Arithmétique et D-modules

Adriano Marmora

▶ **To cite this version:**

Adriano Marmora. Arithmétique et D-modules. Théorie des nombres [math.NT]. IRMA, Université de Strasbourg, 2017. tel-01628170v2

HAL Id: tel-01628170
https://theses.hal.science/tel-01628170v2

Submitted on 17 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à diriger des recherches

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Adriano Marmora

Arithmétique et D-modules

Soutenue le 10 novembre 2017
devant la commission d'examen

Ahmed Abbes, examinateur
Daniel Caro, rapporteur
Bruno Chiarellotto, examinateur
Elmar Große-Klönne, rapporteur
Christine Huyghe, examinatrice
Tobias Schmidt, examinateur
Nobuo Tsuzuki, rapporteur
Jean-Pierre Wintenberger, garant

www-irma.u-strasbg.fr

cnrs dépasser les frontières

IRMA
Institut de Recherche
Mathématique Avancée

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Table des matières

Remerciements v

Avant-propos vii
Travaux originaux présentés dans ce mémoire vii
Travaux originaux non-présentés dans ce mémoire viii

Partie 1. La formule du produit en cohomologie rigide 1

Introduction 3
0.1. Notations 6
0.2. Leitfaden 7

Chapitre 1. La formule du produit et les constantes des équations fonctionnelles 9
1.1. Coefficients p-adiques : rappels sur les F-isocristaux et exemples 9
1.2. Germes de F-isocristaux et théorème de monodromie 13
1.3. Formule du produit 15
1.4. Définition des facteurs epsilon locaux 16
1.5. Preuve de la formule 18

Chapitre 2. Transformation de Fourier locale et phase stationnaire 23
2.1. $\mathscr{D}$-modules arithmétiques 23
2.2. Analyse microlocale p-adique 29
2.3. Intermezzo sur l'irrégularité 32
2.4. Principe de la phase stationnaire en cohomologie rigide 33

Chapitre 3. Sur la structure de Frobenius de la transformation de Fourier d'un $\mathscr{D}$-module arithmétique. Application aux sommes de Gauss. 37
3.1. La formule de Gross–Koblitz 37
3.2. Transformation de Fourier globale en cohomologie rigide 39
3.3. Frobenius et transformation de Fourier 42
3.4. Une preuve alternative de la formule de Gross–Koblitz 44

Partie 2. Sur une question de continuité pour la cohomologie finie de Bloch et Kato 49

4.1. Introduction 51
4.2. Cohomologie finie de Bloch–Kato 52
4.3. Continuité de la cohomologie finie 53
4.4. Esquisse de la preuve du théorème de continuité 55

Bibliographie 59

Remerciements

C'est avec une vive émotion que je m'apprête à soutenir mon habilitation à diriger des recherches. J'ai longtemps hésité et voulu inconsciemment reporter ce moment. Maintenant que je rédige ces lignes, la raison de mon irrésolution m'apparaît à l'esprit. Un sentiment mêlant l'embarras de se retourner sur son propre travail à une insatisfaction persistante, due à l'ambition de vouloir aller toujours plus loin dans ses recherches, m'empêchait de me résoudre à tourner cette page.

C'est le désir de vouloir raconter à mes collègues un « conte » mathématique à travers ce mémoire qui m'a sorti de l'impasse. Je les remercie ici de tout cœur, car l'activité d'un mathématicien n'est pas aussi solitaire qu'on pourrait le croire ; au moins elle ne l'a jamais été pour moi et je n'aurais pas pu mener mon travail sans l'entourage intelligent et propice de mes collègues, à Strasbourg comme ailleurs, pendant toutes ces années.

Mes premiers remerciements vont donc à Tomoyuki et Adrian, co-auteurs des résultats exposés dans les pages qui suivent. Sans leur aide, leur ténacité, leur amitié, ces résultats n'auraient certainement pas vu le jour. Nous avons partagé les joies et les frustrations que le difficile travail de recherche et de rédaction comporte.

Je remercie Jean-Pierre Wintenberger, pour qui j'éprouve une grande estime et admiration, d'avoir accepté d'être le garant de mon habilitation. Je remercie vivement les rapporteurs, Daniel Caro, Elmar Große-Klönne et Nobuo Tsuzuki, pour leur travail et les suggestions sur la première version du manuscrit. Bruno Chiarellotto et Ahmed Abbes m'ont suivi et conseillé pendant de longues années, ma gratitude et mon amitié envers eux ne pourraient pas tenir dans une phrase. Depuis mon arrivée à Strasbourg, le soutien, les conseils et l'amitié de Christine Huyghe ont toujours été présents pour moi. Je remercie Tobias Schmidt de me faire l'honneur de participer à mon jury. Ma gratitude va particulièrement aux membres extérieurs du jury de prendre le temps de se déplacer pour la soutenance malgré leurs engagements professionnels et familiaux.

Un remerciement très chaleureux à mes collègues Strasbourgeois, anciens et nouveaux, qui ont su créer un environnement si agréable toutes ces années ; en particulier je tiens à remercier ceux de mon équipe pour toutes les belles mathématiques qu'ils m'ont apprises au quotidien lors des échanges dans les séminaires, groupes de travail, etc. Un remerciement spécial pour un des derniers arrivés, Giuseppe, qui partage mon bureau, que je dérange en permanence pour n'importe quoi, et avec qui nous nous amusons à la folie à faire des mathématiques. Je n'aurais certainement pas la place ici pour remercier un par un tous les amis et collègues à qui je tiens, mais je voudrais saluer Pierre G., les deux Olivier B., et Andrea P., mathématiciens talentueux et amis.

Le français n'est pas ma langue maternelle, mais ma langue adoptive. Dès lors je glisse souvent dans l'expression. Je remercie Jean-Pierre, Christine et les rapporteurs pour avoir trouvé de nombreuses coquilles dans ce texte et m'avoir ainsi permis de l'améliorer. Dans ce sens un remerciement particulier à Pierre Baumann qui a aimablement corrigé ces remerciements.

Enfin je voudrais remercier ma famille, mes parents et mes sœurs, qui ont été là pour moi depuis le début ; mon beau-frère Diego ; mon neveu Pietro, qui était chez moi cet été pendant la

rédaction de ce texte, et à qui je souhaite de découvrir sa voie ; et mon épouse Ana, qui est de mon côté depuis une vie, et que j'aime.

Strasbourg, novembre 2017

Avant-propos

Ce texte est un survol sur mes travaux que j'ai rédigé en vue de mon Habilitation à Diriger des Recherches. J'aurais pu intituler ce mémoire sous la forme interrogative

« Comment les équations différentielles interviennent en arithmétique ? »,

tant cette question est représentative de mes gouts et traduit le *leitmotif* de ma recherche depuis le début.

Le premier résultat que je présente est la preuve d'une conjecture pour les constantes des équations fonctionnelle des fonctions L en cohomologie rigide. Ce résultat est l'analogue d'une formule de Deligne et Laumon, cf. **[Lau87]**, dite *formule du produit*, pour les mêmes constantes en cohomologie étale ℓ-adique, pour un nombre premier ℓ différent de la caractéristique de la base. J'avais formulé cette conjecture dans **[Mar08]** et prouvé certains cas de celle-ci. La plus part de mes recherches dans les années qui ont suivi avaient pour but de prouver le cas général de cette formule, que j'ai pu finalement démontrer en collaboration avec Tomoyuki Abe.

La théorie de Hodge p-adique a été toujours un de mes sujets d'intérêts préférés et je présente ici un autre résultat, en collaboration avec Adrian Ioviţa, issu d'un projet né à la fin d'un groupe de travail sur l'article de Marc Kisin **[Kis06]**, qu'on avait organisé ensemble pendant l'hiver 2007 à Montréal à l'occasion de mon séjour post-doctoral.

Ce mémoire est divisé en deux parties indépendantes avec une bibliographie commune : la première partie expose les résultats obtenus en collaboration avec Tomoyuki Abe, qui sont parus dans l'article **[AM15]** à l'exception de ceux de la section 3.4 du chapitre 3, qui ont été rédigés dans la courte note **[AM12]** ; la deuxième partie présente les résultats de l'article **[IM15]** en collaboration avec Adrian Ioviţa. La première partie compte une introduction et trois chapitres, la deuxième un seul chapitre. Ça va sans dire que toute erreur présente dans ce texte est de ma propre responsabilité et pas de mes co-auteurs.

Au moment de la rédaction j'ai imaginé les différents chapitres comme étant des exposés destinés à un public de géomètres arithmétiques. En effet la plupart de ces chapitres suivent de près les notes des exposés que j'ai donnés dans des séminaires ou des conférences aux cours des dernières années. Par conséquent, on devrait pouvoir les lire dans l'ordre qu'on préfère. Toutefois les trois premiers chapitres sont fortement entrelacées comme détaillé dans l'introduction à la première partie et illustré dans le *Leitfaden* à la page 7.

Travaux originaux présentés dans ce mémoire

– A.Iovita, A.Marmora, *On the continuity of the finite Bloch-Kato cohomology*,
Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. 134 (2015), 239–271.
`http://dx.doi.org/10.4171/RSMUP/134-6`

– T.Abe, A.Marmora, *Yet another proof of Gross–Koblitz formula*,
juin 2012, disponible sur demande, 1–4.

– T.Abe, A.Marmora, *Product formula for p-adic epsilon factors*,
Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu (JIMJ), Vol. 14 (02) Avril 2015, 275–377.
`http://dx.doi.org/10.1017/S1474748014000024`

Travaux originaux non-présentés dans ce mémoire

– B.Köck, A.Marmora, *Integrality of epsilon representations of wildly ramified Galois covers*, annexe de *Galois-module theory for wildly ramified covers of curves over finite fields*, par H.Fischbacher-Weitz et B.Köck, prépublication arXiv, 34–40.
`https://arxiv.org/pdf/1412.3406.pdf`

Première partie

La formule du produit en cohomologie rigide

Introduction

Qu'est-ce la formule du produit dont il est mention dans le titre ? C'est une égalité entre certains invariant globaux de nature cohomologique sur une courbe sur un corps fini et des invariants locaux définis aux points fermés de la courbe.

Pour être plus précis nous allons introduire des notations : dans toute cette partie, on désignera par X une courbe *propre et lisse* sur un corps *fini* k de caractéristique p. Certains résultats sont valables plus en général pour k parfait ou même juste de caractéristique strictement positive : on renvoie à l'article original, cf. [**AM15**, §0.0.4], pour une description précise des hypothèses nécessaires. Pour simplifier l'exposition on supposera aussi X *géométriquement connexe*. On notera $q = p^f$ le cardinal de k.

Commençons par un tableau d'analogies entre différentes théorie cohomologiques. En caractéristique p il y a deux sortes des cohomologies de Weil : la cohomologie étale ℓ-adique, pour ℓ premier différent de p ; et la cohomologie rigide, dont les constantes vivent dans des corps p-adiques. En caractéristique zéro, disons sur une courbe propre et lisse $\mathfrak{X}$ sur $\mathbb{C}$, nous avons la cohomologie singulière de $\mathfrak{X}(\mathbb{C})$ et la cohomologie de Rham algébrique de $\mathfrak{X}$. Toutes ces cohomologies donnent les mêmes nombres de Betti. La forte analogie entre ces théories est sans cesse renouvelée par des définitions et des théorèmes qui sont les *avatars* d'une même idée dans chacune d'entre elles.

Dans ce mémoire il sera question de cohomologie rigide. Dans la table 1 nous comparons les coefficients de trois de ces théories cohomologiques. La beauté de la cohomologie rigide vient de ce qu'elle s'inspire à la fois de la cohomologie étale ℓ-adique et de la cohomologie de de Rham. Avec la première elle partage la caractéristique positive de la base et par conséquent l'étude des problèmes de ramification (ou d'irrégularité) est plus aisée qu'en caractéristique zéro, car nous disposons de groupes de Galois locaux ayant une filtration de ramification non-triviale. Avec la deuxième elle adopte les équations différentielles (modules à connexions) comme briques de base de la théorie. Il en résulte une meilleure calculabilité, et pas seulement algorithmique, des groupes de cohomologies et des invariants associés.

Table 1. Une table d'analogies entre théories cohomologiques

$\ell \neq p$	$\ell = p$	$\ell = 0$
Cohomologie étale ℓ-adique	Cohomologie rigide	Cohomologie de de Rham
Faisceaux ℓ-adiques lisses sur un ouvert $U \subset X$ non vide, $\pi_1^{ét}(\bar{U}, *) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$	Isocristaux sur un ouvert $U \subset X$ non vide, surconvergents à l'infini	Modules à connexion sur un ouvert $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$ non vide, $\nabla\colon M \to M \otimes \Omega^1_{\mathfrak{U}/\mathbb{C}}$
Faisceaux pervers	$\mathscr{D}^\dagger$-modules holonomes	$\mathscr{D}$-modules holonomes
Faisceaux de Weil	Structures de Frobenius	Structures de Hodge

Entrons dans les lignes de la table. Du côté ℓ-adique les premiers coefficients que nous rencontrons sont les faisceaux lisses sur un ouvert, dont la donnée est équivalente à une représentation ℓ-adique continue du groupe fondamental étale géométrique de l'ouvert. Du côté de Rham nous avons les modules à connexion, forcément intégrable car la base est une courbe ; ceux d'entre eux qui sont à singularités régulières correspondent par Riemann–Hilbert aux représentations complexes du groupe fondamental topologique $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathfrak{U}(\mathbb{C}), *)$, *i.e.* aux systèmes locaux sur l'espace $\mathfrak{U}(\mathbb{C})$ des points complexes de $\mathfrak{U}$. On voit apparaitre dans l'hypothèse de régularité la restriction due au fait que le groupe $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathfrak{U}(\mathbb{C}), *)$ est trop petit par rapport à $\pi_1^{\acute{e}t}(\bar{U}, *)$ pour tenir compte des phénomènes de ramification. En cohomologie rigide les coefficients analogues portent le nom d'isocristaux surconvergents et ont été introduits par Berthelot, cf. [**Ber86**, **Ber96a**]. Ils se réalisent en tant que modules à connexion sur une courbe formelle relevant U à la caractéristique zéro et munis de conditions de surconvergence sur la connexion. Nous en rappellerons la définition au début du chapitre 1. Ils constituent une catégorie bien plus large que celle des représentations p-adiques du groupe fondamental étale, même si, en travaillant au voisinage d'un point, on peut, grâce au théorème de monodromie p-adique, renouer avec le côté galoisien.

Ces trois catégories de coefficients ne sont pas assez grandes et notamment elle ne sont pas stables par certaines opérations cohomologiques que l'on est amené à effectuer dans les dévissages des preuves. Il faut élargir les coefficients comme dans la quatrième ligne de la table : nous avons les faisceaux pervers en ℓ-adique et les $\mathscr{D}$-modules holonomes en cohomologie de Rham, dont ceux régulier correspondent, à nouveau par Riemann–Hilbert, aux faisceaux pervers en cohomologie singulière. En cohomologie rigide Berthelot a introduit les $\mathscr{D}$-modules arithmétiques en s'inspirant du côté de Rham. Nous en rappellerons la définition au début du chapitre 2.

Pour avoir plus d'informations arithmétiques il est naturel et nécessaire d'ajouter une structure supplémentaire : la structure de Frobenius. La stabilité par les six opérations pour ces objets sera atteinte par Daniel Caro, d'abord dans le cas des courbes, puis en générale en introduisant la notion de surholonomie. Pour continuer l'analogie et terminer la dernière ligne de la table, nous avons du côté gauche les faisceaux de Weil et du côté droit les structures de Hodge.

Revenons maintenant à la formule du produit en cohomologie rigide. Elle sera énoncée dans le premier chapitre, dans (1.3.1.1) pour les F-isocristaux et dans (1.5.2.4) pour les F-$\mathscr{D}$-modules arithmétiques (ici le prefixe F indique que les objets sont munis d'une structure de Frobenius). Soit M un F-isocristal sur U surconvergent le long de $X\backslash U$. Le premier invariant global qu'on voudrait considérer est la caractéristique d'Euler–Poincaré (*i.e.* la somme alterné des dimensions de la cohomologie de M), qui en cohomologie rigide est reliée par une formule de Christol et Mebkhout à l'irrégularité de M aux points à l'infini, de la même façon qu'en cohomologie ℓ-adique par la formule de Grothendieck–Ogg–Chafarevitch. La formule du produit, tant en ℓ-adique qu'en p-adique, étudie le produit alterné des determinants du Frobenius agissant sur la cohomologie. L'invariant global qui remplace la caractéristique d'Euler–Poincaré est ainsi la constante de l'équation fonctionnelle de la fonction L de l'isocristal, appelée souvent le facteur epsilon global. Les invariants locaux qui remplacent l'irrégularité sont les facteurs epsilon locaux de Deligne, qui sont fortement liés à la correspondance de Langlands. C'est en effet en s'inspirant du programme de Langlands que Deligne avait conjecturé la formule du produit en cohomologie ℓ-adique et prouvé certains cas de celle-ci. La preuve du cas général à été donnée par Laumon dans [**Lau87**]. L'idée de la preuve vient de l'analyse et consiste à utiliser un « Principe de la phase stationnaire ». C'est un théorème classique en analyse qui donne le comportement asymptotique de la transformée de Fourier d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de variable réelle en terme de données locales aux point critiques de la fonction. Laumon utilise la transformation de Fourier–Deligne pour les faisceaux (pervers) ℓ-adiques et établit un principe de la phase stationnaire dans ce contexte. Un point clé très important est la définition des données

locales aux points de ramification du faisceaux qui est donnée par Laumon en introduisant des transformations de Fourier dites locales et définies via les cycles évanescents. En cohomologie rigide nous avons la transformation de Fourier–Huyghe pour les F-$\mathscr{D}$-modules arithmétiques holonomes. Pour suivre la stratégie de Laumon il fallait établir une phase stationnaire p-adique et définir les transformée locales. L'obstacle était que le formalisme des cycles évanescents relatifs n'est pas disponible et on ne pouvait pas procéder par simple imitation de la preuve. Nous nous sommes alors inspiré de l'analyse algébrique où un principe de la phase stationnaire existe pour les $\mathscr{D}$-modules, cf. [**Mal91**, **GL04**, **Sab08**]. Pour le prouver il a été nécessaire d'utiliser les faisceaux des microdifférentielles arithmétiques dont une théorie satisfaisante a été construite par Abe dans [**Abe15**]. Pour munir la transformée de Fourier locale d'une structure de Frobenius nous avons dû étudier plus en détail la structure de Frobenius sur la transformée de Fourier–Huyghe. Nous présentons dans le chapitre 3 un résultat qui décrit la structure de Frobenius de la transformée de Fourier naïve d'un F-$\mathscr{D}$-module arithmétique. En testant ce résultat sur un exemple, celui de l'isocristal de Kummer, nous avons trouvé une nouvelle preuve de la formule de Gross–Koblitz qui calcule une somme de Gauss p-adique. Nous présentons cette preuve dans la dernière section du chapitre.

Nous donnerons plus de détails sur la structure de la preuve de la formule du produit à la fin du premier chapitre.

Décrivons un peu plus en détails le contenu des trois chapitres. Le but du premier chapitre est d'énoncer la formule du produit et détallier une liste d'outils intervenant dans sa preuve. Les deux premières sections sont constituées de rappels : la première sur les notions de base pour les F-isocristaux surconvergents sur une courbe et la deuxième sur les aspects locaux de la théorie et le théorème de monodromie p-adique. On donne aussi deux exemples classiques qui seront utiles tout le long du texte. La section 3 énonce la formule du produit dans le cadre des F-isocristaux. La définition des constantes locales qui apparaissent dans le membre de droite de la formule est rappelé dans la section suivante. La troisième section contient aussi l'énoncé de la formule de Christol et Mebkhout pour la caractéristique d'Euler–Poincaré citée plus haut. Dans la dernière section on décrit les différentes étapes qui mènent à la démonstration de la formule du produit. Il est essentiel de travailler avec les $\mathscr{D}$-modules arithmétiques et on utilisera le matériel présenté dans les chapitres 2 et 3.

Le chapitre 2 introduit le formalisme des $\mathscr{D}$-modules arithmétiques et traite de la transformée de Fourier locale et du principe de la phase stationnaire. Dans la première section on rappelle les bases de la théorie due à Berthelot. On se bornera aux cas des courbes et au cas local d'un disque formel unité traité par Crew. On termine la première section par une revue des propriétés dont nous aurons besoin. Dans la deuxième section on introduit les microdifférentielles p-adiques et la microlocalisation, et on présentera le théorème de stabilité, qui permet dans le cas d'une courbe de donner une description alternative du cycle caractéristique d'un $\mathscr{D}^{\dagger}$-module et de la notion d'holonomie. On prendra une pause dans la section 3 avec une parenthèse sur la notion d'irrégularité en présentant un résultat de comparaison entre deux définitions : celle analytique de Christol et Mebkhout et celle homologique de Garnier. On termine le chapitre par une section dédiée à la transformé de Fourier locale et le principe de la phase stationnaire. On utilisera ici la transformation de Fourier–Huyghe rappelé dans le chapitre 3.

Le but du chapitre 3 est d'expliquer la preuve de la formule de Gross–Koblitz via la transformation de Fourier. La preuve est détaillée dans la dernière section, §4. Après des rappels sur l'énoncé de la formule dans la première section, on introduit, dans la deuxième section, les transformations de Fourier–Huyghe, naïve et géométrique, et les théorèmes de comparaison de Huyghe.

La section 1 contient aussi des rappels d'analyse p-adique concernant les π de Dwork et les caractères additifs d'un corps fini. Ces rappels sont utilisés pour dans la description du Frobenius de l'isocristal de Dwork dans le chapitre 1. Dans la section 3 on rappelle les structures de Frobenius sur les $\mathscr{D}^\dagger$-modules et on énonce notre théorème permettant de calculer la structure de Frobenius sur la transformée de Fourier naïve.

Les relations entre les trois chapitres de cette partie sont résumées dans §0.2 plus bas.

0.1. Notations

Ces notations seront utilisées dans toute la première partie. Au début de chaque chapitre de la partie, nous rappellerons les notations principalement utilisées et les complèterons au fur et à la mesure avec d'autres.

Soit p est un nombre premier. Pour tout anneau A, on note $A^\times$ le groupe de ses éléments inversibles et $\mathrm{W}(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt (p-typiques) à coefficients dans A.

On désignera par $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, par $\mathbb{Z}_p$ son anneau d'entiers et par $\mathbb{F}_p$ son corps résiduel. On choisit une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, et on note $|\cdot|$ la valeur absolue de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ normalisée par $|p| = p^{-1}$.

Soit $K \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ un corps de valuation discrète complet à corps résiduel fini. On note K^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de K dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On note R_K l'anneau de valuation de K, $\mathfrak{m}_K$ son idéal maximal, k son corps résiduel et $q = p^f$ le cardinal de k ; lorsque il n'y aura pas de risque de confusion on posera $R = R_K$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_K$. On note $\overline{\mathbb{F}}_p$ le corps résiduel de $\overline{\mathbb{Q}}_p$, qui est une clôture algébrique de k et on pose $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}} = \mathrm{W}(\overline{\mathbb{F}}_p)[p^{-1}]$.

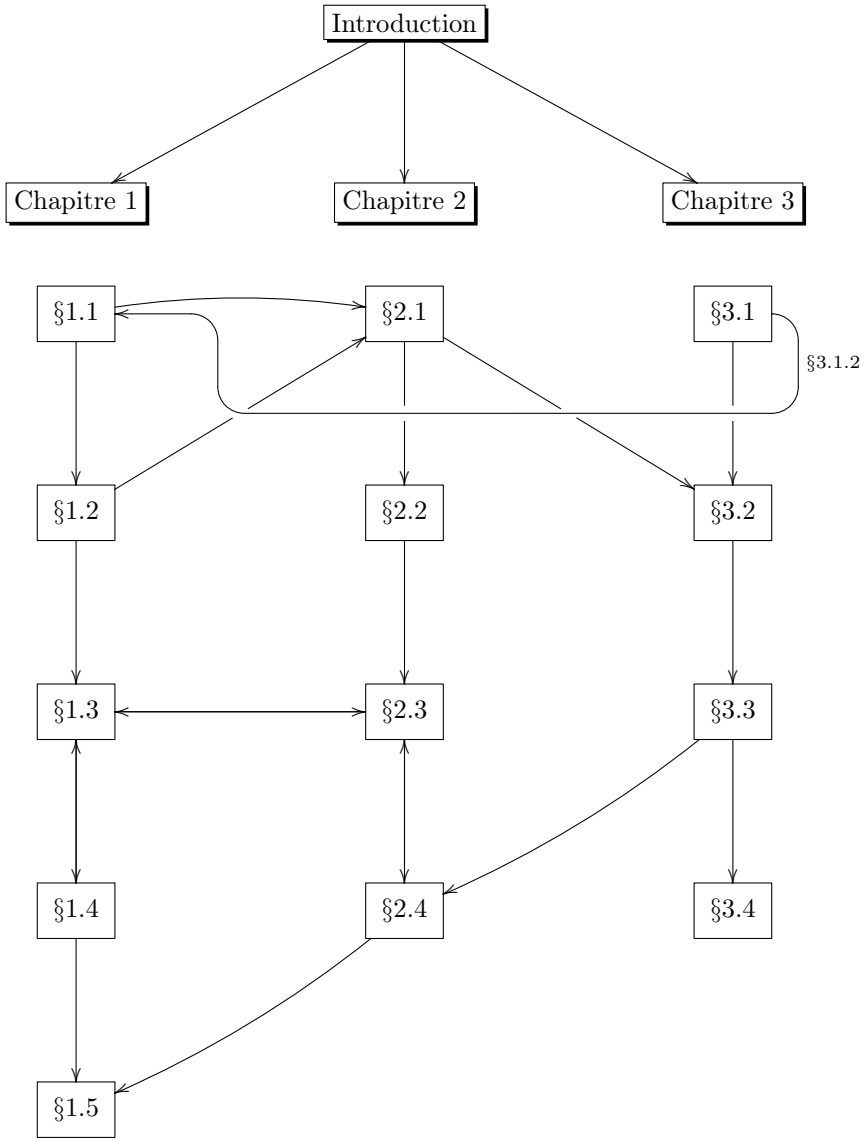
Pour une courbe $\mathscr{C}$, on note par $|\mathscr{C}|$ l'ensemble de ses points fermés. Nous avons noté plus haut par X une courbe propre, lisse et géométriquement connexe sur k.

Pour un entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout complexe $C^\bullet$, on posera $C^\bullet[n] = C^{\bullet+n}$ et on notera $\mathcal{H}^n(C^\bullet)$ la cohomologie de $C^\bullet$ en degré n.

Pour un entier n et un objet M dans une catégorie de coefficients pour la cohomologie rigide (F-isocristaux, F-$\mathscr{D}^\dagger$-modules), on désignera par $M(1)$ le Twist à la Tate de M.

0.2. Leitfaden

Première Partie



CHAPITRE 1

La formule du produit et les constantes des équations fonctionnelles

1.1. Coefficients p-adiques : rappels sur les F-isocristaux et exemples

Les F-isocristaux surconvergents ont été introduits par Berthelot pour généraliser la cohomologie cristalline et disposer de coefficients cohomologiques sur des ouverts des variétés propres. Dans ce texte nous n'allons travailler, à quelque exception près, que sur des courbes. Pour les rappels des définitions nous allons donc nous limiter à la dimension un ou zéro. L'article fondateur de référence est **[Ber96a]**, d'autres références conseillées sont les ouvrages **[LS07, LS11]** et **[Ked10]**. Les articles **[Cre87, Cre98]** constituent aussi une bonne introduction, notamment **[Cre98]** dans le cas des courbes.

Nous allons revoir d'abord le cas de dimension zéro : précisément sur le spectre d'un corps parfait de caractéristique p. Puis, pour tout ouvert non-vide $U \subset X$, on donnera les grandes lignes de la définition de la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$ des F-isocristaux sur U surconvergents le long de $X \backslash U$. On terminera la section par deux exemples classiques qui seront fondamentaux dans la suite : les F-isocristaux de Dwork et de Kummer. Dans la section 1.2 nous rappellerons les aspects locaux de la théorie, c'est-à-dire la définition du germe d'un F-isocristal au voisinage d'un point de X et le « côté galoisien » donné par le théorème de monodromie p-adique.

D'abord nous avons besoin d'un peu plus de notations.

1.1.1. La cohomologie rigide, étant une cohomologie de Weil, doit avoir des coefficients de caractéristique zéro. Il faut relever tout nos objets en caractéristique zéro à commencer par le corps de base.

D'après 0.1, nous avons noté R un anneau de valuation discrète, de caractéristique zéro, complet, de corps résiduel fini k, et corps de fractions K. On suppose maintenant que R est muni d'un isomorphisme $\sigma\colon R \to R$, relevant le Frobenius absolu $x \mapsto x^p$ de k. L'isomorphisme σ s'étend en un automorphisme de K, qu'on désignera encore par σ et qu'on appellera le Frobenius.

On rappelle que nous avons noté par $|\cdot|\colon K \to [0, +\infty[$ la valeur absolue p-adique de K, normalisée par $|p| = \frac{1}{p}$.

1.1.2. F-isocristaux sur un corps parfait. Par définition un F-isocristal sur $\mathrm{Spec}(k)$ à coefficients dans K est un K-espace vectoriel M de dimension finie, muni d'un isomorphisme $\varphi_M\colon M \to M$ semi-linéaire par rapport à σ, *i.e.*

$$\forall a \in K, \forall m \in M, \qquad \varphi_M(am) = \sigma(a)\varphi_M(m).$$

On dit que φ_M est le *Frobenius* de l'isocristal M ou *une structure de Frobenius* sur M et pour alléger les notations, on omettra parfois l'indice M. Il est équivalent de présenter la donnée du Frobenius de façon linéaire, en munissant M d'un isomorphisme linéaire

$$\widetilde{\varphi}\colon \sigma^*(M) \to M,$$

où $\sigma^*(M) = K \otimes_{\sigma,K} M$. Plus en général on peut définir une structure de Frobenius *d'ordre* h, pour $h \geq 1$ entier, en remplaçant le Frobenius σ par σ^h dans la définition ci-dessus.

Un morphisme de F-isocristaux $M \to N$ est une application linéaire de K-espaces vectoriels commutant aux *Frobenii*. La catégorie des F-isocristaux sur $\mathrm{Spec}(k)$ à coefficients dans K sera notée $F\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(k)|K)$ (ou $F^h\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(k)|K)$ si les structures de Frobenius ont ordre h). Comme k est fini de cardinal $q = p^f$, la catégorie $F^f\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(k)|K)$ n'est rien d'autre que la catégorie des K-espaces vectoriels munis d'un isomorphisme.

Plus généralement soient C un corps parfait de caractéristique p et $\widetilde{K}$ une extension finie du corps $\mathrm{W}(C)[p^{-1}]$, munie d'un isomorphisme $\sigma\colon \widetilde{K} \to \widetilde{K}$ relevant le Frobenius algébrique de C. On définit la catégorie $F\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(C)|\widetilde{K})$ des F-isocristaux sur $\mathrm{Spec}(C)$ à coefficients dans $\widetilde{K}$, de façon analogue au cas précédent. Dans la suite nous serons intéressés surtout aux cas $C = \overline{\mathbb{F}}_p$ et $\widetilde{K} = \widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}} = \mathrm{W}(\overline{\mathbb{F}}_p)[p^{-1}]$, ou au cas C/k extension finie et $\widetilde{K}$ le corps composé de K et $\mathrm{W}(C)[p^{-1}]$.

Exemple 1.1.2.1. Soit $\lambda = sr^{-1}$ un nombre rationnel, avec s, r entiers premiers entre eux et $r \geq 1$ (pour $\lambda = 0$ on prendra $r = 1$). On se donne un $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel de dimension r, avec une base $e_1, \ldots, e_r$, et on le munit du Frobenius défini par $\varphi(e_i) = e_{i+1}$, pour $1 \leq i \leq r-1$, et $\varphi(e_r) = p^{-s}e_1$. On obtient ainsi un F-isocristal dans $F\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)|\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$ qu'on note $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}}(\lambda)$.

1.1.3. Filtration par les pentes du Frobenius. Par un théorème classique de Dieudonné et Manin, comme $\overline{\mathbb{F}}_p$ est algébriquement clos, la catégorie $F\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)|\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$ est semi-simple et les objets simples (à isomorphisme près) sont les $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}}(\lambda)$ de l'exemple 1.1.2.1, pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$. En particulier tout objet $M \in F\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)|\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}})$ se casse en

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} M_\lambda \,,$$

où M_λ est un isocristal isocline de pente λ, *i.e.* isomorphe à une somme finie de copies de $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{nr}}(\lambda)$. On dit qu'un F-isocristal est *unité*[1] si toutes ses pentes sont zéro, *i.e.* $M = M_0$. La *filtration par les pentes* du Frobenius sur M est définie par $\mathrm{Fil}^\lambda(M) = \oplus_{\mu \leq \lambda} M_\mu$.

Pour tout $M \in F^h\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(k)|K)$ et n entier on notera $M(n)$ le F^h-isocristal défini par le même espace vectoriel muni du Frobenius $p^{-hn}\varphi_M$. On appelle $M(n)$ le *Twist de Tate* de M.

1.1.4. F-isocristaux surconvergents sur une courbe. Dans l'introduction nous avons désigné par X une courbe propre et lisse sur k. Soit Z un diviseur de X et notons $U = X \backslash Z$ l'ouvert complémentaire. Pour définir la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$ des F-isocristaux surconvergents le long de Z nous devons relever U et X en caractéristique zéro.

On se donne un relèvement formel $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ de $U \hookrightarrow X$ sur R : c'est-à-dire que $\mathfrak{X}$ est une courbe formelle propre et lisse sur $\mathrm{Spf}(R, \mathfrak{m})$ de fibre spéciale X et $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ est un plongement ouvert de fibre spéciale $U \hookrightarrow X$. On notera $\mathfrak{X}_K$ la fibre générique de $\mathfrak{X}$, qui est une courbe analytique rigide sur K, et $\mathrm{sp}\colon \mathfrak{X}_K \to \mathfrak{X}$ l'application de spécialisation. Pour toute partie S de $\mathfrak{X}$ on pose $]S[_{\mathfrak{X}} = \mathrm{sp}^{-1}(S)$, et on l'appelle le *tube* de S dans $\mathfrak{X}$. On note $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}$) le faisceau structurel de $\mathfrak{X}_K$ (resp. $\mathfrak{U}_K$) et $\Omega^1_{\mathfrak{X}_K/K}$ (resp. $\Omega^1_{\mathfrak{U}_K/K}$) le faisceau des formes différentielles.

1. *unit-root* en anglais

Supposons aussi que le Frobenius absolu de X se relève dans un morphisme $\varphi\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ σ-linéaire de schémas formels. Il induit un Frobenius $\varphi\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K}$ et un homomorphisme φ-linéaire $d\varphi\colon \Omega^1_{\mathfrak{X}_K/K} \to \Omega^1_{\mathfrak{X}_K/K}$ qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K} & \xrightarrow{d} & \Omega^1_{\mathfrak{X}_K/K} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle d\varphi} \\ \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K} & \xrightarrow{d} & \Omega^1_{\mathfrak{X}_K/K} \end{array}$$

où $d\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K} \to \Omega^1_{\mathfrak{X}_K/K}$ est la connexion canonique. On rappelle qu'une connexion sur un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K}$-module cohérent M est une application $\nabla\colon M \to M \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K}} \Omega^1_{\mathfrak{X}_K/K}$ additive et satisfaisant la règle de Leibnitz (*i.e.* pour toute section a de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K}$ et m de M, on a $\nabla(am) = a\nabla(m) + m \otimes da$).

Exemple 1.1.4.1. Si $U = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t]) \hookrightarrow \mathbb{P}^1_k$, nous prenons $\mathfrak{U} = \widehat{\mathbb{A}}^1_R = \mathrm{Spf}(R\{t\}) \hookrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^1_R$, où

$$R\{t\} = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\Big|\, \forall\, n, a_n \in R, \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \right\}$$

est l'anneau des séries convergentes dans le disque unitaire (*i.e.* pour $|t| \leq 1$), et $\widehat{\mathbb{P}}^1_R$ désigne la droite projective formelle. Pour tout point fermé x de la fibre spéciale $\widehat{\mathbb{P}}^1_R$, le tube $]x[$ est le disque ouvert $D(\tilde{x}, 1)$ de la droite projective analytique sur K centré dans un relèvement $\tilde{x} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ de la coordonnée de x et de rayon un (*i.e.* défini par $|t - \tilde{x}| < 1$). On peut choisir le Frobenius $\varphi\colon R\{t\} \to R\{t\}$ tel que $\varphi(t) = t^p$; on aura $d\varphi(dt) = d(\varphi(t)) = pt^{p-1}dt$.

Lorsque $U \neq X$, le faisceau de fonctions $\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}$ n'est pas suffisant pour définir la catégorie de F-isocristaux qu'on veut utiliser. Nous aurons besoin du faisceau des fonctions surconvergentes : on note $j\colon \mathfrak{U}_K \hookrightarrow \mathfrak{X}_K$ l'inclusion ouverte et on note $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}$ le sous-faisceau suivant de $j_*\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}$

$$j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K} = \varinjlim_{]\mathfrak{U}[\subset V \subset \mathfrak{X}_K} j_{V*}j_V^*\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_K}\,,$$

où la limite est prise sur le système des voisinages strictes V de $]\mathfrak{U}[_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathfrak{X}_K$ et $j_V\colon V \hookrightarrow \mathfrak{X}_K$ désigne l'inclusion.

Définition 1.1.4.2. Un F-isocristal sur U surconvegent le long de $Z = X\backslash U$ est la donnée d'un $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}$-module cohérent M sur $\mathfrak{X}_K$ muni d'une connexion

$$\nabla\colon M \to M \otimes_{j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}} j^\dagger\Omega^1_{\mathfrak{U}_K/K}$$

et d'un isomorphisme $\varphi_M\colon M \to M$, semi-linéaire par rapport au Frobenius de $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}$ et horizontale par rapport à la connexion. La condition d'horizontalité revient à demander que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}} j^\dagger\Omega^1_{\mathfrak{U}_K/K} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_M} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_M \otimes d\varphi} \\ M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}} j^\dagger\Omega^1_{\mathfrak{U}_K/K} \end{array}$$

Les morphismes de F-isocristaux sont les morphismes de $j^\dagger\mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K}$-modules commutant aux *Frobenii* et horizontales par rapport à la connexion.

La catégorie ainsi définie est indépendante (à équivalence canonique près) du choix du relèvement formel $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ de $U \hookrightarrow X$ et du choix (et de l'existence même) du relèvement du Frobenius. Elle ne dépend que de U, elle est de nature locale en U et fonctorielle en U. On la notera $F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$.

On donnera des exemples de F-isocristaux plus bas, cf. 1.1.5 et 1.1.6.

Remarque 1.1.4.3. En général la définition requiert une condition supplémentaire de surconvergence de la connexion, qui s'exprime en termes de surconvergence l'isomorphisme de Taylor. Sur une courbe cette condition est automatiquement garantie par la structure de Frobenius : si $U = X$, donc U propre, par le « *Dwork's trick* » cf. [**Kat73**, 3.1.2] ; si $U \neq X$, donc U affine, par [**Ber02**, 2.5.7].

1.1.4.4. Lorsque $\mathfrak{U}$ est affine, des théorèmes d'affinité, cf. [**Ber96a**, 2.5.2, 2.5.8], permettent de ne considérer que les sections globales dans la définition. Se donner un F-isocristal surconvergent M est équivalent alors à se donner un module projectif de type fini sur l'anneau $\Gamma(\mathfrak{X}_K, j^\dagger \mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K})$, muni d'une connexion et d'un Frobenius horizontale. On parlera dans ce cas de (φ, ∇)-modules sur l'anneau $\Gamma(\mathfrak{X}_K, j^\dagger \mathscr{O}_{\mathfrak{U}_K})$ des fonctions sur $\mathfrak{U}_K$ surconvergentes à l'infini.

1.1.4.5. Pour tout point fermé $i_x : x \to U$, le foncteur image inverse est donné par le foncteur des sections horizontales de ∇ sur le disque ouvert $]x[$ centré en x. L'horizontalité du Frobenius garantit que c'est un F-isocristal sur $\mathrm{Spec}(k(x))$. Le « *Dwork's trick* » implique que ce F-isocristal a le même rang que le F-isocristal sur U, *i.e.* la connexion admet sur $]x[$ une base de sections horizontales de cardinal maximal.

1.1.4.6. A tout isocristal $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$ on associe des groupes $H^i_{\mathrm{rig}}(U, M)$ dites de cohomologie rigide. Ils sont définis comme l'hypercohomologie du complexe de de Rham associé à M. Ce sont de F-isocristaux dans $F\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(k)|K)$. On définit aussi des groupes de cohomologie à support compact $H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M) \in F\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(k)|K)$. Tout ces groupes sont nuls si i est différent de $0, 1$ ou 2. Dans le cas d'une courbe affine la définition est très concrète, cf. par exemple [**Cre98**, 8.1].

Remarque 1.1.4.7.

(1) Dans [**LS11**] Bernard Le Stum donne une description cristalline très élégante de la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$. Il construit un site, appelé *le site surconvergent* tel que la catégorie des modules de présentation finie sur ce site soit équivalente à $F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$. La cohomologie rigide est la cohomologie de ce site.

(2) Le langage des $\mathscr{D}$-modules arithmétiques, qu'on rappellera au chapitre 2, en incorporant les conditions de (sur)convergence dans la construction même du faisceaux $\mathscr{D}^\dagger(Z)$, permet une définition alternative de la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$. Cette approche n'utilise que les schémas formels p-adiques et pas leur fibre générique.

1.1.5. L'isocristal de Dwork. L'isocristal de Dwork est un object crucial de la théorie. Il est l'analogue en cohomologie de de Rham de l'équation différentielle satisfaite par l'exponentielle complexe, et du faisceau de Artin–Schreier en cohomologie ℓ-adique. Dans ce mémoire il nous intéresse car il est le noyau de la transformée de Fourier–Huyghe, cf. 3.2.2, qui nous utilisons pour démontrer la formule du produit.

Pour le définir on suppose d'abord que R contienne une racine π du polynôme $X^{p-1} + p$, fixée par σ. Un tel élément s'appelle π de Dwork et on renvoie à 3.1.2 pour des rappels d'analyse p-adique concernant ce choix.

On considère la K-algèbre

$$\mathscr{O}(^\dagger\infty) = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \Big| \forall n \geq 0, a_n \in K, \exists\, \rho > 1, \lim_{n\to+\infty} |a_n|\rho^n = 0 \right\}$$

des fonctions sur $\widehat{\mathbb{A}}^1_R$ surconvergentes le long de ∞. Le F-isocristal de Dwork $\mathscr{L}_\pi \in F\text{-Isoc}^\dagger(\mathbb{A}^1_k|K)$ se réalise comme un $\mathscr{O}(^\dagger\infty)$-module libre de rang un. En notant $\mathfrak{e}$ une base de $\mathscr{L}_\pi$, le Frobenius et la connexion sont données par

$$\begin{cases} \mathscr{L}_\pi = \mathscr{O}(^\dagger\infty)\mathfrak{e}, \\ \nabla(\mathfrak{e}) = -\pi\mathfrak{e} \otimes dt, \\ \varphi(\mathfrak{e}) = \theta_\pi(t)\mathfrak{e}, \end{cases}$$

où $\theta_\pi(t) = \exp(\pi(t - t^p)) \in \mathscr{O}(^\dagger\infty)$, cf. 3.1.2. C'est un F-isocristal unité, ce qui veut dire que pour tout point géométrique $i_x \colon x \to \mathbb{A}^1_k$, l'image inverse $i_x^*\mathscr{L}_\pi$ est un F-isocristal unité sur x.

Nous avons $H^2_{\mathrm{rig}}(\mathbb{A}^1, \mathscr{L}_\pi) = 0$ par définition de cohomologie rigide sans support, et on peut montrer

$$H^0_{\mathrm{rig}}(\mathbb{A}^1, \mathscr{L}_\pi) = \ker \nabla = 0, \qquad H^1_{\mathrm{rig}}(\mathbb{A}^1, \mathscr{L}_\pi) = \mathrm{Coker}\, \nabla = 0.$$

Remarquons que le noyau de l'action de ∇ restreinte aux fonctions analytiques sur le disque $D(0,1)$ est

$$i_0^*\mathscr{L}_\pi = \ker \nabla_{|]0[} = K \exp(\pi t)\mathfrak{e}\,,$$

mais $\exp(\pi t) \notin \mathscr{O}(^\dagger\infty)$. Le Frobenius de $i_0^*\mathscr{L}_\pi$ envoie la base $\exp(\pi t)\mathfrak{e}$ sur $\exp(\pi t)\mathfrak{e}$.

1.1.6. L'isocristal de Kummer. Soit $\alpha \in \frac{1}{q-1}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. On considère la K-algèbre

$$\mathscr{O}(^\dagger\{0,\infty\}) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \left| \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{Z}, a_n \in K, \exists\, \rho_1 < 1,\ \rho_2 > 1, \\ \forall \rho \in]\rho_1, \rho_2[,\ \lim\limits_{n\to\pm\infty} |a_n|\rho^n = 0 \end{array} \right. \right\}$$

des fonctions sur $\widehat{\mathbb{P}}^1_R \backslash \{0,\infty\}$ surconvergentes le long de 0 et ∞.

Le F-isocristal de Kummer $\mathscr{K}_\alpha \in F\text{-Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_m|K)$ se réalise comme un $\mathscr{O}(^\dagger\{0,\infty\})$-module libre de rang un. En notant $\mathfrak{e}_\alpha$ une base de $\mathscr{K}_\alpha$, le Frobenius et la connexion sont données par

$$\begin{cases} \mathscr{K}_\alpha = \mathscr{O}(^\dagger\{0,\infty\})\mathfrak{e}_\alpha, \\ \nabla(\mathfrak{e}) = \alpha t^{-1}\mathfrak{e}_\alpha \otimes dt, \\ \varphi(\mathfrak{e}) = t^{\alpha(q-1)}\mathfrak{e}_\alpha. \end{cases}$$

La structure de Frobenius a ordre f, où $q = p^f$, et en particulier elle est K-linéaire. C'est aussi un F-isocristal unité.

Dans ce mémoire le F-isocristal de Kummer apparaitra de manière fondamentale dans le chapitre 3 dans la preuve de la fromule de Gross–Koblitz : cf. les exemples 3.2.1.3 et 3.3.1.3 et la sous-section 3.4.2 ; ainsi que dans une étape de la preuve de la formule du produit, cf. preuve de (1.5.3.2) à la page 21.

1.2. Germes de F-isocristaux et théorème de monodromie

1.2.1. Notations. Soit x un point fermé de X. On note $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X en x, qui est un anneau de valuation discrète car X est lisse. On note $\mathfrak{m}_x$ son idéal maximale et on pose $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ et on note $\deg(x)$ le degré de $k(x)$ sur k. On pose $K_x = K \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{W}(k(x))$, qui est un corps extension non ramifiée de K de corps résiduel $k(x)$. On note encore $|\cdot|$ l'unique valeur absolue étendant celle de K et σ le Frobenius de K_x. Pour tout x on choisi une uniformisante t_x de $\mathcal{O}_{X,x}$ et on écrira $t = t_x$ lorsque il n'y aura pas d'ambiguïté. Le complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à $k(x)[\![t_x]\!]$ (à nouveau par lissité). On pose $S_x = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$, $\eta_x = \mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}\, \widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$ et

$k(\eta_x) = \mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$. On désigne par $j_x\colon \eta_x \to S_x$ le point ouvert de S_x et par $i_x\colon x \to S_x$ le point fermé. On appellera S_x (resp. η_x) le trait complet (resp. le point générique) de X autour de x. Nous avons un foncteur images inverse, cf. **[Cre98**, 8.3.2],

$$j_x\colon F\text{-Isoc}^\dagger(U|K) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|K_x) \tag{1.2.1.1}$$

qui associe à tout isocristal M un « germe de F-isocristal » en x, et on écrira aussi $M_{|\eta_x} = j_x^*(M)$. La définition de cette catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|K_x)$, aboutissement du foncteur j_x^*, sera rappelée en 1.2.2. Avant cela il faut introduire l'anneau de Robba en x

$$\mathcal{R}(\eta_x) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{Z}, a_n \in K_x,\ \exists\ \epsilon < 1 \\ \forall \rho \in\ [\epsilon, 1[,\ \lim\limits_{n\to\pm\infty} |a_n|\rho^n = 0 \end{array} \right\}. \tag{1.2.1.2}$$

C'est l'anneau des séries de Laurent (infinies) convergentes dans un intervalle $[\epsilon, 1[$, avec $\epsilon < 1$ dépendant de la série. On note $\mathcal{R}^+(\eta_x)$ le sous-anneau de $\mathcal{R}(\eta_x)$ des séries à coefficients entiers ($\forall n \in \mathbb{Z}$, $|a_n| \leq 1$). C'est un anneau de valuation discrète muni de la norme de Gauss $\|\cdot\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$, qui n'est pas complet mais néanmoins Hensélien. Son corps résiduel est isomorphe à $k(\eta_x) = k(x)(\!(t_x)\!)$ et son corps des fractions, noté $\mathcal{R}^b(\eta_x)$, est un sous corps dense de $\mathcal{R}(\eta_x)$. Le Frobenius de $k(\eta_x)$ se relève en un endomorphisme d'anneau $\varphi\colon \mathcal{R}^+(\eta_x) \to \mathcal{R}^+(\eta_x)$ qui est σ-linéaire. On l'appelle Frobenius et il s'étend à $\mathcal{R}(\eta_x)$ par continuité.

1.2.2. Germes de F-isocristaux. Nous pouvons à présent définir les objets de la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|K_x)$, qu'on appelle aussi (φ, ∇)-modules sur $\mathcal{R}(\eta_x)$. Ce sont les $\mathcal{R}(\eta_x)$-modules M libres de type fini munis d'une connexion plate

$$\nabla_M\colon M \to M \otimes_{\mathcal{R}(\eta_x)} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(\eta_x)/K_x}, \quad \text{où} \quad \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(\eta_x)/K_x} = \mathcal{R}(\eta_x)dt_x\,,$$

et d'un Frobenius $\varphi_M\colon M \to M$, φ-linéaire et horizontal par rapport à ∇_M. Les morphismes de $F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|K_x)$ sont les applications $\mathcal{R}(\eta_x)$-linéaires, horizontales par rapport à la connexion et commutant avec les Frobenii.

Soient $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$ et $x \in |X|$. Nous pouvons distinguer deux cas : si $x \in |U|$, alors $M_{|\eta_x}$ a une base de sections horizontales, c'est-à-dire $M_{|\eta_x} \cong \mathcal{R}_{\eta_x} \otimes_{K_x} M^\nabla_{|\eta_x}$, et on est réduit essentiellement au F-isocristal $i_x^*M = M^\nabla_{|\eta_x} \in F\text{-Isoc}(\mathrm{Spec}(k(x))|K_x)$; lorsque $x \notin |U|$, $M_{|\eta_x}$ est un objet différentiel plus intéressant, comme on verra dans la suite.

1.2.3. Théorème de monodromie p-adique. Un avantage des germes des équations différentielles est que nous avons une description complètement galoisienne de cette catégorie. Cette description est donnée par le théorème de monodromie p-adique, qui est du indépendamment à André **[And02]**, Mebkhout **[Meb02]** et Kedlaya **[Ked04]**.

Introduisons d'abord les anneaux des hyperfonctions au voisinage d'un point x de X, qu'on supposera rationnel pour alléger les notations. Soit $\bar{\eta}_x \to \eta_x$ un point géométrique au dessus de η_x, et posons $G(x) = \pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_x)$. Les anneaux $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ des hyperfonctions, cf. **[Cre12**, 1.2.1], sont définis par

$$\mathcal{B}_0 = \varinjlim_{\eta'/\eta_x} \mathcal{R}(\eta') \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_0\big[\log t_x\big], \tag{1.2.3.1}$$

où la limite est prise sur le système inductif des revêtements galoisiens finis $\eta' \to \eta_x$, dominés par $\bar{\eta}_x$; et $\mathcal{B}$ est l'anneau de polynômes à coefficients dans $\mathcal{B}_0$ en une variable qu'on a notée $\log t_x$ car on étendra la dérivation $\partial = \frac{\partial}{\partial t_x}$ en posant $\partial(\log t_x) = t_x^{-1}$. L'anneau $\mathcal{B}$ est muni de différentes structures, cf. *loc. cit.* pour plus de détails.

THÉORÈME 1.2.3.1 (André, Mebkhout, Kedlaya). *Nous avons une équivalence de catégorie*

$$F\text{-Isoc}^{\dagger}(\eta_x|K) \to \mathrm{Del}_{K^{\mathrm{nr}}}(G(x))$$

donnée par le foncteur exact

$$M \mapsto \Psi(M) := (M \otimes_{\mathcal{R}(\eta_x)} \mathcal{B})^{\nabla}.$$

Rappelons tout de suite la définition de la catégorie $\mathrm{Del}_{K^{\mathrm{nr}}}(G(x))$ et les propriétés de $\Psi(M)$, qu'on appellera l'espace des *cycles proches* de M. L'espace $\Psi(M)$ est un K^{nr}-espace vectoriel de dimension égal au rang de M, muni de :

- une action de $G(x)$, semi-linéaire par rapport à l'action de $G(x)$ sur K^{nr} via $G(x) \to \pi_1(x, \bar{x})$, et à monodromie finie, c'est-à-dire dont la restriction au sous groupe d'inertie $I(x)$ agit par un quotient fini ;
- un Frobenius $\varphi\colon \Psi(M) \xrightarrow{\sim} \Psi(M)$, *i.e.* un isomorphisme σ-linéaire, équivariant par rapport à l'action de $G(x)$;
- un « opérateur de monodromie » $N\colon \Psi(M) \to \Psi(M)$, qui est linéaire, nilpotent et équivariant ; satisfaisant la relation $N\varphi = p\varphi N$.

Ces structures sur $\Psi(M)$ sont déduites de structures analogues sur l'anneau $\mathcal{B}$ et du Frobenius φ_M de M. Ces objets forment la catégorie qu'on a notée ci-dessus $\mathrm{Del}_{K^{\mathrm{nr}}}(G(x))$, dont les morphismes sont les applications K^{nr}-linéaires commutant à toutes les structures en jeu. Nous l'appellerons la catégorie des *modules de Deligne* de $G(x)$.

EXEMPLE 1.2.3.2.

(1) Le module de Deligne associé à $\mathscr{L}_{\pi|\eta_\infty}$ est la représentation associée au revêtement d'Artin–Schreier $y - y^p = t_\infty^{-1}$ de $\mathbb{P}^1_k\backslash\{0\}$, où $t_\infty = t^{-1}$, qui est un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{F}_p$. Précisément nous avons

$$\Psi(\mathscr{L}_{\pi|\eta_\infty}) = K^{\mathrm{nr}}\,\mathfrak{u}, \qquad \text{avec } \mathfrak{u} = \mathfrak{e} \otimes \theta_\pi(y),$$

muni de :
- l'action de $G(\infty)$ donnée via $G(\infty) \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p \to K^\times$, où le deuxième homomorphisme envoie $1 \in \mathbb{F}_p$ dans $\theta_\pi(1)$, cf. 3.1.2.2-(2) ;
- de la monodromie $N = 0$ et du Frobenius $\varphi(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$.

(2) Soit $\alpha = \frac{1}{q-1}$. Le module de Deligne associé à $\mathscr{K}_{\alpha|\eta_0}$ est la représentation associée au revêtement de Kummer $v^{q-1} = t$ de $\mathbb{G}_m$, qui est un revêtement galoisien de groupe $k^\times$. Précisément nous avons

$$\Psi(\mathscr{K}_{\alpha|\eta_0}) = K^{\mathrm{nr}}\,\mathfrak{u}, \qquad \text{avec } \mathfrak{u} = \mathfrak{e} \otimes v^{-1},$$

muni de l'action de $G(0)$ donnée via $G(0) \twoheadrightarrow k^\times \to K^\times$, où le deuxième homomorphisme est le caractère de Teichmüller, cf. 3.1.1 ; de la monodromie $N = 0$ et du Frobenius $\varphi(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$.

1.3. Formule du produit

1.3.1. Caractéristique d'Euler en cohomologie rigide. Un premier exemple de formule reliant invariants cohomologiques globaux et locaux est la formule de Grothendieck–Ogg–Chafarevitch en cohomologie ℓ-adique. L'analogue de cette formule en cohomologie rigide est un théorème de Christol et Mebkhout [**CM01**, Corollaire 5.0-12], cf. aussi Kedlaya [**Ked06**, Theorem 4.3.1].

THÉORÈME 1.3.1.1 (Christol et Mebkhout). *Soient U un ouvert non vide de X et M un F-isocristal sur U surconvergent le long de $Z = X\backslash U$. Nous avons*

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim_K H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M)}_{\chi_c(U,M)} = \chi_c(U)\,\mathrm{rg}(M) - \sum_{x\in Z}\deg(x)\,\mathrm{irr}(M_{|\eta_x}), \tag{1.3.1.1}$$

où $\chi_c(U) = 2-2g-\sum_{x\in Z}\deg(x)$, g est le genre de X, $\mathrm{rg}(M)$ le rang de M, $\mathrm{irr}(M_{|\eta_x})$ l'irrégularité p-adique de $M_{|\eta_x}$ (cf. 2.3 pour une discussion sur l'irrégularité).

1.3.2. Formule du produit p-adique. La formule du produit est une généralisation multiplicative de la formule de Grothendieck–Ogg–Chafarevitch p-adique.

THÉORÈME 1.3.2.1. [**AM15**, 7.2.6] *Soient Z un diviseur de X, $U = X\backslash Z$ l'ouvert complementaire, $\omega \neq 0$ une forme différentielle méromorphe sur X et M un F-isocristal sur U surconvergent le long de Z. Nous avons*

$$\underbrace{\prod_{i=0}^{2}\det_K(-F, H^i_{\mathrm{rig}}(U,M))^{(-1)^{i+1}}}_{\varepsilon(M)} = q^{(1-g)\,\mathrm{rg}(M)}\prod_{x\in|U|}\varepsilon(M_{|\eta_x},\omega)\prod_{x\in Z}\varepsilon_0(M_{|\eta_x},\omega) \tag{1.3.2.1}$$

où $q = p^f$ est le cardinal de k, g le genre de X, $F = \varphi^f$ la plus petite puissance linéaire du Frobenius, $\varepsilon(M_{|\eta_x},\omega) \in \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ sont des invariant locaux, presque tous égaux à 1, qu'on définira dans la section 1.4 et $\varepsilon_0(M_{|\eta_x},\omega) = \varepsilon(M_{|\eta_x},\omega)\det(-F, M^{\nabla}_{|\eta_x})$.

REMARQUE 1.3.2.2.

(1) L'analogue en cohomologie ℓ-adique de (1.3.2.1) a été conjecturé par Deligne et prouvée par Laumon, cf. [**Lau87**]. C'est un ingrédient dans la preuve de Lafforgue [**Laf02**] des conjectures de Langlands pour les corps de fonctions.

(2) La formule (1.3.2.1) a été utilisée par Abe pour prouver la correspondance de Langlands pour les F-isocristaux sur une courbe et l'existence du camarade cristallin, cf. [**Abe13**].

(3) Le membre de gauche $\varepsilon(M)$ de (1.3.2.1) est la constante de l'équation fonctionnelle de la fonction L de M définie par Étesse et Le Stum dans [**ÉLS93**].

(4) Le membre de droite de (1.3.2.1) ne dépend pas du choix de ω. Cela suit des propriétés de torsion des constantes locales et de la théorie du corps de classe globale, cf. [**Mar08**, Prop. 4.3.9].

(5) L'invariance de (1.3.2.1) par Twist de Tate est équivalente à la formule de Grothendieck–Ogg–Chafarevitch en cohomologie rigide (1.3.1.1), cf. [**Mar08**, Prop. 4.3.6].

1.4. Définition des facteurs epsilon locaux

Dans cette section nous allons rappeler la définition des invariants locaux, les *facteurs epsilon*, qui apparaissent dans (1.3.2.1). La définition se fait en trois étapes qu'on va détailler ci-dessous. D'abord quelques notations. On rappelle qu'on a posé $G(x) = \pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_x)$. Nous désignons par $\nu\colon G(x) = \pi_1(\eta_x,\bar{\eta}_x) \to \pi_1(x,\bar{x})$ l'application de spécialisation. On identifie le groupe $\pi_1(x,\bar{x})$ à $\widehat{\mathbb{Z}}$ en envoyant le Frobenius géométrique sur 1 et on pose $W(x) = \nu^{-1}(\mathbb{Z})$, qui est le groupe de Weil absolu du corps $k(\eta_x)$.

1.4.1. Quasi-caractères. Le cas de rang un est dû à Tate, dans sa thèse [**Tat50**, **Tat67**]. Pour alléger les notations supposons toujours x rationnel sur k et posons $t = t_x$: nous avons $k(\eta_x) \cong k(\!(t)\!)$. Par définition un *quasi-caractère* est un homomorphisme $\chi\colon k(\!(t)\!)^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ localement constant. Le choix d'une forme différentielle méromorphe $\omega \neq 0$ sur X détermine pour chaque point fermé x un caractère additif

$$\psi(\omega_x)\colon k(\eta_x) \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times, \qquad \alpha \mapsto \theta_\pi(1)^{\mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}(\mathrm{Res}_x(\alpha\omega))},$$

où $\theta_\pi(1)$ est une racine primitive p-ième de l'unité, cf. 3.1.2, Res_x désigne le résidu en x et $\mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}$ la trace de l'extension $k/\mathbb{F}_p$. On se donne une mesure de Haar sur le groupe additif $k(\!(t)\!)$. Tate définit le facteur epsilon par

$$\varepsilon(\chi, \psi(\omega_x)) = \begin{cases} \int_{k(\!(t)\!)^\times} \chi^{-1}\psi(\omega_x)\mu & \text{si } \chi \text{ est ramifié } (i.e.\ \chi_{|k[\![t]\!]^\times} \neq 1), \\ q^{v_x(\omega)}\chi(t)^{v_x(\omega)}\mu(k[\![t]\!]) & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.4.1.1}$$

où $v_x(\omega)$ désigne l'ordre (du zéro ou du pôle) de ω en x.

Le facteur epsilon de χ et $\psi(\omega_x)$ est une généralisation des sommes de Gauss, cf. 3.1.3. En effet par (1.4.1.1) on retrouve une somme de Gauss si $\omega_x = t^{-1}dt$ et χ est modérément ramifié, *i.e.* se factorise par la projection canonique $k(\!(t)\!)^\times \to k^\times$.

Remarque 1.4.1.1. Dans *loc. cit.* Tate considère uniquement des applications à valeur complexes, mais avec les définitions ci-dessus tout se transpose au cas de coefficients quelconques. Les topologies naturelles de $\mathbb{C}$ et de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ne jouent aucun rôle ici.

1.4.2. Représentations de Weil–Deligne. La généralisation des invariants locaux de la thèse de Tate au rang supérieur a été faite indépendamment par Langlands et Deligne, cf. [**Del73**, **Lan70**]. Nous allons rappeler la construction de Deligne.

On appelle *représentation de Weil* un $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel D de dimension finie, muni d'une action linéaire $\rho\colon W(x) \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(D)$ à monodromie géométrique finie, qui veut dire que la restriction de ρ à l'inertie $I(x)$ se factorise par un quotient fini. On appellera représentation (de Weil) *virtuelle* tout élément du groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations de Weil.

Théorème 1.4.2.1 (Deligne). *Il existe une unique fonction qui associe à tout couple (ρ, ψ), d'une représentation de Weil $\rho\colon W(x) \to \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(D)$ et d'un caractère additif $\psi\colon k(\!(t)\!) \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ comme ci-dessus, un élément $\varepsilon(\rho, \psi)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$, telle que :*

(1) *$\varepsilon(-, \psi)$ est multiplicatif sur les suites exactes de représentations de Weil ;*

(2) *$\varepsilon(-)$ est invariant par image directe (induction des représentations) sur les représentations virtuelles de rang zéro ;*

(3) *si $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(D) = 1$, alors $\varepsilon(\rho, \psi) = \varepsilon(\chi, \psi)$ avec χ donné par le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccccc} \rho\colon W(x) & \longrightarrow & W(x)^{\mathrm{ab}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \\ & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{rec}}\ {\scriptstyle \sim} & \nearrow_{\chi} & \\ & & k(\!(t)\!)^\times & & \end{array}$$

où $\mathrm{rec}\colon k(\!(t)\!)^\times \xrightarrow{\sim} W(x)^{\mathrm{ab}}$ est l'isomorphisme de réciprocité, normalisé en imposant que $\mathrm{rec}(t)$ soit la classe d'un Frobenius géométrique.

Définition 1.4.2.2. Une *représentation de Weil–Deligne* est un couple (ρ, N) où ρ est une représentation de Weil et $N\colon D \to D$ est un endomorphisme nilpotent satisfaisant $\rho(w)N\rho(w)^{-1} = q^{\nu(w)}N$ pour tout $w \in W(x)$. La définition du facteur epsilon s'étend aux représentations de Weil–Deligne (ρ, N) par

$$\varepsilon((\rho,N),\psi(\omega)) = \varepsilon(\rho,\psi(\omega))\det\big(-\rho(\mathrm{F}^*), D^{I(x)}/\ker(N)^{I(x)}\big),$$

où F^* désigne n'importe quel Frobenius géométrique dans $W(x)$.

1.4.3. F-isocristaux surconvergents. La troisième étape revient à associer une représentation de Weil–Deligne au module de Deligne $\Psi(M_{|\eta_x})$ d'un germe d'isocristal $M_{|\eta_x}$, en suivant le procédé de linéarisation suivant qui est dû à Fontaine et Perrin-Riou en théorie de Hodge p-adique, cf. [**Fon94b**, 1.3.5] et [**PR95**, C1.4].

Soit $(\Psi, \vartheta, \varphi, N)$ un module de Deligne, cf. 1.2.3. Ici, Ψ désigne un K^{nr}-espace vectoriel de dimension finie, disons $n = \dim_{K^{\mathrm{nr}}}(\Psi)$, $\vartheta\colon G(x) \to \mathrm{GL}_n(K^{\mathrm{nr}})$ un cocycle donnant l'action semi-linéaire de $G(x)$ sur Ψ dans une base, $\varphi\colon \Psi \to \Psi$ le Frobenius et $N\colon \Psi \to \Psi$ la monodromie. En restreignant l'action de ϑ à $W(x)$, et en posant

$$\forall\, g \in W(x), \qquad \rho(g) = \varphi^{-\nu(g)} \circ \vartheta(g) \in \mathrm{GL}_n(K^{\mathrm{nr}}),$$

on obtient une action linéaire de $W(x)$ sur Ψ. En étendant linéairement les scalaires de K^{nr} à $\overline{\mathbb{Q}}_p$ on obtient une représentation de Weil, qu'on notera $\big(\widetilde{\Psi}_{|W(x)}, \rho\big)$. On vérifie facilement que $\big(\widetilde{\Psi}_{|W(x)}, \rho, N\big)$ est une représentation de Weil–Deligne.

En résumant, voici comment associer un facteur epsilon en x à un F-isocristal surconvergent.

$$\begin{array}{ccccccc} F\text{-Isoc}^{\dagger}(\eta_x|K) & \to & \mathrm{Del}_{K^{\mathrm{nr}}}(G(x)) & \to & \text{Rep. Weil–Del.} & \to & \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times} \\ M_{|\eta_x} & \mapsto & \Psi(M_{|\eta_x}) & \mapsto & \widetilde{\Psi}(M_{|\eta_x})_{|W(x)} & \mapsto & \varepsilon\big(\widetilde{\Psi}(M_{|\eta_x})_{|W(x)}, \psi(\omega_x)\big) \end{array}$$

1.5. Preuve de la formule

Dans cette section nous allons esquisser la preuve de la formule du produit en indiquant les outils qui interviennent dans la preuve et qui seront détaillés dans les chapitres 2 et 3.

1.5.1. Cas préliminaires. La première étape de la preuve consiste à démontrer plusieurs cas particuliers de la formule, qui seront ensuite utilisés dans la preuve du cas général. Dressons la liste de ces cas avec des détails sur leur démonstration.

(1) Le cas de de rang un se ramène à la thèse de Tate, cf. [**Mar08**, Théorème 4.3.14].

(2) Le cas où le F-isocristal M est unité à monodromie globale finie, cf. [**Mar08**, Théorème 4.3.15].

Si M est unité (*i.e.* les pentes du Frobenius de M sont nulles en tout point géométrique), alors par un théorème de Katz et Tsuzuki, cf. [**Tsu98a**], M correspond à une représentation

$$\rho_M\colon \pi_1(U,\bar{\eta}) \to \mathrm{GL}_n(\Lambda),$$

où $\Lambda = K^{\sigma=\mathrm{Id}}$, avec monodromie *locale géométriquement finie*. Cette dernière condition veut dire que, pour tout point $x \in X\backslash U$, la restriction de ρ_M au sous-groupe d'inertie $I(x)$ du sous-groupe de décomposition $G(x) \subset \pi_1(U,\bar{\eta})$ se factorise par un quotient fini.

La condition de monodromie *globale finie* est plus forte et signifie simplement que la représentation ρ_M se factorise par un quotient fini de $\pi_1(U,\bar{\eta})$. Ce cas se ramène donc assez facilement par le théorème de Brauer au cas de rang un, cf. *loc.cit.*

(3) Le cas précédent n'est malheureusement pas assez général pour pouvoir être utilisé dans le cas général de la preuve de la formule du produit : il faut traiter le cas de monodromie *géométrique* globale finie, ce qui veut dire que la restriction de ρ au sous-groupe $\pi_1(\bar{U},\bar{\eta})$ de $\pi_1(U,\bar{\eta})$, où $\bar{U}=U\times_{\mathrm{Spec}(k)}\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}})$, se factorise par un quotient fini. Ce cas, qui était une généralisation évidente de (2) dans la preuve de la variante ℓ-adique de formule, est plus technique à cause de la nature des coefficients p-adiques. Il a été traite dans [**AM15**, §7.4] en utilisant un procédé d'extension formelle des scalaires dans une catégorie tannakienne, qui permet, par des dévissages, de se réduire au cas de monodromie globale finie. Nous ne nous attarderons pas sur ces techniques qui sont développées dans *loc.cit.* §7.3 et §7.4. Elles s'avèrent utiles en général pour travailler avec les catégories de coefficients en cohomologie rigide, cf. pour exemple [**Abe11**, §2] et [**AC13**, 4.3.8].

(4) Le cas d'un F-isocristal qui est l'extension canonique d'un germe d'un F-isocristal surcovergent. Ce cas se ramène à (3) par un dévissage sur la filtration par les pentes du Frobenius, cf. [**AM15**, Corollary 7.4.8]. L'extension canonique d'un germe d'un F-isocristal sera introduite dans le chapitre 2, cf. 2.1.7.

1.5.2. Généralisation aux $\mathscr{D}$-modules arithmétiques. L'outil incontournable de la preuve de la formule du produit est la transformation de Fourier, dans sa variante globale, introduite en cohomologie rigide par Christine Huyghe, et locale. Les transformations de Fourier locales et globales seront rappelées respectivement dans les chapitres 2 et 3.

Pour pouvoir utiliser ces transformations il n'est plus suffisant de travailler avec les catégories de F-isocristaux surconvergents car elles ne sont pas stables par transformation de Fourier : il faut passer aux $\mathscr{D}$-modules arithmétiques de Berthelot. Il est donc nécessaire de généraliser la formule du produit à ces objets. Le prix a payer pour l'utilisation de la machinerie plus technique des $\mathscr{D}$-modules arithmétiques est largement compensé par une formule plus élégante et symétrique. Pour des cours rappels et des références de la théorie de $\mathscr{D}$-modules arithmétiques on renvoie le lecteur au chapitre 2, section 2.1.

Commençons par généraliser les constantes globales et locales à ce contexte. Le facteur epsilon globale sera la constante de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'un $\mathscr{D}^\dagger$-module introduite par Caro dans [**Car06**]. Soit $\mathscr{C}$ un complexe borné de F-$\mathscr{D}^\dagger$-modules holonomes sur X, on pose

$$L(X,\mathscr{C},t)=\prod_{x\in|X|}\det(1-t^{\deg(x)}F^{\deg(x)}|i_x^+\mathscr{C})^{-1}. \tag{1.5.2.1}$$

Par dualité de Poincaré, cf. [**Abe14**, **Vir04**], la série formelle $L(X,\mathscr{C},t)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$L(X,\mathscr{C},t)=\varepsilon(\mathscr{C})t^{-\chi_c(\mathscr{C})}L(X,\mathbb{D}(\mathscr{C}),t^{-1}), \tag{1.5.2.2}$$

où $\varepsilon(\mathscr{C})=\prod_{i\in\mathbb{Z}}\det\big(-F,\mathcal{H}^i(f_+\mathscr{C})\big)^{(-1)^{i+1}}$, $\mathbb{D}$ désigne le foncteur de dualité et $f\colon X\to\mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme structurel.

Les constantes locales se généralisent aux $\mathscr{D}^\dagger$-modules sur un trait complet S_x en x, cf. 2.1.3–2.1.6, par un dévissage le long du triangle distingué suivant, où nous avons noté $i_x\colon x\to S_x$ (resp. $j_x\colon\eta_x\to S_x$) le point fermé (resp. générique).

$$j_{x!}j_x^+\mathscr{C}_{|S_x}\to\mathscr{C}_{|S_x}\to i_{x+}i_x^!\mathscr{C}\xrightarrow{+1} \tag{1.5.2.3}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le cas général de la formule.

THÉORÈME 1.5.2.1. [**AM15**, Theorem 7.2.5] *Soient $\omega \neq 0$ une forme différentielle méromorphe sur X et $\mathscr{C} \in F\text{-}D^b_{\mathrm{hol}}(X)$ un complexe borné de $\mathscr{D}^\dagger$-modules à cohomologie holonome. Nous avons*

$$\varepsilon(\mathscr{C}) = q^{(1-g)\,\mathrm{rg}(\mathscr{C})} \prod_{x\in|X|} \varepsilon(\mathscr{C}_{|S_x}, \omega) \tag{1.5.2.4}$$

où g est le genre de X, q le cardinal de k, $\mathrm{rg}(\mathscr{C}) \in \mathbb{Z}$ est le rang le générique du complexe $\mathscr{C}$.

REMARQUE 1.5.2.2. On retrouve la formule (1.3.2.1) pour un F-isocristal M surconvergent sur U, en prenant dans (1.5.2.4) $\mathscr{C} = j_!\,\mathrm{sp}_*\,M(-1)[-1]$, où $j\colon U \hookrightarrow X$ est l'immersion ouverte et $\mathrm{sp}\colon \mathscr{X}_K \to \mathscr{X}$ l'application de spécialisation.

1.5.3. Ingrédients et esquisse de la preuve. Passons maintenant en revue les ingrédients nécessaires à terminer la preuve.

(1) Le foncteur d'extension canonique, construit par Matsuda [**Mat02**] et Crew [**Cre00**] dans le cadre des F-isocristaux surconvergents et par Crew [**Cre12**] dans les cadre des $\mathscr{D}^\dagger$-modules. Les propriétés de ce foncteur sont revues dans la section 2.1.7.

(2) Un théorème dit « principe de la phase stationnaire » (dans le cas de faible irrégularité) qui est la raison d'être du chapitre 2. Pour commodité du lecteur on recopie l'énoncé ci-dessous, sinon on réfère à 2.4.3.

THÉORÈME 1.5.3.1. [**AM15**, 4.2.2 et 5.1.8] *Soit $\mathscr{M}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{P}^1},\mathbb{Q}}(\infty)$-module holonome tel que les pentes différentielles de $\mathscr{M}_{|\eta_\infty}$ sont toutes strictement inférieures à 1. Soit Z l'ensemble de points singuliers de $\mathscr{M}$ et supposons $Z \subset \mathbb{A}^1(k)$. Alors*

$$\mathrm{Four}_\pi(\mathscr{M})_{|\eta_\infty} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{s\in Z} \mathscr{F}_\pi^{(s,\infty)}(\mathscr{M}_{|\eta_s}) \tag{1.5.3.1}$$

où $\mathscr{F}_\pi^{(s,\infty)}(\mathscr{M}_{|\eta_s})$ est la transformation de Fourier locale de $\mathscr{M}_{|\eta_s}$ en s.

(3) La formule déterminantielle pour le facteur epsilon local.

THÉORÈME 1.5.3.2. [**AM15**, 7.5.4] *Soit $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|K)$. Nous avons*

$$\varepsilon_0(M, dx) = (-1)^\gamma q^{\gamma+1} \det\Psi\big(\mathscr{F}_\pi^{(0,\infty)}(M)\big)(y) \tag{1.5.3.2}$$

où $\gamma = \mathrm{rg}(M) + \mathrm{irr}(M)$, $\det\Psi\big(\mathscr{F}_\pi^{(0,\infty)}(M)\big)$ est le déterminant du module de Deligne associé à $\mathscr{F}_\pi^{(0,\infty)}(M)$, cf. 1.2.3.1, qu'on voit comme un quasi-caractère de $k(\eta_\infty)^\times$ et on calcule en la coordonnée y duale de x, d'après les notations de 3.2.2.

(4) La suite exacte courte du théorème ci-dessous, reliant la cohomologie rigide d'un F-isocristal surconvergent aux cycles proches de sa transformée de Fourier.

THÉORÈME 1.5.3.3. [**AM15**, 6.2.8] *Soit $\mathscr{M}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{P}^1},\mathbb{Q}}(\infty)$-module holonome tel que sa restriction à un ouvert non-vide U de $\mathbb{A}^1$ est un F-isocristal surconvergent et non-ramifiée à l'infini. Notons $j\colon (\widehat{\mathbb{P}}, \mathbb{P}^1_k\backslash U) \to (\widehat{\mathbb{P}}, \infty)$ le morphisme de couples induit par l'inclusion $\{\infty\} \subset \mathbb{P}^1_k\backslash U$, cf. 2.1.6. Il y a une séquence exacte de modules de Deligne :*

$$0 \to H^1_{\mathrm{rig},c}(U,\mathscr{M})_{K^{\mathrm{nr}}} \to \Psi(\mathrm{Four}_\pi(\mathscr{M}_!)_{|S_{\bar{0}}})(-2) \to \mathscr{M}_{|\infty}(-1)_{K^{\mathrm{nr}}} \to H^2_{\mathrm{rig},c}(U,\mathscr{M})_{K^{\mathrm{nr}}} \to 0$$

où l'indice K^{nr} signifie que l'on a étendu les scalaires à K^{nr}, $\mathscr{M}_! = j_!j^+\mathscr{M}$ et Ψ désigne le foncteur « cycles proches » d'un $\mathscr{D}^\dagger$-modules sur un trait complet, cf. 2.1.5.2.

La preuve de ce théorème utilise :

(a) la suite exacte fondamentale de Crew [**Cre12**, (6.1.14)], cf. Théorème 2.1.5.1-(2) ;

(b) un théorème de Crew [**Cre06**, Th. 2.2] calculant l'image inverse i^+M d'un F-$\mathscr{D}^\dagger$-module holonome par l'immersion i d'un point fermé ;

(c) un calcul de cycles évanescents de la transformée de Fourier d'un $\mathscr{D}^\dagger$-modules, cf. [**AM15**, Lemma 6.2.6] ;

(d) un calcul cohomologique (cf. [**AM15**, Proof of 6.2.8] pour les détails du calcul) utilisant

(i) le théorème de comparaison de Huyghe entre transformée de Fourier géométrique et naïve, cf. 3.2.2.5-(3) ;

(ii) un autre théorème de Huyghe comparant transformation de Fourier géométrique sans et avec support, cf. [**Huy13**] ;

(iii) le théorème de changement de base propre et diverses vérifications de théorèmes de compatibilités entre opérations cohomologiques par Abe, cf. [**Abe14**].

Esquissons enfin la preuve de la formule du produit (1.5.2.4) qui suit maintenant le chemin tracé par Laumon dans la preuve ℓ-adique cf. [**Lau87**].

Réduction géométrique : On se ramène au cas où $X = \mathbb{P}^1_k$. Pour ce faire on choisit un morphisme génériquement étale $h\colon X \to \mathbb{P}^1$. Montrer la formule (1.5.2.4) sur $\mathbb{P}^1_k$ pour $h_+\mathscr{C}$ avec la forme ω est équivalent à montrer la formule sur X pour $\mathscr{C}$ avec la forme $h^*\omega$. Comme (1.5.2.4) ne dépend pas du choix de la forme différentielle, cf. 1.3.2.2-(4), cela donne (1.5.2.4) dans le cas général.

Cas ponctuel : Les cas des $\mathscr{D}^\dagger$-modules ponctuels étant triviale on se ramène au cas où $\mathscr{C}$ est associé à $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$, *i.e.* $\mathscr{C} = j_!\,\mathrm{sp}_*\,M(-1)[-1]$ avec $j\colon U \hookrightarrow X$.

Rationalité : En choisissant de manière plus fine h on peut même supposer $U = \mathbb{G}_m$, ou en tout cas $\mathbb{P}^1_k \backslash U$ rationnel, cf. [**Kat88**, p. 121].

Cas $X = \mathbb{P}^1_k$, $U = \mathbb{G}_m$ et $M \in F$-Isoc$^\dagger(\mathbb{G}_m|K)$: Par la phase stationnaire (1.5.3.1) on se ramène à prouver la formule déterminantielle (1.5.3.2). Pour ce faire on utilise la même stratégie que dans la preuve ℓ-adique de Laumon.

Réduction a cas modéré : On utilise l'extension canonique et le fait que (1.3.2.1) est vérifiée si M est une extension canonique, pour se réduire au cas où $M_{|\eta_0}$ est modéré, *i.e.* $\mathrm{irr}(M_{|\eta_0}) = 0$.

Preuve dans le cas modéré : On démontre d'abord que la formule déterminantielle (1.5.3.2) est invariante par image directe, par décalage de pentes de Frobenius et qu'elle est multiplicative sur les suites exactes courtes. On peut ramener ainsi le cas modéré au cas modéré de rang un et unité. Il s'agit donc de prouver la formule essentiellement dans le cas de l'isocristal de Kummer, dont on sait calculer la transformée de Fourier, qui fait intervenir un twist par une somme de Gauss, cf. (3.4.2.1). Comme l'isocristal de Kummer est modéré, son facteur epsilon local est égale à cette somme de Gauss, ce qui termine la démonstration. On renvoie le lecteur à [**AM15**, Preuve de 7.5.4] pour les détails.

CHAPITRE 2

Transformation de Fourier locale et phase stationnaire

2.1. $\mathscr{D}$-modules arithmétiques

On suit les notations choisies dans 0.1. En particulier on rappelle que nous avons noté par X une courbe propre, lisse et géométriquement connexe sur k et par R un anneau de valuation discrète, complet, de caractéristique zéro, corps résiduel k, idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps de fractions K. On notera $\mathrm{Spf}(R)$ le spectre formel de R par rapport à la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Comme dans le chapitre 1, nous posons $\widehat{\mathbb{A}}^1_R = \mathrm{Spf}(R\{x\})$ et désignons par $\widehat{\mathbb{P}}^1_R$ la droite projective formelle sur $\mathrm{Spf}(R)$.

2.1.1. $\mathscr{D}^\dagger$-modules sur une courbe. Soit $\mathfrak{X}$ une courbe formelle propre et lisse sur $\mathrm{Spf}(R)$ de fibre spéciale X.

Pour tout entier $n \geq 1$, on notera $X_n = \mathfrak{X} \otimes_R R/\mathfrak{m}^n$ la réduction de $\mathfrak{X}$ modulo $\mathfrak{m}^n$ (donc $X_1 = X$). C'est un $R/\mathfrak{m}^n$-schéma dont l'espace topologique sous-jacent est homéomorphe à celui de $\mathfrak{X}$.

Berthelot [**Ber90**] a construit un faisceau d'opérateurs différentiels $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ sur $\mathfrak{X}$. Ce sont des opérateurs différentiels d'ordre infini, mais satisfaisants des conditions de convergence à la Monsky–Washintzer.

Avant de donner un exemple rappelons brièvement les étapes de la constructions. Nous renvoyons le lecteur à [**Ber96b**, **Ber02**] pour plus de détails sur la définition, qui n'est bornée ni au cas des courbes ni au cas propre. On procède en trois étapes.

(1) Soient $n \geq 1, m \geq 0$ des entiers. On définit un faisceau $\mathscr{D}^{(m)}_{X_n}$ des différentielles de niveau m sur le schéma X_n en utilisant les enveloppes divisées à puissances divisées partielles (de niveau m) du faisceau des parties principales généralisant la construction classique de $\mathscr{D}_{X_n}$ par Grothendieck dans EGA IV, cf. [**Gro67**, 16.8].

(2) On complète p-adiquement pour avoir des faisceaux sur les schémas formels. On pose

$$\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} = \varprojlim_n \mathscr{D}^{(m)}_{X_n} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} = \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\,.$$

(3) On passe à la limite directe sur le niveau. On pose

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} = \varinjlim_m \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}.$$

On appelle les sections de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ opérateurs différentiels (d'ordre infini) et de *niveau fini*, par contraste avec celles du faisceau $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathfrak{X}} := \varprojlim_n \mathscr{D}_{X_n}$ qui ont ordre et niveau infinis.

Exemple 2.1.1.1. Soit $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A) \subset \mathfrak{X}$ un ouvert affine de X et $t \in A$ une coordonnée étale de $\mathfrak{U}$. Cela veut dire que t est l'image inverse de $x \in R\{x\}$ par un morphisme étale $\mathrm{Spf}(A) \to \widehat{\mathbb{A}}^1_R$ (pour simplifier, le lecteur est invité à prendre $\mathfrak{X} = \widehat{\mathbb{P}}^1_R$ et $t = x$ dans tout le chapitre, s'agissant

déjà d'un cas essentiel pour ce qui nous intéresse). Pour tout entier $i, m \geq 0$, on note $q_i^{(m)} \in \mathbb{N}$ le quotient dans la division euclidienne de i par p^m, c'est-à-dire

$$i = q_i^{(m)} p^m + r, \text{ avec } 0 \leq r < p^m.$$

Les sections de $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ sur $\mathfrak{U}$ sont données par

$$\Gamma\big(\mathfrak{U}, \widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\big) = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i q_i^{(m)}! \frac{\partial^i}{i!} \,\Big|\, a_i \in A_K,\ \lim_{i\to+\infty} \|a_i\| = 0 \right\},$$

$$\Gamma\big(\mathfrak{U}, \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\big) = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \frac{\partial^i}{i!} \,\Big|\, a_i \in A_K,\ \exists c, \rho \in \mathbb{R}, \rho < 1 \text{ tels que } \forall i \geq 0, \|a_i\| \leq c\rho^i \right\},$$

où ∂ dénote la dérivation duale de la différentielle dt, $A_K = A \otimes_R K$ est l'algèbre affinoïde de la fibre générique $\mathfrak{U}_K$ de $\mathfrak{U}$ et $\|-\|$ une norme de Banach sur A_K.

Pour tout entier $i, m \geq 0$, on posera $\partial^{[i]} = \frac{1}{i!}\partial^i$ et $\partial^{\langle i\rangle_{(m)}} = q_i^{(m)}!\partial^{[i]}$.

2.1.2. $\mathscr{D}^{\dagger}$-modules à pôles surconvergents. Soient Z un diviseur de X et U l'ouvert complementaire. Comme dans le chapitre 1, on relève $U \subset X$ à une immersion ouverte de courbes formelles $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$. Dans cette situation Berthélot construit le faisceaux $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$ sur $\mathfrak{X}$ des opérateurs différentielles à singularités surconvergentes le long de Z. Pour alléger les notations nous allons omettre systématiquement le † à gauche du diviseur et, lorsque il n'y aura pas de risque de confusion, les indices $\mathscr{X}$ et $\mathbb{Q}$: on désignera donc par $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(Z)$, $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}(Z)$ ou $\mathscr{D}^{\dagger}(Z)$ le même faisceau.

Dans le chapitre 3, nous verrons l'exemple des sections globales de $\mathscr{D}^{\dagger}(Z)$ dans le cas $\mathfrak{X} = \widehat{\mathbb{P}}^1_R$ et $Z = \infty$.

Définition 2.1.2.1. Un $\mathscr{D}$-module arithmétique sur X est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module (à gauche) cohérent. Un $\mathscr{D}$-module arithmétique sur X surconvergent le long de Z est un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(Z)$-module (à gauche) cohérent. On notera $\mathscr{D}^{\dagger}$-coh (resp. $\mathscr{D}^{\dagger}(Z)$-coh) la catégorie des $\mathscr{D}$-modules arithmétiques sur X (resp. surconvergents).

Les faisceaux en anneaux $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(Z)$ sont cohérents (à gauche et à droite), cf. [**Ber96b**, 3.6.1-(i) et 4.3.6], et les catégories $\mathscr{D}^{\dagger}$-coh et $\mathscr{D}^{\dagger}(Z)$-coh ne dépendent pas du choix du relèvement $\mathfrak{U} \to \mathfrak{X}$, cf. [**Ber90**, 2.2.1].

Exemple 2.1.2.2. Soient $\mathfrak{X} = \widehat{\mathbb{P}}^1_R$, $\widehat{\mathbb{A}}^1_R = \mathrm{Spf}(R\{t\})$ et $\partial = \frac{\partial}{\partial t}$ (*i.e.* la dérivation duale de dt). Notons 0 (resp. ∞) le diviseur défini par l'annulation de t (resp. de $z = t^{-1}$).

(1) On note $\mathscr{O}({}^{\dagger}0)$ le $\mathscr{D}^{\dagger}(0)$-module de présentation

$$0 \to \mathscr{D}^{\dagger}(0) \xrightarrow{\cdot\partial} \mathscr{D}^{\dagger}(0) \to \mathscr{O}({}^{\dagger}0) \to 0\,.$$

(2) On note $\mathscr{O}({}^{\dagger}\infty)$ le $\mathscr{D}^{\dagger}(\infty)$-module de présentation

$$0 \to \mathscr{D}^{\dagger}(\infty) \xrightarrow{\cdot t^2\partial} \mathscr{D}^{\dagger}(\infty) \to \mathscr{O}({}^{\dagger}\infty) \to 0$$

(remarquons l'égalité $\partial_z = -t^2\partial$, où $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$).

(3) On note δ_0 le $\mathscr{D}^{\dagger}$-module de présentation

$$0 \to \mathscr{D}^{\dagger} \xrightarrow{\cdot t} \mathscr{D}^{\dagger} \to \delta_0 \to 0$$

qu'on appellera le $\mathscr{D}^{\dagger}$-module *ponctuel concentré* en 0, ou bien « *delta de Dirac* » en zéro.

2.1.3. $\mathscr{D}^\dagger$-modules sur un trait. Nous nous plaçons maintenant dans la situation locale d'un trait complet. Soit $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(R[\![t]\!])$ où on muni l'anneau de séries formelles $R[\![t]\!]$ de la topologie $\mathfrak{m}$-adique. La fibre spéciale de $\mathscr{S}$ est donc le trait $S = \mathrm{Spec}(k[\![t]\!])$. On dira que $\mathscr{S}$ est le *disque formel ouvert*. On note $i\colon s \to S$ le point fermé et $j\colon \eta \to S$ le point générique.

Dans [**Cre06**, **Cre12**], Crew a adapté la construction des $\mathscr{D}^\dagger$-modules de Berthelot à ce contexte : il a défini un faisceaux $\mathscr{D}^\dagger$ sur $\mathscr{S}$. Il a seulement deux fibres : la fibre sur le point fermé s (qui est égale aussi aux sections globales du faisceaux) sera notée simplement $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$, celle sur le point η sera notée $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$ (le zéro indique qu'il y a des pôles en $t=0$). Nous avons :

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \partial^{[i]} \,\middle|\, a_i \in R[\![t]\!] \otimes_R K,\ \exists\, c, \rho \in \mathbb{R}, \rho < 1,\ \text{tels que } \forall i \geq 0, \|a_i\|_1 < c\rho^i \right\},$$

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \partial^{[i]} \,\middle|\, a_i \in \mathcal{R}^b,\ \exists c, \rho \in \mathbb{R}, \rho < 1,\ \text{tels que } \forall i \geq 0, \|a_i\|_1 < c\rho^i \right\},$$

où $\partial^{[i]} = \frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial t^i}$, $\mathcal{R}^b$ est l'anneau de Robba en η borné, dont on a rappelé la définition en 1.2.1, et $\|\cdot\|_1$ désigne la norme de Gauss sur les séries $R[\![t]\!] \otimes_R K \subset \mathcal{R}^b$.

2.1.3.1. Dans [**Cre12**, 4.1], Crew a défini l'analytifié $\mathscr{M}^{\mathrm{an}}$ d'un $\mathscr{D}^\dagger$-module cohérent $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{S}$. On note $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}$ le faisceau sur $\mathscr{S}$ dont la fibre spéciale et générique sont respectivement

$$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \left(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}\right)^{\mathrm{an}} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) = \left(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)\right)^{\mathrm{an}}.$$

Le faisceau $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}$ est une $\mathscr{D}^\dagger$-algèbre plate et $\mathscr{M}^{\mathrm{an}} = \mathscr{D}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger} \mathscr{M}$ pour tout $\mathscr{D}^\dagger$-module cohérent $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{S}$.

Exemple 2.1.3.2. Voici des exemples d'analyfication.

(1) $(R[\![t]\!] \otimes_R K)^{\mathrm{an}} = \mathscr{O}_{]0[}$ où

$$\mathscr{O}_{]0[} = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\middle|\, \forall n \geq 0, a_n \in K,\ \forall \rho < 1,\ \lim_{n\to+\infty} |a_n|\rho^n = 0 \right\}$$

est l'anneau des fonctions analytiques sur le disque ouvert de rayon un, centré en zéro. De plus, nous avons la présentation suivante de $\mathscr{O}_{]0[}$ en tant que $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module.

$$0 \to \mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\cdot\partial} \mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} \to \mathscr{O}_{]0[} \to 0\,.$$

(2) $(\mathcal{R}^b)^{\mathrm{an}} = \mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est l'anneau de Robba en η, cf.(1.2.1.2), et nous avons la présentation

$$0 \to \mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) \xrightarrow{\cdot\partial} \mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) \to \mathcal{R} \to 0$$

de $\mathcal{R}$ en tant que $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$-module.

On peut aussi donner une interprétation des sections de $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}$ comme des opérateurs différentiels d'ordre infini, à coefficients dans $\mathscr{O}_{]0[}$, satisfaisant des conditions de convergence explicites, cf. [**Cre12**, (4.1.11)].

2.1.3.3. Soit x un point fermé de $\mathfrak{X}$, qu'on supposera rationnel pour simplifier les notations. Le complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathfrak{X},x}$ de l'anneau locale de $\mathfrak{X}$ en x est isomorphe à $R[\![t]\!]$, où t_x est en coordonnée étale centrée en x. On posera $\mathscr{S}_x = \mathrm{Spf}(R[\![t_x]\!], \mathfrak{m}_R R[\![t_x]\!])$ et on l'appellera le disque formel de $\mathfrak{X}$ en x. On notera $S_x = \mathrm{Spec}(k[\![t_x]\!])$ sa fibre spéciale, $i_x\colon x \to S_x$ le point fermé et $\eta_x\colon \mathrm{Spec}(k(\!(t_x)\!)) \to S_x$

le point générique, comme dans 1.2.1. Lorsque il n'y aura pas de risque d'ambiguïté on omettra l'indice x. Pour tout $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{M}$ on posera

$$\mathscr{M}_{|S_x} = \mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S}_x,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{M}$$

et on dira que c'est la restriction de $\mathscr{M}$ au trait S_x (ou au disque formel $\mathscr{S}_x$) au voisinage de x.

2.1.4. F-$\mathscr{D}^\dagger$-modules holonomes. Supposons que le Frobenius absolu de X se relève dans un morphisme σ-linéaire $\varphi\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ de schémas formels. Une structure de Frobenius sur un $\mathscr{D}^\dagger$-module cohérent $\mathscr{M}$ est un isomorphisme $\varphi\colon F^*\mathscr{M}' \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}$ de $\mathscr{D}^\dagger$-modules, où $F\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ est le Frobenius relatif et $\mathscr{M}'$ est l'image inverse de $\mathscr{M}$ par $\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$. Les structures de Frobenius seront revues plus en détails dans 3.3.1 dans le cas particulier de $\mathfrak{X} = \widehat{\mathbb{P}}^1_R$, $Z = \infty$, mais les définitions sont les mêmes dans le cas général.

La structure de Frobenius permet de définir une notion de variétés caractéristique d'un F-$\mathscr{D}^\dagger$-module grâce à un théorème de descente sur le niveau par le Frobenius, cf. [**Ber02**, 5.2] et [**Ber00**]. La variété caractéristique est une sous-variété du fibré cotangent de la courbe et comme dans le cas analytique sur $\mathbb{C}$, un F-$\mathscr{D}^\dagger$-module $\mathscr{M} \neq 0$ est dit holonome si sa variétés caractéristique est de codimension un. Dans le cas de courbes, grâce aux microdifférentielles p-adiques et à un théorème de Abe, cf. [**Abe15**, Th. 7.2], on peut définir l'holonomie sans structures de Frobenius : on révisera donc cette notion dans 2.2.1 après avoir introduit ce formalisme.

2.1.4.1. On note F-Hol$(\mathscr{D}^\dagger)$ la catégorie des F-$\mathscr{D}^\dagger$-modules holonomes. Un $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}$-modules $\mathscr{M}$ est dit holonome si $\mathscr{M} = (\mathscr{M}_o)^{\mathrm{an}}$ pour $\mathscr{M}_o \in F$-Hol$(\mathscr{D}^\dagger)$; on note F-Hol$(\mathscr{S})$ la catégorie des $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-modules holonomes et on note F-$D^b_{\mathrm{hol}}(X)$ la catégorie des complexes bornés de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes.

2.1.4.2. Soient $\mathfrak{X}$, Z et $\mathfrak{U}$ comme dans 2.1.2 ; notons $\mathrm{sp}\colon \mathfrak{X}_K \to \mathfrak{X}$ le morphisme de specialisation. Les foncteurs d'image inverse et directe sp^*, sp_* sont des équivalences de catégories (quasi-inverses une de l'autre) entre la catégorie F-Isoc$^\dagger(U|K)$ de F-isocristaux sur U surconvergeants le long de Z, cf. 1.1.4.2, et la catégorie des F-$\mathscr{D}^\dagger(Z)$-modules cohérents qui sont $\mathcal{O}(^\dagger Z)$-cohérents, cf. [**Ber96b**, 4.4.12] et [**Ber00**, 4.6.7]. On dira que $\mathrm{sp}_*\, M$ est le F-$\mathscr{D}^\dagger(Z)$-module *associé* au F-isocristal $M \in F$-Isoc$^\dagger(U|K)$.

De même si $M \in F$-Isoc$^\dagger(\eta_x|K)$ est un germe d'isocristal, l'action de ∇ se prolonge en une action de $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S}_x,\mathbb{Q}}(0)$ et l'on obtient ainsi une équivalence entre la catégorie de F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S}_x,\mathbb{Q}}(0)$-modules holonomes et F-Isoc$^\dagger(\eta_x|K)$. En particulier la catégorie F-Hol$(\mathscr{S}_x)$ doit être vue comme l'élargissement de la catégorie F-Isoc$^\dagger(\eta_x|K)$ de η_x au trait complet S_x.

Exemple 2.1.4.3.

(1) Le F-$\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-module $\mathrm{sp}_*\,\mathscr{L}_\pi$ associé au F-isocristal de Dwork, cf. 1.1.5, a la présentation

$$0 \to \mathscr{D}^\dagger(\infty) \xrightarrow{\cdot(\partial+\pi)} \mathscr{D}^\dagger(\infty) \to \mathrm{sp}_*\,\mathscr{L}_\pi \to 0\,.$$

(2) Le F-$\mathscr{D}^\dagger(\{0,\infty\})$-module $\mathrm{sp}_*\,\mathscr{K}_\alpha$ associé au F-isocristal de Kummer, cf. 1.1.6, a la présentation

$$0 \to \mathscr{D}^\dagger(\{0,\infty\}) \xrightarrow{\cdot(\partial-\frac{\alpha}{t})} \mathscr{D}^\dagger(\{0,\infty\}) \to \mathrm{sp}_*\,\mathscr{K}_\alpha \to 0\,.$$

2.1.5. Monodromie locale. Dans cette section nous allons résumer la classification par Crew de la catégorie F-Hol$(\mathscr{S})$ en termes « galoisiens » généralisant le théorème de monodromie p-adique 1.2.3.1 à un trait complet.

L'anneau $\mathcal{B}$ des hyperfonctions considéré dans (1.2.3.1) est de manière naturelle un F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$-module. Crew définit le F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module des *microfonctions* $\mathcal{C}$ par la suite exacte de F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-modules [**Cre12**, (6.1.1)]

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{]0[} \otimes_K K^{\mathrm{nr}} \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

où l'homomorphisme $\mathscr{O}_{]0[} \otimes_K K^{\mathrm{nr}} \hookrightarrow \mathcal{B}$ est induit par les inclusions canoniques $\mathscr{O}_{]0[} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ et $K^{\mathrm{nr}} \subset \mathcal{B}$. On appelle $\mathrm{can}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ la projection canonique. Le F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{C}$ est muni d'une action de G_K, d'un opérateur de monodromie N, induits par ceux sur $\mathcal{B}$, et d'autre structures (les applications de variation) pour lesquelles en renvoie le lecteur à [**Cre12**].

Soit $\mathscr{M}$ un F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module. On pose, cf. [**Cre12**, (6.1.7)]

$$\mathbb{V}(\mathscr{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}}\big(\mathscr{M}, \mathcal{B}\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{W}(\mathscr{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}}\big(\mathscr{M}, \mathcal{C}\big). \tag{2.1.5.1}$$

Crew montre qu'ils sont des K^{nr}-espaces vectoriels de dimension finie lorsque $\mathscr{M}$ est holonome. Ainsi, grâce aux structures induites par celles de M, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, ils forment un couple des modules de Deligne, cf. 1.2.3.1. Ce couple est muni d'autres structures supplémentaires : des applications linéaires $c\colon \mathbb{V}(\mathscr{M}) \to \mathbb{W}(\mathscr{M})$, $v\colon \mathbb{W}(\mathscr{M}) \to \mathbb{V}(\mathscr{M})$ et $v(\tau)\colon \mathbb{W}(\mathscr{M}) \to \mathbb{V}(\mathscr{M})$, pour tout τ dans le groupe d'inertie local, satisfaisant des compatibilités. Ces objets forment de manière naturelle une catégorie, qu'on notera $\mathrm{Sol}_{K^{\mathrm{nr}}}(G)$ et que Crew appelle *Solution Data*. On appellera $\mathbb{V}(\mathscr{M})$ (resp. $\mathbb{W}(\mathscr{M})$) les hypersolutions (resp. microsolutions) de $\mathscr{M}$. Nous regroupons dans le théorème 2.1.5.1 ci-dessous une liste de propriétés qui nous intéressent.

Théorème 2.1.5.1 (Crew).

(1) *Les foncteurs* $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}\colon F\text{-Hol}(\mathscr{S}) \to \mathrm{Del}_{K^{\mathrm{nr}}}(G)$ *sont contravariants et exacts, cf.* [**Cre12**, Lemma 6.1.2].

(2) *Pour tout* F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$*-module holonome* $\mathscr{M}$*, on a une suite exacte, cf.* [**Cre12**, (6.1.14)],

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}}\big(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{]0[} \otimes_K K^{\mathrm{nr}}\big) \to \mathbb{V}(\mathscr{M}) \xrightarrow{c} \mathbb{W}(\mathscr{M}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}}\big(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{]0[} \otimes_K K^{\mathrm{nr}}\big) \to 0.$$

(3) *Le foncteur* $\mathscr{M} \mapsto \big(\mathbb{V}(M), \mathbb{W}(M), c, v, v(\tau)\big)$ *est une anti-équivalence de catégories entre* $F\text{-Hol}(\mathscr{S})$ *et* $\mathrm{Sol}_{K^{\mathrm{nr}}}(G)$*, cf.* [**Cre12**, Th. 7.1.1].

Il est parfois utile de disposer d'une version équivariante de l'équivalence donné en 2.1.5.1-(3) : on pose [**AM15**, 3.1.9]

$$\Psi(\mathscr{M}) = \mathbb{V}(\mathbb{D}_{\mathscr{S}}(\mathscr{M})) \quad \text{et} \quad \Phi(\mathscr{M}) = \mathbb{W}(\mathbb{D}_{\mathscr{S}}(\mathscr{M})), \tag{2.1.5.2}$$

où $\mathbb{D}_{\mathscr{S}}$ est le foncteur de dualité sur $\mathscr{S}$, cf. [**Cre12**, §3.4, p. 243]. On appelle $\Psi(\mathscr{M})$ (resp. $\Phi(\mathscr{M})$) les cycles proches (resp. évanescents) de $\mathscr{M}$.

2.1.6. Opérations cohomologiques et cohomologie rigide. Soit $(\mathfrak{X}, Z)$ un couple formé d'un schéma formel propre et lisse $\mathfrak{X}$ et d'un diviseur Z de sa fibre spéciale. Un morphisme $(\mathfrak{X}_1, Z_1) \to (\mathfrak{X}_2, Z_2)$ entre deux tels couples est un morphisme $f\colon \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2$ tel que $f^{-1}(Z_2)$ est un diviseur et $f(\mathfrak{X}_1 \backslash Z_1) \subset \mathfrak{X}_2 \backslash Z_2$. Différentes opérations cohomologiques sont définies pour les $\mathscr{D}^\dagger$-modules par rapport à un tel morphisme. Nous allons en passer très rapidement quelques-unes en revue et on renvoie le lecteur à [**AM15**, §3] pour un survol, ou à [**Abe14**, **AC13**] pour un traitement plus complet. En particulier l'image directe permet de retrouver la cohomologie rigide d'un F-isocristal en termes de $\mathscr{D}^\dagger$-modules comme rappelé ci-dessous, cf. [**Abe14**] et [**AM15**, 3.1.8]. Dans le cas d'un trait la classification des F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}$-modules holonomes par Crew via les modules de Deligne donne une interprétation galoisiennes des certaines opérations cohomologiques, [**Cre06**, §2], [**Cre12**, §3.4], et aussi [**AC13**, §1.5].

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}^\dagger(Z)$-module cohérent et notons par $f\colon (\mathfrak{X}, Z) \to \mathrm{Spf}(R)$ le morphisme structurel. On désigne par $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},Z}$ le foncteur de dualité par rapport aux $\mathscr{D}^\dagger(Z)$-modules et par $M^\vee$ le dual d'un F-isocristal $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$. Nous avons, cf. [**AM15**, 3.1.8] :

$$\mathrm{sp}^*(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},Z}(\mathscr{M})) \cong (\mathrm{sp}^*(\mathscr{M}))^\vee(-1), \tag{2.1.6.1}$$

$$\mathcal{H}^i(f_+\mathscr{M}) \cong H^{i+1}_{\mathrm{rig}}(U, \mathrm{sp}^*\mathscr{M})(1), \tag{2.1.6.2}$$

$$\mathcal{H}^i(f_!\mathscr{M}) \cong H^{i+1}_{\mathrm{rig},c}(U, \mathrm{sp}^*\mathscr{M})(1). \tag{2.1.6.3}$$

Grâce à la classification de Crew des F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}$-holonomes nous avons le triangle distingué suivant, cf. [**AM15**, (3.1.9.1)].

$$j_{x!}j_x^+\mathscr{M}_{|S_x} \to \mathscr{M}_{|S_x} \to i_{x+}i_x^!\mathscr{M} \xrightarrow{+1} \tag{2.1.6.4}$$

2.1.7. Extension canonique. Crew et Matsuda ont défini un foncteur d'extension canonique [**Cre00**, **Mat02**] pour les F-isocristaux surconvergents. C'est l'analogue en cohomologie rigide du foncteur d'extension canonique construit par Katz et Gabber en cohomologie ℓ-adique, cf. [**Kat86**].

C'est un foncteur exact, pleinement fidèle

$$\begin{aligned} F\text{-Isoc}^\dagger(\eta|K) &\to F\text{-Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_m|K) \\ M &\mapsto M^{\mathrm{can}} \end{aligned}$$

qui associe à tout (φ, ∇)-module M sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}$, un F-isocristal dans $F\text{-Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_m|K)$, noté M^{can}, dont le germe en zéro est canoniquement isomorphe à M et dont l'irrégularité à l'infini est nulle. De plus, si M est unité en tant que F-isocristal, alors M^{can} aussi. L'image essentielle de ce foncteur est complètement caractérisée : on appelle ses objets F-isocristaux *spéciaux* sur $\mathbb{G}_m$, cf. [**Mat02**] pour plus de détails.

Dans [**Cre12**, §8, (8.2.20)], Crew étend la définition du foncteur d'extension canonique aux $\mathscr{D}^\dagger$-modules arithmétiques. Posons $\mathrm{P} = \widehat{\mathbb{P}}^1_R$ et $\mathscr{S}_0 = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{P},0})$, notons par $S_0 \hookrightarrow \mathscr{S}_0$ la fibre spéciale de $\mathscr{S}_0$. Précisément Crew définit un foncteur exact, pleinement fidèle, commutant aux produits tensoriels et duaux,

$$\mathrm{can}\colon F\text{-Hol}(\mathscr{S}_0) \to F\text{-Hol}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathrm{P},\mathbb{Q}}(\infty)),$$

qu'on notera encore $\mathscr{M} \mapsto \mathscr{M}^{\mathrm{can}}$, tel que :

(1) $\mathscr{M}^{\mathrm{can}}_{|\mathbb{G}_m}$ est un isocristal spécial au sens de Matsuda ;

(2) $\mathscr{M}^{\mathrm{can}}_{|S_0} = \mathscr{M}$;

(3) $\mathscr{M}^{\mathrm{can}}$ est régulier à l'infini.

Par construction l'extension canonique de Crew est donc compatible à celle de Matsuda dans le sens que pour tout $\mathscr{M} \in F\text{-Hol}(\mathscr{S}_0)$ on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{sp}^*\big(\mathscr{M}^{\mathrm{can}}_{|\mathbb{G}_m}\big) \cong \big(\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S}_0,\mathbb{Q}}(0) \otimes_{\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S}_0,\mathbb{Q}}} \mathscr{M}\big)^{\mathrm{can}}$$

de F-isocristaux sur $\mathbb{G}_m$ surconvergents à l'infini, où nous avons identifié $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}(0) \otimes \mathscr{M}$ au (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}(\eta_0)$ sous-jacent, cf. 2.1.4.2.

2.2. Analyse microlocale p-adique

2.2.1. Microdifférentielles p-adiques. Nous allons résumer brièvement certains éléments de la théorie des opérateurs microdifférentiels p-adiques, cf. [**Abe15**] ou [**AM15**, 1.1] pour plus de détails.

Notons par $\pi\colon T^*X \to X$ le fibré cotangent, par $s\colon X \to T^*X$ la section nulle et par $\mathring{T}^*X \hookrightarrow T^*X$ l'ouvert complémentaire de $s(X)$. Soit $m \geq 0$ un entier. Le faisceau sur T^*X de microdifférentielles $\mathscr{E}_X^{(m)}$ de niveau m est une $\pi^{-1}\mathscr{D}_X^{(m)}$-algèbre « localisation » de $\mathscr{D}_X^{(m)}$ sur le fibré cotangent.

Pour donner une idée en termes vagues des sections sur un ouvert $\Omega \subset T^*X$, supposons que $\pi(\Omega) \subset X$ est affine et admet une coordonnée étale t, notons par ∂ la dérivation qui lui correspond. Si $\Omega \cap s(X) \neq \emptyset$, alors $\Gamma(\Omega, \mathscr{E}_X^{(m)}) = \Gamma(\pi(\Omega), \mathscr{D}_X^{(m)})$; sinon, pour Ω évitant la section nulle, $\Gamma(\Omega, \mathscr{E}_X^{(m)})$ est une localisation (non commutative) de $\Gamma(\pi(\Omega), \mathscr{D}_X^{(m)})$, obtenue en « inversant ∂ » et en complétant en tant qu'anneau filtré selon les puissances négatives de l'ordre. Pour un tel ouvert Ω, les sections sur Ω sont les mêmes que sur $\mathring{T}^*\pi(\Omega)$ et s'écrivent dans la forme

$$Q = \sum_{i=-\infty}^{r} a_i \partial^{\langle i \rangle_{(m)}}$$

où $a_i \in \Gamma(\pi(\Omega), \mathscr{D}_X^{(m)})$, $r \in \mathbb{Z}$ (l'ordre de Q) et on réfère à [**AM15**, 1.1.1] pour la notation $\partial^{\langle i \rangle_{(m)}}$, pour $i < 0$.

Par complétion p-adique on définit le faisceau $\widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. À la différence du cas de $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$, il n'est pas possible de passer à la limite directe sur le niveau, car il n'existe pas de morphisme continu $\widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \to \widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m+1)}$ compatible à $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)} \hookrightarrow \widehat{\mathscr{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m+1)}$. Pour obvier à ce problème Abe a défini dans [**Abe15**] un faisceau de microdifférentielles intermédiaires $\widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m,m')}$ dépendant de deux niveaux $m \geq 0, m' \geq m$ (m pour les puissances positives de la dérivation, m' pour les puissances négatives), muni de morphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X}}^{(m,m')} & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X}}^{(m+1,m')} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X}}^{(m,m'-1)} & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X}}^{(m+1,m'-1)} \end{array}$$

pour tout $m \geq 0$, $m' \geq m+2$. Il définit alors

$$\mathscr{E}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m,\dagger)} = \varprojlim_{m'} \widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m,m')} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{\dagger} = \varinjlim_{m} \mathscr{E}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m,\dagger)}.$$

Dans [**Abe15**, Th. 7.2], il a prouvé le théorème de stabilité suivant. Soit $\mathscr{M}$ un $\widehat{\mathscr{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module cohérent. Il existe un entier $N \geq m$ tel que pour tout $m'' \geq m' \geq N$, on a

$$\mathrm{Car}^{(m')}\big(\widehat{\mathscr{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m')} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}} \mathscr{M}\big) = \mathrm{Supp}\big(\widehat{\mathscr{E}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m',m'')} \otimes_{\pi^{-1}\widehat{\mathscr{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}} \pi^{-1}\mathscr{M}\big), \tag{2.2.1.1}$$

où Supp désigne le support et $\mathrm{Car}^{(m')}$ est la variété caractéristique de niveau m', cf. [**Ber02**, 5.2.5].

Au 2.1.4 nous avions revu la définition de la catégorie de F-$\mathscr{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-modules holonomes, cf. [**Ber02**, 5.4.1 et 5.4.3 (ii)]. Grâce au théorème (2.2.1.1) ci-dessus on peut donner (dans le cas de courbes seulement) une définition d'holonomie pour un $\mathscr{D}^{\dagger}$-module $\mathscr{M}$ sans structures de Frobenius.

En effet, on peut définir la variété caractéristique de $\mathscr{M}$ en posant

$$\mathrm{Car}(\mathscr{M}) = \mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{M}^{(m)}),$$

pour un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{M}^{(m)}$ tel que $\mathscr{M} = \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes \mathscr{M}^{(m)}$, avec m suffisamment grand. On dit alors que $\mathscr{M}$ est holonome si $\mathscr{M} = 0$ ou sa variété caractéristique est de dimension un. Cette définition coïncide avec celle de Berthelot si $\mathscr{M}$ possède une structure de Frobenius.

2.2.2. Microlocalisation et théorème de stabilité. Nous avons besoin d'étudier plus en profondeur le *microlocalisé* $\widehat{\mathscr{E}}^{(m',m'')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes \pi^{-1}\mathscr{M}$ d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{M}$, pour $m'' \geq m' \geq m$.

Par construction du faisceaux de microdifférentielles, le support du microlocalisé de $\mathscr{M}$ (ou la variété caractéristique) est un sous-ensemble conique du fibré cotangent $\pi\colon T^*X \to X$, c'est-à-dire que s'il contient un point ξ qui n'appartient pas à la section nulle, alors il contient toute la droite affine $\pi^{-1}(\pi(\xi))$.

Définition 2.2.2.1. [**AM15**, 1.3.8]

(1) Un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{M}$ est dit *stable* si pour tout $m'' \geq m' \geq m$,

$$\mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{M}) = \mathrm{Supp}\big(\widehat{\mathscr{E}}^{(m',m'')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\pi^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \pi^{-1}\mathscr{M}\big).$$

(2) Soit $\mathscr{M}$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module. Les points $s \in \mathfrak{X}$ tels que $\pi^{-1}(s) \subset \mathrm{Car}^{(m)}(\mathscr{M})$ sont dits *points singuliers* de $\mathscr{M}$.

(3) Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module. Les *points singuliers* de $\mathscr{M}$ sont les points singuliers de tout $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module stable $\mathscr{M}^{(m)}$ tel que $\mathscr{M} = \mathscr{D}^{\dagger} \otimes \mathscr{M}^{(m)}$.

(4) On note $\mathrm{Sing}(\mathscr{M})$ l'ensemble des points singuliers de $\mathscr{M}$.

Nous avons besoin de généraliser le théorème de stabilité de la variétés caractéristique au cycle caractéristique, cf. [**Abe10**, 2.1.17] et [**Ber02**, 5.4]. Le point clé est de donner, pour un $\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{M}$, une définition de cycle caractéristique indépendant du niveau, c'est-à-dire indépendant du choix d'un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{M}^{(m)}$ tel que $\mathscr{M} = \mathscr{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{M}^{(m)}$. Dans *loc. cit.*, Berthelot a utilisé son théorème de descente par le Frobenius alors que ici nous pouvons prendre, grâce au théorème 2.2.2.4, un entier m assez grand, de sorte que $\mathscr{M}^{(m)}$ soit stable.

Lemme 2.2.2.2. [**AM15**, 1.3.7] *Soit $\mathfrak{C}$ une courbe formelle affine et lisse sur $\mathrm{Spf}(R)$ de coordonnée étale t et dérivation associée ∂. Pour tout $m' \geq m \geq 0$, on pose*

$$A^{(m,m')} = \Big\{ Q \in \Gamma(\mathring{T}^*\mathfrak{C}, \widehat{\mathscr{E}}^{(m,m')}_{\mathfrak{C},\mathbb{Q}}) \big| \, \forall\, i \geq 0,\, Q\partial^i = \partial^i Q \Big\},$$

(ce sont des sections qui sont « constantes » en t). Pour tout nombres réels $0 < a \leq b$, on pose

$$\mathcal{A}(\{a,b]) = \left\{ f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i t^i \,\middle|\, f_i \in K,\ f \text{ converge pour } a < |t| \leq b \text{ et } \|f\|_a := \sup_{i\in\mathbb{Z}} |f_i| a^i < +\infty \right\}.$$

Alors :

(1) *la K-algèbre $A^{(m,m')}$ est commutative et isomorphe à l'algèbre de séries $\mathcal{A}(\{\rho(m'),\rho(m)])$, où $\rho(n) = p^{-\frac{p^n-1}{p-1}}$;*

(2) *$A^{(m,m')}$ est principal et si $m = m'$ il est un corps, noté $A^{(m)}$.*

Le lemme 2.2.2.2 découle d'un résultat de préparation à la Weirstraß. Ce resultat est démontré via de l'analyse p-adique. Il s'agit de montrer la finitude des pentes d'un polygone de Newton de la fonction rayon de convergence $\rho \mapsto \nu(f)_\rho$ qu'on associe à une série $f \in \mathcal{A}(\{a,b\})$, cf. [**AM15**, 1.3.7].

NOTATION 2.2.2.3. [**AM15**, 1.2.1]. Soit $\mathscr{M}$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. On pose

$$\widehat{\mathscr{E}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathscr{M}) = \widehat{\mathscr{E}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\pi^{-1}\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \pi^{-1}\mathscr{M}$$

et on l'appelle le *microlocalisé* (naïf de niveau m) de $\mathscr{M}$. Si s est un point de $\mathfrak{X}$ et ξ_s un point de $\pi^{-1}(s)$ différent de s, on note

$$\widehat{\mathscr{E}}^{(m)}_{s,\mathbb{Q}}(\mathscr{M}) = \widehat{\mathscr{E}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathscr{M})_{\xi_s}$$

la fibre du microlocalisée en ξ_s (elle ne dépend pas du choix de $\xi_s \in \pi^{-1}(s)$ différent de s).

On donne des définitions analogues pour les microdifférentiels intermédiaires $\widehat{\mathscr{E}}^{(m,m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$.

THÉORÈME 2.2.2.4. [**AM15**, 1.5.1] *Soit $\mathfrak{C}$ une courbe formelle affine et lisse sur* $\mathrm{Spf}(R)$ *de coordonnée étale t et de dérivation associée ∂. Soit $\mathscr{M}^{(m)}$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{C},\mathbb{Q}}$-module holonome, stable et posons $Z = \mathrm{Sing}(\mathscr{M})$. Supposons que $\mathscr{M}^{(m)}_{|\mathfrak{C}\setminus Z}$ soit un isocristal convergent. Pour tout $m' \geq m$, posons $\mathscr{M}^{(m')} = \widehat{\mathscr{D}}^{(m')} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m')}} \mathscr{M}^{(m)}$. Alors :*

(1) *Pour tout $m'' \geq m' \geq m$, le $A^{(m',m'')}$-module $\widehat{\mathscr{E}}^{(m',m'')}_{s,\mathbb{Q}}(\mathscr{M}^{(m')})$ est libre et de type fini et*

$$\dim_{A^{(m)}} \widehat{\mathscr{E}}^{(m)}_{s,\mathbb{Q}}(\mathscr{M}^{(m)}) = \mathrm{rg}_{A^{(m',m'')}} \widehat{\mathscr{E}}^{(m',m'')}_{s,\mathbb{Q}}(\mathscr{M}^{(m')}) = \dim_{A^{(m')}} \widehat{\mathscr{E}}^{(m')}_{s,\mathbb{Q}}(\mathscr{M}^{(m')}).$$

On désigne cette dimension par r_s.

(2) *Le cycle* $\mathrm{Cycl}^{(m')}(\mathscr{M}^{(m')})$, *cf.* [**Abe10**, 2.1.17] *pour la définition, est calculé par*

$$\mathrm{Cycl}^{(m')}(\mathscr{M}^{(m')}) = r[X] + p^{m'} \sum_{s\in Z} r_s \deg(s)^{-1}[\pi^{-1}(s)]\,,$$

où r est le rang de l'isocristal $\mathscr{M}^{(m)}_{|\mathfrak{C}\setminus Z}$. On appellera r le rang générique *de $\mathscr{M}^{(m)}$.*

Dans la preuve de 2.2.2.4-(1) la finitude du $A^{(m',m'')}$-module $\widehat{\mathscr{E}}^{(m',m'')}_{s,\mathbb{Q}}(\mathscr{M}^{(m')})$ est obtenue par des lemmes de divisions pour les opérateurs microdifférentiels [**AM15**, 1.3.2, 1.3.9]. On en déduit que $\widehat{\mathscr{E}}^{(m',m'')}_{s,\mathbb{Q}}(\mathscr{M}^{(m')})$ est libre car il peut être muni d'une connexion et $A^{(m',m'')}$ est principal.

2.2.3. Cycle caractéristique. Grâce au théorème 2.2.2.4 nous pouvons maintenant définir le cycle caractéristique d'un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome.

DÉFINITION 2.2.3.1. [**AM15**, 1.5.2] Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome et $\mathscr{M}^{(m)}$ un $\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, stable et tel que $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathscr{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathscr{M}^{(m)} = \mathscr{M}$. On pose

$$\mathrm{Cycl}(\mathscr{M}) = r[X] + \sum_{s\in \mathrm{Sing}(\mathscr{M})} \frac{r_s}{\deg(s)}[\pi^{-1}(s)]$$

où r est le rang générique de $\mathscr{M}^{(m)}$ et $r_s = \dim_{A^{(m)}}\big(\widehat{\mathscr{E}}^{(m)}_{s,\mathbb{Q}}(\mathscr{M}^{(m)})\big) \in \mathbb{N}$.

De plus, le *cycle caractéristique* $\mathrm{Cycl}(\mathscr{M})$ a coefficients entiers, cf. [**AM15**, Rk. 1.5.2-(iii)] : on pose $m_x = \deg(s)^{-1} r_s \in \mathbb{N}$ et on l'appelle la *multiplicité verticale* de $\mathscr{M}$ en x ; on pose $m_{\xi=0} = r$ et on l'appelle la *multiplicité horizontale* ou le *rang générique* de $\mathscr{M}$.

Remarque 2.2.3.2.

(1) La définition 2.2.3.1 repose sur le théorème de stabilité 2.2.2.4, qui est disponible à ce jour que sur des courbes. Dans [**Abe15**, 7.1] Abe conjecture que la variété caractéristique est stable en dimension plus grande que un.
(2) La définition de cycle et le théorème de stabilité sont valables plus généralement sur tout corps k de caractéristique $p > 0$, sans hypothèse de perfection.
(3) Si $\mathscr{M}$ possède une structure de Frobenius le cycle caractéristique coïncide avec celui défini par Berthelot.

Exemple 2.2.3.3. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}^\dagger$-module associé à $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$. Alors sa variété caractéristique satisfait $\mathrm{Car}(\mathscr{M}) \cap \pi^{-1}(U) = U$. En particulier $\mathscr{M}$ est holonome. La multiplicité horizontale est égale au rang de M. On verra à la section 2.3 les liens entre les multiplicités verticales et l'irrégularité de M aux points de $X\backslash U$.

Corollaire 2.2.3.4. [**AM15**, 1.5.3] *Le cycle caractéristique est additif par rapport aux suites exactes courtes de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes et la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes est artinienne et noetherienne.*

2.3. Intermezzo sur l'irrégularité

2.3.1. Pentes différentielles et irrégularité. Soit M un (φ, ∇)-module sur l'anneau de Robba. Christol et Mebkhout ont défini une décomposition par les *pentes différentielles*

$$M = \bigoplus_{\beta \geq 0} M_\beta$$

où M_β est un (φ, ∇)-modules isocline de pente différentielle $\beta \in \mathbb{Q}$. Ces pentes différentielles sont définies par l'analyse p-adique en regardant la fonction rayon de convergence des sections horizontales de ∇ au point générique au sens de Dwork. L'irrégularité p-adique de M est par définition le nombre $\mathrm{irr}(M) = \sum_{\beta \geq 0} \beta \, \mathrm{rg}(M_\beta) \geq 0$. Christol et Mebkhout ont montré aussi que $\mathrm{irr}(M)$ est égale à l'indice d'un certain opérateur associé à la connexion de M : cela implique en particulier que $\mathrm{irr}(M)$ est entier.

Exemple 2.3.1.1. L'irrégularité de $\mathscr{L}_{\pi|\eta_\infty}$ est 1 et celle de $\mathscr{K}_{\alpha|\eta_0}$ et de $\mathscr{K}_{\alpha|\eta_\infty}$ est 0 ; cf. 1.1.5 et 1.1.6 pour les définitions de $\mathscr{L}_\pi$ et $\mathscr{K}_\alpha$, cf. (1.2.1.1) pour celle de $(-)_{|\eta_\infty}$. Plus généralement, par un théorème de Matsuda et Tsuzuki, cf. [**Tsu98b**], la filtration par les pentes différentielles d'un germe de F-isocristal M correspond à la filtration par les pentes de Katz de la représentation $\Psi(M)$ de $I(x)$ (qui est linéaire), cf. [**Lau87**, 2.1]. Ainsi l'irrégularité de M est égale au conducteur de Swan de $\Psi(M)_{|I(x)}$.

Définition 2.3.1.2 (Garnier). Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}^\dagger$-module holonome. On pose

$$\mathrm{irr}^{\mathrm{Gar}}_x(\mathscr{M}) = \chi\big(R\mathcal{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}|S_x})\big) - m_{\xi=0}(\mathscr{M}) + m_x(\mathscr{M}) \in \mathbb{Z}$$

où $\chi(-)$ dénote la caractéristique d'Euler d'un complexe, $(-)_{|S_x}$ a été défini en 2.1.3.3 et $m_x(\mathscr{M})$ (resp. $m_{\xi=0}(\mathscr{M})$) est la multiplicité verticale en x (resp. horizontale) de $\mathscr{M}$.

2.3.2. Équivalence entre les deux notions d'irrégularité.

Théorème 2.3.2.1. [**AM15**, 2.3.2] *Soient $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U|K)$ et $\mathscr{M} = j_+ \,\mathrm{sp}^*\, M$. Alors*

$$\chi(R\mathcal{H}om_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}|S_x})) = 0, \tag{2.3.2.1}$$

$$\forall x \in X, \qquad \mathrm{irr}^{\mathrm{Gar}}_x(\mathscr{M}) = \mathrm{irr}^{\mathrm{CM}}_x(M). \tag{2.3.2.2}$$

Esquisse de la preuve. La première égalité se ramène à la séquence exacte de Crew 2.1.5.1-(2). Pour la deuxième on utilise d'abord la proposition 2.4.3.1, qu'on énoncera plus bas, pour montrer que l'irrégularité de Garnier est une notion locale : *i.e.* $\mathrm{irr}_x^{\mathrm{Gar}}(\mathscr{M})$ ne dépend que de $\mathscr{M}_{|S_x}$. Puis on remarque que les deux définitions d'irrégularité satisfont une formule à la Grothendieck–Ogg–Chafarevitch pour la cohomologie rigide, cf. (1.3.1.1). Ainsi en utilisant le théorème 2.4.3.1 et le foncteur d'extension canonique on peut se réduire au cas modéré, où les deux irrégularités sont zéro et donc égales. □

2.4. Principe de la phase stationnaire en cohomologie rigide

2.4.1. Transformation du Fourier locale. La transformée de Fourier locale est un endofoncteur

$$\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})} : F\text{-Isoc}^\dagger(\eta|K) \to F\text{-Isoc}^\dagger(\eta|K)$$

de la catégorie des germes des F-isocristaux surconvergents, *i.e* des (φ,∇)-modules sur l'anneau de Robba. Nous avons trois définitions équivalentes de $\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}$.

La première définition est géométrique globale et suit une recette qui marche dans différentes théories cohomologiques. En cohomologie rigide elle apparait dans [**Cre12**, (8.3.1)] : on utilise l'extension canonique rappelée en 2.1.7, l'extension par zéro $j_!$ rappelé en 2.1.6 et la transformation de Fourier–Huyghe globale sur la droite affine $\mathbb{A}^1_k$, cf. §3.2 pour des rappels (en particulier cf. 3.2.2.2 pour la notation $\tilde{\infty}$). Résumons la construction ci-dessous.

Pour définir $\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}$ on va d'abord identifier la catégorie de départ $F\text{-Isoc}^\dagger(\eta|K)$ avec la catégories $F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_0|K)$ des germes en 0 des F-isocristaux surconvergents $F\text{-Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_m|K)$, et la catégorie d'arrivée avec la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_{\tilde{\infty}}|K)$ des germes à l'infini des F-isocristaux sur la droite affine duale, cf. §3.2.2.2. Maintenant, étant donné un F-isocristal $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_0|K)$ nous allons :

(1) considérer $j_!M$, qui est un F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}$-module holonome sur le trait S_0 autour de zéro, cf. §2.1.6 ;

(2) prendre l'extension canonique $(j_!M)^{\mathrm{can}}$, qui est un F-$\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-module holonome sur la droite projective surconvergent le long de ∞ ;

(3) appliquer la transformation de Fourier–Huyghe $\mathscr{F}_{\mathrm{géom},\pi}((j_!M)^{\mathrm{can}})$, cf. §3.2 ;

(4) se restreindre à l'infini $(\mathscr{F}_{\mathrm{géom},\pi}((j_!M)^{\mathrm{can}}))_{|\eta_{\tilde{\infty}}}$ pour obtenir un F-$\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{I}_{\tilde{\infty}},\mathbb{Q}}(\tilde{\infty})$-module holonome et donc, cf. 2.1.4.2, un (φ,∇)-module sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}(\eta_{\tilde{\infty}})$.

En conclusion nous avons défini, pour tout $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_0|K)$,

$$\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}(M) = (\mathscr{F}_{\mathrm{géom},\pi}((j_!M)^{\mathrm{can}}))_{|\eta_{\tilde{\infty}}} \in F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_{\tilde{\infty}}|K). \tag{2.4.1.1}$$

En identifiant tout point fermé s de $\mathbb{A}^1_k$ avec l'origine par translations (après extension des scalaires de k à $k(s)$), on peut définir une transformation qu'on notera $\mathscr{F}_\pi^{(s,\tilde{\infty})}(M)$.

Le problème de cette définition est qu'elle se sert des « boites noires » (extension canonique, transformation de Fourier géométrique), et avec elle nous n'arrivons ni à prouver la formule de la phase stationnaire 2.4.3.2 qu'on cherche, ni des propriétés comme 2.4.1.2-(3) ci-dessous.

Remarque 2.4.1.1. On met on garde le lecteur que dans [**AM15**] nous avons des notations différentes pour la transformation de Fourier locale, qui sont incompatibles avec celles utilisées dans le texte présent. Précisément dans *loc. cit.*, nous usons les notations $\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}$, $\Phi^{(0,\tilde{\infty})}$ selon que l'argument du foncteur soit un $\mathscr{D}^\dagger$-module sur la droite projective, ou sur le disque formel ouvert. Dans ce mémoire nous avons pris parti de réduire les notations au minimum : ce que

nous avons noté ici $\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}(M)$, pour $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_0|K)$, serait noté par $\Phi^{(0,\infty)}(j_!M)$ ou encore $\mathscr{F}_\pi^{(0,\infty)}((j_!M)^{\mathrm{can}})$ dans *loc.cit.*

PROPOSITION 2.4.1.2. [**AM15**, 4.2.4]

(1) $\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}$ *est une équivalence de catégorie ;*

(2) $\mathscr{F}_\pi^{(0,\infty)}$ *est exact ;*

(3) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}_\pi^{(0,\infty)}(M)) = \mathrm{rg}(M) + \mathrm{irr}(M)$ *et* $\mathrm{irr}(\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}(M)) = \mathrm{irr}(M)$.

Des détails sur la preuve de 2.4.1.2 seront donnés en 2.4.3.

2.4.2. Définition microdifférentielle de la transformée de Fourier locale. Par le procédé d'analytification de Crew, nous pouvons définir, cf. [**AM15**, 2.2.1], un anneau $\mathscr{E}^{\mathrm{an}}$ de microdifférentielles analytiques p-adiques dont on peut explicitement décrire les éléments. Nous ne le ferons pas ici, mais on se limite à remarquer que nous avons un homomorphisme d'anneaux injectif

$$\phi^{(0,\tilde{\infty})} \colon \mathcal{R} \longrightarrow \mathscr{E}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{I},\mathbb{Q}}$$

envoyant t sur $\pi\partial^{-1}$ (le dérivation ∂ est inversible dans $\mathscr{E}^{\mathrm{an}}$).

DÉFINITION 2.4.2.1. Soit $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_0|K)$ on pose

$$\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}(M) = \mathscr{E}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathscr{D}^{\mathrm{an}}} j_!M$$

et on regarde $\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}(M)$ comme un $\mathcal{R}$-module via l'application $\phi^{(0,\tilde{\infty})} \colon \mathcal{R} \to \mathscr{E}^{\mathrm{an}}$ ci-dessus, muni de la connexion ∇ définie par $m \mapsto (\pi^{-1}\partial^2 x) \cdot m \otimes dy$, pour tout $m \in \mathscr{E}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathscr{D}^{\mathrm{an}}} M$.

REMARQUE 2.4.2.2. On remarque que l'opérateur $\pi^{-1}\partial^2 x$ utilisé pour définir cette connexion consiste dans la composition de l'isomorphisme de la transformée naïve Four_π, cf. 3.2.1, avec le changement de variables $z = x^{-1}$. En effet, l'application $\phi^{(0,\tilde{\infty})} \colon \mathcal{R} \to \mathscr{E}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{I},\mathbb{Q}}$ s'étend en un homorphisme $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{I}_\infty,\mathbb{Q}}(\tilde{\infty}) \to \mathscr{E}^{\mathrm{an}}$, envoyant ∂_z en $\pi^{-1}\partial^2 x$, cf. [**AM15**, 6.2.2].

Nous verrons plus bas, dans la preuve de 2.4.3.2, que la définition 2.4.2.1 coïncide avec (2.4.1.1).

La difficulté avec la définition purement locale 2.4.2.1 est que nous ne savons pas prouver directement (c'est-à-dire localement) ni la finitude du rang de $\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}(M)$ ni l'exactitude du foncteur ainsi défini (nous ne savons pas si $\mathscr{E}^{\mathrm{an}}$ est plat sur $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}$).

L'idée est de travailler quand-même avec l'objet $\mathscr{F}_\pi^{(0,\tilde{\infty})}(M)$ défini en 2.4.2.1, sans hypothèse de finitude, et de passer d'abord par une version faible de la phase stationnaire globale, unie à un théorème de localité de la microlocalisation, pour prouver la finitude et les propriétés 2.4.1.2, comme décrit plus bas dans 2.4.3.2.

2.4.3. Localité de la microlocalisation et phase stationnaire. La proposition 2.4.3.1 ci-dessous est le clé technique pour pouvoir utiliser les faisceaux des microdifférentielles sur une courbe $\mathfrak{X}$ pour étudier de propriété locales d'un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome $\mathscr{M}$. Nous l'avons utilisée plus haut pour montrer que l'irrégularité de Garnier de $\mathscr{M}$ en x ne dépend que de $\mathscr{M}_{|S_x}$ et elle sert à montrer que la transformation de Fourier construite à l'aide de la phase stationnaire est bien un foncteur local. Dans [**AM15**] la proposition 2.4.3.1 est un corollaire de la proposition [**AM15**, 2.2.3], dont la preuve utilise les propriétés fines des topologies sur les anneaux des microdifférentielles intermédiaires.

Proposition 2.4.3.1. [**AM15**, 2.2.6] *Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ deux courbes formelles lisses sur* $\mathrm{Spf}(R)$, $x \in \mathfrak{C}$ *et* $x' \in \mathfrak{C}'$ *et* $\iota\colon \mathscr{S}'_{x'} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_x$ *un isomorphisme entre les disques formels de $\mathfrak{C}'$ en x' et de $\mathfrak{C}$ en x. Soit $\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{M}'$) un $\mathscr{D}^\dagger$-module holonome sur $\mathfrak{C}$ (resp. $\mathfrak{C}'$) et supposons que $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ sont localement isomorphes, c'est-à-dire que nous avons un isomorphisme $f\colon \iota_*\mathscr{M}'_{|S'_{x'}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{|S_x}$ de $\mathscr{D}^{\mathrm{an}}_{\mathscr{S}_x,\mathbb{Q}}$-modules. Alors f induit un isomorphisme*

$$\iota_*(\mathscr{E}^\dagger_{\mathfrak{C}',\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{C}',\mathbb{Q}}} \mathscr{M}')_{\xi'} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{E}^\dagger_{\mathfrak{C},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathscr{D}^\dagger_{\mathfrak{C},\mathbb{Q}}} \mathscr{M})_{\xi} \tag{2.4.3.1}$$

entre les fibres des microlocalisés dans des points $\xi' \in \pi^{-1}(x')$ et $\xi \in \pi^{-1}(x)$ hors de la section nulle.

Théorème 2.4.3.2 (Phase stationnaire). [**AM15**, 4.2.2 et 5.1.8] *Soit $\mathscr{M}$ un F-$\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-module holonome tel que les pentes p-adiques de $\mathscr{M}_{|\eta_\infty}$ sont toutes strictement inférieures à 1. Soit Z l'ensemble de points singuliers de $\mathscr{M}$ et supposons $Z \subset \mathbb{A}^1(k)$. Alors*

$$\mathrm{Four}_\pi(\mathscr{M})_{|\eta_\infty} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{s\in Z} \mathscr{F}_\pi^{(s,\infty)}(\mathscr{M}_{|\eta_s}) \tag{2.4.3.2}$$

où $\mathscr{F}_\pi^{(s,\infty)}(\mathscr{M}_{|\eta_s})$ est la transformation de Fourier locale de $\mathscr{M}$ en s.

Idée de la preuve. La troisième construction de la transformation de Fourier locale (abrégé TFL dans la suite) et la preuve de la phase stationnaire se font au même temps. D'abord nous allons construire l'isomorphisme de la phase stationnaire et la TFL sans nous préoccuper de les munir d'une structure de Frobenius. On munira nos objets de structures de Frobenius à la fin en utilisant le théorème 3.3.2.2-(1), exposé au chapitre 3. Voici un résumé des différentes étapes de la construction.

(1) On définit une TFL par microlocalisation de manière similaire à 2.4.2.1, sans se soucier de la finitude de son rang dans un premier temps. À la différence de 2.4.2.1, on part d'un F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathbb{P}^1}(\infty)$-module holonome $\mathscr{M}$ comme dans l'énoncé du théorème de la phase stationnaire et on utilise $\mathscr{E}^\dagger$ en lieu de $\mathscr{E}^{\mathrm{an}}$.

(2) On prouve l'isomorphisme de la phase stationnaire (2.4.3.2) (sans Frobenius).

(3) Grâce à l'isomorphisme de la phase stationnaire (2.4.3.2) on démontre la finitude du rang de la TFL.

(4) On utilise une formule à la Grothendieck–Ogg–Chafarevitch, généralisée aux $\mathscr{D}^\dagger$-modules, pour calculer précisément le rang de la TFL.

(5) On montre par la proposition 2.4.3.1 que $\mathscr{F}_\pi^{(s,\infty)}(\mathscr{M}_{|\eta_s})$ ainsi définie ne dépend que de $\mathscr{M}_{|\eta_s}$ et pas de la structure de $\mathscr{M}$ sur la droite. Elle coïncide donc avec la définition 2.4.2.1.

(6) On munira nos objets de structures de Frobenius à la fin en utilisant le théorème 3.3.2.2-(1) et un théorème de commutation de la microlocalisation avec l'image inverse par Frobenius, cf. [**AM15**, 6.1.4].

(7) On utilise à nouveau la phase stationnaire pour montrer que $\mathscr{F}_\pi^{(s,\infty)}(\mathscr{M}_{|\eta_s})$ coïncide avec la première définition donnée en 2.4.1, cf. [**AM15**, Corollary 4.2.3].

□

Terminons ce chapitre par deux exemples de calcul de transformation de Fourier locale, pour d'autres exemples cf. [**AM15**, 2.4.4].

Exemple 2.4.3.3.

(1) Soit $M = \mathcal{R}\mathfrak{c}$ le $\mathcal{R}$-module libre de rang 1 muni de la connexion et du Frobenius triviales, *i.e.* $\nabla(\mathfrak{c})$=0 et $\varphi_M(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$. Alors $\mathscr{F}_\pi^{(0,\infty)}(M) = M$.

(2) Soit $\alpha \in \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}$ et $\mathscr{K}_\alpha \in F\text{-Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_m|K)$ le F-isocristal de Kummer, cf. 1.1.6. Supposons $\alpha \notin \mathbb{Z}$ (sinon $\mathscr{K}_\alpha \cong \mathscr{K}_0$ et on retourne dans le cas de l'exemple précédent). Alors $\mathscr{F}_\pi^{(0,\infty)}(\mathscr{K}_{\alpha|\eta_0}) = \mathscr{K}_{\alpha|\eta_\infty} \otimes_K H^1_{\mathrm{rig}}(\mathbb{G}_m, \mathscr{K}_{-\alpha} \otimes \mathscr{L}_\pi)(1)$, par (3.4.2.1).

CHAPITRE 3

Sur la structure de Frobenius de la transformation de Fourier d'un $\mathscr{D}$-module arithmétique. Application aux sommes de Gauss.

Le but de cette partie est de montrer une formule explicite décrivant le Frobenius de la transformée de Fourier–Huyghe d'un $\mathscr{D}$-module arithmétique. L'intérêt d'une telle description vient de ses applications arithmétiques. Nous allons montrer un exemple d'application, notamment aux sommes de Gauss.

3.1. La formule de Gross–Koblitz

3.1.1. Rappelons quelques notations (cf. §0.1) qui sont utilisées dans cette section. Pour simplifier on supposera que le nombre premier p est impair.

Nous avons choisi une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et nous désignons par $|\cdot|$ la norme de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ normalisée par $|p| = \frac{1}{p}$, et par $v_p(\cdot)$ la valuation p-adique associée, $|\cdot| = p^{-v_p(\cdot)}$. On note $\mu_p(\mathbb{Q}_p) \subset \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ le sous groupe des racines p-ièmes de l'unité.

On rappelle que pour tout entier $n \geq 0$, nous avons

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}, \tag{3.1.1.1}$$

où $s_p(n)$ désigne la somme des coefficients du développement p-adique de n,

$$n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \ldots, \text{ avec } 0 \leq n_i \leq p-1, \quad s_p(n) = \sum_i n_i. \tag{3.1.1.2}$$

La lettre k désigne un corps fini $k \supset \mathbb{F}_p$ avec $q = p^f$ éléments. Nous notons par $K \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ un corps de valuation discrète complet de corps résiduel k ; R_K désigne l'anneau des entiers de K.

Nous désignons par $[\cdot]_k \colon k^{\times} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ le caractère de Teichmüller de k. Il est l'unique section multiplicative de la réduction $R_K^{\times} \to k^{\times}$ modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}_K$. On étend $[\cdot]_k$ à une fonction multiplicative $[\cdot]_k \colon k \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ en posant $[0]_k = 0$.

3.1.2. Le π de Dwork. Choisir un caractère additif non trivial

$$\psi \colon \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$$

revient à choisir une racine $\psi(1) \in \mu_p(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ primitive p-ième de l'unité. En analyse p-adique on dispose d'une manière alternative pour faire un tel choix. Nous allons le rappeler brièvement. On se donne une racine $\pi \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ du polynôme $X^{p-1} + p$. La proposition suivante est classique, cf. par exemple [**Ber84**, 1.3].

Proposition 3.1.2.1. *Il existe une unique racine primitive $\zeta_\pi \in \mu_p(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ telle que*

$$\zeta_\pi \equiv 1 + \pi \mod \pi^2$$

En effet l'application $\pi \mapsto \zeta_\pi$ est une bijection entre les racines du polynôme $X^{p-1}+p$ et les racines primitives p-ièmes de l'unité. On notera $\psi_\pi\colon \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ le caractère additif défini par $\psi_\pi(1)=\zeta_\pi$.

On peut faire encore mieux : nous pouvons relever ψ_π à une fonction analytique p-adique. Pour cela rappelons la définition de l'exponentielle de Dwork : désignons par $\theta_\pi(t)$ la série formelle

$$\theta_\pi(t) = \exp(\pi(t-t^p)) \in \overline{\mathbb{Q}}_p[\![t]\!].$$

Comme $\pi(t-t^p)$ a valuation t-adique 1, il est évident que la série exponentielle converge t-adiquement vers un élément bien défini $\theta_\pi(t)$ de $\overline{\mathbb{Q}}_p[\![t]\!]$.

La formule (3.1.1.1) implique que la série formelle $\exp(\pi t) \in \overline{\mathbb{Q}}_p[\![t]\!]$ converge p-adiquement pour tout t tel que $|t|<1$. Par conséquent la série $\theta_\pi(t)=\exp(\pi(t-t^p))=\exp(\pi t)\exp(-\pi t^p)$ converge au moins dans le disque $D(0,1)$ des éléments de norme $|\cdot|<1$, car cela est vrai pour $\exp(\pi t)$ et $\exp(-\pi t^p)$. En fait elle converge plus : on dit qu'elle *surconverge*, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.1.2.2 (Dwork).

(1) $\theta_\pi(t)$ surconverge, i.e. *il existe* $\epsilon>0$ *tel que* $\theta_\pi(t)$ *converge pour* $|t|<1+\epsilon$.

(2) $\theta_\pi(1)$ *est une racine primitive de l'unité et pour tout* $x\in\mathbb{F}_p$,

$$\psi_\pi(x) = \theta_\pi([x]_{\mathbb{F}_p}).$$

Remarque 3.1.2.3. On peut déterminer précisément le rayon de convergence de θ_π : on a $1+\epsilon = p^{\frac{p-1}{p^2}}$, cf. [**Ber84**, 1.4] ou [**Rob00**, Ch.7, §2.4, p. 395].

3.1.3. Sommes de Gauss. Soit π une racine de $X^{p-1}+p$ et $\psi_\pi\colon \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ le caractère additif associé en 3.1.2. Soient $\chi\colon k^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ un caractère multiplicatif (pouvant être triviale) et $\psi_{\pi,k}\colon k \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ le caractère additif de k obtenu en composant la trace de k à $\mathbb{F}_p$ avec ψ_π. Le caractère $\psi_{\pi,k}$ est clairement non-trivial car la trace est surjective et ψ_π est fidèle. On définit la *somme de Gauss* p-adique de χ et $\psi_{\pi,k}$ par

$$G(\chi,\psi_{\pi,k}) = \sum_{x\in k^\times} \chi(x)\psi_{\pi,k}(x).$$

3.1.4. La fonction Gamma p-adique. Désignons par $\Gamma_p\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p^\times$ la fonction Gamma p-adique définie par Morita, cf. par exemple [**Rob00**, Ch. 7, §1]. Par construction $\Gamma_p\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p^\times$ est l'unique fonction continue telle que, pour tout entier $n\geq 2$, on ait

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{1\leq j<n,\, p\not| j} j\,.$$

La fonction Gamma p-adique satisfait l'équation fonctionnelle suivante : pour tout $x\in\mathbb{Z}_p$,

$$\Gamma_p(x+1) = \begin{cases} -x\Gamma_p(x) & \text{si } p \text{ ne divise pas } x\,; \\ -\Gamma_p(x) & \text{si } p \text{ divise } x. \end{cases}$$

3.1.5. Énoncé de la formule. La formule de Gross–Koblitz calcule la somme de Gauss $G(\chi,\psi_{\pi,k})$ en termes d'un produit des valeurs spéciales de la fonction Gamma p-adiques dans des nombres rationnels.

THÉORÈME 3.1.5.1 (Gross–Koblitz). *Soit $\chi\colon k^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ un caractère multiplicatif et $\psi_{\pi,k}\colon k \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ un caractère additif comme dans 3.1.3. Soient $0 \leq n < q-1$ l'unique entier tel que $\chi = [\cdot]_k^{-n}$ et $n = \sum_{j=0}^{f-1} n_j p^j$ son développement p-adique. Pour tout entier $0 \leq i \leq f-1$, notons*

$$n^{(i)} = n_i + n_{i+1}p + \ldots + n_{f-1}p^{f-1-i} + n_0 p^{f-i} + \ldots + n_{i-1}p^{f-1}$$

l'entier obtenu en permutant cycliquement i-fois les chiffres du développement p-adique de n. Alors on a

$$G(\chi, \psi_{\pi,k}) = -\pi^{s_p(n)} \prod_{0\leq i\leq f-1} \Gamma_p\left(\tfrac{n^{(i)}}{q-1}\right), \tag{3.1.5.1}$$

où $s_p(n) = \sum_{j=0}^{f-1} n_j$.

REMARQUE 3.1.5.2. En littérature il y a plusieurs preuves de (3.1.5.1), parmi lesquelles :

(1) la preuve originelle de Gross et Koblitz [**GK79**] ;
(2) la preuve de Dwork, publiée sous le pseudonyme de Maurizio Boyarsky [**Boy80**] ;
(3) les preuves élémentaires de Robert Coleman [**Col87**] ;
(4) la preuve élémentaire d'Alain Robert [**Rob01**].

Le but de ce chapitre est de montrer comment un théorème de description explicite du Frobenius sur la transformation de Fourier–Huyghe d'un $\mathscr{D}$-modules arithmétique permet, uni à un résultat de Barsky sur le développement de Mahler de Γ_p, cf. 3.4.1.1, d'obtenir une autre preuve de la formule de Gross–Koblitz.

3.2. Transformation de Fourier globale en cohomologie rigide

Pour simplifier les notations nous allons nous placer en dimension un, donc sur la droite affine $\mathbb{A}^1_k$.

Il y a deux transformations de Fourier « globales » sur $\mathbb{A}^1_k$. Elles ont été introduites et comparées par Christine Huyghe dans [**NH04**] : la transformée dite naïve et celle géométrique.

3.2.1. Transformation de Fourier naïve. La transformée naïve est la plus simple à définir. Par définition l'algèbre de Weyl $K\langle t, \partial\rangle$ est la K-algèbre non-commutative engendrée par les symboles t et ∂ soumis à la relation $\partial t = t\partial + 1$. Nous aurons besoins du « complété faible » de l'algèbre de Weyl qui a la description concrète suivante

$$D^\dagger(\infty) = \left\{ \sum_{r,m=0}^{+\infty} a_{r,m} t^m \frac{\partial^r}{r!} \,\middle|\, a_{r,m} \in K,\ \exists c>0, \eta<1,\ \forall r,m,\ |a_{r,m}| < c\eta^{r+m} \right\}. \tag{3.2.1.1}$$

C'est un anneau cohérent, c'est-à-dire que tout idéal à gauche, ou à droite, est de présentation finie. On verra au 3.2.2.1 que cette K-algèbre non-commutative est l'algèbre des sections globales du faisceaux $\mathscr{D}^\dagger_{\mathbb{P},\mathbb{Q}}(\infty)$ introduit au chapitre 2.

L'isomorphisme $K\langle t,\partial\rangle \xrightarrow{\sim} K\langle t,\partial\rangle$ qui envoie t sur $\pi^{-1}\partial$ et ∂ sur $-\pi t$, s'étend en un automorphisme de $D^\dagger(\infty)$ qu'on note

$$\mathrm{Four}_\pi\colon D^\dagger(\infty) \xrightarrow{\sim} D^\dagger(\infty).$$

DÉFINITION 3.2.1.1 (Huyghe). Soit M un $D^\dagger(\infty)$-module cohérent (*i.e.* il est de type fini et tout sous-module de type fini est de présentation finie). La transformation de Fourier naïve de M est

$$\mathscr{F}_{\text{naïve},\pi}(M) = (\mathrm{Four}_\pi)_*(M) = D^\dagger(\infty) \otimes_{D^\dagger(\infty)} M,$$

où le produit tensoriel est pris au dessus de $\mathrm{Four}_\pi^{-1}\colon D^\dagger(\infty)\to D^\dagger(\infty)$.

On utilisera la notation suivante qui est bien commode et usuelle dans la théorie complexe : le lecteur est mis garde de ne pas la confondre avec une complétion p-adique !

NOTATION 3.2.1.2. On pose :
– pour tout $D^\dagger(\infty)$-module cohérent M,
$$\widehat{M}=\mathscr{F}_{\text{naïve},\pi}(M)\,;$$
– pour tout $m\in M$,
$$\widehat{m}=1\otimes m\in\widehat{M}\,;$$
– pour tout $Q\in D^\dagger(\infty)$,
$$Q\cdot\widehat{m}=(\mathrm{Four}_\pi(Q)\cdot m)^\wedge=1\otimes(\mathrm{Four}_\pi(Q)\cdot m).$$

La transformation de Fourier naïve est facile à calculer si on connait une présentation d'un $D^\dagger(\infty)$-module, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE 3.2.1.3. Soit $\alpha\in(q-1)^{-1}\mathbb{Z}$ et $\mathscr{K}_\alpha\in F\text{-Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_m|K)$ l'isocristal de Kummer, cf. 1.1.6. L'algèbre $D^\dagger(\infty)$ agit sur $\mathscr{K}_\alpha=\mathscr{O}(^\dagger\{0,\infty\})\mathfrak{e}$, via son action naturelle sur $\mathscr{O}(^\dagger\{0,\infty\})$ et en posant $\partial\cdot\mathfrak{e}=\frac{\alpha}{t}\mathfrak{e}$ et $t\cdot\mathfrak{e}=t\mathfrak{e}$. On obtient ainsi un $D^\dagger(\infty)$-module qui est isomorphe à $D^\dagger(\infty)/D^\dagger(\infty)(t\partial-\alpha)$, via l'application $1\mapsto\mathfrak{e}$, cf. [**Ber90**, (5.1.2)-(ii)]. On calcule
$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{K}_\alpha}&=D^\dagger(\infty)\otimes_{\mathrm{Four}_\pi^{-1}}\big(D^\dagger(\infty)/D^\dagger(\infty)(t\partial-\alpha)\big)\\
&=D^\dagger(\infty)/D^\dagger(\infty)(-\partial t-\alpha) && \big(\text{car }\mathrm{Four}_\pi(t\partial)=\tfrac{\partial}{\pi}\big(-\pi t\big)=-\partial t\big)\\
&=D^\dagger(\infty)/D^\dagger(\infty)(t\partial+\alpha+1)\\
&=\mathscr{K}_{-\alpha-1}\xrightarrow{\sim}\mathscr{K}_{-\alpha} && \big(\text{par }\mathfrak{e}\mapsto t^{-1}\mathfrak{e}\big).
\end{aligned}$$

3.2.2. Transformation de Fourier géométrique. On va se mettre dans le cadre des $\mathscr{D}$-modules arithmétiques de Berthelot qui a été rappelé au chapitre 2.

On pose $R=R_K$ et on notera $\mathscr{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{P}}^1_R,\mathbb{Q}}(\infty)$ le faisceau des opérateurs différentiels sur la droite projective formelle $\widehat{\mathbb{P}}^1_R$ à singularités surconvergentes le long de ∞. Lorsque il n'y aura pas de risque de confusion, on omettra les indices et on écrira plus simplement $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$. Le point de départ est le théorème d'affinité suivant.

THÉORÈME 3.2.2.1 (Noot-Huyghe [**NH04**, Théorèmes 2.2.1 et 2.3.4]).
(1) $\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^1_R,\mathscr{D}^\dagger(\infty))=D^\dagger(\infty)$ *et* $D^\dagger(\infty)$ *est un anneau cohérent.*
(2) *Pour tout* $n\geq 1$, $\mathrm{R}^n\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^1_R,\mathscr{D}^\dagger(\infty))=0$.
(3) *Le foncteur des sections globales est une équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents de* $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$*-modules et la catégorie des* $D^\dagger(\infty)$*-modules cohérents.*

Désignons par $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-coh (resp. $D^\dagger(\infty)$-coh) la catégorie des $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-modules (resp. $D^\dagger(\infty)$-modules) cohérents. La transformation de Fourier géométrique, en pointillé ci-dessous, permet de compléter ce diagramme

(3.2.2.1)
$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}^\dagger(\infty)\text{-coh} & \dashrightarrow & \mathscr{D}^\dagger(\infty)\text{-coh}\\
{\scriptstyle\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^1_R,-)}\big\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^1_R,-)}\big\downarrow{\scriptstyle\cong}\\
D^\dagger(\infty)\text{-coh} & \xrightarrow{\mathscr{F}_{\text{naïve},\pi}} & D^\dagger(\infty)\text{-coh}
\end{array}$$

de foncteurs. Pour en rappeler la définition nous avons besoin de préciser davantage de notations.

3.2.2.2. Soit L un R-module libre de rang un, posons $L_K = L \otimes_R K$. On note L_K^* le K-espace vectoriel dual de L_K et L^* le réseau dans L_K^* dual de L. On désigne par $\mathscr{S}(L)$ (resp. $\mathscr{S}(L^*)$) le complété p-adique de l'algèbre symétrique sur L (resp. L^*) ; et on pose $\mathrm{A} = \mathrm{Spf}(\mathscr{S}(L^*))$, qui est une droite affine formelle sur $\mathrm{Spf}\, R$, et $\check{\mathrm{A}} = \mathrm{Spf}(\mathscr{S}(L^*))$, qui est la droite affine formelle duale de A. Lorsque $L = R$, on pose $\widehat{\mathbb{A}}^1_R = \mathrm{Spf}(\mathscr{S}(L^*))$.

Le choix d'une base $v \in L$ détermine une coordonnée de $\check{\mathrm{A}}$, qu'on notera y, de sorte que $\check{\mathrm{A}} = \mathrm{Spf}(R\{y\})$. La base $v^* \in L^*$ duale de v détermine une coordonnée de A qu'on notera x. On notera t la coordonné de $\widehat{\mathbb{A}}^1_R$ associée à la base $1 \in R$. L'accouplement de dualité $L \times L^* \to R$, détermine un morphisme $\mu\colon \mathrm{A} \times \check{\mathrm{A}} \to \widehat{\mathbb{A}}^1_R$ de schémas formels.

Enfin, on note P (resp. $\check{\mathrm{P}}$) le schéma formel complété projectif de A (resp. $\check{\mathrm{A}}$) et ∞ (resp. $\check{\infty}$) le diviseur à l'infini de P (resp. $\check{\mathrm{P}}$).

Pour résumer nous nous sommes donné :

– une droite formelle pointée, $\infty \in \mathrm{P} \supset \mathrm{A} = \mathrm{Spf}(R\{x\})$;

– la droite duale, $\check{\infty} \in \check{\mathrm{P}} \supset \check{\mathrm{A}} = \mathrm{Spf}(R\{y\})$;

– la multiplication $\mu\colon \mathrm{A} \times \check{\mathrm{A}} \to \widehat{\mathbb{A}}^1_R = \mathrm{Spf}(R\{t\})$, qui est induite par $t \mapsto x \otimes y$.

On note Z le diviseur $(\infty \times \check{\mathrm{P}}) \cup (\mathrm{P} \times \check{\infty})$ de $\mathrm{P} \times \check{\mathrm{P}}$ et on va désigner par p_1 et p_2 les deux projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} & (\mathrm{P} \times \check{\mathrm{P}}, Z) & \\ {\scriptstyle p_1}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p_2} \\ (\mathrm{P}, \infty) & & (\check{\mathrm{P}}, \check{\infty}) \end{array}$$

comme représenté dans le diagramme de couples (schéma, diviseur) ci-dessus.

Le noyau de la transformation de Fourier–Huyghe est construit à partir de l'isocristal de Dwork $\mathscr{L}_\pi$, cf. 1.1.5,

$$\mathscr{L}_\pi = \mathscr{O}(^\dagger\infty)\mathfrak{e}, \qquad \nabla(\mathfrak{e}) = -\pi\mathfrak{e} \otimes dt.$$

L'image inverse de $\mathscr{L}_\pi$ par $\mu\colon \mathrm{A} \times \check{\mathrm{A}} \to \widehat{\mathbb{A}}^1_R$ est l'isocristal

$$\mathscr{L}_\pi(xy) = \mathscr{O}_{\mathrm{P}\times\check{\mathrm{P}}}(^\dagger Z)\mathfrak{e}, \quad \nabla(\mathfrak{e}) = -\pi\mathfrak{e} \otimes (x\,dy + y\,dx).$$

C'est un $\mathscr{D}^\dagger_{\mathrm{P}\times\check{\mathrm{P}}}(Z)$-module cohérent qui est le noyau de la transformation.

Définition 3.2.2.3 (Huyghe [**NH04**, Déf. 3.2.1]). Soit $\mathscr{M}$ un complexe de $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-modules cohérents. On pose

$$\mathscr{F}_{\mathrm{géom},\pi}(\mathscr{M}) = p_{2+}\big(\mathscr{L}_\pi(xy) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathscr{O}^\dagger_{\mathrm{P}\times\check{\mathrm{P}}}(Z)} p_1^!\mathscr{M}\big)[-1]\,.$$

Remarque 3.2.2.4. En termes de complexes de $\mathscr{D}^\dagger(Z)$-modules il faut voir $\mathscr{L}_\pi(xy)$ comme le complexe concentré en degré zéro $\mu^!\mathscr{L}_\pi[-1]$.

Théorème 3.2.2.5 (Huyghe [**NH04**, Th. 5.3.1]). *Pour tout complexe $\mathscr{M}$ de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathrm{P},\mathbb{Q}}(\infty)$-modules cohérents :*

(1) *$\mathscr{F}_{\mathrm{géom},\pi}(\mathscr{M})$ est un complexe de $\mathscr{D}^\dagger_{\check{\mathrm{P}},\mathbb{Q}}(\check{\infty})$-modules cohérents ;*

(2) *si $\mathscr{M}$ est concentré en degré zéro, alors $\mathscr{F}_{\mathrm{géom},\pi}(\mathscr{M})$ est concentré en degré zéro ;*

(3) *$\Gamma(\check{\mathrm{P}}, \mathscr{F}_{\mathrm{géom},\pi}(\mathscr{M})) \cong \mathscr{F}_{\mathrm{naïve},\pi}(\Gamma(\mathrm{P}, \mathscr{M}))$ fonctoriellement en $\mathscr{M}$.*

3.3. Frobenius et transformation de Fourier

Nous allons introduire maintenant la donnée d'un Frobenius dans le cadre précédent. C'est cette structure qui apporte le plus d'informations de nature arithmétique.

3.3.1. Rappels. Nous allons rappeler ici ce qu'est une structure de Frobenius sur un $\mathscr{D}$-module arithmétique. On suppose que les anneaux des constantes R et $K = \mathrm{Frac}(R)$ sont munis d'un isomorphisme de Frobenius $\sigma\colon R \xrightarrow{\sim} R$ relevant le Frobenius $x \mapsto x^p$ de k. Nous suivons les notations choisies dans 3.2.2.2. On note $F\colon \mathrm{P} \to \mathrm{P}^{(1)}$ le morphisme de Frobenius relatif qui s'insère dans le diagramme usuel.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{P} & \xrightarrow{F} & \mathrm{P}^{(1)} & \longrightarrow & \mathrm{P} \\ & \searrow & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & \mathrm{Spf}(R) & \xrightarrow[\sigma]{\simeq} & \mathrm{Spf}(R) \end{array}$$

Berthelot construit un morphisme

$$\varphi_{\mathscr{D}^\dagger}\colon \mathscr{D}^\dagger_{\mathrm{P}}(\infty) \twoheadrightarrow F^*\mathscr{D}^\dagger_{\mathrm{P}^{(1)}}(\infty)$$

surjectif, mais pas injectif cf. [**Ber02**, (2.5.2.3) et 4.5.1]. Pour un $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-module $\mathscr{M}$ on notera $\mathscr{M}^{(1)}$ l'image inverse de $\mathscr{M}$ via $\mathrm{P}^{(1)} \to \mathrm{P}$ et on munira $F^*\mathscr{M}^{(1)}$ de l'action de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathrm{P}}(\infty)$ obtenue par transport de structure via $\varphi_{\mathscr{D}^\dagger}$.

Convention 3.3.1.1. Dans la suite de cette section, pour alléger les notations, nous adopterons les conventions suivantes.

(1) Les faisceaux cohérents en $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-modules seront désignés en utilisant la police RSFS [1], comme par exemple $\mathscr{M}$, $\mathscr{D}$,... et leurs sections globales seront notés avec la police usuelle de la même lettre, donc on écrira $M = \Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^1_R, \mathscr{M}), D = \Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^1_R, \mathscr{D})$.

(2) Pour tout $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-module cohérent $\mathscr{M}$ et toute section globale $m \in M = \Gamma(\mathrm{P}, \mathscr{M})$, on désignera par $F^*(m)$ la section globale

$$F^*(m) = 1 \otimes m \in F^*M^{(1)} = \Gamma(\mathrm{P}, \mathscr{O}_{\mathrm{P}} \otimes_\varphi \mathscr{M}).$$

Définition 3.3.1.2. Une structure de Frobenius sur un $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-module $\mathscr{M}$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-modules $\varphi\colon F^*\mathscr{M}^{(1)} \to \mathscr{M}$. On appellera F-$\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-module un couple $(\mathscr{M}, \varphi)$ formé d'un $\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-module $\mathscr{M}$ muni d'une structure de Frobenius φ.

Exemple 3.3.1.3. L'isocristal de Kummer $K_\alpha = D^\dagger(\infty)/D^\dagger(\infty)(t\partial - \alpha)$, $\alpha \in \frac{1}{q-1}\mathbb{Z}$, cf. 1.1.6, est muni de la structure de Frobenius d'ordre f

$$\varphi\colon F^{*f}K_\alpha \to K_\alpha$$

envoyant $F^{*f}(1) \in F^{*f}K_\alpha$ dans la classe de $t^{(q-1)\alpha}$ dans K_α. On peut « factoriser » cette structure de Frobenius en « morceaux » comme expliqué ci-dessous, cela interviendra dans la preuve de la formule de Gross–Koblitz, cf. 3.4.2.

On montre que $F^*\mathscr{K}_{p\alpha}$ est isomorphe à $\mathscr{K}_\alpha$ (par le changement de variable $t = t_1^p$). On dit que $\mathscr{K}_{p\alpha}$ est un *antécédent* par Frobenius de $\mathscr{K}_\alpha$. Lorsque $\alpha = n(q-1)^{-1}$, pour $0 < n < q-1$, le nombre rationnel $p\alpha$ est congruent à $\alpha^{(1)} := n^{(1)}(q-1)^{-1}$ modulo $\mathbb{Z}$ et par conséquent $\mathscr{K}_{\alpha^{(1)}} \cong \mathscr{K}_{p\alpha}$. On

1. Ralph Smith's Formal Script

appelle un tel $\alpha^{(1)} = n^{(1)}(q-1)^{-1}$ *l'exposant* de $\mathscr{K}_{p\alpha}$. On vérifie qu'on décompose de cette façon l'isomorphisme de Frobenius φ dans une suite de f isomorphismes

$$\varphi\colon F^{*f}K_\alpha \xrightarrow{\varphi_f} F^{*f-1}K_{\alpha^{(f-1)}} \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} F^{*2}K_{\alpha^{(2)}} \xrightarrow{\varphi_2} F^{*}K_{\alpha^{(1)}} \xrightarrow{\varphi_1} K_\alpha. \tag{3.3.1.1}$$

Le nombre rationnel $n^{(i)}(q-1)^{-1}$, pour $1 \leq i \leq f$, apparaissant dans la formule (3.1.5.1) comme argument de la fonction gamma p-adique est ainsi l'exposant du i-ième antécédent de Frobenius de $\mathscr{K}_\alpha$.

3.3.2. Structure de Frobenius sur les transformations de Fourier.

Proposition 3.3.2.1 (Huyghe). *Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}^\dagger$-module cohérent muni d'une structure de Frobenius, alors $\mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(\mathscr{M})$ est muni d'une structure de Frobenius*

En effet, comme $\mathscr{F}_{\text{géom},\pi}$ est défini via des opérations cohomologiques qui commutent au Frobenius, on obtient un isomorphisme fonctoriel, cf. [**Ber00**, Ch. 3],

$$F^*\mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(\mathscr{M})^{(1)} \xrightarrow[\sim]{} \mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(F^*\mathscr{M}^{(1)}). \tag{3.3.2.1}$$

Si $(\mathscr{M},\varphi)$ est un F-$\mathscr{D}^\dagger(\infty)$-module cohérent on obtient par composition

$$F^*\mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(\mathscr{M})^{(1)} \xrightarrow[\sim]{} \mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(F^*\mathscr{M}^{(1)}) \xrightarrow[\sim]{\mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(\varphi)} \mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(\mathscr{M})$$

qui est par définition une structure de Frobenius sur $\mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(\mathscr{M})$.

En reprenant le diagramme (3.2.2.1), on a envie de le compléter en ajoutant les structures de Frobenius et se poser la question de savoir quelle est la structure de Frobenius à mettre sur $\mathscr{F}_{\text{naïve},\pi}(M)$ pour avoir un diagramme commutatif comme suit.

$$\begin{array}{ccc} F\text{-}\mathscr{D}^\dagger(\infty)\text{-coh} & \xrightarrow{\mathscr{F}_{\text{géom},\pi}} & F\text{-}\mathscr{D}^\dagger(\infty)\text{-coh} \\ {\scriptstyle\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^1_R,-)}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^1_R,-)}\downarrow{\scriptstyle\cong} \\ F\text{-}D^\dagger(\infty)\text{-coh} & \xrightarrow{\mathscr{F}_{\text{naïve},\pi}} & F\text{-}D^\dagger(\infty)\text{-coh} \end{array} \tag{3.3.2.2}$$

On verra que la réponse n'est pas si simple qu'elle l'était pour la structure différentielle. Si M est un F-$D^\dagger(\infty)$-module cohérent, il nous suffit de décrire, en suivant la convention 3.3.1.1-(1) pour les notations, le premier isomorphisme de la suite

$$F^*\widehat{M} \xrightarrow[\sim]{\gamma_M} \widehat{F^*M} \xrightarrow[\sim]{\widehat{\Gamma(\mathrm{P},\varphi)}} \widehat{M}. \tag{3.3.2.3}$$

Cet isomorphisme, noté γ_M, ne dépend pas du tout de la structure de Frobenius φ de M, ni même de l'existence d'une structure de Frobenius. Il est défini via l'équivalence du théorème 3.2.2.1-(3) en utilisant l'isomorphisme (3.3.2.1). Par construction l'isomorphisme composé (3.3.2.3) est la structure de Frobenius de $\widehat{M}$ qui rend le diagramme (3.3.2.2) commutatif.

Théorème 3.3.2.2. [**AM15**, 5.1.2 et 5.2.4]

(1) *Il existe un opérateur (non-unique) Q dans $D^\dagger(\infty)$ tel que pour tout $D^\dagger(\infty)$-module cohérent M l'isomorphisme*

$$\gamma_M\colon F^*\widehat{M} \longrightarrow \widehat{F^*M}$$

est calculé par $\gamma_M(F^*(\widehat{m})) = Q\cdot\widehat{F^*(m)}$ (cf. la convention 3.3.1.1).

(2) *Nous pouvons choisir Q de la forme :*

$$Q = -\frac{1}{p}(y^{p-1}Hy^{-(p-1)})^t \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i \frac{a_i}{\pi^i}\, y^i\partial^{i+p-1}$$

où y est la coordonnée de $\check{\mathrm{P}}$, $\partial = \frac{d}{dy}$,

$$H = \frac{1}{p}\sum_{\substack{\xi\in\overline{\mathbb{Q}}_p\\ \xi^p=1}}\sum_{i\geq 0}(\xi-1)^i y^i\frac{\partial^i}{i!} \in D^\dagger(\infty)$$

est l'opérateur de Dwork, cf. [**Gar98**, (2.4.2)]*, les $a_i \in K$ sont les coefficients de la série*

$$\theta_\pi(t) = \exp(\pi(t-t^p)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i,$$

et $(-)^t\colon D^\dagger(\infty)\to D^\dagger(\infty)$ désigne l'opérateur adjoint, défini par $(y^j\partial^i)^t = (-1)^i\partial^i y^j$.

Remarque 3.3.2.3. Le théorème 3.3.2.2 est établi dans [**AM15**] dans le cas plus général d'un Frobenius d'ordre s. Dans l'énoncé ci-dessus il faut en gros remplacer p par p^s et $\theta_\pi(t)$ par $\exp(\pi(t-t^{p^s})) = \theta_\pi(t)\theta_\pi(t^p)\dots\theta_\pi(t^{p^s})$, cf. *loc. cit.* 5.2.4. pour l'expression exacte.

Ingrédients de la preuve. Pour prouver l'existence de l'opérateur Q de l'énoncé on se ramène par dévissage, en utilisant la cohérence, au cas $M = D^\dagger(\infty)$. Dans ce cas l'existence suit de la surjectivité de $\varphi_{\mathscr{D}^\dagger}\colon \mathscr{D}^\dagger_{\mathrm{P}}(\infty)\to F^*\mathscr{D}^\dagger_{\mathrm{P}^{(1)}}(\infty)$: il suffit de prendre un Q tel que $\varphi_{\mathscr{D}^\dagger}(Q) = F^*(1)$.

Le calcul d'un exemple de Q est plus technique. Il s'agit de suivre explicitement, étape par étape, le calcul de l'isomorphisme de Huyghe (3.2.2.5)-(3)

$$\Gamma(\check{\mathrm{P}}, \mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(\mathscr{M})) \cong \mathscr{F}_{\text{naïve},\pi}(\Gamma(\mathrm{P},\mathscr{M}))$$

via le complexe de Spencer. Pour ce faire on utilise un résultat de Abe [**Abe14**, Prop. 2.5] qui donne une description explicite de l'isomorphisme de Berthelot [**Ber02**, 3.4.4] de commutation de F^* avec l'image directe via l'opérateur de Dwork. □

3.4. Une preuve alternative de la formule de Gross–Koblitz

Dans cette sous-section nous allons donner notre preuve de la formule de Gross–Koblitz. Elle n'est pas encore publiée, mais elle a circulé sous forme de notes personnelles [**AM12**]. Comme celles-ci ne sont pas disponibles librement en ligne je vais donner ici plus de détails que dans les autres sections. La présentation sera différente de celle de [**AM12**].

3.4.1. Un résultat de Barsky. Nous allons utiliser le résultats suivant de Barsky qui relie le développement de Mahler de la fonction gamma p-adique avec le développement en série entière de l'exponentielle de Dwork, cf. [**Bar81**, (25)].

Théorème 3.4.1.1 (Barsky). *Pour tout $x\in p\mathbb{Z}_p$, on a l'égalité*

$$\Gamma_p(x) = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{a_i}{\pi^i}\, x_{(i)},$$

où a_i est le i-ième coefficient du développement de la série $\exp(\pi(x-x^p))$; $x_{(0)} = 1$ et pour tout $i\geq 1$, $x_{(i)} = \prod_{j=1}^{i}(x-j+1) = i!\binom{x}{i}$.

REMARQUE 3.4.1.2. Dans [**Bar81**] Barsky considère les coefficients de la série $\exp(x+\frac{x^p}{p})$ qu'il note par $\frac{b_n}{n!}$. Comme $\exp(\pi x+\frac{(\pi x)^p}{p})=\exp(\pi(x-x^p))$, nous avons $\frac{b_i}{i!}=\frac{a_i}{\pi^i}$.

3.4.2. Preuve de la formule de Gross–Koblitz. La formule de Gross–Koblitz est un corollaire du théorème 3.3.2.2-(2).

Soit $0<n<q-1$ un entier et $\alpha=\frac{n}{q-1}$. On travaille avec l'isocristal de Kummer $\mathscr{K}_{\alpha-1}$. L'idée est d'utiliser l'isomorphisme

$$\Gamma(\check{\mathrm{P}},\mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(\mathscr{K}_{\alpha-1}))\cong\mathscr{F}_{\text{naïve},\pi}(\Gamma(\mathrm{P},\mathscr{K}_{\alpha-1}))$$

pour calculer la structure de Frobenius de $\mathscr{F}_{\text{naïve},\pi}(K_{\alpha-1})$ de deux façons différentes.

La première est de montrer avec un calcul géométrique analogue à celui en cohomologie ℓ-adique, utilisant la formule de Künneth, l'isomorphisme

$$\mathscr{F}_{\text{géom},\pi}(\mathscr{K}_{\alpha-1})\cong\mathscr{K}_{-\alpha}\otimes_K H^1_{\text{rig}}(\mathbb{G}_m,\mathscr{K}_{-\alpha}\otimes\mathscr{L}_\pi)(1), \tag{3.4.2.1}$$

cf. [**AM15**, Prop. 3.2.9]. On remarque que la trace du Frobenius agissant sur $H^1_{\text{rig}}(\mathbb{G}_m,\mathscr{K}_{-\alpha}\otimes\mathscr{L}_\pi)$ est l'opposé de la somme de Gauss apparaissant dans le membre de gauche de la formule de Gross–Koblitz. Le twist de Tate (1) dans le membre de droite de (3.4.2.1) correspond à multiplier la structure de Frobenius par q^{-1}.

On rappelle que d'après nos conventions (3.3.1.1) nous avons posé $K_{\alpha-1}=\Gamma(\mathrm{P},\mathscr{K}_{\alpha-1})$ et $\widehat{K}_{\alpha-1}=\mathscr{F}_{\text{naïve},\pi}(\Gamma(\mathrm{P},\mathscr{K}_{\alpha-1}))$. Pour le deuxième calcul on considère d'abord l'isomorphisme $\widehat{K}_{\alpha-1}\cong K_{-\alpha}$ en tant que $D(\infty)$-module (sans structures de Frobenius), prouvé au 3.2.1.3. Puis pour calculer la structure de Frobenius sur cette transformée de Fourier naïve nous allons nous servir de la décomposition

$$\varphi\colon F^{*f}K_{-\alpha}\xrightarrow{\varphi_f}F^{*(f-1)}K_{-\alpha^{(f-1)}}\xrightarrow{\sim}\dots\xrightarrow{\sim}F^{*2}K_{-\alpha^{(2)}}\xrightarrow{\varphi_2}F^*K_{-\alpha^{(1)}}\xrightarrow{\varphi_1}K_{-\alpha},$$

cf. (3.3.1.1). Elle induit une décomposition du Frobenius $F^{*f}\widehat{K}_{-\alpha}\to\widehat{K}_{-\alpha}$ en $2f$ isomorphismes

$$\begin{aligned}F^{*f}\widehat{K}_{-\alpha}&\xrightarrow{\gamma_f}F^{*(f-1)}(\widehat{F^*K_{-\alpha}})\xrightarrow{F^{*(i-1)}(\widehat{\psi}_i)}F^{*(f-1)}\widehat{K}_{-\alpha^{(f-1)}}\xrightarrow{\gamma_{f-1}}\dots\\&\dots\to F^{*2}\widehat{K}_{-\alpha^{(2)}}\xrightarrow{F^*(\gamma_2)}F^*(\widehat{F^*K_{-\alpha^{(2)}}})\xrightarrow{F^*(\widehat{\psi}_2)}F^*(\widehat{K}_{-\alpha^{(1)}})\xrightarrow{\gamma_1}\widehat{F^*K_{-\alpha^{(1)}}}\xrightarrow{\widehat{\psi}_1}\widehat{K}_{-\alpha},\end{aligned}$$

où l'isomorphismes γ_i est défini comme dans (3.3.2.3) et $\psi_i=F^*K_{\alpha^{(i)}}\to K_{\alpha^{(i-1)}}$ est l'isomorphisme tel que $\varphi_i=F^{*(i-1)}(\psi_i)$. Nous allons travailler terme par terme et, dans la proposition 3.4.2.1 ci-dessous, utiliser l'opérateur Q du théorème 3.3.2.2-(2) pour calculer explicitement l'isomorphisme

$$F^{*(i-1)}(\widehat{\psi}_i)\circ F^{*(i-1)}(\gamma_i)\colon F^{*i}\widehat{K}_{-\alpha^{(i)}}\xrightarrow{\sim}F^{*(i-1)}(\widehat{K}_{-\alpha^{(i-1)}}),$$

pour chaque $1\le i\le f$. En réduisant l'expression trouvée grâce au théorème de Barsky, on obtiendra le facteur c_i de (3.4.2.2). Ce sont précisément les facteurs recherchés car en les multipliant pour tout i et en comparant avec le premier calcule de la structure de Frobenius on retrouve la formule de Gross–Koblitz.

PROPOSITION 3.4.2.1. *Soit $\alpha=(q-1)^{-1}n$ avec $0<n<q-1$. On suit les notations de 3.1.5.1 et 3.3.1.3. Posons $\widetilde{\varphi}_i=F^{*(i-1)}(\widehat{\psi}_i)\circ F^{*(i-1)}(\gamma_i)$ et notons $\mathfrak{e}'$ (resp. $\mathfrak{e}$) une base de $\widehat{K}_{-\alpha^{(i)}}$ (resp. $\widehat{K}_{-\alpha^{(i-1)}}$). Alors le Frobenius $\widetilde{\varphi}_i\colon F^{*i}\widehat{K}_{-\alpha^{(i)}}\to F^{*(i-1)}\widehat{K}_{-\alpha^{(i-1)}}$ est donné par*

$$\widetilde{\varphi}_i(F^{*i}(\mathfrak{e}'))=c_i y^{-(p-1-n_{i-1})p^{i-1}}F^{*i-1}(\mathfrak{e}),\qquad \text{où}\quad c_i=p^{-1}\pi^{n_i}\Gamma_p\big(\alpha^{(i)}\big). \tag{3.4.2.2}$$

PREUVE. Il suffit de traiter le cas $i = 1$. Pour alléger les notations on peut supposer $f = 1$, donc $q = p$ (dans le cas général il faut juste tenir compte de $\alpha^{(1)}$ et α dans les notations). Posons $\beta = \alpha - 1$. Nous avons $K_\beta \cong \widehat{K}_{-\alpha}$ en tant que $D(\infty)$-module et $\mathfrak{e}_\beta = \hat{\mathfrak{e}}_{-\alpha}$ via cet isomorphisme.

Nous allons nous servir des relations suivantes qu'on résume dans un lemme. On rappelle que dans 3.4.1.1 nous avons posé $z_{(r)} = z(z-1)\cdot(z-r+1)$.

LEMME 3.4.2.2. *Pour tout entier $r \geq 0$, $j \geq 0$ nous avons dans K_β les égalités :*

(1) $(y^r\partial^r)y^{-j}\mathfrak{e}_\beta = (\beta - j)_{(r)}\, y^{-j}\mathfrak{e}_\beta$;

(2) $(\partial^r y^r)y^{-j}\mathfrak{e}_\beta = (\beta + r - j)_{(r)}\, y^{-j}\mathfrak{e}_\beta$;

en particulier pour $j = 0$,

(3) $y^r\partial^r\mathfrak{e}_\beta = (\beta)_{(r)}\mathfrak{e}_\beta$ *ou* $\partial^r\mathfrak{e}_\beta = (\beta)_{(r)}\, y^{-r}\mathfrak{e}_\beta$.

PREUVE. On démontre (1) et (2) par récurrence en utilisant $t\partial\mathfrak{e}_\beta = \beta\mathfrak{e}_\beta$ et les relations bien connues

$$y^r\partial^r = (y\partial - r + 1)\cdots(y\partial - 1)y\partial\,;$$
$$\partial^r y^r = \partial y(\partial y + 1)\cdots(\partial y + r - 1)\,.$$

dans $D(\infty)$. On en déduit les deux égalités équivalentes de (3). □

Reprenons la preuve de la proposition 3.4.2.1. Il s'agit de calculer l'isomorphisme de Frobenius

$$\widetilde{\varphi}\colon F^*K_\beta \xrightarrow{\sim} F^*\widehat{K}_{-\alpha} \xrightarrow{\gamma} \widehat{F^*K}_{-\alpha} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \widehat{K}_{-\alpha} \xrightarrow{\sim} K_\beta.$$

Nous avons

$$\widetilde{\varphi}\colon F^*(\mathfrak{e}_\beta) \mapsto F^*(\hat{\mathfrak{e}}_{-\alpha}) \overset{\gamma}{\mapsto} Q\cdot\widehat{F^*(\mathfrak{e}_{-\alpha})} \overset{\widehat{\varphi}}{\mapsto} Q\cdot(\widehat{x^{-n}\mathfrak{e}_{-\alpha}}) = Q\cdot((-\alpha)_{(n)}^{-1}\partial^n\mathfrak{e}_{-\alpha})^\wedge \mapsto Q\pi^n y^n(-\alpha)_{(n)}^{-1}\mathfrak{e}_\beta,$$

où on s'est servi de 3.4.2.2-(3) pour montrer l'égalité du milieu.

Comme $\beta = \alpha - 1$, on a $(-\alpha)_{(n)} = (-1)^n(\beta + n)_{(n)}$. On rappelle qu'on a posé

$$Q = -\frac{1}{p}\,\widetilde{H}\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{a_i}{\pi^i}\,y^i\partial^{i+p-1}$$

avec $\widetilde{H} = (y^{p-1}Hy^{-(p-1)})^t$. On obtient

$$Q\pi^n y^n(-\alpha)_{(n)}^{-1}\mathfrak{e}_\beta = -p^{-1}\pi^n(-1)^n(\beta+n)_{(n)}^{-1}\,\widetilde{H}\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{a_i}{\pi^i}\,y^i\partial^{i+p-1}y^n\mathfrak{e}_\beta$$

Par 3.4.2.2-(2) on a

$$\partial^{p-1}y^n\mathfrak{e}_\beta = (\partial^{p-1}y^{p-1})y^{n-(p-1)}\mathfrak{e}_\beta = (\beta+n)_{(p-1)}\,y^{n-(p-1)}\mathfrak{e}_\beta\,,$$

et par 3.4.2.2-(1)

$$(y^i\partial^i)y^{n-(p-1)}\mathfrak{e}_\beta = (\beta + n - (p-1))_i\,y^{n-(p-1)}\mathfrak{e}_\beta\,.$$

En regroupant et en utilisant le théorème de Barsky nous avons

$$-\frac{1}{p}\,\widetilde{H}\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{a_i}{\pi^i}\,(y^i\partial^i)(\partial^{p-1}y^n)\mathfrak{e}_\beta =$$

$$-\frac{1}{p}\,\widetilde{H}\,(\beta+n)_{(p-1)}\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\frac{a_i}{\pi^i}\,(\beta+n-(p-1))_i y^{n-(p-1)}\mathfrak{e}_\beta =$$

$$-\frac{1}{p}\,\widetilde{H}\,(\beta+n)_{(p-1)}\Gamma_p(\beta+n-(p-1))y^{n-(p-1)}\mathfrak{e}_\beta.$$

On remarque que nous pouvons utiliser le théorème de Barsky car

$$\beta + n - (p-1) = \alpha - 1 + n - (p-1) = \frac{n}{p-1} + n - p = \frac{(n-p+1)p}{p-1}$$

est divisible par p. Pour la même raison, grâce à l'équation fonctionnelle de Γ_p, cf. 3.1.4, nous avons

$$-\Gamma_p(\beta + n - (p-1)) = \Gamma_p(\beta + 1 + n - (p-1)) = \Gamma_p(\alpha + n - (p-1)).$$

On montre facilement $(\beta+n)^{-1}_{(n)}(\beta+n)_{(p-1)} = (\beta)_{(p-1-n)}$ et on vérifie que

$$\widetilde{H} y^{n-(p-1)} \mathfrak{e}_\beta = y^{n-(p-1)} \mathfrak{e}_\beta.$$

En regroupant tout on obtient

$$Q\pi^n y^n (-\alpha)^{-1}_{(n)} \mathfrak{e}_\beta = p^{-1}\pi^n (-1)^n \, (\beta)_{(p-1-n)} \, \Gamma_p(\beta + 1 + n - (p-1)) \, y^{n-(p-1)} \mathfrak{e}_\beta$$

Enfin en itérant $p-1-n$ fois l'équation fonctionnelle de Γ_p, comme les arguments de la fonction Γ_p ne sont pas divisibles par p, on trouve

$$\begin{aligned}(-1)^n (\beta)_{(p-1-n)} \, \Gamma_p(\beta + 1 + n - (p-1)) &= (-1)^{n-(p-1)} (\beta)_{(p-1-n)} \, \Gamma_p(\beta + 1 + n - (p-1)) \\ &= \Gamma_p(\beta + 1) = \Gamma_p(\alpha),\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Deuxième partie

Sur une question de continuité pour la cohomologie finie de Bloch et Kato

4.1. Introduction

La cohomologie de Bloch–Kato donne les conditions locales aux places au dessus de p définissant les groupes de Selmer d'une représentation p-adique du groupe de Galois absolu d'un corps de nombres. Nous allons présenter un résultat, prouvé dans **[IM15]**, concernant la cohomologie finie de Bloch–Kato d'une représentation galoisienne p-adique d'un corps local. Le résultat et les techniques utilisées dans la démonstration sont purement locales, mais la motivation arithmétique est globale et vient de la théorie de Iwasawa. Avant de rappeler la définition de cette cohomologie, esquissons cette motivation. La présentation ci-dessous est largement inspirée de l'introduction de **[IM15]**.

Soient E un corps de nombres, $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de E et $G_E = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ le groupe de Galois absolu de E. On se donne une représentation p-adique M de G_E, c'est-à-dire un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de G_E. Le groupe de Selmer de M sur E est le sous groupe du groupe de cohomologie galoisienne continue $H^1(E, M)$ formé de classes qui satisfont certaines restrictions locales, notamment, aux places v de E divisant p, elles appartiennent aux groupes de Bloch–Kato $H^1_f(E_v, M)$ dont on rappellera la définition plus bas, cf. 4.2.

Lorsque la représentation p-adique M est la réalisation p-adique d'un motif sur un corps de nombres, la famille de groupes de Selmer sur une $\mathbb{Z}_p$-extension de E recèle des informations arithmétiques importantes sur le motif comme par exemple sur les fonctions L p-adiques du motif. Ralph Greenberg a posé la question suivante : supposons que deux motifs sont congruents modulo une puissance de p, que peut-on dire sur les deux familles de groupes de Selmer ?

Par exemple dans **[GIP06, GV00]** on obtient le résultat suivant. Soit E_1 et E_2 deux courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$. Supposons que E_1 et E_2 sont toutes les deux ordinaires en p (ou supersingulières en p) et congruentes modulo p (*i.e.* les groupes de points de p-torsion sont isomorphes en tant que représentations). Alors sous des hypothèses supplémentaires on peut montrer que les groupes de Selmer associés à ces courbes sont aussi congruents modulo p. On déduit, par un résultat de K. Kato, que la conjecture principale pour E_1 est équivalente à celle pour E_2.

Bien évidemment pour étudier le comportement des groupes de Selmer vis-à-vis des congruences, on doit d'abord comprendre les comportement des conditions locales données par les groupes de Bloch–Kato. C'est-à-dire étudier les propriétés de continuité p-adique de la cohomologie finie de Bloch–Kato, ce qui est l'objet de **[IM15]**.

Commençons par fixer les notations et rappeler les définitions de base. Pour avoir plus de cohérence avec les notations de **[IM15]**, elles seront légèrement différentes de celles utilisées dans la première partie, cf. §0.1.

4.1.1. Notations. Dans tout ce chapitre, $p \geq 3$ est un nombre premier ; pour le cas $p = 2$ voir l'annexe A de **[IM15]**.

Soit $K \supset \mathbb{Q}_p$ un corps de valuation discrète, complet. On note par $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers et par k son corps résiduel, qu'on supposera fini pour simplifier l'exposition (mais la plupart des résultats restent vrais sous l'hypothèse k parfait, cf. **[IM15]**). Soient $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k, $K_0 = \mathrm{Frac}\, W$ le corps de fractions de W et $e = |K : K_0|$ l'indice de

ramification absolu de K. On se donne une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et on note $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois. On note $\bar{k}$ le corps résiduel de $\overline{K}$ et on pose $G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

On note $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ la catégorie des représentations galoisiennes p-adiques. On rappelle que ses objets sont les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie muni d'une action continue de G_K. On note $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ la catégorie des représentations galoisiennes p-adiques *entières*, *i.e.* la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-modules libres de type fini munis d'une action continue de G_K. Comme G_K est compact toute représentation galoisienne p-adique V admet un réseau $T \subset V$ sur $\mathbb{Z}_p$ stable sous l'action de G_K.

4.1.2. Rappels. On note $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ l'anneau des périodes cristallines de Fontaine. C'est une K_0-algèbre topologique munie d'une action continue de G_K, un Frobenius $\varphi\colon \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et d'autres structures, cf. [**Fon94a**].

Définition 4.1.2.1 (Fontaine).

(1) Une représentation galoisienne V est cristalline si et seulement si
$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \cong \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)}$$
en tant que G_K-module.

(2) Une représentation entière T est cristalline si et seulement si $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est cristalline.

Exemple 4.1.2.2.

(1) Le module de Tate $\mathbb{Z}_p(1) = T_p(\mathbb{G}_m)$ du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$: c'est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang un avec l'action de G_K donnée par le caractère cyclotomique $\chi\colon G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$.

(2) Le module de Tate $T_p(A)$ d'une variété abélienne A avec bonne réduction sur K.

(3) La cohomologie étale p-adique d'une variété propre et lisse sur K avec bonne réduction.

(4) La représentation associée à une forme modulaire cuspidale.

Introduisons encore des notations. On désignera par :
- $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ la catégorie des représentations cristallines à poids de Hodge–Tate compris entre a et b inclus ;
- $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ la catégorie des représentations cristallines entières à poids de Hodge–Tate compris entre a et b inclus ;
- $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}(G_K)_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ la catégorie obtenue en réduisant modulo p^n les objets de la catégorie précédente ;
- $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)_{\mathrm{cris}}$ (resp. $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)_{\mathrm{cris}}$) la catégorie des représentations cristallines (resp. cristallines entières).

Dans les exemples 4.1.2.2-(1) et (2) les poids de Hodge–Tate sont dans $[0,1]$; plus généralement, dans 4.1.2.2-(3), les poids sont dans $[0,i]$ où i est le degré de la cohomologie. Dans 4.1.2.2-(4) les poids sont dans $[0,k-1]$, où k est le poids de la forme modulaire.

4.2. Cohomologie finie de Bloch–Kato

4.2.1. Définitions. On désigne par $H^i(K,V)$ la cohomologie continue $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K,V)$ et de même pour T en lieu de V.

Définition 4.2.1.1 (Bloch–Kato).

(1) Soit V dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)_{\mathrm{cris}}$. On pose
$$H^1_f(K,V) = \ker(H^1(K,V) \to H^1(K, V \otimes \mathrm{B}_{\mathrm{cris}})).$$

(2) Soit T dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)_{\mathrm{cris}}$ et $\eta\colon H^1(K,T)\to H^1(K,T\otimes\mathbb{Q}_p)$ l'application induite par l'inclusion canonique $T\subset T\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$. On pose

$$H^1_f(K,T)=\eta^{-1}(H^1_f(K,V)).$$

On appellera ces groupes *cohomologie finie de Bloch–Kato* ou plus brièvement *cohomologie finie*.

Nous avons $H^1(K,V)\cong\mathrm{Ext}^1_{G_K}(\mathbb{Q}_p,V)$. Si $[E]\in H^1(K,V)$ est une classe représentée par l'extension de représentations

$$0\to V\to E\to\mathbb{Q}_p\to 0,$$

alors $[E]\in H^1_f(K,V)$ si et seulement si E est cristalline. De même, pour une représentation entière T, une classe $[E]\in H^1_f(K,T)$, représentant une extension

$$0\to T\to E\to\mathbb{Z}_p\to 0,$$

appartient à $H^1_f(K,T)$ si et seulement si E est cristalline.

4.2.2. Exemples.

(1) $\mathbb{Z}_p=H^1_f(K,\mathbb{Z}_p)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\big(G_k,\mathbb{Z}_p\big)\subset H^1(K,\mathbb{Z}_p)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\big(G_K,\mathbb{Z}_p\big)$.

(2) Nous avons $H^1(K,\mathbb{Z}_p(1))=\varprojlim_n K^\times/(K^\times)^{p^n}$ par la théorie de Kummer. Dans **[BK90]**, Bloch et Kato montrent $H^1_f(K,\mathbb{Z}_p(1))=\delta(\mathcal{O}_K^*)$, où

$$\delta\colon K^\times\xrightarrow{(\delta_n)}H^1(K,\mathbb{Z}_p(1))=\varprojlim_n H^1(K,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1))$$

est le cobord associé à à la suite exacte courte

$$0\to\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)=\mu_{p^n}(\bar K)\hookrightarrow\bar K^\times\xrightarrow{(-)^{p^n}}\bar K^\times\to 0.$$

4.3. Continuité de la cohomologie finie

Commençons par évoquer la question posée par Greenberg. On rappelle que deux représentations entières T_1 et T_2 sont dites *congruentes modulo p^n* s'il existe un isomorphisme

$$\iota\colon T_1/p^nT_1\xrightarrow{\sim}T_2/p^nT_2$$

en tant que $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[G_K]$-modules.

4.3.1. Position du problème.

Question 4.3.1.1 (Greenberg). *Soient $T_1,T_2\in\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_0})^{[0,p-2]}_{\mathrm{cris}}$, congruentes (en tant que G_{K_0}-modules) modulo p^n, pour un certain $n\geq 1$. Existe-t-il un isomorphisme de groupes*

$$H^1_f(K,T_1)/p^n\xrightarrow{\sim}H^1_f(K,T_2)/p^n$$

qui rende le diagramme suivant commutatif ?

(4.3.1.1)
$$\begin{array}{ccc} H^1_f(K,T_1)/p^n & \longrightarrow & H^1(K,T_1/p^nT_1)\\ \downarrow & & \wr\downarrow{\scriptstyle H^1(K,\iota)}\\ H^1_f(K,T_2)/p^n & \longrightarrow & H^1(K,T_2/p^nT_2)\end{array}$$

On peut reformuler la question de façon fonctorielle en demandant si le foncteur

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_0})^{[0,p-2]}_{\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p\text{-modules}, \quad T \mapsto H^1_f(K,T)/p^n H^1_f(K,T),$$

se factorise par la réduction $T \mapsto T/p^nT$, en déterminant ainsi un sous foncteur de $T/p^n \mapsto H^1(K,T/p^n)$.

Remarque 4.3.1.2.

(1) Les applications horizontales dans le diagramme (4.3.1.1) ci-dessus sont injectives, cf. [**IM15**, 4.1.1].

(2) La congruence est définie en tant que G_{K_0}-modules, mais on s'intéresse à la cohomologie finie par rapport à K.

4.3.2. Contrexemples. Il y a plusieurs exemples classiques qui montrent que les hypothèses de (4.3.1.1) sont nécessaires.

(1) Soit $K = \mathbb{Q}_p(\mu_p)$, où $\mu_p \subset \overline{K}$ désigne le groupe des racines p-ièmes de l'unité. Nous avons

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p(1)/p\mathbb{Z}_p(1) = \mathbb{F}_p(1)$$

en tant que G_K-modules, mais

$$1 = \dim_{\mathbb{F}_p}\big(H^1_f(K,\mathbb{Z}_p)/pH^1_f(K,\mathbb{Z}_p)\big) \neq \dim_{\mathbb{F}_p}\big(H^1_f(K,\mathbb{Z}_p(1))/pH^1_f(K,\mathbb{Z}_p(1))\big) = p-1,$$

cf. [**BK90**].

(2) Soit $K = \mathbb{Q}_p$. Nous avons $\chi^p \cong \chi$ modulo p, ce qui veut dire $\mathbb{F}_p(1) \cong \mathbb{F}_p(p)$, mais on ne peut pas compléter le diagramme (4.3.1.1) par un isomorphisme, en effet $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1)) = \mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^p$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{F}_p$ et lorsque on l'identifie à $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(p))$ via la congruence, on peut montrer que les sous espaces de cohomologie finie sont des droites orthogonales par rapport au cup-produit.

(3) Voici un exemple géométrique de Greenberg qui montre que la congruence sur K_0 est nécessaire. Soient E_1 et E_2 deux courbes elliptiques ordinaires sur K et désignons par $T_i = T_p(E_i)$ le module de Tate de E_i, pour $i = 1, 2$. Supposons que les points de p-torsion $E_1[p]$ et $E_2[p]$ des deux courbes soient rationnels sur K et donc en particulier $K \supset \mu_p$. Un résultat de Coates et Greenberg, cf. [**CG96**], affirme que $H^1_f(K,T_i)$ est l'image de $H^1(K, T(\hat{E}_i)) \hookrightarrow H^1(K,T_i)$, où $\hat{E}_i$ désigne le groupe formel de E_i (qui a hauteur 1 par ordinarité). La réduction $T_i/pT_i = E_i[p]$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension 2, qui est trivial en tant que G_K-module par l'hypothèse de rationalité sur K des points de p-torsion ; en particulier T_1 et T_2 sont congruentes modulo p. Ainsi tout isomorphisme $T_1/pT_1 \to T_2/pT_2$ d'espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$, n'envoyant pas l'image de $T_p(\hat{E}_1)/pT_p(\hat{E}_1)$ dans $T_p(\hat{E}_2)/pT_p(\hat{E}_2)$, donne un contre-exemple à (4.3.1.1).

4.3.3. Résultats connus. Voici une liste de réponses positives à la question 4.3.1.1.

Bloch–Kato: Dans le cas $e = 1$ en utilisant la théorie de Fontaine-Lafaille, cf. [**BK90**].

Greenberg–Iovita–Pollack: Pour $p \geq 3$, dans le cas où les poids de Hodge–Tate sont dans $\{0,1\}$ et sous l'hypothèse $(T_1/p^n)^{G_{K_0}} = (T_1/p^n)^{G_K}$, en utilisant les modules fortement divisible de Breuil, cf. [**GIP06**].

Nekovar: Dans le cas où T_i est le module de Tate d'un groupe de Barsotti–Tate, en utilisant la cohomologie plate. Cela grâce à un résultat de Kisin pour $p \geq 3$ (et de Liu pour $p = 2$) est équivalent au cas de poids Hodge–Tate $\{0,1\}$, cf. [**Nek12**].

4.3.4. Notre résultat.

THÉORÈME 4.3.4.1. [**IM15**, 4.1.12] *Soient T_1, T_2 dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_0})^{[0,r]}_{\mathrm{cris}}$, avec $0 \leq r \leq p-2$. Supposons T_1, T_2 congruentes modulo p^n en tant que G_{K_0}-représentations et supposons*

$$e(r-1) \leq p-1.$$

Alors la congruence induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1_f(K,T_1)/p^n & \hookrightarrow & H^1(K,T_1/p^nT_1) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ H^1_f(K,T_2)/p^n & \hookrightarrow & H^1(K,T_2/p^nT_2). \end{array}$$

De plus nous construisons un sous foncteur, cf. [**IM15**, 4.1.2],

$$H^1_r(K,-)\colon \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}(G_{K_0})^{[0,r]}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

du foncteur $T/p^n \mapsto H^1(K,T/p^n)$, muni d'un isomorphisme canonique, cf. [**IM15**, 4.1.6],

$$H^1_r(K,T/p^n) \cong H^1_f(K,T)/p^n.$$

REMARQUE 4.3.4.2. Nous prouvons aussi la variante suivante de 4.3.4.1, cf. [**IM15**, 4.2.1]. Si $er \leq p-2$, alors nous avons la fonctorialité pour les G_K-morphismes . Cela est moins technique à démontrer, mais moins intéressant aussi car implique $(e,p)=1$ pour tout $r \geq 1$.

4.4. Esquisse de la preuve du théorème de continuité

La preuve du théorème 4.3.4.1 s'inspire de celle de Greenberg–Iovita–Pollack et se base sur la théorie de modules fortement divisibles de Breuil. On utilisera de manière essentielle la théorie de Fontaine–Lafaille ainsi qu'un théorème de Liu qui démontre une conjecture de Breuil [**Liu08**].

4.4.1. Puissances divisées partielles et l'anneau S de Faltings. Soient π une uniformisante de $\mathcal{O}_K$ et $E_\pi(u)$ le générateur unitaire du noyau de l'homomorphisme $W[u] \to \mathcal{O}_K$, envoyant u sur π.

DÉFINITION 4.4.1.1 (Faltings). Soit S le complété p-adique de l'enveloppe à puissance divisés de $W[u]$ par rapport à l'idéal $(E_\pi(u))$.

Pour tout nombre rationnel x, notons $[x]$ sa partie entière (*i.e.* le plus grand entier inférieur ou égale à x). L'anneau S s'identifie au sous anneau suivant de $K[\![u]\!]$

$$S \cong \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i u^{\langle i \rangle} \Big| a_i \in W, \lim_{i \to +\infty} a_i = 0 \right\} \subset K[\![u]\!],$$

où $u^{\langle i \rangle} = \left([\frac{i}{e}]!\right)^{-1} u^i$. On remarque que pour $e=1$ on retrouve l'anneau à puissances divisées usuelles.

L'anneau S est muni des différentes structures qui nous serons utiles dans la suite. Soit $\varphi\colon W[u] \to W[u]$ l'unique homomorphisme semi-linéaire de W-algèbres tel que $u \mapsto u^p$ (où la semi-linéarité est par rapport à l'isomorphisme σ de W relevant le Frobenius absolu de k). L'homomorphisme φ s'étend de manière unique à un homomorphisme qu'on notera $\varphi\colon S \to S$ et qu'on appellera le Frobenius de S.

Pour tout $i \geq 0$, notons $\mathrm{Fil}^i S$ la clôture p-adique dans S de l'idéal engendré par $\frac{E_\pi(u)^j}{j!}$, pour tout $j \geq i$. Pour $i \leq p-1$, nous avons $\varphi(\mathrm{Fil}^i S) \subset p^i S$; on posera $\varphi_i = p^{-i}\varphi\colon \mathrm{Fil}^i S \to S$.

4.4.2. Théorie de Fontaine–Lafaille et un théorème de Liu. La preuve du théorème 4.3.4.1 se fait en plusieurs étapes. La première consiste à mettre en place le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_0})^{[0,r]}_{\mathrm{cris}} & \xrightarrow[\mathrm{D_{cris}}]{\sim} & \text{Modules de Fontaine–Lafaille}/W \\ \downarrow \mathrm{res} & \searrow^{\underline{\mathrm{M}}} & \downarrow -\otimes_W S \\ \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)^{[0,r]}_{\mathrm{cris}} & \xleftarrow[\sim]{T_{\mathrm{st}}} & \text{Modules de Breuil}/S \end{array} \tag{4.4.2.1}$$

de foncteurs. Nous renvoyons le lecteur à [**IM15**, §2.2 et §3.1] pour les définitions des catégories sur la colonne de droite et nous rappelons ici juste que :

- la théorie de Fontaine–Lafaille [**FL82**] donne l'équivalence de catégories de la première ligne ;
- un théorème de Tong Liu (conjecturé par Breuil) nous assure que la deuxième ligne est une équivalence, cf. [**Liu08**, 2.3.5] ;
- nous vérifions dans [**IM15**, Prop. 3.2.2] que le diagramme commute (à isomorphisme près) ;
- le foncteur $\underline{\mathrm{M}}$ associe à toute représentation entière T la donnée

$$\underline{\mathrm{M}}(T) = (M, \varphi_r \colon \mathrm{Fil}^r M \to M, \nabla_M \colon M \to M \otimes_S \Omega^1_S),$$

où M est un S-module libre de rang égale au rang de T sur $\mathbb{Z}_p$, $\varphi_r \colon \mathrm{Fil}^r M \to M$ est un Frobenius divisé sur M ; $\Omega^1_S = S du$ et ∇_M est une connexion. Ces données vérifient des compatibilités que nous n'explicitons pas ici.

4.4.3. Équation différentielle. La deuxième étape consiste à construire un complexe fonctoriel dans la donnée de $\underline{\mathrm{M}}(T)$ dont la cohomologie en degré un calcule le groupe des extensions à la Yoneda. Notons $H^i_r(K,T)$ la cohomologie de ce complexe et posons $M = \underline{\mathrm{M}}(T)$. Grâce à ce complexe et au théorème de Liu cité plus haut, nous obtenons la description explicite suivante du groupe $H^1_f(K,T)$ pour toute représentation T dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)^{[0,r]}_{\mathrm{cris}}$, cf. [**IM15**, 3.3.4-(2)] :

$$H^1_f(K,T) \cong H^1_r(K,T) = \left\{(a,g) \in M \oplus \mathrm{Fil}^{r-1} M \,\middle|\, \nabla_M(-u\tfrac{d}{du})(a) = (\mathrm{Id} - \varphi_{r-1})(ug)\right\}_{/\sim} \tag{4.4.3.1}$$

où la relation $\sim$ est définie par : $(a,g) \sim 0$ si et seulement s'il existe $\gamma \in \mathrm{Fil}^{r-1} M$ tel que

$$a = (\mathrm{Id} - \varphi_{r-1})(\gamma) \text{ et } g \otimes du = \nabla_M(\gamma).$$

Remarque 4.4.3.1. L'opérateur $\nabla_M(-u\frac{d}{du}) \colon M \to M$ est souvent noté N_M et il est une déformation de l'opérateur de monodromie apparaissant en théorie de Hodge p-adique. Plus précisément dans le cas semi-stable, l'opérateur N agissant sur $\mathrm{D_{st}}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$ est le résidu en $u = 0$ de la connexion ∇_M.

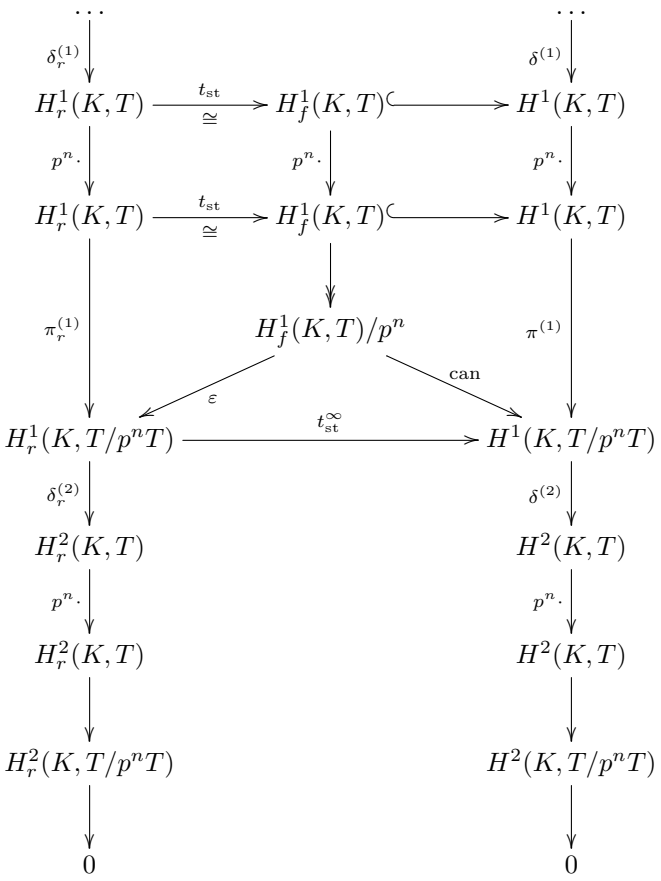
4.4.4. Fin de la preuve. D'abord nous remarquons que le diagramme de foncteurs (4.4.2.1) admet une variante modulo p^n, cf. [**IM15**, 3.2.2.-(2)], où la dernière ligne est donnée par un foncteur (noté T^∞_{st} dans *loc.cit.*) qui est exact, mais pas plein en général. Si on applique notre complexe fonctoriel à la suite exacte courte

$$0 \to T \xrightarrow{p^n} T \to T/p^n \to 0$$

et on calcule la cohomologie, on obtient deux suites exactes longues comme dans le diagramme à la page 57.

D'un côté le morphisme composé de l'inclusion $H^1_f(K,T) \subset H^1(K,T)$ avec $\pi^{(1)}$ se factorise par $H^1_f(K,T)/p^n H^1_f(K,T)$ comme indiqué dans le diagramme, car $H^1(K,T/p^n)$ est de p^n-torsion. Il n'est pas difficile de montrer que l'application can : $H^1_f(K,T)/p^n H^1_f(K,T) \to H^1(K,T/p^n)$ qu'on

TABLE 1. Deux suites exactes longues de cohomologie



déduit est injective, cf. [**IM15**, 4.1.1]. De l'autre côté, comme $H_r^1(K,T/p^nT)$ est de p^n-torsion, le composé de t_{st}^{-1} et $\pi_r^{(1)}$ se factorise aussi via une application

$$\varepsilon\colon H_f^1(K,T)/p^nH_f^1(K,T) \longrightarrow H_r^1(K,T/p^n)$$

rendant le diagramme commutatif. Comme can est injective, ε doit l'être aussi. Pour conclure la preuve il suffit de montrer que ε est un isomorphisme.

Par commutativité du diagramme il suffit de montrer que $\pi_r^{(1)}$ est surjectif. Par exemple, lorsque $e = 1$ ou $r = 1$ on peut montrer $H_r^2(K,T) = 0$; cela était la stratégie utilisée dans [**GIP06**], cf. [**IM15**, 4.1.11]. En général nous prouvons :

(1) si $H_r^2(K,T/p^nT) = 0$, alors $\pi_r^{(1)}$ est surjectif ;
(2) si $e(r-1) \leq p-1$, alors $H_r^2(K,T/p^nT) = 0$.

Pour montrer (1) nous observons que l'obstruction à relever des solutions de l'équation apparaissant dans (4.4.3.1) de S/p^nS à S est donnée par $H_r^2(K,T/p^nT)$, cf. [**IM15**, 4.1.7]. La preuve de (2) résulte de calculs explicites sur les puissances divisées partielles, cf. [**IM15**, 4.1.10].

Remarque 4.4.4.1.

(1) Dans la preuve de (2) ci-dessus, on se ramène facilement au cas $n = 1$, car par un dévissage standard on montre que $H^2_r(K, T/p^nT) = 0$ si et seulement si $H^2_r(K, T/pT) = 0$.

(2) Si $e \geq p$, alors $H^2_r(K, T/p^nT) \neq 0$ et $\pi_r^{(1)}$ et ε ne sont pas surjectifs, cf. [**IM15**, 4.2.3].

Bibliographie

[Abe11] Tomoyuki Abe, *Langlands program for p-adic coefficients and the petites camarades conjecture* (2011), 1–9. arXiv :1111.2479.

[Abe13] ———, *Langlands correspondence for isocrystals and existence of crystalline companion for curves* (2013), 1–97. arXiv :1310.0528.

[Abe14] ———, *Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincaré duality in the theory of arithmetic $\mathcal{D}$-modules*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **131** (2014), 89–149, DOI 10.4171/RSMUP/131-7. MR3217753

[Abe15] ———, *Rings of microdifferential operators for arithmetic $\mathcal{D}$-modules—construction and an application to the characteristic varieties for curves*, Bull. Soc. Math. France **143** (2015), no. 1, 35–107. MR3323344

[Abe10] ———, *Comparison between Swan conductors and characteristic cycles*, Compos. Math. **146** (2010), no. 3, 638–682, DOI 10.1112/S0010437X09004485. MR2644931

[AC13] Tomoyuki Abe and Daniel Caro, *Theory of weights in p-adic cohomology* (2013), 1–65. arXiv :1303.0662.

[AM15] Tomoyuki Abe and Adriano Marmora, *Product formula for p-adic epsilon factors*, J. Inst. Math. Jussieu **14** (2015), no. 2, 275–377, DOI 10.1017/S1474748014000024. MR3315058

[AM12] ———, *Yet another proof of Gross–Koblitz formula* (2012), 1–4, notes disponibles sur demande.

[And02] Yves André, *Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique*, Invent. Math. **148** (2002), no. 2, 285–317, DOI 10.1007/s002220100207. MR1906151

[Bar81] Daniel Barsky, *On Morita's p-adic gamma function*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **89** (1981), no. 1, 23–27, DOI 10.1017/S030500410005790X. MR591968

[Ber84] Pierre Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles*, Astérisque **119-120** (1984), 3, 17–49. p-adic cohomology. MR773087

[Ber86] ———, *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **23** (1986), 3, 7–32. Introductions aux cohomologies p-adiques (Luminy, 1984). MR865810

[Ber90] ———, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules*, p-adic analysis (Trento, 1989), Lecture Notes in Math., vol. 1454, Springer, Berlin, 1990, pp. 80–124. MR1094848

[Ber96a] ———, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres (Premiére partie (version provisoire 1991))*, Prépublication IRMAR **96** (1996), no. 03, 1–91. Disponible à `https://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/publis/Cohomologie_Rigide_I.pdf`.

[Ber96b] ———, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **29** (1996), no. 2, 185–272. MR1373933

[Ber97] ———, *Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 5, 493–498, DOI 10.1016/S0764-4442(97)88895-7. MR1692313

[Ber00] ———, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **81** (2000), vi+136. MR1775613

[Ber02] ———, *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules*, Astérisque **279** (2002), 1–80. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II. MR1922828

[BK90] Spencer Bloch and Kazuya Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 333–400. MR1086888

[Boy80] Maurizio Boyarsky, *p-adic gamma functions and Dwork cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. **257** (1980), no. 2, 359–369, DOI 10.2307/1998301. MR552263

[Car06] Daniel Caro, *Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes*, Compos. Math. **142** (2006), no. 1, 169–206, DOI 10.1112/S0010437X05001880. MR2197408

[CM01] Gilles Christol and Zoghman Mebkhout, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques. IV*, Invent. Math. **143** (2001), no. 3, 629–672, DOI 10.1007/s002220000116. MR1817646

[CG96] John Coates and Ralph Greenberg, *Kummer theory for abelian varieties over local fields*, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 129–174, DOI 10.1007/s002220050048. MR1369413

[Col87] Robert F. Coleman, *The Gross-Koblitz formula*, Galois representations and arithmetic algebraic geometry (Kyoto, 1985/Tokyo, 1986), Adv. Stud. Pure Math., vol. 12, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 21–52. MR948235

[Cre87] Richard Crew, *F-isocrystals and p-adic representations*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 111–138. MR927977

[Cre92] ———, *F-isocrystals and their monodromy groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 4, 429–464. MR1186910 (94a :14021)

[Cre98] ———, *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 6, 717–763, DOI 10.1016/S0012-9593(99)80001-9. MR1664230

[Cre00] ———, *Canonical extensions, irregularities, and the Swan conductor*, Math. Ann. **316** (2000), no. 1, 19–37, DOI 10.1007/s002080050002. MR1735077

[Cre06] ———, *Arithmetic $\mathcal{D}$-modules on a formal curve*, Math. Ann. **336** (2006), no. 2, 439–448, DOI 10.1007/s00208-006-0011-0. MR2244380

[Cre12] ———, *Arithmetic $\mathcal{D}$-modules on the unit disk*, Compos. Math. **148** (2012), no. 1, 227–268, DOI 10.1112/S0010437X11005471. MR2881315

[Del73] Pierre Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), Springer, Berlin, 1973, pp. 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349. MR0349635

[DGS94] Bernard Dwork, Giovanni Gerotto, and Francis J. Sullivan, *An introduction to G-functions*, Annals of Mathematics Studies, vol. 133, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. MR1274045

[ÉLS93] Jean-Yves Étesse and Bernard Le Stum, *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents. I. Interprétation cohomologique*, Math. Ann. **296** (1993), no. 3, 557–576, DOI 10.1007/BF01445120. MR1225991

[Fon94a] Jean-Marc Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque **223** (1994), 59–111. Avec une appendice par Pierre Colmez ; Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). MR1293971

[Fon94b] ———, *Représentations l-adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque **223** (1994), 321–347. Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). MR1293977

[FL82] Jean-Marc Fontaine and Guy Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982), no. 4, 547–608 (1983). MR707328

[GL04] Ricardo García López, *Microlocalization and stationary phase*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 4, 747–768. MR2127946

[Gar98] Laurent Garnier, *Descente par Frobenius explicite pour les $\mathcal{D}^\dagger$-modules*, J. Algebra **205** (1998), no. 2, 542–577, DOI 10.1006/jabr.1997.7373. MR1632769

[GIP06] R. Greenberg, A. Iovita, and R. Pollack, *On Iwasawa Invariants of Elliptic Curves at Supersingular Primes* (2006), prépublication.

[GV00] Ralph Greenberg and Vinayak Vatsal, *On the Iwasawa invariants of elliptic curves*, Invent. Math. **142** (2000), no. 1, 17–63, DOI 10.1007/s002220000080. MR1784796

[GK79] Benedict H. Gross and Neal Koblitz, *Gauss sums and the p-adic Γ-function*, Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 3, 569–581, DOI 10.2307/1971226. MR534763

[Gro67] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **32** (1967), 361. MR0238860

[Huy13] Christine Huyghe, *Comparison theorem between Fourier transform and Fourier transform with compact support*, J. Théor. Nombres Bordeaux **25** (2013), no. 1, 79–97. MR3063832

[IM15] Adrian Iovita and Adriano Marmora, *On the continuity of the finite Bloch-Kato cohomology*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **134** (2015), 239–271, DOI 10.4171/RSMUP/134-6. MR3428419

[Kat73] Nicholas Katz, *Travaux de Dwork*, Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972), Exp. No. 409, Springer, Berlin, 1973, pp. 167–200. Lecture Notes in Math., Vol. 317. MR0498577

[Kat86] Nicholas M. Katz, *Local-to-global extensions of representations of fundamental groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **36** (1986), no. 4, 69–106. MR867916

[Kat88] ———, *Travaux de Laumon*, Astérisque **161-162** (1988), Exp. No. 691, 4, 105–132 (1989). Séminaire Bourbaki, Vol. 1987/88. MR992205

[Ked04] Kiran S. Kedlaya, *A p-adic local monodromy theorem*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 1, 93–184, DOI 10.4007/annals.2004.160.93. MR2119719

[Ked06] ———, *Fourier transforms and p-adic 'Weil II'*, Compos. Math. **142** (2006), no. 6, 1426–1450, DOI 10.1112/S0010437X06002338. MR2278753

[Ked10] ———, *p-adic differential equations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 125, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. MR2663480

[Kis06] Mark Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, Algebraic geometry and number theory, Progr. Math., vol. 253, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, pp. 459–496. MR2263197

[Laf02] Laurent Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147** (2002), no. 1, 1–241, DOI 10.1007/s002220100174. MR1875184

[Lan70] Robert P. Langlands, *On Artin's L-function*, Rice Univ. Stud. **56** (1970), no. 2, 23–28. Disponible à `http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/JL.html`.

[Lau87] Gérard Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **65** (1987), 131–210. MR908218

[LS07] Bernard Le Stum, *Rigid cohomology*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 172, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. MR2358812

[LS11] ———, *The overconvergent site*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **127** (2011), vi+108 pp. (2012). MR2952779

[Liu08] Tong Liu, *On lattices in semi-stable representations : a proof of a conjecture of Breuil*, Compos. Math. **144** (2008), no. 1, 61–88, DOI 10.1112/S0010437X0700317X. MR2388556

[Liu13] ———, *The correspondence between Barsotti-Tate groups and Kisin modules when $p = 2$*, J. Théor. Nombres Bordeaux **25** (2013), no. 3, 661–676. MR3179680

[Mar08] Adriano Marmora, *Facteurs epsilon p-adiques*, Compos. Math. **144** (2008), no. 2, 439–483, DOI 10.1112/S0010437X07002990. MR2406118

[Mal91] Bernard Malgrange, *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Mathematics, vol. 96, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991. MR1117227

[Mat02] Shigeki Matsuda, *Katz correspondence for quasi-unipotent overconvergent isocrystals*, Compositio Math. **134** (2002), no. 1, 1–34, DOI 10.1023/A :1020233201909. MR1931960

[Meb02] Zoghman Mebkhout, *Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique*, Invent. Math. **148** (2002), no. 2, 319–351, DOI 10.1007/s002220100208. MR1906152

[Nek12] Jan Nekovář, *Level raising and anticyclotomic Selmer groups for Hilbert modular forms of weight two*, Canad. J. Math. **64** (2012), no. 3, 588–668, DOI 10.4153/CJM-2011-077-6. MR2962318

[NH04] Christine Noot-Huyghe, *Transformation de Fourier des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter, Berlin, 2004, pp. 857–907. MR2099091

[PR95] Bernadette Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque **229** (1995), 198. MR1327803

[Rob00] Alain M. Robert, *A course in p-adic analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 198, Springer-Verlag, New York, 2000. MR1760253

[Rob01] ———, *The Gross-Koblitz formula revisited*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **105** (2001), 157–170. MR1834987

[Sab08] Claude Sabbah, *An explicit stationary phase formula for the local formal Fourier-Laplace transform*, Singularities I, Contemp. Math., vol. 474, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 309–330. MR2454354

[Tat67] John T. Tate, *Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions*, Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965), Thompson, Washington, D.C., 1967, pp. 305–347. MR0217026

[Tat50] ———, *FOURIER ANALYSIS IN NUMBER FIELDS AND HECKE'S ZETA-FUNCTIONS*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1950. Thesis (Ph.D.)–Princeton University. MR2612222

[Tsu98a] Nobuo Tsuzuki, *Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve*, Amer. J. Math. **120** (1998), no. 6, 1165–1190. MR1657158

[Tsu98b] ———, *The local index and the Swan conductor*, Compositio Math. **111** (1998), no. 3, 245–288, DOI 10.1023/A :1000243409360. MR1617130

[Vir04] Anne Virrion, *Trace et dualité relative pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter, Berlin, 2004, pp. 1039–1112. MR2099095

Résumé — Ce texte est un survol de mes travaux de recherche comprenant deux parties indépendantes. Dans la première nous présentons les résultats obtenus en collaboration avec T. Abe. On se place sur une courbe propre et lisse X sur un corps fini de caractéristique p. Le résultat principal est une formule qui décrit les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L pour la cohomologie rigide de X, comme produit d'invariants locaux (les *facteurs epsilon*) aux points fermés de X. Ce résultat est l'analogue d'une formule de Deligne et Laumon pour les mêmes invariants en cohomologie étale ℓ-adique, avec $\ell \neq p$. Nous donnons une introduction au contexte et aux outils intervenant dans la preuve : notamment, la phase stationnaire pour les D-modules arithmétiques et l'analyse microlocale p-adique. On termine la partie par un théorème décrivant le Frobenius de la transformation de Fourier–Huyghe, avec une application à la formule de Gross–Koblitz. Dans la deuxième partie nous présentons un résultat, en collaboration avec A. Ioviţa, concernant la fonctorialité pour la cohomologie de Bloch–Kato par rapport aux congruences de représentations galoisiennes p-adiques.

Abstract — This text is a survey of my research articles. It consists of two independent parts. In the first we present the results obtained in collaboration with T. Abe and published mainly in the article « Product formula for p-adic epsilon factors ». Let X be a proper and smooth curve over a finite field of characteristic p. This formula describes the constants appearing in the functional equations of L-functions for rigid cohomology of X, as a product of local invariants (the *epsilon factors*) at closed points of X. It is the counterpart in rigid cohomology of the Deligne–Laumon formula for epsilon factors in ℓ-adic étale cohomology. We give an introduction to the context and to the main tools intervening in the proof: the stationary phase formula for arithmetic D-modules and the p-adic microlocal analysis. We end this part with a theorem describing the Frobenius of Fourier–Huyghe transform and an application to Gross–Koblitz formula. In the second part we present a result in collaboration with A. Ioviţa published in the article « On the continuity of the finite Bloch–Kato cohomology ».

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg et CNRS
7 Rue René Descartes
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29
Fax 03 68 85 03 28

www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.unistra.fr

Institut de Recherche Mathématique Avancée

IRMA 2017/006
ISSN 0755-3390
https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01628170