



Dynamique et contrôle des écoulements polyphasiques

Emmanuel Duret

► To cite this version:

Emmanuel Duret. Dynamique et contrôle des écoulements polyphasiques. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005. Français. NNT: . tel-01583019

HAL Id: tel-01583019

<https://theses.hal.science/tel-01583019>

Submitted on 6 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité : Mathématiques et Automatique

présentée et soutenue publiquement

par

Emmanuel DURET

le 04 février 2005

DYNAMIQUE ET CONTRÔLE DES ÉCOULEMENTS POLYPHASIQUES

JURY

M. Bernhard MASCHKE	Président du jury
M. Jean-Pierre CORRIOU	Rapporteur
M. Denis DOCHAIN	Rapporteur
M. Quang-Huy TRAN	Promoteur de thèse
M. Pierre ROUCHON	Directeur de thèse

Aux miens.

Remerciements

Cette thèse a été réalisée à l'Institut Français du Pétrole et s'inscrit dans le cadre d'une collaboration avec le Centre Automatique et Systèmes de l'Ecole des Mines de Paris.

Je désire en premier lieu remercier Messieurs Eric Heintzé et Christian Pauchon qui m'ont donné l'opportunité d'effectuer ces recherches en parallèle de mon travail au sein du projet Transport Polyphasique.

Je souhaite tout particulièrement remercier Monsieur Pierre Rouchon d'avoir accepté de prendre en charge la direction de cette thèse ainsi que pour ses conseils précieux et sa disponibilité de tous les instants. Qu'il trouve ici l'expression de ma grande gratitude.

Cette étude a été initiée par Monsieur Quang-Huy Tran qui a ensuite suivi et orienté son développement tout au long de ces années. Je le remercie chaleureusement pour avoir, avec beaucoup de patience et d'attention, assuré ce suivi scientifique et technique mais surtout pour m'avoir fait profiter de ses nombreuses compétences au travers de nos longues discussions.

Je suis très honoré que Monsieur Bernhard Maschke ait été président de mon jury et que Messieurs Jean-Pierre Corriou et Denis Dochain aient accepté la charge de rapporteur de ce manuscrit. Qu'ils soient remerciés pour la pertinence et la diligence de leurs avis.

Cette thèse n'aurait jamais pu aboutir sans le soutien fort de Mesdames Françoise Brucy et Véronique Henriot qui m'ont donné les moyens d'effectuer ces travaux dans les meilleures conditions possibles. Qu'elles soient ici vivement remerciées.

Je tiens aussi à remercier Yannick Peysson pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée par son sens physique sans égal ainsi que lors de la construction de S^4L . Je lui dois entre autre d'avoir pris goût à l'expérimental.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à tous mes amis et collègues de l'IFP. Qu'ils trouvent là l'expression de toute ma sympathie pour leurs encouragements et leur aide au cours de ce travail de thèse. En particulier, je tiens à citer Anthony, Martin, Philippe, Sandrine et Gilles ainsi que Rida, Guillaume, David, Mohamed et Pierre-Victor.

Enfin, je remercie infiniment Cécile pour sa patience, sa compréhension et son soutien sans faille tout au long de ces années.

Table des matières

1	Introduction générale	1
	Dynamique du severe slugging	11
2	Ecoulements polyphasiques	13
2.1	Grandeurs fondamentales	14
2.2	Lois thermodynamiques	15
2.3	Régimes d'écoulements	16
2.3.1	Ecoulement stratifié	17
2.3.2	Ecoulement dispersé	17
2.3.3	Ecoulement intermittent	18
2.3.4	Transition entre les régimes	18
2.4	Modèles diphasiques transitoires	19
2.4.1	Modèle bi-fluide	19
2.4.2	Modèle à flux de dérive	20
2.5	Lois de fermeture hydrodynamiques	20
2.5.1	En stratifié	21
2.5.2	En dispersé	22
2.5.3	En intermittent	23
2.6	Les écoulements à bouchons	24
2.6.1	Description du severe slugging	26
2.6.2	Description du terrain slugging	29
3	Modélisation du severe slugging	31
3.1	Dimensions du système pipeline/riser	31
3.2	Conditions initiales	32
3.3	Formation du bouchon de liquide	34
3.3.1	Modélisation	35
3.3.2	Calcul de t_f	37
3.4	Production du bouchon de liquide	37
3.4.1	Modélisation	38
3.4.2	Calcul de t_p	39
3.5	Pénétration de la poche de gaz	39

3.5.1	Modélisation	40
3.5.2	Résolution numérique	43
3.5.3	Calcul de t_b	44
3.6	Récapitulatif du modèle	44
3.7	Critère d'occurrence	46
3.8	Validations expérimentales	47
3.8.1	Cartes d'écoulement	47
3.8.2	Comparaison entre le modèle et les expériences	52
3.8.3	Etude des temps caractéristiques	58
3.9	Conclusions	59
 Contrôle du severe slugging		 61
4	Contrôle par prélèvement	63
4.1	Modélisation	64
4.1.1	Dimensions du système	64
4.1.2	Système d'équations	65
4.1.3	Modèle à deux fronts	67
4.1.4	Espace des phases	70
4.1.5	Etat stationnaire	71
4.2	Etude de stabilité d'un contrôleur proportionnel	73
4.2.1	Système en boucle fermée	73
4.2.2	Point d'équilibre	76
4.2.3	Portrait de phases pour $\mathcal{A}_G^{NS} > 0$	77
4.2.4	Portrait de phases pour $\mathcal{A}_G^{NS} \leq 0$	87
4.3	Rajout d'une intégrale à la commande	90
4.3.1	Etude de stabilité locale	91
4.3.2	Etude de stabilité globale	92
4.4	Validations numériques et expérimentales	98
4.4.1	Résultats pour S^4L	99
4.4.2	Résultats pour un système de taille industrielle	111
4.5	Conclusions	112
5	Contrôle par by-pass	113
5.1	Modélisation	114
5.1.1	Dimensions du système	114
5.1.2	Système d'équations	115
5.1.3	Modèle simplifié	123
5.1.4	Espace des phases	128
5.1.5	Etat stationnaire	129
5.2	Critère de design sur la hauteur de réinjection	132
5.2.1	Stabilité des E.D.O. linéaires à retard constant	132
5.2.2	Application au système en boucle ouverte	134

5.3	Mise en place du contrôleur	145
5.3.1	Etat stationnaire	147
5.3.2	Conditions de stabilité	147
5.3.3	Conclusion	150
5.4	Validations numériques et expérimentales	150
5.4.1	Résultats pour S^4L	151
5.4.2	Résultats pour un système de taille industrielle	162
5.5	Conclusions	164
6	Conclusions et perspectives	167
	 Annexes et bibliographie	 171
A	Montage expérimental S^4L	173
B	Modélisation du terrain slugging	179
B.1	Dimensions du système	179
B.2	Conditions initiales	181
B.3	Formation du bouchon de liquide	183
B.4	Production du bouchon de liquide	186
B.5	Pénétration de la poche de gaz	188
C	Stabilité des E.D.O. linéaires à retard constant	191
C.1	Cas d'un retard pur	191
C.2	Cas général	197
	 Bibliographie	 207

Table des figures

1.1	Représentation d'un champ offshore	2
1.2	Synoptique des écoulements polyphasiques	3
1.3	Localisation des bouchons	4
1.4	Régulateur par prélèvement	8
1.5	Régulateur par by-pass	9
2.1	Représentation d'une section transverse en régime séparé	15
2.2	Ecoulements gaz/liquide horizontaux	16
2.3	Ecoulements gaz/liquide verticaux	17
2.4	Transitions possibles entre les différents régimes	18
2.5	Ecoulement annulaire stationnaire	25
2.6	Ecoulement intermittent stationnaire	25
2.7	Cycle du phénomène	26
2.8	Exemple de carte d'écoulement	27
2.9	Formation du bouchon de liquide	27
2.10	Production du bouchon de liquide	28
2.11	Pénétration de la poche de gaz	28
2.12	Chute du liquide	28
2.13	Formation du bouchon de liquide	29
2.14	Production du bouchon de liquide	29
2.15	Pénétration de la poche de gaz	30
2.16	Chute du liquide	30
3.1	Dimensions du problème	32
3.2	P et Π en fonction du temps pour le régime stable	47
3.3	P et Π en fonction du temps pour le régime de transition	48
3.4	P et Π en fonction du temps en conditions de severe slugging	48
3.5	Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08\text{ m}$, $v_G^+ = 15.8\text{ l}$ et $\beta_P = -10^\circ$	49
3.6	Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08\text{ m}$, $v_G^+ = 15.8\text{ l}$ et $\beta_P = -18^\circ$	50
3.7	Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08\text{ m}$, $v_G^+ = 25.8\text{ l}$ et $\beta_P = -10^\circ$	50
3.8	Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08\text{ m}$, $v_G^+ = 25.8\text{ l}$ et $\beta_P = -18^\circ$	51
3.9	Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08\text{ m}$, $v_G^+ = 35.8\text{ l}$ et $\beta_P = -10^\circ$	51
3.10	Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08\text{ m}$, $v_G^+ = 35.8\text{ l}$ et $\beta_P = -18^\circ$	52
3.11	Comparaison des pressions pour $\varepsilon_c = 0$	53
3.12	Comparaison des pressions pour $\varepsilon_c = 0.023$	54

3.13	Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.020$	55
3.14	Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.024$	56
3.15	Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.023$	56
3.16	Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.023$	57
3.17	Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.025$	57
3.18	Période et erreur en fonction de Q_G^{IN}	59
4.1	Système avec prélèvement	63
4.2	Dimensions du problème	65
4.3	Représentation graphique de la fonction $\mathcal{Z}$	66
4.4	Représentation graphique de la fonction $\mathcal{E}$	69
4.5	Représentation de $\bar{u}$ en fonction de x_G^{Ref} pour différents Q_G^{IN}	73
4.6	Portrait de phase en régime saturé	77
4.7	Espace des phases D^{PLV}	78
4.8	Positions relatives de $x_L^\#$ et $\tilde{x}_L$	80
4.9	Allure de $\mathcal{I}_L$	82
4.10	Positions relatives de x_L^b et $\tilde{x}_L$	85
4.11	Allure de $\mathcal{I}_G$	86
4.12	Portrait de phases pour $\mathcal{A}_G^{NS} > 0$	87
4.13	Portrait de phases pour $\mathcal{A}_G^{NS} \leq 0$	89
4.14	Champ de vecteurs pour la commande saturée	95
4.15	Champ de vecteurs dans le plan $(\Delta P, \Theta)$	97
4.16	Trajectoires dans le plan $(\Delta P, \Theta)$	98
4.17	Simulation pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$	100
4.18	Simulation pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	101
4.19	Simulation pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	101
4.20	Simulation pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	102
4.21	Simulation pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$	102
4.22	Test de robustesse du contrôleur	104
4.23	Expérience pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$	105
4.24	Expérience pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	107
4.25	Expérience pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	107
4.26	Expérience pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	108
4.27	Expérience pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$	109
4.28	Scénario sur les débits Q_G^{IN} et Q_L^{IN}	110
4.29	Robustesse du contrôleur	110
4.30	Simulation du contrôleur sur un système de taille industrielle	112
5.1	Système avec by-pass	113
5.2	Dimensions du problème	115
5.3	Caractéristiques $x = x_L(t)$ et $x = x_B(t)$	118
5.4	Représentation de $\bar{u}$ en fonction de x_G^{Ref} pour différents l_I	132
5.5	Conditions suffisantes de stabilité sur $a\tau$ et $b\tau$	133
5.6	Signe des coefficients $\nu_{\mathcal{D}}$ et $\kappa_{\mathcal{D}}$	138

5.7	Représentation de la condition de stabilité $a - b < 0$	139
5.8	Représentation de la condition de stabilité $b t_R > -1$	142
5.9	Condition de stabilité sur (x_G^{Ref}, l_I)	143
5.10	Condition de stabilité pour $S^4 L$	144
5.11	Validation numérique de la condition de stabilité	145
5.12	Validation expérimentale de la condition de stabilité	145
5.13	Simulation pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$	152
5.14	Simulation pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	153
5.15	Simulation pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	153
5.16	Simulation pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	154
5.17	Simulation pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$	154
5.18	Test de robustesse du contrôleur	156
5.19	Pressions P , Π et $\Pi_{filtré}$ pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	158
5.20	Expérience pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	158
5.21	Expérience pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	159
5.22	Expérience pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$	160
5.23	Expérience pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$	161
5.24	Expérience pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$	162
5.25	Simulation du contrôleur sur un système de taille industrielle	164
6.1	Système industriel du by-pass	169
A.1	Représentation de la boucle $S^4 L$	174
A.2	Synoptique de la boucle $S^4 L$	176
A.3	Représentation de la vanne	177
B.1	Dimensions du problème	180
C.1	Arc $\mathcal{A}$ et courbe $\mathcal{C}_0$	195
C.2	Courbes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}_0$	196
C.3	Conditions de stabilité sur $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans le cas réel	199
C.4	Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sur $\bar{a}$ et $\bar{b}$	205

Nomenclature

Lettres romaines

C_0^{int}	Facteur de forme de la poche de gaz $[-]$
C_0^{dis}	Paramètre de distribution des bulles de gaz $[-]$
C_∞^{int}	Vitesse de dérive des bulles de Taylor $[m/s]$
C_∞^{dis}	Vitesse à l'infini d'une bulle dans un milieu liquide stagnant $[m/s]$
C_∞	Vitesse de remontée de la phase gazeuse dans le riser $[m/s]$
C_V	Paramètre de la vanne $[m^2]$
d_K	Distance entre l'interface x_K et le point de réinjection dans le riser $[m]$
d_R	Distance entre le point de réinjection et le sommet du riser $[m]$
D	Diamètre de la conduite $[m]$
D_K	Diamètre hydraulique de la phase K $[m]$
D^{PLV}	Espace des états du modèle de contrôle par prélèvement
D^{BP}	Espace des états du modèle de contrôle par by-pass
f_K	Coefficient de frottement de la phase K sur la paroi de la conduite $[-]$
f_M	Coefficient de frottement du mélange $[-]$
f_I	Coefficient de frottement interfacial gaz/liquide $[-]$
F_K^W	Frottement de la phase K sur la paroi de la conduite $[Pa/m]$
F_I	Frottement interfacial gaz/liquide $[Pa/m]$
g	Accélération de la pesanteur $[m/s^2]$
h_L	Hauteur de liquide en régime stratifié $[m]$
K_P	Gain proportionnel de la commande $[m^{-1}, Pa^{-1} \text{ ou } s^{-1}]$
K_I	Gain intégral de la commande $[(Pa.s)^{-1} \text{ ou } s^{-1}]$
l^B	Longueur du bouchon de liquide en régime intermittent $[m]$
l^P	Longueur de la poche de gaz en régime intermittent $[m]$

l_P	Longueur du pipeline $[m]$
l_R	Hauteur du riser $[m]$
l_G^+	Longueur équivalente de conduite correspondant au volume v_G^+ $[m]$
l_I	Hauteur de réinjection $[m]$
$l_{\mathcal{H}}^{\#}$	Valeur minimale de la hauteur de réinjection $[m]$
l_I^i	Hauteurs de réinjection sur la boucle S^4L ($i = 1, 5$) $[m]$
m_G	Masse de gaz dans le système $[kg]$
m_L	Masse de liquide dans le système $[kg]$
$\tilde{m}_L$	Masse de liquide expulsée pendant le blow-out $[kg]$
P	Périmètre de la conduite $[m]$
P_K	Périmètre mouillé de la phase K $[m]$
P_I	Périmètre de l'interface gaz/liquide $[m]$
P	Pression en un point de la conduite $[Pa]$
P^N	Pression de référence $[Pa]$
p	Pression dans le riser $[Pa]$
P	Pression du gaz dans le pipeline $[Pa$ ou $mbar s]$
P^{OUT}	Pression en sortie de système $[Pa$ ou $mbar s]$
P_I	Pression au point de réinjection $[Pa$ ou $mbar s]$
P_{Ref}	Valeur de référence de la pression du gaz dans le pipeline $[Pa$ ou $mbar s]$
Q_G^{IN}	Débit massique de gaz en entrée de système $[kg/s$ ou $nl/min]$
Q_L^{IN}	Débit massique de liquide en entrée de système $[kg/s$ ou $l/h]$
Q_G^{PLV}	Débit massique de gaz prélevé dans le pipeline $[kg/s$ ou $nl/min]$
Q_G^*	Débit critique de gaz prélevé $[kg/s]$
Q_G^{BP}	Débit massique de gaz bypassé $[kg/s$ ou $nl/min]$
Q_G^{OUT}	Débit massique de gaz en sortie de système $[kg/s$ ou $nl/min]$
Q_L^{OUT}	Débit massique de liquide en sortie de système $[kg/s$ ou $l/h]$
r_ρ	Rapport des densités à la pression P^{OUT} $[-]$
R_K	Fraction volumique de la phase K $[-]$
R_G^B	Taux d'aération du bouchon de liquide en régime intermittent $[-]$
R_K^P	Fraction volumique de la phase K dans le pipeline $[-]$

R_K^R	Fraction volumique de la phase K dans le riser $[-]$
Re_K	Nombre de Reynolds pour la phase K $[-]$
Re_M	Nombre de Reynolds pour le mélange $[-]$
S	Section transversale de la conduite $[m^2]$
S_K	Partie de la section transversale occupée par la phase K $[m^2]$
t	Temps $[s]$
t_i	Temps initial d'une période de severe slugging $[s]$
t_f	Temps auquel finit la formation du bouchon de liquide $[s]$
t_p	Temps auquel finit la production du bouchon de liquide $[s]$
t_b	Temps auquel finit le blow-out $[s]$
t_c	Temps auquel finit la chute de liquide $[s]$
t_K	Temps pour parcourir la distance d_K à la vitesse C_∞ $[s]$
t_R	Temps de remontée du gaz dans le riser en régime saturé $[s]$
T	Température $[K]$
T^N	Température de référence $[K]$
u	Pourcentage d'ouverture de la vanne $[-]$
$\tilde{u}$	Valeur non saturée de l'ouverture de la vanne $[-]$
U_K	Vitesse superficielle de la phase K $[m/s]$
U_M	Vitesse superficielle du mélange $[m/s]$
U_G^n	Vitesse superficielle du gaz pris à 10^5 Pa et 273.15 K $[m/s]$
v_K	Volume occupé par la phase K $[m^3]$
v_G^+	Volume additionnel de gaz en amont du pipeline $[m^3]$
v_G^P	Volume total occupé par le gaz en amont du pied de riser $[m^3]$
V_K	Vitesse de la phase K $[m/s]$
V_T	Vitesse de translation des poches de gaz dans un écoulement intermittent $[m/s]$
V_G^B	Vitesse des bulles de gaz dans un bouchon de liquide en régime intermittent $[m/s]$
w_G	Invariant de Riemann $[kg/m^3]$
x	Abscisse curviligne de la conduite $[m]$
x_G	Position de la langue de gaz dans le système $[m]$
x_L	Position du front de liquide dans le système $[m]$

x_B	Position de la plus haute bulle de gaz contenue dans le riser [m]
x_G^I	Position de la langue de gaz au début d'un cycle de severe slugging [m]
x_L^I	Position du front de liquide au début d'un cycle de severe slugging [m]
x_G^{Ref}	Position de référence à laquelle on souhaite stabiliser la langue de gaz [m]

Lettres grecques

α^{PLV}	Constante de la vanne du contrôleur par prélèvement [$(kg.m)^{\frac{1}{2}}$]
α^{BP}	Constante de la vanne du contrôleur par by-pass [$m.s$]
β	Fraction de poche dans une cellule intermittente $[-]$
β_P	Angle entre le pipeline et l'horizontale [rad]
β_R	Angle entre le riser et l'horizontale [rad]
Δ	Ecart entre ΔP_{Ref} et ΔP [Pa ou $mbars$]
ΔP	Différence entre la pression Π et la pression P [Pa ou $mbars$]
ΔP_{Ref}	Valeur de référence de la différence de pression ΔP [Pa ou $mbars$]
ΔP_I	Différence entre la pression P et la pression P_I [Pa ou $mbars$]
ϵ	Rugosité de la conduite [m]
ε_c	Paramètre de calage des conditions initiales d'un cycle de severe slugging $[-]$
γ_V	Paramètre de la vanne $[-]$
ν_K	Viscosité cinématique de la phase K [m^2/s]
ν_K^N	Viscosité cinématique de la phase K à la pression P^N et la température T^N [m^2/s]
ω_n	Pulsation propre de l'oscillateur libre amorti [s^{-1}]
Ω_K	Angle mouillé de la phase K [rad]
Π	Pression en pied de riser [Pa ou $mbars$]
Π_R	Pression en pied de riser lorsque celui-ci est rempli de liquide [Pa ou $mbars$]
ρ_K	Densité de la phase K [kg/m^3]
ρ_K^N	Densité de la phase K à la pression P^N et la température T^N [kg/m^3]
ρ_M	Densité moyenne du mélange [kg/m^3]
σ_{GL}	Tension superficielle gaz/liquide [N/m]
σ_{GL}^N	Tension superficielle gaz/liquide à la pression P^N et la température T^N [N/m]
σ_G	Vitesse de la poche de gaz pendant le blow-out [m/s]

$\Sigma \mathcal{F}$	Somme des forces appliquées à la colonne liquide pendant le blow-out [N]
τ_K	Contrainte de cisaillement de la phase K [Pa]
τ_I	Contrainte de cisaillement de l'interface gaz/liquide [Pa]
τ_c	Temps caractéristique de l'oscillateur libre amorti [s]
τ_P	Temps caractéristique rapide du contrôleur par by-pass [s]
τ_I	Temps caractéristique lent du contrôleur par by-pass [s]
θ	Inclinaison de la conduite [rad]
Θ	Intégrale de Δ [$Pa.s$ ou $mbar.s$]
ξ	Coefficient d'amortissement de l'oscillateur libre amorti [$-$]

Chapitre 1

Introduction générale

Les écoulements pétroliers dans les conduites sont, d'un point de vue de la modélisation physique, d'une grande complexité. En effet, dans la majorité des cas, le pétrole piégé dans les couches géologiques se trouve sous forme liquide et peut être accompagné d'eau. Lors de la remontée dans le puits, les gaz dissous se libèrent et l'écoulement devient alors un mélange de gaz et de liquides, pouvant aussi contenir des particules solides arrachées au terrain.

Pour le transport des têtes de puits jusqu'aux installations de traitement, deux alternatives se présentent alors :

- la séparation des phases et leur transport dans des conduites séparées,
- le transport du mélange polyphasique par une unique conduite.

La première solution pose des problèmes critiques pour les installations offshore (FIG. 1.1). Il faut, en effet, concevoir un séparateur pour chaque puits et placer ces installations en fond de mer, ce qui augmente les risques et les coûts d'intervention. La seconde solution présente en comparaison de nombreux avantages : minimisation des coûts d'intervention et d'exploitation, ainsi que des délais de mise en production. Cependant, elle nécessite une bonne maîtrise de la physique de ces écoulements.

La problématique du transport polyphasique est de décrire avec exactitude l'écoulement à l'intérieur des conduites en termes de débits, de pression, de température et de taux de présence de chaque phase. Ces différentes grandeurs sont fortement corrélées à ce que l'on appelle la configuration de l'écoulement, c'est-à-dire la répartition de chaque phase dans la conduite (FIG. 1.2). Pour ce faire, des installations expérimentales et des essais sur champ sont utilisés pour générer des banques de données et ainsi concevoir des modèles physiques. Ceux-ci permettent ensuite une résolution numérique des écoulements dans les conduites pétrolières. Cette résolution s'appuie généralement sur une discrétisation temporelle et spatiale, sur lesquelles sont calculés des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, permettant des calculs prédictifs des différentes grandeurs physiques en tout point de la conduite au cours du temps.

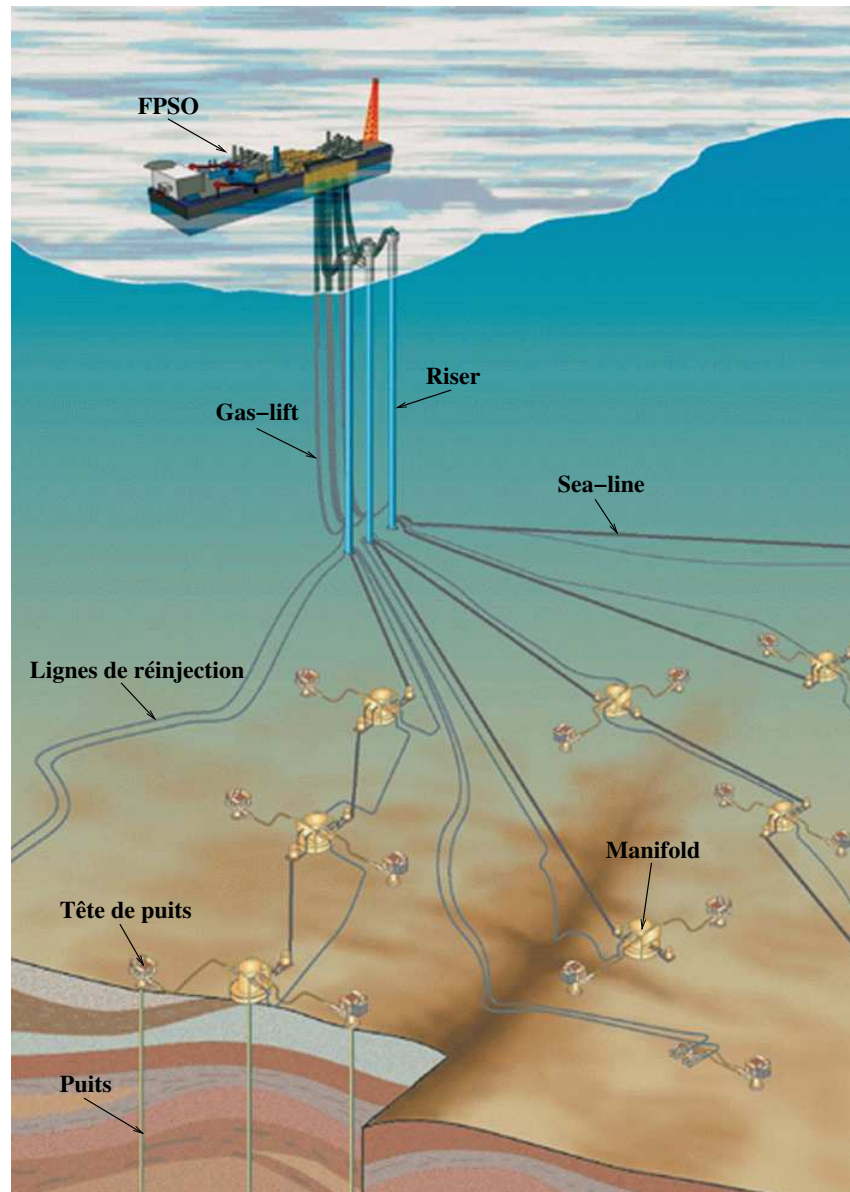


FIG. 1.1: Représentation d'un champ offshore

Ces codes de calcul sont principalement utilisés par les compagnies pétrolières pour permettre de garantir l'écoulement du réservoir aux installations de traitement, à travers un réseau de collecte (maîtrise de la veine fluide). En effet, les différentes phases transportées simultanément peuvent entraîner de graves problèmes d'exploitation, pouvant même aller jusqu'à l'abandon du champ. Pendant la phase de design, les comportements hydraulique, hydrodynamique, thermodynamique, thermique, chimique et mécanique doivent donc être modélisés avec le plus d'exactitude possible pour limiter au maximum les risques. On pense en particulier aux problèmes physico-chimiques comme

la formation des hydrates [136], mais surtout aux problèmes hydrodynamiques comme l'engorgement des conduites par des bouchons de liquide qui peuvent endommager les installations de traitement, réduire les capacités de production, voire tuer le réservoir (FIG. 1.2 et FIG. 1.3).

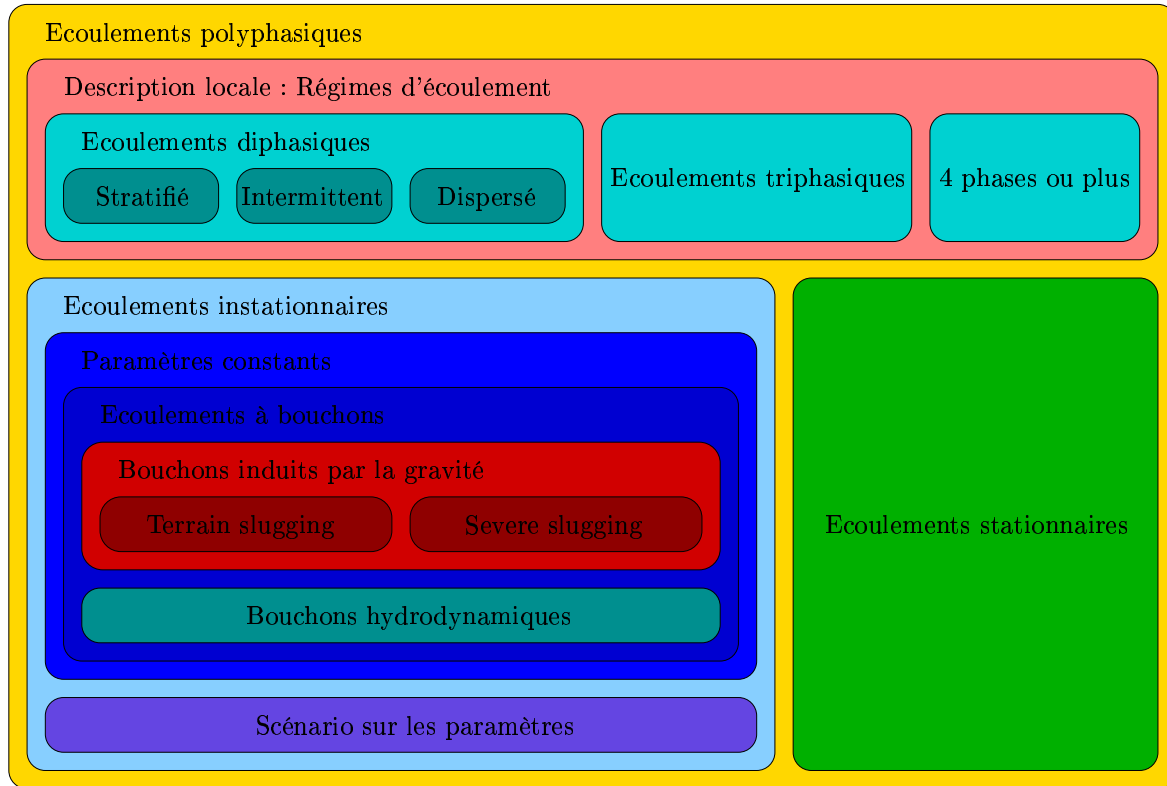


FIG. 1.2: Synoptique des écoulements polyphasiques

En effet, en phase de production normale, la géométrie des conduites polyphasiques peut conduire à la formation de bouchons à différents endroits. Par exemple, si le champ est offshore, les conduites peuvent être divisées en trois catégories : la sea-line qui suit la topographie du fond de l'océan et contient par conséquent des tronçons rectilignes (1) et des tronçons accidentés (2), et le riser, tronçon ascendant (3), permettant de ramener les effluents du fond de la mer aux équipements de surface (par exemple un FPSO). Ainsi, des bouchons peuvent apparaître (FIG. 1.3) :

- dans les parties rectilignes horizontales ou faiblement inclinées de la sea-line, sous la forme de bouchons hydrodynamiques,
- dans les points bas de la sea-line, donnant alors du terrain slugging,
- au pied du riser, formant ainsi le severe slugging.

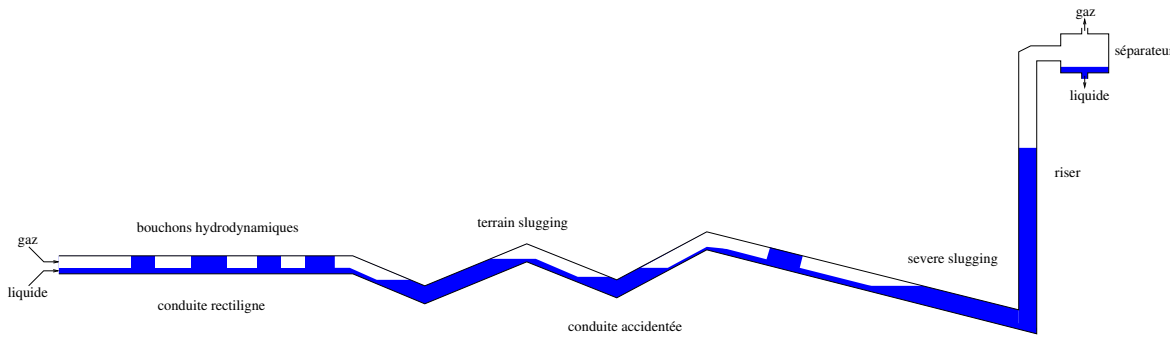


FIG. 1.3: Localisation des bouchons

Cette thèse est principalement consacrée à la modélisation et au contrôle du phénomène de severe slugging. En effet, ce régime d'écoulement produit les fluctuations de pression et de débit les plus importantes. De plus, ayant lieu à l'aval de la sea-line (il apparaît dans le riser), il influence directement l'écoulement en sortie. Ainsi, le terrain slugging et les bouchons hydrodynamiques peuvent être vus comme des perturbations des conditions d'entrée dans le riser et seront donc sans effet si notre contrôleur est assez robuste. De plus, on peut aussi noter l'existence d'outils d'aide à la production, les *slugs catchers* [118], sorte de ballons de décantation, placés en un point de la conduite et permettant d'éliminer les bouchons de liquide de taille raisonnable.

Actuellement, différentes techniques sont disponibles pour remédier avec plus ou moins d'efficacité au problème du severe slugging :

1. **L'augmentation de la pression en amont de la tête de puits**

Yocum [170] et Jansen [91] ont observé que le fait d'augmenter la pression en amont de la tête de puits (en diminuant la section de passage de la duse [85]) permet d'éliminer le severe slugging. En effet, la pression dans la ligne de transport est alors plus faible impliquant une vitesse de la phase gazeuse plus importante et l'écoulement sort ainsi de la région d'occurrence du phénomène. Malheureusement, cette solution n'est pas utilisable en pratique car elle s'accompagne d'une réduction importante de la capacité de production du réservoir.

2. **La réduction du diamètre de la conduite**

Yocum [170] a proposé cette méthode pour permettre d'éliminer le severe slugging. En effet, diminuer le diamètre permet d'augmenter les vitesses des phases et par conséquent de passer dans un régime d'écoulement intermittent voire dispersé en amont du pied de riser interdisant alors au gaz de s'accumuler. Cette technique a l'inconvénient d'augmenter la perte de charge en augmentant les frottements et implique par conséquent une forte hausse de la pression en tête de puits, ce qui réduit d'autant la capacité de production.

3. **L'utilisation d'une duse en tête de riser**

Schmidt et al. [129, 130, 132] ont montré que, dans un système pipeline/riser, le

severe slugging pouvait être fortement atténué, voire éliminé, en utilisant une duse en tête de riser, impliquant uniquement quelques petites modifications au niveau des pressions et des débits. Taitel [143] a ensuite fourni une explication théorique de la stabilisation de l'écoulement, puis Fargalhy [54] présenta des exemples d'application sur champ montrant la faisabilité de cette technique. Malheureusement, elle est difficile à mettre en œuvre, car elle nécessite beaucoup de soins pour minimiser la pression en tête de puits.

4. Le gas-lift

Cette méthode d'injection de gaz dans le riser est la plus utilisée actuellement. Pots et al. [123] l'ont étudiée et ont conclu que l'amplitude du phénomène était considérablement réduite pour une injection de l'ordre de 50% du débit de gaz sortant des puits, mais que le severe slugging ne disparaissait pas complètement même pour une injection de 300%. De plus, pour les champs en eau profonde, Hassanein et Fairhurst [74] ont remarqué que les variations de débits étaient encore plus importantes à cause de la taille des bouchons et des diamètres utilisés, et que le volume du système pouvait amener des fluctuations de pression beaucoup plus grandes et brusques. Ils ont alors suggéré d'injecter le gaz au niveau du pied du riser en y incorporant des émulsifiants. Hill [82, 83] a ensuite décrit des tests effectués sur le champ S.E. Forties où l'injection de gaz à très haut débit a permis d'obtenir un écoulement annulaire stationnaire dans le riser.

A cause des grandes quantités de gaz nécessaires, le principal problème du gas-lift est son prix. En effet, les dépenses d'investissement (CAPEX) sont très élevées pour compresser le gaz et pour le transporter jusqu'en pied de riser [38, 130]. De plus, d'autres problèmes peuvent apparaître. On peut citer en particulier l'effet de Joule-Thompson mis en évidence pour des champs en offshore profond par Johal et al. [94]. En effet, ce sur-refroidissement associé aux hautes pressions implique de plus grands risques de formation d'hydrates ou de paraffines dans le riser. Par conséquent, les opérateurs doivent réchauffer le gaz avant de l'injecter ou bien utiliser des additifs chimiques. Johal et al. proposèrent alors une alternative nommée *Multiphase Riser-Base Lift*, basée sur l'idée de détourner une partie de l'écoulement d'une conduite polyphasique voisine et de l'injecter au pied du riser où se produit le severe slugging. Mais cette méthode demande une autre ligne polyphasique située aux alentours du système posant problème et nécessite de faire une dérivation. Elle est cependant préconisée comme une meilleure alternative au gas-lift traditionnel, les fluides ne créant alors pas de problème thermique et ne demandant pas d'installation supplémentaire en surface. Mais son champ d'application est très limité, nécessitant une autre ligne avec une capacité de production importante.

5. L'utilisation combinée du gas-lift et d'une duse en tête de riser

Jansen [93] a étudié différentes techniques d'élimination et en particulier une combinaison entre gas-lift et dusage en tête de riser. Il suggéra une modélisation des phénomènes basée sur le modèle de Taitel et al. [153] et en déduisit un critère de stabilité. De plus, il observa expérimentalement que cette combinaison semblait être la meilleure méthode pour éliminer le severe slugging, permettant ainsi de réduire

l'importance du dosage et le débit de gaz à injecter et, par conséquent, limitant les problèmes de sur-refroidissement et d'augmentation de la perte de charge. Mais, à notre connaissance, cette technique n'a jamais été déployée sur champ et elle nécessite encore toutes les installations sous-jacentes nécessaires au gas-lift.

6. L'insertion d'une conduite de petit diamètre dans le riser

Wyllie et Brackenridge [168] ont proposé une modification a posteriori du riser, pour réduire les effets du severe slugging. Leur solution nécessite d'y insérer une conduite de petit diamètre, créant ainsi un espace annulaire qui peut être utilisé pour l'injection de gaz. Ceci semble être une bonne solution quand aucune disposition contre le severe slugging n'a été mise en œuvre pendant la phase de design, mais pose le problème du pigging [33] fréquemment utilisé en offshore profond pour éliminer les formations de paraffines et d'hydrates.

7. Le pompage polyphasique

Henriot et al. [78] ont étudié plusieurs méthodes pour éliminer le severe slugging sur le champ de Dunbar. En particulier, ils ont effectué avec le logiciel TACITE [142, 121] plusieurs simulations transitoires en condition de production, en incluant une pompe polyphasique [45] située soit en pied de riser soit en tête de riser. Les résultats ont montré que le severe slugging était très fortement atténué, voire éliminé pour le schéma de production avec la pompe en pied de riser. La difficulté réside ici dans le dimensionnement de cette pompe ainsi que dans son installation, son utilisation et sa maintenance au fond de la mer.

8. Le contrôle de vannes en tête de riser

Hollenberg et al. [86] ont conçu un système d'élimination du severe slugging basé sur le contrôle des débits en sortie de conduite. Le principe était de garder constant le débit total en jouant sur l'ouverture d'une vanne placée en tête de riser. Mais les auteurs ont réalisé que son implémentation était très délicate à cause de la difficulté pour mesurer la vitesse moyenne de l'écoulement, paramètre principal de leur régulateur. Ils résolurent ce problème en remplaçant la vanne par un petit séparateur commandé, permettant ainsi de mesurer chaque débit individuellement (aussi étudié par Haandrikman et al. [70]). Ils conduisirent aussi des tests sur une boucle expérimentale et ont observé que la pression en pied de riser avait triplé indiquant par conséquent, une pression en tête de puits très importante.

De plus, Courbot [38] a proposé un schéma de contrôle pour empêcher l'apparition du severe slugging dans la ligne de transport du champ Dunbar. La pression en pied de riser était maintenue constante grâce à une vanne placée en amont du séparateur. Cette expérience sur champ a prouvé la faisabilité du régulateur bien qu'une augmentation importante de la pression en pied de riser ait été observée.

Enfin, plus récemment, l'équipe de Skogestad [137, 140, 141] a mise en avant plusieurs contrôles actifs basés sur une étude de stabilité de modèles dynamiques simplifiés et permettant de minimiser l'augmentation de la pression dans le système.

9. La séparation sous-marine

La pente descendante du pipeline séparant naturellement le gaz du liquide pour les faibles débits propices au severe slugging, Kaasa [96] a proposé une nouvelle

méthode de contrôle du phénomène, en connectant un second riser entre la sea-line et les équipements de surface. Ce riser, placé de telle sorte qu'il transporte la totalité du gaz (le riser principal transportant alors tout le liquide), est équipé d'une vanne pour réguler les fluctuations de pression. Néanmoins, cette méthode présente l'inconvénient d'être coûteuse, le fait d'ajouter un second riser pouvant ne pas être économiquement viable. De plus, le riser principal est toujours rempli de liquide imposant alors une pression en pied de riser très grande. Pour pallier à cet inconvénient, Song et Kouba [138] ont préconisé une réelle séparation sous-marine en amont du point bas et l'utilisation d'une pompe sur le riser contenant le liquide pour diminuer la pression hydrostatique et ainsi empêcher les réductions de capacité de production.

10. Le self-lifting

Cette technique suggérée par Barbuto [9] et reprise par Tengedal [154, 155] est une amélioration de la méthode proposée par Kaasa. Elle consiste à réinjecter le gaz prélevé à une certaine hauteur dans le riser, ce qui correspond à bipasser le point bas pour la phase gazeuse. De plus, Barbuto indique que la position de réinjection doit se trouver environ au tiers de la hauteur totale du riser pour stabiliser au mieux l'écoulement. Ce processus de transfert permet ainsi de réduire la pression hydrostatique en pied de riser tout en atténuant ou, dans certains cas, en éliminant le severe slugging. De nombreux essais ont été menés par Tengedal sur une boucle expérimentale de l'université de Tulsa et ont montré que la région d'occurrence du phénomène était réduite, mais qu'il était rarement possible d'obtenir une élimination complète.

Toutes ces solutions pour remédier au problème du severe slugging présentent cependant un ou plusieurs des inconvénients suivants :

- une réduction importante de la capacité de production du réservoir,
- une mise en œuvre complexe,
- des coûts d'investissement importants,
- l'interdiction de certaines opérations de maintenance,
- une élimination uniquement partielle,
- un champ d'application restreint.

La première partie de cette thèse est consacrée à la dynamique du severe slugging. En effet, pour nous familiariser avec le sujet, il nous a semblé important de reprendre la démarche de Taitel et al. [153] en développant un modèle réduit et en construisant une boucle d'écoulement.

Ainsi le chapitre 2 présente tout d'abord une description générale des écoulements polyphasiques et s'attarde ensuite sur les différents types d'écoulement à bouchons que l'on peut rencontrer en phase de production. Ces écoulements sont classiquement décrits par des modèles mono-dimensionnels basés sur un système d'Equations aux Dérivées Partielles couplé à différentes lois de fermeture. Certes, ils représentent le modèle continu mais ne peuvent être utilisés directement pour concevoir des lois de commande.

Nous développons donc dans le chapitre 3, un modèle réduit dédié au phénomène de severe slugging dans les systèmes de type pipeline/riser, en intégrant en espace les équations de conservation et en utilisant certaines hypothèses adaptées à ce régime d'écoulement. Ce modèle algébro-différentiel nous sert ensuite à concevoir un montage expérimental de taille réduite (nommé S^4L et décrit en annexe A) représentant fidèlement la réalité des systèmes industriels où la longueur des risers est de l'ordre du kilomètre et celle des pipelines de quelques dizaines de kilomètres.

Dans la seconde partie, nous abordons la question du contrôle du severe slugging, sujet essentiel qui a motivé cette thèse. Nous souhaitons apporter, à cet égard, deux contributions qui nous semblent originales et qui, à notre connaissance, n'ont jamais été entreprises auparavant avec autant de détails : il s'agit plus précisément de deux régulateurs pour stabiliser ce type d'écoulement. Basés sur les principes de la séparation sous-marine et du self-lifting, nous y ajoutons une vanne commandée pour nous permettre de nous affranchir de la plupart des insuffisances des solutions actuellement utilisées. Ces commandes, ne nécessitant que la connaissance de la pression en pied de riser et celle du gaz contenu dans le pipeline, sont de type proportionnel-intégral et sont principalement basées sur la théorie des perturbations (effet proportionnel rapide, effet intégral lent).

On s'intéresse dans le chapitre 4 au cas particulier d'une réinjection directe dans le séparateur (FIG. 1.4). A la différence de Kaasa [96] qui régule uniquement les fluctuations de pression dans le système, nous pensons qu'il est plus judicieux de mettre en œuvre un algorithme de contrôle à double échelle de temps afin de stabiliser la position de l'interface gaz/liquide dans le pipeline.

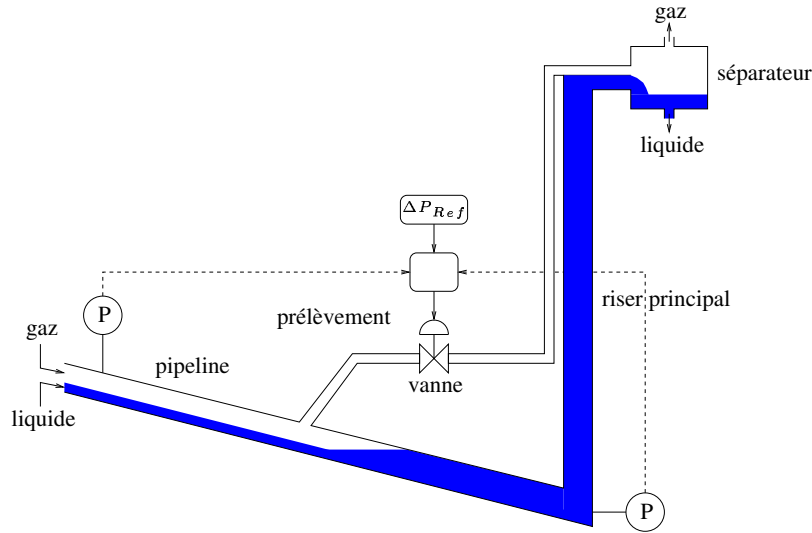


FIG. 1.4: Régulateur par prélèvement

Pour reproduire le système physique, nous développons tout d'abord un modèle réduit basé sur celui décrivant le severe slugging. La principale caractéristique de ce système algébro-différentiel non-linéaire est son caractère hybride, la dimension de l'espace des états chan-

geant au cours du temps. Une étude de stabilité globale du bouclage proportionnel-intégral sur l'ouverture de la vanne est ensuite menée par la technique des portraits de phase et des isoclines, en prenant en compte la saturation de l'ouverture grâce à un anti-windup. Enfin, ce contrôleur est validé sur notre boucle S^4L ainsi que numériquement sur un système de taille industrielle.

Les bons résultats obtenus avec ce régulateur par prélèvement nous permettent d'envisager dans le chapitre 5, le système de régulation complet avec la réinjection du gaz prélevé à une certaine hauteur dans le riser (FIG. 1.5). Cette réinjection, qui a pour principal effet d'introduire un retard correspondant au temps de remontée du gaz dans le riser, a déjà été considérée par Tengedal [154, 155]. Cependant, il s'agit d'un système en boucle ouverte permettant uniquement d'atténuer le severe slugging sans le supprimer entièrement. Nous reprenons son principe en y ajoutant une vanne commandée de manière à supprimer le phénomène pour toutes les conditions opératoires pouvant être rencontrées pendant la vie d'un champ.

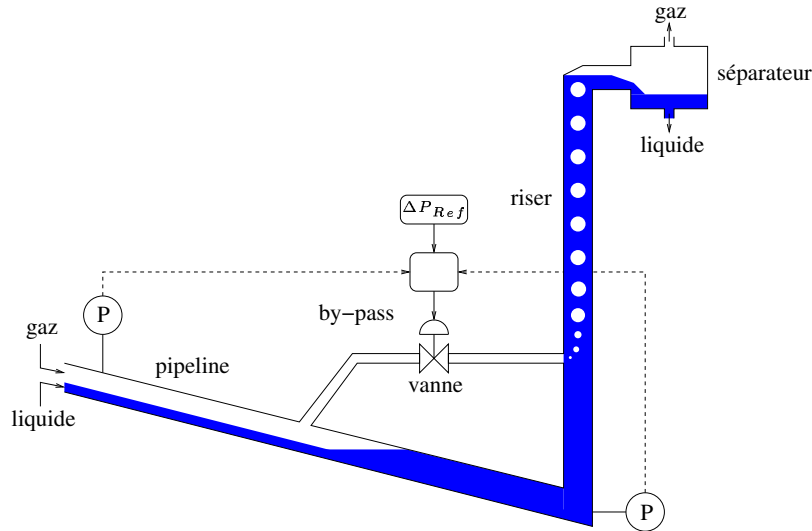


FIG. 1.5: Régulateur par by-pass

Nous développons tout d'abord le modèle reproduisant ce by-pass sous la forme d'un système algébro-différentiel, hybride, implicite et à retard réparti pour lequel les techniques de l'Automatique sont rares. Par conséquent, nous limitons notre étude au cas d'un riser rempli de liquide et nous négligeons l'effet de l'expansion du gaz réinjecté pour obtenir un système explicite et à retard constant. Une étude de stabilité locale en boucle ouverte basée sur un résultat abstrait de stabilité des E.D.O. linéaires à retard constant, est ensuite menée pour en déduire un critère de design sur la hauteur minimale de réinjection qui garantie la stabilité en boucle ouverte et qui a été vérifiée numériquement et expérimentalement. Enfin, la commande est développée en utilisant les techniques de l'Automatique à deux échelles de temps. Ainsi, une étude de stabilité en boucle fermée (sans prise en compte de l'anti-windup sur l'intégrale) est réalisée à partir du système

à retard constant, pour en déduire une contrainte sur le coefficient intégral de la commande. Enfin, ce contrôleur est validé sur notre boucle S^4L ainsi que numériquement sur un système de taille industrielle.

Dynamique du severe slugging

Chapitre 2

Ecoulements polyphasiques

En fonction des conditions opératoires régnant à l'intérieur des conduites polyphasiques, les différents constituants véhiculés peuvent se trouver, soit à l'état gazeux, soit à l'état liquide, soit même à l'état solide, dans des proportions dépendant principalement de la pression et de la température. Pour déterminer l'agencement de ces différentes phases, plusieurs techniques expérimentales ont été mises en œuvre. On peut en particulier citer les méthodes visuelles comme la photographie [81, 157] et la radiographie par rayon X [47]. D'autres méthodes sont aussi utilisées comme la technique dite d'atténuation de la lumière transmise [95], ainsi que celles basées sur la conductivité électrique [13, 59] ou sur des mesures de pression [100, 159].

A partir de ces observations, les écoulements ont été regroupés en différentes familles appelées régimes d'écoulement. Pour un écoulement diphasique gaz/liquide, on trouve principalement le régime stratifié lorsque les phases sont séparées, le régime dispersé où l'écoulement liquide contient des bulles de gaz et le régime intermittent qui est une succession de poches de gaz et de bouchons de liquide [63, 71, 81, 103, 165]. En écoulement liquide/liquide, on trouve majoritairement le régime dispersé (aussi appelé émulsion), l'écoulement à phases séparées étant rare car la différence de densité entre les phases est faible. La notion importante est alors celle de phase continue, c'est-à-dire la phase dominante de l'écoulement et on parle d'inversion de phase lorsque cette phase continue change [28, 46, 59, 157]. Pour les écoulements triphasiques gaz/liquide/liquide, les différents régimes correspondent à l'union des régimes rencontrés en gaz/liquide et en liquide/liquide [2, 115, 119]. Enfin, pour un écoulement contenant des particules solides, la recherche ne s'est jusqu'à présent, presque totalement intéressée qu'aux écoulements liquide/solide. On distingue alors quatre grands types de régime. A faible débit, un lit de particules immobiles est formé sur le fond de la conduite. Il faut atteindre des vitesses suffisantes pour commencer à éroder le lit et à remettre en suspension une partie des particules. A partir d'une valeur critique du débit liquide, le lit se déplace globalement, et une certaine quantité de particules est en suspension dans la phase liquide. Ce régime se poursuit jusqu'à un seuil où la hauteur du dépôt devient nulle, l'ensemble de la phase solide étant alors en suspension dans le liquide [48].

Dans cette étude, nous nous limitons aux écoulements diphasiques gaz/liquide. Nous allons dans un premier temps, introduire quelques grandeurs fondamentales à leur étude, ainsi que les phénomènes thermodynamiques pouvant se produire. Puis, nous détaillerons les différents régimes d'écoulement et nous décrirons les principaux résultats permettant de modéliser leur transport. Enfin, nous nous intéresserons plus en détail aux écoulements à bouchons.

2.1 Grandeurs fondamentales

Soit une conduite de diamètre D , de périmètre P et de section transverse S . Une notion importante pour les écoulements diphasiques gaz/liquide est la notion de fraction volumique (aussi appelée fraction surfacique) [65]. Elle représente, sur une section transverse de la conduite, le taux de présence d'une phase. Ainsi, on appelle la fraction volumique de gaz (resp. liquide) et on note R_G (resp. R_L) le rapport entre la surface prise par le gaz (resp. liquide) et la section de la conduite. Pour une phase K ($K = G$ ou L), on a par conséquent :

$$R_K = \frac{S_K}{S}.$$

De plus, pour un écoulement à phases séparées, on peut introduire les grandeurs suivantes (FIG. 2.1) :

- Pour une phase K , l'angle mouillé Ω_K est défini par la relation implicite :

$$\Omega_K - \sin \Omega_K = 2\pi R_K.$$

De plus, comme $R_G + R_L = 1$, on a l'égalité suivante :

$$\Omega_G + \Omega_L = 2\pi.$$

- Le périmètre mouillé est défini par :

Pour une phase K :

$$P_K = \Omega_K \frac{D}{2}.$$

Et pour l'interface, on a :

$$P_I = D \sin \left(\frac{\Omega_K}{2} \right).$$

- La hauteur de liquide dans une section se détermine par la formule géométrique suivante :

$$h_L = \frac{D}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\Omega_L}{2} \right) \right]. \quad (2.1)$$

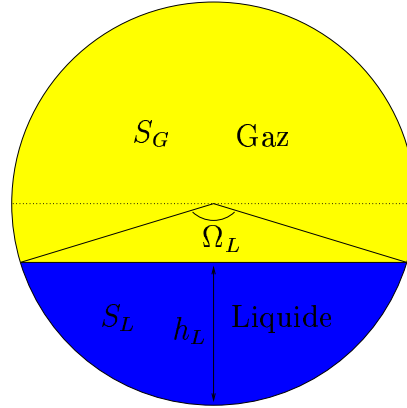


FIG. 2.1: Représentation d'une section transverse en régime séparé

2.2 Lois thermodynamiques

Les effluents étant transportés du réservoir aux installations de traitement, ils sont sujets à d'importantes fluctuations de pression et de température dues aux pertes de charge ainsi qu'à l'influence du milieu extérieur. De plus, la composition du fluide correspondant à la proportion de chaque constituant dans le mélange, peut varier au cours de son transport sous l'influence de la topographie de la conduite (accumulation des constituants lourds dans les point bas par exemple) ou des conditions opératoires (gaz-lift, injections diverses, ...), impliquant alors des propriétés différentes en fonction du temps et de l'espace.

Les lois thermodynamiques ont ainsi pour but de déterminer le nombre de phases en présence, leur proportion relative ainsi que leurs propriétés. Elles sont modélisées par des relations d'égalité des potentiels chimiques pour chacun des constituants, en supposant l'équilibre thermo-chimique [109, 161].

Dans notre étude, nous allons considérer les hypothèses suivantes :

1. L'écoulement est isotherme et les fluides sont newtoniens,
2. Le mélange diphasique est composé de deux constituants,
3. Le constituant "lourd" est à l'état liquide,
4. Le constituant "léger" est à l'état gazeux,
5. Il n'y a pas d'échanges de masse entre les phases.

De plus, nous exprimons les différentes propriétés de chaque phase sous la forme de corrélations en fonction de la pression P et de la température T , sous l'hypothèse d'un gaz parfait et d'un liquide incompressible. Supposons que l'on connaisse pour une pression P^N et une température T^N de référence, la densité ρ_K^N et la viscosité cinématique ν_K^N de chaque phase ainsi que la tension superficielle entre le gaz et le liquide σ_{GL}^N [41, 113]. On peut alors exprimer directement, en supposant que la température constante du mélange est égale à T^N :

- La densité du gaz à partir de la loi de Mariotte :

$$\rho_G(P) = \rho_G^N \frac{P}{P^N}. \quad (2.2)$$

- La densité du liquide qui s'écrit :

$$\rho_L(P) = \rho_L^N. \quad (2.3)$$

- La viscosité cinématique du gaz donnée par :

$$\nu_G(P) = \nu_G^N \frac{\rho_G^N}{\rho_G(P)}. \quad (2.4)$$

- La viscosité cinématique du liquide qui s'exprime sous la forme :

$$\nu_L(P) = \nu_L^N \frac{\rho_L^N}{\rho_L(P)}. \quad (2.5)$$

- La tension superficielle entre le gaz et le liquide supposée constante :

$$\sigma_{GL}(P) = \sigma_{GL}^N. \quad (2.6)$$

2.3 Régimes d'écoulements

Le gaz et le liquide étant transportés ensemble, ils peuvent se répartir de manière très différente (FIG. 2.2 et FIG. 2.3).

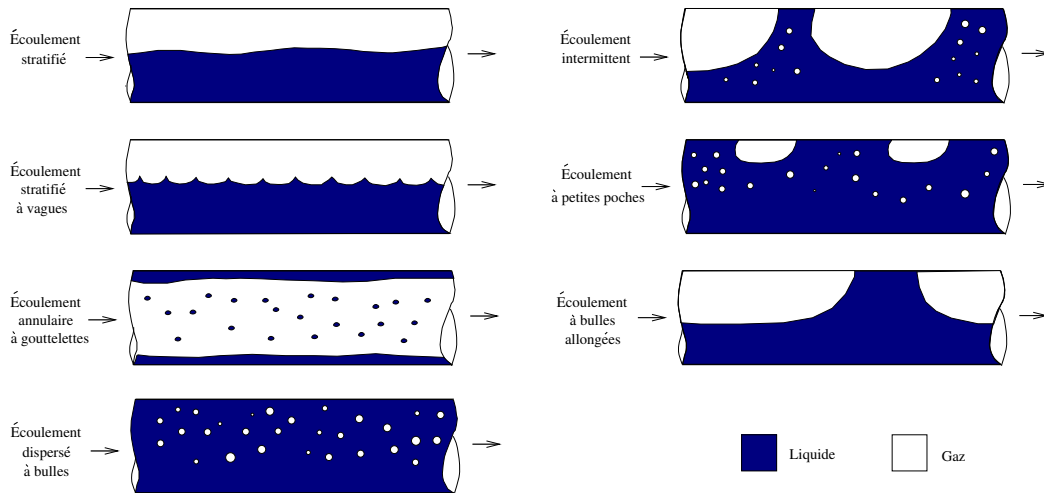


FIG. 2.2: Écoulements gaz/liquide horizontaux

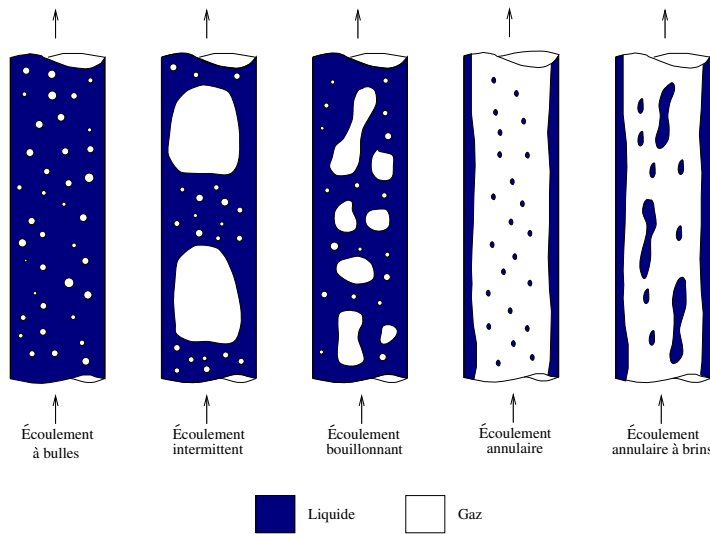


FIG. 2.3: Écoulements gaz/liquide verticaux

En général, les écoulements diphasiques gaz/liquide sont classés suivant trois principales configurations, dont la forme et parfois même l'existence, dépendent non seulement de la vitesse de chaque phase et de leurs propriétés thermodynamiques, mais aussi du diamètre de la conduite et de son inclinaison [22, 80, 88, 165, 167].

2.3.1 Écoulement stratifié

Les deux phases sont alors séparées par une interface dont la forme moyenne est plus ou moins incurvée dans une section droite de la conduite. Le frottement du gaz sur le liquide provoque la formation de vagues lorsque la différence de vitesses entre les deux phases est grande. On parle alors d'écoulement stratifié à vagues. Dans le cas contraire où l'interface gaz/liquide est régulière, on parle d'écoulement stratifié lisse.

Un cas particulier de ce régime est l'écoulement annulaire, où l'interface gaz/liquide a alors une forme cylindrique, sans contact avec la paroi. Le gaz se déplace au centre de la conduite, entouré par le liquide qui s'écoule sur la paroi sous la forme d'un film. Celui-ci peut dans certains cas, contenir des bulles de gaz et inversement, la phase gazeuse peut aussi transporter des gouttelettes.

2.3.2 Écoulement dispersé

Le gaz est alors transporté par le liquide, appelé phase continue, sous forme de bulles. Leur répartition sur une section transverse du pipeline varie suivant leur vitesse et l'inclinaison de la conduite, mais généralement, elle est supposée uniforme. De plus, l'écoulement sera dit à bulles lorsque le débit liquide est faible. Si au contraire celui-ci est grand, on parle plutôt de dispersé à bulles. On observe dans ce cas un ensemble de bulles plus fines et aucune d'entre elles n'est de taille plus importante que les autres.

2.3.3 Écoulement intermittent

Dans cette configuration d'écoulement, on observe une succession de poches de gaz séparées par des bouchons de liquide. Dans certains cas, ces derniers sont aérés, ils contiennent des bulles de gaz qui se concentrent plutôt à l'avant des bouchons. Un tel régime se produit, soit à partir d'un écoulement stratifié à vagues où l'interface gaz/liquide déstabilisée vient toucher le haut de la conduite et former un bouchon, soit à partir d'un écoulement dispersé lorsque les bulles se détendent ou, plus rarement, se regroupent et entrent en coalescence.

2.3.4 Transition entre les régimes

Plusieurs critères permettent de déterminer les transitions entre les différents régimes d'écoulement gaz/liquide (FIG. 2.4). Ils dépendent par exemple, de la hauteur h_L de la phase liquide (2.1), d'une vitesse critique de gaz ou de liquide mais aussi de la géométrie et de la topographie de la conduite [10, 16, 68, 97, 139, 148].

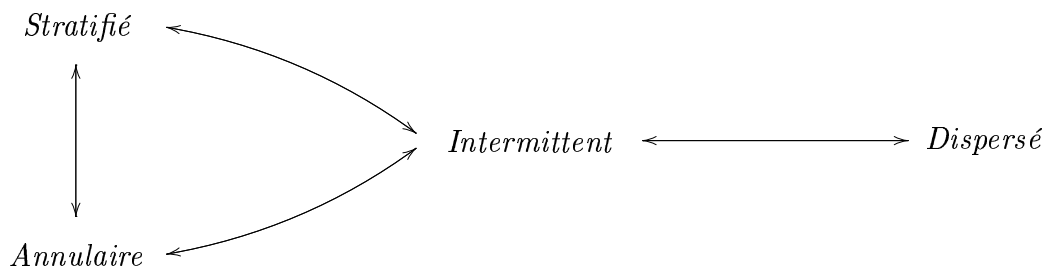


FIG. 2.4: Transitions possibles entre les différents régimes

La première étude a été conduite par Baker [8] pour les écoulements horizontaux. Puis, Taitel et al. [149] présentèrent un modèle théorique prédictif, déterminant les transitions pour des pipelines horizontaux ou faiblement inclinés et dépendant principalement des débits de chaque phase, des propriétés thermodynamiques des fluides ainsi que du diamètre et de l'angle d'inclinaison de la conduite. Ensuite, Shoham [135] mena l'étude expérimentale sans doute la plus complète sur les transitions, l'angle de la conduite utilisée pouvant varier de 0 à 360° et son diamètre pouvant prendre deux valeurs distinctes. Il compara aussi ses résultats avec le modèle de Taitel et al. et en déduisit une extension. Enfin, à partir de 1982, Barnea s'intéressa à certaines transitions particulières [12, 14, 15] puis en déduisit un modèle [11].

Nous pouvons aussi citer différents travaux axés sur la transition du régime dispersé vers le régime intermittent [39, 40, 105, 139, 169], ceux permettant de donner différentes conditions nécessaires de stabilité pour l'existence de l'intermittence [42, 43, 84, 126] ainsi qu'une alternative donnée par un critère fondé sur le concept du glissement minimal et utilisé dans les logiciels du commerce [19, 57].

2.4 Modèles diphasiques transitoires

Les équations de mouvement de fluides newtoniens visqueux sont données par les équations de Navier-Stokes [65]. De façon générale, ces équations dépendent des trois dimensions de l'espace et du temps. Pour simplifier leur intégration, des méthodes de moyennisation peuvent être employées pour diminuer la dimension du problème et par conséquent sa complexité. Dans le cas d'un écoulement dans un pipeline, le problème est généralement formulé en une seule direction, suivant l'abscisse curviligne x de la conduite [22, 25, 49, 89, 133]. Les variables caractéristiques de l'écoulement sont alors moyennées sur une section transverse (droite) du pipeline, que l'on supposera constante dans la suite de notre étude. Ainsi, les écoulements diphasiques transitoires sont en général modélisés suivant deux formulations dites bi-fluide ou à flux de dérive.

2.4.1 Modèle bi-fluide

L'approche classique est donnée par le modèle bi-fluide, noté TFM pour *Two-Fluid Model*. Il est construit à l'aide des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de chaque phase et nécessite certaines lois de fermetures pour déterminer en particulier les différents termes de frottement [44, 50, 90]. Ainsi, les équations de conservations mises en œuvre dans ce cas, peuvent être écrites sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\rho_G R_G) + \partial_x(\rho_G R_G V_G) = 0 \\ \partial_t(\rho_L R_L) + \partial_x(\rho_L R_L V_L) = 0 \\ \partial_t(\rho_G R_G V_G) + \partial_x(\rho_G R_G V_G^2) = -R_G \partial_x P + F_G^W + F_I - \rho_G R_G g \sin \theta \\ \partial_t(\rho_L R_L V_L) + \partial_x(\rho_L R_L V_L^2) = -R_L \partial_x P + F_L^W - F_I - \rho_L R_L g \sin \theta, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où ρ_K , R_K et V_K représentent respectivement la densité, la fraction volumique et la vitesse de la phase K , P représente la pression à l'interface (supposée constante sur une section transverse de la conduite [44]). De plus, on note F_K^W le frottement de la phase K sur la paroi de la conduite, F_I le frottement interfacial et on écrit :

$$F_K^W = \tau_K \frac{P_K}{S} \text{ et } F_I = \tau_I \frac{P_I}{S},$$

τ représentant la contrainte de cisaillement.

Notons que la principale difficulté de ce type de modèle réside dans la complexité des termes sources et en particulier dans la modélisation des phénomènes d'interaction à l'interface, notamment dans les cas où l'écoulement est intermittent ou annulaire. De plus, d'un point de vue numérique, le modèle ne pouvant pas se mettre sous forme conservative, sa résolution est complexe.

2.4.2 Modèle à flux de dérive

Une autre approche, nommée DFM pour *Drift-Flux Model*, traite séparément les lois de conservation de la masse de chaque phase mais utilise une unique équation de conservation de la quantité de mouvement pour le mélange [89, 165]. Par conséquent, outre les lois donnant les termes de frottement pariétal, il faut ajouter à ce modèle une équation de fermeture de type algébrique dépendante du régime d'écoulement, qui peut être soit une corrélation sur la fraction liquide, soit une relation empirique sur la vitesse de gaz, soit encore une loi de glissement entre les deux phases. Ainsi, ce modèle peut s'écrire :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_G R_G) & + \partial_x(\rho_G R_G V_G) & = 0 \\ \partial_t(\rho_L R_L) & + \partial_x(\rho_L R_L V_L) & = 0 \\ \partial_t(\rho_G R_G V_G + \rho_L R_L V_L) & + \partial_x(P + \rho_G R_G V_G^2 + \rho_L R_L V_L^2) & = F_G^W + F_L^W - \rho_M g \sin \theta, \end{cases} \quad (2.8)$$

$\rho_M = \rho_G R_G + \rho_L R_L$ étant la densité moyenne du mélange.

Un des avantages majeurs du modèle à flux de dérive, est d'éviter la modélisation des phénomènes d'interaction à l'interface entre les deux phases, tels que le transfert de quantité de mouvement, ou encore les effets dus aux forces de pression agissant sur l'interface [42, 43]. De plus, d'un point de vue numérique, ce modèle peut être mis sous une forme conservative et est hyperbolique dans la plupart des cas, ce qui facilite grandement sa résolution.

Pour les écoulements pétroliers, lorsque le nombre de Mach du mélange est petit, les termes instationnaires et les termes d'inertie de l'équation de conservation de la quantité de mouvement peuvent alors être négligés [163, 164]. Cela correspond physiquement à des phénomènes transitoires suffisamment lents pour que l'on puisse admettre un équilibre local des forces [147, 151]. Dans ce modèle, nommé NPW pour *No Pressure Waves* [21, 120, 158], les ondes de pression se propagent avec une vitesse infinie au lieu d'une vitesse proche de la vitesse du son dans le mélange, supprimant ainsi les phénomènes à hautes fréquences. De plus, les ondes de taux de vide continuent de se propager avec une vitesse finie proche de celle du mélange [107]. Il peut s'écrire :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_G R_G) + \partial_x(\rho_G R_G V_G) = 0 \\ \partial_t(\rho_L R_L) + \partial_x(\rho_L R_L V_L) = 0 \\ \partial_x P = F_G^W + F_L^W - \rho_M g \sin \theta. \end{cases} \quad (2.9)$$

2.5 Lois de fermeture hydrodynamiques

Nous décrivons, dans cette partie, les équations de fermeture hydrodynamiques nécessaires aux modèles d'écoulement diphasiques transitoires. En particulier, nous nous

intéressons aux relations donnant les différents frottements (nécessaires pour tous les modèles) ainsi qu'aux lois de glissement (nécessaires pour DFM et NPW) des trois principaux régimes d'écoulement précédemment décrits. Notons que dans tous les cas, ces relations de fermeture sont construites sous l'hypothèse d'un écoulement permanent établi.

2.5.1 En stratifié

Une approche classique consiste à utiliser les équations de conservation de la quantité de mouvement du gaz et du liquide [1, 65, 149, 150]. En régime permanent établi, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} S_G \partial_x P = \tau_G P_G + \tau_I P_I - S_G \rho_G g \sin \theta \\ S_L \partial_x P = \tau_L P_L - \tau_I P_I - S_L \rho_L g \sin \theta. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par R_L et la seconde par R_G , on obtient par soustraction, la loi de glissement en stratifié sous la forme d'une équation algébrique implicite, reliant les vitesses des phases à leur fraction volumique en fonction de leurs propriétés thermodynamiques :

$$R_L \tau_G P_G - R_G \tau_L P_L + \tau_I P_I + S R_G R_L (\rho_L - \rho_G) g \sin \theta = 0. \quad (2.10)$$

De plus, les contraintes de cisaillement sont données par les relations suivantes :

- Pour une phase K :

$$\tau_K = -\rho_K f_K \frac{V_K |V_K|}{2}.$$

- Pour l'interface :

$$\tau_I = -\rho_G f_I \frac{(V_G - V_L) |V_G - V_L|}{2}.$$

Le coefficient de frottement f_K peut être déterminé en utilisant les corrélations monophasiques classiques [24] : Hagen-Poiseuille en régime laminaire et en écoulement turbulent, Blasius pour une conduite lisse et Colebrook pour un pipeline rugueux [65]. Nous utiliserons dans la suite, l'équation de Churchill [32] permettant une transition continue entre le laminaire et le turbulent :

$$f_K = 2 \left[\left(\frac{8}{Re_K} \right)^{12} + (A + B)^{-3/2} \right]^{1/12}, \quad (2.11)$$

où :

$$\begin{cases} A = \left\{ -2.457 \ln \left[\left(\frac{7}{Re_K} \right)^{0.9} + \frac{0.27\epsilon}{D} \right] \right\}^{16} \\ B = \left(\frac{37530}{Re_K} \right)^{16}, \end{cases}$$

ϵ étant la rugosité de la conduite et $Re_K = \frac{D_K |V_K|}{\nu_K}$ le nombre de Reynolds dépendant du diamètre hydraulique donné par $D_G = \frac{4S_G}{P_G + P_I}$ pour la phase gazeuse et par $D_L = \frac{4S_L}{P_L}$ pour la phase liquide. De plus, le coefficient de frottement interfacial f_I dépend fortement de la forme de l'interface (lisse ou à vagues) et sa modélisation reste à ce jour un problème ouvert [5, 34, 79, 98]. On peut cependant, en première approximation, utiliser la valeur suivante :

$$f_I = 0.014.$$

Remarque.

Il faut noter que dans le cas du régime annulaire [16, 117], $\Omega_L = 2\pi$ ce qui change considérablement les valeurs des périmètres mouillés. Pour les définir correctement, il faut alors tenir compte de l'équilibre qui s'instaure entre les effets de la pesanteur qui vont avoir tendance à stratifier les deux fluides et l'entraînement du gaz qui va avoir pour effet de plaquer le liquide le long de la conduite. Pour cela, les périmètres mouillés seront pondérés par un paramètre de stratification, correspondant à un nombre de Froude modifié par la densité.

2.5.2 En dispersé

Cette configuration est caractérisée par une suspension de bulles de gaz dans le liquide. La forme des bulles (sphérique ou ellipsoïdale) et leur trajectoire résultent des interactions entre les forces dues aux effets de la tension superficielle, de la viscosité, de la pesanteur et des forces inertielles.

La vitesse moyenne de ces bulles dans la phase continue est caractérisée par une loi empirique de la forme [165, 173] :

$$V_G = C_0^{dis} U_M + C_\infty^{dis}, \quad (2.12)$$

où $U_M = R_G V_G + R_L V_L$ représente la vitesse superficielle du mélange, C_0^{dis} un paramètre de distribution des bulles dans l'écoulement (égal à 1 dans le cas uniforme, 1.2 en moyenne et 1.5 au maximum) et C_∞^{dis} la vitesse à l'infini d'une bulle dans un milieu liquide stagnant que l'on peut écrire [73, 145, 151] :

$$C_\infty^{dis} = 1.53 \left[g \sigma_{GL} \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_L^2} \right]^{\frac{1}{4}} \sin \theta.$$

Nous en déduisons donc la loi de glissement en dispersé sous la forme d'une équation algébrique implicite, reliant les vitesses des phases à leur fraction volumique en fonction de leurs propriétés thermodynamiques :

$$V_G - C_0^{dis} U_M - C_\infty^{dis} = 0.$$

De plus, seul le liquide frotte à la paroi. La contrainte de cisaillement est alors donnée pour un fluide équivalent (liquide plus bulles) par [65] :

$$\tau_M = -\rho_M f_M \frac{U_M |U_M|}{2},$$

où le coefficient de frottement f_M est donné par la relation (2.11), le nombre de Reynolds moyen du mélange étant égal à $Re_M = \frac{D|U_M|}{\nu_L}$.

2.5.3 En intermittent

De nombreuses lois ont été proposées dans la littérature pour modéliser ce régime d'écoulement [20, 44, 56, 110, 111, 144, 173]. L'approche classique appelée "modèle à cellule unitaire", consiste à supposer l'écoulement complètement développé et à idéaliser l'intermittence comme étant la réunion de deux régions :

- Un bouchon de liquide de longueur l^B modélisé par un écoulement dispersé,
- Une poche de gaz avec son film liquide de longueur l^P modélisé par un écoulement stratifié.

On définit par cellule l'ensemble de ces deux régions et on note $\beta = l^P/(l^P + l^B)$ sa fraction de poche.

Remarque. _____

Dans la suite, on indicera les variables par B pour la partie bouchon et par P pour la partie poche.

Pour déterminer la loi de glissement de cette configuration, il faut bien sûr tenir compte des échanges de matière entre la poche de gaz et le bouchon de liquide, mais aussi modéliser le taux d'aération de ce bouchon [4, 58]. On utilisera pour cela la corrélation de Gregory et al. [66] :

$$R_G^B = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{U_M}{8.66}\right)^{1.39}}.$$

Remarque. _____

Une autre approche consiste à déterminer le débit de gaz sortant de la poche et entrant sous forme de bulles dans le bouchon de liquide [27, 104, 114, 124].

De plus, un bilan de masse sur la cellule et une relation de saut permettent de ramener le problème à une équation algébrique implicite, reliant les vitesses des phases à leur fraction volumique en fonction de leurs propriétés thermodynamiques :

$$(R_G^B V_G^B - R_G V_G) - V_T (R_G^B - R_G) = 0,$$

où V_G^B est pris égal à la vitesse des bulles de gaz dans un écoulement dispersé (2.12) et V_T est la vitesse de translation des poches de gaz dans l'écoulement qui s'exprime [7, 18, 30, 65, 166, 174] :

$$V_T = C_0^{int} U_M + C_\infty^{int}, \quad (2.13)$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_0^{int} &= 1.05 + 0.15 \sin^2 \theta \\ C_\infty^{int} &= (0.35 \sin \theta + 0.54 \cos \theta) \sqrt{gD \frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_L}}. \end{cases}$$

Enfin, les autres grandeurs caractéristiques (comme les termes de frottement) sont déterminées comme la moyenne pondérée par β de leur valeur dans la partie poche et dans la partie bouchon [57].

L'inconvénient de cette approche est qu'une fois les équations de transport discrétisées, toutes les grandeurs sont moyennées sur une maille de discrétisation spatiale et par conséquent, on ne connaît pas avec précision la position de chaque bouchon et de chaque poche dans la conduite.

2.6 Les écoulements à bouchons

Les écoulements à bouchons sont classiquement divisés en trois catégories, suivant les mécanismes qui les créent [146]. On distingue en effet :

- les engorgements dus à certaines opérations de maintenance,
- les bouchons hydrodynamiques qui se forment dans les pipelines rectilignes,
- les bouchons induits par la gravité qui apparaissent dans les points bas des conduites accidentées.

Les premiers sont dus à certaines opérations ponctuelles de maintenance des lignes de production. Par exemple, le passage d'un racleur [33] crée une accumulation de liquide en amont, qui peut être de taille très importante. Mais, ces opérations étant programmées dans le temps, il est aisé pour l'exploitant de remédier à son arrivée, en coupant les équipements dédiés au gaz par exemple.

Existant pour toutes les inclinaisons et pour une large gamme de débits de gaz et de liquide, les seconds sont les plus fréquemment rencontrés dans les conduites polyphasiques. Créés par déstabilisation de l'interface gaz/liquide en régime stratifié ou bien par détente ou coalescence des bulles de gaz en régime dispersé, ils sont généralement de taille modeste (classiquement moins d'une centaine de diamètres). Ce sont aussi ceux que l'on modélise actuellement le moins bien. En effet, les phénomènes dominants sont extrêmement complexes, tri-dimensionnels et intrinsèquement instationnaires. Ainsi, même si les débits de gaz et de liquide sont globalement constants dans le temps, la vitesse de chaque phase et la pression varient périodiquement à haute fréquence. Le lecteur intéressé pourra par exemple, se référer aux différents travaux effectués à L'Imperial College pour une synthèse complète [72, 160].

De très grande taille, les bouchons induits par la gravité se forment, eux, à cause de la différence de densité entre le gaz et le liquide pour certaines configurations géométriques de conduite. En effet, lorsque la ligne de production contient un ou plusieurs points bas, il est parfois impossible d'observer un écoulement diphasique stationnaire, c'est-à-dire où

les débits massiques de gaz et de liquide sont constants en tout point et à chaque instant [51]. C'est le cas, lorsqu'un pipeline est relié à un riser ou encore, lorsque la conduite suit la topographie d'un terrain accidenté (fond marin, région montagneuse, ...). Même si l'écoulement garde un caractère stationnaire (majoritairement stratifié) dans les parties descendantes, il est observé dans les parties montantes uniquement si les débits d'entrée sont assez importants. Ainsi, pour des débits de gaz et de liquide très élevés, les portions ascendantes sont généralement en régime annulaire (FIG. 2.5).

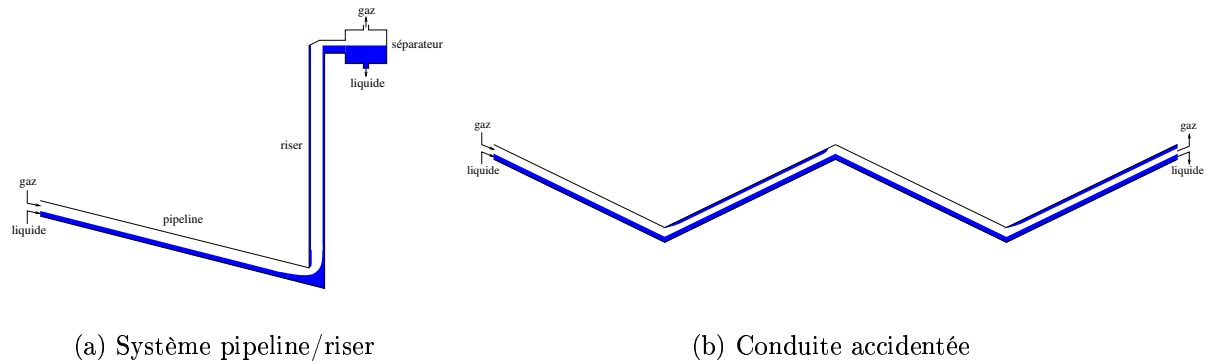


FIG. 2.5: Ecoulement annulaire stationnaire

Lorsque l'on diminue ces débits, l'écoulement tend alors à devenir intermittent (FIG. 2.6).

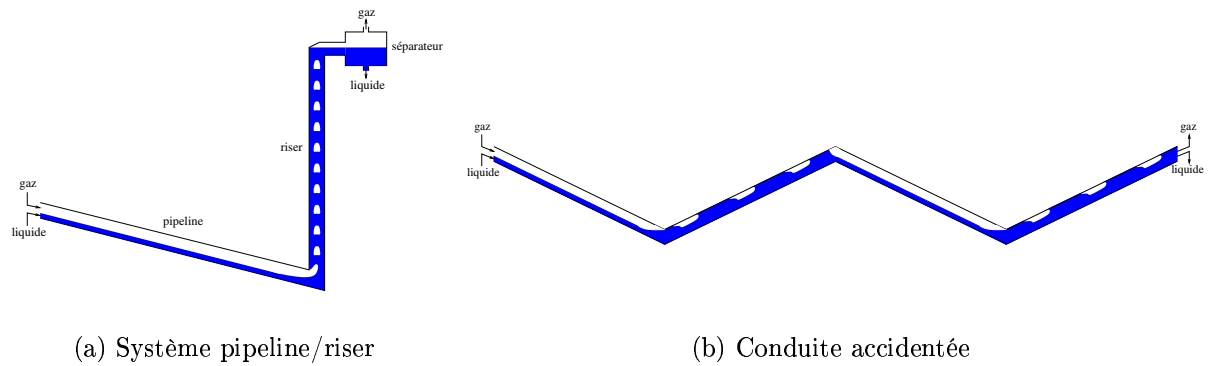


FIG. 2.6: Ecoulement intermittent stationnaire

Mais, pour de faibles débits d'entrée, un écoulement périodique apparaît. En effet, des bouchons de liquide de grande taille se forment dans les parties ascendantes de la conduite puis sont expulsés violemment par le gaz.

Pour un système pipeline/riser, on désigne ce phénomène dans sa forme la plus sévère comme étant du severe slugging tandis que dans le second cas, on emploie plutôt l'expression de terrain slugging. Ces deux types d'écoulement sont fortement instationnaires et sont généralement associés à de fortes variations de pression et de débits (FIG. 2.7).

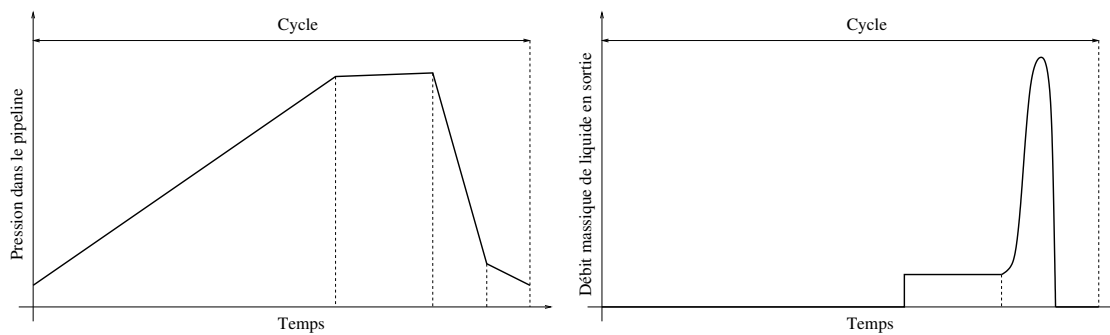


FIG. 2.7: Cycle du phénomène

La particularité de ces phénomènes est que la longueur des bouchons de liquide est supérieure ou égale à la somme des longueurs des parties ascendantes. En particulier, une condition nécessaire à l'apparition du severe slugging est que le liquide atteigne le sommet du riser avant que la poche de gaz atteigne le point bas. Dans le cas contraire, on parle plutôt d'écoulement quasi-stationnaire ou de transition [123, 131, 132, 153]. Ce sont là encore des écoulements instationnaires, dans le sens où les débits de gaz et de liquide oscillent au cours du temps, mais leurs fluctuations sont beaucoup moins accentuées et la taille des bouchons produits est plus petite.

De nombreuses études expérimentales ont été menées sur ces régimes d'écoulements [35, 36, 37, 101, 131]. Certains auteurs les ont modélisés de manière simplifiée [62, 102, 108, 127, 130, 132, 152, 153, 162, 172] et ont comparé leurs résultats par rapport à des essais expérimentaux [52, 42, 93, 153, 162]. D'autres ont préféré étudier leur stabilité pour en déduire des critères d'occurrence [26, 60, 64, 123, 143, 171]. Enfin, plusieurs travaux ont porté sur l'influence de différents paramètres [52, 93, 123, 153, 162]. Dans tous les cas, tous s'accordent à dire que ces phénomènes peuvent être décrits comme suit.

2.6.1 Description du severe slugging

Le graphique FIG. 2.8, extrait de l'article de Hill "Gas Injection at Riser Base Solves Slugging, Flow Problems" paru dans le *Oil and Gas Journal* de février 1990 [83], donne les différents régimes d'écoulement pouvant être rencontrés dans les systèmes de type pipeline/riser en fonction des vitesses superficielles de gaz et de liquide (aussi appelées flux volumétriques, $U_K = R_K V_K$).

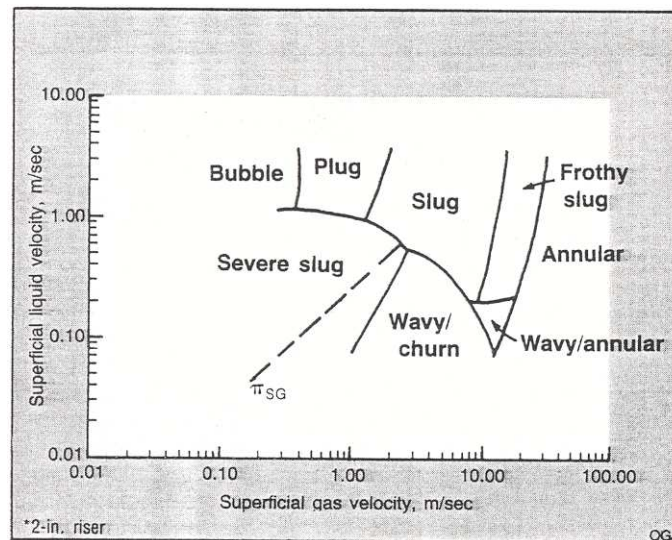


FIG. 2.8: Exemple de carte d'écoulement

Le severe slugging apparaît donc pour les faibles débits. Dans un premier temps, le liquide s'accumule dans le point bas de la conduite et tend à bloquer le passage du gaz. Celui-ci est comprimé jusqu'au moment où sa pression dépasse la pression due au poids du liquide accumulé dans le riser. Un long bouchon de liquide est alors poussé par le gaz en expansion. Puis, le gaz pénètre dans le riser jusqu'à atteindre son sommet. A ce moment, la pression chute et le liquide restant dans le riser retombe dans le point bas. Ce processus est généralement découpé en quatre phases distinctes [143] :

1. Formation du bouchon de liquide

Le liquide s'accumule au pied du riser et bloque le passage du gaz. La pression dans le pipeline augmente.

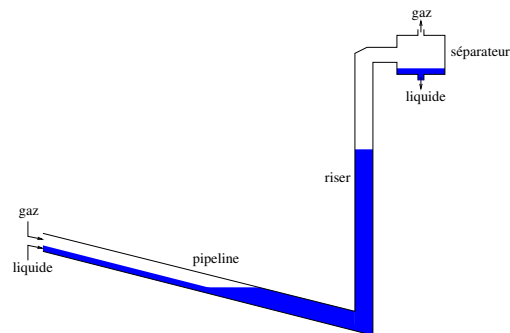


FIG. 2.9: Formation du bouchon de liquide

2. Production du bouchon de liquide

Le niveau supérieur du liquide ayant atteint le sommet du riser, il se déverse dans le séparateur.

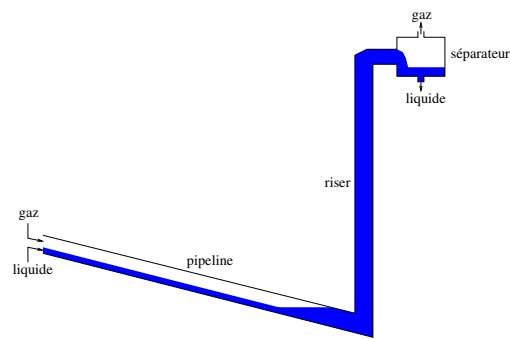


FIG. 2.10: Production du bouchon de liquide

3. Pénétration de la poche de gaz

Pendant cette phase généralement appelée blow-out, la poche de gaz ayant atteint le point bas, elle pénètre à l'intérieur du riser. Le bouchon se déverse alors dans le séparateur avec une vitesse beaucoup plus importante due à une détente rapide du gaz.

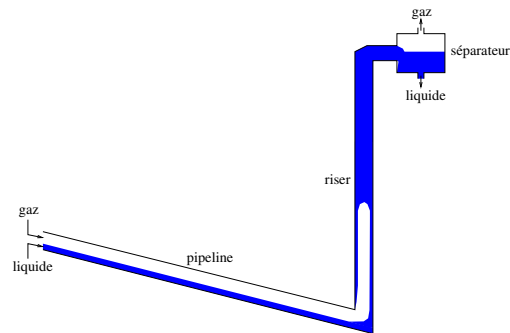


FIG. 2.11: Pénétration de la poche de gaz

4. Chute du liquide

Lorsque la poche de gaz atteint le sommet du riser, la pression au pied de la colonne chute rapidement. Le liquide retombe alors par la paroi et s'accumule à nouveau au pied du riser. Un nouveau cycle commence.

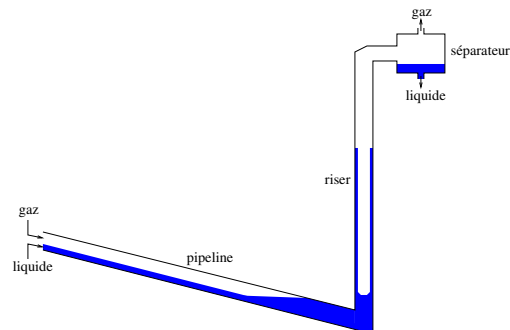


FIG. 2.12: Chute du liquide

2.6.2 Description du terrain slugging

Comme pour le severe slugging, le terrain slugging apparaît dans les conduites accidentées pour de faibles débits de gaz et de liquide. Son principe est aussi similaire, la seule différence étant que tous les tronçons se remplissent successivement pendant la première phase [152]. On retrouve donc :

1. Formation du bouchon de liquide

Le liquide remplit chaque tronçon les uns après les autres et le gaz se trouvant en amont du premier point bas se comprime. De plus, une partie du gaz piégé entre les points bas est expulsé par le bouchon en formation. Ainsi, les interfaces gaz/liquide des parties descendantes s'immobilisent au niveau de leur point bas.

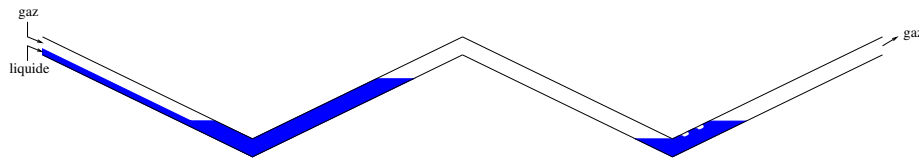


FIG. 2.13: Formation du bouchon de liquide

2. Production du bouchon de liquide

Les portions ascendantes de la conduite accidentée sont maintenant complètement remplies de liquide et le gaz se trouvant en amont du premier point bas pousse le bouchon. Notons aussi que les parties descendantes peuvent encore contenir du gaz piégé.

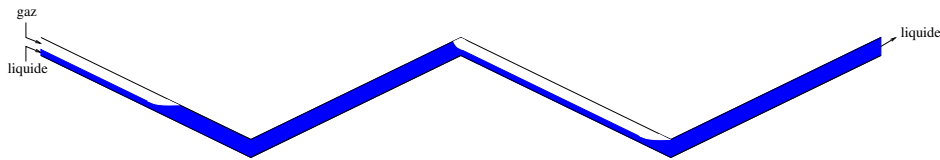


FIG. 2.14: Production du bouchon de liquide

3. Pénétration de la poche de gaz

La poche de gaz ayant atteint le premier point bas, elle pénètre dans la suite de la conduite en se détendant. Le bouchon s'expulse alors violemment.

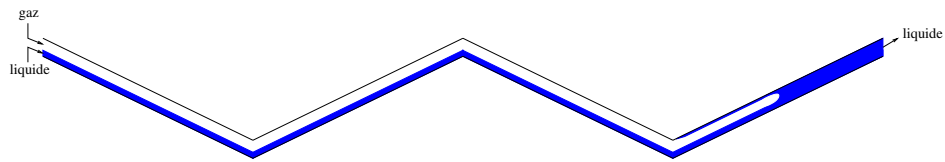


FIG. 2.15: Pénétration de la poche de gaz

4. Chute du liquide

Lorsque la poche de gaz atteint le haut du dernier tronçon ascendant, la pression dans la conduite chute rapidement. Le liquide retombe alors par la paroi et s'accumule à nouveau dans les différents point bas. Un nouveau cycle commence.

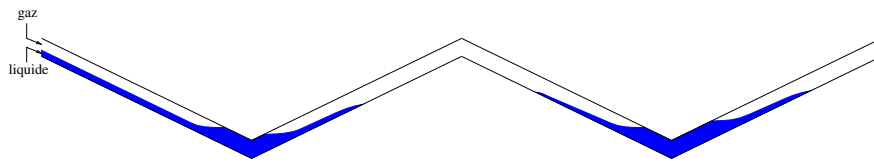


FIG. 2.16: Chute du liquide

Le chapitre suivant est consacré à l'obtention d'un modèle reproduisant le phénomène de severe slugging. Le lecteur intéressé trouvera en annexe B, un modèle plus général applicable aussi bien au severe slugging qu'au terrain slugging.

Chapitre 3

Modélisation du severe slugging

On souhaite obtenir dans ce chapitre, un modèle physique simple reproduisant le phénomène de severe slugging. Basé sur celui développé par Taitel et al. [153, 162], on va s'attacher à l'écrire sous la forme d'un système algébro-différentiel pour chacune des phases du phénomène. Nous allons commencer par la “chute du liquide”, phase supposée instantanée et qui fera office de condition initiale à chaque nouveau cycle (EQU. 3.6). Puis, les deux premières phases seront modélisées en supposant l'équilibre quasi-statique des forces (EQU. 3.15 et 3.20) et la troisième sera basée sur l'équation fondamentale de la dynamique (EQU. 3.24). Nous déduirons ensuite de ce modèle (synthétisé TAB. 3.26), un critère d'occurrence du severe slugging (EQU. 3.27). Enfin, des résultats numériques et des essais expérimentaux sur la boucle S^4L seront présentés (cf. annexe A).

En vue de notre modélisation mathématique, nous allons supposer que :

1. l'écoulement est isotherme et les fluides sont newtoniens,
2. le liquide est incompressible et le gaz est un gaz parfait,
3. le bouchon de liquide est non aéré,
4. les frottements sont négligeables,
5. les débits d'entrée et la pression de sortie sont constants dans le temps.

3.1 Dimensions du système pipeline/riser

Le système représenté par la figure FIG. 3.1, comprend un pipeline de longueur l_P incliné de β_P par rapport à l'horizontale et un riser de longueur l_R incliné de β_R par rapport à l'horizontale. Une condition nécessaire à l'occurrence du phénomène de severe slugging étant de disposer d'un important volume de gaz en amont du riser, la majorité des boucles expérimentales comme celle utilisée pour cette étude, dispose d'un volume additionnel de gaz v_G^+ en entrée de montage, permettant ainsi de s'affranchir d'une conduite de très grande longueur [153, 162]. En effet, ajouter ce volume revient à disposer d'un pipeline de longueur $l_G^+ = v_G^+/S$.

Un mélange diphasique gaz/liquide est injecté en amont du pipeline avec les débits constants Q_G^{IN} et Q_L^{IN} et sort en sommet de riser avec les débits Q_G^{OUT} et Q_L^{OUT} . Le gaz est

à la pression P , le pied de riser à la pression Π et la pression de sortie est constante égale à P^{OUT} . La position de la langue de gaz est repérée par x_G et celle du front de liquide par x_L . De plus, l'origine de ces abscisses curvilignes x_G et x_L est située au niveau du point bas. On a donc $x_G < 0$ (resp. $x_L < 0$) si la langue de gaz (resp. le front de liquide) est dans le pipeline et $x_G > 0$ (resp. $x_L > 0$) si elle (resp. il) est dans le riser.

Compte tenu de la topographie du système, il est légitime de supposer que l'angle entre le pipeline et l'horizontale est dans $[-\frac{\pi}{2}, 0[$ et celui entre le riser et l'horizontale appartient à $]0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui implique que :

1. $\sin \beta_P < 0$,
2. $\sin \beta_R > 0$,
3. $\sin \beta_P \neq \sin \beta_R$.

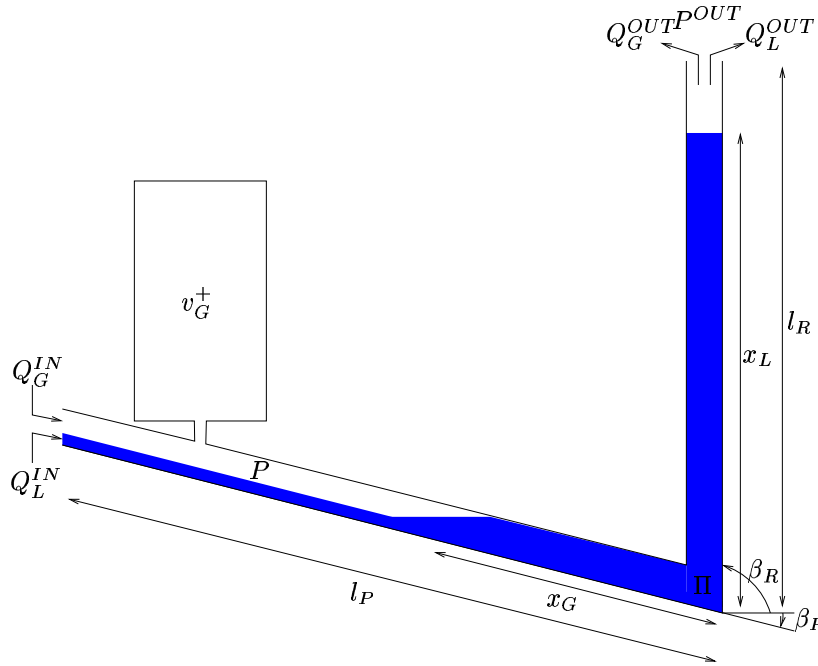


FIG. 3.1: Dimensions du problème

3.2 Conditions initiales

Nous allons déterminer les positions de la langue de gaz et du front de liquide à la fin d'un cycle de severe slugging, servant ainsi de conditions initiales au cycle suivant. Soit $[t_b, t_c]$ l'intervalle de temps pendant lequel se produit la "chute du liquide". Cette phase étant rapide, nous n'allons pas chercher à déterminer sa dynamique. Nous la supposons donc instantanée et nous allons uniquement déterminer la position des fronts une fois que le liquide est retombé en pied de riser. Ainsi, ces positions sont nos conditions initiales à

chaque nouvelle période de severe slugging :

$$\begin{cases} x_G^I &= x_G(t_c) \\ x_L^I &= x_L(t_c). \end{cases}$$

Elles sont très importantes car influencent énormément la durée d'une période de severe slugging. C'est pourquoi, nous avons ajouté un paramètre de calage au modèle qui permet d'en augmenter la précision.

La conservation de la masse de liquide entre les instants t_b et t_c implique que :

$$m_L(t_c) = m_L(t_b).$$

Le liquide étant incompressible et le diamètre du système constant, on peut écrire que :

$$x_L^I - R_G^P x_G^I + R_L^P l_P = R_L^P l_P + R_L^R l_R,$$

où R_K^P (resp. R_K^R) représente la fraction volumique de la phase K à l'intérieur du pipeline (resp. du riser) et peut être déterminée par la relation implicite (2.10). On obtient, par conséquent, une première équation reliant les positions des deux fronts :

$$x_L^I - R_G^P x_G^I = R_L^R l_R. \quad (3.1)$$

L'écoulement étant isotherme et le gaz étant un gaz parfait, on peut écrire, en notant v_G le volume occupé par le gaz dans le système :

$$P(t_c) v_G(t_c) = P(t_b) v_G(t_b). \quad (3.2)$$

Supposons maintenant que, le liquide commençant à s'accumuler, il empêche immédiatement et complètement le passage du gaz en pied de riser. En notant $v_G^P = v_G^+ + S R_G^P l_P$, on a alors :

$$v_G(t_b) = v_G^P.$$

On suppose aussi que, à la fin de la troisième phase lorsque la poche de gaz arrive en haut du riser, la pression dans le système devient presque égale à la pression de sortie P^{OUT} :

$$P(t_b) = (1 + \varepsilon_c) P^{OUT}.$$

On ajoute ce paramètre de calage ε_c pour des raisons de précision. Mais il est toujours très petit devant 1 et peut être pris égal à 0 en première approximation.

De plus, le volume de gaz à l'instant t_c est égal à :

$$v_G(t_c) = v_G^P + S R_G^P x_G^I,$$

et sa pression est donnée par la relation :

$$P(t_c) = P^{OUT} + \rho_L^N g [\sin \beta_R x_L^I - \sin \beta_P x_G^I].$$

En substituant les différents termes par leur expression dans (3.2), on obtient une seconde équation reliant les positions des deux fronts :

$$\rho_L^N g [\sin \beta_R x_L^I - \sin \beta_P x_G^I] [v_G^P + S R_G^P x_G^I] + S R_G^P P^{OUT} x_G^I = \varepsilon_c P^{OUT} v_G^P. \quad (3.3)$$

Les équations (3.1) et (3.3) forment un système algébrique 2×2 en (x_G^I, x_L^I) . La première équation donne directement la position du front de liquide en fonction de la position de la langue de gaz :

$$x_L^I = R_G^P x_G^I + R_L^R l_R. \quad (3.4)$$

En l'injectant dans la seconde, on obtient l'équation du second degré en x_G^I suivante :

$$K_A^4 x_G^{I^2} + K_B^4 x_G^I + K_C^4 = 0,$$

avec :

$$\begin{cases} K_A^4 &= SR_G^P \rho_L^N g (\sin \beta_R R_G^P - \sin \beta_P) \\ K_B^4 &= \rho_L^N g v_G^P (\sin \beta_R R_G^P - \sin \beta_P) + SR_G^P R_L^R \rho_L^N g \sin \beta_R l_R + SR_G^P P^{OUT} \\ K_C^4 &= [R_L^R \rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \varepsilon_c P^{OUT}] v_G^P. \end{cases}$$

Soit $\Delta_G^4 = (K_B^4)^2 - 4K_A^4 K_C^4$. La position de la langue de gaz est donnée par :

$$x_G^I = \frac{-K_B^4 \pm \sqrt{\Delta_G^4}}{2K_A^4}, \quad (3.5)$$

et on choisira la solution vérifiant $-l_P < x_G^I < 0$ et $0 < x_L^I < l_R$.

En conclusion, les conditions initiales d'un cycle de severe slugging, correspondant aux positions des fronts après la chute du liquide dans le riser, sont données par :

$$\begin{cases} x_G^I &= \frac{-K_B^4 \pm \sqrt{\Delta_G^4}}{2K_A^4} \\ x_L^I &= R_G^P x_G^I + R_L^R l_R. \end{cases} \quad (3.6)$$

3.3 Formation du bouchon de liquide

Soit t_i le temps initial d'une période de severe slugging et $[t_i, t_f]$ l'intervalle de temps pendant lequel se produit la première phase (i.e. t_f est le temps pour que le front de liquide atteigne le sommet du riser). Nous allons commencer par mettre en place un système d'équations pour en déduire l'évolution des deux fronts x_G et x_L au cours du temps. Puis, nous déterminerons t_f .

3.3.1 Modélisation

Pendant cette première phase, le gaz s'accumule dans le pipeline et le liquide dans le point bas, les débits en sortie de riser sont nuls (i.e. $Q_G^{OUT} = 0$ et $Q_L^{OUT} = 0$). Les lois de conservation de la masse de gaz et de liquide s'écrivent alors :

$$\dot{m}_G(t) = Q_G^{IN}, \quad (3.7)$$

$$\dot{m}_L(t) = Q_L^{IN}. \quad (3.8)$$

De plus, la masse de gaz contenue dans le pipeline est donnée par la relation suivante :

$$m_G(t) = \rho_G(t)v_G(t).$$

On suppose que le gaz est un gaz parfait. Sa densité est donc régie par la loi (2.2) :

$$\rho_G(t) = \frac{\rho_G^N}{P^N}P(t),$$

et son volume est égal à :

$$v_G(t) = v_G^P + SR_G^P x_G(t).$$

En supposant que $v_G^P \gg SR_G^P x_G$, il peut alors s'écrire :

$$v_G(t) = v_G^P.$$

Ainsi, on obtient que la masse de gaz est une fonction linéaire de sa pression :

$$m_G(t) = \frac{\rho_G^N v_G^P}{P^N}P(t). \quad (3.9)$$

Le liquide étant supposé incompressible, sa densité est constante (EQU. 2.3) et sa masse est donnée par la relation suivante :

$$m_L(t) = \rho_L^N v_L(t).$$

De plus, son volume étant égal à :

$$v_L(t) = S[x_L(t) - x_G(t)] + SR_L^P[l_P + x_G(t)],$$

la masse de liquide s'exprime en fonction des positions x_G et x_L par la relation :

$$m_L(t) = S\rho_L^N[x_L(t) - R_G^P x_G(t) + R_L^P l_P]. \quad (3.10)$$

Enfin, en faisant l'hypothèse d'un "modèle quasi-statique", P et Π sont directement données par la hauteur de liquide dans le système :

$$P(t) = \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t), \quad (3.11)$$

$$\Pi(t) = P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R x_L(t). \quad (3.12)$$

En conclusion, le système d'équations s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{m}_G(t) & = & Q_G^{IN} \\ \dot{m}_L(t) & = & Q_L^{IN} \\ m_G(t) & = & \frac{\rho_G^N v_G^P}{P^N} P(t) \\ m_L(t) & = & S \rho_L^N [x_L(t) - R_G^P x_G(t) + R_L^P l_P] \\ P(t) & = & \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t) \\ \Pi(t) & = & P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R x_L(t) \\ Q_L^{OUT}(t) & = & 0. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

On souhaite maintenant modifier ce système pour faire apparaître explicitement l'évolution des positions x_G et x_L . En remplaçant Π par son expression (3.12) dans l'équation (3.11), on obtient P en fonction de x_G et x_L :

$$P(t) = P^{OUT} + \rho_L^N g [\sin \beta_R x_L(t) - \sin \beta_P x_G(t)].$$

En injectant cette expression dans la formule donnant la masse de gaz (3.9), on peut alors l'écrire :

$$m_G(t) = \frac{\rho_G^N v_G^P}{P^N} [P^{OUT} + \rho_L^N g [\sin \beta_R x_L(t) - \sin \beta_P x_G(t)]] .$$

En dérivant cette relation par rapport à t et en injectant le résultat dans l'équation de conservation de la masse de gaz (3.7), on obtient une première équation reliant les deux vitesses de déplacement $\dot{x}_G$ et $\dot{x}_L$:

$$\sin \beta_R \dot{x}_L(t) - \sin \beta_P \dot{x}_G(t) = \frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N \rho_L^N g v_G^P}. \quad (3.14)$$

De plus, en dérivant l'équation (3.10) et en l'injectant dans l'équation de conservation de la masse de liquide (3.8), on obtient une seconde équation reliant $\dot{x}_G$ et $\dot{x}_L$:

$$\dot{x}_L(t) - R_G^P \dot{x}_G(t) = \frac{Q_L^{IN}}{S \rho_L^N}.$$

Ces deux équations forment un système 2×2 que l'on inverse pour donner deux relations sur $\dot{x}_G$ et $\dot{x}_L$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_G(t) & = & \frac{1}{\rho_L^N (R_G^P \sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left(\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^P} - \frac{\sin \beta_R Q_L^{IN}}{S} \right) \\ \dot{x}_L(t) & = & \frac{1}{\rho_L^N (R_G^P \sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left(\frac{R_G^P P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^P} - \frac{\sin \beta_P Q_L^{IN}}{S} \right). \end{array} \right.$$

On remarque que ces vitesses de déplacement sont toujours définies car on a supposé que $\sin \beta_P < 0 < \sin \beta_R$ et qu'elles sont constantes dans le temps. Notons les K_G^1 et K_L^1 :

$$\begin{cases} K_G^1 &= \frac{1}{\rho_L^N (R_G^P \sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left(\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^P} - \frac{\sin \beta_R Q_L^{IN}}{S} \right) \\ K_L^1 &= \frac{1}{\rho_L^N (R_G^P \sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left(\frac{R_G^P P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^P} - \frac{\sin \beta_P Q_L^{IN}}{S} \right). \end{cases}$$

Le signe de K_G^1 est indéterminé mais on a toujours $K_L^1 > 0$ car $\sin \beta_P < 0$. Cela signifie que durant cette première phase, la langue de gaz peut soit avancer soit reculer, mais que le front de liquide monte toujours jusqu'à atteindre le sommet du riser.

Le modèle de type algébro-différentiel décrivant les grandeurs physiques pendant la première phase s'écrit en définitive :

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) &= K_G^1 \\ \dot{x}_L(t) &= K_L^1 \\ P(t) &= \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t) \\ \Pi(t) &= P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R x_L(t) \\ Q_L^{OUT}(t) &= 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3.2 Calcul de t_f

t_f est le temps pour que le liquide atteigne le sommet du riser. On a donc :

$$x_L(t_f) = l_R.$$

En intégrant l'équation différentielle régissant la position du front de liquide dans le riser entre les instants t_i et t_f , on obtient :

$$t_f = t_i + \frac{l_R - x_L^I}{K_L^1}. \quad (3.16)$$

3.4 Production du bouchon de liquide

Soit $[t_f, t_p]$ l'intervalle de temps pendant lequel se produit la seconde phase (i.e. t_p est le temps pour que la langue de gaz atteigne le pied de riser). Après avoir décrit le modèle donnant l'évolution des différentes grandeurs du système, nous déterminerons la valeur de t_p .

3.4.1 Modélisation

Pendant cette phase, la position du front de liquide reste constante égale à l_R , le liquide s'écoule en sortie de riser et le gaz est toujours bloqué en amont du point bas. Les lois de conservation de la masse de gaz et de liquide s'écrivent par conséquent :

$$\begin{aligned} \dot{m}_G(t) &= Q_G^{IN}, \\ \dot{m}_L(t) &= Q_L^{IN} - Q_L^{OUT}(t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

De plus, en prenant $x_L = l_R$, les équations définissant la masse de gaz, la masse de liquide et les pressions restent inchangées par rapport à celles de la première phase. En notant Π_R la valeur de la pression en pied de riser lorsque celui-ci est complètement rempli de liquide :

$$\Pi_R = P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R l_R,$$

on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_G(t) = Q_G^{IN} \\ \dot{m}_L(t) = Q_L^{IN} - Q_L^{OUT}(t) \\ x_L(t) = l_R \\ m_G(t) = \frac{\rho_G^N v_G^P}{P^N} P(t) \\ m_L(t) = S \rho_L^N [l_R + R_L^P l_P - R_G^P x_G(t)] \\ P(t) = \Pi_R - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t) \\ \Pi(t) = \Pi_R. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Faisons apparaître maintenant l'évolution des positions x_G et x_L . $\dot{x}_G$ est directement solution de la relation (3.14) écrite pour $x_L = l_R$ et $\dot{x}_L = 0$:

$$-\sin \beta_P \dot{x}_G(t) = \frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N \rho_L^N g v_G^P}.$$

Comme $\beta_P \neq 0$, on peut définir la constante K_G^2 égale à :

$$K_G^2 = -\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N \rho_L^N g \sin \beta_P v_G^P}.$$

On remarque que $K_G^2 > 0$, ce qui signifie que la langue de gaz avance toujours vers le point bas pendant cette seconde phase :

$$\dot{x}_G(t) = K_G^2. \quad (3.19)$$

De plus, on peut déterminer le débit de liquide sortant du riser pendant cette phase. En effet, la masse de liquide est donnée par la formule :

$$m_L(t) = S \rho_L^N [l_R + R_L^P l_P - R_G^P x_G(t)].$$

En dérivant cette équation par rapport au temps puis en la réinjectant dans l'équation de conservation de la masse de liquide (3.17), on obtient :

$$-S \rho_L^N R_G^P \dot{x}_G(t) = Q_L^{IN} - Q_L^{OUT}(t).$$

Par conséquent, en remplaçant $\dot{x}_G$ par son expression, le débit de liquide sortant du système est égal à :

$$Q_L^{OUT}(t) = Q_L^{IN} - \frac{S R_G^P P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^P}.$$

On obtient en définitive le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_G(t) & = & K_G^2 \\ x_L(t) & = & l_R \\ P(t) & = & \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t) \\ \Pi(t) & = & \Pi_R \\ Q_L^{OUT}(t) & = & Q_L^{IN} - \frac{S R_G^P P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^P}. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

3.4.2 Calcul de t_p

t_p est le temps pour que la langue de gaz atteigne le pied de riser. On a donc :

$$x_G(t_p) = 0.$$

En intégrant (3.19) entre t_f et t_p , on obtient :

$$t_p = t_f - \frac{x_G(t_f)}{K_G^2}. \quad (3.21)$$

3.5 Pénétration de la poche de gaz

Soit $[t_p, t_b]$ l'intervalle de temps pendant lequel se produit cette troisième phase (i.e. t_b est le temps pour que le gaz atteigne le sommet du riser). Nous allons commencer par mettre en place le modèle. Puis, nous expliciterons une méthode numérique afin de déterminer de façon discrète, les différentes grandeurs physiques en fonction du temps pour $t \in [t_p, t_b]$. Enfin, nous donnerons une manière de calculer le temps t_b .

3.5.1 Modélisation

Pendant cette phase, la langue de gaz est assimilée à un piston déplaçant le liquide situé au centre du riser sur une surface $S R_G^R$ et ayant une masse $\tilde{m}_L$, le liquide proche de la paroi étant supposé rester immobile. Cette méthode, certes peu classique, nous permet d'obtenir un modèle sous la forme d'un système algébro-différentiel.

On peut appliquer à cette colonne liquide, “la relation fondamentale de la dynamique” :

$$\sum \mathcal{F}(t) = \frac{d}{dt} [\tilde{m}_L(t) \sigma_G(t)],$$

où σ_G est la vitesse de la langue de gaz :

$$\sigma_G(t) = \dot{x}_G(t).$$

La masse de liquide se déplaçant dans le riser est donnée par la relation suivante :

$$\tilde{m}_L(t) = S \rho_L^N R_G^R [l_R - x_G(t)]. \quad (3.22)$$

En négligeant les termes de frottements, les forces en présence sont le poids de la colonne de liquide et les forces de pression appliquées sur la surface $S R_G^R$:

$$\sum \mathcal{F}(t) = S R_G^R [P(t) - P^{OUT}] - S R_G^R [l_R - x_G(t)] \rho_L^N g \sin \beta_R.$$

L'écoulement étant isotherme et le gaz étant supposé parfait, on a la relation suivante :

$$P(t) v_G(t) = P(t_p) v_G(t_p).$$

Or on sait que :

$$P(t_p) = \Pi_R,$$

$$v_G(t_p) = v_G^P,$$

$$v_G(t) = v_G^P + S R_G^R x_G(t).$$

La pression P s'exprime donc directement en fonction de x_G par la relation :

$$P(t) = \Pi_R \frac{1}{1 + \frac{S R_G^R}{v_G^P} x_G(t)}.$$

Or, x_G étant très petit devant $\frac{v_G^P}{S R_G^R}$, on peut effectuer un développement limité au premier ordre :

$$P(t) = \Pi_R \left[1 - \frac{S R_G^R}{v_G^P} x_G(t) \right].$$

Par conséquent, la somme des forces en présence s'écrit :

$$\sum \mathcal{F}(t) = \left[S R_G^R \rho_L^N g \sin \beta_R - \frac{(S R_G^R)^2}{v_G^P} \Pi_R \right] x_G(t).$$

Et, en posant $K_G^3 = g \sin \beta_R - \frac{S R_G^R \Pi_R}{\rho_L^N v_G^P}$, on obtient l'équation suivante régissant la position de la langue de gaz dans le riser :

$$\frac{d}{dt} ([l_R - x_G(t)] \sigma_G(t)) = K_G^3 x_G(t).$$

De plus, on a $x_L(t) = l_R$ et le gaz ayant pénétré le riser, la pression Π est supposée égale à la pression du gaz :

$$\Pi(t) = P(t).$$

Enfin, on suppose que le liquide entrant dans la conduite s'accumule dans le pipeline et donc, que la colonne de liquide en mouvement n'est pas alimentée. Ainsi, l'équation de conservation de la masse de liquide située au centre du riser $\tilde{m}_L$ s'écrit :

$$\dot{\tilde{m}}_L(t) = -Q_L^{OUT}(t).$$

En dérivant l'expression (3.22), on obtient que le débit de sortie est égal à :

$$Q_L^{OUT}(t) = S \rho_L^N R_G^R \sigma_G(t).$$

Par conséquent, on obtient le système d'équations suivant (qui est plus complexe que pour les phases 1 et 2) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_G(t) & = \sigma_G(t) \\ \frac{d}{dt} ([l_R - x_G(t)] \sigma_G(t)) & = K_G^3 x_G(t) \\ x_L(t) & = l_R \\ P(t) & = \Pi_R \left[1 - \frac{S R_G^R}{v_G^P} x_G(t) \right] \\ \Pi(t) & = P(t) \\ Q_L^{OUT}(t) & = S \rho_L^N R_G^R \sigma_G(t). \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Pour résoudre ce système, il ne suffit pas de connaître la position de la langue de gaz au temps t_p , sa vitesse est aussi nécessaire. Ainsi, on suppose que le gaz pénètre dans le riser avec une vitesse égale à la vitesse de la langue de gaz dans le pipeline pendant la seconde phase. Les conditions initiales sont par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_G(t_p) & = 0 \\ \sigma_G(t_p) & = K_G^2. \end{array} \right.$$

Le système algébro-différentiel (3.23) n'étant pas standard, effectuons à présent le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} y_G &= (l_R - x_G)^2 \\ \omega_G &= \dot{y}_G. \end{cases}$$

L'état (y_G, ω_G) est donc solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_G(t) &= \omega_G(t) \\ \dot{\omega}_G(t) &= 2 K_G^3 (\sqrt{y_G(t)} - l_R). \end{cases}$$

De plus, x_G étant compris entre 0 et l_R pendant toute la durée de la phase 3, on a :

$$\begin{cases} x_G(t) &= l_R - \sqrt{y_G(t)} \\ \sigma_G(t) &= \frac{-\omega_G(t)}{2\sqrt{y_G(t)}} \\ Q_L^{OUT}(t) &= \frac{-S \rho_L^N R_G^R}{2} \frac{\omega_G(t)}{\sqrt{y_G(t)}}. \end{cases}$$

Ainsi, le modèle s'écrit en définitive :

$$\begin{cases} \dot{y}_G(t) &= \omega_G(t) \\ \dot{\omega}_G(t) &= 2 K_G^3 (\sqrt{y_G(t)} - l_R) \\ x_G(t) &= l_R - \sqrt{y_G(t)} \\ x_L(t) &= l_R \\ P(t) &= \Pi_R \left[1 - \frac{S R_G^R}{v_G^P} x_G(t) \right] \\ \Pi(t) &= P(t) \\ Q_L^{OUT}(t) &= \frac{-S \rho_L^N R_G^R}{2} \frac{\omega_G(t)}{\sqrt{y_G(t)}}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Remarque.

Ce modèle implique que σ_G tende vers l'infini lorsque x_G tend vers l_R , ce qui est physiquement incorrect. Cependant, on peut éviter cela en rajoutant un terme de frottement dans l'expression de la somme des forces en présence.

3.5.2 Résolution numérique

Intéressons nous à la partie différentielle du système (3.24). Nous avons à résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{Y} &= F(Y) \\ Y(t_p) &= Y_p, \end{cases}$$

avec $Y = \begin{pmatrix} y_G \\ \omega_G \end{pmatrix}$, $F(Y) = \begin{pmatrix} \omega_G \\ 2 K_G^3 (\sqrt{y_G} - l_R) \end{pmatrix}$ et $Y_p = \begin{pmatrix} l_R \\ -2 l_R K_G^2 \end{pmatrix}$.

A la différence des deux premières phases, il n'est pas possible ici de trouver une solution analytique. C'est pourquoi, nous allons utiliser un schéma numérique de type Euler explicite d'ordre 1, dont voici la description :

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\Delta t^n} = F(Y^n).$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} y_G^{n+1} &= y_G^n + \Delta t^n \omega_G^n \\ \omega_G^{n+1} &= \omega_G^n + 2 K_G^3 \Delta t^n (\sqrt{y_G^n} - l_R). \end{cases}$$

Ainsi, les grandeurs physiques du système, toutes fonction de y_G et ω_G , seront déterminées de manière discrète pour chaque $t^n \in [t_p, t_b]$.

De plus, le schéma utilisé étant explicite, son pas de temps doit vérifier l'inégalité suivante :

$$\Delta t^n < \frac{1}{\max(|\lambda_i^n|)},$$

λ_i^n étant les valeurs propres de la jacobienne de F calculée en Y^n . Or, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_G^3}{\sqrt{Y_1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont donc $\sqrt{\frac{K_G^3}{\sqrt{y_G}}}$ et $-\sqrt{\frac{K_G^3}{\sqrt{y_G}}}$ et, par conséquent, le pas de temps doit vérifier :

$$\Delta t^n < \sqrt{\frac{\sqrt{y_G^n}}{K_G^3}}.$$

On souhaite aussi que les valeurs successives de y_G^n restent positives. Cela nous implique donc une seconde condition sur le pas de temps :

$$\Delta t^n < \frac{-y_G^n}{\omega_G^n}.$$

Remarque.

Ces conditions impliquent que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta t^n = 0$.

3.5.3 Calcul de t_b

t_b est le temps pour que la langue de gaz atteigne le haut du riser :

$$x_G(t_b) = l_R.$$

Ne pouvant pas résoudre analytiquement le système (3.24), il nous est impossible de donner une relation pour calculer t_b . Par contre, il est possible d'utiliser la résolution numérique pour en donner une approximation, avec une précision aussi bonne qu'on le souhaite. En effet, le pas de temps tendant vers 0 lorsque x_G tend vers l_R , on prendra t_b égal au temps tel que Δt est inférieur à un ε donné :

$$t_b = t_p + \sum_{\Delta t > \varepsilon} \Delta t. \quad (3.25)$$

De plus, pour obtenir une bonne précision sur ce calcul, il est souhaitable de prendre une CFL assez petite pour ne pas cumuler trop d'erreurs.

3.6 Récapitulatif du modèle

Le modèle est composé des systèmes (3.15), (3.20) et (3.24) ainsi que des conditions initiales (3.6). Le tableau suivant en donne une vision synthétique :

temps	Conditions initiales	Système différentiel	Système algébrique
$t \in [t_i, t_f]$ (phase 1)	$x_G(t_i) = \frac{-K_B^4 \pm \sqrt{\Delta_G^4}}{2K_A^4}$ $x_L(t_i) = R_G^P x_G(t_i) + R_L^R l_R$	$\dot{x}_G(t) = K_G^1$ $\dot{x}_L(t) = K_L^1$	$P(t) = \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t)$ $\Pi(t) = P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R x_L(t)$ $Q_L^{OUT}(t) = 0$
$t \in [t_f, t_p]$ (phase 2)	$x_G(t_f) = x_G(t_i) + K_G^1(t_f - t_i)$	$\dot{x}_G(t) = K_G^2$	$x_L(t) = l_R$ $P(t) = \Pi_R - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t)$ $\Pi(t) = \Pi_R$ $Q_L^{OUT}(t) = Q_L^{IN} - \frac{S R_G^P P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^P}$
$t \in [t_p, t_b]$ (phase 3)	$y_G(t_p) = l_R$ $\omega_G(t_p) = -2l_R K_G^2$	$\dot{y}_G(t) = \omega_G(t)$ $\dot{\omega}_G(t) = 2 K_G^3 (\sqrt{y_G(t)} - l_R)$	$x_G(t) = l_R - \sqrt{y_G(t)}$ $x_L(t) = l_R$ $P(t) = \Pi_R \left[1 - \frac{S R_G^R}{v_G^P} x_G(t) \right]$ $\Pi(t) = P(t)$ $Q_L^{OUT}(t) = \frac{-S \rho_L^N R_G^R}{2} \frac{\omega_G(t)}{\sqrt{y_G(t)}}$

(3.26)

3.7 Critère d'occurrence

De nombreuses études ont été menées pour définir certains critères donnant le caractère stationnaire ou périodique de l'écoulement dans un système pipeline/riser [60, 64, 123, 143]. En particulier, Bøe [26] détermina une relation qui sert généralement de référence. Elle s'exprime sous la forme d'une inégalité faisant intervenir le rapport du débit de gaz sur le débit de liquide ainsi qu'une constante dépendant des paramètres du système et des conditions d'écoulement. Elle est déterminée en utilisant le fait qu'une condition à l'occurrence du severe slugging est que le liquide atteigne le sommet du riser avant que la poche de gaz atteigne le point bas. Ainsi, si la vitesse de la langue de gaz pendant la première phase de formation du bouchon de liquide est négative ($K_G^1 \leq 0$), cette condition est toujours vérifiée. Dans notre cas, on peut l'exprimer sous la forme :

$$\frac{Q_G^{IN}}{Q_L^{IN}} \leq \frac{\rho_G^N g \sin \beta_R v_G^P}{S P^N}.$$

Zakarian [171] s'intéressa lui aussi à la stabilité de ces écoulements. Il présenta une analyse mathématique basée sur la théorie des perturbations à partir d'un modèle simplifié transitoire. Ce modèle a été construit en supposant que le pipeline est en régime stratifié et le riser en régime intermittent ou dispersé. Un calcul de bifurcation lui permet de déduire une expression analytique de la frontière séparant les écoulements permanents des écoulements instationnaires (severe slugging ou transition vers le severe slugging) au voisinage des valeurs critiques des paramètres. Il a aussi démontré sur quelques exemples, que la bifurcation à l'origine des instabilités observées est du type Hopf [69]. Cette frontière donne, en particulier, une valeur critique maximale du débit liquide pour laquelle on n'a plus de severe slugging :

$$Q_L^{IN} \leq \frac{149}{S \rho_L^N} \left(\frac{D}{4} \right)^{2/3} \sqrt{|\sin \beta_R|}.$$

Bien que cette dernière inégalité surestime la valeur réelle, la combinaison des deux critères définit une région de l'espace des paramètres où le severe slugging est susceptible de se produire :

$$\begin{cases} \frac{Q_G^{IN}}{Q_L^{IN}} \leq \frac{\rho_G^N g \sin \beta_R v_G^P}{S P^N} \\ Q_L^{IN} \leq \frac{149}{S \rho_L^N} \left(\frac{D}{4} \right)^{2/3} \sqrt{|\sin \beta_R|}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Remarque.

Ce critère d'occurrence (3.27) implique donc que les débits de gaz et de liquide en entrée du pipeline sont faibles. Cela valide bien l'hypothèse quasi-statique prise dans notre modèle pour les deux premières phases.

3.8 Validations expérimentales

Ce paragraphe est consacré à la validation du modèle que nous venons de développer par rapport à différentes expériences menées sur notre boucle d'écoulement S^4L (cf. annexe A). Dans un premier temps, nous allons tracer plusieurs cartes d'écoulement pour nous permettre de valider le critère d'occurrence du severe slugging. Puis, on effectuera une confrontation entre le modèle et les expériences en comparant les pressions P et Π . Enfin, une étude sera menée sur la durée d'un cycle de severe slugging.

3.8.1 Cartes d'écoulement

Commençons par valider le critère d'occurrence (3.27). Pour différentes valeurs des paramètres β_P et v_G^+ , nous allons classifier chaque régime d'écoulement observé sur la boucle en fonction des débits Q_G^{IN} et Q_L^{IN} . Puis, nous tracerons le critère pour vérifier s'il délimite bien la zone d'existence du severe slugging.

Régimes rencontrés

Bien que l'écoulement dans la section inclinée de S^4L soit toujours en régime stratifié, plusieurs types d'écoulement ont été observés dans la partie verticale et ont été regroupés comme suit :

- **Régime stable**

L'écoulement dans le riser est alors intermittent voire bouillonnant. En effet, le débit de gaz est trop important pour permettre au liquide de former un bouchon à la base du riser. Par conséquent, il est entraîné par le gaz et se déverse de façon régulière dans le séparateur. On ne voit aucun cycle périodique se former et les pressions P et Π ne subissent que de petites variations (FIG. 3.2).

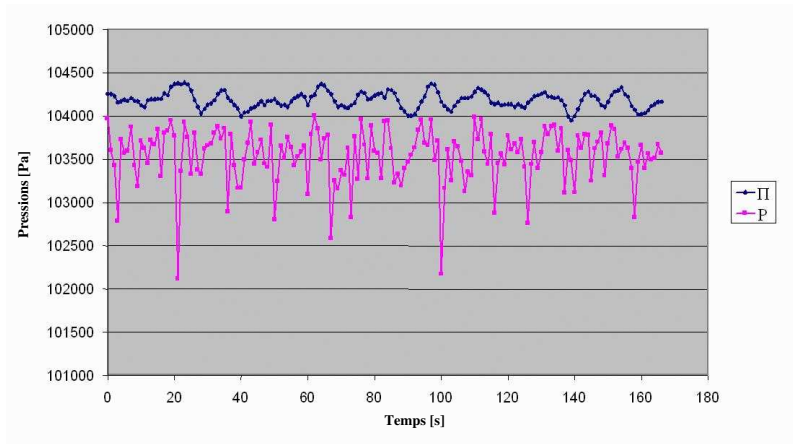


FIG. 3.2: P et Π en fonction du temps pour le régime stable

Ce régime est représenté par des ronds verts sur les différentes cartes d'écoulement.

▲ Régime de transition vers le severe slugging

L'écoulement n'est alors plus stationnaire, mais on ne constate pas de severe slugging au sens strict du terme. En effet, le bouchon de liquide se forme au niveau du point bas, mais il est éjecté par la poche de gaz avant que le riser ne soit complètement rempli. On a donc un écoulement périodique d'amplitude plus faible et de fréquence plus élevée que dans le cas du severe slugging (FIG. 3.3).

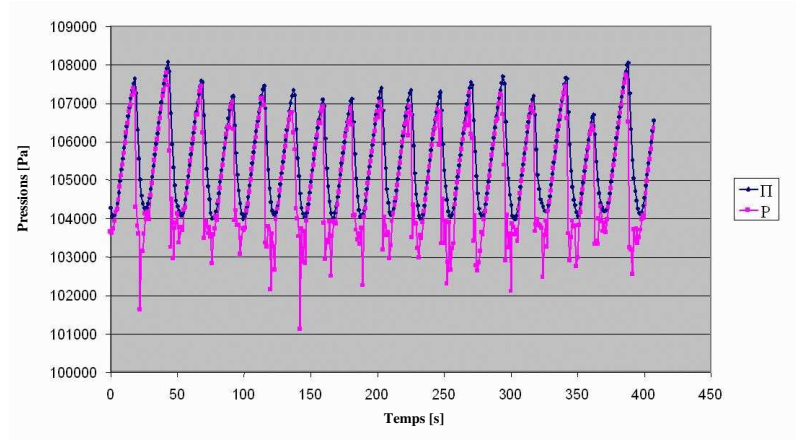


FIG. 3.3: P et Π en fonction du temps pour le régime de transition

Ce régime est représenté par des triangles jaunes sur les différentes cartes d'écoulement.

◆ Severe slugging

L'écoulement est alors périodique et chaque cycle est complet. En effet, on observe distinctement et successivement les quatre phases du phénomène (FIG. 3.4).

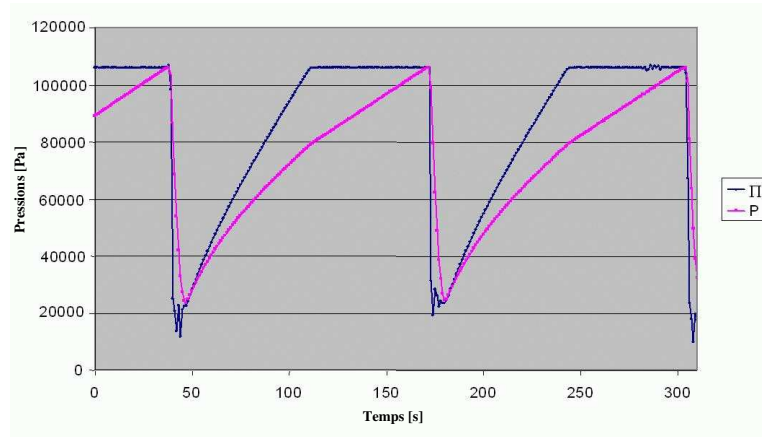


FIG. 3.4: P et Π en fonction du temps en conditions de severe slugging

Il est représenté par les losanges rouges sur les différentes cartes d'écoulement.

● ■ Régimes intermédiaires

Entre ces trois principaux régimes ont été observés deux autres types d'écoulement. Le premier (représenté par des ronds bleus) est une alternance entre le régime stable et le régime de transition vers le severe slugging. En effet, on observe un écoulement intermittent entrecoupé de formations et d'expulsions de bouchons de liquide de petite taille. Le second (représenté par des carrés oranges) est une alternance entre le severe slugging et le régime de transition vers le severe slugging. On observe alors successivement un ou plusieurs cycles de severe slugging puis un ou plusieurs cycles de transition vers le severe slugging, où le bouchon est expulsé avant que le riser ne soit complètement rempli.

Cartes d'écoulement

Pour chaque valeur des paramètres β_P et v_G^+ , l'observation nous permet de tracer une carte d'écoulement en fonction des vitesses superficielles de gaz et de liquide. Chacune de ces cartes nous indique alors les régions de severe slugging, de transition et d'écoulement stable. De plus, le critère d'occurrence (3.27) est représenté par la droite de couleur noire. Seule la première inégalité est ici représentée, la pompe à engrenage de S^4L ne permettant pas d'atteindre le débit critique au dessus duquel il n'a plus de severe slugging. Les graphiques FIG. 3.5, FIG. 3.6, FIG. 3.7, FIG. 3.8, FIG. 3.9 et FIG. 3.10 sont les cartes d'écoulement pour des angles β_P de -10° et -18° et des volumes additionnels de gaz v_G^+ de 15.8 l, 25.8 l et 35.8 l.

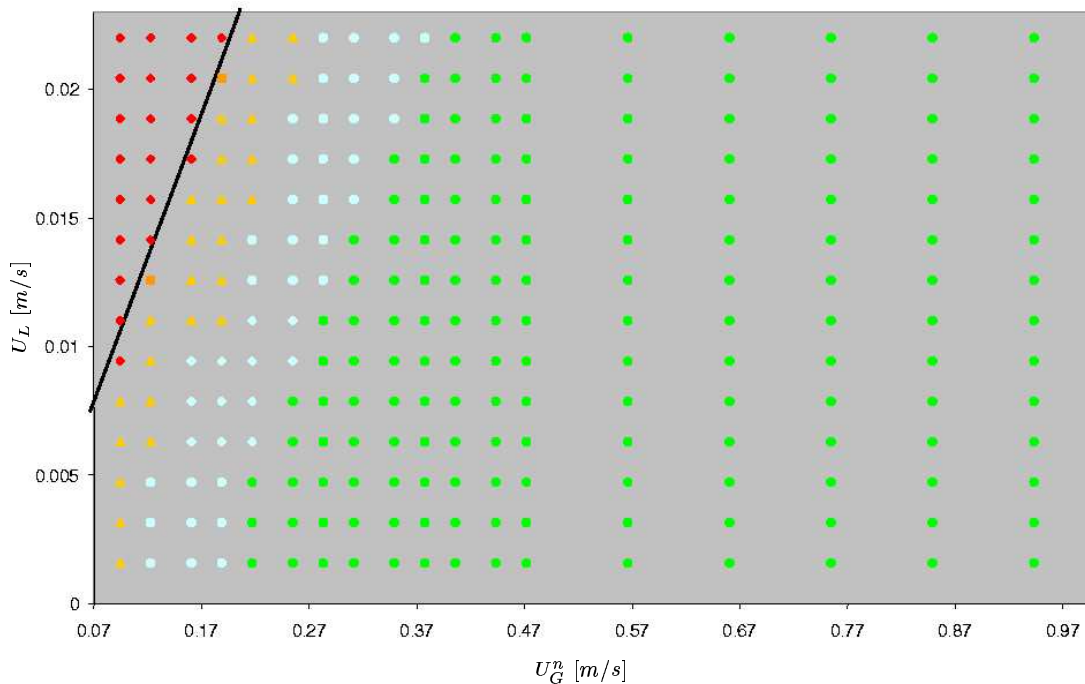


FIG. 3.5: Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08$ m, $v_G^+ = 15.8$ l et $\beta_P = -10^\circ$

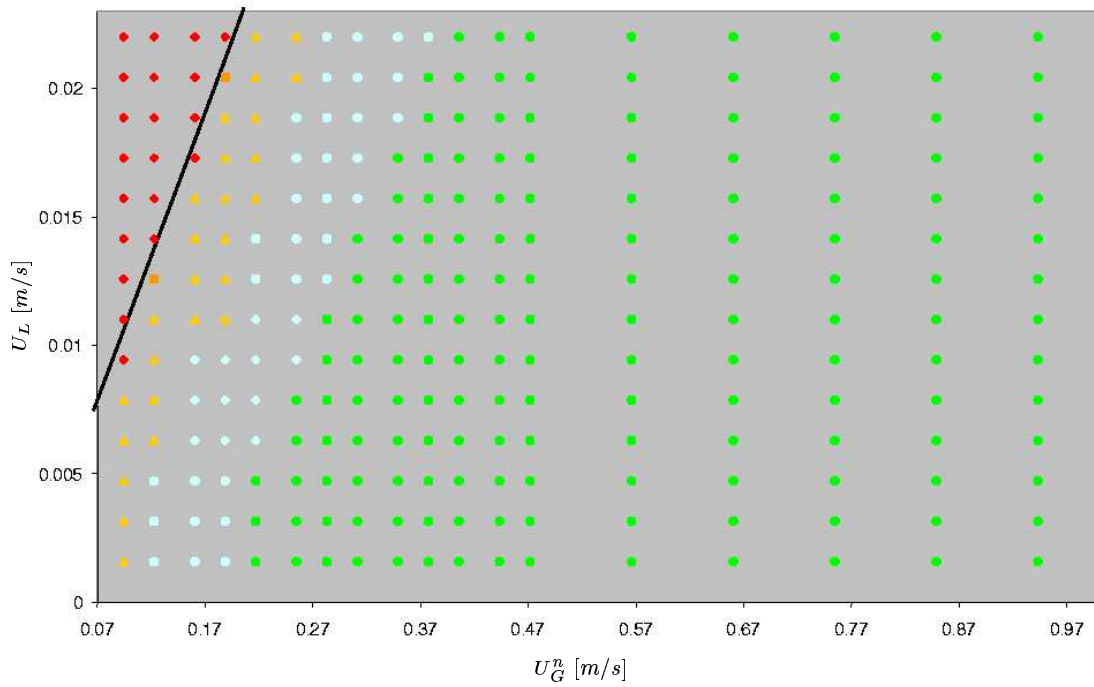


FIG. 3.6: Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08 \text{ m}$, $v_G^+ = 15.8 \text{ l}$ et $\beta_P = -18^\circ$

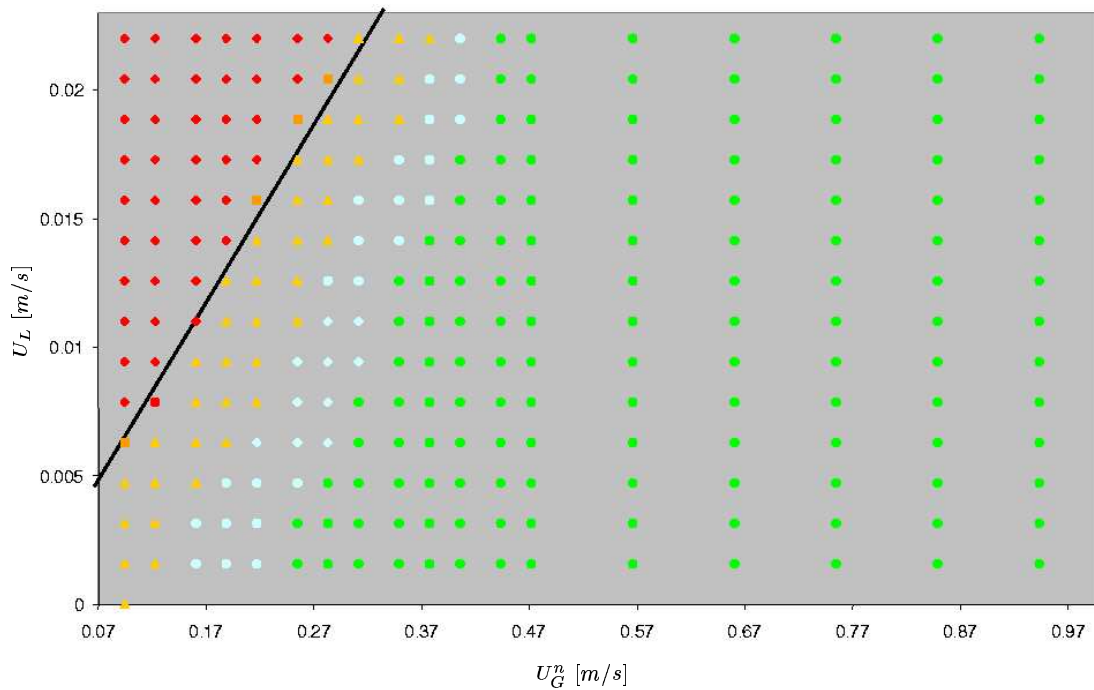


FIG. 3.7: Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08 \text{ m}$, $v_G^+ = 25.8 \text{ l}$ et $\beta_P = -10^\circ$

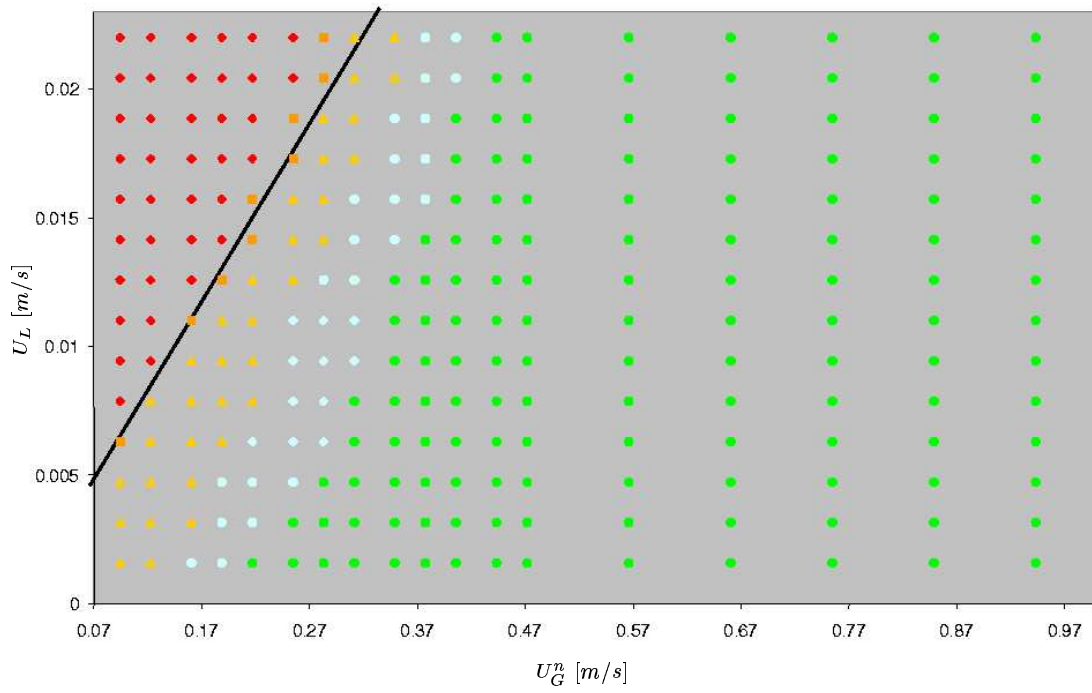


FIG. 3.8: Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08 \text{ m}$, $v_G^+ = 25.8 \text{ l}$ et $\beta_P = -18^\circ$

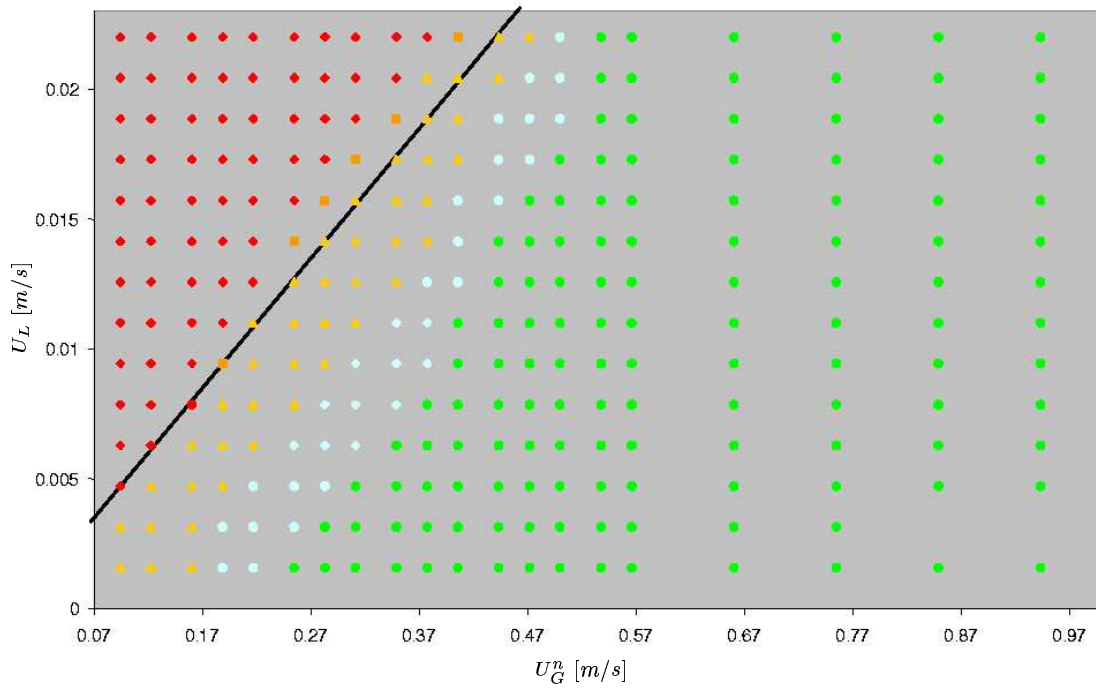


FIG. 3.9: Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08 \text{ m}$, $v_G^+ = 35.8 \text{ l}$ et $\beta_P = -10^\circ$

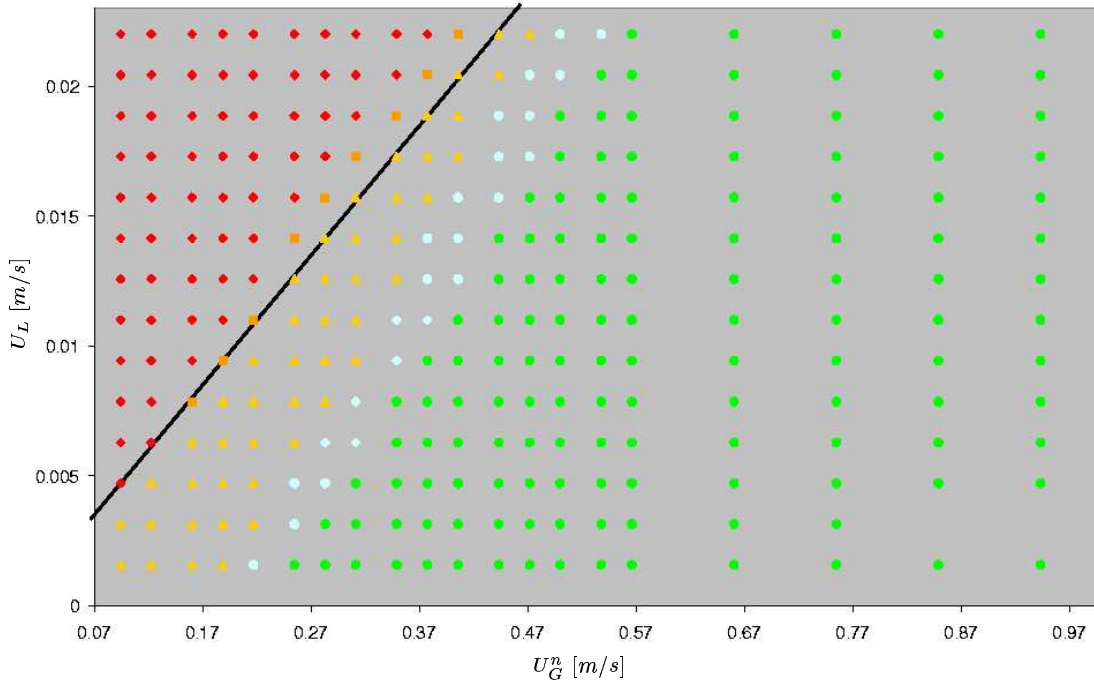


FIG. 3.10: Carte d'écoulement pour $l_R = 1.08 \text{ m}$, $v_G^+ = 35.8 \text{ l}$ et $\beta_P = -18^\circ$

Interprétation des résultats

Nous avons une bonne concordance entre le critère d'occurrence et les résultats expérimentaux. Nous pouvons aussi observer que le volume de gaz en amont du pied de riser joue un rôle très important pour créer des conditions propices au severe slugging. En effet, plus v_G^+ augmente, plus la zone de severe slugging est importante, ce que nous pouvons aussi vérifier sur le critère théorique. Enfin, ces différentes cartes d'écoulement valident le fait que l'angle β_P (qui n'intervient pas dans le critère) n'a aucune influence sur la taille de la région d'existence du phénomène.

3.8.2 Comparaison entre le modèle et les expériences

Pour cette étude, nous conservons maintenant constant l'angle β_P à la valeur -18° et le volume additionnel v_G^+ à 35.8 l . De plus, les différentes observations faites pendant nos expériences sur la boucle S^4L nous ont conduit à fixer les fractions volumiques de gaz respectivement à 0.95 pour le pipeline et 0.75 pour le riser. Ainsi, les paramètres utilisés pour le modèle sont résumés dans le tableau TAB. 3.1.

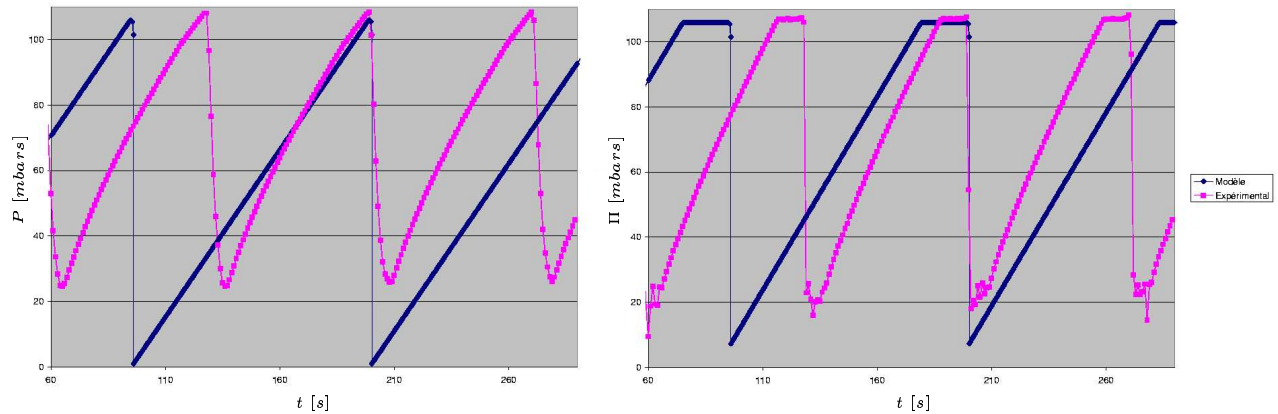
D	l_P	l_R	β_P	β_R	v_G^+
0.015 m	1.5 m	1.08 m	-18°	90°	0.0358 m^3
P^{OUT}	P^N	ρ_G^N	ρ_L^N	R_G^P	R_G^R
101500 Pa	101500 Pa	1.3 kg/m^3	1000 kg/m^3	0.95	0.75

TAB. 3.1: Paramètres utilisés pour le modèle

Nous allons commencer par quantifier l'influence du paramètre de calage ε_c pour ensuite comparer les résultats du modèle (3.26) par rapport aux expériences effectuées sur S^4L .

Influence du paramètre de calage

Le paramètre ε_c sert à ajuster les conditions initiales de notre modèle. En effet, à la fin de la phase de retombée du liquide, nous souhaitons obtenir les pressions les plus proches de celles observées expérimentalement, car elles influencent fortement la durée d'un cycle du phénomène. Pour déterminer son influence, plaçons-nous en un point de la carte d'écoulement se trouvant au milieu de la région d'existence du phénomène (i.e. $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$ correspondant à $U_G^n = 0.19 \text{ m.s}^{-1}$ et $U_L = 0.0173 \text{ m.s}^{-1}$). Les graphiques FIG. 3.11 et FIG. 3.12 représentent, en fonction du temps, la pression P du gaz dans le pipeline et la pression Π en pied de riser données par l'expérience et le modèle, avec $\varepsilon_c = 0$ pour le premier et ε_c optimisé pour le second.

FIG. 3.11: Comparaison des pressions pour $\varepsilon_c = 0$

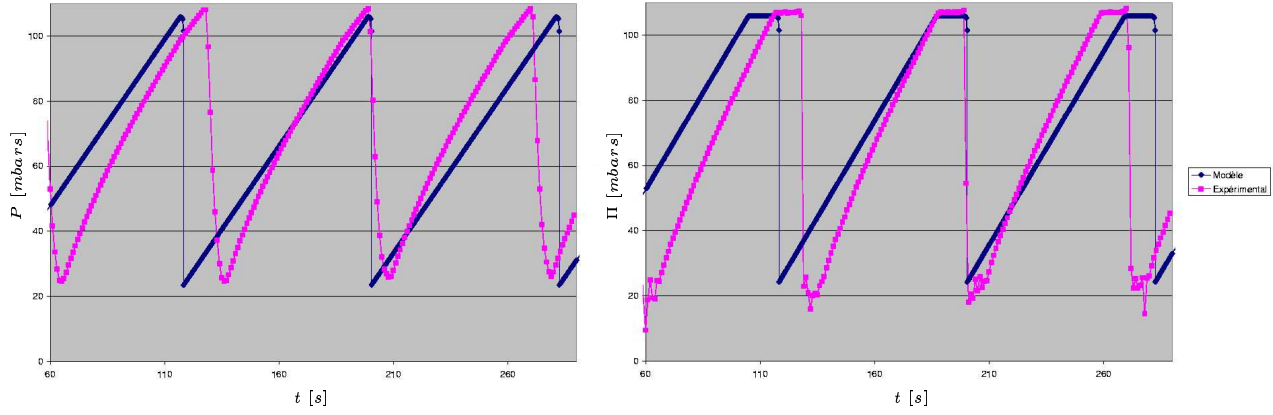


FIG. 3.12: Comparaison des pressions pour $\varepsilon_c = 0.023$

Lorsque ε_c est égal à 0, les pressions à l'instant initial (i.e. les fronts x_G^I et x_L^I) sont très inférieures à celles observées et par conséquent, la période du phénomène est alors beaucoup plus grande. De plus, même si la valeur de ce paramètre reste toujours faible (en dessous de 0.025 pour toutes nos expériences), il influence énormément les conditions initiales, montrant ainsi son utilité et la difficulté pour modéliser la phase 4.

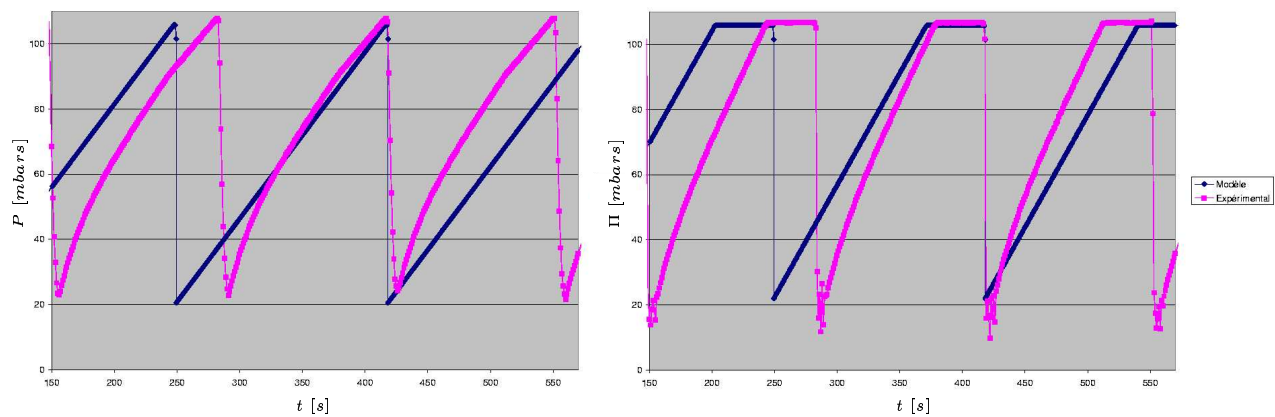
Comparaison des pressions

Le volume additionnel v_G^+ étant fixé à sa valeur maximale de 35.8 l, la carte d'écoulement FIG. 3.10 nous indique que nous sommes en présence de severe slugging pour des débits compris entre 1 et 4 nl/min pour le gaz et entre 3 et 14 l/h pour le liquide. Ainsi, nous choisissons cinq couples (Q_G^{IN}, Q_L^{IN}) permettant de bien couvrir la région où se produit le phénomène (cf. TAB. 3.2).

Q_L^{IN}/Q_G^{IN}	1	2	3	4
14				×
13				—
12				—
11	×	×	×	—
10			—	—
9			—	—
8	×		—	—
7			—	—
6		—	—	—
5		—	—	—
4		—	—	—
3		—	—	—
2	—	—	—	—

TAB. 3.2: Débits de gaz et de liquide retenus pour les expériences

Les graphiques FIG. 3.13, FIG. 3.14, FIG. 3.15, FIG. 3.16 et FIG. 3.17 représentent en fonction du temps, la pression du gaz P et la pression en pied de riser Π données par le modèle et par l'expérience, le paramètre de calage ε_c étant ajusté à sa meilleure valeur.

FIG. 3.13: Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.020$

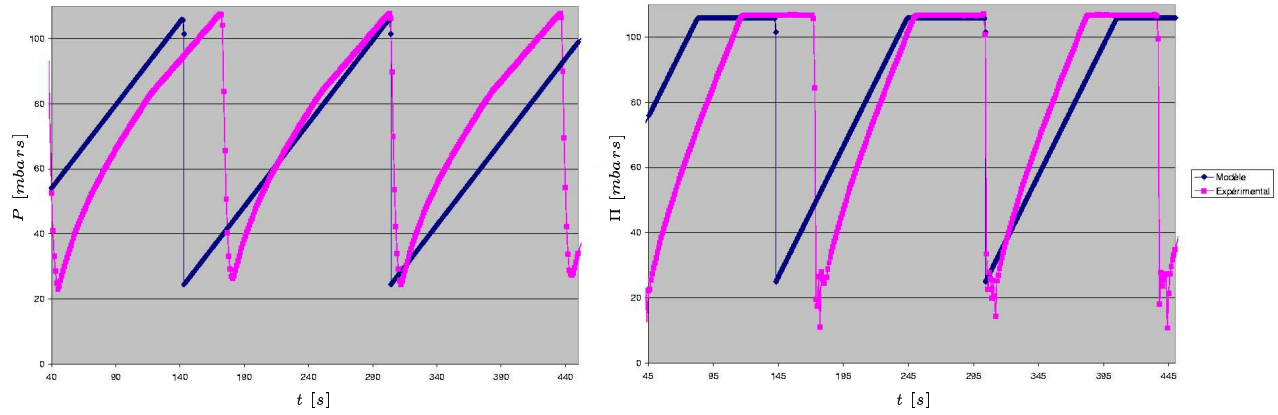


FIG. 3.14: Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.024$

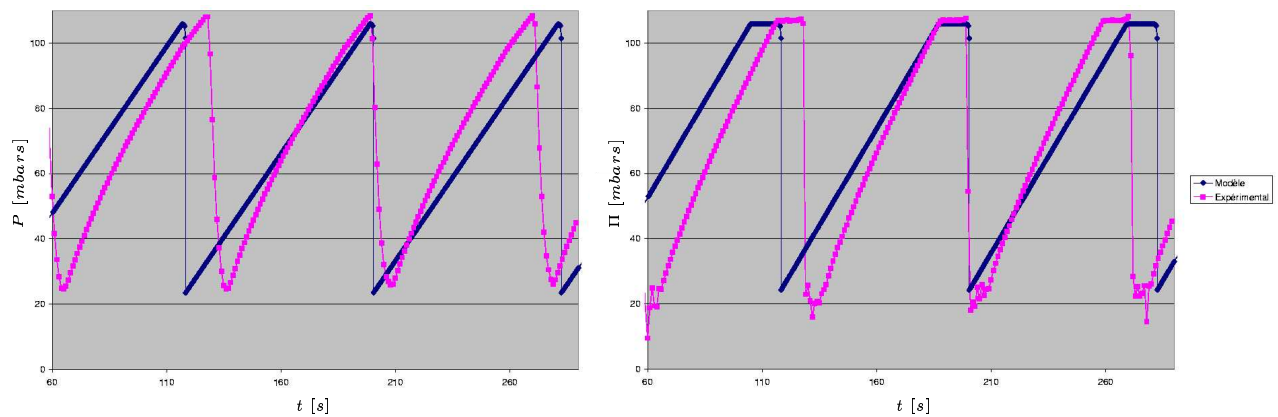


FIG. 3.15: Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.023$

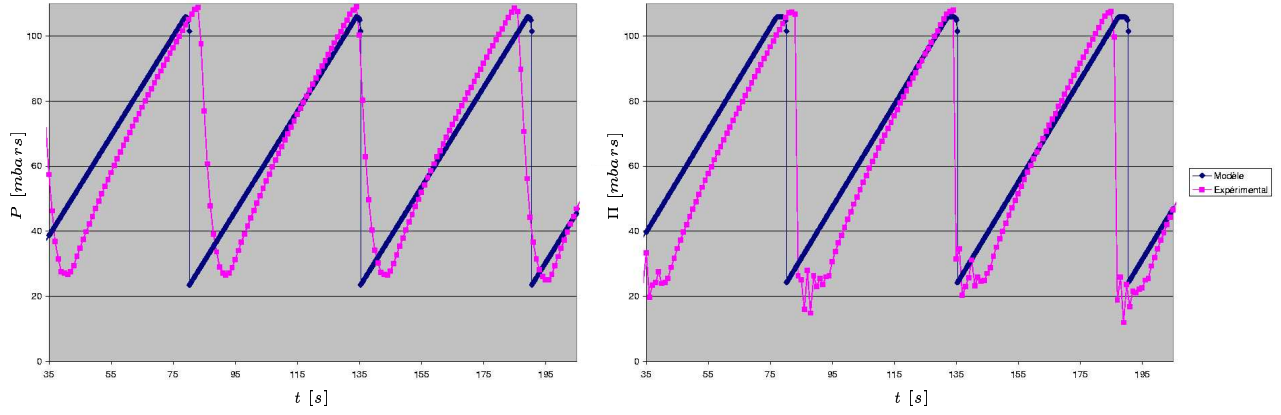


FIG. 3.16: Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.023$

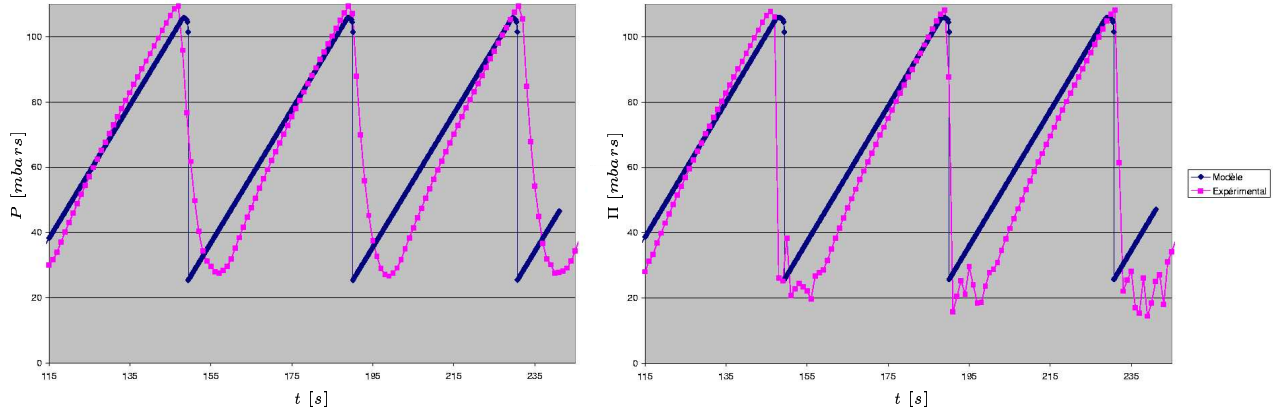


FIG. 3.17: Comparaison de P et Π pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$, $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$ et $\varepsilon_c = 0.025$

Nous avons un bon accord entre le modèle et les expériences. En effet, quantitativement, on retrouve bien les 4 phases du severe slugging et les tendances sont tout à fait correctes. Ainsi, les pressions augmentent en fonction du temps pendant la première phase, la pression en pied de riser reste constante au cours de la seconde, et on retrouve la chute rapide des pressions lors du blow-out. On remarque aussi que, plus le débit de gaz augmente, plus les résultats donnés par le modèle correspondent aux expériences.

Cependant, qualitativement, on observe certaines différences. En effet, la phase 4 n'est pas toujours instantanée comme on l'a supposé dans notre modélisation, surtout pour les forts débits de gaz. De plus, bien que pendant la phase 2, l'évolution de P corresponde bien aux expériences, on ne trouve pas les bonnes vitesses des fronts pendant la première phase. En effet, le modèle les sous-estime, ce qui entraîne en particulier une augmentation de la durée d'un cycle de severe slugging. Cela peut être dû à une imprécision du débitmètre gaz de notre boucle expérimentale pour les faibles débits. Effectivement, il influence

énormément la vitesse des fronts pendant la phase 1 et on retrouve les bonnes valeurs en l'augmentant de 20% dans notre modèle. De plus, ce modèle donne aussi une vitesse de fronts constante pendant cette première phase, alors que l'on observe expérimentalement qu'elle dépend du temps. Cela est peut-être dû aux effets thermiques négligés dans notre modèle, alors que le compresseur délivre du gaz fortement réchauffé en entrée de montage.

3.8.3 Etude des temps caractéristiques

Nous gardons maintenant constant le paramètre de calage à sa valeur moyenne $\varepsilon_c = 0.023$. Le tableau TAB. 3.3 donne la période de severe slugging déterminée pour le modèle et les expériences sur S^4L .

Q_G^{IN}	Q_L^{IN}	Expérience	Simulation	Erreur
8 <i>nl/min</i>	1 <i>l/h</i>	134 <i>s</i>	163 <i>s</i>	21.65 %
11 <i>nl/min</i>	1 <i>l/h</i>	134 <i>s</i>	163 <i>s</i>	21.65 %
11 <i>nl/min</i>	2 <i>l/h</i>	72 <i>s</i>	82 <i>s</i>	13.88 %
11 <i>nl/min</i>	3 <i>l/h</i>	51 <i>s</i>	55 <i>s</i>	7.84 %
14 <i>nl/min</i>	4 <i>l/h</i>	42 <i>s</i>	41 <i>s</i>	2.38 %

TAB. 3.3: Comparaison modèle/expérience sur une période de severe slugging

On remarque que cette période semble être indépendante du débit liquide, ce qui est aussi vérifié par toutes nos simulations numériques. Nous pouvons donc la tracer uniquement en fonction du débit de gaz. Ainsi, le graphe FIG. 3.18 représente la durée d'un cycle pour les simulations et les expériences ainsi que le pourcentage d'erreur du modèle.

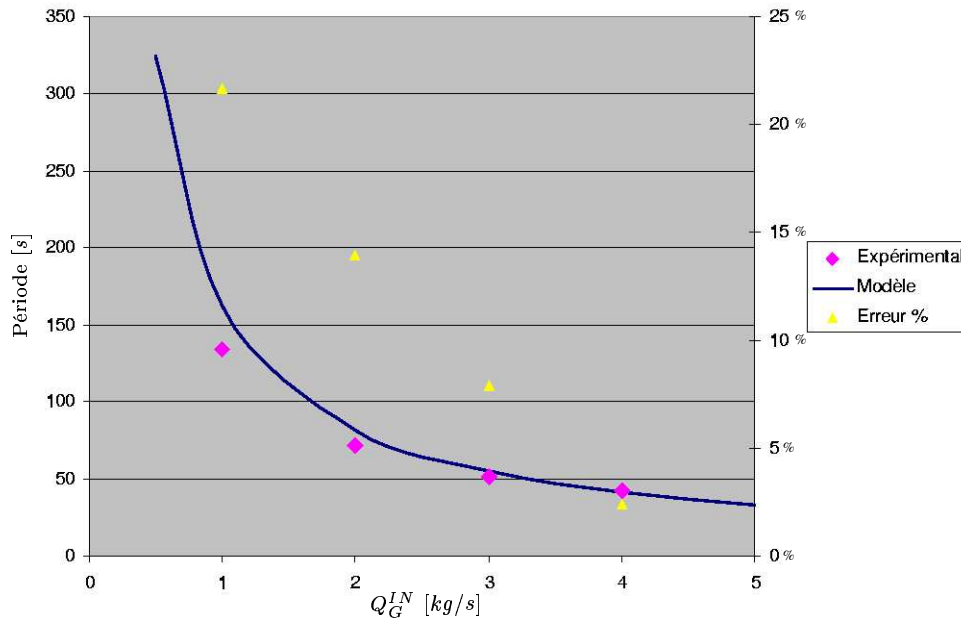


FIG. 3.18: Période et erreur en fonction de Q_G^{IN}

On a une bonne adéquation entre les expériences et les simulations. En effet, l'erreur maximale est de l'ordre de 20% et elle diminue très rapidement lorsque l'on augmente le débit Q_G^{IN} .

3.9 Conclusions

Le modèle réduit développé au cours de ce chapitre représente de manière fidèle le phénomène de severe slugging. En effet, il donne de bons résultats par rapport aux expériences, même si un décalage sur les vitesses des fronts existe lors de la formation du bouchon de liquide. Les différentes phases du phénomène sont bien représentées et les tendances sont tout à fait correctes. De plus, les résultats numériques sont en adéquation avec les observations pour le calcul de la période, avec une erreur maximale de l'ordre de 20 % pour les plus faibles débits de gaz. Enfin, ces validations montrent toute l'importance du paramètre de calage et la complexité pour bien l'ajuster.

Ce modèle va maintenant servir de base au développement des systèmes de régulation décrits dans la partie suivante.

Contrôle du severe slugging

Chapitre 4

Contrôle par prélèvement

Nous souhaitons contrôler le phénomène de severe slugging en utilisant la capacité du pipeline à séparer les phases en amont du pied de riser, pour ensuite les transporter séparément dans deux risers distincts jusqu'aux installations de traitement. La figure FIG. 4.1 est une représentation de ce système, où un piquage permet de prélever la totalité du gaz contenu dans le pipeline et est relié à un riser auxiliaire le transportant jusqu'au séparateur, son débit étant contrôlé par une vanne.

Afin d'obtenir un écoulement stationnaire en empêchant son passage en phase de blow-out, nous allons nous attacher à stabiliser la langue de gaz dans le pipeline en commandant l'ouverture de la vanne et ainsi obtenir des débits constants en sortie de chaque riser.

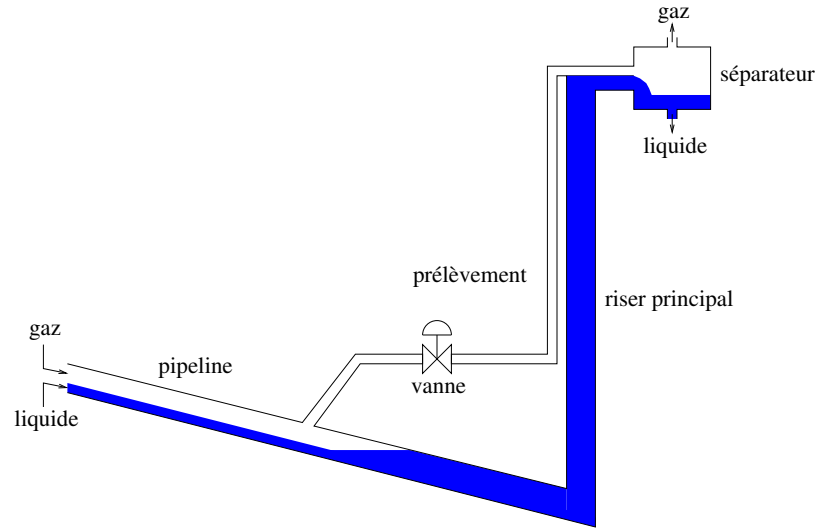


FIG. 4.1: Système avec prélèvement

Ce chapitre est consacré dans un premier temps à l'obtention d'un modèle simplifié pour simuler ce système physique (EQU. 4.9) en utilisant les bilans dynamiques des masses de chaque phase et en supposant l'équilibre quasi-statique des forces. Il décrit ensuite sa

mise sous forme explicite (EQU. 4.10) ainsi que son espace des phases (EQU. 4.11) et son état d'équilibre (EQU. 4.12). Dans un second temps, ce chapitre présente une étude de stabilité d'un bouclage proportionnel sur l'ouverture de la vanne de prélèvement par la méthode des portraits de phase pour les systèmes dans le plan [6], dont le résultat est présenté figures FIG. 4.12 et FIG. 4.13. La principale difficulté de cette étude provient du caractère hybride du système (la dimension de l'espace des états changeant au cours du temps), mais aussi de la saturation de l'ouverture de la vanne. Dans un troisième temps, ce chapitre traite du rajout d'une intégrale lente à notre loi de commande (EQU. 4.15) et de l'étude de sa stabilité dans le cas où le système est en phase de production, c'est-à-dire lorsque le front de liquide a atteint le sommet du riser (FIG. 4.16). Enfin, des résultats numériques et des essais expérimentaux sur S^4L seront présentés.

En vue de la modélisation mathématique, on adopte les hypothèses suivantes :

1. L'écoulement est isotherme et les fluides sont newtoniens,
2. Le liquide est incompressible et le gaz est un gaz parfait,
3. La fraction volumique de liquide dans le pipeline est négligeable,
4. Le bouchon de liquide est non aéré,
5. L'écoulement est "quasi-stationnaire" et les frottements sont négligeables,
6. Les débits d'entrée et la pression de sortie sont constants dans le temps,
7. Le gaz sort uniquement par le prélèvement et le liquide par le riser.

4.1 Modélisation

Au chapitre 3, nous avons déjà étudié deux systèmes algébro-différentiels (3.15) et (3.20) représentant les deux premières phases du severe slugging. Nous souhaitons à présent y incorporer le prélèvement du gaz.

4.1.1 Dimensions du système

Le système, représenté par la figure FIG. 4.2, comprend un pipeline de longueur l_P incliné de β_P par rapport à l'horizontale, un riser principal de longueur l_R incliné de β_R par rapport à l'horizontale et un volume additionnel v_G^+ . De plus, un second riser, connecté au pipeline à une distance assez grande du point bas pour ne prélever que du gaz, le transporte à un débit imposé par l'ouverture u de la vanne.

Un mélange diphasique gaz/liquide est injecté en amont du pipeline avec les débits constants Q_G^{IN} et Q_L^{IN} et sort en sommet de chaque riser avec les débits Q_G^{PLV} et Q_L^{OUT} . Le pipeline est à la pression P , le pied de riser à la pression Π et la pression de sortie est constante égale à P^{OUT} . La position de la langue de gaz est repérée par x_G et celle du front de liquide par x_L .

Compte tenu de la topographie du système, on suppose que $\beta_P \in [-\frac{\pi}{2}, 0[$ et que $\beta_R \in]0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui implique que :

Dans l'optique d'un contrôle sur la boucle S^4L , on remplace $v_G^P = v_G^+ + SR_G^P l_P$ par v_G^+ et on suppose que $R_G^P = 1$. Si l'on ne fait pas ces hypothèses simplificatrices, le calcul est certes plus lourd mais repose néanmoins sur le même principe. Les masses de gaz et de liquide sont ainsi données par les relations suivantes :

$$m_G(t) = \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} P(t), \quad (4.5)$$

$$m_L(t) = S\rho_L^N [x_L(t) - x_G(t)]. \quad (4.6)$$

Le débit de liquide sortant du riser est une fonction a priori assez “compliquée” car il dépend du régime dans lequel se trouve le système pipeline/riser. Toutefois, on peut l'exprimer de façon concise comme :

$$Q_L^{OUT}(t) = \mathcal{Z}(x_G, x_L)|_t, \quad (4.7)$$

la fonction $\mathcal{Z}$ étant donnée par :

$$\mathcal{Z}(x_G, x_L) = \begin{cases} [Q_L^{IN} + S\rho_L^N x_G]^+ & \text{si } (x_L = l_R) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, si le front de liquide n'a pas atteint le sommet du riser (i.e. $x_L < l_R$), le débit est alors nul et dans le cas contraire, on a un débit de sortie uniquement si sa valeur est positive (i.e. $Q_L^{IN} + S\rho_L^N x_G > 0$). Cela correspond au fait que le débit est positif si la langue de gaz ne recule pas assez pour “compenser” complètement le liquide entrant dans le pipeline. La figure FIG. 4.3 est une représentation de la fonction $\mathcal{Z}$ dans le plan $(x_L, x_G) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

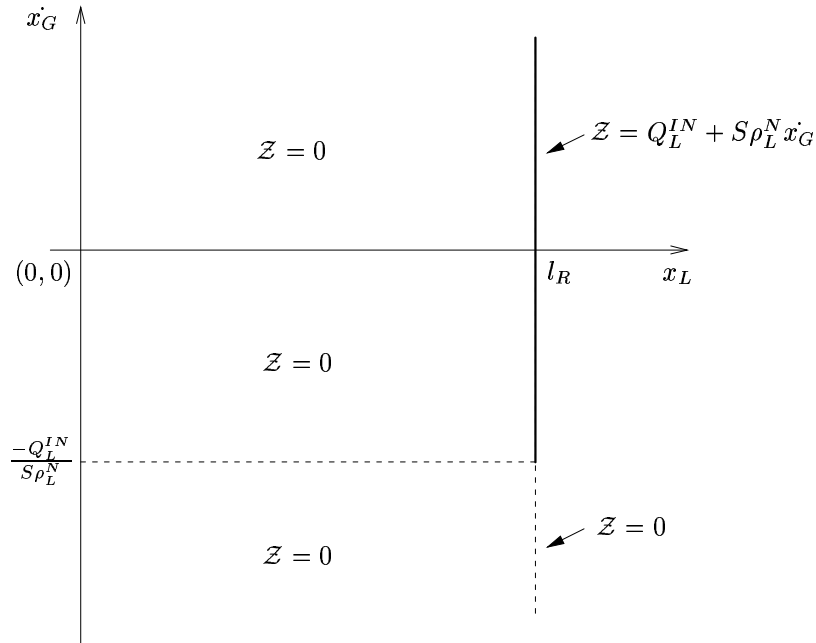


FIG. 4.3: Représentation graphique de la fonction $\mathcal{Z}$

Quant au débit de gaz prélevé, il est donné par l'équation (A.1), relation reliant Q_G^{PLV} à l'ouverture de la vanne $u \in [0, 100]$ en fonction de la pression dans le pipeline P :

$$Q_G^{PLV}(t) = \alpha^{PLV} u(t) \sqrt{[P(t) - P^{OUT}]^+} \text{ avec } \alpha^{PLV} = \frac{\gamma_V}{100} C_V \sqrt{\frac{\rho_G^N}{P^N} P^{OUT}}. \quad (4.8)$$

Les équations (4.1), (4.2), (4.5), (4.6), (4.3), (4.4), (4.7) et (4.8) constituent donc un système algébro-différentiel reliant les différentes grandeurs physiques qui interviennent dans le contrôle par prélèvement :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{m}_G(t) & = & Q_G^{IN} - Q_G^{PLV}(t) \\ \dot{m}_L(t) & = & Q_L^{IN} - Q_L^{OUT}(t) \\ m_G(t) & = & \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} P(t) \\ m_L(t) & = & S \rho_L^N [x_L(t) - x_G(t)] \\ P(t) & = & \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t) \\ \Pi(t) & = & P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R x_L(t) \\ Q_L^{OUT}(t) & = & \mathcal{Z}(x_G, x_L)|_t \\ Q_G^{PLV}(t) & = & \alpha^{PLV} u(t) \sqrt{[P(t) - P^{OUT}]^+}. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

D'un point de vue mathématique, cette forme implicite n'est pas tout à fait "standard" dans la mesure où :

1. au second membre figure encore la dérivée $\dot{x}_G$ en argument d'une fonction algébrique,
2. la fonction $\mathcal{Z}$ n'est pas continue par rapport à ses variables.

Ces difficultés viennent du fait que nous avons unifié les deux premières phases du severe slugging en un seul modèle, mais nous allons voir que ces deux aspects inhabituels ne posent pas de problème majeur pour notre étude.

4.1.3 Modèle à deux fronts

Nous allons maintenant modifier le système (4.9) pour faire apparaître explicitement la dynamique des positions des deux fronts x_G et x_L . Cette nouvelle forme est non seulement plus "parlante" à l'intuition physique, mais permet aussi d'éviter la première difficulté ($\dot{x}_G$ en argument d'une fonction algébrique), et donc d'étudier plus facilement le système.

En dérivant par rapport au temps les relations (4.5) et (4.6), on obtient le système en

$(\dot{x}_G, \dot{x}_L)$ suivant :

$$\begin{cases} \frac{\rho_G^N v_G^+ \rho_L^N g}{P^N} (\sin \beta_R \dot{x}_L(t) - \sin \beta_P \dot{x}_G(t)) &= Q_G^{IN} - Q_G^{PLV}(t) \\ S \rho_L^N (\dot{x}_L(t) - \dot{x}_G(t)) &= Q_L^{IN} - Q_L^{OUT}(t). \end{cases}$$

Une fois ce système inversé, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) &= \mathcal{U}_G(Q_G^{PLV})|_t + \mathcal{V}_G Q_L^{OUT}(t) \\ \dot{x}_L(t) &= \mathcal{U}_L(Q_G^{PLV})|_t + \mathcal{V}_L Q_L^{OUT}(t), \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_G(Q_G^{PLV}) &= \frac{1}{\rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left[\frac{P^N (Q_G^{IN} - Q_G^{PLV})}{\rho_G^N g v_G^+} - \frac{\sin \beta_R Q_L^{IN}}{S} \right] \\ \mathcal{U}_L(Q_G^{PLV}) &= \frac{1}{\rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left[\frac{P^N (Q_G^{IN} - Q_G^{PLV})}{\rho_G^N g v_G^+} - \frac{\sin \beta_P Q_L^{IN}}{S} \right] \\ \mathcal{V}_G &= \frac{\sin \beta_R}{S \rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \\ \mathcal{V}_L &= \frac{\sin \beta_P}{S \rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)}. \end{cases}$$

Les fonctions $\mathcal{U}_G$ et $\mathcal{U}_L$ et les constantes $\mathcal{V}_G$ et $\mathcal{V}_L$ sont toujours définies car $\sin \beta_R > 0$ et $\sin \beta_P < 0$ et on peut noter que $\mathcal{V}_G > 0$ et $\mathcal{V}_L < 0$.

De plus, nous verrons ultérieurement que le débit prélevé Q_G^{PLV} peut s'écrire :

$$Q_G^{PLV}(t) = \alpha^{PLV} u(t) \sqrt{P(t) - P^{OUT}},$$

où u est notre commande correspondant au pourcentage d'ouverture de la vanne (cf. annexe A). Le modèle s'exprime par conséquent sous la forme du système algébro-différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) &= \mathcal{U}_G(Q_G^{PLV})|_t + \mathcal{V}_G Q_L^{OUT}(t) \\ \dot{x}_L(t) &= \mathcal{U}_L(Q_G^{PLV})|_t + \mathcal{V}_L Q_L^{OUT}(t) \\ P(t) &= P^{OUT} + \rho_L^N g [\sin \beta_R x_L(t) - \sin \beta_P x_G(t)] \\ \Pi(t) &= P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R x_L(t) \\ Q_G^{PLV}(t) &= \alpha^{PLV} u(t) \sqrt{\rho_L^N g [\sin \beta_R x_L(t) - \sin \beta_P x_G(t)]} \\ Q_L^{OUT}(t) &= \mathcal{Z}(\dot{x}_G, \dot{x}_L)|_t. \end{cases}$$

Regardons plus en détail la dernière équation. A première vue, elle semble implicite en Q_L^{OUT} dans la mesure où $Q_L^{OUT} = \mathcal{Z}(x_G(Q_L^{OUT}), x_L)$. Il est cependant possible de remplacer $\mathcal{Z}$ par une fonction $\mathcal{E}(x_L, Q_G^{PLV})$ ne dépendant pas de x_G . En effet, si $x_L \neq l_R$ ou si $Q_L^{IN} + S\rho_L^N x_G < 0$, alors $\mathcal{E}$ est donnée directement par $\mathcal{E} = 0$. De plus, si $x_L = l_R$ et si $Q_L^{IN} + S\rho_L^N x_G > 0$, en remplaçant x_G par son expression, on obtient :

$$Q_L^{OUT}(t) = Q_L^{IN} + S\rho_L^N \left(\mathcal{U}_G(Q_G^{PLV})|_t + \mathcal{V}_G Q_L^{OUT}(t) \right).$$

En isolant Q_L^{OUT} au premier membre, puis en divisant par $1 - S\rho_L^N \mathcal{V}_G$, on arrive (après simplifications) à la valeur de Q_L^{OUT} :

$$Q_L^{OUT}(t) = Q_L^{IN} - \frac{SP^N[Q_G^{IN} - Q_G^{PLV}(t)]}{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^+}.$$

Par conséquent, $\mathcal{E}$ peut s'expliciter par :

$$\mathcal{E}(x_L, Q_G^{PLV}) = \begin{cases} \left[Q_L^{IN} - \frac{SP^N(Q_G^{IN} - Q_G^{PLV})}{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^+} \right]^+ & \text{si } (x_L = l_R) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La figure FIG. 4.4 est une représentation de la fonction $\mathcal{E}$ dans le plan $(x_L, Q_G^{PLV}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, où Q_G^* est donnée par la relation suivante :

$$Q_G^* = Q_G^{IN} - \frac{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^+ Q_L^{IN}}{SP^N}.$$

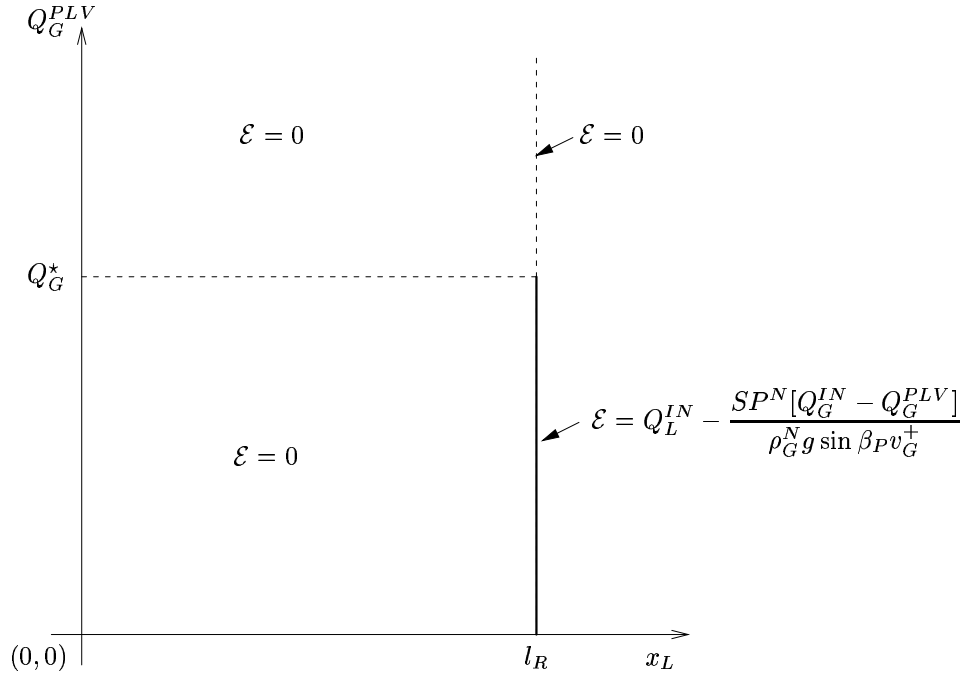


FIG. 4.4: Représentation graphique de la fonction $\mathcal{E}$

Le modèle se ramène en définitive à la forme explicite plus traditionnelle suivante, les difficultés théoriques qui persistent encore étant uniquement celles liées à la discontinuité de $\mathcal{E}$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_G(t) & = & \mathcal{U}_G(Q_G^{PLV})|_t + \mathcal{V}_G Q_L^{OUT}(t) \\ \dot{x}_L(t) & = & \mathcal{U}_L(Q_G^{PLV})|_t + \mathcal{V}_L Q_L^{OUT}(t) \\ P(t) & = & P^{OUT} + \rho_L^N g [\sin \beta_R x_L(t) - \sin \beta_P x_G(t)] \\ \Pi(t) & = & P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R x_L(t) \\ Q_G^{PLV}(t) & = & \alpha^{PLV} u(t) \sqrt{\rho_L^N g [\sin \beta_R x_L(t) - \sin \beta_P x_G(t)]} \\ Q_L^{OUT}(t) & = & \mathcal{E}(x_L, Q_G^{PLV})|_t, \end{array} \right. \quad (4.10)$$

les fonctions $\mathcal{U}_G$, $\mathcal{U}_L$ et $\mathcal{E}$ et les constantes $\mathcal{V}_G$ et $\mathcal{V}_L$ étant données par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{U}_G(Q_G^{PLV}) & = & \frac{1}{\rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left[\frac{P^N (Q_G^{IN} - Q_G^{PLV})}{\rho_G^N g v_G^+} - \frac{\sin \beta_R Q_L^{IN}}{S} \right] \\ \mathcal{U}_L(Q_G^{PLV}) & = & \frac{1}{\rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left[\frac{P^N (Q_G^{IN} - Q_G^{PLV})}{\rho_G^N g v_G^+} - \frac{\sin \beta_P Q_L^{IN}}{S} \right] \\ \mathcal{V}_G & = & \frac{\sin \beta_R}{S \rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \\ \mathcal{V}_L & = & \frac{\sin \beta_P}{S \rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \\ \mathcal{E}(x_L, Q_G^{PLV}) & = & \begin{cases} \left[Q_L^{IN} - \frac{S P^N (Q_G^{IN} - Q_G^{PLV})}{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^+} \right]^+ & \text{si } (x_L = l_R) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

4.1.4 Espace des phases

Soit D^{PLV} l'espace des états du système. Etant uniquement valable pour les deux premières phases du severe slugging, il doit par conséquent vérifier :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -l_P & \leq & x_G \leq 0 \\ 0 & \leq & x_L \leq l_R. \end{array} \right.$$

Cela implique directement que les masses de chaque phase sont toujours positives et que la pression du gaz P est toujours inférieure à la pression en pied de riser Π .

De plus, lorsque la pression dans le pipeline est égale à la pression de sortie, $\dot{P}$ est alors strictement positif car égal à $\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N v_G^+}$. Par conséquent, P et Π sont toujours supérieurs à P^{OUT} impliquant aussi que les débits sont toujours positifs.

Enfin, P s'écrivant $P(t) = P^{OUT} + \rho_L^N g [\sin \beta_R x_L(t) - \sin \beta_P x_G(t)]$, on obtient la relation suivante reliant les positions x_G et x_L :

$$\sin \beta_R x_L \geq \sin \beta_P x_G.$$

En conclusion, D^{PLV} est définie par :

$$D^{PLV} = \{(x_G, x_L) \in [-l_P, 0] \times [0, l_R] \setminus \sin \beta_R x_L \geq \sin \beta_P x_G\}. \quad (4.11)$$

Remarque.

A l'intérieur du domaine D^{PLV} , on a toujours $P \geq P^{OUT}$. Par conséquent, le débit prélevé Q_G^{PLV} peut s'écrire :

$$Q_G^{PLV}(t) = \alpha^{PLV} u(t) \sqrt{\rho_L^N g [\sin \beta_R x_L(t) - \sin \beta_P x_G(t)]}.$$

4.1.5 Etat stationnaire

On note $\overline{x_G}$, $\overline{x_L}$, $\overline{P}$, $\overline{\Pi}$, $\overline{Q_G^{PLV}}$, $\overline{Q_L^{OUT}}$ et $\overline{u}$, les valeurs stationnaires de chaque variable du système. Reprenons le système d'équation (4.9). L'état stationnaire est donné par $\dot{m}_G = 0$ et $\dot{m}_L = 0$. On en déduit directement que $\overline{Q_G^{PLV}} = Q_G^{IN}$ et $\overline{Q_L^{OUT}} = Q_L^{IN}$. Or d'après l'équation (4.7), la seule possibilité pour avoir le débit sortant de liquide égal au débit d'entrée est que le front de liquide ait atteint le sommet du riser. On a donc $\overline{x_L} = l_R$ ce qui implique que $\overline{\Pi} = \Pi_R$. Il nous reste à déterminer $\overline{x_G}$, $\overline{P}$, et $\overline{u}$. En imposant la valeur de $\overline{x_G}$ égale à x_G^{Ref} (position de référence où l'on souhaite stabiliser la langue de gaz), nous pouvons en déduire directement les deux autres grandeurs :

$$\begin{cases} \overline{P} &= \overline{\Pi} - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G^{Ref} \\ \overline{u} &= \frac{Q_G^{IN}}{\alpha^{PLV} \sqrt{\rho_L^N g [\sin \beta_R l_R - \sin \beta_P x_G^{Ref}]}}. \end{cases}$$

Par conséquent, l'état stationnaire est donné par la famille à un paramètre x_G^{Ref} suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overline{x}_G & = & x_G^{Ref} \\ \overline{x}_L & = & l_R \\ \overline{P} & = & \Pi_R - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G^{Ref} \\ \overline{\Pi} & = & \Pi_R \\ \overline{Q}_G^{PLV} & = & Q_G^{IN} \\ \overline{Q}_L^{OUT} & = & Q_L^{IN} \\ \overline{u} & = & \frac{Q_G^{IN}}{\alpha^{PLV} \sqrt{\rho_L^N g [\sin \beta_R l_R - \sin \beta_P x_G^{Ref}]}}. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

De plus, il faut bien entendu s'assurer que $(x_G^{Ref}, l_R) \in D^{PLV}$ pour avoir $\overline{u}$ toujours défini et comme nous souhaitons avoir $\overline{u} \in [0, 100]$, cela implique la condition suivante sur x_G^{Ref} :

$$0 \geq x_G^{Ref} \geq \frac{\sin \beta_R}{\sin \beta_P} l_R - \frac{1}{\rho_L^N g \sin \beta_P} \left(\frac{Q_G^{IN}}{100 \alpha^{PLV}} \right)^2.$$

Ainsi, pour "élargir" la gamme des x_G^{Ref} admissibles, nous pouvons jouer sur la valeur du C_V de la vanne et par conséquent sur α^{PLV} . Par exemple, il semble judicieux de le choisir tel que :

$$\frac{\sin \beta_R}{\sin \beta_P} l_R - \frac{1}{\rho_L^N g \sin \beta_P} \left(\frac{Q_G^{IN}}{100 \alpha^{PLV}} \right)^2 \approx -l_P.$$

On remarque aussi que $\overline{u}$ est toujours positif et qu'il est croissant par rapport à Q_G^{IN} . Par conséquent, si on choisit un x_G^{Ref} tel que $\overline{u} < 100$ pour le plus grand débit de gaz défini par les conditions opératoires, on aura toujours $\overline{u} \in [0, 100]$ quelque soit Q_G^{IN} . La figure FIG. 4.5 donne l'ouverture stationnaire $\overline{u}$ en fonction de $x_G^{Ref} \in [-l_P, 0]$ pour un jeu de données correspond à S^4L , le débit de gaz étant compris entre 1 et 5 nl/min (débit le plus faible pour lequel le severe slugging n'a plus été observé).

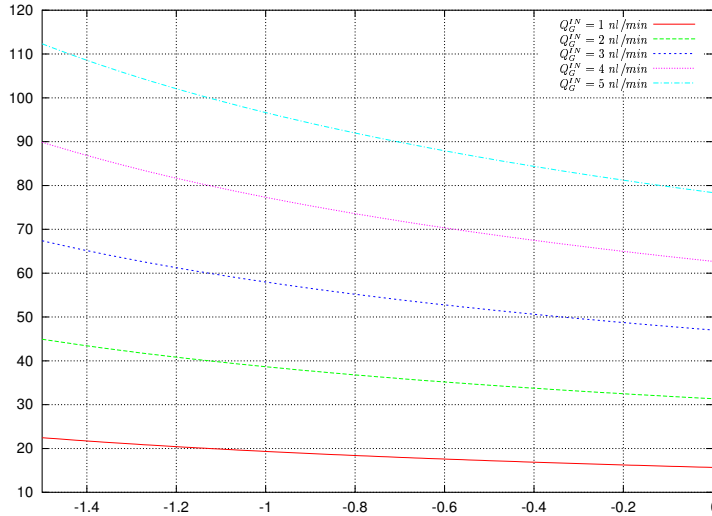


FIG. 4.5: Représentation de $\bar{u}$ en fonction de x_G^{Ref} pour différents Q_G^{IN}

On remarque que les pentes sont faibles et que si on prend $x_G^{Ref} = -0.75 \text{ m}$, on aura toujours $\bar{u} \in [0, 100]$ pour la gamme de débit de gaz créant le severe slugging.

4.2 Etude de stabilité d'un contrôleur proportionnel

Nous allons maintenant étudier comment évoluent les positions x_G et x_L à l'intérieur du domaine D^{PLV} en utilisant un contrôleur de type proportionnel sur l'ouverture de la vanne. La difficulté vient du fait que nous avons affaire à un système dont la dimension d'état change en fonction de la position du front de liquide. Nous allons montrer par les techniques des portraits de phases et des isoclines [6], qu'un bouclage proportionnel avec saturation permet d'obtenir, sous certaines conditions, la stabilité globale du système.

4.2.1 Système en boucle fermée

Soit u la commande de notre système. Etant borné entre 0 et 100%, le contrôleur de type proportionnel par rapport à x_G (que l'on souhaite faire tendre vers x_G^{Ref}) s'écrit :

$$u(t) = \min \left[K_P (x_G(t) - x_G^{Ref})^+, 100 \right]. \quad (4.13)$$

De plus, x_G et x_G^{Ref} étant négatifs, il est intuitif que K_P soit positif. En effet, lorsque la langue est en dessous de sa position de référence, on souhaite ouvrir la vanne pour faire sortir une quantité plus importante de gaz, ce qui a pour effet de remonter la langue dans le pipeline. Et inversement, si elle est au dessus de sa position de référence, on coupe la sortie de gaz pour la faire redescendre. On suppose par conséquent dans la suite que :

$$K_P > 0.$$

Le débit prélevé s'écrit donc :

$$Q_G^{PLV}(t) = \alpha^{PLV} \min \left[K_P \left(x_G(t) - x_G^{Ref} \right)^+, 100 \right] \sqrt{\rho_L^N g [\sin \beta_R x_L(t) - \sin \beta_P x_G(t)]}.$$

Afin de mieux mettre en évidence la structure du problème, introduisons maintenant les notations suivantes :

$$\begin{cases} M &= \frac{100}{K_P} \\ f_V(x_G, x_L) &= \sqrt{\rho_L^N g (\sin \beta_R x_L - \sin \beta_P x_G)} \\ g_V(x_G, x_L) &= \min \left[(x_G - x_G^{Ref})^+, M \right] f_V(x_G, x_L). \end{cases}$$

M est une constante positive, f_V est une fonction continue, positive et croissante par rapport à chacune de ses variables dans le domaine D^{PLV} . De plus, $\min \left[(x_G - x_G^{Ref})^+, M \right]$ étant une fonction continue, positive et croissante à l'intérieur de D^{PLV} , g_V est aussi une fonction continue, positive et croissante par rapport à chacune de ses variables dans le domaine D^{PLV} . Ainsi, on peut écrire le débit prélevé sous la forme :

$$Q_G^{PLV}(t) = \alpha^{PLV} K_P g_V(x_G, x_L)|_t.$$

Convenons-nous également de quelques vocabulaires. Le débit de liquide pouvant être soit positif soit nul, on appelle régime saturé lorsqu'il est positif (i.e. $x_L = l_R$ et $Q_G^{PLV} < Q_G^*$) et dans le cas contraire, il est dit non saturé. Par conséquent, les équations différentielles donnant l'évolution des fronts x_G et x_L s'écrivent :

En régime non saturé

Le débit de liquide étant alors nul, le système peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) &= \mathcal{A}_G^{NS} - \mathcal{B}^{NS} g_V(x_G, x_L)|_t \\ \dot{x}_L(t) &= \mathcal{A}_L^{NS} - \mathcal{B}^{NS} g_V(x_G, x_L)|_t, \end{cases}$$

avec :

$$\mathcal{A}_G^{NS} = \frac{1}{\rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left[\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^+} - \frac{\sin \beta_R Q_L^{IN}}{S} \right],$$

$$\mathcal{A}_L^{NS} = \frac{1}{\rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left[\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^+} - \frac{\sin \beta_P Q_L^{IN}}{S} \right],$$

$$\mathcal{B}^{NS} = \frac{\alpha^{PLV} K_P P^N}{\rho_G^N \rho_L^N g v_G^+ (\sin \beta_R - \sin \beta_P)},$$

ces constantes ayant les propriétés suivantes :

$$\mathcal{A}_G^{NS} < 0,$$

$$\mathcal{A}_L^{NS} > 0,$$

$$\mathcal{B}^{NS} > 0.$$

En régime saturé

Le front de liquide étant situé en sommet de riser, sa dynamique est naturellement donnée par :

$$\dot{x}_L(t) = 0.$$

Le débit de liquide vaut alors :

$$Q_L^{OUT}(t) = Q_L^{IN} - \frac{SP^N [Q_G^{IN} - Q_G^{PLV}(t)]}{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^+}$$

En le reportant dans l'équation donnant l'évolution de la langue de gaz, on obtient :

$$\dot{x}_G(t) = \mathcal{A}_G^S - \mathcal{B}_G^S g_V(x_G, l_R)|_t,$$

avec :

$$\mathcal{A}_G^S = \frac{-P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N \rho_L^N g \sin \beta_P v_G^+},$$

$$\mathcal{B}_G^S = \frac{-\alpha^{PLV} K_P P^N}{\rho_G^N \rho_L^N g \sin \beta_P v_G^+},$$

ces constantes ayant les propriétés suivantes :

$$\mathcal{A}_G^S > 0,$$

$$\mathcal{B}_G^S > 0.$$

Récapitulatif

Le système en boucle fermée est donné par :

Dynamique	Régime non saturé	Régime saturé
$\dot{x}_G(t)$	$\Phi_G(x_G, x_L) _t$	$\Psi_G(x_G) _t$
$\dot{x}_L(t)$	$\Phi_L(x_G, x_L) _t$	0

les fonctions Φ_G , Φ_L et Ψ_G étant définies par :

$$\Phi_G(x_G, x_L) = \mathcal{A}_G^{NS} - \mathcal{B}^{NS} g_V(x_G, x_L),$$

$$\Phi_L(x_G, x_L) = \mathcal{A}_L^{NS} - \mathcal{B}^{NS} g_V(x_G, x_L),$$

$$\Psi_G(x_G) = \mathcal{A}_G^S - \mathcal{B}_G^S g_V(x_G, l_R).$$

De plus, les coefficients sont donnés par :

$$\mathcal{A}_G^{NS} = \frac{1}{\rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left[\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^+} - \frac{\sin \beta_R Q_L^{IN}}{S} \right] <> 0,$$

$$\mathcal{A}_L^{NS} = \frac{1}{\rho_L^N (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} \left[\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^+} - \frac{\sin \beta_P Q_L^{IN}}{S} \right] > 0,$$

$$\mathcal{B}^{NS} = \frac{\alpha^{PLV} K_P P^N}{\rho_G^N \rho_L^N g v_G^+ (\sin \beta_R - \sin \beta_P)} > 0,$$

$$\mathcal{A}_G^S = \frac{-P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N \rho_L^N g \sin \beta_P v_G^+} > 0,$$

$$\mathcal{B}_G^S = \frac{-\alpha^{PLV} K_P P^N}{\rho_G^N \rho_L^N g \sin \beta_P v_G^+} > 0.$$

Enfin, on remarque que g_V étant une fonction continue et croissante, Φ_G , Φ_L et Ψ_G sont des fonctions continues et décroissantes par rapport à chacune de ses variables dans le domaine D^{PLV} .

Malgré la complexité apparente des équations ci-dessus, on peut étudier la stabilité du contrôleur proportionnel (4.13), du moins qualitativement, au moyen des portraits de phase que nous allons maintenant aborder.

4.2.2 Point d'équilibre

Déterminons le point d'équilibre $X^E = (x_G^E, x_L^E)$ du système en boucle fermée. Il vérifie :

$$\begin{cases} \Phi_G(x_G^E, x_L^E) = 0 \text{ et } \Phi_L(x_G^E, x_L^E) = 0 & \text{en régime non saturé} \\ \Psi_G(x_G^E) = 0 \text{ et } x_L^E = l_R & \text{en régime saturé.} \end{cases}$$

Plaçons-nous en régime saturé. Nous verrons ultérieurement qu'il n'existe pas d'état stationnaire pour le régime non saturé. On a tout de suite $x_L^E = l_R$ et déterminons

maintenant x_G^E tel que $\Psi_G(x_G^E) = 0$. L'existence d'un éventuel x_G^E dépend du comportement de la fonction :

$$\Psi_G(x_G) = \mathcal{A}_G^S - \mathcal{B}_G^S \min \left[(x_G - x_G^{Ref})^+, M \right] f_V(x_G, l_R).$$

Tout d'abord, remarquons que $\Psi_G = \mathcal{A}_G^S > 0$ pour tout $x_G < x_G^{Ref}$. Ensuite, notons x_G^M tel que $x_G^M - x_G^{Ref} = M$. On a alors $\Psi_G(x_G) = \mathcal{A}_G^S - \mathcal{B}_G^S M f_V(x_G, l_R)$ pour tout $x_G > x_G^M > x_G^{Ref}$. Comme f_V est une fonction continue croissante par rapport à x_G , si $\Psi_G(x_G^M)$ est strictement négatif, la propriété des valeurs intermédiaires nous assure que x_G^E existe et qu'il est compris entre x_G^{Ref} et x_G^M . Or $\Psi_G(x_G^M) < 0$ est équivalent à $Q_G^{PLV} > Q_G^{IN}$ pour l'ouverture maximale de la vanne. Supposons que c'est le cas, ce qui nous donne une nouvelle condition sur le design de la vanne et en particulier sur son C_V . Il existe par conséquent un point d'équilibre X^E tel que :

$$x_G^{Ref} < x_G^E < x_G^M \text{ et } x_L^E = l_R.$$

En outre, rien n'interdit à x_G^M d'être positif. Cela ne change rien à ce qui suit, étant juste un cas particulier plus simple. Par contre, il faut s'assurer que $x_G^E < 0$ ce qui implique une autre condition sur x_G^{Ref} .

En définitive, en se plaçant dans la configuration $x_G^{Ref} < x_G^E < x_G^M$ et $x_G^E < 0$ et si le régime saturé est un état attracteur (i.e. $\Phi_L(x_G, l_R) > 0$), alors pour tout K_P positif, l'état du système tend vers le point d'équilibre X^E (FIG. 4.6).

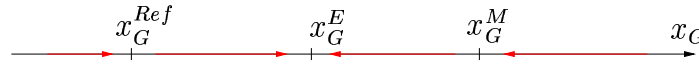


FIG. 4.6: Portrait de phase en régime saturé

La question qui se pose à présent est de savoir si, en partant d'un état quelconque $(x_G, x_L) \in D^{PLV}$ non nécessairement saturé, le système finit par tendre vers l'état d'équilibre.

4.2.3 Portrait de phases pour $\mathcal{A}_G^{NS} > 0$

Plaçons-nous maintenant en régime non saturé avec $\mathcal{A}_G^{NS} > 0$ et introduisons trois courbes particulières dans le domaine D^{PLV} :

1. $\mathcal{D}$ la droite telle que $f_V(x_G, x_L) = 0$,
2. $\mathcal{I}_L$ l'isocline telle que $\Phi_L(x_G, x_L) = 0$,
3. $\mathcal{I}_G$ l'isocline telle que $\Phi_G(x_G, x_L) = 0$.

Droite $\mathcal{D}$

Soit $(x_G^{\mathcal{D}}, x_L^{\mathcal{D}}) \in \mathcal{D}$. On a alors $\Phi_G(x_G^{\mathcal{D}}, x_L^{\mathcal{D}}) = \mathcal{A}_G^{NS}$ et $\Phi_L(x_G^{\mathcal{D}}, x_L^{\mathcal{D}}) = \mathcal{A}_L^{NS}$, ce qui implique que :

$$\begin{cases} x_G > 0 \\ x_L > 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $\mathcal{D}$ est rentrante dans le domaine D^{PLV} . Autrement dit, les trajectoires ne coupent jamais cette droite en sortant et f_V est toujours définie à “droite” de $\mathcal{D}$ (FIG. 4.7).

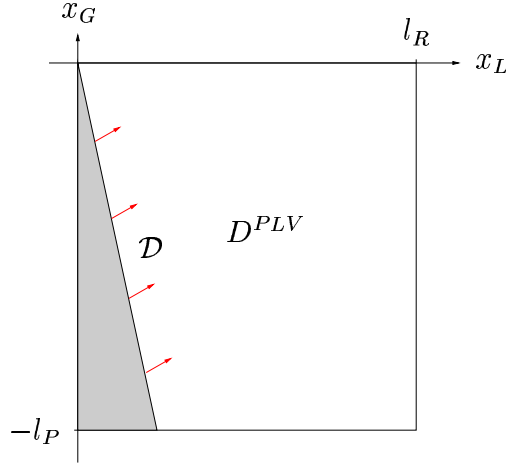


FIG. 4.7: Espace des phases D^{PLV}

Après $\mathcal{D}$ qui délimite le domaine D^{PLV} du système, passons aux isoclines $\mathcal{I}_L$ et $\mathcal{I}_G$, qui sont les lieux où la trajectoire admet une tangente soit horizontale, soit verticale.

Isocline $\mathcal{I}_L$

Nous allons déterminer l'allure de l'isocline $\mathcal{I}_L$ (celle des tangentes verticales) à l'intérieur du domaine D^{PLV} . Elle est définie par :

$$\mathcal{I}_L : \Phi_L(x_G, x_L) = 0 \text{ avec } \Phi_L(x_G, x_L) = \mathcal{A}_L^{NS} - \mathcal{B}^{NS} \min \left[(x_G - x_G^{Ref})^+, M \right] f_V(x_G, x_L).$$

On rappelle, tout d'abord, que Φ_L est une fonction continue et décroissante par rapport à chacune de ses variables dans le domaine D^{PLV} .

Regardons maintenant ses points d'intersection avec les frontières de D^{PLV} . Dans un premier temps, nous allons travailler en omettant le min dans l'expression de Φ_L (ce qui correspond à supposer que x_G^M est positif) et nous allons regarder son point d'intersection avec l'axe des abscisses. Soit $\Phi_L^0(x_L) = \Phi_L(0, x_L)$. Son expression est donnée par :

$$\Phi_L^0(x_L) = \mathcal{A}_L^{NS} - \mathcal{B}^{NS} |x_G^{Ref}| f_V(0, x_L).$$

$\Phi_L^0(x_L)$ est une fonction décroissante et on a $\Phi_L^0(0) = \mathcal{A}_L^{NS}$ strictement positif. Il existe par conséquent une valeur positive de x_L notée $\tilde{x}_L$ telle que $\Phi_L^0(\tilde{x}_L) = 0$. Φ_L^0 s'annule donc si $x_G^M > 0$. Supposons maintenant que $x_G^M < 0$ et reprenons la formulation complète de Φ_L avec le min. Sur l'isocline $\mathcal{I}_L$ et grâce à la monotonie de f_V par rapport à son second argument, x_L peut être vu comme une fonction de x_G , que l'on note $\check{\chi}_L(x_G)$ et on appelle $\check{\chi}_G(x_L)$ sa fonction réciproque :

$$\check{\chi}_G = \check{\chi}_L^{-1}.$$

Grâce au résultat précédent, on sait qu'il existe une valeur de x_L positive supérieure à $\tilde{x}_L$ telle que $\mathcal{I}_L$ coupe la droite $x_G = x_G^M$. On appelle cette valeur $\check{x}_L = \check{\chi}_L(x_G^M)$. Plaçons-nous en ce point $(x_G^M, \check{x}_L)$ et comparons les pentes à gauche et à droite de $\mathcal{I}_L$. Soit $\Phi_L^>(x_G, x_L) = \mathcal{A}_L^{NS} - \mathcal{B}^{NS} M f_V(x_G, x_L)$ et $\Phi_L^<(x_G, x_L) = \mathcal{A}_L^{NS} - \mathcal{B}^{NS} (x_G - x_G^{Ref}) f_V(x_G, x_L)$. On a par conséquent :

$$\begin{cases} \Phi_L^>(x_G, x_L) = \Phi_L(x_G, x_L) & \forall x_G > x_G^M \\ \Phi_L^<(x_G, x_L) = \Phi_L(x_G, x_L) & \forall x_G < x_G^M. \end{cases}$$

De plus, on définit $\mathcal{I}_L^>$ la droite (de pente égale à celle de $\mathcal{D}$) telle que $\Phi_L^>(x_G, x_L) = 0$ ainsi que la fonction associée $\check{\chi}_G^>(x_L)$, et $\mathcal{I}_L^<$ la courbe vérifiant $\Phi_L^<(x_G, x_L) = 0$ ainsi que $\check{\chi}_G^<(x_L)$.

Enfin, soit $P_L^>$ et $P_L^<$ les pentes des isoclines $\mathcal{I}_L^>$ et $\mathcal{I}_L^<$ au point $(x_G^M, \check{x}_L)$. Elles sont définies par :

$$P_L^> = \frac{d\check{\chi}_G^>}{dx_L},$$

$$P_L^< = \frac{d\check{\chi}_G^<}{dx_L}.$$

Le théorème des fonctions implicites implique que :

$$P_L^> = - \frac{\frac{\partial \Phi_L^>}{\partial x_L}(x_G^M, \check{x}_L)}{\frac{\partial \Phi_L^>}{\partial x_G}(x_G^M, \check{x}_L)},$$

$$P_L^< = - \frac{\frac{\partial \Phi_L^<}{\partial x_L}(x_G^M, \check{x}_L)}{\frac{\partial \Phi_L^<}{\partial x_G}(x_G^M, \check{x}_L)}.$$

Les pentes des isoclines $\mathcal{I}_L^>$ et $\mathcal{I}_L^<$ au point $(x_G^M, \tilde{x}_L)$ vérifient donc :

$$P_L^> = - \frac{\frac{\partial f_V}{\partial x_L}(x_G^M, \tilde{x}_L)}{\frac{\partial f_V}{\partial x_G}(x_G^M, \tilde{x}_L)},$$

$$P_L^< = - \frac{\frac{\partial f_V}{\partial x_L}(x_G^M, \tilde{x}_L)}{\frac{\partial f_V}{\partial x_G}(x_G^M, \tilde{x}_L) + \frac{f_V(x_G^M, \tilde{x}_L)}{x_G^M - x_G^{Ref}}}.$$

$f_V(x_G^M, \tilde{x}_L) > 0$, $x_G^M > x_G^{Ref}$, $\frac{\partial f_V}{\partial x_G}(x_G^M, \tilde{x}_L) > 0$ et $\frac{\partial f_V}{\partial x_L}(x_G^M, \tilde{x}_L) > 0$ impliquent par conséquent que :

$$0 > P_L^< > P_L^>.$$

Il existe donc une valeur de x_L notée $x_L^\sharp$, supérieure à $\tilde{x}_L$ et par conséquent positive, telle que $\mathcal{I}_L$ coupe l'axe des abscisses (FIG. 4.8).

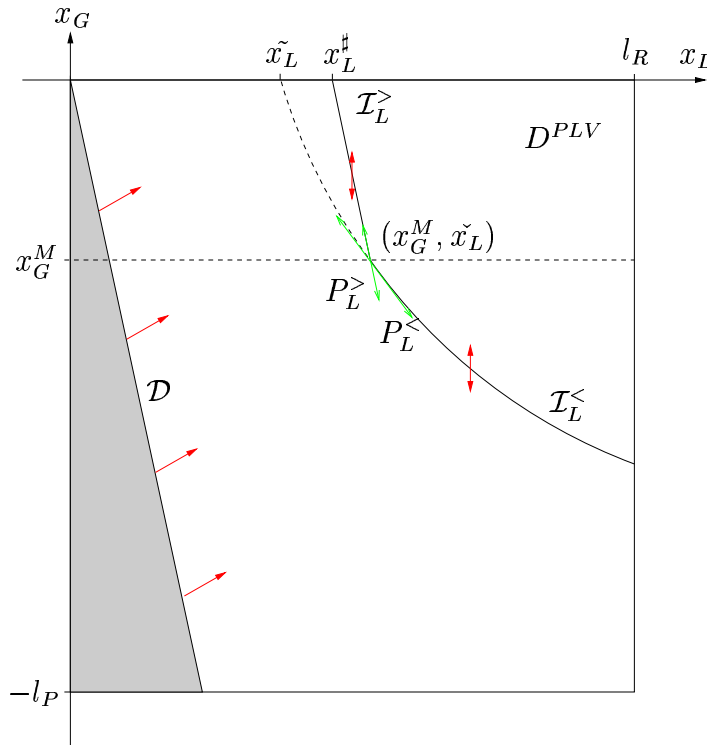


FIG. 4.8: Positions relatives de $x_L^\sharp$ et $\tilde{x}_L$

Remarque.

Si x_G^M est positif, alors on a directement $x_L^\sharp = \tilde{x}_L$ qui est toujours positif.

Déterminons maintenant $x_G^\sharp$, valeur de x_G telle que $\mathcal{I}_L$ coupe la droite $x_L = l_R$. $x_G^\sharp$ existe car $\mathcal{I}_L$ n'est pas parallèle à la droite $x_L = l_R$ et est solution de l'équation $\Phi_L(x_G^\sharp, l_R) = 0$ que l'on peut écrire $g_V(x_G^\sharp, l_R) = \frac{\mathcal{A}_L^{NS}}{\mathcal{B}^{NS}}$. De plus, au point d'équilibre, nous avons $0 = \mathcal{A}_G^S - \mathcal{B}_G^S g_V(x_G^E, l_R)$ que l'on peut écrire sous la forme $g_V(x_G^E, l_R) = \frac{\mathcal{A}_G^S}{\mathcal{B}_G^S}$. En remplaçant $\mathcal{A}_L^{NS}$, $\mathcal{B}^{NS}$, $\mathcal{A}_G^S$ et $\mathcal{B}_G^S$ par leur expression, on obtient :

$$\frac{g_V(x_G^\sharp, l_R)}{g_V(x_G^E, l_R)} = 1 - \frac{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^+ Q_L^{IN}}{SP^N Q_G^{IN}}.$$

$\sin \beta_P$ étant négatif, on a donc :

$$g_V(x_G^\sharp, l_R) > g_V(x_G^E, l_R),$$

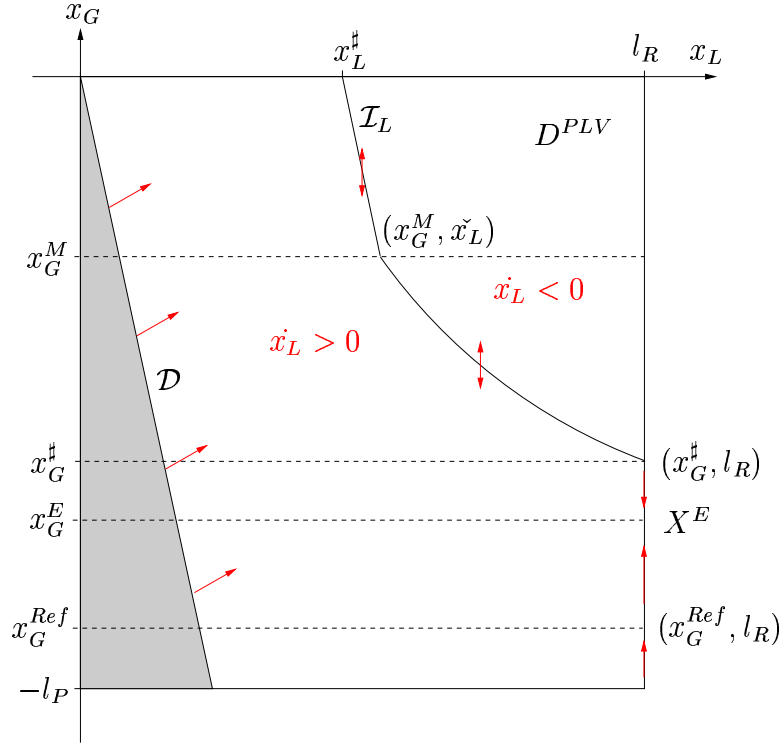
ce qui implique que (g_V étant croissante par rapport à x_G) :

$$x_G^\sharp > x_G^E.$$

Par contre, nous ne connaissons pas le signe de $x_G^\sharp$. Comme l'isocline $\mathcal{I}_L$ est de pente négative, nous pouvons dire que :

1. Si $x_G^\sharp > 0$, alors $\check{x}_L > l_R$ et l'isocline $\mathcal{I}_L$ est en dehors du domaine D^{PLV} ,
2. Si $0 > x_G^\sharp > x_G^M$, alors $x_L^\sharp < l_R$ mais $\check{x}_L > l_R$ et le domaine D^{PLV} ne contient que la première partie de l'isocline, c'est-à-dire $\mathcal{I}_L^>$,
3. Si $x_G^M > 0 > x_G^\sharp$, alors $\check{x}_L < x_L^\sharp < l_R$ et le domaine ne contient que la seconde partie de l'isocline, c'est-à-dire $\mathcal{I}_L^<$,
4. Si $0 > x_G^M > x_G^\sharp$, alors $x_L^\sharp < \check{x}_L < l_R$ et le domaine contient les deux parties de $\mathcal{I}_L$.

Nous nous plaçons dans ce dernier cas, qui est le plus complet mais la suite du raisonnement reste valable pour tous les autres (FIG. 4.9).

FIG. 4.9: Allure de $\mathcal{I}_L$

Isocline $\mathcal{I}_G$

Intéressons-nous maintenant à l'isocline $\mathcal{I}_G$ à l'intérieur du domaine D^{PLV} . Elle est définie par :

$$\mathcal{I}_G : \Phi_G(x_G, x_L) = 0 \text{ avec } \Phi_G(x_G, x_L) = \mathcal{A}_G^{NS} - \mathcal{B}^{NS} \min \left[(x_G - x_G^{Ref})^+, M \right] f_V(x_G, x_L)$$

Tout d'abord, Φ_G est une fonction continue et décroissante par rapport à chacune de ses variables dans le domaine D^{PLV} . De plus, il est immédiat de constater que $\mathcal{I}_G$ et $\mathcal{I}_L$ sont de même pente, la seule différence entre Φ_G et Φ_L étant les coefficients constants $\mathcal{A}_G^{NS}$ et $\mathcal{A}_L^{NS}$.

Déterminons maintenant la position de $\mathcal{I}_G$ par rapport à $\mathcal{I}_L$. Pour une valeur de x_G fixée, soit $(x_G, x_L^{\mathcal{I}_G})$ un point de $\mathcal{I}_G$ et $(x_G, x_L^{\mathcal{I}_L})$ un point de $\mathcal{I}_L$. On a :

$$\mathcal{A}_G^{NS} - \mathcal{B}^{NS} g_V(x_G, x_L^{\mathcal{I}_G}) = 0,$$

$$\mathcal{A}_L^{NS} - \mathcal{B}^{NS} g_V(x_G, x_L^{\mathcal{I}_L}) = 0.$$

Par conséquent, on peut écrire que :

$$\frac{g_V(x_G, x_L^{\mathcal{I}_G})}{g_V(x_G, x_L^{\mathcal{I}_L})} = \frac{\mathcal{A}_G^{NS}}{\mathcal{A}_L^{NS}}.$$

$\mathcal{A}_G^{NS} < \mathcal{A}_L^{NS}$ implique que $g_V(x_G, x_L^{\mathcal{I}_G}) < g_V(x_G, x_L^{\mathcal{I}_L})$ et par conséquent que $x_L^{\mathcal{I}_G} < x_L^{\mathcal{I}_L}$ car g_V est une fonction croissante de x_L . Dans D^{PLV} , $\mathcal{I}_G$ se trouve donc à gauche de $\mathcal{I}_L$.

Regardons maintenant ses points d'intersection avec les axes. Dans un premier temps, enlevons le min de l'expression de Φ_G (ce qui correspond à supposer que x_G^M est positif) et regardons où $\mathcal{I}_G$ coupe l'axe des abscisses. Soit $\Phi_G^0(x_L) = \Phi_G(0, x_L)$. Son expression est donnée par :

$$\Phi_G^0(x_L) = \mathcal{A}_G^{NS} - \mathcal{B}^{NS} |x_G^{Ref}| f_V(0, x_L).$$

$\Phi_G^0(x_L)$ est une fonction décroissante et on a $\Phi_G^0(0) = \mathcal{A}_G^{NS}$ que l'on a supposé être strictement positif. Il existe donc une valeur positive de x_L notée $\check{x}_L$ telle que Φ_G^0 s'annule. De plus, nous savons que $\check{x}_L < \tilde{x}_L$ car $\mathcal{I}_G$ se trouve à gauche de $\mathcal{I}_L$. On obtient donc :

$$0 < \check{x}_L < \tilde{x}_L.$$

Remarque.

Nous verrons ultérieurement que $\check{x}_L < l_R$.

Φ_G^0 s'annule donc si $x_G^M > 0$. Supposons maintenant que $x_G^M < 0$ et reprenons la formulation complète de Φ_G avec le min. Sur l'isocline $\mathcal{I}_G$, x_L peut être vu comme une fonction de x_G . On la note $\hat{\chi}_L(x_G)$ et on appelle $\hat{\chi}_G(x_L)$ la fonction réciproque :

$$\hat{\chi}_G = \hat{\chi}_L^{-1}.$$

Grâce au résultat précédent, on sait qu'il existe une valeur de x_L positive supérieure à $\check{x}_L$ telle que $\mathcal{I}_G$ coupe la droite $x_G = x_G^M$. On appelle cette valeur $\hat{x}_L = \hat{\chi}_L(x_G^M)$. Plaçons-nous en ce point $(x_G^M, \hat{x}_L)$ et comparons les pentes à gauche et à droite de $\mathcal{I}_G$. Soit $\Phi_G^>(x_G, x_L) = \mathcal{A}_G^{NS} - \mathcal{B}^{NS} M f_V(x_G, x_L)$ et $\Phi_G^<(x_G, x_L) = \mathcal{A}_G^{NS} - \mathcal{B}^{NS} (x_G - x_G^{Ref}) f_V(x_G, x_L)$. On a par conséquent :

$$\begin{cases} \Phi_G^>(x_G, x_L) = \Phi_G(x_G, x_L) & \forall x_G > x_G^M \\ \Phi_G^<(x_G, x_L) = \Phi_G(x_G, x_L) & \forall x_G < x_G^M. \end{cases}$$

De plus, on définit $\mathcal{I}_G^>$ la droite (de pente égale à $\mathcal{D}$) telle que $\Phi_G^>(x_G, x_L) = 0$ ainsi que la fonction associée $\hat{\chi}_G^>(x_L)$, et $\mathcal{I}_G^<$ la courbe vérifiant $\Phi_G^<(x_G, x_L) = 0$ ainsi que $\hat{\chi}_G^<(x_L)$. Enfin, soit $P_G^>$ et $P_G^<$ les pentes des isoclines $\mathcal{I}_G^>$ et $\mathcal{I}_G^<$ au point $(x_G^M, \hat{x}_L)$. Elles sont définies par :

$$P_G^> = \frac{d\hat{\chi}_G^>}{dx_L},$$

$$P_G^< = \frac{d\hat{\chi}_G^<}{dx_L}.$$

Le théorème des fonctions implicites fournit :

$$P_G^> = - \frac{\frac{\partial \Phi_G^>}{\partial x_L}(x_G^M, \hat{x}_L)}{\frac{\partial \Phi_G^>}{\partial x_G}(x_G^M, \hat{x}_L)},$$

$$P_G^< = - \frac{\frac{\partial \Phi_G^<}{\partial x_L}(x_G^M, \hat{x}_L)}{\frac{\partial \Phi_G^<}{\partial x_G}(x_G^M, \hat{x}_L)}.$$

Les pentes des isoclines $\mathcal{I}_G^>$ et $\mathcal{I}_G^<$ au point $(x_G^M, \hat{x}_L)$ vérifient donc :

$$P_G^> = - \frac{\frac{\partial f_V}{\partial x_L}(x_G^M, \hat{x}_L)}{\frac{\partial f_V}{\partial x_G}(x_G^M, \hat{x}_L)},$$

$$P_G^< = - \frac{\frac{\partial f_V}{\partial x_L}(x_G^M, \hat{x}_L)}{\frac{\partial f_V}{\partial x_G}(x_G^M, \hat{x}_L) + \frac{f_V(x_G^M, \hat{x}_L)}{x_G^M - x_G^{Ref}}}.$$

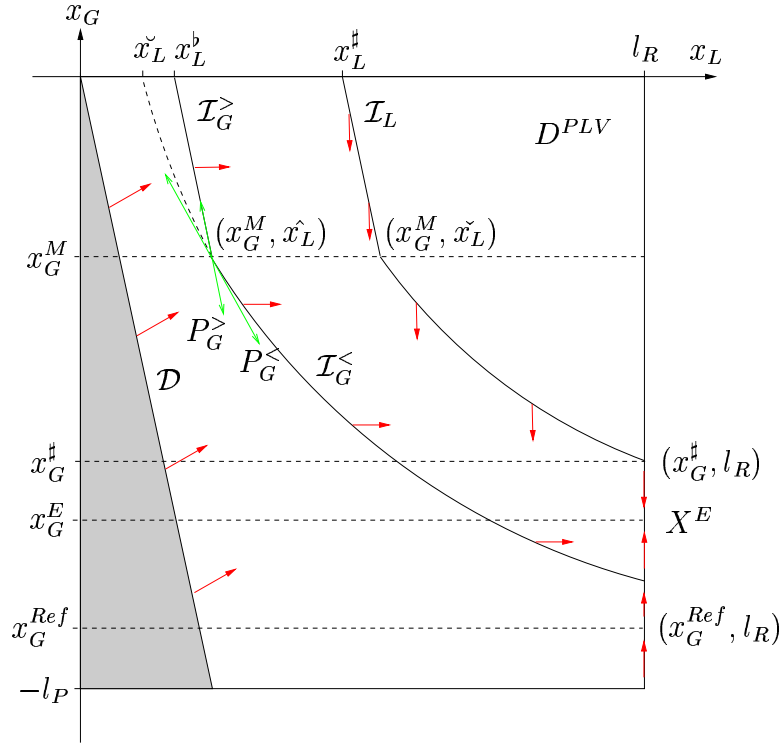
$f_V(x_G^M, \hat{x}_L) > 0$, $x_G^M > x_G^{Ref}$, $\frac{\partial f_V}{\partial x_G}(x_G^M, \hat{x}_L) > 0$ et $\frac{\partial f_V}{\partial x_L}(x_G^M, \hat{x}_L) > 0$ impliquent par conséquent que :

$$0 > P_G^< > P_G^>.$$

Il existe donc une valeur de x_L notée x_L^b , supérieure à $\check{x}_L$ et par conséquent positive, telle que $\mathcal{I}_G$ coupe l'axe des abscisses. De plus, étant donné la position de $\mathcal{I}_G$ par rapport à $\mathcal{I}_L$, nous avons aussi :

$$0 < x_L^b < x_L^\sharp.$$

La figure FIG. 4.10 donne une représentation de x_L^b et $\check{x}_L$ à l'intérieur du domaine D^{PLV} .

FIG. 4.10: Positions relatives de x_L^b et x_L^check

Remarques.

1. Si x_G^M est positif, alors on a trivialement $x_L^b = x_L^check$ qui est toujours positif.
2. Nous verrons ultérieurement que $x_L^b < l_R$.

Déterminons maintenant x_G^b , valeur de x_G telle que $\mathcal{I}_G$ coupe la droite $x_L = l_R$. x_G^b existe car $\mathcal{I}_G$ n'est pas parallèle à la droite $x_L = l_R$ et est solution de l'équation $\Phi_G(x_G^b, l_R) = 0$ que l'on peut écrire $g_V(x_G^b, l_R) = \frac{\mathcal{A}_G^{NS}}{\mathcal{B}_G^{NS}}$. De plus, au point d'équilibre, nous avons $0 = \mathcal{A}_G^S - \mathcal{B}_G^S g_V(x_G^E, l_R)$ que l'on peut écrire sous la forme $g_V(x_G^E, l_R) = \frac{\mathcal{A}_G^S}{\mathcal{B}_G^S}$. En remplaçant $\mathcal{A}_G^{NS}$, $\mathcal{B}_G^{NS}$, $\mathcal{A}_G^S$ et $\mathcal{B}_G^S$ par leur expression, on obtient :

$$\frac{g_V(x_G^b, l_R)}{g_V(x_G^E, l_R)} = 1 - \frac{\rho_G^N g \sin \beta_R v_G^+ Q_L^{IN}}{SP^N Q_G^{IN}}.$$

sin β_R est positif, on a donc :

$$g_V(x_G^b, l_R) < g_V(x_G^E, l_R),$$

ce qui implique que (g_V étant croissante par rapport à x_G) :

$$x_G^b < x_G^E.$$

Nous pouvons aussi maintenant conclure sur le fait que $x_L^b < l_R$. En effet, $x_G^E < 0$ implique que $x_G^b < 0$ et donc que $0 < \check{x}_L < x_L^b < l_R$. Par conséquent, le domaine D^{PLV} contient toujours les deux parties de l'isocline $\mathcal{I}_G$ (FIG. 4.11).

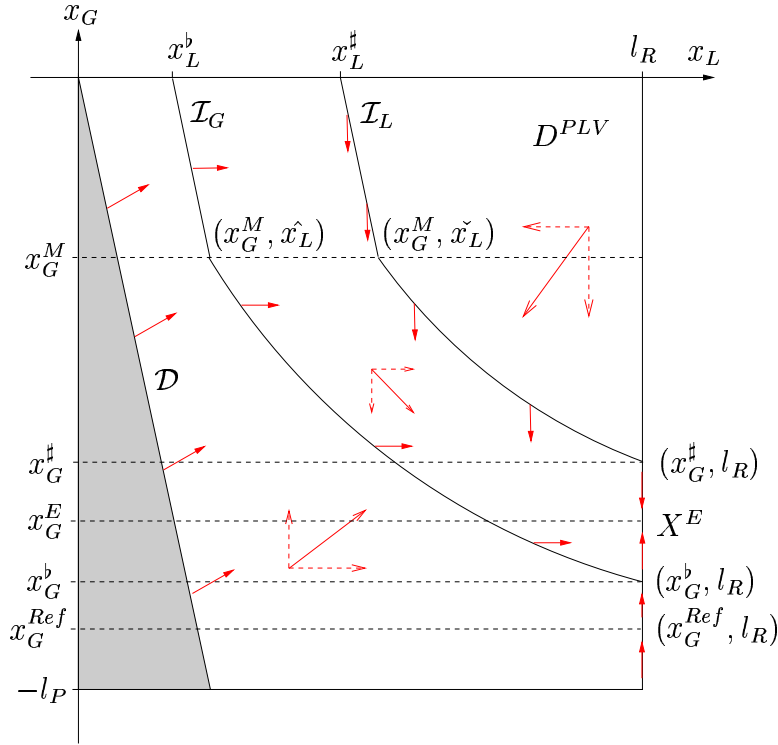


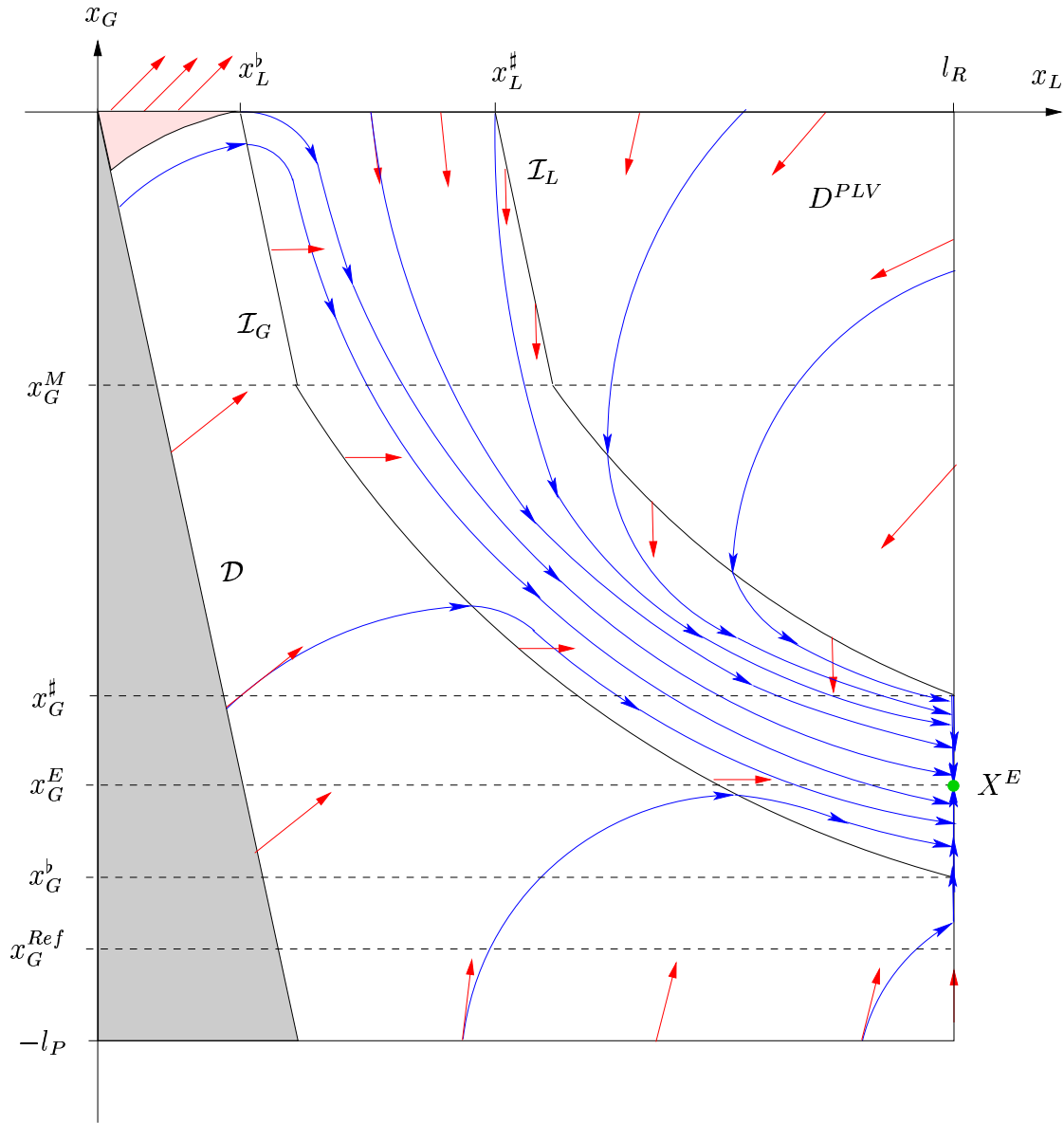
FIG. 4.11: Allure de $\mathcal{I}_G$

Remarque.

Les isoclines $\mathcal{I}_G$ et $\mathcal{I}_L$ étant distinctes et n'ayant aucun point d'intersection, on peut maintenant conclure sur le fait qu'il n'existe pas d'état stationnaire en régime non saturé pour $\mathcal{A}_G^{NS} > 0$.

Trajectoires et fuites

La figure FIG. 4.12 représente les trajectoires dans le domaine D^{PLV} . Il existe, sur les frontières de ce domaine, une fuite pour $x_G = 0$ et $x_L < x_L^b$. Elle est cependant négligeable, car le front de liquide est alors loin d'avoir atteint le sommet du riser et par conséquent, le bouchon expulsé sera de petite taille, au maximum égale à x_L^b . Sinon, toutes les trajectoires convergent vers le point d'équilibre X^E pour n'importe quelle valeur positive de K_P , et par conséquent, le phénomène de severe slugging est stabilisé et les débits de sortie des risers sont constants dans le temps.

FIG. 4.12: Portrait de phases pour $\mathcal{A}_G^{NS} > 0$

4.2.4 Portrait de phases pour $\mathcal{A}_G^{NS} \leq 0$

Ce cas est le plus fréquent en pratique. En effet, la valeur de $\mathcal{A}_G^{NS}$ correspond à la vitesse de la langue de gaz pendant la première phase du severe slugging comme définie dans le chapitre 3 et notée K_G^1 . De plus, une condition nécessaire pour l'occurrence du severe slugging est que le liquide atteigne le sommet du riser avant que la poche de gaz n'atteigne le point bas. Cette condition est en particulier toujours vérifiée si la vitesse de la langue de gaz est négative, c'est-à-dire, dans le cas présent.

Droite $\mathcal{D}$

Nous souhaitons savoir si les trajectoires issues d'un point de $\mathcal{D}$, sont toujours entrantes dans le domaine D^{PLV} . Pour cela, prenons un point $(x_G^{\mathcal{D}}, x_L^{\mathcal{D}})$ de $\mathcal{D}$ et comparons la pente de $\mathcal{D}$ que l'on note $P^{\mathcal{D}}$ au vecteur $(\dot{x}_L, \dot{x}_G)$ de pente $P^{\mathcal{T}} = \frac{\Phi_G(x_G^{\mathcal{D}}, x_L^{\mathcal{D}})}{\Phi_L(x_G^{\mathcal{D}}, x_L^{\mathcal{D}})}$.

On a :

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{D}} &= -\frac{\frac{\partial f_V}{\partial x_L}(x_G^{\mathcal{D}}, x_L^{\mathcal{D}})}{\frac{\partial f_V}{\partial x_G}(x_G^{\mathcal{D}}, x_L^{\mathcal{D}})}, \\ &= \frac{\sin \beta_R}{\sin \beta_P}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{T}} &= \frac{\mathcal{A}_G^{NS}}{\mathcal{A}_L^{NS}} \text{ car } f_V(x_G^{\mathcal{D}}, x_L^{\mathcal{D}}) = 0, \\ &= \frac{SP^N Q_G^{IN} - \rho_G^N g \sin \beta_R v_G^+ Q_L^{IN}}{SP^N Q_G^{IN} - \rho_G^N g \sin \beta_P v_G^+ Q_L^{IN}}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant le rapport $\frac{P^{\mathcal{T}}}{P^{\mathcal{D}}}$. Il est égal à :

$$\frac{P^{\mathcal{T}}}{P^{\mathcal{D}}} = \frac{\frac{SP^N Q_G^{IN}}{\sin \beta_R} - \rho_G^N g v_G^+ Q_L^{IN}}{\frac{SP^N Q_G^{IN}}{\sin \beta_P} - \rho_G^N g v_G^+ Q_L^{IN}}.$$

Or $\frac{1}{\sin \beta_P} < \frac{1}{\sin \beta_R}$, ce qui implique que $\frac{P^{\mathcal{T}}}{P^{\mathcal{D}}} < 1$ car $\frac{SP^N Q_G^{IN}}{\sin \beta_P} - \rho_G^N g v_G^+ Q_L^{IN} < 0$. Par conséquent, on obtient $P^{\mathcal{D}} < P^{\mathcal{T}}$ car $P^{\mathcal{D}} < 0$ et les trajectoires sont donc rentrantes dans le domaine D^{PLV} .

Isocline $\mathcal{I}_L$

Toute l'étude menée sur $\mathcal{I}_L$ pour $\mathcal{A}_G^{NS} > 0$ reste valable dans ce cas.

Isocline $\mathcal{I}_G$

Comme $\mathcal{A}_G^{NS} \leq 0$, l'isocline $\mathcal{I}_G$ n'existe pas car la fonction Φ_G est toujours strictement négative sur tout le domaine D^{PLV} . Il s'ensuit que $\dot{x}_G$ garde un signe constant sur tout le domaine. En l'occurrence, il est positif.

Remarque. _____

On peut là encore conclure sur le fait qu'il n'y a pas d'état stationnaire en régime non saturé.

Trajectoires et fuites

La figure FIG. 4.13 représente les trajectoires dans le domaine D^{PLV} . On remarque qu'il existe une trajectoire de fuite pour $x_G = -l_P$. Cependant, elle n'existe pas en pratique, car on se trouve alors en entrée du pipeline et par conséquent, on a $\dot{x}_G = 0$. Sinon, toutes les trajectoires convergent vers le point d'équilibre X^E pour n'importe quelle valeur positive de K_P , et par conséquent, le phénomène de severe slugging est stabilisé et les débits de sortie des risers sont constants dans le temps.

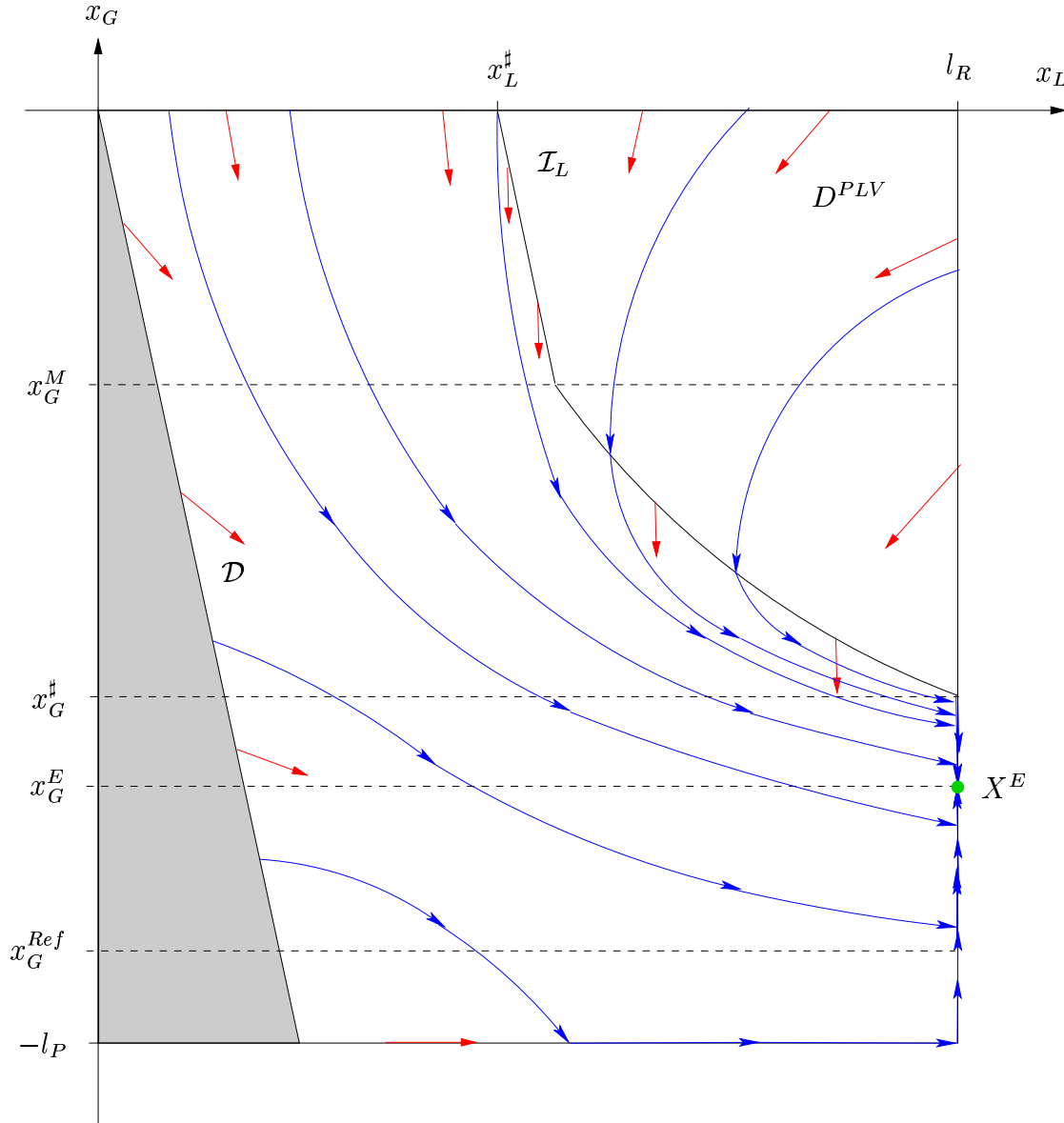


FIG. 4.13: Portrait de phases pour $\mathcal{A}_G^{NS} \leq 0$

4.3 Rajout d'une intégrale à la commande

Les résultats obtenus sur le bouclage proportionnel impliquent que l'on converge toujours vers l'état stabilisé X^E quelque soit K_P positif. Rajoutons maintenant une intégrale à notre commande, pour permettre de stabiliser la langue de gaz à sa position de référence x_G^{Ref} avec précision. Tout d'abord, nous allons étudier la stabilité locale de ce système en boucle fermée et déterminer la valeur de ses gains, puis nous utiliserons à nouveau les techniques des portraits de phase et des isoclines pour conclure sur sa stabilité globale.

La dimension de l'espace des phases étant maintenant incluse dans $\mathbb{R}^3$, une étude du système complet semble être assez complexe. Aussi, nous allons prendre un gain intégral petit pour permettre, pendant un certain temps, de ne pas perturber l'effet du bouclage proportionnel et donc de laisser le système converger vers son état saturé ($x_L = l_R$). Ainsi, nous limitons notre étude au système saturé, ce qui entraîne que la dimension de l'espace des états est égale à 2 et que la technique des portraits de phase s'applique à nouveau facilement. Dans ces conditions, l'évolution de x_G vérifie :

$$\dot{x}_G(t) = \frac{P^N}{\rho_G^N \rho_L^N g \sin \beta_P v_G^+} [Q_G^{PLV}(t) - Q_G^{IN}],$$

et Q_G^{PLV} est donné par la relation suivante :

$$Q_G^{PLV}(t) = \alpha^{PLV} u(t) \sqrt{\rho_L^N g [\sin \beta_R l_R - \sin \beta_P x_G(t)]}.$$

De plus, nous ne mesurons expérimentalement que la pression P et la pression Π . Or en notant $\Delta P = \Pi - P$, nous avons l'égalité suivante :

$$\Delta P(t) = \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t).$$

x_G représente donc la même chose que ΔP . Par conséquent, positionner la langue de gaz à l'abscisse x_G^{Ref} est équivalent à faire tendre la différence de pression ΔP vers une valeur de référence $\Delta P_{Ref} = \rho_L^N g \sin \beta_P x_G^{Ref}$. L'évolution de ΔP est ainsi donnée par :

$$\dot{\Delta P}(t) = \frac{P^N}{\rho_G^N v_G^+} [Q_G^{PLV}(t) - Q_G^{IN}],$$

et le débit prélevé s'écrit alors :

$$Q_G^{PLV}(t) = \alpha^{PLV} u(t) \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P(t)}.$$

On obtient, en définitive, l'équation suivante :

$$\dot{\Delta P}(t) = \frac{P^N}{\rho_G^N v_G^+} \left[\alpha^{PLV} u(t) \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P(t)} - Q_G^{IN} \right]. \quad (4.14)$$

4.3.1 Etude de stabilité locale

Notons $f(\Delta P, u) = \frac{P^N}{\rho_G^N v_G^+} \left[\alpha^{PLV} u(t) \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P(t)} - Q_G^{IN} \right]$ et étudions la dynamique de l'équation (4.14) au voisinage de son état stationnaire. Pour cela, linéarisons la autour du point $(\Delta P_{Ref}, \bar{u})$, $\bar{u}$ étant définie par la relation (4.12). On a :

$$\dot{\Delta P}(t) = \frac{\partial f}{\partial \Delta P}(\Delta P_{Ref}, \bar{u}) [\Delta P(t) - \Delta P_{Ref}] + \frac{\partial f}{\partial u}(\Delta P_{Ref}, \bar{u}) [u(t) - \bar{u}],$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{\Delta P}(t) &= \frac{-\alpha^{PLV} P^N \bar{u}}{2\rho_G^N v_G^+ \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}}} [\Delta P(t) - \Delta P_{Ref}] \\ &+ \frac{\alpha^{PLV} P^N}{\rho_G^N v_G^+} \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}} [u(t) - \bar{u}]. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant la commande de type proportionnel-intégral. Elle s'écrit :

$$u(t) = K_P [\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)] + K_I \int_0^t [\Delta P_{Ref} - \Delta P(\sigma)] d\sigma, \quad (4.15)$$

K_P étant ici égal au gain de l'étude sur le bouclage proportionnel divisé par $-\rho_L^N g \sin \beta_P$. Comme $\sin \beta_P < 0$, on suppose toujours $K_P > 0$. Posons $\Delta(t) = \Delta P_{Ref} - \Delta P(t)$ et $\Theta(t) = K_I \int_0^t \Delta(\sigma) d\sigma$. La commande s'écrit alors :

$$u(t) = K_P \Delta(t) + \Theta(t).$$

Autour du point d'équilibre $(\Delta P_{Ref}, \bar{u})$, l'évolution de Δ est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(t) &+ \frac{\alpha^{PLV} P^N \bar{u}}{2\rho_G^N v_G^+ \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}}} \Delta(t) \\ &+ \frac{\alpha^{PLV} P^N}{\rho_G^N v_G^+} \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}} [K_P \Delta(t) + \Theta(t) - \bar{u}] = 0. \end{aligned}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{\Delta}(t) &+ \left[\frac{\alpha^{PLV} P^N \bar{u}}{2\rho_G^N v_G^+ \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}}} + \frac{\alpha^{PLV} P^N K_P}{\rho_G^N v_G^+} \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}} \right] \dot{\Delta}(t) \\ &+ \left[\frac{\alpha^{PLV} P^N K_I}{\rho_G^N v_G^+} \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}} \right] \Delta(t) = 0. \end{aligned}$$

C'est une équation du second ordre en Δ de type oscillateur libre amorti, dont la forme générale est la suivante :

$$\ddot{\Delta}(t) + 2\xi\omega_n\dot{\Delta}(t) + \omega_n^2\Delta(t) = 0,$$

où ξ est la constante d'amortissement du système et ω_n est la pulsation propre de l'oscillateur. Pour obtenir un contrôle à deux échelles de temps, on se place au dessus du régime critique ($\xi \geq 1$) et ω_n sera à ajuster en fonction du temps caractéristique τ_c du système à contrôler :

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\tau_c}.$$

Ainsi, le point d'équilibre $(\Delta P_{Ref}, \bar{u})$ est localement attracteur et les coefficients K_P et K_I sont donnés par :

$$\begin{cases} K_P = \frac{\rho_G^N v_G^+}{\alpha^{PLV} P^N \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}}} \left[2\xi\omega_n - \frac{P^N Q_G^{IN}}{2\rho_G^N v_G^+ (\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref})} \right] \\ K_I = \frac{\rho_G^N v_G^+ \omega_n^2}{\alpha^{PLV} P^N \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}}} \end{cases}$$

Or, Q_G^{IN} est une inconnue du problème. Pour calculer K_P , nous utilisons donc un débit moyen noté $\overline{Q_G^{IN}}$ dépendant des conditions opératoires :

$$\begin{cases} K_P = \frac{\rho_G^N v_G^+}{\alpha^{PLV} P^N \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}}} \left[2\xi\omega_n - \frac{P^N \overline{Q_G^{IN}}}{2\rho_G^N v_G^+ (\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref})} \right] \\ K_I = \frac{\rho_G^N v_G^+ \omega_n^2}{\alpha^{PLV} P^N \sqrt{\rho_L^N g \sin \beta_R l_R - \Delta P_{Ref}}} \end{cases}$$

Remarque.

Nous avons fait l'hypothèse d'un gain intégral petit pour permettre de laisser converger le système vers son état saturé. Cette contrainte sera donc à prendre en compte, au cas par cas, lors de l'ajustement du coefficient ξ .

4.3.2 Etude de stabilité globale

Alors que pour l'étude locale, on pouvait supposer être dans un voisinage autour du point d'équilibre où l'ouverture de la vanne restait comprise entre 0 et 100%, nous ne pouvons plus faire cette hypothèse maintenant. Nous devons donc prendre en compte la saturation sur u grâce à un anti-windup, pour la contraindre entre ses bornes. Soit $Sat[x] = \min(\max(x, 0), 100)$. L'algorithme de cet anti-windup est le suivant :

1. On calcule la commande à appliquer à la vanne :

$$\tilde{u}(t) = K_P[\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)] + \Theta(t).$$

2. On la sature pour obtenir l'ouverture réelle et on recale la valeur de Θ :

$$u(t) = \text{Sat} [\tilde{u}(t)] \text{ et } \Theta(t) = u(t) - K_P[\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)].$$

Ainsi, pour en tenir compte dans notre modèle de manière continue, l'intégrale Θ sera modélisée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\Theta} = K_I[\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)] + \frac{1}{\varepsilon}[u(t) - \tilde{u}(t)],$$

$\varepsilon \ll 1$ étant un temps caractéristique très court pour permettre de borner la commande rapidement.

Introduisons les trois constantes positives suivantes :

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha^{PLV} P^N}{\rho_G^N v_G^+} \\ b = \rho_L^N g \sin \beta_R l_R \\ c = \frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N v_G^+}. \end{cases}$$

Le système non-linéaire peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P}(t) = a u(t) \sqrt{b - \Delta P(t)} - c \\ \dot{\Theta}(t) = K_I[\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)] + \frac{1}{\varepsilon}[u(t) - \tilde{u}(t)] \\ \tilde{u}(t) = K_P[\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)] + \Theta(t) \\ u(t) = \text{Sat} [\tilde{u}(t)], \end{cases} \quad (4.16)$$

et son état stationnaire est donné par :

$$\begin{cases} \overline{\Delta P} = \Delta P_{Ref} \\ \overline{\Theta} = \bar{u} \\ \bar{\tilde{u}} = \frac{c}{a \sqrt{b - \Delta P_{Ref}}} \\ \bar{u} = \bar{\tilde{u}}. \end{cases}$$

Utilisons maintenant la technique des portraits de phase dans le plan $(\Delta P, \Theta) \in [0, b] \times \mathbb{R}$ (la relation (4.11) impliquant ici que $0 \leq \Delta P \leq b$) pour conclure sur la stabilité du système non-linéaire.

Intéressons-nous tout d'abord au domaine défini par $\tilde{u} < 0$ à l'intérieur duquel $u = 0$. Sa frontière $\mathcal{U}_0$ est une droite qui s'écrit $\Theta = K_P(\Delta P - \Delta P_{Ref})$ et qui coupe l'axe des abscisses en ΔP_{Ref} et l'axe des ordonnées en $\Theta_0 = -K_P \Delta P_{Ref}$. De plus, à l'intérieur de ce domaine, le système (4.16) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P}(t) &= -c \\ \dot{\Theta}(t) &= K_I [\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)] - \frac{1}{\varepsilon} [K_P (\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)) + \Theta(t)]. \end{cases}$$

On a donc $\dot{\Delta P} < 0$ et il existe un critère (supposé toujours vérifié) minimisant ε tel que $\dot{\Theta} < 0$.

Intéressons-nous maintenant à la zone définie par $\tilde{u} > 100$. On a alors $u = 100$ et sa frontière $\mathcal{U}_{100}$ est la droite définie par $\Theta = K_P(\Delta P - \Delta P_{Ref}) + 100$. Elle coupe par conséquent l'axe des abscisses en $\Delta P_{100} = \Delta P_{Ref} - 100/K_P$ et l'axe des ordonnées en $\Theta_{100} = 100 - K_P \Delta P_{Ref}$. De plus, le système non-linéaire (4.16) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P}(t) &= 100 a \sqrt{b - \Delta P(t)} - c \\ \dot{\Theta}(t) &= K_I [\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)] + \frac{1}{\varepsilon} [100 - K_P (\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)) - \Theta(t)]. \end{cases}$$

Etudions le signe de $\dot{\Delta P}$. Pour cela, définissons la fonction $f_{\Delta P}^{100}(\Delta P) = 100 a \sqrt{b - \Delta P} - c$ et ΔP_* la valeur de ΔP annulant cette fonction :

$$f_{\Delta P}^{100}(\Delta P_*) = 0 \iff \Delta P_* = b - \left(\frac{c}{100a}\right)^2.$$

Ainsi, l'isocline $\mathcal{I}_{\Delta P}^{100}$ telle que $f_{\Delta P}^{100}(\Delta P) = 0$ est une droite d'équation $\Delta P = \Delta P_*$. De plus, en notant $\varsigma = \left(\frac{\bar{u}}{100}\right)^2 \in [0, 1]$, ΔP_* peut se mettre sous la forme :

$$\Delta P_* = b - \varsigma(b - \Delta P_{Ref}).$$

En remarquant que $\Delta P_{Ref} < b$, on peut borner son expression par :

$$\Delta P_{Ref} < \Delta P_* < b,$$

ce qui implique par conséquent que :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P} > 0 & \text{si } \Delta P \in [0, \Delta P_*[\\ \dot{\Delta P} = 0 & \text{si } \Delta P = \Delta P_* \\ \dot{\Delta P} < 0 & \text{si } \Delta P \in]\Delta P_*, b]. \end{cases}$$

Etudions maintenant le signe de $\dot{\Theta}$. Soit la fonction f_{Θ}^{100} définie par :

$$f_{\Theta}^{100}(\Delta P, \Theta) = K_I (\Delta P_{Ref} - \Delta P) + \frac{1}{\varepsilon} [100 - K_P (\Delta P_{Ref} - \Delta P) - \Theta].$$

L'isocline $\mathcal{I}_\Theta^{100}$ définie par $f_\Theta^{100}(\Delta P, \Theta) = 0$ est donc une droite d'équation $\Theta = 100 + (K_P - \varepsilon K_I)(\Delta P - \Delta P_{Ref})$ coupant la droite $\mathcal{U}_{100}$ au point $(\Delta P_{Ref}, 100)$, sa pente étant inférieure à celle de $\mathcal{U}_{100}$. Et, on a :

$$\begin{cases} \dot{\Theta} > 0 & \text{si } (K_P - \varepsilon K_I)(\Delta P_{Ref} - \Delta P) + \Theta < 100 \\ \dot{\Theta} = 0 & \text{si } (\Delta P, \Theta) \in \mathcal{I}_\Theta^{100} \\ \dot{\Theta} < 0 & \text{si } (K_P - \varepsilon K_I)(\Delta P_{Ref} - \Delta P) + \Theta > 100. \end{cases}$$

Le graphe FIG. 4.14 représente le champ de vecteurs lorsque la commande est saturée (en supposant que $\Theta_{100} < 0$ comme c'est le cas pour S^4L).

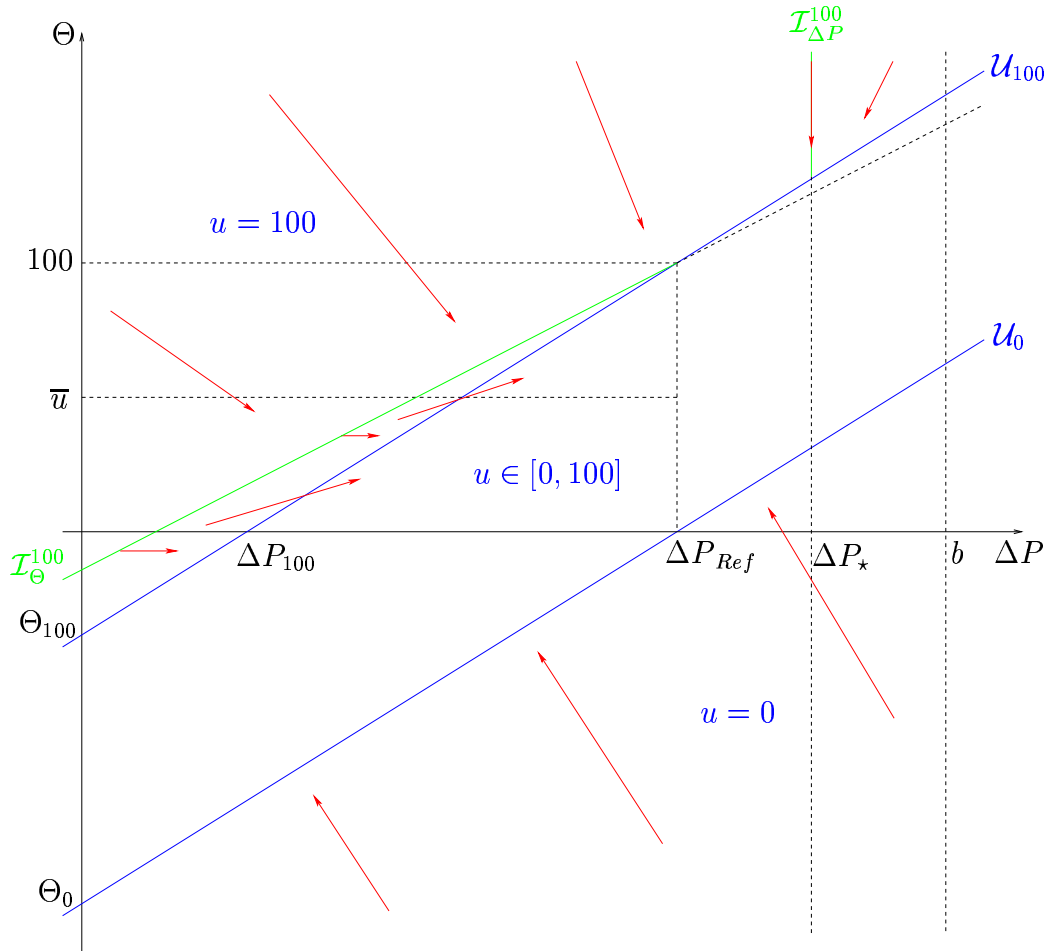


FIG. 4.14: Champ de vecteurs pour la commande saturée

Supposons maintenant que $\tilde{u} \in [0, 100]$. Le système (4.16) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P}(t) &= a[K_P[\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)] + \Theta(t)]\sqrt{b - \Delta P(t)} - c \\ \dot{\Theta}(t) &= K_I[\Delta P_{Ref} - \Delta P(t)]. \end{cases}$$

Étudions, dans un premier temps, les trajectoires au niveau des frontières du domaine. Pour $\Delta P = b$, on a directement :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P} &= -c < 0 \\ \dot{\Theta} &= K_I(\Delta P_{Ref} - b) < 0. \end{cases}$$

Par conséquent, les trajectoires sont rentrantes. Pour $\Delta P = 0$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P} &= a[K_P\Delta P_{Ref} + \Theta]\sqrt{b} - c \\ \dot{\Theta} &= K_I\Delta P_{Ref}. \end{cases}$$

On a alors $\dot{\Theta} > 0$ et, en notant $\Theta_\star = \frac{c}{a\sqrt{b}} - K_P\Delta P_{Ref} \in [\Theta_0, \Theta_{100}]$, le signe de $\dot{\Delta P}$ est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P} < 0 & \text{si } \Theta \in [\Theta_0, \Theta_\star[\\ \dot{\Delta P} = 0 & \text{si } \Theta = \Theta_\star \\ \dot{\Delta P} > 0 & \text{si } \Theta \in]\Theta_\star, \Theta_{100}], \end{cases}$$

Il existe par conséquent une zone de fuite sur la frontière $\Delta P = 0$ pour $\Theta \in [\Theta_0, \Theta_\star[$. Elle n'est cependant pas limitative en pratique, car elle ne sera jamais atteinte si on choisit correctement la valeur initiale de l'intégrale Θ .

Déterminons maintenant l'allure de l'isocline $\mathcal{I}_\Theta$ annulant $\dot{\Theta}$. Elle est donnée par l'équation $\Delta P = \Delta P_{Ref}$ ce qui implique directement que $\dot{\Delta P} = a\Theta\sqrt{b - \Delta P_{Ref}} - c$, et par conséquent que :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P} > 0 & \text{si } \Theta > \bar{u} \\ \dot{\Delta P} < 0 & \text{si } \Theta < \bar{u}. \end{cases}$$

Enfin, étudions l'isocline $\mathcal{I}_{\Delta P}$ telle que $\dot{\Delta P}$ s'annule. Elle a pour équation $\Theta = \frac{c}{a\sqrt{b - \Delta P}} + K_P(\Delta P - \Delta P_{Ref})$. De plus, la dérivée de cette expression par rapport à ΔP est égale à $\frac{c}{2a(b - \Delta P)^{3/2}} + K_P$ qui est toujours strictement positif. Par conséquent, l'isocline est croissante, partant du point $(0, \Theta_\star)$ et tendant vers $+\infty$ pour $\Delta P = b$. De plus, elle coupe la droite $\mathcal{U}_{100}$ à l'abscisse $\Delta P_\star$.

En conclusion, si on néglige la zone de fuites, les trajectoires sont rentrantes dans le domaine de non-saturation de u et à l'intérieur de celui-ci, elles s'enroulent autour du

point d'équilibre. La figure FIG. 4.15 est une représentation du champ de vecteurs dans le plan $(\Delta P, \Theta) \in [0, b] \times \mathbb{R}$.

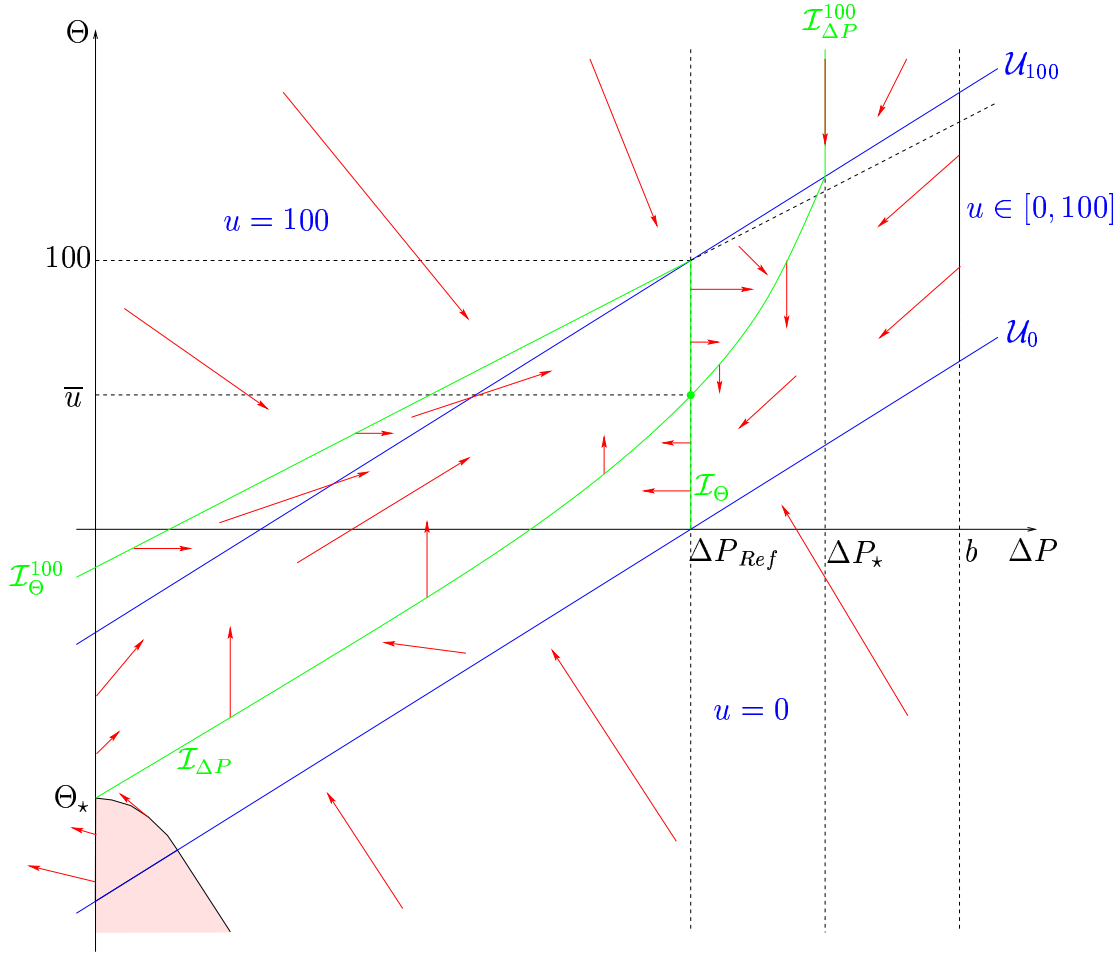


FIG. 4.15: Champ de vecteurs dans le plan $(\Delta P, \Theta)$

A présent, il nous reste à vérifier qu'il n'existe pas d'orbite périodique interdisant au système de tendre vers son point d'équilibre. Pour cela, appliquons le critère de Bendixon [125] au système (4.16). Sa divergence, notée $d(\Delta P, \Theta)$, est égale à :

$$d(\Delta P, \Theta) = \begin{cases} -1/\varepsilon & \text{si } \tilde{u} < 0 \\ -a \left[K_P \sqrt{b - \Delta P} + \frac{K_P(\Delta P_{Ref} - \Delta P) + \Theta}{2\sqrt{b - \Delta P}} \right] & \text{si } 0 \leq \tilde{u} \leq 100 \\ -50a/\sqrt{b - \Delta P} - 1/\varepsilon & \text{si } \tilde{u} > 100. \end{cases}$$

Cette divergence étant de signe constant, il n'existe, de ce fait, pas d'orbite stationnaire s'enroulant autour de l'état d'équilibre.

En résumé, nous avons :

- un système autonome dans le plan (les trajectoires sont bornées en dehors de la zone de fuite),
- un point d'équilibre localement stable,
- pas d'orbite stationnaire.

Ainsi, le théorème de Poincaré-Bendixon [125] nous permet de conclure sur la convergence globale du système vers son état d'équilibre à l'intérieur du bassin d'attraction et donc sur la validité de notre contrôleur. Le graphique FIG. 4.16 représente les différentes trajectoires dans le plan $(\Delta P, \Theta) \in [0, b] \times \mathbb{R}$.

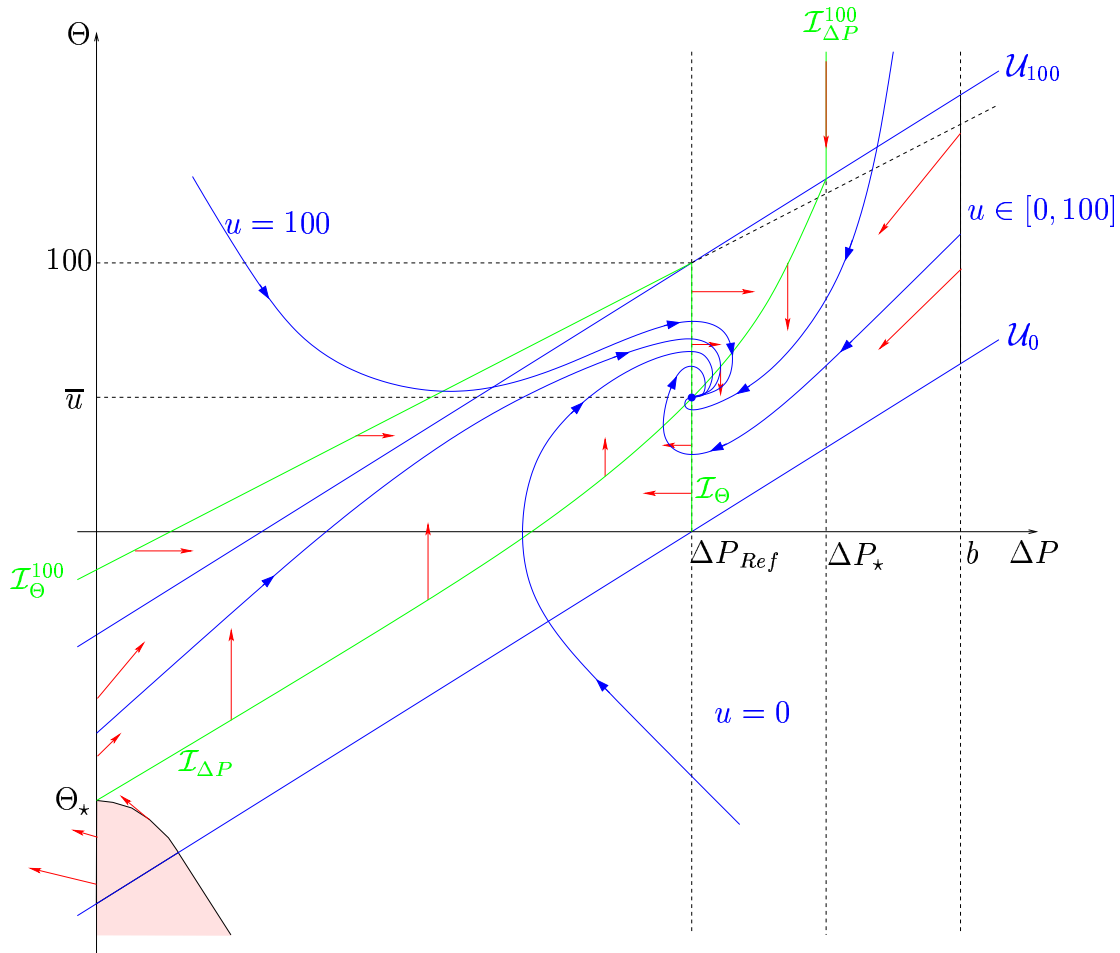


FIG. 4.16: Trajectoires dans le plan $(\Delta P, \Theta)$

4.4 Validations numériques et expérimentales

Nous avons proposé une commande proportionnelle-intégrale (4.15) permettant d'éliminer le phénomène de severe slugging en prélevant une quantité adéquate de gaz dans

le pipeline. Pour valider nos résultats, nous allons simuler le modèle de référence (4.10) associé à cette commande et réaliser plusieurs expériences sur la boucle S^4L .

4.4.1 Résultats pour S^4L

Commençons par valider notre contrôleur sur la boucle d'écoulement S^4L (cf. annexe A). Nous allons tout d'abord, effectuer plusieurs simulations numériques sous MatLab [106] pour déterminer l'ordre de grandeur des coefficients K_P et K_I . Puis, nous analyserons son comportement expérimentalement.

Pour cette étude, nous prenons l'angle β_P égal à -18° et le volume additionnel v_G^+ égal à 35.8 l pour nous permettre d'avoir une plage de débits propices au severe slugging la plus importante possible. Nous allons valider notre commande pour les cinq couples (Q_G^{IN}, Q_L^{IN}) utilisés lors de la comparaison expérimentale du modèle de severe slugging (cf. TAB. 3.2 du chapitre 3). Ainsi, nous allons effectuer des simulations pour $(1 \text{ nl/min}, 8 \text{ l/h})$, $(1 \text{ nl/min}, 11 \text{ l/h})$, $(2 \text{ nl/min}, 11 \text{ l/h})$, $(3 \text{ nl/min}, 11 \text{ l/h})$ et $(4 \text{ nl/min}, 14 \text{ l/h})$. Nous testerons aussi la robustesse de notre régulateur en perturbant les débits d'entrée de gaz et de liquide et en changeant la consigne ΔP_{Ref} au cours du temps.

Simulations

Les différents paramètres de nos simulations correspondent aux données de la boucle S^4L . De plus, nous fixons la valeur de $\bar{Q}_G^{IN}$ à 2.5 nl/min (ce qui correspond environ à $6 \times 10^{-5} \text{ kg/s}$), ξ à 1 pour être proche du régime critique et τ_c est pris égal à 100 s pour avoir un temps de réponse de l'ordre de la minute. Cela implique que $K_P = 0.0433 \text{ Pa}^{-1}$ et $K_I = 0.0015 \text{ (Pa.s)}^{-1}$. Enfin, ΔP_{Ref} est déterminé pour que x_G^{Ref} soit égal à -0.75 m . Ces paramètres sont résumés dans le tableau TAB. 4.1.

D	l_R	β_P	β_R	v_G^+
0.015 m	1.08 m	-18°	90°	0.0358 m^3
C_V	γ_V	P^N	ρ_G^N	ρ_L^N
0.03 m^2	4×10^{-5}	101500 Pa	1.3 kg/m^3	1000 kg/m^3
P^{OUT}	$\bar{Q}_G^{IN}$	x_G^{Ref}	ξ	τ_c
101500 Pa	2.5 nl/min	-0.75 m	1	100 s

TAB. 4.1: Paramètres utilisés pour les simulations

Chaque simulation dure 400 s et débute en régime non saturé. En effet, à l'instant initial, la langue de gaz dans le pipeline est positionnée à -0.3 m et le front liquide dans le riser à 0.2 m . De plus, la vanne est alors fermée. Puis, la commande est lancée dès le premier pas de temps et on s'intéresse à son efficacité pour stabiliser l'écoulement. Les graphiques FIG. 4.17, FIG. 4.18, FIG. 4.19, FIG. 4.20 et FIG. 4.21 représentent en fonction du temps, la position des fronts x_G et x_L , les pressions P et Π , les débits de gaz Q_G^{IN} et

Q_G^{PLV} , les débits de liquide Q_L^{IN} et Q_L^{OUT} , la différence de pression ΔP et sa valeur de référence ΔP_{Ref} ainsi que l'ouverture de la vanne u .

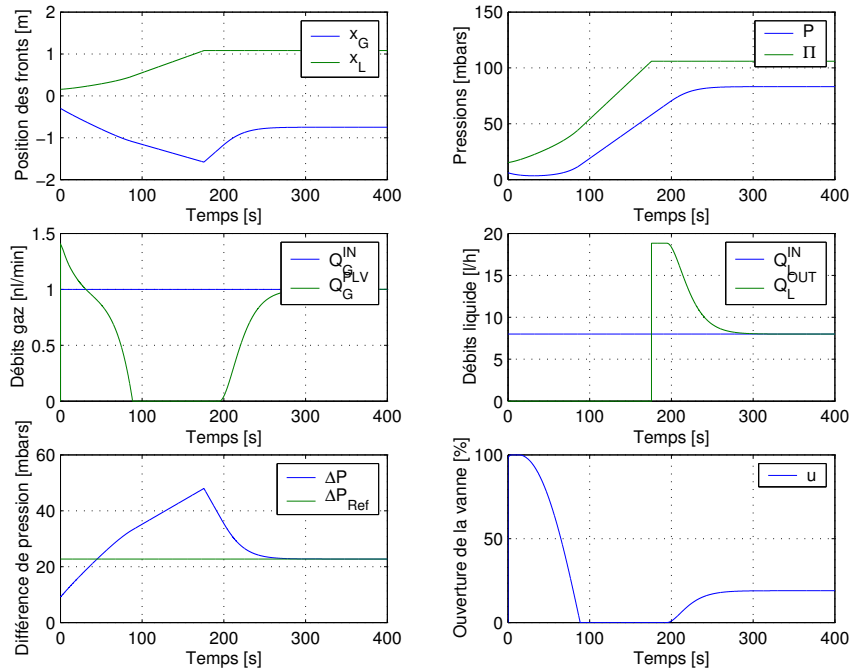


FIG. 4.17: Simulation pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$

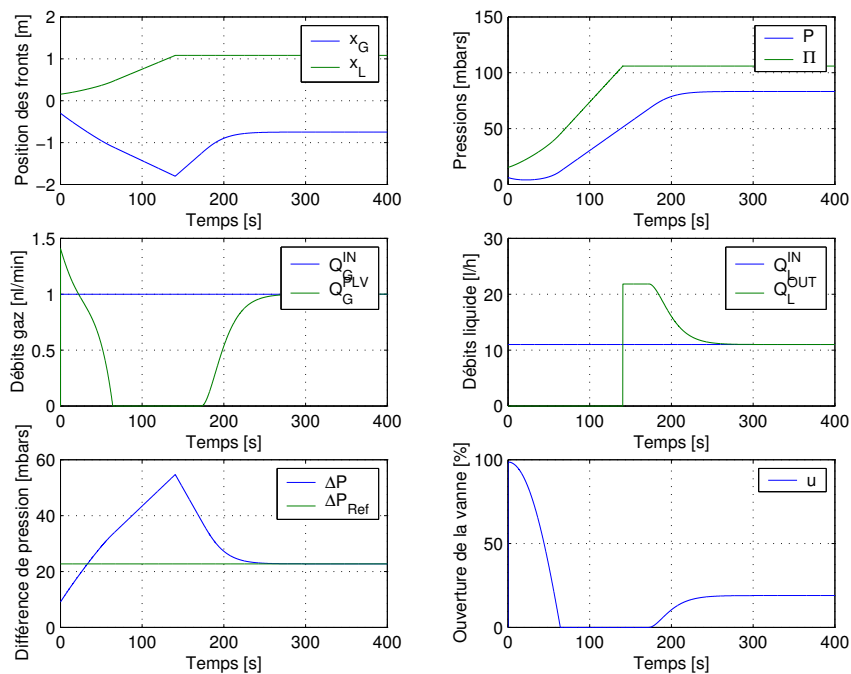


FIG. 4.18: Simulation pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

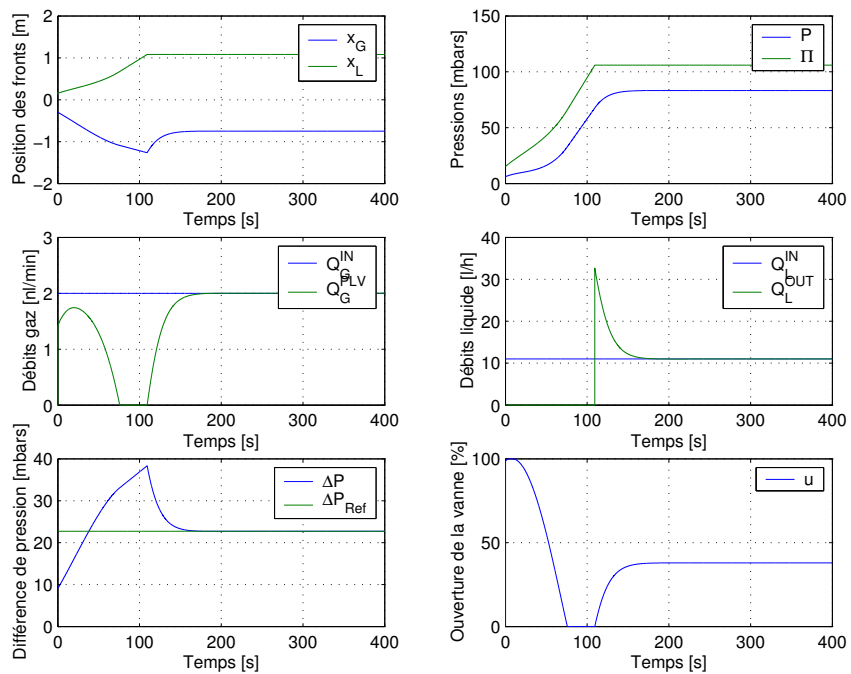


FIG. 4.19: Simulation pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

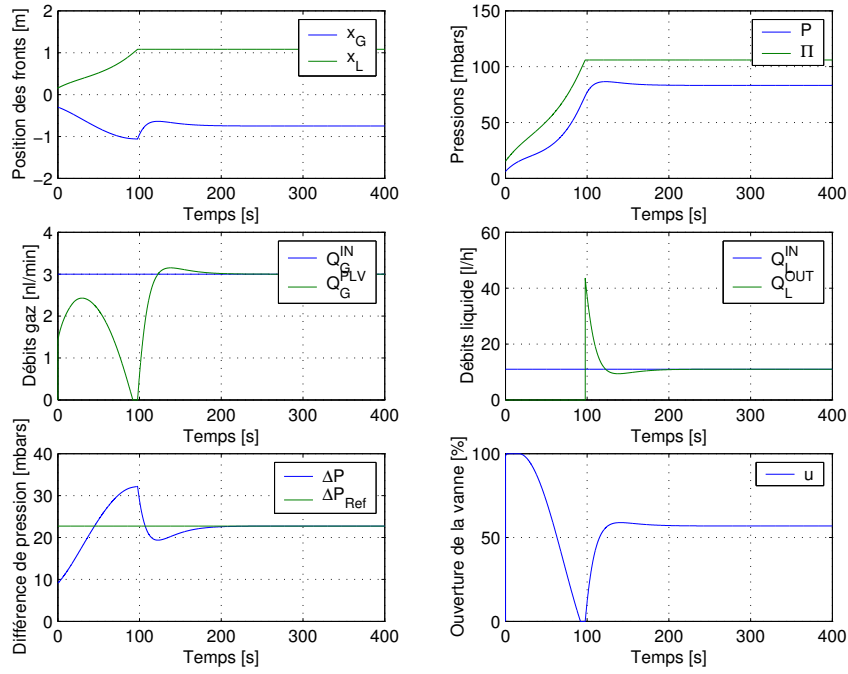


FIG. 4.20: Simulation pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

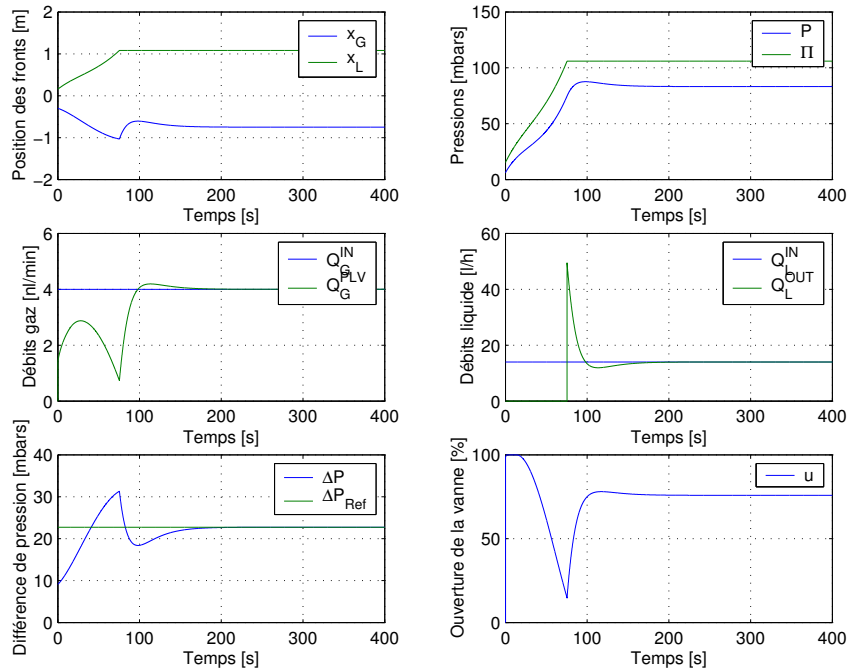


FIG. 4.21: Simulation pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$

Ces différentes simulations montrent que l'on atteint les performances souhaitées. En effet, le temps de réponse est de l'ordre de τ_c et l'erreur entre ΔP et sa valeur de référence est nulle. Certes, on peut sans doute encore améliorer les réglages du régulateur pour réduire le dépassement qui se produit principalement à faible débit gaz, mais on est surtout intéressé par atteindre la consigne avec une erreur nulle tout en conservant la langue de gaz comprise entre $-l_P$ et 0.

Nous allons maintenant tester la robustesse de notre commande en modifiant la consigne ΔP_{Ref} au cours du temps et en introduisant des perturbations sur les débits d'entrée. Pour permettre d'absorber ces changements de consigne, nous réécrivons notre commande (4.15) sous la forme suivante (appelée dans la suite IP) :

$$u(t) = -K_P \Delta P(t) + K_I \int_0^t [\Delta P_{Ref} - \Delta P(\sigma)] d\sigma. \quad (4.17)$$

Ainsi, nous simulons pendant 2000 s le modèle de référence (4.10) associé à cette nouvelle commande (4.17) suivant le scénario décrit dans le tableau TAB. 4.2.

t	0 s	300 s	600 s	900 s	1200 s	2000 s
Q_G^{IN}	2 nl/min	2 nl/min	1 nl/min	3 nl/min	1 nl/min	1 nl/min
Q_L^{IN}	9 l/h	12 l/h	12 l/h	13 l/h	3 l/h	3 l/h
x_G^{Ref}	-0.75 m	-0.3 m	-1.125 m	-1.125 m	-1.125 m	-1.125 m

TAB. 4.2: Scénario du test de robustesse

Le graphique FIG. 4.22 présente en fonction du temps, la position des fronts x_G et x_L , les pressions P et Π , les débits de gaz Q_G^{IN} et Q_G^{PLV} , les débits de liquide Q_L^{IN} et Q_L^{OUT} , la différence de pression ΔP et sa valeur de référence ΔP_{Ref} ainsi que l'ouverture de la vanne u .

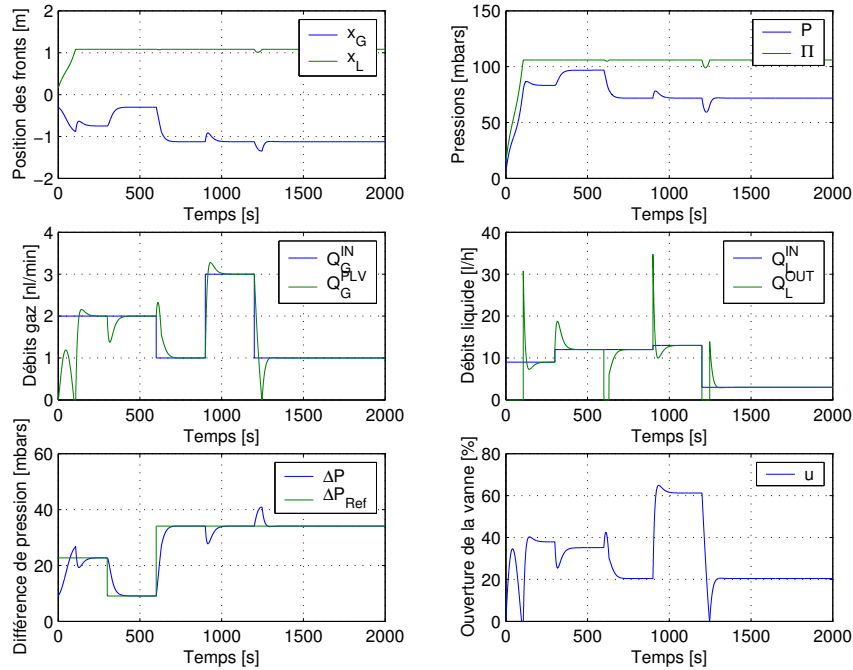


FIG. 4.22: Test de robustesse du contrôleur

Cette simulation montre la robustesse de notre régulateur. En effet, en conservant constant les réglages de la commande, l'écoulement se stabilise pour toutes les conditions de fonctionnement, le système repassant même deux fois en régime non saturé.

Expériences

Ce paragraphe décrit les résultats expérimentaux que nous avons obtenus sur notre boucle d'écoulement S^4L pour les cinq couples de débits (Q_G^{IN}, Q_L^{IN}) . Chaque expérience est menée suivant le même scénario. Tout d'abord, on maintient la vanne de prélèvement fermée et on laisse plusieurs cycles de severe slugging se produire. Puis, au début d'une période, on démarre le régulateur et on attend que l'écoulement se stabilise à la consigne $\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$. Enfin, on modifie deux fois cette consigne pour qu'elle prenne successivement les valeurs 10 mbars et 25 mbars et on attend à chaque fois la stabilisation de l'écoulement. De ce fait, pour permettre d'absorber au mieux ces changements de consigne, on utilise la commande (4.17) décrite dans le paragraphe précédent.

Remarque.

Pour nous permettre d'avoir la plage de x_G^{Ref} la plus grande possible, nous utilisons le piquage de prélèvement le plus en amont de la conduite, c'est-à-dire le plus loin du point bas.

La première expérience concerne le couple de débits $(4 \text{ nl/min}, 14 \text{ l/h})$ et a été utilisée pour ajuster les coefficients K_P et K_I de notre régulateur. Ainsi, nous avons conservé les

valeurs suivantes (EQU. 4.18) :

$$\begin{cases} K_P = 0.02 \text{ Pa}^{-1} \\ K_I = 0.001 (\text{Pa.s})^{-1}, \end{cases} \quad (4.18)$$

qui sont des valeurs très proches de celles déterminées numériquement.

Le tableau TAB. 4.3 résume le scénario de cette expérience et le graphique FIG. 4.23 en présente les résultats où la différence de pression ΔP , la consigne ΔP_{Ref} ainsi que l'ouverture de la vanne u sont tracées en fonction du temps.

Temps	0 s	127 s	330 s	513 s
Action	$u = 0$	$\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 10 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 25 \text{ mbars}$

TAB. 4.3: Scénario pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$

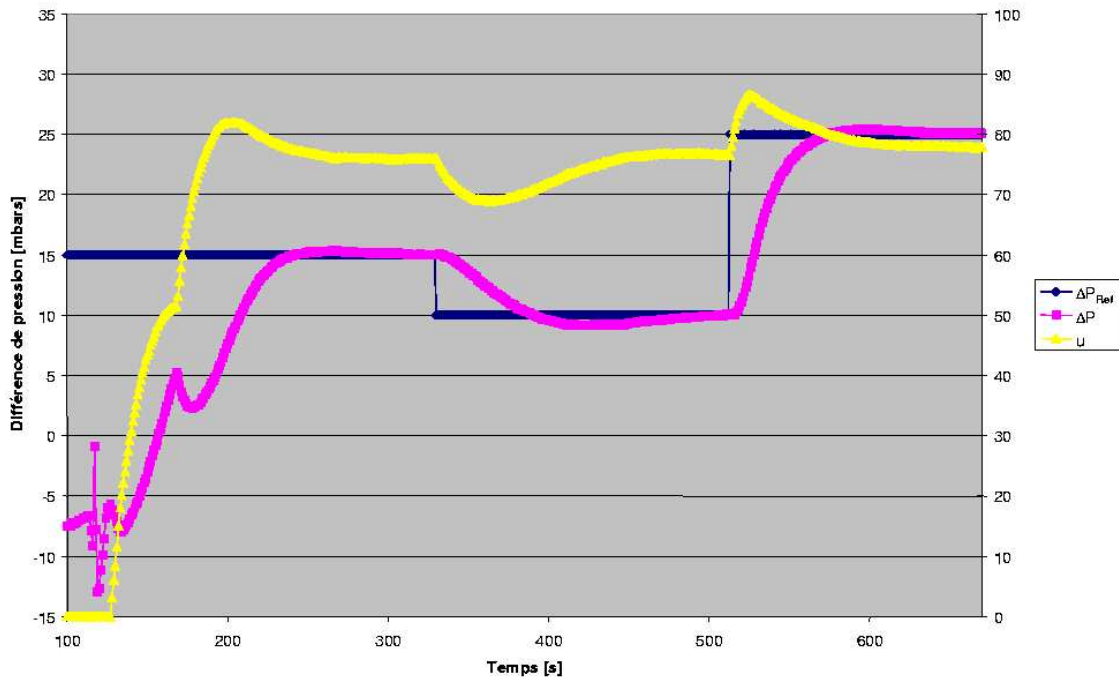


FIG. 4.23: Expérience pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$

Cette expérience montre l'efficacité de notre commande. En effet, la langue de gaz se stabilise à sa position de référence x_G^{Ref} avec une erreur tendant vers 0 dans les temps souhaités et l'ouverture de la vanne se stabilise bien à sa valeur de commande finale. De

plus, elle est robuste car, pour chaque changement de consigne, ΔP revient bien à sa valeur de référence et l'ouverture de la vanne se restabilise bien à sa valeur $\bar{u}$.

Regardons maintenant ce que donne ces valeurs de K_P et K_I (EQU. 4.18) sur les quatre autres couples de débits. Les tableaux TAB. 4.4, TAB. 4.5, TAB. 4.6 et TAB. 4.7 résument chaque scénario et les graphiques FIG. 4.24, FIG. 4.25, FIG. 4.26 et FIG. 4.27 en présentent les résultats.

Temps	0 s	157 s	419 s	658 s
Action	$u = 0$	$\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 10 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 25 \text{ mbars}$

TAB. 4.4: Scénario pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

Temps	0 s	224 s	499 s	714 s
Action	$u = 0$	$\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 10 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 25 \text{ mbars}$

TAB. 4.5: Scénario pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

Temps	0 s	282 s	587 s	805 s
Action	$u = 0$	$\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 10 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 25 \text{ mbars}$

TAB. 4.6: Scénario pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

Temps	0 s	287 s	641 s	851 s
Action	$u = 0$	$\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 10 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 25 \text{ mbars}$

TAB. 4.7: Scénario pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$

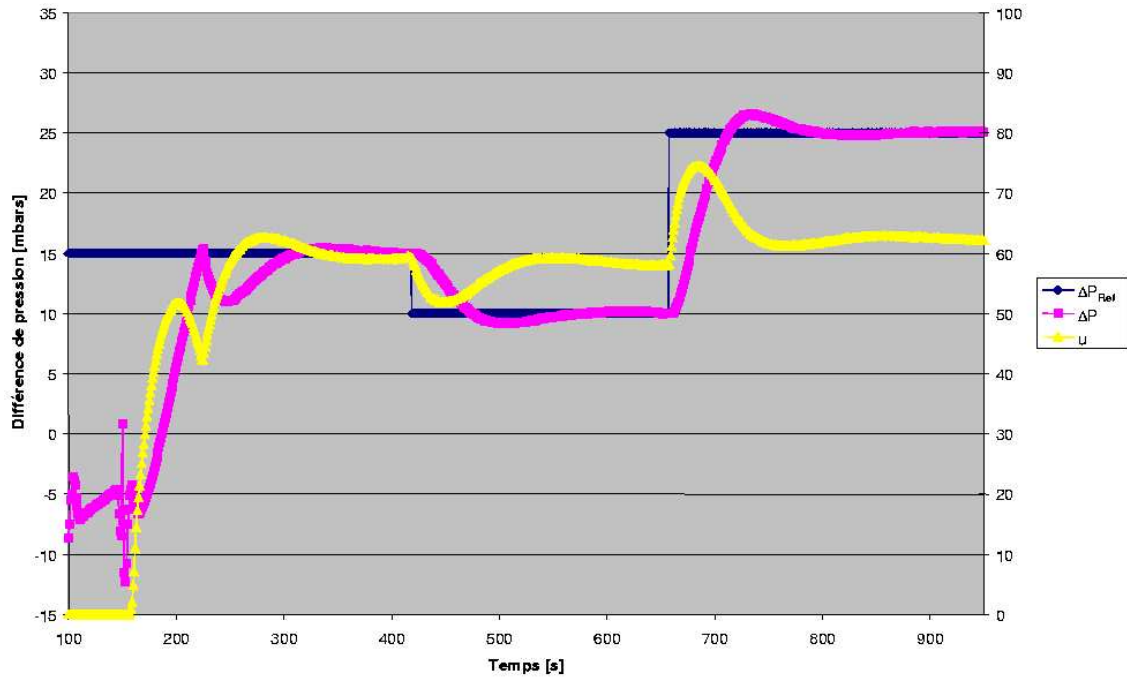


FIG. 4.24: Expérience pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

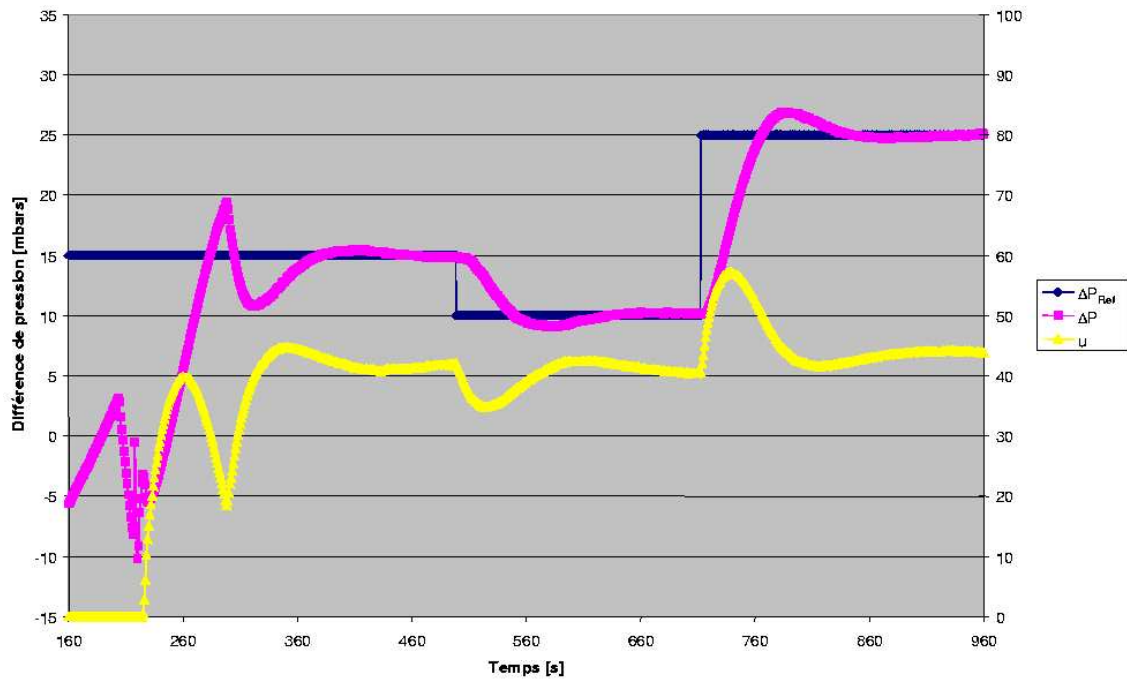


FIG. 4.25: Expérience pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

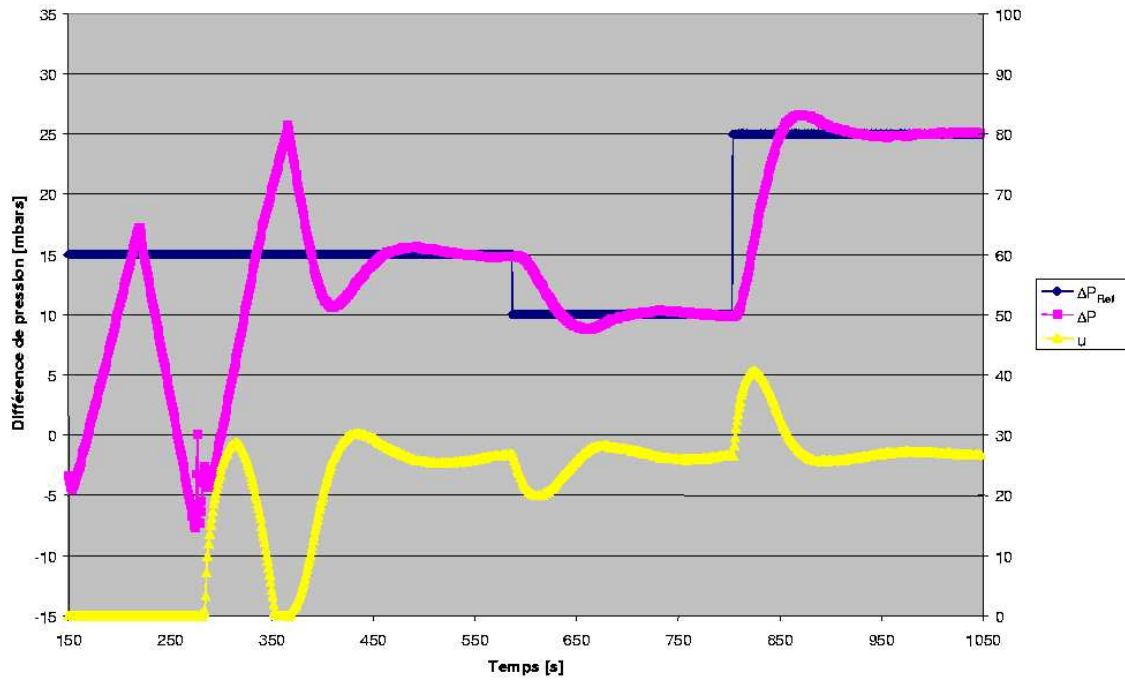


FIG. 4.26: Expérience pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

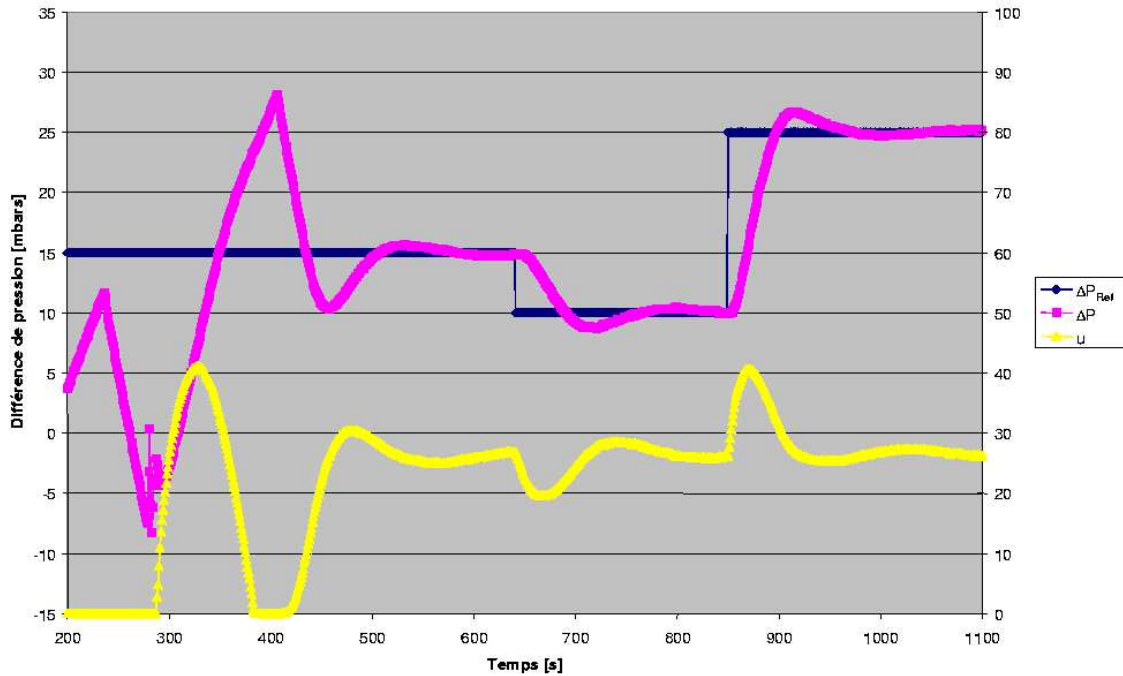


FIG. 4.27: Expérience pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$

Là encore, notre régulateur atteint des résultats à la hauteur de nos attentes en terme d'erreur sur la consigne et de temps de réponse, bien que les coefficients K_P et K_I n'aient pas été réajustés.

Effectuons maintenant un dernier test de robustesse en perturbant les débits en entrée de montage de manière à ce qu'ils simulent un écoulement à bouchons. Pendant toute la durée de l'expérience, la consigne est maintenue constante à la valeur $\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$ et les coefficients K_P et K_I restent une fois de plus inchangés (EQU. 4.18). La figure FIG. 4.28 représente le scénario mis en place sur les débits d'entrée et le graphique FIG. 4.29 en présente les résultats.

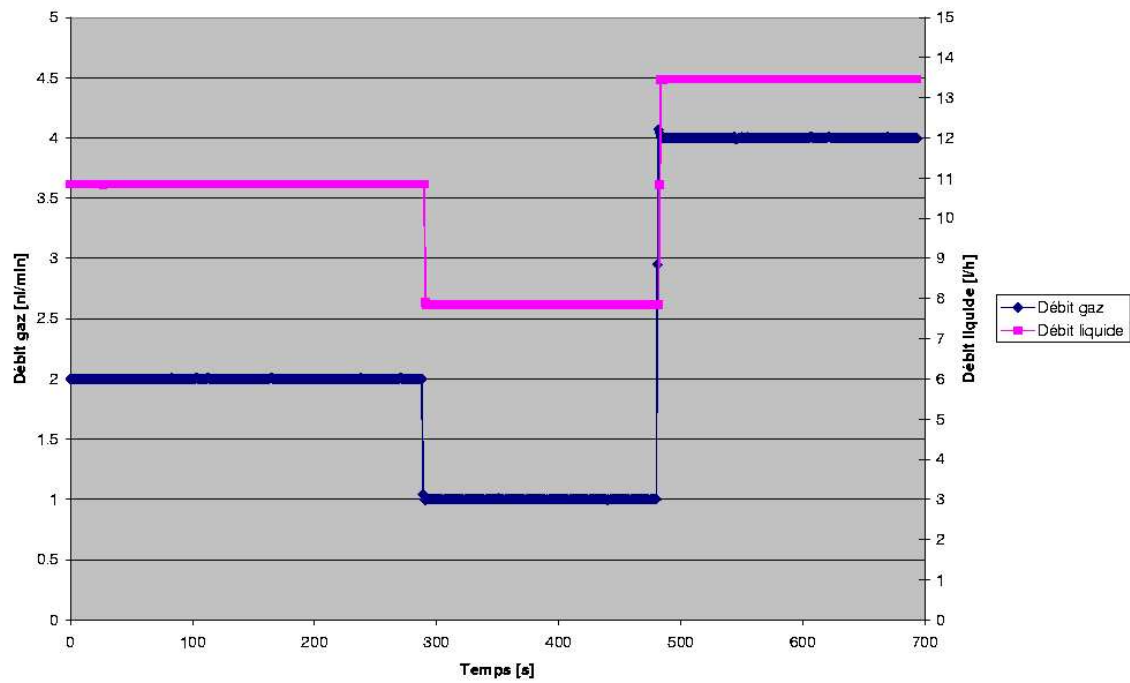


FIG. 4.28: Scénario sur les débits Q_G^{IN} et Q_L^{IN}

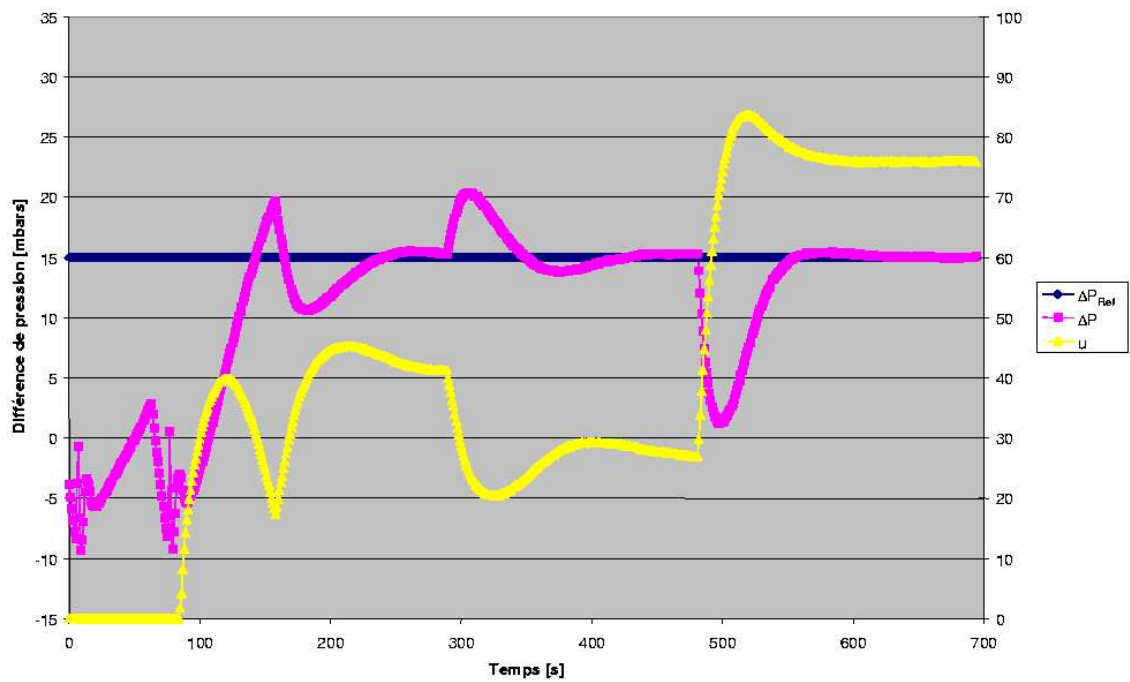


FIG. 4.29: Robustesse du contrôleur

Cette expérience montre la grande robustesse de notre régulateur. En effet, avec un seul réglage des coefficients K_P et K_I , on arrive à atteindre un état stationnaire pour une large plage de fonctionnement en annulant toujours le phénomène de severe slugging.

4.4.2 Résultats pour un système de taille industrielle

Nous allons maintenant valider numériquement notre commande (4.15) en simulant un système d'échelle industrielle. Il est défini par un diamètre de 0.2 m , une hauteur de riser de 1000 m et un volume de gaz en amont du point bas de 100 m^3 correspondant environ à 10 km de conduite. L'angle entre le pipeline et l'horizontale est de -2° et le riser est supposé vertical. De plus, la vanne de prélèvement ayant des caractéristiques classiques, elle est définie par un C_V de 20 m^2 et un coefficient γ_V égal à 12×10^{-5} .

La densité du gaz est de 6 kg/m^3 à la pression de référence P^N égale à 10^6 Pa et celle du liquide est constante égale à 800 kg/m^3 . De plus, la pression en tête de riser est supposée égale à $15 \times 10^5\text{ Pa}$ et les débits en entrée sont égaux à 5 kg/s pour le gaz et à 60 kg/s pour le liquide.

Nous déterminons la consigne ΔP_{Ref} pour obtenir la position de référence x_G^{Ref} égale à -3000 m , la valeur de $\overline{Q_G^{IN}}$ est fixée à 4 kg/s , ξ à 1 pour être proche du régime critique et τ_c est pris égal à 1000 s pour avoir un temps de réponse de l'ordre de 15 minutes. Cela implique que $K_P = 3.8 \times 10^{-5}\text{ Pa}^{-1}$ et $K_I = 1.24 \times 10^{-7}\text{ (Pa.s)}^{-1}$.

Les paramètres de cette simulation sont résumés dans le tableau TAB. 4.8.

D	l_R	β_P	β_R	v_G^+	l_G^+
0.2 m	1000 m	-2°	90°	100 m^3	10610 m
C_V	γ_V	P^N	ρ_G^N	ρ_L^N	P^{OUT}
20 m^2	12×10^{-5}	10^6 Pa	6 kg/m^3	800 kg/m^3	$15 \times 10^5\text{ Pa}$
Q_G^{IN}	Q_L^{IN}	$\overline{Q_G^{IN}}$	x_G^{Ref}	ξ	τ_c
5 kg/s	60 kg/s	4 kg/s	-3000 m	1	1000 s

TAB. 4.8: Paramètres utilisés pour le système industriel

La simulation dure 15000 s et commence en boucle ouverte ($u = 0$) pendant deux cycles de severe-slugging. Puis, à $t = 5200\text{ s}$, le contrôle débute et on laisse l'écoulement se stabiliser. Le graphique FIG. 4.30 représente en fonction du temps, la position des fronts x_G et x_L , les pressions P et Π , les débits de gaz Q_G^{IN} et Q_G^{PLV} , les débits de liquide Q_L^{IN} et Q_L^{OUT} , la différence de pression ΔP et sa valeur de référence ΔP_{Ref} ainsi que l'ouverture de la vanne u .

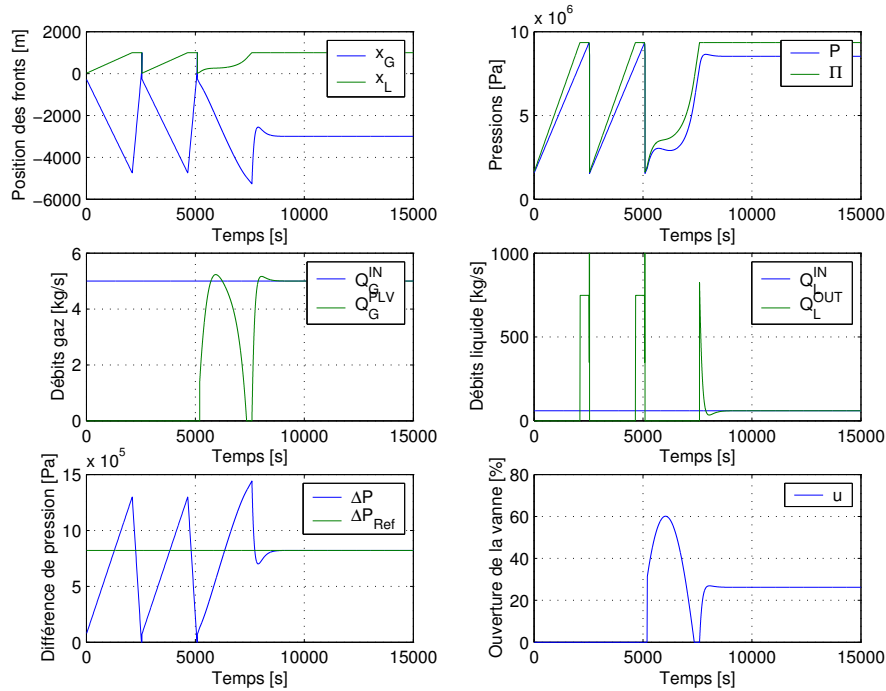


FIG. 4.30: Simulation du contrôleur sur un système de taille industrielle

Cette simulation montre l'efficacité de notre régulateur sur un système industriel. En effet, l'écoulement est stabilisé et les résultats sont ceux escomptés en terme d'erreur sur la consigne et de temps de réponse. Ainsi, en 3000 s, la différence de pression ΔP se stabilise à sa valeur de référence avec une erreur nulle et l'ouverture de la vanne atteint sa valeur de commande finale.

4.5 Conclusions

Ce système de régulation est un bon moyen pour contrôler le phénomène de severe slugging. Simple à implémenter, car étant de type proportionnel-intégral et se basant uniquement sur la mesure de deux pressions, il tient compte des caractéristiques physiques du phénomène, puisqu'il est conçu à partir du modèle réduit développé dans le chapitre 3. Il est aussi très robuste, car il atteint les performances souhaitées en terme d'erreur sur la consigne et de temps de réponse pour une large plage de fonctionnement.

Il a cependant l'inconvénient d'imposer une pression importante dans tout le système, pouvant entraîner des réductions de capacité de production. Pour pallier ce désagrément, une première solution consiste à le coupler à une pompe monophasique liquide. Une autre solution consiste à utiliser le gaz prélevé en le réinjectant à une certaine hauteur dans le riser pour diminuer la pression hydrostatique. C'est cette seconde méthode que nous allons développer dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Contrôle par by-pass

Ce chapitre présente le système complet permettant d'éliminer le phénomène de severe slugging. Le gaz prélevé en amont du point bas est maintenant réinjecté à une certaine hauteur dans le riser (FIG. 5.1).

Afin d'obtenir un écoulement stationnaire en empêchant la phase de blow-out, nous allons, là encore, nous attacher à stabiliser la langue de gaz dans le pipeline en commandant l'ouverture d'une vanne placée sur le by-pass, de sorte à obtenir des débits phasiques constants en sortie de riser.

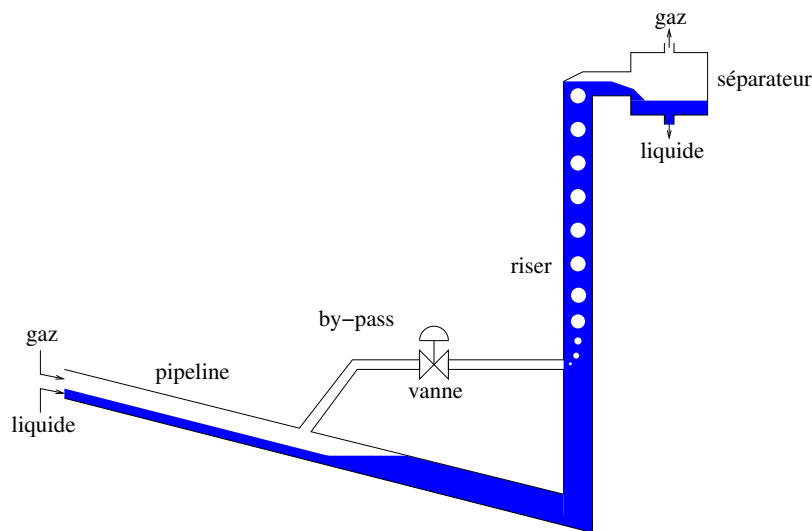


FIG. 5.1: Système avec by-pass

Ce chapitre est consacré dans un premier temps, à l'obtention d'un modèle algébro-différentiel avec retard reproduisant ce système (EQU. 5.19). On utilise pour cela, les bilans de masse pour chaque phase et on suppose l'équilibre quasi-statique des forces ainsi qu'une vitesse constante de remontée du gaz dans le riser, le retard étant alors dû à son temps de séjour. Puis, dans le but d'un contrôle sur la boucle S^4L , on effectue les simplifications sui-

vantes : On se limite au système saturé impliquant alors un retard constant et on néglige l'expansion du gaz dans le riser pour obtenir une forme explicite de la pression au point de réinjection et par conséquent un modèle explicite (EQU. 5.25). Ce chapitre présente ensuite une étude réalisée en boucle ouverte donnant un critère de design sur la hauteur de réinjection en fonction de la position de référence de la langue de gaz (EQU. 5.32), une représentation synthétique en étant donnée FIG. 5.9. Pour cela, on démontre un résultat abstrait de stabilité des E.D.O. linéaires à retard constant (LEM. 5.1), que nous appliquons au linéarisé-tangent de notre système, en supposant que l'ouverture de la vanne reste constante à sa position d'équilibre (EQU. 5.31). Puis, la commande est modélisée en utilisant les techniques de l'Automatique à deux échelles de temps (EQU. 5.34) et on s'attache à déterminer une condition de stabilité sur les paramètres du contrôleur (LEM. 5.2). Enfin, des résultats numériques et des essais expérimentaux sur S^4L sont présentés.

Comme au chapitre précédent, on adopte les hypothèses suivantes :

1. L'écoulement est isotherme et les fluides sont newtoniens,
2. Le liquide est incompressible et le gaz est un gaz parfait,
3. La fraction volumique de liquide dans le pipeline est négligeable,
4. Le bouchon de liquide est non aéré avant le point de réinjection du by-pass,
5. L'écoulement est "quasi-stationnaire" et les frottements sont négligeables,
6. Les débits d'entrée et la pression de sortie sont constants dans le temps,
7. Le gaz et le liquide sortent uniquement par le riser.

5.1 Modélisation

Nous souhaitons obtenir un système algébro-différentiel regroupant les modèles (3.15) et (3.20) des deux premières phases du severe-slugging et prenant en compte le by-pass du gaz.

5.1.1 Dimensions du système

On réinjecte maintenant le gaz prélevé dans le pipeline à une hauteur l_I du riser. Son débit est noté Q_G^{BP} et le débit de gaz sortant en sommet de riser est égal à Q_G^{OUT} . On note aussi P_I la pression au point de réinjection. La figure FIG. 5.2 récapitule les différentes grandeurs caractéristiques du système.

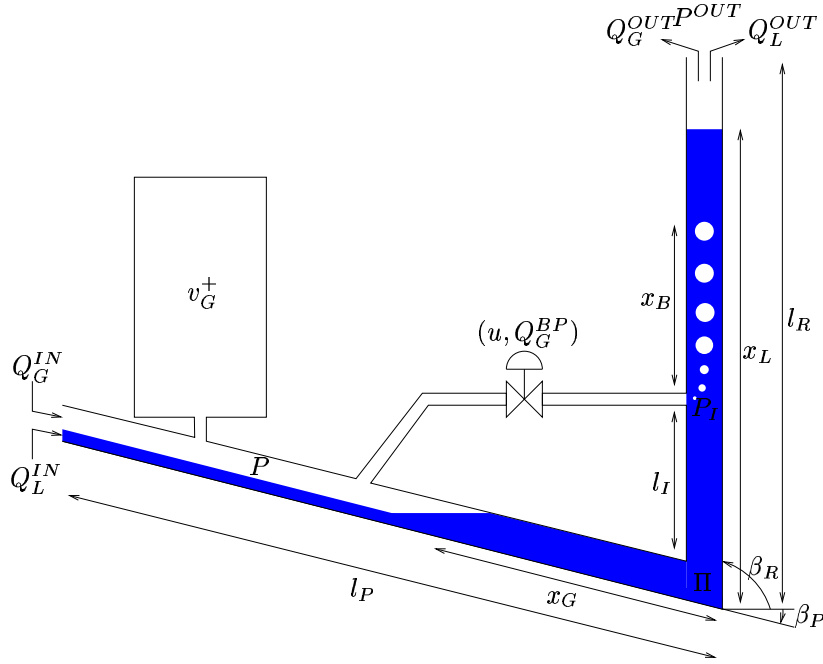


FIG. 5.2: Dimensions du problème

De plus, on suppose que $\beta_P \in [-\frac{\pi}{2}, 0[$ et que $\beta_R \in]0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui implique que :

1. $\sin \beta_P < 0$,
2. $\sin \beta_R > 0$,
3. $\sin \beta_P \neq \sin \beta_R$.

Enfin, on découpe le système en deux parties : La première, appelée “bottom”, comprend tout ce qui est placé en amont du point de réinjection, c’est-à-dire le pipeline et la partie basse du riser ($x \in [-l_P, l_I]$). La seconde, “top”, correspond à la partie supérieure du riser dans laquelle circule un écoulement polyphasique ($x \in [l_I, l_R]$). On indice par “B” les variables de la première et par “T” celles de la seconde.

5.1.2 Système d’équations

La conservation de la masse de gaz implique les deux équations suivantes :

$$\dot{m}_G^B(t) = Q_G^{IN} - Q_G^{BP}(t), \quad (5.1)$$

$$\dot{m}_G^T(t) = Q_G^{BP}(t) - Q_G^{OUT}(t). \quad (5.2)$$

De plus, la loi de conservation de la masse de liquide sur tout le système se traduit par :

$$\dot{m}_L(t) = Q_L^{IN} - Q_L^{OUT}(t), \quad (5.3)$$

avec $m_L = m_L^B + m_L^T$. D'autre part, il est facile de voir qu'on peut aussi écrire les relations algébriques suivantes :

$$m_G^B(t) = \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} P(t), \quad (5.4)$$

$$m_L^B(t) = S \rho_L^N [\min[l_I, x_L(t)] - x_G(t)], \quad (5.5)$$

$$P(t) = \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t), \quad (5.6)$$

$$\Pi(t) = P_I(t) + \rho_L^N g \sin \beta_R \min[l_I, x_L(t)], \quad (5.7)$$

$$Q_G^{BP}(t) = \alpha^{BP} u(t) \sqrt{P_I(t) [P(t) - P_I(t)]^+}, \quad (5.8)$$

où α^{BP} est défini par :

$$\alpha^{BP} = \frac{\gamma_V}{100} C_V \sqrt{\frac{\rho_G^N}{P^N}}.$$

Pour compléter le système, il reste à préciser Q_G^{OUT} , m_L^T , Q_L^{OUT} et P_I . Pour cela, reprenons le modèle NPW (2.9) dans lequel les frottements à la paroi sont négligés :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_G R_G) + \partial_x(\rho_G R_G V_G) = 0 \\ \partial_t(\rho_L R_L) + \partial_x(\rho_L R_L V_L) = 0 \\ \partial_x p = -\rho_M g \sin \beta_R. \end{cases} \quad (5.9)$$

A ces trois E.D.P. viennent s'adjoindre les lois suivantes :

1. La somme des fractions volumiques est constante égale à 1 :

$$R_G + R_L = 1.$$

2. La densité moyenne du mélange s'écrit :

$$\rho_M = \rho_G R_G + \rho_L R_L.$$

3. La densité du gaz est donnée par (2.2), celle du liquide par (2.3) :

$$\begin{cases} \rho_G(p) = \rho_G^N \frac{p}{P^N} \\ \rho_L(p) = \rho_L^N. \end{cases}$$

4. La vitesse du gaz, donnée par (2.12) en régime dispersé et par (2.13) en régime intermittent, peut se mettre sous la forme $V_G = C_0 U_M + C_\infty$. De plus, on suppose que la vitesse débitante U_M est petite par rapport à C_∞/C_0 et par conséquent, que le gaz avance dans le riser à une vitesse constante C_∞ que l'on pourra ajuster en fonction du système à contrôler :

$$V_G = C_\infty.$$

Soit Ω_L le domaine d'intégration, dépendant du temps, défini par :

$$\Omega_L(t) = [l_I, \max[l_I, x_L(t)]] .$$

Nous avons à intégrer sur Ω_L , un système de quatre équations aux dérivées partielles à quatre inconnues P , R_G , V_G et V_L . Pour ce faire, introduisons tout d'abord les notations suivantes :

$$\begin{cases} d_K(t) &= x_K(t) - l_I \\ t_K(t) &= \frac{d_K(t)}{C_\infty} . \end{cases}$$

Chacune des quatres grandeurs Q_G^{OUT} , m_L^T , Q_L^{OUT} et P_I qui manquent pour le moment à la définition du modèle fera l'objet d'une section de calcul détaillée ci-après. En préambule à leur détermination, introduisons un invariant de Riemann et calculons la valeur de m_G^T , qui s'avéreront fort utile par la suite.

Invariant de Riemann w_G

Notons $w_G(x, t) = \rho_G(x, t)R_G(x, t)$. En utilisant la loi de fermeture donnant la vitesse de la phase gazeuse dans le riser, la loi de conservation de la masse de gaz s'écrit :

$$\frac{\partial w_G}{\partial t} + C_\infty \frac{\partial w_G}{\partial x} = 0 .$$

w_G est donc un invariant de Riemann et, en notant $T(x) = \int_{l_I}^x \frac{1}{C_\infty} dx = \frac{x - l_I}{C_\infty}$, on a :

$$w_G(x, t) = w_G(l_I, t - T(x)) .$$

De plus, $Q_G^{BP}(t) = SC_\infty w_G(l_I, t)$, ce qui implique sous certaines conditions sur x , que :

$$w_G(x, t) = \frac{Q_G^{BP}(t - T(x))}{SC_\infty} .$$

Désignons maintenant par x_B la position de la plus haute bulle de gaz contenue dans le riser (qui peut être de taille nulle si le débit prélevé est nul). Cette position est toujours élément du domaine Ω_L et vérifie :

$$\begin{cases} l_I \leq x_B(t) \leq \max[l_I, x_L(t)] \\ d_B(t) \geq 0 \\ t_B(t) \geq 0 . \end{cases}$$

x_B est donc une fonction de x_L et peut être vue comme l'enveloppe décroissante de la fonction $x = x_L(t)$ restreinte au domaine $[l_I, l_R]$, moyennant une rotation d'angle $-\arctan\left(\frac{1}{C_\infty}\right) - \frac{\pi}{2}$ permettant au vecteur C_∞ d'être vertical dirigé vers le bas (FIG. 5.3).

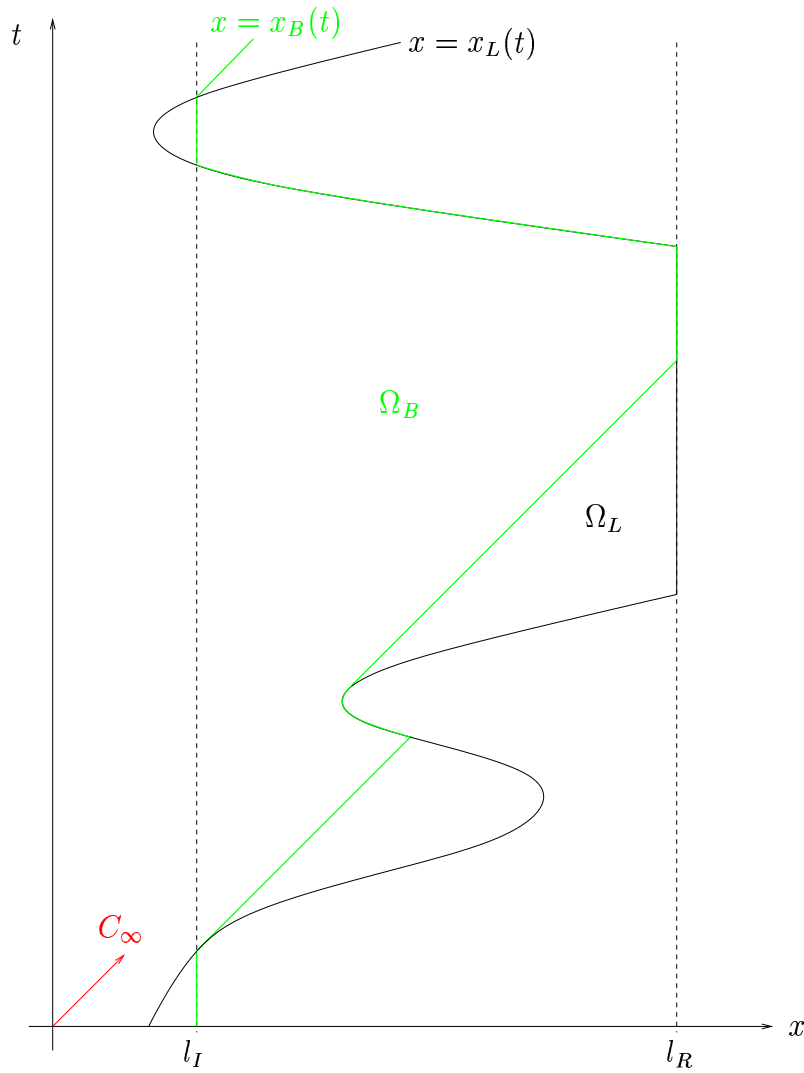


FIG. 5.3: Caractéristiques $x = x_L(t)$ et $x = x_B(t)$

Il est facile de voir que sa vitesse est donnée par la formule “complexe” :

$$\dot{x}_B = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_L < l_I) \\ 0 & \text{si } (x_L = l_I) \text{ et } (\dot{x}_L < 0) \\ \dot{x}_L & \text{si } (x_B = x_L) \text{ et } (\dot{x}_L < C_\infty) \\ C_\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

que l’on peut noter formellement par :

$$\dot{x}_B = \mathcal{B}(x_B, x_L, \dot{x}_L). \quad (5.10)$$

En définissant le domaine Ω_B dépendant du temps par $\Omega_B(t) = [l_I, x_B(t)]$, on obtient alors l'expression de w_G :

$$w_G(x, t) = \begin{cases} \frac{Q_G^{BP}(t - T(x))}{SC_\infty} & \text{si } x \in \Omega_B(t) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.11)$$

Utilisons maintenant cet invariant pour déterminer la masse de gaz contenue dans le riser.

Calcul de la masse de gaz contenue dans la partie haute du riser m_G^T

La masse de gaz est donnée par la formule :

$$m_G^T(t) = S \int_{\Omega_L(t)} w_G(x, t) dx.$$

Or w_G est nul pour $x > x_B$. Donc :

$$\begin{aligned} m_G^T(t) &= S \int_{\Omega_B(t)} w_G(x, t) dx, \\ &= \frac{1}{C_\infty} \int_{l_I}^{x_B(t)} Q_G^{BP}(t - T(x)) dx. \end{aligned} \quad (5.12)$$

En effectuant le changement de variable $\tau = t - T(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} m_G^T(t) &= \frac{1}{C_\infty} \int_{t-T(l_I)}^{t-T[x_B(t)]} -C_\infty Q_G^{BP}(\tau) d\tau, \\ &= \int_{t-t_B(t)}^t Q_G^{BP}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer chacune des quatres grandeurs Q_G^{OUT} , m_L^T , Q_L^{OUT} et P_I .

Calcul du débit de gaz sortant du riser Q_G^{OUT}

En dérivant l'équation (5.13), on obtient :

$$\dot{m}_G^T(t) = Q_G^{BP}(t) - \left(1 - \frac{\dot{x}_B(t)}{C_\infty}\right) Q_G^{BP}(t - t_B(t)).$$

En remplaçant $\dot{m}_G^T$ par son expression donnée par la loi de conservation de la masse de gaz dans le riser (5.2), on obtient le débit de sortie du gaz :

$$Q_G^{OUT}(t) = \left(1 - \frac{\dot{x}_B(t)}{C_\infty}\right) Q_G^{BP}(t - t_B(t)). \quad (5.14)$$

Calcul de la masse de liquide contenue dans la partie haute du riser m_L^T

La somme des masses de gaz et de liquide s'exprime sous la forme suivante :

$$m_G^T(t) + m_L^T(t) = S \int_{\Omega_L(t)} [\rho_G(x, t) R_G(x, t) + \rho_L(x, t) R_L(x, t)] dx.$$

Or, la loi de conservation de la quantité de mouvement du modèle NPW simplifié (5.9) implique que :

$$\begin{aligned} m_G^T(t) + m_L^T(t) &= \frac{-S}{g \sin \beta_R} \int_{\Omega_L(t)} \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) dx, \\ &= \frac{-S}{g \sin \beta_R} [P^{OUT} - P_I(t)]. \end{aligned}$$

Par conséquent, m_L^T s'exprime sous la forme :

$$m_L^T(t) = \frac{S}{g \sin \beta_R} [P_I(t) - P^{OUT}] - m_G^T(t). \quad (5.15)$$

Calcul du débit de liquide sortant du riser Q_L^{OUT}

Le débit de liquide sortant du riser est donné par la relation suivante :

$$Q_L^{OUT}(t) = \begin{cases} [Q_L^{IN} - \dot{m}_L(t)]^+ & \text{si } (x_L(t) = l_R) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or on a :

$$m_L(t)|_{x_L=l_R} = S \rho_L^N [l_I - x_G(t)] + \frac{S}{g \sin \beta_R} [P_I(t) - P^{OUT}] - m_G^T(t),$$

ce qui implique que :

$$Q_L^{OUT}(t)|_{x_L=l_R} = \left[Q_L^{IN} + S \rho_L^N \dot{x}_G(t) - \frac{S}{g \sin \beta_R} \dot{P}_I(t) + Q_G^{BP}(t) - Q_G^{OUT}(t) \right]^+.$$

On obtient par conséquent :

$$Q_L^{OUT}(t) = \begin{cases} \left[Q_L^{IN} + S \rho_L^N \dot{x}_G(t) - \frac{S}{g \sin \beta_R} \dot{P}_I(t) + Q_G^{BP}(t) - Q_G^{OUT}(t) \right]^+ & \text{si } (x_L(t) = l_R) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

que l'on peut écrire formellement :

$$Q_L^{OUT}(t) = \mathcal{Z}(x_L, Q_G^{BP}, Q_G^{OUT}, \dot{x}_G, \dot{P}_I)|_t. \quad (5.16)$$

Calcul de la pression au point d'injection P_I

La densité moyenne ρ_M du mélange diphasique dans le riser peut s'écrire sous la forme :

$$\rho_M(x, t) = w_G(x, t) + \rho_L^N R_L(x, t).$$

Or, $w_G = \rho_G R_G = \frac{\rho_G^N}{P^N} p(1 - R_L)$, ce qui implique que :

$$R_L(x, t) = 1 - \frac{P^N}{\rho_G^N} \frac{w_G(x, t)}{p(x, t)}.$$

En remplaçant w_G par son expression (5.11), on obtient :

$$R_L(x, t) = \begin{cases} 1 - \frac{P^N}{S \rho_G^N C_\infty} \frac{Q_G^{BP}(t - T(x))}{p(x, t)} & \text{si } x \in \Omega_B(t) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, la densité du mélange s'écrit en fonction de la pression dans le riser et des différents débits Q_G^{BP} :

$$\rho_M(x, t) = \begin{cases} \rho_L^N + \frac{1}{SC_\infty} \left(1 - \frac{\rho_L^N P^N}{\rho_G^N p(x, t)} \right) Q_G^{BP}(t - T(x)) & \text{si } x \in \Omega_B(t) \\ \rho_L^N & \text{sinon,} \end{cases}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\rho_M(x, t) = \rho_L^N + \frac{\mathbb{1}_{\Omega_B(t)}(x)}{SC_\infty} \left(1 - \frac{\rho_L^N P^N}{\rho_G^N p(x, t)} \right) Q_G^{BP}(t - T(x)),$$

$\mathbb{1}_D(x)$ étant défini par :

$$\mathbb{1}_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant calculer la pression $p(x, t)$ en tout point du riser, en résolvant le problème de Cauchy formulé à partir de la loi de conservation de quantité de mouvement du système E.D.P. (5.9) (t étant alors un paramètre) :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) &= -g \sin \beta_R \left[\rho_L^N + \frac{\mathbb{1}_{\Omega_B(t)}(x)}{SC_\infty} \left(1 - \frac{\rho_L^N P^N}{\rho_G^N p(x, t)} \right) Q_G^{BP}(t - T(x)) \right] \\ p(x_L(t)) &= P^{OUT}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Et la pression de réinjection P_I s'obtient, de ce fait, en prenant :

$$P_I(t) = p(l_I, t),$$

que l'on peut écrire formellement :

$$P_I(t) = \mathcal{F}_I \left(Q_G^{BP} \right)_{[t-t_B(t), t]}, \quad (5.18)$$

$\mathcal{F}_I$ étant une fonctionnelle dépendant des différents débits Q_G^{BP} entre les instants $t - t_B(t)$ et t et étant solution du problème de Cauchy en espace (5.17).

Récapitulatif

Le système d'équations est donné par les relations (5.1), (5.2), (5.3), (5.10), (5.4), (5.5), (5.15), (5.6), (5.7), (5.18), (5.8), (5.14) et (5.16) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{m}_G^B(t) &= Q_G^{IN} - Q_G^{BP}(t) \\ \dot{m}_G^T(t) &= Q_G^{BP}(t) - Q_G^{OUT}(t) \\ \dot{m}_L^B(t) + \dot{m}_L^T(t) &= Q_L^{IN} - Q_L^{OUT}(t) \\ \dot{x}_B(t) &= \mathcal{B}(x_B, x_L, \dot{x}_L)|_t \\ m_G^B(t) &= \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} P(t) \\ m_L^B(t) &= S \rho_L^N [\min[l_I, x_L(t)] - x_G(t)] \\ m_L^T(t) &= \frac{S}{g \sin \beta_R} [P_I(t) - P^{OUT}] - m_G^T(t) \\ P(t) &= \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t) \\ \Pi(t) &= P_I(t) + \rho_L^N g \sin \beta_R \min[l_I, x_L(t)] \\ P_I(t) &= \mathcal{F}_I \left(Q_G^{BP} \right)_{[t-t_B(t), t]} \\ Q_G^{BP}(t) &= \alpha^{BP} u(t) \sqrt{P_I(t) [P(t) - P_I(t)]^+} \\ Q_G^{OUT}(t) &= \left(1 - \frac{\dot{x}_B(t)}{C_\infty} \right) Q_G^{BP}(t - t_B(t)) \\ Q_L^{OUT}(t) &= \mathcal{Z}(x_L, Q_G^{BP}, Q_G^{OUT}, \dot{x}_G, \dot{P}_I)|_t. \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Remarque.

La seconde équation donnant l'évolution au cours du temps de m_G^T , est équivalente à l'équation (5.13) déterminant sa valeur comme l'intégrale des débits du by-pass. On utilisera dans la suite ces deux formulations de manière équivalente.

5.1.3 Modèle simplifié

La grande complexité du système (5.19) nous oblige à faire quelques hypothèses supplémentaires pour pouvoir l'étudier :

1. Nous nous limitons au régime saturé, dans lequel le front de liquide ainsi que les bulles de gaz ont atteint le sommet du riser. On suppose par conséquent que :

$$x_B(t) = x_L(t) = l_R.$$

De plus, pour simplifier l'étude de stabilité du régulateur, on suppose aussi que du liquide peut rentrer par le sommet du riser, c'est-à-dire que Q_L^{OUT} peut très bien être négatif.

En introduisant les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_R = l_R - l_I \\ t_R = \frac{d_R}{C_\infty}, \end{array} \right.$$

le système d'équations (5.19) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{m}_G^B(t) & = & Q_G^{IN} - Q_G^{BP}(t) \\ \dot{m}_G^T(t) & = & Q_G^{BP}(t) - Q_G^{OUT}(t) \\ m_G^B(t) & = & \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} P(t) \\ m_L^B(t) & = & S \rho_L^N [l_I - x_G(t)] \\ m_L^T(t) & = & \frac{S}{g \sin \beta_R} [P_I(t) - P^{OUT}] - m_G^T(t) \\ P(t) & = & \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t) \\ \Pi(t) & = & P_I(t) + \rho_L^N g \sin \beta_R l_I \\ P_I(t) & = & \mathcal{F}_I \left(Q_G^{BP} \Big|_{[t-t_R, t]} \right) \\ Q_G^{BP}(t) & = & \alpha^{BP} u(t) \sqrt{P_I(t) [P(t) - P_I(t)]^+} \\ Q_G^{OUT}(t) & = & Q_G^{BP}(t - t_R) \\ Q_L^{OUT}(t) & = & Q_L^{IN} + S \rho_L^N \dot{x}_G(t) - \frac{S}{g \sin \beta_R} \dot{P}_I(t) + Q_G^{BP}(t) - Q_G^{OUT}(t). \end{array} \right. \quad (5.20)$$

2. Pour pouvoir écrire P_I explicitement en fonction des variables du système, nous supposons que les effets de l'expansion du gaz sont négligeables (hypothèse discutable pour des risers de grande taille, mais valide pour ceux de petite taille et en particulier pour la boucle S^4L). Cela revient donc à prendre la pression $p(x, t)$ constante égale à P^{OUT} dans (5.17) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) & = & -g \sin \beta_R \left[\rho_L^N + \frac{1}{SC_\infty} \left(1 - \frac{\rho_L^N P^N}{\rho_G^N P^{OUT}} \right) Q_G^{BP}(t - T(x)) \right] \\ p(x_L(t)) & = & P^{OUT}. \end{array} \right.$$

Notons maintenant :

$$r_\rho = \frac{\rho_L^N P^N}{\rho_G^N P^{OUT}}.$$

r_ρ est toujours strictement supérieur à 1. En effet, soit ρ_G^{OUT} la densité du gaz et

ρ_L^{OUT} la densité du liquide pris à la pression P^{OUT} . Elles sont données par :

$$\begin{cases} \rho_G^{OUT} &= \rho_G^N \frac{P^{OUT}}{P^N} \\ \rho_L^{OUT} &= \rho_L^N, \end{cases}$$

et, par conséquent, on a :

$$r_\rho = \frac{\rho_L^{OUT}}{\rho_G^{OUT}},$$

ce qui impose que $r_\rho > 1$ car la densité du liquide est toujours supérieure à celle du gaz.

Nous sommes maintenant capable de résoudre explicitement ce nouveau problème de Cauchy. Pour cela, intégrons l'équation différentielle sur le domaine $[x, l_R]$. On a :

$$\int_x^{l_R} \frac{\partial p}{\partial y}(y, t) dy = -g \sin \beta_R \int_x^{l_R} \left[\rho_L^N + \frac{1}{SC_\infty} (1 - r_\rho) Q_G^{BP}(t - T(y)) \right] dy.$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} P^{OUT} - p(x, t) &= -\rho_L^N g \sin \beta_R \int_x^{l_R} dy - \frac{g \sin \beta_R}{SC_\infty} (1 - r_\rho) \int_x^{l_R} Q_G^{BP}(t - T(y)) dy, \\ p(x, t) &= P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R (l_R - x) + \frac{g \sin \beta_R}{SC_\infty} (1 - r_\rho) \int_x^{l_R} Q_G^{BP}(t - T(y)) dy. \end{aligned}$$

Ainsi, la pression de réinjection $P_I(t) = p(l_I, t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} P_I(t) &= P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R d_R + \frac{g \sin \beta_R}{S} (1 - r_\rho) \frac{1}{C_\infty} \int_{l_I}^{l_R} Q_G^{BP}(t - T(x)) dx \\ &= P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R d_R + \frac{g \sin \beta_R}{S} (1 - r_\rho) m_G^T(t). \end{aligned}$$

De plus, nous pouvons maintenant exprimer m_L^T et Q_L^{OUT} sous la forme :

$$\begin{aligned} m_L^T(t) &= S \rho_L^N d_R - r_\rho m_G^T(t), \\ Q_L^{OUT}(t) &= Q_L^{IN} + S \rho_L^N \dot{x}_G(t) + r_\rho [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{OUT}(t)], \end{aligned}$$

et le système d'équations s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{m}_G^B(t) & = & Q_G^{IN} - Q_G^{BP}(t) \\ \dot{m}_G^T(t) & = & Q_G^{BP}(t) - Q_G^{OUT}(t) \\ m_G^B(t) & = & \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} P(t) \\ m_L^B(t) & = & S \rho_L^N [l_I - x_G(t)] \\ m_L^T(t) & = & S \rho_L^N d_R - r_\rho m_G^T(t) \\ P(t) & = & \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t) \\ \Pi(t) & = & P_I(t) + \rho_L^N g \sin \beta_R l_I \\ P_I(t) & = & P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R d_R + \frac{g \sin \beta_R}{S} (1 - r_\rho) m_G^T(t) \\ Q_G^{BP}(t) & = & \alpha^{BP} u(t) \sqrt{P_I(t) [P(t) - P_I(t)]^+} \\ Q_G^{OUT}(t) & = & Q_G^{BP}(t - t_R) \\ Q_L^{OUT}(t) & = & Q_L^{IN} + S \rho_L^N \dot{x}_G(t) + r_\rho [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{OUT}(t)] . \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant modifier ce modèle pour faire apparaître explicitement la dynamique des pressions P et Π .

Evolution de P

Déterminons l'évolution au cours du temps de P . On a :

$$m_G^B(t) = \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} P(t).$$

En dérivant cette équation par rapport au temps et en substituant $\dot{m}_G^B$ par son expression, on obtient :

$$\dot{P}(t) = \frac{P^N}{\rho_G^N v_G^+} [Q_G^{IN} - Q_G^{BP}(t)] . \quad (5.21)$$

Evolution de Π

Déterminons l'évolution au cours du temps de la pression en pied de riser Π . On a :

$$\Pi(t) = P_I(t) + \rho_L^N g \sin \beta_R l_I.$$

En remplaçant P_I par son expression, on arrive à :

$$\Pi(t) = P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R l_R + \frac{g \sin \beta_R}{S} (1 - r_\rho) m_G^T(t).$$

En dérivant cette équation par rapport au temps et en substituant $\dot{m}_G^T$ par son expression, on obtient :

$$\dot{\Pi}(t) = \frac{g \sin \beta_R}{S} (1 - r_\rho) [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{BP}(t - t_R)]. \quad (5.22)$$

Evolution de x_G

Déterminons l'évolution de la langue de gaz x_G au cours du temps. On a :

$$P(t) = \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_P x_G(t) \implies x_G(t) = \frac{\Pi(t) - P(t)}{\rho_L^N g \sin \beta_P}.$$

En remplaçant $\dot{P}$ et $\dot{\Pi}$ par leur expression (5.21) et (5.22), on obtient :

$$\dot{x}_G(t) = \frac{P^N}{\rho_G^N \rho_L^N g \sin \beta_P v_G^+} [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{IN}] + \frac{\sin \beta_R (1 - r_\rho)}{S \rho_L^N \sin \beta_P} [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{BP}(t - t_R)]. \quad (5.23)$$

Calcul de Q_L^{OUT}

Le débit de liquide sortant du riser Q_L^{OUT} est donné par :

$$Q_L^{OUT}(t) = Q_L^{IN} + S \rho_L^N x_G(t) + r_\rho [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{BP}(t - t_R)].$$

En remplaçant x_G par son expression (5.23), on obtient :

$$Q_L^{OUT}(t) = Q_L^{IN} + \frac{S P^N}{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^+} [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{IN}] + \left(r_\rho + (1 - r_\rho) \frac{\sin \beta_R}{\sin \beta_P} \right) [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{BP}(t - t_R)]. \quad (5.24)$$

Conclusion

Le modèle s'exprime sous la forme du système algébro-différentiel à retard constant suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
\dot{P}(t) & = & \frac{P^N}{\rho_G^N v_G^+} [Q_G^{IN} - Q_G^{BP}(t)] \\
\dot{\Pi}(t) & = & \frac{g \sin \beta_R}{S} (1 - r_\rho) [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{BP}(t - t_R)] \\
P_I(t) & = & \Pi(t) - \rho_L^N g \sin \beta_R l_I \\
x_G(t) & = & \frac{\Pi(t) - P(t)}{\rho_L^N g \sin \beta_P} \\
m_G^B(t) & = & \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} P(t) \\
m_G^T(t) & = & \frac{S}{g \sin \beta_R (1 - r_\rho)} [P_I(t) - P^{OUT} - \rho_L^N g \sin \beta_R d_R] \\
m_L^B(t) & = & S \rho_L^N [l_I - x_G(t)] \\
m_L^T(t) & = & S \rho_L^N d_R - r_\rho m_G^T(t) \\
Q_G^{BP}(t) & = & \alpha^{BP} u(t) \sqrt{P_I(t) [P(t) - P_I(t)]^+} \\
Q_G^{OUT}(t) & = & Q_G^{BP}(t - t_R) \\
Q_L^{OUT}(t) & = & Q_L^{IN} + \frac{S P^N}{\rho_G^N g \sin \beta_P v_G^+} [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{IN}] \\
& & + \left(r_\rho + (1 - r_\rho) \frac{\sin \beta_R}{\sin \beta_P} \right) [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{BP}(t - t_R)] .
\end{array} \right. \quad (5.25)$$

5.1.4 Espace des phases

Ayant restreint notre étude au régime saturé, la pression au point de réinjection P_I atteint sa valeur maximale $P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R d_R$ pour $Q_G^{BP} = 0$ et lorsque ce débit tend vers $+\infty$, P_I tend vers une valeur minimale supérieure à P^{OUT} , correspondant au fait qu'il n'y a que du gaz dans la partie supérieure du riser. Par conséquent, en notant $S_\Pi^{BP} = [P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R l_I, P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R l_R]$, on a directement :

$$\Pi \in S_\Pi^{BP}.$$

De plus, la langue de gaz étant comprise entre $-l_P$ et 0, on a :

$$\Pi + \rho_L^N g \sin \beta_P l_P \leq P \leq \Pi.$$

En notant $S_P^{BP} = [P^{OUT} + \rho_L^N g (\sin \beta_P l_P + \sin \beta_R l_I), P^{OUT} + \rho_L^N g \sin \beta_R l_R]$, on obtient :

$$P \in S_P^{BP}.$$

En conclusion, l'espace des phases D^{BP} du système (5.25) est défini par :

$$D^{BP} = \{(P, \Pi) \in S_P^{BP} \times S_\Pi^{BP} \mid \Pi + \rho_L^N g \sin \beta_P l_P \leq P \leq \Pi\}. \quad (5.26)$$

5.1.5 Etat stationnaire

On note $\overline{x_G}$, $\overline{m_G^B}$, $\overline{m_G^T}$, $\overline{m_L^B}$, $\overline{m_L^T}$, $\overline{P}$, $\overline{\Pi}$, $\overline{P_I}$, $\overline{Q_G^{BP}}$, $\overline{Q_G^{OUT}}$, $\overline{Q_L^{OUT}}$ et $\overline{u}$ les valeurs à l'équilibre de chaque variable du système. L'équation différentielle du modèle (5.25) donnant l'évolution de P au cours du temps implique que :

$$\overline{Q_G^{BP}} = Q_G^{IN}.$$

On en déduit directement que :

$$\overline{Q_G^{OUT}} = Q_G^{IN},$$

$$\overline{Q_L^{OUT}} = Q_L^{IN}.$$

De plus, l'équation (5.13) (qui est équivalente à l'équation différentielle de (5.25) donnant l'évolution de Π) nous permet de déterminer la valeur stationnaire de m_G^T :

$$\overline{m_G^T} = t_R Q_G^{IN}.$$

Ainsi, on trouve immédiatement que :

$$\overline{P_I} = P^{OUT} + g \sin \beta_R \left(\rho_L^N + \frac{1 - r_\rho}{SC_\infty} Q_G^{IN} \right) d_R,$$

$$\overline{\Pi} = \overline{P_I} + \rho_L^N g \sin \beta_R l_I,$$

$$\overline{m_L^T} = \left(S \rho_L^N - \frac{r_\rho}{C_\infty} Q_G^{IN} \right) d_R.$$

Enfin, comme pour le prélèvement, définissons $\Delta P_{Ref} = \overline{\Pi} - \overline{P} = \rho_L^N g \sin \beta_P x_G^{Ref}$ la "position" à laquelle on souhaite stabiliser la langue de gaz. On a alors :

$$\overline{P} = \overline{\Pi} - \Delta P_{Ref},$$

ce qui implique que :

$$\overline{x_G} = \frac{\Delta P_{Ref}}{\rho_L^N g \sin \beta_P},$$

$$\overline{m_G^B} = \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} \overline{P},$$

$$\overline{m_L^B} = S \rho_L^N l_I - \frac{S \Delta P_{Ref}}{g \sin \beta_P},$$

$$\overline{u} = \frac{Q_G^{IN}}{\alpha^{BP} \sqrt{\overline{P_I} [\rho_L^N g \sin \beta_R l_I - \Delta P_{Ref}]}.$$

En définitive, l'état stationnaire est donné par la famille à un paramètre ΔP_{Ref} suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overline{x}_G & = & \frac{\Delta P_{Ref}}{\rho_L^N g \sin \beta_P} \\ \overline{m}_G^B & = & \frac{\rho_G^N v_G^+}{P^N} \overline{P} \\ \overline{m}_G^T & = & t_R Q_G^{IN} \\ \overline{m}_L^B & = & S \rho_L^N l_I - \frac{S \Delta P_{Ref}}{g \sin \beta_P} \\ \overline{m}_L^T & = & \left(S \rho_L^N - \frac{r_\rho}{C_\infty} Q_G^{IN} \right) d_R \\ \overline{P} & = & \overline{\Pi} - \Delta P_{Ref} \\ \overline{\Pi} & = & \overline{P}_I + \rho_L^N g \sin \beta_R l_I \\ \overline{P}_I & = & P^{OUT} + g \sin \beta_R \left(\rho_L^N + \frac{1 - r_\rho}{S C_\infty} Q_G^{IN} \right) d_R \\ \overline{Q}_G^{BP} & = & Q_G^{IN} \\ \overline{Q}_G^{OUT} & = & Q_G^{IN} \\ \overline{Q}_L^{OUT} & = & Q_L^{IN} \\ \overline{u} & = & \frac{Q_G^{IN}}{\alpha^{BP} \sqrt{\overline{P}_I [\rho_L^N g \sin \beta_R l_I - \Delta P_{Ref}]}}. \end{array} \right. \quad (5.27)$$

Pour que $\overline{u}$ soit toujours défini, il faut s'assurer que $\rho_L^N g \sin \beta_R l_I - \Delta P_{Ref} > 0$ ce qui est équivalent à :

$$\sin \beta_R l_I > \sin \beta_P x_G^{Ref}.$$

De plus, pour avoir $\overline{u}$ compris entre 0 et 100%, on impose la condition suivante sur le couple (x_G^{Ref}, l_I) :

$$\alpha l_I^2 + \beta (x_G^{Ref}) l_I + \gamma (x_G^{Ref}) \geq 0,$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & -A \sin \beta_R \\ \beta(x_G^{Ref}) & = & B \sin \beta_R + A \sin \beta_P x_G^{Ref} \\ \gamma(x_G^{Ref}) & = & -B \sin \beta_P x_G^{Ref} - \frac{1}{\rho_L^N g} \left(\frac{Q_G^{IN}}{100 \alpha^{BP}} \right)^2 \\ A & = & g \sin \beta_R \left(\rho_L^N + \frac{1 - r_\rho}{SC_\infty} Q_G^{IN} \right) \\ B & = & P^{OUT} + A l_R. \end{array} \right.$$

Or, la pression de réinjection P_I est toujours supérieure à la pression de sortie P^{OUT} et cela doit en particulier être vrai à l'état d'équilibre : $\overline{P}_I \geq P^{OUT}$. Cela signifie que :

$$\rho_L^N + \frac{1 - r_\rho}{SC_\infty} Q_G^{IN} \geq 0. \quad (5.28)$$

On a par conséquent $\alpha \leq 0$ et l_I doit donc être compris entre les deux racines $l_I^m(x_G^{Ref})$ et $l_I^M(x_G^{Ref})$ définies par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} l_I^m(x_G^{Ref}) & = & \frac{-\beta(x_G^{Ref}) + \sqrt{\Delta(x_G^{Ref})}}{2\alpha} \\ l_I^M(x_G^{Ref}) & = & \frac{-\beta(x_G^{Ref}) - \sqrt{\Delta(x_G^{Ref})}}{2\alpha}, \end{array} \right.$$

le discriminant étant égal à $\Delta(x_G^{Ref}) = \left(B \sin \beta_R - A \sin \beta_P x_G^{Ref} \right)^2 - \frac{4A \sin \beta_R}{\rho_L^N g} \left(\frac{Q_G^{IN}}{100 \alpha^{BP}} \right)^2$.

De plus, on peut montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} l_I^m(x_G^{Ref}) & > & \frac{\sin \beta_P}{\sin \beta_R} x_G^{Ref} \\ l_I^M(x_G^{Ref}) & > & l_R. \end{array} \right.$$

En définitive, la condition s'écrit :

$$l_I^m(x_G^{Ref}) \leq l_I \leq l_R.$$

Remarque.

Notons que cette condition est un premier critère de design pour notre contrôleur et que nous pouvons jouer sur la valeur du C_V de la vanne pour "élargir" la gamme des (x_G^{Ref}, l_I) admissibles.

La figure FIG. 5.4 représente, pour différentes hauteurs l_I , l'ouverture stationnaire $\bar{u}$ en fonction de x_G^{Ref} élément de $[-l_P, 0]$, les paramètres correspondant aux données de la boucle S^4L avec un débit de gaz de 1 nl/min. On remarque que la plage de valeurs admissibles pour x_G^{Ref} est ici plus restreinte que dans le cas du prélèvement.

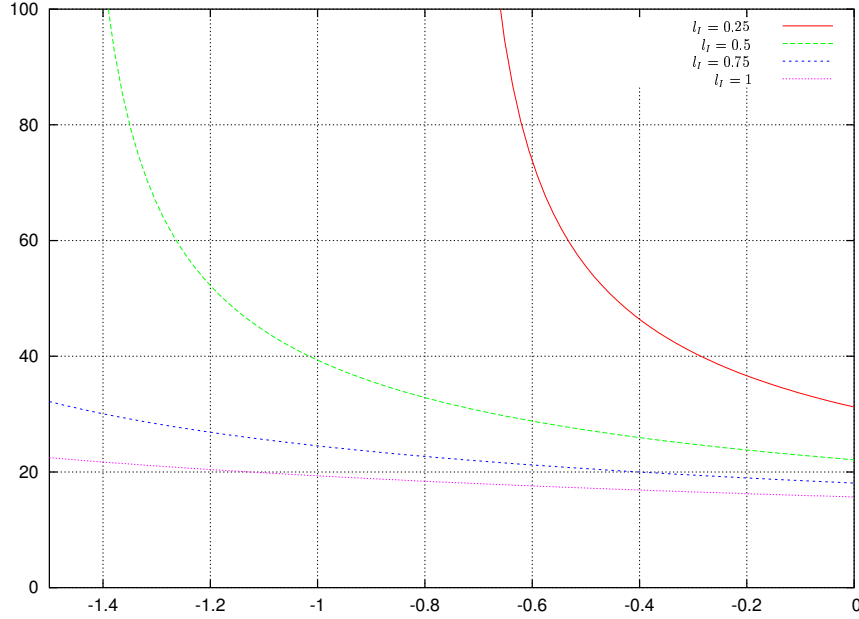


FIG. 5.4: Représentation de $\bar{u}$ en fonction de x_G^{Ref} pour différents l_I

5.2 Critère de design sur la hauteur de réinjection

Cette partie est consacrée à la détermination d'un critère de design sur la hauteur d'injection l_I . Après avoir établi un résultat abstrait de stabilité des E.D.O. linéaires à retard constant, nous l'appliquerons au linéarisé-tangent de notre système en supposant que l'ouverture de la vanne reste constante à sa position d'équilibre.

5.2.1 Stabilité des E.D.O. linéaires à retard constant

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b x(t - \tau), \quad (5.29)$$

où $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ sont des coefficients constants, et $\tau > 0$ représente le retard.

Lemme 5.1. *Une condition suffisante, pour que (5.29) soit stable, est que :*

$$\{a + |b| < 0\} \text{ ou } \left\{ \{a + b < 0\} \text{ et } \{b \tau > -1\} \right\}.$$

Le graphe FIG. 5.5 représente ces conditions dans le plan $(a\tau, b\tau)$.

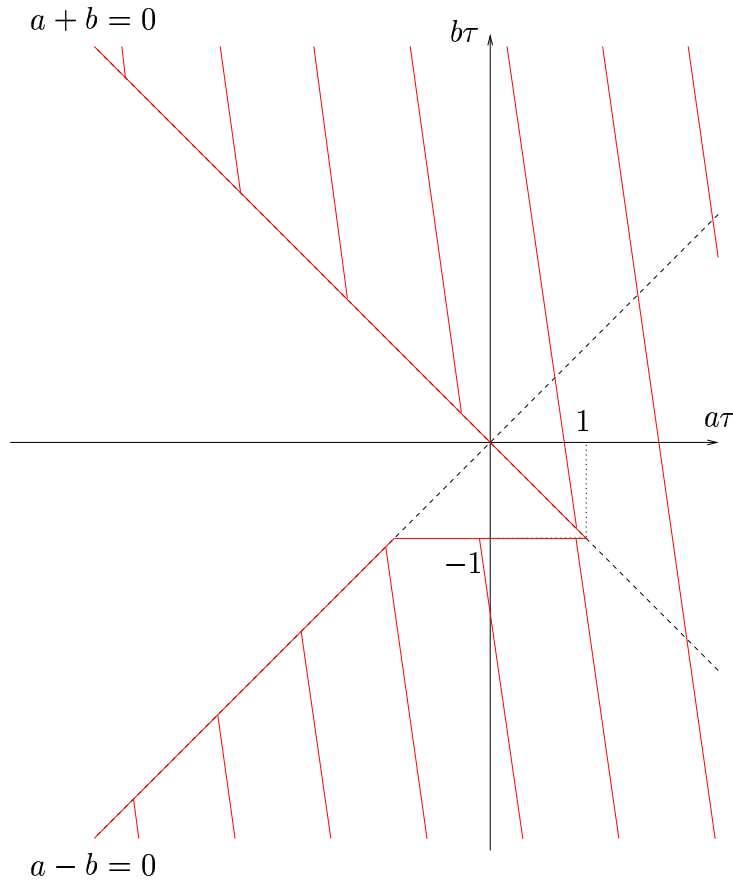


FIG. 5.5: Conditions suffisantes de stabilité sur $a\tau$ et $b\tau$

Démonstration.

La première partie se démontre en utilisant la fonction de Lyapunov définie par :

$$V(t) = x^2(t) + |b| \int_{t-\tau}^t x^2(\sigma) d\sigma.$$

En effet, nous avons directement $V \geq 0$ et sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2a x^2(t) + 2b x(t) x(t - \tau) + |b| [x^2(t) - x^2(t - \tau)] \\ &\leq 2a x^2(t) + |b| [x^2(t) + x^2(t - \tau)] + |b| [x^2(t) - x^2(t - \tau)] \\ &\leq 2(a + |b|) x^2(t). \end{aligned}$$

Par conséquent $a + |b| < 0 \implies \frac{dV}{dt} \leq 0$.

La seconde partie peut être démontrée à partir de la preuve du lemme LEM. C.2 de l'annexe C, en notant que $\frac{\xi_0}{\sin \xi_0} < 1$ pour $a\tau < 1$. $\square$

Remarque.

Pour le lecteur intéressé, une étude plus complète donnant une condition nécessaire et suffisante de stabilité se trouve en annexe C, dans laquelle nous avons détaillé la démonstration de Niculescu [112].

5.2.2 Application au système en boucle ouverte

On se propose maintenant de donner des conditions de stabilité sur la hauteur d'injection l_I par rapport à la position de référence x_G^{Ref} de la langue de gaz. Pour ce faire, nous allons appliquer le lemme LEM. 5.1 au linéarisé-tangent du modèle de simulation (5.25), l'ouverture de la vanne étant supposée maintenue constante à sa valeur stationnaire $\bar{u}$.

En notant :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{P^N}{\rho_G^N v_G^+} > 0 \\ \beta = \frac{g \sin \beta_R}{S} (r_\rho - 1) > 0, \end{cases}$$

le modèle (5.25) peut alors se résumer sous la forme suivante (les autres variables pouvant être calculées a posteriori) :

$$\begin{cases} \dot{\Delta P_I}(t) = \alpha [Q_G^{IN} - Q_G^{BP}(t)] + \beta [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{BP}(t - t_R)] \\ \dot{P_I}(t) = -\beta [Q_G^{BP}(t) - Q_G^{BP}(t - t_R)] \\ Q_G^{BP}(t) = \alpha^{BP} \bar{u} \sqrt{P_I(t) \Delta P_I(t)^+}, \end{cases}$$

la variable d'état ΔP_I étant définie par :

$$\Delta P_I(t) = P(t) - P_I(t) = \rho_L^N g [\sin \beta_R l_I - \sin \beta_P x_G(t)].$$

Linéarisation de Q_G^{BP}

Linéarisons Q_G^{BP} autour du point d'équilibre $(\overline{\Delta P_I}, \overline{P_I})$. En notant :

$$\begin{cases} p_c = P^{OUT} + g \sin \beta_R \left(\rho_L^N + \frac{1-r_\rho}{SC_\infty} Q_G^{IN} \right) l_R > 0 \\ p_l = g \sin \beta_R \left(\rho_L^N + \frac{1-r_\rho}{SC_\infty} Q_G^{IN} \right) > 0 \\ \delta_x = -\rho_L^N g \sin \beta_P > 0 \\ \delta_l = \rho_L^N g \sin \beta_R > 0, \end{cases}$$

$\overline{\Delta P_I}$ et $\overline{P_I}$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \overline{P_I} &= p_c - p_l l_I \\ \overline{\Delta P_I} &= \delta_x x_G^{Ref} + \delta_l l_I. \end{cases}$$

Remarques.

1. La relation (5.28) implique que p_c et p_l sont positifs.
2. On note $\theta = \beta \frac{Q_G^{IN}}{C_\infty} = \delta_l - p_l$ une constante strictement positive. On a alors :

$$\delta_l - \theta > 0 \quad (5.30)$$

De plus, Q_G^{BP} peut être vu comme une fonction de ΔP_I et P_I : $Q_G^{BP}(t) = \mathcal{Q}_G^{BP}(\Delta P_I(t), P_I(t))$. En notant :

$$\begin{cases} \zeta &= \frac{\partial \mathcal{Q}_G^{BP}}{\partial \Delta P_I}(\overline{\Delta P_I}, \overline{P_I}) \\ \eta &= \frac{\partial \mathcal{Q}_G^{BP}}{\partial P_I}(\overline{\Delta P_I}, \overline{P_I}) \\ \delta_{\Delta P_I}(t) &= \Delta P_I(t) - \overline{\Delta P_I} \\ \delta_{P_I}(t) &= P_I(t) - \overline{P_I}, \end{cases}$$

et en remarquant que $\mathcal{Q}_G^{BP}(\overline{\Delta P_I}, \overline{P_I}) = \overline{Q_G^{BP}} = Q_G^{IN}$, Q_G^{BP} peut se linéariser autour du point d'équilibre $(\overline{\Delta P_I}, \overline{P_I})$ sous la forme :

$$Q_G^{BP}(t) = Q_G^{IN} + \zeta \delta_{\Delta P_I}(t) + \eta \delta_{P_I}(t).$$

Enfin, on a :

$$\begin{cases} \zeta &= \frac{Q_G^{IN}}{2\overline{\Delta P_I}} > 0 \\ \eta &= \frac{Q_G^{IN}}{2\overline{P_I}} > 0. \end{cases}$$

Linéarisé-tangent

En remplaçant Q_G^{BP} par son expression linéarisée, on obtient le système linéarisé-tangent suivant :

$$\begin{cases} \dot{\delta_{\Delta P_I}}(t) &= (\beta - \alpha) [\zeta \delta_{\Delta P_I}(t) + \eta \delta_{P_I}(t)] - \beta [\zeta \delta_{\Delta P_I}(t - t_R) + \eta \delta_{P_I}(t - t_R)] \\ \dot{\delta_{P_I}}(t) &= -\beta [\zeta \delta_{\Delta P_I}(t) + \eta \delta_{P_I}(t) - \zeta \delta_{\Delta P_I}(t - t_R) - \eta \delta_{P_I}(t - t_R)]. \end{cases}$$

Notons $a = (\beta - \alpha)\zeta - \beta\eta$ et $b = \beta(\eta - \zeta)$, et effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x(t) &= \zeta \delta_{\Delta P_I}(t) + \eta \delta_{P_I}(t) \\ y(t) &= x(t) + \frac{a}{\alpha} [\delta_{\Delta P_I}(t) + \delta_{P_I}(t)] + \frac{b}{\alpha} [\delta_{\Delta P_I}(t - t_R) + \delta_{P_I}(t - t_R)]. \end{cases}$$

On peut alors écrire que le système différentiel sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= a x(t) + b x(t - t_R) \\ \dot{y}(t) &= 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

y étant constant dans le temps, nous n'avons à étudier que la stabilité de la première équation pour conclure sur la stabilité du système linéarisé-tangent.

Conditions de stabilité

Le lemme LEM. 5.1 nous donne une condition suffisante pour que l'équation sur x soit stable. Elle s'écrit :

$$\{a + |b| < 0\} \text{ ou } \left\{ \{a + b < 0\} \text{ et } \{b t_R > -1\} \right\}.$$

Or $a + b = -\alpha\zeta$ étant toujours négatif, nous pouvons la réécrire dans le cas présent sous la forme :

$$\{a - b < 0\} \text{ ou } \{b t_R > -1\}.$$

- Etudions dans un premier temps la condition $a - b < 0$. On a :

$$a - b = -\alpha\zeta - 2\beta(\eta - \zeta).$$

En remplaçant ζ et η par leur expression, et en notant :

$$\begin{cases} \nu_{\mathcal{D}} &= -\alpha p_l + 2\beta(\delta_l + p_l) \\ v_{\mathcal{D}} &= 2\beta\delta_x \\ \kappa_{\mathcal{D}} &= (2\beta - \alpha)p_c, \end{cases}$$

la condition s'écrit alors :

$$\nu_{\mathcal{D}} l_I + v_{\mathcal{D}} x_G^{Ref} - \kappa_{\mathcal{D}} > 0.$$

Déterminons dans un premier temps les signes des coefficients. On a $v_{\mathcal{D}} > 0$ et en notant $\alpha_{\mathcal{D}}^{\kappa}(\beta) = 2\beta$, $\kappa_{\mathcal{D}}$ vérifie :

$$\begin{cases} \kappa_{\mathcal{D}} > 0 & \text{si } \alpha < \alpha_{\mathcal{D}}^{\kappa}(\beta) \\ \kappa_{\mathcal{D}} < 0 & \text{si } \alpha > \alpha_{\mathcal{D}}^{\kappa}(\beta). \end{cases}$$

De plus, $\nu_{\mathcal{D}}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\nu_{\mathcal{D}} = -\alpha\delta_l + \alpha\beta\frac{Q_G^{IN}}{C_\infty} + 4\beta\delta_l - 2\beta^2\frac{Q_G^{IN}}{C_\infty}.$$

Dans le plan $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+2}$, $\nu_{\mathcal{D}}(\alpha, \beta) = 0$ est une conique. Déterminons-en les directions asymptotiques (en ne gardant que les termes de plus haut degré) :

$$\alpha\beta\frac{Q_G^{IN}}{C_\infty} - 2\beta^2\frac{Q_G^{IN}}{C_\infty} = 0 \iff \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} = 0 \\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Les directions asymptotiques étant réelles, cette conique est une hyperbole. De plus, son centre (α^*, β^*) est caractérisé comme le point-selle de la forme quadratique associée. Il peut donc être déterminé en résolvant le système suivant (obtenu en dérivant $\nu_{\mathcal{D}}(\alpha, \beta) = 0$ par rapport à α et β) :

$$\begin{cases} -\delta_l + \beta^*\frac{Q_G^{IN}}{C_\infty} = 0 \\ \alpha^*\frac{Q_G^{IN}}{C_\infty} + 4\delta_l - 4\beta^*\frac{Q_G^{IN}}{C_\infty} = 0. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \alpha^* = 0 \\ \beta^* = \frac{C_\infty\delta_l}{Q_G^{IN}} > 0. \end{cases}$$

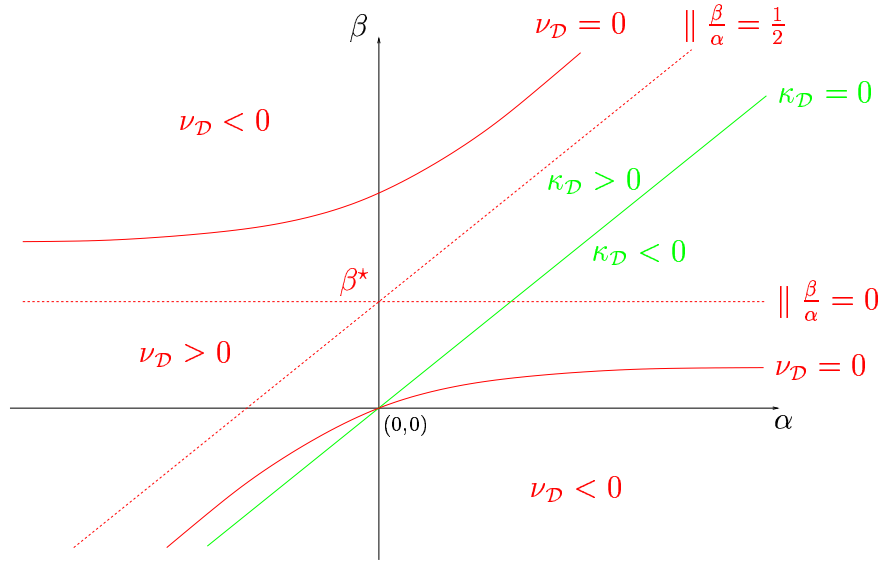
Effectuons maintenant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \bar{\alpha} = \alpha - \alpha^* = \alpha \\ \bar{\beta} = \beta - \beta^* = \beta - \frac{C_\infty\delta_l}{Q_G^{IN}}. \end{cases}$$

$\nu_{\mathcal{D}}$ s'écrit alors sous la forme :

$$\nu_{\mathcal{D}} = \frac{Q_G^{IN}}{C_\infty} \left(\bar{\alpha}\bar{\beta} - 2\bar{\beta}^2 + 2\beta^{*2} \right).$$

Par conséquent le centre de l'hyperbole (α^*, β^*) est à l'intérieur du domaine défini par $\nu_{\mathcal{D}} > 0$. De plus, on remarque que la droite $\kappa_{\mathcal{D}}(\alpha, \beta) = 0$ est parallèle à l'asymptote $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}$ et, par conséquent, ne coupe l'hyperbole qu'en un unique point qui est l'origine $(0, 0)$. Le graphe FIG. 5.6 donne le signe des coefficients $\nu_{\mathcal{D}}$ et $\kappa_{\mathcal{D}}$ dans le plan (α, β) :

FIG. 5.6: Signe des coefficients $\nu_{\mathcal{D}}$ et $\kappa_{\mathcal{D}}$

Enfin, en remarquant que β est toujours inférieur à β^* (car $\beta \frac{Q_G^{IN}}{C_\infty} = \delta_l - p_l < \delta_l = \beta^* \frac{Q_G^{IN}}{C_\infty}$), on a à considérer uniquement la branche inférieure de l'hyperbole que l'on peut écrire sous la forme :

$$\alpha_{\mathcal{D}}^\nu(\beta) = \frac{\beta(2Q_G^{IN}\beta - 4C_\infty\delta_l)}{Q_G^{IN}\beta - C_\infty\delta_l},$$

le numérateur et le dénominateur étant toujours négatifs pour $0 < \beta < \beta^*$. Par conséquent, le signe de $\nu_{\mathcal{D}}$ est donné par :

$$\begin{cases} \nu_{\mathcal{D}} > 0 & \text{si } \alpha < \alpha_{\mathcal{D}}^\nu(\beta) \\ \nu_{\mathcal{D}} < 0 & \text{si } \alpha > \alpha_{\mathcal{D}}^\nu(\beta). \end{cases}$$

En conclusion, les signes des coefficients en fonction de α et β sont donnés par :

	$\alpha_{\mathcal{D}}^\kappa(\beta)$	$\alpha_{\mathcal{D}}^\nu(\beta)$	α
$\nu_{\mathcal{D}} > 0$	$\nu_{\mathcal{D}} > 0$	$\nu_{\mathcal{D}} < 0$	
$\nu_{\mathcal{D}} > 0$	$\nu_{\mathcal{D}} > 0$	$\nu_{\mathcal{D}} > 0$	
$\kappa_{\mathcal{D}} > 0$	$\kappa_{\mathcal{D}} < 0$	$\kappa_{\mathcal{D}} < 0$	

Déterminons maintenant la zone de stabilité. Soit la droite $\mathcal{D}$ définie par $\nu_{\mathcal{D}}l_I + \nu_{\mathcal{D}}x_G^{Ref} - \kappa_{\mathcal{D}} = 0$ de pente $P_{\mathcal{D}} = \frac{-\nu_{\mathcal{D}}}{\nu_{\mathcal{D}}}$ et on note $(x_{\mathcal{D}}, 0)$ son point d'intersection avec

l'axe des abscisses et $(0, l_{\mathcal{D}})$ son point d'intersection avec l'axe des ordonnées. On a par conséquent :

$$\begin{cases} x_{\mathcal{D}} &= \frac{\kappa_{\mathcal{D}}}{\nu_{\mathcal{D}}} \\ l_{\mathcal{D}} &= \frac{\kappa_{\mathcal{D}}}{\nu_{\mathcal{D}}}. \end{cases}$$

De plus, on peut écrire que :

$$l_{\mathcal{D}} = l_R + \frac{(2\beta - \alpha)P^{OUT} - 2\beta\delta_l l_R}{\nu_{\mathcal{D}}},$$

ce qui implique que :

$\alpha_{\mathcal{D}}^{\kappa}(\beta)$	$\alpha_{\mathcal{D}}^{\nu}(\beta)$	α
$P_{\mathcal{D}} < 0$	$P_{\mathcal{D}} < 0$	$P_{\mathcal{D}} > 0$
$0 < l_{\mathcal{D}} \leq l_R$	$l_{\mathcal{D}} < 0 < l_R$	$0 < l_R < l_{\mathcal{D}}$
$x_{\mathcal{D}} > 0$	$x_{\mathcal{D}} < 0$	$x_{\mathcal{D}} < 0$

Les graphes FIG. 5.7 représentent dans le plan (x_G^{Ref}, l_I) , la condition de stabilité $a - b < 0$ en fonction de α et β .

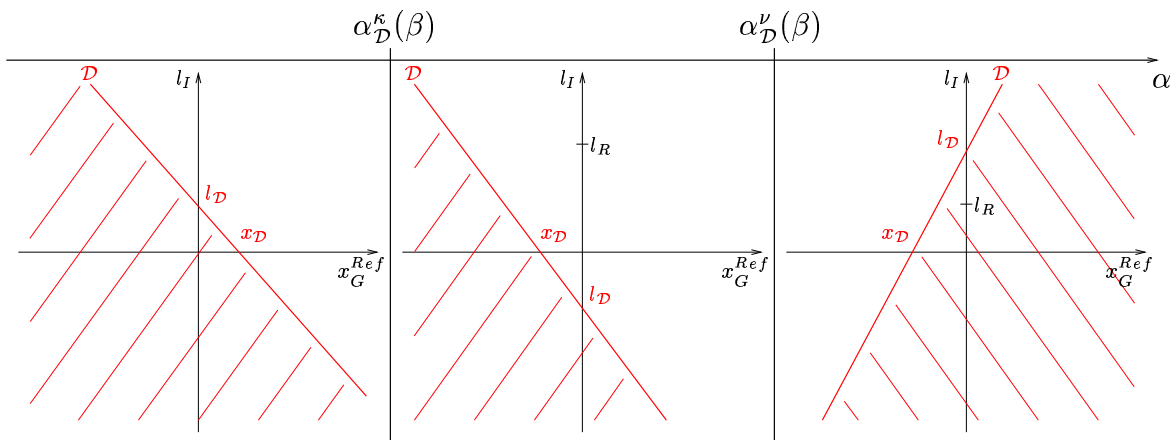


FIG. 5.7: Représentation de la condition de stabilité $a - b < 0$

- Etudions maintenant la condition $b \, t_R > -1$. En notant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\mathcal{H}} = 2\delta_l^2 - \theta^2 \\ \omega_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(2\delta_l - \theta)\delta_x \\ \nu_{\mathcal{H}} = (2\delta_l^2 + \delta_l\theta - 2\theta^2)l_R + (2\delta_l + \theta)P^{OUT} \\ v_{\mathcal{H}} = [2P^{OUT} + (2\delta_l - \theta)l_R] \delta_x \\ \kappa_{\mathcal{H}} = \theta p_c l_R, \end{array} \right.$$

la condition de stabilité est équivalente à :

$$-2\omega_{\mathcal{H}}x_G^{Ref}l_I - \mu_{\mathcal{H}}l_I^2 + v_{\mathcal{H}}x_G^{Ref} + \nu_{\mathcal{H}}l_I - \kappa_{\mathcal{H}} > 0,$$

les constantes $\mu_{\mathcal{H}}$, $\omega_{\mathcal{H}}$, $\nu_{\mathcal{H}}$, $v_{\mathcal{H}}$ et $\kappa_{\mathcal{H}}$ étant strictement positives d'après (5.30).

Définissons maintenant dans le plan (x_G^{Ref}, l_I) , la conique suivante :

$$\mathcal{H} : -2\omega_{\mathcal{H}}x_G^{Ref}l_I - \mu_{\mathcal{H}}l_I^2 + v_{\mathcal{H}}x_G^{Ref} + \nu_{\mathcal{H}}l_I - \kappa_{\mathcal{H}} = 0$$

Déterminons, dans un premier temps, ses directions asymptotiques. On a :

$$2\omega_{\mathcal{H}}x_G^{Ref}l_I + \mu_{\mathcal{H}}l_I^2 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_I}{x_G^{Ref}} = 0 \\ \frac{l_I}{x_G^{Ref}} = \frac{-2\omega_{\mathcal{H}}}{\mu_{\mathcal{H}}} = r_{\mathcal{H}}^{\#} < 0. \end{array} \right.$$

Les directions asymptotiques étant des nombres réels, cette conique est une hyperbole. De plus, son centre $(x_{\mathcal{H}}^*, l_{\mathcal{H}}^*)$ est solution du système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\omega_{\mathcal{H}}l_{\mathcal{H}}^* + v_{\mathcal{H}} = 0 \\ -2\omega_{\mathcal{H}}x_{\mathcal{H}}^* - 2\mu_{\mathcal{H}}l_{\mathcal{H}}^* + \nu_{\mathcal{H}} = 0. \end{array} \right.$$

On obtient par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\mathcal{H}}^* = \frac{\omega_{\mathcal{H}}\nu_{\mathcal{H}} - \mu_{\mathcal{H}}v_{\mathcal{H}}}{2\omega_{\mathcal{H}}^2} \\ l_{\mathcal{H}}^* = \frac{v_{\mathcal{H}}}{2\omega_{\mathcal{H}}}. \end{array} \right.$$

Déterminons maintenant le signe de $x_{\mathcal{H}}^*$. On peut écrire son numérateur sous la forme :

$$\omega_{\mathcal{H}}\nu_{\mathcal{H}} - \mu_{\mathcal{H}}v_{\mathcal{H}} = \frac{\delta_x}{2} [4(\theta - \delta_l) (l_R\delta_l^2 + P^{OUT}(\theta + \delta_l)) - P^{OUT}\theta^2 - \delta_l l_R\theta^2].$$

En utilisant la relation (5.30), il est immédiat que $x_{\mathcal{H}}^* < 0$. De plus, $l_{\mathcal{H}}^*$ positif, peut s'écrire sous la forme :

$$l_{\mathcal{H}}^* = l_R + \frac{2P^{OUT}}{2\delta_l - \theta}.$$

La relation (5.30) implique alors que $l_{\mathcal{H}}^* > l_R$.

Effectuons maintenant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x &= x_G^{Ref} - x_{\mathcal{H}}^* \\ l &= l_I - l_{\mathcal{H}}^*. \end{cases}$$

En notant $R_{\mathcal{H}}^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_x \theta P^{OUT}}{\omega_{\mathcal{H}}} \right)^2$ une constante strictement négative, on obtient :

$$\mathcal{H} : \mu_{\mathcal{H}} l (l - r_{\mathcal{H}}^{\#} x) + R_{\mathcal{H}}^* = 0.$$

Ainsi, la condition de stabilité s'écrit :

$$\mu_{\mathcal{H}} l (l - r_{\mathcal{H}}^{\#} x) + R_{\mathcal{H}}^* < 0.$$

De plus, le centre $(x, l) = (0, 0)$ vérifiant cette condition, la région $b \ t_R > -1$ se trouve à l'intérieur des deux branches de l'hyperbole $\mathcal{H}$. Et, on remarque que l'origine $(x_G^{Ref}, l_I) = (0, 0)$ se trouve en dehors de la région.

Déterminons maintenant les points d'intersection de l'hyperbole avec les axes. Soit $(x_{\mathcal{H}}^{\#}, 0)$ l'unique point d'intersection avec l'axe des abscisses. On a :

$$x_{\mathcal{H}}^{\#} = \frac{\kappa_{\mathcal{H}}}{v_{\mathcal{H}}} > 0.$$

Les points d'intersection avec l'axe des ordonnées sont donnés en résolvant l'équation du second degré suivante :

$$\mu_{\mathcal{H}} l_I^2 - \nu_{\mathcal{H}} l_I + \kappa_{\mathcal{H}} = 0.$$

Soit $\Delta_{\mathcal{H}}$ son déterminant. Il peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{H}} &= (\delta_l - \theta) (8\delta_l P^{OUT} l_R (\delta_l + \theta) + 4\delta_l^3 l_R^2) \\ &+ 2\theta^2 P^{OUT} l_R \delta_l + \delta_l^2 l_R^2 \theta^2 + 4\delta_l^2 P^{OUT^2} + \theta^2 P^{OUT^2} + 4P^{OUT^2} \delta_l \theta. \end{aligned}$$

La relation (5.30) implique qu'il est positif et par conséquent qu'il existe deux points d'intersection de l'hyperbole $\mathcal{H}$ avec l'axe des ordonnées, $l_{\mathcal{H}}^b$ et $l_{\mathcal{H}}^{\#}$, définis par :

$$\begin{cases} l_{\mathcal{H}}^b &= \frac{\nu_{\mathcal{H}} + \sqrt{\Delta_{\mathcal{H}}}}{2\mu_{\mathcal{H}}} \\ l_{\mathcal{H}}^{\#} &= \frac{\nu_{\mathcal{H}} - \sqrt{\Delta_{\mathcal{H}}}}{2\mu_{\mathcal{H}}}. \end{cases}$$

Comme $l_{\mathcal{H}}^b > 0$ et $l_{\mathcal{H}}^b \times l_{\mathcal{H}}^\# = \frac{\kappa_{\mathcal{H}}}{\mu_{\mathcal{H}}} > 0$, on a aussi $l_{\mathcal{H}}^\# > 0$. Regardons maintenant sa position par rapport à l_R . $l_{\mathcal{H}}^\#$ peut se mettre sous la forme :

$$l_{\mathcal{H}}^\# = l_R + \frac{\phi_{\mathcal{H}} - \sqrt{\Delta_{\mathcal{H}}}}{2(2\delta_l^2 - \theta^2)},$$

avec $\phi_{\mathcal{H}} = (\theta - 2\delta_l)\delta_l l_R + (2\delta_l + \theta)P^{OUT}$. La relation (5.30) implique que le dénominateur de la fraction est positif. De plus, si $\phi_{\mathcal{H}}$ est négatif alors le numérateur est aussi négatif et on en déduit que $l_{\mathcal{H}}^\# < l_R$. Si $\phi_{\mathcal{H}}$ est positif, alors en utilisant le fait que $\Delta_{\mathcal{H}} - \phi_{\mathcal{H}}^2 = 8P^{OUT}l_R\delta_l(2\delta_l^2 - \theta^2)$ est strictement positif ce qui implique que $\sqrt{\Delta_{\mathcal{H}}} > \phi_{\mathcal{H}}$, le numérateur est encore négatif et on en déduit encore que $l_{\mathcal{H}}^\# < l_R$.

On peut, en définitive, conclure que :

$$0 < l_{\mathcal{H}}^\# < l_R < l_{\mathcal{H}}^* < l_{\mathcal{H}}^b,$$

ce qui nous permet d'assurer que l'on trouvera toujours un couple $(x_G^{Ref}, l_I) \in [-l_P, 0] \times [0, l_R]$ pour lequel on a stabilité du système. Le graphique FIG. 5.8 représente la condition de stabilité dans le plan (x_G^{Ref}, l_I) .

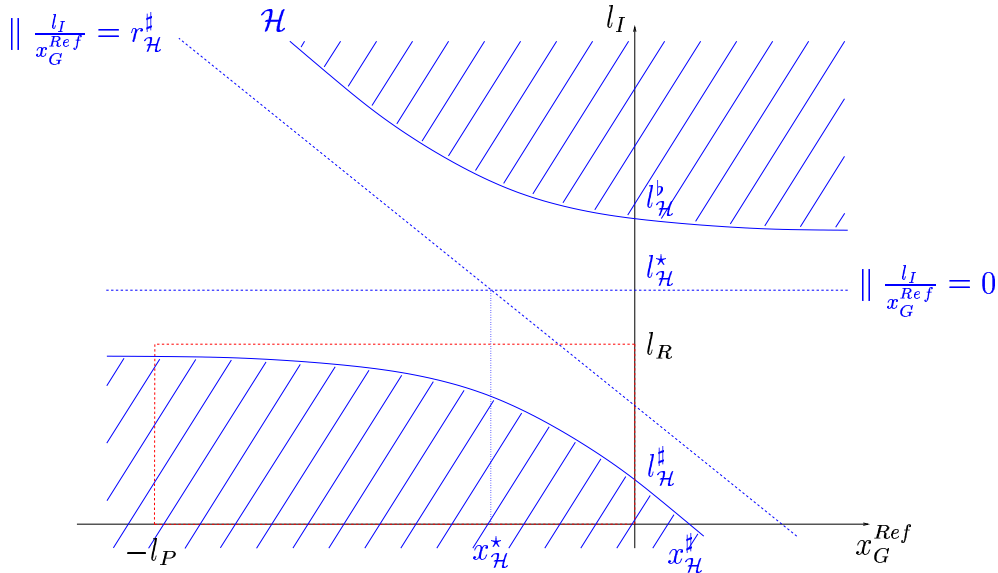


FIG. 5.8: Représentation de la condition de stabilité $b t_R > -1$

Conclusion

Pour un x_G^{Ref} donné, l_I doit vérifier :

$$\left\{ \nu_{\mathcal{D}} l_I + \nu_{\mathcal{D}} x_G^{Ref} - \kappa_{\mathcal{D}} > 0 \right\} \text{ ou } \left\{ -2\omega_{\mathcal{H}} x_G^{Ref} l_I - \mu_{\mathcal{H}} l_I^2 + \nu_{\mathcal{H}} x_G^{Ref} + \nu_{\mathcal{H}} l_I - \kappa_{\mathcal{H}} > 0 \right\}. \quad (5.32)$$

Les différents graphiques de la figure FIG. 5.9 représentent cette condition dans le plan (x_G^{Ref}, l_I) pour les différentes configurations possibles.

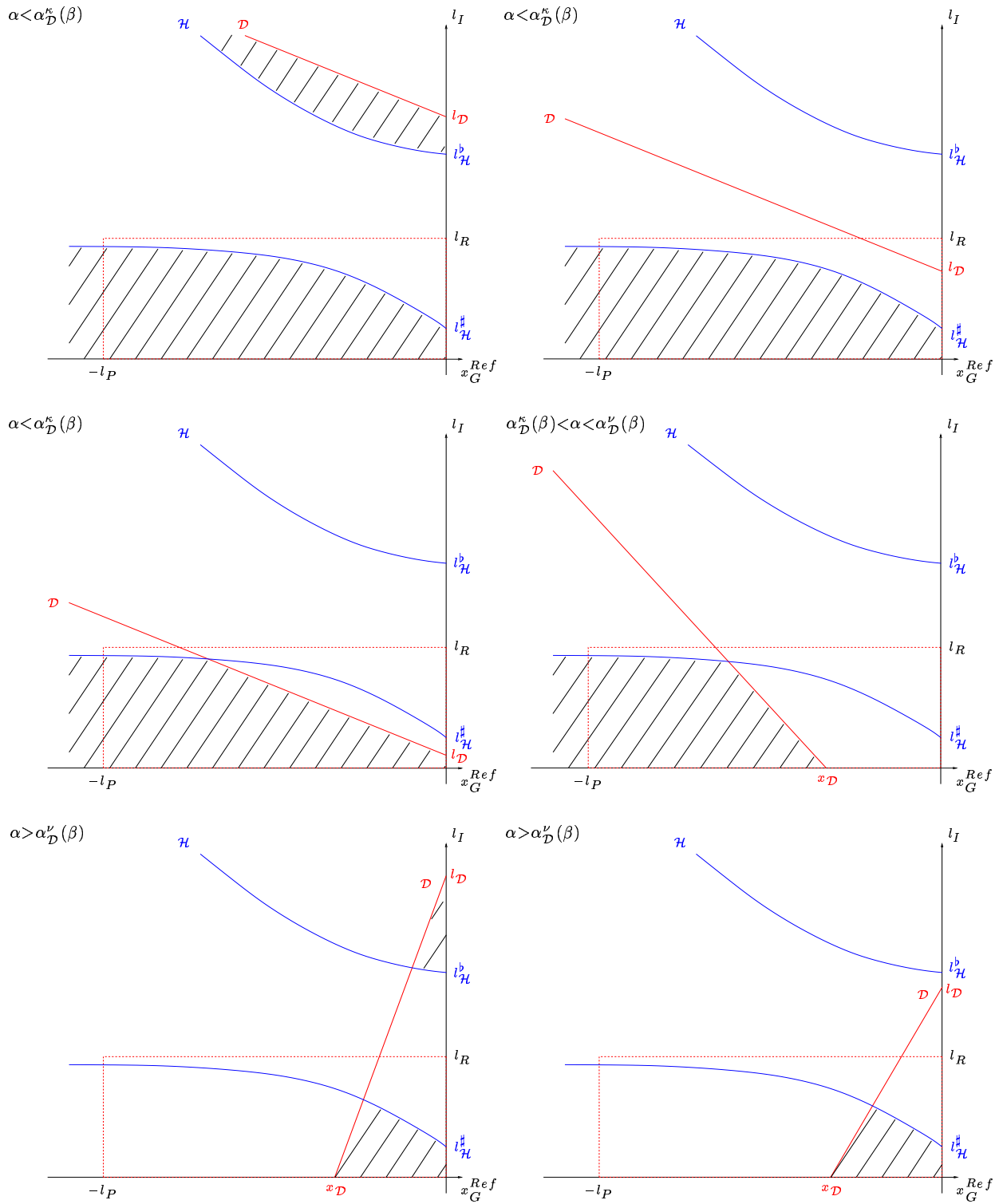


FIG. 5.9: Condition de stabilité sur (x_G^{Ref}, l_I)

Application au montage expérimental S^4L

Pour toute la plage de débit liquide et en choisissant l'angle $\beta_P = -18^\circ$ et le volume additionnel de gaz $v_G^+ = 35.8 \text{ l}$, nous avons, pour tous les débits de gaz produisant du severe slugging :

$$\alpha < \alpha_{\mathcal{D}}^\nu(\beta) \text{ et } l_{\mathcal{D}} > l_R,$$

ce qui implique que la première condition $\nu_{\mathcal{D}} l_I + \nu_{\mathcal{D}} x_G^{Ref} - \kappa_{\mathcal{D}} > 0$ n'est jamais satisfaite.

La seule condition à vérifier est donc donnée par la branche inférieure de l'hyperbole $\mathcal{H}$. Elle est représentée figure FIG. 5.10(a) dans le plan $(x_G^{Ref}, l_I) \in [-l_P, 0] \times [0, l_R]$ pour différents débits de gaz. De plus, le graphe FIG. 5.10(b) donne la valeur de $l_{\mathcal{H}}^\#$ en fonction de $Q_G^{IN} \in [0, 4 \text{ nl/min}]$. Sa valeur maximum est atteinte pour 4 nl/min , qui est le plus grand débit produisant du severe slugging sur S^4L et cette valeur est inférieure à 30 cm .

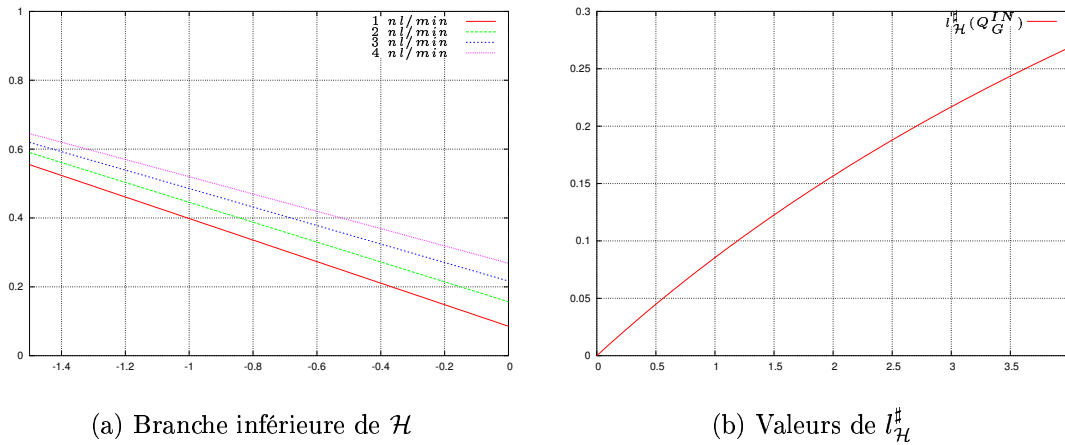


FIG. 5.10: Condition de stabilité pour S^4L

De ce fait, si on choisit une valeur de l_I supérieure à 30 cm , on est alors certain d'avoir une plage de valeurs de $x_G^{Ref} \in [-l_P, 0]$ vérifiant la condition de stabilité. En pratique, on choisira dans nos essais expérimentaux la seconde position de réinjection correspondant à $l_I^2 = 36.5 \text{ cm}$.

Les figures FIG. 5.11 et FIG. 5.12 présentent le résultat de deux simulations effectuées avec les données de la boucle S^4L et de deux expériences, les graphiques de gauche pour $l_I = l_I^1$ (FIG. 5.11(a) et FIG. 5.12(a)) et ceux de droite pour $l_I = l_I^2$ (FIG. 5.11(b) et FIG. 5.12(b)). L'écoulement n'est stabilisé que dans le second cas, ce qui valide numériquement et expérimentalement notre condition de stabilité sur les paramètres (x_G^{Ref}, l_I) .

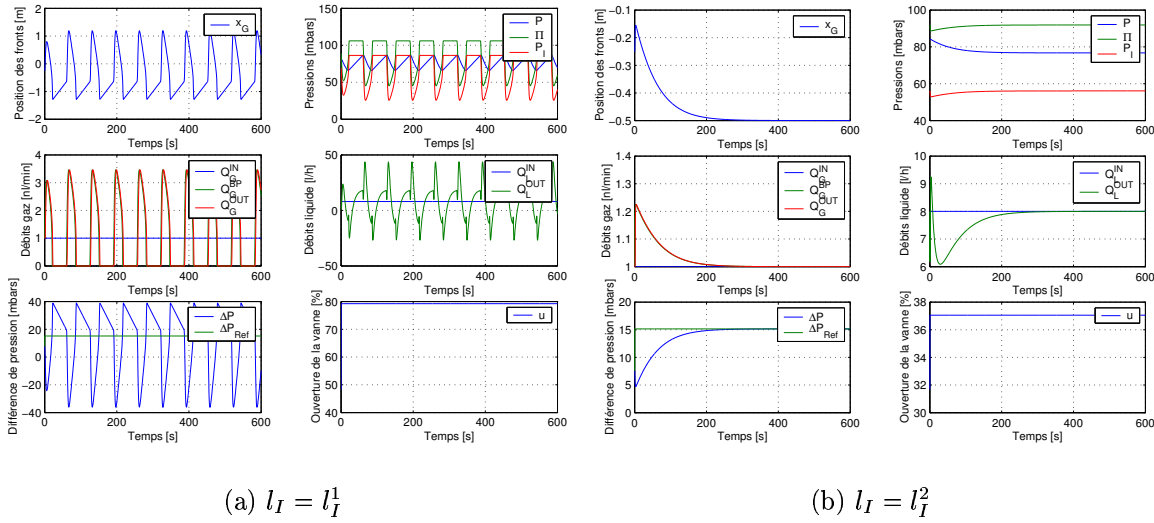


FIG. 5.11: Validation numérique de la condition de stabilité

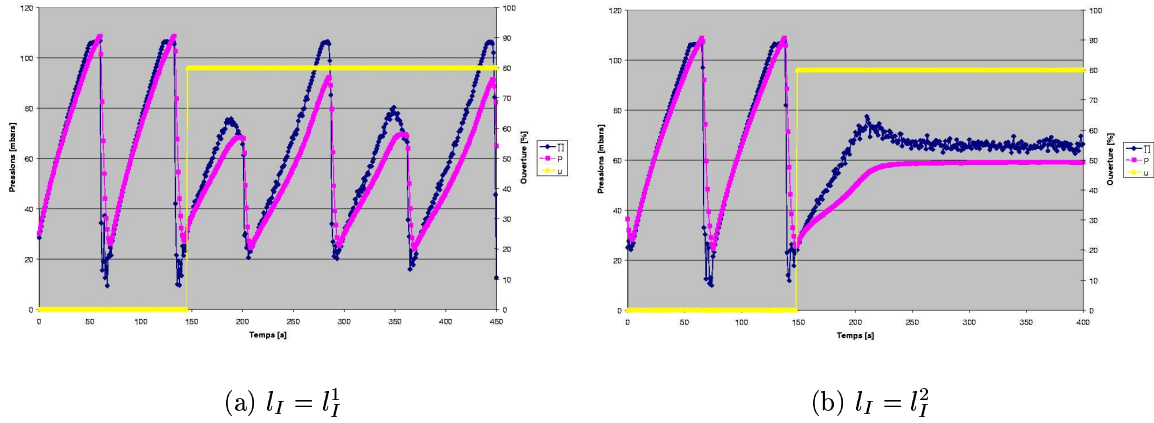


FIG. 5.12: Validation expérimentale de la condition de stabilité

5.3 Mise en place du contrôleur

En ne mesurant que la pression dans le pipeline P et la pression en pied de riser Π , on souhaite commander l'ouverture de la vanne située sur le by-pass, pour contrôler l'écoulement en stabilisant la langue de gaz à la position de référence x_G^{Ref} . Pour cela, plutôt que de modéliser une commande directement sur l'ouverture (ce qui nécessite de prendre en compte l'équation fortement non-linéaire donnant Q_G^{BP} en fonction de u), nous allons travailler directement sur le débit Q_G^{BP} .

Notons $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ une constante strictement positive, et rappelons que la partie différentielle du modèle (5.25) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{P}(t) &= \alpha [Q_G^{IN} - Q_G^{BP}(t)] \\ \dot{\Pi}(t) &= \beta [Q_G^{BP}(t - t_R) - Q_G^{BP}(t)] . \end{cases} \quad (5.33)$$

En prenant $P^N = P^{OUT}$, le rapport γ est donné par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{l_G^+ g \sin \beta_R (\rho_L^N - \rho_G^N)}{P^{OUT}}.$$

Or l_G^+ est très grand pour permettre l'occurrence du severe slugging, ce qui implique que $\gamma \gg 1$ et par conséquent que β est grand par rapport à α . En particulier sur S^4L , on a le rapport suivant :

$$\gamma \approx 20.$$

En conséquence, Π évolue beaucoup plus rapidement que P . Cette constatation est à la base de notre commande. En effet, nous allons dans un premier temps faire converger rapidement P vers une valeur de référence P_{Ref} , ce qui stabilisera la langue de gaz, et par là même, l'écoulement. Puis nous modifierons cette valeur de P_{Ref} lentement au cours du temps pour faire tendre ΔP vers sa valeur de référence ΔP_{Ref} . Ce contrôleur sera donc de la forme :

$$\begin{cases} Q_G^{BP}(t) &= \frac{K_P}{\alpha} [P(t) - P_{Ref}(t)] \\ P_{Ref}(t) &= K_I [\Delta P(t) - \Delta P_{Ref}], \end{cases} \quad (5.34)$$

avec K_P et K_I deux constantes positives.

Le modèle (5.33) et la commande (5.34) forment un système algébro-différentiel dont nous allons maintenant étudier la stabilité pour voir si l'on retrouve une condition sur K_I vérifiant notre intuition physique (i.e. $K_I \ll 1$). En substituant Q_G^{BP} par son expression et en notant $x(t) = P(t) - P_{Ref}(t) - \frac{\alpha}{K_P} Q_G^{IN}$ et $y(t) = \Delta P(t) - \Delta P_{Ref}$, le modèle en boucle fermée peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -K_P x(t) - K_I y(t) \\ \dot{y}(t) &= -\gamma K_P [x(t) - x(t - t_R)] + K_P x(t), \end{cases} \quad (5.35)$$

la variable d'état $\Pi(t) - \frac{\beta}{\alpha} P(t) + \frac{\beta}{\alpha} P(t - t_R)$ étant indépendante du temps.

Nous allons dans un premier temps calculer son état stationnaire puis nous déterminons une condition suffisante de stabilité sous la forme d'une relation entre les différents paramètres du modèle.

5.3.1 Etat stationnaire

L'état stationnaire est donné par :

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{y} = 0, \end{cases}$$

ce qui correspond à :

$$\begin{cases} \overline{\Delta P} = \Delta P_{Ref} \\ \overline{P_{Ref}} = \bar{P} - \frac{\alpha}{K_P} Q_G^{IN}. \end{cases}$$

On peut par conséquent conclure que la position de la langue de gaz se stabilisera bien à sa position de référence.

5.3.2 Conditions de stabilité

Etudions maintenant la stabilité du système (5.35). En notant :

$$Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -K_P & -K_I \\ K_P(1-\gamma) & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma K_P & 0 \end{pmatrix},$$

ce système peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{Z} = A Z(t) + B Z(t - t_R). \quad (5.36)$$

Lemme 5.2. *Une condition suffisante de stabilité du système matriciel (5.36) au sens de Fourier-Laplace est :*

$$K_I < \frac{\alpha}{\beta t_R}.$$

Démonstration.

En prenant $Z(t) = Z_0 e^{st}$, on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$s(K_P + s) + K_P K_I (1 - \gamma + \gamma e^{-s t_R}) = 0.$$

On se place dans le cas $t_R > 0$ (le cas $t_R = 0$ étant déjà connu). En notant $\bar{s} = s t_R$, $\overline{K_P} = K_P t_R$ et $\overline{K_I} = K_I t_R$, et en multipliant par t_R^2 l'équation caractéristique, on obtient :

$$\bar{s}(\overline{K_P} + \bar{s}) + \overline{K_P} \overline{K_I} (1 - \gamma + \gamma e^{-\bar{s}}) = 0.$$

1. Etude des racines réelles ($\bar{s} \in \mathbb{R}$)

Commençons par étudier le cas réel ($\bar{s} = r \in \mathbb{R}$). Soit la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $F(r) = r^2 + \overline{K_P} r + \overline{K_P} \overline{K_I} (1 - \gamma + \gamma e^{-r})$. On a :

$$F'(r) = 2r + \overline{K_P} - \gamma \overline{K_P} \overline{K_I} e^{-r},$$

$$F''(r) = 2 + \gamma \overline{K_P} \overline{K_I} e^{-r}.$$

Par conséquent, $F''(r) > 0 \forall r \in \mathbb{R}$ ce qui implique que F est convexe. De plus, son extremum, noté $F(r_0)$, est un minimum car $F(-\infty) = F(+\infty) = +\infty$. Le tableau de variation suivant donne l'évolution de F sur $\mathbb{R}$:

r	$-\infty$	r_0	$+\infty$
$F''(r)$		+	+
$F'(r)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$F(r)$	$+\infty$	$F(r_0)$	$+\infty$

Nous avons donc deux cas à traiter. Si $F(r_0)$ est positif, alors il n'existe pas de racines réelles et par conséquent aucune condition de stabilité n'est à imposer. Par contre, si $F(r_0)$ est négatif, il existe alors deux racines réelles qui seront négatives si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} F(0) > 0 \\ F'(0) > 0. \end{cases}$$

K_P et K_I étant supposés positifs, la première condition est toujours vérifiée et la seconde implique la condition suivante :

$$\gamma \overline{K_I} < 1.$$

En conclusion, l'étude des racines réelles nous donne la condition suivante :

$$\gamma K_I t_R < 1 \text{ si } F(r_0) < 0.$$

2. Etude des racines complexes ($\bar{s} \in \mathbb{C}$)

Cherchons maintenant les racines complexes de l'équation caractéristique. En posant $\bar{s} = p + \imath q$ et en séparant la partie réelle de la partie imaginaire, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} p^2 - q^2 + p\overline{K_P} + \overline{K_P K_I}(1 - \gamma + \gamma e^{-p} \cos q) = 0 \\ q(2p + \overline{K_P}) - \overline{K_P K_I} \gamma e^{-p} \sin q = 0. \end{cases}$$

Nous allons utiliser un argument de continuité pour assurer que $p < 0$. Intéressons nous d'abord aux racines imaginaires pures ($p = 0$). Le système dégénère alors en :

$$\begin{cases} -q^2 + \overline{K_P K_I}(1 - \gamma + \gamma \cos q) = 0 \\ q\overline{K_P} - \overline{K_P K_I} \gamma \sin q = 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Par conséquent, q doit alors satisfaire ($\overline{K_P}$ étant strictement supérieur à 0) :

$$\gamma \overline{K_I} = \frac{q}{\sin q}.$$

Si cette équation admet une solution (notée alors $\tilde{q}(\gamma, \overline{K_I})$), on obtient par conséquent, avec la première équation du système (5.37), une relation abstraite entre $\overline{K_P}$, $\overline{K_I}$ et γ qui est une surface notée $S(\overline{K_P}, \overline{K_I}, \gamma) = 0$. Dans l'espace $(\overline{K_P}, \overline{K_I}, \gamma)$, cette surface, lorsqu'elle existe, sépare la région stable $p < 0$ de la région instable $p > 0$.

Cependant, si $\gamma \overline{K_I} < 1$, il n'existe pas de solution $\tilde{q}(\gamma, \overline{K_I})$ (cf. démonstration du lemme LEM. C.2 donné en annexe C), ce qui implique que la surface $S(\overline{K_P}, \overline{K_I}, \gamma) = 0$ ne traverse jamais la région $\gamma \overline{K_I} < 1$. C'est, par conséquent, soit une zone entièrement stable soit une zone entièrement instable.

Or, pour le cas limite $\overline{K_I} \rightarrow 0$, le système est notoirement stable, car il correspond au cas d'un contrôleur proportionnel ayant le système caractéristique suivant :

$$\begin{cases} p^2 - q^2 + p\overline{K_P} &= 0 \\ q(2p + \overline{K_P}) &= 0, \end{cases}$$

dont il est "connu" que les racines sont à partie réelle $p < 0$ si $\overline{K_P} > 0$.

La région $\gamma \overline{K_I} < 1$, qui contient le cas limite $\overline{K_I} = 0$, est donc stable ce qui implique en définitive la condition suffisante de stabilité suivante :

$$K_I < \frac{\alpha}{\beta t_R}.$$

□

Remarque.

Le système matriciel (5.36) pouvant s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= z(t) \\ \dot{z}(t) &= -K_P z(t) - K_P K_I x(t) - \gamma K_P K_I \int_{-t_R}^0 z(t+s) ds, \end{cases}$$

lemme LEM. 5.2 peut aussi être démontré en utilisant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = z^2(t) + K_P K_I x^2(t) + \gamma K_P K_I \int_{-t_R}^0 ds \int_{t+s}^t z^2(u) du$$

5.3.3 Conclusion

La condition suffisante de stabilité $K_I < \frac{\alpha}{\beta t_R}$ permettant à notre commande (5.34) de contrôler le système (5.36) valide bien notre intuition physique. En effet, elle indique que le gain intégral doit être petit et par conséquent, que la pression P_{Ref} doit évoluer lentement au cours du temps pour faire tendre ΔP vers sa valeur de référence ΔP_{Ref} .

De plus, les durées caractéristiques de ce régulateur à deux échelles de temps vérifient :

$$\begin{cases} \tau_P &= \frac{1}{K_P} \\ \tau_I &= \frac{1}{K_I}, \end{cases}$$

τ_P étant le temps (rapide) pour stabiliser la langue de gaz dans le pipeline et τ_I le temps (lent) pour que ΔP atteigne sa consigne. En pratique, τ_P sera pris égal à une dizaine de fois le temps t_R de remontée du gaz et τ_I à environ cinquante fois :

$$\begin{cases} \tau_P &= 10 \times t_R \\ \tau_I &= 50 \times t_R. \end{cases}$$

Enfin, nous avons travaillé directement sur le débit de gaz à bypasser. Par conséquent, il semble préférable, pour la mise en œuvre de ce contrôleur, d'utiliser directement un *Flow Regulator Control*. Dans le cas où l'on ne dispose que d'une vanne (comme pour S^4L par exemple), on peut alors utiliser l'algorithme suivant incluant un anti-windup pour prendre en compte les effets de saturation sur l'ouverture de la vanne :

1. On détermine la commande $\widetilde{Q}_G^{BP}$ par la formule (5.34),
2. On en déduit l'ouverture saturée nécessaire :

$$u = Sat \left[\frac{\widetilde{Q}_G^{BP}}{\alpha^{BP} \sqrt{P_I [P - P_I]^+}} \right].$$

3. On détermine ensuite le débit réellement passé par le by-pass :

$$Q_G^{BP} = \alpha^{BP} u \sqrt{P_I [P - P_I]^+}.$$

4. On remet à jour la pression P_{Ref} :

$$P_{Ref} = P - \frac{\alpha}{K_P} Q_G^{BP}.$$

5.4 Validations numériques et expérimentales

Nous avons proposé un régulateur (5.34) permettant d'éliminer le phénomène de severe slugging en bypassant une quantité adéquate de gaz au niveau du pied de riser. Pour valider nos résultats, nous allons simuler le modèle saturé (5.20) (en prenant en compte l'expansion du gaz en résolvant numériquement le problème de Cauchy (5.17)) associé à notre commande et réaliser plusieurs expériences sur la boucle S^4L .

5.4.1 Résultats pour S^4L

Commençons par valider notre contrôleur sur la boucle d'écoulement S^4L (cf. annexe A) pour laquelle l'effet de l'expansion du gaz dans le riser n'est pas très important. Nous allons tout d'abord, effectuer plusieurs simulations numériques sous MatLab pour confirmer l'ordre de grandeur des coefficients K_P et K_I . Puis, nous analyserons son comportement expérimentalement.

Pour cette étude, nous prenons l'angle β_P égal à -18° et le volume additionnel v_G^+ égal à 35.8 l pour nous permettre d'avoir une plage de débits propices au severe slugging la plus importante possible. Nous allons valider notre commande pour les cinq couples (Q_G^{IN}, Q_L^{IN}) utilisés lors de la modélisation du severe slugging et du contrôle par prélèvement (cf. TAB. 3.2 du chapitre 3). Nous testerons aussi la robustesse de notre régulateur en perturbant les débits d'entrée et en modifiant la consigne ΔP_{Ref} , mais aussi en changeant la hauteur de réinjection au cours du temps.

Simulations

Diverses simulations ont montré que la commande n'arrive pas à stabiliser l'écoulement si les conditions initiales sont prises quelconques loin de l'équilibre. Ainsi, les simulations suivantes débutent par un état stabilisé. De plus, nous souhaitons positionner la langue de gaz à la consigne $x_G^{Ref} = -0.5 \text{ m}$ en réinjectant le gaz prélevé à la hauteur $l_I = l_I^1$, bien que cela contredise le critère de design (5.32). En effet, il a été construit à partir d'une étude en boucle ouverte et par conséquent, surestime la valeur critique de la hauteur de réinjection. Notons quand même que dans ce cas, nous avons une marge de manœuvre sur x_G^{Ref} beaucoup plus restreinte et qu'il en est de même pour la différence de pression ΔP_I entre l'amont et l'aval de la vanne.

Les différents paramètres de nos simulations correspondent aux données de la boucle S^4L , sauf pour la valeur du C_V de la vanne que nous prenons ici égal à 0.1 m^2 pour obtenir $\bar{u} \in [0, 100]$ pour tous les débits de gaz donnant du severe slugging. De plus, les différentes observations faites pendant nos expériences nous ont conduit à fixer la vitesse de remontée des bulles de gaz à la valeur moyenne $C_\infty = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ ce qui entraîne que $t_R = 1.76 \text{ s}$. Ainsi, le coefficient τ_P est fixé à 17.6 s et le coefficient τ_I à 88 s , ce qui implique que $\gamma K_I t_R \approx 0.4$. Ces paramètres sont résumés dans le tableau TAB. 5.1.

D	l_R	β_P	β_R	v_G^+
0.015 m	1.08 m	-18°	90°	0.0358 m^3
C_V	γ_V	P^N	ρ_G^N	ρ_L^N
0.1 m^2	4×10^{-5}	101500 Pa	1.3 kg/m^3	1000 kg/m^3
P^{OUT}	C_∞	l_I	x_G^{Ref}	(K_P, K_I)
101500 Pa	0.5 m/s	20 cm	-0.5 m	$(0.0568 \text{ s}^{-1}, 0.0114 \text{ s}^{-1})$

TAB. 5.1: Paramètres utilisés pour les simulations

Chaque simulation dure 600 s et débute par un état stabilisé où x_G est égal à -0.25 m. Les graphiques FIG. 5.13, FIG. 5.14, FIG. 5.15, FIG. 5.16 et FIG. 5.17 représentent en fonction du temps, la position de la langue de gaz x_G , les pressions P , Π , P_I et P_{Ref} , les débits de gaz Q_G^{IN} , Q_G^{BP} et Q_G^{OUT} , les débits de liquide Q_L^{IN} et Q_L^{OUT} , la différence de pression ΔP et sa valeur de référence ΔP_{Ref} ainsi que l'ouverture de la vanne u .

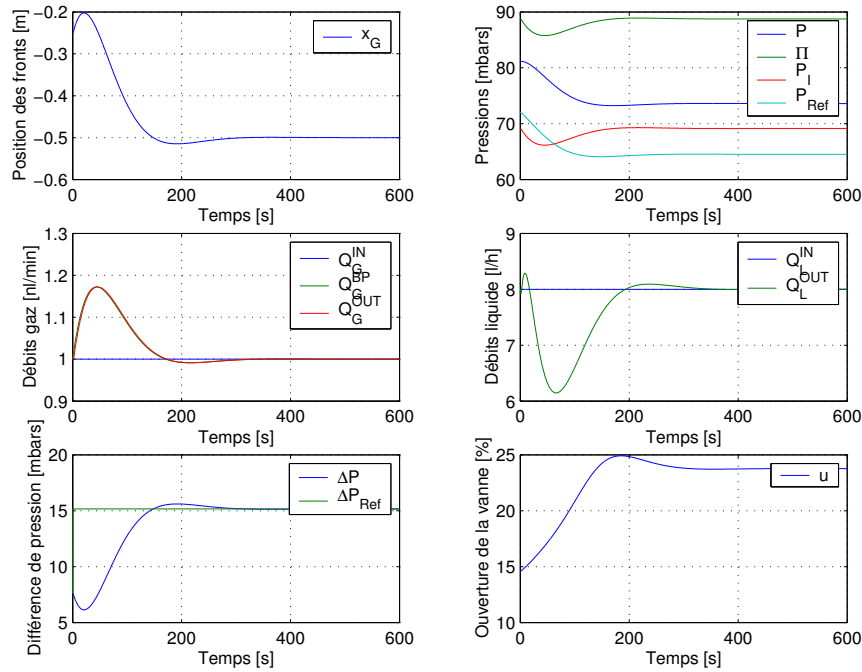
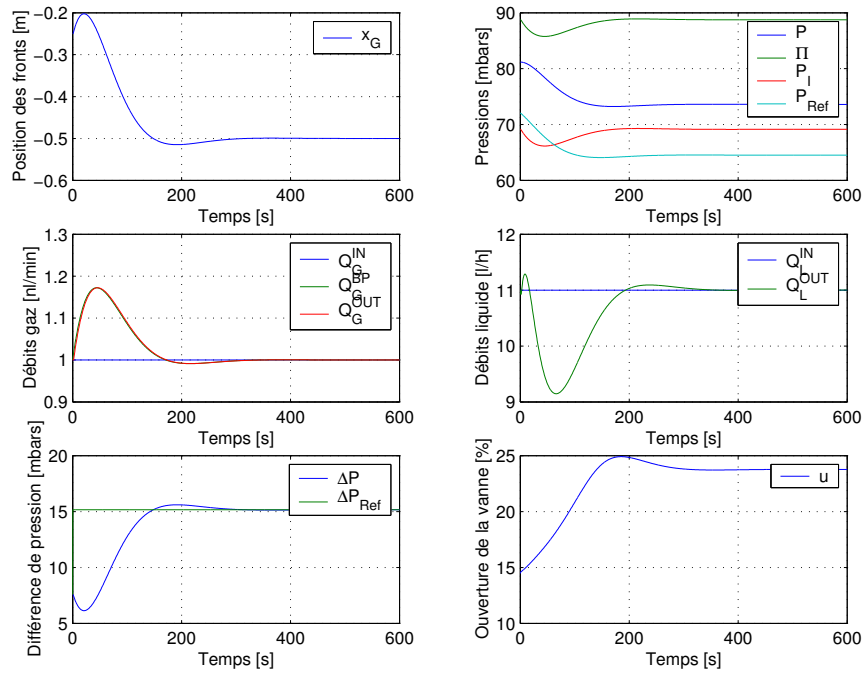
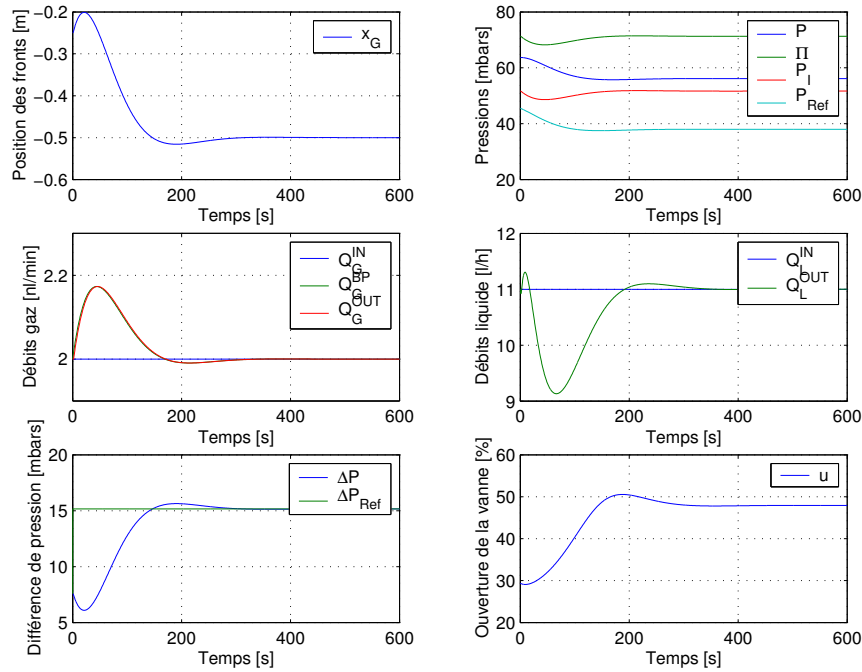


FIG. 5.13: Simulation pour $Q_G^{IN} = 1$ nl/min et $Q_L^{IN} = 8$ l/h

FIG. 5.14: Simulation pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$ FIG. 5.15: Simulation pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

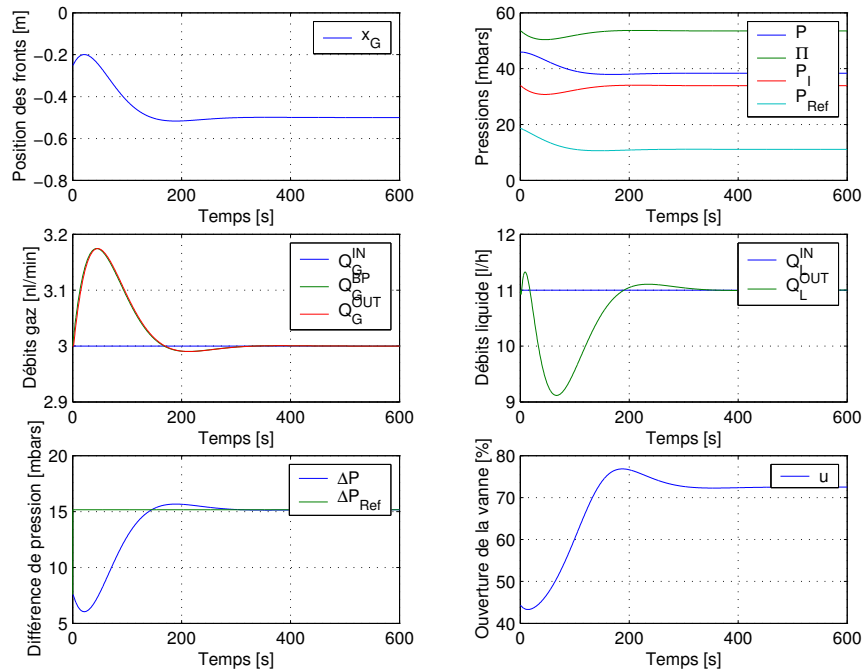


FIG. 5.16: Simulation pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

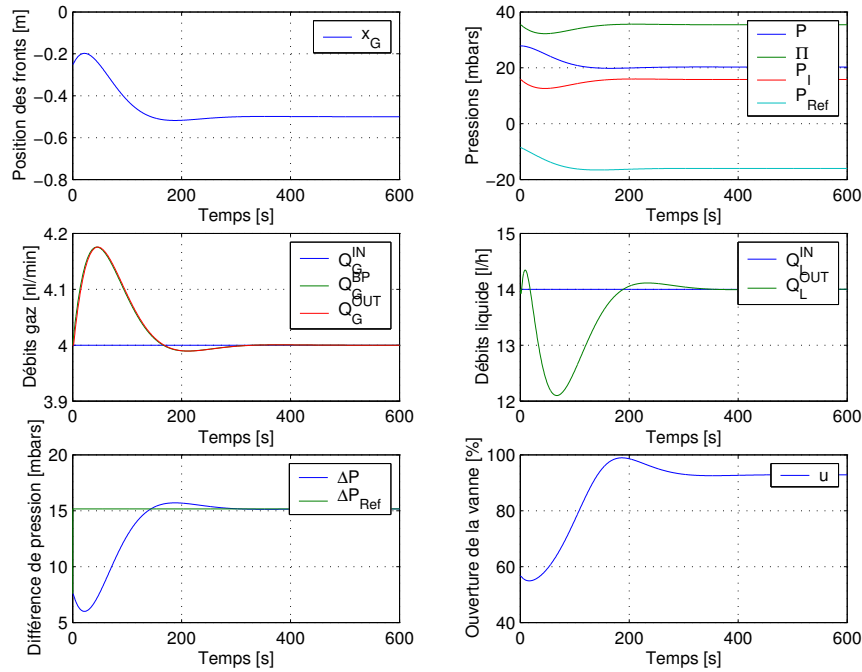


FIG. 5.17: Simulation pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$

Ces différentes simulations montrent l'efficacité de notre régulateur. En effet, pour une large plage de fonctionnement, l'écoulement est stabilisé et les performances sont celles escomptées en terme d'erreur sur la consigne et de temps de réponse. Ainsi, en 300 s , la différence de pression ΔP se stabilise à chaque fois à sa valeur de référence avec une erreur nulle pour un unique couple de coefficients K_P et K_I .

Nous allons maintenant tester la robustesse de notre commande en modifiant la consigne ΔP_{Ref} au cours du temps et en introduisant des perturbations sur les débits d'entrée de gaz et de liquide. Cette simulation dure 3000 s suivant le scénario décrit dans le tableau TAB. 5.2 et la hauteur de réinjection est maintenant égale à l_I^2 pour nous donner une marge de manœuvre suffisante sur x_G^{Ref} .

t	0 s	400 s	900 s	1300 s	1800 s	3000 s
Q_G^{IN}	2 nl/min	2 nl/min	1 nl/min	2.5 nl/min	1 nl/min	1 nl/min
Q_L^{IN}	11 l/h	12 l/h	12 l/h	13 l/h	3 l/h	3 l/h
x_G^{Ref}	-0.5 m	-0.3 m	-1 m	-1 m	-1 m	-1 m

TAB. 5.2: Scénario du test de robustesse

Le graphique FIG. 5.18 présente en fonction du temps, la position de la langue de gaz x_G , les pressions P , Π , P_I et P_{Ref} , les débits de gaz Q_G^{IN} , Q_G^{BP} et Q_G^{OUT} , les débits de liquide Q_L^{IN} et Q_L^{OUT} , la différence de pression ΔP et sa valeur de référence ΔP_{Ref} ainsi que l'ouverture de la vanne u .

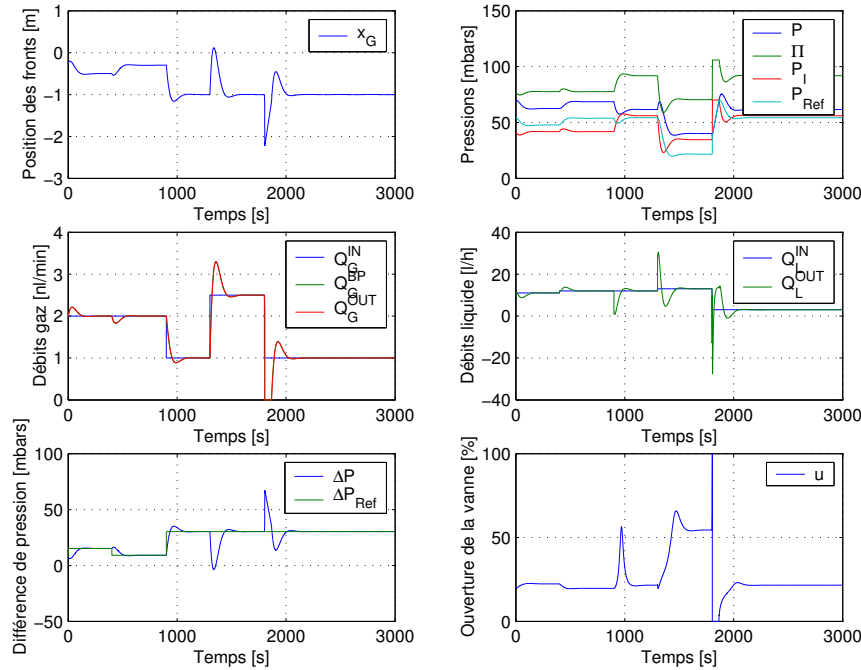


FIG. 5.18: Test de robustesse du contrôleur

Cette simulation montre la robustesse de notre régulateur. En effet, en maintenant constants les réglages de la commande, on stabilise l'écoulement pour toutes les conditions de fonctionnement.

Expériences

De nombreuses expériences ont été menées pour valider notre commande sur la boucle d'écoulement S^4L . En particulier, nous nous sommes intéressés à la hauteur de réinjection la plus basse ($l_I = l_I^1$). Nous n'avons alors jamais réussi à stabiliser l'écoulement, ce qui valide expérimentalement le critère (5.32). Par contre, pour toutes les autres hauteurs, nous sommes arrivés à contrôler le phénomène de severe slugging avec des performances acceptables.

Nous allons maintenant décrire les expériences effectuées pour les cinq couples de débits (Q_G^{IN}, Q_L^{IN}) en utilisant le second ou le troisième point de réinjection ($l_I = l_I^2$ ou $l_I = l_I^3$). Notons tout d'abord que, pour nous permettre d'avoir une plage de valeurs admissibles la plus grande possible sur x_G (et donc conserver le plus possible ΔP_I strictement positif), le prélèvement du gaz ne s'effectue plus dans la partie inclinée mais directement dans le volume additionnel.

Chaque expérience est menée suivant le même scénario. Tout d'abord, on maintient la vanne fermée et on laisse plusieurs cycles de severe slugging se produire. Puis, au début d'une période, on démarre le contrôleur et on laisse l'écoulement se stabiliser à la consigne $\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$. On modifie ensuite cette consigne pour qu'elle prenne la valeur de

10 *mbars* et on attend la stabilisation. Enfin, en conservant $\Delta P_{Ref} = 10 \text{ mbars}$, on change la hauteur de réinjection pour passer de $l_I = l_I^2$ à $l_I = l_I^3$ et on laisse la commande stabiliser à nouveau l'écoulement.

La première expérience concerne le couple (2 *nl/min*, 11 *l/h*) et a été utilisée pour ajuster les coefficients de notre régulateur. Nous avons fixé τ_K à 20 *s* ce qui correspond environ à dix fois le temps t_R et τ_I à 100 *s* ce qui entraîne que $\gamma K_I t_R \approx 0.28$. Ainsi, K_P et K_I sont pris égaux à :

$$\begin{cases} K_P &= 0.05 \text{ s}^{-1} \\ K_I &= 0.01 \text{ s}^{-1}. \end{cases}$$

Le tableau TAB. 5.3 résume le scénario de cette expérience et les graphiques FIG. 5.19 et FIG. 5.20 en donnent les résultats. Le premier présente en fonction du temps, les pressions P , Π et $\Pi_{filtré}$ (cf. annexe A) et le second, la différence de pression ΔP , la consigne ΔP_{Ref} ainsi que l'ouverture de la vanne u .

Temps	0 <i>s</i>	88 <i>s</i>	642 <i>s</i>	1017 <i>s</i>
Action	$u = 0$	$\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 10 \text{ mbars}$	$l_I = l_I^3$

TAB. 5.3: Scénario pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

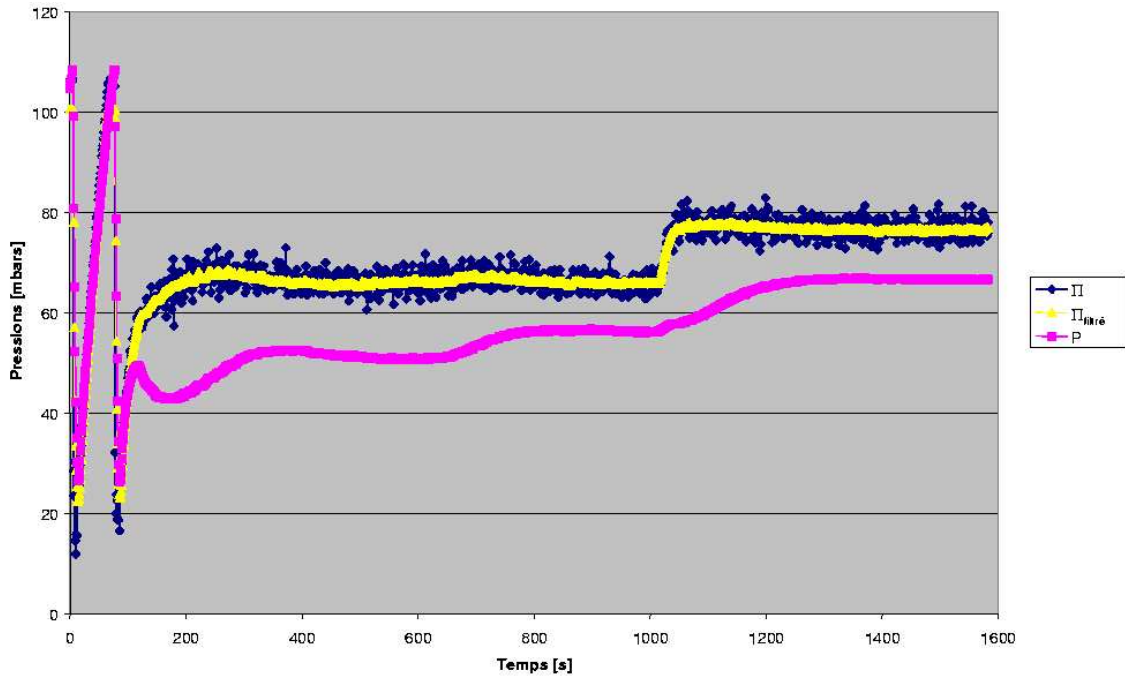


FIG. 5.19: Pressions P , Π et Π_{filtre} pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

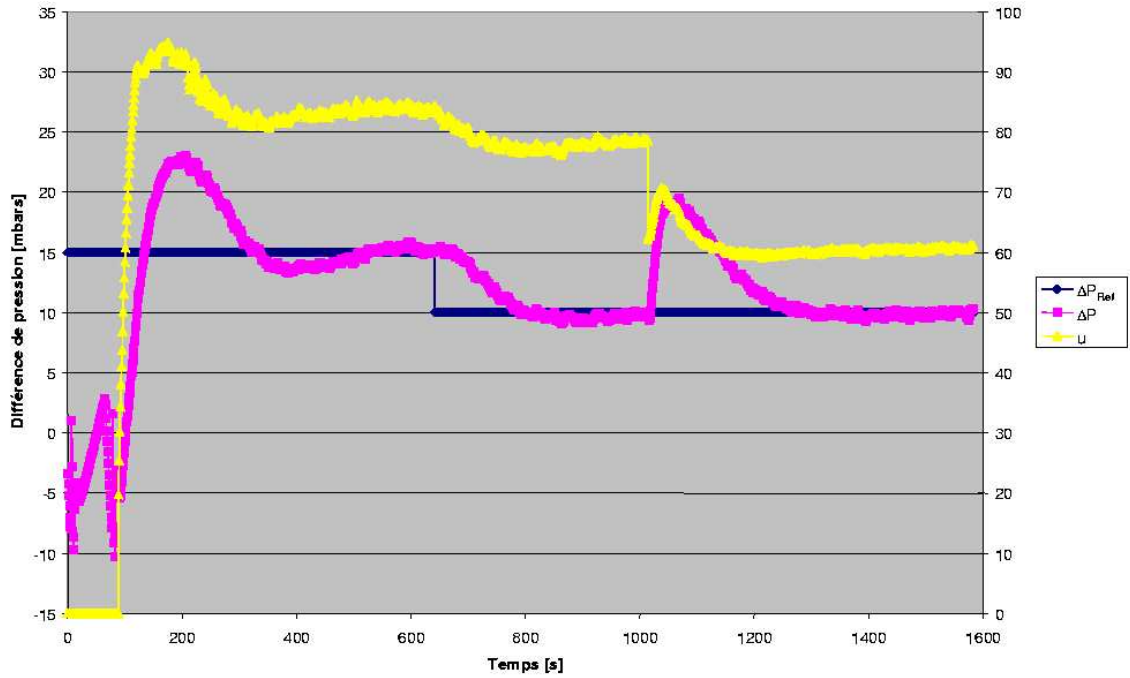


FIG. 5.20: Expérience pour $Q_G^{IN} = 2 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

Cette expérience montre l'efficacité de notre commande. En effet, la langue de gaz se stabilise à sa position de référence x_G^{Ref} avec une erreur tendant vers 0 dans les temps souhaités et l'ouverture de la vanne atteint sa valeur stationnaire. De plus, elle est robuste car, pour le changement de consigne ou la modification de la hauteur de réinjection, ΔP retrouve sa valeur de référence et l'ouverture de la vanne se restabilise à sa valeur de commande finale. Nous pouvons aussi remarquer l'utilité du filtre sur la pression Π . En effet, l'écoulement dans le riser étant intermittent voire bouillonnant, le signal est alors perturbé par un bruit blanc à haute fréquence. Enfin, on trouve des résultats identiques (FIG. 5.21) pour le couple (3 *nl/min*, 11 *l/h*).

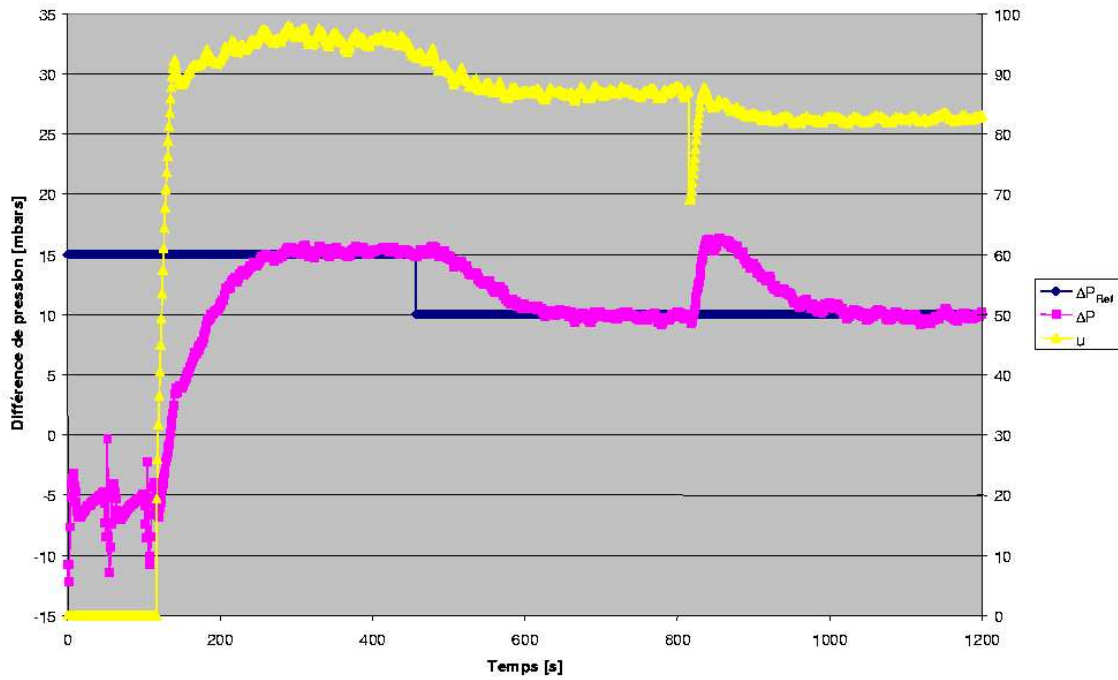
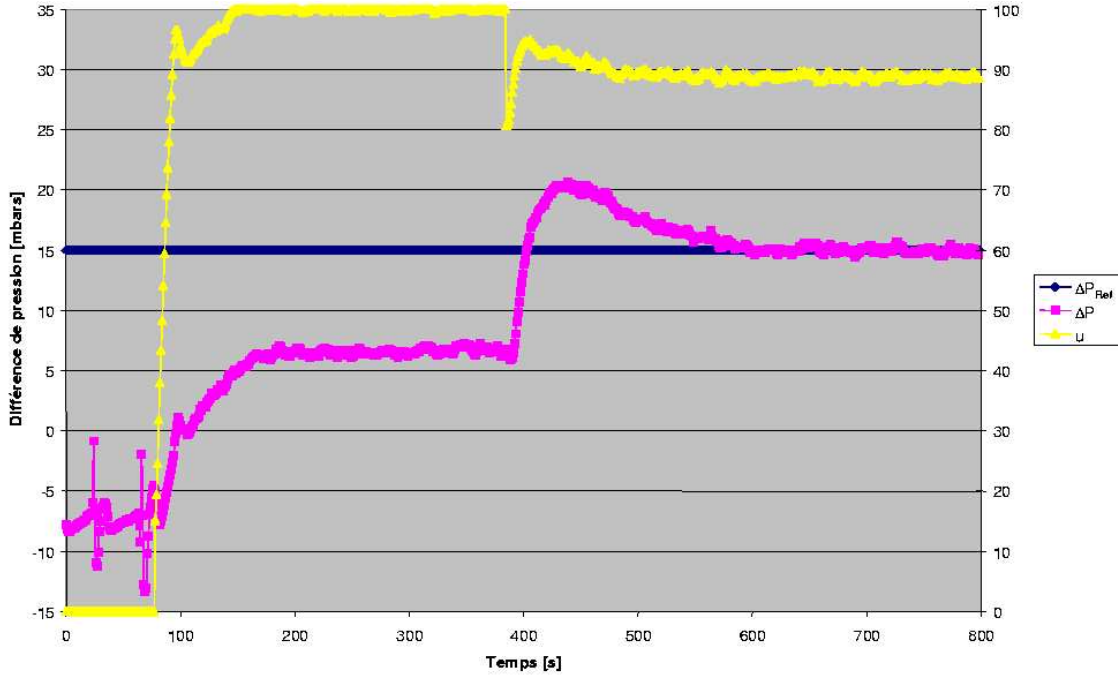


FIG. 5.21: Expérience pour $Q_G^{IN} = 3 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

Pour l'expérience (4 *nl/min*, 14 *l/h*), l'ouverture stationnaire $\bar{u}$ est alors supérieure à 100%, comme c'était déjà le cas pour certaines simulations à cause des caractéristiques de la vanne utilisée. Nous avons tout de même effectué l'expérience (scénario TAB. 5.4 et résultats FIG. 5.22) et on observe que le phénomène de severe slugging est une fois de plus contrôlé (boucle ouverte avec $u = 100\%$), la langue de gaz se stabilisant alors à une position différente de sa position de référence. Puis, une fois la hauteur de réinjection modifiée ($l_I = l_I^3$), l'écoulement se stabilise à nouveau avec une ouverture de vanne inférieure à 100%.

Temps	0 s	77 s	391 s
Action	$u = 0$	$\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbar s}$	$l_I = l_I^3$

TAB. 5.4: Scénario pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$ FIG. 5.22: Expérience pour $Q_G^{IN} = 4 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 14 \text{ l/h}$

Intéressons nous maintenant aux expériences $(1 \text{ nl/min}, 8 \text{ l/h})$ et $(1 \text{ nl/min}, 11 \text{ l/h})$. Les tableaux TAB. 5.5 et TAB. 5.6 résument chaque scénario et les graphiques FIG. 5.23 et FIG. 5.24 en présentent les résultats.

Temps	0 s	298 s	1027 s	1818 s
Action	$u = 0$	$\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbar s}$	$\Delta P_{Ref} = 10 \text{ mbar s}$	$l_I = l_I^3$

TAB. 5.5: Scénario pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$

Temps	0 s	616 s	1137 s	1727 s
Action	$u = 0$	$\Delta P_{Ref} = 15 \text{ mbars}$	$\Delta P_{Ref} = 10 \text{ mbar s}$	$l_I = l_I^3$

TAB. 5.6: Scénario pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

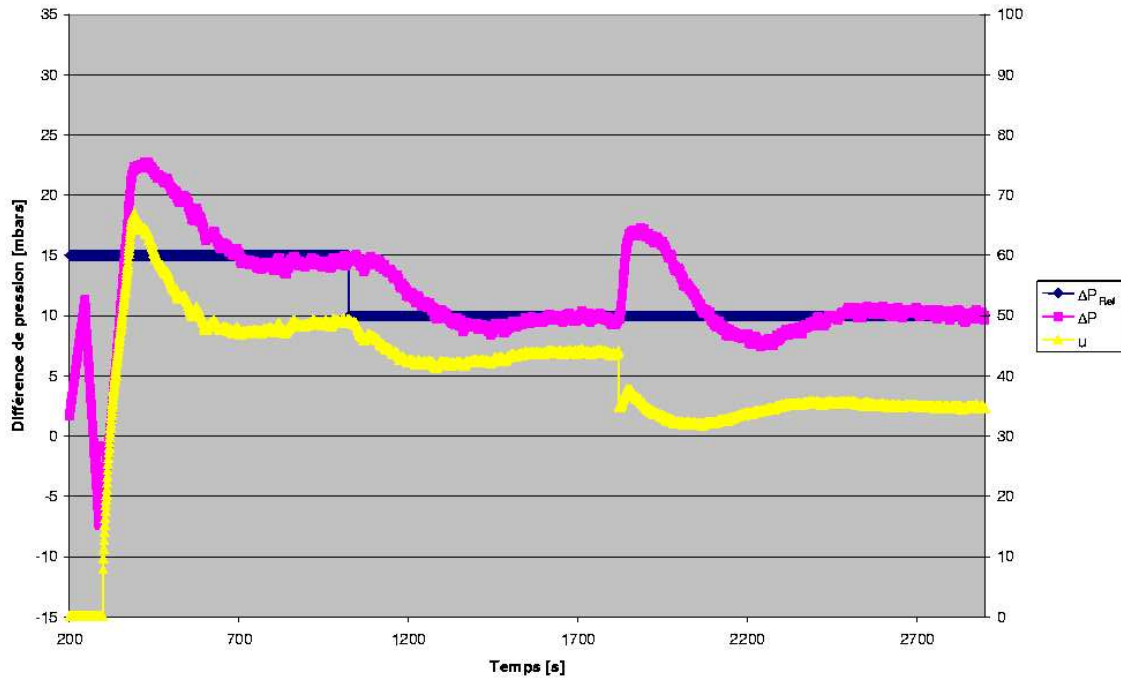


FIG. 5.23: Expérience pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 8 \text{ l/h}$

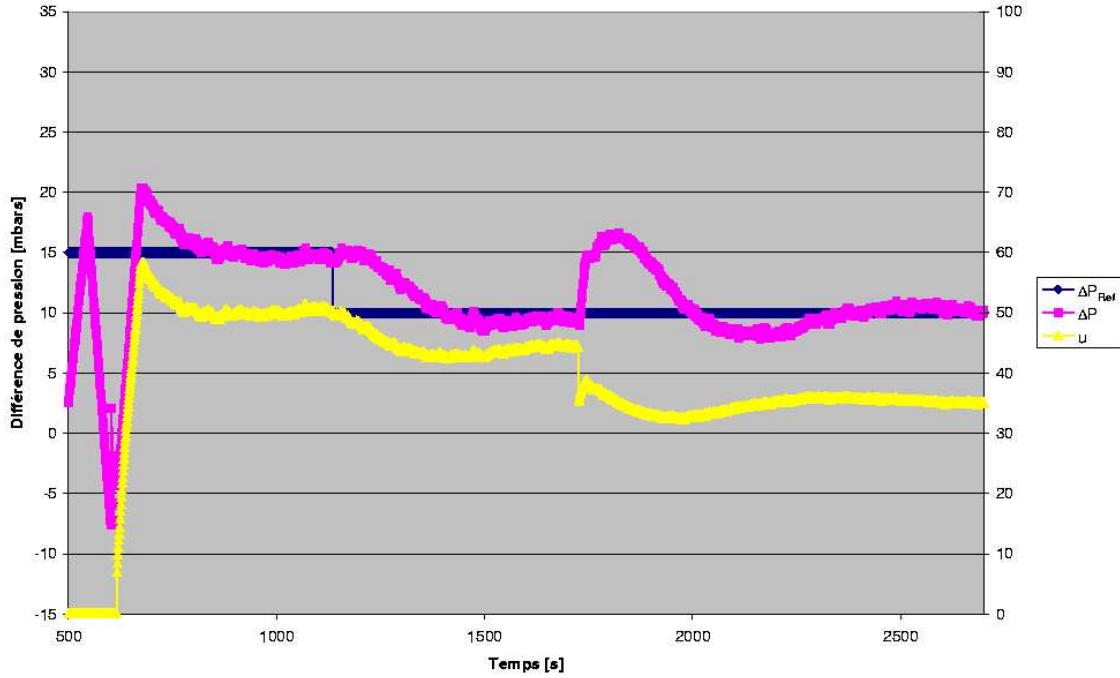


FIG. 5.24: Expérience pour $Q_G^{IN} = 1 \text{ nl/min}$ et $Q_L^{IN} = 11 \text{ l/h}$

Notre contrôleur a là encore le comportement escompté en terme d'erreur sur la consigne et de temps de réponse.

5.4.2 Résultats pour un système de taille industrielle

Bien que le modèle servant de base à notre commande (5.34) ne prenne pas en compte l'expansion du gaz dans le riser, nous allons tout de même regarder son comportement sur le système pipeline/riser à échelle industrielle décrit dans le chapitre 4 consacré au contrôle par prélèvement et pour lequel cet effet n'est plus négligeable. Ainsi, le système est défini par un diamètre de 0.2 m , une hauteur de riser de 1000 m et un volume de gaz en amont du point bas de 100 m^3 correspondant environ à 10 km de conduite. L'angle entre le pipeline et l'horizontale est de -2° et le riser est supposé vertical. Le C_V de la vanne est de 20 m^2 et le coefficient γ_V est pris égal à 12×10^{-5} . De plus, la hauteur de réinjection correspond à la hauteur théorique déterminée par la relation (5.32), c'est-à-dire :

$$l_I = 170 \text{ m}.$$

La densité du gaz est de 6 kg/m^3 à la pression de référence P^N égale à 10^6 Pa et celle du liquide est constante égale à 800 kg/m^3 . De plus, la pression en tête de riser est supposée égale à $15 \times 10^5 \text{ Pa}$ et les débits en entrée sont égaux à 5 kg/s pour le gaz et à 60 kg/s pour le liquide. Enfin, à partir d'une simulation effectuée avec le logiciel TACITE, la vitesse de remontée de la phase gazeuse dans le riser C_∞ est fixée à 20 m/s impliquant que $t_R = 41.5 \text{ s}$.

La consigne ΔP_{Ref} est prise pour avoir x_G^{Ref} égal à -3000 m et nous fixons les temps caractéristiques du régulateur à :

$$\begin{cases} \tau_P = 415\text{ s} \\ \tau_I = 2075\text{ s}. \end{cases}$$

On obtient ainsi des coefficients K_P et K_I égaux à :

$$\begin{cases} K_P = 2.40 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1} \\ K_I = 4.82 \times 10^{-4}\text{ s}^{-1}, \end{cases} \quad (5.38)$$

impliquant que $\gamma K_I t_R \approx 0.33$.

Les paramètres de cette simulation sont résumés dans le tableau TAB. 5.7.

D	l_R	l_I	β_P	β_R	v_G^+
0.2 m	1000 m	170 m	-2°	90°	100 m^3
C_V	γ_V	P^N	ρ_G^N	ρ_L^N	C_∞
20 m^2	12×10^{-5}	10^6 Pa	6 kg/m^3	800 kg/m^3	20 m/s
Q_G^{IN}	Q_L^{IN}	P^{OUT}	x_G^{Ref}	K_P	K_I
5 kg/s	60 kg/s	$15 \times 10^5\text{ Pa}$	-3000 m	$2.40 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1}$	$4.82 \times 10^{-4}\text{ s}^{-1}$

TAB. 5.7: Paramètres utilisés pour le système industriel

La simulation dure 15000 s . A l'instant initial, on part d'un écoulement stabilisé, la langue de gaz dans le pipeline étant à la position $x_G = -1000\text{ m}$. Puis, la commande est lancée dès le premier pas de temps de la simulation. Le graphique FIG. 5.25 représente en fonction du temps, la position de la langue de gaz x_G , les pressions P , Π , P_I et P_{Ref} , les débits de gaz Q_G^{IN} , Q_G^{BP} et Q_G^{OUT} , les débits de liquide Q_L^{IN} et Q_L^{OUT} , la différence de pression ΔP et sa valeur de référence ΔP_{Ref} ainsi que l'ouverture de la vanne u .

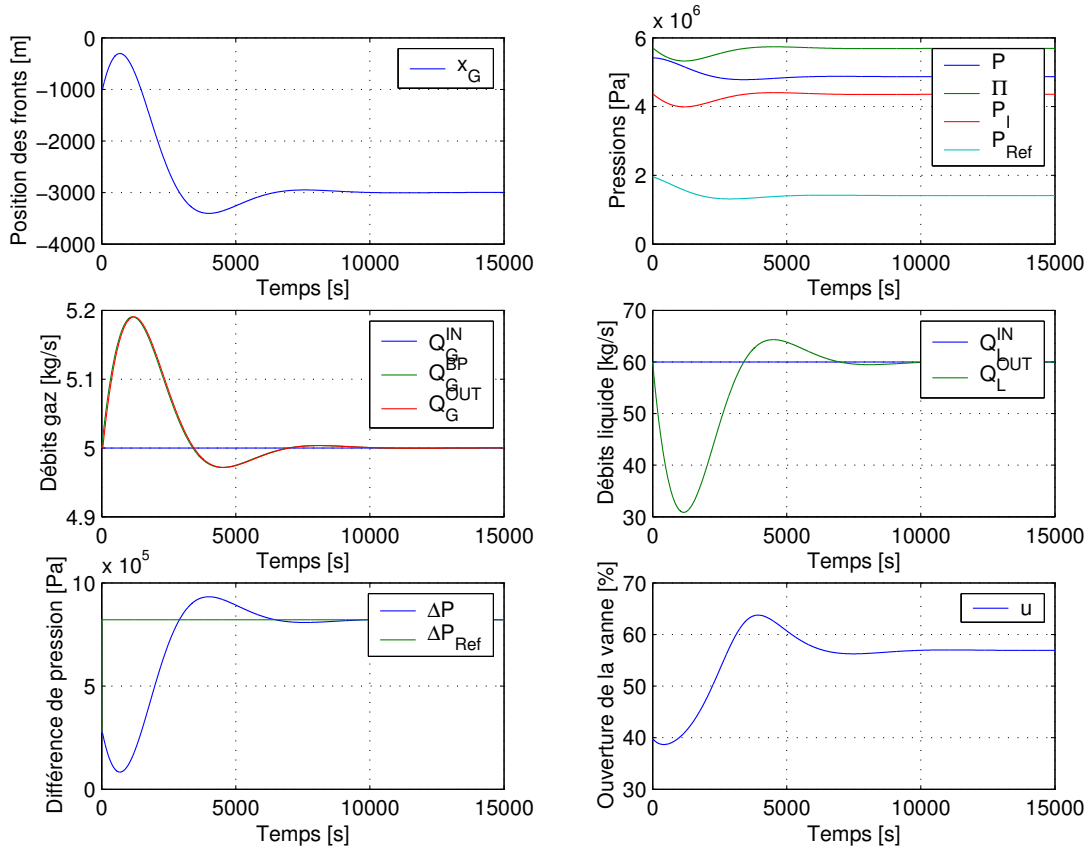


FIG. 5.25: Simulation du contrôleur sur un système de taille industrielle

Cette simulation montre l'efficacité de notre régulateur sur un système industriel. En effet, l'écoulement est stabilisé et les performances sont celles souhaitées en terme d'erreur sur la consigne et de temps de réponse. Ainsi, en 8000 s, la différence de pression ΔP se stabilise à sa valeur de référence avec une erreur nulle et l'ouverture de la vanne atteint sa valeur de commande finale. Certes, ce temps de réponse peut paraître long (il est de l'ordre de 2 h), mais il confirme le critère de stabilité LEM. 5.2 sur l'évolution lente de P_{Ref} et il est à confronter avec le temps de remontée du gaz dans le riser qui est déjà de l'ordre de la minute. De plus, il semble que l'on puisse utiliser des gains plus forts, mais alors, le débit de liquide sortant du riser devient négatif et, par conséquent, notre modèle est faux. Ainsi, il faudrait utiliser le modèle non simplifié pour valider ces nouveaux réglages.

5.5 Conclusions

Ce système de régulation, basé sur le by-pass d'une quantité contrôlée de gaz au niveau du point bas, permet de stabiliser les écoulements diphasiques dans les conduites de type pipeline/riser. Simple à implémenter, car faisant partie de la famille des commandes de type proportionnel-intégral et se basant uniquement sur la mesure de deux pressions, il

tient compte des caractéristiques physiques du phénomène, puisqu'il est conçu à partir du modèle réduit développé dans le chapitre 3. De plus, cette solution non intrusive et ne demandant pas d'équipements de surface, permet de garantir une production maximale du réservoir, le gaz réinjecté diminuant d'autant la pression hydrostatique dans le riser.

L'étude en boucle ouverte a permis de déterminer un critère de design sur la hauteur minimale de réinjection en fonction de la consigne x_G^{Ref} . Même si les simulations numériques nous indiquent qu'elle est surestimée, ce critère a été validé expérimentalement sur la boucle S^4L . En effet, pour une hauteur de réinjection plus petite, le bassin d'attraction est alors trop réduit pour contrôler efficacement l'écoulement. Nous avons ensuite étudié la stabilité d'une commande à deux échelles de temps. Robuste, elle atteint les performances souhaitées en terme d'erreur sur la consigne et de temps de réponse pour une large plage de fonctionnement. Cependant, afin de tirer le meilleur parti de ce système de régulation, il serait utile de concevoir une architecture permettant de conserver une différence de pression ΔP_I toujours suffisante pour permettre au gaz de s'écouler dans le by-pass.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Les modèles mono-dimensionnels permettant de simuler le comportement des écoulements polyphasiques dans les conduites pétrolières sont généralement basés sur un système d'Equations aux Dérivées Partielles couplé à plusieurs lois de fermeture. Ils permettent ainsi de décrire l'écoulement en termes de débits, de pression, de température et de taux de présence de chaque phase. Cependant, ils sont difficilement utilisables directement pour réaliser un contrôleur temps réel.

Nous avons de ce fait, débuté cette thèse par une modélisation du phénomène de severe slugging en intégrant en espace les équations de conservation et en utilisant certaines hypothèses adaptées à ce régime d'écoulement. Ce modèle, de type algébro-différentiel pour chacune des phases du phénomène, permet le design des installations de production off-shores. En particulier, nous l'avons employé pour dimensionner un montage expérimental de taille réduite : notre boucle d'écoulement S^4L , qui par la suite a servi à nos différentes validations. De plus, une extension de ce modèle a été proposée pour permettre de simuler tous les types d'écoulement à bouchons induits par la gravité.

Un premier système de régulation a ensuite été présenté. Utilisant la capacité du pipeline à séparer les phases sous l'effet de la gravité, un piquage permet d'y prélever la totalité de la phase gazeuse et est relié à un riser auxiliaire pour la transporter jusqu'aux installations de traitement, le débit de ce gaz étant contrôlé par une vanne. Dans un premier temps, pour simuler ce système physique, nous nous sommes attachés à obtenir un système d'équations basé sur le modèle réduit de severe slugging. Dans un second temps, une étude de stabilité d'un bouclage proportionnel-intégral sur l'ouverture de la vanne a été menée par la technique des portraits de phase, les principales difficultés de ce travail provenant du caractère hybride du système (la dimension de l'espace des états changeant au cours du temps) et de la saturation de l'ouverture de la vanne.

Ce régulateur est un bon moyen pour contrôler le phénomène de severe slugging. Robuste et simple à implémenter, il a cependant l'inconvénient d'imposer une pression importante dans tout le système, pouvant entraîner des réductions de production.

Pour pallier ce désagrément, un second contrôleur a été mis en œuvre, dans lequel le

gaz prélevé est réinjecté à une certaine hauteur dans le riser pour diminuer la pression hydrostatique. Nous avons tout d'abord, développé le modèle reproduisant ce by-pass sous la forme d'un système hybride, implicite et à retard réparti. Puis, nous nous sommes limités au régime saturé et avons négligé l'expansion du gaz pour obtenir un système explicite et à retard constant. Une étude de stabilité en boucle ouverte a ensuite été menée pour en déduire un critère sur la hauteur minimale de réinjection. Enfin, la commande a été développée en utilisant les techniques à deux échelles de temps.

Ce système de régulation, basé sur le by-pass d'une quantité contrôlée de gaz au niveau du point bas, permet de manière robuste de stabiliser les écoulements diphasiques dans les conduites de type pipeline/riser. De plus, cette solution simple à implémenter, non intrusive et ne demandant pas d'équipements de surface, permet de garantir une production maximale du réservoir, le gaz réinjecté diminuant d'autant la pression hydrostatique.

Par la suite, il serait intéressant d'améliorer les performances de ce contrôleur en utilisant un modèle prenant en compte l'expansion du gaz dans le riser. En effet, les résultats numériques obtenus dans le cadre de cette thèse pour le système industriel (FIG. 5.25) nous indiquent que ce type de commande semble être une solution à approfondir. Ainsi, en se limitant au régime saturé et en supposant que la vitesse de remontée du gaz dans le riser est constante, l'évolution au cours du temps de la pression au point de réinjection s'écrit dans sa forme générale :

$$\dot{P}_I(t) = \frac{g \sin \beta_R}{S} \left(1 - \frac{\rho_L^N P^N}{\rho_G^N P_I(t)} \right) Q_G^{BP}(t) + \beta Q_G^{BP}(t - t_R) + \int_{t-t_R}^t \partial_t N_p(\sigma, t) Q_G^{BP}(\sigma) d\sigma,$$

le noyau $N_p(\sigma, t)$ étant égal à :

$$N_p(\sigma, t) = \frac{g \sin \beta_R}{S} \left(1 - \frac{\rho_L^N P^N}{\rho_G^N p(l_I + C_\infty(t - \sigma), t)} \right),$$

où $p(x, t)$ représente la pression à l'intérieur du riser à l'abscisse x et au temps t . Elle est solution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange diphasique en régime permanent dans laquelle les termes d'inertie et les frottements pariétaux ont été négligés. Le système en boucle fermée avec notre commande à deux échelles de temps s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{P}(t) = \alpha [Q_G^{IN} - Q_G^{BP}(t)] \\ \dot{P}_I(t) = \frac{g \sin \beta_R}{S} \left(1 - \frac{\rho_L^N P^N}{\rho_G^N P_I(t)} \right) Q_G^{BP}(t) \\ \quad + \beta Q_G^{BP}(t - t_R) + \int_{t-t_R}^t \partial_t N_p(\sigma, t) Q_G^{BP}(\sigma) d\sigma \\ \dot{P}_{Ref}(t) = K_I [P_I(t) - P(t) + \rho_L^N g \sin \beta_R l_I - \Delta P_{Ref}] \\ Q_G^{BP}(t) = \frac{K_P}{\alpha} [P(t) - P_{Ref}(t)]. \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un système intégral-différentiel de type Volterra [31] sur lequel une étude de stabilité pourrait être menée pour en déduire des contraintes sur les coefficients K_P et K_I .

Pour l'industrialisation de ce régulateur, il serait souhaitable de concevoir une architecture offshore permettant d'en tirer pleinement bénéfice. Ainsi, une capacité de séparation intégrée à la base du riser pourrait lui être adjointe (FIG. 6.1). En effet, les phases liquides seraient évacuées en partie basse de ce séparateur et le gaz serait recueilli en partie supérieure. Ils seraient ensuite re-combinés dans le riser à une hauteur convenable au dessus de la base, impliquant alors une différence de pression toujours acceptable entre l'amont et l'aval de la vanne et donc une plage d'utilisation beaucoup plus importante.

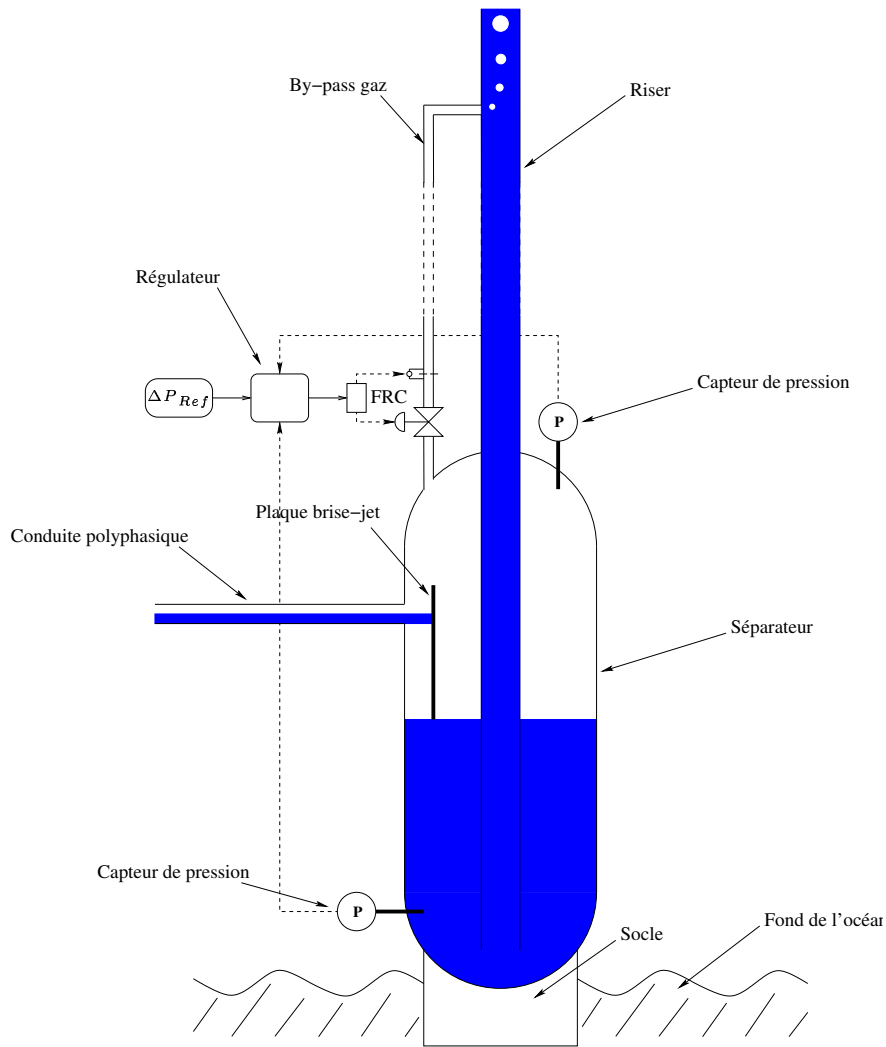


FIG. 6.1: Système industriel du by-pass

Un travail supplémentaire serait nécessaire pour définir les différents équipements et

leur arrangement général, dimensionner les principaux éléments et s'assurer que ce dispositif peut être installé et maintenu en état de bon fonctionnement.

Annexes et bibliographie

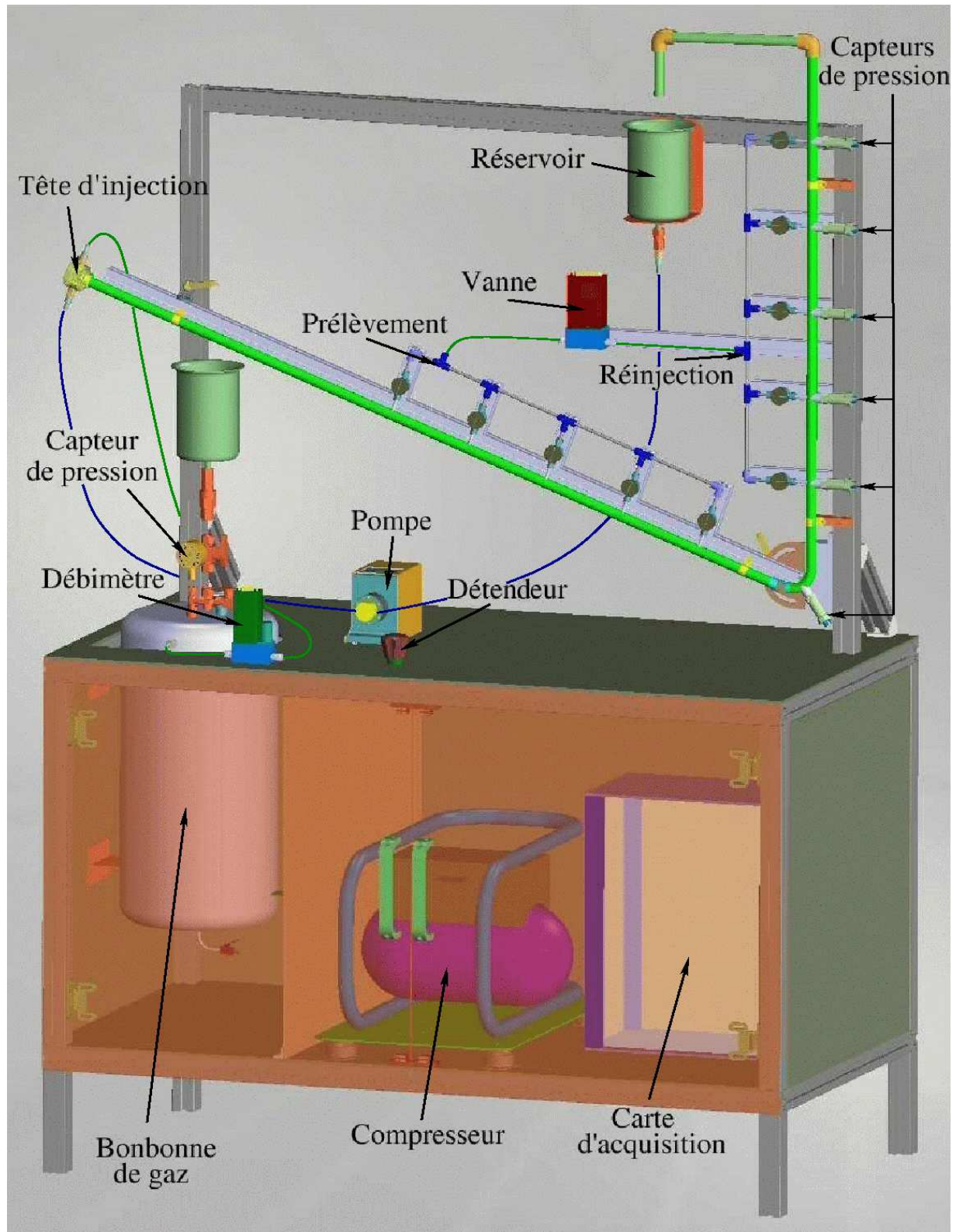
Annexe A

Montage expérimental S^4L

Cette annexe présente le montage expérimental eau/air à échelle réduite utilisée pour valider les différents modèles et contrôleurs mis en place au cours de cette thèse. Cette boucle d'écoulement nommée S^4L pour *Small Size Severe Slugging Loop* est basée sur celle utilisée par Taitel et al. [153, 162] et représente un système pipeline/riser à l'intérieur duquel peut se développer le severe slugging. Elle comprend :

- un tube incliné représentant le pipeline,
- un tube vertical faisant office de riser,
- une tête d'injection en entrée de conduite,
- un réservoir servant de séparateur en sortie,
- une bonbonne de gaz,
- un débitmètre gaz,
- un détendeur,
- un compresseur,
- une pompe à engrenage,
- des piquages pour prélever le gaz dans la partie inclinée,
- des piquages pour réinjecter le gaz dans le tube vertical,
- une vanne pneumatique,
- des capteurs de pression,
- une carte d'acquisition et un ordinateur.

La figure FIG. A.1 donne une représentation de cette boucle d'écoulement.

FIG. A.1: Représentation de la boucle S^4L

L'eau et l'air sont introduits simultanément par la tête d'injection en entrée de conduite (FIG. A.2). Transparente pour permettre de suivre visuellement l'évolution des fronts, son diamètre est de 1.5 *cm*. La longueur du tube incliné est de 1.5 *m* et son angle peut être ajusté entre 0 et -30° . Le tube vertical a une longueur de 1.08 *m* et son angle est fixé à 90° .

Un compresseur, un détendeur limitant la pression à 1 *bar* et un débitmètre sont utilisés pour fixer le débit d'air en entrée sur une plage de 0 à 10 *nl/min* (normaux-litres par minute). Avant d'entrer dans la boucle, l'air est tout d'abord dirigé dans une bonbonne dont le volume peut varier de 0 à 35.8 *l* en la remplissant d'eau ou en la vidant. Cette cuve est utilisée à la place d'une conduite de grande longueur, pour produire un volume satisfaisant de gaz permettant ainsi de générer du severe slugging. Elle est ensuite connectée à la tête d'injection. Notons aussi que le haut de la section verticale est ouverte à la pression atmosphérique. Le tableau TAB. A.1 précise la longueur de conduite équivalente l_G^+ représentant le volume additionnel v_G^+ .

v_G^+	35.8 <i>l</i>	25.8 <i>l</i>	15.8 <i>l</i>	5.8 <i>l</i>	0 <i>l</i>
l_G^+	202 <i>m</i>	146 <i>m</i>	89 <i>m</i>	33 <i>m</i>	0 <i>m</i>

TAB. A.1: Correspondance entre v_G^+ et l_G^+

Une pompe à engrenage permet d'injecter l'eau du réservoir. Son débit varie de 0 à 14 *l/h* (litres par heure). Lorsque le liquide atteint le haut de la section verticale, il coule à nouveau dans le réservoir et on obtient ainsi une circulation d'eau en boucle fermée.

Les pressions sont mesurées dans la bonbonne de gaz, au niveau du point bas et sur toute la hauteur du tube vertical avec des capteurs de pression relatifs dont le domaine de fonctionnement est 0 – 100 *mbar*s. En pratique, nous conservons uniquement les informations de pression au niveau de la bonbonne de gaz et du point bas. Plusieurs vannes sont fixées sur le haut du tube incliné pour prélever le gaz et d'autres sont placées sur la section verticale afin de le réinjecter. Ainsi, on peut effectuer un prélèvement à un endroit précis de la section inclinée et réinjecter le gaz à une certaine hauteur dans le tube vertical. Notons aussi que cette réinjection induit des oscillations à hautes fréquences sur le capteur mesurant la pression au niveau du point bas. On utilise alors un filtre passe-bas sur ce signal. De plus, une vanne pneumatique permet de réguler le débit de cet air bippassé. En partant du point bas, les différentes hauteurs de réinjection l_I sont données par le tableau TAB. A.2.

Nom	l_I^1	l_I^2	l_I^3	l_I^4	l_I^5
l_I	20.0 <i>cm</i>	36.5 <i>cm</i>	53.0 <i>cm</i>	70.0 <i>cm</i>	86.5 <i>cm</i>

TAB. A.2: Hauteurs de réinjection l_I

La pompe, le débitmètre, les capteurs de pression et la vanne pneumatique sont connectés à un ordinateur via une carte d'acquisition et un programme LabVIEW [99] permet de les commander et l'enregistrement en temps réel des données.

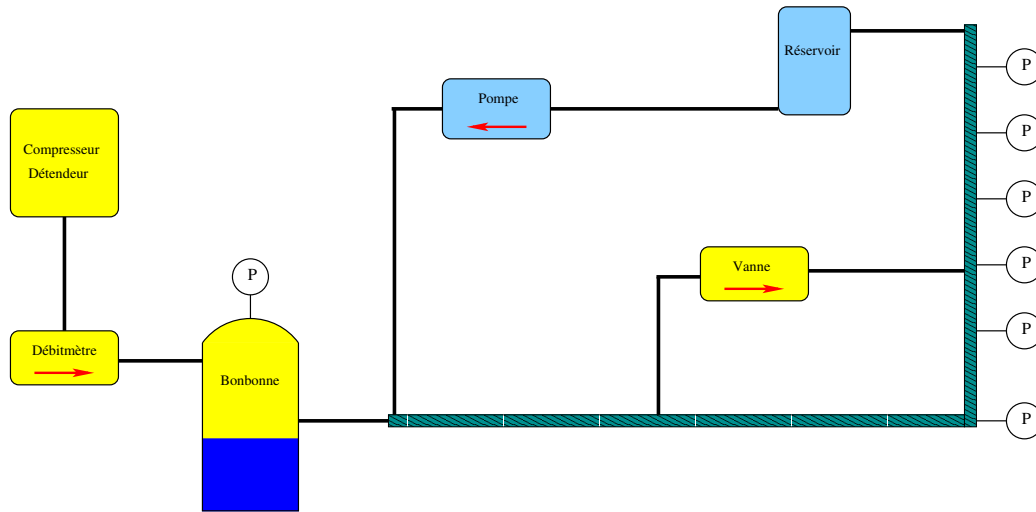


FIG. A.2: Synoptique de la boucle S^4L

Cette boucle reproduit bien le phénomène de severe slugging comme décrit dans le chapitre 2. En effet, pour un volume de gaz et des débits adéquats, nous observons distinctement les quatre phases du phénomène, c'est-à-dire, la formation du bouchon de liquide, sa production, la pénétration de la langue de gaz et, enfin, la retombée du liquide dans le point bas. Puis, lorsque l'on augmente le débit de gaz, il apparaît un régime de transition dans lequel la phase de blow-out commence avant que le riser soit complètement rempli de liquide. Enfin, pour les grands débits de gaz, l'écoulement dans le riser est alors intermittent ou annulaire et aucun cycle de pression n'est observé. Les débits de gaz et de liquide en sortie sont alors constants dans le temps.

Une calibration des différents équipements a aussi été effectuée. Notamment, nous avons vérifié le volume maximum de la bonbonne, le débit de la pompe et du débitmètre gaz et les offsets des capteurs de pression. De plus, pour la vanne pneumatique, nous avons utilisé la relation classique reliant son débit à son ouverture et aux pressions en amont et en aval (FIG. A.3).

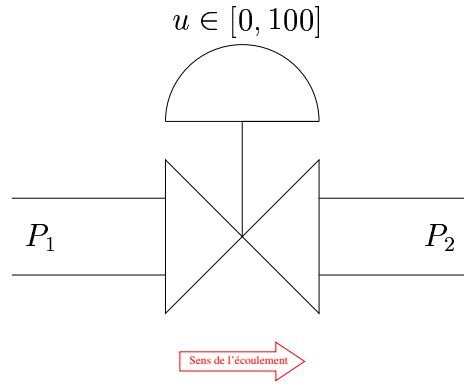


FIG. A.3: Représentation de la vanne

Ainsi, le débit massique de gaz passant par la vanne est donné par la relation suivante :

$$Q_G = \frac{\gamma_V}{100} C_V \sqrt{\frac{\rho_G^N}{P^N}} u \sqrt{P_2 [P_1 - P_2]^+}, \quad (\text{A.1})$$

ρ_G^N étant la densité du gaz à la pression P^N , u l'ouverture de la vanne comprise entre 0 et 100%, P_1 la pression en amont, P_2 la pression en aval et $\gamma_V = 4 \times 10^{-5}$ une constante déterminée expérimentalement. De plus, son C_V est égal à 0.03 m^2 .

Annexe B

Modélisation du terrain slugging

Cette annexe est consacrée à l’obtention d’un modèle physique reproduisant le phénomène de terrain slugging, mais aussi applicable au severe slugging. Il est écrit sous la forme d’un système algébro-différentiel pour chacune des phases du phénomène. Nous allons commencer par la “chute du liquide”, phase supposée instantanée et qui fera office de conditions initiales à chaque nouveau cycle (EQU. B.4). Puis, les deux premières phases seront modélisées en supposant l’équilibre quasi-statique des forces (EQU. B.12 et B.13). Enfin, contrairement au modèle de severe slugging décrit au chapitre 3, la troisième phase sera basée sur l’équation de fermeture (2.13) donnant la vitesse de translation d’une poche de gaz dans un écoulement liquide (EQU. B.14).

En vue de notre modélisation mathématique, nous allons supposer que :

1. l’écoulement est isotherme et les fluides sont newtoniens,
2. le liquide est incompressible et le gaz est un gaz parfait,
3. les bouchons de liquide sont non aérés,
4. les frottements sont négligeables,
5. les débits d’entrée et la pression de sortie sont constants dans le temps.

B.1 Dimensions du système

La conduite accidentée, représentée par la figure FIG. B.1, comprend T tronçons numérotés de $i = 1$ pour celui se trouvant à l’amont de l’écoulement, à $i = T$ pour celui se situant à l’aval. De plus, chacun comprend une portion descendante de longueur l_D^i inclinée de β_D^i par rapport à l’horizontale et une portion ascendante de longueur l_U^i inclinée de β_U^i par rapport à l’horizontale. Enfin, un volume additionnel v_G^+ est ajouté en entrée pour permettre au gaz de se comprimer.

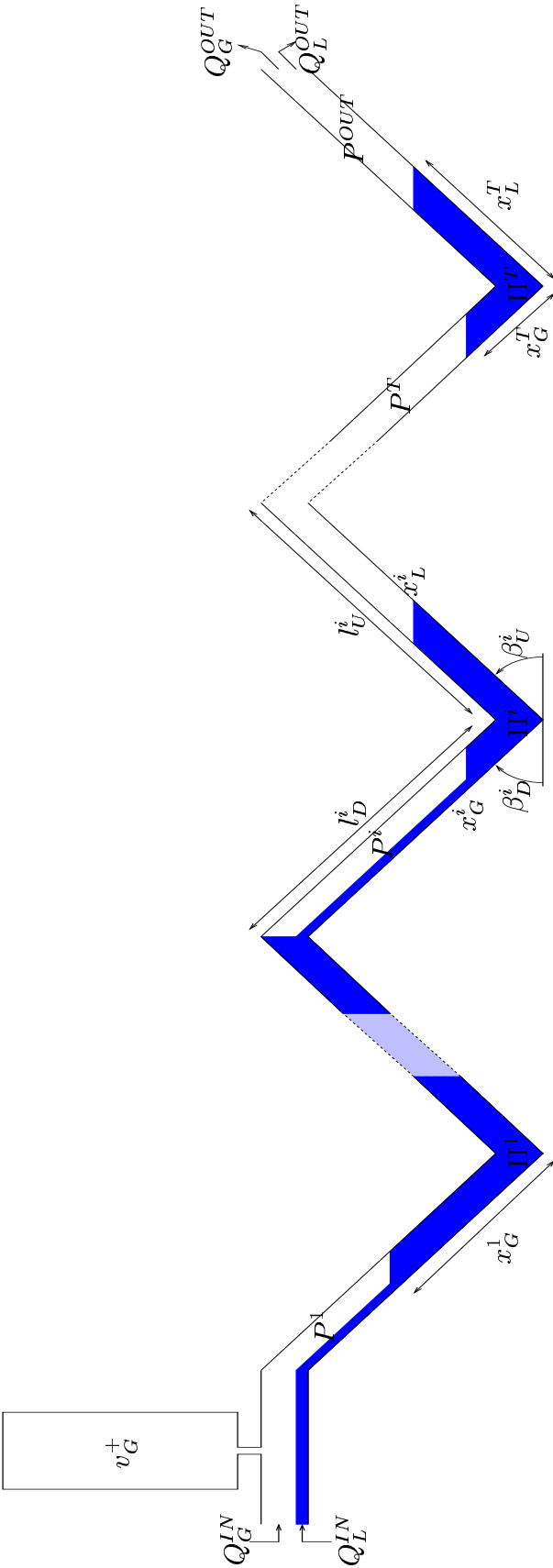


FIG. B.1: Dimensions du problème

Un mélange diphasique gaz/liquide est injecté en amont du premier tronçon avec les débits constants Q_G^{IN} et Q_L^{IN} et sort en fin de dernier tronçon à la pression constante P^{OUT} avec les débits Q_G^{OUT} et Q_L^{OUT} . Le gaz se trouvant en amont du $i^{\text{ième}}$ point bas est à la pression P^i et la pression au niveau de ce point bas est notée Π^i . La position de la langue de gaz dans la $i^{\text{ième}}$ portion descendante est repérée par x_G^i et celle du front de liquide dans la $i^{\text{ième}}$ portion montante par x_L^i . De plus, l'origine de ces abscisses curvilignes x_G^i et x_L^i est située au niveau du point bas. On a donc $x_G^i < 0$ (resp. $x_L^i < 0$) si la langue de gaz (resp. le front de liquide) est dans la $i^{\text{ième}}$ portion descendante et $x_G^i > 0$ (resp. $x_L^i > 0$) si elle (resp. il) est dans la $i^{\text{ième}}$ portion ascendante.

Compte tenu de la topographie de la conduite, il est légitime de supposer que l'angle entre chaque partie descendante et l'horizontale est dans $[-\frac{\pi}{2}, 0[$ et celui entre chaque partie montante et l'horizontale appartient à $]0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui implique que :

1. $\sin \beta_D^i < 0 \ \forall i \in [1, T]$,
2. $\sin \beta_U^i > 0 \ \forall i \in [1, T]$,
3. $\sin \beta_D^i \neq \sin \beta_U^j \ \forall i, j \in [1, T]$.

B.2 Conditions initiales

Nous allons déterminer les positions des différentes interfaces gaz/liquide à la fin d'un cycle de terrain slugging, pour en déduire les conditions initiales au cycle suivant. Pour ce faire, plaçons-nous au niveau du $i^{\text{ième}}$ tronçon et notons $\delta_{i=j}^T$ et $\delta_{i \neq j}^T$ deux constantes vérifiant :

$$\forall i, j \in [1, T], \ \delta_{i \neq j}^T = 1 - \delta_{i=j}^T \text{ et } \delta_{i=j}^T = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $[t_b, t_c]$ l'intervalle de temps pendant lequel se produit la "chute du liquide". Cette phase étant rapide, nous n'allons pas chercher à déterminer sa dynamique. Nous la supposons donc instantanée et nous allons uniquement déterminer la position des fronts $x_G^i(t_c)$ et $x_L^i(t_c)$ une fois que le liquide est retombé dans les différents points bas.

Soit m_L^i la masse de liquide contenue dans le $i^{\text{ième}}$ tronçon. La loi de conservation de la masse entre les instants t_b et t_c implique que :

$$m_L^i(t_c) = m_L^i(t_b).$$

Le liquide étant incompressible et le diamètre du système constant, on obtient :

$$x_L^i(t_c) - x_G^i(t_c) + \delta_{i=1}^T R_L^{D,1} (l_D^1 + x_G^1(t_c)) = R_L^{D,i} l_D^i + R_L^{U,i} l_U^i,$$

où $R_K^{D,i}$ (resp. $R_K^{U,i}$) représente la fraction volumique de la phase K dans la $i^{\text{ième}}$ partie descendante (resp. ascendante) et peut être déterminée par la relation implicite (2.10). On a ainsi une première équation reliant les positions des fronts :

$$x_L^i(t_c) - (1 - \delta_{i=1}^T R_L^{D,1}) x_G^i(t_c) = \delta_{i \neq 1}^T R_L^{D,i} l_D^i + R_L^{U,i} l_U^i. \quad (\text{B.1})$$

L'écoulement étant isotherme et le gaz étant supposé parfait, on peut écrire, en notant v_G^i le volume occupé par le gaz en amont du $i^{\text{ème}}$ point bas de la conduite :

$$P^i(t_c)v_G^i(t_c) = P^i(t_b)v_G^i(t_b). \quad (\text{B.2})$$

Supposons maintenant que, le liquide commençant à s'accumuler, il empêche immédiatement et complètement le passage du gaz au niveau de chaque point bas. Ainsi, le volume de gaz v_G^i à l'instant t_b peut s'écrire sous la forme :

$$v_G^i(t_b) = S \left[R_G^{D,i} l_D^i + \delta_{i \neq 1}^T R_G^{U,i-1} l_U^{i-1} \right] + \delta_{i=1}^T v_G^+.$$

On suppose aussi que, à la fin de la troisième phase lorsque la poche de gaz arrive au sommet du dernier tronçon, la pression dans la conduite accidentée devient presque égale à la pression de sortie P^{OUT} :

$$P^i(t_b) = (1 + \varepsilon_c^i) P^{OUT}.$$

On ajoute ces T paramètres de calage $\varepsilon_c^i \forall i \in [1, T]$ pour des raisons de précision, le temps d'un cycle étant fortement dépendant de ses conditions initiales. Mais ils sont toujours très petits devant 1 et peuvent être pris égaux à 0 en première approximation.

De plus, le volume de gaz v_G^i à l'instant t_c est égal à :

$$v_G^i(t_c) = S \left[(1 - \delta_{i=1}^T R_L^{D,i})(l_D^i + x_G^i(t_c)) + \delta_{i \neq 1}^T (l_U^{i-1} - x_L^{i-1}(t_c)) \right] + \delta_{i=1}^T v_G^+,$$

et sa pression est donnée par la relation :

$$P^i(t_c) = P^{OUT} + \rho_L^N g \sum_{j=i}^T [\sin \beta_U^j x_L^j(t_c) - \sin \beta_D^j x_G^j(t_c)].$$

En remplaçant les différents termes par leur expression dans l'équation (B.2), on obtient une seconde équation reliant les positions des différents fronts :

$$\begin{aligned} & \left[S \left[(1 - \delta_{i=1}^T R_L^{D,i})(l_D^i + x_G^i(t_c)) + \delta_{i \neq 1}^T (l_U^{i-1} - x_L^{i-1}(t_c)) \right] + \delta_{i=1}^T v_G^+ \right] \\ & \times \left[P^{OUT} + \rho_L^N g \sum_{j=i}^T [\sin \beta_U^j x_L^j(t_c) - \sin \beta_D^j x_G^j(t_c)] \right] \\ & = \left[S \left[R_G^{D,i} l_D^i + \delta_{i \neq 1}^T R_G^{U,i-1} l_U^{i-1} \right] + \delta_{i=1}^T v_G^+ \right] (1 + \varepsilon_c^i) P^{OUT}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Par conséquent, les équations (B.1) et (B.3) forment un système non-linéaire à $2T$ équations et $2T$ inconnues ($x_G^1(t_c), x_L^1(t_c), \dots, x_G^T(t_c), x_L^T(t_c), \dots, x_G^T(t_c), x_L^T(t_c)$), que l'on inverse pour obtenir les positions des fronts après la chute du liquide dans les points bas. Notons aussi que ces solutions du système non-linéaire doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -l_D^i < x_G^i(t_c) < 0 \\ 0 < x_L^i(t_c) < l_U^i. \end{cases}$$

De plus, comme expliqué dans le paragraphe décrivant le terrain slugging du chapitre 2, pendant la première phase du phénomène, le gaz piégé entre les différents points bas est poussé par le bouchon de liquide en formation. Ainsi, les interfaces $x_G^i \forall i > 1$ se déplacent jusqu'à atteindre le $i^{\text{ième}}$ point bas impliquant que les fronts $x_L^i \forall i > 1$ remontent dans les portions ascendantes. Nous n'allons pas chercher à modéliser ces déplacements, mais nous prendrons directement cet état comme condition initiale à chaque nouveau cycle du phénomène. Par conséquent, les positions des différents fronts à l'instant initial $(x_G^{1I}, x_L^{1I}, \dots, x_G^{iI}, x_L^{iI}, \dots, x_G^{TI}, x_L^{TI})$ sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G^{1I} = x_G^1(t_c) \\ x_L^{1I} = x_L^1(t_c) \\ x_G^{2I} = 0 \\ x_L^{2I} = x_L^2(t_c) - x_G^2(t_c) \\ \dots \\ x_G^{iI} = 0 \\ x_L^{iI} = x_L^i(t_c) - x_G^i(t_c) \\ \dots \\ x_G^{TI} = 0 \\ x_L^{TI} = x_L^T(t_c) - x_G^T(t_c). \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

B.3 Formation du bouchon de liquide

Soit t_i le temps initial d'une période de severe slugging et $[t_i, t_f]$ l'intervalle de temps pendant lequel se produit la phase de "formation du bouchon de liquide" (i.e. t_f est le temps pour que le bouchon de liquide remplisse entièrement la conduite accidentée). Notons aussi Δt_f^i le temps que met le $i^{\text{ième}}$ tronçon à se remplir de liquide et t_f^i l'instant à partir duquel il est complètement rempli (ce qui implique que $t_f = t_f^T$). On a de ce fait :

$$t_f^i = t_i + \sum_{j=1}^i \Delta t_f^j.$$

De plus, nous allons utiliser la convention suivante pour définir l'opérateur $\sum$:

$$\sum_{m=n_1}^{n_2} X_m = \begin{cases} X_{n_1} + \dots + X_m + \dots + X_{n_2} & \text{si } n_1 \leq n_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, soit m_G^i la masse de gaz piégé juste en amont du $i^{\text{ième}}$ point bas et M_L^i la masse de liquide présent entre l'entrée de la conduite et le $i^{\text{ième}}$ tronçon :

$$M_L^i = \sum_{j=1}^i m_L^j.$$

Supposons que le bouchon de liquide soit en train de remplir le $i^{\text{ième}}$ tronçon. Pendant cette première phase, le gaz s'accumulant en amont du premier point bas et le liquide dans les différentes parties montantes, les débits de sortie sont nuls (i.e. $Q_G^{OUT} = 0$ et $Q_L^{OUT} = 0$). Les lois de conservation des masses m_G^1 et M_L^i s'écrivent alors :

$$\dot{m}_G^1(t) = Q_G^{IN}, \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{M}_L^i(t) = Q_L^{IN}. \quad (\text{B.6})$$

La densité du gaz étant décrite par la loi (2.2), m_G^1 est donné par la relation suivante :

$$m_G^1(t) = \frac{\rho_G^N}{P^N} P^1(t) v_G^1(t),$$

avec $v_G^1(t) = v_G^+ + SR_G^{D,1}[x_G^1(t) + l_D^1]$. En notant $v_G^{upst} = v_G^+ + SR_G^{D,1}l_D^1$ et en supposant que $v_G^{upst} \gg SR_G^{D,1}x_G^1$, on obtient que la masse de gaz m_G^1 est une fonction linéaire de sa pression :

$$m_G^1(t) = \frac{\rho_G^N v_G^{upst}}{P^N} P^1(t). \quad (\text{B.7})$$

Le liquide étant supposé incompressible et le bouchon remplissant le $i^{\text{ième}}$ tronçon, M_L^i peut s'exprimer en fonction des positions x_G^1 et x_L^i par la relation :

$$M_L^i(t) = S\rho_L^N \left[x_L^i(t) - R_G^{D,1}x_G^1(t) + \sum_{j=1}^{i-1} l_U^j + \sum_{j=1}^i R_L^{D,j}l_D^j \right]. \quad (\text{B.8})$$

De plus, en faisant l'hypothèse d'un "modèle quasi-statique", les pressions $P^j(t)$ et $\Pi^j(t) \forall j \in [1, T]$ sont directement données par les différentes hauteurs de liquide :

$$P^j(t) = P^{OUT} + \rho_L^N g \sum_{k=j}^T [\sin \beta_U^k x_L^k(t) - \sin \beta_D^k x_G^k(t)], \quad (\text{B.9})$$

$$\Pi^j(t) = P^j(t) + \rho_L^N g \sin \beta_D^j x_G^j(t). \quad (\text{B.10})$$

Or, plusieurs interfaces gaz/liquide restent immobiles :

$$\begin{cases} x_G^j(t) = 0 & \forall j > i \\ x_L^j(t) = l_U^j & \forall j < i \\ x_L^j(t) = x_L^{j,I} & \forall j > i. \end{cases}$$

Par conséquent, la pression au niveau de chaque point bas est égale à :

$$\Pi^j(t) = P^j(t) + \delta_{j=1}^T \rho_L^N g \sin \beta_D^1 x_G^1(t) \quad \forall j \in [1, T].$$

Et, la pression du gaz piégé en aval du $i^{\text{ième}}$ tronçon est constante égale à :

$$P^j(t) = P^{OUT} + \rho_L^N g \sum_{k=j}^T \sin \beta_U^k x_L^k(t) \quad \forall j > i.$$

On appelle $\mathbb{P}^j$ cette constante :

$$\mathbb{P}^j = P^{OUT} + \rho_L^N g \sum_{k=j}^T \sin \beta_U^k x_L^k(t).$$

Ainsi, la pression P^i en amont du $i^{\text{ième}}$ tronçon en train de se remplir et la pression Π^i au $i^{\text{ième}}$ point bas s'expriment sous la forme :

$$P^i(t) = \mathbb{P}^{i+1} + \rho_L^N g [\sin \beta_U^i x_L^i(t) - \delta_{i=1}^T \sin \beta_D^1 x_G^1(t)],$$

$$\Pi^i(t) = P^i(t) + \delta_{i=1}^T \rho_L^N g \sin \beta_D^1 x_G^1(t).$$

Intéressons nous maintenant aux pressions en amont du $i^{\text{ième}}$ point bas. Pour cela, définissons la constante suivante :

$$\mathbb{I}_{i,j} = \rho_L^N g \sum_{k=j}^{i-1} \sin \beta_U^k x_L^k(t).$$

Pour tout $j \in [1, i]$, on peut alors écrire Π^j sous la forme :

$$\Pi^j(t) = \mathbb{P}^{i+1} + \mathbb{I}_{i,j} + \rho_L^N g \sin \beta_U^i x_L^i(t).$$

En particulier, on a :

$$\Pi^1(t) = \mathbb{P}^{i+1} + \mathbb{I}_{i,1} + \rho_L^N g \sin \beta_U^i x_L^i(t),$$

et, par conséquent, la pression en amont du premier point bas s'écrit :

$$P^1(t) = \mathbb{P}^{i+1} + \mathbb{I}_{i,1} + \rho_L^N g [\sin \beta_U^i x_L^i(t) - \sin \beta_D^1 x_G^1(t)]. \quad (\text{B.11})$$

En injectant cette expression (B.11) dans l'équation (B.7), on obtient :

$$m_G^1(t) = \frac{\rho_G^N v_G^{upst}}{P^N} [\mathbb{P}^{i+1} + \mathbb{I}_{i,1} + \rho_L^N g [\sin \beta_U^i x_L^i(t) - \sin \beta_D^1 x_G^1(t)]] .$$

En dérivant cette relation par rapport au temps et en utilisant la loi de conservation (B.5), on obtient une première équation reliant les deux vitesses de déplacement $\dot{x}_G^1$ et $\dot{x}_L^i$:

$$\sin \beta_U^i \dot{x}_L^i(t) - \sin \beta_D^1 \dot{x}_G^1(t) = \frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N \rho_L^N g v_G^{upst}}.$$

En dérivant l'équation (B.8) et en l'injectant dans la loi de conservation (B.6), on obtient une seconde équation reliant $\dot{x}_G^1$ et $\dot{x}_L^1$:

$$\dot{x}_L^1(t) - R_G^{D,1} \dot{x}_G^1(t) = \frac{Q_L^{IN}}{S \rho_L^N}.$$

Ces deux équations forment un système 2×2 que l'on inverse pour obtenir l'évolution des interfaces x_G^1 et x_L^1 entre les instants t_f^{i-1} et t_f^i :

$$\begin{cases} \dot{x}_G^1(t) = \frac{1}{\rho_L^N (R_G^{D,1} \sin \beta_U^i - \sin \beta_D^1)} \left(\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^{upst}} - \frac{\sin \beta_U^i Q_L^{IN}}{S} \right) \\ \dot{x}_L^1(t) = \frac{1}{\rho_L^N (R_G^{D,1} \sin \beta_U^i - \sin \beta_D^1)} \left(\frac{R_G^{D,1} P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^{upst}} - \frac{\sin \beta_D^1 Q_L^{IN}}{S} \right). \end{cases}$$

On remarque que ces vitesses de déplacement sont toujours définies car on a supposé que $\sin \beta_D^1 < 0 < \sin \beta_U^i$ et qu'elles sont constantes pendant la phase de remplissage du $i^{\text{ème}}$ tronçon. De plus, le signe de $\dot{x}_G^1$ est indéterminé mais on a toujours $\dot{x}_L^1 > 0$, ce qui signifie que, durant toute la première phase, la langue de gaz en amont du premier point bas peut soit avancer soit reculer, mais que le front de liquide avance toujours jusqu'à atteindre la fin du dernier tronçon.

En définitive, pour tout t élément de l'intervalle de temps $[t_f^{i-1}, t_f^i]$, le modèle décrivant l'évolution des différentes interfaces gaz/liquide s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_G^1(t) = \frac{1}{\rho_L^N (R_G^{D,1} \sin \beta_U^i - \sin \beta_D^1)} \left(\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^{upst}} - \frac{\sin \beta_U^i Q_L^{IN}}{S} \right) \\ \dot{x}_L^1(t) = \frac{1}{\rho_L^N (R_G^{D,1} \sin \beta_U^i - \sin \beta_D^1)} \left(\frac{R_G^{D,1} P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g v_G^{upst}} - \frac{\sin \beta_D^1 Q_L^{IN}}{S} \right) \\ \dot{x}_G^j(t) = 0 \quad \forall j \in [2, T] \\ \dot{x}_L^j(t) = l_U^j \quad \forall j < i \\ \dot{x}_L^j(t) = x_L^{jI} \quad \forall j > i, \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

et les différentes pressions s'obtiennent, à partir de ces positions, par les équations (B.9) et (B.10).

B.4 Production du bouchon de liquide

Soit $[t_f, t_p]$ l'intervalle de temps pendant lequel se produit la seconde phase (i.e. t_p est le temps pour que x_G^1 atteigne le premier point bas). Pendant cette phase, le liquide

s'écoule en sortie de conduite avec le débit Q_L^{OUT} et toutes les interfaces gaz/liquide sont immobiles sauf la première langue de gaz :

$$\begin{cases} x_G^i(t) = 0 & \forall i \in [2, T] \\ x_L^i(t) = l_U^i & \forall i \in [1, T]. \end{cases}$$

La loi de conservation de la masse de gaz piégé en amont du premier point bas s'écrit :

$$\dot{m}_G^1(t) = Q_G^{IN}.$$

Or, m_G^1 est encore donnée par la relation (B.7) :

$$m_G^1(t) = \frac{\rho_G^N v_G^{upst}}{P^N} P^1(t),$$

et, en faisant l'hypothèse d'un “modèle quasi-statique”, la pression P^1 est égale à :

$$P^1(t) = P^{OUT} + \Pi_{T+1,1} - \rho_L^N g \sin \beta_D^1 x_G^1(t).$$

Cela implique donc que :

$$\dot{m}_G^1(t) = \frac{\rho_G^N v_G^{upst}}{P^N} [P^{OUT} + \Pi_{T+1,1} - \rho_L^N g \sin \beta_D^1 x_G^1(t)].$$

En dérivant cette expression puis en l'injectant dans la loi de conservation, l'évolution de la langue de gaz x_G^1 est donnée par la relation suivante :

$$\dot{x}_G^1(t) = -\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N \rho_L^N g \sin \beta_D^1 v_G^{upst}}.$$

Ainsi, le modèle décrivant l'évolution des différentes interfaces gaz/liquide pendant la seconde phase s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_G^1(t) = -\frac{P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N \rho_L^N g \sin \beta_D^1 v_G^{upst}} \\ x_G^i(t) = 0 & \forall i \in [2, T] \\ x_L^i(t) = l_U^i & \forall i \in [1, T], \end{cases} \quad (B.13)$$

et les différentes pressions se déterminent une fois de plus, à partir des positions de ces fronts, par les équations (B.9) et (B.10).

On peut aussi déterminer le débit de liquide sortant de la conduite pendant cette phase. En effet, la loi de conservation de la masse totale de liquide M_L^T s'écrit :

$$\dot{M}_L^T(t) = Q_L^{IN} - Q_L^{OUT}(t),$$

et cette masse de liquide vérifie la relation (B.8) dans laquelle on a pris $x_L^T = l_U^T$:

$$M_L^T(t) = S\rho_L^N \left[\sum_{i=1}^T (l_U^i + R_L^{D,i} l_D^i) - R_G^{D,1} x_G^1(t) \right].$$

En dérivant cette équation par rapport au temps puis en la réinjectant dans l'équation de conservation de la masse de liquide, on obtient :

$$-S\rho_L^N R_G^{D,1} \dot{x}_G^1(t) = Q_L^{IN} - Q_L^{OUT}(t).$$

En remplaçant $\dot{x}_G^1$ par son expression, le débit de liquide sortant du système est donné par :

$$Q_L^{OUT}(t) = Q_L^{IN} - \frac{S R_G^{D,1} P^N Q_G^{IN}}{\rho_G^N g \sin \beta_D^1 v_G^{upst}}.$$

B.5 Pénétration de la poche de gaz

Soit $[t_p, t_b]$ l'intervalle de temps pendant lequel se produit cette troisième phase (i.e. t_b est le temps pour que la poche de gaz atteigne la fin de la conduite). A l'instant initial, les fronts se trouvent aux positions suivantes :

$$\begin{cases} x_G^i(t_p) = 0 & \forall i \in [1, T] \\ x_L^i(t_p) = l_U^i & \forall i \in [1, T], \end{cases}$$

la pression P^1 a atteint sa valeur maximale :

$$P^1(t_p) = P^{OUT} + \Pi_{T+1,1},$$

et, entre les instants t_p et t_b , seul x_G^1 se déplace du premier point bas jusqu'à la fin de la conduite pour chasser le bouchon de liquide formé :

$$x_G^1(t) \in \left[0, \sum_{i=1}^T (\delta_{i \neq 1}^T l_D^i + l_U^i) \right] \quad \forall t \in [t_p, t_b].$$

Contrairement au modèle de severe slugging (chapitre 3), nous allons supposer ici que la vitesse de cette interface est modélisée par l'équation de fermeture (2.13) donnant la vitesse de translation d'une poche de gaz dans un écoulement liquide. Ainsi, nous avons :

$$\dot{x}_G^1(t) = C_0 U_M(t) + C_\infty,$$

les coefficients C_0 et C_∞ étant déterminés en supposant que $\rho_G \ll \rho_L$:

$$\begin{cases} C_0 &= 1.05 + 0.15 \sin^2 \theta \\ C_\infty &= (0.35 \sin \theta + 0.54 \cos \theta) \sqrt{gD}. \end{cases}$$

$U_M = U_G + U_L$ représente la vitesse superficielle du mélange. Pour déterminer sa valeur, nous allons commencer par faire l'hypothèse que le liquide entrant dans la conduite n'intervient pas dans l'écoulement. Nous avons ainsi :

$$U_M(t) = U_G(t).$$

De plus, cette phase étant rapide, nous supposons que les termes d'inertie jouent un rôle prépondérant et, par conséquent, que la pression P^1 n'évolue que très peu. Nous la prenons donc constante égale à sa valeur initiale :

$$P^1(t) = P^{OUT} + \Pi_{T+1,1}.$$

Nous pouvons alors calculer U_G par la formule suivante :

$$U_G(t) = \frac{P^N Q_G^{IN}}{S \rho_G^N (P^{OUT} + \Pi_{T+1,1})}.$$

Ainsi, la vitesse de la poche de gaz est, en définitive, donnée par la relation suivante :

$$\dot{x}_G^1(t) = \frac{C_0 P^N Q_G^{IN}}{S \rho_G^N (P^{OUT} + \Pi_{T+1,1})} + C_\infty. \quad (\text{B.14})$$

Remarque.

Cette troisième phase est ici modélisée différemment que dans le cas du severe slugging. En effet, les angles étant plus petits et la conduite de plus grande taille, il semble que la vitesse de la poche de gaz tende rapidement vers une valeur critique constante dans le temps. Ainsi, nous avons préféré la modéliser par une loi de fermeture empirique prenant alors en compte les frottements visqueux.

Annexe C

Stabilité des E.D.O. linéaires à retard constant

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b x(t - \tau), \quad (\text{C.1})$$

où $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ sont des coefficients constants, et $\tau > 0$ représente le retard.

Nous allons étudier la stabilité de ce type d'équations en commençant par le cas $a = 0$ correspondant à une équation à “retard pur”, puis nous étudierons l'équation générale.

Les résultats qui suivent découlent certes d'un théorème plus général de Pontryaguin [17, 122] mais nous préférons les redécouvrir de façon élémentaire, dans la mesure où :

- l'application de la méthode de Pontryaguin n'est pas si immédiate,
- les discussions minutieuses qu'imposent cette démonstration “élémentaire” ne sont souvent pas détaillées dans les ouvrages de référence [112].

C.1 Cas d'un retard pur

Soit l'E.D.O. linéaire suivante :

$$\dot{x}(t) = b x(t - \tau) \quad (\text{C.2})$$

Lemme C.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que (C.2) soit stable au sens de Fourier-Laplace est que :*

$$-\frac{\pi}{2} < b\tau < 0.$$

Démonstration.

En faisant passer les fonctions de type $x(t) = x_0 e^{st}$ dans (C.2), on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$s e^{\tau s} - b = 0 \text{ avec } s \in \mathbb{C}. \quad (\text{C.3})$$

Posons $f_0(s) = s e^{\tau s} - b$. La condition nécessaire et suffisante de stabilité de (C.2) est que les racines complexes de (C.3) soient à partie réelle strictement négative.

1. **Etude des racines réelles** ($s \in \mathbb{R}$)

Cherchons tout d'abord les racines réelles de (C.3). Pour ce faire, dérivons dans un premier temps f_0 . On a :

$$f'_0(s) = \tau \left(\frac{1}{\tau} + s \right) e^{\tau s}.$$

Le signe de f'_0 est donc celui de $\frac{1}{\tau} + s$. Dans ces conditions, les variations de f_0 sont indiquées par le tableau :

s	$-\infty$	$\frac{-1}{\tau}$	0	$+\infty$
f'_0	-	0	+	+
f_0	$-b$	$\frac{-1}{\tau e} - b$	$-b$	$+\infty$

Manifestement, nous avons à traiter trois cas :

• **Cas 1** : $b < -\frac{1}{\tau e}$

On a alors $f_0(\frac{-1}{\tau}) > 0$. Autrement dit, il n'existe pas de racine réelle de l'équation $f_0(s) = 0$.

• **Cas 2** : $0 > b \geq -\frac{1}{\tau e}$

On a alors deux racines réelles (ou une racine double) négatives car :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_0(-\infty) & = & -b > 0 \\ f_0(-\frac{1}{\tau}) & = & -\frac{1}{\tau e} - b \leq 0 \\ f_0(0) & = & -b > 0 \end{array} \right.$$

• **Cas 3** : $b > 0$

Dans ce cas, on a une unique racine réelle strictement positive. En effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_0(-\infty) & = & -b < 0 \\ f_0(-\frac{1}{\tau}) & = & -\frac{1}{\tau e} - b < 0 \\ f_0(0) & = & -b < 0 \\ f_0(+\infty) & = & +\infty > 0 \end{array} \right.$$

L'enseignement que nous retirons de l'étude du cas réel est que l'on doit se trouver dans le premier ou le second cas. Algébriquement, cela se traduit par la condition $b < 0$ que l'on réécrit sous la forme :

$$b\tau < 0.$$

2. Etude des racines complexes ($s \in \mathbb{C}$)

Cherchons maintenant les racines complexes de l'équation $f_0(s) = 0$. En posant $s = p + \imath q$ et en séparant la partie réelle de la partie imaginaire, l'équation caractéristique (C.3) se transforme en le système suivant :

$$\begin{cases} p \cos \tau q - q \sin \tau q = b e^{-\tau p} \\ p \sin \tau q + q \cos \tau q = 0. \end{cases}$$

En posant $X_p = \tau p$ et $X_q = \tau q$ et en se souvenant que l'étude sur les racines réelles implique déjà $b < 0$ (d'où $-b = |b|$), on peut ramener le système à :

$$\begin{cases} X_p = -X_q \cot X_q \\ X_q = |b| \tau \sin X_q e^{X_q \cot X_q}. \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Les racines de l'équation caractéristique (C.3) sont donc de la forme $s = \frac{X_p}{\tau} + \imath \frac{X_q}{\tau}$, $(X_p, X_q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ étant solution du système (C.4).

On remarque tout d'abord que l'on peut limiter notre étude aux X_q strictement positifs. En effet, la stabilité est assurée par la condition $\Re(s) < 0$ et si s est une racine de (C.3), son conjugué est aussi une racine (car si X_q est solution de (C.4), alors $-X_q$ l'est aussi).

De plus, si s est une racine, le signe de sa partie réelle est égale au signe de X_p et on a $\text{sgn}[X_p] = -\text{sgn}[\cot X_q]$ car X_q est supposé positif. La condition de stabilité peut donc s'écrire :

$$\cot X_q > 0.$$

Notons $\Phi_0(X) = |b| \tau \sin X e^{X \cot X}$. Φ_0 possède les propriétés suivantes (les démonstrations étant laissées au soin du lecteur) :

- Φ_0 est définie sur la réunion des domaines $D_k =]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,
- Φ_0 tend vers 0 avec une pente nulle lorsque X tend vers $((k+1)\pi)^-$,
- Φ_0 tend vers $(-1)^k \infty$ lorsque X tend vers $(k\pi)^+$ pour $k \neq 0$,
- Φ_0 est positive sur D_{2k} et négative sur D_{2k+1} ,
- Φ_0 est croissante sur D_{2k+1} et décroissante sur D_{2k} pour $k \neq 0$,
- $\Phi_0(0) = 0$, $\Phi'_0(0) = |b| \tau e$ et $\Phi_0((k + \frac{1}{2})\pi) = |b| \tau$.

Considérons maintenant les deux courbes suivantes (FIG. C.2) :

$$\mathcal{B} : Y = X,$$

$$\mathcal{C}_0 : Y = \Phi_0(X).$$

Trouver les solutions X_q du système (C.4) est équivalent à déterminer les X_q comme l'intersection de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}_0$. Notons X_q^k la solution (si elle existe) sur l'intervalle D_k . Comme Φ_0 est positive sur D_{2k} et négative sur D_{2k+1} , il y a une solution uniquement pour les k pairs. Nous restreignons donc l'étude aux domaines D_{2k} et aux solutions X_q^{2k} .

Sur un domaine $]2k\pi, (2k+1)\pi[$, $\cot(X)$ est positive pour $X < (2k + \frac{1}{2})\pi$. La condition de stabilité devient donc :

$$X_q^{2k} < \left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi.$$

Définissons la droite $\mathcal{D}_{2k}$ passant par l'origine et par $((2k + \frac{1}{2})\pi, \Phi_0((2k + \frac{1}{2})\pi))$. Sa pente notée $P_{2k}^{\mathcal{D}}$ est égale à :

$$P_{2k}^{\mathcal{D}} = \frac{|b| \tau}{(2k + \frac{1}{2}) \pi}.$$

Intéressons nous dans un premier temps au domaine D_{2k} avec $k \neq 0$. On est alors sûr qu'il existe une solution X_q^{2k} et la condition de stabilité est équivalente au fait que la pente de $\mathcal{D}_{2k}$ est inférieure à la pente de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire :

$$|b| \tau < \left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi.$$

Or cette condition doit être vérifiée pour tout $k \geq 1$. La condition de stabilité s'écrit par conséquent :

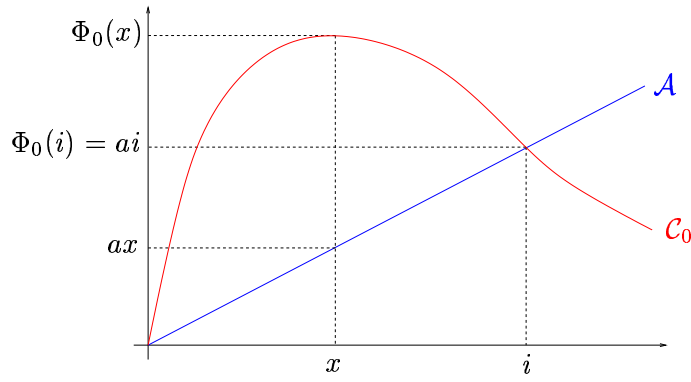
$$|b| \tau < \frac{5\pi}{2}.$$

Intéressons nous maintenant au domaine D_0 . Soit Υ_0 la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \Upsilon_0 & :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ X & \longmapsto \frac{\Phi_0(X)}{X}. \end{aligned}$$

Υ_0 est positive décroissante (démonstration laissée au soin du lecteur). Cela signifie que tout arc partant de l'origine et joignant un point de $\mathcal{C}_0$ est en dessous de $\mathcal{C}_0$ (FIG. C.1). En effet, soit $\mathcal{A} : y = ax$ avec $a > 0$ un arc partant de l'origine et i l'abscisse du point d'intersection de cet arc avec $\mathcal{C}_0$. On a alors pour tout $x < i$:

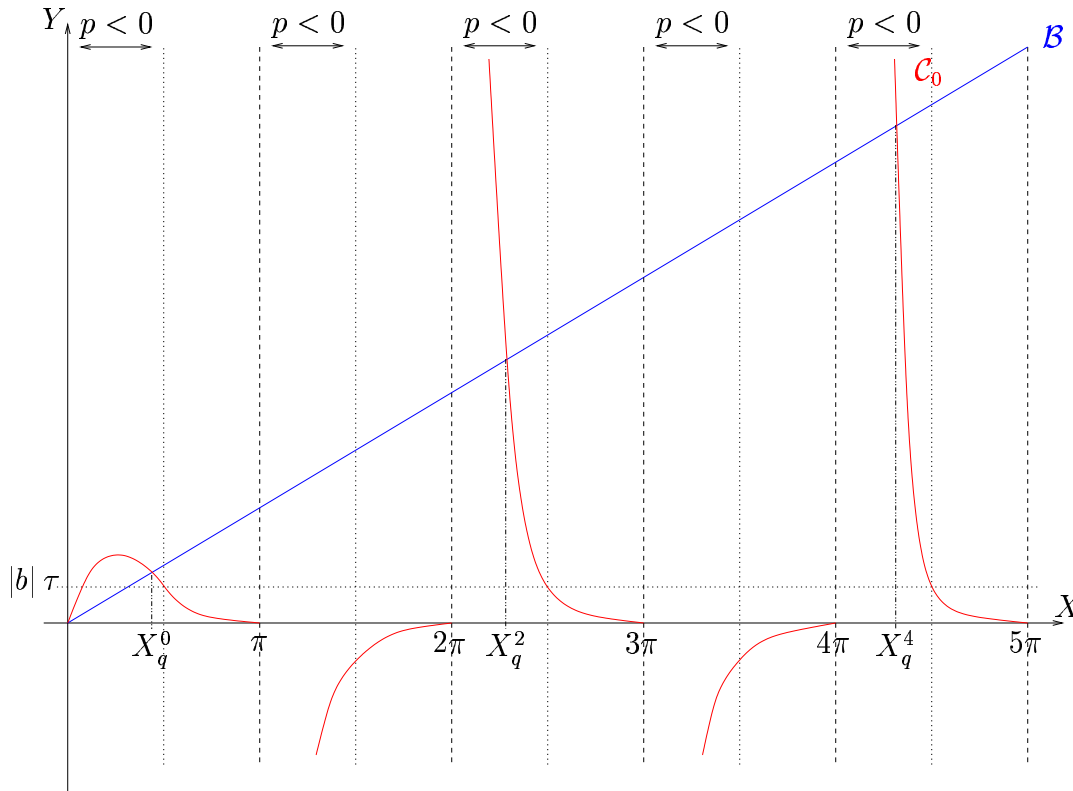
$$\frac{\Phi_0(i)}{i} < \frac{\Phi_0(x)}{x} \iff ax < \Phi_0(x).$$

FIG. C.1: Arc $\mathcal{A}$ et courbe $\mathcal{C}_0$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait une racine X_q^0 est donc que la pente à l'origine de $\mathcal{C}_0$ soit supérieure à la pente de $\mathcal{B}$ c'est-à-dire $|b|\tau e \geq 1$. Dans le cas contraire, la condition de stabilité est uniquement donnée par l'étude sur les domaines D_{2k} avec $k \neq 0$.

Plaçons-nous dans le cas $|b|\tau e \geq 1$. La condition de stabilité est équivalente à :

$$\begin{aligned}
 X_q^0 < \frac{\pi}{2} &\iff \Upsilon_0\left(\frac{\pi}{2}\right) < \Upsilon_0(X_q^0), \\
 &\iff \frac{\Phi_0\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} < \frac{\Phi_0(X_q^0)}{X_q^0}, \\
 &\iff \frac{|b|\tau}{\frac{\pi}{2}} < 1, \\
 &\iff |b|\tau < \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

FIG. C.2: Courbes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}_0$

3. Conclusion

L'étude des racines réelles conduit à la condition $b\tau < 0$. Pour l'étude des racines complexes, soit $|b|\tau e < 1$ et alors X_q^0 n'existe pas et la condition de stabilité est donnée par $|b|\tau < \frac{5\pi}{2}$ qui est toujours vérifiée car $\frac{1}{e} < \frac{5\pi}{2}$, soit $|b|\tau e \geq 1$ et alors la condition est $|b|\tau < \frac{\pi}{2}$.

En définitive, la condition de stabilité "globale" s'écrit :

$$-\frac{\pi}{2} < b\tau < 0.$$

□

Remarque.

Le lemme LEM. C.1 exige non seulement $b < 0$ (ce qui paraît normal après tout), mais aussi que le retard τ ne soit pas trop grand et en particulier inférieur au temps caractéristique $\frac{\pi}{2|b|}$.

C.2 Cas général

Reprenons l'équation générale (C.1) :

$$\dot{x}(t) = a x(t) + b x(t - \tau).$$

Lemme C.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que (C.1) soit stable au sens de Fourier-Laplace est que :*

$$\begin{cases} a + b < 0 \\ a\tau < 1 \\ |b|\tau < M_b(a\tau), \end{cases}$$

le majorant $M_b(a\tau)$ étant défini par :

$$M_b(a\tau) = \frac{X^*}{|\sin X^*|},$$

où X^* est la racine unique de l'équation :

$$X^* \cot X^* = a\tau,$$

sur l'intervalle $]0, \pi[$ si $b < 0$ et sur l'intervalle $]\pi, 2\pi[$ si $b > 0$.

Démonstration.

L'équation caractéristique de (C.1) étant :

$$s = a + b e^{-\tau s} \text{ avec } s \in \mathbb{C},$$

on se ramène au cas précédent en posant $\hat{s} = s - a$ et $\hat{b} = b e^{-a\tau}$:

$$\hat{s} e^{\tau \hat{s}} - \hat{b} = 0. \tag{C.5}$$

Posons $f_a(\hat{s}) = \hat{s} e^{\tau \hat{s}} - \hat{b}$. On veut réaliser $\Re(s) < 0$ pour toute valeur caractéristique s . En termes de $\hat{s}$, la condition de stabilité s'écrit par conséquent :

$$\Re(\hat{s}) < -a.$$

où $\hat{s}$ représente toute racine complexe de $f_a(\hat{s})$.

1. Etude des racines réelles ($\hat{s} \in \mathbb{R}$)

Cherchons tout d'abord les racines réelles de (C.5). Pour ce faire, dérivons dans un premier temps f_a . Nous avons comme dans le cas précédent :

$$f'_a(\hat{s}) = \tau \left(\frac{1}{\tau} + \hat{s} \right) e^{\tau \hat{s}}.$$

Le signe de f'_a étant celui de $\frac{1}{\tau} + \hat{s}$, le tableau de variation de f_a est donc donné par :

$\hat{s}$	$-\infty$	$\frac{-1}{\tau}$	0	$+\infty$
f'_a	$-$	0	$+$	$+$
f_a				

Comme dans le cas du retard pur, nous avons à distinguer trois cas :

- **Cas 1** : $\hat{b} < -\frac{1}{\tau e}$

On a alors $f_a(\frac{-1}{\tau}) > 0$ ce qui implique qu'il n'existe pas de racine réelle de l'équation $f_a(\hat{s}) = 0$.

- **Cas 2** : $0 > \hat{b} \geq -\frac{1}{\tau e}$

On a alors deux racines réelles (ou une racine double) négatives. De plus, elles seront inférieures à $-a$ si et seulement si :

$$\begin{cases} f_a(-a) > 0 \\ f'_a(-a) > 0. \end{cases}$$

Or $f_a(-a) = -e^{-a\tau}(a+b)$ et $f'_a(-a) = -e^{-a\tau}(a\tau - 1)$. La condition à imposer si $0 > \hat{b} \geq -\frac{1}{\tau e}$ ($\iff 0 > \bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1$), s'écrit donc :

$$\begin{cases} a+b < 0 \\ a\tau < 1. \end{cases}$$

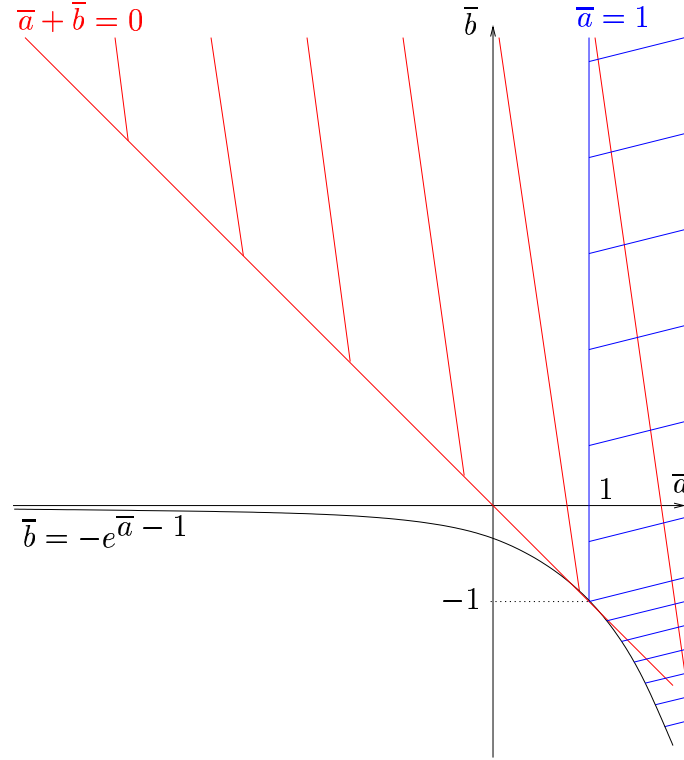
- **Cas 3** : $\hat{b} > 0$

Dans ce cas, on a une unique racine réelle strictement positive. Par conséquent, s sera inférieure à $-a$ si et seulement si $f_a(-a)$ est positif. La condition de stabilité est alors :

$$a+b < 0.$$

En notant $\bar{a} = a\tau$ et $\bar{b} = b\tau$, nous pouvons tirer de l'étude du cas réel les conditions suivantes (représentées sur le graphique FIG. C.3), concernant la stabilité :

$$\begin{cases} \bar{a} + \bar{b} < 0 & \text{si } (\bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1) \\ \bar{a} < 1 & \text{si } (0 > \bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1) \end{cases}$$

FIG. C.3: Conditions de stabilité sur $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans le cas réel

2. Étude des racines complexes ($\hat{s} \in \mathbb{C}$)

Cherchons maintenant les racines complexes de l'équation $f_a(\hat{s}) = 0$. En posant $\hat{s} = \hat{p} + \imath \hat{q}$, et en séparant la partie réelle de la partie imaginaire, l'équation caractéristique (C.5) peut s'écrire sous la forme du système suivant en notant $\hat{X}_p = \tau \hat{p}$ et $\hat{X}_q = \tau \hat{q}$:

$$\begin{cases} \hat{X}_p &= -\hat{X}_q \cot \hat{X}_q \\ \hat{X}_q &= -\hat{b}\tau \sin \hat{X}_q e^{\hat{X}_q \cot \hat{X}_q}. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Les racines de l'équation caractéristique (C.5) sont donc de la forme $\hat{s} = \frac{\hat{X}_p}{\tau} + \imath \frac{\hat{X}_q}{\tau}$, $(\hat{X}_p, \hat{X}_q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ étant solution du système précédent (C.6).

Comme dans le cas du retard pur, on peut limiter notre étude des racines aux $\hat{X}_q$ strictement positifs. De plus, la condition de stabilité est équivalente à :

$$\Re(\hat{s}) < -a \iff \hat{X}_q \cot \hat{X}_q > \bar{a}.$$

Sur le domaine $D_k =]k\pi, (k+1)\pi[$, définissons ξ_k solution (lorsqu'elle existe) de l'équation $\xi_k \cot \xi_k = \bar{a}$. Pour $k \neq 0$, ξ_k existe et est unique sur chaque domaine D_k . En effet, la fonction $X \mapsto X \cot X$ est alors décroissante de $+\infty$ vers $-\infty$ (vérification aisée). Pour $k = 0$, cette fonction est alors décroissante de 1 vers $-\infty$.

On aura par conséquent une solution unique si $\bar{a} \leq 1$ (condition toujours vérifiée pour $\bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1$ d'après l'étude des racines réelles).

Notons aussi $\varepsilon_k = (k + \frac{1}{2})\pi - \xi_k$. On peut démontrer que :

$$|\varepsilon_{k+1}| < |\varepsilon_k| < \frac{\pi}{2}.$$

Définissons maintenant sur l'union des domaines D_k , la fonction

$$\Phi_a(X) = -\hat{b}\tau \sin X e^{X \cot X},$$

et sa courbe associée $\mathcal{C}_a : Y = \Phi_a(X)$. Trouver les solutions $\hat{X}_q$ du système (C.6) est équivalent à déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_a$ et de la première bissectrice $\mathcal{B}$. Notons $\hat{X}_q^k$ cette solution (si elle existe) sur l'intervalle D_k . En appelant $\mathcal{K}$, l'ensemble des k tel que $\hat{X}_q^k$ existe, la condition de stabilité devient alors :

$$\hat{X}_q^k < \xi_k \quad \forall k \in \mathcal{K}.$$

Nous pouvons montrer que Φ_a possède les propriétés suivantes (démonstration laissée au soin du lecteur) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{X \rightarrow ((k+1)\pi)^-} \Phi_a(X) &= 0 \\ \lim_{X \rightarrow ((k+1)\pi)^-} \Phi'_a(X) &= 0 \\ \lim_{X \rightarrow (k\pi)^+} \Phi_a(X) &= \left(\frac{b}{|b|} \right)^k \infty \quad \forall k \neq 0 \\ \operatorname{sgn} [\Phi_a(X)] &= -\operatorname{sgn} [b] \quad \forall X \in D_{2k} \\ \operatorname{sgn} [\Phi_a(X)] &= \operatorname{sgn} [b] \quad \forall X \in D_{2k+1} \\ \operatorname{sgn} [\Phi'_a(X)] &= \operatorname{sgn} [b] \quad \forall X \in D_{2k} \text{ avec } k \neq 0 \\ \operatorname{sgn} [\Phi'_a(X)] &= -\operatorname{sgn} [b] \quad \forall X \in D_{2k+1} \text{ avec } k \neq 0 \\ \Phi_a(0) &= 0 \\ \Phi'_a(0) &= -\hat{b}\tau e. \end{array} \right.$$

Enfin, notons la fonction Υ_a définie par :

$$\begin{array}{lll} \Upsilon_a & : & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & X \longmapsto \frac{\Phi_a(X)}{X}. \end{array}$$

Nous pouvons montrer que Υ_a a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} [\Upsilon_a(X)] = -\operatorname{sgn} [b] & \forall X \in D_{2k} \\ \operatorname{sgn} [\Upsilon_a(X)] = +\operatorname{sgn} [b] & \forall X \in D_{2k+1} \\ \operatorname{sgn} [\Upsilon'_a(X)] = +\operatorname{sgn} [b] & \forall X \in D_{2k} \\ \operatorname{sgn} [\Upsilon'_a(X)] = -\operatorname{sgn} [b] & \forall X \in D_{2k+1}. \end{cases}$$

Contrairement au cas $a = 0$ (retard pur), l'étude des racines réelles n'implique pas ici que $\hat{b}$ soit négatif. Différencions par conséquent les deux cas :

• **Cas 1** : $\hat{b} < 0$

Φ_a étant négative sur les domaines D_{2k+1} et positive sur les domaines D_{2k} , les solutions se trouvent obligatoirement sur les domaines pairs. Et, on est certain qu'il existe des solutions sur les domaines D_{2k} avec $k \neq 0$, car Φ_a est alors positive et décroissante de $+\infty$ à 0.

Υ_a étant décroissante, la condition de stabilité est dans ce cas équivalente à :

$$\begin{aligned} \hat{X}_q^{2k} < \xi_{2k} &\iff \Upsilon_a(\xi_{2k}) < \Upsilon_a(\hat{X}_q^{2k}) \quad \forall 2k \in \mathcal{K}, \\ &\iff \frac{\Phi_a(\xi_{2k})}{\xi_{2k}} < \frac{\Phi_a(\hat{X}_q^{2k})}{\hat{X}_q^{2k}} \quad \forall 2k \in \mathcal{K}, \\ &\iff -\bar{b} < \frac{\xi_{2k}}{\sin \xi_{2k}} \quad \forall 2k \in \mathcal{K}, \\ &\iff -\bar{b} < \min_{2k \in \mathcal{K}} \left(\frac{\xi_{2k}}{\sin \xi_{2k}} \right). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{R}$ le rapport défini, pour $2k$ et $2k+2$ éléments de $\mathcal{K}$, par :

$$\mathcal{R} = \frac{\frac{\xi_{2k+2}}{\sin \xi_{2k+2}}}{\frac{\xi_{2k}}{\sin \xi_{2k}}}.$$

ξ_k étant égal à $\frac{\bar{a}}{\cot \xi_k}$, on peut écrire :

$$\mathcal{R} = \frac{\cos \xi_{2k}}{\cos \xi_{2k+2}},$$

ce qui implique que :

$$\mathcal{R} = \frac{\sin |\varepsilon_{2k}|}{\sin |\varepsilon_{2k+2}|}.$$

Or, $|\varepsilon_{k+1}|$ étant strictement inférieur à $|\varepsilon_k|$, le rapport $\mathcal{R}$ est donc strictement supérieur à 1, impliquant alors que :

$$\frac{\xi_{2k+2}}{\sin \xi_{2k+2}} > \frac{\xi_{2k}}{\sin \xi_{2k}}.$$

Par conséquent, en notant k_M le plus petit élément de $\mathcal{K}$, la condition de stabilité s'écrit :

$$-\bar{b} < \frac{\xi_{k_M}}{\sin \xi_{k_M}}.$$

De plus, pour $k = 0$, la fonction Υ_a est positive décroissante, ce qui implique que tout arc partant de l'origine se trouve en dessous de la courbe $\mathcal{C}_a$. On aura donc une racine si la pente à l'origine de $\mathcal{C}_a$ est supérieure à la pente de la première bissectrice $\mathcal{B}$, c'est-à-dire :

$$-\hat{b}\tau e > 1 \iff \bar{b} < -e^{\bar{a}} - 1.$$

Supposons dans un premier temps que c'est le cas ($\bar{b} < -e^{\bar{a}} - 1$). Pour que ξ_0 existe, il faut tout d'abord que $\bar{a}$ soit strictement inférieur à 1 (car sinon on a $\hat{X}_q \cot \hat{X}_q \leq \bar{a}$ et la racine est instable). De plus, on a alors $k_M = 0$. La condition de stabilité est donc donnée par :

$$\begin{cases} \bar{a} < 1 \\ -\bar{b} < \frac{\xi_0}{\sin \xi_0}. \end{cases}$$

Supposons maintenant $0 > \bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1$. Il n'y a alors pas de solution sur l'intervalle D_0 et par conséquent, on a $k_M = 2$. La condition est donc donnée par :

$$-\bar{b} < \frac{\xi_2}{\sin \xi_2}.$$

• **Cas 2 :** $\hat{b} > 0$

Φ_a étant positive et décroissante de $+\infty$ à 0 pour tout k impair et négative pour tout k pair, il existe une unique racine de l'équation caractéristique (C.5) sur chaque domaine D_{2k+1} . $\mathcal{K}$ est donc l'ensemble des entiers impairs. Υ_a étant décroissante, la

condition de stabilité est alors équivalente à :

$$\begin{aligned}
\hat{X}_q^{2k+1} < \xi_{2k+1} &\iff \Upsilon_a(\xi_{2k+1}) < \Upsilon_a(\hat{X}_q^{2k+1}) && \forall 2k+1 \in \mathcal{K}, \\
&\iff \frac{\Phi_a(\xi_{2k+1})}{\xi_{2k+1}} < \frac{\Phi_a(\hat{X}_q^{2k+1})}{\hat{X}_q^{2k+1}} && \forall 2k+1 \in \mathcal{K}, \\
&\iff -\bar{b} \frac{\sin \xi_{2k+1}}{\xi_{2k+1}} < 1 && \forall 2k+1 \in \mathcal{K}, \\
&\iff \bar{b} < -\frac{\xi_{2k+1}}{\sin \xi_{2k+1}} && \forall 2k+1 \in \mathcal{K}, \\
&\iff \bar{b} < \min_{2k+1 \in \mathcal{K}} \left(\frac{-\xi_{2k+1}}{\sin \xi_{2k+1}} \right), \\
&\iff \bar{b} < -\max_{2k+1 \in \mathcal{K}} \left(\frac{\xi_{2k+1}}{\sin \xi_{2k+1}} \right).
\end{aligned}$$

Or, on peut démontrer comme précédemment que :

$$\frac{\xi_{2k+1}}{\sin \xi_{2k+1}} < \frac{\xi_{2k-1}}{\sin \xi_{2k-1}} \quad \forall 2k+1 \in \mathcal{K}.$$

Cela conduit donc à la condition de stabilité suivante :

$$\bar{b} < -\frac{\xi_1}{\sin \xi_1}.$$

3. Conclusion

L'étude des racines réelles fournit les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \bar{a} + \bar{b} < 0 & \text{si } \bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1 \\ \bar{a} < 1 & \text{si } 0 > \bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1. \end{cases}$$

Pour l'étude des racines complexes, la condition de stabilité est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \bar{a} < 1 \\ -\bar{b} < \frac{\xi_0}{\sin \xi_0} \end{array} \right. & \text{si } \bar{b} < -e^{\bar{a}} - 1 \\ -\bar{b} < \frac{\xi_2}{\sin \xi_2} & \text{si } 0 > \bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1 \\ \bar{b} < -\frac{\xi_1}{\sin \xi_1} & \text{si } \bar{b} > 0. \end{array} \right.$$

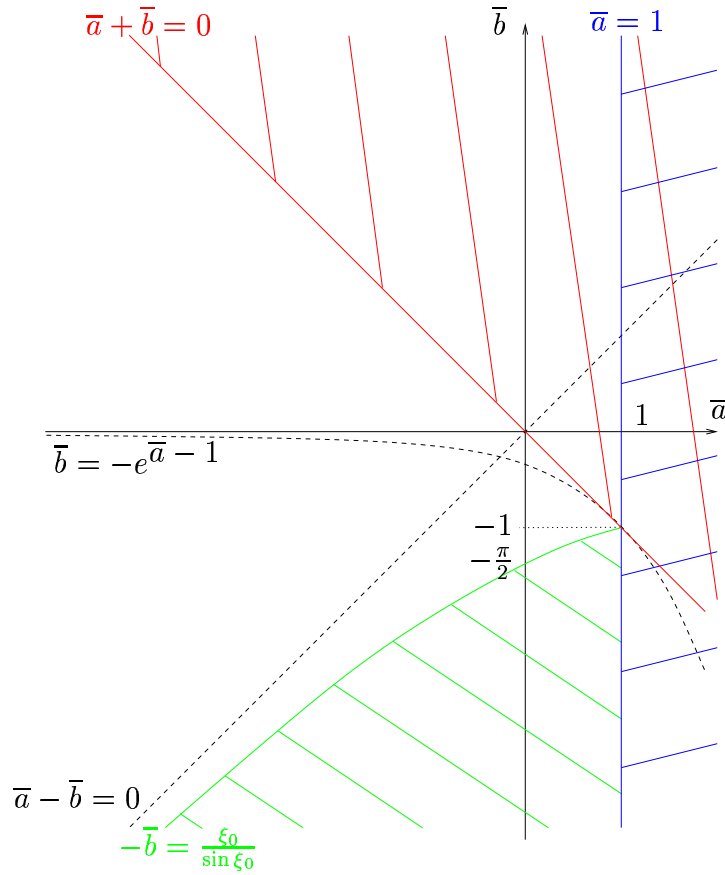
En fait, les conditions $\bar{b} < -\frac{\xi_1}{\sin \xi_1}$ et $-\bar{b} < \frac{\xi_2}{\sin \xi_2}$ s'avèrent superflues (vérification facile) et la condition de stabilité "globale" devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \bar{a} < 1 \\ -\bar{b} < \frac{\xi_0}{\sin \xi_0} \end{array} \right. & \text{si } \bar{b} < -e^{\bar{a}} - 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \bar{a} < 1 \\ \bar{a} + \bar{b} < 0 \end{array} \right. & \text{si } 0 > \bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1 \\ \bar{a} + \bar{b} < 0 & \text{si } \bar{b} > 0, \end{array} \right.$$

que l'on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{a} < 1 & \text{si } \bar{b} < 0 \\ \bar{a} + \bar{b} < 0 & \text{si } \bar{b} \geq -e^{\bar{a}} - 1 \\ -\bar{b} < \frac{\xi_0}{\sin \xi_0} & \text{si } \bar{b} < -e^{\bar{a}} - 1. \end{array} \right.$$

Le graphe FIG. C.4 représente ces conditions dans le plan $(\bar{a}, \bar{b})$.

FIG. C.4: Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité sur $\bar{a}$ et $\bar{b}$

En définitive, elles peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} a + b < 0 \\ a\tau < 1 \\ |b|\tau < M_b(a\tau), \end{cases}$$

$M_b(a\tau)$ étant défini par :

$$|b|\tau = \begin{cases} \frac{\xi_0}{\sin \xi_0} & \text{si } b < 0 \\ -\frac{\xi_1}{\sin \xi_1} & \text{si } b > 0. \end{cases}$$

□

Remarques. _____

1. Si $a = 0$, on retrouve bien le lemme LEM. C.1.

2. On peut multiplier la première condition par τ de sorte à obtenir un ensemble de conditions portant uniquement sur les paramètres adimensionnés $a\tau$ et $b\tau$.
 3. Il est parfaitement possible d'avoir $a > 0$ ou $b > 0$. Ainsi, le retard ($b < 0$) peut compenser un mauvais coefficient instantané ($a > 0$), si celui-ci n'est pas trop grand.
 4. On retrouve, sur le graphique FIG. C.4, que la région correspondant à la condition suffisante de stabilité du lemme LEM. 5.1 est naturellement incluse dans celle de la condition nécessaire et suffisante de stabilité du lemme LEM. C.2.
-

Bibliographie

- [1] S. S. AGRAWAL, G. A. GREGORY, ET G. W. GOVIER, *An analysis of horizontal stratified two phase flow in pipes*, Canadian J. Chem. Engng., 51 (1973), pp. 280–286.
- [2] M. AÇIKGÖZ, F. FRANÇA, ET R. T. LAHEY, *An experimental study of three-phase flow regimes*, Int. J. Multiphase Flow, 18 (1992), pp. 327–336.
- [3] A. R. ALMEIDA ET M. A. L. GONÇALVES, *Venturi for severe slugging elimination*, in 9th International Conference, no. 53, BHRG, 1999.
- [4] P. ANDREUSSI ET K. BENDIKSEN, *An investigation of void fraction in liquid slugs for horizontal and inclined gas-liquid pipe flow*, Int. J. Multiphase Flow, 15 (1989), pp. 937–946.
- [5] N. ANDRISTOS ET T. J. HANRATTY, *Influence of interfacial waves in stratified gas-liquid flows*, AIChE Journal, 33 (1987), pp. 444–454.
- [6] A. A. ANDRONOV, A. A. VITT, ET S. E. KHAIKIN, *Theory of Oscillators*, Dover Publications, 1987.
- [7] K. AZIZ, M. K. NICHOLSON, ET G. A. GREGORY, *Some observations on the motion of elongated bubbles in horizontal pipes*, Canadian J. Chem. Engng., 52 (1974), pp. 695–702.
- [8] O. BAKER, *Simultaneous flow of oil and gas*, Oil and Gas J., 53 (1954), pp. 185–195.
- [9] F. A. BARBUTO, *Method of eliminating severe slug in multiphase flow subsea lines*, application for uk patent no. 2 282 399, Petrobras, 1995.
- [10] D. BARNEA, *Transition from annular and from dispersed bubble flow - unified models for the whole range of pipe inclinaisons*, Int. J. Multiphase Flow, 12 (1986), pp. 733–744.
- [11] —, *A unified model for predicting flow-pattern transitions for the whole range of pipe inclinaisons*, Int. J. Multiphase Flow, 13 (1987), pp. 1–12.
- [12] D. BARNEA ET N. BRAUNER, *Holdup of the liquid slug in two-phase intermittent flow*, Int. J. Multiphase Flow, 11 (1985), pp. 43–49.
- [13] D. BARNEA, O. SHOHAM, ET Y. TAITEL, *Flow pattern characterization in two phase flow by electrical conductance probe*, Int. J. Multiphase Flow, 6 (1980), pp. 387–397.
- [14] —, *Flow pattern transition for downward inclined two-phase flow; horizontal to vertical*, Chem. Engng. Sci., 37 (1982), pp. 735–740.

- [15] —, *Gas-liquid flow in inclined tubes : Flow pattern transitions for upward flow*, Chem. Engng. Sci., 40 (1985), pp. 131–136.
- [16] D. BARNEA ET Y. TAITEL, *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, vol. 3 - Gas-Liquid Flows, N.P. Cheremisinoff, Editor, 1986, ch. Flow Pattern Transition in Two-Phase Gas-Liquid Flows, pp. 403–474.
- [17] R. BELLMAN ET K. L. COOKE, *Differential-Difference Equations*, New York : Academic press, 1963.
- [18] K. BENDIKSEN, *An experimental investigation of the motion of long bubbles in inclined tubes*, Int. J. Multiphase Flow, 10 (1984), pp. 467–483.
- [19] K. BENDIKSEN, D. MALNES, R. MOE, ET S. NULAND, *The dynamic two-fluid model OLGA : Theory and application*, in SPE Production Engineering, no. SPE 19451, Mai 1991, pp. 171–180.
- [20] K. BENDIKSEN, D. MALNES, ET O. NYDAL, *On the modelling of slug flow*, Chem. Eng. Comm., 141-142 (1996), pp. 71–102.
- [21] C. BERGER ET J. B. QUINCY, *Simulation des écoulements diphasiques gaz-liquide dans les conduites pétrolières*, rapport interne 42231, Institut Français du Pétrole, 1995.
- [22] A. E. BERGLES, J. G. COLLIER, J. M. DELHAYE, G. F. HEWITT, ET F. MAYINGER, *Two-phase flow and heat transfer in the power and process industries*, Washington : Hemisphere Publ. Co., 1981.
- [23] S. J. BHATT ET C. S. HSU, *Stability criteria for second order dynamical systems with time lag*, Journal of Applied Mechanics, (1966), pp. 113–118.
- [24] R. B. BIRD, W. E. STEWART, ET E. N. LIGHTFOOT, *Transport Phenomena*, New York : John Wiley & sons, 1960.
- [25] BIRKHOOF, *Averaged conservation laws in pipes*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 8 (1964), pp. 66–77.
- [26] A. BØE, *Severe slugging characteristics ; Part 1 : Flow regime for severe slugging ; Part 2 : Point model simulation study*, in Selected Topics in Two-Phase Flow, Trondheim, Norway, Mars 1981.
- [27] N. BRAUNER ET A. ULLMAN, *Modeling of phase inversion phenomenon in two-phase pipe flows*, Int. J. Multiphase Flow, 28 (2002), pp. 1177–1204.
- [28] —, *Modeling of gas entrainment from Taylor bubbles. Part A : Slug flow*, Int. J. Multiphase Flow, 30 (2004), pp. 239–272.
- [29] R. S. BRODKEY, *The Phenomena of Fluid Motions*, Addison-Wesley Press, 1967.
- [30] T. BROOKE BENJAMIN, *Gravity currents and related phenomena*, J. Fluid Mech., 31 (1968), pp. 209–248.
- [31] T. A. BURTON, *Volterra integral and differential equations*, Academic Press, 1983.
- [32] S. W. CHURCHILL, *Friction factor equation spans all fluids regimes*, Chem. Eng., 84 (1977), pp. 91–92.

-
- [33] L. COADOU, P. DUCHET-SUCHAUX, D. FERRÉ, K. GUMMULURI, E. HEINTZÉ, V. HENRIOT, ET C. PAUCHON, *Pigging operation : Measurement and simulation*, in 9th Multiphase International Conference, Cannes, France, Juin 1999, BHRG.
 - [34] S. L. COHEN ET T. J. HANRATTY, *Effects of waves at a gas-liquid interface of a turbulent air flow*, J. Fluid Mech., 31 (1968), p. 467.
 - [35] J. CORTEVILLE, R. CHATELU, ET J. M. ALLIOT, *Etude des écoulements diphasiques en couplage pipeline/riser. Rapport de la campagne d'essais 1*, rapport interne 42027, Institut Français du Pétrole, 1995.
 - [36] J. CORTEVILLE ET J. P. REYT, *Etude des écoulements diphasiques en couplage pipeline/riser. Rapport de la campagne d'essais 2*, rapport interne 44097, Institut Français du Pétrole, 1997.
 - [37] J. CORTEVILLE, R. STEHLÉ, D. FERRÉ, ET C. PAUCHON, *An experimental study of severe slugging in multiphase production lines*, in 7th Multiphase International Conference, Cannes, France, 1995, BHRG.
 - [38] A. COURBOT, *Prevention of severe slugging in the Dunbar 16" multiphase pipeline*, in Offshore Technology Conference, no. OTC 8196, 1996, pp. 445–452.
 - [39] T. J. CRAWFORD, C. B. WEINBERGER, ET J. WEISMAN, *Two-phase flow patterns and void fractions in downward flow. Part I : Steady-state flow patterns*, Int. J. Multiphase Flow, 11 (1985), pp. 761–782.
 - [40] —, *Two-phase flow patterns and void fractions in downward flow. Part II : Void fractions and transient flow patterns*, Int. J. Multiphase Flow, 12 (1986), pp. 219–236.
 - [41] *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, 1980.
 - [42] V. DE HENAU, *A Study of Terrain-Induced Slugging in Two-Phase Flow Pipelines*, Thèse, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1992.
 - [43] V. DE HENAU ET G. D. RAITHY, *A study of terrain-induced slugging in two-phase flow pipelines*, Int. J. Multiphase Flow, 21 (1995), pp. 365–379.
 - [44] —, *A transient two-fluid model for the simulation of slug flow in pipelines -I. theory*, Int. J. Multiphase Flow, 21 (1995), pp. 335–349.
 - [45] J. DE SALIS, E. HEINTZÉ, ET Y. CHARRON, *Dynamic simulation of multiphase pumps*, in 9th Multiphase International Conference, Cannes, France, Juin 1999, BHRG.
 - [46] S. DECARRE ET J. FABRE, *Etude sur la prédiction de l'inversion de phase*, Revue de l'Institut Français du Pétrole, 52 (1997), pp. 415–424.
 - [47] R. T. P. DERBYSHIRE, G. F. HEWITT, ET B. NICHOLLS, *X-radiography of two-phase gas-liquid flow*, Tech. Report M-1321, AERE, 1969.
 - [48] P. DORON ET D. BARNEA, *Flow pattern maps for solid-liquid flow in pipes*, Int. J. Multiphase Flow, 22 (1996), pp. 273–283.
 - [49] D. A. DREW, *Mathematical modeling of two-phase flow*, Ann. Rev. Fluid Mech., 15 (1983), pp. 261–291.

- [50] J. FABRE, A. LINÉ, ET L. PÉRESSON, *Two-fluid two-flow-pattern model for transient gas-liquid flow in pipes*, in 4th Multiphase International Conference, 1989, pp. 269–284.
- [51] J. FABRE, L. PÉRESSON, J. CORTEVILLE, M. BERNICOT, ET P. OZON, *Ecoulements diphasiques instables dans les systèmes pipeline/riser*, Revue de l'Institut Français du Pétrole, 43 (1988), pp. 815–825.
- [52] ———, *Severe slugging in pipeline/riser systems*, SPE Prod. Eng., (1990), pp. 299–305.
- [53] J. FABRE, L. PÉRESSON, J. CORTEVILLE, R. ODELLO, ET T. BOURGEOIS, *Severe slugging in pipeline/riser systems*, in SPE Annual Technical Conference and Exhibition, no. SPE 16846, Dallas, Texas, USA, September 1987.
- [54] M. A. FARGALHY, *Study of severe slugging in real offshore pipeline riser-pipe system*, in SPE Middle East Oil Technology Conference, no. SPE 15726, Manama, Bahrain, Mars 1987.
- [55] [www.feesa.net/pdf/casestudies/ 007 - Hydrodynamic Slug Size in Multiphase Pipelines.pdf](http://www.feesa.net/pdf/casestudies/007-Hydrodynamic%20Slug%20Size%20in%20Multiphase%20Pipelines.pdf).
- [56] R. C. FERNANDES, R. SEMIAT, ET A. E. DUKLER, *Hydrodynamic model for gas-liquid slug flow in vertical tubes*, AIChE Journal, 29 (1983), pp. 981–989.
- [57] D. FERRÉ, V. BOUVIER, ET C. PAUCHON, *Tacite physical model, description manual*, rapport interne 42385, Institut Français du Pétrole, 1995.
- [58] G. FERSCHNEIDER, *Ecoulement diphasique gaz-liquide à poches et à bouchons en conduites*, Revue de l'Institut Français du Pétrole, 38 (1983).
- [59] J. G. FLORES, *Oil-water flow in vertical and deviated wells*, Thèse, University of Tulsa, 1997.
- [60] P. FUCHS, *The pressure limit for terrain slugging*, in 3th International Conference on Multiphase Flow, BHRA, 1987.
- [61] T. FUNADA ET D. D. JOSEPH, *Viscous potential flow analysis of Kelvin-Helmholtz instability in a channel*, J. Fluid Mech., 445 (2001), pp. 263–283.
- [62] A. GILCHRIST, T. N. WONG, C. D. GRANT, H. C. SIMPSON, ET T. BAXTER, *A dynamic model for slug flow in a pipeline-riser system*, in 4th Multiphase International Conference, BHRG, 1989, pp. 285–300.
- [63] L. P. GOLAN ET A. H. STENNING, *Two-phase vertical flow maps*, in Proc. Inst. Mech. Eng., vol. 184 (3C), 1969, pp. 110–116.
- [64] V. GOLDZBERG ET F. MAC KEE, *Model predicts liquid accumulation, severe terrain-induced slugging for two-phase lines*, Oil and Gas J., 83 (1985), pp. 105–109.
- [65] G. W. GOVIER ET K. AZIZ, *The Flow of Complex Mixtures in Pipes*, New York : Van Nostrand Reinhold, 1972.
- [66] G. A. GREGORY, M. K. NICHOLSON, ET K. AZIZ, *Correlation of the liquid volume fraction in the slug for horizontal gas-liquid slug flow*, Int. J. Multiphase Flow, 4 (1978), pp. 33–39.

-
- [67] G. A. GREGORY ET D. S. SCOTT, *Correlation of liquid slug velocity and frequency in horizontal cocurrent gas-liquid slug flow*, AIChE Journal, 15 (1969), pp. 933–935.
 - [68] P. GRIFFITS ET G. B. WALLIS, *Two-phase slug flow*, J. Heat Trans., 83 (1961).
 - [69] J. GUCKENHEIMER ET P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, vol. 42 - Applied Mathematical Sciences, New York : Springer-Verlag, 1983.
 - [70] G. HAANDRIKMAN ET AL. , *Method and apparatus for suppressing and controlling slugflow in a multi-phase fluid stream*, us patent no. 6,390,114 b1, Shell Oil Company, 2002.
 - [71] M. HAJILOO, B. H. CHANG, ET A. F. MILLS, *Interfacial shear in downward two-phase annular co-current flow*, Int. J. Multiphase Flow, 27 (2001), pp. 1095–1108.
 - [72] C. P. HALE, *Slug Formation, Growth and Decay in Gas-Liquid Flows*, Thèse, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, England, 2000.
 - [73] T. Z. HARMATHY, *Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent*, AIChE Journal, 6 (1960), pp. 281–288.
 - [74] T. HASSANEIN ET P. FAIRHURST, *Challenges in the mechanical and hydraulic aspects of riser design for deep water developments*, in IBC UK Conf. Ltd. Offshore Pipeline Technology Conference, Oslo, Norway, 1998.
 - [75] K. HAVRE ET M. DALSMO, *Active feedback control as the solution to severe slugging*, in SPE Annual Technical Conference and Exhibition, no. SPE 71540, New Orleans, USA, October 2001.
 - [76] P. HEDNE ET H. LINGA, *Suppression of terrain slugging with automatic and manual riser choking*, in ASME Winter Annual Meeting, Dallas, Texas, USA, Novembre 1990, pp. 453–460.
 - [77] V. HENRIOT, A. COURBOT, E. HEINTZÉ, ET L. MOYEUX, *Simulation of process to control severe slugging : Application to the dunbar pipeline*, in SPE Annual Technical Conference and Exhibition, no. SPE 56461, Houston, Texas, USA, Octobre 1999.
 - [78] V. HENRIOT, E. DURET, E. HEINTZÉ, ET A. COURBOT, *Multiphase production control : Application to slug flow*, Oil and Gas Science and Technology, 57 (2002), pp. 87–98.
 - [79] G. HETSRONI, *Handbook of Multiphase Systems*, New York : McGraw-Hill, 1982.
 - [80] G. F. HEWITT, *Measurement of Two-Phase Flow Parameters*, Academic press, 1978.
 - [81] G. F. HEWITT ET D. N. ROBERTS, *Studies of two-phase flow patterns by simultaneous X-ray and flash photography*, Tech. Report M-2159, AERE, 1969.
 - [82] T. J. HILL, *Riser-base gas injection into the S.E. Forties line*, in 4th International Conference on Multi-Phase Flow, BHRA, 1989, pp. 133–148.
 - [83] —, *Gas injection at riser base solves slugging, flow problems*, Oil and Gas J., (1990), pp. 88–92.

- [84] J. O. HINZE, *Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of spitting in dispersion processes*, AIChE Journal, 1 (1955), pp. 289–295.
- [85] F. HOFFMANN, J. CORTEVILLE, ET T. BOURGEOIS, *Ecoulements polyphasiques : Etude des pertes de pression dans les duses de tête de puits*, rapport interne 34910, Institut Français du Pétrole, 1987.
- [86] J. F. HOLLENBERG ET AL. , *A method to suppress severe slugging in flow line riser systems*, in 7th Multiphase International Conference, Cannes, France, 1995, BHRG, pp. 89–103.
- [87] C. S. HSU ET S. J. BHATT, *Stability charts for second order dynamical systems with time lag*, Journal of Applied Mechanics, (1966), pp. 119–124.
- [88] M. G. HUBBARD ET A. E. DUKLER, *The characterization of flow regimes for horizontal two-phase flow*, tech. report, Heat Transfert and Fluid Mechanics Institute, Standford University Press CA, 1966.
- [89] M. ISHII, *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*, Paris : Eyrolles, 1975.
- [90] M. ISHII ET K. MISHIMA, *Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations*, Nuclear Engineering and Design, 82 (1984), pp. 107–126.
- [91] F. E. JANSEN, *Elimination of severe slugging in a pipeline-riser system*, master's thesis, University of Tulsa, 1990.
- [92] F. E. JANSEN ET O. SHOHAM, *Methods for eliminating pipeline-riser flow instabilities*, in Western Regional Meeting, no. SPE 27867, Long Beach, California, USA, Mars 1994, pp. 195–204.
- [93] F. E. JANSEN, O. SHOHAM, ET Y. TAITEL, *The elimination of severe slugging - Experiments and modeling*, Int. J. Multiphase Flow, 22 (1996), pp. 1055–1072.
- [94] K. S. JOHAL ET AL. , *An alternative economic method to riser-base gas lift for deep water subsea oil/gas field developments*, in Offshore Europe Conference, no. SPE 38541, Aberdeen, Scotland, September 1997, pp. 487–492.
- [95] O. C. JONES ET N. ZUBER, *Interrelation between void fraction fluctuations and flow patterns in two-phase flow*, Int. J. Multiphase Flow, 2 (1975), pp. 273–306.
- [96] O. KAASA, *A subsea slug catcher to prevent severe slugging*, in 6th Underwater Technology International Conference, Bergen, Norway, 1990, pp. 387–401.
- [97] S. L. KOKAL ET J. F. STANISLAV, *An experimental study of two-phase flow in slightly inclined pipes - I, flow patterns*, Chem. Engng. Sci., 44 (1989), pp. 665–679.
- [98] J. E. KOWALSKI, *Wall and interfacial shear stress in stratified flow in a horizontal pipe*, AIChE Journal, 33 (1987), pp. 274–281.
- [99] [http ://www.ni.com/labview/](http://www.ni.com/labview/).
- [100] P. Y. LIN ET T. J. HANRATTY, *Detection of slug flow from pressure measurements*, Int. J. Multiphase Flow, 13 (1987), pp. 13–21.
- [101] H. LINGA, *Terrain slugging phenomena. Some experimental results obtained at the SINTEF two-phase flow laboratory*, in 3th Multiphase International Conference, BHRG, 1987, pp. 37–53.

-
- [102] D. C. MAC KAY, *Dynamic model predicts slugging flow effect in offshore production facility*, Oil and Gas J., (1987), pp. 67–72.
 - [103] J. M. MANDHANE, G. A. GREGORY, ET K. AZIZ, *A flow pattern map for gas-liquid flow in horizontal pipes*, Int. J. Multiphase Flow, 1 (1974), pp. 537–553.
 - [104] I. G. MANOLIS, *High pressure gas-liquid slug flow*, Thèse, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, England, 1995.
 - [105] C. S. MARTIN, *Transition from bubbly to slug flow of a vertical downward air-water flow*, in ASME Symposium, Atlanta, USA, 1973.
 - [106] <http://www.mathworks.com/>.
 - [107] A. MATUSZKIEWICZ, J. C. FLAMAND, ET J. A. BOURÉ, *The bubble-slug flow pattern transition and instabilities of void fraction waves*, Int. J. Multiphase Flow, 13 (1987), pp. 199–217.
 - [108] J. MOE, M. N. LINGELEM, H. HOLM, ET O. OLDERVIK, *Severe slugging in offshore gas-condensate flowline-riser systems*, in 4th Multiphase International Conference, BHRG, 1989, pp. 269–284.
 - [109] F. MONTEL, *Phase equilibria needs for petroleum exploration and production industry*, Fluid Phase Equilibria, 84 (1993), pp. 343–367.
 - [110] M. K. NICHOLSON, K. AZIZ, ET G. A. GREGORY, *Intermittent two-phase flow in horizontal pipes : Predictive models*, Canadian J. Chem. Engng., 56 (1978), pp. 653–663.
 - [111] D. J. NICKLIN, J. O. WILKES, ET J. F. DAVIDSON, *Two-phase flow in vertical tubes*, Trans. Instn Chem. Engrs, 40 (1962), pp. 61–68.
 - [112] S. L. NICULESCU, *Delay Effects on Stability : A Robust Control Approach*, Springer, 2001.
 - [113] <http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/>.
 - [114] O. J. NYDAL ET P. ANDREUSSI, *Gas entrainment in a long liquid slug advancing in a near horizontal pipe*, Int. J. Multiphase Flow, 17 (1991), pp. 179–189.
 - [115] U. A. ODOZI, *Three-phase gas/liquid/liquid slug flow*, Thèse, University of London, 2000.
 - [116] <http://www.olga2000.com/>.
 - [117] R. V. OLIEMANS, B. F. M. POTS, ET N. TROMPÉ, *Modeling of annular dispersed two-phase flow in vertical pipes*, Int. J. Multiphase Flow, 12 (1986), pp. 711–732.
 - [118] L. ORANJE, *Handling two-phase gas-condensate flow in offshore pipeline systems*, Oil and Gas J., 81 (1983), pp. 128–138.
 - [119] L. PAN, *High pressure three-phase (gas-liquid-liquid) flow*, Thèse, University of London, 1996.
 - [120] S. PATAULT ET Q. H. TRAN, *Modèle et schéma numérique du code TACITE-NPW*, rapport interne 42415, Institut Français du Pétrole, 1996.

- [121] C. PAUCHON, H. DHULESIA, G. BINH CIRLOT, ET J. FABRE, *TACITE : a transient tool for multiphase pipeline and well simulation*, in SPE Annual Technical Conference and Exhibition, no. SPE 28545, New Orleans, LA, USA, Septembre 1994.
- [122] L. S. PONTRYAGIN, *On the zeros of some elementary transcendental functions*, Amer. Math. Soc. Transl., 1 (1955), pp. 95–110.
- [123] B. F. M. POTS, I. BROMILOW, ET M. KRONIJN, *Severe slug flow in offshore flowline/riser systems*, in SPE Middle East Oil Technology Conference, no. SPE 13723, Manama, Bahrain, Mars 1985.
- [124] K. RIISER, J. FABRE, ET C. SUZANNE, *Gas entrainment at the rear of taylor-bubble*, in 29th meeting of European Two-Phase Flow Group, Stockholm, June 1992.
- [125] P. ROUCHON, *Systèmes dynamiques et modélisation*, Cours de l'ENSMP, Janvier 1993.
- [126] Z. RUDER, P. J. HANRATTY, ET T. J. HANRATTY, *Necessary conditions for the existence of stable slugs*, Int. J. Multiphase Flow, 15 (1989), pp. 209–226.
- [127] C. SARICA ET O. SHOHAM, *A simplified transient model for pipeline-riser systems*, Chem. Engng. Sci., 46 (1991), pp. 2167–2179.
- [128] C. SARICA ET J. O. TENGESDAL, *A new technique to eliminate severe slugging in pipeline/riser systems*, in SPE Annual Technical Conference and Exhibition, no. SPE 63185, Dallas, Texas, USA, Octobre 2000.
- [129] Z. SCHMIDT, *Experimental Study of Two-Phase Slug Flow in a Pipeline-Riser Pipe System*, Thèse, University of Tulsa, 1977.
- [130] Z. SCHMIDT, J. P. BRILL, ET H. D. BEGGS, *Choking can eliminate severe pipeline slugging*, Oil and Gas J., (1979), pp. 230–238.
- [131] —, *Experimental study of severe slugging in a two-phase-flow pipeline-riser pipe system*, SPE J., (1980), pp. 407–414.
- [132] Z. SCHMIDT, D. R. DOTY, ET K. DUTTA-ROY, *Severe slugging in offshore pipeline-riser pipe systems*, SPE J., (1985), pp. 27–37.
- [133] A. H. SHAPIRO, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, vol. 1, New York : Ronald Press, 1953.
- [134] —, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, vol. 2, New York : Ronald Press, 1954.
- [135] O. SHOHAM, *Flow Pattern Transition and Characterization in Gas-Liquid Two Phase Flow in Inclined Pipes*, Thèse, Tel Aviv University, 1983.
- [136] A. SINQUIN, T. PALERMO, ET Y. PEYSSON, *Rheological and flow properties of gas hydrate suspensions*, Oil and Gas Science and Technology, 59 (2004), pp. 41–57.
- [137] G. SKOFTELAND ET J. M. GODHAVN, *Suppression of slugs in multiphase flow lines by active use of topside choke - Field experience and experimental results*, in 11th Multiphase International Conference, San Remo, Italie, Juin 2003, BHRG, pp. 527–542.

-
- [138] S. SONG ET G. KOUBA, *Fluids transport optimization using seabed*, in ETCE/OAME 2000 Joint Conference, no. ECTE2000/PROD-10051, New Orleans, LA, USA, Février 2000.
 - [139] P. L. SPEDDING ET V. T. NGUYEN, *Regime maps for air water two phase flow*, Chem. Eng. Sci., 35 (1980), pp. 779–793.
 - [140] E. STORKAAS ET S. SKOGESTAD, *A low-dimensional dynamic model of severe slugging for control design and analysis*, in 11th Multiphase International Conference, San Remo, Italie, Juin 2003, BHRG, pp. 117–129.
 - [141] E. STORKAAS, S. SKOGESTAD, ET V. ALSTAD, *Stabilization of desired flow regimes in pipelines*, in AIChE Annual Meeting, no. 287d, Reno, Nevada, USA, Novembre 2001.
 - [142] <http://www.simsciesscor.com/products/tacite.stm>.
 - [143] Y. TAITEL, *Stability of severe slugging*, Int. J. Multiphase Flow, 12 (1986), pp. 203–217.
 - [144] Y. TAITEL ET D. BARNEA, *Counter current gas liquid vertical flow-model for flow pattern and pressure drop*, Int. J. Multiphase Flow, 9 (1983), pp. 634–648.
 - [145] —, *A consistent approach for calculating pressure drop in inclined slug flow*, Chem. Engng. Sci., 45 (1990), pp. 1199–1206.
 - [146] —, *Two-phase slug flow*, Advances in Heat Transfer, 20 (1990), pp. 83–132.
 - [147] —, *Simplified transient simulation of two-phase flow using quasi-equilibrium momentum balances*, Int. J. Multiphase Flow, 23 (1997), pp. 493–501.
 - [148] Y. TAITEL, D. BARNEA, ET A. E. DUCKLER, *Modelling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes*, AIChE Journal, 26 (1980), pp. 345–354.
 - [149] Y. TAITEL ET A. E. DUCKLER, *A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow*, AIChE Journal, 22 (1976), pp. 47–55.
 - [150] —, *A theoretical approach to the Lockhart-Martinelli correlation for stratified flow*, Int. J. Multiphase Flow, 2 (1976), pp. 591–595.
 - [151] Y. TAITEL, O. SHOHAM, ET J. P. BRILL, *Simplified transient solution and simulation of two-phase flow in pipelines*, Chem. Engng. Sci., 44 (1989), pp. 1353–1359.
 - [152] —, *Transient two-phase flow in low velocity hilly terrain pipelines*, Int. J. Multiphase Flow, 16 (1990), pp. 69–77.
 - [153] Y. TAITEL, S. VIERKANDT, O. SHOHAM, ET J. P. BRILL, *Severe slugging in a pipeline-riser system, experiments and modeling*, Int. J. Multiphase Flow, 16 (1990), pp. 57–68.
 - [154] J. O. TENGESDAL ET C. SARICA, *A simplified transient model to predict flow behaviour of "self-lifting" a severe slugging attenuation technique, in pipeline-riser systems*, in 11th Multiphase International Conference, San Remo, Italie, Juin 2003, BHRG, pp. 73–85.

- [155] J. O. TENGESDAL, C. SARICA, ET L. THOMPSON, *Severe slugging attenuation for deepwater multiphase pipeline and riser systems*, in SPE Annual Technical Conference and Exhibition, no. SPE 77503, San Antonio, Texas, USA, Septembre 2002.
- [156] J. O. TENGESDAL, L. THOMPSON, ET C. SARICA, *A design approach for "self-lifting" method to eliminate severe slugging in offshore production systems*, in SPE Annual Technical Conference and Exhibition, no. SPE 84227, Denver, Colorado, USA, Octobre 2003.
- [157] J. L. TRALLERO, *Oil-water flow patterns in horizontal pipes*, Thèse, University of Tulsa, 1995.
- [158] Q. H. TRAN, *Simulation des instabilités hydrodynamiques dans les systèmes de pipeline-riser par couplage de deux modèles diphasiques*, rapport interne 42412, Institut Français du Pétrole, 1995.
- [159] N. K. TUTU, *Pressure fluctuations and flow pattern recognition in vertical two-phase gas-liquid flows*, Int. J. Multiphase Flow, 8 (1982), pp. 443–447.
- [160] P. M. UJANG, C. J. LAWRENCE, ET G. F. HEWITT, *Slug tracking : A review*, tech. report, Department of Chemical Engineering and Chemical Technology - Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, England, 2004.
- [161] J. VIDAL, *Thermodynamics Applications in Chemical Engineering and the Petroleum Industry*, Editions Technip, Paris, 2003.
- [162] S. VIERKANDT, *Severe slugging in pipeline-riser systems, experiments and modeling*, master's thesis, The University of Tulsa, 1988.
- [163] H. VIVIAND, *Analyse de modèles simplifiés d'écoulement diphasiques transitoires*, Tech. Report IFP.RET.43.004.01, PRINCIPIA Recherche Développement S.A., 1994.
- [164] —, *Modèles simplifiés d'écoulement dans les conduites pétrolières*, Tech. Report IFP.RET.43.069.02, PRINCIPIA Recherche Développement S.A., 1994.
- [165] G. B. WALLIS, *One-Dimensional Two-Phase Flow*, New York : McGraw-Hill, 1969.
- [166] M. E. WEBER, *Drift in intermittent two-phase flow in horizontal pipes*, Canadian J. Chem. Engng., 59 (1981), pp. 389–399.
- [167] J. WEISMAN, D. DUNCAN, J. GIBSON, ET T. CRAWFORD, *Effect of fluid properties and pipe diameter on two-phase flow pattern in horizontal lines*, Int. J. Multiphase Flow, 5 (1979), pp. 437–460.
- [168] M. W. J. WYLLIE ET A. BRACKENRIDGE, *A retrofit solution to reduce slugging effects in multiphase subsea pipelines - The internal riser insert system (IRIS)*, in Subsea International Conference, 1994.
- [169] Y. YAMAZAKI ET K. YAMAGUCHI, *Characteristics of cocurrent two-phase downflow in tubes flow pattern, void fraction and pressure drop*, J. Nuc. Sci. Tech., 16 (1979), pp. 245–255.
- [170] B. T. YOCUM, *Offshore riser slug flow avoidance, mathematical model for design and optimization*, in SPE European Meeting, no. SPE 4312, Londres, UK, Avril 1973.

- [171] E. ZAKARIAN, *Modélisation et analyse des instabilités d'écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières du type pipeline-riser*, Thèse, Université Paris XIII, Institut Galilée, mars 2000.
- [172] G. ZHENG, J. P. BRILL, ET Y. TAITEL, *Slug flow behavior in a hilly terrain pipeline*, Int. J. Multiphase Flow, 20 (1994), pp. 63–79.
- [173] N. ZUBER ET J. A. FINDLAY, *Average volumetric concentration in two-phase flow systems*, J. Heat Transfer, 87 (1965), pp. 453–468.
- [174] E. E. ZUKOSKI, *Influence of viscosity, surface tension and inclination angle on motion of long bubbles in closed tubes*, J. Fluid Mech., 25 (1966), pp. 821–837.

