambon et al. [2014]. It was shown in this study that the height differences can be offset by a systematic correction of the rheological parameters τ_c and K of the samples, increasing values measured with the rheometer by factors of 11% and 19%, respectively. We checked that the same correction factors apply to the present results, and effectively lead to a perfect agreement (within experimental uncertainties) between the predicted and measured flow heights in the uniform zone (not shown). Although no definitive explanation

could be offered for this correction, we argued in Chambon et al. [2014] that it could be related to scale effects between the rheological parameters of Carbopol measured in the rheometer and those representative of the free-surface flows.

The second discrepancy concerns the depth-averaged velocity $\bar{u}$ obtained by integrating the measured longitudinal velocity profiles. Coming back to the laboratory reference frame, this average velocity is found to be systematically slightly larger than zero, with typical values of a few mm.s^{-1} that are constant along the surge. At first sight, such non-zero average velocities seem incompatible with mass conservation, since the surges are always completely stationary in the channel. We attribute the origin of this apparent paradox to 3D effects taking place at the very tip of the surges. As already mentioned, the flow along the centerline of the channel can be regarded as 2D, with no transverse velocities, at almost every position inside the surge. We observed however that small transverse velocities tend to develop in the first few millimeters close to the contact line. This can be explained by the difficulty of ensuring a perfectly symmetric contact line : defects in channel transverse horizontality of less than a fraction of a degree are sufficient to induce a slight asymmetry of the contact line, resulting in small transverse flows. Although we could not obtain accurate measurements of these transverse velocities, images taken from above (not shown) allowed us to assess that their magnitude is compatible with values of a few mm.s^{-1}, consistent with the measurements of $\bar{u}$. In the reference frame attached to channel bottom, these transverse velocities at the contact line can be seen as a correction to the average velocity imposed to the surges : Instead of u_b, imposed average velocity $\bar{u}$ becomes $u_b + u_t$, with u_t the contribution due to transverse velocities (variable among the experiments).

These experimental artifacts illustrate the difficulty of properly characterizing the rheology of complex fluids such as Carbopol Coussot [2014]; Bonn et al. [2015], and of creating perfectly controlled free-surface flows in laboratory experiments. In this study, we chose to account for these artifacts in our analyses through the definition of non-dimensional quantities. Rescaling experimental data by measured values of uniform flow height and average velocity allows us to investigate the performances of lubrication model independently of the experimental limitations mentioned above. Note that, formally, the non-dimensional model remains dependent on fluid rheological parameters and belt velocity through the non-dimensional yield number G (see 7.10). In practice, this number was thus computed on the base of the corrected value of τ_c and of measured uniform flow height h_N.

7.6.2 Good performance of lubrication model

Comparisons of rescaled quantities revealed that lubrication model provides an accurate description of velocity profiles and free-surface shape in most of the front zone, until the close vicinity of the contact line. A notable property of the model is that, when rescaled, it only depends on slope angle θ and yield number G (see 7.10). Froude number Fr has no direct influence on the predictions, which is a direct consequence of neglecting inertial terms. Unfortunately, this property cannot be directly verified in our data, since values of Fr and G tend to be anti-correlated (Tab. 7.1). As shown in Figure 7.11, we can nevertheless observe that essentially identical rescaled free-surface shapes were obtained for experiments C_1 and C_2, which are characterized by identical slope angles and relatively close G-values, but significantly different Fr numbers.

In Figure 7.11, it can also be noted that the influence of G (in the range investigated in our experiments) on the rescaled free-surface is relatively minor. According to the model, the front zone should become thicker when G increases, but the changes remain small compared to experimental errors such that free-surfaces measured for different G-values are in fact essentially superimposed. On the contrary, predicted plug thickness h_p^* is highly sensitive to, and increases with, G (recall that $h_p^* = G$ in the uniform zone). Although we could not obtain direct measurements of h_p^*, this latter trend is also clearly visible in the experimental apparent plugs (compare, *e.g.*, experiments C_4 and C_1 in supplementary material). Finally, for a given value of G, the model predicts thicker fronts, and a reduced plug thickness in the front zone, when slope angle θ increases. The effect of θ on front shape can effectively be observed in the data (compare experiments C_5 and C_3 in Fig. 7.11).

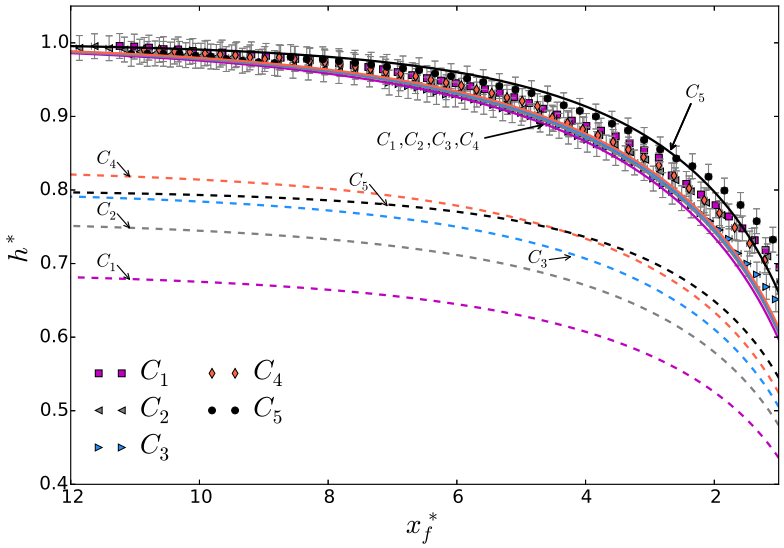

Figure 7.11 Comparison of free-surface shapes measured in the 5 experiments described in Table 7.1 (symbols). Solid and dashed curves represent the corresponding free and yield surfaces predicted by lubrication model. To highlight differences among experiments in the zone where good agreement with the model is obtained, only the region $x_f^* > 1$ is represented.

A last interesting feature of the lubrication solution, in our configuration, is that plug velocity u_p^* is almost uniform along the surge (see Figs. 7.9c and 7.10c). As shown by Eq. (7.21), this feature derives from the relatively small value assumed by flow index n of Carbopol samples, such that plug velocity can be approximated as : $u_p^* \approx (2n+1)/(n+1) \approx 1.29$ (for $n = 0.4$). This property of quasi-uniform surface velocity is also clearly apparent in the experimental data, except in the vicinity of the contact line where discrepancies with the model begin to arise. Furthermore, in agreement with the above approximation, surface velocity is observed to vary only slightly with G and θ (see also figures in supplementary material). Values of u_p^* far from surge tip range between 1.15 and 1.25 among all our experiments.

7.6.3 Discrepancies in the tip

It is only in the tip of the surges that significant differences between experimental data and the lubrication solution are observed. Measured free surfaces become steeper than their theoretical counterparts and, unlike in model predictions, measured velocity profiles display shear across the whole depth of the flow, *i.e.* the plug layer disappears. Figure 7.12 synthetises, for all our (14) experiments, the values of $x^*_{fc,f}$ and $x^*_{fc,u}$ marking the onset of these discrepancies. Globally, these critical distances range between 0.5 and 2. Values of $x^*_{fc,u}$ tend to be smaller than those of $x^*_{fc,f}$ but, due to the arbitrariness involved in the definition of these criteria, we do not deem these differences as significant. The only visible trend in these results is a slight increase of $x^*_{fc,f}$ with yield number G, and a slight decrease with Froude number Fr. Once again, as these two numbers are anti-correlated in our experiments, untangling their respective influences is difficult. However, observing that similar $x^*_{fc,f}$-values are obtained for the two experiments C_1 and C_2 characterized by very different Fr numbers (Tab. 7.1), suggests that $x^*_{fc,f}$ is primarily governed by G. On the contrary, the values of $x^*_{fc,u}$ appear essentially independent of G and Fr (although balancing effects of these two numbers would also be possible). Lastly, it is noteworthy that slope angle θ does not seem to have an influence on these critical distances.

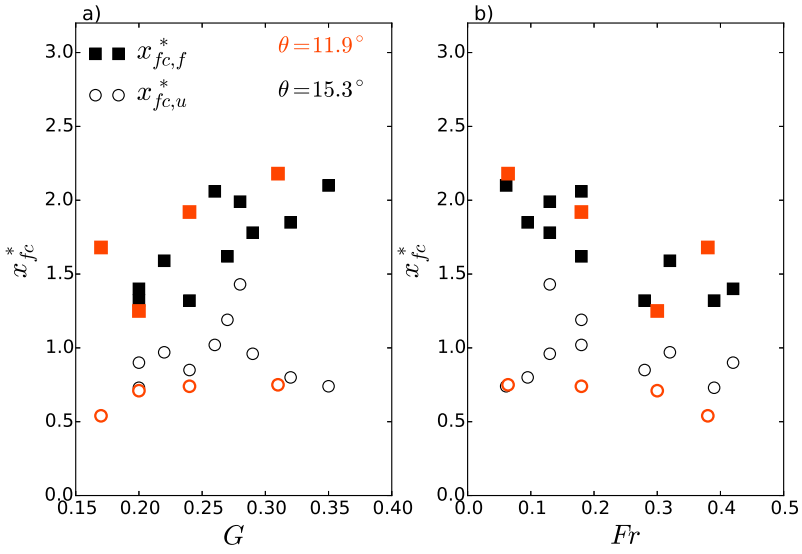

Figure 7.12 Evolution of the critical distances $x^*_{fc,f}$ and $x^*_{fc,u}$ (see definitions in text) below which discrepancies with the lubrication model appear, as a function of a) yield number G and b) Froude number Fr. Data obtained for all our 14 experiments are plotted.

Table 7.1 also reports the values of free-surface slope $\partial_x h_c$ measured at $x^*_f = x^*_{fc,f}$. It is interesting to remark that the onset of the discrepancy with lubrication model occurs for free-surface slopes that are typically on the order of 0.1 (see also Fig. 7.9b and 7.10b). Along the same line, discrepancy onset also corresponds to the point where the ratio v/u of vertical over longitudinal velocities begins to increase (Fig. 7.13). We may thus argue that this discrepancy is primarily due to the break-down of thin-layer assumption ($\epsilon \ll 1$) in the vicinity of the contact line. Such an effect was clearly to be expected, since the slope predicted by lubrication model diverges at the contact line. An interesting implication, however, is that extensions of this model

at higher order in ϵ could then capture flow dynamics even closer to the tip, including possibly the disappearance of the plug layer. Comparisons with such refined models offer promising prospects for future works.

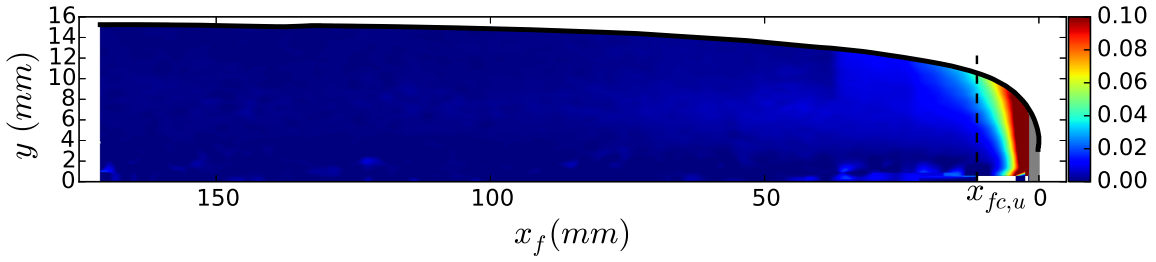

Figure 7.13 Interpolated colormap of the ratio of vertical over longitudinal velocities, v/u, for experiment C_5. The colorscale has been truncated at 0.1 (maximum measured value : 0.4). The position of $x_{fc,u}$ for this experiment is also reported.

Let us nevertheless mention that additional effects, as surface tension or complex rheological properties of Carbopol, may also contribute to the observed discrepancies in the vicinity of the contact line. In particular, it is unlikely that the ingredients currently accounted for in the model can be sufficient to explain the reentrant shape of the free surface observed in the experiments, even considering higher-order developments. Similar "nose-shaped" tips were reported in gravity-driven currents of simple viscous fluids down dry planes Veretennikov et al. [1998]. According to this former study, the overhanging shape results from a balance between surface tension and gravity in the advancing tip. It reflects a solid rotation motion that minimizes viscous dissipation in the vicinity of the contact line. The size of the reentrant zone is then expected to be on the order of the capillary length, *i.e.* ≈ 2 mm for our Carbopol samples (considering a surface tension of about 60 mN.m^{-1}, Jørgensen et al. [2015]). In our experiments, the typical dimension of the reentrant zone is 3 – 4 mm, independent of belt velocity and rheological parameters. Hence, whether this feature is only due to surface tension effects, or whether additional rheological trends of Carbopol (*e.g.* elasticity) also come into play, remains to be elucidated.

7.6.4 Apparent flow curves

As a side benefit of our high-resolution velocity measurements, the apparent flow curve of the material, *i.e.* the stress versus strain-rate relation, can be reconstructed. A typical example is shown in Figure 7.14. The strain rate $\dot{\gamma} = \partial_y u$ is obtained by direct differentiation of the velocity profiles with only slight smoothing, an approximation valid everywhere except in the tip of the surge (see Fig. 7.7). The shear stress τ_{xy} is computed locally according to Eq. (7.3) deriving from lubrication approximation. It should be noted that, in the spirit of a rheometrical approach, the values of h and $\partial_x h$ considered in this computation are the experimentally-measured ones. Yet, in the zone where lubrication model provides a good fit to the data, essentially identical results would have been obtained considering the predicted values of h and $\partial_x h$.

We observe that above a certain distance from the contact line, typically for $x_f \geq 35$ mm in Figure 7.14, all datapoints corresponding to shear-rate values greater than 10^{-1} s^{-1} collapse onto a single curve. This unique apparent flow curve is fully compatible with a Herschel-Bulkley law. It

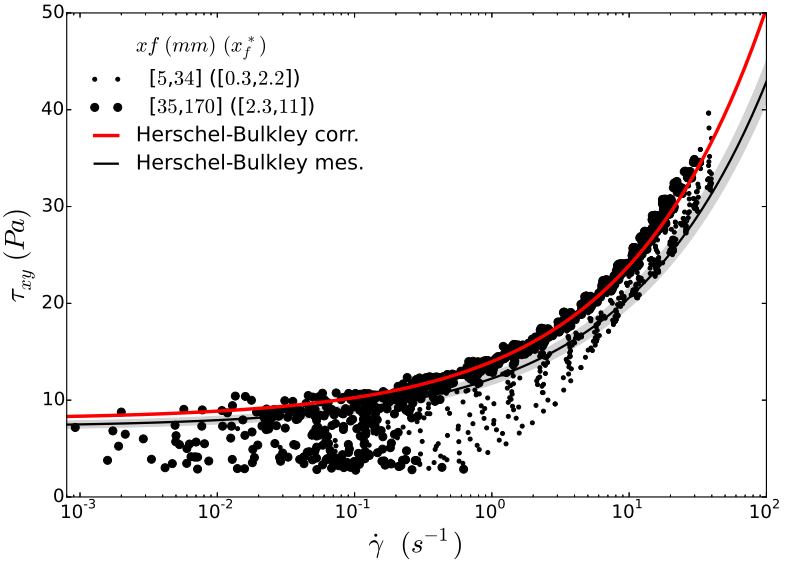

Figure 7.14 Apparent flow curves inferred from measured velocity profiles (see text) for experiment C_5. Symbol sizes indicate the range of distance to the front x_f at which the points were obtained. Black curve and shaded area represent the flow curve and associated uncertainties determined from rheometrical tests. Red curve represents the flow curve obtained by correcting the rheometrical measurements with the correction proposed in Chambon et al. [2014].

differs from the flow curve measured with the rheometer, the discrepancy being consistent with the systematic corrections on τ_c and K proposed by Chambon et al. [2014]. Hence, this result further validates that our Carbopol surges are effectively characterized, at least at lowest-order, by a Herschel-Bulkley rheology, but with parameters slightly differing from those measured in the rheometrical tests. For $\dot{\gamma} < 10^{-1}$ s^{-1}, the data correspond to the plug region of the flow, which explains the loss of a unique constitutive relation. We also observe that datapoints measured in surge tip, for $x_f < 35$ mm in Figure 7.14, no longer collapse on the apparent constitutive relation. Here again, this effect can primarily be attributed to the break-down of lubrication approximation in this region.

7.6.5 Comparison with previous results

The demonstration that lubrication model is capable of accurately reproducing experimental free-surface shapes, is in line with findings of previous studies based on dam-break experiments Ancey and Cochard [2009]; Ancey et al. [2012]. Data rescaling enabled by our particular experimental configuration, through which the results become independent of uncertainties on the rheological parameters, allows us to highlight an even better match than in these transient flows Chambon et al. [2009]. However, the main novelty of the present study is to show that lubrication model also satisfactorily captures the internal dynamics of the flows, except in surge tip. Similar conclusions, but for a more restricted range of flow conditions (Froude numbers smaller than 0.07), were already reported by Andreini et al. [2012]. High-resolution of our results also offers the possibility to propose objective criteria, in terms of, *e.g.*, distance to the contact line or free-surface slope, for defining the position where lubrication approximation actually fails. Although, qualitatively,

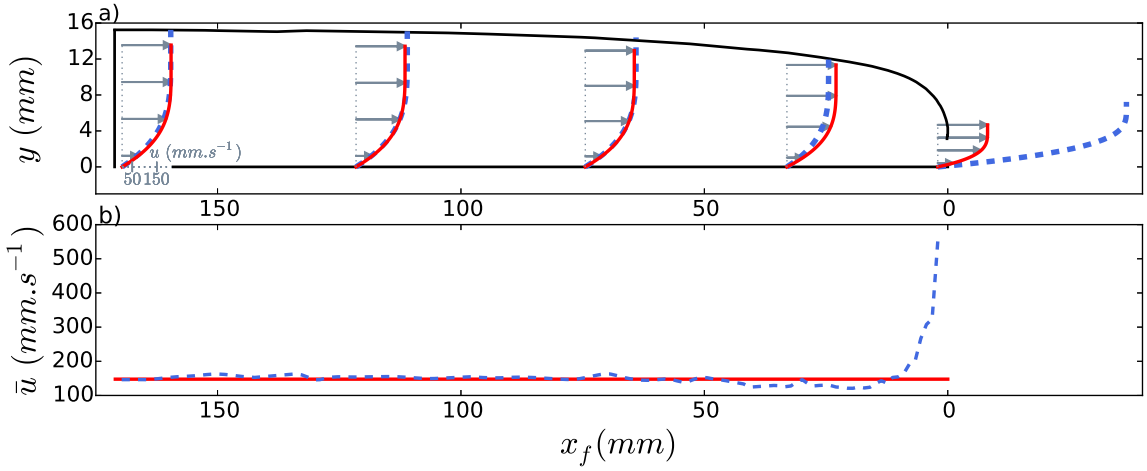

Figure 7.15 a) Theoretical profiles of longitudinal velocity u calculated from the theoretical (red curves) or experimental (dashed blue curves) values of h and $\partial_x h$ at different positions x_f along the surge for experiment C_5. Black line represents experimental free-surface shape. b) Depth-average of the theoretical velocity profiles calculated with the two methods as function of x_f (same legend).

discrepancy onset observed in Andreini et al. [2012] seems to be consistent with our results, *i.e.* to occur for $x_f^* \approx 1$, going any further in the comparison appears difficult.

Noteworthy is that the computation of theoretical velocity profiles in Andreini et al. [2012] is based on the experimental values of h and $\partial_x h$. In our work, on the contrary, theoretical velocity profiles are obtained from the predicted values of h and $\partial_x h$, which are themselves solved from lubrication model. Figure 7.15 presents a comparison between these two approaches for the case of our experiment C_5. Clearly, velocity profiles obtained from the experimental couple $(h, \partial_x h)$ do not comply with the condition of a constant average velocity : Depth-integrated values $\bar{u}$ show fluctuations even far from the contact line, due to noise on the measurements of $\partial_x h$, and abruptly increase in the tip. A similar, strong increase of the predicted average velocity when approaching the tip is visible in the results of Andreini et al. [2012]. While the condition of a constant average velocity is not directly imposed in their experiments, it is nevertheless doubtful that such an increase is consistent with mass conservation. Hence, it can be argued that computation of theoretical velocity profiles based on experimental values of h and $\partial_x h$ generally tends to yield unphysical results in the vicinity of the tip. The position at which the two methods of computation start to differ significantly, can be regarded as another hallmark of the loss of validity of lubrication model.

Finally, let us note that the behavior observed in surge tip, with a rapid disappearance of the unyielded plug and shear invading the whole fluid layer, is consistent with the qualitative prediction made by Piau Piau [1996] almost 20 years ago. This author attributed plug disappearance to the development of extensional normal stresses. Later developments Balmforth and Craster [1999]; Balmforth and Liu [2004] demonstrated that, as soon as the free-surface is not perfectly uniform, significant normal stresses effectively develop in the pseudo-plug. These normal stresses make up for the smallness of the shear stress in this zone, and place the pseudo-plug just above the yield threshold. However, Eq. (7.5) governing the evolution of plug thickness, and the whole lubrication model presented in section 7.3, remain unchanged at lowest order in ϵ by the existence of these

normal stresses. Proper examination of Piau's assumption Piau [1996] therefore appears as another argument to compare our experimental data with thin-layer models at higher orders.

7.7 Conclusion and outlook

Using an original conveyor belt channel and a transparent model material (Carbopol), we monitored internal dynamics of gravity-driven free-surface viscoplastic surges. Advanced velocimetry techniques were developed to minimize experimental errors and achieve high-resolution measurements from the uniform zone to the close vicinity of the contact line. Our results provide the first experimental characterization of the complete velocity field (longitudinal and vertical components) inside viscoplastic surges for a wide range of flow conditions (Froude number varying between 7×10^{-2} and 0.4). From velocity data, local shear rates were derived to investigate the existence of unyielded plug zones inside the flow. Lastly, the free-surfaces of the surges were also measured. This unique dataset was then compared to a thin-layer model based on lubrication approximation. In this framework, flow structure is assumed to remain the same as in a steady uniform regime, with 2-layer velocity profiles and the existence of a (pseudo-)plug zone below the free surface.

The main findings of this study can be summarized as follows :

• Lubrication model provides an accurate description of the flow in most of the surge. The 2-layer structure of the velocity profiles and the progressive thinning of the plug layer in the front zone predicted by the model, are clearly observed in the data. There is no evidence of basal slip in the experimental results.

•Discrepancies between measurements and predictions of lubrication model arise in the tip of the surge, typically in the first 10 – 20 mm close to the contact line. In this zone, the plug layer rapidly disappears and shear invades the whole fluid layer. The free surface also displays a steeper shape than in the theoretical prediction.

• The position at which discrepancies with lubrication model occur, appears to move farther from the tip as yield number G increases. However, additional experiments would be needed to better untangle the respective influences of Froude and yield numbers Fr and G on discrepancy onset.

• In the tip of the surge, velocity profiles predicted by lubrication model are highly dependent on whether the computations are carried out with theoretically-computed or experimentally-measured values of flow height h and flow height gradient $\partial_x h$.

Failure of lubrication model in surge tip can be primarily attributed to the break-down of thin-layer assumption due to steepening of the free surface. More sophisticated models need to be used to capture flow structure in this region. In this prospect, and although complete derivations in the case of a Herschel-Bulkley constitutive law remain to carried out, mathematically-consistent

thin-layer models based on asymptotic developments at higher orders have been proposed for viscoplastic fluids Balmforth and Liu [2004]; Fernandez-Nieto et al. [2010]. Our experimental results now offer a complete dataset to assess the predictive capabilities of these advanced models. Similarly, our data shall also constitute a useful benchmark for DNS simulations, which, in the domain of free-surface viscoplastic flows, remain rare Vola et al. [2004]. Ultimately, such experiment-model comparisons are awaited to help qualifying and improving the performances of operational numerical tools used for, *e.g.*, evaluating hazards and risks caused by gravity-driven flows in geophysical context.

7.8 Appendix : Automatic angle detection in STV

In the case of a velocity field characterized by two components u and v, let us define $D(x, y, t)$ the 3D spatio-temporal diagram obtained by stacking a given sub-image for all recorded times. Smoothed-out derivatives of the spatio-temporal diagram along the 3 dimensions, D_x, D_y and D_t, are computed through convolutions with a 3D first-order Gaussian kernel of standard deviation $s_1 = (1, 1, 1)$ px. Local structure tensor $\mathbf{S}$ is then defined at each point p of the 3D space as :

$$S_{ij}(p) = \int g(r) D_i(p - r) D_j(p - r)\ d^3r, \tag{7.14}$$

where $i, j = x, y, t$, and g is a 3D Gaussian kernel of standard deviation $s_2 = (2, 2, 2)$ px. The role of this second Gaussian convolution is to average out the structure tensor over neighborhoods whose size should be representative of the typical pattern in the images (in our case, the streaks produced by the tracers). In general, the values of s_1 and s_2 should be optimized according to the characteristics of each image series. In our case, these parameters were chosen *a priori* and then kept constant, since the results have been found essentially independent of small variations around this initial choice.

At each point of the 3D space, the eigenvalues and eigenvectors of the structure tensor $\mathbf{S}$ characterize the orientation of the gradient of D. Hence, the eigenvector associated to the largest (resp. smallest) eigenvalue λ_1 (resp. λ_3) characterizes the direction of maximum (resp. minimum) gradient. In our case, since tracers define linear streaks of quasi-constant intensity in the spatio-temporal diagram, we expect λ_3 to be small and the corresponding eigenvector to be aligned with these streaks. Orientation of the streaks can thus be measured through a simple diagonalization of the structure tensor. In practice, the eigenvector of interest is computed at each point of the spatiotemporal diagram and projected along the (x, t)- and (y, t)-planes. As a result, two distributions of angle values are constructed. The final angle measures for the considered sub-image are then obtained as the modes of these distributions. The corresponding standard deviations provide estimates of measurement uncertainties.

7.9 Appendix : Expression of vertical velocity

Assuming $v = 0$ at $y = 0$, vertical velocity in the flow is obtained as : $v = -\int_0^y \partial_x u \, dy'$. From Eq. (7.6), lengthy but straightforward calculations yield the following expression :

$$v = -\lambda^{1/n} \left(1 - \cot\theta \partial_x h\right)^{1/n} \left(h - h_p\right)^{(n+1)/n} \Bigg[\partial_x h \, \mathcal{V}_1(\zeta) - \partial_x h_p \left(\mathcal{V}_1(\zeta) + \frac{h - h_p}{h_p} \mathcal{V}_2(\zeta) \right) \Bigg], \quad (7.15)$$

where we introduced the reduced variable $\zeta = 1 - y/(h - h_p)$, and the functions $\mathcal{V}_1(\zeta)$ and $\mathcal{V}_2(\zeta)$ are given by :

$$\mathcal{V}_1(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} - \zeta + \frac{n}{n+1}\zeta^{(n+1)/n} & \text{if } \zeta > 0 \\ \frac{1}{n+1} - \zeta & \text{if } \zeta \leq 0 \end{cases} \quad (7.16)$$

$$\mathcal{V}_2(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{2n+1} - \zeta + \frac{n}{2n+1}\zeta^{(2n+1)/n}\right) & \text{if } \zeta > 0 \\ \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{2n+1} - \zeta\right) & \text{if } \zeta \leq 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

7.10 Appendix : Non-dimensional stationary-wave solutions

When recast in terms of the (starred) non-dimensional variables introduced in section 7.5.2, the differential equation for the free-surface shape of stationary-wave solutions [Eq. (7.9)] becomes :

$$\cot\theta \frac{dh^*}{dx_f^*} = 1 - \frac{G}{h_p^*}, \quad (7.18)$$

where yield number G is defined in Eq. (7.12). Similarly, the algebraic equation for the plug thickness [Eq. (7.10)] becomes :

$$mHb^{1/n} \left(h^* - h_p^*\right)^{(n+1)/n} \left(h^* + \frac{n}{n+1} h_p^*\right) - h^* {h_p^*}^{1/n} = 0, \quad (7.19)$$

with $Hb = (\tau_c/K)(h_N/u_b)^n$ the Herschel-Bulkley number. Note that Hb is here directly related to G according to :

$$m^n Hb \left(1 - G\right)^{(n+1)} \left(1 + \frac{n}{n+1} G\right)^n = G. \quad (7.20)$$

In practice, Eq. (7.18) is integrated numerically using python function *odeint*. For each value of h^*, the corresponding value of ${h_p}^*$ is obtained by solving Eq. (7.19) with python solver *brentq*.

Recalling that, for the stationary-wave solutions under consideration, the depth-averaged velocity q/h is equal to u_b, the expression for plug velocity [Eq. (7.7)] can be recast as :

$$u_p^* = \frac{2n+1}{n+1} \frac{h^*}{h^* + \frac{n}{n+1} h_p^*}, \quad (7.21)$$

while Eq. (7.6) for the complete velocity profile remains unchanged in terms of non-dimensional variables. Similarly, the expression for the vertical velocity [Eq. (7.15)] can be recast as :

$$v^* = -\frac{2n+1}{n}\frac{h^*}{h^* + \frac{n}{n+1}h_p^*}\left[\frac{dh^*}{dx_f^*}\,\mathcal{V}_1(\zeta) - \frac{dh_p^*}{dx_f^*}\left(\mathcal{V}_1(\zeta) + \frac{h^* - h_p^*}{h_p^*}\mathcal{V}_2(\zeta)\right)\right]. \quad (7.22)$$

As for u^*, the right-hand side of this expression is amenable to a function of h^* and h_p^* only, using Eq. (7.18) and the following relation that derives from Eq. (7.19) :

$$\frac{dh_p^*}{dx_f^*} = \frac{h_p^*}{h^*}\frac{(n+1)^2 h^{*2} + n^2 h_p^{*2} + n h^* h_p^*}{(n+1)h^{*2} + 2n^2 h_p^{*2} + 2n h^* h_p^*}\frac{dh^*}{dx_f^*}. \quad (7.23)$$

7.11 Supplementary material

This supplementary content is devoted to present results for experiments C_1, C_3 and C_4, whose characteristics are presented in Table 1 of the paper (Tab.7.1).

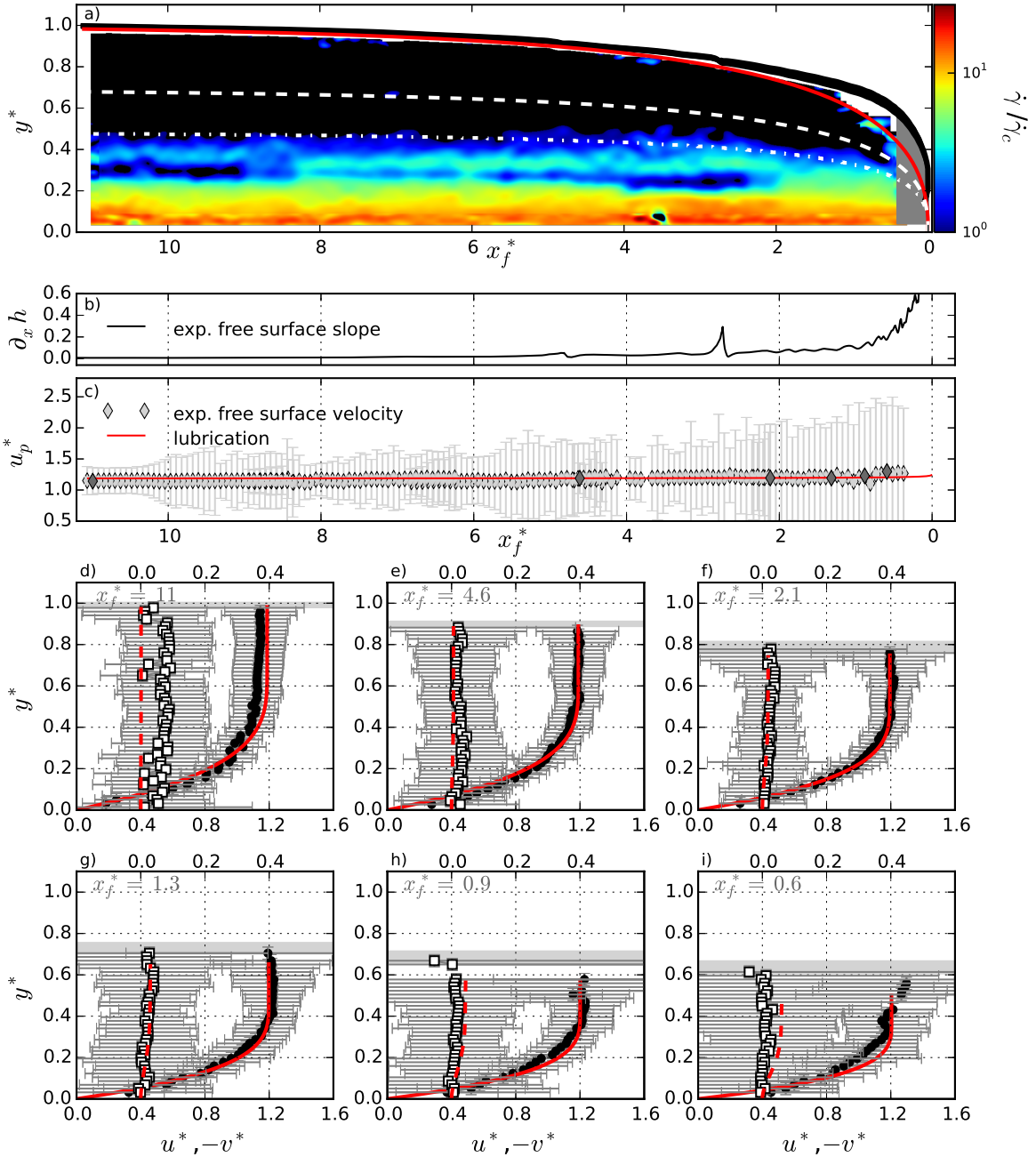

Figure 7.16 Non-dimensional experimental – theoretical comparison for experiment C_1. The legend is the same as for Fig. 7.9 The shear-rate threshold is 0.54s^{-1}.)

.

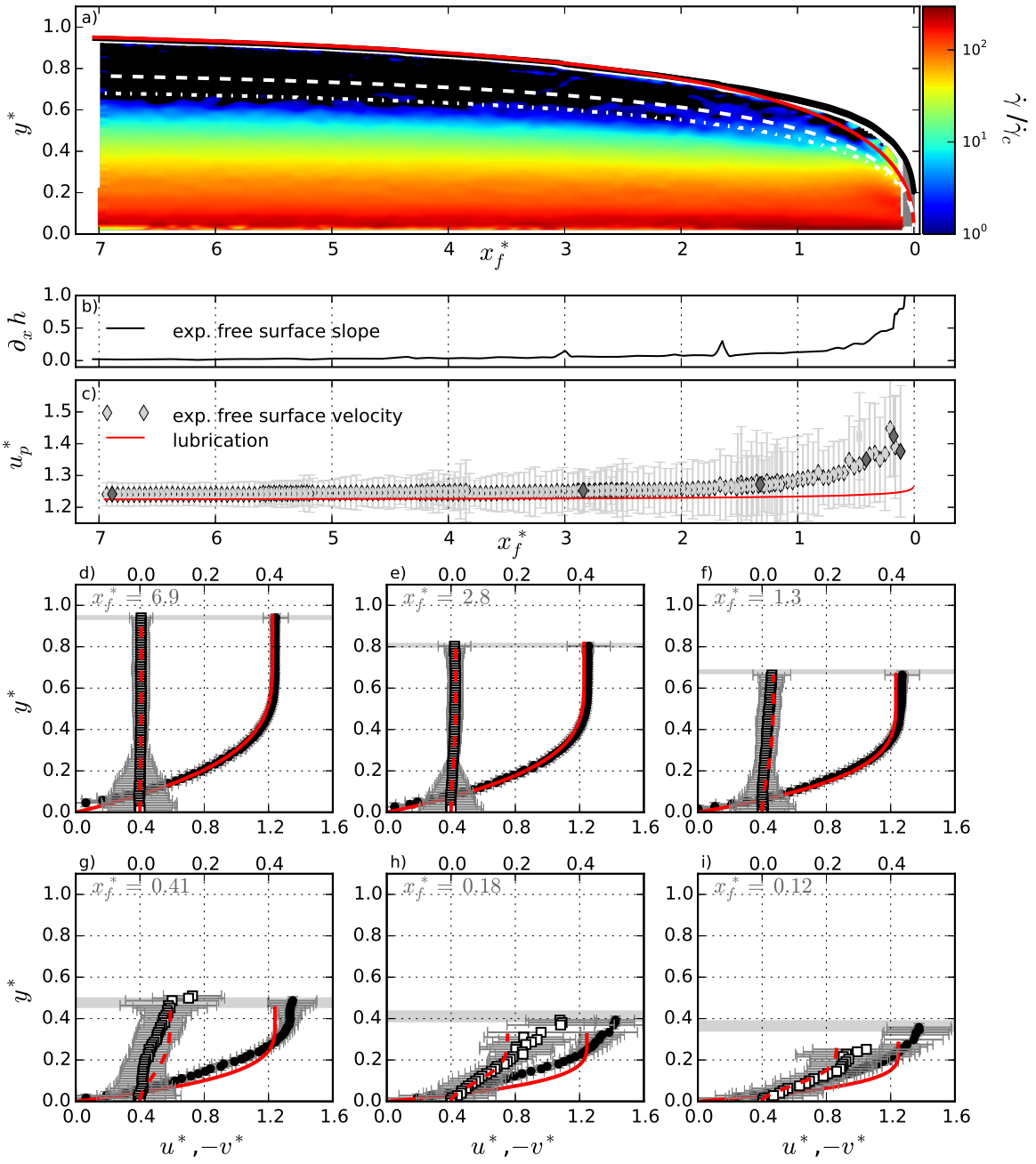

Figure 7.17 Non-dimensional experimental – theoretical comparison for experiment C_3. The legend is the same as for Fig. 7.9. The shear-rate threshold is 0.18s^{-1}.

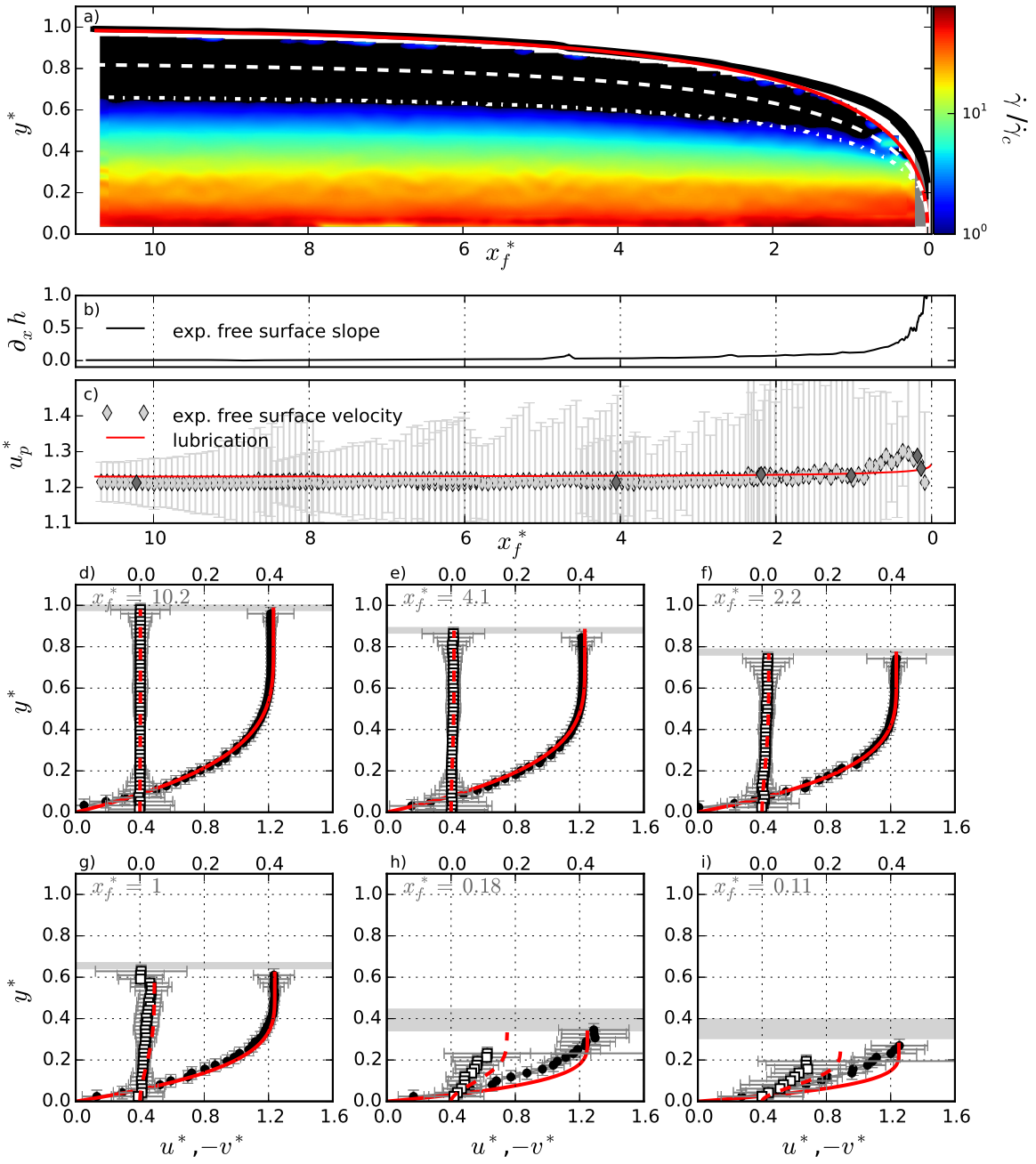

Figure 7.18 Non-dimensional experimental – theoretical comparison for experiment C_4. The legend is the same as for Fig. 7.9. The shear-rate threshold is 0.96s^{-1}.

7.12 Complément 1

Nous présentons ici les figures de l'ensemble des expériences réalisées.

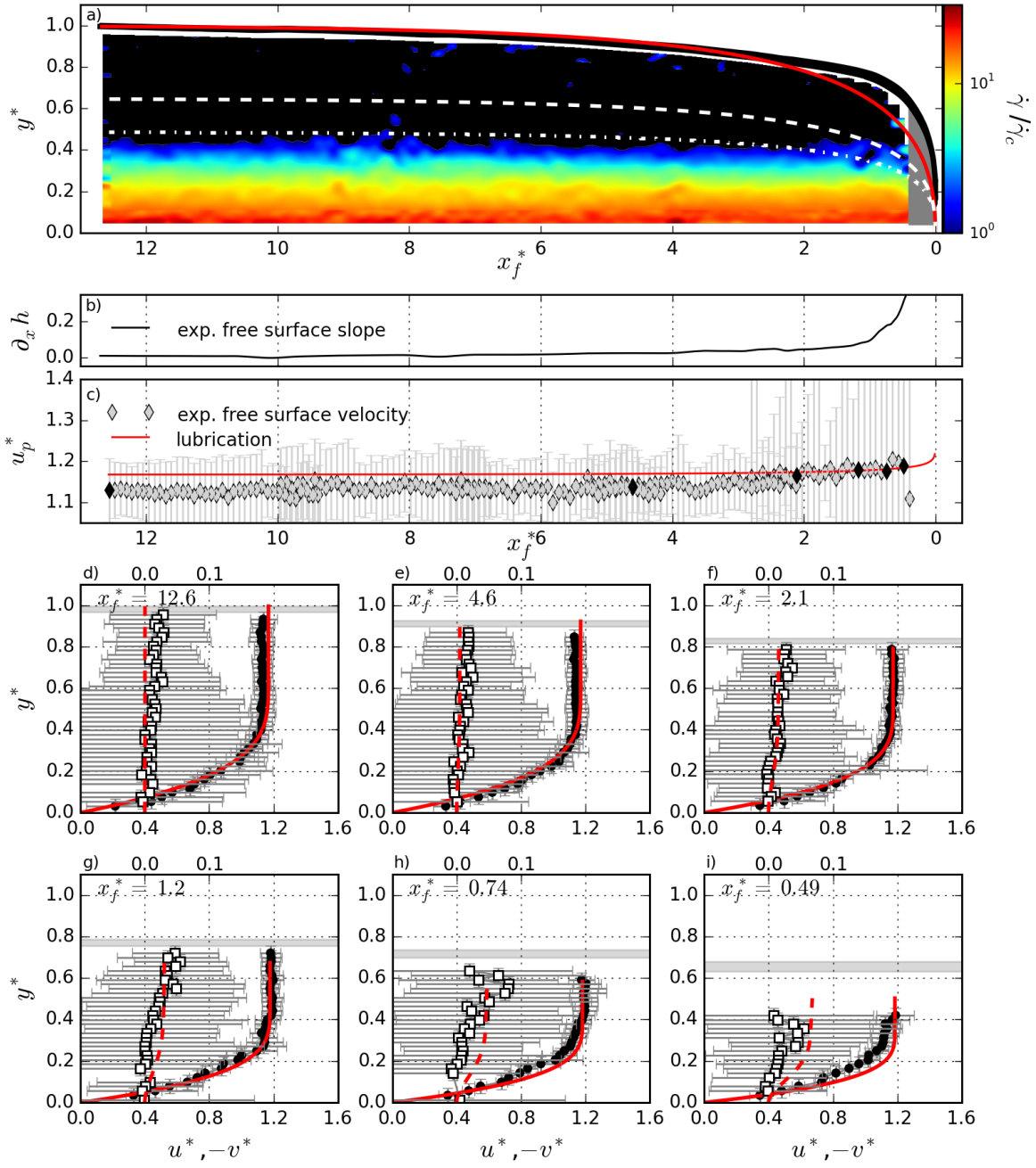

Figure 7.19 Même légende que pour 7.9. Expérience 150309-C2-V1. $\dot{\gamma}_c = 0.34s^{-1}$.

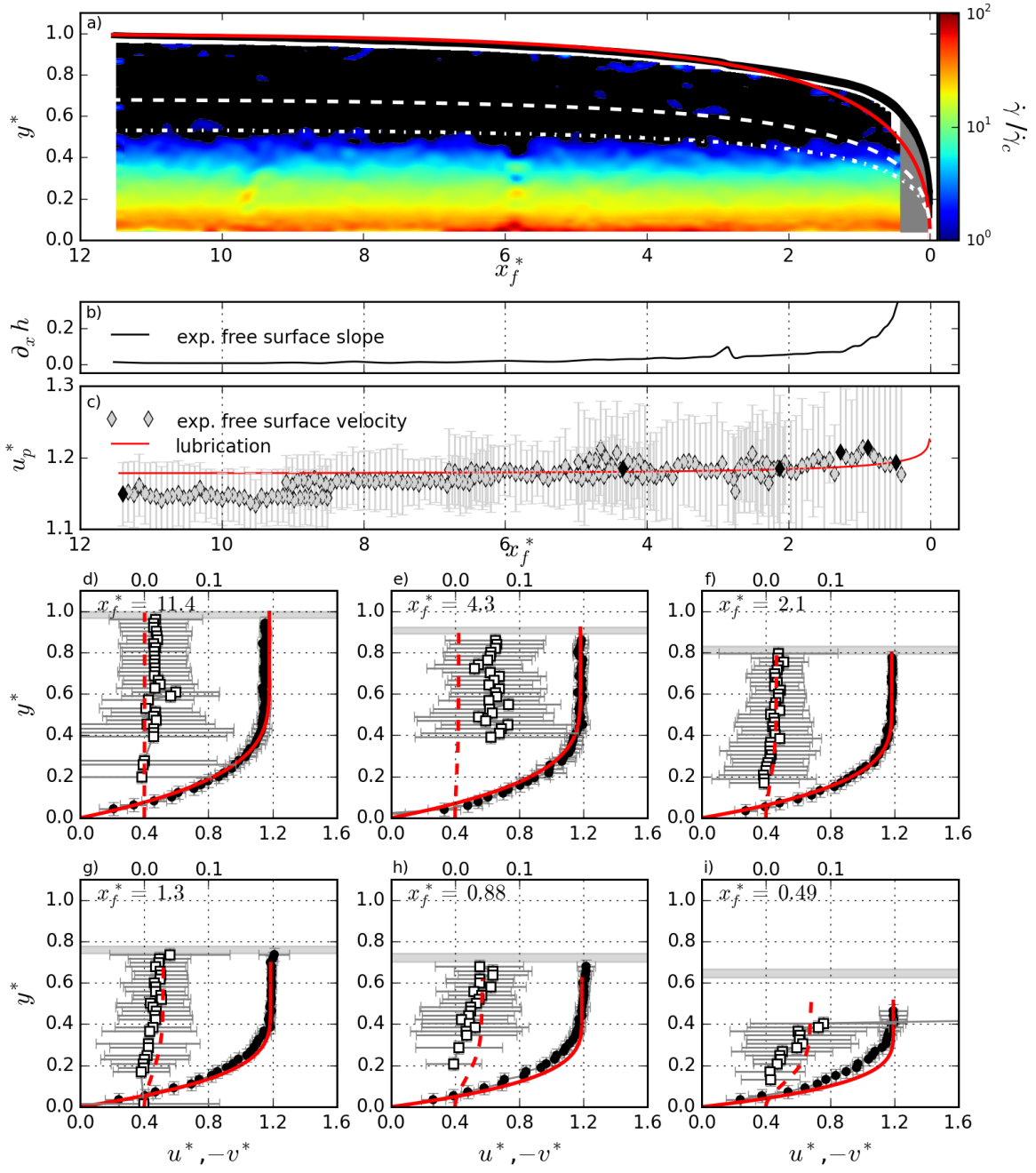

Figure 7.20 Même légende que pour Fig.7.9. Expérience 150309-C2-V2. $\dot{\gamma}_c = 0.34 s^{-1}$.

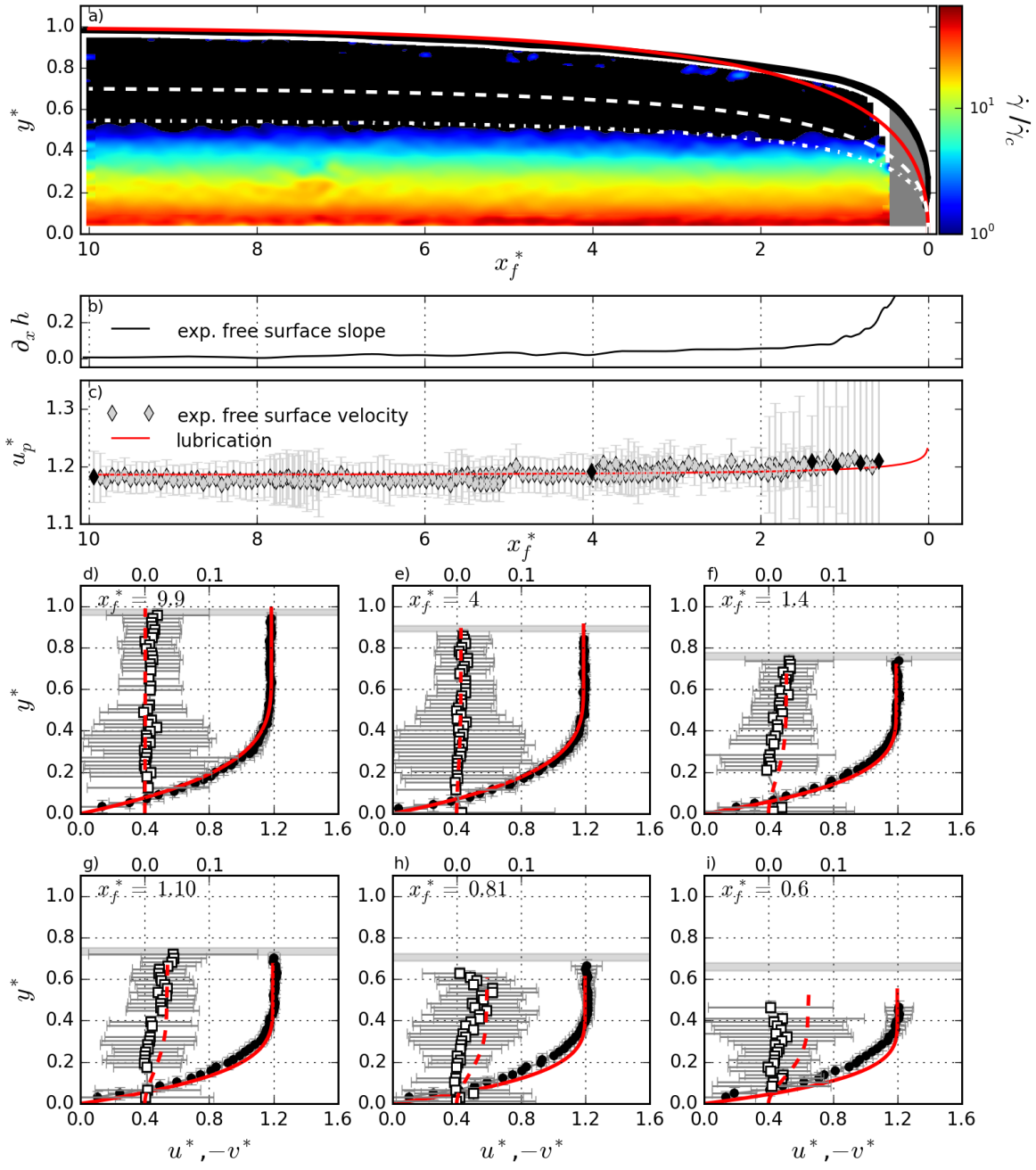

Figure 7.21 Même légende que pour Fig.7.9. Expérience 150309-C2-V3. $\dot{\gamma}_c = 0.46 s^{-1}$.

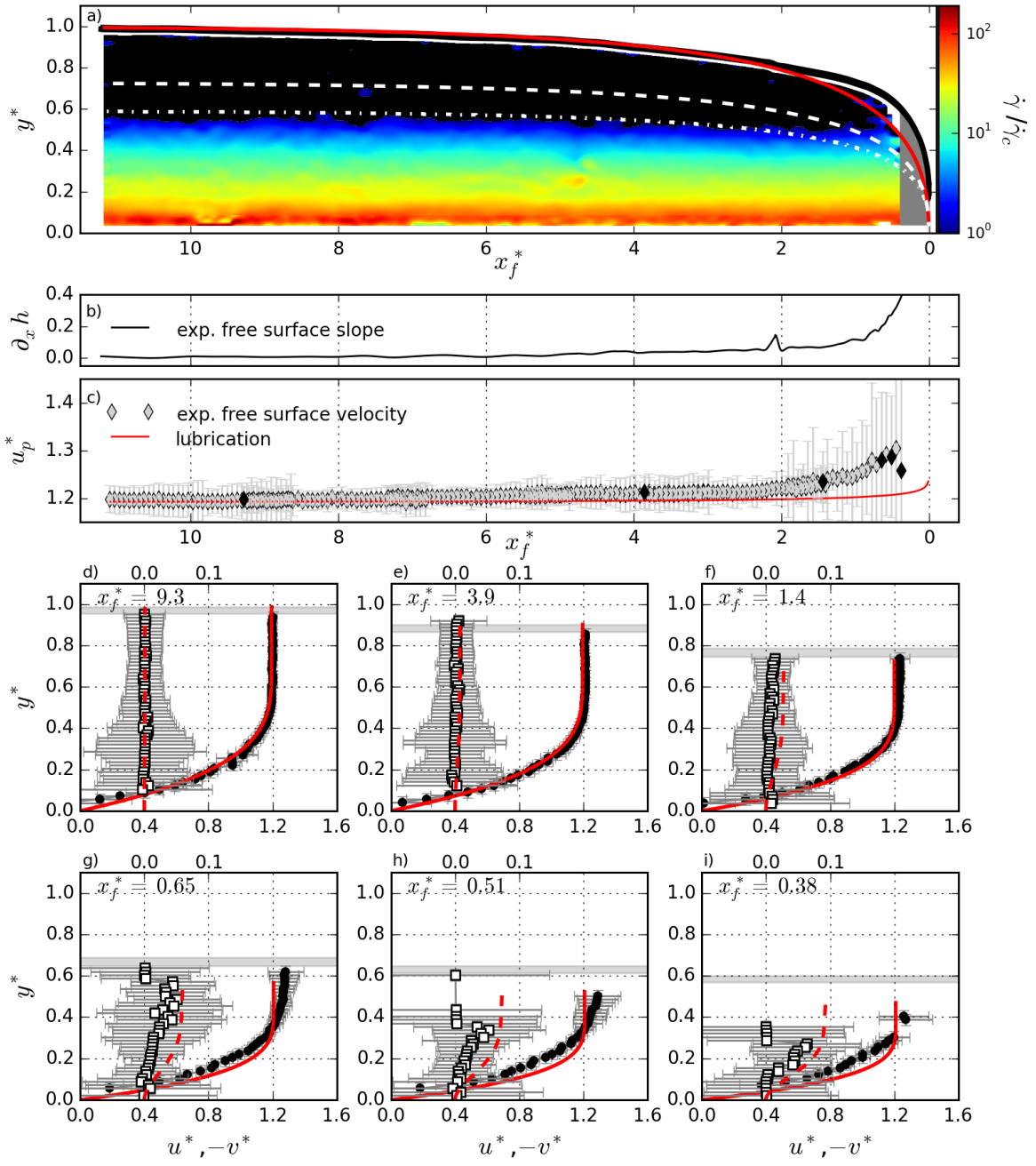

Figure 7.22 Même légende que pour Fig.7.9. Expérience 150309-C2-V4. $\dot{\gamma}_c = 0.41 s^{-1}$.

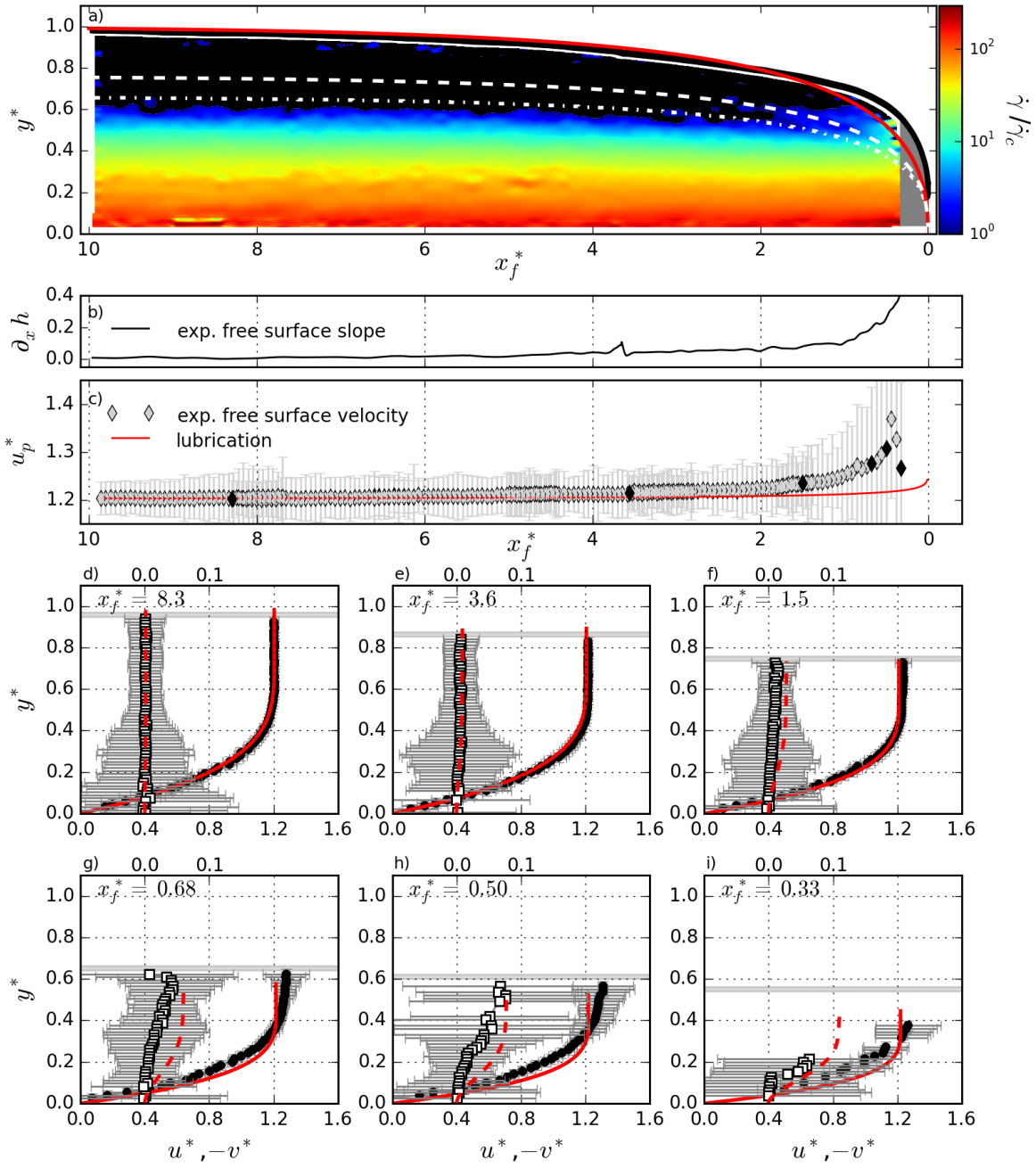

Figure 7.23 Même légende que pour Fig.7.9. Expérience 150309-C2-V5. $\dot{\gamma}_c = 0.23 s^{-1}$.

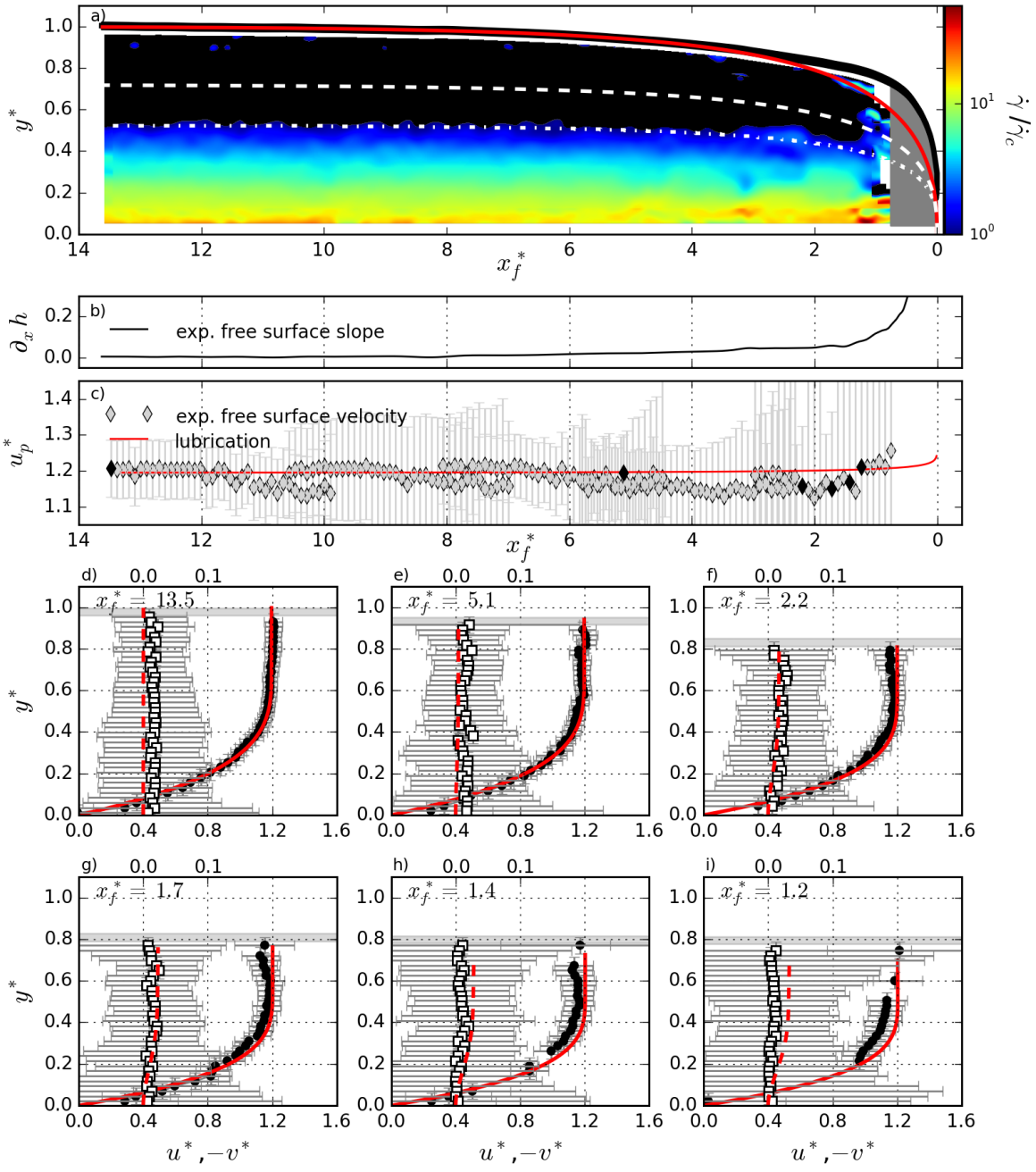

Figure 7.24 Même légende que pour Fig.7.9. Expérience 150327-V1. $\dot{\gamma}_c = 1.0s^{-1}$.

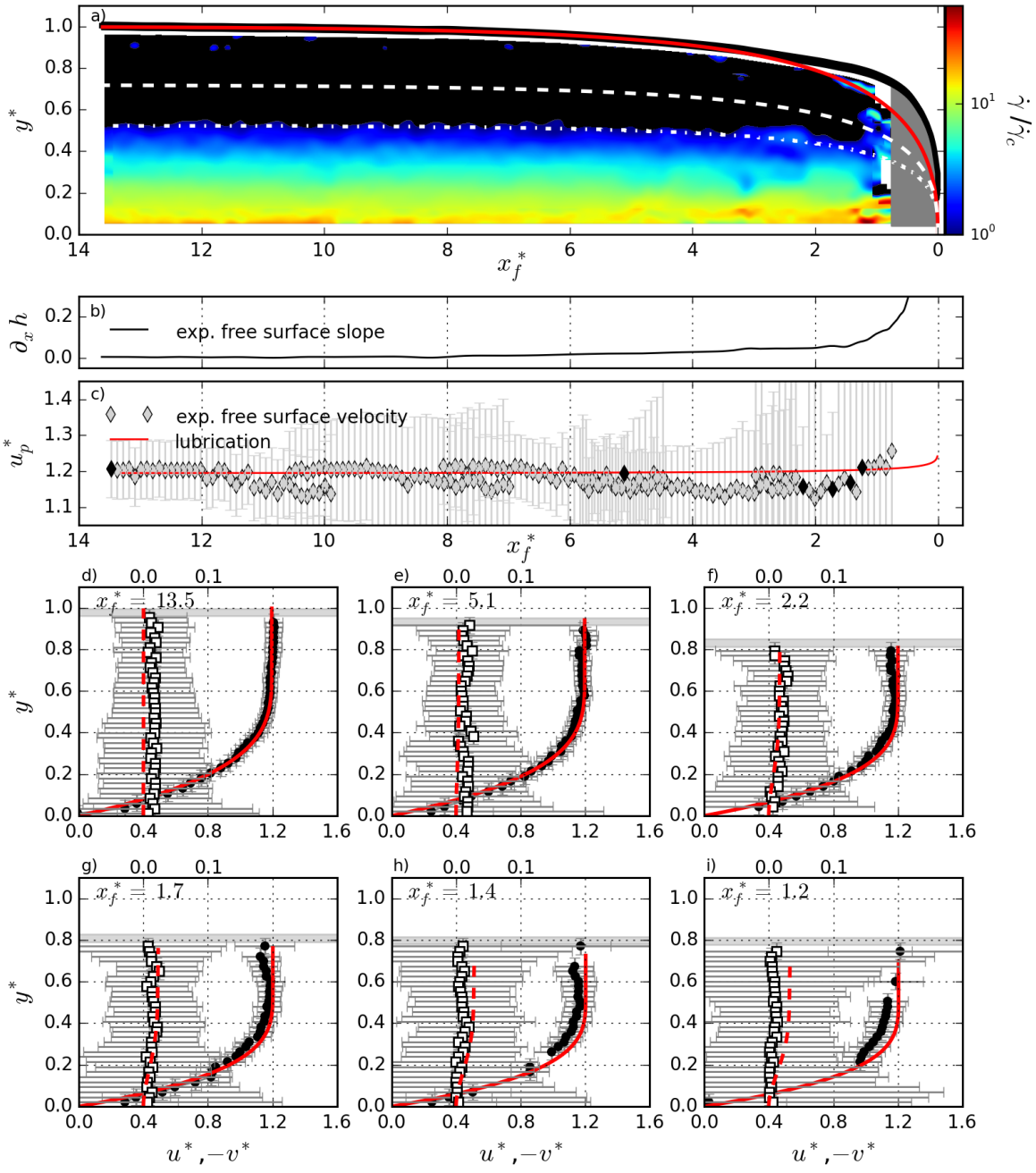

Figure 7.25 Même légende que pour Fig.7.9. Expérience 150327-V2.$\dot{\gamma}_c = 0.51 s^{-1}$.

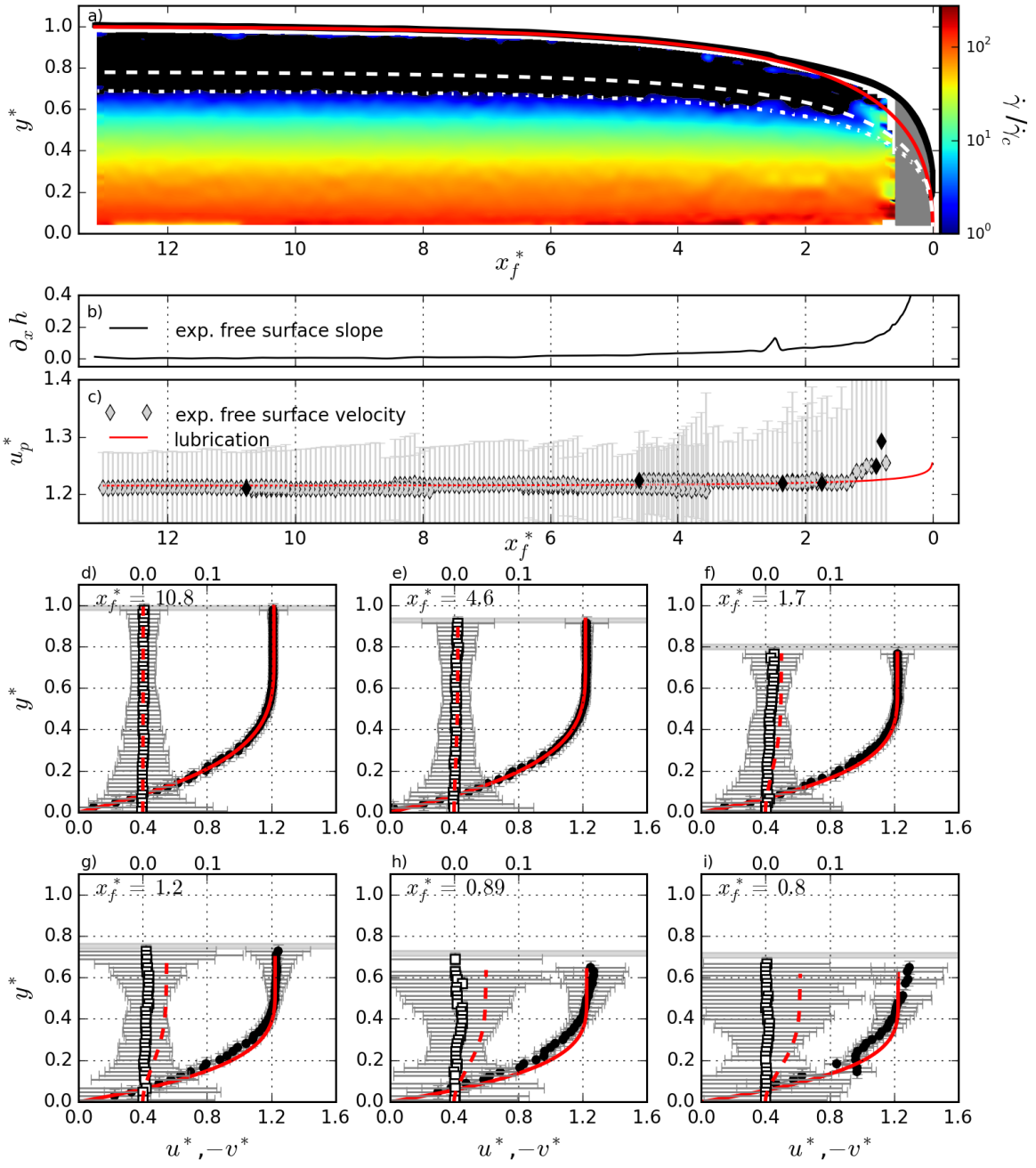

Figure 7.26 Même légende que pour Fig.7.9. Expérience 150327-V3. $\dot{\gamma}_c = 0.26 s^{-1}$.

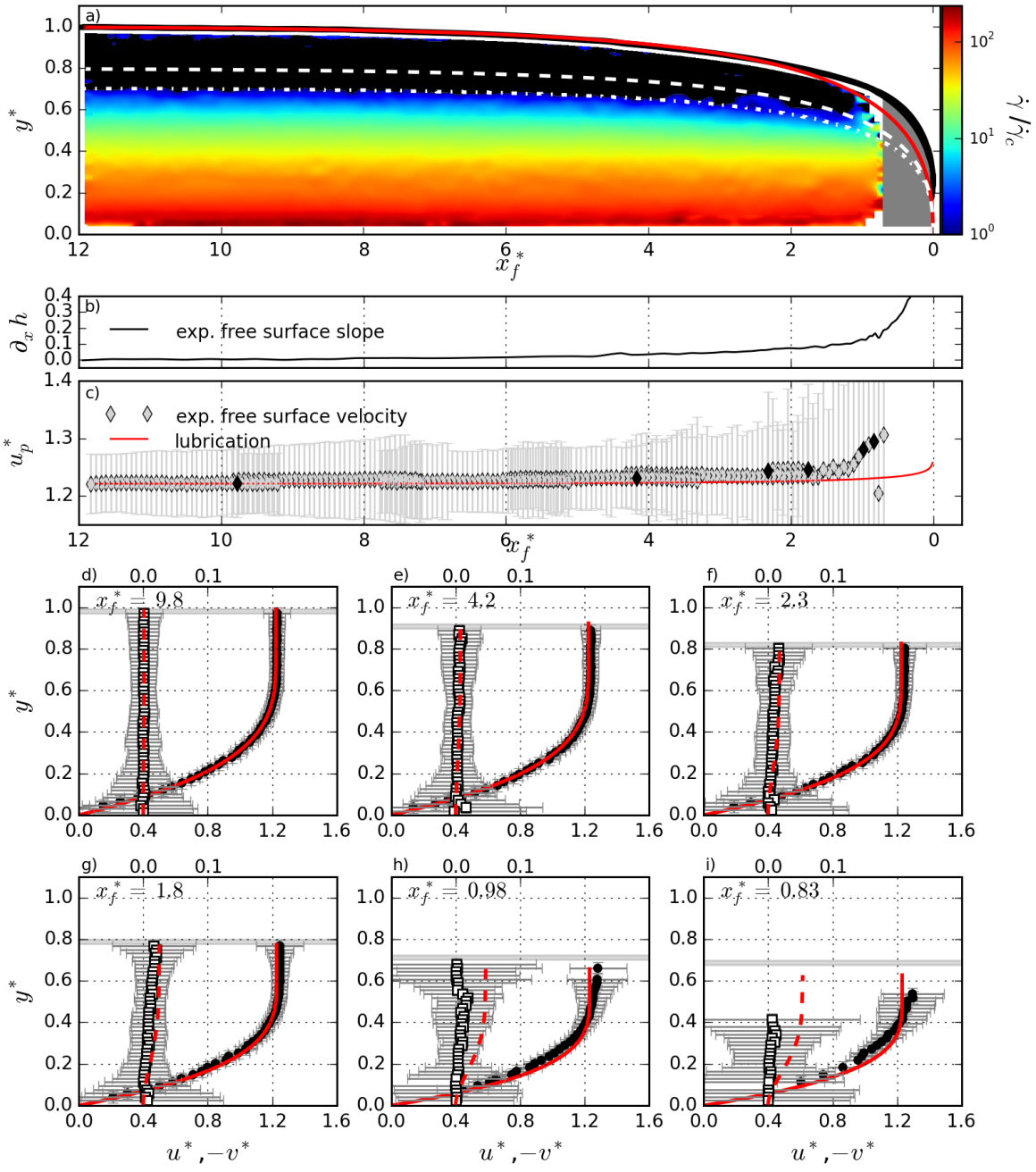

Figure 7.27 Même légende que pour Fig.7.9. Expérience 150327-V4. $\dot{\gamma}_c = 0.32s^{-1}$.

7.13 Complément 2

Les traitements et résultats étudiés au § 7.1, sont maintenant présentés pour l'ensemble des expériences réalisées. Les profils de vitesse, les champs de taux de déformation, les pentes de la surface libre, les vitesses de surface et les formes de front sont représentés pour chaque expérience dans les figures 7.19, 7.20, 7.21, 7.22, 7.23, 7.24, 7.25, 7.26 et 7.27. La nomenclature et les configurations expérimentales sont référencées dans le Tableau 4.1 et 7.2. Nous présenterons dans un premier temps les résultats de l'article (§ 7.1) qui sont corroborés par l'ensemble des expériences. Ensuite nous présenterons des analyses supplémentaires.

7.13.1 Profils de vitesse

Pour l'ensemble des expériences, les profils de vitesse longitudinale mesurés et théoriques sont en bon accord lorsque $x_f^* > 1$. Plus proche de la ligne de contact, la forme des profils expérimentaux diffère de la forme théorique, et l'accord disparaît. L'évolution du plug est liée à l'évolution des profils de vitesse, le plug apparent disparaît là où les profils de vitesse expérimentaux sont complètement cisaillés.

Pour les vitesses verticales v, l'étude systématique de la comparaison entre les mesures et les prédictions théoriques est plus délicate qu'avec les vitesses longitudinales. En effet les plus petites quantités impliquées sont plus difficiles à mesurer car elles sont plus difficilement identifiables par rapport au bruit de mesure. Pour l'ensemble des mesures, la forme du profil de vitesse verticale commence à s'écarter de la prédiction théorique au même endroit que le fait le profil longitudinal. Pour plusieurs expériences, ce que nous avions décrit sur $C_5(150504)$ se reproduit. Nous observons un désaccord de sur la forme de profil de vitesse autour de $x_f^* = 1 - 1.5$, puis l'accord est retrouvé pour les très petits x_f^* (Fig. 7.9i, 7.18i et 7.22i).

Nous pourrions envisager de réduire le bruit de mesure sur la vitesse v en exploitant la relation de la conservation de la masse. Dans ce cas-là nous pourrions reconstituer les profils de vitesse verticale à partir de la dérivée de la vitesse longitudinale $\partial u/\partial x$. Cependant le bruit sur le calcul de $\partial u/\partial x$ est trop important et rend le calcul de v inexploitable dans nos premiers essais. Des développements supplémentaires sont nécessaires pour exploiter la conservation de la masse et compléter les mesures de vitesses verticales.

7.13.2 Forme du front

La forme du front de l'ensemble des expériences a été reportée figure 7.28. Cette figure permet de regrouper l'ensemble des mesures de forme de la surface libre et de les comparer aux prédictions théoriques.

Sur toutes les expériences, la prédiction théorique a tendance à sous-estimer la position de la surface libre au front, cet écart est d'autant plus visible en échelle logarithmique (encart). Pour l'ensemble des expériences, la distance critique de la forme de front ($x_{fc,f}^*$) a été calculée et présentée dans le tableau 7.2. L'écart entre la forme du front prédite et mesurée semble qualitativement se produire plus en amont de la ligne de front lorsque le nombre G associé à l'écoulement observé est grand. Les résultats des calculs de la distance critique $x_{fc,f}^*$ corroborent cette observation

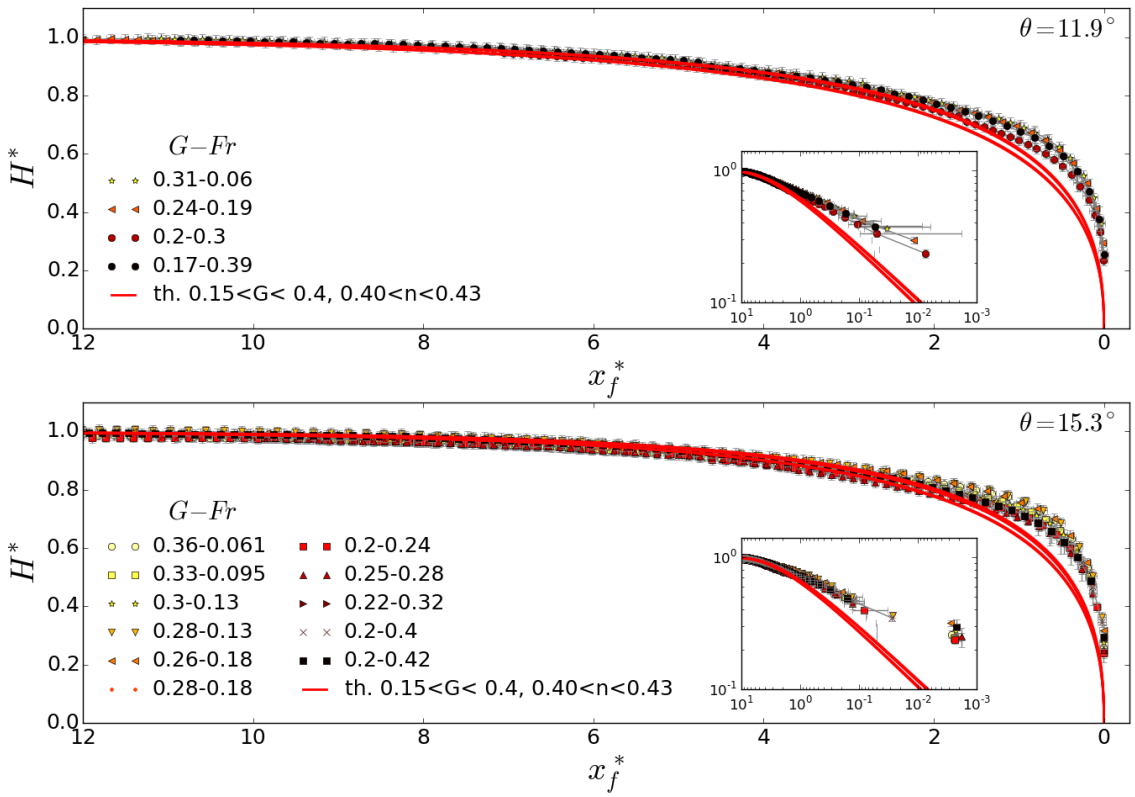

Figure 7.28 Contour expérimental et barre d'erreur de l'ensemble des expériences. Comparaison à un modèle de lubrification. L'encart représente l'échelle logarithmique.

puisqu'ils sont autour de $x_f^* = 2$ pour les nombres G les plus grands, soit environ 0.3 (correspondant à des nombres de Froude inférieurs à 0.1 compte tenu des paramètres expérimentaux), et autour de 1.5 lorsque G est inférieur à 0.2 (correspondant à des nombres de Froude supérieurs à 0.3 compte tenu des paramètres expérimentaux).

7.13.3 Pente de la surface libre

Pour l'ensemble des expériences, la déviation des résultats expérimentaux par rapport au modèle de lubrification se produit pour des pentes de surface libre d'environ 0.1 (Tab. 7.2). Ce critère ($\partial_x h < 0.1$) peut être considéré comme un critère objectif définissant expérimentalement la zone dans laquelle le modèle échoue à prédire correctement la dynamique de l'écoulement.

7.13.4 Tableau de synthèse

Le Tableau 7.2 synthétise les résultats pour l'ensemble des expériences pour lesquelles nous disposons des mesures de la dynamique interne et de la forme du front.

exp.	τ_c	K	n	θ	G	Fr	Re	Bi	Re/Fr^2	$x^*_{fc,f}$	$x^*_{fc,u}$	$\partial_x h_c$
$150309v1$	12	8.2	0.40	15.3	0.35	0.061	0.044	1.2	11.8	2.1	0.74	0.042
$C_1160113v1$	9.6	8.8	0.42	11.9	0.31	0.064	0.053	0.84	12.9	2.18	0.75	0.073
$150309v2$	12	8.2	0.40	15.3	0.32	0.095	0.10	0.98	11.3	1.85	0.80	0.057
$150309v3$	12	8.2	0.40	15.3	0.29	0.13	0.19	0.88	11.2	1.78	0.96	0.055
$150327v1$	8.1	5.8	0.42	15.3	0.28	0.13	0.18	0.75	10	1.99	1.43	0.049
$150327v2$	8.1	5.8	0.42	15.3	0.26	0.18	0.31	0.68	9.6	2.06	1.02	0.058
$150309v4$	12	8.2	0.40	15.3	0.27	0.18	0.36	0.78	11.1	1.62	1.2	0.069
$C_2160127$	7.2	5.1	0.41	11.9	0.24	0.18	0.47	0.71	14.5	1.92	0.74	0.071
$150309v5$	12	8.2	0.40	15.3	0.24	0.28	0.82	0.68	10.5	1.32	0.85	0.096
$C_3160113v5$	9.6	8.8	0.42	11.9	0.20	0.30	1.05	0.48	11.7	1.25	0.71	0.114
$150327v3$	8.1	5.8	0.42	15.3	0.22	0.32	0.93	0.55	9.1	1.59	0.97	0.076
$C_4150612$	5	4.8	0.41	11.9	0.17	0.38	1.6	0.39	11.1	1.68	0.54	0.085
$C_5150504$	7.2	5.0	0.43	15.3	0.20	0.39	1.4	0.52	9.2	1.32	0.73	0.091
$150327v4$	8.1	5.8	0.42	15.3	0.20	0.42	1.6	0.50	9.2	1.40	0.90	0.097

Table 7.2 Caractéristiques des expériences réalisées avec du gel de Carbopol : contrainte seuil, τ_c (Pa), consistance K $(Pa.s^n)$, indice d'écoulement n, angle de la pente du canal θ (°), nombre G, nombre de Froude Fr, nombre de Reynolds Re et nombre de Bingham Bi appelé aussi parfois nombre de Herschel Bulkley, ratio Re/Fr^2, distance critique sur la hauteur de la surface libre $x_{fc,f}$, distance critique sur le profil de vitesse longitudinale $x_{fc,u}$ et pente expérimentale de la surface libre $\partial_x h_c$ à la position $x_{fc,f}$. Vitesse du tapis mobile u_b et hauteur de la zone uniforme dans Tab.4.1

7.14 Complément 3

Nous apportons dans cette section quelques analyses supplémentaires aux principaux résultats de l'article.

7.14.1 Le point de rebroussement

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au point de rebroussement qui, rappelons le, définit la position de l'origine de la ligne de front, là où la pente de la surface libre devient verticale (voir § 4.2.7). La figure 7.29 présente l'évolution de la hauteur du point de rebroussement en fonction de la vitesse imposée du tapis mobile. La vitesse ne semble pas influencer la position du point de rebroussement dans l'écoulement. Le fait que la forme du front mesurée ait tendance à s'écarter de la prédiction théorique pour des distances x^*_f plus importantes lorsque le nombre G est fort n'est donc pas liée à une variation de position du point rebroussement.

7.14.2 Les courbes d'écoulement

Dans la continuité du §7.6.4 nous présentons ici les courbes d'écoulement apparentes issues de la différenciation verticale des profils expérimentaux de vitesse longitudinale. La contrainte de cisaillement τ_{xy} est calculée avec la hauteur et la pente de la surface libre mesurées.

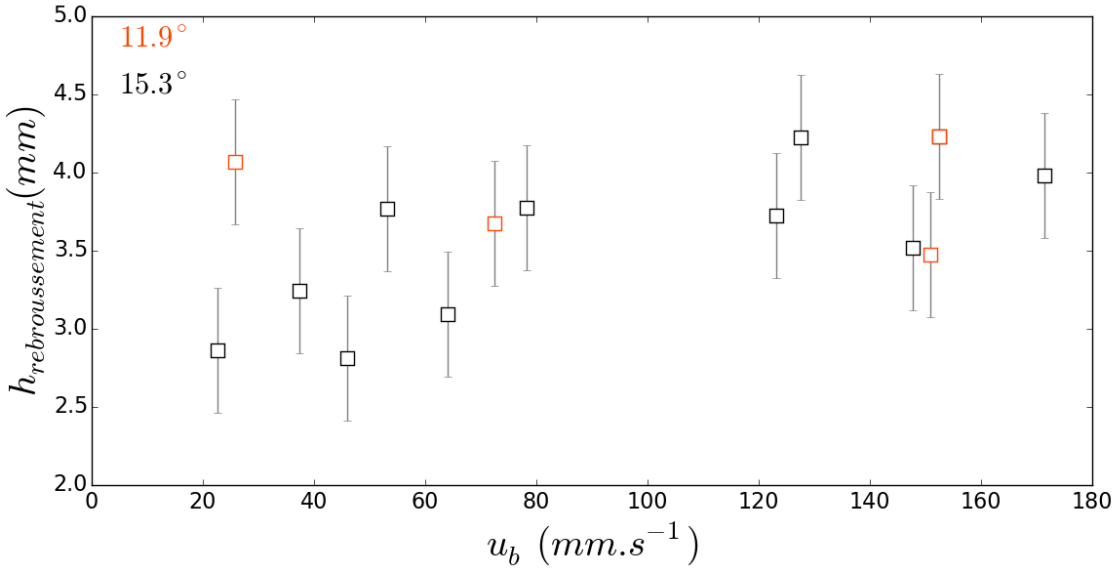

Figure 7.29 Évolution de la hauteur du point de rebroussement divisée par la hauteur de la zone uniforme en fonction de la vitesse de tapis imposée. Voir Fig.4.12 pour rappel des notations.

La figure 7.30 présente les courbes d'écoulement de la zone uniforme au front, pour une coulée de gel de Carbopol, dont la dynamique interne a été mesurée avec 5 vitesses imposées différentes. Les positions dans la coulée allant de $0.5h_N$ à $8h_N$ ($x_f^* \in [0.5, 8]$) ont été référencées et les rhéogrammes apparents ont été tracés pour chacune de ces positions. Les courbes d'écoulement de Herschel-Bulkley, issues des paramètres mesurés au rhéomètre et corrigés selon [Chambon et al., 2014] sont aussi représentées. Cette analyse permet d'étudier l'influence de la vitesse imposée à la coulée sur les courbes d'écoulement apparentes.

Pour l'ensemble des vitesses, les courbes d'écoulement se superposent sur une courbe d'écoulement unique, en bon accord avec un modèle rhéologique de Herschel-Bulkley (et avec les paramètres corrigés, voir §5.5.2, 7.1 et discussion de Chambon et al. [2014]).

Pour la vitesse la plus forte ($u_b = 128mm.s^{-1}$, G = 0.24 et Fr=0.28), (Fig.7.30a), le rhéogramme expérimental situé à $x_f^* = 3$ s'écarte de la courbe apparente unique pour des taux de déformations $\dot{\gamma}$ inférieurs à 0.2 s^{-1}. Pour $x_f^* = 1$, le rhéogramme expérimental s'écarte de la courbe apparente unique pour $\dot{\gamma} < 8\ s^{-1}$.

Pour la vitesse la plus faible ($u_b = 23mm.s^{-1}$, G = 0.35 et Fr=0.061) (Fig.7.30e), le rhéogramme expérimental situé à $x_f^* = 3$ ne s'écarte pas de la courbe apparente unique. Pour $x_f^* = 1$, le rhéogramme expérimental s'écarte de la courbe apparente unique pour $\dot{\gamma} < 0.2\ s^{-1}$

Finalement, on remarque que les courbes d'écoulement ont tendance à mieux se superposer pour les faibles vitesses. Plus la vitesse est forte, plus l'écart de comportement des courbes d'écoulement se produit pour des distances du front importantes. Cet écart a été attribué à un échec du modèle de lubrification au front dans le §7.1. Ici, on, peut ajouter qu'il est d'autant plus important que la vitesse imposée à la coulée augmente.

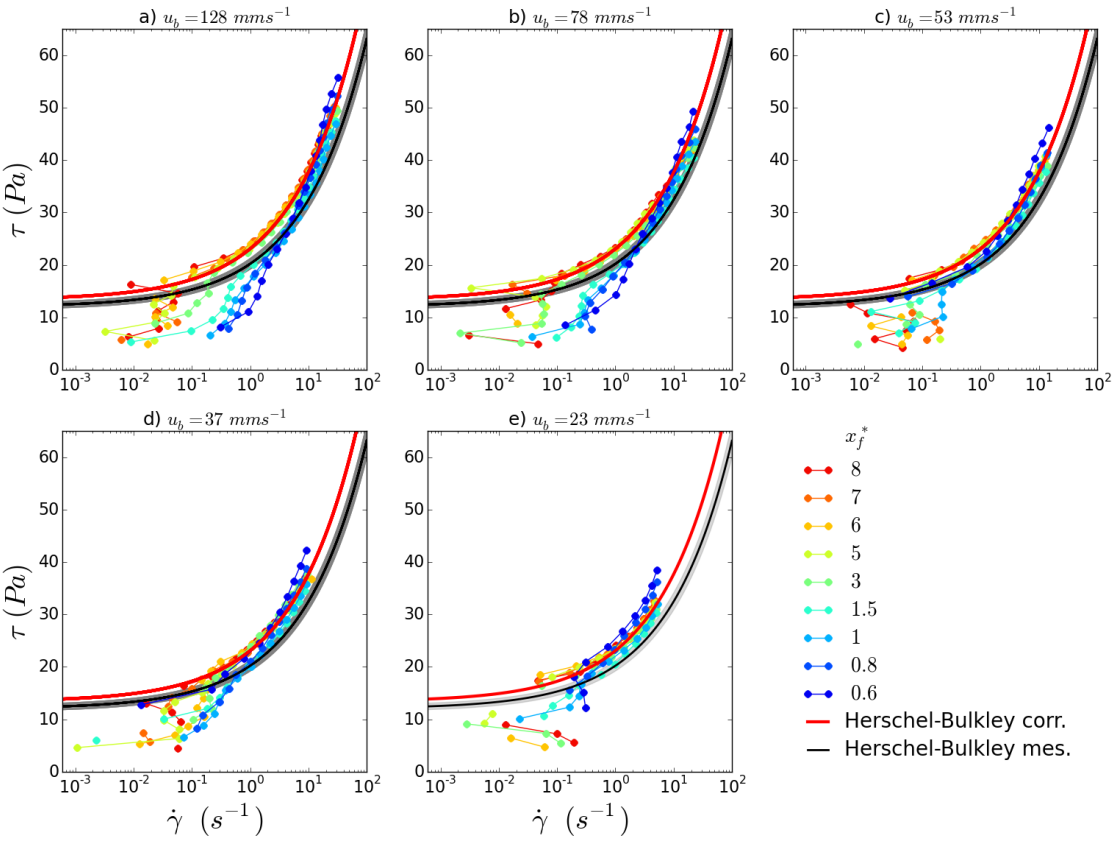

Figure 7.30 Courbes d'écoulement apparentes issues de la dérivation des profils de vitesse. Les valeurs de taux de déformation $\dot{\gamma}$ sont ici obtenues par une différenciation directe des profils de vitesse interpolés sur toute la coulée. De gauche à droite et de bas en haut : V5, V4, V3, V2 et V1. Expérience 150309.

7.15 Complément 4

Dans cette section, nous détaillerons techniquement les méthodes utilisées dans le cadre de cette thèse, qui ont contribué aux résultats, sans avoir été décrites jusqu'à présent.

7.15.1 Détermination de $x_{fc,f}$

Dans cette étude nous avons quantifié la position dans la coulée à partir de laquelle nous observons une différence entre les mesures expérimentales et le modèle. Cette position, appelée distance critique (x_{fc}), représente la distance depuis l'origine du front en dessous de laquelle la prédiction théorique s'éloigne des mesures. La distance à laquelle la hauteur du front expérimentale s'écarte de sa prédiction théorique est notée $x_{fc,f}$.
Elle est positionnée dès que l'écart avec le profil expérimental dépasse 15 pixels (∼0.6 mm). Ce seuil s'approche de l'incertitude maximum que l'on peut mesurer dans cette zone là. Ainsi, le point $x_{fc,f}$ est positionné selon un critère indépendant de l'expérience et de ses incertitudes. La figure 7.31a présente la forme de front théorique et expérimentale de l'expérience $150327v4$. La figure 7.31b représente l'évolution de l'écart de hauteur entre la prédiction du modèle et la mesure

expérimentale. Le seuil de 15 pixels a été reporté, ainsi que la distance critique correspondante. Le seuil est pertinent ici, puisque la position de $x_{fc,f}$ se situe bien là où l'écart avec la prédiction théorique augmente significativement.

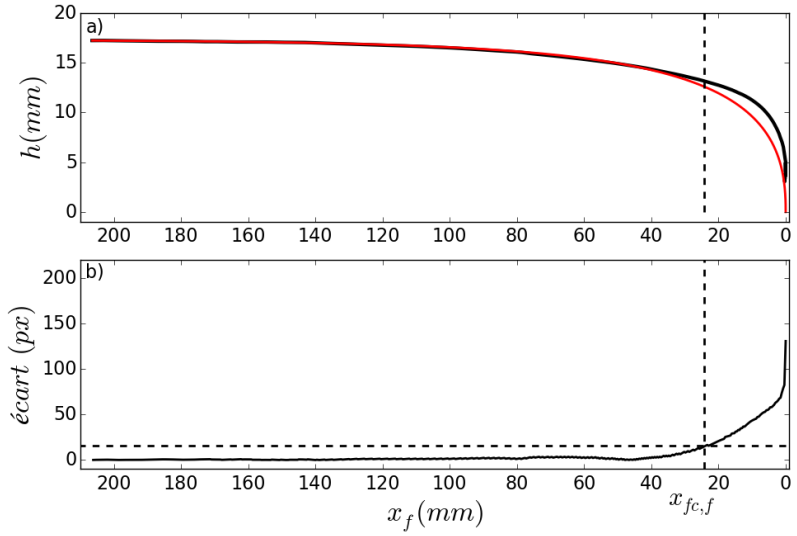

Figure 7.31 a) Contour expérimental (noir) et prédiction théorique (rouge). b) Evolution de l'écart de hauteur entre la prédiction du modèle et la mesure expérimentale en fonction de la distance au front. a,b) La position $x_{fc,f}$ est représentée en pointillé. Ici $x_{fc,f} = 1.4h_n$ ($x^*_{fc,f} = 1.4$). Expérience 150327 V4.

7.15.2 Détermination de $x_{fc,u}$

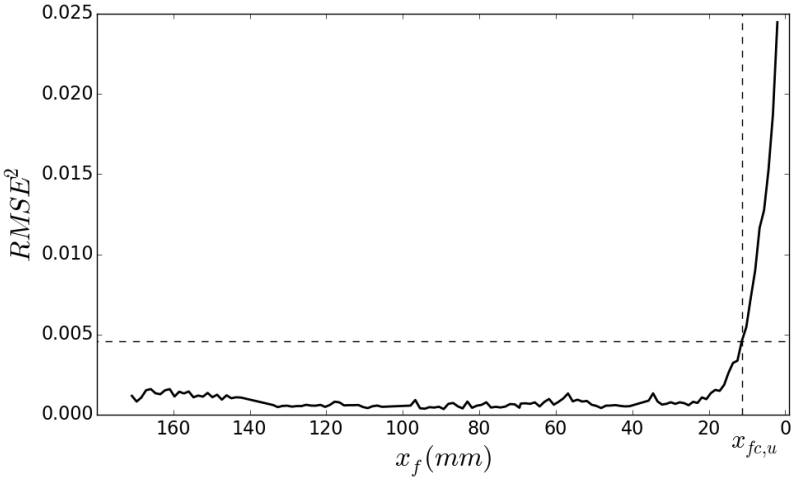

Figure 7.32 Évolution de la différence entre la mesure du profil de vitesse et la prédiction, au carré ($RMSE^2$), en fonction de la distance à la ligne de contact au front. $x_{fc,u} = 0.73h_n$ ($x^*_{fc,u} = 0.73$). $RMSE^2_{seuil} = 0.00456$. Expérience 150504.

La figure 7.32 présente l'évolution du $RMSE^2$ en fonction de la distance au front pour l'ex-

périence 150504 (appelée C_5 dans l'article, au §7.1). L'écart entre la prédiction théorique et la mesure des profils de vitesse est constant pour $x_f > 20mm$, et augmente brusquement ensuite, là où la distance critique est positionnée. A cet endroit là, la pente de la courbe est raide, et une différence de valeur seuil imposée en ordonnée aura peu d'impact sur la détermination de $x_{fc,u}$. En ayant défini le seuil ($\text{RMSE}^2_{seuil} = 0.00456$) comme représentatif des erreurs sur la mesure des profils de vitesse (voir § 7.5.2.1), la distance critique ne dépend pas de l'incertitude de mesure propre à chaque expérience, elle est une indication toujours objective de la distance en dessous de laquelle le modèle ne prédit plus correctement les observations.

7.15.3 Épaisseur du plug : méthode de l'ajustement des profils de vitesse

La position de la zone non cisaillée a été mesurée au §7.5.2.2 par une mesure directe, par différenciation du champ de vitesse. Il s'agit cependant de la zone non cisaillée apparente, puisque la mesure d'un taux de déformation nul est impossible compte tenu du bruit de mesure existant. Ici, nous proposons une méthode indépendante de cette dernière, qui permet d'aboutir à la mesure de l'épaisseur du plug à partir de la partie cisaillée des profils de vitesse mesurés. Nous verrons qu'elle fournit les mêmes conclusions, à savoir une zone de plug qui s'amincit au front et disparaît.

L'expression du profil de vitesse en régime de lubrification s'écrit :

$$u = \begin{cases} \frac{n}{n+1}\Lambda^{1/n}(h-h_p)^{(n+1)/n}\left[1-\left(1-\frac{y}{h-h_p}\right)^{(n+1)/n}\right] & \text{if } y < h-h_p \\ \frac{n}{n+1}\Lambda^{1/n}(h-h_p)^{(n+1)/n} & \text{if } y \geq h-h_p \end{cases} \tag{7.24}$$

avec $\Lambda = \frac{\rho g \sin\theta}{K}\left(1-\cot\theta\ \partial_x h\right)$.

En choisissant un point de référence, dans la zone cisaillée, au-dessus du fond, de hauteur y_{ref} et de vitesse u_{ref}, et en posant $\widehat{u} = \frac{u_s - u_{zc}}{u_s - uref}$, $\hat{y} = \frac{h-y}{h-yref}$ et $\alpha = \frac{h_p}{h-yref}$ on obtient dans la zone cisaillée [Chambon et al., 2014] :

$$\widehat{u} = \left(\frac{\frac{h-y}{h-yref} - \frac{h_p}{h-yref}}{1-\frac{h_p}{h-yref}}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \left(\frac{\hat{y}-\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{n+1}{n}} \tag{7.25}$$

On peut donc ré-écrire l'équation (7.25) sous la forme :

$$\widehat{u} = \frac{1}{1-\alpha}^{\frac{n+1}{n}}\left(\widehat{y}-\alpha\right)^{\frac{n+1}{n}} \tag{7.26}$$

Avec cet adimensionnement, on ne prend en compte que la partie mesurée du profil de la zone cisaillée, sans tenir compte de la position du point situé en y=0, dont la vitesse n'est jamais mesurée en pratique.

La vitesse $\widehat{u}$ est exprimée sans dimension, comme une fonction de la position verticale $\widehat{y}$ et de l'épaisseur de plug adimensionnée α. On cherche à déterminer la valeur de α. Pour cela, une série imposée de α, nommés α_{test} et qui représentent une gamme d'épaisseurs de plug possibles sont injectés dans l'expression $(\widehat{y}-\alpha)^{\frac{n+1}{n}}$. Pour chaque α_{test}, cette expression est ajustée linéairement en fonction de $\widehat{u}$. Le coefficient de régression linéaire ainsi déterminé est égal à $\frac{1}{1-\alpha}^{\frac{n+1}{n}}$. Lorsque

le terme α de ce coefficient de régression est égal à α_{test} (intersection de la courbe figure 7.33a avec la première bissectrice), alors nous pouvons calculer l'épaisseur du plug ($h_p = \alpha(h - y_{ref})$). La figure 7.33b représente la relation entre $\widehat{u}$ et $(\widehat{y} - \alpha)^{\frac{n+1}{n}}$, ajustée par $\frac{1}{1-\alpha}^{\frac{n+1}{n}}$. Tous les points de mesure de vitesse situés dans la zone cisaillée, selon cette méthode, s'alignent sur une droite. Le profil de vitesse complet mesuré et la position de l'interface localisée par cette méthode sont représentés figure 7.33c. Le plug semble positionné de façon cohérente.

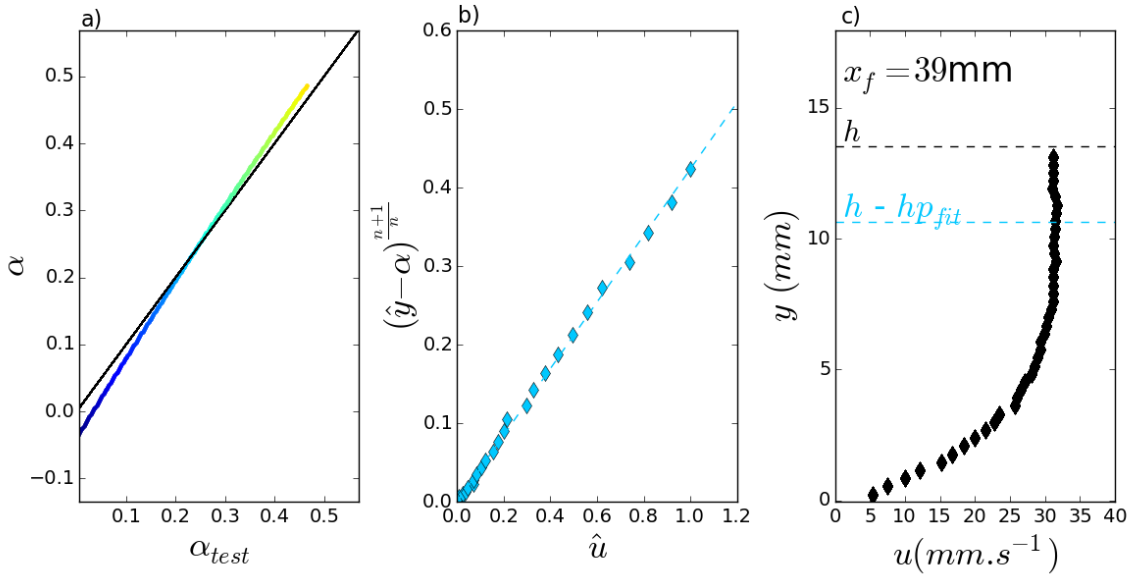

Figure 7.33 Illustration de la méthode de la localisation de l'interface entre la zone cisaillée et le plug par la méthode de l'ajustement du profil de vitesse. Distance au front $x_f^* = 2.4$. Voir le texte pour les explications.

En reproduisant cette méthode, sur tous les profils de vitesse mesurés dans toute la longueur de la coulée, on peut représenter l'évolution de l'épaisseur du plug en fonction de la distance au front.

La figure 7.34 présente l'interface ainsi calculée entre la zone cisaillée et le plug, pour l'expérience 160127. Loin de la ligne de front, l'épaisseur de plug mesurée est parfaitement en accord avec la prédiction théorique. En approchant du front, le plug expérimental s'amincit jusqu'à disparaître.

Si l'on compare les deux méthodes de détection de la zone non cisaillée, (Fig.7.36) on remarque qu'elles indiquent une disparition du plug autour de la distance $x_f^* = 0.8$. La méthode présentée dans cette section indique un amincissement plus précoce. Cependant, la méthode de différenciation directe représente un plug apparent, qui est plus épais que le "vrai" plug. Finalement, les deux méthodes indiquent indépendamment la disparition du plug au front.

Cette méthode d'ajustement du profil de vitesse n'a pas été retenue pour l'analyse des données (§7.5.2.2) car elle repose sur l'hypothèse forte que le profil de vitesse dans la zone cisaillée est de type lubrification, elle est donc basée sur l'hypothèse que le plug s'amincit à mesure que le front approche. Cela signifie que si le profil de vitesse ne respecte plus la forme prédite par le modèle de lubrification, cette méthode ne peut pas mesurer un plug. Lorsque cette méthode indique une disparition du plug expérimental, elle indique à priori, que le profil de vitesse ne peut plus être

approché par un modèle de lubrification. De plus, l'interface peut être parfois très bruitée, à cause des variations du profil de vitesse comme pour le cas de l'expérience 150504 (Fig.7.35).

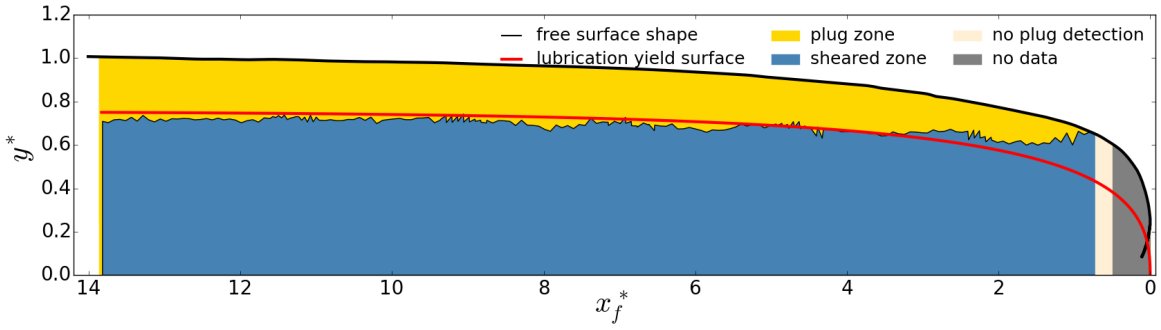

Figure 7.34 Localisation du plug (jaune) et de la zone cisaillée (bleue) par la méthode de l'ajustement du profil de vitesse, contour expérimental (noir), plug théorique (rouge). Expérience 160127.

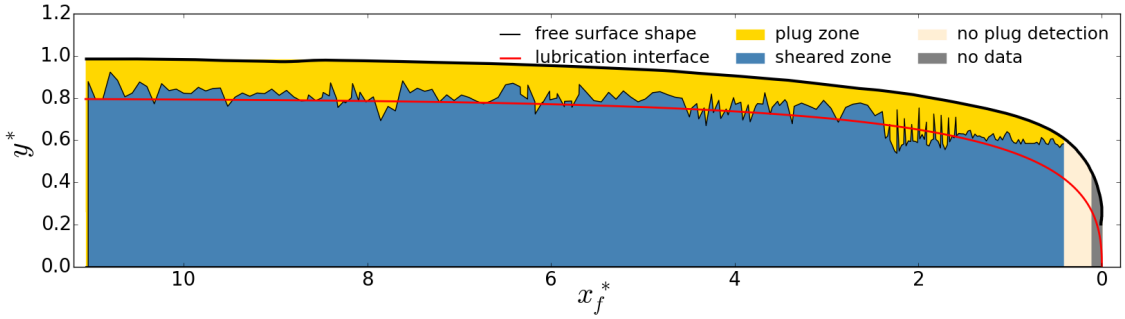

Figure 7.35 Localisation du plug (jaune) et de la zone cisaillée (bleue) par la méthode de l'ajustement du profil de vitesse, contour expérimental (noir), plug théorique (rouge). Expérience 150504.

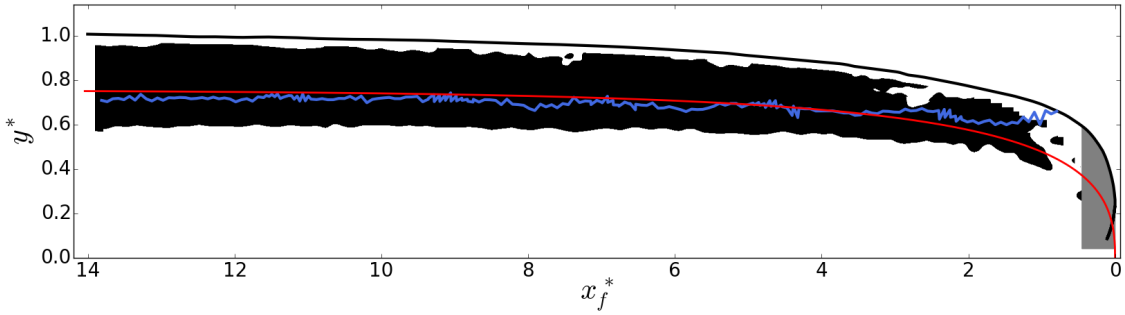

Figure 7.36 Localisation du plug apparent par différenciation verticale du champ de vitesse (méthode présentée au §7.1). Localisation de l'interface entre la zone cisaillée et le plug par la méthode de l'ajustement du profil de vitesse (bleu). Contour expérimental (noir) et plug théorique (rouge). Expérience 160127.

Chapitre 8

Dynamique interne au front d'écoulements à surface libre : Comparaison au modèle consistant à l'ordre 1

Dans ce chapitre, nous présentons la comparaison entre les résultats expérimentaux et le modèle consistant exprimé à l'ordre 1 en ϵ, dont le développement a été présenté au chapitre 3. Nous rappelons que le modèle consistant à l'ordre 1 est développé autour d'une solution de base qui correspond au régime de lubrification. Il comprend le modèle d'ordre 0 (lubrification), des corrections provenant des contraintes normales (en facteur du nombre G) et des corrections provenant des termes d'inertie (en facteur du nombre Froude).

Dans le cas des fluides newtoniens, nous avions observé un bon accord entre les résultats expérimentaux et le modèle de lubrification, de la zone uniforme au front (*cf.* chapitre 6). De plus, dans le cas newtonien, la solution du modèle d'ordre 1 est très proche de la solution de lubrification dans les gammes de Froude étudiées, et n'apportera donc pas de meilleur accord. Nous nous focalisons alors sur les écoulements viscoplastiques.

Nous comparerons la forme du front mesurée expérimentalement ainsi que les profils de vitesse aux prédictions théoriques. Comme le signe de $\partial_x U_p^{(0)}$ intervient dans l'expression du modèle d'ordre 1, et que les deux hypothèses possibles sur le choix du signe fournissent des solutions plausibles, nous présenterons les deux résultats possibles. Nous nous attacherons particulièrement à la vitesse de surface, que nous avons déjà comparée au modèle de lubrification (§7.1) et pour laquelle nous avions observé une augmentation au front qui n'était pas correctement reproduite par ce modèle. On rappelle que le nombre G est défini comme une contrainte seuil adimensionnée $G = \tau_c/(\rho g h_N sin\theta)$, et que le nombre Froude représente l'importance de l'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle $Fr = u_b/\sqrt{g h_N \cos\theta}$.

8.1 Forme de front

La figure 8.1 présente les formes de front expérimentales de l'ensemble des expériences et la comparaison aux modèles d'ordre 0 et 1.

Pour les deux pentes étudiées ($\theta = 11.9°$ et $\theta = 15.3°$), les prédictions de la forme du front se superposent pour le nombre G le plus petit (G=0.17 et G=0.2, courbes noires). En considérant un nombre G plus grand (G=0.31 et G=0.36, courbes rouges) les prédictions du modèle de lubrification et du modèle d'ordre 1 s'écartent davantage. Cet écart est un peu plus marqué dans le cas de la pente la plus forte ($\theta = 15.3°$). Le modèle d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ prédit des fronts de hauteurs légèrement inférieures au modèle de lubrification. Le modèle d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} > 0$ prédit des fronts de hauteurs légèrement supérieures au modèle de lubrification. De façon générale, les deux modèles d'ordre 1 n'améliorent pas la prédiction de la forme du front.

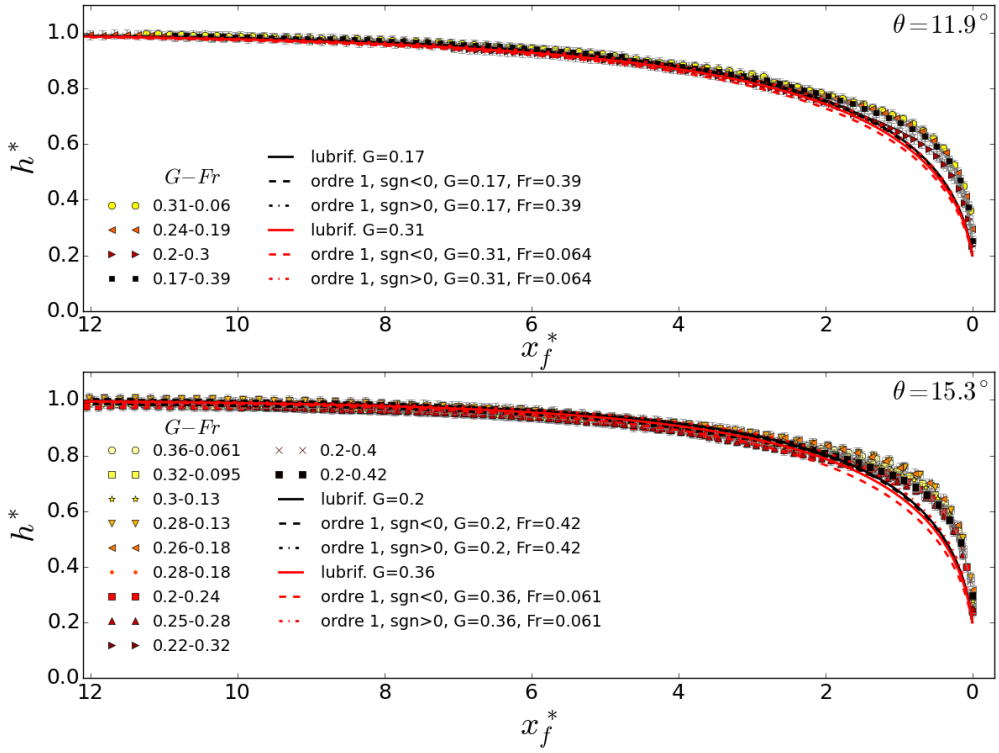

Figure 8.1 Contour expérimental et barres d'erreur de l'ensemble des expériences. Comparaison à un modèle de lubrification et à un modèle consistant d'ordre 1 développé au chapitre 3 (n=0.43). La hauteur et la distance sont adimensionnées par la hauteur de la zone uniforme (h^* est noté H dans le chapitre 3).

On peut alors comparer la distance critique en dessous de laquelle le modèle ne prédit plus correctement la hauteur expérimentale, comme nous l'avions fait avec le modèle de lubrification (Fig. 8.2) (*cf* chapitre 7). On remarque que le modèle d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ cesse d'être valide pour les mêmes distances de la ligne de front que le modèle de lubrification sauf pour les deux expériences avec les nombres G les plus grands, où le modèle d'ordre 1 est moins performant.

Le modèle d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} > 0$ quand à lui stabilise les valeurs de distance critique autour de 1.5. Pour $G < 0.24$ typiquement, les distances critiques sont les mêmes que celle calculées par le modèle de lubrification ou le modèle d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$. En revanche pour les G supérieurs, elles sont inférieures. L'augmentation de la distance critique pour les forts G, que l'on observe avec le modèle de lubrification et le modèle d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ n'est plus visible.

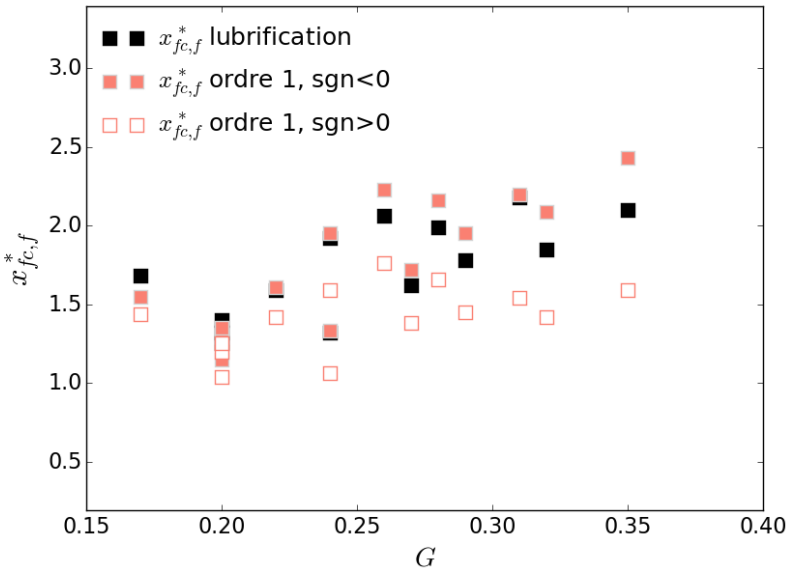

Figure 8.2 Calcul de la distance de la ligne de front (adimensionnée par la hauteur de la zone uniforme), en dessous de laquelle la prédiction théorique s'éloigne de la mesure expérimentale, basée sur un seuil de 15 px (∼0.6 mm), représentatif de l'incertitude sur la mesure de hauteur. Évolution de la distance critique en fonction du nombre G de l'expérience considérée. Comparaison d'un modèle de lubrification à un modèle d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ et $\partial_x U_p^{(0)} > 0$. Pour rappel $G = \tau_c/(\rho g h_N sin\theta)$ représente une contrainte seuil adimensionnée.

Cependant, le modèle avec $\partial_x U_p^{(0)} > 0$ a tendance à produire des formes de front en désaccord avec les mesures de hauteur, bien en amont de la ligne de front. Comme on peut le voir sur la figure 8.3, qui présente la forme du front de l'expérience 150319v2 (G=0.32, Fr=0.095), le modèle d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} > 0$ prédit une hauteur légèrement surestimée pour $4 < x_f^* < 8$. A cet endroit la forme prédite par le modèle d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ est davantage en accord avec les mesures. Un critère différent, basé par exemple sur l'évolution de l'aire entre le modèle et les mesures de hauteur, plutôt que sur un seuil de dépassement au front, aurait sûrement fourni une distance critique différente.

Finalement, les différences observées proches du front entre les modèles sont bien inférieures aux différences observées entre les modèles et les expériences, et ne permettent pas de conclure quant au choix du signe de $\partial_x U_p^{(0)}$ dans le modèle d'ordre 1. Bien que le calcul d'une distance en dessous le laquelle le modèle ne prédit plus correctement la hauteur, basée sur un seuil, avantage le choix $\partial_x U_p^{(0)} > 0$ (Fig. 8.2), la comparaison des formes de front complètes (Fig.8.1 et 8.3) ne permet pas de privilégier ce choix.

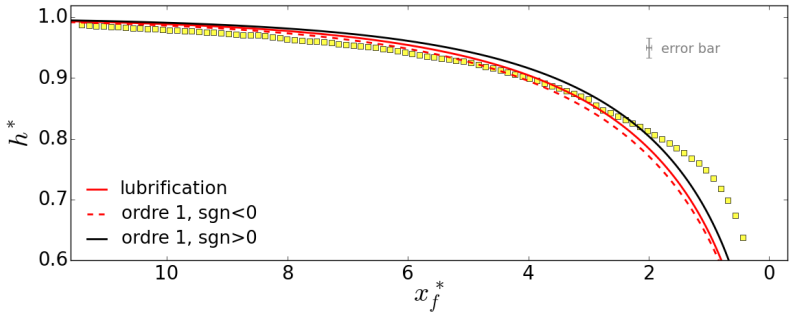

Figure 8.3 Contour expérimental (zoom en amont de la ligne de contact, sans barre d'erreur) de l'expérience $150309v2$ (G=0.32, Fr=0.095). Comparaison à un modèle de lubrification et à un modèle d'ordre 1. La hauteur et la distance sont adimensionnées par la hauteur de la zone uniforme.

8.2 Vitesse de surface

Pour la comparaison avec les vitesses, nous avons choisi 5 expériences réalisées avec le même gel de Carbopol, de contrainte seuil 12 Pa. Ces expériences couvrent la gamme $G \in [0.24, 0.35]$ et $Fr \in [0.061, 0.28]$, ce qui est représentatif de l'ensemble des expériences ($G \in [0.17, 0.35]$, $Fr \in [0.061, 0.42]$). De plus, l'une de ces expériences possède le plus grand nombre G, nous nous attendons donc à des différences importantes entre le modèle à l'ordre 0 et à l'ordre 1 dans ce cas (*cf.* §3.8.5 et §8.1).

Les figures 8.4 à et 8.8 présentent l'évolution de la vitesse de surface expérimentale, ainsi que les prédictions du modèle à l'ordre 1. La prédiction du modèle à l'ordre 0, le modèle de lubrification, a aussi été rappelée pour la comparaison. Comme nous l'avions vu au § 7.1, la vitesse de surface des mesures expérimentales augmente plus fortement au front (lorsque x_f^* diminue) que la prédiction du modèle d'ordre 0 et la différence est d'autant plus forte que le nombre de G de l'expérience diminue. Le modèle d'ordre 1 prédit en général une vitesse de surface qui augmente plus fortement que la solution de l'ordre 0 à l'approche du front. On s'attend donc à de meilleurs accords avec le modèle d'ordre 1. Pour plus de clarté, nous avons décalé les vitesses de surface expérimentales, de façon à ce qu'elles coïncident parfaitement avec la prédiction en zone uniforme (voir les encarts).

Pour l'expérience qui possède le nombre G le plus fort (Fig.8.4), les prédictions du modèle d'ordre 1 sont en très bon accord avec la vitesse de surface mesurée. La vitesse de surface prédite par les deux modèles d'ordre 1 (avec $\partial_x U_p^{(0)} > 0$ ou $\partial_x U_p^{(0)} < 0$) commence à dépasser le modèle de lubrification dès $x_f^* \approx 2$, comme les mesures expérimentales. L'augmentation de la vitesse de surface au front est bien reproduite par les modèles d'ordre 1. Notons toutefois que pour les mesures correspondantes aux petits x_f^*, ($x_f^* < 1$ typiquement) la vitesse de surface expérimentale n'est peut-être pas représentative de la "vraie" vitesse de surface libre, que l'on mesurerait si nous n'avions pas de bruit sur les images. Cependant le bon accord avec les modèles d'ordre 1 dès $x_f^* \approx 2$, se produit là où les mesures de vitesse de surface ne sont pas lacunaires.

Pour l'expérience de nombre G=0.32 (Fig.8.5) l'accord avec les modèles d'ordre 1 est encore bon dès $x_f^* \approx 2$. Il se dégrade pour les points situés le plus près de la ligne de front, mais pour ces quelques points, la vitesse de surface expérimentale est peut-être sous-estimée par rapport à la "vraie" vitesse de surface libre (profils de vitesse présentés Fig.7.20). Pour l'expérience de nombre

G=0.29 (Fig.8.6) l'accord avec les modèles d'ordre 1 est bon lui aussi, dès $x_f^* \approx 2$.

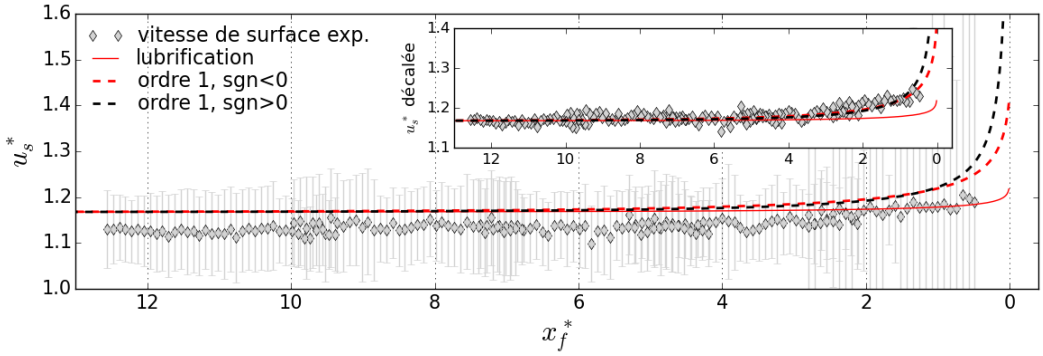

Figure 8.4 Évolution de la vitesse de surface adimensionnée par la vitesse moyenne (u_s^*) en fonction de la position dans la coulée adimensionnée par la hauteur normale (x_f^*). Prédiction théorique du modèle de lubrification et du modèle complet à l'ordre 1. Ce graphique est à lire en parallèle des profils de vitesses, tous présentés au chapitre 7, car la vitesse de surface expérimentale est choisie comme le premier point de mesure du profil de vitesse, qui n'est pas tout le temps situé sur la surface libre, mais parfois en dessous. Expérience 150309v1, G=0.35, Fr=0.061, $\theta = 15.3°$. Profils de vitesse figure 7.19.

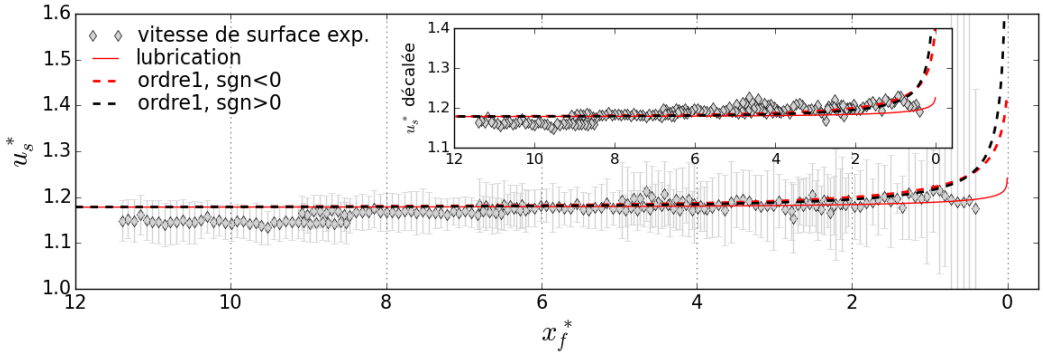

Figure 8.5 Même légende que figure 8.4. Expérience 150309v2, G=0.32, Fr=0.095, $\theta = 15.3°$. Profils de vitesse figure 7.20.

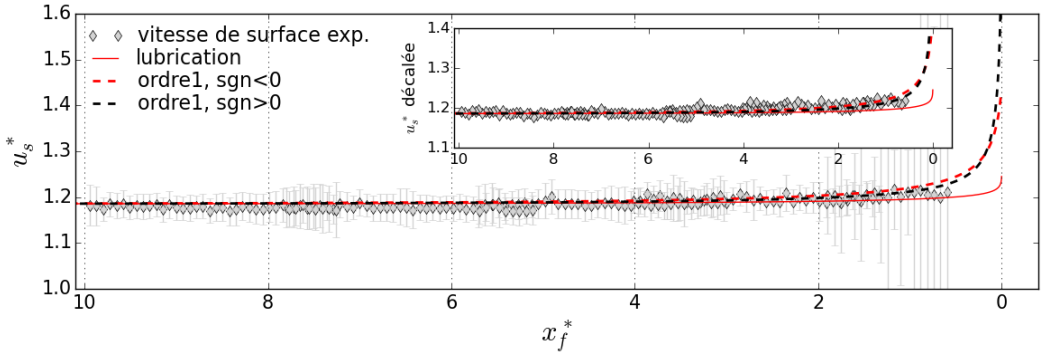

Figure 8.6 Même légende que figure 8.4. Expérience 150309v3, G=0.29, Fr=0.13, $\theta = 15.3°$. Profils de vitesse figure 7.21.

En observant des expériences de nombre G plus petits (0.27, 0.24) (Fig.8.7 et 8.8), la vitesse de surface mesurée augmente plus drastiquement au front. Cette évolution n'est pas correctement reproduite par les modèles d'ordre 1. D'une part, la vitesse prédite par les deux modèles d'ordre 1 commence à dépasser le modèle de lubrification pour $x_f^* < 1$ seulement, alors que la vitesse mesurée la dépasse dès $x_f^* \approx 2$. D'autre part, la forte augmentation de la vitesse de surface au front n'est pas correctement reproduite.

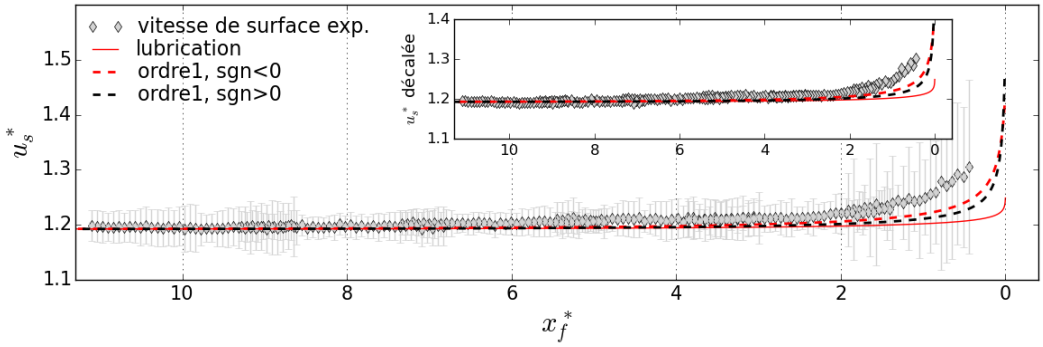

Figure 8.7 Même légende que figure 8.4. Expérience 150309v4, G=0.27, Fr=0.18, $\theta = 15.3°$. Profils de vitesse figure 7.22.

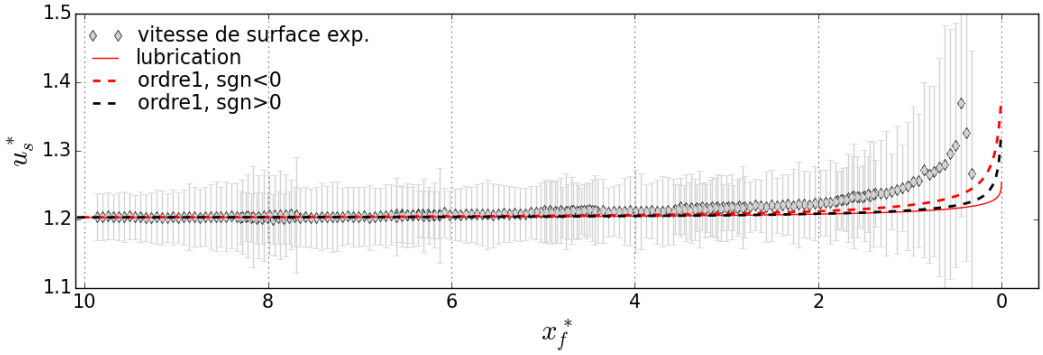

Figure 8.8 Même légende que figure 8.4. Expérience 150309v5, G=0.24, Fr=0.28, $\theta = 15.3°$. Profils de vitesse figure 7.23.

Quand au choix du signe de $\partial_x U_p^{(0)}$ dans le modèle d'ordre 1, il semble que le signe négatif produise des résultats plus proches des mesures expérimentales. De plus, pour des nombres de Froude plus élevés, dans la gamme [0.3-0.4] (comme ceux des expériences 150327v4, 150504, 150612, 161313v5), la vitesse de surface prédite avec un choix de signe positif est inférieure à la vitesse de lubrification (exemple Fig.3.7 et Fig.8.9), ce qui n'est jamais observé expérimentalement. Nous pouvons donc favoriser le modèle consistant d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$.

Pour conclure, pour l'ensemble des expériences, la prédiction théorique du modèle à l'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ se rapproche davantage des mesures expérimentales que le modèle de lubrification. Le modèle à l'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} > 0$ permet lui aussi de mieux prédire la vitesse de surface, sauf pour les cas de Froude élevés, où il est moins performant que la lubrification.

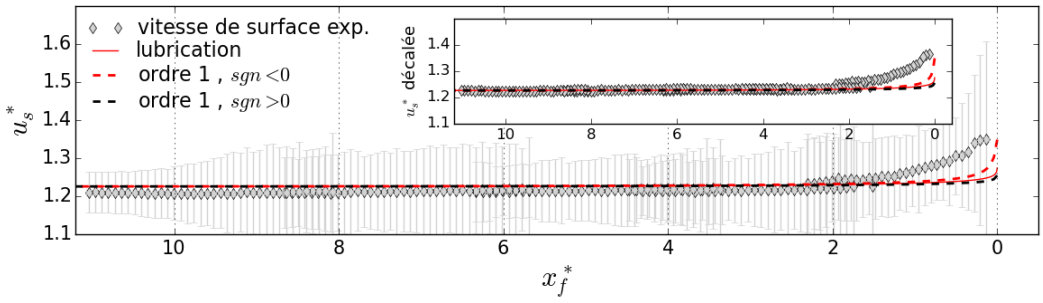

Figure 8.9 Même légende que figure 8.4. Expérience 150504, G=0.2, Fr=, 0.39, $\theta = 15.3°$. Profils de vitesse figure 7.9.

8.3 Profils de vitesse

Nous proposons de décrire les profils de vitesses du modèle d'ordre 1. La figure 8.10 présente le profil de vitesse du modèle à l'ordre 1 (avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ pour l'exemple) à deux positions différentes dans la coulée.

Tout d'abord, les profils de vitesse théoriques présentent une discontinuité en $y = h - h_p$, à l'interface du pseudo-plug. Cela provient du raccord effectué entre la vitesse de la zone cisaillée et du plug (calculé au § 3.7.5.2). Comme le montrent Fernandez-Nieto et al. [2010] il faudrait normalement considérer une zone de transition entre les deux couches, dans laquelle les deux contributions sont présentes. Pour un fluide de Bingham, cette couche de transition à une épaisseur de $\epsilon^{2/3}$ et implique des corrections supplémentaires d'ordre $O(\epsilon^{4/3})$ dans l'expression du débit [Fernandez-Nieto et al., 2010]. On pourrait donc s'attendre à ce qu'elle soit du même ordre pour un fluide de Herschel-Bulkley et influencent l'expression du débit et la forme du front à l'ordre 1. En revanche, ce raccord n'influe pas la valeur de la vitesse de surface prédite par le modèle d'ordre 1.

En faisant abstraction de cette discontinuité, on remarque que le profil de vitesse de l'ordre 1 est cisaillé sur toute l'épaisseur, contrairement au profil de la lubrification qui présente un plug rigide. A l'approche du front, le cisaillement dans le pseudo-plug devient plus fort, et la vitesse dans le pseudo-plug dépasse largement la vitesse du plug de la lubrification. Dans la zone cisaillée, la vitesse du modèle d'ordre 1 est inférieure à la prédiction du modèle de lubrification, accentuant le cisaillement du profil.

La figure 8.11 présente la comparaison des profils de vitesse expérimentaux pour G=0.35 aux prédictions théoriques du modèle de lubrification et du modèle consistant d'ordre 1. Le cisaillement observé, qui augmente à l'approche du front sur toute l'épaisseur du profil de vitesse, est bien reproduit par le modèle d'ordre 1. Globalement, l'évolution de la forme du profil de vitesse mesuré à l'approche du front, avec une diminution des vitesses par rapport à la solution du modèle de lubrification dans la zone cisaillée et une augmentation proche de la surface libre, est bien reproduite par le modèle d'ordre 1.

Le modèle à l'ordre 1 est en meilleur accord avec les profils mesurés que le modèle de lubrification que ce soit avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ ou $\partial_x U_p^{(0)} > 0$. Là encore, la faible différence entre les deux modèles d'ordre 1 ne permet pas de privilégier le choix d'un signe pour $\partial_x U_p^{(0)}$.

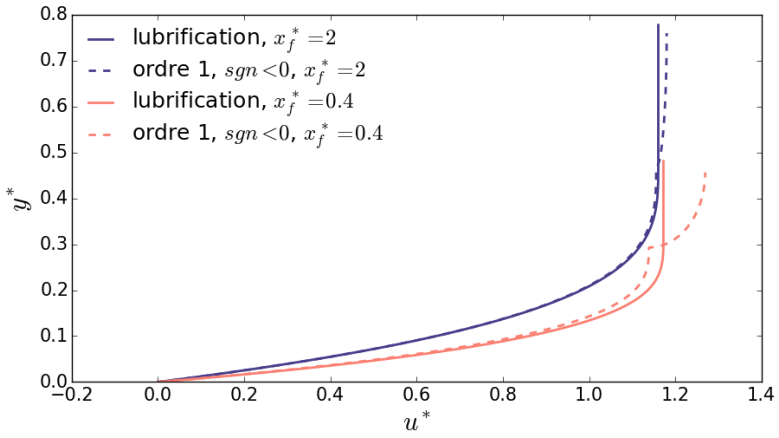

Figure 8.10 Profil de vitesse théorique (adimensionné) prédit par le modèle consistant à l'ordre 1 et le modèle de lubrification, pour deux positions différentes dans la coulée. G=0.4, Fr=0.2, n=0.4 et $\theta = 15°$.

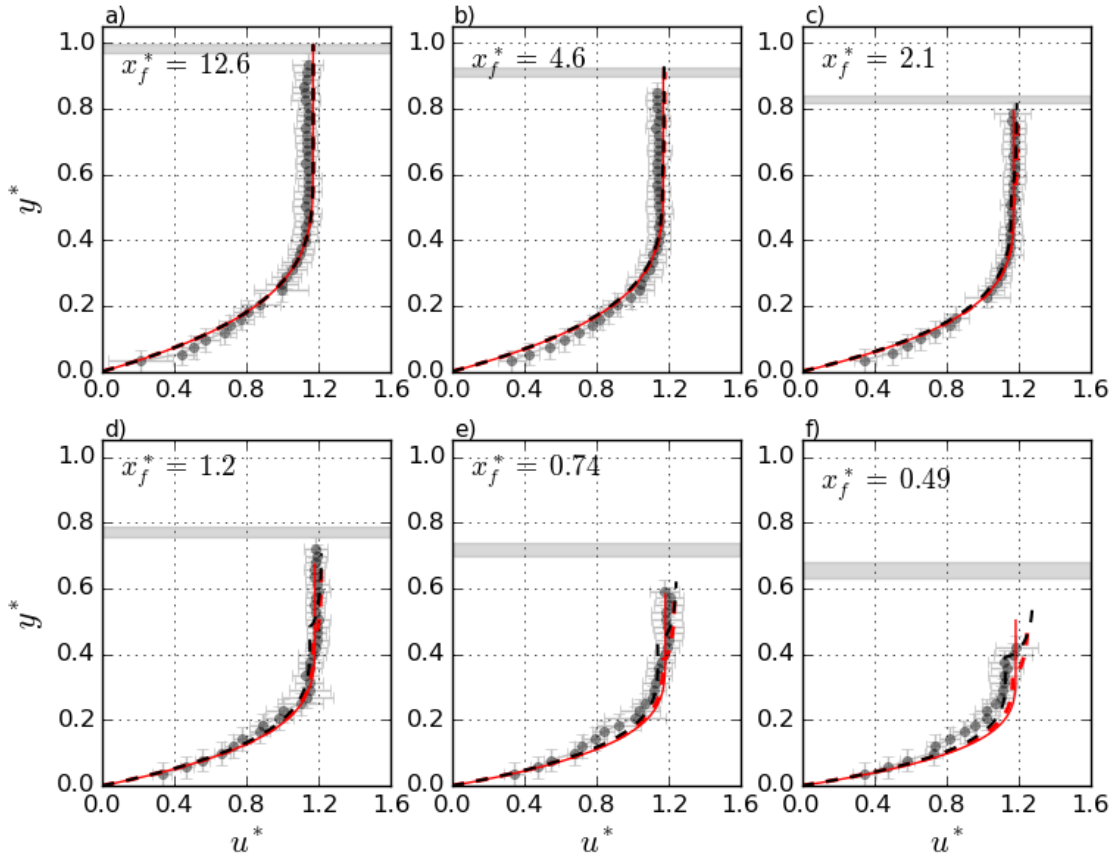

Figure 8.11 Comparaison des profils de vitesse longitudinale. Prédictions théoriques du modèle de lubrification (trait rouge) et du modèle complet à l'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$ (tirets rouges) ou $\partial_x U_p^{(0)} > 0$ (tirets noirs). Expérience $150309v1$, G=0.35, Fr=0.061, $\theta = 15.3°$.

8.4 Discussion et conclusion du chapitre

La comparaison de mesures expérimentales à un modèle d'ordre 1 consistant adapté aux fluides de Herschel-Bulkley constitue, à notre connaissance, une étude originale et nouvelle.

Nous rappelons que l'expression de la forme du front et de la vitesse d'ordre 1, comprennent le modèle à l'ordre 0, des contributions provenant des contraintes normales (en facteur de G) et des contributions provenant des termes d'inertie (en facteur de Fr). La vitesse est calculée en connaissant la valeur de la hauteur et de la pente de la surface libre calculées à l'ordre 1.

Concernant le modèle d'ordre 1 consistant avec $\partial_x U_p^{(0)} > 0$, il fournit dans certaines configurations (G petits, Froude grands) une évolution de la vitesse de surface en contradiction avec ce qui est observé.

Concernant le modèle consistant d'ordre 1 avec $\partial_x U_p^{(0)} < 0$, il ne fournit pas de meilleures prédictions que le modèle de lubrification sur la forme du front. Comme lui, il semble que les désaccords sur la forme de front augmentent lorsque G augmente, sans toutefois pouvoir l'affirmer en raison de la variabilité des données. Pour la vitesse de surface et les profils de vitesse, il fournit de meilleurs accords que le modèle de lubrification. Il prédit une augmentation de la vitesse de surface plus abrupte au front, comme ce qui est observé expérimentalement. Le profil de vitesse prédit par le modèle d'ordre 1 est cisaillé progressivement sur toute l'épaisseur de l'écoulement à l'approche du front, comme ce qui est observé expérimentalement. Cependant, le modèle d'ordre 1 sous estime dans certains cas la vitesse de surface au front et les désaccords avec les mesures semblent augmenter lorsque G diminue et Fr augmente. Nous proposons de discuter l'origine de ces désaccords.

• Le modèle d'ordre 1 permet de rendre compte du cisaillement observé sur les profils de vitesse à l'approche du front, et de l'augmentation de la vitesse de surface à cet endroit là. Pour les profils de vitesse, le modèle d'ordre 1 est alors performant jusqu'à des distances au front plus petites que le modèle de lubrification. En dessous, on rappelle que l'on peut remettre en question la validité de l'approximation de couche-mince.

• Nous remarquons que les prédictions entre le modèle d'ordre 1 et la lubrification sont d'autant plus éloignées que G est grand. De plus l'effet du Froude est d'autant plus grand que G est grand (*cf.* chapitre 3). Or dans nos configurations expérimentales, le nombre G et Froude sont anti-corrélés (*cf.* Tab.7.2).

Les expériences avec un fort G ont aussi un faible nombre de Froude. Alors, les termes d'inerties (en facteur de Fr) ne jouent pas un grand rôle car le Froude est faible. Mais les corrections provenant des contraintes normales suffisent à expliquer l'augmentation de la vitesse de surface, et la disparition du plug à l'approche du front. Il y a alors un bon accord entre les vitesses de surfaces prédites par le modèle d'ordre 1 et celles mesurées.

Les expériences avec un faible G ont aussi un fort nombre de Froude. Alors, les termes d'inerties ne jouent pas un grand rôle non plus car le nombre G est faible, de plus l'augmentation du nombre de Froude tend à réduire l'écart entre la solution de l'ordre 1 et de l'ordre 0. Or ce sont pour ces expériences que la vitesse de surface augmente le plus au front, et que le plug disparaît le plut tôt. Il y a alors une différence importante entre les vitesses de surfaces au front prédites

par le modèle d'ordre 1 et celles mesurées.

Finalement, les effets de contraintes normales sont bien pris en compte dans le modèle d'ordre 1, mais les effets d'inertie le sont moins.

• Le raccord sur le profil de vitesse, au moyen d'une couche de transition, fera apparaître des corrections d'ordre "entre 1 et 2" (d'ordre $\epsilon^{1.3}$ dans les fluides de Bingham par exemple [Fernandez-Nieto et al., 2010]). En ajoutant ces corrections dans l'expression du débit d'ordre 1, cela pourra peut-être modifier la solution dans le sens de l'augmentation des effets d'inertie.

• Peut-être que l'intervention d'un effet supplémentaire (comme l'élasticité, [Saramito, 2009]), pourrait améliorer la prédiction sur la forme du front, sur la vitesse de surface, et sur la forme du profil de vitesse.

• Il semble qu'un mécanisme qui n'est pas pris en compte par le modèle influence la forme du front, et se manifeste notamment par la présence d'un rebroussement (Fig.4.12). Il semble que la tension de surface puisse être à l'origine d'un rebroussement au front de coulées newtoniennes [Veretennikov et al., 1998]. Mais, les modèles intégrés sur l'épaisseur qui prennent en compte une tension de surface [Ruyer-Quil and Manneville, 1998; Fernandez-Nieto et al., 2010] ne peuvent pas pour autant prédire un rebroussement au front. En effet un rebroussement implique qu'il existe plusieurs hauteurs possibles pour une seule abscisse donnée, ce qui sort du cadre de la définition d'une fonction.

Chapitre 9

Conclusions générales et perspectives

Nous rappelons que le contexte de cette thèse est l'étude des laves torrentielles à forte fraction argileuse. Ce type de lave torrentielle peut être représenté, en première approximation, par un comportement rhéologique viscoplastique de type Herschel-Bulkley. Les modèles opérationnels, utilisés pour prédire la propagation et l'étalement de laves torrentielles, reposent sur la résolution numérique des équations d'un modèle de couche-mince intégré dans l'épaisseur : le modèle de Saint-Venant (Eq.1.3). La simulation de ces phénomènes naturels est un enjeu important pour la gestion des risques liés aux laves torrentielles, la prise de décision quant à l'occupation de l'espace par des enjeux humains, et le dimensionnement d'ouvrages.

Pourtant, les modèles de ce type reposent sur plusieurs approximations et simplifications issues des équations primitives, qui ne sont pas consistantes mathématiquement. Cela signifie que le modèle de Saint-Venant classique n'est pas issu d'un développement mathématique rigoureux [Ruyer-Quil and Manneville, 1998; Balmforth and Craster, 1999; Fernandez-Nieto et al., 2010]. Les inconsistances du modèle de Saint-Venant proviennent d'une part du calcul de la contrainte basale, qui repose sur l'hypothèse que le profil de vitesse à la même forme que celle du régime permanent uniforme, même en zones non-uniformes comme au front d'une coulée. De plus, la relation de fermeture utilisée dans le cas d'une rhéologie de Herschel-Bulkley pour la contrainte basale repose sur une hypothèse supplémentaire concernant l'évolution de l'épaisseur de la zone non-cisaillée : le plug. Ce dernier est supposé s'amincir progressivement au front d'une coulée, comme dans le cas du régime de lubrification (Fig.2.9). Mais une évolution différente, avec une disparition du plug au front serait aussi envisageable (Fig.2.10) [Piau, 1996] . Les inconsistances proviennent aussi du coefficient de forme du profil de vitesse β choisi égal à 1 (Eq.2.10), ce qui implique que le profil de vitesse est uniforme dans l'épaisseur, et enfin de la simplification des contraintes normales. Ces inconsistances reposent toutes sur des hypothèses concernant la forme du profil de vitesse.

Afin d'améliorer les modèles, il y a donc un réel besoin de connaître les évolutions du profil de vitesse en zones non-uniformes, en disposant de mesures expérimentales pour la documenter, et d'établir des relations de fermetures consistantes d'un point de vue mathématique qui prennent en compte ces évolutions.

Les objectifs de cette thèse étaient de documenter expérimentalement la dynamique interne au front de coulées à surface libre, et d'utiliser ces résultats pour éprouver les hypothèses du modèle

de Saint-Venant classique. Nous pouvons maintenant dresser les conclusions de cette thèse et montrer ce que nous avons mis en place pour répondre aux objectifs soulevés. Nous présentons aussi dans ce chapitre les pistes d'améliorations directement applicables, ainsi que des suggestions pour de futures études.

9.1 Conclusions

9.1.1 Développements techniques

Nous avons utilisé le canal à fond mobile, un dispositif mis au point quelques années auparavant [Chambon et al., 2009; Ghemmour, 2011; Chambon et al., 2014]. Ce dispositif permet de générer des coulées stationnaires dans le référentiel de l'observateur au moyen d'un fond mobile remontant vers l'amont. Nous avons choisi d'étudier un fluide viscoplastique, bien représenté par une loi de comportement de Herschel-Bulkley, le gel de Carbopol. Nous avons conduit des expériences sur un fluide newtonien, le sirop de glucose, afin de valider les modèles théoriques utilisés et les techniques expérimentales. Le canal nous a permis d'étudier des écoulements dans des configurations diversifiées, en variant la pente, la vitesse du tapis et les propriétés rhéologiques des matériaux.

Un certain nombre de développements techniques ont été nécessaires pour équiper ce dispositif d'un système de mesure de vélocimétrie par méthode optique. Une nappe laser illumine une tranche de fluide, au préalable ensemencé de traceurs, au centre de l'écoulement. Nous avons installé une caméra rapide sur un rail, de façon à capturer l'ensemble de la coulée par des prises de vue successives, de la zone uniforme au front. La prise de vue successive permet une meilleure résolution puisque la coulée est séparée en plusieurs tronçons. Cela implique un certain nombre de post-traitement pour raccorder les images et reconstituer la coulée entière.

Nous avons mesuré les vitesses par méthode PIV, et par une méthode spatio-temporelle tirant parti du caractère permanent de l'écoulement généré sur le canal. Nous avons comparé les deux résultats et nous nous sommes aperçu que la méthode spatio-temporelle est plus performante que la méthode PIV. Nous avons alors retenu la méthode spatio-temporelle pour mesurer les vitesses longitudinales et verticales. La hauteur de l'écoulement est quant à elle directement extraite des images.

Finalement, les développements techniques que nous avons réalisé sur le canal à fond mobile et sur l'analyse des images nous ont offert la possibilité de mesurer les champs de vitesse à haute résolution spatiale (38μm.px^{-1}) à l'intérieur de coulées à surface libre de fluides viscoplastiques et newtoniens.

La rhéologie des matériaux mis en jeu a été étudiée à travers un travail expérimental de rhéométrie classique. Nous avons montré que le comportement du gel de Carbopol était principalement représenté par une loi de comportement de Herschel-Bulkley. Nous n'avons pas mesuré de thixotropie ni de bifurcation de viscosité dans le gel de Carbopol. Ce matériau présente bien le comportement d'un fluide à seuil *idéal*. Nous avons montré toutefois l'existence d'un régime solide élastique aux petites déformations. Le sirop de glucose, quant à lui, possède bien un comportement newtonien.

Le canal à fond mobile peut être aussi utilisé comme un outil permettant, comme le rhéomètre, d'accéder à la rhéologie des matériaux. Nous avons remarqué, comme Chambon et al. [2014], que la rhéologie du gel de Carbopol à l'échelle de l'écoulement sur le canal est légèrement différente de la rhéologie mesurée au rhéomètre. Il s'avère que la correction déjà proposée par Chambon et al. [2014] pour le même type de gel de Carbopol, soit une augmentation de τ_c et K de respectivement 11% et 19%, est cohérente avec l'ensemble de nos mesures. Il semble que la petite dimension des écoulements dans le rhéomètre ($\approx$ 1 mm d'épaisseur typiquement) ne soit pas suffisante pour représenter le comportement du matériau à l'échelle de l'écoulement sur le canal incliné ($\approx$ 20 mm d'épaisseur typiquement). Il y aurait alors des effets d'échelle entre la configuration de mesure confinée du rhéomètre et l'écoulement sur le canal incliné, peut-être à cause des microstructures dans le gel de Carbopol, qui influencent l'écoulement dans l'entrefer du rhéomètre.

9.1.2 Développements théoriques

Parallèlement à notre étude expérimentale qui constitue le cœur de la thèse, nous avons réalisé un travail théorique original. Nous avons développé les expressions consistantes de la vitesse longitudinale et du débit, dans le cadre d'un modèle de couche mince à l'ordre 1 en ϵ, pour un fluide de Herschel-Bulkley. Notre modèle à l'ordre 1 est développé avec le choix d'échelle $\epsilon Re/Fr^2 \approx 1$, c'est à dire autour d'une solution de base qui correspond au régime de lubrification. C'est ce choix qui nous permet de prendre en compte une épaisseur de plug variable, ce qui est nécessaire pour calculer la forme d'un front. De plus, ce choix correspond à la configuration de nos expériences (Tab.7.2).

Dans notre modèle à l'ordre 1 pour les fluides de Herschel-Bulkley, deux termes correctifs apparaissent par rapport au modèle de lubrification : la contribution des contraintes normales plastiques dans le pseudo-plug et la contribution des termes d'inertie. Dans le cadre de notre configuration du fond mobile remontant vers l'amont, il est possible de déduire la forme du front en cherchant une solution de type onde progressive, sans passer par un modèle intégré dans l'épaisseur de type Saint-Venant.

Pour les fluides newtoniens et loi-puissance, les prédictions sur la forme du front du modèle à l'ordre 0 (lubrification) et à l'ordre 1 sont presque identiques dans la gamme de Froude [0 - 1.5].

Pour les fluides viscoplastiques, les résultats du modèle à l'ordre 1 présentent des différences avec le modèle de lubrification. Les différences sont d'autant plus élevées que la contrainte seuil adimensionnée est grande ($G = \tau_c/(\rho g h_N \sin\theta)$). La vitesse de surface prédite par le modèle d'ordre 1 augmente plus abruptement au front que celle prédite par le modèle de lubrification. A l'approche du front, le profil de vitesse calculé à l'ordre 1 ne présente pas de plug, mais un profil cisaillé sur toute l'épaisseur de l'écoulement.

9.1.3 Comparaisons modèles-expériences

Fluides newtoniens :

Les prédictions du modèle de lubrification sont en bon accord avec les formes de front, les profils de vitesse longitudinale et les profils de vitesse verticale. Nous observons bien un profil de

vitesse longitudinal semi-parabolique, de la zone uniforme au front. Nous avons calculé les courbes d'écoulement locales à partir des profils de vitesse mesurés dans l'écoulement, de la zone uniforme au front. Elles sont bien cohérentes avec un modèle newtonien, dont la viscosité est en bon accord avec celle mesurée indépendamment au rhéomètre.

Fluides viscoplastiques :

Nous présentons ici les principales conclusions concernant les fluides viscoplastiques, de rhéologie Herschel-Bulkley.

La dynamique interne :

La structure du profil de vitesse prédite par le modèle de lubrification, avec une zone cisaillée surmontée d'un plug, est bien reconnaissable sur nos profils de vitesse en zone uniforme et en zone faiblement variée. A l'approche du front, cependant, la vitesse de surface augmente, les profils de vitesse expérimentaux deviennent cisaillés sur toute l'épaisseur, conduisant à la disparition du plug à proximité de la ligne de front. C'est ce qu'avait qualitativement prédit Piau [1996] et les expériences mises en œuvre ont permis d'observer cette disparition. Le modèle de lubrification prédit l'existence d'un plug dans le front jusqu'à la ligne de contact, ce qui n'est pas observé expérimentalement. La vitesse de surface du modèle de lubrification augmente à l'approche du front, mais elle est sous-estimée par rapport à la vitesse de surface mesurée.

Nous avons pu quantifier la position dans la coulée en dessous de laquelle la forme du profil de vitesse expérimental s'éloigne de la prédiction théorique de la lubrification. Cette position ($x_{fc,u}$) est située à quelques millimètres de la ligne de contact, entre 0.5 et 1.5 fois la hauteur de la zone uniforme, ce qui correspond à 8-26 mm de la ligne de contact au front, selon les expériences.

Pour les vitesses de surface, le modèle d'ordre 1 fournit de meilleures prédictions que le modèle de lubrification car les vitesses théoriques augmentent davantage à l'approche du front. Pour les forts G ($G > 0.30$), il est même en très bon accord avec les vitesses mesurées. Pour les G inférieurs, qui correspondent aussi aux nombres de Froude les plus élevés ($Fr > 0.18$) le modèle d'ordre 1 ne reproduit plus l'augmentation brutale de la vitesse de surface expérimentale. Les deux corrections jouent dans des sens différents et tendent à se compenser. Il semble alors que les effets de contraintes normales sont bien pris en compte dans le modèle d'ordre 1, mais les effets d'inertie le sont moins.

Le modèle à l'ordre 1 permet aussi d'améliorer la prédiction de la forme du profil de vitesse. Contrairement à la lubrification, le modèle l'ordre 1 prédit un profil de vitesse cisaillé sur toute l'épaisseur, et c'est que nous observons expérimentalement.

La forme du front :

Pour les formes de front, les prédictions du modèle de lubrification et du modèle d'ordre 1 sont très proches et ne peuvent pas être différenciées. Dans tous les cas, elles produisent de bons accords avec les données expérimentales en zone faiblement variée, mais produisent une sous-estimation de la hauteur proche du front. La distance du front en dessous de laquelle les modèles cessent d'être valides pour la prédiction de la hauteur ($x_{fc,f}$) est située entre 1 et 2 fois la hauteur

de la zone uniforme de la coulée (environ 20-30 mm de la ligne de contact au front). À cet endroit, la pente de la surface libre $\partial_x h$ commence à dépasser 0.1, et la vitesse verticale commence à être importante. On peut supposer que ce désaccord provient de la perte de validité du critère de couche mince $\epsilon << 1$, à l'approche du front. Mais il semble aussi qu'un mécanisme qui n'est pas pris en compte par le modèle influence la forme du front, et se manifeste notamment par la présence d'un rebroussement (Fig.4.12). Il semble que la tension de surface puisse être à l'origine d'un rebroussement au front de coulées newtoniennes [Veretennikov et al., 1998]. Il est possible de prendre en compte cette tension de surface dans un modèle intégré sur l'épaisseur [Ruyer-Quil and Manneville, 1998; Fernandez-Nieto et al., 2010]. Toutefois, les modèles qui considèrent $h(x)$ comme une fonction ne peuvent pas pour autant prédire un rebroussement au front.

Bilan :

En approchant le front d'une coulée viscoplastique, les profils de vitesse s'éloignent de la forme qu'ils ont en régime permanent uniforme. Ils deviennent cisaillés sur toute l'épaisseur, la vitesse de surface augmente, et le plug disparaît à l'approche du front.

La comparaison des prédictions théoriques aux mesures de dynamique interne nous a permis de montrer que les contraintes normales jouent un rôle important. Elles permettent d'expliquer l'augmentation de la vitesse de surface et la disparition du plug à l'approche du front, mesurées expérimentalement. La prise en compte des contraintes normales dans un modèle intégré de type Saint-Venant semble alors une étape importante pour améliorer les prédictions théoriques.

En revanche, les corrections inertielles, quand elles deviennent importantes, ne reproduisent pas les données expérimentales. Les corrections inertielles ne semblent pas donc bien prises en compte dans le modèle à l'ordre 1.

9.2 Formulation d'un modèle intégré d'ordre 1

Nous avons vu que le modèle à l'ordre 1 en ϵ est plus performant que le modèle de lubrification pour prédire la forme et l'évolution au front des profils de vitesse mesurés expérimentalement. Nous pouvons maintenant envisager d'utiliser ces développements théoriques dans le but opérationnel de modéliser l'étalement et la propagation d'une coulée de lave torrentielle. Pour cela, la première étape consiste à formuler un modèle intégré dans l'épaisseur consistant d'ordre 1 pour les fluides de Herschel-Bulkley. Puisque nous avons exprimé le débit et la vitesse à l'ordre 1 ($q^{(1)}, u^{(1)}$), nous avons en principe tous les ingrédients nécessaires pour le faire. Nous présentons ci-dessous les principales étapes pour obtenir ce modèle intégré dans l'épaisseur consistant d'ordre 1, et formulons son expression complète.

La seconde étape consisterait, en perspective, à intégrer cette formulation dans un code de calcul numérique, qui prend en compte une topographie basale complexe, afin d'établir des cartes d'étalement de coulées (exemple Fig. 1.8 avec le code numérique Lave2D).

Nous rappelons, en préambule, que les modèles de couche mince, de type Saint-Venant sont obtenus en intégrant sur l'épaisseur les équations primitives, afin d'exprimer la hauteur $h(x,t)$, en fonction de la vitesse moyenne, $\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u dy$. L'intégration dans l'épaisseur de la conservation de la quantité de mouvement (Eq.3.41), donne :

$$\epsilon Re(\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \partial_x \int_0^h \left(u^{(0)}\right)^2 dy) = \lambda h - \epsilon \frac{Re}{Fr^2}\partial_x \int_0^h p^{(1)} dy - \tau_b^{(1)} + \epsilon Bi \partial_x \int_0^h {\sigma_{xx}^p}^{(0)} dy + \epsilon^2 \partial_x \int_0^h \sigma_{xx}^v dy \quad (9.1)$$

avec, de gauche à droite, les termes d'inertie, l'accélération gravitaire due à la pente ($\lambda = tan\theta Re/Fr^2$), le terme de pression, la contrainte basale, le terme des contraintes normales plastiques et le terme des contraintes normales visqueuses.

Pour que le modèle soit consistant à l'ordre 1 en ϵ, certains termes requièrent des développements à l'ordre 0 ou 1 en ϵ. On remarque que le terme de contrainte normale visqueux peut être négligé à l'ordre 1. Comme nous sommes sous l'hypothèse $Re, Bi \approx 1$, $Fr^2 \approx \epsilon$, $\frac{Re}{Fr^2} \approx 1$ (Eq.3.44), le modèle consistent doit donc faire intervenir :

- la pression à l'ordre 1, pour que le terme de pression soit à l'ordre 1 : $\frac{\epsilon Re}{Fr^2}\ \partial_x \int_0^h p dy = \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\ \partial_x \int_0^h p^{(1)} dy + \mathcal{O}(\epsilon^2)$,
- la contrainte normale plastique à l'ordre 0, pour que le terme provenant des contraintes normales plastiques soit à l'ordre 1 : $\epsilon Bi\ \partial_x \int_0^h \sigma_{xx}^p dy = \epsilon Bi\ \partial_x \int_0^h \sigma_{xx}^{p,(0)} dy + \mathcal{O}(\epsilon^2)$,
- la contrainte basale à l'ordre 1,
- la vitesse horizontale u à l'ordre 0 dans le terme d'inertie.

9.2.1 Identités différentielles à l'ordre 0

Nous avions obtenu une première identité différentielle au §3.7.1 avec la conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur $\partial_t h = -\partial_x q^{(0)} + O(\epsilon)$ (Eq.3.74). En différenciant l'expression du débit (Eq. 3.57) en fonction de t et en remplaçant les termes en $\partial_t h$ dans la première identité (Eq. 3.74), on obtient une seconde identité différentielle qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\partial_t(h\bar{u}) = &-\Lambda^{2/n}\,(h-h_p)^{(2n+2)/n}\left(1+2w_p+w_p^2\right)\partial_x h \\ &-\Lambda^{(2-n)/n}\,(h-h_p)^{(3n+2)/n}\left(\tfrac{1}{2n+1}+\tfrac{5n+3}{(n+1)(2n+1)}w_p+\tfrac{n+3}{n+1}w_p^2+w_p^3\right)\partial_x\Lambda \\ &+\Lambda^{(1-n)/n}\,(h-h_p)^{(2n+1)/n}\left(\tfrac{1}{2n+1}+\tfrac{2}{n+1}w_p+w_p^2\right)\partial_t\Lambda+\mathcal{O}(\epsilon) \quad (9.2)\end{aligned}$$

et on rappelle que $w_p = h_p/(h-h_p)$.

9.2.2 Le terme de pression à l'ordre 1

En utilisant l'expression de la pression à l'ordre 1 (Eq.3.76), il vient :

$$\epsilon \frac{Re}{Fr^2}\partial_x \int_0^h p^{(1)} dy = \epsilon \frac{Re}{Fr^2}\partial_x \int_0^h (h-y) dy + \epsilon Bi \partial_x \int_0^h {\sigma_{yy}^p}^{(0)} dy \quad (9.3)$$

$$= \epsilon \frac{Re}{Fr^2} h \partial_x h - \epsilon Bi \partial_x \int_0^h {\sigma_{xx}^p}^{(0)} dy \quad (9.4)$$

On remarque que le second membre à droite de l'égalité peut s'ajouter au terme des contraintes normales dans l'expression 9.1.

9.2.2.1 Le terme de contrainte normale plastique à l'ordre 0

On rappelle qu'à l'ordre 0, les contraintes normales plastiques sont nulles dans la zone cisaillée, on a donc :

$$\epsilon Bi \partial_x \int_0^h {\sigma_{xx}^p}^{(0)} dy = \epsilon Bi \partial_x \int_{h-h_p}^h {\sigma_{xx}^p}^{(0)} dy \tag{9.5}$$

Avec l'expression (3.70), on obtient :

$$\epsilon Bi \partial_x \int_{h-h_p}^h {\sigma_{xx}^p}^{(0)} dy = \epsilon Bi \ \mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)}) \ \partial_x \int_{h-h_p}^h \sqrt{1-\left(\frac{h-y}{h_p}\right)^2} dy \tag{9.6}$$

$$= \epsilon Bi \ \mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)}) \ \partial_x h_p \frac{\pi}{4} \tag{9.7}$$

$$= -\epsilon Bi \ \mathrm{sgn}(\partial_x u_p^{(0)}) \ h_p \frac{\partial_x \Lambda}{\Lambda} \frac{\pi}{4} \tag{9.8}$$

avec, pour rappel, $\Lambda = Bi/h_p$, soit $\partial_x h_p = -h_p \partial_x \Lambda / \Lambda$.

En réécrivant le modèle complet à l'ordre 1 (Eq. 9.1) on obtient alors :

$$\epsilon Re \left(\partial_t (h\bar{u}) + \partial_x \int_0^h u^2 dy \right) + \frac{\epsilon Re}{Fr^2} \ h \partial_x h = \lambda h - \tau_b - \epsilon Bi \ \mathcal{C}_{\mathcal{N}}, \tag{9.9}$$

avec la corrections provenant des contraintes normales plastiques dans le pseudo-plug :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{N}} = \frac{\pi}{2} \frac{h_p}{\Lambda} \mathrm{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) \partial_x \Lambda \tag{9.10}$$

9.2.2.2 Le coefficient β du terme d'inertie

Pour calculer le terme d'inertie, nous devons évaluer le lien entre $\int_0^h u^2 dy$ et $\bar{u}^2$. Nous introduisons une fonction de forme β telle que :

$$\epsilon Re \int_0^h \left(u^{(0)}\right)^2 dy + O(\epsilon^2) = \beta(h, hp) \bar{u}^2 + O(\epsilon^2) \tag{9.11}$$

On obtient à l'aide d'un logiciel de calcul formel (maxima) l'expression suivante pour β :

$$\beta(h, h_p) = \beta(w_p) = \tfrac{2n+1}{3n+2} \tfrac{h}{h-h_p} \ \left(2 + \tfrac{(2n+1)(3n+2)}{(n+1)^2} w_p\right) \ \delta(w_p)^{-2} \tag{9.12}$$

$$= \tfrac{2n+1}{3n+2} (1+w_p) \ \left(2 + \tfrac{(2n+1)(3n+2)}{(n+1)^2} w_p\right) \ \delta(w_p)^{-2} \tag{9.13}$$

$$= \frac{\mu_2(w_p)}{\delta(w_p)^2} \tag{9.14}$$

et ses dérivées :

$$\frac{\partial \beta}{\partial h} = \tfrac{n(2n+1)}{(n+1)^2(3n+2)} \tfrac{h_p}{(h-h_p)^2} \ \left(1 + \tfrac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} w_p\right) \ \delta(w_p)^{-3} \tag{9.15}$$

et

$$\frac{\partial \beta}{\partial h_p} = -\frac{n(2n+1)}{(n+1)^2(3n+2)} \frac{h}{(h-h_p)^2} \left(1 + \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} w_p\right) \delta(w_p)^{-3} \tag{9.16}$$

où l'on a posé $\delta(X) = 1 + \frac{2n+1}{n+1} X$

Les termes d'inertie à gauche de l'équation (9.9) deviennent alors :

$$\epsilon Re \left[\partial_t(h\bar{u}) + \partial_x \left(\beta(w_p) h\bar{u}^2\right)\right] \tag{9.17}$$

Comme le coefficient β est inclus dans une dérivée, une formulation plus simple peut être obtenue en extrayant β des dérivées :

$$\partial_x \left(\beta(w_p)\ h\bar{u}^2\right) = \beta(h, h_p)\ \partial_x \left(h\bar{u}^2\right) + h\bar{u}^2 \frac{\partial \beta}{\partial h} \partial_x h - h\bar{u}^2 \frac{\partial \beta}{\partial h_p} \frac{h_p}{\Lambda} \partial_x \Lambda \tag{9.18}$$

Dans le cadre d'un développement d'ordre 1 et avec notre choix d'échelle (*cf.* 3.44), le facteur $h\bar{u}^2$ qui apparaît devant $\partial\beta/\partial h$ et $\partial\beta/\partial h_p$ peut être remplacé par son expression de l'ordre 0, c'est-à-dire $\left(q^{(0)}\right)^2/h$. Alors, l'équation intégrée devient :

$$\epsilon Re \left[\partial_t(h\bar{u}) + \beta(w_p)\ \partial_x \left(h\bar{u}^2\right) + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}\right] + \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\ h\partial_x h = \lambda h - \tau_b - \epsilon Bi\ \mathcal{C}_{\mathcal{N}} \tag{9.19}$$

avec $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ la somme de toutes les corrections qui proviennent des contraintes normales et $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ la correction qui provient des termes d'inertie.

Comme les coefficients devant $\partial_t(h\bar{u})$ et $\partial_x(h\bar{u})^2$ sont différents, ce modèle n'est pas invariant par transformation galiléenne. Or c'est une propriété importante puisque c'est celle des équations primitives [Noble and Vila, 2013]. Une telle formulation est possible, en utilisant l'identité différentielle (Eq.9.2) pour remplacer $(1-\beta)\ \partial_t(h\bar{u})$ par une fonction en $\partial_x h$, $\partial_x \Lambda$, et $\partial_t \Lambda$. En conséquence, le terme $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ est modifié est devient $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{G}}$. On peut alors écrire l'équation intégrée comme cela :

$$\epsilon Re \left[\frac{\mu_2(w_p)}{\delta(w_p)^2}\ \partial_t(h\bar{u}) + \frac{\mu_2(w_p)}{\delta(w_p)^2}\ \partial_x \left(h\bar{u}^2\right) + \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{G}}\right] + \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\ h\partial_x h = \lambda h - \tau_b - \epsilon Bi\ \mathcal{C}_{\mathcal{N}} \tag{9.20}$$

9.2.2.3 Relation de fermeture pour la contrainte basale

L'originalité du modèle intégré dans l'épaisseur que nous formulons, et que nous cherchons à ce que, si les termes d'inertie $\partial_t(h\bar{u})$ et $\partial_x\left(h\bar{u}^2\right)$ s'annulent, le modèle intégré (Eq.9.20) permette de retrouver l'expression du débit d'ordre 1. Ce choix est motivé par le cas des ondes progressives, pour lequel la vitesse moyenne est constante dans la coulée, et les termes d'inertie se simplifient (§3.8). Dans ce cas, le modèle de Saint-Venant se ramène à une expression du débit, et nous souhaitons que cette expression soit équivalente à celle fournie par le développement asymptotique. Ainsi, lorsque les profils de vitesse sont reconstruits à partir de la solution sur la forme du front du modèle intégré (exemple §3.8.2.2), ils possèdent la bonne vitesse moyenne. Ce choix n'est pas celui de [Fernandez-Nieto et al., 2010] par exemple.

A l'ordre 1, si les termes d'inertie se simplifient, alors l'équation (9.20) devient :

$$\epsilon Re\ \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{G}} + \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\ h\partial_x h = \lambda h - \tau_b^{(1)} - \epsilon Bi\ \mathcal{C}_{\mathcal{N}}, \tag{9.21}$$

c'est à dire

$$\tau_b^{(1)} = Bi + \Lambda(h - h_p) - \epsilon Re\, \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{G}} - \epsilon Bi\, \mathcal{C}_{\mathcal{N}}. \tag{9.22}$$

On cherche à ce que cette expression soit égale à celle du débit d'ordre 1 :

$$q^{(1)} = \tfrac{n}{2n+1}\Lambda^{1/n}(H - H_p)^{(n+1)/n}\,(H + \frac{n}{n+1}H_p) + \epsilon Bi\, \mathcal{Q}_{\mathcal{N}} + \epsilon Re\, \mathcal{Q}_{\mathcal{I}} \tag{9.23}$$

En écrivant la contrainte basale comme la somme de la contrainte basale de l'ordre 0 , d'une correction de contrainte normale et d'une correction inertielle $\tau_b^{(1)} = \tau_b^{(0)} + +\epsilon Re\, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} + \epsilon Bi\, \mathcal{T}_{\mathcal{N}}$, alors on obtient :

$$\tau_b^{(1)} = Bi + \left[\frac{2n+1}{n}\frac{h\bar{u}}{(h - h_p)(h + \frac{n}{n+1}h_p)}\right]^n + \epsilon Re\, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} + \epsilon Bi\, \mathcal{T}_{\mathcal{N}}, \tag{9.24}$$

avec la contrainte basale à l'ordre 0 qui correspond à celle classique du modèle de lubrification (§ 3.4) et permet effectivement de retrouver le débit à l'ordre 0 dans le cas où les termes d'inertie s'annulent.

Alors, l'équation (9.22) devient :

$$\left[\tfrac{2n+1}{n}\frac{h\bar{u}}{(h - h_p)(h + \frac{n}{n+1}h_p)}\right]^n = \Lambda(h - h_p) - \epsilon Re\, \left(\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{G}} + \mathcal{T}_{\mathcal{I}}\right) - \epsilon Bi\, \left(\mathcal{C}_{\mathcal{N}} + \mathcal{T}_{\mathcal{N}}\right), \tag{9.25}$$

et en utilisant une développement limité à l'ordre 1 (comme dans §3.7.5.1), on obtient :

$$\begin{aligned} h\bar{u} = {} & \tfrac{n}{2n+1}\Lambda^{1/n}(h - h_p)^{(n+1)/n}(h + \tfrac{n}{n+1}h_p) \\ & - \tfrac{1}{2n+1}\Lambda^{(1-n)/n}(h - h_p)^{1/n}(h + \tfrac{n}{n+1}h_p)\, \left[\epsilon Re\, \left(\mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{G}} + \mathcal{T}_{\mathcal{I}}\right) + \epsilon Bi\, \left(\mathcal{C}_{\mathcal{N}} + \mathcal{T}_{\mathcal{N}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{9.26}$$

L'identification avec l'expression du débit donne alors :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I}} = -(2n+1)\, \Lambda^{(n-1)/n}\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}}{(h - h_p)^{1/n}(h + \frac{n}{n+1}h_p)} - \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{G}} \tag{9.27}$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{N}} = -(2n+1)\, \Lambda^{(n-1)/n}\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{N}}}{(h - h_p)^{1/n}(h + \frac{n}{n+1}h_p)} - \mathcal{C}_{\mathcal{N}} \tag{9.28}$$

9.2.2.4 Expression complète

En regroupant tous les termes et en appelant $\kappa_{\mathcal{I}}$ la correction inertielle et $\kappa_{\mathcal{N}}$ la correction provenant des contraintes normales on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon Re\left[\frac{\mu_2(w_p)}{\delta(w_p)^2}\, \partial_t(h\bar{u}) + \frac{\mu_2(w_p)}{\delta(w_p)^2}\, \partial_x\left(h\bar{u}^2\right) + \kappa_{\mathcal{I}}\right] + \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\, h\partial_x h = \\ \lambda h - Bi - \left[\frac{2n+1}{n}\frac{h\bar{u}}{(h - h_p)(h + \frac{n}{n+1}h_p)}\right]^n + \epsilon Bi\, \kappa_{\mathcal{N}}, \end{aligned} \tag{9.29}$$

avec

$$\kappa_{\mathcal{N}} = \frac{(2n+1)\pi}{2}\frac{w_p}{\delta(w_p)}\,\partial_x h\ \mathrm{sgn}\left(\partial_x u_p^{(0)}\right) \tag{9.30}$$

et

$$\kappa_{\mathcal{I}} = \mathcal{C}_{\mathcal{I}}^{\mathcal{G}} + \mathcal{T}_{\mathcal{I}} = -(2n+1)\ \Lambda^{(n-1)/n}\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{I}}}{(h-h_p)^{1/n}(h+\frac{n}{n+1}h_p)}. \tag{9.31}$$

La correction inertielle s'exprime alors

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathcal{I}} = -\Lambda^{2/n}\ (h-h_p)^{(2n+2)/n}\ \frac{\alpha_1(w_p)}{\delta(w_p)}\ \partial_x h - \Lambda^{(2-n)/n}\ (h-h_p)^{(3n+2)/n}\ \frac{\alpha_2(w_p)}{\delta(w_p)}\ \partial_x\Lambda \\ + \Lambda^{(1-n)/n}\ (h-h_p)^{(2n+1)/n}\ \frac{\alpha_1(w_p)}{\delta(w_p)}\ \partial_t\Lambda\end{aligned} \tag{9.32}$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha_1(w_p) &= \tfrac{2}{3n+2} + \tfrac{5n+3}{(n+1)^2}w_p + \tfrac{2(n+3)(2n+1)}{(n+1)(n+2)}w_p^2 + (2n+1)w_p^3 \\ \alpha_2(w_p) &= \tfrac{2(3+4n-3n^2)}{(2n+1)(3n+2)(4n+3)} + \tfrac{24+57n+18n^2-22n^3}{3(n+1)^3(3n+2)}w_p + \tfrac{3(4+7n-n^2-n^3)}{(n+1)^2(n+2)}w_p^2 \\ &\quad + \tfrac{(2n+1)(8+n-n^2)}{(n+1)(n+2)}w_p^3 + (2n+1)w_p^4\end{aligned} \tag{9.33}$$

Remarque, lien avec le modèle Saint-Venant classique :

On rappelle ici la forme du modèle Saint-Venant classique, adapté à un fluide de rhéologie Herschel-Bulkley :

$$\epsilon Re\left[\partial_t(h\bar{u}) + \partial_x\left(h\bar{u}^2\right)\right] = \lambda h - \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\ h\partial_x h - Bi - \left[\frac{2n+1}{n}\frac{h\bar{u}}{(h-h_p)(h+\frac{n}{n+1}h_p)}\right]^n \tag{9.34}$$

Ce modèle est aussi invariant par transformation galiléenne. La relation de fermeture utilisée pour la contrainte basale (la loi de frottement) permet de retrouver l'expression du débit $q^{(0)}$ de la lubrification lorsque les termes d'inertie s'annulent (§3.4). La comparaison du modèle Saint-Venant classique illustre des différences par rapport au modèle complet : le coefficient β est constant et ni les corrections inertielles $\kappa_{\mathcal{I}}$, ni les corrections provenant des contraintes normales pastiques $\kappa_{\mathcal{N}}$ ne sont prises en compte.

9.3 Perspectives

Nous nous questionnons ici sur les perceptives de notre travail et sur les analyses qu'il serait utile de conduire par la suite. Comment améliorer les résultats obtenus ? Quelles analyses supplémentaires pourraient être réalisées ? Nous présenterons nos suggestions point par point.

Concernant le traitement des données expérimentales :

• Nous pourrions envisager de réduire le bruit de mesure sur la vitesse verticale v en exploitant la relation de la conservation de la masse. Dans ce cas là nous pourrions reconstituer les profils de vitesse verticale à partir de la dérivée de la vitesse longitudinale $\partial u/\partial x$. Cependant le bruit sur le

calcul de $\partial u/\partial x$ est trop important et rend le calcul de v inexploitable dans nos premiers essais. Des développements supplémentaires sont nécessaires pour exploiter la conservation de la masse et compléter les mesures de vitesses verticales.

• Nous avons calculé deux critères différents pour positionner dans la coulée l'endroit où le modèle cesse d'être valide : la distance critique sur la prédiction de la hauteur $x_{fc,f}$ et la distance critique sur la prédiction du profil de vitesse longitudinale $x_{fc,u}$. Il semble que $x_{fc,f}$ augmente quand le nombre G de l'expérience augmente. En revanche $x_{fc,u}$ ne montre pas de tendance. Pourtant, lorsque nous observons l'évolution des vitesses de surface et du profil de vitesse au front, il semble que les expériences possédant un fort Froude et un petit G ont tendance à s'éloigner davantage des prédictions théoriques que les autres.

Nous pourrions donc envisager de raffiner ces deux critères. $x_{fc,f}$ est actuellement calculé avec un seuil fixe de dépassement de l'écart entre la prédiction et la mesure de hauteur (Fig.7.31). Nous pourrions plutôt considérer l'évolution de l'aire entre la mesure de hauteur et la prédiction, pour prendre en compte les légers désaccords qui peuvent aussi se produire en amont du front, mais qui ne sont suffisamment importants pour dépasser le seuil (exemple Fig.8.3, la hauteur théorique intercepte la hauteur mesurée pour $4 < x_f^* < 8$). $x_{fc,u}$ est actuellement calculé par une seuil sur le carré des différences ($RMSE^2$) entre le profil de vitesse mesuré et prédit. Mais un critère basé sur la loi de répartition (type test de Kolmogorov-Smirnov) pourrait améliorer les résultats. On pourrait peut-être observer une tendance en fonction du nombre G et Fr, ou au contraire montrer plus clairement qu'il n'y en a pas.

• Il serait aussi intéressant de valider l'hypothèse de présence d'un effet d'échelle lors de la mesure des propriétés rhéologiques du gel de Carbopol au rhéomètre. Comme il est difficile d'avoir une idée de la taille des microstructures présentes dans le gel de Carbopol [Oppong et al., 2006], nous pourrions par exemple envisager de tester la rhéologie à l'échelle de l'écoulement pour plusieurs agitations préalables du gel de Carbopol. S'il existe des microstructures relativement grosses dans le gel de Carbopol, une agitation du matériau croissante (et donc une diminution de la taille des particules), devrait faire tendre les propriétés rhéométriques mesurées au rhéomètre vers celles mesurées à l'échelle de l'écoulement sur le canal.

Concernant la comparaison aux modèles :

• Nous avons alors utilisé un modèle purement théorique, dans lequel les profils de vitesse $(u^{(0)}, u^{(1)})$ sont obtenus grâce à la hauteur et la pente de la surface libre eux mêmes calculés théoriquement par les expressions $q^{(0)}$ et $q^{(1)}$. De plus, nous avons adimensionné les solutions par l'échelle du régime permanent uniforme. Les paramètres rhéologiques sont exprimés dans le modèle à travers l'indice d'écoulement n et le nombre ($G = \tau_c/(\rho g h_N \sin\theta)$). Cette méthode permet d'observer, à chaque position dans la coulée, la différence de forme du profil de vitesse entre le modèle et l'observation. Mais, à l'approche du front, la hauteur théorique ne correspond pas à la hauteur mesurée, et les profils de vitesse ne sont donc pas comparés sur la même épaisseur.

Nous avons aussi comparé les mesures aux modèles théoriques calculés avec la hauteur et la pente de la surface libre mesurées expérimentalement. Avec cette méthode, la comparaison est effectuée pour la bonne distance de la ligne de front mais aussi la bonne épaisseur d'écoulement. Mais la mesure de la pente de la surface libre (la dérivée de la mesure de la hauteur), dans le

front, présente des fluctuations dues au bruit de mesure qui est amplifié par la dérivation. La comparaison avec les modèles est alors difficile (Fig.7.15). Nous pourrions calculer la pente de la surface libre avec une méthode qui génère moins de bruit que le filtre de Savitzky-Golay que nous effectuons. De plus, dans le modèle d'ordre 1, la double dérivée de la hauteur apparaît, qu'il va aussi falloir évaluer à partir de mesures expérimentales. Peut-être qu'un traitement de type ondelette, pourrait aider à filtrer les zones trop bruitées.

• Enfin, de façon générale, l'ensemble des expériences réalisées constitue une base de données importante qui pourra servir à tester des modèles numériques. Des modèles de couche mince de complexité croissante pourront être comparés aux mesures, pour observer s'ils permettent de s'en approcher, au front, comme nous l'avons fait au chapitre 8. De plus ces données pourront aussi apporter une comparaison, plutôt rare dans la littérature, avec des modèles CFD (*"Computational Fluid Dynamics"*) [Vola et al., 2004].

Concernant les modèles :

• Dans les développements de la vitesse et du débit à l'ordre 1, nous avons négligé la contribution des contraintes normales visqueuses dans le plug ($\sigma^v_{xx} = O(\epsilon^{n-1})$) car elles sont en facteur de ϵ^2 dans les équations de la conservation du mouvement. Cependant, pour $n = 0.4$, comme avec le gel de Carbopol, la contribution des contraintes normales visqueuses devient d'ordre $\epsilon^{1.4}$. De plus, le raccord sur le profil de vitesse a été effectué abruptement au moyen d'une identification à l'interface entre la zone cisaillée et le plug. Si ce raccord était effectué au moyen d'une couche de transition, il ferait aussi apparaître des corrections d'ordre "entre 1 et 2" (d'ordre $\epsilon^{1.3}$ dans les fluides de Bingham par exemple [Fernandez-Nieto et al., 2010]). Ces deux sources de corrections supplémentaires pourraient peut-être modifier la solution, il faudrait étudier l'influence de ces termes.

• La prise en compte de la contribution des corrections inertielles dans l'expression de la vitesse et du débit à l'ordre 1 à plutôt tendance à réduire l'impact des corrections des contraintes normales (dans la gamme $G \in$[0.17,0.35] et $Fr \in$[0.06-0.42]). Mais un choix arbitraire a été effectué lors des développements théoriques, lorsque les dérivées de la hauteur par rapport au temps ont été remplacées par les dérivées spatiales au moyen d'une identité différentielle. Ce choix, qui influence les corrections inertielles, modifie la forme du front dans le cas newtonien [Chambon, 2014] et pourrait la modifier aussi dans le cas viscoplastique. Un autre choix que celui que nous avons fait pourrait peut-être modifier la solution dans le sens de l'augmentation des effets d'inertie, et améliorer l'accord avec nos résultats expérimentaux. Il faudrait alors tester l'influence des différents choix.

• Nous avons montré que le gel de Carbopol présentait un régime élastique aux petites déformations (§5.3.3.2). L'élasticité est à l'origine de contraintes normales donc la prise en compte de l'élasticité impliquera l'apparition de contraintes normales supplémentaires dans le modèle. Or, dans notre modèle à l'ordre 1, les contraintes normales ont une influence forte sur les solutions. Peut-être que l'intervention de l'effet supplémentaire de l'élasticité dans le modèle, pourrait améliorer la prédiction sur la forme du front, sur la vitesse de surface, et sur la forme du profil de vitesse [Saramito, 2009].

9.4 Suggestions pour de futures études

Étude de différents fluides complexes :

Dans cette thèse nous avons étudié l'écoulement à surface libre de fluides newtoniens et viscoplastiques. Plus généralement, nous pourrions envisager d'étudier d'autres matériaux afin d'isoler les effets des différentes rhéologies. L'étude d'une rhéologie pseudoplastique (avec du CMC ou du Xanthan par exemple [Millet et al., 2013]) et la comparaison aux résultats sur les fluides viscoplastiques pourrait permettre de mettre en évidence les effets liés à l'apparition du seuil. Nous pourrions aussi envisager l'étude d'une rhéologie plus complexe, comme la thixotropie, pour étudier les effets liés à la dépendance au temps de la microstructure.

Écoulement autour d'un obstacle :

Nous avons étudié une zone fortement non-uniforme dans cette thèse, le front d'une coulée à surface libre. Mais il serait envisageable d'installer un obstacle tangent au fond mobile, pour étudier les champs de vitesse autour de celui-ci. Face à l'obstacle, on s'attend à la formation d'une zone morte, dont l'interface pourra être étudiée, de la même façon que le plug dans cette thèse. L'apport, par rapport à l'étude d'un front, et de disposer d'une configuration fortement non-uniforme différente, liée à une variation de topographie basale, pour comparer et tester les modèles de couche mince. De plus, l'étude de l'interface entre les zones mortes formées autour de l'obstacle et les zones cisaillées fournirait des indications sur la transition solide-fluide. De manière générale, le canal à fond mobile peut être considéré comme un outil supplémentaire pour comprendre comment s'effectue la transition solide-liquide.

Étude de l'apparition d'instabilités :

En ajustant le canal à une forte pente (jusqu'à 30°) ou pour des fortes vitesses (jusqu'à 500 mm.s^{-1}), on remarque l'apparition d'instabilités se manifestant notamment au niveau du front, qui devient vaguelé, et sur la hauteur, qui oscille. On pourrait faire l'hypothèse que ces instabilités correspondent aux *roll waves*, [Balmforth et al., 2006; Balmforth and Liu, 2004; Liu and Mei, 1994; Ng and Mei, 1994]. Le canal pourrait alors servir à mesurer l'apparition d'instabilités dans le fluide. Mais des études complémentaires sont nécessaires pour vérifier cette hypothèse.

Étude de mélange :

Les laves torrentielles sont des coulées d'éléments rocheux et d'eau [Hungr et al., 2005; Chambon and Laigle, 2013] dans lesquelles il existe des processus de migration et de ségrégation, notamment à l'origine de la formation du front granulaire [Gray and Ancey, 2009; Johnson et al., 2012; Leonardi et al., 2015]. Le canal à fond mobile pourrait alors être utilisé avec un mélange entre un fluide à seuil et des grains, pour l'étude des propriétés rhéologiques, des phénomènes de migration et de ségrégation. Une étude préliminaire sur le canal à fond mobile a déjà été réalisée [Ghemmour, 2011] avec une particule isolée. Cette étude constitue une première approche qui valide la possibilité d'étudier techniquement les mélanges avec ce dispositif expérimental, et de mesurer la cinématique des particules.

Références

Ancey, C. (1999). Rhéologie des laves torrentielles. Technical report, Toraval.

Ancey, C. (2001). Role of lubricated contacts in concentrated polydisperse suspensions. *J. Rheol.*, 45(6) :1421–1439.

Ancey, C. (2007). Plasticity and geophysical flows : A review. *J. Non-Newton. Fluid*, 142 :4–35.

Ancey, C., Andreini, N., and Epely-Chauvin, G. (2012). Viscoplastic dambreak waves : Review of simple computational approaches and comparison with experiments. *Adv. Water Res.*, 48 :79–91.

Ancey, C. and Cochard, S. (2009). The dam-break problem for Herschel-Bulkley viscoplastic fluids down steep flumes. *J. Non-Newton. Fluid*, 158 :18–35.

Ancey, C., Cochard, S., and Andreini, N. (2009). The dam-break problem for viscous fluids in the high-capillary-number limit. *J. Fluid Mech.*, 624 :1–22.

Andreini, N., Epely-Chauvin, G., and Ancey, C. (2012). Internal dynamics of Newtonian and viscoplastic fluid avalanches down a sloping bed. *Phys. Fluids*, 24 :053101.

Arattano, M. and Franzi, L. (2010). On the application of kinematics models to simulate the diffusice process of debris flows. *Nat.Hazards Earth Syst. Sci.*, 10 :1689–1695.

Arattano, M. and Savage, W., Z. (1994). Modelling debris flows as kinematic waves. *Bulletin of the International Association of Engineering Geology*, 49 :3–13.

Bagnold, R. A. (1954). *Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear*, volume Ser. A. Proc. R. Soc. London.

Baker, J., Johnson, C., and Gray, J. (2016). Segregation-induced finger formation in granular free-surface flows. *J. Fluid Mech.*, 809 :168–212.

Balmforth, N. J. and Craster, R. V. (1999). A consistent thin-layer theory for Bingham plastics. *J. Non-Newton. Fluid*, 84 :65–81.

Balmforth, N. J., Craster, R. V., Rust, A. C., and Sassi, R. (2006). Viscoplastic flow over an inclined surface. *J. Non-Newton. Fluid*, 139 :103–127.

Balmforth, N. J., Craster, R. V., and Sassi, R. (2002). Shallow viscoplastic flow on an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 470 :1–29.

Balmforth, N. J., Frigaard, I. A., and Ovarlez, G. (2014). Yielding to stress : Recent developments in viscoplastic fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 46 :121–146.

Balmforth, N. J. and Liu, J. J. (2004). Roll waves in mud. *J. Fluid Mech.*, 519 :33–54.

Bardou, E. (2002). *Méthodologie de diagnostic des laves torrentielles sur un bassin versant alpin*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Barnes, E., Wilson, D., and Johns, M. (2006). Velocity profiling inside a ram extruder using magnetic resonance (mr) techniques. *Chemical Engineering Science*, 61 :1357 – 1367.

Barnes, H. A. (1997). Thixotropy–a review. *J. Non-Newton. Fluid*, 70 :1 – 33.

Barnes, H. A. (1999). The yield stress - a review or "penta rhei" everything flows ? *J. Non-Newton. Fluid*, 81 :133 – 178.

Barnes, H. A. and Walters, K. (1985). The yield stress myth ? *Rheol. Acta*, 24 :323–326.

Baskurt, O. and Meiselman, H. (2003). Blood rheology and hemodynamics. *Seminars in Thrombosis and Hemostasis*, 29 :435–450.

Bécu, L., Manneville, S., and Colin, A. (2006). Yielding and flow in adhesive and nonadhesive concentrated emulsions. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :138302.

Bel, C., Liébault, F., Navratil, O., Eckert, N., Bellot, H., Fontaine, F., and Laigle, D. (2016). Rainfall control of debris-flow triggering in the Réal torrent, Southern French Prealps. *Geomorphology*.

Bernabeu, N., Saramito, P., and Smutek, C. (2014). Numerical modeling of non-newtonian viscoplastic flows : Part ii. viscoplastic fluids and general tridimensional topographies. *Inter. J. Numer. Anal. Model.*, 11 :213–228.

Berti, M., Martina, M., Franceschini, S., Pignone, S., Simoni, A., and Pizziolo, M. (2012). Probabilistic rainfall thresholds for landslide occurrence using a bayesian approach. *J. Geophys. Res.*, 117.

Berti, M. and Simoni, A. (2005). Experimental evidences and numerical modelling of debris flow initiated by channel runoff. *Landslides*, 2 :171–182.

Bertrand, M., Liébault, F., and Piégay, H. (2013). Debris-flow susceptibility of upland catchments. *Natural Hazards*, 67 :497–511.

Berzi, D. (2011). Analytical solution of collisional sheet flows. *J. Hydraul. Eng.*, 137 :1200–1207.

Berzi, D. and Larcan, E. (2013). Flow resistance of inertial debris flows. *J. Hydraul. Eng.*, 139 :187–194.

Bingham, E. C. (1922). *Fluidity and plasticity*. McGraw-Hill Book Company, Inc.

Bird, R. B., Dai, G., and Yaruso, B. J. (1982). The rheology and flow of viscoplastic materials. *Rev. Chem. Eng.*, 1 :1–70.

Blake, S. (1990). *Viscoplastic Models of Lava Domes*, pages 88–126. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

Bonn, D., Coussot, P., Huynh, H., Bertrand, F., and Debrégeas, G. (2002). Rheology of soft glassy materials. *Europhys. Lett.*, 59 :786–792.

Bonn, D., Paredes, J., Denn, M. M., Berthier, L., Divoux, T., and Manneville, S. (2015). Yield stress materials in soft condensed matter. *arXiv :1502.05281 [cond-mat.soft]*.

Bouchut, F., Fernández-Nieto, E., Mangeney, A., and Narbona-Reina, G. (2016). A two-phase two-layer model for fluidized granular flows with dilatancy effects. *J. Fluid Mech.*, 801 :166–221.

Boujlel, J. (2013). *Déplacement d'un objet à travers un fluide à seuil : couche limite, contrainte seuil et mouillage*. PhD thesis, Université de Paris- Est.

Boujlel, J., Maillard, M., Lindner, A., Ovarlez, G., Chateau, X., and Coussot, P. (2012). Boundary layer in pastes – Displacement of a long object through a yield stress fluid. *J. Rheol.*, 56 :1083–1108.

Bowman, E. T., Laue, J., Imre, B., and Springman, S. M. (2010). Experimental modelling of debris flow behaviour using a geotechnical centrifuge. *Can. Geotech. J.*, 47 :742–762.

Boyer, F., Guazzelli, E., and Pouliquen, O. (2011). Unifying syspension and granular rheology. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :188301.

Carlier, M. (1972). *Hydraulique générale et appliquée*. Eyrolles, EDF.

Chambon, G. (2014). Quelques contributions à la modélisation des écoulements à surface libre de fluides complexes. *Document de synthèse en vue de l'obtention d'une habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier - Université Grenoble Alpes*.

Chambon, G., Ghemmour, A., and Laigle, D. (2009). Gravity-driven surges of a viscoplastic fluid : An experimental study. *J. Non-Newton. Fluid*, 158 :54–62.

Chambon, G., Ghemmour, A., and Naaim, M. (2014). Experimental investigation of viscoplastic free-surface flows in steady uniform regime. *J. Fluid Mech.*, 754 :332–364.

Chambon, G. and Laigle, D. (2013). *Torrents et rivières de montagne, dynamique et aménagement*, chapter Les laves torrentielles. Savoir faire.

Chambon, G. and Naaim, M. (2010). Scaling relationships for constant-volume snow avalanches. *Ann. Glaciol.*, 51 :129–138.

Chan, B., Ji, S., Koveal, C., and Hosoi, A. (2007). Mechanical devices for snail-like locomotion. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 18 :111–116.

Chanson, H., Jarny, S., and Coussot, P. (2006). Dam break wave of thixotropic fluid. *J. Hydraul. Eng.*, 132 :280–293.

Chow, V. (1959). *Open-channel hydraulics*. McGraw-Hill,New York.

Cochard, S. and Ancey, C. (2006). Accurate measurements of free-surface in the dam-break problem. In *River Flow Conference, IHAR, Lisbonne, Septembre 2006*.

Cochard, S. and Ancey, C. (2008). Tracking the free surface of time-dependent flows : image processing for the dam-break problem. *Exp. Fluids*, 44 :59–71.

Cochard, S. and Ancey, C. (2009). Experimental investigation of the spreading of viscoplastic fluids on inclined planes. *J. Non-Newton. Fluid*, 158 :73–84.

Cottin-Bizonne, C., Cross, B., Steinberger, A., and Charlaix, E. (2005). Boundary slip on smooth hydrophobic surfaces : Intrinsic effects and possible artifacts. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :056102.

Coussot, P. (1992). *Rhéologie des boues et laves torrentielles. Etudes de dispersions et suspensions concentrées*. PhD thesis, Thèse de Doctorat de l'Institut national polythechnique de Grenoble.

Coussot, P. (1994). Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel. *J. Hydraul. Res.*, 32 :535–559.

Coussot, P. (2005). *Rheometry of pastes, suspensions, and granular materials. Applications in industry and environment*. Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey.

Coussot, P. (2014). Yield stress fluid flows : A review of experimental data. *J. Non-Newton. Fluid*, 211 :31–49.

Coussot, P. and Ancey, C. (1999a). Rheophysical classification of concentrated suspensions and granular pastes. *Phys. Rev. E*, 59 :4445–4457.

Coussot, P. and Ancey, C. (1999b). *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP sciences.

Coussot, P., Laigle, D., Arattano, M., Deganutti, A., and Marchi, L. (1998). Direct determination of rheological characteristics of debris flows. *J. Hydraul. Eng.*, 124 :865–868.

Coussot, P., Nguyen, Q. D., Huynh, H. T., and Bonn, D. (2002a). Avalanche behavior in yield stress fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :175501.

Coussot, P., Nguyen, Q. D., Huynh, H. T., and Bonn, D. (2002b). Viscosity bifurcation in thixotropic, yielding fluids. *J. Rheol.*, 46 :573–589.

Coussot, P. and Ovarlez, G. (2010). Physical origin of shear-banding in jammed systems. *Eur. Phys. J. E*, 33 :183–188.

Coussot, P. and Piau, J. (1994). On the behavior of fine mud suspensions. *Rheol. Acta*, 33 :175–184.

Coussot, P., Tocquer, L., Lanos, C., and Ovarlez, G. (2009). Macroscopic vs. local rheology of yield stress fluids. *J. Non-Newton. Fluid*, 158 :85–90.

Da Cruz, F., Chevoir, F., Bonn, D., and Coussot, P. (2002). Viscosity bifurcation in granular materials, foams, and emulsions. *Phys. Rev. E*, 66 :051305.

Daido, A. (1971). On the occurrence of mud-debris flow. *Bull. Disaster Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., Part2*, 21 :109–135.

Davies, T. R. H. (1990). Debris-flow surges - experimental simulation. *Journal of Hydrology*, 29 :18–46.

de Souza Mendes, P. R., Naccache, M. F., Varges, P. R., and Marchesini, F. H. (2007). Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions-contractions. *J. Non-Newton. Fluid*, 142 :207–217.

Denlinger, R. P. and Iverson, R. M. (2001). Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain 2. numerical predictions and experimental tests. *J. Geophys. Res.*, 106 :553–566.

Di Giuseppe, E., Corbi, F., Funiciello, F., Massmeyer, A., Santimano, T., Rosenau, M., and Davaille, A. (2015). Characterization of carbopol hydrogel rheology for experimental tectonics and geodynamics. *Tectonophysics*, 642 :29–45.

Dubash, N., Balmforth, N., Slim, A., and Cochard, S. (2009). What is the final shape of a viscoplastic slump ? *J. Non-Newton. Fluid*, 158 :91–100.

Einstein, A. (1956). Investigations on the theory of the brownian movement. *NEw York, Dover Publication. From the Annaleen der Physik (4), 19,1906, pp 371-381*.

Fernandez-Nieto, E. D., Noble, P., and Vila, J. P. (2010). Shallow Water equations for Non-Newtonian fluids. *J. Non-Newton. Fluid*, 165 :712–732.

Forterre, Y. (2006). Kapiza waves as a test for three-dimensional granular flow rheology. *J. Fluid Mech.*, 563 :123–132.

Forterre, Y. and Pouliquen, O. (2008). Flows of dense granular media. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 40 :1–24.

Frigaard, I. and Nouar, C. (2005). On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation. *J. Non-Newton. Fluid*, 127 :1–26.

Fujita, I., Muste, M., and Kruger, A. (1998). Large-scale particle image velocimetry for flow analysis in hydraulic engineering applications. *J. Hydraul. Res.*, 36 :397–414.

Fujita, I., Watanabe, H., and Tsubaki, R. (2007). Development of a non-intrusive and efficient flow monitoring technique : The space-time image velocimetry (STIV). *Int. J. River Basin Manage.*, 5 :105–114.

GDR. Midi (2004). On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E*, 14 :341–365.

Geraud, B., Bocquet, L., and Barentin, C. (2013). Confined flows of a polymer microgel. *Eur. Phys. J. E*, 36.

Gerbeau, J.-F. and Perthame, B. (2001). Derivation of viscous saint-venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 1 :89–102.

Ghemmour, A. (2011). *Ecoulement à surface libre de fluide uil : Réométrie et validation des caractstiques hydrauliques dans un canal à fond mobile. Application aux laves torrentielles.* PhD thesis, Université de Grenoble.

Gray, J. and Ancey, C. (2009). Segregation, recirculation and deposition of coarse particles near two-dimensional avalanche fronts. *J. Fluid Mech.*, 629 :387–423.

Gray, J. and Thornton, A. (2005). A theory for particle size segregation in shallow granular free-surface flows. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 461 :1447–1473.

Gurung, A., Haverkort, J., Drost, S., Norder, B., Westerweel, J., and Poelma, C. (2016). Ultrasound image velocimetry for rheological measurements. *Meas Sci Technol*, 27.

Hart, D. (2000). Super-resolution PIV by Recursive Local-correlation. *J. Vis.*, 3 :187–194.

Herschel, W. and Bulkley, R. (1926). Konsistenzmessungen von gummi-benzollösungen (measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions). *Kolloid Zeitschrift*, 39 :291–300.

Hewitt, D. R. and Balmforth, N. J. (2013). Thixotropic gravity currents. *J. Fluid Mech.*, 727 :56–82.

Hogg, A. J. and Pritchard, D. (2004). The effects of hydraulic resistance on dam-break and other shallow inertial flows. *J. Fluid Mech.*, 501 :179–212.

Huang, H., Fiedler, H., and Wang, J. (1993b). Limitation and improvement of PIV Part III ; Particule image distorsion, a novel technique. *Exp. Fluids*, 15 :263–273.

Huang, X. and Garcia, M. H. (1998). A Herschel-Bulkley model for mud flow down a slope. *J. Fluid Mech.*, 374 :305–233.

Hungr, O., McDougall, S., and Bovis, M. (2005). *Entrainment of material by debris flows*, pages 135–158. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.

Hunt, B. (1994). Newtonian Fluid Mechanics Treatment of Debris Flows and Avalanches. *J. Hydraul. Eng.*, 120 :1350–1363.

Huppert, H. E. (1982). The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface. *J. Fluid Mech.*, 121 :43–58.

Huynh, H., Roussel, N., and Coussot, P. (2005). Aging and free surface flow of a thixotropic fluid. *Phys. Fluids*, 17 :033101–1–033101–9.

Iverson, R., M., Costa, J. E., and LaHusen, R. (1992). Debris-flow flume at H.J. Andrews experimental forest, Oregon. Technical report, U.S Geological Survey.

Iverson, R. (1997). The physics of debris flows. *Rev. Geophys.*, 35 :245–296.

Iverson, R. (2000). Landslide triggering by rain infiltration. *Water Resour. Res.*, 36 :1897–1910.

Iverson, R. (2003). The debris-flow rheology myth. pages 303–314.

Iverson, R. and George, D. (2014). A depth-averaged debris-flow model that includes the effects of evolving dilatancy. i. physical basis. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 470.

Iverson, R. M. (2013). Mechanics of debris flows and rock avalanches. In Fernando, H. J. S., editor, *Handbook and Environmental Fluid Dynamics*, pages 573–587. CRC Press / Taylor and Francis Group.

James, A., Williams, D., and Williams, P. (1987). Direct measurement of static yield properties of cohesive suspensions. *Rheol. Acta*, 26 :437–446.

Jenkins, J. (1992). Boundary conditions for rapid granular flow : Flat, frictional walls. *J. Appl. Mech.*, 59 :120–127.

Johnson, C., Kokelaar, B., Iverson, R., Logan, M., Lahusen, R., and Gray, J. (2012). Grain-size segregation and levee formation in geophysical mass flows. *J. Geophys. Res.*, 117.

Jop, P., Forterre, Y., and Pouliquen, O. (2006). A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441 :727–730.

Jørgensen, L., Le Merrer, M., Delanoë-Ayari, H., and Barentin, C. (2015). Yield stress and elasticity influence on surface tension measurements. *Soft Matter*, 11 :5111–5121.

Kaitna, R., Dietrich, W., and Hsu, L. (2014). Surface slopes, velocity profiles and fluid pressure in coarse-grained debris flows saturated with water and mud. *J. Fluid Mech.*, 741 :377–403.

Kaitna, R. and Rickenmann, D. (2007). A new experimental facility for laboratory debris flow investigation. *J. Hydraul. Res.*, 45 :797–810.

Keane, R., Adrian, R., and Zhang, Y. (1995). Super-resolution particle imaging velocimetry. *Meas Sci Technol*, 6 :754–768.

Laigle, D. and Coussot, P. (1997). Numerical modeling of mudflows. *J. Hydraul. Eng.*, 123 :617–623.

Leonardi, A., Cabrera, M., Wittel, F., Kaitna, R., Mendoza, M., Wu, W., and Herrmann, H. (2015). Granular-front formation in free-surface flow of concentrated suspensions. *Phys. Rev. E*, 92 :052204.

Lighthill, M. J. and Whitham, B. G. (1955). On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 229 :281–316.

Lipscomb, G. and Denn, M. (1984). Flow of bingham fluids in complex geometries. *J. Non-Newton. Fluid*, 14 :337 – 346.

Liu, K. F. and Mei, C. C. (1989). Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 207 :505–529.

Liu, K.-f. and Mei, C. C. (1994). Roll waves on a layer of a muddy fluid flowing down a gentle slope - A Bingham model. *Phys. Fluids*, 6 :2577–2590.

Longo, S., Chiapponi, L., and Di Federico, V. (2016). On the propagation of viscous gravity currents of non-newtonian fluids in channels with varying cross section and inclination. *J. Non-Newton. Fluid*, 235 :95–108.

Luu, L. H. and Forterre, Y. (2009). Drop impact of yield-stress fluids. *J. Fluid Mech.*, 632 :301–327.

Luu, L. H., Philippe, P., and Chambon, G. (2015). Experimental study of the solid-liquid interface in a yield-stress fluid flow upstream of a step. *Phys. Rev. E*, 91 :013013.

Magnin, A. and Piau, J. M. (1987). Shear rheometry of fluids with a yield stress. *J. Non-Newton. Fluid*, 23 :91–106.

Major, J. J. (1997). Depositional processes in large-scale debris-flow experiments. *J. Glaciol.*, 105 :345–366.

Mangeney-Castelnau, A., Vilotte, J.-P., Bristeau, M., Perthame, B., Bouchut, F., Simeoni, C., and Yerneni, S. (2003). Numerical modeling of avalanches based on Saint Venant equations using a kinetic scheme. *J. Geophys. Res.*, 108 :EPM 9–1 – EPM 9–18.

Marchi, L., Arattano, M., and Deganutti, A. (2002). Ten years of debris-flow monitoring in the Moscardo Torrent (Italian Alps). *Geomorphology*, 46 :1–17.

McDougall, S. and Hungr, O. (2005). Dynamic modelling of entrainment in rapid landslides. *Can. Geotech. J.*, 42 :1437–1448.

Mei, C. C., Liu, K.-f., and Yuhi, M. (2001). Mud flows - slow and fast. In Balmforth, N. J. and Provenzale, A., editors, *Geomorphological fluid mechanics : selected topics in geological and geomorphological fluid mechanics*, pages 548–577, Berlin. Springer.

Mei, C. C. and Yuhi, M. (2001). Slow flow of a bingham fluid in a shallow channel of finite width. *J. Fluid Mech.*, 431 :135–159.

Metzner, A. (1985). Rheology of suspensions in polymeric liquids. *J. Rheol.*, 29 :739–775.

Meunier, P. and Leweke, T. (2003). Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry. *Exp. Fluids*, 35 :408–421.

Meunier, P., Leweke, T., Lebescond, R., Van Aughem, B., and Wang, C. (2004). DPIV soft User Guide.

Millet, S., Botton, V., Ben Hadid, H., Henry, D., and Rousset, F. (2013). Stability of two-layer shear-thinning film flows. *Phys. Rev. E*, 88 :043004.

Mitsoulis, E. and Huilgol, R. (2004). Entry flows of bingham plastics in expansions. *J. Non-Newton. Fluid*, 122 :45 – 54.

Møller, P., Fall, A., and Bonn, D. (2009). Origin of apparent viscosity in yield stress fluids below yielding. *Eur. Phys. Lett.*, 87.

Møller, P., Mewis, J., and Bonn, D. (2006). Yield stress and thixotropy : On the difficulty of measuring yield stresses in practice. *Soft Matter*, 2 :274–283.

Naaim, M., Durand, Y., Eckert, N., and Chambon, G. (2013). Dense avalanche friction coefficients : Influence of physical properties of snow. *J. Glaciol.*, 59 :771–782.

Navratil, O., Liébault, F., Bellot, H., Travaglini, E., Theule, J., Chambon, G., and Laigle, D. (2013). High-frequency monitoring of debris-flow propagation along the réal torrent, southern french prealps. *Geomorphology*, 201 :157–171.

Ng, C., O. and Mei, C. C. (1994). Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid. *J. Fluid Mech.*, 263 :151–183.

Nguyen, Q. and Boger, D. (1992). Measuring the flow properties of yield stress fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 24 :47–88.

Noble, P. and Vila, J.-P. (2013). Thin power-law film flow down an inclined plane : Consistent shallow-water models and stability under large-scale perturbations. *J. Fluid Mech.*, 735 :29–60.

Noveon (2002). Neutralizing Carbopol and Pemulen polymers in aqueous and hydroalcoholic systems. Technical report.

Oppong, F. K., Rubatat, L., Frisken, B. J., Bailey, A. E., and de Bruyn, J. R. (2006). Microrheology and structure of a yield-stress polymer gel. *Phys. Rev. E*, 73 :041405.

Ovarlez, G., Cohen-Addad, S., Krishan, K., Goyon, J., and Coussot, P. (2013). On the existence of a simple yield stress fluid behavior. *J. Non-Newton. Fluid*, 193 :68–79.

Ovarlez, G., Mahaut, F., Deboeuf, S., Lenoir, N., Hormozi, S., and Chateau, X. (2015). Flows of suspensions of particles in yield stress fluids. *J. Rheol.*, 59 :1449–1486.

Ovarlez, G., Rodts, S., Chateau, X., and Coussot, P. (2009). Phenomenology and physical origin of shear-localization and shear-banding in complex fluids. *Rheol. Acta*, 48 :831–844.

Papanastasiou, T. (1987). Flow of materails with yield. *J. Rheol.*, 31 :385–404.

Paquier, A. (2002). Modélisation des écoulements en rivière en crue : pour une utilisation adaptée des équations de Saint Venant. *Document de synthèse en vue de l'obtention d'une habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard Lyon 1*.

Pastor, M., Quecedo, M., Gonzalez, E., Herreros, M. I., Fernandez Merodo, J. A., and Mira, P. (2004). Simple approximation to bottom friction for Bingham fluid depth integrated models. *J. Hydraul. Eng.*, 130 :149–155.

Piau, J. M. (1996). Flow of a yield stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane. *J. Rheol.*, 40 :711–723.

Piau, J. M. (2007). Carbopol gels : Elastoviscoplastic and slippery glasses made of individual swollen sponges. Meso- and macroscopic properties, constitutive equations and scaling laws. *J. Non-Newton. Fluid*, 144 :1–29.

Pierson, T. C. (1995). Flow characteristics of large eruption-triggered debris flows at snow-clad volcanoes : Constraints for debris-flow models. *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 66 :283–294.

Pierson, T. C. and Costa, J. E. (1987). A rheologic classification of subaerial sediment-water flows. *Reviews in Engineering Geology*, 1 :12.

Pignon, F., Magnin, A., and Piau, J.-M. (1996). Thixotropic colloidal suspensions and flow curves with minimum : Identification of flow regimes and rheometric consequences. *J. Rheol.*, 40 :573–587.

Putz, A. M. V. and Burghelea, T. I. (2009). The solid-fluid transition in a yield stress shear thinning physical gel. *Rheol. Acta*, 48 :673–689.

Putz, A. M. V., Burghelea, T. I., Frigaard, I. A., and Martinez, D. M. (2008). Settling of an isolated spherical particle in a yield stress shear thinning fluid. *Phys. Fluids*, 20 :033102.

Rabideau, B. D., Moucheront, P., Bertrand, F., Rodts, S., Roussel, N., Lanos, C., and Coussot, P. (2010). The extrusion of a model yield stress fluid imaged by {MRI} velocimetry. *J. Non-Newton. Fluid*, 165 :394 – 408.

Renouf, M., Dubois, F., and Alart, P. (2006). Numerical investigations of fault propagation and forced-fold using a non smooth discrete element method. *Eur. J. of Computational Mechanics*, 15 :549–570.

Rickenmann, D., Laigle, D., McArdell, B. W., and Hubl, J. (2006). Comparison of 2D debris-flow simulation models with field events. *Comput. Geosci.*, 10 :241–264.

Rodkiewicz, C., Sinha, P., and Kennedy, J. (1990). On the application of a constitutive equation for whole human blood. *J. Biomech. Eng.*, 112 :198–206.

Rodts, S., Bertrand, F., Jarny, S., Poullain, P., and Moucheront, P. (2004). Recent developments in mri applications to rheology and fluid mechanics [développements récents dans l'application de l'irm à la rhéologie et à la mécanique des fluides]. *Comptes Rendus Chimie*, 7 :275–282.

Roussel, N. and Coussot, P. (2005). "Fyfty-cent rheometer" for yield stress measurements : From slump to spreading flow. *J. Rheol.*, 49 :705–718.

Roussel, N. and Gram, A. (2014). *Simulation of Fresh Concrete Flow*. Springer Science & Business Media.

Roustaei, A. and Frigaard, I. A. (2013). The occurrence of fouling layers in the flow of a yield stress fluid along a wavy-walled channel. *J. Non-Newton. Fluid*, 198 :109–124.

Ruyer-Quil, C. and Manneville, P. (1998). Modeling film flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B*, 6 :277–292.

Ruyer-Quil, C. and Manneville, P. (2000). Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B*, 15 :357–369.

Saramito, P. (2009). A new elastoviscoplastic model based on the Herschel-Bulkley viscoplastic model. *J. Non-Newton. Fluid*, 158 :154–161.

Saramito, P., Smutek, C., and Cordonnier, B. (2013). Numerical modelling of shallow Non-Newtonian flows : Part 1 . The 1D horizontal dam break problem revisited. *Int. J. Numer. Anal. Modeling, Series B*, 1 :1–18.

Savage, S. B. and Hutter, K. (1989). The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.*, 199 :177–215.

Savage, S. B. and Hutter, K. (1991). The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. part i : Analysis. *Acta Mechanica*, 86 :201–223.

Schellart, W. (2011). Rheology and density of glucose syrup and honey : Determining their suitability for usage in analogue and fluid dynamic models of geological processes. *J. Struct. Geol.*, 33 :1079–1088.

Sollich, P., Lequeux, F., Hébraud, P., and Gates, M. (1997). Rheology of soft glassy materials. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :2020–2023.

Souza Mendes, P. R. and Dutra, E., S. (2004). A viscosity function for viscoplastic liquids. *Annual transaction of the nordic rheology society*, 12 :183–188.

Takahashi, T. (1991). *Debris Flow*. IAHR Monograph Series. Balkema, Rotterdam, The Netherlands.

Takahashi, T. (2009). A review of japanese debris flow research. *Int. J. Erosion Control Engineering*, 2 :1–14.

Tokpavi, D. L., Jay, P., Magnin, A., and Jossic, L. (2009). Experimental study of the very slow flow of a yield stress fluid around a circular cylinder. *J. Non-Newton. Fluid*, 164 :35–44.

Tunuguntla, D., Bokhove, O., and Thornton, A. (2014). A mixture theory for size and density segregation in shallow granular free-surface flows. *J. Fluid Mech.*, 749 :99–112.

Vasquez, R., Capra, L., and Coviello, V. (2016). Factors controlling erosion/deposition phenomena related to lahars at volcan de colima, mexico. *Nat. Hazards Earth Sys. Sci*, 16 :1881–1895.

Veretennikov, I., Indeikina, A., and Chang, H.-C. (1998). Front dynamics and fingering of a driven contact line. *J. Fluid Mech.*, 373 :81–110.

Voellmy, A. (1955). über die Zerstörungskraft von Lawinen. *Schweizerische Bauzeitung*, 12 :159–285.

Vola, D., Babik, F., and Latché, J. C. (2004). On a numerical strategy to compute gravity currents of non-Newtonian fluids. *J. Comput. Phys.*, 201 :397–420.

Weinmann, P. and Laurenson, E. (1979). Approximate flood routing methods : a review. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 105 :1521–1536.

Yu, Z. and Wachs, A. (2007). A fictitious domain method for dynamic simulation of particle sedimentation in bingham fluids. *J. Non-Newton. Fluid*, 145 :78–91.

Annexe A

Étude du front : résultats préliminaires publiés dans *International Journal of Erosion Control Engineering*

Ces résultats, discutés au § 4.1.3, ont été publié sous la forme :

Freydier, P., Chambon, G., Naaim, M., Internal dynamics of a free-surface viscoplastic flow down an inclined channel, International Journal of Erosion Control Engineering Vol. 9, No. 3, 2016

Original Article

Internal Dynamics of a Free-Surface Viscoplastic Flow Down an Inclined Channel

Perrine FREYDIER[1], Guillaume CHAMBON [1] and Mohamed NAAIM [1]

[1] Université Grenoble Alpes, Irstea, UR ETGR, Snow Avalanche and Torrent Control Research Unit, 2 rue de la Papeterie-BP 76, F-38402 St-Martin-d'Hères, France
E-mail: perrine.freydier@irstea.fr

This paper presents preliminary experimental results concerning the internal dynamics of a free surface viscoplastic flow down an inclined channel. Experiments are conducted in an inclined channel whose bottom is constituted of an upward-moving conveyor belt with controlled velocity. Carbopol microgel was used as a homogeneous transparent viscoplastic fluid. This experimental setup allows generating and observing stationary gravity-driven surges in the laboratory frame. We used PIV technique (Particle Image Velocimetry) to obtain velocity fields both in the uniform zone and within the front zone where flow thickness is variable and where recirculation takes place. Experimental velocity profiles and determination of plug position are presented and compared to theoretical predictions based on the lubrication approximation.

Key words: debris flow, experimental fluid mechanics, Carbopol, PIV, shallow water

1. INTRODUCTION

Debris flows constitute one of main natural hazards in mountainous regions of the world because of their great destructive power when flowing on a vulnerable zone. Consequences can be both heavy economic losses and fatalities. Debris flows are commonly composed of mixtures of particles of all sizes in water. The rheological studies conducted on materials sampled in natural muddy debris flows, rich in fine particles (< 40 µm), have shown that these materials behave as non-Newtonian viscoplastic fluids [*Coussot et al.*, 1998; *Bardou*, 2002; *Ancey*, 2007]. In particular, these materials are characterized by a critical stress threshold, called yield stress, which results, in the flows, in the existence of unsheared regions as soon as the stress drops below the yield stress.

An important challenge resides in developing models that are able to accurately predict hydraulic properties of debris flows. These complex flows are generally represented using models based on a momentum integral approach that consists in assuming a shallow flow and in depth-averaging the local conservation equations [*Takahashi*, 1991; *Piau*, 1996; *Huang and Garcia*, 1998; *Ancey*, 2007; *Ancey and Cochard*, 2009]. These models take into account closure terms depending on the shape of the velocity profile inside the flow. But to date, knowledge concerning the shape of velocity profiles and the position of the interface between sheared and unsheared regions, in particular in the vicinity of the front, remains poor [*Andreini et al*., 2012]. It is then necessary to obtain reliable and well documented experimental data about the velocity field in such flows, in order to test, validate and choose the most appropriate model. To this end, the aim of this paper is to present experimental results documenting the internal dynamics of a free surface viscoplastic flow down an inclined channel.

Experiments were conducted in an inclined channel whose bottom is constituted of an upward-moving conveyor belt. This setup allows generating and observing gravity-driven surges that remain globally stationary with respect to the laboratory reference frame. We used Carbopol as a homogeneous transparent viscoplastic material. Carbopol has already been used as model viscoplastic material in various studies [*Robert and Barnes*, 2001; *Coussot et al*., 2009; *Piau*, 2007; *Oppong and De Bruyn*, 2011; *Ovarlez et al*, 2012]. Its rheological properties were determined independently using a rotational parallel plate rheometer. Surges obtained in the channel are characterized by a steep front followed by a long zone where the flow height is flow both in the uniform zone and within the front

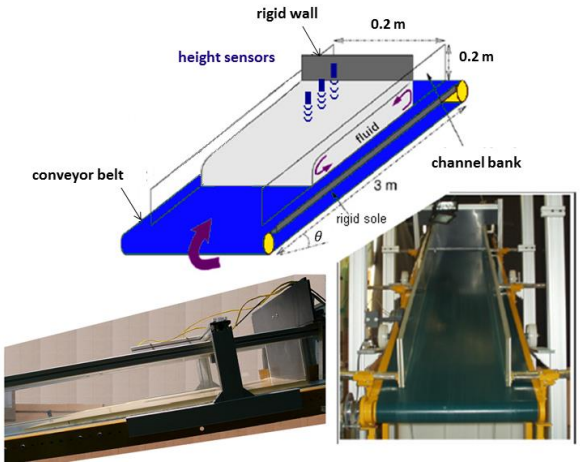

Fig. 1 Schematic representation of the experimental set up, front and side view.

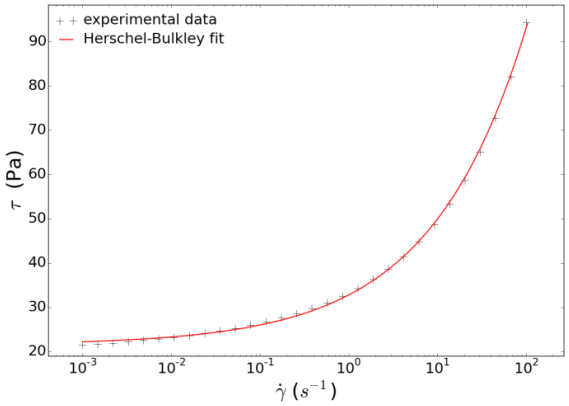

Fig. 2 Steady-state flow curve of Carbopol sample C_b: shear stress τ versus shear rate $\dot{\gamma}$. Data points correspond to the experimental results, and the curve represents the Herschel-Bulkley model determined by fitting the data points. Fitting parameters are indicated in **Table 1**.

zone. Great care was taken to ensure accuracy and reproducibility of the experiments.

First, the experimental setup as well as the model viscoplastic fluid is described. Then, results obtained both in the uniform zone and in the front zone are presented and compared to theoretical predictions based on the lubrication approximation.

2. EXPERIMENTAL METHODS

2.1 Conveyor belt channel

The experimental setup consists of a 3-m-long inclined channel whose bottom is formed by an upward-moving conveyor belt with controlled velocity u_b (**Fig. 1**). Channel section is rectangular, with a width varying from 0 to 0.5 m. The belt is driven by an electrical motor allowing to set velocities from 0 to 1.5 m.s^{-1}. Velocity is monitored by an optoelectronic sensor with a relative accuracy of 1%. The inclination of the whole set up can be varied from 0 to 30°.

The two lateral walls and the upper wall (**Fig. 1)** are fixed in the laboratory frame. A system of sealings prevents fluid leakage below the upper wall and the banks while minimizing friction with the moving belt. The conveyor belt is made of 2 mm thick PVC. Its surface is macroscopically smooth, but it provides good adhesion with the used fluids.

2.2 Viscoplastic fluid

The experiments reported here were performed with a viscoplastic fluid: a polymeric aqueous microgel named Carbopol ETD 2623 supplied by Noveon. The samples of Carbopol were prepared at 0.1% mass concentration by slowly adding 30g of the polymeric powder in 30 L of deionized water under vigorous stirring (700 rpm). After leaving the solution at rest, pH neutralization was performed using a NaOH solution at 1 mol.L^{-1} under slow stirring (100 rpm) during half an hour for homogenization and elimination of bubbles.

The characteristic flow curves of our Carbopol samples were determined using a rotational parallel-plate rheometer (Bohlin CVOR). As shown in **Fig. 2**, the flow curves can be represented by Herschel-Bulkley constitutive relation:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & if\ \tau < \tau_c \\ \tau = \tau_c + K\dot{\gamma}^n & if\ \tau \geq \tau_c \end{cases} \quad (1)$$

where τ_c is the yield stress, K the consistency and n the flow index. The rheological properties of the Carbopol samples used are summarized in **Table 1.**

Uncertainties on the order of $\pm$ 5% on parameters τ_c and K are unavoidable despite careful testing. In addition, recent results with the same material [*Chambon et al*., 2014] concerning the flow properties (height, velocity profile) in the uniform zone showed a systematic discrepancy between experimental results and theoretical predictions based on the measured rheological parameters. This discrepancy can be accounted for by applying an adjustment of the rheological parameters measured with the rheometer according to the following relations:

$$\begin{cases} \tau_{c,corr} = \tau_c \times 1.11 \\ K_{corr} = K \times 1.19 \end{cases} \quad (2)$$

Possible explanations for this discrepancy are discussed in [*Chambon et al*., *2014*]. It seems that the small dimension of the Carbopol samples tested in the rheometer (thickness typically on the order of 1 mm) is not sufficient to correctly represent the mechanical behavior of the material at the flume scale. The above correction, which is unique for all tested Carbopol samples, appears to account for this

Table 1 Properties of the Carbopol samples and characteristics of channel flow experiments performed: density ρ (kg.m^{-3}), slope angle θ (°), yield stress τ_c (Pa), consistency K (Pa.s^n), flow index n, imposed belt velocity u_b (mm.s^{-1}).

exp	ρ	θ	τ_c	K	n	u_b
C_a	1000	14.6	6.00	6.65	0.405	52.7
C_b	1000	11.9	21.49	11.3	0.396	138

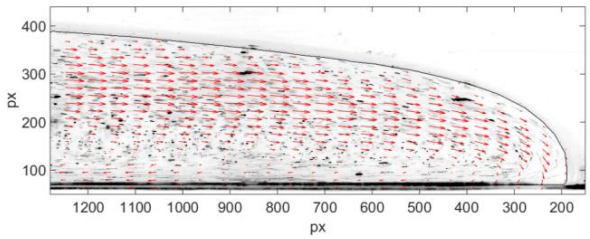

Fig. 3 Example of velocity field for free-surface flow of Carbopol in the front zone computed using DPIVsoft. The length of the image is about 10 cm.

scale effect.

2.3 Flow monitoring

2.3.1 Internal dynamics

PIV was performed with a high speed camera (Baumer HXC13 with Nikon lens 85 mm macro) filming from the side through the transparent wall. Carbopol gel is seeded with micro-tracers RISLAN (polyamide powder with a density of 1.04 g.cm^{-3}) of diameter 40 µm. A powerful lighting was used to illuminate the flow through the transparent wall opposite to the camera. Measurements both in the front zone and in the uniform zone were taken. This paper specifically reports on preliminary experiments conducted in the front zone. These experiments were performed with the following acquisition parameters: exposure time: 3333 ms, frame rate: 50 Hz, image size: 1024x1280 pixels, resolution: 89 µm/pixel.

To recover velocity fields from the images in the front zone, we used the DPIVsoft software [*Meunier and Leweke*, 2003]. DPIVsoft is based on a Particle Image Velocimetry algorithm using square interrogation sub-windows which has been optimized for velocity fields involving high gradients. **Fig. 3** shows an example of the velocity field computed with sub-windows of size 16 pixels. In spite of the use of small sub-windows, the results quality close to the channel bottom, where the velocity gradient is the highest, remains limited with the acquisition system used in this study.

2.3.2 Free surface measurements

The height of the flow in the uniform zone is measured both by image processing from the high speed camera images and with ultrasonic sensors (US). The US sensors allow us to check the flow height measured through image processing. The height of the flow in the front region is measured only with image processing.

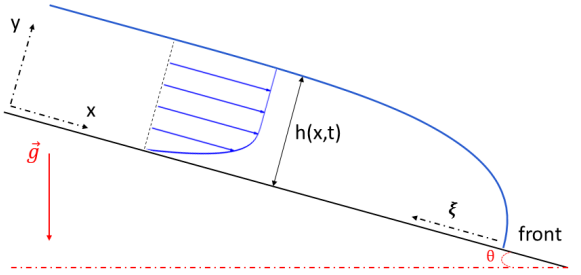

Fig. 4 Thin layer model: schematic representation of notations used in text. ξ denotes the distance from the front.

3. THEORETICAL FRAMEWORK

Here we consider a viscoplastic fluid flowing down an inclined plane whose behavior can be modelled by the Herschel Bulkley law (Eq. (1)). We compare the experimental velocity profiles to the theoretical profiles obtained in the frame of the lubrication approximation, *i.e.* neglecting inertia terms. This approximation is at the base of most shallow-flow formulations used to simulate debris flow propagation [*Coussot*, 1994]. Let us denote θ the slope angle, ρ the fluid density, and h the thickness of the flowing layer.

We define a 2D coordinate system in which the x direction is the direction of the flume, and the y axis is oriented upwards (**Fig. 4**). The position $y = 0$ correspond to the bottom of the flow.

Applying the lubrication approximation, the shear stress in the layer evolves as:

$$\tau = \rho g sin\theta \left(1 - cot\theta \frac{\partial h}{\partial x}\right)(h - y) \qquad (3)$$

Consequently, an unyielded layer, called plug, exists at the top of the flow where $\tau < \tau_c$. The thickness of the plug layer denoted hp is given by:

$$hp = \frac{\tau_c}{\rho g sin\theta \left(1 - cot\theta \frac{\partial h}{\partial x}\right)} \qquad (4)$$

Then, straightforward integration, considering the Hershel Bulkley constitutive law in simple shear ($\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$) leads to the expression of the velocity profile:

$$u(y) = \begin{cases} u_0[1 - \left(1 - \frac{y}{y_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}] & if \quad y < y_0 \\ u_0 & if \quad y \geq y_0 \end{cases} \qquad (5)$$

with $u_0 = \frac{n}{n+1} y_0^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\rho g sin\theta}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \left(1 - cot\theta \frac{\partial h}{\partial x}\right)^{\frac{1}{n}}$, and $y_0 = h - hp$ denotes the thickness of the sheared layer below the plug. Note that this expression reduces to the velocity profile in steady uniform regime

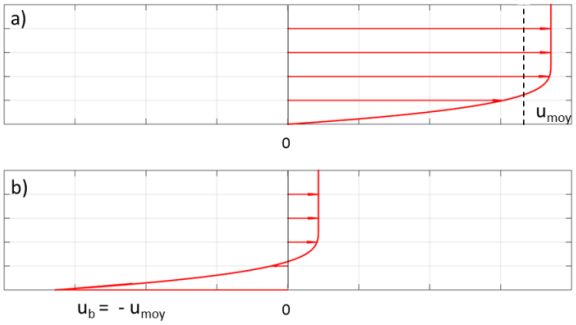

Fig. 5 Typical velocity profile of a viscoplastic fluid in a steady uniform regime down an inclined plane, (a) with no moving conveyor belt, (b) with an upward-moving conveyor belt at velocity u_b.

[*Chambon et al*., 2014] by setting $\frac{\alpha h}{\alpha x}$ to zero. **Fig. 5a** presents a typical velocity profile computed according to Eq. (5)**.** In our experiments with the conveyor belt, we expect the velocity profile in the surges to correspond to a simple shift, by the value of the belt velocity u_b, of this velocity profile obtained down a simple inclined plane **(Fig. 5b)**. Hence, provided that the rheological parameters τ_c, K and n of the fluid are known, and using the values of $\frac{\alpha h}{\alpha x}$ measured experimentally, Eq. (5) can be directly compared to the velocity profiles measured by PIV and shifted by u_b.

4. RESULTS AND DISCUSSION

4.1 Experimental results in the uniform zone

We briefly recall here the results presented by [*Chambon et al*., 2014]. In this study, owing to the absence of vertical velocities in the uniform zone, velocity profiles with a high vertical resolution were obtained using a linear correlation algorithm (**Fig. 6)**. These profiles are compared with the theoretical predictions given by Eq. (5) when setting the depth gradient term to zero. An excellent agreement was found between the measured velocity profiles and the theoretical predictions based on corrected rheological parameters (**Fig. 6**). This result shows that in a steady regime, the macroscopic properties of viscoplastic flow can be accurately predicted by Herschel Bulkley constitutive law.

4.2 Preliminary experimental results in the front zone

The evolution of velocity profiles in the front zone is presented in **Fig. 7**. In the upper part of the flow and sufficiently far from the front we note the existence of a plug marked by a substantial layer of fluid in which all the tracers are moving at the same velocity. When approaching the front (ξ < 10 mm

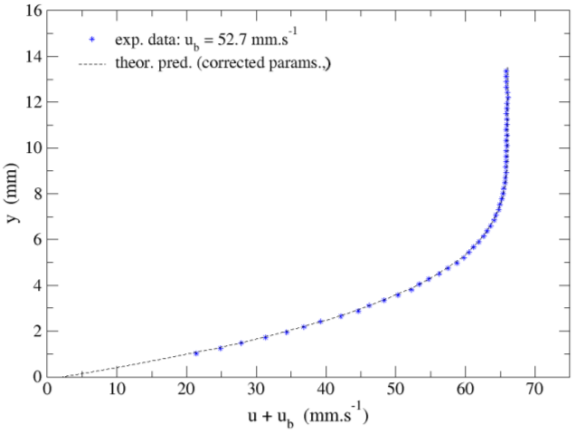

Fig. 6 Horizontal velocity u derived from PIV as a function of vertical coordinate y for Carbopol sample C_a with a belt velocity u_b = 52.7 mm.s^{-1} and a slope angle θ = 14.6°. For comparison with theoretical prediction, the experimental profiles have been shifted by the value of the belt velocity. Rheological parameters used to compute the theoretical velocity profiles are determined by the rheometer and corrected according to Eq. (2).

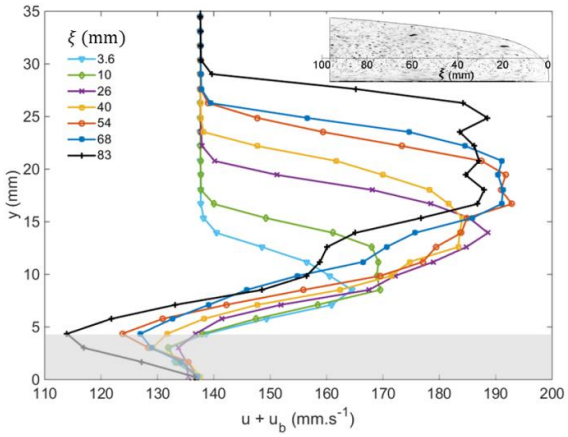

Fig. 7 Velocity profile derived from PIV for Carbopol sample C_b with a belt velocity ub = 138 mm.s^{-1} and a slope angle θ = 11.9°. Colors and symbols denote the position of the velocity profile with respect to the front position (see inset for the lateral view). The shaded area represents velocity artifacts in the bottom region of the flow. Similar artifacts are present close to the free surface.

typically), this plug seems to disappear. However, due to the lack of resolution of the images, it is not possible to assess if the plug really disappears or rather becomes very thin. We also note that the maximum velocities of all the profiles presented in **Fig. 7** seem to be approximately constant for ξ > 10 mm, and to progressively decrease for $\xi \leq$ 10 mm.

Comparison between the measured and theoretical velocity profiles at 6 different locations in the frontal region of the surge is presented in **Fig.8**. The positions of the theoretical and experimentally measured yield surface are also reported. Far from the front ($\xi \geq$ 68 mm), measured velocities appear to be in good agreement with velocities predicted by

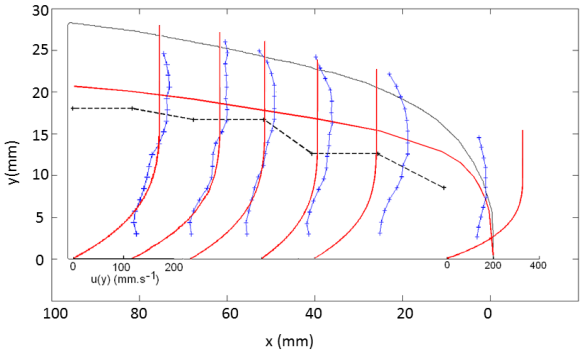

Fig. 8 Velocity profiles derived from PIV for Carbopol sample C_b with a belt velocity u_b = 138 mm.s^{-1} and a slope angle θ =11.9°. The velocity scale is the same for the five left profiles. The dots joined by a blue line represent the experimental data shifted by the value of the belt velocity. The solid red lines represent the theoretical profiles determined by Eq. (5) with corrected rheological parameters and measured free-surface slope. The black dashed line represents the experimental yield surface while the solid red line denotes the theoretical prediction.

Eq. (5), accounting for the corrected rheological parameters. In this region we note a maximum disagreement between experimental and theoretical plug velocities of 11%. The plug position also appears to be well predicted. For ξ < 68 mm, however, disagreement between experiments and theoretical predictions becomes apparent, both for the velocity values and for the plug position.

4.3 Discussion

The preliminary results presented above show a good agreement between experimental data and predictions based on the lubrication approximation in the front zone, except close to the front line itself. This indicates that, sufficiently far from the front, the lubrication approximation can be used to predict velocity profiles and plug position. However, close to the front line, the lubrication approximation appears insufficient to account for the dynamics of the flow. Unfortunately, due to insufficient image resolution, it was not possible to observe precisely the evolution of the plug in this zone. These experimental limitations also explain why velocity profiles display artifacts in the top and bottom regions of the flow (**Fig. 7**).

5. CONCLUSION

This paper reports on preliminary results concerning the internal dynamics in the front zone of a viscoplastic flow. We compared velocity profiles measured experimentally in the front zone to velocity profiles predicted by the lubrication approximation. Experiments were conducted with a model viscoplastic fluid (Carbopol ETD 2623).

Results show that lubrication provides a good approximation to predict velocity profiles except in the zone close to the front line. Due to insufficient images resolution, these preliminary results did not allow us to fully monitor the evolution of the velocity profiles in this zone.

Work is currently on-going to improve these results. A new experimental configuration based on thin laser sheet visualization in the central part of the flow will allow us to avoid the possible side effects due to the walls. Higher resolution images and better signal-to-noise ratio will also allow us a painstaking investigation of the internal dynamics of viscoplastic free-surface flows from the uniform zone to the front.

ACKNOWLEDGMENT: Financial support by INSU - Programme Terre Solide - ALEAS is acknowledged.

REFERENCES

Ancey, C. (2007): Plasticity and geophysical flows: A review, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 142, pp. 4-35.

Ancey, C. and Cochard, S. (2009): The dam-break problem for Herschel‐Bulkley viscoplastic fluids down steep flumes, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 158 pp. 18-35.

Andreini, N., Epely-Chauvin, G. and Ancey, C. (2012): Internal dynamics of Newtonian and viscoplastic fluid avalanches down a sloping bed, Physics of Fluids, Vol. 24, 053101.

Bardou, E. (2002): Méthodologie de diagnostic des laves torrentielles sur un bassin versant alpin, PhD Thesis, No. 2479, EPFL, Lausanne (in French with English abstract).

Chambon, G., Ghemmour, A. and Naaim, M. (2014): Experimental investigation of viscoplastic free-surface flows in steady uniform regime, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 754, pp. 332-364.

Coussot, P. (1994): Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel, Journal of Hydraulic Research, Vol. 32, No 4, pp. 535-559.

Coussot, P., Laigle, D., Arattano, M., Deganutti, A. and Marchi, L. (1998): Direct determination of rheological characteristics of debris flows, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 124, pp. 865-868.

Coussot, P., Tocquer, L., Lanos, C. and Ovarlez, G. (2009): Macroscopic vs. local rheology of yield stress fluids, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 158, No. 1-3, pp. 85-90.

Huang, X. and Garcia, M.H. (1998): A Herschel-Bulkley model for mud flow down a slope, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 374, pp. 305-233.

Meunier, P. and Leweke, T. (2003): Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry, Experiments in Fluids, Vol. 35, pp. 408-421.

Oppong, F.K. and de Bruyn, J.R. (2011): Microrheology and jamming in a yield stress fluid, Rheologica Acta, Vol. 50, pp. 317-326.

Ovarlez, G., Cohen-Addad, S., Krishan, K., Goyon, J. and

Coussot, P. (2012): On the existence of a simple yield stress fluid behavior, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 193, pp. 68-79.

Piau, J.M. (1996): Flow of a yield stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane, Journal of Rheology, Vol. 40, pp.711-723

Piau, J.M. (2007): Carbopol gels: Elastoviscoplastic and slippery glasses made of individual swollen sponges: Meso and macroscopic properties, constitutive equations and scaling laws, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 144, pp. 1-29.

Robert, G.P. and Barnes, H.A. (2001): New measurements of the flow-curves for Carbopol dispersions without slip artefacts, Rheologica Acta, Vol. 40, pp. 499-503.

Takahashi, T. (1991): Debris Flows, IAHR Monograph, A.A. Balkema, Rotterdam, p. 165.

Received: 1 August, 2015
Accepted: 19 February, 2016