



Modélisation de la propagation de fractures hydrauliques par la méthode des éléments finis étendue

Bertrand Paul

► To cite this version:

Bertrand Paul. Modélisation de la propagation de fractures hydrauliques par la méthode des éléments finis étendue. Géotechnique. Université de Lorraine, 2016. Français. NNT : 2016LORR0182 . tel-01580026

HAL Id: tel-01580026

<https://theses.hal.science/tel-01580026>

Submitted on 1 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Bertrand PAUL

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

GéoRessources - RP2E

Thèse de doctorat

Présentée le 2/12/2016 en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LORRAINE

Spécialité "Mécanique - Génie Civil"

Modélisation de la propagation de fractures hydrauliques par la méthode des éléments finis étendue

Jury:

Président:	Jean SULEM , Professeur, Ecole des Ponts ParisTech
Rapporteurs:	Anthony GRAVOUIL , Professeur, INSA Lyon Jean SULEM , Professeur, Ecole des Ponts ParisTech
Examineurs:	John DOLBOW , Professeur, Duke University David GREGOIRE , HDR, Université de Pau et des Pays de l'Adour Fabrice GOLFIER , HDR, Laboratoire GéoRessources - Université de Lorraine
Directeur de thèse:	Richard GIOT , Professeur - Université de Poitiers
Co-directeur de thèse:	Patrick MASSIN , HDR, Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées
Encadrant industriel:	Daniele COLOMBO , IFPEN

Résumé

La perméabilité des roches est fortement influencée par la présence de fractures car ces dernières constituent un chemin préférentiel pour l'écoulement des fluides. Ainsi la présence de fractures naturelles est un facteur déterminant pour la productivité d'un réservoir. Dans le cas de roches à faible conductivité, des techniques de stimulation telle que la fracturation hydraulique sont utilisées pour en augmenter la perméabilité et rendre le réservoir exploitable d'un point de vue économique. A l'inverse, dans le cas du stockage géologique, la présence de fractures dans la roche représente un danger dans la mesure où elle facilite le transport et la migration des espèces disséminées dans la roche. Pour le stockage de CO_2 , les fuites par les fractures présentes dans les couvertures du réservoir et la réactivation des failles constituent un risque majeur. Et en ce qui concerne le stockage géologique de déchets radioactifs, la circulation de fluide dans des réseaux de fractures nouvelles ou réactivées au voisinage de la zone de stockage peut aboutir à la migration de matériaux nocifs. Il est donc important de prévoir les effets de la présence de fractures dans un réservoir. Le but de cette thèse est le développement d'un outil numérique pour la simulation d'un réseau de fractures et de son évolution sous sollicitation hydromécanique. Grâce à sa commodité, la méthode des éléments finis étendue (XFEM) sera retenue et associée à un modèle de zone cohésive. La méthode XFEM permet en effet l'introduction de fissures dans le modèle sans nécessairement remailler en cas de propagation des fissures. L'écoulement du fluide dans la fissure et les échanges de fluide entre la fissure et le milieu poreux seront pris en compte via un couplage hydromécanique. Le modèle est validé avec une solution analytique asymptotique pour la propagation d'une fracture hydraulique plane dans un milieu poroélastique en 2D comme en 3D. Puis, nous étudions la propagation de fractures hydrauliques sur trajets inconnus. Les fissures sont initialement introduites comme des surfaces de fissuration potentielles étendues. Le modèle de zone cohésive sépare naturellement les domaines adhérents et ouverts. Les surfaces potentielles de fissuration sont alors actualisées de manière implicite par un post-traitement de l'état cohésif. Divers exemples de réorientation de fissures hydrauliques et de compétition entre fissures voisines sont analysés. Enfin, nous présentons l'extension du modèle aux jonctions de fractures hydrauliques.

Mots-clés: *XFEM, Couplage Hydro-mécanique, Fissuration, Zone cohésive, Eléments quadratiques, Fracture hydraulique.*

Abstract

The permeability of rocks is widely affected by the presence of fractures as it establishes prevailing paths for the fluid flow. Natural cracks are then a critical factor for a reservoir productivity. For low permeability rocks, stimulation techniques such as hydrofracturing have been experienced to enhance the permeability, so that the reservoir becomes profitable. In the opposite, when it comes to geological storage, the presence of cracks constitutes a major issue since it encourages the leak and migration of the material spread in the rock. In the case of CO_2 storage, the scenario of leakage across the reservoir seal through cracks or revived faults is a matter of great concern. And as for nuclear waste storage, the fluid circulation in a fracture network around the storage cavity can obviously lead to the migration of toxic materials. It is then crucial to predict the effects of the presence of cracks in a reservoir. The main purpose of this work is the design of a numerical tool to simulate a crack network and its evolution under hydromechanical loading. To achieve this goal we chose the eXtended Finite Element Method (XFEM) for its convenience, and a cohesive zone model to handle the crack tip area. The XFEM is a meshfree method that allows us to introduce cracks in the model without necessarily remeshing in case of crack propagation. The fluid flow in the crack as well as the exchanges between the porous rock and the crack are accounted for through an hydro-mechanical coupling. The model is validated with an analytical asymptotic solution for the propagation of a plane hydraulic fracture in a poroelastic media, in 2D as well as in 3D. Then we study the propagation of hydraulic fractures on non-predefined paths. The cracks are initially introduced as large potential crack surfaces so that the cohesive law will naturally separate adherent and debonding zones. The potential crack surfaces are then updated based on a directional criterion appealing to cohesive integrals only. Several examples of crack reorientation and competition between nearby cracks are presented. Finally, we extend our model to account for the presence of fracture junctions.

Keywords: *XFEM, Hydro-mechanical Coupling, Fracture, Cohesive Zone Model, Quadratic Elements, Hydraulic fracture.*

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement mes encadrants Patrick Massin, Richard Giot, Daniele Colombo et Fabrice Golfier pour leur engagement, leur patience et leur encadrement de grande qualité tout au long de ces trois années de thèse. Cela a été une chance d'avoir des encadrants aussi disponibles, réactifs et investis dans mon projet de thèse. Merci également à Sylvie Granet et Sam Cuvilliez qui ont suivi mes travaux de thèse et m'ont apporté leur expertise.

Je souhaite également exprimer toute ma gratitude envers Maxime Faivre et Marcel Ndeffo, avec qui j'ai collaboré étroitement, et également envers Guilhem Ferté et Maximilien Siavelis, dont les travaux de thèse ont constitué une base solide pour mener à bien mes travaux de recherches. Un grand merci à Alexandre Martin pour son aide et ses conseils précieux. Je n'oublie pas non plus mes collègues de l'*IFPEN* et de l'*IMSIA* que je remercie pour leur accueil et tous les moments de convivialité et de partage qui ont contribué à égayer ces 3 années et entretenir un environnement de travail stimulant. Merci également à Sophie pour son soutien et sa patience.

Enfin mes remerciements vont aux membres du jury, Anthony Gravouil, Jean Sulem, John Dolbow et David Grégoire, qui ont aimablement accepté d'apprécier mon travail.

Table des matières

Liste des figures

1	Introduction et contexte	1
1.1	Applications	1
1.2	Géométries complexes et maillages	5
1.3	Cadre de la thèse	7
2	La méthode des éléments finis étendue	11
2.1	Introduction	11
2.2	Une méthode dite de <i>level set</i>	11
2.2.1	Propriétés des <i>level set</i>	12
2.2.2	Actualisation des <i>level set</i>	13
2.3	Discretisation spatiale	14
2.3.1	Partie Heaviside	14
2.3.2	Jonction d'interfaces	15
2.3.3	Partie asymptotique	19
2.4	Les modèles de zone cohésive	22
2.5	Intégration numérique pour les fissures courbes tridimensionnelles et les jonctions de fissures	22
3	Le modèle HM-XFEM	25
3.1	Introduction	25
3.2	Présentation et validation du modèle HM-XFEM en 2D	27
3.3	Compléments	27
3.3.1	Validation du modèle hydromécanique: la colonne de Terzaghi	27
3.3.2	Imposition d'un flux dans une fracture	31
3.3.3	Pilotage du chargement	33
4	Formulation de type "Mortier" pour le contact	35
4.1	Formulation de type "Mortier" pour le contact	36
4.1.1	Loi cohésive mixte dans le formalisme du Lagrangien augmenté	36
4.1.2	Formulation stable de type "Mortier" pour l'insertion d'une loi d'interface dans le cadre XFEM	38
4.1.3	Espaces d'approximation pour les champs associés à la fracture cohésive	40
4.2	Validation du nouveau modèle	41
4.2.1	Introduction	41
4.2.2	Présentation du cas d'étude	43
4.2.3	Résultats numériques	44
4.2.4	Pression de fluide négative en fond de fissure	46
5	Propagation de fractures hydrauliques sur des trajets non prédéfinis	49
5.1	Introduction	49
5.2	Procédure de propagation sur trajets inconnus	49
5.2.1	Résumé de la procédure	50
5.2.2	Détection du fond cohésif	51
5.2.3	Angle de bifurcation	51
5.2.4	Mise à jour de la <i>level set normale</i>	54
5.2.5	Vers un procédé auto-entretenu	54
5.3	Cas d'application	56
5.3.1	Réorientation d'une fracture hydraulique 2D	57

5.3.2	Deux fractures hydrauliques parallèles	58
5.3.3	Deux fractures hydrauliques qui se croisent	59
5.3.4	Réorientation d'une fracture hydraulique 3D	60
5.4	Performances et limitations du modèle	62
6	Jonction de fissures hydrauliques	65
6.1	Espaces d'approximation au niveau de la jonction	65
6.2	Echanges de fluides au niveau de la jonction	69
6.3	Cas d'application	71
6.3.1	Contact au niveau des jonctions d'interfaces	71
6.3.2	Jonction d'interfaces hydrauliques	72
6.3.3	Tenue de couverture d'un réservoir	76
6.3.4	Simulation du "multi-stage hydraulic fracturing"	78
	Conclusion & Perspectives	85
A	Une technique d'intégration quadratique pour les fissures tridimensionnelles courbes et les interfaces branchées dans le cadre de la méthode des éléments finis étendue.	89
B	Un modèle hydromécanique 2D couplé avec XFEM et un modèle de zone cohésive. Applications à la propagation de fractures hydrauliques.	141
C	Formulation faible linéarisée pour le modèle hydromécanique couplé.	171
C.1	Définition du problème	171
C.2	Equations pour le problème mécanique	172
C.3	Equations pour le problème hydrodynamique	173

Liste des Figures

1.1	Un réseau de fractures au sein d'une roche poreuse.	2
1.2	Un système pétrolier classique (source: IFPEN).	2
1.3	Procédé de fracturation hydraulique des roches mères (source: TOTAL).	3
1.4	Fonctionnement d'un "Enhanced Geothermal System" (source: Nature).	4
1.5	Stockage de CO_2 dans un réservoir en fin d'exploitation (source: DNV GL).	4
1.6	Microfissures dans un réservoir (IFPEN).	5
1.7	Horizons et failles dans un bassin (IFPEN).	5
1.8	Maillage 3D d'une jonction de failles (IFPEN).	6
1.9	Détail des éléments au niveau de la jonction (IFPEN).	6
1.10	Éléments extrudés au niveau de la jonction (IFPEN).	6
1.11	Maillage d'un domaine fissuré avec FEM (à gauche) et XFEM (à droite).	6
1.12	Glissement suivant des failles dans un graben (Siavelis [1]).	7
2.1	Level set normale (à gauche) et tangente (à droite) et la fissure Γ résultante (en bas). . .	12
2.2	La base polaire en fond de fissure.	13
2.3	A gauche, les sous domaines complémentaires Ω_+ et Ω_- formés par l'interface arbitraire Γ . A droite, le même domaine maillé, dont les noeuds entourés possèdent l'enrichissement Heaviside.	14
2.4	Fonctions Heaviside utilisées dans <i>Code_Aster</i> pour les deux noeuds d'un segment coupé par une interface Γ	15
2.5	Fonction de forme associé au degré de liberté Heaviside du noeud 2 avec la formulation de Moës (en haut) et avec la formulation complémentaire (en bas)	16
2.6	Deux interfaces non connectées (en haut à gauche). Deux interfaces qui se croisent (en haut à droite). Une interface secondaire branchée sur une interface principale (en bas à gauche). Deux interfaces secondaires branchées sur une interface principale (en bas à droite).	16
2.7	Jonctions d'interfaces.	17
2.8	Cas de figure non traités: branchement multiple et relais entre 2 ou trois interfaces. . . .	18
2.9	Enrichissement Heaviside pour des jonctions d'interfaces.	19
2.10	Enrichissement Heaviside pour des jonctions de fissures.	20
2.11	Critère topologique (à gauche) et géométrique (à droite) pour l'enrichissement asymptotique en fond de fissure.	21
2.12	Un exemple de loi adoucissante linéaire entre la contrainte cohésive et le saut de déplacement. .	22
2.13	Un modèle de zone cohésive.	23
3.1	Géométrie du cas test de Terzaghi.	28
3.2	Pression de pore à $t=10s$ (en Pa).	30
3.3	Déplacements verticaux à $t=10s$	30
3.4	Imposition des flux de fluide M_{ext} sur un bord du domaine et W_{ext} dans l'interface cohésive Γ_c	31
3.5	Imposition d'un flux dans une fracture pour les modèles 2D plans dans le cas non conforme (à gauche) et dans le cas conforme (à droite).	32
3.6	Imposition d'un flux dans une fracture pour les modèles 3D.	33
3.7	Dissipation d'énergie dans un modèle de zone cohésive.	34
4.1	Localisation des variables internes associées à une interface cohésive dans le modèle présenté dans l'Annexe B (à gauche) et dans le modèle de type "Mortier" de Ferté [2] (à droite). . .	35

4.2	Transition entre la zone adhérente et la "process zone" pour les points de Gauss des facettes de contact d'une fracture cohésive tridimensionnelle plane. A gauche le domaine 3D traversé par une interface cohésive horizontale et à droite les facettes de contact associées.	36
4.3	Loi cohésive mixte linéaire non régularisée.	37
4.4	Un élément quadrangle HM-XFEM.	40
4.5	Espaces d'approximation pour les champs associés à la fracture cohésive d'après Géniaut [3] en haut et d'après Ferté [4] en bas.	41
4.6	Modèle de propagation radial (extrait de [5]).	42
4.7	Modèle de propagation PKN (extrait de [5]) (à gauche) et modèle de propagation P3D (extrait de [6]) (à droite).	43
4.8	Maillage utilisé pour le cas radial.	44
4.9	Déformée (X800) et pression de pore (en Pa) à $t=8s$.	44
4.10	Détermination du coefficient C_L .	45
4.11	Profil de la fissure à $t=8s$ (en Pa).	46
4.12	Pression de fluide négative en fond de fissure et inversion des échanges q_1 et q_2 entre la matrice poreuse et la fracture cohésive.	46
5.1	Procédure de mise à jour de la surface de fissuration.	50
5.2	Détection du front cohésif et mise à jour de la <i>level set tangente</i> .	52
5.3	Extension virtuelle de l'interface cohésive Γ_c .	53
5.4	Saut de déplacement tangentiel en pointe de fissure pour un angle de bifurcation β négatif (à gauche) et positif (à droite).	53
5.5	Mise à jour implicite de la <i>level set normale</i> .	54
5.6	Bifurcation d'une fracture cohésive après mise à jour de la <i>level set normale</i> avec une approche implicite (à gauche) et explicite (à droite).	55
5.7	Dans un élément quadrangle traversé par une interface: répartition des points de Gauss dans les différentes sous cellules d'intégration (à gauche) et sur une grille fixe (à droite).	56
5.8	Procédure itérative de propagation d'une fracture cohésive sur trajet inconnu d'après Ferté [7].	56
5.9	Réorientation d'une fracture hydraulique 2D: géométrie du problème (à gauche), déformée amplifiée (X250) et pression de pore en Pa (à droite).	58
5.10	Deux fractures hydrauliques parallèles: géométrie du problème (à gauche), déformée amplifiée (X250) et pression de pore en Pa (à droite).	58
5.11	Deux fractures hydrauliques qui se croisent: géométrie du problème (à gauche), déformée amplifiée (X250) et pression de pore en Pa (à droite).	59
5.12	Géométrie du test de réorientation d'une fracture hydraulique 3D.	60
5.13	Déformée amplifiée (X1000) et déplacement latéral (à gauche) et déformée amplifiée (X1000) et déplacement vertical (à droite) pour $t = 2, 5s$.	61
5.14	Déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa pour $t = 2, 5s$ (à gauche) et $t = 17s$ (à droite).	61
5.15	Points d'intersection entre la surface de fissuration initiale et les arêtes du maillage et pression de pore en Pa pour $t = 2, 5s$.	62
5.16	Points d'intersection entre les arêtes du maillage et les surfaces de fissuration potentielles finale et initiale. On représente aussi la pression de pore en Pa pour $t = 2, 5s$.	62
5.17	Points d'intersection entre la surface de fissuration potentielle finale et les arêtes du maillage: les points rouges correspondent aux points atteints par la fracture hydraulique et les points bleus correspondent à la zone adhérente.	63
6.1	Deux iso-zéros de <i>level set normales</i> (à gauche) et les deux interfaces résultantes (à droite).	66
6.2	Un élément quadrangle HM-XFEM traversé par deux interfaces non connectées.	66
6.3	Une jonction d'interfaces définie par deux iso-zéros de <i>level set normales</i> (à gauche) et les trois branches d'interface résultantes (à droite).	67
6.4	Espaces d'approximation au niveau d'une jonction d'interface avant (à gauche) et après (à droite) le traitement de l'interface principale comme deux branches distinctes.	68
6.5	Un élément quadrangle HM-XFEM comportant une jonction d'interfaces.	68
6.6	4 branches d'interfaces formant une intersection.	69
6.7	Conservation de la masse pour le fluide au niveau d'une jonction d'interfaces.	70
6.8	Continuité de la pression de fluide dans chaque branche au niveau d'une jonction d'interfaces.	70
6.9	Géométrie et chargement pour le test de compression d'un barreau traversé par deux interfaces connectées.	71

6.10 Déplacement horizontal (à gauche) et vertical (à droite) pour le test de compression d'un barreau traversé par deux interfaces connectées.	72
6.11 Géométrie et chargement pour le test de compression sélective en présence d'une intersection d'interfaces.	73
6.12 Déformée amplifiée (X5000) et déplacement horizontal (à gauche), déformée amplifiée (X5000) et déplacement vertical (au milieu) et pression de contact (à droite) pour le test de compression sélective en présence d'une intersection d'interfaces.	73
6.13 Géométrie et chargement pour les deux premiers tests de simulation d'écoulement en présence d'une jonction d'interfaces.	74
6.14 Déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa pour le premier (à gauche) et le deuxième (à droite) test d'écoulement en présence d'une jonction d'interfaces.	74
6.15 Couplage hydrodynamique entre les branches d'interface et la matrice solide poreuse au niveau d'une jonction.	75
6.16 Déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa pour le deuxième test d'écoulement en présence d'une jonction d'interfaces dans le cas où la condition d'égalité sur les champs p_f au niveau de la jonction n'est pas imposée.	76
6.17 Troisième test de simulation d'écoulement en présence d'une jonction d'interfaces: géométrie et chargement (à gauche), déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa (à droite).	76
6.18 Quatrième test de simulation d'écoulement en présence d'une jonction d'interfaces: géométrie et chargement (à gauche), déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa (à droite).	77
6.19 Géométrie et chargement pour l'exercice de simulation de tenue de couverture.	78
6.20 Exercice de simulation de tenue de couverture: déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa pour le cas de référence (à gauche) et le cas d'étude (à droite).	78
6.21 Géométrie et chargement pour les tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing".	79
6.22 Etat de départ pour les tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing".	80
6.23 Déformée amplifiée (X150) et pression de pore en Pa pour les tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing" avec $L = 60m$	81
6.24 Pression de fluide à l'embouchure d'une fracture verticale au cours de sa propagation (en Pa).	82
6.25 Déformée amplifiée (X150) et pression de pore en Pa pour les tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing" avec $L = 120m$	82
6.26 Déformée amplifiée (X150) et pression de pore en Pa pour la dernière série de tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing".	83
6.27 Une interface secondaire branchée en ses deux extrémités sur des interfaces horizontales.	86
C.1 Définition du problème.	171

Chapitre 1

Introduction et contexte

L'objet de la thèse est la modélisation d'un réseau de fractures hydrauliques tridimensionnel au sein d'une formation rocheuse poreuse (voir Figure 1.1). En particulier on devra s'intéresser à la propagation de fractures naturelles sous sollicitations hydrauliques. Outre l'ingénierie pétrolière, la réalisation d'un tel modèle répond à des besoins industriels variés. Les sous-sols sont en effet de plus en plus exploités, pour en extraire des matières premières mais également, et de manière croissante, comme espace de stockage. Or la présence dans les sous sols de failles, de fissures naturelles ou artificielles, dans lesquelles circulent des fluides, posent deux défis majeurs en termes de modélisation.

Le premier est la simulation hydromécanique du massif poreux fracturé, c'est à dire le traitement du couplage hydromécanique entre la matrice solide poreuse fissurée et l'écoulement présent en son sein. En particulier, on cherche à observer:

- le couplage hydromécanique dans la matrice poreuse,
- l'écoulement de fluide dans les fractures,
- les échanges de fluide entre la matrice poreuse et les fractures,
- les échanges de fluide entre fractures connectées,
- la modification des propriétés hydromécaniques du milieu liée à la présence des fractures,
- l'effet des contraintes "régionales" sur le réseau de fractures.

Le deuxième défi est la simulation de l'évolution des différentes fractures hydrauliques. On souhaite pouvoir:

- anticiper l'éventuelle refermeture sur elles-mêmes des fractures,
- simuler l'extension des fractures hydrauliques et leur éventuelle bifurcation en fonction des contraintes locales,
- observer la compétition qui existe entre fractures hydrauliques voisines.

1.1 Applications

Dans le contexte pétrolier, on peut noter l'importance des fractures présentes dans les systèmes pétroliers constitués entre autres de la roche mère, des réservoirs et des couvertures (voir Figure 1.2). La roche mère, contient la matière organique qui est à l'origine des hydrocarbures présents dans le sous-sol. Les réservoirs sont composés de roches poreuses et constituent un réceptacle pour les hydrocarbures issus de la roche mère. Enfin, les couvertures, souvent composées d'argiles étanches, permettent d'imperméabiliser les réservoirs. On distingue alors les hydrocarbures conventionnels des hydrocarbures non conventionnels. Les hydrocarbures conventionnels ont effectué une migration depuis la roche mère vers le réservoir tandis que les hydrocarbures non conventionnels sont encore présents dans la roche mère. La présence de fractures dans la roche mère ou le réservoir facilite la récupération des hydrocarbures dans la mesure où ces dernières constituent un chemin préférentiel pour l'écoulement des fluides. En revanche, la présence de fractures dans les roches de couvertures représente une menace pour l'intégrité du réservoir.

Sur la Figure 1.3 est résumé le procédé de stimulation hydraulique, utilisé dans le cadre de la récupération d'hydrocarbures conventionnels pour les réservoirs à faible perméabilité mais aussi dans le cadre de la récupération d'hydrocarbures non conventionnels dans les roches mères, dont la perméabilité est généralement très faible. Un puits horizontal est foré dans la roche. Puis une grande quantité de

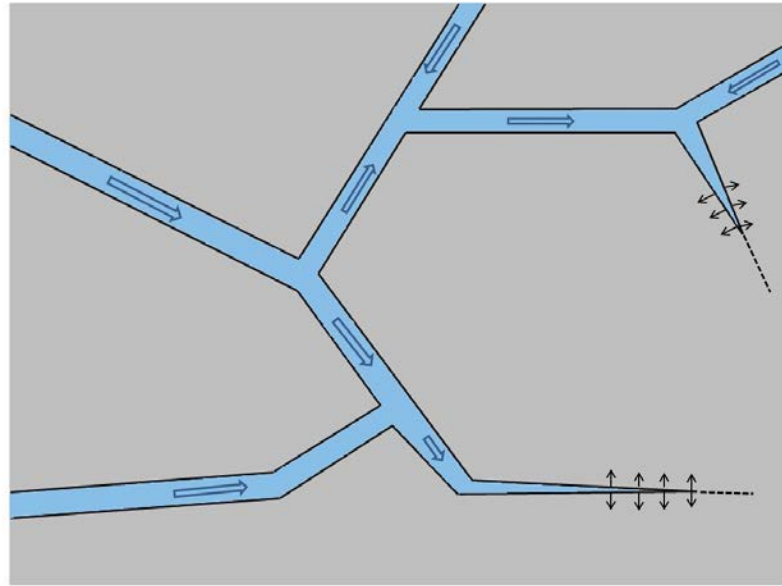


Figure 1.1 – Un réseau de fractures au sein d’une roche poreuse.

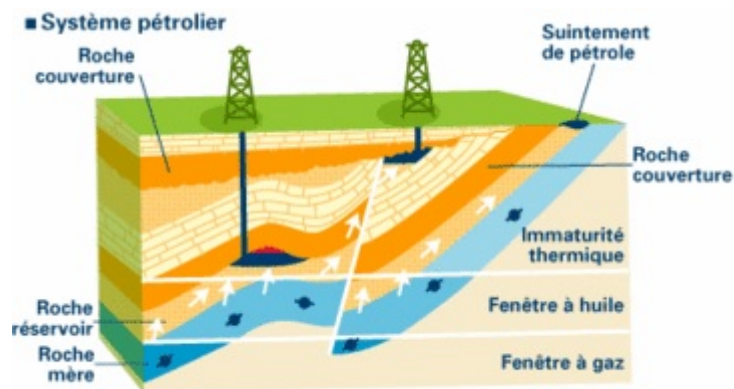


Figure 1.2 – Un système pétrolier classique (source: IFPEN).

fluide est injectée sous haute pression dans le puits, dans le but de créer un réseau de fractures dense et étendu, à partir de fractures naturelles présentes au voisinage du puits ou de fractures préalablement initiées. Enfin, on draine le fluide de fracturation. Le réseau de fractures généré dans la roche mère ou le réservoir augmente fortement la perméabilité de celui-ci, facilitant ainsi le transport des hydrocarbures qu’il contient. L’exploitation peut alors commencer.

Le fluide de fracturation doit remplir deux conditions antagonistes. D’une part, sa viscosité doit être la plus faible possible, pour éviter les pertes de charge, et d’autre part, sa viscosité doit être suffisante pour entraîner avec lui du sable dans les fractures générées. Le sable va permettre le soutènement du réseau de fractures. Il empêche que les fractures générées ne se referment sur elles-mêmes. En effet, plus les fractures sont ouvertes plus leur conductivité est importante. Les industriels pétroliers utilisent donc des additifs chimiques pour ajuster la viscosité du fluide de fracturation. D’autres agents chimiques sont ajoutés au fluide de fracturation, dont certains ont pour but de faciliter la désorption des hydrocarbures de la matrice poreuse.

Afin d’optimiser l’efficacité de ce procédé, il est nécessaire de créer un réseau de fractures dense (afin de maximiser la perméabilité du réservoir) et étendu (pour rendre économiquement exploitable la plus grande zone possible). L’enjeu est alors de déterminer comment effectuer la meilleure stimulation hydraulique du réservoir [8]. Quel débit utiliser? Comment positionner le puits? Dans quelle direction

et avec quelle périodicité spatiale initier les fractures [9], [10]? Comment interagissent les fractures naturelles et les fractures générées lors de la mise sous pression? Le développement d'un outil numérique qui simule le couplage hydromécanique au sein d'un réseau de fractures hydrauliques apporterait des éléments de réponse pour optimiser l'efficacité de ce procédé.

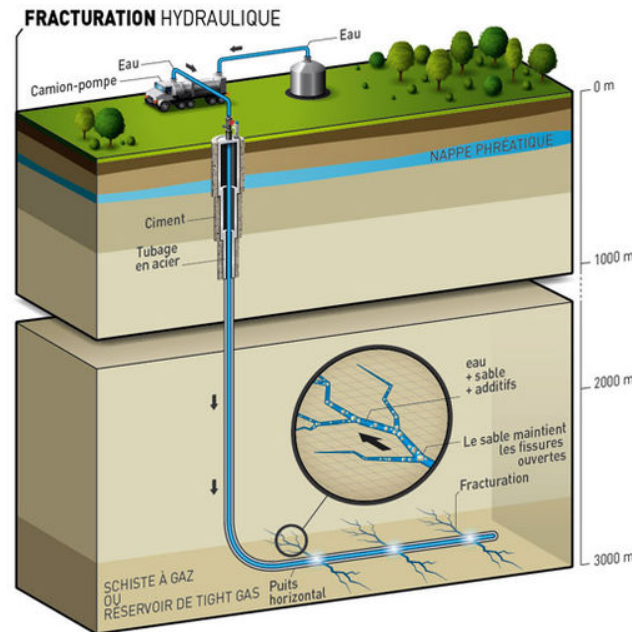


Figure 1.3 – Procédé de fracturation hydraulique des roches mères (source: TOTAL).

Le problème est similaire dans le domaine de l'exploitation de l'énergie géothermique. Sur la Figure 1.4, le principe de fonctionnement d'un "Enhanced Geothermal System" (EGS) est illustré. De l'eau froide est injectée depuis la surface dans le sous-sol à des profondeurs pouvant atteindre plusieurs kilomètres. Cette eau circule alors dans des réseaux de fractures au contact de roches chaudes. Une fois le transfert thermique réalisé, l'eau chaude remonte à la surface pour alimenter une unité de production d'électricité. Afin de s'assurer d'un bon transfert thermique et de dimensionner le procédé, il est important d'anticiper les caractéristiques de l'écoulement du fluide caloporteur au sein du réseau de fractures. Aussi, on a parfois recours à des techniques de stimulation hydrauliques pour augmenter l'efficacité des procédés géothermiques [11]. Il est alors nécessaire de prévoir l'étendue des fissures que l'on active et que l'on génère. Des fractures trop importantes pourraient se propager vers des couches anhydres et les hydrater, modifiant ainsi la composition et l'équilibre du sous-sol.

A l'inverse, il existe des applications pour lesquelles l'extension de réseaux de fractures dans le milieu géologique représente une menace. En effet, lors de l'exploitation d'un réservoir ou lors de son reclassement comme site d'enfouissement de CO_2 , il est essentiel de garantir l'imperméabilité de la roche de couverture. Le procédé d'enfouissement de CO_2 dans un réservoir en fin d'exploitation est représenté sur la Figure 1.5. Le CO_2 est injecté dans le réservoir, au dessus duquel se situe les roches couvertures qui assurent l'étanchéité du réservoir. Différents puits peuvent être disposés autour du réservoir, pour repérer la présence éventuelle de fuites. En effet, suivant la contrainte "régionale" qui règne, la direction des fractures initialement présentes dans le réservoir et les interactions entre celles-ci, des fractures soumises à une pression hydraulique interne seront amenées ou non à se propager dans le réservoir. Lorsque ces fractures atteignent la roche couverture, en fonction des propriétés matériau du réservoir et de la roche couverture [12] [13], on peut assister à une perte d'étanchéité du réservoir. C'est un phénomène que l'on doit absolument éviter pour exploiter efficacement un réservoir conventionnel ou pour effectuer des stockages géologiques dans un réservoir sans risques de fuite. Dans le cas du stockage de CO_2 , il est aussi nécessaire d'anticiper la réactivation de failles ou de fractures préexistantes par le gaz sous pression. Ce risque est d'autant plus important que la présence de CO_2 sous pression dans des cavités rocheuses induit généralement une dilatation des pores [14] et peut altérer les propriétés physico-chimiques de la roche environnante [15], augmentant ainsi le risque de propagation de fractures. Pour les stockages géologiques de déchets radioactifs, le risque de dissémination est encore plus prégnant. L'excavation des alvéoles de confinement modifie non seulement l'état de contrainte *in situ* mais induit également la formation de

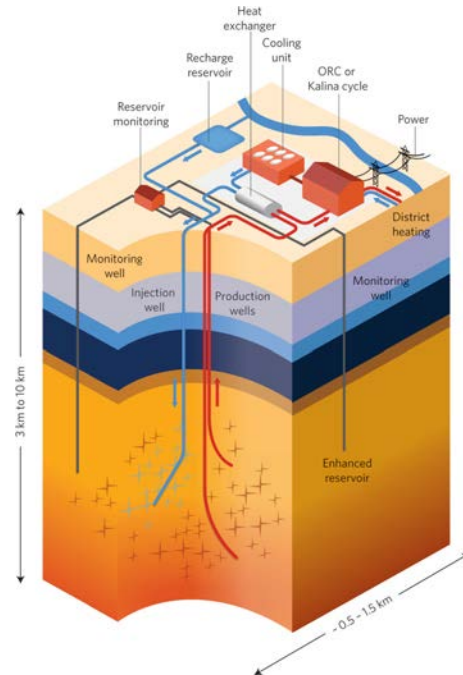


Figure 1.4 – Fonctionnement d'un "Enhanced Geothermal System" (source: Nature).

fractures autour de la zone excavée. Ce phénomène est accentué par les effets du couplage thermo-hydro-mécanique induit par la présence des déchets nucléaires [16]. La circulation de fluide dans ces réseaux de fractures facilite la migration et la dispersion des radionucléides [17]. La libération de polluants est alors susceptible d'avoir lieu dans une zone restreinte autour des fractures ou même à l'échelle de la formation géologique.

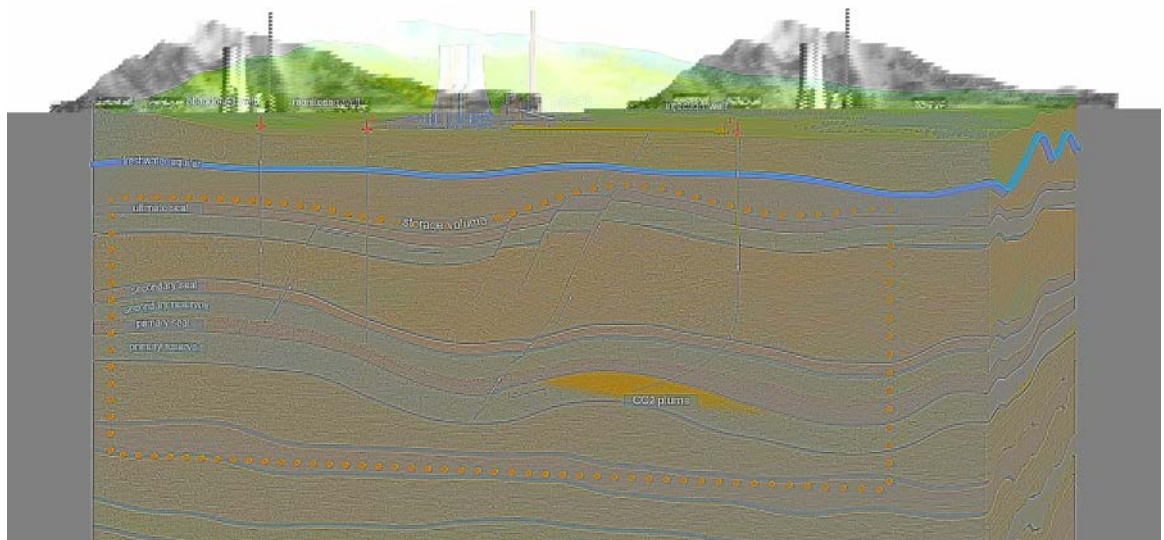


Figure 1.5 – Stockage de CO_2 dans un réservoir en fin d'exploitation (source: DNV GL).

Enfin, les failles et les fractures jouent un rôle essentiel dans le processus de minéralisation des milieux géologiques et donc dans la formation de gisements métallifères (voir [18]). Le fluide minéralisant circule de manière préférentielle dans ces ouvertures, conduisant ainsi à une minéralisation importante au niveau des lèvres de fracture. La circulation du fluide conduit également à la réactivation de fractures

préexistantes, voire à la création de nouvelles fractures (voir [19]). Si la minéralisation au niveau des lèvres de fractures est importante, les dépôts peuvent entraîner le colmatage des fractures, perturbant ainsi le comportement hydraulique du réseau de fractures. La meilleure compréhension de l'écoulement du fluide au sein du réseau de fractures et de la matrice poreuse permettrait d'aider la prédiction de la localisation des dépôts nickélifères.

Il est donc essentiel d'appréhender et de modéliser le comportement des formations rocheuses poreuses qui présentent des fractures, tant pour extraire des ressources naturelles de nos sous-sols que pour envisager des stockages géologiques. On cherche donc à mettre au point un outil numérique qui nous permette à la fois de simuler l'augmentation de la perméabilité d'un réservoir par des techniques de stimulation hydrauliques (extension d'un réseau de fractures) et de contrôler la stabilité des fractures présentes dans un réservoir (tenue de couverture). Nous nous limiterons aux modélisations de réservoir.

1.2 Géométries complexes et maillages

Actuellement, à l'*IFPEN*, la simulation d'écoulements dans les réservoirs fracturés est effectuée avec des logiciels de calcul aux volumes finis. On a alors recours à des techniques d'homogénéisation. Les fractures sont prises en compte dans les mailles réservoirs mais non discrétisées. Chacune d'entre elles contribue à la perméabilité de la maille réservoir suivant sa direction et sa taille. On parle alors de perméabilité équivalente. De telles modélisations sont réalisées par le logiciel *PumaFlow*®. Les informations sur la densité de fracture au niveau d'une maille réservoir, sur leurs directions et leurs importances sont recueillies par les géophysiciens grâce à des techniques d'inversion sismique ou bien directement à partir des images issues du puits. Le logiciel *FracFlow*® permet quant à lui de modéliser de manière discrète les fractures naturelles d'un réservoir. Ces fractures constituent un chemin d'écoulement préférentiel pour l'écoulement du fluide par rapport à la matrice poreuse environnante qui présente une perméabilité beaucoup moins élevée. On modélise ainsi un écoulement à deux vitesses avec en premier lieu l'écoulement du fluide dans les fractures et en deuxième lieu l'écoulement du fluide qui provient de la matrice solide poreuse. Mais ces modélisations ne comportent aucune composante mécanique.

Pour la simulation des procédés de stimulation hydraulique, les équipes de l'*IFPEN* ont développé le logiciel *TightFlow*® qui est capable de modéliser des réseaux de fractures très denses et leur extension (voir Figure 1.6). Mais là encore ce sont des modélisations hydrodynamiques qui n'intègrent l'aspect mécanique du problème de la propagation d'un réseau de fractures que de manière simplifiée.

Les simulations de bassin sont effectuées avec des calculs aux volumes finis pour la partie écoulement (maturation et migration des hydrocarbures) puis enrichis par des calculs aux éléments finis pour prendre en compte le couplage mécanique. Il est alors nécessaire de disposer de maillages qui satisfont à la fois les exigences de la simulation de l'écoulement et les exigences de la simulation mécanique; notamment la nécessité d'être conformes aux discontinuités (voir Figure 1.7). Le maillage des zones de jonction de failles se heurte alors à des difficultés majeures.

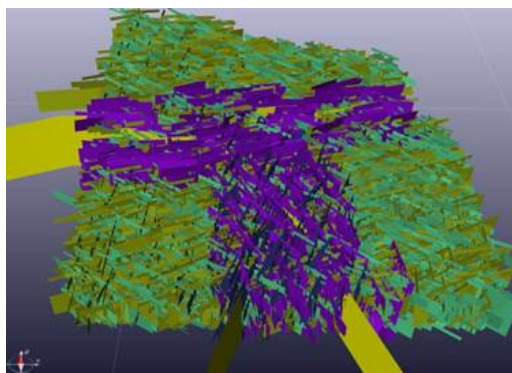


Figure 1.6 – Microfissures dans un réservoir (*IFPEN*).

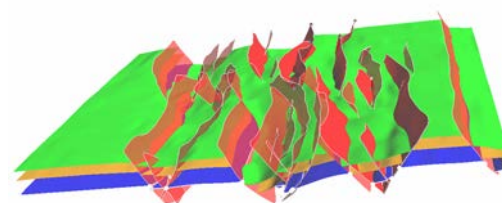


Figure 1.7 – Horizons et failles dans un bassin (*IFPEN*).

Sur les Figures 1.8 à 1.10, on observe le détail du maillage d'une zone de jonction de failles pour un modèle 3D. Les éléments générés par le mailleur sont conformes à la jonction de failles mais ils sont pour certains très allongés et de tailles très variables. Ce mauvais rapport d'aspect des mailles au niveau de la jonction de failles augure d'importants problèmes de conditionnement lors de la résolution numérique. Il arrive même que les générateurs de maillage échouent tout simplement à produire des

maillages conformes au niveau des jonctions de failles 3D pour les modèles géologiques complexes utilisés à l'*IFPEN*.

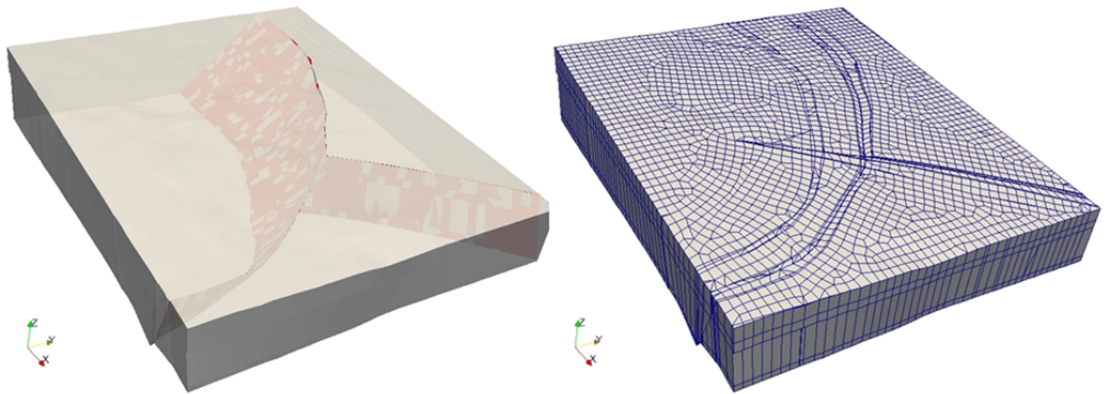


Figure 1.8 – Maillage 3D d’une jonction de failles (*IFPEN*).

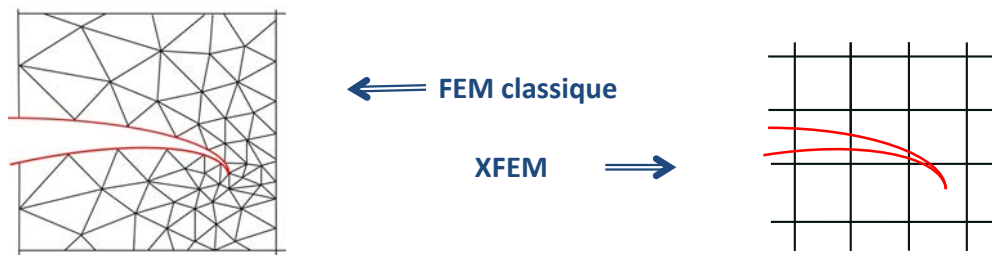


Figure 1.11 – Maillage d’un domaine fissuré avec FEM (à gauche) et XFEM (à droite).

La méthode XFEM est déjà utilisée à l'*IFPEN* pour les modélisations de bassin. Elle permet notamment de prendre en compte la présence de failles au sein de modèles 3D. Cette fonctionnalité a été développée dans le cadre d’une thèse effectuée en partenariat avec EDF R&D [1] (voir Figure 1.12).

Dans le cadre de mes travaux, pour simuler un couplage hydromécanique total et lever la difficulté posée par la présence de fractures, nous avons choisi de créer des éléments finis couplés HM-XFEM

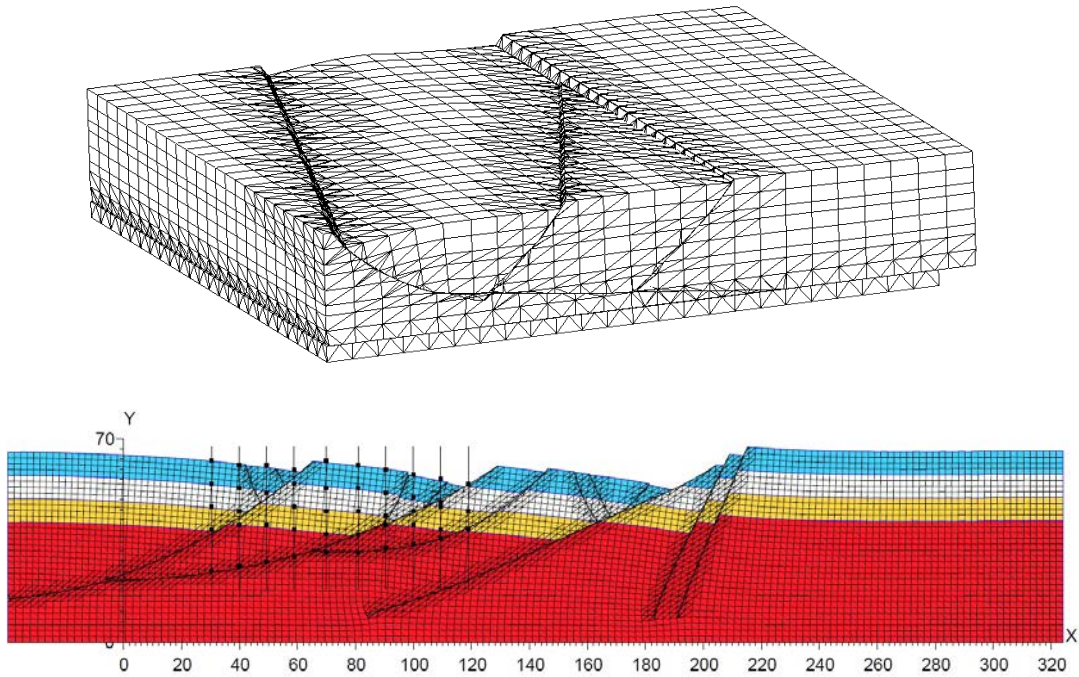


Figure 1.12 – Glissement suivant des failles dans un graben (Siavelis [1]).

(Hydro-Mécanique couplée avec *the eXtended Finite Element Method*).

1.3 Cadre de la thèse

La propagation de fractures sous chargement hydraulique est un problème récurrent en mécanique des roches car la présence de fractures affecte les propriétés hydromécaniques des formations rocheuses. C'est un problème non linéaire, non local et qui dépend de l'histoire du chargement, ce qui le rend très complexe à formuler et à résoudre. Il a également la particularité d'être fortement couplé. Il faut prendre en compte à la fois :

- la déformation mécanique de la matrice solide poreuse,
- les échanges de matière au sein de la matrice poreuse et entre la matrice poreuse et les fractures,
- l'écoulement préférentiel du fluide dans le réseau de fractures,
- l'éventuelle refermeture ou propagation des fractures.

Dans le cadre de cette thèse, on effectue les hypothèses suivantes, qui contribuent à simplifier la modélisation.

- la matrice solide est supposée isotrope et élastique,
- on se place dans l'hypothèse des petites transformations, c'est à dire que les transformations géométriques subies par la matrice solide sont supposées faibles devant la taille du domaine. De cette manière, les déformations occasionnées restent suffisamment petites pour que l'hypothèse du comportement élastique de la matrice solide reste légitime,
- les fissures sont initialement présentes, on ne traite pas la nucléation des fissures mais uniquement leur propagation.
- on se place dans le cadre de la mécanique de la rupture linéaire pour les matériaux fragiles,
- la matrice solide est saturée par une seule phase liquide,
- l'ensemble des pores de la matrice solide sont connectés.

Précisons également que nous n'incluons que quelques fractures dans nos modélisations. La prise en compte d'une discontinuité dans le modèle avec XFEM s'associe en effet à une augmentation notable

du nombre de degrés de liberté du problème (pour les champs associés à la fracture) et comme nous le verrons dans la Section 2.5, les éléments XFEM que nous utilisons ne peuvent être intersectés que par 2 ou 3 fractures au plus. Il s'agit donc de simuler le comportement des fractures principales au sein d'un réservoir. On peut ensuite envisager un couplage avec les logiciels de simulation de réservoir développés par l'IFPEN pour prendre en compte la contribution hydrodynamique de multiples fractures secondaires autour des fractures principales.

Le développement de ces éléments hydromécaniques traversés par d'éventuelles discontinuités sera effectué dans *Code_Aster*. Le *Code_Aster* est un code de calcul aux éléments finis développé par EDF R&D. Il est libre et très bien documenté (<http://www.code-aster.org>). Par ailleurs il existe un partenariat entre l'IFPEN et EDF R&D pour l'utilisation et le développement de fonctionnalités avancées dans *Code_Aster*, utilisées par exemple dans l'outil de restauration de bassin développé par l'IFPEN *Kine3D-3*©, ou pour les prototypes de codes de calcul HM couplés pour les modèles de bassin. La méthode des éléments finis étendue est développée depuis 2003 dans *Code_Aster* [20]. Des éléments Thermo-Hydro-Mécaniques (THM) [21], [22] et des éléments de joint hydraulique [23] ont également été développés dans *Code_Aster*. On s'appuiera sur ces éléments pour développer des éléments couplés HM-XFEM. Notons que les éléments de joint hydraulique disponibles dans *Code_Aster* sont limités aux modélisations surfaciques de propagation de fractures hydrauliques sur des trajets connus et dont la géométrie est simple. Nos éléments peuvent simuler l'évolution d'un réseau de fractures tridimensionnel sous sollicitations hydromécaniques avec des trajets de fissuration quelconques et non connus *a priori*. Pour cela, on s'appuie sur les dernières avancées en matière de méthode des éléments finis étendue et en particulier sur les travaux de 3 anciens doctorants dont les développements sont disponibles dans *Code_Aster*. Les éléments hydromécaniques disponibles dans *Code_Aster* sont dits "à interpolation mixte", i.e. interpolation quadratique du champ des déplacements et interpolation linéaire des champs associés aux phases fluides. Comme mentionné dans [24] et démontré par Ern et al. [25], cette interpolation mixte est nécessaire afin de réduire les oscillations de la solution numérique. Il s'agira donc dans le cadre XFEM de considérer l'interpolation quadratique des champs de *level set*, interpolés avec le même ordre que le champ des déplacements. En outre, les éléments XFEM quadratiques rencontrent d'importants problèmes de conditionnement, en particulier en 3D. La formulation introduite récemment par Ndeffo [26] permet de pallier ces problèmes en assurant un conditionnement satisfaisant pour les éléments XFEM 3D quadratiques. La possibilité d'introduire des jonctions de fissures dans les modèles XFEM a été apportée avec les travaux de Siavelis [1]. Il s'agira dans le cadre de ma thèse d'étendre ces développements aux modélisations quadratiques. Enfin, Ferté [7] a proposé une méthode originale pour la propagation de fractures cohésives tridimensionnelles dans le cadre de la méthode XFEM. Nous nous appuierons sur ces travaux pour permettre la propagation de fractures hydrauliques avec des trajets inconnus.

Le développement des éléments HM-XFEM a été effectué en étroite collaboration avec Maxime Faivre (Thèse LABEX RESSOURCES21 2012-2016 "Modélisation du comportement hydrogéomécanique d'un réseau de failles sous l'effet des variations de l'état de contrainte"). Les travaux de Faivre, dont le but est l'étude de la dispersion de métaux rares dans le milieu géologique, sont limités à la propagation de fractures sur des chemins prédéfinis dans le cadre d'études 2D car il s'agit essentiellement de la réactivation de fractures préexistantes. C'est cette partie des développements numériques qui a été effectuée en collaboration et qui a donné lieu à une publication scientifique (voir Annexe B). Dans le cadre de ma thèse, j'ai introduit la possibilité de faire des études 3D avec des surfaces de fissure quelconques, d'avoir des jonctions de fissures et de propager les fractures hydrauliques sur des trajets inconnus. Le modèle que nous avons développé est complexe et les développements informatiques associés sont lourds. L'intégralité de ces développements a été restituée dans le code industriel d'EDF R&D *Code_Aster*. A cette fin, nous avons dû produire des développements rigoureux et suivre la procédure qualité imposée. Pour faciliter le développement et la restitution de nos travaux, nous avons effectué les développements de manière séquentielle, étape par étape. Et à chaque étape, nous avons mis en place des validations intermédiaires du modèle.

Le manuscrit s'articule autour de 6 chapitres. Le deuxième chapitre est consacré à la méthode des éléments finis étendue (XFEM). Après avoir présenté cette méthode, on propose une technique d'intégration quadratique pour les modèles tridimensionnels comportant des fissures courbes et des interfaces branchées. Plusieurs analyses de convergence viennent démontrer la précision de cette technique. Dans le chapitre 3, nous présentons un modèle hydromécanique couplé avec XFEM (inspiré des travaux de Carrier et al. [24]) capable de modéliser la propagation de fractures hydrauliques sur des trajets prédéfinis au moyen d'un modèle de zone cohésive. En particulier, on retrouve les résultats prévus par la solution analytique asymptotique KGD [27]. Dans le chapitre suivant, on introduit une nouvelle formulation de type "Mortier" pour le modèle de zone cohésive (inspirée des travaux de Ferté [2]), facilitant la mise en place d'une procédure de propagation des fractures hydrauliques sur trajets inconnus. Dans le chapitre 5, nous détaillons cette procédure de propagation sur trajets inconnus. Puis divers exemples de

réorientation de fractures hydrauliques et de compétition entre fractures voisines sont étudiés. Enfin, le chapitre 6 porte sur l'extension de notre modèle aux jonctions de fissures. Différents exemples viennent illustrer les possibilités d'application alors permises.

Chapitre 2

La méthode des éléments finis étendue

Dans ce chapitre, on présente la méthode XFEM (eXtended Finite Element Method), qui s'appuie généralement sur un formalisme de *level set*. En particulier, on détaille l'extension de cette méthode pour la modélisation de réseaux de fissures (prise en compte des jonctions de discontinuités). Enfin, une technique d'intégration quadratique pour les modèles 3D dans le cadre de la méthode XFEM est proposée. Plusieurs analyses de convergence attestent de la robustesse et de la précision de cette procédure qui a fait l'objet d'une publication (voir Annexe A).

2.1 Introduction

La méthode des éléments finis étendue (XFEM) est une méthode numérique récente introduite par Moës, Dolbow et Belytschko dans [28]. Basée sur la partition de l'unité [29], cette extension de la méthode des éléments finis classique permet la prise en compte de fissures ou d'interfaces via l'introduction locale de degrés de liberté additionnels associés à des fonctions de forme discontinues. On s'affranchit alors de la difficulté de produire un maillage conforme aux discontinuités (des fissures dans notre cas) et de la nécessité de remailler le domaine en cas d'évolution de la discontinuité (propagation de fissure). C'est une méthode très performante mais qui pose certains problèmes de stabilité, décrits en [30], et de conditionnement [31]. Des alternatives existent: on peut citer par exemple les méthodes sans maillage [32] comme la *Discrete Element Method* (DEM) ou la *Boundary Element Method* (BEM). La méthode DEM [33] est basée sur une discrétisation nodale sans connectivité. L'initiation et la propagation des fractures sont prises en compte par la rupture des liens entre les noeuds assimilés à des particules. Cette méthode sera particulièrement adaptée pour décrire certains mécanismes d'interaction au sein des structures granulaires. Cependant, l'absence de support pour discrétiser les bords du domaine rend difficile l'imposition de conditions aux limites de type Dirichlet [34]. Dans le cadre de la méthode BEM, seules les frontières du domaine et la surface de la fracture seront discrétisées [35], facilitant ainsi le processus de remaillage en cas de propagation de la fracture. Toujours dans le but de s'affranchir de mailler les discontinuités, des méthodes à discontinuités internes [36], [37] ont été proposées. Les discontinuités sont alors représentées par des degrés de liberté internes condensés sur les degrés de liberté nodaux. Cependant, ces méthodes sont très coûteuses en temps de calcul et manquent parfois de robustesse. C'est pourquoi les méthodes basées sur la partition de l'unité comme XFEM ou GFEM (Generalized Finite Element Method [38]) sont préférées pour les applications industrielles. Elles permettent en particulier de découpler la cinématique de part et d'autre de la discontinuité, facilitant ainsi les techniques d'intégration numérique. La méthode XFEM est utilisée à des fins très variées: propagation de fracture 3D [39], interfaces entre matériaux différents [40], branchement de fractures [41], failles dans les bassins sédimentaires [1].

2.2 Une méthode dite de *level set*

La méthode des fonctions de niveau [42], [43] a été introduite dans le cadre de la mécanique des fluides pour représenter l'évolution d'interfaces (des bulles de gaz dans un liquide par exemple). L'idée consiste à considérer l'interface comme l'iso-zéro d'une fonction distance.

On considère un domaine Ω qui comporte une fissure Γ . Au sein du maillage, on souhaite pouvoir identifier cette interface comme le lieu des points $\mathbf{x}$ tels que $\psi(\mathbf{x}, t) = 0$. Pour cela, on a recours à un jeu de fonctions distances ou *level set*. La première, appelée *level set normale* (lsn), donne la distance signée dans la direction normale à l'interface sans tenir compte du fond de fissure tandis que la deuxième, appelée *level set tangente* (lst), donne la distance signée au front de fissure dans la direction tangentielle. La fissure Γ est alors définie comme étant l'intersection entre la surface $\{\mathbf{x} \in \Omega \text{ tel que } lsn(\mathbf{x}) = 0\}$ et le domaine $\{\mathbf{x} \in \Omega \text{ tel que } lst(\mathbf{x}) < 0\}$ (voir Figure 2.1). Le fond de fissure est l'ensemble des points $\{\mathbf{x} \in \Omega \text{ tel que } lsn(\mathbf{x}) = lst(\mathbf{x}) = 0\}$. Ces fonctions de niveau permettent de localiser la fissure sans la mailler. Et lorsque la fissure se propage, il suffit de faire évoluer ces fonctions de niveau (voir paragraphe 2.2.2).

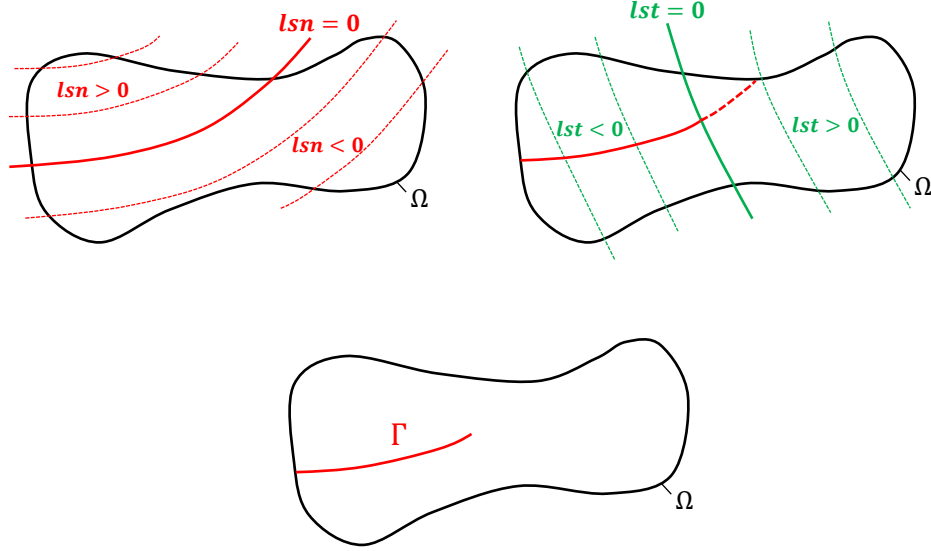


Figure 2.1 – Level set normale (à gauche) et tangente (à droite) et la fissure Γ résultante (en bas).

2.2.1 Propriétés des *level set*

Pour définir implicitement une interface $\Gamma := \{\mathbf{x}, lsn(\mathbf{x}) = 0 \text{ et } lst(\mathbf{x}) \leq 0\}$, il n'est pas nécessaire que les *level set* soient des fonctions distances. Néanmoins, c'est le choix le plus répandu, car cette propriété permet de définir directement une base adaptée au fond de fissure. En effet, si elles sont choisies comme telles, les *level set* vérifient par définition:

$$\begin{cases} \|\nabla(lsn)\| = 1 \\ \|\nabla(lst)\| = 1 \\ \nabla(lsn) \cdot \nabla(lst) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Les vecteurs $\mathbf{n} := \nabla(lsn)$ et $\mathbf{t} := \nabla(lst)$ forment alors une base orthonormée adaptée au fond de fissure (voir Figure 2.2). Et pour tout point $\mathbf{x}$ de Ω , on accède directement aux coordonnées polaires associées avec:

$$\begin{cases} r(\mathbf{x}) = \sqrt{lsn^2 + lst^2} \\ \Theta(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{lsn}{lst}\right) \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans *Code_Aster*, on fait le choix d'interpoler les champs de *level set* au sein du maillage avec les mêmes fonctions de forme que le champ des déplacements. La discontinuité Γ est ainsi approximée uniquement à partir des valeurs nodales des *level set*. Comme expliqué dans l'Annexe A, la fissure discrétisée Γ_h obtenue ne coïncide pas nécessairement avec la fissure initiale Γ . Mais désormais, on parlera abusivement de "level set normale" et "level set tangente" pour désigner les champs de level set discrétisés.

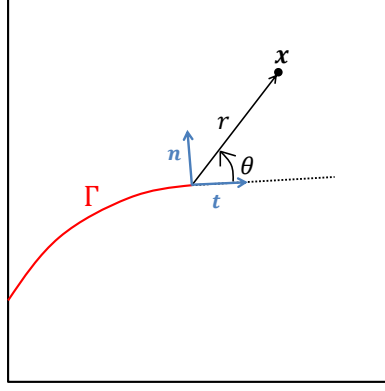


Figure 2.2 – La base polaire en fond de fissure.

2.2.2 Actualisation des *level set*

La propagation d'une fissure se caractérise par l'avancée du front de fissure, repéré implicitement dans le cadre de la méthode XFEM par l'intersection des iso-zéros des *level set*. La propagation d'une fissure s'apparente donc à une mise à jour des champs de *level set*.

Les algorithmes de mise à jour des champs de *level set* se regroupent en deux catégories:

- les méthodes standards de déplacement d'interface,
- les méthodes géométriques.

Les méthodes standards de déplacement d'interface s'appuient sur la résolution d'équations aux dérivées partielles. Il s'agit généralement d'équations de type Hamilton-Jacobi (voir [42]). Etant donnée une interface **A** repérée implicitement par un champ de *level set* normale ϕ_n et un champ de *level set* tangentiel ϕ_t , la procédure suit les étapes suivantes [44]:

- extension de la vitesse de l'interface $\mathbf{V}_\phi = \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}$ à tous les noeuds du maillage,
- mise à jour des champs de *level set* avec l'équation d'Hamilton-Jacobi: $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \mathbf{V}_\phi = 0$ (voir [45]),
- normalisation de la *level set normale*, $\|\phi_n\| = 1$,
- orthogonalisation des *level set*: la *level set normale* étant fixée, on ajuste la *level set tangente* de manière à respecter $\nabla \phi_n \cdot \nabla \phi_t = 0$,
- normalisation de la *level set tangente*, $\|\phi_t\| = 1$.

Les trois dernières étapes visent à conserver la propriété de distance signée pour les champs de *level set*. Elles sont effectuées en résolvant des équations d'Hamilton-Jacobi de la forme $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{sign}(\phi)(\|\nabla \phi\| - 1) = 0$ pour les étapes de normalisation et $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} + \text{sign}(\phi_n) \frac{\nabla \phi_n}{\|\nabla \phi_n\|} \cdot \nabla \phi_t = 0$ pour l'étape d'orthogonalisation. t est un temps fictif qui évolue jusqu'à ce qu'un état stationnaire soit atteint. Lorsqu'il s'agit de la propagation d'une fissure, lors de la deuxième étape, on effectue d'abord la mise à jour de la *level set normale* ϕ_n et celle-ci n'est effectuée que dans le domaine $\{\mathbf{x}, \phi_t(\mathbf{x}) \geq 0\}$. De cette manière, on garde intacte la surface de la fissure précédente. On ne met à jour qu'une surface de fissuration potentielle en amont du fond de fissure.

Afin de résoudre ces équations aux dérivées partielles, les auteurs ont considéré:

- des schémas de différences finies implicites [46], [47], ou bien explicites [48], [44] [49]. Il existe alors une condition de stabilité CFL (Courant, Friedrichs et Lewy) qui oblige à opter pour un petit pas de temps et à effectuer un grand nombre d'itération dès lors que le maillage est non structuré. Ces schémas sont donc plus couramment utilisés sur une grille auxiliaire régulière [50].
- les *fast marching methods* [47], [51] qui consistent à résoudre une équation polynomiale pour chaque noeud, en procédant de proche en proche à partir des noeuds les plus proches de l'interface.

Les méthodes géométriques s'appuient directement sur l'évolution du fond de fissure. La mise à jour des champs de *level set* est alors effectuée de manière explicite à partir de considérations purement géométriques. Aucun schéma d'intégration numérique n'est requis. Cette méthode a été développée aussi bien avec des champs de *level set* scalaires [52], [45] qu'avec des champs de *level set* vectoriels [53].

2.3 Discrétisation spatiale

En FEM classique, l'approximation du champ des déplacements $\mathbf{u}_h$ s'écrit:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \mathbf{a}_i \psi_i(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

Les déplacements $\mathbf{u}_h$ au point $\mathbf{x}$ sont donc interpolés à partir des valeurs nodales $\mathbf{a}_i$ de l'ensemble N des noeuds dont le support contient $\mathbf{x}$ via leurs fonctions de forme associées ψ_i . Les fonctions de forme ψ_i sont en général des polynômes d'interpolation de Lagrange. Dans le cadre de la méthode XFEM, il s'agit de prendre en compte la présence de discontinuités au sein même des éléments. Le champ des déplacements ne peut donc plus être approximé correctement par des fonctions polynomiales. On procède alors à l'enrichissement de la base des fonctions d'interpolation. Dans cette section, nous allons présenter les différents enrichissements adéquats dans le cas d'une interface, d'un branchement d'interfaces et d'un fond de fissure.

2.3.1 Partie Heaviside

Pour représenter le saut de déplacement à travers une interface Γ au sein d'un domaine Ω , on introduit les degrés de liberté $\mathbf{b}_j$ aux noeuds j dont le support est intersecté par l'interface (voir Figure 2.3). Ces degrés de libertés additionnels seront associés à des fonctions de forme discontinues que l'on définit grâce à une fonction Heaviside. La présence de l'interface est repérée implicitement dans le maillage à l'aide d'une *level set normale*. Le signe de cette *level set* permet en particulier de définir deux domaines Ω_+ et Ω_- de part et d'autre de l'interface tels que $\Omega_+ \cup \Omega_- = \Omega$ (voir Figure 2.3). On applique alors la fonction Heaviside directement à la fonction *level set* de manière à ce qu'elle soit discontinue à l'endroit même de l'interface. Dans *Code_Aster*, la fonction Heaviside utilisée pour définir la fonction de forme

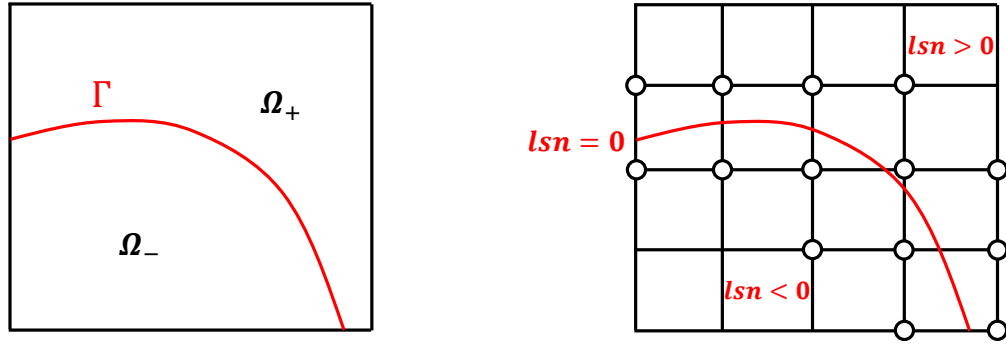


Figure 2.3 – A gauche, les sous domaines complémentaires Ω_+ et Ω_- formés par l'interface arbitraire Γ . A droite, le même domaine maillé, dont les noeuds entourés possèdent l'enrichissement Heaviside.

Cette définition dépend donc de la position du noeud j par rapport à l'interface Γ . Un exemple unidimensionnel est donné sur la Figure 2.4. La quantité $H_j(lsn(\mathbf{x}))$ vaut donc 0 si le point $\mathbf{x}$ et le noeud j se trouvent du même côté de l'interface et ± 2 sinon (le coefficient 2 est introduit pour faciliter l'écriture du saut moyen de déplacement le long de l'interface [20]). Cette formulation "complémentaire" s'inspire des travaux de Hansbo et al. [54]. Initialement, Moës et al. [28] avaient proposé d'utiliser la fonction Heaviside généralisée:

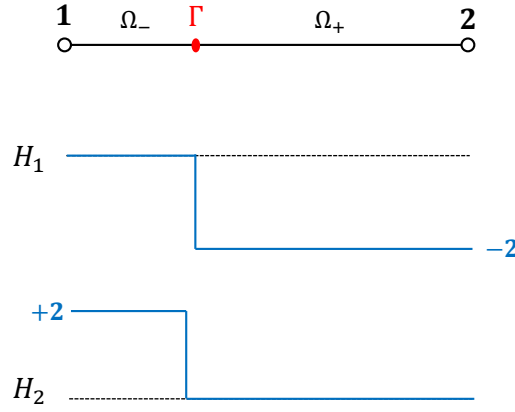


Figure 2.4 – Fonctions Heaviside utilisées dans *Code_Aster* pour les deux noeuds d'un segment coupé par une interface Γ .

$$H(lsn(\mathbf{x})) = \begin{cases} +1 & \text{si } lsn(\mathbf{x}) > 0 \\ -1 & \text{si } lsn(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Cependant, Ndeffo [26] a montré qu'on limite la dégradation du conditionnement de la matrice de rigidité avec la formulation "complémentaire" (Equation 2.4) par rapport à la formulation de Moës et al. (Equation 2.5). Aussi, l'utilisation de la formulation complémentaire permet de s'assurer que l'enrichissement Heaviside ne s'exprime que sur les mailles qui sont effectivement coupées par l'interface et non pas sur les mailles adjacentes qui partagent au moins un noeud avec les mailles coupées par l'interface. On représenté un exemple unidimensionnel sur la Figure 2.5. Le segment du milieu, qui relie les noeuds 2 et 3 est coupé par l'interface Γ . Les noeuds 2 et 3 possèdent l'enrichissement Heaviside. On représente la fonction de forme $H_2\psi_2$ associé au degré de liberté Heaviside du noeud 2 avec la formulation de Moës (en haut) et avec la formulation complémentaire (en bas). Avec la formulation de Moës, la fonction de forme s'étend sur le segment de gauche, adjacent au segment coupé par l'interface. Dans le segment de gauche, on aura alors recours à des techniques de "blending" (voir [55]) pour assurer la transition entre les noeuds enrichis et les noeuds non enrichis. On parle de "blending element". Avec la formulation complémentaire, la fonction de forme n'est non nulle que dans le segment coupé par l'interface (voir Figure 2.5 en bas). On s'affranchit donc des techniques de "blending" (voir [55]) dans les mailles adjacentes aux mailles coupées par l'interface.

L'approximation du champ des déplacements s'écrit finalement:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \mathbf{a}_i \psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in N \cap N_H} \mathbf{b}_j \psi_j(\mathbf{x}) H_j(lsn(\mathbf{x})) \quad (2.6)$$

où N est l'ensemble des noeuds dont le support contient le point $\mathbf{x}$ et N_H l'ensemble des noeuds qui possèdent l'enrichissement Heaviside.

2.3.2 Jonction d'interfaces

Pour simuler la présence de plusieurs interfaces, on utilise plusieurs champs de *level set normals* (voir Figure 2.6 en haut à gauche), et à chaque interface est associé un enrichissement Heaviside. L'approximation du champ des déplacements s'écrit alors:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \mathbf{a}_i \psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\Pi} \sum_{j \in N \cap N_H^n} \mathbf{b}_j^n \psi_j(\mathbf{x}) H_j^n(lsn_n(\mathbf{x})) \quad (2.7)$$

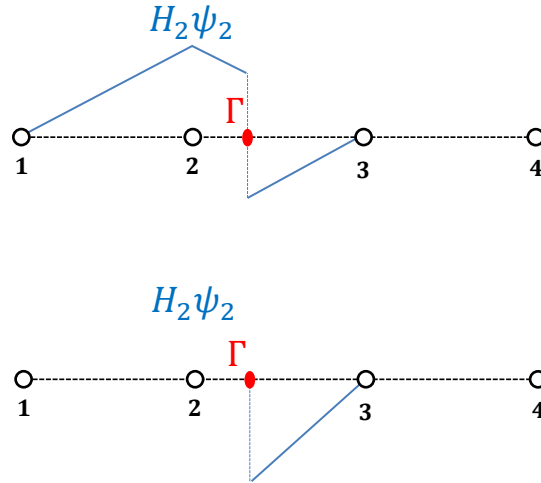


Figure 2.5 – Fonction de forme associé au degré de liberté Heaviside du noeud 2 avec la formulation de Moës (en haut) et avec la formulation complémentaire (en bas)

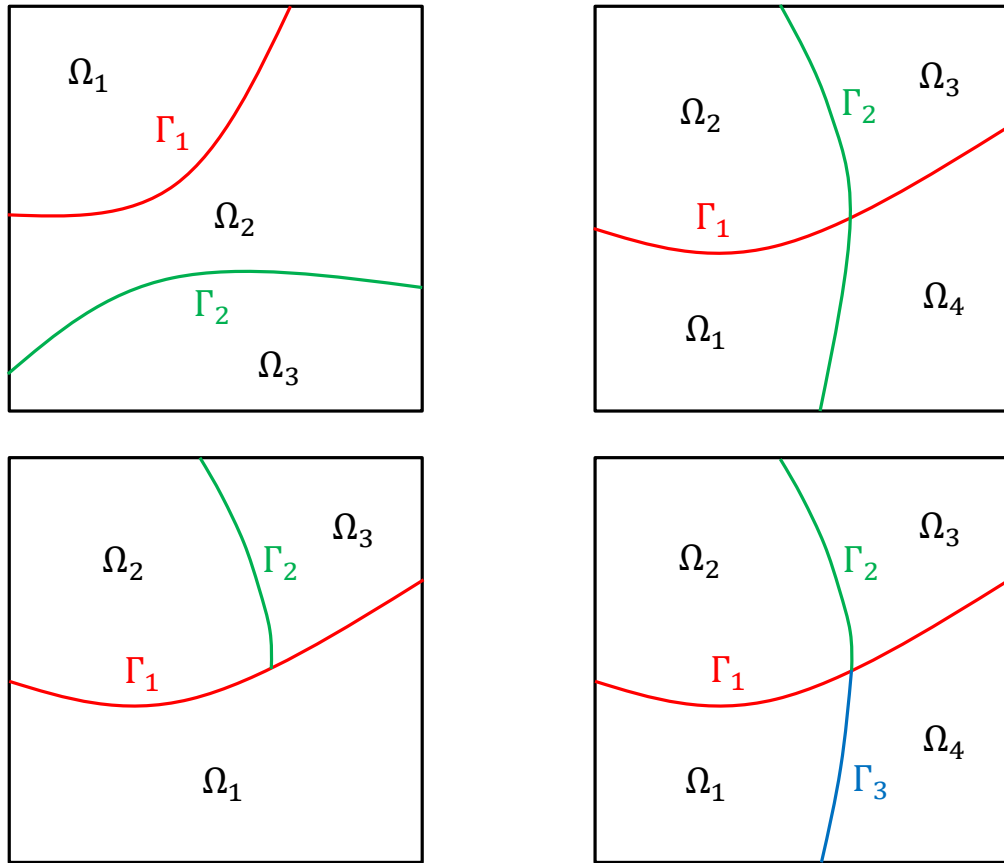


Figure 2.6 – Deux interfaces non connectées (en haut à gauche). Deux interfaces qui se croisent (en haut à droite). Une interface secondaire branchée sur une interface principale (en bas à gauche). Deux interfaces secondaires branchées sur une interface principale (en bas à droite).

où N est l'ensemble des noeuds dont le support contient le point $\mathbf{x}$, N_H^n l'ensemble des noeuds qui possèdent l'enrichissement Heaviside pour l'interface n , $\mathbf{b}_j^n$ les degrés de liberté supplémentaires associés et Π le nombre d'interfaces.

Mais dès lors que ces interfaces sont connectées, il convient de mettre en oeuvre une technique d'enrichissement spécifique. En effet, lorsque deux interfaces traversent le domaine Ω et se croisent (voir Figure 2.6 en haut à droite), le domaine Ω est partitionné en 4 sous domaines Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 et Ω_4 . Or au niveau de l'intersection, la cinématique des 4 blocs est décrite par: le jeu de degrés de liberté classiques et les deux jeux de degrés de liberté Heaviside associés respectivement aux deux interfaces. 4 jeux de degrés de liberté sont pourtant nécessaires pour décrire complètement la cinématique des 4 sous domaines Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 et Ω_4 au niveau de l'intersection (pour chaque nouveau sous domaine, on doit rajouter un jeu de degrés de liberté supplémentaire). On applique donc le choix exposé dans [41] qui consiste à introduire des interfaces secondaires branchées sur des interfaces principales. Sur la Figure 2.6 en bas à gauche, l'interface secondaire Γ_2 est branchée sur l'interface principale Γ_1 dans la partie supérieure du domaine. Au niveau de la jonction, la cinématique des 3 sous domaines Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 est correctement décrite par le jeu de degrés de liberté classique et les deux jeux de degrés de liberté Heaviside associés respectivement à Γ_1 et Γ_2 . Afin de simuler une intersection, on branche deux interfaces secondaires Γ_2 et Γ_3 de part et d'autre de l'interface principale Γ_1 (voir Figure 2.6 en bas à droite). On dispose alors d'autant de jeux de degrés de liberté de déplacement que de sous domaines au niveau de l'intersection. En pratique, afin de définir de quel côté une fissure secondaire se branche sur une fissure principale, l'utilisateur est amené à renseigner un point de référence $\mathbf{x}_{ref}$ situé du côté où il souhaite brancher l'interface secondaire. Sur la Figure 2.7 à gauche, le point $\mathbf{x}_{ref2}$ est situé au dessus de l'interface principale Γ_1 . L'interface secondaire Γ_2 vient donc se brancher au dessus de l'interface Γ_1 . On peut étendre ce procédé de hiérarchisation entre Γ_2 et Γ_3 (voir Figure 2.7 à droite), ce qui peut se brancher sur Γ_2 ou sur Γ_3 (voir Figure 2.7 à droite), ce qui peut se brancher sur Γ_1 .

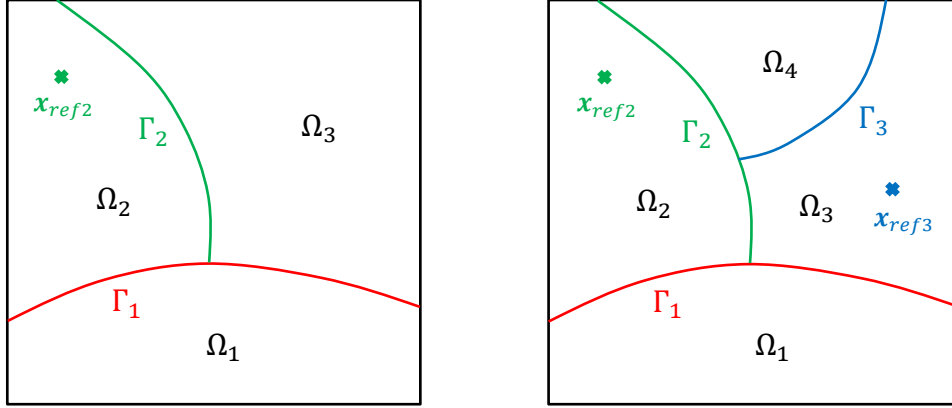


Figure 2.7 – Jonctions d'interfaces.

Cependant, on ne considérera ici que les configurations dans lesquelles les interfaces ne sont branchées que sur une autre interface et pour lesquelles l'ordonnancement entre interfaces principales et secondaires est transitif (voir Figure 2.8). Par exemple, dans la Figure 2.8 à droite, l'interface Γ_3 est branchée sur l'interface Γ_2 qui est elle-même branchée sur l'interface principale Γ_1 . Or Γ_1 est branchée sur Γ_3 . Il est impossible d'ordonner les interfaces, ce cas de figure est donc exclu. Néanmoins, il ne correspond pas à une situation réellement rencontrée en géologie.

En ce qui concerne l'enrichissement du champ des déplacements, on adopte toujours l'enrichissement Heaviside détaillé dans la paragraphe 2.3.1 pour l'interface principale. En revanche, pour l'interface secondaire, il est nécessaire de tronquer cet enrichissement au niveau de la jonction. En effet, l'interface secondaire n'est définie que d'un côté de l'interface principale. On adopte donc l'approche de Daux et al. [41] qui préconise un enrichissement par une fonction jonction notée J^2 pour l'interface branchée Γ_2 . La fonction J^2 correspond à la fonction Heaviside adaptée à l'interface Γ_2 (comme définie au paragraphe précédent 2.3.1) mais elle est tronquée au niveau de la jonction. Elle est prolongée par la valeur 0 du côté où l'interface Γ_2 n'est pas définie:

$$J_j^2(\mathbf{x}) = \begin{cases} H_j^2(\text{lsn}_2(\mathbf{x})) & \text{si } \text{lsn}_1(\mathbf{x}) * \text{lsn}_1(\mathbf{x}_{ref2}) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

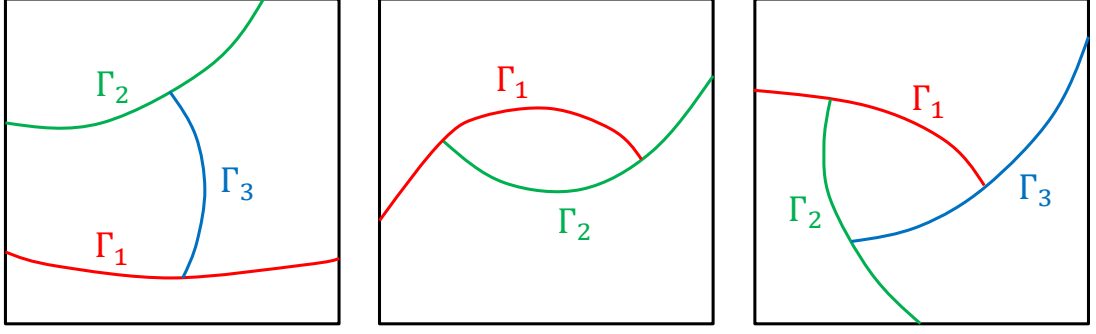


Figure 2.8 – Cas de figure non traités: branchement multiple et relais entre 2 ou trois interfaces.

En pratique, on ne met en oeuvre l'enrichissement jonction que là où c'est nécessaire. Pour une interface secondaire Γ_2 branchée sur une interface principale Γ_1 , seuls les noeuds dont le support contient la jonction seront porteurs de l'enrichissement jonction. Les autres noeuds dont le support est complètement intersecté par l'interface Γ_2 seront porteurs de l'enrichissement Heaviside pour l'interface Γ_2 (voir Figure 2.9). L'approximation du champ des déplacements pour une jonction simple s'écrit donc:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \mathbf{a}_i \psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in N \cap N_H^1} \mathbf{b}_j^1 \psi_j(\mathbf{x}) H_j^1(lsn_1(\mathbf{x})) + \sum_{k \in N \cap J_{2 \rightarrow 1}} \mathbf{b}_k^2 \psi_k(\mathbf{x}) J_k^2(lsn_2(\mathbf{x})) + \sum_{j \in N \cap N_H^2} \mathbf{b}_j^2 \psi_j(\mathbf{x}) H_j^2(lsn_2(\mathbf{x})) \quad (2.9)$$

avec N_H^1 les noeuds dont le support est complètement coupé par Γ_1 , N_H^2 les noeuds dont le support est complètement coupé par Γ_2 et $J_{2 \rightarrow 1}$ les noeuds dont le support contient la jonction de Γ_2 sur Γ_1 .

Pareillement, si une troisième interface est branchée sur l'interface principale Γ_1 , la fonction jonction J^3 associée sera définie de la manière suivante:

$$J_j^3(\mathbf{x}) = \begin{cases} H_j^3(lsn_3(\mathbf{x})) & \text{si } lsn_1(\mathbf{x}) * lsn_1(\mathbf{x}_{ref3}) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.10)$$

En revanche, si une troisième interface Γ_3 est branchée sur l'interface Γ_2 elle-même branchée sur l'interface principale Γ_1 , la fonction jonction J^3 associée sera définie de la manière suivante:

$$J_j^3(\mathbf{x}) = \begin{cases} H_j^3(lsn_3(\mathbf{x})) & \text{si } lsn_1(\mathbf{x}) * lsn_1(\mathbf{x}_{ref3}) \geq 0 \text{ et } lsn_2(\mathbf{x}) * lsn_2(\mathbf{x}_{ref3}) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

En effet, J^3 est tronquée par rapport à Γ_2 mais aussi par rapport à Γ_1 dans la mesure où Γ_3 résulte d'un branchement successif sur Γ_1 puis sur Γ_2 . On généralise facilement à n branchements successifs à partir d'une interface principale Γ_1 . La fonction jonction J^n associée à l'interface Γ_n (en bout de chaîne) s'écrit alors:

$$J_j^n(\mathbf{x}) = \begin{cases} H_j^n(lsn_n(\mathbf{x})) & \text{si } \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, lsn_i(\mathbf{x}) * lsn_i(\mathbf{x}_{refn}) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.12)$$

Les jeux de degrés de liberté additionnels sont ajoutés séquentiellement au fur et à mesure que les interfaces sont ajoutées au modèle. Pour chaque noeud, il existe une table de correspondance qui associe les jeux de degrés de liberté additionnels $\mathbf{b}_j^n$ aux différentes interfaces qui intersectent le support du noeud (voir détails dans [1]). Par ailleurs, dans *Code_Aster*, les noeuds des éléments XFEM portent au plus 4 jeux de degrés de liberté additionnels. Le support d'un noeud ne peut donc être intersecté

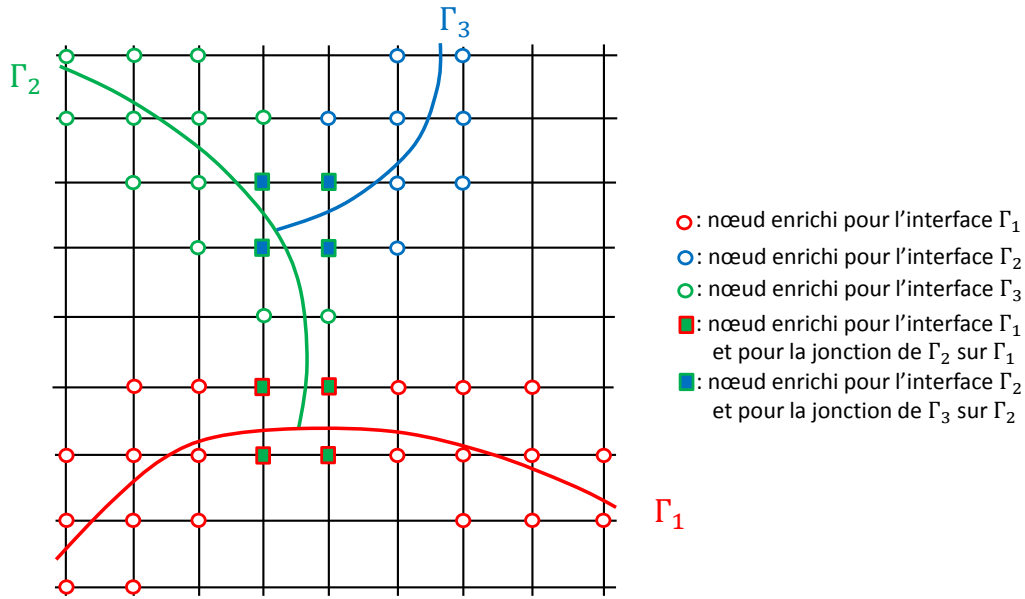


Figure 2.9 – Enrichissement Heaviside pour des jonctions d'interfaces.

que par 4 interfaces au plus. Lorsque le support d'un noeud est intersecté par plus de 4 interfaces, le code retourne un message d'erreur qui invite l'utilisateur à raffiner le maillage ou diminuer le nombre d'interfaces présentes dans le modèle. Il y a donc une limitation sur le nombre d'interfaces que l'on peut prendre en compte dans un modèle XFEM.

Dans le cadre de GFEM, Simone et al. [56] a proposé d'utiliser les fonctions caractéristiques des différents domaines pour construire un enrichissement qui permette de décrire la cinématique de chaque sous-domaine. A chaque sous domaine est alors associé un jeu de degré de liberté de déplacement. Cette approche paraît beaucoup plus simple et commode à mettre en oeuvre. Cependant, le traitement des fonds de fissures n'apparaît pas naturellement car la procédure ne prend en compte que des contours fermés. Duarte [57] a généralisé cette approche à des cas d'application 3D avec fond de fissure en prolongeant les discontinuités jusqu'aux bords du domaine, mais cela suppose que les prolongements de discontinuités ne se croisent pas et nécessite un raffinement important du maillage aux abords des fonds de fissure. L'approche que nous avons adoptée, introduite par Daux et al [41], s'appuie sur un enrichissement local au niveau des jonctions d'interfaces, et les degrés de liberté additionnels introduits sont associés aux interfaces et non aux sous domaines. Rien n'empêche donc de considérer ces interfaces comme des fissures à condition que les fonds de fissures soient suffisamment éloignés de la jonction (voir Figure 2.10). Ceci dans le but de s'assurer que les noeuds concernés par un enrichissement de type jonction ont bien leur support complètement traversé par les fissures protagonistes de la jonction. L'enrichissement de l'approximation du champ des déplacements pour la région du fond de fissure sera l'objet du prochain paragraphe.

Des éléments XFEM de jonction ont été introduits dans *Code_Aster* par Siavelis [1]. Dans le cadre de mes travaux de thèse, ces développements ont été poursuivis dans le but:

- d'améliorer la robustesse des éléments de jonction XFEM,
- d'autoriser la présence de jonctions de fissures pour les modélisations XFEM quadratiques,
- et d'adapter les éléments de jonction XFEM aux modélisations hydromécaniques.

Une méthode d'intégration quadratique pour les modèles XFEM tridimensionnels présentant des fissures courbes et des jonctions d'interfaces a également été développée. C'est l'objet de la Section 2.5.

2.3.3 Partie asymptotique

Au niveau du fond de fissure, l'enrichissement Heaviside ne suffit plus à modéliser correctement l'approximation du champ des déplacements. En effet, en mécanique linéaire de la rupture élastique, le champ de contraintes en fond de fissure est singulier. D'après [58], le développement asymptotique du champ des déplacements pour une fissure plane en milieu infini s'écrit:

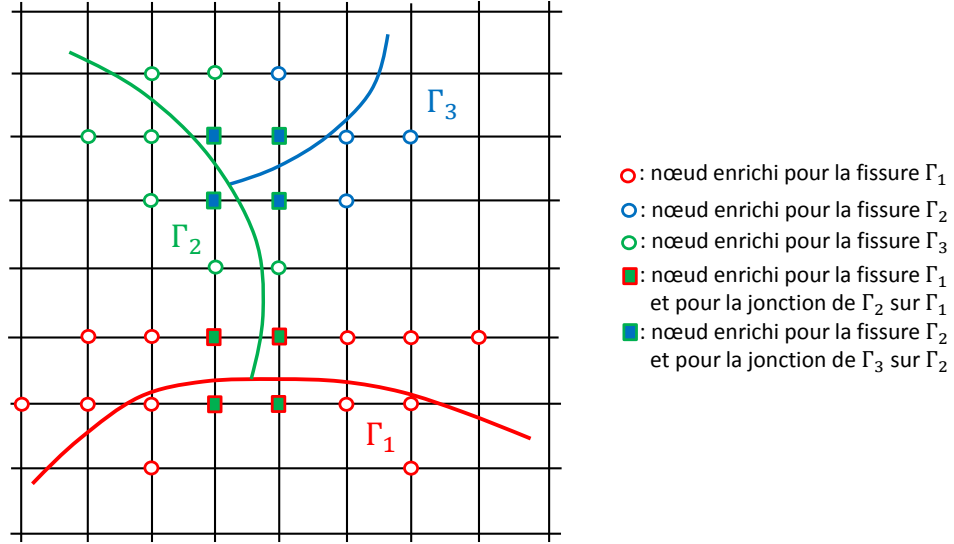


Figure 2.10 – Enrichissement Heaviside pour des jonctions de fissures.

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_I \cos(\frac{\theta}{2})(\kappa - \cos \theta) + K_{II} \sin(\frac{\theta}{2})(\kappa + 2 + \cos \theta)] \\ u_2 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_I \sin(\frac{\theta}{2})(\kappa - \cos \theta) - K_{II} \cos(\frac{\theta}{2})(\kappa - 2 + \cos \theta)] \\ u_3 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{III} \sin(\frac{\theta}{2}) \end{cases} \quad (2.13)$$

avec $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ et $\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformations planes} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contraintes planes} \end{cases}$, où E est le module de Young, ν le coefficient de Poisson et (r, θ) la base polaire en fond de fissure (voir Figure 2.2). Les déplacements (u_1, u_2, u_3) correspondent respectivement aux modes cinématiques I, II et III de la fissure et (K_I, K_{II}, K_{III}) sont les facteurs d'intensité des contraintes respectifs. L'interpolation polynomiale du champ des déplacements n'est donc pas adaptée pour approximer les déplacements au voisinage du fond de fissure. L'idée est donc d'enrichir localement l'approximation du champ des déplacements par une base de fonctions compatibles avec les expressions précédentes. Une telle base s'écrit:

$$\{\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta\} \quad (2.14)$$

Cet enrichissement, qui s'appuie sur les coordonnées polaires (r, θ) est facilité par l'utilisation des fonctions distances (confer Equation 2.2).

Il est important de remarquer que parmi ces 4 fonctions, la fonction $\{\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}\}$ est discontinue au travers de l'interface. En effet, $\begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin \frac{-\pi}{2} = -1 \end{cases}$. C'est donc elle qui pilote l'ouverture de la fissure au voisinage du fond. L'approximation du champ des déplacements au niveau du fond de fissure s'écrit finalement:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \mathbf{a}_i \psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{k \in N \cap N_A} \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{c}_k^\alpha \psi_k(\mathbf{x}) F^\alpha(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

avec $\{F^1, F^2, F^3, F^4\}$ les fonctions $\{\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta\}$, $\mathbf{c}_k^\alpha$ les degrés de libertés additionnels associés, N l'ensemble des noeuds dont le support contient $\mathbf{x}$ et N_A l'ensemble des noeuds qui possèdent l'enrichissement asymptotique.

Pour déterminer quels noeuds sont concernés par l'enrichissement asymptotique au voisinage du fond de fissure, il existe deux critères. Lorsque seuls les noeuds des mailles qui contiennent le fond de fissure sont porteurs de l'enrichissement asymptotique, on parle de technique d'enrichissement topologique [28] (voir Figure 2.11). On peut également choisir de faire porter l'enrichissement asymptotique par tous les noeuds situés au voisinage du fond de fissure dans la mesure où ces fonctions asymptotiques sont les mieux à même d'approximer le champ des déplacements au voisinage du fond. On définit alors un rayon d'enrichissement r . Tous les noeuds du maillage situés à une distance inférieure à ce rayon du fond de fissure se verront porteurs de l'enrichissement asymptotique (voir Figure 2.11). On parle de technique d'enrichissement géométrique [59], par opposition à la technique d'enrichissement topologique. Avec la technique d'enrichissement géométrique, certains noeuds peuvent être porteurs à la fois de l'enrichissement Heaviside et de l'enrichissement asymptotique. Finalement, la forme générale pour l'approximation du champ des déplacements s'écrit:

4

(2.16)

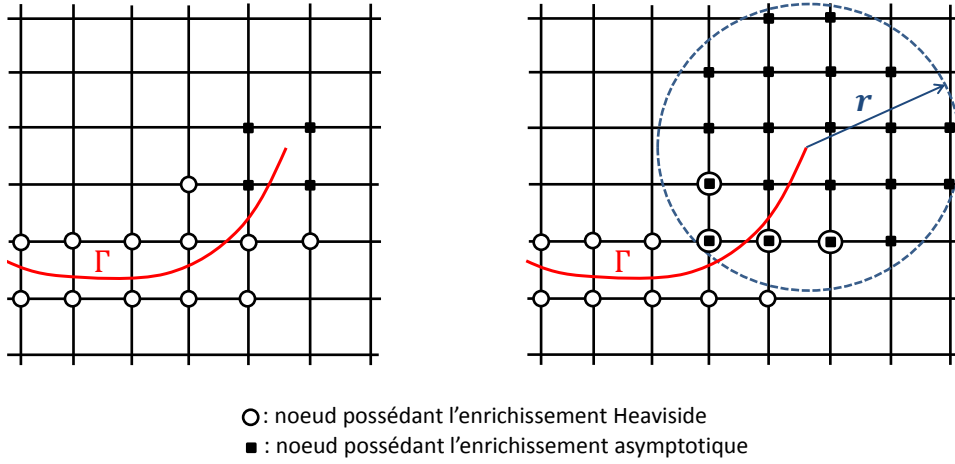


Figure 2.11 – Critère topologique (à gauche) et géométrique (à droite) pour l'enrichissement asymptotique en fond de fissure.

Avec le critère géométrique, l'enrichissement asymptotique est indépendant du raffinement du maillage. Cependant, il entraîne une détérioration significative du conditionnement de la matrice de rigidité. Pour remédier à ce problème, Chahine et al [60] ont proposé l'introduction de fonctions "cut-off" pour localiser l'enrichissement asymptotique. Les fonctions $\{F^1, F^2, F^3, F^4\}$ sont alors modulées par un paramètre $\chi(r)$ dépendant de la distance r au fond de fissure:

$$\begin{cases} \chi(r) = 1 & \text{si } r < r_{min} \\ \chi(r) \in]0, 1[& \text{si } r_{min} < r < r_{max} \\ \chi(r) = 0 & \text{si } r > r_{max} \end{cases} \quad (2.17)$$

avec $0 < r_{min} < r_{max}$. Une autre approche consiste à utiliser un enrichissement asymptotique vectoriel [61], [62]. On utilise alors les facteurs d'intensité des contraintes comme degrés de liberté [63], à partir desquels on reconstruit le développement asymptotique du champ des déplacements en fond de fissure (Equation 5.4). Cette approche a le mérite de réduire le nombre de degrés de liberté supplémentaires et limite la dégradation du conditionnement de la matrice de rigidité.

Un moyen de contourner l'utilisation de ces fonctions asymptotiques semi-analytiques est l'utilisation d'un modèle de zone cohésive. Nous détaillerons cette approche dans le paragraphe suivant.

2.4 Les modèles de zone cohésive

Les modèles de zone cohésive ont initialement été proposés par Barenblatt [64] et Dugdale [65] puis étendus par Hillerborg et al. [66] avec l'introduction de la notion d'énergie de rupture. Cela consiste à introduire des forces de cohésion au niveau des lèvres de la fracture, dont l'amplitude s'amenuise à mesure que la fracture s'ouvre. La contrainte qui s'exerce sur les lèvres de fissure, qui dérive généralement d'un potentiel [67], est alors directement reliée au saut de déplacement δ par une loi adoucissante (voir Figure 2.12). Une fois que la contrainte critique ou contrainte de rupture σ_c est atteinte, le processus de fissuration commence

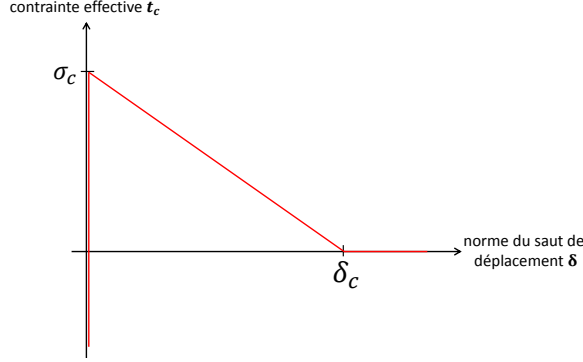


Figure 2.12 – Un exemple de loi adoucissante linéaire entre la contrainte cohésive et le saut de déplacement.

Les modèles de zone cohésive sont mis en oeuvre le long d'une zone de fissuration potentielle prédéfinie. On distingue alors 3 zones (voir Figure 2.13):

- une zone adhérente en amont du fond de fissure. Les efforts de traction cohésive sont inférieurs à σ_c dans cette zone et le matériau est non endommagé,
- une "process zone" dans laquelle s'exercent des efforts de traction cohésifs. Le saut de déplacement y est non nul,
- une zone ouverte dans laquelle les efforts de traction cohésifs sont nuls.

On simule ainsi un processus de fissuration dans la "process zone", qui effectue la transition entre la zone saine et la zone entièrement fissurée, et on s'affranchit de l'enrichissement singulier en pointe de fissure. Un ordre de grandeur de la longueur de la zone cohésive l_c est donnée par: $l_c = M \frac{G_c E}{\sigma_c^2 (1-\nu^2)}$, avec E le module de Young du matériau, ν le coefficient de Poisson du matériau, G_c l'énergie de surface et M une constante multiplicative qui dépend de la loi adoucissante utilisée (voir [68]). On peut interpréter la "process zone" comme étant la zone où des micro-fractures apparaissent. Ces micro-fractures se développent jusqu'à fusionner et ne former qu'une seule macro-fracture; on est alors en zone ouverte. La pointe de fracture réellement observable se situe donc à la limite entre la "process zone" et la zone ouverte tandis que la limite entre la "process zone" et la zone saine correspond à la zone d'initiation du processus de fracturation. Les efforts de traction cohésive y sont maximaux.

Dans *Code_Aster*, des modèles de zone cohésive ont été développés aussi bien dans le cadre FEM que dans le cadre XFEM, et divers types de lois adoucissantes sont disponibles (voir [69]). Dans le cadre de mes travaux de thèse, nous avons dans un premier temps adapté la formulation développée par Lorentz [70] au cas de l'hydromécanique (voir Section 3.2). Puis, nous avons utilisé la formulation mixte de type "Mortier" développée par Ferté [2] (voir Section 4.1.2).

2.5 Intégration numérique pour les fissures courbes tridimensionnelles et les jonctions de fissures

Dans ce paragraphe, on présente une méthode d'intégration originale pour les fissures courbes et les interfaces branchées tridimensionnelles dans le cadre de la méthode des éléments finis étendue. Puis diverses analyses de convergence attestent de la robustesse et de la précision de cette méthode. Cela a fait l'objet d'une publication scientifique (Annexe A).

Les cas tests en rapport avec cette fonctionnalité d'intégration quadratique restitués et documentés dans *Code_Aster* dans le cadre de la thèse sont les suivants:

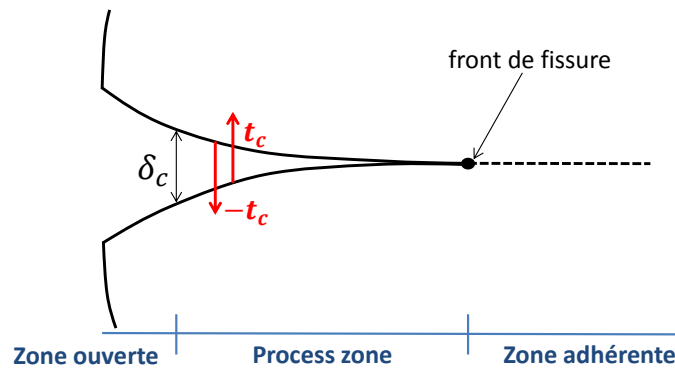


Figure 2.13 – Un modèle de zone cohésive.

- Test des différentes configurations de découpe dégénérées pour les éléments XFEM 3D quadratiques [71].
- Application d'une pression répartie sur les lèvres d'une interface XFEM courbe traversant une colonne [72].
- Application d'une pression répartie sur les lèvres d'une interface XFEM courbe traversant une calotte sphérique [73].

Chapitre 3

Le modèle HM-XFEM

Dans cette partie, on détaille les équations du modèle poro-mécanique et leur discrétisation spatiale avec la méthode XFEM. Ensuite, un cas de validation analytique et divers cas de propagation de fractures hydrauliques parallèles sont présentés. En complément, nous effectuons un test de consolidation de sol pour valider le comportement hydromécanique de notre modèle de matrice poro-élastique saturée. Enfin, on détaille la manière dont le chargement "flux dans une interface" est imposé dans notre modèle.

3.1 Introduction

De nombreux auteurs ont étudié le problème de la propagation de fractures hydrauliques, avec une approche analytique ([74], [75], [76]) ou plus récemment avec une approche numérique ([77], [24]). La modélisation de ce phénomène complexe nécessite de prendre en compte à la fois:

- l'écoulement préférentiel du fluide dans les fractures qui dépend de l'ouverture de celles-ci,
- la déformation de la matrice solide poreuse induite par la pression du fluide dans les fractures,
- la déformation de la matrice solide poreuse induite par les efforts mécaniques dans le réservoir comme les efforts tectoniques, les efforts résiduels dus à l'histoire du chargement ou à l'exploitation du réservoir (subsidence),
- les échanges de fluide entre le réseau de fractures et la matrice poreuse,
- l'éventuelle propagation des fractures.

Les travaux analytiques sur le sujet s'attachent donc à résoudre le système complexe d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui régissent ces phénomènes. Les solutions asymptotiques proposées ne s'appliquent donc qu'à des situations simples pour lesquelles les fractures sont planes [78], [79], [80].

Les modèles numériques exhibés dans la littérature sont variés. Par exemple, des modèles d'endommagement ont été appliqués à des géo-matériaux saturés en fluide [81], [82]. Des variables internes d'endommagement sont alors actualisées localement en fonction des déformations mécaniques et de la pression de pore, traduisant l'évolution de micro-fissures qui par coalescence vont donner naissance à une macro-fissure. Cependant, ces modèles ne prennent pas en compte les déformations non élastiques (comme les déformations plastiques) pourtant essentielles pour appréhender le processus d'endommagement. Pour pallier ce problème, certains auteurs ont développé des modèles d'endommagement micro-mécaniques [83] qui s'attachent à modéliser la micro-structure du matériau cassant. Néanmoins, ces modèles micro-mécaniques ne sont pas adaptés pour décrire la propagation de macro-fractures dont l'ouverture (i.e. la discontinuité du champ des déplacements) ne peut plus être négligée. Des modèles DEM (confer Section 2.1) ont également été proposés pour caractériser l'endommagement et la propagation de fractures dans les massifs rocheux poreux [84], de même que l'approche de type champ de phase [85].

Dès lors que le nombre de fractures à prendre en compte est faible, il devient possible de les discrétiser comme des surfaces entrouvertes par exemple dans le cadre de la méthode des éléments finis (FEM) avec des éléments d'interface [24], [86], [87]. On est alors en mesure de modéliser l'écoulement préférentiel du fluide dans les fractures. Presque tous les modèles s'accordent sur l'utilisation de la loi cubique pour modéliser l'écoulement dans les fractures, ce qui est justifié dans [88]. Mais certains modèles choisissent de discrétiser le fluide de manière plus fine, en associant au fluide non seulement un degré de liberté de pression mais aussi un degré de liberté de vitesse [89]. Ils sont alors à même de rendre compte de la dissymétrie de l'écoulement du fluide dans la fracture dans le cas de perméabilités relatives différentes d'une lèvre de fissure à l'autre. Par ailleurs, les auteurs suggèrent que le développement de micro-fractures dans la zone d'endommagement modifie significativement la porosité de la matrice poreuse au

voisinage des fractures. D'autres modèles étudient le phénomène de retard du fluide en fond de fissure ("fluid lag") [90] à l'aide d'éléments sans épaisseur dans l'interface. La propagation des fractures pouvant être brutale, il arrive que le fluide accuse un retard dans sa propagation, laissant ainsi un espace libre au niveau du fond de fissure. Cela peut se traduire numériquement par des pressions de fluide négatives en fond de fissure. Une condition pour éviter ce phénomène de retard du fluide, qui dépend en particulier de la viscosité du fluide, est exposée dans [91]. On peut citer aussi l'approche multi-échelle développée par Peirce [92] dans le but de capter le phénomène de "fluid lag" avec un maillage relativement peu raffiné. Dans les éléments qui contiennent le fond de fissure, des points de contrôle repèrent l'avancée réelle du front fluide.

Dans le cadre de l'ingénierie pétrolière, Bungert et Peirce ont proposé un modèle capable de gérer plusieurs fractures autour d'un puits [9] afin d'étudier la compétition qui existe entre ces dernières. Des modèles adaptés à la modélisation de fractures qui débouchent sur des failles ou des interfaces sédimentaires ont également été développés [77], [93]. Il s'agit alors de déterminer si la fracture va être stoppée par la rencontre avec cette faille ou si elle va continuer à se propager sans être perturbée par la faille. L'écoulement du fluide au niveau de la jonction joue un rôle déterminant dans ce phénomène. En effet, si le fluide arrive à s'engouffrer de manière préférentielle dans la faille rencontrée, la propagation de la fissure devrait être stoppée, et on pourrait même envisager que ce mécanisme réactive la faille. On peut également citer les travaux de Maerten [94] qui a recours dans son modèle à des éléments de frontière pour simuler les interactions entre les fractures d'un réseau et l'effet de la "contrainte régionale" sur les fractures. Cependant, ce modèle de réservoir fracturé ne permet pas de simuler l'écoulement dans les fractures.

Une autre approche consiste à ne discrétiser que le réseau de fractures. On parle alors de "Discrete Fracture Network" (DFN). Les échanges de fluide entre le réseau de fractures et le milieu poreux environnant sont éventuellement modélisés par des modèles de "leak-off" semi-analytiques. Ces modèles sont particulièrement adaptés à la prise en compte d'un nombre raisonnable de fractures connectées entre elles [95], [96]. La difficulté majeure réside alors dans la génération d'un maillage conforme à chaque fracture (au niveau des intersections de fractures). Une solution a été développée par McClure [11], [97] pour contourner cette difficulté et prendre en considération jusqu'à plusieurs milliers de fractures dans le cadre de la modélisation des EGS (Enhanced Geothermal Systems). Les fractures ne sont pas maillées mais sont caractérisées par leur orientation, leur taille et leur conductivité. L'écoulement dans les fractures est implicitement couplé avec l'état de contrainte régional. Suivant leur orientation et la pression de fluide à laquelle elle sont soumises, les fractures seront alors amenées à s'ouvrir ou à cisailier. Plus récemment, un modèle de treillis 2D a été développé pour étudier la propagation de fractures hydrauliques dans les roches granuleuses [98].

La volonté de coupler la méthode des éléments finis étendue avec un modèle hydromécanique a souvent été exprimée. Cette combinaison semble en effet appropriée pour modéliser la propagation de fractures sous l'action d'une pression hydraulique, en particulier dans le cas de fractures présentant des géométries complexes. En effet, dans le cas où les fractures sont discrétisées avec des éléments d'interface, il est nécessaire de produire un maillage conforme au réseau de fractures, ce qui s'avère être très difficile dans le cas de fractures connectées ou non planes, en particulier pour les modèles tridimensionnels (confer Section 1.2). De plus, cela impose de produire un nouveau maillage après chaque propagation de fractures, avec des opérations de projections entre deux maillages successifs très coûteuses numériquement. La méthode XFEM permet de contourner ces difficultés.

Les modèles hydromécaniques couplés avec XFEM proposés dans la littérature sont assez semblables à celui que nous proposons. Un fluide s'écoule dans les fissures dont le cinématique est gérée par des degrés de liberté additionnels associés à des fonctions de forme discontinues. Et un modèle de zone cohésive est presque toujours préféré à un enrichissement singulier au niveau du fond de fissure. Les modélisations HM-XFEM n'étant pas quasi-statiques mais dynamiques, le modèle de zone cohésive présente en effet l'avantage d'autoriser naturellement l'avancée du front de fissure au cours d'un pas de temps. La pression du fluide présent dans la fissure s'applique sur les lèvres de fissure, entraînant son ouverture. En pointe de fissure, lorsque la pression atteint le seuil inhérent au modèle de zone cohésive, la fracture se propage, offrant un espace supplémentaire au fluide pour se répandre. De tels modèles ont été réalisés pour une seule phase fluide [99], [100], [101], [102], [103] ou même deux phases [104], [105]. L'influence de la thermique dans la propagation des fractures hydrauliques a également été appréciée [106], [107]. Outre les applications pétrolières [101], [102], l'application à l'analyse de la nocivité de fractures sur des ouvrages du génie civil est traitée dans [108]. Un modèle de propagation de fractures dans le béton a d'ailleurs été proposé par Ren et al. [109]. Dans le cadre de la simulation du procédé de fracturation hydraulique, Lecampion a mis au point un modèle qui ne fait pas intervenir de zone cohésive dans la région du fond de fissure [110]. Il suggère à la place d'introduire pour le champ des déplacements un enrichissement singulier qui dépend du régime de propagation. Ainsi, il utilise un enrichissement différent lorsque les effets visqueux dominent le processus de propagation et lorsque l'effet de la ténacité de la roche domine

le processus de propagation; ceci dans le but d'approximer au mieux le profil d'ouverture au voisinage du fond de fissure. Gordeliy et Peirce montrent dans [111] que cette approche permet de retrouver des taux de convergence optimaux pour les solutions analytiques asymptotiques exhibés dans [112]. Enfin, Réthoré et al. proposent un modèle découplé pour lequel l'écoulement du fluide dans la fracture est simulé indépendamment [113]. Cette approche à deux échelles permet notamment une simulation fine de l'écoulement dans la fissure. Elle a été étendue au cas partiellement saturé [114]. Cependant ce modèle peine à modéliser le couplage qui existe entre la matrice solide poreuse et la fracture.

Dans le modèle que nous proposons, le couplage est total dans le sens où le fluide présent dans la fracture et le fluide interstitiel présent dans la matrice poreuse ne forment qu'une seule et même phase. Cela est rendu possible grâce aux conditions aux limites imposées au niveau des lèvres de l'interface et au modèle poromécanique utilisé pour modéliser le massif rocheux. Ce couplage total pose d'importantes difficultés dans la formulation mathématique du problème ainsi que dans son implémentation informatique mais c'est la garantie que notre modèle simule effectivement un réseau de fractures au sein d'un massif poreux et non pas la somme d'un problème de fissuration et d'un problème d'écoulement. En particulier, cela permet d'appréhender la compétition entre le phénomène de "leak-off" (fuite du fluide injectée dans la roche poreuse au niveau des lèvres de fissure) et de soutènement des fractures par le fluide sous pression (le fluide sous pression retenu dans la fracture entraîne l'ouverture de celle-ci et encourage son éventuelle propagation). Dans [24], la compétition entre ces deux phénomènes est étudiée à la lumière de nombres adimensionnels extraits du problème. Pour contourner la difficulté posée par le couplage entre la matrice poreuse et la fracture, certains modèles comme celui présenté dans [115] ajoutent des éléments d'interface à la modélisation XFEM pour simuler le phénomène de "leak-off". La fuite de matière de la fissure vers le massif est alors proportionnelle à l'aire de l'interface et à la pression du fluide dans la fracture. Mais cela ne peut s'appliquer qu'à des fractures dont la géométrie est simple et qui n'interagissent pas avec d'autres fractures. En effet, les modélisations réalisées jusque-là ne prennent en compte qu'une seule fracture et sont essentiellement bidimensionnelles. Le modèle que nous avons développé permet de simuler un réseau de fractures tridimensionnel, avec des surfaces de fissuration dont la géométrie est complexe.

3.2 Présentation et validation du modèle HM-XFEM en 2D

La présentation du modèle HM-XFEM couplé 2D a fait l'objet d'une publication (voir Annexe B). On y effectue également une validation du modèle pour différents régimes de propagation. La solution analytique sur laquelle on s'appuie est détaillée dans [27]. Enfin, on réalise des simulations sur des modèles comportant plusieurs fractures hydrauliques afin d'apprécier les interactions entre les différentes fractures. Pour l'un de ces exemples, on choisit de faire évoluer les fractures hydrauliques sur des trajectoires courbes, afin de montrer l'intérêt et la robustesse de la discrétisation XFEM que nous avons adoptée.

3.3 Compléments

Dans cette section, on apporte quelques compléments sur la présentation et la validation du modèle HM-XFEM. En premier lieu, on effectue un test de validation analytique du modèle hydromécanique dans la matrice poreuse. Puis, on détaille la manière dont les chargements "flux de fluide" sont imposés dans notre modèle HM-XFEM. Enfin, on évoquera le pilotage du chargement.

3.3.1 Validation du modèle hydromécanique: la colonne de Terzaghi

Dans cette section, on présente un test de validation analytique du modèle hydromécanique que nous utilisons. Il s'agit d'un test de consolidation de sol connu dans la littérature sous le nom de "colonne de Terzaghi" [116]. Il a été utilisé pour la validation des éléments hydromécaniques dans *Code_Aster* [117]. On le reproduit en y incluant une interface cohésive fermée afin de valider le comportement hydromécanique des éléments HM-XFEM que nous avons développés et afin de vérifier que la présence d'une interface cohésive fermée ne perturbe pas le comportement hydromécanique de la matrice poreuse. Les paramètres matériau de l'interface cohésive sont choisis de telle sorte que l'interface reste fermée tout au long de la simulation.

La géométrie du problème est représentée sur la Figure 3.1. Une colonne de hauteur $H = 10m$ et de largeur $L = 1m$ est traversée dans sa partie haute par une interface cohésive horizontale. La colonne est encastree à sa base et les déplacements horizontaux sont bloqués sur les bords verticaux (conditions oedométriques). La colonne est initialement au repos, la pression de pore est nulle. On bloque la pression

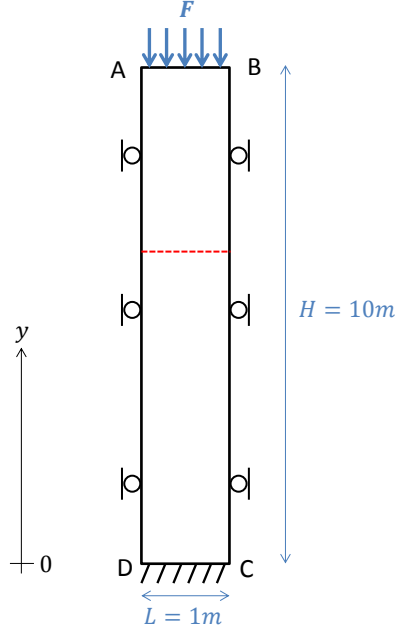


Figure 3.1 – Géométrie du cas test de Terzaghi.

de pore à zéro sur la face supérieure de la colonne. A l'instant $t = 0s$, on applique un échelon de force vertical réparti sur le bord supérieur de la colonne. La valeur de cet échelon de force est $F = 1Pa$.

Les caractéristiques du matériau et du fluide sont les suivantes:

Paramètres matériau du massif poreux	
Module de Young	$E = 10MPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0$
Densité du liquide	$\rho = 1000kg.m^{-3}$
Coefficient de Biot	$b = 1$
Perméabilité intrinsèque	$k^{int} = 10^{-8}m^2$
Viscosité du fluide	$\mu = 0.001Pa.s$
Mobilité du fluide	$\lambda = 10^{-5}m^2.Pa^{-1}.s^{-1}$
Porosité	$\phi = 0.5$
Module de compressibilité du fluide	K_w
Module de compressibilité de la matrice solide	K_s
Module de compressibilité du milieu poreux	K_m

Les paramètres matériau de la zone cohésive sont les suivants:

Paramètres matériau de l'interface cohésive	
Contrainte critique	$\sigma_c = 1MPa$
Energie cohésive	$G_c = 1000Pa.m^{-1}$

Le coefficient de Poisson ν étant nul, le problème est unidirectionnel (suivant la direction verticale). La masse volumique du fluide ρ est supposée constante ($\frac{1}{K_w} = 0$). Le coefficient de Biot b est pris égal à 1, ce qui suppose que la matrice solide est incompressible ($\frac{1}{K_s} = 0$) car $b = 1 - \frac{K_m}{K_s}$. La solution de ce problème est analytique. C'est une solution non linéaire et dépendante du temps.

Les contraintes totales poro-élastiques sont $\sigma = E\epsilon(u) - bp\mathbf{1}$. Le problème étant unidirectionnel, seule la composante verticale est non nulle: $\sigma_{yy}(y, t) = Eu_{y,y}(y, t) - bp(y, t)$.

L'équilibre mécanique s'écrit alors:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \Rightarrow Eu_{y,yy}(y, t) - bp_{,y}(y, t) = 0 \quad (3.1)$$

Dans la colonne, la conservation de la masse pour le fluide s'écrit: $\text{div}(\mathbf{M}) + \frac{\partial m_w}{\partial t} = 0$ avec $\begin{cases} \mathbf{M} = -\lambda \rho \nabla p \\ m_w = \rho \phi(1 + \epsilon_{yy}) \end{cases}$. Le fluide est supposé incompressible donc l'équation de conservation de la masse se réécrit:

$$-\lambda p_{,yy}(y, t) + \frac{\partial[(1 + \epsilon_{yy}(y, t))\phi(y, t)]}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

D'autre part $d\phi = (b - \phi)(d\epsilon_v + \frac{dp}{K_s})$. Or $\frac{1}{K_s} = 0$ car la matrice solide est supposée incompressible donc $d\phi = (b - \phi)d\epsilon_v = (b - \phi)d\epsilon_{yy}$. Soit finalement $\frac{\partial \phi}{\partial t} = (b - \phi)\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial t} = (b - \phi)\frac{\partial u_{y,y}}{\partial t} = (b - \phi)\dot{u}_{y,y}$

Donc finalement en ne gardant que les termes du premier ordre, l'équation d'équilibre hydrodynamique s'écrit:

$$-\lambda p_{,yy}(y, t) + b\dot{u}_{y,y}(y, t) = 0 \quad (3.3)$$

Les conditions initiales sont: $\begin{cases} u_y(y, 0) = 0 \\ p(y, 0) = 0 \end{cases}$

Et pour $t > 0$, les conditions aux limites s'écrivent: $\begin{cases} u_y(0, t) = 0 \\ p(H, t) = 0 \\ \sigma_{yy}(H, t) = F\eta(t) = Eu_{y,y}(H, t) - bp(H, t) \end{cases}$
où $\eta(t)$ est la fonction échelon en $t = 0$.

L'équilibre mécanique donne directement l'équilibre des contraintes totales pour $t > 0$ sur $[0, H]$:

$$\sigma_{yy}(y, t) = F = Eu_{y,y}(y, t) - bp(y, t) \quad (3.4)$$

soit:

$$u_{y,y}(y, t) = \frac{1}{E}(F + bp(y, t)) \text{ pour } t > 0 \text{ sur } [0, H] \quad (3.5)$$

L'équilibre hydraulique conduit alors à: $\frac{b^2}{E}\dot{p}(y, t) - \lambda p_{,yy}(y, t) = 0$ pour $t > 0$ sur $[0, H]$ avec comme condition initiale $p(y, 0) = -\frac{F}{b}$ sur $[0, H]$ et la condition aux limites: $p(H, t) = 0$ pour $t > 0$.

Le coefficient de consolidation $c = \frac{\lambda E}{b^2}$ vaut $c = 0.1m^2.s^{-1}$. Il pilote la durée du processus de consolidation. Il en découle aussi un temps caractéristique $\tau = \frac{H^2}{c}$. Pour $t = \tau$, il a été atteint un peu plus de 90% de la consolidation. Dans notre cas $\tau = 1000s$.

La solution de cette équation est (confer [116]):

$$\begin{cases} p(y, t) = \frac{-4F}{b\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} e^{-\lambda E \pi^2 (2m-1)^2 \frac{t}{4b^2 H^2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi y(2m-1)}{2H}\right) \\ u_y(y, t) = \frac{Fy}{E} + \frac{b}{E} \int_0^y p(\xi, t) d\xi \end{cases}$$

soit finalement:

$$u_y(y, t) = \frac{Fy}{E} - \frac{8HF}{\pi^2 E} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} e^{-\lambda E \pi^2 (2m-1)^2 \frac{t}{4b^2 H^2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi y(2m-1)}{2H}\right) \quad (3.6)$$

Pour des instants $t \rightarrow \infty$, on a: $\begin{cases} p(0, \infty) = 0 \\ u_y(H, \infty) = \frac{FH}{E} \end{cases}$

Les résultats obtenus à $t = 10s$ avec une colonne constituée de 32 éléments quadrangles à 8 noeuds sont représentés sur les Figures 3.2 et 3.3. On y représente également la solution analytique. La précision des résultats numériques est très satisfaisante (inférieure à 0,01%) et la colonne n'est pas perturbée par la présence de l'interface cohésive horizontale. Elle se comporte comme une colonne non fissurée.

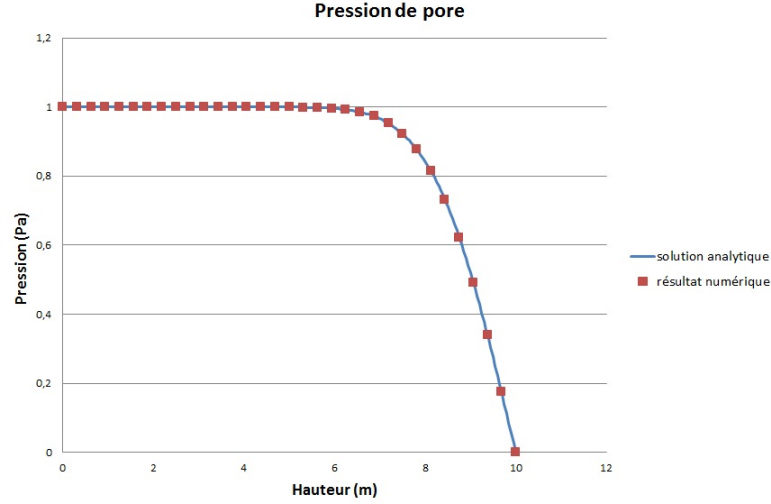


Figure 3.2 – Pression de pore à $t=10s$ (en Pa).

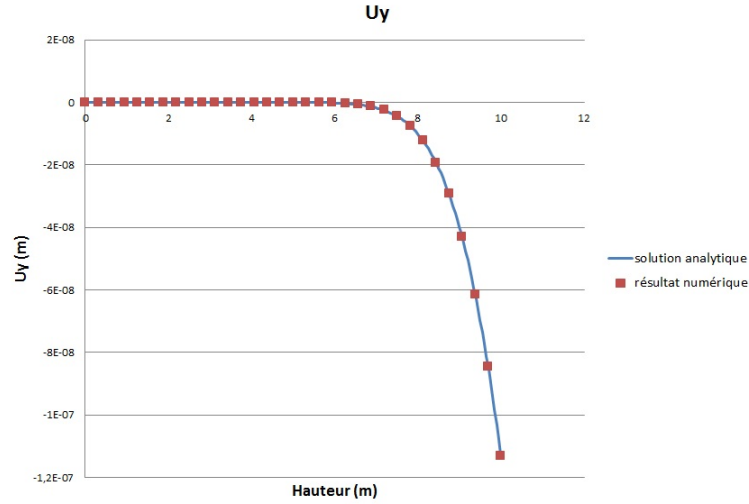


Figure 3.3 – Déplacements verticaux à $t=10s$.

En plus de ce test qui valide le couplage hydromécanique dans la matrice poreuse et l'immersion des interfaces cohésives fermées dans la matrice, nous avons réalisé une série de tests pour valider séparément les différents aspects du modèle. Cette validation par étapes a facilité le débogage des développements informatiques. Ces tests sont documentés et ont été restitués dans *Code_Aster* dans le cadre de la thèse:

- Validation du comportement mécanique des éléments HM-XFEM [118].
- Consolidation d'une colonne de sol poro-élastique saturée et fracturée [119].

- Imposition d'un flux de fluide dans une colonne poro-élastique saturée traversée par une interface cohésive [120].
- Validation du pilotage par prédiction élastique pour les éléments cohésifs HM-XFEM [121].
- Validation du couplage hydromécanique entre l'interface cohésive et la matrice poreuse saturée [122].
- Validation du modèle de zone cohésive utilisé pour les éléments HM-XFEM [123].
- Imposition d'un flux de fluide dans une interface cohésive XFEM traversant une colonne poro-élastique saturée [124].

3.3.2 Imposition d'un flux dans une fracture

Dans ce paragraphe, on détaille la manière dont sont imposés les chargements "flux de fluide" dans la matrice poreuse ou directement dans les interfaces cohésives. On rappelle que la pression du fluide interstitiel dans la matrice poreuse est notée p tandis que la pression du fluide dans l'interface cohésive est notée p_f . Au

vers le milieu por

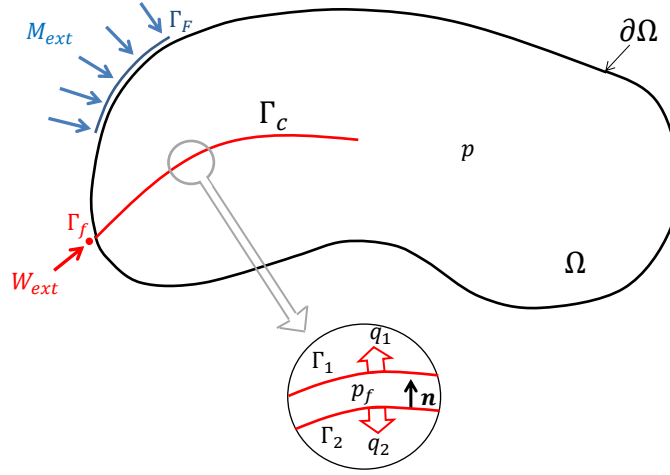


Figure 3.4 – Imposition des flux de fluide M_{ext} sur un bord du domaine et W_{ext} dans l'interface cohésive Γ_c .

En ce qui concerne les flux de fluide surfaciques M_{ext} injectés dans la matrice poreuse, l'intégration du second membre se fait naturellement sur le bord du domaine Γ_F sur lequel est imposé le flux (voir Figure 3.4).

La conservation de la masse dans la matrice poreuse s'écrit localement de la manière suivante (confer Annexe B):

$$\frac{\partial m_w}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{M}) = 0 \quad (3.7)$$

avec $\mathbf{M}$ le flux massique de fluide dans la matrice poreuse et m_w les apports massiques dans la matrice poreuse.

La formulation faible intégrée sur le domaine Ω s'écrit alors:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{\partial m_w}{\partial t} p^* d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla p^* d\Omega &= \int_{\Gamma_F} M_{ext} p^* d\Gamma_F - \int_{\Gamma_+} q_+ p^* d\Gamma_+ - \int_{\Gamma_-} q_- p^* d\Gamma_- \\ \forall p^* \in H_1(\Omega) \text{ admissibles et tels que } p^* \text{ discontinue à travers } \Gamma_c \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le flux M_{ext} est donc intégré sur le bord Γ_F , de dimension $ndim - 1$ si $ndim$ est la dimension du domaine Ω . Le support utilisé pour cette intégration n'est autre que les arêtes du maillage (les faces en 3D) qui coïncident avec le bord Γ_F .

En revanche, lorsqu'il s'agit d'imposer un flux de fluide directement dans une fracture, la dimension de l'embouchure de la fissure est $ndim - 2$ si $ndim$ est la dimension du domaine. L'intégration du chargement flux requiert plus d'attention.

La conservation de la masse dans l'interface cohésive s'écrit localement de la manière suivante (confer Annexe B):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{W}) = 0 \quad (3.9)$$

avec $\mathbf{W}$ le flux massique de fluide dans l'interface cohésive et m_w les apports massiques dans l'interface cohésive.

La forme faible intégrée sur l'interface Γ_c s'écrit alors:

$$-\int_{\Gamma_c} \frac{\partial w}{\partial t} p_f^* d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} \mathbf{W} \cdot \nabla p_f^* d\Gamma_c = \int_{\Gamma_f} W_{ext} p_f^* d\Gamma_f + \int_{\Gamma_+} q_+ p_f^* d\Gamma_+ + \int_{\Gamma_-} q_- p_f^* d\Gamma_- \quad (3.10)$$

$\forall p_f^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ admissibles

Intéressons-nous dans un premier temps au cas où la dimension de Ω est 2. Le flux massique W_{ext} s'exprime alors en $kg.s^{-1}$ et Γ_f est réduit à un point. Rappelons que l'espace d'approximation des champs associés à l'interface cohésive (comme p_f) s'appuie uniquement sur les noeuds sommets des arêtes intersectées strictement par l'interface et sur les noeuds sur lesquels passe l'interface (confer Annexe B). De plus, afin de satisfaire la condition de stabilité LBB [29], des relations d'égalité sont imposées de part et d'autre de l'interface pour les champs associés à l'interface [4] [31]. Sur la Figure 3.5, les noeuds

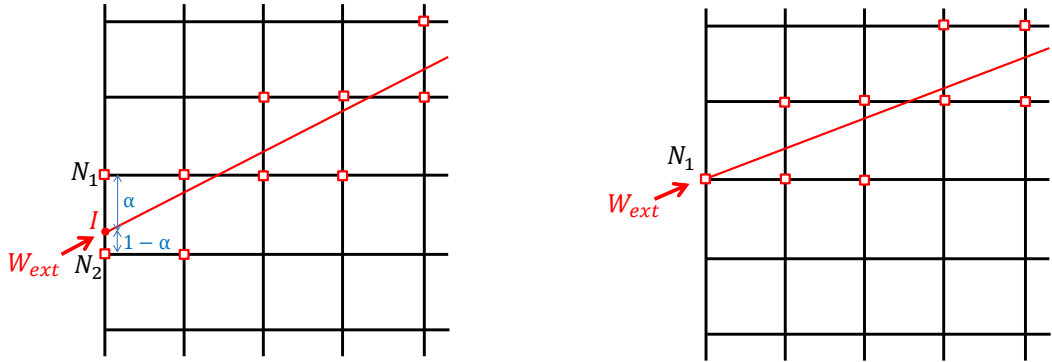


Figure 3.5 – Imposition d'un flux dans une fracture pour les modèles 2D plans dans le cas non conforme (à gauche) et dans le cas conforme (à droite).

Dans le cas où la dimension de Ω est 3, le flux massique W_{ext} s'exprime en $kg.m^{-1}.s^{-1}$ et Γ_f est une courbe. Afin d'intégrer le terme $\int_{\Gamma_f} W_{ext} p_f^* d\Gamma_f$, il est nécessaire de disposer d'un support qui approxime la courbe Γ_f . A cette fin, on reconstruit une approximation de l'interface sur le bord du domaine comme une chaîne de segments à 3 noeuds (donc éventuellement courbes). Dans chaque face de bord, l'interface Γ_c est donc discrétisée par un segment à 3 noeuds. Pour ce faire, on utilise la même technique que celle exposée dans l'Annexe A. Les faces de bord intersectées par Γ_c sont basculées dans l'espace de référence (voir Figure 3.6). On détermine alors les intersections I_1 et I_2 avec les arêtes de la face, qui vont constituer les noeuds extrémités du segment à 3 noeuds. Puis, on détermine la position du noeud

milieu I_3 sur la médiatrice du segment $[I_1 I_2]$ à l'aide de l'algorithme 1 détaillé dans l'Annexe A. On obtient alors une approximation quadratique de l'interface au bord du domaine Ω . On est dès lors à même d'évaluer $\int_{\Gamma_f} W_{ext} p_f^* d\Gamma_f$ en effectuant une intégration sur la chaîne des segments à 3 noeuds qui approximent Γ_f . Il faut cependant bien prendre garde à l'espace d'approximation de p_f sur les faces intersectées. Comme rappelé précédemment, l'espace d'approximation du champ p_f s'appuie uniquement sur les noeuds sommets des arêtes intersectées strictement par l'interface et sur les noeuds sur lesquels passe l'interface. Sur la Figure 3.6, seuls les noeuds N_1 , N_3 et N_4 de la face de bord quadrangle portent le degré de liberté p_f . Or les fonctions de formes $\{\phi_{N_1}, \phi_{N_3}, \phi_{N_4}\}$ ne satisfont pas à elles seules la partition de l'unité sur la face quadrangle (en effet: $\phi_{N_1} + \phi_{N_2} + \phi_{N_3} + \phi_{N_4} = 1$). Afin de satisfaire tout de même la partition de l'unité, on utilise des fonctions de forme modifiées pour le champ p_f (voir [125]):

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{N_1} = \phi_{N_1} + \frac{\phi_{N_2}}{3} \\ \tilde{\phi}_{N_2} = 0 \\ \tilde{\phi}_{N_3} = \phi_{N_3} + \frac{\phi_{N_2}}{3} \\ \tilde{\phi}_{N_4} = \phi_{N_4} + \frac{\phi_{N_2}}{3} \end{cases} \quad (3.11)$$

avec ϕ_{N_i} les fonctions de forme linéaires originales et $\tilde{\phi}_{N_i}$ les fonctions de formes modifiées pour s'adapter à l'espace d'approximation du champ p_f . La fonction de forme du noeud inactif N_2 est donc répartie équitablement entre les 3 noeuds actifs de la face quadrangle. Ainsi, l'interpolation du champ p_f dans cette face via les fonctions de forme des noeuds actifs $\{\tilde{\phi}_{N_1}, \tilde{\phi}_{N_3}, \tilde{\phi}_{N_4}\}$ satisfait la partition de l'unité. On aura tout de même des éléments cohésifs dans

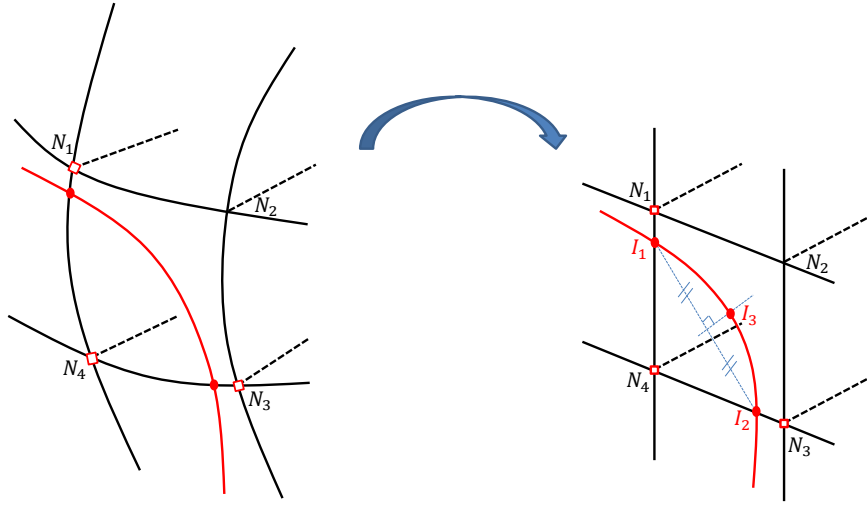


Figure 3.6 – Imposition d'un flux dans une fracture pour les modèles 3D.

3.3.3 Pilotage du chargement

Dans *Code_Aster*, il existe des modules pour piloter le chargement des modèles comportant des zones cohésives [126]. En effet, on a recours au pilotage du chargement pour capter le processus de dissipation d'énergie dans la zone cohésive et la propagation des fractures cohésives dans le cas de modélisations quasi-statiques. La première possibilité consiste à piloter directement le saut de déplacement en fonction du temps sur un groupe de mailles. La seconde possibilité consiste à piloter la quantité maximale d'énergie γ_{max} dissipée au niveau de la zone cohésive au cours du temps. En un point de Gauss de l'interface cohésive, la quantité d'énergie dissipée γ entre l'instant i et l'instant $i + 1$ (voir Figure 3.7) s'écrit:

$$\gamma = \kappa_{i+1}\sigma_c\left(1 - \frac{\kappa_{i+1}}{2\delta_c}\right) - \kappa_i\sigma_c\left(1 - \frac{\kappa_i}{2\delta_c}\right) \quad (3.12)$$

avec κ_i l'ouverture maximale à l'instant i , σ_c la contrainte critique et δ_c l'ouverture critique (confer Annexe A). Le chargement est alors modulé (voir [126]) pour satisfaire la condition:

$$\max \{\gamma\} = \gamma_{max} \quad (3.13)$$

sur les points

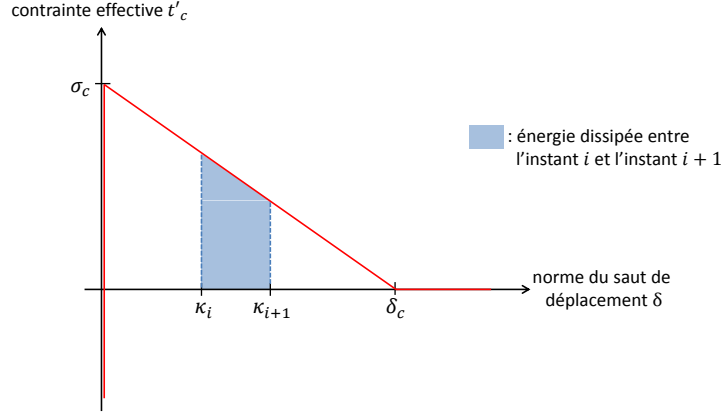


Figure 3.7 – Dissipation d'énergie dans un modèle de zone cohésive.

Si ces options de pilotage du chargement sont très utiles pour les simulations mécaniques quasi-statiques (voir [2]), elles le sont beaucoup moins pour nos simulations hydromécaniques qui intègrent le temps comme variable physique. En effet, il est impossible de faire coïncider les pas de temps utilisés pour le pilotage (quantité maximale d'énergie dissipée dans la zone cohésive au cours du temps) et l'écoulement du temps physique qui régit la diffusion du fluide dans la matrice poreuse et dans les fractures. Nos simulations sont en fait naturellement pilotées par l'écoulement du temps physique. Par exemple dans le cas où l'on impose un flux de fluide dans une interface cohésive, c'est le chargement flux, dépendant du temps, qui pilote le calcul. C'est alors le découpage temporel du calcul qui nous permet de suivre au mieux le déroulé de la simulation et d'observer d'éventuelles instabilités (comme la propagation de fractures hydrauliques).

Chapitre 4

Formulation de type "Mortier" pour le contact

Dans la partie qui suit, nous allons introduire une nouvelle formulation pour le modèle de zone cohésive au sein de notre modèle HM-XFEM. Cette nouvelle formulation, introduite par Ferté dans [2], facilitera par la suite la procédure de propagation sur trajets inconnus. En effet, dans le cadre de cette formulation, l'ensemble des variables internes associées aux interfaces cohésives (comme la quantité d'énergie dissipée ou la masse volumique du fluide dans la fissure) sera porté par les noeuds sommets des arêtes intersectées par la discontinuité. Dans la formulation adoptée initialement (voir Annexe B), ces variables internes sont stockées au niveau des points de Gauss des facettes de contact (qui sont le support pour l'intégration le long des discontinuités, confer Annexe A). Or lorsque la propagation d'une fracture cohésive requiert une mise à jour de sa surface potentielle de fissuration (mise à jour de la *level set normale*), la position et la répartition des facettes de contact changent, nous obligeant à effectuer des projections depuis les anciennes facettes de contact vers les nouvelles. Ces opérations de projections

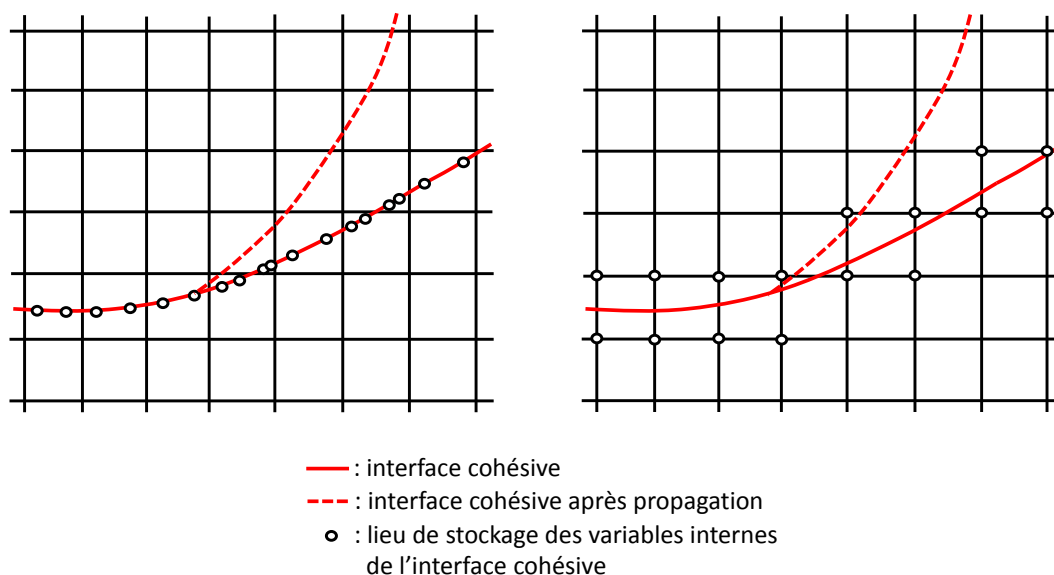


Figure 4.1 – Localisation des variables internes associées à une interface cohésive dans le modèle présenté dans l'Annexe B (à gauche) et dans le modèle de type "Mortier" de Ferté [2] (à droite).

Par ailleurs, dans le modèle que nous avons présenté dans l'Annexe B, les interfaces cohésives sont définies à l'aide d'une *level set normale* uniquement. Le fond de fissure est alors repéré naturellement

à l'aide du modèle de zone cohésive, comme la limite entre la zone adhérente et la "process zone". La zone adhérente, située en amont du fond de fissure, s'interprète alors comme une surface potentielle de fissuration, immuable. Afin de mettre en place une procédure de propagation sur trajets inconnus, on souhaite s'appuyer sur le formalisme des *level set*. Il est donc nécessaire de disposer d'une *level set tangente*, qui repère la position du fond de fissure (confer paragraphe 2.1). Dans le cadre du modèle de zone cohésive présenté dans l'Annexe B, la position du fond de fissure peut être interprétée comme la limite entre les points de Gauss des facettes de contact appartenant à la zone adhérente (pour lesquels l'énergi

(pour l'
difficile
comme

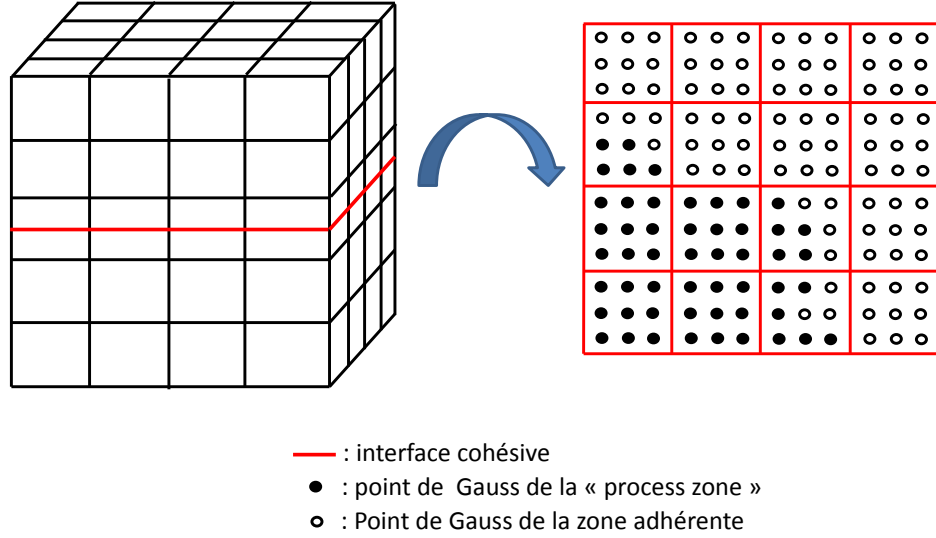


Figure 4.2 – Transition entre la zone adhérente et la "process zone" pour les points de Gauss des facettes de contact d'une fracture cohésive tridimensionnelle plane. À gauche le domaine 3D traversé par une interface cohésive horizontale et à droite les facettes de contact associées.

Avec la formulation cohésive de Ferté, l'ensemble des variables internes associées à la fracture cohésive est stocké aux noeuds du maillage. On peut alors construire directement un champ de *level set tangente* nodal à partir de ces variables internes nodales, et on assure la compatibilité d'un élément à l'autre.

Ferté a initialement introduit cette formulation stable de type "Mortier" pour modéliser la propagation de fractures dans les matériaux fragiles avec une zone de fissuration potentielle cohésive étendue. Il a démontré qu'une loi pénalisée n'est pas adaptée pour simuler une adhérence parfaite avec des zones cohésives étendues. La formulation cohésive de Ferté est adaptée aux lois cohésives mixtes non régularisées (c'est à dire avec adhésion initiale parfaite) que nous utilisons pour notre modèle HM-XFEM. Elle a été développée pour des éléments XFEM linéaires. Dans ce chapitre, nous allons détailler l'adaptation de cette formulation à nos éléments XFEM quadratiques hydromécaniques. Puis, nous effectuerons une nouvelle validation de notre modèle par comparaison avec une solution analytique asymptotique pour la propagation d'une fracture hydraulique plane radiale dans un milieu poro-élastique tridimensionnel et homogène.

4.1 Formulation de type "Mortier" pour le contact

Dans cette section, on présente la nouvelle formulation de type "Mortier" pour le modèle de zone cohésive, introduite par Ferté [2].

4.1.1 Loi cohésive mixte dans le formalisme du Lagrangien augmenté

Soit $\mathbf{w}$ le saut de déplacement au niveau de l'interface cohésive. Dans le formalisme du Lagrangien augmenté, l'expression générale de la densité d'énergie de surface dérivant d'un potentiel est la suivante:

$$\Pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) = \phi(\lambda_n + r w_n, \boldsymbol{\lambda}_s + r_s \mathbf{w}_s) - \frac{\lambda_n^2}{2r} - \frac{\boldsymbol{\lambda}_s \cdot \boldsymbol{\lambda}_s}{2r_s} \quad (4.1)$$

avec ϕ une fonction dérivable qui dépend de la loi cohésive utilisée, r et r_s les paramètres d'augmentation normal et tangentielle, σ_c la cohésive et w_c le saut de déplacement critique. On peut représenter la loi cohésive mixte linéaire non régularisée par deux graphes :

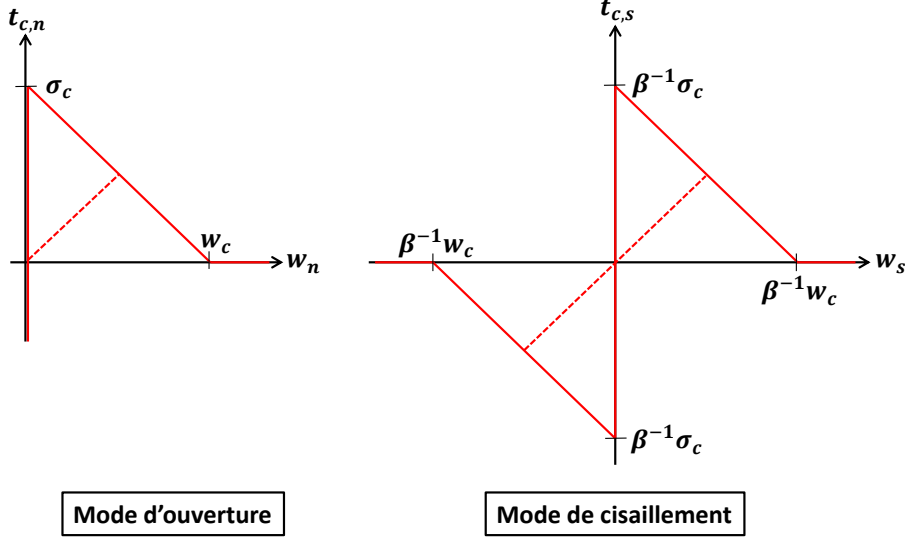


Figure 4.3 – Loi cohésive mixte linéaire non régularisée.

La contrainte cohésive est donnée par $\mathbf{t}_c = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{w}}$. Toujours dans le formalisme du Lagrangien augmenté, l'équation supplémentaire pour la loi d'interface est obtenue en imposant la condition d'optimalité $\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0$.

La traction cohésive s'écrit alors :

$$t_{c,n}(\lambda_n + r w_n, \boldsymbol{\lambda}_s + r_s \mathbf{w}_s) = \frac{\partial \Pi}{\partial w_n} = r \frac{\partial \phi}{\partial (\lambda_n + r w_n)} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{t}_{c,s}(\lambda_n + r w_n, \boldsymbol{\lambda}_s + r_s \mathbf{w}_s) = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{w}_s} = r_s \frac{\partial \phi}{\partial (\boldsymbol{\lambda}_s + r_s \mathbf{w}_s)} \quad (4.3)$$

Pour simplifier les notations, on omet à partir de maintenant la dépendance de $\mathbf{t}_c$ à $\lambda_n + r w_n$ et $\boldsymbol{\lambda}_s + r_s \mathbf{w}_s$. La condition d'optimalité donne alors directement $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{t}_c$.

Soit $(\lambda + r w)_{\text{eq}} := \sqrt{\langle \lambda_n + r w_n \rangle_+^2 + \beta^{-2} (\boldsymbol{\lambda}_s + r_s \mathbf{w}_s)^2}$ la contrainte cohésive augmentée équivalente, avec $\langle - \rangle_+$ l'opérateur qui retourne la partie positive. On choisit la fonction seuil ϕ telle que : $\phi((\lambda + r w)_{\text{eq}}) := \frac{(\lambda + r w)_{\text{eq}} - \sigma_c}{r w_c - \sigma_c}$ avec w_c le saut de déplacement critique pour la loi cohésive, c'est-à-dire la valeur de la norme du saut de déplacement à partir de laquelle plus aucun effort cohésif ne se manifeste. On peut alors définir une variable interne adimensionnelle α vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi((\lambda + r w)_{\text{eq}}) - \alpha &\leq 0 \\ \dot{\alpha} &\geq 0 \\ \alpha [\phi((\lambda + r w)_{\text{eq}}) - \alpha] &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pour un matériau sain on a $\alpha \leq 0$ et pour un matériau entièrement rompu on a $\alpha \geq 1$. En cours de chargement, on a $\begin{cases} \dot{\alpha} = 0 \\ \alpha = \phi((\lambda + rw)_{\text{éq}}) \end{cases}$.

On définit alors la fonction ϕ comme suit:

$$\phi(\lambda_n + rw_n, \lambda_s + r_s \mathbf{w}_s) = 2G_c \left(1 - \frac{\sigma_c}{rw_c}\right) \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2r} \langle \lambda_n + rw_n \rangle_-^2 \quad (4.5)$$

avec $\langle - \rangle_-$ l'opérateur qui retourne la partie négative.

Dans le cas sans contact (on a alors $\langle \lambda_n + rw_n \rangle_- = 0$), la densité d'énergie de surface (Equation 4.1) dépend donc uniquement de α et $\lambda_{\text{éq}}$: $\Pi(\alpha, \lambda_{\text{éq}}) = \phi(\alpha) - \frac{\lambda_{\text{éq}}}{2r}$. Au moment où l'endommagement commence, on a : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda_{\text{éq}} = \sigma_c \end{cases}$, et au moment où l'endommagement est terminé (rupture), $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \lambda_{\text{éq}} = 0 \end{cases}$. On a donc: $\Pi(\alpha = 1, \lambda_{\text{éq}} = 0) - \Pi(\alpha = 0, \lambda_{\text{éq}} = \sigma_c) = G_c$, ce qui assure que G_c correspond à l'énergie à fournir pour endommager complètement une unité de surface de l'interface cohésive.

La traction cohésive résultante peut être synthétisée en une traction cohésive équivalente: $t_{c,\text{éq}} = \sqrt{\langle t_{c,n} \rangle_+^2 + \beta^{-2} \mathbf{t}_{c,s}^2}$, reliée à la contrainte cohésive augmentée de la manière suivante: $t_{c,\text{éq}} = (1 - T_d)(\lambda + rw)_{\text{éq}}$ avec T_d l'endommagement donné par:

$$T_d = \frac{\alpha}{\left(1 - \frac{\sigma_c}{rw_c}\right)\alpha + \frac{\sigma_c}{rw_c}} \quad (4.6)$$

On vérifie bien $T_d = 0$ lorsque $\alpha = 0$ (adhérence parfaite) et $T_d = 1$ lorsque $\alpha = 1$ (rupture). Dans le cas général, la traction cohésive s'écrit finalement:

$$t_{c,n} = (1 - T_d) \langle \lambda_n + rw_n \rangle_+ + \langle \lambda_n + rw_n \rangle_- \quad (4.7)$$

$$\mathbf{t}_{c,s} = (1 - T_d)(\lambda_s + r_s \mathbf{w}_s) \quad (4.8)$$

4.1.2 Formulation stable de type "Mortier" pour l'insertion d'une loi d'interface dans le cadre XFEM

Comme expliqué dans [2], les quantités associées à l'interface (la traction cohésive $\mathbf{t}_c$ et la densité d'énergie Π) doivent être définies sur un espace réduit M_0 par rapport à l'espace de définition des déplacements U_0 . On évite ainsi les oscillations erratiques durant les phases d'adhérence. Cela s'applique également au saut de déplacement $\mathbf{w}$, qui rentre en jeu dans les phases d'adhérence (via la contrainte cohésive augmentée). $\mathbf{w}$ est donc introduit comme une nouvelle inconnue du problème, définie sur un espace différent de celui de $[\mathbf{u}]$: M_0 . La construction de l'espace d'approximation pour les champs définis sur l'espace réduit M_0 sera détaillée dans le paragraphe suivant. L'énergie totale du système Ω traversé par une interface cohésive Γ_c s'écrit alors:

$$E(\mathbf{u}, \lambda, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma_t + \int_{\Gamma_c} \Pi(\mathbf{w}, \lambda) d\Gamma_c \quad (4.9)$$

La solution du problème est donc $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \lambda) = \underset{\mathbf{w}^*=[\mathbf{u}^*]}{\operatorname{argmin}} E(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*, \lambda^*)$.

Le Lagrangien s'écrit alors:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma_t + \int_{\Gamma_c} \Pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\mu} \cdot ([\mathbf{u}] - \mathbf{w}) d\Gamma_c \quad (4.10)$$

avec $\boldsymbol{\mu}$ un multiplicateur de Lagrange introduit pour satisfaire la condition $[\mathbf{u}] = \mathbf{w}$ au niveau de l'interface cohésive Γ_c . Les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont également définis sur l'espace réduit M_0 adapté à la fracture cohésive.

Les conditions d'optimalité de ce Lagrangien donnent la formulation faible suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{u}^* \in \mathbf{U}_0, \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma_t + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\mu} \cdot [\mathbf{u}^*] d\Gamma_c = 0 \\ \forall \boldsymbol{\mu}^* \in \mathbf{M}_0, \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\mu}^* \cdot ([\mathbf{u}] - \mathbf{w}) d\Gamma_c = 0 \\ \forall \mathbf{w}^* \in \mathbf{M}_0, - \int_{\Gamma_c} \mathbf{w}^* \cdot (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{t}_c) d\Gamma_c = 0 \\ \forall \lambda_n^* \in M_0, - \int_{\Gamma_c} \frac{\lambda_n - t'_{c,n}}{r} \lambda_n^* d\Gamma_c = 0, \quad \forall \lambda_s^* \in \mathbf{M}_0, - \int_{\Gamma_c} \frac{\lambda_s - \mathbf{t}'_{c,s}}{r\beta^2} \cdot \boldsymbol{\lambda}_s^* d\Gamma_c = 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

avec:

$$\mathbf{U}_0 = \{\mathbf{u}^* \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{u}^* \text{ discontinu à travers } \Gamma_c \text{ et } \mathbf{u}^* = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}, \quad M_0 = \{\Lambda^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\} \quad (4.12)$$

Dans le cadre de notre problème hydromécanique, nous faisons l'hypothèse des contraintes effectives de Biot [127], [128], [129]. En particulier, la contrainte cohésive totale s'écrit: $\mathbf{t}_c = \mathbf{t}'_c - p_f \mathbf{n}$ avec $\mathbf{t}'_c$ la contrainte cohésive effective et $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire dirigé de la matrice poreuse vers l'interface cohésive. Dans la troisième condition d'optimalité, la dérivée partielle de $\Pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda})$ par rapport au saut de déplacement $\mathbf{w}$ fait apparaître la contrainte cohésive totale $\mathbf{t}_c$ dans la mesure où c'est la contrainte cohésive totale qui s'exerce sur les lèvres de l'interface cohésive Γ_c . On peut donc réécrire cette condition d'optimalité en faisant intervenir la pression de fluide p_f dans l'interface cohésive:

$$\forall \mathbf{w}^* \in \mathbf{M}_0, - \int_{\Gamma_c} \mathbf{w}^* \cdot (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{t}'_c + p_f \mathbf{n}) d\Gamma_c = 0 \quad (4.13)$$

En revanche, pour la quatrième condition d'optimalité, la nullité de la dérivée partielle de $\Pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda})$ par rapport à $\boldsymbol{\lambda}$ traduit bien la loi d'interface, c'est à dire l'égalité entre le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ et la contrainte cohésive effective $\mathbf{t}'_c$.

Les champs $\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\mu}$ seront définis dans la base globale $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$ et les champs $\mathbf{w}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ seront définis dans la base locale de la fracture cohésive $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b})$ avec $\mathbf{n}$ la normale à la fracture cohésive. La première condition d'optimalité s'interprète comme l'équation globale d'équilibre mécanique. Le terme $\int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\mu} \cdot [\mathbf{u}^*] d\Gamma_c$ tient compte du travail des contraintes cohésives dans la fracture. La seconde condition d'optimalité n'est autre que la projection du saut de déplacement $[\mathbf{u}]$ dans l'espace réduit M_0 . La troisième s'interprète comme la projection de la contrainte cohésive totale $\mathbf{t}_c$ dans l'espace réduit M_0 . Enfin, la quatrième condition d'optimalité traduit la loi d'interface.

La formulation faible pour le problème hydrodynamique (équation de conservation de la masse dans la fracture cohésive, équation de conservation de la masse dans la matrice poreuse et équations de dualisation de la condition de continuité de la pression du fluide aux lèvres de la fracture cohésive) reste identique à celle présentée dans l'Annexe B et la résolution du problème global couplé s'effectue de la même manière que précédemment, avec un algorithme de Newton-Raphson. La forme linéarisée de la formulation faible pour l'ensemble du problème (mécanique et hydrodynamique) est détaillée dans l'Annexe C. Cette nouvelle formulation pour le modèle de zone cohésive fait intervenir deux degrés de liberté supplémentaires par rapport à la formulation initialement adoptée (Annexe B): le saut de

déplacement $\mathbf{w}$ et le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$. Sur la Figure 4.4, on représente un élément quadrangle HM-XFEM et ses degrés de liberté dans le cadre de cette nouvelle formulation. Les degrés de liberté $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont les déplacements et les degrés de liberté $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ sont les degrés de liberté pour le champ de pression.

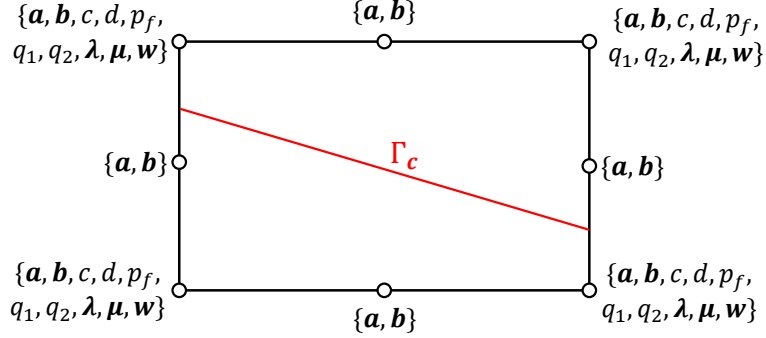


Figure 4.4 – Un élément quadrangle HM-XFEM.

Contrairement à ce qui était fait pour la formulation initiale, on ne fait pas intervenir de colocation aux points de Gauss de la fracture cohésive. Le saut de déplacement au niveau de la fracture cohésive $\mathbf{w}$ est directement disponible aux noeuds sommets des arêtes intersectées (car c'est un degré de liberté). On peut donc stocker les variables internes associées à l'interface cohésive (essentiellement la quantité d'énergie dissipée) au niveau des noeuds sommets. On fait de même pour les variables internes hydrauliques associées à l'interface cohésive (essentiellement la masse volumique ρ du fluide dans la fracture).

Le détail des équations du modèle HM-XFEM dans son intégralité et l'expression des seconds membres et des matrices élémentaires est disponible dans [130].

4.1.3 Espaces d'approximation pour les champs associés à la fracture cohésive

On rappelle que pour chacun des champs associés à la fracture cohésive Γ_c (p_f , q_1 , q_2 , $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{w}$), l'ensemble cinématiquement admissible associé sera:

$$M_0 = \{\Lambda^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\} \quad (4.14)$$

$H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées premières sont de carré intégrable sur Ω . Le saut de déplacement $[\mathbf{u}]$ est défini sur l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ associé à la trace de $H^1(\Omega)$ restreint à Γ_c . Son espace dual associé est $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.

L'espace d'approximation des champs associés à la fracture cohésive repose sur les noeuds sommets des arêtes coupées par Γ_c et les noeuds par lesquels passe Γ_c (pour les noeuds sommets qui n'appartiennent pas à une arête intersectée, on élimine les degrés de liberté cohésifs avec la méthode exposée par Géniaut [131]). Comme expliqué dans l'Annexe B, on réduit cet espace d'approximation pour satisfaire la condition LBB [29] et éviter l'apparition d'oscillations parasites dans la résolution numérique. Pour ce faire, on impose des relations d'égalités pour les champs cohésifs des noeuds sommets de certaines arêtes intersectées par la discontinuité. Cette idée a d'abord été introduite par Moës et al. [30] puis améliorée par Béchet [31]. Un algorithme de sélection des arêtes sujettes à ces relations d'égalité, basé sur les travaux de Moës et al. [30] a spécifiquement été développé par Géniaut [3]. Il repose sur le concept d'arêtes vitales. On rassemble dans un premier temps les arêtes qui ont un noeud sommet en commun dans des groupes d'arêtes. Puis, si une arête d'un groupe peut être supprimée sans isoler les noeuds auxquels elle est connectée, alors cette arête est considérée comme non vitale. Enfin, des relations d'égalité sont imposées entre les degrés de liberté cohésifs des noeuds reliés par des arêtes vitales. Donc, au sein d'un groupe d'arêtes vitales, un champ cohésif Λ ne sera approximé que par un seul et même degré de liberté commun. Sur la Figure 4.5 en haut, on a représenté un exemple pour une

interface traversant des mailles triangulaires. Les arêtes vitales sont représentées en pointillés, et pour un champ cohésif Λ , la dimension de l'espace d'approximation est 4.

Jusque-là, nous nous sommes basés sur cette approche pour la réduction de l'espace d'approximation des champs associés à la fracture cohésive dans notre modèle HM-XFEM. Récemment, Ferté [4] a proposé une nouvelle approche pour la sélection des arêtes sur lesquelles imposer des relations d'égalité, qui repose sur la proximité entre la fracture cohésive et les noeuds des arêtes intersectées. Ainsi, pour chaque groupe d'arêtes connectant, si l'interface cohésive passe à proximité d'un noeud sommet, les arêtes intersectées reliées à ce noeud seront vitales (voir Figure 4.5 en bas à droite). Et dans le cas où l'interface reste à une distance suffisante de chacun des noeuds sommets, on ne retient qu'une seule arête vitale choisie au hasard dans le groupe connectant (voir Figure 4.5 en bas à gauche). Pour l'exemple représenté dans la Figure 4.5, entre l'approche de Géniaut et l'approche de Ferté, la dimension de l'espace d'approximation passe de 5 à 9 ou 11 suivant si l'interface passe à proximité d'un noeud sommet ou non. Le nouvel espace d'approximation obtenu, moins restreint, permet d'obtenir de meilleures propriétés de convergence avec des éléments quadratiques (voir [4]). Désormais nous adaptons cette approche pour la construction de l'espace

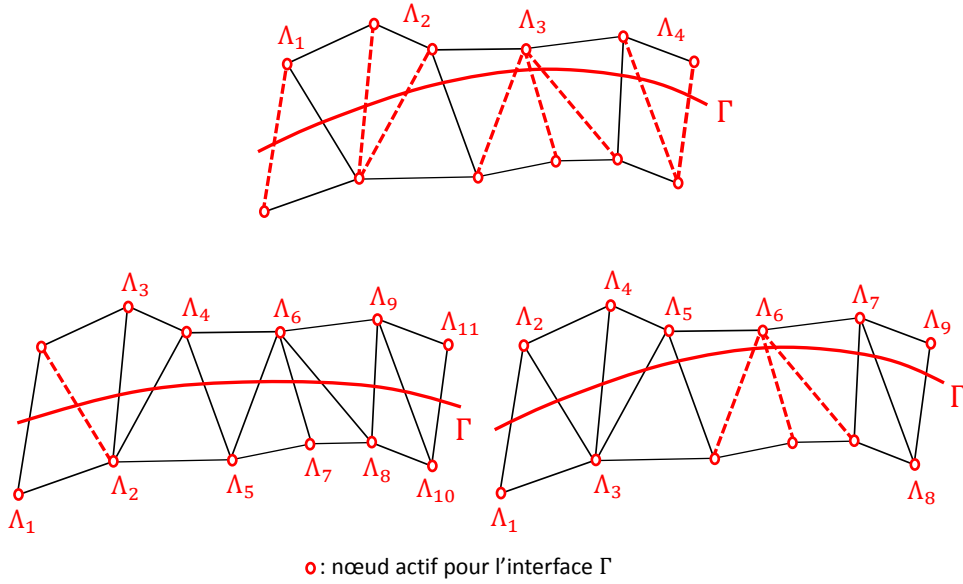


Figure 4.5 – Espaces d'approximation pour les champs associés à la fracture cohésive d'après Géniaut [3] en haut et d'après Ferté [4] en bas.

4.2 Validation du nouveau modèle

4.2.1 Introduction

Afin de valider ce nouveau modèle, on effectue un test de validation analytique similaire à celui effectué dans l'Annexe B mais avec une interface plane au sein d'un milieu poro-élastique 3D. La solution analytique asymptotique de ce cas connu dans la littérature sous le nom de "penny shaped hydraulic crack" [78] est également détaillée dans [27]. Elle diffère peu du cas 2D effectué dans l'Annexe B. Elle repose toujours sur le développement en séries d'inconnues adimensionnelles [132]. Par la même occasion, ce test permet de valider les éléments 3D HM-XFEM que nous avons développés.

La géométrie du problème est représentée sur la Figure 4.6. Un flux de fluide Q_0 est injecté ponctuellement dans un bloc poro-élastique saturé semi-infini, soumis à une contrainte verticale σ_0 . Le fluide injecté est supposé incompressible. On simule alors la propagation d'une fracture hydraulique circulaire horizontale alimentée en son centre par un puits vertical. La propagation se fait donc radialement dans un plan perpendiculaire à l'axe du puits en 2D. Ce modèle asymptotique prend en compte:

- la déformation de la matrice solide élastique sous l'action de l'augmentation de la pression du fluide au niveau des parois de la fissure,
- l'écoulement du fluide dans la fracture, qui est gouvernée par la loi cubique,

- les échanges de matière avec la matrice solide poreuse, supposés unidirectionnels et donnés par la loi de Carter [133],
- et la propagation de la fracture hydraulique en mode I, la matrice solide ayant une ténacité K_c .

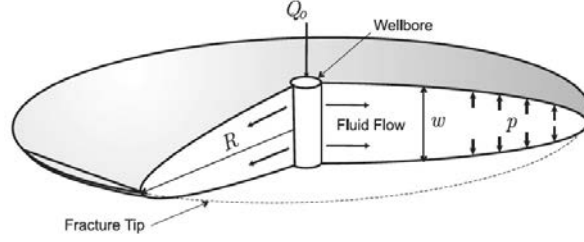


Figure 4.6 – Modèle de propagation radial (extrait de [5]).

Comme dans le modèle KGD présenté dans l'Annexe B, il est possible de distinguer dans le cas général 4 principaux régimes asymptotiques: le régime dominé par les effets de la ténacité de la matrice solide et par l'accumulation du fluide dans la fracture (*storage-toughness dominated regime*), le régime dominé par les effets de la ténacité de la matrice solide et par la fuite du fluide dans la matrice poreuse (*leak-off-toughness dominated regime*), le régime dominé par les effets de la viscosité du fluide et par l'accumulation du fluide dans la fracture (*storage viscosity dominated regime*) et le régime dominé par les effets de la viscosité du fluide et la fuite du fluide dans la matrice poreuse (*leak-off-toughness dominated regime*) en fonction de deux paramètres adimensionnels K (ténacité adimensionnelle) et C (coefficient de "leak-off" adimensionnel).

$$K = \frac{4K_c}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{3Q_0 E'^3 \mu} \right)^{\frac{1}{4}} \quad C = 2C_L \left(\frac{E' t}{12\mu Q_0^3} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (4.15)$$

avec $K_c = \sqrt{E' G_c}$, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ et C_L le coefficient de "leak-off". t est la durée d'injection.

Comme le suggère Detournay [112], le coefficient de ténacité adimensionnel K est interprété comme étant le rapport entre l'énergie dissipée dans le processus de fracturation et l'énergie dissipée par les effets visqueux.

La solution analytique de ce problème repose sur l'adimensionalisation des équations constitutives du modèle et le développement en séries d'inconnues adimensionnelles (la pression du fluide, l'ouverture de la fracture et le rayon de la fracture). En particulier, la montée en ordre dans le développement en séries permet une accommodation de la solution à des régimes intermédiaires (entre 2 régimes asymptotiques par exemple). La solution analytique prévoit une singularité $\frac{2}{3}$ (i.e $w \sim r^{\frac{2}{3}}$ avec w l'ouverture normale de la fracture et r la distance au fond de fissure) pour les régimes de propagation dominés par les effets de la viscosité du fluide et une singularité $\frac{1}{2}$ pour les régimes de propagation dominés par les effets de la ténacité de la matrice poreuse. L'existence de ces régimes asymptotiques a été confirmée expérimentalement avec des mesures optiques de l'ouverture de fractures hydrauliques [134]. On s'intéressera uniquement ici au *storage toughness dominated regime*, pour lequel la majorité du fluide injecté dans la fracture est stockée dans la fracture dont le comportement sera dominé par les effets de la ténacité du matériau plutôt que par les effets de dissipation liés à la viscosité du fluide.

En plus du modèle KGD proposé par Khristianovic et Zheltov [78] que nous avons exposé et confronté à notre modèle dans l'Annexe B et du modèle "penny shaped" que nous avons présenté et expérimenté ci-dessus, il existe d'autres modèles pour la propagation de fractures hydrauliques, qui font également intervenir une géométrie de fracture idéale. En particulier, le modèle PKN, introduit par Perkins et Kerns [79] puis modifié par Nordgren [76], implique la propagation d'une fracture verticale plane dont la hauteur fixée H est supposée plus faible que sa longueur l (voir Figure 4.7 à gauche). La propagation et l'écoulement sont supposés unidimensionnels dans la direction horizontale. Enfin, le modèle P3D (pseudo three dimensional) introduit par Settari et al. [135] et Palmer et al. [80] est une extension du modèle PKN, pour lequel la fracture verticale est soumise à une contrainte de confinement horizontale. Cette contrainte de confinement est prise plus importante au niveau des extrémités inférieure et supérieure du plan de la fracture (voir Figure 4.7 à droite) de manière à privilégier l'ouverture de la fracture dans la direction horizontale. Des travaux numériques avec le modèle P3D ont été effectués par Dontsov et

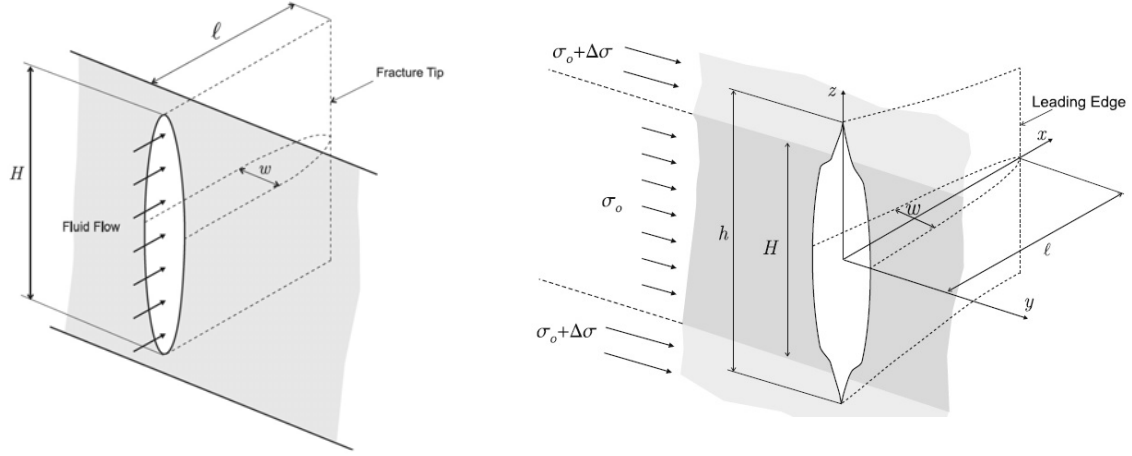


Figure 4.7 – Modèle de propagation PKN (extrait de [5]) (à gauche) et modèle de propagation P3D (extrait de [6]) (à droite).

Peirce [136]. Pour ces deux modèles, la condition de contraintes planes est supposée vérifiée dans chaque plan perpendiculaire au plan de la fracture.

Afin de capter le mieux possible les solutions analytiques asymptotiques détaillées dans [6], [27], [80] pour ces différents modèles, certains auteurs proposent de mettre en place un enrichissement singulier adapté au régime de propagation au niveau du fond de fissure [110], [111], [137] (singularité $\frac{2}{3}$ lorsque les effets visqueux prédominent et singularité $\frac{1}{2}$ lorsque les effets de la ténacité de la matrice prédominent). On récupère alors des taux de convergence optimaux vers la solution analytique [73].

4.2.2 Présentation du cas d'étude

On considère un domaine cylindrique de hauteur $H = 40m$ et de rayon $R = 20m$. Le cylindre est traversé à mi-hauteur par une interface cohésive plane représentée au moyen d'une *level set normale*. Ce plan constitue la surface potentielle de fissuration. Il n'évolue pas au cours de la simulation. Sous l'effet de l'injection de fluide au centre de cette surface potentielle de fissuration, les parois de l'interface cohésive s'entrouvrent et la fissure se développe à mesure que le fluide sous pression compense les efforts de cohésion. Le modèle de zone cohésive sépare ainsi naturellement les zones adhérentes des zones ouvertes. La pression de pore est fixée à zéro sur les faces inférieures et supérieures du cylindre.

Les propriétés matérielles de la matrice poreuse, du fluide et les caractéristiques de la zone cohésive utilisées dans notre simulation sont résumées ci-après:

Paramètres matériaux pour le massif poreux et le fluide	
Module de Young	$E = 17GPa$
Module de Poisson	$\nu = 0,2$
Coefficient de Biot	$b = 0,75$
Perméabilité intrinsèque	$k^{int} = 10^{-15}m^2$
Porosité	$\phi = 0,2$
Viscosité dynamique	$\mu = 10^{-4}Pa.s$
Module de compressibilité du liquide	$\frac{1}{K_w} = 0Pa^{-1}$
Masse volumique du liquide	$\rho = 1000kg.m^{-3}$
Contrainte critique	$\sigma_c = 1,25MPa$
Energie cohésive	$G_c = 120Pa.m$
Coefficient d'augmentation	$r = 2$

On injecte un flux ponctuel $Q_0 = 5 kg.s^{-1}$ au centre de la zone potentielle de fissuration pour une durée totale égale à 8 secondes et on impose une contrainte de confinement verticale $\sigma_0 = 3,7MPa$. Le coefficient de "leak-off" équivalent pour la loi de Carter C_L sera identifié *a posteriori*. Nous l'avons trouvé égal à $3.10^{-5}U.I.$

On vérifie alors $K = \frac{4K_c}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{3Q_0 E'^3 \mu} \right)^{\frac{1}{4}} = 2.89$ et $C = 2C_L \left(\frac{E' t}{12\mu Q_0^3} \right)^{\frac{1}{6}} = 0.18$. D'après [112], on se situe bien dans le régime asymptotique *storage toughness dominated regime*.

Le maillage utilisé, constitué de 7400 hexaèdres à 20 noeuds et 100 pentaèdres à 15 noeuds, est représenté sur la Figure 4.8. Le problème présente une symétrie cylindrique. On ne modélise donc

qu'une fraction angulaire du domaine (30° d'angle) et on bloque les déplacements normaux sur les faces latérales. Le maillage possède un raffinement vertical plus fin au voisinage de l'interface cohésive.

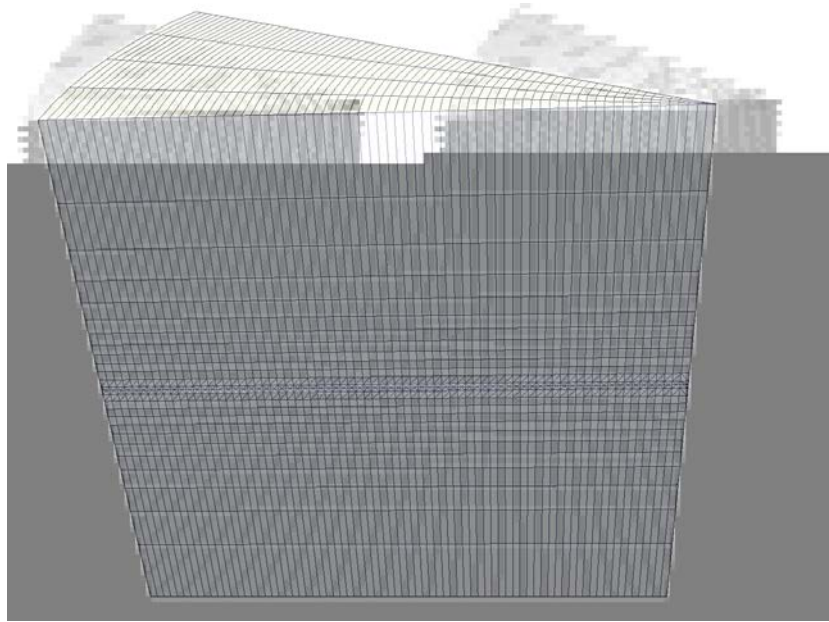


Figure 4.8 – Maillage utilisé pour le cas radial.

4.2.3 Résultats numériques

La déformée amplifiée et la pression de pore obtenues pour $t = 8s$ sont représentées sur la Figure 4.9. On vérifie que la solution obtenue présente bien une symétrie radiale. Pour une valeur de la distance r au point d'injection, la variation relative des champs le long de l'arc est inférieure à 0.5%. Le calcul a demandé une quinzaine d'heures avec une version parallélisée de *Code_Aster*.

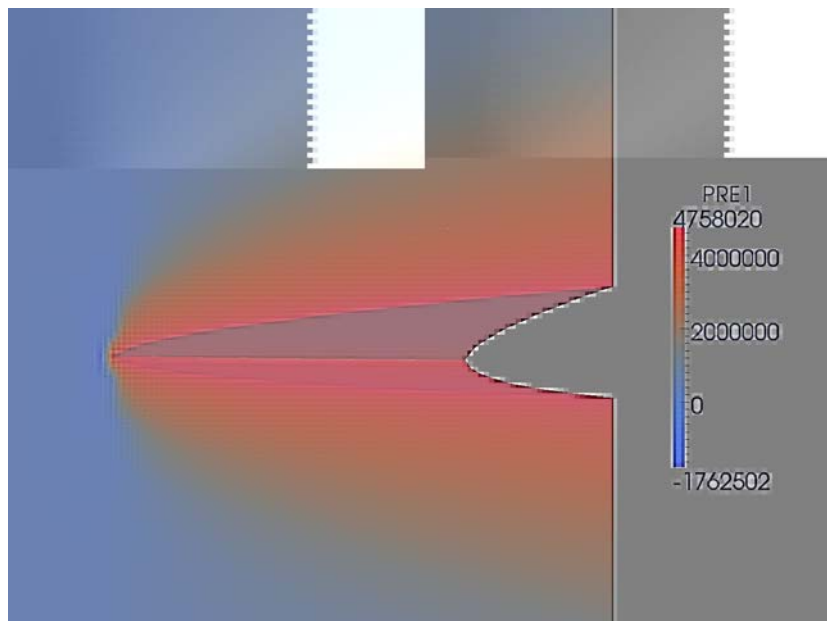


Figure 4.9 – Déformée (X800) et pression de pore (en Pa) à $t=8s$.

Dans le modèle "penny shaped hydraulic crack", les pertes de fluide dans la matrice poreuse au

niveau des parois de la fissure sont modélisées à l'aide de la loi de Carter [138]. Les pertes de fluide par unité de surface au niveau des parois de la fissure $g(r, t)$ sont alors données par:

$$g(r, t) = \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_0(r)}} \quad (4.16)$$

où $t_0(r)$ est le temps au bout duquel la fracture hydraulique atteint le rayon r par rapport au point d'injection et C_L le coefficient de "leak-off". Le coefficient 2 devant C_L est ajouté pour prendre en compte à la fois les parois inférieure et supérieure de la fracture. Dans notre modèle numérique, le couplage hydromécanique entre la fracture hydraulique et la matrice poreuse est total. Les échanges de fluide entre l'interface et la matrice solide poreuse (degrés de liberté q_1 et q_2) sont obtenus après résolution du système d'équations couplé. On se propose de vérifier l'adéquation de la loi de Carter avec notre modèle hydromécanique entièrement couplé. En particulier, on déterminera *a posteriori* le coefficient de "leak-off" C_L dans le cas étudié. Pour ce faire, on se place à une distance $r = 3,2m$ du point d'injection et on relève l'instant $t_0(r)$ au bout duquel la fracture atteint ce point. Puis, on relève en ce point, pour différents instants supérieurs à $t_0(r)$, la valeur des flux de fluide q_1 et q_2 de la fracture cohésive vers les parties supérieure et inférieure du domaine. Etant donnée la symétrie du problème par rapport au plan de la fracture, on vérifie que q_1 et q_2 sont égaux. On trace alors q_1 , soit la quantité de fluide qui s'échappe de la fracture vers la partie supérieure de la matrice poreuse par unité de surface, en fonction de $\frac{1}{\sqrt{t - t_0(r)}}$. Le graphe obtenu est représenté sur la Figure 4.10.

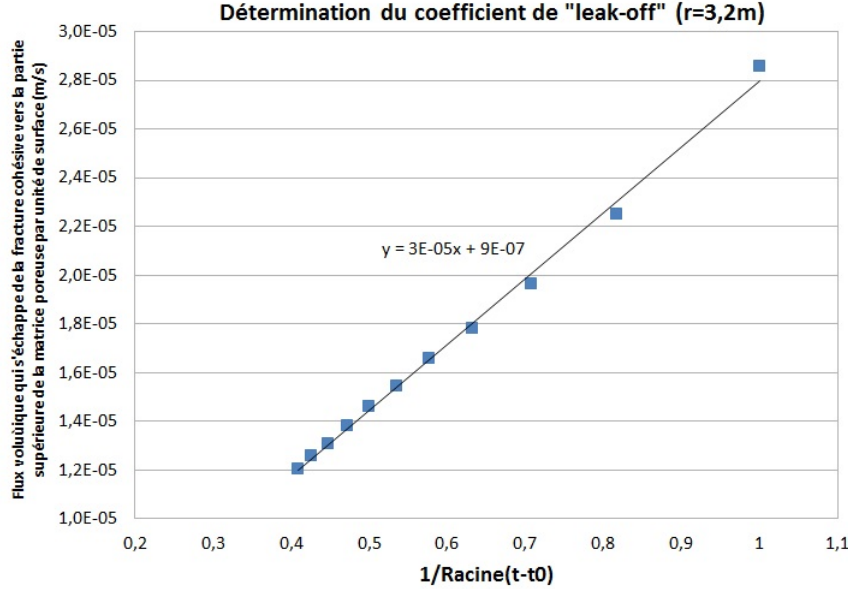
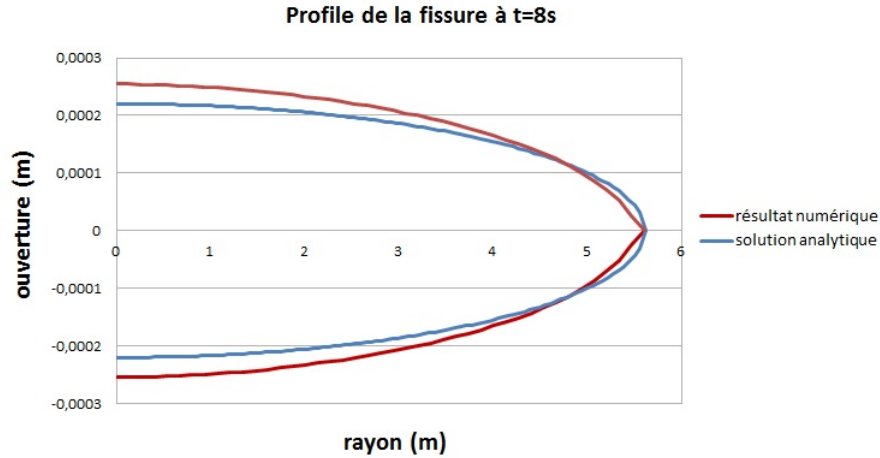


Figure 4.10 – Détermination du coefficient C_L .

Les valeurs de q_1 obtenues pour différents instants s'alignent de manière plutôt satisfaisante sur une droite. La loi de Carter semble donc adaptée pour modéliser le "leak-off" que nous avons obtenu avec notre modèle hydromécanique couplé. Et le coefficient de "leak-off" associé vaut $C_L = 3.10^{-5} U.I.$. Nous avons effectué une nouvelle fois l'expérience avec une valeur différente du rayon ($r = 4,8m$) et trouvé la même valeur de C_L par régression.

Cet accord entre la loi de Carter et le "leak-off" donné par notre modèle hydromécanique couplé n'est bien évidemment pas valable dans le cas général. Les limites de la loi de Carter pour les temps longs dans le cas de fractures hydrauliques planes tridimensionnelles ont été mises en évidence dans [139]. Et dès lors que les fractures sont non planes ou que plusieurs fractures hydrauliques sont situées à proximité l'une de l'autre, la loi de Carter devient complètement inapplicable et il devient très avantageux de disposer d'un modèle hydromécanique fortement couplé comme le notre pour modéliser le "leak-off".

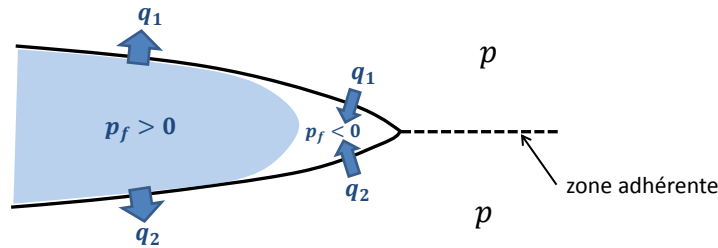
Maintenant que nous avons obtenu le coefficient de "leak-off" C_L équivalent, nous pouvons comparer nos résultats numériques avec la solution analytique. Le profil de la fracture obtenu à $t = 8s$ est représenté sur la Figure 4.11 et comparé à la solution analytique.

Figure 4.11 – Profil de la fissure à $t=8s$ (en Pa).

L'accord entre le résultat numérique et la solution analytique est moins satisfaisant que pour les cas de validation effectués dans l'Annexe B. Cependant, cette précision relative est à mettre en perspective avec le maillage plutôt peu raffiné que nous avons utilisé, mais qui se situait dans la limite des moyens dont nous disposions en termes de puissance de calcul (la matrice carrée à inverser avait une taille de l'ordre de 500000). Dans tous les cas, notre modèle HM-XFEM parvient à donner une tendance assez précise du profil de la fracture tel que prévu par la solution analytique dans le cas *storage toughness dominated regime*.

4.2.4 Pression de fluide négative en fond de fissure

Lorsque les effets visqueux prédominent dans la propagation de la fracture hydraulique ("viscosity dominated regime"), on observe avec notre modèle une chute de pression importante en fond de fissure, qui se traduit généralement par des valeurs négatives de la pression de fluide p_f . En amont du fond de fissure, dans la zone adhérente, la pression de fluide p_f redevient égale à la pression de pore locale dans la matrice poreuse p (qui est positive). Cette chute de la pression de fluide p_f crée un appel de fluide en fond de fissure qui se manifeste par une inversion des flux d'échange entre la fracture cohésive et la matrice poreuse (voir Figure 4.12)

Figure 4.12 – Pression de fluide négative en fond de fissure et inversion des échanges q_1 et q_2 entre la matrice poreuse et la fracture cohésive.

Dans le cas de validation que nous avons effectué pour le "viscosity dominated regime" dans l'Annexe B, on observait une pression négative en fond de fissure, sans que cela ne vienne perturber significativement la résolution numérique car la comparaison avec la solution analytique était satisfaisante. Cependant, il est probable que ce phénomène numérique, bien que local, perturbe le fonctionnement de notre modèle dans la région du fond de fissure.

Ce phénomène traduit en fait l'existence d'un "fluid lag": le front d'avancée du fluide et la pointe de fracture ne coïncident pas. L'existence de ce "fluid lag" a été étudiée par les auteurs [91], [140], [141], qui soulignent que ce phénomène est systématiquement présent lorsque la viscosité du fluide domine le régime de propagation de la fracture. A ce titre il est important de noter que la singularité en pointe de

fracture est $w \sim r^{\frac{2}{3}}$ dans le cas où la viscosité du fluide domine le régime de propagation et $w \sim r^{\frac{1}{2}}$ dans le cas où la ténacité de la matrice poreuse domine le régime de propagation de la fracture hydraulique. C'est donc dans le cas dominé par la viscosité du fluide, pour lequel on attend un "fluid lag" et donc un fond de fissure "sec" que la singularité en fond de fissure diffère du cas mécanique classique sans couplage hydromécanique (voir paragraphe 2.3.3). Ce n'est donc pas la pointe de fissure (dans laquelle intervient le "fluid lag") qui gouverne la singularité observée pour la forme de la fissure mais plutôt les effets visqueux du fluide sur la matrice solide. Afin d'éviter l'apparition de valeurs négatives de la pression dans les modèles numériques, Shen et al. [91] proposent d'ajuster la pression à zéro dans la zone de "fluid lag", afin de simuler une phase gazeuse dans l'espace situé entre le front du fluide et le fond de fissure. Une alternative a été proposée par Gracie [142] qui propose de mettre en place un seuil sur le saut de déplacement normal pour l'intégration de la loi cubique (qui gouverne l'écoulement dans la fracture cohésive). Ainsi, en dessous d'une certaine ouverture normale de la fissure, la loi cubique ne s'applique pas, le fluide présent dans la fracture étant au repos. Enfin, Gordeliy et Pierce ont proposé un schéma numérique permettant de caractériser la propagation de la fracture en présence de "fluid lag" [101].

Chapitre 5

Propagation de fractures hydrauliques sur des trajets non prédéfinis

Dans la partie qui suit, nous allons présenter le procédé de propagation des fractures hydrauliques sur trajets inconnus. L'avancée du fond de fissure s'effectue toujours naturellement avec le modèle de zone cohésive, mais la bifurcation des fractures hydrauliques est déterminée *a posteriori* par un post-traitement du résultat cohésif. Au sein du maillage, la propagation d'une fracture hydraulique se traduit par une actualisation des *level set*. Finalement, divers exemples de réorientation de fractures hydrauliques en fonction des contraintes locales et de compétitions entre fractures hydrauliques voisines sont présentés.

5.1 Introduction

Parmi les différentes approches existantes pour la modélisation de la rupture fragile, nous avons opté pour le modèle de zone cohésive [64]. C'est une approche très commode à mettre en oeuvre avec la méthode XFEM. En particulier, l'avancée du fond de fissure s'effectue naturellement, dans une direction prédéfinie, avec l'établissement de l'équilibre mécanique de la structure. Pour anticiper une bifurcation dans le trajet de fissuration, on a recours à la mécanique linéaire de la rupture [143], [144], qui repose sur l'écriture de lois globales de conservation de l'énergie. D'autres approches existent comme les modèles à gradient [145], [146], les modèles de champ de phase [147], [148] ou bien encore des approches non locales qui reposent sur des techniques de régularisation [149], [150]. Mais celles-ci supposent une détérioration continue au sein de la structure. Avec notre modèle de zone cohésive, la surface de discontinuité est localisée et discrétisée.

Dans la littérature, il existe divers modèles pour la propagation de fractures hydrauliques sur des trajets non prédéfinis. La plupart discrétisent la surface de discontinuité et ont recours à des critères locaux pour déterminer la bifurcation des fractures. Dans le cadre du génie civil, ces modèles permettent par exemple d'étudier la déviation de fractures dans le béton [151], [152] [153], [154]. Dans le cadre de l'industrie pétrolière, le modèle hydromécanique couplé avec XFEM développé par Huygue et Remij [155] permet d'apprécier la réorientation de fractures issues d'un même puits en fonction des contraintes régionales. Toujours avec un modèle hydromécanique couplé avec XFEM et un modèle de zone cohésive, Wang étudie la réorientation des "wing crack" en fonction des contraintes régionales [156], ou encore les interférences entre deux fractures hydrauliques qui se propagent à proximité l'une de l'autre [157]. La réorientation de fractures hydrauliques tridimensionnelles a été étudiée par Gupta et Duarte [158] avec un modèle adaptatif GFEM ou bien encore avec un modèle de type DFN [159]. On peut également envisager de modéliser la déviation de fractures hydrauliques avec un modèle de joints hydrauliques reliés entre eux et formant un treillis [98]. Enfin on peut citer l'approche de type champ de phase de Wheeler et al. [85] pour la modélisation de la propagation de fractures hydrauliques sur trajets inconnus.

5.2 Procédure de propagation sur trajets inconnus

La procédure de propagation sur trajet non prédéfini que nous avons retenue a été développée par Ferté [7] pour modéliser la propagation de fractures dans les matériaux fragiles comme le béton. Elle

repose sur l'utilisation du modèle de zone cohésive présenté dans le chapitre précédent. Un trait original de cette procédure est la détermination *a posteriori* de l'avancée de la fracture, par un post-traitement du résultat cohésif. L'avancée de la fracture est effectuée dans le modèle grâce à la mise à jour des champs de *level set* normal et tangentiel avec une méthode géométrique (confer paragraphe 2.2.2).

Jusque-là, les fractures n'étaient définies au sein de notre modèle que par un champ de *level set normale*. Le long de cette interface cohésive immuable, le modèle de zone cohésive distingue naturellement la zone fracturée de la zone saine. Afin de mettre en oeuvre la propagation sur trajet non prédéfini, le fond de fissure devra être repéré implicitement par un champ de *level set tangente*. La formulation de type "Mortier" présentée dans le chapitre précédent permet la construction d'un tel champ de *level set tangente* pour repérer la position du fond cohésif. Comme nous le verrons dans le paragraphe 5.2.5, elle présente aussi l'avantage de faciliter la projection des champs associés à la fracture cohésive lors de la mise à jour de la surface de fissuration.

5.2.1 Résumé de la procédure

Dans ce chapitre, les fractures cohésives seront donc systématiquement définies à l'aide d'un champ de *level set normal* et d'un champ de *level set tangente*. Elles possèdent donc un fond de fissure. Cependant, on distinguera le fond de fissure du fond cohésif qui sépare la zone adhérente de la "process zone". La surface de discontinuité définie par le champ de *level set* : $\{\mathbf{x} \in \Omega : lsn(\mathbf{x}) \leq 0 \cap lst(\mathbf{x}) < 0\}$ sera qualifiée de surface potentielle de fissuration. La fracture à proprement parler se propage selon la surface potentielle de fissuration. Elle est délimitée par le fond cohésif. L'espace entre le fond cohésif et le fond de fissure correspond à la zone adhérente. La procédure de propagation sur trajet non prédéfini est résumée sur la Figure 5.1.

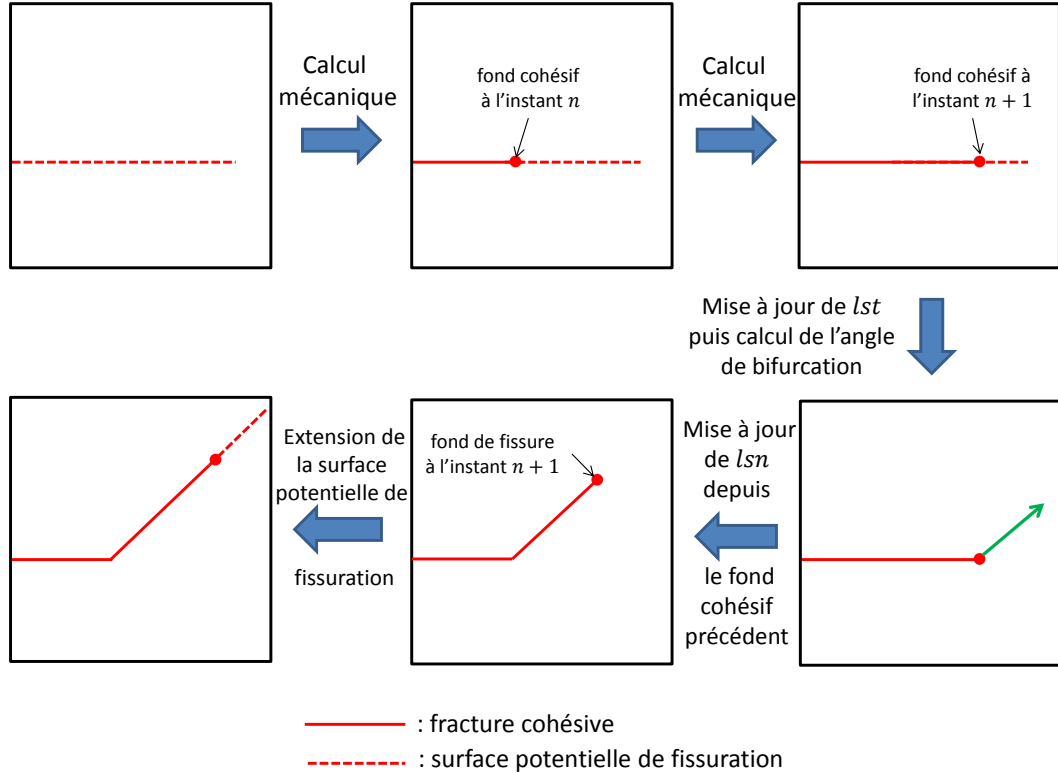


Figure 5.1 – Procédure de mise à jour de la surface de fissuration.

On considère une première surface potentielle de fissuration définie à l'aide d'un champ de *level set normale* et d'un champ de *level set tangente* (Figure 5.1 en haut à gauche). On procède à l'injection de fluide dans cette surface potentielle de fissuration. A l'instant n , on détecte le fond de fissure cohésif, qui sépare la zone fracturée de la zone adhérente (Figure 5.1 en haut au milieu). On poursuit alors l'injection de fluide jusqu'à l'instant $n + 1$. Une fois l'équilibre déterminé, le fond de fissure cohésif a avancé par rapport au fond précédent (Figure 5.1 en haut à droite). On procède une nouvelle fois à la détection du fond cohésif. Puis on effectue une mise à jour du champ de *level set tangente* pour faire

coïncider le fond cohésif détecté et le fond de fissure (Figure 5.1 en bas à droite). On calcule alors l'angle de bifurcation par un post traitement du résultat cohésif et on met à jour en conséquence le champ de *level set normale*, à partir du fond cohésif détecté à l'instant n (Figure 5.1 en bas au milieu). Le nouveau fond de fissure est alors repéré comme l'intersection entre l'iso-zéro du champ de *level set tangent* et l'iso-zéro du champ de *level set normal* mis à jour. Enfin, on étend la surface de fissuration potentielle (Figure 5.1 en bas à gauche).

Contrairement aux approches généralement adoptées pour la propagation de fractures sur trajets inconnus, cette méthode propose une actualisation implicite de la surface potentielle de fissuration, qui est mise à jour *a posteriori* depuis le fond cohésif précédent. Comme expliqué dans [7], ce choix est motivé par la fait qu'ainsi, l'avancée de la fissure devient en quelque sorte une inconnue du problème, elle n'est pas postulée *a priori*.

Remarque: la surface de fissuration potentielle doit toujours être choisie suffisamment large pour ne pas risquer de voir la fracture hydraulique arriver en butée. Durant les phases de calcul mécanique (injection de fluide), il faut veiller à ce que le fond cohésif ne se rapproche pas trop du fond de fissure. On prévoit donc toujours une marge dans la définition de la surface de fissuration potentielle, et une fois la mise à jour de la surface de fracture terminée, on étend la surface de fissuration potentielle (Figure 5.1 en bas à gauche) pour préparer le calcul suivant. En pratique, l'extension de la surface de fissuration potentielle n'est rien d'autre qu'une translation du champ de *level set tangente*.

Dans les paragraphes qui suivent, on présente en détails les différentes étapes de ce procédé de propagation sur trajet non prédéfini.

5.2.2 Détection du fond cohésif

Comme expliqué dans le paragraphe 4.1.2, les variables internes associées à l'interface cohésive sont portées par les noeuds sommets des éléments traversés par la fracture cohésive. En particulier, on dispose de la variable interne α en chacun de ces noeuds sommets. Cette variable interne quantifie l'énergie dissipée dans la zone cohésive. Elle vérifie $\alpha \leq 0$ en zone adhérente (où le processus de dissipation n'a pas débuté) et $0 < \alpha < 1$ dans la "process zone". En zone ouverte, on a $\alpha = 1$ (toute l'énergie a été dissipée). On va utiliser cette variable interne pour repérer la position du fond cohésif, qui correspond à l'endroit où $\alpha = 0$, c'est à dire la limite entre la zone adhérente et la "process zone". Au sein du maillage, le fond cohésif correspond donc à l'intersection entre l'iso-zéro de la *level set normale* et l'iso-zéro de la variable interne α . On détermine les points d'intersection entre le fond cohésif et les faces du maillage avec un algorithme de Newton-Raphson. La chaîne de points récupérée constitue une approximation du fond de fissure cohésif. Enfin, on actualise si besoin le champ de *level set tangente* avec une méthode géométrique pour l'adapter à la position du fond cohésif. Les détails sur la procédure de mise à jour du champ de level set sont disponibles dans [160]. Un exemple est représenté sur la Figure 5.2 pour une fissure plane dans un maillage constitué d'hexaédres.

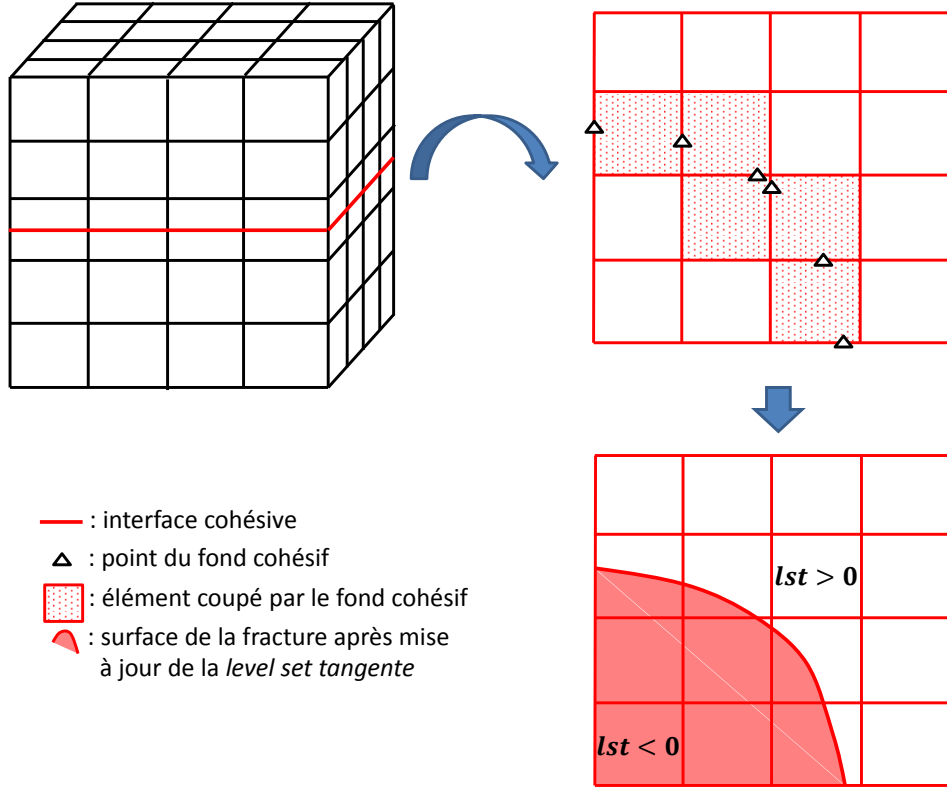
5.2.3 Angle de bifurcation

Parmi les critères pour la bifurcation des fractures, on peut citer le critère de déviation dans la direction normale à la contrainte de confinement principale [161] [162] ou encore le critère de minimisation de K_{II} (facteur d'intensité des contraintes pour le mode II, confer paragraphe 2.3.3) [163]:

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\sigma_{nt}}{\sigma_{nn} - \sigma_{tt}} \right) \quad (5.1)$$

avec $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b})$ la base orthonormée adaptée au fond de fissure (voir Figure 5.5). Ces critères sont directement écrits à partir de quantités locales, en l'occurrence le champ des contraintes au niveau du fond de fissure. Or pour des fractures tridimensionnelles avec des fonds de fissure courbes ou non lisses, le calcul de l'angle de bifurcation β à partir de quantités locales peut donner lieu à des variations sensibles de proche en proche, et finalement générer une surface de fissure propagée qui présente des aspérités. C'est pourquoi on préfère l'utilisation du critère de contrainte circonférentielle maximale d'Erdogan et Sih [164], traduit en termes de facteurs d'intensité des contraintes:

$$\beta = 2 \arctan \left[\frac{1}{4} \left(K_I/K_{II} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{(K_I/K_{II})^2 + 8} \right) \right] \quad (5.2)$$


 Figure 5.2 – Détection du front cohésif et mise à jour de la *level set tangent*.

Ce critère repose sur la minimisation des contraintes tangentielles à la fracture (σ_{tt}). Il est écrit ci-dessus à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} qui sont des quantités énergétiques globales. On devrait donc bénéficier d'une meilleure régularité dans le calcul de l'angle β .

Remarque: pour les modèles tridimensionnels, le fond de fissure est une courbe. On l'approxime par une chaîne de segments reliant les points d'intersection entre les faces du maillage et le fond cohésif (confer paragraphe précédent). Ensuite, on répartit sur cette chaîne de segments un certain nombre de points de calcul. C'est au niveau de ces points de calcul que l'on détermine les facteurs d'intensité des contraintes et l'angle de déviation β . Enfin, on interpole le champ β sur tout le fond de fissure à partir des valeurs déterminées aux points de calcul. Plus de détails sont disponibles dans [20].

Afin de déterminer ces facteurs d'intensité des contraintes, on utilise la même méthode que Ferté [7]. Ferté a montré que l'on peut toujours définir une intégrale de Rice J dans le cadre d'un modèle de zone cohésive et que celle-ci peut s'exprimer en fonction d'intégrales sur la zone cohésive uniquement:

$$J = - \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_c \cdot \nabla[\mathbf{u}] \cdot \boldsymbol{\theta} d\Gamma_c \quad (5.3)$$

avec $[\mathbf{u}]$ le saut de déplacement à travers la fracture cohésive, $\mathbf{t}_c$ la contrainte cohésive totale qui s'applique sur les lèvres de la fracture et $\boldsymbol{\theta}$ une extension virtuelle de la fracture (voir Figure 5.3), c'est à dire un champ de vecteurs unitaires tangents à la surface de la fissure et dirigés vers le font de fissure.

Il a également établi l'égalité entre cette intégrale de Rice cohésive et la quantité G (dérivée de l'énergie potentielle totale par rapport à l'avancée de la fissure), reliée aux facteurs d'intensité des contraintes par la formule d'Irwin:

$$J = G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (5.4)$$

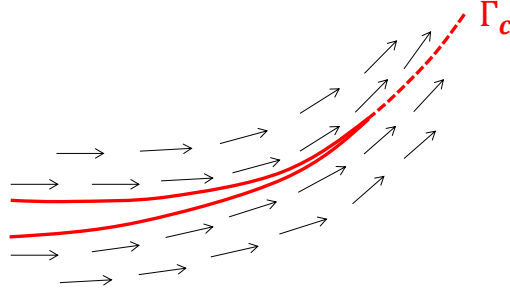


Figure 5.3 – Extension virtuelle de l'interface cohésive Γ_c .

On rappelle que dans l'hypothèse des contraintes effectives, pour notre problème hydromécanique: $\mathbf{t}_c = \mathbf{t}'_c - p_f \mathbf{n} = (t'_{c,n} - p_f) \mathbf{n} + t'_{c,t} \mathbf{t} + t'_{c,b} \mathbf{b}$. Par ailleurs, $\nabla[\mathbf{u}] \cdot \boldsymbol{\theta} = \frac{\partial[u]_n}{\partial\theta} \mathbf{n} + \frac{\partial[u]_t}{\partial\theta} \mathbf{t} + \frac{\partial[u]_b}{\partial\theta} \mathbf{b}$. Finalement, en combinant les équations 5.3 et 5.4, il vient par identification:

$$K_I^2 = -\frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Gamma_c} \frac{\partial[u]_n}{\partial\theta} (t'_{c,n} - p_f) d\Gamma_c \quad (5.5)$$

$$K_{II}^2 = -\frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Gamma_c} \frac{\partial[u]_t}{\partial\theta} t'_{c,t} d\Gamma_c \quad (5.6)$$

$$K_{III}^2 = -2\mu \int_{\Gamma_c} \frac{\partial[u]_b}{\partial\theta} t'_{c,b} d\Gamma_c \quad (5.7)$$

Pour calc
raisonner
nécessair
voir sur l
 $K_{II} > 0$)
Pour pre:
le signe s

uit le
,_t est
ut le
donc
< 0).
dont

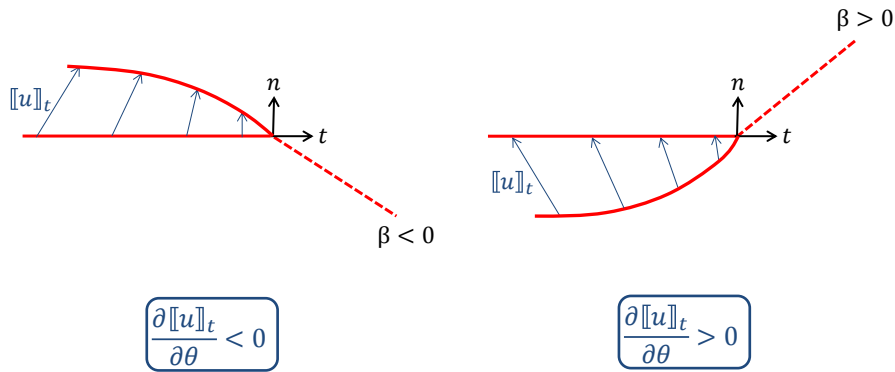


Figure 5.4 – Saut de déplacement tangentiel en pointe de fissure pour un angle de bifurcation β négatif (à gauche) et positif (à droite).

Ainsi, à partir de l'intégration de quantités dans la zone cohésive uniquement, on détermine les facteurs d'intensité des contraintes K_I et K_{II} nécessaires au calcul de l'angle de bifurcation β .

Remarque: dans ce paragraphe, nous avons transposé les résultats établis par Ferté [7] dans le cadre de la fissuration fragile d'un matériau élastique homogène à notre problème hydromécanique. Cependant, il convient de noter que les différentes hypothèses préalables à l'établissement de ces résultats ne sont plus valables dans le cas de l'hydrodynamique, en raison notamment des effets visqueux du fluide. Il est à noter aussi que la formule d'Irwin ou encore la formule qui donne l'angle de bifurcation β d'après le critère de la contrainte circonférentielle maximale ne sont plus nécessairement valables dans le cas où la singularité en pointe de fissure n'est pas $\frac{1}{2}$ (notamment dans le cas où les effets de la viscosité du fluide dominent le processus de propagation de la fracture hydraulique, confer le Chapitre précédent). Cependant, il ne faut pas perdre de vue que ces calculs ne débouchent que sur la détermination de l'angle de bifurcation β . L'essentiel est d'utiliser un critère qui opère une réorientation dans la direction perpendiculaire aux contraintes de confinement minimales. Nous avons fait le choix de rester dans l'esprit de la méthode proposée par Ferté pour la propagation de fractures cohésives sur trajets non prédéfinis. De plus, le critère de bifurcation qu'il suggère est commode dans le sens où il mobilise uniquement le calcul d'intégrales dans la zone cohésive et est écrit en termes de quantités globales.

5.2.4 Mise à jour de la *level set normale*

Une fois l'angle de bifurcation β calculé en différents points du fond, on procède à l'actualisation du champ de *level set normale*. Encore une fois, on utilise la méthode géométrique détaillée dans [160]. La mise à jour de la *level set normale* est effectuée à partir du fond cohésif détecté à l'instant n (voir Figure 5.5). La surface de la fracture obtenue à l'instant n doit donc rester inchangée. A cette fin, on effectue l'actualisation du champ de *level set normale* uniquement dans le domaine situé en amont du fond cohésif

détecté à lapté
au fond c ment
dans le d

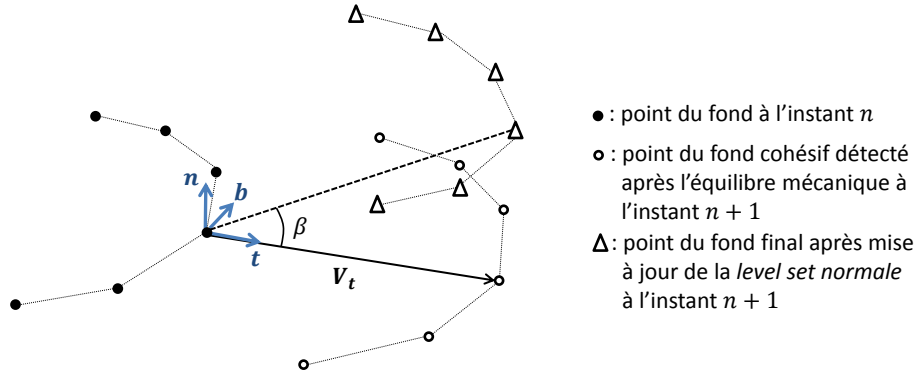


Figure 5.5 – Mise à jour implicite de la *level set normale*.

5.2.5 Vers un procédé auto-entretenu

Notre procédure de propagation sur trajet non prédéfini se heurte à un problème majeur. Une fois déterminée la nouvelle surface de fracture et la nouvelle zone de fissuration potentielle à l'instant $n + 1$, il faut projeter les champs du modèle traversé par la fracture non déviée sur le modèle traversé par la nouvelle fracture. Sur la Figure 5.1, cela revient à projeter les champs du modèle depuis la configuration représentée en haut à droite vers la configuration représentée en bas à gauche. Cette projection s'avère être assez complexe du fait de la variété des champs présents dans le modèle. Nous ne l'avons pas développée dans le cadre de cette thèse. Une fois la procédure de propagation terminée (Figure 5.1 en bas à gauche), on est donc obligé de relancer le calcul depuis le début si on souhaite poursuivre la propagation de la fracture hydraulique sur la nouvelle surface de fissuration potentielle. Des exemples seront détaillés dans la Section suivante. Ci-dessous, nous allons exposer des solutions pour mener à bien la projection des champs du modèle traversé par la fracture non déviée sur le modèle traversé par la nouvelle fracture, et ainsi garantir une procédure de propagation sur trajet inconnu "auto-entretenu". Ces solutions devront être mises en oeuvre lors des développements futurs du modèle.

On peut distinguer 4 types de champs à projeter:

- les champs associés à l'interface cohésive (degrés de liberté p_f , q_1 , q_2 , λ , $\mathbf{w}$, μ et les variables internes associées aux interfaces cohésives).
- la partie classique du champ des déplacements et du champ de pression de pore,
- la partie Heaviside du champ des déplacements et du champ de pression de pore,
- et les variables internes hydrauliques associées au massif, qui sont portées par les points d'intégration des éléments de volume.

La projection du premier type de champ ne pose pas de difficultés majeures dans la mesure où ces champs sont portés par les noeuds sommets des arêtes intersectées par la fracture cohésive et qu'une procédure de projection a été mise en place avec succès par Ferté [7]. La projection de la partie classique du champ des déplacements et du champ de pression de pore est directe, ces champs ne diffèrent pas entre les deux modèles. En revanche, la projection de la partie Heaviside du champ des déplacements et du champ de pression de pore n'est pas immédiate. En effet, comme on peut le voir sur la Figure 5.6, la position de la surface de discontinuité est modifiée entre les deux modèles et il en va donc de même pour l'enrichissement. Il s'agit donc de projeter l'enrichissement Heaviside d'une surface de fissuration à l'autre. Afin de faciliter cette opération, il est raisonnable de revenir à une approche explicite, c'est à dire à une mise à jour de la surface de discontinuité à partir du fond cohésif courant. Dans l'approche implicite que nous avons retenu [7], la bifurcation de la surface de discontinuité s'effectue depuis le fond cohésif précédent (voir Figure 5.6 à gauche). Une partie de la zone ouverte (la fracture cohésive) est donc amenée à se réorienter. Dans le cadre d'une approche explicite, la bifurcation de la surface de discontinuité s'effectuerait depuis le fond cohésif courant. Donc la zone ouverte resterait figée. Seule la zone adhérente de la surface de discontinuité serait mise à jour (voir Figure 5.6 à droite). Or en zone

adhér
Donc
où la
une e
de la
ces pi

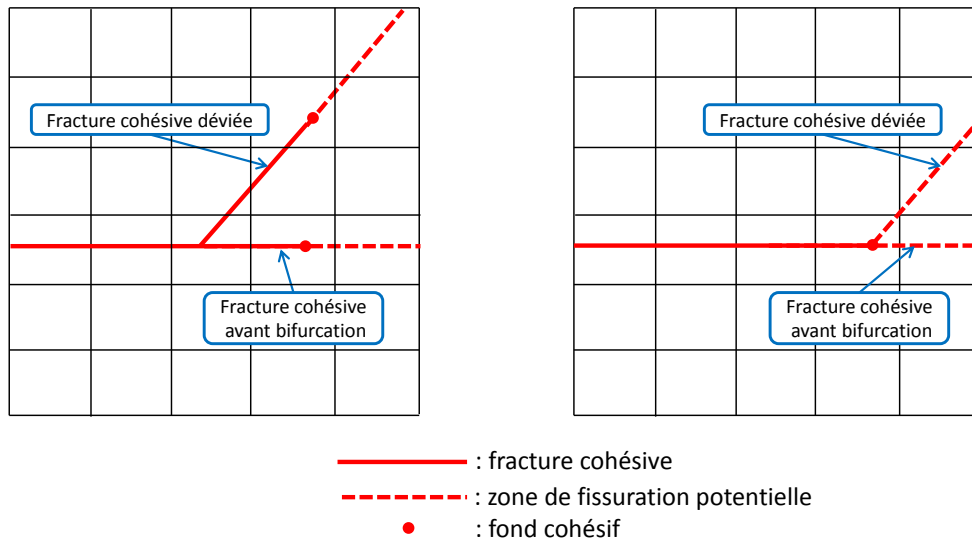


Figure 5.6 – Bifurcation d'une fracture cohésive après mise à jour de la *level set normale* avec une approche implicite (à gauche) et explicite (à droite).

Le quatrième type de champ (les variables internes associées au massif poreux) est porté par les points d'intégration des éléments volumiques. Or, comme on peut l'observer sur la Figure 5.7 à gauche, la disposition des points d'intégration dans les éléments traversés par une discontinuité dépend de la position de la discontinuité. Afin de supprimer cette dépendance, on peut opter pour l'utilisation d'une grille de points d'intégration fixe dans les éléments traversés par la discontinuité (Figure 5.7 à droite), comme suggéré par Ventura et al. [165]. Les variables internes associées au massif sont alors toujours portées aux mêmes endroits, quelle que soit la position de la discontinuité. Leur projection d'un modèle à l'autre est immédiate.

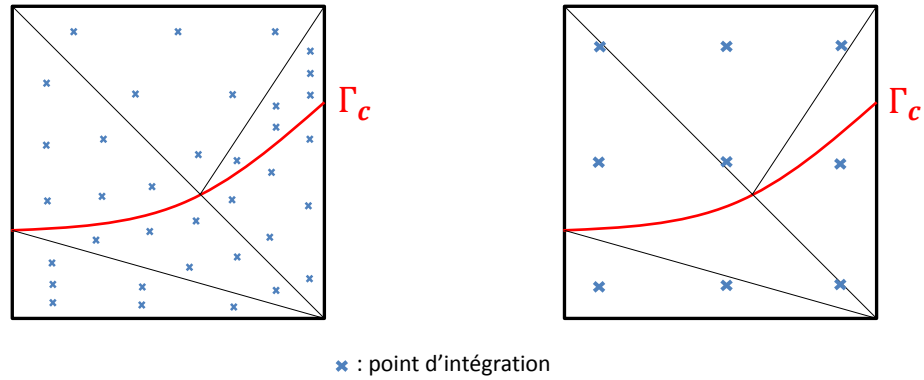


Figure 5.7 – Dans un élément quadrangle traversé par une interface: répartition des points de Gauss dans les différentes sous cellules d'intégration (à gauche) et sur une grille fixe (à droite).

Dans le cadre des travaux de thèse de Ferté, ce problème n'est pas survenu dans la mesure où les modélisations étaient quasi-statiques. L'histoire du chargement (qui se résume à la quantité d'énergie dissipée au niveau de la fracture cohésive) était alors intégralement contenue dans les quantités associées à l'interface cohésive. Seule la projection du premier type de champ était nécessaire. Le procédé de propagation sur trajet inconnu était alors auto-entretenu (voir Figure 5.8).

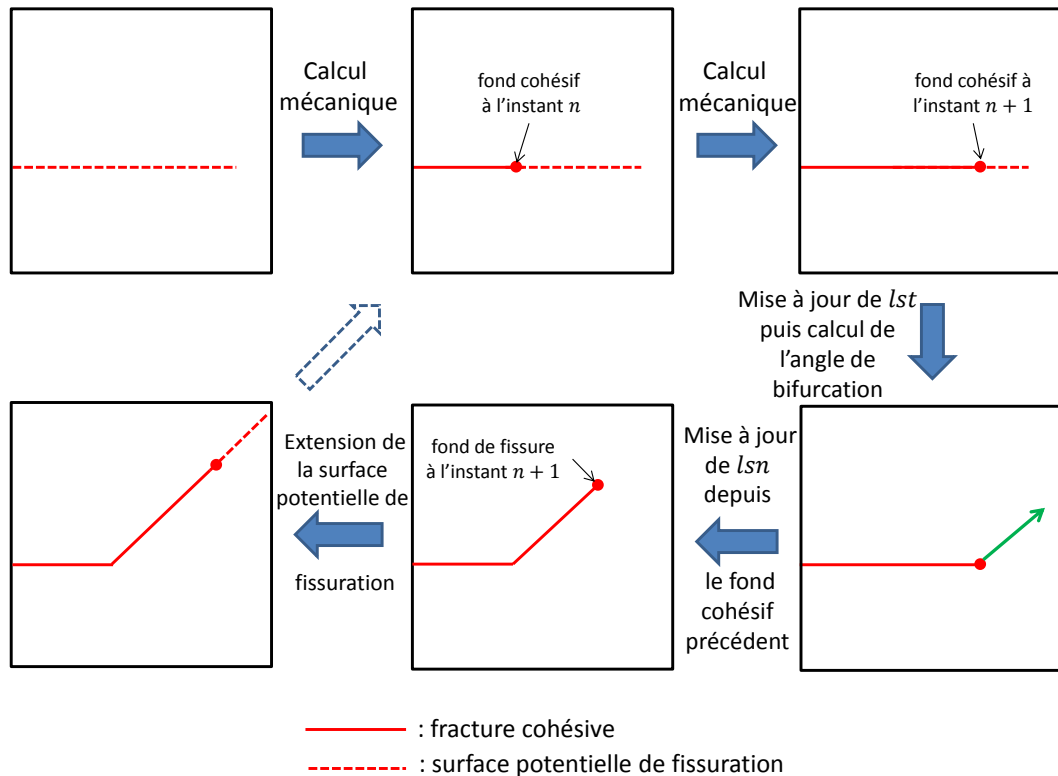


Figure 5.8 – Procédure itérative de propagation d'une fracture cohésive sur trajet inconnu d'après Ferté [7].

5.3 Cas d'application

Dans cette section, on réalise 4 tests de propagation de fractures hydrauliques sur trajets non prédéfinis, 3 bidimensionnels et un tridimensionnel. En premier lieu, on étudie la réorientation d'une "wing crack"

en fonction des contraintes locales. Puis, on effectue deux tests élémentaires pour observer l'influence mutuelle de deux fractures hydrauliques voisines. Le premier cas porte sur deux fractures hydrauliques se propageant parallèlement et le deuxième sur deux fractures hydrauliques qui se croisent. Ces deux tests constituent une première base pour étudier la compétition qui règne entre les différentes fractures hydrauliques d'un réseau. Enfin, on réalise un test de réorientation d'une fracture tridimensionnelle en fonction des contraintes locales.

5.3.1 Réorientation d'une fracture hydraulique 2D

Le premier test est un test de réorientation d'une fracture hydraulique en fonction des contraintes locales. On s'attend en effet à ce que la direction de propagation d'une fracture hydraulique s'oriente selon le maximum des contraintes de confinement. Dans cette direction, le fluide sous pression dans la fracture rencontre une résistance moindre pour ouvrir la fracture et la propager. A ce titre, le critère de bifurcation que nous avons retenu (confer paragraphe 5.2.3) est conçu pour minimiser les contraintes de confinement dans la nouvelle direction de propagation.

On considère un barreau de hauteur $H = 10m$ et de longueur $L = 16m$. Les déplacements verticaux sont bloqués sur les faces inférieure et supérieure du barreau. Sur les bords verticaux, le barreau est soumis à une contrainte de confinement $\sigma_0 = 0,6MPa$. On introduit une surface potentielle de fissuration plane inclinée d'un angle $\theta = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale, au centre du barreau (voir Figure 5.9 à gauche). Et on procède à l'injection d'un fluide avec un débit $Q = 1,6.10^{-1} kg.s^{-1}$ au centre de cette surface potentielle de fissuration pendant une durée totale de 30s. Le pas de temps utilisé Δt est de 0,1s pendant la première seconde et de 0,25s ensuite.

Le maillage utilisé est régulier, constitué de 2560 quadrangles à 8 noeuds. Les caractéristiques du matériau et du fluide sont les suivantes:

Paramètres matériaux pour le massif poreux et le fluide	
Module de Young	$E = 5800MPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.2$
Densité du liquide	$\rho = 1000kg.m^{-3}$
Coefficient de Biot	$b = 0.8$
Perméabilité intrinsèque	$k^{int} = 10^{-15}m^2$
Viscosité du fluide	$\mu = 0.001Pa.s$
Porosité	$\phi = 0.1$
Module de compressibilité du fluide	$\frac{1}{K_w} = 5.10^{-10}Pa^{-1}$
Contrainte critique	$\sigma_c = 1MPa$
Energie cohésive	$G_c = 900Pa.m$

Le premier calcul porte sur une durée totale égale à 6s. La fracture hydraulique se développe de part et d'autre du point d'injection, sur le trajet prédéfini par la surface de fissuration potentielle initiale. A $t = 5s$, on effectue une première détection pour les deux fonds cohésifs de la fracture. Et pour $t = 6s$, on effectue une première mise à jour de la surface potentielle de fissuration. Celle-ci bifurque alors à partir des fonds cohésifs détectés à $t = 5s$. On relance alors le calcul avec cette nouvelle surface potentielle de fissuration jusqu'à $t = 7s$, temps au bout duquel on effectue une nouvelle actualisation de la surface potentielle de fissuration. Et ainsi de suite jusqu'à $t = 30s$. En résumé, la propagation de la fracture s'effectue sur le trajet prévu par la surface de fissuration potentielle initiale pendant les 5 premières secondes et sur un trajet non prédéfini entre $t = 5s$ et $t = 30s$. La mise à jour de la surface de fissuration est alors effectuée toute les secondes. On relance donc le calcul 25 fois. L'ensemble de la simulation a demandé environ 5 heures pour arriver à son terme.

La déformée amplifiée et la pression de pore obtenues à $t = 30s$ (lors du dernier calcul avec la dernière surface de fissuration potentielle obtenue) sont représentées sur la Figure 5.9 à droite.

Dans la zone centrale du barreau, le trajet de fissuration est droit et coïncide avec la surface de fissuration potentielle initiale. Cette section de la fracture correspond à la propagation sur trajet prédéfini pendant les 5 premières secondes. Ensuite, la fracture hydraulique se réoriente progressivement vers la direction horizontale, c'est à dire parallèlement à la contrainte de confinement imposée σ_0 . Au niveau des deux extrémités de la fracture hydraulique, l'inclinaison par rapport à l'horizontale est inférieure à 5° d'angle. On assiste donc à la réorientation attendue. De plus, le motif obtenu est antisymétrique par rapport au point d'injection, les deux branches de la fracture hydraulique se comportant de manière similaire.

Ce premier test nous permet de contrôler le bon fonctionnement de notre procédure de propagation sur trajet non prédéfini et la bonne prise en compte du critère des contraintes circonférentielles maximales

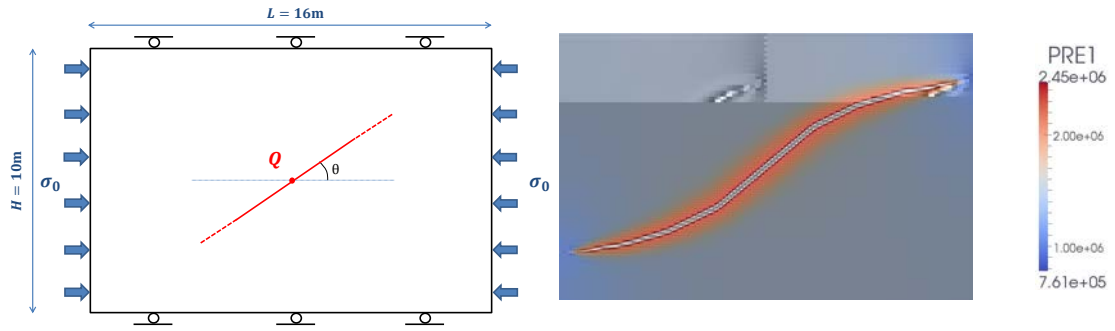


Figure 5.9 – Réorientation d'une fracture hydraulique 2D: géométrie du problème (à gauche), déformée amplifiée (X250) et pression de pore en Pa (à droite).

d'Erdogan et Sih [164] dans le cas 2D. Le motif que nous avons obtenu est très similaire à celui obtenu par Wang [156] avec un modèle hydromécanique couplé avec XFEM, pour un test de réorientation d'une "wing crack" analogue à celui que nous avons présenté ci-dessus.

5.3.2 Deux fractures hydrauliques parallèles

Le deuxième test porte sur la compétition entre deux fractures hydrauliques proches l'une de l'autre et qui se propagent dans la même direction. On cherche à observer l'influence qu'elles exercent l'une sur l'autre. Plus particulièrement, on s'attend à ce que les deux fractures hydrauliques se gênent dans leurs propagations respectives.

On considère un barreau carré de côté $L = 10m$. Les déplacements verticaux sont bloqués sur les faces inférieure et supérieure et les déplacements horizontaux sont bloqués sur les faces latérales. On introduit deux surfaces potentielles de fissuration verticales, débouchant sur la face inférieure du barreau et éloignées d'une distance $d = 3m$ (voir Figure 5.10 à gauche). On procède à l'injection d'un fluide avec un débit $Q = 3.10^{-1} kg.s^{-1}$ à l'embouchure des deux surfaces potentielles de fissuration pendant une durée totale de 16s. Le pas de temps utilisé Δt est de 0,1s pendant la première seconde et de 0,25s ensuite.

Le maillage utilisé est régulier, constitué de 1600 quadrangles à 8 noeuds. Les caractéristiques du matériau et du fluide sont identiques au cas précédent. Pendant les 6 premières secondes, la propagation de chacune des deux fractures hydrauliques s'effectue verticalement, selon le trajet défini initialement. Entre $t = 6s$ et $t = 16s$, on procède à la mise à jour des surfaces potentielles de fissuration des deux fractures toutes les secondes.

Elles sont représentées sur la Figure 5.10

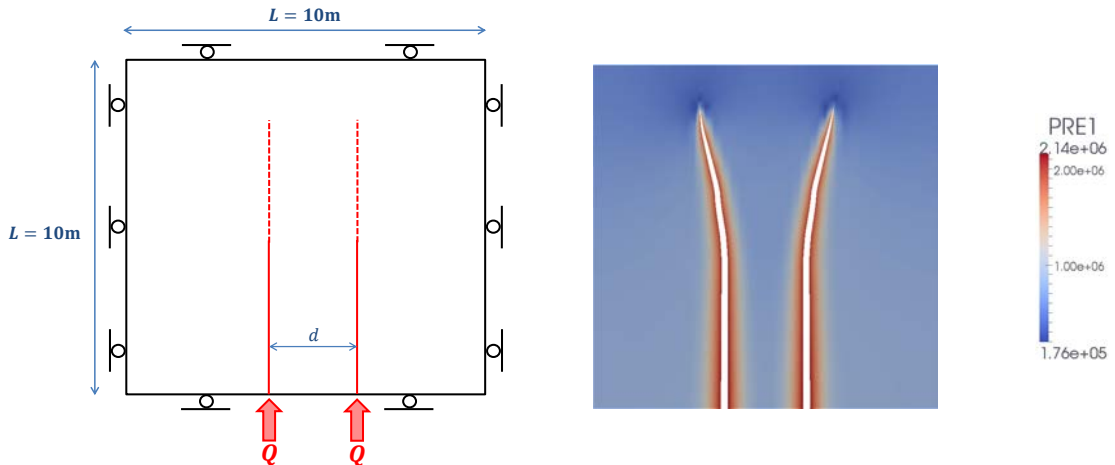


Figure 5.10 – Deux fractures hydrauliques parallèles: géométrie du problème (à gauche), déformée amplifiée (X250) et pression de pore en Pa (à droite).

Les deux fractures hydrauliques se propagent verticalement pendant les 6 premières secondes. A

partir de cet instant, leurs trajectoires divergent. A $t = 16s$, l'angle d'ouverture entre les deux extrémités des fractures est de l'ordre de 17° . Par ailleurs, le motif obtenu est symétrique par rapport à l'axe vertical, les deux fractures hydrauliques se comportant de la même manière.

Wang a mis en évidence que cette divergence est due à une perturbation du champ des contraintes autour de chacune des fractures liée la présence de la fracture voisine [157]. La présence d'une autre fracture du côté droit de la fracture de gauche induit une dissymétrie du champ des contraintes dans son voisinage et *vice versa*. Les deux fractures ont alors tendance à s'éloigner l'une de l'autre, poursuivant leur propagation dans la direction du maximum des contraintes de confinement. Elles s'éloignent pour ne plus se gêner dans leurs propagations respectives. Wang a effectué plusieurs tests en faisant varier l'éloignement d entre les deux fractures [157]. En dessous d'un certain éloignement, il observe des motifs dissymétriques. L'une des deux fractures se propage alors moins que l'autre mais son ouverture est plus importante. Ce phénomène de divergence de deux fractures hydrauliques parallèles a également été observé par Haddad et al. [166] avec un modèle tridimensionnel pour la simulation de fractures hydrauliques verticales planes à partir d'un puits horizontal.

5.3.3 Deux fractures hydrauliques qui se croisent

Le troisième test porte sur la compétition entre deux fractures hydrauliques dont les directions de propagation sont parallèles et qui se croisent. On cherche à observer l'influence qu'elles exercent l'une sur l'autre. On s'attend encore une fois à ce que les deux fractures hydrauliques se gênent dans leurs propagations respectives.

On considère un barreau carré de côté $L = 10m$. Les déplacements verticaux sont bloqués sur les faces inférieure et supérieure et les déplacements horizontaux sont bloqués sur les faces latérales. On introduit deux surfaces potentielles de fissuration verticales, l'une débouchant sur la face inférieure du barreau l'autre débouchant sur la face supérieure du barreau. Elles sont éloignées horizontalement d'une distance $d = 2m$ (voir Figure 5.11 à gauche). On procède à l'injection d'un fluide avec un débit $Q = 3.10^{-1} kg.s^{-1}$ à l'embouchure des deux surfaces de fissuration potentielles pendant une durée totale de $16s$. Le pas de temps utilisé Δt est de $0,1s$ pendant la première seconde et de $0,25s$ ensuite.

Le maillage utilisé ainsi que les caractéristiques du matériau et du fluide sont identiques au cas précédent. Pendant les 6 premières secondes, la propagation de chacune des deux fractures hydrauliques s'effectue verticalement, selon leurs trajets définis initialement. Entre $t = 6s$ et $t = 16s$, on procède à la mise à jour des surfaces de fissuration potentielles des deux fractures toutes les secondes.

La déformée amplifiée et la pression de pore obtenues à $t = 16s$ sont représentées sur la Figure 5.11

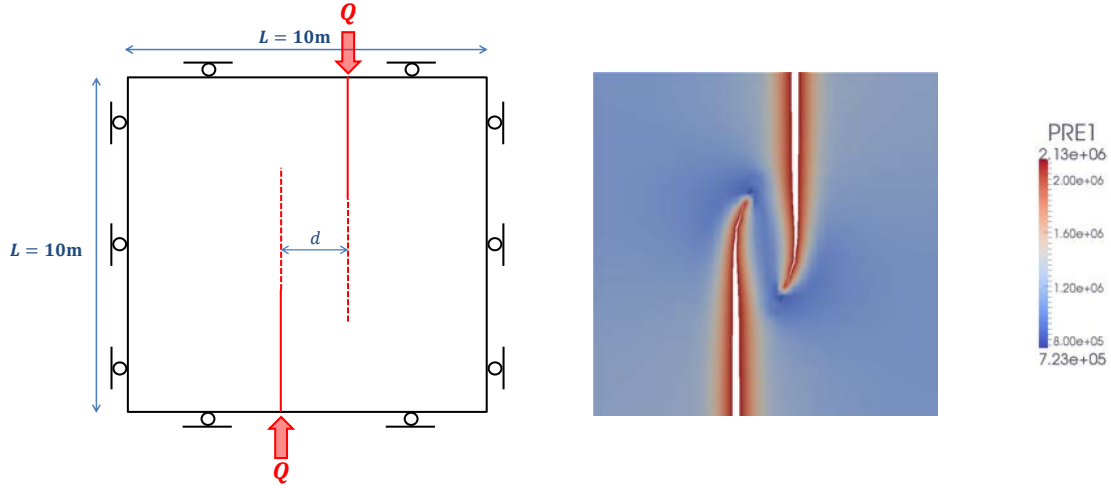


Figure 5.11 – Deux fractures hydrauliques qui se croisent: géométrie du problème (à gauche), déformée amplifiée (X250) et pression de pore en Pa (à droite).

Les deux fractures hydrauliques se propagent verticalement pendant les 6 premières secondes. Puis leurs trajectoires bifurquent progressivement vers l'intérieur du domaine, donnant l'impression de s'enrouler l'une sur l'autre. A $t = 16s$, la déviation des extrémités des fractures par rapport à la verticale est de l'ordre de 25° d'angle. Par ailleurs, le motif obtenu est antisymétrique par rapport au centre du domaine, les deux fractures hydrauliques se comportant de la même manière.

Encore une fois, le motif que nous avons obtenu est très similaire à celui obtenu par Wang [157] avec un modèle hydromécanique couplé avec XFEM, pour un test analogue à celui que nous avons présenté ci-dessus. La déviation observée s'explique une nouvelle fois par une perturbation du champ des contraintes au voisinage des pointes des fractures, liée à la présence d'une autre fracture à proximité. Cette fois-ci, au lieu de s'éloigner, les deux fractures se rapprochent, s'enroulant l'une sur l'autre.

5.3.4 Réorientation d'une fracture hydraulique 3D

Finalement, on effectue un test de réorientation similaire à celui effectué dans le paragraphe 5.3.1 mais dans le cas tridimensionnel. On s'attend toujours à ce que la direction de propagation de la fracture hydraulique s'oriente selon le maximum des contraintes de confinement.

On considère un bloc de hauteur $H = 10m$, de longueur $L = 16m$ et de profondeur $B = 6m$. Les déplacements verticaux sont bloqués sur les faces inférieure et supérieure du bloc et les déplacements suivant y sont bloqués sur les faces avant et arrière du bloc. Le bloc est soumis à une contrainte de confinement $\sigma_0 = 0,6MPa$ dans la direction x (voir Figure 5.12).

On introduit une surface potentielle de fissuration plane, en forme de demi disque, inclinée d'un angle $\theta = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale (voir Figure 5.12). Cette surface potentielle de fissuration débouche sur la face avant du domaine et le centre du demi-disque coïncide avec le centre de la face avant du domaine (on modélise en fait la moitié d'un bloc qui comporterait une fracture inclinée en forme de disque). On procède à l'injection ponctuelle d'un fluide avec un débit massique $Q = 6 kg.s^{-1}$ au centre du disque pendant une durée totale de $17s$. Le pas de temps utilisé Δt est de $0.05s$ pendant la première seconde

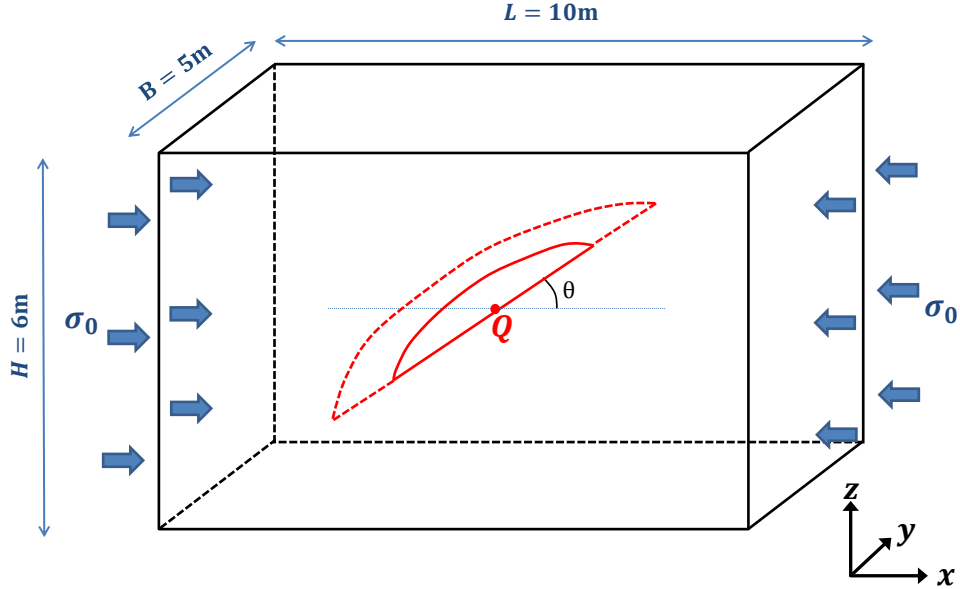


Figure 5.12 – Géométrie du test de réorientation d'une fracture hydraulique 3D.

Les caractéristiques du matériau et du fluide sont identiques au cas précédent. Le maillage utilisé est constitué de 22177 tétraèdres à 10 noeuds. Le premier calcul porte sur une durée totale égale à $2,5s$. La fracture hydraulique se développe alors depuis le point d'injection, de manière circulaire, dans la surface de fissuration potentielle prédéfinie. A $t = 2,5s$, on effectue une première détection du fond cohésif de la fracture. Et pour $t = 3s$, on effectue une première mise à jour de la surface de fissuration potentielle. Celle-ci bifurque alors à partir du fond cohésif détecté à $t = 2,5s$. On effectue de nouvelles mises à jour de la surface de fissuration potentielle pour $t = 3,5s$ et $t = 4s$ et toutes les secondes jusqu'à $t = 17s$. En résumé, la propagation de la fracture s'effectue sur la surface de fissuration potentielle initiale pendant les 2,5 premières secondes et sur trajet libre entre $t = 2,5s$ et $t = 17s$. On relance donc le calcul 16 fois. L'ensemble de la simulation a demandé une centaine d'heures pour arriver à son terme sur un poste de calcul scientifique.

Sur la Figure 5.13, on représente la déformée amplifiée et les déplacements selon x et selon z obtenus pour $t = 2,5s$ avec la surface de fissuration initiale. En particulier, on observe une compression du

bloc dans la direction x , qui s'explique par l'application des contraintes de confinement. Sous l'effet de l'injection du fluide, la fracture s'ouvre sur un demi-disque dont le rayon est d'environ $1,7m$.

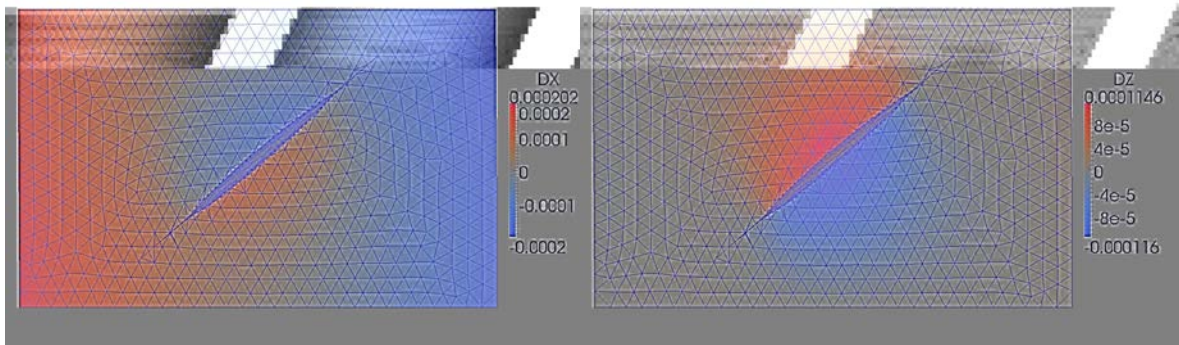


Figure 5.13 – Déformée amplifiée (X1000) et déplacement latéral (à gauche) et déformée amplifiée (X1000) et déplacement vertical (à droite) pour $t = 2,5s$.

La déformée amplifiée et la pression de pore obtenues à $t = 2,5s$ avec la surface de fissuration potentielle initiale sont représentées sur la Figure 5.14 à gauche (vue de devant). À droite, on observe la déformée amplifiée et la pression de pore obtenues à $t = 17s$ avec la surface de fissuration potentielle finale.

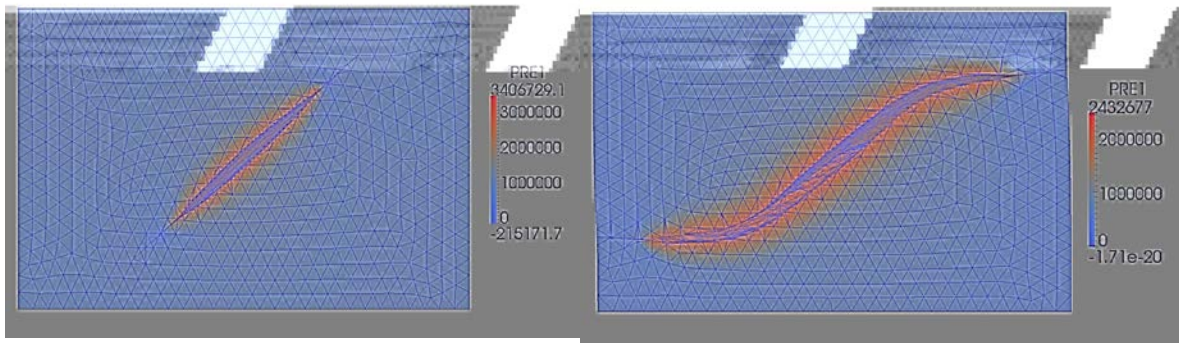


Figure 5.14 – Déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa pour $t = 2,5s$ (à gauche) et $t = 17s$ (à droite).

Sur la face de devant (sur laquelle débouche la fracture), on observe le même motif que pour le cas de réorientation 2D du paragraphe 5.3.1. La fracture hydraulique se réoriente selon la direction horizontale, c'est à dire selon la direction des contraintes de confinement.

Afin de mieux cerner la réorientation de la fracture hydraulique qui s'opère dans le volume, on représente les points d'intersection entre la surface potentielle de fissuration et les arêtes du maillage. Ces points correspondent en fait aux noeuds des facettes de contact (confer Annexe A). Sur la Figure 5.15, on représente les points de la surface de fissuration potentielle initiale et la pression de fluide pour $t = 2,5s$. On observe alors la propagation de la fracture hydraulique sur le demi-disque de points pour lesquels la pression est élevée). La zone de transition entre les points rouges (points atteints par la fracture hydraulique) et les points bleus (pour lesquels la pression est plus faible et qui n'ont donc pas été atteints par la fracture hydraulique) constitue le fond cohésif à $t = 2,5s$. C'est la limite entre la zone adhérente (en bleue) et la zone fracturée (en rouge). C'est à partir de ce fond cohésif que s'effectuera la première bifurcation de la surface de fissuration potentielle.

Sur la Figure 5.16, on représente, pour deux angles de vue différents, la surface de fissuration potentielle finale (points blancs) et la surface de fissuration initiale (points colorés) avec la pression de pore pour $t = 2,5s$. On observe ainsi l'écart entre la surface de fissuration potentielle initiale et la surface de fissuration potentielle finale, obtenue après 15 mises à jour successives. En particulier, on vérifie que la bifurcation entre les deux surfaces de fissuration potentielles s'effectue au niveau de la limite entre les points rouges et les points bleus, c'est-à-dire au niveau du front cohésif détecté à $t = 2,5s$. Et dans tout le volume, on observe une réorientation de la surface de fissuration potentielle vers le plan horizontal.

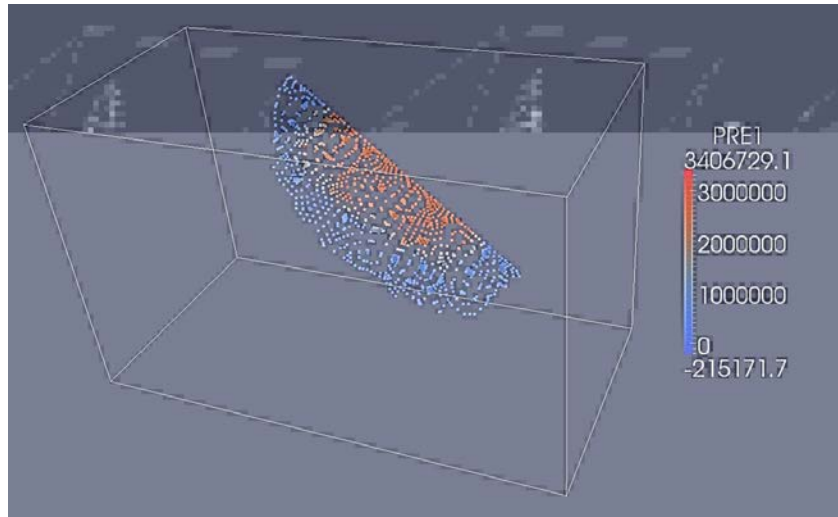


Figure 5.15 – Points d'intersection entre la surface de fissuration initiale et les arêtes du maillage et pression de pore en Pa pour $t = 2,5s$.

La surface de fissuration potentielle finale n'est pas parfaitement antisymétrique, et elle ne débouche pas de manière parfaitement horizontale sur la face de derrière. Cela pourrait probablement être corrigé avec l'utilisation d'un maillage plus raffiné, qui nous permettrait de récupérer un fond cohésif plus lisse et une surface de fracture complètement antisymétrique. On limiterait alors les irrégularités dans la mesure des facteurs d'intensité des contraintes qui servent ensuite à déterminer l'angle de bifurcation β .

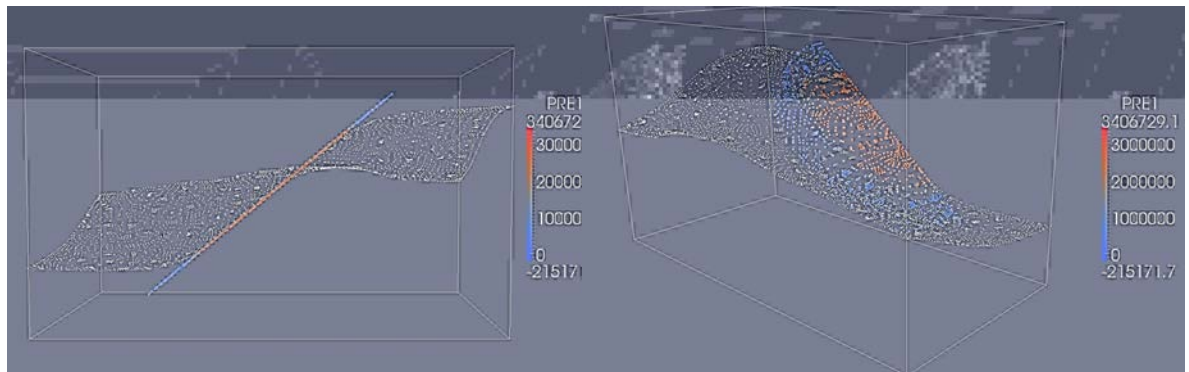


Figure 5.16 – Points d'intersection entre les arêtes du maillage et les surfaces de fissuration potentielles finale et initiale. On représente aussi la pression de pore en Pa pour $t = 2,5s$.

Sur la Figure 5.17, on représente pour deux angles de vue différents l'avancée du fluide dans la fracture hydraulique, entre $t = 2,5s$ et $t = 17s$, sur la surface de fissuration potentielle finale. Les points en rouge correspondent à des points atteints par la fracture hydraulique tandis que les points en bleu correspondent à la zone adhérente. A $t = 2,5s$, tous les points rouges sont situés sur le plan de fissuration potentiel initial. A $t = 17s$, la surface de la fracture est beaucoup plus complexe; au niveau du fond de fissure, la propagation s'effectue dans une direction proche de l'horizontale.

Ce test valide la procédure de propagation sur trajet non prédéfini pour une fracture hydraulique tridimensionnelle. On observe le résultat attendu, c'est-à-dire la réorientation de la fracture selon la direction des contraintes de confinement maximales. Aussi, ce test permet de démontrer la capacité de notre modèle à intégrer des fractures tridimensionnelles dont la géométrie est complexe.

5.4 Performances et limitations du modèle

La convergence de l'algorithme de Newton-Raphson employé pour résoudre le problème couplé est globalement satisfaisante car on dépasse rarement 5 itérations pour atteindre le critère de convergence.

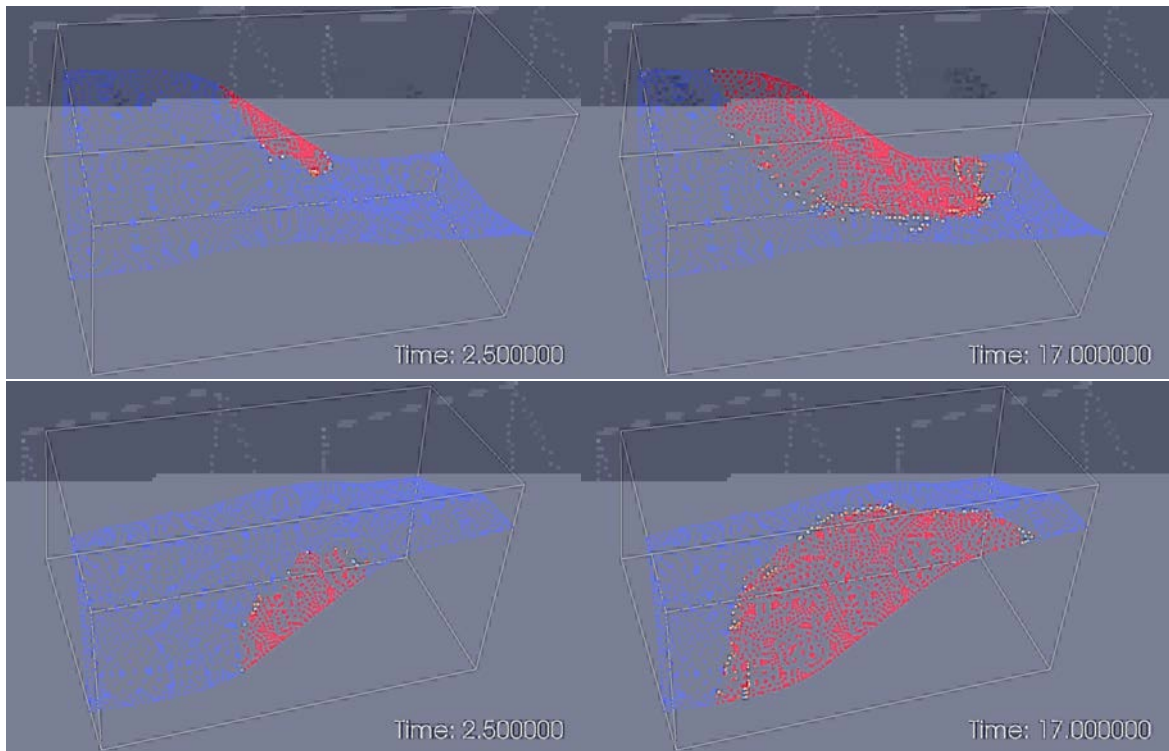


Figure 5.17 – Points d’intersection entre la surface de fissuration potentielle finale et les arêtes du maillage: les points rouges correspondent aux points atteints par la fracture hydraulique et les points bleus correspondent à la zone adhérente.

Cependant, lorsque l’on injecte un flux de fluide directement dans une fracture hydraulique, il convient d’utiliser une discrétisation temporelle adaptée, en particulier lors de l’initiation de la fracture (au début de l’injection). En effet, si on injecte une trop grande quantité de fluide en l’espace d’un seul pas de temps, le calcul échoue car la masse volumique du fluide dans la fracture ρ et sa pression de fluide p_f divergent. Sur les 4 exemples présentés dans ce chapitre, le pas de temps Δt est de 0,1s ou 0,05s lors de la première seconde et de 0,25s ensuite. Cette discrétisation temporelle est aussi calibrée de manière à accompagner le processus de propagation des fractures hydrauliques, en cohérence avec le raffinement des maillages utilisés. En effet, avec les débits de fluide que nous injectons et les maillages utilisés, un pas de temps de 0.25s correspond environ à une extension sur une distance équivalente à demi élément pour les fractures hydrauliques étudiées. On est alors en mesure d’observer la dissipation d’énergie qui a lieu dans les zones cohésives et la propagation progressive des fractures hydrauliques. En ce qui concerne la mise à jour de la surface potentielle de fissuration, le trajet de fissuration final obtenu sera d’autant plus précis que cette mise à jour a été effectuée régulièrement. Nous avons choisi de l’effectuer toutes les secondes. Cette fréquence résulte d’un compromis entre le temps de calcul total nécessaire (puisque à chaque mise à jour le calcul est relancé depuis le début) et la précision souhaitée pour le trajet de fissuration. Au cours d’une seconde, entre deux mises à jour du trajet de fissuration, les fractures hydrauliques que nous avons étudiées se propagent sur une distance équivalente à la taille d’une ou deux mailles environ. Cette fréquence semble donc adaptée à la précision des maillages utilisés.

Le nombre de degrés de liberté est rapidement très élevé pour nos modélisations HM-XFEM. L’interpolation du champ des déplacements est quadratique et les noeuds sommets sont porteurs à la fois des degrés de liberté de déplacement et de pression de pore. Pour les éléments traversés par une fracture cohésive, il faut rajouter les degrés de liberté Heaviside (pour le champ des déplacements et le champ de pression de pore) et l’ensemble des degrés de liberté associés à la fracture cohésive. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, le nombre de degrés de liberté augmente encore pour les éléments traversés par plusieurs fractures cohésives. Le cas limite est l’hexaèdre à 20 noeuds qui comporte une intersection de fractures. On compte alors 656 degrés de liberté pour ce seul élément. On est donc rapidement limité par la taille des modèles et par le nombre de fractures que l’on peut introduire dans les modèles.

Mais la limite principale de notre modèle reste liée à la propagation sur trajet non prédéfini, avec la nécessité de relancer les calculs depuis le début à chaque mise à jour de la surface de fissuration potentielle. Cet aspect multiplie les temps de calcul en cas de propagation sur trajet inconnu et limite

donc fortement la taille des modélisations que nous pouvons envisager. Cela nous oblige également à limiter la fréquence avec laquelle on effectue la mise à jour de la surface de fissuration potentielle. Des solutions pour palier ce problème ont été suggérées dans le paragraphe [5.2.5](#), et devront être mises en oeuvre dans les futurs développements du modèle.

Chapitre 6

Jonction de fissures hydrauliques

L'objectif de la thèse est la simulation de réseaux de fractures stimulées hydrauliquement au sein de roches poreuses. Il s'agit donc dans cette dernière partie de proposer un cadre pour la simulation des jonctions de fractures hydrauliques. Au paragraphe 2.3.2, nous avons détaillé la discrétisation spatiale pour l'approximation du champ des déplacements en cas de jonctions de fissures. Il en va exactement de même pour le champ de pression de pore dans le massif. La situation requiert plus d'attention pour les champs associés aux fractures cohésives (p_f , q_1 , q_2 , λ , μ , $\mathbf{w}$), pour lesquels on va introduire un espace d'approximation adapté, afin de prendre en compte à la fois l'écoulement du fluide et le modèle de zone cohésive au niveau d'une jonction de fractures. En particulier, avec le modèle de zone cohésive, on doit modéliser les efforts de contact en jonction de fissure. Et en ce qui concerne l'écoulement du fluide, on doit assurer la "connexion hydraulique" entre les branches protagonistes d'une jonction.

Dans la littérature, il existe assez peu d'exemples de prise en compte du contact avec jonction de fissures. Les travaux de Sanders [167] prennent en compte le contact en jonction avec l'approche GFEM de Simone et al. [56] pour modéliser des polycristaux en 2D. Et dans le cadre XFEM, Siavelis [1] a proposé un modèle de contact frottant avec Lagrangien augmenté généralisé aux jonctions de fissures et pouvant même simuler les grands glissements. C'est sur ces travaux que nous nous sommes basés pour étendre notre modèle HM-XFEM aux jonctions de fissures hydrauliques.

La modélisation de jonctions de fissures en milieu poreux est plus courante. Le modèle hydromécanique développé par Pouya [168] prend en compte les jonctions de fissures hydrauliques avec des éléments d'interfaces. Il est notamment appliqué à la mesure des propriétés hydrauliques des milieux poro-fracturés [169]. La présence de fractures connectées entre elles dans un milieu poreux induit en effet une augmentation significative de sa perméabilité effective [170]. Cependant, ce modèle est limité aux géométries bidimensionnelles et impose de produire des maillages conformes aux jonctions de fissures. Les travaux de Darcel [171] portent également sur la modification des propriétés hydrauliques des milieux poreux après corrélation avec un réseau de fractures hydrauliques connectées.

Dans le cadre de l'ingénierie pétrolière, le modèle de type DFN de Weng et al. [172] prend en compte les intersections entre fractures hydrauliques et fractures naturelles, dont l'ouverture est modulée par les contraintes régionales. Au niveau des intersections, la conservation de la masse est imposée pour les flux de fluide. D'autres travaux portent sur la propagation de fractures hydrauliques verticales multiples, alimentées par un même puits horizontal [173], [10]. En particulier, Bungler [173] cherche à déterminer le flux de fluide qu'il est nécessaire d'injecter dans le puits pour arriver à la propagation simultanée des différentes fractures verticales. Un petit modèle hydrodynamique gère alors la partition du flux de fluide entre les différentes fractures verticales, connectées entre elles via le puits horizontal. Les jonctions hydrauliques entre le puits horizontal et les fractures verticales sont donc simulées avec un algorithme de partition des flux d'entrées pour les fractures verticales. Enfin, le modèle XFEM de Dahi-Taleghani et Olson [174] simule les jonctions entre des fractures hydrauliques et des discontinuités naturelles dans les massifs rocheux. Il permet d'apprécier le rôle du décollement et du glissement dans la bifurcation ou non des fractures hydrauliques au niveau des jonctions.

6.1 Espaces d'approximation au niveau de la jonction

En premier lieu, nous allons détailler la construction des espaces d'approximation pour les champs associés aux interfaces cohésives au niveau des jonctions. Pour une seule interface cohésive, la construction de l'espace d'approximation a été détaillée au paragraphe 4.1.3. Cet espace repose sur les noeuds sommets des arêtes intersectées par l'interface. Des relations d'égalité sont imposées sur certaines arêtes

de part et d'autre de l'interface de manière à réduire l'absence d'approximation et satisfaire la condition de stat (voir F modèle travers les cha erfaces ts pour

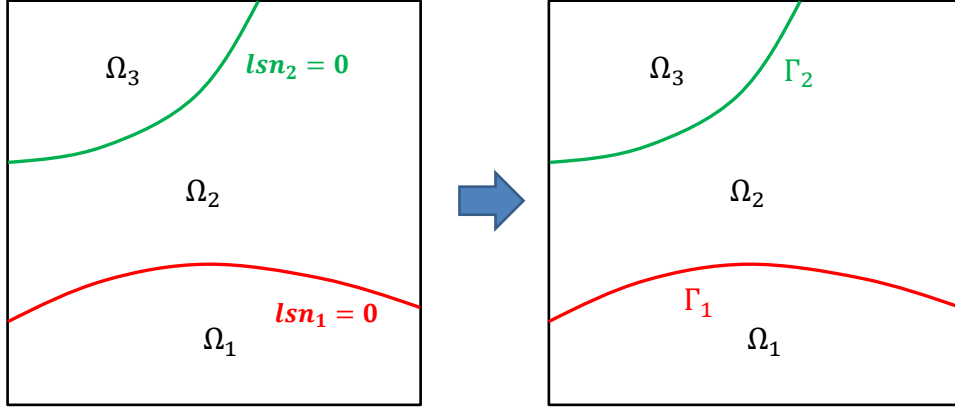


Figure 6.1 – Deux iso-zéros de *level set normales* (à gauche) et les deux interfaces résultantes (à droite).

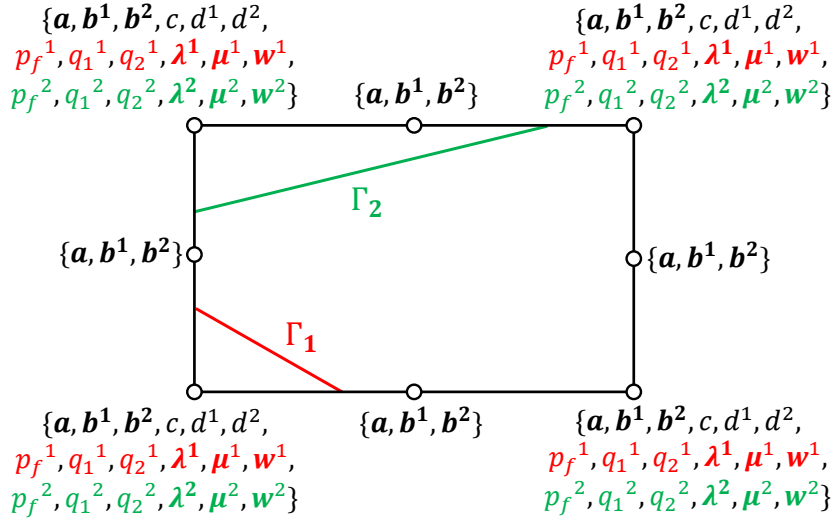


Figure 6.2 – Un élément quadrangle HM-XFEM traversé par deux interfaces non connectées.

Au sein de l'élément quadrangle représenté sur la Figure 6.2, l'approximation d'un champ Λ^n (Λ^n est une notation générique pour désigner p_f^n , q_1^n , q_2^n , λ^n , μ^n ou $\mathbf{w}^n$) associé à la fracture cohésive n (avec $n \in \{1, 2\}$) s'écrit :

$$\Lambda_h^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 \Lambda_i^n \tilde{\phi}_i(\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

avec $\tilde{\phi}_i$ les fonctions de forme linéaire du quadrangle (éventuellement modifiées pour s'adapter aux noeuds sommets actifs et satisfaire tout de même la partition de l'unité, confer paragraphe 3.3.2) et Λ_i^n les degrés de liberté nodaux pour le champ Λ de l'interface n .

Pour rappel, l'approximation du champ des déplacement et du champ de pression de pore dans cet élément s'écrivent respectivement:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^8 \mathbf{a}_i \psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^8 \mathbf{b}_j^n \psi_j(\mathbf{x}) H_j^n(lsn_n(\mathbf{x})) \quad (6.2)$$

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 c_i \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^4 d_j^n \phi_j(\mathbf{x}) H_j^n(lsn_n(\mathbf{x})) \quad (6.3)$$

avec ψ_i les fonctions de forme quadratique du quadrangle, $\mathbf{a}_i$ et c_i les degrés de liberté classiques pour respectivement le champ des déplacements et le champ de pression de pore et $\mathbf{b}_i^n$ et d_i^n les degrés de liberté Heaviside associés à l'interface n pour respectivement le champ des déplacements et le champ de pression de pore. Comme dans [1], les jeux de degrés de liberté pour les champs associés aux interfaces cohésives sont ajoutés séquentiellement au fur et à mesure que les interfaces sont ajoutées au modèle. Et pour chaque noeud, il existe une table de correspondance qui associe les jeux de degrés de liberté additionnels aux différentes interfaces cohésives qui intersectent le support du noeud.

En revanche, en présence d'une jonction d'interfaces (définie comme dans le paragraphe 2.3.2 à l'aide de deux iso-zéros de *level set normale* la deuxième se branchant sur la première) on ne considérera plus deux m associés aux int s (voir Figure mation au nive tinctes.

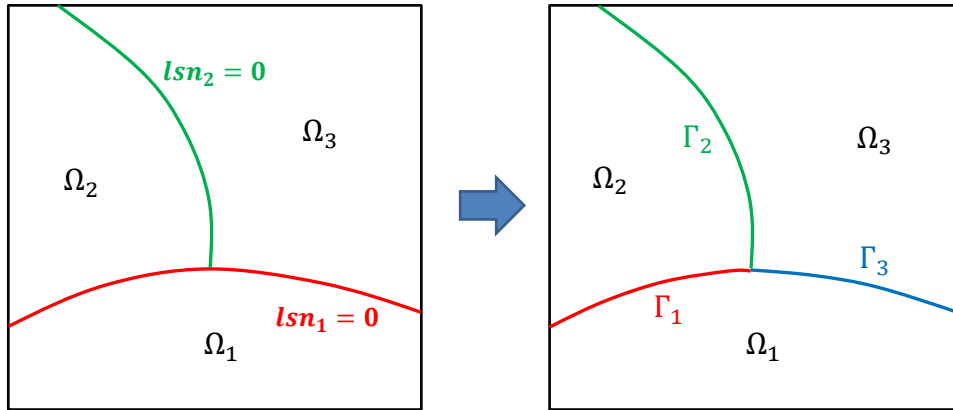


Figure 6.3 – Une jonction d'interfaces définie par deux iso-zéros de *level set normales* (à gauche) et les trois branches d'interface résultantes (à droite).

Dans l'approche de Siavelis [1], cette séparation de l'interface principale en deux branches d'interfaces n'était pas effectuée, empêchant toute discontinuité des champs associés à l'interface cohésive d'une branche à l'autre. Sur la Figure 6.4, on représente les espaces d'approximation pour les champs associés aux interfaces cohésives au niveau d'une jonction d'interfaces. Des relations d'égalité sont imposées de part et d'autre de l'interface au niveau des arêtes représentées en pointillés. Les noeuds reliés par les arêtes en pointillés seront donc porteurs d'un unique et même degré de liberté Λ_i pour le champ cohésif Λ . On représente ces espaces d'approximation avant le traitement de l'interface principale comme deux branches distinctes (à gauche) et après traitement (à droite). Dans le cas de gauche, l'espace d'approximation pour l'interface principale (en rouge) est de dimension 4. En particulier, dans l'élément qui comporte la jonction, un champ Λ associé à l'interface cohésive principale sera constant égal à Λ_3 . On ne peut donc pas avoir de discontinuité pour ces champs au passage du branchement. Or les champs cohésifs qui règnent dans chacune des deux branches sont *a priori* indépendants et doivent être discrétisés sur des espaces distincts. Par exemple, la pression de contact qui s'exerce peut différer d'une branche à l'autre (voir l'exemple du paragraphe 6.3.1). De plus, dans le cadre de jonctions d'interfaces

hydrauliques, le fait de ne pas traiter l'interface principale comme deux branches distinctes pourrait biaiser les phénomènes de bifurcation des fractures hydrauliques que l'on s'attend à observer au niveau des jonctions (du fait de la continuité qui existe entre deux branches). De ce fait, on considérera systématiquement autant d'interfaces que de branches pour la construction des espaces d'approximation des champs associés aux fractures cohésives. Dans le cas représenté à droite sur la Figure 6.4, l'interface principale est traitée comme deux branches distinctes.

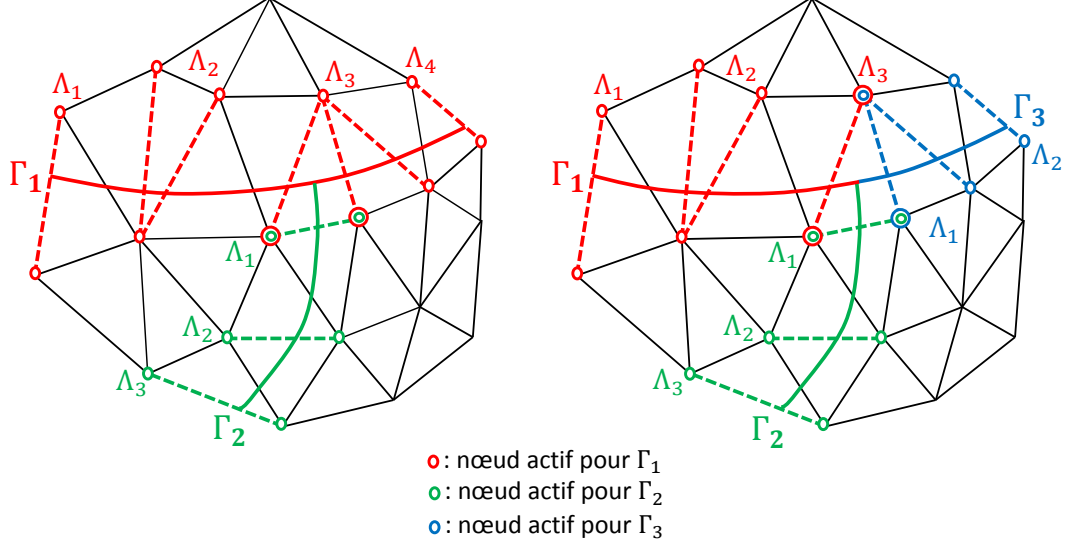


Figure 6.4 – Espaces d'approximation au niveau d'une jonction d'interface avant (à gauche) et après (à droite) le traitement de l'interface principale comme deux branches distinctes.

Dans l'élément qui contient la jonction d'interfaces, 3 jeux de degrés de liberté sont donc nécessaires pour les champs associés aux interfaces cohésives. Sur la Figure 6.5, on représente un élément quadrangle comportant une jonction et les différents degrés de liberté portés par ses noeuds.

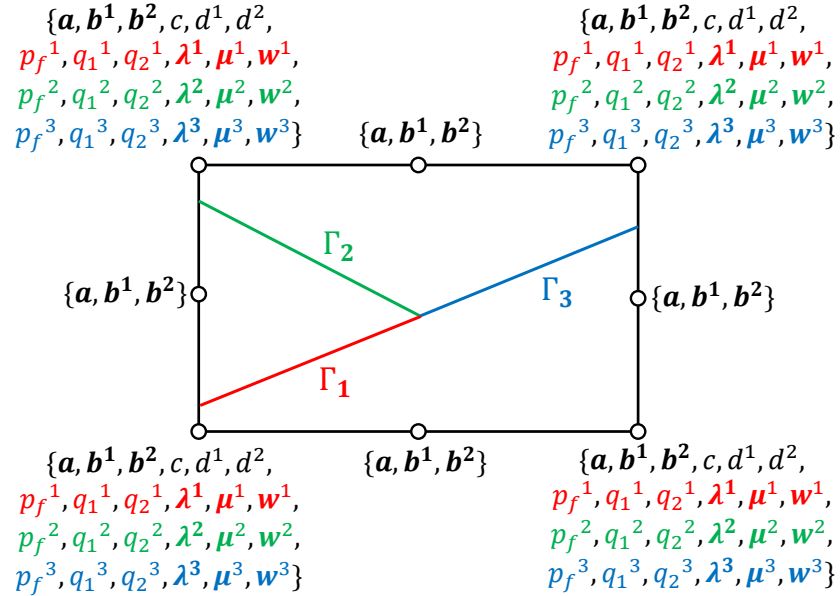


Figure 6.5 – Un élément quadrangle HM-XFEM comportant une jonction d'interfaces.

Comme annoncé dans le paragraphe 2.3.2, dans *Code_Aster*, nous avons fixé la limite à 4 jeux de degrés de liberté par noeuds. Un noeud ne pourra donc pas voir dans son support plus de 4 branches

d'inté
assoc
en cc

s champs
e la prise

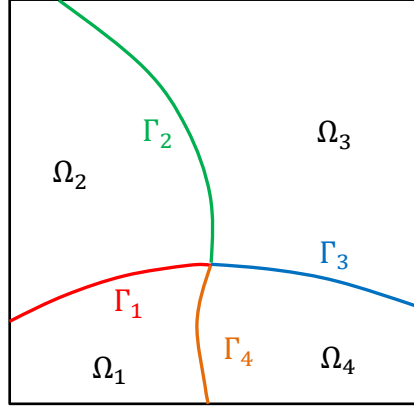


Figure 6.6 – 4 branches d'interfaces formant une intersection.

6.2 Echanges de fluides au niveau de la jonction

Au niveau des jonctions d'interfaces hydrauliques, il convient d'imposer une condition pour assurer la "connexion hydraulique" entre chacune des branches. Pouya [168] a montré qu'au niveau d'une jonction, la conservation de la masse pour le fluide s'écrit indépendamment des échanges entre les interfaces cohésives et la matrice poreuse (termes d'échange q_1 et q_2). Tout se passe comme si les interfaces étaient imperméables et la relation qui existe entre les flux de fluide sortants dans chacune des branches est la suivante:

$$\sum_{n=1}^{\Pi} \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{m}_n = 0 \quad (6.4)$$

avec $\mathbf{W}_n$ le flux de fluide sortant dans la branche n , $\mathbf{m}_n$ un vecteur unitaire tangent à la branche n et perpendiculaire à la ligne de jonction d'interfaces et Π le nombre de branches distinctes. Un exemple pour une jonction à trois branches est représenté sur la Figure 6.7.

Cette condition, qui fait intervenir les flux de fluide sortants dans chaque branche au niveau de la jonction, est peu commode à imposer dans le cadre de notre modèle HM-XFEM dans la mesure où l'expression des flux $\mathbf{W}$ fait intervenir le gradient de p_f . De plus, les espaces d'approximation dont on dispose pour le champ p_f dans chaque branche (voir Figure 6.4) ne sont pas assez fins pour imposer convenablement cette condition de conservation de la masse. On préfère donc imposer la continuité de la pression de fluide p_f dans chaque branche au niveau des jonctions d'interfaces hydrauliques. On choisit une condition de type Dirichlet par rapport à la condition portant sur les flux $\mathbf{W}$ (équation 6.4) qui s'apparente à une condition de type Neumann.

En pratique, on imposera cette condition directement aux noeuds sommets des éléments comportant une jonction. Sur la Figure 6.8, la pression de fluide p_f est constante par branche dans l'élément qui comporte la jonction. On impose la condition $p_f^1 = p_f^2$ sur le noeud sommet actif à la fois pour Γ_1 et Γ_2 et $p_f^1 = p_f^3$ sur le noeud sommet actif à la fois pour Γ_1 et Γ_3 . Au final, on a imposé la condition $p_f^1 = p_f^2 = p_f^3$. La pression de fluide p_f est donc constante et égale à la même valeur dans chacune des branches de l'élément qui comporte la jonction. On n'impose pas la condition $p_f^2 = p_f^3$ sur le noeud sommet actif à la fois pour Γ_2 et Γ_3 afin d'éviter une redondance. La procédure pour imposer correctement la continuité de la pression de fluide p_f au niveau d'une jonction d'interfaces hydrauliques suit les étapes suivantes:

- pour tous les éléments comportant une jonction, on impose aux noeuds sommets actifs pour au moins deux branches des relations d'égalité entre les degrés de liberté p_f associés à chaque branche,

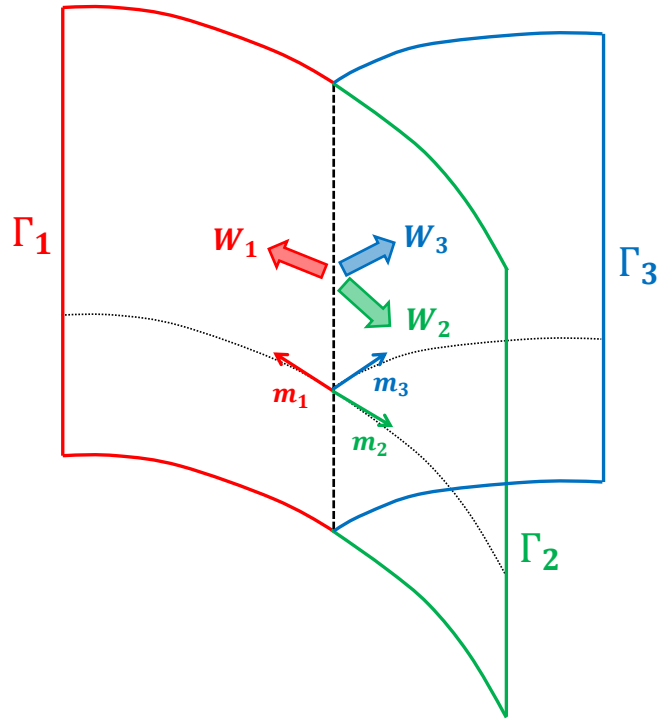


Figure 6.7 – Conservation de la masse pour le fluide au niveau d’une jonction d’interfaces.

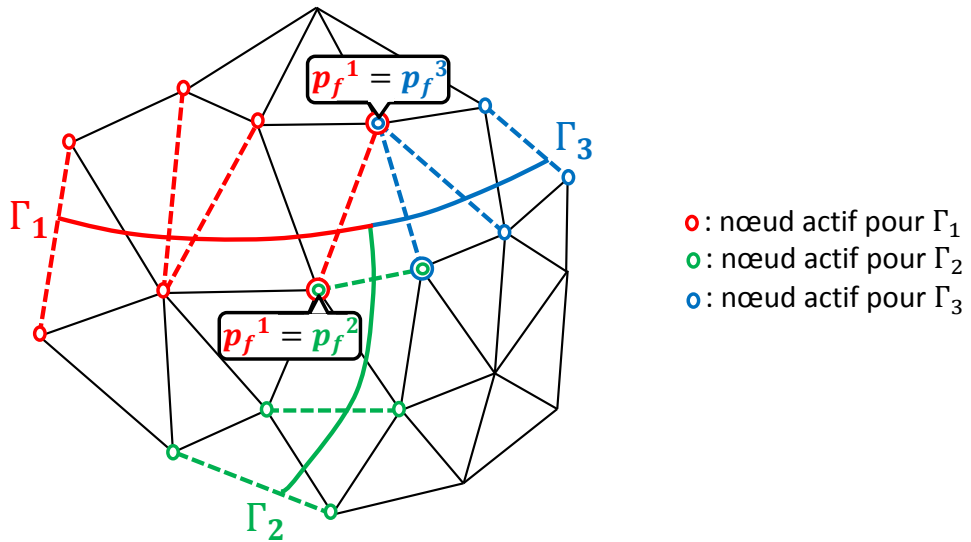


Figure 6.8 – Continuité de la pression de fluide dans chaque branche au niveau d’une jonction d’interfaces.

Les cas test présentant des jonctions d’interfaces restitués et documentés dans *Code_Aster* dans le cadre de la thèse sont les suivants:

- Application d’une pression répartie sur les lèvres d’une jonction de fissure XFEM pour le cas hydromécanique [175].

- Compression d'un bloc multi-fissuré avec XFEM: cas de l'hydromécanique [176].
- Contact glissière dans un bloc multi-fissuré: cas de l'hydromécanique [177].
- Injection d'un flux de fluide dans deux interfaces XFEM connectées au sein d'une colonne poro-élastique saturée [178].

6.3 Cas d'application

Dans cette section, on présente divers exemples avec des jonctions d'interfaces. Les deux premiers paragraphes portent sur des cas de validation du fonctionnement de notre modèle avec jonction de fissures. En premier lieu, on valide la bonne prise en compte du contact au niveau des jonctions de fissures, indépendamment du problème hydrodynamique. Puis on valide le bon fonctionnement de l'écoulement en jonction de fissure. Enfin, sur deux exemples, on montre le champ d'application ouvert avec la modélisation des jonctions de fissures hydrauliques dans notre modèle HM-XFEM.

Tous les exemples que nous allons présenter dans cette partie portent sur des jonctions d'interfaces (pas de fond de fissure). Cependant, rien n'empêche de considérer des jonctions de fissures et de mettre en oeuvre la procédure de propagation sur trajet non prédéfini présentée dans le chapitre précédent pour chacune des pointes de fissures, à condition tout de même que les fonds de fissure et les jonctions ne cohabitent pas dans une même maille (confer paragraphe 2.3.2). Néanmoins, les jonctions de fissures sont toujours prédéfinies. On ne traite pas les éventuelles rencontres d'une fracture qui se propage sur trajet libre avec d'autres fractures.

6.3.1 Contact au niveau des jonctions d'interfaces

Les deux tests élémentaires présentés ci-après permettent de s'assurer de la bonne prise en compte du contact au niveau des jonctions d'interfaces. On ne s'intéressera qu'au problème mécanique, tous les degrés de liberté associés à la phase fluide étant bloqués à 0.

Le premier test porte sur un barreau carré de côté $L = 10m$ traversé par deux interfaces, la deuxième étant branchée sur la première. On procède à une compression isotrope de ce barreau en imposant des déplacements horizontaux $U = -0.0001m$ sur la face droite et des déplacements verticaux $U = -0.0001m$ sur la face supérieure et inférieure.

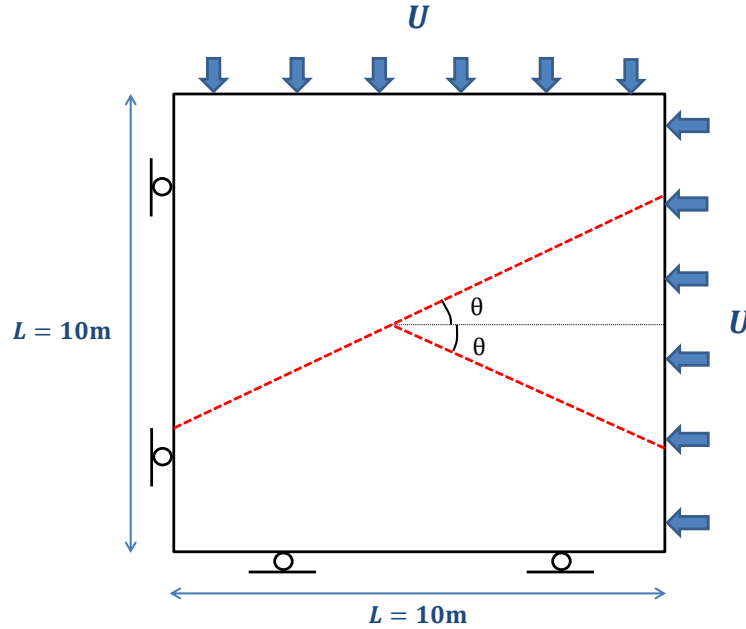


Figure 6.9 – Géométrie et chargement pour le test de compression d'un barreau traversé par deux interfaces connectées.

Les caractéristiques du matériau sont les suivantes:

Paramètres matériaux du barreau	
Module de Young	$E = 5800 MPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0$
Contrainte critique	$\sigma_c = 0,5 MPa$
Energie cohésive	$G_c = 9000 Pa.m$

Le maillage est régulier, constitué de 25 quadrangles à 8 noeuds. Les déplacements horizontaux et verticaux obtenus sont représentés sur la Figure 6.10.

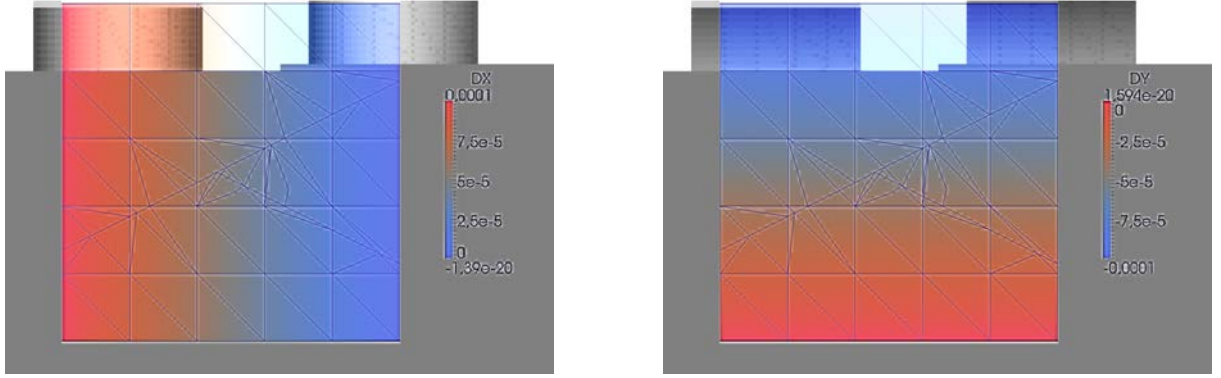


Figure 6.10 – Déplacement horizontal (à gauche) et vertical (à droite) pour le test de compression d'un barreau traversé par deux interfaces connectées.

Le barreau se comporte comme un barreau non fissuré. On n'observe aucune perturbation dans le champ des déplacements au voisinage des interfaces. Par ailleurs, la pression de contact obtenue avec le modèle cohésif dans l'interface principale comme dans l'interface secondaire est celle attendue par la théorie: $\frac{U}{L}E$. Notre modèle cohésif est donc à même de prendre en compte les efforts de contact au niveau des jonctions d'interfaces.

Le deuxième test porte sur le même barreau traversé par trois interfaces. Deux interfaces verticales sont branchées de part et d'autre d'une première interface horizontale qui traverse entièrement le barreau. Les deux interfaces verticales sont branchées sur l'interface horizontale en un même point A, formant ainsi une intersection. Cette fois-ci, on impose les déplacements $U = -0.0001m$ uniquement sur le bloc situé en haut à droite (voir Figure 6.11). Et de manière à simuler un contact glissant, on bloque à 0 les degrés de liberté associés aux efforts cohésifs tangentiels.

Les paramètres matériau ainsi que le maillage utilisé sont identiques au cas précédent.

Sur la Figure 6.12, on représente la déformée amplifiée et le champ des déplacements obtenu, ainsi que la pression de contact λ_n .

Les deux blocs supérieurs ont été comprimés latéralement tandis que les deux blocs de droite ont été comprimés verticalement. Le bloc situé en bas à gauche n'a subi aucune déformation. Donc au niveau de l'intersection, les efforts de contact ont été transmis sélectivement aux blocs adjacents au bloc situé en haut à droite. On simule bien un contact glissant au niveau de l'intersection d'interfaces. La pression de contact λ_n est discontinue dans l'élément qui comporte la jonction. Elle est égale à $\frac{U}{L} * E$ dans les deux branches qui bordent le bloc situé en haut à droite et égale à 0 dans les deux autres branches. C'est ainsi que le bloc situé en bas à gauche ne subit aucune déformation. D'ailleurs, au niveau de l'intersection, il rentre logiquement en interpénétration avec le bloc situé en haut à droite, du fait de l'hypothèse des petites transformations. On valide ainsi la prise en compte des efforts de contact "bloc par bloc" au niveau des jonctions d'interfaces et on met en évidence la nécessité de construire des espaces d'approximation indépendants pour chaque branche d'interface au niveau des jonctions d'interfaces.

6.3.2 Jonction d'interfaces hydrauliques

Dans cette partie, on présente 4 tests élémentaires pour illustrer la modélisation des branchements d'interfaces hydrauliques avec notre modèle. On rappelle qu'au niveau des jonctions, la propagation ou non de chacune des branches est entièrement gérée par le modèle de zone cohésive. Il n'y a dans notre modèle aucun critère spécifique pour l'éventuelle bifurcation d'une fracture hydraulique au niveau d'une jonction.

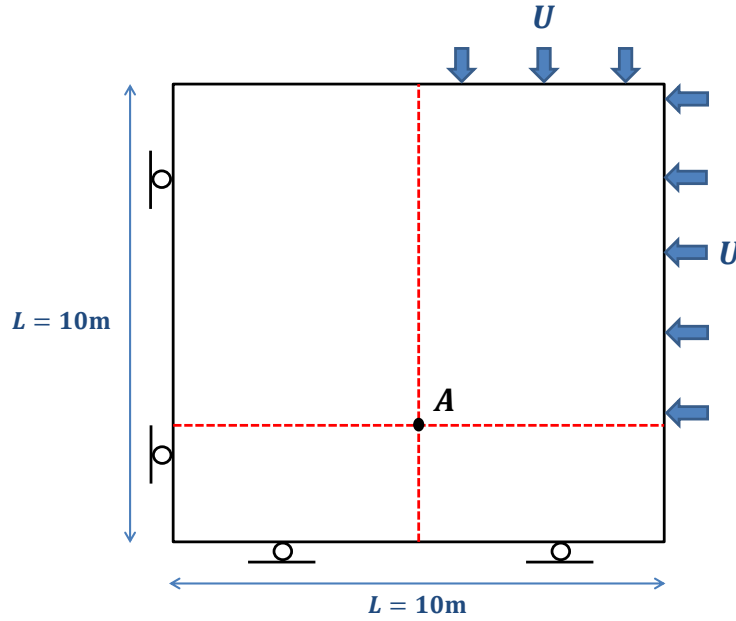


Figure 6.11 – Géométrie et chargement pour le test de compression sélective en présence d'une intersection d'interfaces.

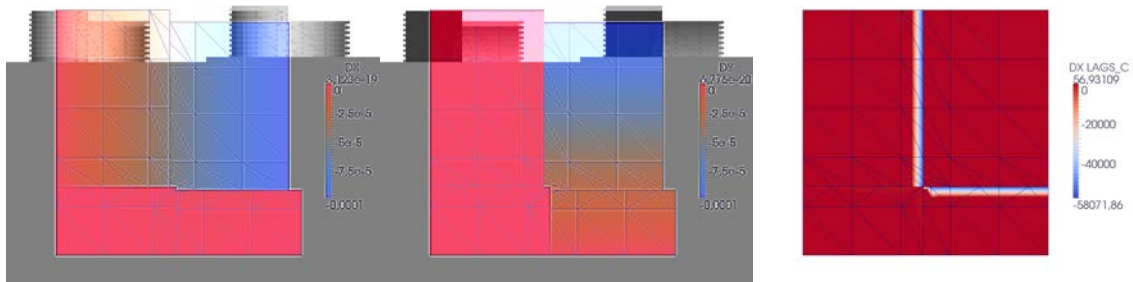


Figure 6.12 – Déformée amplifiée (X5000) et déplacement horizontal (à gauche), déformée amplifiée (X5000) et déplacement vertical (au milieu) et pression de contact (à droite) pour le test de compression sélective en présence d'une intersection d'interfaces.

On considère un barreau de hauteur $H = 10m$ et de largeur $L = 10m$ traversé par deux interfaces, la deuxième étant branchée sur la première. Les déplacements verticaux sont bloqués sur les bords inférieurs et supérieurs tandis que les déplacements horizontaux sont bloqués sur la face de droite. A l'embouchure des interfaces sur la face de droite, on impose respectivement des flux de fluide Q_1 et Q_2 (voir Figure 6.13).

Les caractéristiques du matériau et du fluide sont les suivantes:

Paramètres matériaux pour le massif poreux et le fluide	
Module de Young	$E = 5800MPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.25$
Densité du liquide	$\rho = 1000kg.m^{-3}$
Coefficient de Biot	$b = 0.8$
Perméabilité intrinsèque	$k^{int} = 10^{-15}m^2$
Viscosité du fluide	$\mu = 0.001Pa.s$
Porosité	$\phi = 0.1$
Module de compressibilité du fluide	$\frac{1}{K_w} = 5.10^{-10}Pa^{-1}$
Contrainte critique	$\sigma_c = 0.11MPa$
Energie cohésive	$G_c = 50Pa.m$

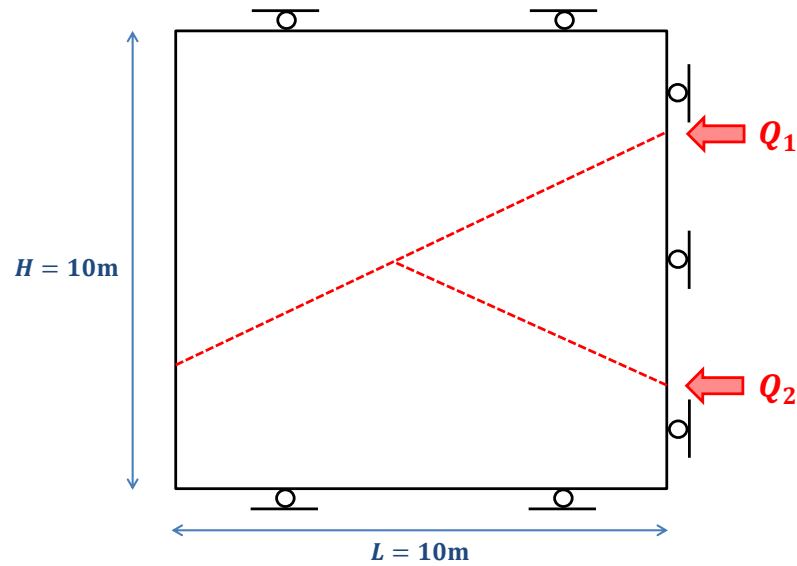


Figure 6.13 – Géométrie et chargement pour les deux premiers tests de simulation d'écoulement en présence d'une jonction d'interfaces.

Le maillage utilisé est régulier et constitué de 144 quadrangles à 8 noeuds. Pour le premier cas test élémentaire, on impose les flux suivants : $\begin{cases} Q_1 = 25.10^{-3} \text{ kg.s}^{-1} \\ Q_2 = 25.10^{-3} \text{ kg.s}^{-1} \end{cases}$. La déformée amplifiée et la pression de pore obtenues pour $t = 50s$ sont représentés sur la Figure 6.14 à gauche.

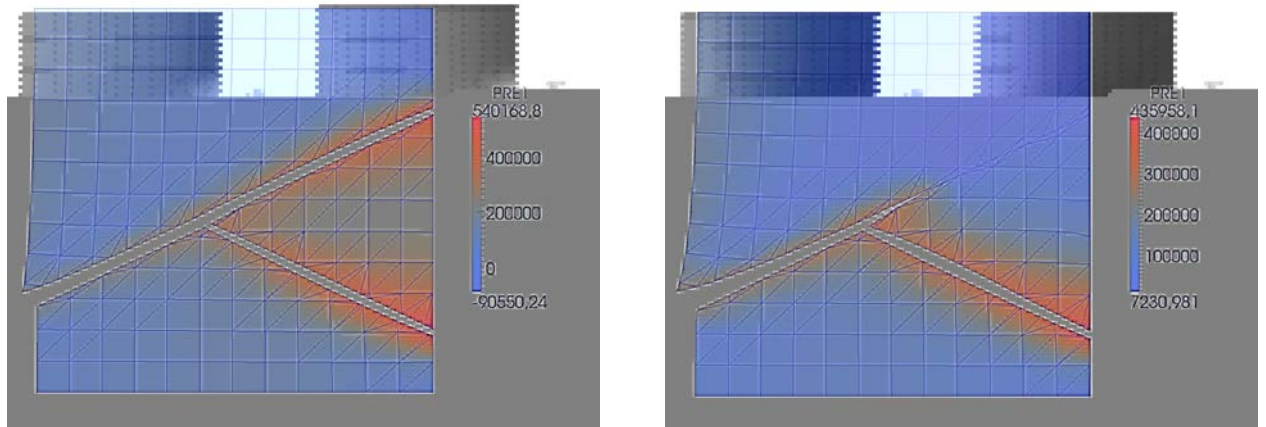


Figure 6.14 – Déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa pour le premier (à gauche) et le deuxième (à droite) test d'écoulement en présence d'une jonction d'interfaces.

Les deux branches d'interfaces de droite se propagent jusqu'à la jonction où elles se rejoignent et alimentent la branche de gauche qui se propage à son tour. La "connexion hydraulique" entre les branches d'interfaces semble fonctionnelle.

Pour le deuxième test élémentaire, on impose les flux suivants sur la face de droite : $\begin{cases} Q_1 = 0 \text{ kg.s}^{-1} \\ Q_2 = 25.10^{-3} \text{ kg.s}^{-1} \end{cases}$. La déformée amplifiée et la pression de pore obtenues pour $t = 50s$ sont représentées sur la Figure 6.14 à droite.

Cette fois-ci, seule la branche située en bas à droite est alimentée et se propage jusqu'à la jonction. Au niveau de la jonction, le fluide s'engouffre préférentiellement dans la branche de gauche qui se propage à son tour. La préférence pour la branche de gauche peut s'expliquer par le fait que la branche située en bas à droite qui se propage initialement induit des contraintes de compression verticales dans la partie droite du domaine, rendant plus facile la pénétration du fluide dans la branche de gauche par rapport à

l'autre branche située dans le secteur droit du domaine.

Remarque: dans notre modèle, on impose faiblement la condition $p_f = p$ au niveau des lèvres de chacune des interfaces (voir Annexe B). En effet, on intègre la formulation faible suivante:

$$\int_{\Gamma_i} (p - p_f) q_i^* d\Gamma_i = 0 \quad \forall q_i^* \in Q_i \text{ pour } i \in \{1, 2\} \quad (6.5)$$

sur chacune des lèvres de chaque interface. Le support utilisé pour réaliser cette intégration est constitué des points de Gauss des facettes de contact de chaque interface (confer Annexe A). On pourrait donc penser que, de proche en proche, la continuité de la pression de fluide p_f dans les branches d'interfaces est assurée par l'égalité faible avec la pression de pore environnante p , la pression de pore dans chaque bloc raccordant entre elles les pression de fluide dans les branches d'interfaces (voir Figure 6.15), ceci rendant finalement inutile l'imposition de la continuité de la pression de fluide p_f dans chaque branche au niveau de la jonction (confer paragraphe 6.2). Or il n'en est rien. L'expérience montre que si la continuité de la pression de fluide p_f n'est pas imposée directement, les branches d'interfaces se comportent de manière indépendante d'un point de vue hydraulique. Par exemple, la déformée amplifiée et la pression de pore obtenues pour $t = 50s$ pour le cas test précédent dans le cas où la condition d'égalité sur les champs p_f au niveau de la jonction n'est pas imposée sont représentées sur la Figure 6.16. Tout se passe alors comme s'il y avait un bouchon au niveau des jonctions d'interfaces hydrauliques. Seule la branche d'interface située en bas à droite est alimentée en fluide et le fluide n'est pas transmis aux autres branches d'interfaces au niveau de la jonction. Il est donc bien nécessaire d'imposer fortement cette continuité du champ p_f aux noeuds sommets des éléments comportant une jonction.

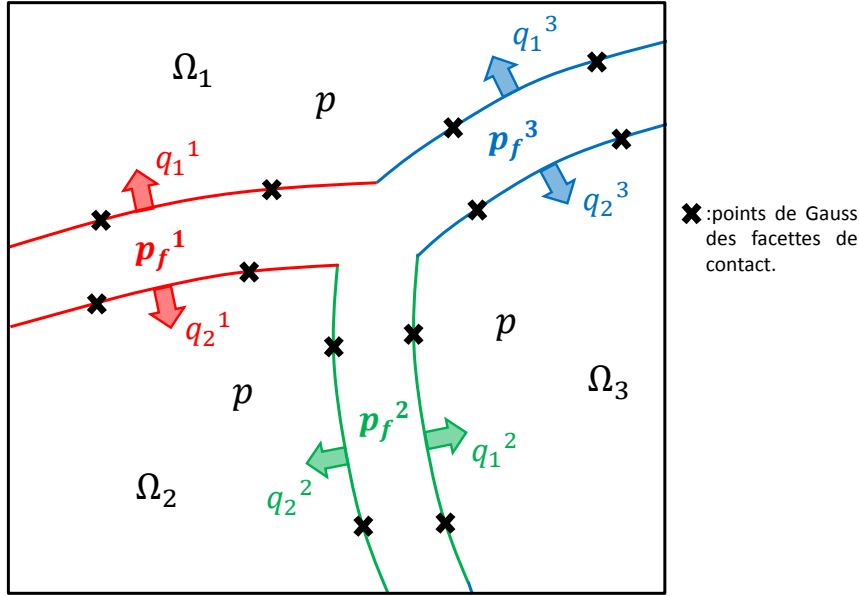


Figure 6.15 – Couplage hydrodynamique entre les branches d'interface et la matrice solide poreuse au niveau d'une jonction.

Pour le troisième test élémentaire, on considère le même barreau et les mêmes caractéristiques matériau mais on injecte un flux de fluide $Q = 25.10^{-3} \text{ kg.s}^{-1}$ dans l'interface de gauche au niveau de la face gauche du barreau (voir Figure 6.17 à gauche). Les déplacements verticaux sont toujours bloqués sur les faces inférieure et supérieure et les déplacements horizontaux sont bloqués sur la face de gauche. La déformée amplifiée et la pression de pore obtenues pour $t = 50s$ sont représentées sur la Figure 6.17 à droite.

Dans cette configuration, on s'aperçoit que l'interface principale, alimentée en fluide, se propage tout droit, en ignorant la présence de l'interface branchée.

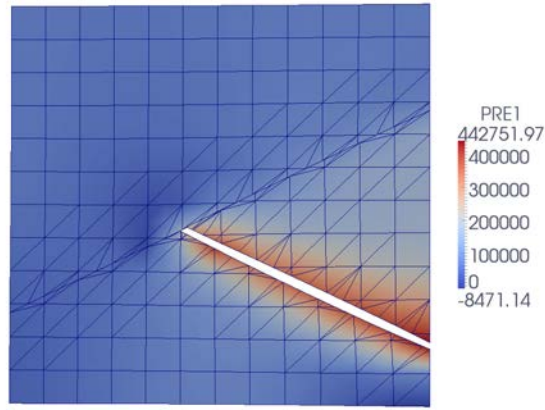


Figure 6.16 – Deuxième test d'écoulement : déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa au niveau de la jonction d'interfaces

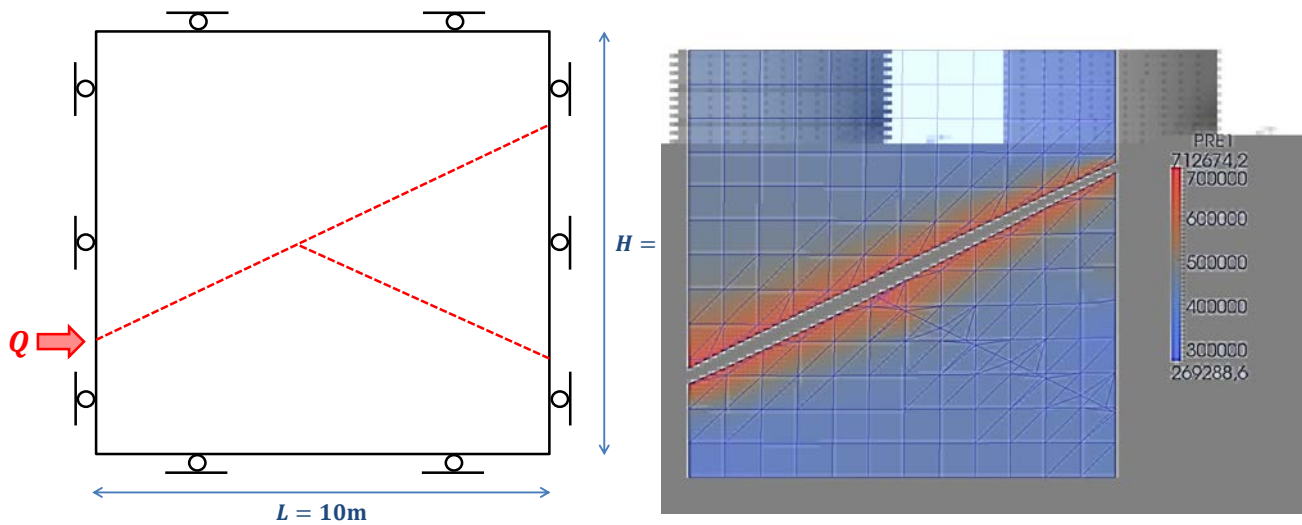


Figure 6.17 – Troisième test de simulation d'écoulement en présence d'une jonction d'interfaces: géométrie et chargement (à gauche), déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa (à droite).

Pour le quatrième cas test élémentaire, on fait en sorte de favoriser la propagation de l'interface branchée. Pour cela, on l'incline davantage par rapport à l'horizontale et on impose un déplacement vertical $U_y = -0.0001m$ sur la face supérieure du barreau (voir Figure 6.18 à gauche). De cette manière, les contraintes de confinement dans la direction normale à l'interface principale sont plus importantes que les contraintes de confinement dans la direction normale à l'interface branchée. L'interface branchée devrait donc être "plus facile à propager" hydrauliquement. La déformée amplifiée et la pression de pore obtenues pour $t = 50s$ sont représentées sur la Figure 6.18 à droite.

Au niveau de la jonction, le fluide est allé préférentiellement dans l'interface branchée, la propageant, mais a également permis de propager la branche de droite de l'interface principale.

Ces 4 tests élémentaires permettent de mieux appréhender le comportement de l'écoulement en jonction d'interfaces avec notre modèle HM-XFEM et de s'assurer de son bon fonctionnement.

6.3.3 Tenue de couverture d'un réservoir

Dans ce paragraphe, on présente un test de simulation de tenue de couverture. Le problème de la tenue de couverture se pose aussi bien dans le cadre du stockage géologique de CO_2 que dans le cadre de la récupération d'hydrocarbures dans les réservoirs fracturés. Les fractures stimulées hydrauliquement peuvent rencontrer sur leur chemin des fractures naturelles, des failles géologiques ou encore des interfaces sédimentaires. Les roches couverture, généralement composées d'argiles étanches, permettent

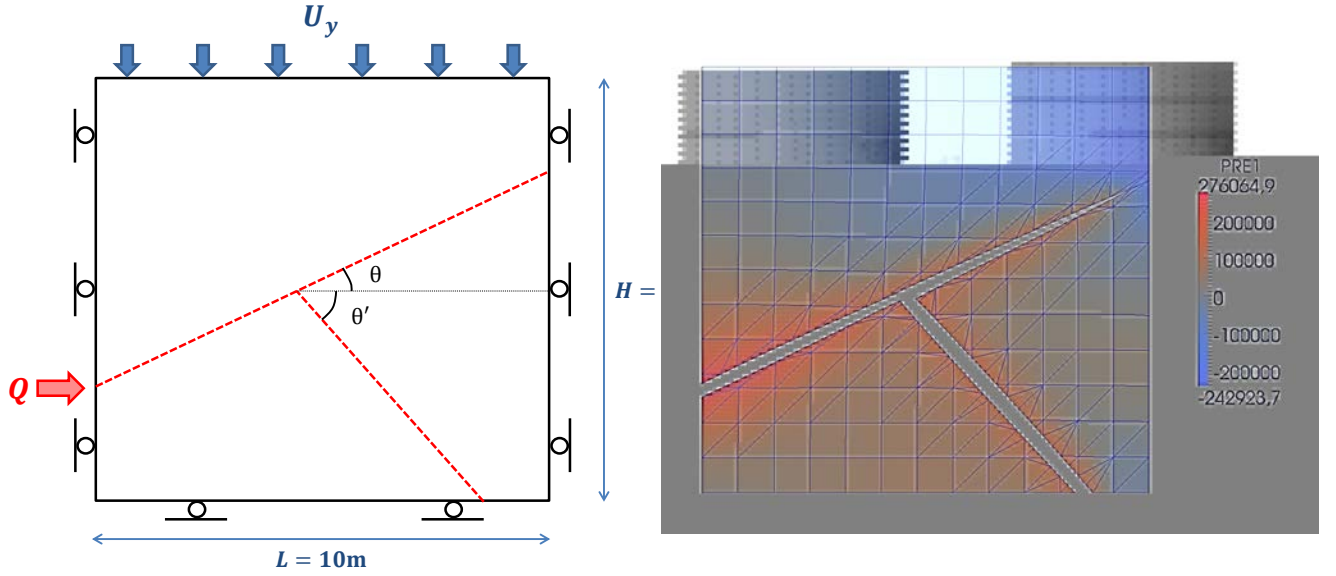


Figure 6.18 – Quatrième test de simulation d'écoulement en présence d'une jonction d'interfaces: géométrie et chargement (à gauche), déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa (à droite).

d'imperméabiliser les réservoirs. La propagation de fractures hydrauliques depuis le réservoir vers la roche couverture constitue donc une menace pour l'intégrité du réservoir. Des travaux ont donc été menés pour tenter de déterminer à quelle condition une fracture hydraulique est en mesure de traverser l'interface entre le réservoir et la roche couverture pour poursuivre sa propagation dans la roche couverture. On peut par exemple citer le modèle BEM avec frottement de Coulomb de Jeffrey et al. [93] pour la simulation de la rencontre des fractures hydrauliques avec des horizons sédimentaires. Les travaux de Karnaeva [13] mettent quant à eux en évidence l'influence du changement des paramètres mécaniques E et ν à travers l'interface. Plus la roche couverture aura une rigidité et un module de Poisson élevé par rapport à la roche réservoir, moins les fractures hydrauliques auront de chances de traverser l'interface entre le réservoir et la couverture.

Ci-dessous, on réalise un petit test pour simuler une expérience de tenue de couverture. On considère un barreau de hauteur $H = 10m$ et de largeur $L = 10m$ traversés par deux interfaces cohésives qui s'intersectent (voir Figure 6.19). La partie supérieure (en marron) s'apparentera à la roche couverture tandis que la partie inférieure s'apparentera à la roche réservoir. Les déplacements horizontaux sont bloqués sur les faces latérales et les déplacements verticaux sont bloqués sur les bords inférieur et supérieur.

Les caractéristiques des matériaux et du fluide sont les suivantes:

Paramètres matériaux pour le massif poreux et le fluide	
Module de Young	$\begin{cases} E_{res} = 17000MPa \\ E_{couv} = 25500MPa \end{cases}$
Coefficient de Poisson	$\begin{cases} \nu_{res} = 0.2 \\ \nu_{couv} = 0.3 \end{cases}$
Densité du liquide	$\rho = 1000kg.m^{-3}$
Coefficient de Biot	$b = 0.8$
Perméabilité intrinsèque	$k^{int} = 10^{-17}m^2$
Viscosité du fluide	$\mu = 0.001Pa.s$
Porosité	$\phi = 0.1$
Module de compressibilité du fluide	$\frac{1}{K_w} = 5.10^{-10}Pa^{-1}$
Contrainte critique	$\sigma_c = 1.25MPa$
Energie cohésive	$G_c = 900Pa.m$

Le module de Young et le coefficient de Poisson diffèrent pour les deux roches. On choisit $E_{couv} = 1.5 * E_{res}$ et $\nu_{couv} = 1.5 * \nu_{res}$. Le maillage utilisé est régulier et constitué de 1225 quadrangles à 8 noeuds. On injecte un flux de fluide $Q_0 = 25.10^{-3} kg.s^{-1}$ dans la branche située en bas du domaine. On réalise également un cas de référence pour lequel la roche couverture a les mêmes propriétés que la

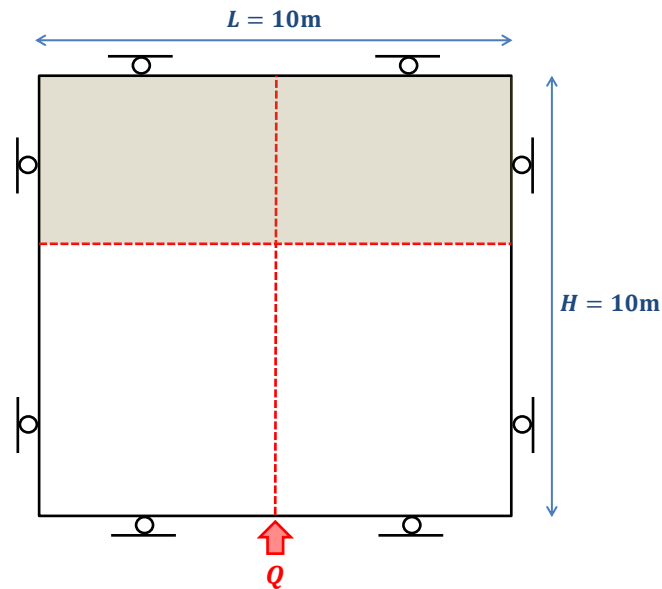


Figure 6.19 – Géométrie et chargement pour l'exercice de simulation de tenue de couverture.

roche réservoir. La déformée amplifiée et la pression de pore obtenues à $t = 30s$ pour le cas de référence et le cas d'étude sont représentées sur la Figure 6.20.

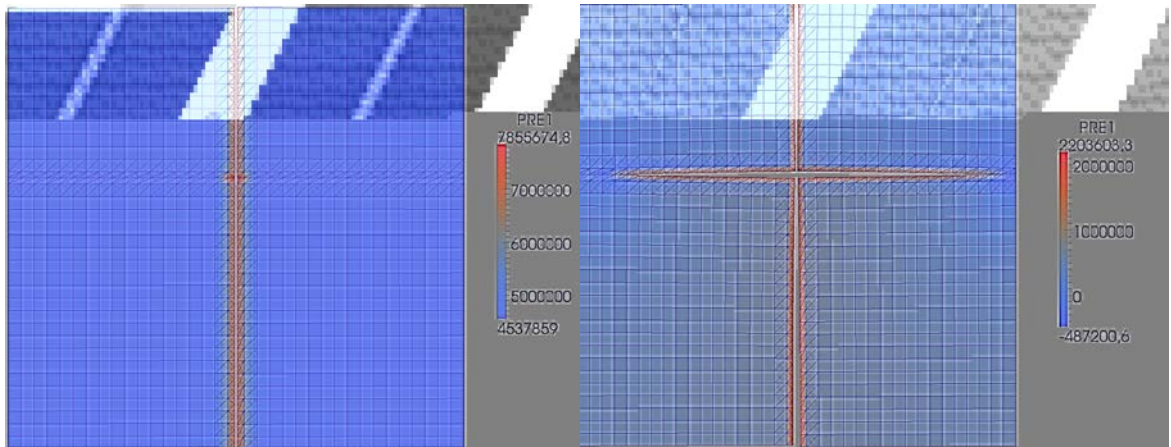


Figure 6.20 – Exercice de simulation de tenue de couverture: déformée amplifiée (X1000) et pression de pore en Pa pour le cas de référence (à gauche) et le cas d'étude (à droite).

Dans le cas de référence, la fracture hydraulique verticale s'est propagée tout droit, en ignorant l'interface cohésive horizontale. En revanche, dans le cas d'étude, la fracture hydraulique a pénétré la roche couverture, mais le fluide s'est également répandu dans l'interface horizontale entre les deux roches, ralentissant la propagation de la fracture hydraulique verticale. La différence des paramètres mécaniques entre la roche réservoir et la roche couverture a donc limité le risque de pénétration de la couverture.

Ce cas d'étude très simple vise à illustrer une possibilité ouverte par la prise en compte des jonctions hydrauliques dans notre modèle HM-XFEM. Dans le paragraphe suivant, on effectue une série de tests plus approfondis pour présenter une autre application possible: le "multi-stage hydraulic fracturing".

6.3.4 Simulation du "multi-stage hydraulic fracturing"

Dans ce paragraphe, on effectue des simulations de "multi-stage hydraulic fracturing". Ce procédé consiste à injecter une grande quantité d'eau dans un puits horizontal pour propager des fractures verticales préalablement initiées. Outre l'orientation du puits horizontal qui doit être judicieusement choisie

en fonction des contraintes régionales, le paramètre décisif pour la réussite du procédé est l'espacement entre les fractures verticales que l'on souhaite propager. En effet, si celles-ci sont trop proches, on risque de n'en faire propager qu'un nombre limité, en raison de l'effet d'écran. Lorsqu'une fracture hydraulique verticale se propage sous l'effet de la pression du fluide, elle modifie l'état de contraintes dans son entourage. Elle génère d'importants efforts dans la direction horizontale, rendant plus difficile la propagation d'autres fractures verticales. C'est l'effet d'écran.

Lecampion a étudié en détail la question de la répartition spatiale des fractures verticales dans le cadre du "multi-stage hydraulic fracturing" [10], [179]. Il a étudié la compétition entre les fractures verticales voisines à la lumière d'un nombre adimensionnel qui dépend des paramètres d'injection, des propriétés de la roche, de la différence de pression entre le puits et les fractures verticales et de l'espacement entre les différentes fractures. Il en déduit un espacement minimum à partir duquel les fractures verticales voisines peuvent se propager simultanément.

On se propose d'étudier le problème avec notre modèle HM-XFEM. On considère un bloc de hauteur $H = 10m$ et de largeur $L = 60m$ traversé dans sa partie basse par une interface horizontale (voir Figure 6.21). Plusieurs interfaces verticales sont branchées sur cette interface horizontale, dans la partie

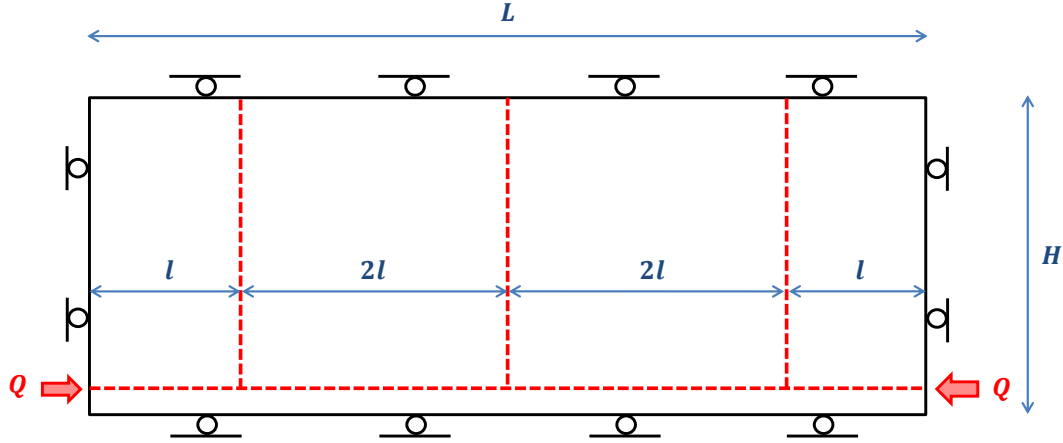


Figure 6.21 – Géométrie et chargement pour les tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing".

L'interface horizontale est amenée à jouer le rôle de puits. On l'ouvre donc initialement. Elle est alimentée en fluide à ses deux extrémités, et la pression de fluide s'y homogénéise très rapidement. La déformée amplifiée et la pression de pore à l'état initial sont représentées sur la Figure 6.22. La pression de fluide qui règne alors dans le puits est de l'ordre de $6.7MPa$. On poursuit l'injection du fluide dans le puits avec un débit $Q = 1.10^{-1} kg.s^{-1}$ pour une durée égale à $1500s$.

Les caractéristiques du matériau et du fluide sont les suivantes:

Paramètres matériaux pour le massif poreux et le fluide	
Module de Young	$E = 5800MPa$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.25$
Densité du liquide	$\rho = 1000kg.m^{-3}$
Coefficient de Biot	$b = 0.8$
Perméabilité intrinsèque	$k^{int} = 10^{-17}m^2$
Viscosité du fluide	$\mu = 0.001Pa.s$
Porosité	$\phi = 0.1$
Module de compressibilité du fluide	$\frac{1}{K_w} = 5.10^{-10}Pa^{-1}$
Contrainte critique	$\sigma_c = 0.9MPa$
Energie cohésive	$G_c = 500Pa.m$

Le maillage utilisé est régulier et constitué de 5430 quadrangles à 8 noeuds. On effectue ce test

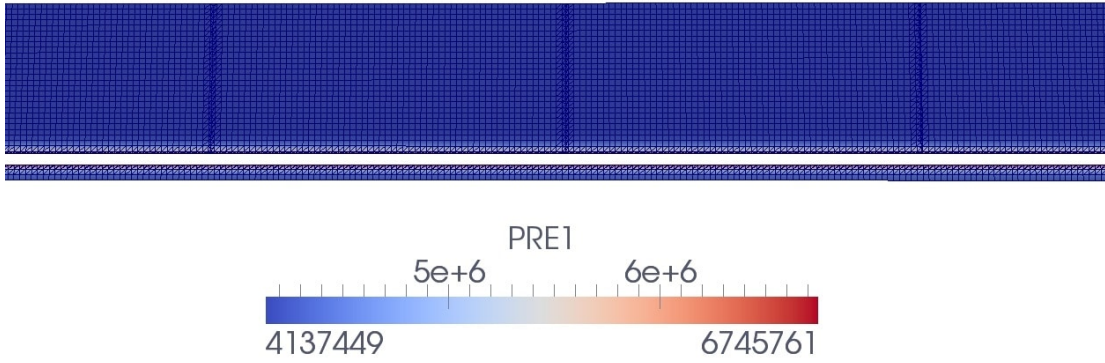


Figure 6.22 – Etat de départ pour les tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing".

pour un nombre de fractures verticales $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. Les déformées amplifiées et les pressions de pore obtenues à $t = 1500s$ sont représentées sur la Figure 6.23.

On observe la propagation de certaines fractures verticales. Dans tous les cas, ces propagations sont quasi-simultanées et très brutales. Il faut de l'ordre de $1s$ pour propager complètement une fracture verticale. Sur la Figure 6.24, on représente l'évolution de la pression du fluide au niveau de l'embouchure d'une fracture verticale amenée à se propager. On observe une baisse de pression soudaine au moment de l'ouverture de la fracture verticale. En s'ouvrant, elle offre un espace supplémentaire au fluide pour se répandre, d'où la baisse de pression observée. Une fois la propagation terminée, la pression de fluide reprend son augmentation régulière en raison de l'injection continue de fluide dans le système. Le fait de modéliser le puits comme une interface assure en effet que la conservation de la masse du fluide dans l'ensemble {puits+fractures} est résolue au sein même des éléments finis. Cela est rendu possible par la prise en compte des jonctions hydrauliques dans notre modèle.

Quel que soit le nombre $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ de fractures verticales, seules deux se propagent effectivement. Et les fractures qui se propagent ne sont pas toujours celles situées sur les bords. On peut donc penser que pour $n \geq 3$, l'espacement entre les fractures verticales est trop petit pour permettre la propagation de l'ensemble des fractures verticales. En particulier, pour $n = 3$, cet espacement vaut $2l = 20m$. Et pour $n = 5$, la fracture centrale, éloignée d'une distance $4l = 24m$ des fractures situées aux extrémités, ne se propage pas. Pour $n = 2$, les deux fractures espacées de $2l = 30m$ parviennent à se propager. On pourrait donc supposer que l'espacement minimal permettant la propagation de l'ensemble des fractures verticales se situe entre $24m$ et $30m$.

On effectue une deuxième série de tests avec $L = 120m$ et $n \in \{4, 5, 6\}$. Les déformées amplifiées et les pressions de pore obtenues à $t = 1500s$ sont représentées sur la Figure 6.25.

Dans le cas où $n = 4$, toutes les fractures verticales parviennent à se propager. L'espacement vaut alors $2l = 30m$. En revanche, pour $n = 5$, seule une fracture verticale sur deux se propage, l'espacement vaut alors $2l = 24m$. Pour $n = 6$, on observe la propagation de 3 fractures uniquement, et l'espacement vaut $2l = 20m$. Cette deuxième série de tests vient donc renforcer l'hypothèse de l'existence d'un espacement minimal entre les fractures verticales pour assurer la propagation de l'ensemble de ces dernières. Cet espace serait situé entre $24m$ et $30m$ (pour ce cas de figure précis).

On se propose d'effectuer une dernière série de tests avec un nombre de fractures constant égal à 4, afin d'obtenir un encadrement plus précis de l'espacement minimal entre les fractures verticales nécessaire à la propagation de l'ensemble de ces dernières. On fait varier l'espacement $2l$ entre $24m$ et $30m$ avec un pas de $1m$. Le nombre de fractures verticales étant égal à 4, la longueur totale du domaine est à $4 * 2l$.

Pour $2l \geq 25m$, on observe systématiquement la propagation des 4 fractures hydrauliques verticales. Pour $2l = 24m$, seules les deux fractures verticales des extrémités se propagent. Les déformées amplifiées et les pressions de pore obtenues à $t = 1500s$ pour $2l = 24m$, $2l = 25m$ et $2l = 26m$ sont représentées sur la Figure 6.26.

Cette dernière série de tests vient encore renforcer l'hypothèse de l'existence d'un espacement minimal entre les fractures verticales pour assurer la propagation de l'ensemble de ces dernières. Dans le cas que nous avons étudié, cet espace serait situé entre $24m$ et $25m$. Néanmoins, il faudrait mener une analyse plus complète pour envisager avec certitude la validité de cette hypothèse.

Ces séries de tests démontrent encore une fois le potentiel de notre modèle HM-XFEM avec jonction d'interfaces, qui pourrait constituer un outil numérique performant pour des applications industrielles variées.

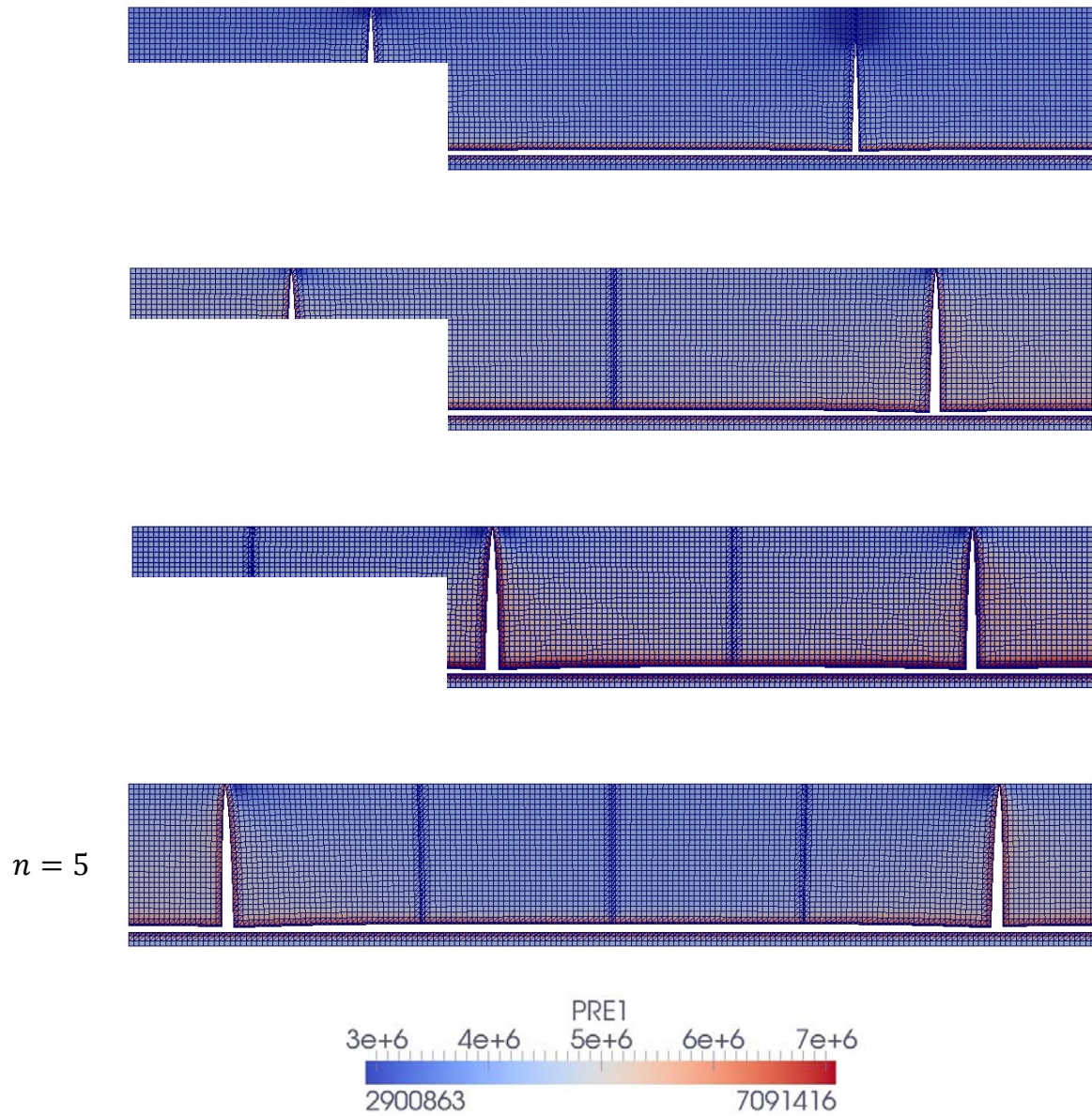
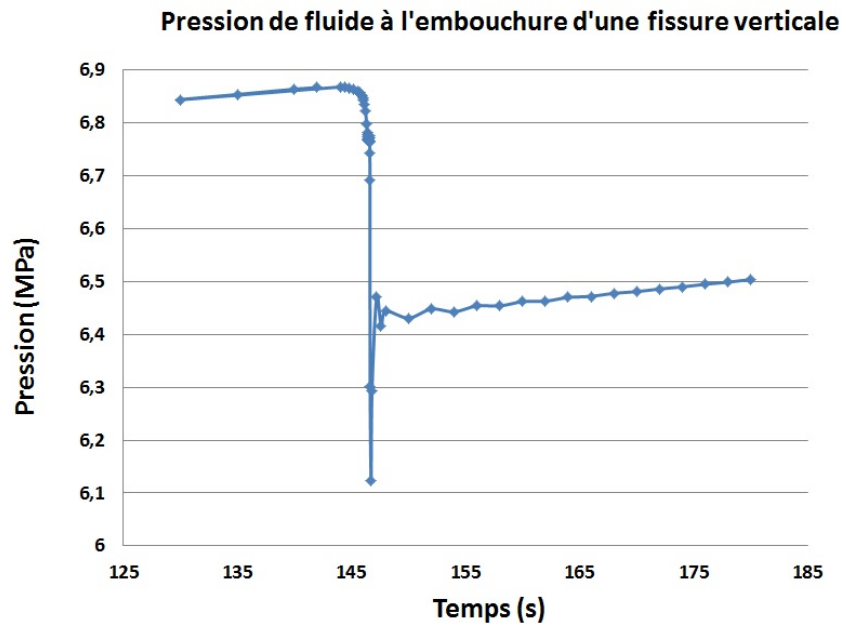


Figure 6.23 – Déformée amplifiée (X150) et pression de pore en Pa pour les tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing" avec $L = 60m$.



ure d'une fracture verticale au cours de sa propagation (en

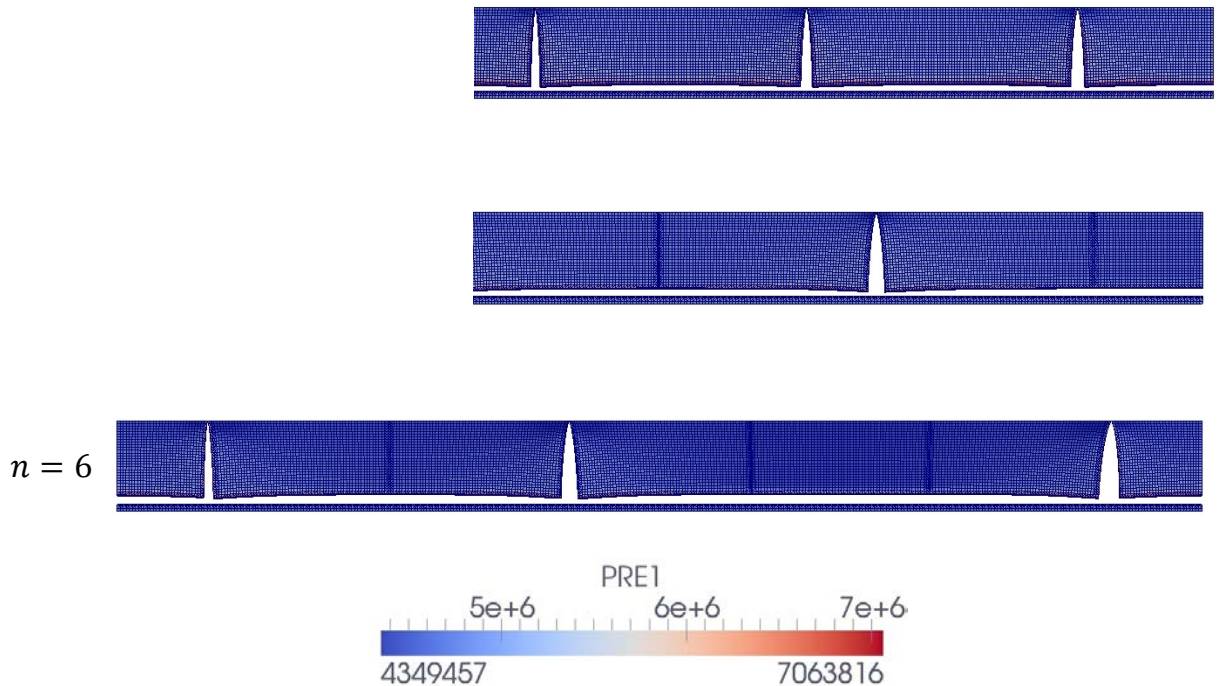


Figure 6.25 – Déformée amplifiée (X150) et pression de pore en Pa pour les tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing" avec $L = 120m$.

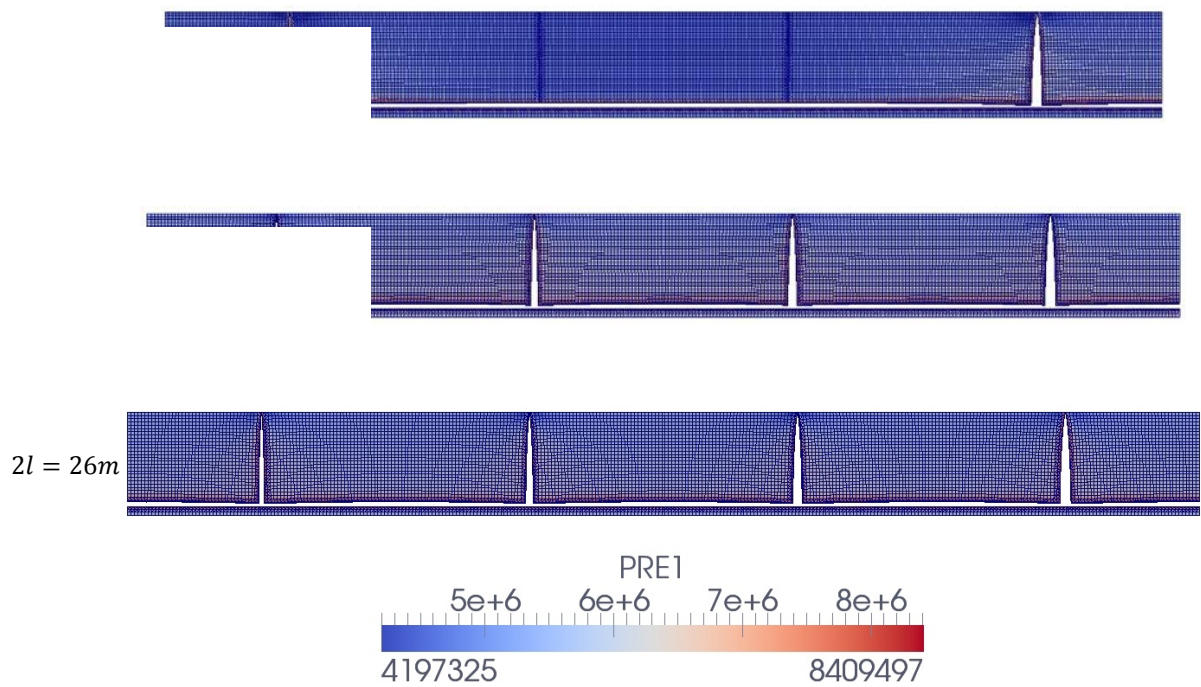


Figure 6.26 – Déformée amplifiée (X150) et pression de pore en Pa pour la dernière série de tests de simulation de "multi-stage hydraulic fracturing".

Conclusion et Perspectives

Nous avons mis au point un outil numérique original pour la simulation d'un réseau de fractures tridimensionnel au sein d'un massif poreux, les fractures étant stimulées hydrauliquement et se propageant éventuellement. De nombreux modèles voient le jour pour étudier les milieux poreux fracturés, afin de répondre à des besoins croissants dans le cadre d'applications industrielles variées. Les aspects qui démarquent le modèle que nous avons développé des autres modèles existants sont les suivants:

- notre modèle simule un couplage hydromécanique total entre le réseau de fractures hydrauliques et le milieu poreux environnant,
- il permet la propagation des fractures sur des trajets non prédéfinis,
- il a été étendu au cas tridimensionnel,
- il est capable de considérer des géométries de fracture quelconques,
- et enfin il prend en compte les jonctions entre fractures hydrauliques.

Afin de rendre compte de ces différents aspects, nous avons choisi la méthode XFEM pour la prise en compte des discontinuités au sein du milieu poreux. On s'affranchit ainsi de la difficulté de produire un maillage conforme au réseau de fractures et de la nécessité d'avoir recours à des techniques de remaillage (qui sont complexes, coûteuses et perturbent le problème à résoudre) en cas de propagation des fractures. Notre modèle s'appuie sur les avancées les plus récentes de la méthode des éléments finis étendue, comme l'approche cohésive développée par Ferté [2] pour la propagation en mode mixte de fractures tridimensionnelles sur trajets inconnus, ou encore les éléments de jonction XFEM. La stabilité de notre modèle est assurée par l'utilisation de 3 espaces d'approximation distincts. Le champ des déplacements est interpolé de manière quadratique, le champ de pression de pore de manière linéaire et enfin, l'ensemble des champs associés aux fractures cohésives (champs cohésifs et champs relatifs à l'écoulement dans les fractures) sont discrétisés sur un espace d'approximation adapté qui s'appuie sur les noeuds sommets des arêtes du maillage intersectées par les fractures cohésives. De cette manière, on n'observe pas d'oscillations lors de la résolution numérique. Cependant, notre modèle ne peut supporter qu'un nombre restreint de discontinuités. On ne discrétise donc que les fractures principales. L'influence d'éventuelles fractures d'importance secondaire pourra être prise en compte avec des techniques d'homogénéisation. La nucléation des fractures dans les milieux poreux de même que l'émergence de jonctions de fractures hydrauliques ne sont pas traitées avec notre modèle. On modélise l'évolution de fractures hydrauliques préexistantes. De même, les jonctions de fissures sont prédéfinies par l'utilisateur. On ne traite pas les éventuels branchements qui surviennent après la bifurcation d'une fracture hydraulique vers une autre fracture. Une méthode permettant de gérer la nucléation et la coalescence de fractures dans le cadre XFEM a récemment été développée par Moës et al. [180].

En premier lieu, nous avons rappelé le principe de la méthode XFEM et présenté une méthode d'intégration robuste pour les modélisations XFEM quadratiques tridimensionnelles avec jonctions d'interfaces. Puis, nous avons détaillé le modèle hydromécanique adopté et le modèle de zone cohésive utilisé pour gérer la propagation et l'éventuelle refermeture des fractures hydrauliques. Nous avons alors démontré la fiabilité du modèle par la comparaison avec une solution analytique asymptotique. Par la suite, nous avons basculé sur une approche cohésive de type "Mortier" pour faciliter la mise en place d'une procédure de propagation sur trajet inconnu. Le modèle a alors été de nouveau comparé à une solution analytique asymptotique. Après avoir détaillé la procédure de propagation sur trajets non prédéfinis, nous avons effectué divers tests de réorientation de fractures hydrauliques, démontrant ainsi les capacités du modèle. Enfin, nous avons exposé l'extension de notre modèle aux jonctions de fractures hydrauliques et illustré, avec quelques exemples, le champ d'applications ouvert par cette fonctionnalité supplémentaire. En particulier, le modèle numérique développé peut apporter une meilleure compréhension sur:

- la déformation de la matrice poreuse solide induite par la présence de fractures dans lesquelles circule un fluide sous pression,

- l'extension de ces fractures, notamment la distance jusqu'à laquelle elles sont susceptibles de se propager,
- la direction préférentielle de propagation des fractures hydrauliques et leur éventuelle déviation,
- la compétition qui existe entre différentes fractures hydrauliques au sein d'un réseau,
- la circulation du fluide dans ce réseau de fractures hydrauliques,
- les échanges de matière qui existent entre la roche poreuse et ce réseau,
- la compétition entre les effets de la viscosité du fluide et les effets de la ténacité de la matrice poreuse solide.

Les développements ont été implémentés et restitués dans le code de calcul aux éléments finis industriel *Code_Aster*. Ces travaux seront amenés à être poursuivis dans le cadre de la thèse de Sourena Moosavi (Thèse GéoRessources 2015-2018 "Crack initiation and propagation in anisotropic medium accounting for Hydro-Mechanical couplings") qui travaille sur la prise en compte de l'anisotropie structurale de la matrice poreuse.

Parmi les perspectives de développement possibles, on pourrait également étendre le modèle aux conditions partiellement saturées. Des exemples existent dans la littérature: Mohammadnejad et Khoei [104] ou encore Dastjerdy et al [181]. Il serait intéressant aussi de prendre en compte l'inertie de la matrice solide poreuse, l'aspect dynamique ayant certainement un rôle clef dans le phénomène de propagation des fractures hydrauliques. Concernant la démarche de validation du modèle, on pourrait effectuer une nouvelle comparaison avec une solution analytique asymptotique, en s'appuyant cette fois-ci sur un modèle de type P3D [6]. Aussi, il conviendrait d'étudier de manière approfondie l'adaptation des paramètres et de la forme des lois cohésives que nous utilisons au cas des roches poreuses. A propos des jonctions de fissures, la possibilité de brancher des interfaces sur plusieurs fissures à la fois (voir Figure 6.27) nous permettrait de modéliser des réseaux de fractures complexes. Il s'agirait également de prendre en compte l'apparition de branchements entre fractures hydrauliques suite à la mise à jour des surfaces de fissuration potentielles. Mais l'axe de développement privilégié concerne la procédure de propagation sur trajets non prédéfinis. Comme expliqué dans le paragraphe 5.4, il faudrait pouvoir projeter l'ensemble des champs du modèle d'une surface de fissuration potentielle à l'autre. A cette fin, on peut s'appuyer sur l'algorithme d'extension des champs associés à la fracture cohésive développé par Ferté [7] et envisager d'utiliser une grille de points d'intégration fixe dans les éléments traversés par les discontinuités. En ce qui concerne la propagation ex au-delà du fond d modèle comportar début.

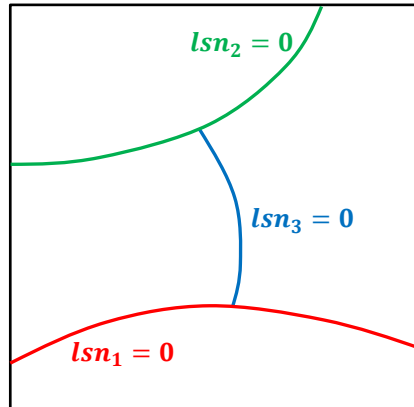


Figure 6.27 – Une interface secondaire branchée en ses deux extrémités sur des interfaces horizontales.

Par ailleurs, il est nécessaire d'apporter des améliorations pour certaines fonctionnalités du modèle existant. Le modèle de zone cohésive utilisé et l'espace d'approximation des champs cohésifs gagneraient à être validés avec des analyses de convergence du même type que celles effectuées dans l'Annexe A (avec des interfaces courbes tridimensionnelles). Nous avons en effet rencontré à plusieurs reprises des défauts de convergence pour les modélisations 3D comportant des éléments non tétraédriques en présence d'interfaces courbes. Pour les modèles tridimensionnels, la prise en compte des jonctions hydrauliques

manque de robustesse. Lorsque la géométrie de la jonction est non triviale, on assiste souvent à des redondances dans l'imposition de la condition de continuité de la pression de fluide p_f . Une solution consisterait à n'utiliser qu'un seul et même espace d'approximation pour toutes les branches au niveau des jonctions d'interfaces pour interpoler le champ p_f , au lieu d'utiliser les espaces d'approximation propres à chaque branche pour finalement les raccorder entre eux. De même, la procédure géométrique de mise à jour des *level set* est parfois mise en défaut pour les fronts de fissure courbes. L'utilisation de la "fast-marching method", qui effectue la mise à jour des champs de *level set* de proche en proche à partir de la surface de discontinuité, permettrait de gagner en robustesse. Enfin, il conviendrait de traiter le problème de la pression de fluide négative en pointe de fissure.

Les fonctionnalités développées au cours de cette thèse sont nombreuses. On a aussi apporté des améliorations autour de fonctionnalités déjà existantes. Les points restants à améliorer et les perspectives de développements futurs sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	Améliorations possibles	Perspectives
XFEM quadratique		Développement d'une méthode d'intégration sur grille fixe dans les éléments traversés par une discontinuité [165].
HM		Extension du modèle aux milieux poreux partiellement saturés.
Modèle de zone cohésive	Validation du modèle de zone cohésive et de l'espace d'approximation des champs cohésifs avec des analyses de convergence sur des cas test de compression avec des interfaces 3D courbes.	Travaux sur l'identification des paramètres de la zone cohésive (σ_c et G_c) et la détermination de lois appropriées dans le cas des roches poreuses.
Ecoulement dans les interfaces	Traitement du problème de la pression de fluide négative en pointe de fissure.	Nouvelle validation du modèle avec un test de type P3D [6].
Propagation sur trajet non prédéfini	Amélioration de la robustesse des procédés de détection du front cohésif et de mise à jour des <i>level set</i> (utilisation par exemple de la "Fast Marching Method" [47]).	Projection des champs du modèle hydromécanique après propagation.
Jonctions d'interfaces	Amélioration de la robustesse des jonctions hydrauliques dans le cas 3D (imposition de la condition de continuité de la pression de fluide p_f)	Développement d'une approche généralisée aux fractures branchées sur plusieurs fractures à la fois. Gestion automatisée de l'apparition de jonctions de fractures hydrauliques suite à la mise à jour des surfaces de fissuration potentielles.
Aspect dynamique		Prise en compte de l'inertie de la matrice poreuse solide.

Annexe A

Une technique d'intégration quadratique pour les fissures tridimensionnelles courbes et les interfaces branchées dans le cadre de la méthode des éléments finis étendue.

An integration technique for 3D curved cracks and branched discontinuities within the eXtended Finite Element Method

Paul B.^{(1,2,3)*}, Ndeffo M.^(1,4), Massin P.⁽¹⁾, Moës N.⁽⁴⁾

⁽¹⁾ Laboratoire IMSIA, UMR EDF-CNRS-CEA-ENSTA ParisTech, 828 Boulevard des Maréchaux 91762 Palaiseau Cedex, France

⁽²⁾ IFPEN, 1 à 4 avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison Cedex, France

⁽³⁾ GeoRessources UMR 7359 Université de Lorraine, ENSG ; CNRS ; CREGU ; 54518 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

⁽⁴⁾ GeM, École Centrale de Nantes/Université de Nantes/UMR 61831, rue de la Noé, 44321 Nantes Cedex 3

bertrand.paul@polytechnique.edu

marcel-m-externe.ndeffo@edf.fr

patrick.massin@edf.fr

nicolas.moes@ec-nantes.fr

Abstract

In this paper, we present a robust procedure for the integration of discontinuous functions across arbitrary curved interfaces defined by means of level set functions for an application to linear and quadratic eXtended Finite Elements. It includes the possibility of having branched discontinuities. For the volume integration, integration subcells are built inside the approximation mesh. The set of subcells conforms to the discontinuities, constitutes the integration mesh and can also be used by the visualization tools. Surface integration may also be performed along the crack faces by selecting the appropriate subcell faces. When combined with the eXtended Finite Element Method (XFEM) optimal convergence rates are obtained with curved geometries for both linear and quadratic elements.

Keywords: XFEM, level-set-method, high order approximation, numerical integration, curved geometries

1. Introduction

The Extended Finite Element Method (X-FEM) is an extension to the classical finite element method introduced by Moës, Dolbow and Belytschko in [1]. It offers a convenient way to solve problems with interfaces or singularities. The X-FEM accounts for the presence of discontinuities by means of a local enrichment of the polynomial interpolation space with discontinuous functions, based on the partition of unity method [2]. The discontinuities are usually described implicitly by means of the level set method [3], [4]. As a consequence, some of the finite elements of the mesh are crossed by the discontinuities. The presence of discontinuities within the elements must then be taken into account for the numerical integration. Finite elements are split into integration subcells matching the discontinuities, so that the classical numerical integration techniques may be used on each side of the discontinuity. One may also want to enforce loadings on the immersed discontinuities (contact efforts or fluid pressure in the case of hydraulic fractures). This requires a reconstructed approximation of the arbitrary discontinuities. It is clear then that the accuracy of the extended finite element depends on the quality of approximation of the subcells delimited by the immersed discontinuities. For this matter, appropriate error measures have been introduced by Ferté [5] for linear and quadratic extended finite elements. Corresponding theoretical orders of convergence were obtained in 2 dimensions. In this paper, we propose an accurate integration technique for 3 dimensional quadratic models. The presence of discontinuities within the elements also prefigures major conditioning issues as the shape function supports associated with enriched degrees of freedom depend on the position

*Correspondence to: Bertrand PAUL, IFPEN (bat. L), 1 à 4 avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison Cedex, France
Email address: bertrand.paul@polytechnique.edu

of the arbitrary interfaces. This is even worse for 3 dimensional quadratic models. For this aim, we rely on the work of Ndeffo [6] who proposed a robust X-FEM formulation for quadratic models. In particular, we extend it to the case of branched interfaces.

The extension of the X-FEM to higher order elements has been widely considered. First of all, Stazi and Belytschko [7], based on the work of Chessa [8] on the partition of unity, proposed a quadratic interpolation for the classical part of the displacement but a linear one for the enriched Heaviside and crack-tip parts. In order to better describe the crack curvature, the level set function was discretized using the same quadratic shape functions as those of the classical part of the displacements and its iso-zero was approximated by means of a linear subdivision. However the authors highlighted the need to consider the curvature of the interface for the design of the integration subcells. Cheng and Fries [9], Dréau et al. [10], and Moumnassi and coworkers [11] observed suboptimal convergence rates for higher formulation with linear representations of curved interfaces. The description of the curved crack geometries over finer subgrids allowed to recover optimal error rates, provided that the straight subcells approximating the curved crack were small enough to compensate the interpolation error generated by the linear subdivision [12]. Finally, Legay, Wang and Belytschko [13] and Huerta [14] used quadratic curved subcells in 2 dimensions to approximate curved interfaces and observed optimal convergence rates. The quadratic interpolation of the crack-tip part of the enrichment was considered in [15] but encountered major conditioning issues. In order to circumvent this difficulty, alternative enrichment strategies were proposed: enrichment with cutoff functions [16], vectorial enrichment [17] or both combined [18]. The use of a pre-conditioner over a fixed enriched area around the crack-tip [19] also offered a successful remedy. The numerical examples we present in this paper are limited to Heaviside enrichment, but our cutting procedure provides an accurate quadratic approximation of crack fronts which may be combined with the tools mentioned above for the integration over crack tip areas.

In the present work, the approach of Legay and coworkers [13] is extended to 3 dimensional models. Starting from the discretized iso-zero of the level set, the elements are split into straight tetrahedral subcells in the linear case and curved quadratic tetrahedral subcells in the quadratic case. The resulting integration subcells are then considered as belonging to one or the other side of the discontinuity. The numerical results we obtain show the accuracy of the proposed integration procedure.

The higher order integration of implicit geometries for 3D models has been widely investigated by Fries et al [20]. The main feature of our methodology compared to the procedure depicted in [20] is the use of level set adjustments to handle the potential multiple roots of the level sets along the edges of the mesh. In the approach of [20], sample grids and recursive refinements are used to detect the fine details of the arbitrary interfaces and reduce the number of topologically distinct configurations. In our approach the level sets are approximated based on the initial mesh refinement with the discretization used for the displacement field. Additionally, the procedure detailed in the present work is extended to branched arbitrary interfaces and takes into consideration the crack fronts.

The paper is organized as follows. Some preliminaries are given in Section 2: we discuss the integration problem within the extended finite element method framework. Then Section 3 focuses on the partitioning of the approximation mesh with respect to arbitrary discontinuities. The elements of the mesh that are crossed by the discontinuities are split into integration subcells fitting the discontinuities. In Section 4, we detail the recovery of the approximated discontinuity surfaces as the set of faces of integration subcells fitting the arbitrary discontinuities. In Section 5, we depict the X-FEM formulation we use for branched discontinuities. Then, convergence analyses are performed on the resolution of the approximated interfaces for 3D models with curved branched interfaces. Optimal convergence rates are achieved for both the linear and the quadratic case. Finally, we perform X-FEM mechanical test cases in 3 dimensions with a single curved interface. Convergence analyses are performed for both the displacement norm and the energy norm. Once again, we obtain optimal convergence rates for both the linear and the quadratic case.

2. Preliminaries

2.1 Model problem

The formulation is written within the framework of linear elastostatic mechanics. We consider a crack Γ in a domain Ω with boundary $\partial\Omega$ and outward normal $\mathbf{n}$, representing a linear elastic and isotropic solid. The crack is composed of two faces Γ_- and Γ_+ whose outward normal are respectively $\mathbf{n}_-$ and $\mathbf{n}_+$. The domain is submitted to imposed displacements $\bar{\mathbf{u}}$ on Γ_u and imposed tractions $\bar{\mathbf{t}}$ on Γ_t . The crack faces are eventually subject to imposed tractions $\bar{\mathbf{t}}_-$ and $\bar{\mathbf{t}}_+$ on Γ_- and Γ_+ (Figure 1). We study the case without body forces, in small strain. Stresses, strains and displacements are respectively denoted by $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ and $\mathbf{u}$. The problem is to find the admissible displacement field which satisfies the following equations:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ on } \Omega$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ on } \Gamma_t$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_- = \bar{\mathbf{t}}_- \text{ on } \Gamma_- \text{ and } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_+ = \bar{\mathbf{t}}_+ \text{ on } \Gamma_+$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t) \text{ on } \Omega$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_u$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \text{ on } \Omega \text{ where } \mathbf{C} \text{ is Hooke's tensor}$$

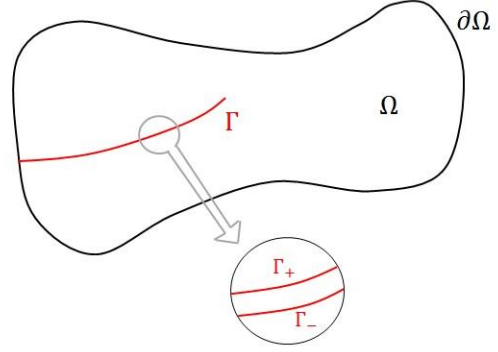


Figure 1. Definition of the problem.

Let U be the space of admissible displacement fields and U_0 the space of kinematically admissible test functions $\mathbf{v}$ vanishing on Γ_u . The weak form of equilibrium for linear elastostatic and boundary conditions can be written as:

Find $\mathbf{u} \in U$ such that:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_-} \bar{\mathbf{t}}_- \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_+} \bar{\mathbf{t}}_+ \cdot \mathbf{v} d\Omega, \forall \mathbf{v} \in U_0 \quad (\text{Eq. 1})$$

Within the finite element method, the domain Ω is meshed. The approximation of the displacement field $\mathbf{u}_h$ is:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \varphi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i$$

where φ_i are the finite element shape functions, $\mathbf{u}_i$ the nodal displacements and N the set of nodes in the mesh.

However the internal crack Γ does not necessarily fit the mesh. Therefore in the framework of the extended finite element method (through the partition of unity [2]), the approximation of the displacement field is enriched by additional discontinuous functions discontinuous to allow a displacement jump across the crack:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \varphi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{k=1, K} \sum_{j \in N_{g,k}} \varphi_j(\mathbf{x}) F_k(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{j,k} \quad (\text{Eq. 2})$$

where K is the number of distinct enrichment functions, F_k the enrichment functions and $a_{j,k}$ the associated additional degrees of freedom for the sets of enriched nodes $N_{g,k}$. The enrichment functions F_k are eventually discontinuous across the crack.

2.2 Level set method

The arbitrary discontinuities are localized thanks to level set functions. An arbitrary interface is introduced with a single level set function which represents the normal distance to the interface surface. The interface then corresponds to the iso-zero of this level set. In this article, this level set function is named the normal level set or lsn . When it comes to describing arbitrary cracks, two level set functions are necessary [21]. The first one stores the normal distance to the crack surface, regardless of the presence of the crack front. The second one, the tangential level set (lst), is the tangent distance to the crack front with respect to the crack surface. The crack is defined as the set of points x that satisfies: $\begin{cases} lsn(x) = 0 \\ lst(x) < 0 \end{cases}$. The level set functions are often chosen as distance functions satisfying: $\begin{cases} \|\nabla lsn\| = 1 \\ \|\nabla lst\| = 1 \end{cases}$ and given their definition, they must also satisfy: $\nabla lsn \cdot \nabla lst = 0$ on the crack front.

In Figure 2, we observe the arbitrary crack surface described by a normal level set (top left). The crack front is then described thanks to the tangential level set (top right). Finally, we depicted on the bottom the resulting crack.

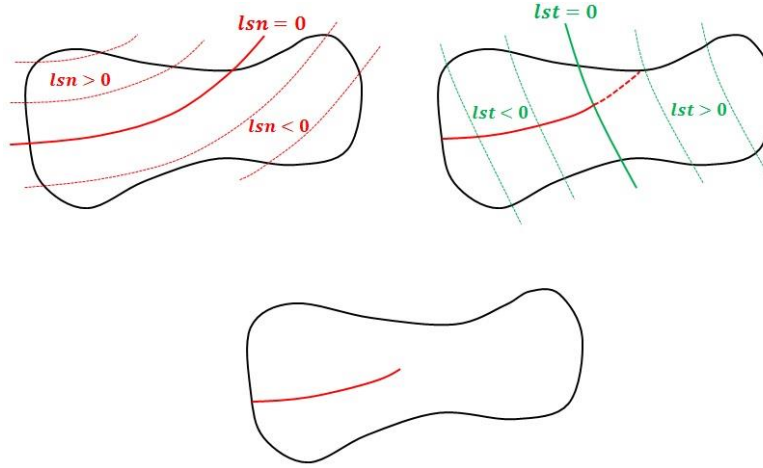


Figure 2. On the use of level set functions to describe an arbitrary crack.

In the implementation we have chosen, level set functions are approximated by the same shape functions as the displacement field (see [21]). This is a common choice which enables the crack shape to be described entirely in terms of nodal values. Of course this is not necessary nor always most convenient and one could choose to work with the analytic functions. However, in the case of propagation, the functions are not known explicitly and their numerical estimates at the nodes provide the only information to characterize them. Hence from now on, we abusively use the expressions “normal level set” and “tangential level set” to designate the discretized level set functions.

The crack Γ depicted by the original level set functions is then discretized within the finite element mesh by means of the discretized level set functions. The resulting discretized discontinuity is denoted Γ_h . Finally, the elements crossed by Γ_h are split into integration subcells approximating the discontinuity (quadratic integration subcells in the quadratic case and linear ones in the linear case). The resulting approximation of the crack is denoted $\tilde{\Gamma}$ and does not necessarily coincide with the

discretized crack Γ_h [5] (see Figure 3). In order to measure the error introduced in this two-step process, we compute the resolution ε defined as follows:

$$\varepsilon = \max_{x \in \Gamma} (\min_{\tilde{x} \in \tilde{\Gamma}} |x - \tilde{x}|)$$

For each point x of the theoretical interface Γ , we compute the distance to the approximated interface $\min_{\tilde{x} \in \tilde{\Gamma}} |x - \tilde{x}|$. Finally, we take the maximum over $x \in \Gamma$. The resolution ε is then the maximal distance between the analytical interface and the approximated interface. Ferté [5] showed that the resolution is proportional to n^2 in the linear case and n^3 in the quadratic case, n denoting the representative size of the elements of the mesh, provided that the theoretical crack Γ has sufficient geometric regularity.

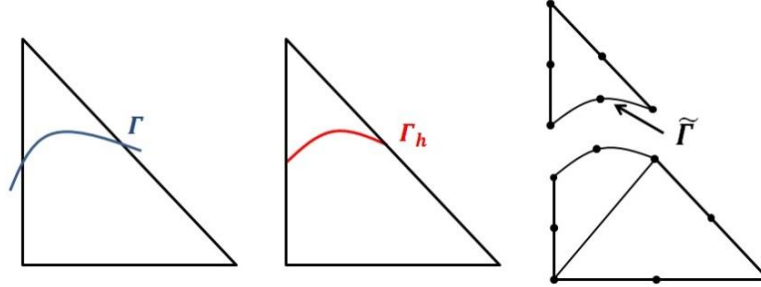


Figure 3. The analytical arbitrary interface Γ (left), the discretized iso-zero of the normal level set Γ_h (middle) and the approximated interface $\tilde{\Gamma}$ (right).

2.3 Domain integration

The approximation of the displacement field is discontinuous across the crack (Eq. 2) so that the quantities we have to integrate over the domain Ω (Eq. 1) are also discontinuous. Since the integration over domain Ω is obtained as a sum of the integration over each element, we may now focus on an element. For each separate discontinuity, the iso-zero of the associated level set delimits two distinct subdomains on each side of the discontinuity. Thus, for i separate discontinuities we obtain $i + 1$ distinct subdomains. In the case of branched discontinuities, a main discontinuity is defined delimiting again two subdomains. In one of these subdomains a secondary discontinuity is located dividing the subdomain into two sub-subdomains. Hence each junction of discontinuities is associated with three subdomains. Finally in case of multiple junctions, the different subdomains constitute a partition of space delimited by the sequence of iso-zeros of the corresponding level set functions. As a consequence, when an element is cut by cracks, it is subdivided into pieces which belong to the different subdomains over the element.

In order to obtain an approximation of the subdomains, we identify the elements of the mesh that are crossed by an arbitrary discontinuity and divide them into integration subcells fitting the discontinuity. Within an element that includes a crack front, we perform this cutting procedure regardless of the presence of the crack front (Figure 4). The presence of the crack front is then eventually taken into account with specific degrees of freedom associated with singular enrichment functions [1] [19] or with internal variables within the framework of cohesive zone model [22]. In the approach proposed by Minnebo et al. [23], the elements of the mesh that include the crack front are cut with respect to the crack surface only: $\{l_{sn} = 0\} \cap \{l_{st} < 0\}$, so that the crack front position is topologically induced by the set of integration subcells. However the extension of this method to 3D models is laborious. Two types of elements are then concerned by the cutting procedure for a crack:

- The elements that are entirely crossed by a discontinuity. The edges of these elements are strictly intersected by the iso-zero of the normal level set and for each intersection point we satisfy $l_{st} < 0$;

- The elements that are cut by the discontinuity and include a piece of the crack front for which $\max\{lsn\} * \min\{lsn\} < 0$ and $\max\{lst\} * \min\{lst\} < 0$. The edges of these elements are strictly intersected by the iso-zero of the normal level set and on the set of intersection points we satisfy $lsn = 0$ and $\max\{lst\} * \min\{lst\} < 0$.

Once the cutting procedure is done, we can make the distinction between two meshes. The initial mesh and the mesh resulting from the elements of the initial mesh that are not cut and the integration subcells designed to fit the arbitrary discontinuities. We denote this second mesh as the integration mesh. It is used for domain integration but also for post-processing with visualization tools.

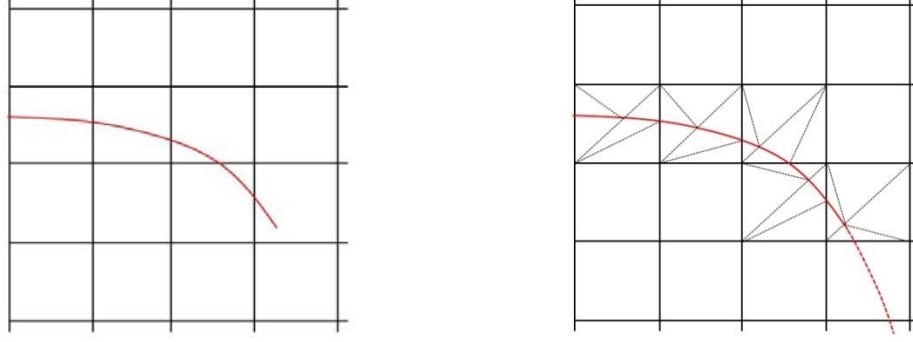


Figure 4. A crack on a regular mesh (left) and the triangular integration subcells generated in the elements crossed by the crack (right).

The difficulty of the problem lies in the construction of the integration subcells. We must have a systematic and robust procedure that manages to shape quadratic sub-elements fitting arbitrary discontinuities for 3D models with curved cracks. To our knowledge, there are few methods described in the literature [20] for the cutting of 3D elements in the quadratic case. In the following, we propose a robust method to consistently create quadratic subcells fitting a crack surface in the 3D case.

3. Partitioning 3D domains with arbitrary discontinuities

In the following section, we detail the design of the volume integration subcells in the elements that are crossed by the crack. First of all, we proceed to preliminary adjustments and reduce the problem to simplex cells in order to be left with a reasonable number of topologically distinct cutting configurations. Finally, the method is extended to multi cracked models.

3.1 Overview of the cutting procedure

Our cutting procedure performs without refinement. We may thus fail to identify small cracks embedded within a single element, but we assume the user is aware of the relative size of the element of the mesh compared to the geometric refinement of the level set description. On the contrary, the approach proposed by Fries et al [20] uses a sample grid to detect possible changes in the sign of the level set within the elements of the mesh. Adaptive remeshing techniques with quadtree and octree meshes have also been studied in the extended finite method [24]. These methods enable a finer approximation of the immersed discontinuities and reduce the number of topologically distinct cutting configurations. Similarly to the approach of [20], we build integration subcells fitting the arbitrary discontinuities with a quadratic accuracy. Then, we recover a

reconstructed approximation of the immersed interfaces as the set of faces of the integration subcells coinciding with the discontinuities. Two noticeable features of our cutting procedure are the systematic preliminary reduction into primary elements and the level set adjustment procedure. This considerably reduces the number of topologically distinct cutting configurations we may encounter. The determination of the intersection points between the mesh and the immersed boundaries is systematically performed in the reference configuration of the elements so that the overall cutting procedure only relies on a one dimensional root-finding algorithm. We expect a quadratic convergence for this Newton-Raphson algorithm. Since the procedure depicted in this paper has been implemented in an industrially oriented finite element software, all the challenging cases have been identified and thoroughly treated. An overview of the overall cutting procedure, including the design of the integration subcells and the recovery of the contact faces, is summarized in [Appendix A](#). Finally, the integration procedure detailed in sections 3 and 4 is entirely applicable for linear models. The difference lies in the fact that the middle nodes are not necessary in the linear case.

3.2 Level set adjustments

In the linear case, the intersections between the iso-zero of the discretized normal level set with the mesh are found in two ways:

- If at a node of the mesh $lsn(N) = 0$, then the node is located on the iso-zero,
- If at the edge linking node A and B $lsn(N_A) * lsn(N_B) < 0$, then the position of the intersection point I is given by: $I = N_A + \frac{lsn(N_A)}{lsn(N_A) - lsn(N_B)} \overrightarrow{N_A N_B}$ (see [Figure 5](#)), if the level set is a distance function.

The quadratic case requires more attention. The intersections between the iso-zero of the discretized normal level set and the mesh are localized:

- At the nodes of the mesh satisfying $lsn(N) = 0$
- On any edge cut by the iso-zero of the discretized normal level set.

The condition for an edge to be cut is not similar to the linear case. Actually, along the edge of a quadratic mesh, the discretized level sets are marked at three locations: the two end nodes and the middle node. This leads to potential double roots of the discretized level sets along an edge (see [Figure 5](#)).

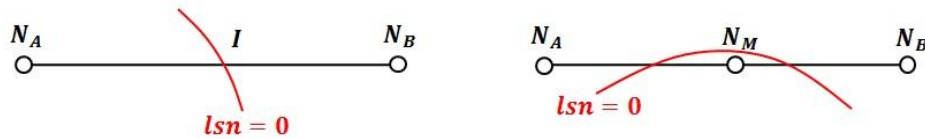


Figure 5. An intersection between the iso-zero of the normal level set and an edge in the linear case (left) and a case of double roots of the normal level set along an edge in the quadratic case (right).

In the end, the condition for an edge to be strictly cut by the iso-zero of the normal level set in the quadratic case is: $\max\{lsn(N_A), lsn(N_B), lsn(N_M)\} * \min\{lsn(N_A), lsn(N_B), lsn(N_M)\} < 0$. The choice is made not to consider the situations of double roots of the normal level set along an edge in order to reduce the number and the complexity of the cutting configurations. For this aim, we proceed to level set adjustments by setting to zero some of the values of the discrete nodal field associated with the interpolation of the level set functions (see [Figure 7](#)).

The only cases of multiple roots of the discretized normal level set along an edge we accept are depicted in [Figure 6](#):



Figure 6. The two cases of multiple roots of the level sets along a three node edge which are authorized.

Either the normal level set is null for each node of the edge, either it is null for one vertex node and the middle node. We also forbid the case where the iso-zero of the normal level set brushes against an edge: $\begin{cases} lsn(N_A) * lsn(N_B) > 0 \\ lsn(N_M) = 0 \end{cases}$. Four situations encountered with the discretized normal level set must then be adjusted. They are depicted in [Figure 7](#).

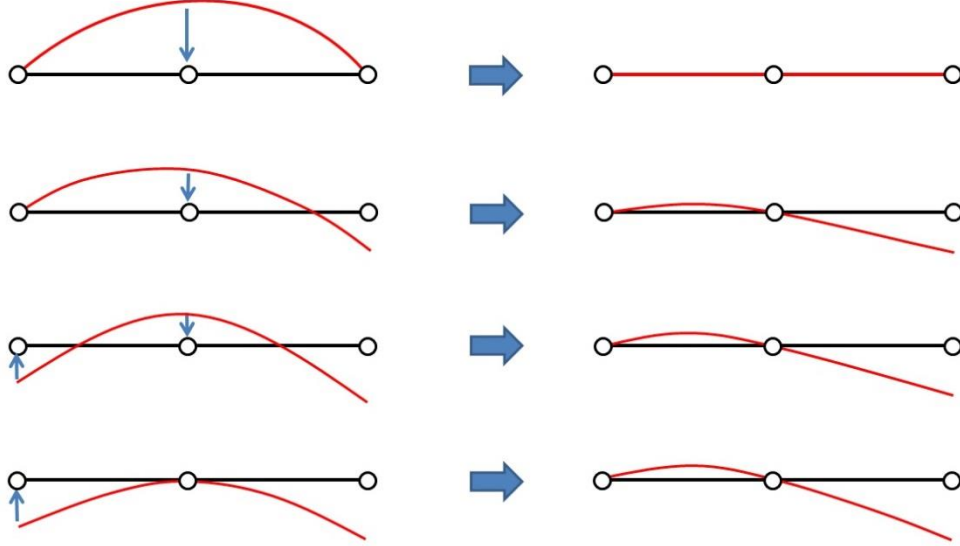


Figure 7. Level set adjustments along an edge.

For each case, we modify the value of the discretized normal level set at some nodes to be brought down to one of the two configurations of [Figure 6](#). For the last two cases ([Figure 7](#) bottom), a choice is made so that the shift is performed on the vertex node whose normal level set is the smallest.

Each time an adjustment is performed we introduce an error because we modify the value of the discretized normal level set at one or two nodes. The approximated iso-zero of the normal level set Γ_h is then shifted (see [Figure 7](#)). It is not an optimal solution. As soon as we make adjustments, the convergence properties for the approximation of the subdomains may not apply. This choice is justified by the following arguments:

- The restriction of the double root situations significantly reduces the number and the complexity of the cutting configurations.
- The adjustments are likely to happen only when the iso-zero of the discretized level set is highly curved and close to an edge. The use of finer meshes always ends up solving the issue.
- The software is able to return a message each time an adjustment is performed. Furthermore, in order to provide an indication on the error introduced, we measure the shift realized relatively to the range of the level set values over the support of the shifted node.

Remarks:

- *When an adjustment is performed on an edge, it can induce a situation that requires an adjustment on an adjacent edge so that the procedure is performed recursively until no more adjustment is needed.*
- *The exact same procedure is applied to the discretized tangential level set.*

3.3 Intersected elements

An element that need to be cut satisfy $\begin{cases} \max\{l_{sn}\} * \min\{l_{sn}\} \leq 0 \\ \min\{l_{st}\} \leq 0 \end{cases}$ over all of its nodes. As mentioned before, in the implementation we have chosen, level set functions are approximated by the same shape functions as the displacement field so that the level sets are known exactly only at the nodes of the mesh. For this reason, the criterion for an element to be intersected solely relies on the fact that its edges are intersected. Contrarily to Fries [20], we do not use sample grids and recursive refinement to detect possible changes in the sign of the analytical arbitrary interface within the elements of the mesh. We assume the user is aware of the relative size of the elements of the mesh compared with the pattern of the arbitrary interfaces. Then a face that is intersected by the arbitrary interface but whose edges are not intersected is not considered as a cut face (see [Figure 8](#) left). The same applies for an interface entirely included inside an element (see [Figure 8](#) right).

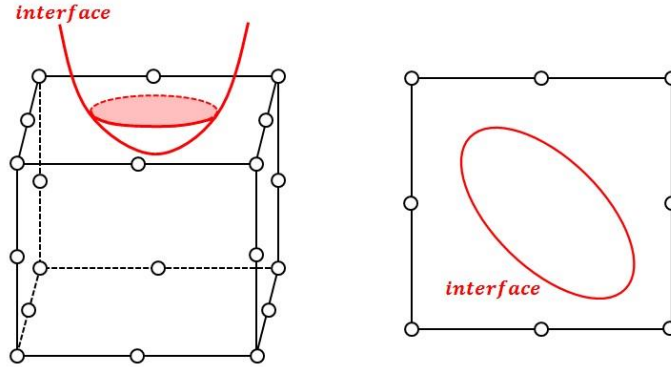


Figure 8. Two patterns of arbitrary interfaces that are neglected by the cutting procedure.

3.4 Tetrahedral split

Before we begin the treatment of an element that needs to be cut, we perform a prior treatment in order to reduce the problem. In the reference configuration of the parent element, we systematically split the non-simplex elements into a set of tetrahedrons for 3D models and triangles for 2D models. In this way, we only consider one type of cell for the cutting procedure. It considerably reduces the number of cutting configurations we may come across. In [Figures 9](#) and [10](#), we depict the partitioning of the non-simplex elements into simplex cells.

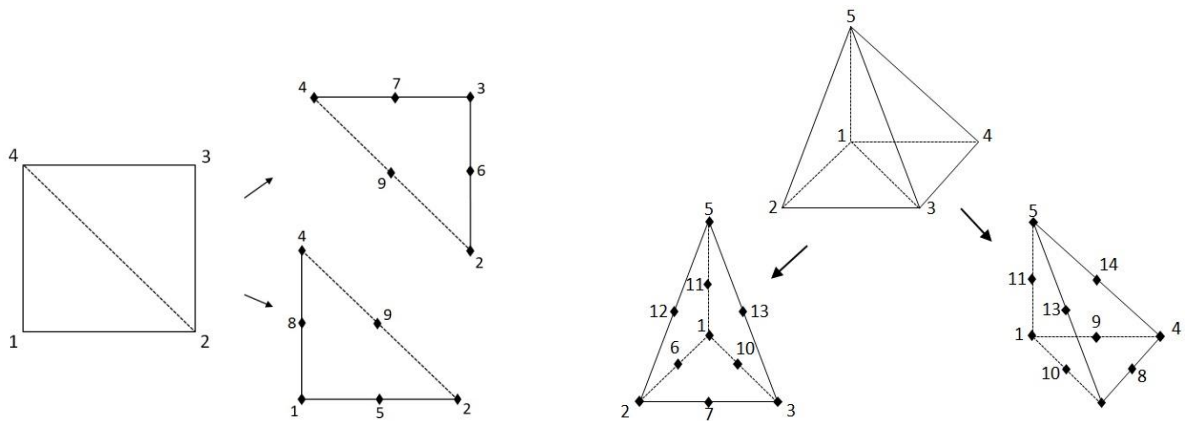


Figure 9. Partition of a quadrangle into two triangles (left) and partition of a pyramid into two tetrahedral elements (right).

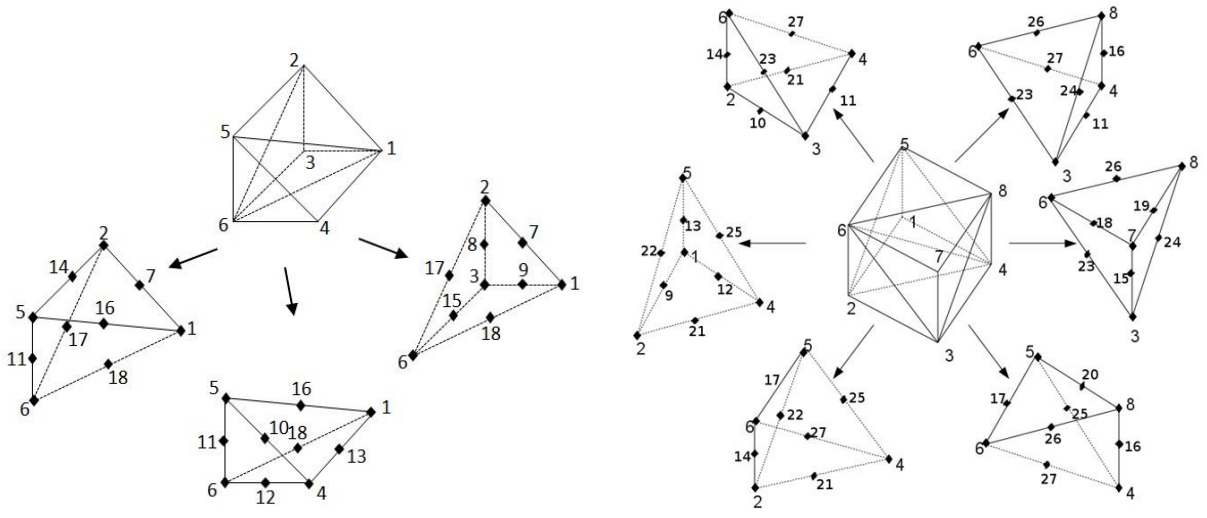


Figure 10. Partition of a pentahedron into three tetrahedral elements (left) and partition of a hexahedron into six tetrahedral elements (right).

In the quadratic case, this partitioning induces the apparition of internal edges and additional nodes (see [Figure 10](#)). These additional nodes were not part of the initial mesh; they are nodes that do not carry degrees of freedom. As the internal edges were not part of the original mesh, they were not concerned by the level set adjustment procedure. We can thus possibly observe double roots of the level sets along these internal edges. This would bring unwanted cutting configurations. A solution to bypass this problem is explained in paragraph [3.6.2](#). It relies on the fact that we can choose between different partitions of the non-simplex elements.

There is not a unique manner to split a quadrangular element into two triangles: there are two (see [Figure 11](#)). The same goes for the pyramidal elements. There are two eligible sets of tetrahedral elements depending on how the internal edge splits the quadrangular face. For the pentahedron, we count 6 different manners to obtain a partition of 6 tetrahedral elements (see [Figure 11](#)). Finally, there are 6 different ways to partition a hexahedron into two pentahedra (see [Figure 11](#)). We expect then a maximum of 6^3 different manners to partition a hexahedron into 6 tetrahedral elements. Amongst these 6^3 different possibilities, a lot are identical due to symmetries and we only keep those who ensure the compatibility between the different tetrahedral elements. One can show that we are left with 72 distinct manners to partition a hexahedron into 6 compatible tetrahedral elements. These different manners to partition the non-simplex elements into primary simplex cells constitute splitting configurations. We store these different configurations. As we will observe in paragraph [3.6.2](#), the use of these different configurations is essential to prevent the apparition of unwanted double roots of the level set along the edges of the primary simplex cells.

All the elements of the mesh that need to be cut are now split into a partition of simplex cells. The problem is now reduced to the cutting of simplex cells with respect to the iso-zero of the normal level set. Please note that since the primary simplex cells are only used for integration and post-treatment on each element, they do not need to share conforming faces when switching from an element of the mesh to its neighbors.

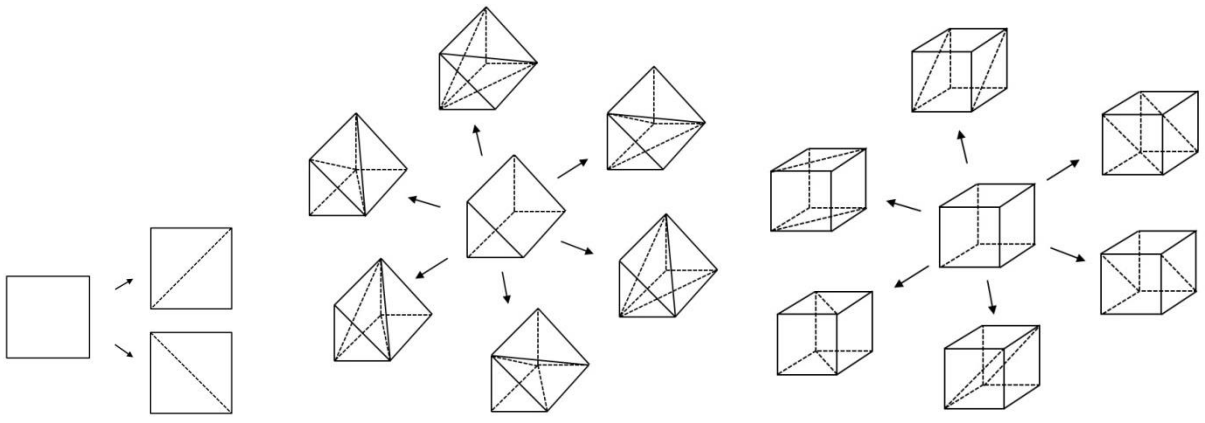


Figure 11. The two different configurations for a quadrangular element (left), the 6 different configurations for a pentahedron (middle) and the six different ways to partition a hexahedron into two pentahedra (right).

3.5 Intersections between the primary simplex cells and the iso-zero of the tangential level set

For all the elements that need to be cut, we loop over the primary simplex cells and determine the intersections with the iso-zero of the discretized normal level set. For each primary simplex cell:

- We loop over the vertex nodes and identify those who coincide with the iso-zero of the normal level set ($lsn(N) = 0$). We denote as n_s the number of intersection points coinciding with the vertex nodes of the primary simplex cell.
- We loop over the edges and for those verifying $lsn(N_A) * lsn(N_B) < 0$, we determine the position of the intersection point. If $lsn(N_M) = 0$, the intersection point directly coincides with the middle node N_M . In the opposite case, we use the root finding **algorithm 1** to determine the position of the intersection point. We denote by n_e the number of edges intersected by the iso-zero of the normal level set which includes the edges intersected at one vertex node and at the middle node (see [Figure 6](#)).

In order to determine the position of an intersection point on the edge of a primary simplex cell, we move to the reference configuration of the parent element and use a Newton-Raphson algorithm. The relocation in the reference configuration of the parent element presents two major advantages:

- The edges of the primary simplex cells are necessarily straight in the reference configuration of the parent element (see [Figure 12](#)).
- The convergence criterion for the Newton-Raphson algorithm is the same for all edges.

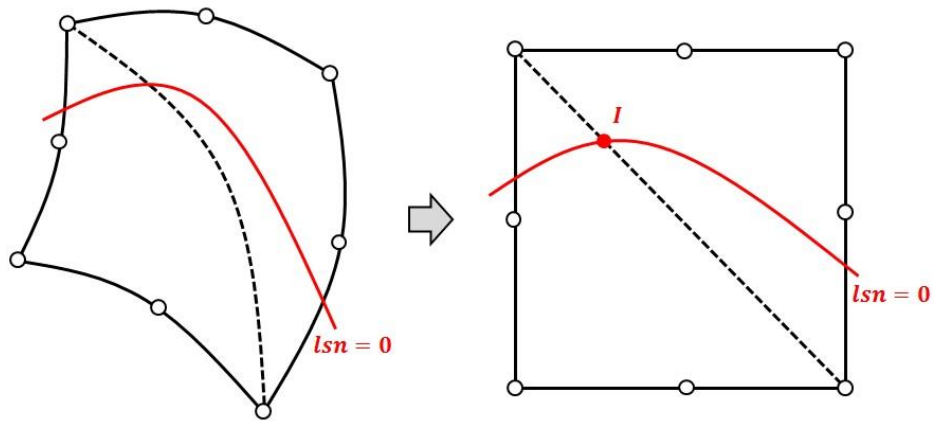


Figure 12. A quadrangular element crossed by the iso-zero of the normal level set in the real space (left) and in the reference configuration (right).

A parameterization of a straight edge $N_A N_B$ in the reference space is: $= N_A + t * \overrightarrow{N_A N_B}$, $t \in [0, 1]$. Algorithm 1 determines the intersection point between the iso-zero of a discretized level set and a straight line within an element. It only requires an initial guess of the position of the zero-level set and a unit vector carrying the search direction.

$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{N_A N_B}}{\|\overrightarrow{N_A N_B}\|}$ provides the unit vector and a relevant initial guess is the linear approximation:

$$I_0 = N_A + \frac{lsn(N_A)}{lsn(N_A) - lsn(N_B)} \overrightarrow{N_A N_B}$$

Algorithm 1: research of an intersection point between the iso-zero of a level set and a straight line within an element

- We set n to 0 and Δt_0 to 2ε
- While $|\Delta t_n| > \varepsilon$
 - $n = n + 1$
 - $I_n = I_{n-1} + \Delta t_{n-1} \vec{u}$
 - Compute the shape functions φ_i associated with the nodes of the parent element for I_n
 - Interpolate the value of the level set $ls(I_n) = \sum_{nodes} \varphi_i ls_i$
 - Compute the derivative of the level set field along the unit vector $\vec{u}$: $\vec{\nabla} ls(I_n) \cdot \vec{u}$
 - $\Delta t_n = -\frac{ls(I_n)}{\vec{\nabla} ls(I_n) \cdot \vec{u}}$
- Return I_n

Tolerance ε is on the displacement increment Δt_n in the reference configuration of the parent element. It is common to all elements and edges. Since the level set field is polynomial within an element, we expect a quadratic convergence for the Newton-Raphson algorithm.

Remark: when we look for an intersection point on an edge that coincides with an edge of the parent element, the discretized level set field only depends on the values of the level set at the three nodes of the edge. We could directly get the position of the intersection point from the resolution of a second order polynomial equation.

3.6 Shaping the integration subcells

Once we have determined the intersections between the primary simplex cells and the iso-zero of the normal level set, we associate to each primary simplex cell a cutting configuration. There is a total of 3 cutting configurations in the 2D case and 9 cutting configurations in the 3D case. The different cutting configurations are distinguished with the number n_s of intersection points coinciding with vertices nodes and the number n_e of edges intersected by the iso-zero of the normal level set.

In the following, we detail the different cutting configurations encountered in 2D and 3D. The table hereunder gives the number of subcells generated by the primary simplex cells for each cutting configuration. In [Figures 13 to 24](#), we depict the different cutting configurations, the iso-zero of the tangential level set appearing in red. The nodes and the edges of the primary simplex cells that coincide with this iso-zero also appear in red.

	n_e	n_s	Number of subcells generated	Figure
2D	1	1	2	13
	2	0	3	14
	2	1	3	15
3D	1	2	2	16
	2	1	3	17
	2	2	3	18
	3	0	4	19
	3	1	4	20
	3	2	4	21
	4	0	6	22
	4	1	6	23
	3	1	5	24

Table 1. Cutting configurations for the primary simplex cells.

Remark: there are two configurations labelled $\begin{cases} n_e = 3 \\ n_s = 1 \end{cases}$. The first is distinguishable from the second one because it has a common vertex for all three intersected edges (see [Figures 20](#) and [24](#)).

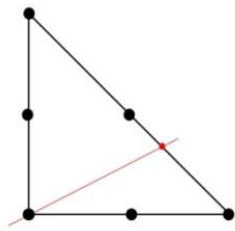


Figure 13.

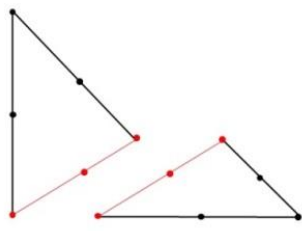


Figure 14.

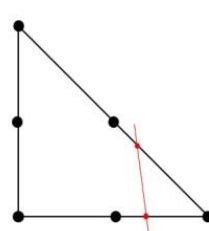


Figure 15.

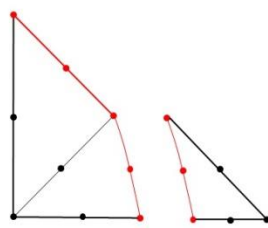
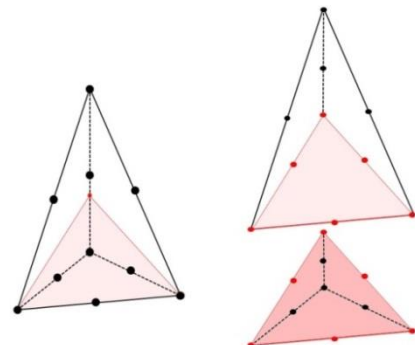


Figure 16.



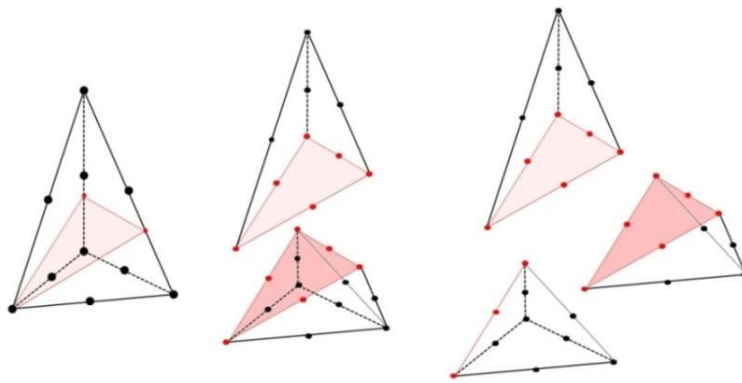


Figure 17.

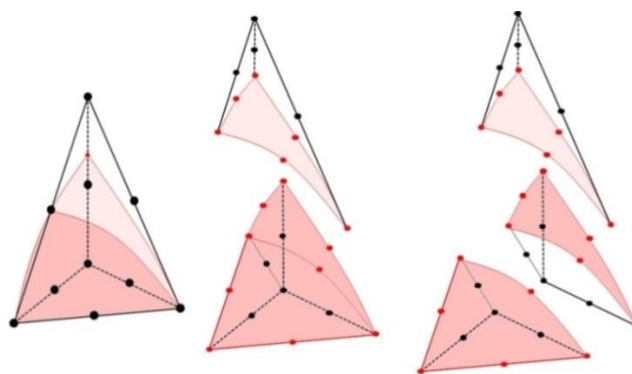


Figure 18.

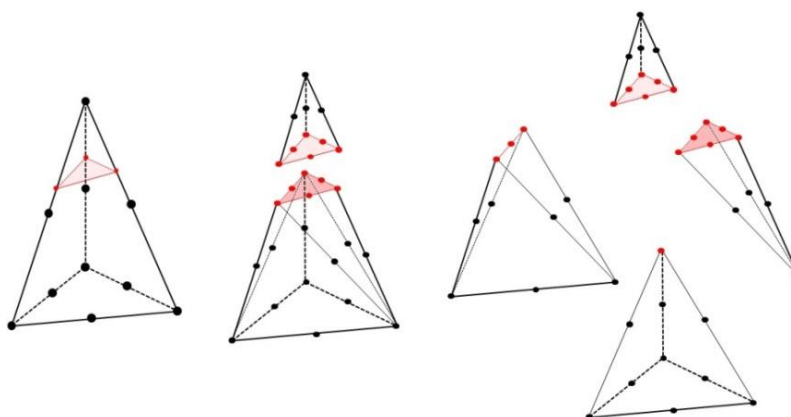


Figure 19.

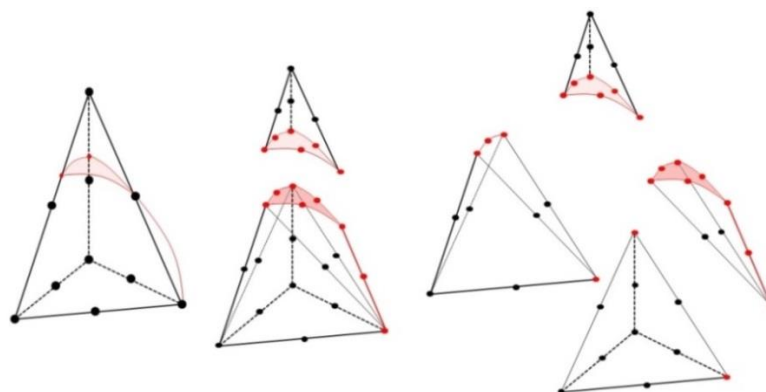


Figure 20.

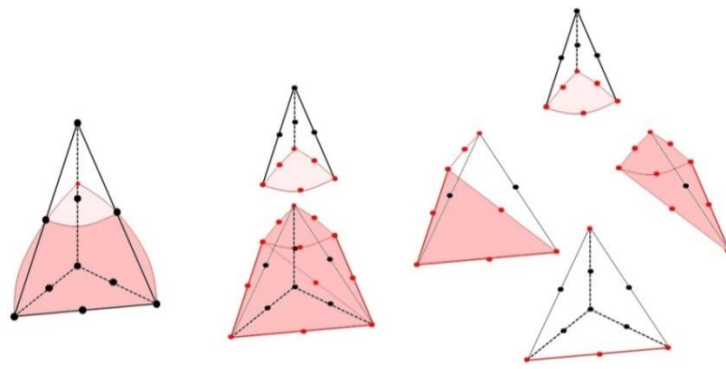


Figure 21.

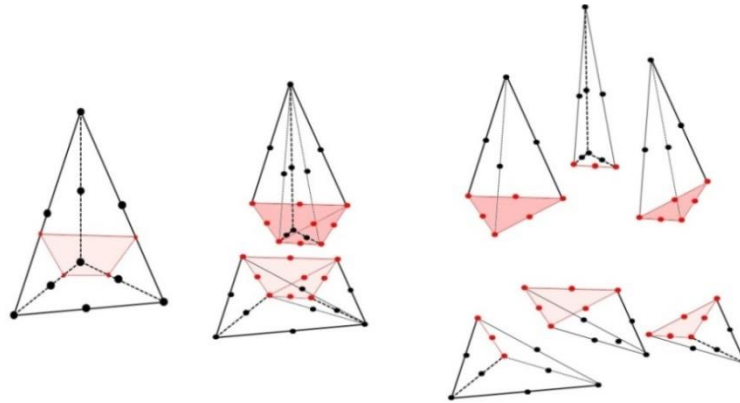


Figure 22.

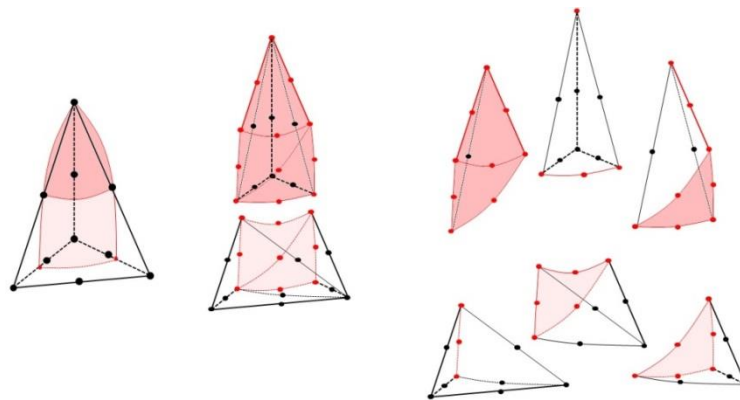


Figure 23.

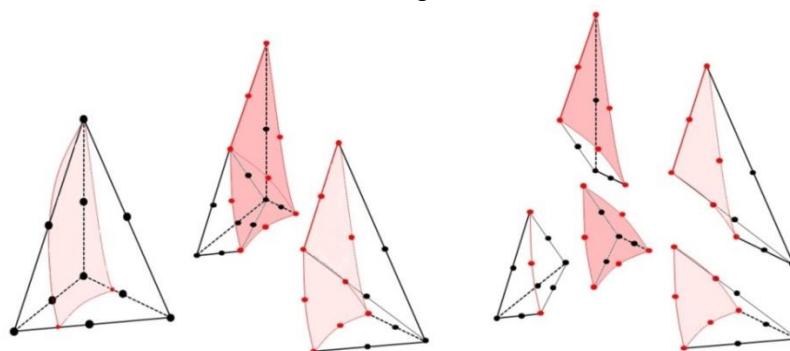


Figure 24.

In order to maintain a quadratic accuracy in the approximation of the subdomains on both sides of the discontinuity, the middle nodes of the integration subcells must be thoroughly determined.

At this stage, we have only resolved the intersections between the primary simplex cell and the iso-zero of the normal level set so that we have at our disposal the entire set of vertex nodes for the integration subcells. In the following, we detail the determination of the middle nodes for the 3D configuration $\begin{cases} n_e = 4 \\ n_s = 0 \end{cases}$. The procedure is similar for the other configurations. We distinguish 4 types of middle nodes. Here again, the determination of these nodes is performed in the reference configuration of the parent element.

3.6.1 1st type of middle nodes

The edges of the primary simplex cell that are intersected by the iso-zero of the normal level set are split into two edges, one on either side of the discontinuity. We place the middle nodes on each of these edges. For an edge $N_A N_B$ of a primary simplex cell intersected at point I , the positions of the middle nodes are simply $N_A + \frac{1}{2} * \overrightarrow{N_A I}$ and $N_B + \frac{1}{2} * \overrightarrow{N_B I}$. In [Figure 25](#), we observe the first type middle nodes placed on the intersected edges of the primary tetrahedron.

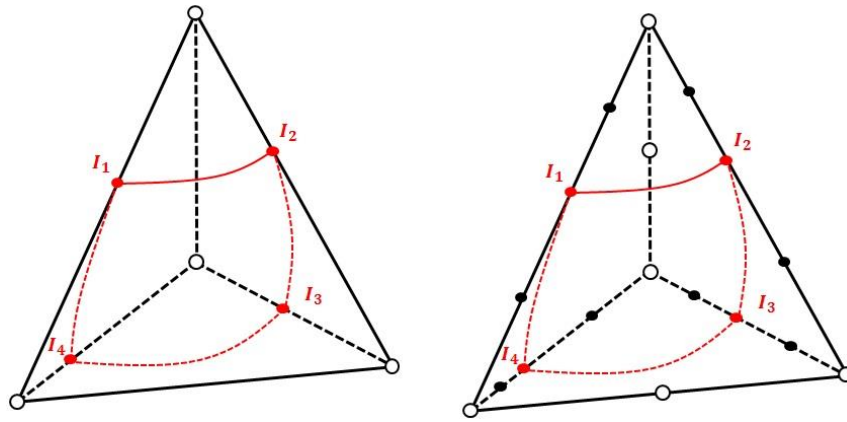


Figure 25. The primary tetrahedron with the 4 intersection points $I_{1,2,3,4}$ (left) and the first type of middle nodes (black circles) on its intersected edges (right).

3.6.2 2nd type of middle nodes

The second type of middle nodes are located on the faces of the primary tetrahedron, between the intersection points, on the approximated discontinuity. For each intersected face, we search this middle node on the perpendicular bisector to the segment formed by the two intersection points. For example in [Figure 27](#) (left), we search the middle node between I_3 and I_4 on the perpendicular bisector to the segment $[I_3 I_4]$ on the bottom face of the primary tetrahedron. We still use **algorithm 1** to locate these middle nodes. But we must ensure that the middle node stays confined in the face of the current primary simplex cell. Indeed, for non-simplex elements, the middle node can be found in the adjacent primary simplex cell, creating a situation of double roots of the normal level set along an edge (see [Figure 26](#)). In order to detect this situation, we compute first the limits t_{inf} and t_{sup} of the authorized interval along the perpendicular bisector. The middle of the segment $[I_3 I_4]$ is then chosen as an initial guess and the vector $\vec{u}$ is chosen as the unit vector on the perpendicular bisector oriented along the gradient of the normal level set. Once the algorithm has converged, if the middle node is found out of the interval $[t_{inf}, t_{sup}]$, we go back to the splitting into primary simplex cells (paragraph 3.4) for the parent element and select another configuration. For instance in [Figure 26](#), we depict a 2D example of double roots of the normal level set along the internal edge of a quadrangle. The other splitting configuration succeeds in bypassing the problem. The 3D cases are similar. There might be some extreme cases for which no configuration succeeds in bypassing the

problem. In that case, we perform a local linear approximation of the discretized normal level set. Nevertheless these unfixed cases would definitely present very twisted level sets and a mesh refinement would surely solve the problem.

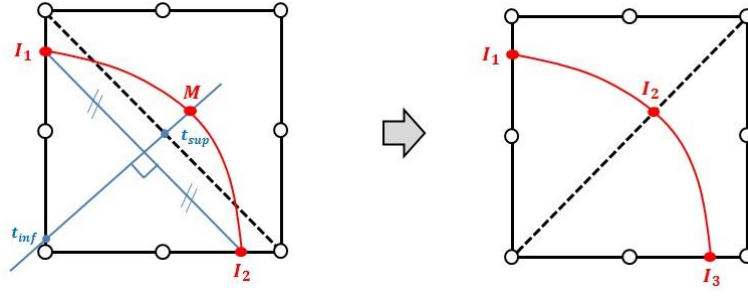


Figure 26. A case of double roots of the normal level set along the internal edge of a quadrangle. The middle node M between I_1 and I_2 is found out of bounds (left). The other configuration is selected to split the quadrangle into two primary triangles, bypassing the problem (right).

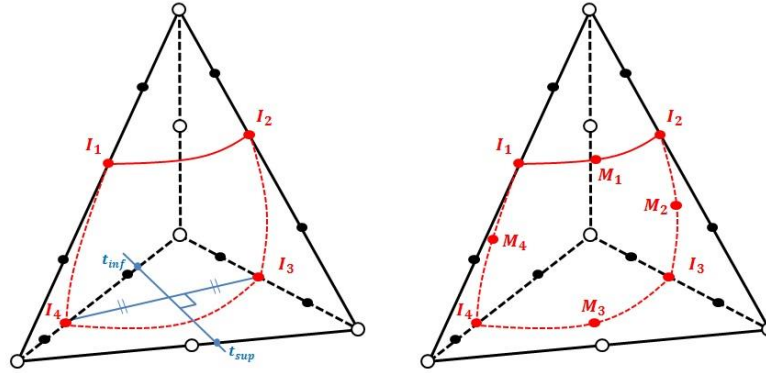


Figure 27. Determination of the middle node between I_3 and I_4 (left) and the primary tetrahedron with the second type of middle nodes $M_{1,2,3,4}$ (right).

3.6.3 3rd type of middle nodes

The third type of middle nodes are located on the triangular faces of the primary simplex cells intersected by the discontinuity. These faces are split into a triangle and a quadrangle (see [Figure 28](#) left). The quadrangle $N_1N_2I_2I_1$ is supposed to be split into two triangles. For this aim, we determine the middle node between I_2 and the opposite vertex node N_1 . Whenever possible, we choose the middle of the segment $[I_2N_1]$ as the middle node C which generates one non twisted sub-triangle instead of two (see [Figure 28](#)). However this choice may not be convenient when the discontinuity is highly curved. In [Figure 28](#), the case depicted at the bottom left generates distorted sub-triangles if the middle node C is chosen as the middle of the segment $[I_2N_1]$. In that case, we choose the center of the quadratic quadrangle for C . In order to detect these situations, we compute the tangent vector $\vec{j}$ to the three node segment I_2MI_1 at point I_2 (see [Figure 28](#)). Depending on its position compared to the tangent vector $\vec{k}$ to the segment I_2N_1 , we choose a different type of construction for the localization of the middle node C .

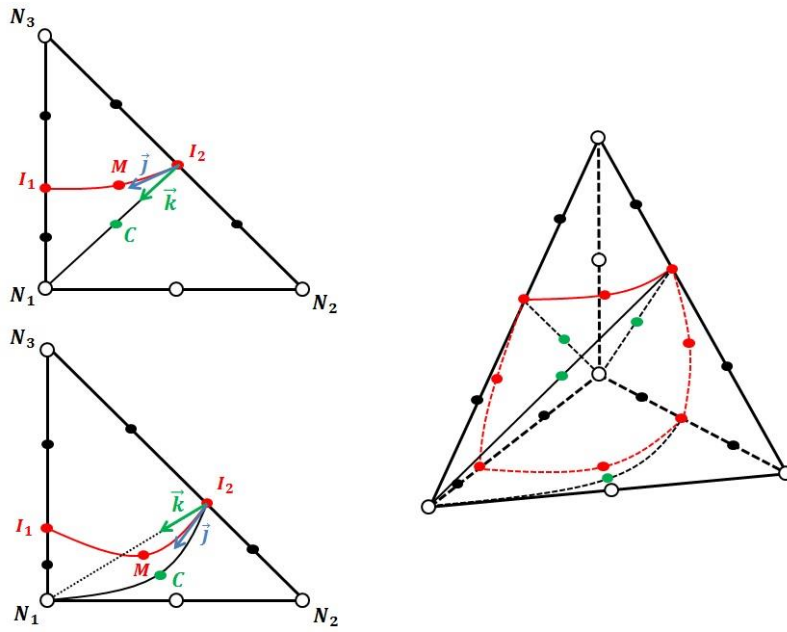


Figure 28. Determination of the third type of middle node: C is chosen as the middle of the segment $[I_2N_1]$ (top left) and C is chosen as the center of quadrangle $N_1N_2I_2I_1$ (bottom left). The primary tetrahedron with the third type of middle nodes represented in green (right).

3.6.4 4th type of middle nodes

The last type of middle nodes are the ones located at the center of the quadrangular faces approximating the iso-zero of the tangential level set. In [Figure 29](#), we look for the center of quadrangle $I_1I_2I_3I_4$. The middle of segment $[I_2I_4]$ is chosen as an initial guess and for the unit vector $\vec{u}$ carrying the straight search path, we choose the normalized gradient of the normal level set. In fact, the gradient of the normal level set gives the normal direction to the interface which gives the best search direction. Once again, first we determine the authorized interval $[t_{inf}, t_{sup}]$, corresponding to the intersection between the search direction and the primary tetrahedron. If the middle node is found out of bounds, we go back to the splitting into primary simplex cells and select another configuration.

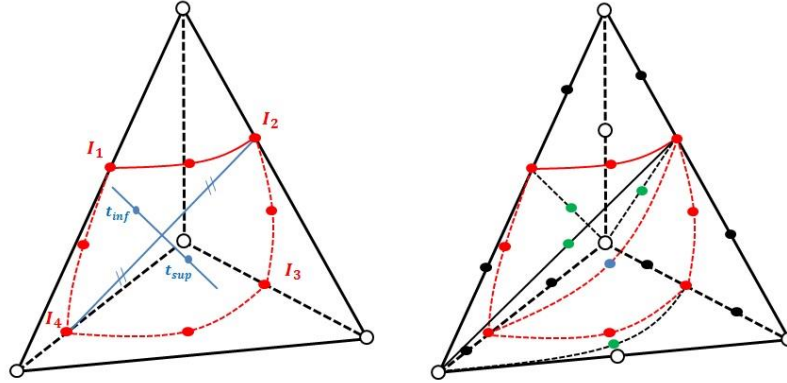


Figure 29. Determination of the fourth type of middle node in the interval $[t_{inf}, t_{sup}]$ (left) and the primary tetrahedron with the four types of middle nodes (right).

It should be noted that we may get distorted subcells and then locally negative jacobians from the determination of the middle nodes. The appearance of distortions is especially prevented for the determination of the 3rd type of middle nodes (see [Figure 28](#)) and irrelevant for the 1st type of middle nodes but cannot be entirely excluded for the determination of the 2nd and 4th type of middle nodes. On [Figure 30](#), we observe a distorted subcell after the determination of a second type middle node in a triangular element.

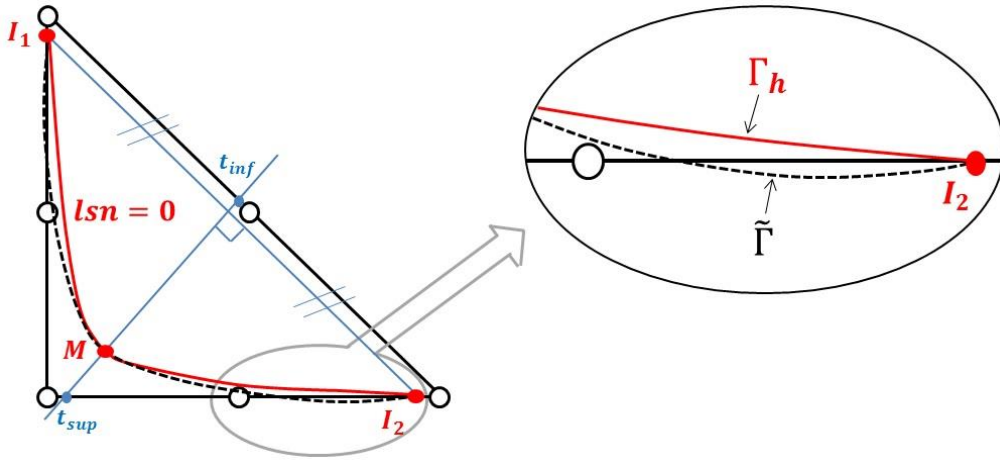


Figure 30. Appearance of a distorted subcell from the determination of the second type middle node M

The middle node M is determined on the perpendicular bisector to the segment $[I_1 I_2]$. The interpolated iso-zero level set Γ_h (red curve in Figure 30) has no multiple intersections with the edges of the triangle because this situation is prevented by the level set adjustment (confer section 3.2). But the resulting three node segment $I_1 M I_2$ (black dash in Figure 30) which is an interpolation that approximates the iso-zero level set Γ_h does intersect the edges of the parent triangle. The subcells adjacent to this three node segment are then distorted. Indeed, Γ_h and $\tilde{\Gamma}$ have three common points I_1, M and I_2 but are distinct (5 points are necessary to determine a unique conic section). So in the extreme case we depicted on the figure above, the difference between Γ_h and $\tilde{\Gamma}$ leads to the appearance of distorted subcells.

Nevertheless, the level set adjustments we perform as well as the restricted interval $[t_{inf}, t_{sup}]$ we use for the determination of the middle nodes minimizes the importance of these distortions. Also it is clear that the appearance of a distortion requires a very highly curved level set compared to the size of the mesh. Each time a negative jacobian is computed at an integration point (confer 3.8), the software returns an error message encouraging the use of a finer mesh and stop further calculation.

Now that all the nodes of the integration subcells have been determined, the primary simplex cells are split into integration subcells according to the cutting configurations depicted in paragraph 3.6. The integration subcells are labelled with the sign of the normal level set, depending on which side of the discontinuity they belong to. The nodes of the integration subcells coinciding with the iso-zero of the normal level set are also specifically labelled.

3.7 An extension to multi-cracked models

The splitting into integration subcells can be extended to multi-cracked models, in particular to branched discontinuities. For the elements crossed by several discontinuities, the procedure depicted for one interface is performed iteratively.

A normal level set field is associated with each arbitrary discontinuity. Branched discontinuities are defined only on one side of a main discontinuity. In Figure 31, the second discontinuity (in green) is branched on the first discontinuity (in red) and defined only in the domain $\{lsn_1 > 0\}$. The third one (in blue) is branched on the second one, which was branched on the first one. Thus it is defined only in the domain $\{lsn_1 > 0\} \cap \{lsn_2 > 0\}$.

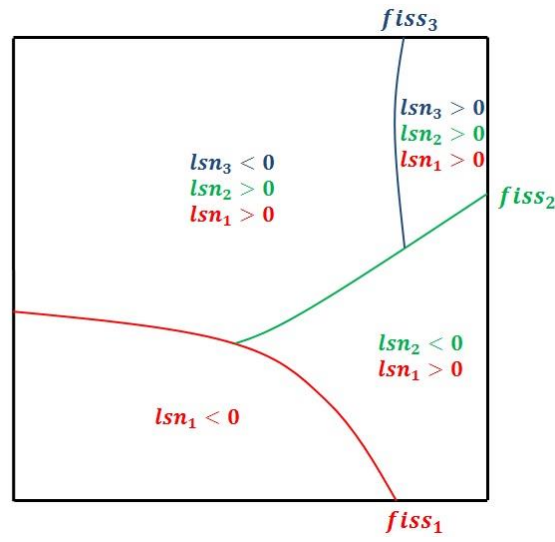


Figure 31. Definition of branched arbitrary discontinuities by means of normal level sets.

For an element crossed by several discontinuities, we proceed one discontinuity after another. For the first discontinuity, the procedure depicted above is normally performed. We end up with a set of integration subcells fitting the first discontinuity. For the cutting with respect to the second discontinuity, we proceed in the same way as for the first discontinuity except that the set of primary simplex cells is replaced by the set of integration subcells we obtained during the first cutting procedure. The difference lies in the fact that the edges of the integration subcells are not necessarily straight in the reference configuration of the parent element, contrarily to the edges of the primary simplex cells. In order to bypass this problem and apply the exact same procedure as for a single discontinuity: we work on the reference configuration of the integration subcells to perform the cutting procedure with respect to the second discontinuity. In this way, we always end up cutting simplex cells with straight edges. The procedure is summarized in [Figure 32](#). The quadrangle is crossed by a main discontinuity (in red) and a branched discontinuity (in green). We work in the reference configuration of this quadrangle to perform the cutting with respect to the first discontinuity. Then we loop over the resulting integration sub-triangles. For each of them, we work in the reference configuration of the sub-triangle and apply the procedure depicted in paragraphs [3.4](#) to [3.6](#).

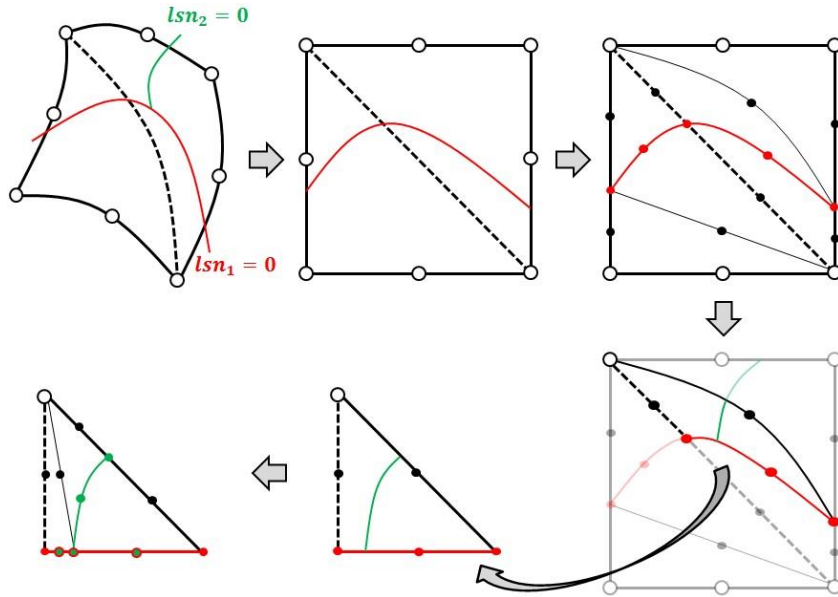


Figure 32. Cutting procedure for a quadrangle including a branched discontinuity.

In [Figure 33](#), we observe the final integration sub-triangles obtained for the quadrangle, fitting both discontinuities. The nodes coinciding with the first discontinuity appear in red and the nodes coinciding with the second discontinuity appear in green. The junction point is green and circled in red.

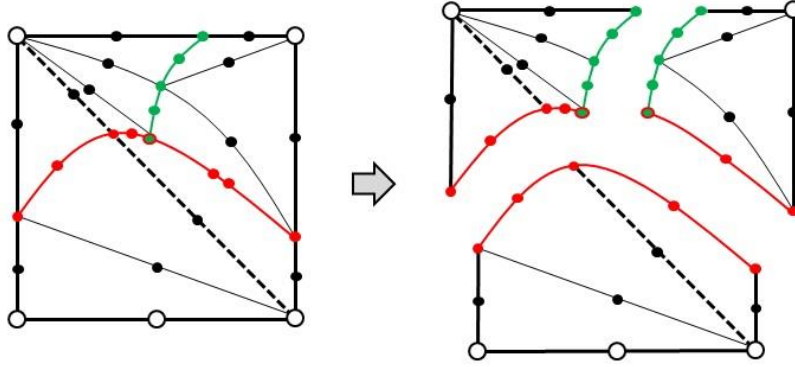


Figure 33. Final integration sub-triangles for the quadrangle.

Similarly to the single discontinuity case, the integration subcells are labelled with the signs of the normal level sets, depending on which side of the discontinuities they belong to. When the level set is not defined (in the case of branched discontinuities), the default sign is 0. The nodes of the integration subcells coinciding with the iso-zero of the tangential level sets are also specifically labelled. In particular, the junction points are labelled for both discontinuities.

3.8 Integration over the subdomains

Now that we split the elements crossed by arbitrary discontinuities into sets of integration sub-cells, making up an accurate quadratic approximation of the subdomains, we are in position to realize a domain integration. The integration subcells were labelled depending on which sub-domain they belong to. We can thus recover exclusively the set of elements and subcells approximating any subdomain. For the volume integration over the integration subcells, we use the Standard Gauss integration techniques. The Gauss integration schemes we use are summarized hereunder. According to [\[25\]](#), the use of order 3 Gauss integration schemes in the linear case and of order 5 Gauss integration schemes in the quadratic case offers satisfactory accuracy for the integration of the left side terms of equation [1](#) over tetrahedral elements.

		Subcell	Number of Gauss integration points per subcell	order
1D	Linear case	2 node segment	2	3
	Quadratic case	3 node segment	3	5
2D	Linear case	3 node triangle	3	3
	Quadratic case	6 node triangle	6	5
3D	Linear case	4 node tetrahedron	5	3
	Quadratic case	10 node tetrahedron	15	5

Table 2. Gauss integration schemes for the integration subcells.

The location of the integration points depends on the subcells geometry. In particular, when the arbitrary interface evolves (in case of crack propagation for example), the location of the integration

points changes. This may represent a difficult obstacle to tackle, particularly when internal variables are stored at the integration points. It is often the case for plasticity or hydromechanics. In order to bypass this problem, our cutting procedure may be combined with the techniques depicted in [26-28] that use a fixed sample of integration points within the elements crossed by arbitrary interfaces. The relative weights of the integration points are estimated upon the approximated subdomains. These techniques offer excellent performances, and enables the repartition and the number of integration points in the elements cut by the fracture not to depend on the integration subcells pattern.

4. Integration on the crack surface

Now that we have designed the volume integration subcells in the elements crossed by arbitrary discontinuities, we have to obtain a reconstructed iso-zero of the normal level set to achieve integration on the crack surface. This integration is useful for various applications of the extended finite element method. For instance, the contact efforts preventing the interpenetration between adjacent subdomains are usually integrated on the crack surface [29], [30] as well as the cohesive efforts when the propagation of the crack is governed by a cohesive zone model [22]. The consideration of a fluid pressure on the fracture walls in the case of hydraulic fractures [31] also requires a material approximation of the zero-level set. The volume subcells were built in order to allow a quadratic approximation of the domains separated by arbitrary discontinuities. Thus the approximation of the different domains includes an approximation of the discontinuities. We use the faces of the subcells that coincide with the discontinuities to build the reconstructed implicit interfaces. When the element includes a piece of a crack front, a final cutting procedure with respect to the tangential level set is necessary to obtain a reconstructed approximation of the crack surface and front.

4.1 Overview of the recovery of the contact faces

The set of faces approximating an implicit interface is designated hereafter the contact faces as one of their main use is the integration of the contact equations between adjacent subdomains. We impose an absolute fit between the integration subcells and the contact faces. The fit is clear for the contact faces that are directly recovered from the integration subcells. However, when an element includes a piece of the crack front, the contact faces recovered from the integration subcells must be cut with respect to the tangential level set associated with the crack front. In order to maintain the fit with the integration subcells and the quadratic accuracy throughout this final cutting procedure, we use the tools depicted in Section 3. In the end, the cutting procedure for the contact faces relies on the cutting procedure performed for the integration subcells.

4.2 Contact faces for an element entirely cut by an interface

First of all, we focus on the elements entirely crossed by a single arbitrary discontinuity. These elements have already been split up into tetrahedral integration subcells (triangular integration subcells in the 2D case). Some faces of these subcells correspond to the quadratic approximation of the arbitrary discontinuity. The vertex nodes of these faces were specifically labelled when we shaped the integration subcells because they correspond to the intersections between the discontinuity and the edges of the primary simplex cells. As a consequence, we only need to loop over the faces of the integration subcells and select those whose 3 vertex nodes are labelled as intersection nodes (see Figures 34 and 35). In order to get each contact face exactly once, the choice is made to extract them only from the subcells labelled with a negative signed distance function.

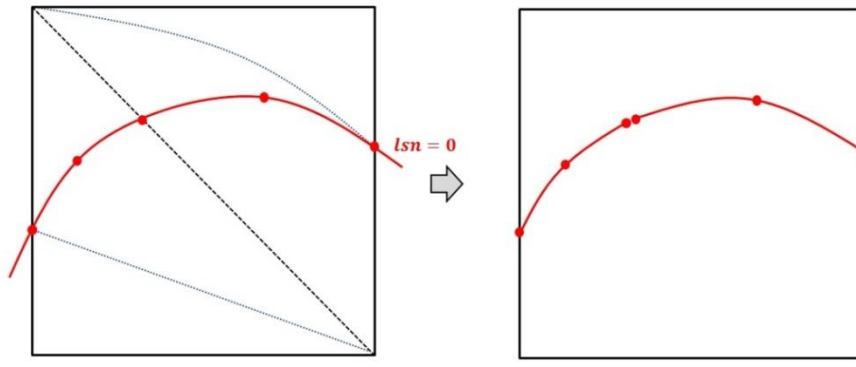


Figure 34. Extracting the contact faces from a quadrangular element: triangular integration subcells (left) and resulting contact faces (right).

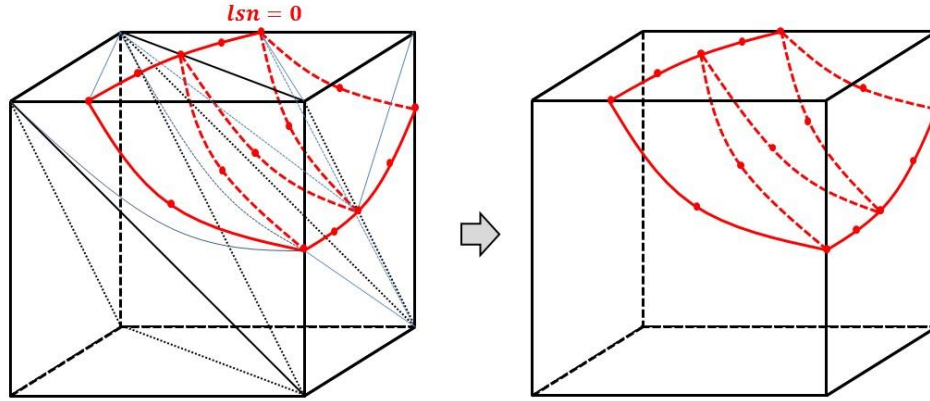


Figure 35. Extracting the contact faces from a hexahedral element: tetrahedral integration subcells (left) and resulting triangular contact faces (right).

4.3 Contact faces for an element which includes a piece of the crack front

For the elements that include a piece of the crack front, another complementary cutting procedure is necessary. Indeed, the design of the integration subcells detailed in Section 3 was realized regardless of the crack front. All the elements that intersect the discontinuity were split with respect to the normal level set only. In order to perform an integration over the surface of discontinuity, it is necessary to have contact faces that match the crack front depicted by the iso-zero of the tangential level set.

The first step consists in extracting the preliminary contact faces the same way as with the previous section. Then, we compute the value of the tangential level set at the vertex nodes of these preliminary contact faces and classify them into 3 groups:

- The contact faces whose 3 vertex nodes satisfy $lst \geq 0$ form group 1. This group is out of bounds: its elements will be eliminated.
- The contact faces whose 3 vertex nodes satisfy $lst \leq 0$ form group 2. We keep this entire group for the final contact faces.
- The remaining contact faces that are necessarily intersected by the iso-zero of the tangential level set form group 3. These contact faces need a further cutting.

In the 2D case, the intersection between the iso-zero of the tangential level set and a preliminary contact face of group 3 is determined with algorithm 1 in the reference configuration of the contact face (so that the contact face is a straight segment). Then, the new middle node of the contact face (type 1 middle node) is mapped from the reference configuration of the segment to the contact face

in the parent element. The procedure, which is summed up in [Figure 36](#), can be synthesized as follows:

- Amongst the preliminary contact faces, we keep those whose vertex nodes satisfy $lst \leq 0$ and select the ones intersected by the iso-zero of the tangential level set for the cutting procedure (top left).
- We determine the intersection between the contact face and the iso-zero of the tangential level set (top right).
- We determine the new position of the middle node of the intersected contact face (bottom right).
- We get the final contact faces (bottom left).

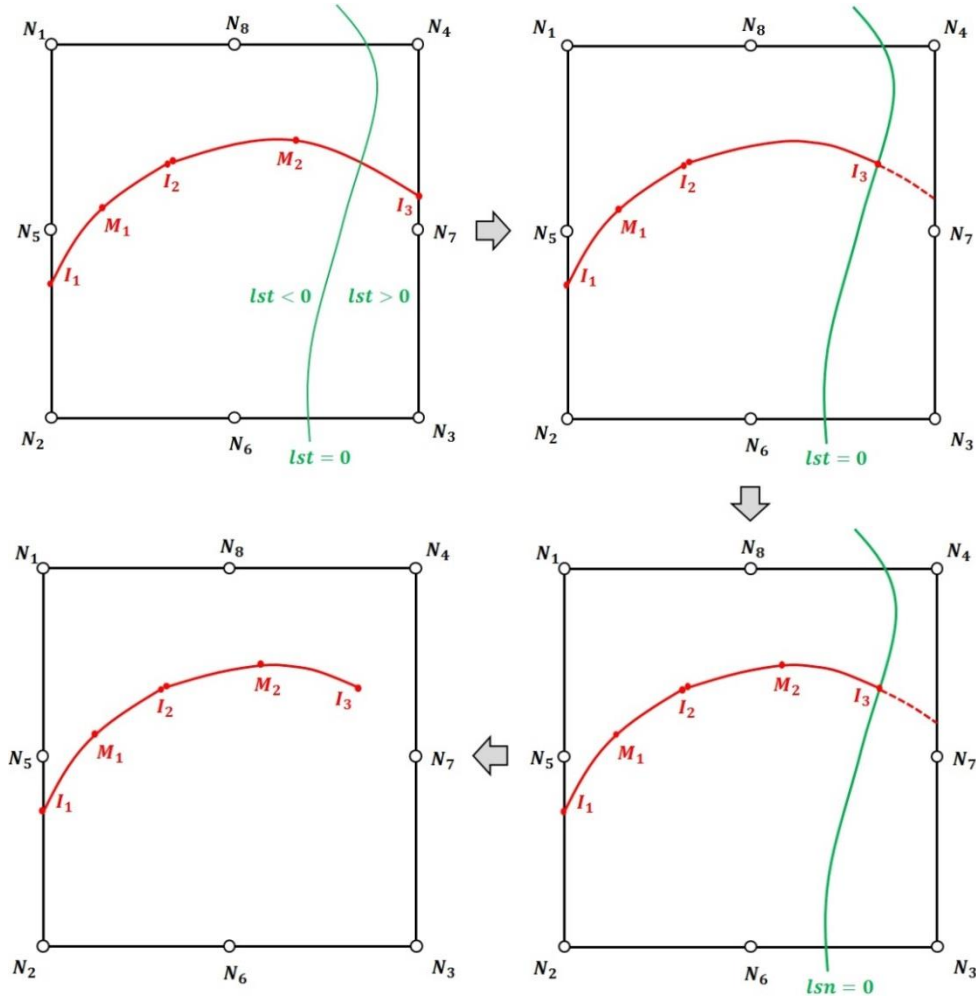


Figure 36. Extracting the contact faces from a quadrangle that includes the crack front.

The 3D case requires more attention. Amongst the triangular contact faces of group 3, we distinguish 3 cutting configurations:

- the contact faces that have one vertex node satisfying $lst = 0$ (configuration 1)
- the contact faces that have two vertex nodes satisfying $lst < 0$ (configuration 2)
- the contact faces that have one vertex node satisfying $lst < 0$ (configuration 3)

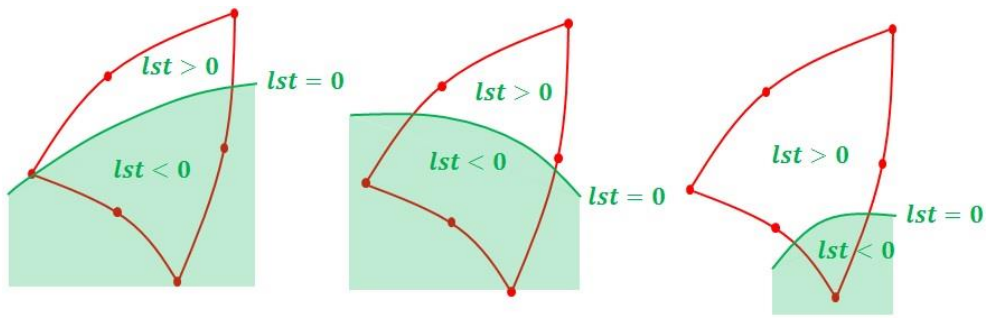


Figure 37. The 3 cutting configurations for the contact faces.

The criterion we use to determine whether a contact face is entirely in the domain $\{x | lst(x) \leq 0\}$ or entirely in the domain $\{x | lst(x) \geq 0\}$ or intersected by the iso-zero of the tangential level set only relies on the vertex nodes of the contact faces. We might then face situations for which the values of the tangential level set at the middle nodes of the contact faces contradict this classification, giving away double roots of the tangential level set along the edge of the contact face. At first, we assume these situations do not occur. The last part of this section is dedicated to the treatment of these delicate cases.

In the following, we explain the cutting procedure for the second cutting configuration. The task consists in cutting a triangle with respect to the tangential level set. In the reference space of the parent element, this triangle is not necessarily plane as it approximates the iso-zero of the normal level set. In order to be reduced to the cutting procedure depicted in paragraphs 3.4 to 3.6, we use the same ingredient as in the case of multi-cracked elements. We map the preliminary contact face with its associated reference triangle whose edges are straight. Then, we apply the classic procedure for the cutting of 2D triangular element ([Figure 38](#)).

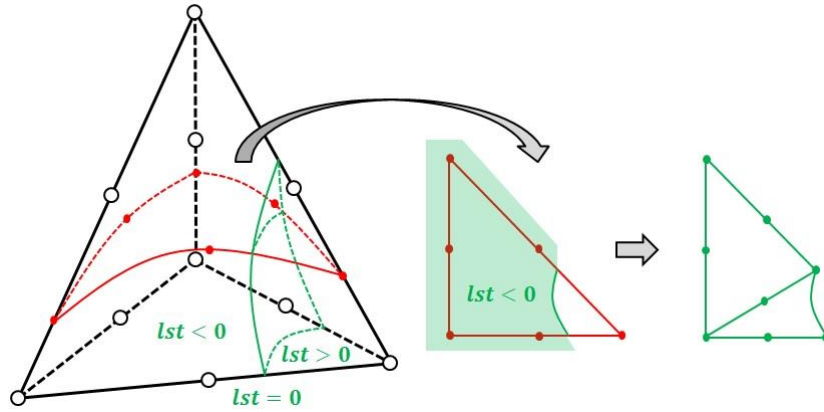


Figure 38. Cutting a triangular primary contact face into two triangular final contact faces within a tetrahedral element.

In [Figure 39](#), we observe the two final triangular contact faces in the primary tetrahedral element. They fit the iso-zero of the tangential level set.

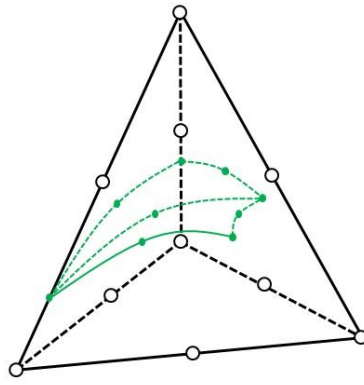


Figure 39. Final contact faces in the primary tetrahedral element.

The cutting procedure is similar for the other two configurations. As depicted in [Figure 40](#), they both give one final triangular contact face.

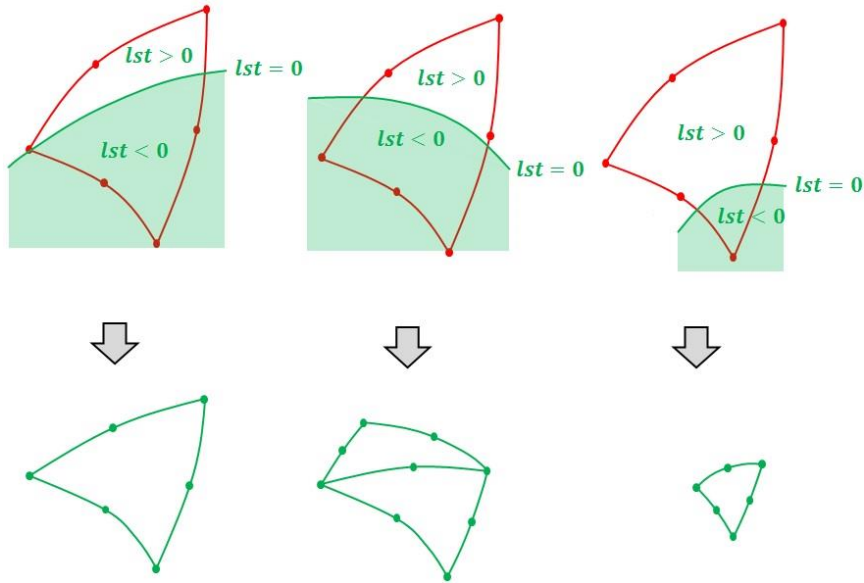


Figure 40. The final contact faces for the 3 cutting configurations.

Finally, we look at the situations of double roots of the tangential level set along an edge of the preliminary contact faces. In [Figure 41](#), we observe the preliminary contact faces generated by a planar crack in a hexahedron.

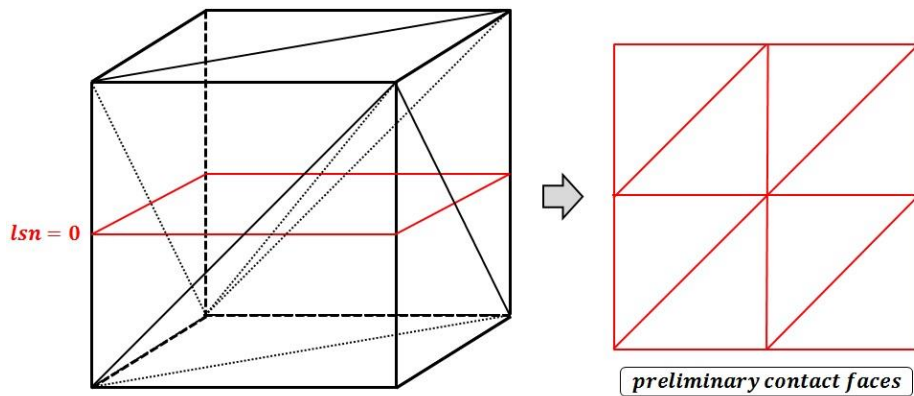


Figure 41. Preliminary contact faces generated by a planar crack in a hexahedron.

The tangential level set cannot cancel twice on the edges of the preliminary contact faces that coincide with a face of the parent element because we previously performed the level set adjustment (paragraph 3.2). However, on the edges of the preliminary contact faces that are internal to non-simplex parent element, we cannot prevent potential double roots of the tangential level set. Two distinct situations may occur. The first situation is depicted in Figure 42. It corresponds to double roots of the tangential level set along the edge of a preliminary contact face due to a local high convexity of the crack front. This situation is detected when we look for the middle node M between the two intersection points I_1 and I_2 . The middle node M is found out of the bounds since it exceeds the upper limit t_{sup} . Contrarily to what was done in Section 3 for the integration subcells, we authorize the middle node M to go over the upper limit t_{sup} as the nearby preliminary contact face affected by the intrusion stands in group 1 and will be eliminated. In this way, we obtain an accurate quadratic approximation of the crack surface.

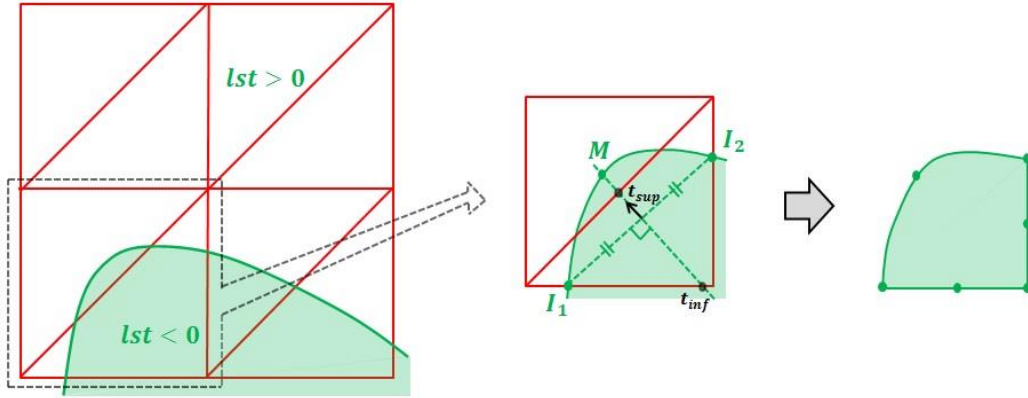


Figure 42. Situation 1.

The second situation is depicted in Figure 43. It corresponds to double roots of the tangential level set along the edge of a preliminary contact face due to a local high concavity of the crack front. This situation is detected when we look for the middle node M between the two intersection points I_1 and I_2 . The middle node M is found out of the bounds since it exceeds the lower limit t_{inf} . In this case, we cannot allow the intrusion of the middle node M in the nearby preliminary contact face because it would bring distorted contact faces. One solution consists in making a local linear approximation of the tangential level set. The position of the middle node M is chosen as the initial guess of algorithm 1. In the reference space of the parent element, it is then the middle of segment $[I_1 I_2]$.

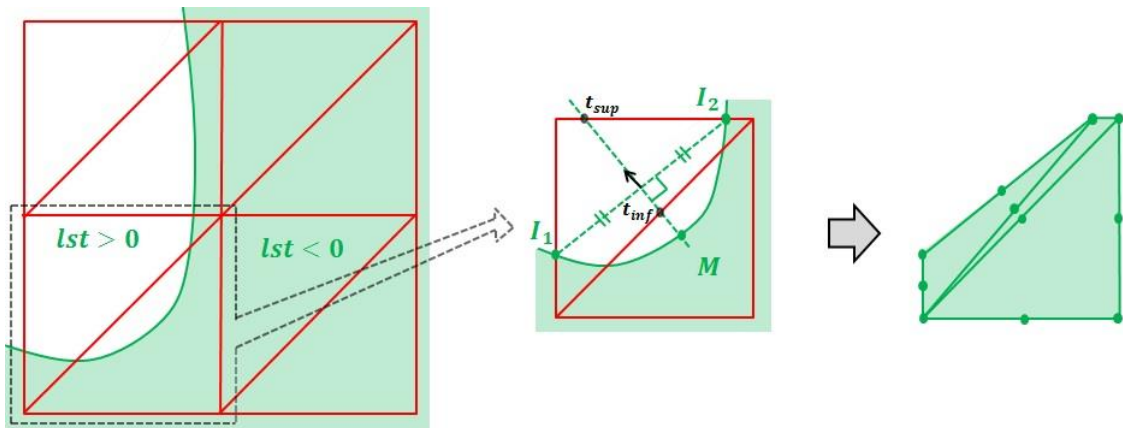


Figure 43. Situation 2.

This local linear approximation of the tangential level set noticeably degrades the accuracy of our integration procedure. By all means, we would like to avoid it. The solution consists in going back to the very beginning of the cutting procedure for the parent element. We try the other eligible configurations for the partitioning of the parent element into primary simplex cells (paragraph 3.4) until no double roots of the level set is recorded. As depicted in [Figure 44](#), these other configurations generate different primary simplex cells and different patterns for the preliminary contact faces, likely to bypass the problem depicted in [Figure 43](#).

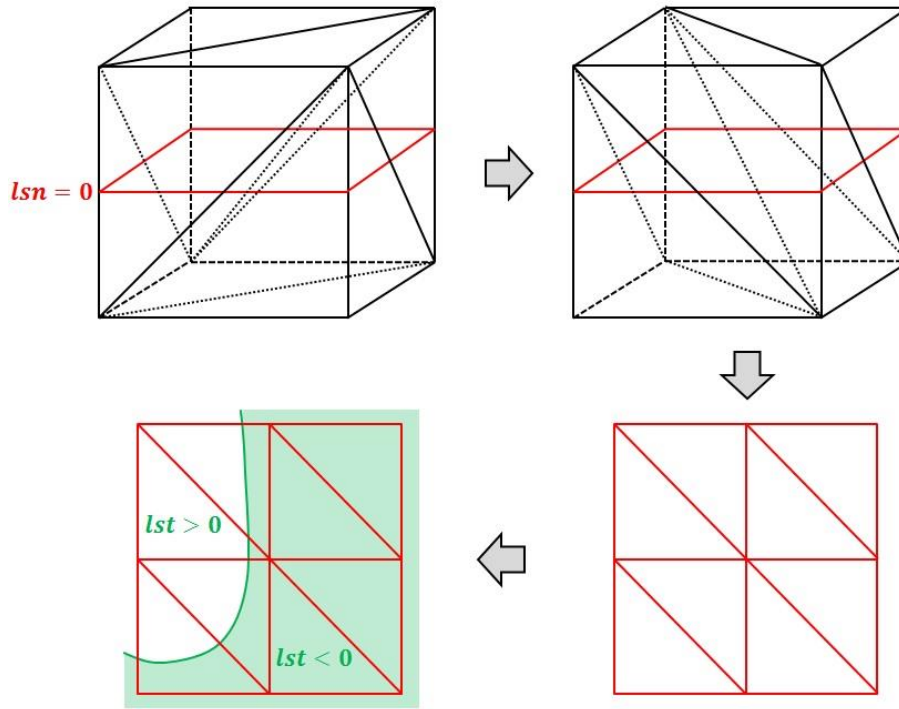


Figure 44. Treatment of situation 2.

- 1 - First and previous configuration for the primary simplex cells (top left).
- 2 - Another configuration of the primary simplex cells (top right).
- 3 - The new configuration of the primary simplex cells generates a new pattern of preliminary contact faces (bottom right).
- 4 - The new pattern of preliminary contact faces allows us to accurately approximate the crack surface in the vicinity of the crack front (bottom left).

As for the design of the integration subcells, we can imagine there might be some extreme cases for which no configuration succeeds in bypassing the problem of double roots of the level sets along an edge of a primary integration subcell and along an edge of a preliminary contact face. *A fortiori*, there is no guarantee that some configurations may succeed in bypassing double roots of the level sets for both the design of the volume integration subcells and the design of the final contact faces. In that case, we perform local linear approximations of the discretized level sets. These unfixed cases would definitely present very twisted level sets so that mesh refinement would most likely solve the problem.

These contact faces also allow us to obtain an accurate quadratic reconstruction of the crack front as a chain of 3 node segments for 3D models. It may be useful for fracture mechanics post-processing. The vertex nodes of the final contact faces corresponding to the iso-zero of the tangential level set are specifically labelled so that the approximated crack front is extracted from the edges of the final contact faces.

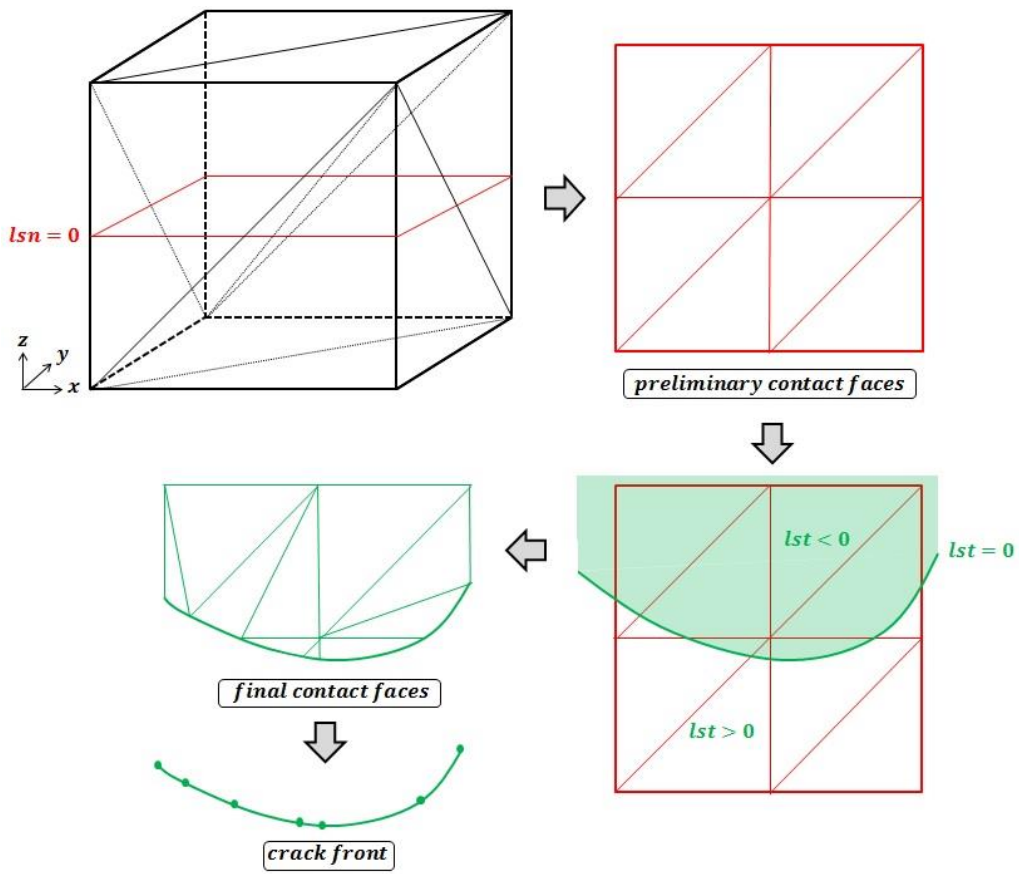


Figure 45. Recovery of the approximated crack front in a hexahedral element.

In the case depicted in [Figure 45](#), considering an horizontal normal level set, for one hexahedral element we get 8 preliminary contact faces, 10 final contact faces and the crack front is approximated by 6 three node segments. This segmentation induces an increased refinement of the approximated crack front. Such a refinement occurs locally, for non simplex elements, depending on both the density of preliminary contact faces and geometry of the crack surface.

4.4 Contact faces for multi-cracked elements

In this section, we detail the recovery of the contact faces for multi-cracked elements. We only consider multi-cracked elements that do not include crack fronts. In order to recover the contact faces of multi-cracked elements that include crack fronts, we would have to combine the procedure depicted in this section with the procedure depicted in the previous section.

The multi-cracked elements have already been split into tetrahedral integration subcells (triangular integration subcells in the 2D case). As for the single-cracked elements, some faces of these subcells correspond to the quadratic approximation of arbitrary discontinuities. The vertex nodes of these faces were specifically labelled distinctly for each discontinuity when we built the integration subcells. In particular, the junction points were labelled for the two discontinuities forming the junction. Therefore, for each discontinuity, we proceed exactly as for a single discontinuity. We loop over the faces of the integration subcells and select those whose 3 vertex nodes are labelled as intersection nodes for the current discontinuity. In the case of a single discontinuity, the choice was made to loop only over the integration subcells labelled with a negative signed distance function in order to recover the contact faces exactly once. For multi-cracked elements, it is necessary to modify this rule for the main discontinuities. The main discontinuities are defined as the discontinuities on which another discontinuity is branched. For these discontinuities, we decide to recover the contact

faces from the integration subcells labelled either with a negative or a positive sign distance function depending on the position of the branched interface. We choose the sign corresponding to the side where the interface is branched. Then we loop over the integration subcells labelled with the corresponding sign to recover the contact faces for the main discontinuity. In [Figure 46](#), we observe a quadrangular element including a branched discontinuity and the resulting triangular integration subcells fitting both discontinuities. The main discontinuity and the branched discontinuity delimit three distinct domains Ω_1 , Ω_2 and Ω_3 over the quadrangular element. In [Figure 47](#), we observe the resulting contact faces when we extract the contact faces for the main discontinuity from the integration subcells labelled with a sign that does not correspond to the branching (left) and with a sign that corresponds to the branched discontinuity (right). In the first case, we end up with two contact faces for the main interface as if the branching was not existing. Then the contact face whose end nodes are I_2 and I_3 does not fit the junction, which is essential if we want to perform a surface integration exclusively on the boundary separating Ω_1 from Ω_3 . In the second case, we end up with 3 contact faces for the main interface that fit the discontinuity junction.

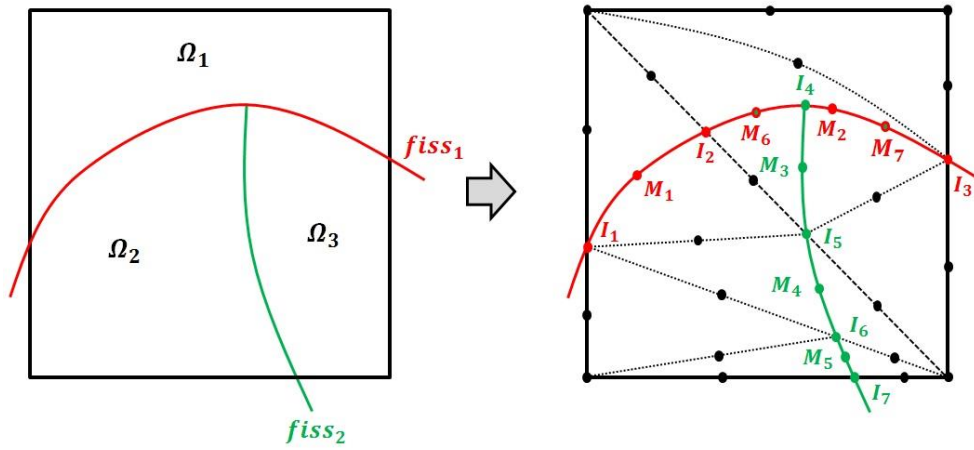


Figure 46. A quadrangular element including a branched discontinuity (left) and the resulting integration subcells (right).

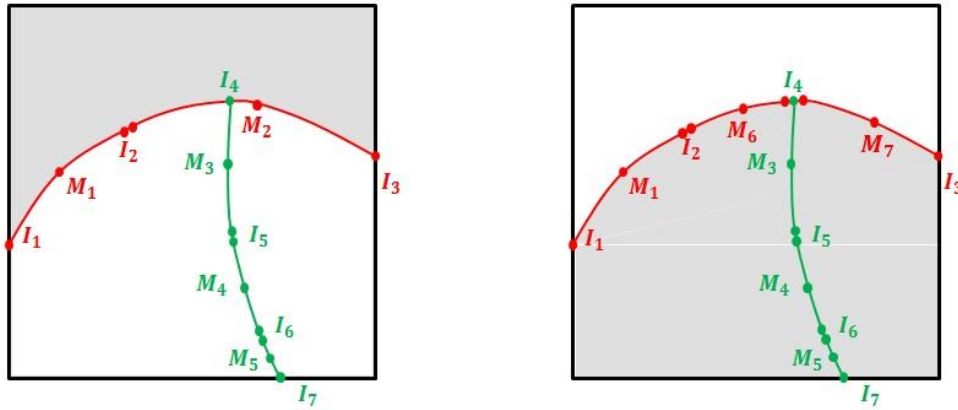


Figure 47 . The resulting contact faces when we extract the contact faces of the main interface from the integration subcells located above (left) and below (right) the main interface.

When several discontinuities are branched on the same main discontinuity within an element, we may not be able to properly recover contact faces fitting all the junctions. In [Figure 48](#) (left), we observe a quadrangular element crossed by a main interface (red) with two branched discontinuities. The discontinuities are branched on both sides of the main interface. We also observe the resulting integration subcells. Neither the integration subcells located below the main interface neither the

ones located above generate contact faces fitting both junctions for the main interface. This configuration can not be solved so that we forbid the presence of two distinct fracture junctions within the same element. This can easily be avoided by refining the mesh. However, we can still have branched fractures within the same element if the different junctions coincide ([Figure 48](#) right).

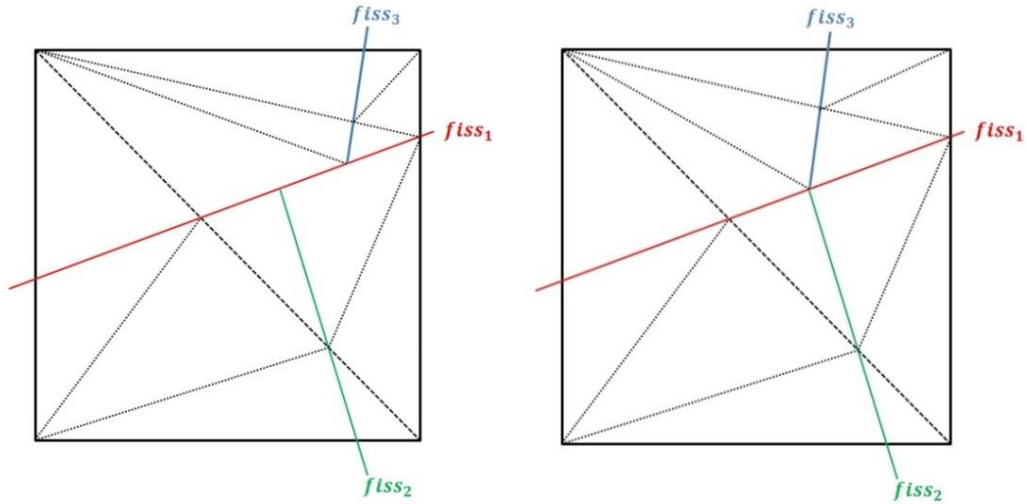


Figure 48. A quadrangular element including two discontinuity junctions and the resulting integration subcells in the case of not coinciding junctions (left) and coinciding junctions (right).

4.5 Integration over the contact faces

Now that we have built contact faces that accurately approximate the immersed boundaries, we are in position to perform surface integrations over the subdomain boundaries. For this aim, we use classical Gauss integration techniques. For each contact face, the positions of Gauss integration points are interpolated from the position of the nodes of the contact face. Furthermore, the surface integration often requires the normal direction to the contact face (for instance to take into account a fluid pressure in the fracture). Hence for each Gauss point we build a unit normal vector to the contact face (oriented along the gradient of the normal level set) from the position of the nodes of the contact face (see [Figure 49](#)).

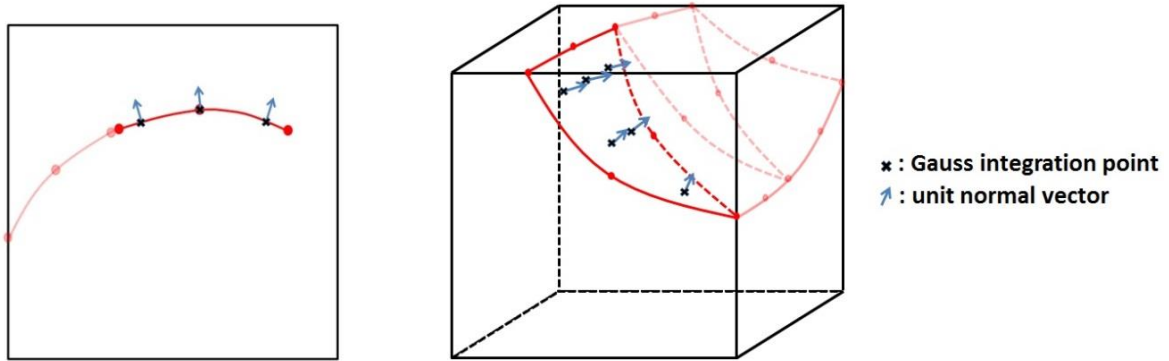


Figure 49. Integration over the curved contact faces of a quadrangle (left) and a hexahedron (right).

The Gauss integration schemes used for the surface integration are the same as the ones used for the domain integration (see [Table 2](#) with 1D elements for the 2D case and 2D elements for the 3D case). According to [\[25\]](#), the use of order 3 Gauss integration schemes in the linear case and order 5 Gauss integration schemes in the quadratic case offers satisfactory accuracy for the integration of the right side terms of equation [1](#) over triangular elements.

5. Validation of the integration method

We present numerical results in order to illustrate and validate the accuracy and robustness of the proposed integration method. In particular, we performed several convergence analyses. The convergence rates we get are in accordance with the theory. First of all, we present the XFEM formulation we combined to our integration procedure to perform the numerical tests.

5.1 Description of the XFEM formulation used

In the literature there are several partition of unity based approaches to model cracks in elastic media. In the work of Ndeffo [6], a thorough analysis has been made and numerical issues have been investigated, at least concerning quadratic elements. It has been established that partition of unity based formulations tend to have large condition numbers (when the discontinuity gets close to the nodes of the approximation mesh).

Therefore, conditioning and accuracy issues need a special care, especially when modeling higher order strong discontinuities. Hence, Ndeffo suggest a convenient formulation to deal with the swift condition number increase. In this section, we extend the suggested formulation to the case of branched discontinuities. Before describing more precisely the aforementioned formulation, let's focus on the definition of branched discontinuities. In the literature, there are two methods to define branched cracks kinematics:

- Using sign fields defining “junction” functions relying on the framework of X-FEM and level-sets [32].
- Using non-overlapping domains in the “neighborhood” of the branched discontinuity relying on the framework of GFEM [33].

The X-FEM defines iteratively the “junction” functions based on level-sets, to represent the branched crack kinematics. GFEM fits for the description of branched discontinuity when information about the domains is available; typically, in the case of poly-crystals models, where partitions of the whole domain are well labelled [34]. As we use level-sets to model discontinuity in this paper, an X-FEM description is more convenient.

However, the X-FEM enrichment functions perform poorly in terms of conditioning and accuracy for higher order elements, as shown in [6]. Formulations based on the partition in domains [35], [33], have a better numerical behavior. Thus our enrichment strategy should combine both features: the X-FEM for its convenience and the formulations based on domains partitioning to deal with conditioning issues. As explained in [6], these two approaches are intermingled. Hence, we can switch from the description of branched discontinuities using level sets to the description using domain partitioning, more fitted for higher order elements. Before solving the afore-mentioned conditioning issues, let's focus again on the definition and assembly of X-FEM junction degrees of freedom.

5.1.1 Definition X-FEM/GFEM approximation spaces

In the case of multiple cracks, following the notations of equation 2, the GFEM/X-FEM approximation of the displacement field can be summarized as follows:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N/N_g} \varphi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{k=1, K} \sum_{j \in N_{g,k}} \varphi_j(\mathbf{x}) F_{j,k}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{j,k}$$

where N/N_g is the set of non enriched nodes whatever the enrichment, K is the number of distinct enriched degrees of freedom, which depends on the number of cracks intersecting the support of the

nodes, $N_{g,k}$ represents the set of enriched nodes for each specific enrichment and $a_{j,k}$ are the related degree of freedom. $F_{j,k}$ is a generic notation for either X-FEM or GFEM node-wise enrichment functions defined in the table below:

	Single crack	Single junction	Double junction
X-FEM	$\{\varphi, H_1\varphi\}$	$\{\varphi, H_1\varphi, H_2\varphi\}$	$\{\varphi, H_1\varphi, H_2\varphi, H_3\varphi\}$
GFEM	$\{\chi_{\Omega_1}\varphi, \chi_{\Omega_2}\varphi\}$	$\{\chi_{\Omega_1}\varphi, \chi_{\Omega_2}\varphi, \chi_{\Omega_3}\varphi\}$	$\{\chi_{\Omega_1}\varphi, \chi_{\Omega_2}\varphi, \chi_{\Omega_3}\varphi, \chi_{\Omega_4}\varphi\}$
NEW	$\{\varphi, \chi_{\Omega_2}\varphi\}$	$\{\varphi, \chi_{\Omega_2}\varphi, \chi_{\Omega_3}\varphi\}$	$\{\varphi, \chi_{\Omega_2}\varphi, \chi_{\Omega_3}\varphi, \chi_{\Omega_4}\varphi\}$

Table 3. Comparison between node-wise enrichment functions in the case of X-FEM, GFEM and the NEW enrichment strategy proposed, where H_i represents a sign-function and χ_{Ω_i} the characteristic function of domain Ω_i .

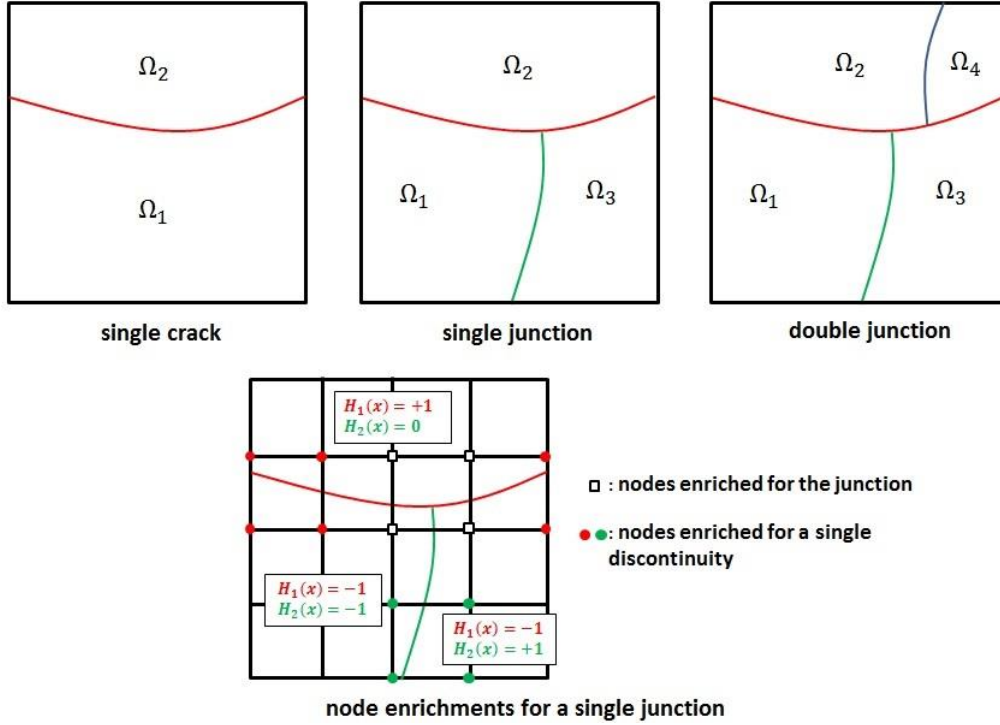


Figure 50. Heaviside functions and domain definitions. In the case of junctions, only the nodes whose support is intersected by multiple cracks are enriched with junction enrichment functions.

The X-FEM and GFEM formulations describe exactly the same approximation space and so does the new enrichment strategy proposed (see [Table 3](#)) which is an extension to junctions of the formulation proposed in [6]. The motivation for this new enrichment strategy is the following. When the crack surface gets close to the nodes of the mesh, the condition number soars with quadratic elements. Thus, a special treatment is needed to improve the numerical behavior of the approximation space. Ndeffo suggested that X-FEM sign functions performed rather poorly and may lead to wrong results. Therefore, X-FEM can't be used directly even if the X-FEM junction functions are more convenient when level-set information is used. That is why we considered a reshape of the X-FEM approximation to solve those conditioning issues. The construction of the new enrichment suggested above follows the principle of complementary element or complementary nodes that is encountered also in the literature [36]. For the same arguments underlined by Ndeffo, this new formulation combines features of both X-FEM and GFEM:

- The convenience of the X-FEM for implementation: X-FEM exploits fully the formalism of level-sets to describe branched discontinuities;
- The good numerical properties of Hansbo's formulation [35]: standard shape functions and enrichment shape functions are almost orthogonal when the interface gets close to the nodes.

5.1.2 Dealing with X-FEM conditioning issue

Nevertheless, those enrichment functions need additional treatment given their asymptotic behavior, particularly because their domain of definition cancels out when the crack surface gets close to the nodes. Therefore, a pre-conditioner is needed to scale-up the related degrees of freedom. Then, we use the simple pre-conditioner suggested in [6]. The matrix notation of the finite element problem $Ku = f$ is replaced by:

$$K'u' = f' \quad \text{with} \quad \begin{cases} K' = D_c K D_c \\ u = D_c u' \\ f' = D_c f \end{cases}$$

where D_c is defined as:

$$[D_c]_{i,i} = d / \sqrt{K_{i,i}} \quad \text{with} \quad d = \sqrt{\frac{\max(K_{i,i}) + \min(K_{i,i})}{2}}$$

Finally, given the coupling between quadratic enrichment functions, some redundant degrees of freedom have to be removed to prevent the condition number soaring. Thus, some middle nodes shape functions are removed within the partition of unity set of functions. Our elimination strategy for these middle nodes relies on the use of the "stiffness criterion" suggested by [37].

The degree of freedom $a_{j,k}$ associated with the middle node j is eliminated if:

$$\frac{\int_{\text{Supp}(j) \cap \Omega_k} \|\varphi_{j,X}\|^2 d\Omega}{\int_{\text{Supp}(j)} \|\varphi_{j,X}\|^2 d\Omega} \leq 10^{-9}$$

where $\text{Supp}(j)$ is the support of node j , $\varphi_{j,X}$ is the derivative of the classical shape function associated with the middle node j in the global coordinate basis X and $\|\varphi_{j,X}\|$ is the usual Euclidian L_2 norm.

5.1.3 From level-sets to local domains

The "complementary" domain enrichment detailed here requires partitioning into domains [33], which cannot be extracted straightforwardly from level-sets information within elements. At the element level, one needs to label partitions of global domains intersecting the support of each node. In contrast, X-FEM's branching relies on the local behavior of Heaviside-function [32] rather than on the global domains. Then, for the new enrichment formulation we adopt, the local sign field information must be transposed into domain mapping. This is feasible with several loops over the elements which associate to the sequence of Heaviside functions seen by each subcell (see Figure 50) a unique coding number characterizing the domain it belongs to [6].

The use of this formulation ensures good performances in terms of conditioning for the numerical examples presented below. The following numerical tests are performed with *Code_Aster* (<http://web-code-aster.org>). First of all, we focus on the approximated geometry of the subdomains. We perform some tests with very highly curved and non-convex iso-zero of the level sets in order to appreciate the ability of our cutting procedure to handle non trivial implicit geometries. Then we

introduce error measurements for the approximated subdomains. Convergence analyses on the resolution of the approximated interfaces are performed for 2D and 3D models including branched discontinuities. A convergence analysis is also performed on the resolution of a curved approximated crack front. Finally we proceed to a nonlinear mechanical test including curved interfaces. Convergence analyses are performed for the displacement field and the energy errors.

5.2 Preliminary examples

In [Figure 51](#), we observe 3 examples which demonstrate the ability of the cutting procedure described in the first two parts to handle highly curved and non-convex interfaces. The three examples are performed with regular meshes formed of quadratic hexahedral elements. The equations associated with the analytical normal level set used are specified for each example. In particular, we observe the faces of the integration subcells that accurately represent the arbitrary boundaries of the different domains.

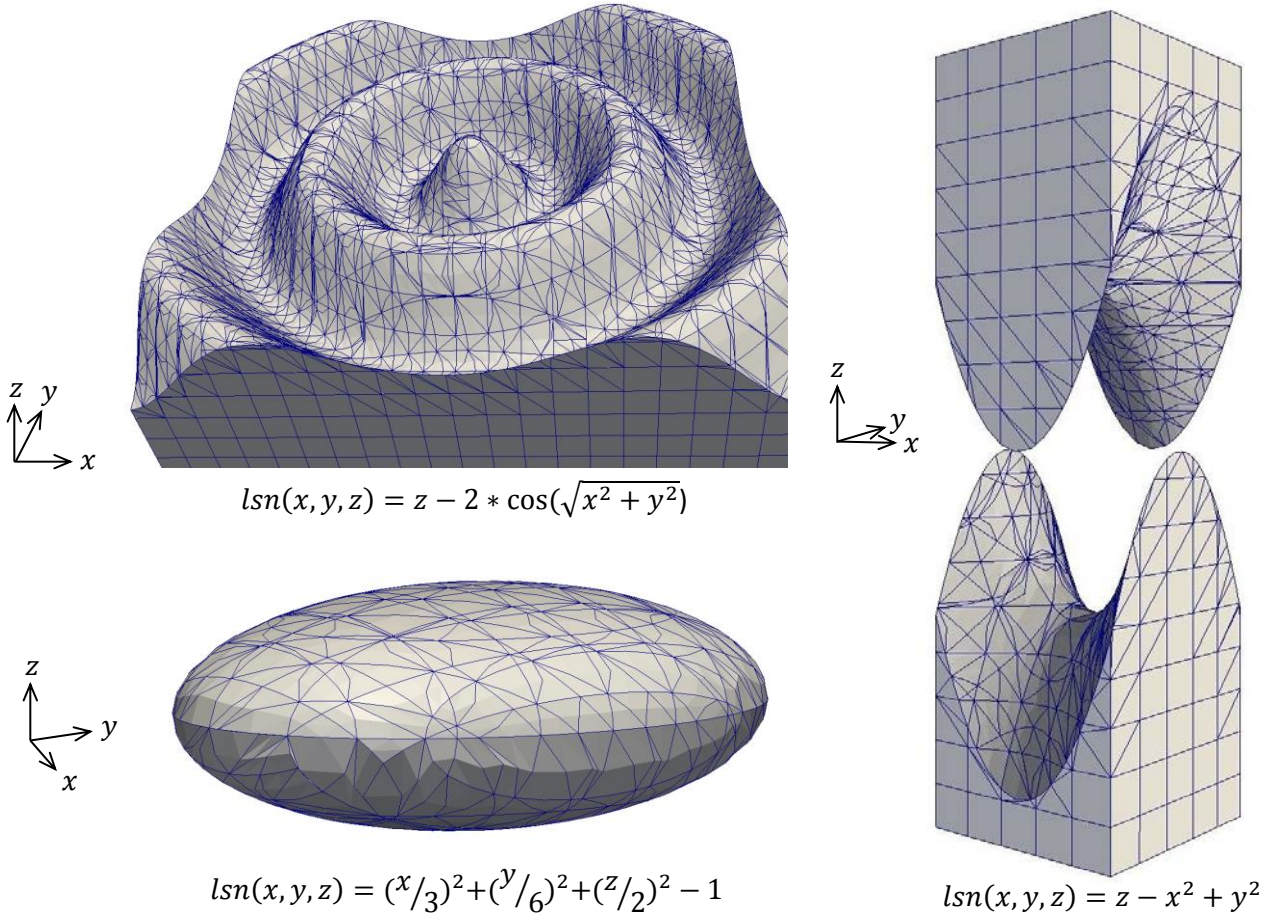


Figure 51. The concentric wavelet (top left), the ellipsoid (bottom left) and the saddle (right) geometries.

The quality of the approximation of the subdomains seems satisfactory, given the fact that the meshes we use are relatively coarse compared to the curvature of the analytical normal level set we have chosen. In order to measure the accuracy of the approximated subdomains, we compute the resolution ε defined in paragraph [2.2](#). We may also use the relative volume error defined as follows:

$$volume\ error = \left| \frac{\Omega - \Omega_h}{\Omega} \right|$$

where Ω is the analytical volume of the subdomain and Ω_h is the volume of the approximated subdomain. A first approach would suggest that, from their definition, both error measures should have the same order of convergence. However, as explained in [5], higher rates of convergence are often observed for the volume error because of compensation phenomena. Therefore we favour the measurement of the resolution for the upcoming convergence analyses. Nevertheless, the resolution must systematically be put in perspective with the dimensions of the domain as it is a distance measurement.

On the table below, we give the volume error and the resolution normalized with the characteristic length of each domain for the 3 examples depicted in Figure 51:

	Volume error (%)	Resolution/characteristic length
Concentric wavelets	0,32	0,0045
Ellipsoid	0,27	0,016
Saddle	0,076	0,006834

Table 4. Volume error and normalized resolution for the examples of Figure 51.

Finally we perform a convergence analysis for the resolution ε of the concentric wavelet. The meshes we use are formed of regular hexahedral elements, with n denoting the number of elements in the directions (Ox) and (Oy) . The width of the domain is $10m$. We plot the resolution ε for different values of n (Figure 52). The convergence rate we get is close to the expected analytical rate (3 for quadratic models).

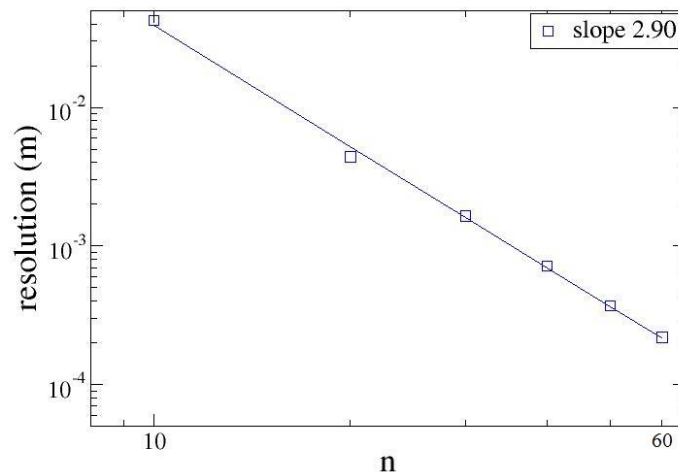


Figure 52. Convergence results for the resolution of the concentric wavelet.

In the following paragraph, we perform convergence analyses on the resolution for 2D and 3D models including branched discontinuities.

5.3 Convergence analyses for the approximated subdomains

We use a 2D model of a square domain crossed by an horizontal interface and two vertical interfaces branched on the first one. The geometry and the boundary conditions are depicted in Figure 53.

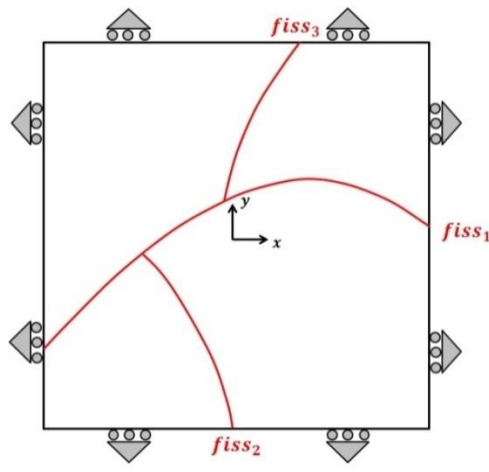


Figure 53. Geometry and boundary conditions.

The dimension of the square is $10m \times 10m$. The origin of the cartesian coordinate system is located at the center of the square. The equations of the normal level sets associated with the three interfaces are:

$$\left\{ \begin{array}{l} lsn_1(x, y) = y + 2,69 - 4,3 * \sin\left(\frac{x + 5}{4,2}\right) \\ lsn_2(x, y) = x + 5 * \exp\left(\frac{y - 2}{3}\right) \\ lsn_3(x, y) = \sqrt{(x - 10)^2 + (y + 2)^2} - 10,68 \end{array} \right.$$

The second interface is defined in the domain $\{lsn_1(x, y) < 0\}$ and the third interface is defined in the domain $\{lsn_1(x, y) > 0\}$. The loading consists of a uniform mechanical pressure p applied on both walls of the three interfaces. The material we use is elastic and we expect an isotropic compression in each block. To perform the test, we use regular meshes formed of quadrangular elements, the parameter n denoting the number of elements in each direction. We obtain the exact displacements for this problem as the solution we expect is linear in each block. This demonstrates the ability of our model to handle the volume and surface integrations in presence of interface junctions.

According to [5], the orders of convergence we should obtain for the resolution ε are respectively 2 in the linear case and 3 in the quadratic case. It should be noted that we are able to appreciate the resolution error ε as the theoretical level set we have chosen are a sine curve, an exponential curve and a circular arc. It is not perfectly solved by the linear nor the quadratic cutting procedure we have used so far. In Figure 54, we observe the zoomed deformed shape and the integration meshes in the quadratic case for $n = 4$ and $n = 20$.

We plot the resolution for different values of n (Figure 55). The convergence rates we get for the linear and the quadratic models are close to the expected analytical rates. For the quadratic case, the error level is very much lower compared to the linear case. The quadratic cutting procedure we use proves to be highly efficient and accurate at approximating curved domain boundaries including junctions.

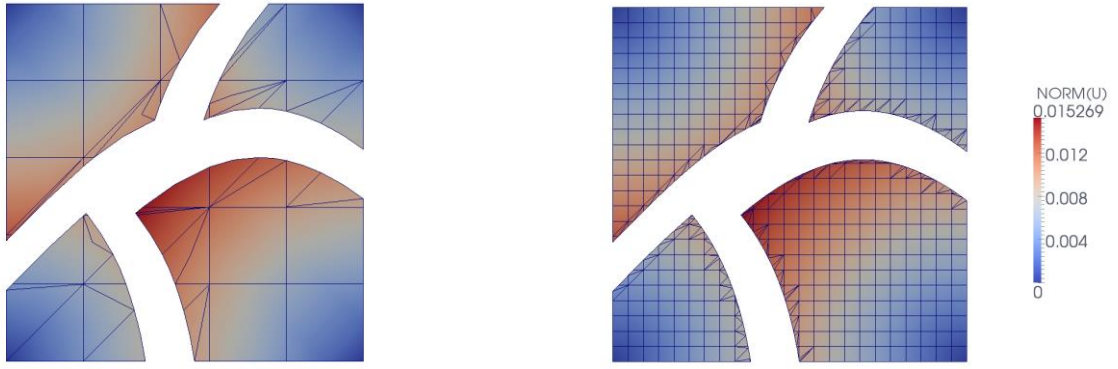


Figure 54. Amplified deformed mesh and displacement norm for $n = 4$ (left) and $n = 20$ (right) for the quadratic case.

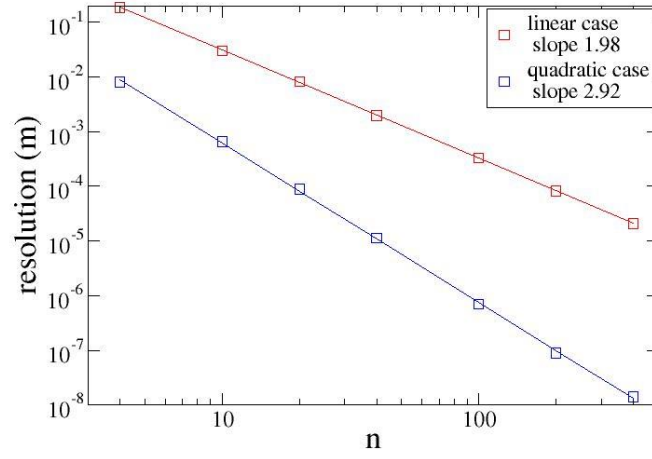


Figure 55. Convergence results for the 2D square crossed by curved branched interfaces.

We perform a similar analysis in the extruded 3D case whose geometry is depicted in [Figure 56](#). The thickness of the squared plate is 2 m .

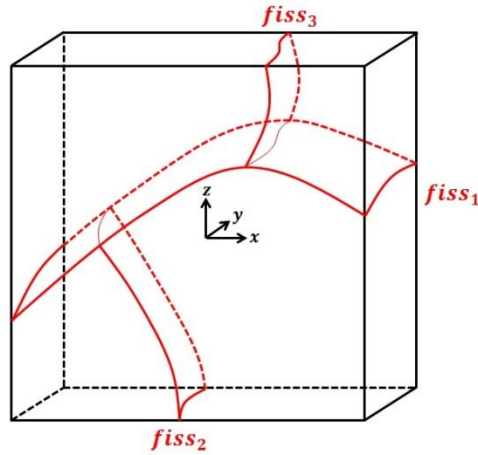


Figure 56. Geometry of the 3D case.

The equations of the normal level sets associated with the three interfaces are:

$$\left\{ \begin{array}{l} lsn_1(x, y, z) = z + 2,69 - 4,3 * \sin\left(\frac{x+5}{4,2}\right) + 0,12 * (y-1)^2 \\ lsn_2(x, y, z) = x + 5 * \exp\left(\frac{y-2}{3}\right) - 0,3 * y^2 \\ lsn_3(x, y, z) = \sqrt{(z-3)^2 + (x+5)^2} - 7,1 + 0,45 * \cos(y-1) \end{array} \right.$$

The loading and the boundary conditions are identical to the 2D case. We use regular meshes formed of hexahedral elements, the parameter n denoting the number of elements in directions (Ox) and (Oz) . The number of elements in the thickness of the square is $n/5$. In [Figure 57](#), we observe the zoomed deformed shape and the integration meshes in the quadratic case for $n = 5$ and $n = 10$. We can especially appreciate the design of the quadratic integration subcells whose faces coincide with the different interfaces.

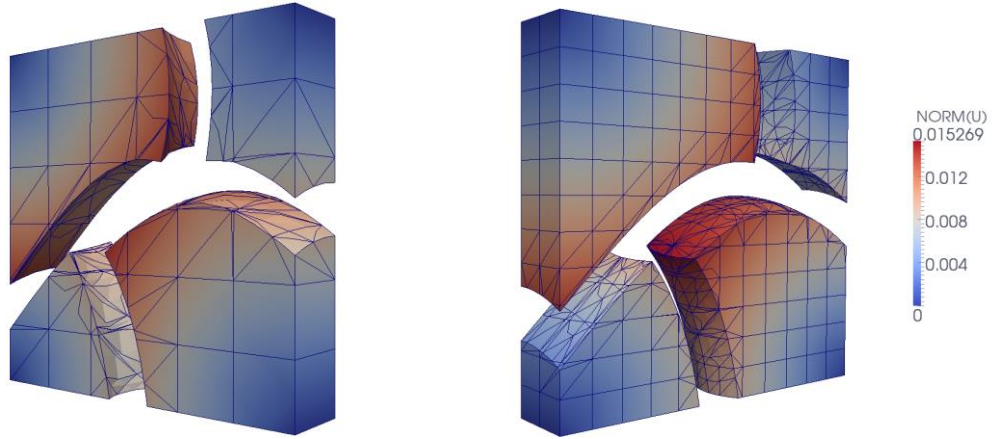


Figure 57. Amplified deformed mesh and displacement norm for $n=5$ (left) and $n=10$ (right) for the quadratic case.

We plot the resolution for different values of n ([Figure 58](#)). The convergence rates we get for the linear and the quadratic models are once again close to the expected analytical rates.

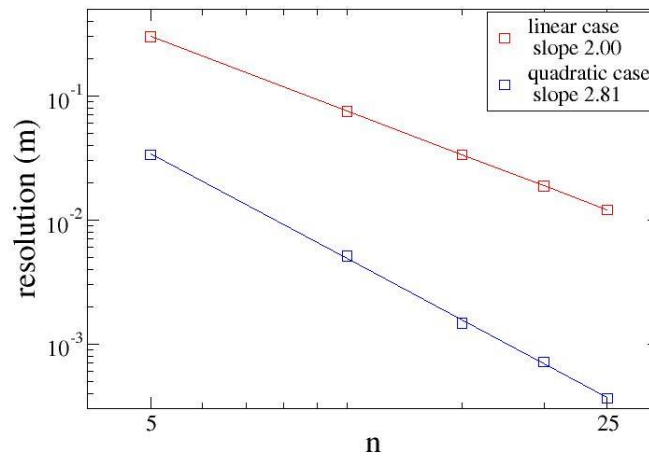


Figure 58. Convergence results for the 3D square crossed by curved branched interfaces.

5.4 Convergence analysis for a curved approximated crack front

The next convergence analysis we perform concerns a fracture front, modeled by means of a *normal level set* and a *tangential level set*. The geometry is depicted in [Figure 59](#). A cube of size 1 m is cut at mid height by a planar crack whose front is sinusoidal. We do not perform any mechanical simulation; we only focus on the computed surface of the crack in order to validate our integration technique for crack fronts. The crack is defined by two level set functions, a normal level set and a tangential level set:

$$\begin{cases} lsn(x, y, z) = z - 1/2 \\ lst(x, y, z) = 1 - y - 0,75 * \sin(x - 0,4) \end{cases}$$

The crack corresponds to the surface $\{lsn = 0\} \cap \{lst < 0\}$ and the crack front to the curve $\{lsn = 0\} \cap \{lst = 0\}$

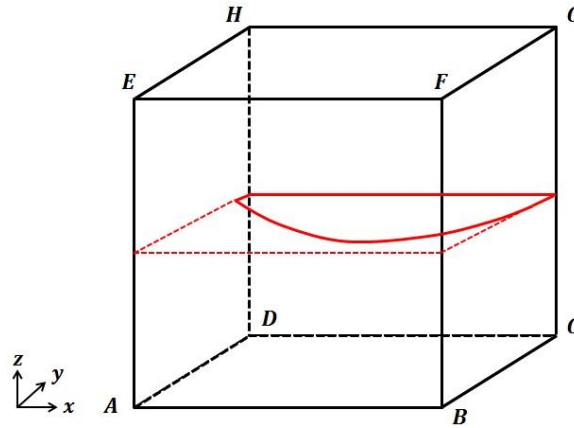
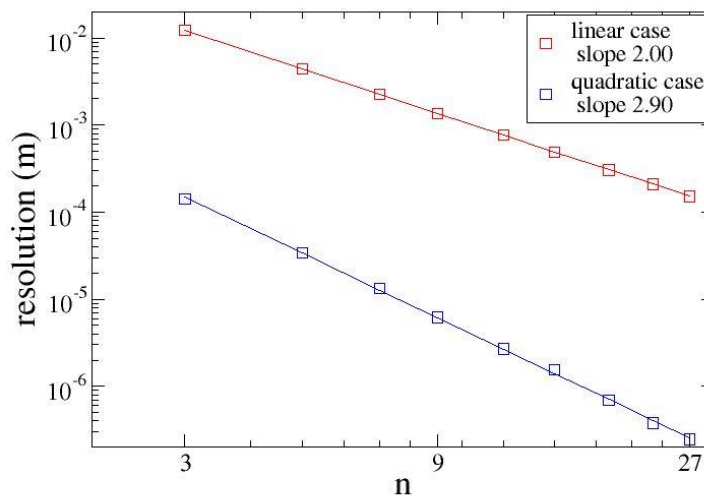


Figure 59. Geometry of the problem.

We use regular meshes formed of hexahedra, the parameter n denoting the number of elements in each direction. The theoretical tangential level set we choose is a sine curve which is not perfectly solved by the linear nor the quadratic cutting procedure we use. We perform a convergence analysis on the crack front resolution ε defined previously in [2.2](#).

The resolution for the crack front area is plotted with respect to n in [Figure 60](#).



The convergence rates we get for the linear and the quadratic models are entirely satisfactory. The error levels we obtain seem excessively low. This is due to the increased refinement for the approximated crack front as explained in paragraph 4.3.

5.5 Spherical interface on a radial mesh

The test consists of a spherical cap divided by a concentric interface. The external part of the cap is clamped and its internal part is submitted to a constant pressure p . On the interface, the theoretical contact pressure is applied mechanically on each side. The choice has been made to exclude proper contact formulations in the following experiments, so that we can focus on the accuracy of the integration procedure, independently from the convergence of the contact algorithm. We take advantage of the symmetry of the problem and model only a quarter of a hemisphere. The orthoradial displacements are then prescribed on the lateral boundaries of the domain (Figure 61). The material is linear elastic.

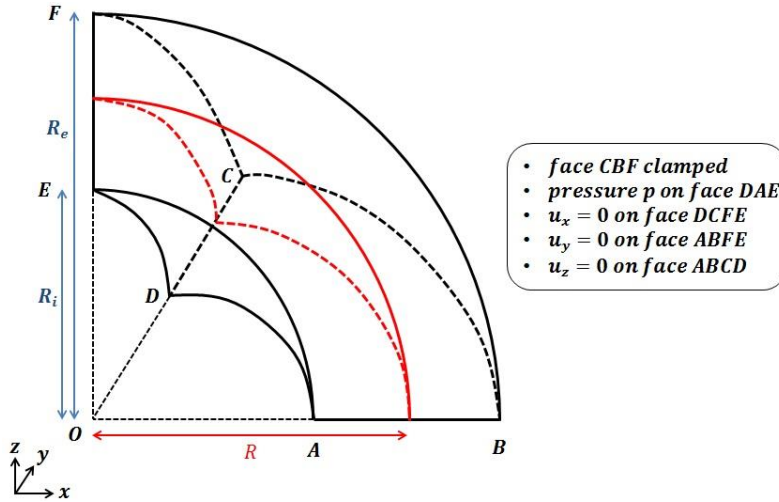


Figure 61. Geometry and boundary conditions.

If the exact theoretical contact pressure is applied on the interface, the cap should behave likewise a one-piece cap. The displacements for this very classical problem only depend on the distance r to the center and are then given by:

$$\begin{cases} u_r(\mathbf{r}) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \\ u_\theta(\mathbf{r}) = 0 \\ u_\varphi(\mathbf{r}) = 0 \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{-p}{E \left(2 \frac{R_e^3}{R_i^3} + 1 \right)} \\ C_2 = -C_1 R_e^3 \end{cases}$$

Considering the spherical coordinates system (r, θ, φ) , the stress tensor is given by:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r) = E \frac{du_r(r)}{dr} \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \sigma_{\varphi\varphi}(r) = E \frac{u_r(r)}{r} \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \end{cases}$$

The contact pressure p_{int} we must enforce on the interface is then:

$$p_{int} = -\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma}(R) \cdot \mathbf{e}_r = -\sigma_{rr}(R) = -E \left(C_1 - 2 * \frac{C_2}{R^3} \right) = -EC_1 \left(1 + 2 * \frac{R_e^3}{R^3} \right) = p * \frac{1 + 2 * \frac{R_e^3}{R^3}}{1 + \frac{R_e^3}{R_i^3}}$$

This pressure is applied on each side of the interface.

We choose the following set of parameters:

$$R_i = 1m, \quad R_e = 2m, \quad R = 1.5m, \quad E = 5,8.10^9 Pa, \quad \nu = 0, \quad p = 10^6 Pa$$

The meshes we have chosen are radial (see [Figure 62](#) left). The parameter n denotes the number of volume elements in the thickness of the cap. It also corresponds to the number of volume elements in the angular directions.

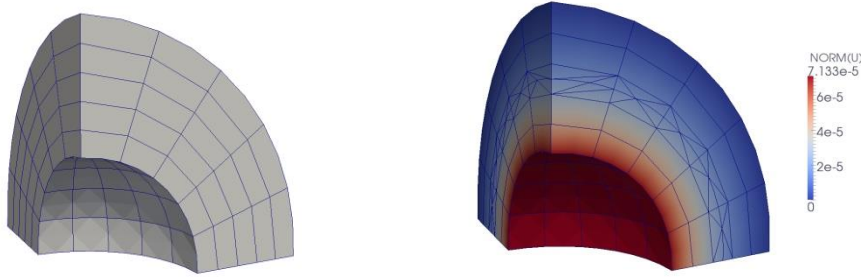


Figure 62. The quadratic mesh used for $n=5$, formed of 100 hexahedral elements and 25 pentahedral elements (left) and the obtained displacements norm (right).

In [Figure 62](#) (right), we observe the displacement magnitude on the post-processing mesh for the quadratic case. In particular, we can see clearly the edges of the integration subcells generated around the interface.

We perform a convergence analysis for both the linear and the quadratic case on the displacement error rate and the energy error rate. The displacement relative error we compute is:

$$displacement\ error = \frac{\sqrt{\int_{\Omega_h} (\mathbf{u}_{h,1} - \mathbf{u}_h)^2}}{\sqrt{\int_{\Omega_h} \mathbf{u}_{h,1}^2}}$$

where Ω_h is the approximated domain (the domain covered by the integration mesh), $\mathbf{u}_{h,1}$ is the analytical solution projected on the displacement approximation space and $\mathbf{u}_h$ is the displacement field we obtained. The energy relative error we compute is:

$$energy\ error = \frac{\sqrt{\int_{\Omega_h} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{h,1} - \mathbf{u}_h) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{h,1} - \mathbf{u}_h)}}{\sqrt{\int_{\Omega_h} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{h,1}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{h,1})}}$$

where $\boldsymbol{\varepsilon}$ is the Lagrangian strain tensor and $\mathbf{C}$ is the linear elastic Hooke tensor.

According to [\[5\]](#), the convergence rates we expect for the displacement error and the energy error are respectively 2 and 3 in the quadratic case and 1 and 2 in the linear case.

Hereunder we display the energy error and the displacement error for different values of n . The convergence rates we obtain are close to the analytical values.

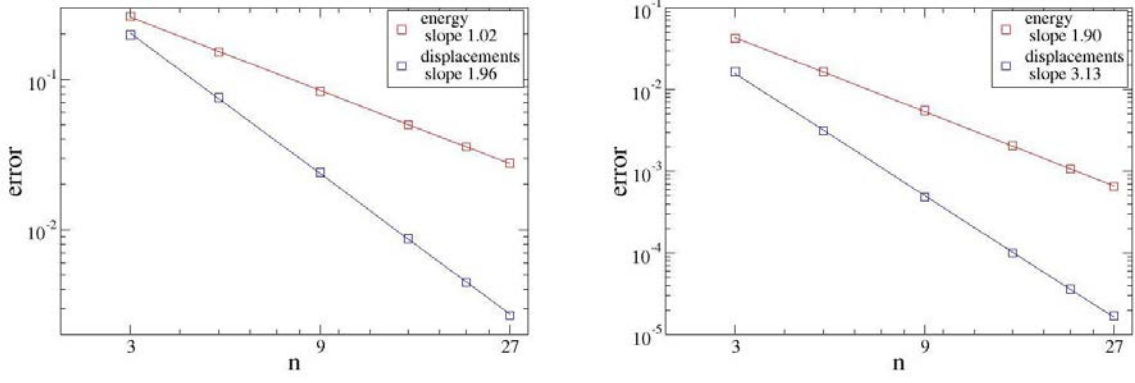


Figure 63. Convergence results for the spherical cap in the linear case (left) and the quadratic case (right)

In order to emphasize the importance of the quadratic approximation of the level set, we perform the same convergence analysis with a quadratic displacement field and a linear approximation of the interface. The convergence rates we get are also in agreement with the theory [5]. The rates jump from 3 to 2 for the relative error of the displacement norm and from 2 to 1.5 for the relative error of the energy norm (see Figure 64 left). Finally, in order to confirm the relevance of the Standard Gauss integration schemes we use, we perform a last convergence analysis in the quadratic case with order 3 Gauss integration schemes for the volume integration subcells and triangular contact faces instead of order 5 Gauss integration schemes (confer 3.8). The convergence rates we get are once again deteriorated (see Figure 64 right). The optimal Gauss integration schemes we had chosen in the first place for the quadratic case are then necessary to observe the optimal theoretical convergence rates.

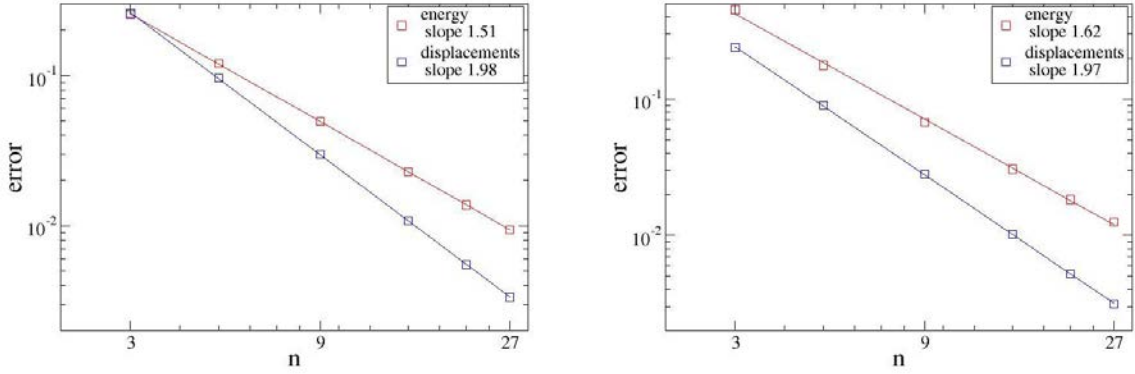


Figure 64. Convergence results for the spherical cap in sub-optimal cases: quadratic displacement field and linear approximation of the interface (left), quadratic case with order 3 Gauss integration schemes for the integration subcells and the contact faces (right).

5.6 Spherical interface on an arbitrary mesh

This last analysis focuses on the robustness of the cutting algorithms. The problem is similar to the previous case but the mesh we use is no longer radial. For this aim we model a cube extruded from the spherical cap. The geometry of the problem is depicted in Figure 65. The size of the cube is 1 m and the radius of the spherical interface centered in A is $R = 1,2\text{ m}$. The internal radius of the spherical cap is $R_i = 0,3\text{ m}$ and its external radius is $R_e = 0,3 + \sqrt{3}\text{ m}$. The loading on the spherical cap is similar to the previous case: the displacements are still clamped on its external boundary and a mechanical pressure p is imposed on its internal boundary. The theoretical contact pressure is still

applied on both sides of the interface. In this way, we can extract the analytical solution depicted in part 5.5 and restrain it to the cube.

On faces EFGH, BCGF and DCGH, we impose the theoretical displacements of this problem. On faces ABCD, ABFE and ADHE, the exact Neumann boundary conditions are imposed. Finally, on three points of the block included between $r = R_i$ and $r = R$, the theoretical displacements are imposed in order to prevent rigid body displacements.

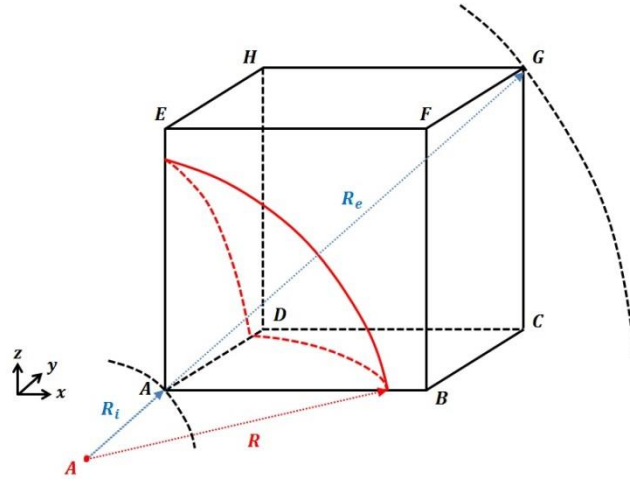


Figure 65. Geometry of the problem.

We use regular meshes formed of hexahedra. Thus the elements are arbitrarily cut by the spherical interface. As a consequence, many cutting configurations are likely to happen. The test is realized for both linear and quadratic elements. Here n denotes the number of elements on each edge of the cube. In Figure 66, we observe the displacements on the integration mesh for $n = 5$ in the quadratic case. In particular, we observe the edges of the volume integration subcells surrounding the spherical interface.

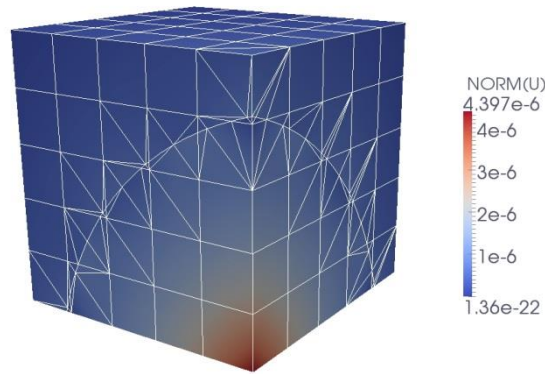


Figure 66. Displacement norm on the integration mesh for $h=5$ in the quadratic case.

A convergence analysis is performed in order to prove the robustness of our integration procedure when a curved interface arbitrarily crosses a regular mesh. The relative error for the displacements and the energy is plotted below for various values of n , in the linear case as well as in the quadratic case (Figure 67).

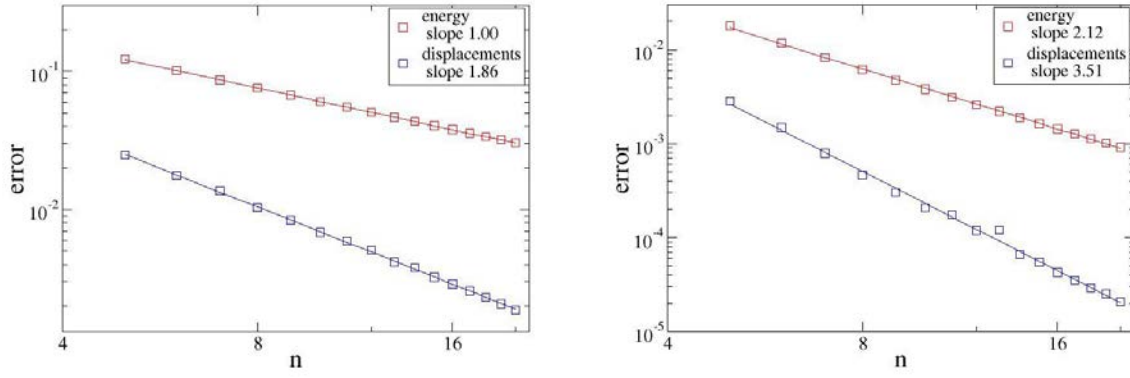


Figure 67. Convergence results for a cube crossed by a spherical interface in the linear case (left) and in the quadratic case (ritgh).

In the linear case, the orders of convergence we get are in perfect agreement with the theory. In the quadratic case, we observe a super-convergence for the displacement norm compared to the theoretical order we should get. Very similar convergence rates and error levels are obtained if we perform the same analysis without the XFEM interface (same mesh and a FEM resolution with no mention of an interface in the command file of the simulation). Once more, the convergence rates are in accordance with the theory, demonstrating the accuracy and reliability of the integration procedure. For large values of n , a large number of hexahedral elements are arbitrarily cut by the curved interface, testing the limits of our model. The conditioning is also really put to the test as the interface often passes very close to the nodes of the approximation mesh. For $n > 8$, some degrees are freedom are systematically eliminated according to the “stiffness criterion” presented in paragraph 5.1.2. These eliminations did not disrupt the convergence.

6. Conclusion

A robust strategy for the accurate quadratic integration of implicitly defined geometries within the framework of the eXtended Finite Element Method has been proposed. The elements of the mesh crossed by arbitrary discontinuities are split into simplex integration subcells whose faces accurately approximate the crack boundaries, so that we can integrate exclusively in each subcell. The integration strategy performs without remeshing, under the assumption that the user is aware of the relative size of the elements of the mesh compared with the pattern of the arbitrary interfaces. For this aim, we systematically reduce the problem to a few topologically distinct cutting configurations at the price of eventual shifts for the interpolated iso-zero of the level set. Problematic cases of double roots of the interpolated level set fields along edges have to be handled with thorough consideration. The design of the integration subcells is systematically performed in the associated reference element, so that the overall cutting procedure is handled by a one-dimensional root-finding algorithm. For the surface integration, the contact faces are directly recovered as the faces of the integration subcells coinciding with the interpolated interfaces. Optimal convergence rates are obtained in three dimensions for both linear and quadratic models. Although we investigated the case of strong discontinuities, the method can be applied to weak discontinuities without any difficulty. Our integration technique may be used with other methods that use implicitly defined geometries as the fictitious domain methods [38-39]. Finally, our cutting procedure may be combined with the techniques depicted in [26-28] that use a fixed sample of integration points within the elements crossed by arbitrary interfaces. These techniques enable the repartition and the number of integration points in the elements cut by the fracture not to depend on the integration subcell pattern.

Appendix A: Overview of the whole cutting procedure

The overall cutting procedure, including the design of the integration subcells and the recovery of the contact faces, is summarized hereunder:

- Loop over the elements of the mesh

Step 1: Identify the elements that need to be cut

- Loop over the arbitrary discontinuities defined by means of level set functions
 - ✓ The elements that are entirely crossed by the discontinuity are labelled as “interface elements” for the current discontinuity.
 - ✓ The elements that are cut by the discontinuity and include a piece of the crack front are labelled as “crack-tip elements” for the current discontinuity.

Step 2: Cut the elements into volume subcells which fit the arbitrary discontinuities

The variable j is introduced in order to mark the configuration chosen to split the element into primary simplex cells. j is initialized to 1 and cannot go past j_{max} which corresponds to the number of eligible configurations for the current type of mesh.

- Loop over the discontinuities for which the current element was labelled (at this stage, we do not distinguish the “crack-tip elements” from the “interface elements”)
 - If the element is cut for the first time (first discontinuity for this element)
 - ✓ The element is split up into primary simplex cells according to configuration j
 - ✓ For each primary simplex cell, we determine the intersections with the iso-zero of the level set in the reference space of the parent element using algorithm 1 and shape the integration subcells generated by each primary simplex cell. If double roots of the normal level set along the edge of a primary simplex subcell are detected and $j < j_{max}$ → **go back to the previous step with $j = j + 1$.**
 - ✓ We obtain a set of integration subcells fitting the current discontinuity.
 - ✓ The nodes of the integration subcells that coincide with the discontinuity are specifically labelled.
 - ✓ Each integration subcell is labelled with the local sign of the normal level set.
 - Else (the element has already been split into integration subcells)
 - ✓ We map each integration subcell with its associated reference element and determine the intersections with the iso-zero of the level set using algorithm 1. Then we shape the children integration subcells generated by each integration subcell.
 - ✓ We obtain a set of integration subcells fitting not only the current discontinuity but also the previous ones.
 - ✓ The nodes of the integration subcells that coincide with the current discontinuity are specifically labelled.
 - ✓ Each integration subcell is labelled with the local sign of the current normal level set.

Step 3: Recover the contact faces

- Loop over the discontinuities for which the current element was labelled
 - If the element is an “interface element” for the current discontinuity
 - ✓ Determine the sign of the normal level set associated with the side of the interface chosen for the recovery of the preliminary contact faces.
 - ✓ Loop over the integration subcells labelled with the corresponding sign and determine the faces that coincide with the iso-zero of the normal level set.

- ✓ We obtain the set of contact faces for the current discontinuity.
 - Else, the element is a “crack-tip” element for the current discontinuity
 - ✓ Determine the sign of the normal level set associated with the side of the interface chosen for the recovery of the preliminary contact faces.
 - ✓ Loop over the integration subcells labelled with the corresponding sign and determine the faces that coincide with the iso-zero of the normal level set.
 - ✓ We obtain a set of preliminary contact faces for the current discontinuity.
 - ✓ Classify the preliminary contact faces into 3 groups :
 - The group of preliminary contact faces satisfying $lst > 0$. The elements of this group are out of the bounds.
 - The group of preliminary contact faces satisfying $lst < 0$. We select this entire group for the final contact faces.
 - The group of preliminary contact faces intersected by the iso-zero of the tangential level set.
 - ✓ The elements of this last group need a further cutting. We map the preliminary contact faces with their associated reference element and use algorithm 1 to cut these preliminary contact faces with respect to the iso-zero of the tangential level set. If double roots of the tangential level set along the edge of a preliminary contact face are detected and $j < j_{max} \rightarrow$ **go back to the beginning of step 2 and $j = j + 1$.**
 - ✓ We obtain the set of final contact faces for the current discontinuity.

Acknowledgements

This work was supported by IFPEN and EDF. We thank them for their participation. The authors are grateful to Alexandre Martin (IMSIA) for his helpful support.

References

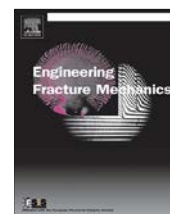
- [1] Dolbow J., Moës N., Belytschko T., A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1999 **46**:131-150.
- [2] Melenk J.M., Babuska I., The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1996; **39**:289-314.
- [3] Osher S., Sethian J. A., Fronts propagation with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Comput. Phys.* 1998 **79**:12-49.
- [4] Sethian J. A., Level Set Methods and Fast Marching Methods (2nd edition). *Cambridge University Press*: Cambridge, 1999.
- [5] Ferté G., Massin P., Moës N., Convergence analysis of linear or quadratic X-FEM for curved free boundaries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2014; **278**:794-827.
- [6] Ndeffo M., Modélisation numérique de la propagation de fissures avec des éléments XFEM 2D et 3D quadratiques, Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Nantes, 2015.
- [7] Stazi F. L., Budyn E., Chessa J., Belytschko T., An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks. *Computational Mechanics* 2003; **31**:38-48.
- [8] Chessa J., Wang H., Belytschko T., On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 2003; **57**:1015-1038.
- [9] Cheng K. W., Fries T. P., Higher-order XFEM for curved strong and weak discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2010; **82**:564-590.
- [10] Dréau K., Chevaugeon N., Moës N., Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010; **199**:1922-1936.
- [11] Moumnassi M., Belouettar S., Béchet É., Bordas S. P. A., Quoirin D., Potier-Ferry M., Finite element analysis on implicitly defined domains: an accurate representation based on arbitrary parametric surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2011; **200**:774-796.
- [12] Legrain G., Chevaugeon N., Dréau K., High order X-FEM and level sets for complex microstructures: uncoupling geometry and approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2012; **241-244**:172-189.
- [13] Legay A., Wang H. W., Belytschko T., Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; **64**:991-1008.
- [14] Sala-Lardies E., Fernández-Méndez S., Huerta A., Optimally convergent high-order X-FEM for problems with voids and inclusion. *Proceedings of the ECCOMAS 2012*, Vienna, Austria, 2012; 1–14.
- [15] Laborde P., Pommier J., Renard Y., Salaün M., High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; **64**:354–381.
- [16] Chahine E., Laborde P., Renard Y., Crack-tip enrichment in the XFEM method using a cutt-off function. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 2008; **75**:629-646.
- [17] Chevaugeon N., Moës N., Minnebo H., Improved crack-tip enrichment functions and integration for crack modeling using the extended finite element method. *J. Multiscale Comput. Eng.* 2013; **11**:597-631.
- [18] Nicaise S., Renard Y., Chahine E., Optimal convergence analysis for the extended finite element method. *Internat. J. Numer. Methods. Engrg.* 2010; **84**:1115-1138.
- [19] Béchet E., Minnebo H., Moës N., Burgardt B., Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engrng.* 2009; **64**(8):1033-1056.

- [20] Fries T. P., Omerovic S., Higher-order accurate integration of implicit geometries. *Int. J. for Numer. Meth. Engng* 2015. 10.1002/nme.5121
- [21] Moës N., Gravouil A., Belytschko T., Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part 1: Mechanical Model. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2002; **53**:2549-2568 (DOI: 10.1002/nme.429).
- [22] Ferté G., Massin P., Moës N., 3D crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2016; **300**:347-374, 2016.
- [23] Minnebo H., Three-dimensional integration strategies of singular functions introduced by the XFEM in the LEFM. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2012; **92**:1117-1138 (DOI: 10.1002/nme.4378).
- [24] Legrain G., Allais R., Cartraud P., On the use of the extended finite element method with quadtree/octree meshes. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2012; **86**:717-743 (DOI: 10.1002/nme.3070).
- [25] Dhatt G., Touzot G., Lefrançois E., Une présentation de la méthode des éléments finis, Editions Lavoisier (1981)
- [26] Mousavi S. E, Sukumar N., Numerical integration of polynomials and discontinuous functions on irregular convex polygons and polyhedrons. *Computational Mechanics* 2011; **47**:535-554.
- [27] Ventura G., Gracie R., Belytschko T., Fast integration and weight function blending in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2009; **77**:1-29.
- [28] Martin A., Esnault J.B., Massin P., About the use of standard integration schemes for X-FEM in solid mechanics plasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2016, **283**:551-572, 2015.
- [29] Géniaut S., Massin P., Moës N., A stable 3D contact formulation using X-FEM. *European Journal of Computational Mechanics* 2012; **16**:259-275 (DOI :10.3166/remn).
- [30] Pierrès E., Baietto M. C. and Gravouil A., A two-scale extended finite element method for modeling 3D crack growth with interfacial contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2010; **199**:1165-1177.
- [31] Faivre M., Paul B., Golfier F., Giot R., Massin P., Colombo D., 2D coupled HM-XFEM modeling with cohesive zone model and applications to fluid driven fracture network. *Engineering Fracture Mechanics* 2016; (10.2016/j.engfracmech.2016.03.29)
- [32] Dolbow J., Sukumar N., Daux C., Moës N., Belytschko T., Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2000; **48**:1741-1760.
- [33] Duarte C. A., Reno L. G., Simone A., A high-order generalized fem for through-the-thickness branched cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007; **72**:325-351.
- [34] Simone A., Duarte C. A., Van der Giessen E., A generalized Finite Element Method for polycrystals with discontinuous grain boundaries. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2006; **67**:1122-1145.
- [35] Hansbo A., Hansbo P., A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2004; **193**:3523-3540.
- [36] Ling D., Yang Q., Cox B., An augmented finite element method for modelling arbitrary discontinuities in composite materials. *Int. Journal Fract.* 2009; **156**:53-73.
- [37] Massin P., Siavelis M., Guiton M. L. E., Moës N., Large sliding contact along branched discontinuities with X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2013; **52**:201-219.
- [38] Mittal R., Iaccarino G., Immersed boundary methods. *Annual review of fluid mechanics*, 2005: **37**:239-261.

[39] Burman E., Hansbo P., Fictitious domain finite element methods using cut elements: I. A stabilized Langrange multiplier method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010; **199**:2680–2686.

Annexe B

Un modèle hydromécanique 2D
couplé avec XFEM et un modèle de
zone cohésive. Applications à la
propagation de fractures
hydrauliques.



2D coupled HM-XFEM modeling with cohesive zone model and applications to fluid-driven fracture network



M. Faivre^{a,*}, B. Paul^{a,b,c}, F. Golfier^a, R. Giot^a, P. Massin^b, D. Colombo^c

^a Université de Lorraine, ENSG, CNRS, CREGU, GeoRessources Laboratory, F-54501 Vandoeuvre-Lès-Nancy, France

^b IMSIA, UMR EDF-CNRS-CEA-ENSTA ParisTech, Université Paris Saclay, France

^c IFP Energies Nouvelles, 92852 Rueil-Malmaison Cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 18 December 2015

Received in revised form 19 March 2016

Accepted 23 March 2016

Available online 29 March 2016

Keywords:

XFEM

Non-regularized cohesive zone model

Hydro-mechanical coupling

Fluid-driven fracture

Multiple fracturing

ABSTRACT

The present work focuses on a new numerical model for the fully coupled hydro-mechanical analysis of groundwater flows through poroelastic saturated media. In particular, the presence and eventual propagation of fluid-driven fractures is accounted for within a non-regularized cohesive zone model. In this paper, the fracture propagation is considered as a reactivation process: the fracture already exists and evolves (*i.e.* opens or closes) on a pre-defined path initially constrained. The Talon-Curnier constitutive law is considered for the fracture interfaces and its expression has been adapted to the hydro-mechanical coupling related to the fracture evolution. The fluid pressure inside the fracture is governed by the lubrication equation. The momentum-stress balance equations involving fluid flow and deformation of the solid porous matrix are derived within the framework of the generalized Biot theory. The extended finite element method (XFEM) is preferred to a standard finite element spatial discretization in order to easily handle the presence and evolution of discontinuities in the porous medium. A set of four Lagrange multipliers is introduced to prevent spurious oscillations of the numerical solution at the interface. Comparisons between numerical results and theoretical solution assess the validity of the model presented in this paper. In addition, the hydro-mechanical interactions between neighboring fractures and the effects of the permeability of the porous medium are investigated. We also demonstrate the capability of our model to handle non-planar fracture paths.

© 2016 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The permeability of rocks is widely affected by the presence of fractures as they establish preferential paths for fluid flow. Natural fractures are then a critical factor for determining the hydro-mechanical behavior of geological formations. As a consequence, leakage or detrimental spreading (of pollutants, fluids, etc.) can locally or regionally occur. In engineering studies, those aspects have to be considered. For nuclear waste storage in deep layers, implantation of storage cells modifies the *in situ* stress field and generates fractures [1], increasing significantly the hazards associated to potential radionuclides leakage. The scenario of leakage across the cavity seal through fractures or reactivated faults is then a matter of great concern. Similarly, metal deposits resulting from supergene weathering of ultramafic rocks [2], are strongly constrained by the development and extension of pre-existing fracture networks which participate to mineralization, modifying the porous structure

* Corresponding author at: ENSG (bat. E), Rue du Doyen Marcel Roubault, TSA 70605, 54518 Vandoeuvre-Lès-Nancy Cedex, France.

E-mail address: maxime.faivre@univ-lorraine.fr (M. Faivre).

Nomenclature

b	Biot's coefficient
C_L	leak-off coefficient
C	dimensionless leak-off coefficient
C_i	dimensionless leak-off coefficient for fracture (Pi) or (Ci) $i \in \{1, 2, 3\}$
E	Young's modulus
E'	plane strain modulus
G_c	cohesive energy
H	generalized Heaviside function
K_c	fracture toughness for mode I
K'	effective toughness
K^{int}	intrinsic permeability
$\mathcal{K}$	dimensionless toughness coefficient
$\mathcal{K}_i$	dimensionless toughness coefficient for fracture (Pi) or (Ci) $i \in \{1, 2, 3\}$
ls_n	normal level-set
L_r	augmented Lagrangian
$\mathbf{M}$	mass flux
$\mathbf{n}$	outward normal to the domain boundary
$\mathbf{n}_c$	outward normal to the fracture
p	pore pressure field in the porous medium
p_f	fluid pressure field inside the fracture
q_i	Lagrange multipliers (hydrodynamical part) $i \in \{1, 2\}$
Q_i	injection rates $i \in \{0, 1\}$
r	augmented ratio
t	time
$\mathbf{t}_c$	total cohesive stress
t_{c_n}	normal total cohesive stress
$\mathbf{t}'_c$	effective cohesive stress
t'_{c_n}	normal effective cohesive stress
$\mathbf{u}$	nodal displacement field
$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$	nodal displacement jump
$\mathbf{W}$	mass fluid rate
x	horizontal coordinate
y	vertical coordinate
β	augmented multiplier
γ	fluid mobility
δ	local displacement jump
δ_c	critical opening
δ_{eq}	equivalent displacement jump
δ_n	normal local displacement jump
λ	Lagrange multiplier (mechanical part)
μ	dynamic viscosity
ν	Poisson's ratio
ρ	fluid density
σ_c	critical stress
σ_0	confining stress
ϕ	eulerian porosity

and leading to perturbations in the pore pressure as well as in the *in situ* stress field. Similar processes have been reviewed by Das et al. [3] concerning magmatic intrusions and hydrothermal processes that participate to extension and segregation of trace elements [4–6]. Both are examples of natural hydraulic fractures. In the field of petroleum engineering, stimulation techniques like hydraulic fracturing are commonly used for low permeability reservoirs in order to increase their permeability and make them economically exploitable [7]. A high pressure flow is injected in the well, causing fracture opening and propagation. Both the fracture front and the fluid front propagate simultaneously [8,9], depending on the rock toughness and fluid viscosity [10,11]. To better understand and simulate all of these phenomena, developing and implementing more efficient and reliable numerical models would be beneficial.

Among all current available numerical methods, the finite element method (FEM) is one of the most convenient and is the most widely used. Modeling fracture propagation or thermo-hydro-mechanical problems have been successfully conducted with numerical models based on zero-thickness interface elements within the classical FEM (see for example [12]).

Unfortunately, FEM applied to fracture mechanics requires meshes that match the discontinuities. So its extension to fracture mechanics with fracture growth and complex 3D geometries becomes in most cases inefficient. Indeed, as the fracture propagates in space and time, it is necessary to use advanced remeshing algorithms, and to maintain the mesh structure during the update process. This implies additional computational costs with uncertain reliability on complicated geometries due to mesh fitting and associated conditioning issues for large aspect ratio elements. To overcome these drawbacks, meshless methods have been introduced. As depicted in Belytschko et al. [13], we can distinguish four main categories of meshless methods: kernel based methods (e.g. the Smooth Particle Hydrodynamics method (SPH) [14]), Moving Least Square Methods (MLS) (e.g. the Diffuse Elements Method [15]), particle-based methods (e.g. Discrete Element Methods (DEM) [16]) and partition of unity methods [17]. Kernel methods and MLS are not really handy due to their conceptual formulations. In particular, the definition of interpolation functions is not an easy task. The particle-based methods suffer from intensive calculation time because of the large amount of particles involved to perform numerical simulations. The extended finite element method (XFEM), based on the partition of unity [17] retains most advantages of meshless methods while alleviating their negative sides. However, XFEM is not considered as a meshless method in its own right given that a physical mesh is involved.

The extended finite element method has initially been implemented by Belytschko et al. [18] and Moës et al. [19]. In the literature, XFEM has been employed to model holes and inclusions [20], branched and intersected fractures [21], fracture growth with cohesive zone model (in 2D [22–24] and in 3D [25]), fracture growth with frictional contact (for small sliding [26,27] and large sliding [28]) and recently in conjunction with hydro-mechanical (HM) model [29–32]. With XFEM, the fracture representation is no longer dependent on the structural mesh. In other words, it does not need to match the element edges. On a mathematical point of view, this method allows the local incorporation of enrichment functions [18,19,33,34]. Basically, the Heaviside function is usually used to simulate a displacement jump across the fracture in a narrow band of elements. In addition, in the fracture tip area, asymptotic functions are added to represent properly the singularity. The classical finite element approximation is then enriched with additional degrees of freedom to take into account the discontinuity at each node whose support is cut (or partially cut) by the fracture. But the main issue is to incorporate the discontinuity into this approximation in the narrow band. Following the pioneer work of Osher and Sethian [35] to represent a moving interface, XFEM has been associated to the level method which localizes the discontinuity. Previously, discontinuities were represented using minimal remeshing or mapping process for kinked fracture as depicted in [18,33] respectively. But with the level-sets, remeshing is useless and it can be used with XFEM in a natural way (see [36]). For this purpose, the iso-zeros of two orthogonal signed distance functions are used to characterize the fracture geometry (the iso-zero of the normal level-set describes the fracture surface and the iso-zero of the tangential level-set is orthogonal to the fracture surface on the crack front). This method is particularly suited to simulate fracture propagation [37]. During this process, only the two level-set fields are updated on a fixed mesh at each time step. In other words, the fracture grows independently from the mesh structure. Several approaches exist to actualize level-sets to take into account propagation like solving Hamilton–Jacobi-type equations (see [38,39] for more details), or like geometrical approaches either vectorial [40,41] or scalar [42].

Classically, engineering studies involve interface elements which have been developed in mechanics with FEM by Goodman et al. [43]. Extension to the saturated fractured porous medium has been performed by Noorishad et al. [44] and more recently by Cornec et al. [45] and Carrier et al. [46]. However, as mentioned in Watanabe et al. [29], the use of interface elements may be a major disadvantage because these elements involve complex mesh structure and may lead to convergence problems for strongly coupled modelings. To overcome those drawbacks, Watanabe et al. [29] proposed a new formulation of interface elements with XFEM by means of lower-dimensional elements on pre-existing fracture paths. In the literature, HM models with XFEM have been widely considered. For example, the fluid-saturated porous medium with arbitrary discontinuities has been modeled with XFEM [30], then extended to the partially-saturated porous medium [32] both for seismic analysis and dams failure [47]. The failure initiation in thermo-elasticity has been studied in [48] and a thermo-hydro-mechanical model for the saturated porous medium with impermeable interfaces has been treated in [49]. Application to hydraulic fracture propagation has been presented in [8,9] or in [50] for concrete hydraulic fracturing. In Rethore et al. [31] a two-scale approach is considered where the fluid circulation along the fracture is simulated independently from the pore pressure field. This work has been adapted to the partially-saturated porous medium in [51] with a cohesive zone model at the vicinity of the fracture. This approach involves a porosity-dependent permeability of the fracture. These authors assume that the development of the fracture and micro-cracks in the damaged zone modifies significantly the porosity of the porous medium.

The case of multiple hydraulic fractures has recently been investigated for petroleum engineering applications. In [52], Lecampion et al. have studied the simultaneous propagation of parallel radial hydraulic fractures from an horizontal well-bore. In particular, the elastic stress interactions between the different fractures as well as the partitioning of the fluid flow into the different fractures are examined in order to explain the preferential growth of a subset of dominant fractures. In [53], an energy rate approach is adopted to compare the simultaneous propagation of parallel hydraulic fractures with various geometrical frames. The injected fluid rate and the spacing between each fracture is adjusted in order to prevent the appearance of a reduced number of dominant fractures, propagating to the detriment of the majority. Finally, the work of Wang et al. [54] associates the Mohr–Coulomb theory of plasticity to a cohesive zone model within the XFEM in order to study the propagation of hydraulic fractures in brittle as well as ductile rocks. Furthermore, this fully coupled numerical model allows the propagation of 2D curved hydraulic fractures on non-predefined paths. However, these authors consider

a phantom-node method [55] with a cohesive zone model to update the fracture path propagation, which suffers from the mesh sensitivity problem.

In the present paper, the propagation process due to injection of fluid can be assimilated as a reactivation procedure of pre-existing fractures. A convenient way to characterize this process is the introduction of a cohesive zone model. This kind of model has been introduced by Barenblatt [56] and Dugdale [57] to overcome Griffith's theory limitations due to the singularity of the stress field at the fracture tip. More recently, several HM models have been developed by means of a cohesive zone model with XFEM. Mohammadnejad et al. [58] have studied the propagation of cohesive fractures for the partially-saturated porous medium as a continuation of Rethore et al. [31]. This model has been applied to hydraulic fracture problems in [59]. The formulation of the HM-XFEM model presented in this paper is quite similar to the one developed in Mohammadnejad et al. [59] but differs on several points. Firstly, Mohammadnejad et al. [59] considered fluid leakages from the fracture to the surrounding porous medium by means of boundary conditions. On the contrary, we introduced in our model two additional degrees of freedom to take into account these leakage rates at each wall of the fracture in the same manner as Carrier et al. [46]. Secondly, in Mohammadnejad et al. [59] an explicit cohesive law has been considered to treat the fracture evolution. Ferte [60] recommends not using explicit or regularized formulations with XFEM to avoid oscillations in the contact pressure and displacements at the interface and obtain a meaningful solution, when different regimes are considered (contact, initial adhesion, damage phase with loading or unloading, etc.). Under this consideration, we have adapted to HM problems the augmented Lagrangian formulation developed in Lorentz [61] and the classical Talon-Curnier mixed-interface cohesive constitutive law [62]. Then, specific Lagrange multiplier approximation spaces have been introduced in our HM-XFEM model formulation to avoid spurious instabilities in the numerical solution. Finally, the continuity of the pore pressure field is forced at the interface as in [46] and the fluid circulation is ruled by a cubic law [63].

This article is organized as follows. In Section 2, we present the set of equations used to describe the fractured porous medium. In particular, the modified formulation of the Talon-Curnier mixed interface cohesive law is written in details. In Section 3, we introduce the finite element formulation of the HM-XFEM model. A brief description of the finite element design is illustrated and details about the spatial discretization are depicted. Finally in Section 4, we apply to our model the notorious KGD test case. Then simple test cases are presented to show the ability of our HM-XFEM model to simulate fluid circulation in 2D with a non-connected fracture network (two cases with straight interfaces and another with curved interfaces are considered).

2. Overview of the HM-XFEM model: theoretical aspects

2.1. Hypothesis and notations

We consider a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ entirely cut by a discontinuity Γ_c with respective outward normals $\mathbf{n}$ and $\mathbf{n}_c$. The domain is divided into two distinct sub-domains Ω_1 and Ω_2 , respectively the upper and lower part of Ω so that $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

We decompose the boundary of the domain Ω into $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_p \cup \Gamma_f$ where hydrodynamic and mechanical Dirichlet/Neumann boundary conditions are enforced respectively on (Γ_p, Γ_f) and (Γ_u, Γ_t) . In the same way, the fracture is split into $\Gamma_c = \Gamma_f \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Γ_1 and Γ_2 represent each wall of the fracture where fluid exchanges may occur (*i.e.* between the fracture and the surrounding porous medium) and Γ_f represents the surface where a prescribed flux along the fracture is applied. Surface cohesive efforts must be taken into account on Γ_1 and Γ_2 .

The domain and fracture boundary decomposition is summarized in Fig. 1.

The surrounding porous medium is fully saturated with a single-fluid phase and fluid flow takes place in the fracture. As a consequence, a pressure p is associated to the interstitial fluid in the porous matrix and a distinct pressure p_f is associated to the fluid in the fracture. We denote $\mathbf{u}$ the displacement field and $[\![\mathbf{u}]\!]$ the displacement jump (at the level-set interface).

We consider a point P_1 on Γ_1 and a point P_2 on Γ_2 . The outward normal to Γ_1 is denoted as $\mathbf{n}_c^1 = -\mathbf{n}_c$ and the outward normal to Γ_2 is $\mathbf{n}_c^2 = \mathbf{n}_c$. The normal displacement jump (positive or equal to zero in opening and negative in the case of interpenetration) is defined as follows:

$$[\![\mathbf{u}]\!] \cdot \mathbf{n}_c = (\mathbf{u}(P_1) - \mathbf{u}(P_2)) \cdot \mathbf{n}_c \geq 0 \quad (1)$$

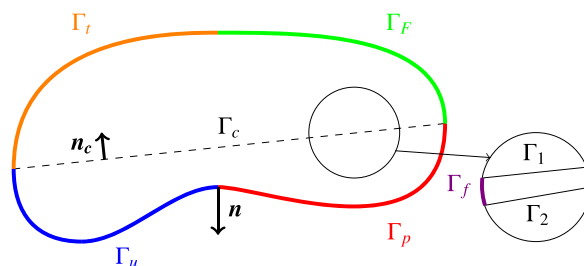


Fig. 1. Domain decomposition.

The orientation of the exchanges between the surrounding porous medium and the fracture, as well as the conventions for the displacement jump adopted at the interface are represented in Fig. 2.

In addition, infinitesimal strain and Biot effective stress are assumed.

2.2. Boundary conditions

As depicted in Fig. 1, boundary conditions existing on the external boundary of the domain Ω and on the fracture Γ_c are used to get the weak formulation of the governing equations (see Section 2.4).

On the external boundary of Ω , the following essential boundary conditions are imposed:

- $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ on Γ_u (prescribed displacements);
- $p = p_0$ on Γ_p (prescribed pore pressure).

and the natural boundary conditions are written as:

- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$ on Γ_t (prescribed traction);
- $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{M}_{\text{ext}}$ on Γ_F (constant flux toward the surrounding porous medium).

Additionally, the essential boundary conditions on the fracture Γ_c are the following:

- $\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_c = \mathbf{W}_{\text{ext}}$ on Γ_f (prescribed flux along the fracture);
- $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}_c^1 = q_1$ on Γ_1 and $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}_c^2 = q_2$ on Γ_2 (equality of fluxes between the surrounding porous medium and the fracture on both sides)
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_c^1 = -\mathbf{t}_c$ on Γ_1 (imposed surface cohesive efforts);
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_c^2 = \mathbf{t}_c$ on Γ_2 (imposed surface cohesive efforts).

An additional boundary condition is needed to guarantee the continuity of the pore pressure p with the fluid pressure p_f at the fracture walls. This hypothesis is legitimate regarding the relative thickness of the discontinuity. So we can write:

- $p = p_f$ on Γ_1 ;
- $p = p_f$ on Γ_2 .

As previously mentioned in the introduction, the pore pressure field is mathematically built to be discontinuous across the fracture (see Section 3.1.1). But considering the previous boundary condition for each fracture wall, we weakly enforce $p = p_f$. Then, only the gradient of the pore pressure field is discontinuous. Two Lagrange multiplier fields are introduced to fulfill this condition on fracture walls: q_1 and q_2 which are interpreted as potential mass interfacial fluxes between the surrounding porous medium and the fracture.

2.3. Governing equations of the HM-XFEM model

In the following the main governing-equations set is presented. In particular, we have to distinguish between the mechanical equations (related to the cohesive zone model (CZM) and the solid matrix elastic behavior) from the flow equations that describe the behavior of interstitial fluid located in the pores of the solid matrix and in the fracture.

2.3.1. Mass and momentum balance equations

The pore pressure p associated to the single-fluid phase in the porous matrix and in the fracture is governed by the mass balance equation. For the surrounding porous medium its expression is given by:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{Div}(\mathbf{M}) = 0 \quad (2)$$

where ρ is the fluid density, ϕ the eulerian porosity of the bulk and $\mathbf{M}$ the mass flux.

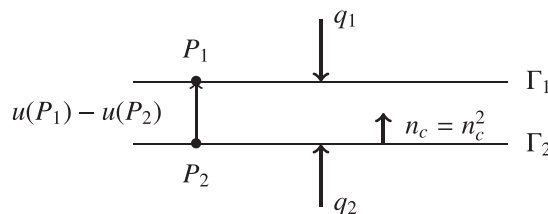


Fig. 2. Conventions adopted.

The variations of the fluid density and of the porosity are respectively of the form:

$$d\phi = (b - \phi) \left(d\varepsilon_v + \frac{dp}{K_s} \right) \quad (3)$$

and

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K_w} \quad (4)$$

where K_s is the bulk compressibility modulus for the solid phase, K_w the fluid compressibility modulus, b Biot's coefficient [64] and $\varepsilon_v = \text{Tr}(\nabla \mathbf{u}) = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ the volumetric strain.

Finally, the mass flux is given by Darcy's law (gravity is neglected):

$$\mathbf{M} = -\gamma \rho \nabla p \quad (5)$$

The velocity is expressed in terms of the fluid mobility $\gamma = K^{int} k_{lq}^{rel} / \mu$ where K^{int} represents the intrinsic permeability and μ the dynamic viscosity. Furthermore, the mobility is a function of the relative permeability of the fluid phase $k_{lq}^{rel}(S_{lq})$ (given by the *Mualem/Van-Genuchten's* law [65]) and is a function of the saturation S_{lq} . Considering a fully-saturated porous medium we set $k_{lq}^{rel}(S_{lq}) = 1$.

A similar approach is conducted for the fracture. A continuous pressure p_f is associated to the fluid flow in the fracture and mass interfacial fluxes q_1 and q_2 may occur between the fracture and the surrounding porous medium. Under these considerations an additional mass balance equation (i.e. the lubrication equation) is introduced:

$$\frac{\partial(\rho \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_c)}{\partial t} + \text{Div}(\mathbf{W}) = q_1 + q_2 \quad (6)$$

where $\mathbf{W}$ is the mass fluid rate inside the fracture. We assume that the fracture conductivity depends on the cube of its aperture so that the fluid flow inside the fracture is related to the fracture aperture by means of a cubic law [63]. Neglecting the gravity effects, we obtain:

$$\mathbf{W} = -\frac{\rho(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n}_c)^3}{12\mu} \nabla p_f \quad (7)$$

To conclude, the variation of the fluid density inside the fracture is given by:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp_f}{K_w} \quad (8)$$

2.3.2. Evolution of the fracture: introduction of a cohesive zone model

As previously mentioned in the introduction, one of the features of the HM-XFEM model is the use of a cohesive zone model along the fracture path (see Fig. 3). Under this assumption, the fracture is decomposed into three distinct zones:

- an entirely opened zone (zone 1) where the total stress on the fracture walls is only due to the fluid and is equal to $-p_f \mathbf{n}_c$ on Γ_2 and $p_f \mathbf{n}_c$ on Γ_1 ;
- a partially opened zone (zone 2 or fracture process zone FPZ) where the total stress on the fracture walls (under the assumption of the effective stress) is $\mathbf{t}_c = \mathbf{t}'_c - p_f \mathbf{n}_c$ (i.e. $-p_f < t_{cn} < -p_f + \sigma_c$ where t_{cn} is the normal total cohesive stress and σ_c the critical stress). Over a critical fracture opening δ_c the total stress is equal to the stress defined in zone 1;

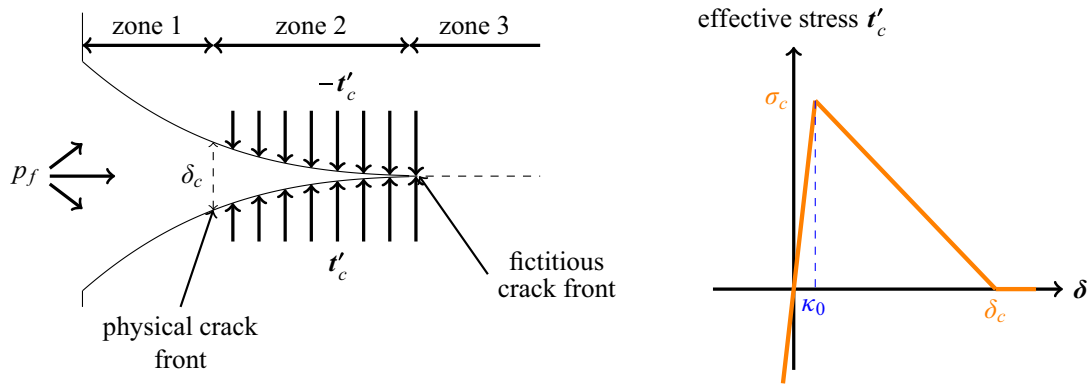


Fig. 3. Representation of a cohesive zone model under fluid circulation (left) and the chart of a regularized cohesive constitutive law (right).

- a non-damaged zone (zone 3) where the two sides of the fracture are in perfect adhesion and no interpenetration occurs. Fluid circulation is not possible in this area.

The cohesive zone models the area where micro-cracking has occurred, but micro-cracks have not yet coalesced with a single macro-crack. The boundary between the entirely opened zone and the cohesive zone thus locates the physical crack front of the observable macro-crack. On the contrary, the boundary between cohesive and adherent zone only locates the onset of micro-cracking: it is the front of the fictitious crack representing the material debonding ahead of the physical crack. In a purposeful misuse of language, the *fictitious crack front* is simply referred to as *crack front* from here onward.

One can notice that the fracture mentioned above is entirely invaded by the fluid. In case of dry fracture (not considered in this model), the stress repartition would be unchanged. Only the value of the cohesive stress is modified in zone 2 since the total cohesive stress is equal to the effective cohesive stress.

In this paper, the cohesive zone model relies on the principle of minimization of the total potential energy of the system:

$$E_p(\mathbf{u}, \delta) = \Phi(\mathbf{u}) + \Psi(\delta) - W_{ext}(\mathbf{u}) \quad (9)$$

with:

- $\Psi(\delta) = \int_{\Gamma_c} \Pi(\delta) d\Gamma_c$ the surface energy related to the fracture opening and $\Pi(\delta)$ the surface cohesive energy density;
- $\Phi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega$ the elastic energy of the system and $\phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ the bulk strain energy density;
- $W_{ext}(\mathbf{u})$ the work of external forces to the domain Ω (i.e. traction forces). The work of gravity forces is neglected.

The total potential energy is a function of the displacement field $\mathbf{u}$ and of the fracture aperture $\delta = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$. The solution of the problem consists in minimizing the total potential energy of the system:

$$\min_{\mathbf{u}, \delta} (E_p(\mathbf{u}, \delta)) \quad (10)$$

In fact, two specific formulations (based on the previous energetic approach) should be taken under consideration following the recent works of Laverne [66] and Debruyne et al. [67]. The first formulation is a regularized cohesive constitutive law. The effective stress is then related to the fracture aperture via a simple explicit relation:

$$\mathbf{t}'_c = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta} \quad (11)$$

where Π is the surface cohesive energy density.

The use of this explicit formulation requires the introduction of a penalization parameter which corresponds to an initial fracture opening κ_0 at the critical stress σ_c (see Fig. 3 (right)). While $\|\delta\| \leq \kappa_0$, the energy dissipation is null. This allows a small interpenetration associated to small debonding when the lips should be closed and adherent, as well as a small initial aperture with small debonding before damage occurs at the interface. The initial adherence is thus not verified.

As mentioned in the introduction, Ferte [60] recommends not using explicit or regularized formulations with XFEM. The inclusion debonding test case conducted by Ferte [60] shows different situations depending on the value of the penalization parameter. If the penalization parameter is too small, the fracture aperture is far away from the reference solution obtained in FEM with conforming meshes: we get non physical opening or interpenetration. On the contrary, if the value of this parameter is too high, spurious oscillations of the traction in the adherent zone appear. Such oscillations may lead to a mis-evaluation of the regime (adherence or debonding). They are linked to the fact that the discretization space for traction is too rich in comparison with that of the displacement. As a consequence, the numerical LBB condition (or commonly denominated as the *inf-sup* condition in the literature) fulfillment [17] is no longer realized. This condition ensures the uniqueness and the stability of the numerical solution regarding the appropriate design of each Lagrange multiplier approximation space (see Section 3).

However (see Section 3) the HM-XFEM finite element must satisfy this condition. To reach this goal, an alternative solution is to consider a non-regularized cohesive zone model that will satisfy the LBB condition [68]. This model is based on a specific set of active constraints on the Lagrange multipliers and on the resolution of a saddle-point problem [61].

Unlike the regularized formulation, this one involves a formulation with two additional fields. Following the previous energetic formulation and the argumentation of Lorentz [61], the field δ is now considered as a new unknown in the mathematical formulation (i.e. due to the dualisation of the equality constraint $\delta = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$). The solution of the mechanical problem is now:

$$\min_{\mathbf{u}, \delta, \lambda} (E_p(\mathbf{u}, \delta)) \quad (12)$$

A solution $(\mathbf{u}, \delta)$ of Eq. (12) is obtained from the saddle point $(\mathbf{u}, \delta, \lambda)$ of an augmented Lagrangian L_r (see Section 2.4.2). The field λ which appears in the Lagrangian is related to the enforcement of the constraint $\delta = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ in the optimization problem (12). Unlike the field δ , λ is an additional degree of freedom (see Section 3.1.2).

2.4. Weak formulation of the HM-XFEM model

2.4.1. Function spaces

Before specifying the weak formulations of the previous constitutive equations, we define the test function spaces of the displacement field $\mathbf{u}^*$, the pore pressure field p^* , the fluid pressure field p_f^* , and the Lagrange multiplier fields (λ^* , q_1^* and q_2^*). We refer the reader to [69,70] for more informations about the establishment of these function spaces.

The sets of kinematically admissible displacements and pore pressure on Ω are respectively:

$$U_0 = \{\mathbf{u}^* \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) / \mathbf{u}^* \text{ discontinuous across } \Gamma_c \text{ and } \mathbf{u}^* = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$$

$$P_0 = \{p^* \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) / \nabla p^* \text{ discontinuous across } \Gamma_c \text{ and } p^* = 0 \text{ on } \Gamma_p\}$$

and the spaces of each Lagrange multiplier field are such as:

$$Q_1 = \{q_1^* \in H^{-1/2}(\Gamma_1) / q_1^* \in \Gamma_1\}$$

$$Q_2 = \{q_2^* \in H^{-1/2}(\Gamma_2) / q_2^* \in \Gamma_2\}$$

$$P_0^f = \{p_f^* \in H^{-1/2}(\Gamma_c) / p_f^* \geq 0 \text{ on } \Gamma_c\}$$

$$A_0 = \{\lambda^* \in H^{-1/2}(\Gamma_c) / \lambda^* \geq 0 \text{ on } \Gamma_c\}$$

where $H^1(\Omega_1)$ and $H^1(\Omega_2)$ are the Sobolev spaces of integrable square functions whose first order partial derivatives are integrated respectively on Ω_1 and Ω_2 . The nodal displacement jump $[[\mathbf{u}]]$ is defined in $H^{1/2}(\Gamma_c)$, the trace space of $H^1(\Omega)$ restricted to Γ_c . Its dual space is $H^{-1/2}(\Gamma_c)$. A brief justification of the Lagrange multiplier spaces construction is given in Section 3.

According to the argumentation of Nistor et al. [28], each element in A_0 corresponds to a tensile stress, which suppose the fracture is opened. In the same way, for each element in P_0^f a positive fluid pressure through the fracture generates a flow.

2.4.2. Weak formulation of the mechanical part

A common way to solve Eq. (12) is based on the introduction of the augmented lagrangian L_r as explained in Lorentz [61].

$$L_r(\mathbf{u}, \delta, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} E_p(\mathbf{u}, \delta) + \int_{\Gamma_c} \lambda \cdot ([[\mathbf{u}]] - \delta) d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} \frac{r}{2} ([[\mathbf{u}]] - \delta)^2 d\Gamma_c \quad (13)$$

To get the first optimality condition, we consider the first partial derivative of L_r with respect to δ . Thus $\forall \delta^*$:

$$\int_{\Gamma_c} [\mathbf{t}_c - \lambda - r([[\mathbf{u}]] - \delta)] \cdot \delta^* d\Gamma_c = 0 \quad (14)$$

Note that Eq. (14) involves the total cohesive stress. However this field is only defined locally, because the cohesive constitutive law is integrated at the level of the Gauss points network at the interface. To do that, the field δ is discretized as a constant by collocation at each Gauss point of the discontinuity. Under the consideration of Eq. (14), the local expression of the total cohesive stress $\mathbf{t}_c$ is given by Eq. (15) and follows the classical Talon-Curnier [62] constitutive law:

$$\mathbf{t}_c(\delta, \kappa) = \lambda + r([[\mathbf{u}]] - \delta) \quad (15)$$

Considering a fully-saturated porous medium and fluid circulation inside the fracture, the contribution of the fluid pressure in the fracture has to be taken into account in the formulation of the cohesive stress. Particularly, under the assumption of the effective stress ($\mathbf{t}_c = \mathbf{t}'_c - p_f \mathbf{n}_c$), the relationship that must be satisfied at each Gauss point is now:

$$\mathbf{t}'_c(\delta, \kappa) = \lambda + r([[\mathbf{u}]] - \delta) + p_f \mathbf{n}_c \quad (16)$$

Graphically, the solution fits the intersection of the linear function $f : \delta \rightarrow \lambda + r([[\mathbf{u}]] - \delta) + p_f \mathbf{n}_c$ with the chart of the effective cohesive stress $\mathbf{t}'_c$ (see Fig. 4). The main advantage of introducing the augmented term $\int_{\Gamma_c} \frac{r}{2} ([[\mathbf{u}]] - \delta)^2 d\Gamma_c$ in Eq. (13) is to ensure the uniqueness of the solution if the parameter r is high enough. This parameter is interpreted as the slope of the linear function f . The field δ is locally written as a function of the augmented multiplier $\beta = \lambda + r[[\mathbf{u}]] + p_f \mathbf{n}_c$. As a consequence, δ is no longer an unknown of the coupled problem.

Before specifying the weak formulation of the mechanical part related to this cohesive constitutive law, it is appropriate to specify the expression of the field δ by means of the definition of the subgradient $\partial \Pi(\delta)$ (for more details see [61]).

According to Lorentz [61], 5 key points have to be kept in mind when using the Talon-Curnier constitutive law:

- the non-interpenetrability of the fracture walls;
- a perfect initial adhesion;
- a coupling between both failure modes I and II;
- when the fracture is opened, the displacement reaches a critical value δ_c ;
- the failure irreversibility.

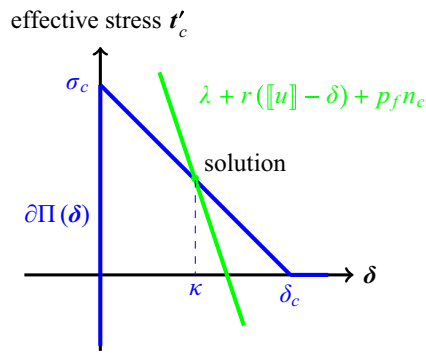


Fig. 4. Uniqueness of the solution (based on Lorentz [61]).

To fulfill the third condition, we consider the equivalent displacement jump defined as:

$$\delta_{eq} = \sqrt{\delta \cdot \delta} \quad (17)$$

To ensure the failure irreversibility, the variable κ is introduced to record the highest norm that the displacement jump δ reaches during the failure process:

$$\kappa(t) = \sup_{t' < t} \delta_{eq}(t') \quad (18)$$

Then the contact condition is ensured by the addition of a function I in the expression of the surface cohesive energy density $\Pi(\delta)$ to force a positive value of the normal displacement jump. The modified surface cohesive energy density is of the form:

$$\Pi(\delta, \kappa) = I(\delta \cdot \mathbf{n}_c) + \psi(\max(\delta_{eq}, \kappa)) \quad (19)$$

$$\text{with } I(\delta \cdot \mathbf{n}_c) = \begin{cases} 0 & \text{if } \delta \cdot \mathbf{n}_c \geq 0 \\ +\infty & \text{if } \delta \cdot \mathbf{n}_c < 0 \end{cases} \text{ and } \psi(\delta_{eq}) = \begin{cases} G_c \frac{\delta_{eq}}{\delta_c} \left(2 - \frac{\delta_{eq}}{\delta_c}\right) & \text{if } \delta_{eq} \leq \delta_c \\ G_c & \text{if } \delta_{eq} > \delta_c \end{cases}$$

$G_c = \frac{1}{2} \sigma_c \delta_c$ is the cohesive energy, σ_c the critical stress and δ_c the critical opening. The function ψ is introduced in Eq. (19) to ensure the perfect initial adhesion until it reaches the critical stress σ_c (i.e. $\psi'(0) = \sigma_c$). In fact, this function characterizes the energy dissipation of the system from the damage process initiation to the failure.

Finally, we define the following notations $\langle \beta \rangle = \langle \beta_n \rangle \mathbf{n}_c + \beta_s$ and $\|\beta\| = \sqrt{\langle \beta \rangle \cdot \langle \beta \rangle}$. The Macauley brackets $\langle \cdot \rangle$ denotes the positive part of β . This operator takes into account the non-interpenetrability of both fracture sides for the displacement jump computation.

Thus considering the formulation of [61] and the modified expression of the augmented multiplier β (which takes into account the fluid pressure contribution) the displacement jump δ is expressed as (see Fig. 5 for the regimes listed below):

- in the case of perfect adhesion ($\delta = \mathbf{0}, \kappa = 0$) :

$$\begin{aligned} \partial \Pi(\delta) &= \{ \mathbf{t}'_c \in \mathbb{R}^2 / \|\mathbf{t}'_c\| \leq \sigma_c \} \\ \delta &= \mathbf{0} \quad \text{if } \|\beta\| \leq \sigma_c \text{ with } \beta = \lambda + r[\mathbf{u}] + p_f \mathbf{n}_c \end{aligned} \quad (20)$$

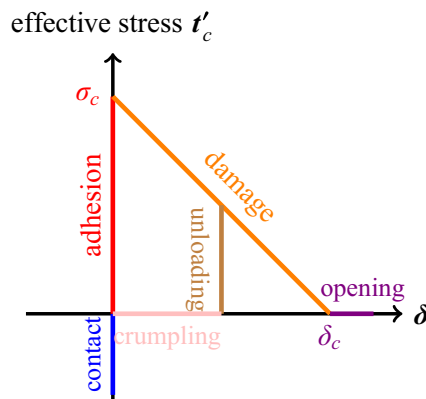


Fig. 5. Regimes of the Talon-Curnier constitutive law (based on Lorentz [61]).

- during the damage phase $\delta_{eq} > \kappa$:

$$\partial\Pi(\delta) = \left\{ t'_{c_n} \mathbf{n}_c + \psi'(\delta_{eq}) \frac{\delta}{\delta_{eq}} / t'_{c_n} \leq 0, \delta_n \geq 0, t'_{c_n} \delta_n = 0 \right\} \quad (21)$$

$$\delta = \frac{\langle \beta \rangle}{\psi'(\delta_{eq}) + r\delta_{eq}} \delta_{eq} \quad \text{if } \|\beta\| > r\kappa + \psi'(\delta_{eq})$$

with δ_{eq} solution of $\psi'(\delta_{eq}) + r\delta_{eq} = \sqrt{\|\beta_s\|^2 + \langle \beta_n \rangle^2}$ and $\beta = \lambda + r[\![\mathbf{u}]\!] + p_f \mathbf{n}_c$

- in the case of unloading $\delta_{eq} = \kappa$:

$$\partial\Pi(\delta) = \left\{ t'_{c_n} \mathbf{n}_c + \alpha \delta; 0 \leq \alpha \leq \frac{\psi'(\kappa)}{\kappa}, t'_{c_n} \leq 0, \delta_n \geq 0, t'_{c_n} \delta_n = 0 \right\} \quad (22)$$

$$\delta = \frac{\langle \beta \rangle}{\|\beta\|} \kappa \quad \text{if } r\kappa < \|\beta\| < r\kappa + \psi'(\kappa)$$

with $\beta = \lambda + r[\![\mathbf{u}]\!] + p_f \mathbf{n}_c$

- in the case of crumpling (i.e. sliding after unloading) $\delta_{eq} < \kappa$:

$$\partial\Pi(\delta) = \{ t'_{c_n} \mathbf{n}_c / t'_{c_n} \leq 0, \delta_n \geq 0, t'_{c_n} \delta_n = 0 \} \quad (23)$$

$$\delta = \frac{\langle \beta \rangle}{r} \quad \text{if } \|\beta\| \leq r\kappa \text{ with } \beta = \lambda + r[\![\mathbf{u}]\!] + p_f \mathbf{n}_c$$

The weak formulation of the mechanical part is finally given by the last two optimality conditions:

- equilibrium equation:

$$\forall (\lambda^*, \mathbf{u}^*) \in A_0 \times U_0 \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega + \int_{\Gamma_c} [\lambda + r([\![\mathbf{u}]\!] - \delta(\beta))] \cdot [\![\mathbf{u}^*]\!] d\Gamma_c - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma_t = 0 \quad (24)$$

- interface equation:

$$\forall \lambda^* \in A_0 \quad \int_{\Gamma_c} ([\![\mathbf{u}]\!] - \delta(\beta)) \cdot \lambda^* d\Gamma_c = 0 \quad (25)$$

2.4.3. Weak formulation of the hydrodynamical part

The mass balance equation for the surrounding porous medium and the fracture involves time as a physical unknown. Thus, both equations are discretized in time by means of a θ -scheme. A variable indexed by + is expressed at the current time-step whereas a variable indexed by – is expressed at the previous time-step, and $\Delta t = t^+ - t^-$.

According to the principle of Virtual Work, the weak formulation of the mass balance equation related to the surrounding porous medium is of the form:

$$\begin{aligned} \forall p^* \in P_0 \quad & - \int_{\Omega} \frac{m_w^+ - m_w^-}{\Delta t} p^* d\Omega + \theta \int_{\Omega} \mathbf{M}^+ \cdot \nabla p^* d\Omega + (1 - \theta) \int_{\Omega} \mathbf{M}^- \cdot \nabla p^* d\Omega \\ & = \theta \int_{\Gamma_f} M_{ext}^+ p^* d\Gamma_f + (1 - \theta) \int_{\Gamma_f} M_{ext}^- p^* d\Gamma_f - \theta \int_{\Gamma_1} q_1^+ p^* d\Gamma_1 \\ & - (1 - \theta) \int_{\Gamma_1} q_1^- p^* d\Gamma_1 - \theta \int_{\Gamma_2} q_2^+ p^* d\Gamma_2 - (1 - \theta) \int_{\Gamma_2} q_2^- p^* d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (26)$$

with $m_w^+ - m_w^- = \rho^+ \varphi^+ (1 + \varepsilon_v^+) - \rho^- \varphi^- (1 + \varepsilon_v^-)$

In the same manner, we set for the fracture:

$$\begin{aligned} \forall p_f^* \in P_0^f \quad & - \int_{\Gamma_c} \frac{w^+ - w^-}{\Delta t} p_f^* d\Gamma_c + \theta \int_{\Gamma_c} \mathbf{W}^+ \cdot \nabla p_f^* d\Gamma_c + (1 - \theta) \int_{\Gamma_c} \mathbf{W}^- \cdot \nabla p_f^* d\Gamma_c \\ & = \theta \int_{\Gamma_f} W_{ext}^+ p_f^* d\Gamma_f + (1 - \theta) \int_{\Gamma_f} W_{ext}^- p_f^* d\Gamma_f + \theta \int_{\Gamma_1} q_1^+ p_f^* d\Gamma_1 \\ & + (1 - \theta) \int_{\Gamma_1} q_1^- p_f^* d\Gamma_1 + \theta \int_{\Gamma_2} q_2^+ p_f^* d\Gamma_2 + (1 - \theta) \int_{\Gamma_2} q_2^- p_f^* d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (27)$$

with $w^+ - w^- = \rho^+ [\![\mathbf{u}]\!]^+ \cdot \mathbf{n}_c - \rho^- [\![\mathbf{u}]\!]^- \cdot \mathbf{n}_c$

To finish, the weak formulation of the pressure continuity along each fracture side Γ_1 and Γ_2 respectively is given by:

$$\forall q_1^* \in Q_1 \quad \int_{\Gamma_1} (p - p_f) q_1^* d\Gamma_1 = 0 \quad (28)$$

$$\forall q_2^* \in Q_2 \quad \int_{\Gamma_2} (p - p_f) q_2^* d\Gamma_2 = 0 \quad (29)$$

As the fracture acts like a preferential channel for the fluid circulation, a strong coupling of the mechanical behavior with the mass transfer occurs between the surrounding porous medium and the fluid in the fracture. At the process zone, where fracturing occurs, the fluid pressure influences the cohesive stress arise which is transferred to the bulk (see Eq. (24)). In the mean time, as the fluid circulates inside the fracture (*i.e.* the second and third terms in the left-hand side of Eq. (27)), mass transfers may occur from the fracture to the bulk (*i.e.* the fourth last terms in the right-hand side of Eqs. (27) and (26) respectively). These mass transfers due to leakage, are then governed by Darcy's law in the bulk (*i.e.* the second and third terms in the left-hand side of Eq. (26)). On the counterpart, the pressure continuity conditions (Eqs. (28) and (29)) on each wall of the fracture participate to the variation of the bulk porosity (see Eq. (3) and first left-hand side term of Eq. (26)).

3. Finite element formulation: discretization with the XFEM-method

3.1. Fields involved

3.1.1. Bulk

Because of the presence of the fracture, all the fields related to the surrounding porous medium have to be discontinuous on both sides of the fracture. Firstly, the discontinuity of the approximation of the displacement field is considered as a strong discontinuity following [71]. In this sense, the primary field and its gradient (*i.e.* strain field) are discontinuous in order to take into account the displacement jump at the interface. Secondly, unlike the displacement field, the pore pressure field must be continuous across the fracture considering the continuity condition $p = p_f$ on Γ_1 and Γ_2 . Thus, the approximation of the pore pressure must be able to take into account a weak discontinuity: the pore pressure field is continuous along the fracture, but its normal gradient is discontinuous. It is for example possible to obtain a discontinuity of the fluid pore pressure normal gradient in case of fluid leakage from the fracture to both sides of the porous medium. It is important to note that the XFEM enrichment authorizes a strong discontinuity for the pore pressure field across the fracture, but that pore pressure continuity is weakly enforced at each fracture lip with Lagrange multipliers. This artefact prevents us from using weakly discontinuous shape functions for which a separate analysis has been performed by N'Deffo et al. ("On the construction of approximation spaces to model strong discontinuities and cracks with linear and quadratic elements", in preparation) showing that for quadratic elements this choice has the best numerical properties in terms of conditioning issues and precision amongst several other ones available in the literature [20,72,73].

The approximation of the displacement field and of the pore pressure field are of the form:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i \varphi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j \varphi_j(\mathbf{x}) H(\ln(\mathbf{x})) \quad (30)$$

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I_s} c_i \psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in J_s} d_j \psi_j(\mathbf{x}) H(\ln(\mathbf{x})) \quad (31)$$

For both of them, the standard finite element approximation is enriched at the vicinity of the fracture by means of an enrichment function associated to additional degrees of freedom. I is the subset of nodes whose support contains the point $\mathbf{x}$ and I_s is the restriction of I to the vertex nodes subset. In the same way, $J \subset I$ is the subset of nodes whose support is entirely cut by the fracture. $J_s \subset I_s$ is the restriction to the vertex nodes subset.

In Eq. (30), the approximation of the displacement field is divided into two parts:

- the standard part which is a linear combination of the degree of freedom $\mathbf{a}_i$ at node $i \in I$ with the quadratic shape function $\varphi_i(\mathbf{x})$ of node i ;
- and the enriched part which is a linear combination of the enriched degree of freedom $\mathbf{b}_j$ at node $j \in J$ with the quadratic shape function $\varphi_j(\mathbf{x})$ of node j weighted by the enrichment function H .

In Eq. (31), the approximation of the pore pressure is divided into two parts:

- the standard part which is a linear combination of the degree of freedom c_i at node $i \in I_s$ with the linear shape function $\psi_i(\mathbf{x})$ of node i ;
- and the enriched part which is a linear combination of the enriched degree of freedom d_j at node $j \in J_s$ with the linear shape function $\psi_j(\mathbf{x})$ of node j weighted by the enrichment function H .

As mentioned in [46] and demonstrated by Ern et al. [74], a quadratic interpolation for the displacement field and a linear interpolation for the pore pressure field is adopted to reduce oscillations of the solution if highly transient boundary conditions are prescribed. As a consequence, the classical $\mathbf{a}_i$ and the enriched $\mathbf{b}_i$ degrees of freedom related to the displacement field are carried by the vertex and middle nodes of the HM-XFEM elements. This differs from the classical c_i and the enriched d_i degrees of freedom related to the pore pressure field which are only carried by the vertex nodes of the HM-XFEM elements.

The set of nodes J and J_s are enriched with the generalized Heaviside function defined as:

$$H(\ln(\mathbf{x})) = \begin{cases} -1 & \text{if } \ln(\mathbf{x}) < 0 \\ +1 & \text{if } \ln(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases}$$

We have to make the distinction between two kinds of elements. Firstly, we have to distinguish the elements entirely cut by the fracture. All the nodes of these elements are enriched by the enrichment function. According to the argumentation of Chessa et al. [75], this kind of element is able to reproduce exactly the enrichment function and is able to *a fortiori* catch the discontinuity of both discontinuous fields. We call them the reproducing elements. In this case the partition of unity [17] is completely realized. Secondly, all the elements adjacent to the reproducing elements have at least one non-enriched node. We call them the blending elements. Chessa et al. [75] have shown that the blending elements do not realize the partition of unity because they are not able to reproduce exactly the enrichment function at each node. Moreover, unwanted enriched terms are not compensated by terms from the standard approximation part (see [76]). For that reason, the convergence rate of the numerical solution may be highly degraded. For the general case, specific methods have been designed to overcome these drawbacks like the enrichment functions correction. Application to the partially-saturated porous medium has been successfully conducted by Mohammadnejad et al. in [32]. Following the demonstration of Fries [76], we choose the generalized Heaviside function because this function overcomes naturally the problems aforementioned. To insure optimal convergence rates of the numerical solution and the coexistence between blending elements and standard elements (see Fig. 6), we reuse the convenient method proposed by Geniaut [77] to eliminate the unwanted enriched degrees of freedom in the blending elements by setting them to zero. Briefly, we set the corresponding enriched second-member terms to zero in the matricial system of equations to be solved and set the corresponding diagonal enriched stiffness matrix terms to unity. The same procedure is conducted for the Lagrange multiplier degrees of freedom (see Section 3.1.2) for the non-enriched nodes of the blending elements.

The iso-zero of the normal level-set lsn (solid red line in Fig. 6), which is a signed distance function, represents the fracture geometry. To enrich properly a node whose support is entirely cut by the fracture (for the reproducing and blending elements), the sign of the normal level-set function gives the sign of the generalized Heaviside function. In the literature, the normal level-set field is commonly interpolated by means of linear piecewise shape functions. In the HM-XFEM model described in this paper, the fracture surface can be represented by means of quadratic shape functions. Thus, the normal level-set field is interpolated from the nodal value of the signed distance function lsn by means of either the standard quadratic shape functions $F = \varphi$ (i.e. curved interface used in Section 4.2.4) [78] or the standard linear shape functions $F = \psi$ (i.e. straight interface used from Sections 4.1.3–4.2.3):

$$lsn(x) = \sum_{i \in I} lsn_i F_i(x) \quad (32)$$

3.1.2. Along the fracture

At the interface, the field formulation is quite different from the one defined for the surrounding porous medium. All the fields (i.e. p_f , q_1 , q_2 and λ) involved at the level of the fracture are continuous, because both sides of the fracture represent a single line (referred to as the contact surface in this paper). Following the formulation of Geniaut et al. [25], the contact surface is defined by adding virtual 1D quadratic elements (i.e. three-node segments) along the fracture path (defined by the normal level-set lsn). To be more precise, a set of intersection points between the fracture and the extended elements is considered. In our case and based on these authors work, a set of four Lagrange multiplier degrees of freedom is added to the vertex node belonging to the edge of the parent element intersected by the fracture. Nevertheless, this interpolation space is submitted to restriction (see below).

We consider the approximation of the continuous fields defined along the fracture path. So that the approximation of the fluid pressure field is of the form:

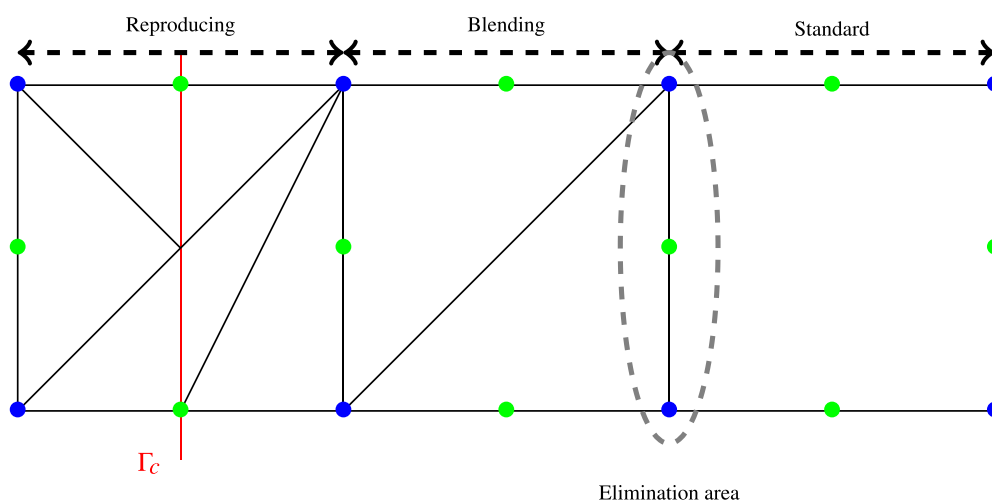


Fig. 6. Sub-division for integration and coexistence between HM-XFEM and standard HM elements.

$$p_f(x) = \sum_{i \in K} (p_f)_i \psi_i(x) \quad (33)$$

and the approximation of the Lagrange multiplier fields are given by:

$$q_1(x) = \sum_{i \in K} (q_1)_i \psi_i(x) \quad (34)$$

$$q_2(x) = \sum_{i \in K} (q_2)_i \psi_i(x) \quad (35)$$

$$\lambda(x) = \sum_{i \in K} \lambda_i \psi_i(x) \quad (36)$$

where K is the set of vertex nodes from the reproducing elements.

Mathematically, the fields q_1 , q_2 and λ result from the dualisation of two equality constraints, which enforce respectively the continuity of the fluid pressure across the upper and the lower fracture lips on the one side and the equality between the nodal displacement jump $[[\mathbf{u}]]$ and the local displacement jump δ on the other side. They naturally correspond to Lagrange multipliers. As mentioned in [70,28,60], a great attention has to be paid to build these three Lagrange multiplier spaces in order to satisfy the LBB condition and ensure the uniqueness of the solution [17]. Otherwise, oscillations of the numerical solution may appear. For the sake of simplicity, we choose for the fluid pressure the same approximation space as for the three other Lagrange multipliers because this field is only defined at the interface and is involved in the local estimate of the cohesive constitutive law.

A strategy to avoid oscillations of the numerical solution is to reduce locally the dimension of the Lagrange multiplier approximation spaces. This idea has been developed to deal with boundary conditions within the XFEM in Moës et al. [70] and then improved by Bechet et al. [69] and Ferte et al. [60]. A specific formulation, based on the one of Moës et al. [70], has been adapted for the frictional-contact problem by Geniaut et al. [25]. Therefore, the Lagrange multiplier space dimension has to be high enough to ensure a good convergence rate of the numerical solution, but at the same time it has to remain small enough compared to the one of the displacement field in order to avoid numerical oscillations. In practice, the method relies on the concept of a vital edge selection amongst the edges intersected by the normal level-set. For each intersected edge e , the connectivity of the node i above and of the node j below the fracture is considered. Here is the idea for the selection algorithm: if the longest edge of a group can be removed without isolating the nodes i or j , this edge is considered as a non-vital edge. Hence, equality relationships between Lagrange multipliers are imposed at each node of a group of vital edges. For isolated vital edges, equality relationships are prescribed in between the vertex nodes.

An example with our 4 Lagrange multiplier formulation is presented in Fig. 7. For the sake of simplicity, only the vertex nodes of the bilinear triangular elements are represented in Fig. 7. The set of vital edges is represented with solid blue lines and the one for the non-vital edge set with dashed lines. The Lagrange multipliers involved in equality relationships are specified with $\Lambda_i = \begin{bmatrix} (p_f)_i & (q_1)_i \\ (q_2)_i & \lambda_i \end{bmatrix}$ where $i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3.2. Design of a HM-XFEM element

To conclude the finite element formulation, the representation of an HM-XFEM finite element is given Fig. 8.

Quadrangular as well as triangular quadratic meshes are available for this HM-XFEM model. It is essential to note that only the blending and reproducing elements are HM-XFEM elements, the remaining elements being classical HM elements. Moreover, the contact surfaces (red dashed line for straight interface and orange dashed line for curved interface) aforementioned are virtually added along the fracture path to perform the numerical integration of the surface integrals from Eqs. (24)–(29). They are represented by three-node segments. The vertex nodes correspond to the intersections between the interface and the edges of the parent element. Then, the middle node of the segment is determined in the reference space as the intersection between the perpendicular bisector of the segment and the iso-zero of the normal level-set, in order to

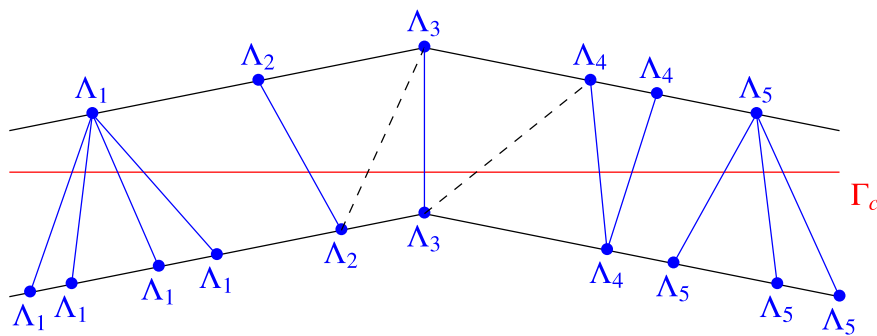


Fig. 7. Equality relationships between Lagrange multiplier degrees of freedom (from [25]).

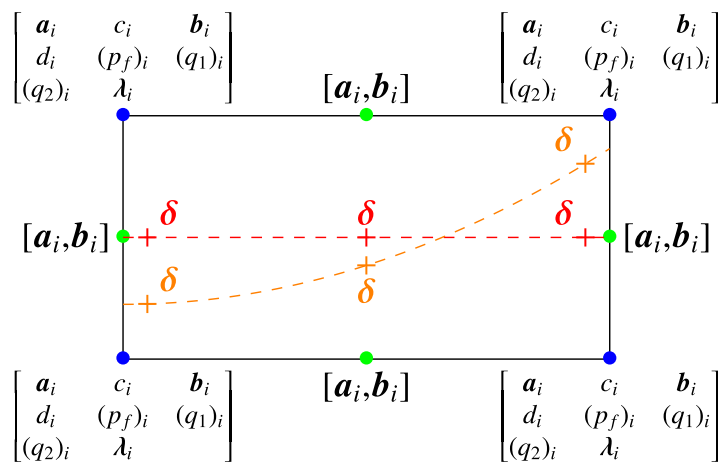


Fig. 8. Representation of a quadrangular element.

take into account the eventual curvature of the interface. Finally, the positions of the Gauss points on the interface are interpolated from the coordinates of this three-node segment. We specify in Fig. 8 with the red crosses (respectively orange crosses) the Gauss point network for a single straight contact surface (respectively curved contact surface), where the local displacement field δ is computed. Then on both sides of the fracture, each reproducing and blending element is virtually divided into triangular integration sub-cells [19] to perform the numerical integration of the bulk integrals in Eqs. (24) and (26) (see Fig. 6). In the case of curved interfaces, the sub-division process is not trivial and needs specific treatments to perform the integration in each sub-cells (see Paul et al., “An integration technique for 3D curved cracks and branching discontinuities within the eXtended Finite Element Method”, in preparation).

4. Validation and numerical results

In the following, the HM-XFEM model is applied firstly to the well-known plane-strain KGD benchmark [10,11] classically used in petroleum engineering. We want to validate the influence of fluid injection inside a pre-existing fracture that propagates in time and space under different regimes (see Section 4.1). Carrier et al. [46] have already compared the analytical solutions developed by [79,80] with their numerical simulations performed with a FEM interface element model. Then, some numerical test-cases are presented to illustrate the capabilities of the HM-XFEM model, including the example of a multi-fractured porous medium (with non-connected fractures) submitted to fluid injection in each one of them (see Section 4.2). With this test case we aim at appreciating numerically the influence of the permeability of the surrounding porous medium on the evolution of the different fractures and at evaluating the competition that takes place between nearby fractures. In this paper, all the simulations have been conducted with the finite element software Code_Aster developed by EDF R&D [81].

4.1. Validation of the HM-XFEM model on the KGD benchmark

In this section, all the simulations are performed with the exact same data from Carrier et al. [46] and our numerical results are compared to the analytical solutions of Bunger et al. [79] and Adachi et al. [80].

4.1.1. Geometry and boundary conditions

We consider an infinite porous medium of 60 m high and 45 m wide. The medium is entirely cut by a pre-existing discontinuity. The geometry of the discontinuity is represented by means of a single level-set (*i.e.* the normal level-set). As previously mentioned, there is no need to use a tangent level-set to take into account the fracture tip behavior due to the pre-existing propagation path assumption and the cohesive zone model features. This normal level-set represents the propagation path of the fracture which coincides with the x -axis of the coordinate system. At point (0, 0), an incompressible fluid is injected with a constant rate Q_0 . The fluid propagates along the fracture path. A compressive regional-field σ_0 is applied at the top and the bottom of the medium to incorporate the *in situ* stress state field. As depicted in Fig. 9, the pore pressure is set to zero at the top, the bottom and the right side of the medium (solid blue lines). The displacements are set to zero in the x -direction at the left side. Moreover, we consider a fully-saturated porous medium with a wetting fluid. Initially the fluid pressure and the interstitial pore pressure are both set to zero. Considering the symmetry of the problem, we model just an half of the porous medium geometry.

The material properties of the surrounding porous medium and the features of the cohesive zone are summarized in Table 1.

Compared to Carrier et al. [46], we use a regular mesh composed of the quadrangular elements referenced in Section 3.2. No specific refinement has been carried out at the vicinity of the fracture path propagation, demonstrating the mesh independence of the HM-XFEM model. Moreover, the interface is not conformed with the element edges. Nevertheless, the mesh

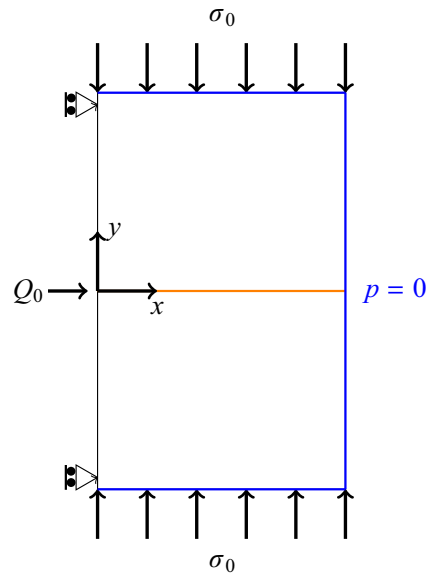


Fig. 9. Geometry and boundary conditions.

Table 1

Parameters for the bulk and the cohesive zone (from [46]).

Viscosity	μ	Depends on the regime
Liquid compressibility	$\frac{1}{K_w}$	0
Density	ρ	1 kg m ⁻³
Young's modulus	E	17 GPa
Poisson's ratio	ν	0.2
Biot coefficient	b	0.75
Permeability	K^{int}	Depends on the regime
Critical stress	σ_c	1.25 MPa
Cohesive energy	G_c	120 Pa m
Augmented ratio	r	100 Pa m ⁻¹
Porosity	ϕ	0.2
Constant injection rate	Q_0	0.0005 m ² s ⁻¹

used is fine enough to ensure the convergence and the precision of the numerical solution (120×121 elements). We present here the results for the near storage-toughness dominated regime and the storage-viscosity dominated regime.

4.1.2. Propagation regimes features

As depicted in [79], two parallel mechanisms are involved during fluid propagation:

- the energy dissipation associated either with surface creation in the bulk (*i.e.* fracturing) or with the fluid (*i.e.* viscous effects);
- storage of fluid either in the fracture (for short time) or in the matrix (for large time).

The characteristic leakage times are τ_1 for the viscosity dominated regime and τ_2 for the toughness dominated regime:

$$\tau_1 = \frac{12\mu Q_0^3}{E'(2C_L)^6} \quad \tau_2 = \frac{K'^4 Q_0^2}{E'^4 (2C_L)^6} \quad (37)$$

The dissipation mechanisms are governed by the dimensionless toughness $\mathcal{K}$ and the dimensionless leak-off coefficient $\mathcal{C}$ respectively:

$$\mathcal{K} = \frac{4K_c}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{3Q_0 E'^3 \mu} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \mathcal{C} = 2C_L \left(\frac{E' t}{12\mu Q_0^3} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (38)$$

where $K_c = \sqrt{G_c \frac{E}{1-\nu^2}}$, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$, $K' = 4K_c \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2}$ and $C_L = \frac{K^{int}}{\mu} \frac{\sigma_0}{\sqrt{\pi c}}$. Parameter c is the poroelastic intrinsic diffusion coefficient [82]. K_c represents the fracture toughness (K' has the same meaning, but is introduced to avoid carrying numerical factors

in Eq. (38)), E' is the plane strain modulus, and C_L is the leak-off coefficient which estimates the fluid leakage from the fracture into the porous matrix.

Detournay [83] suggests that the dimensionless toughness $\mathcal{K}$ is interpreted as the ratio between the energy dissipated in fracturing the porous matrix and the dissipation associated to the viscous effects under zero fluid-lag and zero leak-off assumptions. The dimensionless leak-off coefficient $\mathcal{C}$ is a time-dependent parameter [84], which quantifies the transition between the propagation regime where zero leak-off (i.e. the storage dominated regime for $\mathcal{C} < 1$) occurs to the regime characterized by large leak-off (i.e. the leak-off dominated regime for $\mathcal{C} > 1$).

According to [85], at short time, the storage-toughness dominated regime is characterized by $\mathcal{K} > 4$ and $\mathcal{C} < 1$ whereas the storage-viscosity dominated regime corresponds to $\mathcal{K} < 1$ and $\mathcal{C} < 1$. Contrariwise, at large time, two other regimes can be observed: the leak-off-toughness dominated regime (i.e. $\mathcal{K} > 4$ and $\mathcal{C} > 1$) and the leak-off-viscosity dominated regime (i.e. $\mathcal{K} < 1$ and $\mathcal{C} > 1$), the latest not being investigated in this validation section. For intermediate regimes between viscosity and toughness dominated regimes, at all time, both energy dissipation mechanisms are competing.

4.1.3. Numerical results for the near storage-toughness dominated regime

In this section, we present the numerical experiments performed in the case of the near storage-toughness dominated regime. To investigate the effects of this regime on the fracture evolution, the fluid injected at the inlet is characterized by a viscosity $\mu = 1 \times 10^{-4}$ Pa s. In this case, viscous effects related to the fluid are reduced during the propagation process. Moreover the leak-off coefficient is set to $C_L = 6.28 \times 10^{-5}$ m s^{1/2} allowing small leakage in the porous medium. To stay in the storage regime, the intrinsic permeability is set to $K^{int} = 1 \times 10^{-15}$ m² and the confining stress is set to $\sigma_0 = 3.7$ MPa. The definitions of C_L and $\mathcal{C}$ (see Eq. (38)) suggests that the increase of K^{int} and σ_0 is sufficient to reach the (near) leak-off toughness dominated regime for large time. We perform the simulation between $t = 0$ s and $t = 20$ s. For this example the dimensionless toughness is equal to $\mathcal{K} = 2.89$ and the dimensionless leakage-coefficient $\mathcal{C} \in [0, 1.02]$. The range for these two dimensionless parameters allows to stay in the near storage-toughness dominated regime, but starting at $t = 20$ s leak-age starts to dominate and the equilibrium is reached at $\tau_2 = 1213$ s.

Figs. 10 and 11 show the comparison between the simulations performed with our HM-XFEM model and the analytical solution of [79]. The numerical results are in very good agreement with the theory. As predicted by the analytical solution, the fracture opening profile is symmetrical (Fig. 10 (right)) and the fracture length overpasses 6 m after $t = 10$ s. For information purposes only, the fluid pressure inside the fracture and the cohesive effective stress are displayed in Fig. 11 (right). The range of values for which $t'_c = 0$ MPa corresponds to *zone 1* referenced in Fig. 3, where the porous medium is completely broken. In this zone, the fluid pressure is uniform and equal to $p_f = 4.5$ MPa. The ascending part of the profile from $t'_c = 0$ MPa to $t'_c = 1.25$ MPa = σ_c corresponds to the damaged zone (referenced as *zone 2* in Fig. 3). During this phase, loading/unloading or crumpling can be observed. The fluid pressure field is uniform and is still equal to $p_f = 4.5$ MPa. Then, the descending part from $t'_c = 1.25$ MPa corresponds to the adhesion zone until the far-field *in situ* stress $t'_c = -\sigma_0 = -3.7$ MPa is reached. This far-field corresponds to the contact zone. These two zones are tagged as *zone 3* in Fig. 3. In the contact and the adhesion zones, the fluid pressure drops abruptly from $p_f = 4.5$ MPa to $p_f = 0$ MPa, the latest corresponding to a zero displacement on the lips displacement profile.

In Fig. 12, the relative error between the analytical solution and the numerical solution is displayed for the simulations performed with the HM-XFEM model (left) and for the simulations performed by Carrier et al. [46] (right). The relative error is quite similar between the two methods used, XFEM in this paper and interface elements in Carrier et al. [46]. As an example, we compared the relative error obtained with a regular quadrangular mesh (labeled as “quad.” in Fig. 12 (left)) and with a physical mesh, whose density element is 11,168 triangles (labeled as “tria.” in Fig. 12 (left)). The relative error, for the triangular mesh case, is lower than the one obtained with the regular quadrangular mesh. However, in both cases, the numerical solutions do not match perfectly the analytical solution (even observed by Carrier et al. [46]). Indeed, the propagation

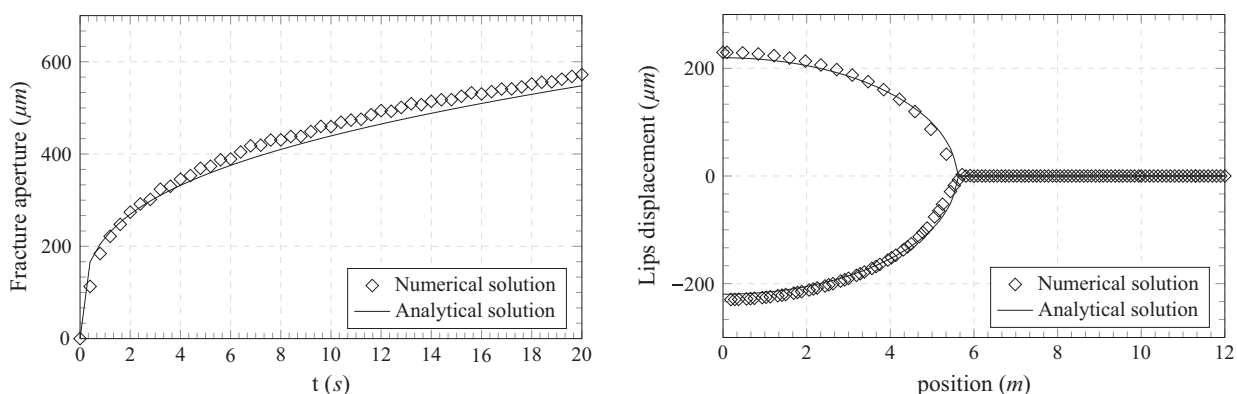


Fig. 10. Numerical and analytical solutions [79] for the fracture aperture at the inlet (left) and the lips displacement at $t = 10$ s (right): near storage-toughness dominated regime.

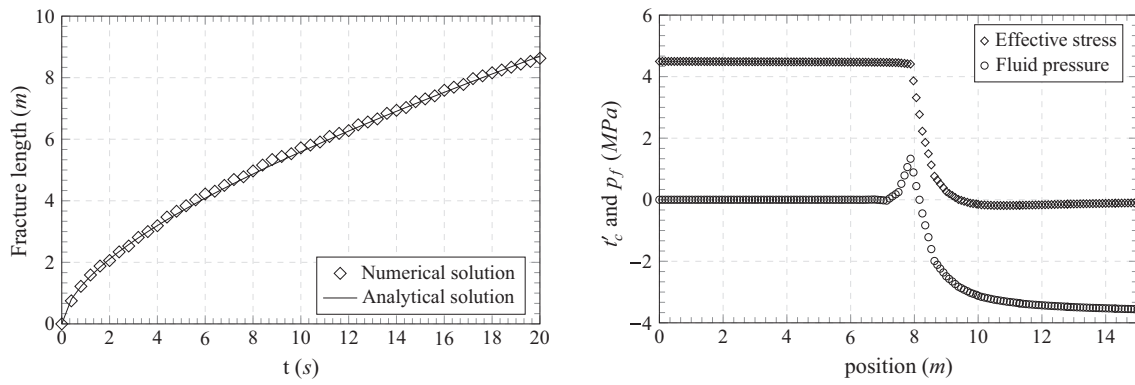


Fig. 11. Numerical and analytical solutions [79] for the fracture length at the inlet (left). Numerical profiles of the effective cohesive stress and the fluid pressure at $t = 18$ s (right): near storage-toughness dominated regime.

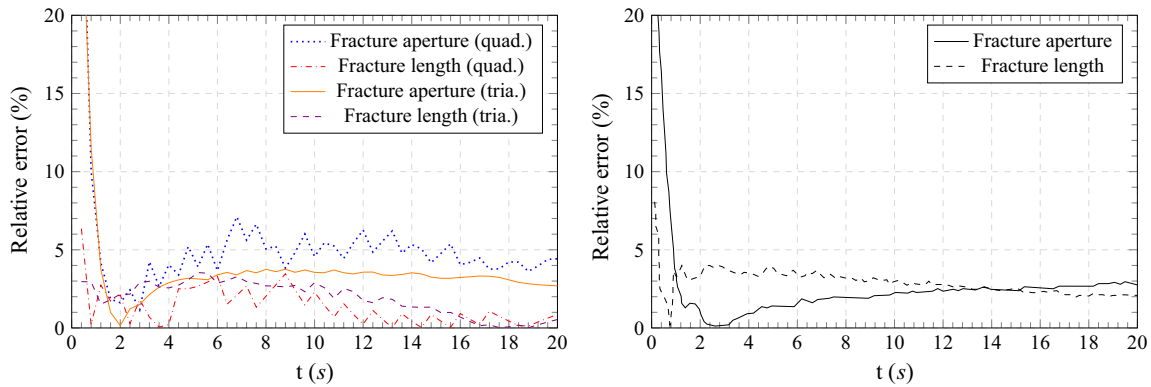


Fig. 12. Relative error for the fracture opening and for the fracture length at the inlet in the situation of near storage-toughness dominated regime: HM-XFEM model (left) and Carrier et al. [46] model (right).

criterion used for the analytical model is based on the consideration of the equality between the stress intensity factor in mode I and the material toughness [86]. In our case, the Talon-Curnier constitutive law governs the propagation and the fracture opening due to the fluid injection. On the contrary, the latter is governed by an integro-differential equation classically used in Linear Elastic Fracture Mechanics [87] for the analytical model.

To finish, it is important to underline the high relative error (around 20% for the fracture aperture) recorded at the very first time steps. This artefact can be related to the Fracture Process Zone position. In fact, the Fracture Process Zone size is constant and is approximately [88]

$$l = \frac{9\pi}{32} \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{G_c}{\sigma_c^2} = 1.2 \text{ m} \quad (39)$$

Before $t = 1$ s, the Fracture Process Zone length is greater or equal than the fracture length. This can explain the numerical perturbations observed which disappear as the fracture grows.

4.1.4. Numerical results for the storage-viscosity dominated regime

We now perform simulations in the case of the storage-viscosity dominated regime. Unlike the previous regime, the hydraulic fracture propagation is only dependent on the viscous dissipation due to the fluid injection. Like [46], our HM-XFEM model takes into account the hydro-mechanical coupling in contrast with the analytical solution of [80]. Indeed, due to the strong interactions existing between the viscous fluid injection and the impermeable surrounding porous medium, an additional compressive stress occurs and is assimilated to the so-called back-stress effect [89,90]. Given the restrictive assumptions of the KGD analytical solution, the back-stress effect has been removed from our simulations in storage-viscosity dominated regime (i.e., by taking $b = 0$) to conduct a fair comparison. The leak-off coefficient is $C_L = 0 \text{ m s}^{1/2}$. The fluid viscosity has been increased and is set to $\mu = 1 \times 10^{-1} \text{ Pa s}$. To stay in the storage regime, the intrinsic permeability is chosen as $K^{int} = 1 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ and the confining stress is set to $\sigma_0 = 3.7 \text{ MPa}$. The dimensionless toughness coefficient reaches $\mathcal{K} = 0.51$ and the dimensionless leak-off coefficient is $\mathcal{C} = 0$ at all time steps. We simulate over 30s in this example. The range for these two dimensionless parameters is in agreement with the conditions $\mathcal{K} < 1$ and $\mathcal{C} < 1$. However, the leakage equilibrium is never reached because $\tau_1 \rightarrow +\infty$.

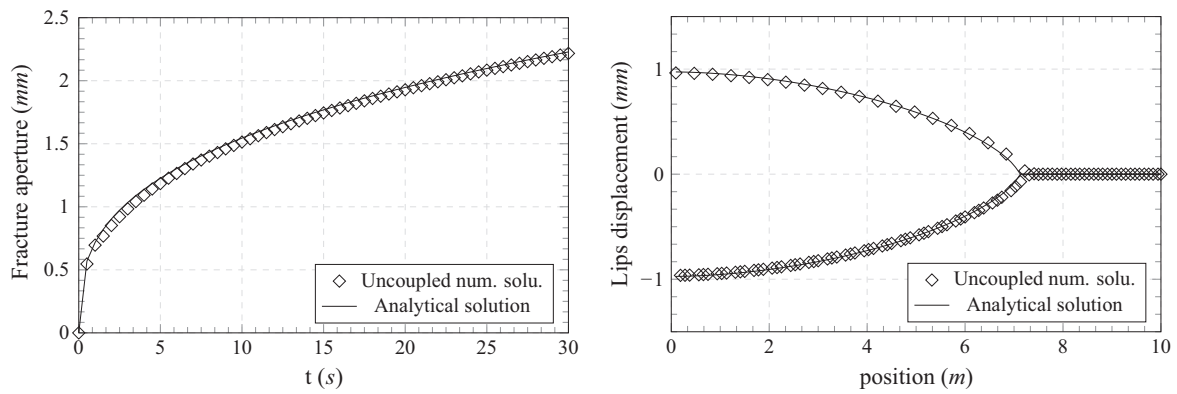


Fig. 13. Numerical and analytical solutions [80] for the fracture aperture at the inlet (left) and the lips displacement at $t = 20$ s (right): storage-viscosity dominated regime.

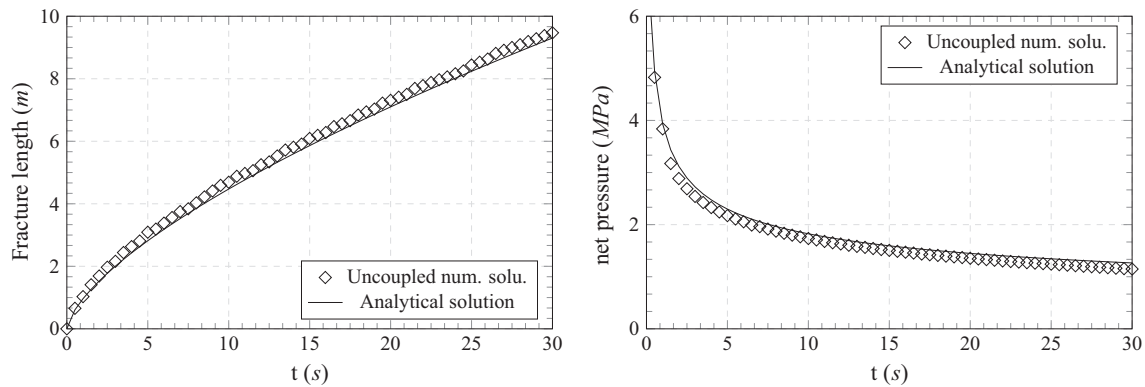


Fig. 14. Numerical and analytical solutions [80] for the fracture length (left) and the net pressure (right) both at the inlet: storage-viscosity dominated regime.

The comparison between the HM-XFEM results and the analytical solution of [80] is shown in Figs. 13 and 14. The numerical results are in very good agreement with the theory. Compared to the near storage-toughness dominated regime, the dissipation due to the viscous effects reduces the fracture length but increases the fracture aperture at the inlet. Moreover, our simulations confirm the results of Carrier et al. [46] concerning the removal of back-stress effect from the numerical solution. Indeed, the numerical plot for the net pressure, which is $p_n = p_f - \sigma_0$, matches the analytical solution (see Fig. 14 (right)).

In Fig. 15, the relative error between the analytical solution and the numerical solution is displayed for the simulations performed with the HM-XFEM model and for the simulations performed by Carrier et al. [46]. Like with the near storage-toughness dominated regime, the simulations performed with the HM-XFEM model seem to be as efficient as the simulations conducted with interface elements.

Simulations carried out in this section confirm the validity of the HM-XFEM model. It allows us to apply our model to the case of a multi fluid-driven fractured porous medium. Such a configuration is representative of the multi-stage fracturing technique which is the most popular completion method for horizontal wells in unconventional reservoirs.

4.2. Computational results for the multi-fractured porous medium

4.2.1. Geometry and boundary conditions

In this section the dimensions of the sample are the same as previously. The medium is entirely cut by three pre-existing discontinuities, each one represented by means of a single level-set. Two types of fracture geometries are considered as illustrated in Fig. 16. In the case of planar discontinuities (see Sections 4.2.2 and 4.2.3) the first fracture (P1) cuts the medium at $y = 4.44$ m, the second fracture (P2) at $y = 0$ and the third one (P3) at $y = -4.44$ m. (P2) splits a layer of thickness $l = 3.7$ m (orange rectangle in Fig. 16) whose permeability is lower than that of the whole domain. At points $(0, 0)$, $(0, 4.44)$ and $(0, -4.44)$ an incompressible fluid is injected with a constant flow rate Q_0 .

For the case involving three pre-existing curved interfaces (see Section 4.2.4), the first fracture (C1) is represented by the normal level-set $y = 8 + 6.5 \cos(x/7.16)$, the second (C2) is represented by $y = 0$ (planar interface) and the third one (C3) is represented by $y = -8 - 6.5 \cos(x/7.16)$. The factor 7.16 is introduced to display only one period in the whole domain. In the same way, we inject an incompressible fluid with a constant flow rate Q_0 at point $(0, 0)$ and a constant flow rate Q_1 at points $(0, 14.5)$ and $(0, -14.5)$.

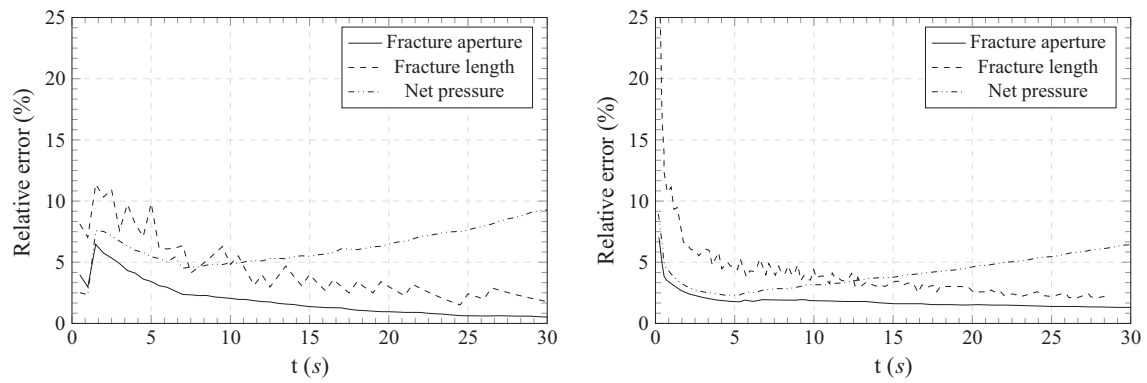


Fig. 15. Relative error for the fracture opening and the fracture length at the inlet for the storage-viscosity dominated regime: HM-XFEM model (left) and Carrier et al. [46] model (right).

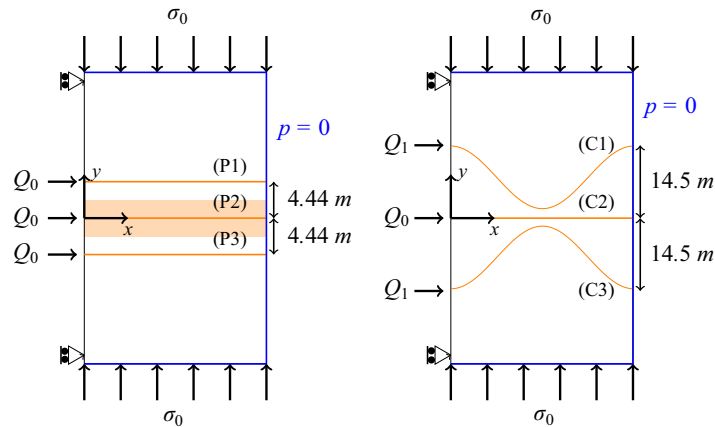


Fig. 16. Geometry and boundary conditions for straight (left) and curved (right) interfaces.

Table 2
Permeabilities of the bulk and the orange layer.

	Bulk	Orange layer
$K_x^{int} \text{ (m}^2\text{)}$	1×10^{-16}	1×10^{-16}
$K_y^{int} \text{ (m}^2\text{)}$	5×10^{-15}	5×10^{-16}

The boundary conditions are unchanged (see Fig. 16). The material properties of the surrounding porous medium and the features of the cohesive zone are summarized in Table 1. Here again, the interfaces are not conformed with the element edges.

4.2.2. Computational results for a fracture network with straight interfaces: anisotropic diffusion

In this first example, we investigate the effects of a fluid injection in an anisotropic medium cut by three straight interfaces as depicted in Fig. 16 (left). The anisotropy is only considered for the hydraulic parameters but the elastic parameters remain isotropic. The vertical confining stress is $\sigma_0 = 5 \text{ MPa}$. The surrounding porous medium and the orange layer are characterized by different permeabilities in the vertical and horizontal directions (see Table 2). With this configuration, the diffusion is oriented vertically for each fracture. For all of them, the fluid injection rate is $Q_0 = 0.0005 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ and the fluid viscosity is $\mu = 1 \times 10^{-4} \text{ Pa s}$.

For the fracture (P2), the leak-off coefficient is $C_L = 3.47 \times 10^{-5} \text{ m s}^{1/2}$. This coefficient has been calculated from the numerical values of the Lagrange multipliers q_1 and q_2 by linear regression using Carter's law [91]. As demonstrated by Carrier et al. [46], Carter's law is a good approximation for the case of unidimensional diffusion. Moreover, the leak-off coefficient for (P1) and (P3) is $C_L = 2 \times 10^{-4} \text{ m s}^{1/2}$. For (P1) and (P3), the dimensionless toughness coefficients are equal to $\mathcal{K}_{1,3} = 2.89$ and the dimensionless leakage coefficients are $\mathcal{C}_{1,3} \in [1, 4.11]$. For both fractures, the characteristic leakage time is $\tau_2 = 1.16 \text{ s}$. However for (P2), if the dimensionless toughness is still $\mathcal{K}_2 = 2.89$, the dimensionless leakage coefficient is now $\mathcal{C}_2 \in [0, 0.71]$.

We chose to account for a layer with different properties in order to investigate the interactions of fractures characterized by different storage regimes: (P1) and (P3) are near leak-off-toughness dominated fractures ($1 < \mathcal{K}_{1,3} < 4$ and $\mathcal{C}_{1,3} > 1$) whereas (P2) is a near storage-toughness dominated fracture ($1 < \mathcal{K}_2 < 4$ and $\mathcal{C}_2 < 1$).

In Sections 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4, we use the two dimensionless parameters to characterize the propagation regime of the three fractures as if each one was isolated, since, to the authors knowledge, no specific formulation of both dimensionless coefficients has been mentioned in the literature for fracture network. Hence we have to keep in mind that such an analysis could be partially biased.

In Figs. 17 and 18, the normal opening and the fluid pressure evolution for each fracture are respectively plotted for two time steps $t_1 = 18$ s and $t_2 = 80$ s. We display here the relative lips displacements measured with respect to the horizontal x-axis.

At $t_1 = 18$ s (Fig. 17 (left)), we notice that the extension of (P1) and (P3) is smaller compared to (P2). As mentioned before, two different storage regimes are involved for each fracture. Indeed, in the case of the near leak-off-toughness dominated regime (i.e. (P1) and (P3)), the fracture lengths are shorter because of the large fluid leakage around. Leakage is associated to a minimal volume creation. We confirm this argument with Fig. 19, which shows a large vertical leakage area from the fracture to the porous matrix, for both time steps. Because of the small permeability in the horizontal direction, the fluid diffusion operates only from the inlet to (P1) and (P3) fracture tips ($x \in [0, 3.3]$). As a result, the opening of (P2) is very small for $x \in [0, 3.3]$. For (P2) at $t_1 = 18$ s, Fig. 18 (left) shows a perturbation in the profile of the fluid pressure in this area close to the inlet. As expected, the fluid pressure in (P2) is greater than in (P1) and (P3) because of the small volume storage close to the inlet. Moreover, as demonstrated in Section 4.1.3, the near storage-toughness dominated regime is normally characterized by an uniform fluid pressure repartition along the fracture profile. In this case, both dissipation effects are competing (i.e. fracturing and viscous effects) for the near storage-toughness dominated regime. But considering the range of values for coefficient $\mathcal{K}_2 = 2.89$, we would expect the fracturing dissipation mechanism to prime. Thus, this fluid pressure perturbation might suggest that the dissipation mechanism due to viscous effects starts to dominate in this area due to the compressive stress state generated by the behavior of (P1) and (P3). On the contrary, for $x > 3.3$ m, the normal opening of (P2) is bigger and the fluid pressure is uniform up to the fracture tip. In this area the influence of (P1) and (P3) vanishes, and fracturing dissipation mechanism dominates for the central fracture. As (P2) is a near storage-toughness dominated fracture, it propagates further than the two others. As a matter of fact, the fluid storage inside (P2) is compensated by a large volume creation (i.e. propagation).

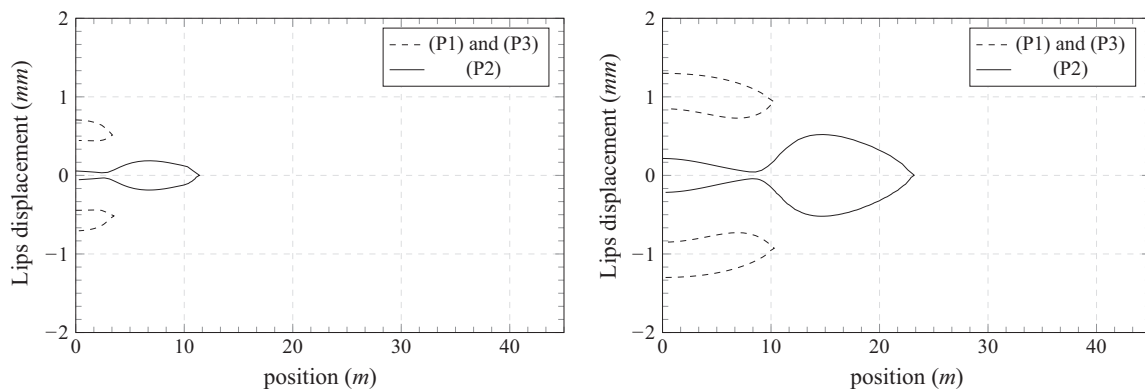


Fig. 17. Lips displacement for each fracture at $t_1 = 18$ s (left) and $t_2 = 80$ s (right).

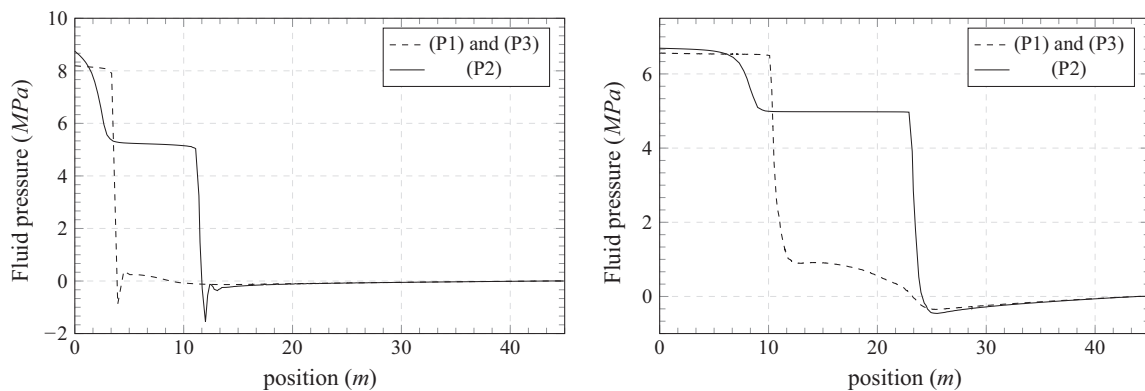


Fig. 18. Evolution of the fluid pressure along each fracture path at $t_1 = 18$ s (left) and $t_2 = 80$ s (right).

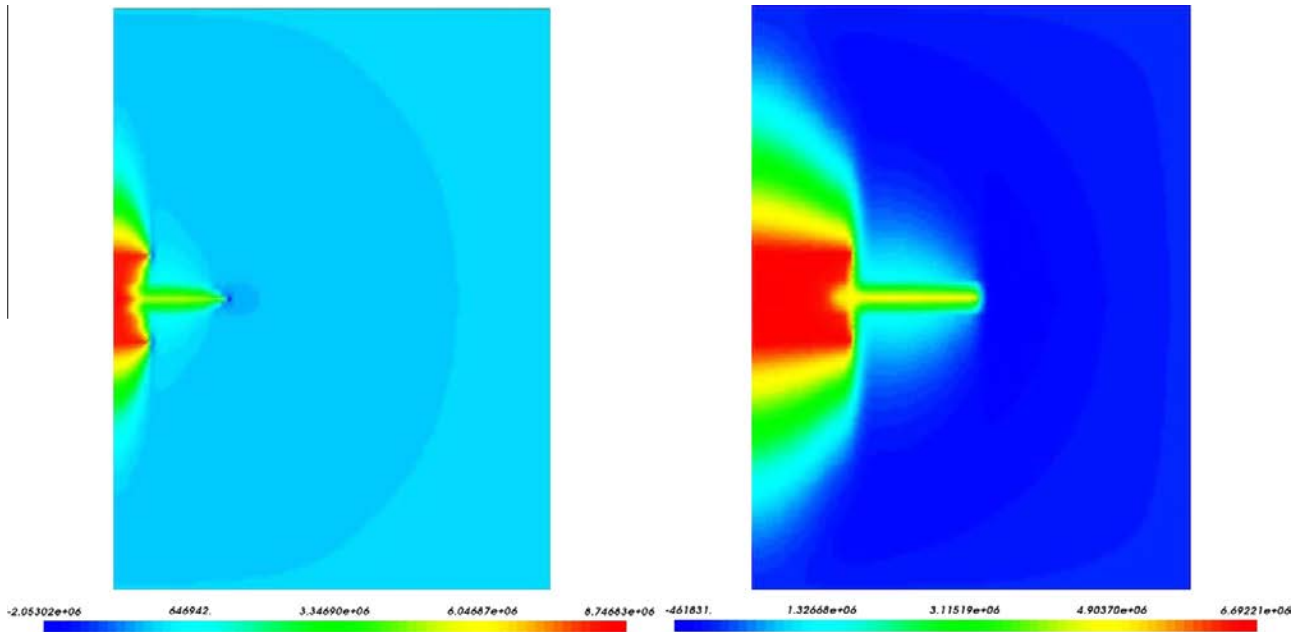


Fig. 19. Scalar maps for the pore pressure at $t_1 = 18$ s (left) and $t_2 = 80$ s (right).

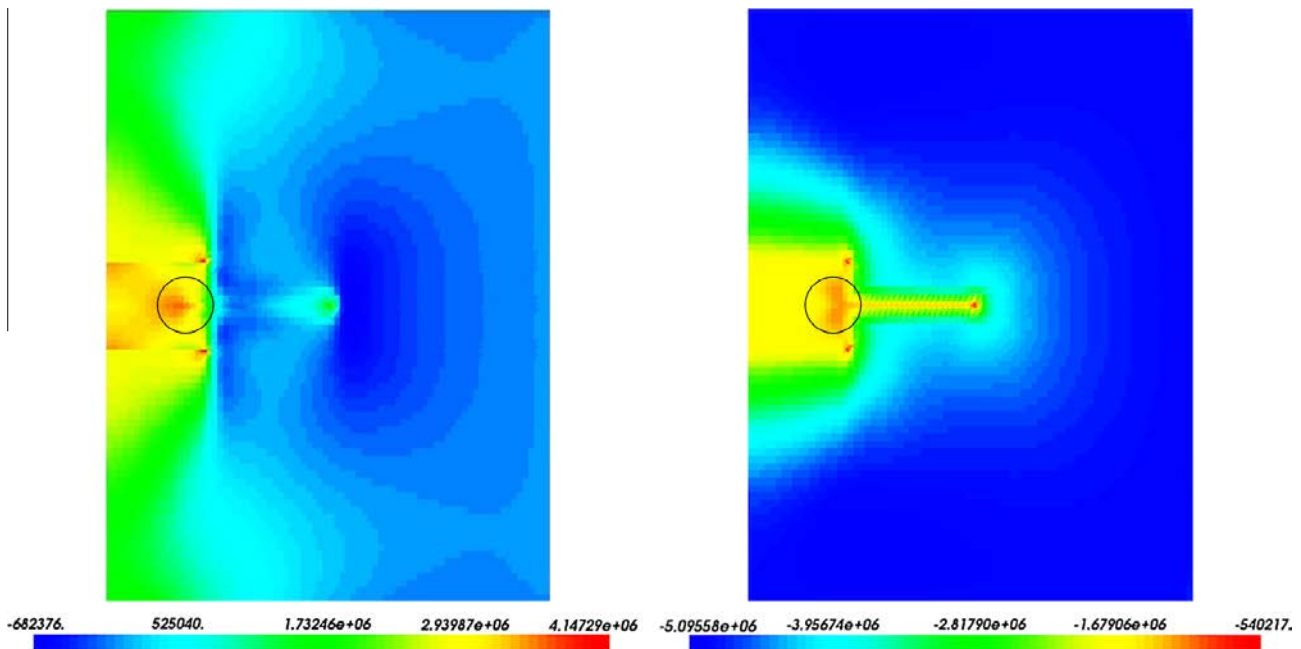


Fig. 20. Scalar maps for the horizontal effective stress (left) and the vertical effective stress (right) at $t_2 = 80$ s. The circles indicate the position of the bottleneck observed in Fig. 17 (right).

For larger time, $t_2 = 80$ s, (P1) and (P3) still propagate, but their extensions are slowed down compared to (P2). For $x \in [0, 7]$ (see Fig. 17 (right)), the fluid is preferentially stored inside (P2) which leads to an increase of the normal opening. So, the volume created is high enough to get a uniform fluid pressure repartition in this zone (see Fig. 18 (right)). Fractures (P1) and (P3) are deflected due to a change in the stress field. As shown in Fig. 20 (left and right), the horizontal and vertical effective stresses are maximal in the area (*i.e.* $x \in [0, 7]$) surrounded by the fractures (P1) and (P3) where the fluid pressure is maximal (see Fig. 19 (right)). In this zone the competition between the fractures is the strongest. It is confirmed by the displacement map (see Fig. 21 (left)) that shows a relative vertical displacement close to zero until the tips of (P1) and (P3) are overpassed. We assimilate this process to the stress shadowing effect as depicted in [92–94] (also observed at $t_1 = 18$ s for $x \in [0, 3.3]$). The displacements above (P1) and below (P3) are symmetrical with respect to the x -axis and are non-zero, as the vertical compressive effective stress decreases until reaching the *in situ* stress state $\sigma_0 = -5$ MPa (see Fig. 20 (right)). For $x \in [7, 10]$, near the tips of (P1) and (P3), pressure diffusion in the porous matrix is more important. As a consequence (P2)

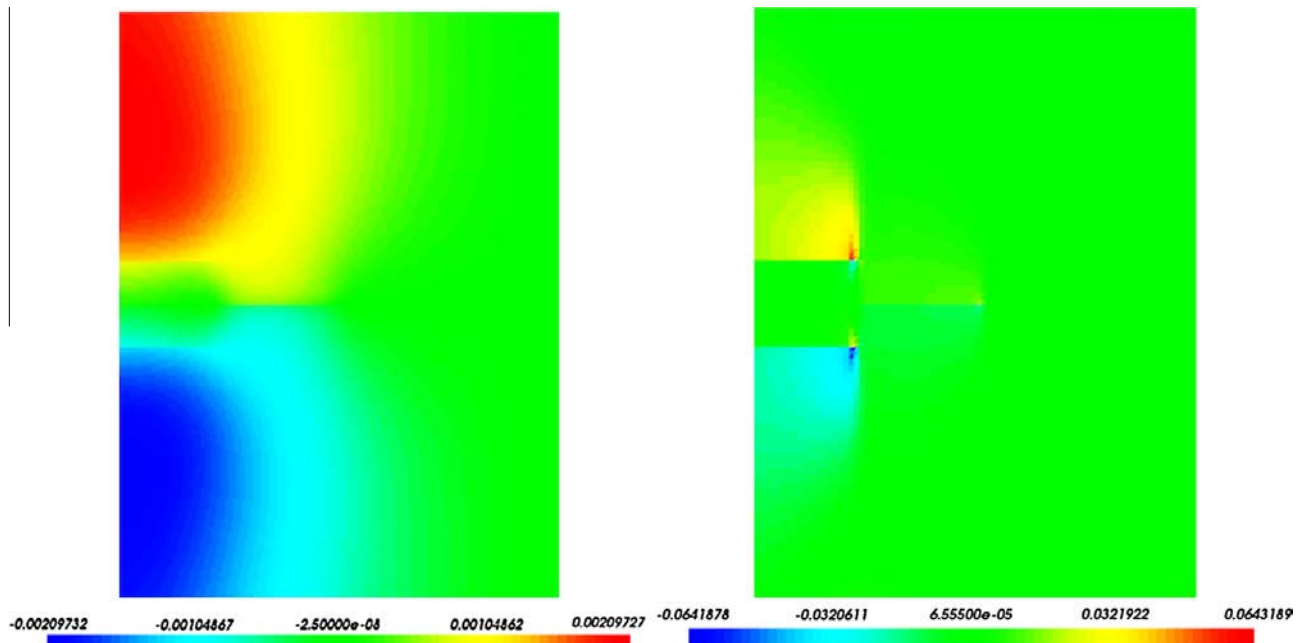


Fig. 21. Scalar maps for the vertical displacement (left) and the normal flux for each fracture (right) at $t_2 = 80$ s.

is partially closed (see Fig. 17 (right)). Due to this competition, the fluid pressure decreases in this bottleneck, which supposes that the fluid circulation is partially dropped off, related to the tight opening of the fracture. This phenomenon is observed and circled in Fig. 20 (left and right) and is related to a maximal vertical compressive stress in this zone. For the horizontal direction (see Fig. 20 (left)), this bottleneck is located at the limit of a large tensile zone followed by a large compressive zone. In this way, the dissipation mechanism associated to viscous effects seems to override the toughness influence of the solid matrix in this area. Then, for $x \in]10, 23]$ the influence of (P1) and (P3) on (P2) vanishes and the normal opening is bigger and symmetric. Once again in this area, the fluid pressure remains uniform until it reaches the initial pore pressure field.

For information purposes, Fig. 20 (left) shows, for $x \in]10, 15]$ along (P2), a decrease of the horizontal effective stress, then for $x \in]15, 23]$ an increase of this field. The first phase is explained by the stress field relaxation in the horizontal direction, as the influence of (P1) and (P3) vanishes. The second phase is related to the existence of the process zone. Then for $x > 23$ m, the relaxation of the far-field stress is observed.

Fig. 18 at $t_2 = 80$ s, indicates a raise of the (P1) and (P3) pressure profile for $x \in]10, 23]$. As the tips of (P1) and (P3) are overpassed in this area, we measure the pore pressure rather than the fluid pressure, because the two fractures (P1) and (P3) are in adherence for $x > 10$ m. Moreover in this area, (P2) is widely opened. The opening of this fracture generates the deformation of the bulk whose behavior is governed by linear elasticity. Fig. 19 (right) shows a weak fluid diffusion from (P2) for $x \in]10, 23]$. Indeed, the weak pressure diffusion between the orange layer and the domain leads to a fluid pressure increase within the orange layer. As a result, the pore pressure in the bulk also increases and induces an additional compressive stress in this zone (see Fig. 20 (right) for $x \in]10, 23]$ and $|y| \in [0, 4.44]$), which is interpreted as the back-stress effect aforementioned in Section 4.1.4. When the tip of (P2) is overpassed for $x > 23$ m, the pressure profile of (P1) and (P3) reaches the expected initial pore pressure field (i.e. $p = 0$).

We display in Fig. 21 (right) the normal flux map. Two points can be highlighted here. Firstly, leakage is located only above (P1) and below (P3). The maximum leak-off rate (at the upper and lower sides of each surrounding fracture) is measured near both fracture tips, where the competition between all of the three fractures starts to disappear. On the contrary, in the competition area where the stress shadowing effect is the strongest, leakage does not exist. As the permeability of the orange layer is lower than the bulk one, small leakage happens for $x \in]10, 23]$ along (P2). Secondly, this example confirms the interest of introducing the enriched degree of freedom d_i in the expression of the approximation of the pore pressure field (see Eq. (31)). Although the pressure continuity $p = p_f$ is enforced at the interface, we are able to catch the discontinuity of the pore pressure gradient on each side of the fractures.

To confirm the efficiency of our XFEM formulation, we plotted in Fig. 22 a cross section perpendicular to the fracture network for $x = 8$ m. As can be seen, the pressure profile at $t_1 = 18$ s and $t_2 = 80$ s are symmetrical with respect to the x -axis (i.e. $y = 0$) and no spurious oscillations are mentioned. Both ascending parts observed for $|y| \in [0, 4.44]$ at $t_2 = 80$ s are related to the strong interaction between each fracture in this area.

Finally, at the fracture tips for $t_1 = 18$ s, the fluid pressure in (P1), (P2) and (P3) drops very quickly to reach the initial pore pressure field (i.e. $p = 0$), and we measure negative values of fluid pressure (see in Fig. 18 (left) and Fig. 19 (left)). These negative values are due to pressure shock propagation related to the weak permeability of the porous medium in the horizontal

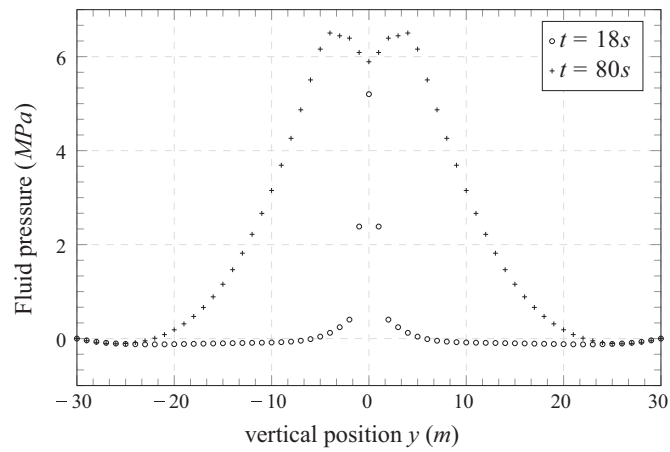


Fig. 22. Evolution of the pore pressure field along a cross section perpendicular to the fracture network (for $x = 8$ m) at $t_1 = 18$ s and $t_2 = 80$ s.

direction. When the fracture is closed, the fluid pressure is equal to the pore pressure of the surrounding porous medium. Before the pressure diffusion at the tip begins in the porous medium, negative pressure values are measured. Then, when large diffusion time is reached, this effect is reduced (see Fig. 18 (right) and Fig. 19 (right)).

4.2.3. Computational results for a fracture network with straight interfaces: isotropic diffusion

We now perform simulations for three straight horizontal fractures in an homogenous rock (*i.e.* the orange layer is no longer considered) where the diffusion in the bulk is bi-dimensional. In this case, we investigate the competition of fractures whose storage regimes are identical, in contrast with the previous case. The geometry of the problem is depicted in Fig. 16 (left).

The vertical confining stress is $\sigma_0 = 5$ MPa, the permeability of the solid matrix is $K^{int} = 5 \times 10^{-15}$ m² and the fluid viscosity is $\mu = 1 \times 10^{-4}$ Pa s. The injection rates are $Q_0 = 0.0005$ m² s⁻¹. The leak-off coefficient is $C_L = 2 \times 10^{-4}$ m s^{1/2} for each fracture. As previously, the simulation will represent over 80s. The dimensionless toughness coefficient are equal to $\mathcal{K}_{1,2,3} = 2.89$ and the dimensionless leakage coefficient are $\mathcal{C}_{1,2,3} \in [1, 4.11]$. Thus, the three fractures propagate in the near leak-off-toughness dominated regime since $1 < \mathcal{K}_{1,2,3} < 4$ and $\mathcal{C}_{1,2,3} > 1$.

In Fig. 25, we observe the pore pressure field at $t_1 = 18$ s and $t_2 = 80$ s. The fluid pressure inside the fractures as well as the opening profiles are given for each fracture at t_1 and t_2 in Figs. 24 and 23 respectively. We also measure the relative lips displacements with respect to the horizontal x -axis.

At $t_1 = 18$ s (see Fig. 23 (left)), the profile of the three fractures is quite similar except for a slight advance of the central fracture. The diffusion process in the porous matrix has started around each of the fractures and the pore pressure map (see Fig. 25 (left)) suggests that interactions between the fractures are just beginning as the diffusion areas intersect. As a result, the domain located between the two open fractures (P1) and (P3) is supplied by the fluid leak-off of these two surrounding fractures at the same time, accelerating the raise of the pore pressure in these areas. This augmentation of the pore pressure has two consequences. The first one, considering the generalized Biot theory, is the swelling of the medium, submitted to an important fluid pressure in its pores. Secondly, the fluid leakages from the fractures to the porous medium decrease as the pressure gap reduces between the fluid pressure in the fractures and the pore pressure in the vicinity of the fractures. As (P2) is affected by this phenomenon on both of its sides, it is then progressively constrained to store all of its injected fluid instead

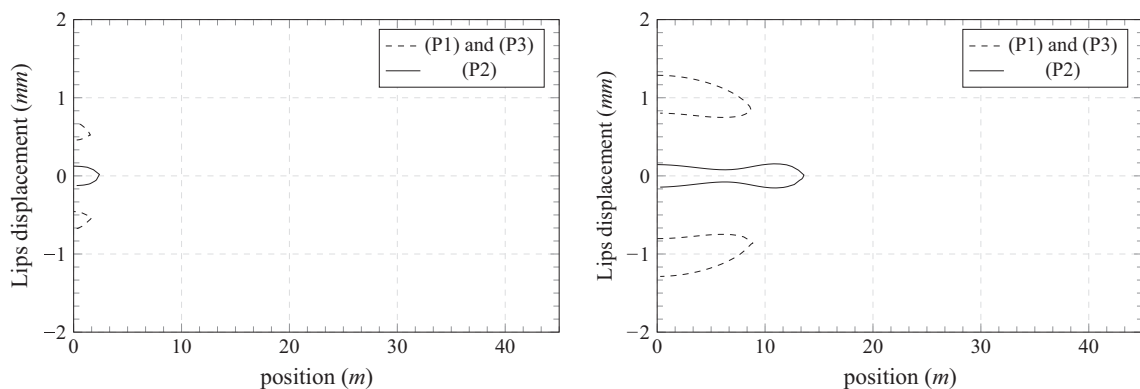


Fig. 23. Lips displacement for each fracture at $t_1 = 18$ s (left) and $t_2 = 80$ s (right).

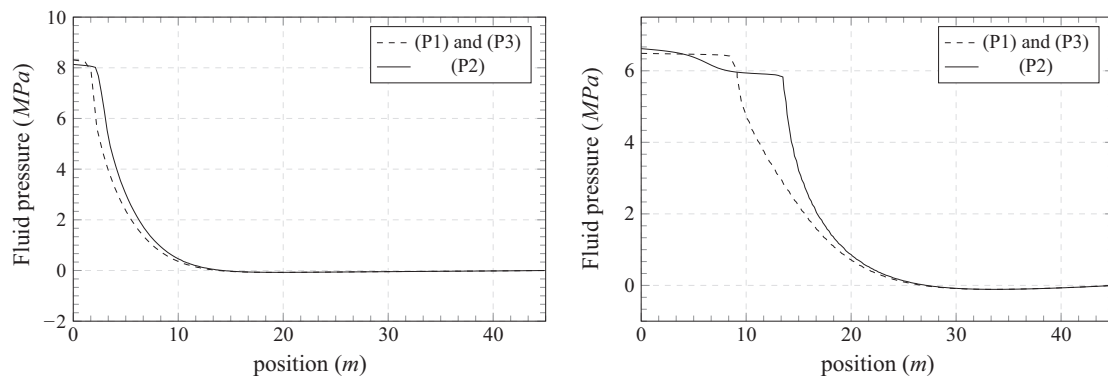


Fig. 24. Evolution of the fluid pressure along each fracture path at $t_1 = 18$ s (left) and $t_2 = 80$ s (right).

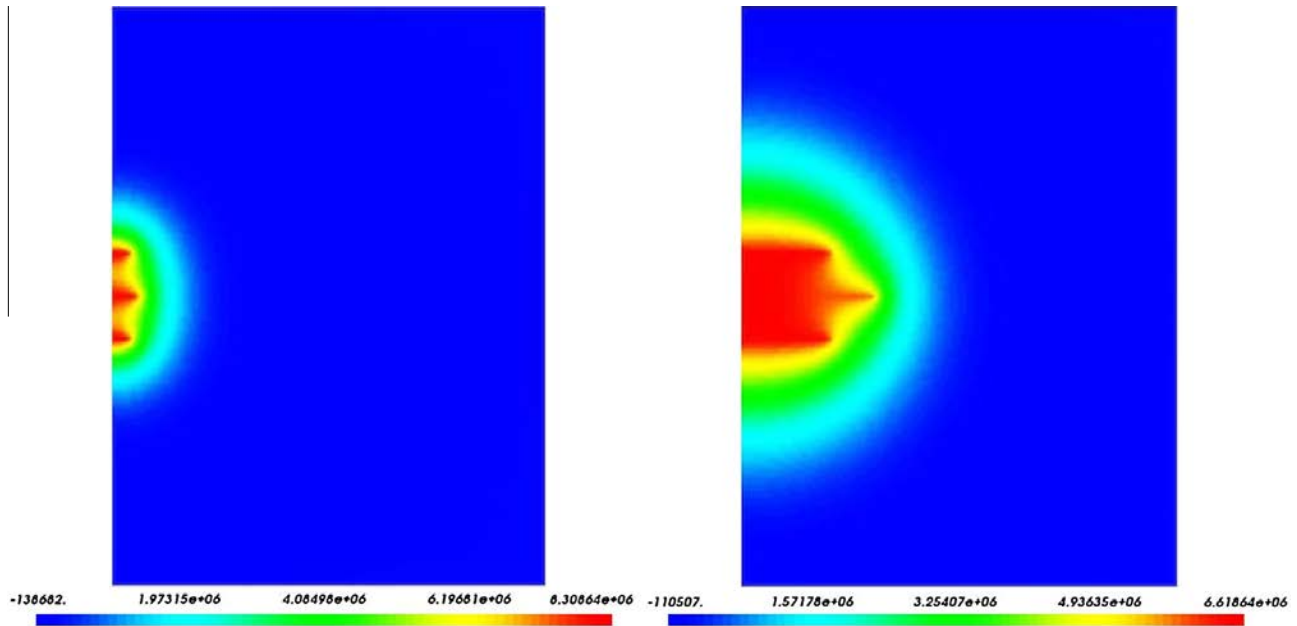


Fig. 25. Scalar maps for the pore pressure at $t_1 = 18$ s (left) and $t_2 = 80$ s (right).

of releasing a part of it in the surrounding porous medium. This explains the slight difference of length between (P2) and the outlying fractures (P1) and (P3). At $t_1 = 18$ s, the fluid pressure inside the fractures is almost the same for (P2) and the two surrounding fractures (P1) and (P3) (approximately 8 MPa). As depicted in Fig. 24 (left), the fluid pressure profile is characteristic of a near leak-off-toughness dominated regime as the fluid pressure is constant for each fracture ($x \in [0, 2.5]$). The fracturing dissipation mechanism seems to dominate.

At $t_1 = 18$ s, the interactions between the three parallel fractures are just beginning. But for $t_2 = 80$ s, the fracture profiles are significantly affected by the interactions between one another. The areas between the open fractures are subject to an important swelling and the local stress state is altered. There is no fluid leakage possible from the fractures to the porous matrix in these areas. This explains the unsymmetrical profiles of (P1) and (P3) with respect to the propagation path, and the uncommon profile of (P2) as illustrated in Fig. 23 (right), which is constrained to extend ahead of the peripheral fracture fronts in order to carry its fluid. Indeed, the opening of (P2) is significantly smaller than the opening of (P1) and (P3) because it suffers on both sides from the stress shadowing effect, induced by the two surrounding fractures interactions. As presented in Section 4.2.2, the same perturbation is observed on the fluid pressure profile of (P2) (see Fig. 24 (right)). Indeed, close to the tips of (P1) and (P3), where the normal opening of (P2) is reduced (see Fig. 23 (right) for $x \in [5, 7]$), the viscous dissipation mechanism seems to prime due to the fracture aperture reduction. However, the fluid pressure gradient observed in this case is less important compared to the previous case (see Section 4.2.2). This difference can be attributed to the propagation regime of (P2) (i.e. near-leak-off-toughness dominated regime here) and the bi-dimensional fluid diffusion around this fracture. In this area, the combination of these two processes tends toward the reduction of the energy dissipation mechanism due to viscous effects. For $x > 10$ m, the fluid pressure inside (P2) is uniform and its aperture increases, because the influence of (P1) and (P3) vanishes. Hence, the fracturing dissipation mechanism dominates again.

In this experience, we have highlighted the strong interactions likely to take place between different fractures in the near leak-off-toughness dominated regime as soon as their diffusion areas intersect. Similarities with the results of Section 4.2.2 have been noticed, but the fluid pressure field is more affected when the competition involves a near storage-toughness dominated fracture. Moreover, the negative values observed at the fracture tips (see Section 4.2.2) are no longer relevant here. Indeed, the bi-dimensional diffusion allows to balance the fluid pressure front value with the pore pressure field (see the smooth pressure decrease ahead each fracture tip in Fig. 24).

4.2.4. Computational results for a fracture network with curved interfaces

In this last configuration, the impact of the fracture shape (*i.e.* curved or straight fractures) is investigated. The geometry of the problem is depicted in Fig. 16 (right). The vertical confining stress is $\sigma_0 = 3.7$ MPa, the permeability of the solid matrix is $K^{int} = 1 \times 10^{-16} \text{ m}^2$ and the viscosity of the fluid is $\mu = 1 \times 10^{-4} \text{ Pa s}$. The injection rates are $Q_0 = 0.001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ for the central fracture (C2) and $Q_1 = 0.0014 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ for both curved fractures (C1) and (C3). The leak-off coefficient is $C_L = 1.47 \times 10^{-5} \text{ m s}^{1/2}$ for each fracture. We simulate over 40 s. So, the dimensionless toughness is equal to $\mathcal{K}_2 = 2.43$ and the dimensionless leakage-coefficient $\mathcal{C}_2 \in [0, 0.19]$ for (C2). The dimensionless toughness coefficients are $\mathcal{K}_{1,3} = 2.24$ and the dimensionless leakage coefficients are $\mathcal{C}_{1,3} \in [0, 0.16]$ for (C1) and (C3). Thus, the conditions $1 < \mathcal{K}_{1,2,3} < 4$ and $\mathcal{C}_{1,2,3} < 1$ are fulfilled to stay in the near storage-toughness dominated regime for each fracture.

The interest of this experiment is double. First, this demonstrates the ability of our model to handle strongly curved fractures. In particular, the Lagrange approximation space is non-trivial for these curved fractures. The set of equality relations applied to the Lagrange multipliers ensures the stability of the numerical solution. Secondly, it allows us to appreciate the behavior of the fractures when they approach close to each other and when the predefined fracture path is not identically perpendicular to the confining stress direction. In Fig. 26, we display the deformed mesh and the pore pressure for $t_1 = 17$ s and $t_2 = 40$ s.

The fluid pressure in the fractures is also given for $t_1 = 17$ s and $t_2 = 40$ s as well as the normal opening of the fractures in Figs. 27 and 28 respectively (“position” refers to the horizontal coordinate x). Note that the profiles of the two curved fractures have been symmetrized.

The two outlying curved fractures (C1) and (C3) scarcely propagate between $t_1 = 17$ s and $t_2 = 40$ s, and their shape is unpredictable since they significantly differ from the case with planar fractures (see Fig. 28). They obviously store the injected fluid instead of extending. This can be attributed to the important vertical confining stress. Indeed, the shape of their normal opening indicates that the local thickness of the fracture is related to its orientation. The more the fracture is inclined compared to the horizontal direction, the less confining stress it faces in the direction normal to its path. It is then easier for the fluid in the fracture to sustain and open the fracture. Also, we note that their propagation almost stops after $t_1 = 17$ s, when they reach the narrow gully that coincides with a fracture path perpendicular to the confining stress. It seems then easier for these fractures to store the injected fluid in the areas that present a low perpendicular compressive stress than to extend in a direction perpendicular to the confining stress. This explains the shape of the curved fractures. The slight differences between these two fractures are due to the unsymmetrical discretization of the fracture, that relies on the integration sub-cells (see Fig. 28). For information purposes, Abbas et al. [95] investigated within XFEM the influence of the far-field stress state and fracture offset angles on the growth of hydraulic fracture networks.

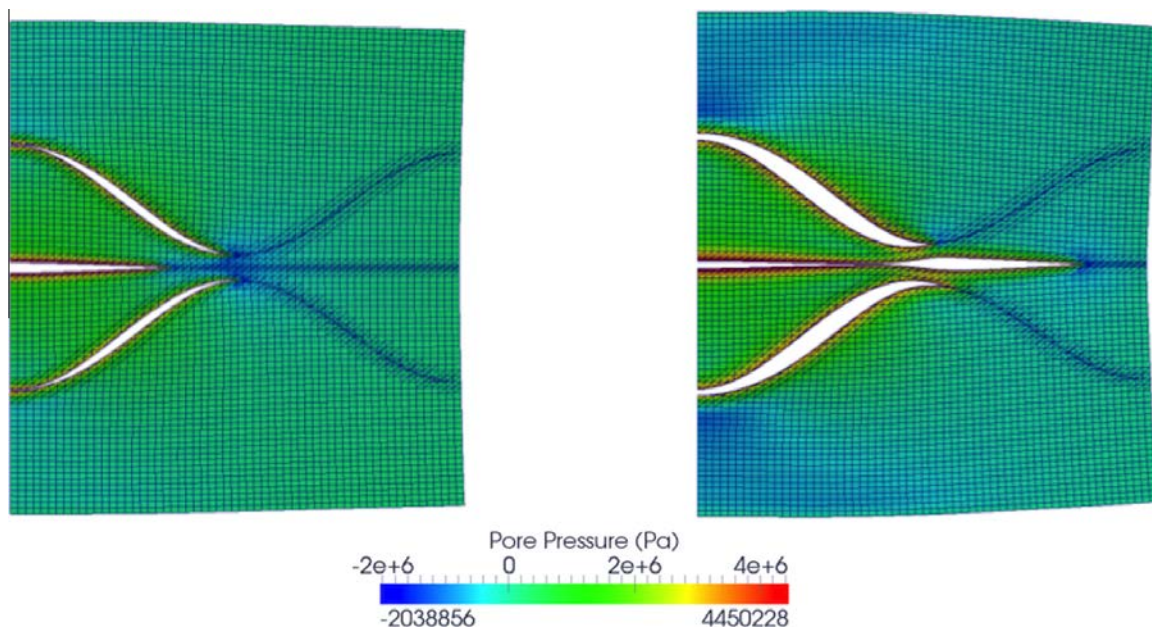


Fig. 26. Deformed mesh ($\times 800$) and pore pressure for $t_1 = 17$ s (left) and $t_2 = 40$ s (right).

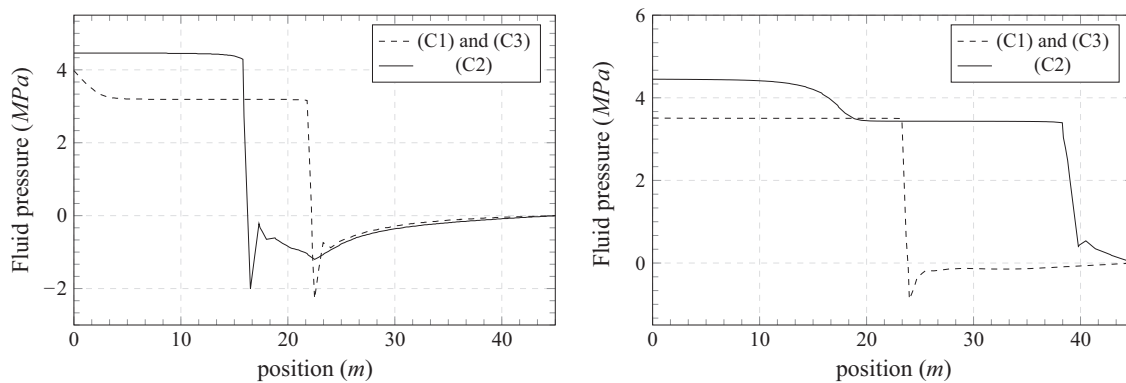


Fig. 27. Evolution of the fluid pressure along each fracture path at $t_1 = 17$ s (left) and $t_2 = 40$ s (right).

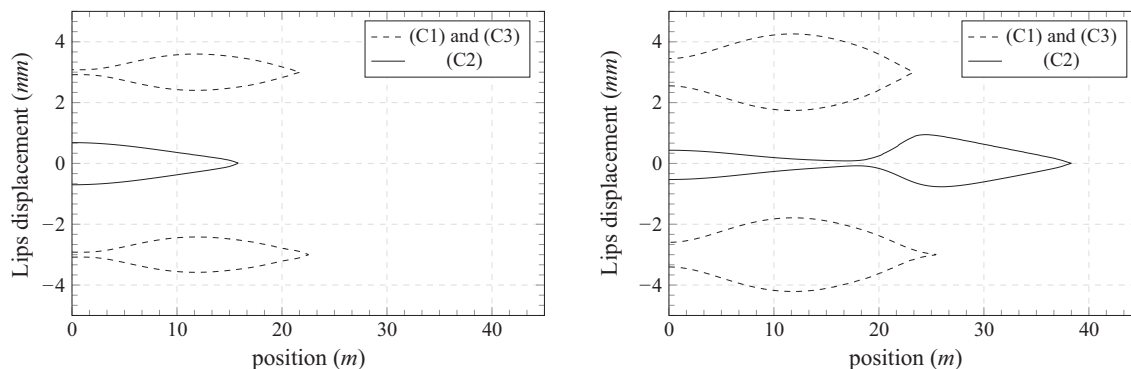


Fig. 28. Lips displacement for each fracture at $t_1 = 17$ s (left) and $t_2 = 40$ s (right).

The central straight fracture (C2) also exhibits an uncommon shape at $t_2 = 40$ s (see Fig. 28 (right)). It seems to suffer a lot from the competition of the two surrounding fractures that shield it for $x < 20$ m. The normal opening becomes smaller as the two other fractures approach and tighten the central fracture (C2). The stress interaction between fractures is maximal here. In the area of the narrow gully, the three fractures have approximately the same direction and the opening of the central fracture increases as the competition becomes fair. Then, for $x > 20$ m, the central fracture is on its own, the opening is wider as it is easier to store fluid in this area, deprived of competition with other fractures.

Concerning the fluid pressure in the fractures, at $t_1 = 17$ s (see Fig. 27 (left)), it is significantly higher in the central fracture (C2) compared to the curved fractures (C1) and (C3). The pressure necessary to sustain a fracture perpendicular to the confining stress is greater than the fluid pressure necessary to sustain a fracture whose path is closer to the confining stress direction. For the curved fractures (C1) and (C3), we observe a pressure drop near the injection points ($x \in [0, 5]$). Indeed, due to the combination of the normal stress effects, which is maximal in this area, and the influence of the normal opening of (C2) which participates to close (C1) and (C3), the viscous dissipation mechanism seems to dominate locally. The propagation of the curved fractures in the inclined part is very fast, because the path direction is more favorable. An important area is then rapidly opened for the fluid, which is sucked up in this area. We do not have it at $t_2 = 40$ s because in this area, the influence of (C2) slowly disappears as it propagates. So, (C1) and (C3) start to reopen. However, the fluid pressure in the central fracture (C2) at $t_2 = 40$ s is $p_f \in [3.4, 4.4]$ for $x \in [15, 20]$. This pressure drop is related to the change in the profile of the normal opening of this fracture and the direction of the maximal stress state, which both enable the viscous dissipation mechanism to dominate here again. For $x \in [15, 20]$, it suffers from a disadvantage due to the curved fractures, while for $x > 20$ m, it has no competitors and an uniform fluid pressure profile is observed. In this case, the fracturing dissipation mechanism is preponderant and allows (C2) to propagate.

At all the fracture tips (see Fig. 27), like in Section 4.2.2, we still measure negative values of the fluid pressure field. In this example this effect is increased because of the smaller permeability of the bulk and of the lack of diffusion at the fracture tips.

Still, this experience allows us to appreciate the robustness of our numerical model and to connect our observations to physical phenomena.

5. Conclusion

We proposed in this paper a strongly coupled HM-XFEM model for the simulation of groundwater flows through a fractured porous medium. The ability to apprehend the various phenomena involved in the hydraulic fracturing process relies on

the use of different approximation spaces. The stability of the hydro-mechanical coupling in the deformable porous matrix is guaranteed by a mixed interpolation in the standard finite element approximation of the bulk. The fluid flow in the fracture and the non-regularized cohesive zone model which rule the fracture evolution have been successfully inserted in the model thanks to additional approximation spaces designed for the fields associated to the interface. This insures the numerical stability of our model.

The HM-XFEM model has shown promising results on the KGD benchmark. One of its main advantages compared to the existing models (e.g. interface elements) is the use of the eXtended Finite Element Method, that enables us to propose complex fracture geometries on relatively coarse and regular meshes.

Numerical simulations of the KGD benchmark applied to a non-connected fracture network have proven the capabilities of the HM-XFEM model to account for the interaction of nearby fractures. Indeed, we performed numerical simulations to demonstrate the influence of the matrix permeability on the propagation of each fracture of the network. Therefore, we highlighted the competition of both dissipation mechanisms involved in the propagation of the fracture network. In the first example, where different storage regimes (i.e. in the fracture and in the porous medium) and an anisotropic diffusion were considered, we showed a strong influence of the two outlying fractures on the local appearance of viscous dissipation effects at the level of the central fracture. On the contrary, the second example demonstrated that the combination of bi-dimensional diffusion and identical propagation regimes for each fracture (i.e. near leak-off-toughness dominated regime), in an isotropic medium, participates to reduce these local viscous dissipation effects. Moreover in the case of highly curved interfaces, non-uniform fracture opening and non-uniform fluid pressure repartition are still observable due to the influence of the regional stress field orientation. In this way, we underlined some limits of the KGD benchmark when applied to a fracture network, because the analytical solutions do not account for the hydro-mechanical coupling generated by another fracture or by the fracture geometry.

In the near future, a second paper will come along with significant extensions of the HM-XFEM model. First of all, we extended our model to the 3D case. But this requires 3D quadratic XFEM elements that suffer from major robustness and conditioning issues. A robust procedure has recently been developed by Paul et al. ("An integration technique for 3D curved cracks and branching discontinuities within the eXtended Finite Element Method", in preparation) for the design of robust volumetric quadratic XFEM elements. It includes the possibility of having fracture junctions in our HM-XFEM model. Other approaches have also been proposed in [96,97]. When it comes to the conditioning issue inherent to 3D quadratic XFEM elements, major advances have recently been performed by N'Deffo et al. ("On the construction of approximation spaces to model strong discontinuities and cracks with linear and quadratic elements", in preparation) enabling the use of complex fracture geometries for 3D XFEM models. Finally, we would like to model the propagation of fluid-driven fractures on non-predefined paths. An original method for 3D cohesive crack growth on non-predefined paths has been developed by Ferte et al. [60] in Code_Aster. We rely on these works to complete the design of our coupled HM-XFEM elements.

Acknowledgments

This work was supported by the French National Research Agency through the national program "Investissements d'avenir" with the reference ANR-10-LABEX-21-RESSOURCES21 and by the Regional Council of Lorraine. Part of this work was financially supported by EDF and IFPEN that we thank for their participation. The authors are grateful to Sylvie Granet and Sam Cuvillez (EDF R&D AMA T64) for their constructive remarks.

References

- [1] Levasseur S, Charlier R, Frieg B, Collin F. Hydro-mechanical modelling of the excavation damaged zone around an underground excavation at Mont Terri Rock Laboratory. *Int J Rock Mech Min Sci* 2010;47:414–25.
- [2] Cluzel D, Vigier B. Syntectonic mobility of supergene nickel ores of New Caledonia (Southwest Pacific). Evidence from garnierite veins and faulted regolith. *Resource Geol* 2008;58:161–70.
- [3] Das R, Zhang Y, Schaub P, Cleary PW. Modelling rock fracturing caused by magma intrusion using the smoothed particle hydrodynamics method. *Comput Geosci* 2014;18:927–47.
- [4] Lisitsin VA, Gonzalez-Alvarez I, Porwal A. Regional prospectivity analysis for hydrothermal-remobilised nickel mineral systems in western Victoria, Australia. *Ore Geol Rev* 2013;52:100–12.
- [5] Gonzalez-Alvarez I, Pirajno F, Kerrich R. Hydrothermal nickel deposits: secular variation and diversity. *Ore Geol Rev* 2013;52:1–3.
- [6] Nimis P, Zaykov VV, Omenetto P, Melekestseva IY, Tesalina SG, Orgeval JJ. Peculiarities of some mafic-ultramafic and ultramafic-hosted massive sulphide deposits from the main Uralian Fault Zone, southern Urals. *Ore Geol Rev* 2008;33:49–69.
- [7] Valko P, Economides MJ. *Hydraulic fracture mechanics*. Chichester UK: John Wiley and Sons; 1995.
- [8] Gordeliy E, Peirce A. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 2013;253:305–22.
- [9] Gordeliy E, Peirce A. Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the XFEM. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 2013;266:125–43.
- [10] Khristianovic S, Zheltov Y. Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids. *Proc 4th World Petrol Congress* 1955;2:579–86.
- [11] Geertsma J, de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures. *J. Petrol. Technol.* 1969;21:1571–81.
- [12] Granet S. Modélisations THHM: Généralités et algorithmes [R7.01.10]. <<http://www.code-aster.org/>>.
- [13] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P. Meshless methods: an overview and recent developments. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 1996;139:3–47.
- [14] Lucy LB. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron J* 1977;12:1013–24.
- [15] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Comput Mech* 1992;10:307–18.
- [16] Cundall PA, Strack ODL. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique* 1979;29:47–65.

- [17] Melenk JM, Babushka I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 1996;139:289–314.
- [18] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing. *Int J Numer Methods Engrg* 1999;45:601–20.
- [19] Moës N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int J Numer Methods Engrg* 1999;46:131–50.
- [20] Sukumar N, Chopp DL, Moës N, Belytschko T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 2001;190:6183–200.
- [21] Daux C, Moës N, Dolbow J, Sukumar N, Belytschko T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int J Numer Methods Engrg* 2000;48:1741–60.
- [22] Moës N, Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engng Fract Mech* 2002;69:813–33.
- [23] Meschke G, Dumstorff P. Energy-based modelling of cohesive and cohesionless cracks via XFEM. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 2007;196:2338–57.
- [24] Zi G, Belytschko T. New crack-tip element for XFEM and applications to cohesive cracks. *Int J Numer Methods Engrg* 2003;57:2221–40.
- [25] Geniaut S, Massin P, Moës N. A stable 3D contact formulation for cracks using XFEM. *Rev Eur Méc Numér* 2007;75:259–76.
- [26] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. An extended finite element method for modelling crack growth with frictional contact. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 2001;190:6825–46.
- [27] Khoei AR, Nikbakht M. Contact friction modelling with the extended finite element method (XFEM). *J Mater Technol* 2006;177:58–62.
- [28] Nistor I, Guiton MLE, Massin P, Moës N, Geniaut S. An X-FEM approach for large sliding contact along discontinuities. *Int J Numer Methods Engrg* 2009;78:1407–35.
- [29] Watanabe N, Wang W, Taron J, Gorke UJ, Kolditz O. Lower-dimensional interface elements with local enrichment: application to coupled hydro-mechanical problems in discretely fractured porous media. *Int J Numer Methods Engrg* 2012;90:1010–34.
- [30] Khoei AR, Haghighat E. Extended finite element modelling of deformable porous media with arbitrary interfaces. *Appl Math Modell* 2011;35:5426–41.
- [31] Rethore J, de Borst R, Abellan MA. A two-scale approach for fluid flow in fractured porous media. *Int J Numer Methods Engrg* 2007;71:780–800.
- [32] Mohammadnejad T, Khoei AR. An extended finite element method for fluid flow in partially saturated porous media with weak discontinuities; the convergence analysis of local enrichment strategies. *Comput Mech* 2013;51:327–45.
- [33] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elem Anal Des* 2000;36:235–60.
- [34] Belytschko T, Moës N, Usui S, Parimi C. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int J Numer Methods Engrg* 2001;50:993–1013.
- [35] Osher S, Sethian JA. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J Comput Phys* 1988;79:12–49.
- [36] Dufloy M. A study of the representation of cracks with the level sets. *Int J Numer Methods Engrg* 2007;70:1261–302.
- [37] Stolarska M, Chopp DL, Moës N, Belytschko T. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *Int J Numer Methods Engrg* 2001;51:943–60.
- [38] Gravouil A, Moës N, Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part II: Level set update. *Int J Numer Methods Engrg* 2002;53:2569–86.
- [39] Colombo D, Massin P. Fast and robust level set update for 3D non-planar XFEM crack propagation modelling. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 2011;200:2160–80.
- [40] Ventura G, Budyn E, Belytschko T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *Int J Numer Methods Engrg* 2003;58:1571–92.
- [41] Geniaut S, Galenne E. A simple method for crack growth in mixed mode with XFEM. *Int J Solids Struct* 2012;49:2094–106.
- [42] Colombo D. An implicit geometrical approach to level sets update for 3D non-planar XFEM crack propagation. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 2012;237–240:39–50.
- [43] Goodman RE, Taylor RL. A model for the mechanics of jointed rock. *J Soil Mech Found Div ASCE* 1968;94:637–59.
- [44] Noorishad J, Tsang CF, Witherspoon P. Theoretical and field studies of coupled hydromechanical behaviour of fractured rocks-1. Development and verification of a numerical simulator. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abst* 1992;29:401–9.
- [45] Cornec A, Scheider I, Schwalbe KH. On the practical application of the cohesive model. *Engng Fract Mech* 1963;70:1963–87.
- [46] Carrier B, Granet S. Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model. *Engng Fract Mech* 2012;79:312–28.
- [47] Khoei AR, Mohammadnejad T. Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media: a comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfall dams. *Comput Geotech* 2011;38:142–66.
- [48] Zamani A, Eslami MR. Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation. *Int J Solids Struct* 2010;47:1392–404.
- [49] Khoei AR, Moallemi S, Haghighat E. Thermo-hydro-mechanical modelling of impermeable discontinuity in saturated porous media with X-FEM technique. *Engng Fract Mech* 2012;96:701–23.
- [50] Ren Q, Dong Y, Yu T. Numerical modelling of concrete hydraulic fracturing with extended finite element method. *Sci China Ser E-Tech Sci* 2009;52:559–65.
- [51] Rethore J, de Borst R, Abellan MA. A two-scale model for fluid flow in an unsaturated porous medium with cohesive cracks. *Comput Mech* 2008;48:227–38.
- [52] Lecampion B, Desroches J. Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from horizontal wellbore. *J Mech Phys Solids* 2015;82:235–58.
- [53] Bungier AP. Analysis of the power input needed to propagate multiple hydraulic fractures. *Int J Solids Struct* 2013;50:1538–49.
- [54] Wang H. Numerical modeling of non-planar hydraulic fracture propagation in brittle and ductile rocks using XFEM with cohesive zone method. *J Petrol Sci Engrg* 2015;135:127–40.
- [55] Rabczuk T, Zi G, Gerstenberger A, Wall A. A new crack tip element for the phantom-node method with arbitrary cohesive cracks. *Int J Numer Methods Eng* 2008;75:577–99.
- [56] Barenblatt G. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv Appl Mech* 1962;7:55–130.
- [57] Dugdale D. Yielding of steel sheets containing slits. *J Mech Phys* 1960;8:100–4.
- [58] Mohammadnejad T, Khoei AR. Hydro-mechanical modeling of cohesive crack propagation in multiphase porous media using the extended finite element method. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 2013;37:1247–79.
- [59] Mohammadnejad T, Khoei AR. An extended finite element method for hydraulic fracture propagation in deformable porous medium with the cohesive crack model. *Finite Elem Anal Des* 2013;73:77–95.
- [60] Ferte G, Massin P, Moës N. 3D crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 2016;300:347–74.
- [61] Lorentz E. A mixed interface finite element for cohesive zone models. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 2008;198:302–17.
- [62] Talon C, Curnier A. A model of adhesion coupled to contact and friction. *Eur J Mech – A/Solids* 2003;22:545–65.
- [63] Witherspoon PA, Wang JSY, Iwai K, Gale JE. Validity of the cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture. *Water Resour Res* 1980;16:1016–24.
- [64] Lewis RW, Schrefler BA. The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media. 2nd edition. Chichester: Wiley; 1998.
- [65] Schaap MG, Genuchten M. A modified Mualem-van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation. *Vadose Zone J* 2006;5:27–34.

- [66] Laverne J. Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives: considérations théoriques et implantations numériques. Ph.D. thesis, Thèse de Doctorat de l'Université Paris XIII; 2004.
- [67] Debruyne G, Laverne J, Dumouchel PE. Dynamic crack growth: analytical and numerical cohesive zone model approaches from basic tests to industrial structures. *Engng Fract Mech* 2012;90:1–29.
- [68] Ferte G, Massin P, Moës N. Interface problems with linear or quadratic X-FEM: design of a stable multiplier space and error analysis. *Int J Numer Methods Engng* 2014;100:834–70.
- [69] Bechet E, Moës N, Wohlmuth B. A stable lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. *Int J Numer Methods Engng* 2009;78:931–54.
- [70] Moës N, Bechet E, Tourbier M. Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *Int J Numer Methods Engng* 2006;67:1641–69.
- [71] Mosler J. Numerical analyses of discontinuous material bifurcation: strong and weak discontinuities. *Comput Methods Appl Mech Engng* 2005;194:979–1000.
- [72] Moës N, Cloirec M, Cartraud P, Remacle JF. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comput Methods Appl Mech Engng* 2003;192:3163–77.
- [73] Belytschko T, Black T, Moës N, Sukumar N, Usui S. Structured extended finite element methods of solids defined by implicit surfaces. *Int J Numer Methods Engng* 2003;56:609–35.
- [74] Ern A, Meunier S. A posteriori error analysis of euler-galerkin approximations to coupled elliptic-parabolic problems. *ESAIM: M2AN* 2009;43:353–75.
- [75] Chessa J, Wang H, Belytschko T. On the construction of blending elements for local partition of enriched finite elements. *Int J Numer Methods Engng* 2003;57:1015–38.
- [76] Fries TP. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *Int J Numer Methods Engng* 2008;75:503–32.
- [77] Geniaut S. Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles. Ph.D. thesis, Ecole Centrale Nantes; 2006.
- [78] Moës N, Gravouil A, Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part I: Mechanical model. *Int J Numer Methods Engng* 2002;53:2549–68.
- [79] Bungier A, Detournay E, Garagash D. Toughness-dominated hydraulic fracture with leak-off. *Int J Fract* 2005;134:175–90.
- [80] Adachi J, Detournay E. Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock. *Engng Fract Mech* 2008;75:4666–94.
- [81] EDF R&D, site officiel de Code.Aster. <<http://www.code-aster.org/>>.
- [82] Coussy O. Poromechanic. John Wiley & Sons; 2004.
- [83] Detournay E. Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks. *Int J Geomech* 2004;4:1–11.
- [84] Spence DA, Sharp PW. Self-similar solution for elastohydrodynamic cavity flow. *Proc Roy Soc Lond Ser A* 1985;400:289–313.
- [85] Hu J, Garagash DI. Plane-strain propagation of a fluid-driven crack in a permeable rock with fracture toughness. *J Engng Mech* 2010;136:1152–66.
- [86] Irwin G. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *ASME Trans J Appl Mech* 1957;24:361–4.
- [87] Bilby B, Eshelby J. Dislocations and the theory of fracture. *Fracture, an advanced treatise*. New York: Academic; 1968.
- [88] Rice J. The mechanics of earthquake rupture. In: Dziewonski AM, editor. *Physics of the Earth's interior*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company; 1980.
- [89] Vandamme L, Roegiers J. Poroelasticity in hydraulic fracturing simulators. *J Pet Technol* 1957;42:1199–203.
- [90] Detournay E, Cheng A, McLennan J. A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm. *ASME J Ener Res Tech* 1990;112:224–30.
- [91] Carter E. Optimum fluid characteristics for fracture extension. *Drill Prod Pract* 1957;261–70.
- [92] Fisher MK, Heinze JR, Harris CD, Davidson BM, Wright CA, Dunn KP. Optimizing horizontal completion techniques in the Barnett Shale using microseismic fracture mapping. In: Paper SPE 90051 presented at the 2004 SPE annual technical conference and exhibition, Houston TX, September 26–29; 2004.
- [93] Cheng Y. Boundary element analysis of the stress distribution around multiple fractures: implications for the spacing of perforation clusters of hydraulically fractured horizontal wells. In: SPE 125769; 2009.
- [94] Wong SW, Geilikam M, Xu G. Interaction of multiple hydraulic fractures in horizontal wells. In: SPE 163982; 2013.
- [95] Abbas S, Gordeliy E, Peirce A, Lecampion B, Chuprakov D, Prioul R. Limited height growth and reduction opening of hydraulic fractures due to fracture offsets: an XFEM application. In: SPE 168622; 2014.
- [96] Duarte AC, Reno LG, Simone A. A high-order generalized FEM for through-the-thickness branched cracks. *Int J Numer Methods Engng* 2007;72:325–51.
- [97] Fries TP, Omerovic S. Higher-order accurate integration of implicit geometries. *Int J Numer Methods Engng*. doi: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.5121>.

Annexe C

Formulation faible linéarisée pour le modèle hydromécanique couplé.

C.1 Définition du problème

On considère une fracture cohésive Γ_c dans un domaine Ω . Le domaine Ω est poreux et saturé par une unique phase fluide dont la pression sera notée p . La pression de fluide dans la fracture cohésive sera notée p_f . Les échanges de masse depuis la fracture vers le massif au niveau des lèvres supérieure Γ_1 et inférieure Γ_2 de la fracture seront notés respectivement q_1 et q_2 . Sur le bord du domaine $\partial\Omega$, on impose:

- les déplacements $\mathbf{u}$ à zéro sur Γ_u ,
- la pression de pore p à zéro sur Γ_p ,
- des efforts surfaciques $\mathbf{t}$ sur Γ_t ,
- un flux de fluide surfacique M_{ext} sur Γ_F ,
- un flux de fluide W_{ext} à l'embouchure de la fracture cohésive Γ_f .

On notera $\mathbf{F}$ les efforts volumiques agissant sur Ω et r^{hom} la masse volumique homogénéisée de la matrice poreuse saturée. Les notations et les déplacements sont résumés sur la Figure C.1.

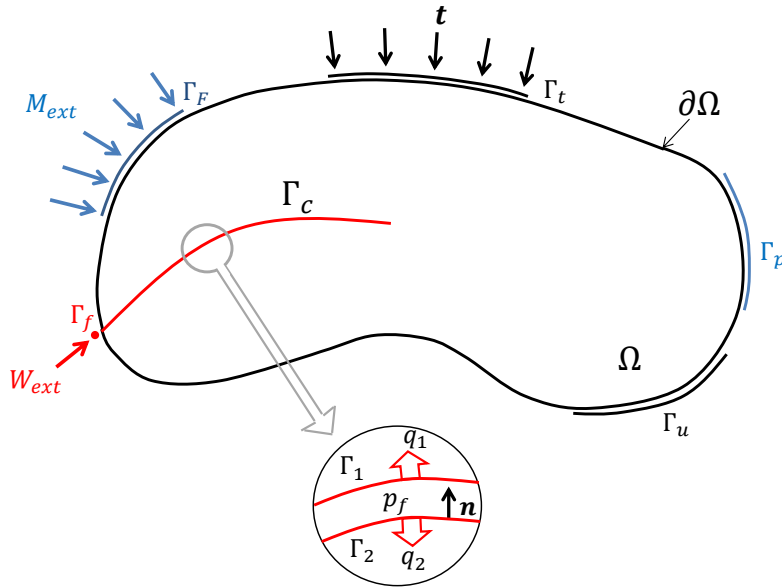


Figure C.1 – Définition du problème.

On se place dans le cadre de la théorie des contraintes effectives de Biot [127], [128], [129]. Dans la matrice poreuse, le tenseur des contraintes totales s'écrit $:\sigma = \sigma' - bp\mathbf{1}$ avec b le module de Biot et σ' le

tenseur des contraintes effectives, relié au tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ par une loi linéaire élastique. De même, la contrainte cohésive totale qui s'applique sur les lèvres de fractures s'écrit: $\mathbf{t}_c = \mathbf{t}'_c - p_f \mathbf{n}$ avec $\mathbf{t}'_c$ la contrainte cohésive effective et $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire dirigé de la matrice poreuse vers l'interface cohésive.

C.2 Equations pour le problème mécanique

La formulation faible du problème mécanique comprend 4 équations:

- l'équation d'équilibre mécanique,
- l'équation de projection du saut de déplacement,
- l'équation de projection de la contrainte cohésive,
- et l'équation de loi d'interface.

La formulation faible linéarisée de l'équation d'équilibre mécanique s'écrit:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}'(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega - \int_{\Omega} b \delta p (\mathbf{1} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*)) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \delta \boldsymbol{\mu} \cdot [\mathbf{u}^*] d\Gamma_c = & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega + \int_{\Omega} b p (\mathbf{1} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*)) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\mu} \cdot [\mathbf{u}^*] d\Gamma_c \\ & + \int_{\Omega} r^{hom} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma_t \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathbf{U}_0 \end{aligned}$$

avec: $\mathbf{U}_0 = \{\mathbf{u}^* \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{u}^* \text{ discontinu à travers } \Gamma_c \text{ et } \mathbf{u}^* = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}$.

La formulation faible linéarisée de l'équation de projection du saut de déplacement s'écrit:

$$\int_{\Gamma_c} ([\delta \mathbf{u}] - \delta \mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\mu}^* d\Gamma_c = - \int_{\Gamma_c} ([\mathbf{u}] - \mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\mu}^* d\Gamma_c \quad \forall \boldsymbol{\mu}^* \in \mathbf{M}_0 \quad (\text{C.1})$$

avec: $M_0 = \{\boldsymbol{\Lambda}^* \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)\}$.

La formulation faible linéarisée de l'équation de projection de la contrainte cohésive s'écrit:

$$- \int_{\Gamma_c} [\delta \mu_n - \frac{\partial t'_{c,n}}{\partial (\lambda_n + r w_n)} (\delta \lambda_n + r \delta w_n) + \delta p_f] \cdot w_n^* d\Gamma_c = \int_{\Gamma_c} [\mu_n - t'_{c,n} + p_f] \cdot w_n^* d\Gamma_c \quad \forall w_n^* \in M_0 \quad (\text{C.2})$$

$$- \int_{\Gamma_c} [\delta \boldsymbol{\mu}_s - \frac{\partial \mathbf{t}'_{c,s}}{\partial (\boldsymbol{\lambda}_s + r_s \mathbf{w}_s)} (\delta \boldsymbol{\lambda}_s + r_s \delta \mathbf{w}_s)] \cdot \mathbf{w}_s^* d\Gamma_c = \int_{\Gamma_c} [\boldsymbol{\mu}_s - \mathbf{t}'_{c,s}] \cdot \mathbf{w}_s^* d\Gamma_c \quad \forall \mathbf{w}_s^* \in \mathbf{M}_0 \quad (\text{C.3})$$

La formulation faible linéarisée de l'équation de loi d'interface s'écrit:

$$- \int_{\Gamma_c} \frac{1}{r} [\delta \lambda_n - \frac{\partial t'_{c,n}}{\partial \lambda_n + r w_n} (\delta \lambda_n + r \delta w_n)] \cdot \lambda_n^* d\Gamma_c = \int_{\Gamma_c} \frac{1}{r} [\lambda_n - t'_{c,n}] \cdot \lambda_n^* d\Gamma_c \quad \forall \lambda_n^* \in M_0 \quad (\text{C.4})$$

$$- \int_{\Gamma_c} \frac{1}{r \beta^2} [\delta \boldsymbol{\lambda}_s - \frac{\partial \mathbf{t}'_{c,s}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_s + r_s \mathbf{w}_s} (\delta \boldsymbol{\lambda}_s + r_s \delta \mathbf{w}_s)] \cdot \boldsymbol{\lambda}_s^* d\Gamma_c = \int_{\Gamma_c} \frac{1}{r \beta^2} [\boldsymbol{\lambda}_s - \mathbf{t}'_{c,s}] \cdot \boldsymbol{\lambda}_s^* d\Gamma_c \quad \forall \boldsymbol{\lambda}_s^* \in \mathbf{M}_0 \quad (\text{C.5})$$

Remarque: les équations mécaniques sont systématiquement écrites à l'instant "+" car elles sont indépendantes du temps.

C.3 Equations pour le problème hydrodynamique

La matrice poreuse a une perméabilité intrinsèque k^{int} supposée constante et une porosité ϕ . Les modules de compressibilité de la matrice poreuse et du fluide seront notés respectivement K_s et K_w . Le fluide a une viscosité μ supposée constante et une masse volumique notée ρ . Dans la matrice poreuse, le flux de fluide est donné par la loi de Darcy: $\mathbf{M} = -\frac{\rho k^{int}}{\mu} \nabla p$ et les apports massiques sont donnés par: $m_w = \rho \phi \epsilon_v$ avec $\epsilon_v = Tr(\epsilon)$. Dans la fracture cohésive, le flux de fluide est donné par la loi cubique $\mathbf{W} = -\rho \frac{([\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n})^3}{12\mu} \nabla p_f$ et les apports massiques sont donnés par: $w = \rho[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}$.

La formulation faible du problème hydrodynamique comprend 3 équations:

- l'équation de conservation de la masse dans le massif,
- l'équation de conservation de la masse dans l'interface cohésive,
- et les deux équations de dualisation de la condition de continuité de la pression aux niveau des lèvres de la fracture cohésive.

Les deux équations de conservation de la masse sont discrétisées en temps à l'aide d'un θ -schéma.

La formulation faible linéarisée de l'équation de conservation de la masse dans le massif, discrétisée en temps s'écrit:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \rho^+ b Tr(\nabla(\delta \mathbf{u})) p^* d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\rho^+(b - \phi^+)}{K_s} + \frac{\rho^+ \phi^+}{K_w} \right) \delta p p^* d\Omega + \Delta t \theta \int_{\Omega} -\frac{\rho^+ k^{int}}{\mu K_w} \nabla(p^+) \cdot \nabla(p^*) \delta p d\Omega \\ & + \Delta t \theta \int_{\Omega} -\frac{\rho^+ k^{int}}{\mu} \nabla(\delta p) \cdot \nabla(p^*) d\Omega + \Delta t \theta \int_{\Gamma_1} \delta q_1 p^* d\Gamma_1 + \Delta t \theta \int_{\Gamma_2} \delta q_2 p^* d\Gamma_2 = \int_{\Omega} (m_w^+ - m_w^-) p^* d\Omega \\ & - \Delta t \theta \int_{\Omega} \mathbf{M}^+ \cdot \nabla(p^*) d\Omega - \Delta t(1 - \theta) \int_{\Omega} \mathbf{M}^- \cdot \nabla(p^*) d\Omega + \Delta \theta \int_{\Gamma_F} M_{ext}^+ p^* d\Gamma_F + \Delta t(1 - \theta) \int_{\Gamma_F} M_{ext}^- p^* d\Gamma_F \\ & - \Delta t \theta \int_{\Gamma_1} q_1^+ p^* d\Gamma_1 - \Delta t(1 - \theta) \int_{\Gamma_1} q_1^- p^* d\Gamma_1 - \Delta t \theta \int_{\Gamma_2} q_2^+ p^* d\Gamma_2 - \Delta t(1 - \theta) \int_{\Gamma_2} q_2^- p^* d\Gamma_2 \quad \forall p^* \in P_0 \end{aligned}$$

avec: $P_0 = \{p^* \in H^1(\Omega) \text{ tel que } p^* \text{ discontinue à travers } \Gamma_c \text{ et } p^* = 0 \text{ sur } \Gamma_p\}$.

La formulation faible linéarisée de l'équation de conservation de la masse dans l'interface cohésive, discrétisée en temps s'écrit:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_c} [\delta \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}_c p_f^* d\Gamma_c - \int_{\Gamma_c} \frac{\rho^+ [\mathbf{u}^+] \cdot \mathbf{n}_c}{K_w} \delta p_f p_f^* d\Gamma_c + \Delta t \theta \int_{\Gamma_c} -\frac{\rho^+ ([\mathbf{u}^+] \cdot \mathbf{n}_c)^3}{12\mu K_w} \delta p_f \nabla(p_f^+) \cdot \nabla(p_f^*) d\Gamma_c \\ & + \Delta t \theta \int_{\Gamma_c} -\frac{3\rho^+}{12\mu} ([\mathbf{u}^+] \cdot \mathbf{n}_c)^2 [\delta \mathbf{u}] \cdot \nabla(p_f^+) \otimes \mathbf{n}_c \cdot \nabla(p_f^*) d\Gamma_c + \Delta t \theta \int_{\Gamma_c} -\frac{\rho^+ ([\mathbf{u}^+] \cdot \mathbf{n}_c)^3}{12\mu} \nabla(\delta p_f) \cdot \nabla(p_f^*) d\Gamma_c \\ & - \Delta t \theta \int_{\Gamma_1} \delta q_1 p_f^* d\Gamma_1 - \Delta t \theta \int_{\Gamma_2} \delta q_2 p_f^* d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_c} (w^+ - w^-) p_f^* d\Gamma_c - \Delta t \theta \int_{\Gamma_c} \mathbf{W}^+ \cdot \nabla(p_f^*) d\Gamma_c \\ & - \Delta t(1 - \theta) \int_{\Gamma_c} \mathbf{W}^- \cdot \nabla(p_f^*) d\Gamma_c + \Delta t \theta \int_{\Gamma_f} W_{ext}^+ p_f^* d\Gamma_f + \Delta t(1 - \theta) \int_{\Gamma_f} W_{ext}^- p_f^* d\Gamma_f + \Delta t \theta \int_{\Gamma_1} q_1^+ p_f^* d\Gamma_1 \\ & + \Delta t(1 - \theta) \int_{\Gamma_1} q_1^- p_f^* d\Gamma_1 + \Delta t \theta \int_{\Gamma_2} q_2^+ p_f^* d\Gamma_2 + \Delta t(1 - \theta) \int_{\Gamma_2} q_2^- p_f^* d\Gamma_2 \quad \forall p^* \in M_0 \end{aligned}$$

La formulation faible linéarisée des deux équations de dualisation de la condition d'égalité de pression au niveau des lèvres de la fracture cohésive s'écrivent:

$$\int_{\Gamma_1} \delta p q_1^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} \delta p_f q_1^* d\Gamma_1 = - \int_{\Gamma_1} (p - p_f)^+ q_1^* d\Gamma_1 \quad \forall q_1^* \in M_0 \quad (\text{C.6})$$

$$\int_{\Gamma_2} \delta p q_2^* d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_2} \delta p_f q_2^* d\Gamma_2 = - \int_{\Gamma_2} (p - p_f)^+ q_2^* d\Gamma_2 \quad \forall q_2^* \in M_0 \quad (\text{C.7})$$

Bibliographie

- [1] M. Siavelis. *Modélisation numérique X-FEM de grands glissements avec frottement le long d'un réseau de discontinuités*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2011. , [6](#), [7](#), [8](#), [11](#), [18](#), [19](#), [65](#), [67](#)
- [2] G. Ferté. *Développement de l'approche X-FEM cohésive pour la modélisation de fissures et d'interfaces avec le logiciel libre EDF R&D Code_Aster*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2014. , [8](#), [22](#), [34](#), [35](#), [36](#), [38](#), [85](#)
- [3] S. Géniaut, P. Massin, and N. Moës. A stable 3d contact formulation for cracks using xfem. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 75:259–276, 2007. , [40](#), [41](#)
- [4] G. Ferté, P. Massin, and N. Moës. Interface problems with linear or quadratic x-fem: design of a stable multiplier space and error analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 100:834–870, 2014. , [32](#), [41](#)
- [5] J. Adachi, E. Siebrits, A. Pierce, and J. Desroches. Computer simulation of hydraulic fractures. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 44:739–757, 2007. , [42](#), [43](#)
- [6] J. Adachi, E. Detournay, and A. Peirce. Analysis of the classical pseudo-3d model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 47:625–639, 2010. , [43](#), [86](#), [87](#)
- [7] G. Ferté, P. Massin, and N. Moës. 3d crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 300:347–374, 2015. , [8](#), [35](#), [49](#), [51](#), [52](#), [54](#), [55](#), [56](#), [86](#)
- [8] B. Lecampion, J. Desroches, X. Weng, J. Burghardt, and E. T. Brown. Can we engineer better multi stage horizontal completions? evidence of the importance of near-wellbore fracture geometry from theory, lab and field experiments. SPE hydraulic Fracturing Technology Conference, 2015. [2](#)
- [9] A. Bungler and A. Peirce. Numerical simulation of simultaneous growth of multiple interacting hydraulic fractures from horizontal wells. ASCE Shale Energy Engineering Conference, 2014. [3](#), [26](#)
- [10] B. Lecampion and J. Desroches. Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from a horizontal wellbore. *J. Mech. Phys. Sol.*, 82:235–258, 2015. [3](#), [65](#), [79](#)
- [11] M.W. McClure. *Modeling and characterization of hydraulic stimulation and induced seismicity in geothermal and shale gas reservoirs*. PhD thesis, Stanford University, 2012. [3](#), [26](#)
- [12] A. Noiret. *Contribution à la caractérisation du comportement géomécanique des roches couvertures des réservoirs pétroliers*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009. [3](#)
- [13] E. Karnaeva. *Amorçage et propagation des réseaux de fractures dans le contexte du stockage de CO₂*. PhD thesis, Université Paris 6, 2012. [3](#), [77](#)
- [14] L. Perrier, D. Grégoire, F. Plantier, and G. Pijaudier-cabot. Experimental and modeling investigations of adsorption-induced swelling and damage in microporous materials. *20th European Conference on Fracture (ECF20)*, pages 1263–1268, 2014. [3](#)
- [15] F. Gherardi, T. Xu, and K. Pruess. Numerical modeling of self-limiting and self-enhancing caprock alteration by CO₂ storage in a depleted gas reservoir. *Chemical Geology*, 244:103–129, 2007. [3](#)
- [16] J. Sulem and X. Li. Thermo-hydro-mechanical effects in clay host rocks for radioactive waste repositories. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 47:1–1, 2014. [4](#)
- [17] S. Levasseur, R. Charlier, B. Frieg, and F. Collin. Hydro-mechanical modeling of the excavation damaged zone around an underground excavation at Mont Terri Rock Laboratory. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 47:414–425, 2010. [4](#)
- [18] D. Cluzel and B. Vigier. Syntectonic mobility of supergene nickel ores of new caledonia (southwest pacific). *Ressource Geology*, 58:161–170, 2008. [4](#)

- [19] A. Myagkiy, M. Cathelineau, F. Golfier, L. Truche, B. Quesnel, and M. Drouillet. Defining mechanisms of brecciation in silicate bearing fractures (koniombo, new caledonia). Proceedings of the 13th Biennial SGA (Society for Geology Applied to Mineral Deposits) meeting, 2015. [5](#)
- [20] EDF R&D. *documentation Code_Aster R7.02.12: eXtended Finite Element Method*. 2016. [8](#), [14](#), [52](#)
- [21] EDF R&D. *documentation Code_Aster R7.01.10: Modélisations THHM, Généralités et algorithmes*. 2013. [8](#)
- [22] EDF R&D. *documentation Code_Aster R7.01.11: Modèles de comportement THHM*. 2013. [8](#)
- [23] EDF R&D. *documentation Code_Aster R7.01.15: Modélisation des fissures avec couplage hydro-mécanique en milieu poreux saturé*. 2013. [8](#)
- [24] B. Carrier and S. Granet. Numerical modeling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model. *Engineering Fracture Mechanics*, 79(3):312–328, 2012. [8](#), [25](#), [27](#)
- [25] A. Ern and S. Meunier. A posteriori error analysis of euler-garlekin approximations to coupled elliptic-parabolic problems. *ESAIM: M2AN*, 43:353–375, 2009. [8](#)
- [26] M. Ndeffo. *Modélisation numérique de la propagation de fissures avec des éléments 2D et 3D quadratiques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2015. [8](#), [15](#)
- [27] A. P. Bunger, E. Detournay, and D. I. Garagash. Toughness dominated hydraulic fracture with leak-off. *International Journal of Fracture*, 134 DOI 10.1007/s10704-005-0154-0:175–190, 2005. [8](#), [27](#), [41](#), [43](#)
- [28] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for numerical methods in engineering*, 46:135–150, 1999. [11](#), [14](#), [21](#)
- [29] J. M. Melenk, J. Dolbow, and I. Babuska. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 39:289–314, 1996. [11](#), [32](#), [40](#), [66](#)
- [30] E. Béchet, N. Moës, and M. Tourbier. Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:135–150, 2006. [11](#), [40](#)
- [31] E. Béchet, N. Moës, and B. Wohlmuth. A stable lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 78:931–954, 2009. [11](#), [32](#), [40](#)
- [32] D. Organ, T. Belytschko, Y. Krongauzand, and M. Fleming. Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47, 1996. [11](#)
- [33] P.A. Cundall and O.D.L Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29:47–65, 1979. [11](#)
- [34] J. Gosz and W.K. Liu. Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics*, 19:120–135, 1996. [11](#)
- [35] T.A. Cruse. Boundary element analysis in computational fracture mechanics. *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*, 1988. [11](#)
- [36] Y. Leroy and M. Ortiz. Finite element analysis of strain localization in frictional materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 13:53–74, 1989. [11](#)
- [37] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61:189–214, 1987. [11](#)
- [38] T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babuska. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 47:1401–1417, 2000. [11](#)
- [39] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 48:1549–1570, 2000. [11](#)
- [40] H. Pathak, A. Singh, and I.V. Singh. Numerical simulation of bi-material interfacial cracks using efgm and xfem. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 8:9–36, 2012. [11](#)
- [41] C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 48:1741–1760, 2000. [11](#), [17](#), [19](#)

- [42] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithm based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988. [11](#), [13](#)
- [43] J. A. Sethian. Level set methods and fast marching methods (2nd edition). 1999. [11](#)
- [44] N. Moës, A. Gravouil, and T. Belytschko. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level-sets - part ii: level set update. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 53:2569–2586, 2002. [13](#)
- [45] M. Duflo. A study of the representation of cracks with level-sets. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 70:1261–1302, 2007. [13](#)
- [46] D. Colombo and P. Massin. Fast and robust level-set update for 3d non-planar x-fem crack propagation modeling. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 200:2160–2180, 2011. [13](#)
- [47] N. Sukumar, D.L. Chopp, E. Béchet, and N. Moës. Three-dimensional non-planar crack growth by a coupled extended finite element and fast marching method. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 76:727–748, 2008. [13](#), [87](#)
- [48] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao, and M. Kang. A pde-based fast local level-set method. *Journal of Computational Physics*, 155:410–438, 1999. [13](#)
- [49] P. Brabel. *Modélisation avec la méthode X-FEM de la propagation dynamique et de l'arrêt de fissure de clivage dans un acier de cuve REP*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2007. [13](#)
- [50] P. Brabel, A. Combescure, A. Gravouil, and S. Marie. Level set x-fem non-matching meshes: application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 155:410–438, 2006. [13](#)
- [51] T. J. Barth and J. A. Sethian. Numerical schemes for the hamilton-jacobi and level-set equations on triangulated domains. *Journal of Computational Physics*, 145:1–40, 1998. [13](#)
- [52] D. Colombo. An implicit geometrical approach to level-set update for 3d non-planar x-fem crack propagation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 240:39–50, 2012. [13](#)
- [53] G. Ventura, E. Budyn, and T. Belytschko. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 58:1571–1592, 2003. [13](#)
- [54] A. Hansbo and P. Hansbo. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 193:3523–3540, 2004. [14](#)
- [55] J. Chessa, H. Wang, and T. Belytschko. On the construction of blending elements for local partition of enriched finite elements. *Int. J. Numer. Methods. Engng.*, 57:1015–1038, 2003. [15](#)
- [56] A. Simone, C.A. Duarte, and E. Van der Giessen. A generalized finite element method for polycrystals with discontinuous grain boundaries. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 67:1122–1145, 2006. [19](#), [65](#)
- [57] C.A. Duarte, L.G. Reno, and A. Simone. A high-order generalized fem for through-the-thickness branched cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 72:325–351, 2007. [19](#)
- [58] G. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. Appl. Mech.*, 24:361–364, 1957. [19](#)
- [59] E. Béchet, H. Minnebo, N. Moës, and B. Burgardt. Improved implementation and robustness study of the x-fem for stress analysis around cracks. *Int. J. Numer. Methods. Engng.*, 64(8):1033–1056, 2005. [21](#)
- [60] E. Chahine, P. Laborde, and Y. Renard. Crack-tip enrichment in the xfem method using a cut-off function. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 75:629–646, 2008. [21](#)
- [61] C.A. Duarte, I Babuska, and J.T. Oden. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, 77:215–232, 2000. [21](#)
- [62] M. Gosz and B. Moran. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:299–319, 2002. [21](#)
- [63] X.Y. Liu, Q.Z. Xiao, and B.L. Karihaloo. Xfem for direct evaluation of mixed mode sifs in homogeneous and bi-materials. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 59:1103–1118, 2004. [21](#)
- [64] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle failure. *Adv. Appl. Mech.*, 7:55–129, 1962. [22](#), [49](#)
- [65] D. Dugdale. Yelding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys.*, 8:100–104, 1960. [22](#)

- [66] A. Hillerborg, M. Modeer, and P.E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cem. Concr. Res.*, 6:163–168, 1976. [22](#)
- [67] A. Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl. Mech.*, 54:525–531, 1987. [22](#)
- [68] J. Rice. The mechanics of earthquake rupture. *Physics of the earth's interior*, pages 555–649, 1980. [22](#)
- [69] EDF R&D. *documentation Code_Aster R7.02.11: Lois de comportement cohésives et pilotage du chargement*. 2016. [22](#)
- [70] E. Lorentz. A mixed interface finite element for cohesive zone models. *Comput. Meth. Appl. Engrg.*, 198:302–317, 2008. [22](#)
- [71] EDF R&D. *documentation Code_Aster V1.01.361: Cas de découpe dégénérés pour les éléments XFEM 3D quadratiques*. 2015. [23](#)
- [72] EDF R&D. *documentation Code_Aster V6.04.246: Application d'une pression répartie sur les lèvres d'une interface XFEM courbe traversant une colonne*. 2015. [23](#)
- [73] EDF R&D. *documentation Code_Aster V6.04.247: Application d'une pression répartie sur les lèvres d'une interface XFEM courbe traversant une calotte sphérique*. 2015. [23](#), [43](#)
- [74] A. Savitsky and E. Detournay. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 39:6311–6337, 2002. [25](#)
- [75] T. Mura, H. Abe, and L. Keer. Growth-rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks. *J. Geophys. Res.*, 81:35–40, 1976. [25](#)
- [76] R. Nordgren. Propagation of a vertical hydraulic fracture. *J. Geophys. Res.*, 12:306–314, 1972. [25](#), [42](#)
- [77] X. Zhang, Z. Chen, A. Bungler, and R. Jeffrey. Escape of fluid-driven fractures from frictional bedding interfaces: a numerical investigation. *Acta Mech Solida Sinica*, 22:443–452, 2009. [25](#), [26](#)
- [78] S. Khristianovic and Y. Zheltov. Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids. *Proceedings of the 4th world petroleum congress*, 2:579–586, 1955. [25](#), [41](#), [42](#)
- [79] T. K. Perkins and L. R. Kern. Widths of fractures. *J. Pet. Technol.*, 222:937–949, 1961. [25](#), [42](#)
- [80] I. D. Palmer and H. B. Carroll. Three-dimensional hydraulic fracture propagation in the presence of stress variations. *Proceedings of the SPE/DOE/GRI unconventional gas recovery symposium, SPE/DOE 10849*, pages 870–878, 1982. [25](#), [42](#), [43](#)
- [81] J.F. Shao. Poroelastic behaviour of brittle rock materials with anisotropic damage. *Mech. Mater.*, 30:41–53, 1998. [25](#)
- [82] J.F. Shao, Y.F. Lu, and D. Lydzba. Damage modeling of saturated rocks in drained and undrained conditions. *J. Eng. Mech. ASCE*, 130:733–740, 2004. [25](#)
- [83] S. Andrieux, Y. Bamberger, and J. Marigo. Un modèle de matériau microfissuré pour les roches et les bétons. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 5:471–513, 1986. [25](#)
- [84] L. Scholtès and F. Donzé. Modelling progressive failure in fractured rock masses using a 3d discrete element method. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 52:18–30, 2012. [25](#)
- [85] M.F. Wheeler, T. Wick, and W. Wollner. An augmented-lagrangian method for the phase field approach for pressurized fractures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 271:69–85, 2014. [25](#), [49](#)
- [86] J. Noorishad, C.F. Tsang, and P. Witherspoon. Theoretical and field studies of coupled hydromechanical behaviour of fractured rocks -1. development and verification of a numerical simulator. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sciences*, 29:401–409, 1992. [25](#)
- [87] A. Cornec, I. Scheider, and K.H. Schwalbe. On the practical application of the cohesive model. *Engng. Fracture Mech.*, 70:1963–1987, 1993. [25](#)
- [88] K.J.E. Iwai, P.A. Witherspoon, J.S.Y. Wang, and J.E. Gale. Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture. *Water Ressources*, 16:1016–1024, 1980. [25](#)
- [89] A. Fumagalli and A. Scotti. A numerical method for two phase flow in fractured porous media with non-matching grids. *Advances in Water Ressources*, 62 (Part C):454–464, 2013. [25](#)
- [90] D. Owen, M. Lobao, R. Eve, and N.E.A. de Souza. Modeling of hydro-fracture flow in porous media. *Engng. Comput.*, 27:129–154, 2010. [26](#)

- [91] Y. Shen, M.J. Hunsweck, and A.J. Lew. A finite element approach to the simulation of hydraulic fractures with lag. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 37:993–1015, 2013. [26](#), [46](#), [47](#)
- [92] A. Peirce. Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 283:881–908, 2015. [26](#)
- [93] R.G. Jeffrey, X. Zhang, and M. Thiercelin. Deflection and propagation of fluid-driven fractures at frictional bedding interfaces: a numerical investigation. *Journal of Structural Geology*, 30:396–410, 2007. [26](#), [77](#)
- [94] F. Maerten. *Geomechanics to solve geological structure issues: forward, inverse and restoration modeling*. PhD thesis, Université de Montpellier II, 2010. [26](#)
- [95] M.F. Benedetto, S. Berrone, S. Pieraccini, and S. Scialo. The virtual element method for discrete fracture network simulations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 280:135–156, 2014. [26](#)
- [96] S. Berrone, S. Pieraccini, and S. Scialo. An optimization approach for large scale simulations of discrete fracture network flows. *Journal of Computational Physics*, 256:838–853, 2014. [26](#)
- [97] M.W. McClure, M. Badazadeh, and S. Shiozawa. Fully coupled hydromechanical simulation of hydraulic fracturing in three-dimensional discrete fracture network. SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, 2015. [26](#)
- [98] D. Grégoire, V. Lefort, O. Nouailletas, and G. Pijaudier-Cabot. 2d-lattice modelling of crack propagation induced by fluid injection in heterogenous quasi brittle materials. *21st European Conference on Fracture (ECF21)*, pages 2698–2705, 2016. [26](#), [49](#)
- [99] F. Jin, X. Fang, and C. Zhang. Modeling of fracture process under water pressure in crack using xfem. *Computational Mechanics ISCM*, Tsinghua University Press Springer, 2007. [26](#)
- [100] E. Haghighat, A.R. Khoei, and S. Moallemi. Extended finite element modeling of deformable porous media with arbitrary interfaces. *Applied Mathematical Modeling*, 35:5426–5441, 2011. [26](#)
- [101] E. Gordeliy and A. Peirce. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the xfem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 253:305–322, 2013. [26](#), [47](#)
- [102] E. Gordeliy and A. Peirce. Implicit level set schemes for modeling hydraulic fractures using the xfem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 266:125–143, 2013. [26](#)
- [103] T. Mohammadnejad and A.R. Khoei. An extended finite element method for hydraulic fracture propagation in deformable porous media with the cohesive crack model. *Finite Element Analysis and Design*, 73:77–95, 2013. [26](#)
- [104] T. Mohammadnejad and A.R. Khoei. Hydro-mechanical modeling of cohesive crack propagation in multiphase porous media using the extended finite element method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37:1247–1279, 2013. [26](#), [86](#)
- [105] L. Simoni and S. Secchi. Cohesive fracture mechanics for a multi-phase porous medium. *Engng. Comput.*, 20:675–698, 2003. [26](#)
- [106] A. Younes, P. Núñez, A. Makradi, Q. Shao, L. Bouhala, and S. Belouettar. An xfem model for cracked porous media: effects of fluid flow and heat transfer. *Int. J. Fracture*, 185:155–169, 2014. [26](#)
- [107] A.R. Khoei, S. Moallemi, and E. Haghighat. Thermo-hydro-mechanical modelling of impermeable discontinuity in saturated porous media with x-fem technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 96:701–723, 2012. [26](#)
- [108] A.R. Khoei and T. Mohammadnejad. Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media: a comparison between two and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfall dams. *Computers and Geotechnics*, 38:142–166, 2011. [26](#)
- [109] Q. Ren, Y. Dong, and T. Yu. Numerical modelling of concrete hydraulic fracturing with extended finite element method. *Sci. China Ser. E-Tech. Sci.*, 52:559–565, 2009. [26](#)
- [110] B. Lecampion. An extended finite element method for hydraulic fracture problems. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, DOI: 100.1002/cnm.1111, 2008. [26](#), [43](#)
- [111] E. Gordeliy and A. Peirce. Enrichment strategies and convergence properties of the xfem for hydraulic fracture problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 283:474–502, 2015. [27](#), [43](#)
- [112] E. Detournay. Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks. *International Journal of Geomechanics*, 4:35–45, 2004. [27](#), [42](#), [43](#)
- [113] J. Réthoré, R. de Borst, and M.A. Abellan. A two-scale approach for fluid flow in fractured porous media. *Int. Journal. Numer. Meth. Engng.*, 71:780–800, 2007. [27](#)

- [114] J. Réthoré, R. de Borst, and M.A. Abellan. A two-scale approach for fluid flow in an unsaturated porous medium with cohesive cracks. *Comput. Mech.*, 48:227–238, 2008. [27](#)
- [115] S. Secchi and B.A. Schrefler. Hydraulic fracturing and its peculiarities. *Asia Pacific Journal on Computational Engineering*, (1:8 doi:10.1186/2196-1166-1-8), 2014. [27](#)
- [116] L. Meirovitch. *Analytical Methods in vibrations*. McMilan Ed., 1967. [27](#), [29](#)
- [117] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.30.100: Consolidation d’une colonne de sol poro-élastique saturé (Terzaghi)*. 2013. [27](#)
- [118] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.143: Application d’une pression répartie sur les lèvres d’une interface XFEM pour le cas hydromécanique*. 2014. [30](#)
- [119] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.144: Consolidation d’une colonne de sol poro-élastique saturée et fracturée: utilisation de la méthode XFEM*. 2014. [30](#)
- [120] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.114: Flux hydrique sur un milieu poreux saturé*. 2014. [31](#)
- [121] EDF R&D. *documentation Code_Aster V6.03.118: Validation des éléments de joint et d’interface en 2D plan et 3D*. 2016. [31](#)
- [122] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.146: Validation du couplage hydromécanique dans une colonne poro-élastique saturée et traversée par une interface XFEM*. 2016. [31](#)
- [123] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.147: Validation d’un modèle de zone cohésive avec la méthode XFEM: cas de l’hydromécanique*. 2016. [31](#)
- [124] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.148: Injection de fluide dans une interface XFEM traversant une colonne poro-élastique saturée*. 2016. [31](#)
- [125] EDF R&D. *documentation Code_Aster R5.03.54: Contact en petits glissements avec X-FEM*. 2015. [33](#)
- [126] EDF R&D. *documentation Code_Aster R5.03.80: Méthodes de pilotage du chargement*. 2013. [33](#), [34](#)
- [127] M.A. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.*, 26:155–164, 1955. [39](#), [171](#)
- [128] M.A. Biot. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. *J. Appl. Phys.*, 78:91–96, 1956. [39](#), [171](#)
- [129] M.A. Biot. Theory of finite deformations of porous solids. *Indiana University Math J.*, 7:597–620, 1972. [39](#), [171](#)
- [130] EDF R&D. *documentation Code_Aster R7.02.18: Eléments hydromécaniques couplés avec XFEM*. 2016. [40](#)
- [131] S. Géniaut. *Approche X-FEM pour la fissuration sous contact des structures industrielles*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2006. [40](#)
- [132] D.A. Spence and P.W. Sharp. Self-similar solution for elasto-hydrodynamic. *Proc. R. Soc. London Ser. A.*, 400:289–313, 1985. [41](#)
- [133] E. Carter. Optimum fluid characteristics for fracture extension. *Drill Prod. Pract.*, pages 261–270, 1957. [42](#)
- [134] A.P. Bunger and E. Detournay. Experimental validation of the tip asymptotics for fluid-driven crack. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:3101–3115, 2008. [42](#)
- [135] A. Settari and M. P. Cleary. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry (p3dh). *Proceedings of the 6th SPE symposium on reservoir simulation of the Society of Petroleum Engineers, SPE 10505*, pages 185–214, 1982. [42](#)
- [136] E.V. Dontsov and A.P. Peirce. An enhanced pseudo-3d model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness. *Engineering Fracture Mechanics*, 142:116–139, 2015. [43](#)
- [137] D. Garagash and E. Detournay. The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium. *J. Appl. Mech.*, 67:183–192, 2000. [43](#)
- [138] E. carter. Optimum fluid characteristics for fracture extension. *Drill Prod. Pract.*, pages 261–270, 1957. [45](#)
- [139] Y. Kovalyshen. *Fluid-Driven Fracture in Poroelastic Medium*. PhD thesis, The University of Minnesota, 2010. [45](#)

- [140] B. Lecampion and E. Detournay. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag. *Comp. Meth. Appl. Meth. Engng.*, 196:4863–4880, 2007. [46](#)
- [141] J.R. Lister. Buoyancy-driven fluid fracture: the effects of material toughness and of low-viscosity precursors. *J. Fluid Mech.*, 210:263–280, 1990. [46](#)
- [142] R. Gracie, M. Esfahani, and M. Komijani. Dynamic hydraulically driven fracture with xfem. ECCOMAS, 2016. [47](#)
- [143] S. Géniaut and E. Galenne. A simple method for crack growth in mixed mode with xfem. *International Journal of Solids and Structures*, 49:2094–2106, 2012. [49](#)
- [144] H. M. Westergaard. Exact solution for a cracked elastic bulk: bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6:49–53, 1939. [49](#)
- [145] R. Bargellini, J. Besson, E. Lorentz, and S. Michel-Ponnelle. A non-local finite element based on volumetric strain gradient: application to ductile fracture. *Computational Materials Science*, 33:762–767, 2009. [49](#)
- [146] R. Fernandes, C. Chavant, and R. Chambon. A simplified second gradient model for dilatant materials: theory and numerical implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 45:5289–5307, 2008. [49](#)
- [147] V. Hakim and A. Karma. Laws of crack motion and phase-field models of fracture. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 57:342–368, 2009. [49](#)
- [148] C. Miehe, F. Welschinger, and M. Hofacker. Thermodynamically consistent phase field models of fracture: Variational principles and multi-field fe implementations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 83:1273–1311, 2010. [49](#)
- [149] C. Comi and U. Perego. Numerical aspects of non-local damage analyses. *Rev. Eur. Elem. Finis*, 10:227–242, 2001. [49](#)
- [150] G. Pijaudier-Cabot and Z. P. Bazant. Non local damage theory. *J. Engng. Mech.*, 113:1512–1533, 1987. [49](#)
- [151] T. Liu, P. Cao, and H. Lin. Damage and fracture evolution of hydraulic fracturing in compression-shear rock cracks. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 74:55–63, 2014. [49](#)
- [152] B.A. Schrefler, S. Secchi, and L. Simoni. On adaptative refinement techniques in multi-field problems including cohesive fracture. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 195:444–461, 2004. [49](#)
- [153] S. Secchi, L. Simoni, and B.A. Schrefler. Mesh adaptation and transfer schemes for discrete fracture propagation in porous materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31:331–345, 2007. [49](#)
- [154] S. Secchi and B.A. Schrefler. A method for 3-d hydraulic fracturing simulation. *Int. J. Fracture*, 178:245–258, 2012. [49](#)
- [155] J.M. Huygue, E.W. Remij, J.J.C. Remmers, and D.M.J Smeulders. The enhanced local pressure model for the accurate analysis of fluid pressure driven fractures in porous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 286:293–312, 2014. [49](#)
- [156] H. Wang. Numerical modeling of non-planar hydraulic fracture propagation in brittle and ductile rocks using xfem with cohesive zone method. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 135:127–140, 2015. [49](#), [58](#)
- [157] H. Wang. Numerical investigation of fracture spacing and sequencing effects on multiple hydraulic fracture interference and coalescence in brittle and ductile reservoir rocks. *Engineering Fracture Mechanics*, 157:107–124, 2016. [49](#), [59](#), [60](#)
- [158] P. Gupta and C.A. Duarte. Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation. *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 38:1397–1430, 2014. [49](#)
- [159] M.M. Rahman, M.M. Hossain, D.G. Crosby, M.K. Rahman, and S.S. Rahman. Analytical, numerical and experimental investigations of transverse fracture propagation from horizontal wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 35:127–150, 2002. [49](#)
- [160] EDF R&D. *documentation Code_Aster R7.02.13: Algorithmes de propagation de fissures avec X-FEM*. 2016. [51](#), [54](#)
- [161] D. Haboussa. *Modélisation de la transition traction cisaillement des métaux sous choc par la X-FEM*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2012. [51](#)
- [162] M. Schöllman, H. Richard, G. Kullmer, and M. Fulland. A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures. *International Journal of Fracture*, 177:129–141, 2002. [51](#)

- [163] N. Hasebe, S. Memat Nasser, and L.M. Keer. Stress analysis of a kinked crack initiating from a rigid line inclusion. part ii: direction of propagation. *Mechanics of Materials*, 3:147–156, 1984. [51](#)
- [164] F. Erdogan and G.C. Sih. On the crack extension in plane loading and transverse shear. *Journal Basic Engng.*, 85:519–527, 1963. [51](#), [58](#)
- [165] G. Ventura, R. Gracie, and T. Belytschko. Fast integration and weight function blending in the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 77:1–29, 2009. [55](#), [87](#)
- [166] M. Haddad and K. Sepehrnoori. Simulation of hydraulic fracturing in quasi-brittle shale formations using characterized cohesive layer: Stimulation controlling factors. *Journal of Unconventional Oil and Gas Resources*, 9:65–83, 2014. [59](#)
- [167] J.D. Sanders, J.E. Dolbow, and T.A. Laursen. On methods for stabilizing constraints over enriched interfaces in elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 78:1000–1036, 2009. [65](#)
- [168] A. Pouya. Three-dimensional flow in fractured porous media: a potential solution based on singular integral equations. *Advances in Water Ressources*, 35:30–40, 2012. [65](#), [69](#)
- [169] M-N. Vu. *Modélisation des écoulements dans des milieux poreux fissurés par la méthode des équations aux intégrales singulières*. PhD thesis, Université Paris Est, 2012. [65](#)
- [170] M.N. Vu, A. Pouya, and D.M. Seyed. Modelling of steady-state fluid flow in 3d fractured isotropic porous media: applications to effective permeability calculation. *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37:2257–2277, 2012. [65](#)
- [171] C. Darcel. *Corrélations dans les réseaux de fractures: caractérisation et conséquences sur les propriétés hydrauliques*. PhD thesis, Université de Rennes, 2002. [65](#)
- [172] X. Weng, O. Kress, C.E. Cohen, R. Wu, and H. Gu. Modelling hydraulic-fracture-network propagation in a naturally fractured formation. *SPE*, 26, 2011. [65](#)
- [173] A.P. Bunger. Analysis of the power input needed to propagate multiple hydraulic fractures. *International Journal of Solids and Structures*, 50:1538–1549, 2013. [65](#)
- [174] A. Dahi-Taleghani and J.E. Olson. Numerical modeling of multistranded-hydraulic-fracture propagation: accounting for the interaction between induced and natural fractures. *SPE*, 2011. [65](#)
- [175] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.145: Application d’une pression répartie sur les lèvres d’une jonction de fissure XFEM pour le cas hydromécanique*. 2015. [70](#)
- [176] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.149: Compression d’un bloc multi-fissuré avec XFEM: cas de l’hydromécanique*. 2016. [71](#)
- [177] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.150: Contact glissière dans un bloc multi-fissuré: cas de l’hydromécanique*. 2016. [71](#)
- [178] EDF R&D. *documentation Code_Aster V7.31.151: Injection d’un flux de fluide dans deux interfaces XFEM connectées au sein d’une colonne poro-élastique saturée*. 2016. [71](#)
- [179] B. Lecampion. Simultaneous initiation and propagation of multiple hydraulic fractures from a horizontal well. Centre Français de Mécanique des Roches, 2014. [79](#)
- [180] N. Moës, C. Stolz, P. E. Bernard, and N. Chevaugeon. A level set based model for damage growth: the thick level set approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 86:358–380, 2011. [85](#)
- [181] F. Dastjerdy, O. Barani, and F. Kalantary. Modeling of hydraulic fracture problem in partially saturated porous media using cohesive zone model. *Int. J. Civ. Eng.*, 13:185–194, 2015. [86](#)

Modélisation de la propagation de fractures hydrauliques par la méthode des éléments finis étendue

La perméabilité des roches est fortement influencée par la présence de fractures car ces dernières constituent un chemin préférentiel pour l'écoulement des fluides. Ainsi la présence de fractures naturelles est un facteur déterminant pour la productivité d'un réservoir. Dans le cas de roches à faible conductivité, des techniques de stimulation telle que la fracturation hydraulique sont utilisées pour en augmenter la perméabilité et rendre le réservoir exploitable d'un point de vue économique. A l'inverse, dans le cas du stockage géologique, la présence de fractures dans la roche représente un danger dans la mesure où elle facilite le transport et la migration des espèces disséminées dans la roche. Pour le stockage de CO₂, les fuites par les fractures présentes dans les couvertures du réservoir et la réactivation des failles constituent un risque majeur. Et en ce qui concerne le stockage géologique de déchets radioactifs, la circulation de fluide dans des réseaux de fractures nouvelles ou réactivées au voisinage de la zone de stockage peut aboutir à la migration de matériaux nocifs. Il est donc important de prévoir les effets de la présence de fractures dans un réservoir. Le but de cette thèse est le développement d'un outil numérique pour la simulation d'un réseau de fractures et de son évolution sous sollicitation hydro-mécanique. Grâce à sa commodité, la méthode des éléments finis étendue (XFEM) sera retenue et associée à un modèle de zone cohésive. La méthode XFEM permet en effet l'introduction de fissures dans le modèle sans nécessairement remailler en cas de propagation des fissures. L'écoulement du fluide dans la fissure et les échanges de fluide entre la fissure et le milieu poreux seront pris en compte via un couplage hydro-mécanique. Le modèle est validé avec une solution analytique asymptotique pour la propagation d'une fracture hydraulique plane dans un milieu poroélastique en 2D comme en 3D. Puis, nous étudions la propagation de fractures hydrauliques sur trajets inconnus. Les fissures sont initialement introduites comme des surfaces de fissuration potentielles étendues. Le modèle de zone cohésive sépare naturellement les domaines adhérents et ouverts. Les surfaces potentielles de fissuration sont alors actualisées de manière implicite par un post-traitement de l'état cohésif. Divers exemples de réorientation de fissures hydrauliques et de compétition entre fissures voisines sont analysés. Enfin, nous présentons l'extension du modèle aux jonctions de fractures hydrauliques.

Mots-clés: XFEM, Couplage hydro-mécanique, Fissuration, Zone cohésive, Eléments quadratiques, Fracture hydraulique.

Modeling fluid-driven cracks with the extended finite element method

The permeability of rocks is widely affected by the presence of fractures as it establishes prevailing paths for the fluid flow. Natural cracks are then a critical factor for a reservoir productiveness. For low permeability rocks, stimulation techniques such as hydrofracturing have been experienced to enhance the permeability, so that the reservoir becomes profitable. In the opposite, when it comes to geological storage, the presence of cracks constitutes a major issue since it encourages the leak and migration of the material spread in the rock. In the case of CO₂ storage, the scenario of leakage across the reservoir seal through cracks or revived faults is a matter of great concern. And as for nuclear waste storage, the fluid circulation in a fracture network around the storage cavity can obviously lead to the migration of toxic materials. It is then crucial to predict the effects of the presence of cracks in a reservoir. The main purpose of this work is the design of a numerical tool to simulate a crack network and its evolution under hydromechanical loading. To achieve this goal we chose the eXtended Finite Element Method (XFEM) for its convenience, and a cohesive zone model to handle the crack tip area. The XFEM is a meshfree method that allows us to introduce cracks in the model without necessarily remeshing in case of crack propagation. The fluid flow in the crack as well as the exchanges between the porous rock and the crack are accounted for through an hydro-mechanical coupling. The model is validated with an analytical asymptotic solution for the propagation of a plane hydraulic fracture in a poroelastic media, in 2D as well as in 3D. Then we study the propagation of hydraulic fractures on non predefined paths. The cracks are initially introduced as large potential crack surfaces so that the cohesive law will naturally separate adherent and debonding zones. The potential crack surfaces are then updated based on a directional criterion appealing to cohesive integrals only. Several examples of crack reorientation and competition between nearby cracks are presented. Finally, we extend our model to account for the presence of fracture junctions.

Keywords: XFEM, Hydro-mechanical Coupling, Fracture, Cohesive Zone Model, Quadratic Elements, Hydraulic fracture.

