



HAL
open science

Étude et réalisation d'un nouveau système de référence spatio-temporel basé sur des liens inter-satellites dans une constellation GNSS

Edouard Richard

► **To cite this version:**

Edouard Richard. Étude et réalisation d'un nouveau système de référence spatio-temporel basé sur des liens inter-satellites dans une constellation GNSS. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066545 . tel-01619076

HAL Id: tel-01619076

<https://theses.hal.science/tel-01619076>

Submitted on 19 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

École doctorale n° 127
Astronomie et Astrophysique d'Île-de-France

Laboratoire « Systèmes de Référence Temps-Espace »
Observatoire de Paris

Étude et réalisation d'un nouveau système de référence spatio-temporel basé sur des liens inter-satellites dans une constellation GNSS

Par Édouard RICHARD

Thèse de doctorat spécialité "Astrophysique"

Dirigée par Peter WOLF et Pacôme DELVA

présentée et soutenue publiquement le 27 janvier 2016

Devant le jury composé de:

Frédéric DAIGNE,	Président du jury
Pascale DEFRAIGNE,	Rapporteur
Gilles MÉTRIS,	Rapporteur
Sylvain LOYER,	Examineur
Peter WOLF,	Directeur de thèse
Pacôme DELVA,	Co-directeur de thèse

À mes parents, Patricia et Jean-Luc.

Résumé

L'exactitude délivrée par les systèmes de positionnement globaux par satellites (GNSS) est un facteur clé pour de nombreuses applications scientifiques telles que le positionnement de points géodésiques ou d'autres satellites, l'établissement de systèmes de référence spatio-temporels, la synchronisation d'horloges ou encore l'étude directe du lien pour sonder l'atmosphère. L'augmentation de la constellation GNSS avec des mesures de pseudo-distances entre les satellites est une option prometteuse pour améliorer l'exactitude du système. Plusieurs études présentent l'apport qualitatif de ces liens inter-satellites (ISL), mais ne permettent pas de mesurer efficacement l'impact quantitatif de cette technologie. Dans cette thèse, nous avons effectué une étude différentielle entre un système classique (possédant seulement des liens standards espace-sol) et un système augmenté avec des ISL. Les deux systèmes sont étudiés sous les mêmes hypothèses et à travers le même code de calcul. Celui-ci est composé de deux parties distinctes et autonomes : une simulation d'observables sous la forme de pseudo-temps de vol bruités, et une analyse qui délivre, après ajustement des paramètres, les bilans d'erreurs quantitatifs. La comparaison des bilans d'erreurs quantitatifs associés aux deux systèmes nous permet d'établir, pour une même application donnée, les différences de performance relatives entre les deux systèmes. Les résultats obtenus permettent de franchir un pas de plus vers la validation de l'apport des liens inter-satellites et sont à considérer pour les versions futures des systèmes de navigation par satellites.

Abstract

The accuracy reached by the Global Navigation Satellite Systems (GNSS) is critically important for many scientific applications such as geodetic point or satellite positioning, space-time reference frame realization, clocks synchronization or the study of the links to probe the atmosphere. One option for improving the system accuracy is the use of inter-satellite pseudo-range measurements, so called inter-satellite links (ISL). Several studies have shown the qualitative interest of ISL but do not allow to efficiently measure the quantitative impact of this new technology on space-time positioning. In this thesis, we present a differential study between a standard system (with standard satellite-to-ground links only) and system augmented by ISL. The two systems are compared under the same hypothesis and simulated within the same software. The software is made of two distinct and independent parts : the simulation which generates the noisy pseudo-ranges, and an analysis which uses a non linear adjustment procedure in order to recover the initial parameters of the simulation and compute the quantitative error budgets. For a given application, the quantitative comparison between the error budgets of both systems allow us to highlight the relative merits of the two configurations. Our results are a further step in the characterization of the interest of ISL and should prove useful for the design of future satellite navigation system design.

Remerciements

Bien au-delà de la formalité, j'ai l'occasion avec ces quelques lignes de témoigner ma reconnaissance aux personnes qui m'ont entouré pendant cette période inoubliable qu'est la thèse. Sans doute à cause de l'angoisse de ne pas être à la hauteur des personnes présentes pour moi, j'ai rédigé cette partie très tardivement. Sois prévenu cher lecteur, la liste est longue.

Évidemment comment ne pas débiter avec mes directeurs de thèse, Peter Wolf et Pacôme Delva, qui m'ont encadré et soutenu pendant toute la durée de mon doctorat. Du fond du coeur, je vous remercie tous les deux de m'avoir accepté dans votre équipe, de m'avoir fait confiance et accompagné dans cette expérience de 3 années bien remplies (et un peu plus). Je ne peux le cacher, je n'aurais rêvé meilleur encadrement que ce duo de surfeurs.

Pacôme, je prends ici le risque d'être « pompeux » pour affirmer que tu as été un modèle pour moi. Scientifique rigoureux, ouvert sur de nombreux domaines, ta passion pour la Science est absolument contagieuse. En outre, ton rôle dans le milieu scientifique ne s'arrête pas aux sujets novateurs que tu traites (et qui m'ont toujours convaincu) : tu es aussi un de ceux qui s'implique dans la pédagogie et l'enseignement. Au delà des cours à l'université que j'ai eu le plaisir d'enseigner avec toi, il m'est facile de témoigner de ton talent de pédagogue et de l'énergie que tu dépenses dans ce domaine. Présent presque quotidiennement pour moi, tu n'as jamais montré un signe d'impatience alors que je te demandais de me ré-expliquer les mêmes notions. Tu n'as pas compté tes heures disponibles et ne m'as jamais lâché même dans les moments les plus difficiles (la fin fut longue). Même si la relation encadrant-étudiant crée nécessairement des barrières, j'ai souvent trouvé échos dans nos discours respectifs.

Peter, malgré ton calendrier chargé, tu as toujours été présent pour contrôler le déroulement des opérations, pour tenir la barre du navire, lorsque mon sujet nous offrait un panel de trajectoires possibles. Arrivé à bon port, mon seul regret est de ne pas avoir davantage profité de tes lumières. Car non seulement, tes connaissances scientifiques couvrent de nombreux domaines de la physique, mais tu mets toujours un point d'honneur à les présenter de la façon la plus limpide et détaillée possible. Véritable pilier dans le « milieu », cela aura été un honneur de partager ces trois ans avec toi et Pacôme.

Avec deux chercheurs de votre trempe il est normal de trouver à vos côtés une équipe soudée et rayonnante scientifiquement, composée de personnes admirables qui ont su se retrouver.

Présente depuis mes premiers pas dans l'astrophysique, je te remercie Marie-Christine Angonin pour ta bienveillance et ta disponibilité. Tes précieux conseils m'ont permis de travailler avec Pacôme et Peter, et de réussir ce parcours du mieux que je pouvais. De plus je tiens à remercier Pierre Teyssandier pour son enseignement passionnant de Master 2 qui m'a donné le goût des transferts de temps relativistes. Merci aussi à Christophe Leponcin-Lafitte pour avoir sauvé ma soutenance de toutes ses fautes d'orthographe à H-24 et pour nous avoir aidé à répéter. Frédéric Meynadier, je n'imagine pas les heures de perdues sans ton expertise informatique. Merci de m'avoir toujours accueilli avec la plus grande sympathie et de m'avoir fait partager tes connaissances à chaque fois que j'en avais besoin.

Je souhaite maintenant remercier vivement les membres du jury d'évaluation de cette thèse : Frédéric Daigne, Pascale Defraigne, Gilles Métris et Sylvain Loyer. Ce fut un honneur pour moi que vous acceptiez de porter votre regard expert et critique sur mes travaux. Dans des délais très courts, vous avez toutefois effectué une lecture attentive et critique de mes résultats. Les questions que vous avez soulevées et nos divers échanges ont permis de faire avancer mon sujet et promettent une source prolifique d'études futures.

On dit souvent que l'excellence d'un laboratoire se reflète à travers les étudiants qui y transitent. Je pense que le SYRTE fait alors office de modèle. Merci sincèrement Indranil. Nos échanges passionnés sur la musique et les séries ont servi de respirations nécessaires entre nos heures interminables de rédaction. J'ai vivement apprécié nos déambulations nocturnes dans le laboratoire entre deux sous parties, me permettant de mieux vivre cette étape un peu trop solitaire. Et évidemment je te remercie du fond du coeur pour t'être occupé de ma soutenance, pour avoir tout pris en charge. Ce jour si important pour moi n'aurait pas été le même sans ton soutien.

Merci aussi Mehdi, pour nos discussions passionnantes, entrecoupées de vanes solides. Merci aussi à Adrien, Olivier, Rinat, Satya, Marc-Antoine, César, Hélène, Denis, Ramon, Cyrille pour avoir partagé d'agréables repas, ou écoles d'été.

Je tiens à remercier vivement Noël Dimarcq et Arnaud Landragin pour leur bienveillance et leur accueil dans le laboratoire. Bien évidemment je peux généraliser ces remerciements à l'ensemble des personnes du laboratoire pour m'avoir chaleureusement accueilli, et qui font de ce lieu un espace de recherche dédié à l'excellence. Merci en particulier à Ouali, Joseph, Sébastien, Christian, Pascal, Émeric, Daniele, Rémi, Christine, Rodolphe, Jean, José, Jean-Yves, Gilles et Philip. Merci aussi à Marine, Francia, Christel et Pascale de vous occuper de nous.

Pendant ces 3 ans j'ai aussi eu la chance de partager le bureau de Pierre Urich. Je tiens à te remercier très vivement pour tout le temps que tu m'as accordé. Nos discussions passionnantes sur la société, l'art ou la science furent une source de vitamines, de nourriture riche pour mon esprit. Cette thèse n'aurait pas eu la même couleur sans ta présence. Même pendant la rédaction je pouvais compter sur toi pour nous ouvrir une

fenêtre d'air frais, aérant l'esprit de l'ébullition ambiante. Scientifiquement précis, armé de bon sens et d'une mémoire à toute épreuve, j'ai encore beaucoup à apprendre de toi. Merci aussi à Claude, pour évoluer au sein de l'Observatoire et être venu arroser mon potager de temps en temps. La science n'est rien sans le goût de la création artistique, car toutes deux sont le propre de l'homme.

En outre, j'ai eu le plaisir de partager mes repas avec mes camarades de l'IMCCE, Jess Alex et Andy. Fameux couple, j'ai eu le plaisir d'apprécier la vitalité de Jess et des débats interminables mais éclairés avec Alex. Merci à vous pour votre rafraichissante compagnie. Merci aussi à Andy. Nos pauses du midi étaient une raison en soi de venir à l'Observatoire !

Je remercie aussi vivement la famille, et amis que j'ai eus près de moi durant ces années. Bien sûr, il y a notre trio, avec Lester et Mathieu, qui trouve sa place dans ces remerciements. L'Irlande, les soirées au DB, les Breaking Bad, Geekopolis et autres sorties ont ponctué ma thèse de purs moments de joie, d'amitié et de franche camaraderie. Merci à vous pour toujours être de la partie, et d'avoir donné du relief à toute cette expérience.

Je souhaite aussi remercier Karelle et Romain. Alternativement, vous avez peuplé mes nuits blanches. Karelle, dans les heures les plus noires, tu as réussi à me faire garder la tête hors de l'eau. Je te remercie pour tes précieux conseils et ton écoute à l'épreuve du temps. Romain, nos théories sur la nature de l'homme nous ont emmené là où aucune personne n'avait été auparavant. Je reste convaincu que nous pourrions écrire une thèse commune sur nos sujets de discussion. Merci aussi à Martin pour nos moments de fou rire indénombrables ! De plus, je tiens à remercier David sincèrement. Nos échanges, nos projets artistiques communs ont su nourrir une autre partie de l'exercice créatif qu'est la thèse. Nos ailes sont lourdes et chargées, mais notre détermination est plus puissante encore.

À présent, il me reste trois personnes à remercier. Tout d'abord mes parents, Patricia et Jean Luc. Le jour de la soutenance l'émotion m'a étreint, et j'ai l'occasion encore ici de vous témoigner mon profond amour et ma reconnaissance éternelle. Vous m'avez donné le goût des sciences sans êtres scientifiques, le goût de l'art sans être artistes. Il n'y a que du meilleur à découvrir et puiser en vous, et c'est sans doute pour cela que ma vie est si facile. Merci infiniment pour votre soutien, à peine imaginable par les autres et pour tout ce que vous m'avez donné sans jamais rien demander.

Finalement, je souhaite remercier du fond du coeur Laura, qui partage ma vie depuis plus de 10 ans. Ayant toujours eu foi en moi et ce depuis le début, ta confiance inébranlable est un moteur quotidien sur lequel je me repose. Enfin pas que, il y aussi ton amour tendre, ton intellect rationnel, tes valeurs... Tu me permets d'être la meilleure version de moi-même et on sait tous les deux que rien de tout cela n'aurait existé sans notre relation constructive. Tu donnes du sens à ce que je suis. Pour cela et tout le reste, je te remercie. Si la vie est faite de rencontres, je n'échangerais pas la nôtre contre une rencontre du troisième type ...

Table des matières

Introduction	1
1 Transfert de temps relativiste	5
1.1 Introduction	6
1.2 Cadre relativiste	7
1.3 Systèmes de référence spatio-temporels	16
1.4 Transfert de temps 1-voie par satellite	23
1.5 Délais issus d'effets perturbateurs	28
1.6 Équation d'observation	33
2 Actuel et futur GNSS	35
2.1 Définition d'un GNSS	36
2.2 Positionnement	37
2.3 Les GNSS actuels	44
2.4 Relativité et GNSS	50
2.5 Limitations actuelles	55
2.6 Liens inter-satellites	64
3 Logiciel	71
3.1 Présentation de l'étude	72
3.2 Simulation	74
3.3 Analyse	93
4 Comparaison des systèmes Classique et Hybride	103
4.1 Informations préliminaires	104
4.2 Version Témoin	108
4.3 Version Bruit horloge	115
4.4 Version Complète	120
4.5 Figures	125
Conclusion	139

Liste des figures

1.1	Construction de l'UTC et du TAI http://bipm.org	22
1.2	Différence de secondes entre TAI et UTC (ARIAS, 2015).	23
1.3	Convention de simultanéité d'Einstein.	24
1.4	Différence de durée propre écoulée.	26
1.5	Description du transfert de temps 1-voie.	27
1.6	Délai créé par la présence de l'atmosphère.	30
1.7	Effet de multi-trajet sur la mesure de pseudo-distance.	32
2.1	Sensibilité statistique du test du décalage gravitationnel en fonction de la durée de l'expérience.	54
2.2	Schématisation du principe de fonctionnement d'une horloge atomique.	56
2.3	Écart-types d'Allan comparés pour les horloges de GIOVE-A, GIOVE-B et des satellites GPS (WALLER et collab., 2008)	58
2.4	59
2.5	Écart-types d'Allan modifiés pour les horloges des satellites Galileo IOV et pour une horloge du bloc IIF du GPS (PRANGE et collab., 2014)	60
2.6	61
2.7	Schématisation de l'augmentation du nombre de mesures en présence d'ISL.	64
2.8	Exactitudes atteintes par le processus de détermination d'orbite du logiciel de simulation GNSS (FERNÁNDEZ, 2011).	67
3.1	Méthodologie de l'étude réalisée. Les deux systèmes, avec et sans liens ISLs, sont étudiés dans le même cadre physique. L'analyse des bilans d'erreur quantitatifs émanant des sources d'erreurs permet de comparer ces deux systèmes sous hypothèses équivalentes et ainsi de définir leurs avantages relatifs.	73
3.2	Schéma récapitulatif des entrées et sorties de la simulation.	74
3.3	Flowchart de la simulation.	75
3.4	Ordre de grandeur des accélérations perturbatrices agissant sur différentes classes de satellites (MONTENBRUCK et EBERHARD, 2000).	77
3.5	Performance de l'intégrateur et de l'interpolation dans la Simulation	80
3.6	Flowchart du calcul du pseudo-temps de vol pour un lien STG.	81
3.7	Angle de déviation par rapport au zénith.	82
3.8	Délais troposphériques des lien STG.	84
3.9	Constellations sol et espace utilisées pour faire le test sur les délais troposphériques.	84

3.10	Variation journalière de la température.	85
3.11	Flowchart du calcul du pseudo-temps de vol pour un lien STS.	86
3.12	Principe de la visibilité entre deux satellites.	88
3.13	Écart-types d'Allan schématisés pour les horloges des satellites (bleu) et des stations (rouge) du système Galileo.	91
3.14	Écart-types d'Allan d'une horloge embarquée de notre logiciel.	91
3.15	Biais troposphérique en température.	92
3.16	Flowchart de l'analyse.	93
3.17	Schéma récapitulatif des entrées et sorties de l'analyse.	94
3.19	Performances comparées des intégrateurs et des interpolations du logiciel.	97
3.20	Critère de convergence avec la routine lsqcurvefit.	101
4.1	Géométrie de la constellation satellite	105
4.2	Répartition des stations issues du réseau IGS et utilisées pour les tests du logiciel.	105
4.3	Temps de calcul en fonction du nombre de stations pour un test avec 3 satellites avec les différentes sources de bruit (a), et sans (b).	107
4.4	Référentiel du satellite composé des vecteur radial, tangent et cross-tangent.	109
4.5	Histogramme des résidus des temps de vol associés aux cinq satellites émetteurs pour les liens STG du système Classique.	111
4.6	114
4.7	Histogramme des résidus des temps de vol STG associés aux cinq satellites émetteurs pour le système Classique.	116
4.8	119
4.9	Histogramme des résidus des temps de vol associés aux cinq satellites émetteurs.	121
4.10	124
4.11	Paramètres finaux ajustés et leur erreur relative associée.	126
4.12	Paramètres finaux ajustés et leur erreur relative associée.	127
4.13	Erreurs absolues sur l'orbite des satellites après ajustement, en repère inertiel.	128
4.14	Erreurs absolues sur l'orbite des satellites après ajustement, en repère inertiel.	129
4.15	Erreurs absolues sur l'orbite des satellites après ajustement, en repère local orbital.	130
4.16	Erreurs absolues sur l'orbite des satellites après ajustement, en repère local orbital.	131
4.17	Erreurs absolues sur le mouvement des stations après ajustement, en repère inertiel.	132
4.18	Erreurs absolues sur le mouvement des stations après ajustement, en repère inertiel.	133
4.19	Résidus des temps de vol STG triés pour les cinq satellites.	134
4.20	Résidus des temps de vol STG triés pour les cinq satellites.	135
4.21	Résidus des temps de vol STS triés pour les cinq satellites.	136

Liste des tableaux

2.1	Latences et exactitudes des différentes éphémérides produites par l'IGS. . .	63
3.1	Séquence entre trois satellites.	87
3.2	Tableau représentant les données stockées dans les fichiers d'observables.	89
4.1	Valeurs des éléments képlériens initiaux pour les cinq satellites utilisés. . .	104
4.2	Valeurs des paramètres d'horloges pour les cinq satellites utilisés.	104
4.3	Localisation des stations et paramètres d'horloges associés.	106
4.4	Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol associés à chaque satellite émetteur pour les liens STG du système Classique.	111
4.5	Séquence d'émissions entre les cinq satellites de la constellation. Un 1 correspond à une émission. Les vingt émissions sont simultanées (une seule sous-séquence).	111
4.6	Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol STG associés à chaque satellite émetteur pour le système Hybride.	113
4.7	Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol STS associés à chaque satellite émetteur pour le système Hybride.	113
4.8	Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol STG associés à chaque satellite émetteur pour le système Classique.	116
4.9	Moyenne et écart-type des résidus des temps STG de vol associés à chaque satellite émetteur pour le système Hybride.	118
4.10	Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol STS associés à chaque satellite émetteur pour le système Hybride.	118
4.11	Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol associés à chaque satellite émetteur.	121
4.12	Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol associés à chaque satellite émetteur.	123
4.13	Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol associés à chaque satellite émetteur.	123

Introduction

Les systèmes globaux de positionnement par satellite (GNSS) entretiennent, à travers l'utilisation de technologies de pointe et de modélisations physiques complexes, une relation étroite avec la recherche fondamentale. En effet, une description physique extrêmement rigoureuse est primordiale pour atteindre les performances nominales des GNSS. Par exemple, les développements avant-gardistes en mécanique quantique sont utilisés pour construire des horloges atomiques de 25cm^3 capables d'atteindre des stabilités en fréquence inférieures à 10^{-14} à la journée (ROCHAT et collab., 2005). De plus, il est absolument nécessaire de décrire l'évolution des objets dans un cadre relativiste.

En effet, évoquons cette anecdote : la première horloge atomique au Césium à être placée en orbite fut lancée le 23 juin 1977 à bord du satellite NTS-2 de la constellation NAVSTAR GPS. À cette époque, grâce aux travaux d'Einstein sur la relativité générale, il était connu qu'une horloge en orbite ne subirait pas le même potentiel que celle placée sur la surface de la Terre et présenterait alors un décalage en fréquence. Cependant, l'ensemble de la communauté discutait l'ordre de grandeur associé à ce décalage et doutait alors de la nécessité d'incorporer les corrections relativistes aux fréquences d'horloges. Par conséquent, un synthétiseur de fréquence fut incorporé au système d'horloge afin de modifier la fréquence de l'horloge si les effets relativistes s'étaient révélés trop importants (ASHBY, 2003). Lorsque l'horloge fut en orbite, elle opéra pendant 20 jours avant que le synthétiseur ne soit mis en marche. Les différences de fréquences étant contenues dans le domaine d'exactitude de l'horloge, la prédiction de la relativité générale fut vérifiée à environ 1% près (BUISSON et collab., 1978).

Cette émulation entre recherche fondamentale et développement technologique industriel fait du domaine des GNSS un milieu scientifique en ébullition permanente. Réciproquement, de nombreux domaines en recherche fondamentale tirent profit des développements technologiques du GNSS. Pour ne citer que quelques exemples d'applications scientifiques, on utilise aujourd'hui les GNSS pour construire le repère de référence international ITRF (ALTAMIMI et collab., 2011), l'échelle de temps TAI (PETIT et ARIAS, 2009), pour effectuer des tests de physique fondamentale (DELVA et collab., 2015), pour la recherche en géophysique (PANET et collab., 2010), pour les prévisions météorologiques (BUBNOVÁ et collab., 1995), etc.

En 2001, l'Union Européenne entreprend de se doter de son propre système de positionnement par satellite, nommé Galileo. L'intense activité qui naît de ce projet, pousse la communauté scientifique à réfléchir à l'amélioration future du système sous tous ses angles. Entendons par là que les enjeux sont non seulement d'améliorer l'exactitude du

système, mais aussi son intégrité, sa robustesse et sa disponibilité.

Introduire des liens inter-satellites dans une constellation de satellites MEO¹ comme Galileo est une option prometteuse pour augmenter et optimiser les critères cités précédemment. Ces liens inter-satellites correspondent à la fois à des mesures de pseudo-distances entre les satellites, mais aussi à des échanges d'informations comme le message de navigation ou les paramètres de santé du satellite. Deux applications majeures utilisent les liens inter-satellites : la détermination précise de l'orbite et des paramètres d'horloges des satellites, et le contrôle de l'intégrité.

Outre des débuts difficiles avec le système AUTONAV du GPS, **WOLF (2000b)** a démontré la faisabilité et les potentiels gains d'un système augmenté de liens inter-satellites. **HAMMESFAHR et collab. (1999)** ont ensuite réalisé une étude détaillée de l'ensemble des contraintes technologiques et des avantages qu'offrent ces systèmes. Ces résultats et considérations ont encouragé l'ESA à entreprendre une série d'études (**ARONA et collab., 2008**; **FERNÁNDEZ et collab., 2011**) ainsi que le développement d'un modèle de démonstration des liens inter-satellites (ADVISE+).

Cependant, en ne considérant que les résultats qui portent sur la détermination des orbites et des paramètres d'horloges, plusieurs améliorations peuvent être apportées à ces études :

- Tout d'abord, les premiers travaux réalisés il y a presque 20 ans ne prennent pas en compte le paysage technologique contemporain. Par exemple, le système Galileo mis en place aujourd'hui est très différent des premières ébauches considérées.
- Ensuite, ces études ont toutes pour premier objectif de caractériser de manière absolue le gain d'exactitude qu'offre le système augmenté de liens. De nombreuses sources de bruits et d'effets perturbateurs sont prises en compte, mais ne sont pas analysées en détail dans les bilans d'erreurs quantitatifs. De plus, par l'expression "caractériser de manière absolue", j'entends par là que les résultats trouvés sont qualitatifs et non quantitatifs. En effet, pour effectuer une mesure, il faut avoir une unité, un étalon. Pour mesurer quantitativement l'amélioration apportée par un système avec des liens, l'étalon choisi doit être l'élément connu, soit le système standard équipé seulement de liens espace-sol. En comparaison à ce système classique témoin, il est alors possible de donner une valeur quantitative pour le gain. Dans le cas contraire, la méthodologie "étude absolue" rend les résultats difficiles à analyser.

Par conséquent, j'ai entrepris dans cette thèse de réaliser une étude différentielle entre un système classique (qui servira de témoin) et un système augmenté de liens inter-satellites. Les deux systèmes seront étudiés sous les mêmes hypothèses et à travers le même code de calcul. Les sources de bruits et d'effets perturbateurs dans nos simulations seront ajoutées par complexité graduelle, permettant une lecture efficace des résultats. Cette méthodologie est robuste et permet d'avoir confiance dans les résultats qu'elle délivre.

1. *Medium Earth Orbit* : satellite en orbite terrestre moyenne (circular) autour de la Terre, situé entre environ 2000 km et 35000 km (période de révolution entre environ 2h et 12h)

Afin encore une fois d'augmenter la robustesse de mon étude, j'ai codé, entièrement et spécialement pour cette étude, un logiciel séparable en deux parties distinctes et autonomes : une simulation d'observables sous la forme de pseudo-temps de vol, et une analyse qui délivre après ajustement des paramètres, les bilans d'erreurs quantitatifs.

Cette étude apporte de la clarté, de la simplicité et une prise en compte d'un contexte actuel dans le cadre de la détermination des orbites et des paramètres d'horloges dans une constellation augmentée de liens inter-satellites.

Le premier chapitre de cette thèse établira les différentes bases théoriques nécessaires pour comprendre les transferts de temps relativistes s'opérant dans les GNSS. Je présenterai sommairement le cadre de travail relativiste, suite à quoi je passerai en revue les systèmes de référence spatio-temporels. Je présenterai finalement un modèle de transfert de temps relativiste à partir duquel je pourrai dans le second chapitre étudier les observations d'un GNSS.

Le second chapitre présente sommairement les principes des GNSS actuels, en y détaillant les observables de base. Puis après avoir passé en revue les différents GNSS, je m'intéresserai à la prise en compte de la théorie de la relativité générale dans les GNSS actuels. Afin de pouvoir envisager quelles seraient les caractéristiques d'une nouvelle génération de GNSS, je listerai les principaux facteurs actuels limitant des GNSS. Finalement je conclurai qu'un nombre important de ces limites peut être surmonté avec l'implémentation de liens inter-satellites dans la constellation.

Le troisième chapitre détaillera le cœur de mon travail : la réalisation d'un logiciel complet permettant d'étudier les différences de performances entre un système classique composé seulement de liens espace-sol, et un système augmenté, appelé dans le reste de l'étude système hybride, composé à la fois de liens sol-espace et de liens inter-satellites. J'expliciterai la méthode utilisée ainsi que ses différentes hypothèses associées. Le chapitre est séparé en deux parties : la partie détaillant la simulation qui génère les observables, et la partie présentant les composants de l'analyse. Je vérifierai ici les ordres de grandeur des exactitudes atteintes par les outils composants le logiciel.

Le dernier chapitre présentera les résultats de mon étude, en comparant, au moyen de trois scénarios, les performances entre le système classique et le système hybride. Ces trois scénarios sont : la version témoin sans effets perturbateurs et sources de bruit, permettant de démontrer la robustesse de mon étude, et de vérifier les performances numériques de l'ensemble du logiciel ; la version comprenant comme source de bruit des bruits d'horloges réalistes (bruit blanc de fréquence et bruit Flicker) ; la version complète comprenant à la fois des bruits d'horloges mais aussi un biais troposphérique.

Je conclurai finalement en présentant les résultats de mon étude et en discutant des perspectives qu'ouvrent mes travaux.

Chapitre 1

Transfert de temps relativiste

« Si j'avais su, je serais devenu horloger »

Albert Einstein.

Sommaire

1.1 Introduction	6
1.2 Cadre relativiste	7
1.2.1 Référentiels en physique classique	7
1.2.2 Relativité restreinte	8
1.2.3 Principe d'équivalence	11
1.2.4 Relativité générale	13
1.3 Systèmes de référence spatio-temporels	16
1.3.1 Systèmes de coordonnées relativistes	17
1.3.2 Réalisation des systèmes de référence spatiales	19
1.3.3 Réalisation des systèmes de référence temporel	20
1.4 Transfert de temps 1-voie par satellite	23
1.4.1 Simultanéité	23
1.4.2 Transformation temps propre - temps coordonnée	25
1.4.3 Equation de désynchronisation	27
1.5 Délais issus d'effets perturbateurs	28
1.5.1 Electronique	28
1.5.2 Effet des antennes	29
1.5.3 Atmosphère	29
1.5.4 Multi-trajets	32
1.6 Équation d'observation	33

1.1 Introduction

L'expérience du réel que notre cher lecteur éprouve actuellement est intrinsèquement corrélée à la notion de localisation par rapport à son environnement extérieur. Cette localisation peut être décrite, dans une première approche, par deux concepts fondamentaux : l'Espace et le Temps. Il apparaît alors naturel qu'un pan entier de la construction scientifique, appelé métrologie, soit dédié à la définition des principes et des méthodes pour effectuer, entre autres, des mesures de temps et de distance.

Plus particulièrement, la métrologie du temps réunit l'ensemble de l'activité scientifique autour de la mesure locale du temps (construction et opération des horloges) et de la comparaison et dissémination de telles mesures (transfert de temps) sur des régions spatio-temporelles allant de quelques mètres (l'intérieur du laboratoire) à des distances astronomiques voir cosmologiques.

L'avènement de la physique quantique dans la première moitié du XXe siècle a révolutionné la métrologie du temps avec l'apparition des premières horloges atomiques. Celles-ci sont vite devenues l'outil de mesure du temps le plus exact, remplaçant les observations astronomiques pour définir officiellement l'unité du temps (la seconde) en 1967 (BIPM, 2006). Cette dernière est définie comme suit :

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

En partant de cette définition, et en choisissant la vitesse de la lumière comme constante de définition ($c = 299792458 m.s^{-1}$ exactement), on obtient la définition de l'unité de longueur :

Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde.

Par conséquent, les mesures des distances s'effectuent par des mesures directes de la durée de trajet des signaux lumineux, ou par la longueur d'onde de lasers dont la fréquence est connue en terme de la définition de la seconde ci-dessus.

Parallèlement aux développements en physique quantique, la théorie de la relativité générale propose d'unifier les concepts d'espace et de temps intuitivement distincts, en un objet appelé l'Espace-temps. Bien que longtemps ignorée en métrologie du temps, elle s'impose à partir des années 1960 avec le développement des technologies spatiales qui permettent des mesures astrométriques de haute exactitude. Elle devient rapidement partie intégrante d'un grand nombre d'applications dans le spatial et la géodésie, par exemple des systèmes de positionnement par satellite (*Global Navigation Satellite System - GNSS*).

La problématique de notre étude portant sur les GNSS, nous présenterons dans ce

premier chapitre les concepts nécessaires pour traiter des transferts de temps dans un cadre relativiste. Nous commencerons par une description sommaire de la théorie de la relativité générale. Nous nous attarderons ensuite à définir les différents systèmes de référence spatio-temporels. Puis, nous présenterons le transfert de temps 1-voie par satellite, modèle de base pour la compréhension des mesures GNSS. Nous concluons sur une liste non-exhaustive des effets perturbateurs à introduire dans le modèle du transfert de temps 1-voie par satellite.

Ce chapitre est très largement inspiré de différents cours donnés à l'Observatoire de Paris, notamment du cours de Physique des Satellites et du Positionnement, construit par Peter Wolf, Marie-Christine Angonin, Phillippe Tuckey et Pacôme Delva.

1.2 Cadre relativiste

1.2.1 Référentiels en physique classique

Pour décrire les systèmes physiques étendus en physique classique (notamment en astronomie et géophysique) on utilise des référentiels (ou systèmes de référence) qui permettent la formulation des lois de la physique en fonction de :

- Un système de coordonnées spatiales x^i à 3 dimensions (où l'indice en lettres latines i prend les valeurs $i = 1, 2, 3$) permettant de repérer les positions spatiales ;
- Une coordonnée temporelle t permettant de repérer les instants successifs en chaque point de l'espace.

Un système de coordonnées spatio-temporelles sera dénoté $\{ct, x^i\}$ ou plus généralement $\{x^\lambda\}$. Ce système de coordonnées spatio-temporelles peut être choisi librement en fonction du problème à traiter. Cependant, il est impératif de spécifier ce choix d'une manière non ambiguë lors de l'échange de données d'observation ou de résultats de calculs théoriques (BLANCHET, 1996).

Événement

En se plaçant dans un référentiel arbitraire, un événement est la donnée de 3 valeurs particulières des coordonnées spatiales x^i et d'une valeur de la coordonnée temporelle t . On dénotera l'événement P par :

$$P = (ct, x^i) \equiv (ct, \mathbf{x}) \equiv (ct, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z). \quad (1.2.1)$$

À partir d'un référentiel $\{x^\lambda\}$ associé aux coordonnées t, x^i , on peut définir un nouveau référentiel $\{x'^\lambda\}$ associé à de nouvelles coordonnées t', x'^i en posant :

$$\begin{aligned} ct' &= F^0(ct, x^j) \\ x'^i &= F^i(ct, x^j) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

où F^0, F^i sont quatre fonctions arbitraires de t, x^i telles que les fonctions inverses donnant t, x^i en fonction de t', x'^i existent. Dans les deux référentiels $\{x^\lambda\}$ et $\{x'^\lambda\}$ reliés entre

eux par les transformations de coordonnées (1.2.2), un même événement sera :

$$P = (ct, x^i) = (ct', x'^i). \quad (1.2.3)$$

Il faut penser les événements comme des points dans l'espace et le temps repérés dans les différents référentiels par des coordonnées telles que (1.2.3) mais dont la définition est intrinsèque, c'est-à-dire qui existent de façon indépendante du choix d'un référentiel en particulier.

Nous définissons une classe de référentiel particulier : les référentiels dit inertiels (ou galiléens). Ils sont définis comme des référentiels vérifiant la première loi de Newton qui affirme que tout corps libre se meut dans un mouvement rectiligne uniforme. Ces référentiels permettent d'énoncer le principe de relativité galiléenne (appelé aussi principe de covariance) :

Toutes les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels inertiels.

On définit ainsi le groupe de transformations permettant de passer d'un référentiel inertiel à un autre : le groupe de Galilée.

La théorie de l'électromagnétisme, unifiée par Maxwell au milieu du XIXe siècle, soulève cependant un problème important concernant le principe de relativité de Galilée : les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par transformation d'un référentiel inertiel à un autre au sens du groupe d'invariance de Galilée.

1.2.2 Relativité restreinte

En 1905, inspiré par les travaux de Poincaré et Lorentz, Einstein propose une nouvelle théorie de la relativité : la relativité restreinte. Basée sur un groupe de transformations linéaires laissant invariantes les équations de Maxwell, et donc la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide, elle permet de généraliser les transformations entre référentiels inertiels.

Notons que pour les développements mathématiques suivants, nous utiliserons la convention de sommation des indices muets : lorsqu'un même symbole est utilisé à la fois en indice et en exposant dans une même équation, il est admis que cela corresponde à une sommation sur toutes les valeurs possibles de ce symbole, soit :

$$g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (1.2.4)$$

La relativité restreinte postule que les lois de transformation d'un référentiel inertiel arbitraire $\{x^\alpha\}$ vers un autre référentiel inertiel $\{x'^\alpha\}$ s'écrivent :

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (1.2.5)$$

où Λ^α_β est une matrice 4×4 satisfaisant aux contraintes :

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta = \eta_{\gamma\delta} \quad (1.2.6)$$

où $\eta_{\alpha\beta}$ désigne la matrice de Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.7)$$

La matrice est dite matrice pseudo-euclidienne de signature $(-+++)$. Les lois de transformation (1.2.5) avec (1.2.6) forment un groupe appelé groupe de Poincaré-Lorentz et les matrices Λ_{β}^{α} s'appellent matrices de Lorentz.

Intervalle invariant

Soit la distance entre deux événements P_1 et P_2 , repérés dans un référentiel inertiel $\{x^{\lambda}\}$ par leurs coordonnées $P_1 = (x_1^{\alpha}) = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$ et $P_2 = (x_2^{\alpha}) = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ tel que :

$$s^2 = \eta_{\alpha\beta} (x_2^{\alpha} - x_1^{\alpha})(x_2^{\beta} - x_1^{\beta}) \quad (1.2.8)$$

$$= -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \quad (1.2.9)$$

Si les coordonnées de P_2 diffèrent de celles de P_1 par des quantités infinitésimales, $x_2^{\alpha} = x_1^{\alpha} + dx^{\alpha}$, on écrira l'intervalle infinitésimal :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (1.2.10)$$

Cet intervalle est bien défini comme le carré de la pseudo-distance dans le système de coordonnées spatio-temporelles entre les événements P_1 et P_2 . C'est une forme quadratique des différences de coordonnées, comme en géométrie euclidienne. La seule différence est que cette forme quadratique n'est pas définie positive, mais a la signature $(-+++)$. La propriété fondamentale du groupe de Poincaré-Lorentz (1.2.5)-(1.2.7) est de laisser l'intervalle (1.2.10) entre deux événements invariant par changement de référentiel inertiel. Autrement dit, la quantité (1.2.10) est une quantité absolue, c'est-à-dire indépendante de tout choix de coordonnées.

De cette invariance, on déduit la constance de la vitesse de la lumière dans le vide. En effet, si un rayon lumineux se propage à la vitesse c de P_1 à P_2 dans un référentiel inertiel $\{x^{\lambda}\}$, on a $s^2 = 0$, or si cette quantité est invariante, alors dans un second référentiel $\{x'^{\lambda}\}$ on aura aussi pour ce même rayon, $s'^2 = 0$. Le rayon lumineux se propage donc à la vitesse c dans le référentiel $\{x'^{\lambda}\}$.

Temps propre

À présent, intéressons-nous à un référentiel inertiel particulier : le référentiel comobile à l'observateur.

Soit une horloge idéale¹ H se déplaçant dans un référentiel inertiel arbitraire $\{x'^{\lambda}\}$ avec une vitesse coordonnée v' , d'un point événement P_1 à un point événement P_2 infiniment proche de P_1 . On attache à cette horloge un référentiel comobile $\{X^{\lambda}\}$ (autrement

1. Une horloge idéale est une horloge, sans biais, délivrant la mesure d'un temps propre. Pour une horloge non-idéale, on ne parle plus de temps propre mais de temps local.

dit, l'horloge est fixe dans le référentiel $\{X^\lambda\}$. La pseudo-distance au carré donnée par (1.2.10) entre les points P_1 et P_2 dans le référentiel $\{X^\lambda\}$ vaut :

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (1.2.11)$$

Or dans le référentiel comobile, la position de l'horloge ne varie pas, on a donc : $dX = dY = dZ = 0$. D'où la relation :

$$ds^2 = -c^2 dT^2. \quad (1.2.12)$$

De la relation (1.2.12), on introduit pour $ds < 0$, le temps propre d'une horloge $d\tau$ de la façon suivante :

$$d\tau = \sqrt{-\frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \quad (1.2.13)$$

$$= -\frac{ds}{c}. \quad (1.2.14)$$

où $ds < 0$. On voit que l'on peut définir naturellement le temps propre d'un observateur, se déplaçant à une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière, comme le temps qui s'écoule dans le référentiel inertiel dans lequel l'observateur est au repos à l'instant considéré. Le temps propre est une quantité absolue puisqu'il ne dépend que de la vitesse de la lumière et de la racine carrée de l'intervalle invariant ds^2 qui est lui aussi une quantité absolue. Il est entièrement indépendant du référentiel choisi. L'intervalle invariant exprimé dans le référentiel $\{x'^\lambda\}$ s'écrivant comme (1.2.10), on a alors :

$$-c^2 d\tau^2 = ds^2 \quad (1.2.15)$$

$$= ds'^2 \quad (1.2.16)$$

$$= -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \quad (1.2.17)$$

Soit, en faisant intervenir la vitesse coordonnée de l'horloge dans le référentiel $\{x'^\lambda\}$ par la relation $v' = \frac{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}}{dt'}$, on trouve :

$$d\tau = dt' \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \quad (1.2.18)$$

La première observation que l'on puisse faire de l'équation (1.2.18) est qu'en relativité restreinte, le temps perd son caractère absolu. Pour accéder au temps propre d'un observateur distant, il faut effectuer une transformation qui dépend du système de coordonnées utilisé. La seconde observation est qu'il est fondamental de distinguer les quantités localement mesurables (que nous appellerons quantités propres) des quantités coordonnées qui dépendent d'un choix de coordonnées, autrement dit de convention.

Notons que jusqu'à présent nous étudions des systèmes dans lesquels la gravitation est absente. En effet, la loi d'attraction gravitationnelle universelle de Newton n'entre pas dans le cadre de la relativité restreinte puisqu'elle n'est pas invariante par les transformations de Poincaré-Lorentz

À la lumière des développements précédents, le principe de relativité restreinte peut s'exprimer de la façon suivante :

Toutes les lois de la physique, hormis celles régissant la gravitation, sont identiques dans tous les référentiels inertiels.

On comprend dès lors l'usage de l'épithète "restreint" : la gravitation n'est pas introduite et la covariance de ces lois physiques exclut les référentiels non inertiels. Cependant, c'est encore une fois des constructions sous-jacentes de la mécanique classique que va s'élever une théorie générale de la relativité.

1.2.3 Principe d'équivalence

Principe d'équivalence faible

La seconde loi de Newton postule :

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a} \quad (1.2.19)$$

où m_i est un coefficient qui caractérise la capacité de l'objet considéré à se mettre en mouvement suite à une sollicitation externe (une force quelconque \mathbf{F}). Il dépend uniquement des caractéristiques de l'objet (ANGONIN, 2014). On l'appelle masse inertielle. Soit m_g le coefficient qui apparaît dans la loi de la gravitation :

$$\mathbf{F}_g = m_g \mathbf{g} \quad (1.2.20)$$

où m_g est appelé la masse grave. Il quantifie le couplage entre l'objet considéré et le champs gravitationnel. Il dépend uniquement des caractéristiques de l'objet. Un corps caractérisé par m_i et m_g placé dans un champ de gravitation \mathbf{g} acquiert d'après (1.2.19) et (1.2.20) l'accélération

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i} \mathbf{g} \quad (1.2.21)$$

En théorie newtonienne, il n'y a aucune raison pour que le rapport $\frac{m_g}{m_i}$ ne varie pas d'un corps à l'autre. Or, expérimentalement, il n'en est rien : tous les corps, placés dans un même champ de gravitation, acquièrent la même accélération, indépendamment non seulement de la masse des corps mais aussi de leur nature, c'est-à-dire de leur composition interne. Ce fait expérimental, montre que l'on peut toujours choisir, pour tous les corps, et dans un bon système d'unités,

$$m_i = m_g \quad (1.2.22)$$

Par conséquent, Newton érigea le principe d'équivalence faible (PEf) :

Indépendamment de leur masse ou de leur structure interne, tous les corps chutent dans un champ gravitationnel avec la même accélération (Universality of Free Fall, UFF).

Principe d'équivalence d'Einstein

Einstein, en 1907, nota que si $m_i = m_g$ pour tous les corps, alors on peut "effacer" les effets d'un champ de gravitation \mathbf{g} statique et uniforme en se plaçant dans un référentiel uniformément accéléré. Or, tout champ de gravitation peut-être considéré comme statique et uniforme dans une région assez petite² de l'espace et pendant un laps de temps assez court. Par conséquent, en tout événement plongé dans un champ de gravitation arbitraire, on peut choisir un référentiel dit localement inertiel tel que, dans un voisinage de l'événement en question, le mouvement libre de tous les corps soit rectiligne et uniforme. La définition du référentiel localement inertiel est en cela une reformulation du principe d'équivalence faible.

En poursuivant la réflexion, Einstein constata que les objets réels n'étant pas des point-événements, leur masse-énergie inclut de nombreuses contributions : énergie de masse et énergie cinétique des constituants, énergie de liaison électromagnétique, énergie de liaison nucléaire, etc... Les diverses énergies constituant les corps (mise à part l'énergie gravitationnelle) étant décrites par la relativité restreinte, il fût amené à poser le principe d'équivalence d'Einstein (PEE) :

Dans le référentiel localement inertiel du PEE, la relativité restreinte permet de décrire les lois de la physique comme si la gravitation était absente.

Cela signifie que localement, les effets d'un champ gravitationnel sur une expérience peu étendue n'utilisant pas la gravitation sont identiques aux effets d'une accélération du référentiel attaché à l'expérience. Aucune expérience non-gravitationnelle locale ne peut faire la différence entre un référentiel soumis à la gravitation ou non.

Donnons enfin une formulation moderne du principe d'équivalence d'Einstein permettant de distinguer les expériences nécessaires pour tester ce principe (WILL, 1993) :

Universalité de la chute libre -UFF : Le principe d'équivalence faible est vérifié (principe d'universalité de la chute libre pour des masses tests.) ;

Invariance locale de Lorentz - LLI : Le résultat d'une expérience non-gravitationnelle est indépendant de la vitesse et de l'orientation du système de référence inertiel dans laquelle elle est réalisée ;

Invariance locale de position- LPI : Le résultat d'une expérience non-gravitationnelle est indépendant de la position et du moment où elle est réalisée.

La conséquence fondamentale du PEE est que les lois de la relativité restreinte ne diffèrent pas selon qu'il s'agisse d'un référentiel accéléré ou soumis à un champ de gravitation. On a ici une nouvelle classe de référentiels équivalents. Inspiré par les réflexions de Mach sur les fondements de la mécanique classique, Einstein suggère un principe de relativité générale (ou covariance généralisée) :

Tous les référentiels, quel que soit leur état de mouvement, doivent être équivalents pour l'expression des lois de la nature.

2. suffisamment petite pour que les effets de non-uniformité et de non-staticité soient négligeables par rapport aux incertitudes de mesure

Théorie métrique

On montre, par l'intermédiaire de référentiels non inertiels en rotation, que pour des référentiels où règne un champ d'accélération, l'intervalle (1.2.10) prendra une forme plus complexe que lorsque l'on considère seulement des référentiels inertiels. On peut alors donner, dans un référentiel non inertiel $\{x^\lambda\}$, une forme générale de l'intervalle (1.2.10), qui reste une forme quadratique des différentielles des coordonnées :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.2.23)$$

Lorsque l'on utilise des référentiels accélérés, les coordonnées (x^α) sont des coordonnées curvilignes (HLADIK, 2006). Les coefficients $g_{\alpha\beta}$ de l'équation (1.2.23) sont des fonctions des coordonnées $\{x^\lambda\}$ et déterminent toutes les propriétés de la géométrie dans chaque système de coordonnées. Ils caractérisent une distance invariante à travers la métrique du système de référence considéré. Étant définies en chacun des points de l'espace topologique considéré, ces composantes forment le champ de composantes du tenseur métrique. De plus, selon l'équation (1.2.23), les quantités $g_{\alpha\beta}$ sont symétriques selon les indices, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. On a donc 10 composantes indépendantes. La géométrie la plus générale décrivant un tel système n'est pas plate.

1.2.4 Relativité générale

Le postulat d'une géométrie non euclidienne décrivant notre univers n'est pas une idée introduite par Einstein : Riemann et Poincaré avaient, quelques années avant la relativité générale, déjà considéré des univers où la matière induirait des géométries non-euclidiennes (POINCARÉ, 1902).

À la lumière de leur travaux, Einstein va supposer que notre univers est un espace Riemannien.

Espace Riemannien

Afin de décrire les espaces de Riemann, introduisons tout d'abord un espace topologique particulier : la variété pseudo riemannienne de dimension quatre. Nous ne cherchons pas à détailler explicitement cet espace, juste à en donner les propriétés fondamentales. Tout d'abord, une variété de dimension quatre, \mathcal{V}_4 , est un espace topologique séparé dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^4 (TEYSSANDIER, 2008). La première propriété est qu'à chaque point \mathcal{P} de la variété \mathcal{V}_4 on associe un voisinage \mathcal{U} de \mathcal{P} que l'on peut "cartographier" sur l'espace \mathbb{R}^4 . Nous entendons par là, qu'il existe une bijection continue φ qui permet d'attribuer à tout point \mathcal{P} de \mathcal{U} un quadruplet et un seul de nombres réels $\varphi(\mathcal{P}) = (x^\alpha)$ et réciproquement. Le couple (\mathcal{U}, φ) s'appelle une carte locale ou encore un système de coordonnées locales. Voyons maintenant la seconde propriété fondamentale. Supposons que le point \mathcal{M} appartienne également au domaine \mathcal{U}' d'une autre carte locale (\mathcal{U}', φ') où il est repéré par les coordonnées locales $\varphi'(\mathcal{P}) = (x^\beta)$. Puisqu'il y a correspondance biunivoque entre un point et ses coordonnées locales dans une cartographie donnée, on a les transforma-

tions entre systèmes de coordonnées par (1.2.2) soit :

$$x^{\beta'} = F^{\beta'}(x^\alpha) \quad (1.2.24)$$

$$x^\alpha = F^\alpha(x^{\beta'}) \quad (1.2.25)$$

Les fonctions F^α et $F^{\beta'}$ définissent ce qu'on appelle des formules de transformation des coordonnées locales. La variété \mathcal{V}_4 est dite différentielle lorsque ces fonctions admettent des dérivées partielles continues de n'importe quel ordre quelles que soient les cartes locales dont les domaines \mathcal{U} et \mathcal{U}' ont une intersection non vide.

Un espace de Riemann est une variété différentielle à laquelle est attaché en chaque point un tenseur métrique. Plus précisément, en chaque point de \mathcal{V}_4 , on munit l'espace vectoriel tangent de la variété d'une forme bilinéaire \mathbf{g} qui est symétrique, non dégénérée et de signature $(-, +, +, +)$.

Nous avons déjà introduit la notion de métrique au sens de la distance au carré généralisée dans un référentiel accéléré. Dans un système de coordonnées $\{x^\lambda\}$, le tenseur métrique est défini par la forme quadratique de l'équation (1.2.23) où les coefficients $g_{\alpha\beta}$ vérifient les conditions suivantes (HLADIK, 2006) :

- les composantes $g_{\alpha\beta}$ sont symétriques $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$;
- le déterminant de la matrice est différent de zéro ;
- la forme quadratique ds^2 est invariante par tout changement de coordonnées ;
- les dérivées partielles d'ordre deux des $g_{\alpha\beta}$ existent et sont continues.

En outre, tout espace de Riemann est caractérisé par sa courbure. La courbure est une déformation intrinsèque de l'espace riemannien qui n'a pas besoin de dimensions extérieures pour exister. On définit la courbure par le tenseur de Riemann qui ne dépend que des dérivées des composantes du tenseur métrique. Il permet d'exprimer le transport parallèle d'un vecteur sur un espace courbe.

Espace-temps de la relativité générale

Comme nous l'avons évoqué précédemment, Einstein postule que notre univers est un espace de Riemann de dimension quatre. L'Espace-temps de la relativité générale est défini comme le couple d'une variété différentielle de dimension quatre notée \mathcal{V}_4 et de sa métrique \mathbf{g} associée. A titre de comparaison, l'espace minkowskien qui pose le cadre de la relativité restreinte est le couple $(\mathbb{R}^4, \eta_{\alpha\beta})$.

On sait que la manifestation de la courbure de l'espace non-euclidien est engendrée par la métrique d'un référentiel accéléré. Or, en vertu du principe d'équivalence, tout champ d'accélération est équivalent à un champ de gravitation. La courbure peut donc être vue comme une manifestation de la gravitation. Elle produit une déformation intrinsèque de l'espace. Ce postulat nous amène donc à deux constatations :

- La répartition de matière influe sur la géométrie de l'Espace-temps ;

- Les corps soumis uniquement à la gravitation suivent des géodésiques³. Ils se meuvent comme les particules libres dans un espace non-euclidien. Tout mouvement inertiel dans l'Espace-temps de la relativité générale se ramène à déterminer les géodésiques correspondant à un système donné. La gravitation est déjà prise en compte dans la structure de la géométrie.

Les équations reliant la géométrie de l'Espace-temps à la matière-énergie se nomment les équations d'Einstein.

Equations d'Einstein

Les équations d'Einstein s'expriment comme (GOURGOULHON, 2012) :

$$S_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.2.26)$$

où G est la constante de gravitation universelle de Newton et c la célérité de la lumière. Le membre de gauche de l'équation (1.2.26), $S_{\mu\nu}$, est le tenseur d'Einstein qui s'exprime en fonction du tenseur de courbure et donc en fonction des dérivées partielles des coefficients de la métrique $g_{\mu\nu}$. Le tenseur du membre de droite de l'équation (1.2.26), $T_{\mu\nu}$, correspond au tenseur énergie-impulsion. Les coefficients $g_{\mu\nu}$ sont solutions des équations d'Einstein (1.2.26).

Les équations répondent aux contraintes suivantes (HLADIK, 2006) :

- Une géométrie euclidienne à l'infini : lorsque que l'on s'éloigne de toute masse active, l'attraction du champ gravitationnel devient nulle ; la courbure doit donc être nulle si les coordonnées tendent vers l'infini ;
- Les équations satisfont à la conservation de l'énergie-impulsion ;
- Les équations recherchées sont covariantes pour satisfaire au principe de relativité généralisée.

La résolution de ces équations nous permet de déterminer les potentiels gravitationnels $g_{\alpha\beta}$ à condition de fixer certaines hypothèses : simplification du modèle physique et choix de jauge.

Temps propre en relativité générale

Considérons dans un système de coordonnées $\{x^\lambda\}$ deux événements infiniment voisins. Afin d'être cohérent avec l'expression (1.2.14), on injecte dans l'équation de l'intervalle invariant (1.2.23) le laps de temps propre, $d\tau$, entre ces deux événements, ce qui donne (GOURGOULHON, 2012) :

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.2.27)$$

Le laps de temps propre entre deux événements infiniment voisins est donc :

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \quad (1.2.28)$$

3. Chemin le plus court entre deux points de l'Espace-temps

Pour une horloge idéale, on a donc le temps propre mesuré le long de la trajectoire spatio-temporelle \mathcal{C} défini comme :

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{C}} \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \quad (1.2.29)$$

1.3 Systèmes de référence spatio-temporels

Afin de permettre l'étude des systèmes physiques, il est nécessaire, comme nous l'avons vu dans la section précédente, de cartographier l'espace étudié. Un système de référence spatio-temporel doit permettre de modéliser le mouvement des objets célestes ainsi que la propagation des ondes électromagnétiques sans introduire d'erreur de modèles supérieure à l'exactitude des appareils de mesure. On est donc forcément amené à adopter une théorie métrique relativiste de la gravitation et à utiliser des systèmes de coordonnées introduits dans la partie précédente. Mentionnons en outre que, selon le principe de covariance généralisé, les systèmes de coordonnées ne représentent pas des observables physiques et sont donc mathématiquement équivalents. Autrement dit, un système ne sera pas privilégié par rapport à un autre si ce n'est pour des considérations de "lecture physique" des coordonnées.

On suit plusieurs étapes successives afin de définir ces systèmes de référence et de les réaliser sous la forme de repères de référence. Les étapes pour la construction du système de référence sont (CAPITAINE, 2011) :

- *Conception et définition du système de référence* : le système de référence idéal est défini par l'énoncé d'un principe général qui donne une propriété générale que devra vérifier le système de référence ;
- *Choix d'une structure physique* : on choisit l'ensemble physique sur lequel on fait porter la définition idéale. On obtient ainsi le système de référence ;
- *Conventions et modélisation* : on associe un ensemble de paramètres qui permettent de modéliser mathématiquement les propriétés physiques intéressantes de l'ensemble physique choisi. On obtient alors le système de référence conventionnel.

Sur la base du système de référence, on construit le repère de référence de la façon suivante :

- *Matérialisation du système* : on applique les modèles choisis dans la construction du système de référence au système physique choisi et à un ensemble d'observations de ce système. On obtient ainsi les positions coordonnées d'un certain nombre de points en fonction du temps coordonné.
- *Extension du repère conventionnel* : les points du repère dont la position est ainsi déterminée sont le plus souvent insuffisants pour les applications pratiques, ou ne sont pas forcément accessibles par certains instruments de mesure. La position coordonnée en fonction du temps coordonné de nouveaux points par rapport au repère fondamental constitue une extension du repère de référence conventionnel par un ensemble de repères secondaires.

Dans la pratique, les systèmes de référence présentent une hiérarchie spécifique à leur utilisation. Tout d’abord, il est nécessaire de fixer un système de coordonnées barycentriques (BCRS), centré sur le barycentre du système solaire, à partir duquel on construit un système de référence barycentrique (ICRS). Puis, pour les applications terrestres, on établit un système de coordonnées centré sur le géocentre de la Terre (GCRS), permettant de construire un système de référence terrestre avec des axes de rotation fixes par rapport à la surface terrestre (ITRS).

Dans un premier temps, nous allons détailler les différents systèmes de coordonnées basés entièrement sur une théorie relativiste de l’Espace-temps.

1.3.1 Systèmes de coordonnées relativistes

Dans les années 1980, S. Kopeikin dériva les équations post-newtoniennes du mouvement d’objets étendus dans un système à N-corps (KOPEIKIN, 1988). De plus, pour un corps donné et dans cette approximation post-newtonienne, il présenta les relations permettant de construire un système de coordonnées locales attaché à ce corps. Conjointement avec V. Brumberg, ces travaux donnèrent naissance au formalisme Brumberg - Kopeikin (BK) permettant de construire un ensemble de systèmes de référence en donnant les expressions des potentiels de gravitation des tenseurs métriques ainsi que les transformations pour passer du système de référence global barycentrique du Système Solaire aux systèmes de référence locales (géocentrique, planétocentrique, etc) (BRUMBERG et KOPEJKIN, 1989).

Parallèlement au formalisme BK, T. Damour, M. Soffel et C. Xu développèrent aussi une technique permettant les transformations entre systèmes de coordonnées dans le cadre d’une théorie post-newtonienne de la gravitation. Il résulta de ce travail le formalisme Damour-Soffel-Xu (DSX) qui décrit les transformations entre un système de coordonnées globales dans le problème à N-corps, avec N système de coordonnées locales respectivement comobiles aux N corps (DAMOUR et collab., 1991).

À la lumière de ces différents travaux, l’Union Astronomique Internationale (IAU) a recommandé en 1991 (IAU, 1991) d’utiliser ces formalismes pour construire les différents systèmes de référence relativistes.

BCRS

Pour les applications situées au sein du Système Solaire, l’IAU recommande d’utiliser le Système de Référence Céleste Barycentrique (BCRS). La métrique du BCRS se place dans le formalisme Post-Newtonien. C’est une solution approchée des équations d’Einstein (1.2.26) valable dans le régime des champs et vitesses faibles, c’est-à-dire $\frac{U}{c^2} \approx \frac{v^2}{c^2} \ll 1$ ($< 10^{-5}$ dans le Système Solaire), pour un ensemble de N corps non-sphériques et en rotation. Les coefficients du tenseur métrique recommandé par l’IAU en 2000 sont

de la forme (SOFFEL et collab., 2003) :

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2w(t, \mathbf{x})}{c^2} - \frac{2w^2(t, \mathbf{x})}{c^4} + O(c^{-5}), \\ g_{0i} &= -\frac{4}{c^3} w^i + O(c^{-5}), \\ g_{ij} &= \delta_{ij} \left(1 + \frac{2w(t, \mathbf{x})}{c^2} \right) + O(c^{-4}), \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

où $w(t, \mathbf{x})$ et $w^i(t, \mathbf{x})$ sont des potentiels scalaire et vecteur. Ces termes peuvent être exprimés comme la somme des potentiels générés par chaque corps du système considéré. Le centre du système est fixé au barycentre des N masses. Ses axes sont dynamiquement non-tournants par rapport aux objets extra-galactiques.

Le temps coordonnée correspondant est appelé le Temps Barycentrique Coordonnée (TCB). Il peut être vu comme le temps généré par une horloge idéale, isolée, comobile et au repos avec le barycentre du système solaire.

GCRS

Le Système de Référence Céleste Géocentrique (GCRS) a pour origine spatiale le géocentre (centre de masse de la Terre) et a ses axes spatiaux cinématiquement non tournants par rapport au BCRS. En cela on le qualifie de quasi-inertiel. La métrique du GCRS correspond à une transformation temporelle et spatiale des coordonnées du BCRS données dans SOFFEL et collab. (2003). Les composantes de la métrique GCRS s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} G_{00} &= -1 + \frac{2W(\mathbf{T}, \mathbf{X})}{c^2} - \frac{2W^2(\mathbf{T}, \mathbf{X})}{c^4} + O(c^{-5}), \\ G_{0a} &= -\frac{4}{c^3} W^a + O(c^{-5}), \\ G_{ab} &= \delta_{ab} \left(1 + \frac{2W(\mathbf{T}, \mathbf{X})}{c^2} \right) + O(c^{-4}), \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

où $W(t, \mathbf{x})$ et $W^a(t, \mathbf{x})$ sont des potentiels scalaire et vecteur. Ils peuvent être exprimés comme la somme du potentiel provenant de la Terre, et d'un potentiel extérieur issu de forces de marées et de forces inertielles.

Le temps coordonnée correspondant est appelé le Temps Géocentrique Coordonnée (TCG). Il peut être vu comme le temps généré par une horloge idéale, isolée, comobile et au repos avec le géocentre.

Un autre temps coordonnée pour le système géocentrique peut être défini : le Temps Terrestre (TT). Il diffère du TCG par une fréquence constante telle que :

$$\frac{dT_T}{dT_{CG}} = 1 - L_G \quad (1.3.3)$$

Cette fréquence fut choisie (IAU, 1991) telle que l'unité de l'échelle du TT soit cohérente avec la définition de la seconde sur le géoïde tournant, c'est-à-dire $L_G = \frac{U_G}{c^2}$ où U_G est le potentiel de pesanteur⁴ au niveau du géoïde⁵. Cependant, pour des raisons d'exactitude sur la réalisation du géoïde, il a été décidé par les résolutions de 2000 de fixer la constante à $6,96990134 \times 10^{-10}$ (SOFFEL et collab., 2003). Les origines temporelles de TCB, TCG et TT sont définies par le TAI, tel que TCB (resp. TCG et TT) = TAI + 32.184s, le 1er janvier 1977 à 0h TAI, au géocentre.

1.3.2 Réalisation des systèmes de référence spatiales

Avec ces systèmes de coordonnées établis, on procède à la construction du système de référence spatial.

Dans le cadre du positionnement classique par satellite, on considère généralement qu'il est nécessaire de séparer deux types d'objets : les satellites qui appartiennent au domaine céleste, et les utilisateurs qui évoluent, dans la majorité des cas, à la surface de la Terre. Pour cette raison, on peut définir deux types de systèmes de référence d'espace (CAPITAINE, 2011) : l'un céleste appelé CRS (pour Système de référence Céleste) décrivant la dynamique des satellites, et l'autre dit TRS (pour Système de Référence Terrestre) qui permet de positionner les utilisateurs au sol.

Le CRS idéal ne doit pas présenter de rotation. Cela peut être axiomatisé de deux façons différentes :

- soit le système ne présente pas de rotation par rapport à un ensemble d'objets ne pouvant pas avoir de mouvement propre : c'est la définition d'un système de référence cinématique.
- soit le système est tel que les équations décrivant le mouvement des astres n'ont pas de termes d'accélération d'entraînement : c'est ce que l'on appelle un système de référence dynamique.

Selon ALTAMIMI et collab. (2002), le TRS idéal est tel que la croûte terrestre ne doit en moyenne présenter aucune translation, rotation, ou expansion. Un système de référence terrestre conventionnel est basé sur la position et le mouvement d'un ensemble de points répartis sur la surface du globe.

Pour se positionner sur la surface de la Terre, on modélise de manière approximative le géoïde par un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles. Celui-ci est construit de manière à minimiser la différence entre le géoïde et la surface de l'ellipsoïde. On associe alors au système de référence terrestre, l'ellipsoïde défini par ses coordonnées géographiques⁶.

4. termes d'origines gravitationnels et rotationnels

5. surface d'équipotentielle du potentiel gravitationnel coïncidant au mieux avec la surface moyenne des mers.

6. Système de coordonnées sphériques composé de la latitude, la longitude et l'altitude (HOFMANN-WELENHOF et collab., 1997).

Dans le cadre des applications scientifiques, on utilise couramment deux systèmes de référence recommandés par l'IAU (CAPITAINE, 2011) : L'ICRS (Système de Référence Céleste International) et l'ITRS (Système de Référence Terrestre International). Le premier est composé d'un ensemble de paramètres conventionnels permettant par exemple de définir l'orientation de ses axes. La réalisation en repère de référence de l'ICRS est l'ICRF (Repère de Référence Céleste International). Il a été obtenu en déterminant de manière précise les coordonnées d'un ensemble de 3414 sources extra-galactiques par la technique VLBI (MA et collab., 1998).

Le second, ITRS, est un système de référence établi à partir du système de coordonnées GCRS. Sa réalisation, l'ITRF (Repère de Référence Terrestre), est élaborée en combinant différentes techniques d'observation permettant la localisation précise de stations sur la surface du globe. Ces techniques sont (CAPITAINE, 2011) : VLBI (interférométrie à grande ligne de base sur des sources extragalactiques), SLR (mesures laser sur des satellites artificiels de la Terre), LLR (Mesures laser sur coin de cube lunaire), DORIS, GNSS (deux systèmes de positionnement par satellite utilisant des ondes radio).

1.3.3 Réalisation des systèmes de référence temporel

Lorsque l'on envisage la mesure du temps, il faut distinguer deux notions complémentaires :

- le repérage de la date d'un événement, qui nécessite la définition d'une échelle de temps ;
- la mesure de durées, nécessitant la définition d'une unité de temps.

Ces deux notions sont intrinsèquement reliées par le fait que l'unité de temps correspond à l'intervalle séparant deux événements particuliers dans l'échelle de temps ou bien l'échelle de temps s'obtient par cumul des unités de temps.

Selon CAPITAINE (2011), une échelle de temps idéale possède les propriétés suivantes :

- Elle doit être universelle ;
- Elle ne doit pas subir d'interruption ;
- Elle doit être uniforme ;
- Elle doit être aisément accessible.

TAI

Le Temps Atomique International est une échelle de temps créée en 1970 par le Comité des Poids et Mesures. On le définit comme :

une échelle de temps coordonnée définie dans un repère de référence géocentrique, avec la seconde du Système International réalisée sur le géoïde tournant comme unité de temps.

Le TAI est construit tous les mois par le Bureau International des Poids et Mesure (BIPM) (ARIAS et collab., 2011). Les étapes pour sa réalisation sont les suivantes (cf. figure 1.1a) :

1. Environ 70 laboratoires (cf. figure 1.1b) fournissent les mesures continues de plus de 450 horloges atomiques.
2. Une moyenne pondérée avec limitation des poids est calculée par un algorithme, qui fournit en sortie l'échelle de temps libre EAL ayant une stabilité en fréquence de 4×10^{-16} pour un temps d'intégration de 30 à 40 jours.
3. On compare ensuite cette échelle de temps avec 12 étalons primaires de fréquence qui permettent de corriger EAL pour que l'unité du TAI soit en accord avec la seconde du SI. Cette échelle de temps possède une exactitude en fréquence de l'ordre de quelques 10^{-16} .

D'un point de vue relativiste, TAI est établi à partir des lectures des temps propres d'un ensemble d'horloges. C'est une réalisation *a posteriori* du temps coordonnée TT (et donc de TCG à travers la formule (1.3.3)) en appliquant une transformation temps propre - temps coordonnée.

UTC

Le temps Universel Coordonné UTC est une échelle de temps atomique déduite du TAI qui réalise une échelle de temps concordante avec la rotation de la Terre, diffusée tous les mois par la Circulaire T. Pratiquement, elle correspond à :

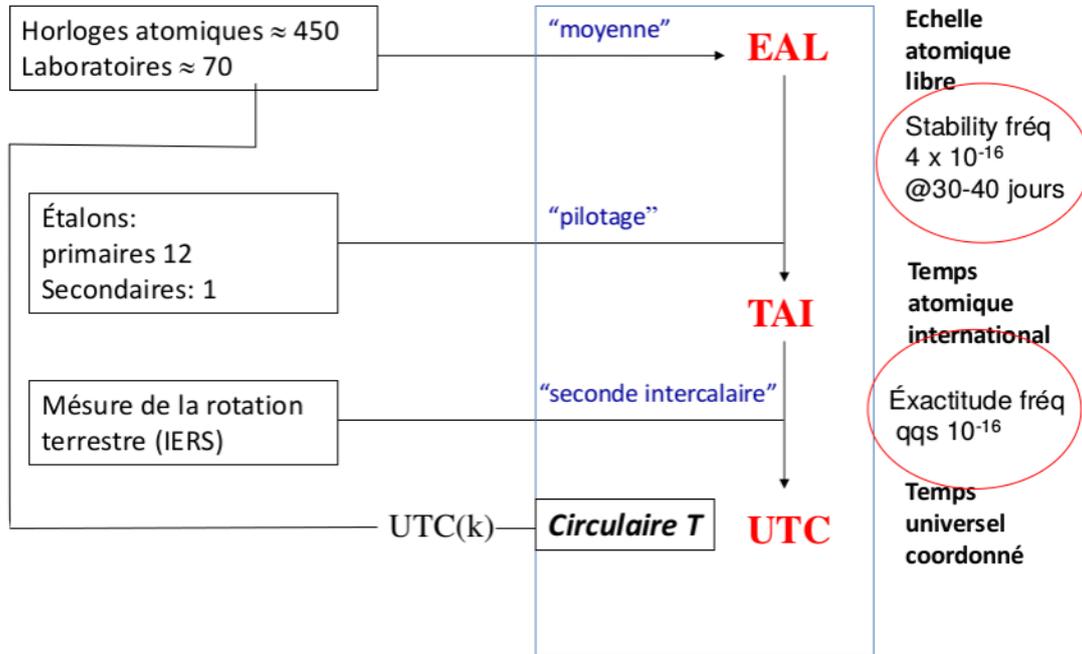
$$\text{TAI} = \text{UTC} + n \quad (1.3.4)$$

où n est le nombre entier de secondes intercalaires, qui est fixé à 36 depuis le 30 juin 2015 (cf. figure 1.2). L'ajout d'une seconde intercalaire consiste à garder une différence entre UTC et le temps défini par la rotation de la Terre, UT1, inférieure à 0,9s et est déterminée par l'International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS).

Des réalisations locales et en temps réel de UTC, les UTC(k), existent dans les laboratoires fournissant leurs données pour réaliser le TAI. Puisque la dissémination de UTC est mensuelle, une solution rapide de UTC, UTCr, est publiée toutes les semaines. Son rôle est notamment d'aider les laboratoires à corriger leurs réalisations locales de UTC.

Dans l'étape 1. de la réalisation du TAI expliquée ci-dessus, les données de base sont les différences une à une des horloges, ie. les différences en temps entre la lecture des horloges prises à minuit tous les cinq jours. Or, ces horloges sont distribuées sur la Terre, il faut donc des moyens pour les comparer, lesquels seront abordés dans les prochaines sections.

Elaboration of TAI and UTC - ALGOS



(a) Processus de réalisation du TAI (ARIAS, 2015).



(b) Stations participant à la construction de l'UTC.

FIGURE 1.1 – Construction de l'UTC et du TAI <http://bipm.org>.

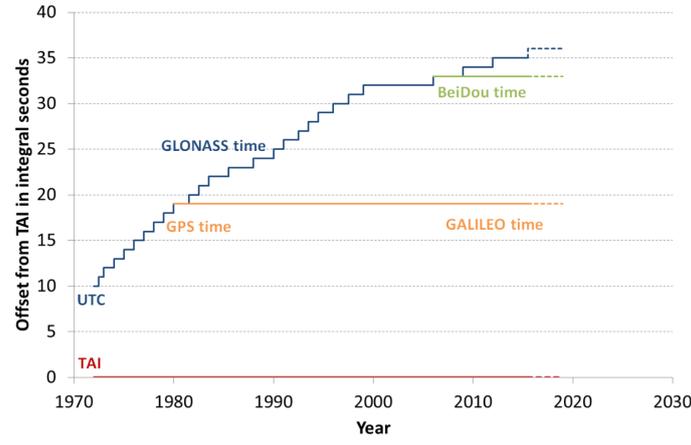


FIGURE 1.2 – Différence de secondes entre TAI et UTC (ARIAS, 2015).

1.4 Transfert de temps 1-voie par satellite

Comparer deux horloges revient à déterminer leur écart en temps et/ou leur écart en fréquence. Pour le premier cas, on parle de “transfert de temps”, alors que pour le deuxième, on parle de “transfert de fréquence”. Le transfert de temps consiste à synchroniser deux horloges ou à déterminer leur écart respectif. Si l’on considère une horloge comme fournissant un signal périodique qui représente l’écoulement du temps, par exemple un signal de fréquence 1 Hz, on mesure l’écart de phase entre les deux signaux d’horloges. De la même manière, pour le transfert de fréquence, on cherche à déterminer la différence en fréquence entre les deux signaux. On appelle cette opération la “syntonisation” des horloges.

Quand les deux horloges sont placées l’une à côté de l’autre, la comparaison ne pose pas de problème conceptuel particulier car il s’agit de comparer deux mesures de la même quantité locale : le temps propre. En revanche, lorsque les deux horloges sont distantes, on ne peut plus comparer leur temps physique. Ainsi avant d’évoquer les différentes notions du transfert de temps, il est nécessaire de s’interroger sur la notion de simultanéité de deux événements dans un cadre relativiste.

1.4.1 Simultanéité

Comme nous l’avons vu, en relativité il n’existe pas de définition *a priori* pour la simultanéité de deux événements et donc la synchronisation d’horloges distantes est arbitraire. La simultanéité est un choix conventionnel, au même titre que le choix d’un système de coordonnées spatio-temporelles. Ainsi, pour avoir un sens, toute assertion d’une simultanéité d’événements distants doit être accompagnée d’un énoncé de la convention de simultanéité choisie.

Simultanéité d'Einstein

La première convention de simultanéité fut proposée par Einstein dans son article fondateur de la relativité restreinte, et utilise l'échange de signaux électromagnétiques (EINSTEIN, 1905). Soit deux horloges A et B à coordonnées spatiales fixes ($dx^j = 0$ sur leur trajectoires) comme représenté sur la figure 1.3. L'horloge A émet un signal au temps coordonné $t_{e,B}^A$ ($\tau_{e,B}^A$ en temps propre de A) qui est reçu et réfléchi par B au temps coordonné $t_{e,A}^B$ ($\tau_{e,A}^B$ en temps propre de B). Le signal retour est reçu par A au temps coordonné $t_{r,B}^A$ ($\tau_{r,B}^A$ en temps propre de A). On pose, par convention, que l'événement τ_B^A à la position spatiale x_A , qui est simultanément à l'événement $\tau_{e,A}^B$ à la position x_B (l'événement "réflexion à B"), a lieu à $\tau_{e,B}^A$ plus la moitié du temps aller-retour mesuré par A :

$$\tau_B^A = \frac{1}{2}(\tau_{r,B}^A + \tau_{e,B}^A) \quad (1.4.1)$$

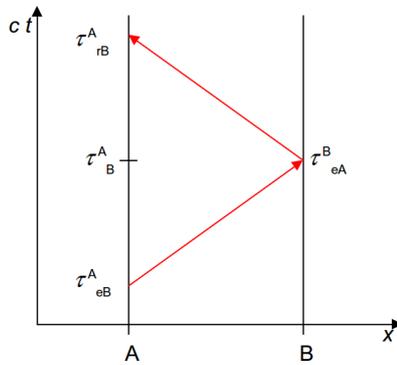


FIGURE 1.3 – Convention de simultanéité d'Einstein.

Remarquons ici que la convention d'Einstein n'est qu'une convention parmi toute une classe de conventions possibles basées sur le même principe opérationnel. Pour voir cela, il suffit de remplacer le facteur $1/2$ en (1.4.1) par un facteur κ . Chaque valeur de κ caractérise alors une autre convention de simultanéité, la valeur $\kappa = 1/2$ étant la simultanéité d'Einstein (cf. figure 1.3).

Dans le cas où l'on souhaite synchroniser plus de deux horloges entre elles, la convention de simultanéité d'Einstein devient problématique à cause de son caractère non transitif. Il convient dès lors de changer de stratégie.

Simultanéité par transport lent

Une autre méthode opérationnelle consiste à synchroniser deux horloges localement proches l'une de l'autre et à transporter l'une de ces deux horloges jusqu'à une troisième horloge où l'on pourra à nouveau effectuer une synchronisation. On appelle cette méthode la convention de simultanéité par transport lent d'horloge. L'exactitude est cependant limitée par l'instabilité de l'horloge transportable qui est aujourd'hui supérieur à 10^{-17} en fréquence (PETIT et WOLF, 2005). Cette technique de transfert de

temps a prospéré jusqu'au développement des Systèmes de Navigation par Satellite au début des années 80.

Simultanéité coordonnée

Pour les raisons mentionnées précédemment, les conventions de simultanéité d'Einstein et par transport lent d'horloge ne sont pas commodes en pratique. En effet, pour l'établissement d'un temps international, il ne serait pas très judicieux que les temps légaux de deux pays A et C étant chacun synchronisé avec celui d'un pays B, ne soient pas synchronisés entre eux.

Une convention de simultanéité qui contourne ces difficultés est la convention de simultanéité coordonnée exprimée par Klioner, en 1992 (KLIONER, 1992) :

Dans un système de coordonnées donné, deux événements (t_1, x_1) et (t_2, x_2) sont dits simultanés (par convention) si et seulement si $t_1 = t_2$.

La première conséquence directe de cette définition est la nécessité de définir au préalable un système de coordonnées spatio-temporelles (avec son tenseur métrique). La seconde conséquence est que cette convention n'est valable que dans ce système de coordonnées. En effet, deux événements simultanés dans un système de coordonnées ne le sont pas nécessairement dans un autre.

En outre, puisque le but premier des comparaisons d'horloges est de réaliser des échelles de temps coordonnées, ce choix de convention apparaît alors naturellement. La synchronisation des horloges GNSS et la réalisation du TAI utilisent cette convention.

1.4.2 Transformation temps propre - temps coordonnée

Après avoir fixé la convention de simultanéité coordonnée, il ne nous reste plus qu'une étape avant d'établir l'équation d'horloges : la transformation entre temps propre et temps coordonnée. Pour des applications de transfert de temps ne nécessitant pas une exactitude inférieure à 10^{-18} (WOLF et PETIT, 1995), on peut utiliser la métrique donnée par les résolutions de l'IAU de 1991 IAU (1991) :

$$\begin{aligned} G_{00} &= -1 + \frac{2U(\mathbf{T}, \mathbf{X})}{c^2} + O(c^{-4}), \\ G_{0i} &= 0(c^{-3}), \\ G_{ij} &= \delta_{ij} \left(1 + \frac{2U(\mathbf{T}, \mathbf{X})}{c^2} \right) + O(c^{-4}), \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

où $U(\mathbf{T}, \mathbf{X})$ est le potentiel total newtonien, qui peut s'exprimer comme la somme du potentiel provenant de la Terre, noté $U_E(\mathbf{T}, \mathbf{X})$, et celui des autres objets du système solaire, noté U_{ext} .

En outre, pour des applications avec une incertitude supérieure à $5 \cdot 10^{-17}$, le potentiel $U(\mathbf{T}, \mathbf{X})$ peut être exprimé seulement par le potentiel newtonien de la Terre (WOLF

et PETIT, 1995). Dans le cadre du système de coordonnées relatif à notre étude, nous pouvons alors exprimer le temps propre en fonction des coordonnées GCRS en injectant la métrique (1.4.2) dans l'équation du temps propre (1.2.28). On trouve donc que pour une horloge A, aux coordonnées $\mathbf{x}_A(t)$ et ce à l'ordre $\frac{1}{c^2}$ en ne gardant que le potentiel newtonien de la Terre, l'expression :

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{\left(1 - 2 \frac{U_E(t, \mathbf{x}_A)}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + 2 \frac{U_E(t, \mathbf{x}_A)}{c^2}\right) \delta_{ij} dx^i dx^j} \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

En posant la vitesse coordonnée $\mathbf{v}_A(t) = \frac{d\mathbf{x}_A(t)}{dt}$, et en ne gardant que les termes en $\frac{1}{c^2}$, on obtient :

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right) = 1 - \frac{1}{c^2} \left[U_E(t, \mathbf{x}_A) + \frac{\mathbf{v}_A^2(t)}{2} \right] \quad (1.4.4)$$

Le premier coefficient du membre de droite correspond au décalage gravitationnel en fréquence, appelé effet Einstein. Il est directement lié au fait que la relativité générale est une théorie métrique (et donc au principe d'équivalence). Le second coefficient est l'effet Doppler relativiste du second ordre.

A présent, nous pouvons écrire l'intervalle de temps coordonnée $T_{01} = T_1 - T_0$ transformé en temps propre de A :

$$[T_{01}]^A = \int_{T_0}^{T_1} \left(1 - \frac{U_E(t, \mathbf{x}_A)}{c^2} - \frac{\mathbf{v}_A^2(t)}{2c^2} \right) dt \quad (1.4.5)$$

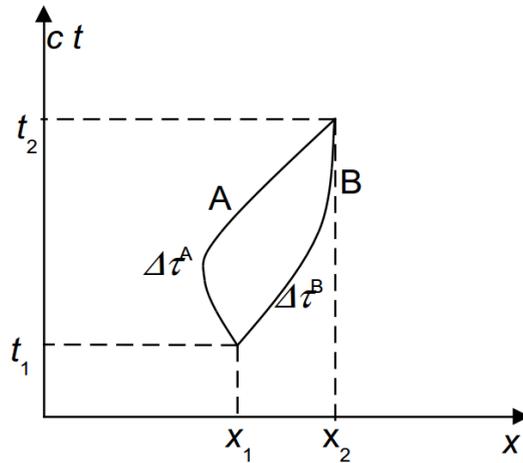


FIGURE 1.4 – Différence de durée propre écoulée.

De la même façon, nous définissons l'intervalle de temps propre de A, $\Delta\tau^A = \tau_1^A - \tau_0^A$, transformé en temps coordonnée T :

$$[\Delta\tau^A]^T = \int_{\tau_0^A}^{\tau_1^A} \left(1 + \frac{U_E(t, \mathbf{x}_A)}{c^2} + \frac{\mathbf{v}_A^2(t)}{2c^2} \right) d\tau^A \quad (1.4.6)$$

Nous remarquons qu'il est donc impératif de tenir compte du chemin spatio-temporel emprunté pour effectuer un transfert de temps entre deux objets distants (cf. figure 1.4). En effet, la différence entre le temps propre et le temps coordonné d'une horloge A pour une durée donnée, dépend du potentiel gravitationnel $U_E(t, \mathbf{x}_A)$ subit le long du trajet spatio-temporel par cette horloge, ainsi que de sa vitesse coordonnée de déplacement $v_A^2(t)$.

1.4.3 Equation de désynchronisation

Déterminer la désynchronisation entre deux horloges A et B revient à déterminer leur différence en temps propre au même temps coordonné, c'est-à-dire à calculer la quantité :

$$\tau^B(t_0) - \tau^A(t_0) \quad (1.4.7)$$

Dans le cas idéal, c'est-à-dire lorsque les effets perturbateurs et les sources de bruits

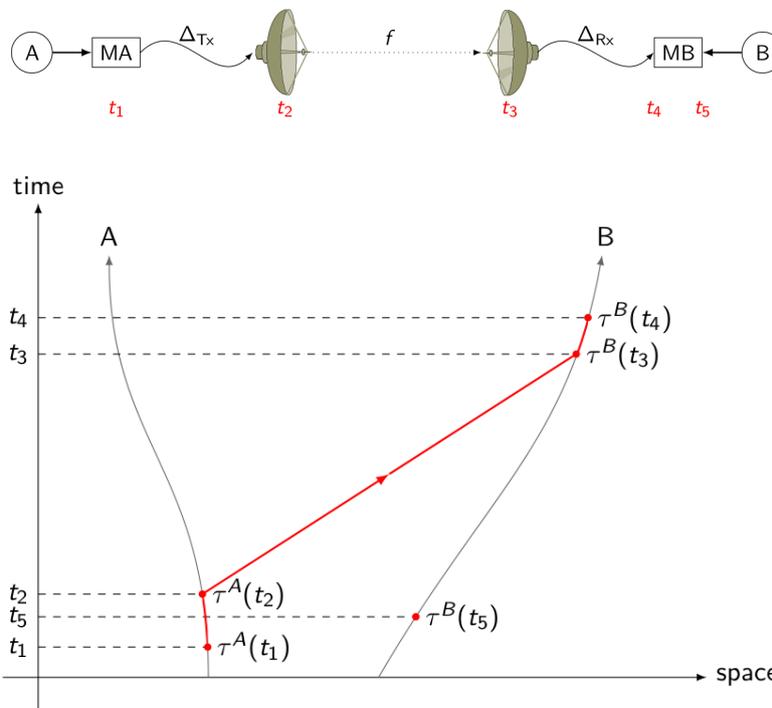


FIGURE 1.5 – Description du transfert de temps 1-voie.

ne sont pas pris en compte, la comparaison d'horloges distantes par satellite peut être décrite de la façon suivante (cf. figure 1.5) :

1. Au temps coordonné t_1 , le modem MA produit un signal référencé aux signaux de l'horloge A.
2. Ce signal est acheminé vers l'antenne d'émission, émis vers B au temps coordonné t_2 , et reçu par l'antenne de B au temps coordonné t_3 .
3. Il est acheminé vers le modem récepteur, MB, au temps coordonné t_4 .

4. Au temps coordonnée t_5 , le modem MB a généré le même signal mais référencé à l'horloge B.

Dans l'approche où l'on néglige les temps de propagation entre les horloges et les modems, la désynchronisation des deux horloges à la date t_4 est donc (WOLF, 2004) :

$$\tau^B(t_4) - \tau^A(t_4) = \tau^B(t_4) - (\tau^A(t_1) + [T_{14}]^A) \quad (1.4.8)$$

On définit que les deux modem référencent la même valeur temporelle lorsque :

$$\tau^A(t_1) = \tau^B(t_5) \quad (1.4.9)$$

L'observable brute est l'écart entre le signal reçu et le signal équivalent généré localement par MB, soit :

$$\begin{aligned} \Delta\tau^B &= \tau_{prod}^B - \tau_{rec}^B \\ &= \tau^B(t_5) - \tau^B(t_4) \\ &= \tau^A(t_1) - \tau^B(t_4) \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

où pour la dernière égalité on a utilisé l'équation (1.4.9). Finalement, la désynchronisation peut s'écrire :

$$\tau^B(t_4) - \tau^A(t_4) = [-T_{14}]^A - \Delta\tau^B \quad (1.4.11)$$

1.5 Délais issus d'effets perturbateurs

Dans la pratique, le délai de propagation T_{14}^A dans (1.4.11) contient des effets perturbateurs qu'il faut mesurer ou estimer. On peut séparer ces sources d'erreurs en trois groupes : celles liées aux satellites, celles liées au milieu de propagation intermédiaire et celles liées à la station.

1.5.1 Electronique

Des retards dus à l'électronique du satellite ou du récepteur peuvent survenir avant la génération du signal ou respectivement après sa réception. Ils sont composés des retards des signaux dans les antennes, les amplificateurs, les câbles liant les antennes aux modems (récepteurs), et les retards dans les modems eux-mêmes.

Au niveau du satellite, un signal généré à l'instant d'émission par l'oscillateur interne sera effectivement émis par l'antenne avec un certain retard. Ce dernier correspond au temps nécessaire pour que le signal traverse l'ensemble des composants électroniques séparant l'horloge et l'antenne à l'intérieur du satellite. Lors de ce trajet, plusieurs facteurs sources d'erreurs peuvent intervenir (comme le bruit thermique).

Au niveau du récepteur, le même schéma de transport de l'information est répété. Ces retards peuvent varier pour les différentes fréquences, ainsi que pour les différents canaux des récepteurs (WOLF, 2004).

1.5.2 Effet des antennes

Centre de phase

La différence entre le centre de phase de l'antenne et le centre géométrique de l'antenne entraîne un retard de propagation. Pour un satellite, le centre de phase correspond au point d'émission du signal par l'élément actif de l'antenne. L'incertitude causée par le centre de phase de l'antenne dépend du type d'antenne, de la fréquence utilisée ainsi que de la direction du signal d'émission.

Pour le récepteur, le centre de phase correspond au point d'impact du signal provenant du satellite sur la partie active de l'antenne. L'incertitude causée par le centre de phase de l'antenne dépend du type d'antenne, de la fréquence utilisée ainsi que de l'angle d'élévation du satellite.

Pour exprimer la position du centre de phase d'une antenne, on considère deux paramètres :

- Un vecteur constant qui correspond à la différence entre la position moyenne du centre de phase de l'antenne et le centre de masse du satellite ;
- un terme qui varie en fonction des caractéristiques du signal et de la direction d'émission (respectivement réception).

Une modélisation du trajet du signal correspondant à un décentrage de phase est de l'ordre de quelques centimètres, et son incertitude après traitement descend à quelques millimètres (HOFMANN-WELENHOF et collab., 1997).

Effet de phase wind-up

La polarisation d'une onde électromagnétique correspond à la direction d'orientation du champ électrique dans le plan de propagation de l'onde. Pour les systèmes GNSS, l'onde est polarisée circulairement dans le sens anti-horaire. En raison de cette polarisation, un changement d'orientation relatif entre les antennes d'émission et de réception va entraîner un changement dans l'observation de la phase. Cet effet est de l'ordre du millimètre dans un positionnement différentiel, mais passe à la dizaine de centimètres pour un positionnement absolu. L'incertitude dépend en outre de la longueur d'onde de la porteuse (WU et collab., 1992).

1.5.3 Atmosphère

Dans un premier temps, rappelons quelques bases de l'optique géométrique.

D'après le principe de Fermat, le chemin optique l , pour une onde électromagnétique plongé dans un milieu d'indice n , envoyé d'un émetteur E à un récepteur R, peut s'exprimer de la façon suivante (DUQUENNE et collab., 2005) :

$$l = \int_E^R n dl \quad (1.5.1)$$

Sachant que la distance géométrique l_0 (cf figure 1.6) séparant E et R est :

$$l_0 = \int_E^R dl \quad (1.5.2)$$

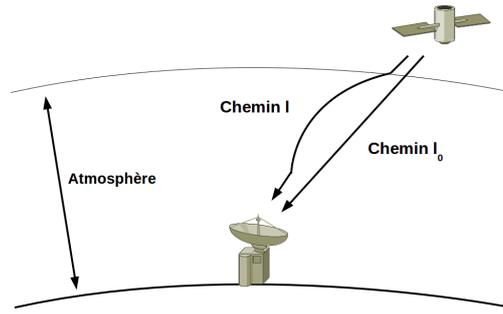


FIGURE 1.6 – Délai créé par la présence de l’atmosphère.

on peut en déduire le délai de propagation ΔL pour la traversée d’un milieu caractérisé par son indice de réfraction n :

$$\Delta L = \int_E^R (n - 1) dl \quad (1.5.3)$$

Par conséquent, pour un site donné, les délais atmosphériques dépendent directement de la configuration géométrique relative entre le satellite et la station : les signaux émanant de satellites à faible élévation traversent un chemin géométrique plus important que pour des satellites proches du zénith.

Afin d’étudier la propagation d’un signal, il est usuel de séparer l’atmosphère en deux contributions : l’ionosphère et la troposphère.

Ionosphère

La partie haute de l’atmosphère, située entre 50 et 1000km d’altitude, est un milieu fortement ionisé. On peut supposer que cette strate se comporte comme un plasma à l’intérieur duquel les ions ne se déplacent pas et que l’équation du mouvement des électrons suit le modèle de Drude. Si une onde électromagnétique se propage dans ce milieu dispersif, on a sa vitesse de groupe v_{gr} et sa vitesse de phase v_{φ} qui prennent la forme (CHENAL, 2012) :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (1.5.4)$$

respectivement :

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (1.5.5)$$

où k est le vecteur d’onde, ω est la pulsation de l’onde et ω_p est la pulsation de Langmuir qui dépend principalement du nombre d’électrons par unité de volume N_e . Les indices de réfraction de ce milieu, pour la vitesse de phase et la vitesse de groupe développées

au premier ordre en $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, prennent la forme :

$$n_\varphi = \frac{c}{v_\varphi} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} = 1 - 40,3 \frac{N_e}{f^2} \quad (1.5.6)$$

$$n_{gr} = 1 + 40,3 \frac{N_e}{f^2} \quad (1.5.7)$$

où f est la fréquence de l'onde en Hz et N_e en m^{-3} .

Finalement, nous donnons la valeur des délais ionosphérique associés à une mesure de phase, respectivement de code, pour la distance entre l'émetteur et le récepteur :

$$\Delta_\varphi^{iono} = -\frac{40,3}{f^2} \int_E^R N_e dl \quad (1.5.8)$$

$$\Delta_{gr}^{iono} = \frac{40,3}{f^2} \int_E^R N_e dl \quad (1.5.9)$$

Pour une application GNSS, on voit que l'information du signal (donnée par le code) va être retardée. Au contraire, la phase de la porteuse va être en avance. On appelle ce phénomène la divergence ionosphérique. Notons que pour les expressions (1.5.8) et (1.5.9), nous avons approximé les quantités propres à des quantités coordonnées. En effet, l'incertitude de tous les systèmes de transfert de temps actuels est supérieure à $10^{-13} s$ et les termes correctifs issus de la transformation temps propre - temps coordonnée sont inférieurs⁷. On appelle TEC (Total Electron Content), la densité d'électrons intégrée sur le chemin du signal, définie comme :

$$TEC = \int_E^R N_e dl \quad (1.5.10)$$

L'unité du TEC est en nombre d'électrons par mètre carré, ou plus généralement en TECU (TEC units) où 1TECU vaut $10^{16} electrons/m^2$. La valeur zénithale moyenne du TEC est donnée toutes les deux heures par l'IGS (International GNSS Service) ou peut être obtenue à partir des modèles. Elle varie en fonction de la latitude, de l'activité solaire et du cycle jour – nuit.

Pour un satellite GNSS au zénith, l'effet sera d'environ 15m le jour et 3m la nuit, alors que pour un satellite à 10° d'élévation, l'effet sera de 45m le jour et 9m la nuit (KAPLAN et HEGARTY, 2005).

Troposphère

La troposphère est la partie basse (inférieure à 50km), électriquement neutre de l'atmosphère. C'est un milieu non dispersif pour des fréquences allant jusqu'à 15MHz. Le

7. L'allongement ionosphérique étant de l'ordre de $10^1 m$ soit $10^{-7} s$ pour un signal à 1GHz, et la transformation temps propre - temps coordonnée appliquant un facteur multiplicatif de l'ordre de 10^{-9} , on a bien une correction de $10^{-16} s$

délat troposphérique associé vaut selon (1.5.3) :

$$\begin{aligned}\Delta^{tropo} &= \int_E^R (n - 1) dl \\ &= 10^{-6} \int_E^R N dl\end{aligned}\tag{1.5.11}$$

où N est la réfractivité. Comme dans le délat ionosphérique, on peut approximer les quantités propres aux quantités coordonnées.

Le délat normalisé va dépendre physiquement de trois variables : la température, la pression et l'humidité. Par conséquent, on modélise généralement la réfractivité comme la somme de deux composantes : l'une sèche, N_d , et l'autre humide, N_w . La composante sèche est source de 90% du délat troposphérique et peut être modélisée de façon très précise. La composante humide, où est stocké plus de 80% de la vapeur d'eau de l'atmosphère, est très difficilement prédictible principalement en raison des variations météorologiques. L'effet du délat total (composantes sèche et humide) varie de 2,4m pour un satellite au zenith à 25m pour un satellite à une faible élévation (10°) (KAPLAN et HEGARTY, 2005).

1.5.4 Multi-trajets

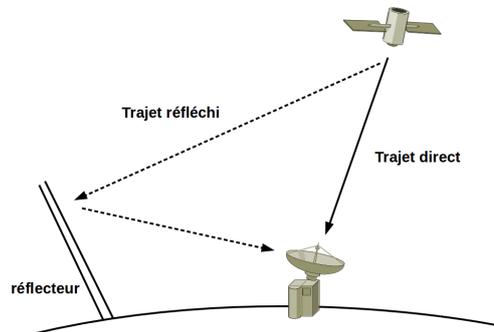


FIGURE 1.7 – Effet de multi-trajet sur la mesure de pseudo-distance.

Ce biais dans les mesures apparaît lorsqu'un signal issu d'un satellite ne prend pas un chemin direct pour arriver à l'antenne du récepteur (cf. figure 1.7). Par exemple, des réflexions sur les surfaces proches du récepteur entraînent un délat supplémentaire dans le temps de propagation. Il dépend de l'environnement du récepteur, du type d'antenne, de la fréquence du satellite, ainsi que de l'élévation du satellite : plus son élévation sera basse, plus le signal sera susceptible au multi-trajet.

Dans un système GNSS, l'erreur sur le positionnement diffère selon les observations utilisées. Pour l'observation de code, les délais peuvent être équivalents à des distances de plusieurs mètres, alors que pour une observation par la phase de la porteuse, l'erreur

sur la distance sera de l'ordre de la longueur d'onde, soit quelques dizaines de centimètres (SUIBIRANA et collab., 2013). Cependant, en positionnement différé, le lissage par la moyenne des observations permet de réduire considérablement l'incertitude associée à cet effet dû au multi-trajet.

1.6 Équation d'observation

En repartant de l'équation (1.4.11) et en posant pour la désynchronisation :

$$\delta t = \tau^B(t_4) - \tau^A(t_4) \quad (1.6.1)$$

nous pouvons finalement exprimer l'observable $\Delta\tau^B$ en fonction des délais de propagation du signal dans l'application du transfert de temps une-voie par satellite :

$$\begin{aligned} \Delta\tau^B &= -\delta t - [T_{14}]^A \\ &= -\delta t - [T_{12} + T_{23} + T_{34}]^A \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Le délai T_{12} correspond au délai interne dû à l'électronique Δ_A^e et à l'antenne Δ_A^a de l'émetteur. Similairement, le délai T_{34} correspond au délai interne causé par l'électronique Δ_B^e et l'antenne Δ_B^a pour le récepteur.

De plus, en écrivant le temps de vol T_{23} en fonction des retards troposphérique Δ^{tropo} , ionosphérique Δ^{iono} , des trajets multiples Δ^m et de la distance géométrique R_{AB} , on a finalement :

$$\begin{aligned} \Delta\tau^B &= -\delta t - \left[[\Delta_A^e + \Delta_A^a]^T + R_{AB} + \Delta^{tropo} + \Delta^{iono} + \Delta^m + [\Delta_B^e + \Delta_B^a]^T \right]^A \\ &= -\delta t - (\Delta_A^e + \Delta_A^a) - \left[R_{AB} + \Delta^{tropo} + \Delta^{iono} + \Delta^m + [\Delta_B^e + \Delta_B^a]^T \right]^A \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Puisque nous sommes à présent en possession des outils de base pour appréhender les transferts de temps relativistes, nous allons considérer dans le chapitre suivant les systèmes de positionnement par satellite.

Chapitre 2

Actuel et futur GNSS

« *Always in motion is the future* »

Yoda

Sommaire

2.1 Définition d'un GNSS	36
2.1.1 Bref historique	36
2.1.2 Structure des GNSS	37
2.2 Positionnement	37
2.2.1 Signal	37
2.2.2 Mesure sur le code	38
2.2.3 Mesure sur la phase	40
2.2.4 Combinaison d'observations	42
2.2.5 Mode de localisation Différentiel	43
2.3 Les GNSS actuels	44
2.3.1 GPS	44
2.3.2 GLONASS	47
2.3.3 Galileo	48
2.3.4 BeiDou-COMPASS	49
2.4 Relativité et GNSS	50
2.4.1 Principe des GNSS	50
2.4.2 Effet Horloges	51
2.4.3 Propagation du signal	53
2.5 Limitations actuelles	55
2.5.1 Horloges atomiques	55
2.5.2 Effets systématiques et modèle de satellite	58
2.5.3 Modèle de troposphère	62
2.5.4 Produits	63
2.6 Liens inter-satellites	64
2.6.1 Généralités	64
2.6.2 Détermination de l'orbite et des paramètres d'horloges	65
2.6.3 Contrôle de l'intégrité	68

2.1 Définition d'un GNSS

2.1.1 Bref historique

La navigation est définie comme la science permettant de connaître la position d'un objet relativement à un repère de référence. Au XXe siècle, une révolution majeure s'opéra dans ce domaine : conjointement à l'apparition des premières horloges atomiques, on assista aux premiers lancements de satellites artificiels dans l'environnement terrestre. Ces deux ingrédients donnèrent naissance à la navigation spatiale ou navigation satellitaire.

En 1944, I. I. Rabi reçoit le prix Nobel de physique pour la découverte du phénomène de résonance magnétique nucléaire, et la mesure par une méthode de jets atomiques. Il ne faudra attendre qu'une dizaine d'années pour voir apparaître la première horloge atomique au césium développée par Louis Essen et Jack Parry au NPL ([ESSEN et PARRY, 1955](#)) (cf. sous-section [2.5.1](#)).

Parallèlement à ces avancées fondamentales et technologiques, le premier satellite artificiel terrestre, Sputnik-1, est mis en orbite autour de la Terre par l'URSS le 4 octobre 1957. Il émet des signaux électromagnétiques de fréquence 20 et 40 MHz vers la Terre. Dans l'article de [GUIER et WEIFFENBACH \(1958\)](#), l'orbite de Sputnik est déterminée en étudiant le décalage Doppler du signal reçu. La grande exactitude de cette méthode conduit le directeur du centre de recherche du Laboratoire de Physique Appliquée (APL) de l'Université Johns Hopkins, Frank T. McClure, à imaginer un système de positionnement basé sur le principe inverse : connaissant l'orbite d'un satellite, l'étude du décalage Doppler du signal reçu (émis par le satellite) permettrait de déterminer la position d'un récepteur sur Terre ; c'est le début du programme TRANSIT (1958). Cette méthode repose sur l'existence d'oscillateurs ultra-stables ayant une très bonne stabilité à court-terme afin que leur fréquence change très peu lors d'un passage du satellite au-dessus du récepteur, et sur une bonne connaissance de l'orbite du satellite. Ce système permettait un positionnement avec une exactitude de l'ordre de 80 mètres, et une synchronisation d'horloge de l'ordre de 200 ms. La méthode est complexe et ne permet pas le positionnement en temps réel : il faut attendre l'arrivée d'un satellite (en moyenne 4h), la durée du passage et le traitement des données. Cela convenait donc à des utilisateurs fixes ou très lents. Les caractéristiques du système TRANSIT étaient conçues pour le positionnement en haute mer des sous-marins nucléaires américains équipés des missiles Polaris : ces sous-marins se positionnaient de façon périodique, en un temps court (2mn) et ils bénéficiaient de données orbitales des satellites améliorées (cryptées).

En 1967 débute le programme TIMATION avec le lancement de deux satellites TIMATION I et II. Une nouvelle méthode de positionnement est utilisée : le *ranging*, c'est-à-dire la mesure de la pseudo-distance entre l'émetteur et le récepteur (cf. sous-section [2.2.2](#)). Cela nécessite de bonnes horloges à la fois pour le récepteur et pour l'émetteur. Le post-traitement de la variation de la pseudo-distance et la connaissance de l'orbite du satellite permettent ensuite de déduire la position du récepteur. Les tests obtiennent des résultats au moins aussi bons que ceux obtenus avec le système TRANSIT.

Ce programme donne naissance au programme NAVSTAR GPS (*NAVigation Satellite with Time And Ranging Global Positioning System*), dont les ambitions sont très supérieures au système TRANSIT : la position d'un récepteur doit être disponible en temps réel, quelle que soit la météo, sur toute la surface de la Terre et avec une exactitude de l'ordre du mètre. L'amélioration de l'exactitude du système de positionnement nécessite, entre autre, une amélioration des horloges embarquées. Les deux satellites NAVSTAR GPS NTS-1 et 2 embarquent pour la première fois dans l'espace des horloges atomiques, dont la stabilité est bien meilleure que celle des oscillateurs ultra-stables des programmes précédents.

Le programme NAVSTAR GPS est encore aujourd'hui la référence en terme de système de positionnement par satellite (ou GNSS pour *Global Navigation Satellite System*).

2.1.2 Structure des GNSS

Les différents GNSS actuels se basent tous sur le même principe que NAVSTAR GPS : l'utilisation du ranging passif. On peut caractériser un GNSS par trois segments : le segment spatial, qui comprend la constellation de satellites, le segment de contrôle, aussi nommé segment sol, et le segment utilisateur.

- Le segment spatial a pour rôle de générer et de transmettre de façon continue des signaux GNSS au moyen d'horloges ultra-stables, ainsi que d'enregistrer et de distribuer aux utilisateurs le message de navigation téléchargé par le segment de contrôle. Pour les constellations globales telles que le GPS, le segment spatial doit s'assurer de fournir un minimum de quatre satellites en vues simultanées pour un utilisateur sur la surface terrestre, et ce à tout moment.
- Le segment sol veille au bon fonctionnement de la constellation en contrôlant le statut et la configuration des satellites. Il a pour mission de calculer les éphémérides et l'évolution des horloges des satellites afin de les télécharger dans le message de navigation. De plus, il veille sur la correspondance entre l'échelle de temps GNSS et l'échelle de temps universel UTC.
- Enfin, le segment utilisateur, grâce à la méthode de ranging passif, est composé d'un nombre illimité de récepteurs GNSS qui reçoivent les signaux des satellites, leur permettant ainsi de déterminer de façon continue leur coordonnées spatio-temporelles.

2.2 Positionnement

Les GNSS utilisent les principes de transfert de temps 1-voie présentés dans le chapitre 1. En repartant de l'équation de propagation (1.6.3) du chapitre 1, nous expliciterons brièvement dans la suite de cette section les différentes observables rencontrées.

2.2.1 Signal

Les signaux émis par les satellites sont dérivés d'une fréquence fondamentale générée par une ou plusieurs horloges atomiques embarquées. Le domaine fréquentiel

alloué aux systèmes de navigation par l'ITU (*International Telecommunication Union*, est compris entre 11610 et 1610 MHz. Les fréquences dérivées dans le domaine radio sont appelées porteuses et permettent de véhiculer deux types d'informations :

- Un indicateur de l'instant d'émission du signal par le satellite.
- Un jeu de données nécessaires au récepteur pour calculer sa position.

Ces différentes informations sont transportées sur les porteuses sous la forme de codes binaires suivant une technique appelée BPSK (*Binary Phase Shift Keying*). Cette méthode consiste à augmenter de 180° la phase de la porteuse lorsque le code binaire change de parité (0 ou 1) (HOFMANN-WELENHOF et collab., 1997).

La longueur d'onde d'un code correspond à la distance parcourue par le signal pendant un *bit*. De plus, une fréquence porteuse peut être modulée par plusieurs codes, tandis qu'un code peut être modulé sur plusieurs fréquences porteuses.

L'indicateur temporel d'émission du signal par le satellite est donné par la valeur temporelle associée à une fonction binaire dépendante du temps, appelée code pseudo-aléatoire. Ce dernier correspond à une séquence de longueur finie dont les valeurs sont connues par le récepteur. Le terme pseudo-aléatoire fait référence au comportement du code, qui se rapproche de celui d'un bruit blanc.

Le jeu de données supplémentaires qui permet à l'utilisateur de calculer sa position est appelé message de navigation. Il comporte :

- *Ephémérides* : Un jeu de 16 paramètres comprenant les éléments képlériens de l'orbite des satellites et leurs dérivées premières temporelles, permettant à l'utilisateur de calculer la position des satellites.
- *Corrections d'horloges* : Un modèle polynomial caractérisant le fonctionnement des horloges embarquées et les paramètres de correction au temps GNSS.
- *Paramètres de service* : Nécessaires pour identifier le satellite et la qualité du signal reçu.
- *Almanach* : Nécessaire pour indiquer de façon approximative la position de tous les satellites de la constellation.
- *Correction ionosphérique* : Les coefficients de modèle ionosphérique global simplifié permettant de calculer le délai ionosphérique.

2.2.2 Mesure sur le code

Le principe de mesure par le code peut être expliqué de la façon suivante : les satellites et les récepteurs génèrent un code pseudo-aléatoire dont les valeurs $code(\tau)$ sont référencées par rapport à leurs horloges locales¹. Le récepteur reçoit au temps local τ_r^g une valeur du code $code(\tau_e^i)$ provenant du satellite i et émis au temps local du satellite τ_e^i . La valeur de ce code reçu est différente de la valeur $code(\tau_r^g)$ du code générée par le

1. Nous ne parlerons pas ici de temps propre puisque les horloges étudiées dans ce chapitre ne sont plus idéales

récepteur. Ce dernier va ainsi rechercher le temps τ tel que $code(\tau^g) = code(\tau_e^i)$.

Le décalage temporel recherché est estimé via une boucle de code (DLL- *Delay Lock Loop*). Cette procédure consiste à décaler les deux codes l'un par rapport à l'autre jusqu'à l'obtention d'un pic de corrélation maximale.

On obtient finalement l'observable du transfert de temps donné par la formule (1.6.3) du chapitre 1. La pseudo-distance ρ^i , qui correspond à ce décalage temporel est par conséquent :

$$\rho^i = c \left(\tau_r - \tau_e^i \right) + \epsilon^i \quad (2.2.1)$$

où c est la vitesse de la lumière, et ϵ^i est le bruit de la mesure du décalage temporel.

Considérons à présent, la désynchronisation entre le temps physique de l'horloge et l'échelle de temps coordonnée du GNSS. On pose :

$$\tau_e^i = t_e^i + \delta t_e^i \quad (2.2.2)$$

où δt_e^i est la différence entre le temps local t_e^i et le temps coordonnée t_e^i associé au satellite i . De la même façon, on a pour le récepteur :

$$\tau_r = t_r + \delta t_r \quad (2.2.3)$$

La pseudo-distance peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\rho^i = c \left(t_r - t_e^i + \delta t_r - \delta t_e^i \right) + \epsilon^i \quad (2.2.4)$$

Dans un référentiel inertiel, on peut écrire (KOUBA, 2009) :

$$\frac{\rho^i}{c} = \frac{R^i}{c} + \Delta^{tropo} + \Delta^{iono} + \Delta^m + \Delta^e + \left(\delta t_r - \delta t_e^i \right) + \frac{\epsilon^i}{c} \quad (2.2.5)$$

où $R^i = |\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}^i(t_e)|$ avec $\mathbf{x}^i(t_e)$ la position du satellite au temps coordonnée t_e et $\mathbf{x}(t_r)$ la position du récepteur au temps coordonnée t_r . Dans cette équation, on mesure ρ^i et l'on cherche à déterminer $\mathbf{x}(t_r)$ et δt_r . Les autres délais intervenant dans l'équation sont modélisés ou mesurés par différentes méthodes. Ils se réfèrent aux délais introduits dans le chapitre 1 (cf équation 1.6.3), avec le terme Δ^e regroupant l'ensemble des délais provenant de l'électronique et des antennes. On est donc en présence d'un système à quatre inconnues, nécessitant, pour un positionnement instantané, la mesure de quatre pseudo-distances.

Afin d'éviter les interférences entre les signaux et de pouvoir associer aux paramètres du message de navigation les satellites respectifs, le récepteur doit pouvoir déterminer l'origine d'un signal reçu. Pour cela plusieurs techniques de séparation des signaux existent :

- La méthode CDMA (Code Division Multi Access) est celle utilisée par le GPS, Galileo et Beidou. Chaque satellite possède un code qui lui est propre et qui est de corrélation nulle avec ceux des autres satellites. Le récepteur connaissant le code de tous les satellites, il peut déterminer la provenance du signal reçu.

- La méthode FDMA (Frequency Division Multi Access) est utilisée par GLONASS. Les satellites émettent le même code mais sur des fréquences qui leurs sont spécifiques. Le récepteur détermine l'origine du signal grâce à la fréquence de ce dernier.
- La méthode TDMA (Time Division Multi Access) n'est à ce jour utilisée par aucun GNSS. Chaque satellite émet des signaux à des instants différents. Le récepteur, peut alors, en fonction de la date de réception, identifier le satellite émetteur.

Une fois quatre satellites identifiés, on résout les équations de la navigation 2.2.5 en linéarisant autour d'une solution approchée au moyen d'une méthode d'ajustement type moindres-carrés (DUQUENNE et collab., 2005).

Le bruit de la mesure est estimé de manière empirique et approché à mieux de 1% de la longueur d'onde du signal sur lequel se fait la mesure. Par exemple pour le GPS, le code C/A à une période de l'ordre de $1ms$ ($10^6 bits.s^{-1}$, ce qui correspond à une erreur de l'ordre du mètre. Pour le code P du GPS, qui a une période de $10^7 bits.s^{-1}$, l'erreur est de l'ordre de 30cm (DUQUENNE et collab., 2005).

Le positionnement en mode absolu sur le code présente une exactitude de l'ordre de la dizaine de mètres (ou un peu moins). Il est caractérisé par la géométrie au moyen des facteurs de dilution de la précision (DOP- *Dilution Of Precision*).

2.2.3 Mesure sur la phase

Une autre solution pour effectuer un positionnement avec les signaux GNSS repose sur la mesure de la phase des ondes porteuses. Le principe est de comparer la phase des porteuses du signal reçu avec celle générée par le récepteur.

Une onde sinusoïdale $x(\tau)$ d'amplitude A et de fréquence f s'exprime sous la forme :

$$x(\tau) = A \cos(\omega(\tau - \tau_0) + \phi_0) \quad (2.2.6)$$

avec la pulsation $\omega = 2\pi f$ en $rad.s^{-1}$, ϕ_0 la phase à l'origine exprimée en rad, et $\phi(\tau) = 2\pi f(\tau - \tau_0) + \phi_0$ la phase à l'instant t , en rad.

Généralement, on exprime aussi la phase en cycles telle que :

$$\phi(\tau) = f(\tau - \tau_0) + \frac{\phi_0}{2\pi} \quad (2.2.7)$$

Un cycle est une grandeur sans unité qui représente un nombre de longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f}$ ou de périodes du signal.

La différence de phase exprimée en cycle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \phi(\tau_r) - \phi^i(\tau_e) &= f(\tau_r - \tau_e^i) \\ &= f \frac{\rho^i}{c} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

où ρ^i est la pseudo-distance séparant le récepteur au temps de réception τ_r du satellite i au temps d'émission τ_e .

La boucle de phase permet d'obtenir le décalage temporel par optimisation du pic de corrélation de la même façon que pour la mesure sur le code. Le déphasage $\Delta\psi$ mesuré par le récepteur correspond à la partie fractionnaire de la différence de l'équation 2.2.8, soit une valeur comprise entre 0 et 1 cycle. Ces deux déphasages sont reliés par la formule :

$$\phi(\tau_r) - \phi^i(\tau_e) = \Delta\psi(\tau_r) + N^i(\tau_r) + \epsilon^i \quad (2.2.9)$$

où $N^i(\tau_r)$ est un nombre entier inconnu de cycle, et ϵ^i l'erreur attachée au lien. Il est possible pour le récepteur de connaître le nombre exact de cycle écoulé depuis la première mesure. On aura donc, tant que la réception du signal n'est pas interrompue :

$$N^i(\tau_r) = N^i(\tau_1) + n(\tau_r) \quad (2.2.10)$$

avec $n(\tau_r)$ le nombre de cycle compté depuis la première mesure et $N^i(\tau_1)$ est le nombre de cycle inconnu par le récepteur. Cette dernière grandeur est appelée l'ambiguïté entière.

Avec les équations (2.2.10), (2.2.8) et (2.2.9), l'observable peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta\psi(\tau_r) + n(\tau_r) &= \phi(\tau_r) - \phi^i(\tau_e) - N^i(\tau_1) - \epsilon^i \\ &= \phi(\tau_r) - \phi^i(\tau_r) + f \frac{\rho^i}{c} - N^i(\tau_1) - \epsilon^i \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

En reliant les temps locaux aux temps coordonnées comme pour la mesure de code, et en supposant que les fréquences générées par le récepteur et l'émetteur sont, au premier ordre et pour un laps de temps très court, identiques, on a :

$$\begin{aligned} \phi(\tau_r) - \phi^i(\tau_r) &= f \left(t_r - \delta t_r - t_r + \delta t_r^i \right) \\ &= f \left(\delta t_r^i - \delta t_r \right) \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Finalement, on exprime le déphasage en unité de distance en multipliant par la longueur d'onde λ :

$$L^i = \lambda\Phi = c \left(\delta t_r^i - \delta t_r \right) + R^i + \Delta^{tropo} + \Delta^{iono} + \Delta^e + \Delta^m - \lambda N^i(\tau_1) - \epsilon^{/i} \quad (2.2.13)$$

avec $\epsilon^{/i}$, le bruit du lien multiplié par la longueur d'onde, R^i la distance géométrique et $\lambda\Phi = \Delta\psi(\tau_r) + n(\tau_r)$.

Le bruit du lien est, comme pour la mesure sur le code, inférieur à 1% de la longueur d'onde. A titre d'exemple, les longueurs d'onde des porteuses GPS étant d'environ 20cm, le bruit de mesure est de l'ordre du millimètre. Cela fait du positionnement par la phase une méthode extrêmement efficace.

Le positionnement PPP, pour Positionnement Ponctuel Précis, est un positionnement absolu qui utilise des mesures de phase et de code en temps réel ou différé. Il consiste à calculer une solution GNSS pour un récepteur unique en utilisant des orbites et des corrections précises issues des centres d'analyses GNSS à partir de réseau global comme celui de l'IGS (Dow et collab., 2009).

2.2.4 Combinaison d'observations

Les observations brutes présentées précédemment ne donnent accès qu'à certains paramètres et peuvent être entachées de biais liés par exemple à la position du récepteur ou à la géométrie de la constellation visible.

Les combinaisons des mesures de phase permettent de construire de nouvelles observables affranchies de certains biais et de n'utiliser que certains paramètres. Ces combinaisons sont calculées relativement aux signaux reçus d'un seul satellite. Pour cela, on utilise des récepteurs bi-fréquences pour combiner les observations entre les fréquences ; en résulte alors des combinaisons linéaires de phase, ainsi que des combinaisons linéaires de phase et de pseudo-distance. Ces dernières permettent de réduire le bruit de la mesure de la pseudo-distance.

Le schéma général d'une combinaison de phase à deux fréquences, ϕ_1 et ϕ_2 , est de créer une nouvelle observable de phase ϕ basée sur les mesures des deux phases réellement observées. En principe, on écrit :

$$\begin{aligned}\phi &= n_1\phi_1 + n_2\phi_2 \\ &= n_1f_1t + n_2f_2t\end{aligned}\tag{2.2.14}$$

où n_1 et n_2 sont des réels, f_1 est la fréquence relative à la phase ϕ_1 , et f_2 est la fréquence relative à la phase ϕ_2 à l'instant t .

Par exemple, la combinaison $\phi_1 - \phi_2$ permet d'obtenir une observable avec une longueur d'onde plus importante. On appelle cette combinaison "wide-lane" (SUIBIRANA et collab., 2013) ou combinaison Melbourne-Wübbena (MELBOURNE, 1985; WÜBBENA, 1985). Elle est notamment utilisée pour faciliter la résolution des ambiguïtés entières. En posant,

$$\begin{aligned}\phi_1 - \phi_2 &= \frac{L_1}{\lambda_1} - \frac{L_2}{\lambda_2} \\ &= \frac{f_1L_1 - f_2L_2}{c}\end{aligned}\tag{2.2.15}$$

la combinaison wide-lane s'exprime alors en unité de distance :

$$\begin{aligned}L_{wl} &= \lambda_{wl} \cdot (\phi_1 - \phi_2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{f_1L_1 - f_2L_2}{c} \\ &= \frac{1}{f_1 - f_2} (f_1L_1 - f_2L_2)\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

Citons finalement une autre combinaison de phase très utile : la combinaison ionosphere-free. Celle-ci est de la forme : $f_1\phi_1 - f_2\phi_2$, soit :

$$L_{iono} = \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2L_1 - f_2^2L_2)\tag{2.2.17}$$

Cette combinaison de signaux ne dépend pas au premier ordre des effets ionosphériques et correspond à un nombre non-entier d'ambiguïtés, ce qui peut être un avantage pour la détection des sauts de cycle en cours de campagne de mesure.

2.2.5 Mode de localisation Différentiel

Outre le positionnement absolu en temps réel ou différé (PPP) évoqué précédemment, il est possible de combiner les mesures de plusieurs utilisateurs pour effectuer un positionnement relatif (ou différentiel). Pour cela, il est nécessaire de disposer d'au moins deux récepteurs qui observent simultanément la constellation de satellites. Les observations sont comparées pour déduire la position relative des deux récepteurs. L'un des récepteurs est pris comme référence, ses coordonnées étant alors supposées connues. La position du deuxième récepteur est ensuite exprimée relativement aux coordonnées du premier récepteur référence.

Le mode différentiel permet d'éliminer l'ensemble des erreurs communes aux deux récepteurs : en différenciant les observations réalisées au même instant, on s'affranchit en partie des erreurs systématiques. Cette méthode de positionnement peut se baser sur des mesures de code ou de phase, pour des temps d'observations allant de quelques secondes à plusieurs jours. Le calcul est réalisé en temps réel ou en temps différé avec des éphémérides radiodiffusées ou calculées a posteriori (par l'IGS par exemple).

Code

Le mode de localisation différentiel utilisant des mesures de code est nommé DGNSS (pour *Differential GNSS*). Il ne fait pas la distinction entre un utilisateur mobile ou fixe et entre un calcul en temps réel ou en temps différé.

Phase

On distingue deux modes de localisation différentiels utilisant la phase suivant que le calcul soit en temps réel ou en temps différé :

- Le mode de localisation différentiel par mesure de phase en temps réel est appelé mode RTK (*Real Time Kinematic*). La position du récepteur, fixe ou mobile, est déterminée à partir des données d'éphémérides radiodiffusées par les satellites.
- Le mode de localisation différentiel par mesure de phase en temps différé regroupe deux techniques : le mode géodésique (ou mode statique) qui permet de déterminer la position d'un récepteur statique, et le mode cinématique, qui permet de calculer en temps différé les positions successives d'un utilisateur mobile. La différence fondamentale d'approche entre ces deux techniques réside dans la résolution des ambiguïtés entières. En effet, pour le mode statique, l'utilisateur reste stationné sur un point pendant une durée suffisamment longue et les ambiguïtés sont constantes dans le temps. Le mode géodésique est utilisé pour la mise en place des réseaux permanents. Le message de navigation radiodiffusé par les satellites est délaissé au profit d'éphémérides calculées a posteriori.

Les différences de phases construites sont les suivantes :

- Simple différence : La différence des observations de phase provenant d'un satellite et mesurée par deux récepteurs permet, dans un premier temps, d'éliminer

des équations d'observation certaines erreurs systématiques dues à un satellite donné (erreurs d'horloges et en partie, erreurs liées aux orbites).

- Double différence : La différenciation des simples différences (c'est-à-dire l'observation simultanée de deux satellites par les deux récepteurs) permet d'éliminer en plus les erreurs propres aux récepteurs (horloges).
- Triple différence : La différenciation des doubles différences obtenues pour différentes époques successives permet la détermination des ambiguïtés et des sauts de cycles (DUQUENNE et collab., 2005).

À présent, nous allons présenter les caractéristiques des différents GNSS.

2.3 Les GNSS actuels

2.3.1 GPS

En 1983, les États Unis d'Amérique décident de rendre disponible le GPS aux civils et c'est plus de dix ans plus tard (27 avril 1995) que la constellation GPS atteint sa phase opérationnelle (FOC : Full Operational Capability) avec un nombre de 24 satellites. Bien que le GPS a été mis en oeuvre par le ministère de la Défense états-unien (DoD), il est sous le contrôle conjoint de ce ministère et du ministère du Commerce (DoC) depuis les années 2000.

Les 24 satellites nécessaires à la constellation GPS nominale sont distribués sur 6 plans orbitaux qui ont une inclinaison de 55° relativement à l'équateur et espacés les uns des autres (en longitude) de 60° . Il y a 4 satellites par plan (avec un espace disponible pour un satellite de secours) séparés de façon non symétrique afin de minimiser l'impact d'un satellite défectueux. Cette géométrie est conçue pour maximiser la couverture satellitaire. Les orbites sont quasi-circulaires, avec une excentricité de 0,02 et un demi-grand axe de 26560 km , i.e. une altitude de 20200 km (MEO, Orbite Terrestre Moyenne). Les satellites ont une vitesse de $3,9\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ et une période de 11h58m02s, soit 12h sidérales. Cette géométrie permet notamment l'observation simultanée de 4 à 12 satellites avec plus de 15° d'élévation, en tout point de la surface terrestre, et ce à tout moment.

Plusieurs générations de satellites GPS se sont succédées au fur et à mesure des avancées technologiques. On les regroupe par bloc :

- le bloc I correspond à 11 satellites lancés de 1978 à 1985. Ce sont des satellites de développement nécessaires à la phase initiale de test. Ils ont une masse de 845 kg et ont une durée de vie moyenne de 4,5 ans (même si certains fonctionnèrent 10 ans). A noter qu'ils peuvent évoluer pendant 3 à 4 jours sans contact avec le segment de contrôle. En 2005, le dernier satellite de ce bloc cessa d'être opérationnel.
- les blocs II et IIA (pour *Advanced*) se composent de 28 satellites (21 satellites opérationnels plus 3 de secours et 4 de remplacement en réserve) lancés de 1989 à 1997. Ils correspondent à la mise en place opérationnelle du système (phase FOC). Avec une masse de 1500 kg et une durée de vie nominale de 7,5 ans, s'étendant

pour la plupart à 10 ans, ils ont été conçus pour être capables de fonctionner de façon autonome pendant 180 jours (cf section 2.6). C'est sur ces satellites que la dégradation S/A fut installée.

- le bloc IIR (*Replacement*) fut lancé à partir de 1997 et présente plusieurs nouveautés technologiques comme l'ajout de liens inter-satellites. Les 20 satellites du bloc IIR font 2000kg, ont une durée de vie de 10 ans et emportent à leur bord 3 horloges césium. Tout comme les blocs II et IIA, ils peuvent être sans contact avec le segment de contrôle pendant 6 mois sans que cela ne dégrade les éphémérides. Ce sont les satellites destinés au remplacement du bloc IIA.
- le premier satellite du bloc IIM (*Modernized*) fut lancé en 2005 et comporte un signal militaire en plus. Ce bloc comporte 8 satellites
- le bloc IIF (*Follow on*) débuta en 2010 et présente un 3e signal civil (L5). Il est de plus équipé d'un système de navigation inertielle et le temps de vie de ces satellites est de l'ordre de 15 ans.
- le bloc III, dont le lancement pourrait débuter en 2017, comportera un 4e signal civil et une amélioration des capacités technologiques, notamment dans le domaine de l'interopérabilité entre les différents GNSS.

La constellation comporte à ce jour 31 satellites opérationnels contrôlés par le segment sol.

Le réseau au sol est composé d'une station principale, la *Master Control Station* (MCS), située à Colorado Spring et d'un réseau de stations de Suivi appelées les *Master Stations* (MS), distribuées sur toute la surface du globe.

La MCS est le centre de commande de tout le réseau au sol : elle supervise la maintenance, l'intégrité et le maintien en orbite des satellites. Les MS collectent continuellement les signaux des satellites en vue et envoient leurs données à la MCS qui calcule les éphémérides, prédit les paramètres d'horloges et génère ainsi le message de navigation.

Les éphémérides des satellites sont données dans le repère de référence WGS-84, développé par le service géographique de l'armée des États-Unis en 1984.

L'échelle de temps du système est le GPS Time, réalisée à partir des horloges embarquées et reliée à l'UTC par l'intermédiaire de l'USNO (U.S. Naval Observatory). Plus précisément, la « Master Clock » UTC(USNO-MC) basée à Washington, sur lequel est synchronisé UTC(USNO-AMC) pour « Alternate Master Clock » à Colorado Springs, et de là est fabriqué GPS Time comme horloge composite avec les horloges embarquées et celles des autres stations-sol du GPS. Le GPS time est donc basé sur l'UTC(USNO) depuis le 6 janvier 1980 à 0h et ne subit pas l'ajout de secondes intercalaires.

Chaque satellite est à ce jour vu par au moins 3 MS et ce sont ces dernières qui transfèrent quotidiennement le message de navigation aux satellites. Ce message de navigation est mis à jour toutes les deux heures.

Les satellites GPS émettent sur trois bandes porteuses appelées L1, L2 et L5, à des fréquences respectives de 1575,42 MHz, 1227,60 MHz et 1176,45 MHz (multiples de la fréquence fondamentale de 10,23 Mhz). Les signaux combinent des codes pseudo-aléatoires et des messages de navigation, construits tous deux par modulation de la phase de la porteuse.

Historiquement, il existe deux principaux codes pseudo-aléatoires : le code C/A (Coarse Acquisition) débité à une cadence de 1,023 Mhz (longueur d'onde de 293,1 m) sur la fréquence L1, de période 1ms et propre à chaque satellite ; et le code P (Precise), utilisé par les militaires ou les utilisateurs agréés, débité à une cadence de 10,23 MHz (longueur d'onde de 29,31m) sur les deux fréquences et de période 266 jours. Ce code P est partitionné et ses différents morceaux sont associés à des satellites différents. Le Code C/A est librement accessible au public et permet le positionnement en temps réel standard (Standard Positioning System), au contraire du code P qui est crypté et réservé aux utilisateurs habilités et aux militaires. Ce dernier permet d'avoir accès à un positionnement de haute précision (Precise Positioning System). Le code C/A est porté par L1 tandis que le code P utilise les deux porteuses L1 et L2.

La modernisation des signaux GPS permet de doter la bande de fréquence L2 d'un nouveau signal civil : L2C². Combinée au signal L1 C/A en transfert de temps bi-fréquence, l'observable obtenue permet de s'affranchir des termes ionosphériques du premier ordre, améliorant ainsi le positionnement.

Cette modernisation cible aussi le signal réservé aux militaires, avec la naissance du code M, version améliorée du code P. Finalement, un signal civil à accès réservé aux applications sensibles (aviation, sauvetage, etc) est modulé sur la porteuse L5. Il est appelé SoL pour *Safety of Life*.

Le message de navigation, envoyé à une cadence plus faible de 50 bits par seconde, est modulé sur les deux porteuses et donne accès aux éphémérides du satellite (éléments képlériens et premières dérivées par rapport au temps), à ses paramètres d'horloges, aux coefficients de correction ionosphérique, etc. Les satellites émettant tous aux mêmes fréquences, ils sont identifiés par la méthode CDMA (Code Division Multiple Access).

Le GPS avait autrefois un système de dégradation volontaire, le S/A (Selective Availability), désactivé en 2000 et supprimé de façon permanente et définitive en 2008. Il permettait d'agir directement sur la fréquence fondamentale de l'horloge embarquée en introduisant un déphasage ainsi qu'une dégradation des éléments radio diffusés en effectuant des troncatures sur les éléments képlériens ou les paramètres d'horloge. Le positionnement proche de l'ordre de la dizaine de mètres en temps normal passait à 100m lorsque le S/A était en marche.

2. Premier lancement d'un satellite GPS bloc IIR(M) doté du signal L2C en 2005

2.3.2 GLONASS

À l'époque de la Guerre Froide, l'URSS entreprend dès la fin de années 1970 de se doter d'un système de positionnement par satellite. En 1976, GLONASS naît sur le papier et c'est en 1982 que le premier lancement des satellites prototypes COSMOS 1413 a lieu. S'en suivront 17 lancements de satellites prototypes pendant 3 ans. À partir de 1985 et jusqu'en 1990, les premiers satellites opérationnels GLONASS furent lancés. Avec des spécificités différentes et des durées de vie nominales allant de 2 à 3 ans (mais 4,5 ans en moyenne), ils pesaient environ 1250 kg et étaient dotés d'un meilleur système de transfert de temps que les satellites prototypes. Même s'il fût déclaré opérationnel en 1995, le système ne perdura pas avec la chute de l'URSS et la baisse des fonds alloués (6 satellites opérationnels en 2000). Il faudra attendre 2003 et l'envoi du nouveau satellite COSMOS 2404 pour que le projet redémarre et attendre 2011 pour que GLONASS soit entièrement opérationnel.

Le système nominal GLONASS est composé de 24 satellites répartis sur 3 plans orbitaux inclinés par rapport à l'équateur de $64,8^\circ$. Ils évoluent à une altitude de 19 130 km. Les satellites sont espacés de façon symétrique sur les plans et ont une période de révolution de 11h 15m 44s, la géométrie de la constellation se répétant ainsi tous les 8 jours sidéraux. Huit satellites sont prévus pour chaque plan.

À l'instar du GPS, le système de contrôle de GLONASS veille au bon fonctionnement de la constellation, détermine les éphémérides et les paramètres d'horloges téléchargés deux fois par jour sur les satellites de la constellation. La tête du système se trouve à Krasnoznamensk (dans la région de Moscou) et est appelée *System Control Center*. Un réseau de cinq stations analogue au MS du GPS (*Telemetry Tracking & Command centers- TT&C*) est réparti sur l'ensemble des territoires de l'ex-URSS. Les stations de Suivi observent et collectent les données GLONASS afin de les envoyer à la SCC qui construit le message de navigation, téléchargé vers les satellites par l'intermédiaire de certaines TT&C.

Dans le système géodésique associé à GLONASS, nommé PZ-90, les éphémérides sont données en coordonnées cartésiennes. L'échelle de temps associée à GLONASS, le GLONASS time, est gérée par le *Central Synchronizer*. Elle est synchronisée à la réalisation UTC(SU), et suit les saut de secondes de UTC.

Les signaux des satellites GLONASS sont portés sur deux bandes fréquentielles de 1602,5625 MHz à 1608,75 MHz pour la bande dite G1 et de 1246,4375 MHz à 1251,25 MHz pour la bande dite G2. Cependant, chaque satellite émet à sa propre fréquence, comprise à l'intérieure de ces bandes G1 et G2. Le contenu du signal est construit de façon différente à celui du GPS, avec deux codes qui sont communs à tous les satellites de GLONASS : le premier, assimilable au code C/A, est émis sur la bande G1 uniquement à une cadence de 0,511 MHz ; le second, assimilable au code P, est transmis sur les bandes G1 et G2 à une cadence de 5,110 MHz. Les codes étant identiques pour tous les satellites, ceux-ci sont identifiés par leur fréquence (méthode FDMA). Cependant, en raison de l'encombrement grandissant des bandes radio, la Russie passe progressivement à une technologie CDMA depuis quelques années.

2.3.3 Galileo

Les inconvénients du système GPS (notamment l'accessibilité et des dégradations volontaires possibles du système) ont poussé la communauté européenne à développer un GNSS européen : Galileo. L'autonomie et l'indépendance politiques vis-à-vis du GPS et de GLONASS, qui sont régis par des entités militaires, sont, en plus des retombées économiques, un moteur de la mise en route de Galileo. Piloté par la Commission Européenne, Galileo est le premier service civil qui assure, de par sa nature intrinsèque, une intégrité à l'utilisateur.

Le premier satellite Galileo, Giove-A, fut lancé en 2005. Avec sa mise en orbite débute la phase de test, IOV (In Orbit Validation). Il a pour mission de sécuriser et de maintenir l'allocation des fréquences Galileo par l'International Telecommunication Union (ITU), de valider la technologie et de permettre le début des phases de test pour le segment utilisateur. Son compagnon Giove-B est lancé fin 2005. Pour une masse de 600kg, il emporte deux horloges atomiques rubidium, et deux masers à hydrogène passif.

La phase de lancement des satellites opérationnels débuta en 2011, avec deux satellites mis en orbite sur le premier plan, et continua en 2012 avec deux autres mis sur un autre plan orbital. Ils ont une masse de 700 kg et présentent le même système d'horloge que Giove-B. En 2014, deux satellites Galileo furent positionnés sur une orbite trop excentrique suite à une défaillance technique de la fusée de lancement (DELVA et collab., 2015). Cette orbite a ensuite été (partiellement) corrigée afin d'assurer leur intégration au sein du système de positionnement. En 2015, six autres satellites furent lancés avec succès. Cette phase devrait prendre fin vers 2020, où la constellation sera constituée de 30 satellites répartis sur 3 plans orbitaux (27 satellites + 3 de secours soit 10 satellites par plan) ayant une inclinaison par rapport à l'équateur de 56°. Les satellites sont placés sur des orbites MEO à 23 222 km et avec une excentricité nominale proche de zéro. Leur période est de 14h 4m 45s répétant ainsi la même configuration spatiale tous les 10 jours sidéraux. Cette structure correspond à un minimum de 6 satellites en vue (pour une élévation au dessus de l'horizon de plus de 10°) pour n'importe quel point de la surface terrestre, à n'importe quel moment. Le temps de vie des satellites de la phase opérationnelle est de 12 ans.

Le segment de contrôle de Galileo est constitué de 2 centres de contrôle principaux (les *Ground Control Centers*, GCC) situés à Fucino (Italie) et à Oberpfaffenhofen (Allemagne) ainsi que d'un réseau de stations collectant et transmettant les données des signaux Galileo (les *TT&C et Uplink stations*, ULS). On distingue au sein du segment sol deux axes principaux : le segment de contrôle au sol et le segment de mission au sol (tous deux gérés par les GCC). Le segment de contrôle au sol (GCS) s'occupe de la plateforme des satellites et de la maintenance de la constellation. Il s'appuie sur un réseau de 5 stations TT&C pouvant communiquer dans les deux sens avec chaque satellite, à la fois de façon régulière mais aussi ponctuellement si besoin. Sa mission est de vérifier la bonne santé des satellites et de la constellation en général.

Le segment de mission au sol (GMS) a pour mission d'analyser continuellement les signaux émis par les satellites. Il est ainsi composé d'un réseau de stations de Suivi (les

Galileo Sensor Stations- GSS) relié à des centres de stockage de données et à des centres de calculs. Le GMS communique avec les satellites via les ULS. Il a pour rôle de calculer l'orbitographie et le décalage des horloges des satellites afin de les corriger pour les prochaines heures, corrections qui seront transmises par les ULS aux satellites. Ils vérifient en outre que la différence entre l'échelle de temps Galileo (*Galileo System Time*) et le Temps Atomique International (TAI) ne varie pas de plus de 28ns.

Sa seconde mission est de calculer l'intégrité, autrement dit de transmettre à l'utilisateur un message lui précisant si le signal d'un satellite donné dépasse les tolérances acceptables et n'est donc pas utilisable. Ces stations, ainsi que certaines stations de l'IGS, participent à la réalisation du repère de référence de Galileo, le GTRF (*Galileo Terrestrial Reference Frame*).

La construction du GST est organisée selon deux fonctions ; la *Precise Time Facility* (PTF) qui s'occupe de réaliser et de diffuser l'échelle de temps pour les opérations de navigation, et le *Galileo Time Service Provider* (GTSP) qui permet son rattachement à l'UTC (UHRICH et collab., 2008). GST est généré dans chaque « *Precise Time Facility* » (PTF), qui sont implantées au sein des deux GCC à Oberpfaffenhoffen et à Fucino. L'un est le backup de l'autre, et ils doivent pouvoir être interchangeables suivant des paramètres précis.

Les services de base de Galileo comprendront : un service ouvert (OS) disponible gratuitement à tout utilisateur et d'une exactitude comparable au C/A du GPS, un service commercial (CS) permettant l'accès à une exactitude supérieure, un service de sauvegarde de la vie (SoL) qui fournira une intégrité sur les signaux fournis, un service public réglementé (PRS) qui sera protégé et encrypté, réservé aux autorités gouvernementales de sûretés, et pour finir un service de recherche et de sauvetage (SAR). Ces différents services seront disponibles dans les signaux Galileo dans les bandes de fréquence E1 (1159-1591 MHz), E5 (1164-1215 MHz) et E6 (1260-1300 MHz).

2.3.4 BeiDou-COMPASS

Le programme GNSS chinois, Beidou-Compass, s'est accéléré ces dix dernières années en effectuant une transition d'un système de positionnement par satellite régional vers un système global. En 1989, le système test comporte deux satellites géostationnaires. Il faudra attendre ensuite l'an 2000 pour que le premier satellite géostationnaire opérationnel soit lancé. En 7 ans, 4 satellites géostationnaires survolent la Chine, puis en 2012, après le lancement de la phase II du programme, c'est 5 GEO, 4 MEO et 5 IGSO (orbite géosynchrone inclinée) qui assurent un système opérationnel couvrant la Chine et ses territoires voisins. La phase III promet une constellation de 35 satellites, comprenant 5 GEO, 27 MEO et 3 IGSO prévus pour 2020. Les satellites MEO sont répartis sur 3 plans orbitaux inclinés de 55°, évoluant à une altitude de 21 528 km. La période de révolution de ces satellites MEO est de 12h53 min (révolution de la géométrie tous les 7 jours sidéraux).

Le segment sol de Beidou est très peu documenté. Il comporte 1 station de contrôle

maîtresse (MCS), 2 ULS et 30 MS.

Les signaux de Beidou utilisent la technique CDMA et sont portés par les fréquences B1, B2 et B3. Ces dernières sont dans la même gamme de fréquences que celles de Galileo, amenant des problèmes d'interférence non résolus à l'heure actuelle. Le système dispose de deux services, l'un étant accessible par tous, l'autre étant réservé aux habilités.

2.4 Relativité et GNSS

2.4.1 Principe des GNSS

La relativité générale était encore au début des années 1960 une théorie physique assez lointaine du champ des applications technologiques. C'est sans doute cet écart entre recherche fondamentale et recherche appliquée qui a favorisé l'adoption d'un cadre de travail quasi-newtonien pour les GNSS. Nous entendons par là que l'Espace-Temps considéré est celui de Minkowski et que par conséquent, le postulat d'une vitesse de la lumière constante ne s'applique que pour des référentiels inertiels.

Les horloges du système GNSS sont ajustées pour être en accord avec une échelle de temps coordonnée définie par un ensemble d'horloges idéales synchronisées au repos dans un référentiel terrestre et sur le géoïde (cf. 1.3.3). Le temps coordonnée est alors vu comme un temps newtonien, et les temps des horloges embarquées du GNSS présentent, vis à vis de ce temps absolu fictif, des écarts qu'il est nécessaire de corriger. La relativité est introduite dans le cadre théorique comme un ensemble de corrections à apporter au modèle quasi-newtonien (CHENAL, 2014).

Ce système de référence temporel est défini relativement à un système de référence inertielle géocentrique. Or le référentiel choisi pour exprimer les éphémérides des satellites est un référentiel tournant autour d'un axe fixe et centré sur le centre de masse de la Terre, appelé ECEF (*Earth Centered Earth Fixed*) (ASHBY, 2003).

En conséquence, afin de résoudre les équations de la navigation (2.2.5), il est impératif d'effectuer un changement de repère pour se placer dans un référentiel inertielle. Dans le cas contraire, on introduit une erreur sur le calcul du temps de parcours entre chaque émetteur et le récepteur, appelé effet Sagnac.

En effet, considérons la transformation d'un référentiel inertielle vers un référentiel tournant. L'Espace-Temps est Minkowskien et la métrique du repère inertielle en coordonnées cylindriques est :

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (2.4.1)$$

et la transformation vers un système de coordonnées $\{t', r', \phi', z'\}$ tournant à la vitesse angulaire ω_E est :

$$t = t', \quad r = r', \quad \phi = \phi' + \omega_E t', \quad z = z' \quad (2.4.2)$$

La métrique issue de ce changement de référentiel s'exprime alors :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\omega_E^2 r'^2}{c^2} \right) (cdt')^2 + 2\omega_E r'^2 d\phi' dt' + (d\sigma')^2 \quad (2.4.3)$$

où $(d\sigma')^2 = (dr')^2 + (r'd\phi')^2 + (dz')^2$ est le carré de la distance coordonnée. Pour des rayons lumineux, on a donc, en gardant seulement les premiers termes en $\omega_e r'/c$:

$$\begin{aligned} cdt' &= d\sigma' + \frac{\omega_E r'^2 d\phi'}{c} \\ &= d\sigma' + \frac{2\omega_E dA'_z}{c} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

où l'on a posé $dA'_z = r'^2 d\phi'/2$. Le temps de vol coordonné entre deux événements A et B vaut donc :

$$\int_A^B dt' = \int_A^B \frac{d\sigma'}{c} + \frac{2\omega_E}{c^2} \int_A^B dA'_z \quad (2.4.5)$$

Dans ce référentiel non-inertiel, on doit ajouter au temps habituel de parcours $d\sigma'/c$, la quantité $2\omega_E A'_z/c^2$ proportionnelle au carré de la distance à l'axe de rotation. Pour les satellites de type Galileo, l'ordre de grandeur de cet effet est au maximum de 133ns, soit une trentaine de mètres (CHENAL, 2014). Ce terme est cependant nul dans un référentiel inertiel.

A partir de l'équation de transfert de temps 1-voie par satellite donnée dans le chapitre 1, nous allons présenter dans la suite de cette section les différentes corrections relativistes effectuées sur les horloges des satellites GPS et Galileo, ainsi que celles sur la propagation du signal.

2.4.2 Effet Horloges

Décalage constant

Dans un repère inertiel géocentrique où l'échelle de temps-coordonnée est définie par des horloges au repos sur le géoïde et en négligeant les termes d'ordre supérieur à c^{-2} , l'équation de la métrique vaut (ASHBY, 2003) :

$$ds^2 = - \left(1 - 2 \frac{U(\mathbf{r}) - U_0}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 + 2 \frac{U(\mathbf{r}) - U_0}{c^2} \right) v^2 dt^2 \quad (2.4.6)$$

où $U(\mathbf{r})$ et U_0 sont les potentiels de gravitation newtonien ressentis respectivement à la position \mathbf{r} et sur le géoïde. $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ est la vitesse coordonnée.

Au premier ordre, on peut considérer le potentiel de gravitation comme :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{GM_E}{r} \quad (2.4.7)$$

et la vitesse du satellite sur l'ellipse :

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} = GM_E \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) \quad (2.4.8)$$

La durée infinitésimale en temps-coordonné vaut donc :

$$\begin{aligned} dt &= \left(1 + \frac{GM_E}{rc^2} - \frac{U_0}{c^2} + \frac{GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) \right) d\tau \\ &= \left(1 + \frac{3GM_E}{2ac^2} - \frac{U_0}{c^2} - \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right) d\tau \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

On en déduit l'expression du temps de vol sur le chemin \mathcal{C} parcouru :

$$\Delta t = \int_{\mathcal{C}} \left(1 + \frac{3GM_E}{2ac^2} - \frac{U_0}{c^2} - \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right) d\tau \quad (2.4.10)$$

Les termes deux et trois de la somme de l'équation 2.4.10 correspondent à un décalage gravitationnel en fréquence constant qui vaut pour les satellites GPS :

$$\frac{3GM_E}{2ac^2} - \frac{U_0}{c^2} = 2.5046 \cdot 10^{-10} - 6.9693 \cdot 10^{-10} = -4.4647 \cdot 10^{-10} \quad (2.4.11)$$

Pour les satellites Galileo (CHENAL, 2014), cette somme vaut $-4.749 \cdot 10^{-10}$. Le signe négatif pour ce résultat indique que l'horloge en orbite a une fréquence trop élevée par rapport aux horloges sur le géoïde. Afin d'être synchronisé avec l'échelle de temps-coordonnée GNSS, ce décalage constant peut être, par exemple, corrigé en amont, c'est-à-dire avant le lancement du satellite. Dans ce cas la fréquence de l'horloge en orbite sera synchronisée avec celles du réseau sol.

Le satellite NTS-2 permet pour la première fois, en 1977, de mesurer la différence de fréquences entre une horloge en orbite et une horloge au sol, avec une exactitude relative de l'ordre de 1%. Si l'on ne prend pas en compte ce décalage, l'erreur au bout d'un jour atteint environ 12 km (ASHBY, 2003). Cet effet est une preuve directe de la relativité générale.

Le dernier terme de la somme de l'équation 2.4.10 comporte, en plus d'une partie constante, une partie variable qui donne lieu à un autre effet.

Effet en excentricité

Exprimons dans un premier temps le rayon de l'orbite du satellite (MURRAY et DERMOTT, 1998) :

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.4.12)$$

où e est l'excentricité et E est l'anomalie excentrique, solution de l'équation :

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{GM_E}{a^3}} (t - t_p) \quad (2.4.13)$$

avec t_p le temps de passage au périastre. En différenciant cette équation, on trouve :

$$dE - e dE \cos(E) = \sqrt{\frac{GM_E}{a^3}} dt \quad (2.4.14)$$

soit :

$$\frac{dt}{1 - e \cos(E)} = \frac{dE}{\sqrt{\frac{GM_E}{a^3}}} \quad (2.4.15)$$

Maintenant, injectons cette équation dans le dernier terme de l'équation 2.4.10 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) d\tau &= -\frac{2GM_E}{ac^2} \int_{\mathcal{E}} \left(\frac{a}{r} - 1 \right) d\tau \\ &= -\frac{2GM_E}{ac^2} \int_{\mathcal{E}} \frac{e \cos(E)}{1 - e \cos(E)} d\tau \\ &= -\frac{2GM_E e}{ac^2 \sqrt{\frac{GM_E}{a^3}}} \int_{\mathcal{E}} \cos(E) dE \\ &= -\frac{2\sqrt{GM_E a}}{c^2} e (\sin(E) - \sin(E_0)) \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

La constante d'intégration apparue dans l'équation 2.4.16, va être absorbée dans le biais constant estimé par le récepteur. L'autre terme varie dans le temps et est fonction de l'excentricité de l'orbite. Alors que ce terme, pour des satellites GPS et Galileo, est de l'ordre de $23ns$ (ASHBY, 2003), soit environ 7m, il peut atteindre pour le cas des satellites Galileo placés sur une orbite trop excentrique, la valeur maximale de 240m. La stratégie adoptée par les GNSS actuels est de faire corriger cet effet en excentricité par le récepteur.

À noter, que lors de l'envoi des satellites Galileo 5 et 6 sur une mauvaise orbite, notamment plus excentrique que les orbites nominales, il a été proposé par DELVA et col-lab. (2015) de tester la relativité générale en utilisant cet effet en excentricité et la stabilité des horloges embarquées. Nous pouvons finalement donner la forme finale de la transformation temps propre-temps coordonnée :

$$\tau(t) = \left(1 - \frac{3GM_E}{2ac^2} \right) t - \frac{2\sqrt{GM_E a}}{c^2} e \sin E(t) + Cste \quad (2.4.17)$$

Sur une période d'environ un an, il a été montré que l'on pouvait améliorer le précédent test sur le décalage gravitationnel (réalisé par la sonde *Gravity Probe A*) à une exactitude de l'ordre $3 \cdot 10^{-5}$, soit un gain d'un facteur 4-5 (cf. figure 2.1).

2.4.3 Propagation du signal

Outre les effets agissant sur la fréquence des horloges du GNSS, le délai de propagation du signal ainsi que les distances parcourues ne sont pas les mêmes en présence d'un espace-temps courbe.

Pour un photon ($ds^2 = 0$), en considérant un déplacement $d\sigma = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2}$, et en remplaçant dans l'équation 2.4.6, on a :

$$dt = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} - \frac{U_0}{c^2} \right) d\sigma \quad (2.4.18)$$

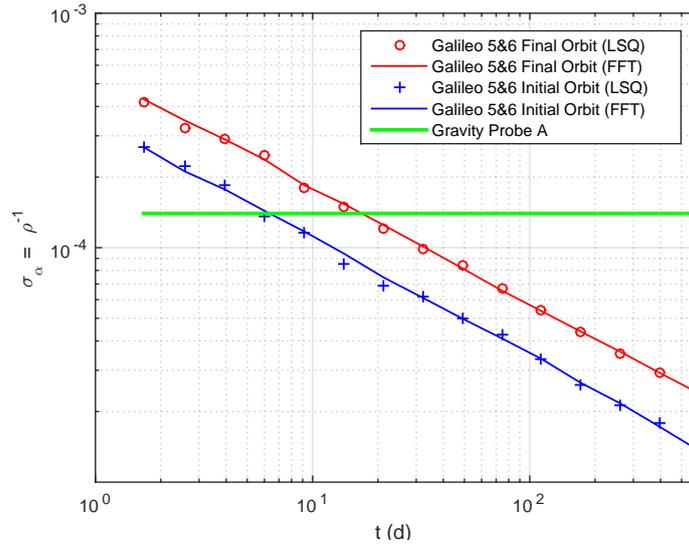


FIGURE 2.1 – Sensibilité statistique du test du décalage gravitationnel en fonction de la durée de l'expérience.

Le temps de parcours s'obtient alors en intégrant sur la distance coordonnée l entre l'émetteur et le récepteur :

$$\Delta t = \frac{l}{c} - \frac{U_0}{c^2} \frac{l}{c} + \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{r_1 + r_2 + l}{r_1 + r_2 - l} \right) \quad (2.4.19)$$

où r_1 et r_2 sont les distances entre le centre de masse de la Terre et l'émetteur, respectivement le récepteur. Le premier terme est le temps de parcours dans un espace-temps plat. Le second terme correspond au choix du temps coordonnée pris sur le géoïde. Le troisième terme est le délai supplémentaire dû à la courbure de l'espace temps. Ce délai est appelé effet Shapiro. Il est de l'ordre du centimètre pour les satellites MEO (ASHBY, 2003) et a été mis en évidence en 1964 par SHAPIRO (1964).

Pour des positionnements ultra-précis, il faudrait aussi tenir compte de la transformation distance coordonnée en distance propre. En effet, toujours en utilisant l'équation 2.4.6, on a pour une distance purement radiale entre un point r_1 et un autre point $r_2 > r_1$:

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \left(1 + \frac{GM_E}{c^2 r} \right) = r_2 - r_1 + \frac{GM_E}{c^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (2.4.20)$$

Typiquement, cette transformation, pour une distance entre la surface de la Terre et le rayon de l'orbite d'un satellite GPS, est d'environ 6,3mm (ASHBY, 2003).

Avant d'obtenir ce niveau d'exactitude sur le positionnement par GNSS, il est nécessaire de dépasser certaines limites que nous allons discuter ci-dessous.

2.5 Limitations actuelles

2.5.1 Horloges atomiques

La réalisation des fréquences des signaux émis par les satellites, ainsi que la datation de ces signaux exigent de la part des horloges embarquées à la fois une bonne stabilité mais aussi une bonne exactitude :

- L'exactitude de fréquence représente l'incertitude sur notre connaissance de l'ensemble des effets systématiques qui déplacent la fréquence d'horloge par rapport à la définition. En effet, en pratique les atomes ne sont pas rigoureusement isolés, mais manipulés dans un dispositif dont les paramètres doivent être bien maîtrisés : effet des environnements magnétique et thermique, collisions entre atomes, effets techniques liés à des fuites micro-onde ou à des perturbations de phase sur le signal d'interrogation synchrone au cycle d'horloge, distribution de phase dans le résonateur d'interrogation, etc.
- La stabilité est la capacité du dispositif à reproduire la même fréquence au cours du temps. Cette grandeur est associée aux différentes sources de bruit de l'horloge : bruits techniques associés à l'électronique ou aux lasers de détection, bruit de phase de l'oscillateur d'interrogation de Ramsey, bruit de projection quantique à la détection, qui constitue le bruit ultime irréductible.

Ces deux qualités sont fondamentales pour le positionnement spatial. En effet la qualité des prédictions d'horloges est gouvernée par la qualité de l'horloge embarquée. Par exemple (BAUCH et collab., 2012) :

- La stabilité à long terme (supérieure à 1h) contraint l'intervalle de prédiction maximal d'une horloge embarquée pour une exactitude donnée. Elle contraint ainsi la fréquence à laquelle doivent être mises à jour les corrections d'horloges.
- La stabilité à court terme (inférieure à 15min) contraint l'échantillonnage temporel auquel doivent être disponibles les nouvelles corrections d'horloge pour du positionnement précis ponctuel.
- La qualité de l'horloge embarquée contraint finalement le modèle mathématique à utiliser pour l'évolution de l'horloge d'un satellite.

Par conséquent, si l'on souhaite obtenir en positionnement absolu en temps réel une exactitude δl de l'ordre du mètre, il faut avoir une mesure temporelle δt égale à :

$$\delta t = \frac{\delta l}{c} \approx 3 \cdot 10^{-9} s \quad (2.5.1)$$

De plus, il faut que l'horloge fournisse une échelle uniforme et reproductible. L'incertitude sur une fréquence étant liée à l'incertitude du temps référencé par la relation :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta t}{t} \quad (2.5.2)$$

De cette relation, nous observons que la dérive de fréquence d'une horloge est proportionnelle à la dérive de la datation. Nous pouvons ainsi faire deux remarques : tout

d'abord, il est impératif de choisir un phénomène de fréquence élevé pour réduire l'incertitude sur le temps de recalage de l'horloge. Ensuite, l'incertitude sur ce temps de décalage étant proportionnelle à la dérive de la fréquence, il est nécessaire de réduire l'incertitude de celle-ci. Ces deux critères ont naturellement entraîné l'implémentation des horloges atomiques dans les satellites GNSS.

Principe de fonctionnement d'une horloge atomique

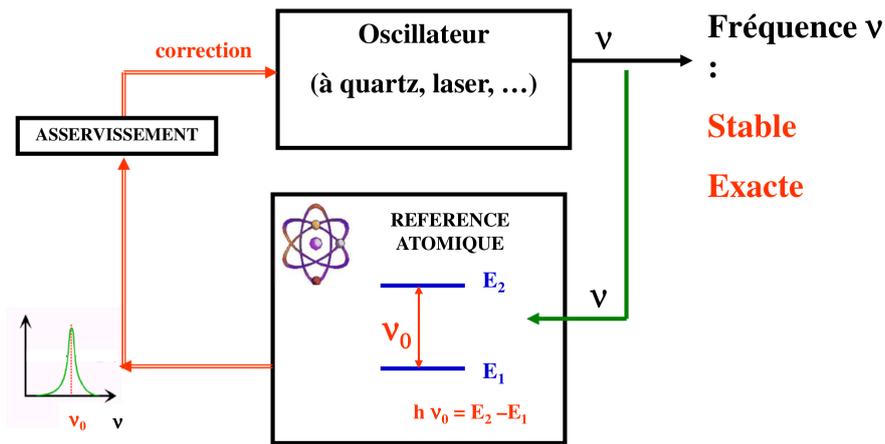


FIGURE 2.2 – Schématisation du principe de fonctionnement d'une horloge atomique.

Le principe de fonctionnement d'une horloge atomique est d'utiliser une propriété intrinsèque aux atomes : les états atomiques sont quantifiés et les niveaux d'énergie associés sont prédictibles grâce à la théorie quantique. Il suffit donc de sélectionner des atomes dont la structure électronique permet d'isoler expérimentalement deux niveaux d'énergie afin qu'ils émettent ou absorbent de manière privilégiée des photons dont la fréquence est extrêmement bien connue et stable. Ces atomes deviennent ainsi une référence pour une mesure de fréquence permettant d'aboutir à une mesure de temps.

Le principe est le suivant (cf. figure 2.2) : Un oscillateur (par exemple à quartz piézo-électrique) émet, à l'intérieur d'une cavité résonnante (cavité de Ramsey), une onde électromagnétique à la pulsation ω_0 proche de la fréquence atomique utilisée. La valeur de la fréquence de l'oscillateur est adaptable et mesurable. Par ailleurs, des atomes sont placés dans un niveau énergétique A et envoyés dans la cavité résonnante, où l'onde les excite. En effet, si la fréquence de l'onde provenant de l'oscillateur est proche de la fréquence de transition des atomes, les atomes vont interagir avec l'onde sous forme d'oscillations de Rabi³. Cette interaction produit un changement d'énergie des atomes, passant de l'état A à l'état B en émettant un photon de pulsation :

$$\omega_{AB} = \frac{E_B - E_A}{\hbar} \tag{2.5.3}$$

3. suite à une impulsion π

avec \hbar la constante de Planck réduite. La probabilité de transition de A vers B est une fonction de ω_0 et prend la forme d'une courbe centrée sur ω_{AB} de largeur $\Delta\omega$. Un compteur, relié à l'oscillateur piézo-électrique, détecte à la sortie de la cavité la quantité d'atomes dans l'état B et asservit ainsi l'oscillateur à quartz de manière à ce qu'il génère une fréquence ω_0 plus proche de ω_{AB} . Autrement dit, le pilotage de la fréquence par l'oscillateur permet à l'horloge d'ajuster la fréquence de ce dernier sur une fréquence qui correspond à une réponse maximale des atomes. Le compteur mesure alors en sortie la fréquence atomique, dite fréquence d'horloge. L'horloge atomique est un oscillateur dont la fréquence est verrouillée sur celle d'une transition atomique. On appelle cette boucle de rétroaction, la boucle d'interrogation-correction.

La largeur de $\Delta\omega$ de la courbe de probabilité de changement d'état d'énergie des atomes dépend directement du temps d'interaction de ceux-ci avec l'onde impulsée par le quartz : plus le temps est long, plus la largeur diminue, améliorant ainsi la précision de la fréquence ω_0 . Pour augmenter ce temps d'interaction, C. Cohen-Tannoudji, S. Chu, et W. Daniel Phillips ont proposé de refroidir les atomes avec des lasers. Cette préparation d'atomes froids leur a valu le prix Nobel en 1997.

Performances actuelles

Afin de caractériser la stabilité des différentes horloges atomiques, on utilise la variance d'Allan. Son expression est la suivante (UHRICH, 2009) :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \left\langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \right\rangle \quad (2.5.4)$$

où \bar{y}_k et \bar{y}_{k+1} sont des moyennes successives et adjacentes d'écart de fréquence normés (moyennés depuis le début des mesures) instantanées calculées sur une durée d'échantillonnage τ . k est l'indice de numérotation des valeurs de y , qui s'expriment comme :

$$y_k = \left\langle \frac{\delta\nu}{\nu} \right\rangle_k \quad (2.5.5)$$

où $\delta\nu$ est l'erreur de fréquence et ν la fréquence nominale.

Les horloges embarquées dans les satellites GNSS sont, notamment pour le GPS, des horloges au césium, et, pour Galileo, des horloges au rubidium et des masers passifs à hydrogène. L'étude comparée des écarts-types d'Allan⁴ des masers à hydrogène des satellites Galileo, des horloges au rubidium de Galileo, et des horloges des satellites GPS (cf. figures 2.3 2.4a 2.4b) montre que, pour des intervalles de temps inférieurs à trois heures, les masers sont les horloges les plus stables en orbite (WALLER et collab., 2008). Au delà, ils présentent des perturbations frappant également les autres horloges. En effet, les horloges au rubidium des satellites Galileo ont des performances comprises entre celles du maser et celles des horloges des satellites GPS et connaissent après trois heures, ces mêmes perturbations.

4. L'écart type d'Allan est égale à la racine carré de la variance d'Allan.

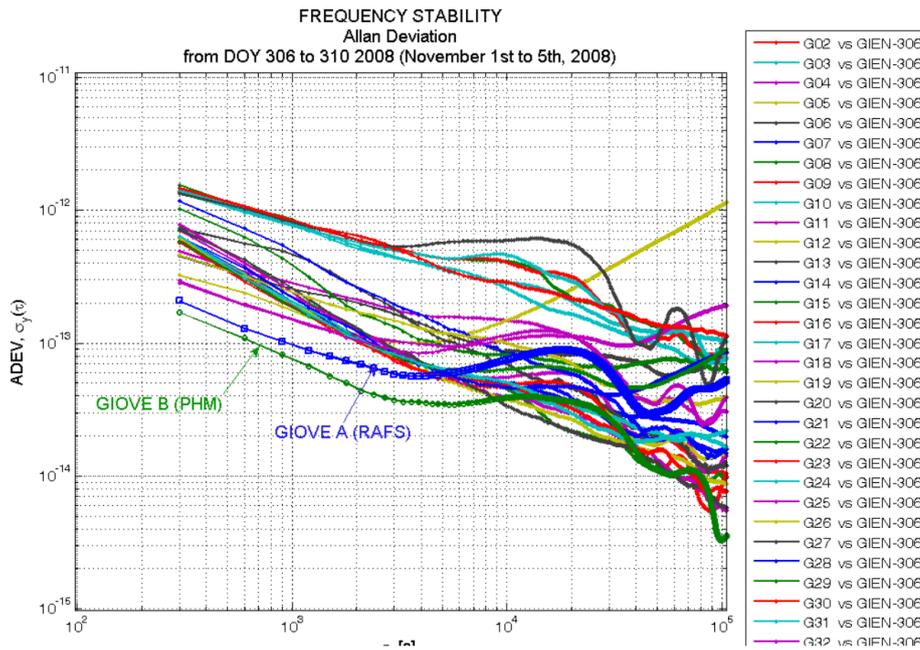


FIGURE 2.3 – Écart-types d’Allan comparés pour les horloges de GIOVE-A, GIOVE-B et des satellites GPS (WALLER et collab., 2008)

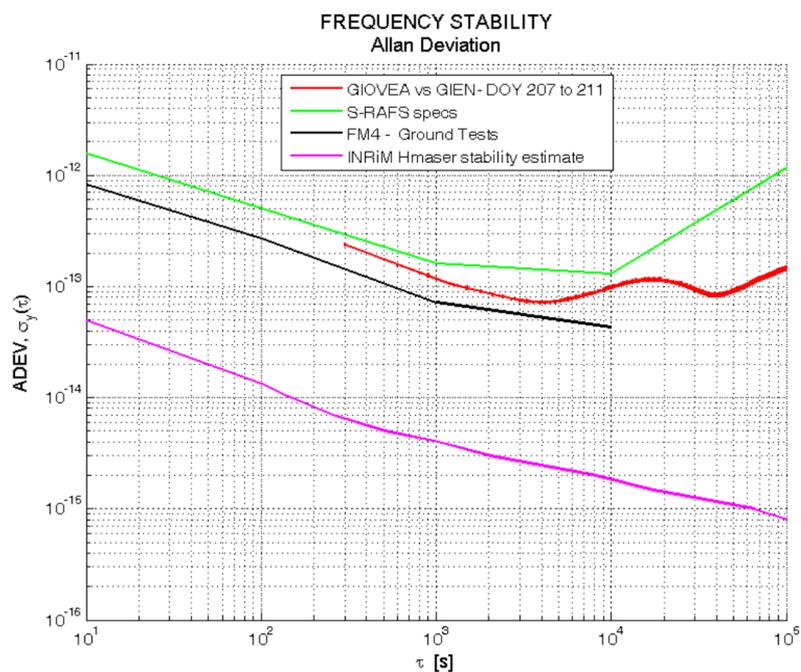
La figure 2.5 montre les écart-types d’Allan modifiés (MDEVs) pour différentes horloges du GPS et de Galileo (PRANGE et collab., 2014). Pour un temps d’intégration de 1000s les MDEVs sont entre $3 \cdot 10^{-14}$ et $7 \cdot 10^{-14}$. Elles décroissent en $\tau^{-\frac{1}{2}}$, qualité caractéristique du bruit blanc de fréquence (voir section 3.2.7). La “bosse” autour de 2100s est due à des effets systématiques aux fréquences orbitales et correspond à une erreur sur la composante radiale de l’orbite estimée (MONTENBRUCK et collab., 2015). En effet, une erreur sur la composante radiale de la position du satellite impacte directement la détermination de l’horloge. Au moins 75% de cet effet est dû à une mauvaise modélisation de la pression de radiation solaire (cf. section 2.5.2), le reste des effets pouvant résulter des variations de température dans le satellite (MONTENBRUCK et collab., 2015) (cf. section 2.5.2).

L’amélioration de la stabilité des horloges couplée à la compréhension des effets systématiques entachant de biais les mesures réalisées par les horloges sont d’une importance capitale pour le développement des GNSS de nouvelle génération. Ces effets systématiques sur les horloges proviennent notamment des comportements du satellite hôte qui sont mal connus.

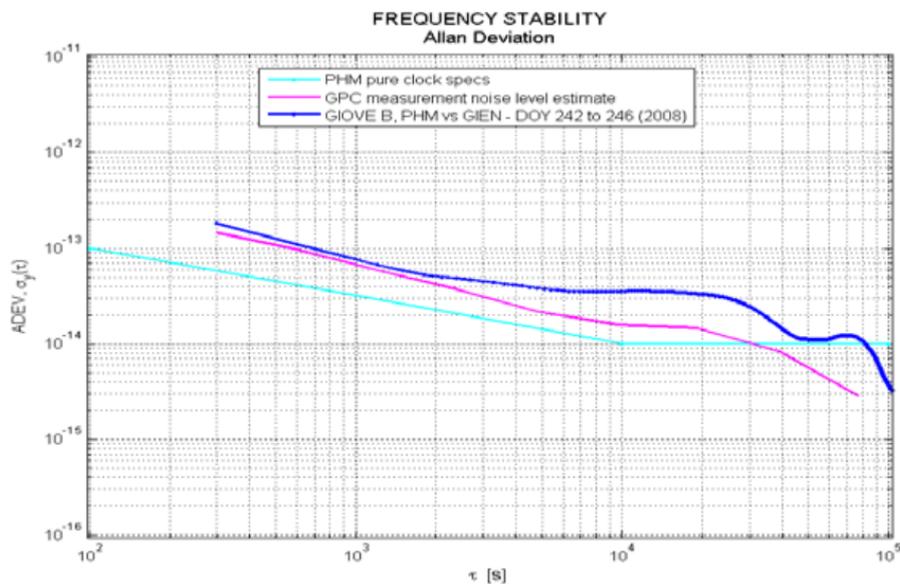
2.5.2 Effets systématiques et modèle de satellite

Modèle de satellite

Les réactions des différents composants du satellite à l’environnement spatial sont des connaissances précieuses mais difficiles à caractériser et à obtenir. Plusieurs gran-



(a) Écart-types d'Allan pour les horloges au rubidium de GIOVE-A (WALLER et collab., 2008)



(b) Écart-types d'Allan pour le maser passif à hydrogène de GIOVE-B (WALLER et collab., 2008)

FIGURE 2.4

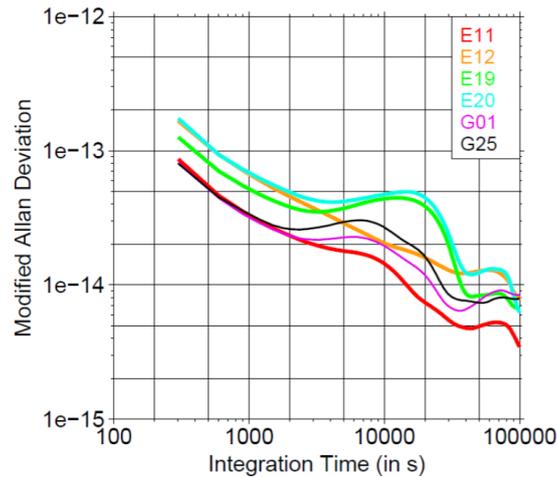


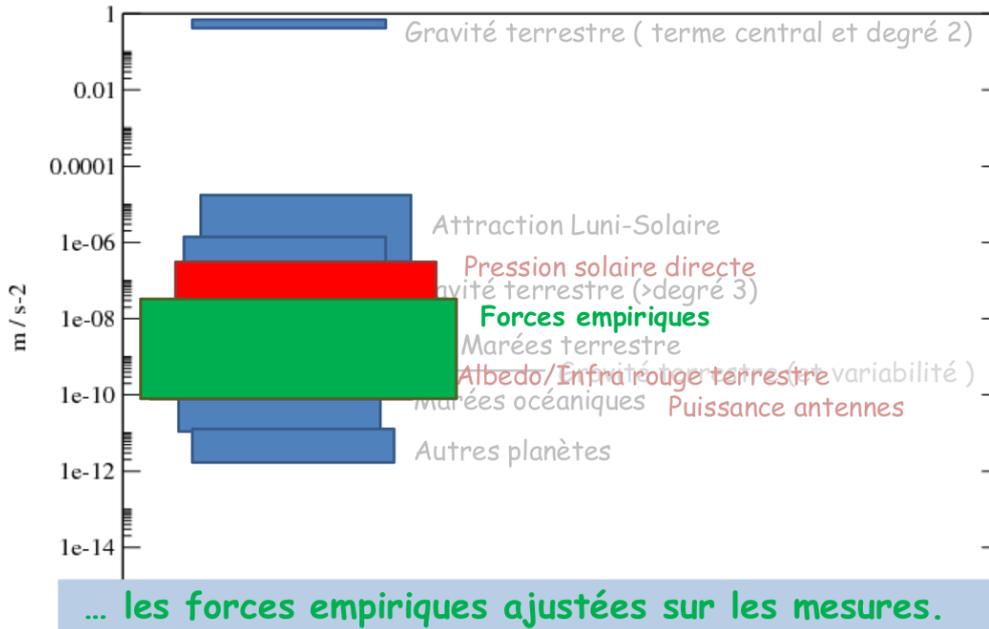
FIGURE 2.5 – Écarts-types d’Allan modifiés pour les horloges des satellites Galileo IOV et pour une horloge du bloc IIF du GPS (PRANGE et collab., 2014)

deux physiques sont susceptibles d’amoinrir les performances des horloges des satellites en entraînant des effets systématiques. Par exemple, bien que les sensibilités aux variations de température du maser passif à hydrogène des satellites Galileo aient été caractérisées au sol (ROCHAT et collab., 2012), et que les satellites soient équipés de capteurs de températures, aucune mesure de ces dernières ne sont disponibles publiquement. Or, plusieurs facteurs provenant soit de l’environnement spatial (rayonnement) soit des satellites eux-mêmes (propulseur, alimentation des antennes) peuvent induire d’importants écarts de température (estimation à 0,5K suivant MONTENBRUCK et collab. (2012) pour des satellites GPS de block IIF).

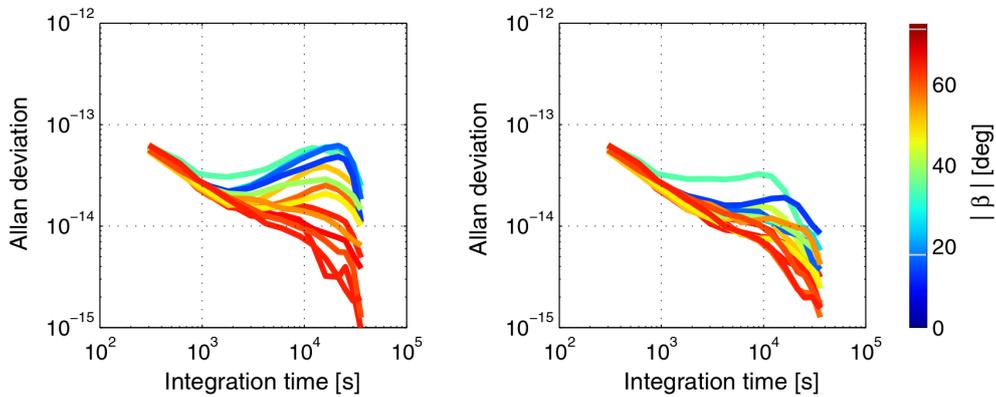
La connaissance des variations de grandeurs physiques (comme la température ou le champ magnétique ambiant) auxquelles sont soumises le satellite, mais aussi la réaction des composants de ce dernier dans le milieu spatial, sont des données qu’il est nécessaire de connaître précisément, notamment si l’on souhaite investiguer des domaines d’exactitude plus importants. En outre, la mauvaise modélisation des forces non-gravitationnelles dans la restitution d’orbite peut entraîner une erreur d’orbite imputable sur le positionnement.

Modélisation des forces non-gravitationnelles

Les deux principales sources d’accélération non-gravitationnelle sont la pression de radiation solaire directe et l’albédo (cf. figure 3.4). Ces deux forces surfaciques sont compliquées à modéliser puisque les propriétés optiques et thermiques des satellites (macro-modèles) sont encore une fois mal connues et présentent des erreurs allant de 20% à 100 % selon les cas (LOYER, 2015). Pour compenser ces forces surfaciques, on ajoute dans le processus de restitution d’orbite des forces empiriques, permettant alors d’obtenir des orbites cohérentes avec les mesures (cf. figure 2.6a).



(a) Ordre de grandeur des différentes composantes de l'accélération d'un satellite GNSS (LOYER, 2015).



(b) Écart-types d'Allan du maser passif à hydrogène de IOV-1 où l'orbite du satellite a été déterminé sans (à gauche) et avec (à droite) un modèle rectangulaire de satellite (MONTENBRUCK et collab., 2015).

FIGURE 2.6

Déterminer les paramètres importants jouant dans les modèles de forces surfaciques est une tâche complexe. Par exemple, la forme du satellite joue un rôle prépondérant dans la modélisation de la force de pression de radiation solaire (cf. figure 2.6b). Le passage dans le macro modèle d'une forme cubique vers une forme rectangulaire des satellites Galileo a permis d'améliorer de façon significative les erreurs radiales d'orbite (9 à 5cm sur la technique de *tracking* par laser du satellite - SLR) (MONTENBRUCK et collab., 2015).

Cependant, deux limitations apparaissent avec cette méthode : les paramètres ajustés sont partiellement corrélés aux autres paramètres présents dans une restitution globale (comme les coordonnées des stations, les désynchronisations d'horloges, etc) et l'ensemble des composantes des forces surfaciques ne se retrouve pas complètement absorbé (LOYER, 2015).

Effet de la géométrie

Une erreur sur la modélisation de orbites se traduit directement par des variations de la fréquence de l'horloge mesurée puisque les solutions d'horloges sont obtenues entre autre par l'ajustement des mesures 1-voie. Ainsi, une erreur d'orbite de Δx sur la ligne de visée (*Line of sight* - LOS) correspond directement à une erreur sur l'estimation de la phase de l'horloge de $\approx \frac{\Delta x}{c}$ (DELVA et collab., 2015).

Les erreurs sur les éphémérides des satellites sont généralement plus petites sur la composante radiale du mouvement du satellite que sur les composantes non-radiales. Il est plus difficile pour le segment de contrôle d'observer le mouvement des satellites à travers ces composantes puisqu'elles ne se projettent pas significativement sur la ligne de visée (KAPLAN et HEGARTY, 2005).

Outre la caractérisation des composants du satellite, la géométrie relative entre le segment spatial et le segment utilisateur/contrôle (évalué avec le critère de dilution de la précision, DOP) et les forces non-gravitationnelles, le lien entre l'utilisateur et le satellite est aussi, comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, une source d'erreur induisant une limitation importante des performances actuelles des GNSS.

2.5.3 Modèle de troposphère

Nous avons vu dans la section 2.2.4 qu'il est possible de supprimer les effets de l'ionosphère au premier ordre par une combinaison linéaire de phase. Les effets ionosphériques du second ordre produisent un délai sur le *range* de l'ordre de 2cm (HERNÁNDEZ-PAJARES et collab., 2014). Son effet sur l'orbite des satellites en produits finaux est de l'ordre de 1cm sur la composante Z et d'environ 20ps sur les horloges embarquées. Après correction, l'impact de cet effet sur un positionnement précis est de l'ordre du millimètre, ce qui est négligeable au vu des performances actuelles.

Pour corriger l'effet troposphérique, on utilise des modèles qui dépendent de l'angle d'élévation du satellite (*Mapping Function*). Ces modèles se distinguent en deux groupes :

les modèles orientés géodésie et les modèles orientés navigation. Le premier groupe utilise des données météorologiques locales à l'utilisateur, et dépend ainsi de la qualité de ces données, tandis que le second n'en utilise pas.

Cependant, l'incertitude encore élevée de cet effet réside principalement dans la composante humide, variant rapidement dans le temps et dans l'espace. Cette limite reste une des principales sources d'incertitude du positionnement par GNSS.

2.5.4 Produits

Éphémérides	Latence	orbites	horloges	PPP journalier
Radio-diffusées	Temps réel	1 <i>m</i>	5 <i>ns</i> (1,5 <i>m</i>)	-
IGS temps réel	15 secondes	3 <i>cm</i>	250 <i>ps</i> (7,5 <i>cm</i>)	-
IGS ultra-rapides	3-9 heures	3 <i>cm</i>	150 (4,5 <i>cm</i>)	-
IGS rapides	17-41 heures	2,5 <i>cm</i>	75 <i>ps</i> (2,5 <i>cm</i>)	3 – 7 <i>mm</i>
IGS finales	12-18 jours	2,5 <i>cm</i>	75 <i>ps</i> (2,5 <i>cm</i>)	2,5 – 5 <i>mm</i>

TABLEAU 2.1 – Latences et exactitudes des différentes éphémérides produites par l'IGS.

Les produits issus de l'IGS (Dow et collab., 2009) sont donnés dans le tableau 2.1 en coordonnées géocentriques cartésiennes. Hormis pour les orbites prédites, les limites des exactitudes sont issues de la comparaison avec des données SLR indépendantes.

Pour aller au delà des performances actuelles, plusieurs solutions sont envisagées :

Accéléromètre : Cette technologie permettrait d'améliorer la connaissance sur l'orbite réelle des satellites au travers notamment de la mesure des forces d'origine non-gravitationnelle agissant sur les satellites.

Horloges ultra-stable : Des horloges plus stables se traduisent par des bruits moins importants et des mesures plus précises.

Études en amont sur composants : La caractérisation des propriétés optiques et thermiques des composants du satellite dans l'environnement spatial permet de réduire les effets systématiques.

Mesure in-situ : Les données d'attitude bord corrélées aux réponses des composants du satellite réduisent les effets systématiques.

Liens inter-satellites : Un grand nombre d'avantages semble naître de l'échange d'informations entre satellites.

Dans la section suivante, nous allons passer en revue les différentes études réalisées sur les liens inter-satellites dans une constellation GNSS.

2.6 Liens inter-satellites

2.6.1 Généralités

On appelle lien inter-satellites (ISL) un signal contenant une information que peuvent s'échanger directement deux satellites d'une constellation GNSS. Ce signal peut être l'équivalent d'une mesure *range*, autrement dit de pseudo-distance comme pour les liens descendants classiques entre un satellite et une station; on parle alors de *cross-link ranging* ou de *inter-satellite ranging*. Dans le cadre de cette thèse, nous utiliserons simplement l'expression "liens STS" (*satellite-to-satellite*) pour parler des mesures de pseudo-distances entre satellites.

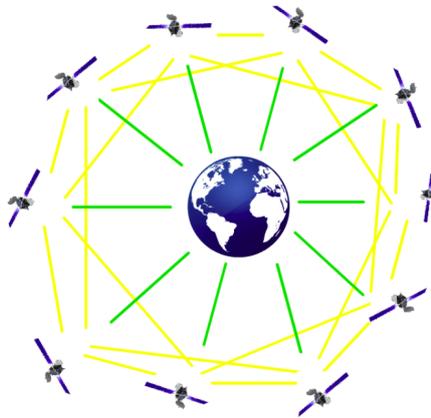


FIGURE 2.7 – Schématisation de l'augmentation du nombre de mesures en présence d'ISL.

De plus, l'information peut aussi être l'ensemble des paramètres d'observation de l'environnement local du satellite, comme les mesures in-situ (température, mesures inertielles, informations sur l'état de l'horloge) évoquées dans la section précédente, et/ou le message de navigation contenant l'ensemble des paramètres de la constellation. On parlera alors de liens de communication (*communication links* ou *crosslink data*).

Dans le domaine de la navigation, on peut juger des performances d'un système au travers de quatre paramètres (WOLF, 2000c) :

- son exactitude : elle est définie par le type de lien utilisé et l'exactitude des éphémérides prédites. Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, elle peut être améliorée par : les combinaisons de signaux utilisés, l'augmentation de la fréquence de mises à jour des éphémérides radio-diffusées et l'amélioration des modèles utilisés pour leur construction, l'amélioration des performances des horloges.
- sa disponibilité : elle est caractérisée par la géométrie relative des constellations sol et espace et le nombre de satellites en état de fonctionnement ("santé" du satellite).

- la continuité de son service et l'intégrité : elles caractérisent la confiance que l'utilisateur peut avoir dans les performances affichées du service. Elle s'exprime sous la forme d'une probabilité de panne associée à un délai d'alerte (*Time To Alert-TTA*). Pour améliorer l'intégrité, les corrections d'éphémérides doivent être disséminées à une fréquence élevée et avec un délai faible entre les mesures et les corrections diffusées.

Qualitativement, on comprend que les liens inter-satellites sont une technologie ayant un impact bénéfique dans l'ensemble de ces quatre critères, notamment la navigation, avec la détermination des orbites et des désynchronisations d'horloges (ODCS - *Orbit Determination and Clock Synchronisation*), et le contrôle de l'intégrité.

On peut séparer en différentes stratégies l'utilisation des ISL :

1. STS + calcul des ODCS au sol : on attend une amélioration de l'exactitude du message de navigation radio-diffusé par les stations, et une réduction du besoin du segment sol en terme de stations de suivi.
2. STS + calcul des ODCS au sol + crosslink data : réduction significative du besoin du segment sol. Un seul satellite a besoin d'être en vue d'une station ULS pour que l'ensemble de la constellation soit à jour.
3. STS + calcul à bord des ODCS + crosslink data : On parle ici de navigation autonome. Les satellites peuvent déterminer leur position relative et mettre à jour de façon quasi-instantanée les éphémérides de la constellation. Le raccordement au référentiel terrestre doit cependant être entretenu pour les applications au sol.

En outre, les deux derniers points permettent d'effectuer un contrôle de l'intégrité directement à bord du satellite, réduisant drastiquement les délais d'alerte. Notons que lorsque le processus de calcul est embarqué, il est possible d'avoir un contrôle de l'intégrité et une détermination des ODCS quasi-instantanés.

2.6.2 Détermination de l'orbite et des paramètres d'horloges

Comme évoqué succinctement dans la partie 2.3.1, le bloc IIR de la constellation GPS est équipé de liens inter-satellites ; il est nommé AUTONAV pour *AUTO*nomous *NAV*igation. Ce système permet au satellite de calculer de façon autonome son orbite et ses paramètres d'horloges grâce à : des liens STS, des liens de communication et un centre de calcul embarqué. Pour cela, il est nécessaire au préalable de télécharger un jeu d'orbites prédites et des corrections d'horloges valables pour une période de 210 jours (MENN et BERNSTEIN, 1994). L'objectif est de pouvoir naviguer de façon autonome pendant 180 jours. Les ISL du système AUTONAV sont des liens Two-way dans le domaine radio et utilisent une technique de séparation TDMA. De plus, grâce à son canal de communication, chaque satellite peut disséminer les éphémérides enregistrées aux autres satellites. Le besoin du segment sol est alors radicalement réduit, notamment vis-à-vis de la Master Station. Cette dernière voit typiquement les satellites GPS deux fois par jour, transmettant les orbites prédites et calculées sur la base des observations des dernières 24h écoulées. Le système de communication inter-satellites couplé avec une procédure

d'ajustement embarquée permettrait une véritable navigation autonome avec un taux de mises à jour des éphémérides extrêmement court (de l'ordre de quelques minutes).

Théoriquement, le principe est le suivant : si l'accès au segment de contrôle est impossible, le système AUTONAV permet grâce aux mesures de pseudo-distances STS de synchroniser les horloges de la constellation et de déterminer ses éphémérides et ses paramètres d'horloges de façon autonome. Sans ce système et sans le lien au sol, la synchronisation des horloges divergerait très rapidement (trois jours) (MARTOCCIA et collab., 1998). Cependant, ce système est à ce jour désactivé et semble ne pas être en capacité d'opérer de façon nominale (MENN et BERNSTEIN, 1994).

La thèse de WOLF (2000c) a permis de souligner les différents apports des ISL dans une constellation GNSS. Elle propose d'étudier les ISL dans un contexte technologique optimal : tous les paramètres des satellites sont ajustés à bord et dans une même procédure. L'ajustement est en temps réel (pas d'itération) et permet de corriger les orbites enregistrés dans les satellites. La procédure est comparable à l'ajustement des réseaux géodésiques, à la différence que dans les systèmes standards l'orbite des satellites est estimée indépendamment pour chaque satellite. Or avec les liens STS, l'orbite d'un satellite devient corrélée à celle des autres satellites, permettant la suppression d'effets systématiques relatifs à l'observation quasi-radiale et d'améliorer la confiance dans les prédictions d'orbites.

En simulant différents types de constellation (IGSO, GEO-LEO, MEO-MEO, LEO-LEO), WOLF (2000c) et HAMMESFAHR et collab. (1999) concluent que :

- La connaissance des trois composantes du mouvement des satellites est améliorée lorsque l'on ajoute des mesures STS. Le calcul des corrections d'horloges et d'orbites peut être effectué à bord du satellite en temps réel (*autonomous onboard determination*) ou au sol. Ceci entraîne une meilleure exactitude sur le positionnement de l'utilisateur (meilleure UERE - (*User Equivalent Range Error*)).
- L'amélioration de la détermination des éphémérides est rendue possible grâce à l'observation de nouveaux plans dans la géométrie de la constellation satellite. La couverture d'observation est meilleure et la disponibilité des satellites est alors très fortement augmentée. En effet, le facteur de DOP est moindre et la nouvelle LOS des liens STS, en étant proche de la composante tangentielle du mouvement du satellite, est sensible aux variations non radiales des mesures de pseudo-distances.
- En comparaison au système classique où les corrections sont déterminées par les stations de contrôle, les liens ISL permettent une mise à jour des paramètres en temps quasi-réel (*high update rate*) ; on passe de quelques heures à quelques minutes.
- Les observables entre les satellites permettent aussi d'avoir des mesures sur l'orbite d'un satellite qui n'est pas visible par les stations sols (effet de pont).
- Les observables STS ont l'avantage de ne pas traverser la troposphère, et d'être faiblement soumises aux effets de l'ionosphère.

- Lorsque des manœuvres de navigation sont effectuées, il est possible, grâce à la détermination autonome des éphémérides, de retrouver les performances nominales dans des délais plus courts.
- L'augmentation des observations (cf. figure 2.7), couplée à une navigation autonome, permet de réduire drastiquement le besoin en segment sol, tout en augmentant cependant l'effort de développement du segment espace. On comprend alors que les liens ISL peuvent être un véritable atout géo-stratégique.

Concernant les résultats quantitatifs pour la détermination d'orbites issues de (WOLF, 2000c), plusieurs précautions sont à prendre : Dans un premier temps, la méthodologie utilisée est à considérer : l'étude est basée sur les résultats d'un logiciel prenant en compte une grande quantité d'effets perturbateurs et de sources de bruit. Cependant, la contrepartie de la forte complexité d'un modèle est la complexité à décorréler les différentes sources d'erreurs dans le bilan quantitatif d'erreur fourni par l'analyse ; les résultats risquant alors de devenir illisibles. De plus, les bruits incorporés aux systèmes ne sont pas réalistes et cette étude ne s'inscrit pas entièrement dans un paysage technologique contemporain.

Suite à ces deux travaux, l'ESA a entrepris le développement d'une série d'études sur l'implémentation des ISL dans la constellation Galileo. Par ordre chronologique : GNSSPLUS (ARONA et collab., 2008), ADVISE (FERNÁNDEZ et collab., 2011), ADVENT, et ADVISE+ (nous ne discuterons pas des performances des deux derniers, les notes techniques n'étant pas disponibles).

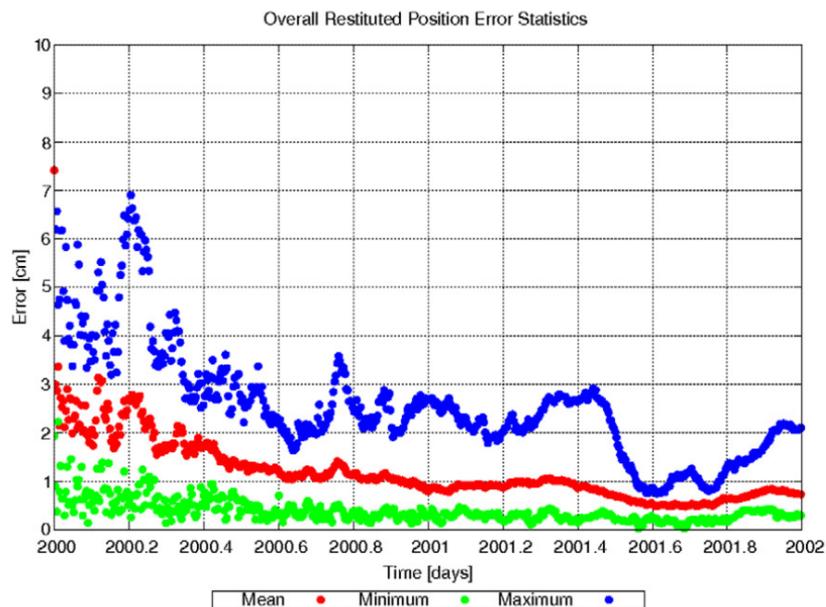


FIGURE 2.8 – Exactitudes atteintes par le processus de détermination d'orbite du logiciel de simulation GNSS (FERNÁNDEZ, 2011).

Ces études ont pour but de définir l'architecture d'un système réaliste augmenté de liens ISL, et de définir sa faisabilité technologique. Le système étudié dans [FERNÁNDEZ \(2011\)](#) utilise des signaux dans la bande radio K avec un accès par TDMA : une matrice définit l'ordre d'observation des paires de satellites, avec pour but de minimiser le temps entre les observations consécutives d'un même satellite. Les liens sont des deux-voies asynchrones (*sequential two-way*). L'erreur sur les orbites et les synchronisations d'horloges estimées est inférieure au décimètre (cf. figure 2.8). Le bruit des liens est estimé à $0,4ns$ soit une dizaine de centimètres. Cette étude cherche à déterminer le domaine d'exactitude atteignable par un système augmenté. Cependant, la complexité des modèles utilisés combinée à l'absence d'un système témoin qui permettrait la comparaison des performances avec le système augmenté de lien ISL, rend la lecture des résultats difficiles (robustesse faible).

2.6.3 Contrôle de l'intégrité

Le contrôle de l'intégrité effectué par des liens de type sol-espace est limité par ([FERNÁNDEZ, 2011](#)) :

- le passage du signal dans l'atmosphère et l'environnement du récepteur (trajets multiples, interférences, etc) ;
- la durée totale du processus de contrôle de l'intégrité ;
- l'absence de prise en compte des données bord ;
- l'observation restreinte de la géométrie de la constellation de satellites.

Les travaux de [WOLF \(2000c\)](#) ont abouti au développement d'un algorithme de contrôle de l'intégrité pour un satellite en navigation autonome équipé de ISL ([WOLF, 2000a](#)). L'intégrité est contrôlée ici par une combinaison de trois tests : un test excluant des mesures trop bruitées, un filtre de Kalman permettant de détecter les augmentations lentes d'erreurs sur la position et les paramètres d'horloges, et enfin un test de khi-deux pour détecter les augmentations rapides des erreurs. Pour les différents scénarios étudiés, les délais d'alerte (TTA) sont inférieurs à 3s. La réponse rapide du système de contrôle, en plus d'être due au nombre important de mesures disponibles et à leur répartition dans différents plans de la géométrie, provient d'une diffusion directe de la défaillance du satellite vers l'utilisateur.

[RODRÍGUEZ-PÉREZ et collab. \(2011\)](#) proposent un système de contrôle d'intégrité pour le système Galileo basé sur des mesures STS de pseudo-distances et des mesures Doppler en two-way par accès TDMA. La détection des sauts de phase et de fréquence et des dégradations sur l'horloge dépend fortement du type de bruit ajouté.

D'autres études ([XU et collab., 2011](#); [ZHAO et collab., 2011](#)) appuient ces résultats démontrant la faisabilité du contrôle de l'intégrité par un système embarqué s'appuyant sur des ISL.

Suite à l'ensemble de ces travaux, il devient clair que les liens inter-satellite semblent être une piste sérieuse pour l'amélioration de l'ensemble des critères requis d'un GNSS. En effet, l'amélioration des domaines d'exactitudes atteints pour la détermination des

orbites et des désynchronisations d'horloges des satellites, la robustesse et la confiance dans le contrôle d'intégrité du système, ainsi que sa disponibilité sont unanimement présentés par les précédents travaux comme des qualités améliorées de façon significative par les liens inter-satellites.

À partir de ces différentes connaissances sur le paysage actuel des GNSS et dans l'optique d'étudier l'impact des liens inter-satellites dans ces constellations, nous allons dans le prochain chapitre, présenter notre travail, c'est à dire la méthodologie utilisée et le logiciel que nous avons entièrement construit.

Chapitre 3

Logiciel

*« If you wish to make an apple pie
from scratch, you first have to invent
the Universe. »*

Carl Sagan

Sommaire

3.1 Présentation de l'étude	72
3.1.1 Problématique	72
3.1.2 Méthodologie	72
3.1.3 Hypothèses	73
3.2 Simulation	74
3.2.1 Généralités	74
3.2.2 Principe	75
3.2.3 Équations du mouvement	76
3.2.4 Pseudo-temps de vol pour un lien STG	79
3.2.5 Pseudo-temps de vol pour un lien STS	86
3.2.6 Produits de la Simulation	89
3.2.7 Sources d'erreurs	89
3.3 Analyse	93
3.3.1 Généralités	93
3.3.2 Principes	93
3.3.3 Paramètres ajustés	94
3.3.4 Nouvelle modélisation de l'observable	95
3.3.5 Ajustement	100

3.1 Présentation de l'étude

3.1.1 Problématique

Les travaux présentés dans le chapitre précédent suggèrent de considérer activement les liens inter-satellites pour l'amélioration à la fois des performances d'un système de positionnement, mais aussi de sa robustesse. La critique que l'on peut porter à ces travaux est que l'expérience de la réalité est souvent plus complexe que sa théorie. Bon nombre d'effets ne sont effectivement pas modélisés dans les études présentées, et même si le lecteur saisit l'avantage qualitatif d'un système augmenté de liens inter-satellites, qu'en est-il du réel gain quantitatif et du véritable impact de cette nouvelle technologie introduite dans le système ?

L'idéal pour répondre à cette question serait d'avoir des données réelles permettant de comparer les performances entre un système classique, composé seulement des observables standard entre stations et satellites (*Space-to-Ground*, *STG*), et d'un système ayant en plus des observables *STG*, des observables entre les différents satellites (*Space-to-Space*, *STS*). L'étude des bilans d'erreurs de ces deux systèmes permettrait alors de quantifier le gain acquis par cette augmentation du système.

Puisque les données réelles de ces observables *STS* dans un système GNSS ne sont pas accessibles¹, nous entreprenons dans cette thèse de réaliser cette étude comparative à l'aide de données simulées. Sous certaines hypothèses restrictives, nous souhaitons quantifier l'amélioration d'un système Hybride vis à vis d'un système Classique.

Après avoir détaillé la méthode choisie pour répondre à cette problématique, nous présenterons le logiciel construit spécialement dans le cadre de cette thèse pour mener à bien notre étude.

3.1.2 Méthodologie

Une façon de répondre à la problématique présentée ci-dessus est de réaliser une étude différentielle entre deux systèmes :

- Le premier système est le SYSTÈME CLASSIQUE avec seulement des observables *STG*. C'est le cas des GNSS actuels.
- Le second système possède à la fois ces observables *STG*, mais aussi des observables *STS*. Ce système augmenté de liens inter-satellites est appelé SYSTÈME HYBRIDE.

L'étude comparative nous permet d'établir, pour une même application donnée, les différences de performance entre les deux systèmes. La méthodologie de notre travail consiste en premier lieu à modéliser les observables de ces deux systèmes dans le même cadre physique, et en second lieu, à établir un budget d'erreur quantitatif prenant en

1. Les données issues des liens inter-satellites du bloc IIR du GPS, permettant de rendre autonome la constellation pendant 180 jours, n'ont pas été rendues publiques et ne permettent donc pas de conclure sur les performances d'un système augmenté.

compte différentes sources d'erreurs. Ces dernières peuvent provenir à la fois des modèles utilisés, mais aussi des instruments (cf figure 3.1).

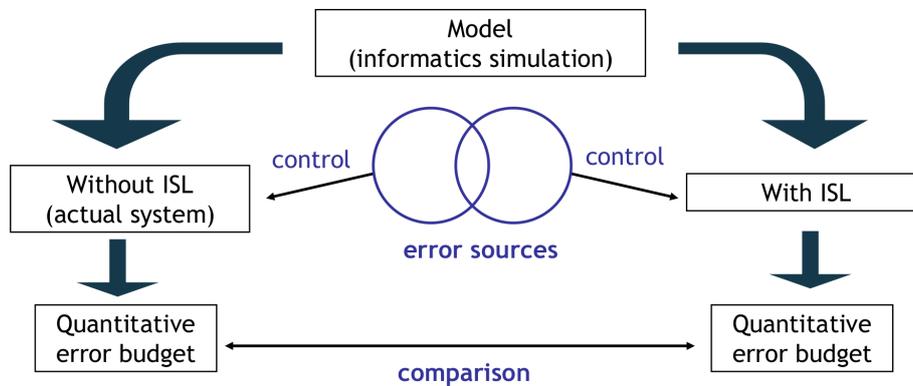


FIGURE 3.1 – Méthodologie de l'étude réalisée. Les deux systèmes, avec et sans liens ISLs, sont étudiés dans le même cadre physique. L'analyse des bilans d'erreur quantitatifs émanant des sources d'erreurs permet de comparer ces deux systèmes sous hypothèses équivalentes et ainsi de définir leurs avantages relatifs.

Pour réaliser cette étude, nous avons codé un logiciel construit en deux parties distinctes :

1. Une simulation qui calcule les observables *pseudo-ranges* relatives aux deux systèmes.
2. Une analyse qui prend en entrée les *pseudo-ranges* simulés afin de retrouver, par l'intermédiaire d'une procédure d'ajustement non-linéaire, les conditions initiales de la simulation.

Les différences résultant de cet ajustement servent à construire un budget d'erreur quantitatif qui dépend des sources d'erreurs introduites dans l'étude. Ce budget d'erreur nous permettra d'établir les mérites des différents systèmes pour une application donnée.

3.1.3 Hypothèses

Contrairement aux autres travaux portant sur les liens inter-satellites détaillés précédemment (cf. 2.6), le but de notre étude est de déterminer les avantages *relatifs* aux deux configurations - Classique et Hybride. Nous ne souhaitons nullement effectuer une démonstration des performances maximales d'une configuration. Même si nous tenons compte des derniers travaux réalisés pour définir les limites actuelles des GNSS standard ainsi que les stratégies de communication inter-satellites, nous réalisons ici une démonstration de principe visant à quantifier les différences relatives entre les deux systèmes.

En conséquence du caractère différentiel de cette étude, les inexactitudes introduites dans les modèles physiques considérés ne sont pas critiques : elles seront partagées par

les deux systèmes analysés sous hypothèses équivalentes. Pour notre étude, il est donc suffisant d'étudier les principales sources d'erreurs.

De plus, nous nous plaçons dans un repères inertiel Géocentrique et considérons des signaux iono-free. Le but étant d'avoir une lecture claire des résultats en attachant de l'importance aux sources d'erreurs critiques.

3.2 Simulation

3.2.1 Généralités

La simulation est écrite en fortran 90 et correspond à 23 000 lignes de code non compilées. Son objectif est de générer la totalité des observables possibles pour un jeu de satellites et de stations donné. Ces observables sont sous la forme de pseudo-temps de vol entre deux objets, satellites ou stations. Elles sont équivalentes aux observables *pseudo-ranges* divisées par la vitesse de la lumière dans le vide. Nous stockons ces observables dans deux fichiers distincts : l'un regroupant les pseudo-temps de vol entre les satellites et les stations (STG- *space to ground*), l'autre regroupant les pseudo-temps de vols entre les paires de satellites (STS - *space to space*).

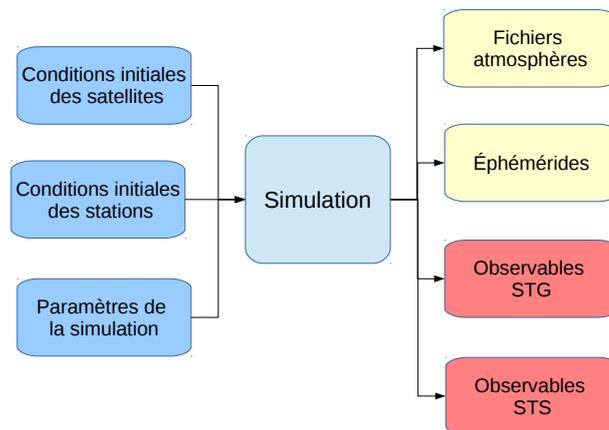


FIGURE 3.2 – Schéma récapitulatif des entrées et sorties de la simulation.

On réunit en deux groupes les différentes entrées nécessaires au lancement de la simulation (voir figure 3.2) :

- *Conditions initiales* : ce sont les paramètres ajustés plus tard par l'Analyse. Elles correspondent aux positions initiales, vitesses initiales et paramètres d'horloges des satellites et des stations. On les notera respectivement $\mathbf{X}_s(t_0)$, $\mathbf{V}_s(t_0)$, \mathbf{H}_s pour les satellites et $\mathbf{X}_g(t_0)$, \mathbf{H}_g pour les stations. La vitesse des stations n'est pas estimée dans la version actuelle de la simulation.
- *Paramètres de la simulation* : ce sont les paramètres qui ne seront pas ajustés par l'Analyse. On peut citer par exemple le temps d'intégration, la présence de la tro-

posphère dans notre simulation, le modèle d'orbite choisi, la précision requise pour le calcul du temps de vol, etc.

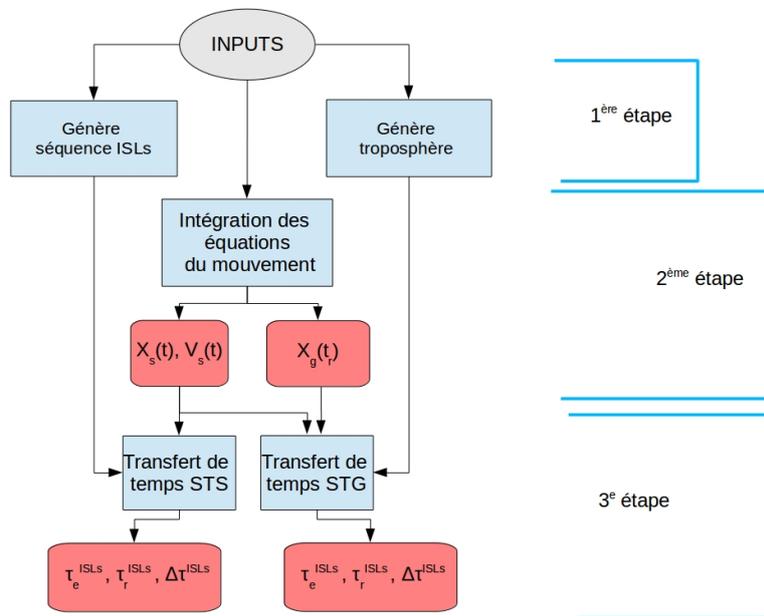


FIGURE 3.3 – Flowchart de la simulation.

3.2.2 Principe

Nous pouvons séparer le processus de calcul de notre simulation en trois axes majeurs (cf figure 3.3) :

1. *Lecture des conditions initiales et lancement des processus secondaires* : dans la première partie de la simulation, on commence par lire et allouer les conditions initiales aux classes satellites et stations. Ce démarrage permet de lancer le calcul de différents processus secondaires, comme la construction de la classe troposphère (cf 3.2.4) et la construction de la séquence générale de liens inter-satellites (cf 3.2.5).
2. *Intégrations des équations du mouvement des différents objets* : dans la seconde partie, on intègre numériquement les équations du mouvement des satellites, et analytiquement les équations du mouvement des stations (cf section 3.2.3). Grâce aux éphémérides ainsi générées, on pourra interpoler les positions des satellites aux temps souhaités dans la dernière partie de la simulation.
3. *Calcul du temps de vol* : finalement, la troisième partie de la simulation permet de calculer pour les deux types de liens, et ce de façon séparée, le temps de vol entre les différents objets. Cette opération commence par un test de visibilité commune

pour chaque couple d'objets. Puis on calcule le temps de vol avec un algorithme géométrique et on effectue la transformation temps coordonnée vers temps local pour les observables et les temps d'émission ou de réception (sections 3.2.4 et 3.2.5).

À la fin du processus de calcul, la simulation construit trois types de produits (voir figure 3.2) :

- *Ephémérides* : les positions et vitesses des objets à différentes époques sont enregistrées dans leurs classes respectives et stockées dans autant de fichiers qu'il y a d'objets.
- *Observables* : les pseudo-temps de vols, avec les temps d'émission et de réception respectifs sont stockés dans les deux fichiers d'observations.
- *Produits secondaires* : certains produits générés au cours de la simulation sont enregistrés, comme par exemple l'évolution des grandeurs physiques liée à la génération de l'atmosphère ou les polynômes de l'interpolation².

3.2.3 Équations du mouvement

Pour décrire les trajectoires spatio-temporelles des différents objets, nous avons choisi de travailler dans le cadre de la métrique GCRS et de donner les équations du mouvement sous leur forme cartésienne. Les conditions initiales des satellites sont extraites de fichiers RINEX GPS accessible sur le site de l'IGN (<http://rgp.ign.fr/SERVICES/outils.php>) et les positions initiales des stations sont issues des données du site de l'IGS (<http://igs.org/network>).

Satellites

On utilisera les équations du mouvement issues de BRUMBERG (1991) pour décrire l'orbite des satellites dans le repère géocentrique. Ces équations sont de la forme :

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_s^i}{dt^2} = F_0^i + F_1^i + F_2^i + F_3^i + \dots + c^{-2} \sum_{n=1}^6 \phi_n^i \quad (3.2.1)$$

où $\mathbf{x}(t)$ est le vecteur position en coordonnées géocentriques en fonction du temps géocentrique t . Dans cette expression, les composantes newtoniennes de l'accélération, F^i , ont été séparées des termes d'origine relativiste, ϕ^i . Comme décrit dans BRUMBERG (1991), les termes F_0^i correspondent aux termes képlériens de l'accélération, F_1^i sont les termes dus à la non-sphéricité de la Terre, F_2^i sont les accélérations perturbatrices causées par les autres corps du Système Solaire, et F_3^i sont des termes de couplage provenant du caractère non-inertiel du repère GCRS. En ce qui concerne les composantes relativistes de l'accélération, ϕ_1^i sont les termes dits de Schwarzschild, ϕ_2^i modélisent l'effet de Lense-Thirring causé par la rotation terrestre, ϕ_3^i sont les termes relativistes dus à la non-sphéricité de la Terre, ϕ_4^i sont les corrections relativistes de l'interaction

2. Les polynômes de Lagrange sont construits en amont une seule fois pour tous les points de l'orbite calculés par l'intégration. Cette procédure nous permet de ne pas avoir à les reconstruire à chaque itération de la routine de calcul du temps de vol

entre la Terre et les autres masses, ϕ_5^i sont les termes relativistes de marées, et ϕ_6^i sont des corrections relativistes causées par les autres masses et apparaissant à la suite de la transformation du repère BCRS au repère GCRS.

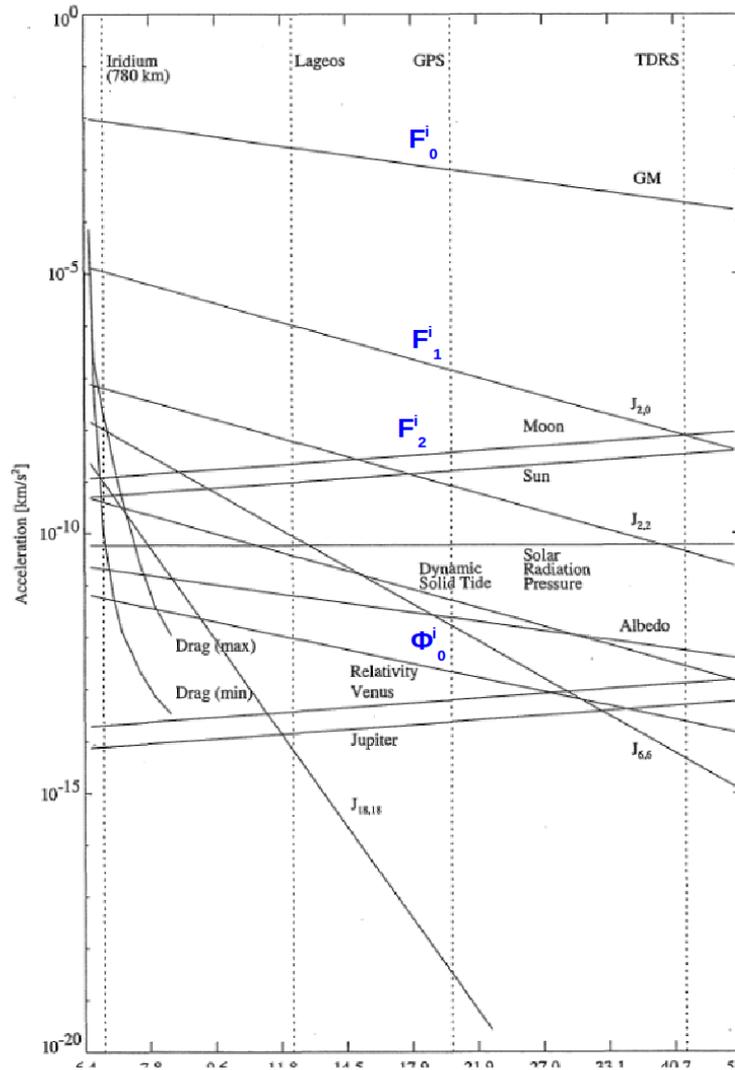


FIGURE 3.4 – Ordre de grandeur des accélérations perturbatrices agissant sur différentes classes de satellites (MONTENBRUCK et EBERHARD, 2000).

La figure 3.4 présente l'ordre de grandeur des différentes accélérations, d'origines gravitationnelles et non-gravitationnelles, auxquelles sont soumis les satellites. Les termes d'origine gravitationnelle mentionnés dans l'équation (3.2.1) sont indiqués en bleu sur la figure. En outre, on notera que la principale accélération perturbatrice d'origine non gravitationnelle agissant sur les satellites GNSS provient de la force de pression de radiation solaire.

Dans la version actuelle du logiciel, nous avons implémenté le premier terme newtonien F_0^i correspondant au monopole du potentiel de la terre, ainsi que le premier terme relativiste ϕ_1^i , correspondant à la précession du périégée de l'orbite. L'équation du mouvement de nos satellites en coordonnées géocentriques est donc (BRUMBERG, 1991) :

$$\frac{d^2 x_s^i}{dt^2} = \frac{GM_E}{r^3} \left[-x^i + \frac{\left(4 \frac{GM_E}{r} - \dot{x}^k \dot{x}^k \right) x^i + 4x^i \dot{x}^k \dot{x}^i}{c^2} \right] \quad (3.2.2)$$

où r est le rayon de l'orbite, \dot{x} la vitesse géocentrique, G la constante de la gravitation et M_E la masse de la Terre.

Pour les termes F_1^i de l'accélération, nous avons codé une solution du potentiel gravitationnel terrestre basé sur le modèle de potentiel EGM2008. Ce dernier, construit à partir de fonctions harmoniques sphériques, est développé jusqu'à l'ordre et degré 2159. L'équation du potentiel développé en harmonique sphérique s'exprime sous la forme (MURRAY et DERMOTT, 1998) :

$$U = \frac{GM_T}{r} \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{r} \right)^l \bar{P}_{lm}(\sin \phi) (\bar{C}_{lm} \cos(l\lambda) + \bar{S}_{lm} \sin(m\lambda)) \quad (3.2.3)$$

où a_e est le demi-grand axe terrestre issu du modèle de potentiel considéré, $(\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm})$ sont les coefficients de Stokes normalisés issus du modèle, \bar{P}_{lm} sont les fonctions de Legendre normalisées et (r, ϕ, λ) sont les coordonnées sphériques de l'objet subissant le potentiel.

Nous n'avons pas encore implémenté dans le logiciel cette solution pour le calcul des termes F_1^i de l'accélération.

Stations

Les solutions des équations du mouvement des stations sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} x_g(t) &= x_g(t_0) \cos(\omega_E t) - y_g(t_0) \sin(\omega_E t) \\ y_g(t) &= x_g(t_0) \sin(\omega_E t) + y_g(t_0) \cos(\omega_E t) \\ z_g(t) &= z_g(t_0) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

où $x_g(t_0), y_g(t_0), z_g(t_0)$ sont les positions cartésiennes initiales de la station et ω_E est la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

Intégrateur numérique

Les équations du mouvement des satellites sont intégrées numériquement à l'aide d'un intégrateur issu de la librairie `rksuite` disponible sur `netLib`. Cet intégrateur utilise une méthode de type Runge et Kutta d'ordre 7–8 à pas de temps variable (BRANKIN et collab., 1993). Le lecteur pourra se référer à FLANNERY et collab. (1992) pour une description détaillée des méthodes Runge et Kutta, soulignant leurs différences avec les autres méthodes disponibles. Puisque les orbites sont quasi-circulaires, et les périodes

d'intégration courtes, nous allons voir que cet intégrateur obtient des performances suffisantes lors de nos applications.

Pour notre étude, nous avons besoin d'intégrer les orbites des satellites sur des durées proches de la journée. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, les éléments osculateurs des orbites des satellites et les paramètres d'horloge sont mis à jour plusieurs fois par jour dans les différentes constellations GNSS. Les arcs d'intégration correspondant à des fractions de journée dans la réalité, nous avons besoin que les résultats de l'intégration numérique aient une exactitude bien meilleure que l'exactitude des produits réels diffusés, soit $2,5\text{cm}$ en produits finaux GPS (cf. <http://igs.org/products>).

Afin de tester l'intégrateur RK8, nous avons calculé analytiquement la solution des équations du mouvement d'un problème à deux corps régis par un mouvement képlérien pour un temps d'intégration de deux jours, puis nous avons calculé la solution de ce même problème avec RK8.

Nous pouvons voir sur la figure 3.5a que pour une durée d'intégration de 10^5s (soit l'équivalent d'un peu plus d'une journée), l'erreur numérique absolue sur l'orbite calculé par RK8 ne diffère pas, par rapport à la solution exacte, de plus de $8\mu\text{m}$ pic à pic pour les composantes cartésiennes de la position, et de plus de 2.10^{-9}m.s^{-1} pic à pic pour les composantes cartésiennes de la vitesse. Cette précision nous suffit amplement pour les différents cas étudiés dans cette thèse.

Interpolation

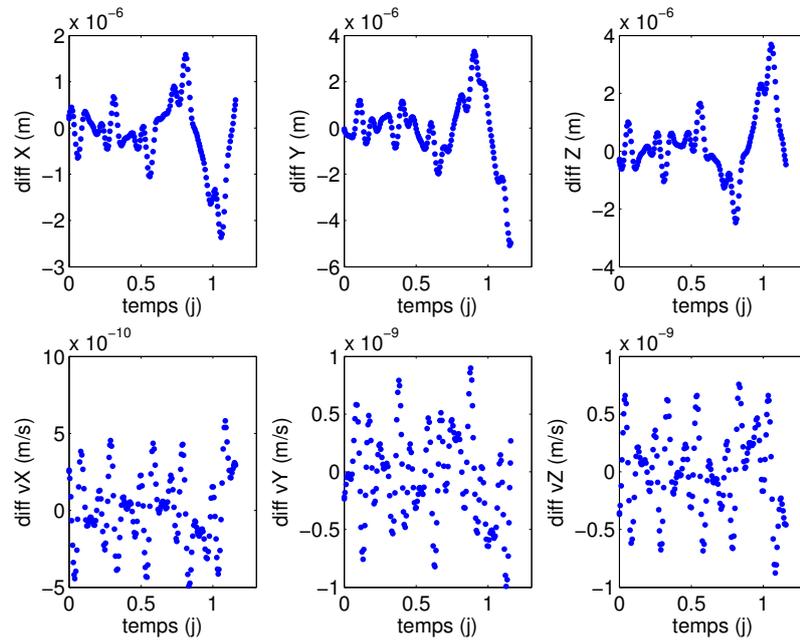
L'intégrateur RK8 fournit la solution échantillonnée au pas de calcul variable mais pas à tout instant. Par conséquent, pour obtenir les positions des satellites aux temps d'émission et de réception, nous avons codé une interpolation de Lagrange d'ordre 8.

La figure 3.5b présente la différence absolue entre la solution exacte calculée à des temps t par l'intégration analytique du problème des deux corps képlérien, et la solution calculée au temps t' par l'intégrateur RK8, puis interpolée au temps t par notre routine. On voit que l'erreur numérique entraînée par notre procédure sur les composantes de la position reste inférieure à $20\mu\text{m}$.

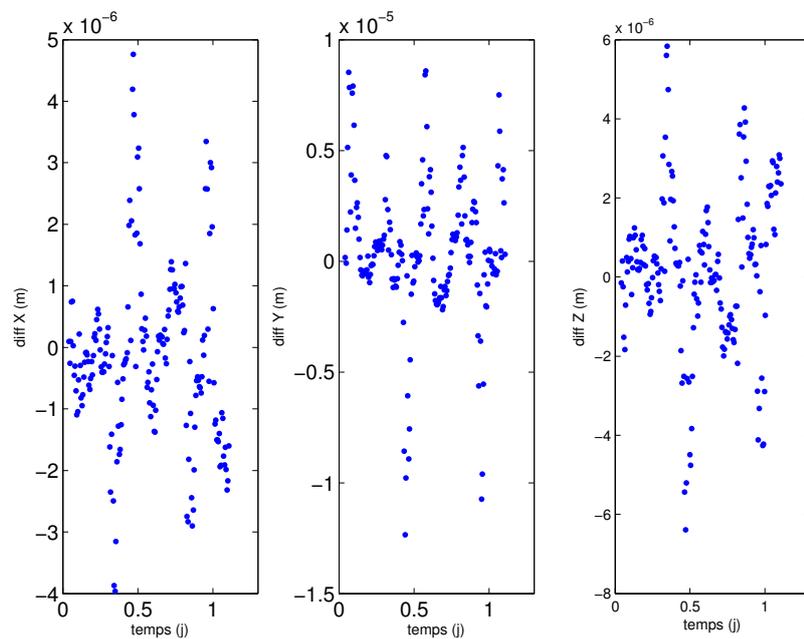
Avec ces différents outils, nous sommes en mesure de connaître la position des différents éléments des constellations sol et espace à tout instant. La prochaine étape est alors le calcul du transfert de temps entre un satellite et une station, ou un satellite vers un autre satellite.

3.2.4 Pseudo-temps de vol pour un lien STG

L'approche méthodologique choisie pour calculer le transfert de temps dans la simulation est fondamentalement la même pour les deux types de liens étudiés. Dans le cadre du transfert de temps STG décrit ici, nous choisissons arbitrairement de fixer les temps coordonnés t_r de réception du signal. Ainsi, les observables sont collectées pour



(a) Différence absolue entre la solution donnée par l'intégration analytique du problème de Kepler et la solution propagée par l'intégrateur RK8.



(b) Différence entre la solution exacte du problème des deux corps képlérien, et la solution numérique calculée par RK8, puis interpolée avec une routine utilisant les polynômes de Lagrange à l'ordre 8.

FIGURE 3.5 – Performance de l'intégrateur et de l'interpolation dans la Simulation

une série de temps coordonnées t_r , tel que $t_r^{i+1} = t_r^i + \delta t$. La durée δt est constante et correspond à l'intervalle entre deux temps coordonnées de réception. On cherche donc à déterminer le temps d'émission t_e , sachant que l'on connaît le temps de réception t_r , la position $x_g(t_r)$ de la station à t_r , et la position du satellite $x_s(t)$ à n'importe quel temps t . Notons que nous avons opté pour ce choix conventionnel afin de fournir des données similaires à celles présentes dans le format de données RINEX.

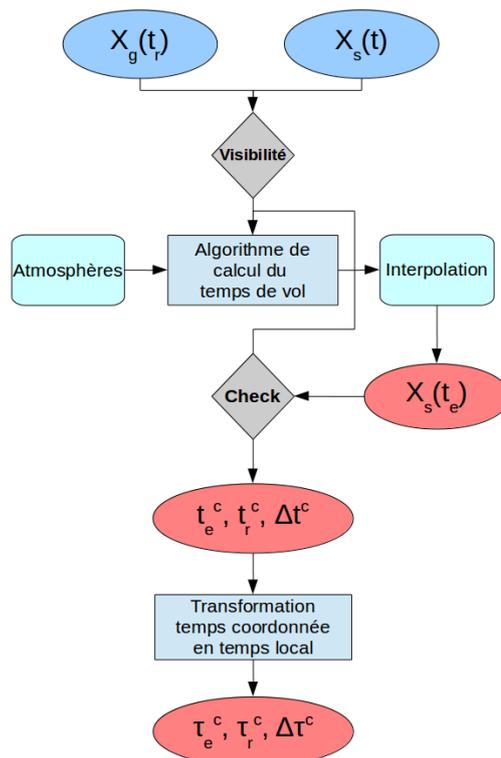


FIGURE 3.6 – Flowchart du calcul du pseudo-temps de vol pour un lien STG.

La stratégie de calcul se résume en trois étapes (cf figure 3.6) :

1. Vérifier que la station à laquelle on veut appliquer le transfert de temps voit le satellite au temps de réception du signal t_r .
2. Déterminer le temps d'émission t_e à partir du calcul du temps de vol.
3. Effectuer la transformation temps coordonnée vers temps local pour avoir accès à l'observable *pseudo-range* sous forme de pseudo-temps de vol : $\Delta\tau = \tau_r - \tau_e$.

Visibilité du satellite

La première étape du transfert de temps STG consiste à vérifier que le satellite émetteur du signal est bien visible par la station réceptrice au sol.

Soit deux vecteurs, \mathbf{R}_g et \mathbf{D} , définis respectivement au temps t_r par le vecteur séparant la station par rapport au centre de masse de la Terre, et le vecteur entre la position de la station et la position du satellite. On définit z comme l'angle entre ces deux vecteurs au temps de réception t_r (cf figure 3.7). Cet angle est appelé distance zénithale et correspond à l'angle de déviation par rapport au zénith. La station verra alors le satellite si et seulement si :

$$\cos(z) \geq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (3.2.5)$$

où α est l'angle limite d'élévation en dessous duquel les satellites ne sont plus visibles par les stations.

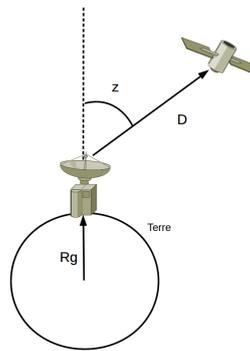


FIGURE 3.7 – Angle de déviation par rapport au zénith.

Résolution numérique du temps de vol

Une fois que l'on a vérifié que le satellite est visible, on procède au transfert de temps. La station recevant le signal au temps t_r , on cherche par conséquent à déterminer le temps d'émission t_e du signal, solution de l'équation :

$$t_r - t_e = \frac{|\mathbf{x}_g(t_r) - \mathbf{x}_s(t_e)|}{c} + \Delta^{tropo} \quad (3.2.6)$$

où Δ^{tropo} est le délai troposphérique en secondes, et dépend de la position $\mathbf{x}_s(t_e)$ du satellite. Cette équation peut se résoudre numériquement par la procédure itérative (Algorithme 1) où η est la précision désirée :

Algorithm 1 - Algorithme de calcul de t_e

Données : $\mathbf{x}_g(t_r)$, t_r , $\mathbf{x}_s(t)$

Initialisation : $i = 0$, $t_e^{(0)} = t_r$

while $|\Delta t^i - \Delta t^{i-1}| > \eta$ **do**

$$t_e^{(i+1)} = t_r - \frac{|\mathbf{x}_g(t_r) - \mathbf{x}_s(t_e^{(i)})|}{c} + \Delta^{tropo}$$

$$\Delta t^{i+1} = \left| t_e^{(i+1)} + \frac{|\mathbf{x}_g(t_r) - \mathbf{x}_s(t_e^{(i+1)})|}{c} - t_r + \Delta^{tropo} \right|$$

$i = i + 1$

end while

return $t_e = t_e^i$,
 $\Delta t = t_r - t_e$

La première étape de cet algorithme est de calculer le temps de vol coordonnée du signal correspondant à la distance géométrique entre la station au temps t_r de réception du signal, et le satellite au temps $t_e^0 = t_r$. Ce temps de vol nous donne alors accès à un nouveau temps d'émission $t_e^1 = t_r - \Delta t$. La seconde étape consiste à calculer le nouveau temps de vol coordonnée correspondant cette fois-ci à la position du satellite au temps t_e^1 , en ayant préalablement déterminé la position du satellite à l'instant t_e^1 . En itérant cette procédure, on calcule précisément le temps d'émission tel que la différence entre les deux derniers temps de vol coordonnée calculés soit inférieure au paramètre η .

La position du satellite est calculée à chaque itération i grâce à notre routine d'interpolation testée précédemment. En sortie de cet algorithme, on a donc accès aux temps coordonnés de réception t_r et d'émission t_e du signal, ainsi qu'au temps coordonnée de propagation du signal Δt .

Délais troposphérique

Modèle de Saastamoinen Le délai troposphérique Δ^{tropo} introduit ci-dessus est calculé à partir du modèle de Saastamoinen (SAASTAMOINEN, 1972). Ce modèle empirique est basé sur des données météorologiques mesurées dans l'environnement proche des stations. Il est intégré dans la simulation de la façon suivante : on munit chaque station de trois vecteurs dans lesquels sont stockés l'évolution en fonction du temps de trois grandeurs physiques : la température, la pression et la pression de vapeur d'eau. Puis, on calcule le délai troposphérique total par la formule :

$$\Delta^{tropo} = \frac{1}{c} \cdot \frac{2.277 \cdot 10^{-3}}{\cos z} \left[p + \left(\frac{1255}{T} + 0.05 \right) e - \tan^2 z \right] \quad (3.2.7)$$

où z est l'angle entre la ligne de visée et le zénith, p est la pression en hPa , e la pression de vapeur d'eau en hPa et T la température en degré Kelvin.

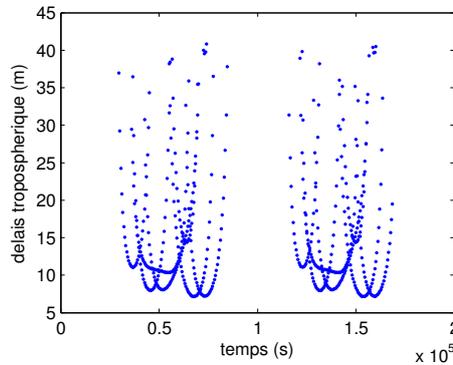


FIGURE 3.8 – Délais troposphérique des lien STG.

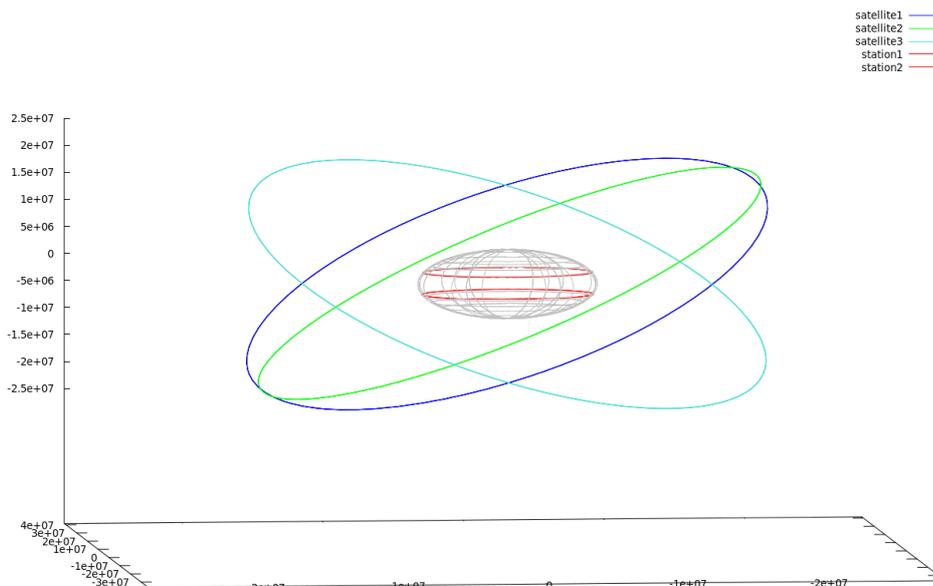


FIGURE 3.9 – Constellations sol et espace utilisées pour faire le test sur les délais troposphériques.

Sur la figure 3.8, on a calculé les délais troposphériques pour une série d'observations entre trois satellites et deux stations (cf figure 3.9). La valeur de ces retards varie selon l'angle d'élévation entre l'horizon de la station et le satellite émetteur. En utilisant le modèle de Saastamoinen, nous trouvons des valeurs comprises entre environ $40m$ pour les plus basses élévations (mais supérieures à 10°) et environ $7m$ pour les plus hautes élévations.

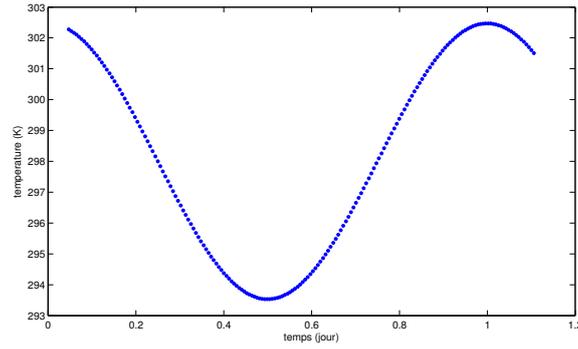


FIGURE 3.10 – Variation journalière de la température.

Évolution des grandeurs physiques Nous supposons que la variation des trois grandeurs physiques présentées ci-dessus est journalière et de la forme :

$$K(t) = \bar{K} \cdot \left[1 + \frac{\nu_K}{100} \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta T} t + \phi\right) \right] \quad (3.2.8)$$

où $K(t)$ est la grandeur physique en fonction du temps, \bar{K} sa valeur moyenne, ν_K est l'amplitude de variation par rapport à la valeur moyenne, ΔT est la période et ϕ la phase.

À titre d'exemple, la figure 3.10 décrit l'évolution de la température simulée d'une station au cours de 24h.

Transformation en temps local

Nous disposons à ce stade du temps d'émission t_e , du temps de réception t_r ainsi que de la durée de temps de vol coordonnée Δt . Il nous reste alors à transformer ces temps coordonnés en temps locaux.

Les corrections d'horloges à apporter peuvent être modélisées par un polynôme du second degré. Les comportements des horloges physiques ainsi que la transformation temps coordonnée-temps propre sont absorbés dans les coefficients du polynôme. Cette méthode est proposée dans l'*Interface Document Control* (GALILEO, 2010) de Galileo. Le polynôme peut s'exprimer sous la forme :

$$\tau(t) = a + bt + ct^2 \quad (3.2.9)$$

où a est un offset de l'horloge, b un offset en fréquence de l'horloge et c un taux de dérive en fréquence de l'horloge. On a ainsi dans le cas d'un lien STG :

$$\tau_s(t_e) = a_s + b_s t_e + c_s t_e^2 \quad (3.2.10)$$

$$\tau_g(t_r) = a_g + b_g t_r + c_g t_r^2 \quad (3.2.11)$$

$$\Delta\tau^C = a_g - a_s + (b_g - b_s) \Delta t + (c_g - c_s) (\Delta t)^2 \quad (3.2.12)$$

où $\tau_s(t_e)$ est le temps d'émission en temps local du satellite, $\tau_g(t_r)$ est le temps de réception en temps local de l'horloge station, et $\Delta\tau^C$ est l'observable pseudo-temps de vol du lien STG.

3.2.5 Pseudo-temps de vol pour un lien STS

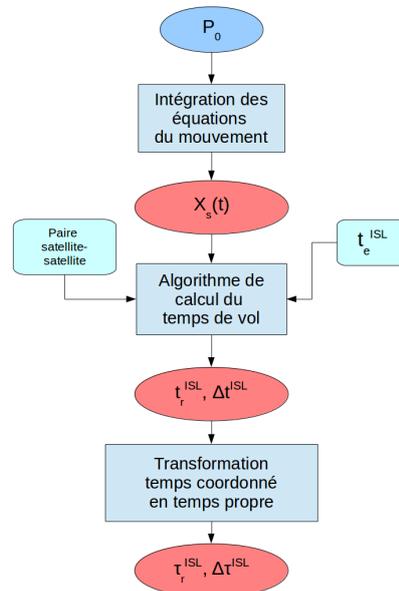


FIGURE 3.11 – Flowchart du calcul du pseudo-temps de vol pour un lien STS.

Notre simulation permet aussi de traiter un échange d’observables *pseudo-ranges* entre deux satellites. La stratégie de calcul est la même que pour les liens STG : on vérifie que les deux satellites sont bien en vue commune, puis on détermine le temps de vol coordonné du signal par un algorithme géométrique (suivant le même processus itératif que l’algorithme 1), et enfin on transforme les temps coordonnés en temps locaux (cf figure 3.11). Cependant, au contraire des liens STG, nous avons choisi pour les liens inter-satellites de fixer le temps d’émission t_e du signal. Le problème est symétrique par rapport à celui vu précédemment : Les observables sont collectées pour une série de temps coordonnés t_e tel que $t_e^{i+1} = t_e^i + \delta t'$ où $\delta t'$ est constant et correspond à l’intervalle entre deux temps coordonnés d’émission. On cherche à présent à déterminer le temps de réception t_r du signal. La position du satellite émetteur $\mathbf{x}_s(t_e)$ à l’instant t_e ainsi que la position du satellite récepteur $\mathbf{x}_g(t)$ à n’importe quel temps t sont connues.

Séquençage des émissions

Comme introduit dans le chapitre précédent, nous avons organisé la stratégie d’émission des signaux entre satellites dans un séquençage prédéfini par l’utilisateur. On appelle *séquence* l’organisation unitaire chronologique des émissions inter-satellites qui se répète tous les $\delta t'$. Dans le tableau 3.1, nous avons représenté une séquence entre trois satellites.

Les colonnes d’une même ligne représentent les émissions simultanées pour les paires de satellites indiquées. Pour un couple de satellites $(i; j)$, on indique dans chaque case par un 1 si le satellite émetteur i envoie un signal vers le satellite récepteur j . On écrit un 0 dans le cas contraire. Chaque ligne correspond à une *sous-séquence*. Pour n

Paires de satellites	(1;2)	(1;3)	(2;1)	(2;3)	(3;1)	(3;2)
Sous-séquences (1)	1	1	0	0	0	0
Sous-séquences (2)	0	0	1	1	0	0
Sous-séquences (3)	0	0	0	0	1	1

TABEAU 3.1 – Séquence entre trois satellites.

sous-séquences, le temps d'émission simultané des signaux t_e correspondant à la sous séquence k sera :

$$t_e = \frac{\delta t}{n} \cdot (k - 1) + N\delta t \quad (3.2.13)$$

où N est le nombre de séquences déjà réalisées.

Par exemple, la séquence représentée dans le tableau 3.1, est composée de trois sous-séquences. Lors de la première sous-séquence, le satellite 1 envoie un signal vers les deux autres satellites. Il est le seul émetteur durant cette sous-séquence, les deux autres étant en mode récepteur. Puis, lors de la deuxième sous-séquence, le satellite 2 devient émetteur, et les satellite 1 et 3 sont récepteurs. Enfin la séquence se finit avec l'émission de signaux par le satellite 3 vers les deux autres satellites.

Ainsi, pour la case correspondant à la ligne 3 et la colonne 5, on a émission d'un signal du satellite émetteur 3 vers le satellite récepteur 1 au temps d'émission :

$$\begin{aligned} t_e &= \frac{\delta t}{3} \cdot (3 - 1) + N\delta t \\ &= \delta t \cdot \left(N + \frac{2}{3} \right) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Notons que cette séquence est un exemple parmi d'autres, et que nous n'utiliserons pas celle là dans le chapitre 5.

Grâce à cette organisation des liens STS, il est possible dans notre simulation d'investiguer plusieurs stratégies correspondant à différents scénarios technologiques possibles. En effet, nous pouvons décider qu'un satellite émettant un signal ne peut pas recevoir simultanément un signal provenant d'un autre satellite.

En outre, nous serions aussi dans la mesure d'investiguer quelle géométrie serait optimale pour une constellation GNSS munie de liens STS. Il suffirait d'analyser pour différents jeux de conditions initiales données, quelles paires de satellites échangent le plus de signaux au cours d'une période de révolution de la constellation, et quelles en sont les conséquences sur le positionnement spatio-temporel.

Une fois que la séquence est choisie par l'utilisateur, il est nécessaire de vérifier, afin d'opérer l'échange de signaux, que le satellite récepteur j de la paire $(i; j)$ voit bien le satellite émetteur i .

Visibilité du satellite

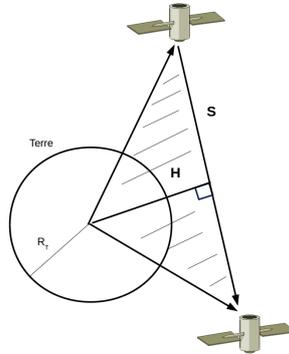


FIGURE 3.12 – Principe de la visibilité entre deux satellites.

Le satellite s_e émet un signal en direction du satellite récepteur s_r au temps t_e . On vérifiera que le satellite émetteur est visible pour le satellite récepteur si et seulement si :

$$H \geq R_T \quad (3.2.15)$$

où R_T est le rayon de la Terre et H est la hauteur du triangle S définie par R_1 , le rayon de l'orbite du satellite s_e au temps t_e , R_2 le rayon de l'orbite du satellite s_r au temps t_e et S la distance séparant les deux satellites (cf figure 3.12).

Temps de vol

Le satellite s_e envoie un signal au temps fixé t_e . Nous souhaitons donc connaître le temps de réception t_r du signal par le satellite s_r , solution de l'équation :

$$t_r - t_e = \frac{|\mathbf{x}_{sr}(t_r) - \mathbf{x}_{se}(t_e)|}{c} \quad (3.2.16)$$

En effet, à la différence de l'équation (3.2.6) du temps de vol coordonnée des liens STG, dans le cas d'un échange d'observables entre deux satellites, le signal ne traverse pas l'atmosphère terrestre³. L'algorithme de calcul de t_r est alors de la même forme que l'algorithme 1.

3. Ceci est une hypothèse simplificatrice de notre étude. En effet, dans la réalité, un lien STS peut-être rasant, voire traverser l'atmosphère.

Transformation temps local

Les transformations en temps locaux dans le cas des liens STS sont données par les formules suivantes :

$$\tau_{se}(t_e) = a_{se} + b_{se}t_e + c_{se}t_e^2 \quad (3.2.17)$$

$$\tau_{sr}(t_r) = a_{sr} + b_{sr}t_r + c_{sr}t_r^2 \quad (3.2.18)$$

$$\Delta\tau^{\text{ISL}} = a_{sr} - a_{se} + (b_{sr} - b_{se})\Delta t + (c_{sr} - c_{se})(\Delta t)^2 \quad (3.2.19)$$

où $\tau_{se}(t_e)$ est le temps d'émission en temps local du satellite émetteur, $\tau_{sr}(t_r)$ est le temps de réception en temps local du satellite récepteur, et $\Delta\tau^{\text{ISL}}$ est l'observable en secondes du lien STS.

3.2.6 Produits de la Simulation

La simulation nous permet de créer, pour les deux systèmes étudiés, des observables comparables. Les fichiers de sorties prennent la forme suivante (cf tableau 3.2) :

i	Emetteur	Récepteur	t_r	t_e	Δt
1	1	1	35600.000...	35599.917...	8.273...E-0002
2	1	2			
...
110	2	2			
111	2	3			

TABLEAU 3.2 – Tableau représentant les données stockées dans les fichiers d'observables.

La première colonne correspond au numéro de l'observation. La seconde et la troisième colonnes sont respectivement les numéros des objets émetteurs et récepteurs. La quatrième, cinquième et sixième colonnes correspondent respectivement au temps local de réception, au temps local d'émission et à l'observable pseudo-temps de vol du signal.

3.2.7 Sources d'erreurs

Bruit horloge

Les bruits des horloges sont calculés grâce aux routines développées par Jean-Yves Richard et utilisées dans le cadre de simulations de données relatives à la mission ACES (*Atomic Clock Ensemble in Space*). Ces routines permettent de générer des bruits colorés en construisant la densité spectrale de puissance au moyen d'une loi de puissance en fréquence, qui s'écrit (UHRICH, 2009) :

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_{\alpha} \cdot f^{\alpha} \quad (3.2.20)$$

où h_α sont des coefficients indépendants de la fréquence.

À chaque terme correspond une modulation de bruit particulière :

- $\alpha = -2$ est un bruit de marche aléatoire en fréquence,
- $\alpha = -1$ est un bruit de scintillation de fréquence (bruit Flicker en fréquence),
- $\alpha = 0$ est un bruit blanc de fréquence,
- $\alpha = 1$ est un bruit de scintillation de phase,
- $\alpha = 2$ est un bruit blanc de phase.

Dans le domaine temporel, la variance d'Allan $\sigma_y^2(\tau)$ peut aussi s'écrire comme une loi de puissance de τ à l'aide des mêmes coefficients h_α . On a en effet :

$$\sigma_y^2(\tau) = h_{-2} \frac{(2\pi)^2}{6} \tau + h_{-1} 2 \ln(2) + h_0 \frac{1}{2\pi} + h_1 \frac{1,038 + 3 \ln(2\pi f_h \tau)}{(2\pi)^2 \tau^2} + h_2 \cdot \frac{3 f_h}{(2\pi)^2 \tau^2} \quad (3.2.21)$$

où τ est la période d'analyse du système et f_h la fréquence de coupure haute du système.

Nous ajoutons à nos temps locaux d'émission et de réception deux types de bruit : un bruit de scintillation de fréquence (bruit Flicker) et un bruit blanc de fréquence. Comme vu précédemment, nous n'attribuons pas les mêmes bruits aux horloges suivant qu'elle appartiennent aux stations ou aux satellites. Pour les satellites nous choisissons, par exemple, au regard des performances actuelles détaillées dans la section 2.5.1 :

- un bruit de scintillation de fréquence (Bruit Flicker⁴) à $6 \cdot 10^{-15}$,
- un bruit blanc de fréquence à $5 \cdot 10^{-13}$ @1s.

Pour les stations :

- un bruit de scintillation de fréquence (Bruit Flicker) à $7 \cdot 10^{-16}$,
- un bruit blanc de fréquence à $1,46 \cdot 10^{-13}$ @1s.

Les écarts-types d'Allan schématisés pour des oscillateurs possédant ces bruits caractéristiques sont représentées par les courbes de la figure 3.13.

Les routines utilisées prennent en entrées les différents coefficients h_α pour des périodes de 1s. Nous présentons ci-dessous comment déterminer ces coefficients.

À l'aide de 3.2.21, nous cherchons le coefficient h_0 d'une horloge du satellite telle que :

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(1) &= (5 \cdot 10^{-13})^2 \\ &= h_0 \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

4. le bruit de Flicker de fréquence est indépendant de la période d'intégration du système.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 2(5 \cdot 10^{-13})^2 \\
 &= 5 \cdot 10^{-25}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.23}$$

Nous obtenons alors pour l'horloge d'un satellite l'écart-type d'Allan présenté dans la figure 3.14.

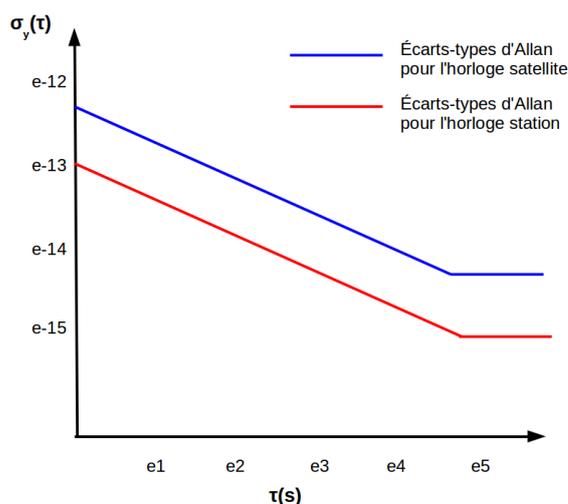


FIGURE 3.13 – Écart-types d'Allan schématisés pour les horloges des satellites (bleu) et des stations (rouge) du système Galileo.

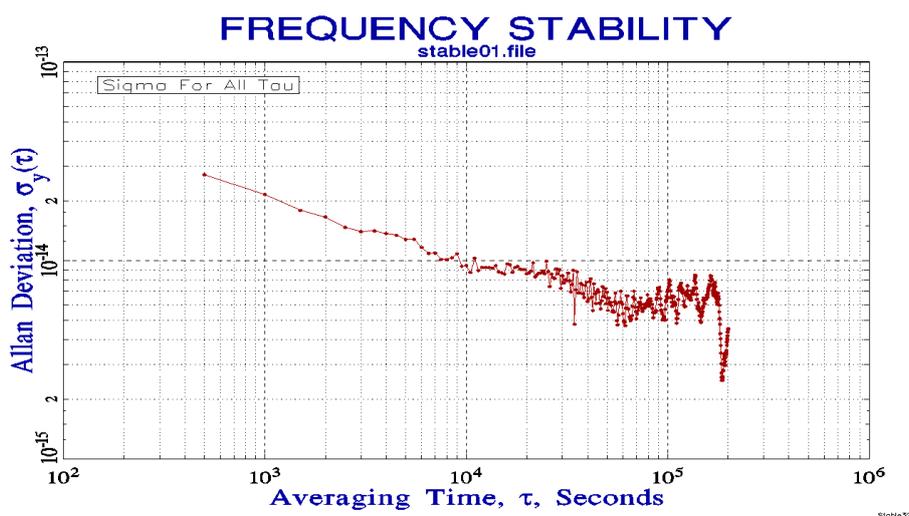


FIGURE 3.14 – Écart-types d'Allan d'une horloge embarquée de notre logiciel.

Biais troposphérique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 (section 2.5.3), l'estimation de l'erreur associée au délai troposphérique est une limite des systèmes actuels. Afin de rendre compte de cette incertitude, nous pouvons introduire un biais sur l'évolution des grandeurs physiques décrites par l'équation (3.2.8). Ce biais est matérialisé par une erreur sur l'amplitude \bar{K} . L'équation tenant compte de ce biais et décrivant l'évolution d'une grandeur physique prend alors la forme :

$$K'(t) = (1 + \zeta) \cdot K(t) \quad (3.2.24)$$

où ζ est le pourcentage d'erreur sur l'amplitude de la fonction périodique $K(t)$. La figure 3.15 montre l'évolution de l'erreur entraînée par un biais de 2% sur la valeur de l'amplitude de la fonction température.

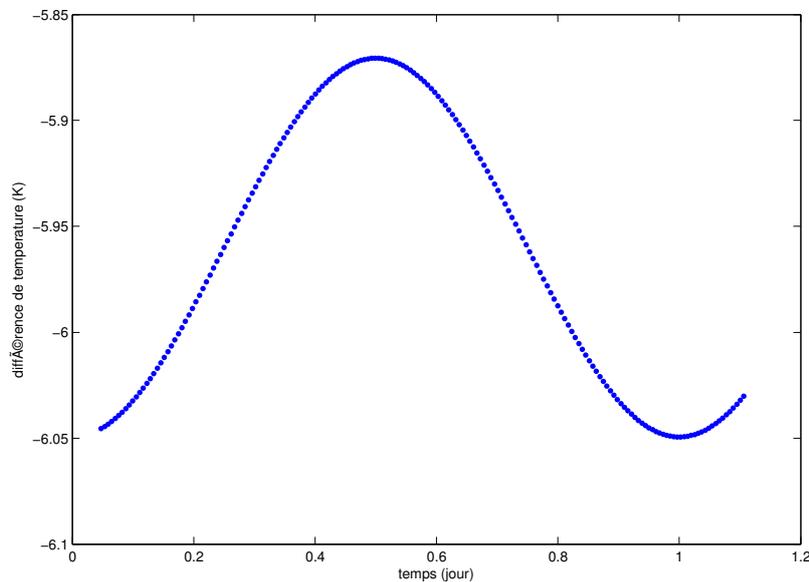


FIGURE 3.15 – Biais troposphérique en température.

3.3 Analyse

3.3.1 Généralités

L'analyse a été écrite en MATLAB et correspond à environ 15 000 lignes de codes non compilées. L'objectif de cette partie du logiciel est le suivant : à partir d'un jeu de conditions initiales perturbées et des observables bruitées de la simulation, l'analyse réalise une procédure d'ajustement non-linéaire afin de retrouver le bon jeu de paramètres initiaux implémenté dans la simulation. Cette procédure d'ajustement est décrite par le schéma de la figure 3.16.

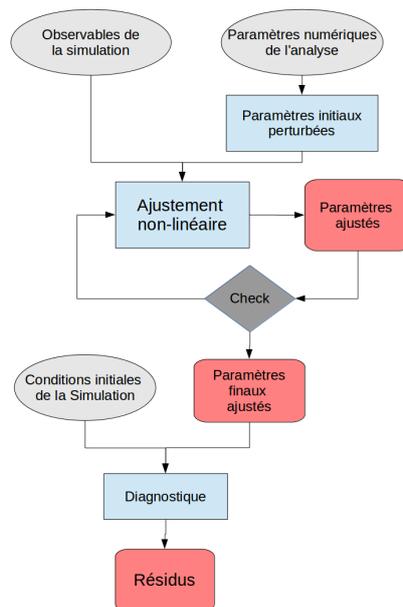


FIGURE 3.16 – Flowchart de l'analyse.

Les entrées de l'analyse sont (cf figure 3.17) :

- Y_{obs} : Les deux fichiers d'observables bruités fournis par la simulation.
- P : Un jeu de paramètres à ajuster.
- Choix de l'utilisateur : Les options numériques de l'analyse qui définissent les choix de l'utilisateur du logiciel : quel système on utilise pour faire l'analyse, quelles perturbations de la simulation on prend en compte, etc ...

3.3.2 Principes

L'analyse peut être scindée en trois sections :

1. La première section correspond à l'initialisation de l'analyse : on définit le système que l'on souhaite utiliser pour retrouver le jeu de conditions initiales de la simulation. Ce choix définit par conséquent quel type d'observables on utilise dans la procédure d'ajustement : liens STG et STS pour le système hybride et liens STG

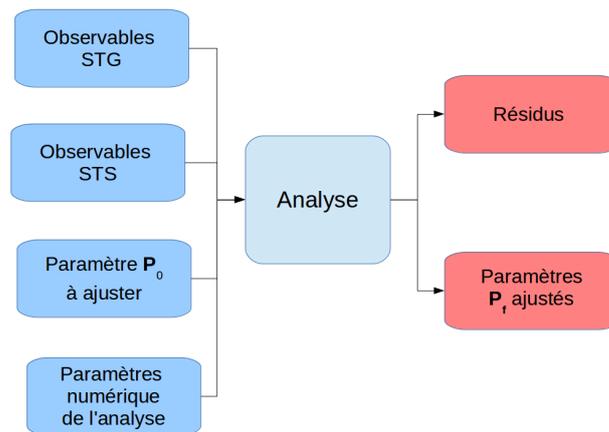


FIGURE 3.17 – Schéma récapitulatif des entrées et sorties de l'analyse.

seulement pour le système classique. En outre, on fixe aussi lors de cette section les valeurs initiales du vecteur paramètres \mathbf{P} que l'on souhaite ajuster. On note ce vecteur initial \mathbf{P}_0 . Dans la version actuelle de notre logiciel, les paramètres ajustables sont les conditions initiales des satellites et des stations, y compris les paramètres d'horloges.

2. Puis, dans la seconde section, on procède à l'ajustement non-linéaire du jeu de paramètres défini précédemment. Le jeu de paramètres initiaux donné en entrée de cette procédure permet de reconstruire les observables \mathbf{Y}_{th} de l'analyse qui seront comparées aux observables \mathbf{Y}_{obs} de la simulation. En sondant l'espace des solutions des paramètres à ajuster, la procédure d'ajustement génère par itérations successives des solutions intermédiaires \mathbf{P}_i jusqu'à converger vers une solution finale \mathbf{P}_f des paramètres qui minimise la différence $\mathbf{Y}_{obs} - \mathbf{Y}_{th}$ au sens des moindres-carrés.
3. Finalement, on compare dans une troisième et dernière section les valeurs des paramètres finaux ajustés \mathbf{P}_f avec les valeurs vraies de ces paramètres, introduites en entrée de la simulation. De plus, nous générons les résidus des observables, ce qui nous permet de construire le bilan d'erreur quantitatif pour un système étudié.

Les sorties de l'analyse sont par conséquent (cf 3.17) :

- \mathbf{P}_f : les paramètres finaux ajustés ;
- \mathcal{R}^i : les résidus des observables entre l'analyse et la simulation ;
- \mathcal{R}'^i : les résidus des trajectoires des satellites et des stations sur la durée de l'arc d'intégration.

3.3.3 Paramètres ajustés

Dans la version actuelle du logiciel, les paramètres à retrouver à partir des observables \mathbf{Y}_{obs} sont les conditions initiales des satellites et des stations (cf. 3.2.1). Par consé-

quent, pour les deux systèmes, Classique et Hybride, le vecteur paramètre \mathbf{P} à ajuster est de la forme :

$$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{X}_s(t_0), \mathbf{V}_s(t_0), \mathbf{H}_s, \mathbf{X}_g(t_0), \mathbf{H}_g) \quad (3.3.1)$$

où $\mathbf{X}_s(t_0)$ sont les positions initiales des satellites au temps t_0 ⁵, $\mathbf{V}_s(t_0)$ sont les vitesses initiales des satellites à t_0 , \mathbf{H}_s sont les valeurs des coefficients du polynôme décrivant le comportement des horloges des satellites, $\mathbf{X}_g(t_0)$ sont les positions des stations à l'instant initial t_0 et \mathbf{H}_g sont les valeurs des coefficients du polynôme décrivant le comportement des horloges des stations.

Notre routine d'ajustement a besoin d'une solution initiale \mathbf{P}_0 pour le vecteur à ajuster. Cette solution initiale est construite à partir des valeurs initiales données en entrée de la simulation que nous perturbons.

Soit par exemple, pour les positions initiales des satellites $\mathbf{X}_s(t_0)$ du vecteur \mathbf{P}_0 :

$$\mathbf{X}_s(t_0) = (1 + \gamma) \mathbf{X}'_s(t_0) \quad (3.3.2)$$

où $\mathbf{X}'_s(t_0)$ sont les conditions initiales du satellite données en entrée de la simulation et γ est la perturbation. Typiquement pour un satellite on peut perturber les conditions initiales d'une centaine de mètres, soit $\gamma = 10^{-5}$.

Le problème que nous étudions étant à symétrie sphérique, il est nécessaire de fixer les axes de notre repère pour obtenir une solution. L'utilisateur du logiciel peut choisir de fixer dans les options numériques de l'analyse les conditions initiales d'un satellite ou d'une station. Cet objet ne fera pas partie du vecteur \mathbf{P} . Il n'aura donc pas ses conditions initiales ajustées qui prendront alors les valeurs rentrées dans la simulation.

3.3.4 Nouvelle modélisation de l'observable

Méthode

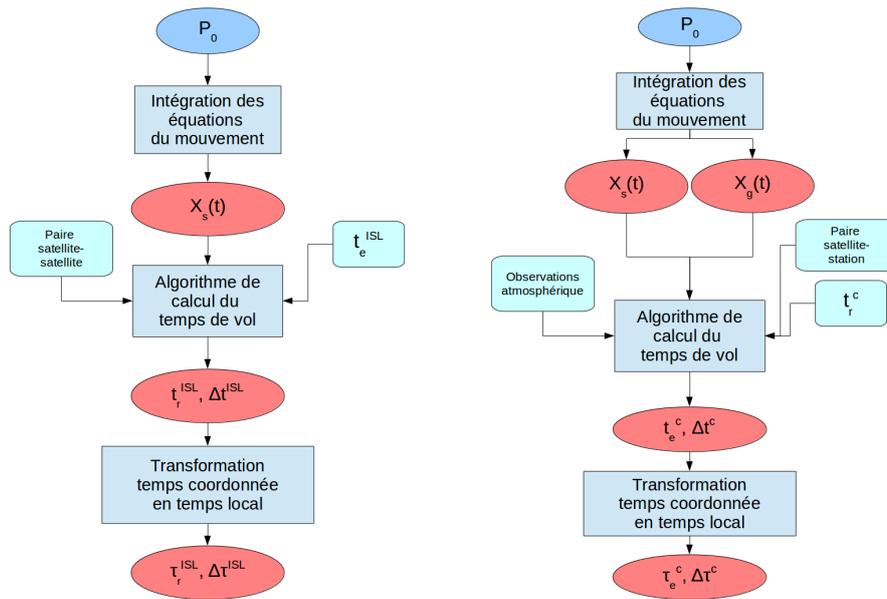
Les routines utilisées dans l'analyse ne sont pas celles de la simulation. Outre le fait qu'elles ne soient pas codées dans le même langage de programmation, elles diffèrent aussi par les méthodes et les algorithmes utilisés. Ce choix de programmation apporte de la robustesse à notre étude tout en facilitant le débogage.

Le modèle utilisé pour l'ajustement permettant de générer les observables \mathbf{Y}_{th} de l'analyse est donné dans la fonction $\mathcal{F}(t_i, \mathbf{P})$. Les entrées que reçoit $\mathcal{F}(t_i, \mathbf{P})$ sont :

- Le vecteur de paramètres à ajuster \mathbf{P} .
- Les temps locaux de réception, respectivement d'émission, des signaux associés à chaque observable $\Delta\tau$ des liens STG, respectivement STS.
- Les paires d'objets $(i; j)$ associées à chaque observable $\Delta\tau$.
- Les vecteurs d'observations de l'atmosphère.

On utilise la même procédure introduite dans la simulation pour construire les observables pseudo-temps de vol (cf figures 3.18b et 3.18a) :

5. t_0 correspond au début de la simulation



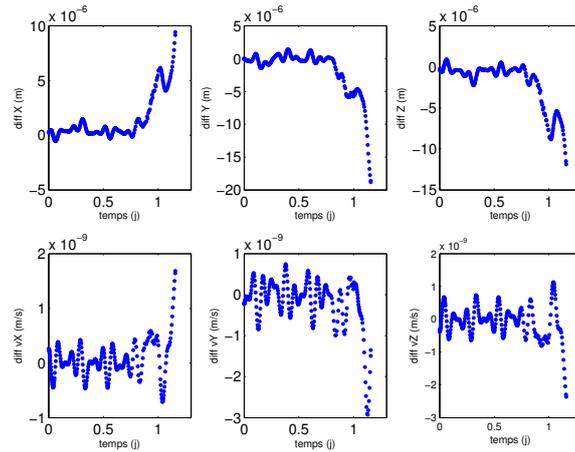
(a) Flowchart du calcul de l'observable STS effectuée par la fonction $\mathcal{F}(t_i, \mathbf{P})$. (b) Flowchart du calcul de l'observable STG effectuée par la fonction $\mathcal{F}(t_i, \mathbf{P})$.

1. À partir d'un jeu de conditions initiales, on intègre les équations du mouvement des satellites et des stations.
2. On identifie la paire d'objets sur laquelle est appliqué le calcul du temps de vol.
3. Dans le cas des liens STG, respectivement STS, on transforme le temps local de réception, respectivement d'émission, donné dans le fichier d'observation, en temps coordonnée, puis on calcule le temps de vol coordonnée Δt entre le satellite et la station. On utilise pour cela le même modèle qui décrit le comportement d'une horloge dans la simulation (cf. 3.2.5 et 3.2.5).
4. Finalement, on effectue la transformation inverse, temps coordonnée vers temps local, pour obtenir l'observable $\Delta \tau$.

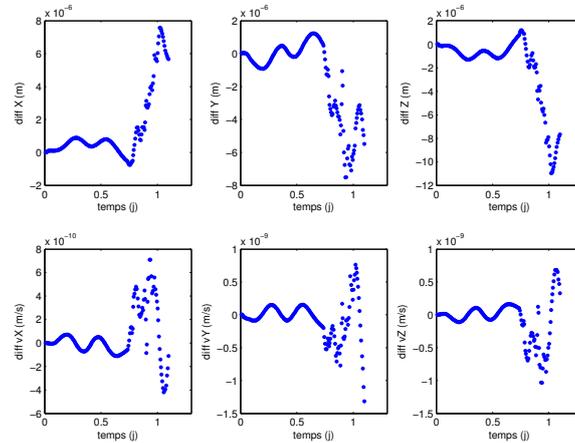
Trajectoires des satellites et des stations

Les orbites des satellites sont calculées numériquement à l'aide de l'intégrateur numérique ode113 pré-fourni par les bibliothèques MATLAB. Ce dernier est un intégrateur à pas et ordre variable qui utilise les prédicteurs-correcteurs de Adams-Bashforth-Moulton d'ordres 1 à 13 (SHAMPINE et GORDON, 1975). Afin de vérifier l'erreur numérique introduite par l'utilisation de cet outil, nous calculons la différence absolue entre la solution des équations du mouvement d'un problème à deux corps régis par un mouvement képlérien, et la solution de ce même problème calculé avec l'intégrateur ode113.

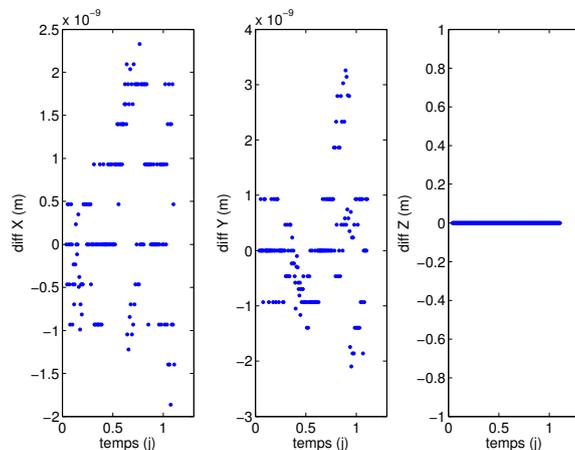
Nous pouvons voir sur la figure 3.19a que pour une durée d'intégration d'un peu plus d'une journée (10^5 s), l'erreur numérique absolue sur l'orbite calculée par ode113 ne diffère pas par rapport à la solution exacte de plus de $20 \mu m$ pour les composantes cartésiennes de la position, et de plus de $4.10^{-9} m.s^{-1}$ pour les composantes cartésiennes de



(a) Différence absolue entre la solution donnée par l'intégration analytique du problème de Kepler et la solution propagée par l'intégrateur ode113 pour la trajectoire d'un satellite.



(b) Différence entre la solution propagée par l'intégrateur RK8 pour le problème des deux corps kélpérien, et la solution calculée par ode113 puis interpolée avec une routine utilisant les polynômes de Lagrange à l'ordre 8 dans le cas d'un satellite.



(c) Différence entre la solution calculée par la simulation et celle calculée par l'analyse pour l'équation du mouvement d'un station.

la vitesse. Ces performances sont environ deux fois moins bonnes que celles de l'intégrateur utilisé dans la simulation. Elles restent néanmoins dans le même ordre de grandeur et seront par conséquent tout à fait suffisantes pour nos applications.

L'intégrateur ode113 étant un intégrateur à pas de temps variable, nous devons utiliser une méthode d'interpolation pour obtenir les positions des satellites aux temps souhaités. Identiquement à la simulation, nous utilisons une interpolation de Lagrange d'ordre 8.

La figure 3.19b présente la différence absolue entre la solution du problème des deux corps képlérien calculée à des temps t par l'intégrateur RK8 de la simulation et la solution calculée au temps t' par l'intégrateur ode113, puis interpolée au temps t par notre routine. L'erreur numérique entraînée par l'interpolation sur les composantes de la position reste comparable aux performances de l'intégrateur ode113, c'est-à-dire environ $10\mu m$ en position et $10^{-9} m.s^{-1}$ en vitesse.

Les positions des stations sont calculées analytiquement avec la formule (3.2.4). La figure 3.19c montre la différence entre la trajectoire d'une station calculée par la simulation, et celle calculée par l'analyse. L'erreur est de l'ordre de $10^{-9} s$ pour les composantes X et Y, et nulle pour la composante Z (la valeur de la position suivant l'axe Z étant constante).

Calcul du temps de vol

Une fois les orbites générées et le système GNSS choisi, on procède au calcul des temps de vol coordonnés.

Dans le cadre du système Classique, on identifie dans le fichier d'observables STG, la station réceptrice, le satellite émetteur et le temps de réception du signal. Similairement, dans le cadre du système Hybride, on répète une deuxième fois cette procédure pour le fichier d'observables STS, en identifiant le satellite émetteur, le satellite récepteur et le temps d'émission du signal. Nous donnerons ici la méthode pour obtenir le temps de réception du signal dans un cas général.

Soit un signal émis au temps t_0 par le satellite dont la position est inconnue. Le satellite récepteur reçoit le signal au temps t_1 . Sa position a été calculée dans la partie précédente. On cherche à déterminer t_1 en fonction de $\mathbf{x}_r(t_0)$, $\mathbf{x}_e(t_0)$ et t_0 . L'équation du temps de propagation $T_{01} = t_1 - t_0$ est de la forme :

$$T_{01} = \frac{\|\mathbf{x}_r(t_1) - \mathbf{x}_e(t_0)\|}{c} + \Delta^{tropo} \quad (3.3.3)$$

On peut donner une expression approchée de la position de la station au temps t_1 en faisant un développement limité au temps t_0 :

$$\mathbf{x}_r(t_1) = \mathbf{x}_r(t_0) + \mathbf{v}_r(t_0)T_{01} + \mathbf{a}_r(t_0)\frac{T_{01}^2}{2} + O(T_{01})^3 \quad (3.3.4)$$

En introduisant la distance géométrique entre le satellite et la station, $\mathbf{D}(t_0) = \mathbf{x}_r(t_0) - \mathbf{x}_e(t_0)$, au temps t_0 , on trouve :

$$\mathbf{x}_r(t_1) - \mathbf{x}_e(t_0) = \mathbf{D}(t_0) + \mathbf{v}_r(t_0)T_{01} + \mathbf{a}_r(t_0)\frac{T_{01}^2}{2} + O(T_{01})^3 \quad (3.3.5)$$

Exprimons à présent le carré de la distance géométrique parcourue par le signal, $R_{01} = \|\mathbf{x}_r(t_1) - \mathbf{x}_e(t_0)\|$, en fonction du carré de $\mathbf{D}(t_0)$ et de T_{01} :

$$\begin{aligned} R_{01}^2 &= D^2(t_0) + v_r^2(t_0)T_{01}^2 + 2\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0)T_{01} + 2\mathbf{D}(t_0)\mathbf{a}_r(t_0)\frac{T_{01}^2}{2} + O(T_{01})^3 \\ &= D^2(t_0) \left(1 + \frac{v_r^2(t_0)}{D^2(t_0)}T_{01}^2 + 2\frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0)}{D^2(t_0)}T_{01} + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{a}_r(t_0)}{D^2(t_0)}T_{01}^2 + O(T_{01}^3) \right) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

où l'on a négligé les termes d'ordre $(T_{01})^3$. En effectuant un développement limité, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{R_{01}}{c} &= \frac{D(t_0)}{c} \left[1 + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0)}{D^2(t_0)}T_{01} \right] \\ &\quad + \frac{D(t_0)}{2c} \left[\left(\frac{v_r^2(t_0)}{D^2(t_0)} - \frac{(\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0))^2}{D^4(t_0)} + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{a}_r(t_0)}{D^2(t_0)} \right) T_{01}^2 + O(T_{01}^3) \right] \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Dans l'optique d'exprimer R_{01} en fonction seulement de $D(t_0)$, nous injectons l'équation (3.3.3) dans l'équation précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{R_{01}}{c} &= \frac{D(t_0)}{c} \left[1 + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0)}{D^2(t_0)} \left(\frac{R_{01}}{c} + \Delta^{tropo} \right) \right] \\ &\quad + \frac{D(t_0)}{2c} \left[\left(\frac{v_r(t_0)^2}{c^2} - \frac{(\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0))^2}{D^4(t_0)} + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{a}_r(t_0)}{D^2(t_0)} \right) R_{01}^2 \right] \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Finalement l'équation (3.3.3) devient :

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= \frac{D(t_0)}{c} \left[1 + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0)}{D^2(t_0)} \frac{D(t_0)}{c} \left(1 + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0)}{cD(t_0)} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{v_r(t_0)^2}{c^2} - \frac{(\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0))^2}{c^2D^2(t_0)} + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{a}_r(t_0)}{c^2} \right) \right] \\ &\quad + \Delta^{tropo} \left(1 + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0)}{cD(t_0)} \right) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Le temps de réception en fonction du temps d'émission s'exprime alors sous la forme :

$$\begin{aligned} t_1(t_0) &= t_0 + \frac{D(t_0)}{c} \left[1 + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0)}{cD(t_0)} + \frac{1}{2c^2} \left(v_r(t_0)^2 + \frac{(\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0))^2}{D^2(t_0)} + \mathbf{D}(t_0)\mathbf{a}_r(t_0) \right) \right] \\ &\quad + \left(1 + \frac{\mathbf{D}(t_0)\mathbf{v}_r(t_0)}{cD(t_0)} \right) \Delta^{tropo} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

On peut montrer que, pour un lien STG, le temps d'émission t_0 s'exprime en fonction de t_1 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} t_0(t_1) &= t_1 - \frac{D(t_1)}{c} \left[1 + \frac{\mathbf{D}(t_1)\mathbf{v}_e(t_1)}{cD(t_1)} + \frac{1}{2c^2} \left(v_e(t_1)^2 + \frac{(\mathbf{D}(t_1)\mathbf{v}_e(t_1))^2}{D^2(t_1)} - \mathbf{D}(t_1)\mathbf{a}_e(t_1) \right) \right] \\ &\quad - \left(1 + \frac{\mathbf{D}(t_1)\mathbf{v}_e(t_1)}{cD(t_1)} \right) \Delta^{tropo} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Le terme Δ^{tropo} est calculé par le même modèle de Saastamoinen utilisé dans la simulation. Les valeurs de la température, de la pression d'eau et de la pression ne sont pas les valeurs réelles mais les valeurs mesurées localement et donc biaisées (cf équation (3.2.24)). Notons que pour un lien STS, le terme Δ^{tropo} est nul.

La transformation temps coordonnée vers temps local est la même expression polynomiale que celle utilisée dans la simulation (cf équation (3.2.9)), les coefficients des polynômes faisant partie des paramètres à ajuster.

3.3.5 Ajustement

La procédure d'ajustement de notre logiciel est la fonction `lsqcurvefit` issue de la toolbox Optimisation de MATLAB. Elle permet d'effectuer un ajustement par la méthode des moindres carrés non-linéaires.

Les entrées de cette routine sont :

- \mathbf{P}_0 : la solution initiale du vecteur de paramètres à ajuster.
- $\mathcal{F}(\mathbf{P}, t)$: la fonction permettant de calculer le vecteur observable théorique \mathbf{Y}_{th} .
- \mathbf{Y}_{obs} : Le vecteur observable de la simulation.

La méthode des moindres carrés non-linéaires est une procédure d'ajustement standard qui a pour objectif de trouver le vecteur \mathbf{P}_f minimisant l'expression :

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{P}) &= \sum_{i=1}^N \left(Y_{obs}^i - Y_{th}^i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{R}^i(\mathbf{P}) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

où Y_{th}^i sont les observables calculées par l'analyse à l'aide de la fonction $\mathcal{F}(\mathbf{P}, t_i)$ et $\mathcal{R}^i(\mathbf{P})$ sont les résidus du modèle, soit l'écart au sens géométrique entre les observables Y_{obs}^i obtenues avec la simulation et les valeurs théoriques des observables Y_{th}^i calculées par l'analyse.

En sortie de l'ajustement, on obtient les produits suivants :

- \mathbf{P}_f : le vecteur de paramètres ajustés,
- $\mathcal{R}^i(\mathbf{P}_f)$: les résidus ,
- \mathbf{Y}_{th} : les observables théoriques issues de la fonction $\mathcal{F}(\mathbf{P}_f, t)$.

Cette optimisation est réalisée avec un algorithme moindres-carrés dit de région de confiance réflexive (BYRD et collab., 1988). La procédure d'ajustement est décrite dans la documentation de la toolbox Optimisation⁶. La convergence est contrôlée par deux paramètres, Tol^P et Tol^F . Le premier représente une limite inférieure sur la variation

6. <http://fr.mathworks.com/help/optim/ug/least-squares-model-fitting-algorithms.html>

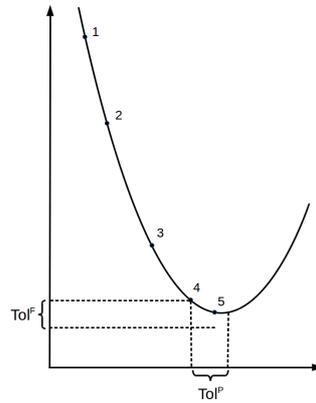


FIGURE 3.20 – Critère de convergence avec la routine lsqcurvefit.

des paramètres \mathbf{P} . Autrement dit, si l'algorithme tente de faire un pas s dans l'espace \mathcal{N} des solutions, plus petit que Tol^P , le processus itératif s'arrête. Tol^F est une limite inférieure sur la variation de la valeur de la fonction $\mathcal{F}(\mathbf{P}, t)$. Si $|\mathcal{F}^{i+1}(\mathbf{P}, t) - \mathcal{F}^i(\mathbf{P}, t)| < Tol^F$ l'itération prend fin (cf. figure 3.20).

Avec l'aide de notre logiciel complet (analyse et simulation), et en utilisant notre méthodologie différentielle, nous allons, dans la suite du manuscrit, procéder à une série de tests permettant d'examiner différents scénarios. Puis, nous étudierons différentes versions du logiciel correspondant à différents niveaux de complexité d'un scénario optimal. Cette stratégie nous permettra de mettre en évidence les apports des liens inter-satellites dans une constellation GNSS.

Chapitre 4

Comparaison des systèmes Classique et Hybride

« C'est le temps que tu as perdu pour ta rose qui rend ta rose importante. »

Antoine de Saint-Exupéry

Sommaire

4.1 Informations préliminaires	104
4.1.1 Constellation	104
4.1.2 Choix d'utilisateurs	105
4.1.3 Temps de calcul	106
4.2 Version Témoin	108
4.2.1 Système Classique	108
4.2.2 Système Hybride	111
4.2.3 Conclusions	113
4.3 Version Bruit horloge	115
4.3.1 Système Classique	115
4.3.2 Système Hybride	116
4.3.3 Conclusions	118
4.4 Version Complète	120
4.4.1 Système Hybride	121
4.4.2 Conclusions	123
4.5 Figures	125

4.1 Informations préliminaires

4.1.1 Constellation

Satellites

Dans la version présentée du logiciel, nous avons utilisé des satellites du réseau GPS états-unien. Dans une première approche, qui sera gardée pour l'ensemble de l'étude, nous avons choisi une constellation de cinq satellites répartis sur cinq plans orbitaux différents (cf figure 4.1a). Nous avons choisi cette géométrie réduite pour mener nos tests car elle permet d'optimiser le coût en temps de calcul.

Les satellites GPS, comme présentés dans le chapitre 2, partagent sensiblement les mêmes paramètres keplériens à l'exception de la longitude du nœud ascendant Ω qui détermine le plan de l'orbite. Dans le tableau (4.1) nous avons renseigné les paramètres keplériens initiaux de la constellation réduite utilisée, tandis que le tableau (4.2) donne les paramètres d'horloges associés à chaque satellite.

Satellite	a (m)	e	i (rad)	M (rad)	ω (rad)	Ω (rad)
1	2.655979069878460E+07	0.0053	0.977	0.4932	2.2080	1.6290
2	2.656163325812329E+07	0.0081	0.978	4.3013	5.6474	2.5999
3	2.656041941321679E+07	0.0028	0.960	5.0386	0.3353	5.7167
4	2.655904621851325E+07	0.0058	0.927	3.0579	1.3139	0.4152
5	2.656059629210296E+07	0.0021	0.960	2.0825	0.3106	0.3106

TABLEAU 4.1 – Valeurs des éléments képlériens initiaux pour les cinq satellites utilisés.

Satellite	A_s (s)	B_s	C_s (s^{-1})
1	1.22E-09	1.35E-13	6.22E-19
2	1.21E-09	1.31E-13	6.21E-19
3	1.23E-09	1.33E-13	6.23E-19
4	1.21E-09	1.31E-13	6.25E-19
5	1.20E-09	1.30E-13	6.20E-19

TABLEAU 4.2 – Valeurs des paramètres d'horloges pour les cinq satellites utilisés.

Sur la figure (4.1b) nous avons représenté la valeur du paramètre Ω pour les cinq satellites. La différence des valeurs de Ω pour les satellites 2 et 3 est d'environ 180° , tandis que celle des satellites 4 et 5 est d'environ 8° . Le satellite 1 explore un cinquième plan orbital.

Cette géométrie a l'avantage de ne pas entraîner de biais géométriques importants qui surviendraient avec une constellation n'explorant pas suffisamment les différents plans orbitaux possibles des satellites GPS.

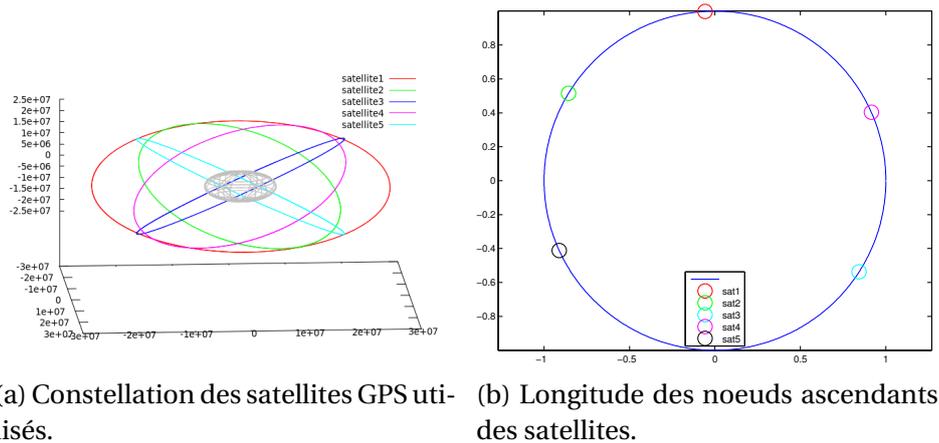


FIGURE 4.1 – Géométrie de la constellation satellite

Stations

Les stations au sol que nous utilisons pour notre étude sont des sites du réseau IGS. Les coordonnées de ces stations sont disponibles sur le site de l'IGS¹. Nous avons choisi un échantillon de 12 stations réparties de façon homogène sur la surface du globe, encore une fois pour éviter un biais géométrique. La figure 4.2 donne la localisation des stations choisies sur le planisphère et le tableau 4.3 indique les paramètres d'horloges associés.

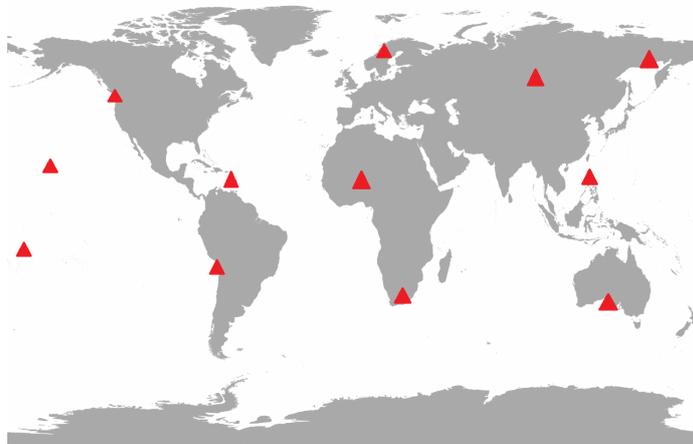


FIGURE 4.2 – Répartition des stations issues du réseau IGS et utilisées pour les tests du logiciel.

4.1.2 Choix d'utilisateurs

Pour lancer l'analyse des données simulées, l'utilisateur du logiciel doit renseigner plusieurs entrées :

1. <http://igs.org/network>

Station	Localisation	A_g (s)	B_g	C_g (s^{-1})
1	Papeete (Tahiti)	3.3e-10	1.6e-14	1.7e-19
2	Mauna (Hawai)	3.1e-10	1.9e-14	1.3e-19
3	Rio Grande (Chili)	3.5e-10	1.8e-14	1.9e-19
4	Umtata (Afrique Sud)	3.3e-10	1.7e-14	1.4e-19
5	Ceduna (Australie)	3.3e-10	1.5e-14	1.3e-19
6	Le Lamentin (Martinique)	3.7e-10	1.1e-14	1.2e-19
7	Toro (Niger)	3.1e-10	1.8e-14	1.0e-19
8	Taguig City (Philippines)	3.6e-10	1.2e-14	1.1e-19
9	Brewster (USA)	3.8e-10	1.5e-14	1.6e-19
10	Arti (Russie)	3.1e-10	1.4e-14	1.3e-19
11	Kiruna (Suède)	3.1e-10	1.4e-14	1.2e-19
12	Magadan (Russie)	3.3e-10	1.6e-14	1.5e-19

TABEAU 4.3 – Localisation des stations et paramètres d’horloges associés.

- *Système* : Cette option sélectionne les types d’observables utilisées pour retrouver les conditions initiales : Classique ou Hybride.
- *Fixer* : Afin d’éviter d’avoir un système non-déterminé, il est nécessaire de fixer les axes du problème. La solution choisie est de fixer un objet de la constellation, satellite ou station. Les paramètres de cet objet sont alors fixés à leur vraie valeur et ne sont pas ajustés (cf. 3.3.3).
- *Perturbations* : De combien on perturbe les conditions initiales. Les paramètres perturbés sont des entrées de l’analyse (cf. 3.3.3).
- *TolX* : La valeur du paramètre TolX (cf. 3.3.5).
- *TolF* : La valeur du paramètre TolF (cf. 3.3.5) .
- *Bruit horloges* : Bruite les observables temps de vol, mais aussi les temps d’émission et les temps de réception (cf. 3.2.7).
- *Biais atmosphérique* : Produit un biais sur les observations atmosphériques (cf. 3.2.7).

4.1.3 Temps de calcul

Les tests présentés dans ce chapitre ont été réalisés sur un PC avec un Intel Core i7 quatre cœurs 3720QM à 2.6GHz et 8GB de RAM. L’OS est un Ubuntu 64 bits. La simulation a été calculée avec gfortran et l’analyse avec la version 7.9 de Matlab.

Simulation

La simulation, qui crée les différentes observables, présente un temps de calcul extrêmement court. Pour une constellation de cinq satellites, douze stations, avec des observables Classiques et des séquences de liens inter-satellites collectées toutes les cinquante secondes pendant 10^5 s, l’ensemble des résultats est obtenu en environ deux secondes. Cela correspond à environ 7560 observations.

Analyse

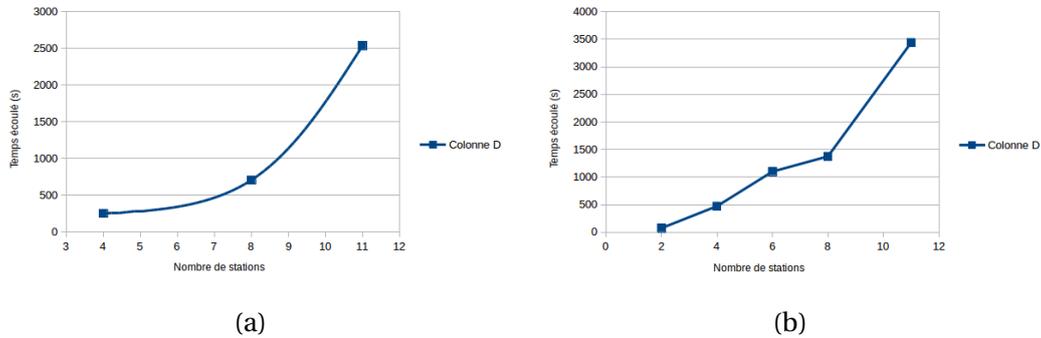


FIGURE 4.3 – Temps de calcul en fonction du nombre de stations pour un test avec 3 satellites avec les différentes sources de bruit (a), et sans (b).

Sur les figures 4.3, nous avons répertorié les temps de calcul de différents tests en fonction du nombre de stations et des biais et bruits implémentés. Les tests effectués sur les temps de calcul sont faits avec un système Classique composé de 3 satellites (dont un fixé), $ToIX = 10^{-16}$, et $ToIF = 10^{-28}$. Nous remarquons que le temps de calcul de l'analyse augmente exponentiellement avec le nombre de stations. En résumé, le temps de calcul augmente avec :

- le nombre d'observations,
- le nombre de satellites,
- le nombre de stations,
- la précision souhaitée ($ToIX$ et $ToIF$).

L'ensemble des résultats présentés dans la suite du chapitre correspond à des analyses où l'on a fixé le satellite 1, et où l'on a choisi $ToIX = 10^{-16}$ et $ToIF = 10^{-28}$. Ces choix arbitraires donnent en effet les meilleurs résultats pour l'ajustement, optimisant le rapport performance sur temps de calcul. Les temps de calculs sont alors inférieurs à la demi-journée.

La suite de ce chapitre s'articulera de la façon suivante : dans un premier temps, afin de tester les niveaux de précision de notre logiciel et ainsi son bon fonctionnement, nous procéderons à des tests sur une version témoin, dépourvue de bruits d'horloges et de biais atmosphériques. Puis nous ajouterons successivement les bruits d'horloges et les biais atmosphériques dans les données. Les bruits d'horloges seront caractéristiques des horloges embarquées sur les satellites Galileo et le biais atmosphérique sera typique des biais rencontrés dans les stations météorologiques.

Les figures des produits de l'analyse seront regroupées en fin de chapitre afin de pouvoir comparer plus facilement les différents scénarios.

4.2 Version Témoin

Dans le but de vérifier la robustesse de notre logiciel, nous procédons à un run à “vide”, c’est-à-dire sans aucune source d’erreur. Dans un premier temps, l’intérêt est d’être certain que toutes les différentes étapes de calcul sont opérationnelles, puis, de tester les performances de notre logiciel. Pour cela nous utilisons les constellations sol et espace présentées précédemment (soit cinq satellites et douze stations). Le mouvement des satellites est intégré pendant une durée de 1.10^5s , autrement dit un peu plus d’une journée. Le choix de cet arc est motivé par la longueur des arcs des systèmes opérationnels qui ne dépasse jamais la journée, quelles que soient les constellations étudiées. La première partie de cette section détaillera les résultats de l’analyse pour le système Classique, tandis que la seconde partie présentera les résultats pour le système Hybride.

4.2.1 Système Classique

Le temps entre deux signaux reçus est $\delta t = 500s$. Nous ne constatons pas de différence dans les performances du logiciel en effectuant ce choix plutôt que $\delta t = 30s$, si ce n’est un gain en temps de calcul non-négligeable. Les stations commencent à recevoir des signaux à partir de $t = 3600s$ et arrêtent d’en recevoir à $t = t_f - 3600s$ où t_f correspond à la fin de l’intégration. Ce choix permet d’éviter les problèmes de bords liés à l’interpolation du mouvement des satellites. On analyse ainsi 3860 observations STG.

Paramètres ajustés

Le jeu de paramètres \mathbf{P}_0 à ajuster correspond aux composantes cartésiennes de la position et de la vitesse des quatre² satellites, aux composantes cartésiennes de la position des douze stations, ainsi qu’aux trois paramètres d’horloges attachés à chaque objet. Ce vecteur comporte dans ce cas 108 composantes. Tous les paramètres sont ajustés en même temps et ce sans pondération.

On choisit d’éloigner très fortement la valeur initiale des paramètres liés aux satellites de leurs solutions réelles en prenant comme valeur pour γ (cf. équation (3.3.2)) :

$$\begin{cases} \gamma^X &= 10^{-5} \\ \gamma^V &= 10^{-6} \\ \gamma^H &= 10^2 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

où γ^X est l’erreur relative sur la position, γ^V l’erreur relative sur la vitesse et γ^H l’erreur relative sur les paramètres d’horloge. En outre, on fixe l’angle limite d’élévation α à 5° .

La solution \mathbf{P}_f trouvée par la routine d’ajustement est présentée dans la figure 4.11a. Pour chaque paramètre indiqué en abscisse, on associe en ordonnée la valeur de l’erreur relative commise par la routine d’ajustement. Les erreurs relatives des positions initiales des satellites $X_s(i)$ et des stations $X_g(i)$, ainsi que des vitesses initiales des satellites $V_s(i)$,

2. Quatre satellites puisque le premier satellite a ses conditions initiales fixées, et non ajustées.

sont comprises entre 10^{-11} et 10^{-14} . Les paramètres d'horloges des satellites sont légèrement mieux ajustés que ceux des stations, avec des erreurs comprises entre 10^{-5} et 10^{-6} pour les satellites et 10^{-4} et 10^{-5} pour les stations.

Orbites des satellites

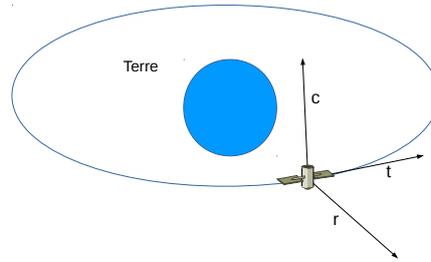


FIGURE 4.4 – Référentiel du satellite composé des vecteur radial, tangent et cross-tangent.

Les figures 4.13a et 4.15a mettent en évidence l'erreur faite sur les orbites des satellites. La figure 4.13a donne la différence entre les orbites réelles exprimées en coordonnées cartésiennes par la simulation et les orbites déterminées par l'analyse avec la solution \mathbf{P}_f . Identiquement, la figure 4.15a présente l'erreur absolue faite sur l'orbite mais exprimée dans la base satellite. Ce repère est construit avec les vecteurs unitaires radial, tangent et cross-tangent à la trajectoire du satellite (cf figure 4.4). Ce repère est aussi appelé le Repère Orbital Local.

Dans les deux cas, la courbe rouge correspond au satellite 1. Celui-ci n'ayant pas ses paramètres ajustés, l'incertitude sur l'orbite correspond aux erreurs dues aux différents outils numériques utilisés : l'intégration numérique et l'interpolation présentées dans la section 3.3.4. C'est en soi la solution optimale que l'optimisation peut atteindre. On note déjà une première différence dans les performances des outils numériques : c'est sur les composantes radiales et tangentes que le logiciel opère l'erreur la plus importante. Les différences sur l'orbite du satellite 1 pour la composante cross-tangente sont de l'ordre de quelques $10^{-8}m$ pic à pic³ tandis que les erreurs sur la composante radiale et la composante tangente sont respectivement de l'ordre de $10^{-6}m$ et $7.10^{-6}m$. Pour les vitesses, l'erreur la plus importante est faite sur la composante radiale avec environ $1.10^{-9}m.s^{-1}$. L'erreur faite sur la composante tangente est d'environ $10^{-10}m.s^{-1}$ et l'erreur sur la composante cross-tangente est de l'ordre de quelques $10^{-12}m.s^{-1}$.

Les solutions trouvées par l'ajustement pour la composante radiale de l'orbite des autres satellites sont de l'ordre de grandeur de la solution optimale (celle du satellite 1), c'est-à-dire quelques $10^{-6}m$. Les différences sur la composante tangente de l'orbite sont d'environ $10^{-5}m$, alors que pour la composante cross-tangente l'erreur est légèrement inférieure ou de l'ordre de $10^{-6}m$. Pour les vitesses, l'erreur radiale est aussi de l'ordre de

3. L'ordre de grandeur des erreurs sera toujours donné pic à pic.

grandeur de la solution optimale, c'est-à-dire $1.10^{-9} m.s^{-1}$. L'erreur faite sur les composantes tangente et cross-tangente sont respectivement de $1.10^{-9} m.s^{-1}$ et $1.10^{-10} m.s^{-1}$

Pour les paramètres de l'orbite des satellites, l'ajustement réalisé par l'analyse est en conclusion proche de l'ordre de grandeur des erreurs provenant des outils numériques utilisés. En outre, on pourrait penser à première vue que la composante cross-tangente de l'orbite est moins bien évaluée au regard de la différence de performance entre l'orbite optimale donnée par le satellite 1 et celles des autres satellites. Cependant, cela n'est qu'un artefact provenant de la base choisie pour effectuer l'ajustement : les paramètres position et vitesse sont exprimés dans la base cartésienne et non dans celle du satellite. En effet, si l'on regarde les orbites exprimées dans la base cartésienne, aucune des composantes n'est privilégiée, que ce soit pour les positions ou pour les vitesses.

Mouvement des stations

Comme pour les satellites, la figure 4.17a présente la différence entre le mouvement des stations calculé avec les paramètres initiaux de la simulation, et celui calculé avec les paramètres finaux de l'analyse. L'erreur faite sur les mouvements des douze stations est présentée pour les trois composantes cartésiennes et est de l'ordre de grandeur de l'erreur faite sur l'orbite des satellites, c'est-à-dire $10^{-6} m$. Les mouvements des stations étant calculés analytiquement par les formules (3.2.4), il est cohérent que les différences de trajectoires présentent des formes sinusoïdales pour les composantes X et Y, et constante pour la composante Z.

Si les différences d'orbites n'avaient été issues que des performances des outils numériques, on aurait eu les résultats présentés dans la section 3.3.4. Par conséquent, on observe ici les corrélations entre les paramètres des satellites et ceux des stations qui interviennent dans la recherche des solutions de l'ajustement.

En outre, les stations ne présentent pas les mêmes erreurs entre elles. Certaines semblent mieux contraintes que d'autres. Nous supposons que ces différences s'expliquent par la position relative des stations par rapport aux satellites. En effet, la géométrie de la constellation espace n'est pas symétrique.

Résidus des temps de vol

Nous avons répertorié, sur les figures 4.19a et 4.5 les résidus des temps de vol associés aux cinq satellites émetteurs. Par exemple, le premier graphique de cette figure répertorie toutes les observations échangées par le satellite 1 avec les douze stations. La grande majorité des valeurs sont comprises entre $-5.10^{-15} s$ et $5.10^{-15} s$. En unité de longueur, cela est cohérent avec les différences de $10^{-6} m$ présentes sur l'orbite des satellites et des stations. Les moyennes et écarts-types pour les cinq satellites sont donnés dans le tableau 4.4.

Satellite émetteur	Moyenne (s)	Ecart-type (s)
1	1.519e-17	5.665e-15
2	4.151e-16	3.993e-15
3	-3.450e-16	3.317e-15
4	1.626e-16	4.930e-15
5	-9.945e-16	4.394e-15

TABLEAU 4.4 – Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol associés à chaque satellite émetteur pour les liens STG du système Classique.

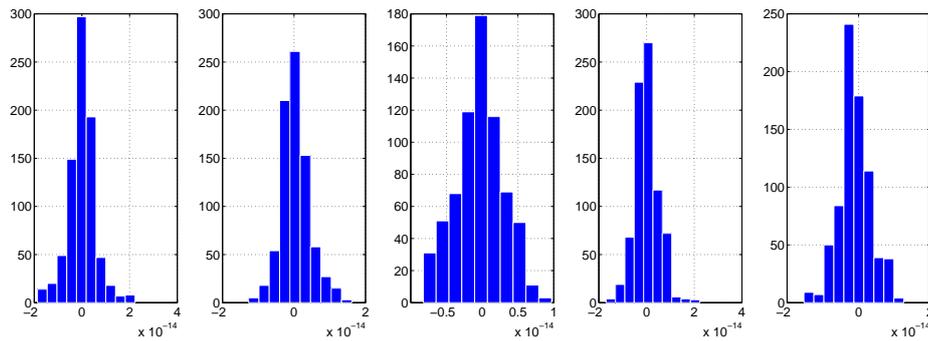


FIGURE 4.5 – Histogramme des résidus des temps de vol associés aux cinq satellites émetteurs pour les liens STG du système Classique.

4.2.2 Système Hybride

Nous dotons à présent la constellation de liens inter-satellites. La séquence (cf 3.2.5) choisie est donnée dans le tableau (4.5). Les vingt émissions possibles - si les satellites récepteur sont tous visibles- sont simultanées et répétées toutes les $\delta' = 500s$. On ajoute ainsi aux 3860 space-to-ground, 3700 observations space-to-space à analyser. Au cours d'une même itération de l'ajustement, l'ensemble des observations (STS et STG) est pris en compte.

Paires de satellites	(1;2)	(1;3)	..	(1;5)	(2;1)	(2;3)	...	(5;3)	(5;4)
Sous-séquences (1)	1	1	...	1	1	1	...	1	1

TABLEAU 4.5 – Séquence d'émissions entre les cinq satellites de la constellation. Un 1 correspond à une émission. Les vingt émissions sont simultanées (une seule sous-séquence).

Paramètres ajustés

Le vecteur de paramètres à ajuster est le même que pour le système Classique et comprend 108 composantes. Les perturbations apportées aux conditions initiales des paramètres sont identiques à celles prises pour le système Classique.

La solution \mathbf{P}_f trouvée par la routine d'ajustement est présentée dans la figure 4.12a. Les erreurs relatives associées aux différents paramètres sont, dans le cas des stations, du même ordre de grandeur que pour le système Classique. Celles liées aux satellites sont sensiblement plus faibles (moins d'un ordre de grandeur) pour les positions et vitesses. Notons de plus une erreur relative plus faible pour les horloges des satellites (un ordre de grandeur).

Cette amélioration sensible de l'optimisation pour les satellites est due à la présence d'un nouveau type de mesure dans le système Hybride. Les liens inter-satellites permettent en effet d'explorer la géométrie de la constellation espace dans des plans radicalement différents de ceux du système Classique. Ils augmentent de plus la proportion relative d'observables attachées aux satellites, créant ainsi un biais favorisant les paramètres des satellites devant ceux des stations.

Orbites des satellites

Les figures 4.14a et 4.16a donnent les différences entre les orbites réelles des satellites calculées par la simulation et les orbites retrouvées par l'analyse. La composante radiale de l'orbite des satellites est mieux déterminée lorsque les liens inter-satellites sont ajoutés, avec une erreur d'environ $2 \cdot 10^{-6} m$. La composante tangente du mouvement des satellites est elle aussi améliorée : l'erreur, qui était supérieure à $10^{-5} m$, est d'environ $6 \cdot 10^{-6} m$ avec le système Hybride. En outre, l'erreur faite sur la composante cross-tangente est sensiblement identique à celle du système Classique.

Pour les vitesses, la composante radiale a été améliorée avec une erreur bien inférieure à $10^{-9} m \cdot s^{-1}$. L'erreur sur la composante tangente a été divisée par deux, soit $4 \cdot 10^{-10} m \cdot s^{-1}$, tandis que l'erreur sur la composante cross-tangente reste sensiblement la même : $4 \cdot 10^{-10} m \cdot s^{-1}$.

Mouvement des stations

La figure 4.18a présente l'erreur faite sur le mouvement des stations par l'analyse. Les performances sont sensiblement identiques à celles du système Classique, c'est-à-dire quelques $10^{-6} m$ pour les composantes X et Y du mouvement. Cependant, une légère amélioration est faite pour la composante Z avec des erreurs bien inférieures à $10^{-6} m$.

Résidus des temps de vol

Les résidus des temps de vol pour les observables STG sont donnés dans les figures 4.20a et 4.6a. Leurs valeurs sont comparables à celles du système Classique. Les écarts-types et moyennes sont donnés dans le tableau 4.6. En outre, les résidus des temps de vol pour les observables STS sont donnés dans par les figures 4.21a et 4.6b. Leurs valeurs sont comprises entre $-1 \cdot 10^{-14} s$ et $1 \cdot 10^{-14} s$. Les écarts-types et moyennes associés sont répertoriés dans le tableau 4.7.

La valeur des résidus des liens STS est plus importante que celle des liens STG et ce pour la raison suivante : l'erreur commise par la routine calculant le temps de vol dans l'analyse est directement corrélée à la distance (cf. section 3.3.4). Par conséquent, dans le cas des liens STS, la distance étant plus importante, l'erreur le sera aussi.

Satellite émetteur	Moyenne (s)	Ecart-type (s)
1	-4.453e-16	7.702e-15
2	1.075e-16	5.8316e-15
3	-7.400e-17	3.156e-15
4	2.193e-16	5.255e-15
5	4.608e-16	3.444e-15

TABLEAU 4.6 – Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol STG associés à chaque satellite émetteur pour le système Hybride.

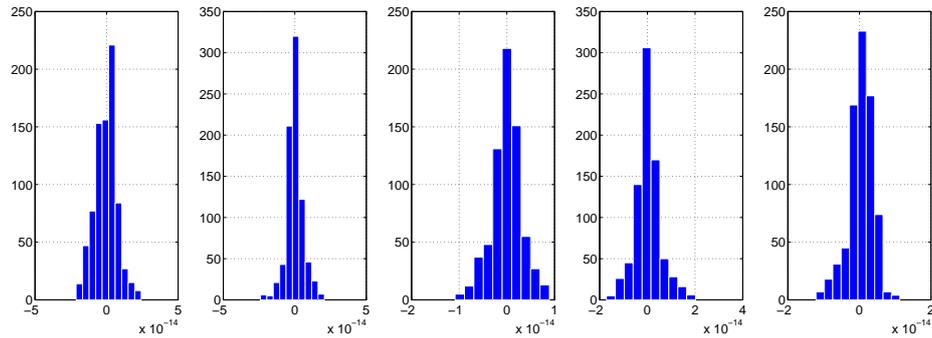
Satellite émetteur	Moyenne (s)	Ecart-type (s)
1	4.111e-16	8.078e-15
2	-5.543e-16	7.698e-15
3	-4.107e-16	7.225e-15
4	8.293e-16	7.221e-15
5	-1.137e-15	7.685e-15

TABLEAU 4.7 – Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol STS associés à chaque satellite émetteur pour le système Hybride.

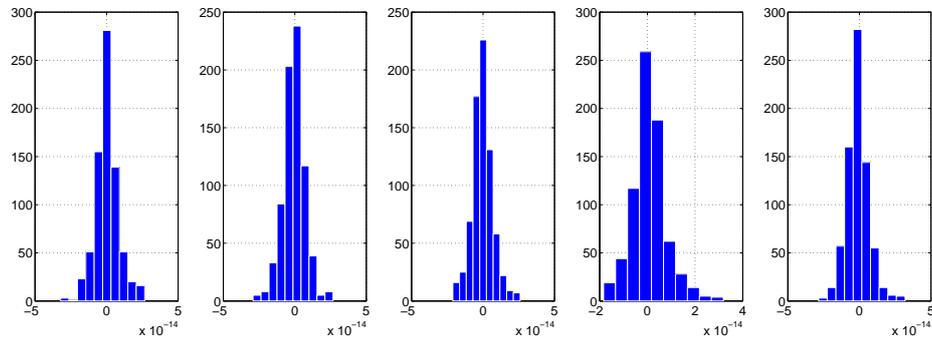
4.2.3 Conclusions

Les performances atteintes par notre logiciel nous permettent d'entreprendre l'étude de l'impact des liens inter-satellites. L'erreur faite sur le mouvement des satellites correspond aux limites des outils numériques utilisés, c'est-à-dire pour la position des satellites et des stations $10^{-6}m$. Ces valeurs sont directement corrélées aux résidus sur les temps de vol qui sont de l'ordre de la centième de picoseconde.

En outre, on observe une amélioration des performances de l'ajustement lorsque l'on ajoute des liens inter-satellites dans la constellation : les positions, vitesses et paramètres d'horloges des satellites sont mieux contraints. Les liens STS permettent d'explorer la géométrie de la constellation dans des plans que n'explorent pas les observables STG du système Classique. Finalement, l'augmentation relative du nombre d'observables liées aux satellites permet de favoriser les paramètres des satellites devant ceux des stations.



(a) Histogramme des résidus des temps de vol STG associés aux cinq satellites émetteurs pour le système Hybride.



(b) Histogramme des résidus des temps de vol STS associés aux cinq satellites émetteurs pour le système Hybride.

FIGURE 4.6

4.3 Version Bruit horloge

À présent, nous ajoutons les bruits d'horloges présentés dans la section 3.2.7, c'est-à-dire pour les satellites :

- un bruit de scintillation de fréquence (Bruit Flicker) à $6 \cdot 10^{-15}$,
- un bruit blanc de fréquence à $5 \cdot 10^{-13}$ @1s,

et pour les stations :

- un bruit de scintillation de fréquence (Bruit Flicker) à $7 \cdot 10^{-16}$,
- un bruit blanc de fréquence à $1,46 \cdot 10^{-13}$ @1s.

4.3.1 Système Classique

Paramètres ajustés

La figure 4.11b donne la solution trouvée par l'ajustement pour un système Classique avec des horloges réalistes. Les paramètres de position des satellites et des stations ont une erreur relative comprise entre 10^{-8} et 10^{-9} . Les paramètres associés aux vitesses des satellites sont dispersés entre 10^{-8} et 10^{-11} . Les paramètres d'horloge des satellites sont globalement mieux contraints que ceux des stations avec des valeurs comprises entre 1 et 10^{-2} , tandis que ceux des stations ont des valeurs comprises entre 2 et 10^{-1} .

Par rapport à la version témoin (cf. figure 4.11a), on perd environ quatre ordres de grandeur sur l'erreur relative des paramètres.

Orbites des satellites

L'erreur faite sur l'orbite des satellites, présentée dans les figures 4.13b et 4.15b, est d'environ 5cm pour la composante radiale (sauf pour le satellite 5 où elle est millimétrique) et atteint le décimètre pour les composantes tangente et cross-tangente.

Pour les vitesses, l'erreur est d'environ $10^{-5} m.s^{-1}$ pour les composantes radiale et cross-tangente, et de quelques $10^{-6} m.s^{-1}$ pour la composante tangente.

Le fait que la composante radiale de la position soit mieux déterminée semble provenir de la nature radiale des observations (cf. chapitre 2).

Mouvement des stations

La figure 4.17b donne l'erreur sur le mouvement des douze stations pour les trois composantes cartésiennes. Les différences entre la simulation et l'analyse vont du centimètre au décimètre.

Résidus des temps de vol

Les résidus des temps de vol pour les liens STG, présentés dans les figures 4.19b et 4.7, sont compris majoritairement entre $-1.10^{-10} s$ et $1.10^{-10} s$. Ceux-ci correspondent

aux bruits caractéristiques de nos horloges réalistes. En effet, les écarts-types des résidus des temps de vol, associés à chaque satellite émetteur, donnés dans le tableau 4.8, sont de l'ordre de quelques 10^{-11} . Or l'écart type du bruit blanc des horloges satellite pour 3860 observations vaut :

$$\begin{aligned}\sigma(\tau) &= 5 \cdot 10^{-13} \sqrt{3860} \\ &= 3.106 \cdot 10^{-11}\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

Cette valeur n'est pas exactement équivalente à celle du tableau 4.8 car nos horloges ont non seulement du bruit blanc, mais aussi du bruit Flicker.

Satellite émetteur	Moyenne (s)	Ecart-type (s)
1	1.007e-13	7.829e-11
2	2.817e-13	8.138e-11
3	5.026e-13	8.032e-11
4	1.453e-13	6.533e-11
5	4.642e-13	5.804e-11

TABLEAU 4.8 – Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol STG associés à chaque satellite émetteur pour le système Classique.

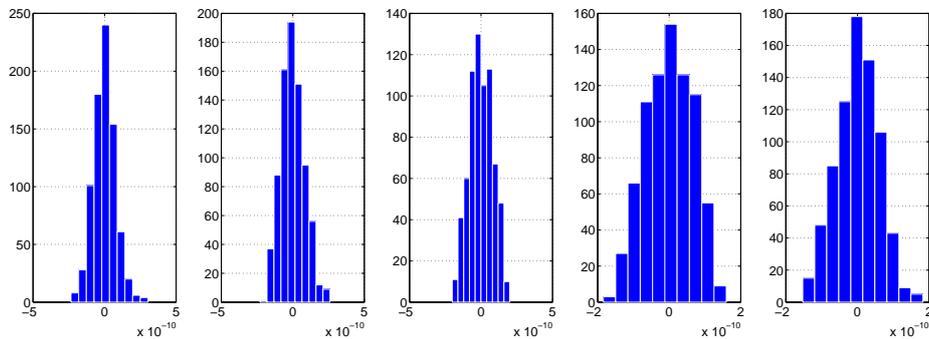


FIGURE 4.7 – Histogramme des résidus des temps de vol STG associés aux cinq satellites émetteurs pour le système Classique.

4.3.2 Système Hybride

Paramètres ajustés

La figure 4.12b donne les résultats de l'ajustement pour la version avec les bruits d'horloges dans le cas du système Hybride. On observe la même amélioration que dans la version témoin lorsque l'on passe du système Classique au système Hybride : les paramètres des satellites sont mieux contraints que ceux des stations qui ne changent pas drastiquement d'un système à l'autre. En effet, les paramètres des positions des satellites sont mieux contraints que ceux des stations avec une erreur relative comprise entre

10^{-9} et 10^{-11} , contre 10^{-8} à 10^{-9} pour les stations. Cependant, en absolue, l'erreur sur ces paramètres est équivalente. Les erreurs relatives sur les paramètres des vitesses des satellites sont entre 10^{-9} et quelques 10^{-10} .

Les paramètres d'horloges des satellites ne sont pas mieux contraints par rapport au système Classique. Les erreurs sur les paramètres A_s sont inférieures à 1, contrairement à celles sur A_g qui sont supérieures à 1. Les erreurs relatives sur les paramètres B_s sont d'environ 10^{-1} tandis que celles sur B_g sont proches de 1. Enfin, la même tendance est observée pour les paramètres C_s et C_g qui ont leurs erreurs inférieures à 10^{-1} , respectivement comprises entre 1 et quelques 10^{-1} .

Orbites des satellites

Les figures 4.14b et 4.16b montrent l'erreur faite sur l'orbite des satellites lorsque des horloges réalistes brulent les observables. Pour les trois composantes cartésiennes de la position, l'erreur est sub-centimétrique. Si l'on s'intéresse aux composantes de la base du satellite, sur la composante radiale, on observe une erreur qui va de quelques millimètres à $1,5\text{cm}$. L'erreur sur la composante tangente va de 1cm à 3cm , tandis que celle sur la composante cross-tangente est sub-centimétrique.

La vitesse est elle aussi nettement améliorée. Les différentes composantes montrent une erreur d'environ $2 \cdot 10^{-6} \text{m.s}^{-1}$.

On en conclut que l'implémentation de liens inter-satellites dans le système permet de gagner presque un ordre de grandeur sur la détermination de l'orbite des satellites par rapport à un système Classique.

Mouvement des stations

Les différences présentées pour le mouvement des stations dans la figure 4.18b sont identiques à celles du cas Classique. Nous ne notons pas d'amélioration pour la détermination du mouvement des stations lorsque l'on ajoute des liens STS pour ce test avec des bruits d'horloges.

Nous supposons que la raison pour laquelle la détermination du mouvement des stations n'est pas meilleure en présence de liens STS provient du poids des observations. En effet, dans le cas du système Hybride, la moitié des observations ne font pas intervenir les stations. Par conséquent, les paramètres des satellites ont un « poids » plus important dans l'ajustement et sont ainsi mieux contraints.

Résidus des temps de vol

Les figures 4.20b, 4.8a et 4.21b, 4.8b montrent les résidus des temps de vol pour les liens STG et respectivement STS. Comme pour le système Classique, les résidus des liens STG sont compris entre $-1 \cdot 10^{-10} \text{s}$ et $1 \cdot 10^{-10} \text{s}$.

Satellite émetteur	Moyenne (s)	Ecart-type (s)
1	-3.644e-13	7.682e-11
2	2.324e-12	9.116e-11
3	3.501e-13	8.995e-11
4	-7.857e-12	7.716e-11
5	5.489e-12	5.994e-11

TABLEAU 4.9 – Moyenne et écart-type des résidus des temps STG de vol associés à chaque satellite émetteur pour le système Hybride.

Satellite émetteur	Moyenne (s)	Ecart-type (s)
1	-1.173e-12	1.410e-10
2	-7.611e-13	1.601e-10
3	-6.007e-13	1.562e-10
4	2.055e-12	1.328e-10
5	-2.165e-12	1.194e-10

TABLEAU 4.10 – Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol STS associés à chaque satellite émetteur pour le système Hybride.

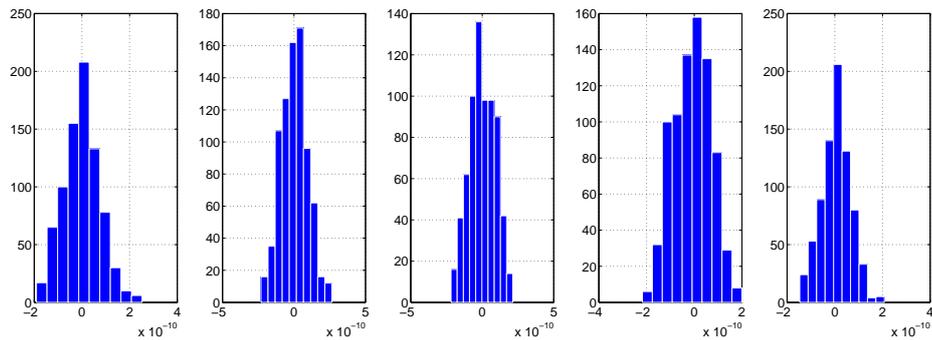
Pour les liens STS, les résidus sont majoritairement situés dans l'intervalle $-2 \cdot 10^{-10} s$ et $2 \cdot 10^{-10} s$. Les valeurs des moyennes et écarts types associés aux deux types de liens sont données dans les tableaux 4.9 et 4.10.

Nous notons que les écart-types des liens STG sont très similaires à ceux du système Classique. De plus, les valeurs des écart-types des liens STS sont environ égales au double de la valeur de ceux des liens STG et ce systématiquement.

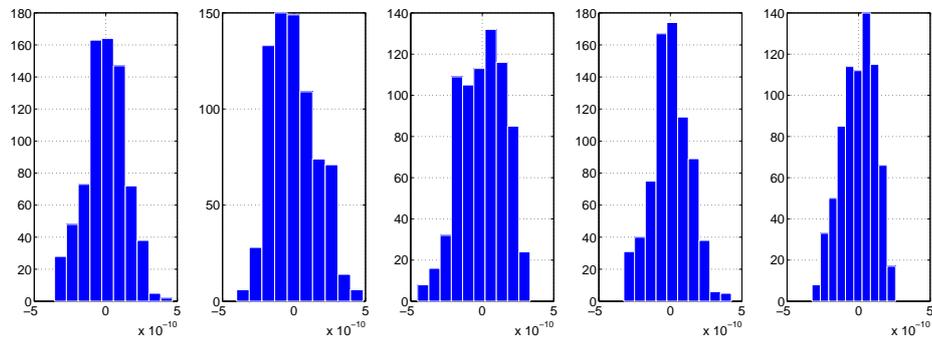
4.3.3 Conclusions

Des résultats présentés, nous pouvons conclure que les observables STS améliorent de façon non négligeable l'orbitographie des satellites. En effet, pour la composante radiale du mouvement, l'erreur est réduite d'un facteur trois et l'erreur sur les composantes tangente et cross-tangente est quant à elle réduite d'un facteur dix. De plus, les vitesses sont elles aussi beaucoup mieux contraintes avec un gain d'un ordre de grandeur.

Les paramètres des stations ne sont cependant pas améliorés dans notre test, cela étant dû aux observables STS qui augmentent le nombre d'observables liées aux satellites favorisant ainsi les paramètres des satellites dans notre ajustement non-pondéré.



(a) Histogramme des résidus des temps de vol STG associés aux cinq satellites émetteurs pour le système Hybride.



(b) Histogramme des résidus des temps de vol STS associés aux cinq satellites émetteurs pour le système Hybride .

FIGURE 4.8

4.4 Version Complète

Nous présentons dans cette section les résultats pour une version complète du logiciel, incluant non seulement, comme dans les tests précédents, les bruits d'horloges, mais aussi un biais atmosphérique. Dans les tests suivants, nous introduisons un biais sur l'évolution de la température mesurée localement pour chaque station et intervenant dans le calcul du délai troposphérique. L'équation 3.2.24 devient alors :

$$T'(t) = (1 + 0,02) \cdot T(t) \quad (4.4.1)$$

où $T'(t)$ est la température utilisée dans l'analyse pour calculer le délai troposphérique, et $T(t)$ est la température utilisée pour calculer le délai troposphérique dans la simulation. Le biais de 2% en température a été choisi après comparaison des valeurs du modèle VMF1 (*Vienne Mapping Function 1*) et de mesures *in-situ* (HELM, 2015). Pour certaines stations, les erreurs peuvent varier entre 3K et 10K. C'est pourquoi nous optons pour un biais d'environ 6K.

Paramètres ajustés

Les résultats de l'ajustement sont présentés dans la figure 4.11c. Les paramètres des positions et vitesses des satellites ont des erreurs relatives comprises entre 10^{-7} et 10^{-9} , tandis que celles des stations sont regroupées autour de 10^{-7} . Les paramètres d'horloges des satellites sont aussi mieux contraints avec des erreurs proches de 10^{-1} alors que celles des stations sont proches de 1.

En comparant avec le système Classique de la version comprenant seulement des bruits d'horloges (cf. 4.11b), on remarque que l'ajout du biais atmosphérique impacte plus les stations que les satellites : l'erreur relative sur la position de station est presque deux ordres de grandeur plus importante, tandis que celle des satellites est d'environ un ordre de grandeur plus importante.

Orbites des satellites

L'erreur sur l'orbitographie des satellites est montrée dans les figures 4.13c et 4.15c. La composante radiale présente des erreurs allant de 2cm à 8cm. Pour la composante tangente, l'erreur est décimétrique. En outre, la composante cross-tangente présente une erreur assez différente selon le satellite : les satellites 3 et 4 ont des erreurs décimétriques, tandis que les satellites 2 et 5 ont des erreurs allant de 60cm à 80cm.

Les différences sur les vitesses pour la composante radiale sont de l'ordre de grandeur de $10^{-5} m.s^{-1}$, et de $4 \cdot 10^{-6} m.s^{-1}$ à $10^{-5} m.s^{-1}$ pour la composante tangente. Similairement aux positions des satellites, l'erreur sur la composante cross-tangente de la vitesse varie suivant le satellite : les satellites 3 et 4 ont une erreur inférieure à $4 \cdot 10^{-5} m.s^{-1}$, tandis que les satellites 2 et 5 ont une erreur d'environ $10^{-4} m.s^{-1}$.

Par rapport à la version avec bruits d'horloges seulement, l'erreur est environ deux fois plus importante sauf pour les satellites 2 et 5 où l'erreur sur la composante cross-tangente est dix fois plus grande.

Mouvement des stations

Les erreurs sur les mouvements des stations varient entre 40cm et $1,60\text{m}$ pour les composantes X et Y du mouvement, et entre 10cm et 60cm pour la composante Z (cf figure 4.17c).

Résidus des temps de vol

Les résidus des temps de vol STG sont présentés dans les figures 4.19c et 4.9. Ces résidus sont différents de ceux présentés précédemment : en plus d'avoir la majorité des valeurs comprises entre $-0,5 \cdot 10^{-9}$ et $0,5 \cdot 10^{-9}$, on observe une asymétrie par rapport à 0 avec des valeurs comprises entre $0,5 \cdot 10^{-9}$ et $1,5 \cdot 10^{-9}$. Ceci est caractéristique du biais troposphérique implémenté, produisant ainsi une surestimation des temps de vol calculés par l'analyse par rapport à ceux calculés par la simulation. Les valeurs des moyennes et écarts-types associés à chaque satellite sont répertoriées dans le tableau 4.11.

Satellite émetteur	Moyenne (s)	Ecart-type (s)
1	$-1.375\text{e-}13$	$4.054\text{e-}10$
2	$1.819\text{e-}12$	$3.604\text{e-}10$
3	$3.607\text{e-}12$	$4.121\text{e-}10$
4	$4.569\text{e-}14$	$4.228\text{e-}10$
5	$2.829\text{e-}12$	$3.812\text{e-}10$

TABLEAU 4.11 – Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol associés à chaque satellite émetteur.

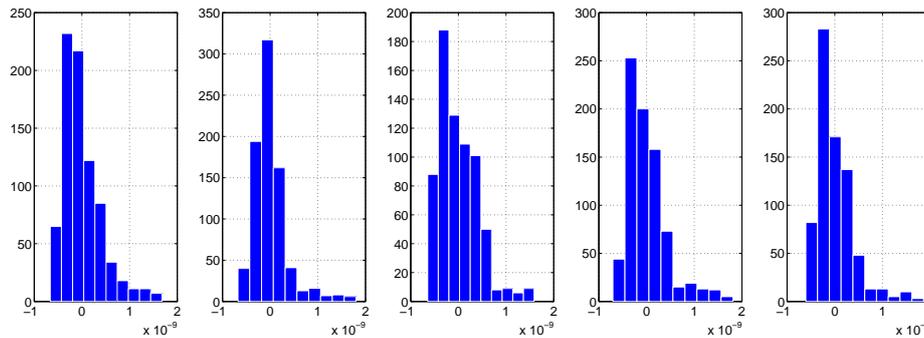


FIGURE 4.9 – Histogramme des résidus des temps de vol associés aux cinq satellites émetteurs.

4.4.1 Système Hybride

Paramètres ajustés

L'erreur relative sur les paramètres ajustés, dans le cas du système Hybride avec du bruit d'horloge et un biais troposphérique, est présentée dans la figure 4.12c. Les pa-

ramètres des satellites ont des erreurs relatives comprises entre 2.10^{-8} et 3.10^{-10} , alors que celles des stations sont regroupées autour de 10^{-7} . Les erreurs sur les paramètres d'horloges sont mieux contraintes pour les satellites avec des valeurs proches de 10^{-1} . Celles des stations sont de l'ordre de 10 pour A_g , comprises entre 1 et 10^{-2} pour B_g et proches de 1 pour C_g .

Par rapport au système Classique (cf. figure 4.11c), on remarque une nette amélioration dans l'ajustement sur les paramètres positions et vitesses des satellites. En effet, leur erreur relative a diminué de plus d'un ordre de grandeur.

Orbites des satellites

Les différences d'orbites entre la simulation et l'analyse sont présentées dans la figure 4.16c. Pour la composante radiale, l'erreur sur l'orbite est comprise entre $5mm$ et $2cm$ selon le satellite. L'erreur faite sur la composante tangente est de quelques centimètres, et celle sur la composante cross-tangente est comprise entre $1cm$ et $4cm$. Dans la base cartésienne, cela correspond à des erreurs centimétriques.

Les vitesses présentent des erreurs pour la composante radiale qui varient selon les satellites de $0,5.10^{-6}m.s^{-1}$ à $5.10^{-6}m.s^{-1}$. Pour la composante tangente, l'erreur est comprise entre $0,5.10^{-6}m.s^{-1}$ et $3,5.10^{-6}m.s^{-1}$. Sur la composante cross-tangente, l'erreur est comprise entre $1.10^{-6}m.s^{-1}$ et $6.10^{-6}m.s^{-1}$.

L'ajout de liens STS permet de réduire l'erreur sur les positions des satellites d'un ordre de grandeur en coordonnées cartésiennes. Dans le référentiel du satellite, l'ensemble des composantes ont aussi été améliorées, avec une amélioration pouvant aller jusqu'à un facteur vingt pour la composante cross-tangente (satellite 2). De plus, l'erreur sur la vitesse a aussi été améliorée d'un ordre de grandeur.

Mouvement des stations

Les erreurs absolues sur les mouvements des stations sont représentées sur la figure 4.18c. Les différences d'orbites pour les composantes X et Y varient suivant les stations entre $50cm$ et $140cm$, tandis que pour la composante Z, l'erreur est comprise entre $20cm$ et $65cm$. Ces valeurs sont comparables aux résultats du système Classique.

Résidus des temps de vol

Les résidus des temps de vol pour les liens STG sont donnés dans les figures 4.20c et 4.10a. Les valeurs sont comprises entre $-0,5.10^{-9}s$ et $1,5.10^{-9}s$. Les écarts-types et moyennes sont donnés dans le tableau 4.12.

Pour les résidus des liens STS présentés dans les figures et 4.20c, 4.10b les valeurs sont comprises entre $-2.10^{-10}s$ et $2.10^{-10}s$. Les écarts-types et moyennes sont donnés dans le tableau 4.13.

Satellite émetteur	Moyenne (s)	Ecart-type (s)
1	-1.042e-12	4.173e-10
2	-4.112e-11	3.683e-10
3	4.577e-11	4.078e-10
4	1.204e-11	4.315e-10
5	-9.943e-12	3.874e-10

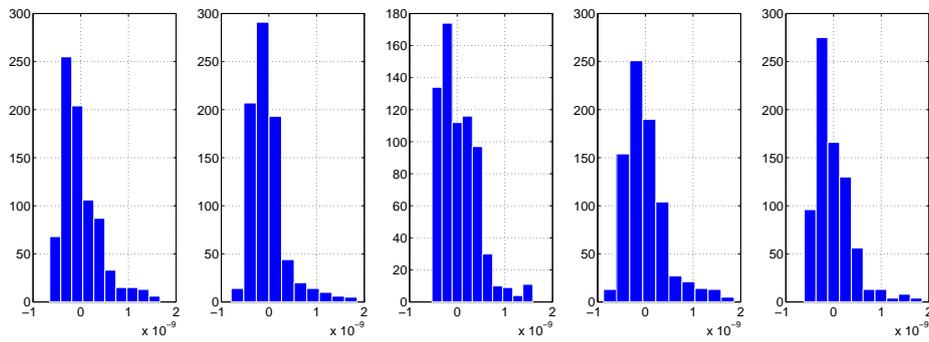
TABLEAU 4.12 – Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol associés à chaque satellite émetteur.

Satellite émetteur	Moyenne (s)	Ecart-type (s)
1	5.597e-12	1.049e-10
2	2.306e-11	1.297e-10
3	-2.295e-11	1.149e-10
4	-3.919e-12	1.088e-10
5	3.517e-12	1.062e-10

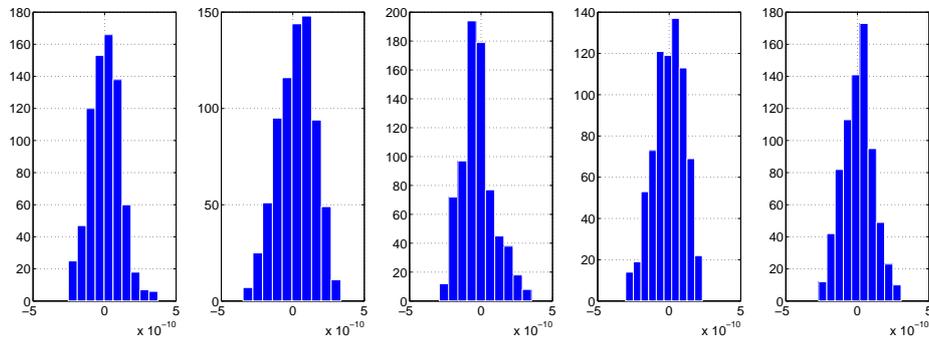
TABLEAU 4.13 – Moyenne et écart-type des résidus des temps de vol associés à chaque satellite émetteur.

4.4.2 Conclusions

Dans cette version du logiciel, nous constatons que l'ajout de liens inter-satellites dans notre constellation GNSS permet d'améliorer d'un ordre de grandeur l'orbitographie des satellites. Le système Hybride, possédant des observables ne subissant pas les effets atmosphériques et explorant des plans de la géométrie inconnue pour le système Classique, détermine avec une meilleure exactitude les différentes composantes de la trajectoire des satellites. Notons de plus que la composante cross-tangente est très nettement mieux contrainte.



(a) Histogramme des résidus des temps de vol associés aux cinq satellites émetteurs.



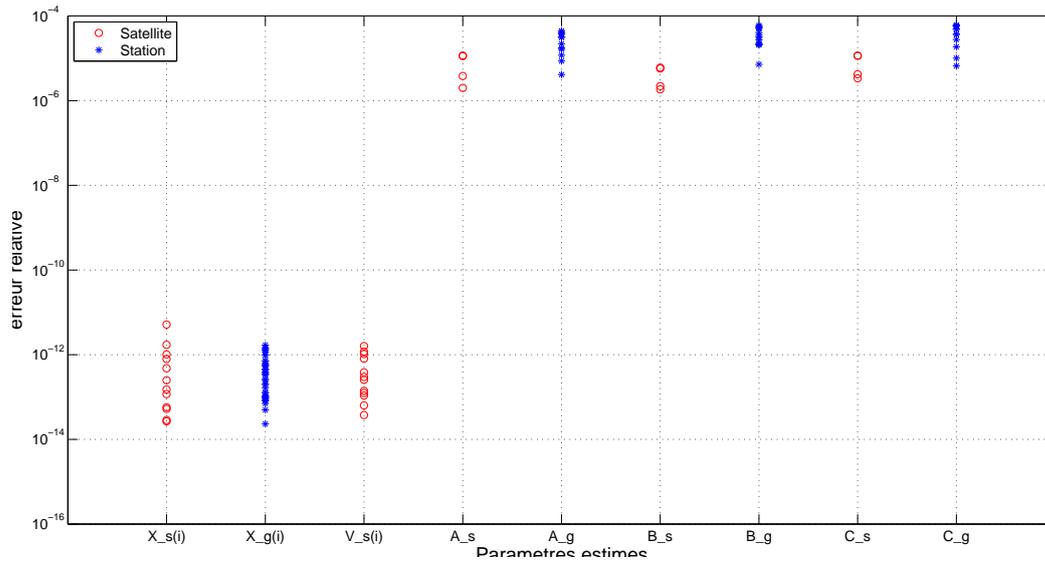
(b) Histogramme des résidus des temps de vol associés aux cinq satellites émetteurs.

FIGURE 4.10

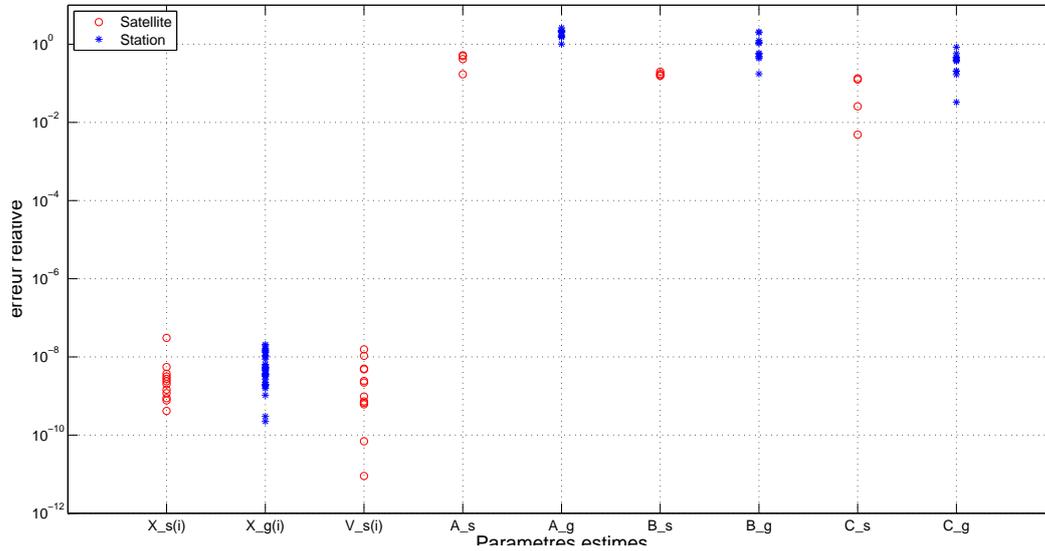
4.5 Figures

Dans cette section, nous présentons les différents résultats détaillés au cours du présent chapitre. Pour une observable considérée, la présentation est organisée par paire de pages : la page de gauche regroupe les résultats des calculs faits dans la configuration classique, et sur la page de droite ceux faits dans la configuration hybride. De plus, sur chaque page sont présentées les trois versions étudiées : témoin, bruits d'horloge, et complète. Cette organisation des résultats permettra à notre lecteur de facilement discerner les avantages de chacune des configurations pour une observable considérée.⁴

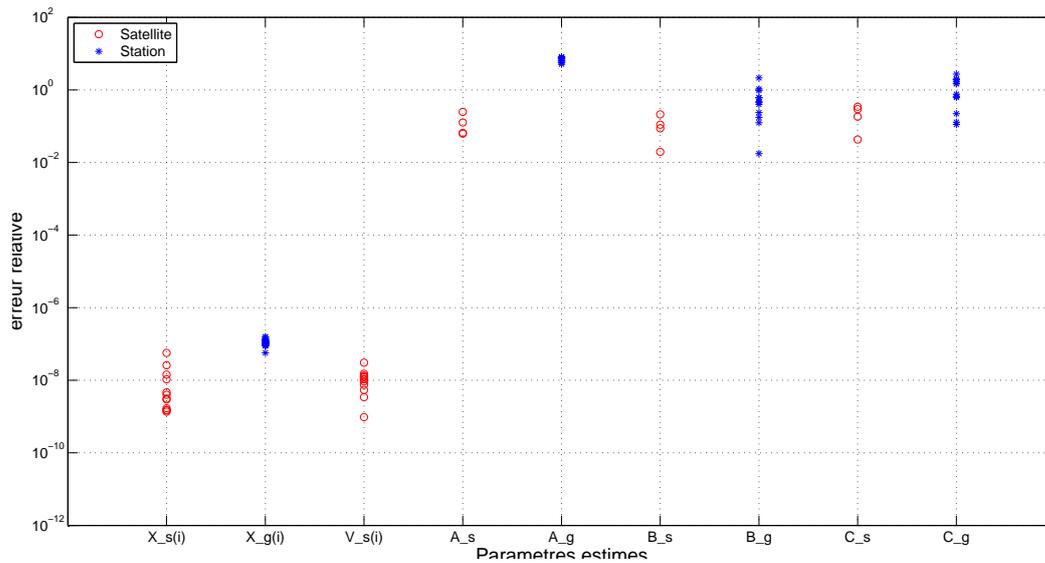
4. Notons ici que ces résultats sont un échantillon de ce qui nous a semblé intéressant d'exposer dans ce manuscrit. Ils ne représentent cependant qu'une fraction parmi l'ensemble des tests qui ont été faits durant cette thèse.



(a) Système Classique, Version Témoin.

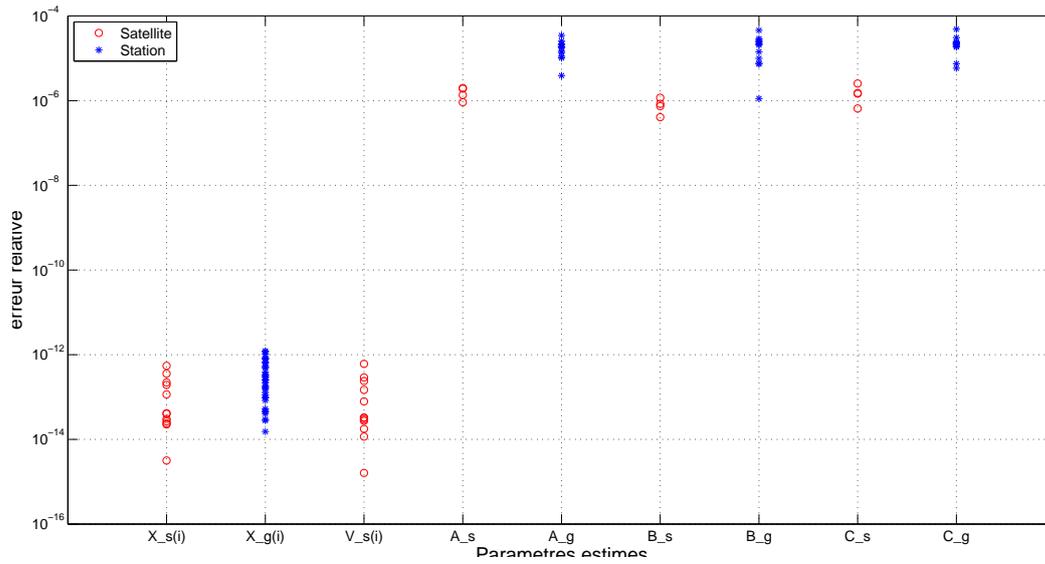


(b) Système Classique, Version Bruit d'horloge.

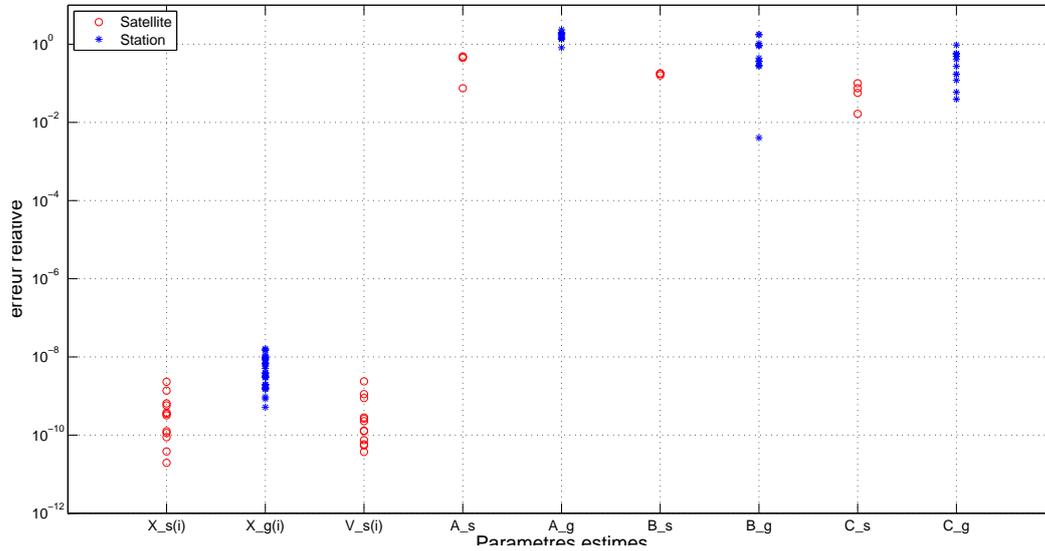


(c) Système Classique, Version Complète.

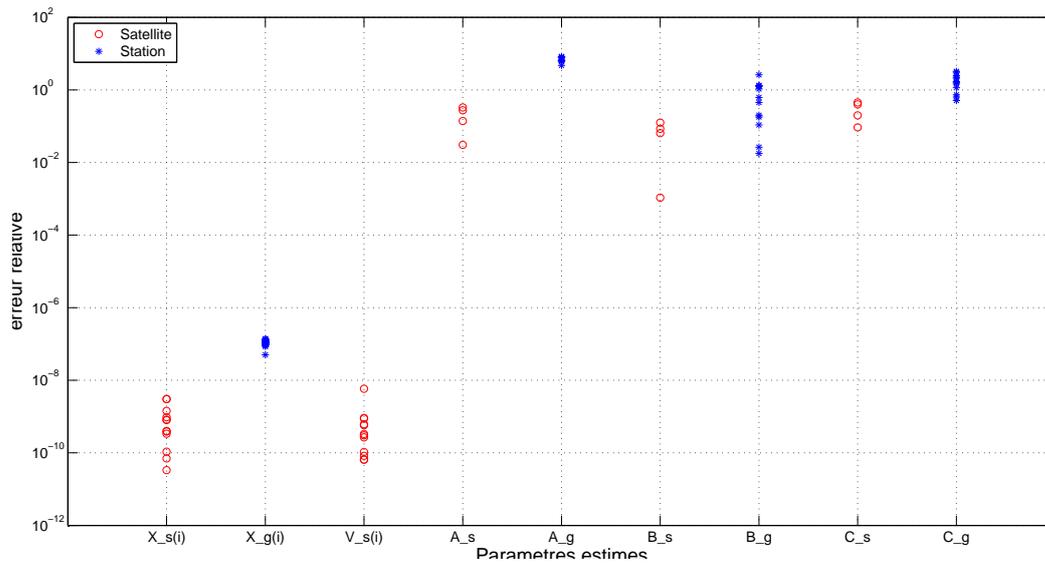
FIGURE 4.11 – Paramètres finaux ajustés et leur erreur relative associée.



(a) Système Hybride, Version Témoin.

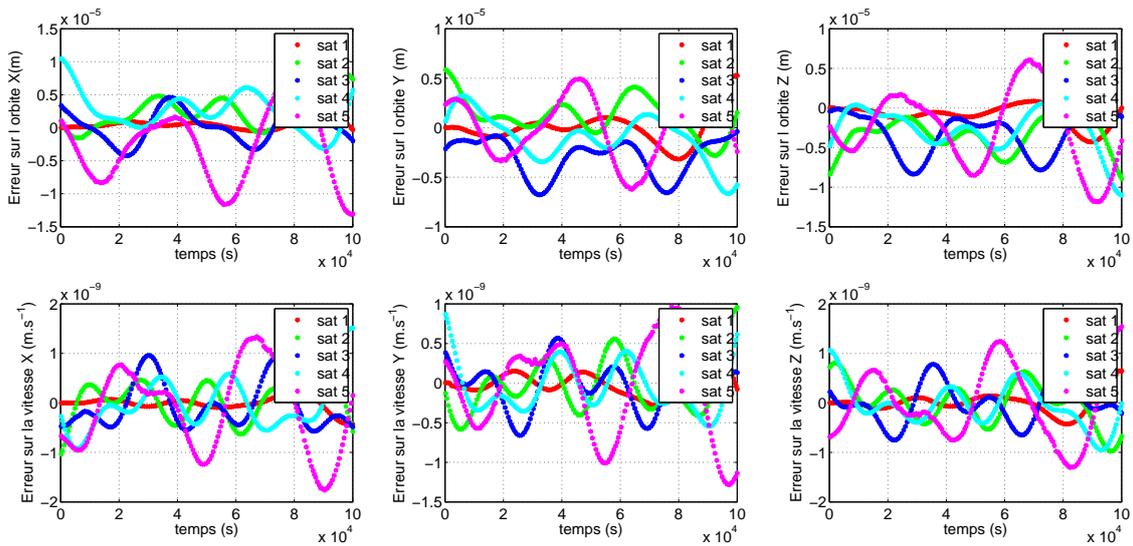


(b) Système Hybride, Version Bruit d'horloge.

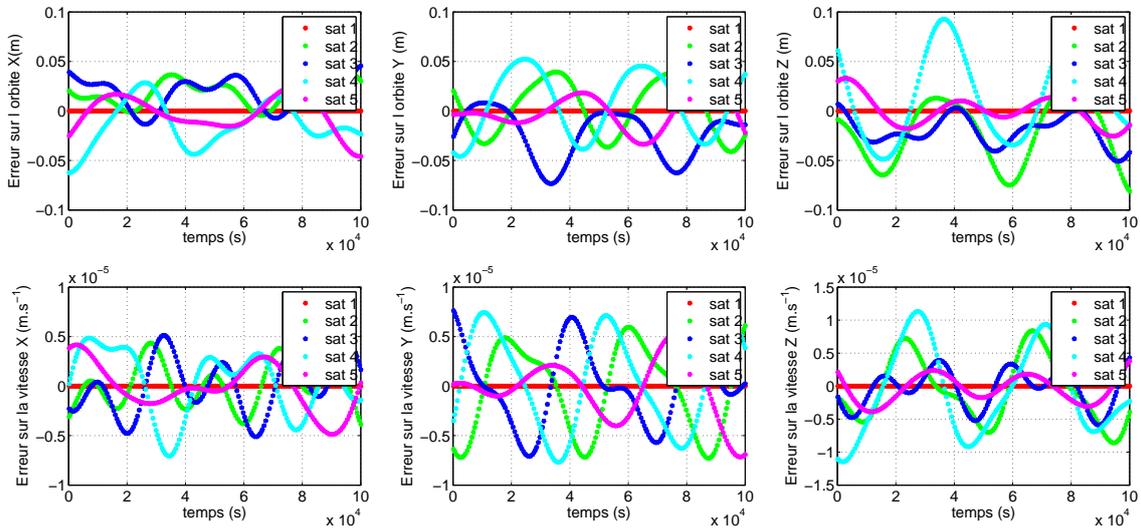


(c) Système Hybride, Version Complète.

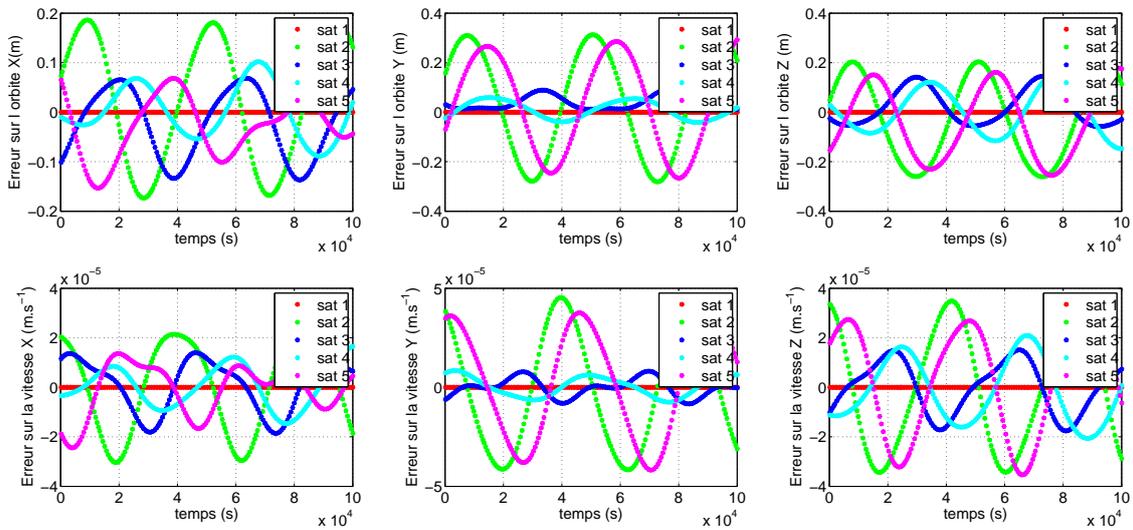
FIGURE 4.12 – Paramètres finaux ajustés et leur erreur relative associée.



(a) Système Classique, Version Témoin.

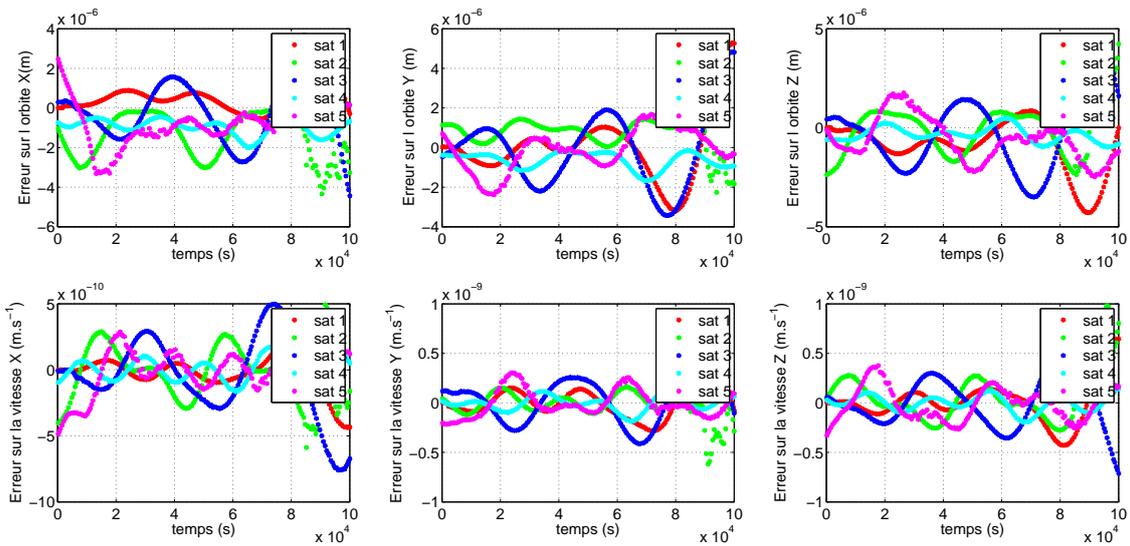


(b) Système Classique, Version Bruit d'horloge.

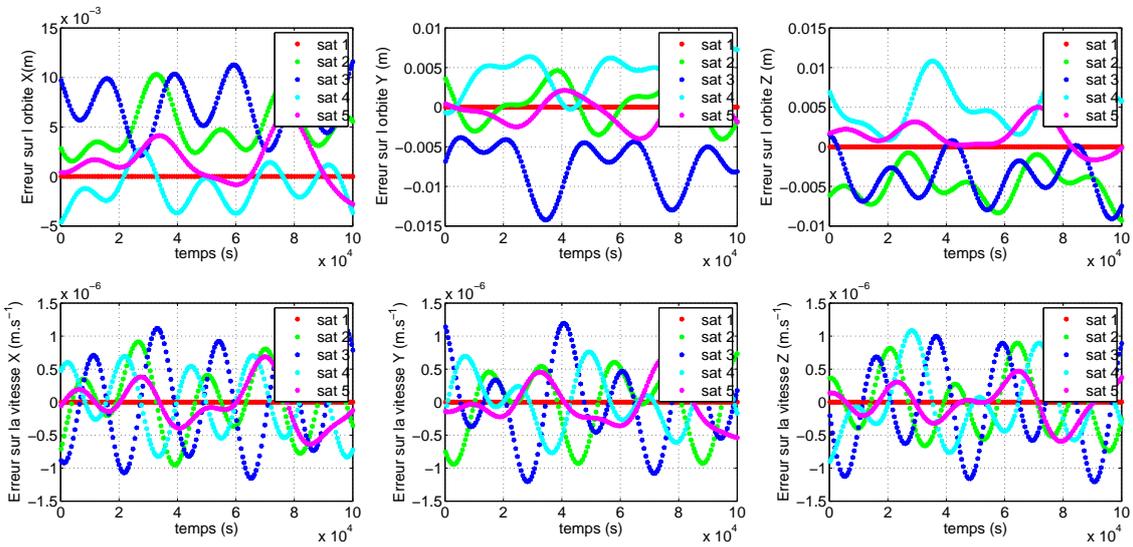


(c) Système Classique, Version Complète.

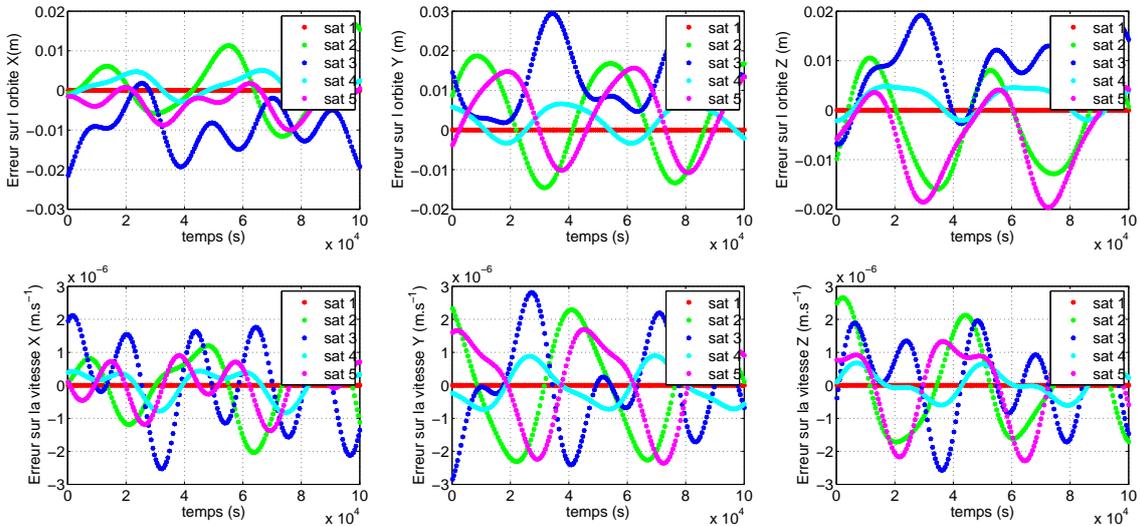
FIGURE 4.13 – Erreurs absolues sur l'orbite des satellites après ajustement, en repère inertiel.



(a) Système Hybride, Version Témoin.

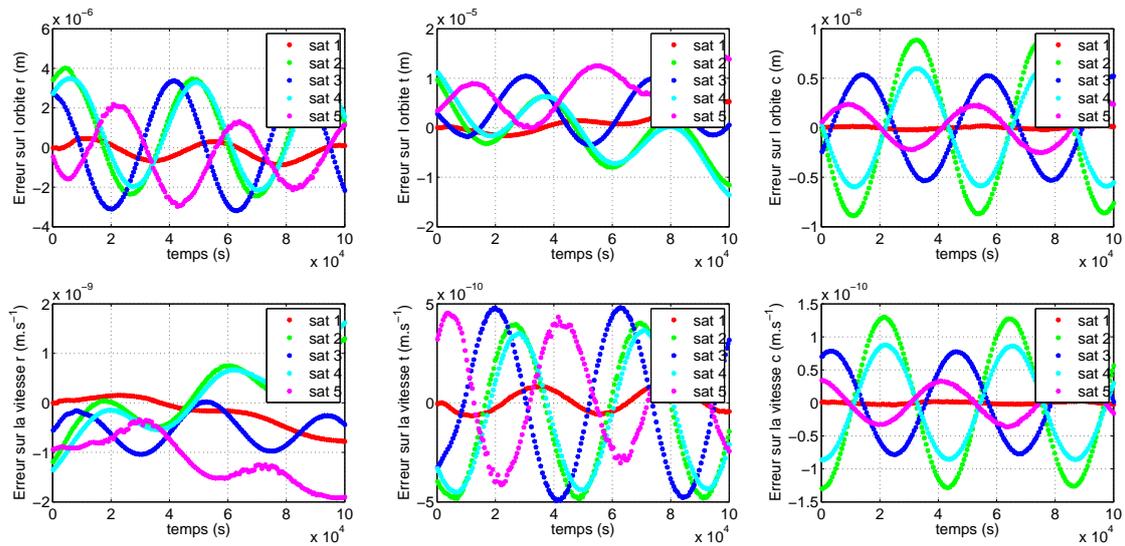


(b) Système Hybride, Version Bruit d'horloge.

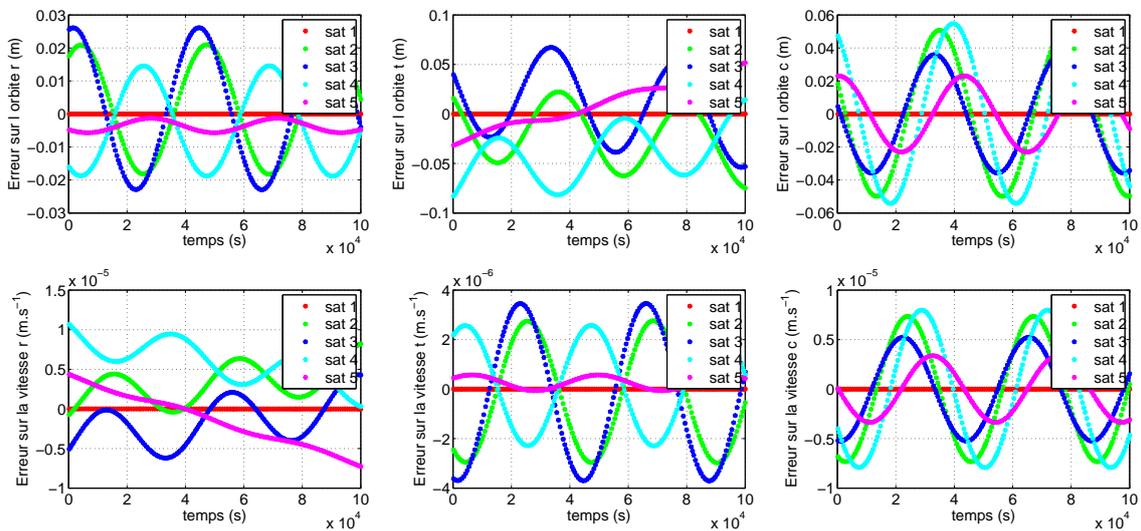


(c) Système Hybride, Version Complète.

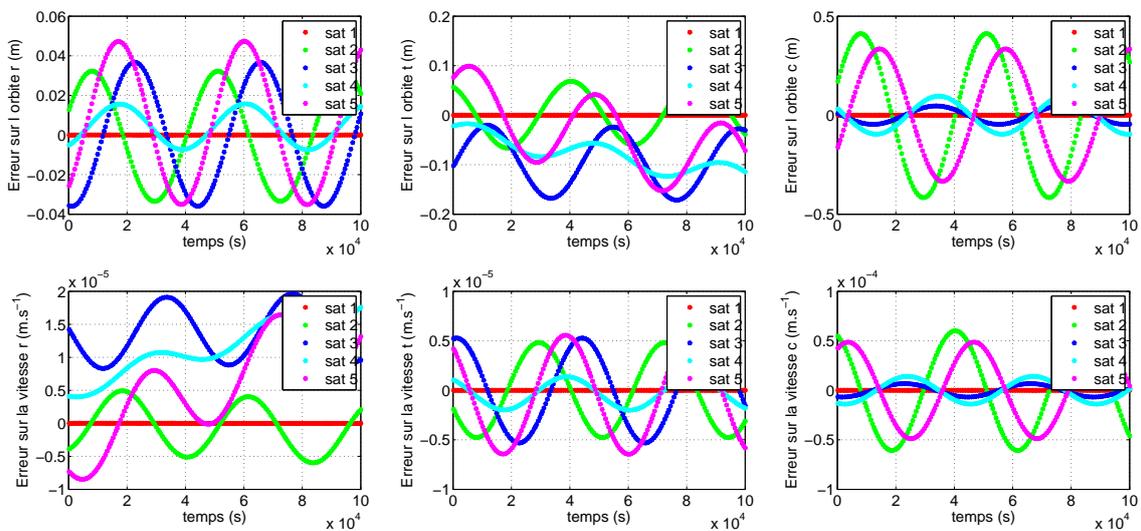
FIGURE 4.14 – Erreurs absolues sur l'orbite des satellites après ajustement, en repère inertiel.



(a) Système Classique, Version Témoin.

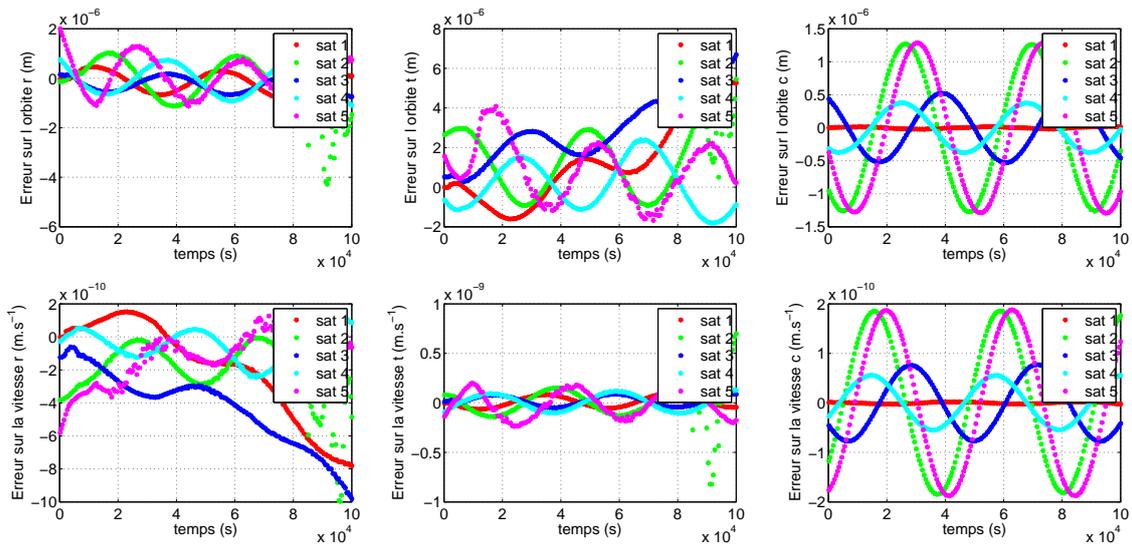


(b) Système Classique, Version Bruit d'horloge.

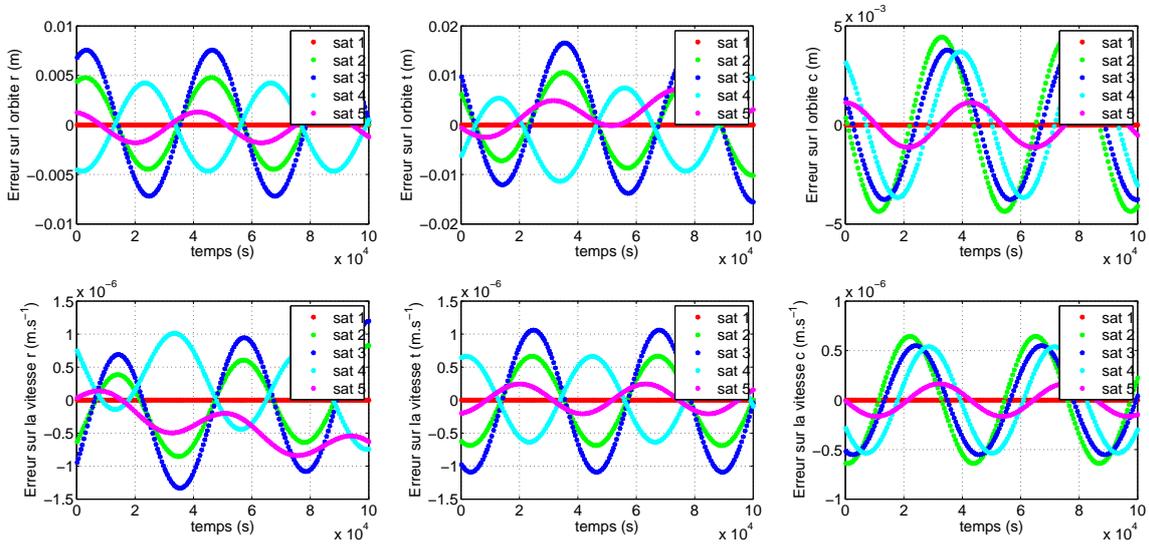


(c) Système Classique, Version Complète.

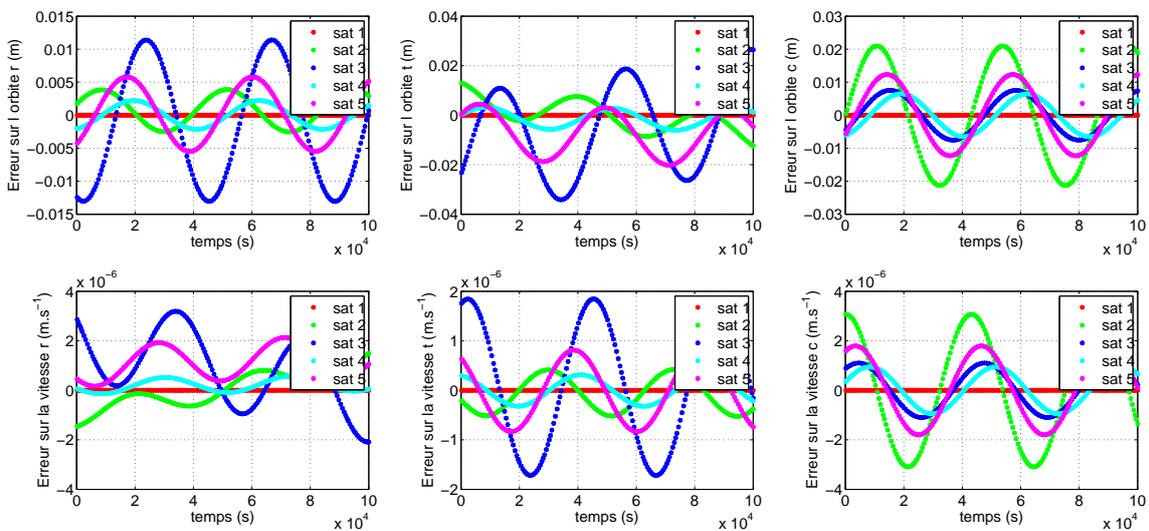
FIGURE 4.15 – Erreurs absolues sur l'orbite des satellites après ajustement, en repère local orbital.



(a) Système Hybride, Version Témoin.

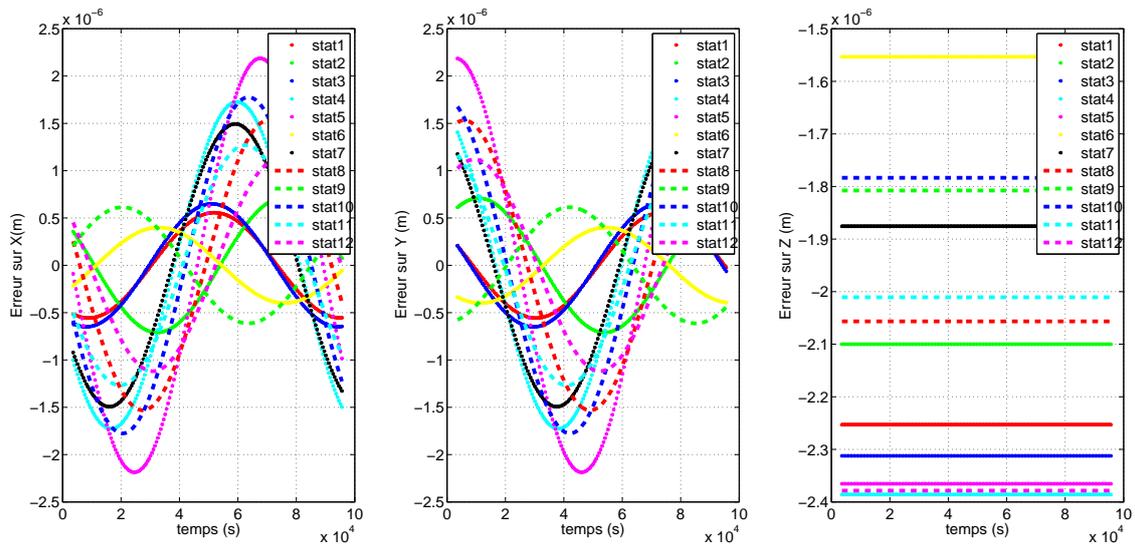


(b) Système Hybride, Version Bruit d'horloge.

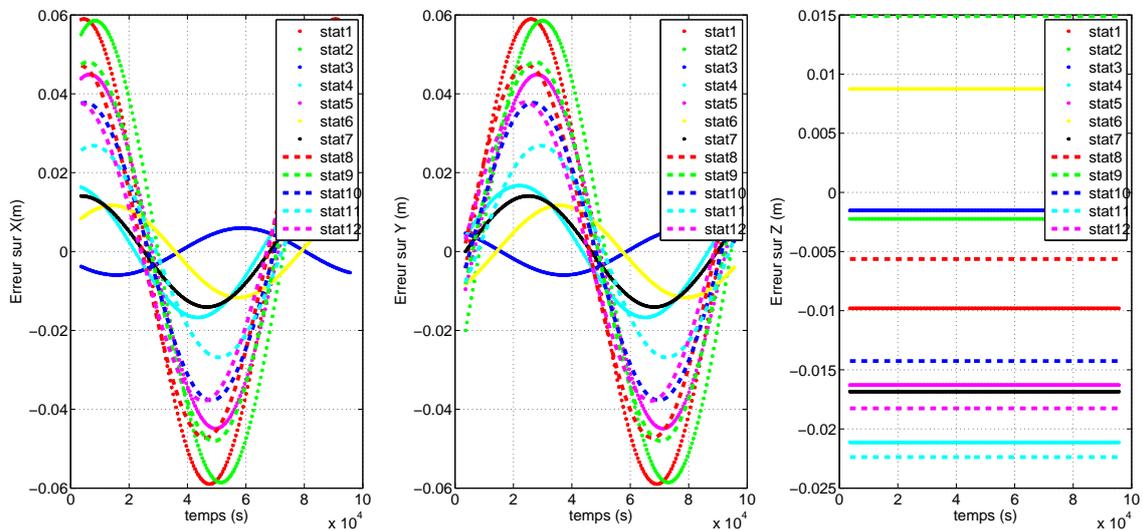


(c) Système Hybride, Version Complète.

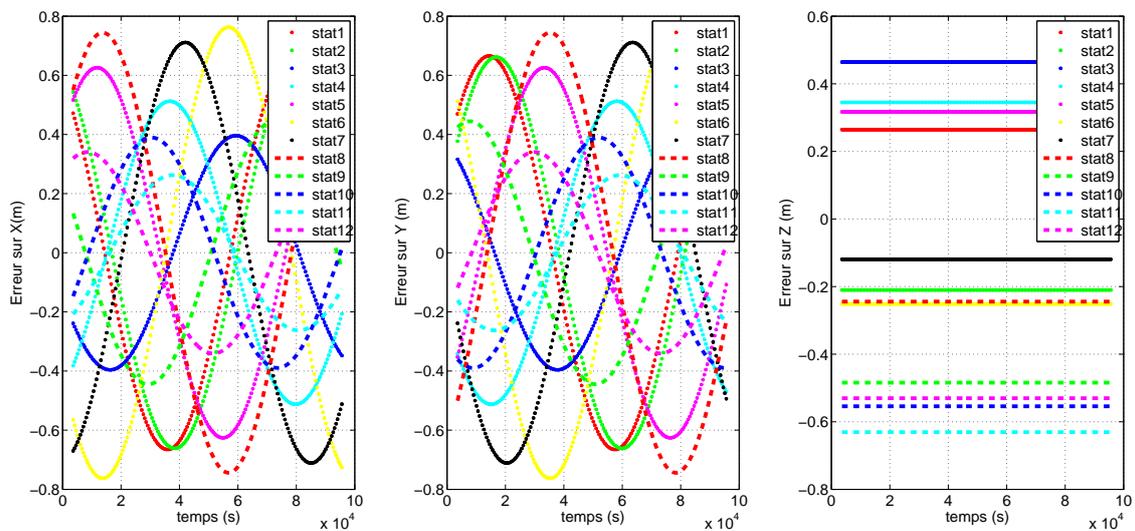
FIGURE 4.16 – Erreurs absolues sur l'orbite des satellites après ajustement, en repère local orbital.



(a) Système Classique, Version Témoin.

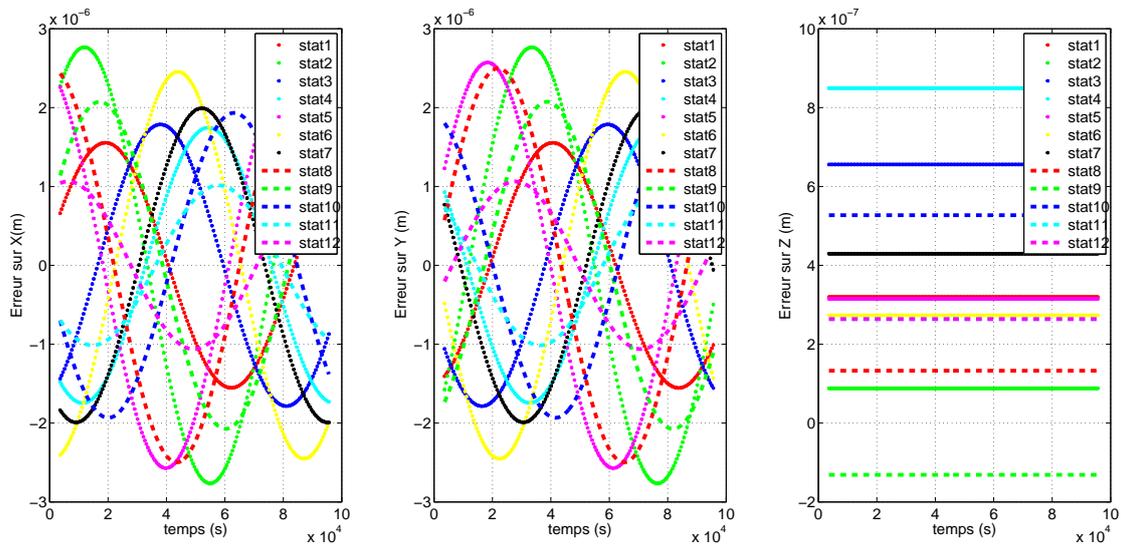


(b) Système Classique, Version Bruit d'horloge.

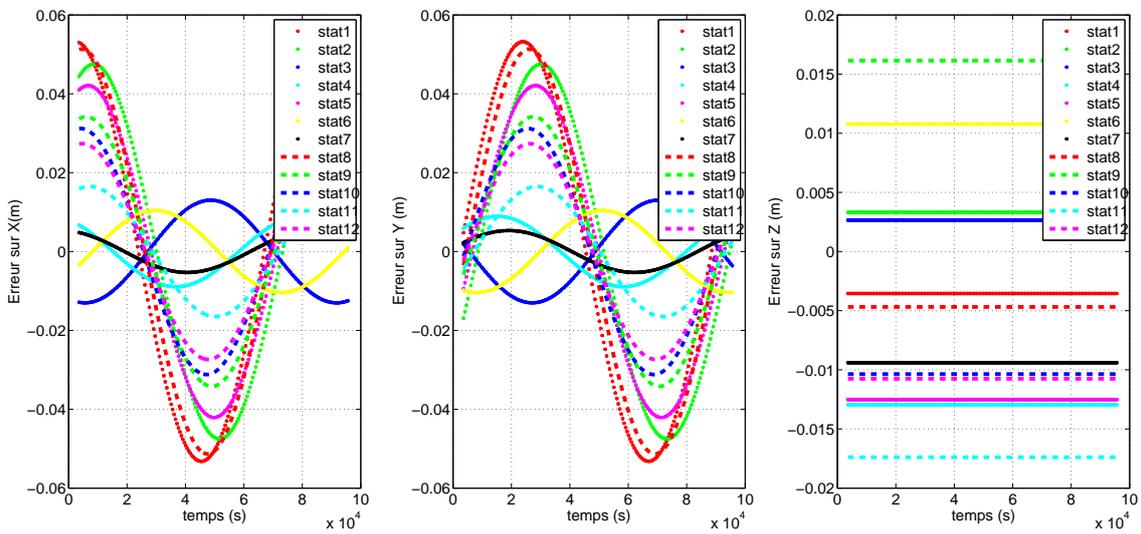


(c) Système Classique, Version Complète.

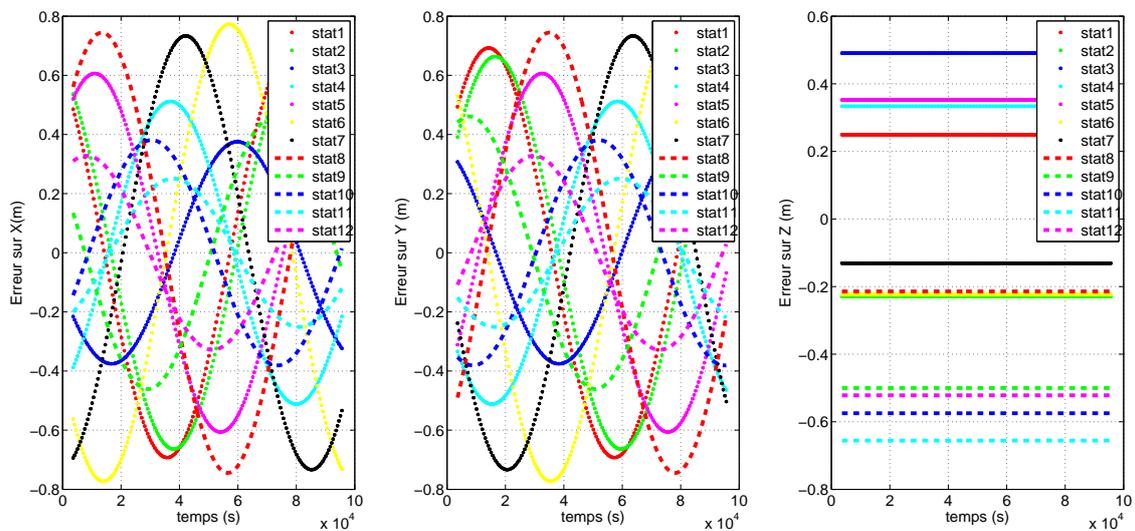
FIGURE 4.17 – Erreurs absolues sur le mouvement des stations après ajustement, en repère inertiel.



(a) Système Hybride, Version Témoin.

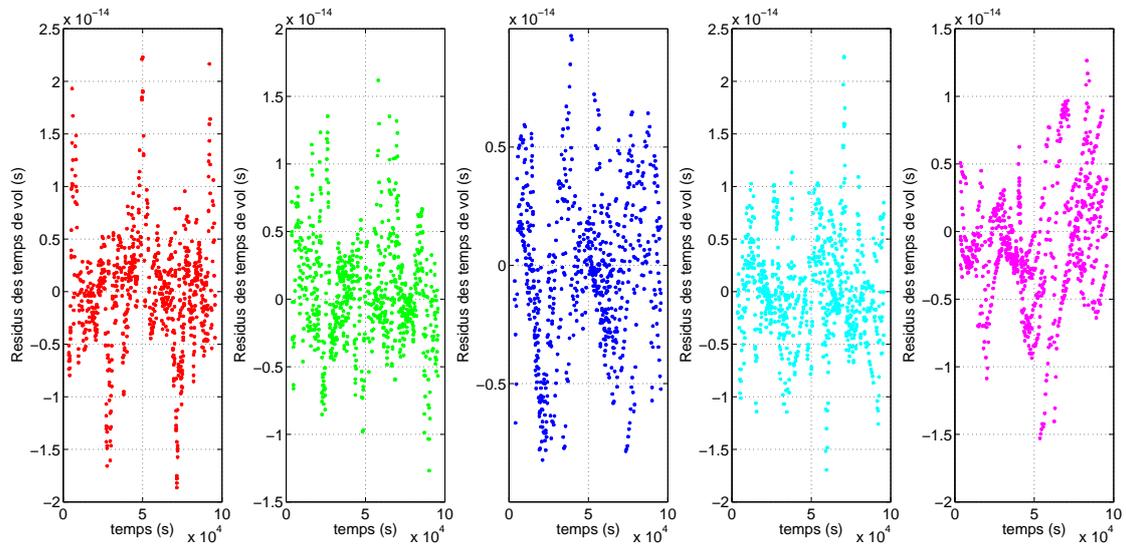


(b) Système Hybride, Version Bruit d'horloge.

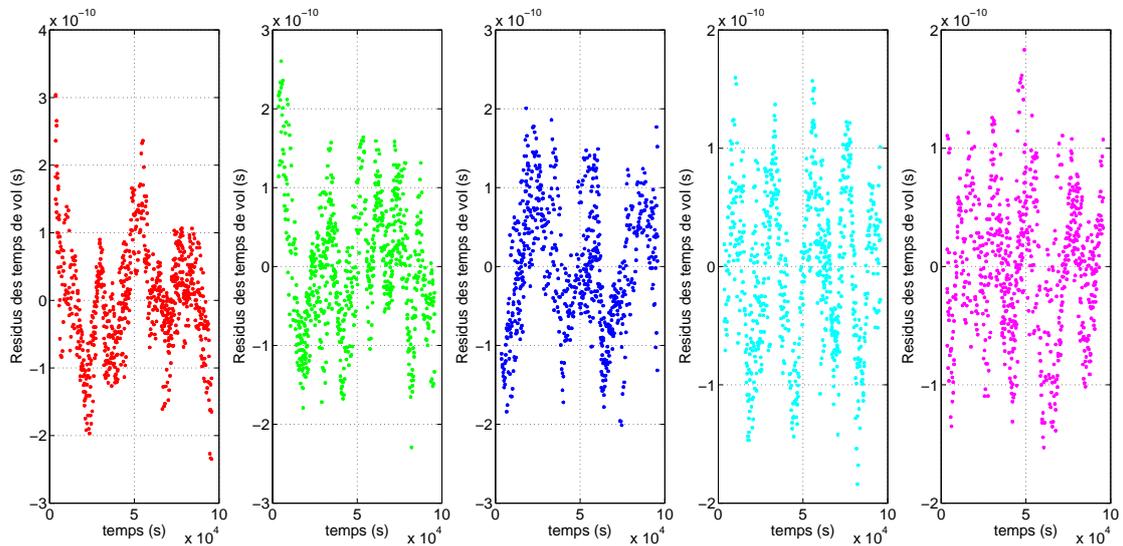


(c) Système Hybride, Version Complète.

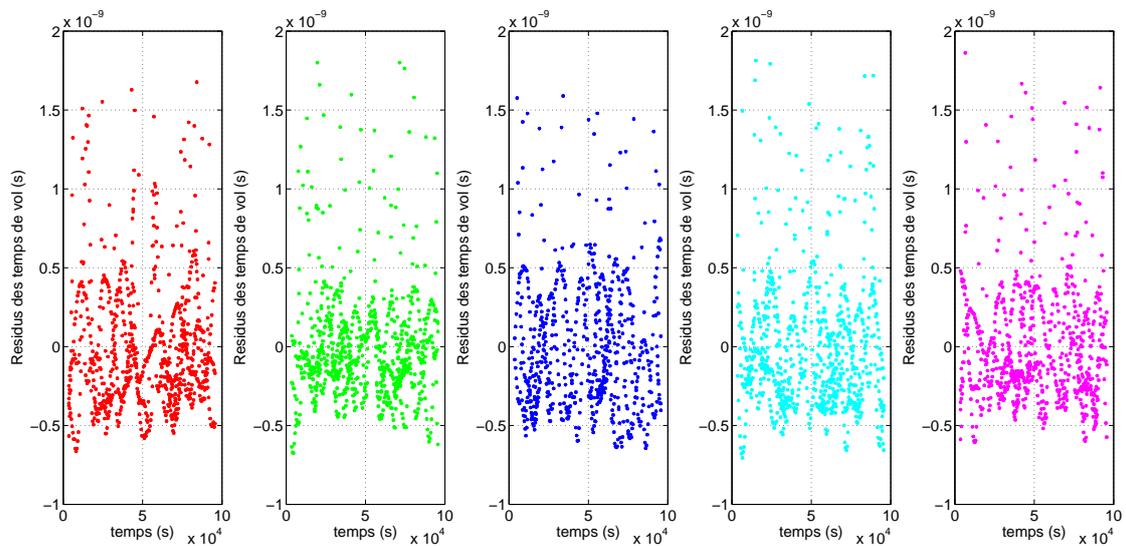
FIGURE 4.18 – Erreurs absolues sur le mouvement des stations après ajustement, en repère inertiel.



(a) Système Classique, Version Témoin.

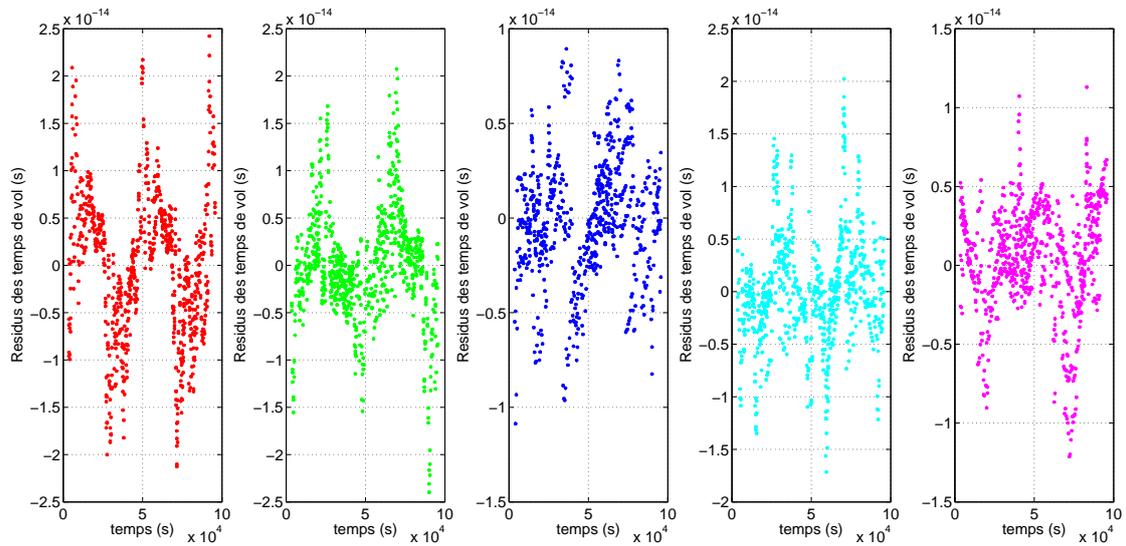


(b) Système Classique, Version Bruit d'horloge.

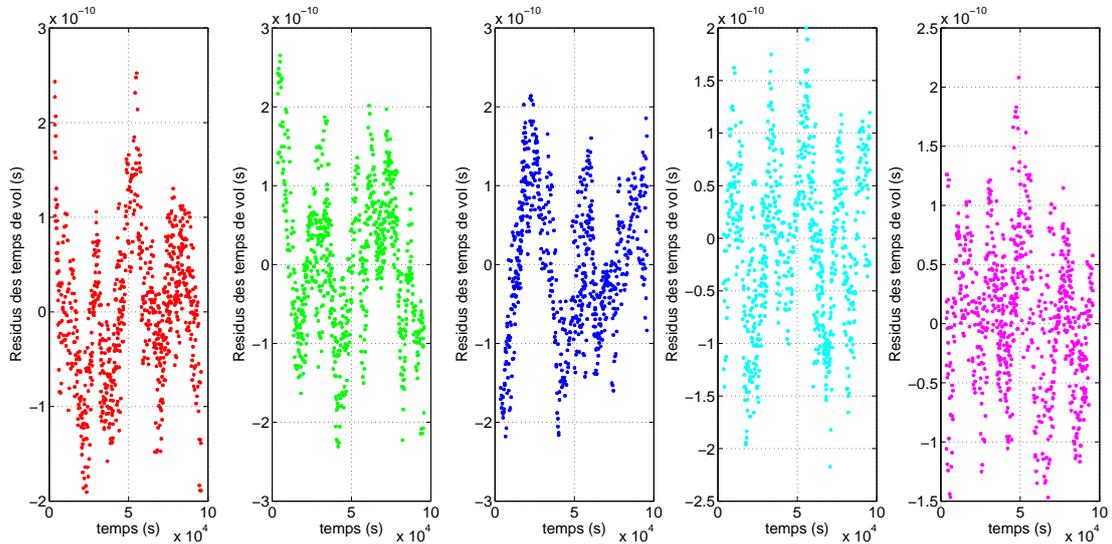


(c) Système Classique, Version Complète.

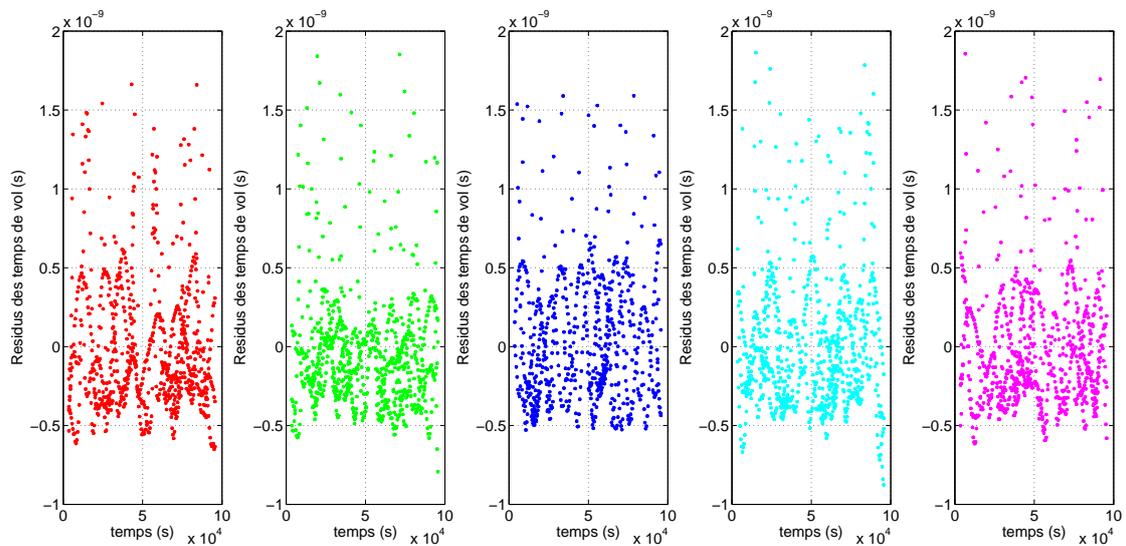
FIGURE 4.19 – Résidus des temps de vol STG triés pour les cinq satellites.



(a) Système Hybride, Version Témoin.

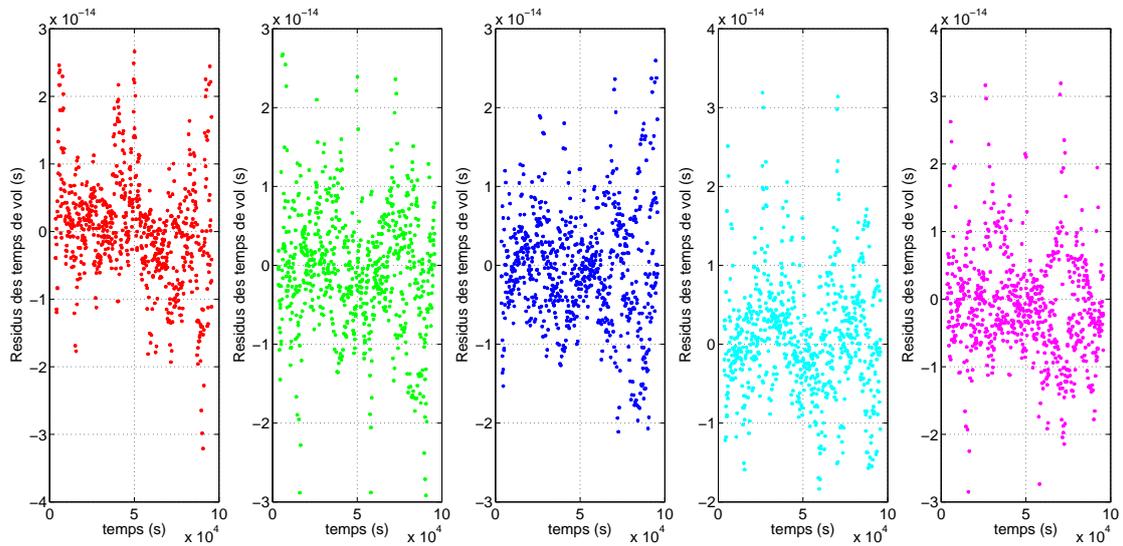


(b) Système Hybride, Version Bruit d'horloge.

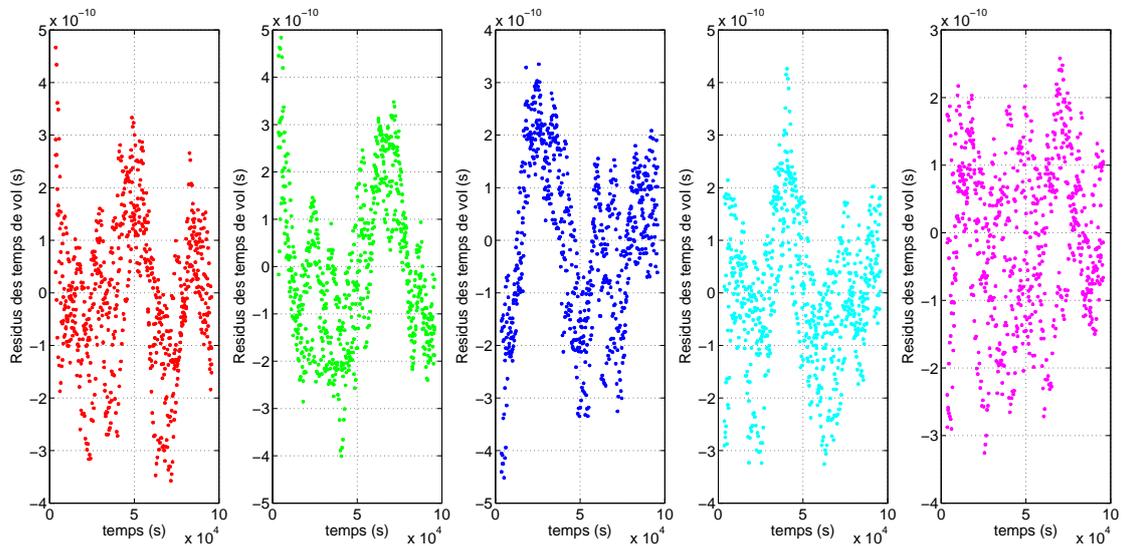


(c) Système Hybride, Version Complète.

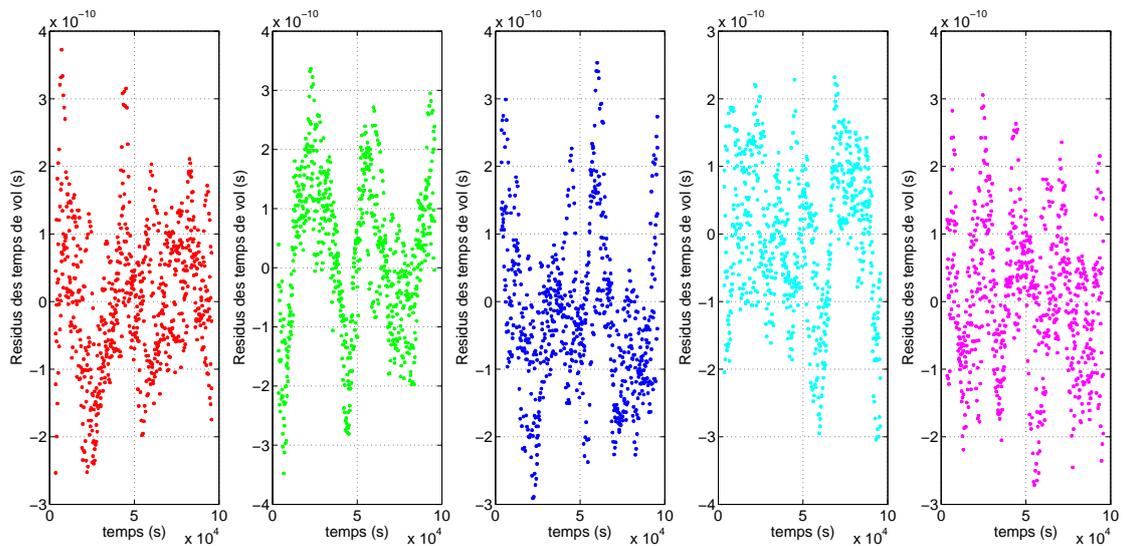
FIGURE 4.20 – Résidus des temps de vol STG triés pour les cinq satellites.



(a) Système Hybride, Version Témoin.



(b) Système Hybride, Version Bruit d'horloge.



(c) Système Hybride, Version Complète.

FIGURE 4.21 – Résidus des temps de vol STS triés pour les cinq satellites.

Conclusion

Comme présenté dans l'introduction, j'ai conduit une étude différentielle à l'aide d'observations simulées. Mes travaux ont permis de répondre à la problématique suivante : déterminer quantitativement l'impact des liens inter-satellites (ISL) dans une constellation GNSS. Sous des hypothèses équivalentes, j'ai comparé les performances entre un GNSS standard (au sens des GNSS actuels), appelé système classique, et un système GNSS augmenté par des ISL, appelé système hybride.

La méthodologie de l'étude a consisté à :

- modéliser les observables bruitées des deux systèmes étudiés.
- établir un budget d'erreur quantitatif dépendant des différentes sources d'erreurs (délai troposphérique et instrument).

Le caractère différentiel de cette étude permet de ne pas considérer les inexactitudes de modèle (équations du mouvement, propagation des signaux) introduites comme critiques, puisqu'elles sont partagées par les deux systèmes étudiés. Cette méthodologie autorise cependant à quantifier les différences relatives entre les deux systèmes par la comparaison de leurs exactitudes relatives respectives. Les sources de bruits et d'effets perturbateurs dans nos calculs sont ajoutées progressivement, ce qui permet à la fois d'avoir accès à une lecture limpide des résultats, mais aussi d'augmenter la robustesse et la confiance en nos résultats.

Pour mener à bien cette étude, j'ai écrit un logiciel qui se découpe en deux parties autonomes :

- Une simulation qui calcule deux types de pseudo-temps de vol bruités (liens STS et liens STG) respectifs aux deux systèmes étudiés.
- Une analyse qui prend en entrée ces pseudo-temps de vol dans le but de trouver les paramètres initiaux de la simulation grâce à une procédure d'ajustement non linéaire, et qui construit les budgets d'erreurs quantitatifs. Suite à l'étude des différentes limitations actuelles, j'ai retenu dans le cadre de cette thèse deux principales sources de bruit : le bruit troposphérique et les bruits d'horloges.

Le logiciel a été codé spécialement pour cette étude et propose une architecture souple et modulaire, autorisant facilement l'implémentation de nouveaux modèles. Néanmoins, cet environnement de travail peut s'adapter à d'autres études dans le domaine des GNSS.

J'ai montré que la présence des ISL dans le système hybride améliore la détermination des orbites des satellites et cela quelle que soit la combinaison de bruits considérée (Bruit horloge seul ou bruit horloge et biais troposphérique). Pour la version complète du logiciel, comportant des bruits d'horloges réalistes et un biais troposphérique réaliste, on améliore d'un facteur quatre la détermination de la composante radiale du mouvement et de plus d'un ordre de grandeur la détermination des composantes tangentées et cross-tangentées. Cette optimisation des performances est due à deux qualités du système hybride :

- Les liens ISL explorent des plans de la géométrie du système complet différents de ceux des liens espace-sol.
- Ces liens ne sont pas soumis aux erreurs troposphériques.

L'ajustement des autres paramètres reste cependant sensiblement identique. Le fait que les paramètres de position des stations ne soient pas améliorés dans le système hybride provient de la présence des liens STS qui augmentent la proportion d'observations liées aux satellites. Les paramètres des satellites sont alors favorisés dans l'ajustement non-pondéré.

J'apporte finalement avec cette étude de la clarté, de la simplicité, et une prise en compte du contexte actuel pour investiguer le domaine de la détermination des orbites et des paramètres d'horloges dans une constellation de type GNSS augmentée de liens inter-satellites. De plus, elle s'inscrit de façon complémentaire vis-à-vis des autres études réalisées sur les liens inter-satellites.

Pour aller au-delà de cette thèse, on peut envisager le problème suivant : on constate que les positions des stations ne sont pas améliorées avec le système hybride. Cependant, les orbites des satellites sont améliorées d'un ordre de grandeur. Il serait alors intéressant de regarder ce qu'il se passe pour un utilisateur "standard" des GNSS (qui ne participe pas à l'ajustement et à la détermination de la solution globale), tel que le récepteur à bord d'une voiture, d'un avion ou d'un satellite en orbite basse. Ce récepteur utilise les orbites et les paramètres d'horloges des satellites tels que fournis pour déterminer sa propre position. Avec le logiciel développé, il est par conséquent possible de répondre à cette problématique, en mesurant l'erreur sur le positionnement de l'utilisateur et ce pour les deux systèmes. On s'attend à ce que la position du récepteur soit améliorée avec l'utilisation des orbites du système hybride, mais mon logiciel serait en mesure de le quantifier relativement. De plus, il serait intéressant de distinguer deux types d'utilisateurs, ceux positionnés sur Terre et ceux en orbite basse, dans le but de sonder l'évolution de l'amélioration attendue sur le positionnement.

En outre, il serait utile d'implémenter des modèles physiques plus précis, ainsi que d'autres sources de bruits. D'une part, cela permettrait d'être certain que ce qui n'est pas implémenté dans l'étude ne modifie pas les principales conclusions. D'autre part, il serait possible d'accéder à une évaluation de l'exactitude absolue attendue pour le système hybride. Notons qu'il serait impératif, pour avoir une estimation de l'impact quantitatif absolu des ISL, de simuler le système classique sous les mêmes hypothèses.

Pour répondre à ces nouvelles perspectives, je pourrais améliorer :

- le modèle d'orbite : Il serait intéressant d'implémenter l'ensemble des composantes du mouvement dues aux forces gravitationnelles, notamment d'utiliser un modèle précis du potentiel terrestre et d'introduire les effets perturbateurs dus aux autres corps du système solaire. En outre, la modélisation des forces non gravitationnelles est aussi à considérer, telle que la force de pression de radiation solaire qui est une composante importante de l'accélération du satellite.
- les bruits : D'autres sources de bruits peuvent être en effet considérées. Par exemple, l'implémentation d'un bruit ionosphérique (pour les liens passant par la haute atmosphère) est à envisager. De plus, des bruits provenant de l'électronique et de la position des antennes pourraient être implémentés. Notons qu'une étude portant sur les types d'horloges utilisés serait intéressante à conduire. En effet, mon logiciel pourrait comparer les systèmes utilisant différents types d'horloges, caractérisés par des bruits différents.
- la séquence des ISL et les techniques de transfert de temps : J'ai utilisé dans nos tests un schéma simple de séquence ISL, où l'émetteur envoie vers tous les récepteurs en vue au même instant coordonné. Cependant, on pourrait envisager les contraintes des différentes technologies de transfert de temps (1-voie, 2-voies asynchrone, 2-voies) et caractériser leur impact. De plus, le système d'ISL en développement par l'ESA considère un accès TDMA⁵ avec une séquence minimisant le temps entre deux observations relatives à la même paire de satellite. Une étude intéressante serait de considérer différentes séquences propres à la géométrie de la constellation utilisée. Pour cela, il serait indispensable de construire un algorithme prenant en entrée les qualités exigées par la séquence (maximisation du nombre d'observables, maximisation des observables entre paires de satellites différentes, etc.).

Finalement, la base de travail que procure mon logiciel, pourrait servir de point de départ pour quantifier l'impact d'un système autonome de référence spatio-temporel (COLL, 2013). Ce système serait réalisé par la constellation de satellites GNSS grâce aux liens inter-satellites (COLL, 2003; DELVA et collab., 2011b; ČADEŽ et collab., 2011). L'ajout des modèles considérés ci-dessus permettrait de comparer, à des niveaux d'exactitude et de stabilité significatives, et ce pour diverses applications, les performances entre un système terrestre standard et un système autonome indépendant des paramètres liés à la rotation de la Terre (DELVA et collab., 2011a). Pour réaliser un tel système, il est en effet nécessaire de pouvoir modéliser très précisément les forces non-gravitationnelles (DELVA et collab., 2011b). La réalisation d'un tel système aurait notamment un impact important dans les domaines de la physique fondamentale et de la géoscience (DELVA et collab., 2011a).

5. cf. section 2.2.2 pour une définition.

Bibliographie

- ALTAMIMI, Z., C. BOUCHER et P. SILLARD. 2002, «New trends for the realization of the international terrestrial reference system», *Advances in Space Research*, vol. 30, n° 2, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0273-1177\(02\)00282-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0273-1177(02)00282-X), p. 175 – 184, ISSN 0273-1177. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S027311770200282X>. 19
- ALTAMIMI, Z., X. COLLILIEUX et L. MÉTIVIER. 2011, «ITRF2008 : an improved solution of the international terrestrial reference frame», *Journal of Geodesy*, vol. 85, doi :10.1007/s00190-011-0444-4, p. 457–473. 1
- ANGONIN, M. C. 2014, «Introduction à la relativité générale», Cours donné en Master 1 à l'Observatoire de Paris. 11
- ARIAS, E. F. 2015, «Echelles de temps, temps des gnss et dissémination de temps», Présentation faite aux journées GNSS et la Science, CNES. iii, 22, 23
- ARIAS, E. F., G. PANFILO et G. PETIT. 2011, «Timescales at the bipm», *Metrologia*, vol. 48, n° 4, p. S145. URL <http://stacks.iop.org/0026-1394/48/i=4/a=S04>. 21
- ARONA, L., J. A. PULIDO et F. SOUALLE. 2008, «Gnssplus final report», cahier de recherche, Deimos Space. 2, 67
- ASHBY, N. 2003, «Relativity in the Global Positioning System», *Living Reviews in Relativity*, vol. 6, doi :10.12942/lrr-2003-1, ISSN 1433-8351. URL <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1>. 1, 50, 51, 52, 53, 54
- BAUCH, A., G. BEUTLER et G. PETIT. 2012, «Time and frequency metrology and its use for navigation : Status and proposed future research themes», . 55
- BIPM. 2006, *Le Système international d'unités, 8e édition*, BIPM. URL <http://www.bipm.org>. 6
- BLANCHET, L. 1996, «Introduction à la relativité générale», Universités Paris VII et Paris XI DEA d'Astrophysique et Techniques Spatiales. 7
- BRANKIN, R., I. GLADWELL et L. F. SHAMPINE. 1993, *RKSUITE : A Suite of Explicit Runge-Kutta Codes*, World. 78
- BRUMBERG, V. et S. KOPEJKIN. 1989, «Relativistic theory of celestial reference frames», dans *Reference Frames, Astrophysics and Space Science Library*, vol. 154, édité par J. Kovalevsky, I. Mueller et B. Kolaczek, Springer Netherlands, ISBN 978-94-010-6909-0, p. 115–141, doi :10.1007/978-94-009-0933-5_6. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-0933-5_6. 17
- BRUMBERG, V. A. 1991, *Essential relativistic celestial mechanics*. 76, 78
- BUBNOVÁ, R., G. HELLO, P. BÉNARD et J.-F. GELEYN. 1995, «Integration of the fully elastic equations cast in the hydrostatic pressure terrain-following coordinate in the framework of the arpege/aladin nwp system», *Monthly Weather Review*, vol. 123, n° 2, p. 515–535. 1

- BUISSON, J. A., R. L. EASTON et T. B. MCCASKILL. 1978, «Initial results of the navstar gps nts-2 satellite», dans *Proceedings of the 9th Annual Precise Time and Time Interval Applications and Planning Meeting*, p. 177–200. 1
- BYRD, R., R. SCHNABEL et G. SHULTZ. 1988, «Approximate solution of the trust region problem by minimization over two-dimensional subspaces», *Mathematical Programming*, vol. 40, n° 1-3, doi :10.1007/BF01580735, p. 247–263, ISSN 0025-5610. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01580735>. 100
- CAPITAINE, N. 2011, «Systèmes de référence», Cours de Master 2 Recherche de l’Observatoire de Paris. 16, 19, 20
- CHENAL, J. 2012, «Galileo : un système global de positionnement par satellites», Leçon aux élèves du Mastère de Photogrammétrie, Positionnement et Mesures de Déformations Option Géodésie. 30
- CHENAL, J. 2014, «Introduction aux techniques de la géodésie spatiale», Mastère de Photogrammétrie, Positionnement et Mesures de Déformations Option Géodésie. 50, 51, 52
- COLL, B. 2003, «A principal positioning system for the Earth», *arXiv :gr-qc/0306043*. URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0306043>, arXiv : gr-qc/0306043. 141
- COLL, B. 2013, «Relativistic positioning systems : Perspectives and prospects», *arXiv preprint arXiv :1302.5782*. 141
- DAMOUR, T., M. SOFFEL et C. XU. 1991, «General-relativistic celestial mechanics. i. method and definition of reference systems», *Phys. Rev. D*, vol. 43, doi :10.1103/PhysRevD.43.3273, p. 3273–3307. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.43.3273>. 17
- DELVA, P., A. CADEZ, U. KOSTIC et S. CARLONI. 2011a, «A relativistic and autonomous navigation satellite system», *arXiv :1106.3168 [gr-qc]*. URL <http://arxiv.org/abs/1106.3168>, arXiv : 1106.3168. 141
- DELVA, P., A. HEES, S. BERTONE, E. RICHARD et P. WOLF. 2015, «Test of the gravitational redshift with stable clocks in eccentric orbits : application to Galileo satellites 5 and 6», *Classical and Quantum Gravity*, vol. 32, doi :10.1088/0264-9381/32/23/232003, p. 232 003, ISSN 0264-9381. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2015CQGra..32w2003D>. 1, 48, 53, 62
- DELVA, P., U. KOSTIĆ et A. ČADEŽ. 2011b, «Numerical modeling of a Global Navigation Satellite System in a general relativistic framework», *Advances in Space Research*, vol. 47, n° 2, doi :10.1016/j.asr.2010.07.007, p. 370–379, ISSN 0273-1177. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117710004643>. 141
- DOW, J. M., R. NEILAN et C. RIZOS. 2009, «The international gnss service in a changing landscape of global navigation satellite systems», *Journal of Geodesy*, vol. 83, n° 3-4, p. 191–198. 41, 63

- DUQUENNE, F., S. BOTTON et F. P. [ET AL.]. 2005, *GPS : localisation et navigation par satellites Texte imprimé*, Hermes science publications, Paris, ISBN 2-7462-1090-8. URL <http://opac.inria.fr/record=b1119598>, gPS : Global positioning system. 29, 40, 44
- EINSTEIN, A. 1905, «Zur Elektrodynamik bewegter Körper», *Annalen der Physik*, vol. 17, n° 10, doi :10.1002/andp.19053221004, p. 891–921, ISSN 00033804. URL <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004>. 24
- ESSEN, L. et J. V. L. PARRY. 1955, «An atomic standard of frequency and time interval : A caesium resonator», *Nature*, vol. 176, n° 4476, doi :10.1038/176280a0, p. 280–282. URL <http://dx.doi.org/10.1038/176280a0>. 36
- FERNÁNDEZ, F. A. 2011, «Inter-satellite ranging and inter-satellite communication links for enhancing GNSS satellite broadcast navigation data», *Advances in Space Research*, vol. 47, doi :10.1016/j.asr.2010.10.002, p. 786–801. iii, 67, 68
- FERNÁNDEZ, F. A., J.-L. GERNER et J. DOW. 2011, «ESA ADVISE Project. New Developments on Inter-Satellite Ranging for Orbit and Clock Determination», cahier de recherche, ESA. 2, 67
- FLANNERY, B. P., W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY et W. VETTERLING. 1992, «Numerical recipes in C», *Press Syndicate of the University of Cambridge, New York*, vol. 24. 78
- GALILEO, E. U. 2010, «Signal In Space Interface Control Document», . 85
- GOURGOULHON, E. 2012, «Relativité générale», Observatoire de Paris, Universités Paris VI, Paris VII et Paris XI Master Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale Année M2 - Parcours Recherche. 15
- GUIER, W. H. et G. C. WEIFFENBACH. 1958, «Theoretical analysis of doppler radio signals from earth satellites», *Nature*, vol. 181, n° 4622, doi :10.1038/1811525a0, p. 1525–1526. URL <http://dx.doi.org/10.1038/1811525a0>. 36
- HAMMESFAHR, J., A. HORNOSTEL, J. HAHN, H. L. TRAUTENBERG, C. RAPP, W. SPECHT, B. EISSFELLER, R. WOLF, O. BALBACH, Z. FU, T. ZINK, P. SOUTY, D. LEVAVASSEUR, H. MALTHAN, N. LEMKE, W. SCHÄFER, P. TAVELLA et M. LEONARDI. 1999, «Intersatellite ranging and autonomous ephemeris determination for future navigation systems, final report», cahier de recherche. 2, 66
- HELM, A. 2015, «Aces tropospheric model vmf1 performance assessment», cahier de recherche, Airbus. 120
- HERNÁNDEZ-PAJARES, M., À. ARAGÓN-ÁNGEL, P. DEFRAIGNE, N. BERGEOT, R. PRIETO-CERDEIRA et A. GARCÍA-RIGO. 2014, «Distribution and mitigation of higher-order ionospheric effects on precise gnss processing», *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, vol. 119, n° 4, p. 3823–3837. 62
- HLADIK, J. 2006, *Introduction à la relativité générale*, ellipses. 13, 14, 15

- HOFMANN-WELENHOF, B., H. LICHTENEGGER et J. COLLINS. 1997, *GPS, Theory and Practice*, fourth, revised edition éd., Springer-Verlag. 19, 29, 38
- IAU. 1991, «iau trasactions vol xxib», dans *Proc. 21st Gen. Assembly Buenos Aires*, Kluwer, Dordrecht, Boston, London. 17, 19, 25
- KAPLAN, E. et C. HEGARTY. 2005, *Understanding GPS : Principles and Application*, Artech House. 31, 32, 62
- KLIONER, S. 1992, «The problem of clock synchronization : A relativistic approach», *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 53, n° 1, doi :10.1007/BF00049363, p. 81–109, ISSN 0923-2958. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00049363>. 25
- KOPEIKIN, S. M. 1988, «Celestial coordinate reference systems in curved spacetime», *Celest. Mech.*, vol. 44, doi :10.1007/BF01230709, p. 87. 17
- KOUBA, J. 2009, «A guide to using international gnss service (igs) products», . 39
- LOYER, S. 2015, «Perspectives pour l’orbitographie précise des satellites gnss», dans *Journée GNSS et Science*. 60, 61, 62
- MA, C., E. F. ARIAS, T. M. EUBANKS, A. L. FEY, A.-M. GONTIER, C. S. JACOBS, O. J. SOVERS, B. A. ARCHINAL et P. CHARLOT. 1998, «The international celestial reference frame as realized by very long baseline interferometry», *The Astronomical Journal*, vol. 116, n° 1, p. 516. URL <http://stacks.iop.org/1538-3881/116/i=1/a=516>. 20
- MARTOCCIA, D., H. BERNSTEIN, Y. CHAN, R. FRUEHOLZ et A. WU. 1998, «Gps satellite timing performance using the autonomous navigation (autonav)», dans *Proceedings of the 11th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1998)*, p. 1705 – 1712. 66
- MELBOURNE, W. G. 1985, «The case for ranging in gps-based geodetic systems», dans *Proceedings of the first international symposium on precise positioning with the Global Positioning System*, vol. 1519. 42
- MENN, M. et H. BERNSTEIN. 1994, «Ephemeris observability issues in the Global Positioning System (GPS) autonomous navigation (AUTONAV)», dans , *IEEE Position Location and Navigation Symposium, 1994*, p. 677–680, doi :10.1109/PLANS.1994.303376. 65, 66
- MONTENBRUCK, O. et G. EBERHARD. 2000, *Satellite orbits : models, methods, and applications*, 1^{re} éd., Berlin ; London : Springer, ISBN 354067280X. One CD-ROM in pocket attached to inside back cover. iii, 77
- MONTENBRUCK, O., U. HUGENTOBLE, R. DACH, P. STEIGENBERGER et A. HAUSCHILD. 2012, «Apparent clock variations of the block iif-1 (svn62) gps satellite», *GPS solutions*, vol. 16, n° 3, p. 303–313. 60

- MONTENBRUCK, O., P. STEIGENBERGER et U. HUGENTOBLER. 2015, «Enhanced solar radiation pressure modeling for galileo satellites», *Journal of Geodesy*, vol. 89, n° 3, p. 283–297. 58, 61, 62
- MURRAY, C. D. et S. F. DERMOTT. 1998, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press. 52, 78
- PANET, I., F. POLLITZ, V. MIKHAILOV, M. DIAMENT, P. BANERJEE et K. GRIJALVA. 2010, «Upper mantle rheology from grace and gps postseismic deformation after the 2004 sumatra-andaman earthquake», *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, vol. 11, n° 6. 1
- PETIT, G. et E. F. ARIAS. 2009, «Use of IGS products in TAI applications», *Journal of Geodesy*, vol. 83, doi :10.1007/s00190-008-0240-y, p. 327–334. 1
- PETIT, G. et P. WOLF. 2005, «Relativistic theory for time comparisons : a review», *Metrologia*, vol. 42, n° 3, p. S138. URL <http://stacks.iop.org/0026-1394/42/i=3/a=S14>. 24
- POINCARÉ, H. 1902, *La science et l'hypothèse*, Flammarion. 13
- PRANGE, L., R. DACH, S. LUTZ, S. SCHAEER et A. JÄGGI. 2014, «The code mgex orbit and clock solution», dans *IAG Potsdam 2013 Proceedings. Springer, International Association of Geodesy Symposia, accepted for publication*. iii, 58, 60
- ROCHAT, P., F. DROZ, P. MOSSET, G. BARMAVERAIN, Q. WANG, D. BOVING, L. MATTIONI, M. BELLONI, M. GIOIA, U. SCHMIDT et collab.. 2005, «The onboard galileo rubidium and passive maser, status & performance», dans *Frequency Control Symposium and Exposition, 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International*, IEEE, p. 26–32. 1
- ROCHAT, P., F. DROZ, Q. WANG et S. FROIDEVAUX. 2012, «Atomic clocks and timing systems in global navigation satellite systems», dans *Proceedings of European navigation conference, Gdansk, April*, p. 1–11. 60
- RODRÍGUEZ-PÉREZ, I., C. GARCÍA-SERRANO, C. CATALÁN CATALÁN, A. M. GARCÍA, P. TAVELLA, L. GALLEANI et F. AMARILLO. 2011, «Inter-satellite links for satellite autonomous integrity monitoring», *Advances in Space Research*, vol. 47, n° 2, doi :10.1016/j.asr.2010.07.019, p. 197–212, ISSN 0273-1177. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117710004916>. 68
- SAASTAMOINEN, J. 1972, «Contributions to the theory of atmospheric refraction», *Bulletin Géodésique (1946-1975)*, vol. 105, n° 1, doi :10.1007/BF02521844, p. 279–298. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02521844>. 83
- SHAMPINE, L. F. et J. A. GORDON, M. K. (MARILYN KAY). 1975, *Computer solution of ordinary differential equations : the initial value problem*, San Francisco : W. H. Freeman, ISBN 0716704617. Includes index. 96
- SHAPIRO, I. I. 1964, «Fourth test of general relativity», *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, doi :10.1103/PhysRevLett.13.789, p. 789–791. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.789>. 54

- SOFFEL, M., S. A. KLIONER, G. PETIT, P. WOLF, S. M. KOPEIKIN, P. BRETAGNON, V. A. BRUMBERG, N. CAPITAINE, T. DAMOUR, T. FUKUSHIMA, B. GUINOT, T.-Y. HUANG, L. LINDEGREN, C. MA, K. NORDTVEDT, J. C. RIES, P. K. SEIDELMANN, D. VOKROUH-LICKÝ, C. M. WILL et C. XU. 2003, «The iau 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework : Explanatory supplement», *The Astronomical Journal*, vol. 126, n° 6, p. 2687. URL <http://stacks.iop.org/1538-3881/126/i=6/a=2687>. 18, 19
- SUIBIRANA, J. S., J. ZORNOZA et M. HENANDEZ-PAJARES. 2013, *GNSS data processing*, vol. I : Fundamentals and Algorithms, ESA Communications. 33, 42
- TEYSSANDIER, P. 2008, «Introduction aux théories relativistes et à leurs applications», Master “Sciences de l’Univers et techniques spatiales” Niveau M1. 13
- UHRICH, P. 2009, «Caractérisation de la stabilité des oscillateurs», Cours de Master M1. 57, 89
- UHRICH, P., P. TUCKEY, J. ACHKAR et D. VALAT. 2008, «Métrologie du temps externe pour le système européen de radionavigation par satellites galileo.», *Revue française de métrologie*. 49
- WALLER, P., F. GONZALEZ, J. HAHN, S. BINDA, R. PIRIZ, I. HIDALGO, G. TOBIAS, I. SESIA, P. TAVELLA et G. CERRETTO. 2008, «In-orbit performance assessment of giove clocks», cahier de recherche, DTIC Document. iii, 57, 58, 59
- WILL, C. M. 1993, *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press. 12
- WOLF, P. 2004, «Cours sur les transferts de temps relativistes», Cours de Master M1. 28
- WOLF, P. et G. PETIT. 1995, «Relativistic theory for clock syntonization and the realization of geocentric coordinate times.», *Astronomy and Astrophysics*, vol. 304, p. 653. 25
- WOLF, R. 2000a, «Onboard autonomous integrity monitoring using intersatellite links», dans *Proceedings of the Satellite Division of the Institute of Navigation 13th International Technical Meeting (September 19-22, 2000, Salt Lake City, Utah)*, p. 1572–1581. URL http://www.ifen.com/fileadmin/publications/IONGPS2000_ISL.pdf. 68
- WOLF, R. 2000b, «Satellite orbit and ephemeris determination using inter satellite links», *Vollständiger Abdruck der an der Fakultät für Bauingenieur-und Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurswissenschaften(Dr-Ing) eingereichten Dissertation*. URL <https://www.cs.tcd.ie/Stephen.Farrell/ipn/background/orbit-calc-using-intersat-links.pdf>. 2
- WOLF, R. 2000c, «Satellite Orbit and Ephemeris Determination using Inter Satellite Links», . 64, 66, 67, 68
- WU, J., S. WU, G. HAJJ, W. BERTIGER et S. LICHTEN. 1992, «Effects of antenna orientation on gps carrier phase», *Manuscripta Geodaetica*. 29

- WÜBBENA, G. 1985, «Software developments for geodetic positioning with gps using ti-4100 code and carrier measurements», dans *Proceedings of the first international symposium on precise positioning with the global positioning system*, vol. 19, sl] :[sn]. 42
- XU, H., J. WANG et X. ZHAN. 2011, «Gnss satellite autonomous integrity monitoring (saim) using inter-satellite measurements», *Advances in Space Research*, vol. 47, n° 7, p. 1116–1126. 68
- ZHAO, X., S. LIU et C. HAN. 2011, «Performance Analysis Of Autonomous Navigation Of Constellation Based On Inter Satellite Range Measurement», *Procedia Engineering*, vol. 15, doi :10.1016/j.proeng.2011.08.768, p. 4094–4098, ISSN 1877-7058. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705811022697>. 68
- ČADEŽ, A., U. KOSTIĆ, P. DELVA, S. CARLONI et A. ČADEŽ. 2011, «Mapping the Space-time Metric with a Global Navigation Satellite System–extension of study : Recovering of orbital constants using inter-satellites links», URL <http://www.academia.edu/download/30500402/act-rpr-phy-mappingspacetimeccn.pdf>. 141