Cohomologie cuspidale des champs de Chtoucas

Cong Xue

▶ **To cite this version:**

Cong Xue. Cohomologie cuspidale des champs de Chtoucas. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Paris-Saclay, 2017. Français. NNT : 2017SACLS125 . tel-01578141

HAL Id: tel-01578141
https://theses.hal.science/tel-01578141

Submitted on 28 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université PARIS-SACLAY | École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

UNIVERSITÉ PARIS SUD — Comprendre le monde, construire l'avenir — université PARIS-SACLAY

NNT : 2017SACLS125

THÈSE DE DOCTORAT

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : Université Paris-Sud

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Cong XUE

Cohomologie cuspidale des champs de chtoucas

Date de soutenance : 7 Juin 2017

Après avis des rapporteurs : DENNIS GAITSGORY (Harvard University)
YAKOV VARSHAVSKY (Hebrew University of Jerusalem)

Jury de soutenance :

GAËTAN CHENEVIER	(Université Paris-Sud) Examinateur
JEAN-FRANÇOIS DAT	(Université Paris 6) Examinateur
DENNIS GAITSGORY	(Harvard University) Rapporteur, Président
VINCENT LAFFORGUE	(Institut Fourier) Codirecteur de thèse
GÉRARD LAUMON	(Université Paris-Sud) Codirecteur de thèse
SOPHIE MOREL	(Princeton University) Examinateur
OLIVIER SCHIFFMANN	(Université Paris-Sud) Examinateur

Fondation mathématique FMJH Jacques Hadamard

université PARIS-SACLAY | École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Titre : Cohomologie cuspidale des champs de chtoucas

Résumé : Dans cette thèse, on construit le morphisme terme constant pour les groupes de cohomologie ℓ-adique à support compact des champs classifiants de G-chtoucas. Ensuite on définit la cohomologie cuspidale et on montre qu'elle est de dimension finie. De plus, on montre que la cohomologie cuspidale coïncide avec la cohomologie Hecke-finie au sens rationnel. Cette construction et les résultats ont été conjecturés par Vincent Lafforgue.

Mots-clefs : chtoucas, grassmannienne affine, cohomologie ℓ-adique, terme constant

Title : Cuspidal cohomology of stacks of shtukas

Abstract : In this thesis, we construct the constant term morphism for the ℓ-adic cohomology groups with compact support of the classifying stacks of the G-shtukas. Then we define the cuspidal cohomology and we prove that it is of finite dimension. Moreover, we show that the cuspidal cohomology coincides with the Hecke-finite cohomology in the rational sense. This construction and the results have been conjectured by Vincent Lafforgue.

Keywords : shtukas, affine grassmannien, ℓ-adic cohomology, constant term

献给我的父母

Remerciements

Je remercie tout d'abord mes directeurs, Vincent Lafforgue et Gérard Laumon, pour leur grande disponibilité, pour le partage de leurs connaissances mathématiques avec moi, pour la lecture et les corrections très soigneuses de mon manuscrit. De plus, je remercie Vincent Lafforgue pour ce sujet de thèse qui m'apporte beaucoup de joies [1]. Je remercie Gérard Laumon pour m'avoir aidé à trouver la confiance en moi.

J'exprime ma gratitude à Dennis Gaitsgory et Yakov Varshavsky pour avoir accepté d'être mes rapporteurs et pour avoir répondu à mes questions pendant la période de ma thèse.

Je remercie chaleureusement Gaëtan Chenevier, Jean-François Dat, Sophie Morel et Olivier Schiffmann pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie particulièrement Gaëtan Chenevier qui m'a soutenue constamment pendant ces années et qui m'a introduite dans ce domaine.

J'ai beaucoup bénéficié du groupe de travail sur les chtoucas organisé par Benoit Stroh et Vincent Pilloni. Je tiens à les remercier sincèrement. Je remercie François Charles pour avoir répondu à une question sur le calcul de l'adhérence d'une cellule de Schubert. Je remercie Luc Illusie et Weizhe Zheng pour m'avoir expliqué un exemple sur la torsion dans des faisceaux pervers sur la grassmannienne affine.

Je remercie vivement mes collègues du bureau 14 : Lison, Lucile, Mikolaj, Tiago et Yang ; et ma collègue Hong. De plus, je remercie mes amis du Séminaire Secret d'Orsay et mes amis du Séminaire Mathjeunes pour les moments d'enthousiasme que nous avons partagés. Je souhaite remercier aussi Maria et Benben pour notre amitié. Je remercie particulièrement Shinan et Lizao pour les nombreuses discussions excitantes et fructueuses.

Je remercie mon âme soeur Sisi pour tout ce qu'elle m'apporte. Je remercie Linxiao qui m'a accompagné pour découvrir plein de belles choses pendant la dernière année de ma thèse.

Finalement je remercie du fond de mon coeur mon parrain Richard, mes amis Marie et Jacques et ma famille pour leur soutien constant.

1. et quelques petites peines temporaires qui deviennent elles mêmes une sorte de joie

Table des matières

0.1 Les résultats 9
0.1.1 Morphisme terme constant et cohomologie cuspidale 11
0.1.2 Finitude de la cohomologie cuspidale 15
0.1.3 Cohomologie Hecke-finie et cohomologie cuspidale 16
0.2 Plan 17
0.3 Notations et conventions 18

1 Rappels sur l'équivalence de Satake géométrique et la compatibilité avec l'induction parabolique 19
1.1 Grassmannienne affine 19
1.1.1 Définition et représentabilité 19
1.1.2 Action de groupe et orbites 22
1.2 Grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld 23
1.2.1 Version globale de la grassmannienne affine 24
1.2.2 Version globale du groupe G_0 27
1.2.3 Action des groupes et strates fermées 28
1.3 Catégories de faisceaux pervers et foncteur de globalisation 29
1.3.1 Catégorie des faisceaux pervers 30
1.3.2 Foncteur de globalisation 31
1.4 Structure de factorisation et produit de fusion 32
1.4.1 Structure de factorisation 32
1.4.2 Produit de fusion 34
1.5 Équivalence de Satake géométrique pour la grassmannienne affine 35
1.5.1 Structure tannakienne 35
1.5.2 Induction parabolique pour un tore 36
1.5.3 Groupe tannakien et groupe dual 37
1.6 Extension partielle de Satake géométrique aux grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld 39
1.7 Compatibilité avec l'induction parabolique 40
1.7.1 Cas de la grassmannienne affine 40
1.7.2 Cas des grassmanniennes de Beilinson-Drinfeld 45

1.8 Démonstration de la Proposition 1.5.3 et du Théorème 1.7.4 . . . 47
1.8.1 Démonstration de la Proposition 1.5.3 47
1.8.2 Démonstration du Théorème 1.7.4 51

2 Rappel sur les champs de chtoucas 53
2.1 Comme préchamps 53
2.1.1 Définition de préchamps de chtoucas 53
2.1.2 Une autre description du préchamp de Hecke 55
2.1.3 Préchamp $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$ 58
2.1.4 Stratification de Harder-Narasimhan 59
2.1.5 Préchamps $\mathrm{Bun}_{G,N}/\Xi$ et $\mathrm{Cht}_{G,N,I}/\Xi$ 64
2.2 Comme champs algébriques 66
2.2.1 Représentabilité 66
2.2.2 Un morphisme lisse clé 68
2.3 Exemples de champs de Chtoucas 71
2.4 Correspondance de Hecke 77

3 Préparation géométrique pour le morphisme terme constant 81
3.1 Induction parabolique pour les champs de chtoucas 81
3.1.1 Comme préchamps 81
3.1.2 Quotient par Ξ 82
3.2 Troncature de Harder-Narasimhan pour le diagramme d'induction parabolique 83
3.2.1 Troncature de Harder-Narasimhan de Bun_M 83
3.2.2 Diagramme de Bun avec troncature Harder-Narasimhan . 88
3.2.3 Troncature de Harder-Narasimhan de Cht_M 90
3.2.4 Compatibilité entre deux ouverts de Harder-Narasimhan . 92
3.3 Diagramme d'induction parabolique de chtoucas et de grassmanniennes affines 95
3.3.1 Comme préchamps 95
3.3.2 Comme champs algébriques 96
3.3.3 Diagramme avec troncature de Harder-Narasimhan et quotient par Ξ 99
3.3.4 Les composants de $\mathrm{Cht}_{M,I,W}$ 99
3.4 Géométrie de morphisme $i : \mathrm{Cht}_P \to \mathrm{Cht}_G$ 102
3.5 Géométrie du morphisme $\pi : \mathrm{Cht}_P \to \mathrm{Cht}_M$ 102
3.5.1 Cas général 103
3.5.2 Situation pour μ assez grand 105

4 Morphisme terme constant et énoncés des résultats principaux 107
4.1 Cohomologie des champs de chtoucas . . . 107
4.1.1 Remarques sur $[G_{I,0}\backslash Gr_{G,I,W}]$ . . . 108
4.1.2 Faisceau pervers sur $\mathrm{Cht}_{G,I,N,W}/\Xi$ . . . 109
4.1.3 Faisceaux de cohomologie pour $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$ . . . 111
4.1.4 Faisceau pervers sur $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}/\Xi$ et faisceau de cohomologie pour $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}/\Xi$ . . . 112
4.2 Construction du morphisme terme constant . . . 115
4.2.1 Morphisme entre faisceaux pervers . . . 115
4.2.2 Morphisme entre faisceaux de cohomologie . . . 121
4.2.3 Morphisme terme constant . . . 122
4.3 Définition de la cohomologie cuspidale . . . 126
4.4 Définition de cohomologie Hecke-finie . . . 127
4.4.1 Action des algèbres de Hecke (correspondance cohomologique) . . . 127
4.4.2 Cohomologie Hecke-finie . . . 128
4.5 Énoncé des résultats . . . 129

5 Géométrie des horosphères 130
5.1 Étape 1 : première réduction . . . 131
5.2 Étape 2 : fibres de $\mathrm{Bun}_{P,N} \to \mathrm{Bun}_{M,N}$ . . . 133
5.2.1 Le cas sans niveau . . . 133
5.2.2 Filtration canonique de U . . . 135
5.2.3 Un lemme d'annulation de H^1 . . . 136
5.2.4 Démonstration du lemme 5.2.9 . . . 138
5.2.5 Démonstration du lemme 5.2.10 . . . 140
5.2.6 Le cas avec niveau . . . 141
5.3 Étape 3 : égalisateur . . . 144
5.4 Remarques . . . 145
5.5 Exemples . . . 146

6 Cohomologie des horosphères 149
6.1 Notations et énoncé cohomologique . . . 149
6.2 Démonstration de la proposition 6.1.1 . . . 150
6.2.1 De la géométrie à la cohomologie : morphisme i . . . 151
6.2.2 De la géométrie à la cohomologie : morphisme π . . . 151
6.2.3 Démonstration de la proposition 6.1.1 . . . 153
6.3 Démonstration du lemme 6.2.5 . . . 153
6.3.1 Réduction à un énoncé local . . . 153
6.3.2 Cohomologie d'espaces fibrés de fibre un groupe unipotent 154
6.3.3 Remarques . . . 156

6.4 Exemples 156

7 Cohomologie cuspidale est de dimension finie 157
7.1 Principe de la construction de l'ensemble Ω_G 158
7.2 Préparations concernant la limite inductive 160
7.2.1 Rappels sur les composants de Cht_M 160
7.2.2 Suite exacte longue de cohomologie et morphisme terme constant 161
7.2.3 Strates localement fermées 166
7.3 Début de la récurrence : rang 0 167
7.4 Du rang $r-1$ au rang r : constante C_G^0, propriétés a) et b) 168
7.5 Pour rang r : constante C_G et propriété c) 172
7.5.1 Quelques résultats généraux sur les limites inductives . . . 172
7.5.2 Démonstration du lemme 7.5.1 173
7.6 Conclusion et remarques 175
7.7 Illustration dans le cas GL_2, GL_3 et GL_4 177
7.7.1 Cas de GL_2 177
7.7.2 Cas de GL_3 178
7.7.3 Cas de GL_4 181

8 Cohomologie cuspidale et cohomologie Hecke-finie rationnelle 186
8.1 Préparation 186
8.2 Démonstration de la proposition 192
8.2.1 La cohomologie cuspidale est Hecke-finie rationnelle . . . 192
8.2.2 La cohomologie Hecke-finie rationnelle est cuspidale 192
8.3 Remarques et exemples 196

A Rappels pour les chapitres 1 et 2 197
A.1 Quelques notations pour les G-torseurs 197
A.2 Quelques notations pour les ind-schémas 200
A.2.1 Ind-schémas 200
A.2.2 Action de groupe 201
A.2.3 Catégorie des faisceaux pervers 202
A.3 Action de groupe sur les préchamps 203

B Un lemme sur morphisme de carré cartésien 205

C Rappels pour le chapitre 5 208
C.1 Une filtration canonique de U 208
C.2 Le schéma en groupes $U_{\mathcal{F}_M}$ 209
C.3 Catégorie de $U_{\mathcal{F}_M}$-torseurs 210

Introduction

0.1 Les résultats

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p. Soit X une courbe projective lisse géométriquement irréductible sur $\mathbb{F}_q$ et F son corps de fonctions. Soit G un groupe réductif connexe déployé sur $\mathbb{F}_q$.

Notons $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et $\mathbb{O}$ l'anneau des adèles entiers. Soit N un niveau, c'est-à-dire qu'un sous-schéma fini de X. Notons $\mathcal{O}_N$ l'anneau des fonctions sur N et $K_N := \mathrm{Ker}(G(\mathbb{O}) \to G(\mathcal{O}_N))$ le sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A})$ associé à N.

Notons Z le centre de G. Soit Ξ un sous-groupe discret de $Z(\mathbb{A})$ tel que le quotient $Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})/Z(\mathbb{O})\Xi$ soit fini. Alors le volume de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\Xi$ est fini. On note $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{C})$ l'espace des formes automorphes de niveau N. Pour tout parabolique $P \subsetneq G$, notons U le radical unipotent. Notons $M_P := P/U$ (ou simplement M quand il n'y a pas d'ambiguïté). Alors on a le morphisme terme constant :

$$C_G^P : C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{C}) \to C(U(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{C})$$

$$f \quad \mapsto \quad f^P : g \mapsto \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(ug)du.$$

Une fonction f est dite cuspidale si pour tout P comme ci-dessus, le terme constant f^P est nul. On note $C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions cuspidales.

L'espace des formes automorphes $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{C})$ est muni d'une action de l'algèbre de Hecke $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{C})$ par produit de convolution à droite. Une fonction f est dite Hecke-finie si $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{C}) \cdot f$ est de dimension finie. Notons $C_c^{\mathrm{Hf}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions Hecke-finies.

On a

Théorème 0.1.1. *(Harder, [Har74]) L'espace $C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathbb{C})$ est de dimension finie.*

Proposition 0.1.2. *(V. Lafforgue, [Laf12], Prop 8.23) Les espaces suivants sont égaux :*

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi,\mathbb{C}) = C_c^{\mathrm{Hf}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi,\mathbb{C}).$$

Plus généralement, on considère les champs classifiants des G-chtoucas, qui ont été introduits par Drinfeld dans [Dri87] pour $G = GL_r$ dans le cas de deux pattes et par Varshavsky dans [Var04] en général. Soient G et N comme avant, I un ensemble fini et W_i une représentation de $\widehat{G}$ pour chaque $i \in I$, où $\widehat{G}$ est le groupe dual de Langlands de G. On définit un champ classifiant les G-torseurs sur X avec niveau N, muni d'un isomorphisme avec son image inverse par Frobenius en dehors d'un ensemble fini $(x_i)_{i\in I}$ de points de X appelés les pattes, tel que la position relative en chaque patte x_i soit bornée par W_i. On note ce champ $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$, avec $W := \boxtimes_i W_i$. Le cas de Drinfeld correspond à $G = GL_r$, avec $I = \{1,2\}$, $W_1 = St$ la représentation standard de GL_r et $W_2 = St^*$ la représentation duale.

Dans [Var04] et [Laf12], Varshavsky et Vincent Lafforgue ont considéré la cohomologie ℓ-adique de champ de G-chtoucas pour ℓ un nombre premier différent de p. Plus précisément, ils ont considéré les groupes de cohomologie à support compact $H^j_{G,N,I,W}$, avec $j \in \mathbb{Z}$, pour le complexe d'intersection ℓ-adique de $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$. En particulier, quand $I = \emptyset$ (donc W est trivial), on a $H^0_{G,N,\emptyset,1} = C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi,\mathbb{Q}_\ell)$.

D'un coté, pour tout parabolique P et $M := M_P$, on peut définir les champs des P-chtoucas et les champs des M-chtoucas. Les morphismes $G \hookleftarrow P \twoheadrightarrow M$ induisent une correspondance entre les champs des chtoucas pour G et M. Grâce à cette correspondance on peut construire un morphisme terme constant de la cohomologie du champ des G-chtoucas à la cohomologie du champ des M-chtoucas. Ainsi on peut définir la partie cuspidale $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ de $H^j_{G,N,I,W}$ comme l'intersection des noyaux des morphismes terme constant pour tout parabolique propre.

D'un autre coté, le groupe de cohomologie $H^j_{G,N,I,W}$ est muni d'une action des opérateurs de Hecke. Une classe de cohomologie c est dite Hecke-finie (au sens rationnel) si $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N,\mathbb{Q}_\ell)\cdot c$ est de dimension finie. Notons $H^{j,\,\text{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ le sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace des classes Hecke-finies au sens rationnel.

De plus, les actions de opérateurs de Hecke commutent avec le morphisme terme constant.

Vincent Lafforgue a conjecturé que

- la cohomologie cuspidale est de dimension finie donc est Hecke-finie ;
- la cohomologie Hecke-finie est inclue dans la cohomologie cuspidale.

Dans cette thèse, on va montrer que la conjecture est vraie :

Théorème 0.1.3. *Le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ est de dimension finie. Et les deux sous-espaces vectoriels $H^{j,\,\text{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ et $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ sont égaux.*

Dans la suite de cette section, on va décrire la construction de morphisme terme constant. Puis on définit la cohomologie cuspidale et on énonce des résultats plus détaillés. Pour simplifier, on considère seulement le cas sans niveau. On a les résultats analogues avec niveau.

0.1.1 Morphisme terme constant et cohomologie cuspidale

Maintenant soit G' un groupe réductif ou un sous-groupe parabolique d'un groupe réductif. Soit I un ensemble fini. Commençons par la définition du champ de chtoucas sans borne sur la position relative :

Définition 0.1.4. (champ de G'-chtoucas) On note $\mathrm{Cht}_{G',I}$ le préchamp qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde $\mathrm{Cht}_{G',I}(S)$ qui classifie la donnée de
i) $x_i \in X(S)$ pour $i \in I$,
ii) $\mathcal{G} \in \mathrm{Bun}_{G'}(S)$,
iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} {}^{\tau}\mathcal{G}\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})},$$

où on note ${}^{\tau}\mathcal{G} := (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{G}$ et on note Γ_{x_i} le graphe de $x_i : S \to X$ dans $X \times S$.

Le champ des chtoucas a un "modèle local" comme suit :

Définition 0.1.5. (grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld, [BD99]) On note $\mathrm{Gr}_{G',I}$ le préfaisceau qui associe à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ l'ensemble $\mathrm{Gr}_{G',I}(S)$ qui classifie la donnée de
i) $x_i \in X(S)$ pour $i \in I$,
ii) G'-torseurs $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$, où on note $\Gamma_{\sum \infty x_i}$ le voisinage formel de $\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i}$ dans $X \times S$,
iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}_1\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_2\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})},$$

où le sens de l'isomorphisme sur $\Gamma_{\sum\infty x_i} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})$ sera défini dans le chapitre 1.
iv) une trivialisation $\theta : \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\sim} G'$ sur $\Gamma_{\sum\infty x_i}$.

Définissons $G'_{I,\mathcal{O}}$ comme le préfaisceau sur X^I qui classifie le groupe des automorphismes du G'-torseur trivial sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$. Notons $[G'_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G',I}]$ le quotient au sens des champs. Dans [Laf12], Vincent Lafforgue a considéré un morphisme :

$$\epsilon_{G'} : \quad \mathrm{Cht}_{G',I} \quad \to \quad [G'_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G',I}]$$

$$(\phi : \mathcal{G} \to {}^{\tau}\mathcal{G}) \mapsto (\phi\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} \to {}^{\tau}\mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}})$$

et il a montré que ce morphisme est formellement lisse (voir les rappels sur ce fait dans le chapitre 2).

En appliquant les deux définitions au groupe réductif G, on obtient $\mathrm{Cht}_{G,I}$ et $\mathrm{Gr}_{G,I}$. Soit W une représentation de $\widehat{G}^I$. On peut définir un sous-schéma fermé $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ dans $\mathrm{Gr}_{G,I}$ en bornant la position relation par W. En particulier, quand I est un singleton et W la représentation irréductible de $\widehat{G}$ de plus haut poids λ, le sous-schéma fermé $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ est l'adhérence dans $\mathrm{Gr}_{G,I}$ de (la globalisation sur X de) la cellule de Schubert définie par λ. On peut généraliser cette définition à tout I et W.

Ensuite on définit le sous-champ fermé $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ de $\mathrm{Cht}_{G,I}$ comme l'image inverse de $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ par le morphisme ϵ_G.

De plus, d'après Satake géométrique dans [MV07], on peut associer fonctoriellement à tout W un faisceau pervers à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ (à décalage près) $G_{I,\mathcal{O}}$-équivariant $\mathcal{S}_{G,I,W}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I}$. Lorsque W est irréductible, ce faisceau pervers est isomorphe au complexe d'intersection de $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$.

Comme le morphisme ϵ_G est lisse, l'image inverse de $\mathcal{S}_{G,I,W}$ (vu comme faisceau pervers sur $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I}]$) par le morphisme ϵ_G est un faisceau pervers (à décalage près) sur $\mathrm{Cht}_{G,I}$. On note ce faisceau pervers $\mathcal{F}_{G,I,W}$. Lorsque W est irréductible, $\mathcal{F}_{G,I,W}$ est isomorphe au complexe d'intersection de $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$.

En appliquant la définition 0.1.4 aux groupes P et M, on peut définir les champs $\mathrm{Cht}_{P,I}$ et $\mathrm{Cht}_{M,I}$ sur X^I. Soit W une représentation de $\widehat{G}^I$. Les morphismes $G \hookleftarrow P \twoheadrightarrow M$ induisent une correspondance (où $\mathrm{Cht}_{P,I,W}$ est défini comme l'image inverse de $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ par $\mathrm{Cht}_{P,I} \to \mathrm{Cht}_{G,I}$ et $\mathrm{Cht}_{M,I,W}$ est défini en restreignant W de $\widehat{G}^I$ à $\widehat{M}^I$) :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Cht}_{P,I,W} & & \\ & \overset{i}{\swarrow} & \downarrow & \overset{\pi}{\searrow} & \\ \mathrm{Cht}_{G,I,W} & & & & \mathrm{Cht}_{M,I,W} \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & X^I & & \end{array} \tag{0.1.1}$$

Le morphisme π est de type fini. Ainsi on peut définir un complexe $\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,I,W}$ dans $D_c^b(\mathrm{Cht}_{M,I,W})$.

Construction 0.1.6. On construit un morphisme de complexes dans $D_c^b(\mathrm{Cht}_{M,I,W})$:

$$\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,I,W} \to \mathcal{F}_{M,I,W}.$$

Pour cela, on utilise deux ingrédients :

- la compatibilité de Satake géométrie avec l'induction parabolique. Précisément, pour la correspondance de grassmanniennes de Beilinson-Drinfeld :

$$\mathrm{Gr}_{G,I,W} \xleftarrow{i^0} \mathrm{Gr}_{P,I,W} \xrightarrow{\pi^0} \mathrm{Gr}_{M,I,W},$$

on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{S}_{M,I,W} \xrightarrow{\sim} (\pi^0)_! (i^0)^* \mathcal{S}_{G,I,W}.$$

- le diagramme commutatif au-dessus de X^I :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cht}_{G,I,W} & \xleftarrow{\ i\ } & \mathrm{Cht}_{P,I,W} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathrm{Cht}_{M,I,W} \\
\downarrow{\scriptstyle \epsilon_G} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_P} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_M} \\
[G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \longleftarrow & [P_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}] & \longrightarrow & [M_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}]
\end{array} \tag{0.1.2}$$

Maintenant considérons la cohomologie ℓ-adique des champs des chtoucas comme dans [Laf12]. Pour cela, on se restreint au diagramme suivant, où $\overline{\eta^I}$ est un point générique géométrique de X^I et Ξ est comme avant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{Cht}_{P,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi & & \\
 & \swarrow^{i} & \downarrow & \searrow^{\pi} & \\
\mathrm{Cht}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi & & & & \mathrm{Cht}_{M,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \overline{\eta^I} & &
\end{array} \tag{0.1.3}$$

Le champ $\mathrm{Cht}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford qui n'est pas nécessairement de type fini. Néanmoins, il est limite inductive des sous-champs ouverts définis par les troncatures Harder-Narasimhan, qui sont de type fini. Ainsi, pour tout entier j, on peut définir $H^j_{G,I,W}$ comme la limite inductive

des groupes de cohomologie à support compact en degré j de faisceau pervers $\mathcal{F}_{G,I,W}$ restreint sur ces sous-champs ouverts.

La cohomologie ℓ-adique à support compact d'un champ de Deligne-Mumford de type fini est de dimension finie. Donc $H^j_{G,I,W}$ est la limite inductive de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie. Mais $H^j_{G,I,W}$ n'est pas nécessairement de dimension finie.

En revanche, le champ $\mathrm{Cht}_{M,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford qui a une infinité de composants connexes (on remarque que Ξ est un réseau dans $Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$ mais pas un réseau dans $Z_M(F)\backslash Z_M(\mathbb{A})$). On peut d'abord définir le groupe de cohomologie composante par composante, pour chaque composante connexe on fait la même chose que pour G. Ensuite on définit $H^j_{M,I,W}$ comme la somme directe pour toutes les composants connexes, complétée dans la direction du cône engendré par les coracines simples de G moins celles de M.

D'après [Var04], le morphisme $i : \mathrm{Cht}_{P,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi \to \mathrm{Cht}_{G,I,W,\overline{\eta^I}}/\Xi$ dans le diagramme commutatif (0.1.3) est propre composante par composante. En appliquant la correspondance cohomologique de [SGA5] III 3 à ce diagramme et au morphisme de complexes de faisceaux $\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,I,W} \to \mathcal{F}_{M,I,W}$, on obtient un morphisme pour tout degré j :

$$\mathcal{C}_G^{P,\,j} : H^j_{G,I,W} \to H^j_{M,I,W}.$$

On l'appelle morphisme terme constant pour le parabolique P.

(Techniquement, pour construire ce morphisme on construit d'abord des morphismes pour les groupes de cohomologie de sous-champs ouverts de Harder-Narasimhan.)

Définition 0.1.7. Pour tout j, on définit la cohomologie cuspidale comme :

$$H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,I,W} := \bigcap_{P \subsetneq G} \mathrm{Ker}\, \mathcal{C}_G^{P,\,j}.$$

C'est un sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de $H^j_{G,I,W}$.

Remarque 0.1.8. Quand $I = \emptyset$ (donc W est trivial), on a $H^j_{G,\emptyset,1} = 0$ si $j \neq 0$ et $H^0_{G,\emptyset,1} = C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O})\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$. Dans ce cas, le morphisme terme constant $\mathcal{C}_G^{P,\,0}$ pour la cohomologie coïncide avec le morphisme terme constant $\mathcal{C}_G^P$ pour les fonctions. Et on a l'égalité

$$H^{0,\,\mathrm{cusp}}_{G,\emptyset,1} = C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O})\Xi, \mathbb{Q}_\ell).$$

0.1.2 Finitude de la cohomologie cuspidale

Pour montrer que la cohomologie cuspidale est de dimension finie, on montre d'abord la contractibilité des fibres du morphisme de restriction de P à M pour les champs de chtoucas restreints sur les strates assez profondes.

Pour un W fixé, l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ se factorise par un quotient qui est un schéma en groupes de dimension fini noté $G_{I,\underline{d}}$. On peut remplacer $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ par $[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ dans le diagramme (0.1.2), de même pour P et M. Notons

$$\widetilde{\mathrm{Cht}_{M,I,W}} := \mathrm{Cht}_{M,I,W} \underset{[M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I}]}{\times} [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I}].$$

Le diagramme commutatif (0.1.2) induit un morphisme de champs :

$$\pi_{\underline{d}} : \mathrm{Cht}_{P,I,W} \to \widetilde{\mathrm{Cht}_{M,I,W}}.$$

Théorème 0.1.9. *(Énoncé géométrique) Les fibres du morphisme $\pi_{\underline{d}}$ restreint sur les strates de Harder-Narasimhan assez profondes (pour P) sont contractibles.*

Précisément, on va montrer que localement pour la topologie lisse, $\mathrm{Cht}_{P,I,W}$ est un espace fibré sur $\widetilde{\mathrm{Cht}_{M,I,W}}$ de fibre un schéma en groupes unipotents sur le champ classifiant d'un autre schéma en groupes unipotents.

Ensuite, d'après [Var04], la restriction du morphisme i dans le diagramme (0.1.3) sur les strates assez profondes est un presque-isomorphisme (c'est-à-dire schématique, fini, bijectif et universellement injectif). On montrera que ce fait et la contractibilité ci-dessus entraînent un isomorphisme pour le morphisme terme constant restreint sur les strates assez profondes :

Proposition 0.1.10. *(Énoncé cohomologique) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la restriction du morphisme terme constant $\mathcal{C}_G^{P,\,j} : H^j_{G,I,W} \to H^j_{M,I,W}$ sur les strates assez profondes (pour P) est un isomorphisme.*

Finalement, on montrera la finitude de la cohomologie cuspidale à l'aide de la proposition suivante, qui est une conséquence de la proposition 0.1.10 :

Proposition 0.1.11. *Soit G un groupe réductif. Il existe un sous-champ ouvert de $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ de type fini, tel que toutes les classes de cohomologie dans $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,I,W}$ proviennent de la cohomologie de ce sous-champ ouvert.*

Comme le groupe de cohomologie à support compact d'un champ de Deligne-Mumford de type fini est de dimension fini, on en déduit que $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,I,W}$ est de dimension finie.

Remarque 0.1.12. En utilisant cette proposition, on montre aussi que pour tout sous-champ ouvert de $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ défini par la troncature de Harder-Narasimhan à l'aide d'un copoids assez loin de tous les murs, et pour tout degré j, le morphisme du groupe de cohomologie de cet ouvert vers la limite inductive $H^j_{G,I,W}$ est injectif.

0.1.3 Cohomologie Hecke-finie et cohomologie cuspidale

Chaque fonction f dans l'algèbre de Hecke $C_c(G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell)$ donne une correspondance cohomologique de support :

$$\mathrm{Cht}_{G,I,W}/\Xi\big|_{\eta^I} \longleftarrow \Gamma(f) \longrightarrow \mathrm{Cht}_{G,I,W}/\Xi\big|_{\eta^I}$$

où les deux morphismes sont finis étales. L'algèbre de Hecke $C_c(G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell)$ agit sur $H^j_{G,I,W}$ grâce à ces correspondances.

Une classe de cohomologie c dans $H^j_{G,I,W}$ est dite Hecke-finie au sens rationnel si l'espace $C_c(G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell) \cdot c$ est de dimension finie. Notons $H^{j,\,\text{Hf-rat}}_{G,I,W}$ le sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace de $H^j_{G,I,W}$ des classes de cohomologie Hecke-finies au sens rationnel.

De même, l'algèbre de Hecke $C_c(M(\mathbb{O})\backslash M(\mathbb{A})/M(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell)$ agit sur $H^j_{M,I,W}$. De plus, on a un morphisme terme constant des algèbres de Hecke :

$$C_c(G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell) \to C_c(M(\mathbb{O})\backslash M(\mathbb{A})/M(\mathbb{O}), \mathbb{Q}_\ell).$$

On vérifie que l'action des algèbres de Hecke commute avec le morphisme terme constant des groupes de cohomologie et donc préserve la cohomologie cuspidale. Par conséquence, la finitude de la cohomologie cuspidale implique que $H^{j,\,\text{cusp}}_{G,I,W}$ est inclus dans $H^{j,\,\text{Hf-rat}}_{G,I,W}$. On montrera que

Théorème 0.1.13. *L'inclusion $H^{j,\,\text{cusp}}_{G,I,W} \subset H^{j,\,\text{Hf-rat}}_{G,I,W}$ est une égalité.*

Remarque 0.1.14. Dans [Laf12], Vincent Lafforgue a considéré le sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^{j,\,\text{Hf}}_{G,I,W}$ de $H^j_{G,I,W}$: une classe de cohomologie c est dite Hecke-finie si le sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module $C_c(G(\mathbb{O})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}), \mathbb{Z}_\ell) \cdot c$ de $H^j_{G,I,W}$ est de type fini.

Par définition, on a $H^{j,\,\text{Hf}}_{G,I,W} \subset H^{j,\,\text{Hf-rat}}_{G,I,W}$. Ainsi le théorème précédent implique que

$$H^{j,\,\text{Hf}}_{G,I,W} \subset H^{j,\,\text{cusp}}_{G,I,W}.$$

Comme conséquence, $H^{j,\,\text{Hf}}_{G,I,W}$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie. On conjecture que l'inclusion ci-dessus est une égalité.

0.2 Plan

Les deux premières parties ne contiennent que des rappels.

Dans le chapitre 1, nous rappelons l'équivalence de Satake géométrique de [MV07] et [BD99] pour les grassmanniennes de Beilinson-Drinfeld, surtout sa compatibilité avec l'induction parabolique, c'est-à-dire l'isomorphisme $\mathcal{S}_{M,I,W} \xrightarrow{\sim} (\pi^0)_!(i^0)^*\mathcal{S}_{G,I,W}$ (à décalage près).

Le chapitre 2 contient des rappels sur les champs de chtoucas. Nous rappelons les définitions des champs de chtoucas, la stratification de Harder-Narasimhan et la construction du morphisme formellement lisse $\mathrm{Cht}_{G,I} \to [G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I}]$.

Dans le chapitre 3, nous construisons le diagramme de l'induction parabolique pour les champs de chtoucas et le diagramme (0.1.2). Nous définissons une troncature au sens de Harder-Narasimhan pour les champs des M-chtoucas qui est compatible avec l'induction parabolique.

Dans le chapitre 4, nous rappelons d'abord la cohomologie des champs des chtoucas. Ensuite nous construisons le morphisme terme constant à l'aide des chapitres 1 et 3. Nous définissons la cohomologie cuapidale et la cohomologie Hecke-finie et nous énonçons les résultats principaux de la thèse.

Ensuite nous passons aux démonstrations.

Les chapitres 5-7 sont consacrés à la démonstration de la finitude de la cohomologie cuspidale.

Le chapitre 5 a pour but de montrer que la fibre du morphisme $\pi_{\underline{d}}$ restreint sur les strates de Harder-Narasimhan assez profondes est contractible. Pour cela, nous rappelons le fait que la restriction du morphisme $\mathrm{Bun}_P \to \mathrm{Bun}_M$ sur les strates de Harder-Narasimhan assez profondes est contractible. Ensuite nous l'appliquons au morphisme $\pi_{\underline{d}}$.

Dans le chapitre 6, nous présentons une conséquence cohomologie du chapitre 5. Nous montrons que la restriction du morphisme terme constant aux strates assez profondes est un isomorphisme.

Dans le chapitre 7, nous montrons la finitude de la cohomologie cuspidale à l'aide de l'isomorphisme dans chapitre 6. Nous montrons la proposition 0.1.11 par récurrence sur le rang semi-simple de groupe réductif.

Le chapitre 8 a pour but de montrer l'égalité entre la cohomologie cuspidale et la cohomologie Hecke-finie (au sens rationnel) en utilisant la finitude de la cohomologie cuspidale et les propriétés du morphisme terme constant montrées dans les chapitres précédents.

0.3 Notations et conventions

Soit G un groupe réductif connexe déployé sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.

1) On note Z_G le centre de G. On note G^{ad} le groupe adjoint de G (égal à G/Z_G).

2) On note $\widehat{G}$ le groupe réductif déployé sur $\mathbb{Q}_\ell$ dont les racines et les poids sont les coracines et les copoids de G, et vice-versa.

3) Notons $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement naturel entre les poids et les copoids. On note Λ_G le réseau des poids de G et $\widehat{\Lambda}_G$ le réseau des copoids de G. $\widehat{\Lambda}_G$ coïncide avec $\Lambda_{\widehat{G}}$.

4) Soit T un tore. On note $X^*(T) := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ et $X_*(T) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$. Si T est un tore maximal de G, alors $X^*(T) = \Lambda_G$, $X_*(T) = \widehat{\Lambda}_G$.

5) On fixe un Borel $B \subset G$, on note Λ_G^+ le réseau des poids dominants de G. On note ρ_G la demi somme des racines positives.

6) On a $\pi_1(G) \simeq X_*(T)/X_*(T^{\mathrm{sc}})$ (le quotient du réseau des copoids par le réseau des coracines). Il est canoniquement isomorphe au groupe des caractères de $Z_{\widehat{G}}$ (que l'on note $Z_{\widehat{G}}^\vee$).

7) On note Γ_G l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin de G. Les paraboliques dans G sont en bijection avec les sous-ensembles de Γ_G. Pour un parabolique P avec quotient de Levi M, on note $\Gamma_M \subset \Gamma_G$ l'ensemble correspondant. L'ensemble Γ_M s'identifie avec l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin de M.

8) Pour tout $i \in \Gamma_G$, on note $\check{\alpha}_i$ la racine simple de G correspondante à i.

Chapitre 1

Rappels sur l'équivalence de Satake géométrique et la compatibilité avec l'induction parabolique

Dans les sections 1 et 2, on suppose que G est un groupe algébrique affine connexe sur $\mathbb{F}_q$ (sauf mention spécifique). Dans les sections 3-8, on suppose de plus que G est réductif déployé.

On renvoie à l'annexe A.1 pour des notations concernant les G-torseurs et à l'annexe A.2 pour les notations concernant les ind-schémas.

Dans les sections 1-4, on rappelle quelques constructions et propriétés de [BD99], [Gai01] et [MV07]. Dans la section 5, on rappelle l'énoncé de Satake géométrique pour la grassmannienne affine d'après [MV07]. Dans la section 6, on rappelle une extension partielle de Satake géométrique pour les grassmanniennes de Beilinson-Drinfeld dans [Gai07] et [Laf12]. Dans la section 7, on rappelle la compatibilité de Satake géométrique avec l'induction parabolique dans [BD99] et [BG02], qui joue un rôle crucial pour la suite. Dans la section 8, on rappelle et on complète la démonstration dans [BD99] et [MV07] pour la proposition 1.5.3 et du théorème 1.7.9.

1.1 Grassmannienne affine

Dans cette section on suppose que $k = \overline{\mathbb{F}_q}$.

1.1.1 Définition et représentabilité

Soit R une k-algèbre commutative et $S = \operatorname{Spec} R$. Un fibré vectoriel sur $\operatorname{Spec} R[[t]]$ est un $R[[t]]$-module M projectif et de type fini. On a $M \simeq \varprojlim M/t^n M$,

où M/t^nM est un $R[t]/t^n$-module projectif et de type fini.

Soit $\mathcal{G}$ un G-torseur sur $\operatorname{Spec} R[[t]]$. On a une équivalence entre les données de $\mathcal{G}$ et $\varprojlim \mathcal{G}_n$, où $\mathcal{G}_n$ est la restriction de $\mathcal{G}$ sur $\operatorname{Spec} R[t]/t^n$, qui est un G-torseur sur $\operatorname{Spec} R[t]/t^n$.

Définition 1.1.1. On note $\mathbf{Gr}_G$ le foncteur de la catégorie des k-algèbres commutatives vers la catégorie des ensembles, qui associe à toute k-algèbre commutative R les classes d'isomorphisme des paires $(\mathcal{G}, \theta)$ où

i) $\mathcal{G}$ est un G-torseur sur $\operatorname{Spec} R[[t]]$,

ii) θ est un isomorphisme $\mathcal{G}\big|_{\operatorname{Spec} R((t))} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\operatorname{Spec} R((t))}$, où on note G le G-torseur trivial sur $\operatorname{Spec} R[[t]]$.

Définition 1.1.2. On note $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}$ le foncteur qui associe à toute k-algèbre commutative R le groupe $G(R((t))) = \operatorname{Mor}(\operatorname{Spec} R((t)), G) =$ groupe des automorphismes du G-torseur trivial sur $\operatorname{Spec} R((t))$.

On note $G_{\mathcal{O}}$ le foncteur qui associe à toute k-algèbre commutative R le groupe $G(R[[t]]) = \operatorname{Mor}(\operatorname{Spec} R[[t]], G) =$ groupe des automorphismes du G-torseur trivial sur $\operatorname{Spec} R[[t]]$.

On note $G_{\mathcal{O},n}$ le foncteur qui associe à toute k-algèbre commutative R le groupe $G(R[[t]]/t^n) = \operatorname{Mor}(\operatorname{Spec} R[[t]]/t^n, G) =$ groupe des automorphismes du G-torseur trivial sur $\operatorname{Spec} R[[t]]/t^n$.

$\mathbf{G}_{\mathcal{K}}$ agit sur $\mathbf{Gr}_G$ par changement de trivialisation : $\mathbf{G}_{\mathcal{K}} \times \mathbf{Gr}_G \to \mathbf{Gr}_G$: $(g, (\mathcal{G}, \theta)) \mapsto (\mathcal{G}, L_g \circ \theta)$, où L_g est l'automorphisme du G-torseur trivial donné par la multiplication à gauche par g. Ainsi $G_{\mathcal{O}}$ agit sur $\mathbf{Gr}_G$ via $G_{\mathcal{O}} \hookrightarrow \mathbf{G}_{\mathcal{K}}$.

On a un morphisme de foncteurs :

$$\mathbf{G}_{\mathcal{K}} \to \mathbf{Gr}_G$$

donné par l'action sur le G-torseur trivial. Comme $G_{\mathcal{O}}$ est le groupe des automorphismes du G-torseur trivial, ce morphisme se factorise à travers le quotient fpqc $G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$. Comme tous les G-torseurs sont localement triviaux pour la topologie fpqc, le morphisme de foncteur est un isomorphisme

$$\mathbf{G}_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Gr}_G.$$

L'action de $G_{\mathcal{K}}$ et $G_{\mathcal{O}}$ sur Gr_G ci-dessus est la multiplication à gauche sur $G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$.

On envoie à l'annexe A.2 pour la définition et les propriétés des ind-schémas.

Proposition 1.1.3. *a) Le foncteur $\mathbf{Gr}_G$ est représentable par un ind-schéma d'ind-type fini. C'est la grassmannienne affine de G.*

b) Chaque $G_{\mathcal{O},n}$ est représentable par un schéma en groupes connexe de type fini. Le foncteur $G_{\mathcal{O}}$ est représentable par un schéma en groupes connexe.

c) Le foncteur $\mathbf{G}_{\mathcal{K}}$ est représentable par un ind-schéma en groupes.

Démonstration.

a) (On rappelle le principe de la démonstration dans A.5 de [Gai01].)

Quand $G = GL_r$, Gr_G est isomorphe au foncteur qui associe à toute k-algèbre commutative R l'ensemble des $R[[t]]$-modules $\mathcal{L}$ projectifs de type fini et tels que $t^m R[[t]]^r \subset \mathcal{L} \subset t^{-m} R[[t]]^r$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{Gr}_{G,m}$ le foncteur qui classifie les mêmes données mais avec m fixé. Il est isomorphe au foncteur qui associe à toute k-algèbre commutative R l'ensemble des R-modules projectifs de type fini quotients de $t^{-m} R[[t]]^r / t^m R[[t]]^r$ avec un noyau t-stable (le morphisme de foncteurs est donné par $\mathcal{L} \mapsto t^{-m} R[[t]]^r / \mathcal{L}$). Ce foncteur est représentable par un sous-schéma fermé de $\coprod_{d=0}^{2mr} \mathrm{Gr}(d, 2mr)$, où $\mathrm{Gr}(d, 2mr)$ est le schéma projectif qui classifie les quotients de dimension d d'un espace de dimension $2mr$ (la grassmannienne classique). De plus, on a des immersions fermées $\mathrm{Gr}_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{Gr}_m \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{m+1} \hookrightarrow \cdots$.

Par définition, $\mathrm{Gr}_G = \varinjlim \mathrm{Gr}_{G,m}$. Donc Gr_G est représentable par un ind-schéma d'ind-type fini.

Quand G est réductif, pour toute inclusion $G \hookrightarrow GL_N$, GL_N/G est affine. Dans ce cas le morphisme $\mathrm{Gr}_G \to \mathrm{Gr}_{GL_N}$ est représentable et fermé.

Pour G général, on peut choisir une inclusion $G \hookrightarrow GL_N \times GL_1$ de groupe algébrique telle que $(GL_N \times GL_1)/G$ soit quasi-affine. Alors $\mathrm{Gr}_G \to \mathrm{Gr}_{GL_N \times GL_1}$ est représentable et localement fermé. (Pour les détails on envoie à 4.5.1 de [BD99] ou A.5 de [Gai01].)

b) $G_{\mathcal{O},n}$ est la restriction à la Weil de G de $\operatorname{Spec} k[t]/t^n$ à $\operatorname{Spec} k$ donc est un schéma en groupes connexe de type fini. Par définition, $G_{\mathcal{O}} = \varprojlim G_{\mathcal{O},n}$ est aussi un schéma en groupes connexe.

c) Voir la Proposition 1.2 de [BL94].

□

Remarque 1.1.4. $G_{\mathcal{O}}$ et $G_{\mathcal{O},n}$ sont réduits. En général, l'ind-schéma $\mathbf{Gr}_G$ défini ci-dessus n'est pas réduit. Un exemple est pour $G = \mathbb{G}_m$. Pour toute k-algèbre commutative R, un réseau $\mathcal{L} \in \mathbf{Gr}_{\mathbb{G}_m}(R)$ est engendré par un élément dans $R((t))^\times$. On a

$$R((t))^\times = \left\{ \sum_i a_i t^i \in R((t)); \quad \exists i_0, \text{ t.q. } a_{i_0} \in R^\times, a_j \text{ nilpotent pour tout } j < i_0 \right\}$$

$$R((t))^\times / R[[t]]^\times = \coprod_{i_0 \in \mathbb{Z}} \bigcup_{N \geq 1} \{(a_{i_0-1}, \cdots, a_{i_0-N}); a_j \in R \text{ nilpotent } \}$$

Donc $\mathbf{Gr}_{\mathbb{G}_m}$ n'est pas réduit.

Si G est semi-simple, alors $\mathbf{Gr}_G$ est réduit. Pour plus de détails, voir 4.5.1 [BD99].

La cohomologie que l'on va considérer dans toute la suite est la cohomologie étale, donc cela ne change rien si on considère le sous-ind-schéma réduit associé à $\mathbf{Gr}_G$. Pour les (ind-)schémas réduits on aura une bonne notion d'orbite sous l'action d'un groupe (ce qui n'est pas le cas pour les (ind-)schémas non réduits).

Notation 1.1.5. On note Gr_G (resp. $G_{\mathbb{K}}$) le sous-ind-schéma réduit associé à $\mathbf{Gr}_G$ (resp. $\mathbf{G}_{\mathbb{K}}$) (au sens de l'annexe A.2).

Exemple 1.1.6. Avec les nouvelles notations, $\mathrm{Gr}_{\mathbb{G}_m}$ (l'ind-schéma réduit) est une réunion disjointe des points indexés par $\mathbb{Z}$.

1.1.2 Action de groupe et orbites

On a vu que $G_{\mathcal{O}}$ agit sur Gr_G par changement de trivialisation.

Proposition 1.1.7. *L'action de $G_{\mathcal{O}}$ sur Gr_G est "bonne" (au sens de la définition A.2.4 dans l'annexe).*

Démonstration.

Quand $G = GL_r$, l'action de $G_{\mathcal{O}}$ sur Gr_G est donnée par l'action sur les réseaux. Pour tout m, on a défini $\mathrm{Gr}_{G,m}$, qui est stable sous l'action de $G_{\mathcal{O}}$. De plus, l'action de $G_{\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,m}$ se factorise à travers le quotient $G_{\mathcal{O},2m}$.

En général, on utilise une inclusion $G \hookrightarrow GL_N \times GL_1$ comme dans la démonstration de la proposition 1.1.3 qui induit $\mathrm{Gr}_G \to \mathrm{Gr}_{GL_N \times GL_1}$. Pour tout m, on peut définir $\mathrm{Gr}_{GL_N \times GL_1, m}$ pour $\mathrm{Gr}_{GL_N \times GL_1}$ et on a $\mathrm{Gr}_{GL_N \times GL_1} = \varinjlim \mathrm{Gr}_{GL_N \times GL_1, m}$. On définit $\mathrm{Gr}_{G,m}$ comme le produit fibré de $\mathrm{Gr}_{GL_N \times GL_1, m}$ et Gr_G sur $\mathrm{Gr}_{GL_N \times GL_1}$. Il est $G_{\mathcal{O}}$-stable. De plus, pour tout m, il existe un entier n_m tel que l'action de $G_{\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,m}$ se factorise à travers $G_{\mathcal{O},n_m}$.

On a $\mathrm{Gr}_G = \varinjlim \mathrm{Gr}_{G,m}$. Par le lemme A.2.3 dans l'annexe, tout sous-schéma fermé de type fini de Gr_G est inclus dans un $\mathrm{Gr}_{G,m}$. C'est la définition d'une action "bonne".

□

Quand G est réductif, on a la notion de $G_{\mathcal{O}}$-orbite.

On note $\widehat{\Lambda}_G^+$ l'ensemble des copoids dominants de G. On a alors la décomposition de Cartan :

$$G(k((t))) = \bigsqcup_{\lambda \in \widehat{\Lambda}_G^+} G(k[[t]]) t^\lambda G(k[[t]]).$$

Cela implique que

$$\mathrm{Gr}_G = \bigsqcup_{\lambda \in \widehat{\Lambda}_G^+} G_{\mathcal{O}} t^\lambda G_{\mathcal{O}} / G_{\mathcal{O}},$$

où $G_{\mathcal{O}}t^{\lambda}G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}$ sont les $G_{\mathcal{O}}$-orbites, vues comme des sous-schémas réduits localement fermés de Gr_G.

Définition 1.1.8. On note $\mathrm{Gr}^0_{G,\lambda} := G_{\mathcal{O}}t^{\lambda}G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}$ et $\mathrm{Gr}_{G,\lambda}$ son adhérence Zariski dans Gr_G.

Les $\mathrm{Gr}^0_{G,\lambda}$ sont lisses et ils forment une stratification dans Gr_G. On a

$$\mathrm{Gr}_{G,\lambda} = \bigsqcup_{\mu\leq\lambda} \mathrm{Gr}^0_{G,\mu},$$

où $\mu \leq \lambda$ si et seulement si $\lambda - \mu$ est une somme de coracines positives de G.

Remarque 1.1.9. Les notations ici sont cohérentes avec celles dans [Var04] et [Laf12]. En revanche, les autres notent souvent $\mathrm{Gr}_{G,\lambda}$ l'orbite $G_{\mathcal{O}}t^{\lambda}G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}$ et $\overline{\mathrm{Gr}_{G,\lambda}}$ son adhérence de Zariski.

Dans la suite on va considérer la représentation d'ind-schéma $\mathrm{Gr}_G = \varinjlim \mathrm{Gr}_{G,\lambda}$ (limite inductive filtrante).

On note $\widehat{G}$ le groupe dual de Langlands de G, considéré comme un groupe réductif déployé sur $\mathbb{Q}_\ell$ dont les racines et les poids sont les coracines et les copoids de G, et vice-versa.

Dans la suite on va indexer les $G_{\mathcal{O}}$-orbites par les représentations irréductibles de $\widehat{G}$, c'est-à-dire que pour $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G})$ représentation irréductible de plus haut poids $\lambda \in \Lambda^+_{\widehat{G}} = \widehat{\Lambda}^+_G$, on note

$$\mathrm{Gr}_{G,W} := \mathrm{Gr}_{G,\lambda}.$$

Pour $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G})$ une représentation de dimension finie qui est donc une somme directe de représentations irréductibles $\bigoplus W_j$, on définit

$$\mathrm{Gr}_{G,W} := \bigcup \mathrm{Gr}_{G,W_j}.$$

On a un corollaire de la proposition 1.1.7 ci-dessus :

Corollaire 1.1.10. *Si l'entier d est assez grand en fonction de W, alors l'action de $G_{\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,W}$ se factorise à travers le quotient $G_{\mathcal{O},d}$.*

1.2 Grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld

Soit X une courbe projective lisse géométriquement irréductible sur $\mathbb{F}_q$.

1.2.1 Version globale de la grassmannienne affine

Notation 1.2.1. Ici, on utilise la même notation que la notation 1.7 dans [Laf12].

Soit S un schéma sur $\mathbb{F}_q$. Pour tout S-point x de X, on note $\Gamma_x \subset X \times S$ le graphe de x. Soient I un ensemble fini et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de S-points de X. On note $\Gamma_{\sum \infty x_i}$ le voisinage formel de $\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i}$ dans $X \times S$. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_{\sum dx_i}$ le d-ième épaississement de $\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i}$ dans $X \times S$.

Un G-torseur sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$ est la même chose qu'une limite projective de G-torseurs sur $\Gamma_{\sum dx_i}$ pour d tendant vers l'infini.

Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ deux G-torseurs sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$. On définit un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i})}$$

comme la donnée pour toute représentation V de G d'un morphisme

$$V_{\mathcal{G}} \to V_{\mathcal{G}'}(N \sum_{i\in I} x_i)$$

où l'ordre N du pôle dépend de V, de telle sorte que ces morphismes soient fonctoriels en V et compatibles au produit tensoriel et au dual.

Définition 1.2.2. (la grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld (sur X^I))

Soit I un ensemble fini. On note $\mathbf{Gr}_{G,I}$ le foncteur de $SchAff/\mathbb{F}_q$ vers Ens, qui associe à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ l'ensemble $\mathbf{Gr}_{G,I}(S)$ qui classifie la donnée de

i) $x_i \in X(S)$ pour $i \in I$,

ii) deux G-torseurs $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$,

iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i})},$$

iv) une trivialisation $\theta : \mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} G$ sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$.

Comme dans le cas de la grassmannienne affine, ce foncteur est représentable par un ind-schéma sur X^I.

Précisément, quand $G = GL_n$, notons $\mathrm{Gr}_{G,I,m}$ le foncteur qui associe à tout schéma affine $S = \operatorname{Spec} R$ sur $\mathbb{F}_q$ l'ensemble des $((x_i)_{i\in I}, \mathcal{E})$ où

i) $(x_i)_{i\in I} \in X(S)^I$,

ii) $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur $X \times S$ muni d'inclusions $\mathcal{O}^n_{X\times S}(-m(\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i})) \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{O}^n_{X\times S}(m(\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i}))$.

Alors $\mathrm{Gr}_{G,I,m}$ est représentable par un schéma projectif de type fini sur X^I. On a des immersions fermées $\mathrm{Gr}_{G,I,1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{G,I,m} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{G,I,m+1} \hookrightarrow \cdots$ et $\mathrm{Gr}_{G,I} = \varinjlim \mathrm{Gr}_{G,I,m}$.

En général, on utilise une inclusion $G \hookrightarrow GL_N \times GL_1$ tel que $(GL_N \times GL_1)/G$ soit quasi-affine. Alors le morphisme $\mathrm{Gr}_{G,I} \to \mathrm{Gr}_{GL_N \times GL_1, I}$ est représentable et localement fermé.

Notation 1.2.3. En général, $\mathbf{Gr}_{G,I}$ n'est pas réduit. On note $\mathrm{Gr}_{G,I}$ le sous-schéma réduit associé.

Remarque 1.2.4. Quand I est un singleton, $\mathrm{Gr}_{G,I}$ est au-dessus de X. On le note $\mathrm{Gr}_{G,X}$. Pour tout point géométrique x de X, notons $\widehat{\mathcal{O}_x}$ la complétion de l'anneau local en x et $\widehat{F_x}$ son corps des fractions. Alors la fibre $\mathrm{Gr}_{G,x}$ de $\mathrm{Gr}_{G,X}$ en x est (canoniquement) le quotient fpqc $G_{\widehat{F_x}}/G_{\widehat{\mathcal{O}_x}}$. On peut identifier $\widehat{\mathcal{O}_x} \simeq k[[t]]$ et $\widehat{F_x} \simeq k((t))$ avec t une uniformisante de $\widehat{\mathcal{O}_x}$. Ainsi, $\mathrm{Gr}_{G,x}$ est isomorphe (non canoniquement) à la grassmannienne affine Gr_G dans la section précédente.

Remarque 1.2.5. En général, on a la propriété suivante de $\mathrm{Gr}_{G,I}$ qui est cruciale pour la structure de factorisation dans la section 4. Soient $(x_i)_{i\in I} \in X^I$ des points géométriques. Alors la fibre de $\mathrm{Gr}_{G,I}$ en $(x_i)_{i\in I}$ est isomorphe à $\prod_{y\in\{x_i, i\in I\}} \mathrm{Gr}_{G,y}$.

Pour obtenir une relation canonique quand I est un singleton, on a besoin des notations suivantes :

Définition 1.2.6. On note $\mathbf{Aut}$ (resp. $\mathbf{Aut}_n$) le foncteur qui associe à toute k-algèbre commutative R le groupe des automorphismes R-linéaires continues de $R[[t]]$ (resp. de $R[t]/t^n$).

Un automorphisme R-linéaire continu de $R[[t]]$ (resp. $R[t]/t^n$) est donné par $t \mapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$, où $a_j \in R$, avec a_0 nilpotent (pour être continu) et a_1 inversible (pour être un automorphisme).

Le foncteur $\mathbf{Aut}$ (resp. $\mathbf{Aut}_n$) est représentable par un schéma en groupes connexe (resp. schéma en groupes de type fini connexe). Par définition, on a $\mathbf{Aut} = \varprojlim \mathbf{Aut}_n$.

Notation 1.2.7. En général, ces schémas ne sont pas réduits. Désormais, on prend les sous-schémas réduits associés et on les note Aut et Aut_n.

Avec cette nouvelle notation, un élément dans $Aut(R)$ (réduit) est donné par $t \mapsto a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$, où $a_j \in R$, avec a_1 inversible.

Aut (resp. Aut_n) est inclus dans le groupe des automorphismes de $G_{\mathcal{O}}$ (resp. $G_{\mathcal{O},n}$). Donc Aut agit sur $G_{\mathcal{K}}, G_{\mathcal{O}}$ et Gr_G. De plus, les $G_{\mathcal{O}}$-orbites $\mathrm{Gr}_{G,\lambda}$ sont Aut-stables. En fait, soit $\phi : t \mapsto b_1 t + b_2 t^2 + \cdots \in Aut$ où b_1 est inversible, alors son action sur $t^\lambda \in \mathrm{Gr}_G$ est $\phi(t)^\lambda = (b_1 t + b_2 t^2 + \cdots)^\lambda = t^\lambda \cdot g$, où $g \in G_{\mathcal{O}}$.

Remarque 1.2.8. Le schéma en groupes **Aut** agit sur $\mathbf{Gr}_G$. Le sous-schéma réduit *Aut* agit sur l'ind-schéma réduit Gr_G. Mais l'action de **Aut** sur $\mathbf{Gr}_G$ ne préserve pas Gr_G. On l'illustre par un exemple pour $G = \mathbb{G}_m$:

Aut agit sur $\mathbf{Gr}_{\mathbb{G}_m}$:

$$\mathbf{Aut}(R) \times \mathbf{Gr}_{\mathbb{G}_m}(R) \to \mathbf{Gr}_{\mathbb{G}_m}(R)$$

$$\left((\phi : t \mapsto b_0 + b_1 t + \cdots), \sum_i a_i t^i\right) \mapsto \sum_i a_i (b_0 + b_1 t + \cdots)^i$$

En revanche, l'action de **Aut** sur $\mathbf{Gr}_{\mathbb{G}_m}$ ne préserve pas $\mathrm{Gr}_{\mathbb{G}_m}$: si $\phi \in \mathbf{Aut}(R)$ avec $b_0 \neq 0$, $\sum_i a_i t^i \in \mathrm{Gr}_{\mathbb{G}_m}(R)$, alors le premier coefficient dans $\sum_i a_i (b_0 + b_1 t + \cdots)^i$ est nilpotent, donc $\sum_i a_i (b_0 + b_1 t + \cdots)^i$ n'est pas dans $\mathrm{Gr}_{\mathbb{G}_m}(R)$.

Mais *Aut* agit sur $\mathrm{Gr}_{\mathbb{G}_m}$: si $\phi \in Aut(R)$, c'est-à-dire que $b_0 = 0$, alors le premier coefficient de $\sum_i a_i (b_1 t + \cdots)^i$ est inversible donc $\sum_i a_i (b_1 t + \cdots)^i$ est dans $\mathrm{Gr}_{\mathbb{G}_m}(R)$.

Proposition 1.2.9. *L'action de Aut sur* Gr_G *est "bonne" (au sens de la définition A.2.4 dans l'annexe).*

Définition 1.2.10. Maintenant considérons un foncteur $\mathbf{X}$ (resp. $\mathbf{X}_n$) qui associe à tout schéma affine $S = \operatorname{Spec} R$ sur k l'ensemble des paires (x, α) où

i) $x \in X(S)$,

ii) $\alpha : R[[t]] \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}_{X\times S}|_{\Gamma_x}}$ est un isomorphisme continu R-linéaire.

(resp. ii) $\alpha : R[[t]]/t^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X\times S}/\mathcal{I}_x^n$ un isomorphisme continu R-linéaire, où $\mathcal{I}_x$ est le faisceau d'idéaux de Γ_x.)

Le foncteur $\mathbf{X}$ (resp. $\mathbf{X}_n$) est représentable par un ind-schéma (resp. schéma de type fini).

Notation 1.2.11. On prend les sous-schémas réduits associés et on les note encore $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_n$.

Par définition, $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{X}_n$) est un *Aut*-torseur sur X (resp. Aut_n-torseur sur X). On a $\mathcal{X} = \varprojlim \mathcal{X}_n$. Comme l'action de *Aut* sur Gr_G est "bonne", on peut définir l'espace fibré $(\mathrm{Gr}_G \times \mathcal{X})/Aut$ (au sens de la définition A.2.6). On a un isomorphisme canonique d'ind-schémas

$$\mathrm{Gr}_{G,X} \simeq (\mathrm{Gr}_G \times \mathcal{X})/Aut. \tag{1.2.1}$$

Dans la suite, on a besoin d'une définition équivalente pour les grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld :

Proposition 1.2.12. *Soit I un ensemble fini.* $\mathrm{Gr}_{G,I}$ *est isomorphe au foncteur de $SchAff/\mathbb{F}_q$ vers Ens, qui associe à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ l'ensemble* $\mathrm{Gr}_{G,I}(S)$ *qui classifie la donnée de*

i) $x_i \in X(S)$ pour $i \in I$,

ii) deux G-torseurs $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ sur $X \times S$,

iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}\big|_{X\times S\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \tilde{\to} \mathcal{G}'\big|_{X\times S\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})},$$

iv) une trivialisation $\theta : \mathcal{G}' \tilde{\to} G$ sur $X \times S$.

En effet, si on a $(\mathcal{G}, \mathcal{G}', \phi)$ comme dans la définition 1.2.2, on peut étendre $\mathcal{G}$ en un G-torseur sur $X \times S$ en le recollant sur $\Gamma_{\sum \infty x_i} - \bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i}$ avec le G-torseur trivial sur $(X \times S) - \bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i}$ par $\theta \circ \phi$. Ce recollement est justifié par le lemme de descente de Beauville-Laszlo dans [BL95] et la généralisation dans [BD99].

1.2.2 Version globale du groupe $G_{\mathcal{O}}$

Notation 1.2.13. Soit I un ensemble fini. Soit $\underline{d} := (d_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I$. Pour tout $(x_i)_{i\in I} \in X(S)^I$, on note $\Gamma_{\sum d_i x_i}$ le sous-schéma fermé de $X \times S$ dont l'idéal est engendré, localement pour la topologie de Zariski, par $\prod_{i\in I} t_i^{d_i}$, où t_i est une équation du graphe Γ_{x_i}. C'est-à-dire que $\Gamma_{\sum d_i x_i}$ est le sous-schéma associé au diviseur effectif $\sum d_i x_i \subset X \times S$.

Définition 1.2.14. Soit I un ensemble fini. Soit $\underline{d} := (d_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I$. On note $G_{I,\mathcal{O}}$ (resp. $G_{I,\underline{d}}$) le foncteur qui associe à tout schéma affine $S = \operatorname{Spec} R$ sur k l'ensemble classifiant la donnée de

i) $x_i \in X(S)$ pour $i \in I$,

ii) un élément dans $G(\Gamma_{\sum \infty x_i})$.

(resp. ii) un élément dans $G(\Gamma_{\sum d_i x_i})$.)

On définit $\Gamma_{D^{univ}_{I,\underline{d}}}$ comme le sous schéma fermé dans $X \times X^I$ dont l'idéal est engendré, localement pour la topologie de Zariski, par $\prod_{i\in I} t_i^{d_i}$, où t_i est une équation du graphe dans $X \times X^I$ de la projection sur le i-ième facteur $pr_i : X^I \to X$. Ainsi, pour tout $(Id, (x_i)_{i\in I}) : X \times S \to X \times X^I$, sa restriction sur $X \times S$ est le graphe $\Gamma_{\sum d_i x_i}$.

On a un morphisme $\Gamma_{D^{univ}_{I,\underline{d}}} \hookrightarrow X \times X^I \to X^I$. Par définition, $G_{I,\underline{d}}$ est la restriction à la Weil de G de $\Gamma_{D^{univ}_{I,\underline{d}}}$ à X^I. De plus, $G_{I,\mathcal{O}} := \varprojlim G_{I,\underline{d}}$, où la limite est pour $d_i \to \infty$ $(i \in I)$.

Donc le foncteur $G_{I,\mathcal{O}}$ (resp. $G_{I,\underline{d}}$) est représentable par un schéma en groupes (resp. schéma en groupes de type fini) sur X^I.

Notation 1.2.15. En général, $G_{I,\mathcal{O}}$ (resp. $G_{I,\underline{d}}$) n'est pas réduit. On prend le sous-schéma réduit associé et on le note encore $G_{I,\mathcal{O}}$ (resp. $G_{I,\underline{d}}$).

Remarque 1.2.16. Quand I est un singleton, $d \in \mathbb{N}$. $G_{I,\mathcal{O}}$ et $G_{I,d}$ sont au-dessus de X. On les note $G_{X,\mathcal{O}}$ et $G_{X,d}$. Pour tout point géométrique x de X, en identifiant $\widehat{\mathcal{O}_x} \simeq k[[t]]$ comme ci-dessus, la fibre de $G_{X,\mathcal{O}}$ (resp. $G_{X,d}$) est isomorphe (non canoniquement) à $G_{\mathcal{O}}$ (resp. $G_{\mathcal{O},d}$).

Canoniquement, on a un isomorphisme de schémas en groupe :

$$G_{X,\mathcal{O}} \simeq (G_{\mathcal{O}} \times \mathcal{X})/Aut. \tag{1.2.2}$$

De plus, il existe $n_d \in \mathbb{N}$ tel que

$$G_{X,d} \simeq (G_{\mathcal{O},d} \times \mathcal{X}_{n_d})/Aut_{n_d}. \tag{1.2.3}$$

Remarque 1.2.17. Soient $(x_i)_{i\in I} \in X^I$ des points géométriques. Alors la fibre de $G_{I,\mathcal{O}}$ en $(x_i)_{i\in I}$ est isomorphe à $\prod_{y\in\{x_i, i\in I\}} G_{\widehat{\mathcal{O}_y}}$. La fibre de $G_{I,\underline{d}}$ en $(x_i)_{i\in I}$ est isomorphe à $\prod_{y\in\{x_i, i\in I\}} G_{\mathcal{O}_y, \sum_{x_i=y} d_i}$.

1.2.3 Action des groupes et strates fermées

$G_{I,\mathcal{O}}$ agit sur $\mathrm{Gr}_{G,I}$ par changement de trivialisation de $\mathcal{G}'$. Concrètement, pour tout schéma affine S on a

$$G_{I,\mathcal{O}}(S) \times \mathrm{Gr}_{G,I}(S) \to \mathrm{Gr}_{G,I}(S)$$

$$\Big(\big((x_i), g\big), \big((x_i), \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}' \xrightarrow[\sim]{\theta} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}}\big)\Big) \mapsto \big((x_i), \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}' \xrightarrow[\sim]{L_g \circ \theta} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}}\big)$$

où L_g est l'automorphisme du G-torseur trivial sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$ donné par la multiplication à gauche par $g \in G(\Gamma_{\sum \infty x_i})$.

Proposition 1.2.18. *L'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I}$ est "bonne" (au sens de la définition A.2.4 dans l'annexe).*

Démonstration. Quand $G = GL_r$, on a déjà défini les $\mathrm{Gr}_{G,I,m}$ tel que $\mathrm{Gr}_{G,I} = \varinjlim \mathrm{Gr}_{G,I,m}$. Pour tout m, $\mathrm{Gr}_{G,I,m}$ est stable sous l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$. De plus, il existe des entiers $d_i(m)$ pour tout $i \in I$ tels que l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ se factorise à travers $G_{I,\underline{d}(m)}$, où $\underline{d}(m) = (d_i(m))_{i\in I}$.

En général, on utilise une inclusion $G \hookrightarrow G' = GL_N \times GL_1$ comme dans le cas de la grassmannienne affine.

□

Maintenant supposons G est réductif.

Dans le cas de la grassmannienne affine, pour W une représentation irréductible de $\widehat{G}$ de plus haut poids λ, on a noté $\mathrm{Gr}_{G,W} = \mathrm{Gr}_{G,\lambda}$. En général, on va s'intéresser aux sous-schémas fermés réduits de $\mathrm{Gr}_{G,I}$ indexés par $W \in Rep_E(\widehat{G}^I)$, où $\widehat{G}$ est le groupe dual de G.

Définition 1.2.19. 1) Soit I un singleton. Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G})$ la représentation irréductible de plus haut poids $\lambda \in \Lambda^+_{\widehat{G}}$. On note

$$\mathrm{Gr}_{G,X,W} := (\mathrm{Gr}_{G,\lambda} \times \mathcal{X})/Aut.$$

C'est un sous-schéma fermé réduit de $\mathrm{Gr}_{G,X}$.

2) Soient I un ensemble fini et $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$ de la forme $\boxtimes_{i\in I} W_i$, avec les W_i irréductibles. Soit $U \subset X^I$ le complémentaire de toutes les diagonales, c'est-à-dire que $U = \{(x_i)_{i\in I}, \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$. On a un isomorphisme

$$\gamma : \mathrm{Gr}_{G,I}\big|_U \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Gr}_{G,\{i\}}\Big|_U .$$

On définit $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ comme le sous-schéma fermé réduit de $\mathrm{Gr}_{G,I}$ égal à l'adhérence de Zariski de $\gamma^{-1}\left(\prod_{i\in I} \mathrm{Gr}_{G,\{i\},W_i}\Big|_U\right)$.

3) En général, notons $\underline{\omega} = (\omega_i)_{i\in I}$. Si pour tout ω on fixe un représentant V_ω dans la classe des représentations irréductibles de plus haut poids ω, alors $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$ admet une unique décomposition de la forme

$$W = \bigoplus_{\underline{\omega}\in(X^+_*(T))^I} \Big(\bigotimes_{i\in I} V_{\omega_i}\Big) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$$

où $\mathfrak{W}_{\underline{\omega}} := \mathrm{Hom}(\bigotimes_{i\in I} V_{\omega_i}, W)$. Les $\mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$ sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, presque tous nuls. On définit $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ comme la réunion de tous les sous-schémas fermés réduits $\mathrm{Gr}_{G,I,\boxtimes V_{\omega_i}} \subset \mathrm{Gr}_{G,I}$ pour $\underline{\omega}$ tel que $\mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$ est non nul.

Corollaire 1.2.20. *Les $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ sont stables sous l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$. De plus, si les entiers d_i sont assez grands en fonction de W, l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ se factorise à travers le quotient $G_{I,\underline{d}}$.*

1.3 Catégories de faisceaux pervers et foncteur de globalisation

A partir de cette section on suppose que G est réductif.

1.3.1 Catégorie des faisceaux pervers

Cas de la grassmannienne affine

On a vu dans la proposition 1.1.7 que l'action de $G_{\mathcal{O}}$ sur Gr_G est "bonne". Donc on peut appliquer A.2.3 de l'annexe aux $G_{\mathcal{O}}$ et $\mathrm{Gr}_G = \varinjlim \mathrm{Gr}_{G,\lambda}$.

Définition 1.3.1. On définit

$$\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{Q}_\ell) := \varinjlim \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O},d_\lambda}}(\mathrm{Gr}_{G,\lambda}, \mathbb{Q}_\ell),$$

où les d_λ sont des entiers assez grands au sens du corollaire 1.1.10. On l'appelle la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux pervers $G_{\mathcal{O}}$-équivariants sur Gr_G.

Notons

$$\mathrm{Gr}^0_{G,\lambda} \xrightarrow{j_\lambda} \mathrm{Gr}_{G,\lambda} \xrightarrow{i_\lambda} \mathrm{Gr}_G,$$

où j_λ est une immersion ouverte et i_λ est une immersion fermée. On définit

$$IC_{G,\lambda} := (i_\lambda)_*(j_\lambda)_{!*}\mathbb{Q}_\ell[\dim(\mathrm{Gr}_{G,\lambda})](\frac{\dim(\mathrm{Gr}_{G,\lambda})}{2}).$$

Dans Gr_G il y a un point special correspondant au G-torseur trivial : ($\mathcal{G} = G, \theta = \mathrm{Id}$). Il est $G_{\mathcal{O}}$-stable et c'est en fait $\mathrm{Gr}_{G,\lambda}$ pour $\lambda = 0$. On le note $\mathrm{Gr}_{G,0}$. On note $IC_{G,0}$ le faisceau gratte-ciel supporté sur le point $\mathrm{Gr}_{G,0}$.

Proposition 1.3.2. *Les objets simples de la catégorie* $\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{Q}_\ell)$ *sont les* $IC_{G,\lambda}$.

Démonstration.

1) Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{Q}_\ell)$ un objet simple. Comme $\mathcal{F}$ est $G_{\mathcal{O}}$-équivariant il doit être supporté sur un $\mathrm{Gr}_{G,\lambda}$ et de la forme $(i_\lambda)_*(j_\lambda)_{!*}\mathcal{E}[\dim(\mathrm{Gr}_{G,\lambda})](\frac{\dim(\mathrm{Gr}_{G,\lambda})}{2})$ où $\mathcal{E}$ est un système local sur $\mathrm{Gr}^0_{G,\lambda}$.

2) $\mathrm{Gr}^0_{G,\lambda} = G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}} \cap t^\lambda G_{\mathcal{O}} t^{-\lambda}$ est simplement connexe. En fait, notons P_λ le sous-groupe parabolique de G qui est le stabilisateur de $G_{\mathcal{O}}t^\lambda G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}$. Alors $G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}} \cap t^\lambda G_{\mathcal{O}} t^{-\lambda} \to G/P_\lambda : t \mapsto 0$ est une fibration en tous d'espaces affines sur la variété de drapeaux G/P_λ qui est simplement connexe .

□

Proposition 1.3.3. *([Lus83], Prop 1 et A.7 dans [Gai01]) La catégorie* $\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{Q}_\ell)$ *est semi-simple.*

Cas de la grassmannienne de Beilinson-Drinfeld

Notons $\mathrm{Perv}_{G_{I,n_m}}(\mathrm{Gr}_{G,I,m},\mathbb{Q}_\ell)$ la catégorie de faisceaux pervers G_{I,n_m}-équivariants sur $\mathrm{Gr}_{G,I,m}$. Par le même argument que dans le cas de la grassmannienne affine, on peut définir

Définition 1.3.4.

$$\mathrm{Perv}_{G_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I},\mathbb{Q}_\ell) := \varinjlim \mathrm{Perv}_{G_{I,n_m}}(\mathrm{Gr}_{G,I,m},\mathbb{Q}_\ell).$$

On l'appelle la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux pervers $G_{I,\mathcal{O}}$-équivariants sur $\mathrm{Gr}_{G,I}$.

Cette catégorie ne dépend pas du choix de la présentation de $\mathrm{Gr}_{G,I}$ comme ind-schéma. Par définition, un faisceau pervers sur $\mathrm{Gr}_{G,I}$ est supporté sur un sous-schéma fermé de type fini.

Dans $\mathrm{Gr}_{G,I}$ il y a une $G_{I,\mathcal{O}}$-orbite spéciale correspondante au G-torseur trivial. C'est $\mathrm{Gr}_{G,I,\mathbf{1}}$ (defini dans la définition 1.2.19), où $\mathbf{1}$ est la représentation triviale de $\widehat{G}^I$. On note ce point $\mathrm{Gr}_{G,I,\mathbf{1}}$. On note $IC_{G,I,\mathbf{1}}$ le faisceau gratte-ciel supporté sur ce point.

1.3.2 Foncteur de globalisation

Construction 1.3.5. ([BD99] 5.3.14, [MV07] 5, [Gai01] 2.1) Quand I est un singleton, on va construire un foncteur

$$Glob : \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G,\mathbb{Q}_\ell) \to \mathrm{Perv}_{G_{X,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,X},\mathbb{Q}_\ell).$$

On rappelle l'idée de la construction. Considérons un diagramme

$$\mathrm{Gr}_{G,X} \xleftarrow{p} \mathrm{Gr}_G \times \mathcal{X} \xrightarrow{q} \mathrm{Gr}_G \times X,$$

où $\mathcal{X}$ est le Aut-torseur sur X défini dans la section 2, p est donné par $\mathrm{Gr}_{G,X} \simeq (\mathrm{Gr}_G \times \mathcal{X})/Aut$, q est donné par $X \simeq \mathcal{X}/Aut$.

Pour tout $\mathcal{S} \in \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E)$, on peut associer un faisceau pervers $\mathcal{S} \boxtimes E_X[1]$ sur $\mathrm{Gr}_G \times X$, où E_X est le faisceau constant sur X. Alors $q^*(\mathcal{S} \boxtimes E_X[1])$ est un faisceau pervers (à décalage près, où le sens précisé sera donné dans la remarque ci-dessous) sur $\mathrm{Gr}_G \times \mathcal{X}$ qui est Aut-équivariant pour l'action de Aut sur $\mathcal{X}$.

En effet, on a vu que les $G_{\mathcal{O}}$-orbites $\mathrm{Gr}_{G,\lambda}$ sont Aut-invariantes (le paragraphe avant la proposition 1.2.9). De plus, Aut est connexe. Donc les IC_λ sont Aut-équivariants. D'après la proposition 1.3.3, la catégorie $\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ est semi-simple. On en déduit que tout faisceau pervers $G_{\mathcal{O}}$-équivariant sur Gr_G est Aut-équivariant. Donc $\mathcal{S} \boxtimes E_X[1]$ est Aut-équivariant pour l'action de Aut sur Gr_G.

Par conséquent, $q^*(\mathcal{S} \boxtimes E_X[1])$ est Aut-équivariant pour l'action diagonale de Aut sur $\mathrm{Gr}_G \times \mathcal{X}$.

Donc il existe un unique faisceau pervers $\mathcal{S}_X$ sur $\mathrm{Gr}_{G,X}$ tel que $p^*\mathcal{S}_X \simeq q^*(\mathcal{S} \boxtimes E_X[1])$ (l'existence vient de la descente, l'unicité vient de la Prop 4.2.5 de [BBD82] et du fait que Aut est connexe). De plus, $q^*(\mathcal{S} \boxtimes E_X[1])$ est $G_{\mathcal{O}}$-équivariant pour l'action de $G_{\mathcal{O}}$ sur Gr_G, en utilisant $G_{X,\mathcal{O}} \simeq (G_{\mathcal{O}} \times \mathcal{X})/Aut$, on en déduit que $\mathcal{S}_X$ est $G_{X,\mathcal{O}}$-équivariant.

Le foncteur $\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E) \to \mathrm{Perv}_{G_{X,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,X}, E)$ est donné par $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}_X$.

Remarque 1.3.6. Dans l'idée ci-dessus, pour des raisons techniques, par exemple pour parler de faisceau pervers ou utiliser la Prop 4.2.5 de [BBD82], il faut remplacer les (ind)-schémas de dimension infinie par les (ind)-schémas de dimension finie. On peut faire cela parce que l'action de Aut sur Gr_G est "bonne" (au sens de A.2.2).

Proposition 1.3.7. *Le foncteur Glob* : $\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E) \to \mathrm{Perv}_{G_{X,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,X}, E)$ *est pleinement fidèle.*

1.4 Structure de factorisation et produit de fusion

A partir de cette section, on va considérer seulement la partition (I) de I pour simplifier. On notera $\mathrm{Gr}_{G,I}$ au lieu de $\mathrm{Gr}_{G,I}^{(I)}$. Mais tous les résultats se généralisent pour les autres partitions.

1.4.1 Structure de factorisation

Les grassmanniennes de Beilinson-Drinfeld ont une structure de factorisation : (5.3.10-5.3.12 de [BD99])

Soient I, J deux ensembles finis et $\zeta : I \twoheadrightarrow J$ une application surjective. On note $\Delta_\zeta : X^J \to X^I, (x_j)_{j\in J} \mapsto (x_{\zeta(i)})_{i\in I}$ le morphisme diagonal associé à ζ. Alors le diagramme suivant est un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_{G,I} & \xleftarrow{\widetilde{\Delta_\zeta}} & \mathrm{Gr}_{G,J} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^I & \xleftarrow{\Delta_\zeta} & X^J \end{array} \tag{1.4.1}$$

où le morphisme $\widetilde{\Delta_\zeta}$ envoie

$$\left((x_j)_{j\in J}, \mathcal{G}, \phi : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_j} \smallsetminus (\bigcup_{j\in J} \Gamma_{x_j})} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_j} \smallsetminus (\bigcup_{j\in J} \Gamma_{x_j})}\right)$$

sur

$$\left((x'_i = x_{\zeta(i)})_{i\in I}, \mathcal{G}, \phi : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x'_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x'_i})} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x'_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x'_i})}\right).$$

Exemple 1.4.1. a) Quand $J = I$ et ζ est une permutation, $\Delta_\zeta : X^I \to X^I, (x_i)_{i\in I} \mapsto (x_{\zeta(i)})_{i\in I}$ est une permutation et le morphisme $\widetilde{\Delta_\zeta}$ envoie

$$\left((x_i)_{i\in I}, \mathcal{G}, \phi : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}\right)$$

sur

$$\left((x_{\zeta(i)})_{i\in I}, \mathcal{G}, \phi : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}\right).$$

b) Quand J est un singleton, $\Delta_\zeta : X \to X^I, x \mapsto (x, \cdots, x)$ est l'inclusion diagonale et le morphisme $\widetilde{\Delta_\zeta}$ envoie

$$\left(x, \mathcal{G}, \phi : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\infty x}\smallsetminus\Gamma_x} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\infty x}\smallsetminus\Gamma_x}\right)$$

sur

$$\left((x, \cdots, x), \mathcal{G}, \phi : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\infty x}\smallsetminus\Gamma_x} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\infty x}\smallsetminus\Gamma_x}\right).$$

Notons $U^{(I)} \subset X^I$ le complémentaire de toutes les diagonales, c'est-à-dire que $U = \{(x_i)_{i\in I}, \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$. Alors le diagramme suivant est un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Gr}_{G,X})^I\big|_{U^{(I)}} & \xrightarrow{\widetilde{j}} & \mathrm{Gr}_{G,I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^{(I)} & \xrightarrow{j} & X^I \end{array} \tag{1.4.2}$$

Le morphisme $\widetilde{j}$ envoie

$$\left(\left(x_i, \mathcal{G}_i, \phi_i : \mathcal{G}_i\big|_{\Gamma_{\infty x_i}\smallsetminus\Gamma_{x_i}} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\infty x_i}\smallsetminus\Gamma_{x_i}}\right)_{i\in I}\right)$$

sur

$$\left((x_i)_{i\in I}, \mathcal{G}, \phi : \mathcal{G}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}\right),$$

où $\mathcal{G}_i$ est un G-torseur sur $\Gamma_{\infty x_i}$ et $\mathcal{G}$ est le G-torseur sur $\Gamma_{\sum \infty x_i} = \coprod \Gamma_{\infty x_i}$ tel que la restriction sur $\Gamma_{\infty x_i}$ est $\mathcal{G}_i$.

1.4.2 Produit de fusion

Le produit de fusion est défini dans [BD99], [MV07] et [Gai07]. On rappelle la définition de la manière suivante pour voir la relation entre deux foncteurs $\star$ et $*$. Pour les détails, voir ces références.

Soient I_1, I_2 deux ensembles finis. Notons $I = I_1 \sqcup I_2$. Gaitsgory a défini un foncteur dans 2.4 [Gai07] :

$$\star : \mathrm{Perv}_{G_{I_1,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I_1}, E) \times \mathrm{Perv}_{G_{I_2,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I_2}, E) \to \mathrm{Perv}_{G_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I}, E).$$

On rappelle la construction : considérons des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{Gr}_{G,I_1} \times \mathrm{Gr}_{G,I_2})\big|_{U^{(I)}} & \xrightarrow{\widetilde{j}} & \mathrm{Gr}_{G,I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U^{(I)} & \xrightarrow{\quad j \quad} & X^I \end{array}$$

Pour tout $\mathcal{S}_1 \in \mathrm{Perv}_{G_{I_1,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I_1}, E)$ et $\mathcal{S}_2 \in \mathrm{Perv}_{G_{I_2,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I_2}, E)$, on définit le produit

$$\mathcal{S}_1 \star \mathcal{S}_2 := \widetilde{j}_{!*}((\mathcal{S}_1 \boxtimes \mathcal{S}_2)\big|_{U^{(I)}}) \in \mathrm{Perv}_{G_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I}, E).$$

Soit J un ensemble fini. Maintenant on définit le produit de fusion sur $\mathrm{Perv}_{G_{J,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,J}, E)$:

Notons $2J := J \sqcup J$. Notons $\Delta_J : X^J \hookrightarrow X^{2J}$ l'inclusion diagonale : $(x_j)_{j\in J} \mapsto \big((x_j)_{j\in J}, (x_j)_{j\in J}\big)$. Considérons des carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathrm{Gr}_{G,J} \times \mathrm{Gr}_{G,J})\big|_{U^{(2J)}} & \xrightarrow{\widetilde{j}} & \mathrm{Gr}_{G,2J} & \xleftarrow{\widetilde{\Delta_J}} & \mathrm{Gr}_{G,J} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U^{(2J)} & \xrightarrow{\quad j \quad} & X^{2J} & \xleftarrow{\Delta_J} & X^J \end{array}$$

Soient $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathrm{Perv}_{G_{J,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,J}, E)$. Le produit de fusion est :

$$\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2 := \widetilde{\Delta_J}^*(\mathcal{S}_1 \star \mathcal{S}_2) \tag{1.4.3}$$

$$= \widetilde{\Delta_J}^* \widetilde{j}_{!*}((\mathcal{S}_1 \boxtimes \mathcal{S}_2)\big|_{U^{(2J)}}) \in \mathrm{Perv}_{G_{J,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,J}, E). \tag{1.4.4}$$

Remarque 1.4.2. On a défini le produit de fusion pour les grassmanniennes de Beilinson-Drinfeld. Quand J est un singleton, en considérant la restriction sur la fibre, on peut définir un produit de fusion pour la grassmannienne affine :

Soient $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$. Alors on a le produit de fusion pour leur globalisations : $Glob(\mathcal{S}_1) * Glob(\mathcal{S}_2) \in \mathrm{Perv}_{G_{X,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,X}, E)$. Soit $x \in X$, notons $\mathrm{Gr}_{G,x}$ la fibre de $\mathrm{Gr}_{G,X}$ au-dessus de x et notons $i_x : \mathrm{Gr}_{G,x} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{G,X}$. En utilisant un isomorphisme (non canonique) $\mathrm{Gr}_{G,x} \simeq \mathrm{Gr}_G$, on obtient une inclusion $i : \mathrm{Gr}_G \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{G,X}$. On peut définir

$$i^*(Glob(\mathcal{S}_1) * Glob(\mathcal{S}_2)) \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$$

et on dit que c'est le produit de fusion de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. Cette définition ne dépend pas de x (pour tout x, on a un isomorphisme $\mathrm{Gr}_{G,x} \simeq \mathrm{Gr}_G$).

Remarque 1.4.3. Le produit de fusion défini ci-dessus est suffisant pour toutes les utilisations. Mais historiquement, c'est le produit de convolution qui est d'abord considéré. Dans [MV07] Mirkovic et Vilonen ont défini le produit de convolution $*_c$ sur $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ (Voir aussi dans [BD99] ou [Gai01]). Ils ont montré qu'il y a un isomorphisme dans $\mathrm{Perv}_{G_{X,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,X}, E)$:

$$Glob(\mathcal{S}_1) * Glob(\mathcal{S}_2) \simeq Glob(\mathcal{S}_1 *_c \mathcal{S}_2).$$

Cet isomorphisme identifie le produit de fusion et le produit de convolution.

1.5 Équivalence de Satake géométrique pour la grassmannienne affine

Dans cette section on rappelle l'énoncé de Satake géométrique d'après [MV07].

L'équivalence de Satake géométrique donne une équivalence entre $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ et $Rep_E(\widehat{G})$, où $\widehat{G}$ est le groupe dual de G. Pour l'obtenir, d'abord on montre que $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ muni d'un produit tensoriel et d'un foncteur fibre est une catégorie tannakienne. C'est la sous-section 1 ci-dessous. Ensuite on applique la théorie tannakienne pour obtenir un groupe tannakien G_{tann} et une équivalence $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E) \xrightarrow{\sim} Rep_E(G_{tann})$. Finalement on identifie G_{tann} avec $\widehat{G}$. Pour cela, on construit un homomorphisme $\widehat{T} \to G_{tann}$, où T est un tore maximal de G et on utilise l'induction parabolique de T à G. C'est ce que l'on fait dans la sous-section 2 ci-dessous. Avec cette préparation, on peut identifier G_{tann} avec $\widehat{G}$ dans la sous-section 3 ci-dessous et donc énoncer Satake géométrique.

1.5.1 Structure tannakienne

Dans la remarque précédente, on a vu que d'après [MV07] la catégorie $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ est munie du produit de convolution (ou de fusion). Ce produit

(désormais noté $*$) est muni de contraintes d'associativité et de commutativité (modifiée par la règle de Koszul donnée par la parité). Ainsi $(\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E), *)$ est une catégorie tensorielle E-linéaire avec l'objet d'identité $IC_{G,\mathbb{0}}$.

De plus, la catégorie $\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ (avec la contrainte de commutativité modifiée) est munie d'un foncteur

$$H^*_G := \underset{j\in\mathbb{Z}}{\oplus} H^j(\mathrm{Gr}_G, -) : \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E) \to Mod_E.$$

Proposition 1.5.1. *(Cor3.7, Prop 6.3 [MV07])*

a) H^*_G est un foncteur fibre, c'est-à-dire qu'il est exact et fidèle et que pour tout $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E)$, on a un isomorphisme $H^*_G(\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2) \simeq H^*_G(\mathcal{S}_1) \otimes H^*_G(\mathcal{S}_2)$ qui est compatible avec les contraintes d'associativité et de commutativité.

b) $(\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E), *, H^*_G)$ est une catégorie tannakienne sur E, c'est-à-dire que c'est une catégorie tensorielle abélienne, rigide, E-linéaire, avec $E \xrightarrow{\sim} End(1)$, et munie d'un foncteur fibre.

Exemple 1.5.2. Pour un tore T, Gr_T est discret et les composants connexes sont paramétrées par $X_*(T)$. Donc $\mathrm{Perv}_{T_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_T, E) = \bigoplus_{\nu\in X_*(T)} Perv_{T_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{T,\nu}) \simeq Mod_E(X_*(T))$, où $Mod_E(X_*(T))$ est la catégorie des E-modules $X_*(T)$-gradués.

On note $\widehat{T}$ l'unique tore sur E tel que $X^*(\widehat{T}) \simeq X_*(T)$. Alors on a une équivalence de catégories :

$$\mathrm{Perv}_{T_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_T, E) \simeq Mod_E(X_*(T)) \simeq Mod_E(X^*(\widehat{T})) \simeq Rep_E(\widehat{T}).$$

1.5.2 Induction parabolique pour un tore

Soit B un Borel et T le tore : $G \supset B \twoheadrightarrow T$. On peut définir Gr_B (resp. Gr_T) en remplaçant les G-torseurs par les B-torseurs (resp. T-torseurs) dans la définition de grassmannienne affine. Alors $G \supset B \twoheadrightarrow T$ induisent des morphismes d'ind-schémas :

$$\mathrm{Gr}_G \xleftarrow{i} \mathrm{Gr}_B \xrightarrow{\pi} \mathrm{Gr}_T,$$

$$(\mathcal{B} \overset{B}{\times} G \to G) \leftarrow (\mathcal{B} \to B) \mapsto (\mathcal{B} \overset{B}{\times} T \to T).$$

Notons $U_B := \mathrm{Ker}(B \to T)$. Le morphisme π est formellement lisse et surjectif et ses fibres sont les $(U_B)_{\mathcal{K}}$-orbites. Ainsi π induit une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de Gr_B et celui des composants connexes de Gr_T, qui est égal à $X_*(T)$.

Le morphisme i est une bijection ensembliste sur les points géométriques mais pas un isomorphisme. En fait, d'après 4.5 de [BD99], les composante connexes de Gr_G sont paramétrées par $Z^\vee_{\widehat{G}}$. L'image inverse d'une composante connexe de Gr_G sous i est une réunion infinie des composantes connexes dans Gr_B.

Pour tout $\nu \in X_*(T)$, $\mathrm{Gr}_{T,\nu}$ est un point et $\pi^{-1}(\mathrm{Gr}_{T,\nu})$ est la composante connexe de Gr_B correspondante. Considérons

$$\mathrm{Gr}_G \xleftarrow{i_\nu} \pi^{-1}(\mathrm{Gr}_{T,\nu}) \xrightarrow{\pi_\nu} \mathrm{Gr}_{T,\nu}.$$

Proposition 1.5.3. *(Thm 3.5, Thm 3.6, Prop 6.4 [MV07])*

a) Pour tout $\mathcal{S} \in Perv_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$, $\pi_{\nu!}i_\nu^*\mathcal{S}$ est concentré en degré $\langle \nu, 2\rho_G\rangle$, et $\bigoplus_\nu \pi_{\nu!}i_\nu^*[\langle \nu, 2\rho_G\rangle]$ est un foncteur tensoriel de $Perv_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ vers $Perv_{T_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_T)$.

b) $\bigoplus_\nu H^{\langle \nu, 2\rho_G\rangle}(\pi_{\nu!}i_\nu^*) : Perv_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G) \to Mod_E$ est un foncteur fibre (pour tout $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$, on a un isomorphisme

$$H^{\langle \nu, 2\rho_G\rangle}(\pi_{\nu!}i_\nu^*)(\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2) \simeq \bigoplus_{\nu_1+\nu_2=\nu} H^{\langle \nu_1, 2\rho_G\rangle}(\pi_{\nu_{1,!}}i_{\nu_1}^*)(\mathcal{S}_1) \otimes H^{\langle \nu_2, 2\rho_G\rangle}(\pi_{\nu_{2,!}}i_{\nu_2}^*)(\mathcal{S}_2)).$$

c) On a un morphisme de foncteurs fibres $H_G^* \to \bigoplus_\nu H^{\langle \nu, 2\rho_G\rangle}(\pi_{\nu!}i_\nu^*)$ qui est un isomorphisme.

1.5.3 Groupe tannakien et groupe dual

Maintenant on applique la théorie tannakienne à $(\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E), *, H_G^*)$. Notons $\underline{Aut}^*(H_G^*)$ le foncteur qui associé à toute E-algèbre R l'ensemble des automorphismes de foncteurs fibres $\phi_R \circ H_G^*$, où ϕ_R est le foncteur canonique $Mod_E \to Mod_R$.

D'après le Thm 1.12 de [Del90] ou le Thm 2.11 de [DM82], le foncteur $\underline{Aut}^*(H_G^*)$ est représentable par un schéma en groupes affine sur E que l'on note G_{tann}. De plus, le foncteur

$$\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_{tann})$$

défini par H_G^* est une équivalence de catégories tensorielles.

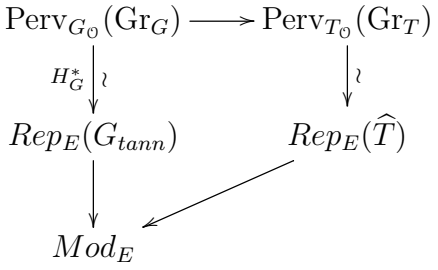
La catégorie $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ a une propriété importante : soient $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \widehat{\Lambda}_G^+$, alors $IC_{G,\mu_1+\cdots+\mu_n}$ est un facteur direct de $IC_{G,\mu_1} \otimes \cdots \otimes IC_{G,\mu_n}$.

Cette propriété implique que la catégorie $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ a un générateur tensoriel : $\bigoplus_{j=1}^r IC_{G,\lambda_j}$ où $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ est un ensemble des générateurs de $\widehat{\Lambda}_G^+$. Donc G_{tann} est de type fini. (Prop 2.20 de [DM82])

La propriété ci-dessus implique aussi que pour toute représentation non triviale V, la sous catégorie de $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ dont les objets sont les sous-quotients de V^n (somme directe) pour un certain $n \in \mathbb{N}$ n'est pas stable sous $\otimes$. D'après la corollaire 2.22 de [DM82], G_{tann} est connexe.

Comme la catégorie $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ est semi-simple, G_{tann} est réductif. (Prop 2.23 de [DM82].)

Ensuite l'exemple 1.5.2 pour le cas de tore et la proposition 1.5.3 impliquent que le diagramme suivant est commutatif :



Ainsi on obtient un foncteur $Rep_E(G_{tann}) \to Rep_E(\widehat{T})$. D'après [Del90] ou [DM82], ce foncteur induit un homomorphisme de groupes $\widehat{T} \to G_{tann}$.

Pour tout $\mu \in X^*(\widehat{T}) = X_*(T)$, notons λ le copoids dominant de G conjugué à μ. Alors la représentation de $\widehat{T}$ de poids μ est un facteur direct de $\bigoplus_\nu H^{\langle \nu, 2\rho_G\rangle}(\pi_{\nu!}i_\nu^*)(IC_{G,\lambda})$. Ainsi tout objet de $Rep_E(\widehat{T})$ est un sous-quotient de l'image d'un objet de $Rep_E(G_{tann})$. D'après la proposition 2.21 de [DM82], $\widehat{T} \to G_{tann}$ est une immersion fermée.

Comme les objets simples de $\mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ sont paramétrées par $X^*(\widehat{T})^+$, les représentations irréductibles de G_{tann} sont paramétrées par $X^*(\widehat{T})^+$. Donc le tore $\widehat{T}$ dans G_{tann} est maximal.

Comme G_{tann} et $\widehat{G}$ sont réductifs, on peut les identifier en identifiant leurs données radicielles et obtenir $\widehat{G} \xrightarrow{\sim} G_{tann}$. De plus, on peut rendre cet isomorphisme canonique en construisant un épinglage canonique de G_{tann}. On envoie à [MV07] et [BD99] 5.3.23 pour plus de détails.

Cette identification avec l'équivalence $H_G^* : \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_{tann})$ donnent le théorème suivant :

Théorème 1.5.4. *(Satake géométrique) (Mirkovic-Vilonen. Thm 7.3 [MV07], [BD99], Thm 2.2 [Gai07]) On a un foncteur canonique naturel*

$$H_G^* : \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}).$$

Il induit une équivalence de catégories tensorielles.

Pour T, on obtient un foncteur $H_T^* : Perv_{T_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_T) \to Rep_E(\widehat{T})$. On définit

$$Perv'_{T_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_T) := \bigoplus_{\nu \in X_*(T)} Perv_{T_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{T,\nu}) \otimes \left(E[1](\frac{1}{2})\right)^{\otimes(-\langle \nu, 2\rho_G\rangle)}.$$

On définit $H_T'^*$ le morphisme H_T^* avec décalage.

Corollaire 1.5.5. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} Perv_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E) & \xrightarrow{\pi_1 i^*} & Perv'_{T_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_T, E) \\ {\scriptstyle H_G^*}\downarrow\wr & & {\scriptstyle H_T'^*}\downarrow\wr \\ Rep_E(\widehat{G}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & Rep_E(\widehat{T}). \end{array}$$

Notation 1.5.6. Le théorème implique que l'on a un foncteur inverse canonique naturel qui induit une équivalence de catégories tensorielles. Pour tout $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G})$, on note $\mathcal{S}_{G,W} \in \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, E)$ son image par ce foncteur inverse.

Remarque 1.5.7. Le foncteur inverse est fonctoriel. Autrement dit toute flèche $W_1 \to W_2$ induit une flèche $S_{G,W_1} \to S_{G,W_2}$. Cette propriété est cruciale pour tous les chapitres suivants.

Exemple 1.5.8. Quand $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G})$ est isomorphe à la représentation irréductible de plus haut poids $\lambda \in \widehat{\Lambda}_G^+$, on a un isomorphisme non canonique $\mathcal{S}_{G,W} \simeq IC_{G,\lambda}$. (En fait, une homothétie $W \to W$ de rapport α induit par la fonctorialité un isomorphisme $\mathcal{S}_{G,W} \to \mathcal{S}_{G,W}$ qui n'est pas Id mais le produit par α.)

1.6 Extension partielle de Satake géométrique aux grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld

Considérons la catégorie $\mathrm{Perv}_{G_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I}, \mathbb{Q}_\ell)$ et le produit de fusion $*$ construit dans la section 4.

Construction 1.6.1. Gaitsgory (Appendix B, [Gai07]) et V.Lafforgue (Section 1, [Laf12]) ont défini un foncteur tensoriel :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I) \to \mathrm{Perv}_{G_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I}, \mathbb{Q}_\ell) & & (1.6.1) \\ W \quad \mapsto \quad \mathcal{S}_{G,I,W} & & \end{array}$$

Voir le théorème 1.17 [Laf12] pour les propriétés qu'il satisfait.

On rappelle la construction de ce foncteur :
1) Quand I est un singleton, c'est le composé :

$$\begin{array}{c} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Perv}_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{glob} \mathrm{Perv}_{G_{X,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,X}, \mathbb{Q}_\ell) \\ W \quad \mapsto \quad \mathcal{S}_{G,W} \quad \mapsto \quad \mathcal{S}_{G,X,W}. \end{array}$$

2) On commence par $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$ irréductible. Alors W est de la forme $\boxtimes_{i\in I} W_i$. Pour tout i, notons $\mathcal{S}_{G,X,W_i}$ le faisceau pervers sur $\mathrm{Gr}_{G,X}$ associé à W_i d'après 1). Par la structure de factorisation de $\mathrm{Gr}_{G,I}$ (le diagramme (1.4.2)), on définit

$$\mathcal{S}_{G,I,\boxtimes_{i\in I} W_i} := \widetilde{j}_{!*}((\boxtimes_{i\in I} \mathcal{S}_{G,X,W_i})\big|_{U^{(I)}}).$$

Maintenant soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$ général. Comme la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$ est semi-simple, W est une somme directe des représentations irréductibles :

$$W = \bigoplus_{\underline{\omega}\in(X_*^+(T))^I} \Big(\bigotimes_{i\in I} V_{\omega_i}\Big) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$$

où $\mathfrak{W}_{\underline{\omega}} := \mathrm{Hom}(\bigotimes_{i\in I} V_{\omega_i}, W)$. Les $\mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$ sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, presque tous nuls. On définit

$$\mathcal{S}_{G,I,W} := \bigoplus_{\underline{\omega}\in(X_*^+(T))^I} \mathcal{S}_{G,I,\boxtimes_{i\in I} V_{\omega_i}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathfrak{W}_{\underline{\omega}}.$$

Remarque 1.6.2. Par rapport à la construction ci-dessus, il y a un résultat plus fort, le Thm 2.6 dans [Gai07]. Ce théorème est pour les coefficients $\mathbb{Z}_\ell$, et il donne une équivalence entre $\mathrm{Perv}_{G_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I}, \mathbb{Q}_\ell)$ et une autre catégorie liée à $\widehat{G}$. Mais on n'en a pas besoin ici.

Exemple 1.6.3. D'après l'exemple 1.5.8, quand W est irréductible de la forme $\boxtimes_{i\in I} V_{\omega_i}$, on a un isomorphisme non canonique entre $\mathcal{S}_{G,I,W}$ et le faisceau d'intersection sur $\mathrm{Gr}_{G,I,\boxtimes V_{\omega_i}}$.

Remarque 1.6.4. Pour tout ensemble fini I et tout $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$, on a défini $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ comme un sous-schéma fermé réduit de $\mathrm{Gr}_{G,I}$ dans la définition 1.2.19. En fait, $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ est le support de $\mathcal{S}_{G,I,W}$.

1.7 Compatibilité avec l'induction parabolique

Considérons un parabolique P et son plus grand quotient réductif $M : G \supset P \twoheadrightarrow M$, avec $M = P/U_P$, où U_P est le radical unipotent de P.

1.7.1 Cas de la grassmannienne affine

En appliquant la définition 1.1.1 à P et M, on peut définir Gr_P et Gr_M. On a des morphismes d'ind-schémas

$$\mathrm{Gr}_G \xleftarrow{i} \mathrm{Gr}_P \xrightarrow{\pi} \mathrm{Gr}_M,$$

où i est donné par $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} \overset{P}{\times} G$; π est donné par $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} \overset{P}{\times} M$.

Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G})$. Prenons $\widehat{M} \hookrightarrow \widehat{G}$. On peut voir W comme une représentation de $\widehat{M}$ et définir $\mathrm{Gr}_{M,W}$.

Proposition 1.7.1. *On a $i^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,W}) \subset \pi^{-1}(\mathrm{Gr}_{M,W})$, où l'image inverse est définie comme sous-schéma réduit dans Gr_P.*

Démonstration.

Soit ω un copoids dominant de G. Notons V^ω la représentation irréductible de $\widehat{G}$ de plus haut poids ω. Pour tout copoids ν de G, on note $\mathrm{Gr}_{T,\nu}$ la composante dans Gr_T associé à ν.

Noua avons besoin de théorème 3.2 de [MV07] : Lorsque $P = B$, le sous-schéma $i^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,V^\omega}) \cap \pi^{-1}(\mathrm{Gr}_{T,\nu})$ dans Gr_B est non vide si et seulement si ν est conjugué à un copoids dominant $\leq \omega$.

Quand $P = B$, l'énoncé est une conséquence de ce théorème.

Pour P général, on utilise le diagramme suivant, où le carré est cartésien. :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathrm{Gr}_B & & & \\ & & \overset{i_P^B}{\swarrow} & & \overset{\pi_{B'}^B}{\searrow} & & \\ & \mathrm{Gr}_P & & & & \mathrm{Gr}_{B'} & \\ \overset{i_G^P}{\swarrow} & & \overset{\pi_M^P}{\searrow} & & \overset{i_M^{B'}}{\swarrow} & & \overset{\pi_T^{B'}}{\searrow} \\ \mathrm{Gr}_G & & & \mathrm{Gr}_M & & & \mathrm{Gr}_T \end{array}$$

Le sous-schéma $(i_G^P)^{-1}\mathrm{Gr}_{G,V^\omega}$ dans Gr_P est stable par l'action de $P_{\mathbb{O}}$. Le sous-schéma $(\pi_M^P)(i_G^P)^{-1}\mathrm{Gr}_{G,V^\omega}$ dans Gr_M est stable par l'action de $M_{\mathbb{O}}$. Donc $(\pi_M^P)(i_G^P)^{-1}\mathrm{Gr}_{G,V^\omega}$ est une réunion de strates dans Gr_M.

Notons C_ω l'ensemble de copoids de G conjugués à un copoids dominant $\leq \omega$. On a

$$\begin{aligned} (\pi_T^{B'})(i_M^{B'})^{-1}(\pi_M^P)(i_G^P)^{-1}\mathrm{Gr}_{G,V^\omega} &\overset{(a)}{=} (\pi_T^{B'})(\pi_{B'}^B)(i_P^B)^{-1}(i_G^P)^{-1}\mathrm{Gr}_{G,V^\omega} \\ &= (\pi_T^B)(i_G^B)^{-1}\mathrm{Gr}_{G,V^\omega} \\ &\overset{(b)}{=} \bigsqcup_{\nu \in C_\omega} \mathrm{Gr}_{T,\nu} \end{aligned}$$

(a) vient du carré cartésien dans le diagramme ci-dessus. (b) vient du théorème 3.2 de [MV07] appliqué à $\mathrm{Gr}_G \leftarrow \mathrm{Gr}_B \rightarrow \mathrm{Gr}_T$.

Maintenant appliquons le théorème 3.2 de [MV07] à $\mathrm{Gr}_M \leftarrow \mathrm{Gr}_{B'} \rightarrow \mathrm{Gr}_T$. On en déduit qu'une strate $\mathrm{Gr}_{M,\lambda}^0$ pour λ un copoids dominant de M ne peut être dans $(\pi_M^P)(i_G^P)^{-1}\mathrm{Gr}_{G,V^\omega}$ que si tous les copoids de M conjugué à λ sont dans C_ω. Donc

$$(\pi_M^P)(i_G^P)^{-1}\mathrm{Gr}_{G,V^\omega} \subset \mathrm{Gr}_{M,V^\omega}.$$

□

Définition 1.7.2. On définit $\mathrm{Gr}_{P,W} := i^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,W})$ comme sous-schéma réduit dans Gr_P.

Avec cette définition, on a des morphismes

$$\mathrm{Gr}_{G,W} \leftarrow \mathrm{Gr}_{P,W} \rightarrow \mathrm{Gr}_{M,W}.$$

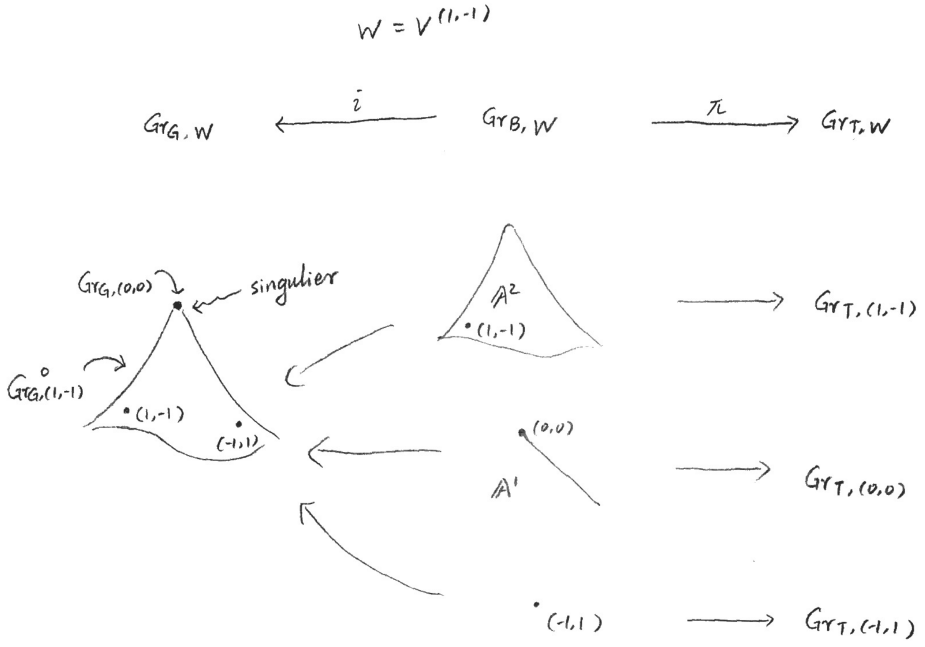
Exemple 1.7.3. Considérons le cas où $G = GL_2$. On a

$$\mathrm{Gr}_G \xleftarrow{i} \mathrm{Gr}_B \xrightarrow{\pi} \mathrm{Gr}_T \simeq X_*(T) = \mathbb{Z}^2.$$

Soit W la représentation de $\widehat{G} = GL_2$ de plus haut poids $\omega = (1, -1)$. Alors $\mathrm{Gr}_{G,(1,-1)} = \overline{\mathrm{Gr}^{\circ}_{G,(1,-1)}} = \mathrm{Gr}^{\circ}_{G,(1,-1)} \cup \mathrm{Gr}_{G,(0,0)}$.

Dans Gr_B, l'image inverse $i^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,(1,-1)})$ a trois composants connexes. Leurs images dans Gr_T sont : $\mathrm{Gr}_{T,(1,-1)}$, $\mathrm{Gr}_{T,(0,0)}$, $\mathrm{Gr}_{T,(-1,1)}$.

$\mathrm{Gr}_{T,W} = \mathrm{Gr}_{T,(1,-1)} \sqcup \mathrm{Gr}_{T,(0,0)} \sqcup \mathrm{Gr}_{T,(-1,1)}$.



D'après 4.5, 5.3.26-5.3.28 de [BD99], les composantes connexes de Gr_M sont paramétrées par $Z^{\vee}_{\widehat{M}} := \mathrm{Hom}(Z_{\widehat{M}}, \mathbb{G}_m)$, où $Z_{\widehat{M}}$ est le centre de $\widehat{M}$.

Pour tout $\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}$, on note $\mathrm{Gr}_{M,\theta}$ la composante connexe indexée par θ. Alors on a une décomposition

$$\mathrm{Gr}_M = \coprod_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \mathrm{Gr}_{M,\theta}.$$

Considérons

$$\mathrm{Gr}_G \xleftarrow{i_\theta} \pi^{-1}(\mathrm{Gr}_{M,\theta}) \xrightarrow{\pi_\theta} \mathrm{Gr}_{M,\theta}. \tag{1.7.1}$$

On peut définir la catégorie $\mathrm{Perv}_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M, \mathbb{Q}_\ell)$. Elle a une décomposition $\mathrm{Perv}_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \mathrm{Perv}_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_{M,\theta}, \mathbb{Q}_\ell)$. Remarquons que $2(\rho_G - \rho_M) \in \mathrm{Hom}(Z_M, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, Z_{\widehat{M}})$, donc pour tout $\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}$, le nombre $\langle \theta, 2(\rho_G - \rho_M)\rangle$ est bien défini. Notons

$$\mathrm{Perv}'_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \mathrm{Perv}_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_{M,\theta}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \big(\mathbb{Q}_\ell[1](\frac{1}{2})\big)^{\otimes(-\langle \theta, 2(\rho_G - \rho_M)\rangle)}.$$

Théorème 1.7.4. *(Compatibilité de Satake géométrique avec l'induction parabolique. 5.3.29 [BD99]. Thm4.3.4 [BG02])*

a) Pour tout $\mathcal{S} \in Perv_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{Q}_\ell)$ et tout $\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}$, on a

$$\pi_{\theta!} i_\theta^* \mathcal{S} \otimes (\mathbb{Q}_\ell[1](\frac{1}{2}))^{\otimes\langle \theta, 2(\rho_G - \rho_M)\rangle} \in Perv_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M, \mathbb{Q}_\ell),$$

i.e. $\pi_! i^*$ est un foncteur de $Perv_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{Q}_\ell)$ vers $Perv'_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M, \mathbb{Q}_\ell)$. De plus, c'est un foncteur tensoriel.

b) Notons H'^*_M l'équivalence de Satake avec décalage pour M : $Perv'_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{M})$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Perv_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{\pi_! i^*} & Perv'_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M, \mathbb{Q}_\ell) \\ {\scriptstyle H^*_G}\downarrow\wr & & {\scriptstyle H'^*_M}\downarrow\wr \\ \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{M}). \end{array}$$

Maintenant on donne un isomorphisme de faisceaux pervers qui est un corollaire du diagramme ci-dessus et qui va servir pour la suite.

Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G})$. Notons $\mathcal{S}_{G,W} \in Perv_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{Q}_\ell)$ le faisceau pervers correspondant par Satake géométrique.

De plus, le centre $Z_{\widehat{M}}$ agit sur W via $Z_{\widehat{M}} \hookrightarrow \widehat{M} \hookrightarrow \widehat{G}$. On peut voir W comme une représentation de $Z_{\widehat{M}}$ et on a une décomposition

$$W = \bigoplus_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} W_\theta.$$

On a

$$\mathrm{Gr}_{M,W} = \coprod_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \mathrm{Gr}_{M,W} \cap \mathrm{Gr}_{M,\theta}.$$

En fait, $\mathrm{Gr}_{M,W} \cap \mathrm{Gr}_{M,\theta} = \mathrm{Gr}_{M,W_\theta}$ (les W_θ sont des représentations de $\widehat{M}$).

On note $\mathcal{S}_{M,W_\theta} \in Perv_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M, \mathbb{Q}_\ell)$ le faisceau pervers correspondant à W_θ via H^*_M.

Dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{M})$, on a

$$W_\theta \hookrightarrow W \simeq \oplus_{\theta'} W_{\theta'}.$$

D'après la fonctorialité et la commutativité du diagramme ci-dessus, cette inclusion induit une flèche

$$\mathcal{S}_{M,W_\theta} \otimes \big(\mathbb{Q}_\ell[1](\frac{1}{2})\big)^{\otimes(-\langle\theta, 2(\rho_G - \rho_M)\rangle)} \to \mathcal{S}_{M,W} \simeq \pi_! i^* \mathcal{S}_{G,W} \simeq \bigoplus_{\theta' \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \pi_{\theta'!} i^*_{\theta'} \mathcal{S}_{G,W}.$$

Comme les composants connexes de Gr_M sont paramétrées par $Z^\vee_{\widehat{M}}$, la flèche ci-dessus se factorise par $\pi_{\theta!} i^*_\theta \mathcal{S}_{G,W}$.

Corollaire 1.7.5. *Ce morphisme de faisceaux pervers est un isomorphisme :*

$$\mathcal{S}_{M,W_\theta} \otimes \big(\mathbb{Q}_\ell[1](\frac{1}{2})\big)^{\otimes(-\langle\theta, 2(\rho_G - \rho_M)\rangle)} \xrightarrow{\sim} \pi_{\theta!} i^*_\theta \mathcal{S}_{G,W}. \tag{1.7.2}$$

Remarque 1.7.6. En particulier, quand $P = B$ et $M = T$, les composants connexes de Gr_T sont paramétrées par $X_*(T)$. (Dans ce cas on a $X_*(T) = \Lambda_{\widehat{T}} = Z^\vee_{\widehat{T}}$.) Pour tout $\nu \in X_*(T)$, on a

$$\mathcal{S}_{T,W_\nu} \otimes \big(\mathbb{Q}_\ell[1](\frac{1}{2})\big)^{\otimes(-\langle\nu, 2\rho_G\rangle)} \xrightarrow{\sim} \pi_{\nu!} i^*_\nu \mathcal{S}_{G,W}. \tag{1.7.3}$$

On retrouve a) de la proposition 1.5.3.

1.7.2 Cas des grassmanniennes de Beilinson-Drinfeld

En appliquant la définition 1.2.2 aux P et M, on peut définir $\mathrm{Gr}_{P,I}$ et $\mathrm{Gr}_{M,I}$. $G \supset P \twoheadrightarrow M$ induisent des morphismes d'ind-schémas :

$$\mathrm{Gr}_{G,I} \xleftarrow{i} \mathrm{Gr}_{P,I} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Gr}_{M,I}.$$

Concrètement, pour tout schéma S, un S-point de $\mathrm{Gr}_{P,I}$ est

$$\big((x_i)_{i\in I}, \mathcal{P} \xrightarrow{\phi} \mathcal{P}' \xrightarrow[\sim]{\theta} P\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}}\big),$$

où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont des P-torseurs.

$i : \mathrm{Gr}_{P,I}(S) \to \mathrm{Gr}_{G,I}(S)$ est donné par $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} \overset{P}{\times} G$;

$\pi : \mathrm{Gr}_{P,I}(S) \to \mathrm{Gr}_{M,I}(S)$ est donné par $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} \overset{P}{\times} M$.

Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$. Prenons $\widehat{M}^I \hookrightarrow \widehat{G}^I$. On peut voir W comme une représentation de $\widehat{M}^I$ et définir $\mathrm{Gr}_{M,I,W}$. Comme une conséquence de la proposition 1.7.1 :

Proposition 1.7.7. *On a $i^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,I,W}) \subset \pi^{-1}(\mathrm{Gr}_{M,I,W})$, où l'image inverse est au sens des sous-schémas réduits dans $\mathrm{Gr}_{P,I}$.*

On peut avoir une version du théorème 3.2 de [MV07] pour $\mathrm{Gr}_{G,I}$ et $\mathrm{Gr}_{T,I}$. La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la proposition 1.7.1 pour les grassmanniennes affines.

Définition 1.7.8. On définit $\mathrm{Gr}_{P,I,W} := i^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,I,W})$ comme sous-schéma réduit dans $\mathrm{Gr}_{P,I}$.

Avec cette définition, on a des morphismes

$$\mathrm{Gr}_{G,I,W} \leftarrow \mathrm{Gr}_{P,I,W} \to \mathrm{Gr}_{M,I,W}.$$

D'après 4.5, 5.3.26-5.3.28 de [BD99], on a une flèche

$$\mathrm{Gr}_{M,I} \to Z^\vee_{\widehat{M}}.$$

Pour tout $\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}$, on note $\mathrm{Gr}_{M,I,\theta}$ l'image inverse de θ. Alors on a une décomposition

$$\mathrm{Gr}_{M,I} = \coprod_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \mathrm{Gr}_{M,I,\theta}.$$

Pour tout $\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}$, on considère

$$\mathrm{Gr}_{G,I} \xleftarrow{i_\theta} \pi^{-1}(\mathrm{Gr}_{M,I,\theta}) \xrightarrow{\pi_\theta} \mathrm{Gr}_{M,I,\theta}.$$

On peut définir $\mathrm{Perv}_{M_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{M,I}, \mathbb{Q}_\ell)$. Notons

$$\mathrm{Perv}'_{M_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{M,I}, \mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \mathrm{Perv}_{M_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{M,I,\theta}) \otimes \left(\mathbb{Q}_\ell[1](\frac{1}{2})\right)^{\otimes(-\langle\theta, 2(\rho_G - \rho_M)\rangle)}.$$

Théorème 1.7.9. *Le diagramme suivant est commutatif (au sens où l'on a un isomorphisme canonique de foncteurs entre les deux composées) :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Perv}_{G_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I}, \mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{\pi_! i^*} & \mathrm{Perv}'_{M_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{M,I}, \mathbb{Q}_\ell) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{M}^I). \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs définis dans 1.6.1 (avec un décalage pour M).

Comme dans le cas de la grassmannienne affine, on donne un isomorphisme de faisceaux pervers qui est un corollaire du diagramme ci-dessus et qui va servir pour la suite.

Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$. On note $\mathcal{S}_{G,I,W} \in \mathrm{Perv}_{G_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{G,I}, \mathbb{Q}_\ell)$ le faisceau pervers correspondant via le foncteur dans la construction 1.6.1.

On a $\widehat{M} \hookrightarrow \widehat{G}$, on peut voir W comme une représentation de $\widehat{M}^I$ et définir $\mathrm{Gr}_{M,I,W}$.

De plus, le centre $Z_{\widehat{M}}$ agit sur W via $Z_{\widehat{M}} \hookrightarrow \widehat{M} \hookrightarrow \widehat{G} \hookrightarrow \widehat{G}^I$. Donc on a une décomposition

$$W = \bigoplus_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} W_\theta.$$

Les W_θ sont des sous $\widehat{M}^I$-représentations de W.

On a

$$\mathrm{Gr}_{M,I,W} = \coprod_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \mathrm{Gr}_{M,I,W_\theta}.$$

On note $\mathcal{S}_{M,I,W_\theta} \in \mathrm{Perv}_{M_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{M,I}, \mathbb{Q}_\ell)$ le faisceau pervers correspondant à W_θ via le foncteur dans la construction 1.6.1. (Donc $\mathcal{S}_{M,I,W_\theta} \otimes \left(\mathbb{Q}_\ell[1](\frac{1}{2})\right)^{\otimes(-\langle\theta, 2(\rho_G - \rho_M)\rangle)} \in \mathrm{Perv}'_{M_{I,\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_{M,I}, \mathbb{Q}_\ell)$.)

De façon similaire au cas de grassmannienne affine dans la sous-section ci-dessus, on en déduit que :

Corollaire 1.7.10. *On a un isomorphisme de faisceaux pervers :*

$$\mathcal{S}_{M,I,W_\theta} \otimes \big(\mathbb{Q}_\ell[1](\frac{1}{2})\big)^{\otimes(-\langle\theta,2(\rho_G-\rho_M)\rangle)} \xrightarrow{\sim} (\pi_\theta)_!(i_\theta)^*\mathcal{S}_{G,I,W}. \tag{1.7.4}$$

Remarque 1.7.11. En particulier, quand $P = B$ et $M = T$, les composants connexes de $\mathrm{Gr}_{T,I}$ sont paramétrées par $X_*(T)$. Pour tout $\nu \in X_*(T)$, on a

$$\mathcal{S}_{T,I,W_\nu}[-\langle\nu, 2\rho_G\rangle] \otimes \mathbb{Q}_\ell(\langle\nu,\rho_G\rangle) \xrightarrow{\sim} \pi_{\nu!}i_\nu^*\mathcal{S}_{G,I,W}. \tag{1.7.5}$$

1.8 Démonstration de la Proposition 1.5.3 et du Théorème 1.7.4

1.8.1 Démonstration de la Proposition 1.5.3

On rappelle et complète la démonstration donnée dans [BD99] et [MV07].

(a) Notons B^- le Borel opposé de B, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_G & \xleftarrow[i]{} & \mathrm{Gr}_B \\ {\scriptstyle i^-}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{Gr}_{B^-} & \xrightarrow{\pi^-} & \mathrm{Gr}_T. \end{array}$$

Pour tout $\nu \in X_*(T)$, notons $L_\nu := \varpi^\nu T_{\mathcal{O}}/T_{\mathcal{O}} \in \mathrm{Gr}_T$ (i.e. c'est le $\mathrm{Gr}_{T,\nu}$ ci-dessus), $S_\nu := \pi^{-1}L_\nu$, $T_\nu := (\pi^-)^{-1}L_\nu$, on a

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_G & \xleftarrow[i_\nu]{} & S_\nu \\ {\scriptstyle i_\nu^-}\uparrow & & {\scriptstyle \pi_\nu}\downarrow\uparrow{\scriptstyle f_\nu} \\ T_\nu & \underset{f_\nu^-}{\overset{\pi_\nu^-}{\rightleftarrows}} & L_\nu. \end{array}$$

Où $\pi_\nu \circ f_\nu \simeq Id$, $\pi_\nu^- \circ f_\nu^- \simeq Id$. Et par définition, $S_\nu = N_{B,\mathcal{K}}\varpi^\nu G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}$, $T_\nu = N_{B,\mathcal{K}}^-\varpi^\nu G_{\mathcal{O}}/G_{\mathcal{O}}$, où N_B (resp. N_B^-) est le radical unipotent de B (resp. B^-).

Pour comparer les notations différentes, on remarque que pour tout $\mathcal{S} \in Perv_{G_{\mathcal{O}}}(\mathrm{Gr}_G)$, $H^q(\pi_{\nu!}i_\nu^*\mathcal{S}) = H_c^q(S_\nu, \mathcal{S})$ et $H^q(\pi_{\nu*}i_\nu^!\mathcal{S}) = H^q_{T_\nu}(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{S})$.

Il suffit de montrer l'énoncé pour $\mathcal{S}$ simple, i.e. $\mathcal{S} \cong IC_{G,\lambda}$ pour un certain $\lambda \in X_*^+(T)$. (En fait, si on a $0 \to \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_3 \to 0$, alors $\pi_{\nu!}i_\nu^*\mathcal{S}_1 \to \pi_{\nu!}i_\nu^*\mathcal{S}_2 \to \pi_{\nu!}i_\nu^*\mathcal{S}_3 \xrightarrow{+1}$. Cela induit une suite exacte longue $\cdots \to H^q(\pi_{\nu!}i_\nu^*\mathcal{S}_1) \to H^q(\pi_{\nu!}i_\nu^*\mathcal{S}_2) \to H^q(\pi_{\nu!}i_\nu^*\mathcal{S}_3) \to \cdots$.)

Soit $\mathcal{S} \cong IC_{G,\lambda}$.

(i) D'abord on montre que

$$H_c^q(S_\nu, \mathcal{S}) = 0 \quad si \quad q > \langle \nu, 2\rho_G \rangle,$$

$$H_{T_\nu}^q(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{S}) = 0 \quad si \quad q < \langle \nu, 2\rho_G \rangle.$$

Pour obtenir le premier, d'abord on observe que comme $\mathcal{S}$ est pervers par rapport à la stratification donnée par Gr_G^η, $\mathcal{S}|_{\mathrm{Gr}_G^\eta}$ est en degré $\leq -\langle \eta, 2\rho_G \rangle$. En utilisant $dim(S_\nu \cap \mathrm{Gr}_G^\eta) = \langle \nu + \eta, \rho_G \rangle$, on a $H_c^q(S_\nu \cap \mathrm{Gr}^\eta, \mathcal{S}) = 0$ pour tout $\eta \in X_*^+(T)$ et $q > \langle \nu, 2\rho_G \rangle$.

Ensuite, notons $X := S_\nu \cap \overline{\mathrm{Gr}^\lambda}$, $X_p := \bigcup_{\eta \leq \lambda, \langle \eta, 2\rho_G \rangle \leqslant -p} S_\nu \cap \mathrm{Gr}^\eta$. Alors X_p est fermé dans X, $X_p \supset X_{p+1}$.

D'après 2.5* de "Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques" de [SGA4], on a

$$E_1^{pq} = H_c^{p+q}(X_p - X_{p+1}, \mathcal{S}) \Rightarrow H_c^{p+q}(X, \mathcal{S}).$$

On a $X_p - X_{p+1} = \bigcup_{\eta \leq \lambda, \langle \eta, 2\rho_G \rangle = -p} S_\nu \cap \mathrm{Gr}^\eta$ où $S_\nu \cap \mathrm{Gr}^\eta$ est une composante connexe de $X_p - X_{p+1}$. Si $H_c^q(S_\nu \cap \mathrm{Gr}^\eta, \mathcal{S}) = 0$ pour $q > \langle \nu, 2\rho_G \rangle$, alors $H_c^q(X_p - X_{p+1}, \mathcal{S}) = 0$ pour $q > \langle \nu, 2\rho_G \rangle$. Donc $H_c^q(X, \mathcal{S}) = 0$ si $q > \langle \nu, 2\rho_G \rangle$.

Finalement, on peut montrer que $H_c^q(S_\nu, \mathcal{S}) \simeq H_c^q(S_\nu \cap \overline{\mathrm{Gr}^\lambda}, \mathcal{S})$. Donc on a $H_c^q(S_\nu, \mathcal{S}) = 0$ si $q > \langle \nu, 2\rho_G \rangle$.

Pour obtenir le second, d'abord on remplace le Borel B (resp. S_ν) ci-dessus par le Borel opposé B^- (resp. T_ν). En utilisant $dim(T_\nu \cap \mathrm{Gr}_G^\eta) = -\langle \nu - \eta, \rho_G \rangle$, on obtient $H_c^q(T_\nu, \mathcal{S}) = 0$ si $q > -\langle \nu, 2\rho_G \rangle$.

Remarquons que l'on a $\mathbb{D}(\pi_\nu^-)_*(i_\nu^-)^! \mathcal{S} \simeq (\pi_\nu^-)_!(i_\nu^-)^* \mathbb{D}\mathcal{S} \simeq (\pi_\nu^-)_!(i_\nu^-)^* \mathcal{S}$, donc $H^q((\pi_\nu^-)_*(i_\nu^-)^! \mathcal{S}) = 0$ si $q < \langle \nu, 2\rho_G \rangle$.

(ii) Ensuite, on a une flèche dans $D_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$:

$$(\pi_\nu^-)_*(i_\nu^-)^! \mathcal{S} \to (\pi_\nu)_!(i_\nu)^* \mathcal{S}.$$

En fait, cette flèche est donnée par la composée des morphismes : $(\pi_\nu^-)_*(i_\nu^-)^! \xrightarrow{adj} (\pi_\nu^-)_*(f_\nu^-)_*(f_\nu^-)^*(i_\nu^-)^! \simeq (f_\nu^-)^*(i_\nu^-)^! \xrightarrow{adj} (f_\nu^-)^*(i_\nu^-)^!(i_\nu)_*(i_\nu)^* \xleftarrow{\sim \beta} (f_\nu^-)^*(f_\nu^-)_*(f_\nu)^!(i_\nu)^* \xrightarrow{\sim} (f_\nu)^!(i_\nu)^* \xrightarrow{adj} (f_\nu)^!(\pi_\nu)^!(\pi_\nu)_!(i_\nu)^* \simeq (\pi_\nu)_!(i_\nu)^*$ où le morphisme β est le changement de base.

(iii) On montrera que la flèche dans (ii) est un isomorphisme. Avec (i), cela impliquera (a).

En fait, considérons l'action de $\mathbb{G}_m$ via le cocaractère $2\check{\rho}_G$ sur Gr_G. Les points fixés sont les L_ν, $\nu \in X_*(T)$. Alors $S_\nu = \{x \in \mathrm{Gr}, \lim_{s \to 0} 2\check{\rho}_G(s)x = L_\nu\}$, $T_\nu = \{x \in \mathrm{Gr}, \lim_{s \to \infty} 2\check{\rho}_G(s)x = L_\nu\}$.

D'après le théorème 8 et sa remarque dans [Fal03], $\overline{\mathrm{Gr}^{\lambda}}$ est normal. Donc on peut appliquer le théorème 1 de [Bra03] à $\overline{\mathrm{Gr}^{\lambda}}$ et à l'action de $\mathbb{G}_m$ via le cocaractère $2\check{\rho}_G$. On obtient que la flèche dans (ii) est un isomorphisme.

(iii)' (On donne une autre démonstration de (iii) sans utiliser la normalité dans [Fal03], à l'aide d'une généralisation du théorème de Braden dans [DG14].) Notons $X := \overline{\mathrm{Gr}^{\lambda}_G}$. Considérons l'action de $\mathbb{G}_m$ via le cocaractère $2\check{\rho}_G$ sur X. D'après [DG14], on défini $X^+ := \mathbf{Maps}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{A}^1, X)$ et $X^0 := \mathbf{Maps}^{\mathbb{G}_m}(pt, X)$. On a le morphisme $X^+ \xrightarrow{p^+_X} X$ induit par l'évaluation en $1 \in \mathbb{A}^1$ et le morphisme $q^+ : X^+ \to X^0$ induit par le morphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant $0 : pt \to \mathbb{A}^1$.

Lemme 1.8.1. *La restriction de p^+_X sur chaque composante connexe de X^+ est une immersion localement fermée.*

Par définition, $X^0 = \{L_\nu | \nu \in X_*(T), \forall w \in W, w\nu \leqslant \lambda\}$. Pour $L_\nu \in X^0$, notons $X^+_\nu := (q^+)^{-1}(L_\nu)$. A priori, par définition X^+_ν n'est pas un sous-schéma de X. Mais d'après le lemme ci-dessus, on sait que dans notre cas, $X^+_\nu \hookrightarrow X^+ \to X$ est une immersion. D'après 1.4.3 de [DG14], quand $X^+_\nu \hookrightarrow X$ est une immersion, on a $X^+_\nu = \{x \in X | \lim_{s\to 0} 2\check{\rho}_G(s)x = L_\nu\}$ (où $\lim_{s\to 0}$ signifie que pour un schéma S, le morphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant $S \times \mathbb{G}_m \to X$ peut étendre à un morphisme $S \times \mathbb{A}^1 \to X$). Le dernier n'est d'autre que $S_\nu \cap \overline{\mathrm{Gr}^{\lambda}_G}$.

De même, on peut définir X^- et montrer que $X^-_\nu = T_\nu \cap \overline{\mathrm{Gr}^{\lambda}_G}$.

Donc on peut appliquer le thm 3.1.6 de [DG14] à $\overline{\mathrm{Gr}^{\lambda}}$ et à l'action de $\mathbb{G}_m$ via le cocaractère $2\check{\rho}_G$. On obtient que la flèche dans (ii) est un isomorphisme.

Démonstration du lemme 1.8.1.

Soit V une représentation fidèle de dimension finie de G, alors cela induit $G \hookrightarrow GL(V) \simeq GL_r$ où $r = dimV$. Notons λ' la composé $\mathbb{G}_m \xrightarrow{\lambda} T_G \hookrightarrow T_{GL_r}$. Il y a $M, N \in \mathbb{N}$ tel que l'on a des immersions fermées suivantes :

$$\overline{\mathrm{Gr}^{\lambda}_G} \hookrightarrow \overline{\mathrm{Gr}^{\lambda'}_{GL_r}} \hookrightarrow \mathrm{Gr}(M, N) \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathrm{Gr}(M, N), \mathcal{L}_{det})).$$

La première immersion est induite par $G \hookrightarrow GL_r$ (4.5.1 de [BD99]).

Pour définir la deuxième immersion, notons $\lambda' = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$. Il existe un m tel que $\overline{\mathrm{Gr}^{\lambda'}_{GL_r}}(R) \subset \{\mathcal{R} \subset R((\varpi))^r$ un sous-$R[[\varpi]]$-module localement libre, $\varpi^m R[[\varpi]]^r \subset \mathcal{R} \subset \varpi^{-m} R[[\varpi]]^r, \varpi^{-m} R[[\varpi]]^r/\mathcal{R}$ est un R-module localement libre de rang $\sum(m + \lambda_i), \mathcal{R}/\varpi^m R[[\varpi]]^r$ est un R-module localement libre de rang $\sum(m - \lambda_i)\} \subset \{$ sous R-module loc. libre loc. facteur direct de rang $\sum(m - \lambda_i)$ de $\varpi^{-m} R[[\varpi]]^r/\varpi^m R[[\varpi]]^r$ stable par l'action de $\varpi\} \subset \{$ sous R-module loc. libre loc. facteur direct de rang $\sum(m - \lambda_i)$ de $\varpi^{-m} R[[\varpi]]^r/\varpi^m R[[\varpi]]^r\} = \mathrm{Gr}(M, N)(R)$, avec $M = \sum(m - \lambda_i), N = 2mr$.

La troisième immersion est le plongement de Plucker. On note $\mathcal{L}_{det}$ est le fibré en droites de determinant relatif sur $\mathrm{Gr}(M,N)$.

On a l'action de T_{GL_r} sur les trois derniers objets par multiplication à gauche (pour le dernier, T_{GL_r} agit sur $\mathcal{L}_{det}$ et cela induit une action linéaire sur $H^0(\mathrm{Gr}(M,N),\mathcal{L}_{det})$) et l'action de T_G sur tous les quatre objets ci-dessus par multiplication à gauche qui est compatible avec l'action de T_{GL_r}. Donc on a une action de $\mathbb{G}_m$ donnée par $\mathbb{G}_m \xrightarrow{2\check{\rho}_G} T_G \hookrightarrow T_{GL_r}$ sur tous les objets.

Notons $X := \overline{\mathrm{Gr}_G^{\lambda}}$ et $\mathbb{P} := \mathbb{P}(H^0(\mathrm{Gr}(M,N),\mathcal{L}_{det}))$. D'après [DG14], on défini $X^+ := \mathbf{Maps}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{A}^1, X)$ et $\mathbb{P}^+ := \mathbf{Maps}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{A}^1, \mathbb{P})$. On a diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X^+ & \xrightarrow{p_X^+} & X \\ {\scriptstyle i_X^+}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_X} \\ \mathbb{P}^+ & \xrightarrow{p_{\mathbb{P}}^+} & \mathbb{P}. \end{array}$$

où p_X^+ et $p_{\mathbb{P}}^+$ sont donnés par l'évolution en $1 \in \mathbb{A}^1$, i_X est une immersions fermées.

D'après le thm 1.6.8 de [DG14], la restriction de $p_{\mathbb{P}}^+$ sur chaque composant connexe de $\mathbb{P}^+$ est une immersion localement fermée. D'après le lemme 1.4.9 (ii) de [DG14], le morphisme $X^+ \to X \times_{\mathbb{P}} \mathbb{P}^+$ est un isomorphisme. Donc la restriction de p_X^+ sur chaque composant connexe de X^+ est une immersion localement fermée. On a montré le lemme.

□

(b) Soit $\mathcal{S} \in Perv_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$. Notons X le support de $\mathcal{S}$, $X_p := \bigcup_{\langle \nu, 2\rho_G\rangle \leqslant -p} S_\nu \cap X$. Alors X_p est fermé dans X, $X_p \supset X_{p+1}$. On utilise

$$E_1^{pq} = H_c^{p+q}(X_p - X_{p+1}, \mathcal{S}) \Rightarrow H_c^{p+q}(X, \mathcal{S}).$$

$X_p - X_{p+1} = \bigcup_{\langle \nu, 2\rho_G\rangle = -p} S_\nu \cap X$. Comme l'adhérence dans Gr_G de S_ν est $\overline{S_\nu} = \cup_{\eta \leq \nu} S_\eta$, chaque $S_\nu \cap X$ est une composant connexe de $X_p - X_{p+1}$. D'après a) de la proposition 1.5.3, on a $H_c^{p+q}(X_p - X_{p+1}, \mathcal{S}) = 0$ sauf si $p+q = -p$. Donc la suite spectrale dégénère et on obtient $H_c^n(X,\mathcal{S}) \simeq H_c^n(\cup_{\langle \nu, 2\rho_G\rangle = n} S_\nu \cap X, \mathcal{S})$.

Ensuite on montre que

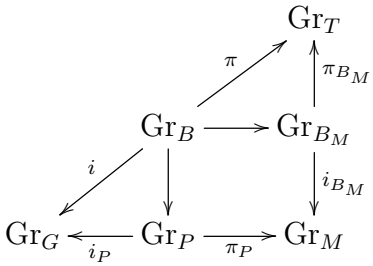
$$H_c^n(\cup_{\langle \nu, 2\rho_G\rangle = n} S_\nu \cap X, \mathcal{S}) \simeq \oplus_{\langle \nu, 2\rho_G\rangle = n} H_c^n(S_\nu \cap X, \mathcal{S}).$$

En fait, chaque $S_\nu \cap X$ est une composant connexe de $\cup_{\langle \nu, 2\rho_G\rangle = n} S_\nu \cap X$. Si $\nu_1, \nu_2 \in X_*(T)$ tel que $\langle \nu_1, 2\rho_G\rangle = \langle \nu_2, 2\rho_G\rangle = n$, alors d'après (2) on a $0 \to H_c^n(S_{\nu_1}, \mathcal{S}) \to H_c^n(S_{\nu_1} \cup S_{\nu_2}, \mathcal{S}) \to H_c^n(S_{\nu_2}, \mathcal{S}) \to 0$ et $0 \to H_c^n(S_{\nu_2}, \mathcal{S}) \to H_c^n(S_{\nu_1} \cup S_{\nu_2}, \mathcal{S}) \to H_c^n(S_{\nu_1}, \mathcal{S}) \to 0$. Donc ces deux suites exactes se scindent, $H_c^n(S_{\nu_1} \cup S_{\nu_2}, \mathcal{S}) \simeq H_c^n(S_{\nu_1}, \mathcal{S}) \oplus H_c^n(S_{\nu_2}, \mathcal{S})$.

Comme conséquence, $H^n(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{S}) = H^n(X, \mathcal{S}) = H^n_c(X, \mathcal{S}) \simeq H^n_c(\cup_{\langle \nu, 2\rho_G\rangle = n} S_\nu \cap X, \mathcal{S}) \simeq \oplus_{\langle \nu, 2\rho_G\rangle = n} H^q_c(S_\nu \cap X, \mathcal{S})$.

1.8.2 Démonstration du Théorème 1.7.4

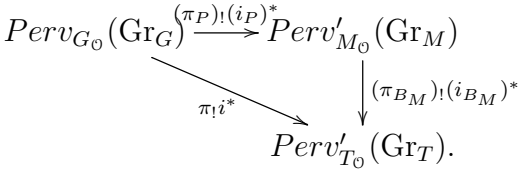
On rappelle la démonstration dans 5.3.29 de [BD99] :
(a) Notons $B_M := B/(N_P \cap B)$. On a le diagramme commutatif



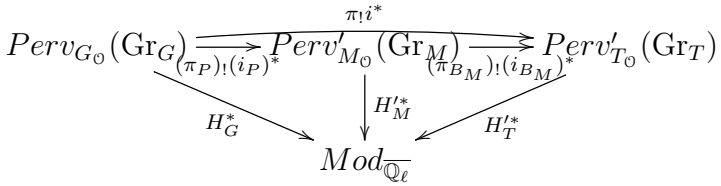
où $\mathrm{Gr}_B = \mathrm{Gr}_P \times_{\mathrm{Gr}_M} \mathrm{Gr}_{B_M}$. Comme foncteurs de $D_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ vers $D_{T_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_T)$, on a $\pi_! i^* \simeq (\pi_{B_M})_!(i_{B_M})^*(\pi_P)_!(i_P)^*$ (par changement de base propre).

D'après le lemme 3.9 de [MV07], un complexe $\mathcal{A} \in D_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M)$ est dans $Perv'_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M)$ ssi $(\pi_{B_M})_!(i_{B_M})^*\mathcal{A}$ est dans $Perv'_{T_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_T)$. Soit $\mathcal{S} \in Perv_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$, alors $(\pi_P)_!(i_P)^*\mathcal{S} \in D_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M)$. Or on sait que $\pi_! i^*\mathcal{S} \in Perv'_{T_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_T)$. Donc il faut que $(\pi_P)_!(i_P)^*\mathcal{S} \in Perv'_{M_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_M)$.

(b) D'après (a) et la proposition 1.5.3, on a le diagramme commutatif :



Considérons le diagramme :



On a $H^*_G \simeq H'^*_T(\pi_! i^*) \simeq H'^*_T((\pi_{B_M})_!(i_{B_M})^*(\pi_P)_!(i_P)^*) \simeq H'^*_M((\pi_P)_!(i_P)^*)$, où le premier et le dernier isomorphisme viennent de (c) de la proposition 1.5.3

appliqué à G et à M.

Remarque : On peut aussi montre l'énoncé par un argument similaire que le cas de Borel ci-dessus, en considérant une filtration de Gr_G par les $S_{P,\nu}$.

Chapitre 2

Rappel sur les champs de chtoucas

Les rappels dans ce chapitre sont basés sur [Dri87], le chapitre 1 de [Laf97], [Var04] et les sections 1, 2, 4 de [Laf12].

On va seulement considérer les champs de chtoucas sans modifications intermédiaires. Les champs de chtoucas avec modifications intermédiaires sont nécessaires pour les actions de Frobenius partiels, mais on ne les considérera pas. Voir [Laf12] pour les détails sur cela.

2.1 Comme préchamps

2.1.1 Définition de préchamps de chtoucas

Notation 2.1.1. Si S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, on notera $\mathrm{Frob}_S : S \to S$ le morphisme qui est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et qui sur le faisceau de structure $\mathcal{O}_S$ est l'élévation à la puissance q. (On dit aussi que c'est le Frobenius absolu ou le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$.)

Si $\mathscr{X}$ est un champ sur $\mathbb{F}_q$, on notera $\mathrm{Frob}_{\mathscr{X}} : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ (ou simplement Frob s'il n'y a pas d'ambiguïté) le morphisme qui pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ induit le foncteur

$$\mathscr{X}(S) \to \mathscr{X}(S)$$
$$(x : S \to \mathscr{X}) \mapsto (x \circ \mathrm{Frob}_S : S \to S \to \mathscr{X}).$$

Cette définition est compatible avec la précédente lorsque $\mathscr{X}$ est un schéma, parce que le diagramme suivant est commutatif sur $\mathbb{F}_q$:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{X} & \xrightarrow{\mathrm{Frob}_{\mathscr{X}}} & \mathscr{X} \\ {\scriptstyle x}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle x} \\ S & \xrightarrow{\mathrm{Frob}_S} & S \end{array}$$

Définition 2.1.2. On note Bun_G le préchamp qui associe à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde

$$\mathrm{Bun}_G(S) = \{\mathcal{F}_G : G\text{-torseur sur } X \times S\}.$$

Soit N un sous-schéma fini de X. On note $\mathrm{Bun}_{G,N}$ le préchamp qui associe à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde

$$\mathrm{Bun}_{G,N}(S) = \{\mathcal{F}_G : G\text{-torseur sur } X \times S,\ \psi : \mathcal{F}_G\big|_{N\times S} \xrightarrow{\sim} G\big|_{N\times S}\}.$$

Lemme 2.1.3. *Le morphisme* $\mathrm{Bun}_{G,N} \to \mathrm{Bun}_G$ *d'oubli de la structure du niveau fait de* $\mathrm{Bun}_{G,N}$ *un* G_N*-torseur sur* Bun_G.

Soient $N' \supset N$ *deux sous-schémas finis de* X. *Alors* $\mathrm{Bun}_{G,N'}$ *est un* $Ker(G_{N'} \to G_N)$*-torseur sur* $\mathrm{Bun}_{G,N}$.

Notation 2.1.4. Pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ et tout G-torseur $\mathcal{F}_G$ sur $X \times S$, on notera ${}^{\tau}\mathcal{F}_G$ le G-torseur $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{F}_G$.

Par définition, si $\mathcal{F}_G$ désigne $S \xrightarrow{x} \mathrm{Bun}_G$, alors ${}^{\tau}\mathcal{F}_G$ est la composée $S \xrightarrow{\mathrm{Frob}_S} S \xrightarrow{x} \mathrm{Bun}_G$. On peut définir un morphisme de foncteurs $\mathrm{Frob}_{\mathrm{Bun}_G} : \mathrm{Bun}_G \to \mathrm{Bun}_G$: pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$, cela induit le foncteur de groupoïdes :

$$\mathrm{Bun}_G(S) \to \mathrm{Bun}_G(S), \quad \mathcal{F}_G \mapsto {}^{\tau}\mathcal{F}_G.$$

En fait, on va montrer que le préchamp Bun_G est représentable par un champ algébrique sur $\mathbb{F}_q$. Le morphisme $\mathrm{Frob}_{\mathrm{Bun}_G}$ est donc le morphisme dans la notation 2.1.1.

Définition 2.1.5. Soit I un ensemble fini. Soit N un sous-schéma fini de X. On note $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$ le préchamp qui associe à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde $\mathrm{Cht}_{G,N,I}(S)$ qui classifie la donnée de

i) $x_i \in (X \smallsetminus N)(S)$ pour $i \in I$,

ii) $(\mathcal{F}_G, \psi) \in \mathrm{Bun}_{G,N}(S)$,

iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{F}_G\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} {}^{\tau}\mathcal{F}_G\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}$$

préservant les structures de niveau en N, c'est-à-dire que ${}^{\tau}\psi \circ \phi\big|_{N\times S} = \psi$.

Définition 2.1.6. Soient I et N comme dans la définition précédente. On note $\mathrm{Hecke}_{G,N,I}$ le préchamp qui associe à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde $\mathrm{Hecke}_{G,N,I}(S)$ qui classifie la donnée de

i) $x_i \in (X \smallsetminus N)(S)$ pour $i \in I$,

ii) $(\mathcal{F}_G, \psi), (\mathcal{F}'_G, \psi') \in \mathrm{Bun}_{G,N}(S)$,

iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{F}_G\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'_G\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}$$

préservant les structures de niveau en N, c'est-à-dire que $\psi' \circ \phi\big|_{N\times S} = \psi$.

Remarque 2.1.7. Par définition, on a un carré cartésien de préchamps sur $\mathbb{F}_q$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_{G,N,I} & \longrightarrow & \mathrm{Hecke}_{G,N,I} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (pr,\, pr')} \\ \mathrm{Bun}_{G,N} & \xrightarrow{(\mathrm{Id},\,\mathrm{Frob})} & \mathrm{Bun}_{G,N} \times \mathrm{Bun}_{G,N} \end{array} \tag{2.1.1}$$

où pr (resp. pr') est la projection de $\big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_G, \psi) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{F}'_G, \psi')\big)$ vers $(\mathcal{F}_G, \psi)$ (resp. vers $(\mathcal{F}'_G, \psi')$).

Remarque 2.1.8. Le préchamp $\mathrm{Bun}_{G,N}$ est sur $\mathbb{F}_q$. Les préchamps $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$ et $\mathrm{Hecke}_{G,N,I}$ sont sur $(X \smallsetminus N)^I$.

Notation 2.1.9. On omet N de la notation lorsque $N = \emptyset$.

Lemme 2.1.10. *Le morphisme* $\mathrm{Cht}_{G,N,I} \to \mathrm{Cht}_{G,I}$ *d'oubli de la structure du niveau fait de* $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$ *un* $G_N(\mathbb{F}_q)$*-torseur sur* $\mathrm{Cht}_{G,I}$.

Plus généralement, soient $N' \supset N$ *deux sous-schémas finis de* X, *alors* $\mathrm{Cht}_{G,N',I}$ *est un* $Ker(G_{N'}(\mathbb{F}_q) \to G_N(\mathbb{F}_q))$*-torseur sur* $\mathrm{Cht}_{G,N,I}\big|_{(X\smallsetminus N')^I}$.

2.1.2 Une autre description du préchamp de Hecke

On aura besoin d'une description de $\mathrm{Hecke}_{G,N,I}$ comme dans la proposition 2.1.16 ci-dessous. Cela va servir pour la section 2.2.2 suivante.

Commençons par une généralisation de $\mathrm{Bun}_{G,N}$.

Définition 2.1.11. Soit N un sous-schéma fini de X. Soit I un ensemble fini. Soit $\underline{d} := (d_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I$. On note $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\underline{d}}$ le préchamp qui associe à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde qui classifie la donnée de

i) $x_i \in (X \smallsetminus N)(S)$ pour $i \in I$,

ii) $\mathcal{F}_G$: un G-torseur sur $X \times S$,

iii) une structure de niveau sur le diviseur $(N \times S) + \Gamma_{\sum d_i x_i}$:

$$\psi : \mathcal{F}_G\big|_{(N\times S)+\Gamma_{\sum d_i x_i}} \tilde{\to} G\big|_{(N\times S)+\Gamma_{\sum d_i x_i}}$$

Remarque 2.1.12. $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\underline{d}}$ est sur $(X \smallsetminus N)^I$. Soient $(x_i)_{i\in I} \in (X \smallsetminus N)^I(\mathbb{F}_q)$. Alors la fibre de $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\underline{d}}$ au-dessus de $(x_i)_{i\in I}$ est isomorphe à $\mathrm{Bun}_{G,N+\sum d_i x_i}$ (on voit $N + \sum d_i x_i$ comme un sous-schéma fini de X dans la définition 2.1.2).

Définition 2.1.13. On définit le préchamp $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} := \varprojlim \mathrm{Bun}_{G,N,I,\underline{d}}$, où la limite est pour tous les d_i tendant vers ∞.

Concrètement, pour tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$, le groupoïde $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty}(S)$ classifie la donnée de

i) et ii) comme dans la définition précédente,

iii) $\psi : \mathcal{F}_G\big|_{(N\times S)+\Gamma_{\sum \infty x_i}} \tilde{\to} G\big|_{(N\times S)+\Gamma_{\sum \infty x_i}}$.

Construction 2.1.14. On construit un morphisme de préchamps sur $(X \smallsetminus N)^I$:

$$\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I} \to \mathrm{Hecke}_{G,N,I},$$

où $\mathrm{Gr}_{G,I}$ est la grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld sur X^I définie dans la section 2 du chapitre 1.

Il envoie

$$\Big((x_i)_{i\in I},\ \mathcal{F}_G,\ \psi : \mathcal{F}_G\big|_{N\times S} \tilde{\to} G\big|_{N\times S},\ \kappa : \mathcal{F}_G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} \tilde{\to} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}}\Big) \in \mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty}(S)$$

et

$$\Big((x_i)_{i\in I},\ \phi : \mathcal{F}'_G \to \mathcal{F}''_G,\ \theta : \mathcal{F}''_G \tilde{\to} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}}\Big) \in \mathrm{Gr}_{G,I}(S)$$

sur

$$\Big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_{G,0}, \psi_0) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{F}_{G,1}, \psi_1)\Big) \in \mathrm{Hecke}_{G,N,I}(S),$$

où

$$\mathcal{F}_{G,1} := \begin{cases} \mathcal{F}_G & \text{sur} \quad X \times S - \cup\Gamma_{x_i} \\ \mathcal{F}''_G & \text{sur} \quad \Gamma_{\sum \infty x_i} \end{cases} \qquad \mathcal{F}_{G,0} := \begin{cases} \mathcal{F}_G & \text{sur} \quad X \times S - \cup\Gamma_{x_i} \\ \mathcal{F}'_G & \text{sur} \quad \Gamma_{\sum \infty x_i} \end{cases}$$

le recollement est donné par $\kappa^{-1} \circ \theta$ (resp. $\kappa^{-1} \circ \theta \circ \phi$) sur $\Gamma_{\sum \infty x_i} - \cup\Gamma_{x_i}$. Comme $(x_i)_{i\in I} \in (X \smallsetminus N)(S)^I$, les deux diviseurs $N \times S$ et $\cup\Gamma_{x_i}$ sont disjoints. Donc on a une structure de niveau $\psi_1 = \psi$ pour $\mathcal{F}_{G,1}$ (resp. $\psi_0 = \psi$ pour $\mathcal{F}_{G,0}$).

On remarque qu'en fait, on a $\mathcal{F}_{G,1} \tilde{\to} \mathcal{F}_G$.

Dans la section 2 du chapitre 1, on a défini le groupe $G_{I,\mathcal{O}}$ sur X^I. Il agit sur $\mathrm{Gr}_{G,I}$ par changement de trivialisation. De plus, il agit aussi sur le préchamp $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty}$ par changement de trivialisation sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$.

Définition 2.1.15. On définit $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I})]$ comme quotient du préchamp $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I}$ par l'action diagonale de $G_{I,\mathcal{O}}$ (au sens de l'annexe A.3).

Proposition 2.1.16. *a) Le morphisme des préchamps* $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I} \to \mathrm{Hecke}_{G,N,I}$ *se factorise à travers le quotient* $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I})]$.

b) Le morphisme dans a) induit est un isomorphisme des préchamps :

$$[G_{I,\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I})] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hecke}_{G,N,I}\,.$$

On note $\beta_{G,N,I,\infty}$ *son inverse.*

Démonstration. a) Sur $(X \smallsetminus N)^I$, l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ est donnée par :

$$G_{I,\mathcal{O}} \times (\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I}) \longrightarrow \mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I}$$

$$\Big(\gamma, \big((\mathcal{F}_G, \psi, \kappa), (\mathcal{F}'_G \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}''_G, \theta)\big)\Big) \mapsto \Big(\big(\mathcal{F}_G, \psi, L_\gamma \circ \kappa\big), \big(\mathcal{F}'_G \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}''_G, L_\gamma \circ \theta\big)\Big)\,.$$

On voit que cette action ne change pas les G-torseurs $\mathcal{F}_{G,0}$ et $\mathcal{F}_{G,1}$ définis dans la construction 2.1.14 ci-dessus, qui sont donnés par le recollement en utilisant $\kappa^{-1} \circ \theta$ et $\kappa^{-1} \circ \theta \circ \phi$ respectivement. D'où le a).

b) On considère un préchamp $\widetilde{\mathrm{Hecke}}_{G,N,I}$ au-dessus de $(X \smallsetminus N)^I$ qui est défini en associant à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde $\widetilde{\mathrm{Hecke}}_{G,N,I}(S)$ qui classifie la donnée de

i) $\big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_{G,0}, \psi_0) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{F}_{G,1}, \psi_1)\big) \in \mathrm{Hecke}_{G,N,I}(S)$,

ii) une trivialisation sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$:

$$\theta : \mathcal{F}_{G,1}\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}}.$$

Le morphisme $\widetilde{\mathrm{Hecke}}_{G,N,I} \to \mathrm{Hecke}_{G,N,I}$ d'oubli de la trivialisation fait de $\widetilde{\mathrm{Hecke}}_{G,N,I}$ un $G_{I,\mathcal{O}}$-torseur sur $\mathrm{Hecke}_{G,N,I}$ (au sens de A.3). On a un carré carté-

sien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Hecke}}_{G,N,I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [G_{I,\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I})] & \longrightarrow & \mathrm{Hecke}_{G,N,I}, \end{array}$$

La flèche horizontale en haut est donnée par

$$\Big(\big(\mathcal{F}_G,\psi,\kappa\big),\big(\mathcal{F}'_G \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}''_G,\theta\big)\Big) \mapsto \big((\mathcal{F}_{G,0},\psi_0) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{F}_{G,1},\psi_1),\theta\big),$$

où les $\mathcal{F}_{G,0}$ et $\mathcal{F}_{G,1}$ sont les G-torseurs définis dans la construction 2.1.14.

Les deux flèches verticales sont des $G_{I,\mathcal{O}}$-torseurs. Donc pour montrer le b), il suffit de montrer que $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I} \to \widetilde{\mathrm{Hecke}}_{G,N,I}$ est un isomorphisme. Pour cela, on construit un morphisme inverse, qui envoie

$$\Big((x_i)_{i\in I},(\mathcal{F}_{G,0},\psi_0) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{F}_{G,1},\psi_1),\theta : \mathcal{F}_{G,1}\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}} \xrightarrow{\sim} G\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}}\Big) \in \widetilde{\mathrm{Hecke}}_{G,N,I}(S)$$

sur

$$\Big(\big(\mathcal{F}_{G,1},\psi_1,\theta\big),\big(\mathcal{F}_{G,0}\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}_{G,1}\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}},\theta\big)\Big) \in (\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I})(S).$$

□

Remarque 2.1.17. On va montrer que les préchamps $\mathrm{Hecke}_{G,N,I}$ et $\mathrm{Bun}_{G,N}$ sont des ind-champs. Comme $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \to \mathrm{Bun}_{G,N}$ est un $G_{I,\mathcal{O}}$-torseur, d'après la proposition A.3.4 dans l'annexe A.3, $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I})]$ est un champ. Donc l'isomorphisme dans la proposition 2.1.16 est en fait un isomorphisme d'ind-champs.

2.1.3 Préchamp $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$

Définition 2.1.18. On note $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I}]$ le quotient de $\mathrm{Gr}_{G,I}$ par $G_{I,\mathcal{O}}$ au sens des préchamps. Alors pour tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$, $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I}](S)$ est le groupoïde qui classifie la donnée de

i) $x_i \in X(S)$ pour $i \in I$,

ii) deux G-torseurs $\mathcal{F}_G, \mathcal{F}'_G$ sur $\Gamma_{\sum\infty x_i}$,

iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{F}_G\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'_G\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}.$$

Construction 2.1.19. Notons $\epsilon_{G,I,\infty}$ la composée :

$$\mathrm{Cht}_{G,N,I} \to \mathrm{Hecke}_{G,N,I} \simeq [G_{I,\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I})] \to [G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I}].$$

Autrement dit, il envoie

$$\Big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_G, \psi) \xrightarrow{\phi} ({}^{\tau}\mathcal{F}_G, {}^{\tau}\psi)\Big) \in \mathrm{Cht}_{G,N,I}(S)$$

sur

$$\Big((x_i)_{i\in I}, \mathcal{F}_G\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}} \xrightarrow{\phi} {}^{\tau}\mathcal{F}_G\big|_{\Gamma_{\sum\infty x_i}}\Big) \in [G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I}](S).$$

Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$. Rappelons que l'on a défini le sous-schéma fermé $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ de $\mathrm{Gr}_{G,I}$ dans le chapitre 1.

Définition 2.1.20. a) On définit $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$ comme image inverse de $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ par le morphisme ci-dessus $\epsilon_{G,I,\infty} : \mathrm{Cht}_{G,N,I} \to [G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I}]$.

b) On définit $\mathrm{Hecke}_{G,N,I,W}$ comme image inverse de $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ par le morphisme composé : $\mathrm{Hecke}_{G,N,I} \simeq [G_{I,\mathcal{O}}\backslash(\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I})] \to [G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I}]$.

Par définition, $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$ est un sous-préchamp fermé de $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$. Le préchamp $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$ est limite inductive des $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$.

Lemme 2.1.21. *Soit W de la forme $\boxtimes_{i\in I} V_{\omega_i}$, où V_{ω_i} est la représentation irréductible de $\widehat{G}$ de plus haut poids ω_i. Alors $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$ est non vide si et seulement si $[\sum_{i\in I}\omega_i] = 0$ dans $\pi_1(G)$.*

2.1.4 Stratification de Harder-Narasimhan

On rappelle la stratification de Harder-Narasimhan pour Bun_G et $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$. Voir [Var04], [Sch15], [DG15] pour plus de détails.

Commençons par quelques préparations. On a un isomorphisme canonique $\pi_0(\mathrm{Bun}_{\mathbb{G}_m}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Ainsi pour tout tore H déployé on a un isomorphisme canonique

$$\deg_H : \pi_0(\mathrm{Bun}_H) \xrightarrow{\sim} \widehat{\Lambda}_H.$$

Soit P un parabolique standard de G et M le plus grand quotient réductif. En utilisant $M \twoheadrightarrow M^{\mathrm{ab}}$, on obtient

$$\mathrm{Bun}_M \to \mathrm{Bun}_{M^{\mathrm{ab}}} \to \pi_0(\mathrm{Bun}_{M^{\mathrm{ab}}}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\Lambda}_{M^{\mathrm{ab}}}.$$

D'ailleurs, l'isogénie $Z_M \twoheadrightarrow M^{\mathrm{ab}}$ induit un isomorphisme $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{M^{\mathrm{ab}}} \simeq \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M}$. Notons $\deg_M$ le composé :

$$\deg_M : \mathrm{Bun}_M \to \widehat{\Lambda}_{M^{\mathrm{ab}}} \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{M^{\mathrm{ab}}} \simeq \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M}.$$

Notons $\deg_P$ le composé :

$$\deg_P : \mathrm{Bun}_P \to \mathrm{Bun}_M \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M}.$$

Par définition,

$$\widehat{\Lambda}_{Z_M} = \{\lambda \in \widehat{\Lambda}_G \mid \langle \lambda, \alpha_i \rangle = 0 \text{ pour } i \in \Gamma_M\}.$$

On a une inclusion

$$\iota_P : \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M} \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_G.$$

On a une projection

$$pr_P : \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_G \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M}$$

définie comme le composé

$$\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_G = \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_M \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{M^{\mathrm{ab}}} \simeq \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M}.$$

Ainsi le noyau de pr_P est

$$\mathrm{Ker}(pr_P) = \bigoplus_{i \in \Gamma_M} \mathbb{Q} \cdot \check{\alpha}_i.$$

Le composé

$$\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M} \xrightarrow{\iota_P} \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_G \xrightarrow{pr_P} \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M}$$

est $\mathrm{Id} : \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M} \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M}$.

Remarque 2.1.22. L'ensemble $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M}$ est noté $\Lambda^{\mathbb{Q}}_{G,P}$ dans [DG15]. Le réseau $\widehat{\Lambda}_{M^{\mathrm{ab}}}$ est noté $\check{\Lambda}_{G,P}$ dans [Sch15], et le morphisme composé $\widehat{\Lambda}_{M^{\mathrm{ab}}} \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{M^{\mathrm{ab}}} \simeq \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M} \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_G$ est appelé morphisme de pente dans [Sch15] 2.1.3.

Exemple 2.1.23. Quand $G = GL_r$ et $M = GL_{r_1} \times GL_{r_2}$, le morphisme ι_P est donné par

$$\iota_P : \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M} \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_G$$

$$(v', v'') \mapsto (\frac{v'}{r_1}, \cdots, \frac{v'}{r_1}, \frac{v''}{r_2}, \cdots, \frac{v''}{r_2})$$

où $\frac{v'}{r_1}$ apparait r_1 fois et $\frac{v''}{r_2}$ apparait r_2 fois.

Dans l'autre sens,

$$pr_P : \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q}} \to \widehat{\Lambda}_{Z_M}^{\mathbb{Q}}$$
$$(\mu_1, \cdots, \mu_r) \mapsto (\sum_{i=1}^{r_1} \mu_i, \sum_{j=r_1+1}^{r} \mu_j).$$

Maintenant considérons l'application :

$$\iota_P \circ \deg_P : \mathrm{Bun}_P \to \widehat{\Lambda}_{Z_M}^{\mathbb{Q}} \to \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q}}.$$

Le morphisme $G \twoheadrightarrow G^{\mathrm{ad}}$ (dont le noyau est Z_G) induit $\widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q}} \to \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{\mathbb{Q}}$. Notons le composé :

$$\iota_P^{ad} : \widehat{\Lambda}_{Z_M}^{\mathbb{Q}} \to \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q}} \to \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{\mathbb{Q}}.$$
$$\iota_P^{ad} \circ \deg_P : \mathrm{Bun}_P \to \widehat{\Lambda}_{Z_M}^{\mathbb{Q}} \to \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{\mathbb{Q}}.$$

Soient $\lambda, \mu \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$. On dit que $\lambda \leq \mu$ si $\mu - \lambda$ est une somme des coracines simples de G^{ad} avec coefficients dans $\mathbb{Q}^+$.

Définition 2.1.24. a) Pour tout $\mu \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$, on définit $\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}$ comme le préchamp qui associe à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde

$$\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}(S) := \{\mathcal{F}_G \in \mathrm{Bun}_G(S) | \text{ pour tout point géométrique } s \in S,$$
$$\text{tout parabolique } P, \text{ toute } P\text{-structure } \mathcal{F}_P \text{ sur } \mathcal{F}_{G,s}, \text{ on a } \iota_P^{ad} \circ \deg_P(\mathcal{F}_P) \leq \mu\}.$$

b) Pour tout sous-schéma fini N de X, on note $\mathrm{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}$ l'image inverse de $\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}$ dans $\mathrm{Bun}_{G,N}$.

Remarque 2.1.25. D'après [DG15] lemma 7.3.2, il suffit de vérifier la condition seulement pour $P = B$. Autrement dit, la définition ci-dessus est équivalente à dire que

$$\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}(S) = \{\mathcal{F}_G \in \mathrm{Bun}_G(S) | \text{ pour tout point géométrique } s \in S,$$
$$\text{toute } B\text{-structure } \mathcal{F}_B \text{ sur } \mathcal{F}_{G,s}, \text{ on a } \iota_B^{ad} \circ \deg_B(\mathcal{F}_B) \leq \mu\}.$$

Elle est aussi équivalente à dire que

$$\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}(S) = \{\mathcal{F}_G \in \mathrm{Bun}_G(S) | \text{ pour tout point géométrique } s \in S,$$
$$\text{toute } B\text{-structure } \mathcal{F}_B \text{ sur } \mathcal{F}_{G,s}, \text{ tout } \lambda \in \Lambda_{G^{\mathrm{ad}}}, \text{ on a } \deg \mathcal{F}_{B,\lambda} \leq \langle \mu, \lambda \rangle\}.$$

où $\mathcal{F}_{B,\lambda}$ est le fibré en droites associé à λ (i.e. le $\mathbb{G}_m$-torseur $\mathcal{F}_B \overset{B}{\times} \mathbb{G}_m$ associé à $B \to T \to T^{\mathrm{ad}} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{G}_m$).

Cette dernière définition est celle utilisée dans [Var04] et [Laf12].

Exemple 2.1.26. Quand $G = GL_r$, on a $\widehat{\Lambda}_G \simeq \mathbb{Z}^r$ et $\widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}^r$.

$$\widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}} = \{\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_r) \bmod \mathbb{Q}(1, \cdots, 1) \in \mathbb{Q}^r/\mathbb{Q}(1, \cdots, 1), \text{ tel que } \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_r\}.$$

L'ordre partiel dans $\widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{\mathbb{Q}}$ est donné par

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \bmod \mathbb{Q}(1, \cdots, 1) \leq (\mu_1, \cdots, \mu_r) \bmod \mathbb{Q}(1, \cdots, 1)$$

si et seulement s'il existe un $a \in \mathbb{Q}$, tel que

$$\begin{gathered} \lambda_1 + a \leq \mu_1, \\ (\lambda_1 + a) + (\lambda_2 + a) \leq \mu_1 + \mu_2, \\ \cdots \\ (\lambda_1 + a) + \cdots + (\lambda_r + a) = \mu_1 + \cdots + \mu_r. \end{gathered}$$

Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(S)$. Alors pour tout point géométrique $s \in S$, $\mathcal{E}_s$ est un fibré vectoriel de rang r. Il a une filtration canonique Harder-Narasimhan

$$\widetilde{\mathcal{E}_s} : 0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_s.$$

Notons $r_i := rg(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i-1})$. Considérons le parabolique standard P correspondant aux blocs $(r_1, r_2, \cdots, r_m)$ et le Levi $M = GL_{r_1} \times \cdots \times GL_{r_m}$. Alors la filtration $\widetilde{\mathcal{E}_s}$ est une P-structure de $\mathcal{E}_s$ et on a

$$\deg_{\mathrm{P}} \widetilde{\mathcal{E}_s} = \big(\deg \mathcal{E}_1, \deg(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1), \cdots, \deg(\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_{m-1})\big) \in \mathbb{Z}^m = \widehat{\Lambda}_{Z_M},$$

$$\iota_P \circ \deg_{\mathrm{P}} \widetilde{\mathcal{E}_s} = \big(\mu(\mathcal{E}_1), \cdots, \mu(\mathcal{E}_1), \cdots, \mu(\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_{m-1}), \cdots, \mu(\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_{m-1})\big) \in \mathbb{Q}^r = \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q}},$$

où chaque $\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$, défini comme $\frac{\deg(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})}{rg(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})}$, apparait exactement r_i fois.

Soit $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_r) \bmod \mathbb{Q}(1, \cdots, 1) \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$. Alors $\mathrm{Bun}_{GL_r}^{\leq \mu}(S)$ classifie les fibrés vectoriels $\mathcal{E} \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(S)$ tel que pour tout point géométrique $s \in S$, pour P le parabolique correspondant à la filtration Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}_s$, on ait $\iota_P^{ad} \circ \deg_{\mathrm{P}} \mathcal{E}_s \leq \mu$. Avec les notations ci-dessus, cette condition s'écrit comme

$$\big(\mu(\mathcal{E}_1), \cdots, \mu(\mathcal{E}_1), \cdots, \mu(\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_{m-1}), \cdots, \mu(\mathcal{E}_m/\mathcal{E}_{m-1})\big) \bmod \mathbb{Q}(1, \cdots, 1) \leq \mu.$$

Autrement dit, le polygone Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}_s$ est au-dessous du polygone défini par μ (après la normalisation telle que les deux polygones se terminent en un même point).

Lemme 2.1.27. *([Var04] Lemme A.3) Pour tout $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$, $\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}$ est un sous-préchamp ouvert de Bun_G. Pour $\mu_1 \leq \mu_2$, on a une immersion ouverte :*

$$\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu_1} \hookrightarrow \mathrm{Bun}_G^{\leq \mu_2}.$$

De plus, Bun_G est la limite inductive de ces sous-préchamps ouverts

$$\mathrm{Bun}_G = \bigcup_{\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}} \mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}.$$

Définition 2.1.28. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. On définit

$$\mathrm{Bun}_G^{<\mu} := \bigcup_{\mu',\, \mu' < \mu} \mathrm{Bun}_G^{\leq \mu'}$$

$$\mathrm{Bun}_G^{=\mu} := \mathrm{Bun}_G^{\leq \mu} - \mathrm{Bun}_G^{<\mu}.$$

Le préchamp $\mathrm{Bun}_G^{<\mu}$ est ouvert dans $\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}$. Le préchamp $\mathrm{Bun}_G^{=\mu}$ est fermé dans $\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}$. Donc $\mathrm{Bun}_G^{=\mu}$ est un sous-préchamp localement fermé de Bun_G.

Lemme 2.1.29. *D'après [DG15] 7.4.5 - 7.4.9, on a des propriétés suivantes :*
i) Les $\mathrm{Bun}_G^{=\mu}$ pour les μ différents ne s'intersectent pas.
ii) L'ensemble de μ tel que $\mathrm{Bun}_G^{=\mu} \neq \emptyset$ est discret dans $\widehat{\Lambda}^{+}_{G^{\mathrm{ad}}} \otimes \mathbb{R}$.
iii)

$$\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu} = \bigcup_{\lambda,\, \lambda \leq \mu} \mathrm{Bun}_G^{=\lambda}.$$

Définition 2.1.30. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. On définit $\mathrm{Cht}^{\leq \mu}_{G,N,I}$ (resp. $\mathrm{Cht}^{<\mu}_{G,N,I}$, $\mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,N,I}$) comme l'image inverse de $\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}$ (resp. $\mathrm{Bun}_G^{<\mu}$, $\mathrm{Bun}_G^{=\mu}$) par le morphisme

$$\mathrm{Cht}_{G,N,I} \to \mathrm{Bun}_G,$$

$$\Big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_G, \psi) \xrightarrow{\phi} ({}^{\tau}\mathcal{F}_G, {}^{\tau}\psi)\Big) \mapsto \mathcal{F}_G.$$

D'après le lemme 2.1.27 ci-dessus, on a

Lemme 2.1.31. *Le sous-préchamp $\mathrm{Cht}^{\leq \mu}_{G,N,I}$ est ouvert dans $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$. On a $\mathrm{Cht}_{G,N,I} = \bigcup_\mu \mathrm{Cht}^{\leq \mu}_{G,N,I}$. Pour $\mu_1, \mu_2 \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$, $\mu_1 < \mu_2$, on a une immersion ouverte :*

$$\mathrm{Cht}^{\leq \mu_1}_{G,N,I} \hookrightarrow \mathrm{Cht}^{\leq \mu_2}_{G,N,I}.$$

Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(\widehat{G}^I)$. On définit $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}$ comme l'image inverse de $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I}$ par le morphisme $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W} \hookrightarrow \mathrm{Cht}_{G,N,I}$.

Remarque 2.1.32. Ici, on définit la stratification de $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$ par la filtration de Harder-Narasimhan seulement pour $\mathcal{F}_G$.

Dans [Dri87] et [Laf97], Drinfeld et L.Lafforgue ont considéré une autre stratification de $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$ qui est définie en utilisant la filtration de Harder-Narasimhan pour un chtouca $(\mathcal{F}_G, \psi) \xrightarrow{\phi} ({}^{\tau}\mathcal{F}_G, {}^{\tau}\psi)$. Ainsi, pour tout $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$, on peut définir un sous-champ ouvert noté $\mathrm{Cht}^{{}^{\tau}\leq\mu}_{G,N,I}$.

Les deux systèmes inductifs sont compatibles, au sens suivant : on a

$$\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I} \subset \mathrm{Cht}^{{}^{\tau}\leq\mu}_{G,N,I}\,.$$

Pour tout μ, il existe un μ' tel que

$$\mathrm{Cht}^{{}^{\tau}\leq\mu}_{G,N,I} \subset \mathrm{Cht}^{\leq\mu'}_{G,N,I}\,.$$

De plus, pour μ assez grand pour B, on a

$$\mathrm{Cht}^{{}^{\tau}=\mu}_{G,N,I} = \mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,N,I}\,.$$

Pour voir ce dernier, considérons le cas où $G = GL_n$. Rappelons qu'un chtouca dans $\mathrm{Cht}_{GL_n,I,W}(S)$ avec des pattes en $(x_i)_{i\in I} \in X(S)$ est un fibré vectoriel $\mathcal{F}$ de rang n sur $X \times S$, muni d'un morphisme de faisceaux $\phi : \mathcal{F} \to {}^{\tau}\mathcal{F}(\Gamma_{\sum n_i x_i})$ (où les entiers $(n_i)_{i\in I}$ est déterminés par W), qui est un isomorphisme sur $X \times S \smallsetminus \cup\Gamma_{x_i}$ et qui a des pôles en $\cup\Gamma_{x_i}$.

Si $(\mathcal{F}, \phi) \in \mathrm{Cht}^{=\mu}_{GL_2,I,W}$ pour $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \widehat{\Lambda}^{+}_{GL_2}$ tel que $\mu_1 - \mu_2 \gg 0$. Alors $\mathcal{F}$ admet une filtration canonique $0 \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ avec $\mathcal{E}$ un sous-fibré de rang 1. Considérons

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & {}^{\tau}\mathcal{F} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{E} & & {}^{\tau}\mathcal{E} \end{array}$$

La condition sur μ implique que le morphisme composé $\mathcal{E} \to {}^{\tau}\mathcal{F}/{}^{\tau}\mathcal{E}(\Gamma_{\sum n_i x_i})$ est le morphisme nul. Ainsi le morphisme $\mathcal{E} \to {}^{\tau}\mathcal{F}(\Gamma_{\sum n_i x_i})$ se factorise par ${}^{\tau}\mathcal{E}(\Gamma_{\sum n_i x_i})$.

Le fibré vectoriel $\mathcal{E}$ muni de ce morphisme $\mathcal{E} \to {}^{\tau}\mathcal{E}(\Gamma_{\sum n_i x_i})$ est un sous-chtouca de $(\mathcal{F}, \phi)$.

2.1.5 Préchamps $\mathrm{Bun}_{G,N}/\Xi$ et $\mathrm{Cht}_{G,N,I}/\Xi$

Dans toute la suite on fixe un sous-groupe discret Ξ de $Z_G(\mathbb{A})$ tel que
i) $\Xi \cap Z_G(\mathbb{O})Z_G(F) = \emptyset$;

ii) le quotient $Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})/Z_G(\mathbb{O})\Xi$ soit fini ;

iii) le composé $\Xi \hookrightarrow Z_G(\mathbb{A}) \twoheadrightarrow G^{\mathrm{ab}}(\mathbb{A})$ soit injectif (où la deuxième flèche est induite par le composé $Z_G \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G^{\mathrm{ab}}$).

$\mathrm{Bun}_{Z_G,N}(\mathbb{F}_q)$ agit sur $\mathrm{Bun}_{G,N}$ (resp. $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$) par torsion d'un G-torseur par un Z_G-torseur : autrement dit, l'action de $\mathcal{T}_Z \in \mathrm{Bun}_{Z_G,N}(\mathbb{F}_q)$ est donnée par $\mathcal{F}_G \mapsto (\mathcal{F}_G \times \mathcal{T}_Z)/Z_G$.

Notons $K_{Z_G,N} := \mathrm{Ker}(Z_G(\mathbb{O}) \to Z_G(\mathcal{O}_N))$. On a

$$\mathrm{Bun}_{Z_G,N}(\mathbb{F}_q) \simeq Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})/K_{Z_G,N}.$$

Ainsi, pour tout N, Ξ agit sur $\mathrm{Bun}_{G,N}$ et $\mathrm{Cht}_{G,N,I}$ via $\Xi \to Z_G(\mathbb{A}) \to \mathrm{Bun}_{Z_G,N}(\mathbb{F}_q)$.

Définition 2.1.33. On définit les quotients

$$\mathrm{Bun}_{G,N}/\Xi \quad \text{et} \quad \mathrm{Cht}_{G,N,I}/\Xi;$$

De plus, soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. L'action de Ξ préserve les sous-préchamps ouverts $\mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N}$ (resp. $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I}$).

Définition 2.1.34. On peut définir les quotients

$$\mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N}/\Xi \quad \text{et} \quad \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I}/\Xi.$$

Le préchamp $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$ est stable sous l'action de Ξ. Donc on peut définir $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$ et $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi$.

Comme G est réductif, on peut construire un morphisme

$$\deg_G : \mathrm{Bun}_G \to \widehat{\Lambda}_{G^{ab}} \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{G^{ab}} \simeq \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}.$$

Définition 2.1.35. Pour tout $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}$, notons Bun^{ν}_G l'image inverse de ν.

Remarque 2.1.36. Le sous-préchamp Bun^{ν}_G est ouvert et fermé dans Bun_G. De plus, Bun^{ν}_G est non vide seulement si ν apparait à un sous-groupe engendré par un nombre fini d'éléments $A_G \subset \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}$ tel que $A_G \otimes \mathbb{Q} = \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}$. En fait, $A_G = pr_G(\widehat{\Lambda}_G)$, où $pr_G : \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_G \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}$. Pour plus de détails, on renvoie à la section 7.2 de [DG15].

On a vu que Ξ agit sur $\mathrm{Bun}_{G,N}$. De plus, Ξ agit aussi sur $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}$ via $\Xi \hookrightarrow Z_G(\mathbb{A}) \to \mathrm{Bun}_{Z_G} \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}$. Cette action est compatible avec le morphisme $\deg_G$:

$\mathrm{Bun}_G \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}$. Par définition, le morphisme $\Xi \to G^{\mathrm{ab}}(\mathbb{A})$ est injectif. Donc Ξ agit sur $\widehat{\Lambda}_{G^{ab}}$ et elle préserve A_G. Ainsi on obtient

$$\mathrm{Bun}_G\,/\Xi \to A_G/\Xi.$$

Comme $Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})/Z_G(\mathbb{O})\Xi$ est fini et le noyau de $Z_G \twoheadrightarrow G^{\mathrm{ab}}$ est fini, A_G/Ξ est fini. On peut choisir un sous-ensemble fini A'_G de A_G tel que le composé $A'_G \to A_G \to A_G/\Xi$ soit bijectif. Ainsi, on obtient un isomorphisme

$$\bigsqcup_{\nu\in A'_G} \mathrm{Bun}^{\nu}_{G,N} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bun}_{G,N}\,/\Xi.$$

(L'injectivité vient du fait que l'on a choisi Ξ tel que $\Xi \to G^{\mathrm{ab}}(\mathbb{A})$ soit injectif.)

Soit $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}$. On définit $\mathrm{Cht}^{\nu}_{G,N,I}$ comme image inverse de Bun^{ν}_G par le morphisme

$$\mathrm{Cht}_{G,N,I} \to \mathrm{Bun}_G,$$
$$\Big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_G,\psi) \xrightarrow{\phi} ({}^{\tau}\mathcal{F}_G, {}^{\tau}\psi)\Big) \mapsto \mathcal{F}_G.$$

On a

$$\bigsqcup_{\nu\in A'_G} \mathrm{Cht}^{\nu}_{G,N,I} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cht}_{G,N,I}\,/\Xi.$$

2.2 Comme champs algébriques

2.2.1 Représentabilité

Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Soit $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G}$. Notons $\mathrm{Bun}^{\leq\mu,\nu}_{G,N}$ l'image inverse de $\mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N}$ par $\mathrm{Bun}^{\nu}_{G,N} \to \mathrm{Bun}_{G,N}$. On a

$$\mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N}\,/\Xi \simeq \bigsqcup_{\nu\in A'_G} \mathrm{Bun}^{\leq\mu,\nu}_{G,N}\,.$$

$$\mathrm{Bun}_{G,N} = \bigcup_{\mu}\bigsqcup_{\nu\in A'_G} \mathrm{Bun}^{\leq\mu,\nu}_{G,N}\,.$$

Proposition 2.2.1. *([Var04] Lemma 3.1)*
a) Quand N est assez grand par apport à μ, $\mathrm{Bun}^{\leq\mu,\nu}_{G,N}$ est un schéma lisse quasi-projectif.
b) Pour tout N, le préchamp $\mathrm{Bun}_{G,N}$ est représentable par un champ algébrique d'Artin.

Remarque 2.2.2. Dans la proposition ci-dessus, a) implique que $\mathrm{Bun}^{\nu}_{G,N}$ est une réunion d'un nombre fini de composantes connexes. Mais on n'aura pas besoin de ce fait.

Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$. Notons $\mathrm{Cht}^{\leq\mu,\nu}_{G,N,I,W}$ l'image inverse de $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}$ par $\mathrm{Cht}^{\nu}_{G,N,I,W} \to \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$. On a

$$\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi \simeq \bigsqcup_{\nu\in A'_G} \mathrm{Cht}^{\leq\mu,\nu}_{G,N,I,W}\,.$$

$$\mathrm{Cht}_{G,N,I,W} = \bigcup_{\mu}\bigsqcup_{\nu\in A'_G} \mathrm{Cht}^{\leq\mu,\nu}_{G,N,I,W}\,.$$

Proposition 2.2.3. *(Proposition 2.16 [Var04])*
a) Si N est assez grand par apport à μ, alors $\mathrm{Cht}^{\leq\mu,\nu}_{G,N,I,W}$ est un schéma quasi-projectif.
b) Pour tout N et μ, le préchamp $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}$ (resp. $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$) est représentable par un champ algébrique de Deligne-Munfold localement de type fini.

Comme conséquence, $\mathrm{Cht}_{G,N,I} = \varinjlim \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$ est une limite inductive des champs algébriques de Deligne-Munfold.

Corollaire 2.2.4. *Le préchamp $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi$ est représentable par un champs algébrique de Deligne-Munfold de type fini.*

On rappelle le principe de la démonstration de la proposition 2.2.3. Voir [Var04] pour plus de détails.
D'abord, on a besoin de la représentativité de $\mathrm{Hecke}_{G,N,I,W}$.

Proposition 2.2.5. *([Var04] Lemma 3.1) Le morphisme*

$$pr : \mathrm{Hecke}_{G,N,I,W} \to \mathrm{Bun}_{G,N}, \quad (\mathcal{F}_G \to \mathcal{F}'_G) \mapsto \mathcal{F}_G$$

est représentable et projectif (de même pour pr'). Comme conséquence, $\mathrm{Hecke}_{G,N,I,W}$ est représentable par un champ algébrique d'Artin.

La démonstration est dans A.4 de [Var04]. Le fait important est que la fibre de ce morphisme sur un $\mathcal{F}_G \in \mathrm{Bun}_{G,N}$ est l'ensemble des $((x_i)_{i\in I}, \mathcal{F}, \theta : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_G)$ où $\mathcal{F}$ est un G-torseur sur X et θ est un isomorphisme sur $X - \bigcup_{i\in I} x_i$ dont la position relative sur $\bigcup_{i\in I} x_i$ est bornée par W. La fibre est une version tordue par $\mathcal{F}_G$ de $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$. Dans le chapitre 1, on a vu que $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ est un schéma réduit projectif de type fini.

Démonstration de la proposition 2.2.3.

a) Pour tout μ, si N est assez grand en fonction de μ comme dans la proposition 2.2.1, alors $\mathrm{Bun}_{G,N}^{\leq\mu,\nu}$ est un schéma quasi-projectif. D'après la proposition 2.2.5, $\mathrm{Hecke}_{G,N,I,W}^{\leq\mu,\nu}$ est aussi un schéma quasi-projectif.

Par définition, on a un carré cartésien de préchamps sur $\mathbb{F}_q$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}^{\leq\mu,\nu} & \longrightarrow & \mathrm{Hecke}_{G,N,I,W}^{\leq\mu,\nu} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (pr_0,pr_1)} \\ \mathrm{Bun}_{G,N}^{\leq\mu,\nu} & \xrightarrow{(\mathrm{Id},\mathrm{Frob})} & \mathrm{Bun}_{G,N}^{\leq\mu,\nu} \times \mathrm{Bun}_{G,N}^{\leq\mu,\nu} \end{array} \tag{2.2.1}$$

Donc le préchamp $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}^{\leq\mu,\nu}$ est un sous-préchamp fermé de $\mathrm{Hecke}_{G,N,I,W}^{\leq\mu,\nu}$. On en déduit que $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}^{\leq\mu,\nu}$ est un schéma quasi-projectif.

b) est une conséquence de a) et du lemme 2.1.10.

□

2.2.2 Un morphisme lisse clé

Rappelons que dans le chapitre 1, pour tout $\underline{d} := (d_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I$, on a défini un schéma en groupe $G_{I,\underline{d}}$ sur X^I. Le corolaire 1.2.20 dit que $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ est stable par l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ et que quand les entiers d_i sont assez grands en fonction de W, l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ se factorise à travers le quotient $G_{I,\underline{d}}$. Prenons un tel $\underline{d}$.

Définition 2.2.6. On définit $[G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ comme le champ de quotient (au sens de 2.4.2 de [LMB99]).

Proposition 2.2.7. *Le champ $[G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ est algébrique. Le morphisme $\mathrm{Gr}_{G,I,W} \to [G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ fait $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ un $G_{I,\underline{d}}$-torseur sur $[G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$.*

Le quotient $G_{I,\mathcal{O}} \to G_{I,\underline{d}}$ induit un morphisme $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}] \to [G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$. Notons $\epsilon_{G,N,I,\underline{d}}$ la composée

$$\mathrm{Cht}_{G,N,I,W} \to [G_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}] \to [G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}].$$

Corollaire 2.2.8. *$\epsilon_{G,N,I,\underline{d}}$ est un morphisme de champs algébriques.*

Le morphisme $G \to G/Z_G \simeq G^{\mathrm{ad}}$ induit un morphisme de champs algébriques $[G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}] \to [G_{I,\underline{d}}^{\mathrm{ad}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$. Le composé de morphismes

$$\mathrm{Cht}_{G,N,I,W} \xrightarrow{\epsilon_{G,N,I,\underline{d}}} [G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}] \to [G_{I,\underline{d}}^{\mathrm{ad}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$$

se factorise par le quotient $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$. Autrement dit, on possède un morphisme de champs algébriques

$$\epsilon^{\Xi}_{G,N,I,\underline{d}} : \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi \to [G^{\mathrm{ad}}_{I,\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}].$$

Proposition 2.2.9. *(V.Lafforgue, Prop 2.8 de [Laf12]) Le morphisme*

$$\epsilon_{G,N,I,\underline{d}} : \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} \longrightarrow [G_{I,\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$$

est lisse de dimension $\dim G_{I,\underline{d}} = (\sum d_i) \dim G$.

Corollaire 2.2.10. *Le morphisme*

$$\epsilon^{\Xi}_{G,N,I,\underline{d}} : \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi \to [G^{\mathrm{ad}}_{I,\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$$

est lisse de dimension $\dim G^{ad}_{I,\underline{d}} = (\sum d_i) \dim G^{ad}$.

Cette proposition est tellement importante pour la suite que l'on va rappeler sa démonstration. Commençons par un lemme :

$G_{I,\underline{d}}$ agit sur $\mathrm{Bun}_{G,I,N,\underline{d}}$ par changement de trivialisation. On définit le champ de quotient $[G_{I,\underline{d}} \backslash (\mathrm{Bun}_{G,I,N,\underline{d}} \underset{(X \smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W})]$. Notons $\beta_{G,I,\underline{d}}$ le composé

$$\mathrm{Hecke}_{G,N,I,W} \simeq [G_{I,\mathcal{O}} \backslash (\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \underset{(X \smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W})] \to [G_{I,\underline{d}} \backslash (\mathrm{Bun}_{G,I,N,\underline{d}} \underset{(X \smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W})],$$

où le premier morphisme est donné dans la construction 2.1.14 et la proposition 2.1.16, le deuxième morphisme est induit par $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\infty} \to \mathrm{Bun}_{G,I,N,\underline{d}}$ et $G_{I,\mathcal{O}} \to G_{I,\underline{d}}$.

Lemme 2.2.11. *Ce morphisme est un isomorphisme de champs algébriques :*

$$\beta_{G,I,\underline{d}} : \mathrm{Hecke}_{G,N,I,W} \xrightarrow{\sim} [G_{I,\underline{d}} \backslash (\mathrm{Bun}_{G,I,N,\underline{d}} \underset{(X \smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W})].$$

Démonstration du proposition 2.2.9.

On omet l'indice N pour simplifier les notations.

Comme l'énoncé est local pour la topologie lisse, il suffit de montrer que $\mathrm{Cht}_{G,I,W} \underset{[G_{I,\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W} \to \mathrm{Gr}_{G,I,W}$ est lisse.

En utilisant l'isomorphisme $\beta_{G,I,\underline{d}}$ dans le lemme ci-dessus, on a un diagramme où tout les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cht}_{G,I,W} \underset{[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{G,I,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{G,I,W} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Cht}_{G,I,W} & \longrightarrow & \mathrm{Hecke}_{G,I,W} \overset{\beta}{\underset{\simeq}{\to}} [G_{I,\underline{d}}\backslash(\mathrm{Bun}_{G,I,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W})] & \to & [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]
\end{array} \tag{2.2.2}$$

En combinant le carré à gauche dans le diagramme (2.2.2) ci-dessus avec le diagramme 2.1.1, on a un diagramme où tout les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cht}_{G,I,W} \underset{[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{G,I,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Cht}_{G,I,W} & \longrightarrow & \mathrm{Hecke}_{G,I,W} \overset{\beta}{\underset{\simeq}{\to}} [G_{I,\underline{d}}\backslash(\mathrm{Bun}_{G,I,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W})] & & \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (pr_1,\, \mathrm{Frob}\cdot pr_0)} & & \\
\mathrm{Bun}_G & \xrightarrow{\triangle} & \mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Bun}_G & &
\end{array} \tag{2.2.3}$$

Comme une conséquence du diagramme (2.2.3) ci-dessus, on a un carré cartésien au-dessus de $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cht}_{G,I,W} \underset{[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{G,I,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W} \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (pr_1,\, \mathrm{Frob}\cdot pr_0\cdot \beta^{-1},\, \mathrm{Id})} \\
\mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Gr}_{G,I,W} & \xrightarrow{(\triangle,\, \mathrm{Id})} & \mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Gr}_{G,I,W}
\end{array} \tag{2.2.4}$$

Pour conclure, on applique le lemme 2.2.12 ci-dessous à $Y = \mathrm{Gr}_{G,I,W}$, $\mathcal{V} = \mathrm{Bun}_{G,I,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W}$, $\mathcal{U} = \mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Gr}_{G,I,W}$, $b_1 = pr_1$, $b_2 = \mathrm{Frob}\cdot pr_0 \cdot \beta^{-1}$, $\mathcal{W} = \mathrm{Cht}_{G,I,W} \underset{[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]}{\times} \mathrm{Gr}_{G,I,W}$. On utilise le fait que Bun_G est lisse sur $\mathbb{F}_q$ et que le morphisme Frob a une dérivée nulle.

□

Lemme 2.2.12. *Soient Y un schéma sur $\mathbb{F}_q$, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux champs algébriques localement de type fini et lisses sur Y. Soient b_1, b_2 deux morphismes de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{U}$ tels que b_1 et b_2 commutent avec la projection vers Y et que b_1 soit lisse et b_2 ait une dérivée nulle dans les fibres au-dessus de Y. Notons $\mathcal{W}$ le produit fibré de champs*

algébriques :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (b_1,b_2)} \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{(Id,Id)} & \mathcal{U} \underset{Y}{\times} \mathcal{U} \end{array}$$

Alors $\mathcal{W}$ est lisse sur Y.

2.3 Exemples de champs de Chtoucas

Exemple 2.3.1. (Chtoucas pour un tore T)

Commençons par chtoucas pour $\mathbb{G}_m$. Soit $I = \{1, 2, \cdots, n\}$. Soit W une représentation irréductible de $\widehat{\mathbb{G}_m}^I$. Alors W est de la forme $\psi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \psi_n$, avec ψ_i caractère de $\mathbb{G}_m$, donné par un entier $\omega_i \in \mathbb{Z}$. On a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_{\mathbb{G}_m,I,W} & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L} \\ X^I & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_X \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{L} \\ \\ {}^{\tau}\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \end{array}$$

$$(x_i)_{i\in I} \qquad \sum_{i\in I} \omega_i x_i$$

Le champ $\mathrm{Cht}_{\mathbb{G}_m,I,W}$ est non vide si et seulement si $\sum_{i\in I} \omega_i = 0$. Quand il est non vide, il est de dimension relative 0 au-dessus de X^I.

Soit $T \simeq \mathbb{G}_m^r$. Soit $I = \{1, 2, \cdots, n\}$. Soit W une représentation irréductible de $\widehat{T}^I$. Alors W est de la forme $W_1 \boxtimes \cdots \boxtimes W_n$, avec W_i une représentation irréductible de $\widehat{T}$. Chaque W_i est de la forme $\chi_1^{(i)}\chi_2^{(i)}\cdots\chi_r^{(i)}$, avec $\chi_j^{(i)}$ caractère de $\mathbb{G}_m$, donné par un entier $\omega_j^{(i)} \in \mathbb{Z}$. On a

$$\mathrm{Cht}_{T,I,W} = \mathrm{Cht}_{\mathbb{G}_m,\, I,\, \chi_1^{(1)}\boxtimes\cdots\boxtimes\chi_1^{(n)}} \underset{X^I}{\times} \cdots \underset{X^I}{\times} \mathrm{Cht}_{\mathbb{G}_m,\, I,\, \chi_r^{(1)}\boxtimes\cdots\boxtimes\chi_r^{(n)}}$$

$$((x_i)_{i\in I}, \mathcal{L}_1 \to {}^{\tau}\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_r \to {}^{\tau}\mathcal{L}_r) \mapsto ((x_i)_{i\in I}, \mathcal{L}_1 \to {}^{\tau}\mathcal{L}_1), \cdots, ((x_i)_{i\in I}, \mathcal{L}_r \to {}^{\tau}\mathcal{L}_r)$$

Le champ $\mathrm{Cht}_{T,I,W}$ est non vide si et seulement si $\sum_{i\in I} \omega_j^{(i)} = 0$ pour tout $1 \leq j \leq r$. Dans ce cas, il est de dimension relative 0 au-dessus de X^I.

Exemple 2.3.2. (Chtoucas sans pattes)

Quand $I = \emptyset$, on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_{G,N,\emptyset} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{G,N} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Id,Id)} \\ \mathrm{Bun}_{G,N} & \xrightarrow{(Id,\mathrm{Frob})} & \mathrm{Bun}_{G,N} \times \mathrm{Bun}_{G,N} \,. \end{array}$$

Le champ $\mathrm{Cht}_{G,N,\emptyset}$ est canoniquement isomorphe au champ discret $\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$, considéré comme un champ constant sur $\mathbb{F}_q$. C'est-à-dire que

$$\bigsqcup_{(\mathcal{F}_G,\psi)\in \mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)} [Aut^{\psi}(\mathcal{F}_G)\backslash \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cht}_{G,N,\emptyset}$$

où $Aut^{\psi}(\mathcal{F}_G)$ est le groupe des automorphismes de $\mathcal{F}_G$, qui est un groupe fini (formés des sections globales du faisceau $\underline{Aut}(\mathcal{F}_G)$ sur X qui respecte la structure de niveau ψ), et $[Aut^{\psi}(\mathcal{F}_G)\backslash \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q]$ est le quotient au sens des champs.

Il y a deux façons de voir cet isomorphisme. La première est comme dans [Dri87] Proposition 1.1 ou [Laf97] 1.3. Quand $G = GL_n$, on utilise un lemme de Drinfeld ([Dri87] Proposition 1.1, [Laf97] 1.3 Lemme 3) : soit K un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{F}_q$, alors le foncteur de catégories

$$\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Cht}_{G,\emptyset}(K), \quad \mathcal{F}_G \mapsto \mathcal{F}_G \otimes K$$

induit une équivalence. Pour G en général, on utilise une généralisation de ce lemme.

La seconde façon est comme dans [Var04] 3.2, 3.3 : on sait que quand N' est assez grand par apport à μ, les champs algébriques dans le carré cartésien suivant sont représentables par des schémas :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,\emptyset,N'} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N'} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Id,Id)} \\ \mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N'} & \xrightarrow{(Id,\mathrm{Frob})} & \mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N'} \times \mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N'} \,. \end{array}$$

Donc $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,\emptyset,N'} \simeq \mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N'}(\mathbb{F}_q)$.

On a vu dans le lemme 2.1.10 que $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,\emptyset,N'}$ est un $Ker(G_{N'}(\mathbb{F}_q) \to G_N(\mathbb{F}_q))$-torseur sur $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,\emptyset}$. De plus, on déduit du lemme 2.1.3 que $\mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N'}(\mathbb{F}_q)$ est un $Ker(G_{N'}(\mathbb{F}_q) \to G_N(\mathbb{F}_q))$-torseur sur $\mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$. Ces deux faits impliquent un isomorphisme de champs algébriques $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,\emptyset} \simeq \mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$.

Exemple 2.3.3. (Chtoucas à une patte)

Soit $G = GL_r$ avec $r > 1$. Soient $N = \emptyset$, $I = \{0\}$ et $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G})$. Dans ce cas le champ algébrique $\mathrm{Cht}_{G,\{0\},W}$ est sur X. Soit $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \in \widehat{\Lambda}_G^+$, alors pour que $\mathrm{Cht}_{G,\{0\},V^\lambda}$ soit non vide, il faut que $\sum \lambda_j = 0$.

On note St la représentation standard de $\widehat{G} \simeq GL_r$ et St son dual. Alors

$$St \otimes St^* = V^{(1,0,\cdots,0,-1)} \oplus \mathbf{1}.$$

Dans ce cas, d'après la définition 1.1.8, $\mathrm{Gr}_{GL_n,V^{(1,0,\cdots,0,-1)}}$ est une réunion de deux strates $\mathrm{Gr}^0_{GL_n,(1,0,\cdots,0,-1)} \cup \mathrm{Gr}_{GL_n,(0,\cdots,0)}$. D'après la définition 1.2.19,

$$\mathrm{Gr}_{GL_r,St\otimes St^*} = \mathrm{Gr}_{GL_r,V^{(1,0,\cdots,0,-1)}} \cup \mathrm{Gr}_{GL_r,\mathbf{1}} = \mathrm{Gr}_{GL_r,V^{(1,0,\cdots,0,-1)}}.$$

D'après la définition et 2.1.20,

$$\mathrm{Cht}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*} = \mathrm{Cht}_{GL_r,\{0\},V^{(1,0,\cdots,0,-1)}}.$$

Concrètement, notons $\omega = (1, 0, \cdots, 0, -1) \in \widehat{\Lambda}_G^+$, la définition s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cht}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*}(S) =\{&\alpha \in X(S), \quad \mathcal{E} \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(S), \quad \phi : \mathcal{E}\big|_{X\times S-\Gamma_\alpha} \xrightarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{E}\big|_{X\times S-\Gamma_\alpha},\\ &\text{t.q. pour tout } \lambda \text{ poids fondamental de } GL_r,\\ &\phi(\mathcal{E}_{V^\lambda})(-\langle\lambda,\omega\rangle\Gamma_\alpha) \subset {}^\tau\mathcal{E}_{V^\lambda} \subset \phi(\mathcal{E}_{V^\lambda})(\langle\lambda,\omega\rangle\Gamma_\alpha)\}\end{aligned}$$

En particulier, on a $\phi(\mathcal{E})(-\Gamma_\alpha) \subset {}^\tau\mathcal{E} \subset \phi(\mathcal{E})(\Gamma_\alpha)$ et $\phi(\det\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} {}^\tau\det\mathcal{E}$.

Cette définition est équivalente à dire que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cht}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*}(S) =\{&\alpha \in X(S), \quad \mathcal{E} \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(S), \quad f : {}^\tau\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}(\Gamma_\alpha),\\ &\text{t.q. } f \text{ induit } {}^\tau\det\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \det\mathcal{E}, \quad rg(f\big|_{\Gamma_\alpha}) \leq 1\}\end{aligned}$$

C'est un champ algébrique de dimension $2r-2$ sur X. Il n'est pas lisse. Ses lieux singuliers sont

$$\begin{aligned}\mathrm{Cht}_{\{0\},Sing}(S) :=\{&\alpha \in X(S), \quad \mathcal{E} \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(S), \quad f : {}^\tau\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}(\Gamma_\alpha),\\ &\text{t.q. } f \text{ induit } {}^\tau\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\}.\end{aligned}$$

D'après l'exemple 2.3.2 ci-dessus, on a

$$\mathrm{Cht}_{\{0\},Sing} \simeq X \times \mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q).$$

Notons

$$\mathbb{A}^1 \times Y_0 := \{\alpha \in \mathbb{A}^1, C \in M_{r\times r}, \text{ t.q. } \mathrm{tr}\, C = 0 \text{ et } \mathrm{rg}\, C \leq 1\}.$$

Le seul point singulier de Y_0 est $C = 0$. Il existe un isomorphisme (non canonique) entre un voisinage étale d'un point singulier $(\alpha, f) \in \mathrm{Cht}_{\{0\},Sing} \subset \mathrm{Cht}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*}$ et un voisinage étale de $(0,0) \in \mathbb{A}^1 \times Y_0$.

Quand $r = 2$,

$$\begin{aligned} Y_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ t.q. } a+d=0 \text{ et } ad-bc=0 \right\} \\ &= \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q[x_1,x_2,x_3,x_4]/(x_1x_4 - x_2x_3, x_1+x_4) \end{aligned}$$

Il a un seul point singulier, qui est $(0,0,0,0)$.

Rappelons que la grassmannienne affine $\mathrm{Gr}_{GL_2,St\otimes St^*}$ a un seul point singulier : $\mathrm{Gr}_{GL_2,(0,0)}$. Un voisinage étale du point singulier est isomorphe à la variété $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q[x_1,x_2,x_3,x_4]/(x_1x_4 - x_2x_3, x_1+x_4)$.

Considérons la grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld $\mathrm{Gr}_{GL_2,\{0\},St\otimes St^*} \simeq (\mathrm{Gr}_{GL_2,St\otimes St^*} \times \mathcal{X})/Aut$. On en déduit que ses lieux singuliers sont $\mathrm{Gr}_{\{0\},Sing} \simeq (\mathrm{Gr}_{GL_2,(0,0)} \times \mathcal{X})/Aut$. Un voisinage étale d'un point singulier est isomorphe à $\mathbb{A}^1 \times Y_0$, avec le point singulier correspond à $(0,0) \in \mathbb{A}^1 \times Y_0$.

En fait, d'après le théorème 2.20 de [Var04] ou la proposition 2.11 de [Laf12], localement pour la topologie étale, $\mathrm{Cht}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*}$ et $\mathrm{Gr}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*}$ sont isomorphes. Cet isomorphisme local est non canonique, alors qu'on rappelle le diagramme suivant au-dessus de X, où tous les morphismes sont canoniques :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*} & \longleftarrow & \mathrm{Cht}_{\{0\},Sing} \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & \downarrow \\ [G_{X,\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*}] & \longleftarrow & [G_{X,\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_{\{0\},Sing}] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Gr}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*} & \longleftarrow & \mathrm{Gr}_{\{0\},Sing} \end{array}$$

Tous les carrés sont cartésiens, et les flèches verticales sont lisses (on remarque que ϵ est le morphisme dans la proposition 2.2.9).

Exemple 2.3.4. (Chtoucas à deux pattes de Drinfeld)

Dans cet exemple, on rappelle les chtoucas de Drinfeld et les remarques 1) et 2) après la proposition 3.3 de [Dri87]. On y envoie pour plus de détails.

Quand $I = \{1,2\}$, $G = GL_r$, on définit des champs de chtoucas avec modifications intermédiaires :

$$\mathrm{Cht}^{(\{1\},\{2\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}(S) := \left\{ (\alpha,\beta) \in X(S)^2, \mathcal{E} \xleftarrow{\phi_\alpha} \mathcal{E}' \xrightarrow{\phi_\beta} {}^\tau\mathcal{E} \right\}$$

$$\mathrm{Cht}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}(S) := \left\{(\alpha,\beta)\in X(S)^2, \mathcal{E}\xrightarrow{\phi_\beta}\mathcal{E}'\xleftarrow{\phi_\alpha}{}^\tau\mathcal{E}\right\}$$

où $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sont deux fibrés vectoriels de rang r sur $X\times S$, ϕ_α (resp. ϕ_β) est un morphisme de faisceaux injectif dont le conoyau est un faisceau inversible sur le graphe Γ_α (resp. Γ_β).

$\mathrm{Cht}^{(\{1\},\{2\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$ (resp. $\mathrm{Cht}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$) s'appelle champ de chtoucas à gauche (resp. à droite) dans [Dri87] et [Laf97].

D'après [Dri87] proposition 3.3, $\mathrm{Cht}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$ est lisse sur X^2, de dimension relative $2r-2$.

On peut aussi le voir par le fait que le morphisme $\mathrm{Cht}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}\to[G_{\{1,2\},\underline{d}=(2,2)}\backslash\mathrm{Gr}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}]$ est lisse, où

$$\mathrm{Gr}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}(S) := \left\{(\alpha,\beta)\in X(S)^2, \mathcal{E}\xrightarrow{\phi_\beta}\mathcal{E}'\xleftarrow{\phi_\alpha}\mathcal{E}''\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}^r\right\}.$$

Comme St et St^* correspondent aux copoids minuscules, $\mathrm{Gr}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$ est lisse sur X^2 (en fait, la fibre au-dessus de chaque $(\alpha,\beta)\in X^2$ est une fibration de $\mathbb{P}^{r-1}$ sur $\mathbb{P}^{r-1}$). Et il est de dimension $\langle 2\rho_{GL_r},(1,0,\cdots,0,-1)\rangle = 2r-2$.

Maintenant considérons le champ de chtoucas à deux patte sans modifications intermédiaires. On applique la définition 2.1.20 aux $G=GL_r$, $I=\{1,2\}$, $N=\emptyset$ et $W=St\boxtimes St^*$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}(S) :=&\{(\alpha,\beta)\in X(S)^2, \mathcal{E}\in\mathrm{Bun}_{GL_r}(S),\\ &\phi:\mathcal{E}\big|_{X\times S-\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta}\xrightarrow{\sim}{}^\tau\mathcal{E}\big|_{X\times S-\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta},\\ &\text{t.q. pour tout } \lambda \text{ poids fondamental de } GL_r,\\ &\phi(\mathcal{E}_{V^\lambda})(-\langle\lambda,\omega\rangle\Gamma_\alpha)\subset{}^\tau\mathcal{E}_{V^\lambda}\subset\phi(\mathcal{E}_{V^\lambda})(\langle\lambda,\omega\rangle\Gamma_\beta)\}\end{aligned}$$

où $\omega = (1,0,\cdots,0,-1)$. Les conditions impliquent en particulier que $\phi(\mathcal{E})(-\Gamma_\alpha)\subset{}^\tau\mathcal{E}\subset\phi(\mathcal{E})(\Gamma_\beta)$ et que $\phi(\det\mathcal{E})(\Gamma_\beta-\Gamma_\alpha)\xrightarrow{\sim}{}^\tau\det\mathcal{E}$.

1) La définition est équivalente à dire que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}(S) =&\{(\alpha,\beta)\in X(S)^2, \mathcal{E}\in\mathrm{Bun}_{GL_r}(S), f:{}^\tau\mathcal{E}\hookrightarrow\mathcal{E}(\Gamma_\beta),\\ &f \text{ induit } {}^\tau\det\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\det\mathcal{E}(\Gamma_\beta-\Gamma_\alpha),\quad rg(f\big|_{\Gamma_\beta})\leq 1\}\end{aligned}$$

C'est un champ algébrique de dimension $2r-2$ sur X^2. Contrairement au cas de champ de chtoucas avec modifications intermédiaires, ce champ n'est pas lisse. Ses points singuliers sont

$$\mathrm{Cht}_{\{1,2\},Sing} := \{(\alpha,\alpha)\in X^2, f:{}^\tau\mathcal{E}\hookrightarrow\mathcal{E}(\Gamma_\alpha), f \text{ induit } {}^\tau\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}\}$$

Par définition, on a $\mathrm{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}\big|_X \simeq \mathrm{Cht}_{GL_r,\{0\},St\otimes St^*}$ au-dessus de la diagonale de X^2. Et $\mathrm{Cht}_{\{1,2\},Sing} = \mathrm{Cht}_{\{0\},Sing}$.

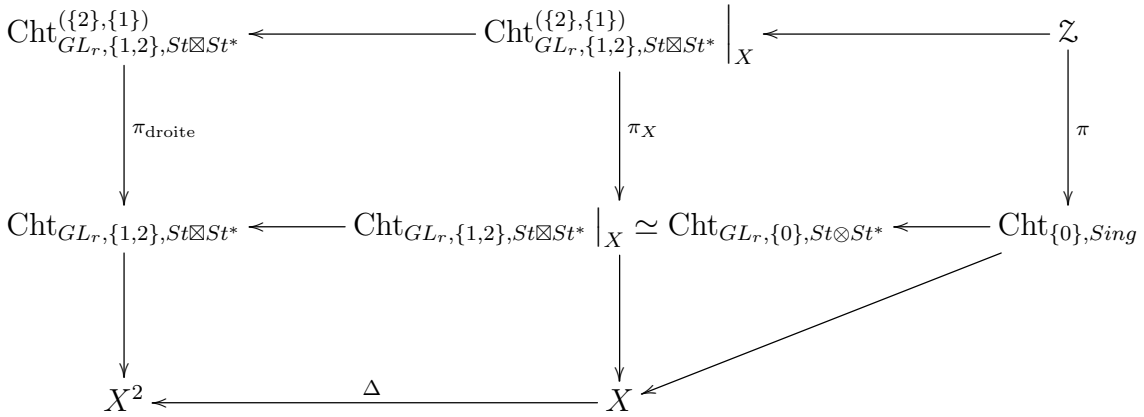
2) Pour les chtoucas à droite, on a un morphisme donné par l'oubli de la modification intermédiaire $\mathcal{E}'$:

$$\pi_{\mathrm{droite}} : \mathrm{Cht}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*} \to \mathrm{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$$

$$\big((\alpha,\beta),\mathcal{E} \xrightarrow{\phi_\beta} \mathcal{E}' \xleftarrow{\phi_\alpha} {}^\tau\mathcal{E}\big) \mapsto \big((\alpha,\beta),\mathcal{E}\big|_{X\times S-\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta} \xrightarrow{\sim} {}^\tau\mathcal{E}\big|_{X\times S-\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta}\big)$$

Ce morphisme est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert $\mathrm{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*} - \mathrm{Cht}_{\{1,2\},Sing}$. La fibre au-dessus de chaque point dans $\mathrm{Cht}_{\{1,2\},Sing}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^{r-1}$. En fait, ce morphisme est petit et il est une résolution des singularités.

On utilise un diagramme commutatif pour illustrer ces relations, où tous les carrés sont cartésiens. π_X et π sont des restrictions de π_{droite}, $\mathcal{Z}$ est un cycle dans $\mathrm{Cht}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}\Big|_X$ de dimension $r-1$ sur X.



(2.3.1)

De même, pour les chtoucas à gauche, on a un morphisme

$$\pi_{\mathrm{gauche}} : \mathrm{Cht}^{(\{1\},\{2\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*} \to \mathrm{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$$

et un diagramme similaire au diagramme ci-dessus pour π_{gauche}.

3) Notons

$$\mathbb{A}^1 \times Y := \{\beta \in \mathbb{A}^1, C \in M_{r\times r},\ \text{t.q. } \mathrm{rg}\, C \leq 1\},$$

avec un morphisme $\mathbb{A}^1 \times Y \to X^2 : (\beta, C) \mapsto (\beta + \mathrm{tr}\, C, \beta)$. Alors :

i) Un voisinage étale d'un point singulier de $\mathrm{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$ est isomorphe à un voisinage étale de $(0,0) \in \mathbb{A}^1 \times Y$, avec une trivialisation de ${}^\tau\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}(\Gamma_\beta)$ sur le voisinage telles que $f\big|_{\Gamma_\beta} : {}^\tau\mathcal{E} \to \mathcal{E}(\Gamma_\beta)$ corresponde à C.

ii) π_{droite} correspond à la résolution des singularités de Y donnée par

$$Y' := \{(C, \mathcal{L}), C \in M_{r\times r}, \mathcal{L} \text{ une droite, t.q. } \operatorname{rg} C \leq 1, \mathcal{L} \supset \operatorname{Im} C\},$$

et $\operatorname{Im}(\mathcal{E}' \to \mathcal{E}(\Gamma_\beta))$ correspond à $\mathcal{L}$ (dans ce cas f est donné par la composée ${}^\tau\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}(\Gamma_\beta)$).

iii) π_{gauche} correspond à la résolution des singularités de Y donnée par

$$'Y := \{(C, \mathcal{K}), C \in M_{r\times r}, \mathcal{K} \text{ une hyperplan, t.q. } \operatorname{rg} C \leq 1, \mathcal{K} \subset \operatorname{Ker} C\},$$

et $\operatorname{Ker}({}^\tau\mathcal{E} \to \mathcal{E}'(\Gamma_\beta))$ correspond à $\mathcal{K}$ (dans ce cas f est donné par la composée ${}^\tau\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'(\Gamma_\beta) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Gamma_\beta)$).

iv) Le produit fibré $\operatorname{Cht}^{(\{1\},\{2\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*} \underset{\operatorname{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}}{\times} \operatorname{Cht}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$ correspond à la résolution des singularités de Y donnée par

$$\begin{aligned} {}'Y \underset{Y}{\times} Y' =& \{(C, \mathcal{K}, \mathcal{L}), C \in M_{r\times r}, \mathcal{L} \text{ une droite}, \mathcal{K} \text{ une hyperplan}, \\ & \text{t.q. } \operatorname{rg} C \leq 1, \mathcal{K} \subset \operatorname{Ker} C, \mathcal{L} \supset \operatorname{Im} C\}, \end{aligned}$$

qui est d'ailleurs l'éclaté de Y en 0.

Remarque 2.3.5. a) $\operatorname{Cht}^{(\{1\},\{2\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$ (resp. $\operatorname{Cht}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$, $\operatorname{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$) est noté $M^{m,n}_{D,d}$ (resp. ${}^{m,n}_{D,d}M$, U) dans la remarque 2) après la proposition 3.3 de [Dri87].

$\operatorname{Cht}^{(\{1\},\{2\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*} \underset{\operatorname{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}}{\times} \operatorname{Cht}^{(\{2\},\{1\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$ est noté ${}^m_D M^n_d$; $\mathcal{Z}$ est noté Z dans la remarque 1) de loc.cit.

b) $\operatorname{Cht}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$ est noté $\operatorname{Cht}^{(\{1,2\})}_{GL_r,\{1,2\},St\boxtimes St^*}$ dans [Laf12].

Remarque 2.3.6. Les champs de chtoucas de Drinfeld sont pour les copoids minuscules, donc ces champs sont lisses sur X^2. En général, cette lissité est remplacée par la lissité du morphisme $\epsilon_{G,N,I,\underline{d}} : \operatorname{Cht}_{G,N,I,W} \longrightarrow [G_{I,\underline{d}}\backslash \operatorname{Gr}_{G,I,W}]$ dans la proposition 2.2.9.

Pour cette raison, on considère le faisceau constant pour champ de chtoucas de Drinfeld et les faisceaux IC (qui viennent de faisceaux IC sur $\operatorname{Gr}_{G,I,W}$) pour les champs de chtoucas en général.

2.4 Correspondance de Hecke

Dans cette section, on rappelle la construction de la correspondance de Hecke dans la construction 2.20 de [Laf12] . On y renvoie pour plus de détails.

Notons $K_N := \mathrm{Ker}(G(\mathbb{O}) \to G(\mathcal{O}_N))$ le sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$ associé à N et on note $K_{N,v}$ sa composante en la place v, de sorte que $K_N = \prod_v K_{N,v}$. On a $K_{N,v} = G(\mathcal{O}_v)$ pour tout $v \in |X| \smallsetminus |N|$. Soit $\mathfrak{T} \subset |X|$ un ensemble fini de places et $g = (g_v)_{v\in|X|} \in G(\mathbb{A})$ tel que $g_v \in K_{N,v}$ pour tout $v \notin \mathfrak{T}$.

Construction 2.4.1. Dans le cas particulier où $|N| \cap \mathfrak{T} = \emptyset$, $K_N g K_N$ est déterminé par la donnée d'une famille $(\lambda_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}}$ de copoids dominants de G.

On construit un champ $\Gamma_N(g)$: ses S-points classifient la donnée de $(x_i)_{i\in I} : S \to (X \smallsetminus (|N| \cup \mathfrak{T}))^I$ et d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}'_G, \psi') & \xrightarrow{\phi'} & ({}^\tau\mathcal{F}'_G, {}^\tau\psi') \\ \uparrow{\scriptstyle \kappa} & & \uparrow{\scriptstyle {}^\tau\kappa} \\ (\mathcal{F}_G, \psi) & \xrightarrow{\phi} & ({}^\tau\mathcal{F}_G, {}^\tau\psi) \end{array}$$

tel que la ligne inférieure

$$\big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_G, \psi) \xrightarrow{\phi} ({}^\tau\mathcal{F}_G, {}^\tau\psi)\big) \tag{2.4.1}$$

et la ligne supérieure

$$\big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}'_G, \psi') \xrightarrow{\phi'} ({}^\tau\mathcal{F}'_G, {}^\tau\psi')\big) \tag{2.4.2}$$

appartiennent à $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}(S)$ et que

- $\kappa : \mathcal{F}_G\big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})\times S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'_G\big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})\times S}$ soit un isomorphisme entrelaçant ψ et ψ',
- en tout point $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$, la position relative de $\mathcal{F}_G$ par rapport à $\mathcal{F}'_G$ soit *égale* au copoids dominant $\lambda_{\mathfrak{t}}$, plus précisément en tout point géométrique s de S, les restrictions de $(\mathcal{F}_G \xrightarrow{\phi} {}^\tau\mathcal{F}_G)$ et $(\mathcal{F}'_G \xrightarrow{\phi} {}^\tau\mathcal{F}'_G)$ au voisinage formel de $\mathfrak{t}$ dans X peuvent être trivialisées de façon unique modulo l'action de $G(\mathcal{O}_{\mathfrak{t}})$ et alors $\kappa : \mathcal{F}_G\big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{t})\times s} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'_G\big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{t})\times s}$ définit un élément de $G(\mathcal{O}_{\mathfrak{t}})\backslash G(F_{\mathfrak{t}})/G(\mathcal{O}_{\mathfrak{t}})$ qui corresponde à $\lambda_{\mathfrak{t}}$.

De plus, on a des morphismes de champs algébriques sur $(X \smallsetminus (N \cup \mathfrak{T}))^I$:

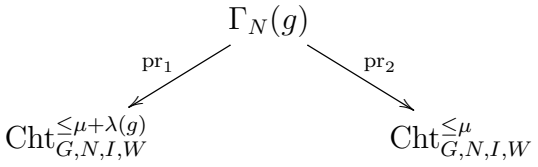
$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_N(g) & \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\ \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} & & \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} \end{array} \tag{2.4.3}$$

où pr_1 et pr_2 sont données par (2.4.1) et (2.4.2).

$\Gamma_N(g)$ dépend seulement de la double classe $K_N g K_N$.

Lemme 2.4.2. *Les morphismes* pr_1 *et* pr_2 *sont représentables finis étales.*

Lemme 2.4.3. *Il existe un $\lambda(g) \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$ assez grand en fonction de g, tel que pour tout $\mu \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$, la correspondance (2.4.3) ci-dessus donne sur $(X \smallsetminus (N \cup \mathfrak{T}))^I$:*



Remarque 2.4.4. En général, c'est-à-dire lorsque $|N| \cap \mathfrak{T}$ peut être non vide, on peut encore construire une correspondance $\Gamma_N(g)$.

Notons

$$\mathrm{Cht}_{G,I,*,W} := \varprojlim \mathrm{Cht}_{G,I,N',W}\,\big|_{\eta^I},$$

où η^I est le point générique de X^I. Alors pour tout sous-groupe K ouvert compact de $G(\mathbb{O})$, on peut définir un champ algébrique sur U^I, où U est le plus grand ouvert de X tel que $K \supset \prod_{v \in |U|} G(\mathcal{O}_v)$:

$$\mathrm{Cht}_{G,I,K,W} := \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}\,/K.$$

En particulier, quand $K = K_N$, le champ défini comme ci-dessus $\mathrm{Cht}_{G,I,K_N,W} := \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}\,/K_N$ est égal à $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$.

Notons $K_g := g^{-1}K_N g \cap K_N$, on définit $\mathrm{Cht}_{G,I,K_g,W} := \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}\,/K_g$. Soit N' un niveau tel que $K_{N'} \subset K_g$ et $|N'| = |N| \cup \mathfrak{T}$. Comme $K_{N'} \subset K_N$, on a un morphisme

$$\mathrm{pr} : \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}\,/K_{N'} \to \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}\,/K_N.$$

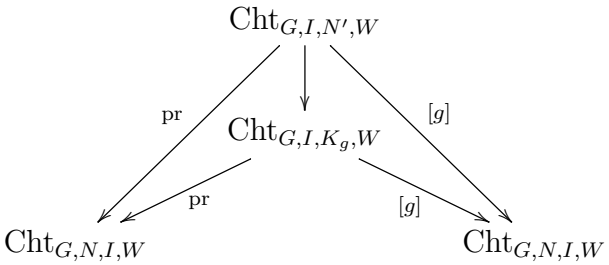
Comme $K_{N'} \subset g^{-1}K_N g$, on a un morphisme composé

$$[g] : \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}\,/K_{N'} \xrightarrow{g,\simeq} \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}\,/gK_{N'}g^{-1} \to \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}\,/K_N.$$

De plus, $K_{N'}$ est un sous-groupe distingué dans K_N. Comme $K_g \subset K_N$, $K_{N'}$ est aussi distingué dans K_g. Donc $K_g/K_{N'}$ est un groupe. Ainsi, on a un morphisme

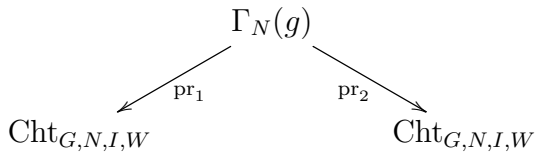
$$\mathrm{Cht}_{G,I,N',W} \to \mathrm{Cht}_{G,I,N',W}\,/(K_g/K_{N'}) \simeq \mathrm{Cht}_{G,I,K_g,W}\,.$$

Les morphismes pr et $[g]$ se factorisent à travers $\mathrm{Cht}_{G,I,K_g,W}$. Donc on a un diagramme commutatif sur $(X \smallsetminus (N \cup \mathfrak{T}))^I$:



Tous les morphismes dans le diagramme sont représentables finis étales.

Considérons le morphisme $\mathrm{Cht}_{G,I,*,W}/K_g \xrightarrow{(\mathrm{Id},g)} \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}/K_g \times \mathrm{Cht}_{G,I,*,W}/gK_gg^{-1}$. On définit $\Gamma_N(g)$ comme image de (Id, g). Alors on a une correspondance :



Dans le cas où $|N| \cap \mathfrak{T} = \emptyset$, cette construction coïncide avec la construction 2.4.1.

Chapitre 3

Préparation géométrique pour le morphisme terme constant

Soit P un sous-groupe parabolique de G. Notons M son plus grand quotient réductif. Dans la section 1, on va définir les champs de chtoucas pour les groupes P et M puis construire un diagramme d'induction parabolique pour les champs de chtoucas (3.1.2). On va donner une troncature sur ce diagramme dont on aura besoin pour la suite.

Dans la section 2, on va construire un diagramme qui lie l'induction parabolique pour les champs de chtoucas avec celle pour les grassmanniennes affines. Ce diagramme jouera un rôle essentiel pour la construction du morphisme terme constant dans le chapitre 4.

Ensuite dans les sections 3 et 4 on énonce quelques propriétés géométriques sur le diagramme d'induction parabolique des champs de chtoucas, qui serviront pour la construction du morphisme terme constant dans le chapitre 4 et pour la démonstration dans le chapitre 5.

3.1 Induction parabolique pour les champs de chtoucas

3.1.1 Comme préchamps

Définition 3.1.1. ([Var04] 2.28) On peut appliquer la définition 2.1.5 du préchamp $\mathrm{Cht}_{G,I,N}$ à tout groupe algébrique affine connexe. Ainsi on peut définir le préchamp $\mathrm{Cht}_{P,N,I}$ (resp. $\mathrm{Cht}_{M,N,I}$) en considérant les P-torseurs (resp. les M-torseurs).

On écrit la définition précise de $\mathrm{Cht}_{P,N,I}$. Celle de $\mathrm{Cht}_{M,N,I}$ est similaire. Soit I un ensemble fini. Soit N un sous-schéma fini de X. On note $\mathrm{Cht}_{P,N,I}$ le foncteur

qui associe à tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde $\mathrm{Cht}_{P,N,I}(S)$ qui classifie la donnée de

i) $x_i \in (X \smallsetminus N)(S)$ pour $i \in I$,

ii) $(\mathcal{F}_P, \psi) \in \mathrm{Bun}_{P,N}(S)$,

iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{F}_P\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} {}^{\tau}\mathcal{F}_P\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}$$

préservant les structures de niveau en N, c'est-à-dire que ${}^{\tau}\psi \circ \phi\big|_{N\times S} = \psi$.

Construction 3.1.2. Les morphismes de groupes $G \hookleftarrow P \twoheadrightarrow M$ induisent des morphismes de préchamps sur $(X \smallsetminus N)^I$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Cht}_{P,N,I} & \\ {\scriptstyle i}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{Cht}_{G,N,I} & & \mathrm{Cht}_{M,N,I} \end{array} \tag{3.1.1}$$

Concrètement, pour tout schéma affine S sur $\mathbb{F}_q$,

$i : \mathrm{Cht}_{P,N,I}(S) \to \mathrm{Cht}_{G,N,I}(S)$ est donné par

$$(\mathcal{F}_P \to {}^{\tau}\mathcal{F}_P) \mapsto (\mathcal{F}_P \overset{P}{\times} G \to {}^{\tau}\mathcal{F}_P \overset{P}{\times} G);$$

$\pi : \mathrm{Cht}_{P,N,I}(S) \to \mathrm{Cht}_{M,N,I}(S)$ est donné par

$$(\mathcal{F}_P \to {}^{\tau}\mathcal{F}_P) \mapsto (\mathcal{F}_P \overset{P}{\times} M \to {}^{\tau}\mathcal{F}_P \overset{P}{\times} M).$$

3.1.2 Quotient par Ξ

Rappelons que nous avons fixé $\Xi \subset Z_G(\mathbb{A})$ dans la section 2.1.5 du chapitre 2. On a vu que Ξ agit sur $\mathrm{Cht}_{G,I,N}$.

Le morphisme $Z_G \to M$ induit $\mathrm{Bun}_{Z_G,N}(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Bun}_{M,N}(\mathbb{F}_q)$. Ainsi Ξ agit aussi sur $\mathrm{Cht}_{M,N,I}$ via le composé des morphismes $\Xi \to Z_G(\mathbb{A}) \to \mathrm{Bun}_{Z_G,N}(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Bun}_{M,N}(\mathbb{F}_q)$. De même, le morphisme $Z_G \to P$ induit une action de Ξ sur $\mathrm{Cht}_{P,N,I}$. Ces actions sont compatibles, ainsi on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Cht}_{P,N,I}\,/\Xi & \\ {\scriptstyle i}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{Cht}_{G,N,I}\,/\Xi & & \mathrm{Cht}_{M,N,I}\,/\Xi \end{array} \tag{3.1.2}$$

Exemple 3.1.3. (Chtoucas sans pattes)

On note $K_{G,N} := \mathrm{Ker}(G(\mathbb{O}) \to G(\mathcal{O}_N))$, $K_{P,N} := \mathrm{Ker}(P(\mathbb{O}) \to P(\mathcal{O}_N))$ et $K_{M,N} := \mathrm{Ker}(M(\mathbb{O}) \to M(\mathcal{O}_N))$.

Quand $I = \emptyset$, $\mathrm{Cht}_{G,\emptyset,N}/\Xi$ est canoniquement isomorphe au champ constant $\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi \simeq G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi$ sur $\mathbb{F}_q$.

Les diagrammes ci-dessus deviennent :

$$\begin{array}{ccc} & P(F)\backslash P(\mathbb{A})/K_{P,N}\Xi & \\ {\scriptstyle i}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi} \\ G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi & & M(F)\backslash M(\mathbb{A})/K_{M,N}\Xi \end{array} \tag{3.1.3}$$

3.2 Troncature de Harder-Narasimhan pour le diagramme d'induction parabolique

Dans les chapitres suivants, on va s'intéresser aux cohomologies ℓ-adiques sur $\mathrm{Cht}_{G,N,I}/\Xi$ et $\mathrm{Cht}_{M,N,I}/\Xi$. Pour obtenir une bonne cohomologie, on aura besoin de champs de Deligne-Mumford de type fini.

On a vu dans la section 2.2.1 du chapitre 2 que pour $W \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I)$, $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$ est un champ de Deligne-Munford localement de type fini mais pas de type fini. En revanche, pour $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$, le champ $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi$ (défini dans la section 2.1.4 du chapitre 2) est un champ de Deligne-Munford de type fini.

Pour cette raison, on veut construire un diagramme d'induction parabolique avec troncature de Harder-Narasimhan et quotient par Ξ. Donc on a besoin d'une troncature pour $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}/\Xi$ compatible avec la troncature de $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$.

On va commencer par donner des troncatures pour Bun_M.

Remarque 3.2.1. Rappelons que dans le cas $G = GL_r$, le champ $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi$ classifie les fibrés vectoriels de degré non fixé dont le polygone de HN est au-dessous de celui correspondant à μ (à une translation par les éléments dans Z_G près).

3.2.1 Troncature de Harder-Narasimhan de Bun_M

Le but de cette sous-section est de donner un sens aux troncatures de Bun_M/Ξ données par les copoids dans $\widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$.

Rappelons que nous avons noté $\widehat{\Lambda}_G$ le réseau des copoids du groupe G, $\widehat{\Lambda}_G^+$ le sous-ensemble des copoids dominants. De même pour le groupe M. Par définition, on a $\widehat{\Lambda}_M = \widehat{\Lambda}_G$ et $\widehat{\Lambda}_M^+ \supset \widehat{\Lambda}_G^+$.

Notation 3.2.2. On note $\leq^M$ l'ordre partiel dans $\widehat{\Lambda}_M^{\mathbb{Q}}$. C'est-à-dire que pour $\lambda, \mu \in \widehat{\Lambda}_M^{\mathbb{Q}}$, on dit que $\lambda \leq \mu$ si $\mu - \lambda$ est une somme de coracines simples de M à coefficients dans $\mathbb{Q}^+$.

Définition 3.2.3. Soit $\widetilde{\lambda} \in \widehat{\Lambda}_M^{+,\mathbb{Q}}$. On définit

$$\begin{aligned}\mathrm{Bun}_M^{\leq^M \widetilde{\lambda}}(S) := \{\mathcal{F}_M \in \mathrm{Bun}_M(S) | \text{ pour tout point géométrique } s \in S,\\ \text{tout parabolique } P_M \text{ et toute } P_M\text{-structure } \mathcal{F}_{P_M} \text{ sur } \mathcal{F}_{M,s},\\ \text{on a } \iota_{P_M} \circ \deg_{P_M}(\mathcal{F}_{P_M}) \leq^M \widetilde{\lambda}\}.\end{aligned}$$

Lemme 3.2.4. *Le champ* $\mathrm{Bun}_M^{\leq^M \widetilde{\lambda}}$ *est un sous-champ ouvert de* Bun_M.

Le morphisme $G \to G/Z_G = G^{\mathrm{ad}}$ induit $\Upsilon_G : \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q}} \to \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{\mathbb{Q}}$. D'ailleurs, on a $\widehat{\Lambda}_M = \widehat{\Lambda}_G$. Donc on peut aussi voir Υ_G comme :

$$\Upsilon_G : \widehat{\Lambda}_M^{\mathbb{Q}} = \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q}} \to \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{\mathbb{Q}}.$$

Définition 3.2.5. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$. On définit :

$$\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu} := \bigcup_{\widetilde{\lambda} \in \widehat{\Lambda}_M^{+,\mathbb{Q}},\quad \Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) \leq \mu} \mathrm{Bun}_M^{\leq^M \widetilde{\lambda}}.$$

L'inégalité $\Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) \leq \mu$ est dans $\widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{\mathbb{Q}}$.

Remarque 3.2.6. Le copoids $\widetilde{\lambda}$ est dominant pour M, mais pas nécessairement dominant pour G. Donc pour un μ fixé, il y a une infinité d'éléments dans $\Upsilon_G(\widehat{\Lambda}_M^+) \subset \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{\mathbb{Q}}$ qui sont inférieurs à μ.

Nous allons donner une décomposition de $\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}$ qui servira pour la suite. Rappelons que dans la section 2.1.4 du chapitre 2, nous avons défini $\deg_M : \mathrm{Bun}_M \to \widehat{\Lambda}_{Z_M}^{\mathbb{Q}}$. Considérons le composé :

$$\mathrm{Bun}_M \to \widehat{\Lambda}_{Z_M}^{\mathbb{Q}} \to \widehat{\Lambda}_{Z_M/Z_G}^{\mathbb{Q}}.$$

Pour tout $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, notons Bun^{ν}_M son image inverse dans Bun_M. C'est un sous-champ ouvert et fermé. Nous avons une décomposition :

$$\mathrm{Bun}_M = \bigsqcup_{\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}} \mathrm{Bun}^{\nu}_M .$$

Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Pour tout $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, notons $\mathrm{Bun}^{\leq \mu, \nu}_M$ l'intersection de $\mathrm{Bun}^{\leq \mu}_M$ et Bun^{ν}_M. Alors on a une décomposition

$$\mathrm{Bun}^{\leq \mu}_M = \bigsqcup_{\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}} \mathrm{Bun}^{\leq \mu, \nu}_M . \tag{3.2.1}$$

De plus, on peut décrire précisément $\mathrm{Bun}^{\leq \mu, \nu}_M$. Pour cela, on a besoin de quelques notations. Les morphismes pr_P et ι_P sont définis dans la section 2.1.4 du chapitre 2. Les autres sont dans des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_G & \xrightarrow{pr_P} & \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M} \\ \downarrow \Upsilon_G & & \downarrow \Upsilon_{Z_M} \\ \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{G/Z_G} & \xrightarrow{pr^{ad}_P} & \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_G & \xleftarrow{\iota_P} & \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M} \\ \downarrow \Upsilon_G & & \downarrow \Upsilon_{Z_M} \\ \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{G/Z_G} & \xleftarrow{\iota^{ad}_P} & \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G} \end{array}$$

En utilisant ces notations, on a

$$\mathrm{Bun}^{\leq \mu, \nu}_M = \bigcup_{\widetilde{\lambda} \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_M, \quad \Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) \leq \mu, \quad pr^{ad}_P \circ \Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) = \nu} \mathrm{Bun}^{\leq^M \widetilde{\lambda}}_M . \tag{3.2.2}$$

Remarque 3.2.7. Le champ $\mathrm{Bun}^{\leq \mu, \nu}_M$ est non vide seulement si $\nu \in pr^{ad}_P(\widehat{\Lambda}_{G^{ad}}) \subset \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$ et $\iota^{ad}_P(\nu) \leq \mu$ (où l'inégalité est au sens dans $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$).

Donc la décomposition (3.2.1) est en fait indexée par un cône translaté dans $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$:

$$\mathrm{Bun}^{\leq \mu}_M = \bigsqcup_{\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}, \quad \iota^{ad}_P(\nu) \leq \mu} \mathrm{Bun}^{\leq \mu, \nu}_M . \tag{3.2.3}$$

Remarque 3.2.8. Notons $r := \mathrm{rg}(Z_M/Z_G)$. Si on identifie $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$ avec $\mathbb{Q}^r$ et le donne un ordre partiel :

$$(a_1, \cdots, a_r) \leq (b_1, \cdots, b_r) \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{i} a_j \leq \sum_{j=1}^{i} b_j, \quad a_1 + \cdots + a_r = b_1 + \cdots + b_r,$$

alors la condition $\iota^{ad}_P(\nu) \leq \mu$ dans $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$ est la même que la condition $\nu \leq pr^{ad}_P(\mu)$ dans $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$ pour cet ordre partiel.

Remarque 3.2.9. On verra dans la section suivante que la raison pour laquelle on considère une telle décomposition est que $\mathrm{Bun}_M^{\leq\mu}$ et $\mathrm{Bun}_M^{\leq\mu,\,\nu}$ sont stables sous l'action de Ξ, mais $\mathrm{Bun}_M^{\leq^M\widetilde{\lambda}}$ ne l'est pas.

Exemple 3.2.10. Cas de $G = GL_2$, $M = T = GL_1 \times GL_1$. On a $Z_M = M$ et

$$\widehat{\Lambda}_G^+ = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2, n_1 \geq n_2\}; \quad \widehat{\Lambda}_M^+ = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\};$$

$$\widehat{\Lambda}_{G^{ad}}^+ = \{(n_1, n_2) \bmod (1,1), n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, n_1 \geq n_2\};$$

$$\widehat{\Lambda}_{Z_M/Z_G} = \{(n_1, n_2) \bmod (1,1), n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \quad (n_1, n_2) \mapsto n_1 - n_2.$$

Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2) \bmod (1,1) \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^+ \subset \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$. Alors $\mu_1 - \mu_2$ est bien défini. Soit $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \widehat{\Lambda}_M^{+,\mathbb{Q}}$. Soit $\nu = (\nu', \nu'') \bmod (1,1) \in \widehat{\Lambda}_{Z_M/Z_G}$. Alors on a

$$\begin{aligned}\Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) \leq \mu &\Longleftrightarrow (\lambda_1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - (\mu_1 + \mu_2)}{2}, \lambda_2 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - (\mu_1 + \mu_2)}{2}) \leq (\mu_1, \mu_2) \\ &\Longleftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \leq \mu_1 - \mu_2.\end{aligned}$$

$$\iota_P^{ad}(\nu) \leq \mu \Longleftrightarrow (\nu', \nu'') \bmod (1,1) \leq (\mu_1, \mu_2) \bmod (1,1) \Longleftrightarrow \nu' - \nu'' \leq \mu_1 - \mu_2;$$

$$pr_P^{ad} \circ \Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) = \nu \Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \bmod (1,1) = (\nu', \nu'') \bmod (1,1) \Longleftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = \nu' - \nu''.$$

La décomposition (3.2.3) est :

$$\begin{aligned}\mathrm{Bun}_M^{\leq\mu} &= \bigsqcup_{(\nu',\nu'') \bmod (1,1) \in \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z},\quad \nu'-\nu'' \leq \mu_1 - \mu_2} \mathrm{Bun}_M^{\leq\mu,\,(\nu',\nu'') \bmod (1,1)}, \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z},\quad n \leq \mu_1 - \mu_2} \mathrm{Bun}_M^{\leq\mu,\,n}\end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{Bun}_M^{\leq\mu,\,n} = \bigcup_{\widetilde{\lambda} \in \widehat{\Lambda}_M^{+,\mathbb{Q}},\quad \lambda_1 - \lambda_2 = n \leq \mu_1 - \mu_2} \mathrm{Bun}_M^{\leq^M\widetilde{\lambda}}.$$

Concrètement, on a

$$\mathrm{Bun}_M^{\leq\mu} = \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \text{ fibrés en droites }, \deg \mathcal{L}_1 - \deg \mathcal{L}_2 \leq \mu_1 - \mu_2\}.$$

Pour $n \leq \mu_1 - \mu_2$,

$$\mathrm{Bun}_M^{\leq\mu,\,n} = \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \text{ fibrés en droites }, \deg \mathcal{L}_1 - \deg \mathcal{L}_2 = n\};$$

$$\mathrm{Bun}_M^{\leq^M\widetilde{\lambda}} = \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \text{ fibrés en droites }, \deg \mathcal{L}_1 = \lambda_1, \deg \mathcal{L}_2 = \lambda_2\};$$

Exemple 3.2.11. Cas de $G = GL_3$, $M = GL_2 \times GL_1$. On a

$$\widehat{\Lambda}_M^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^r, \lambda_1 \geq \lambda_2\} \supset \widehat{\Lambda}_G^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^r, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\};$$

$$\widehat{\Lambda}_{G^{ad}}^+ \simeq \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \bmod (1,1,1), \lambda_j \in \mathbb{Z}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\};$$

$$\widehat{\Lambda}_{Z_M/Z_G} = \{(d_1, d_2) \bmod (2,1), d_1, d_2 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \quad (d_1, d_2) \mapsto d_1 - 2d_2.$$

Dans cet exemple, on a

$$\widehat{\Lambda}_M^{\mathbb{Q}} = \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{pr_P} \widehat{\Lambda}_{Z_M}^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\Upsilon_{Z_M}} \widehat{\Lambda}_{Z_M/Z_G}^{\mathbb{Q}}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3) \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3.$$

Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \bmod (1,1,1) \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$. Soit $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \widehat{\Lambda}_M^{+,\mathbb{Q}}$. Soit $\nu = (\nu', \nu'') \bmod (2,1) \in \widehat{\Lambda}_{Z_M/Z_G}$. Rappelons que l'ordre partiel dans $\widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{\mathbb{Q}}$ est donné dans l'exemple 2.1.26 dans chapitre 2. Donc on a

$$\Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) \leq \mu \Longleftrightarrow (\lambda_1 + a, \lambda_2 + a, \lambda_3 + a) \leq (\mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad a := \frac{\sum_{i=1}^3 \mu_i - \sum_{i=1}^3 \lambda_i}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + a & \leq & \mu_1 \\ \lambda_1 + a + \lambda_2 + a & \leq & \mu_1 + \mu_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 - (\sum_{i=1}^3 \lambda_i) \leq 3\mu_1 - (\sum_{i=1}^3 \mu_i) \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \leq \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3 \end{cases}$$

$$\iota_P^{ad}(\nu) \leq \mu \Longleftrightarrow (\frac{\nu'}{2}, \frac{\nu'}{2}, \nu'') \bmod (1,1,1) \leq (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \bmod (1,1,1)$$
$$\Longleftrightarrow \nu' - 2\nu'' \leq \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3$$

$$\nu \leq pr_P^{ad}(\mu) \Longleftrightarrow (\nu', \nu'') \bmod (2,1) \leq (\mu_1 + \mu_2, \mu_3) \bmod (2,1)$$
$$\Longleftrightarrow \nu' - 2\nu'' \leq \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3$$

$$pr_P^{ad} \circ \Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) = \nu \Longleftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3) \bmod (2,1) = (\nu', \nu'') \bmod (2,1)$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = \nu' - 2\nu''$$

En notant $n := \nu' - 2\nu''$, la décomposition (3.2.3) est :

$$\begin{aligned}\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu} &= \bigsqcup_{(\nu',\nu'') \bmod (2,1) \in \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z},\quad \nu'-2\nu'' \leq \mu_1+\mu_2-2\mu_3} \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu,\ (\nu',\nu'') \bmod (2,1)},\\ &= \bigsqcup_{n \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}\quad n \leq \mu_1+\mu_2-2\mu_3} \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu,\ n},\end{aligned}$$

avec pour $n \leq \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3$,

$$\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu,\ n} = \bigcup_{\widetilde{\lambda} \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_M,\quad 3\lambda_1 - (\sum_{i=1}^3 \lambda_i) \leq 3\mu_1 - (\sum_{i=1}^3 \mu_i),\quad \lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3 = n} \mathrm{Bun}_M^{\leq {}^M\widetilde{\lambda}}.$$

Concrètement, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu} = \{&\mathcal{L}_1 \text{ fibré de rang 2}, \quad \mathcal{L}_2 \text{ fibré en droites},\\ &\text{note } (n_1, n_2) \text{ le polygone de } \mathcal{L}_1, \quad \text{note } n_3 \text{ le degré de } \mathcal{L}_2\\ &\text{alors } (n_1, n_2, n_3) \bmod (1,1,1) \leq (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \bmod (1,1,1)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu,\ n} = \{&\mathcal{L}_1 \text{ fibré de rang 2}, \quad \mathcal{L}_2 \text{ fibré en droites},\\ &\deg \mathcal{L}_1 - 2\deg \mathcal{L}_2 = n;\\ &\text{note } (n_1, n_2) \text{ le polygone de } \mathcal{L}_1, \quad \text{note } n_3 \text{ le degré de } \mathcal{L}_2\\ &\text{alors } (n_1, n_2, n_3) \bmod (1,1,1) \leq (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \bmod (1,1,1)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Bun}_M^{\leq {}^M\widetilde{\lambda}} = \{&\mathcal{L}_1 \text{ fibré de rang 2}, \quad \mathcal{L}_2 \text{ fibré en droites},\\ &\text{polygone de } \mathcal{L}_1 \leq (\lambda_1, \lambda_2), \quad (\Rightarrow \deg \mathcal{L}_1 = \lambda_1 + \lambda_2)\\ &\deg \mathcal{L}_2 = \lambda_3\}.\end{aligned}$$

3.2.2 Diagramme de Bun avec troncature Harder-Narasimhan

Définition 3.2.12. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. On définit $\mathrm{Bun}_P^{\leq \mu}$ l'image inverse de $\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}$ dans Bun_P.

Lemme 3.2.13. *L'image de* $\mathrm{Bun}_P^{\leq \mu}$ *dans* Bun_M *est incluse dans* $\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}$.

Démonstration.

Soit $\mathcal{F}_P \in \mathrm{Bun}_P^{\leq \mu}$. Notons $\mathcal{F}_G := \mathcal{F}_P \overset{P}{\times} G$ et $\mathcal{F}_M := \mathcal{F}_P \overset{P}{\times} M$.

Par définition, $\mathcal{F}_G \in \mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}$. Donc pour tout parabolique P' de G, on a $\phi_{P'} \circ \deg_{P'}(\mathcal{F}_G) \leq \mu$. En particulier, pour tout parabolique P_M de M, on a $\phi_{P_M} \circ \deg_{P_M}(\mathcal{F}_G) \leq \mu$. Or on a $\phi_{P_M} \circ \deg_{P_M}(\mathcal{F}_M) = \phi_{P_M} \circ \deg_{P_M}(\mathcal{F}_G)$, cela implique que $\mathcal{F}_M \in \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}$.

□

Par conséquent, on a le diagramme suivant, où le morphisme π est surjectif :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Bun}_P^{\leq \mu} & \\ {\scriptstyle i}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{Bun}_G^{\leq \mu} & & \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}. \end{array} \tag{3.2.4}$$

Exemple 3.2.14. Cas de $G = GL_2$, $M = GL_1 \times GL_1$. Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2) \bmod (1,1) \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{ad}}$. Le diagramme (3.2.4) est donné par

$$\mathrm{Bun}_{GL_2}^{\leq \mu} \longleftarrow \mathrm{Bun}_B^{\leq \mu} \longrightarrow \mathrm{Bun}_{GL_1 \times GL_1}^{\leq \mu}$$

$$\mathcal{E} \longleftarrow \mathcal{L} \subset \mathcal{E} \longrightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{E}/\mathcal{L})$$

où $\mathcal{E}$ est un fibré de rang 2 dont le polygone Harder-Narasimhan est au-dessous de celui donné par le copoids $(\mu_1, \mu_2) + \frac{\deg \mathcal{E} - \mu_1 - \mu_2}{2}(1,1)$, et $\mathcal{L}$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$ de rang 1.

Plus concrètement, par exemple $\mathcal{E} = \mathcal{O}(n) \oplus \mathcal{O}(-n) \in \mathrm{Bun}_G^{\leq (n,-n)}$, où $n \geq 0$. Alors $\mathcal{O}(n)$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$ et $(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(-n)) \in \mathrm{Bun}_M^{\leq (n,-n)}$. De plus, pour tout $m \leq -n$ (donc m est négatif), $\mathcal{O}(m)$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$. Donc $(\mathcal{O}(m), \mathcal{O}(-m)) \in \mathrm{Bun}_M^{\leq (n,-n)}$ correspond à $\mathcal{E}$ via la correspondance ci-dessus.

Exemple 3.2.15. Cas de $G = GL_3$, $M = GL_2 \times GL_1$. Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \bmod (1,1,1) \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{ad}}$. Le diagramme (3.2.4) est donné par

$$\mathrm{Bun}_{GL_3}^{\leq \mu} \longleftarrow \mathrm{Bun}_P^{\leq \mu} \longrightarrow \mathrm{Bun}_{GL_2 \times GL_1}^{\leq \mu}$$

$$\mathcal{E} \longleftarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{E} \longrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{E}/\mathcal{F})$$

où $\mathcal{E}$ est un fibré de rang 3 dont le polygone Harder-Narasimhan est au-dessous de celui donné par $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) + \frac{\deg \mathcal{E} - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3}{3}(1,1,1)$, et $\mathcal{F}$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$ de rang 2.

Si le polygone Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$ est donné par (μ'_1, μ'_2, μ'_3) et celui de $\mathcal{F}$ est donné par (λ_1, λ_2), alors il faut $\lambda_1 \leq \mu'_1$ (puisque un sous-fibré de $\mathcal{F}$ est aussi un sous-fibré de $\mathcal{E}$) et $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \mu'_1 + \mu'_2$. Si on note λ_3 le degré de $\mathcal{E}/\mathcal{F}$, alors il faut $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3$. On remarque qu'il peut arriver que $\lambda_2 < \lambda_3$.

Plus concrètement, par exemple, si $\mathcal{E} = \mathcal{O}^3 \in \mathrm{Bun}_G^{\leq (0,0,0)}$. Alors $\mathcal{F} = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$. Dans ce cas, $\mathcal{E}/\mathcal{F} = \mathcal{O}(3)$. Donc $(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(3)) \in \mathrm{Bun}_M^{\leq (0,0,0)}$ est correspondant à $\mathcal{E}$ via la correspondance ci-dessus. Pour tout m négatif, $\mathcal{F} = \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}/\mathcal{F} = \mathcal{O}(-m)$ correspond aussi à $\mathcal{E}$ via cette correspondance.

Considérons un autre exemple $\mathcal{E} = \mathcal{O}(n) \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-n) \in \mathrm{Bun}_G^{\leq (n,0,-n)}$ avec $n > 0$. Alors pour tout $m \leq 0$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}$ est un sous-fibré de $\mathcal{E}$. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}/\mathcal{F} = \mathcal{O}(-m)$ correspond à $\mathcal{E}$.

Remarque 3.2.16. En général, considérons la correspondance (3.2.4). Soit $\mathcal{F}_G$ un point géométrique de $\mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}$. Notons $i^{-1}(\mathcal{F}_G)$ la fibre du morphisme i au-dessus de $\mathcal{F}_G$. Notons $\pi(i^{-1}(\mathcal{F}_G))$ son image par le morphisme π. Alors $\pi(i^{-1}(\mathcal{F}_G)) \cap \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu,\, \nu}$ est non vide seulement si ν est inclus dans le cône translaté dans $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$ défini par $\iota_P^{ad}(\nu) \leq \mu$. Il peut y avoir une infinité de ν tel que $\pi(i^{-1}(\mathcal{F}_G)) \cap \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu,\, \nu}$ soit non vide.

Maintenant considérons le quotient par Ξ. Le morphisme $Z_G \to Z_M$ (resp. $Z_G \to Z_P$) induit $\mathrm{Bun}_{Z_G,N}(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Bun}_{Z_M,N}(\mathbb{F}_q)$ (resp. $\mathrm{Bun}_{Z_G,N}(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Bun}_{Z_P,N}(\mathbb{F}_q)$). Donc Ξ agit sur Bun_M (resp. Bun_P). De plus, cette action préserve les ouverts $\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}$ (resp. $\mathrm{Bun}_P^{\leq \mu}$). Donc on peut définir

$$\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}/\Xi \quad (\text{ resp. } \mathrm{Bun}_P^{\leq \mu}/\Xi)$$

et on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Bun}_P^{\leq \mu}/\Xi & \\ {\scriptstyle i}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{Bun}_G^{\leq \mu}/\Xi & & \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}/\Xi. \end{array} \tag{3.2.5}$$

De plus, pour tout $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, d'après (3.2.2), Ξ agit sur $\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu,\nu}$. Donc la décomposition (3.2.3) passe au quotient par Ξ :

$$\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}/\Xi = \bigsqcup_{\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G},\quad \iota_P^{ad}(\nu) \leq \mu} \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu,\nu}/\Xi. \tag{3.2.6}$$

3.2.3 Troncature de Harder-Narasimhan de Cht_M

Définition 3.2.17. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. On définit $\mathrm{Cht}_{M,N,I}^{\leq \mu}$ comme l'image inverse de $\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}$ par le morphisme

$$\mathrm{Cht}_{M,N,I} \to \mathrm{Bun}_M,$$

$$\Big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_M, \psi) \xrightarrow{\phi} ({}^{\tau}\mathcal{F}_M, {}^{\tau}\psi)\Big) \mapsto \mathcal{F}_M.$$

Définition 3.2.18. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. On définit $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I}$ comme l'image inverse de $\mathrm{Bun}_P^{\leq\mu}$ par le morphisme

$$\mathrm{Cht}_{P,N,I} \to \mathrm{Bun}_P,$$
$$\Big((x_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_P, \psi) \xrightarrow{\phi} ({}^{\tau}\mathcal{F}_P, {}^{\tau}\psi)\Big) \mapsto \mathcal{F}_P.$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}_{G,N,I} & \longleftarrow & \mathrm{Cht}_{P,N,I} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{M,N,I} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Bun}_G & \longleftarrow & \mathrm{Bun}_P & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_M \end{array} \tag{3.2.7}$$

Donc $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I}$ est image inverse de $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I}$ par le morphisme $i : \mathrm{Cht}_{P,N,I} \to \mathrm{Cht}_{G,N,I}$. Et on a :

Lemme 3.2.19. *L'image de* $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I}$ *dans* $\mathrm{Cht}_{M,N,I}$ *est inclus dans* $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I}$.

On a un diagramme sur $(X \smallsetminus N)^I$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I} & & \\ & \swarrow^{i} & & \searrow^{\pi} & \\ \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I} & & & & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I} \end{array} \tag{3.2.8}$$

Il y a une action de Ξ sur $\mathrm{Cht}_{M,N,I}$ (resp. $\mathrm{Cht}_{P,N,I}$) via la composée des morphismes $\Xi \to Z_G(\mathbb{A}) \to \mathrm{Bun}_{Z_G,N}(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Bun}_{Z_M,N}(\mathbb{F}_q)$. Cette action préserve les ouverts $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I}$ (resp. $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I}$). Donc on peut définir

$$\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I}/\Xi \quad (\text{ resp. } \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I}/\Xi).$$

Construction 3.2.20. Le diagramme (3.2.8) passe au quotient par Ξ :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I}/\Xi & & \\ & \swarrow^{i} & & \searrow^{\pi} & \\ \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,I,N}/\Xi & & & & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I}/\Xi \end{array} \tag{3.2.9}$$

La décomposition

$$\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}/\Xi = \bigsqcup_{\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G},\quad \iota_P^{ad}(\nu) \leq \mu} \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu,\,\nu}/\Xi.$$

induit une décomposition

$$\mathrm{Cht}_{M,N,I}^{\leq \mu}/\Xi = \bigsqcup_{\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G},\quad \iota_P^{ad}(\nu) \leq \mu} \mathrm{Cht}_{M,N,I}^{\leq \mu,\nu}/\Xi. \tag{3.2.10}$$

3.2.4 Compatibilité entre deux ouverts de Harder-Narasimhan

Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. On a défini $\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}$ dans la definition 3.2.5.

Définition 3.2.21.

$$\mathrm{Bun}_M^{< \mu} := \bigcup_{\mu' \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}},\quad \mu' < \mu} \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu'},$$

où $\mu' < \mu$ est dans $\widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$.

C'est un sous-champ ouvert dans $\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}$.

Définition 3.2.22.

$$\mathrm{Bun}_M^{= \mu} := \mathrm{Bun}_M^{\leq \mu} - \mathrm{Bun}_M^{< \mu}.$$

C'est un sous-champ fermé dans $\mathrm{Bun}_M^{\leq \mu}$. Donc un sous-champ localement fermé dans Bun_M.

Remarque 3.2.23. Soit $\widetilde{\lambda} \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_M$. On a défini $\mathrm{Bun}_M^{\leq^M \widetilde{\lambda}}$ dans la définition 3.2.3. On définit

$$\mathrm{Bun}_M^{=^M \widetilde{\lambda}} := \mathrm{Bun}_M^{\leq^M \widetilde{\lambda}} - \bigcup_{\widetilde{\lambda}' \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_M,\quad \widetilde{\lambda}' < \widetilde{\lambda}} \mathrm{Bun}_M^{\leq^M \widetilde{\lambda}'}.$$

Alors on a

$$\mathrm{Bun}_M^{= \mu} := \bigcup_{\widetilde{\lambda} \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_M,\quad \Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) = \mu} \mathrm{Bun}_M^{=^M \widetilde{\lambda}},$$

où l'égalité $\Upsilon_G(\widetilde{\lambda}) = \mu$ est dans $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$.

Dans la définition 3.2.12, on a défini $\mathrm{Bun}_P^{\leq\mu} := i^{-1}(\mathrm{Bun}_G^{\leq\mu})$ dans Bun_P. D'après le lemme 3.2.13, on a $i^{-1}(\mathrm{Bun}_G^{\leq\mu}) \subset \pi^{-1}(\mathrm{Bun}_M^{\leq\mu})$. Donc $\mathrm{Bun}_P^{\leq\mu} = i^{-1}(\mathrm{Bun}_G^{\leq\mu}) \cap \pi^{-1}(\mathrm{Bun}_M^{\leq\mu})$.

Définition 3.2.24.

$$\mathrm{Bun}_P^{<\mu} := i^{-1}(\mathrm{Bun}_G^{<\mu}).$$

C'est un sous-champ ouvert dans $\mathrm{Bun}_P^{\leq\mu}$.

Définition 3.2.25.

$$\mathrm{Bun}_P^{=\mu} := i^{-1}(\mathrm{Bun}_G^{\leq\mu}) \cap \pi^{-1}(\mathrm{Bun}_M^{=\mu}).$$

C'est un sous-champ fermé dans $\mathrm{Bun}_P^{\leq\mu}$.

Remarque 3.2.26. On a un morphisme $\mathrm{Bun}_P^{=\mu} \to \mathrm{Bun}_G^{=\mu}$. Mais $i^{-1}(\mathrm{Bun}_G^{=\mu}) \nsubseteq \pi^{-1}(\mathrm{Bun}_M^{=\mu})$.

Par définition, l'action de Ξ sur Bun_M préserve le sous-champ $\mathrm{Bun}_M^{=\mu}$. Donc on peut définir $\mathrm{Bun}_M^{=\mu}/\Xi$. Pour la même raison, on peut définir $\mathrm{Bun}_P^{=\mu}/\Xi$.

Lemme 3.2.27. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Bun}_G^{=\mu}/\Xi & \longleftarrow & \mathrm{Bun}_P^{=\mu}/\Xi & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_M^{=\mu}/\Xi \\
\downarrow{\scriptstyle f_G} & & \downarrow{\scriptstyle f_P} & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\
\mathrm{Bun}_G^{\leq\mu}/\Xi & \xleftarrow{i} & \mathrm{Bun}_P^{\leq\mu}/\Xi & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Bun}_M^{\leq\mu}/\Xi \\
\uparrow{\scriptstyle g_G} & & \uparrow{\scriptstyle g_P} & & \uparrow{\scriptstyle g_M} \\
\mathrm{Bun}_G^{<\mu}/\Xi & \longleftarrow & \mathrm{Bun}_P^{<\mu}/\Xi & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_M^{<\mu}/\Xi
\end{array} \tag{3.2.11}$$

Remarque 3.2.28. Les morphismes g_G, g_P et g_M sont des immersions ouvertes. Les morphismes f_G, f_P et f_M sont des immersions fermées.

Les sous-champs $\mathrm{Bun}_G^{<\mu}$ et $\mathrm{Bun}_G^{=\mu}$ (resp. $\mathrm{Bun}_M^{<\mu}$ et $\mathrm{Bun}_M^{=\mu}$) sont complémentaires l'un l'autre. Mais $\mathrm{Bun}_P^{=\mu}$ est un sous-champ fermé dans le complémentaire de $\mathrm{Bun}_P^{<\mu}$.

Par définition de $\mathrm{Bun}_P^{<\mu}$ et $\mathrm{Bun}_P^{=\mu}$, le carré en bas à gauche et le carré en haut à droite sont cartésiens.

Remarque 3.2.29. Soit $\mathcal{F}_G$ un point géométrique de $\mathrm{Bun}_G^{=\mu}$. Pour tout sous-groupe parabolique P', notons $i_{P'}^{-1}(\mathcal{F}_G)$ la fibre du morphisme $i_{P'}$ au-dessus de $\mathcal{F}_G$. Alors $i_{P'}^{-1}(\mathcal{F}_G) \cap \mathrm{Bun}_{P'}^{\leq\mu}$ est non vide ($\mathcal{F}_G$ a toujours une B-structure).

En revanche, il peut arriver que $i_{P'}^{-1}(\mathcal{F}_G) \cap \mathrm{Bun}_{P'}^{=\mu}$ est vide. En fait, il existe un P et une P-structure $\mathcal{F}_P$ tels que $\iota_P^{ad} \circ \deg_P(\mathcal{F}_P) = \mu$ dans $\widehat{\Lambda}_{G^{ad}}^{+,\mathbb{Q}}$. (Voir [Sch15] pour la définition précisée de ce P) Pour ce P, $i_P^{-1}(\mathcal{F}_G) \cap \mathrm{Bun}_P^{=\mu}$ est non vide. Pour les autres sous-groupe paraboliques P', $i_{P'}^{-1}(\mathcal{F}_G) \cap \mathrm{Bun}_{P'}^{=\mu}$ peut être vide.

Exemple 3.2.30. Cas de $G = GL_2$, $M = GL_1 \times GL_1$. Soit $n > 0$ et $\mu = (n, -n) \bmod (1, 1)$. Considérons $\mathcal{E} = \mathcal{O}(n) \oplus \mathcal{O}(-n) \in \mathrm{Bun}_G^{=\mu}$. Alors ses images inverses dans $\mathrm{Bun}_B^{\leq \mu}$ sont les filtrations $\mathcal{O}(m) \subset \mathcal{E}$, avec $m = n$ ou $m \leq -n$. Parmi eux, $\mathcal{O}(n) \subset \mathcal{E}$ est dans $\mathrm{Bun}_B^{=\mu}$. Il envoie à $(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(-n))$ dans $\mathrm{Bun}_M^{=\mu}$. Les $\mathcal{O}(m) \subset \mathcal{E}$ avec $m \leq -n$ sont dans $\mathrm{Bun}_B^{<\mu}$ et ils envoient à $(\mathcal{O}(m), \mathcal{O}(-m))$ dans $\mathrm{Bun}_M^{<\mu}$. C'est comme on a vu dans l'exemple 3.2.14.

Exemple 3.2.31. Cas de $G = GL_3$.

Notons P_1 le sous-groupe parabolique de blocs $(1, 2)$. On a $M_1 = GL_1 \times GL_2$.

Notons P_2 le sous-groupe parabolique de blocs $(2, 1)$. On a $M_2 = GL_2 \times GL_1$.

Soit $\mu = (n, n, -2n) \bmod (1, 1, 1)$ avec $n > 0$. Soit $\mathcal{E} \in \mathrm{Bun}_G^{=\mu}$ un fibré de degré 0. La condition $= \mu$ implique que la filtration canonique de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$ est de la forme $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ avec $\mathcal{F}$ un sous-fibré de rang 2. Donc $\deg \mathcal{F} = 2n$.

Pour P_2, la filtration $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est dans $\mathrm{Bun}_{P_2}^{=\mu}$. Il envoie à $(\mathcal{F}, \mathcal{E}/\mathcal{F})$ dans $\mathrm{Bun}_{M_2}^{=\mu}$.

Pour P_1, $i_{P'}^{-1}(\mathcal{E}) \cap \mathrm{Bun}_{P_1}^{=\mu}$ peut être vide. En effet, une P_1-structure de $\mathcal{E}$ est une filtration de la forme $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$, avec $\mathcal{L}$ un sous-fibré en droites. La condition $= \mu$ demande que $\deg \mathcal{L} = n$. Mais il peut arriver que $\mathcal{E}$ n'a pas de sous-fibré en droites de degré n.

Considérons un autre exemple. Soit $\mu = (0, 0, 0) \bmod (1, 1, 1)$. Soit $\mathcal{E} = \mathcal{O}^3 \in \mathrm{Bun}_G^{=\mu}$. Alors pour P_1, il a une image inverse $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}$ dans $\mathrm{Bun}_{P_1}^{=\mu}$ et des images inverses $\mathcal{O}(m) \subset \mathcal{E}$ avec $m < 0$ dans $\mathrm{Bun}_{P_1}^{<\mu}$. Pour P_2, il a une image inverse $\mathcal{O}^2 \subset \mathcal{E}$ dans $\mathrm{Bun}_{P_2}^{=\mu}$ et des images inverses $\mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O} \subset \mathcal{E}$ avec $m < 0$ dans $\mathrm{Bun}_{P_2}^{<\mu}$.

Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$. On a défini $\mathrm{Cht}_{G,N,I}^{\leq \mu}$, $\mathrm{Cht}_{G,N,I}^{<\mu}$ et $\mathrm{Cht}_{G,N,I}^{=\mu}$ dans la définition 2.1.30 du chapitre 2. On a défini $\mathrm{Cht}_{M,N,I}^{\leq \mu}$ dans la définition 3.2.17. De même façon, on définit $\mathrm{Cht}_{M,N,I}^{=\mu}$, $\mathrm{Cht}_{M,N,I}^{<\mu}$. On a défini $\mathrm{Cht}_{P,N,I}^{\leq \mu}$ dans la définition 3.2.18. De même façon, on définit $\mathrm{Cht}_{P,N,I}^{=\mu}$ et $\mathrm{Cht}_{P,N,I}^{<\mu}$.

Lemme 3.2.32. *On a*

$$\mathrm{Cht}_{P,N,I}^{=\mu} := i^{-1}(\mathrm{Cht}_{G,N,I}^{\leq \mu}) \cap \pi^{-1}(\mathrm{Cht}_{M,N,I}^{=\mu}).$$

Lemme 3.2.33. *Le lemme 3.2.27 ci-dessus implique que le diagramme suivant*

est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cht}_G^{=\mu}/\Xi & \longleftarrow & \mathrm{Cht}_P^{=\mu}/\Xi & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_M^{=\mu}/\Xi \\
\downarrow{\scriptstyle f_G} & & \downarrow{\scriptstyle f^P} & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\
\mathrm{Cht}_G^{\leq\mu}/\Xi & \longleftarrow & \mathrm{Cht}_P^{\leq\mu}/\Xi & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_M^{\leq\mu}/\Xi \\
\uparrow{\scriptstyle g_G} & & \uparrow{\scriptstyle g^P} & & \uparrow{\scriptstyle g_M} \\
\mathrm{Cht}_G^{<\mu}/\Xi & \longleftarrow & \mathrm{Cht}_P^{<\mu}/\Xi & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_M^{<\mu}/\Xi
\end{array} \tag{3.2.12}$$

Remarque 3.2.34. Les morphismes g_G, g_P et g_M sont des immersions ouvertes. Les morphismes f_G, f_P et f_M sont des immersions fermées.

Les sous-champs $\mathrm{Cht}_G^{<\mu}$ et $\mathrm{Cht}_G^{=\mu}$ (resp. $\mathrm{Cht}_M^{<\mu}$ et $\mathrm{Cht}_M^{=\mu}$) sont complémentaires l'un l'autre. Mais $\mathrm{Cht}_P^{=\mu}$ est seulement un sous-champ fermé dans le complémentaire de $\mathrm{Cht}_P^{<\mu}$.

Par définition de $\mathrm{Cht}_P^{<\mu}$ et $\mathrm{Cht}_P^{=\mu}$, le carré en bas à gauche et le carré en haut à droite sont cartésiens.

3.3 Diagramme d'induction parabolique de chtoucas et de grassmanniennes affines

Le but de cette section est de construire le diagramme dans la construction 3.3.1 au sens des préchamps et le diagramme dans le lemme 3.3.5 au sens des champs algébriques.

3.3.1 Comme préchamps

En appliquant la définition 1.2.14 du chapitre 1 à P et M, on définit $P_{I,\mathcal{O}}$ et $M_{I,\mathcal{O}}$. Le morphisme $P \hookrightarrow G$ induit un morphisme $P_{I,\mathcal{O}} \hookrightarrow G_{I,\mathcal{O}}$. De même, le morphisme $P \twoheadrightarrow M$ induit un morphisme $P_{I,\mathcal{O}} \twoheadrightarrow M_{I,\mathcal{O}}$.

Le schéma en groupes $P_{I,\mathcal{O}}$ agit sur $\mathrm{Gr}_{P,I}$ par changement de trivialisation. Donc on peut définir $[P_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{P,I}]$ et $[M_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{M,I}]$ au sens des préchamps comme dans la définition 2.1.18. De plus, on peut construire des morphismes de préchamps

$$\epsilon_P : \mathrm{Cht}_{P,N,I} \to [P_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{P,I}]$$

et

$$\epsilon_M : \mathrm{Cht}_{M,N,I} \to [M_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{M,I}]$$

comme dans la définition 2.1.19.

Rappelons que l'on a des morphismes d'ind-schémas

$$\mathrm{Gr}_{G,I} \xleftarrow{i_0} \mathrm{Gr}_{P,I} \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{Gr}_{M,I}.$$

Les morphismes $i_0 : \mathrm{Gr}_{P,I} \to \mathrm{Gr}_{G,I}$ et $P_{I,\mathcal{O}} \hookrightarrow G_{I,\mathcal{O}}$ induisent un morphisme de préchamps qui est représentable (noté encore i_0) :

$$i_0 : [P_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{P,I}] \to [G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I}].$$

(On peut le voir comme le composé $[P_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{P,I}] \to [P_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I}] \to [G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I}]$.)

Les morphismes $\pi_0 : \mathrm{Gr}_{P,I} \to \mathrm{Gr}_{M,I}$ et $P_{I,\mathcal{O}} \twoheadrightarrow M_{I,\mathcal{O}}$ induisent un morphisme de préchamps qui est non représentable (noté encore π_0) :

$$\pi_0 : [P_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{P,I}] \to [M_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{M,I}].$$

(On peut le voir comme le composé $[P_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{P,I}] \to [P_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{M,I}] \to [M_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{M,I}]$.)

Construction 3.3.1. On construit un diagramme de préchamps qui est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}_{G,N,I} & \xleftarrow{\ i\ } & \mathrm{Cht}_{P,N,I} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathrm{Cht}_{M,N,I} \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_G} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_P} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_M} \\ [G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I}] & \xleftarrow{\ i_0\ } & [P_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{P,I}] & \xrightarrow{\ \pi_0\ } & [M_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{M,I}] \end{array} \tag{3.3.1}$$

3.3.2 Comme champs algébriques

Dans le chapitre 2, nous avons vu que le champ $[G_{I,\mathcal{O}} \backslash \mathrm{Gr}_{G,I}]$ n'est pas algébrique. Pour des raisons techniques, nous aurons besoin des champs algébriques.

Soit $W \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\widehat{G}^I)$. Dans le chapitre 1, nous avons défini les sous-schémas fermés $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ et $\mathrm{Gr}_{M,I,W}$ (nous pouvons voir W comme une représentation de $\widehat{M}^I$ par restriction via $\widehat{M}^I \hookrightarrow \widehat{G}^I$). De plus, dans la proposition 1.7.7, nous avons montré que $(i_0)^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,I,W}) \subset (\pi_0)^{-1}(\mathrm{Gr}_{M,I,W})$, où l'image inverse est au sens des sous-schémas réduits dans $\mathrm{Gr}_{P,I}$. Nous avons défini $\mathrm{Gr}_{P,I,W} := (i_0)^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,I,W})$ comme sous-schéma réduit dans $\mathrm{Gr}_{P,I}$ et nous avons des morphismes de schémas

$$\mathrm{Gr}_{G,I,W} \leftarrow \mathrm{Gr}_{P,I,W} \to \mathrm{Gr}_{M,I,W}.$$

Soit $\underline{d} \in \mathbb{N}^I$. En appliquant la définition 1.2.14 du chapitre 1 à P et M, on définit $P_{I,\underline{d}}$ et $M_{I,\underline{d}}$. Le morphisme $P \hookrightarrow G$ induit un morphisme $P_{I,\underline{d}} \hookrightarrow G_{I,\underline{d}}$. De même, le morphisme $P \twoheadrightarrow M$ induit un morphisme $P_{I,\underline{d}} \twoheadrightarrow M_{I,\underline{d}}$.

On a vu dans la corollaire 1.2.20 du chapitre 1 que si les entiers d_i sont assez grands en fonction de W, l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ (resp. $M_{I,\mathcal{O}}$) sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ (resp. $\mathrm{Gr}_{M,I,W}$) se factorise à travers le quotient $G_{I,\underline{d}}$ (resp. $M_{I,\underline{d}}$). D'après la section 2.2.2 du chapitre 2, on peut définir $[G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ et $[M_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{M,I,W}]$ et ils sont des champs algébriques.

On en déduit que l'action de $P_{I,\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{P,I,W}$ se factorise à travers le quotient $P_{I,\underline{d}}$. Et $[P_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{P,I,W}]$ est aussi un champ algébrique.

Les morphismes $i_0 : \mathrm{Gr}_{P,I,W} \to \mathrm{Gr}_{G,I,W}$ et $P_{I,\underline{d}} \hookrightarrow G_{I,\underline{d}}$ induisent un morphisme de champs algébriques qui est représentable :

$$i_{0,\underline{d}} : [P_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{P,I,W}] \to [G_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{G,I,W}].$$

Les morphismes $\pi_0 : \mathrm{Gr}_{P,I,W} \to \mathrm{Gr}_{M,I,W}$ et $P_{I,\underline{d}} \twoheadrightarrow M_{I,\underline{d}}$ induisent un morphisme de champs algébriques qui n'est pas représentable :

$$\pi_{0,\underline{d}} : [P_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{P,I,W}] \to [M_{I,\underline{d}}\backslash\mathrm{Gr}_{M,I,W}].$$

On définit $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W} := \epsilon_M^{-1}([M_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{M,I,W}])$ comme dans la définition 2.1.20 (on peut appliquer cette définition parce que M est réductif).

Proposition 3.3.2. *On a* $i^{-1}(\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}) \subset \pi^{-1}(\mathrm{Cht}_{M,N,I,W})$, *où l'image inverse est au sens des sous-champs réduits dans* $\mathrm{Cht}_{P,N,I}$.

C'est une conséquence de la proposition 1.7.7 du chapitre 1 et de la commutativité du diagramme (3.3.1).

Définition 3.3.3. On définit $\mathrm{Cht}_{P,I,N,W} := i^{-1}(\mathrm{Cht}_{G,N,I,W})$ comme sous-champ réduit dans $\mathrm{Cht}_{P,N,I}$.

On a vu dans la section précédente que $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$ et $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}$ sont des champs algébriques de Deligne-Mumford localement de type fini. D'après [Var04], le morphisme i est schématique. On en déduit que $\mathrm{Cht}_{P,N,I,W}$ est aussi un champ algébrique de Deligne-Mumford. De plus, les morphismes de préchamps (3.1.1) induisent des morphismes de champs algébriques :

$$\mathrm{Cht}_{G,N,I,W} \xleftarrow{i} \mathrm{Cht}_{P,N,I,W} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cht}_{M,N,I,W}\,. \tag{3.3.2}$$

Lemme 3.3.4. *L'image de* $\mathrm{Cht}_{P,I,N,W}$ *par le morphisme* $\mathrm{Cht}_{P,N,I} \to [P_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{P,I}]$ *est inclus dans* $[P_{I,\mathcal{O}}\backslash\mathrm{Gr}_{P,I,W}]$.

Démonstration.

On déduit de la commutativité du diagramme (3.3.1) que dans $\mathrm{Cht}_{P,N,I}$:

$$\begin{aligned} i^{-1}(\mathrm{Cht}_{G,I,N,W}) &= i^{-1}\epsilon_G^{-1}([G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]) \\ &= \epsilon_P^{-1} i_0^{-1}([G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]) = \epsilon_P^{-1}[P_{I,\mathcal{O}}\backslash i_0^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,I,W})] \end{aligned}$$

La dernière equation est justifiée par le fait que $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ est stable sous l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$. Donc $i_0^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,I,W})$ est stable sous l'action de $P_{I,\mathcal{O}}$.

On obtient une flèche qui est la restriction de ϵ_P à $i^{-1}(\mathrm{Cht}_{G,I,N,W})$:

$$\mathrm{Cht}_{P,N,I,W} = i^{-1}(\mathrm{Cht}_{G,I,N,W}) \to [P_{I,\mathcal{O}}\backslash i_0^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,I,W})] = [P_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}].$$

□

On note $\epsilon_{P,\underline{d}}$ le composé :

$$\mathrm{Cht}_{P,N,I,W} \to [P_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}] \to [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}],$$

où la deuxième flèche est induite par $P_{I,\mathcal{O}} \to P_{I,\underline{d}}$. Alors $\epsilon_{P,\underline{d}}$ est un morphisme de champs algébriques.

Lemme 3.3.5. *Le diagramme de champs algébriques suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} & \xleftarrow{\ i\ } & \mathrm{Cht}_{P,I,N,W} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{G,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{P,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{M,\underline{d}}} \\ [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \xleftarrow{\ i_{0,\underline{d}}\ } & [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}] & \xrightarrow{\ \pi_{0,\underline{d}}\ } & [M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}] \end{array} \tag{3.3.3}$$

Remarque 3.3.6. On a aussi un diagramme commutatif de champs algébriques, où la première ligne sont des schémas :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Gr}_{G,I,W} & \xleftarrow{\ i_0\ } & \mathrm{Gr}_{P,I,W} & \xrightarrow{\ \pi_0\ } & \mathrm{Gr}_{M,I,W} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \xleftarrow{\ i_{0,\underline{d}}\ } & [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}] & \xrightarrow{\ \pi_{0,\underline{d}}\ } & [M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}] \end{array} \tag{3.3.4}$$

3.3.3 Diagramme avec troncature de Harder-Narasimhan et quotient par Ξ

Pour des raisons techniques, nous aurons besoin de considérer la troncature de Harder-Narasimhan sur le diagramme d'induction parabolique.

Lemme 3.3.7. *Pour tout $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{ad}}$, les deux diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W} & \xleftarrow{i} & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I,W} & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I,W} \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{G,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{P,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{M,\underline{d}}} \\ [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \xleftarrow{i^0_{\underline{d}}} & [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}] & \xrightarrow{\pi^0_{\underline{d}}} & [M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}] \end{array} \tag{3.3.5}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,N,I,W} & \xleftarrow{i} & \mathrm{Cht}^{=\mu}_{P,N,I,W} & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Cht}^{=\mu}_{M,N,I,W} \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{G,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{P,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{M,\underline{d}}} \\ [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \xleftarrow{i^0_{\underline{d}}} & [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}] & \xrightarrow{\pi^0_{\underline{d}}} & [M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}] \end{array} \tag{3.3.6}$$

De plus, toutes les constructions ci-dessus sont compatibles avec le quotient par Ξ.

Lemme 3.3.8. *On a le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi & \xleftarrow{i} & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I,W}/\Xi & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I,W}/\Xi \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{G,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{P,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{M,\underline{d}}} \\ [G^{ad}_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \xleftarrow{i^0_{\underline{d}}} & [P^{ad}_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}] & \xrightarrow{\pi^0_{\underline{d}}} & [M^{ad}_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}] \end{array} \tag{3.3.7}$$

3.3.4 Les composants de $\mathrm{Cht}_{M,I,W}$

Soit V une représentation irréductible de $\widehat{M^I}$, de la forme $\boxtimes_{i\in I} V^{\lambda_i}$ avec V^{λ_i} représentation irréductible de $\widehat{M}$ de plus haut poids λ_i. La Proposition 2.16 d) de [Var04] dit que le champ $\mathrm{Cht}_{M,I,V}$ est non vide si et seulement si $\sum_{i\in I}\lambda_i$ est

dans le réseau des racines de $\widehat{M}$. Le cas $M = T$ est discuté dans l'exemple 2.3.1 dans le chapitre 2.

Maintenant soit $W \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I)$. On a défini $\mathrm{Cht}_{M,I,W}$ en regardant W comme une représentation de $\widehat{M}^I$ par la restriction. Dans cette sous-section, nous étudions les composants de $\mathrm{Cht}_{M,I,W}$.

Dans la section 1.7 du chapitre 1, pour tout $\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}$, on a défini W_θ comme une sous $\widehat{M}$-représentation de W et on a

$$W = \bigoplus_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} W_\theta.$$

Cela induit une décomposition en sous-schéma (resp. sous-champ) ouvert et fermé :

$$\mathrm{Gr}_{M,I,W} = \bigsqcup_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \mathrm{Gr}_{M,I,W_\theta}.$$

$$\mathrm{Cht}_{M,I,W} = \bigsqcup_{\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}} \mathrm{Cht}_{M,I,W_\theta}\,. \tag{3.3.8}$$

Notons

$$\mathrm{Gr}_{P,I,W,\theta} := i_0^{-1}(\mathrm{Gr}_{G,I,W}) \cap \pi_0^{-1}(\mathrm{Gr}_{M,I,W_\theta});$$
$$\mathrm{Cht}_{P,I,N,W,\theta} := i^{-1}(\mathrm{Cht}_{G,I,N,W}) \cap \pi^{-1}(\mathrm{Cht}_{M,I,N,W_\theta}).$$

Le diagramme (3.3.3) ci-dessus induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cht}_{G,N,I,W} & \xleftarrow{i_\theta} & \mathrm{Cht}_{P,N,I,W,\theta} & \xrightarrow{\pi_\theta} & \mathrm{Cht}_{M,N,I,W_\theta} \\
\downarrow{\scriptstyle \epsilon_{G,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{P,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{M,\underline{d}}} \\
[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \xleftarrow{i^0_{\underline{d},\theta}} & [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W,\theta}] & \xrightarrow{\pi^0_{\underline{d},\theta}} & [M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W_\theta}]
\end{array} \tag{3.3.9}$$

Lemme 3.3.9. *Dans la décomposition (3.3.8) ci-dessus, les seules composants non nécessairement vides sont les* $\mathrm{Cht}_{M,I,W_\theta}$ *pour* θ *tel que* $\langle \theta, (\rho_G - \rho_M)\rangle = 0$.

Démonstration. Notons

$$\varphi : \Lambda_{\widehat{M}} \to \Lambda_{Z_{\widehat{M}}}.$$

On a

$$W_\theta = \bigoplus_{\sum_{i\in I} \varphi(\lambda_i) = \theta} \big(\boxtimes_{i\in I} V^{\lambda_i} \big).$$

Rappelons que par la définition,

$$\mathrm{Cht}_{M,I,W_\theta} = \bigcup \mathrm{Cht}_{M,I,\boxtimes_{i\in I}V^{\lambda_i}} .$$

D'après la Proposition 2.16 d) de [Var04], le champ $\mathrm{Cht}_{M,I,\boxtimes_{i\in I}V^{\lambda_i}}$ est non vide si et seulement si $\sum_{i\in I}\lambda_i$ est dans le réseau des racines de $\widehat{M}$. Donc le champ $\mathrm{Cht}_{M,I,W_\theta}$ est non vide si et seulement si θ est dans l'image du réseau des racines de $\widehat{M}$ par la projection φ. Dans ce cas $\langle\theta,(\rho_G-\rho_M)\rangle = 0$.

□

Remarque 3.3.10. Même si θ satisfait $\langle\theta,(\rho_G-\rho_M)\rangle = 0$, le champ $\mathrm{Cht}_{M,I,W_\theta}$ peut être vide.

Exemple 3.3.11. (Chtoucas à deux pattes)

Soient $G = GL_2$ et $I = \{1,2\}$. Soit $W = W_1 \boxtimes W_2 \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^2)$. Rappelons que

$$\mathrm{Cht}_{G,I,W} = \{(x_1,x_2), \mathcal{F}_G \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}'_G \xrightarrow{\phi_2} {}^\tau\mathcal{F}_G\}$$

où pour ϕ_i, la position relative en x_i est bornée par W_i, $i = 1,2$.

Par exemple si $W = St \boxtimes St^*$, c'est-à-dire que $W = V^{(1,0)} \boxtimes V^{(0,-1)}$, alors $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ est non vide. Si $W = St \boxtimes St$, c'est-à-dire que $W = V^{(1,0)} \boxtimes V^{(1,0)}$, alors $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ est vide.

Maintenant considérons le cas $W = V^{(1,0)} \boxtimes V^{(0,-1)}$. On a $M = GL_1 \times GL_1$. Notons V_ν la représentation irréductible de $\widehat{M}$ de poids $\nu \in X_*(GL_1 \times GL_1) = \mathbb{Z}^2$. Alors on a

$$\begin{array}{rll}
\text{pour } \theta = (1,-1) & W_\theta = V_{(1,0)} \boxtimes V_{(0,-1)} & \mathrm{Cht}_{M,I,W_\theta} = \emptyset \\
\text{pour } \theta = (0,0) & W_\theta = (V_{(1,0)} \boxtimes V_{(-1,0)}) \bigoplus (V_{(0,1)} \boxtimes V_{(0,-1)}) & \mathrm{Cht}_{M,I,W_\theta} \neq \emptyset \\
\text{pour } \theta = (-1,1) & W_\theta = V_{(0,1)} \boxtimes V_{(-1,0)} & \mathrm{Cht}_{M,I,W_\theta} = \emptyset
\end{array}$$

Dans cet exemple, $\mathrm{Cht}_{M,I,W_{(0,0)}} \neq \emptyset$ puisqu'il contient le chtouca trivial.

Exemple 3.3.12. (Chtoucas à une patte)

Soient $G = GL_2$ et $I = \{1\}$. Soit $W = V^{(1,-1)} \in \mathrm{Rep}(\widehat{G})$. On a

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{Cht}_{B,\{1\},W_{(1,-1)}} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{T,\{1\},W_{(1,-1)}} \\
 & \swarrow & & & \\
\mathrm{Cht}_{G,\{1\},W} & \longleftarrow & \mathrm{Cht}_{B,\{1\},W_{(0,0)}} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{T,\{1\},W_{(0,0)}} \\
 & \nwarrow & & & \\
 & & \mathrm{Cht}_{B,\{1\},W_{(-1,1)}} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_{T,\{1\},W_{(-1,1)}}
\end{array}$$

Comme dans l'exemple 2.3.1 du chapitre 2, avec la notation ici, on a

$$\mathrm{Cht}_{T,\{1\},W_{(a,b)}} = \{x, \mathcal{L}_1 \to {}^{\tau}\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \to {}^{\tau}\mathcal{L}_2\}$$

où la condition $W_{(a,b)}$ est ${}^{\tau}\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(ax)$, ${}^{\tau}\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(bx)$. Donc $\mathrm{Cht}_{T,\{1\},W_{(1,-1)}}$ et $\mathrm{Cht}_{T,\{1\},W_{(-1,1)}}$ sont vides.

3.4 Géométrie de morphisme $i : \mathrm{Cht}_P \to \mathrm{Cht}_G$

Dans cette section on considère le morphisme i dans le diagramme (3.3.3).

Notons η^I le point générique de X^I. Notons $\mathrm{Cht}_{G,N,\eta^I,W}$ la restriction $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}\big|_{\eta^I}$. De même pour $\mathrm{Cht}_{P,N,\eta^I,W}$ et $\mathrm{Cht}_{M,N,\eta^I,W}$. Notons $i\big|_{\eta^I}$ la restriction du morphisme i sur η^I :

$$i\big|_{\eta^I} : \mathrm{Cht}_{P,N,\eta^I,W}/\Xi \to \mathrm{Cht}_{G,N,\eta^I,W}/\Xi.$$

Proposition 3.4.1. *([Dri87] Prop 4.3 pour les chtoucas à deux pattes, [Var04] Prop5.7 en général)*

a) Le morphisme $i\big|_{\eta^I}$ est fini (en particulier, est propre) composante par composante.

b) Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{ad}}$. Si N est assez grand en fonction de μ, alors $i\big|_{\eta^I}$ est même une immersion fermée sur $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,\eta^I,W}/\Xi$.

Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+}_{G^{ad}}$. Maintenant notons $i^{=\mu}\big|_{\eta^I}$ la restriction du morphisme $i\big|_{\eta^I}$ sur $\mathrm{Cht}^{=\mu}_{P,N,\eta^I,W}/\Xi$:

$$i^{=\mu}\big|_{\eta^I} : \mathrm{Cht}^{=\mu}_{P,N,\eta^I,W}/\Xi \to \mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,N,\eta^I W}/\Xi.$$

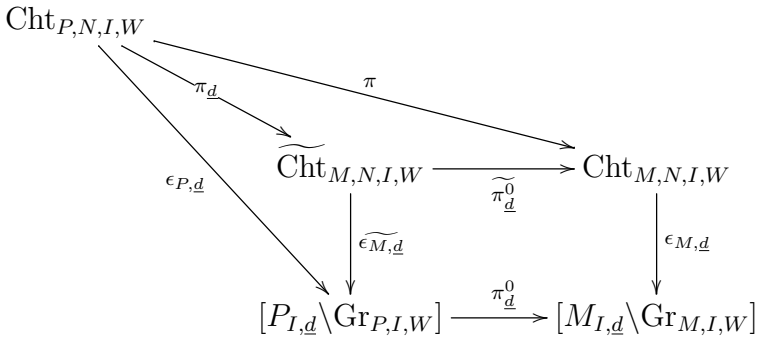
Théorème 3.4.2. *([Dri87] Prop 4.4, [Var04] Thm 2.25) Si μ est assez grand pour P en fonction de G, N, W et X, alors le morphisme $i^{=\mu}\big|_{\eta^I}$ est schématique, fini, bijectif et universellement injectif.*

3.5 Géométrie du morphisme $\pi : \mathrm{Cht}_P \to \mathrm{Cht}_M$

Dans cette section on considère le morphisme π dans le diagramme (3.3.3).

3.5.1 Cas général

Le carré à droite dans le diagramme (3.3.3) n'est pas cartésien. On fait apparaitre un carré cartésien :



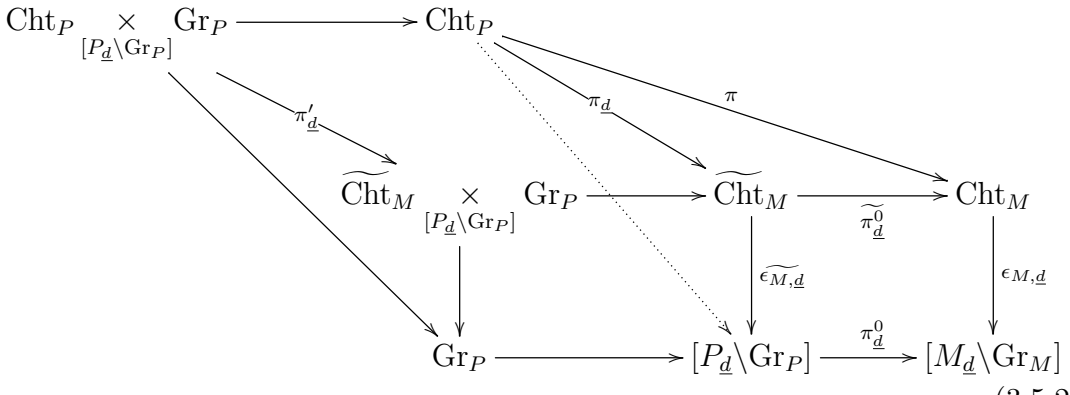
(3.5.1)

Proposition 3.5.1. *Le morphisme $\pi_{\underline{d}}$ est lisse.*

Démonstration.

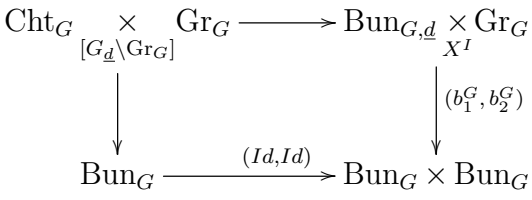
Simplification des notations dans la démonstration : on n'écrit plus les indices N, I et W.

1) Le problème est local pour la topologie lisse. Donc par descente, il suffit de montrer l'énonce pour $\pi'_{\underline{d}} : \mathrm{Cht}_P \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \to \widetilde{\mathrm{Cht}_M} \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P$, qui est inclus dans le diagramme commutatif suivant :



(3.5.2)

Nous avons vu dans la démonstration du proposition 2.2.9 dans le chapitre 2 un carré cartésien :



(3.5.3)

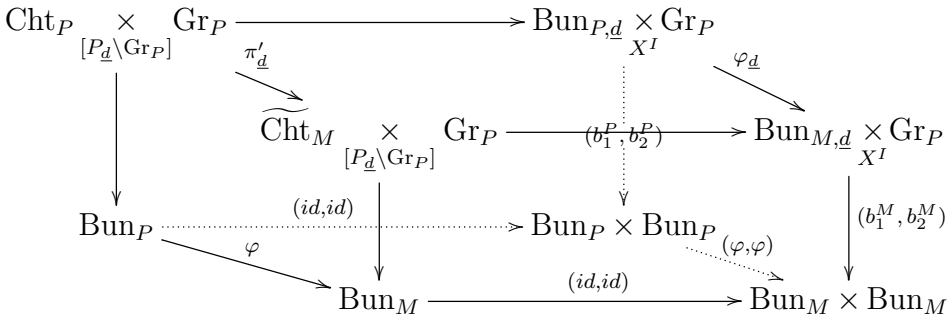
où le morphisme b_1^G est l'oubli du niveau en $\underline{d}$, le morphisme b_2^G vient de la composée :

$$\mathrm{Bun}_{G,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_G \to [G_{I,\underline{d}} \backslash (\mathrm{Bun}_{G,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_G)] \simeq \mathrm{Hecke}_G \overset{pr_0}{\to} \mathrm{Bun}_G \xrightarrow{\mathrm{Frob}} \mathrm{Bun}_G .$$

Le carré (3.5.3) reste cartésien avec P et M au lieu de G. En tenant compte que

$$\widetilde{\mathrm{Cht}}_M \underset{[P_{\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \simeq \mathrm{Cht}_M \underset{[M_{\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_M]}{\times} \mathrm{Gr}_P,$$

on obtient un diagramme commutatif sur $\mathbb{F}_q$, dont la face avant et derrière sont carrés cartésiens :



(3.5.4)

où le morphisme b_1^P est l'oubli du niveau en $\underline{d}$, le morphisme b_2^P est la composée :

$$\mathrm{Bun}_{P,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_P \to [P_{I,\underline{d}} \backslash (\mathrm{Bun}_{P,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_P)] \overset{\sim}{\to} \mathrm{Hecke}_P \overset{pr_0}{\to} \mathrm{Bun}_P \xrightarrow{\mathrm{Frob}} \mathrm{Bun}_P .$$

Le morphisme b_1^M est l'oubli du niveau en $\underline{d}$, le morphisme b_2^M est la composée de

$$\mathrm{Bun}_{M,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_P \to \mathrm{Bun}_{M,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_M \to [M_{I,\underline{d}} \backslash (\mathrm{Bun}_{M,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_M)] \overset{\sim}{\to} \mathrm{Hecke}_M$$

avec

$$\mathrm{Hecke}_M \overset{pr_0}{\to} \mathrm{Bun}_M \xrightarrow{\mathrm{Frob}} \mathrm{Bun}_M .$$

2) Ensuite, on va appliquer le lemme B.0.6 dans l'annexe B au cube ci-dessus.

Soit S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et $(\widetilde{\mathcal{F}_M}, f)$ un morphisme $S \to \widetilde{\mathrm{Cht}}_M \underset{[P_{\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P$. Il induit les morphismes composés

$$S \to \widetilde{\mathrm{Cht}}_M \underset{[P_{\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \to \mathrm{Bun}_{M,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_P$$

$$S \to \widetilde{\mathrm{Cht}}_M \underset{[P_{\underline{d}} \backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \to \mathrm{Bun}_M .$$

On note $\mathscr{Z}_{S,\underline{d}}$, $\mathrm{Bun}_{U,\underline{d}}^{\mathcal{F}_M}$ et $\mathrm{Bun}_U^{\mathcal{F}_M}$ les produits fibrés :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z}_{S,\underline{d}} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}_P \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'_{\underline{d}}} \\ S & \xrightarrow{(\widetilde{\mathcal{F}_M}, f)} & \widetilde{\mathrm{Cht}}_M \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_{U,\underline{d}}^{\mathcal{F}_M} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{P,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_P \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\underline{d}}} \\ S & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{M,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_P \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_U^{\mathcal{F}_M} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_P \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ S & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_M \end{array} \tag{3.5.5}$$

D'après le lemme B.0.6 dans l'annexe B, on a un carré cartésien sur S :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z}_{S,\underline{d}} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{U,\underline{d}}^{\mathcal{F}_M} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (b_1^U, b_2^U)} \\ \mathrm{Bun}_U^{\mathcal{F}_M} & \xrightarrow{(Id,Id)} & \mathrm{Bun}_U^{\mathcal{F}_M} \underset{S}{\times} \mathrm{Bun}_U^{\mathcal{F}_M} \end{array} \tag{3.5.6}$$

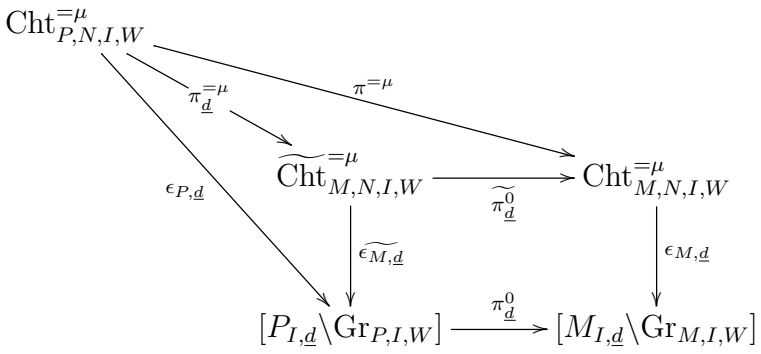
où le morphisme b_1^U est l'oubli du niveau en $\underline{d}$, le morphisme b_2^U est induit par les morphismes b_2^P et b_2^M.

3) On remarque que les groupes P, U et M sont définis sur $\mathbb{F}_q$ et qu'ils sont lisses. Donc les champs $\mathrm{Bun}_{U,\underline{d}}^{\mathcal{F}_M}$ et $\mathrm{Bun}_U^{\mathcal{F}_M}$ sont lisses sur S. De plus, d'après la construction dans 2), le morphisme b_1^U est lisse et b_2^U a une dérivée nulle dans les fibres au-dessus de S (parce que c'est la composée d'un morphisme avec le morphisme Frob, qui a une dérivée nulle). En appliquant le lemme 2.2.12 au carré (3.5.6) dans 2), on en déduit que $\mathscr{Z}_{S,\underline{d}}$ est lisse sur S.

□

3.5.2 Situation pour μ assez grand

Dans la sous-section ci-dessus, tout reste vrai en remplaçant $\mathrm{Cht}_{P,N,I,W}$ et $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}$ par $\mathrm{Cht}_{P,N,I,W}^{=\mu}$ et $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}^{=\mu}$ respectivement. En particulier, on a un diagramme commutatif :



(3.5.7)

Définition 3.5.2. Soit H un schéma en groupes de dimension finie sur un schéma S. On dit que H est un schéma en groupes unipotents s'il est une extension successive de $\mathbb{G}_a$, c'est-à-dire que H admet une filtration

$$H = H^{(0)} \supset H^{(1)} \supset \cdots \supset H^{(m)} \supset H^{(m+1)} = 0$$

tel que $\mathbb{G}_a^{n_j} \xrightarrow{\sim} H^{(j)}/H^{(j+1)}$ comme schéma en groupes sur S.

Remarque 3.5.3. La définition générale d'un schéma en groupes unipotents est une extension successive de α_p, $\mathbb{F}_p$ ou $\mathbb{G}_a$. Mais ici, on considère seulement $\mathbb{G}_a$.

Définition 3.5.4. Soit H un schéma sur $\mathbb{F}_q$. Soit $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un morphisme de champs algébriques sur $\mathbb{F}_q$. On dit que $\mathscr{X}$ est un espace fibré de fibre H sur $\mathscr{Y}$ si pour tout schéma S et tout morphisme $S \to \mathscr{Y}$, le produit fibré $\mathscr{X} \underset{\mathscr{Y}}{\times} S$ est, localement pour la topologie étale, isomorphe à $S \times H$.

Maintenant on énonce le théorème clé géométrique :

Théorème 3.5.5. *Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Quand μ est assez grand pour P, alors localement pour la topologie lisse, $\mathrm{Cht}^{=\mu}_{P,I,N,W}$ est un espace fibré sur $\widetilde{\mathrm{Cht}}^{=\mu}_{M,I,N,W}$ de fibre un schéma en groupes unipotents sur le champ classifiant d'un autre schéma en groupes unipotents.*

Le sens précisé de μ assez grand pour P et la démonstration de ce théorème seront donnés dans le chapitre 5.

Chapitre 4

Morphisme terme constant et énoncés des résultats principaux

Dans la section 1, on rappelle la définition des faisceaux de cohomologie pour les champs de chtoucas d'après [Laf12]. Dans la section 2, on construit le morphisme de terme constant du faisceau de cohomologie pour G vers le faisceau de cohomologie pour M.

Dans la section 3, on définit la cohomologie cuspidale en utilisant le morphisme de terme constant. Dans la section 4, on rappelle la définition de la cohomologie Hecke finie d'après [Laf12]. Dans la section 5, on énonce les résultats principaux sur la cohomologie cuspidale et la cohomologie Hecke finie.

4.1 Cohomologie des champs de chtoucas

Rappelons que l'on a fixé un sous-groupe discret Ξ de $Z_G(\mathbb{A})$ dans la section 2.1.5 du chapitre 2 et que l'on a construit dans le chapitre 3 le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Cht}_{P,N,I,W}/\Xi & & \\ & \overset{i}{\swarrow} & & \overset{\pi}{\searrow} & \\ \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi & & & & \mathrm{Cht}_{M,N,I,W}/\Xi \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & (X \smallsetminus N)^I & & \end{array} \tag{4.1.1}$$

Le but de cette section est de définir des faisceaux pervers sur $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$ et $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}/\Xi$ et de définir les faisceaux de cohomologie sur $(X \smallsetminus N)^I$ pour ces faisceaux pervers.

4.1.1 Remarques sur $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash Gr_{G,I,W}]$

Soit $W \in \mathrm{Rep}(\widehat{G}^I)$. Rappelons que nous avons défini un morphisme de champs :

$$\epsilon_{G,N,I,\infty} : \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} \to [G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}].$$

On veut définir un faisceau pervers sur $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$ à l'aide d'un faisceau pervers sur $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ et du morphisme $\epsilon_{G,N,I,\infty}$.

Rappelons que pour tout $\underline{d} \in \mathbb{N}^I$ assez grand en fonction de W tel que l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ se factorise à travers le quotient $G_{I,\underline{d}}$ (le corollaire 1.2.20 du chapitre 1), on a un morphisme de champs algébriques :

$$\epsilon_{G,N,I,\underline{d}} : \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} \to [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}].$$

Remarquons que le schéma en groupes $G_{I,\mathcal{O}}$ est de dimension infinie. Ainsi le champ $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ n'est pas algébrique. De plus, si on utilise $M_{I,\mathcal{O}}$ au lieu de $M_{I,\underline{d}}$ dans le théorème 3.5.5 du chapitre 3, alors les fibres du morphisme

$$\pi_\infty : \mathrm{Cht}_{P,N,I,W} \to \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} \underset{[M_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}]}{\times} [P_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}]$$

sont de dimension infinie.

Pour ces raisons techniques, au lieu d'utiliser le morphisme $\epsilon_{G,N,I,\infty}$ ci-dessus, on a besoin de choisir un $\underline{d} \in \mathbb{N}^I$ assez grand et d'utiliser le morphisme $\epsilon_{G,N,I,\underline{d}}$.

Ce qui est important est que les résultats cohomologiques ci-dessous ne dépendront pas de choix de $\underline{d}$. En fait, essentiellement on travaillera avec un système projectif des $[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ avec des $\underline{d}$ assez grands. Et on peut voir ce système projectif comme $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$.

Pour voir cela, soient $\underline{d} \leq \underline{d}' \in \mathbb{Z}^I$ assez grands en fonction de W, où $\underline{d} \leq \underline{d}'$ si $d_i \leq d'_i$ pour tout $i \in I$. Alors les morphismes

$$G_{I,\mathcal{O}} \twoheadrightarrow G_{I,\underline{d}'} \twoheadrightarrow G_{I,\underline{d}}$$

induisent un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} & & \\ & \swarrow^{\epsilon_{G,I,N,\infty}} & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{G,I,N,\underline{d}'}} & \searrow^{\epsilon_{G,I,N,\underline{d}}} & \\ [G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \longrightarrow & [G_{I,\underline{d}'}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \longrightarrow & [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] \end{array} \tag{4.1.2}$$

Cela nous permet de construire un système projectif

$$\varprojlim [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}],$$

où la limite est prise sur les $\underline{d}$ assez grands.

On peut voir $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ comme ce système projectif.

D'après l'explication après la définitions 2.14 de [Laf12], quand on passe au quotient par Ξ, on a

$$\epsilon^{\Xi}_{G,N,I,\infty} : \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi \to [G^{\mathrm{ad}}_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}],$$

et

$$\epsilon^{\Xi}_{G,N,I,\underline{d}} : \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi \to [G^{\mathrm{ad}}_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}].$$

4.1.2 Faisceau pervers sur $\mathrm{Cht}_{G,I,N,W}/\Xi$

Soit $W \in Rep(\widehat{G}^I)$. Soit $\underline{d} \in \mathbb{N}^I$ assez grand par rapport à W tel que l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ se factorise à travers le quotient $G_{I,\underline{d}}$.

Comme G est connexe, $G_{I,\underline{d}}$ l'est aussi. Appliquons la Proposition 4.2.5 de [BBD82] au morphisme

$$\xi_{G,\underline{d}} : \mathrm{Gr}_{G,I,W} \to [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}].$$

On en déduit que le foncteur $\xi^*_{G,\underline{d}}[\dim G_{I,\underline{d}}]$ induit un foncteur pleinement fidèle des faisceaux pervers sur $[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ dans les faisceaux pervers sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$.

Donc la définition ci-dessous a un sens :

Définition 4.1.1. On définit un faisceau pervers (à décalage près) sur $[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ comme un faisceau pervers sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ qui est $G_{I,\underline{d}}$-équivariant.

Remarque 4.1.2. Cette définition est compatible avec le système projectif dans la sous-section précédente.

En fait, soit $\underline{d} < \underline{d}' \in \mathbb{Z}^I$ assez grands en fonction de W. Alors le noyau du morphisme $G_{I,\underline{d}'} \twoheadrightarrow G_{I,\underline{d}}$ est unipotent. Donc on a une équivalent entre la catégorie des faisceaux pervers $G_{I,\underline{d}}$-équivariant sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ et la catégorie des faisceaux pervers $G_{I,\underline{d}'}$-équivariant sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$.

De plus, on peut définir formellement un faisceau pervers (à décalage près) sur $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ comme un faisceau pervers sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ qui est $G_{I,\mathcal{O}}$-équivariant.

En fait, le noyau du morphisme $G_{I,\mathcal{O}} \twoheadrightarrow G_{I,\underline{d}}$ est unipotent, donc un faisceau pervers $G_{I,\mathcal{O}}$-équivariant est aussi $G_{I,\underline{d}}$-équivariant.

Donc on peut voir un faisceau pervers sur $[G_{I,\mathcal{O}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ comme un faisceau pervers sur le système projectif $\varprojlim [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$.

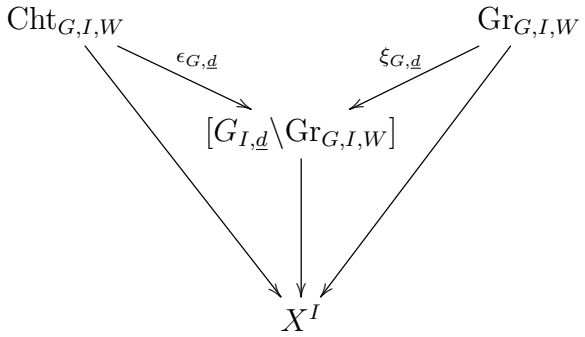
Dans la section 1.6 du chapitre 1, on a défini (via l'équivalence de Satake géométrique) le faisceau pervers $\mathcal{S}_{G,I,W}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ qui est $G_{I,\mathcal{O}}$-équivariant. Alors $\mathcal{S}_{G,I,W}$ est aussi $G_{I,\underline{d}}$-équivariant.

D'après la définition 4.1.1 ci-dessus, $\mathcal{S}_{G,I,W}$ est un faisceau pervers sur le champ algébrique $[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$.

Définition 4.1.3. On définit $\mathcal{F}_{G,I,N,W} := (\epsilon_{G,I,N,\underline{d}})^* \mathcal{S}_{G,I,W}$.

Proposition 4.1.4. *Le complexe $\mathcal{F}_{G,I,N,W}$ est un faisceau pervers sur $\mathrm{Cht}_{G,I,N,W}$ normalisé relativement à $(X \smallsetminus N)^I$.*

Remarque 4.1.5. On a un diagramme commutatif :



où le morphisme $\epsilon_{G,\underline{d}}$ est lisse de dimension relative $(\sum d_i) \dim G$, le morphisme $\xi_{G,\underline{d}}$ est aussi lisse de dimension relative $(\sum d_i) \dim G$. Ainsi, on a $\dim \mathrm{Cht}_{G,I,W} = \dim \mathrm{Gr}_{G,I,W}$.

D'après [MV07], quand $W = \boxtimes_{i\in I} W_i$ est irréductible, avec W_i représentation irréductible de $\widehat{G}$ de plus haut poids ω_i, on a $\dim \mathrm{Gr}_{G,I,W} = \sum_{i\in I} \langle 2\rho_G, \omega_i\rangle + \dim X^I$.

Remarque 4.1.6. Par définition, $\mathcal{S}_{G,I,W}$ est un faisceau pervers sur le schéma $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ normalisé relativement à X^I. En fait, quand W est irréductible, $\mathcal{S}_{G,I,W}$ est isomorphe (non canoniquement) au complexe d'intersection de $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ normalisé relativement à X^I (l'exemple 1.6.3 du chapitre 1). Sur la strate ouverte lisse $\mathrm{Gr}^0_{G,I,W}$ (défini dans la définition 1.1.8 et la définition 1.2.19 du chapitre 1), $\mathcal{S}_{G,I,W}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_\ell[\sum_{i\in I}\langle 2\rho_G, \omega_i\rangle]$.

Le faisceau pervers $\mathcal{F}_{G,I,W}$ est isomorphe (non canoniquement) au complexe d'intersection de $\mathrm{Cht}_{G,I,W}$ normalisé relativement à X^I. Sur la strate ouverte lisse $\mathrm{Cht}^0_{G,I,W}$ (définie comme $\epsilon^*_{G,\underline{d}}([G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}^0_{G,I,W}])$), $\mathcal{F}_{G,I,W}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_\ell[\sum_{i\in I}\langle 2\rho_G, \omega_i\rangle]$.

On n'utilise pas ce fait dans la suite.

Comme $(Z_G)_{I,\mathcal{O}}$ agit trivialement sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$, le faisceau pervers $\mathcal{S}_{G,I,W}$ sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ est aussi $G^{\mathrm{ad}}_{I,\mathcal{O}}$-équivariant et $G^{\mathrm{ad}}_{I,\underline{d}}$-équivariant. On le voit comme un faisceau pervers (à décalage près) sur le champ algébrique $[G^{\mathrm{ad}}_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$.

Définition 4.1.7. On définit $\mathcal{F}^{\Xi}_{G,I,N,W} := (\epsilon^{\Xi}_{G,I,N,\underline{d}})^*\mathcal{S}_{G,I,W}$. C'est un faisceau pervers sur $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$ normalisé relativement à $(X \smallsetminus N)^I$.

Remarque 4.1.8. D'après les remarques dans la sous-section 4.1.1 ci-dessus, $\mathcal{F}_{G,N,I,W}$ et $\mathcal{F}^{\Xi}_{G,N,I,W}$ ne dépendent pas de $\underline{d}$. Formellement on a $\mathcal{F}_{G,I,N,W} = (\epsilon_{G,I,N,\mathfrak{O}})^*\mathcal{S}_{G,I,W}$ et $\mathcal{F}^{\Xi}_{G,I,N,W} = (\epsilon^{\Xi}_{G,I,N,\mathfrak{O}})^*\mathcal{S}_{G,I,W}$.

4.1.3 Faisceaux de cohomologie pour $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$

Notation 4.1.9. Notons le morphisme de pattes :

$$\mathfrak{p}_G : \mathrm{Cht}_{G,I,N}/\Xi \to (X \smallsetminus N)^I.$$

Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. On a vu que le sous-champ ouvert $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi$ de $\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi$ est un champ de Deligne-Mumford de type fini. Donc on peut définir :

Définition 4.1.10. (Définitions 4.1, 4.7 de [Laf12])

$$\mathcal{H}^{\leq\mu}_{G,N,I,W} := R(\mathfrak{p}_G)_!(\mathcal{F}^{\Xi}_{G,N,I,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi}).$$

C'est un complexe dans $D^b_c((X \smallsetminus N)^I, \mathbb{Q}_\ell)$, concentré entre degré $[-\dim \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}, \dim \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}]$.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on définit la cohomologie en degré j (pour la t-structure ordinaire) :

Définition 4.1.11.

$$\mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W} := R^j(\mathfrak{p}_G)_!(\mathcal{F}^{\Xi}_{G,N,I,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi}).$$

C'est un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constructible sur $(X \smallsetminus N)^I$.

Remarque 4.1.12. Le complexe $\mathcal{H}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}$ dépend de Ξ. On ne l'écrit pas dans les indices pour simplifier les notations.

Maintenant, soit $\mu_1, \mu_2 \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$ et $\mu_1 < \mu_2$. Alors d'après le lemme 2.1.31 du chapitre 2, on a une immersion ouverte

$$\mathrm{Cht}^{\leq\mu_1}_{G,I,N,W} \hookrightarrow \mathrm{Cht}^{\leq\mu_2}_{G,I,N,W}.$$

Cette immersion ouverte induit un morphisme de complexes :

$$\mathcal{H}^{\leq\mu_1}_{G,N,I,W} \to \mathcal{H}^{\leq\mu_2}_{G,N,I,W}.$$

Pour tout j, on a un morphisme des faisceaux de cohomologie :

$$\mathcal{H}^{j,\leq\mu_1}_{G,N,I,W} \to \mathcal{H}^{j,\leq\mu_2}_{G,N,I,W}.$$

Donc on peut définir la limite inductive sur les μ :

Définition 4.1.13. On définit

$$\mathcal{H}^{j}_{G,N,I,W} := \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}$$

dans la limite inductive de catégories de faisceaux constructibles sur $(X \smallsetminus N)^I$.

Exemple 4.1.14. (Chtoucas sans pattes)

Quand $I = \emptyset$, on a vu que $\mathrm{Cht}_{G,N,\emptyset}/\Xi$ est canoniquement isomorphe au champ constant $\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi \simeq G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$. Dans ce cas, le complexe $\mathcal{H}^{\leq\mu}_{G,N,\emptyset}$ est supporté en degré 0 et $\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{G,N,\emptyset}$ est un faisceau constant sur $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$. On a

$$\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{G,N,\emptyset} \simeq C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell).$$

4.1.4 Faisceau pervers sur $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}/\Xi$ et faisceau de cohomologie pour $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}/\Xi$

Soit P un sous-groupe parabolique de G. Soit M son quotient de Levi. Rappelons que nous avons fixé un sous-groupe discret Ξ de $Z_G(\mathbb{A})$.

Soit $V \in Rep(\widehat{M}^I)$. Soit $\underline{d} \in \mathbb{N}^I$ assez grand en fonction de V. On a

$$\epsilon_{M,N,I,\underline{d}} : \mathrm{Cht}_{M,N,I,V} \to [M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,V}]$$

et

$$\epsilon^{\Xi}_{M,N,I,\underline{d}} : \mathrm{Cht}_{M,N,I,V}/\Xi \to [(M/Z_G)_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,V}] \to [M^{\mathrm{ad}}_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,V}].$$

Définition 4.1.15. On définit

$$\mathcal{F}_{M,I,N,V} := (\epsilon_{M,N,I,\underline{d}})^* \mathcal{S}_{M,I,V};$$

$$\mathcal{F}^{\Xi}_{M,I,N,V} := (\epsilon^{\Xi}_{M,N,I,\underline{d}})^* \mathcal{S}_{M,I,V}.$$

Remarque 4.1.16. Comme pour G, si V est irréductible, le complexe $\mathcal{F}_{M,I,N,V}$ (resp. $\mathcal{F}^{\Xi}_{M,I,N,V}$) est isomorphe (non canoniquement) au complexe d'intersection de $\mathrm{Cht}_{M,I,N,V}$ (resp. $\mathrm{Cht}_{M,N,I,V}/\Xi$), normalisé relativement à $(X \smallsetminus N)^I$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$. On n'utilise jamais ce fait dans la suite.

Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Nous avons défini $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,I,N,V}/\Xi$ dans la définition 3.2.17 du chapitre 3. Par définition, Ξ est un réseau dans $Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A})$. En revanche, il est seulement un sous-groupe discret mais pas un réseau dans $Z_M(F)\backslash Z_M(\mathbb{A})$. Pour cette raison, $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,I,N,V}/\Xi$ est un champ de Deligne-Mumford localement de type fini mais pas nécessairement de type fini. En revanche, il y a une décomposition induite par (3.2.10) :

$$\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I,V}/\Xi = \bigsqcup_{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G},\quad \iota_P^{ad}(\nu)\leq\mu} \mathrm{Cht}^{\leq\mu,\,\nu}_{M,N,I,V}/\Xi$$

et chaque $\mathrm{Cht}^{\leq\mu,\,\nu}_{M,I,N,V}/\Xi$ est un champ de Deligne-Mumford de type fini.

Notation 4.1.17. Notons le morphisme de pattes :

$$\mathfrak{p}_M : \mathrm{Cht}_{M,N,I}/\Xi \to (X\smallsetminus N)^I.$$

Définition 4.1.18. Pour tout $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, pour tout $j\in\mathbb{Z}$, on définit

$$\mathcal{H}^{\leq\mu,\,\nu}_{M,N,I,V} := R(\mathfrak{p}_M)_!(\mathcal{F}^{\Xi}_{M,I,N,V}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu,\,\nu}_{M,N,I,V}/\Xi}),$$

$$\mathcal{H}^{j,\leq\mu,\,\nu}_{M,N,I,V} := R^j(\mathfrak{p}_M)_!(\mathcal{F}^{\Xi}_{M,I,N,V}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu,\,\nu}_{M,N,I,V}/\Xi}).$$

Chaque $\mathcal{H}^{\leq\mu,\,\nu}_{M,N,I,V}$ est dans $D^b_c((X\smallsetminus N)^I)$.

Notation 4.1.19. Notons le cône translaté dans $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$:

$$\widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G} := \{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G},\ \iota_P^{ad}(\nu)\leq\mu\}.$$

Définition 4.1.20. On note $\mathcal{H}^{\leq\mu}_{M,N,I,V}$ ou parfois $R(\mathfrak{p}_M)_!(\mathcal{F}^{\Xi}_{M,I,N,V}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I,V}/\Xi})$ la famille de complexes $(\mathcal{H}^{\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V})_{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}}$ sur $(X\smallsetminus N)^I$.

On note $\mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{M,N,I,V}$ ou parfois $R^j(\mathfrak{p}_M)_!(\mathcal{F}^{\Xi}_{M,I,N,V}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I,V}/\Xi})$ la famille de faisceaux constructibles $(\mathcal{H}^{j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V})_{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}}$ sur $(X\smallsetminus N)^I$.

Maintenant, soient $\mu_1,\mu_2\in\widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$ avec $\mu_1<\mu_2$. Alors pour tout $\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, on a une immersion ouverte

$$\mathrm{Cht}^{\leq\mu_1}_{M,I,N,V}\hookrightarrow\mathrm{Cht}^{\leq\mu_2}_{M,I,N,V}.$$

Cette immersion ouverte induit un morphisme de complexes :

$$\mathcal{H}^{\leq\mu_1,\nu}_{M,N,I,V} \to \mathcal{H}^{\leq\mu_2,\nu}_{M,N,I,V}.$$

Pour tout j, on a un morphisme de faisceaux de cohomologie :

$$\mathcal{H}^{j,\leq\mu_1,\nu}_{M,N,I,V} \to \mathcal{H}^{j,\leq\mu_2,\nu}_{M,N,I,V}.$$

Cela donne $\mathcal{H}^{j,\leq\mu_1}_{M,N,I,V} \to \mathcal{H}^{j,\leq\mu_2}_{M,N,I,V}$. On peut définir formellement la limite inductive sur les μ :

$$\varinjlim_{\mu'} \mathcal{H}'^{j,\leq\mu'}_{M,N,I,W}.$$

Soit $\overline{\eta^I}$ un point générique géométrique de X^I. Notons

$$H^{j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V} := \mathcal{H}^{j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V}\Big|_{\overline{\eta^I}}.$$

C'est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel.

Définition 4.1.21. On définit

$$H^{j,\leq\mu}_{M,N,I,V} := \prod_{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}} H^{j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V}.$$

On remarque que $H^{j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V} = 0$ si $\nu \notin \widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}$. On dit que $H^{j,\leq\mu}_{M,N,I,V}$ est supporté sur le cône translaté $\widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}$ dans $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$.

Notation 4.1.22.

$$H^{j,\nu}_{M,N,I,V} := \varinjlim_{\mu'} H^{j,\leq\mu',\nu}_{M,N,I,V}.$$

$$\widehat{\bigoplus} H^{j,\nu}_{M,N,I,V} := \{(e_\nu) \in \prod_{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}} H^{j,\nu}_{M,N,I,V}, \quad \exists\, \mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}},\ \text{t.q. } e_\nu = 0 \text{ si } \nu \notin \widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}\}.$$

Définition 4.1.23.

$$H^{j}_{M,N,I,V} := \varinjlim_{\mu'} H^{j,\leq\mu'}_{M,N,I,V} \subset \widehat{\bigoplus} H^{j,\nu}_{M,N,I,V}.$$

Exemple 4.1.24. (Chtoucas sans pattes)

Soient $I = \emptyset$ et $W = 1$. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{ad}}$. Le complexe $\mathcal{H}^{\leq\mu}_{M,N,\emptyset,1}$ est supporté en degré 0 et $\mathcal{H}^{0,\leq\mu}_{M,N,\emptyset,1}$ est un faisceau constant sur $\operatorname{Spec}\mathbb{F}_q$. On a

$$H^{0,\leq\mu,\nu}_{M,\emptyset,N,1} = C_c(\mathrm{Bun}^{\leq\mu,\nu}_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$$

$$H^{0,\leq\mu}_{M,\emptyset,N,1} \subset C(\mathrm{Bun}^{\leq\mu}_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$$

Il est supporté sur les $\mathrm{Bun}^{\leq\mu,\nu}_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi$ pour $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}$.

$$H^{0}_{M,\emptyset,N,1} = \varinjlim_{\mu} H^{0,\leq\mu}_{M,\emptyset,N,1} \subset C(\mathrm{Bun}_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$$

On remarque que dans ce cas, pour chaque ν, $R^0(\mathfrak{p}_M)_!(\mathbb{Q}_\ell\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V}/\Xi})$ est un espace de fonctions à support compact. En revanche, $R^0(\mathfrak{p}_M)_!(\mathbb{Q}_\ell\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I,V}/\Xi})$ est un espace de fonctions à support non nécessairement compact puisque $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,\emptyset,N,1}/\Xi$ n'est pas de type fini.

4.2 Construction du morphisme terme constant

Le but de cette section est de construire le morphisme terme constant (définition 4.2.7) pour chaque parabolique P.

4.2.1 Morphisme entre faisceaux pervers

Soit $W \in Rep(\widehat{G}^I)$. On peut le voir comme une représentation de $\widehat{M}^I$ par restriction. D'apres le lemme 3.3.5 du chapitre 3, on a des morphismes :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Cht}_{P,N,I,W} & \\ {\scriptstyle i}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} & & \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} \end{array}$$

On a un faisceau pervers $\mathcal{F}_{G,I,N,W}$ sur $\mathrm{Cht}_{G,I,N,W}$ (la définition 4.1.3) et un faisceau pervers $\mathcal{F}_{M,I,N,W}$ sur $\mathrm{Cht}_{M,I,N,W}$ (la définition 4.1.15).

Le morphisme π est de type fini. Donc le foncteur ci-dessous est bien défini :

$$\pi_! i^* : D^b_c(\mathrm{Cht}_{G,N,I,W}) \to D^b_c(\mathrm{Cht}_{M,N,I,W}). \tag{4.2.1}$$

En particulier, on a un complexe $\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,I,N,W} \in D^b_c(\mathrm{Cht}_{M,N,I,W})$.

Construction 4.2.1. On construit un morphisme de complexes dans $D^b_c(\mathrm{Cht}_{M,N,I,W})$:

$$\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,I,N,W} \to \mathcal{F}_{M,I,N,W}. \tag{4.2.2}$$

Construction.

i) Prenons un $\underline{d} \in \mathbb{N}^I$ assez grand tel que l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ (resp. $P_{I,\mathcal{O}}$, $M_{I,\mathcal{O}}$) sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ (resp. $\mathrm{Gr}_{P,I,W}$, $\mathrm{Gr}_{M,I,W}$) se factorise à travers le quotient $G_{I,\underline{d}}$ (resp. $P_{I,\underline{d}}$, $M_{I,\underline{d}}$). Dans chapitre 3, on a construit un diagramme commutatif :

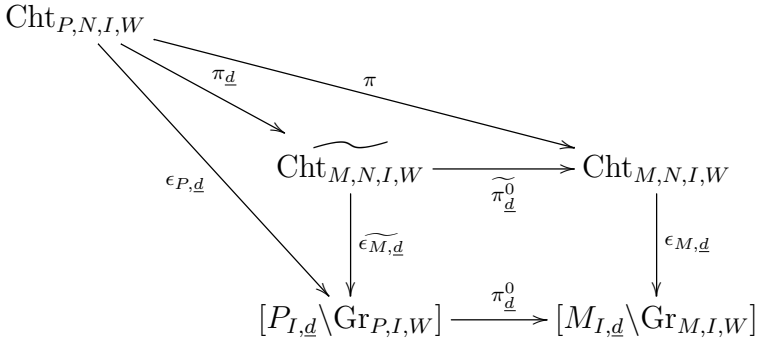
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} & \xleftarrow{i} & \mathrm{Cht}_{P,N,I,W} & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{G,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{P,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{M,\underline{d}}} \\ [G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] & \xleftarrow{i^0_{\underline{d}}} & [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}] & \xrightarrow{\pi^0_{\underline{d}}} & [M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}] \end{array} \tag{4.2.3}$$

On veut construire une flèche

$$\pi_!(\epsilon_{P,\underline{d}})^* \to (\epsilon_{M,\underline{d}})^*(\pi^0_{\underline{d}})_![-2m](-m) \tag{4.2.4}$$

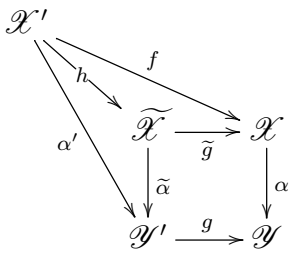
où $m = \dim U_{\underline{d}} = (\sum d_i) \dim U$.

Pour obtenir cette flèche, on applique la construction ci-dessous au diagramme suivant :



(4.2.5)

Construction 4.2.2. Soit



(4.2.6)

un diagramme commutatif de champs algébriques, où $\widetilde{\mathscr{X}}$ est le produit fibré $\mathscr{X} \underset{\mathscr{Y}}{\times} \mathscr{Y}'$, f et g sont de type fini. Supposons que le morphisme h est lisse. Alors on construit un morphisme de foncteurs

$$f_!(\alpha')^* \to \alpha^* g_![-2\dim h](-\dim h).$$

Construction. On a

$$\begin{aligned} f_!(\alpha')^* &\simeq \widetilde{g}_! h_! h^* \widetilde{\alpha}^* \\ &\xrightarrow{Tr} \widetilde{g}_! \widetilde{\alpha}^* [-2\dim h](-\dim h) \xleftarrow{\sim} \alpha^* g_! [-2\dim h](-\dim h) \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

La première flèche vient de la commutativité.

La deuxième flèche est induite par l'isomorphisme $h^*[2\dim h](\dim h) \simeq h^!$ (puisque h est lisse) et le morphisme trace pour h : $Tr : h_! h^! \to Id$ ([SGA4] XVIII 2).

La troisième flèche est le changement de base propre ([SGA4] XVII 5).

□

ii) On déduit de i) des flèches de complexes de faisceaux :

$$\begin{aligned} \pi_! i^* \mathcal{F}_{G,N,I,W} &= \pi_! i^* (\epsilon_{G,\underline{d}})^* \mathcal{S}_{G,I,W} \\ &\overset{(a)}{\simeq} \pi_! (\epsilon_{P,\underline{d}})^* (i^0_{\underline{d}})^* \mathcal{S}_{G,I,W} \\ &\overset{(b)}{\to} (\epsilon_{M,\underline{d}})^* (\pi^0_{\underline{d}})_! (i^0_{\underline{d}})^* \mathcal{S}_{G,I,W} [-2m](-m) \\ &\overset{(c)}{\xleftarrow{\sim}} (\epsilon_{M,\underline{d}})^* \mathcal{S}_{M,I,W} = \mathcal{F}_{M,N,I,W} \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

La composition de ces flèches donne

$$\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,I,N,W} \to \mathcal{F}_{M,I,N,W}.$$

(a) vient de la commutativité du diagramme (4.2.3) ;

(b) vient de la flèche (4.2.4) dans i) ;

Maintenant expliquons le morphisme clé (c) : rappelons que nous avons décomposition

$$\mathrm{Gr}_{M,I,W} = \bigsqcup_{\theta \in Z^\vee_M} \mathrm{Gr}_{M,I,W_\theta} \quad \text{et} \quad \mathrm{Cht}_{M,I,W} = \bigsqcup_{\theta \in Z^\vee_M} \mathrm{Cht}_{M,I,W_\theta}.$$

Dans la section 1.7.2 du chapitre 1, on a vu que pour la correspondance

$$\mathrm{Gr}_{G,I,W} \xleftarrow{i^0_\theta} \mathrm{Gr}_{P,I,W,\theta} \xrightarrow{\pi^0_\theta} \mathrm{Gr}_{M,I,W_\theta},$$

on a un morphisme de terme constant (qui est une conséquence de l'équivalence de Satake géométrique) :

$$\mathcal{S}_{M,I,W_\theta}[-2s](-s) \xrightarrow{\sim} (\pi^0_\theta)_! (i^0_\theta)^* \mathcal{S}_{G,I,W} \tag{4.2.9}$$

avec $s = \langle \theta, (\rho_G - \rho_M) \rangle$.

Considérons la correspondance

$$[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}] \xleftarrow{i^0_{\underline{d},\theta}} [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W,\theta}] \xrightarrow{\pi^0_{\underline{d},\theta}} [M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W_\theta}].$$

On voit $\mathcal{S}_{G,I,W}$ comme complexe sur $[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ et $\mathcal{S}_{M,I,W_\theta}$ comme complexe sur $[M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W_\theta}]$. Comme $U_{\underline{d}}$ est un schéma en groupes unipotents et $\pi^0_{\underline{d},\theta}$ est de dimension relative $\dim \pi^0_\theta + \dim U_{\underline{d}} = \dim \pi^0_\theta + m$, le morphisme (4.2.9) implique un morphisme

$$\mathcal{S}_{M,I,W_\theta}[-2s](-s) \xrightarrow{\sim} (\pi^0_{\underline{d},\theta})_!(i^0_{\underline{d},\theta})^*\mathcal{S}_{G,I,W}[-2m](-m). \tag{4.2.10}$$

Le morphisme (c) est une réunion des morphismes indexés par θ :

$$(\epsilon_{M,\underline{d}})^*\mathcal{S}_{M,I,W_\theta}[-2s](-s) \xrightarrow{\sim} (\epsilon_{M,\underline{d}})^*(\pi^0_{\underline{d},\theta})_!(i^0_{\underline{d},\theta})^*\mathcal{S}_{G,I,W}[-2m](-m).$$

D'après le lemme 3.3.9 dans le chapitre 3, on a $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W} = \mathrm{Cht}_{M,N,I,W_\theta}$ pour $\theta \in Z^\vee_{\widehat{M}}$ tel que $\langle \theta, (\rho_G - \rho_M)\rangle = 0$. Ainsi l'image de morphisme $\epsilon_{M,\underline{d}}$ est inclus dans $[M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W_\theta}]$ avec $\langle \theta, (\rho_G - \rho_M)\rangle = 0$. Donc dans morphisme (c), il y a seulement une composante non nulle, c'est la composante avec $s = 0$.

□

Remarque 4.2.3. Il y a deux ingrédients clés dans la construction ci-dessus :

a) le morphisme $\mathcal{S}_{M,I,W_\theta}[-2s](-s) \xrightarrow{\sim} (\pi^0)_!(i^0)^*\mathcal{S}_{G,I,W}$ qui vient de Satake géométrique. C'est aussi la raison pour laquelle il faut préciser θ pour donner le décalage s.

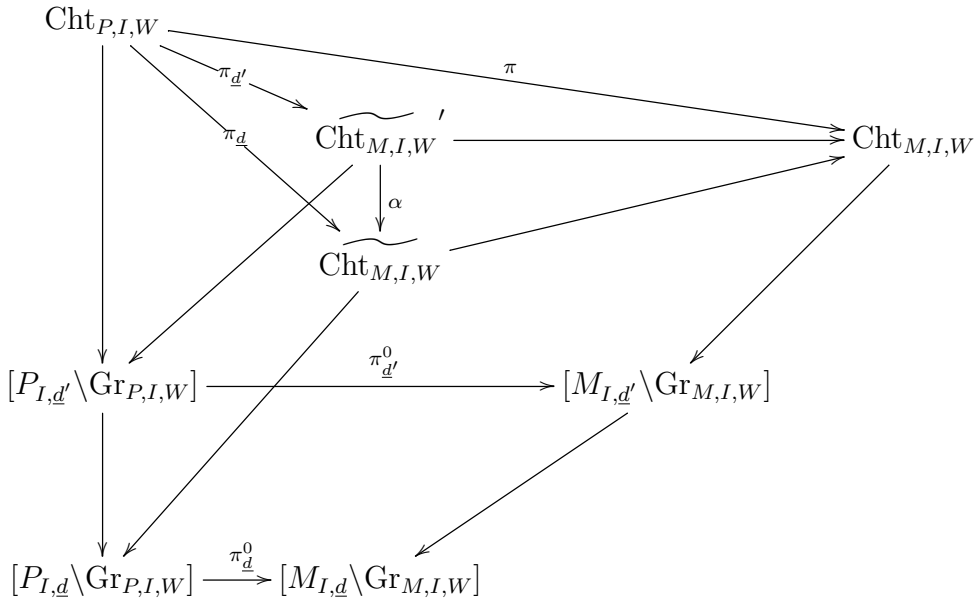
b) les morphismes lisses $\epsilon_{G,\underline{d}}$ et $\epsilon_{M,\underline{d}}$. Grâce à ces morphismes, on peut définir fonctoriellement les faisceaux pervers $\mathcal{F}_{G,I,W}$ et $\mathcal{F}_{M,I,W}$ à partir de $\mathcal{S}_{G,I,W}$ et $\mathcal{S}_{M,I,W}$. Et le morphisme lisse $\pi_{\underline{d}}$, qui permet d'appliquer le lemme 4.2.2.

Lemme 4.2.4. *Le morphisme (4.2.2) ne dépend pas de choix de $\underline{d}$.*

Démonstration. D'après la sous-section 4.1.1, ce que nous considérons est un système compatible de $[G_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{G,I,W}]$ pour les $\underline{d} \in \mathbb{N}^I$ assez grand.

Soit $\underline{d} < \underline{d}' \in \mathbb{N}^I$ assez grand en fonction de W. Alors le diagramme suivant

est commutatif :



(4.2.11)

Comme $\pi_{\underline{d}} = \alpha \circ \pi_{\underline{d}'}$, le morphisme de trace

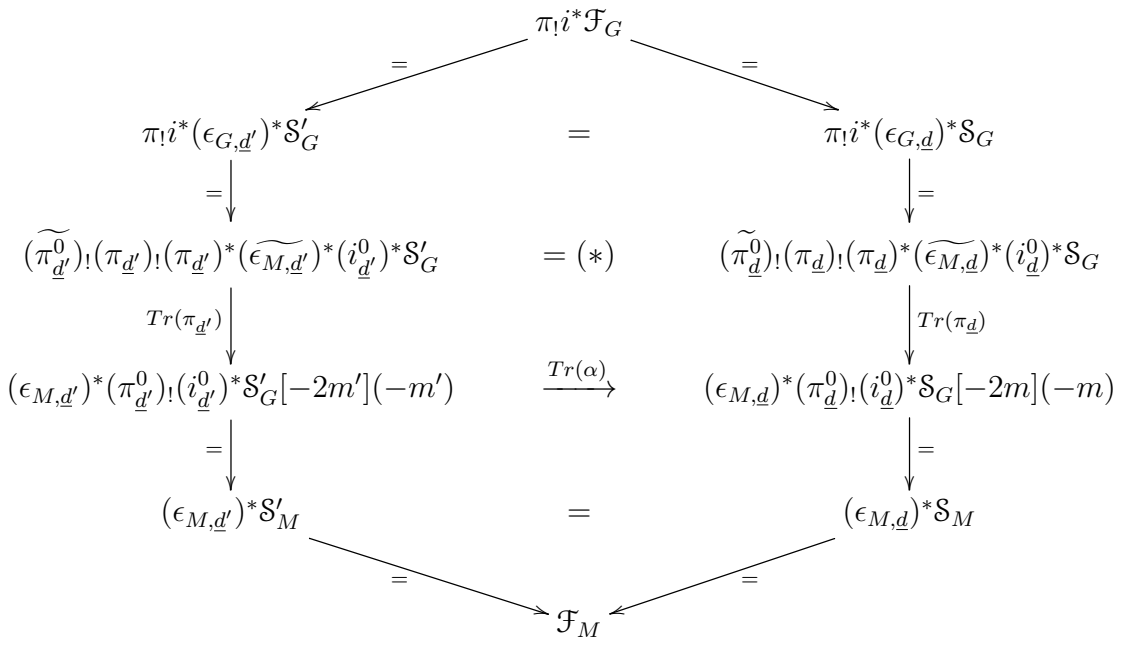
$$Tr(\pi_{\underline{d}}) : (\pi_{\underline{d}})_!(\pi_{\underline{d}})^! \to \mathrm{Id}$$

est le composé de

$$\alpha_!(\pi_{\underline{d}'})_!(\pi_{\underline{d}'})^!\alpha^! \xrightarrow{Tr(\pi_{\underline{d}'})} \alpha_!\alpha^! \xrightarrow{Tr(\alpha)} \mathrm{Id}\,.$$

Le clé est que les fibres de morphisme α est le champ classifiant de groupe $\mathrm{Ker}(U_{\underline{d}'} \to U_{\underline{d}})$, qui est un groupe unipotent. D'après le lemme 6.2.5 du chapitre 6, le morphisme $Tr(\alpha) : \alpha_!\alpha^! \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme de foncteurs.

Ainsi on a le diagramme commutatif des complexes :



où $m = \dim U_{\underline{d}} = (\sum d_i) \dim U$ et $m' = \dim U_{\underline{d}'} = (\sum d'_i) \dim U$.

L'égalité $(*)$ est donnée par

$$\begin{aligned}(\widetilde{\pi^0_{\underline{d}'}})_! (\pi_{\underline{d}'})_! (\pi_{\underline{d}'})^* (\widetilde{\epsilon_{M,\underline{d}'}})^* (i^0_{\underline{d}'})^* \mathcal{S}'_G &= (\widetilde{\pi^0_{\underline{d}}})_! \alpha_! (\pi_{\underline{d}'})_! (\pi_{\underline{d}'})^* \alpha^* (\widetilde{\epsilon_{M,\underline{d}}})^* (i^0_{\underline{d}})^* \mathcal{S}_G \\ &= (\widetilde{\pi^0_{\underline{d}}})_! (\pi_{\underline{d}})_! (\pi_{\underline{d}})^* (\widetilde{\epsilon_{M,\underline{d}}})^* (i^0_{\underline{d}})^* \mathcal{S}_G\end{aligned}$$

□

Le diagramme (4.2.3) dans la construction 4.2.1 est compatible à la troncature de Harder-Narasimhan et au quotient par Ξ. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Pour le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,I,W}/\Xi & & \\ & \swarrow^{i} & \downarrow & \searrow^{\pi} & \\ \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi & & \mathfrak{p}_P & & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I,W}/\Xi \\ & \searrow_{\mathfrak{p}_G} & \downarrow & \swarrow_{\mathfrak{p}_M} & \\ & & (X \smallsetminus N)^I & & \end{array} \tag{4.2.12}$$

on a aussi le morphisme de complexes comme dans la construction 4.2.1 :

$$\pi_! i^* \mathcal{F}^{\Xi}_{G,I,N,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi} \to \mathcal{F}^{\Xi}_{M,I,N,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,I,W}/\Xi}.$$

4.2.2 Morphisme entre faisceaux de cohomologie

A partir de maintenant, on considère seulement la restriction de $\mathrm{Cht}_{G,I,N}$ et $\mathrm{Cht}_{M,I,N}$ en η^I (point générique de X^I).

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,\eta^I,W}/\Xi & & \\ & \overset{i}{\swarrow} & \downarrow \mathfrak{p}_P & \overset{\pi}{\searrow} & \\ \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W}/\Xi & & & & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,\eta^I,W}/\Xi \\ & \underset{\mathfrak{p}_G}{\searrow} & \eta^I & \underset{\mathfrak{p}_M}{\swarrow} & \end{array} \tag{4.2.13}$$

Notons

$$\mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W} := \mathcal{F}^{\Xi}_{G,N,I,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W}/\Xi}$$
$$\mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{M,N,\eta^I,W} := \mathcal{F}^{\Xi}_{M,N,I,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,\eta^I,W}/\Xi}.$$

On a un morphisme de complexes sur $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{M,N,\eta^I,W}/\Xi$ comme dans la construction 4.2.1 :

$$\pi_! i^* \mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W} \to \mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{M,N,\eta^I,W}. \tag{4.2.14}$$

D'après la proposition 5.7 dans [Var04] (dont on a rappelé l'énoncé dans la proposition 3.4.1 du chapitre 3), le morphisme

$$i : \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{P,N,\eta^I,W}/\Xi \to \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W}/\Xi$$

est propre composante par composante. Donc on peut appliquer [SGA5] III 3 ou [Laf12] 4.1 au diagramme commutatif (4.2.13) ci-dessus et à la correspondance cohomologique (4.2.14). On obtient un morphisme sur η^I :

$$R(\mathfrak{p}_G)_! \mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W} \to R(\mathfrak{p}_M)_! \mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{M,N,\eta^I,W}. \tag{4.2.15}$$

Concrètement, d'abord on a un morphisme de foncteurs (tous les foncteurs sont considérés comme foncteurs dérivés) :

$$(\mathfrak{p}_G)_! \overset{(a)}{\to} (\mathfrak{p}_G)_! i_* i^* \overset{(b)}{\simeq} (\mathfrak{p}_G)_! i_! i^* \overset{(c)}{\simeq} (\mathfrak{p}_M)_! \pi_! i^* \tag{4.2.16}$$

où (a) est l'adjonction, (b) est parce que i est propre, (c) est la commutativité du diagramme (4.2.13) ci-dessus. Le composé donne

$$(\mathfrak{p}_G)_! \mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W} \to (\mathfrak{p}_M)_! \pi_! i^* \mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W}.$$

Ensuite on compose ce morphisme avec (4.2.14), on obtient

$$(\mathfrak{p}_G)_! \mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W} \to (\mathfrak{p}_M)_! \pi_! i^* \mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W} \to (\mathfrak{p}_M)_! \mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{M,N,\eta^I,W}. \tag{4.2.17}$$

4.2.3 Morphisme terme constant

Notation 4.2.5. On note

$$\mathrm{Cht}'_{P,N,I,W} := \mathrm{Cht}_{P,N,I,W} \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N),$$

$$\mathrm{Cht}'_{M,N,I,W} := \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N).$$

On peut faire tout comme dans la section 4.1.4 pour $\mathrm{Cht}'_{M,N,I,W}$: on a un morphisme composé

$$\epsilon'^{\Xi}_{M,N,I,\underline{d}} : \mathrm{Cht}'_{M,N,I,W}/\Xi \to \mathrm{Cht}_{M,I,W}/\Xi \to [M^{\mathrm{ad}}_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}].$$

On définit

$$\mathcal{F}'^{\Xi}_{M,I,N,W} := (\epsilon'^{\Xi}_{M,N,I,\underline{d}})^* \mathcal{S}_{M,I,W}.$$

Notons

$$\mathfrak{p}'_M : \mathrm{Cht}'_{M,N,I}/\Xi \to (X \smallsetminus N)^I.$$

On définit

$$\mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V} := R^j(\mathfrak{p}'_M)_!(\mathcal{F}'^{\Xi}_{M,I,N,V}\Big|_{\mathrm{Cht}'^{\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V}/\Xi}).$$

On note $\mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu}_{M,N,I,V}$ ou parfois $R^j(\mathfrak{p}'_M)_!\mathcal{F}'^{\Xi,\leq\mu}_{M,N,I,W}$ la famille de faisceaux $(\mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,V})_{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}}$ sur $(X \smallsetminus N)^I$.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Cht}'_{P,N,I,W} & \\ {\scriptstyle i'}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi'} \\ \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} & & \mathrm{Cht}'_{M,N,I,W} \end{array} \tag{4.2.18}$$

où le morphisme i' (resp. π') est induit par le morphisme i (resp. π).

Toutes les constructions dans les sections précédentes marchent pareillement pour ce diagramme. Donc on a un morphisme de complexe sur η^I :

$$R(\mathfrak{p}_G)_!\mathcal{F}^{\Xi,\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W} \to R(\mathfrak{p}'_M)_!\mathcal{F}'^{\,\Xi,\leq\mu}_{M,N,\eta^I,W}. \tag{4.2.19}$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, ce morphisme induit un morphisme de faisceaux sur η^I :

$$\mathcal{C}^{P,\,j,\leq\mu}_G : \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \longrightarrow \mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I}. \tag{4.2.20}$$

Remarque 4.2.6. En fait, pour chaque $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}$, on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Cht}^{'\,\leq\mu,\nu}_{P,N,\eta^I,W}/\Xi & & \\ & \swarrow^{i'} & \downarrow & \searrow^{\pi'} & \\ \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,\eta^I,W}/\Xi & & \mathfrak{p}_P & & \mathrm{Cht}^{'\,\leq\mu,\nu}_{M,N,\eta^I,W}/\Xi \\ & \searrow_{\mathfrak{p}_G} & \downarrow & \swarrow_{\mathfrak{p}_M} & \\ & & \eta^I & & \end{array} \tag{4.2.21}$$

et on définit un morphisme

$$\mathcal{C}^{P,\,j,\,\leq\mu,\,\nu}_G : \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \longrightarrow \mathcal{H}^{'\,j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I}.$$

Le morphisme $\mathcal{C}^{P,\,j,\,\leq\mu}_G$ est en fait une famille de morphismes $\mathcal{C}^{P,\,j,\,\leq\mu,\,\nu}_G$ indexés par $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}$.

Maintenant soit $\mu_1, \mu_2 \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$ avec $\mu_1 < \mu_2$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}^{\leq\mu_2}_G & \longleftarrow & \mathrm{Cht}^{'\,\leq\mu_2}_P & \longrightarrow & \mathrm{Cht}^{'\,\leq\mu_2}_M \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Cht}^{\leq\mu_1}_G & \longleftarrow & \mathrm{Cht}^{'\,\leq\mu_1}_P & \longrightarrow & \mathrm{Cht}^{'\,\leq\mu_1}_M \end{array} \tag{4.2.22}$$

où les flèches verticales sont des immersions ouverts.

Pour tout j, il induit un diagramme commutatifs de faisceaux de cohomologie :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{j,\leq\mu_2}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{'\,j,\leq\mu_2}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{H}^{j,\leq\mu_1}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{'\,j,\leq\mu_1}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I}. \end{array} \tag{4.2.23}$$

Ainsi on obtient un morphisme de limites inductives.

Définition 4.2.7. Pour tout sous-groupe parabolique P, pour tout degré j, on définit un morphisme terme constant sur η^I :

$$\mathcal{C}^{P,j}_G : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \longrightarrow \varinjlim_{\mu'} \mathcal{H}^{'\,j,\leq\mu'}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I}. \tag{4.2.24}$$

Soit $\overline{\eta^I}$ un point géométrique de η^I. Comme dans les sections précédentes, notons $H^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W} := \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\overline{\eta^I}}$ et $H^{'\,j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,W} := \mathcal{H}^{'\,j,\leq\mu,\nu}_{M,N,I,W}\Big|_{\overline{\eta^I}}$. Notons

$$H^{j}_{G,N,I,W} = \varinjlim_{\mu} H^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W} \quad H^{'\,j}_{M,N,I,W} = \varinjlim_{\mu'} H^{'\,j,\leq\mu'}_{M,N,I,W}.$$

On a

$$\mathcal{C}^{P,j}_{G} : H^{j}_{G,N,I,W} \to H^{'\,j}_{M,N,I,W}. \tag{4.2.25}$$

Exemple 4.2.8. (Chtoucas sans patte)

Pour tout P, quand $I = \emptyset$ et $W = 1$, on a

$$\mathrm{Cht}_{G,N,\emptyset,1} = G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cht}'_{P,N,\emptyset,1} &= (P(F)\backslash P(\mathbb{A})/K_{P,N}) \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N) \\
&= P(F)\backslash\big(P(\mathbb{A}) \overset{P(\mathbb{O})}{\times} G(\mathbb{O})\big)/K_{G,N} \\
&= P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cht}'_{M,N,\emptyset,1} &= (M(F)\backslash M(\mathbb{A})/K_{M,N}) \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N) \\
&= M(F)\backslash\big(M(\mathbb{A}) \overset{P(\mathbb{O})}{\times} G(\mathbb{O})\big)/K_{G,N} \\
&= U(\mathbb{A})M(F)\backslash\big(P(\mathbb{A}) \overset{P(\mathbb{O})}{\times} G(\mathbb{O})\big)/K_{G,N} \\
&= U(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N} \\
&= U(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}
\end{aligned}$$

Dans ce cas, le diagramme (4.2.18) est :

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N} \longleftarrow P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N} \longrightarrow U(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}. \tag{4.2.26}$$

Le morphisme terme constant (4.2.24) coïncide avec le morphisme de terme constant classique :

$$C^{P}_{G} : C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow C(U(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell).$$

$$f \qquad \mapsto \qquad f^P : g \mapsto \int_{U(F)\backslash U(A)} f(ug)du.$$

Remarque 4.2.9. Dans l'exemple 4.2.8 ci-dessus, le morphisme terme constant classique C_G^P est en fait une famille de morphismes indexés par $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_G/Z_M}$:

$$C_G^{P,\nu} : C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow C_c((U(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi)^\nu, \mathbb{Q}_\ell).$$

$$f \qquad \mapsto \qquad f^P\big|_{(U(\mathbb{A})P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi)^\nu}.$$

Par exemple, soient $G = GL_2$, $M = GL_1 \times GL_1$, la courbe $X = \mathbb{P}^1$ et $N = \emptyset$. Si f est une fonction supportée sur le point correspondant au fibré $\mathcal{O}(n) \oplus \mathcal{O}(-n)$, alors f^P est supporté sur les points correspondants aux fibrés $(\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(-n))$ et $(\mathcal{O}(m), \mathcal{O}(-m))$ pour tout $m \leq -n$.

Remarque 4.2.10. On a diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}_{G,N,I,W} & \xleftarrow{i'} & \mathrm{Cht}'_{P,N,I,W} & \xrightarrow{\pi'} & \mathrm{Cht}'_{M,N,I,W} \\ & \nwarrow^{i} & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathrm{Cht}_{P,N,I,W} & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} \end{array} \tag{4.2.27}$$

où les deux flèches verticales sont des immersions ouvertes et fermées.

Quand $N = \emptyset$, On a $\mathrm{Cht}'_{M,N,I,W} = \mathrm{Cht}_{M,N,I,W}$. En général, le morphisme $\mathrm{Cht}_{M,N,I,W} \to \mathrm{Cht}'_{M,N,I,W}$ n'est pas un isomorphisme. Pour construire le morphisme terme constant, on utilise la ligne en haut au lieu de la ligne en bas.

Quand $N = \emptyset$ et $I = \emptyset$, le diagramme (4.2.27) est

$$\begin{array}{ccccc} G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}) & \longleftarrow & P(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}) & \longrightarrow & U(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}) \\ & \nwarrow & \uparrow{\scriptstyle =} & & \uparrow{\scriptstyle =} \\ & & P(F)\backslash P(\mathbb{A})/P(\mathbb{O}) & \longrightarrow & M(F)\backslash M(\mathbb{A})/M(\mathbb{O}) \end{array}$$

Quand $N \neq \emptyset$ et $I = \emptyset$, choisissons $k_j \in G(\mathbb{O})$ tel que

$$G(\mathbb{O}) = \bigcup k_j K_{G,N}.$$

Pour chaque k_j, on construit un morphisme

$$P(F)\backslash P(\mathbb{A})/K_{P,N} \xrightarrow{\Psi_j^P} P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N} = P(F)\backslash\big(P(\mathbb{A}) \overset{P(\mathbb{O})}{\times} G(\mathbb{O})\big)/K_{G,N}$$

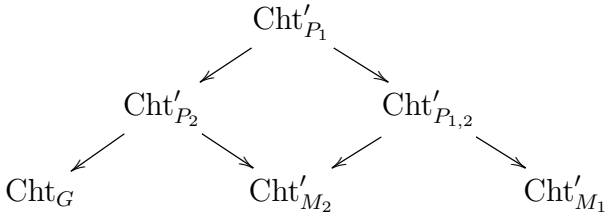
$$p \quad \mapsto \quad pk_j$$

Le diagramme (4.2.27) est

$$\begin{array}{ccccc} G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N} & \longleftarrow & P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N} & \longrightarrow & U(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N} \\ & \nwarrow & \uparrow{\scriptstyle \Psi_j^P} & & \uparrow{\scriptstyle \Psi_j^M} \\ & & P(F)\backslash P(\mathbb{A})/K_{P,N} & \longrightarrow & M(F)\backslash M(\mathbb{A})/K_{M,N} \end{array}$$

Les morphismes Ψ_j^P et Ψ_j^M sont injectifs, mais pas bijectifs.

Remarque 4.2.11. Soient $P_1 \subset P_2$ deux paraboliques. Notons M_1 et M_2 leur plus grand quotient réductif respectivement. Alors on a diagramme commutatif dont le carré est cartésien :



On en déduit que le morphisme terme constant $\mathcal{C}_G^{P_1}$ se factorise à travers $\mathcal{H}_{M_2}$:

$$H^j_{G,N,I,W} \xrightarrow{\mathcal{C}_G^{P_2}} H'^{\,j}_{M_2,N,I,W} \xrightarrow{\mathcal{C}_{M_2}^{P_{1,2}}} H'^{\,j}_{M_1,N,I,W}.$$

4.3 Définition de la cohomologie cuspidale

Définition 4.3.1. Pour tout j, on définit la cohomologie cuspidale en degré j comme

$$\mathcal{H}^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W} := \bigcap_{P\subsetneq G} \mathrm{Ker}\, \mathcal{C}_G^{P,\,j} \subset \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{j,\,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I}. \tag{4.3.1}$$

C'est un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau sur η^I.

Notation 4.3.2. On note $H^{j,\,cusp}_{G,N,I,W} := \mathcal{H}^{j,\,cusp}_{G,N,I,W}|_{\overline{\eta}^I}$. C'est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel.

Exemple 4.3.3. (Chtoucas sans patte)

Dans le cas classique, une forme automorphe $f \in C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ est dite cuspidale si pour tout parabolique P le terme constant f^P (défini dans l'exemple 4.2.8) est nul. On note $C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ l'espace des formes automorphismes cuspidales.

Quand $I = \emptyset$ et $W = 1$, d'après l'exemple 4.2.8 ci-dessus, le $\mathbb{Q}_\ell$-espace $H^{0,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ coïncide avec $C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$.

Remarque 4.3.4. D'après la remarque 4.2.11 ci-dessus, le morphisme terme constant pour un parabolique P se factorise par le morphisme terme constant pour tout parabolique maximal qui contient P. Donc pour qu'un élément dans H_G soit cuspidal, il faut et il suffit que son image par le morphisme terme constant soit nulle pour tout parabolique maximal.

4.4 Définition de cohomologie Hecke-finie

4.4.1 Action des algèbres de Hecke (correspondance cohomologique)

On rappelle la construction de l'action des algèbres de Hecke dans la section 4.4 de [Laf12] . On y renvoie pour plus de détails.

Soit $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Q}_\ell)$ et $\mathfrak{T}$ un ensemble fini de places de X contenant $|N|$ et tel que

$$f = \big(\bigotimes_{v \notin \mathfrak{T}} \mathbf{1}_{G(\mathcal{O}_v)}\big) \otimes f',$$

où $f' \in C_c(\prod_{v\in\mathfrak{T}} K_{N,v}\backslash G(F_v)/K_{N,v}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Alors f est une somme des fonctions caractéristiques de $K_N g K_N$, pour des $g = (g_v)_{v\in|X|} \in G(\mathbb{A})$ tel que $g_v \in G(\mathcal{O}_v)$ pour tout $v \notin \mathfrak{T}$.

Pour chaque tel g, la construction dans la section 2.4 du chapitre 2 fournit, pour $\kappa \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$ assez grand en fonction de g, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma_N(g) & & \\ & \swarrow^{\mathrm{pr}_1} & \downarrow & \searrow^{\mathrm{pr}_2} & \\ \mathrm{Cht}^{\leq\mu+\kappa}_{G,I,N,W}/\Xi\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} & & & & \mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,I,N,W}/\Xi\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} \\ & \searrow_{\mathfrak{p}_G} & \downarrow & \swarrow_{\mathfrak{p}_G} & \\ & & (X\smallsetminus\mathfrak{T})^I & & \end{array} \tag{4.4.1}$$

où pr_1 et pr_2 sont finis étales.

On a un morphisme de complexes sur $\mathrm{Cht}^{\leq\mu+\kappa}_{G,I,N,W}/\Xi\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I}$:

$$(\mathrm{pr}_1)_!(\mathrm{pr}_2)^*\mathcal{F}^\Xi_{G,I,N,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,I,N,W}/\Xi} \to \mathcal{F}^\Xi_{G,I,N,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu+\kappa}_{G,I,N,W}/\Xi}. \tag{4.4.2}$$

Ensuite on applique le cadre général de correspondances cohomologiques (voir [SGA5] III 3 ou [Laf12] 4.1) au diagramme (4.4.1) et au morphisme (4.4.2) ci-dessus, et on obtient un morphisme dans $D^c_b((X\smallsetminus\mathfrak{T})^I, \mathbb{Q}_\ell)$:

$$T(g) : (\mathfrak{p}_G)_!\mathcal{F}^\Xi_{G,I,N,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,I,N,W}/\Xi} \to (\mathfrak{p}_G)_!\mathcal{F}^\Xi_{G,I,N,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu+\kappa}_{G,I,N,W}/\Xi}.$$

Avec la définition 4.1.10, ce morphisme s'écrit aussi :

$$T(g) : \mathcal{H}^{\leq \mu}_{G,N,I,W}\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} \to \mathcal{H}^{\leq \mu+\kappa}_{G,N,I,W}\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I}.$$

On en déduit un morphisme dans $D^c_b((X\smallsetminus\mathfrak{T})^I, \mathbb{Q}_\ell)$, pour $\kappa \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}}$ assez grand en fonction de f :

$$T(f) : \mathcal{H}^{\leq \mu}_{G,N,I,W}\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} \to \mathcal{H}^{\leq \mu+\kappa}_{G,N,I,W}\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I}.$$

4.4.2 Cohomologie Hecke-finie

Rappelons que nous avons noté $H^j_{G,N,I,W} = \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{j,\leq \mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\overline{\eta}^I}$.

Définition 4.4.1. ([Laf12], Définition 8.19) Une classe de cohomologies c de $H^j_{G,N,I,W}$ est dite Hecke-finie si le sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Z}_\ell)\cdot c$ de $H^j_{G,N,I,W}$ est de type fini.

On note $H^{j,\,\mathrm{Hf}}_{G,N,I,W}$ l'ensemble de toutes les classes Hecke-finies. C'est un sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de $H^j_{G,N,I,W}$ qui est stable par $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Q}_\ell)$.

Définition 4.4.2. Une classe de cohomologies c de $H^j_{G,N,I,W}$ est dite Hecke-finie au sens rationnel si le sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Q}_\ell)\cdot c$ est de dimension finie.

On note $H^{j,\,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ l'ensemble de toutes les classes Hecke-finies au sens rationnel. C'est un sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de $H^j_{G,N,I,W}$ qui est stable par $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Q}_\ell)$.

On a

$$C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Q}_\ell) = C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Z}_\ell)\otimes \mathbb{Q}_\ell.$$

Donc pour une classe de cohomologies c, si $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Z}_\ell)\cdot c$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini, alors $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{Q}_\ell)\cdot c$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie. Comme conséquence, on a une inclusion de sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de $H^j_{G,N,I,W}$:

$$H^{j,\,\mathrm{Hf}}_{G,N,I,W} \subset H^{j,\,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}. \tag{4.4.3}$$

Remarque 4.4.3. On a vu dans l'exemple 4.3.3 que quand $I = \emptyset$, on a

$$H^0_{G,N,\emptyset} = C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell).$$

$$H^{0,\,\mathrm{cusp}}_{G,\emptyset,N,1} = C^{\mathrm{cusp}}_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell).$$

Dans ce cas, on a

Théorème 4.4.4. *(Theorem 1.2.1, [Har74])*
Le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $C_c^{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ est de dimension finie.

De plus, $C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Z}_\ell) \subset C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_{G,N}\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ est un réseau. On a

Proposition 4.4.5. *(Proposition 8.23, [Laf12]) Les sous-espaces suivants de $H_{G,N,\emptyset,1}$ sont égaux :*

$$H^{0,\mathrm{Hf}}_{G,N,\emptyset} = H^{0,\ \mathrm{cusp}}_{G,N,\emptyset,1} = H^{0,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,\emptyset}.$$

4.5 Énoncé des résultats

Pour toute courbe X projective lisse géométriquement irréductible sur $\mathbb{F}_q$, tout groupe réductif déployé G sur $\mathbb{F}_q$, tout sous-schéma fini $N \subset X$, tout ensemble fini I, toute représentation W de $\widehat{G}^I$ et tout Ξ, on a défini un faisceau de cohomologie $H^{j,\ cusp}_{G,N,I,W}$ en degré j sur le point générique géométrique $\overline{\eta^I}$ de X^I. C'est un sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de $H^j_{G,N,I,W}$.

Le premier résultat concerne seulement la cohomologie cuspidale.

Théorème 4.5.1. *Le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^{j,\ cusp}_{G,N,I,W}$ est de dimension finie.*

Quand $I = \emptyset$, on retrouve le théorème 4.4.4.

Le deuxième résultat est que les deux sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels $H^{j,\ \mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ et $H^{j,\ cusp}_{G,N,I,W}$ de $H^j_{G,N,I,W}$ sont égaux.

Proposition 4.5.2. *L'inclusion $H^{j,\ \mathrm{cusp}}_{G,N,I,W} \subset H^{j,\ \text{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ est une égalité.*

Une conséquence directe de l'inclusion $H^{j,\ \mathrm{Hf}}_{G,N,I,W} \subset H^{j,\ \mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ et de les deux résultats ci-dessus est :

Corollaire 4.5.3. *Le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^{j,\ \mathrm{Hf}}_{G,N,I,W}$ est de dimension finie.*

Quand $I = \emptyset$, on retrouve la proposition 4.4.5.

Chapitre 5

Géométrie des horosphères

Soit G un groupe réductif, P un parabolique et M son quotient de Levi. Le but de ce chapitre est de montrer que le morphisme de restriction de P à M pour les chtoucas est contractible sur les strates assez profondes.

Précisément, soit W une représentation de $\widehat{G}^I$, $\underline{d} = (d_i)_{i\in I} \in (\mathbb{N}^+)^I$ assez grand en fonction de W au sens du chapitre 1. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Dans le chapitre 3, on a noté

$$\widetilde{\mathrm{Cht}}^{=\mu}_{M,I,N,W} := \mathrm{Cht}^{=\mu}_{M,I,N,W} \underset{[M_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{M,I,W}]}{\times} [P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}]$$

et on a considéré un morphisme

$$\pi^{=\mu}_{\underline{d}} : \mathrm{Cht}^{=\mu}_{P,I,N,W} \to \widetilde{\mathrm{Cht}}^{=\mu}_{M,I,N,W}.$$

On a montré qu'il est lisse dans la proposition 3.5.1.

Rappelons que nous avons défini un schéma en groupes unipotents comme une extension successive de schémas en groupes additifs dans la définition 3.5.2. Les ensembles Γ_G et Γ_M sont définis dans la section 0.3.

Dans ce chapitre, on va construire une constante $C(G, X, N, \underline{d}) \in \mathbb{Q}^+$ et montrer :

Théorème 5.0.4. *Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Si $\langle \mu, \check{\alpha}_i \rangle > C(G, X, N, \underline{d})$, pour tout $i \in \Gamma_G - \Gamma_M$, alors localement pour la topologie lisse, $\mathrm{Cht}^{=\mu}_{P,I,N,W}$ est un espace fibré sur $\widetilde{\mathrm{Cht}}^{=\mu}_{M,I,N,W}$ de fibre un schéma en groupes unipotents sur le champ classifiant d'un autre schéma en groupes unipotents.*

5.1 Étape 1 : première réduction

L'énoncé est local pour la topologie lisse. Donc il suffit de le montrer pour

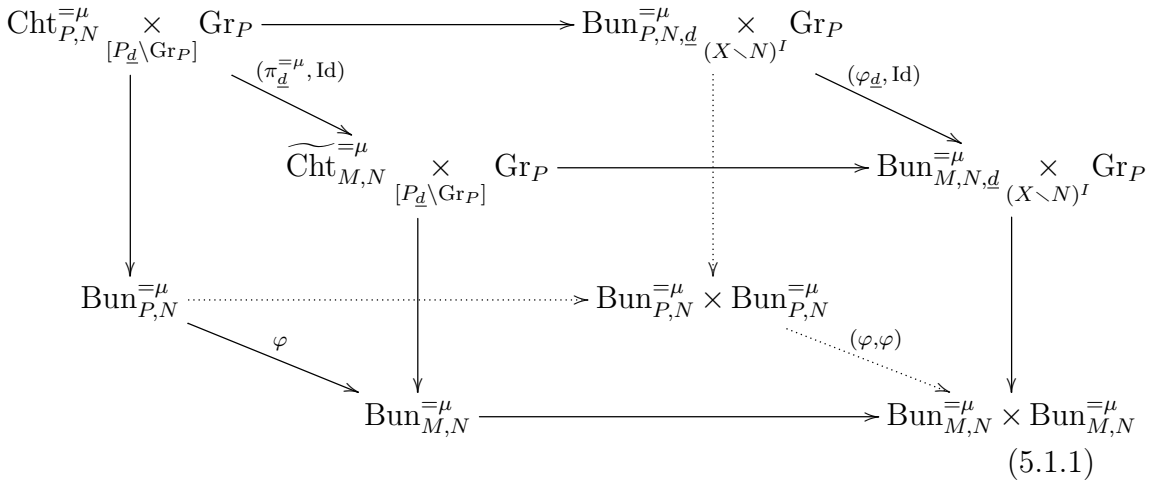
$$\pi_{\underline{d}}^{=\mu} : \mathrm{Cht}^{=\mu}_{P,I,N,W} \underset{[P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}]}{\times} \mathrm{Gr}_{P,I,W} \to \widetilde{\mathrm{Cht}}^{=\mu}_{M,I,N,W} \underset{[P_{I,\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_{P,I,W}]}{\times} \mathrm{Gr}_{P,I,W}.$$

Rappelons que dans la définition 2.1.11 du chapitre 2, nous avons défini un champ $\mathrm{Bun}_{G,I,N,\underline{d}}$ sur $(X \smallsetminus N)^I$. La fibre de $\mathrm{Bun}_{G,N,I,\underline{d}}$ au-dessus de $(x_i)_{i\in I} \in (X \smallsetminus N)^I(\mathbb{F}_q)$ est isomorphe à $\mathrm{Bun}_{G,N+\sum d_i x_i}$.

Notation 5.1.1. Pour raccourcir les notations, on va noter :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cht}_{P,N} &:= \mathrm{Cht}_{P,I,N,W}, \quad & \mathrm{Cht}_{M,N} &:= \mathrm{Cht}_{M,I,N,W}, \\ \mathrm{Gr}_P &:= \mathrm{Gr}_{P,I,W}, \quad & \mathrm{Gr}_M &:= \mathrm{Gr}_{M,I,W}, \\ P_{\underline{d}} &:= P_{I,\underline{d}}, \quad & M_{\underline{d}} &:= M_{I,\underline{d}}, \\ \mathrm{Bun}_{P,N,\underline{d}} &:= \mathrm{Bun}_{P,I,N,\underline{d}}, \quad & \mathrm{Bun}_{M,N,\underline{d}} &:= \mathrm{Bun}_{M,I,N,\underline{d}}\,. \end{aligned}$$

Le diagramme (3.5.4) dans le chapitre 3 peut être restreint à $\mathrm{Cht}^{=\mu}_{P,N}$ et $\widetilde{\mathrm{Cht}}^{=\mu}_{M,N}$. Donc le morphisme $\pi_{\underline{d}}^{=\mu}$ est inclus dans un diagramme commutatif (avec les carrés en face et en arrière cartésiens) :



(5.1.1)

où φ (resp. $\varphi_{\underline{d}}$) est la restriction de P à M (resp. avec niveau).

D'après le lemme B.0.6 dans l'annexe B, la fibre de $\pi_{\underline{d}}$ est produit fibré de la fibre de $\varphi_{\underline{d}}$ et φ au-dessus de la fibre de (φ, φ).

Concrètement, soit S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et

$$S \to \widetilde{\mathrm{Cht}}^{=\mu}_{M,N} \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P$$

un morphisme donné par un chtouca $\big((x_i), \mathcal{F}_M \to {}^{\tau}\mathcal{F}_M, \psi : \mathcal{F}_M\big|_{N\times S} \tilde{\to} M\big|_{N\times S}\big)$ et un point $s : S \to \mathrm{Gr}_P$. Ce morphisme induit les morphismes

$$S \to \widetilde{\mathrm{Cht}^{=\mu}_{M,N}} \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \to \mathrm{Bun}^{=\mu}_{M,N,\underline{d}} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_P$$

$$S \to \widetilde{\mathrm{Cht}^{=\mu}_{M,N}} \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \to \mathrm{Bun}^{=\mu}_{M,N}\,.$$

On note respectivement $\mathscr{Z}_{S,N,\underline{d}}$, $\mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N,\underline{d}}$ et $\mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N}$ les produits fibrés :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z}_{S,N,\underline{d}} & \longrightarrow & \mathrm{Cht}^{=\mu}_{P,N} \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{=\mu}_{\underline{d}}} \\ S & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Cht}^{=\mu}_{M,N}} \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P \end{array} \tag{5.1.2}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N,\underline{d}} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}^{=\mu}_{P,N,\underline{d}} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_P \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\varphi_{\underline{d}}, \mathrm{Id})} \\ S & \longrightarrow & \mathrm{Bun}^{=\mu}_{M,N,\underline{d}} \underset{(X\smallsetminus N)^I}{\times} \mathrm{Gr}_P \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}^{=\mu}_{P,N} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ S & \longrightarrow & \mathrm{Bun}^{=\mu}_{M,N} \end{array} \tag{5.1.3}$$

D'après le lemme B.0.6 dans l'annexe B, on a un carré cartésien sur S :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z}_{S,N,\underline{d}} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N,\underline{d}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (pr_0^U, \mathrm{Frob}\cdot pr_1^U)} \\ \mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N} & \xrightarrow{(Id,Id)} & \mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N} \underset{S}{\times} \mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N} \end{array} \tag{5.1.4}$$

Comme l'on a expliqué dans la section 3.5.1 du chapitre 3, le morphisme pr_0^U est l'oubli de structure de niveau en $\underline{d}$. Le morphisme pr_1^U est induit par les morphismes :

$$pr_1^P : \mathrm{Bun}_{P,N,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_P \to [P_{I,\underline{d}}\backslash(\mathrm{Bun}_{P,N,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_P)] \tilde{\to} \mathrm{Hecke}_{P,N} \overset{pr_0}{\to} \mathrm{Bun}_{P,N}\,.$$

et

$$pr_1^M : \mathrm{Bun}_{M,N,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_P \to [M_{I,\underline{d}}\backslash(\mathrm{Bun}_{M,N,\underline{d}} \underset{X^I}{\times} \mathrm{Gr}_M)] \tilde{\to} \mathrm{Hecke}_{M,N} \overset{pr_0}{\to} \mathrm{Bun}_{M,N}\,.$$

Les champs $\mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N,\underline{d}}$ et $\mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N}$ sont lisses au-dessus de S. Le morphisme pr_0^U est lisse et $\mathrm{Frob}\cdot pr_1^U$ est de dérivée nulle dans les fibres au-dessus de S.

5.2 Étape 2 : fibres de $\mathrm{Bun}_{P,N} \to \mathrm{Bun}_{M,N}$

Le but de cette section est de montrer la proposition suivante :

Proposition 5.2.1. *Soit $N \subset X$ un niveau. Soit I un ensemble fini et $\underline{d} = (d_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I$. Il existe une constante $C(G, X, N, \underline{d}) \in \mathbb{Q}^+$, tel que si $\langle \mu, \check{\alpha}_i \rangle > C(G, X, N, \underline{d})$ pour tout $i \in \Gamma_G - \Gamma_M$, alors $\mathrm{Bun}^{=\mu}_{P,I,N,\underline{d}}$ est le champ classifiant d'un schéma en groupes unipotents sur $\mathrm{Bun}^{=\mu}_{M,I,N,\underline{d}}$.*

Corollaire 5.2.2. *Si $\langle \mu, \check{\alpha}_i \rangle > C(G, X, N, \underline{d})$ pour tout $i \in \Gamma_G - \Gamma_M$, alors pour tout S et tout morphisme*

$$\big((x_i), \widetilde{\mathcal{F}_M}, \widetilde{\psi}, s\big) : S \to \widetilde{\mathrm{Cht}^{=\mu}_{M,N}} \underset{[P_{\underline{d}}\backslash \mathrm{Gr}_P]}{\times} \mathrm{Gr}_P,$$

le champ $\mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N}$ (resp. $\mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N,\underline{d}}$) défini dans le diagramme 5.1.2 est le champ classifiant d'un schéma en groupes unipotents H (resp. d'un schéma en groupes unipotents $H_{\underline{d}}$) sur S. De plus, $\dim H - \dim H_{\underline{d}} = (\sum d_i) \dim U$.

La stratégie pour montrer la proposition 5.2.1 est d'utiliser une annulation de H^1 d'une version tordue de U pour montrer que la fibre est un champ classifiant. On montre ensuite que le groupe des automorphismes est un schéma en groupes unipotents en utilisant une filtration canonique sur U.

On commence par le cas où $N = \emptyset$ et $\underline{d} = \underline{0}$.

5.2.1 Le cas sans niveau

Commençons par quelques préparations. Rappelons que nous avons $U \hookrightarrow P \twoheadrightarrow M$. Le sous-groupe U est distingué dans P, donc P agit sur U par adjonction.

Pour obtenir une action de M sur U, nous choisissions une section $M \hookrightarrow P$. Alors M agit sur U par adjonction via $M \hookrightarrow P$.

Remarque 5.2.3. Si U est commutatif, alors l'action de U sur lui-même par adjonction est triviale. Dans ce cas l'action de M sur U ne dépend pas du choix de $M \hookrightarrow P$.

En général, l'action de M sur U dépend du choix de $M \hookrightarrow P$. Nous allons discuter dans la remarque 5.2.11 que le résultat final ne dépend pas du choix.

Soit S un schéma et $\mathcal{F}_M$ un M-torseur sur $X \times S$.

Définition 5.2.4. On définit un espace fibré sur $X \times S$ avec fibre U :

$$U_{\mathcal{F}_M} := (\mathcal{F}_M \times U)/M.$$

Lemme 5.2.5. *L'espace fibré $U_{\mathcal{F}_M}$ est muni d'une structure de schéma en groupes sur $X \times S$.*

On envoie à Annexe C.2 pour la démonstration de ce lemme.

Notons $pr_S : X \times S \to S$.

Définition 5.2.6. Soit A un faisceau en groupes sur $X \times S$. On définit un faisceau de groupes $R^0(pr_S)_* A$ sur S :

$$(S' \to S) \mapsto \mathrm{Hom}_{X \times S}(X \times S', A'),$$

où A' est l'image inverse de A par $X \times S' \to X \times S$.

Appliquons cette définition au schéma en groupes $U_{\mathcal{F}_M}$ sur $X \times S$. On obtient un faisceau en groupes sur S :

$$R^0(pr_S)_* U_{\mathcal{F}_M}.$$

Définition 5.2.7. ([Gir71] V.2.1, [SGA4] XII.3) Soit A un faisceau en groupes sur $X \times S$. On définit $R^1(pr_S)_* A$ comme le faisceau d'ensembles sur S associe au pré-faisceau :

$$(S' \to S) \mapsto H^1(X \times S', A').$$

D'après [Gir71], le faisceau $R^1(pr_S)_* A$ est muni d'une section canonique (qui correspond au A-torseur trivial). C'est un faisceau d'ensembles pointés.

Appliquons cette définition au schéma en groupes $U_{\mathcal{F}_M}$ sur $X \times S$. On obtient un faisceau d'ensembles pointés sur S :

$$R^1(pr_S)_* U_{\mathcal{F}_M}.$$

Remarque 5.2.8. Dans le cas où A est un faisceau en groupes additifs, ces définitions sont compatibles avec le complexe des faisceaux $R(pr_S)_* A$ sur S.

La proposition 5.2.1 avec $N = \emptyset$ et $\underline{d} = \underline{0}$ est une conséquence des lemmes suivants :

Lemme 5.2.9. *Il existe une constante $C(G, X) \in \mathbb{Q}^+$, tel que si $\langle \mu, \check{\alpha}_i \rangle > C(G, X)$ pour tout $i \in \Gamma_G - \Gamma_M$, alors pour tout S et tout $\mathcal{F}_M : S \to \mathrm{Bun}_M^{=\mu}$,*

a) le faisceau en groupes $R^0(pr_S)_* U_{\mathcal{F}_M}$ est unipotent (i.e. une extension successive de faisceaux $\mathbb{G}_a$).

b) le faisceau d'ensembles pointés $R^1(pr_S)_* U_{\mathcal{F}_M}$ est trivial.

Sous les hypothèses du lemme 5.2.9 ci-dessus, notons $\mathscr{Y}_S$ le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Y}_S & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_P^{=\mu} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\mathcal{F}_M} & \mathrm{Bun}_M^{=\mu} \end{array}$$

Lemme 5.2.10. *Le champ $\mathscr{Y}_S$ est canoniquement isomorphe au champ classifiant du faisceau en groupes unipotents $R^0(pr_S)_*U_{\mathcal{F}_M}$ sur S.*

Le morphisme $\mathscr{Y}_S \to S$ admet une section donnée par le $U_{\mathcal{F}_M}$-torseur trivial. Donc le faisceau en groupes unipotents $R^0(pr_S)_*U_{\mathcal{F}_M}$ est représenté par le schéma en groupes $\underline{Aut}_S$(le $U_{\mathcal{F}_M}$-torseur trivial) sur S :

$$(S' \to S) \mapsto Aut_{X\times S'}\big(\text{ le } U_{\mathcal{F}_M}\text{-torseur trivial sur } X \times S'\big).$$

Donc $R^0(pr_S)_*U_{\mathcal{F}_M}$ est un schéma en groupes unipotents sur S.

Remarque 5.2.11. (Indépendance du résultat en fonction du choix de $M \hookrightarrow P$)

Soient $M_1, M_2 \subset P$ tels que $M \xrightarrow{\sim} M_1$ et $M \xrightarrow{\sim} M_2$ soient deux sections. Alors il existe un $u \in P$ tel que $M_2 = uM_1u^{-1}$. L'isomorphisme

$$\psi_{12} : P \to P \qquad p \mapsto upu^{-1}$$

envoie M_1 à M_2. Notons $U^1_{\mathcal{F}_M}$ le schéma en groupes obtenu en utilisant $M \xrightarrow{\sim} M_1 \subset P$ et $U^2_{\mathcal{F}_M}$ le schéma en groupes obtenu en utilisant $M \xrightarrow{\sim} M_2 \subset P$. Alors on a un isomorphisme

$$\psi_{12} : U^1_{\mathcal{F}_M} \xrightarrow{\sim} U^2_{\mathcal{F}_M} \qquad (x', u') \mapsto (x', uu'u^{-1})$$

Il induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \mathscr{Y}_S & \\ \swarrow^{\simeq} & & \searrow^{\simeq} \\ R^0(pr_S)_*U^1_{\mathcal{F}_M} & \xrightarrow[\psi_{12}]{\simeq} & R^0(pr_S)_*U^2_{\mathcal{F}_M} \end{array}$$

5.2.2 Filtration canonique de U

D'après la section C.1 de l'annexe C, on a une filtration canonique de U :

$$U = U^{(0)} \supset U^{(1)} \supset \cdots \supset U^{(m)} \supset U^{(m+1)} = 0. \tag{5.2.1}$$

Chaque $U^{(j+1)}$ est un sous-groupe distingué dans $U^{(j)}$. Les quotients sont munis des isomorphismes

$$\vartheta^{(j)} : \mathbb{G}_a^{n_j} \xrightarrow{\sim} U^{(j)}/U^{(j+1)}.$$

Pour tout j, le sous-groupe $U^{(j)}$ est distingué dans P, donc M agit sur chaque $U^{(j)}$ par adjonction via $M \hookrightarrow P$. On en déduit que M agit sur chaque $U^{(j)}/U^{(j+1)}$ et $U/U^{(j)}$ par adjonction.

Soit S un schéma et $\mathcal{F}_M$ un M-torseur sur $X \times S$.

Définition 5.2.12. On définit un espace fibré de fibre $U^{(j)}/U^{(j+1)}$ sur $X \times S$:

$$(U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M} := \big(\mathcal{F}_M \times U^{(j)}/U^{(j+1)}\big)/M.$$

Définition 5.2.13. On définit un espace fibré de fibre $U/U^{(j)}$ sur $X \times S$:

$$(U/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M} := \big(\mathcal{F}_M \times U/U^{(j)}\big)/M.$$

Lemme 5.2.14. *L'espace fibré $(U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}$ est un schéma en groupes additifs sur $X \times S$.*

Lemme 5.2.15. *L'espace fibré $(U/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M}$ est un schéma en groupes sur $X \times S$.*

On envoie à Annexe C.2 pour la démonstration de ces lemmes.

Soit $N \subset X$ un niveau. On peut voir $U^{(j)}/U^{(j+1)}$ comme un $\mathcal{O}$-module par l'isomorphisme canonique $\vartheta^{(j)} : \mathbb{G}_a^{n_j} \xrightarrow{\sim} U^{(j)}/U^{(j+1)}$. On définit $(U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}(-N \times S)$ au sens des $\mathcal{O}$-modules. Notons $pr_S : X \times S \to S$.

Lemme 5.2.16. *Le faisceau en groupes*

$$R^0(pr_S)_*\big((U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}(-N \times S)\big)$$

est représentable par un schéma en groupes additifs.

C'est la construction $\mathbb{V}$ de Grothendieck.

5.2.3 Un lemme d'annulation de H^1

Soit G un groupe réductif. Soit $N \subset X$ un niveau. Notons g le genre de X.

Construction 5.2.17. On construit une constante dans $\mathbb{Q}^+$:

$$C(G,X,N) := max\{2g-2,0\} + \deg N + strng_X(G),$$

où la constante $strng_X(G)$ est définie de façon suivante :

D'après [DG15] section 10.3 et 10.4, pour tout Levi M' de G et toute racine α de G qui n'est pas une racine de M', on peut définir un M'-module $V_{M',\alpha}$. Ensuite on peut construire une constante $strng_X(M',(V_{M',\alpha})^*) \in \mathbb{Q}^+$. Posons

$$strng_X(G) := \underset{M',\alpha}{Max}\ \{strng_X(M',(V_{M',\alpha})^*)\}.$$

Lemme 5.2.18. *([DG15], Proposition 10.4.5) Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}_G^+$. Soit P un parabolique et M Levi. Si μ satisfait la condition suivante pour P :*

$$\bigstar_P : \langle \mu, \check{\alpha}_i \rangle > C(G,X,N),\ \textit{pour tout } i \in \Gamma_G - \Gamma_M,$$

alors pour tout $(\mathcal{F}_M,\psi) \in \mathrm{Bun}_{M,N}^{=\mu}(S)$, tout point géométrique $s \hookrightarrow S$ et tout j, on a

$$H^1\left(X_s, (U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}(-N\times S)\right) = 0.$$

Notons $pr_S : X \times S \to S$.

Corollaire 5.2.19. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme ci-dessus, on a*

$$R^1(pr_S)_*\left((U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}(-N\times S)\right) \textit{ est trivial.}$$

Maintenant soient I un ensemble fini et $\underline{d} = (d_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I$. On définit une constante dans $\mathbb{Q}^+$:

$$C(G,X,N,\underline{d}) := max\{2g-2,0\} + \deg N + \sum_{i\in I} d_i + strng_X(G).$$

Corollaire 5.2.20. *Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}_G^+$. Soit P un parabolique et M Levi. Si μ satisfait la condition suivante pour P :*

$$\bigstar_P : \langle \mu, \check{\alpha}_i \rangle > C(G,X,N,\underline{d}),\ \textit{pour tout } i \in \Gamma_G - \Gamma_M,$$

alors pour tout $((x_i),\mathcal{F}_M,\psi) \in \mathrm{Bun}_{M,N,\underline{d}}^{=\mu}(S)$, tout point géométrique $s \hookrightarrow S$ et tout j, on a

$$H^1\left(X_s, (U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}(-N\times S - \Gamma_{\sum d_i x_i})\right) = 0.$$

Corollaire 5.2.21. *Sous les mêmes conditions que le lemme ci-dessus, on a*

$$R^1(pr_S)_*\big((U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}(-N\times S-\Gamma_{\sum d_i x_i})\big) \text{ est trivial.}$$

Remarque 5.2.22. Dans [DG15], la proposition est plus précise. Pour chaque $i\in\Gamma_G$, il y a une constante $c_i\in\mathbb{Q}^+$ et on considère si $\langle\mu,\check{\alpha}_i\rangle>c_i$. Ici on prend le maximal parmi les c_i pour simplifier les arguments dans chapitre 7. Donc la constante $C(G,X,D)$ n'est pas optimale.

Remarque 5.2.23. Comme cela est expliqué dans [DG15] 10.3-10.5, si la caractéristique de corps de base k est 0, alors on peut prendre simplement $strng_X(G)=0$. En revanche, si la caractéristique est p, il faut avoir le terme $strng_X(G)$, qui est éventuellement positif, dans la définition de $C(G,X,N)$.

Exemple 5.2.24. Soit $G=GL_r$, $P=(r_1,r_2)$, $M=GL_{r_1}\times GL_{r_2}$. Soit $N=\emptyset$. Soit $\mu\in\widehat{\Lambda}_G^+$ satisfaisant la condition $\bigstar_P$, c'est-à-dire que $\mu_{r_1}-\mu_{r_1+1}\geq C(G,X)$. Soit $\mathcal{F}_M=(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\in\mathrm{Bun}_M^{=\mu}$. Alors le lemme 5.2.18 correspond au fait qu'il n'y a pas d'extension non triviale de $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_1$.

5.2.4 Démonstration du lemme 5.2.9

Lemme 5.2.25. *Supposons que nous avons une suite exacte de faisceaux en groupes sur $X\times S$:*

$$0\to A\to B\to C\to 0.$$

i) Si le faisceau d'ensembles pointés $R^1(pr_S)_*A$ est trivial, alors on a une suite exacte de faisceaux en groupes

$$0\to R^0(pr_S)_*A\to R^0(pr_S)_*B\to R^0(pr_S)_*C\to 0.$$

ii) Si de plus le faisceau d'ensembles pointés $R^1(pr_S)_*C$ est aussi trivial, alors le faisceau d'ensembles pointés $R^1(pr_S)_*B$ est trivial.

Démonstration.

D'après [Gir71] V Prop 2.3 ou [SGA4] XII 3, la suite exacte $0\to A\to B\to C\to 0$ de faisceaux en groupes sur $X\times S$ induit une suite exacte sur S de faisceaux d'ensembles pointés :

$$0\to R^0(pr_S)_*A\to R^0(pr_S)_*B\to R^0(pr_S)_*C\to \tag{5.2.2}$$

$$R^1(pr_S)_*A\to R^1(pr_S)_*B\to R^1(pr_S)_*C$$

i) Par l'hypothèse, $R^1(pr_S)_*A$ est trivial. Cela implique que l'on a une suite exacte de faisceaux en groupes sur S :

$$0 \to R^0(pr_S)_*A \to R^0(pr_S)_*B \to R^0(pr_S)_*C \to 0. \tag{5.2.3}$$

ii) Considérons la suite exacte des ensembles pointés sur S :

$$R^1(pr_S)_*A \to R^1(pr_S)_*B \to R^1(pr_S)_*C.$$

Pour tout B-torseur $\mathcal{G}$ sur $X \times S$, le C-torseur $\mathcal{G} \overset{B}{\times} C$ est trivial (puisque par hypothèse, $R^1(pr_S)_*C$ est trivial). Par l'exactitude, on en déduit que $\mathcal{G}$ vient d'un A-torseur. Par hypothèse, $R^1(pr_S)_*A$ est aussi trivial, c'est-à-dire que tout A-torseur est trivial. Donc $\mathcal{G}$ est trivial. On en déduit que $R^1(pr_S)_*B$ est trivial. □

Démonstration du lemme 5.2.9.

La filtration canonique de U :

$$U = U^{(0)} \supset U^{(1)} \supset \cdots \supset U^{(m)} \supset U^{(m+1)} = 0$$

induit pour tout $j \in \{2, \cdots, m+1\}$ une suite exacte de groupes :

$$0 \to U^{(j-1)}/U^{(j)} \to U/U^{(j)} \to U/U^{(j-1)} \to 0. \tag{5.2.4}$$

Pour tout j, la suite exacte (5.2.4) ci-dessus induit une suite exacte de schemas en groupes sur $X \times S$:

$$0 \to (U^{(j-1)}/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M} \to (U/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M} \to (U/U^{(j-1)})_{\mathcal{F}_M} \to 0. \tag{5.2.5}$$

Pour $j = 1$, on a $U/U^{(1)} = U^{(0)}/U^{(1)}$. On a $\vartheta^{(0)} : \mathbb{G}_a^{n_0} \xrightarrow{\sim} U^{(0)}/U^{(1)}$. Cela implique que $R^0(pr_S)_*(U/U^{(1)})_{\mathcal{F}_M}$ est un faisceau en groupes additifs. Par hypothèse sur μ et le lemme 5.2.19, le faisceau d'ensembles pointés $R^1(pr_S)_*(U/U^{(1)})_{\mathcal{F}_M}$ est trivial.

Pour $j \geq 2$, supposons que le faisceau d'ensembles pointés $R^1(pr_S)_*(U/U^{(j-1)})_{\mathcal{F}_M}$ est trivial et que $R^0(pr_S)_*(U/U^{(j-1)})_{\mathcal{F}_M}$ est un faisceau en groupes unipotents sur S. Par hypothèse sur μ et le lemme 5.2.19 , le faisceau d'ensembles pointés $R^1(pr_S)_*(U^{(j-1)}/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M}$ est trivial. En appliquant le lemme 5.2.25 à la suite exacte de schémas en groupes sur $X \times S$:

$$0 \to (U^{(j-1)}/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M} \to (U/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M} \to (U/U^{(j-1)})_{\mathcal{F}_M} \to 0.$$

on en déduit que :

$$R^1(pr_S)_*(U/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M} \text{ est trivial ;}$$

et on a une suite exacte de faisceaux en groupes :

$$0 \to R^0(pr_S)_*(U^{(j-1)}/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M} \to R^0(pr_S)_*(U/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M} \to R^0(pr_S)_*(U/U^{(j-1)})_{\mathcal{F}_M} \to 0.$$

Comme $R^0(pr_S)_*(U/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M}$ est une extension d'un faisceau en groupes unipotents par un faisceau en groupes additifs, il est un faisceau en groupes unipotents.

On continue jusqu'à $j = m + 1$. Comme résultat, le faisceau en groupes $R^0(pr_S)_*(U/U^{(m+1)})_{\mathcal{F}_M} = R^0(pr_S)_*U_{\mathcal{F}_M}$ est unipotent. Le faisceau d'ensemble pointé $R^1(pr_S)_*U_{\mathcal{F}_M}$ est trivial.

□

5.2.5 Démonstration du lemme 5.2.10

Démonstration du lemme 5.2.10.
Le groupoïde $\mathscr{Y}_S(S)$ classifie la donnée de
- un P-torseur $\mathcal{F}_P$ sur $X \times S$;
- un isomorphisme $\alpha : \mathcal{F}_P/U \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_M$.

Rappelons que nous avons choisi $M \hookrightarrow P$. Ainsi, M agit sur $\mathcal{F}_P$ via $M \hookrightarrow P$. On définit un faisceau $\mathcal{F}_P/M$ sur $X \times S$. Le faisceau $\mathcal{F}_P/M$ est muni d'une action de schéma en groupes $U_{\mathcal{F}_M}$.

Lemme 5.2.26. *$\mathcal{F}_P/M$ muni de cette action est un $U_{\mathcal{F}_M}$-torseur sur $X \times S$.*

On envoie à l'annexe C.2 pour la démonstration.

Construction 5.2.27. On construit un foncteur entre deux catégories :

$$\{(\mathcal{F}_P,\ \alpha : \mathcal{F}_P/U \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_M)\} \to \{U_{\mathcal{F}_M}\text{-torseur }\}$$

$$(\mathcal{F}_P,\ \alpha) \mapsto \mathcal{F}_P/M.$$

Lemme 5.2.28. *Le foncteur dans la construction ci-dessus induit une équivalence des catégories.*

On envoie à l'annexe C.2 pour la démonstration.

Pour tout $f : S' \to S$, notons $U'_{\mathcal{F}_M}$ l'image inverse de $U_{\mathcal{F}_M}$ par $X \times S' \to X \times S$. D'après le lemme 5.2.28 ci-dessus, $\mathscr{Y}_S(S')$ est le groupoïde des $U'_{\mathcal{F}_M}$-torseurs. D'après le lemme 5.2.9 b), le faisceau d'ensembles pointés $R^1(pr_S)_*U_{\mathcal{F}}$ est trivial. Donc tout $U'_{\mathcal{F}_M}$-torseur est trivial.

Ainsi, $\mathscr{Y}_S(S')$ est le groupoïde dont le seul objet est le $U'_{\mathcal{F}_M}$-torseur trivial et les flèches sont les automorphismes du $U'_{\mathcal{F}_M}$-torseur trivial.

On en déduit que le champ $\mathscr{Y}_S$ est isomorphe au champ classifiant du faisceau en groupes unipotents $R^0(pr_S)_*U_{\mathcal{F}_M}$ sur S.

□

Exemple 5.2.29. Quand $G = GL_r$, $P = (r_1, r_2)$, $M = GL_{r_1} \times GL_{r_2}$ avec $r_1 + r_2 = r$. Soit $\mathcal{F}_M = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ un M-torseur. Alors un $U_{\mathcal{F}_M}$-torseur est une extension $\mathcal{L}_1 \hookrightarrow \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_2$. Les automorphismes sont

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 \end{array}$$

Un P-torseur $\mathcal{F}_P$ au-dessus de $\mathcal{F}_M$ est $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{L}_1$ et $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{L}_2$. Les automorphismes (comme P-torseur) sont

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 \end{array}$$

Pour un P-torseur $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ avec des isomorphismes $\theta_1 : \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_1$ et $\theta_2 : \mathcal{E}/\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_2$, les automorphismes (qui préservent θ_1, θ_2) sont

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 \end{array}$$

5.2.6 Le cas avec niveau

Soit V un schéma en groupes sur $X \times S$. On peut lui associer un faisceau en groupes $\mathcal{V}$ sur le site étale de $X \times S$: pour tout ouvert étale X' de $X \times S$, $\mathcal{V}(X')$ est le groupe des sections de V sur X'.

Notons $i_D : D \hookrightarrow X \times S$ un diviseur. Notons $V\big|_D$ le produit fibré $D \underset{X\times S}{\times} V$. On peut lui associer un faisceau en groupes $\mathcal{V}\big|_D$ sur D.

On a un morphisme de faisceaux en groupes : $\mathcal{V} \to (i_D)_*(\mathcal{V}\big|_D)$. Concrètement, pour tout morphisme étale $X' \to X \times S$, on a l'homomorphisme $\mathcal{V}(X') \to \mathcal{V}\big|_D(X' \underset{X\times S}{\times} D)$.

Définition 5.2.30. On définit un faisceau en groupes $\mathcal{K}er_{V,D}$ comme le noyau du morphisme $\mathcal{V} \to (i_D)_*(\mathcal{V}\big|_D)$.

Si V est lisse, ce morphisme de faisceaux en groupes est surjectif. On a une suite exacte de faisceaux en groupes sur $X \times S$:

$$0 \to \mathcal{K}er_{V,D} \to \mathcal{V} \to (i_D)_*(\mathcal{V}\big|_D) \to 0. \tag{5.2.6}$$

Lemme 5.2.31. *On a une équivalence de catégories :*

$$\{\mathcal{K}er_{V,D}\text{-torseur sur } X \times S\} \tilde{\to} \{\big(\mathcal{G} : \mathcal{V}\text{-torseur sur } X \times S,\ \beta : \mathcal{G}\big|_D \tilde{\to} \mathcal{V}\big|_D\big)\}.$$

Remarque 5.2.32. On a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bun}_{\mathcal{K}er_{V,D}}(X \times S/S) & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{\mathcal{V}}(X \times S/S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \mathrm{Bun}_{\mathcal{V}\big|_D}(X \times S/S) \end{array}$$

Démonstration de la proposition 5.2.1.

Prenons $C(G, X, N, \underline{d})$ la constante construite dans la section 5.2.3. Supposons que μ satisfait la condition du corolaire 5.2.21.

Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et $S \to \mathrm{Bun}^{=\mu}_{M,I,N,\underline{d}}$ un morphisme donné par $\big((x_i)_{i\in I}, \mathcal{F}_M, \psi_M\big)$ où ψ_M est une structure du niveau sur $N \times S + \Gamma_{\sum d_i x_i} \subset X \times S$.

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Y}_{S,N,\underline{d}} & \longrightarrow & \mathrm{Bun}^{=\mu}_{P,I,N,\underline{d}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\left((x_i),\mathcal{F}_M,\psi_M\right)} & \mathrm{Bun}^{=\mu}_{M,I,N,\underline{d}} \end{array}$$

1) Posons

$$D = N \times S + \Gamma_{\sum d_i x_i}.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathscr{Y}_{S,N,\underline{d}}(S) &= \{(\mathcal{F}_P,\ \psi_P : \mathcal{F}_P\big|_D \tilde{\to} P \times D,\ \alpha : \mathcal{F}_P/U \tilde{\to} \mathcal{F}_M,\ \psi_P/U \Rightarrow \psi_M \circ \alpha)\} \\ &= \{(\mathcal{G} : U_{\mathcal{F}_M}\text{-torseur sur } X \times S,\ \beta : \mathcal{G}\big|_D \tilde{\to} U_{\mathcal{F}_M}\big|_D)\} \end{aligned}$$

Appliquons la définition 5.2.30 ci-dessus au schéma en groupes $U_{\mathcal{F}_M}$ sur $X \times S$, on obtient une suite exacte de faisceaux en groupes :

$$0 \to \mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},D} \to \mathcal{U}_{\mathcal{F}_M} \to (i_D)_* \mathcal{U}_{\mathcal{F}_M}\big|_D \to 0.$$

Appliquons le lemme 5.2.31 ci-dessus, on obtient une équivalence de catégories :

$$\{\mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},D}\text{-torseur sur } X \times S\} \tilde{\to} \{(\mathcal{G} : \mathcal{U}_{\mathcal{F}_M}\text{-torseur sur } X \times S,\ \beta : \mathcal{G}\big|_D \tilde{\to} \mathcal{U}_{\mathcal{F}_M}\big|_D)\}.$$

Donc pour tout $S' \to S$, on a

$$\mathscr{Y}_{S,N,\underline{d}}(S') = \{\mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},N}\text{-torseur sur } X \times S'\}.$$

On remarque que jusqu'à ici $\mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},D}$ est vu comme un faisceau en groupes.

2) Ensuite on a besoin d'un lemme :

Lemme 5.2.33. *Sous les hypothèses concernant μ,*
a) le faisceau en groupes $R^0(pr_S)_*\mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},D}$ est unipotent (i.e. une extension successive de faisceaux $\mathbb{G}_a$) ;
b) le faisceau d'ensembles pointés $R^1(pr_S)_*\mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},D}$ est trivial.

On utilise la filtration canonique de U. L'argument est le même que dans la démonstration du lemme 5.2.9 sauf que l'on remplace tout $(U^{(j-1)}/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M}$ par $\mathcal{K}er_{(U^{(j-1)}/U^{(j)})_{\mathcal{F}_M},D}$.

3) Finalement, par le même argument que le lemme 5.2.10 (tout $\mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},D}$-torseur est trivial), on montre que $\mathscr{Y}_{S,N,\underline{d}}$ est le champ classifiant du faisceau en groupes unipotents $R^0(pr_S)_*\mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},D}$ sur S.

Le morphisme $\mathscr{Y}_{S,N,\underline{d}} \to S$ admet une section e donnée par le $\mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},D}$-torseur trivial. Donc le faisceau en groupes unipotents $R^0(pr_S)_*\mathcal{K}er_{U_{\mathcal{F}_M},D}$ est représenté par le schéma en groupes unipotents $\underline{Aut}_S(e)$ sur S.

□

Démonstration du corolaire 5.2.2.
Supposons que μ satisfait la même condition (assez grand pour P en fonction de N et $\underline{d}$) que dans le proposition 5.2.1.
D'après la proposition 5.2.1 pour le cas où $\underline{d} = \underline{0}$, on a

$$\mathrm{Bun}_{U,N}^{\mathcal{F}_M} = [S/H_N], \quad \text{avec } H_N := R^0(pr_S)_* \operatorname{Ker}_{U_{\mathcal{F}_M},N\times S}.$$

D'après la proposition 5.2.1 au cas général, on a

$$\mathrm{Bun}^{\mathcal{F}_M}_{U,N,\underline{d}} = [S/H_{N,\underline{d}}], \quad \text{avec } H_{N,\underline{d}} := R^0(pr_S)_* \,\mathrm{Ker}_{U_{\mathcal{F}_M}, N\times S+\Gamma_{\sum d_i x_i}}.$$

De plus, on a une suite exacte des faisceaux en groupes :

$$0 \to \mathrm{Ker}_{U_{\mathcal{F}_M}, N\times S+\Gamma_{\sum d_i x_i}} \to \mathrm{Ker}_{U_{\mathcal{F}_M}, N\times S} \to (\mathrm{Ker}_{U_{\mathcal{F}_M}, N\times S})\Big|_{\Gamma_{\sum d_i x_i}} \to 0.$$

Comme $(x_i)_{i\in I} \in (X \smallsetminus N)^I$, on a $(N \times S) \bigcap \Gamma_{\sum d_i x_i} = \emptyset$. Donc $(\mathrm{Ker}_{U_{\mathcal{F}_M}, N\times S})\Big|_{\Gamma_{\sum d_i x_i}} = U_{\mathcal{F}_M}\big|_{\Gamma_{\sum d_i x_i}}$. De plus, par les hypothèses sur μ, les $R^1(pr_S)_*$ de ces faisceaux s'annulent. Donc

$$\dim H_N - \dim H_{N,\underline{d}} = (\sum d_i) \dim U.$$

□

5.3 Étape 3 : égalisateur

Notation 5.3.1. Soient $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ deux champs algébriques sur un schéma S, $f, g : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ deux morphismes de champs, alors on définit l'égalisateur de f et g comme le produit fibré $\mathscr{Z}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z} & \longrightarrow & \mathscr{Y} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f,g)} \\ \mathscr{X} & \xrightarrow{(Id,Id)} & \mathscr{X} \times \mathscr{X} \end{array}$$

Quand $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ sont des schémas, cette définition coïncide avec la définition habituelle.

Soient H_S et H'_S deux schémas en groupes sur S. Soit $f : H'_S \to H_S$ un morphisme de schémas en groupes. Notons $[S/H'_S]$ le champ classifiant de schéma en groupes H'_S sur S. De même pour $[S/H_S]$. Alors f induit un morphisme de champs :

$$\overline{f} : [S/H'_S] \to [S/H_S].$$

Lemme 5.3.2. *Soit $f, g : H'_S \to H_S$ deux morphismes de schémas en groupes surjectifs. Notons $\mathscr{Z}$ le produit fibré :*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Z} & \longrightarrow & [S/H'_S] \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\overline{f},\overline{g})} \\ [S/H_S] & \xrightarrow{(id,id)} & [S/H_S] \underset{S}{\times} [S/H_S]. \end{array} \tag{5.3.1}$$

Alors

$$\mathscr{Z} \simeq [H_S/H'_S],$$

où H'_S agit sur H_S par $h' \cdot h = f(h')hg(h')^{-1}$. Le morphisme $\mathscr{Z} \to [S/H_S]$ est induit par $H_S \to S$ et $H'_S \xrightarrow{f} H_S$.

Le théorème 5.0.4 est une conséquence du corolaire 5.2.2 dans l'étape 2 et du lemme 5.3.2 ci-dessus.

Démonstration du théorème 5.0.4. D'après le corolaire 5.2.2 dans l'étape 2, on a $\mathrm{Bun}_{U,N}^{\mathcal{F}_M} = [S/H_N]$ et $\mathrm{Bun}_{U,N,\underline{d}}^{\mathcal{F}_M} = [S/H_{N,\underline{d}}]$.

D'après le diagramme (5.1.4), $\mathscr{Z}_{S,N,\underline{d}}$ est l'égalisateur de deux morphismes surjectifs $\mathrm{pr}_0^U, \mathrm{pr}_1^U : \mathrm{Bun}_{U,N,\underline{d}}^{\mathcal{F}_M} \to \mathrm{Bun}_{U,N}^{\mathcal{F}_M}$. On applique le lemme 5.3.2, alors $\mathscr{Z}_{S,N,\underline{d}}$ est isomorphe à $[H_N/H_{N,\underline{d}}]$, où $H_{N,\underline{d}}$ agit sur H_N par $h' \cdot h = pr_0^U(h')hpr_1^U(h')^{-1}$. □

5.4 Remarques

Remarque 5.4.1. (Une autre méthode)

Si on veut seulement montrer que le morphisme

$$Tr : (\pi_{\underline{d}}^{=\mu})_!(\pi_{\underline{d}}^{=\mu})^! \to Id$$

est un isomorphisme, alors un résultat géométrique mois fort nous suffit. En fait, on a besoin seulement de schémas en groupes additifs, mais pas de schémas en groupes unipotents.

Il suffit de considérer la tour de chtoucas induite par la filtration canonique de U. Le morphisme composé est $\pi_{\underline{d}}^{=\mu}$:

$$\mathrm{Cht}_P^{=\mu} \xrightarrow{\pi_{\underline{d},m}^{=\mu}} \cdots \to \widetilde{\mathrm{Cht}_{P_{j+1}}^{=\mu}} \xrightarrow{\pi_{\underline{d},j}^{=\mu}} \widetilde{\mathrm{Cht}_{P_j}^{=\mu}} \to \ldots \xrightarrow{\pi_{\underline{d},0}^{=\mu}} \widetilde{\mathrm{Cht}_M^{=\mu}}$$

et il suffit de montrer que chaque morphisme

$$Tr : (\pi_{\underline{d},j}^{=\mu})_!(\pi_{\underline{d},j}^{=\mu})^! \to Id$$

est un isomorphisme.

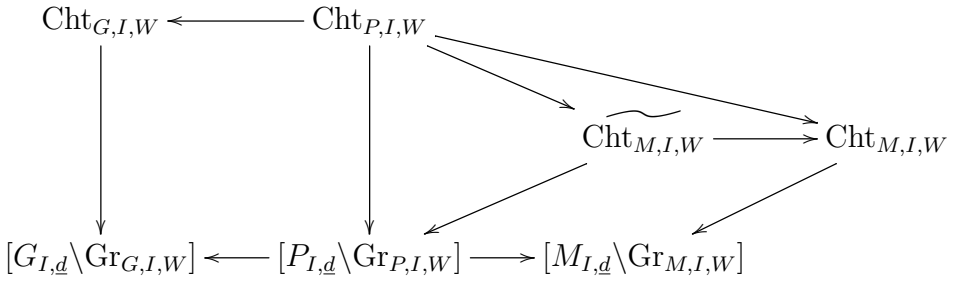
Pour cela, il suffit d'utiliser le champ de Picard pour montrer que pour chaque étage, la fibre de $\mathrm{Bun}_{P_{j+1}}^{=\mu} \to \mathrm{Bun}_{P_j}^{=\mu}$ (et $\mathrm{Bun}_{P_{j+1},\underline{d}}^{=\mu} \to \mathrm{Bun}_{P_j,\underline{d}}^{=\mu}$) est le champ classifiant d'un schéma en groupes additifs.

Remarque 5.4.2. On peut montrer le résultat plus fort suivant. Mais on n'en a pas besoin pour le chapitre 6.

Lemme 5.4.3. *([Dri87] pour $G = GL_2$) Le champ $\mathscr{Z}_{S,N,\underline{d}}$ est une tour d'espaces affines (i.e. une fibration successive d'espaces affines) quotienté par un groupe fini de cardinal une puissance de q.*

5.5 Exemples

Dans cette section, on donne deux exemples pour le diagramme suivant :

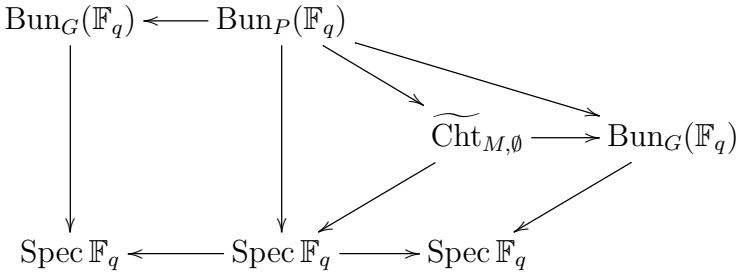


(5.5.1)

Exemple 5.5.1. (Chtoucas sans pattes.)

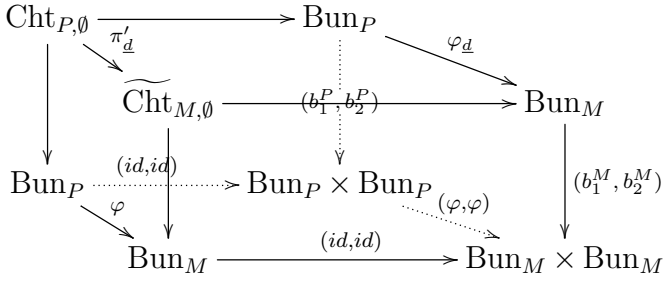
Soit $I = \emptyset$. Dans ce cas, on a $\mathrm{Gr}_{G,\emptyset} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q$, $\mathrm{Gr}_{P,\emptyset} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q$ et $\mathrm{Gr}_{M,\emptyset} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q$. Il n'y a pas de $\underline{d}$.

Le diagramme (5.5.1) devient



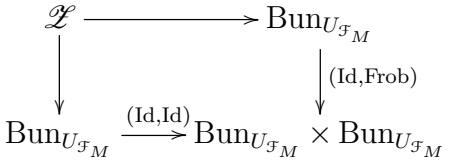
(5.5.2)

La cube (3.5.4) dans le chapitre 3 devient :



(5.5.3)

Notons $\mathscr{Z}$ la fibre de $\mathrm{Cht}_{P,\emptyset} \to \widetilde{\mathrm{Cht}}_{M,\emptyset}$ au-dessus de $\mathcal{F}_M \to {}^{\tau}\mathcal{F}_M$, alors il est le produit fibré



Donc $\mathscr{Z} = \mathrm{Bun}_{U_{\mathfrak{I}_M}}(\mathbb{F}_q)$. Les deux lignes suivantes sont les mêmes :

$$\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q) \leftarrow \mathrm{Bun}_P(\mathbb{F}_q) \to \widetilde{\mathrm{Cht}}_{M,\emptyset} \xrightarrow{=} \mathrm{Bun}_M(\mathbb{F}_q)$$

$$\begin{array}{ccccc} G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{O}) & \longleftarrow & P(F)\backslash P(\mathbb{A})/P(\mathbb{O}) & \longrightarrow & U(\mathbb{A})M(F)\backslash P(\mathbb{A})/P(\mathbb{O}) \\ & & & & \big\downarrow = \\ & & & & M(F)\backslash M(\mathbb{A})/M(\mathbb{O}) \end{array} \tag{5.5.4}$$

Quand μ est assez grand, on a une bijection sur les ensembles des classes d'isomorphisme :

$$\mathrm{Bun}_G^{=\mu}(\mathbb{F}_q) \xleftarrow{i} \mathrm{Bun}_P^{=\mu}(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Bun}_M^{=\mu}(\mathbb{F}_q).$$

Exemple 5.5.2. (Chtoucas à deux pattes de Drinfeld.)

Soient $G = GL_2$, $N = \emptyset$, $I = \{1, 2\}$ et $W = St \boxtimes St^*$. Considérons les fibres au-dessus de $(\alpha, \beta) \in X^2(\mathbb{F}_q)$ où $\mathrm{Frob}^n(\alpha) \neq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On a

$$\mathrm{Gr}_{G,(\alpha,\beta),W} = \mathrm{Gr}_G^{(1,0)} \times \mathrm{Gr}_G^{(0,-1)} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Le schéma $\mathrm{Gr}_{T,(\alpha,\beta),W}$ est une réunion disjointe de quatre points. Le diagramme $\mathrm{Gr}_{G,(\alpha,\beta),W} \leftarrow \mathrm{Gr}_{B,(\alpha,\beta),W} \to \mathrm{Gr}_{T,(\alpha,\beta),W}$ est :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Gr}_{G,(\alpha,\beta),W} & \xleftarrow{i^0} & \mathrm{Gr}_{B,(\alpha,\beta),W} & \xrightarrow{\pi^0} & \mathrm{Gr}_{T,(\alpha,\beta),W} \\ & & \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \cdot = \mathrm{Gr}_T^{(1,0)} \times \mathrm{Gr}_T^{(0,-1)} \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \longleftarrow & \mathbb{A}^1 \times \cdot & \longrightarrow & \cdot = \mathrm{Gr}_T^{(1,0)} \times \mathrm{Gr}_T^{(-1,0)} \\ & & \cdot \times \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \cdot = \mathrm{Gr}_T^{(0,1)} \times \mathrm{Gr}_T^{(0,-1)} \\ & & \cdot \times \cdot & \longrightarrow & \cdot = \mathrm{Gr}_T^{(0,1)} \times \mathrm{Gr}_T^{(-1,0)} \end{array}$$

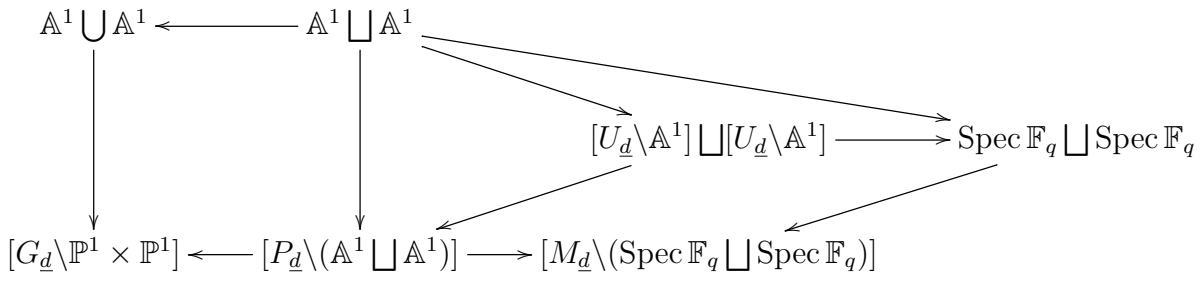
D'après la section 3.3.4 du chapitre 3, $\mathrm{Cht}_{T,(\alpha,\beta),V^{(1,0)}\boxtimes V^{(0,-1)}} = \emptyset$ et $\mathrm{Cht}_{T,(\alpha,\beta),V^{(0,1)}\boxtimes V^{(-1,0)}} = \emptyset$, où V^ν est la représentation irréductible de T de plus haut poids $\nu \in \Lambda_T$ (i.e. un caractère).

Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \widehat{\Lambda}_G^{+,\mathbb{Q}}$ tel que $\mu_1 - \mu_2$ assez grand. Alors on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Cht}_{T,(\alpha,\beta),W}^{=\mu} &= \mathrm{Cht}_{T,(\alpha,\beta),V^{(1,0)}\boxtimes V^{(-1,0)}}^{=\mu} \bigsqcup \mathrm{Cht}_{T,(\alpha,\beta),V^{(0,1)}\boxtimes V^{(0,-1)}}^{=\mu} \\ &= \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \bigsqcup \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 4.3 de [Dri87], $\pi^{-1}(\mathrm{Cht}^{=\mu}_{T,(\alpha,\beta),V^{(1,0)}\boxtimes V^{(-1,0)}}) \simeq \mathbb{A}^1$ (type 1) et $\pi^{-1}(\mathrm{Cht}^{=\mu}_{T,(\alpha,\beta),V^{(0,1)}\boxtimes V^{(0,-1)}}) \simeq \mathbb{A}^1$ (type 2).

Le diagramme (5.5.1) restreint sur $\mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,I,W}$ est



(5.5.5)

où l'action de $U_{\underline{d}}$ sur $\mathbb{A}^1$ est triviale.

Chapitre 6

Cohomologie des horosphères

Le but de ce chapitre est de montrer que la restriction du morphisme terme constant $\mathcal{C}_G^P$ sur le groupe de cohomologie des horosphères assez éloignées de P est un isomorphisme (la proposition 6.1.1), en utilisant deux énoncés géométriques :

1) pour tout parabolique P, la restriction du morphisme i : $\mathrm{Cht}'_{P,N,I,W} \to \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}$ sur les strates de Harder-Narasimhan assez éloignées de P est fini, bijectif et universellement injectif. C'est le théorème de Varshavsky que nous avons énoncé dans 3.4.2.

2) pour tout parabolique P, les fibres de la restriction du morphisme $\pi_{\underline{d}}$: $\mathrm{Cht}'_{P,N,I,W} \to \widetilde{\mathrm{Cht}}'_{M,N,I,W}$ sur les strates Harder-Narasimhan assez éloignées de P sont contractibles. C'est le théorème 3.5.5 que nous avons montré dans le chapitre 5.

6.1 Notations et énoncé cohomologique

Rappelons que dans chapitre 4, nous avons défini le morphisme terme constant pour P en degré j :

$$\mathcal{C}_G^{P,j} : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \longrightarrow \varinjlim_{\mu'} \mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu'}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I},$$

où $\mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu'}_{M,N,I,W}$ est le faisceau de cohomologie à support compact pour

$$\mathrm{Cht}'_{M,N,I,W} = \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N).$$

Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Notons

$$\mathcal{H}^{j,=\mu}_{G,N,I,W} = R^j(\mathfrak{p}_G)_!(\mathcal{F}^{\Xi}_{G,N,I,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,N,I,W}/\Xi})$$

$$\mathcal{H}^{'\,j,=\mu}_{M,N,I,W} = R^j(\mathfrak{p}'_M)_!(\mathcal{F}^{\Xi}_{M,N,I,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{'=\mu}_{M,N,I,W}/\Xi}).$$

On a la restriction du morphisme terme constant sur $\mathcal{H}^{j,=\mu}_{G,N,I,W}\big|_{\eta^I}$:

$$\mathcal{C}^{P,j,=\mu}_G : \mathcal{H}^{j,=\mu}_{G,N,I,W}\big|_{\eta^I} \longrightarrow \mathcal{H}^{'\,j,=\mu}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I}. \tag{6.1.1}$$

Le but de ce chapitre est de montrer la proposition suivante :

Proposition 6.1.1. *Soit P un parabolique. Notons M son quotient de Levi. Il existe une constante $\widetilde{C}(G,X,N,W) \in \mathbb{Q}^+$ tel que pour $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$, si $\langle \mu, \check{\alpha}_i\rangle > \widetilde{C}(G,X,N,W)$ pour tout $i \in \Gamma_G - \Gamma_M$, alors pour tout j, le morphisme $\mathcal{C}^{P,j,=\mu}_G$ est un isomorphisme.*

Notation 6.1.2. Dans la suite de ce chapitre, pour simplifier les notations, on note

$$\mathrm{Cht}_G := \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi\big|_{\eta^I} \quad (\text{ resp. } \mathrm{Cht}_P, \mathrm{Cht}_M)$$
$$\mathcal{H}^{j,=\mu}_G := \mathcal{H}^{j,=\mu}_{G,N,I,W}\big|_{\eta^I}$$
$$\mathcal{H}^{'\,j,=\mu}_M := \mathcal{H}^{'\,j,=\mu}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I}.$$

6.2 Démonstration de la proposition 6.1.1

La stratégie est de réduire l'énoncé à deux énoncés cohomologiques : Notons

$$\mathrm{Cht}^{=\mu}_G \xleftarrow{i} \mathrm{Cht}^{'=\mu}_P \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cht}^{'=\mu}_M.$$

D'après la construction dans le chapitre 4, le morphisme

$$\mathcal{C}^{P,\,j,=\mu}_G : \mathcal{H}^{j,=\mu}_G \longrightarrow \mathcal{H}^{'\,j,=\mu}_M$$

est la composée de deux morphismes :

$$R^j(\mathfrak{p}_G)_!(\mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}^{=\mu}_G}) \xrightarrow{(1)} R^j(\mathfrak{p}'_M)_!(\pi_! i^*\mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}^{'=\mu}_M}) \xrightarrow{(2)} R^j(\mathfrak{p}'_M)_!(\mathcal{F}_M\big|_{\mathrm{Cht}^{'=\mu}_M})$$

où le morphisme (1) est le composé

$$R^j(\mathfrak{p}_G)_!(\mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}^{=\mu}_G}) \to R^j(\mathfrak{p}_G)_! i_! i^*(\mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}^{=\mu}_G}) \xrightarrow{\sim} R^j(\mathfrak{p}'_P)_! i^*(\mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}^{=\mu}_G}) \xrightarrow{\sim} R^j(\mathfrak{p}'_M)_!(\pi_! i^*\mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}^{'=\mu}_M}),$$

le morphisme (2) vient du morphisme de complexes $\pi_! i^*\mathcal{F}_G \to \mathcal{F}'_M$. On va montrer que les morphismes (1) et (2) sont isomorphismes.

6.2.1 De la géométrie à la cohomologie : morphisme i

Soit G un groupe réductif. Soit $N \subset X$ un niveau. Soient I un ensemble fini et W une représentation de $\widehat{G}^I$.

Dans [Var04], Varshavsky a construit une constante $C'(G, X, N, W) \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ et a montré le théorème suivant que nous avons déjà énoncé dans le chapitre 3 :

Théorème 6.2.1. *([Dri87] Prop 4.4, [Var04] Thm 2.25) Soit P un parabolique. Notons M le quotient de Levi. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Si $\langle \mu, \check{\alpha}_i \rangle > C'(G, X, N, W)$ pour tout $i \in \Gamma_G - \Gamma_M$, alors le morphisme $i^{=\mu} : \mathrm{Cht}'^{=\mu}_{P,I,N,W} \to \mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,I,N,W}$ est schématique, fini, universellement injectif, et bijectif.*

Comme une conséquence du théorème 6.2.1 ci-dessus, on a

Lemme 6.2.2. *Le morphisme de foncteurs dans la catégorie $D^b_c(\mathrm{Cht}^{=\mu}_{G,I,N,W})$*

$$adj : Id \to (i^{=\mu})_*(i^{=\mu})^* \text{ est un isomorphisme.} \tag{6.2.1}$$

D'après la construction (4.2.16) dans chapitre 4, le morphisme

$$R^j(\mathfrak{p}_G)_!(\mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}^{=\mu}_G}) \xrightarrow{(1)} R^j(\mathfrak{p}'_M)_!(\pi_! i^* \mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}'^{=\mu}_M})$$

est induit par le morphisme de foncteurs

$$(\mathfrak{p}_G)_! \xrightarrow{\mathrm{adj}} (\mathfrak{p}_G)_! i_* i^* \simeq (\mathfrak{p}_G)_! i_! i^* \simeq (\mathfrak{p}'_M)_! \pi_! i^*.$$

Donc l'isomorphisme (6.2.1) ci-dessus implique :

Lemme 6.2.3. *Sous l'hypothèse du théorème 6.2.1, pour tout j, le morphisme :*

$$R^j(\mathfrak{p}_G)_!(\mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}^{=\mu}_G}) \xrightarrow{(1)} R^j(\mathfrak{p}'_M)_!(\pi_! i^* \mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}'^{=\mu}_M}) \tag{6.2.2}$$

est un isomorphisme.

6.2.2 De la géométrie à la cohomologie : morphisme π

Soient $\underline{d}, \underline{d}' \in (\mathbb{Z}^+)^I$. On dit que $\underline{d} \leq \underline{d}'$ si $d_i \leq d'_i$ pour tout $i \in I$. On définit $\underline{d} \in (\mathbb{Z}^+)^I$ comme le plus petit tel que l'action de $G_{I,\mathcal{O}}$ (resp. $P_{I,\mathcal{O}}$, $M_{I,\mathcal{O}}$) sur $\mathrm{Gr}_{G,I,W}$ (resp. $\mathrm{Gr}_{P,I,W}$, $\mathrm{Gr}_{M,I,W}$) se factorise à traverser le quotient $G_{I,\underline{d}}$ (resp. $P_{I,\underline{d}}$, $M_{I,\underline{d}}$). Alors $\underline{d}$ est déterminé par W et G.

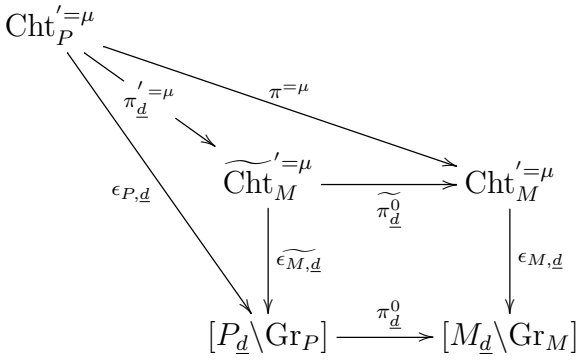
Rappelons que dans le chapitre 5, on a construit une constante dans $\mathbb{Q}^{\geq 0}$:

$$C(G,X,N,\underline{d}) = max\{2g-2,0\} + \deg N + \sum_{i\in I} d_i + strng_X(G).$$

Rappelons que dans la notation 4.2.5, nous avons noté

$$\mathrm{Cht}_P^{'=\mu} = \mathrm{Cht}_P^{=\mu} \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N) \quad \mathrm{Cht}_M^{'=\mu} = \mathrm{Cht}_M^{=\mu} \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N).$$

On a un diagramme commutatif, où $\widetilde{\mathrm{Cht}}_M^{'=\mu}$ est défini comme le produit fibré :



D'après la définition de $\widetilde{\mathrm{Cht}}_M^{'=\mu}$, on a

$$\widetilde{\mathrm{Cht}}_M^{'=\mu} = \widetilde{\mathrm{Cht}}_M^{=\mu} \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N).$$

Donc on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}'_P & \xrightarrow{\pi'_{\underline{d}}} & \widetilde{\mathrm{Cht}}'_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Cht}_P & \xrightarrow{\pi_{\underline{d}}} & \widetilde{\mathrm{Cht}}_M \end{array}$$

Le théorème 5.0.4 dans le chapitre 5 s'écrit aussi comme :

Théorème 6.2.4. *Soit P un parabolique. Notons M le quotient de Levi. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Si $\langle \mu, \check{\alpha}_i \rangle > C(G,X,N,\underline{d})$ pour tout $i \in \Gamma_G - \Gamma_M$, alors localement pour la topologie lisse, $\mathrm{Cht}^{'=\mu}_{P,I,N,W}$ est un espace fibré sur $\widetilde{\mathrm{Cht}}^{'=\mu}_{M,I,N,W}$ de fibre un schéma en groupes unipotents sur le champ classifiant d'un autre schéma en groupes unipotents.*

Dans la section suivante, on va montrer que comme conséquence du théorème 6.2.4 ci-dessus, on a :

Lemme 6.2.5. *Le morphisme de foncteurs dans la catégorie* $D_b^c(\widetilde{\mathrm{Cht}}^{'=\mu}_{M,I,N,W})$ *:*

$$Tr : (\pi_{\underline{d}}^{'=\mu})_!(\pi_{\underline{d}}^{'=\mu})^! \to Id.$$

est un isomorphisme.

Rappelons que dans la construction 4.2.1, en comparant le morphisme (4.2.4) et le morphisme (4.2.8), nous avons

$$\begin{aligned}\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,N,I,W} &= (\widetilde{\pi}_{\underline{d}}{}^0)_!(\pi'_{\underline{d}})_!(\pi'_{\underline{d}})^*(\widetilde{\epsilon_{M,\underline{d}}})^*(i^0_{\underline{d}})^* \mathcal{S}_{G,I,W} \\ &\xrightarrow{Tr} (\widetilde{\pi}_{\underline{d}}{}^0)_!(\widetilde{\epsilon_{M,\underline{d}}})^*(i^0_{\underline{d}})^* \mathcal{S}_{G,I,W}[-2m](-m) \\ &\simeq (\epsilon_{M,\underline{d}})^*(\pi^0_{\underline{d}})_!(i^0_{\underline{d}})^* \mathcal{S}_{G,I,W}[-2m](-m) = (\epsilon_{M,\underline{d}})^* \mathcal{S}_{M,I,W} = \mathcal{F}_{M,N,I,W}\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

D'après le lemme 6.2.5, le morphisme Tr restreint sur les strates $= \mu$ est un isomorphisme. Cela implique que le morphisme de faisceaux dans la construction 4.2.1 :

$$\big(\pi_! i^* \mathcal{F}_{G,N,I,W}\big)\big|_{\mathrm{Cht}^{'=\mu}_M} \to \mathcal{F}_{M,N,I,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{'=\mu}_M} \tag{6.2.4}$$

est un isomorphisme. Comme conséquence, on a

Lemme 6.2.6. *Sous la condition du théorème 6.2.4, pour tout j, le morphisme*

$$R^j(\mathfrak{p}'_M)_!(\pi_! i^* \mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}^{'=\mu}_M}) \xrightarrow{(2)} R^j(\mathfrak{p}'_M)_!(\mathcal{F}_M\big|_{\mathrm{Cht}^{'=\mu}_M})$$

est un isomorphisme.

6.2.3 Démonstration de la proposition 6.1.1

Comme le choix de $\underline{d}$ (le plus petit) ci-dessus ne dépend que de W et G, on peut définir

$$\widetilde{C}(G, X, N, W) := Max\{C(G, X, N, \underline{d}),\ C'(G, X, N, W)\}.$$

Prenons la constant $\widetilde{C}(G, X, N, W)$ comme ci-dessus, la proposition 6.1.1 est une conséquence du lemme 6.2.3 et du lemme 6.2.6.

6.3 Démonstration du lemme 6.2.5

6.3.1 Réduction à un énoncé local

On peut ramener l'énoncé de l'isomorphisme aux énoncés sur la fibre de $\pi_{\underline{d}}^{'=\mu}$ sur un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{F}_q$, par le lemme suivant :

Lemme 6.3.1. *Soient $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ deux champs algébriques sur $\mathbb{F}_q$, $f : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ un morphisme lisse de dimension relative m. Pour montrer que la flèche canonique $f_! f^! \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que pour $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ et pour tout point géométrique $x \hookrightarrow \mathscr{X}$, on a $H^j(f^{-1}(x), \Lambda) = 0$ pour $j > 0$ et le morphisme canonique $\Lambda \to H^0(f^{-1}(x), \Lambda)$ est un isomorphisme, où $f^{-1}(x) := \mathscr{Y} \underset{\mathscr{X}}{\times} x$.*

Démonstration.

i) D'abord, pour montrer que $f_! f^! \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme, il suffit de le montrer fibre à fibre.

En fait, $f_!$ commute avec changement de base. Et f^* commute avec changement de base. Comme f est lisse de dimension relative m, $f^! = f^*[2m](m)$. Donc $f_! f^!$ commute avec changement de base.

(Concrètement, pour tout point géométrique $x \hookrightarrow \mathscr{X}$, on note

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(x) & \xrightarrow{\tilde{i}_x} & \mathscr{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle f_x} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ x & \xrightarrow{i_x} & \mathscr{X} \end{array}$$

où $f^{-1}(x)$ est le produit fibré. On a $i_x^* f_! f^! = i_x^* f_! f^*[2m](m) = f_{x,!} \tilde{i}_x^* f^*[2m](m) = f_{x,!} f_x^* i_x^*[2m](m) = f_{x,!} f_x^! i_x^*$. Donc il suffit de montrer que $f_{x,!} f_x^! \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme.)

ii) Ensuite, par dualité, montrer que la flèche $f_{x,!} f_x^! \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme est la même chose que montrer que la flèche canonique $\mathrm{Id} \to f_{x,*} f_x^*$ est un isomorphisme.

Soit $C \in D_c^b(x, \Lambda)$. Comme $f_{x,*} f_x^* C = f_{x,*} f_x^* \Lambda \underset{\Lambda}{\otimes} C$, il suffit de montrer que $\Lambda \to f_{x,*} f^* \Lambda = f_{x,*} \Lambda$ est un isomorphisme, i.e. $H^j(f^{-1}(x), \Lambda) = 0$ pour $j > 0$ et $\Lambda \xrightarrow{\sim} H^0(f^{-1}(x), \Lambda)$ (i.e. $R^j f_{x,*} = 0$ pour $j > 0$ et $R^0 f_{x,*} = Id.$).

□

6.3.2 Cohomologie d'espaces fibrés de fibre un groupe unipotent

Commençons par quelques préparations :

Définition 6.3.2. Soient $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ deux champs algébriques sur un schéma S et $f : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ un morphisme de champ sur S. On dit que $\mathscr{Y}$ est une tour d'espaces affines (un espace affine généralisé) sur $\mathscr{X}$ si pour tout schéma S' sur S et tout morphisme $S' \to \mathscr{X}$, le produit fibré $\mathscr{Y} \underset{\mathscr{X}}{\times} S'$ est une tour d'espaces affines (i.e. une fibration successive en fibrés affines) sur S'.

Exemple 6.3.3. Soit $H_{\mathscr{X}}$ un schéma en groupes unipotents sur $\mathscr{X}$, alors un $H_{\mathscr{X}}$-torseur est une tour d'espaces affines sur $\mathscr{X}$.

Lemme 6.3.4. *Soit K un corps algébriquement clos. Soit $\mathscr{X}$ un champ algébrique sur* $\operatorname{Spec} K$*. Soit $f : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ une tour d'espaces affines sur $\mathscr{X}$. Notons $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Alors pour tout j, le morphisme*

$$H^j(\mathscr{X}, \Lambda) \to H^j(\mathscr{Y}, \Lambda)$$

est un isomorphisme.

Démonstration.

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{Y} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathscr{X} \\ & {\scriptstyle h}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & \operatorname{Spec} K & \end{array} \tag{6.3.1}$$

On a une suite spectrale :

$$H^p(\mathscr{X}, R^q f_* \Lambda) \Rightarrow H^{p+q}(\mathscr{Y}, \Lambda).$$

Le morphisme adjoint $\Lambda \to f_* f^* \Lambda = f_* \Lambda$ est un isomorphisme puisqu'il l'est fibre par fibre (chaque fibre de f est un espace affine, puis on utilise [SGA5] VII Prop1.1). Donc $R^j f_* \Lambda = 0$ pour $j > 0$ et $\Lambda \xrightarrow{\sim} R^0 f_* \Lambda$. La suite spectrale est dégénérée.

□

Lemme 6.3.5. *Soient H et H' des groupes unipotents sur* $\operatorname{Spec} K$*. Notons $[\cdot/H']$ le champ classifiant de H'. Soit $\mathscr{Z} \to [\cdot/H']$ un espace fibré sur $[\cdot/H']$, de fibre H. Alors $H^j(\mathscr{Z}, \Lambda) = 0$ pour $j > 0$ et $H^0(\mathscr{Z}, \Lambda) = \Lambda$.*

Démonstration. D'abord, en appliquant le lemme 6.3.4 à $\mathscr{Z} \to [\cdot/H']$, pour tout j, on en déduit

$$H^j(\mathscr{Z}, \Lambda) = H^j([\cdot/H'], \Lambda).$$

Ensuite, le champ $[\cdot/H']$ est le classifiant du groupe unipotent H'. En appliquant le lemme 6.3.4 à $\operatorname{Spec} K \to [\cdot/H']$ (on voit $\operatorname{Spec} K$ comme un H'-torseur sur $[\cdot/H']$), on en déduit

$$H^j(\operatorname{Spec} K, \Lambda) = H^j([\cdot/H'], \Lambda).$$

En fin, on a $H^j(\operatorname{Spec} K, \Lambda) = 0$ pour $j > 0$ et $H^0(\operatorname{Spec} K, \Lambda) = \Lambda$.

□

Maintenant nous pouvons montrer l'isomorphisme Tr à l'aide de ce lemme :
Démonstration du lemme 6.2.5.

Le théorème géométrique 6.2.4 dit que la fibre $\mathscr{Z}_{\underline{d}}$ de $\pi_{\underline{d}}^{'=\mu}$ au dessus d'un point géométrique est un espace fibré de fibre un groupe unipotent sur le classifiant d'un autre groupe unipotent. D'après le lemme 6.3.5 ci-dessus, on a $H^j(\mathscr{Z}_{\underline{d}}, \Lambda) = 0$ pour $j > 0$ et $\Lambda \xrightarrow{\sim} H^0(\mathscr{Z}_{\underline{d}}, \Lambda)$.

Ensuite le lemme 6.3.1 implique que le morphisme Tr est un isomorphisme. □

6.3.3 Remarques

Remarque 6.3.6. D'après la construction dans le chapitre 5, les schémas en groupes unipotents dans le théorème géométrique 6.2.4 dépendent du choix de l'inclusion $M \hookrightarrow P$. En revanche, le résultat $H^j(\mathscr{Z}_{\underline{d}}, \Lambda) = 0$ pour $j > 0$ et $\Lambda \xrightarrow{\sim} H^0(\mathscr{Z}_{\underline{d}}, \Lambda)$ n'en dépend pas.

Remarque 6.3.7. On a un corollaire évident du lemme 6.3.4 :

Soit Y un schéma sur S, muni d'une action du schéma en groupes unipotents H sur S. Alors on a

$$H^j([Y/H], \Lambda) \simeq H^j(Y, \Lambda).$$

Exemple 6.3.8. Notons $B(\mathbb{G}_a/S)$ le champ de classifiant de $\mathbb{G}_a$ sur une base S. Alors $S \to B(\mathbb{G}_a/S)$ est un espace affine de fibre $\mathbb{G}_a$ sur $B(\mathbb{G}_a/S)$. On a

$$H^j(B(\mathbb{G}_a/S), \Lambda) \simeq H^j(S, \Lambda).$$

6.4 Exemples

Exemple 6.4.1. (Chtoucas sans patte.)

On se met dans le cadre de l'exemple 5.5.1. Le morphisme terme constant

$$C_G^P : C_c(\mathrm{Bun}_G^{=\mu}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathbb{C}) \to C_c(\mathrm{Bun}_M^{'=\mu}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathbb{C})$$

est un isomorphisme.

Exemple 6.4.2. (Chtoucas à deux pattes de Drinfeld.)

On se met dans le cadre de l'exemple 5.5.2. $N = \emptyset$. Comme le champ $\mathrm{Cht}_{G,(\alpha,\beta),W}$ est lisse de dimension 2 au-dessus de $(\alpha, \beta) \in X^2$, le faisceau $\mathcal{F}_G = \mathbb{Q}_\ell[2](1)$. Comme le champ $\mathrm{Cht}_{T,(\alpha,\beta),W}$ est de dimension 0 au-dessus de $(\alpha, \beta) \in X^2$, le faisceau $\mathcal{F}_T$ est égal à $\mathbb{Q}_\ell$. Le morphisme terme constant

$$\mathcal{C}_G^{B,j,=\mu} : R^j(\mathfrak{p}_G)_!(\mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}_G^{=\mu}}) \xrightarrow{(1)} R^j(\mathfrak{p}_T)_!(\pi_! i^* \mathcal{F}_G\big|_{\mathrm{Cht}_T^{=\mu}}) \xrightarrow{(2)} R^j(\mathfrak{p}_T)_!(\mathcal{F}_T\big|_{\mathrm{Cht}_T^{=\mu}})$$

est

$$\mathcal{C}_G^{B,j,=\mu} : H_c^j(\mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^1, \mathbb{Q}_\ell[2](1)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_\ell \oplus \mathbb{Q}_\ell.$$

Chapitre 7

Cohomologie cuspidale est de dimension finie

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème 4.5.1 : pour tout j, le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^{j\ \mathrm{cusp}}_{G,I,N,W}$ est de dimension finie. Pour cela, on va utiliser le fait que le morphisme terme constant $\mathcal{C}_G^{P,\,j}$ restreint sur les horosphères assez éloignées de P est un isomorphisme (la proposition 6.1.1 dans le chapitre 6). On va présenter notre stratégie dans la section 1 et donner la démonstration dans les sections suivantes.

Rappelons que nous avons fixé $\Xi_G \subset Z_G(\mathbb{A})$ dans 2.1.5. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Rappelons que dans le chapitre 4, nous avons défini

$$\mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W} = R^j(\mathfrak{p}_G)_!(\mathcal{F}^{\Xi}_{G,N,I,W}\big|_{\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}/\Xi_G})$$

comme un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constructible sur $(X \smallsetminus N)^I$. Et nous avons noté

$$H^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W} := \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\overline{\eta}^I}.$$

$$H^{j}_{G,N,I,W} := \varinjlim_{\mu} H^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}.$$

Comme $H^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie, le théorème 4.5.1 sera une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 7.0.3. *Soit G un groupe réductif déployé. Alors il existe $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$ tel que*

$$H^{j,cusp}_{G,N,I,W} \subset \mathrm{Im}(H^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W} \to H^{j}_{G,N,I,W}).$$

Notation 7.0.4. Dans la suite de ce chapitre, pour simplifier les notations, on écrit

$$\mathrm{Cht}_G := \mathrm{Cht}_{G,N,I,W}/\Xi_G\big|_{\eta^I} \quad \mathrm{Cht}_P := \mathrm{Cht}_{P,N,I,W}/\Xi_G\big|_{\eta^I} \quad \mathrm{Cht}_M := \mathrm{Cht}_{M,N,I,W}/\Xi_G\big|_{\eta^I}$$

$$\mathrm{Cht}'_P := \mathrm{Cht}_P \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N) \quad \mathrm{Cht}'_M := \mathrm{Cht}_M \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N)$$

$$H_G^{j,\leq\mu} := H_{G,N,I,W}^{j,\leq\mu} \quad (\text{ resp. } H_G^j)$$

$$H_M^{'j,\leq\mu,\nu} := H_{M,N,I,W}^{'j,\leq\mu,\nu} \quad (\text{ resp. } H_M^{'j,\leq\mu}, H_M^{'j})$$

Remarque 7.0.5. Dans la suite on va traiter seulement le cas où le cardinal de $\pi_1(G^{\mathrm{ad}})$ est 1. En général, notons b le cardinal de $\pi_1(G^{\mathrm{ad}})$. Toutes les notations et les démonstrations ci-dessous marchent pareillement en remplaçant $\mu - \alpha_i$ par $\mu - \frac{1}{b}\alpha_i$.

7.1 Principe de la construction de l'ensemble Ω_G

Soit G un groupe réductif. Pour construire un ensemble Ω_G qui satisfait la proposition 7.0.3, notre stratégie est de d'abord construire une constante $C_G^0 \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$. Ensuite on construit un ensemble associé à cette constante de la manière suivante :

Notation 7.1.1. Soit G un groupe réductif. Soit $C \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ une constante. On note

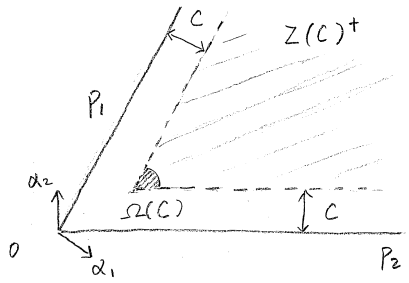
$$Z(C)^+ := \{\mu \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}} \mid \forall i \in \Gamma_G, \langle \mu, \alpha_i \rangle > C\}$$
$$\Omega(C) := \{\mu \in Z(C)^+ \mid \forall i \in \Gamma_G, \mu - \alpha_i \notin Z(C)^+\}$$

Alors $\Omega(C)$ est un ensemble borné dans $\widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$. De plus, il existe $\mu_C \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$ tel que

$$\Omega(C) \subset \{\lambda \in Z(C)^+ | \lambda \leq \mu_C\}.$$

On va prendre $\Omega_G := \Omega(C_G^0)$, un $\mu_{C_G^0}$ comme ci-dessus et montrer qu'il satisfait la proposition 7.0.3.

Illustration 7.1.2. $G = GL_3$.



On va en fait montrer la proposition suivante.

Notation 7.1.3. Soit G un groupe réductif déployé. Pour tout $i \in \Gamma_G$, notons P_i le parabolique maximal associé et M_i son quotient de Levi. On a $\Gamma_G - \Gamma_{M_i} = \{i\}$.

Proposition 7.1.4. *Soit G un groupe réductif déployé. Il existe une constante $C_G^0 \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$, telle qu'on ait les propriétés suivantes :*

a) Pour tout $\mu \in Z(C_G^0)^+ - \Omega(C_G^0)$, pour tout $i \in \Gamma_G$ tel que $\mu - \alpha_i \in Z(C_G^0)^+$, le morphisme

$$\mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \mu-\alpha_i} \to H_{M_i}^{'j}) \to \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \mu} \to H_{M_i}^{'j})$$

est surjectif, où $H_G^{j,\leq \mu} \to H_{M_i}^{'j}$ est le composé $H_G^{j,\leq \mu} \to H_G^j \xrightarrow{\wp_G^{P_i}} H_{M_i}^{'j}$.

b) On a une inclusion de sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de H_G^j :

$$H_G^{j,\mathrm{cusp}} \subset \mathrm{Im}(\bigcup_{\mu \in \Omega(C_G^0)} H_G^{j,\leq \mu} \to H_G^j).$$

c) Il existe une autre constante $C_G \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$, telle que pour tout $\lambda \in Z(C_G)^+$, le morphisme

$$H_G^{j,\leq \lambda} \to H_G^j$$

soit injectif.

La démonstration de cette proposition s'occupera le reste de ce chapitre. Dans la preuve, on montrera a) et on en déduira b) puis c).

Plus précisément, pour construire la constante C_G^0 et montrer la proposition 7.1.4 pour un groupe réductif G, on utilisera la récurrence sur le rang semi-simple du groupe : d'abord on montrera la proposition 7.1.4 pour les Levi de G de rang 0. Ensuite on montrera que si la proposition est vraie pour les Levi de G de rang $n-1$, alors elle est vraie pour les Levi de G de rang n. Finalement, on arrivera à montrer la proposition pour le groupe G.

La propriété c) pour Levi de rang semi-simple $n-1$ sera utilisée comme hypothèse de récurrence pour montrer la proposition 7.1.4 pour les Levi de rang semi-simple n.

Voici une description plus formelle de la récurrence. Notons r_G le rang semi-simple de G.

0) Pour chaque Levi $M^{(0)}$ de rang semi-simple 0 de G, on va d'abord construire une constante $C_{M^{(0)}}^0$ et montrer les propriétés a) et b) de $H_{M^{(0)}}^j$. Ensuite on

va utiliser ces propriétés pour construire une autre constante $C_{M^{(0)}} \geq C^0_{M^{(0)}}$ et montrer qu'elle vérifie l'hypothèse de récurrence c) pour $M^{(0)}$.

...

n) Pour chaque Levi $M^{(n)}$ de rang semi-simple n de G, on va d'abord construire une constante $C^0_{M^{(n)}} :=$

$$Max\left\{\{C_{M^{(n-1)}} \mid M^{(n-1)} \text{ Levi de rang semi-simple } n-1 \text{ de } M^{(n)}\}, \widetilde{C}(M^{(n)}, X, N, W)\right\}$$

où $\widetilde{C}(M^{(n)}, X, N, W)$ est la constante dans la proposition 6.1.1 appliquée au groupe réductif $M^{(n)}$. Puis on va montrer les propriétés a) et b) de $H^j_{M^{(n)}}$ à l'aide des hypothèses de récurrence c) pour les $M^{(n-1)}$.

Ensuite on va construire une autre constante $C_{M^{(n)}} \geq C^0_{M^{(n)}}$ en utilisant ces propriétés et montrer qu'elle vérifie l'hypothèse de récurrence c) pour $M^{(n)}$.

.....

r_G) Pour G, on va construire une constante $C^0_G :=$

$$Max\left\{\{C_{M^{(r_G-1)}} \mid M^{(r_G-1)} \text{ Levi de rang semi-simple } r_G-1 \text{ de } G\}, \widetilde{C}(G, X, N, W)\right\}$$

Puis on va montrer la proposition 7.0.3 pour $\Omega_G = \Omega(C^0_G)$ à l'aide des hypothèses de récurrence pour les $M^{(r_G-1)}$.

7.2 Préparations concernant la limite inductive

7.2.1 Rappels sur les composants de Cht_M

Rappelons que dans le chapitre 3, pour $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$, nous avons défini

$$\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_M := \bigcup_{\widetilde{\lambda}\in\widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_M,\quad \Upsilon(\widetilde{\lambda})\leq^{G^{ad}}\mu} \mathrm{Cht}^{\leq^M\widetilde{\lambda}}_M$$

Nous avons une décomposition en des parties ouvertes et fermées :

$$\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_M = \bigsqcup_{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G},\quad \iota^{ad}_P(\nu)\leq^{G^{ad}}\mu} \mathrm{Cht}^{\leq\mu,\,\nu}_M$$

où les $\mathrm{Cht}^{\leq\mu,\,\nu}_M$ sont définis comme :

$$\mathrm{Cht}^{\leq\mu,\,\nu}_M := \bigcup_{\widetilde{\lambda}\in\widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_M,\quad \Upsilon(\widetilde{\lambda})\leq^{G^{ad}}\mu,\quad pr^{ad}_P\circ\Upsilon(\widetilde{\lambda})=\nu} \mathrm{Cht}^{\leq^M\lambda}_M .$$

Rappelons que dans le chapitre 4, nous avons défini

$$H_M^{'j,\leq\mu,\nu} := H_c^j(\mathrm{Cht}_{M,\overline{\eta}^I}^{'\leq\mu,\nu}/\Xi_G, \mathcal{F}_M).$$

$$\widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G} := \{\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G},\ \iota_P^{ad}(\nu) \leq \mu\}.$$

On a vu que $H_M^{'j,\leq\mu,\nu} = 0$ si $\nu \notin \widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}$. On a défini

$$H_M^{'j} := \varinjlim_{\mu\in\widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}} H_M^{'j,\leq\mu}.$$

De plus, pour chaque $\nu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, on a défini

$$H_M^{'j,\nu} := \varinjlim_{\widetilde{\lambda}\in\widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_M,\quad pr_P^{ad}\circ\Upsilon(\widetilde{\lambda})=\nu} H_M^{'j,\leq^M\widetilde{\lambda}}.$$

On a

$$H_M^{'j} \subset \prod_{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}} H_M^{'j,\nu}.$$

L'image du morphisme $H_M^{'j,\leq\mu} \to H_M^{'j} \to \prod_{\nu\in\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}} H_M^{'j,\nu}$ est supportée sur l'ensemble des ν dans $\widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G}$.

7.2.2 Suite exacte longue de cohomologie et morphisme terme constant

Soit G un groupe réductif, P un parabolique et M son quotient de Levi. Soient $\mu_1, \mu_2 \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$ et $\mu_1 < \mu_2$.

Nous avons vu dans la section 3.2.4 que le morphisme de champs

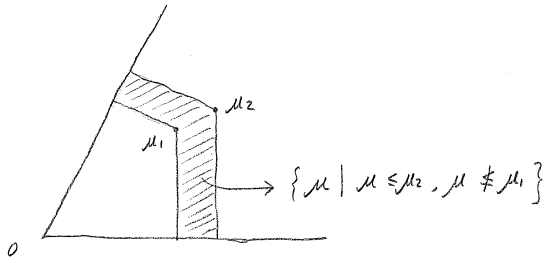
$$\mathrm{Cht}_G^{\leq\mu_1} \to \mathrm{Cht}_G^{\leq\mu_2}$$

est une immersion ouverte. Notons $\mathrm{Cht}_G^{]\mu_1,\mu_2]}$ le sous-champ fermé dans $\mathrm{Cht}_G^{\leq\mu_2}$ qui est complémentaire à $\mathrm{Cht}_G^{\leq\mu_1}$.

Remarque 7.2.1. Par la definition ci-dessus, on a :

$$\mathrm{Cht}_G^{]\mu_1,\mu_2]} = \bigcup_{\mu\in\widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}},\quad \mu\leq\mu_2,\quad \mu\not\leq\mu_1} \mathrm{Cht}_G^{=\mu}.$$

Illustration 7.2.2. $G = GL_3$



De même, le morphisme de champs

$$\mathrm{Cht}_M^{\leq \mu_1} \to \mathrm{Cht}_M^{\leq \mu_2}$$

est une immersion ouverte. On note $\mathrm{Cht}_M^{]\mu_1,\mu_2]}$ le sous-champ fermé dans $\mathrm{Cht}_M^{\leq \mu}$ qui est complémentaire à $\mathrm{Cht}_M^{\leq \mu_1}$.

Le morphisme de champs

$$\mathrm{Cht}_P^{\leq \mu_1} \to \mathrm{Cht}_P^{\leq \mu_2}$$

est une immersion ouverte. Rappelons que nous avons $\mathrm{Cht}_G \xleftarrow{i} \mathrm{Cht}'_P \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cht}'_M$. Notons

$$\mathrm{Cht}_P^{']\mu_1,\mu_2]} := \mathrm{Cht}_P^{'\leq \mu_2} \cap \pi^{-1}(\mathrm{Cht}_M^{']\mu_1,\mu_2]}).$$

On remarque que $\mathrm{Cht}_P^{']\mu_1,\mu_2]} \to \mathrm{Cht}_P^{'\leq \mu_2}$ est une immersion fermée. Il n'est pas nécessairement le complémentaire de $\mathrm{Cht}_P^{'\leq \mu_1}$. Il est seulement un fermé dans le complémentaire de $\mathrm{Cht}_P^{'\leq \mu_1}$.

Lemme 7.2.3. *Le diagramme suivant de champs algébriques est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Cht}_G^{]\mu_1,\mu_2]} & \xleftarrow{i_{12}} & \mathrm{Cht}_P^{'\,]\mu_1,\mu_2]} & \xrightarrow{\pi_{12}} & \mathrm{Cht}_M^{'\,]\mu_1,\mu_2]} \\
\downarrow{\scriptstyle i_G} & & \downarrow{\scriptstyle i_P} & & \downarrow{\scriptstyle i_M} \\
\mathrm{Cht}_G^{\leq \mu_2} & \xleftarrow{i_2} & \mathrm{Cht}_P^{'\leq \mu_2} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathrm{Cht}_M^{'\leq \mu_2} \\
\uparrow{\scriptstyle j_G} & & \uparrow{\scriptstyle j_P} & & \uparrow{\scriptstyle j_M} \\
\mathrm{Cht}_G^{\leq \mu_1} & \xleftarrow{i_1} & \mathrm{Cht}_P^{'\leq \mu_1} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathrm{Cht}_M^{'\leq \mu_1}
\end{array} \tag{7.2.1}$$

De plus, le carré en bas à gauche et le carré en haut à droite sont cartésiens.

Pour tout j, notons

$$H_G^{j,]\mu_1,\mu_2]} := H_c^j(\mathrm{Cht}_{G,\overline{\eta^I}}^{]\mu_1,\mu_2]} / \Xi_G, \mathcal{F}_G)$$

$$H_M^{'j,]\mu_1,\mu_2]} := H_c^j(\mathrm{Cht}_{M,\overline{\eta^I}}^{'\,]\mu_1,\mu_2]}/\Xi_G, \mathcal{F}_M).$$

Comme i_P et i_G sont des immersions fermées et i_2 est propre, le morphisme i_{12} est propre. En appliquant la construction du morphisme terme constant dans le chapitre 4 à la ligne en haut du diagramme (7.2.1), on obtient un morphisme terme constant :

$$\mathcal{C}_G^{P,j,]\mu_1,\mu_2]} : H_G^{j,]\mu_1,\mu_2]} \to H_M^{'j,]\mu_1,\mu_2]}. \tag{7.2.2}$$

Le diagramme de champs algébriques (7.2.1) ci-dessus induit un diagramme de groupes de cohomologie, dont on va étudier ensuite la commutativité :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_G^{j-1,]\mu_1,\mu_2]} & \longrightarrow & H_G^{j,\leq\mu_1} & \longrightarrow & H_G^{j,\leq\mu_2} & \longrightarrow & H_G^{j,]\mu_1,\mu_2]} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & H_M^{'j-1,]\mu_1,\mu_2]} & \longrightarrow & H_M^{'j,\leq\mu_1} & \longrightarrow & H_M^{'j,\leq\mu_2} & \longrightarrow & H_M^{'j,]\mu_1,\mu_2]} \longrightarrow \cdots
\end{array} \tag{7.2.3}$$

Les flèches horizontales sont les suites exactes longues associées à un ouvert et un fermé complémentaire, et les flèches verticales sont des morphismes terme constant.

Lemme 7.2.4. *Pour tout j, le diagramme suivant est commutatif :*

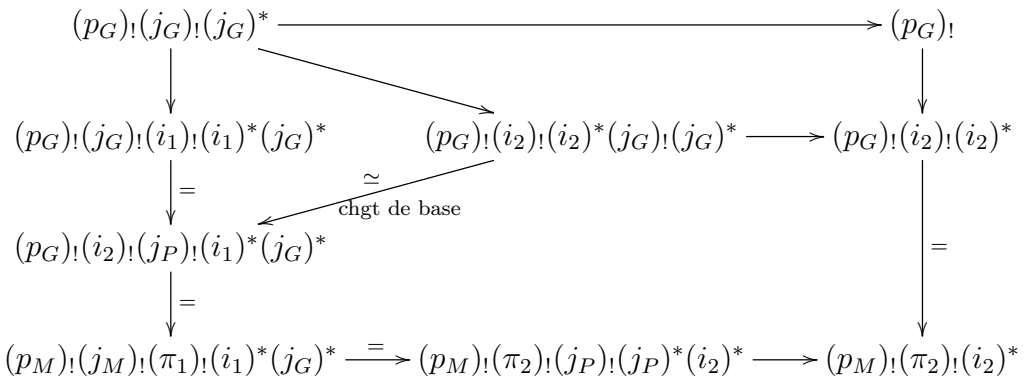
$$\begin{array}{ccccc}
H_G^{j,\leq\mu_1} & \longrightarrow & H_G^{j,\leq\mu_2} & \longrightarrow & H_G^{j,]\mu_1,\mu_2]} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_M^{'j,\leq\mu_1} & \longrightarrow & H_M^{'j,\leq\mu_2} & \longrightarrow & H_M^{'j,]\mu_1,\mu_2]}
\end{array} \tag{7.2.4}$$

Démonstration. On va montrer que le diagramme de complexes dans $D(\eta^I)$ suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
(p_G)_!(j_G)_!(j_G)^*\mathcal{F}_G & \longrightarrow & (p_G)_!\mathcal{F}_G & \longrightarrow & (p_G)_!(i_G)_!(i_G)^*\mathcal{F}_G \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(p_M)_!(j_M)_!(\pi_1)_!(i_1)^*(j_G)^*\mathcal{F}_G & \longrightarrow & (p_M)_!(\pi_2)_!(i_2)^*\mathcal{F}_G & \longrightarrow & (p_M)_!(i_M)_!(\pi_{12})_!(i_{12})^*(i_G)^*\mathcal{F}_G \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(p_M)_!(j_M)_!(j_M)^*\mathcal{F}_M & \longrightarrow & (p_M)_!\mathcal{F}_M & \longrightarrow & (p_M)_!(i_M)_!(i_M)^*\mathcal{F}_M
\end{array} \tag{7.2.5}$$

1) La commutativité en haut à gauche vient du diagramme commutatif de

foncteurs :



Le diagramme en bas à droite est commutatif parce que le carré en bas à gauche dans le diagramme 7.2.1 est cartésien.

2) La commutativité en bas à gauche :

On considère le diagramme commutatif de champs algébriques suivant, où les notations sont cohérentes avec la construction 4.2.1 dans le chapitre 4. Précisément, on voit π_2 comme la composée $\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}} \circ \pi_{2,\underline{d}}$, pour $\underline{d}$ assez grand en fonction de W. De même pour π_1.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Cht}_G^{\leq \mu_2} & \xleftarrow{i_2} & \mathrm{Cht}_P^{'\leq \mu_2} & \xrightarrow{\pi_{2,\underline{d}}} & \widetilde{Cht}_M^{'\leq \mu_2} & \xrightarrow{\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}}} & \mathrm{Cht}_M^{'\leq \mu_2} \\ \uparrow{\scriptstyle j_G} & & \uparrow{\scriptstyle j_P} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{j_M}} & & \uparrow{\scriptstyle j_M} \\ \mathrm{Cht}_G^{\leq \mu_1} & \xleftarrow{i_1} & \mathrm{Cht}_P^{'\leq \mu_1} & \xrightarrow{\pi_{1,\underline{d}}} & \widetilde{Cht}_M^{'\leq \mu_1} & \xrightarrow{\widetilde{\pi^0_{1,\underline{d}}}} & \mathrm{Cht}_M^{'\leq \mu_1} \end{array} \tag{7.2.6}$$

Dans ce diagramme, le carré à gauche et le carré à droite sont cartésiens. Le carré au milieu ne l'est pas. Comme dans le chapitre 4, les morphismes $\pi_{1,\underline{d}}$ et $\pi_{2,\underline{d}}$ sont lisses. On a $\dim(\pi_{1,\underline{d}}) = \dim(\pi_{2,\underline{d}}) = (\sum d_i) \dim U$. Notons cette dimension m.

On en déduit que le diagramme suivant de foncteurs est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
(\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_!(\pi_{2,\underline{d}})_!(j_P)_!(j_P)^*(\pi_{2,\underline{d}})^* & \longrightarrow & (\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_!(\pi_{2,\underline{d}})_!(\pi_{2,\underline{d}})^* \\
\downarrow = & & \\
(\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_!(\widetilde{j_M})_!(\pi_{1,\underline{d}})_!(\pi_{1,\underline{d}})^*(\widetilde{j_M})^* & & \downarrow \\
\downarrow & & \\
(\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_!(\widetilde{j_M})_!(\widetilde{j_M})^*[-2m](-m) & \longrightarrow & (\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_![-2m](-m) \\
\downarrow = & \nearrow & \\
(j_M)_!(\widetilde{\pi^0_{1,\underline{d}}})_!(\widetilde{j_M})^*[-2m](-m) & & \\
\downarrow \text{chgt de base} \simeq & & \\
(j_M)_!(j_M)^*(\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_![-2m](-m) & &
\end{array}$$

Le diagramme en haut est commutatif parce que le carré au milieu dans le diagramme (7.2.6) est commutatif.

3) La commutativité en haut à droite vient du diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccccc}
(p_G)_! & & \longrightarrow & & (p_G)_!(i_G)_!(i_G)^* \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
(p_G)_!(i_2)_!(i_2)^* & \longrightarrow & (p_G)_!(i_2)_!(i_P)_!(i_P)^*(i_2)^* & \xrightarrow{=} & (p_G)_!(i_G)_!(i_{12})_!(i_{12})^*(i_G)^* \\
\downarrow = & & & & \downarrow = \\
(p_M)_!(\pi_2)_!(i_2)^* & & & & (p_M)_!(i_M)_!(\pi_{12})_!(i_{12})^*(i_G)^*
\end{array}$$

4) La commutativité en bas à droite :

On considère le diagramme commutatif de champs algébriques, où les notations sont cohérentes avec la construction 4.2.1 dans le chapitre 4. Précisément, on voit π_{12} comme la composée $\widetilde{\pi^0_{12,\underline{d}}} \circ \pi_{12,\underline{d}}$, pour $\underline{d}$ assez grand en fonction de W.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Cht}_G^{]\mu_1,\mu_2]} & \xleftarrow{i_{12}} & \mathrm{Cht}_P^{'\,]\mu_1,\mu_2]} & \xrightarrow{\pi_{12,\underline{d}}} & \widetilde{Cht}_M^{'\,]\mu_1,\mu_2]} & \xrightarrow{\widetilde{\pi^0_{12,\underline{d}}}} & \mathrm{Cht}_M^{'\,]\mu_1,\mu_2]} \\
\downarrow{\scriptstyle i_G} & & \downarrow{\scriptstyle i_P} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{i_M}} & & \downarrow{\scriptstyle i_M} \\
\mathrm{Cht}_G^{\leq\mu_2} & \xleftarrow{i_2} & \mathrm{Cht}_P^{'\leq\mu_2} & \xrightarrow{\pi_{2,\underline{d}}} & \widetilde{Cht}_M^{'\leq\mu_2} & \xrightarrow{\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}}} & \mathrm{Cht}_M^{'\leq\mu_2}
\end{array} \tag{7.2.7}$$

Le carré au milieu et le carré à droite sont cartésiens. Le carré à gauche ne l'est pas. Le morphisme $\pi_{12,\underline{d}}$ est lisse. On a $\dim(\pi_{12,\underline{d}}) = (\sum d_i)\dim U = m$.

On en déduit que le diagramme suivant de foncteurs est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
(\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_!(\pi_{2,\underline{d}})_!(\pi_{2,\underline{d}})^* & \longrightarrow & (\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_!(\pi_{2,\underline{d}})_!(i_P)_!(i_P)^*(\pi_{2,\underline{d}})^* \\
\downarrow & & \downarrow = \\
 & & (\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_!(\widetilde{i_M})_!(\pi_{12,\underline{d}})_!(\pi_{12,\underline{d}})^*(\widetilde{i_M})^* \\
 & & \downarrow \\
(\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_![-2m](-m) & \longrightarrow & (\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_!(\widetilde{i_M})_!(\widetilde{i_M})^*[-2m](-m) \\
 \searrow & & \downarrow = \\
 & & (i_M)_!(\widetilde{\pi^0_{12,\underline{d}}})_!(\widetilde{i_M})^*[-2m](-m) \\
 & & \downarrow \simeq \quad \text{chgt de base} \\
 & & (i_M)_!(i_M)^*(\widetilde{\pi^0_{2,\underline{d}}})_![-2m](-m)
\end{array}$$

Le diagramme en haut est commutatif parce que le carré au milieu dans le diagramme (7.2.7) ci-dessus est cartésien.

□

7.2.3 Strates localement fermées

Notation 7.2.5. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Soit M un quotient de Levi de G. On note

$$S_M(\mu) := \{\lambda \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}} \mid \lambda \leq^M \mu\},$$

où $\lambda \leq^M \mu$ si et seulement si $\mu - \lambda$ est égal modulo $\widehat{\Lambda}_{Z_G}$ à une somme des coracines simples de M avec des coefficients rationnels positifs. Puis on note

$$\mathrm{Cht}_G^{S_M(\mu)} := \bigcup_{\lambda \in S_M(\mu)} \mathrm{Cht}_G^{=\lambda}.$$

$$\mathrm{Cht}_M^{'S_M(\mu)} := \bigcup_{\lambda \in S_M(\mu)} \mathrm{Cht}_M^{'=\lambda}.$$

Le sous-champ $\mathrm{Cht}_G^{S_M(\mu)}$ est localement fermé dans Cht_G. Le sous-champ $\mathrm{Cht}_M^{'S_M(\mu)}$ est ouvert dans Cht'_M.

Notons

$$H_G^{j,\,S_M(\mu)} := H_c^j(\mathrm{Cht}_{G,\overline{\eta^I}}^{S_M(\mu)}/\Xi_G, \mathcal{F}_G)$$

$$H_M^{'\,j,\,S_M(\mu)} := H_c^j(\mathrm{Cht}_{M,\overline{\eta^I}}^{'\,S_M(\mu)}/\Xi_G, \mathcal{F}_M).$$

On a un corollaire de la proposition 6.1.1 :

Lemme 7.2.6. *Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$. Si $\langle \mu, \check{\alpha}_i \rangle > \widetilde{C}(G, X, N, W)$ pour tout $i \in \Gamma_G - \Gamma_M$, alors pour tout j, la restriction du morphisme terme constant sur $H_G^{j,S_M(\mu)}$:*

$$H_G^{j,S_M(\mu)} \to H_M^{'\,j,S_M(\mu)}. \tag{7.2.8}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le sous-champ $\mathrm{Cht}_G^{=\mu}$ est fermé dans $\mathrm{Cht}_G^{S_M(\mu)}$. Le sous-champ $\mathrm{Cht}_M^{'=\mu}$ est fermé dans $\mathrm{Cht}_M^{'\,S_M(\mu)}$. En appliquant le lemme 7.2.3 et 7.2.4, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H_G^{j,\,S_M(\mu)-\mu} & \longrightarrow & H_G^{j,\,S_M(\mu)} & \longrightarrow & H_G^{j,=\mu} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_M^{'\,j,\,S_M(\mu)-\mu} & \longrightarrow & H_M^{'\,j,\,S_M(\mu)} & \longrightarrow & H_M^{'\,j,=\mu} \end{array} \tag{7.2.9}$$

D'après la proposition 6.1.1 pour μ, la flèche verticale à droite est un isomorphisme.

Continuons le processus successivement à $S_M(\mu) - \mu$. Chaque fois on enlève un sous-champ fermé $\mathrm{Cht}_G^{=\lambda}$ pour un λ maximal. Par la définition de $S_M(\mu)$, tout $\lambda \in S_M(\mu)$ tel que $\mathrm{Cht}_G^{=\lambda} \neq \emptyset$ est de la forme $\mu - \sum_{j \in \Gamma_G - \Gamma_M} \frac{c_j}{b} \alpha_j$ avec $c_j \in \mathbb{Z}^+$, où b est le cardinal de $\pi_1(G^{\mathrm{ad}})$. Comme $\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \leq 0$, on a

$$\langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq \langle \mu, \alpha_i \rangle > \widetilde{C}(G, X, N, W).$$

Donc λ satisfait la condition dans la proposition 6.1.1 et le morphisme $H_G^{j,=\lambda} \to H_M^{'\,j,=\lambda}$ est un isomorphisme.

□

7.3 Début de la récurrence : rang 0

Soit G un groupe réductif déployé. Nous avons fixé $\Xi_G \subset Z_G(\mathbb{A})$ dans 2.1.5.

Notation 7.3.1. Pour chaque quotient de Levi M de G, on fixe un $\Xi_M \subset Z_M(\mathbb{A})$ qui satisfait les conditions dans 2.1.5 pour M, de façon compatible parmi tous les Levi : si M_1 un quotient de Levi de G et M_2 un quotient de Levi de M_1, alors on a $\Xi_G \subset \Xi_{M_1} \subset \Xi_{M_2} \subset T$.

Soit T un quotient de Levi de G de rang semi-simple 0. Alors $\widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{T^{\mathrm{ad}}} = \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{T^{\mathrm{ad}}}$ a un seul élément. Notons cet élément ν.

Le champ algébrique Cht_T/Ξ_T est de type fini. Il y a seulement un terme dans la limite inductive :

$$H_T^{j,\leq\nu} = H_T^{j,=\nu} = H_T^j.$$

De plus, il n'y a pas de morphisme terme constant pour T. Donc la partie cuspidale de H_T^j est la cohomologie elle-même, qui est de dimension finie.

Lemme 7.3.2. *Soit T un quotient de Levi de G de rang semi-simple 0. Prenons $C_T^0 = 0$, alors on a*

a) $Z(C_T^0)^+ = \Omega(C_T^0) = \{\nu\}$.

b)

$$H_T^{j,\mathrm{cusp}} = H_T^j.$$

c) prenons $C_T = C_T^0 = 0$, alors on a $Z(C_T)^+ = \{\nu\}$, le morphisme

$$H_T^{j,=\nu} \to H_T^j$$

est injectif.

7.4 Du rang $r-1$ au rang r : constante C_G^0, propriétés a) et b)

Le but de cette section est de montrer le lemme suivant.

Lemme 7.4.1. *Soit G un groupe réductif de rang semi-simple r. Supposons que la proposition 7.1.4 est vraie pour tout quotient de Levi M de G de rang semi-simple $r-1$ avec la notation 7.3.1. Choisissons C_M une constante qui satisfait la proposition 7.1.4 c) pour chaque tel M. Prenons*

$$C_G^0 := Max\left\{\{C_M \mid M \text{ quotient de Levi de } G \text{ de rang ss } r-1\},\ \widetilde{C}(G,X,N,W)\right\}$$

où $\widetilde{C}(G,X,N,W)$ est la constante dans la proposition 6.1.1 appliquée à G. Alors pour cette constante C_G^0, les propriétés a) et b) dans la proposition 7.1.4 sont vraies pour G.

Remarque 7.4.2. En particulier, pour $r = 1$, pour tout Levi T de rang semi-simple $r-1 = 0$, on peut prendre $C_T = 0$. Et on prend

$$C_G^0 := Max\left\{0, \widetilde{C}(G,X,N,W)\right\} = \widetilde{C}(G,X,N,W).$$

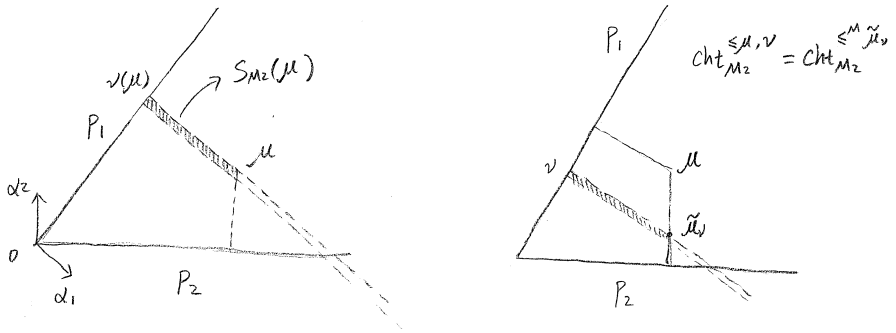
Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Soit M un quotient de Levi de G. Dans la section 7.2.3, on a défini $S_M(\mu) := \{\lambda \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}} \mid \lambda \leq^M \mu\}$. Notons $\nu(\mu) := pr^{ad}_P(\mu) \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, où pr^{ad}_P est défini dans la section 3.2.1. On a

$$\mathrm{Cht}^{'\, S_M(\mu)}_M = \mathrm{Cht}^{'\, \leq \mu,\, \nu(\mu)}_M = \mathrm{Cht}^{'\leq^M \mu}_M . \tag{7.4.1}$$

Remarque 7.4.3. Plus généralement, pour chaque $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, il existe un $\widetilde{\mu}_\nu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_M$, tel que

$$\mathrm{Cht}^{\leq \mu,\, \nu}_M = \mathrm{Cht}^{\leq^M \widetilde{\mu}_\nu}_M .$$

Illustration 7.4.4. $G = GL_3$



Démonstration du lemme 7.4.1.

a) Soit $\mu \in Z(C^0_G)^+ - \Omega(C^0_G)$. Soit $i \in \Gamma_G$ tel que $\mu - \alpha_i \in Z(C^0_G)^+$. Notons $M := M_i$. Alors on a $\Gamma_G - \Gamma_M = \{i\}$. Soit $a \in \mathrm{Ker}(H^{j,\leq \mu}_G \to H^{'\, j}_{M_i})$.

1) On applique le lemme 7.2.4 à μ et $\mu - \alpha_i$. Remarquons que dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned}]\mu - \alpha_i, \mu] \cap \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}} &= \{\mu - \sum_{j \in \Gamma_G - \Gamma_M} c_j \alpha_j,\ c_j \in \mathbb{Z}^+\} \\ &= \{\lambda \in \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}} \mid \lambda \leq^M \mu\} \\ &= S_M(\mu) \cap \widehat{\Lambda}^+_{G^{\mathrm{ad}}} \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

Donc $\mathrm{Cht}^{]\mu-\alpha_i,\mu]}_G = \mathrm{Cht}^{S_M(\mu)}_G$ et $\mathrm{Cht}^{'\,]\mu-\alpha_i,\mu]}_M = \mathrm{Cht}^{'\, S_M(\mu)}_M$. On obtient un diagramme commutatif de groupes de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccc} H^{j,\leq \mu-\alpha_i}_G & \longrightarrow & H^{j,\leq \mu}_G & \longrightarrow & H^{j,S_M(\mu)}_G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^{'\, j,\leq \mu-\alpha_i}_M & \longrightarrow & H^{'\, j,\leq \mu}_M & \longrightarrow & H^{'\, j,S_M(\mu)}_M \end{array} \tag{7.4.3}$$

2) Comme $\mu \in Z(C_G^0)^+$, on a $\langle \mu, \alpha_i \rangle > \widetilde{C}(G, X, N, W)$. D'après le lemme 7.2.6, pour tout j, on a

$$H_G^{j, S_M(\mu)} \xrightarrow{\sim} H_M^{'j, S_M(\mu)}.$$

3) Le sous-champ $\mathrm{Cht}_M^{'S_M(\mu)}$ est ouvert et fermé dans $\mathrm{Cht}_M^{'\leq \mu}$. Donc le sous-champ complémentaire $\mathrm{Cht}_M^{'\leq \mu - \alpha_i}$ l'est aussi. On en déduit que

$$H_M^{'j, \leq \mu} = H_M^{'j, \leq \mu - \alpha_i} \oplus H_M^{'j, S_M(\mu)}.$$

Notons a_M l'image de a dans $H_M^{'j, \leq \mu}$, alors a_M est de la forme (a'_M, a_M^S) avec $a'_M \in H_M^{'j, \leq \mu - \alpha_i}$ et $a_M^S \in H_M^{'j, S_M(\mu)}$.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_G^{j, \leq \mu} & \longrightarrow & H_G^j \\ {\scriptstyle \mathfrak{C}_G^{P, j, \leq \mu} = (\mathfrak{C}_G^{P, j, \leq \mu, \nu})_\nu} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathfrak{C}_G^{P, j} = (\mathfrak{C}_G^{P, j, \nu})_\nu} \\ H_M^{'j, \leq \mu} & \longrightarrow & H_M^{'j} \end{array} \tag{7.4.4}$$

En particulier, pour $\nu(\mu) := pr_P^{ad}(\mu) \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_G^{j, \leq \mu} & \longrightarrow & H_G^j \\ {\scriptstyle \mathfrak{C}_G^{P, j, \leq \mu, \nu(\mu)}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathfrak{C}_G^{P, j, \nu(\mu)}} \\ H_M^{'j, \leq \mu, \nu(\mu)} & \longrightarrow & H_M^{'j, \nu(\mu)} \end{array} \tag{7.4.5}$$

D'après (7.4.1), on a

$$H_M^{'j, \leq \mu, \nu(\mu)} = H_M^{'j, \leq^M \mu} = H_M^{'j, S_M(\mu)}.$$

Notons $\overline{a}$ l'image de a dans H_G^j. Par la commutativité, l'image de a_M^S dans $H_M^{'j, \nu(\mu)}$ est $\mathfrak{C}_G^{P, j, \nu(\mu)}(\overline{a})$. Comme $a \in \mathrm{Ker}(H_G^{j, \leq \mu} \to H_{M_i}^{'j})$, on a $\mathfrak{C}_G^{P, j, \nu(\mu)}(\overline{a}) = 0$.

4) Par l'hypothèse du lemme 7.4.1, la propriété c) de la proposition 7.1.4 est vraie pour M. La définition de C_G^0 implique que $C_G^0 \geq C_M$. Les conditions sur Ξ_M impliquent que le morphisme composé

$$\mathrm{Cht}^{\nu(\mu)}_{M,N,I,W} / \Xi_G \to \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} / \Xi_G \to \mathrm{Cht}_{M,N,I,W} / \Xi_M$$

est fini. Donc la propriété c) pour M et Ξ_M implique que le morphisme

$$H_M^{j, \leq^M \mu} \to H_M^{j, \nu(\mu)}$$

est injectif. Comme $\mathrm{Cht}'_M = \mathrm{Cht}_M \overset{P(\mathcal{O}_N)}{\times} G(\mathcal{O}_N)$ est une réunion disjointe de copies de Cht_M, on en déduit que le morphisme

$$H_M^{'\,j,\leq^M \mu} \to H_M^{'\,j,\,\nu(\mu)}$$

est aussi injectif. Donc $\mathcal{C}_G^{P,\,j,\,\nu(\mu)}(\overline{a}) = 0$ dans 3) implique que $a_M^S = 0$.

5) D'après la commutativité du carré à droite dans le diagramme (7.4.3) dans 1) et l'isomorphisme dans 2), l'image de a dans $H_G^{j,S_M(\mu)}$ est 0. Par l'exactitude de la ligne du haut au milieu dans le diagramme (7.4.3), on en déduit qu'il existe un $a' \in H_G^{j,\leq \mu-\alpha_i}$ dont l'image dans $H_G^{j,\leq\mu}$ est a. De plus $\mathcal{C}_G^{P,\,j}(\overline{a'}) = \mathcal{C}_G^{P,\,j}(\overline{a}) = 0$. Donc $a' \in \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq\mu-\alpha_i} \to H_{M_i}^{'\,j})$.

b) Soit $x \in H_G^{j,\,\mathrm{cusp}}$. Notons

$$\mathcal{A}(x) := \{\lambda \in Z(C_G^0)^+ \mid x \in \mathrm{Im}(H_G^{j,\leq\lambda} \to H_G^j)\}.$$

Par définition d'une limite inductive, l'ensemble $\mathcal{A}(x)$ est non vide. Soit μ un élément minimal de $\mathcal{A}(x)$ pour l'ordre partiel dans $\widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$.

Si $\mu \in \Omega(C_G^0)$, alors on a déjà

$$x \in \mathrm{Im}(H_G^{j,\leq\mu} \to H_G^j) \subset \mathrm{Im}(\bigcup_{\mu' \in \Omega(C_G^0)} H_G^{j,\leq\mu'} \to H_G^j).$$

Si $\mu \notin \Omega(C_G^0)$, alors il existe un $i \in \Gamma_G$, tel que $\mu - \alpha_i \in Z(C_G^0)^+$. D'après a), le morphisme

$$\mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq\mu-\alpha_i} \to H_{M_i}^{'\,j}) \to \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq\mu} \to H_{M_i}^{'\,j})$$

est surjectif. Le fait que $x \in H_G^{j,\,\mathrm{cusp}} \cap \mathrm{Im}(H_G^{j,\leq\mu} \to H_G^j)$ implique qu'il provient d'un élément dans $\mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq\mu} \to H_{M_i}^{'\,j})$. Ainsi il provient aussi d'un élément dans $H_G^{j,\leq\mu-\alpha_i}$, c'est-à-dire que $x \in \mathrm{Im}(H_G^{j,\leq\mu-\alpha_i} \to H_G^j)$. Donc $\mu - \alpha_i \in \mathcal{A}(x)$. Mais ceci contredit l'hypothèse que μ est un élément minimal dans $\mathcal{A}(x)$.

On en déduit que pour tout $x \in H_G^{j,\,\mathrm{cusp}}$, pour tout μ minimal dans $\mathcal{A}(x)$, on a $\mu \in \Omega(C_G^0)$. Donc

$$H_G^{j,\,\mathrm{cusp}} \subset \mathrm{Im}(\bigcup_{\mu' \in \Omega(C_G^0)} H_G^{j,\leq\mu'} \to H_G^j).$$

□

7.5 Pour rang r : constante C_G et propriété c)

Dans cette section, G est le même groupe réductif de rang semi-simple r que dans la section précédente. On va construire une constante C_G pour G et vérifier qu'elle satisfait la propriété c) dans la proposition 7.1.4 pour G.

Lemme 7.5.1. *Sous les hypothèse du lemme 7.4.1, il existe une autre constante $C_G \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$, $C_G \geq C_G^0$, telle que pour tout $\lambda \in Z(C_G)^+$, le morphisme*

$$H_G^{j,\leq \lambda} \to H_G^j$$

soit injectif.

On va d'abord donner quelques préparations, et ensuite montrer ce lemme.

7.5.1 Quelques résultats généraux sur les limites inductives

Lemme 7.5.2. *Soit V^{lim} un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\{V^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un système filtrant de sous-espaces vectoriels de V^{lim}. Si*

$$\varinjlim_{\lambda} V^\lambda = V^{lim},$$

alors il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $V^{\lambda_0} = V^{lim}$.

Démonstration. Notons n la dimension de V^{lim}. Soit $\{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de V^{lim}. Par la définition de limite inductive, pour chaque v_i, il existe un $\lambda_i \in \Lambda$ et un élément $w_i \in V^{\lambda_i}$ tel que l'image de w_i dans $\varinjlim_\lambda V^\lambda = V^{lim}$ soit v_i.

Comme le système est filtrant, il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$, tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on ait $V^{\lambda_i} \subset V^{\lambda_0}$. Notons w_i^0 l'image de w_i dans V^{λ_0}, i.e.

$$V^{\lambda_i} \hookrightarrow V^{\lambda_0} \hookrightarrow V^{lim}$$

$$w_i \mapsto w_i^0 \mapsto v_i$$

Alors $\{w_1^0, \cdots, w_n^0\}$ est une base de V^{λ_0}. On en déduit que $V^{\lambda_0} = V^{lim}$.

□

Notation 7.5.3. Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. On note

$$\mathcal{J}_\mu^{lim} : H_G^{j,\leq\mu} \to H_G^j.$$

Soient $\mu_1, \mu_2 \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$ et $\mu_1 \leq \mu_2$. On note

$$\mathcal{J}_{\mu_1}^{\mu_2} : H_G^{j,\leq\mu_1} \to H_G^{j,\leq\mu_2}.$$

Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Pour tout $\lambda \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$ tel que $\lambda \geq \mu$, on a

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{\lambda}_{\mu}) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{lim}_{\mu}) \subset H^{j,\leq\mu}_{G}.$$

Soient $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq \mu$, alors

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{\lambda_1}_{\mu}) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{\lambda_2}_{\mu}).$$

Lemme 7.5.4. *Soit $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$. Alors il existe $\mu_0 \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G}$ avec $\mu_0 \geq \mu$, tel que $\mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{\mu_0}_{\mu}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{lim}_{\mu})$.*

Démonstration.

Comme $\mathrm{Cht}^{\leq\mu}_{G}$ est un champ de Deligne-Munfold de type fini, le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^{j,\leq\mu}_{G}$ est de dimension finie. Donc le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{lim}_{\mu})$ est de dimension finie.

Considérons l'ensemble de sous-espaces vectoriels

$$\{\mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{\lambda}_{\mu}) \mid \lambda \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G}, \lambda \geq \mu\}.$$

C'est un système filtrant. De plus, on a

$$\varinjlim_{\lambda} \mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{\lambda}_{\mu}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{lim}_{\mu}).$$

En appliquant le lemme 7.5.2 aux $\mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{lim}_{\mu})$ et $\{\mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{\lambda}_{\mu}) \mid \lambda \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G}, \lambda \geq \mu\}$, on en déduit qu'il existe $\mu_0 \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G}$ avec $\mu_0 \geq \mu$, tel que $\mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{\mu_0}_{\mu}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{I}^{lim}_{\mu})$. □

Construction 7.5.5. i) On fixe un μ_C tel que

$$\Omega(C^0_G) \subset \{\lambda \in Z(C^0_G)^+ | \lambda \leq \mu_C\}.$$

ii) Pour μ_C, on fixe un $\mu_0 \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}}$ qui satisfait le lemme 7.5.4.

iii) Posons

$$\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q},\,\geq\mu_0}_{G} := \{\lambda \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{\mathrm{ad}}} \mid \lambda \geq \mu_0\}.$$

7.5.2 Démonstration du lemme 7.5.1

Lemme 7.5.6. *Sous les hypothèses du lemme 7.4.1, pour tout $\lambda \in Z(C^0_G)^+$, il existe un $\lambda' \in \Omega(C^0_G)$, $\lambda' \leq \lambda$, tel que le morphisme*

$$\mathrm{Ker}(H^{j,\leq\lambda'}_{G} \to \prod_{M} H'^{j}_{M}) \to \mathrm{Ker}(H^{j,\leq\lambda}_{G} \to \prod_{M} H'^{j}_{M})$$

soit surjectif.

Quand λ est déjà dans $\Omega(C_G^0)$, il suffit de prendre $\lambda' = \lambda$.

La démonstration ci-dessous n'introduit aucun argument nouveau par rapport à la démonstration de la propriété a) dans la section précédente. On l'écrit pour la commodité du lecture.

Démonstration.

On peut construire une chaine

$$\lambda^{(m)} \leq \lambda^{(m-1)} \leq \cdots \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(0)} = \lambda$$

avec $m \geq 0$ et

i) $\lambda^{(s)} \in Z(C_G^0)^+$ pour tout $s \in \{0, 1, \cdots, m\}$,

ii) $\lambda^{(s+1)} = \lambda^{(s)} - \alpha_{i_s}$ pour un $i_s \in \Gamma_G$,

iii) $\lambda^{(m)} \in \Omega(C_G^0)$.

(En effet, $\lambda^{(0)}$ satisfait i) et ii). Si on a déjà une chaine jusqu'à $\lambda^{(k)}$ avec $k \geq 0$ qui satisfait i) et ii), et si $\lambda^{(k)} \notin \Omega(C_G^0)$, par définition, il existe un $i_k \in \Gamma_G$ tel que $\lambda^{(k)} - \alpha_{i_k} \in Z(C_G^0)^+$. En posant $\lambda^{(k+1)} := \lambda^{(k)} - \alpha_{i_k}$, on obtient une chaine plus longue. On peut continuer ce processus jusqu'à une chaine qui satisfait i) ii) iii).)

Pour cette chaine, on a des morphismes

$$H_G^{j,\leq\lambda^{(m)}} \to H_G^{j,\leq\lambda^{(m-1)}} \to \cdots \to H_G^{j,\leq\lambda^{(1)}} \to H_G^{j,\leq\lambda}.$$

Leur composée est le morphisme

$$H_G^{j,\leq\lambda^{(m)}} \to H_G^{j,\leq\lambda}.$$

D'après le lemme 7.4.1, pour tout $k \in \{1, \cdots, m\}$, le morphisme

$$\mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq\lambda^{(k)}} \to \prod H_M'^{j}) \to \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq\lambda^{(k-1)}} \to \prod H_M'^{j})$$

est surjectif. On en déduit que le morphisme

$$\mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq\lambda^{(m)}} \to \prod H_M'^{j}) \to \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq\lambda} \to \prod H_M'^{j})$$

est surjectif.

Posons $\lambda' := \lambda^{(m)}$.

□

Lemme 7.5.7. *Pour tout $\lambda \in \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q},\,\geq\mu_0} \cap Z(C_G^0)^+$, où $\widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q},\,\geq\mu_0}$ est l'ensemble défini dans la construction 7.5.5, le morphisme*

$$H_G^{j,\leq\lambda} \to H_G^j$$

est injectif.

Démonstration. D'un côté, comme $\lambda \in Z(C_G^0)^+$, d'après le lemme 7.5.6, il existe un $\mu \in \Omega(C_G^0)$, $\mu \leq \lambda$, tel que

$$\mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \mu} \to \prod H_M^{'j}) \to \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \lambda} \to \prod H_M^{'j})$$

soit surjectif.

D'un autre côté, l'hypothèse $\lambda \in \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q},\, \geq \mu_0}$ dit que $\mu_0 \leq \lambda$, où μ_0 est associé à μ_C comme dans la construction 7.5.5.

On a $\mu \leq \mu_C \leq \mu_0 \leq \lambda$. Considérons les morphismes

$$H_G^{j,\leq \mu_C} \to H_G^{j,\leq \mu_0} \to H_G^{j,\leq \lambda} \to H_G^j.$$

$$\begin{array}{ccccccc} b' & \mapsto & b^0 & \mapsto & b & \mapsto & 0 \end{array}$$

On a $\mathrm{Ker}(\mathcal{I}_{\mu_C}^{\mu_0}) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{I}_{\mu_C}^{\lambda}) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{I}_{\mu_C}^{lim})$. Or d'après le lemme 7.5.4, $\mathrm{Ker}(\mathcal{I}_{\mu_C}^{\mu_0}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{I}_{\mu_C}^{lim})$, donc $\mathrm{Ker}(\mathcal{I}_{\mu_C}^{\lambda}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{I}_{\mu_C}^{lim})$.

Pour tout élément $b \in \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \lambda} \to H_G^j)$, on a $b \in \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \lambda} \to \prod H_M^{'j})$. Par la surjectivité, b provient d'un élément $b' \in \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \mu_C} \to \prod H_M^{'j})$. On a $b' \in \mathrm{Ker}(\mathcal{I}_{\mu_C}^{lim}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{I}_{\mu_C}^{\lambda})$, donc son image b dans $H_G^{j,\leq \lambda}$ est nulle. Comme conséquence, le morphisme $H_G^{j,\leq \lambda} \to H_G^j$ est injectif.

□

Construction 7.5.8. L'ensemble $\widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}} - \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q},\, \geq \mu_0}$ est borné. Donc on peut trouver une constante $C_G \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$, $C_G \geq C_G^0$, telle que

$$Z(C_G)^+ \subset \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q},\, \geq \mu_0}.$$

Finalement, on arrive à la

Démonstration du lemme 7.5.1. Prenons la constante C_G comme dans la construction 7.5.8 ci-dessus. Alors pour tout $\lambda \in Z(C_G)^+ \subset Z(C_G^0)^+$, on a $\lambda \in \widehat{\Lambda}_G^{\mathbb{Q},\, \geq \mu_0} \cap Z(C_G^0)^+$. D'après le lemme 7.5.7, le morphisme $H_G^{j,\leq \lambda} \to H_G^j$ est injectif. □

7.6 Conclusion et remarques

Exemple 7.6.1. Considérons le cas où $I = \emptyset$. Dans ce cas le seul groupe de cohomologie non nul est en degré 0. Pour tout quotient de Levi M, pour tout $\mu \in \widehat{\Lambda}_{G^{\mathrm{ad}}}^{+,\mathbb{Q}}$, on a

$$H_M^{'0,\leq^M \mu} = C_c(\mathrm{Bun}_{M,N}^{'\leq^M \mu}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G, \mathbb{Q}_\ell).$$

$$H_M^{'0} \subset C(\mathrm{Bun}'_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G, \mathbb{Q}_\ell).$$

Le morphisme

$$H_M^{'0,\leq^M\mu} \to H_M^{'0}$$

est injectif. Donc la constante $C_M = 0$ satisfait déjà la propriété c) de la proposition 7.1.4 pour M.

On prend $C_G^0 = C(G, X, N)$, alors la proposition 7.1.4 est vraie pour G. En particulier, la propriété b) implique le résultat classique : l'espace $H_G^{0,\mathrm{cusp}} = C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G, \mathbb{Q}_\ell)$ est de dimension finie.

Dans ce cas, la démonstration précédente se réduit à l'argument classique, que l'on rappelle pour la commodité du lecture.

Posons $\Omega_{G,N} := \Omega(C_G^0)$. Si une fonction f n'est pas dans

$$\bigcup_{\mu' \in \Omega_{G,N}} C_c(\mathrm{Bun}_{G,N}^{\leq\mu'}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G, \mathbb{Q}_\ell),$$

alors il existe un $\lambda \in Z(C_G^0)^+ - \Omega(C_G^0)$ tel que $f\big|_{\mathrm{Bun}_{G,N}^{=\lambda}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G} \neq 0$. Alors il existe un parabolique P tels que λ soit assez éloigné du mur associe à P. D'après l'exemple 6.4.1, la restriction du morphisme terme constant C_G^P sur $\mathrm{Bun}_{G,N}^{=\lambda}(\mathbb{F}_q)/\Xi$ est un isomorphisme :

$$C_G^{P,=\lambda} : C_c(\mathrm{Bun}_{G,N}^{=\lambda}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} C_c(\mathrm{Bun}_{M,N}^{'=\lambda}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G, \mathbb{Q}_\ell), \quad f \mapsto f^P.$$

Donc on a $f^P\big|_{\mathrm{Bun}_{M,N}^{'=\lambda}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G} \neq 0$. Cela implique que $f^P\big|_{\mathrm{Bun}_{M,N}^{'\leq\lambda}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G} \neq 0$. Or le morphisme

$$C(\mathrm{Bun}_{M,N}^{'\leq\lambda}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathbb{Q}_\ell) \to C(\mathrm{Bun}'_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$$

est injectif, donc $f^P \neq 0$. Par définition, $f \notin C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G, \mathbb{Q}_\ell)$.

Remarque 7.6.2. Dans le cas des fonctions, le morphisme

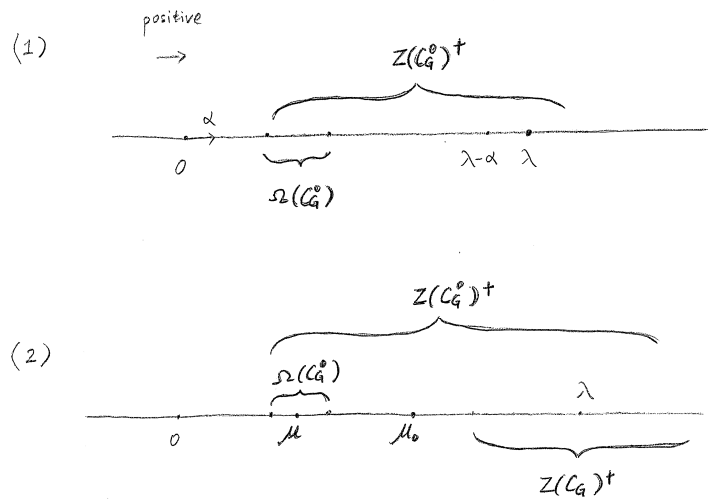
$$C(\mathrm{Bun}_{M,N}^{'\leq\lambda}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G, \mathbb{Q}_\ell) \to C(\mathrm{Bun}'_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi_G, \mathbb{Q}_\ell)$$

est injectif pour tout $\lambda \in \widehat{\Lambda}_{G\mathrm{ad}}^{+,\mathbb{Q}}$. Mais en général, on montre seulement que le morphisme $H_M^{'j,\leq\lambda} \to H_M^{'j}$ est injectif pour les λ assez éloignés du mur associé à P.

7.7 Illustration dans le cas GL_2, GL_3 et GL_4

7.7.1 Cas de GL_2

figure 1



Exemple 7.7.1. Soit $G = GL_2$. Notons B le sous-groupe Borel et T le tore. Notons α la seule racine simple de G. Prenons $C_G^0 := \widetilde{C}(G, X, N, W)$. Le cardinal de $\pi_1(GL_2^{\mathrm{ad}})$ est 2. Notons

$$Z(C_G^0)^+ := \{\mu \in \widehat{\Lambda}_G^{+,\mathbb{Q}} \mid \langle \mu, \alpha \rangle > C_G^0\}$$

$$\Omega(C_G^0) := \{\mu \in Z(C_G^0)^+ \mid \mu - \frac{1}{2}\alpha \notin Z(C_G^0)^+\}.$$

Une illustration de chambre de Weyl de G, l'ensemble $Z(C_G^0)^+$ et $\Omega(C_G^0)$ est donnée dans la figure 1 (1).

Dans ce cas, dans la démonstration de la proposition 7.1.4 a), les étapes 3) et 4) se simplifient parce que $\mathcal{C}_G^B(\overline{a}) = 0$ implique immédiatement que $a_T^S = 0$.

Quant à la propriété c), d'abord on remarque que $H_T^{k,=\mu}$ s'annule sauf si $k = 0$. En utilisant ce fait, on peut simplifier la démonstration pour $j \neq 1$:
pour tout $\lambda \in Z(C_M^0)^+$, on a

$$H_G^{j-1,=\lambda} \xrightarrow{\sim} H_T^{j-1,=\lambda} = 0.$$

La suite exacte longue

$$\cdots \to H_G^{j-1,=\lambda} \to H_G^{j,\leq\lambda-\frac{1}{2}\alpha} \to H_G^{j,\leq\lambda} \to H_G^{j,=\lambda} \to \cdots$$

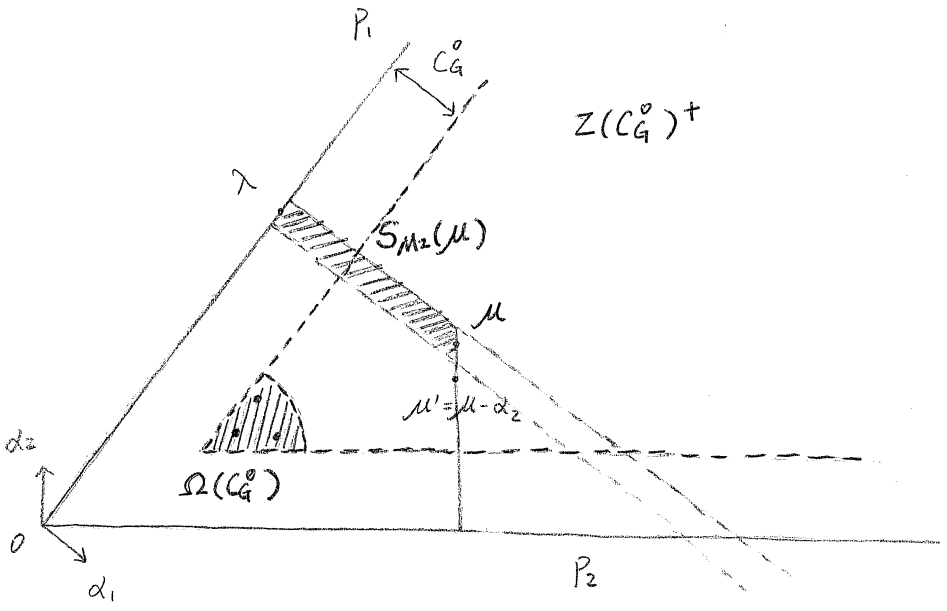
implique que $H_G^{j,\leq\lambda-\frac{1}{2}\alpha} \to H_G^{j,\leq\lambda}$ est injectif. Comme conséquence, pour tout $\mu \in Z(C_M^0)^+$, le morphisme $H_G^{j,\leq\mu} \to H_G^j$ est injectif.

Mais pour $j = 1$, on doit utiliser l'argument général dans la section 7.5 (illustré dans la figure 1 (2)) pour montrer que le morphisme $H_G^{-1,\leq\lambda} \to H_G^{-1}$ est injectif.

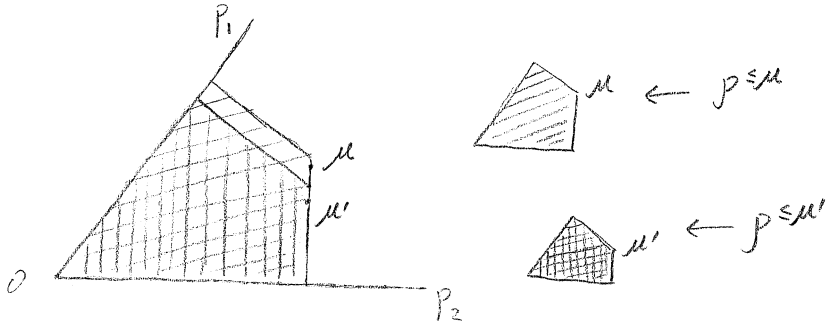
7.7.2 Cas de GL_3

figure 2

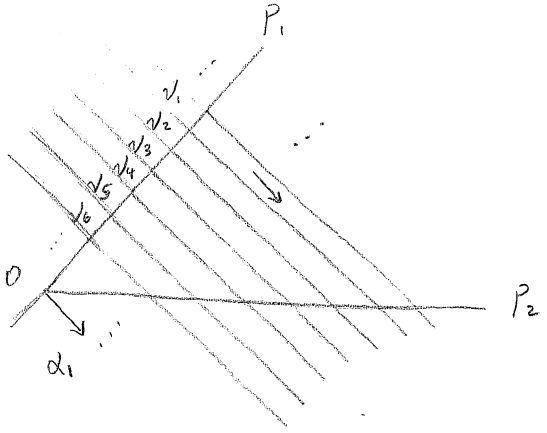
(1)



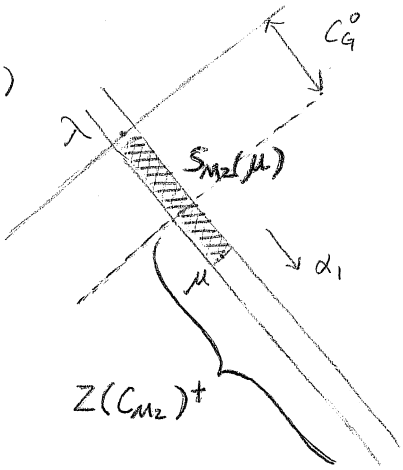
(2)



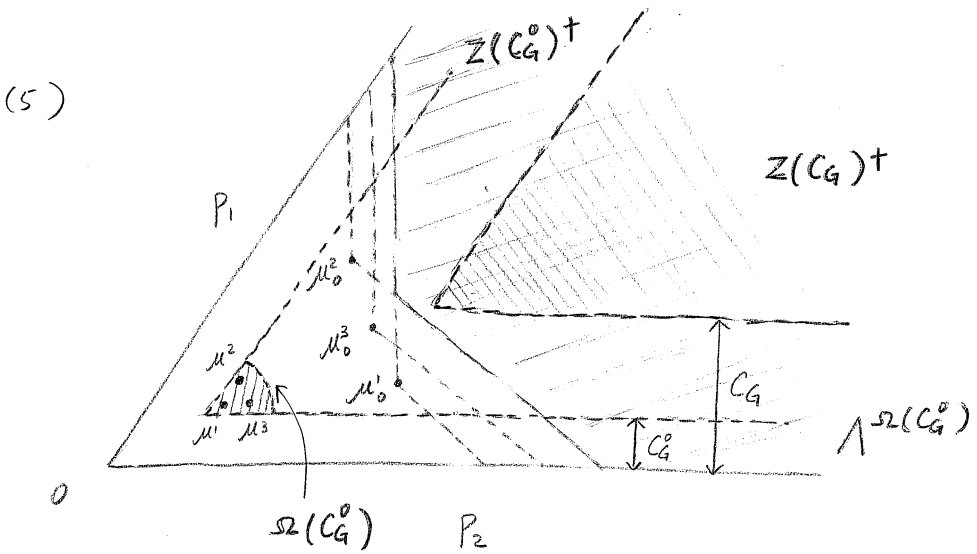
(3)



(4)



(5)



Exemple 7.7.2. Soit $G = GL_3$. Notons B le sous-groupe Borel standard (triangle supérieure). Notons $\alpha_1 = e_1 - e_2$ et $\alpha_2 = e_2 - e_3$ les deux racines simples. Alors le parabolique P_1 associé à α_1 est de la forme $(1,2)$ et $M_1 = GL_1 \times GL_2$. Et le parabolique P_2 associé à α_2 est de la forme $(2,1)$ et $M_2 = GL_2 \times GL_1$.

Appliquant l'exemple précédent aux M_1 et M_2, on obtient deux constantes C_{M_1} et C_{M_2}. Prenons

$$C_G^0 := Max\left\{C_{M_1},\ C_{M_2},\ \widetilde{C}(G,X,N,W)\right\}.$$

Le cardinal de $\pi_1(GL_3^{\mathrm{ad}})$ est 3. Notons

$$Z(C_G^0)^+ := \{\mu \in \widehat{\Lambda}_G^{+,\mathbb{Q}} \mid \langle \mu, \alpha\rangle > C_G^0\}$$

$$\Omega(C_G^0) := \{\mu \in Z(C_G^0)^+ \mid \mu - \frac{1}{3}\alpha \notin Z(C_G^0)^+\}.$$

Une illustration de chambre de Weyl de G (pour une composant connexe), l'ensemble $Z(C_G^0)^+$ et $\Omega(C_G^0)$ est donnée dans la figure 2 (1).

Maintenant on donne une illustration de la démonstration pour la propriété a) de la proposition 7.1.4 pour G :

Soit $\mu \in Z(C_G^0)^+ - \Omega(C_G^0)$. Supposons que $\mu - \frac{1}{3}\alpha_2 \in Z(C_G^0)^+$, comme dans la figure 2 (1). Notons $M := M_2$. Dans ce cas, l'ensemble $S_{M_2}(\mu) := \{\lambda \in \widehat{\Lambda}_G^+ \mid \lambda \leq^{M_2} \mu\}$ est illustré dans la figure 2 (1).

Notons $\mu' = \mu - \frac{1}{3}\alpha_2$. L'ensemble

$$\mathcal{P}^{\leq \mu} := \{\lambda \in \widehat{\Lambda}_G^{+,\mathbb{Q}} \mid \lambda \leq^G \mu\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^{\leq \mu'} := \{\lambda \in \widehat{\Lambda}_G^{+,\mathbb{Q}} \mid \lambda \leq^G \mu'\}$$

sont illustrés dans la figure 2 (2). On voit bien que $\mathcal{P}^{\leq \mu} = \mathcal{P}^{\leq \mu'} \cup S_{M_2}(\mu)$.

Considérons le diagramme commutatif de groupes de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccc} H_G^{j,\leq \mu'} & \longrightarrow & H_G^{j,\leq \mu} & \longrightarrow & H_G^{j,S_M(\mu)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H_M^{'j,\leq \mu'} & \longrightarrow & H_M^{'j,\leq \mu} & \longrightarrow & H_M^{'j,S_M(\mu)} \end{array} \tag{7.7.1}$$

où l'isomorphisme vient du lemme 7.2.6, appliqué à P_2 et $S_{M_2}(\mu)$. Remarquons que tout $\lambda \in S_{M_2}(\mu)$ est de la forme $\mu - n\alpha_1$ avec $n \in \mathbb{Q}^+$. Comme $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle < 0$, le copoids λ satisfait la condition

$$\langle \lambda, \alpha_2\rangle \geq \langle \mu, \alpha_2\rangle > C_G^0 \geq \widetilde{C}(G,X,N,W).$$

Dans la chambre de Weyl, cela signifie que tous les copoids dans $S_{M_2}(\mu)$ sont assez loin du mur P_2.

Dans la chambre de Weyl de G^{ad}, les composantes connexes de M_2 sont illustrées dans la figure 2 (3). En particulier, $\mathrm{Cht}_M^{S_{M_2}(\mu)}$ et $\mathrm{Cht}_M^{\leq \mu'}$ sont ouverts et fermés dans $\mathrm{Cht}_M^{\leq \mu}$. Comme conséquence, on a

$$H_M^{'j,\leq \mu} = H_M^{'j,\leq \mu'} \oplus H_M^{'j,S_M(\mu)}.$$

Maintenant soit $a \in \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \mu} \to H_M^{'j})$. Notons a_M son image dans $H_M^{'j,\leq \mu}$. Alors a_M est de la forme (a'_M, a_M^S) avec $a'_M \in H_M^{'j,\leq \mu'}$ et $a_M^S \in H_M^{'j,S_M(\mu)}$.

Dans l'ouvert fermé de Cht_M indicé par $\nu(\mu) := pr_P^{ad}(\mu)$, illustré dans la figure 2 (4), on a le morphisme du groupe de cohomologie d'un ouvert vers la limite inductive :

$$H_M^{j,S_M(\mu)} = H_M^{j,\leq^M \mu} \to H_M^{j,\nu(\mu)}.$$

Comme $C_G^0 \geq C_M$, par la propriété c) pour M dans l'exemple précédent, ce morphisme est injectif.

L'hypothèse $a \in \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \mu} \to H_M^{'j})$ implique que l'image de a_M^S dans la limite $H_M^{j,\nu(\mu)}$ est nulle. On en déduit que $a_M^S = 0$.

D'après la commutativité du diagramme (7.7.1), il existe un $a' \in \mathrm{Ker}(H_G^{j,\leq \mu'} \to H_M^{'j})$ dont l'image dans $H_G^{j,\leq \mu}$ est a.

Pour la propriété c), l'ensemble $\Lambda^{\Omega(C_G^0)}$ est illustré dans la figure 2 (5). On suit l'argument de la section 7.5. A la fin, on choisit une constante $C_G \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$, $C_G \geq C_G^0$, telle que

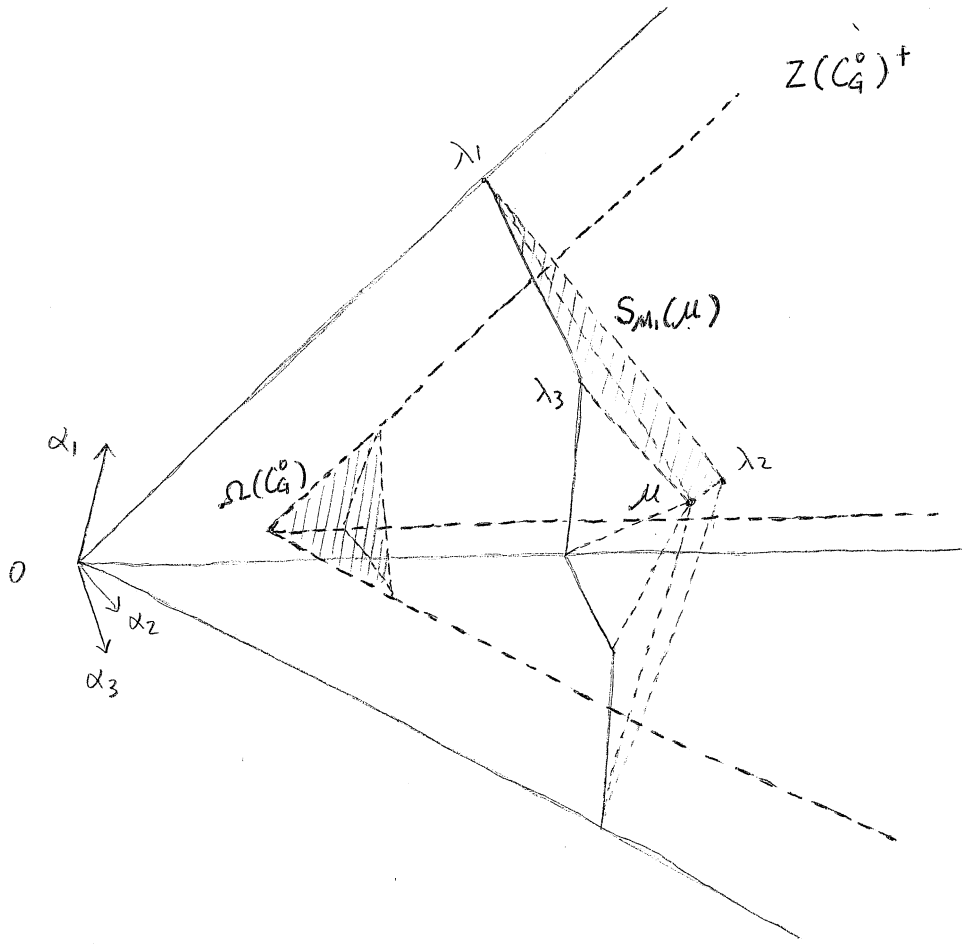
$$Z(C_G)^+ \subset \Lambda^{\Omega(C_G^0)}.$$

L'ensemble $Z(C_G)^+$ est illustré dans la figure 2 (5).

7.7.3 Cas de GL_4

figure 3

(1)

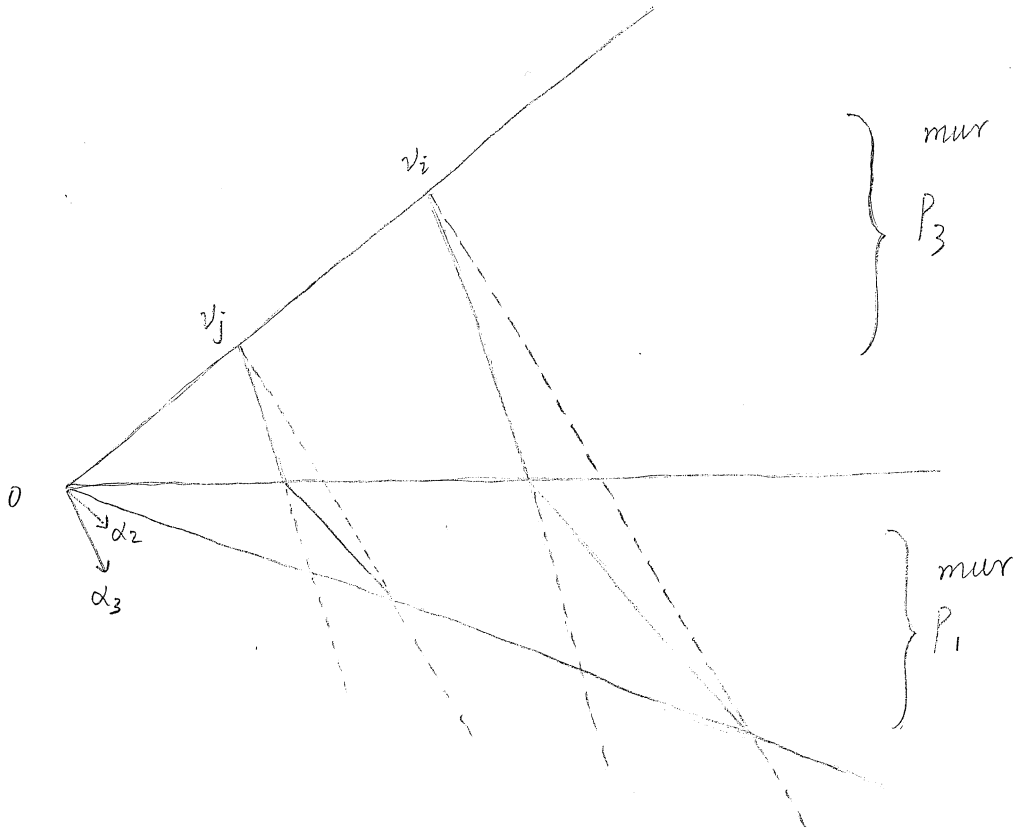


mur P_3

mur arrière : P_2

mur P_1

(2)

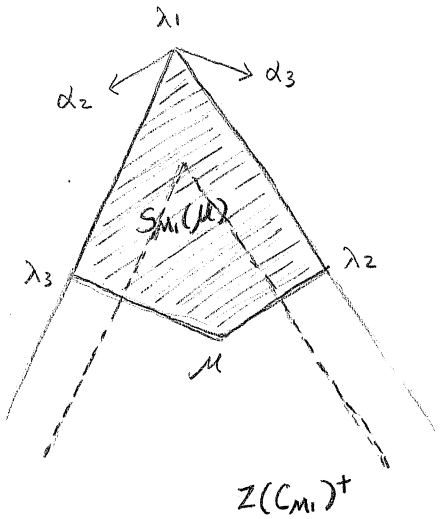


mur P_3

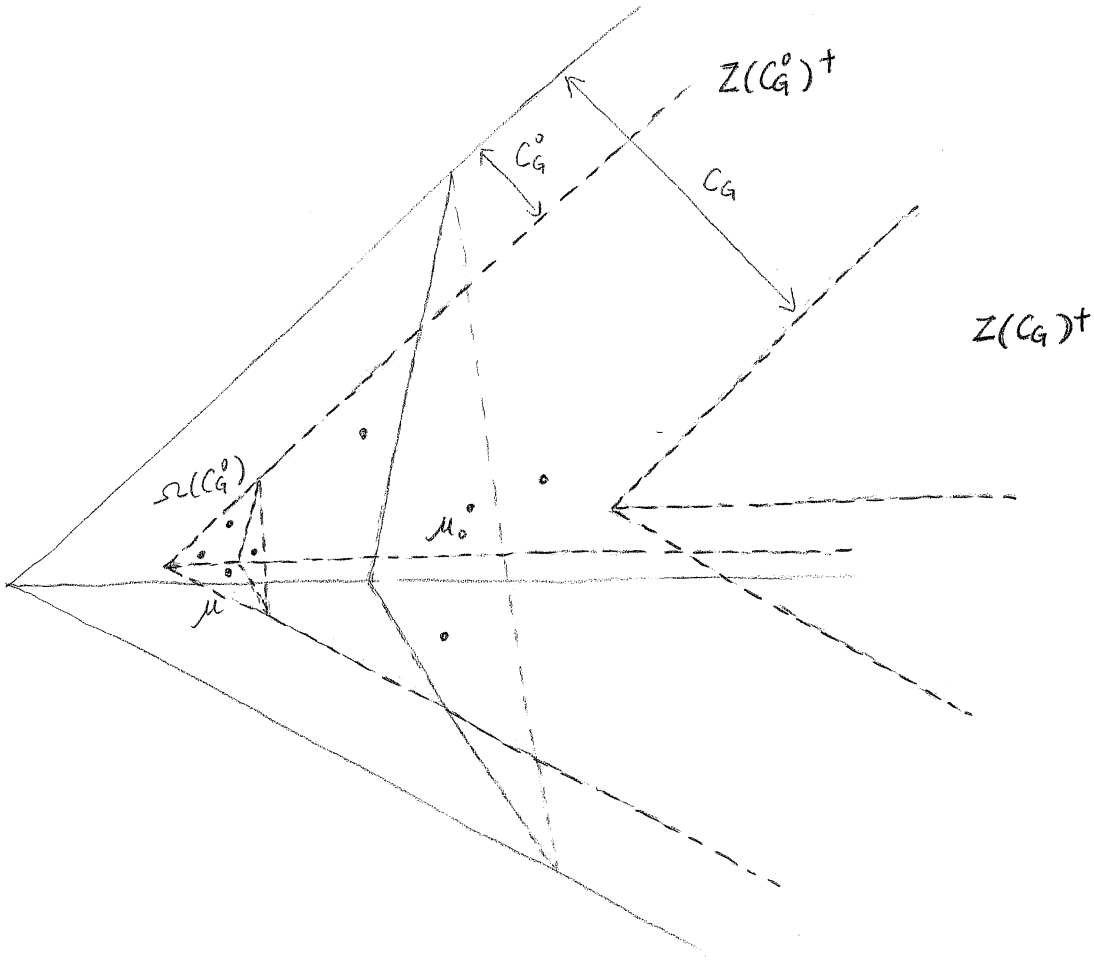
mur arrière P_2

mur P_1

(3)



(4)



Exemple 7.7.3. Soit $G = GL_4$. Notons B le sous-groupe de Borel standard (formé des matrices triangulaires supérieures). Notons $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$ et $\alpha_3 = e_3 - e_4$ les trois racines simples. Alors on a trois paraboliques maximaux :

Le parabolique P_1 associé à α_1 est de la forme $(1,3)$ et $M_1 = GL_1 \times GL_3$.

Le parabolique P_2 associé à α_2 est de la forme $(2,2)$ et $M_2 = GL_2 \times GL_2$.

Le parabolique P_3 associé à α_3 est de la forme $(3,1)$ et $M_3 = GL_3 \times GL_1$.

Appliquant les exemples précédents à M_1, M_2 et M_3, on obtient trois constantes C_{M_1}, C_{M_2} et C_{M_3}. Prenons

$$C_G^0 := Max\left\{C_{M_1},\ C_{M_2},\ C_{M_3},\ \widetilde{C}(G,X,N,W)\right\}.$$

Le cardinal de $\pi_1(GL_4^{\mathrm{ad}})$ est 4. Notons

$$Z(C_G^0)^+ := \{\mu \in \widehat{\Lambda}_G^{+,\mathbb{Q}} \mid \langle \mu, \alpha \rangle > C_G^0\}$$

$$\Omega(C_G^0) := \{\mu \in Z(C_G^0)^+ \mid \mu - \frac{1}{4}\alpha \notin Z(C_G^0)^+\}.$$

Une illustration de chambre de Weyl de G (pour une composant connexe), l'ensemble $Z(C_G^0)^+$ et $\Omega(C_G^0)$ est donnée dans la figure 3 (1).

Maintenant on donne une illustration de la démonstration du lemme 7.4.1, pour montrer la propriété a) de la proposition 7.1.4 pour G :

Soit $\mu \in Z(C_G^0)^+ - \Omega(C_G^0)$. Supposons que $\mu - \alpha_1 \in Z(C_G^0)^+$, comme dans la figure 3. Notons $M := M_1$ et $P := P_1$. Dans ce cas, l'ensemble $S_M(\mu)$ est illustré dans la figure 3 (1).

Remarquons que tout $\lambda \in S_M(\mu)$ est de la forme $\mu - n_2\alpha_2 - n_3\alpha_2$ avec $n_2, n_3 \in \mathbb{Q}^+$. Rappelons que si $i \neq j$, alors $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle < 0$. Donc λ satisfait la condition

$$\langle \lambda, \alpha_1 \rangle \geq \langle \mu, \alpha_1 \rangle > C_G^0 \geq \widetilde{C}(G,X,N,W).$$

Dans la chambre de Weyl, cela signifie que tous les copoids dans $S_M(\mu)$ sont assez loin du mur P.

Dans la chambre de Weyl de G, les composantes connexes de $M = M_1$ sont illustrées dans la figure 3 (2). En particulier, $\mathrm{Cht}_M^{S_M(\mu)}$ et $\mathrm{Cht}_M^{\leq \mu'}$ sont ouverts et fermés dans $\mathrm{Cht}_M^{\leq \mu}$. Comme conséquence, on a

$$H_M^{j,\leq \mu} = H_M^{j,\leq \mu'} \oplus H_M^{j,S_M(\mu)}.$$

La composante de Cht_M indexée par $\nu(\mu) := pr_P^{ad}(\mu)$ est illustrée dans la figure 3 (3). On a le morphisme de groupes de cohomologie d'un ouvert vers la limite inductive :

$$H_M^{j,S_M(\mu)} = H_M^{j,\leq^M \mu} \to H_M^{j,\nu(\mu)}.$$

Comme $C_G^0 \geq C_M$, par la propriété c) pour M dans l'exemple précédent, ce morphisme est injectif.

Pour la propriété c), l'ensemble $\Lambda^{\Omega(C_G^0)}$ est illustré dans la figure 3 (4). Ensuite, l'argument est comme dans la section 7.5. A la fin, on choisit une constante $C_G \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$, $C_G \geq C_G^0$, telle que

$$Z(C_G)^+ \subset \Lambda^{\Omega(C_G^0)}.$$

L'ensemble $Z(C_G)^+$ est illustré dans la figure 3 (4).

Remarque 7.7.4. Le cas de GL_4 est le premier cas qui n'est pas facile. Dans l'argument ci-dessus, on voit l'importance de la propriété c) de GL_3, qui est une conséquence de la finitude de la cohomologie cuspidale pour GL_3.

Chapitre 8

Cohomologie cuspidale et cohomologie Hecke-finie rationnelle

Ce chapitre a pour but de montrer la proposition 4.5.2 énoncée dans le chapitre 4 :

Proposition 8.0.5. *Les deux sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels $H^{j,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ et $H^{j,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ de H^j_G sont égaux pour tout degré j.*

Pour cela, on montre d'abord la compatibilité du morphisme terme constant avec les opérateurs de Hecke. Ensuite, on montre une inclusion $H^{j,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W} \subset H^{j,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ en utilisant le fait que $H^{j,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ est de dimension finie. A la fin, on montre l'inclusion dans l'autre sens $H^{j,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W} \supset H^{j,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ en utilisant le fait que les images du morphisme terme constant sont supportées sur les composants de $H^{'j}_M$ indexées par un translaté d'un cone, et que l'algèbre d'opérateurs de Hecke contient un groupe qui agit comme une translation sur les composants de $H^{'j}_M$.

8.1 Préparation

Soit v une place dans $X \smallsetminus N$. Notons $\mathfrak{T} = N \cup v$. Soit $f \in C_c(G(\mathcal{O}_v)\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), \mathbb{Q}_\ell)$.

Dans la section 4.4, on a vu qu'on peut associer un opérateur de Hecke $T(f)$ agissant sur la cohomologie du champ de chtoucas pour G. Il existe un $\kappa \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{ad}}$ (dépendant de f) tel que pour tout $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{ad}}$, on a un morphisme dans $D^c_b((X \smallsetminus \mathfrak{T})^I, \mathbb{Q}_\ell)$:

$$T(f) : \mathcal{H}^{\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} \to \mathcal{H}^{\leq\mu+\kappa}_{G,N,I,W}\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I}.$$

On a un morphisme canonique des algèbres de Hecke en v, qui est une inclusion :

$$C_c(G(\mathcal{O}_v)\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v),\mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow C_c(M(\mathcal{O}_v)\backslash M(F_v)/M(\mathcal{O}_v),\mathbb{Q}_\ell) \tag{8.1.1}$$

$$f \qquad \mapsto \qquad f^M : g \mapsto \int_{U(F_v)/U(\mathcal{O}_v)} f(gu)du.$$

Pour un κ assez grand, on a un morphisme

$$T(f^M) : \mathcal{H}'^{\leq\mu}_{M,N,I,W}\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} \to \mathcal{H}'^{\leq\mu+\kappa}_{M,N,I,W}\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I}.$$

Lemme 8.1.1. *Pour tout f comme ci-dessus, pour tout degré j, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \xrightarrow{T(f)} & \mathcal{H}^{j,\leq\mu+\kappa}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \\ \downarrow \mathcal{C}_G^{P,\,j,\,\leq\mu} & & \downarrow \mathcal{C}_G^{P,\,j,\,\leq\mu+\kappa} \\ \mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \xrightarrow{T(f^M)} & \mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu+\kappa}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \end{array} \tag{8.1.2}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes terme constant.

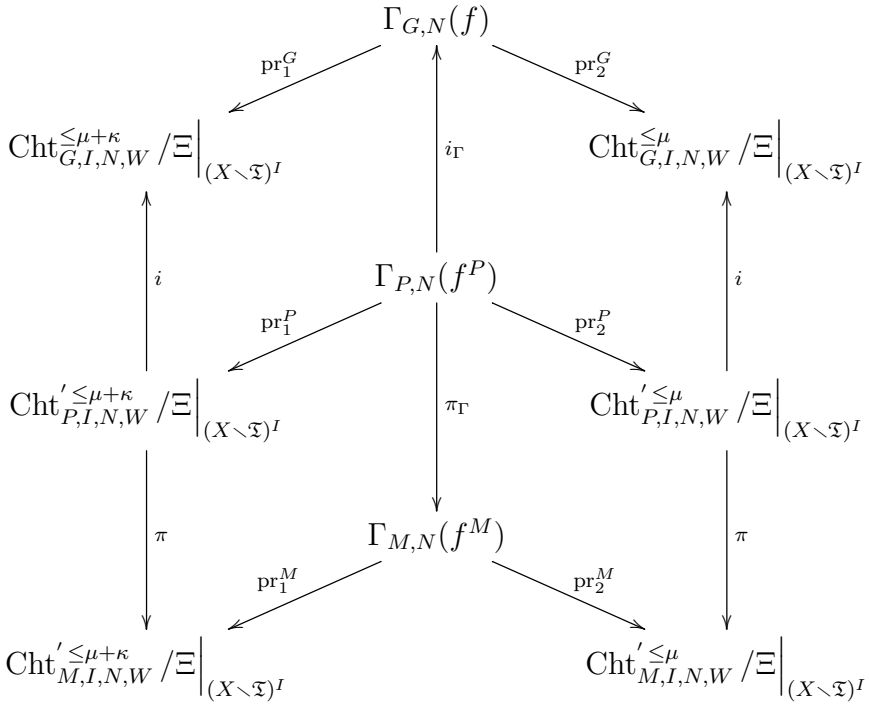
Démonstration.

Considérons le cas où f est la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{G(\mathcal{O}_v)gG(\mathcal{O}_v)}$, pour $g \in G(F_v)$. Par la section 2.4 du chapitre 2, f donne une correspondance cohomologique sur la première ligne dans le diagramme (8.1.3) ci-dessous.

Notons f^P la restriction de f sur $P(F_v)$. Alors f^P donne une correspondance cohomologique sur la deuxième ligne dans le diagramme (8.1.3) ci-dessous.

On a f^M défini par le morphisme (8.1.1). Alors f^M donne une correspondance cohomologique sur la troisième ligne dans le diagramme (8.1.3) ci-dessous.

On a un diagramme commutatif des champs algébriques :



(8.1.3)

1) Par définition, $\Gamma_{G,N}(f)$ est associé à la $G(\mathcal{O}_v)$-orbite

$$gG(\mathcal{O}_v)/G(\mathcal{O}_v)$$

dans $G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$. Les morphismes pr_1^G et pr_2^G sont finis étales de degré le cardinal $\sharp\big(gG(\mathcal{O}_v)/G(\mathcal{O}_v)\big)$. La correspondance de Hecke $T(f)$ est induite par :

$$(\mathrm{pr}_1^G)_!(\mathrm{pr}_2^G)^*\mathcal{F}_G \to \mathcal{F}_G.$$

Comme $G(F_v) = P(F_v)G(\mathcal{O}_v)$, on a $G(F_v)/G(\mathcal{O}_v) = P(F_v)/P(\mathcal{O}_v)$. Ainsi on peut voir la $G(\mathcal{O}_v)$-orbite $gG(\mathcal{O}_v)/G(\mathcal{O}_v)$ comme une réunion des $P(\mathcal{O}_v)$-orbites dans $P(F_v)/P(\mathcal{O}_v)$:

$$\bigsqcup_\nu g_\nu^P P(\mathcal{O}_v)/P(\mathcal{O}_v).$$

La correspondance $\Gamma_{P,N}(f^P)$ est associée à cette réunion des $P(\mathcal{O}_v)$-orbites.

Pour chaque ν, les morphismes $(\mathrm{pr}_1^P)_\nu$ et $(\mathrm{pr}_2^P)_\nu$ sont finis étales de degré le cardinal $\sharp\big(g_\nu^P P(\mathcal{O}_v)/P(\mathcal{O}_v)\big)$. La correspondance de Hecke $T(f^P)$ est induite par :

$$(\mathrm{pr}_1^P)_!(\mathrm{pr}_2^P)^*\mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P.$$

Le carré en haut à gauche dans le diagramme (8.1.3) est cartésien. On a

$$i^*(\mathrm{pr}_1^G)_!(\mathrm{pr}_2^G)^* = (\mathrm{pr}_1^P)_!(i_\Gamma)^*(\mathrm{pr}_2^G)^* = (\mathrm{pr}_1^P)_!(\mathrm{pr}_2^P)^* i^*.$$

On en déduit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \xrightarrow{T(f)} & \mathcal{H}^{j,\leq\mu+\kappa}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}'^{j,\leq\mu}_{P,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \xrightarrow{T(f^P)} & \mathcal{H}'^{j,\leq\mu+\kappa}_{P,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \end{array}$$

2) Pour chaque $P(\mathcal{O}_v)$-orbite $g_\nu^P P(\mathcal{O}_v)/P(\mathcal{O}_v)$ dans $P(F_v)/P(\mathcal{O}_v)$, la projection par $P(F_v)/P(\mathcal{O}_v) \to M(F_v)/M(\mathcal{O}_v)$ est une $M(\mathcal{O}_v)$-orbite $g_\nu^M P(\mathcal{O}_v)/P(\mathcal{O}_v)$ dans $M(F_v)/M(\mathcal{O}_v)$. On a

$$f^M = \sum_\nu m(g_\nu^P)\mathbf{1}_{M(\mathcal{O}_v)g_\nu^M M(\mathcal{O}_v)}.$$

Pour chaque ν, les morphismes $(\mathrm{pr}_1^M)_\nu$ et $(\mathrm{pr}_2^M)_\nu$ sont finis étales de degré le cardinal $\sharp\big(g_\nu^M M(\mathcal{O}_v)/M(\mathcal{O}_v)\big)$. Pour chaque ν, on a

$$m(g_\nu^P)\sharp\big(g_\nu^M M(\mathcal{O}_v)/M(\mathcal{O}_v)\big) = \sharp\big(g_\nu^P P(\mathcal{O}_v)/P(\mathcal{O}_v)\big).$$

La correspondance de Hecke $T(f^M)$ est induite par :

$$(\mathrm{pr}_1^M)_!(\mathrm{pr}_2^M)^*\mathcal{F}_M \to \mathcal{F}_M.$$

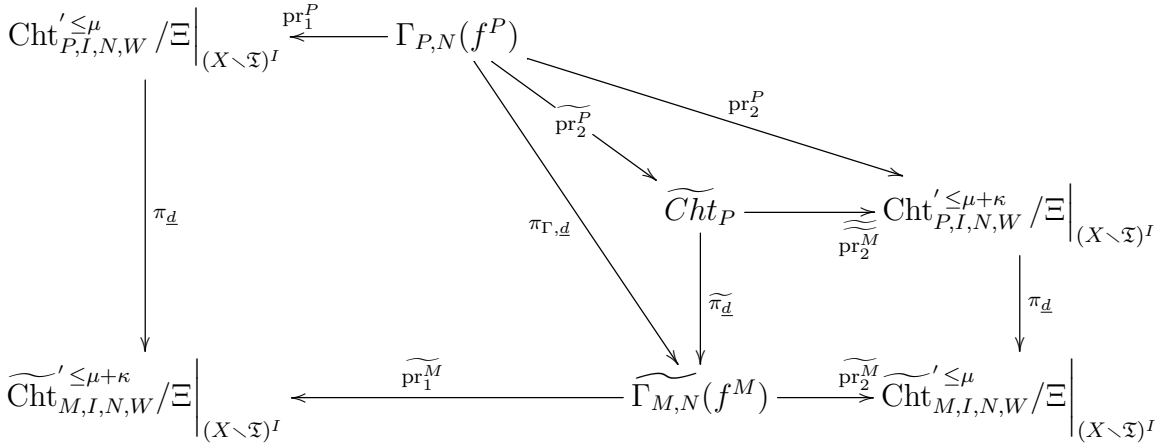
Maintenant nous avons besoin de voir π comme la composée $\widetilde{\pi}^0_{\underline{d}} \circ \pi_{\underline{d}}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Cht}'^{\leq\mu+\kappa}_{P,I,N,W}/\Xi\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} & \xleftarrow{\mathrm{pr}_1^P} & \Gamma_{P,N}(f^P) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2^P} & \mathrm{Cht}'^{\leq\mu}_{P,I,N,W}/\Xi\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\Gamma,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\underline{d}}} \\ \widetilde{\mathrm{Cht}}'^{\leq\mu+\kappa}_{M,I,N,W}/\Xi\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} & \xleftarrow{\widetilde{\mathrm{pr}}_1^M} & \widetilde{\Gamma_{M,N}}(f^M) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{pr}}_2^M} & \widetilde{\mathrm{Cht}}'^{\leq\mu}_{M,I,N,W}/\Xi\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\pi}^0_{\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\pi}^0_{\Gamma,\underline{d}}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\pi}^0_{\underline{d}}} \\ \mathrm{Cht}'^{\leq\mu+\kappa}_{M,I,N,W}/\Xi\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} & \xleftarrow{\mathrm{pr}_1^M} & \Gamma_{M,N}(f^M) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2^M} & \mathrm{Cht}'^{\leq\mu}_{M,I,N,W}/\Xi\Big|_{(X\smallsetminus\mathfrak{T})^I} \end{array}$$

Les deux carrés en bas sont cartésiens. Donc le diagramme suivant de foncteurs est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{\pi}^0_{\underline{d}})_!(\widetilde{\mathrm{pr}}_1^M)_!(\widetilde{\mathrm{pr}}_2^M)^* & \longrightarrow & (\widetilde{\pi}^0_{\underline{d}})_! \\ \downarrow \simeq & & \downarrow = \\ (\mathrm{pr}_1^M)_!(\mathrm{pr}_2^M)^*(\widetilde{\pi}^0_{\underline{d}})_! & \longrightarrow & (\widetilde{\pi}^0_{\underline{d}})_! \end{array} \tag{8.1.4}$$

Les deux carrés en haut ne sont pas cartésiens. On fait apparaitre un carré cartésien :



Par le même argument que la section 3.5.1 du chapitre 3, on montre que le morphisme

$$(\widetilde{\mathrm{pr}}_2^P)_\nu : \Gamma_{P,N}(f^P)_\nu \to (\widetilde{Cht}_P)_\nu$$

est fini étale de degré $\sharp\big(g_\nu^P P(\mathcal{O}_v)/P(\mathcal{O}_v)\big)/\sharp\big(g_\nu^M M(\mathcal{O}_v)/M(\mathcal{O}_v)\big) = m(g_\nu^P)$. Le diagramme des foncteurs suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\pi_{\underline{d}})_!(\mathrm{pr}_1^P)_!(\mathrm{pr}_2^P)^* & \longrightarrow & (\pi_{\underline{d}})_! \\ \downarrow = & & \\ (\widetilde{\mathrm{pr}}_1^M)_!(\widetilde{\pi}_{\underline{d}})_!(\widetilde{\mathrm{pr}}_2^P)_!(\widetilde{\mathrm{pr}}_2^P)^*(\widetilde{\widetilde{\mathrm{pr}}}_2^M)^* & & \\ \downarrow \mathrm{Tr} & & \downarrow = \\ (\widetilde{\mathrm{pr}}_1^M)_!(\widetilde{\pi}_{\underline{d}})_!(\widetilde{\widetilde{\mathrm{pr}}}_2^M)^* & & \\ \downarrow \simeq & & \\ (\widetilde{\mathrm{pr}}_1^M)_!(\widetilde{\mathrm{pr}}_2^M)^*(\pi_{\underline{d}})_! & \longrightarrow & (\pi_{\underline{d}})_!. \end{array} \tag{8.1.5}$$

En combinant le diagramme (8.1.5) avec le diagramme (8.1.4), on en déduit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
(\widetilde{\pi^0_{\underline{d}}})_!(\pi_{\underline{d}})_!(\mathrm{pr}_1^P)_!(\mathrm{pr}_2^P)^* i^*\mathcal{F}_G & \longrightarrow & (\widetilde{\pi^0_{\underline{d}}})_!(\pi_{\underline{d}})_! i^*\mathcal{F}_G \\
\downarrow & & \downarrow = \\
(\widetilde{\pi^0_{\underline{d}}})_!(\widetilde{\mathrm{pr}_1^M})_!(\widetilde{\mathrm{pr}_2^M})^*(\pi_{\underline{d}})_! i^*\mathcal{F}_G & \longrightarrow & (\widetilde{\pi^0_{\underline{d}}})_!(\pi_{\underline{d}})_! i^*\mathcal{F}_G \\
\downarrow \simeq & & \downarrow = \\
(\mathrm{pr}_1^M)_!(\mathrm{pr}_2^M)^*(\widetilde{\pi^0_{\underline{d}}})_!(\pi_{\underline{d}})_! i^*\mathcal{F}_G & \longrightarrow & (\widetilde{\pi^0_{\underline{d}}})_!(\pi_{\underline{d}})_! i^*\mathcal{F}_G \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathrm{pr}_1^M)_!(\mathrm{pr}_2^M)^*\mathcal{F}_M & \longrightarrow & \mathcal{F}_M
\end{array}$$

Comme $\widetilde{pr_2^P}$ est fini étale, la flèche composée

$$\mathrm{Id} \to (\widetilde{pr_2^P})_*(\widetilde{pr_2^P})^* = (\widetilde{pr_2^P})_!(\widetilde{pr_2^P})^! \to \mathrm{Id}$$

est la multiplication par son degré.

On en déduit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu}_{P,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \xrightarrow{T(f^P)} & \mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu+\kappa}_{P,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \\
\downarrow \mathcal{C}_G^{P,\,j,\,\leq\mu} & & \downarrow \mathcal{C}_G^{P,\,j,\,\leq\mu+\kappa} \\
\mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \xrightarrow{T(f^M)} & \mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu+\kappa}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I}
\end{array}$$

□

Comme conséquence, le morphisme terme constant est compatible avec les opérateurs de Hecke :

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \xrightarrow{T(f)} & \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu}_{G,N,I,W}\Big|_{\eta^I} \\
\downarrow \mathcal{C}_G^{P,\,j} & & \mathcal{C}_G^{P,\,j} \downarrow \\
\varinjlim_{\mu'} \mathcal{H}^{j,\leq\mu'}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I} & \xrightarrow{T(f^M)} & \varinjlim_{\mu'} \mathcal{H}'^{\,j,\leq\mu'}_{M,N,I,W}\Big|_{\eta^I}
\end{array} \tag{8.1.6}$$

Remarque 8.1.2. Cas $I = \emptyset$, $N = \emptyset$. Dans ce cas, il n'y a pas de $\underline{d}$. On a vu dans l'exemple 5.5.1 que

$$\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q) \leftarrow \mathrm{Bun}_P(\mathbb{F}_q) \rightarrow \widetilde{\mathrm{Cht}}_{M,\emptyset} \xrightarrow{=} \mathrm{Bun}_M(\mathbb{F}_q)$$

est le même que (5.5.4), avec les actions des opérateurs de Hecke :

$$T(f) \qquad T(f^P) \qquad T(f^P) \qquad T(f^M)$$

8.2 Démonstration de la proposition

8.2.1 La cohomologie cuspidale est Hecke-finie rationnelle

D'abord, on a une inclusion :

$$H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W} \subset H^{j,\,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}.$$

En effet, d'après le diagramme commutatif (8.1.6) ci-dessus, $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ est stable sous les actions des opérateurs de Hecke $C_c(G(O_v)\backslash G(F_v)/G(O_v), E)$. De plus, d'après le théorème 4.5.1, le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ est de dimension finie. Par définition de $H^{j,\,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ dans la section 4.4, on en déduit que $H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W} \subset H^{j,\,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$.

8.2.2 La cohomologie Hecke-finie rationnelle est cuspidale

Ensuite on va montrer l'inclusion dans l'autre sens :

$$H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W} \supset H^{j,\,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}.$$

Pour cela, on a besoin d'un lemme général :

Lemme 8.2.1. *Soient A, B deux E-algèbres commutatives et $\Phi : A \to B$ un morphisme d'algèbres. Soient $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ deux E-espaces vectoriels munis d'une action de A et de B respectivement. Soit $\Theta : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ un morphisme qui commute avec les actions de A et B, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif pour tout $a \in A$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{W} \\ {\scriptstyle a}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Phi(a)} \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{W} \end{array}$$

i) Soit $x \in \mathcal{V}$. Si B est finie sur A et le sous-E-espace vectoriel $A \cdot x$ de $\mathcal{V}$ est de dimension finie, alors le sous-E-espace vectoriel $B \cdot \Theta(x)$ de $\mathcal{W}$ est aussi de dimension finie.

ii) Soit Λ un groupe additif muni d'un ordre partiel $\prec$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, notons $\Lambda^\lambda := \{\nu' \in \Lambda \mid \nu' \preccurlyeq \lambda\}$. On suppose que $\mathcal{W}$ est une somme partiellement complétée des espaces vectoriels indexés par Λ :

$$\mathcal{W} = \widehat{\bigoplus_{\nu\in\Lambda}} \mathcal{W}^\nu$$
$$:= \{(w_\nu) \in \prod_{\nu\in\Lambda} \mathcal{W}^\nu \mid \text{ il existe un } \lambda \in \Lambda, \text{ tel que } w_\nu = 0 \text{ pour tout } \nu \notin \Lambda^\lambda\}.$$

Si B contient un élément (inversible) b tel qu'il existe un élément non nul $\xi(b) \in \Lambda$, tel que pour tout $\nu \in \Lambda$, l'action de b induit un isomorphisme :

$$b : \ \mathcal{W}^\nu \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}^{\nu+\xi(b)}.$$

On suppose que pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a l'inégalité stricte $\lambda \prec \lambda + \xi(b)$. Soit $y \in \mathcal{W}$ non nul. Alors le sous-E-espace vectoriel $B \cdot y$ de $\mathcal{W}$ est de dimension infinie.

Démonstration.

i) Comme B est un A-module de type fini, il existe un ensemble fini J et des éléments $b_j \in B$ pour tout $j \in J$ tel que

$$B = \sum_{j\in J} b_j \Phi(A).$$

Ainsi,

$$B \cdot \Theta(x) = \big(\sum_{j\in J} b_j \Phi(A)\big) \cdot \Theta(x) = \sum_{j\in J} b_j \Theta(A \cdot x).$$

L'hypothèse que $A \cdot x$ est de dimension finie implique que $\Theta(A \cdot x)$ l'est aussi. Donc $b_j\Theta(A \cdot x)$ est de dimension finie. Donc $B \cdot \Theta(x)$ est de dimension finie.

ii) Pour tout élément $w \in \mathcal{W}$, on note w_ν sa projection sur $\mathcal{W}^\nu$. Et on note $w = (w_\nu)_{\nu\in\Lambda}$. On dit que w est supporté sur une cone Λ^μ si $w_\nu = 0$ pour tout $\nu \notin \Lambda^\mu$.

Avec cette notation, on a

$$y = (y_\nu)_{\nu\in\Lambda}.$$

Pour tout $\nu \in \Lambda$, on a un isomorphisme $b \cdot \mathcal{W}^\nu \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}^{\nu+\xi(b)}$. Cela implique que

$$b \cdot y = (b \cdot y_\nu)_{\nu\in\Lambda}, \text{ avec } b \cdot y_\nu \in \mathcal{W}^{\nu+\xi(b)}.$$

Comme y est non nul, il existe un $\lambda \in \Lambda^\mu$ tel que $y_\lambda \neq 0$. Comme b est inversible, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $b^n \cdot y_\lambda \neq 0$.

Par définition, y est supporté sur un cône Λ^μ, pour $\mu \in \Lambda$.

Quand n est assez grand, $\lambda + n\xi(b)$ n'appartient plus à Λ^μ. Donc l'élément $b^n \cdot y$ n'est plus supporté sur Λ^μ car $(b^n \cdot y)_{\lambda+n\xi(b)} = b^n \cdot y_\lambda \neq 0$. On remarque que $b^n \cdot y$ est supporté sur la cône $\Lambda^{\mu+n\xi(b)}$.

De même, pour tout $m \geq 2$, l'élément $b^{mn} \cdot y$ est supporté sur la cône $\Lambda^{\mu+mn\xi(b)}$, mais n'est pas supporté sur $\Lambda^{\mu+(m-1)n\xi(b)}$ car $(b^{mn} \cdot y)_{\lambda+mn\xi(b)} \neq 0$.

Donc l'espace engendré par $b^{\mathbb{Z}} \cdot y$ est de dimension infinie. Comme $B \supset b^{\mathbb{Z}}$, l'espace $B \cdot y$ est aussi de dimension infinie.

□

Avant de donner la démonstration de l'inclusion, on a besoin d'une propriété des algèbres de Hecke. On peut voir $C_c(M(O_v)\backslash M(F_v)/M(O_v), \mathbb{Q}_\ell)$ comme une $C_c(G(O_v)\backslash G(F_v)/G(O_v), \mathbb{Q}_\ell)$-algèbre par (8.1.1).

Lemme 8.2.2. *L'algèbre $C_c(M(O_v)\backslash M(F_v)/M(O_v), \mathbb{Q}_\ell)$ est finie sur $C_c(G(O_v)\backslash G(F_v)/G(O_v), \mathbb{Q}_\ell)$.*

□

Démonstration de l'inclusion.

Soit $a \in H^{\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$. Soit v une place dans $X \smallsetminus N$.

1) D'un côté, par définition de la cohomologie Hecke-fini rationnelle, le E-espace vectoriel

$$C_c(G(O_v)\backslash G(F_v)/G(O_v), E) \cdot a$$

est de dimension finie. Pour tout parabolique propre P avec Levi M, on applique le i) du lemme 8.2.1 à

$E = \mathbb{Q}_\ell$

$A = C_c(G(O_v)\backslash G(F_v)/G(O_v), E)$,

$B = C_c(M(O_v)\backslash M(F_v)/M(O_v), E)$,

$\Phi : A \to B$ donné par $f \mapsto f^M$ comme dans (8.1.1),

$\mathcal{V} = H^j_{G,N,I,W}$

$\mathcal{W} = H^{'\,j}_{M,N,I,W}$

$\Theta : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est le morphisme terme constant $\mathfrak{C}^{P,\,j}_G$.

D'après le lemme, le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel

$$C_c(M(O_v)\backslash M(F_v)/M(O_v), \mathbb{Q}_\ell) \cdot \mathfrak{C}^{P,\,j}_G(a)$$

est de dimension finie.

2) D'un autre côté, l'algèbre de Hecke $C_c(M(O_v)\backslash M(F_v)/M(\mathcal{O}_v), E)$ pour M en place v contient un algèbre de groupe $E[Z_M(F_v)/Z_M(\mathcal{O}_v)]$.

Soit $g \in Z_M(F_v)$ mais $g \notin Z_M(\mathcal{O}_v)$. Dans le chapitre 2, on a vu que g agit sur Cht_M via $Z_M(F_v) \to Z_M(\mathbb{A}) \to \mathrm{Bun}_{Z_M}(\mathbb{F}_q)$, par torsion d'un M-torseur par un Z_M-torseur. De plus, notons $\xi(g)$ son image par le morphisme composé :

$$Z_M(F_v) \to \mathrm{Bun}_{Z_M}(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Bun}_M(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{Bun}_M \xrightarrow{\deg_M} \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M} \to \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}.$$

Rappelons que pour tout $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, l'action de g induit un isomorphisme (dont l'inverse est induit par g^{-1})

$$g : \mathrm{Cht}^{\nu}_M /\Xi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cht}^{\nu+\xi(g)}_M /\Xi.$$

Notons f_g la fonction caractéristique de g, c'est-à-dire que $f_g := 1_{M(\mathcal{O}_v)gM(\mathcal{O}_v)}$. Alors on a

$$E[Z_M(F_v)/Z_M(\mathcal{O}_v)] \hookrightarrow C_c(M(O_v)\backslash M(F_v)/M(\mathcal{O}_v), E)$$

$$\sum a_n[g] \mapsto \sum a_n f_g.$$

De plus, fixons un $t \in \mathbb{G}_m(F_v)/\mathbb{G}_m(\mathcal{O}_v)$ qui est de degré positif. Alors pour tout $\lambda \in \widehat{\Lambda}_{Z_M}$, $\lambda(t)$ est un élément dans $Z_M(F_v)/Z_M(\mathcal{O}_v)$. On a

$$E[\widehat{\Lambda}_{Z_M}] \hookrightarrow E[Z_M(F_v)/Z_M(\mathcal{O}_v)]$$

$$\sum a_n\lambda_n \mapsto \sum a_n[\lambda_n(t)].$$

Comme $a \in H^j_{G,N,I,W}$, il existe un $\mu \in \widehat{\Lambda}^{+,\mathbb{Q}}_{G^{ad}}$ tel que a est l'image d'un élément dans $H^{j,\leq\mu}_{G,N,I,W}$. On a vu dans le chapitre 4 que $\mathcal{C}^{P,\,j}_G(a)$ provient d'un élément dans $H'^{\,j,\leq\mu}_{M,N,I,W}$, donc est supporté sur les composants de $H'^{\,j}_{M,N,I,W}$ indexées par le cône $\widehat{\Lambda}^{\mu}_{Z_M/Z_G} \subset \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$. Si $\mathcal{C}^{P,\,j}_G(a) \neq 0$, alors on peut appliquer ii) du lemme 8.2.1 à

$E, A, B, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ comme dans 1),

$\Lambda := \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$, avec l'ordre partiel donné par $\nu' \leq \nu$ ssi $\iota^{ad}_P(\nu') \leq^{G^{ad}} \iota^{ad}_P(\nu)$.

$\mathcal{W}^{\nu} := H'^{\,j,\,\nu}_{M,N,I,W}$, pour tout $\nu \in \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$

$b := T(f_g)$ l'opérateur de Hecke pour M en place v associe à un élément g d'ordre infini dans $Z_M(F_v)$, $g \notin Z_G(F_v)$, $g \notin Z_M(O_v)$

$\xi(b) = \xi(g)$;

$y = \mathcal{C}^{P,\,j}_G(a) \in H'^{\,j,\,\leq\mu}_{M,N,I,W}$.

On en déduit que le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel

$$C_c(M(O_v)\backslash M(F_v)/M(O_v),\mathbb{Q}_\ell)\cdot \mathcal{C}_G^{P,\,j}(a)$$

est de dimension infinie.

3) De 1) et 2), on déduit que

$$\mathcal{C}_G^{P,\,j}(a)=0 \quad \text{pour tout } P.$$

C'est-à-dire que $a\in H^{j\ \mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$.

□

Remarque 8.2.3. Il y a deux démonstrations alternatives :

a) En utilisant la remarque 4.3.4 du chapitre 4, on peut aussi montrer l'inclusion $H^{j,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}\supset H^{j,\mathrm{Hf-rat}}_{G,N,I,W}$ en raisonnant seulement sur les paraboliques maximaux. Dans ce cas, l'ensemble $\widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$ et l'ordre partiel est seulement l'ordre ordinaire dans $\mathbb{Q}$.

b) On peut utiliser une fonction $\psi : \widehat{\Lambda}^{\mathbb{Q}}_{Z_M/Z_G}\to\mathbb{Q}$ dont la restriction sur $A_P^{ad}:=pr_P^{ad}(\widehat{\Lambda}_{M/Z_G})$ est $A_P^{ad}\to\mathbb{Z}$. Ainsi, on peut voir $H^{'\,j}_{M,N,I,W}$ comme une famille $(H^{'\,j,\,n}_{M,N,I,W})$ indexée par $n\in\mathbb{Z}$, avec $H^{'\,j,\,n}_{M,N,I,W}=\bigoplus_{\psi(\nu)=n} H^{'\,j,\,\nu}_{M,N,I,W}$. Dans ce cas, il suffit de montrer le lemme 8.2.1 ii) avec $\Lambda=\mathbb{Z}$.

8.3 Remarques et exemples

Remarque 8.3.1. Chtoucas sans patte

On applique le lemme 8.2.1 à :
$A=C_c(G(O_v)\backslash G(F_v)/G(O_v),\mathbb{Q}_\ell)$,
$B=C_c(M(O_v)\backslash M(F_v)/M(O_v),\mathbb{Q}_\ell)$,
$\Phi : f\mapsto f^M$,
$\mathcal{V}=C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi,\mathbb{Q}_\ell)$
$\mathcal{W}=\widehat{\bigoplus_\nu} C((U(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi)^\nu,\mathbb{Q}_\ell)\subset C(U(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi,\mathbb{Q}_\ell)$

On retrouve le lemme 8.25 dans [Laf12].

Remarque 8.3.2. Maintenant on a $H^{j,\,\mathrm{Hf}}_{G,N,I,W}\subset H^{j,\,\mathrm{Hf\text{-}rat}}_{G,N,I,W}=H^{j,\,\mathrm{cusp}}_{G,N,I,W}$ dans $H^j_{G,N,I,W}$. On conjecture que $H^{j,\,\mathrm{Hf}}_{G,N,I,W}\subset H^{j,\,\mathrm{Hf\text{-}rat}}_{G,N,I,W}$ est une égalité.

Annexe A

Rappels pour les chapitres 1 et 2

A.1 Quelques notations pour les G-torseurs

Soit S un schéma. Soit G un faisceau en groupes (on va considérer une action de G sur lui-même (à gauche) par multiplication).

Définition A.1.1. Un G-torseur sur S est un faisceau $\mathcal{G}$ sur $(Sch/S)_{fpqc}$, muni d'une action de G (à gauche), tel qu'il existe un morphisme fpqc $S' \to S$ tel que $\mathcal{G}\big|_{S'} \simeq G\big|_{S'}$ comme faisceau, et l'isomorphisme est compatible avec l'action de G.

Proposition A.1.2. *Quand G est un schéma en groupes affine sur S, un G-torseur défini ci-dessus est représentable par un schéma.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ un G-torseur au sens des faisceaux qui est trivialisé par $S' \to S$. Notons $\widetilde{S'}_G = S' \underset{S}{\times} G$ qui est un schéma sur S'. La donnée de descente (par rapport à $S' \to S$) pour le faisceau $\mathcal{G}\big|_{S'}$ induit une donnée de descente pour le faisceau $G\big|_{S'}$, qui est aussi une donnée de descente pour le schéma $\widetilde{S'}_G$. D'après [SGA1] VIII, Thm 2.1, on obtient un schéma sur S qui représente le faisceau $\mathcal{G}$. □

Remarque A.1.3. Quand G est lisse, tout G-torseur est localement trivial pour la topologie lisse (donc pour la topologie étale).

Notation A.1.4. a) Soit Z un schéma sur S muni d'une action de G. Soit $\mathcal{G}$ un G-torseur sur S. Alors on note $Z_{\mathcal{G}} := (Z \underset{S}{\times} \mathcal{G})/G := (Z \underset{S}{\times} \widetilde{S}_G)/G$. On l'appelle un espace fibré sur S de fibre Z.

b) En particulier, soient $\mathcal{G}$ un G-torseur sur S et G' un autre schéma en groupes affine sur S avec un homomorphisme de schémas en groupes $G \to G'$.

Alors on peut obtenir un G'-torseur $\mathcal{G} \overset{G}{\times} G'$ qui est défini comme l'espace fibré $(G' \underset{S}{\times} \mathcal{G})/G$.

Sur S, pour tout GL_r-torseur $\mathcal{G}$, on peut construire un espace fibré $V^r_{\mathcal{G}}$ où V^r est la représentation standard de GL_r. C'est un fibré vectoriel de rang r sur S.

Inversement, pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r, on peut construire un foncteur qui associe à tout $S' \to S$ l'ensemble $Isom_{S'}(\mathcal{E}_{S'}, \mathcal{E}^0_{S'})$, où $\mathcal{E}^0$ est le fibré vectoriel de rang r trivial. C'est un GL_r-torseur sur S.

Proposition A.1.5. *La construction ci-dessus induit une équivalence entre la catégorie des GL_r-torseurs sur S et la catégorie des fibrés vectoriels de rang r sur S.*

Remarque A.1.6. Par définition, un morphisme de G-torseurs est G-équivariant donc automatiquement un isomorphisme. Ainsi, dans la proposition ci-dessus, on considère seulement les isomorphismes dans la catégorie des fibrés vectoriels de rang r sur S.

Soit k un corps. Soient S un schéma sur k et G un schéma en groupes affine sur k. Notons $Rep_k(G)$ la catégorie tensorielle des représentations k-linéaires de dimension finie de G. Notons $Vect(S)$ la catégorie tensorielle des fibrés vectoriels sur S. Un G-torseur $\mathcal{G}$ induit un foncteur $F_{\mathcal{G}} : Rep_k(G) \to Vect(S), V \mapsto V_{\mathcal{G}}$.

Proposition A.1.7. *Le foncteur $\mathcal{G} \mapsto F_{\mathcal{G}}$ de la catégorie des G-torseurs vers la catégorie des foncteurs tensoriels exacts $Rep_k(G) \to Vect(S)$ induit une équivalence de catégories.*

Démonstration.

On va construire le foncteur inverse : soit $F : Rep_k(G) \to Vect(S)$ un foncteur tensoriel exact.

Notons $\mathcal{R}$ l'algèbre des fonctions régulières sur G à coefficients dans k, i.e. $\mathcal{R} = k[G]$ et $G = \operatorname{Spec} k[G]$. Il est muni des actions de G à gauche et à droite par translation. On voit $\mathcal{R}$ munie de l'action de G à gauche comme une limite inductive des représentations de dimension finie : $\mathcal{R} \simeq \varinjlim V_i$, où $V_i \in Rep_k(G)$. On définit $F(\mathcal{R}) := \varinjlim F(V_i)$. C'est un $\mathcal{O}_S$-module. La structure d'anneau commutatif sur $\mathcal{R}$ induit une structure de $\mathcal{O}_S$-algèbre commutative sur $F(\mathcal{R})$.

Notons $\widetilde{S} := \mathbf{Spec}_S F(\mathcal{R})$. L'action de G à droite sur $\mathcal{R}$ induit une action de G sur $\widetilde{S}$. De plus, on peut vérifier que $\widetilde{S}$ est fidèlement plat sur S.

Pour tout $V \in Rep_k(G)$, on a un isomorphisme de représentations

$$\mathcal{R} \otimes V \xrightarrow{\sim} \mathcal{R} \otimes \underline{V}$$

$$f \otimes v \mapsto (g \mapsto f(g) \otimes g^{-1}v)$$

où $\underline{V}$ est l'espace vectoriel sous-jacent de V, l'action de G est diagonale pour $\mathcal{R} \otimes V$ et est seulement sur $\mathcal{R}$ pour $\mathcal{R} \otimes \underline{V}$.

En particulier, on a

$$\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \simeq \mathcal{R} \otimes \underline{\mathcal{R}}.$$

En appliquant F, on obtient

$$F(\mathcal{R}) \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} F(\mathcal{R}) \simeq F(\mathcal{R}) \underset{k}{\otimes} \underline{\mathcal{R}}.$$

Cela induit

$$\widetilde{S} \underset{S}{\times} \widetilde{S} \simeq \widetilde{S} \times G$$

qui est compatible avec les actions de G. Par définition, $\widetilde{S}$ est un G-torseur sur S.

□

Remarque A.1.8. En particulier, quand $S = \operatorname{Spec} k$, le G-torseur trivial est le même que le foncteur d'oubli $Rep_k(G) \to Vect_k$.

Soit H un groupe linéaire sur E. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne E-linéaire. Soit

$$\phi : Rep_E(H) \to \mathcal{C}$$

un foncteur E-linéaire additif.

Notons $\mathcal{R}$ l'algèbre des fonctions régulières sur H à coefficients dans E. On la voit comme une représentation de H par l'action à gauche sur $\mathcal{R}$. L'action de H à droite sur $\mathcal{R}$ induit une action de H à droite sur $\phi(\mathcal{R})$.

Lemme A.1.9. *Pour tout $V \in Rep_E(H)$, on a*

$$\phi(V) \simeq (\phi(\mathcal{R}) \otimes V)^H,$$

où $(\phi(\mathcal{R}) \otimes V)^H$ sont les invariants sous l'action de H diagonale (à droite sur $\phi(\mathcal{R})$ et à gauche sur V).

Démonstration.

Pour tout $W \in Rep_E(H)$ et tout E-espace vectoriel de dimension finie $\underline{V}$,

$$\phi(W \otimes \underline{V}) = \phi(W) \otimes \underline{V}.$$

Ainsi, on a

$$\phi(\mathcal{R} \otimes \underline{V}) = \phi(\mathcal{R}) \otimes \underline{V}.$$

On a vu (dans la démonstration de la proposition A.1.7) que pour tout $V \in Rep_E(H)$, on a un isomorphisme de représentations de H

$$\mathcal{R} \otimes V \xrightarrow{\sim} \mathcal{R} \otimes \underline{V}$$

où l'action de H est diagonale sur $\mathcal{R} \otimes V$ (à droite sur $\mathcal{R}$ et à gauche sur V) et est seulement sur $\mathcal{R}$ pour $\mathcal{R} \otimes \underline{V}$.

De plus, si on considère les invariants sous H, on a un isomorphisme de E-espaces vectoriels

$$(\mathcal{R} \otimes V)^H \simeq (\mathcal{R} \otimes \underline{V})^H \simeq \underline{V}.$$

Si $(\mathcal{R} \otimes V)^H$ est muni d'une action de H par l'action à gauche sur $\mathcal{R}$ et $\underline{V}$ est muni de l'action de H, alors l'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme de représentations de H :

$$(\mathcal{R} \otimes V)^H \simeq V.$$

On en déduit que

$$\phi(V) \simeq \phi((\mathcal{R} \otimes V)^H) \simeq (\phi(\mathcal{R}) \otimes V)^H.$$

□

A.2 Quelques notations pour les ind-schémas

Cette section est entièrement extraite de l'appendice A.1 - A.4 de [Gai01]. On l'écrit ici pour faciliter la lecture.

A.2.1 Ind-schémas

Soient F, F' deux foncteurs contravariants $Sch \to Ens$ et $F' \to F$ un morphisme. On dit que F' est un sous-foncteur fermé de F si pour tout schéma S et tout $S \to F$, le foncteur de produit cartésien $S \underset{F}{\times} F'$ est representable par un sous-schéma fermé de S.

Soit $Y_1 \hookrightarrow Y_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow Y_n \hookrightarrow \cdots$ une limite inductive de schémas, où tous les morphismes $Y_i \hookrightarrow Y_{i+1}$ sont des immersions fermées.

On définit un foncteur $\varinjlim Y_i$ sur Sch : il associe à tout schéma quasi-compact S l'ensemble $\mathrm{Hom}(S, \varinjlim Y_i) := \varinjlim \mathrm{Hom}(S, Y_i)$. Ensuite on l'entend à tous les schémas en demandant qu'il soit un faisceau pour la topologie Zariski.

Plus généralement, soit $(Y_i)_{i \in I}$ une système filtrant de schémas où tous les morphismes $Y_i \hookrightarrow Y_j$ sont des immersions fermées. On peut définir un foncteur $\varinjlim Y_i$ en considérant la limite directe filtrante.

Définition A.2.1. Un ind-schéma (strict) est un foncteur F qui est isomorphe comme foncteur à un certain $\varinjlim Y_i$ ci-dessus. On appelle $\varinjlim Y_i$ une représentation d'ind-schéma de F.

Dans la suite on va omet le mot "strict".

Définition A.2.2. a) On dit qu'un ind-schéma est d'ind-type fini si on peut choisir les Y_i tels qu'ils sont tous de type fini. Sauf mention spécifique, un ind-schéma est toujours d'ind-type fini.

b) On dit qu'un ind-schéma est réduit si on peut choisir les Y_i tels qu'ils sont tous réduits. Soit $F = \varinjlim Y_i$, on définit le sous-ind-schéma réduit associé comme $\varinjlim (Y_i)_{red}$, où $(Y_i)_{red}$ est le sous-schéma réduit associé à Y_i. Le sous-ind-schéma réduit ne dépend que la représentation de F comme $\varinjlim Y_i$.

Voici quelques propriétés d'ind-schéma :

Lemme A.2.3. *Soit F un ind-schéma avec une représentation $F \simeq \varinjlim Y_i$.*

a) Si Z est un schéma de type fini et $Z \to F$ est un sous-foncteur fermé, alors il existe un i tel que Z est un sous-schéma fermé de Y_i.

b) Si F' est un sous-foncteur fermé de F, alors F' est aussi un ind-schéma.

c) Si $F \simeq \varinjlim Y'_j$ est une autre représentation, alors pour tout i il existe un j tel que Y'_i est un sous-schéma fermé de Y_j et vice versa.

Démonstration. a) Z est de type fini donc quasi-compact. Par définition, $\mathrm{Hom}(Z, F) := \varinjlim_i \mathrm{Hom}(Z, Y_i)$. Donc un $f : Z \to F$ vient d'un $f_i \in \mathrm{Hom}(Z, Y_i)$ pour un certain i. Comme $\varinjlim (Y_i \cap Z) = F \cap Z = Z$ et Z est de type fini, quand i est assez grand, f_i est une immersion fermée.

b) et c) sont tautologique. □

Dans le cas de a) on dit que Z est un sous-schéma fermé de type fini de F. En général, on dit qu'un sous-schéma fermé de F est un sous-foncteur fermé de F.

A.2.2 Action de groupe

Soit H un schéma en groupes, qui est une limite projective de groupes algébriques linéaires $H = \varprojlim H_n$. Soit F un ind-schéma.

Définition A.2.4. Suppose que H agit sur F comme foncteur. On dit que l'action est "bonne" si tout sous-schéma fermé Z de F est contenu dans un sous-schéma fermé Z' tel que Z' soit H-stable et que l'action de H sur Z' se factorise à travers le quotient H_n pour un certain n.

Définition A.2.5. Soit $F \simeq \varinjlim Y_i$ une représentation d'ind-schéma. On suppose que H agit sur F et l'action est "bonne". On définit un H-torseur $\mathcal{H}$ sur F comme un système compatible de H_n-torseurs $\mathcal{H}_{i,n}$ sur les Y_i.

D'après c) du lemme A.2.3 ci-dessus, cette définition ne dépend pas du choix de la représentation $\varinjlim Y_i$.

Définition A.2.6. Soit $\mathcal{H}$ un H-torseur sur F et F' un ind-schéma muni d'une action "bonne" de H. On peut choisir une représentation $F' \simeq \varinjlim Y'_i$ telle que les Y'_i soient des H_i-schémas. Alors on peut définir "l'espace fibré" $(F' \times \mathcal{H})/H$ sur F comme la limite inductive (filtrante) de $(Y'_i \times \mathcal{H}_{i,i})/H_i$. C'est un ind-schéma.

A.2.3 Catégorie des faisceaux pervers

Soit $F = \varinjlim Y_i$ un ind-schéma. Pour tout i, notons $D^b_c(Y_i, E)$ la catégorie dérivée bornée des E-faisceaux constructibles sur Y_i. Par définition, on a des immersions fermées $Y_i \hookrightarrow Y_j$. Elles induisent des foncteurs $D^b_c(Y_i, E) \to D^b_c(Y_j, E)$ donnés par l'image directe. On définit $D^b_c(Y, E) := \varinjlim D^b_c(Y_i, E)$. Le foncteur d'image directe pour une immersion fermée est exact, donc $D^b_c(Y, E)$ est encore une catégorie triangulée.

Notons $\mathrm{Perv}(Y_i, E)$ la catégorie des faisceaux pervers sur Y_i. On a des foncteurs $\mathrm{Perv}(Y_i, E) \to \mathrm{Perv}(Y_j, E)$ donnés par le foncteur d'image directe. On définit $\mathrm{Perv}(Y, E) := \varinjlim \mathrm{Perv}(Y_i, E)$. C'est encore une catégorie abélienne grâce à l'exactitude du foncteur d'image directe pour une immersion fermée.

D'après c) du lemme A.2.3, $D^b_c(Y, E)$ et $\mathrm{Perv}(Y, E)$ ne dépendent pas du choix de la présentation de Y comme ind-schéma.

Remarque A.2.7. Par définition, un faisceau pervers sur un ind-schéma est supporté sur un sous-schéma fermé de type fini.

Soit Z un schéma de type fini et H un groupe algébrique connexe qui agit sur Z. Notons $\mathrm{Perv}_H(Z)$ la catégorie des faisceaux pervers H-équivariants sur Z. En général, les objets dans cette catégorie sont des faisceaux pervers avec une donnée de descente et il y a un foncteur d'oubli $\mathrm{Perv}_H(Z) \to \mathrm{Perv}(Z)$. Quand H est connexe, le foncteur d'oubli est pleinement fidèle. Dans ce cas on peut voir $\mathrm{Perv}_H(Z)$ comme une sous-catégorie de $\mathrm{Perv}(Z)$.

Soit H' un groupe algébrique connexe qui est un quotient de H tel que le noyau est connexe et qu'il agit trivialement sur Z, alors le morphisme $H \twoheadrightarrow H'$ induit un foncteur $\mathrm{Perv}_{H'}(Z) \to \mathrm{Perv}_H(Z)$ qui est une équivalence de catégories.

Soit F un ind-schéma. Soit $H = \varprojlim H_i$ avec une action "bonne" sur F. Choisissons une représentation $F = \varinjlim Y_i$ avec tout Y_i stable par H_i et telle que l'action de H sur Y_i se factorise à travers H_i.

Définition A.2.8. $\mathrm{Perv}_H(F) := \varinjlim \mathrm{Perv}_{H_i}(Y_i)$.

D'après c) du lemme A.2.3 ci-dessus, cette définition ne dépend pas de choix de représentation d'ind-schéma.

A.3 Action de groupe sur les préchamps

Soit $\mathscr{X}$ un préchamp. Soit G un faisceau en groupes.

Définition A.3.1. La notation d'action de G sur $\mathscr{X}$ a été définie dans [Rom05], Définition 1.3.

Définition A.3.2. Soient $\mathscr{X}$ un préchamp et G un faisceau en groupes qui agit sur $\mathscr{X}$. On définit un préchamp $[\mathscr{X}/G]$: il associé à tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ le groupoïde dont les objets sont :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{(f,\sigma)} & \mathscr{X} \\ \downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

où $\mathcal{G}$ est G-torseur sur S, $(f,\sigma) : \mathcal{G} \to \mathscr{X}$ est un morphisme G-équivariant, c'est-à-dire que le diagramme suivant de préchamp est 2-commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}\times f}\downarrow & \overset{\sigma}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G \times \mathscr{X} & \longrightarrow & \mathscr{X} \end{array}$$

Une flèche entre $(\mathcal{G}, f, \sigma)$ et $(\mathcal{G}', f', \sigma')$ est donnée par un diagramme 2-commutatif de préchamp :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{u} & \mathcal{G}' \\ & {\scriptstyle \alpha}\swarrow & \\ {\scriptstyle (f,\sigma)}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle (f',\sigma')} \\ & \mathscr{X} & \end{array}$$

où u est G-équivariant.

Définition A.3.3. Soient $\mathscr{Y}$ un préchamp et G un faisceau en groupes. Un G-torseur sur $\mathscr{Y}$ est un préchamp $\widetilde{\mathscr{Y}} \to \mathscr{Y}$ tel que pour tout schéma S, $S \underset{\mathscr{Y}}{\times} \widetilde{\mathscr{Y}} \to S$ est un G-torseur.

Soient $\mathscr{Y}$ un préchamp et $\mathscr{X}$ un G-torseur sur $\mathscr{Y}$. Alors $[\mathscr{X}/G] = \mathscr{Y}$ comme préchamp.

Si $\mathscr{Y}$ est un champ, alors $[\mathscr{X}/G]$ est aussi un champ.

En général, quand $\mathscr{X}$ est un champ, le préchamp $[\mathscr{X}/G]$ n'est pas nécessairement un champ. Pour obtenir un champ, il faut prendre le champ associé, comme dans la proposition 2.6 de [Rom05]. En revanche, dans le cas qui nous s'intéresse ci-dessous, le quotient est déjà un champ.

Proposition A.3.4. *Soient $\mathscr{Y}$ un champ et $\mathscr{X}$ un G-torseur sur $\mathscr{Y}$ (donc $\mathscr{X}$ est aussi un champ). Soit Z un schéma muni d'une action de G. Alors le préchamp $[G\backslash(\mathscr{X} \times Z)]$, où l'action de G est diagonale, est un champ.*

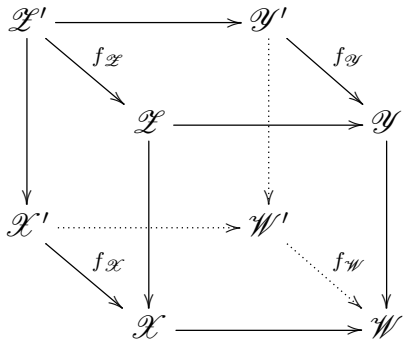
En particulier, quand $Z = \mathbb{F}_q$, on retrouve :

Corollaire A.3.5. *Soient $\mathscr{Y}$ un champ et $\mathscr{X}$ un G-torseur sur $\mathscr{Y}$. Alors $[\mathscr{X}/G]$ est un champ.*

Annexe B

Un lemme sur morphisme de carré cartésien

Lemme B.0.6. *Soient $\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}, \mathscr{W}, \mathscr{X}', \mathscr{Y}', \mathscr{Z}', \mathscr{W}'$ des champs algébriques sur un schéma de base S. Si on a un diagramme commutatif :*



(B.0.1)

où la face avant et derrière sont cartésiens :

Alors les fibres de $f_{\mathscr{Z}}$, $f_{\mathscr{X}}$, $f_{\mathscr{Y}}$ et $f_{\mathscr{W}}$ forment un carré cartésien.

Plus précisément, pour tout schéma T sur S et tout $z : T \to \mathscr{Z}$, le dernier induit $x : T \to \mathscr{Z} \to \mathscr{X}$, $y : T \to \mathscr{Z} \to \mathscr{Y}$ et $g(x) : T \to \mathscr{Z} \to \mathscr{X} \xrightarrow{g} \mathscr{W}$. On note

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{Z}_T \to \mathscr{Z}' & \mathscr{Y}_T \to \mathscr{Y}' & \mathscr{X}_T \to \mathscr{X}' & \mathscr{W}_T \to \mathscr{W}' \\ \downarrow \quad \downarrow f_{\mathscr{Z}} & \downarrow \quad \downarrow f_{\mathscr{Y}} & \downarrow \quad \downarrow f_{\mathscr{X}} & \downarrow \quad \downarrow f_{\mathscr{W}} \\ T \xrightarrow{z} \mathscr{Z} & T \xrightarrow{y} \mathscr{Y} & T \xrightarrow{x} \mathscr{X} & T \xrightarrow{g(x)} \mathscr{W}. \end{array}$$

Le lemme dit que l'on a $\mathscr{Z}_T \xrightarrow{\sim} \mathscr{X}_T \underset{\mathscr{W}_T}{\times} \mathscr{Y}_T$.

Démonstration.

D'un cote,

$$z = (x,\ y,\ \theta : g(x) \xrightarrow{\sim} h(y)) \in \mathscr{Z}(T).$$

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_T(T) =& \{z' \in \mathscr{Z}'(T), f_{\mathscr{Z}}(z') \xrightarrow{\sim} z\} \\ =& \{x' \in \mathscr{X}'(T),\ y' \in \mathscr{Y}'(T),\ \theta' : g'(x') \xrightarrow{\sim} h'(y') \\ & \alpha : f_{\mathscr{X}}(x') \xrightarrow{\sim} x,\ \beta : f_{\mathscr{Y}}(y') \xrightarrow{\sim} y \\ & \text{t.q. le diagramme commute :} \quad \}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} f_{\mathscr{W}}(g'(x')) & \xrightarrow{f_{\mathscr{W}}(\theta')} & f_{\mathscr{W}}(h'(y')) \\ \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ g(f_{\mathscr{X}}(x')) & & h(f_{\mathscr{Y}}(y')) \\ \downarrow{\scriptstyle g(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle h(\beta)} \\ g(x) & \xrightarrow{\quad\theta\quad} & h(y) \end{array}$$

D'un autre cote,

$$\mathscr{W}_T(T) = \{w' \in \mathscr{W}'(T), \gamma : f_{\mathscr{W}}(w') \xrightarrow{\sim} g(x)\}.$$

Le morphisme $\mathscr{X}_T \to \mathscr{W}_T$ est donné par

$$(x',\ \alpha : f_{\mathscr{X}}(x') \xrightarrow{\sim} x) \mapsto \big(g'(x'),\ f_{\mathscr{W}}(g'(x')) = g(f_{\mathscr{X}}(x')) \underset{g(\alpha)}{\xrightarrow{\sim}} g(x)\big)$$

Le morphisme $\mathscr{Y}_T \to \mathscr{W}_T$ est donné par

$$(y',\ \beta : f_{\mathscr{Y}}(y') \xrightarrow{\sim} y) \mapsto \big(h'(y'),\ f_{\mathscr{W}}(h'(y')) = h(f_{\mathscr{Y}}(y')) \underset{h(\beta)}{\xrightarrow{\sim}} h(y) \underset{\theta^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} g(x)\big)$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\mathscr{X}_T \underset{\mathscr{W}_T}{\times} \mathscr{Y}_T =& \{x', \alpha : f_{\mathscr{X}}(x') \xrightarrow{\sim} x,\ y', \beta : f_{\mathscr{Y}}(y') \xrightarrow{\sim} y \\ & \theta' : g'(x') \xrightarrow{\sim} h'(y') \quad \text{t.q. le diagramme commute}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} f_{\mathscr{W}}(g'(x')) & \xrightarrow{g(\alpha)} & g(x) \\ {\scriptstyle f_{\mathscr{W}}(\theta')}\downarrow & \nearrow_{\theta^{-1}\circ h(\beta)} & \\ f_{\mathscr{W}}(h'(y')) & & \end{array}$$

Ainsi on construit un morphisme

$$\mathscr{Z}_T \to \mathscr{X}_T \underset{\mathscr{W}_T}{\times} \mathscr{Y}_T$$

$$(x', y', \theta', \alpha, \beta) \mapsto (x', \alpha, y', \beta, \theta')$$

et c'est un isomorphisme.

□

Annexe C

Rappels pour le chapitre 5

C.1 Une filtration canonique de U

Notons Φ l'ensemble des racines de (G,T), Φ^+ l'ensemble des racines positives pour (G,B,T).

Chaque racine $\alpha \in \Phi$ induit un morphisme de schémas en groupes

$$\theta_\alpha : \mathbb{G}_a \hookrightarrow G.$$

L'image est noté X_α, qui est un sous-schéma en groupes de G.

Soit $U \hookrightarrow P \twoheadrightarrow M$. Notons Φ_M l'ensemble des racines de (M,T). Apres avoir choisi un ordre dans l'ensemble $\Phi - \Phi_M$, on a un morphisme de schémas :

$$\prod_{\alpha\in\Phi,\ \alpha\notin\Phi_M} X_\alpha \xrightarrow{\sim} U.$$

Pour chaque $i \in \Gamma_G$, notons α_i est la racine simple de G associé. Soit $\alpha \in \Phi$. Alors on peut exprimer α comme $\alpha = \sum_{i\in\Gamma_G} \mathrm{coef}_i(\alpha)\alpha_i$, avec $\mathrm{coef}_i(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Notons $U^{(m)}$ le sous-groupe de U engendré par les X_α avec

$$\alpha \in \Phi^+, \quad \alpha \notin \Phi_M, \quad \sum_{i\in\Gamma_G,\, i\notin\Gamma_M} \mathrm{coef}_i(\alpha) \geq m+1.$$

Alors on obtient une filtration

$$U = U^{(0)} \supset U^{(1)} \supset \cdots \supset U^{(r)} \supset U^{(r+1)} = 0.$$

De plus, notons

$$A_m := \{\lambda \in \Phi^+ | \lambda \notin \Phi_M, \quad \sum_{i\in\Gamma_G,\, i\notin\Gamma_M} \mathrm{coef}_i(\lambda) = m+1\}.$$

Alors on a un isomorphisme de schémas

$$\prod_{\alpha\in A_m} X_\alpha \xrightarrow{\sim} U^{(m)}/U^{(m+1)}$$

Or pour tout $\alpha, \beta \in \Phi^+$,

$$[X_\alpha, X_\beta] \subset \prod_{i>0, j>0} X_{i\alpha+j\beta}.$$

Donc $U^{(m)}/U^{(m+1)}$ est commutatif. Comme conséquence, l'isomorphisme de schémas ci-dessus est en fait un isomorphisme de schémas en groupes.

Finalement, on a un isomorphisme canonique de schémas en groupes :

$$\prod_{\alpha\in A_m} \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha\in A_m} X_\alpha \xrightarrow{\sim} U^{(m)}/U^{(m+1)}.$$

C.2 Le schéma en groupes $U_{\mathcal{F}_M}$

On a défini l'espace fibré $U_{\mathcal{F}_M} := (\mathcal{F}_M \times U)/M$, où l'action de M sur $\mathcal{F}_M \times U$ est

$$m \cdot (x, u) := (x \cdot m^{-1}, mum^{-1}).$$

Lemme C.2.1. *(Le lemme 5.2.5 dans chapitre 5) L'espace fibré $U_{\mathcal{F}_M}$ est muni d'une structure de schéma en groupes sur $X \times S$.*

Démonstration.

On donne une structure de schéma en groupes sur $U_{\mathcal{F}_M}$: localement sur $X \times S$, soient $(x_1, u_1), (x_2, u_2) \in (\mathcal{F}_M \times U)/M$, alors il existe $m \in M$, tel que $x_2 = x_1 \cdot m$. Alors dans $(\mathcal{F}_M \times U)/M$, on a

$$(x_2, u_2) = (x_1 \cdot m, u_2) = (x_1, mu_2m^{-1}).$$

On pose

$$(\mathcal{F}_M \times U)/M \times (\mathcal{F}_M \times U)/M \longrightarrow (\mathcal{F}_M \times U)/M$$

$$\big((x_1, u_1), (x_2, u_2)\big) \longrightarrow (x_1, u_1mu_2m^{-1})$$

L'élément neutre est la classe de $(x, 1)$.

On vérifie que $U_{\mathcal{F}_M}$ muni de cette loi de multiplication est un schéma en groupes.

□

Lemme C.2.2. *(Le lemme 5.2.14dans chapitre 5) L'espace fibré $(U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}$ est un schéma en groupes commutatifs sur $X \times S$.*

Démonstration.

D'après le lemme ci-dessus, $(U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}$ est un schéma en groupes sur $X \times S$.

De plus, notons $W := U^{(j)}/U^{(j+1)}$. Alors W est commutatif. On a

$$(\mathcal{F}_M \times W)/M \times (\mathcal{F}_M \times W)/M \longrightarrow (\mathcal{F}_M \times W)/M$$

$$\big((x_1, u_1), (x_2, u_2)\big) \longrightarrow (x_1, u_1 m u_2 m^{-1})$$

$$\big((x_2, u_2), (x_1, u_1)\big) \longrightarrow (x_1, m u_2 m^{-1} u_1) = (x_1, u_1 m u_2 m^{-1})$$

On en déduit que $(U^{(j)}/U^{(j+1)})_{\mathcal{F}_M}$ est un schéma en groupes commutatifs.

□

C.3 Catégorie de $U_{\mathcal{F}_M}$-torseurs

Maintenant on donne une action du schéma en groupes $U_{\mathcal{F}_M}$ sur tout P-torseur $\mathcal{F}_P$ muni d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{F}_P/U \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_M$:

Localement, soit $(x, u) \in U_{\mathcal{F}_M}$ et $y_P \in \mathcal{F}_P$. Notons y_M l'image de y_P par le morphisme $\mathcal{F}_P \to F_P/U \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_M$.

Il existe $m_0 \in M$, tel que $x = y_M \cdot m_0$. On a

$$(x, u) = (y_M \cdot m_0, u) = (y_M, m_0 u m_0^{-1}).$$

On définit

$$(x, u) \cdot y_P := y_P \cdot (m_0 u^{-1} m_0^{-1}).$$

On vérifie que c'est une action de groupe.

De plus, $U_{\mathcal{F}_M}$ agit sur le faisceau $\mathcal{F}_P/M$: soit $(x, u) \in U_{\mathcal{F}_M}$ et $y_P \in \mathcal{F}_P$. Pour tout $m \in M$, on a $\mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_M : y_P \cdot m \mapsto y_M \cdot m$. Donc on a

$$\begin{aligned}(x, u) \cdot (y_P \cdot m) &= ((y_M \cdot m) \cdot m^{-1} m_0, u) \cdot (y_P \cdot m) \\ &= (y_P \cdot m) \cdot (m^{-1} m_0 u^{-1} m_0^{-1} m) = (y_P \cdot m_0 u^{-1} m_0^{-1}) \cdot m.\end{aligned}$$

On vérifie que c'est une action de groupe.

Lemme C.3.1. *(Le lemme 5.2.26 dans chapitre 5) Le faisceau $\mathcal{F}_P/M$ muni de cette action est un $U_{\mathcal{F}_M}$-torseur sur $X \times S$.*

Démonstration. Soit $S' \to X \times S$ un morphisme fpqc tel que l'on a $\mathcal{F}_P\big|_{S'} \xrightarrow{\sim} P \times S'$ et $\mathcal{F}_M\big|_{S'} \xrightarrow{\sim} M \times S'$. Alors on a

$$U_{\mathcal{F}_M}\big|_{S'} = (\mathcal{F}_M\big|_{S'} \times U)/M \xrightarrow{\sim} (M \times S' \times U)/M = U \times S'$$

$$\mathcal{F}_P/M\big|_{S'} \xrightarrow{\sim} (P \times S')/M = U \times S'.$$

On peut construire un morphisme $\mathcal{F}_P/M\big|_{S'} \xrightarrow{\sim} U \times S' \xrightarrow{\sim} U_{\mathcal{F}_M}\big|_{S'}$. On vérifie que ce morphisme est compatible avec l'action de $U_{\mathcal{F}_M}\big|_{S'}$. Donc $\mathcal{F}_P/M$ est un $U_{\mathcal{F}_M}$-torseur.

□

Lemme C.3.2. *(Le lemme 5.2.28 dans chapitre 5) Le foncteur*

$$\{(\mathcal{F}_P,\ \alpha : \mathcal{F}_P/U \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_M)\} \to \{U_{\mathcal{F}_M}\text{-torseur }\}$$

$$(\mathcal{F}_P,\ \alpha) \mapsto \mathcal{F}_P/M.$$

induit une équivalence des catégories.

Démonstration. On va construire un foncteur inverse : Soit $\mathcal{G}$ un $U_{\mathcal{F}_M}$-torseur sur $X \times S$. On peut définir le produit fibré $\mathcal{F}_M \underset{X\times S}{\times} \mathcal{G}$. Il est muni d'une action de P de la manière suivante :

Soit $p \in P$ et $(x, g) \in \mathcal{F}_M \underset{X\times S}{\times} \mathcal{G}$. Comme on a fixé une section $M \hookrightarrow P$, on peut écrire $p = mu$. On définit :

$$p \cdot (x, g) := (x \cdot m^{-1}, (x, u) \cdot g).$$

Soit $S' \to X \times S$ un morphisme fpqc tel que $\mathcal{F}_M\big|_{S'} \xrightarrow{\sim} M \times S'$ et $\mathcal{G}\big|_{S'} \xrightarrow{\sim} U \times S'$. On a

$$\mathcal{F}_M \underset{X\times S}{\times} \mathcal{G}\Big|_{S'} \xrightarrow{\sim} (M \times S') \underset{S'}{\times} (U \times S') = P \times S'.$$

Ce morphisme est compatible avec l'action de P. Donc $\mathcal{F}_M \underset{X\times S}{\times} \mathcal{G}$ est un P-torseur.

De plus, on construit un morphisme

$$\alpha : (\mathcal{F}_M \underset{X\times S}{\times} \mathcal{G})/U \to \mathcal{F}_M \quad (x, g) \mapsto x.$$

Ainsi, on a un foncteur

$$\{U_{\mathcal{F}_M}\text{-torseur }\} \to \{(\mathcal{F}_P,\ \alpha : \mathcal{F}_P/U \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_M)\}$$

$$\mathcal{G} \mapsto (\mathcal{F}_M \underset{X\times S}{\times} \mathcal{G},\ \alpha).$$

□

Bibliographie

[SGA1] Alexandre Grothendieck. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1960-61 - Revêtements étales et groupe fondamental,* SGA 1, Lecture Notes in Mathematics **224**, Springer, (1971)

[SGA4 1/2] Pierre, Deligne. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - Cohomologie étale,* SGA $4\frac{1}{2}$, Lecture Notes in Mathematics **569**, Springer, (1977)

[SGA4] Artin, Michael ; Alexandre Grothendieck ; Jean-Louis Verdier. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1963-64 - Théorie des topos et cohomologie étale des schémas,* SGA 4 (Tome 3), Lecture Notes in Mathematics **305**, Springer, (1972)

[SGA5] Cohomologie ℓ-adique et fonctions L. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5). Edité par Luc Illusie. Lecture Notes in Mathematics **589** Springer (1977)

[BBD82] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne. *Faisceaux pervers.* Astérisque **100**, Société Mathématique de France (1982)

[BD99] A. Beilinson and V. Drinfeld. Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves (1999), available at the address `http://math.uchicago.edu/~mitya/langlands.html`

[BG02] A. Braverman and D. Gaitsgory. Geometric Eisenstein series. *Invent. Math.* **150** (2) 287–384 (2002)

[Bra03] T. Braden. Hyperbolic localization of intersection cohomology. *Transf. Groups.* **8** 209–216 (2003)

[BL94] A. Beauville and Y. Laszlo. Conformal Blocks and Generalized Theta Functions. *Commun. Math. Phys.* **164**, 385–419 (1994)

[BL95] A. Beauville and Y. Laszlo. Un lemme de descente. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math.* **320**, 335–340 (1995)

[Del90] P. Deligne. Catégories tannakiennes. *The Grothendieck Festschrift*, Vol. II, Progr. Math., **87**, 111–195, Birkhäuser (1990)

[DM82] P. Deligne and J. Milne. Tannakian categories, in Hodge Cycles and Motives, Lecture Notes in Math. 900 (1982) 101–228.

[Dri87] V. G. Drinfeld. Moduli varieties of F-sheaves. *Func. Anal. and Appl.* **21**, 107–122 (1987)

[DG13] V. G. Drinfeld and D. Gaitsgory. Geometric constant term functor(s).

[DG14] V. Drinfeld and D. Gaitsgory. On a theorem of Braden. *Transf. Groups.* **19** no.2, 313–358 (2014)

[DG15] V. G. Drinfeld and D. Gaitsgory. Compact generation of the category of D-modules on the stack of G-bundles on a curve. *Cambridge Journal of Mathematics* Volume 3, Number 1-2, 19–125 (2015)

[Fal03] G. Faltings. Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles. *J. Eur. Math. Soc.* **5** (1), 41–68 (2003)

[Gai01] D. Gaitsgory. Construction of central elements in the affine Hecke algebra via nearby cycles. *Invent. Math.* **144**, 253–280 (2001)

[Gai07] D. Gaitsgory. On de Jong's conjecture. *Israel J. Math.* **157**, 155–191 (2007)

[Gir71] J. Giraud. Cohomologie non abélienne. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **179**, Springer (1971)

[Har74] G. Harder. Chevalley Groups Over Function Fields and Automorphic Forms. *Annals of Mathematics* **100** (2), 249–306 (1974)

[Laf97] L. Lafforgue. Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson. *Astérisque* **243** (1997)

[Laf12] V. Lafforgue. Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale. *Preprint* `http://arxiv.org/abs/1209.5352` (2012)

[LMB99] G. Laumon et L. Moret-Bailly. *Champs algébriques.* Ergebnisse der Math. **39**, Springer (1999)

[Lus83] G. Lusztig. *Singularities, character formulas, and a q-analogue for weight mul- tiplicities.* Astérisque **101** (1983) 208–229

[MV07] I. Mirkovic and K. Vilonen. Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings. *Annals of Math.* **166**, 95–143 (2007)

[Rom05] M. Romagny. Group actions on stacks and applications *Michigan Math.* **J. 53** (2015)

[Sch15] S. Schieder. The Harder-Narasimhan stratification of the moduli stack of G-bundles via Drinfeld's compactifications. *Selecta Math.* **21** (3), 763–831 (2015)

[Var04] Y. Varshavsky. Moduli spaces of principal F-bundles. *Selecta Math. (N.S.)* **10** (1), 131–166 (2004)