

Caractérisations des modèles multivariés de stables-Tweedie multiples

Cyrille Clovis Moypemna Sembona

▶ **To cite this version:**

Cyrille Clovis Moypemna Sembona. Caractérisations des modèles multivariés de stables-Tweedie multiples. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Franche-Comté, 2016. Français. NNT : 2016BESA2071 . tel-01661524

HAL Id: tel-01661524
https://theses.hal.science/tel-01661524

Submitted on 12 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





École Doctorale Carnot-Pasteur

THÈSE DE DOCTORAT
DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

présentée par

Cyrille Clovis MOYPEMNA SEMBONA

pour obtenir le grade de
Docteur de Mathématiques et Applications
de l'Université de Franche-Comté

Caractérisations des modèles multivariés de stables-Tweedie multiples

---

Soutenue le 17 juin 2016, devant le jury composé de :

Jean-François DUPUY	Professeur, INSA de Rennes	Rapporteur
Uwe FRANZ	Professeur, Université de Franche-Comté	Président du jury
Célestin KOKONENDJI	Professeur, Université de Franche-Comté	Directeur de thèse
Efoévi KOUDOU	Maître de Conférences-HDR, Université de Lorraine	Examinateur
Denys POMMERET	Professeur, Université d'Aix-Marseille	Rapporteur

---





Les travaux présentés dans cette thèse ont été financés par une bourse de coopération et d'action culturelle de l'ambassade de france à bangui en partenariat avec l'université de bangui, république centrafricaine.

Gbou mbeti ngangou !

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à Célestin Kokonendji qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. Je suis profondément reconnaissant pour son soutient continu et ses nombreux conseils durant cette thèse.

J'exprime tous mes remerciements aux autres membres du jury pour leurs rôles respectifs et si précieux : Messieurs Jean-Francois Dupuy, Uwe Franz, Efoévi Koudou et Denys Pommeret.

Je souhaite remercier Joachim Rainaldy Sioké pour sa contribution dans l'aboutissement de ce travail.

Je remercie l'ensemble des membres du Laboratoire de Mathématiques de Besançon, en particuliers ceux de l'équipe de probabilités et statistique. Merci à tous de m'avoir accueilli dans ce laboratoire pour ces travaux de thèse.

Je tiens à remercier mes collègues doctorants du LMB, en particuliers mes co-bureaux : Alessandro, Céline, Clément, Colin, Emilie, Ibrahim, Marine, Michel, Pamella et Xiao.

J'adresse toute ma gratitude au service de coopération et d'action culturelle de l'Ambassade de France à Bangui en partenariat avec l'Université de Bangui qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

Je remercie également les autres collègues de la Faculté des Sciences de l'Université de Bangui, en particuliers ceux du Département de Mathématiques et Informatique : Sékou Traoré, Faustin Archange Touadéra, Mada Nalimbi, Jocelyn Gonessa, Ernest Mada, Francial Libengué et Ben-Sthal Sakoma. Merci pour vos soutiens et encouragements.

Oncle Wailo, tantes Faustine et Sophie, Saxette, Eric Danboy, la famille Béaré, la famille Gbeyoro, Bertrand Mbeya, Chérubin et Daniel ; mes remerciements et ma profonde gratitude.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille, en particuliers ma chère petite fille Bethany Moypemna et ma fiancée Sylvie Nalimo qui m'ont tant soutenues de loin ou de près, mes parents qui m'ont fait toujours comprendre que la vie est un combat de tous les jours et qu'il faudrait travailler dur pour réussir, mais aussi tous mes frères et sœurs. Malgré mon éloignement depuis de nombreuses années, leur intelligence, leur confiance, leur tendresse, leur amour me portent et me guident tous les jours. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je vous aime.

Une pensée pour Vincent Yalanga et Robert Namfeï qui n'ont pas vu l'aboutissement de mon travail mais je sais que vous en auriez été très fiers de votre neveu !

A ma petite fille chérie Bethany Rose Moypemna.

Productions Scientifiques

(*i*) Kokonendji, C. C., **Moypemna-Sembona, C. C**. & Sioké Rainaldy, J. (2015). A characterization of multivariate normal stable Tweedie models and their associated polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **288**, 159–168.

(*ii*) Kokonendji, C. C. & **Moypemna-Sembona, C. C**. (2016). Characterization and classification of multiple stable Tweedie models, *Soumis pour publication*.

(*iii*) Kokonendji, C. C & **Moypemna Sembona, C. C.** (2016). A complete characterization of multivariate normal stable Tweedie models by generalized variance functions, *Soumis pour publication*.

Résumé

Ce travail de thèse porte sur différentes caractérisations des modèles multivariés de stables-Tweedie multiples dans le cadre des familles exponentielles naturelles sous la propriété de "steepness". Ces modèles parus en 2014 dans la littérature ont été d'abord introduits et décrits sous une forme restreinte des stables-Tweedie normaux avant les extensions aux cas multiples. Ils sont composés d'un mélange d'une loi unidimensionnelle stable-Tweedie de variable réelle positive fixée, et des lois stables-Tweedie de variables réelles indépendantes conditionnées par la première fixée, de même variance égale à la valeur de la variable fixée. Les modèles stables-Tweedie normaux correspondants sont ceux du mélange d'une loi unidimensionnelle stable-Tweedie positive fixé et les autres toutes gaussiennes indépendantes. A travers des cas particuliers tels que normal, Poisson, gamma, inverse gaussienne, les modèles stables-Tweedie multiples sont très fréquents dans les études de statistique et probabilités appliquées.

D'abord, nous avons caractérisé les modèles stables-Tweedie normaux à travers leurs fonctions variances ou matrices de covariance exprimées en fonction de leurs vecteurs moyens. La nature des polynômes associés à ces modèles est déduite selon les valeurs de la puissance variance à l'aide des propriétés de la quasi orthogonalité, des systèmes de Lévy-Sheffer, et des relations de récurrence polynomiale. Ensuite, ces premiers résultats nous ont permis de caractériser à l'aide de la fonction variance la plus grande classe des stables-Tweedie multiples. Ce qui a conduit à une nouvelle classification laquelle rend la famille beaucoup plus compréhensible. Enfin, une extension de caractérisation des stables-Tweedie normaux par fonction variance généralisée ou déterminant de la fonction variance a été établie via leur propriété d'indéfinie divisibilité et en passant par les équations de Monge-Ampère correspondantes.

Exprimées sous la forme de produit des composantes du vecteur moyen aux puissances multiples, la caractérisation de tous les modèles multivariés stables-Tweedie multiples par fonction variance généralisée reste un problème ouvert.

Mots clés : Famille exponentielle naturelle, steepness, fonction variance, variance généralisée, équation de Monge-Ampère, polynôme, quasi orthogonalité, système de Lévy-Sheffer, indéfinie divisibilité.

Abstract

In the framework of natural exponential families, this thesis proposes differnts charcterizations of multivariate multiple stables-Tweedie under "steepness" property. These models appeared in 2014 in the literature were first introduced and described in a restricted form of the normal stables-Tweedie models before extensions to multiple cases. They are composed by a fixed univariate stable-Tweedie variable having a positive domain, and the remaining random variables given the fixed one are reals independent stables-Tweedie variables, possibly different, with the same dispersion parameter equal to the fixed component. The corresponding normal stables-Tweedie models have a fixed univariate stable-Tweedie and all the others are reals Gaussian variables. Through special cases such that normal, Poisson, gamma, inverse Gaussian, multiples stables-Tweedie models are very common in applied probability and statistical studies.

We first characterized the normal stable-Tweedie through their variances function or covariance matrices expressed in terms of their means vector. According to the power variance parameter values, the nature of polynomials associated with these models is deduced with the properties of the quasi orthogonal, Levy-Sheffer systems, and polynomial recurrence relations. Then, these results allowed us to characterize by function variance the largest class of multiples stables-Tweedie. Which led to a new classification, which makes more understandable the family. Finally, a extension characterization of normal stable-Tweedie by generalized variance function or determinant of variance function have been established via their infinite divisibility property and through the corresponding Monge-Ampere equations.

Expressed as product of the components of the mean vector with multiple powers parameters reals, the characterization of all multivariate multiple stable- Tweedie models by generalized variance function remains an open problem.

Keywords : Natural exponential family, steepness, variance function, generalized variance function, Monge-Ampere equation, polynomial, quasi orthogonality polynomials, Levy-Sheffer system, infinite divisibility.

Table des matières

Notations **19**

Introduction générale **21**
Motivations 21
Organisation de la thèse 22

1 Concepts fondamentaux **25**
1.1 Introduction 25
1.2 Généralités sur les familles exponentielles 25
1.3 Fonctions variances et leurs déterminants 27
1.4 Opérations classiques sur *FEN* 29
1.5 Modèles stables-Tweedie univariés 30
1.6 Schéma de caractérisations des *NST* et *MST* 35

2 A characterization of *NST* models and their associated polynomials **37**
2.1 Résumé en français 37
2.2 Introduction 38
2.3 *NST* models and déterminant of the Hessian cumulant function 40
2.4 Characterization of *NST* by variance functions 45
2.5 Polynomials associated with *NST* models 47
2.5.1 Some quasi-orthogonal polynomials and *NST* models . 47
2.5.2 The *NST* Lévy–Sheffer systems 48
2.5.3 Recurrence relation of polynomials associated with *NST* 50
2.6 Proof of Theorem 2.4.1 55

3 Characterization and classification of *MST* models **63**
3.1 Résumé en français 63
3.2 Introduction 64
3.3 *MST* models and the determinant of Hessian cumulant function 65
3.4 Characterization of *MST* by variance functions 69
3.5 Proof of Theorem 3.4.1 70
3.6 Summary and remarks 79

4 Caractérisation par fonctions variances généralisées des *NST* **81**
4.1 Introduction 81

4.2 Procédures de caractérisations par fonctions de variances généralisées . . . 82
4.2.1 Connexion avec l'équation de Monge-Ampère . . . 82
4.2.2 Déterminant des matrices de moments . . . 83
4.2.3 Deux méthodes de résolution . . . 85
4.3 Caractérisation des modèles *NST* par fonction variance généralisée . . . 87
4.3.1 Enoncé et remarques . . . 87
4.3.2 Démonstration du Théorème 4.3.1 pour $p > 2$ . . . 88
4.3.3 Démonstration du Théorème 4.3.1 pour $1 < p < 2$ . . . 92
4.3.4 Démonstration du Théorème 4.3.1 pour $p = 1$ . . . 96
4.4 Conclusion . . . 100

Conclusion générale et perspectives **103**
Bilan des travaux . . . 103
Perspectives . . . 104

Références bibliographiques **105**

Liste des tableaux

1.5.1 Résumé des modèles stables-Tweedie de domaine des moyennes unité M_p et de support de distributions S_p (e.g. Jørgensen, 1997). 33
1.6.1 Schéma de caractérisations des *FEN* 36

2.3.1 Summary of k-variate *NST* models with power variance parameter $p \geq 1$, power variance generalized q, mean domain $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_1} = (0, \infty) \times \mathbb{R}^k$ and the support of distribution $\mathbf{S}_p$. 45
2.5.1 Orthogonal polynomials on $\mathbb{R}$ for quadratic NEF (Morris, 1982) 52
2.5.2 2-Orthogonal polynomials on $\mathbb{R}$ for cubic *NEF* (Hassairi & Zarai, 2004) 52
2.5.3 The twelve G_0-orbits of the real cubic NEF distributed in four G-orbits (Hassairi, 1992) 53
2.5.4 (d)-(Pseudo) (Orthogonal) polynomials and univariate stable Tweedie model 53
2.5.5 Orthogonal polynomials on $\mathbb{R}^k$ of the Casalis class by Pommeret (1996) with $\mathbf{V}_F(\mathbf{m}) = a\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{B}(\mathbf{m}) + \mathbf{C}$ 54
2.5.6 (d)-(Pseudo) (Orthogonality) polynomials and multivariate *NST* model with $\mathbf{V}_F(\mathbf{m}) = m_1^{p-2} \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{Diag}_k(0, m_1, \cdots, m_1)$ 54

3.3.1 Summary of some sub-classes of *MST* models for $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_2)$ with $p_1 \geqslant 1$, mean domain $\mathbf{M}_{\mathbf{G_p}}$ and support $\mathbf{S_p}$ of distributions. S_{p_1} mentioned below represents the support (1.8) of Tweedie law with parameter p_1. 68
3.3.2 Summary of all elements of gamma stable Tweedie model for $\mathbf{p} = (p_1, 2, \ldots, 2)$ with $p_1 \geqslant 1$, mean domain $\mathbf{M}_{\mathbf{G_p}} = (0, \infty)^k$ and support $\mathbf{S_p} = (0, \infty)^k$ of distributions. 68
3.3.3 Summary of some particular elements of *MST* models for $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_1)$ with $p_1 \geqslant 1$, mean domain $\mathbf{M}_{\mathbf{G_p}} = (0, \infty)^k$ and support $\mathbf{S_p}$ of distributions. 69

Notations

det	Déterminant
FEN	Familles Exponentielles Naturelles
NEF	Familles Exponentielles Naturelles en anglais
$\mathbf{F}$	L'ensemble des probabilités des *FEN*
K	Fonction cumulante en univariée
$\mathbf{K}$	Fonction cumulante en multivariée
L	Transformée de Laplace
m	Moyenne en univariée
$\mathbf{m}$	Moyenne en multivariée
M	Domaine des moyennes en univarée
$\mathbf{M}$	Domaine des moyennes en multivarées
S_p	Support de distributions en univariée de puissance raviance $p \in \mathbb{R}$
$\mathbf{S_p}$	Support de distributions en multivariée de puissance variance $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$
MST	Stables-Tweedie Multiple
NST	Stables-Teedie Normaux
p	Paramètre de puissance variance
$\mathbf{p}$	Paramètre de puissance variance à composantes multiples
V	Fonction variance en univariée
$\mathbf{V}$	Fonction variance en multivariée
μ	Mesure génératrice en univariée
$\boldsymbol{\nu}$	Mesure génératrice de en multivariée
θ	Paramètre canonique en univariée
$\boldsymbol{\theta}$	Paramètre canonique en multivariée
Θ	Domaine canonique en univariée
$\mathbf{\Theta}$	Domaine canonique en multivariée

Introduction générale

Sommaire

Motivations 21
Organisation de la thèse 22

Motivations

Un problème important en analyse statistique est comment choisir une famille de lois ou de modèles spécifiques pour décrire l'étude d'un phénomène. Dans certains cas, il s'avère difficile et une alternative serait de regarder les théorèmes sur les caractérisations de ces modèles sous des hypothèses raisonnables relatives à la nature de l'expérience. Tel est le cas des Familles Exponentielles Naturelles (*FEN*) $\mathbf{F}$ qui jusqu'alors sont généralement caractérisées par la donnée du domaine $\mathbf{M_F}$ des moyennes $\mathbf{m}$ des probabilités $\mathbf{P}(\mathbf{m}, \mathbf{F})$ qui la composent, par la fonction variance $\mathbf{V_F}$ qui à tout $\mathbf{m}$ de $\mathbf{M_F}$ fait correspondre $\mathbf{V_F}(\mathbf{m})$ l'opérateur matriciel de la variance de la loi $\mathbf{P}(\mathbf{m}, \mathbf{F})$, par les polynômes orthogonaux ou quasi-orthogonaux, etc.

Plusieurs caractérisations des *FEN* ont été proposées dans la littérature parmi lesquelles on peut mentionner celle de Morris (1982) qui classifie toutes les *FEN* de fonction variance quadratique en dimension une. Cette classification concerne des lois usuelles que sont : normal, Poisson, gamma, binomiale, et binomiale négative. Différentes caractérisations des classes de Morris comportant des polynômes orthogonaux sont dues à Feinsilver (1986), Meixner (1934) & Shanbhag (1979). Une extension en univariée et multivariées de ces caractérisations des *FEN* est donnée ces dernières années par des auteurs. En univariée par exemple, on peut noter la double caractérisation de la loi inverse-gaussienne généralisée par Koudou & Ley (2014) dont la première est basée sur l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre d'échelle et la deuxième par une caractérisation de type Stein. Cette loi intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes réels, notamment la modélisation de données concernant des temps d'attente (Jørgensen, 1982), des phénomènes extrêmes en hydrologie (Chebana et al., 2010), l'activité neuronale (Iyengar & Liao, 1997). Letac & Mora (1990) classifient les *FEN* réelles de fonctions variances cubiques tout comme Hassairi & Zarai (2004) qui les caractérisent

par la propriété de 2-orthogonalité. Kokonendji (2005a, 2005b) caractérisent par d-pseudo-orthogonalité et par d-orthogonalité des systèmes de Sheffer les *FEN* de fonctions variances polynomiales de degré $2d - 1$ qui sont des cas particuliers des classes des lois stable-Tweedie (1984).

Dans le cadre de *FEN* multivariées, nous nous referons d'abord à Letac (1989) qui caractérise les familles Poisson-gaussiennes par fonctions variances ; voir aussi Kokonendji & Masmoudi (2006) et Koudou & Pommeret (2002) qui caractérisent ces mêmes familles par le déterminant de la fonction variance, appelée fonction variance généralisée (resp. la stabilité de convolution). Plus généralement Casalis (1996) a classifié toutes les $2d + 4 -$ *FEN* quadratiques simples sur $\mathbb{R}^d$, lesquelles on a $d + 1$ types des familles Poisson-gaussiennes (voir aussi Kokonendji & Masmoudi (2013) pour la caractérisation des familles gamma-gaussiennes par fonctions variances), la famille multinomiale et la famille hyperbolique. Voir aussi Gutierrez et al. (2002) pour la caractérisation des *FEN* quadratiques simples par la propriété de martingale inverse. Aussi, Bar-Lev et al. (1994) caractérisent six types des *FEN* de diagonale irréductible sur $\mathbb{R}^d$ qui sont : normal, Poison, multinomiale, négative multinomiale, gamma et hybride.

Au sujet des caractérisations des *FEN* par des polynômes orthogonaux ou quasi orthogonaux, on peut se référer aux travaux de Pommeret & Kokonendji (2005) et Pommeret (1996). Aussi, Pommeret (2001) pour la caractérisation des *FEN* quadratiques simples (resp. quadratiques) à l'aide des polynômes orthogonaux (resp. pseudo-orthogonaux) via systèmes de Sheffer. On peut citer également les travaux de Hassaïri & Zarai (2004), Kokonendji & Zarai (2007) par la transorthogonalité ou 2-pseudo-orthogonalité des *FEN* multivariées cubiques simples.

Organisation de la thèse

Ce travail de thèse porte sur différentes caractérisations des modèles multivariées stables-Tweedie normaux (*NST*) et ceux des stables-Tweedie multiples (*MST*) sous les propriétés de "steepnes". Les modèles *MST* parus dans la revue TEST en 2014 ont été d'abord introduits et décrits sous une forme restreinte des *NST* avant les extensions aux cas multiples. Ils sont composés d'un mélange d'une loi unidimensionnelle stable-Tweedie de variable réelle positive fixée, et des lois stables-Tweedie de variables réelles indépendantes conditionnées par la première fixée, de même paramètre de dispersion égale à la valeur de la variable fixée. Les modèles *NST* correspondants sont ceux du mélange d'une loi unidimensionnelle stable-Tweedie et les autres sont toutes gaussiennes indépendantes. A travers des cas particuliers tels que normal, Poisson, gamma, inverse-gaussienne, les modèles *MST* sont très fréquents dans les études de statistique et probabilités appliquées. Notons que ces caractérisations sont essentiellement basées sur la décomposition matricielle en bloc du complément de Schur (voir Zhang, 2005) et la résolution des équations

de Monge-Ampère.

Le premier chapitre est un chapitre d'introduction sur les *FEN* en multivariées. On trouve les définitions classiques et les résultats fondamentaux tels que les fonctions variances et variances généralisées ou déterminant de la matrice de variance-covariance, nécessaires à la lecture de ce travail. Les modèles stables-Tweedie univariés sont également introduits. Ils seront utilisés pour construire les *NST* et les *MST*.

Le Chapitre 2 est consacré à la caractérisation par fonctions variances des modèles multivariés *NST* de fonctions variances $\mathbf{V}(\mathbf{m})$ à puissance $p \geq 1$, entièrement déterminer par la première composante m_1 du vecteur moyen $\mathbf{m}$ de $\mathbb{R}^k$ avec $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Selon les valeurs du paramètre p, la nature des polynômes associés à ces modèles est déduite à l'aide des propriétés de la quasi-orthogonalité, des systèmes de Levy-Sheffer, et des relations de récurrences polynomiales correspondantes.

Le Chapitre 3 concerne la caractérisation et classifications par fonction variance des modèles multivariés *MST*. L'approche est similaire à celle utilisée pour les *NST*. la différence se situe au niveau du paramètre de puissance variance $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ à composantes multiples avec $p_1 \geq 1$. Cette caractérisation a conduit à une nouvelle classification, laquelle rend la famille beaucoup plus compréhensible et donc facilement exploitable. Ainsi, selon les valeurs de la composante $p_1 \geq 1$ du paramètre de puissance variance nous avons pu résumer en quatre sous-classes les modèles *MST*.

Le chapitre 4 étend la caractérisation de tous les *NST* à l'aide de la fonction variance généralisée. La fonction variance généralisée est une mesure de variabilité à l'intérieur d'une population multivariée. En pratique, elle intervient dans diverses situations telles que la détection des individus ou observations en dehors d'une limite de surveillance/contrôle ou la présence des valeurs aberrantes dans un nuage. Très bien connue sous hypothèse gaussienne, la fonction variance généralisée demeure peu maniable dans la jungle de la non-normalité en multivariée. Cette caractérisation des *NST* par fonction variance généralisée est établie via leur propriété d'indéfinie divisibilité et en passant par les équations de Monge-Ampère correspondantes.

Le document se termine par une conclusion générale et des perspectives sur les caractérisations par fonctions variances généralisées des modèles multivariées *MST* et les polynômes qui leurs sont associés.

Chapitre 1

Concepts fondamentaux

Sommaire

1.1 Introduction 25
1.2 Généralités sur les familles exponentielles 25
1.3 Fonctions variances et leurs déterminants 27
1.4 Opérations classiques sur *FEN* 29
1.5 Modèles stables-Tweedie univariés 30
1.6 Schéma de caractérisations des *NST* et *MST* 35

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la description des *FEN*. Ainsi, la Section 1.2 décrit les *FEN* sur $\mathbb{R}^k$, la Section 1.3 est consacrée aux fonctions variances et fonctions variances généralisées. La Section 1.4 mentionne quelques opérations classiques sur les *FEN* et leurs fonctions variances (généralisées). Enfin, la Section 1.5 traite les cas particuliers des modèles stables-Tweedie univariés.

1.2 Généralités sur les familles exponentielles

Les familles exponentielles représentent un ensemble de lois, contenant la plupart des lois usuelles, qui satisfont à une propriété importante en Statistique que nous référons le lecteur au livre de Barndorff-Nielsen (1978). Nous rappelons que pour étudier la loi d'une variable aléatoire $\mathbf{x}$, nous considérons, soit ses probabilités $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ (cas discret), soit sa densité $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ (cas continu) paramétrés par θ. Nous utiliserons dans les énoncés la fonction de densité, mais le cas discret est tout à fait analogue.

Définition 1.2.1 *Soit une variable aléatoire* $\mathbf{X}$ *de loi* $P_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ *sur un espace mesurable* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. *Cette loi fait partie d'une famille exponentielle si elle satisfait aux deux propriétés suivantes :*

(*i*) *Le support* $S_{\boldsymbol{\theta}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) > 0\} = S$ *ne dépend pas de* $\boldsymbol{\theta}$,

(*ii*) *Il existe* $k+1$ *fonctions* $a_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, a_k(\boldsymbol{\theta}), b(\boldsymbol{\theta})$ *définies sur* $\boldsymbol{\Theta}$, *et* $k+1$ *fonctions* $T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_k(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})$ *définies sur* $\mathcal{X}$, *telles que la densité s'écrit :*

$$\ln\left(f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})\right) = \sum_{j=1}^{k}\Big(a_j(\boldsymbol{\theta})T_j(\mathbf{x})\Big) + b(\boldsymbol{\theta}) + h(\mathbf{x}),$$

équivalent à

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\Big(a_j(\boldsymbol{\theta})T_j(\mathbf{x})\Big) + b(\boldsymbol{\theta}) + h(\mathbf{x})\right\}. \tag{1.1}$$

Nous pouvons encore écrire :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) &= \exp(b(\boldsymbol{\theta}))\exp(h(\mathbf{x}))\exp\sum_{j=1}^{k}\Big(a_j(\boldsymbol{\theta})T_j(\mathbf{x})\Big) \\ &= B(\boldsymbol{\theta})H(\mathbf{x})\exp\sum_{j=1}^{k}\Big(a_j(\boldsymbol{\theta})T_j(\mathbf{x})\Big). \end{aligned}$$

Dans (1.1), si pour tout $j \in \{1,\ldots,k\}$ on a : $a_j(\boldsymbol{\theta}) = \theta_j$, $T_j(\mathbf{x}) = x_j$ et $h(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_k)^\top \in \boldsymbol{\Theta}$ et pour tout $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, alors on parle d'une famille exponentielle naturelle (*FEN*).

Proposition 1.2.1 *Soit une variable aléatoire* X *de loi* $P_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ *faisant partie d'une famille exponentielle. Sous des conditions de régularité évidentes, nous avons :*

$$\forall i \in \{1,\ldots,k\}, \quad \sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}[T_j(X)]\frac{\partial a_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i} = -\frac{\partial b(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}.$$

Exemples de familles exponentielles usuelles

Voici quelques exemples d'illustration des familles exponentielles pour des lois univariées.

Exemple 1 *Soit une variable aléatoire* X *distribuée selon une loi Binomiale* $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n;p)$. *Pour* $x \in \{0,\ldots,n\}$, *nous avons :*

$$\ln\left(f(x;p)\right) = x\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + n\ln(1-p) + \ln\left(\frac{n!}{x!(n-x)!}\right).$$

Nous constatons que cette loi fait partie d'une familles exponentielles avec $\theta = p$, $p = 1$, le support $S_p = \{0,\ldots,n\} = S$ qui ne dépend pas de p, et :

$$a_1(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right),\ T_1(x) = x,\ b(p) = n\ln(1-p),\ h(x) = \ln\left(\frac{n!}{x!(n-x)!}\right).$$

La Proposition 1.2.1 nous donne ici $\mathbb{E}[T(X)]\dfrac{1}{p(1-p)} = \dfrac{n}{1-p}$. C'est-à-dire $\mathbb{E}[X] = np$.

Exemple 2 *Soit une variable aléatoire X distribuée selon une loi Normale $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(m;\sigma^2)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons :*

$$\ln\left(f(x;m,\sigma^2)\right) = \frac{xm}{\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right).$$

Nous avons $k = 2$, $\theta = (m,\sigma^2)^\top$, le support $S_{(m,\sigma^2)} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_\star^+ = S$ qui ne dépend pas de m ni de σ^2, et :

$$a_1(m,\,\sigma^2) = \frac{m}{\sigma^2}, \quad a_2(m,\,\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_2(x) = x^2, \quad b(m,\,\sigma^2) = -\frac{m^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right), \quad h(x) = 0.$$

Une loi Normale univariée fait bien partie d'une famille exponentielle. Il en est de même pour les lois Normales multivariées. La Proposition 1.2.1, lorsque nous dérivons par rapport à m, nous donne ici :

$$\mathbb{E}[T_1(X)]\tfrac{1}{\sigma^2} + 0\;\mathbb{E}[T_2(X)] = \tfrac{m}{\sigma^2}.$$

C'est-à-dire $\mathbb{E}[X] = m$. Lorsque nous dérivons par rapport à σ^2, nous obtenons :

$$-\mathbb{E}[T_1(X)]\frac{m}{\sigma^4} + \mathbb{E}[T_2(X)]\frac{1}{2\sigma^4} = -\frac{m^2}{2\sigma^4} + \frac{1}{2\sigma^2}.$$

C'est-à-dire $\mathbb{E}[X^2] = m^2 + \sigma^2$.

Proposition 1.2.2 *Soit $\tilde{X}$ un n-échantillon d'une variable aléatoire X de loi $P_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ faisant partie d'une famille exponentielle. Alors la loi de $\tilde{X}$ notée $\mathcal{L}(\tilde{X})$ fait partie d'une FE. Son support est S^n et la vraisemblance s'écrit :*

$$\ln(L(\tilde{x}\,;\,\boldsymbol{\theta})) = \left(\sum_{j=1}^k a_j(\boldsymbol{\theta})\left(\sum_{i=1}^n T_j(x_i)\right)\right) + nb(\boldsymbol{\theta}) + \left(\sum_{i=1}^n h(x_i)\right),$$

où S et L désignent respectivement le support de $P_{\boldsymbol{\theta}}$ et la densité de $\tilde{X}$.

Il suffit de considérer les mêmes fonctions $a_j(\boldsymbol{\theta})$, $j = 1,\cdots,k$, que celles de $\mathcal{L}(X)$, $nb(\boldsymbol{\theta})$ et de poser $T_j(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n T_j(x_i)$, $j = 1,\ldots,k$ et $h(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n h(x_i)$. □

1.3 Fonctions variances et leurs déterminants

Les *FEN* est une classe remarquable des familles exponentielles. Elle est en générale déterminée par la forme de sa fonction variance contrairement aux fonctions variances généralisées qui de nos jours demeurent difficiles à manipuler pour caractériser certaines *FEN*. Dans cette thèse nous considérons les *FEN* définies comme suit :

Soit μ une mesure de Randon positive sur $\mathbb{R}^k$ avec $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Soit

$$L_\mu : \mathbb{R}^k \to (0, \infty), \ \boldsymbol{\theta} \mapsto L_\mu(\boldsymbol{\theta}) := \int_{\mathbb{R}^k} \exp(\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \rangle) \mu(\mathbf{dx}),$$

sa transformée de Laplace et $\mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta}) := \ln L_\mu(\boldsymbol{\theta})$ la fonction cumulante et analytique réelle sur l'intérieur $\Theta(\mu)$ de l'ensemble convexe $\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k; L_\mu(\boldsymbol{\theta}) < \infty\}$. L'application $\boldsymbol{\theta} \longmapsto \mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta})$ est une fonction convexe sur $\Theta(\mu)$. Notons $\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^k\right)$ l'ensemble des mesures μ tels que μ ne soit pas concentrée sur un hyperplan affine. Dans ces conditions $\mathbf{K}_\mu$ est strictement convexe, réelle analytique sur $\Theta(\mu)$. Ainsi, pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ fixé, l'ensemble des mesures de probabilités

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mu) = \{\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mu)(dx) = \exp[\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \rangle - \mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta})]\mu(dx); \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta(\mu)\},$$

définie sur $\mathbb{R}^k$ est appelé *FEN* engendrée par μ. La mesure μ est appelée base de $\mathbf{F}$ et pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \Theta(\mu)$ on a :

$$\mathbf{K}'_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial \mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right)_{j=1,\ldots,k} = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mu)d\mathbf{x} =: \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}),$$

et

$$\mathbf{K}''_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)_{i,j=1,\ldots,k} = \int_{\mathbb{R}^k} [\mathbf{x} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})] \otimes [\mathbf{x} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})]\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mu)d\mathbf{x},$$

où $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})$ désigne la moyenne de $\mathbf{F}$.

De plus les applications $\mathbf{K}'_\mu : \Theta(\mu) \to \mathbf{K}'_\mu\left(\Theta(\mu)\right) =: \mathbf{M}_\mathbf{F}$ où $\mathbf{M}_\mathbf{F}$ désigne le domaine des moyennes de $\mathbf{F}$ et $h \longmapsto \mathbf{K}''_\mu(\boldsymbol{\theta})(h, h)$ sont respectivement un difféomorphisme (voir Letac, 1992) et une forme quadratique strictement définie positive sur $\mathbb{R}^{k\star}$ (espace dual de $\mathbb{R}^k$). Notons $\psi_\mu : \mathbf{M}_\mathbf{F} \to \Theta(\mu)$ la bijection réciproque de $\mathbf{K}'_\mu$. Il est alors possible de donner une nouvelle définition de la famille $\mathbf{F}(\mu)$, sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mu) = \left\{\mathbf{P}(\psi(\mathbf{m}), \mu); \mathbf{m} \in \mathbf{M}_\mathbf{F}\right\}, \tag{1.2}$$

appelée paramétrisation canonique de $\mathbf{F}$ par son domaine des moyennes.

Définition 1.3.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *une FEN sur* $\mathbb{R}^k$ *engendrée par une mesure* $\mu \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^k\right)$ *en (1.2) et* $\mathbf{M}_\mathbf{F}$ *le domaine des moyennes* $\mathbf{m}$. *L'application* $\mathbf{V}_\mathbf{F} : \mathbf{M}_\mathbf{F} \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right)$ *définie par*

$$\mathbf{V}_\mathbf{F}(\mathbf{m}) = \mathbf{K}''_\mu\left(\psi_\mu(\mathbf{m})\right) = \left[\psi'_\mu(\mathbf{m})\right]^{-1} \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right),$$

est appelée fonction variance de $\mathbf{F}$ *et caractérise les FEN,* $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right)$ *désigne l'ensemble des matrices symétriques définies positives sur* $\mathbb{R}^k$.

La forme basique des fonctions variances en multivariées est celle des fonctions variances quadratiques considérées par Letac (1989) comme suit :

$$\mathbf{V_F}(\mathbf{m}) = \mathbf{A}(\mathbf{m}, \mathbf{m}) + \mathbf{B}(\mathbf{m}) + \mathbf{C}, \tag{1.3}$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{m}, \mathbf{m})$, $\mathbf{B}(\mathbf{m})$ et $\mathbf{C}$ sont respectivement des matrices carrées d'ordre k bilinéaire symétrique, linéaire et constante d'élements en $\mathbf{m} \in \mathbf{M_F} \subseteq \mathbb{R}^k$. Casalis (1996) décrit et classifie l'ensemble des *FEN* quadratiques simples sur $\mathbb{R}^k$ de fonctions variances de forme particulière de (1.3)

$$\mathbf{V_F}(\mathbf{m}) = a\mathbf{m}\mathbf{m}^\top + \mathbf{B}(\mathbf{m}) + \mathbf{C},$$

pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_F$ et $a \in \mathbb{R}$. Elle contribue également dans l'ouvrage de Kotz et al. (2000, [Chap. 54]) sur les résultats standards et les notations sur les *FEN*.

Définition 1.3.2 *Sous l'hypothèse de Définition 1.3.1, la fonction variance généralisée de la famille* $\mathbf{F}$ *est l'application*

$$\det \mathbf{V_F} : \mathbf{M_F} \to (0, \infty); \mathbf{m} \mapsto \det \mathbf{V_F}(\mathbf{m}).$$

1.4 Opérations classiques sur *FEN*

Nous présentons dans cette section quelques résultats utiles sur les *FEN*, leurs fonctions variances et variances généralisées qu'on utilisera tout au long de ce document.

Proposition 1.4.1 *Soit* μ *et* μ' *deux mesures positives de Randon* σ*-finies sur* $\mathbb{R}^k$ *telles que* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mu)$, $\mathbf{F}' = \mathbf{F}(\mu')$ *et* $\mathbf{m} \in \mathbf{M_F}$.

(*i*) *S'il existe* $(\mathbf{a}, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ *tels que* $\mu'(d\mathbf{x}) = \exp\{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle + b\}\mu(d\mathbf{x})$, *alors* $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$: $\Theta(\mu') = \Theta(\mu) - \mathbf{a}$ *et* $\mathbf{K}_{\mu'}(\theta) = \mathbf{K}_\mu(\theta + \mathbf{a}) + b$; *pour* $\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \in \mathbf{M_F}$,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = \mathbf{V_F}(\mathbf{m}) \text{ et } \det \mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = \det \mathbf{V_F}(\mathbf{m})$$

(*ii*) *Si* $\mu' = \varphi * \mu$ *est l'image de* μ *par la transformation* $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, *où* $\mathbf{A}$ *est une matrice non dégénérée d'ordre* k *et* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$, *alors :* $\Theta(\mu') = \mathbf{A}^\top\Theta(\mu)$ *et* $\mathbf{K}_{\mu'}(\theta) = \mathbf{K}_\mu(\mathbf{A}^\top\theta) + \mathbf{b}^\top\theta$; *pour* $\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{b} \in \varphi(\mathbf{M})$,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = \mathbf{A}\mathbf{V_F}\left(\varphi^{-1}(\overline{\mathbf{m}})\right)\mathbf{A}^\top \text{ et } \det \mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = (\det \mathbf{A})^2 \det \mathbf{V_F}(\mathbf{m}).$$

(*iii*) *Si* $\mu' = \mu^{*t}$ *est une puissance de convolution* $t-$*ièmè de* μ *pour* $t > 0$, *alors :* $\Theta(\mu') = \Theta(\mu)$ *et* $\mathbf{K}_{\mu'}(\theta) = t\mathbf{K}_\mu(\theta)$; *pour* $\overline{\mathbf{m}} = t\mathbf{m} \in t\mathbf{M_F}$,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = t \cdot \mathbf{V_F}\left(t^{-1} \cdot \overline{\mathbf{m}}\right) \text{ et } \det \mathbf{V}'_{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{m}}) = t^k \det \mathbf{V_F}(\mathbf{m}).$$

(*iv*) *(Hassaïri, 1999) Si* $\boldsymbol{\mu}$ *est une mesure infiniment divisible, il existe une mesure positive de Lévy modifiée* $\boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{\mu}\right)$ *sur* $\mathbb{R}^k$ *telle que, pour tout* $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\left(\boldsymbol{\mu}\right) = \boldsymbol{\Theta}\left(\boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{\mu}\right)\right)$, $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\rho}}\left(\boldsymbol{\mu}\right) = \ln\det\mathbf{K}''_{\boldsymbol{\mu}}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$. *De plus, si* $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{\mu}\right)$ *alors, pour tout* $\overline{\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^{k}\left(\mathbf{V}'_{\mathbf{F}}\left(\mathbf{m}\right)e_i\right)e_i, \mathbf{V}'_{\mathbf{F}}\left(\overline{\mathbf{m}}\right) = \dfrac{d\overline{\mathbf{m}}}{d\mathbf{m}}\mathbf{V}_{\mathbf{F}}\left(\mathbf{m}\right)$.

Les parties (*i*) et (*ii*) de la Proposition 1.4.1 montrent, respectivement, que la fonction variance généralisée $\det\mathbf{V}_{\mathbf{F}}\left(\mathbf{m}\right)$ de $\mathbf{F}$ est invariant pour tout élément de ces bases (ou mesure génératrice) et pour les transformations affines $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ telles que $\det\mathbf{A} = \pm 1$, en particulier pour la translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$.

1.5 Modèles stables-Tweedie univariés

Nous rappelons brièvement ici les modèles stables-Tweedie univariés, lesquels s'avèrent indispensables pour décrire les modèles multivariés *NST* et *MST*.

Définition 1.5.1 *La loi* α*-stable positive est une loi de probabilité générée par le processus de Lévy* $(X_t^{\alpha})_{t>0}$ *et peut être définie par les mesures de probabilités (Feller, 1971 ; page 583),*

$$\mu_{\alpha,t}(dx) = \frac{1}{\pi x}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^j\Gamma(1+j\alpha)\sin(-j\pi\alpha)}{j!\alpha^j(\alpha-1)^{-j}\left[(1-\alpha)\,x\right]^{\alpha j}}\mathbb{1}_{\{x>0\}}dx,$$

où $\alpha \in (0,1)$ *est le paramètre d'indice,* $\Gamma(\cdot)$ *est la fonction gamma classique, et* $\mathbb{1}_A$ *désigne la fonction indicatrice sur tout événement* A *donné.*

Elle est utilisée en mathématiques, physique et analyse quantitative (finance de marché). Le cas particulier le plus utilisé est la distribution inverse-gaussienne ($\alpha = 1/2$). Voir Kaufman & Roberts (1966) pour $\alpha = 1/3$ en utilisant la fonction de Bessel. Rappelons qu'une variable aléatoire non dégénérée X est (strictement) α-stable si, pour tout $n \geq 2$, il existe un réel (zéro) b_n tel que

$$X_1 + \ldots + X_n \overset{d}{=} n^{1/\alpha}X + b_n, \tag{1.4}$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes copies de la variable X et $\overset{d}{=}$ désigne une égalité en lois de probabilités. Par conséquent, on a $\alpha \in]0,2]$. Le cas limite à gauche de $\alpha \to 0$ correspond à la distribution gamma. Pour $\alpha \in [1,2]$ on définit une famille de distributions stables (extrêmes) concentrées sur $\mathbb{R}$ où les cas spéciaux sont les distributions de Cauchy ($\alpha = 1$) et normal ($\alpha = 2$). Puisque le paramètre d'indice α dans la relation (1.4) peut aussi être négatif et correspond à la distribution de famille Poisson composée ($\alpha < 0$), Tweedie

(1984) a proposé une classification de toutes les distributions $\alpha - stables$ avec $\alpha \in [-\infty, 2]$. En introduit le paramètre de "puissance de variance" p, défini par

$$p : p(\alpha) = (2-\alpha)/(1-\alpha), \tag{1.5}$$

et équivalent à $\alpha := \alpha(p) = (p-2)/(p-1)$.

Soit $t > 0$ le paramètre de convolution, $\alpha \in [-\infty, 2]$ connecté intrinsèquement au paramètre de puissance variance $p \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty]$ de relation (1.5). Nous définissons les *FEN* stables-Tweedie, $F_{p,t} = F(\mu_{p,t})$ générées par les mesures positives σ-finies $\mu_{p,t}$, de transformées de Laplace

$$L_{\mu_{\alpha,t}}(\theta_0) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\theta_0 x)\, \mu_{\alpha,t}(dx) = \left(L_{\mu_{\alpha,1}}(\theta_0)\right)^t =: \left(L_{\mu_p}(\theta_0)\right)^t, \tag{1.6}$$

et les fonctions cumulantes $K_{\mu_{p,t}} = tK_{\mu_{p,1}} =: tK_{\mu_p}$ avec

$$K_{\mu_p}(\theta_0) = \begin{cases} \exp(\theta_0) & \text{pour} \quad p = 1 \\ -\ln(-\theta_0) & \text{pour} \quad p = 2 \\ [1/(2-p)]\,[-(p-1)\theta_0]^{1+1/(1-p)} & \text{pour} \quad p \neq 1,\ 2 \end{cases}, \tag{1.7}$$

pour tout θ_0 dans les domaines canoniques respectifs

$$\Theta\left(\mu_p\right) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pour} \quad p = 0,\ 1 \\ [0, +\infty[& \text{pour} \quad p < 0 \text{ ou } 0 < p < 1 \\ ]-\infty, 0[& \text{pour} \quad 1 < p \leq 2 \text{ ou } p = \infty \\ ]-\infty, 0] & \text{pour} \quad 2 < p < \infty \end{cases}$$

de support de distributions

$$S_p = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pourr} \quad p \leq 0\ ,\ p \to \infty \\ \mathbb{N} & \text{pour} \quad p = 1 \\ [0, +\infty[& \text{pour} \quad 1 < p < 2 \\ ]0, +\infty[& \text{pour} \quad p \geq 2. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ainsi, en posant $m = K'_{\mu_{p,t}}(\theta_0)$ la dérivée première de $K_{\mu_{p,t}}(\theta_0)$ et en exprimant θ_0 en fonction de m on obtient $\theta_0(m) = [1/(1-p)]\,(m/t)^{(1-p)}$ pour $p \neq 1$ et $\theta_0(m) = \ln(m/t)$ pour $p = 1$, on trouve la fonction variance correspondante $V_{F_{p,t}}(m) := K''_{\mu_{\alpha(p),t}}(\theta_0(m)) = [\theta'_0(m)]^{-1}$ d'expression

$$V_{F_{p,t}}(m) = tV_p(m/t) = t^{1-p}m^p \ \forall m \in M_{F_{p,t}} \tag{1.9}$$

avec $M_{F_{p,t}} = tM_p$ où

$$M_p := K'_{\mu_p}(\Theta(\mu_p)) = \begin{cases} \mathbb{R} & p = 1 \\ ]0, +\infty[& p \neq 1, \end{cases} \tag{1.10}$$

et

$$m(\theta_0) = \begin{cases} \exp(\theta_0) & p = 1 \\ -1/\theta_0 & p = 2 \\ [-(p-1)\theta_0]^{1/(1-p)} & p \neq 1,\ 2. \end{cases}$$

Une description complète en termes des modèles exponentiels de dispersion de paramètre de puissance variance unité

$$V_p(m) = m^p, \quad m \in M_p, \;\; p \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\,, \tag{1.11}$$

peut être trouvée dans Jørgensen (1997, [Chap. 4]), où M_p est le domaine des moyennes m. Pour convenance nous prenons $p = \infty$, et la fonction variance unité prend la forme exponentielle $V_\infty(m) = \exp(\beta m)\,, \beta \neq 0$.

Pour $\alpha \in (0, 1)$ ou $p > 2$, on obtient les distributions α-stable positive de (1.5.1) avec le cas particulier de la distribution inverse-gaussienne ($\alpha = 1/2$ ou $p = 3$). Le cas limite $\alpha \to 0$ ou $p = 2$ conduit à la distribution gamma. Observons cependant que les distributions stables extrêmes ($\alpha \in (1, 2)$, ou $p < 0$) ne sont pas *steep* [1], concentrées sur $\mathbb{R}$ avec le domaine des moyennes $(0, \infty)$ et leurs cas limites qui sont les distributions de Cauchy ($\alpha = 1$ ou $p = \infty$) et normale ($\alpha = 2$ ou $p = 0$). Comme pour $\alpha < 0$ ou $p \in (1, 2)$, c'est la famille Poisson composée ayant une masse en zéro et par ailleurs une distribution positive continue

$$\mu_{p(\alpha),t}(dx) = \delta_0(dx) + \frac{dx}{x} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j (\alpha - 1)^j}{j! \alpha^j \Gamma(-\alpha j) \left[(1 - \alpha)\, x\right]^{\alpha j}} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

(δ_x étant la mesure de Dirac en x). Seule la distribution de Poisson ($\alpha = -\infty$ ou $p = 1$) est discrète dans la classe des stables-Tweedie univariées. Finalement, suivant les valeurs de p, les modèles stables-Tweedie univariés se diffèrent plus ou moins par les expressions mathématiques de leurs mesures, les fonctions cumulantes, les supports de distribution ou leur domaines des moyennes. Tel est le cas de famille Poisson composée ayant une masse de distribution en zéro pour $p \in (1, 2)$. La sous-classe des distributions stables extrêmes $p \in (-\infty, 0)$ ne sont pas *steep* et ne sera pas considérée dans ce travail. Par conséquent, sous la propriété de *steepness* nous résumons selon les valeurs de ces p, les sous-classes des stables-Tweedies univariées Tweedie (1984) comme suivent : la distribution normale ($p = 0$) avec le domaine des moyennes et le support de distribution $\mathbb{R}$, les distributions de Poisson ($p = 1$) et Poisson composée ($1 < p < 2$) avec le domaine des moyennes $(0, \infty)$ et les supports de distribution $\mathbb{N}$ et $[0, \infty)$, respectivement. Et enfin, les distributions gamma ($p = 2$) et positive stable ($p > 2$) avec les domaines des moyennes et supports de distribution $(0, \infty)$. La Table 1.5.1 suivante récapitule les lois stables-Tweedie de domaine des moyennes M_p et de support de distributions S_p.

1. *Steepness* peut être caractérisé comme suit : le domaine des moyennes $\left(M_p\right)$ est égal à l'intérieur de l'enveloppe convexe fermée du support de distribution $\left(S_p\right)$; voir Barndorff-Nielsen (1978).

TABLE 1.5.1 – Résumé des modèles stables-Tweedie de domaine des moyennes unité M_p et de support de distributions S_p (e.g. Jørgensen, 1997).

Distribution(s)	$p = p(\alpha)$	$\alpha = \alpha(p)$	M_p	S_p
Stable extrême	$p < 0$	$1 < \alpha < 2$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{R}$
Normal	$p = 0$	$\alpha = 2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
[N'existe pas]	$0 < p < 1$	$2 < \alpha < \infty$		
Poisson	$p = 1$	$\alpha = -\infty$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{N}$
Poisson composée	$1 < p < 2$	$\alpha < 0$	$]0, +\infty[$	$[0, +\infty[$
Gamma décentrée	$p = 3/2$	$\alpha = -1$	$]0, +\infty[$	$[0, +\infty[$
Gamma	$p = 2$	$\alpha = 0$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Stable positive stable	$p > 2$	$0 < \alpha < 1$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Inverse-gaussienne	$p = 3$	$\alpha = 1/2$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Stable extrême	$p = \infty$	$\alpha = 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Le résultat suivant est nouveau dans ce travail de thèse et est d'importance intérêt sur la continuité de la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}$ pour $p \geq 1$ et sera utilisé au chapitre 4 dans la résolution des équations de Monge-Ampère.

Théorème 1.5.1 *Pour $t = 1$, la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}$ est continue sur $]1, +\infty[$.*

Remarque 1.5.2 *Pour l'instant on n'a pas la continuité à droite de $p = 1$. Cela est dû au fait que la distribution de Poisson correspondante soit discrète. Une attention particulière mériterait de porter sur ce cas dans la suite de notre travail.*

Pour la démonstration du Théorème 1.5.1, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 1.5.3 *Pour $p \geq 1$, la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}$ satisfait les égalités suivantes :*

(i) $K''_{\mu_p}(\theta_0) = K_{\mu_p}(\theta_0)$ *pour* $p = 1$.

(ii) $K''_{\mu_p}(\theta_0) = \left[(2-p)K_{\{\mu_p}(\theta_0)\right]^{p/(2-p)}$ *pour* $1 < p < 2$.

(iii) $K''_{\mu_p}(\theta_0) = \exp\left[2K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$ *pour* $p = 2$.

(iv) $K''_{\mu_p}(\theta_0) = \left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{-p/(p-2)}$ *pour* $p > 2$.

Démonstration : Nous considérons dans cette preuve les expressions des fonctions cumulantes de relation (1.7).

$\boxed{(i)}$ Pour $p = 1$, $K_{\mu_p}(\theta_0) = \exp(\theta_0)$, les dérivées successives donnent respectivement $K'_{\mu_p}(\theta_0) = \exp(\theta_0)$ et $K''_p(\theta_0) = \exp(\theta_0)$ par conséquent $K''_{\mu_p}(\theta_0) = K_{\mu_p}(\theta_0)$, avec $K_{\mu_p}(\theta_0) > 0$ pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{(ii)}$ Pour $1 < p < 2$, $K_{\mu_p}(\theta_0) = [1/(2-p)]\left[-(p-1)\theta_0\right]^{1+1/(1-p)}$ équivalent à $\theta_0 = [1/(1-p)]\left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{(1-p)/(2-p)}$ avec $\Theta_{\mu_p} = (-\infty, 0)$. Les dérivées successives donnent respectivement,

$$K'_{\mu_p}(\theta_0) = [-(p-1)\theta_0]^{1/(1-p)} = \left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{1/(2-p)},$$

et

$$K''_{\mu_p}(\theta_0) = [-(p-1)\theta_0]^{p/(1-p)} = \left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{p/(2-p)},$$

avec $K_{\mu_p}(\theta_0) > 0$.

$\boxed{(iii)}$ Pour $p = 2$, $K_{\mu_p}(\theta_0) = -\ln(-\theta_0)$ équivalent à $\theta_0 = -\exp\left[-K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$ avec $\Theta_{\mu_p} = (-\infty, 0)$. Alors les dérivées successives donnent respectivement, $K'_{\mu_p}(\theta_0) = -1/\theta_0 = \exp\left[K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$ et $K''_{\mu_p}(\theta_0) = 1/\theta_0^2 = \exp\left[2K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$.

$\boxed{(iv)}$ Pour $p > 2$, $K_{\mu_p}(\theta_0) = [-1/(p-2)]\,[-(p-1)\theta_0]^{1+1/(1-p)}$ équivalent à $\theta_0 = [1/(1-p)]\left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{(1-p)/(2-p)}$ avec $\Theta_{\mu_p} = (-\infty, 0)$. Les dérivées successives donnent respectivement,

$$K'_{\mu_p}(\theta_0) = \left[1/\left(-(p-1)\theta_0\right)\right]^{1/(p-1)} = \left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{1/(p-2)},$$

et

$$K''_{\mu_p}(\theta_0) = \left[1/\left(-(p-1)\theta_0\right)\right]^{p/(p-1)} = \left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{p/(p-2)},$$

avec $K_{\mu_p}(\theta_0) < 0$. □

Démonstration du Théorème 1.5.1 : Pour $p \neq 1; 2$ la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}$ est bien définie et donc continue.

Pour $p \neq 2$,

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 2^-}\left[K''_{\mu_p}(\theta_0)\right] &= \lim_{p\to 2^-}\left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{p/(2-p)} \\
&= \lim_{p\to 2^-}\left[(2-p)\left[1/(2-p)\right]\left[-(p-1)\theta_0\right]^{1+1/(1-p)}\right]^{p/(2-p)} \\
&= \lim_{p\to 2^-}\left[-(p-1)\theta_0\right]^{p/(1-p)} \\
&= (\theta_0)^{-2} \\
&= \exp\left[2K_{\mu_{p=2}}(\theta_0)\right] \\
&= K''_{\mu_{p=2}}(\theta_0),
\end{aligned}$$

et donc la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}(\theta_0)$ est continue à gauche $p = 2$.

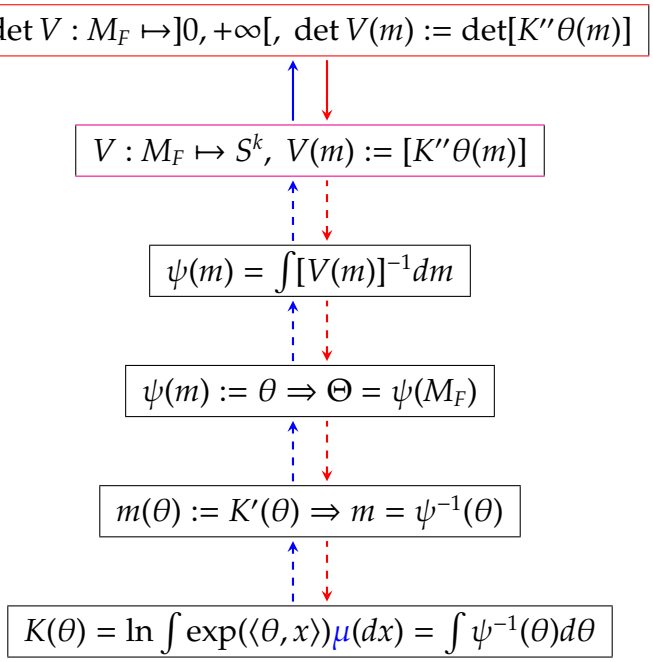
$$
\begin{aligned}
\lim_{p\to 2^+}\left[K''_{\mu_p}(\theta_0)\right] &= \lim_{p\to 2^2}\left[1/\left(-(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{-p/(p-2)} \\
&= \lim_{p\to 2^+}\left[\frac{1}{(-(p-1)\theta_0)^{(2-p)/(1-p)}}\right]^{-p/(2-p)} \\
&= \lim_{p\to 2^+}\left[\frac{1}{-(p-1)\theta_0}\right]^{-p/(1-p)} \\
&= (1/\theta_0)^2 \\
&= \exp\left[2K_{\mu_{p=2}}(\theta_0)\right] \\
&= K''_{\mu_{p=2}}(\theta_0),
\end{aligned}
$$

d'où la continuité à droite de $p = 2$ et conclut la démonstration du Théorème 1.5.1. □

1.6 Schéma de caractérisations des *NST* et *MST*

La Table 1.6.1 ci-dessous décrit les différentes étapes de caractérisations des modèles *NST* et *MST* qu'on utilisera dans la suite de ce travail. En effet, les flèches en bleues décrivent les modèles considérés tandis que celles en rouges donnent la procédure de caractérisations. La flèche continue rouge de caractérisation par fonction variance généralisée est à détailler en Section 4.2. Notons que ces fonctions variances (généralisées) sont définies sur $M := K'(\Theta)$, où Θ est le domaine canonique de K.

TABLE 1.6.1 – Schéma de caractérisations des *FEN*



Chapitre 2

A characterization of *NST* models and their associated polynomials

Sommaire

2.1 Résumé en français 37
2.2 Introduction 38
2.3 *NST* models and déterminant of the Hessian cumulant function 40
2.4 Characterization of *NST* by variance functions 45
2.5 Polynomials associated with *NST* models 47
2.5.1 Some quasi-orthogonal polynomials and *NST* models 47
2.5.2 The *NST* Lévy–Sheffer systems 48
2.5.3 Recurrence relation of polynomials associated with *NST* 50
2.6 Proof of Theorem 2.4.1 55

2.1 Résumé en français

Dans ce chapitre, on a proposé une caractérisation par fonction variance des modèles *NST* multivariés sur $\mathbb{R}^k$ décrits par Boubacar Maïnassara & Kokonendji (2014). Ces modèles sont composés d'une variable stable-Tweedie positive fixée et des variables gaussiennes indépendantes conditionnées par la première, de mêmes paramètres de dispersion égale à la variable fixée. Étant donné un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, les modèles *NST* multivariés sont générés par la mesures σ-finies $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$ on $\mathbb{R}^k$ (avec $p \geq 1$ et $t > 0$) données par :

$$\boldsymbol{\nu}_{p,t}(d\mathbf{x}) = \mu_{p,t}(dx_1) \prod_{j=2}^{k} \mu_{0,x_1}(dx_j),$$

où X_1 est une variable stable-Tweedie positive univariée de distribution $\mu_{p,t}$ en Definition 1.5.1 et $X_2, \ldots, X_k$ sachant $X_1 = x_1$ sont $k-1$ variables réelles gaussiennes indépendantes générées par μ_{0,x_1} (de moyenne et de variance x_1) avec $(p-1)(1-\alpha) = 1$. La fonction cumulante $\mathbf{K}_{\nu_{p,t}}(\boldsymbol{\theta}) = \log \int_{\mathbb{R}^k} \exp(\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \rangle) \nu_{p,t}(d\mathbf{x})$ est explicitement

$$\mathbf{K}_{\nu_{p,t}}(\boldsymbol{\theta}) = tK_{\mu_{p,1}}\left(\theta_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right),$$

pour tout $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^\top$ dans le domaine canonique

$$\boldsymbol{\Theta}(\nu_{p,t}) = \left\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k; \left(\theta_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right) \in \Theta\left(\mu_{p,1}\right)\right\},$$

où $K_{\mu_{p,1}} =: K_{\mu_p}$ est la fonction cumulante des modèles stables-Tweedie de relation (1.7).

Ces modèles ont pour fonctions variances

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_{p,t}}(\mathbf{m}) = t^{1-p} m_1^{p-2} \cdot \mathbf{m}\mathbf{m}^\top + \mathbf{Diag}_k(0, m_1, \ldots, m_1), \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{p,t}},$$

avec t la puissance de convolution de mesure associée, p le paramètre de puissance variance et $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{p,t}} =]0, \infty[\times \mathbb{R}^{k-1}$ le domaine des moyennes $\mathbf{m}$. A travers la décomposition matricielle de $\mathbf{V}_{\mathbf{G}_{p,t}}(\mathbf{m})$ via le complément de Schur, on a su déterminer la matrice inverse de $\mathbf{V}_{\mathbf{G}_{p,t}}(\mathbf{m})$, et arriver à caractériser analytiquement les *NST* par leurs fonctions variances en distinguant les cas limites $p = 1$ et $p = 2$. Les lois *NST* étant indéfiniment divisible pour $p \geq 1$, la nature des polynômes associés à ces modèles a été décrite à l'aide des propriétés de la quasi orthogonalité, des systèmes de Lévy-Sheffer et des relations de récurrences correspondantes.

2.2 Introduction

An important problem in statistical analysis is how to choose an adequate family of distributions or statistical model to describe the study. For this purpose, the characterization theorems can be useful because, under general reasonable suppositions related to the nature of the experiment, they allow us to reduce the possible set of distributions that can be used. One of these reasonable assumptions is that the normal stable Tweedie (*NST*) models (Boubacar Maïnassara & Kokonendji, 2014) present particular forms of variance functions based on the first component of mean vector and a probability measure which is not easy to handle. So, a characterization by variance functions or by associated polynomials is required for the analysis related to this model. Recall that variance function plays a significant role in the classification of natural exponential families (*NEF*). Thus, the NEFs can be characterized

by variance functions obtained by successive differentiations of the Laplace transform of a positive measure. Also, the variance functions are convenient to identify a family that is, for example, a Laplace transform to identify a probability distribution.

For an accurate presentation of this work, let us introduce some notations. Let $k \in \{2, 3, \ldots\}$, we denote by $(\mathbf{e}_i)_{i=1,\ldots,k}$ an orthonormal basis of $\mathbb{R}^k$ and by $\mathbf{I}_k = \mathbf{Diag}_k(1, \ldots, 1)$ the $k \times k$ unit matrix. For two vectors $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ and $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, we use the notations $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$ and $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\top$ to denote the scalar $\sum_{j=1}^k a_j b_j$ and the $k \times k$ matrix $\left(a_i b_j\right)_{i,j=1,\ldots,k}$ respectively, and finally $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right)$ the set of symmetric matrices on $\mathbb{R}^k$. About exponential families, variance function, generalized variance function, we are referring to Chapter 1.

Concerning notations of associated polynomials, we also recall that for all $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ and for all $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$, we write $\mathbf{x}^\mathbf{n} = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$, $\|\mathbf{x}\|_+ = \max\left(-\sum x_i^-, \sum x_i^+\right)$, $\mathbf{n}! = n_1! \cdots n_k!$ and $|\mathbf{n}| = n_1 + \cdots + n_k$. A polynomial in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ of the $|\mathbf{n}|$th degree can be written as follows :

$$Q_\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{q}| \leq |\mathbf{n}|} \alpha_\mathbf{q} \mathbf{x}^\mathbf{q}, \quad \mathbf{n}, \mathbf{q} \in \mathbb{N}^k,$$

where $\alpha_\mathbf{q} \neq 0$ when $|\mathbf{q}| = |\mathbf{n}|$. Let us now introduce the power of convolution $t > 0$ of any $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ such that $\mu^{*t} = \mu_t$ generates the NEF $\mathbf{F}_t = \mathbf{F}(\mu_t)$ on $\mathbb{R}^k$ with mean $\mathbf{m}_t \in \mathrm{M}_{\mathbf{F}_t}$. Note that, for $t > 0$ and then μ is infinitely divisible, we can associate $\mathbf{F}_t$ to a Lévy process $(X_t)_{t>0}$; see, e.g., Sato (1999). For all $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^k$ and for all $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}\left(\mathbb{R}^k\right)$, following Schoutens & Teugels (1998) we define a family of associated polynomials (linked to the so-called Lévy-Scheffer systems) in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ by

$$\mathrm{P}_{\mathbf{A},\mathbf{n},t}(\mathbf{x}) = f_{\mu_t}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_t)\left(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_k\right) / f_{\mu_t}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_t), \tag{2.1}$$

where $f_{\mu_t}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}, \mathbf{m})(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{e}_k)$ is the $|\mathbf{n}|$th derivative of $\mathbf{m} \mapsto f_{\mu_t}(\mathbf{x}, \mathbf{m})$ in $|\mathbf{n}|$th directions $\mathbf{A}\mathbf{e}_1$ (n_1 times), ... , $\mathbf{A}\mathbf{e}_k$ (n_k times) with

$$f_{\mu_t}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = \exp\{\langle \psi_{\mu_t}(\mathbf{m}), \mathbf{x} \rangle - K_{\mu_t}(\psi_{\mu_t}(\mathbf{m}))\}, \quad \forall \mathbf{m} \in \mathrm{M}_{F_t},$$

and the relation $\psi_{\mu_t}(\mathbf{m}) = \psi_\mu(\mathbf{m}/t)$. When $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, the expression (2.1) corresponds to $\mathrm{P}_{\mathbf{n},t}(\mathbf{x}) = f_{\mu_t}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_t)/f_{\mu_t}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_t)$. In particular, $f_{\mu_t}(\cdot, \mathbf{m}_t) := 1$ and $\mathrm{P}_{\mathbf{A},\mathbf{n},t}$ is a polynomial in $\mathbf{x}$ of degree $|\mathbf{n}|$ and the sequence $(\mathrm{P}_{\mathbf{A},\mathbf{n},t=1})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}$ forms a basis of $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$.

In this paper we first characterize the *NST* models through their variance functions and then describe some of their associated polynomials by quasi-othogonality properties. For this, Section 2.3 recalls the description of all k-variate *NST* models which are composed by a fixed univariate stable Tweedie variable having a positive value domain, and the remaining random variables given the fixed one are real independent Gaussian variables with the same

variance equal to the fixed component. Section 2.4 is devoted to the result of the *NST* characterization by variance functions, for which the proof is given in the appendix in Section 2.6. In Section 2.5 we examine associated polynomials with these models.

2.3 *NST* models and déterminant of the Hessian cumulant function

According to Boubacar Maïnassara & Kokonendji (2014) and given a random vector $(X_1, \ldots, X_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, the multivariate *NST* models are generated by σ-finite measures $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$ on $\mathbb{R}^k$ (with $p \geq 1$ and $t > 0$) as follows :

$$\boldsymbol{\nu}_{p,t}(d\mathbf{x}) = \mu_{p,t}(dx_1) \prod_{j=2}^{k} \mu_{0,x_1}(dx_j), \tag{2.2}$$

where X_1 is a positive univariate stable-Tweedie distribution $\mu_{p,t}$ of Definition 1.5.1 and $X_2, \ldots, X_k$ given $X_1 = x_1$ are $k-1$ real independent Gaussian variables generated by μ_{0,x_1} (with mean 0 and variance x_1) with $(p-1)(1-\alpha) = 1$. The cumulant function $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_{p,t}}(\boldsymbol{\theta}) = \log \int_{\mathbb{R}^k} \exp(\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \rangle) \boldsymbol{\nu}_{p,t}(d\mathbf{x})$ is explicitly

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_{p,t}}(\boldsymbol{\theta}) = tK_{\mu_{p,1}}\left(\theta_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k} \theta_j^2\right), \tag{2.3}$$

for all $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^\top$ in the canonical domain

$$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}_{p,t}) = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k ; \left(\theta_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k} \theta_j^2\right) \in \Theta\left(\mu_{p,1}\right) \right\} \tag{2.4}$$

where $K_{\mu_{p,1}} =: K_{\mu_p}$ is the cumulant function of stables-Tweedie models of relation (1.7).

The fowolling results stat some news importants properties of cumulant of (2.3) which we will use in Chapitre 4.

Theorem 2.3.1 *For $t = 1$, the determinant of Hessian cumulant fonction (2.3) is continuous for all $p \in (1, \infty)$ and satisfies :*

(*i*) $\det \mathbf{K}''_{\boldsymbol{\nu}_p}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_p}(\boldsymbol{\theta})\right]^k$ *pour* $p = 1$.

(*ii*) $\det \mathbf{K}''_{\boldsymbol{\nu}_p}(\boldsymbol{\theta}) = \left[(2-p)\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_p}(\boldsymbol{\theta})\right]^{(p+k-1)/(2-p)}$ *pour* $1 < p < 2$.

(*iii*) $\det \mathbf{K}''_{\boldsymbol{\nu}_p}(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left[(k+1)\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_p}(\boldsymbol{\theta})\right]$ *pour* $p = 2$.

(*iv*) $\det \mathbf{K}''_{\boldsymbol{\nu}_p}(\boldsymbol{\theta}) = \left[1/\left(-(p-2)\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_p}(\boldsymbol{\theta})\right)\right]^{(p+k-1)/(p-2)}$ *pour* $p > 2$.

The following lemma is required to prove Theorem 2.3.1.

Lemma 2.3.1 *Let* $\mathbf{L}$ *be a positive definite* $k \times k$ *matrix* $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right)$ *having the form*

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

with $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{k-1})^\top \in \mathbb{R}^{k-1}$ *and* $\mathbf{A}$ *is a* $(k-1) \times (k-1)$ *symetric matrix. Then, the determinant of matrix* $\mathbf{L}$ *is given by*

$$\det \mathbf{L} = \lambda \det(\mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}).$$

Proof : Since $\lambda \neq 0$, one can use Schur complement $\mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$ of λ to obtain

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times(k-1)} \\ \lambda^{-1}\mathbf{a} & \mathbf{I}_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0_{1\times(k-1)} \\ 0_{(k-1)\times 1} & \mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1}\mathbf{a}^\top \\ 0_{(k-1)\times 1} & \mathbf{I}_{k-1} \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{I}_{k-1}$ is $(k-1)\times(k-1)$ unit matrix, $0_{1\times(k-1)}$ is $1\times(k-1)$ matrix and $0_{(k-1)\times 1}$ is $(k-1)\times 1$ matrix une matrice a $k-1$ colonnes et une ligne. Then,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{L} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times(k-1)} \\ \lambda^{-1}\mathbf{a} & \mathbf{I}_{k-1} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \lambda & 0_{1\times(k-1)} \\ 0_{(k-1)\times 1} & \mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1}\mathbf{a}^\top \\ 0_{(k-1)\times 1} & \mathbf{I}_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= (\det \mathbf{I}_{k-1}) \left(\lambda \det(\mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a} \otimes \mathbf{a})\right) (\det \mathbf{I}_{k-1}) \\ &= \lambda \det(\mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}), \end{aligned}$$

and the Lemma 2.3.1 is proved. □

Proof of Theorem 2.3.1 : Setting $g(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k} \theta_j^2$ and $t = 1$, the relation (2.3) is write

$$\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) = K_{\mu_p}\left(g(\boldsymbol{\theta})\right) \tag{2.5}$$

with $p \geqslant 1$. Then,

$$\mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) = K''_{\mu_p}\left(g(\boldsymbol{\theta})\right) \times g'(\boldsymbol{\theta}) \otimes g'(\boldsymbol{\theta}) + K'_{\mu_p}\left(g(\boldsymbol{\theta})\right) \times g''(\boldsymbol{\theta}),$$

where $g'(\boldsymbol{\theta}) = (1, \theta_2, \ldots, \theta_k)^\top$ et $g''(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Diag}_k\,(0, 1, \ldots, 1)$. Therefore

$$\begin{aligned} \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) &= K''_{\mu_p}\left(g(\boldsymbol{\theta})\right)(1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \otimes (1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \\ &\quad + K'_{\mu_p}\left(g(\boldsymbol{\theta})\right) \mathbf{Diag}_k\,(0, 1, \ldots, 1)\,. \end{aligned}$$

Using Lemma 2.3.1 with $\lambda = K''_{\mu_p}\left(g(\boldsymbol{\theta})\right)$, $\mathbf{a} = K''_{\mu_p}\left(g(\boldsymbol{\theta})\right)(\theta_2, \ldots, \theta_k)^\top$ and $\mathbf{A} = K''_{\mu_p}\left(g(\boldsymbol{\theta})\right)(\theta_2, \ldots, \theta_k) \otimes (\theta_2, \ldots, \theta_k) + K'_{\mu_p}\left(g(\boldsymbol{\theta})\right)\mathbf{I}_{k-1}$. One deduces $\mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} =$

$K'_{\mu_p}(g(\boldsymbol{\theta}))\,\mathbf{I}_{k-1}$ and

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) &= K''_{\mu_p}(g(\boldsymbol{\theta}))\det\left[K'_{\mu_p}(g(\boldsymbol{\theta}))\,\mathbf{I}_{k-1}\right] \\
&= K''_{\mu_p}(g(\boldsymbol{\theta}))\left[K'_{\mu_p}(g(\boldsymbol{\theta}))\right]^{k-1}\det \mathbf{I}_{k-1} \\
&= K''_{\mu_p}(g(\boldsymbol{\theta}))\left[K'_{\mu_p}(g(\boldsymbol{\theta}))\right]^{k-1} \\
&= K''_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\left[K'_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{k-1}, \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

which we use to verify the four relationships listed in the above proposal based on (2.42) and the expressions of K_{μ_p} of Définition 1.5.1 according to the values of p.

$\boxed{(i)}$ For $p=1$, $K_{\mu_p}(\theta_0)=\exp(\theta_0)$, then $K'_{\mu_p}(\theta_0)=\exp(\theta_0)$ and $K''_p(\theta_0)=\exp(\theta_0)$ therefore (2.6) is write

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) &= K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\left[K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{k-1} \\
&= \left[K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{k} \\
&= \left[\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})\right]^{k},
\end{aligned}$$

with $\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})>0$ pour $p=1$.

$\boxed{(ii)}$ For $1<p<2$, $K_{\mu_p}(\theta_0)=[1/(2-p)]\left[-(p-1)\theta_0\right]^{1+1/(1-p)}$ with $\Theta_{\mu_p}=(-\infty,0)$. Then the first and second order derivatives gives, respectively $K'_{\mu_p}(\theta_0)=\left[-(p-1)\theta_0\right]^{1/(1-p)}=\left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{1/(2-p)}$ and $K''_{\mu_p}(\theta_0)=\left[-(p-1)\theta_0\right]^{p/(1-p)}=\left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{p/(2-p)}$. The expression of (2.6) becomes

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) &= \left[(2-p)K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{p/(2-p)}\left[(2-p)K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{(k-1)/(2-p)} \\
&= \left[(2-p)K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{(p+k-1)/(2-p)} \\
&= \left[(2-p)\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})\right]^{(p+k-1)/(2-p)},
\end{aligned}$$

with $\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})>0$ pour $1<p<2$.

$\boxed{(iii)}$ For $p=2$, $K_{\mu_p}(\theta_0)=-\log(-\theta_0)$ avec $\Theta_{\mu_p}=(-\infty,0)$. Then $K'_{\mu_p}(\theta_0)=-1/\theta_0=\exp\left[K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$ et $K''_{\mu_p}(\theta_0)=1/\theta_0^2=\exp\left[2K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$ and then the relation

(2.6) is write,

$$\begin{aligned}\det \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) &= \exp\left[2K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]\left[\exp\left\{K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right\}\right]^{k-1}\\ &= \exp\left[(k+1)K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]\\ &= \exp\left[(k+1)\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})\right].\end{aligned}$$

$\boxed{(iv)}$ For $p > 2$, $K_{\mu_p}(\theta_0) = [-1/(p-2)]\,[-(p-1)\theta_0]^{1+1/(1-p)}$ avec $\Theta_{\mu_p} = (-\infty, 0)$. Then the first and second order derivatives gives, respectively

$$K'_{\mu_p}(\theta_0) = \left[1/\left(-(p-1)\theta_0\right)\right]^{1/(p-1)} = \left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{1/(p-2)},$$

and

$$K''_{\mu_p}(\theta_0) = \left[1/\left(-(p-1)\theta_0\right)\right]^{p/(p-1)} = \left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{p/(p-2)},$$

that one replaces in the expression (2.6) to get

$$\begin{aligned}\det \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) &= \left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right)\right]^{(p+k-1)/(p-2)}\\ &= \left[1/\left(-(p-2)\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})\right)\right]^{(p+k-1)/(p-2)},\end{aligned}$$

with $\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) < 0$ for $p > 2$.

For $p \in (1,2) \cup (2,\infty)2$, the function $p \mapsto \mathbf{K}_{\nu_p}$ is continuous. We will check the continuity at $p = 2$. Then,

For $p \neq 2$,

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 2^-}\left[\det \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})\right] &= \lim_{p\to 2^-}\left[(2-p)\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})\right]^{(p+k-1)/(2-p)} \\
&= \lim_{p\to 2^-}\left[(2-p)K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{(p+k-1)/(2-p)} \\
&= \lim_{p\to 2^-}\left[-(p-1)\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{(p+k-1)/(1-p)} \\
&= \left[-\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{-(k+1)} \\
&= \exp\left[-(k+1)\log\left(-\theta_1-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right] \\
&= \exp\left[(k+1)K_{\mu_{p=2}}\left(-\theta_1-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right] \\
&= \exp\left[(k+1)\mathbf{K}_{\nu_{p=2}}(\boldsymbol{\theta})\right] \\
&= \det \mathbf{K}''_{\nu_{p=2}}(\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned}$$

from where the function $p \mapsto \det \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})$ is continuous from the left at $p = 2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 2^+}\left[\det \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})\right] &= \lim_{p\to 2^+}\left[1/\left(-(p-2)\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})\right)\right]^{(p+k-1)/(p-2)} \\
&= \lim_{p\to 2^+}\left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right)\right]^{(p+k-1)/(p-2)} \\
&= \lim_{p\to 2^+}\left[1/\left(-(p-1)\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right)\right]^{(p+k-1)/(p-1)} \\
&= \left[-\left(\theta_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right]^{-(k+1)} \\
&= \exp\left[-(k+1)\log\left(-\theta_1-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right] \\
&= \exp\left[(k+1)K_{\mu_{p=2}}\left(-\theta_1-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}\theta_j^2\right)\right] \\
&= \exp\left[(k+1)\mathbf{K}_{\nu_{p=2}}(\boldsymbol{\theta})\right] \\
&= \det \mathbf{K}''_{\nu_{p=2}}(\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned}$$

from where the function $p \mapsto \det \mathbf{K}''_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})$ is continuous from the right at $p = 2$. □

For fixed $p \geq 1$ and $t > 0$, the multivariate NEF generated by $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$ of (3.2) is the set $\mathbf{G}_{p,t} = \left\{\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}; p, t)\,;\ \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}_{p,t})\right\}$ of probability distributions

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}; p, t)(d\mathbf{x}) = \exp\left[\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}\rangle - \mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_{p,t}}(\boldsymbol{\theta})\right] \boldsymbol{\nu}_{p,t}(d\mathbf{x}).$$

Therefore, the variance functions of $\mathbf{G}_{p,t} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\nu}_{p,t})$ generated by $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$ is

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_{p,t}}(\mathbf{m}) = t^{1-p} \cdot m_1^{p-2} \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{Diag}_k(0, m_1, \ldots, m_1), \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{p,t}} \tag{2.7}$$

and the generalized variance functions

$$\det \mathbf{V}_{\mathbf{G}_{p,t}}(\mathbf{m}) = t^{1-p} \cdot m_1^{p+k-1}, \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{p,t}} = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}. \tag{2.8}$$

with $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{p,t}} = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$. Here is the covariance matrix structure of the trivariate normal Poisson, that is $k = 3$ and $p = 1$:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_1}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_1 + m_1^{-1} m_2^2 & m_1^{-1} m_2 m_3 \\ m_3 & m_1^{-1} m_2 m_3 & m_1 + m_1^{-1} m_3^2 \end{pmatrix}.$$

Tables 2.3.1 summarizes the k-variate *NST* models with power variance parameter $p \geq 1$, power generalized variance parameter $q := p + k - 1$ and support of distribution $\mathbf{S}_p$.

Table 2.3.1 – Summary of k-variate *NST* models with power variance parameter $p \geq 1$, power variance generalized q, mean domain $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_1} = (0, \infty) \times \mathbb{R}^k$ and the support of distribution $\mathbf{S}_p$.

Type(s)	p	$q = p + k - 1$	$\mathbf{S}_p$
Normal Poisson	$p = 1$	$q = k$	$\mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k-1}$
Normal Poisson composé	$1 < p < 2$	$k < q < k + 1$	$[0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$
Normal noncentral gamma	$p = 3/2$	$q = k + 1/2$	$[0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$
Normal gamma	$p = 2$	$q = k + 1$	$(0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$
Normal positive stable	$p_2 > 2$	$q > k + 1$	$(0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$
Normal Inverse Gaussienne	$p = 3$	$q = k + 2$	$(0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$

2.4 Characterization of *NST* by variance functions

We now come to the main result. Namely, we want to prove that, given a variance function defined in (2.7) with fixed $p \geq 1$, the corresponding NEF is

one of the *NST* models generated by $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$ of (3.2). The result of characterization with $t = 1$ can be stated as below and its proof is given in the appendix of Section 2.6.

Theorem 2.4.1 *Let $k \in \{2, 3, \ldots\}$, $p \geq 1$ and $\mathbf{M}_p = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$. Then the unit variance function $\mathbf{V}_p : \mathbf{M}_p \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right)$ defined by*

$$\mathbf{V}_p(\mathbf{m}) = m_1^{p-2} \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{Diag}_k(0, m_1, \ldots, m_1), \tag{2.9}$$

for all $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)^\top \in \mathbf{M}_p$, characterizes up to affinity the NST model generated by $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$ of (3.2) with $t = 1$.

Since all *NST* models $\mathbf{G}_{p,t} = \mathbf{G}(\nu_{\alpha,t})$ are infinitely divisible (Sato, 1999), the following result highlights their modified Lévy measures $\rho(\nu_{\alpha,t})$ of the normal gamma type for $p > 1$ and degenerated for $p = 1$. See Kokonendji & Khoudar (2006) for some univariate situations $k = 1$.

Theorem 2.4.2 *(Boubacar Maïnassara & Kokonendji, 2014). Let $\nu_{\alpha(p),t}$ be a generating measure (3.2) of an NST family for given $p = p(\alpha) \geq 1$ and $t > 0$. Denote $\eta = 1 + k/(p-1) = \eta(p,k) > 1$ the modified Lévy measure parameter. Then*

$$\rho(\nu_{\alpha(p),t}) = \begin{cases} t^k (p-1)^{-\eta(p,k)} \cdot \nu_{0,\eta(p,k)} & \text{for} \quad p > 1 \\ t^k \cdot (\delta_{\mathbf{e}_1} \prod_{j=2}^{k} \mu_{2,1})^{*k} & \text{for} \quad p = 1. \end{cases}$$

Corollary 2.4.1 *(Boubacar Maïnassara & Kokonendji, 2014). Let $\mathbf{G}'_p = \mathbf{G}(\rho(\nu_{\alpha(p),t}))$ under assumptions of Theorem 2.4.2. Then*

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}'_p}(\overline{\mathbf{m}}) = \begin{cases} [\eta(p,k)]^{-1} \cdot \overline{\mathbf{m}} \otimes \overline{\mathbf{m}} + \langle \mathbf{e}_1, \overline{\mathbf{m}} \rangle \cdot \mathbf{Diag}_k(0, 1, \ldots, 1) & \text{for} \quad p > 1 \\ k^{-1} \cdot \mathbf{Diag}_k(0, 1, \ldots, 1) & \text{for} \quad p = 1, \end{cases}$$

with $\overline{\mathbf{m}} \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$.

The following lemma is also required for the proof of Theorem 2.4.1.

Lemma 2.4.2 *Let $\mathbf{L}$ be a positive definite $k \times k$ matrix in $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right)$ having the form*

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \lambda & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

with $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{k-1}$ and $\mathbf{A}$ a $(k-1) \times (k-1)$ symmetric matrix. Then, the inverse matrix of $\mathbf{L}$ is given by

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} + \lambda^{-2} \mathbf{a}^\top \mathbf{S}^{-1} \mathbf{a} & -\lambda^{-1} \mathbf{a}^\top \mathbf{S}^{-1} \\ -\lambda^{-1} \mathbf{a} \mathbf{S}^{-1} & \mathbf{S}^{-1} \end{pmatrix},$$

with $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \lambda^{-1} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$.

Proof. It is easy to check that $\mathbf{L}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{I}_k$. Which provides the result.□

2.5 Polynomials associated with *NST* models

Throughout this section, the *NST* laws are associated to the Lévy processes $(\mathbf{X}_t)_{t>0}$ because each distribution $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$ defined in (3.2) is infinitely divisible for given $p \geq 1$; see, e.g., Sato (1999). As NEF (from μ_t) we associate to *NST* models (from $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$) the polynomials in (2.1) denoted here by $\mathrm{P}_{\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}$ for a given power variance parameter $p \geq 1$.

2.5.1 Some quasi-orthogonal polynomials and *NST* models

Let us recall here the definition of orthogonality and some of their modifications.

Définition 2.5.1 *A family* $(\mathrm{P}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}$ *of polynomials on* $\mathbb{R}^k$ *is said to be :*

(i) $\boldsymbol{\mu}$*-orthogonal (resp.* $\boldsymbol{\mu}$*-pseudo-orthogonal) if for all* $\mathbf{n}$ *and* $\mathbf{q}$ *in* $\mathbb{N}^k$*, one has* $\int_{\mathbb{R}^k} \mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\mathrm{P}_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\mu}(d\mathbf{x}) = 0$ *when* $\mathbf{n} \neq \mathbf{q}$ *(resp.* $|\mathbf{n}| \neq |\mathbf{q}|$*).*

(ii) $\boldsymbol{\mu}$*-transorthogonal (resp.* $\boldsymbol{\mu}$*-2-pseudo-orthogonal) if for all* $\mathbf{n}$ *and* $\mathbf{q}$ *in* $\mathbb{N}^k$*, one has* $\int_{\mathbb{R}^k} \mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\mathrm{P}_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\mu}(d\mathbf{x}) = 0$ *when* $\|\mathbf{n}-\mathbf{q}\|_+ \geq \inf(|\mathbf{n}|;|\mathbf{q}|)$ *(resp.* $|\mathbf{n}| \geq 2|\mathbf{q}|$*).*

(iii) d-orthogonal ($d \geq 1$) *if and only if the d terms recurrence relations are written*

$$x_i \mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{0\leq|\mathbf{q}|\leq d} \alpha_{i,\mathbf{n}+e_j-\mathbf{q}}(\mathbf{n})\mathrm{P}_{\mathbf{n}+e_j-q}(\mathbf{x}),$$

for all $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_k)^\top \in \mathbb{R}^k$.

The following proposition summarizes some known results on the associated polynomials of *NST* models.

Proposition 2.5.1 *Let* $\mathrm{P}_{\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{x})$ *be polynomials of (2.1) associated to NST models for* $p > 1$, $t > 0$ *and* $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^k)$ *with generating measure* $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$*. Then, we have the three following assertions :*

(i) $\mathrm{P}_{\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{x})$ *are* $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$*-orthogonal or* $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$*-pseudo-orthogonal if and only if* $p = 2$*;*

(ii) $\mathrm{P}_{\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{x})$ *are* $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$*-transorthogonal or* $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$*-pseudo-orthogonal if and only if* $p = 3$*;*

(iii) $\mathrm{P}_{\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{x})$ *are p-orthogonal if and only if* $p \in \{2,3,4,\ldots\}$.

Proof. $\boxed{(i)}$ Since the corresponding *NST* model with $p = 2$ is the gamma-Gaussian type which belongs to simple quadratic NEFs, we therefore refer to Pommeret (1996).

$\boxed{(ii)}$ For the normal inverse Gaussian with $p = 3$ and belonging to simple cubic NEFs, the detailed proofs are given in Hassairi & Zarai (2006) for the $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$-pseudo-orthogonality and in Kokonendji & Zarai (2007) for the $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$-transorthogonality.

$\boxed{(iii)}$ See Kokonendji & Pommeret (2005). □

As for $p \in [1,\infty)\setminus\{2,3,\ldots\}$ the characterizations by modifications of orthogonality property are not available. In particular, the normal Poisson polynomials with $p = 1$ need more investigations. Beside this, the Poisson-Gaussian polynomials are orthogonals (see Pommeret, 1996) because they are in the simple quadratic families of Casalis (1996). See Nisa et al. (2015) and Kokonendji & Nisa (2016) for short discussion and differences between normal Poisson and Poisson-Gaussian families.

2.5.2 The *NST* Lévy–Sheffer systems

The concept is defined as follows.

Définition 2.5.2 *A polynomial set* $\left\{Q_{\mathbf{n},t}(\mathbf{x})\,;\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k, t\geq 0\right\}$ *is called a Lévy-Sheffer system (see also Schoutens & Teugels, 1998) if there exits a neighborhood of* $\mathbf{m}=0$ *denoted by* $\mathbf{B}$ *such that*

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N}^k}\frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}Q_{\mathbf{n},t}(\mathbf{x}) = \exp\left\{\langle a(\mathbf{m}),\mathbf{x}\rangle - tK_{\boldsymbol{\mu}}\left(a(\mathbf{m})\right)\right\},\quad \forall(t,\mathbf{m})\in[0,\infty)\times\mathbf{B},$$

where $a:\mathbf{B}\to\mathbb{R}^k$ *is an analytic function with* $a(0)=0$ *and* $\boldsymbol{\mu}$ *is an infinitely divisible distribution on* $\mathbb{R}^k$.

It is clear that a Lévy-Sheffer system is connected to a Lévy process $(\mathbf{X}_t)_{t>0}$ with associated distributions $(\boldsymbol{\mu}_t)_{t>0}$; see also Kokonendji (2005b) for further details. Let us recall also that if $(\mathbf{X}_t)_{t>0}$ is a Lévy process, then the basic link between the polynomials and the corresponding Lévy process is given by the following martingale equality for each $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k$ and for $0<s\leq t$,

$$\mathbb{E}\left[Q_{\mathbf{n},t}(\mathbf{X}_t)\,|\,\mathbf{X}_s\right] = Q_{\mathbf{n},s}(\mathbf{X}_s). \tag{2.10}$$

In the framework of *NST* models, we are looking for the corresponding *NST* Lévy-Sheffer system and a particular case of characterization by pseudo-orthogonality.

Proposition 2.5.2 *Let* $\mathrm{P}_{t\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{x})$ *be polynomials of (2.1) associated to NST models for* $p\geq 1$, $t>0$ *and* $\mathbf{A}\in\mathbf{GL}(\mathbb{R}^k)$ *with generating measure* $\boldsymbol{\nu}_{p,t}$ *and* $\boldsymbol{\nu}_p := \boldsymbol{\nu}_{p,1}$. *Then, we have the two following assertions :*

(i) $(\mathrm{P}_{t\mathbf{A},\mathbf{n};p,t})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k,t>0}$ *forms a Lévy-Sheffer systems and for all* $t\geq s$,

$$\mathbb{E}\left\{\exp\langle\psi_{\boldsymbol{\nu}_p}(\mathbf{Am}+\mathbf{m}_1),\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_s\rangle\,|\,\mathbf{X}_s\right\} = \exp\left\{(t-s)\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_p}\left(\psi_{\boldsymbol{\nu}_p}(\mathbf{Am}+\mathbf{m}_1)\right)\right\}, \tag{2.11}$$

for all $\mathbf{m}$ *in a neighborhood of* $\mathbf{m}_t$;

(ii) $(\mathrm{P}_{t\mathbf{A},\mathbf{n};p,t})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k,t\geq 0}$ *is pseudo-orthogonal if and only if* $p=2$.

Proof. (i) By Taylor expansion, one successively has :

$$\begin{aligned} f_{\nu_p}(\mathbf{x}, t\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_t) &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{(t\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_t - \mathbf{m}_t)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} f_{\nu_p}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_t) \\ &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} f_{\nu_{p,t}}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_t)\,(t\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \ldots, t\mathbf{A}\mathbf{e}_k) \\ &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \mathrm{P}_{t\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

and then,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \mathrm{P}_{t\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{x}) &= \exp\left\{\langle \psi_{\nu_p}(t\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_t), \mathbf{x}\rangle - \mathbf{K}_{\nu_p}\left(\psi_{\nu_p}\left(t\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_t\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\langle \psi_{\nu_p}(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1), \mathbf{x}\rangle - t\mathbf{K}_{\nu_p}\left(\psi_{\nu_p}\left(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1\right)\right)\right\}, \end{aligned}$$

with $\mathbf{m}_t = t\mathbf{m}_1$. Setting $a(\mathbf{m}) = \psi_{\nu_p}(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1)$ and since ν_p is an infinitely divisible, from this we deduce the desired result.

To prove (2.11) we apply (2.10) to the $\mathrm{P}_{t\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{x})$ and we get

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{P}_{t\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{X}_t) \,|\, \mathbf{X}_s\right) = \mathrm{P}_{s\mathbf{A},\mathbf{n};p,s}(\mathbf{X}_s). \tag{2.12}$$

We now combine (2.12) with the form of the generating function. On the left hand side we find

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \mathbb{E}\{\mathrm{P}_{t\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{X}_t) \,|\, \mathbf{X}_s\} \frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} &= \mathbb{E}\left\{\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \{\mathrm{P}_{t\mathbf{A},\mathbf{n};p,t}(\mathbf{X}_t)\} \,|\, \mathbf{X}_s\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\exp\left\{\langle \psi_{\nu_p}(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1), \mathbf{X}_t\rangle - t\mathbf{K}_{\nu_p}\left(\psi_{\nu_p}\left(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1\right)\right)\right\} \,|\, \mathbf{X}_s\right\} \\ &= \exp\left\{-t\mathbf{K}_{\nu_p}\left(\psi_{\nu_p}\left(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1\right)\right)\right\} \mathbb{E}\left\{\exp\left\{\langle \psi_{\nu_p}(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1), \mathbf{X}_t\rangle\right\} \,|\, \mathbf{X}_s\right\}. \end{aligned}$$

On the right, we have

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \mathrm{P}_{s\mathbf{A},\mathbf{n};p,s}(\mathbf{X}_s) &= f_{\nu_p}(\mathbf{X}_s, s\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_s) \\ &= \exp\left\{\langle \psi_{\nu_p}(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1), \mathbf{X}_s\rangle - s\mathbf{K}_{\nu_p}\left(\psi_{\nu_p}\left(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{-s\mathbf{K}_{\nu_p}\left(\psi_{\nu}\left(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1\right)\right)\right\} \exp\left\{\langle \psi_{\nu_p}(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1), \mathbf{X}_s\rangle\right\}. \end{aligned}$$

Combination of both previous expressions leads to the relationship

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left\{\langle \psi_{\nu_p}(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1), \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_s\rangle\right\} \,|\, \mathbf{X}_s\right\} = \exp\left\{t\mathbf{K}_{\nu_p}\left(\psi_{\nu_p}\left(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1\right)\right) - s\mathbf{K}_{\nu_p}\left(\psi_{\nu_p}\left(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{m}_1\right)\right)\right\},$$

which is equivalent to relation (2.11) ; hence, Part (i) is proven.

(ii) For $p = 2$ the corresponding *NST* model is gamma-Gaussian and belongs to quadratic NEF case. We therefore refer to Pommeret (2000). □

2.5.3 Recurrence relation of polynomials associated with *NST*

For simplicity we here omit the power variance parameter $p \geq 1$ related to any *NST* model and their corresponding polynomials and generating measure ; because the following result holds for all $p \geq 1$.

Theorem 2.5.1 *A sequence of polynomials* $(\mathrm{P}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}$ *is associated with the NST models if* $(\mathrm{P}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}$ *satisfies the following recurrence relationship*

$$\begin{aligned} x_1\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= n_1\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) + \|\mathbf{n}-(p-1)e_1\|_+ A_{\mathbf{n}}^{(p-1)e_1}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-(p-1)e_1}(\mathbf{x}) + A_{\mathbf{n}}^{e_1}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-e_1}(\mathbf{x}) \\ x_i\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= A_{\mathbf{n}}^{e_i}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-e_i}(\mathbf{x}), \quad \forall i = 2,\ldots,k, \end{aligned}$$

where $A_{\mathbf{n}}^{\mathbf{q}} = \mathbf{n}!/(\mathbf{n}-\mathbf{q})!$, *with convention* $A_{\mathbf{n}}^{\mathbf{q}} = 0$ *for* $\mathbf{n}-\mathbf{q} \notin \mathbb{N}^k$.

Proof. By Taylor expansion, for any $\mathbf{m} \in \mathrm{M} := (0,\infty)\times\mathbb{R}^{k-1}$ and for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ we have

$$f_\nu(\mathbf{x},\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \tag{2.13}$$

where $f_\nu(\cdot,\mathbf{m})$ is the associated probability density ; e.g. from Theorem 2.4.1. Then (2.13) can write

$$\exp\left\{\langle\psi_\nu(\mathbf{m}),\mathbf{x}\rangle - \mathbf{K}_\nu\left(\psi_\nu(\mathbf{m})\right)\right\} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),$$

equivalent to

$$\exp\left\{\langle\psi_\nu(\mathbf{m}),\mathbf{x}\rangle\right\} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\exp\left\{\mathbf{K}_\nu\left(\psi_\nu(\mathbf{m})\right)\right\},$$

that is

$$\exp\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}\rangle = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\left(\mathbf{K}'_\nu(\boldsymbol{\theta})\right)^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\exp\left\{\mathbf{K}_\nu(\boldsymbol{\theta})\right\}. \tag{2.14}$$

Differentiating with respect to θ_i one obtains :

$$x_i\exp\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}\rangle = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k} \frac{\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}\left\{\sum_{j=1}^{k} n_j\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_j}\frac{\partial^2\mathbf{K}_\nu(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j} + \mathbf{m}^{\mathbf{n}}\frac{\partial\mathbf{K}_\nu(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\right\}\exp\left\{\mathbf{K}_\nu(\boldsymbol{\theta})\right\}. \tag{2.15}$$

From (2.14) and (2.15) we successively get

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}\frac{\mathbf{m}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}x_i\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}\frac{\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}\left\{\sum_{j=1}^{k}n_j\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_j}\mathbf{V}_{ij}(\mathbf{m})+\mathbf{m}^{\mathbf{n}}m_i\right\}\\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}\frac{\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}\sum_{j=1}^{i-1}n_j\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_j}m_1^{p-2}m_im_j\\
&\quad+\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}\frac{\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}\left\{\sum_{j=i+1}^{k}n_j\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_j}m_1^{p-2}m_im_j+n_i\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_i}\left(m_1^{p-2}m_i^2+m_1\right)+\mathbf{m}^{\mathbf{n}}m_i\right\}\\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}\frac{\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}\sum_{j=1}^{k}n_j\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_j}m_1^{p-2}m_im_j\\
&\quad+\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}\frac{\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}\left[-n_i\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_i}m_1^{p-2}m_i^2+n_i\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_i}\left(m_1^{p-2}m_i^2+m_1\right)+\mathbf{m}^{\mathbf{n}}m_i\right]\\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}\frac{\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}\left\{\sum_{j=1}^{k}n_j\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_j}m_1^{p-2}m_im_j+n_im_1\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_i}+\mathbf{m}^{\mathbf{n}}m_i\right\}\\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^k}\frac{\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}\left\{|\mathbf{n}|\mathbf{m}^{\mathbf{n}+e_i+(p-2)e_1}+n_i\mathbf{m}^{\mathbf{n}-e_i+e_1}+\mathbf{m}^{\mathbf{n}+\mathbf{e_i}}\right\},
\end{aligned}$$

and identifying the coefficients of $\mathbf{m}^{\mathbf{n}}$, it follows that :

$$x_i\frac{\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}{\mathbf{n}!}=\frac{\|\mathbf{n}-e_i-(p-2)e_1\|_+}{(\mathbf{n}-e_i-(p-2)e_1)!}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-e_i-(p-2)e_1}(\mathbf{x})+\frac{n_i+1-\delta_{i1}}{(\mathbf{n}+e_i-e_1)!}\mathrm{P}_{\mathbf{n}+e_i-e_1}(\mathbf{x})+\frac{1}{(\mathbf{n}-e_i)!}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-e_i}(\mathbf{x}),$$

equivalent to

$$x_i\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})=\|\mathbf{n}-(e_i+(p-2)e_1)\|_+A_{\mathbf{n}}^{e_i+(p-2)e_1}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-(e_i+(p-2))e_1}(\mathbf{x})+(n_i+1-\delta_{i1})A_{\mathbf{n}}^{e_1-e_i}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-(e_1-e_i)}(\mathbf{x})+A_{\mathbf{n}}^{e_i}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-e_i}(\mathbf{x}).$$

Hence, for $i=1$ we get

$$x_1\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})=n_1\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})+A_{\mathbf{n}}^{e_1}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-e_1}(\mathbf{x})+\|\mathbf{n}-(p-1)e_1\|_+A_{\mathbf{n}}^{(p-1)e_1}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-(p-1)e_1}(\mathbf{x}),$$

and for $i\in\{2,3,\ldots,k\}$, $A_{\mathbf{n}}^{e_i+(p-2)e_1}=A_{\mathbf{n}}^{e_1-e_i}=0$, then $x_i\mathrm{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})=A_{\mathbf{n}}^{e_i}\mathrm{P}_{\mathbf{n}-e_i}(\mathbf{x})$. The proof of Theorem 2.5.1 is complete. □

The following tables summarize the classical polynomials associated with *NEF* on $\mathbb{R}^k$.

TABLE 2.5.1 – Orthogonal polynomials on $\mathbb{R}$ for quadratic NEF (Morris, 1982)

Type	$\mathbf{V_F}(m)$	$\mathbf{M_F}$	$Q_n(x)$	Orthog. polynomials
Gaussian	1	$\mathbb{R}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}})\mathrm{H}_n(\sqrt{2}x)$	**Hermite**
Poisson	m	$(0,\infty)$	$(-1)^n\mathrm{C}_n^1(x)$	**Charlier**
Gamma	m^2	$(0,\infty)$	$(-1)^n\mathrm{L}_n^0(x+1)$	**Laguerre**
Binomial	$m(1-m)$	$(0,1)$	$n!(\frac{1}{4})^n\mathrm{K}_n^{\frac{1}{2},1}(x)$	**Krawchouk**
Negative-binomial	$m(1+m)$	$(0,\infty)$	$2^{-\frac{3n}{2}}\mathrm{M}_n^{\frac{1}{2},1}(x-1)$	**Meixner**
Hyperbolic	m^2+1	$\mathbb{R}$	$n!\mathrm{P}_n^1(x)$	**Pollaczek**

TABLE 2.5.2 – 2-Orthogonal polynomials on $\mathbb{R}$ for cubic *NEF* (Hassairi & Zarai, 2004)

Type $\mathbf{V}_F(m), m>0$	$Q_n(x)$ (Induction relations $n\geq 2$), $Q_0(x)=1$
Inverse Gaussian m^3	$Q_1(x)=(x-1), \quad Q_2(x)=x^2-6x+3$ $Q_{n+1}(x)=(x-3n-1)Q_n(x)-n(3n-2)Q_{n-1}(x)-A_n^3Q_{n-2}(x)$
Ressel-Kendall $m^2(m+1)$	$Q_1(x)=\frac{1}{2}(x-1), \quad Q_2(x)=\frac{1}{4}(x^2-7x+4)$ $Q_{n+1}(x)=\frac{1}{2}[(x-5n-1)Q_n(x)-n(4n-3)Q_{n-1}(x)-A_n^3Q_{n-2}(x)]$
Abel (GP) $m(m+1)^2$	$Q_1(x)=\frac{1}{4}(x-1), \quad Q_2(x)=\frac{1}{16}(x^2-15x+8)$ $Q_{n+1}(x)=\frac{1}{4}[(x-8n-1)Q_n(x)-n(5n-4)Q_{n-1}(x)-A_n^3Q_{n-2}(x)]$
Takács (GNB) $m(m+1)(2m+1)$	$Q_1(x)=\frac{1}{6}(x-1), \quad Q_2(x)=\frac{1}{36}(x^2-15x+8)$ $Q_{n+1}(x)=\frac{1}{6}[(x-13n-1)Q_n(x)-n(9n-8)Q_{n-1}(x)-2A_n^3Q_{n-2}(x)]$
Strict arcsine $m(m^2+1)$	$Q_1(x)=\frac{1}{2}(x-1), \quad Q_2(x)=\frac{1}{4}(x^2-5x+3)$ $Q_{n+1}(x)=\frac{1}{2}[(x-4n-1)Q_n(x)-n(3n-2)Q_{n-1}(x)-A_n^3Q_{n-2}(x)]$
Large arcsine (GSA) $m(2m^2+2m+1)$	$Q_1(x)=\frac{1}{9}(x-1), \quad Q_2(x)=\frac{1}{81}(x^2-13x+3)$ $Q_{n+1}(x)=\frac{1}{9}[(x-11n-1)Q_n(x)-n(8n-7)Q_{n-1}(x)-2A_n^3Q_{n-2}(x)]$

TABLE 2.5.3 – The twelve G_0-orbits of the real cubic NEF distributed in four G-orbits (Hassairi, 1992)

G-orbit	Quadratic (Morris, 1982)		Cubic (Letac & Mora, 1990)	
1st	Gaussian		Inverse Gaussian	
	1		m^3	
2nd	Poisson	Gamma	Abel	Ressel-Kendall
	m	m^2	$m(m+1)^2$	$m^2(m+1)$
3rd	Binomial	Negative binomial	Takács	
	$m(1-m)$	$m(m+1)$	$m(m+1)(2m+1)$	
4th	Hyperbolic		Large arcsine	Strict arcsine
	m^2+1		$m(2m^2+2m+1)$	$m(m^2+1)$

TABLE 2.5.4 – (d)-(Pseudo) (Orthogonal) polynomials and univariate stable Tweedie model

Types	$V_F(m)=m^p$	$Q_n(x)$
Extreme stable	$p<0$	?
Normal	$p=0$	Orthogonal (Hermite)
[Do not exist]	$0<p<1$	
Poisson	$p=1$	Orthogonal (Charlier)
Compound Poisson	$1<p<2$	?
Gamma	$p=2$	Orthogonal (Laguerrre)
Positive stable	$p>2$	?
Inverse Gaussian	$p=3$	2-Orthogonal (Hassairi & Zarai, 2004 ; Kokonendji, 2005b)
Positive stable	$p=2d-1$, $d\in\{2,3,\cdots\}$	d-Pseudo-orthogonal (Kokonendji, 2005a) d-Orthogonal/Sheffer syst. (kokonendji, 2005b)

TABLE 2.5.5 – Orthogonal polynomials on $\mathbb{R}^k$ of the Casalis class by Pommeret (1996) with $\mathbf{V}_F(\mathbf{m}) = a\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{B}(\mathbf{m}) + \mathbf{C}$

Types	a	$\mathbf{B}(\mathbf{m}) + \mathbf{C}$	$Q_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ (Orthogonal)
Poisson-G$_{j=0,1,\cdots,k}$	0	$\mathbf{Diag}_k(m_1, \cdots, m_j, 1, \cdots, 1)$	Charlier & Hermite
Gaussian (PG_0)	0	Σ	Hermite
Poisson (PG_k)	0	$\mathbf{Diag}_k(m_1, \cdots, m_k)$	Charlier
NM-gamma-G$_{j=0,1,\cdots,k}$	1	$\mathbf{Diag}_k(m_1, \cdots, m_j, 0, m_{j+1}, \cdots, m_{j+1})$	Laguerre & Charlier
Gamma-Gaussian ($NMgG_0$)	1	$\mathbf{Diag}_k(0, m_1, \cdots, m_1)$	Hermite & Laguerre
Neg.Multinomial ($NMgG_k$)	1	$\mathbf{Diag}_k(m_1, \cdots, m_k)$	Meixner
Multinomial	-1	$\mathbf{Diag}_k(m_1, \cdots, m_k)$	Laguerre & Meixner
Hyperbolic	1	$\mathbf{Diag}_k(m_1, \cdots, m_{k-1}, \sum_{i=1}^{k-1} m_i + 1)$	Meixner & Pollaczek

TABLE 2.5.6 – (d)-(Pseudo) (Orthogonality) polynomials and multivariate *NST* model with $\mathbf{V}_F(\mathbf{m}) = m_1^{p-2} \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{Diag}_k(0, m_1, \cdots, m_1)$

Types	$p = p(\alpha)$	$Q_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$
Normal Poisson	$p = 1$	?
Normal Compound Poisson	$1 < p < 2$	?
Normal Gamma	$p = 2$	Orthogonal (Pommeret, 1996) Pseudo-Orthogonal (Pommeret, 2000)
Normal Positive stable	$p > 2$	?
Normal Inverse Gaussian	$p = 3$	Transorthogonal / 2-Pseudo-Orthogonal (Hassairi & Zarai, 2006 ; Kokonendji & Zarai, 2007)
Normal Positive stable	$p \in \{3, 4, \cdots\}$	p-Orthogonal (Kokonendji & Pommeret, 2005) & ? ?

2.6 Proof of Theorem 2.4.1

We mainly show that, given the variance function (3.7) with fixed $p \geq 1$ then, up to affinity, the corresponding cumulant function is that introduced in (2.3) with $t = 1$. For problems of existence, we first proving the limits cases ($p = 1; p = 2$) then the cas $p \in (1,2) \cup (2,\infty)$.

Let $\mathbf{F}_p = \mathbf{F}(\nu_p)$ be a NEF satisfies (3.7), $p \geq$ and for $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)^\top \in \mathbf{M}_{\mathbf{F}_p} = (0,\infty) \times \mathbb{R}^{k-1} =: \mathbf{M}$ (does not depending on $p > 1$). To apply Lemma 2.4.2 with $\mathbf{L} = [\mathbf{V}_p(\mathbf{m})]$ of (3.7), one sets : $\lambda = m_1^p$, $\mathbf{a} = m_1^{p-1}(m_2, ..., m_k)^\top$ and $\mathbf{A} = m_1^{p-2}(m_2, ..., m_k) \otimes (m_2, ..., m_k) + m_1 \mathbf{I}_{k-1} = \lambda^{-1}\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + m_1 \mathbf{I}_{k-1}$. Then $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} = m_1 \mathbf{I}_{k-1}$ and, since $m_1 > 0$, we successively have : $\mathbf{S}^{-1} = (1/m_1)\mathbf{I}_{k-1}$, $\lambda^{-1} + \lambda^{-2}\mathbf{a}^\top \mathbf{S}^{-1}\mathbf{a} = (1/m_1^p) + (1/m_1^3)\sum_{j=2}^k m_j^2$, $-\lambda^{-1}\mathbf{a}^\top \mathbf{S}^{-1} = -(1/m_1^2)\mathbf{a}^\top$ and $-\lambda^{-1}\mathbf{a}\mathbf{S}^{-1} = -(1/m_1^2)\mathbf{a}$. Thus, the inverse of variance-covariance matrix of (3.7) can be written as

$$\left[\mathbf{V}_p(\mathbf{m})\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m_1^p} + \dfrac{1}{m_1^3}\displaystyle\sum_{j=2}^k m_j^2 & \dfrac{-1}{m_1^2}\mathbf{a}^\top \\ \dfrac{-1}{m_1^2}\mathbf{a} & \dfrac{1}{m_1}\mathbf{I}_{k-1} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Since $\mathbf{m} = \mathbf{K}'_{\nu_p}(\theta)$ and $\mathbf{V}_p(\mathbf{m}) = \mathbf{K}''_{\nu_p}(\theta)$, then by writing θ in terms of $\mathbf{m}$ one obtains

$$\mathbf{V}_p(\mathbf{m}) = [\theta'(\mathbf{m})]^{-1}$$

which implies

$$\theta(\mathbf{m}) = \int [\mathbf{V}_p(\mathbf{m})]^{-1} d\mathbf{m}.$$

For $\theta \in \mathbf{\Theta} := \theta(\mathbf{M})$ with $\mathbf{M} = (0,\infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$, there exist an analytic function $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ such that, for all $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$

$$\theta'(\mathbf{m}) = \left(\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{m})}{\partial m_i \partial m_j}\right)_{i,j=1,2,\ldots,k}. \tag{2.17}$$

Case $p = 1$: For $p = 1$, the relation (2.16) can write, for all $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)^T \in \mathbf{M} := (0,\infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$

$$[\mathbf{V}_1(\mathbf{m})]^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_1^3}\displaystyle\sum_{j=2}^k m_j^2 & -\dfrac{1}{m_1^2}\mathbf{a}^T \\ -\dfrac{1}{m_1^2}\mathbf{a} & \dfrac{1}{m_1} I_{k-1} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Using (2.17) and (2.18) for getting the first information on stable-Tweedie component, we have

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial m_1^2} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1^3}\sum_{j=2}^k m_j^2. \tag{2.19}$$

Integrating (2.19) with respect to m_1 where $m_1 > 0$, we have

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_1} = \log m_1 - \frac{1}{2m_1^2} \sum_{j=2}^{k} m_j^2 + g(m_2, \ldots, m_k), \tag{2.20}$$

where $g : \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ is an analytic function to be determined. Derivative of (2.20) with respect to m_j, for $j = 2, \ldots, k$ gives

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial m_j \partial m_1} = -\frac{m_j}{m_1^2} + \frac{\partial g}{\partial m_j}. \tag{2.21}$$

Expression (2.21) is equal to the $(1, j)$th element of $[\mathbf{V}_1(\mathbf{m})]^{-1}$ in (2.18), so by identification we get

$$-\frac{m_j}{m_1^2} = -\frac{m_j}{m_1^2} + \frac{\partial g}{\partial m_j},$$

and we deduce that $\partial g / \partial m_j = 0$ implies $g(m_2, \ldots, m_k) = \alpha_1$ (a real constant). And thus, (2.20) becomes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_1} = \log m_1 - \frac{1}{2m_1^2} \sum_{j=2}^{k} m_j^2 + \alpha_1. \tag{2.22}$$

Integrating (2.22) with respect to m_1 we have

$$\varphi(\mathbf{m}) = m_1 \log m_1 - m_1 + \frac{1}{2m_1} \sum_{j=2}^{k} m_j^2 + \alpha_1 m_1 + h(m_2, \ldots, m_k), \tag{2.23}$$

where $h : \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ an analytic function to be determined. From now on, complete informations of the model (i.e. normal components) begin to show itself. The two first derivatives of (2.23) with respect to m_j give, respectively,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_j} = \frac{m_j}{m_1} + \frac{\partial h}{\partial m_j}, \quad \forall j = 2, \ldots, k \tag{2.24}$$

and,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial m_j^2} = \frac{1}{m_1} + \frac{\partial^2 h}{\partial m_j^2}, \quad \forall j = 2, \ldots, k. \tag{2.25}$$

Expression (2.25) is equal to the diagonal (j, j) of $[\mathbf{V}_1(\mathbf{m})]^{-1}$ in (2.18) for all $j \in \{2, \ldots k\}$, hence we have

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_1} + \frac{\partial^2 h}{\partial m_j^2}.$$

Consequently $\partial^2 h / \partial m_j^2 = 0$ and $\partial h / \partial m_j = \alpha_j$ (a real constant) for all $j \in \{2, \ldots, k\}$. Then, equation (2.24) becomes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_j} = \frac{m_j}{m_1} + \alpha_j, \quad j = 2, \ldots, k. \tag{2.26}$$

Using equations (2.22) and (2.26) we get

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}) = \left(\log m_1 - \frac{1}{2m_1^2} \sum_{j=2}^{k} m_j^2, \frac{m_2}{m_1}, \ldots, \frac{m_k}{m_1} \right)^T + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)^T,$$

or

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}) = \begin{cases} \theta_1(\mathbf{m}) &= \log m_1 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} \frac{m_j^2}{m_1^2} + \alpha_1 \\ \theta_j(\mathbf{m}) &= \frac{m_j}{m_1} + \alpha_j, \qquad\qquad j = 2, \ldots, k. \end{cases} \tag{2.27}$$

From (2.27), each θ_j belongs to $\mathbb{R}$ for $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ because $m_1 > 0$ and $\theta_j \in \mathbb{R}$ for $j \in \{2, \ldots, k\}$. Thus, one has $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{M}) \subseteq \mathbb{R}^k$ and also

$$m_1(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left[(\theta_1 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2\right] \tag{2.28}$$

$$m_j(\boldsymbol{\theta}) = (\theta_j - \alpha_j) \exp\left[(\theta_1 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2\right], j = 2, \ldots, k. \tag{2.29}$$

Since $\mathbf{M} = (0, 1) \times \mathbb{R}^{k-1}$, we deduce that $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}) = \mathbb{R}^k$. Also $\mathbf{m} = \dfrac{\partial \mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$, then using (2.28) as follow :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta}) &= \int \frac{\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} d\theta_1 \\ &= \exp\left[(\theta_1 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2\right] + f(\theta_2, \ldots, \theta_k), \end{aligned} \tag{2.30}$$

where $f : \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ is an analytic function to be determined. Taking derivative of (2.30) with respect to θ_j for each $j = 2, \ldots, k$, we obtain

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = (\theta_j - \alpha_j) \exp\left[(\theta_1 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2\right] + \frac{\partial f}{\partial \theta_j},$$

which is equal to (2.29) ; then one gets $\partial f / \partial \theta_j = 0$ for all $j \in \{2, \ldots, k\}$ implying $f(\theta_2, \ldots, \theta_k) = b$ (a real constant). Finally, for all $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^T \in \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu})$, (2.30) becomes

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left[(\theta_1 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2\right] + b.$$

By Proposition 1.4.1 one can see that, up to affinity, this $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_p}$ is a *NST* cumulant function as given in (2.3) with $t = 1$ on its corresponding canonical domain

in (3.4) for $p = 1$. The proof of Theorem 2.4.1 is therefore completed by use of the analytical property of $\mathbf{K}_{\nu_p}$. □

Case $p = 2$: Casalis (1996) dealt this case in the context of $2d + 4$ quadratic NEFs families and corresponds to gamma-Gaussian family. For $p = 2$, the inverse matrix $\left[\mathbf{V}_p(\mathbf{m})\right]^{-1}$ in (2.16) can write

$$[\mathbf{V}_2(\mathbf{m})]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_1^3}\sum_{j=2}^{k} m_j^2 & -\frac{1}{m_1^2}\mathbf{a}^T \\ -\frac{1}{m_1^2}\mathbf{a} & \frac{1}{m_1} I_{k-1} \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

for all $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)^T$ in $\mathbf{M} := (0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$. Using (2.17) and (2.31) for getting the first information on stable-Tweedie component, we have

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial m_1^2} = \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_1^3}\sum_{j=2}^{k} m_j^2,$$

and then

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_1} = -\frac{1}{m_1} - \frac{1}{2m_1^2}\sum_{j=2}^{k} m_j^2 + g(m_2, \ldots, m_k), \tag{2.32}$$

where $g : \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ is an analytic function to be determined. Derivative of (2.32) with respect to θ_j gives

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial m_j \partial m_1} = -\frac{m_j}{m_1^2} + \frac{\partial g}{\partial m_j}, j = 2, \ldots, k. \tag{2.33}$$

Expression (2.33) is equal to $(1, j)$th element of $[\mathbf{V}_2(\mathbf{m})]^{-1}$ in (2.31), that is

$$-\frac{m_j}{m_1^2} + \frac{\partial g}{\partial m_j} = -\frac{m_j}{m_1^2},$$

therefore $\dfrac{\partial g}{\partial m_j} = 0$ for each $j = 2, \ldots, k$ indeed $g(m_2, \ldots, m_k) = \alpha_1$ (a real constant). The relation (2.32) becomes,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_1} = -\frac{1}{m_1} - \frac{1}{2m_1^2}\sum_{j=2}^{k} m_j^2 + \alpha_1, \tag{2.34}$$

and its primitives can be written as

$$\varphi(\mathbf{m}) = -\log m_1 + \frac{1}{2m_1}\sum_{j=2}^{k} m_j^2 + \alpha_1 m_1 + h(m_2, \ldots, m_k), \tag{2.35}$$

where $h : \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ is an analytic function to be determined. From now on, complete information of the model (i.e. normal components) begin to show itself. The two first derivatives of (2.35) with respect to m_j give, respectively,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_j} = \frac{m_j}{m_1} + \frac{\partial h}{\partial m_j}, \qquad \forall j \in \{2, \ldots, k\} \tag{2.36}$$

and

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial m_j^2} = \frac{1}{m_1} + \frac{\partial^2 h}{\partial m_j^2}, \qquad \forall j \in \{2, \ldots, k\}. \tag{2.37}$$

Expression (2.37) is equal to diagonal (j, j)th element of $[\mathbf{V}_2(\mathbf{m})]^{-1}$ in (2.31) for $j \in \{2, \ldots k\}$, so we deduce

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_1} + \frac{\partial^2 h}{\partial m_j^2}.$$

Consequently $\partial^2 h / \partial m_j^2 = 0$ and $\partial h / \partial m_j = \alpha_j$ (a real constant) for all $j = 2, \ldots, k$. Then, equation (2.36) becomes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m_j} = \frac{m_j}{m_1} + \alpha_j, \quad \forall j \in \{2, \ldots, k\}, \tag{2.38}$$

using equations (2.34) and (2.38) one obtains

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}) = \begin{cases} \theta_1(\mathbf{m}) &= -\dfrac{1}{m_1} - \dfrac{1}{2m_1^2} \sum_{j=2}^{k} m_j^2 + \alpha_1 \\ \theta_j(\mathbf{m}) &= \dfrac{m_j}{m_1} + \alpha_j, \quad j = 2, \ldots, k. \end{cases} \tag{2.39}$$

From (2.39), each θ_j belongs to $\mathbb{R}$ because $m_1 > 0$ and $m_j \in \mathbb{R}$ for $j \in \{2, \ldots, k\}$. And also

$$m_1 = \frac{-1}{(\theta_1 - \alpha_1) + \dfrac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2}, \tag{2.40}$$

$$m_j = \frac{-(\theta_j - \alpha_j)}{(\theta_1 - \alpha_1) + \dfrac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2}, \; j = 2, \ldots, k, \tag{2.41}$$

with $\theta_j(\mathbf{m}) - \alpha_j \neq 0$ for all $j \in \{1 \ldots, k\}$. Since $m_1 > 0$, then in (2.40), $(\theta_1 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2 < 0$ and thus $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}) = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k ; (\theta_1 - \alpha_1) + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2 < 0 \right\}$. Also, $\mathbf{m} = \dfrac{\partial \mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$, then using (2.40) one can obtain $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta})$ as follow :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta}) &= \int \frac{\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} d\theta_1 \\ &= -\log\Big[-(\theta_1 - \alpha_1) - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k} (\theta_j - \alpha_j)^2 \Big] + f(\theta_2, \ldots, \theta_k), \end{aligned} \tag{2.42}$$

where $f : \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ is an analytic function to be determined. Again, derivative of (2.42) with respect to θ_j produces

$$\frac{\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j} = \frac{-(\theta_1-\alpha_1)}{(\theta_1-\alpha_1)+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}(\theta_j-\alpha_j)^2} + \frac{\partial f}{\partial\theta_j}, \tag{2.43}$$

which is equal to (2.41) ; then one gets, $\partial f/\partial\theta_j = 0$ for all $j \in \{2,\ldots,k\}$ implying $f(\theta_2,\ldots,\theta_k) = c$ (a real constant). Finally, it ensues from it that we have

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\theta}) = -\log\Big[-(\theta_1-\alpha_1)-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}(\theta_j-\alpha_j)^2\Big]+c, \quad \forall\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}).$$

By Proposition 1.4.1 one can see that, up to affinity, this $\mathbf{K}_{\nu_p}$ is a *NST* cumulant function as given in (2.3) with $t = 1$ on its corresponding canonical domain in (3.4) for $p = 2$. □

Case $p \in (1,2)\cup(2,\infty)$: Using (2.17) into (2.16) for getting the first informations on the stable Tweedie component, we have

$$\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_1^2} = \frac{1}{m_1^p} + \frac{1}{m_1^3}\sum_{j=2}^{k} m_j^2,$$

and then

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_1} = \frac{-1}{(p-1)m_1^{p-1}} - \frac{1}{2m_1^2}\sum_{j=2}^{k} m_j^2 + g(m_2,\ldots,m_k), \tag{2.44}$$

where $g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$ is a analytic function to be determined. Note that since $m_1 > 0$ and $p \in (1,2)\cup(2,\infty)$ then (2.44) is well defined. Derivative of (2.44) with respect to m_j gives

$$\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_j\partial m_1} = -\frac{m_j}{m_1^2} + \frac{\partial g(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j}, \quad \forall j\in\{2,\ldots,k\}. \tag{2.45}$$

Expression (2.45) is equal to the $(1,j)$th element of $[\mathbf{V}_p(\mathbf{m})]^{-1}$ in (2.16), that is

$$\frac{-m_j}{m_1^2} + \frac{\partial g(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j} = \frac{-m_j}{m_1^2}, \quad \forall j\in\{2,\ldots,k\};$$

therefore, $\partial g(m_2,\ldots,m_k)/\partial m_j = 0$, for all $j \in \{2,\ldots,k\}$ implies $g(m_2,\ldots,m_k) = a_1$ (a real constant). Thus (2.44) becomes

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_1} = \frac{-1}{(p-1)m_1^{p-1}} - \frac{1}{2m_1^2}\sum_{j=2}^{k} m_j^2 + a_1, \tag{2.46}$$

and, by integration with respect to m_1, one gets

$$\varphi(\mathbf{m}) = \frac{-1}{(p-1)(p-2)m_1^{p-2}} - \frac{1}{2m_1}\sum_{j=2}^{k} m_j^2 + a_1 m_1 + h(m_2,\ldots,m_k), \tag{2.47}$$

where $h : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$ is an analytic function to be determined. From now on, complete informations of the model (i.e. normal components) begin to show itself. The two first derivatives of (2.47) with respect to m_j give, respectively,

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_j} = \frac{m_j}{m_1} + \frac{\partial h(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j}, \quad \forall j \in \{2,\ldots,k\} \tag{2.48}$$

and

$$\frac{\partial\varphi^2(\mathbf{m})}{\partial m_j^2} = \frac{1}{m_1} + \frac{\partial^2 h(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j^2}, \quad \forall j \in \{2,\ldots,k\}. \tag{2.49}$$

Expression (2.49) is equal to the diagonal (j,j)th element of $[\mathbf{V}_p(\mathbf{m})]^{-1}$ in (2.16) for all $j \in \{2,\ldots,k\}$, hence we have

$$\frac{1}{m_1} + \frac{\partial^2 h(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j^2} = \frac{1}{m_1}.$$

Consequently, $\partial^2 h(m_2,\ldots,m_k)/\partial m_j^2 = 0$ and $\partial h(m_2,\ldots,m_k)/\partial m_j = a_j$ (a real constant) for all $j \in \{2,\ldots,k\}$. Then equation (2.48) becomes

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_j} = \frac{m_j}{m_1} + a_j, \quad \forall j = 2,\ldots,k. \tag{2.50}$$

Using equations (2.46) and (2.50) one obtains

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}) = \begin{cases} \theta_1 &= \dfrac{-1}{(p-1)m_1^{p-1}} - \dfrac{1}{2m_1^2}\sum_{j=2}^{k} m_j^2 + a_1 \\ \theta_j &= \dfrac{m_j}{m_1} + a_j, \qquad j = 2,\ldots,k. \end{cases} \tag{2.51}$$

From (2.51) and since $m_1 > 0$ and $m_j \in \mathbb{R}$ for all $p \in (1,2)\cup(2,\infty)$, one has : $(\theta_1 - a_1) < 0$ which can be extended to 0 when $p > 2$ (see also (2.54) below) and $(\theta_j - a_j) \in \mathbb{R}$ for $j \in \{2,\ldots,k\}$. Hence, up to affinity (see Proposition 1.4.1) the set Θ introduced for (2.17) is similar to the one of (3.4). Also, the system (2.51) leads to its converse as

$$m_1(\boldsymbol{\theta}) = \left(-(p-1)\Big[(\theta_1 - a_1) + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}(\theta_j - a_j)^2\Big]\right)^{-1/(p-1)} \tag{2.52}$$

and

$$m_j(\boldsymbol{\theta}) = (\theta_j - a_j)\left(-(p-1)\Big[(\theta_1 - a_1) + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}(\theta_j - a_j)^2\Big]\right)^{-1/(p-1)}, \; j = 2,\ldots,k, \tag{2.53}$$

with $\theta_j - a_j \neq 0$ for all $j \in \{2,\ldots,k\}$. Since $\mathbf{m} = \partial \mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta}$ then using (2.52) one can write $\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})$ as follow :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) &= \int \frac{\partial \mathbf{K}'_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} d\theta_1 \\ &= \frac{-1}{p-2}\left(-(p-1)\Big[(\theta_1 - a_1) + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}(\theta_j - a_j)^2\Big]\right)^{1-1/(p-1)} \\ &\quad + f(\theta_2,\ldots,\theta_k), \end{aligned} \tag{2.54}$$

where $f : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$ is an analytic function to be determined. Again, derivative of (2.54) with respect to θ_j gives

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = (\theta_j - a_j)\left(-(p-1)\Big[(\theta_1 - a_1) + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}(\theta_j - a_j)^2\Big]\right)^{-1/(p-1)} + \frac{\partial f(\theta_2,\ldots,\theta_k)}{\partial \theta_j}$$

which is equal to (2.53); then, one gets $\partial f(\theta_2,\ldots,\theta_k)/\partial \theta_j = 0$ for all $j \in \{2,\ldots,k\}$ implying $f(\theta_j,\ldots,\theta_k) = b$ (a real constant). Finally, it ensues from it that we have

$$\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2-p}\left(-(p-1)\Big[(\theta_1 - a_1) + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k}(\theta_j - a_j)^2\Big]\right)^{1+1/(1-p)} + b.$$

By Proposition 1.4.1 one can see that, up to affinity, this $\mathbf{K}_{\nu_p}$ is a *NST* cumulant function as given in (2.3) with $t = 1$ on its corresponding canonical domain in (3.4) for all $p \in (1,2)\cup(2,\infty)$. The proof of Theorem 2.4.1 is therefore completed by use of the analytical property of $\mathbf{K}_{\nu_p}$. □

Chapitre 3

Characterization and classification of *MST* models

Sommaire

3.1 Résumé en français 63
3.2 Introduction 64
3.3 *MST* models and the determinant of Hessian cumulant function 65
3.4 Characterization of *MST* by variance functions 69
3.5 Proof of Theorem 3.4.1 70
3.6 Summary and remarks 79

3.1 Résumé en français

Les modèles multivarés stables-Teedie multiples sont introduits par Boubacar Maïnassara & Kokonendji (2014) comme extention des modèles *NST*. Pour $k \in \{2, 3 \ldots\}$ fixé et $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, les modèles *MST* sont composés de mélange d'une variable stable-Teedie $\mathbf{X}_i$ positive fixée et de $k-1$ variables $(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_k)^\top$ indépendantes conditionnées par la première fixée de mêmes paramètres de dispersion égales à la première variable fixée.

Pour $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ et $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ avec $p_1 \geqslant 1$ et $p_j \in \{0\} \cup [1, \infty)$ pour tout $j \in \{2, \ldots, k\}$ tel que $p_j = (\alpha_j - 2)/(\alpha_j - 1) = p_j(\alpha_j)$ équivalent à $\alpha_j = (p_j - 2)/(p_j - 1) = \alpha_j(p_j)$, les modèles *MST* sont générés par les mesures σ-finies $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}$ sur $\mathbb{R}^k$, avec $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\alpha}) = (p_1, \ldots, p_k)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ et $t > 0$ comme suivent :

$$\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}(d\mathbf{x}) = \boldsymbol{\nu}_{p_1 \ldots, p_k, t}(d\mathbf{x}) = \mu_{p_1,t}(dx_1) \prod_{j=2}^{k} \mu_{p_j, x_1}(dx_j),$$

où X_1 est une variable stable-Tweedie de distribution $\mu_{\mathbf{p},t}$ et $X_2, \ldots, X_k$ sachant $X_1 = x_1$ sont $k-1$ variables Tweedie indépendantes générées par μ_{p_j, x_1}

de mêmes paramètres de dispersion $t = x_1$. La fonction cumulante est explicitement donnée par

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}}(\boldsymbol{\theta}) = tK_{\mu_{p_1}}\left(\theta_1 + \sum_{j=2}^{k} K_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right),$$

for all $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^\top$ dans le domaine canonique

$$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}) = \left\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R} \times \Theta\left(\mu_{p_2}\right) \times \ldots \times \Theta\left(\mu_{p_k}\right); \left(\theta_1 + \sum_{j=2}^{k} K_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right) \in \Theta\left(\mu_{p_1}\right)\right\},$$

avec $\Theta\left(\mu_{p_1}\right)$ donné en Definition 1.5.1.

La fonction variance et fonction variance généralisée correspondantes sont respectivement,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}(\mathbf{m}) = t^{1-p_1} m_1^{p_1-2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{Diag}_k(0, m_1^{1-p_2} m_2^{p_2}, \ldots, m_1^{1-p_k} m_k^{p_k}), \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}},$$

et

$$\det \mathbf{V}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}(\mathbf{m}) = t^{1-p_1} m_1^{k-1+p_1-p_2-\cdots-p_k} \prod_{j=2}^{k} m_j^{p_j},$$

où $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}} = (0, \infty) \times M_{p_2,t} \times \ldots \times M_{p_k,t}$ représente le domaine des moyens.

La caractérisation par fonction variance des modèles multivariés *MST* est similaire à celle établie au cas *NST*. La seule différence se situe au niveau de paramètre de puissance variance $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ à composantes multiples avec $p_1 \geq 1$. Cette caractérisation a conduit à une nouvelle classification des modèles *MST*, laquelle rend la famille beaucoup plus compréhensible et donc facilement exploitable. Ainsi, selon les valeurs de la composante $p_1 \geq 1$ du paramètre de puissance variance nous avons résumé en quatre sous-classes les modèles *MST* : Le Poisson-*MST* ($p_1 = 1$), gamma-*MST* ($p_1 = 2$), Poisson composé-*MST* ($1 < p < 2$) avec un cas particulier de gamma-non-central-*MST* ($p_1 = 3/2$) et enfin, le positive-stable-*MST* ($p_1 > 2$) avec un cas particulier de gaussienne inverse-*MST* ($p_1 = 3$).

3.2 Introduction

Extending normal stable Tweedie (*NST*), multiple stable Tweedie (*MST*) models are recently introduced as huge class of multivariate distributions. They are composed by a fixed univariate stable Tweedie variable having a positive domain, and the remaining random variables given the fixed one are real independent stable Tweedie variables, possibly different, with the same dispersion parameter equal to the fixed component.

Within the framework of exponential dispersion models, the characterization of *MST* models through their variance functions is completely proven

under steepness property. A new classification is therefore deduced such as Poisson-*MST*, gamma-*MST*, noncentral-gamma-*MST* and inverse-Gaussian-*MST* families, for which each one of them contains one element of normal stable Tweedie models namely normal-Poisson, normal-gamma or gamma-Gaussian, normal-noncentral-gamma and normal-inverse-Gaussian distributions, respectively.

The dsecription of *MST* models by Boubacar Maïnassara and Kokonendji (2014) as extension of (*NST*) models is gven by their generalized variance functions $\det \mathbf{V}(\mathbf{m})$, of the form

$$\det \mathbf{V}(\mathbf{m}) = m_1^{q_1} m_2^{q_2} \dots m_\ell^{q_\ell}, \tag{3.1}$$

for all mean vector $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)^\top \in \mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^k$, for given $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$ and $q_s \in \mathbb{R}$, for $s \in \{1, \dots, \ell\}$. Note that $\ell = 0$ in (3.1) is for the k-dimensional Gaussian model with $\det \mathbf{V}(\mathbf{m}) = 1$, and $\ell = 1$ in (3.1) is for *NST* models with $\det \mathbf{V}(\mathbf{m}) = m_1^{q_1}$. We can refer to Cuenin et al. (2016b) for a recent description of *MST* with simulation studies of the generalized variance estimator of (3.1). See also Louati et al. (2016) for the same version of *NST* under the domination of "multivariate normal α-stable exponential families, without extensions to MST and their generalized variance function (3.1).

Concernig this paper we completely characterize all *MST* through their variance functions (3.5) but not that of generalized variance functions in (3.1) which is tedious taste. Note already that the characterization of the *NST* models by variance functions is solidly shown in Kokonendji et al. (2015) and this is, in fact, a very small sub-classes in the huge classes of *MST*. Remember that univarite (stable) Tweedie models (Definition 1.5.1) are used to build many new classes of models and properties ; see e.g. Jørgensen & Kokonendji (2015), Kendal (2014) and Kokonendji et al. (2004).

In this paper we characterize the *MST* models through their variance functions. For this, Section 3.3 presents the description of *MST* models which are composed by a fixed univariate stable Tweedie variable having a positive value domain, and the remaining random variables given the fixed one are also real independent Tweedie variables, possibly different, with the same dispersion parameter equal to the fixed component. Section 3.4 and 3.5 are devoted to the theorem of characterization of *MST* models by variance functions and its proof, respectively. Summarize and final remarks are made in Section 3.6 introducing a new classification of *MST* models.

3.3 *MST* models and the determinant of Hessian cumulant function

Let $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$ and $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ with $p_1 \geqslant 1$ and $p_j \in \{0\} \cup [1, \infty)$ for all $j \in \{2, \dots, k\}$ such that $p_j = (\alpha_j - 2)/(\alpha_j - 1) = p_j(\alpha_j)$ equivalent to $\alpha_j = (p_j - 2)/(p_j - 1) = \alpha_j(p_j)$. Now, according to Boubacar Maïnassara and Kokonendji

(2014) and given a random vector $(X_1,\ldots,X_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, from Definition 1.5.1 the *MST* models are generated by σ-finite measures $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}$ on $\mathbb{R}^k$, with $\mathbf{p}=\mathbf{p}(\boldsymbol{\alpha})=(p_1,\ldots,p_k)$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ and $t>0$ as follows :

$$\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}(d\mathbf{x})=\boldsymbol{\nu}_{p_1\ldots,p_k,t}(d\mathbf{x})=\mu_{p_1,t}(dx_1)\prod_{j=2}^{k}\mu_{p_j,x_1}(dx_j), \tag{3.2}$$

where X_1 is a positive univariate stable Tweedie distribution $\mu_{p_1,t}$ and $X_2,\ldots,X_k$ given $X_1=x_1$ are $k-1$ real independent Tweedie variables generated by μ_{p_j,x_1} with the same dispersion parameter $t=x_1$ for all $j\in\{2,\ldots,k\}$. The cumulant function $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}}(\boldsymbol{\theta})=\log\int_{\mathbb{R}^k}\exp(\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}\rangle)\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}(d\mathbf{x})$ is explicitly

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}}(\boldsymbol{\theta})=tK_{\mu_{p_1}}\left(\theta_1+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right), \tag{3.3}$$

for all $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_k)^\top$ in the canonical domain

$$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t})=\left\{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}\times\Theta\left(\mu_{p_2}\right)\times\ldots\times\Theta\left(\mu_{p_k}\right);\left(\theta_1+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right)\in\Theta\left(\mu_{p_1}\right)\right\}, \tag{3.4}$$

with $\Theta\left(\mu_{p_1}\right)$ given in Definition 1.5.1.

For $t>0$ and fixed $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_k)$ with $p_1\geqslant 1$ and $p_j\in\{0\}\cup[1,\infty)$, the multivariate NEF generated by $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}$ of (3.2) is the set $\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}=\left\{\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{p},t);\ \boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t})\right\}$ of probability distributions

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{p},t)(d\mathbf{x})=\exp\left[\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{x}\rangle-\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}}(\boldsymbol{\theta})\right]\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}(d\mathbf{x}).$$

Therefore, the variance functions of $\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}=\mathbf{G}(\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t})$ generated by $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}$ is

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}(\mathbf{m})=t^{1-p_1}m_1^{p_1-2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\mathbf{Diag}_k\left(0,m_1^{1-p_2}m_2^{p_2},\ldots,m_1^{1-p_k}m_k^{p_k}\right), \tag{3.5}$$

for all $\mathbf{m}\in\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}=(0,\infty)\times\overset{k}{\underset{j=2}{\times}}M_{p_j,t}$, where $M_{p_j,t}$ is the mean domain of univariate stable-Tweedie distributions. The generalized variance functions is given by following theorem.

Theorem 3.3.1 *The corresponding generalized variance function of (3.5) is given by,*

$$\det\mathbf{V}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}(\mathbf{m})=t^{1-p_1}m_1^{k-1+p_1-p_2-\cdots-p_k}\prod_{j=2}^{k}m_j^{p_j}, \tag{3.6}$$

for all $\mathbf{m}\in\mathbf{M}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}$ *above.*

According to p_j values for each $j \in \{2,\ldots,k\}$, the term $\mathbf{D}_k(\ldots)$ of (3.5) occurs in several ways. e.g. : up to permutation for fixed $\ell \in \{2,\ldots,k\}$, number of non-Gaussian components, (3.5) can write,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}(\mathbf{m}) = t^{1-p_1} m_1^{p_1-2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \mathbf{Diag}_k(0, m_1^{1-p_2}m_2^{p_2},\ldots,m_1^{1-p_\ell}m_\ell^{p_\ell}, m_1,\ldots,m_1),$$

for all $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}} = (0,\infty) \overset{\ell}{\underset{j=2}{\times}} M_{p_j,t} \times \mathbb{R}^{k-\ell}$. In this cas, the generalized variance function is,

$$\det \mathbf{V}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}(\mathbf{m}) = t^{1-p_1} m_1^{k-1+p_1-p_2-\cdots-p_\ell} \prod_{j=2}^{k} m_j^{p_j},$$

for all $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}$ above, to compare with (4.1) for $t=1$, $\ell = k$, $q_1 = k-1+p_1-p_2-\cdots-p_k$ and $q_s = p_s$ for $s = 2,\ldots,k$.

Proof of Theorem 3.3.1 : Set $\lambda = t^{1-p_1}m_1^{p_1}$, $\mathbf{a} = t^{1-p_1}m_1^{p_1-2}(m_2,\ldots,m_k)^\top$ and

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= t^{1-p_1}m_1^{p_1-2}(m_2,\ldots,m_k)\otimes(m_2,\ldots,m_k) + \mathbf{Diag}_{k-1}(m_1^{1-p_2}m_2^{p_2},\ldots,m_1^{1-p_k}m_k^{p_k})\\ &= \lambda^{-1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} + \mathbf{Diag}_{k-1}(m_1^{1-p_2}m_2^{p_2},\ldots,m_1^{1-p_k}m_k^{p_k}),\end{aligned}$$

then $\mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} = \mathbf{Diag}_{k-1}(m_1^{1-p_2}m_2^{p_2},\ldots,m_1^{1-p_k}m_k^{p_k})$ et $\det(\mathbf{A}-\lambda^{-1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}) = \det \mathbf{Diag}_{k-1}(m_1^{1-p_2}m_2^{p_2},\ldots,m_1^{1-p_k}m_k^{p_k}) = m_1^{k-1-p_2-p_3-\cdots-p_k}\prod_{j=2}^k m_j^{p_j}$.
Applying Lemma 2.3.1 with $\mathbf{L} = \mathbf{V}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}(\mathbf{m})$, one obtains

$$\det \mathbf{V}_{\mathbf{G}_{\mathbf{p},t}}(\mathbf{m}) = \lambda \det(\mathbf{A}-\lambda^{-1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}) = t^{1-p_1}m_1^{k-1+p_1-p_2-p_3-\cdots-p_k}\prod_{j=2}^{k} m_j^{p_j},$$

The proof of Theorem 3.3.1 is now complete. □

The following Tables 3.3.1, 3.3.2 and 3.3.3 summarize the *MST* models with different values of power variance parameter $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_k)$.

TABLE 3.3.1 – Summary of some sub-classes of *MST* models for $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_2)$ with $p_1 \geqslant 1$, mean domain $\mathbf{M}_{\mathbf{G_p}}$ and support $\mathbf{S_p}$ of distributions. S_{p_1} mentioned below represents the support (1.8) of Tweedie law with parameter p_1.

Type(s)	p_2	$\mathbf{M}_{\mathbf{G_p}}$	$\mathbf{S_p}$
Normal stable Tweedie (NST)	$p_2 = 0$	$(0,\infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$	$S_{p_1} \times \mathbb{R}^{k-1}$
Poisson stable Tweedie	$p_2 = 1$	$(0,\infty)^k$	$S_{p_1} \times \mathbb{N}^{k-1}$
Compound Poisson stable Tweedie	$1 < p_2 < 2$	$(0,\infty)^k$	$S_{p_1} \times [0,\infty)^{k-1}$
Non-central gamma stable Tweedie	$p_2 = 3/2$	$(0,\infty)^k$	$S_{p_1} \times [0,\infty)^{k-1}$
Gamma stable Tweedie	$p_2 = 2$	$(0,\infty)^k$	$S_{p_1} \times (0,\infty)^{k-1}$
Positive stable Tweedie	$p_2 > 2$	$(0,\infty)^k$	$S_{p_1} \times (0,\infty)^{k-1}$
Inverse Gausian stable Tweedie	$p_2 = 3$	$(0,\infty)^k$	$S_{p_1} \times (0,\infty)^{k-1}$

TABLE 3.3.2 – Summary of all elements of gamma stable Tweedie model for $\mathbf{p} = (p_1, 2, \ldots, 2)$ with $p_1 \geqslant 1$, mean domain $\mathbf{M}_{\mathbf{G_p}} = (0,\infty)^k$ and support $\mathbf{S_p} = (0,\infty)^k$ of distributions.

Type(s)	p_1
Gamma Poisson	$p_1 = 1$
Gamma compound Poisson	$1 < p_1 < 2$
Gamma non-central gamma	$p_1 = 3/2$
Multiple gamma	$p_1 = 2$
Gamma positive stable	$p_1 > 2$
Gamma inverse Gausian	$p_1 = 3$

TABLE 3.3.3 – Summary of some particular elements of *MST* models for $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_1)$ with $p_1 \geqslant 1$, mean domain $\mathbf{M}_{\mathbf{G_p}} = (0, \infty)^k$ and support $\mathbf{S_p}$ of distributions.

Type(s)	p_1	$\mathbf{S}_p$
Multiple Poisson	$p_1 = 1$	$\mathbb{N}^k$
Multiple compound Poisson	$1 < p_1 < 2$	$[0, \infty)^k$
Multiple non-central gamma	$p_1 = 3/2$	$[0, \infty)^k$
Multiple gamma	$p_1 = 2$	$(0, \infty)^k$
Multiple positive stable	$p_1 > 2$	$(0, \infty)^k$
Multiple inverse Gaussian	$p_1 = 3$	$(0, \infty)^k$

3.4 Characterization of *MST* by variance functions

We now come to the main result. Namely, we want to prove that, given a variance function defined in (3.5) with fixed $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ where $p_1 \geqslant 1$, the corresponding *NEF* is one of the *MST* models generated by $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}$ of (3.2). The result of characterization with $t = 1$ can be stated as below.

Theorem 3.4.1 *Let $k \in \{2, 3, \ldots\}$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ with $p_1 \geqslant 1$ and $p_j \in \{0\} \cup [1, \infty)$ for $j \in \{2, 3, \ldots, k\}$. Then the variance functions defined by*

$$\mathbf{V_p}(\mathbf{m}) = m_1^{p_1-2}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{Diag}_k\left(0, m_1^{1-p_2}m_2^{p_2}, \ldots, m_1^{1-p_k}m_z^{p_k}\right), \tag{3.7}$$

for all $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)^\top \in \mathbf{M_p} = (0, \infty) \overset{k}{\underset{j=2}{\times}} M_{p_j,t}$, characterizes up to affinity the MST models generated by $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}$ of (3.2) with $t = 1$ and M_{p_j} denotes the mean domain of stable-Tweedie distributions.

The general result from (3.5) for $t > 0$ is deduced from Part (iii) of Proposition 1.4.1 below which contains classical operations on NEFs and their variance functions.

The cases $p_1 = 0$ and $p_j \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ are excluded for all $j \in \{1, \ldots, k\}$ in this section. Which is a direct consequence of the following proposition.

Proposition 3.4.1 *(i) The are no exponential dispersion models with mean domain $M = (0, \infty)$ and unit variance function $V(m) \sim m^p$ as $m \to 0$ for $p \in (0, 1)$ (see [35], **Lemma 7**).*

(ii) $p_1 = 0$ *corresponds to the observed values in* $\mathbb{R}$ *(possible negative or null) which is not possible for a variance of another univariate stable Tweedie distributions (3.2).*

(iii) $p_j < 0$ *are linked to the extreme Tweedie models, not steep and therefore similar argument of* $p_1 = 0$ *holds too.*

3.5 Proof of Theorem 3.4.1

We show that (3.7) corresponds to *MST* variance function of families generated by (3.2) with $t = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ The aim is to show that for fixed $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$, $p_1 \geqslant 1$ and $p_j \in \{0\} \cup [1, \infty)$ for $j \in \{2, \ldots k\}$, the variance function of the NEF $\mathbf{G}_{\mathbf{p},t} = \mathbf{G}\left(\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}\right)$ generated by $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{p},t}$ of (3.2) with $t = 1$ is that in relation (3.7). The proof is done in the same manner as in the case of NST models (see Theorem 3.1 of Boubacar Maïnassara & Kokonendji, 2014) which we summarize as follows. From (1.3.1) and (3.3) we here have $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta}) =: K_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta}))$ with $g(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1 + \sum_{j=2}^{k} K_{\mu_{p_j}}(\theta_j)$ and $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}_\mathbf{p})$ of (3.4). Therefore, $\mathbf{K}'_{\boldsymbol{\nu}_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta}) = K'_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta})) \times g'(\boldsymbol{\theta})$, and

$$\mathbf{K}''_{\boldsymbol{\nu}_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta}) = K''_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta})) \times g'(\boldsymbol{\theta}) \otimes g'(\boldsymbol{\theta}) + K'_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta})) \times g''(\boldsymbol{\theta}), \tag{3.8}$$

with $g'(\boldsymbol{\theta}) = \left(1, K'_{\mu_{p_2}}(\theta_2), \ldots, K'_{\mu_{p_k}}(\theta_k)\right)^\top$ and $g''(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Diag}_k\left(0, K''_{\mu_{p_2}}(\theta_2), \ldots, K''_{\mu_{p_k}}(\theta_k)\right)$. Since

$$\mathbf{m} =: \mathbf{K}'_{\boldsymbol{\nu}_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta}) = K'_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta})) \times g'(\boldsymbol{\theta}) = K'_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta}))\left(1, K'_{\mu_{p_2}}(\theta_2), \ldots, K'_{\mu_{p_k}}(\theta_k)\right)^\top,$$

using (3.4) we deduce the mean domain $\mathbf{M}_\mathbf{p} = \mathbf{K}'_{\boldsymbol{\nu}_\mathbf{p}}\left(\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\nu}_\mathbf{p})\right) = (0, \infty) \times K'_{\mu_{p_2}}\left(\Theta_{\mu_{p_2}}\right) \times K'_{\mu_{p_3}}\left(\Theta_{\mu_{p_3}}\right) \times \cdots \times K'_{\mu_{p_k}}\left(\Theta_{\mu_{p_k}}\right) = (0, \infty) \times \mathrm{M}_{p_2} \times \mathrm{M}_{p_3} \times \cdots \times \mathrm{M}_{p_k}$. Letting $K'_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta})) = m_1$ and $K'_{\mu_{p_j}}(\theta_j) = m_j/m_1$ for $j \in \{2, \ldots, k\}$, one gets $g'(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) = (1, m_2/m_1, \ldots, m_k/m_1)^\top$. To determine $K''_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta}))$ and $K''_{\mu_{p_j}}\left(\theta_j\right)$ one has, from Definition 1.5.1, $K'_{\mu_{p_j}}(\theta_j) = -(p_j - 1)\left[-(p_j - 1)\theta_j\right]^{1/(1-p_j)}$ which leads to

$$K''_{\mu_{p_j}}(\theta_j) = K'_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \times \left[-(p_j - 1)\theta_j\right]^{-1} = \left[K'_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right]^{p_j};$$

therefore, $K''_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta})) = \left[K'_{\mu_{p_1}}(g(\boldsymbol{\theta}))\right]^{p_1} = m_1^{p_1}$ and $K''_{\mu_{p_j}}(\theta_j) = \left[K'_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right]^{p_j} = \left(m_j/m_1\right)^{p_j}$ for $j \in \{2, \ldots, k\}$. From (3.8) with $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})$ one obtains

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_\mathbf{p}(\mathbf{m}) &= m_1^{p_1} \times g'(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) \otimes g'(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) + m_1 \times g''(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) \\
&= m_1^{p_1} \times \frac{1}{m_1^2}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + m_1 \mathbf{Diag}_k\left(0, m_1^{-p_2} m_2^{p_2}, \ldots, m_1^{-p_k} m_k^{p_k}\right),
\end{aligned}$$

which is (3.4.1) and that concludes the implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Conversely, under the assumption of *steepness*, we show that, given the variance function (3.7) with fixed $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ where $p_1 \geqslant 1$ and for $j \in \{2, \ldots, k\}, p_j \in \{0\} \cup [1, \infty)$; and the mean domain $\mathbf{M_p} = (0, \infty) \times M_{p_2} \times \ldots \times M_{p_k}$ then, up to affinity, the corresponding cumulant function is that introduced in (3.3) with $t = 1$. For consistency problems of means domain, support of distributions or cumulant functions, different cases following the values of $\mathbf{p}$ will be distinguished up to permutation as below :

$$p_1 \geqslant 1, \begin{cases} p_j = 0 \quad \text{for} \quad j \in \{2, \ldots, w\}, \quad M_{p_j} = \mathbb{R} \\ p_j \geqslant 1 \quad \text{for} \quad j \in \{w+1, \ldots, k\}, \quad M_{p_j} = (0, \infty) \end{cases} \text{, with } 1 \leq w \leq k. \tag{3.9}$$

Note that if $w = k$ in (3.9) then one has NST models and the proof is already given by Kokonendji et al. (2015) and we here omit it. Also if $w = 1$ in (3.9), means no Gaussian component in these *MST* models.

Also, for some values of p_j for each $j \in \{1, \ldots, k\}$, *MST* laws differ more or less from their mathematical expressions, or from their distribution supports. Thus, up to permutation, we detail (3.9) without $w = k$ as follows :

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & p_1 = 1 \\ (ii) & p_1 = 2 \\ (iii) & p_1 \in (1, 2) \\ (iv) & p_1 \in (2, \infty) \end{array}\right\}, \begin{cases} p_j = 0 & \text{for} \quad j \in \{2, \ldots, w\} \ (k > w \geqslant 1) \\ p_j = 1 & \text{for} \quad j \in \{w+1, \ldots, \ell\} \ (\ell \geqslant w) \\ p_j = 2 & \text{for} \quad j \in \{\ell+1, \ldots, r\} \ (r \geqslant \ell) \\ p_j \in (1, 2) & \text{for} \quad j \in \{r+1, \ldots, s\} \ (s \geqslant r) \\ p_j \in (2, \infty) & \text{for} \quad j \in \{s+1, \ldots, k\} \ (k \geqslant s). \end{cases} \tag{3.10}$$

Note that for all limit cases ($w = 1$, $\ell = w$, $r = \ell$, $s = r$ and $k = s$) in (3.10) their corresponding components (normal, Poisson, gamma, compound Poisson and positive stable, respectively) do not exist in these *MST* models. From now, we first prove (*iv*), followed by (*iii*) and finally (*ii*) and (*i*).

$\boxed{(iv)}$ For fixed $\mathbf{p} = (p_1, p_2 \ldots, p_k)$ such that $p_1 \in (2, \infty)$, $p_j = 0$ for $j \in \{2, \ldots, w\}$ $(k > w \geqslant 1)$, $p_j = 1$ for $j \in \{w+1, \ldots, \ell\}$ $(\ell \geqslant w)$, $p_j = 2$ for $j \in \{\ell+1, \ldots, r\}$ $(r \geqslant \ell)$, $p_j \in (1, 2)$ for $j \in \{r+1, \ldots, s\}$ $(s \geqslant r)$ and $p_j \in (2, \infty)$ for $j \in \{s+1, \ldots, k\}$ $(k \geqslant s)$, the variance function in (3.7) is written

$$\begin{aligned} \mathbf{V_p}(\mathbf{m}) = \frac{1}{m_1^{2-p_1}} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \quad + \quad \mathbf{Diag}_k \Big(& 0, m_1, \ldots, m_1, m_{w+1}, \ldots, m_\ell, \frac{m_{\ell+1}^2}{m_1}, \ldots, \frac{m_r^2}{m_1}, \frac{m_{r+1}^{p_{r+1}}}{m_1^{p_{r+1}-1}}, \\ & \ldots, \frac{m_s^{p_s}}{m_1^{p_s-1}}, \frac{m_{s+1}^{p_{s+1}}}{m_1^{p_{s+1}-1}}, \ldots, \frac{m_k^{p_k}}{m_1^{p_k-1}} \Big), \end{aligned} \tag{3.11}$$

for all $\mathbf{m} \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^{w-1} \times (0, \infty)^{k-w}$. Since $m_1 > 0$ and $p_1 > 2$, to apply Lemma

2.4.2 with $\mathbf{L} = [\mathbf{V}_p(\mathbf{m})]$ of (3.11), one sets : $\lambda = m_1^{p_1}$, $\mathbf{a}^\top = m_1^{p_1-1}(m_2, ..., m_k)$ and

$$\mathbf{A} = m_1^{p_1-2}(m_2,\dots,m_k)\otimes(m_2,\dots,m_k) + \mathbf{Diag}_{k-1}\Big(m_1,\dots,m_1,m_{w+1},\dots,m_\ell,\frac{m_{\ell+1}^2}{m_1},\dots,\frac{m_r^2}{m_1},\frac{m_{r+1}^{p_{r+1}}}{m_1^{p_{r+1}-1}},\dots,\frac{m_s^{p_s}}{m_1^{p_s-1}},\frac{m_{s+1}^{p_{s+1}}}{m_1^{p_{s+1}-1}},\dots,\frac{m_k^{p_k}}{m_1^{p_k-1}}\Big).$$

Then,

$$\mathbf{S} = \mathbf{Diag}_{k-1}\Big(m_1,\dots,m_1,m_{w+1},\dots,m_\ell,\frac{m_{\ell+1}^2}{m_1},\dots,\frac{m_r^2}{m_1},\frac{m_{r+1}^{p_{r+1}}}{m_1^{p_{r+1}-1}},\dots,\frac{m_s^{p_s}}{m_1^{p_s-1}},\frac{m_{s+1}^{p_{s+1}}}{m_1^{p_{s+1}-1}},\dots,\frac{m_k^{p_k}}{m_1^{p_k-1}}\Big), \tag{3.12}$$

where $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$,

$$\lambda^{-1}+\lambda^{-2}\mathbf{a}^\top\mathbf{S}^{-1}\mathbf{a} = \frac{1}{m_1^{p_1}}+\frac{1}{m_1^2}\left(\sum_{j=2}^{w}\frac{m_j^2}{m_1}+\sum_{j=w+1}^{\ell}m_j+\sum_{j=\ell+1}^{r}m_1+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{m_1^{p_j-1}}{m_j^{p_j-2}}+\sum_{j=s+1}^{k}\frac{m_1^{p_j-1}}{m_j^{p_j-2}}\right),$$

$-\lambda^{-1}\mathbf{a}^\top\mathbf{S}^{-1} = -(1/m_1)\mathbf{b}^\top$ and $-\lambda^{-1}\mathbf{a}\mathbf{S}^{-1} = -(1/m_1)\mathbf{b}$, where

$$\mathbf{b}^\top = \left(\frac{m_2}{m_1},\dots,\frac{m_w}{m_1},1,\dots,1,\frac{m_1}{m_{\ell+1}},\dots,\frac{m_1}{m_r},\frac{m_1^{p_{r+1}-1}}{m_{r+1}^{p_{r+1}-1}},\dots,\frac{m_1^{p_s-1}}{m_s^{p_s-1}},\frac{m_1^{p_{s+1}-1}}{m_{s+1}^{p_{s+1}-1}},\dots,\frac{m_1^{p_k-1}}{m_k^{p_k-1}}\right).$$

Thus, the inverse of variance-covariance matrix of (3.11) can be written as

$$\left[\mathbf{V_p}(\mathbf{m})\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1^{p_1}}+\frac{1}{m_1^2}\left(\sum_{j=2}^{w}\frac{m_j^2}{m_1}+\sum_{j=w+1}^{\ell}m_j+\sum_{j=\ell+1}^{r}m_1+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{m_1^{p_j-1}}{m_j^{p_j-2}}+\sum_{j=s+1}^{k}\frac{m_1^{p_j-1}}{m_j^{p_j-2}}\right) & \frac{-1}{m_1}\mathbf{b}^\top \\ \frac{-1}{m_1}\mathbf{b} & \mathbf{S}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

with zero sum limits for $w = 1$, $\ell = w$, $r = \ell$, $s = r$ and $k = s$, respectively, and $\mathbf{S}^{-1}$ is the inverse matrix of $\mathbf{S}$ in (3.12) . Since $\mathbf{m} = \mathbf{K}'_{\nu_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta})$ and $\mathbf{V_p}(\mathbf{m}) = \mathbf{K}''_{\nu_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta})$, then by writing $\boldsymbol{\theta}$ in terms of $\mathbf{m}$ one obtains $\mathbf{V_p}(\mathbf{m}) = [\boldsymbol{\theta}'(\mathbf{m})]^{-1}$ which implies

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}) = \int [\mathbf{V_p}(\mathbf{m})]^{-1} d\mathbf{m}.$$

For $\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta} := \boldsymbol{\theta}(\mathbf{M_p})$ with $\mathbf{M_p} = (0,\infty)\times\mathbb{R}^{w-1}\times(0,\infty)^{k-w}$, there exist an analytic function $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ such that, for all $\mathbf{m}\in\mathbf{M_p}$

$$\boldsymbol{\theta}'(\mathbf{m}) = \left(\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_i\partial m_j}\right)_{i,j=1,2,\dots,k}. \tag{3.14}$$

Using (3.14) into (3.13) for getting the first informations on the stable Tweedie component, we have

$$\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_1^2} = \frac{1}{m_1^{p_1}}+\frac{1}{m_1^2}\left(\sum_{j=2}^{w}\frac{m_j^2}{m_1}+\sum_{j=w+1}^{\ell}m_j+\sum_{j=\ell+1}^{r}m_1+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{m_1^{p_j-1}}{m_j^{p_j-2}}+\sum_{j=s+1}^{k}\frac{m_1^{p_j-1}}{m_j^{p_j-2}},\right)$$

and then

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_1} = \frac{1}{(1-p_1)m_1^{p_1-1}} - \frac{1}{2m_1^2}\sum_{j=2}^{w} m_j^2 - \frac{1}{m_1}\sum_{j=w+1}^{\ell} m_j + \sum_{j=\ell+1}^{r}\log(m_1) + \sum_{j=r+1}^{s}\frac{m_1^{p_j-2}}{(p_j-2)m_j^{p_j-2}} + \sum_{j=s+1}^{k}\frac{m_1^{p_j-2}}{(p_j-2)m_j^{p_j-2}} + \psi(m_2,\ldots,m_k) \quad (3.15)$$

where $\psi : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$ is a analytic function to be determined. Note that since $m_1 > 0, p_1 > 2$ and $m_j > 0, p_j \in (1,2)\cup(2,\infty)$ for all $j \in \{r+1,\ldots,k\}$ then (3.15) is well defined. Derivative of (3.15) with respect to m_j gives

$$\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_j \partial m_1} = \begin{cases} -\dfrac{m_j}{m_1^2} + \dfrac{\partial\psi(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{2,\ldots,w\} \\ -\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{\partial\psi(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{w+1,\ldots,\ell\} \\ 0 + \dfrac{\partial\psi(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{\ell+1,\ldots,r\} \\ -\dfrac{m_1^{p_j-2}}{m_j^{p_j-1}} + \dfrac{\partial\psi(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{r+1,\ldots,s\} \\ -\dfrac{m_1^{p_j-2}}{m_j^{p_j-1}} + \dfrac{\partial\psi(m_2,\ldots,m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{s+1,\ldots,k\}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Expression (3.16) is equal to the $(1,j)$th element of $[\mathbf{V}_p(\mathbf{m})]^{-1}$ in (3.13), therefore, $\partial\psi(m_2,\ldots,m_k)/\partial m_j = 0$, for all $j \in \{2,\ldots,\ell\}\cup\{r+1,\ldots,k\}$ and $\partial\psi(m_2,\ldots,m_k)/\partial m_j = -1/m_j$, with $m_j > 0$ for all $j \in \{\ell+1,\ldots,r\}$ implies ψ is a real constant in $m_2,\ldots,m_\ell,m_{r+1},\ldots,m_k$. Thus $\psi(m_2,\ldots,m_k) = -\sum_{j=\ell+1}^{r}\log(m_j) + a_1$, and (3.15) becomes

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_1} = \frac{1}{(1-p_1)m_1^{p_1-1}} - \frac{1}{2m_1^2}\sum_{j=2}^{w} m_j^2 - \frac{1}{m_1}\sum_{j=w+1}^{\ell} m_j + \sum_{j=\ell+1}^{r}\log\left(\frac{m_1}{m_j}\right) + \sum_{j=r+1}^{s}\frac{m_1^{p_j-2}}{(p_j-2)m_j^{p_j-2}} + \sum_{j=s+1}^{k}\frac{m_1^{p_j-2}}{(p_j-2)m_j^{p_j-2}} + a_1, \quad (3.17)$$

and, by integration with respect to m_1, one gets

$$\varphi(\mathbf{m}) = \frac{1}{(1-p_1)(1-p_2)m_1^{p_1-2}} + \frac{1}{2m_1}\sum_{j=2}^{w} m_j^2 - \log(m_1)\sum_{j=w+1}^{\ell} m_j + \sum_{j=\ell+1}^{r} m_1\left(\log\left(\frac{m_1}{m_j}\right)-1\right) + \sum_{j=r+1}^{s}\frac{m_1^{p_j-1}}{(p_j-1)(p_j-2)m_j^{p_j-2}} + \sum_{j=s+1}^{k}\frac{m_1^{p_j-1}}{(p_j-1)(p_j-2)m_j^{p_j-2}} + a_1 m_1 + \zeta(m_2,\ldots,m_k), \quad (3.18)$$

where $\zeta : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$ is an analytic function to be determined. From now on, complete informations of the model begin to show itself. The two first derivatives of (3.18) with respect to m_j give, respectively,

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{m})}{\partial m_j} = \begin{cases} \dfrac{m_j}{m_1} + \dfrac{\partial \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{2, \ldots, w\} \\ -\log(m_1) + \dfrac{\partial \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{w+1, \ldots, \ell\} \\ -\dfrac{m_1}{m_j} + \dfrac{\partial \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{\ell+1, \ldots, r\} \\ -\dfrac{m_1^{p_j-1}}{(p_j-1)m_j^{p_j-1}} + \dfrac{\partial \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{r+1, \ldots, s\} \\ -\dfrac{m_1^{p_j-1}}{(p_j-1)m_j^{p_j-1}} + \dfrac{\partial \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j} & \text{for} \quad j \in \{s+1, \ldots, k\}, \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{m})}{\partial m_j^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{\partial^2 \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j^2} & \text{for} \quad j \in \{2, \ldots, w\} \\ 0 + \dfrac{\partial^2 \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j^2} & \text{for} \quad j \in \{w+1, \ldots, \ell\} \\ \dfrac{m_1}{m_j^2} + \dfrac{\partial^2 \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j^2} & \text{for} \quad j \in \{\ell+1, \ldots, r\} \\ \dfrac{m_1^{p_j-1}}{m_j^{p_j}} + \dfrac{\partial^2 \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j^2} & \text{for} \quad j \in \{r+1, \ldots, s\} \\ \dfrac{m_1^{p_j-1}}{m_j^{p_j}} + \dfrac{\partial^2 \zeta(m_2, \ldots, m_k)}{\partial m_j^2} & \text{for} \quad j \in \{s+1, \ldots, k\}. \end{cases} \tag{3.20}$$

Expression (3.20) is equal to the diagonal (j, j)th element of $[\mathbf{V}_p(\mathbf{m})]^{-1}$ in (3.13) for all $j \in \{2, \ldots, k\}$. Consequently, $\partial^2 \zeta(m_2, \ldots, m_k)/\partial m_j^2 = 0$ for $j \in \{2, \ldots, w\} \cup \{\ell+1, \ldots, k\}$ and $\partial^2 \zeta(m_2, \ldots, m_k)/\partial m_j^2 = 1/m_j$ with $m_j > 0$ for $j \in \{w+1, \ldots, \ell\}$ implies $\partial \zeta(m_2, \ldots, m_k)/\partial m_j$ is a real constant in $m_2, \ldots, m_w, m_{\ell+1}, \ldots, m_k$ and $\partial \zeta(m_2, \ldots, m_k)/\partial m_j = \log(m_j) + a_j$ for $j \in \{w+1, \ldots, \ell\}$ with a_j a real constant.

Then equation (3.19) becomes

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_j} = \begin{cases} \dfrac{m_j}{m_1} + a_j & \text{for} \quad j \in \{2,\dots,w\} \\ \log\left(\dfrac{m_j}{m_1}\right) + a_j & \text{for} \quad j \in \{w+1,\dots,\ell\} \\ -\dfrac{m_1}{m_j} + a_j & \text{for} \quad j \in \{\ell+1,\dots,r\} \\ -\dfrac{m_1^{p_j-1}}{(p_j-1)m_j^{p_j-1}} + a_j & \text{for} \quad j \in \{r+1,\dots,s\} \\ -\dfrac{m_1^{p_j-1}}{(p_j-1)m_j^{p_j-1}} + a_j & \text{for} \quad j \in \{s+1,\dots,k\}. \end{cases} \tag{3.21}$$

Since $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}) = \left(\partial\varphi(\mathbf{m})/\partial m_j\right)_{j=1,2,\dots,k}$, using equations (3.17) and (3.21) one obtains

$$\begin{aligned} \theta_1 \;=\; & \frac{1}{(1-p_1)m_1^{p_1-1}} - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\left(\frac{m_j}{m_1}\right)^2 - \sum_{j=w+1}^{\ell}\frac{m_j}{m_1} + \sum_{j=\ell+1}^{r}\log\left(\frac{m_1}{m_j}\right) \\ & + \sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{p_j-2}\left(\frac{m_1}{m_j}\right)^{p_j-2} + \sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{p_j-2}\left(\frac{m_1}{m_j}\right)^{p_j-2} + a_1, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\theta_j - a_j = \begin{cases} \dfrac{m_j}{m_1} & \text{for} \quad j \in \{2,\dots,w\} \\ \log\left(\dfrac{m_j}{m_1}\right) & \text{for} \quad j \in \{w+1,\dots,\ell\} \\ -\dfrac{m_1}{m_j} & \text{for} \quad j \in \{\ell+1,\dots,r\} \\ -\dfrac{1}{p_j-1}\left(\dfrac{m_1}{m_j}\right)^{p_j-1} & \text{for} \quad j \in \{r+1,\dots,s\} \\ -\dfrac{1}{p_j-1}\left(\dfrac{m_1}{m_j}\right)^{p_j-1} & \text{for} \quad j \in \{s+1,\dots,k\}, \end{cases} \tag{3.23}$$

with $(\theta_j - a_j) < 0$ for $j \in \{\ell+1,\dots,k\}$ because $m_j > 0$ for $j \in \{w+1,\dots,k\}$ and $p_j \in (1,2)\cup(2,\infty)$ for $j \in \{r+1,\dots,k\}$. From (3.22) and (3.23) , one has :

$$\begin{aligned} \theta_1 \;=\; & \frac{1}{(1-p_1)m_1^{p_1-1}} - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\left(\theta_j - a_j\right)^2 - \sum_{j=w+1}^{\ell}\exp(\theta_j - a_j) + \sum_{j=\ell+1}^{r}\log\left(-(\theta_j - a_j)\right) \\ & + \sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{p_j-2}\left(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\right)^{\frac{p_j-2}{p_j-1}} + \sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{p_j-2}\left(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\right)^{\frac{p_j-2}{p_j-1}} + a_1 \end{aligned}$$

and the inverse,

$$\begin{aligned} m_1 &= \Big\{(1-p_1)\Big\{(\theta_1-a_1)+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\big(\theta_j-a_j\big)^2+\sum_{j=w+1}^{\ell}\exp(\theta_j-a_j)-\sum_{j=\ell+1}^{r}\log\big(-(\theta_j-a_j)\big) \\ &\quad -\sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{p_j-2}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{\frac{p_j-2}{p_j-1}}-\sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{p_j-2}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{\frac{p_j-2}{p_j-1}}\Big\}\Big\}^{\frac{1}{1-p_1}} \\ &= \left((1-p_1)\left((\theta_1-a_1)+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j-a_j)\right)\right)^{\frac{1}{1-p_1}}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

with $(1-p_1)\Big((\theta_1-a_1)+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j-a_j)\Big)<0$ since $m_1>0$, and

$$m_j=\begin{cases} m_1(\theta_j-a_j) & \text{for} \quad j\in\{2,\dots,w\} \\ m_1\exp(\theta_j-a_j) & \text{for} \quad j\in\{w+1,\dots,\ell\} \\ -m_1/(\theta_j-a_j) & \text{for} \quad j\in\{\ell+1,\dots,r\} \\ m_1/\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{\frac{1}{p_j-1}} & \text{for} \quad j\in\{r+1,\dots,s\} \\ m_1/\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{\frac{1}{p_j-1}} & \text{for} \quad j\in\{s+1,\dots,k\}, \end{cases} \tag{3.25}$$

Since $\mathbf{m}=\big(\partial\mathbf{K}_{\nu_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta})/\partial\theta_j\big)_{j=1,\dots,k}$ then using (3.24) one can write $\mathbf{K}_{\nu_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta})$ as follow :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\nu_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta}) &= \int\frac{\partial\mathbf{K}_{\nu_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1}d\theta_1 \\ &= \frac{1}{2-p_1}\Big\{(1-p_1)\Big\{(\theta_1-a_1)+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\big(\theta_j-a_j\big)^2+\sum_{j=w+1}^{\ell}\exp(\theta_j-a_j) \\ &\quad -\sum_{j=\ell+1}^{r}\log\big(-(\theta_j-a_j)\big)+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{2-p_j}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{\frac{p_j-2}{p_j-1}} \\ &\quad +\sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{2-p_j}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{\frac{p_j-2}{p_j-1}}\Big\}\Big\}^{1+\frac{1}{1-p_1}}+\phi(m_2,\dots,m_k), \end{aligned} \tag{3.26}$$

where $\phi:\mathbb{R}^{k-1}\to\mathbb{R}$ is an analytic function to be determined. Again, derivative of (3.26) with respect to θ_j gives

$$\frac{\partial\mathbf{K}_{\nu_\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j}=\begin{cases} m_1(\theta_j-a_j)+\dfrac{\partial\phi(m_2,\dots,m_k)}{\partial\theta_j} & \text{for} \quad j\in\{2,\dots,w\} \\ m_1\exp(\theta_j-a_j)+\dfrac{\partial\phi(m_2,\dots,m_k)}{\partial\theta_j} & \text{for} \quad j\in\{w+1,\dots,\ell\} \\ -m_1/(\theta_j-a_j)+\dfrac{\partial\phi(m_2,\dots,m_k)}{\partial\theta_j} & \text{for} \quad j\in\{\ell+1,\dots,r\} \\ m_1/\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{\frac{1}{p_j-1}}+\dfrac{\partial\phi(m_2,\dots,m_k)}{\partial\theta_j} & \text{for} \quad j\in\{r+1,\dots,s\} \\ m_1/\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{\frac{1}{p_j-1}}+\dfrac{\partial\phi(m_2,\dots,m_k)}{\partial\theta_j} & \text{for} \quad j\in\{s+1,\dots,k\}, \end{cases}$$

which is equal to (3.25); then, one gets $\partial\phi(m_2,\ldots,m_k)/\partial\theta_j = 0$ for all $j \in \{2,\ldots,k\}$ implying $\phi(m_2,\ldots,m_k) = b$ (a real constant). Finally, it ensues from it that we have

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\nu_{\mathbf{p}}}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2-p_1}\Bigg\{(1-p_1)\Big\{(\theta_1-a_1)+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\big(\theta_j-a_j\big)^2+\sum_{j=w+1}^{\ell}\exp(\theta_j-a_j)\\
&\quad-\sum_{j=\ell+1}^{r}\log\big(-(\theta_j-a_j)\big)+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{2-p_j}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{1+\frac{1}{1-p_j}}\\
&\quad+\sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{2-p_j}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j)\big)^{1+\frac{1}{1-p_j}}\Big\}\Bigg\}^{1+\frac{1}{1-p_1}}+b\\
&= \frac{1}{2-p_1}\left((1-p_1)\left((\theta_1-a_1)+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j-a_j)\right)\right)^{1+\frac{1}{1-p_1}}+b\\
&= K_{\mu_{p_1}}\left((\theta_1-a_1)+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j-a_j)\right)+b, \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

where $K_{\mu_{p_j}}$ are the cumulant functions given in Definition 1.5.1 with $p_1 > 2$, $p_j \in \{0\}\cup[1,\infty)$ for $j \in \{2,\ldots,k\}$ and $\Big[(\theta_1-a_1)+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j-a_j)\Big] \in (-\infty,0] =: \Theta(\mu_{p_1})$. By Proposition 1.4.1 one can see that, up to affinity and because of $p_1 > 2$, this $\mathbf{K}_{\nu_{\mathbf{p}}}$ of (3.27) will be called the *positive stable-MST* cumulant function as given in (3.3) with $t = 1$ on its corresponding canonical domain in (3.4) for $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ such that $p_1 \in (2,\infty)$, $p_j = 0$ for $j \in \{2,\ldots,w\}$ $(k > w \geqslant 1)$, $p_j = 1$ for $j \in \{w+1,\ldots,\ell\}$ $(\ell \geqslant w)$, $p_j = 2$ for $j \in \{\ell+1,\ldots,r\}$ $(r \geqslant \ell)$, $p_j \in (1,2)$ for $j \in \{r+1,\ldots,s\}$ $(s \geqslant r)$ and $p_j \in (2,\infty)$ for $j \in \{s+1,\ldots,k\}$ $(k \geqslant s)$.

$\boxed{(iii)}$ For fixed $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ such that $p_1 \in (1,2)$, $p_j = 0$ for $j \in \{2,\ldots,w\}$ $(k > w \geqslant 1)$, $p_j = 1$ for $j \in \{w+1,\ldots,\ell\}$ $(\ell \geqslant w)$, $p_j = 2$ for $j \in \{\ell+1,\ldots,r\}$ $(r \geqslant \ell)$, $p_j \in (1,2)$ for $j \in \{r+1,\ldots,s\}$ $(s \geqslant r)$ and $p_j \in (2,\infty)$ for $j \in \{s+1,\ldots,k\}$ $(k \geqslant s)$, the expressions of variance function and cumulant function are similar to (iv). However, one has $1+1/(1-p_1) < 0$ since $p_1 \in (1,2)$, and thus in (3.27) one has $\Big[(\theta_1-a_1)+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j-a_j)\Big] \in (-\infty,0) =: \Theta(\mu_{p_1})$ which will correspond to the so called *compound Poisson-MST* families.

$\boxed{(ii)}$ For fixed $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ such that $p_1 = 2$, $p_j = 0$ for $j \in \{2,\ldots,w\}$ $(k > w \geqslant 1)$, $p_j = 1$ for $j \in \{w+1,\ldots,\ell\}$ $(\ell \geqslant w)$, $p_j = 2$ for $j \in \{\ell+1,\ldots,r\}$ $(r \geqslant \ell)$, $p_j \in (1,2)$ for $j \in \{r+1,\ldots,s\}$ $(s \geqslant r)$ and $p_j \in (2,\infty)$ for $j \in \{s+1,\ldots,k\}$ $(k \geqslant s)$, the variance function in (3.7) is written

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{\mathbf{p}}(\mathbf{m}) &= \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\mathbf{Diag}_k\Big(0, m_2,\ldots,m_\ell,\frac{m_{\ell+1}^2}{m_1},\ldots,\frac{m_r^2}{m_1}, m_1^{1-p_{r+1}}m_{r+1}^{p_{r+1}},\ldots,m_1^{1-p_s}m_s^{p_s},\\
&\qquad m_1^{1-p_{s+1}}m_{s+1}^{p_{r+1}},\ldots,m_1^{1-p_k}m_k^{p_k}\Big),
\end{aligned}$$

with $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{p}} = (0,\infty)\times\mathbb{R}^{w-1}\times(0,\infty)^{k-w}$. We proceed in the same manner as

in (iv) from (3.11) to (3.27), and thus one obtains :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\mathbf{m})}{\partial m_1} &= -\frac{1}{m_1}-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\left(\frac{m_j}{m_1}\right)^2-\sum_{j=w+1}^{\ell}\frac{m_j}{m_1}+\sum_{j=\ell+1}^{r}\log\left(\frac{m_1}{m_j}\right)\\ &\quad+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{p_j-2}\left(\frac{m_1}{m_j}\right)^{p_j-2}+\sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{p_j-2}\left(\frac{m_1}{m_j}\right)^{p_j-2}+a_1',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_1 &= -\Big\{(\theta_1-a_1')+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\big(\theta_j-a_j'\big)^2+\sum_{j=w+1}^{\ell}\exp(\theta_j-a_j')-\sum_{j=\ell+1}^{r}\log\big(-(\theta_j-a_j')\big)\\ &\quad+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{2-p_j}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j')\big)^{1+\frac{1}{1-p_j}}+\sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{2-p_j}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j')\big)^{1+\frac{1}{1-p_j}}\Big\}^{-1}\\ &= -\left((\theta_1-a_1')+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta-a_j')\right)^{-1},\end{aligned}$$

with $(\theta_1-a_1')+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta-a_j')<0$ since $m_1>0$. Then

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\nu_{\mathbf{p}}}(\boldsymbol{\theta}) &= -\log\Big\{-\Big\{(\theta_1-a_1')+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\big(\theta_j-a_j'\big)^2+\sum_{j=w+1}^{\ell}\exp(\theta_j-a_j')-\sum_{j=\ell+1}^{r}\log\big(-(\theta_j-a_j')\big)\\ &\quad+\sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{2-p_j}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j')\big)^{1+\frac{1}{1-p_j}}+\sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{2-p_j}\big(-(p_j-1)(\theta_j-a_j')\big)^{1+\frac{1}{1-p_j}}\Big\}\Big\}+b'\\ &= -\log\left\{-\left((\theta_1-a_1')+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j-a_j')\right)\right\}+b'\\ &= K_{\mu_{p_1}}\left((\theta_1-a_1')+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j-a_j')\right)+b',\end{aligned}\tag{3.28}$$

where $K_{\mu_{p_j}}$ are the cumulant function given in Definition 1.5.1 with $p_1=2$, $p_j\in\{0\}\cup[1,\infty)$ for $j\in\{2,\ldots,k\}$ and $(\theta_1-a_1')+\sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j-a_j')\in(-\infty,0)=:\Theta(\mu_{p_1})$. Again, by Proposition 1.4.1 we prove that, up to affinity, this $\mathbf{K}_{\nu_{\mathbf{p}}}$ of (3.28) will be called *gamma-MST* cumulant function as given in (3.3) with $t=1$ on its corresponding canonical domain in (3.4) for $\mathbf{p}=(2,p_2,\ldots,p_k)$ such that $p_1=2$, $p_j=0$ for $j\in\{2,\ldots,w\}$ $(k>w\geqslant 1)$, $p_j=1$ for $j\in\{w+1,\ldots,\ell\}$ $(\ell\geqslant w)$, $p_j=2$ for $j\in\{\ell+1,\ldots,r\}$ $(r\geqslant\ell)$, $p_j\in(1,2)$ for $j\in\{r+1,\ldots,s\}$ $(s\geqslant r)$ and $p_j\in(2,\infty)$ for $j\in\{s+1,\ldots,k\}$ $(k\geqslant s)$.

$\boxed{(i)}$ For fixed $\mathbf{p}=(p_1,p_2\ldots,p_k)$ such that $p_1=1$, $p_j=0$ for $j\in\{2,\ldots,w\}$ $(k>w\geqslant 1)$, $p_j=1$ for $j\in\{w+1,\ldots,\ell\}$ $(\ell\geqslant w)$, $p_j=2$ for $j\in\{\ell+1,\ldots,r\}$ $(r\geqslant\ell)$, $p_j\in(1,2)$ for $j\in\{r+1,\ldots,s\}$ $(s\geqslant r)$ and $p_j\in(2,\infty)$ for $j\in\{s+1,\ldots,k\}$ $(k\geqslant s)$, the variance function in (3.7) is written

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\mathbf{p}}(\mathbf{m}) &= \frac{1}{m_1}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\mathbf{Diag}_k\Big(0,m_2,\ldots,m_\ell,\frac{m_{\ell+1}^2}{m_1},\ldots,\frac{m_r^2}{m_1},m_1^{1-p_{r+1}}m_{r+1}^{p_{r+1}},\ldots,m_1^{1-p_s}m_s^{p_s},\\ &\qquad m_1^{1-p_{s+1}}m_{s+1}^{p_{r+1}},\ldots,m_1^{1-p_k}m_k^{p_k}\Big),\end{aligned}$$

with $\mathbf{m} \in \mathbf{M_p} = (0,\infty) \times \mathbb{R}^{w-1} \times (0,\infty)^{k-w}$. Similary to (ii), one has :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(\mathbf{m})}{\partial m_1} &= \log(m_1) - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\left(\frac{m_j}{m_1}\right)^2 - \sum_{j=w+1}^{\ell}\frac{m_j}{m_1} + \sum_{j=\ell+1}^{r}\log\left(\frac{m_1}{m_j}\right) \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{p_j-2}\left(\frac{m_1}{m_j}\right)^{p_j-2} + \sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{p_j-2}\left(\frac{m_1}{m_j}\right)^{p_j-2} + a_1'',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_1 &= \exp\Big\{(\theta_1 - a_1'') + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\left(\theta_j - a_j''\right)^2 + \sum_{j=w+1}^{\ell}\exp(\theta_j - a_j'') - \sum_{j=\ell+1}^{r}\log\left(-(\theta_j - a_j'')\right) \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{2-p_j}\left(-(p_j-1)(\theta_j - a_j'')\right)^{1+\frac{1}{1-p_j}} + \sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{2-p_j}\left(-(p_j-1)(\theta_j - a_j'')\right)^{1+\frac{1}{1-p_j}}\Big\}\end{aligned}$$

and, successively

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\nu_p}(\boldsymbol{\theta}) &= \exp\Big\{(\theta_1 - a_1'') + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{w}\left(\theta_j - a_j''\right)^2 + \sum_{j=w+1}^{\ell}\exp(\theta_j - a_j'') - \sum_{j=\ell+1}^{r}\log\left(-(\theta_j - a_j'')\right) \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^{s}\frac{1}{2-p_j}\left(-(p_j-1)(\theta_j - a_j'')\right)^{1+\frac{1}{1-p_j}} + \sum_{j=s+1}^{k}\frac{1}{2-p_j}\left(-(p_j-1)(\theta_j - a_j'')\right)^{1+\frac{1}{1-p_j}}\Big\} + b'' \\ &= \exp\left\{(\theta_1 - a_1'') + \sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j - a_j'')\right\} + b'' \\ &= K_{\mu_{p_1}}\left((\theta_1 - a_1'') + \sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j - a_j'')\right) + b'', \qquad (3.29)\end{aligned}$$

where $K_{\mu_{p_j}}$ is a cumulant function given in Definition 1.5.1 with $p_1 = 1$, $p_j \in \{0\} \cup [1,\infty)$ for $j \in \{2,\ldots,k\}$ and $\left[(\theta_1 - a_1'') + \sum_{j=2}^{k}K_{\mu_{p_j}}(\theta_j - a_j'')\right] \in \mathbb{R} =: \Theta(\mu_{p_1})$. Thus, by Proposition 1.4.1 we show that, up to affinity, this $\mathbf{K}_{\nu_\mathbf{p}}$ of (3.29) will be called *Poisson-MST* cumulant function as given in (3.3) with $t = 1$ on its corresponding canonical domain in (3.4) for $\mathbf{p} = (1, p_2 \ldots, p_k)$ such that $p_1 = 1$, $p_j = 0$ for $j \in \{2,\ldots,w\}$ $(k > w \geqslant 1)$, $p_j = 1$ for $j \in \{w+1,\ldots,\ell\}$ $(\ell \geqslant w)$, $p_j = 2$ for $j \in \{\ell+1,\ldots,r\}$ $(r \geqslant \ell)$, $p_j \in (1,2)$ for $j \in \{r+1,\ldots,s\}$ $(s \geqslant r)$ and $p_j \in (2,\infty)$ for $j \in \{s+1,\ldots,k\}$ $(k \geqslant s)$. The proof of Theorem 3.4.1 is now complete. □

3.6 Summary and remarks

We have characterized in Theorem 3.4.1 the *MST* models through their variance functions for which the proof leads to the following classification. For given $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_k)$ such that $p_1 \geqslant 1$ of (3.9) and (3.10), different parts of the proof of Theorem 3.4.1 allow to summarize in four subclasses the *MST* models according to the values of p_1 : The *Poisson-MST* ($p_1 = 1$), *gamma-MST* ($p_1 = 2$), *compound Poisson-MST* ($1 < p_1 < 2$) with a particular case of *non-central gamma-MST* ($p_1 = 3/2$) and finally, the *positive stable-MST* ($p_1 > 2$) with a particular case of *inverse Gaussian-MST* ($p_1 = 3$). According to Tables 3.3.1, 3.3.2

and 3.3.3, these subclasses of *MST* include several families of distributions amongst which the NST models for $\mathbf{p} = (p_1, 0, \ldots, 0)$, the multiple Poisson models for $\mathbf{p} = (1, \ldots, 1)$, the non-central gamma stable Tweedie models for $\mathbf{p} = (p_1, 3/2, \ldots, 3/2)$, the gamma non-central gamma for $\mathbf{p} = (3/2, 2, \ldots, 2)$, etc. These subclasses are distinguished by their support of distributions , mean domains or by their probability measures. Note that, the variance functions of (3.7) satisfy necessary conditions of Ghribi et al. (2015) on the characterization of NEF once Gaussian components of *MST* models are removed, reducing the mean domains to $(0, \infty)^k$.

The characterization of all *MST* through generalized variance functions (3.1) seems difficult for the moment and remains an opening problem. But some authors have done for particular cases ; we can refer to Kokonendji & Seshadri (1996) on the characterization of Gausian models, Kokonendji & Masmoudi (2006 ; 2013) for Poisson-Gaussian families and the characterization via Monge-Ampère equation of gamma-Gaussian model, respectively. Following the values of $\mathbf{p}$, we also could watch the associated (quasi/pseudo)-orthogonal polynomials of all *MST* models ; see Kokonendji et al. (2015) for the particular case of NST models. An alternative constructions and applications of multivariate models with some flexibility can be found in Jørgensen (2013), Furman & Landsman (2010), respectively.

Chapitre 4

Caractérisation par fonctions variances généralisées des NST

Sommaire

4.1 Introduction 81
4.2 Procédures de caractérisations par fonctions de variances généralisées 82
4.2.1 Connexion avec l'équation de Monge-Ampère 82
4.2.2 Déterminant des matrices de moments 83
4.2.3 Deux méthodes de résolution 85
4.3 Caractérisation des modèles NST par fonction variance généralisée 87
4.3.1 Enoncé et remarques 87
4.3.2 Démonstration du Théorème 4.3.1 pour $p > 2$ 88
4.3.3 Démonstration du Théorème 4.3.1 pour $1 < p < 2$ . . 92
4.3.4 Démonstration du Théorème 4.3.1 pour $p = 1$ 96
4.4 Conclusion 100

4.1 Introduction

Le déterminant de matrice de variance-covariance, appelé aussi variance généralisée et introduit par Wilks (1932) sous l'hypothèse de la gaussienneté, joue un rôle important dans l'analyse multivariée de mesure de variabilité. Un bon estimateur tel que sans biais de la variance généralisée reste un défi à relever selon les modèles statistiques ; voir, par exemple, Iliopoulos & Kourouklis (1998) pour des références bibliographiques sur les développements de ce sujet dans le cas de la normalité. Une approche convenable de tel estimateur passe par des résultats de caractérisation du modèle, sous des suppositions raisonnables de la nature du phénomène étudié.

Dans le cadre des *FEN* $\mathbf{F}$, la variance généralisée est le déterminant de la matrice de covariance exprimée en termes du vecteur moyen $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)^\top \in \mathbf{M_F} \subseteq \mathbb{R}^k$ avec $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Elle est une mesure de variabilité à l'intérieur d'une population multivariée. En pratique, elle intervient dans diverses situations telles que la détection des individus ou observations en dehors d'une limite de surveillance/contrôle ou la présence des valeurs aberrantes dans un nuage. Très bien connue sous l'hypothèse gaussienne, la variance généralisée demeure peu maniable dans la jungle de la non-normalité multivariée. On s'intéressera particulièrement aux fonctions variances généralisées écrites sous la forme,

$$\det \mathbf{V_F}(\mathbf{m}) = m_1^{q_1} m_2^{q_2} \cdots m_\ell^{q_\ell}, \tag{4.1}$$

où $\mathbf{V_F}(\mathbf{m})$ désigne la fonction variance (matrice de covariance) du modèle exponentiel considéré, $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$ donné et $q_s \in \mathbb{R}$. Dans (4.1), le membre de droite est supposé connu par contre celui de gauche inconnu. On peut citer les cas particuliers $\ell = 0$ en (4.1) correspondant au modèle Gaussien sur $\mathbb{R}^k$ avec $\det \mathbf{V_F}(m) = 1$ et $\ell = 1$ dans (4.1) pour les modèles *NST* avec

$$\det \mathbf{V_F}(\mathbf{m}) = m_1^{q_1}, \quad \forall \mathbf{m} \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^{k-1}. \tag{4.2}$$

L'objectif principale de ce Chapitre est de prouver que la *FEN* cachée derrière la fonction variance $\mathbf{V_F}(\mathbf{m})$ de (4.2) est belle et bien celle des *NST*. Les cas Gaussiens ($q_1 = 0$), normal-Poisson ($q_1 = 1$) et normal-gamma ($q_1 = k + 1$) ont été résolus par Kokonendji & Seshadri(1996), Nisa et al.(2016) et Kokonendji & Masmoudi (2013) respectivement. Ainsi nous présentons en Section 4.2 les procédures de caractérisations par fonctions variances généralisées. La Section 4.3 est consacrée au Théorème de caractérisation des modèles *NST* par fonction variance généralisée plus la preuve, et la Conclusion en Section 4.4.

4.2 Procédures de caractérisations par fonctions de variances généralisées

Notons que contrairement aux fonctions variances, les fonctions variances généralisées ne caractérisent pas les *FEN* en général. Ainsi sous hypothèses de positivité de la matrice de covariance ou de l'infinie divisibilité de la mesure considérée, des cas particuliers ont été résolu par certains auteurs. Dans cet esprit, nous élaborons dans cette Section les procédures de caractérisation par fonction variances généralisées.

4.2.1 Connexion avec l'équation de Monge-Ampère

Dans le problème de caractérisation par fonctions variances généralisées, par exemple dans (4.1) et (4.2), les membres de droite de ces deux équations

sont tous donnés tandis que ceux de gauches sont des inconnus. La relation $\mathbf{V}(\mathbf{m}) := \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))$ induit immédiatement

$$\det \mathbf{V}(\mathbf{m}) = \det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})), \tag{4.3}$$

sur le domaine des moyennes $\mathbf{M_F}$ et permet de récrire (4.2) de la manière suivante

$$\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) = m_1^{q_1}, \quad \forall \mathbf{m} \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^{k-1} =: \mathbf{M}. \tag{4.4}$$

C'est une paramétrisation par moyenne $\mathbf{m}$. Alors que la reparamétrisation canonique de (4.4) donne

$$\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}), \tag{4.5}$$

avec $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} := \boldsymbol{\theta}(\mathbf{M})$.

Les équations du type (4.5) sont connues sous le nom d'équation de Monge-Ampère pour une fonction inconnue et suffisamment dérivable $\mathbf{K} : \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, k \geqslant 2$, où $\mathbf{K}'' = (D^2_{ij}\mathbf{K})_{i,j=1,\cdots,k}$ désigne la matrice hessienne de $\mathbf{K}$ et $\mathcal{A}$ est une fonction positive donnée définie sur $\boldsymbol{\Theta}$ (voir, e.g., Gutiérrez, 2001, pour des détails). Cette classe d'équations (4.5) a été une source de nombreux travaux lesquels sont liés à beaucoup de domaines de mathématiques, tels que la géométrie et le transport optimal (e.g., Villani, 2003, et ses références bibliographiques). Des solutions numériques sont également étudiées (e.g. Loeper and Rapetti, 2005) ; ce serait une source d'inspiration pour une approximation de nos estimateurs. Cependant, les solutions explicites demeurent généralement de "challenging" problèmes. En particulier pour $m_{q_1} = 1$ dans (4.5), les démonstrations de l'équation fondamentale de Monge-Ampère telle comme "une fonction lisse et strictement convexe $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{R}^k$ telle que $\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) = 1$ est une forme quadratique" étaient progressives, différentes, et selon la dimension : Jörgens (1954) pour $k = 2$ (voir aussi Kokonendji, 1995), Calabi (1958) pour $k = 3,\ 4,\ 5$, et Pogorelov (1972) pour $k \geqslant 6$. Nous renvoyons à Cheng & Yau (1986) pour une démonstration plus analytique et soit disant courte, et à Caffarelli & Li (2004) pour son extension à des fonctions périodiques et positives.

4.2.2 Déterminant des matrices de moments

Rappelons que dans le cadre du modèle de probabilités

$$F = F(\boldsymbol{\mu}) = \left\{P_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\mu}}(d\mathbf{x}) := \exp\{\mathbf{x}^\top\boldsymbol{\theta} - \mathbf{K}_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\theta})\}\boldsymbol{\mu}(d\mathbf{x}); \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\mu})\right\},$$

appelé *FEN* engendrée par $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^k\right)$ non concentrée sur un hyperplan de $\mathbb{R}^k$, si $\mathbf{X}$ est un vecteur aléatoire distribué comme $P_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\mu}}$ alors $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}'_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\theta}) = \left(D_i\mathbf{K}_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\theta})\right)_{i=1,\ldots,k}$ et $\mathrm{Var}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}''_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\theta})$ où $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\mu}}$ désigne la fonction cumulant associée à la mesure $\boldsymbol{\mu}$. La fonction $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{K}'_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\theta})$ est une transformation bijective

de $\boldsymbol{\Theta}(\mu)$ sur $\mathbf{M}_F := \mathbf{K}'_\mu\left(\boldsymbol{\Theta}(\mu)\right)$ et, par conséquent, $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})$ fournit une paramétrisation alternative de la famille $F = P(\mathbf{m}, F); \mathbf{m} \in \mathbf{M}_F$, appelée la paramétrisation par la moyenne. Notons que $\mathbf{M}_F$ ne dépend que de F, et non du choix de la mesure génératrice μ de F. La matrice de variance-covariance de $P(\mathbf{m}, F)$ peut-être écrite comme une fonction du paramètre $\mathbf{m}$, $\mathbf{V}_F(\mathbf{m}) = \mathbf{K}''_\mu(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))$, appelée la fonction variance de F. Ensemble avec le domaine des moyennes $\mathbf{M}_F$, $\mathbf{V}_F$ caractérise F dans la classe de toutes les *FEN* ; voir, e.g., Kotz et al. (2000, Chap. 54) pour quelques détails. La fonction qui à tout $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_F$ associe $\det \mathrm{Var}_F(\mathbf{m})$ s'appelle *la fonction de variance généralisée* de F. En dimension 1 elle correspond simplement à la variance de F. Contrairement à la fonction variance, la fonction de variance généealisée ne caractérise pas les *FEN* $F = F(\mu)$ en général, et il est nécessaire de résoudre individuellement l'équation de Monge-Ampère (4.5).

Les premiers types des équations (4.5) sont apparus pour la première fois dans la classification de *fonction variance quadratique simple* avec $\mathbf{V}_F(\mathbf{m}) = \alpha\mathbf{m}\mathbf{m}^\top + \mathbf{B}(\mathbf{m}) + \mathbf{C}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{B}(\mathbf{m})$ et $\mathbf{C}$ sont des matrices $(k \times k)$ symétriques réelles d'éléments linéaires et constants respectivement en $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_F \subseteq \mathbb{R}^k$ (Casalis, 1996). Ainsi, comme une utilisation pratique en statistique, il a été conjecturé par Kokonendji & Pommeret (2007) qu'avec les types d'équations (4.5) de fonction variance quadratique simple, les modèles exponentiels construits fournissent de simples expressions des estimateurs *sans biais à variance minimale* (**SBVM**) de variance généralisée, lesquelles sont proportionnelles à celles obtenues explicitement par la méthode du maximum de vraisemblance (**MV**). Ce dernier a été établi à partir des conséquences d'une propriété élégante de déterminant des matrices des moments d'un modèle exponentiel que nous énonçons par les théorèmes suivants :

Théorème 4.2.1 *Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^k$ et ν la mesure image de $\dfrac{1}{k!}\left(\det[\mathbf{X}_1 \ldots \mathbf{X}_k]\right)^2 \mu(d\mathbf{X}_1) \cdots \mu(d\mathbf{X}_k)$ par l'application*

$$S : \left(\mathbb{R}^k\right)^k \to \mathbb{R}^k, \quad (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}) \mapsto \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_k.$$

Alors

(*i*) $\det \mathbf{L}''_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{L}_\nu(\boldsymbol{\theta})$

(*ii*) $\det \mathbf{L}''_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{L}_\mu(\boldsymbol{\theta})\right)^k \det\left[\mathbf{K}''_\mu(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{K}'_\mu(\boldsymbol{\theta}) \otimes \mathbf{K}'_\mu(\boldsymbol{\theta})\right]$.

Théorème 4.2.2 *Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^k$ non concentrée sur un hyperplan affine de $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^k$ et ν_0 la mesure image de*

$$\frac{1}{(k+1)!}\left(\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix}\right)^2 \mu(d\mathbf{X}_0)\mu(d\mathbf{X}_1) \cdots \mu(d\mathbf{X}_k),$$

par l'application

$$S_0 : \left(\mathbb{R}^k\right)^{k+1} \to \mathbb{R}^k, \quad (\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}) \mapsto \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_k.$$

Alors pour chaque $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\mu})$ *tel que* $\mathbf{L}_\mu(\boldsymbol{\theta})$ *existe,*

(*i*) $\det \mathcal{L}_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{L}_{\nu_0}(\boldsymbol{\theta})$

(*ii*) $\det \mathcal{L}_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \left(\mathbf{L}_\mu(\boldsymbol{\theta})\right)^{k+1} \det \mathbf{K}''_\mu(\boldsymbol{\theta})$,

où $\mathcal{L}_\mu(\boldsymbol{\theta})$ est la matrice symétrique d'ordre $k+1$ donnée par

$$\mathcal{L}_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\mu(\boldsymbol{\theta}) & \left(\mathbf{L}'_\mu(\boldsymbol{\theta})\right)^\top \\ \\ \mathbf{L}'_\mu(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{L}''_\mu(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}.$$

Pour plus de détails voir Kokonendji & Seshadri (1994b, 1996) via un problème dans Pólya & Szegö (1972) et aussi Lindsay (1989). La connection avec **SBVM** est présentée au dernier paragraphe ci-dessous où l'on s'écarte de la proportionalité avec **MV** (e.g. Kokonendji, 1994).

4.2.3 Deux méthodes de résolution

Première méthode (par théorie de mesure)

Sous l'hypothèse d'indéfinie divisibilité de $F = F(\boldsymbol{\mu})$, l'un des outils techniques dont on dispose actuellement pour une caractérisation de fonctions variances généralisées (4.3) au sens de Monge-Ampère sont les suivants. Tout d'abord et afin d'avoir une solution particulière au problème, nous avons besoin de la mesure de Lévy modifiée $\rho(\boldsymbol{\mu})$ satisfaisant (e.g., Hassairi, 1999)

$$\mathbf{K}_{\rho(\boldsymbol{\mu})}(\boldsymbol{\theta}) = \log \det \mathbf{K}''_\mu(\boldsymbol{\theta}), \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\mu}). \tag{4.6}$$

Ensuite, on peut faire appel aux deux résultats suivants :

1. il existe une matrice Σ symétrique d'ordre $k \times k$, semi-definie positive et de rang $\leqslant k$, et une mesure positive $\boldsymbol{\nu}$ sur $\mathbb{R}^k$ telle que

   $$\mathbf{K}''_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma + \mathbf{L}''_\nu(\boldsymbol{\theta}),$$

   avec $\mathbf{L}''_\nu(\boldsymbol{\theta}) := \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}\mathbf{x}^\top \exp(\boldsymbol{\theta}^\top \mathbf{x}) \boldsymbol{\nu}(d\mathbf{x})$ (e.g., Gikhman & Skorokhod, 2004) ;
2. pour deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ d'ordre $k \times k$, on a

   $$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sum_{S \subset \{1,2,\ldots,k\}} \det(\mathbf{A}_{S'}) \det(\mathbf{B}_S),$$

   avec $S' = \{1, 2, \ldots, k\}\ S$ et $\mathbf{A}_S = (a_{ij})_{i,j \in S^2}$ pour $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j \in \{1,2,\ldots,k\}^2}$ (voir, e.g., Muir, 1960).

Le premier résultat est une équivalence de la formule de Lévy-Khinchine (e.g. Sato, 1999) ; ainsi, Σ vient de la partie brownienne et le reste $\mathbf{L}''_{\nu}(\boldsymbol{\theta})$ correspond à la partie des sauts du processus de Lévy associé à travers sa mesure de Lévy $\boldsymbol{\nu}$. Le second résultat permet de calculer $\det \mathbf{K}''_{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = \det\left[\Sigma + \mathbf{L}''_{\nu}(\boldsymbol{\theta})\right]$. Pour $S = i_1, i_2, \ldots, i_\ell$, avec $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_\ell \leqslant k$, un sous-ensemble non-vide de $\{1, 2, \ldots, k\}$, et $\tau_S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ l'application définie par $\tau_S(\mathbf{x}) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\ell})^\top$, nous définissons $\boldsymbol{\nu}_S$ la mesure image de

$$H_\ell(dx_1, \ldots, dx_\ell) = (1/\ell!)(\det\left[\tau_S(x_1) \ldots \tau_S(x_\ell)\right])^2 \boldsymbol{\nu}(dx_1) \ldots \boldsymbol{\nu}(dx_\ell)$$

par $\psi_\ell : \left(\mathbf{R}^k\right)^\ell \to \mathbb{R}^k, (x_1, \ell, x_\ell) \mapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_\ell$. D'où, la mesure de Lévy modifiée $\rho(\boldsymbol{\mu})$ dans (4.6) peut s'exprimer comme

$$\rho(\boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{\Lambda})\delta_0 + \sum_{\emptyset \neq S \subset \{1,2,\ldots,k\}} (\det \boldsymbol{\Lambda}_{S'})\boldsymbol{\nu}_S,$$

de telle sorte que $\boldsymbol{\Lambda}$ soit une représentation diagonale de Σ dans une base orthonormale. Enfin, il vient la discussion astucieuse et au cas par cas (pour l'instant) afin d'aboutir à l'*unicité* de solution à "transformations élémentaires" près du modèle $F = F(\boldsymbol{\mu})$ (i.e. changement de base, affinité et puissance de convolution pour la mesure génératrice). Cette méthode est basée sur la théorie de mesure et a été utilisé par Kokonendji & Masmoudi (2006) et Nisa et al.(2016) pour caractériser les modèles Poisson-gaussien et normal-Poisson respectivement.

Seconde méthode (analytique)

Si on arrive à présenter le membre de gauche $\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta})$ d'équation d'équation de Monge-Ampère (4.5) comme une fonction (connue) de $\mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta})$, à savoir

$$\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) := h\left(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right), \tag{4.7}$$

où h est une fonction connue et $\mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta})$ inconnu ; alors le problème (4.5) devient

$$h\left(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}), \tag{4.8}$$

où seulement $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ est l'inconnu à déterminer analytiquement. Nous referons le lecteur au papier de Kokonendji & Masmoudi (2013) pour la caractérisation de normal-gamma où $h\left(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right) = \exp\left\{(k+1)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right\}$ laquelle est un cas particulier de

$$h\left(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right) = \exp\left\{a\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{b}^\top\boldsymbol{\theta} + c\right\}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k, \tag{4.9}$$

où $(a, \mathbf{b}, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ est un triplet donné des constantes. Les cas résolus de (4.9) sont : $a = 0$ et $\mathbf{b} = 0$ et correspond au modèle gaussien (Kokonendji & Seshadri,1996), $a = 0$ pour les Poisson-gaussiens (Kokonendji & Masmoudi, 2006), $a < 0$ pour le multinomial qui n'est pas indéfiniment divisible (Ghribi &

Masmoudi, 2010), et un cas très particulier de $a > 0$ pour le gamma-gaussien (Kokonendji & Masmoudi, 2013).

Dans la suite, nous nous intéressons aux équations (4.5) dont les membres de gauches sont de la forme

$$\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{1}{-\alpha \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}\right]^{\beta}, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k, \tag{4.10}$$

ou

$$\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) = [\alpha \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})]^{\beta}, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k, \tag{4.11}$$

avec α et β des réels positifs fixées.

4.3 Caractérisation des modèles *NST* par fonction variance généralisée

4.3.1 Enoncé et remarques

Théorème 4.3.1 *Soit $k \in \{2, 3, \ldots\}$ et $p \geqslant 1$. Si une FEN $\mathbf{F}_p$ satisfait (4.2) avec $q_1 = p+k-1$ et (4.10) ou (4.11) alors, à affinité près, $\mathbf{F}_p$ est un modèle NST. En particulier, selon les différentes valeurs de $p \geqslant 1$, et pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{F_p} =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^{k-1}$, (4.2) s'écrit via (4.10) ou (4.11)*

(*i*) $[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))]^k = m_1^k$ *pour* $p = 1$,

(*ii*) $[(2-p)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))]^{(p+k-1)/(2-p)} = m_1^{p+k-1}$ *pour* $1 < p < 2$,

(*iii*) $\exp[(k+1)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))] = m_1^{k+1}$ *pour* $p = 2$,

(*iv*) $[1/(-(p-2)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})))]^{(p+k-1)/(p-2)} = m_1^{p+k-1}$ *pour* $p > 2$;

où $\mathbf{K}$ est la fonction cumulante associée à la mesure de référence.

Ces relations sont une conséquence directe du Théorème 2.3.1 combiné à (4.2) puisque la fonction variance $\mathbf{V}(\mathbf{m}) = \mathbf{K}''(\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}))$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{F_p}$.

Remarque 4.3.2 *Le cas $p = 2$ est complètement résolu dans Kokonendji & Masmoudi (2013) selon la seconde méthode (analytique).*

Remarque 4.3.3 *Le cas $p = 1$ a été résolu par la première méthode (par la théorie de mesure) dans Nisa et al. (2016) et nous allons en proposer une autre démonstration en Section 4.3.4 selon la seconde méthode (analytique).*

Les Sections suivantes sont consacrées à la démonstration du Théorème 4.3.1 pour $p > 2$, $1 < p < 2$ ainsi que le cas limite $p = 1$, respectivement.

4.3.2 Démonstration du Théorème 4.3.1 pour $p > 2$

Nous montrons dans cette sous-section que pour $k \in \{2, 3, \ldots\}$ et $p > 2$ fixés, la *FEN* $\mathbf{F}_p$ satisfaisant (4.2) avec $q_1 = p + k - 1$ c'est-à-dire

$$\det \mathbf{V}_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{m}) = m_1^{p+k-1}, \qquad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{F}_p} =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^{k-1}, \tag{4.12}$$

est un modèle *NST* ($p > 2$) à affinité près. Les propriétés suivantes sont nécessaires dans la suite de démonstration.

Lemme 4.3.4 *Soit* $\mathbf{K}$ *la fonction cumulante associée à la FEN* $\mathbf{F}_p$ *des modèles NST avec* $p > 2$. *Alors pour tout* $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{F}_p}$,

(i) $\det \mathbf{V}_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{m}) = \left[1/\left(-(p-2)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))\right)\right]^{(p+k-1)/(p-2)}$.

(ii) $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) < 0$.

Démonstration : Soit $\mathbf{K}$ la fonction cumulante associée à $\mathbf{F}_p$ de (4.12) avec $p > 2$ fixé.

$\boxed{(i)}$ C'est une combinaison de (4.3) et (*iv*) du Théorème 2.3.1.

$\boxed{(ii)}$ Des relations (*i*) du Lemme 4.3.4 et (4.12) on a $\left[1/\left(-(p-2)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))\right)\right]^{(p+k-1)/(p-2)} = m_1^{p+k-1}$. Puisque $m_1 > 0$ et que $p > 2$ alors $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) < 0$. Les résultats du Lemme sont ainsi prouvés.

Lemme 4.3.5 *Soit* $\mathbf{G}_p$ *la FEN vérifiant (4.12) de fonctions variances* $\mathbf{V}_{\mathbf{G}_p}(\mathbf{m}) = \left(V_{ij}(\mathbf{m})\right)_{i,j=1,\ldots,k}$. *Alors*

$$V_{1j}(\mathbf{m}) = m_1^{p-1} m_j, \quad \forall j = 1, \ldots, k.$$

Démonstration : A partir des relations (*i*) du Lemme 4.3.4 et (4.12) on a

$$\frac{p+k-1}{p-2} \log\left[\frac{-1}{(p-2)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))}\right] = (p+k-1)\log m_1,$$

équivalent à

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) = -\frac{1}{p-2} m_1^{-(p-2)} \tag{4.13}$$

et en dérivant respectivement par rapport à $\mathbf{m}$, on obtient

$$\mathbf{m}\left[\mathbf{V}_{F_p}(\mathbf{m})\right]^{-1} u = \frac{1}{m_1^{p-1}} (1, 0, \ldots, 0)\, u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^k; \tag{4.14}$$

et puisqu'on a $\mathbf{m} = \mathbf{K}'(\boldsymbol{\theta})$ et $\boldsymbol{\theta}'(\mathbf{m}) = \left[\mathbf{V}_{F_p}(\mathbf{m})\right]^{-1}$ suivant les définitions de la paramétrisation par la moyenne et de la fonction variance de $\mathbf{G}_p$, respectivement. En particulier pour $u = \mathbf{V}_{\mathbf{G}_p}(\mathbf{m}) e_j$ en (4.14) où $(e_j)_{j=1,\ldots,k}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^k$, on obtient le résultat désiré. □

Lemme 4.3.6 *Sous les hypothèses du Lemme 4.3.5, il existe une fonction* $g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}_-^\star$ *telle que*

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{p-2}\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{1-1/(p-1)}, \tag{4.15}$$

sur $\boldsymbol{\Theta} = \left\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k; \theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k) < 0\right\}$.

Démonstration : A partir du Lemme 4.3.5 on a $V_{11}(\mathbf{m}) = m_1^p$, cela signifie que

$$D_{11}^2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \left(D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right)^p. \tag{4.16}$$

En intégrant par rapport à θ_1, il existe une fonction $g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}_-^\star$ telle que

$$D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{-1/(p-1)}. \tag{4.17}$$

On en déduit que $\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k) < 0$ car $D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1 > 0$, $p-1 > 0$. Alors pour $\boldsymbol{\theta} = (0,\theta_2,\ldots,\theta_k)$, on a $0 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k) < 0$, par conséquent $g(\theta_2,\ldots,\theta_k) < 0$.
La dérivée de $D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ par rapport à θ_j donne

$$D_{1j}^2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{-g'(\theta_2,\ldots,\theta_k)D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)}, \quad \forall j = 2,\ldots,k, \tag{4.18}$$

et par le Lemme 4.3.5 on a,

$$D_{1j}^2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \left(D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right)^{p-1} D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}), \quad \forall j = 2,\ldots,k \tag{4.19}$$

avec $D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_j$ et $D_{ij}^2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) = V_{ij}(\mathbf{m})$ pour $i,j = 1,\ldots,k$. En combinant (4.18) et (4.19) on obtient

$$\left(D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right)^{p-1} D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{-g'(\theta_2,\ldots,\theta_k)D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)},$$

par conséquent,

$$D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g'(\theta_2,\ldots,\theta_k)\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{-1/(p-1)},$$

pour tout $j = 2,\ldots,k$ et une intégration suivant θ_j donne

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{p-2}\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{1-1/(p-1)} + b(\theta_1), \tag{4.20}$$

où b est une fonction à variable réelle à déterminer. Et donc en dérivant (4.20) par rapport à θ_1 on a

$$D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{-1/(p-1)} + b'(\theta_1),$$

comparer à (4.17) on trouve $b'(\theta_1) = 0$ soit $b(\theta_1) = b$ constante réelle. Et donc de (4.13) et (4.20) on obtient

$$-\frac{1}{p-2}\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{1-1/(p-1)} + b = -\frac{1}{p-2}m_1^{-(p-2)},$$

avec $m_1 = D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ ci-dessus alors $b = 0$. D'où, l'expression (4.20) devient

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{p-2}\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{1-1/(p-1)},$$

qui conclut la démonstration du Lemme 4.3.6. □

Lemme 4.3.7 *A partir de Lemme 4.3.6, on obtient les assertions suivantes :*

(*i*) $D^2_{11}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1^p$

(*ii*) $D^2_{1j}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1^{p-1}m_j$, $\forall j = 2,\ldots,k$

(*iii*) $D^2_{ij}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1^{p-2}m_im_j + m_1g''_{ij}(\theta_2,\ldots,\theta_k)$, $\forall i,j \in \{2,\ldots,k\}$, *où* $m_j = D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ *pour tout* $j = 1,2,\ldots,k$.

Démonstration : (*i*) et (*ii*) découlent du Lemme 4.3.5. Concernant (*iii*), la dérivée partielle de (4.15) par rapport à θ_i donne

$$D_i\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g'_i(\theta_2,\ldots,\theta_k)\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{-1/(p-1)} = m_i,$$

et par la suite,

$$\begin{aligned} D^2_{ij}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) &= g'_i(\theta_2,\ldots,\theta_k)g'_j(\theta_2,\ldots,\theta_k)\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{-p/(p-1)} \\ &\quad + g''_{ij}(\theta_2,\ldots,\theta_k)\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{-1/(p-1)} \\ &= m_im_j\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{-(p-2)/(p-1)} \\ &\quad + g''_{ij}(\theta_2,\ldots,\theta_k)\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right)\right]^{-1/(p-1)} \\ &= m_1^{p-2}m_im_j + m_1g''_{ij}(\theta_2,\ldots,\theta_k) \end{aligned} \tag{4.21}$$

pour tout $i,j = 2,\ldots,k$. Le Lemme est donc démontré. □

Lemme 4.3.8 *La fonction* $g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^\star_-$ *du Lemme 4.3.6 vérifie les propriétés suivantes :*

(*i*) *g est une fonction convexe.*

(*ii*) $\det g''(\theta_2,\ldots,\theta_k)$ *est un réel constant indépendant de* θ_j, $\forall j \in \{2,\ldots,k\}$.

(*iii*) $g'' = \Sigma_{k-1}$ *est une matrice symétrique de* $\mathbb{R}^{k-1}$ *indépendante de* θ_j, $\forall j \in \{2,\ldots,k\}$.

Démonstration : Soit $\boldsymbol{\nu}_p = (\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_1^c)$ la mesure génératrice de $\mathbf{G}_p$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{k-1}$.

$\boxed{(i)}$ Puisque la fonction $(\theta_2,\ldots,\theta_k) \mapsto \mathbf{K}(0,\theta_2,\ldots,\theta_k) =: \mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_1^c}(\theta_2,\ldots,\theta_k)$ est la fonction cumulante de $\boldsymbol{\nu}_1^c$, alors la fonction $(\theta_2,\ldots,\theta_k) \mapsto \mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_1^c}(\theta_2,\ldots\theta_k) =$

$-\frac{1}{p-2}\left[-(p-1)g(\theta_2,\ldots,\theta_k)\right]^{1-1/(p-1)}$ est convexe. Ceci implique que $(\theta_2,\ldots,\theta_k) \mapsto [-(p-2)\mathbf{K}(0,\theta_2,\ldots\theta_k)]^{1+1/(p-2)} = -(p-1)g(\theta_2,\ldots,\theta_k)$ est aussi convexe. Par conséquent g est convexe.

$\boxed{(ii)}$ De Lemme 4.3.7 et Lemme 2.3.1, on peut écrire

$$\begin{aligned}\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) &= \det\left[D^2_{ij}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right]_{i,j=1,\ldots,k} \\ &= \lambda \det(\mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}),\end{aligned}$$

avec $\lambda = m_1^p$, $\mathbf{a} = m_1^{p-1}(m_2,\ldots,m_k)^\top$ et $\mathbf{A} = \frac{1}{m_1^p}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} + m_1 g''_{ij}(\theta_2,\ldots,\theta_k)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) &= m_1^p \det\left(\frac{1}{m_1^p}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} + m_1 g''_{ij}(\theta_2,\ldots,\theta_k) - \frac{1}{m_1^p}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\right) \\ &= m_1^p m_1^{k-1} \det g''_{ij}(\theta_2,\ldots,\theta_k) \\ &= m_1^{p+k-1} \det g''_{ij}(\theta_2,\ldots,\theta_k).\end{aligned}$$

Puisque $\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta})$ doit être égal à m_1^{p+k-1}, on en déduit que $\det g''_{ij}(\theta_2,\ldots,\theta_k) = 1$ indépendant de θ_j, pour tout $j \in \{2,\ldots,k\}$.

$\boxed{(iii)}$ Cela découle de (ii) et les résultats de Jörgens-Calabi-Pogorelov. □

Dans l'ordre de conclure la démonstration du Théorème pour $p > 2$, il suffit de montrer que le modèle $\mathbf{G}_p = \mathbf{G}(\boldsymbol{\nu}_p)$ des Lemmes 4.3.5-4.3.8 correspondent à $\mathbf{F}_p$ du Théoreme 4.3.1 à transformation affine près. En effet, de Lemme 4.3.7 avec $g''(\theta_2,\ldots,\theta_k) = \Sigma_{k-1}$, la fonction variance s'écrit

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_p}(\mathbf{m}) = m_1^{p-2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \Sigma_{k-1}\end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

où $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)^\top$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{k-1}$. En appliquant la décomposition de Cholesky, il existe une matrice triangulaire $\mathbf{T}$ telle que $\Sigma_{k-1} = \mathbf{T}\mathbf{T}^\top$. Désignons par $\mathbf{G}'_p$ l'image de *FEN* $\mathbf{G}_p$ par la transformation linéaire $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^k$ avec $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}^{-1}\end{pmatrix}$ où $\mathbf{T}$ est la matrice inverse de $\mathbf{T}$. Alors, par la formule (54. 14)

de Kotz et al. (2000) on a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G'}(\mathbf{m}) &:= \mathbf{B}\mathbf{V}_{G_p}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{m}\right)\mathbf{B}^\top \\
&= \mathbf{B}\left\{m_1^{p-2}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{m})\otimes(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{m}) + m_1\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}\mathbf{T}^\top \end{pmatrix}\right\}\mathbf{B}^\top \\
&= m_1^{p-2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\mathbf{B}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}\mathbf{T}^\top \end{pmatrix}\mathbf{B}^\top \\
&= m_1^{p-2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}\mathbf{T}^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & (\mathbf{T}^\top)^{-1} \end{pmatrix} \\
&= m_1^{p-2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T} \end{pmatrix} \\
&= m_1^{p-2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{I}_{k-1} \end{pmatrix} \\
&= m_1^{p-2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\mathbf{Diag}_k(0,1,\ldots,1)
\end{aligned}
$$

qui correspond à affinité près à la fonction variance des modèles *NST* F_p et conclut la preuve du Theoreme 4.3.1 pour $p > 2$. □

4.3.3 Démonstration du Théorème 4.3.1 pour $1 < p < 2$

Soient $k \in \{2,\ldots\}$ et $1 < p < 2$ fixés. Notons $\mathbf{F}_p$ la *FEN* de (4.2) avec $1 < p < 2$ et $q_1 = p + k - 1$. Montrons que la fonction variance définie par

$$\det \mathbf{V}_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{m}) = m_1^{p+k-1}, \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{F}_p} =]0,+\infty[\times \mathbb{R}^k, \tag{4.23}$$

est celle de la famille $\mathbf{F}_p$. Les résultats qui suivent sont nécéssaires pour la la démonstration du Théorème 4.3.1 avec $1 < p < 2$.

Lemme 4.3.9 *La fonction cumulante* $\mathbf{K}$ *associée à* $\mathbf{F}_p$ *vérifie pour tout* $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{F}_p}$,

(*i*) $\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) = [(2-p)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))]^{(p+k-1)/(2-p)} = m_1^{p+k-1}$.

(*ii*) $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{m}) > 0$.

Démonstration : (*i*) Cela découle des relations (*iv*) du Théorème 4.3.1 et (4.23).

(*ii*) Puisque $[(2-p)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))]^{(p+k-1)/(2-p)} = m_1^{p+k-1} > 0$ et que $m_1 > 0$; $1 < p < 2$, alors $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{m}) > 0$.

Lemme 4.3.10 *Soit* $\mathbf{G}_p$ *la FEN vérifiant (4.23) de fonctions variances* $\mathbf{V}_{\mathbf{G}_p}(\mathbf{m}) = \left(V_{ij}(\mathbf{m})\right)_{i,j=1,\ldots,k}$. *Alors*

$$V_{1j}(\mathbf{m}) = m_1^{p-1} m_j, \quad \forall j = 1, \ldots, k.$$

Démonstration : De la relation (i) du Lemme 4.3.9 on a

$$\frac{p+k-1}{2-p} \log\left[(p-2)\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))\right] = (p+k-1)\log m_1,$$

équivalent à

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) = \frac{1}{2-p} m_1^{2-p}, \tag{4.24}$$

et en dérivant respectivement par rapport à $\mathbf{m}$, on obtient

$$\mathbf{m}\left[\mathbf{V}_{F_p}(\mathbf{m})\right]^{-1} u = \frac{1}{m_1^{p-1}} (1, 0, \ldots, 0)\, u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^k; \tag{4.25}$$

et puisqu'on a $\mathbf{m} = \mathbf{K}'(\boldsymbol{\theta})$ et $\boldsymbol{\theta}'(\mathbf{m}) = \left[\mathbf{V}_{F_p}\mathbf{m}\right)\Big]^{-1}$ suivant les définitions de la paramétrisation par la moyenne et de la fonction variance de $\mathbf{G}_p$, respectivement. En particulier pour $u = \mathbf{V}_{\mathbf{G}_p}(\mathbf{m})e_j$ en (4.25) où $(e_j)_{j=1,\ldots,k}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^k$, on obtient le résultat désiré. □

Lemme 4.3.11 *Sous les hypothèses du Lemme 4.3.10, il existe une fonction* $g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}_-^\star$ *telle que*

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2-p}\left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2, \ldots, \theta_k)\right)\right]^{1-1/(p-1)}, \tag{4.26}$$

sur $\boldsymbol{\Theta} = \left\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k; \theta_1 + g(\theta_2, \ldots, \theta_k) < 0\right\}$.

Démonstration : A partir de Lemme 4.3.10 on a $V_{11}(\mathbf{m}) = m_1^p$, cela signifie que

$$D_{11}^2 \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \left(D_1 \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right)^p.$$

En intégrant par rapport à θ_1, il existe une fonction $g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}_-^\star$ telle que

$$D_1 \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \left[-(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2, \ldots, \theta_k)\right)\right]^{-1/(p-1)}. \tag{4.27}$$

On en déduit que $\theta_1 + g(\theta_2, \ldots, \theta_k) < 0$ car $D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1 > 0$, $p - 1 > 0$. Alors pour $\boldsymbol{\theta} = (0, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, on a $0 + g(\theta_2, \ldots, \theta_k) < 0$, par conséquent $g(\theta_2, \ldots, \theta_k) < 0$.
La dérivée de $D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ par rapport à θ_j donne

$$D_{1j}^2 \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{-g'(\theta_2, \ldots, \theta_k) D_1 \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{(p-1)\left(\theta_1 + g(\theta_2, \ldots, \theta_k)\right)}, \quad \forall j = 2, \ldots, k, \tag{4.28}$$

et par le Lemme 4.3.10 on a,

$$D_{1j}^2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = (D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}))^{p-1}\, D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}), \quad \forall j = 2,\dots,k \tag{4.29}$$

avec $D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_j$ et $D_{ij}^2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) = V_{ij}(\mathbf{m})$ pour $i,j = 1,\dots,k$. En combinant (4.28) et (4.29) on obtient

$$(D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}))^{p-1}\, D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{-g'(\theta_2,\dots,\theta_k)D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{(p-1)\,(\theta_1 + g(\theta_2,\dots,\theta_k))},$$

par conséquent,

$$D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g'(\theta_2,\dots,\theta_k)\left[-(p-1)\,(\theta_1 + g(\theta_2,\dots,\theta_k))\right]^{-1/(p-1)},$$

pour tout $j = 2,\dots,k$ et une intégration suivant θ_j donne

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2-p}\left[-(p-1)\,(\theta_1 + g(\theta_2,\dots,\theta_k))\right]^{1-1/(p-1)} + b(\theta_1), \tag{4.30}$$

où b est une fonction à variable réelle à déterminer. Et donc en dérivant (4.30) par rapport à θ_1 on a

$$D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \left[-(p-1)\,(\theta_1 + g(\theta_2,\dots,\theta_k))\right]^{-1/(p-1)} + b'(\theta_1),$$

comparer à (4.27) on trouve $b'(\theta_1) = 0$ soit $b(\theta_1) = b$ constante réelle. Et donc de (4.24) et (4.30) on obtient

$$\frac{1}{2-p}\left[-(p-1)\,(\theta_1 + g(\theta_2,\dots,\theta_k))\right]^{1-1/(p-1)} + b = -\frac{1}{p-2}m_1^{-(p-2)}$$

avec $m_1 = D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ ci-dessus alors $b = 0$. D'où l'expression (4.30) devient

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2-p}\left[-(p-1)\,(\theta_1 + g(\theta_2,\dots,\theta_k))\right]^{1-1/(p-1)},$$

qui conclut la démonstration du Lemme 4.3.11. □

Lemme 4.3.12 *A partir de Lemme 4.3.11, on obtient les assertions suivantes :*

(*i*) $D_{11}^2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1^p$.

(*ii*) $D_{1j}^2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1^{p-1}m_j$, $\forall j = 2,\dots,k$.

(*iii*) $D_{ij}^2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1^{-(2-p)}m_im_j + m_1g_{ij}''(\theta_2,\dots,\theta_k)$, $\forall i,j \in \{2,\dots,k\}$, *où* $m_j = D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ *pour tout* $j = 1,2,\dots,k$.

Démonstration : (*i*) et (*ii*) découlent du Lemme 4.3.10. Concernant (*iii*), la dérivée partielle de (4.26) par rapport à θ_i donne

$$D_i\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g_i'(\theta_2,\dots,\theta_k)\left[-(p-1)\,(\theta_1 + g(\theta_2,\dots,\theta_k))\right]^{-1/(p-1)} = m_i,$$

et par la suite,

$$\begin{aligned} D^2_{ij}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) &= g'_i(\theta_2,\dots,\theta_k)g'_j(\theta_2,\dots,\theta_k)\left[-(p-1)\left(\theta_1+g(\theta_2,\dots,\theta_k)\right)\right]^{-p/(p-1)} \\ &\quad +g''_{ij}(\theta_2,\dots,\theta_k)\left[-(p-1)\left(\theta_1+g(\theta_2,\dots,\theta_k)\right)\right]^{-1/(p-1)} \\ &= m_i m_j\left[-(p-1)\left(\theta_1+g(\theta_2,\dots,\theta_k)\right)\right]^{-(p-2)/(p-1)} \\ &\quad +g''_{ij}(\theta_2,\dots,\theta_k)\left[-(p-1)\left(\theta_1+g(\theta_2,\dots,\theta_k)\right)\right]^{-1/(p-1)} \\ &= m_1^{-(2-p)}m_i m_j + m_1 g''_{ij}(\theta_2,\dots,\theta_k), \end{aligned} \tag{4.31}$$

pour tout $i,j=2,\dots,k$. Le Lemme est donc démontré.

Lemme 4.3.13 *La fonction $g:\mathbb{R}^{k-1}\to\mathbb{R}^{\star}_{-}$ du Lemme 4.3.11 vérifie les propriétés suivantes :*

(*i*) *g est une fonction convexe.*

(*ii*) *$\det g''(\theta_2,\dots,\theta_k)$ est un réel constant indépendant de θ_j, $\forall j\in\{2,\dots,k\}$.*

(*iii*) *$g''=\Sigma_{k-1}$ est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^{k-1}$ indépendant de θ_j, $\forall j\in\{2,\dots,k\}$.*

Démonstration : Soit $\boldsymbol{\nu}_p=(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_1^c)$ la mesure génératrice de $\mathbf{G}_p$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{k-1}$.

$\boxed{(i)}$ Puisque la fonction $(\theta_2,\dots,\theta_k)\mapsto\mathbf{K}(0,\theta_2,\dots,\theta_k)=:\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_1^c}(\theta_2,\dots,\theta_k)$ est la fonction cumulante de $\boldsymbol{\nu}_1^c$, alors la fonction $(\theta_2,\dots,\theta_k)\mapsto\mathbf{K}_{\boldsymbol{\nu}_1^c}(\theta_2,\dots\theta_k)=\dfrac{1}{2-p}\left[-(p-1)g(\theta_2,\dots,\theta_k)\right]^{1-1/(p-1)}$ est convexe. Ceci implique que $(\theta_2,\dots,\theta_k)\mapsto\left[-(p-2)\mathbf{K}(0,\theta_2,\dots\theta_k)\right]^{1+1/(p-2)}=-(p-1)g(\theta_2,\dots,\theta_k)$ est aussi convexe. Par conséquent g est convexe.

$\boxed{(ii)}$ De Lemme 4.3.12 et Lemme 2.3.1, on peut écrire

$$\begin{aligned} \det\mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) &= \det\left[D^2_{ij}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\right]_{i,j=1,\dots,k} \\ &= \lambda\det(\mathbf{A}-\lambda^{-1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}), \end{aligned}$$

avec $\lambda=m_1^p$, $\mathbf{a}=m_1^{p-1}(m_2,\dots,m_k)^\top$ et $\mathbf{A}=\dfrac{1}{m_1^p}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}+m_1 g''_{ij}(\theta_2,\dots,\theta_k)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \det\mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) &= m_1^p\det\left(\frac{1}{m_1^p}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}+m_1 g''_{ij}(\theta_2,\dots,\theta_k)-\frac{1}{m_1^p}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\right) \\ &= m_1^p m_1^{k-1}\det g''_{ij}(\theta_2,\dots,\theta_k) \\ &= m_1^{p+k-1}\det g''_{ij}(\theta_2,\dots,\theta_k). \end{aligned}$$

Puisque $\det\mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta})$ doit être égal à m_1^{p+k-1}, on en déduit que $\det g''_{ij}(\theta_2,\dots,\theta_k)=1$ indépendant de θ_j, pour tout $j\in\{2,\dots,k\}$.

$\boxed{(iii)}$ Cela découle de (*ii*) et les résultats de Jögens-Calabi-Pogorelov.

Dans l'ordre de conclure la démonstration du Théorème pour $p > 2$, il suffit de montrer que le modèle $\mathbf{G}_p = \mathbf{G}(\boldsymbol{\nu}_p)$ des Lemmes 4.3.10-4.3.13 correspondent à $\mathbf{F}_p$ du Théoreme 4.3.1 à transformation affine près. En effet, de Lemme 4.3.13 avec $g''(\theta_2, \ldots, \theta_k) = \Sigma_{k-1}$, la fonction variance s'écrit

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_p}(\mathbf{m}) = m_1^{-(2-p)}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + m_1 \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \Sigma_{k-1} \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

où $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^\top$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{k-1}$. En appliquant la décomposition de Cholesky, il existe une matrice triangulaire $\mathbf{T}$ telle que $\Sigma_{k-1} = \mathbf{T}\mathbf{T}^\top$. Désignons par $\mathbf{G}'_p$ l'image de *FEN* $\mathbf{G}_p$ par la transformation linéaire $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^k$ avec $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix}$ où $\mathbf{T}$ est la matrice inverse de $\mathbf{T}$. Alors, par la formule (54. 14) de Kotz et al. (2000) on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{\mathbf{G}'}(\mathbf{m}) &:= \mathbf{B}\mathbf{V}_{\mathbf{G}_p}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{m}\right)\mathbf{B}^\top \\
&= \mathbf{B}\left\{ m_1^{p-2}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{m}) \otimes (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{m}) + m_1 \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}\mathbf{T}^\top \end{pmatrix} \right\} \mathbf{B}^\top \\
&= m_1^{-(2-p)}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + m_1 \mathbf{B} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}\mathbf{T}^\top \end{pmatrix} \mathbf{B}^\top \\
&= m_1^{-(2-p)}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + m_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}\mathbf{T}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & (\mathbf{T}^\top)^{-1} \end{pmatrix} \\
&= m_1^{-(2-p)}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + m_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T} \end{pmatrix} \\
&= m_1^{-(2-p)}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + m_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{I}_{k-1} \end{pmatrix} \\
&= m_1^{-(2-p)}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + m_1 \mathbf{Diag}_k(0, 1, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

qui correspond à affinité près à la fonction variance des modèles *NST* F_p et conclut la preuve du Theoreme 4.3.1 pour $1 < p < 2$. □

4.3.4 Démonstration du Théorème 4.3.1 pour $p = 1$

Nous démontrons dans cette sous-section que pour $p = 1$ et $k \in \{2, 3, \ldots\}$ fixés, la *FEN* $\mathbf{F}_p$ satisfaisant (4.2) avec $q_1 = p + k - 1$ c'est-à-dire la fonction

variance générailisée

$$\det \mathbf{V}_{\mathbf{F}_1}(\mathbf{m}) = m_1^k, \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{F}_1} =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^{k-1}, \tag{4.33}$$

est un modèle *NST* à affinité près. Les résultats suivants sont utiles pour la démonstration de ce théorème ($p = 1$).

Lemme 4.3.14 *La fonction variance généralisée (4.33) satisfait pour tout* $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_{\mathbf{F}_1}$,

(*i*) $\det \mathbf{V}_{\mathbf{F}_1}(\mathbf{m}) = [\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))]^k = m_1^k$.

(*ii*) $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) > 0$.

Démonstration : (i) C'est une combinaison de (4.33) et (*i*) du Théorème 4.3.1.

ii Puisque $m_1 > 0$ et que $[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))]^k = m_1^k$, alors $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) > 0$ pour $p = 1$. □

Lemme 4.3.15 *Soit* $\mathbf{G}_1$ *la FEN vérifiant (4.33) de fonction variance* $\mathbf{V}_{\mathbf{G}_1}(\mathbf{m}) = \left(V_{ij}(\mathbf{m})\right)_{i,j=1,\dots,k}$ *pour* $p = 1$. *Alors*

$$V_{1j}(\mathbf{m}) = m_j, \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Démonstration : A partir de relation (*i*) du Lemme 4.3.14 on a

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) = m_1, \tag{4.34}$$

et en dérivant respectivement par rapport à $\mathbf{m}$, on obtient

$$\mathbf{m}\left[\mathbf{V}_{\mathbf{G}_1}(\mathbf{m})\right]^{-1} u = (1, 0, \dots, 0)\, u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^k; \tag{4.35}$$

et puisqu'on a $\mathbf{m} = \mathbf{K}'(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m}))$ et $\boldsymbol{\theta}'(\mathbf{m}) = \left[\mathbf{V}_{\mathbf{G}_1}(\mathbf{m})\right]^{-1}$ suivant les définitions de la paramétrisation par la moyenne des *FEN* et de sa fonction variance, respectivement. En particulier pour $u = \mathbf{V}_{\mathbf{G}_1}(\mathbf{m})e_j$ en (4.35) où $(e_j)_{j=1,\dots,k}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^k$, on obtient le résultat désiré. □

Lemme 4.3.16 *Sous les hypothèses du Lemme 4.3.15, il existe une fonction* $g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}_-^\star$ *telle que*

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g(\theta_2, \dots, \theta_k) \exp(\theta_1), \tag{4.36}$$

sur $\boldsymbol{\Theta} = \left\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k; g(\theta_2, \dots, \theta_k) > 0\right\}$.

Démonstration : A partir de Lemme 4.3.15 on a $V_{11}(\mathbf{m}) = m_1$, cela signifie que

$$D_{11}^2 \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = D_1 \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}).$$

En intégrant par rapport à θ_1, il existe une fonction $g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}_+^\star$ telle que

$$D_1 \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g(\theta_2, \dots, \theta_k) \exp(\theta_1). \tag{4.37}$$

On en déduit que $g(\theta_2, \ldots, \theta_k) > 0$ car $D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1 > 0$. La dérivée de $D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ par rapport à θ_j donne

$$D^2_{1j}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g'(\theta_2, \ldots, \theta_k)\exp(\theta_1), \tag{4.38}$$

et par le Lemme 4.3.15 on a,

$$D^2_{1j}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}), \quad \forall j = 2, \ldots, k, \tag{4.39}$$

avec $D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_j$ et $D^2_{ij}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{m})) = V_{ij}(\mathbf{m})$ pour $i, j = 1, \ldots, k$. En combinant (4.38) et (4.39) on obtient

$$D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g'(\theta_2, \ldots, \theta_k)\exp(\theta_1),$$

pour tout $j = 2, \ldots, k$ et une intégration suivant θ_j donne

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g(\theta_2, \ldots, \theta_k)\exp(\theta_1) + c(\theta_1), \tag{4.40}$$

où c est une fonction à variable réelle à déterminer. Et donc en dérivant (4.40) par rapport à θ_1 on a

$$D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g(\theta_2, \ldots, \theta_k)\exp(\theta_1) + c'(\theta_1),$$

comparer à (4.37) on trouve $c'(\theta_1) = 0$ soit $c(\theta_1) = c$ constante réelle. Et donc de (4.34) et (4.40) on obtient

$$g(\theta_2, \ldots, \theta_k)\exp(\theta_1) + b = m_1$$

avec $m_1 = D_1\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ ci-dessus alors $c = 0$. L'expression (4.40) devient

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = g(\theta_2, \ldots, \theta_k)\exp(\theta_1),$$

qui conclut la démonstration du Lemme 4.3.16. □

Lemme 4.3.17 *A partir de Lemme 4.3.16, on obtient les assertions suivantes :*

(*i*) $D^2_{11}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1$.

(*ii*) $D^2_{1j}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_j$, *pour tout* $j = 2, \ldots, k$.

(*iii*) $D^2_{ij}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = m_1^{-1}m_i m_j + m_1 g''_{ij}(\theta_2, \ldots, \theta_k)$, $\forall i, j = 2, \ldots, k$, *où* $m_j = D_j\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ *pour tout* $j = 1, 2, \ldots, k$.

Démonstration : (*i*) et (*ii*) découlent du Lemme 4.3.15. (*iii*) est une conséquence directe du Lemme 4.3.7 avec $p = 1$. Le lemme est donc démontré. □

Lemme 4.3.18 *La fonction* $g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{\star}_{+}$ *du Lemme 4.3.16 vérifie les propriétés suivantes :*

(*i*) *g est une fonction convexe.*

(*ii*) $\det g''(\theta_2, \ldots, \theta_k)$ *est un réel constant indépendant de* θ_j, $\forall j \in \{2, \ldots, k\}$.

(*iii*) $g'' = \Sigma_{k-1}$ *est une matrice symétrique de* $\mathbb{R}^{k-1}$ *indépendant de* θ_j, $\forall j \in \{2, \ldots, k\}$.

Démonstration : $\boxed{(i)}$ Pour $\theta_1 = 0$, $\mathbf{K}(0, \theta_2, \ldots, \theta_k) = g(\theta_2, \ldots, \theta_k)\exp(0) = g(\theta_2, \ldots, \theta_k)$ et $\mathbf{K}$ est convexe alors il en est de même pour g.

$\boxed{(ii)}$ De Lemme 4.3.17 et Lemme 2.3.1, on peut écrire

$$\begin{aligned} \det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) &= \det\left[D^2_{ij}(\boldsymbol{\theta})\right]_{i,j=1,\ldots,k} \\ &= \lambda \det(\mathbf{A} - \lambda^{-1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}), \end{aligned}$$

avec $\lambda = m_1$, $\mathbf{a} = (m_2, \ldots, m_k)^\top$ et $\mathbf{A} = \dfrac{1}{m_1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} + m_1 g''_{ij}(\theta_2, \ldots, \theta_k)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) &= m_1 \det\left(\frac{1}{m_1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} + m_1 g''_{ij}(\theta_2, \ldots, \theta_k) - \frac{1}{m_1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\right) \\ &= m_1 m_1^{k-1} \det g''_{ij}(\theta_2, \ldots, \theta_k) \\ &= m_1^k \det g''_{ij}(\theta_2, \ldots, \theta_k). \end{aligned}$$

Puisque $\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta})$ doit être égal à m_1^k, on en déduit que $\det g''_{ij}(\theta_2, \ldots, \theta_k) = 1$ indépendant de θ_j, pour tout $j \in \{2, \ldots, k\}$.

$\boxed{(iii)}$ Cela découle de (*ii*) et les résultats de Jögens-Calabi-Pogorelov. □

Dans l'ordre de conclure la démonstration du Théorème pour $p = 1$, il suffit de montrer que le modèle $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}(\boldsymbol{\nu}_1)$ correspond à $\mathbf{F}_1$ du Théoreme 4.3.1 à transformation affine près. En effet, de Lemme 4.3.16 avec $g''(\theta_2, \ldots, \theta_k) = \Sigma_{k-1}$, la fonction variance s'écrit

$$\mathbf{V}_{\mathbf{G}_p}(\mathbf{m}) = m_1^{-1}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1 \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \Sigma_{k-1} \end{pmatrix}, \tag{4.41}$$

où $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^\top$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{k-1}$. En appliquant la décomposition de Cholesky, il existe une matrice triangulaire $\mathbf{T}$ telle que $\Sigma_{k-1} = \mathbf{T}\mathbf{T}^\top$. Désignons par $\mathbf{G}'_1$ l'image de *FEN* $\mathbf{G}_1$ par la transformation linéaire $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^k$ avec $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix}$ où $\mathbf{T}$ est la matrice inverse de $\mathbf{T}$. Alors, par la formule (54. 14)

de Kotz et al. (2000) on a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G'}(\mathbf{m}) &:= \mathbf{B}\mathbf{V}_{G_1}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{m}\right)\mathbf{B}^\top \\
&= \mathbf{B}\left\{m_1^{-1}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{m})\otimes(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{m}) + m_1\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}\mathbf{T}^\top \end{pmatrix}\right\}\mathbf{B}^\top \\
&= m_1^{-1}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\mathbf{B}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}\mathbf{T}^\top \end{pmatrix}\mathbf{B}^\top \\
&= m_1^{-1}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}\mathbf{T}^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & (\mathbf{T}^\top)^{-1} \end{pmatrix} \\
&= m_1^{-1}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{T} \end{pmatrix} \\
&= m_1^{-1}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{k-1}^\top \\ \mathbf{0}_{k-1} & \mathbf{I}_{k-1} \end{pmatrix} \\
&= m_1^{-1}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + m_1\mathbf{Diag}_k(0,1,\ldots,1),
\end{aligned}
$$

qui correspond à affinité près à la fonction variance des modèles *NST* F_1 et conclut la preuve du Theoreme 4.3.1 pour $p = 1$. □

4.4 Conclusion

Le problème de caractérisation des *FEN* par fonction variance généralisée est généralement associé à la résolution des équations de Monge-Ampère. Dans ce chapitre, on est parvenu à caractériser les modèles *NST* par fonction variance généralisée. Le résultat de cette caractérisation est élaboré par l'intermédiaire de l'expression de la fonction variance généralisée exprimée en fonction de la fonction cumulante. Par cette relation, la résolution des équations de Monge-Ampère associées à ce modèle se ramène tout simplement à une équation d'inconnue la "fonction cumulante".

Notons que, pour un échantillon de vecteurs aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. de modèles *NST* paramétrisés par la moyenne, de probabilités $\mathbf{P}(\mathbf{m},\mathbf{G}_{p,t})$, $p \geq 1$ fixé et $t > 0$. Les estimateurs de maximum de vraissemblance (MLE) et les estimateurs sans biais à variance minimale de la variance généralisée (2.8) sont facilement obtenus et égaux à : $T_{n;k;p,t} = \det \mathbf{V}_{\mathbf{G}_{p,t}}(\mathbf{X}) = t^{1-p}\left(\overline{X_1}\right)^{k+p-1}$, respectivement $U_{n;k;p,t} = C_{n;k;p,t}\left(n\overline{\mathbf{X}}\right)$ où $C_{n;k;p,t}$ est une fonction positive, voir Boubacar Maïnassara & Kokonendji (2014).

Suivant Boubacar Maïnassara & Kokonendji (2014), en combinant la puissance $(p+k-1)$ de la variance généralisée des modèles *NST* (Theorem 4.3.1), la nouvelle classe des modèles multivariés appelés *multiple stable Tweedie* (voir Ceunin et al., 2016a) ayant la fonction variance généralisée de la form

$$\det \mathbf{V}(\mathbf{m}) = m_1^{q_1} m_2^{q_2} \cdots m_\ell^{q_\ell}, \forall \mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)^\top \in \mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^k \tag{4.42}$$

pour $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$ donné et $q_s \in \mathbb{R}$, $s = 1, 2, \ldots, \ell$; avec $\ell = 0$ dans (4.42) concerne le modèle gaussien de dimension k avec $\det \mathbf{V}(\mathbf{m}) = 1$. En effet, pour $\ell = k$ dans (4.42), on a

$$q_1 = p + k - 1 - q_2 - \cdots - q_k. \tag{4.43}$$

Rappelons que $q_j = 0$ correspond à la composante normal pour $j = 2, \ldots, k$. Donc, si $\ell < k$ dans la relation (4.42), on a $k - \ell$ composantes gaussiennes dans (4.42). Des résultats intéressants ont été trouvés sur les estimateurs MLE et UMVU de ces nouveaux modèles ; lesquels méritent une discussion et étude globale, en particulier au niveau de leur caractérisation à l'aide des fonctions variances généralisées.

Conclusion générale et perspectives

Sommaire

Bilan des travaux 103
Perspectives 104

Bilan des travaux

Ce travail porte sur différentes caractérisations des modèles multivariées du type *NST* (stables-Tweedie normaux) et de type *MST* (stables-Tweedie multiples). On a d'abord caractérisé les *NST* par fonction variance et étudié les polynômes qui leurs sont associés en proposant une relation de récurrences polynomiales pour le paramètre de puissance variance $p = 1$. Selon les valeurs du paramètre de puissance variance p, la nature de ces polynômes est déduite, lesquels on a les polynômes $\boldsymbol{\nu}_p$-orthogonaux ou $\boldsymbol{\nu}_p$-pseudo-orthogonaux pour $p = 2$; $\boldsymbol{\nu}_p$-transthogonal ou $\boldsymbol{\nu}_p$-pseudo-orthogonaux pour $p = 3$ et p-orthogonal si $p \in \{2, 3, 4, \ldots\}$.

Ensuite, on a caractérisé par fonction variance les modèles multivariés *MST*. L'approche est similaire à celle utilisée pour les *NST*. La différence se situe au niveau du paramètre de puissance variance $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ à composantes multiples avec $p_1 \geq 1$. Cette caractérisation des *MST* reprend les grandes lignes de cas *NST* où il y a une certaine cohérence et une homogénéité qui se dégagent de ces caractérisations et a conduit à une nouvelle classification des modèles *MST*, laquelle rend la famille beaucoup plus compréhensible et donc facilement exploitable. Ainsi, selon les valeurs de la composante $p_1 \geq 1$ du paramètre de puissance variance nous avons résumé en quatre sous-classes les modèles *MST* : Le Poisson-*MST* ($p_1 = 1$), gamma-*MST* ($p_1 = 2$), Poisson composé-*MST* ($1 < p < 2$) avec un cas particulier de gamma-non-central-*MST* ($p_1 = 3/2$) et enfin, le positive-stable-*MST* ($p_1 > 2$) avec un cas particulier de gaussienne inverse-*MST* ($p_1 = 3$).

Et enfin, la caractérisation des *NST* a été étendue à l'aide de la fonction variance généralisée. Cette caractérisation est basée sur la résolution des

équations fondamentales de Monge-Ampère de la forme $\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) = m_1(\boldsymbol{\theta})^q$ avec $q = p + k - 1$ où k représente la dimension de l'espace considéré. Dans la littérature, seules les cas $q \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ ont été résolus. La méthode utilisée dans cette thèse pour caractériser par fonction variance généralisée les *NST* consiste à transformer les équations de Monge-Ampère associées par la relation $\det \mathbf{K}''(\boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}))$, où f est une fonction positive donnée et $\mathbf{K}$ la fonction cumulante à déterminer. Cette dernière relation nous permet d'isoler $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ et remonter analytiquement à la fonction variance des modèles *NST*. Cette méthode parait efficace et pratique à comparer aux méthodes existantes dans la littérature.

Notons que la fonction $p \mapsto \mathbf{K}_p$ de tous les satbles-Tweedie en univariés comme en multivariés est continue sur $]1, +\infty[$.

Perspectives

La description des modèles *MST* telle qu'établit parait complexe au niveau de l'expression de la fonction variance de paramètre de puissance à composantes multiples où toutes les composantes du vecteur moyen sont présentées en puissance de paramètre. Un problème ouvert serait : de regarder la continuité au point $p = 1$ évoquée ci-dessus, de déterminer les polynômes de *NST* pour $p \neq \mathbb{N}$. Aussi, d'étendre la caractérisation par fonction variance généralisée établie aux modèles *NST* au cas *MST*, de déterminer la nature des polynômes qui leurs sont associés, d'estimer les paramètres des modèles *MST*, d'appliquer dans la vie courante ces résultats ; néanmoins pour certains valeurs de paramètre de puissance variance.

Autre travail en perspectif serait de revoir la description des modèles *NST* puis *MST* conditionnés cette fois par deux ou plusieurs variables stables-Tweedie fixées ; c'est-à-dire on part un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_k)^\top \in \mathbb{R}^k$ tel qu'à permutation près $X_1, X_2, \ldots, X_j$ sont stables fixées et $X_{j+1}, \ldots, X_k$ sachant celles fixées sont normales ou stables-Tweedie.

Références bibliographiques

[1] Bar-Lev, S., Bschouty, D., Enis, P., Letac, G., Lu, I. & Richard, D. (1994). The diagonal multivariate natural exponential families and their classification. *Journal of Theoretical Probability*, **7**, 883-929.

[2] Barndorff-Nielsen, O. (1978). *Information and Exponential Families in Statistical Theory*. Wiley, New York.

[3] Boubacar-Maïnassara, Y. & Kokonendji, C. C. (2014). On normal stable Tweedie models and power-generalized variance functions of only one component. *TEST*, **23**, 585-606.

[4] Caffarelli, L. & Li, Y. Y. (2004). A Liouville theorem for solutions of the Monge-Ampère equation with periodic data. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, **21**, 97-120.

[5] Calabi, E. (1958). Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens. *Michigan Mathematical Journal*, **5**, 105-126.

[6] Casalis, M. (1996). The $2d + 4$ simple quadratic natural exponential families on $\mathbb{R}^d$. *The Annals of Statistics*, **24**, 1828-1854.

[7] Chebana, F., El Adlouni, S. & Bobée, B. (2010). Mixed estimation methods for Halphen distributions with applications in extreme hydrologic events. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. **24**, 359-376.

[8] Cheng, S. Y. & Yau, S. T. (1986). Complete affine hypersurfaces : I. The completeness of affine metrics. *Communications on Pure Applied Mathematics*, **39**, 839-866.

[9] Cuenin, J., Faivre, A. & Kokonendji, C. C. (2016a). On generalized variances of products of powered components and multiple stable Tweedie models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, In Press (accepted 2016.01.18).

[10] Cuenin, J., Jørgensen, B. & Kokonendji, C.C. (2016b). Simulations of full multivariate Tweedie with flexible dependence structure. *Computational Statistics*, In Press [DOI :10.1007/s00180-015-0617-3].

[11] Feinsilver, P. (1986). Some classes of orthogonal polynomials associated with martingales. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **98**, 298-302.

[12] Feller W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*, vol. **2**, 2nd edn. Wiley, New York.

[13] Furman, E. & Landsman, Z. (2010). Multivariate Tweedie distributions and some related capital-at-risk analyses. *Insurance : Mathematics and Economics*, **46**, 351-361.

[14] Gikhman, I. I. & Skorokhod, A. V. (2004). *The Theory of Stochastic Processes II*. Springer, New York.

[15] Ghribi, A., Kokonendji, C. C. & Masmoudi, A. (2015). Characteristic property of a class of multivariate variance functions. *Lithuanian Mathematical Journal*, **55**, 506-517.

[16] Ghribi, A. & Masmoudi, A. (2010). Characterization of multinomial exponential families by generalized variance. *Statistics and Probability Letters*, **80**, 939-944.

[17] Gutiérrez, C. E. (2001). *The Monge-Ampère Equation*. Birkhäuser, Boston.

[18] Gutierrez-Rubio, D., López-Blázquez, F. & Pommeret, D. (2002). A characterization of simple quadratic natural exponential families with a reverse martingale property. *C. R. Acad. Sci. Paris, Math.*, **334**, 405-409.

[19] Hassairi, A. (1999). Generalized variance and exponential families. *The Annals of Statistics*, **27**, 374-385.

[20] Hassairi, A. & Zarai, M. (2004). Characterization of the cubic exponential families by orthogonality polynomials. *The Annals of Probability*, **32**, 2463-2476.

[21] Hassairi, A., Zarai, M. (2006). Characterization of the simple cubic multivariate exponential families. *Journal of Functional Analysis*, **235**, 69-89.

[22] Iliopoulos, G. & Kourouklis, S. (1998). On improve interval estimation for the generalized variance. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **66**, 305-320.

[23] Iyengar, S. & Liao, Q. (1997). Modeling neural activity using the generalized inverse Gaussian distribution. *Biological Cybernetics*, **77**, 289-295.

[24] Jörgens, K. (1954). Über die lösungen der differentialgleichung $rt-s^2 = 1$. *Mathematische Annalen*, **127**, 130-134.

[25] Jørgensen, B. (1982). *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*. Springer-Verlag, Heidelberg.

[26] Jørgensen, B. (1997). *The theory of dipersion models*. Chapman & Hall, London.

[27] Jørgensen, B. (2013). Construction of multivariate dispersion models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **27**, 285-309.

[28] Jørgensen, B. & Kokonendji, C. C. (2016). Discrete dispersion models and their Tweedie asymptotics. *AStA-Advances in Statistical Analysis*, **100**, 43-78.

[29] Kaufman, H. & Roberts G. E., (1966). *Table of Laplace transforms*. Saunders, London.

[30] Kendal, W. S. (2014). Multifractability attributed to dual central limit-like convergence effects. *Physica A*, **201**, 22-23.

[31] Kokonendji, C. C. (1994). Exponential families with variance functions in $\sqrt{\Delta}P(\Delta)$: Seshadri's class. *TEST*, **3**, 123-172.

[32] Kokonendji, C. C. (1995). Une caractérisation des vecteurs gaussiens n-dimensionnels. Prépublication du Laboratoire LAMIFA, No. 95/03, Université de Picardie Jules Vernes- Amiens, 9 pages.

[33] Kokonendji, C. C. (2005a). Characterizations of some polynomial variance functions by d-pseudo-orthogonality. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **19**, 427-438.

[34] Kokonendji, C. C. (2005b). On d-orthogonality of the Sheffer systems associated to a convolution semigroup. *Journal of Computing and Applied Mathematics*, **181**, 83-91.

[35] Kokonendji, C. C., Demétrio, C. G. B. & Dossou-Gbété (2004). Some discrete exponential dispersion models : Poisson-Tweedie and Hinde-Demétrio classes. *SORT-Statistics and Operations Research Transactions*, **28**, 201-214.

[36] Kokonendji, C. C. & Masmoudi, A. (2006). A characterization of Poisson-Gaussian families by generalized variance. *Bernoulli*, **12**, 371-379.

[37] Kokonendji, C. C. & Masmoudi, A. (2013). On the Monge-Ampère equation for characterizing gamma-Gaussian model. *Statistics and Probability Letters*, **83**, 1692-1698.

[38] Kokonendji, C. C., Moypemna-Sembona, C. C. & Sioké-Rainaldy, J. (2015). A characterization of multivariate normal stable Tweedie models and their associated polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **288**, 159-168.

[39] Kokonendji, C. C. & Nisa, K., (2016). Generalized Variance Estimations of Normal - Poisson Models. In *Forging Connections between Computational Mathematics and Computational Geometry*, Chap. 21, pp. 247-260 (Editors : K. Chen, A. Ravidran), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol. **124**, Springer International Publishing Switzerland.

[40] Kokonendji, C. C. & Pommeret, D. (2005). Characterization of multivariate exponential families with polynomial variance function. *African Diaspora Journal of Mathematics - Advances in Mathematics*, **1**, 78-84.

[41] Kokonendji, C. C. & Pommeret, D. (2007). Comparing UMVU and ML estimators of the generalized variance for natural exponential families. *Statistics*, **41**, 547-558.

[42] Kokonendji, C. C. & Seshadri, V. (1994). Le déterminant de la dérivée seconde d'une transformée de Laplace est une transformée de Laplace. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Mathématiques*, **318**, 361-366.

[43] Kokonendji, C. C. & Seshadri, V. (1996). On the determinant of the second derivative of a Laplace transform. *The Annals of Statistics*, **24**, 1813-1827.

[44] Kokonendji, C. C. & Zarai, M. (2007). Transorthogonal polynomials and simple cubic multivariate distributions. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, **21**, 171-201.

[45] Kotz, S., Balakrishnan, N., & Johnson, L. N. (2000). *Continuous Multivariate Distributions*. John Wiley and Sons, Chicester.

[46] Koudou, A. E. & Ley, C. (2014). Characterizations of GIG laws : a survey complemented with two new results. *Probability Surveys*, **11**, 161-176.

[47] Koudou, A. E. & Pommeret, D. (2002). A Characterization of Poisson–Gaussian Families by Convolution-Stability. *Journal of Multivariate Analysis*, **81**, 120-127.

[48] Letac, G. (1989). Le problème de classification des familles exponentielles naturelles de $\mathbb{R}^d$ ayant une fonction-variance quadratique, in *Probability Measures on Groups*, Lecture Notes in Mathematics, **1306**, 194-215, Springer-Verlag, Berlin.

[49] Letac, G. (1992). *Lectures on Natural Exponential Families and Their Variance Functions*, vol. **50**. Monografias de matematicá, Instituto de Matematicá Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

[50] Letac, G. & Mora, M. (1990). Natural Real Exponential Families with Cubic Variance Functions. *The Annals of Statistics*, **18**, 1-37.

[51] Lindsay, B. G. (1989). On the determinants of moment matrices. *The Annals of Statistics*, **17**, 711–721.

[52] Loeper, G. & Rapetti, F. (2005). Numerical solution of the Monge-Ampère equation by a Newton's algorithm. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Mathématiques*, **340**, 319-324.

[53] Louati, M., Masmoudi, A. and Mselim, F. (2015). Multivariate Normal α-Stable Exponential Families, *Mediterranean Journal of Mathematics*, [DOI : 10.1007s0009-015-0562-y].

[54] Meixner, J. (1934). Orthogonal polynomsysteme mit einer besonderen gestalt der erzengenden function. *Journal of the London Mathematical Society*, **9**, 6-13.

[55] Morris, C. N. (1982). Natural exponential families with quadratic variance functions. *The Annals of Statistics* **10**, 65–82.

[56] Muir, T. (1960). *A Treatise on the Theory of Determinants*. Dover, New York.

[57] Nisa, K., Kokonendji C. C. & Saefuddin, A, (2015). Characterizations of multivariate normal-Poisson models. *Journal of the Iranian Statistical Society*, **14**, In Press [DOI :10.7508/jirss.2015.02.003].

[58] Pommeret, D. (1996). Orthogonal polynomials and natural exponential families. *Test*, **5**, 77-111.

[59] Pommeret, D. (2000). Orthogonality of the Sheffer system associated to a Lévy process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **86**, 1-10.

[60] Pommeret, D. (2001). *K* terms recurrence relations and polynomial variance functions of the *K*th degre. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **133**, 555-565.

[61] Pogorelov, A. V. (1972). On the improper convex affine hyperspheres. *Geometriae Dedicata*, **1**, 33-46.

[62] Pólya, G. & Szegö, G. (1972). *Problems and Theorems in Analysis I*. Springer, Berlin.

[63] Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge.

[64] Shanbhag, D. N. (1979). Diagonality of the Bhattacharyya matrix as a characterization. *Theory of Probability and its Applications*, **24**, 430-433.

[65] Schoutens, W. & Teugels, J. L. (1998). Lévy processes, polynomials and martingales. *Communications in Statistics - Stochastics Models*, **14**, 335-349.

[66] Tweedie, M. C. K. (1984). An index which distinguishes between some important exponential families. In *Statistics : Applications and New Directions. Proceedings of the Indian Statistical Golden Jubilee International Conference* (eds. J. K. Ghosh and J. Roy), 579-604.

[67] Villani, C. (2003). *Topics in Optimal Transportation*. Graduate Studies in Mathematics, vol. **58**, American Mathematical Society, Providence.

[68] Wilks, S. S. (1932). Certain generalizations in the analysis of variance. *Biometrika*, **24**, 471-494.

[69] Zhang, F. (2005). *The Schur Complement and Its Applications*. Springer, Berlin.