

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES GAUSSIENS RÉELS

Thèse présentée à l'université de Rouen

par

Thierry DE LA RUE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

Spécialité : Mathématiques-Probabilités

soutenue le 22 juin 1994 devant le jury composé de :

Monsieur Claude DELLACHERIE	Président
Monsieur Mariusz LEMANCZYK	Rapporteur
Monsieur Jean-Paul THOUVENOT	Rapporteur
Monsieur Emmanuel LESIGNE	Examineur
Monsieur José de SAM LAZARO	Examineur
Monsieur Jean-Marie STRELCYN	Examineur

Je commence par une pensée émue pour mes professeurs et amis de l'École Normale Supérieure, qui m'ont fait faire mes premiers pas dans le monde des probabilités. M'éloigner d'eux pour retourner en terre normande fut un choix délicat, que je n'eus pas à regretter par la suite.

Parce qu'il m'a accueilli chaleureusement dans le DEA qu'il dirigeait à l'époque, et pour avoir accepté ensuite d'encadrer cette thèse, je voudrais exprimer ici toute ma reconnaissance à José de Sam Lazaro, ainsi qu'à Jean-Marie Strelcyn qui, le premier, m'a fait découvrir les joies de la théorie ergodique.

Comment ne pas évoquer ma rencontre décisive avec Jean-Paul Thouvenot : ses questions sont à l'origine de ce travail, et l'intérêt constant qu'il a porté à mes recherches fut pour moi le meilleur encouragement. Qu'il soit ici vivement remercié, ainsi que tous les participants au séminaire de théorie ergodique de Paris 6 auprès desquels j'ai passé des moments fort enrichissants.

Ces remerciements s'adressent également à Mariusz Lemanczyk, pour l'honneur qu'il m'a fait en rapportant mon travail, ainsi qu'à Emmanuel Lesigne, que je suis fier de compter au nombre des membres de mon jury.

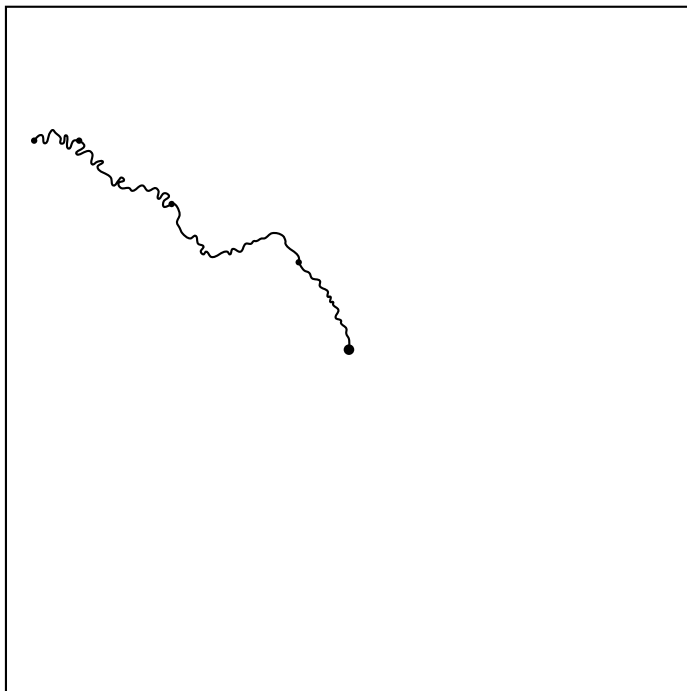
Je n'oublie pas bien sûr tous les membres du Laboratoire d'Analyse et Modèles Stochastiques de Rouen, à commencer par Claude Dellacherie et Gérard Grancher, pour la formidable convivialité qui règne entre professeurs et doctorants. Je réserve une pensée particulière pour Jean Calbrix (sans qui je ne saurais toujours pas ce qu'est un espace de Lebesgue), Lucien Verney (à qui je dois une jolie démonstration), Philippe Andary et Olivier Benois (pour leur aide \TeX nique), Régine Debeurre, Sylvie Patenere et Marc Jolly (pour leur disponibilité et leur gentillesse).

Quant à Isabelle, je n'ai qu'un souhait : partager toujours avec elle les bonheurs et les doutes de la vie d'un mathématicien. . .

Sommaire

Introduction	1
Bibliographie	7
Chapitre I. Entropie d'un système dynamique gaussien	11
I.1. Cas d'une mesure spectrale absolument continue	13
I.2. Généralisation au cas d'une action de \mathbb{Z}^d	16
Références	16
Chapitre II. Mouvement moyen et système dynamique gaussien 19	
II.1. Le mouvement moyen classique	21
II.2. Une transformation de la trajectoire brownienne	22
II.3. Insertion de T dans un flot et mouvement moyen	28
Références	32
Chapitre III. Systèmes dynamiques gaussiens d'entropie nulle, lâchement et non lâchement Bernoulli	33
III.1. Introduction et notations	35
III.2. Un gaussien d'entropie nulle non lâchement Bernoulli	39
III.3. Un gaussien-Kronecker lâchement Bernoulli	50
Références	61

Introduction



Le travail présenté ici concerne certains systèmes dynamiques de la forme $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, où $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Lebesgue, et T une transformation mesurable de Ω , qui préserve la mesure de probabilité μ : pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$. On supposera toujours T bijective, et grâce aux bonnes propriétés des espaces de Lebesgue, il est à noter qu'alors T^{-1} est aussi mesurable.

De tels systèmes se construisent naturellement en théorie des probabilités à partir d'un processus stationnaire $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$: si on note E l'espace dans lequel les variables aléatoires X_p prennent leurs valeurs, on pose $\Omega = E^{\mathbb{Z}}$, sur lequel μ est la loi du processus ; \mathcal{A} est la tribu engendrée par les projections sur chaque coordonnée (notées encore X_p , $p \in \mathbb{Z}$) complétée pour μ , et T est le décalage : pour tout $\omega = (x_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ dans Ω , l'image de ω par T est la suite décalée $(x'_p)_{p \in \mathbb{Z}}$, où pour tout p , $x'_p = x_{p+1}$. Le cas où les variables X_p sont indépendantes est bien connu, le système dynamique obtenu est alors nommé *décalage de Bernoulli*.

Systèmes dynamiques gaussiens

On appelle *système dynamique gaussien* (réel) le système obtenu lorsque le processus stationnaire (X_p) est gaussien réel centré. La loi de ce processus, et donc toutes les propriétés du système dynamique gaussien, dépend alors uniquement des covariances

$$c_p \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}[X_0 X_p] \quad (p \in \mathbb{Z}),$$

que l'on peut écrire grâce au théorème de Bochner-Herglotz-Khinchin sous la forme

$$c_p = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt} d\gamma(t), \quad (1)$$

où γ est une mesure finie positive et symétrique sur $[-\pi, \pi[$, appelée *mesure spectrale du système*. Inversement, une telle mesure γ étant donnée, on peut toujours construire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ la loi μ d'un processus gaussien stationnaire, dont les covariances sont données par la formule (1).

On peut aussi donner une définition plus générale d'un système dynamique gaussien, et c'est celle-ci que nous retiendrons par la suite :

Le système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ est appelé système dynamique gaussien de mesure spectrale γ si on peut trouver un processus gaussien réel centré $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ vérifiant :

- $X_p = X_0 \circ T^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$,
- la plus petite tribu rendant mesurables tous les X_p coïncide avec \mathcal{A} ,
- $\mathbb{E}[X_p X_q] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-q)t} d\gamma(t)$.

En fait, cette définition signifie simplement que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ est isomorphe au système gaussien "canonique" construit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ à partir de la mesure spectrale γ .

Propriétés spectrales et entropie

Pour tout système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, on définit un opérateur unitaire U_T sur l'espace $L^2(\mu)$ par

$$\forall f \in L^2(\mu), U_T(f) \stackrel{\text{déf}}{=} f \circ T.$$

Dans le cas d'un système dynamique gaussien, on sait décomposer $L^2(\mu)$ en une somme de *chaos de Wiener* (voir [1] ou [16]), sur lesquels on connaît relativement bien l'action de l'opérateur U_T . Ceci permet de relier des propriétés spectrales de T comme l'ergodicité ou le mélange à des conditions simples sur la mesure spectrale γ . Ainsi, T est ergodique si et seulement si γ est diffuse, c'est à dire $\gamma(\{t\}) = 0$ pour tout t (et dans ce cas, T est même faiblement mélangeante), et T est fortement mélangeante si et seulement si les coefficients de Fourier c_p de γ tendent vers 0 quand $|p| \rightarrow +\infty$.

L'entropie d'un système dynamique gaussien se calcule aussi facilement à partir de sa mesure spectrale : elle ne peut valoir que 0 ou $+\infty$, suivant respectivement que γ est ou n'est pas singulière par rapport à la mesure de Lebesgue λ . Bien qu'il soit déjà énoncé en 1966 ([5]), on ne connaissait de ce résultat qu'une démonstration partielle, dans le cas où la mesure spectrale est singulière par rapport à λ . Le but du chapitre 1 est de compléter cette démonstration en établissant que si γ est absolument continue par rapport à λ , alors l'entropie est effectivement infinie. De plus, on remarque que ce résultat se généralise à une action de \mathbb{Z}^d ($d \in \mathbb{N}^*$), c'est à dire au système dynamique construit à partir d'un processus gaussien stationnaire $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}^d}$. (Il y a cette fois d transformations à considérer, qui sont les décalages dans les d directions possibles.)

De ce calcul de l'entropie et du fameux théorème d'Ornstein ([19]) résulte alors la conséquence remarquable suivante :

Tous les systèmes gaussiens à mesure spectrale absolument continue par rapport à λ sont isomorphes.

En effet, le gaussien de mesure spectrale λ est un décalage de Bernoulli, car les coefficients de Fourier de λ étant nuls pour $p \neq 0$, les variables aléatoires X_p , $p \in \mathbb{Z}$ sont indépendantes. Puis, tout gaussien de mesure spectrale absolument continue par rapport à λ est un facteur de ce système, donc aussi un Bernoulli. Or, deux Bernoulli de même entropie sont toujours isomorphes.

Il n'y a donc, à isomorphisme près, qu'un seul gaussien de mesure spectrale absolument continue par rapport à λ . La partie intéressante de l'étude des systèmes gaussiens concerne donc le cas de l'entropie nulle. On trouve notamment dans cette catégorie des systèmes dynamiques aux propriétés étranges, qui sont présentés dans le paragraphe suivant.

Les gaussiens-Kronecker et la question du rang

Rappelons qu'une partie K du cercle unité S^1 , identifié à l'intervalle $[-\pi, \pi[$, est appelée *ensemble de Kronecker* si toute application continue de K dans S^1 est la limite uniforme sur K d'une suite d'applications de la forme

$$\varphi_p \quad : \quad t \longmapsto e^{ij_p t} \quad (j_p \in \mathbb{Z}).$$

On sait construire des ensembles de Kronecker parfaits (voir [1]), et il existe donc des mesures diffuses portées par des ensembles de Kronecker. On appelle justement *gaussien-Kronecker* un système dynamique gaussien dont la mesure spectrale est diffuse (pour l'ergodicité) et concentrée sur $K \cup (-K)$, où K est un

ensemble de Kronecker dans $[0, \pi[$. Un ensemble de Kronecker étant toujours de mesure de Lebesgue nulle, un gaussien-Kronecker est toujours d'entropie nulle.

Ces systèmes ont été introduits en 1967 par Foias et Stratila ([7]), qui leur ont découvert une inhabituelle propriété de stabilité spectrale, partagée avec les systèmes à spectre discret :

Dès qu'un système dynamique est spectralement isomorphe à un gaussien-Kronecker, il lui est métriquement isomorphe.

Autre propriété peu commune des gaussiens-Kronecker : le “Weak-Closure Theorem” ([11]). En clair : toute transformation S qui préserve μ et qui commute avec T est une limite faible de puissances de T .

Curieusement, cette propriété se retrouve dans une autre famille de systèmes dynamiques, qui n'ont apparemment rien à voir avec les gaussiens : les systèmes de rang un. Ce sont les systèmes pour lesquels toute partie mesurable de Ω peut être approchée arbitrairement bien par une réunion finie d'atomes d'une partition de la forme

$$\{B, TB, \dots, T^{h-1}B, R\},$$

la mesure du “résidu” R pouvant être aussi petite que l'on veut. On trouve parmi les systèmes de rang un les systèmes à spectre discret, mais on sait aussi en construire d'autres qui sont faiblement ou fortement mélangeants.

Outre l'ergodicité, l'entropie nulle et le Weak-Closure Theorem, les systèmes de rang un partagent avec les gaussiens-Kronecker la propriété d'avoir spectre simple L^p pour tout $p \in [1, +\infty[$, c'est-à-dire que l'on peut trouver $f \in L^p(\mu)$ tel que le sous-espace engendré par les $f \circ T^k$, $k \in \mathbb{Z}$ soit dense dans L^p . Devant tant de points communs, il est alors bien naturel de se demander s'il existe des gaussiens-Kronecker de rang un...

L'intérêt d'une réponse à cette question réside essentiellement dans le fait que la structure des facteurs d'un gaussien (Kronecker ou non) est infiniment plus riche que celle de tous les systèmes de rang un connus jusqu'à présent. Les gaussiens sont en effet “infiniment divisibles” : pour tout intervalle $I \subset [0, 1]$, on peut trouver un facteur \mathcal{B}_I (qui est encore un gaussien), de telle sorte que si I est la réunion de deux intervalles disjoints I_1 et I_2 , alors \mathcal{B}_I est le produit de \mathcal{B}_{I_1} et \mathcal{B}_{I_2} ; de plus, $\mathcal{B}_{[0,1]}$ est le système initial, et pour toute famille décroissante $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles dont la longueur tend vers 0, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{I_n}$ est la tribu triviale.

S. Ferenczi ([4]) a cru construire un gaussien-Kronecker de rang un, mais une erreur cruciale dans son travail fait que l'existence ou non d'un gaussien de rang un demeure un problème complètement ouvert à ce jour. C'est pourtant l'espoir d'une réponse définitive à cette question qui fut à l'origine des chapitres 2 et 3 de cette thèse.

Transformations de la trajectoire brownienne

Il y avait dans la construction de Ferenczi une idée qui méritait d'être développée, car elle semblait bien adaptée à l'étude de la dynamique des gaussiens : il s'agissait de voir un système dynamique gaussien non pas comme le décalage

sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ muni d'une certaine mesure, mais comme une transformation d'un espace d'applications continues. Il s'avère que ces applications sont en fait des trajectoires browniennes planes. On peut ainsi construire les systèmes dynamiques gaussiens (ergodiques) sur l'espace canonique du mouvement brownien complexe, c'est-à-dire l'espace des applications complexes continues sur $[0, 1]$, nulles en 0, muni de la mesure de Wiener.

Le détail de cette construction est exposé dans le chapitre 2 ; en voici les principales étapes :

- Si σ est une mesure de probabilité sur $[0, \pi]$, concentrée en un nombre fini de points $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de masses respectives m_1, \dots, m_p , on définit une transformation T_σ qui consiste à faire tourner de l'angle α_k le morceau de trajectoire correspondant à l'intervalle de temps $[t_{k-1}, t_k]$, où

$$t_0 \stackrel{\text{déf}}{=} 0, \quad t_k \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^k m_j \quad (1 \leq k \leq p).$$

- Si σ est cette fois diffuse sur $[0, \pi]$, on peut trouver une suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures atomiques qui converge suffisamment bien vers σ pour que, avec probabilité 1, la suite de trajectoires $(T_{\sigma_n} \omega)$ converge uniformément vers une trajectoire notée $T_\sigma \omega$. Bien sûr, les T_{σ_n} et T_σ préservent la mesure. On montre alors que le processus gaussien réel $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ défini par

$$X_p \stackrel{\text{déf}}{=} \Re (B_1 \circ T_\sigma^p) \quad (p \in \mathbb{Z})$$

est stationnaire, de mesure spectrale la mesure γ symétrique sur $[-\pi, \pi]$ construite à partir de σ , et qu'il engendre toute la tribu borélienne. Ainsi, le système dynamique obtenu est un système dynamique gaussien, de mesure spectrale γ .

On peut remarquer une étrange ressemblance entre cette construction, et la dynamique du mouvement des planètes dans le système de Ptolémée, exposée par exemple dans [5]. Cette dernière situation donne lieu au calcul d'un mouvement moyen, c'est-à-dire la limite d'une vitesse angulaire moyenne entre l'instant 0 et l'instant t . Le reste du chapitre 2 est consacré à un calcul de mouvement moyen dans le cadre d'un système dynamique gaussien : la transformation T_σ peut être insérée dans un flot $(T_\sigma^t)_{t \in \mathbb{R}}$, et si on écrit $B_1 \circ T_\sigma^t = \rho_t \exp(iA_t)$ avec $t \mapsto A_t$ continue (ce qui est presque sûrement possible), alors avec probabilité 1, A_t/t a une limite quand $t \rightarrow +\infty$, qui est la moyenne de σ .

Lâche-Bernoullicité

Le chapitre 3 montre que modéliser les systèmes dynamiques gaussiens par une transformation de la trajectoire brownienne complexe peut permettre de mieux comprendre certaines de leurs propriétés. Comme on l'a déjà remarqué, l'étude des gaussiens à mesure spectrale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ne présente pas beaucoup d'intérêt, puisqu'ils sont tous isomorphes. En revanche, lorsque la mesure spectrale est singulière par rapport à λ , il existe une grande richesse de cas possibles. Il est simple de voir que

tous les gaussiens à mesure spectrale singulière ne sont pas tous isomorphes, puisqu'on sait en construire des mélangeants, qui ne peuvent donc pas être isomorphes à un gaussien rigide comme par exemple un gaussien-Kronecker. Les résultats établis dans ce chapitre 3 prouvent que l'on peut même trouver deux gaussiens d'entropie nulle non équivalents au sens de Kakutani.

Rappelons ici une des définitions possibles de cette équivalence :

Deux systèmes dynamiques $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mu', T')$ sont dits équivalents au sens de Kakutani si on peut trouver $A \in \mathcal{A}$ et $A' \in \mathcal{A}'$, chacun de mesure strictement positive, tels que les transformations T_A et $T'_{A'}$ induites respectivement sur A et A' par T et T' soient isomorphes.

La formule d'Abramov sur l'entropie d'une transformation induite :

$$h(T_A) = \frac{1}{\mu(A)}h(T)$$

montre que si T et T' sont équivalentes en ce sens, et si $h(T) = 0$, alors nécessairement $h(T') = 0$. Mais jusqu'à l'introduction de la "lâche-Bernoullicité" par Feldman en 1976 ([3]), on ne savait pas si deux systèmes d'entropie nulle étaient toujours équivalents. Feldman montre dans cet article que la lâche-Bernoullicité (dont on donne la définition dans le cas de l'entropie nulle au début du chapitre 3) est nécessaire à un système d'entropie nulle pour être équivalent à une rotation irrationnelle¹. En construisant un système d'entropie nulle non lâchement Bernoulli, il a donc répondu négativement à ce problème.

On construit dans le chapitre 3 deux systèmes gaussiens à mesure spectrale singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, l'un (qui est un gaussien-Kronecker) est lâchement Bernoulli, et l'autre non. En conséquence, ces deux systèmes ne sont pas équivalents au sens de Kakutani.

Sous-jacente à cette étude de la lâche-Bernoullicité des gaussiens demeure la question du rang un : en effet, tout rang un étant lâchement Bernoulli, l'espoir était de prouver qu'un gaussien d'entropie nulle ne pouvait jamais être lâchement Bernoulli, ce qui aurait définitivement réglé le problème. Mais cette conjecture se révélant fautive, et l'exemple lâchement Bernoulli trouvé étant justement un gaussien-Kronecker, la question reste plus ouverte que jamais.

Il semblerait toutefois d'après les résultats (provisoire!) de travaux en cours que le gaussien-Kronecker lâchement Bernoulli construit ici *ne soit pas* de rang un (ni même de rang fini). Est-il alors vraiment impossible qu'un système dynamique gaussien soit de rang un? Et si tel est le cas, peut-on tout de même construire un rang un qui soit infiniment divisible?

À suivre...

Bibliographie

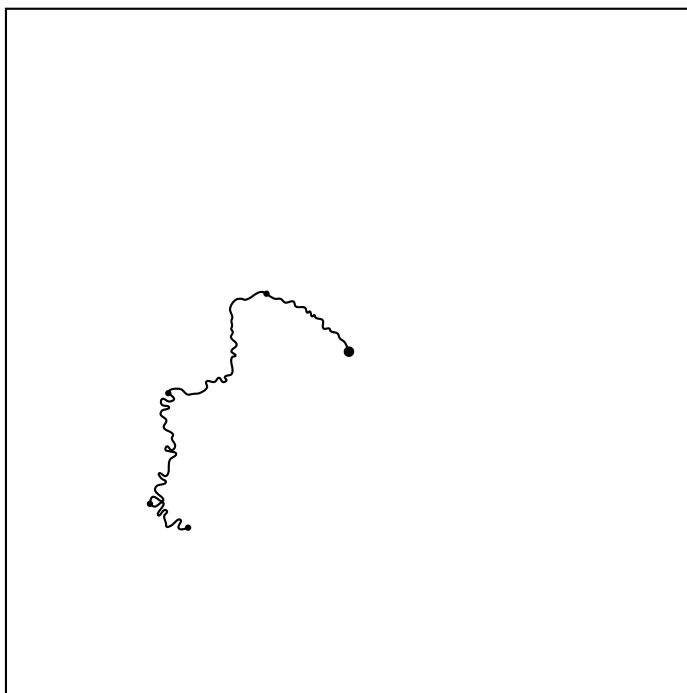
- [1] J.P. CONZE. Entropie d'un groupe abélien de transformations. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 25 : 11–30, 1972.

¹En fait, c'est même une condition suffisante : voir [7].

- [2] I.P. CORNFELD, S.V. FOMIN, et Ya.G. SINAI. *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 1982.
- [3] A. DEL JUNCO. Transformations with discrete spectrum are stacking transformations. *Canadian Journal of Mathematics*, 28 : 836–839, 1976.
- [4] J. DOOB. *Stochastic Processes*. Wiley, New-York, 1973.
- [5] J. FELDMAN. New K-automorphisms and a problem of Kakutani. *Israel Journal of Mathematics*, 24 : 16–38, 1976.
- [6] S. FERENCZI. Systèmes de rang fini. Thèse de doctorat d'État, Université d'Aix-Marseille 2, 1990.
- [7] C. FOIAS et S. STRATILA. ensembles de Kronecker dans la théorie ergodique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 20 : 166–168, 1967.
- [8] J. HAEZENDONCK. Abstract Lebesgue-Rokhlin spaces. *Bull. Soc. Math. Belgique*, 25 : 243–258, 1973.
- [9] A. IWANIK et J. DE SAM LAZARO. Sur la multiplicité L^p d'un automorphisme gaussien. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 312 : 875–876, 1991.
- [10] B. JESSEN et H. TORNEHAVE. Mean motion and zeros of almost periodic functions. *Acta Mathematica*, 77 : 138–279, 1945.
- [11] B. KAMIŃSKI. The theory of invariant partitions for \mathbb{Z}^d -actions. *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math.*, 29 : 349–362, 1981.
- [12] J. KING. The commutant is the weak closure of the powers, for rank-1 transformations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 6 : 363–384, 1986.
- [13] J.L. KING. Joining-rank and the structure of finite-rank mixing transformations. *J. Analyse Math.*, 51 : 182–227, 1988.
- [14] L. LAGRANGE. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes I et II. In *Œuvres* 5, pages 123–344. Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1781.
- [15] P. LÉVY. Le mouvement brownien plan. *American Journal of Mathematics*, 62 : 487–550, 1940.
- [16] J. NEVEU. *Processus Aléatoires Gaussiens*. Presses de l'Université de Montréal, 1968.
- [17] D. NEWTON. Coalescence and spectrum of automorphisms of a lebesgue space. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 19 : 117–122, 1971.
- [18] D. NEWTON et W. PARRY. On a factor automorphism of a normal dynamical system. *Ann. Math. Statistics*, 37 : 1528–1533, 1966.
- [19] D. ORNSTEIN. Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. *Advan. Math.*, 4 : 337–352, 1970.
- [20] D.S. ORNSTEIN, D.J. RUDOLPH, et B. WEISS. *Equivalence of Measure Preserving Transformations*. Memoirs of the American Mathematical Society 262, 1982.
- [21] K. PETERSEN. *Ergodic Theory*. Cambridge University Press, 1983.

- [22] M.S. PINSKER. Dynamical systems with completely positive or zero entropy. *Dokl. Akad. Nauk.*, 133 : 1025–1026, 1960.
- [23] V.A. ROKHLIN. On the fundamental ideas of measure theory. *AMS Translations Serie 1*, 10 : 2–53, 1963. (Première publication en russe : 1949.).
- [24] A. ROTHSTEIN. Versik processes : First steps. *Israel Journal of Mathematics*, 36 : 205–224, 1980.
- [25] D.J. RUDOLPH. *Fundamentals of Measurable Dynamics – Ergodic Theory on Lebesgue Spaces*, pages 9–26. Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [26] T. DE LA RUE. Espaces de lebesgue. In *Séminaire de Probabilités XXVII, Lecture Notes in Mathematics 1557*, pages 15–21. Springer-Verlag, 1993.
- [27] S. STERNBERG. *Celestial Mechanics*, pages 36–54. Benjamin, 1969.
- [28] J.P. THOUVENOT. The metrical structure of some gaussian processes. In *Ergodic Theory and Related Topics II*, pages 195–198, Georghental, 1986. Teubner Texte zur Mathematik.
- [29] H. WEYL. Mean motion. *American Journal of Mathematics*, 60 : 889–896, 1938.

Chapitre I



Entropie d'un système dynamique gaussien ; cas d'une action de \mathbb{Z}^d

Thierry DE LA RUE

Abstract

We show that the entropy of a Gaussian dynamical system is 0 or ∞ , according as its spectral measure is singular with respect to the Lebesgue measure or not; then we extend this result to the case of a \mathbb{Z}^d -action.

Résumé

On montre ici que l'entropie d'un système dynamique gaussien est 0 ou ∞ , suivant que sa mesure spectrale est ou n'est pas singulière par rapport à la mesure de Lebesgue; on étend ensuite ce résultat au cas d'une action de \mathbb{Z}^d .

1 Calcul de l'entropie dans le cas d'une mesure spectrale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue

Soit σ une mesure finie symétrique sur $[-\pi, \pi]$, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique gaussien de mesure spectrale σ . Cela signifie qu'il existe un processus gaussien réel centré $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ vérifiant

- $X_p = X_0 \circ T^p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$,
- la plus petite tribu rendant mesurables tous les X_p coïncide avec \mathcal{A} ,
- $E_\mu[X_p X_q] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-q)t} d\sigma(t)$.

Notons λ la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$. Si $\sigma = \lambda$, les variables aléatoires X_p , $p \in \mathbb{Z}$, sont indépendantes, et il est très facile alors de montrer que T est d'entropie infinie. On va en fait établir le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Dès que σ est absolument continue par rapport à λ , T est d'entropie infinie.*

Remarque. Dans [5], Newton et Parry attribuent ce résultat à Pinsker, mais nous n'en avons trouvé la preuve ni dans la référence citée ([6]), ni ailleurs.

Si σ et $\tilde{\sigma}$ sont deux mesures finies symétriques équivalentes sur $[-\pi, \pi]$, deux systèmes dynamiques gaussiens de mesures spectrales respectives σ et $\tilde{\sigma}$ sont métriquement isomorphes. Pour prouver le théorème 1.1, Il suffit donc de considérer le cas où $\sigma = \sigma_A$, la mesure σ_A étant définie pour tout A mesurable dans $[0, \pi]$ par

$$\frac{d\sigma_A}{d\lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} 1_A + 1_{-A}.$$

Dans la suite, on notera h_A l'entropie d'un système dynamique gaussien de mesure spectrale σ_A .

Lemme 1.2 *Pour tout $M > 0$, il existe $\theta_M \in]0, \pi[$ tel que, pour tout $A \subset [0, \pi]$, $\lambda([0, \pi] \setminus A) \leq \theta_M$ entraîne $h_A \geq M$.*

Preuve — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique gaussien de mesure spectrale λ , et soit $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ le processus gaussien sous-jacent. Étant donné $M > 0$, fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ln n \geq M + 1$, et considérons une partition de \mathbb{R} en n intervalles R_1, \dots, R_n , tels que pour tout k , $\mu(X_0 \in R_k) = \frac{1}{n}$. On construit alors la partition $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ de Ω définie par $P_k \stackrel{\text{déf}}{=} (X_0 \in R_k)$. Les partitions $T^j \mathcal{P}$, $j \in \mathbb{Z}$, étant indépendantes, on a

$$h(\mathcal{P}, T) = H(\mathcal{P}) = \ln n \geq M + 1.$$

L'espace gaussien réel \mathcal{H}_r engendré par les X_p est isomorphe au sous-espace de $L^2([-\pi, \pi], \lambda)$ formé des fonctions f vérifiant $f(-t) = \overline{f(t)}$, chaque X_p correspondant à e^{ip} (voir [1]). Pour $A \subset [0, \pi]$, on peut trouver $Y_0 \in \mathcal{H}_r$ correspondant à $1_A + 1_{-A}$. Posons pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $Y_p \stackrel{\text{déf}}{=} Y_0 \circ T^p$. (Y_p correspond à $e^{ip}(1_A + 1_{-A})$.) Construisons une autre partition $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ de Ω , définie par $Q_k \stackrel{\text{déf}}{=} (Y_0 \in R_k)$. Le facteur de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ engendré par les Y_p étant un système dynamique gaussien de mesure spectrale σ_A , il suffit de montrer que $h(\mathcal{Q}, T) \geq M$ dès que $\lambda([0, \pi] \setminus A)$ est assez petit.

La distance entre les partitions \mathcal{P} et \mathcal{Q} est donnée par

$$|\mathcal{P} - \mathcal{Q}| \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^n \mu(P_k \Delta Q_k) = 2\mu \left(\bigcup_{k=1}^n P_k \setminus Q_k \right).$$

La partition \mathcal{P} étant fixée, on montre facilement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $|\mathcal{P} - \mathcal{Q}| \leq \delta_\varepsilon$ entraîne $H(\mathcal{P} | \mathcal{Q}) \leq \varepsilon$. De plus, on a l'inégalité

$$h(\mathcal{P}, T) \leq h(\mathcal{Q}, T) + H(\mathcal{P} | \mathcal{Q}).$$

Ainsi, si $|\mathcal{P} - \mathcal{Q}| \leq \delta_1$, on obtient $h(\mathcal{Q}, T) \geq h(\mathcal{P}, T) - 1 \geq M$. Il reste donc à voir que $|\mathcal{P} - \mathcal{Q}| \rightarrow 0$ quand $\lambda([0, \pi] \setminus A) \rightarrow 0$.

Pour cela, considérons les bornes finies a_1, \dots, a_{n-1} des intervalles R_1, \dots, R_n , et posons pour tout $s > 0$

$$M_s \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{k=1}^{n-1} [a_k - s, a_k + s].$$

Fixons $\varepsilon > 0$, et choisissons s assez petit pour que $\mu(X_0 \in M_s) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Remarquons que $Z_0 \stackrel{\text{déf}}{=} X_0 - Y_0$ est une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance $2\lambda([0, \pi] \setminus A)$. Ainsi, si $\lambda([0, \pi] \setminus A)$ est assez petit, on a $\mu(|Z_0| \geq s) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et alors

$$|\mathcal{P} - \mathcal{Q}| = 2\mu \left(\bigcup_{k=1}^n P_k \setminus Q_k \right) \leq 2\mu(X_0 \in M_s) + 2\mu(|Z_0| \geq s) \leq \varepsilon.$$

□

Lemme 1.3 Soient M et θ_M comme au lemme 1.2, et $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est contenu dans un intervalle de la forme $\left[\frac{k}{n}\pi, \frac{k+1}{n}\pi\right]$, et si $\lambda(A) \geq \frac{1}{n}(\pi - \theta_M)$, alors $h_A \geq \frac{M}{n}$.

Preuve — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique gaussien de mesure spectrale σ_A , et $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ le processus gaussien sous-jacent. On vérifie aisément que pour tout $q \in \mathbb{Z}$, on a

$$E_\mu[X_0 X_{nq}] = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iqt} d\sigma_B(t),$$

où $B \subset [0, \pi]$ et $\lambda(B) \geq \pi - \theta_M$. Le facteur de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T^n)$ engendré par les $(X_{nq})_{q \in \mathbb{Z}}$ étant un système dynamique gaussien de mesure spectrale σ_B , il est d'après le lemme 1.2 d'entropie supérieure ou égale à M . On a donc $h(T^n) \geq M$, i.e. $h(T) \geq \frac{M}{n}$. \square

On peut maintenant achever la preuve du théorème 1.1. Soit $A \subset [0, \pi]$ et $M > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{A}_n l'algèbre des parties de $[0, \pi]$ engendrée par les intervalles $\left[\frac{k}{2^n}\pi, \frac{k+1}{2^n}\pi\right]$, k décrivant $\{0, \dots, 2^n - 1\}$. On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n assez grand et $A_\varepsilon \in \mathcal{A}_n$ vérifiant $\lambda(A \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Prenons en particulier $\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \theta_M \frac{\lambda(A)}{4\pi} \leq \frac{\lambda(A)}{2}$. Écrivons alors

$$A_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^p \left[\frac{k_j}{2^n}\pi, \frac{k_j+1}{2^n}\pi \right].$$

On a forcément $\lambda(A_\varepsilon) = p \frac{\pi}{2^n} \geq \frac{\lambda(A)}{2}$, d'où $p \geq 2^n \frac{\lambda(A)}{2\pi}$.

Appelons r le nombre d'entiers k_j vérifiant

$$\lambda\left(\left[\frac{k_j}{2^n}\pi, \frac{k_j+1}{2^n}\pi\right] \setminus A\right) > \frac{\theta_M}{2^n}.$$

On a aussi $r \frac{\theta_M}{2^n} \leq \lambda(A_\varepsilon \setminus A) \leq \theta_M \frac{\lambda(A)}{4\pi}$, d'où $r \leq 2^n \frac{\lambda(A)}{4\pi}$.

Il existe donc un entier $q \stackrel{\text{déf}}{=} p - r \geq 2^n \frac{\lambda(A)}{4\pi}$, et q entiers k'_1, \dots, k'_q vérifiant chacun

$$\lambda\left(\left[\frac{k'_j}{2^n}\pi, \frac{k'_j+1}{2^n}\pi\right] \setminus A\right) \leq \frac{\theta_M}{2^n}.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$, posons $A_j \stackrel{\text{déf}}{=} A \cap \left[\frac{k'_j}{2^n}\pi, \frac{k'_j+1}{2^n}\pi\right]$. D'après le lemme 1.3, on a $h_{A_j} \geq \frac{M}{2^n}$. Mais les A_j étant deux à deux disjoints, le produit de q systèmes dynamiques gaussiens de mesures spectrales respectives $\sigma_{A_1}, \dots, \sigma_{A_q}$ est un facteur de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$. On a donc

$$h_A \geq h_{A_1} + \dots + h_{A_q} \geq \frac{q}{2^n} M \geq \frac{\lambda(A)}{4\pi} M.$$

Comme M est arbitraire, on obtient le résultat annoncé. \square

2 Généralisation au cas d'une action de \mathbb{Z}^d ($d \geq 1$)

On considère maintenant un groupe $G = (T^z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ de transformations préservant la mesure sur l'espace de Lebesgue $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, telles que pour tous z, z' dans \mathbb{Z}^d , $T^z \circ T^{z'} = T^{z+z'}$ (en particulier, G est un groupe abélien). Cette fois, on suppose l'existence d'un processus gaussien réel centré $(X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ vérifiant

- $X_z = X_0 \circ T^z$ pour tout $z \in \mathbb{Z}^d$,
- la plus petite tribu rendant mesurables tous les X_z coïncide avec \mathcal{A} ,
- $E_\mu[X_z X_{z'}] = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle z-z', t \rangle} d\sigma(t)$, où σ est une mesure finie symétrique sur $[-\pi, \pi]^d$, appelée mesure spectrale du système.

De même que dans le cas d'une action de \mathbb{Z} , on peut définir l'entropie de ce système dynamique, notée $h(G)$ (voir [1]). Notons λ_d la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]^d$; on a alors le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Si σ est singulière par rapport à λ_d , alors $h(G) = 0$. Dans le cas contraire, $h(G) = +\infty$.*

Preuve — Le soin est laissé au lecteur d'adapter la démonstration du théorème 1.1 au cas d'une action de \mathbb{Z}^d . Ceci ne présente aucune difficulté car toutes les propriétés de l'entropie dont on a besoin restent valables (voir toujours [1]). Ainsi, si σ est absolument continue par rapport à λ_d , on a $h(G) = +\infty$.

Si σ n'est pas singulière par rapport à λ_d , on peut écrire $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, où σ_1 est singulière et σ_2 absolument continue par rapport à λ_d . On peut alors trouver un facteur de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, G)$ qui soit un système dynamique gaussien de mesure spectrale σ_2 , et donc d'entropie infinie. Dans ce cas, on obtient bien $h(G) = +\infty$.

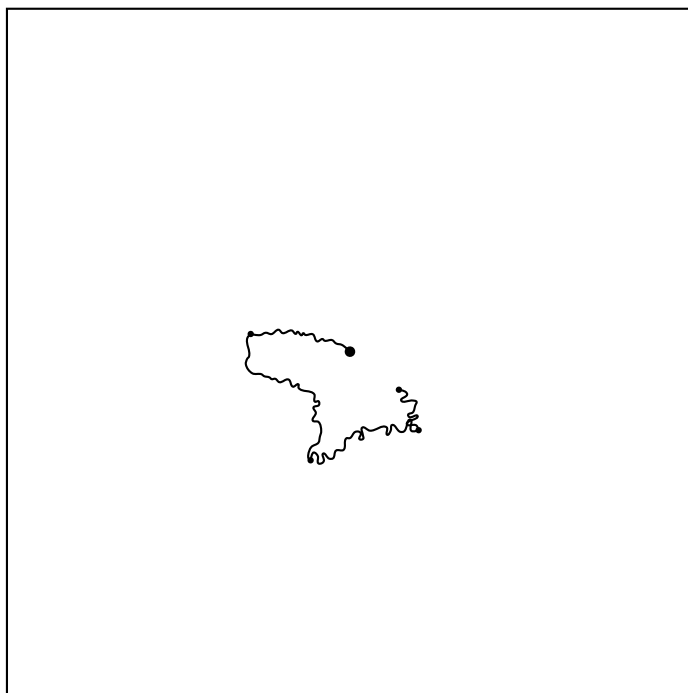
Considérons maintenant le cas où σ est singulière par rapport à λ_d . La démonstration donnée dans ce cas par Newton ([4]) se généralise sans problème au cas d'une action de \mathbb{Z}^d : supposons par l'absurde $h(G) > 0$, et notons $\pi(G)$ la tribu de Pinsker du système, *i.e.* le plus grand facteur d'entropie nulle. Soit \mathcal{H}_0 le sous-espace de $L^2(\mu)$ formé des fonctions $\pi(G)$ -mesurables, et \mathcal{H}_1 l'orthogonal de \mathcal{H}_0 . Puisque la tribu engendrée par les $T^z X_0$ est \mathcal{A} tout entière, X_0 n'est pas dans \mathcal{H}_0 (autrement, on aurait $h(G) = 0$). On peut donc écrire $X_0 = Y + Z$, où $Y \in \mathcal{H}_0$, et $Z \in \mathcal{H}_1$, $Z \neq 0$. Or, d'après [3], G a dans \mathcal{H}_1 un spectre de Lebesgue dénombrable, et donc la mesure spectrale de Z est absolument continue par rapport à λ_d . Mais alors la mesure spectrale σ de X_0 , qui est la somme des mesures spectrales respectives de Y et Z , n'est pas singulière par rapport à λ_d . La contradiction prouve que $h(G) = 0$. \square

Références

- [1] J.P. CONZE. Entropie d'un groupe abélien de transformations. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 25 : 11–30, 1972.
- [2] I.P. CORNFELD, S.V. FOMIN, et Ya.G. SINAI. *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 1982.

- [3] B. KAMIŃSKI. The theory of invariant partitions for \mathbb{Z}^d -actions. *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math.*, 29 : 349–362, 1981.
- [4] D. NEWTON. Coalescence and spectrum of automorphisms of a lebesgue space. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 19 : 117–122, 1971.
- [5] D. NEWTON et W. PARRY. On a factor automorphism of a normal dynamical system. *Ann. Math. Statistics*, 37 : 1528–1533, 1966.
- [6] M.S. PINSKER. Dynamical systems with completely positive or zero entropy. *Dokl. Akad. Nauk.*, 133 : 1025–1026, 1960.

Chapitre II



Mouvement Moyen et Système Dynamique Gaussien

Thierry DE LA RUE

Abstract

From a given nonatomic probability measure σ on $[0, \pi]$, we construct a transformation T of the complex brownian path $(B_u)_{0 \leq u \leq 1}$. In this way we get a real gaussian dynamical system, whose spectral measure is the symmetric probability on $[-\pi, \pi]$ obtained from σ . The transformation T can be inserted in a flow $(T^t)_{t \in \mathbb{R}}$, and the “orbits” $t \mapsto Z_t = B_1 \circ T^t$ have almost surely a mean motion : if we write $Z_t = \rho_t e^{iA_t}$ where $t \mapsto A_t$ is continuous, then with probability 1, $\frac{1}{t}A_t$ has a limit when $t \rightarrow +\infty$, which is the mean of σ .

Résumé

Étant donné une mesure de probabilité diffuse σ sur $[0, \pi]$, on construit une transformation T de la trajectoire brownienne complexe $(B_u)_{0 \leq u \leq 1}$. On obtient ainsi un système dynamique gaussien réel dont la mesure spectrale est la probabilité symétrique sur $[-\pi, \pi]$ obtenue à partir de σ . La transformation T peut être insérée dans un flot $(T^t)_{t \in \mathbb{R}}$, et les “orbites” $t \mapsto Z_t \stackrel{\text{déf}}{=} B_1 \circ T^t$ ont presque sûrement un mouvement moyen : si on note $Z_t = \rho_t e^{iA_t}$ où $t \mapsto A_t$ est continue, alors avec probabilité 1, $\frac{1}{t}A_t$ a une limite quand $t \rightarrow +\infty$, qui est la moyenne de σ .

1 Le mouvement moyen “classique”

La situation classique du calcul du mouvement moyen a pour origine l'étude du mouvement des planètes. Dans une vision (très) simplifiée de l'univers, on imagine n astres qui se déplacent dans un plan dont l'origine est la Terre. L'astre 1 décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon a_1 , à une vitesse angulaire α_1 ; de manière générale, l'astre $k+1$ tourne autour de l'astre k à une distance a_{k+1} de celui-ci, et avec une vitesse angulaire α_{k+1} . On s'intéresse au mouvement de l'astre n par rapport à la Terre.

Si on repère chaque point du plan par une affixe complexe, la position de l'astre n à l'instant t est

$$z(t) = a_1 e^{i(\alpha_1 t + \beta_1)} + \dots + a_n e^{i(\alpha_n t + \beta_n)}$$

où les β_k sont les angles repérant les astres les uns par rapport aux autres à l'instant $t = 0$.

Pour un choix général des a_k et des β_k , $z(t)$ ne s'annule jamais. On peut donc écrire la position à l'instant t sous la forme

$$z(t) = \rho(t) e^{i\varphi(t)}$$

où $\rho(t) > 0$, et $t \mapsto \varphi(t)$ est une fonction réelle continue (en fait, de classe C^∞).

C'est Lagrange ([3]) qui pose le premier la question du mouvement moyen : $\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$ représente la vitesse angulaire moyenne entre l'instant 0 et l'instant t . Lagrange se demande si cette moyenne a une limite lorsque t tend vers l'infini. Le mouvement moyen, lorsqu'il existe, est alors $m = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{t}$.

On peut facilement calculer le mouvement moyen dans un cas simple. Remarquons que l'astre n est toujours dans le disque de centre l'astre 1 et de rayon $a_2 + \dots + a_n$. Supposons donc que a_1 soit plus grand que la somme de tous les autres rayons. Dans ce cas, la différence entre $\varphi(t)$ et $\varphi_1(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \alpha_1 t + \beta_1$ n'est alors jamais plus grande que $\frac{\pi}{2}$. On a donc $m = \alpha_1$.

Hartman fut le premier à montrer l'existence du mouvement moyen dans le cas général. Weyl a ensuite établi une formule pour ce mouvement moyen, qui avait été conjecturée par Wintner : lorsque les α_k sont rationnellement indépendants, le mouvement moyen existe et vaut

$$m = p_1 \alpha_1 + \dots + p_n \alpha_n$$

où les p_k sont des coefficients positifs ne dépendant que des rayons a_k . Plus exactement, soient $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n$ $n - 1$ variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. p_k est alors la probabilité que la somme

$$a_1 e^{i\theta_1} + \dots + a_{k-1} e^{i\theta_{k-1}} + a_{k+1} e^{i\theta_{k+1}} + \dots + a_n e^{i\theta_n}$$

soit de module inférieur à a_k . On a de plus le résultat remarquable suivant :

$$p_1 + \dots + p_n = 1.$$

Ainsi, m est une combinaison linéaire convexe des vitesses angulaires. (Cette égalité peut être obtenue en prenant tous les α_k égaux, auquel cas le mouvement moyen est clairement α_1 ; malheureusement, ce cas sort du cadre précédent puisque les α_k ne sont pas ici rationnellement indépendants...) Bien sûr, lorsque $a_1 > a_2 + \dots + a_n$, on retrouve le résultat précédent. En effet, on a alors clairement $p_1 = 1$, et $p_2 = \dots = p_n = 0$.

Intuitivement, la formule de Wintner peut se comprendre ainsi : l'astre k ne contribue au mouvement moyen que lorsqu'il est assez près de la Terre pour tourner autour !

Le lecteur curieux pourra trouver tous les détails concernant les résultats de ce paragraphe dans [2], [5] et [6].

On va maintenant établir l'existence d'un mouvement moyen dans une autre situation, qui peut s'interpréter comme la limite du cadre précédent lorsque le nombre n de planètes tend vers l'infini. La courbe obtenue en reliant chaque astre k à l'astre $k + 1$ ressemble alors étrangement à une trajectoire brownienne...

2 Une transformation de la trajectoire brownienne

Notons $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace canonique du mouvement brownien complexe issu de zéro, sur l'intervalle de temps $[0, 1]$:

- Ω est l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} , qui s'annulent en $u = 0$. Pour $\omega \in \Omega$ et $0 \leq u \leq 1$, on note $B_u(\omega)$ la position de la trajectoire ω à l'instant u .
 - μ est la mesure de Wiener sur Ω .
 - \mathcal{A} est la tribu borélienne complétée pour μ .
- Soit σ une mesure de probabilité sur $[0, \pi]$, supposée diffuse (i.e. pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sigma(\{x\}) = 0$). Pour tout $x \in [0, \pi]$, posons

$$f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma([0, x]);$$

l'application f est alors continue et croissante de $[0, \pi]$ sur $[0, 1]$.

2.1 Découper, tourner et recoller

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit une transformation T_n de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ de la façon suivante :

- Pour $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, on fixe un réel α_k^n appartenant à l'intervalle $J_k^n \stackrel{\text{déf}}{=} \left[\frac{k}{2^n} \pi, \frac{k+1}{2^n} \pi \right]$.
- Soit $\omega \in \Omega$: la trajectoire ω est "coupée" en 2^n morceaux, correspondant aux intervalles de temps $f(J_0^n), \dots, f(J_{2^n-1}^n)$. Le morceau correspondant à $f(J_k^n)$ est tourné de l'angle α_k^n . La trajectoire $T_n(\omega)$ est obtenue en recollant bout à bout les nouveaux morceaux.

Plus précisément, notons pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$

$$R_k^n \stackrel{\text{déf}}{=} B_{f(\frac{k+1}{2^n}\pi)} - B_{f(\frac{k}{2^n}\pi)}.$$

Soit u un réel dans $[0, 1]$, et k tel que $u \in f(J_k^n)$. On a alors

$$B_u \circ T_n = \sum_{j=0}^{k-1} e^{i\alpha_j^n} R_j^n + e^{i\alpha_k^n} \left(B_u - B_{f(\frac{k}{2^n}\pi)} \right).$$

Sous μ , $(B_u \circ T_n)_{0 \leq u \leq 1}$ est encore un mouvement brownien complexe issu de zéro, et donc T_n préserve la mesure μ .

De la même manière, pour tout réel t on peut définir la transformation T_n^t , obtenue en remplaçant l'angle α_k^n par $t\alpha_k^n$. La famille $(T_n^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est alors un groupe de transformations de Ω préservant μ .

2.2 Définition de la transformation T

Considérons la partie Ω_0 de Ω définie par

$$\Omega_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \omega \in \Omega / \sum_{k=0}^{2^n-1} |R_k^n(\omega)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \right\}.$$

La mesure σ étant diffuse, on a

$$\sup_k \left[f\left(\frac{k+1}{2^n}\pi\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\pi\right) \right] = \sup_k \sigma(J_k^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

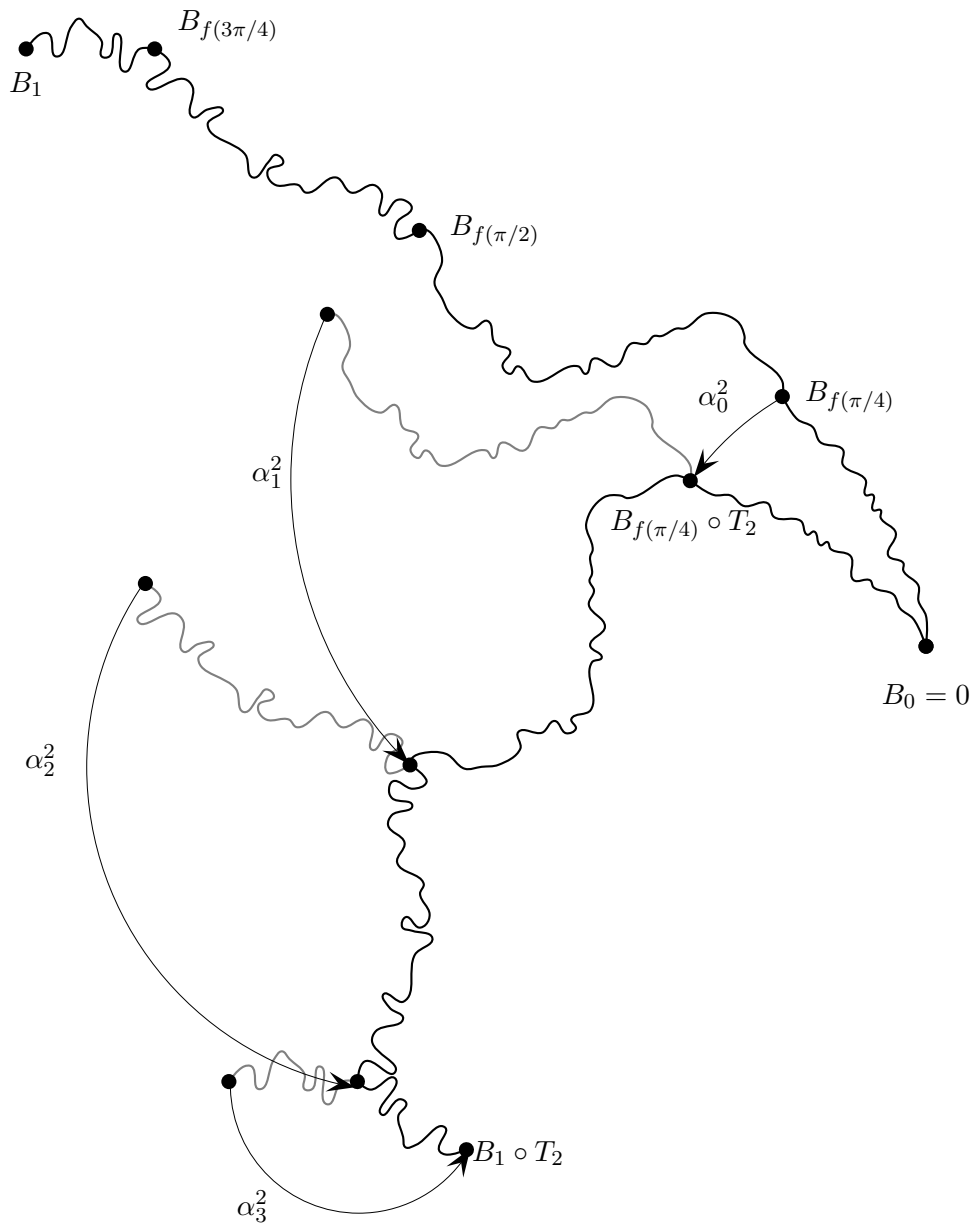


FIG. 1 – Action de T_2 sur une trajectoire continue.

Par une propriété classique du mouvement brownien¹, on a donc $\mu(\Omega_0) = 1$.

Proposition 2.1 *Pour tout $\omega \in \Omega_0$, la suite des trajectoires $(T_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément par rapport à u sur $[0, 1]$ vers une trajectoire continue et issue de zéro, notée $T(\omega)$. Sous μ , $(B_u \circ T)_{0 \leq u \leq 1}$ est encore un mouvement brownien, et donc T préserve la mesure μ . Enfin, pour tout $\omega \in \Omega_0$, $T(\omega) \in \Omega_0$.*

Preuve — Soit u un réel dans $[0, 1]$, et k tel que $u \in f(J_k^n)$. Pour tout x réel, notons $[x]$ la partie entière de x , et posons $l = [k/2]$. On a alors

$$\begin{aligned}
& |B_u \circ T_{n+1} - B_u \circ T_n| \\
= & \left| \sum_{j=0}^{k-1} e^{i\alpha_j^{n+1}} R_j^{n+1} + e^{i\alpha_k^{n+1}} \left(B_u - B_{f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\pi\right)} \right) \right. \\
& \left. - \sum_{j=0}^{l-1} e^{i\alpha_j^n} R_j^n - e^{i\alpha_l^n} \left(B_u - B_{f\left(\frac{l}{2^n}\pi\right)} \right) \right| \\
\leq & \sum_{j=0}^{k-1} \left| e^{i\alpha_j^{n+1}} - e^{i\alpha_{[j/2]}^n} \right| \left| B_{f\left(\frac{j+1}{2^{n+1}}\pi\right)} - B_{f\left(\frac{j}{2^{n+1}}\pi\right)} \right| \\
& + \left| e^{i\alpha_k^{n+1}} - e^{i\alpha_{[k/2]}^n} \right| \left| B_u - B_{f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\pi\right)} \right| \\
\leq & \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\pi}{2^n} \left| B_{f\left(\frac{j+1}{2^{n+1}}\pi\right)} - B_{f\left(\frac{j}{2^{n+1}}\pi\right)} \right| + \frac{\pi}{2^n} \left| B_u - B_{f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\pi\right)} \right| \\
\leq & \sqrt{(k+1) \left(\frac{\pi}{2^n} \right)^2 \sqrt{\sum_{j=0}^{k-1} \left| B_{f\left(\frac{j+1}{2^{n+1}}\pi\right)} - B_{f\left(\frac{j}{2^{n+1}}\pi\right)} \right|^2 + \left| B_u - B_{f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\pi\right)} \right|^2}}.
\end{aligned}$$

Or, comme la trajectoire est uniformément continue sur $[0, 1]$, on a pour n assez grand

$$\left| B_u - B_{f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\pi\right)} \right|^2 \leq 1.$$

De plus, comme $\omega \in \Omega_0$, on a aussi pour n assez grand

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left| B_{f\left(\frac{j+1}{2^{n+1}}\pi\right)} - B_{f\left(\frac{j}{2^{n+1}}\pi\right)} \right|^2 \leq 3.$$

Ainsi, pour n assez grand (“assez grand” dépendant de ω , mais pas de u), on a

$$|B_u \circ T_{n+1} - B_u \circ T_n| \leq 2\pi \frac{1}{2^{n/2}},$$

ce qui suffit à montrer la convergence uniforme de la suite de trajectoires $(T_n(\omega))$. La trajectoire limite $T(\omega)$ est forcément continue et issue de zéro.

En utilisant des résultats classiques sur la convergence en probabilité des variables aléatoires gaussiennes, on obtient immédiatement que $(B_u \circ T)_{0 \leq u \leq 1}$

¹voir par exemple [4].

est un processus gaussien centré. De plus, la convergence ayant lieu aussi dans L^2 , on montre facilement que ce processus est encore un mouvement brownien.

Montrons enfin que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $T(\omega) \in \Omega_0$. En utilisant la majoration obtenue ci-dessus, on trouve

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} |R_k^n \circ T - R_k^n \circ T_n| \leq \sum_{p \geq n} 2\pi \frac{1}{2^{p/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{2^n-1} |R_k^n \circ T|^2 - \sum_{k=0}^{2^n-1} |R_k^n|^2 \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{2^n-1} |R_k^n \circ T|^2 - \sum_{k=0}^{2^n-1} |R_k^n \circ T_n|^2 \right| \\ &\leq \sup_k (|R_k^n \circ T| + |R_k^n|) \sum_{k=0}^{2^n-1} |R_k^n \circ T - R_k^n \circ T_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Dans la suite, on se restreindra donc à l'espace probabilisé $(\Omega_0, \mathcal{A}, \mu)$.

Proposition 2.2 *Soit γ la mesure de probabilité symétrique sur $[-\pi, \pi]$ définie par*

$$\gamma(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\sigma(A \cap [0, \pi]) + \sigma(-A \cap [0, \pi])}{2}.$$

Alors $(\Omega_0, \mathcal{A}, \mu, T)$ est un système dynamique gaussien réel de mesure spectrale γ .

Preuve — Soit \mathcal{H}_1 le sous-espace gaussien de $L^2(\mu)$ engendré par la famille $(B_u)_{0 \leq u \leq 1}$, et notons λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Il existe un isomorphisme entre \mathcal{H}_1 et $L^2([0, 1], 2\lambda)$, qui fait correspondre $\mathbb{1}_{[0, u]}$ à B_u . De manière générale, si $f \in L^2([0, 1], 2\lambda)$, on note $\int_0^1 f(u) dB_u$ l'élément de \mathcal{H}_1 correspondant.

Pour tout $u \in [0, 1]$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors par définition de T_n

$$B_u \circ T_n = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0, u]} \varphi_n(v) dB_v = \int_0^u \varphi_n(v) dB_v,$$

$$\text{où } \varphi_n(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\alpha_k^n} \mathbb{1}_{f(J_k^n)}(v).$$

Or, on vérifie facilement la convergence presque sûre et dans $L^2(2\lambda)$ de φ_n vers $e^{i\psi}$, où

$$\psi(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf \{t \in [0, \pi] / \sigma([0, t]) = v\}.$$

On a donc

$$B_u \circ T = \lim_{n \rightarrow \infty} B_u \circ T_n = \int_0^u e^{i\psi(v)} dB_v.$$

Par suite, pour tout $X \in \mathcal{H}_1$, si $X = \int_0^1 f(u) dB_u$, alors

$$X \circ T = \int_0^1 e^{i\psi(u)} f(u) dB_u.$$

Soit \mathcal{H}_2 le sous-espace gaussien de $L^2(\mu)$ engendré par la famille $(\overline{B_u})_{0 \leq u \leq 1}$. On vérifie immédiatement que \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont orthogonaux, et \mathcal{H}_2 est aussi isomorphe à $L^2(2\lambda)$. Si $\tilde{X} = \int_0^1 f(u) d\overline{B_u}$, on obtient de même que ci-dessus

$$\tilde{X} \circ T = \int_0^1 f(u) e^{-i\psi(u)} d\overline{B_u}.$$

Finalement, notons $\mathcal{H} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. \mathcal{H} est un sous-espace gaussien, et tout $X \in \mathcal{H}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$X = \int_0^1 f(u) dB_u + \int_0^1 g(u) d\overline{B_u},$$

où f et g sont dans $L^2(2\lambda)$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a alors

$$X \circ T^p = \int_0^1 f(u) e^{ip\psi(u)} dB_u + \int_0^1 g(u) e^{-ip\psi(u)} d\overline{B_u}.$$

Remarquons que pour toute fonction h mesurable bornée de $[0, \pi]$ dans \mathbb{C} , on a l'égalité

$$\int_0^1 h(\psi(v)) dv = \int_0^\pi h(t) d\sigma(t).$$

En effet, on le vérifie facilement lorsque h est une indicatrice d'intervalle, et cela suffit pour montrer que σ est la mesure image de λ par ψ .

Posons maintenant

$$X_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(B_1 + \overline{B_1}) = \Re e(B_1),$$

et pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$X_p \stackrel{\text{déf}}{=} X_0 \circ T^p = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{ip\psi(u)} dB_u + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-ip\psi(u)} d\overline{B_u}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \langle X_0, X_p \rangle_{L^2(\mu)} &= \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} e^{ip\psi} \right\rangle_{L^2(2\lambda)} + \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} e^{-ip\psi} \right\rangle_{L^2(2\lambda)} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{ip\psi(u)} du + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-ip\psi(u)} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{ipt} d\sigma(t) + \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-ipt} d\sigma(t) \\ &= \int_{-\pi}^\pi e^{ipt} d\gamma(t). \end{aligned}$$

Ainsi, le processus $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est un processus réel gaussien stationnaire, de mesure spectrale γ .

Il reste maintenant à montrer que la tribu engendrée par les X_p est \mathcal{A} tout entière. Pour cela, il suffit de voir que l'espace \mathcal{V} engendré par les X_p est \mathcal{H} tout entier. Or, \mathcal{V} est isomorphe à $L^2([-\pi, \pi], \gamma)$, X_p correspondant à e^{ip} . Pour tout $u \in [0, 1]$, soit $F_u \in \mathcal{V}$ correspondant à $2 \cdot \mathbb{1}_{[0, \psi(u)]}$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle F_u, X_p \rangle_{L^2(\mu)} &= \left\langle 2 \cdot \mathbb{1}_{[0, \psi(u)]}, e^{ip} \right\rangle_{L^2(\gamma)} \\ &= \int_0^{\psi(u)} e^{-ips} d\sigma(s) \\ &= \int_0^u e^{-ip\psi(s)} ds \\ &= \langle B_u, X_p \rangle_{L^2(\mu)}. \end{aligned}$$

On a donc pour tout $Y \in \mathcal{V}$

$$\langle F_u, Y \rangle_{L^2(\mu)} = \langle B_u, Y \rangle_{L^2(\mu)},$$

et donc F_u est la projection orthogonale de B_u sur \mathcal{V} . De plus, $\|F_u\|^2 = 2u = \|B_u\|^2$, d'où $F_u = B_u$. \square

3 Insertion de T dans un flot et mouvement moyen

Pour tout $\omega \in \Omega_0$ et tout réel t , on peut définir aussi $T^t(\omega)$ comme la limite uniforme sur $[0, 1]$ des trajectoires $(T_n^t(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$. De même, T^t est une transformation de Ω_0 préservant la mesure μ . On a $T^1 = T$, et on devine facilement que pour tous réels s et t , $T^{s+t} = T^s \circ T^t$. (La démonstration est laissée au lecteur courageux...)

On appellera *orbite* de ω la fonction qui à tout réel t associe

$$Z_t(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} B_1 \circ T^t(\omega).$$

Proposition 3.1 *Pour tout $\omega \in \Omega_0$, l'orbite de ω est de classe C^∞ , et pour presque tout $\omega \in \Omega_0$, elle ne passe pas par l'origine.*

Preuve — Fixons $\omega \in \Omega_0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$t \mapsto Z_{n,t} \stackrel{\text{déf}}{=} B_1 \circ T_n^t = \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{it\alpha_k^n} R_k^n$$

est clairement de classe C^∞ , la dérivée p -ième en t étant

$$Z_{n,t}^{(p)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} i^p (\alpha_k^n)^p e^{it\alpha_k^n} R_k^n.$$

Soient α et β dans $[0, \pi]$, et $t \in \mathbb{R}$. On a l'inégalité

$$\begin{aligned} \left| \alpha^p e^{it\alpha} - \beta^p e^{it\beta} \right| &\leq \left| \alpha^p e^{it\alpha} - \alpha^p e^{it\beta} \right| + \left| \alpha^p e^{it\beta} - \beta^p e^{it\beta} \right| \\ &\leq \pi^p |t| |\alpha - \beta| + |\alpha^p - \beta^p| \\ &\leq (|t| \pi^p + p \pi^{p-1}) |\alpha - \beta|. \end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité, et en effectuant des calculs similaires à ceux faits dans la proposition 2.1, on montre de la même façon la convergence de $Z_{n,t}^{(p)}$ uniformément par rapport à t sur tout compact de \mathbb{R} , ce qui prouve que l'orbite de ω est bien de classe C^∞ .

La seconde partie de la proposition 3.1 découle alors du lemme suivant :

Lemme 3.2 *Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ un processus gaussien complexe stationnaire, X_0 étant de loi $N_2(0, 1)$. Supposons que $t \mapsto X_t$ soit presque sûrement de classe C^1 . Alors presque sûrement (X_t) ne passe pas par l'origine.*

Preuve — Par Fubini, on a

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 \frac{1}{|X_t|} dt \right] = \int_0^1 \mathbb{E} \left[\frac{1}{|X_t|} \right] dt = \mathbb{E} \left[\frac{1}{|X_0|} \right] < +\infty.$$

On a donc presque sûrement

$$\int_0^1 \frac{1}{|X_t|} dt < +\infty. \quad (2)$$

Or, il est facile de voir que pour tout ω vérifiant (2) et pour lequel $t \mapsto X_t(\omega)$ est de classe C^1 , $X_t(\omega)$ ne peut pas s'annuler. \square

Bien sûr, le lemme 3.2 prouve aussi que presque sûrement, les applications $t \mapsto Z_{n,t}$ ne passent pas par l'origine. On peut donc écrire pour presque tout $\omega \in \Omega_0$

$$Z_t = \rho_t e^{iA_t} \quad \text{et} \quad Z_{n,t} = \rho_{n,t} e^{iA_{n,t}}$$

où ρ_t et $\rho_{n,t}$ sont strictement positifs, et $t \mapsto A_t$, $t \mapsto A_{n,t}$ sont des fonctions réelles continues (en fait, de classe C^∞).

Proposition 3.3 *Pour presque tout ω , le mouvement moyen existe, et il ne dépend pas de ω ; i.e. il existe un réel m tel que*

$$\frac{1}{t} A_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} m.$$

De plus, on a

$$m = \int_0^\pi x d\sigma(x).$$

Preuve — Pour presque tout ω (en fait, pour tous les ω dont l'orbite ne passe pas par 0), on a écrit $Z_t = \rho_t e^{iA_t}$, où toutes les fonctions sont de classe C^∞ . Dérivons par rapport à t :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Z_t &= \left(\frac{d}{dt}\rho_t\right)e^{iA_t} + i\left(\frac{d}{dt}A_t\right)Z_t \\ \frac{\frac{d}{dt}Z_t}{Z_t} &= \frac{\frac{d}{dt}\rho_t}{\rho_t} + i\left(\frac{d}{dt}A_t\right) \\ \frac{d}{dt}A_t &= \Im m \left(\frac{\frac{d}{dt}Z_t}{Z_t} \right).\end{aligned}$$

De même, on a presque sûrement

$$\frac{d}{dt}A_{n,t} = \Im m \left(\frac{\frac{d}{dt}Z_{n,t}}{Z_{n,t}} \right).$$

Or, on sait que $Z_{n,t} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} Z_t$, et que $\frac{d}{dt}Z_{n,t} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \frac{d}{dt}Z_t$. On a donc

$$\frac{d}{dt}A_{n,t} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \frac{d}{dt}A_t.$$

Soient V et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les variables aléatoires définies par

$$V \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{dt}A_t \Big|_{t=0} \quad ; \quad V_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{dt}A_{n,t} \Big|_{t=0}.$$

Lemme 3.4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \in L^1(\mu)$, $V \in L^1(\mu)$ et $V_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1} V$.*

En effet, puisqu'on sait déjà que $V_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} V$, il suffit de prouver que la famille $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Pour cela, montrons que cette famille est bornée dans L^p pour tout p tel que $1 \leq p < 2$:

$$V_n = \Im m \left(\frac{\frac{d}{dt}Z_{n,t} \Big|_{t=0}}{Z_{n,0}} \right) = \Im m \left(\frac{\sum_{k=0}^{2^n-1} i\alpha_k^n R_k^n}{B_1} \right).$$

Remarquons que $\Re e(R_k^n)$ et $\Im m(R_k^n)$ sont deux variables réelles gaussiennes centrées indépendantes, de variance $\sigma(J_k^n)$. Posons

$$s_n^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_k^n \sigma(J_k^n).$$

On a bien sûr $0 \leq s_n^2 \leq \pi$, car s_n^2 est une combinaison linéaire convexe des α_k^n , et on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_k^n R_k^n = s_n^2 B_1 + \sum_{k=0}^{2^n-1} (\alpha_k^n - s_n^2) R_k^n.$$

On vérifie alors facilement que $Y_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} (\alpha_k^n - s_n^2) R_k^n$ est indépendant de B_1 .

On a donc

$$|V_n| \leq s_n^2 + \left| \frac{Y_n}{B_1} \right|,$$

d'où

$$\|V_n\|_p \leq s_n^2 + \left\| \frac{Y_n}{B_1} \right\|_p \leq \pi + \|Y_n\|_p \left\| \frac{1}{B_1} \right\|_p.$$

Mais la variance de Y_n est toujours majorée par 2π , et comme $p < 2$, on a $\|1/B_1\|_p < +\infty$. On en déduit $\|V_n\| \leq K_p$, où K_p ne dépend pas de n , et le lemme 3.4 est établi.

Puisque $V \in L^1$, on peut appliquer le théorème de Birkhoff au flot (T^t) pour prouver que presque sûrement $\frac{1}{t} \int_0^t V(T^\tau \omega) d\tau$ a une limite quand $t \rightarrow +\infty$, notée $\bar{V}(\omega)$. Or

$$\int_0^t V(T^\tau \omega) d\tau = A_t - A_0,$$

et donc

$$\frac{A_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \bar{V}(\omega).$$

De plus, la mesure σ étant diffuse, on sait que la transformation $T = T^1$ est ergodique (voir [1]). On a donc $\bar{V}(\omega) \stackrel{\mu\text{-P.s.}}{=} \mathbb{E}[V]$.

Il reste maintenant à calculer le mouvement moyen $m = \mathbb{E}[V]$. Grâce au lemme 3.4, on a bien sûr

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[V_n].$$

Mais on a vu que $V_n = \Im m \left(i \left(s_n^2 + \frac{Y_n}{B_1} \right) \right)$. On a donc

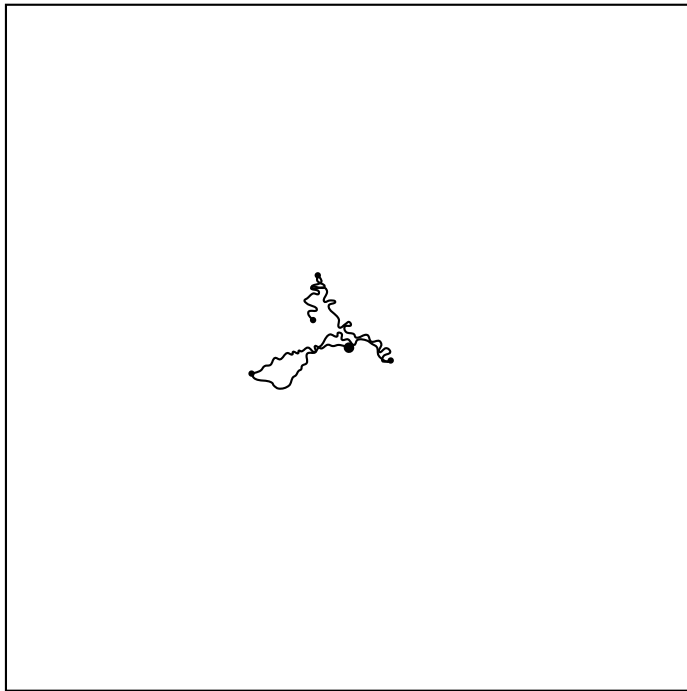
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_n] &= \Im m \left(i \mathbb{E} \left[s_n^2 + \frac{Y_n}{B_1} \right] \right) \\ &= \Im m \left(i s_n^2 + i \mathbb{E}[Y_n] \mathbb{E} \left[\frac{1}{B_1} \right] \right) \\ &= \Im m(i s_n^2) = s_n^2. \end{aligned}$$

Enfin, on vérifie facilement que $s_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^\pi x d\sigma(x)$. Ainsi, m est bien la moyenne de σ . \square

Références

- [1] I.P. CORNFELD, S.V. FOMIN, et Ya.G. SINAI. *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 1982.
- [2] B. JESSEN et H. TORNEHAVE. Mean motion and zeros of almost periodic functions. *Acta Mathematica*, 77 : 138–279, 1945.
- [3] L. LAGRANGE. Théorie des variations séculaires des éléments des planètes I et II. In *Œuvres* 5, pages 123–344. Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1781.
- [4] P. LÉVY. Le mouvement brownien plan. *American Journal of Mathematics*, 62 : 487–550, 1940.
- [5] S. STERNBERG. *Celestial Mechanics*, pages 36–54. Benjamin, 1969.
- [6] H. WEYL. Mean motion. *American Journal of Mathematics*, 60 : 889–896, 1938.

Chapitre III



Systemes dynamiques gaussiens d'entropie nulle, lâchement et non lâchement Bernoulli

Thierry DE LA RUE

Abstract

We construct here two real gaussian dynamical systems of zero entropy; the first one is not loosely Bernoulli, and the second is a loosely Bernoulli Gaussian-Kronecker system. To get loose-Bernoullicity for the second system, we prove and use a property of planar brownian motion on $[0, 1]$: we can recover the whole trajectory knowing only some angles formed by the motion.

Résumé

On construit ici deux systèmes dynamiques gaussiens réels d'entropie nulle; le premier n'est pas lâchement Bernoulli, le second est un Gaussien-Kronecker lâchement Bernoulli. Pour obtenir la lâche-Bernoullicité du second, on montre et on utilise une propriété du mouvement brownien plan: on peut reconstituer toute la trajectoire sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ à partir de certains angles formés par les accroissements du brownien.

1 Introduction et notations

On s'intéresse ici aux systèmes dynamiques de la forme $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, où $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Lebesgue, et T une transformation mesurable de Ω , inversible, qui préserve la mesure de probabilité μ .

Un *mot* de longueur l sur un "alphabet" \mathcal{U} est une suite finie $W = (u_1, \dots, u_l)$ d'éléments de l'ensemble \mathcal{U} ; on notera aussi $W = u_1 \dots u_l$. Un *sous-mot* de W est un mot de la forme $W' = u_k u_{k+1} \dots u_{k+r}$ avec $1 \leq k \leq k+r \leq l$. Une *sous-suite* de W est un mot de la forme $W'' = u_{j_1} \dots u_{j_s}$ avec $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq l$.

Soit $\mathcal{P} = \{P_u, u \in \mathcal{U}\}$ une partition finie de Ω , les P_u appartenant bien sûr à la tribu \mathcal{A} . Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $\mathcal{P}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} u$ si $\omega \in P_u$, et pour tout couple d'entiers (i, j) avec $i < j$, on définit sur l'alphabet \mathcal{U} le mot

$$W|_i^j(\omega, T, \mathcal{P}) \stackrel{\text{déf}}{=} u_i u_{i+1} \dots u_{j-1},$$

où pour tout $k \in \{i, \dots, j-1\}$, $u_k \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{P}(T^k \omega)$.

1.1 Distances entre mots

Soient $W = u_1 \dots u_l$ et $W' = u'_1 \dots u'_l$ deux mots de même longueur l sur un alphabet \mathcal{U} . On définit entre ces deux mots la distance \bar{d} par

$$\bar{d}(W, W') \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{r}{l},$$

où r est le nombre d'indices $k \in \{1, \dots, l\}$ tels que $u_k \neq u'_k$. On a ainsi par exemple sur l'alphabet $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\bar{d}(12341, 12434) = \frac{3}{5}.$$

On définit également la distance \bar{f} entre W et W' par

$$\bar{f}(W, W') \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{l - s}{l},$$

où s est la longueur de la plus grande sous-suite commune aux mots W et W' . Dans l'exemple précédent, la plus grande sous-suite commune aux deux mots est 1234, et on a donc

$$\bar{f}(12341, 12434) = \frac{1}{5}.$$

Clairement, la distance \bar{f} est toujours inférieure ou égale à la distance \bar{d} .

On peut étendre la définition de \bar{f} au cas où W et W' sont de longueurs respectives l et l' différentes. On pose alors

$$\bar{f}(W, W') \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{l + l' - 2s}{l + l'},$$

où s est défini comme précédemment.

1.2 “Lâche-Bernoullicité”

La distance \bar{f} fut introduite par J. Feldman ([3]) pour définir la notion de “lâche-Bernoullicité” d’un système dynamique. On ne va pas donner ici la définition générale de cette propriété, mais simplement l’énoncer dans le cas où T est d’entropie nulle.

Définition 1.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique d’entropie nulle. Il est dit lâchement Bernoulli si pour toute partition finie \mathcal{P} de Ω et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout entier $l \geq N$, on puisse trouver une partie M de Ω (dépendant de \mathcal{P} , l et ε), de mesure $\mu(M) \leq \varepsilon$, en dehors de laquelle on ait pour tous ω et ω'*

$$\bar{f}\left(W|_0^l(\omega, T, \mathcal{P}), W|_0^l(\omega', T, \mathcal{P})\right) \leq \varepsilon.$$

Remarque : dans cette définition, on peut remplacer “il existe un entier N tel que, pour tout entier $l \geq N$...” par “pour tout entier N , il existe $l \geq N$ tel que...”.

Les systèmes lâchement Bernoulli d’entropie nulle sont les systèmes équivalents au sens de Kakutani à une rotation irrationnelle sur le tore \mathbb{T} (la définition de cette équivalence se trouve dans [7]). Tous les systèmes de rang fini sont lâchement Bernoulli (voir encore [7]). En construisant le premier exemple d’entropie nulle non lâchement Bernoulli, J. Feldman ([3]) a prouvé qu’il existait plusieurs classes d’équivalence parmi les systèmes d’entropie nulle. Depuis, plusieurs autres exemples ont été trouvés ; citons notamment celui proposé par A. Rothstein ([8]), dont quelques idées sont adaptées ici au cas des systèmes gaussiens.

1.3 Systèmes dynamiques gaussiens

Soit γ une mesure finie symétrique sur le tore \mathbb{T} identifié à l'intervalle $[-\pi, \pi[$. Rappelons que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ est un système dynamique gaussien réel de mesure spectrale γ si il existe un processus gaussien réel centré $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ vérifiant :

- pour tout entier p , $X_p = X_0 \circ T^p$,
- la plus petite tribu rendant les X_p mesurables est \mathcal{A} ,
- pour tous p et q , $\mathbb{E}[X_p X_q] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(q-p)t} d\gamma(t)$.

Bien sûr, la donnée de γ détermine toutes les propriétés d'un tel système. En particulier, T est ergodique si et seulement si γ est diffuse, et dans ce cas T est même faiblement mélangeante (voir [1]). L'entropie de T ne peut valoir que 0 ou $+\infty$, suivant respectivement que γ est ou n'est pas singulière par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [10]).

1.4 Transformations de la trajectoire brownienne complexe

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ désignera l'espace canonique du mouvement brownien complexe issu de 0, sur l'intervalle de temps $[0, 1]$:

- Ω est l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} , qui s'annulent en $t = 0$,
- μ est la mesure de Wiener sur Ω ,
- \mathcal{A} est la tribu borélienne, complétée pour μ .

Pour $\omega \in \Omega$, et $0 \leq t \leq 1$, on note $B_t(\omega)$ la position de la trajectoire ω à l'instant t .

Pour toute mesure de probabilité σ sur $[0, 2\pi[$ ayant un nombre fini de points de masse non nulle², on peut définir une transformation T_σ de Ω qui est mesurable, inversible, qui préserve la mesure μ et telle que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $p \in \mathbb{Z}$

$$B_t \circ T_\sigma^p = \int_0^t e^{ip\psi(s)} dB_s, \quad (3)$$

$$\text{où } \psi(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf \{x \in [0, 2\pi] / \sigma([0, x]) \geq s\}.$$

Dans le cas où σ est concentrée en un nombre fini de points $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$, de masses respectives m_1, \dots, m_p , $T_\sigma \omega$ se construit facilement à l'aide de la formule (3) : posons pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, $t_k \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^k m_j$ (avec bien sûr $t_0 = 0$) ; on découpe la trajectoire ω en p morceaux, correspondant aux intervalles de temps $[t_{k-1}, t_k]$ ($1 \leq k \leq p$), puis on effectue une rotation de l'angle α_k sur le k -ième morceau. $T_\sigma \omega$ est la trajectoire obtenue en recollant bout à bout les nouveaux morceaux.

Dans le cas où σ est diffuse, T_σ s'obtient comme une limite de transformations T_{σ_n} , où les mesures σ_n sont concentrées en un nombre fini de points. Tous les détails de cette construction sont donnés dans [9], ainsi que la preuve du théorème qui suit.

²Dans la suite, on se restreindra implicitement aux probabilités sur $[0, 2\pi[$ qui vérifient cette propriété.

Théorème 1.2 Si σ est diffuse et concentrée sur $[0, \pi[$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T_\sigma)$ est un système dynamique gaussien réel de mesure spectrale γ , où γ est la mesure de probabilité symétrique sur $]-\pi, \pi[$ définie par

$$\gamma(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \left(\sigma(A \cap [0, \pi]) + \sigma(-A \cap [0, \pi]) \right),$$

le processus gaussien réel sous-jacent étant donné par $X_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \Re e(B_1)$. De plus, on a $T_\sigma^2 = T_{\tilde{\sigma}}$, où $\tilde{\sigma}$ est la mesure sur $[0, 2\pi[$ image de σ par $t \mapsto 2t$.

En corollaire, si σ est diffuse sur $[0, 2\pi[$, T_σ est ergodique (même faiblement mélangeante), et si de plus σ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, T_σ est d'entropie nulle.

On se propose dans la suite de montrer qu'un système dynamique gaussien d'entropie nulle peut être lâchement Bernoulli, et peut également ne pas l'être. Il s'agit donc de construire deux mesures diffuses sur $[0, \pi[$, singulières par rapport à la mesure de Lebesgue, telles que les deux transformations T_σ correspondantes soient respectivement lâchement Bernoulli et non lâchement Bernoulli. Les deux constructions utilisent le lemme suivant.

Lemme 1.3 Fixons une partition finie $\mathcal{P} = \{P_u, u \in \mathcal{U}\}$ de Ω . Soit σ_0 une mesure de probabilité sur $]0, 2\pi[$, concentrée en p points $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$, chacun de masse $1/p$, et soit l un entier supérieur ou égal à 1. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute mesure de probabilité σ vérifiant

$$\forall k \in \{0, \dots, p-1\}, \sigma([\alpha_k - \delta, \alpha_k + \delta]) = \frac{1}{p}, \quad (4)$$

on ait

$$\mu \left(W|_0^l(\omega, T_\sigma, \mathcal{P}) \neq W|_0^l(\omega, T_{\sigma_0}, \mathcal{P}) \right) \leq \varepsilon.$$

Preuve — Comme les variables B_t , $0 \leq t \leq 1$, $t \in \mathbb{Q}$ engendrent \mathcal{A} , on se ramène facilement au cas où $\mathcal{P}(\omega)$ ne dépend que d'un nombre fini de variables B_{t_1}, \dots, B_{t_r} . Pour tout $s \in [0, 1]$, posons

$$\begin{aligned} \psi_0(s) &\stackrel{\text{déf}}{=} \inf \{x \in [0, 2\pi] / \sigma_0([0, x]) \geq s\}, \\ \text{et } \psi(s) &\stackrel{\text{déf}}{=} \inf \{x \in [0, 2\pi] / \sigma([0, x]) \geq s\}. \end{aligned}$$

Appelons λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Si σ vérifie (4), on a pour tout $k \in \{0, \dots, l-1\}$

$$\left\| e^{ik\psi} - e^{ik\psi_0} \right\|_{L^2([0, 1], 2\lambda)} \leq 2k\delta,$$

on en déduit

$$\sup_{1 \leq j \leq r} \left\| B_{t_j} \circ T_\sigma^k - B_{t_j} \circ T_{\sigma_0}^k \right\|_{L^2(\mu)} \leq 2k\delta.$$

La convergence dans L^2 entraînant la convergence en probabilité, il n'est pas difficile de voir que si δ est assez petit, on obtient pour tout $k \in \{0, \dots, l-1\}$

$$\mu \left(\mathcal{P}(T_\sigma^k \omega) \neq \mathcal{P}(T_{\sigma_0}^k \omega) \right) \leq \frac{\varepsilon}{l},$$

ce qui suffit pour avoir la majoration voulue. \square

2 Construction d'un système dynamique gaussien d'entropie nulle, non lâchement Bernoulli

2.1 Quelques lemmes

Lemme 2.1 *Soient W, W_0, W_1, W_2, W_3 cinq mots sur un alphabet \mathcal{U} . W est de longueur klm (k, l et m entiers), et les W_i sont tous de même longueur l' . On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0, \delta \in]0, 1/3[$ et $\rho \in]0, 1[$ vérifiant*

1. $\bar{f}(W, W_0) \leq \varepsilon,$
2. pour $1 \leq i \leq 3, \bar{d}(W_0, W_i) \leq \varepsilon',$
3. $\varepsilon + 6\varepsilon' \leq \rho\delta.$

Écrivons W sous la forme $W = W^1 \dots W^{km}$, où les W^j sont tous de longueur l . Pour tout $s \in \{1, \dots, k\}$, soit P_s l'ensemble des entiers de la forme $hk + s$ ($0 \leq h \leq m - 1$). Notons enfin b le plus petit entier vérifiant $b \geq \frac{1-\rho}{3}m$.

Alors il existe un entier $s \in \{1, \dots, k\}$, b indices $j_1, \dots, j_b \in P_s$, et b sous-mots $W_0^{j_1}, \dots, W_0^{j_b}$ de W_0 tels que, pour tout $r \in \{1, \dots, b\}$ et tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\bar{f}(W^{j_r}, W_i^{j_r}) \leq \delta$ (où $W_i^{j_r}$ désigne le sous-mot de W_i situé à la même place que $W_0^{j_r}$ dans W_0).

Preuve — Appelons n la longueur de la plus grande sous-suite commune à W et W_0 . Alors on peut découper W_0 sous la forme $W_0 = W_0^1 \dots W_0^{km}$, de telle façon que, si n_j désigne la longueur de la plus grande sous-suite commune à W^j et W_0^j , on ait $n = \sum_{j=1}^{km} n_j$. Notons l_j la longueur de W_0^j , et découpons les mots W_i ($1 \leq i \leq 3$) suivant le même motif : $W_i = W_i^1 \dots W_i^{km}$, où l_j est aussi la longueur de W_i^j . Pour $1 \leq j \leq km$, soit d_j le nombre de lettres de W_0^j qui ne coïncident pas avec les 3 lettres correspondantes de W_1^j, W_2^j, W_3^j . Remarquons que pour tout $j \in \{1, \dots, km\}$ et tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la longueur de la plus grande sous-suite commune à W^j et W_i^j est au moins $n_j - d_j$, et donc

$$\bar{f}(W^j, W_i^j) \leq \frac{l + l_j - 2n_j + 2d_j}{l + l_j}. \quad (5)$$

D'après les hypothèses de l'énoncé, on a

$$\frac{\sum_{j=1}^{km} (l + l_j - 2n_j)}{klm + l'} = \frac{klm + l' - 2n}{klm + l'} = \bar{f}(W, W_0) \leq \varepsilon, \quad (6)$$

$$\text{et } \frac{\sum_{j=1}^{km} d_j}{l'} \leq \bar{d}(W_0, W_1) + \bar{d}(W_0, W_2) + \bar{d}(W_0, W_3) \leq 3\varepsilon'. \quad (7)$$

De l'inégalité (7), on déduit

$$\frac{2 \sum_{j=1}^{km} d_j}{klm + l'} \leq 6\varepsilon',$$

puis, à l'aide de l'inégalité (6)

$$\frac{\sum_{j=1}^{km} (l + l_j - 2n_j + 2d_j)}{klm + l'} \leq \varepsilon + 6\varepsilon' \leq \rho\delta.$$

Posons pour $1 \leq s \leq k$

$$t_s \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{\sum_{j \in P_s} (l + l_j)}{klm + l'}.$$

On a $\sum_{s=1}^k t_s = 1$, et

$$\sum_{s=1}^k t_s \sum_{j \in P_s} \frac{l + l_j - 2n_j + 2d_j}{\sum_{j \in P_s} (l + l_j)} \leq \rho\delta.$$

Par cons\u00e9quent, il existe au moins un s pour lequel

$$\sum_{j \in P_s} \frac{l + l_j - 2n_j + 2d_j}{\sum_{j \in P_s} (l + l_j)} \leq \rho\delta.$$

(Car une combinaison lin\u00e9aire convexe de r\u00e9els tous strictement sup\u00e9rieurs \u00e0 $\rho\delta$ serait elle-m\u00eame strictement sup\u00e9rieure \u00e0 $\rho\delta$.) Fixons donc un tel s , et notons

$$A \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ j \in P_s \mid \frac{l + l_j - 2n_j + 2d_j}{l + l_j} > \delta \right\},$$

et soit $B \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} P_s \setminus A$. Pour tout $j \in B$, et tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a d'apr\u00e8s (5)

$$\bar{f}(W^j, W_i^j) \leq \delta.$$

De plus, on peut \u00e9crire

$$\begin{aligned} \rho\delta \sum_{j \in P_s} (l + l_j) &\geq \sum_{j \in P_s} (l + l_j - 2n_j + 2d_j) \\ &\geq \delta \sum_{j \in A} (l + l_j), \end{aligned}$$

$$\text{d'o\u00f9 } \sum_{j \in A} (l + l_j) \leq \rho \sum_{j \in P_s} (l + l_j),$$

$$\text{et donc } \sum_{j \in B} (l + l_j) \geq (1 - \rho) \sum_{j \in P_s} (l + l_j).$$

Remarquons enfin que si $j \in B$, on a

$$\frac{l_j - l}{l_j + l} \leq \frac{l + l_j - 2n_j}{l + l_j} \leq \delta \leq \frac{1}{3},$$

et donc $l_j \leq 2l$. On en d\u00e9duit (le nombre d'\u00e9l\u00e9ments de B \u00e9tant not\u00e9 $\#B$)

$$\begin{aligned} 3l \#B &\geq \sum_{j \in B} (l + l_j) \\ &\geq (1 - \rho) \sum_{j \in P_s} (l + l_j) \\ &\geq (1 - \rho)ml, \\ \text{d'o\u00f9 } \#B &\geq \frac{1 - \rho}{3}m, \end{aligned}$$

et il y a donc au moins b \u00e9l\u00e9ments dans B . \(\square\)

Lemme 2.2 Soit P un polynôme de degré $m \geq 1$, à coefficients complexes, et soit \mathcal{D} une droite du plan complexe passant par l'origine. Alors le nombre de réels $\theta \in [0, 2\pi[$ qui vérifient $P(e^{i\theta}) \in \mathcal{D}$ est majoré par $2m$.

Preuve — Quitte à multiplier P par un complexe de module 1, on peut toujours supposer que \mathcal{D} est la droite d'équation $\Re(z) = 0$.

Fixons un réel α . Soit Q le polynôme défini par $Q(z) \stackrel{\text{déf}}{=} P(e^{i\alpha}z)$. Q est aussi de degré m . Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, on peut écrire

$$\Re\left(P(e^{i(\alpha+\theta)})\right) = \Re\left(Q\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}\right)\right),$$

où $t \stackrel{\text{déf}}{=} \tan(\theta/2)$. On peut alors trouver un polynôme R de degré au plus $2m$ tel que $R(t)$ s'annule en même temps que la partie réelle de $P(e^{i(\alpha+\theta)})$. Or, quand θ décrit $] -\pi, \pi[$, t décrit \mathbb{R} et donc $R(t)$ s'annule au plus $2m$ fois. Pour tout réel α , le nombre de $\theta \in]-\pi, \pi[$ qui vérifient $P(e^{i(\alpha+\theta)}) \in \mathcal{D}$ est donc majoré par $2m$. Choisissons en particulier α tel que $P(e^{i(\alpha-\pi)}) \notin \mathcal{D}$. Sur l'intervalle $[\alpha - \pi, \alpha + \pi[$, $P(e^{i\theta})$ ne passe au plus que $2m$ fois par \mathcal{D} . \square

Lemme 2.3 Soient $0 < c \leq n$ deux entiers. Alors le nombre d'applications croissantes de $\{1, \dots, c\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ est majoré par $c 2^c 2^{3\sqrt{nc}}$.

Preuve — Pour définir une telle application f , il suffit de choisir un entier $k \in \{1, \dots, c\}$, qui sera le nombre d'éléments de $f(\{1, \dots, c\})$, une partie I à k éléments parmi $\{1, \dots, n\}$, qui sera bien sûr $f(\{1, \dots, c\})$, puis l'ensemble E des entiers $j \in \{1, \dots, c-1\}$ qui vérifient $f(j) = f(j+1)$. Or, le nombre de choix possibles pour k est c ; d'après le lemme 5.2 dans [8], le nombre de parties I à k éléments parmi $\{1, \dots, n\}$ est majoré par $2^{3\sqrt{nk}}$, donc par $2^{3\sqrt{nc}}$; enfin, le nombre de façons de choisir E est clairement majoré par 2^c . \square

2.2 Programme de la construction

On se fixe une partition $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_{100}\}$ de Ω , qui servira à nier la définition 1.1. Cette partition est définie par

$$P_k \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \omega \in \Omega \mid \arg(B_1(\omega)) \in \left[\frac{2(k-1)\pi}{100}, \frac{2k\pi}{100} \right] \right\},$$

en prenant bien sûr la détermination de l'argument comprise entre 0 et 2π . On notera alors pour simplifier

$$W|_i^j(\omega, T) \stackrel{\text{déf}}{=} W|_i^j(\omega, T, \mathcal{P}).$$

On se fixe aussi une suite $(\delta_n)_{n \geq 1}$ de réels dans $]0, 1/3[$, strictement décroissante, et de limite $\delta > 0$. On pose, pour tout $n \geq 2$

$$\varepsilon_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\delta_{n-1} - \delta_n}{100},$$

et pour tout $n \geq 1$

$$\rho_n \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{\delta_n - 2\varepsilon_{n+1}}{\delta_n} < 1.$$

On va construire par r\u00e9currence une suite $(T_n)_{n \geq 1} = (T_{\sigma_n})_{n \geq 1}$ de transformations de Ω , σ_n \u00e9tant une mesure de probabilit\u00e9 sur $[0, 2\pi[$, concentr\u00e9e en p_n points $\alpha_0^n < \dots < \alpha_{p_n-1}^n$, chacun de masse $1/p_n$. Les α_k^n seront choisis de la forme $2j_k^n \pi / l_n$, avec l_n et les j_k^n entiers. En cons\u00e9quence, T_n sera p\u00e9riodique, de p\u00e9riode l_n .

On prendra les α_k^{n+1} au voisinage des α_k^n , pour qu'avec une forte probabilit\u00e9, les mots $W|_0^{l_n}(\omega, T_{n+1})$ soient identiques aux mots $W|_0^{l_n}(\omega, T_n)$. On obtiendra \u00e0 la fin une probabilit\u00e9 limite σ , diffuse et singuli\u00e8re par rapport \u00e0 la mesure de Lebesgue. La transformation T_σ sera donc ergodique, d'entropie nulle et, on l'esp\u00e8re, non lâchement Bernoulli. Si on note $\tilde{\sigma}$ la mesure image de σ par $t \mapsto t/2$, on aura $T_{\tilde{\sigma}}^2 = T_\sigma$, et donc $T_{\tilde{\sigma}}$ ne sera pas non plus lâchement Bernoulli (voir [7]). Or, d'apr\u00e8s le th\u00e9or\u00e8me 1.2, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T_{\tilde{\sigma}})$ est un syst\u00e8me dynamique gaussien r\u00e9el d'entropie nulle; on aura donc trouv\u00e9 l'exemple annonc\u00e9 dans le titre.

Pour tout $p \geq 1$, notons \mathcal{A}_p la tribu engendr\u00e9e par les variables

$$A_k^p \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} B_{(k+1)/p} - B_{k/p} \quad (0 \leq k \leq p-1).$$

On peut tout de suite remarquer que, si σ_n est construite comme indiqu\u00e9 pr\u00e9c\u00e9demment, alors tous les mots $W|_i^j(\omega, T_n)$ seront \mathcal{A}_{p_n} -mesurables. En effet, on aura pour tout entier r

$$B_1 \circ T_n^r = \sum_{k=0}^{p_n-1} A_k^{p_n} e^{ir\alpha_k^n}.$$

La propri\u00e9t\u00e9 (\mathcal{H}_n) \u00e9nonc\u00e9e ci-dessous sera v\u00e9rifi\u00e9e \u00e0 chaque \u00e9tape, et assurera ainsi que T_σ n'est pas lâchement Bernoulli.

(\mathcal{H}_n) — Il existe un "mauvais" ensemble M_n , \mathcal{A}_{p_n} -mesurable, stable par T_n , dont la mesure v\u00e9rifie

$$\mu(M_n) \leq \frac{\varepsilon_{n+1}}{2};$$

pour tout $\omega_0 \in \Omega \setminus M_n$, et tout entier $l \geq 1$, on a

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \setminus M_n \mid \bar{f}\left(W|_0^{l_n}(\omega, T_n), W|_0^l(\omega_0, T_n)\right) \leq \delta_n\right\}\right) \leq \eta_n(l_n), \quad (8)$$

$$\text{o\u00f9 } \eta_n(l) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left(16 l 2^{30\sqrt{l}}\right)^{-\frac{9}{1-\rho_n}}.$$

2.3 Construction de T_1

Soit m_1 un entier assez grand (\u00e0 pr\u00e9ciser par la suite). Pour $0 \leq j \leq m_1 - 1$, posons

$$\alpha_j^1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{2\pi j}{m_1}.$$

On définit σ_1 comme étant la mesure de probabilité sur $[0, 2\pi]$ qui donne à chaque point α_j^1 la masse $1/m_1$. On pose aussi $l_1 \stackrel{\text{déf}}{=} p_1 \stackrel{\text{déf}}{=} m_1$. On vérifie alors facilement par le calcul des covariances que les variables aléatoires $B_1, B_1 \circ T_1, \dots, B_1 \circ T_1^{l_1-1}$ sont indépendantes. Par conséquent, pour chaque mot W de longueur l_1 sur l'alphabet $\mathcal{U} \stackrel{\text{déf}}{=} \{1, \dots, 100\}$, on a

$$\mu \left(W|_0^{l_1}(\omega, T_1) = W \right) = 100^{-l_1}.$$

Fixons un mot W_0 de longueur l quelconque, et cherchons à estimer le nombre de mots $W \in \mathcal{U}^{l_1}$ vérifiant $\bar{f}(W, W_0) \leq \delta_1$. Si $l > 2l_1$, comme $\delta_1 \leq 1/3$, ce n'est pas la peine de chercher, car il n'y en a pas! De même si $l < l_1/2$. Il suffit donc de voir le cas où $l_1/2 \leq l \leq 2l_1$. Notons alors s le plus petit entier qui vérifie

$$\frac{l + l_1 - 2s}{l + l_1} \leq \frac{1}{3},$$

s est la longueur minimum de la plus grande sous-suite commune à W et W_0 pour que $\bar{f}(W, W_0) \leq 1/3$. On a forcément $s \geq l_1/2$. Par ailleurs, le nombre de mots W de longueur l_1 ayant en commun avec W_0 une sous-suite de longueur s est clairement majoré par

$$C_l^s C_{l_1}^s 100^{l_1-s} \leq 2^l 2^{l_1} 100^{l_1/2} \leq 80^{l_1}.$$

On obtient finalement

$$\mu \left(\bar{f} \left(W|_0^{l_1}(\omega, T_1), W_0 \right) \leq \delta_1 \right) \leq \left(\frac{4}{5} \right)^{l_1}.$$

Si $m_1 = l_1$ est choisi assez grand, on a $(4/5)^{l_1} \leq \eta_1(l_1)$, et donc la propriété (\mathcal{H}_1) est vérifiée (avec $M_1 = \emptyset$).

2.4 Passage de T_n à T_{n+1}

Supposons maintenant construite la transformation $T_n = T_{\sigma_n}$, vérifiant la propriété (\mathcal{H}_n) . Grâce au lemme 1.3, il est possible de choisir un entier k_{n+1} assez grand pour que, pour toute mesure de probabilité σ vérifiant

$$\forall j \in \{0, \dots, p_n - 1\}, \sigma \left(\left[\alpha_j^n, \alpha_j^n + \frac{2\pi}{k_{n+1}l_n} \right] \right) = \frac{1}{p_n}, \quad (9)$$

on ait

$$\mu \left(W|_0^{3l_n}(\omega, T_n) \neq W|_0^{3l_n}(\omega, T_\sigma) \right) \leq \frac{\varepsilon_{n+1} \varepsilon_{n+2}}{32l_n}. \quad (10)$$

Pour des raisons techniques, imposons de plus que k_{n+1} soit un multiple de 3.

Soit m_{n+1} un entier suffisamment grand (à préciser ultérieurement). On considère les $p_n m_{n+1}$ points de $[0, 2\pi]$ définis comme suit

$$\alpha_{j m_{n+1} + r}^{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha_j^n + \frac{2\pi r}{k_{n+1} l_n m_{n+1}}$$

$$(0 \leq j \leq p_n - 1 ; 0 \leq r \leq m_{n+1} - 1).$$

(Voir la figure 2 page 40.) On pose aussi $p_{n+1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} p_n m_{n+1}$, et $l_{n+1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} l_n k_{n+1} m_{n+1}$. On d\u00e9finit σ_{n+1} comme \u00e9tant la probabilit\u00e9 qui donne \u00e0 chaque point α_j^{n+1} la masse $1/p_{n+1}$. On v\u00e9rifie bien alors que T_{n+1} est p\u00e9riodique de p\u00e9riode l_{n+1} . Il s'agit maintenant de montrer que si l'on choisit m_{n+1} suffisamment grand, (\mathcal{H}_{n+1}) est v\u00e9rifi\u00e9e. Pour cela, on va utiliser la propri\u00e9t\u00e9 (\mathcal{H}_n) , et il faut donc se ramener \u00e0 la transformation T_n ; c'est l'objet du paragraphe qui suit.

2.4.1 Approximation des T_{n+1} -mots par des concat\u00e9nations de T_n -mots

Soit $\omega \in \Omega$, et $l \geq 1$. Soit $J = \{0 = j_0 < j_1 < \dots < j_p = l\}$ un ensemble d'indices tels que $j_{k+1} - j_k \leq 3l_n$ pour tout k . On va approcher $W|_0^l(\omega, T_{n+1})$ par le mot, not\u00e9 $W_J(\omega)$, obtenu en rempla\u00e7ant dans $W|_0^l(\omega, T_{n+1})$ chaque sous-mot $W|_{j_k}^{j_{k+1}}(\omega, T_{n+1})$ par $W|_0^{j_{k+1}-j_k}(T_{n+1}^{j_k}\omega, T_n)$. Par construction, σ_{n+1} v\u00e9rifie (9), et par (10), on obtient

$$\mathbb{E} \left[\bar{d} \left(W|_{j_k}^{j_{k+1}}(\omega, T_{n+1}), W|_0^{j_{k+1}-j_k}(T_{n+1}^{j_k}\omega, T_n) \right) \right] \leq \frac{\varepsilon_{n+1} \varepsilon_{n+2}}{32 l_n},$$

d'o\u00f9

$$\mathbb{E} \left[\bar{d} \left(W_J(\omega), W|_0^l(\omega, T_{n+1}) \right) \right] \leq \frac{\varepsilon_{n+1} \varepsilon_{n+2}}{32 l_n},$$

et par l'in\u00e9galit\u00e9 de Tchebychev, on obtient

$$\mu \left(\bar{d} \left(W_J(\omega), W|_0^l(\omega, T_{n+1}) \right) > \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon_{n+2}}{16 l_n}.$$

Appliquons ce r\u00e9sultat aux quatre ensembles d'indices

$$\begin{aligned} J_0 &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{0, l_n, 2l_n, \dots, k_{n+1}m_{n+1}l_n\}, \\ J_1 &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{0, 3l_n, 6l_n, \dots, (2k_{n+1}m_{n+1} - 3)l_n, 2k_{n+1}m_{n+1}l_n\}, \\ J_2 &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{0, l_n, 4l_n, 7l_n, \dots, (2k_{n+1}m_{n+1} - 2)l_n, 2k_{n+1}m_{n+1}l_n\}, \\ J_3 &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{0, 2l_n, 5l_n, 8l_n, \dots, (2k_{n+1}m_{n+1} - 1)l_n, 2k_{n+1}m_{n+1}l_n\}. \end{aligned}$$

(Rappelons que k_{n+1} est choisi multiple de 3.) D\u00e9finissons l'\u00e9v\u00e9nement

$$D_0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left(\bar{d} \left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W_{J_0}(\omega) \right) > \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} \right).$$

Alors D_0 est $\mathcal{A}_{p_{n+1}}$ -mesurable, et $\mu(D_0) \leq \frac{\varepsilon_{n+2}}{16 l_n}$. En utilisant la p\u00e9riodicit\u00e9 de T_n et T_{n+1} , on montre facilement que $T_{n+1}^{l_n} D_0 = D_0$. Posons

$$M_{0,n+1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \bigcup_{j=0}^{l_n-1} T_{n+1}^{-j} D_0.$$

Alors $M_{0,n+1}$ est stable par T_{n+1} , $\mathcal{A}_{p_{n+1}}$ -mesurable, et de mesure

$$\mu(M_{0,n+1}) \leq \frac{\varepsilon_{n+2}}{16}.$$

De même, posons

$$D_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\bar{d} \left(W|_0^{2l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W_{J_1}(\omega) \right) > \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} \right),$$

$$\text{et } M_{1,n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=0}^{3l_n-1} T_{n+1}^{-j} D_1.$$

On a aussi $M_{1,n+1}$ stable par T_{n+1} , $\mathcal{A}_{p_{n+1}}$ -mesurable, et de mesure

$$\mu(M_{1,n+1}) \leq \frac{3\varepsilon_{n+2}}{16}.$$

Puis, pour $i \in \{2, 3\}$, posons

$$D_i \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\bar{d} \left(W|_0^{2l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W_{J_i}(\omega) \right) > \varepsilon_{n+1} \right).$$

On vérifie aisément que si m_{n+1} est assez grand, alors

$$T_{n+1}^{(i-1)l_n} D_i \subset D_1,$$

et donc $D_i \subset M_{1,n+1}$. Posons enfin

$$M_{n+1}^1 \stackrel{\text{déf}}{=} M_{0,n+1} \cup M_{1,n+1}.$$

Alors M_{n+1}^1 est stable par T_{n+1} , $\mathcal{A}_{p_{n+1}}$ -mesurable, de mesure $\mu(M_{n+1}^1) \leq \frac{\varepsilon_{n+2}}{4}$, et en dehors de M_{n+1}^1 , on a

$$\begin{aligned} \bar{d} \left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W_{J_0}(\omega) \right) &\leq \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} \leq \varepsilon_{n+1}, \\ \text{et } \bar{d} \left(W|_0^{2l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W_{J_i}(\omega) \right) &\leq \varepsilon_{n+1} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

2.4.2 Encore un lemme

Pour $\omega \in \Omega$, et $i \in \{1, 2, 3\}$, on appelle *i-bloc* un sous-mot de $W_{J_i}(\omega)$, de longueur $3l_n$, délimité par deux indices consécutifs de J_i . Ainsi, il y a $\frac{2k_{n+1}m_{n+1}}{3}$ 1-blocs, et $\left(\frac{2k_{n+1}m_{n+1}}{3} - 1 \right)$ *i*-blocs pour $i \in \{2, 3\}$. Un *i*-bloc est toujours de la forme $W|_0^{3l_n} \left(T_{n+1}^k \omega, T_n \right)$. Notons $n_i(\omega)$ le nombre de fois où un *i*-bloc est différent de celui qui le suit.

Lemme 2.4 *On a toujours $n_i(\omega) \leq 200 l_n m_{n+1}$.*

Preuve — Posons, pour tout entier k , $V_k \stackrel{\text{déf}}{=} W|_0^{l_n} \left(T_{n+1}^k \omega, T_n \right)$. Soit W un *i*-bloc, et kl_n la place de la première lettre de W dans $W_{J_i}(\omega)$. Alors W est la concaténation de trois copies identiques de V_k . W est donc différent du *i*-bloc suivant si et seulement si $V_k \neq V_{k+3}$. On va montrer en fait que le nombre d'entiers $k \in \{0, \dots, k_{n+1}m_{n+1} - 2\}$ tels que $V_k \neq V_{k+1}$ est majoré par $100 l_n m_{n+1}$, ce qui suffira largement pour établir le résultat annoncé.

Fixons un entier r dans $\{0, \dots, l_n - 1\}$, et soit u_k la $(r + 1)$ -ième lettre de V_k ($0 \leq k \leq k_{n+1}m_{n+1} - 2$). Il suffit de montrer que le nombre d'entiers k tels que $u_k \neq u_{k+1}$ est majoré par $100 m_{n+1}$. Comme T_n et T_{n+1} commutent, on a

$$u_k = \mathcal{P}(T_n^r \circ T_{n+1}^{kl_n} \omega) = \mathcal{P}(U^k \omega'),$$

où $U \stackrel{\text{déf}}{=} T_{n+1}^{l_n}$ et $\omega' \stackrel{\text{déf}}{=} T_n^r \omega$. Or, pour $0 \leq s \leq m_{n+1} - 1$ et $0 \leq j \leq p_n - 1$, on a

$$A_{s+jm_{n+1}}^{p_{n+1}} \circ U = \exp\left(\frac{i2\pi s}{k_{n+1}m_{n+1}}\right) A_{s+jm_{n+1}}^{p_{n+1}}.$$

Posons, pour $0 \leq s \leq m_{n+1} - 1$,

$$R_s \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=0}^{p_n-1} A_{s+jm_{n+1}}^{p_{n+1}}(\omega').$$

On a alors

$$\begin{aligned} B_1 \circ U^k(\omega') &= \sum_{s=0}^{m_{n+1}-1} R_s \exp\left(\frac{i2k\pi s}{k_{n+1}m_{n+1}}\right) \\ &= P\left(\exp\left(\frac{i2k\pi}{k_{n+1}m_{n+1}}\right)\right) \\ \text{où } P(X) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{s=0}^{m_{n+1}-1} R_s X^s \end{aligned}$$

Le nombre d'entiers k tels que $\mathcal{P}(U^k \omega') \neq \mathcal{P}(U^{k+1} \omega')$ est donc majoré par le nombre de réels $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $P(e^{i\theta})$ appartienne à l'une des 50 droites d'équations $\arg(z) \equiv \frac{2j\pi}{100} \pmod{\pi}$ ($1 \leq j \leq 50$). Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.2 pour obtenir le résultat. \square

2.4.3 Éviter le mauvais ensemble M_n

On a ici besoin de remarquer la propriété suivante, qui découle de la construction de la mesure σ_{n+1} :

$$\text{les tribus } T_{n+1}^{-jk_{n+1}l_n} \mathcal{A}_{p_n}, \quad (0 \leq j \leq m_{n+1} - 1) \text{ sont indépendantes.} \quad (11)$$

En effet, l'action de $T_{n+1}^{k_{n+1}l_n}$ sur les variables $A_k^{p_n}$ est similaire à celle de T_1 sur B_1 (en remplaçant simplement m_1 par m_{n+1}). Pour tout $r \in \{0, \dots, k_{n+1} - 1\}$, et tout $\omega \in \Omega$, posons

$$\begin{aligned} g_r(\omega) &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{m_{n+1}} \sum_{j=0}^{m_{n+1}-1} \mathbb{1}_{M_n}(T^{jk_{n+1}l_n+r} \omega), \\ \text{et } g(\omega) &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{k_{n+1}} \sum_{r=0}^{k_{n+1}-1} g_r(\omega). \end{aligned}$$

Puisque M_n est \mathcal{A}_{p_n} -mesurable, les m_{n+1} variables aléatoires $\mathbb{1}_{M_n} \circ T^{jk_{n+1}l_n + rl_n}$ ($0 \leq j \leq m_{n+1} - 1$) sont indépendantes, et comme $\mu(M_n) \leq \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$, si m_{n+1} est assez grand, on a

$$\mu(g_r > \varepsilon_{n+1}) \leq \frac{\varepsilon_{n+2}}{4k_{n+1}l_n},$$

et donc $\mu(g > \varepsilon_{n+1}) \leq \frac{\varepsilon_{n+2}}{4l_n}$.

Posons

$$M_{n+1}^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=0}^{l_n-1} T_{n+1}^{-j}(g > \varepsilon_{n+1}).$$

Alors M_{n+1}^2 est $\mathcal{A}_{p_{n+1}}$ -mesurable, de mesure plus petite que $\frac{\varepsilon_{n+2}}{4}$, et stable par T_{n+1} (toujours grâce à la périodicité de T_n et T_{n+1}). Pour tout $\omega \in \Omega$, on va maintenant transformer le mot $W_{J_0}(\omega)$, de sorte à éliminer les problèmes dus au mauvais ensemble M_n . Pour $0 \leq j \leq k_{n+1}m_{n+1} - 1$, à chaque fois que $T_{n+1}^{j l_n} \omega$ tombe dans M_n , on remplace le sous-mot $W|_0^{l_n}(T_{n+1}^{j l_n} \omega, T_n)$ par le mot

$$Z(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \underbrace{\omega \dots \omega}_{l_n \text{ fois}}.$$

Appelons $W'_{J_0}(\omega)$ le nouveau mot ainsi obtenu. C'est un mot sur l'alphabet à 101 lettres $\mathcal{U} \cup \{\omega\}$. Par définition de l'événement M_{n+1}^2 , il est clair que si $\omega \notin M_{n+1}^2$, alors $\bar{d}(W_{J_0}(\omega), W'_{J_0}(\omega)) \leq \varepsilon_{n+1}$.

Pour $i = 1, 2, 3$, on va faire subir au mot $W_{J_i}(\omega)$ un traitement similaire. Considérons l'ensemble des "bons mots"

$$B_n \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ W \in \mathcal{U}^{l_n} \mid \exists \omega \in \Omega \setminus M_n, W|_0^{l_n}(\omega, T_n) = W \right\}.$$

Remarquons que si $W|_0^{l_n}(\omega_0, T_n) \in B_n$, alors pour tout entier r et tout $l \geq 1$, et même si $\omega_0 \in M_n$, on a

$$\mu\left(\left\{ \omega \in \Omega \setminus M_n \mid \bar{f}\left(W|_0^{l_n}(\omega, T_n), W|_r^{r+l}(\omega_0, T_n)\right) \leq \delta_n \right\}\right) \leq \eta_n(l_n). \quad (12)$$

En effet, T_n étant de période l_n , la connaissance de $W|_0^{l_n}(\omega_0, T_n)$ suffit à déterminer le mot $W|_r^{r+l}(\omega_0, T_n)$. On peut donc supposer que ω_0 n'est pas dans M_n . De plus, M_n étant stable par T , $T^r \omega_0$ n'est pas non plus dans M_n , et vérifie donc (8).

Fixons $i \in \{1, 2, 3\}$, et notons $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_p = 2l_{n+1}$ les éléments de J_i . À chaque fois que $W|_0^{l_n}(T_{n+1}^{j_k} \omega, T_n) \notin B_n$, on remplace dans $W_{J_i}(\omega)$ le sous-mot $W|_0^{j_{k+1} - j_k}(\omega, T_n)$ par $\omega \dots \omega$ ($(j_{k+1} - j_k)$ fois la lettre ' ω '). On appelle $W'_{J_i}(\omega)$ le nouveau mot ainsi obtenu. De même que précédemment, on vérifie aisément que si $\omega \notin M_{n+1}^2$, alors

$$\bar{d}(W_{J_i}(\omega), W'_{J_i}(\omega)) \leq 3\varepsilon_{n+1}.$$

Dorénavant, le terme “ i -bloc” désignera aussi un sous-mot de $W'_{J_i}(\omega)$ délimité par deux indices consécutifs de J_i . Remarquons que le lemme 2.4 reste valable si l’on remplace $W_{J_i}(\omega)$ par $W'_{J_i}(\omega)$. En effet, si n'_i est défini à partir de W'_{J_i} comme l’est n_i à partir de W_{J_i} , on a clairement $n'_i = n_i$.

On peut maintenant définir le mauvais ensemble de la $(n + 1)$ -ième étape :

$$M_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} M_{n+1}^1 \cup M_{n+1}^2.$$

Alors M_{n+1} est, comme prévu, $\mathcal{A}_{p_{n+1}}$ -mesurable, stable par T_{n+1} , de mesure plus petite que $\frac{\varepsilon_{n+2}}{2}$, et si $\omega \notin M_{n+1}$, alors

$$\bar{d}\left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W'_{J_0}(\omega)\right) \leq 2\varepsilon_{n+1}, \quad (13)$$

$$\text{et } \bar{d}\left(W|_0^{2l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W'_{J_i}(\omega)\right) \leq 4\varepsilon_{n+1} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14)$$

2.4.4 Vérification de (\mathcal{H}_{n+1})

Fixons maintenant $\omega_0 \in \Omega \setminus M_{n+1}$, et un entier $l \geq 1$. Il s’agit de majorer la probabilité de l’événement

$$A(\omega_0, l) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\bar{\mathcal{F}}\left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W|_0^l(\omega_0, T_{n+1})\right) \leq \delta_{n+1}\right) \cap M_{n+1}.$$

Comme on l’a déjà remarqué, si $l < \frac{l_{n+1}}{2}$, ou si $l > 2l_{n+1}$, on a pour tout mot W de longueur l_{n+1}

$$\bar{\mathcal{F}}\left(W|_0^l(\omega_0, T_{n+1}), W\right) > \frac{1}{3} > \delta_{n+1}.$$

Il suffit donc d’étudier le cas $\frac{l_{n+1}}{2} \leq l \leq 2l_{n+1}$. Pour $i = 1, 2, 3$, appelons $W'_{J_i}(\omega_0, l)$ le mot constitué des l premières lettres de $W'_{J_i}(\omega_0)$. Comme ω_0 n’est pas dans M_{n+1} , on a par (14)

$$\bar{d}\left(W|_0^l(\omega_0, T_{n+1}), W'_{J_i}(\omega_0, l)\right) \leq 16\varepsilon_{n+1}.$$

Soit maintenant $\omega \in A(\omega_0, l)$. Grâce à (13), on a

$$\bar{\mathcal{F}}\left(W'_{J_0}(\omega), W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_{n+1})\right) \leq 2\varepsilon_{n+1},$$

et donc, par l’inégalité triangulaire, on obtient

$$\bar{\mathcal{F}}\left(W'_{J_0}(\omega), W|_0^l(\omega_0, T_{n+1})\right) \leq \delta_{n+1} + 2\varepsilon_{n+1}.$$

Comme $\delta_{n+1} + 2\varepsilon_{n+1} + (6 \times 16)\varepsilon_{n+1} = \rho_n \delta_n$, toutes les hypothèses du lemme 2.1 sont vérifiées. Notons b le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1-\rho_n}{3}m_{n+1}$, et pour $1 \leq s \leq k_{n+1}$, soit

$$P_s \stackrel{\text{déf}}{=} \{hk_{n+1} + s, 0 \leq h \leq m_{n+1} - 1\}.$$

Découpons $W'_{J_0}(\omega)$ en $k_{n+1}m_{n+1}$ sous-mots notés $W^1, \dots, W^{k_{n+1}m_{n+1}}$, tous de même longueur l_n . Rappelons que l'on a

$$W^j = \begin{cases} W|_0^{l_n} \left(T_{n+1}^{(j-1)l_n} \omega, T_n \right) & \text{si } T_{n+1}^{(j-1)l_n} \omega \notin M_n, \\ Z(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, d'après la conclusion du lemme 2.1, il existe $s \in \{1, \dots, k_{n+1}\}$, b indices $j_1, \dots, j_b \in P_s$, et b sous-mots $W_0^{j_1}, \dots, W_0^{j_b}$ de $W|_0^l(\omega_0, T_{n+1})$ tels que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et tout $r \in \{1, \dots, b\}$, on ait $\bar{f}(W^{j_r}, W_i^{j_r}) \leq \delta_n$, $W_i^{j_r}$ désignant le sous-mot de $W'_{J_i}(\omega_0, l)$ situé à la même place que $W_0^{j_r}$ dans $W|_0^l(\omega_0, T_{n+1})$. Comme $\delta_n \leq \frac{1}{3}$, la longueur de chaque mot $W_0^{j_r}$ est toujours majorée par $2l_n$. En conséquence, pour tout r il existe un $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $W_i^{j_r}$ soit entièrement contenu dans un i -bloc. Si on note c le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1-\rho_n}{9}m_{n+1}$, on est alors assuré de l'existence d'un $i \in \{1, 2, 3\}$ et de c sous-mots $W_i^{h_1}, \dots, W_i^{h_c}$ de $W'_{J_i}(\omega_0)$, chacun contenu dans un i -bloc, et qui vérifient tous

$$\bar{f}(W^{h_r}, W_i^{h_r}) \leq \delta_n. \quad (15)$$

Supposons fixés s , les indices $h_1, \dots, h_c \in P_s, i$ et les sous-mots $W_i^{h_1}, \dots, W_i^{h_c}$ de $W'_{J_i}(\omega_0)$. Alors pour tout $r \in \{1, \dots, c\}$, la probabilité que (15) soit réalisé est majorée par $\eta_n(l_n)$. En effet, ou bien on peut appliquer (12), ou bien $W_i^{h_r}$ est contenu dans un i -bloc de la forme $\omega_0 \dots \omega_0$, et alors on a clairement $\mu(\bar{f}(W^{h_r}, W_i^{h_r}) < 1) = 0$. De plus, comme les indices h_1, \dots, h_c sont tous dans un même ensemble P_s , on a grâce à (11) l'indépendance des mots W^{h_1}, \dots, W^{h_c} . La probabilité que (15) soit réalisé pour tout r est donc majorée par $(\eta_n(l_n))^c$, donc par

$$\left(\eta_n(l_n) \right)^{\frac{1-\rho_n}{9}m_{n+1}}.$$

Il reste maintenant à majorer le nombre de choix possibles pour s, h_1, \dots, h_c, i et les $W_i^{h_r}$.

- Il y a bien sûr k_{n+1} choix pour s .
- L'entier s étant déterminé, il y a c indices à choisir parmi les m_{n+1} éléments de P_s . Majorons grossièrement le nombre de façons de choisir h_1, \dots, h_c par $2^{m_{n+1}}$.
- Il y a 3 choix possibles pour i .

Le plus difficile est de majorer le nombre de choix des sous-mots $W_i^{h_1}, \dots, W_i^{h_c}$ de $W'_{J_i}(\omega_0)$. Ils sont entièrement déterminés par la donnée de leur longueur respective, des i -blocs dans lesquels ils sont contenus, et du rang de leur première lettre dans chaque i -bloc.

- La longueur de chaque $W_i^{h_r}$ valant au plus $2l_n$, il y a au plus $(2l_n)^c$ choix possibles pour les longueurs.
- En utilisant le lemme 2.4, on montre facilement que le nombre de choix possibles pour les i -blocs est majoré par le nombre d'applications croissantes de $\{1, \dots, c\}$ dans $\{1, \dots, 200l_n m_{n+1}\}$, et donc, d'après le lemme 2.3, par $c^{2c} 2^3 \sqrt{200c l_n m_{n+1}}$.

- Chaque i -bloc étant de longueur $3l_n$, il y a au plus $(3l_n)^c$ choix pour les places des premières lettres.

En majorant c par $\frac{m_{n+1}}{2}$, et $c2^c$ par $2^{m_{n+1}}$, on en déduit que le nombre de choix possibles pour les sous-mots W_i^{hr} est plus petit que

$$\left(4l_n 2^{30\sqrt{l_n}}\right)^{m_{n+1}}.$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \mu\left(A(\omega_0, l)\right) &\leq 3k_{n+1} \left(8l_n 2^{30\sqrt{l_n}}\right)^{m_{n+1}} \left(\eta_n(l_n)\right)^{\frac{1-\rho_n}{9}m_{n+1}} \\ &\leq 3k_{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{n+1}}. \end{aligned}$$

Il est maintenant clair que si m_{n+1} est assez grand, on a pour tout $\omega_0 \notin M_n$ et tout $l \geq 1$

$$\mu\left(A(\omega_0, l)\right) \leq \eta_{n+1}(l_n k_{n+1} m_{n+1}),$$

i.e. (\mathcal{H}_{n+1}) est vérifiée.

2.5 La transformation limite T_σ

On peut donc construire comme prévu les transformations T_n ; il ne reste plus qu'à trouver leur limite. Soit σ l'unique mesure de probabilité sur $[0, 2\pi[$ qui vérifie (9) pour tout n . Alors σ est diffuse et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, comme T_σ vérifie (10) pour tout n , on a

$$\mu\left(W|_0^{l_n}(\omega, T_\sigma) \neq W|_0^{l_n}(\omega, T_n)\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

À cause des propriétés (\mathcal{H}_n) , T_σ ne peut donc pas être lâchement Bernoulli. \square

3 Un système gaussien-Kronecker lâchement Bernoulli

Après avoir trouvé un exemple non lâchement Bernoulli parmi les systèmes dynamiques gaussiens d'entropie nulle, la question se pose de savoir si certains de ces systèmes peuvent être lâchement Bernoulli. La réponse est oui, comme on va le voir maintenant.

La construction qui va suivre étant totalement indépendante de la précédente, toutes les notations introduites dans la partie 2 peuvent (et doivent!) être oubliées. On a besoin tout d'abord d'établir une propriété concernant le mouvement brownien complexe.

3.1 Le module du mouvement brownien complexe fonction de certains angles formés par la trajectoire

Lemme 3.1 *Soit \mathcal{B} une sous-tribu de \mathcal{A} , et soit Y une variable aléatoire complexe intégrable, de module presque sûrement non nul, et qui vérifie*

$$\mathbb{E}\left[|Y| \mid \mathcal{B}\right] \stackrel{\mu\text{-p.s.}}{=} \left|\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{B}]\right|,$$

alors $\arg(Y)$ est \mathcal{B} -mesurable.

Preuve — Écrivons $\mathbb{E}[Y | \mathcal{B}] = \rho e^{i\varphi}$ (φ est alors \mathcal{B} -mesurable), et soit $Y = Re^{i\psi}$. On a alors $\mathbb{E}[|Y| | \mathcal{B}] = \mathbb{E}[R | \mathcal{B}]$, et

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[Y | \mathcal{B}]| &= \mathbb{E}[Y e^{-i\varphi} | \mathcal{B}] \\ &= \mathbb{E}[R e^{i(\psi - \varphi)} | \mathcal{B}] \\ &= \mathbb{E}[R \cos(\psi - \varphi) | \mathcal{B}] \quad (\text{car c'est réel!}). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient $\mathbb{E}[R(1 - \cos(\psi - \varphi)) | \mathcal{B}] = 0$, d'où $\psi \stackrel{\mu\text{-p.s.}}{=} \varphi$; ainsi, $\psi = \arg(Y)$ est bien \mathcal{B} -mesurable. \square

Définissons maintenant la variable aléatoire Θ , uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$, par

$$\Theta \stackrel{\text{déf}}{=} \arg\left(\frac{B_{1/2} - B_1}{B_{1/2}}\right).$$

On définit aussi deux transformations G et D de Ω par

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad B_t \circ G &\stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{2} B_{t/2}, \\ \text{et } B_t \circ D &\stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{2} (B_{(t+1)/2} - B_{1/2}). \end{aligned}$$

Remarquons que G et D préservent la mesure μ , et que les tribus $G^{-1}(\mathcal{A})$ et $D^{-1}(\mathcal{A})$ sont indépendantes.

Notons $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \{G, D\}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, Γ^n est l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet Γ . On pose aussi

$$\begin{aligned} \Gamma^{<n} &\stackrel{\text{déf}}{=} \Gamma^0 \cup \dots \cup \Gamma^{n-1} \quad (n \geq 1), \\ \text{et } \Gamma^* &\stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n. \end{aligned}$$

On définit $\Theta_G \stackrel{\text{déf}}{=} \Theta \circ G$, $\Theta_D \stackrel{\text{déf}}{=} \Theta \circ D$, puis, ayant défini les variables aléatoires Θ_W pour tout $W \in \Gamma_n$, on pose $\Theta_{GW} \stackrel{\text{déf}}{=} \Theta_W \circ G$ et $\Theta_{DW} \stackrel{\text{déf}}{=} \Theta_W \circ D$. On obtient ainsi récursivement une famille de variables aléatoires $(\Theta_W)_{W \in \Gamma^*}$, Θ correspondant bien entendu au mot de longueur nulle (voir la figure 3 page 40). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{A}_n la tribu engendrée par les Θ_W , $W \in \Gamma^n$, puis $\mathcal{B}_n \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}_0 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n$, et $\mathcal{B}_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.

Théorème 3.2 $|B_1|$ est \mathcal{B}_∞ -mesurable.

Notons $R \stackrel{\text{déf}}{=} |B_1|$, et de la même manière que précédemment, définissons récursivement la famille $(R_W)_{W \in \Gamma^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les 2^n variables R_W , $W \in \Gamma^n$ sont indépendantes, de même loi que R . Si on note \mathcal{F}_n la tribu qu'elles engendrent, on vérifie aisément que pour $n \geq 1$, \mathcal{F}_n est indépendante de \mathcal{B}_{n-1} . De plus, comme on va le voir maintenant, $|B_1|$ est $(\mathcal{B}_{n-1} \vee \mathcal{F}_n)$ -mesurable.

Si $(r_W)_{W \in \Gamma}$ est une famille de réels positifs, et $\theta \in [0, 2\pi]$, on pose

$$Z_1(\theta, (r_W)) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(r_G + e^{i(\pi-\theta)} r_D \right),$$

et $M_1(\theta, (r_W)) \stackrel{\text{déf}}{=} |Z_1(\theta, (r_W))|$.

Remarquons que l'on a $M_1(\Theta, (R_W)) = |B_1|$, qui est donc $\mathcal{B}_0 \vee \mathcal{F}_1$ -mesurable. Soit maintenant $n \geq 2$ pour lequel on a défini les applications Z_{n-1} et M_{n-1} . On pose alors, pour toute famille $(\theta_W)_{W \in \Gamma^{<n}}$ de réels dans $[0, 2\pi]$, et pour toute famille $(r_W)_{W \in \Gamma^n}$ de réels positifs

$$Z_n((\theta_W), (r_W)) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[M_{n-1}((\theta_{W'}^G), (r_{W'}^G)) + e^{i(\pi-\theta)} M_{n-1}((\theta_{W'}^D), (r_{W'}^D)) \right],$$

et $M_n((\theta_W), (r_W)) \stackrel{\text{déf}}{=} |Z_n((\theta_W), (r_W))|$,

la famille $(\theta_{W'}^G)_{W' \in \Gamma^{<(n-1)}}$ étant définie par

$$\forall W' \in \Gamma^{<(n-1)}, \theta_{W'}^G \stackrel{\text{déf}}{=} \theta_{GW'},$$

de même pour $(\theta_{W'}^D)$, $(r_{W'}^G)$ et $(r_{W'}^D)$. On vérifie aisément par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $M_n((\Theta_W), (R_W)) = |B_1|$, qui est donc bien $\mathcal{B}_{n-1} \vee \mathcal{F}_n$ -mesurable. De plus, on a aussi pour tout $n \geq 1$

$$Z_n((\Theta_W), (R_W)) = Z \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(R_G + e^{i(\pi-\Theta)} R_D \right).$$

Pour tout $n \geq 1$, notons \mathcal{X}_n l'ensemble des familles $(r_W)_{W \in \Gamma^n}$ de réels positifs, et soit μ_n la probabilité sur \mathcal{X}_n qui rend les 2^n coordonnées indépendantes, de même loi que R . Grâce à l'indépendance de \mathcal{B}_{n-1} et \mathcal{F}_n , la variance conditionnelle de R sachant \mathcal{B}_{n-1} s'écrit

$$V_n \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E} \left[R^2 \mid \mathcal{B}_{n-1} \right] - \left(\mathbb{E} [R \mid \mathcal{B}_{n-1}] \right)^2$$

$$= \int_{\mathcal{X}_n} M_n^2((\Theta_W), (r_W)) d\mu_n(r_W) - \left(\int_{\mathcal{X}_n} M_n((\Theta_W), (r_W)) d\mu_n(r_W) \right)^2.$$

Remarquons que $V_n \geq 0$ μ -p.s., et que $\mathbb{E} [V_n] \leq \mathbb{E} [R^2] < +\infty$; en conséquence, toutes les intégrales sont μ -p.s. finies. Posons pour tout $n \geq 1$

$$D_n \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\mathbb{E} [R \mid \mathcal{B}_{n-1}] \right)^2 - \left| \mathbb{E} [Z \mid \mathcal{B}_{n-1}] \right|^2.$$

On a aussi $D_n \geq 0$ μ -p.s., et par un théorème de convergence de martingales, on obtient

$$D_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mu\text{-p.s.}} \left(\mathbb{E} [R \mid \mathcal{B}_\infty] \right)^2 - \left| \mathbb{E} [Z \mid \mathcal{B}_\infty] \right|^2. \quad (16)$$

On va maintenant montrer l'égalité suivante, valable pour tout $n \geq 2$:

$$\mathbb{E} [V_n] = \mathbb{E} [V_{n-1}] - \mathbb{E} [D_n]. \quad (17)$$

Pour cela, écrivons V_n sous la forme

$$\begin{aligned} V_n &= \mathbb{E} \left[|B_1|^2 \mid \mathcal{B}_{n-1} \right] - Y_n - D_n, \\ \text{où } Y_n &\stackrel{\text{déf}}{=} \left| \mathbb{E} [Z \mid \mathcal{B}_{n-1}] \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{\mathcal{X}_n} M_{n-1} \left((\Theta_W) \circ G, (r_W^G) \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\pi - \Theta)} M_{n-1} \left((\Theta_W) \circ D, (r_W^D) \right) d\mu_n(r_W) \right|^2. \end{aligned}$$

Or, sous μ_n , (r_W^G) et (r_W^D) suivent la loi μ_{n-1} . On a donc

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{X}_{n-1}} M_{n-1} \left((\Theta_W) \circ G, (r_W^G) \right) d\mu_{n-1}(r_W^G) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{X}_{n-1}} M_{n-1} \left((\Theta_W) \circ D, (r_W^D) \right) d\mu_{n-1}(r_W^D) \right)^2 \\ &\quad + \cos(\pi - \Theta) \left(\int_{\mathcal{X}_{n-1}} M_{n-1} \left((\Theta_W) \circ G, (r_W^G) \right) d\mu_{n-1}(r_W^G) \right) \\ &\quad \quad \times \left(\int_{\mathcal{X}_{n-1}} M_{n-1} \left((\Theta_W) \circ D, (r_W^D) \right) d\mu_{n-1}(r_W^D) \right). \end{aligned}$$

Sous μ , les variables $(\Theta_W) \circ G$, $(\Theta_W) \circ D$ et Θ sont indépendantes. Comme $\mathbb{E} [\cos(\pi - \Theta)] = 0$, l'espérance du troisième terme est nulle. Il reste alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Y_n] &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E} [|B_1| \mid \mathcal{B}_{n-2}] \circ G \right)^2 + \left(\mathbb{E} [|B_1| \mid \mathcal{B}_{n-2}] \circ D \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E} [|B_1| \mid \mathcal{B}_{n-2}] \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

De plus, comme

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E} [|B_1|^2 \mid \mathcal{B}_{n-1}] \right] = \mathbb{E} [|B_1|^2] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [|B_1|^2 \mid \mathcal{B}_{n-2}] \right],$$

on obtient bien l'égalité (17).

Comme D_n et V_n sont μ -p.s. positifs, on en déduit que la suite $(\mathbb{E} [V_n])_{n \geq 1}$ est décroissante positive. Elle admet donc une limite $l \geq 0$. On a alors

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 2} D_n \right] = \sum_{n \geq 2} \mathbb{E} [D_n] = \mathbb{E} [V_1] - l < +\infty,$$

et donc

$$D_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mu\text{-p.s.}} 0.$$

En comparant ce qui précède avec (16), on obtient

$$\mathbb{E} [R \mid \mathcal{B}_\infty] = \left| \mathbb{E} [Z \mid \mathcal{B}_\infty] \right|.$$

On peut donc appliquer le lemme 3.1 avec $Z = Y$ et $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}$; $\arg(Z)$ est donc \mathcal{B}_∞ -mesurable. On en déduit par le théorème de Thalès que le rapport R_G/R_D est aussi \mathcal{B}_∞ -mesurable. Considérons maintenant les tribus $\mathcal{B}_\infty^G \stackrel{\text{déf}}{=} G^{-1}(\mathcal{B}_\infty)$, et $\mathcal{B}_\infty^D \stackrel{\text{déf}}{=} D^{-1}(\mathcal{B}_\infty)$. On a $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}_\infty^G \vee \mathcal{B}_\infty^D \vee \mathcal{A}_0$, les trois sous-tribus étant indépendantes. On vérifie facilement l'égalité

$$\mathbb{E} \left[\frac{R_G}{R_D} \mid \mathcal{B}_\infty \right] = \mathbb{E} \left[R_G \mid \mathcal{B}_\infty^G \right] \mathbb{E} \left[\frac{1}{R_D} \mid \mathcal{B}_\infty^D \right],$$

d'où

$$\frac{R_G}{R_D} = \mathbb{E} \left[R_G \mid \mathcal{B}_\infty^G \right] \mathbb{E} \left[\frac{1}{R_D} \mid \mathcal{B}_\infty^D \right].$$

Prenons enfin l'espérance conditionnelle des deux membres de l'égalité précédente par rapport à la tribu $G^{-1}(\mathcal{A})$; on obtient

$$R_G \mathbb{E} \left[\frac{1}{R_D} \right] = \mathbb{E} \left[R_G \mid \mathcal{B}_\infty^G \right] \mathbb{E} \left[\frac{1}{R_D} \right].$$

On en déduit $R_G = \mathbb{E} \left[R_G \mid \mathcal{B}_\infty^G \right]$, R_G est donc \mathcal{B}_∞ -mesurable. De même, R_D est \mathcal{B}_∞ -mesurable, puis $|B_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| R_G + e^{i(\pi-\Theta)} R_D \right|$ est aussi \mathcal{B}_∞ -mesurable. \square

Corollaire 3.3 *Si pour tout $n \geq 0$ on note \mathcal{T}_n la tribu engendrée par les variables*

$$\Phi_k^n \stackrel{\text{déf}}{=} \arg \left(B_{(k+1)/2^n} - B_{k/2^n} \right) \quad (0 \leq k \leq 2^n - 1),$$

alors pour tout $n \geq 0$ on a

$$\mathcal{T}_n \vee \bigvee_{m=n}^{+\infty} \mathcal{A}_m = \mathcal{A}.$$

Preuve — Il suffit d'établir le résultat pour $n = 0$. En effet, on remarque les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= G^{-1}(\mathcal{A}) \vee D^{-1}(\mathcal{A}), \\ \mathcal{T}_{n+1} &= G^{-1}(\mathcal{T}_n) \vee D^{-1}(\mathcal{T}_n), \\ \text{et } \bigvee_{m=n+1}^{+\infty} \mathcal{A}_m &= G^{-1} \left(\bigvee_{m=n}^{+\infty} \mathcal{A}_m \right) \vee D^{-1} \left(\bigvee_{m=n}^{+\infty} \mathcal{A}_m \right). \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate prouvera alors la propriété pour tout entier $n \geq 0$. Posons

$$\mathcal{A}' \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{T}_0 \vee \bigvee_{m=0}^{+\infty} \mathcal{A}_m = \mathcal{T}_0 \vee \mathcal{B}_\infty.$$

Comme $R = |B_1|$ est \mathcal{B}_∞ -mesurable, pour tout $W \in \Gamma^*$, R_W est aussi \mathcal{B}_∞ -mesurable. Clairement, $B_1 = R \exp(i\Phi_0^0)$ est \mathcal{A}' -mesurable. Puis, connaissant $B_0 = 0$, R_G , R_D , Θ et B_1 , on en déduit aisément la valeur de $B_{1/2}$, qui est donc lui aussi \mathcal{A}' -mesurable. De cette façon, on montre par récurrence sur n que pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n\}$, $B_{k/2^n}$ est \mathcal{A}' -mesurable; d'où $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. \square

3.2 Construction d'une mesure σ sur $]0, \pi[$

Rappelons que des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont dits *rationnellement indépendants* si toute combinaison linéaire de la forme $\sum_{k=1}^p n_k \alpha_k$ (où les n_k sont entiers) ne peut être multiple de 2π que si les n_k sont tous nuls.

La première étape de la construction consiste à choisir deux réels α_0^1 et α_1^1 dans $]0, \pi[$, rationnellement indépendants. On détermine ensuite un réel $\delta_1 > 0$, assez petit pour que les intervalles ouverts I_0^1 et I_1^1 , centrés respectivement en α_0^1 et α_1^1 et de diamètre δ_1 soient disjoints.

À la n -ième étape, on a ainsi obtenu 2^n intervalles ouverts deux à deux disjoints $I_0^n, \dots, I_{2^n-1}^n$, centrés respectivement en $\alpha_0^n, \dots, \alpha_{2^n-1}^n$, et de diamètre $\delta_n > 0$. À la $(n+1)$ -ième étape, on choisit dans chaque intervalle I_k^n deux réels α_{2k}^{n+1} et α_{2k+1}^{n+1} , de sorte à ce que $\alpha_0^{n+1}, \dots, \alpha_{2^{n+1}-1}^{n+1}$ soient rationnellement indépendants. (C'est toujours possible, car pour tout entier $p \geq 1$, l'ensemble des p -uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in]0, \pi[^p$ constitués de réels non rationnellement indépendants est de mesure de Lebesgue nulle.) On choisit ensuite un réel $\delta_{n+1} > 0$, assez petit pour que les intervalles ouverts $I_0^{n+1}, \dots, I_{2^{n+1}-1}^{n+1}$, centrés respectivement en $\alpha_0^{n+1}, \dots, \alpha_{2^{n+1}-1}^{n+1}$ et de diamètre δ_{n+1} soient deux à deux disjoints, et de sorte à ce que pour tout $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, $I_{2k}^{n+1} \cup I_{2k+1}^{n+1} \subset I_k^n$ (voir la figure 4 page 40). Pour tout entier $n \geq 1$, on note σ_n la probabilité sur $[0, \pi[$ définie par

$$\forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, \quad \sigma_n(\{\alpha_k^n\}) = 2^{-n},$$

et on pose $T_n \stackrel{\text{déf}}{=} T_{\sigma_n}$. On appelle enfin σ l'unique mesure de probabilité sur $[0, \pi[$ qui vérifie

$$\forall n \geq 1, \forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}, \quad \sigma(I_k^n) = 2^{-n}.$$

Il est clair que si, à chaque étape n , on choisit δ_n suffisamment petit, alors σ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Par ailleurs, σ est diffuse, et donc d'après le théorème 1.2, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T_\sigma)$ est un système dynamique gaussien réel d'entropie nulle. La suite est consacrée à la preuve du théorème suivant.

Théorème 3.4 *Si, à chaque étape n , on choisit δ_n assez petit, alors T_σ est lâchement Bernoulli.*

3.3 Lâche-Bernoullicité de T_σ

Si $\mathcal{P} = \{P_u, u \in \mathcal{U}\}$ et $\mathcal{Q} = \{Q_u, u \in \mathcal{U}\}$ sont deux partitions finies de Ω , on définit une distance entre \mathcal{P} et \mathcal{Q} par

$$|\mathcal{P} - \mathcal{Q}| \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{u \in \mathcal{U}} \mu(P_u \Delta Q_u).$$

Fixons-nous une suite strictement décroissante $(\varepsilon_p)_{p \geq 1}$ de réels tendant vers 0. Fixons aussi une famille dénombrable $(B_p)_{p \geq 1}$ de parties de Ω , qui engendrent la tribu \mathcal{A} . Pour tout $p \geq 1$, notons $\mathcal{P}(B_1, \dots, B_p)$ la partition finie de Ω engendrée par B_1, \dots, B_p . On va construire par récurrence une suite $(n_p)_{p \geq 1}$ d'entiers,

strictement croissante. Posons pour commencer $n_1 = 1$; puis, connaissant n_p , on choisit n_{p+1} assez grand pour que, si on note

$$\mathcal{G}_p \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathcal{T}_{n_p} \vee \bigvee_{n=n_p}^{n_{p+1}-1} \mathcal{A}_n,$$

on puisse trouver une partition finie \mathcal{Q}_p , \mathcal{G}_p -mesurable, v\u00e9rifiant

$$|\mathcal{P}(B_1, \dots, B_p) - \mathcal{Q}_p| \leq \frac{1}{2}\varepsilon_p.$$

L'existence de n_{p+1} est assur\u00e9e gr\u00e2ce au corollaire 3.3. Rappelons alors que pour tout $p \geq 1$, \mathcal{G}_p est engendr\u00e9e par les variables $\Phi_k^{n_p}$ ($0 \leq k \leq 2^{n_p} - 1$) et Θ_W ($W \in \Gamma^{n_p} \cup \dots \cup \Gamma^{n_{p+1}-1}$). Remarquons que pour tout $n \geq 0$ et tout $W \in \Gamma^n$, on peut trouver un $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ tel que $\Theta_W \equiv \Phi_{2k+1}^{n+1} - \Phi_{2k}^{n+1} [2\pi]$. \mathcal{G}_p est donc engendr\u00e9e par les variables $\Phi_k^{n_p}$ ($0 \leq k \leq 2^{n_p} - 1$) et

$$\Delta_k^n \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \Phi_{2k+1}^n - \Phi_{2k}^n \quad (n_p + 1 \leq n \leq n_{p+1}, 0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1),$$

toutes ces variables \u00e9tant uniform\u00e9ment distribu\u00e9es dans le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, que l'on peut toujours identifier \u00e0 l'intervalle $[0, 2\pi[$.

Pour tout entier $r \geq 1$ et toute variable al\u00e9atoire Φ uniform\u00e9ment distribu\u00e9e sur $[0, 2\pi[$, on consid\u00e8re la partition de Ω

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Phi, r) &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{P_1(\Phi, r), \dots, P_r(\Phi, r)\}, \\ \text{o\u00f9 } P_k(\Phi, r) &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left(\Phi \in \left[\frac{2(k-1)\pi}{r}, \frac{2k\pi}{r} \right] \right). \end{aligned}$$

Comme \mathcal{Q}_p est \mathcal{G}_p -mesurable, il est facile de voir que si l'on choisit un entier r_p assez grand, alors on peut trouver une partition \mathcal{Q}'_p moins fine que la partition

$$\mathcal{P}_p \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \bigvee_{k=0}^{2^{n_p}-1} \mathcal{P}(\Phi_k^{n_p}, r_p) \vee \bigvee_{\substack{n_p+1 \leq n \leq n_{p+1} \\ 0 \leq k \leq 2^{n-1}-1}} \mathcal{P}(\Delta_k^n, r_p),$$

et qui v\u00e9rifie

$$|\mathcal{Q}'_p - \mathcal{Q}_p| \leq \frac{1}{2}\varepsilon_p.$$

Les partitions \mathcal{P}_p , $p \geq 1$ \u00e9tant ainsi d\u00e9finies, on va \u00e9tablir le r\u00e9sultat suivant.

Proposition 3.5 *Si les δ_n sont choisis assez petits, alors pour tout entier $p \geq 1$ on peut trouver un entier $l_p \geq 1/\varepsilon_p$ et un ensemble M_p de mesure $\mu(M_p) \leq \varepsilon_p$, en dehors duquel on a pour tous ω et ω'*

$$\bar{f} \left(W|_0^{l_p}(\omega, T_\sigma, \mathcal{P}_p), W|_0^{l_p}(\omega', T_\sigma, \mathcal{P}_p) \right) \leq \varepsilon_p. \quad (18)$$

Par construction, toute partition finie \mathcal{P} de Ω peut \u00eatre approch\u00e9e arbitrairement bien par une partition \mathcal{P}' moins fine que \mathcal{P}_p pour p assez grand.

On déduit donc facilement de la proposition précédente que T_σ est lâchement Bernoulli si les δ_n sont assez petits.

On va montrer le résultat annoncé pour $p = 1$, le même raisonnement pouvant s'appliquer par la suite à tous les entiers p . Pour tout réel $\eta > 0$, posons

$$f(\eta) \stackrel{\text{déf}}{=} 2\sqrt{2\eta} + 2\eta.$$

Choisissons $\eta_1 > 0$ assez petit pour que $f^{n_2-1}(\eta_1) \leq \frac{1}{2}\varepsilon_1$, et posons, pour tout $n \in \{2, \dots, n_2\}$, $\eta_n \stackrel{\text{déf}}{=} f^{n-1}(\eta_1)$. Notons

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{P}(\Phi_0^1, r_1) \vee \mathcal{P}(\Phi_1^1, r_1), \\ \text{et } \mathcal{R}_n &\stackrel{\text{déf}}{=} \bigvee_{k=0}^{2^{n-1}-1} \mathcal{P}(\Delta_k^n, r_1) \quad (2 \leq n \leq n_2). \end{aligned}$$

L'action de la transformation T_1 sur la tribu \mathcal{T}_1 est celle d'une rotation irrationnelle d'angle (α_0^1, α_1^1) sur le tore \mathbb{T}^2 . Or, une rotation irrationnelle est toujours lâchement Bernoulli. Comme la partition \mathcal{R}_1 est \mathcal{T}_1 -mesurable, on peut trouver un entier h_1 assez grand, et un ensemble E_1 de mesure $\mu(E_1) \leq \eta_1$, en dehors duquel on a pour tous ω et ω'

$$\bar{f} \left(W|_0^{h_1}(\omega, T_1, \mathcal{R}_1), W|_0^{h_1}(\omega', T_1, \mathcal{R}_1) \right) \leq \eta_1.$$

Formulons maintenant l'hypothèse de récurrence suivante, pour $1 \leq n \leq n_2$.

(\mathcal{H}_n) —On peut trouver un entier h_n arbitrairement grand, et un ensemble E_n de mesure $\mu(E_n) \leq \eta_n$, en dehors duquel pour tous ω et ω' on a

$$\bar{f} \left(W|_0^{h_n}(\omega, T_n, \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_n), W|_0^{h_n}(\omega', T_n, \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_n) \right) \leq \eta_n.$$

Soit $n \in \{1, \dots, n_2 - 1\}$ tel que (\mathcal{H}_n) soit vérifiée. On va montrer que si δ_n est choisi assez petit, alors (\mathcal{H}_{n+1}) est aussi vérifiée. Définissons l'événement

$$D_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(W|_0^{h_n}(\omega, T_n, \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_n) \neq W|_0^{h_n}(\omega', T_n, \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_n) \right).$$

Grâce au lemme 1.3, si on choisit δ_n assez petit, on a $\mu(D_{n+1}) \leq \eta_n$. Posons $U \stackrel{\text{déf}}{=} T_{n+1}^{h_n}$. L'action de U sur la tribu \mathcal{T}_{n+1} est celle d'une rotation irrationnelle sur le tore $\mathbb{T}^{2^{n+1}}$. Comme \mathcal{R}_{n+1} est \mathcal{T}_{n+1} -mesurable, on peut trouver un entier m_{n+1} assez grand, et un ensemble E'_{n+1} de mesure $\mu(E'_{n+1}) \leq \eta_n$ en dehors duquel on a pour tous ω et ω'

$$\bar{f} \left(W|_0^{m_{n+1}}(\omega, U, \mathcal{R}_{n+1}), W|_0^{m_{n+1}}(\omega', U, \mathcal{R}_{n+1}) \right) \leq \eta_n. \quad (19)$$

Définissons pour $\omega \in \Omega$

$$g(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{m_{n+1}} \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \mathbb{1}_{E_n \cup D_{n+1}}(\omega).$$

On a $\int_{\Omega} g d\mu = \mu(E_n \cup D_n + 1) \leq 2\eta_n$, et donc

$$\mu(g > \sqrt{2\eta_n}) \leq \sqrt{2\eta_n}.$$

Posons maintenant $E_{n+1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} E'_{n+1} \cup (g > \sqrt{2\eta_n})$: on a bien $\mu(E_{n+1}) \leq \eta_{n+1}$. Fixons ω et ω' en dehors de E_{n+1} ; alors, de (19) et des in\u00e9galit\u00e9s $g(\omega) \leq \sqrt{2\eta_n}$, $g(\omega) \leq \sqrt{2\eta_n}$, on d\u00e9duit l'existence d'un entier $r \geq (1 - \eta_n + 2\sqrt{2\eta_n}) m_{n+1}$, et de $2r$ entiers

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_1 < \dots < k_r \leq m_{n+1} - 1 \\ \text{et} \quad 0 &\leq k'_1 < \dots < k'_r \leq m_{n+1} - 1, \end{aligned}$$

tels que pour tout $s \in \{1, \dots, r\}$

- $\mathcal{R}_{n+1}(U^{k_s}\omega) = \mathcal{R}_{n+1}(U^{k'_s}\omega')$,
- $U^{k_s}\omega \notin E_n \cup D_{n+1}$,
- $U^{k'_s}\omega' \notin E_n \cup D_{n+1}$.

Remarquons maintenant que les variables Δ_k^{n+1} sont invariantes par T_n . En cons\u00e9quence, on a aussi pour tout entier $l \in \{0, \dots, h_n - 1\}$

$$\mathcal{R}_{n+1}(T_n^l U^{k_s}\omega) = \mathcal{R}_{n+1}(T_n^l U^{k'_s}\omega'),$$

mais comme $U^{k_s}\omega$ et $U^{k'_s}\omega'$ sont en dehors de D_{n+1} , on obtient

$$\mathcal{R}_{n+1}(T_{n+1}^l U^{k_s}\omega) = \mathcal{R}_{n+1}(T_{n+1}^l U^{k'_s}\omega').$$

En utilisant en plus le fait que $U^{k_s}\omega$ et $U^{k'_s}\omega'$ ne sont pas dans E_n , on peut en d\u00e9duire

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(W|_0^{h_n}(U^{k_s}\omega, T_{n+1}, \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_{n+1}), W|_0^{h_n}(U^{k'_s}\omega', T_{n+1}, \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_{n+1})\right) \\ \leq \eta_n. \end{aligned}$$

On en conclut ais\u00e9ment que pour tous ω et ω' dans $\Omega \setminus E_{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(W|_0^{m_{n+1}h_n}(\omega, T_{n+1}, \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_{n+1}), W|_0^{m_{n+1}h_n}(\omega', T_{n+1}, \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_{n+1})\right) \\ \leq 2\eta_n + 2\sqrt{2\eta_n} = \eta_{n+1}. \end{aligned}$$

On v\u00e9rifie donc bien (\mathcal{H}_{n+1}) avec $h_{n+1} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} m_{n+1}h_n$.

On a ainsi prouv\u00e9 par r\u00e9currence que si l'on choisit les δ_n assez petits, (\mathcal{H}_n) est vraie pour tout $n \in \{1, \dots, n_2\}$. Posons alors $l_1 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} h_{n_2}$; comme m_{n_2} peut \u00eatre choisi arbitrairement grand, on peut s'arranger pour que $l_1 \geq 1/\varepsilon_1$. Il suffit maintenant de prendre δ_{n_2} assez petit pour avoir

$$\mu\left(W|_0^{l_1}(\omega, T_{n_2}, \mathcal{P}_1) \neq W|_0^{l_1}(\omega, T_{\sigma}, \mathcal{P}_1)\right) \leq \frac{1}{2}\varepsilon_1,$$

(toujours gr\u00e2ce au lemme 1.3), et la proposition 3.5 est \u00e9tablie pour $p = 1$. Le m\u00eame raisonnement \u00e9tant valable pour tout entier p , on peut ainsi obtenir une transformation T_{σ} lâchement Bernoulli. \square

3.4 Obtention d'un gaussien-Kronecker

Une partie K du tore \mathbb{T} est appelée *ensemble de Kronecker* si toute fonction continue $\varphi : K \rightarrow \mathbb{T}$ est limite uniforme sur K d'une suite (φ_p) de fonctions de la forme

$$\varphi_p : \begin{cases} K \rightarrow \mathbb{T} \\ t \mapsto j_p t \quad [2\pi], \end{cases}$$

où les j_p sont entiers.

On appelle *système gaussien-Kronecker* un système dynamique gaussien réel dont la mesure spectrale γ est diffuse et concentrée sur $K \cup (-K)$, où K est un ensemble de Kronecker dans $[0, \pi[$. Un ensemble de Kronecker étant toujours de mesure de Lebesgue nulle, les systèmes gaussiens-Kronecker sont toujours d'entropie nulle (et ergodiques, car leur mesure spectrale est diffuse); mais ils possèdent aussi quelques propriétés moins habituelles :

- ils ont spectre simple L^p pour tout $p \geq 1$ (voir [1] et [5]),
- ils vérifient le *Weak Closure Theorem* (voir [11]), *i.e.* toute transformation S préservant μ et commutant avec T est limite faible de puissances de T : on peut trouver une suite d'entiers (j_p) telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu \left(S^{-1} A \Delta T^{-j_p} A \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Curieusement, ces deux propriétés sont partagées par les systèmes de rang un (voir [4] et [6]). De plus, les gaussiens-Kronecker ont en commun avec les systèmes à spectre discret (qui sont de rang un) la propriété de stabilité spectrale : tout système qui est spectralement isomorphe à un gaussien-Kronecker lui est en fait métriquement isomorphe ([1] et [2]). Il est alors bien naturel de se demander si il existe un gaussien-Kronecker qui soit de rang un. S. Ferenczi ([4]) a répondu affirmativement à cette question, mais malheureusement un argument crucial manque dans sa démonstration.

L'exhibition d'un gaussien-Kronecker de rang un aurait quelques conséquences intéressantes : on aurait ainsi trouvé un système de rang un infiniment divisible ; de plus, M. Lemanczyk et S. Ferenczi s'appuient sur l'existence d'un tel système pour prouver que le rang n'est pas un invariant spectral ([4]).

Il se trouve que la transformation T_σ construite ici pourrait être un bon candidat au poste de gaussien-Kronecker de rang un. En effet, on peut voir dans [1] que le support $S = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{0 \leq k \leq 2^n - 1} \overline{I}_k^n$ de σ est un ensemble de Kronecker si les δ_n sont assez petits. On peut donc s'arranger pour que T_σ soit un gaussien-Kronecker lâchement Bernoulli. Peut-on ainsi obtenir un système gaussien de rang un ?

Terminons enfin par une dernière question, qui se pose inévitablement à la suite des deux constructions exposées ici : pour quelle mesure spectrale un système dynamique gaussien d'entropie nulle est-il lâchement Bernoulli ?

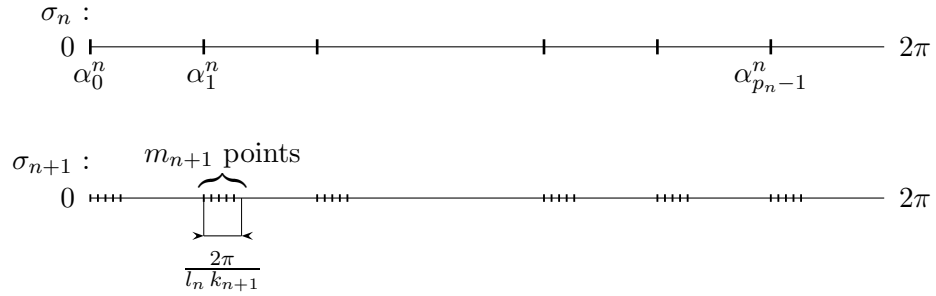


FIG. 2 – Passage de σ_n à σ_{n+1} (première construction)

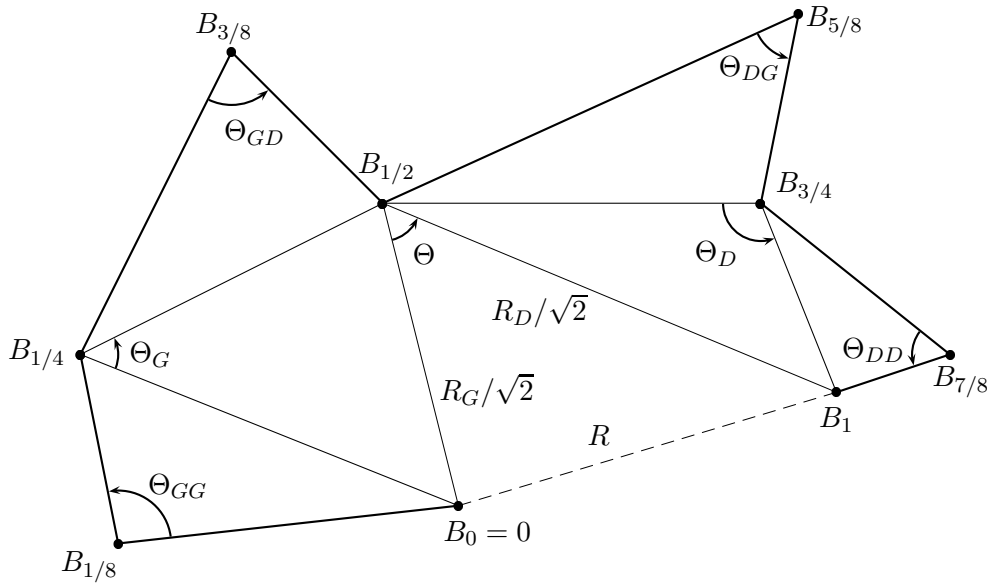


FIG. 3 – Les angles Θ_W , $W \in \Gamma^{<3}$

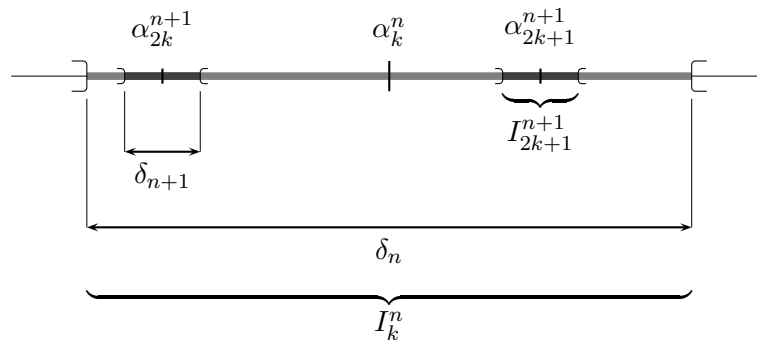


FIG. 4 – Dans l'intervalle I_k^n (seconde construction)

Références

- [1] I.P. CORNFELD, S.V. FOMIN, et Ya.G. SINAI. *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 1982.
- [2] A. DEL JUNCO. Transformations with discrete spectrum are stacking transformations. *Canadian Journal of Mathematics*, 28 : 836–839, 1976.
- [3] J. FELDMAN. New K-automorphisms and a problem of Kakutani. *Israel Journal of Mathematics*, 24 : 16–38, 1976.
- [4] S. FERENCZI. Systèmes de rang fini. Thèse de doctorat d'État, Université d'Aix-Marseille 2, 1990.
- [5] A. IWANIK et J. DE SAM LAZARO. Sur la multiplicité L^p d'un automorphisme gaussien. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 312 : 875–876, 1991.
- [6] J. KING. The commutant is the weak closure of the powers, for rank-1 transformations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 6 : 363–384, 1986.
- [7] D.S. ORNSTEIN, D.J. RUDOLPH, et B. WEISS. *Equivalence of Measure Preserving Transformations*. Memoirs of the American Mathematical Society 262, 1982.
- [8] A. ROTHSTEIN. Versik processes : First steps. *Israel Journal of Mathematics*, 36 : 205–224, 1980.
- [9] T. DE LA RUE. Mouvement moyen et système dynamique gaussien.
- [10] T. DE LA RUE. Entropie d'un système dynamique gaussien : Cas d'une action de \mathbb{Z}^d . *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 317 : 191–194, 1993.
- [11] J.P. THOUVENOT. The metrical structure of some gaussian processes. In *Ergodic Theory and Related Topics II*, pages 195–198, Georghenthal, 1986. Teubner Texte zur Mathematik.

Abstract

The first chapter of this thesis proves that the entropy of a gaussian dynamical system is zero or infinite, according as its spectral measure is singular or not with respect to the Lebesgue measure. This result is extended to the case of a multidimensional action.

In the second chapter, we develop a new model for gaussian systems, which are viewed as a transformation of the plane brownian path. This transformation can be inserted in a flow, for which we calculate a mean motion.

This model is used in the third chapter to construct two gaussian systems of zero entropy which are not Kakutani-equivalent : one of them is not loosely Bernoulli, whereas the other one (a gaussian-Kronecker system) is loosely Bernoulli. For this, we also need to show a property of the plane brownian motion : the whole path can be recovered knowing only some angles formed by the trajectory.

Keywords : stationary gaussian process, plane brownian motion, entropy, mean motion, loose-Bernoullicity, gaussian-Kronecker.

Résumé

Le premier chapitre de cette thèse établit que l'entropie d'un système dynamique gaussien est soit nulle, soit infinie, suivant respectivement que sa mesure spectrale est singulière ou non par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce résultat est étendu au cas d'une action multidimensionnelle.

Dans le second chapitre, on développe un nouveau modèle pour les systèmes gaussiens, qui sont vus comme une transformation de la trajectoire brownienne plane. Cette transformation peut être insérée dans un flot, pour lequel on calcule un mouvement moyen.

Ce modèle est utilisé dans le troisième chapitre pour construire deux systèmes gaussiens d'entropie nulle non équivalents au sens de Kakutani : l'un n'est pas lâchement Bernoulli, alors que l'autre, qui est un gaussien-Kronecker, est lâchement Bernoulli. Pour cela, on a aussi besoin de montrer une propriété du mouvement brownien plan : certains angles formés par les accroissements du brownien suffisent pour reconstituer toute la trajectoire.

Mots clés : processus gaussien stationnaire, mouvement brownien plan, entropie, mouvement moyen, lâche-Bernoullicité, gaussien-Kronecker.