



**HAL**  
open science

# Modélisation de liaisons flexibles amortissantes en élastomères pour la prédiction du comportement dynamique de systèmes complexes

Benjamin Morin

► **To cite this version:**

Benjamin Morin. Modélisation de liaisons flexibles amortissantes en élastomères pour la prédiction du comportement dynamique de systèmes complexes. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2016. Français. NNT : 2016CNAM1067 . tel-01508485

**HAL Id: tel-01508485**

**<https://theses.hal.science/tel-01508485>**

Submitted on 14 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale des Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés

## THÈSE DE DOCTORAT

*présentée par* : Benjamin MORIN

*soutenue le* : 3 Novembre 2016

*pour obtenir le grade de* : Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers

*Spécialité* : Mécanique

# Modélisation de liaisons flexibles amortissantes en élastomère pour la prédiction du comportement dynamique de systèmes complexes

### JURY COMPOSÉ DE :

M. DEÛ J.-F.	LMSSC, Le Cnam (Paris), France	<i>Directeur de thèse</i>
M. LEGAY A.	LMSSC, Le Cnam (Paris), France	<i>Co-encadrant de thèse</i>
M. DESCELIERS C.	MSME, UPEM (Champs-sur-Marne), France	<i>Rapporteur</i>
M. DION J.L.	QUARTZ, Supméca (Saint-Ouen), France	<i>Rapporteur</i>
M. NÉRON D.	LMT, ENS (Cachan), France	<i>Président du jury</i>
M. TROCLET B.	Airbus DS (Les Mureaux), France	<i>Examineur</i>



# Résumé

Dans le cadre de l'amortissement passif de structures, les élastomères sont employés dans les industries du transport sous la forme de liaisons amortissantes. Ces matériaux ont un comportement dépendant de la fréquence, de la température et de la précharge. Les modèles numériques associés peuvent être coûteux en temps de calcul, notamment en phase d'optimisation. Le but de cette thèse est de proposer un modèle réduit efficace de ces liaisons amortissantes, qui prenne en compte la dissipation viscoélastique et les précharges non-linéaires dans les liaisons. La première partie de ce mémoire se concentre sur la représentation de la dissipation par modèle réduit. Une loi de comportement viscoélastique, basée sur un modèle rhéologique identifié expérimentalement, est utilisée avec la méthode des éléments finis pour obtenir un modèle numérique des liaisons amortissantes. Un premier modèle réduit prédictif est dérivé en utilisant une extension originale des méthodes de sous-structuration. La deuxième partie traite de l'influence des précharges statiques non-linéaires sur le comportement dynamique et la dissipation dans les liaisons. Pour cela, une loi de comportement hyper-visco-élastique linéarisée autour d'un état précontraint statique non-linéaire est développée. Les méthodes de sous-structuration introduites dans la première partie sont alors enrichies afin de tenir compte de la dissipation et les non-linéarités géométriques dans les liaisons. Finalement, ces modèles réduits à 2 nœuds permettent des gains en temps de calcul d'un facteur 50 à 100 et sont facilement utilisables par l'ingénieur en phase de conception.

**Mots clés :** Amortissement, Élastomères, Viscoélasticité, Sous-structuration, Modèles Réduits, Hyperélasticité, Non-linéarités géométriques.



# Abstract

In the context of passive damping, various mechanical systems from the space, aeronautic or auto-mobile industry use elastomer components (shock absorbers, silent blocks, flexible joints...). These materials have frequency, temperature and amplitude dependent characteristics. The associated numerical models may become computationally too expensive during an optimization process. The aim of this work is to propose an efficient reduced model of rubber devices that account for the viscoelastic damping and the non-linear pre-stress in the dampers. The first part of this thesis is about how to include the viscoelastic damping in the reduced model. It starts by using a viscoelastic constitutive relation, based on experimental identification, within the frame of the finite element method to obtain a numerical model of the rubber dampers. A first efficient reduced model is then derived from this FE model by using an original extension of sub-structuring methods in the case of viscoelastic damping. In the second part, the influence of non-linear static pre-stress over the dynamic behavior and the dissipation in the dampers is studied. An hyper-visco-elastic constitutive relation, linearized in the neighbourhood of a pre-stressed state, is developed. The sub-structuring methods presented in the first part are then upgraded to account for the damping and the geometrical non-linearities in the dampers. Finally, these 2-node reduced models give access to greatly reduced computation times (50 to 100 times faster) and are easy to use for the engineer.

**Keywords :** Damping, Elastomer, Viscoelasticity, Sub-structuring, Reduced Order Model, Hyperelasticity, Geometrical non-linearities.



# Remerciements

Quatre années ont passé depuis mes débuts, ma thèse est soutenue. Le plus gros du travail me semblait fait, et me voilà pourtant revenu à une page blanche ! Ces remerciements s'adressent à toutes les personnes, amis, collègues, famille et autres individus sans qui cette thèse n'aurait pu se faire.

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-François DEÛ, mon directeur de thèse, pour m'avoir offert l'opportunité de réaliser ce travail et pour la patience dont il a bien voulu faire preuve malgré les difficultés qui ont pu se présenter au cours de ces quatre années. Ton souci permanent de rigueur et de détail m'a poussé à être moi-même plus exigeant et a certainement fait de moi un meilleur chercheur. Il me reste encore du chemin à parcourir, et je serai ravi d'avoir à nouveau l'occasion de travailler avec toi.

Je remercie également Antoine LEGAY, mon co-encadrant de thèse, pour m'avoir dédié tant de temps et avoir fait de moi un numéricien accompli (l'espoir fait vivre !). L'enthousiasme que tu mets dans tes différents projets restera pour moi un modèle à suivre. Tes démonstrations d'arabesque devant la foule ébahie des convives de la cafétéria me manqueront.

Je remercie Airbus Safran Luncher pour le soutien et le suivi apporté à ma thèse, et plus précisément ses représentants Bernard TROCLET et Marie DE ROCHAMBEAU pour le temps qu'ils ont bien voulu dédier à nos nombreuses entrevues.

J'aimerais remercier les membres de mon jury de thèse pour leur participation à ma sou-

---

tenance et pour le temps investi dans sa préparation. Merci donc, au président du jury David NERON, aux deux rapporteurs Christophe DESCELIERS et Jean-Luc DION, ainsi qu'aux examinateurs, Jean-François DEÛ, Antoine LEGAY et Bernard TROCLET.

Je remercie infiniment toute l'équipe du LMSSC pour avoir eu la gentillesse de m'accueillir parmi eux. L'atmosphère chaleureuse du laboratoire et la bonne humeur de ses membres m'ont permis d'accomplir mon travail dans les meilleures conditions possibles. Ce sera toujours un plaisir de venir vous rendre visite. Petite mention spéciale à Lucie et Mathieu, pour leur participation (même involontaire) dans l'une de mes plus belles gaffes : "mais, c'est Mathieu"... Mes excuses au chairman.

Un grand merci à tous les membres du BDD, Martin, Boris, Olivier, Guillaume, Pierre, Christophe, Aro et Sylvain pour l'ambiance joviale et détendue que vous m'avez apporté. Mon nouveau bureau me semble bien vide... Je vous souhaite bonne chance à tous pour la suite, et bon courage aux prochains souteneurs ! Et un grand merci au dictateur auto-proclamé du BDD, peintre de cochonneries qu'il appelle "de lard", pour avoir organisé tous ces splendides banquets et festins !

Je remercie maintenant ma famille, sans qui je ne serais pas le même aujourd'hui, pour son soutien permanent et sans failles malgré le manque d'attention dont j'ai pu faire preuve envers vous ces derniers temps. Je vous aime tous, et j'espère avoir bientôt l'occasion de vous rendre visite.

Merci à toi Maman. Tu as fait preuve de courage et d'abnégation pour m'élever, tu n'as jamais manqué de m'apporter tout l'amour et le soutien dont j'ai pu avoir besoin, et finalement tu as toujours respecté mes choix. Étant plutôt pudique, je profite de l'occasion pour te dire que je t'aime. Je ne vous souhaite que du bonheur à toi et à Ghislain.

Merci aussi à toi Morgane, d'avoir partagé ma vie de thésard, avec ses hauts et ses bas, tout en supportant mon pessimisme naissant et "parfois" mon humeur maussade. Tu m'as

suivi sans hésiter dans mon choix de faire une thèse, je t'en remercie.

Merci à Stanislas, mon ami de toujours, pour ses encouragements. Bientôt 25 ans que l'on se connaît ! Heureux que tu ais pu assister à ma soutenance, il va falloir qu'on se voit plus souvent à l'avenir.

Merci à Mathieu, mon ami et acolyte geek pour toutes les sorties, parties, discussions et autres moments de détente qu'on a partagé, pendant lesquels j'ai pu me changer les idées et rigoler un bon coup.

Je tiens finalement à remercier :

- mes prédécesseurs, hommes de sciences, des plus illustres aux moins connus, depuis l'antiquité jusqu'à nos jours, sans qui les sciences modernes n'existeraient pas,
- les auteurs de sciences-fiction, dans leur ensemble, sans qui mon amour pour les sciences n'aurait sans doute pas été le même, ni aussi précoce.

Mon mémoire de thèse est désormais complet, ces quatre années ainsi que le 3 Novembre 2016 resteront gravés dans ma mémoire, merci à tous !

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>I Modélisation de liaisons élastomère en dynamique linéaire</b>	<b>27</b>
<b>1 Modélisation du comportement viscoélastique</b>	<b>29</b>
1.1 Introduction à la viscoélasticité . . . . .	30
1.2 Modèles rhéologiques classiques . . . . .	33
1.3 Identification des paramètres des modèles de comportement . . . . .	40
1.4 Conclusions et modèle retenu . . . . .	43
<b>2 État de l’art sur la modélisation des liaisons</b>	<b>47</b>
2.1 Introduction . . . . .	48
2.2 Bibliographie sur les approches expérimentales . . . . .	48
2.3 Modèles éléments finis en viscoélasticité linéaire . . . . .	53
2.3.1 Domaine temporel . . . . .	54
2.3.2 Domaine fréquentiel . . . . .	61
2.4 Application . . . . .	64
<b>3 Modèles réduits de liaisons élastomères</b>	<b>67</b>
3.1 Rigidification des interfaces des liaisons . . . . .	68
3.2 Réduction par sous-structuration dynamique dans le cas non-amorti . . . . .	69

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.2.1	Introduction . . . . .	69
3.2.2	Méthode à interfaces fixes : méthode de Craig-Bampton . . . . .	73
3.2.3	Méthodes à interfaces libres : méthodes de MacNeal et de Rubin . . . . .	81
3.3	Réduction par sous-structuration dans le cas amorti . . . . .	96
3.3.1	Introduction . . . . .	96
3.3.2	Méthode à interfaces fixes . . . . .	98
3.3.3	Méthode à interfaces libres . . . . .	107
3.4	Conclusion . . . . .	114
 <b>II Prise en compte des non-linéarités géométriques dans les liaisons élastomères</b>		<b>117</b>
 <b>4 Modélisation de liaisons élastomère précontraintes</b>		<b>119</b>
4.1	Introduction et état de l'art . . . . .	120
4.2	Précharge statique non-linéaire des liaisons . . . . .	122
4.2.1	Potentiel hyperélastique des matériaux isotropes . . . . .	122
4.2.2	Expression du tenseur des contraintes . . . . .	124
4.2.3	Expression du tenseur d'élasticité . . . . .	124
4.2.4	Choix d'un modèle hyperélastique . . . . .	125
4.2.5	Mise en œuvre numérique du problème non-linéaire statique . . . . .	130
4.3	Comportement amortissant des liaisons préchargées . . . . .	138
4.3.1	Loi de comportement hyper-visco-élastique . . . . .	138
4.3.2	Séparation des comportements en dilatation et distorsion . . . . .	140
4.3.3	Expression du tenseur des contraintes . . . . .	141
4.3.4	Linéarisation du comportement autour d'un état précontraint . . . . .	142
4.4	Conclusion . . . . .	148

<b>5 Modèles réduits de liaisons élastomère précontraintes</b>	<b>149</b>
5.1 Dynamique des liaisons préchargées . . . . .	150
5.1.1 Écriture des équations de la dynamique dans le cas préchargé . . . . .	150
5.1.2 Influence de la précharge sur le comportement dynamique des liaisons	151
5.2 Réduction par sous-structuration dans le cas non amorti . . . . .	156
5.2.1 Méthode aux interfaces fixes . . . . .	156
5.2.2 Méthode aux interfaces libres . . . . .	161
5.3 Réduction par sous-structuration dans le cas amorti . . . . .	166
5.3.1 Méthode aux interfaces fixes . . . . .	166
5.3.2 Méthode aux interfaces libres . . . . .	171
5.4 Conclusion . . . . .	176
<b>Conclusion</b>	<b>179</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>182</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Introduction

Grâce à leur propriétés amortissantes, les matériaux élastomères sont couramment utilisés dans l'industrie pour réaliser des pièces anti-vibratoires notamment sous la forme de liaisons (ou jonctions) entre sous-systèmes d'ensembles mécaniques. Ces liaisons sont généralement composées de divers matériaux (métalliques, composites et élastomères) et ont des géométries complexes adaptées au domaine d'application. Dans l'industrie spatiale, ce type de liaison est par exemple utilisé pour protéger la charge utile ou d'autres systèmes sensibles comme l'électronique de bord, des sollicitations dynamiques subies par le lanceur, au décollage ou lors des séparations des étages par découpes pyrotechniques.

Lors de la phase de conception d'un système mécanique contenant des liaisons dissipatives, l'ingénieur a besoin d'outils prédictifs capables de représenter le comportement dynamique de ces liaisons dans leur environnement. Des modèles prédictifs doivent alors être développés. Ces modèles sont complexes à mettre en place car ils nécessitent à la fois :

- de connaître le comportement dynamique des matériaux constitutifs (en particulier les élastomères) ;
- d'être capable de modéliser la liaison dans sa globalité, par exemple via des modèles éléments finis non-linéaires géométriques ;
- de pouvoir estimer l'efficacité de ces dispositifs d'amortissement sur le comportement dynamique des sous-systèmes connectés.

Il existe aujourd'hui peu de modèles prédictifs pour ce type de problématique et les développements sont souvent empiriques et basés sur des expérimentations coûteuses. Ces modèles utilisant des assemblages de ressorts, d'amortisseurs et de frotteurs, en série ou en parallèle, ont l'avantage d'être peu coûteux mais ne constituent pas des modèles repré-

sentatifs pour des applications 3D et doivent être identifiés par de nombreux essais. Le travail proposé dans cette thèse concerne le développement de modèles efficaces de liaisons flexibles amortissantes en élastomère pour la prédiction du comportement dynamique de systèmes complexes.

### Objectifs de la thèse

Le but principal de la thèse est de proposer une méthodologie efficace pour prédire le comportement dynamique de liaisons à base de matériaux élastomères dans les systèmes dynamiques complexes. Pour cela, trois objectifs sont visés :

- Il s'agit dans un premier temps de développer des modèles de comportement dissipatifs de matériaux élastomères en grande transformation à l'échelle macroscopique. Ces modèles doivent prendre en compte l'influence de la fréquence et de la précontrainte sur la rigidité et l'amortissement du matériau.
- Le second objectif du travail est de proposer une modélisation numérique efficace de la liaison dans son ensemble en tenant compte de sa géométrie, de ses matériaux constitutifs grâce aux modèles matériaux précédents et des non-linéarités matérielles et géométriques.
- Enfin, le dernier objectif est de proposer une modélisation réduite de la liaison (super-élément à peu de degrés de liberté) à partir des modèles 3D précédents. Ces modèles réduits doivent permettre des gains en temps de calcul significatifs.

### Approche proposée

Pour répondre aux objectifs fixés dans cette thèse, l'approche proposée est basée sur :

- Le développement d'un modèle de comportement non-linéaire dissipatif adapté à la modélisation d'un matériau élastomère précontraint sollicité dynamiquement. Ce modèle est basé sur un couplage entre les modèles rhéologiques viscoélastiques et les modèles hyperélastiques présents dans la littérature. Le modèle utilisé est linéarisé autour d'un état précontraint et permet de représenter la réponse dynamique d'un élastomère sous la forme d'une rigidité et d'un amortissement dépendant d'une

précharge non-linéaire.

- La mise en œuvre numérique de modèles éléments finis 3D de liaison avec prise en compte de la dissipation et des non-linéarités géométriques et matérielles. Ces modèles éléments finis sont créés à l'aide d'un code maison, implémenté en interne à l'occasion de cette thèse dans le but d'obtenir un outil numérique maîtrisé et dont le fonctionnement et la gestion des algorithmes de résolution est totalement connu. Ce code est alimenté à l'aide de la loi de comportement précédemment développée.
- Finalement, à partir des modélisations précédentes, une méthodologie de réduction de modèle est proposée, basée sur les techniques de sous-structuration présentes dans la littérature. Ces techniques sont ici modifiées de manière à prendre en compte le comportement dissipatif des élastomères ainsi que la dépendance à la précharge. Les modèles réduits se présentent sous la forme de super-éléments remplaçant les modèles éléments finis 3D des liaisons dans un assemblage complet. Ces super-éléments sont interchangeables et permettent de générer efficacement des bases de données numériques associées à la rigidité et à la dissipation des liaisons pour différents cas de sollicitations dynamiques appliquées.

## Développement d'un code maison

Le comportement des élastomères nécessite l'emploi de modèles qui ne sont pas toujours présents dans les codes du commerce ou alors difficiles à maîtriser pleinement sans savoir comment ces modèles sont implémentés et gérés par ces codes. Dans un même temps, les codes commerciaux sont optimisés pour un usage défini dans un cadre bien précis, pas nécessairement adapté aux activités de recherche, comme par exemple ici la mise en œuvre d'une méthodologie de réduction des modèles de liaisons.

Pour contourner ces problèmes, un code maison est développé pendant cette thèse, avec pour but de pouvoir réaliser des calculs de statique et de dynamique, dans les domaines temporel et fréquentiel, en prenant en compte les comportements dissipatif et non-linéaire des élastomères. Le code implémenté est basé sur le code SILEX, développé en interne (<http://antoinelegay.free.fr>), et se compose de deux parties (Fig. 1) :

1. Un cœur en langage Fortran, qui calcule les termes des matrices de masse et de

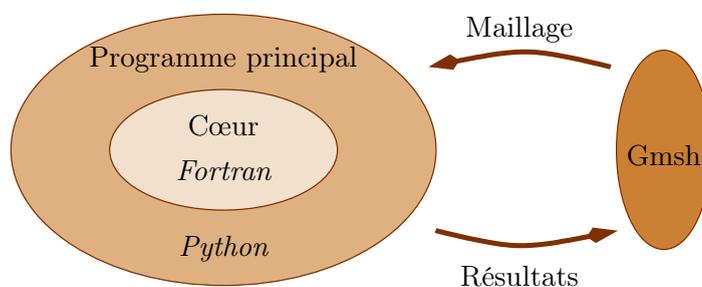


FIGURE 1 – Architecture du code développé en interne

raideur, en tenant compte des lois de comportement, à chacun des points d'intégration du maillage. Fortran est un langage compilé très performant lorsqu'il est nécessaire d'effectuer de nombreux calculs simples, comme c'est le cas par exemple lors du calcul des matrices de raideur et de masse de la méthode des éléments finis.

2. Une enveloppe en langage Python, qui assure l'assemblage des matrices, la résolution du système matriciel (via la librairie Scipy ou Mumps en parallèle), et la sauvegarde des résultats. Python est un langage interprété et orienté objet, facile à utiliser et très efficace pour la manipulation des données. Python offre une large gamme de bibliothèques, permettant la résolution de différents types de problèmes (systèmes linéaires, problèmes aux valeurs propres...), ainsi que la parallélisation des calculs.

La machine utilisée pour faire tourner le code possède une vingtaine de processeurs ce qui permet d'exploiter les capacités de parallélisation de Python, notamment avec la librairie MPI. La création des maillages ainsi que la visualisation des résultats sont fait avec le logiciel GMSH [27], qui est un mailleur libre d'accès. Finalement l'ensemble de ce code est basé sur des langages et des outils libres d'accès, ce qui offre une totale liberté d'utilisation et de nombreuses possibilités d'améliorations futures. Il est à noter qu'un total d'environ 5000 lignes utiles de code Fortran et 10000 lignes utiles de code Python ont été implémentées au cours de cette thèse.

## Cas d'application proposé

De façon à pouvoir tester et valider les solutions présentées dans cette thèse, un cas d'application représentatif est proposé. Il est composé d'un cadre en aluminium supporté

par quatre liaisons amortissantes en forme de diabolo. Cette structure peut être vue comme un support pour des équipements embarqués dans un avion, un lanceur ou encore un satellite (ordinateur de bord, télescope...). Les dimensions de la structure sont données dans le schéma d'illustration (Fig. 2) et les paramètres matériaux utilisés pour modéliser le cadre et les liaisons dans le domaine linéaire sont donnés le tableau (Tab. 1). Les paramètres du modèle viscoélastique de Zener fractionnaire et du modèle hyperélastique de Yeoh pour les liaisons sont données dans le tableau (Tab. 2).

L'ensemble de la structure est maillé en hexaèdres à 8 nœuds, pour un total de plus de 200000 degrés de libertés (ddls), dont plus de 80% pour les liaisons. Le maillage du cadre est choisi de façon arbitraire, étant donné que l'étude proposée dans ce mémoire concerne les liaisons amortissantes. En revanche, une étude de convergence est menée sur le maillage de la liaison avec des maillages allant de 3465 ddls à 69708 ddls (Fig. 3). Pour vérifier la convergence des maillages, le calcul des 150 premiers modes propres de la liaison encastree sur ses faces inférieure et supérieure est effectué pour chacun de ces maillages. Les fréquences propres obtenues sont comparées sur la figure (Fig. 5.a). Un aperçu de quelques un des ces modes est donné dans les figures (Fig. 6) et (Fig. 7). Les fréquences propres ainsi que les formes de ces modes ont été calculées avec le code maison et avec Nastran. Pour un maillage donné, les fréquences propres calculées avec ces deux outils montrent des écarts inférieurs à 0,1%. Les fréquences propres maximales obtenues avec ces maillages vont de 697 Hz pour le maillage le plus grossier, à 581 Hz pour le maillage le plus fin, ce qui correspond à la plage de fréquence étudiée plus loin dans ce mémoire. De manière à se fixer une limite acceptable, le maillage à 69708 ddls est considéré comme étant convergé, et ses fréquences propres servent de référence pour le calcul des erreurs relatives des autres maillages (Fig. 5.b). Le maillage comportant 41980 ddls est retenu pour la suite de l'étude car il constitue un compromis acceptable entre l'erreur (inférieure à 1% sur la plage de fréquence envisagée) et le temps de calcul.

Le chargement appliqué à la structure est un déplacement imposé directement sous les liaisons, ayant pour norme 0,1mm dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ . Le déplacement résultant dans la structure est observé au point P (Fig. 2).

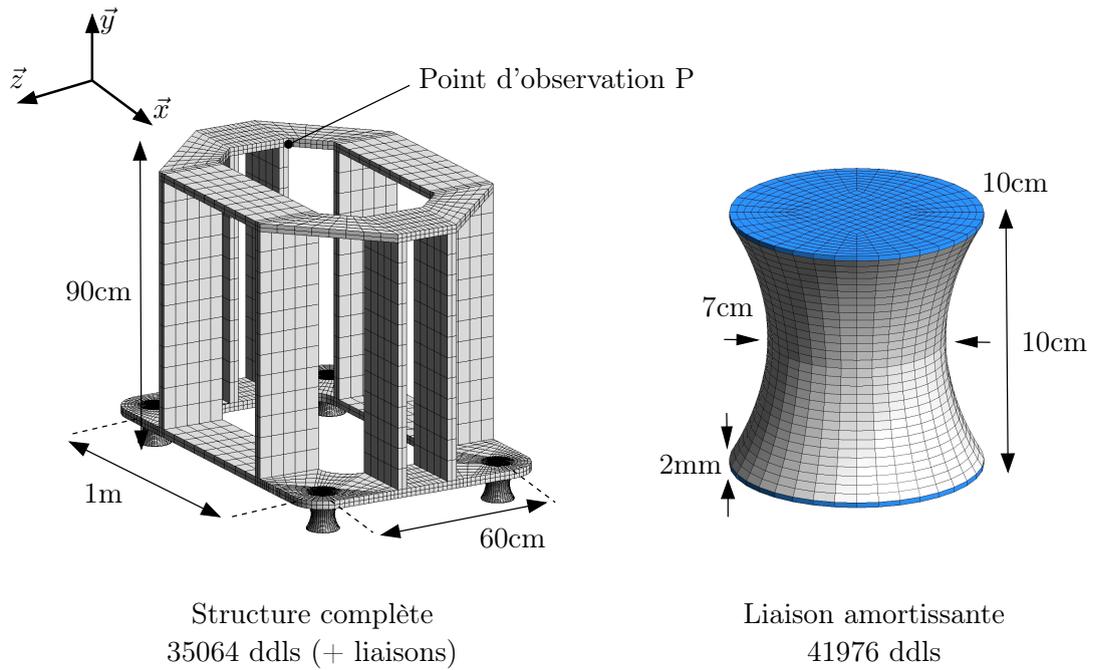


FIGURE 2 – Dimensions de la structure choisie comme cas d'application et placement du point d'observation P

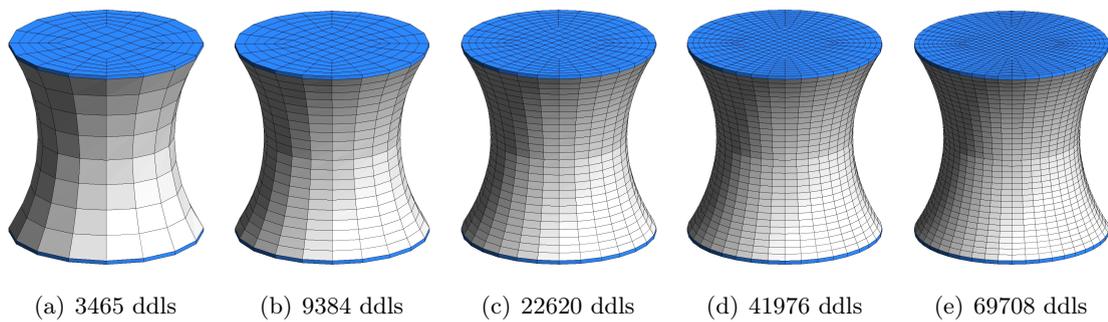


FIGURE 3 – Les cinq maillages testés pour la convergence des fréquences propres

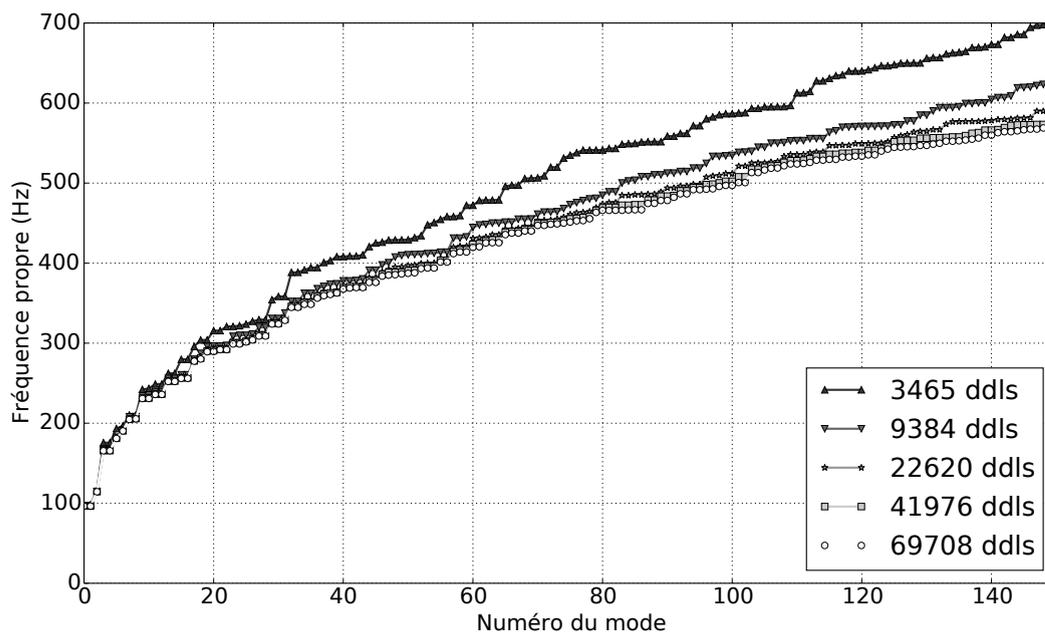


FIGURE 4 – Étude de convergence des fréquences propres des 150 premiers modes de la liaison encastrée aux interfaces

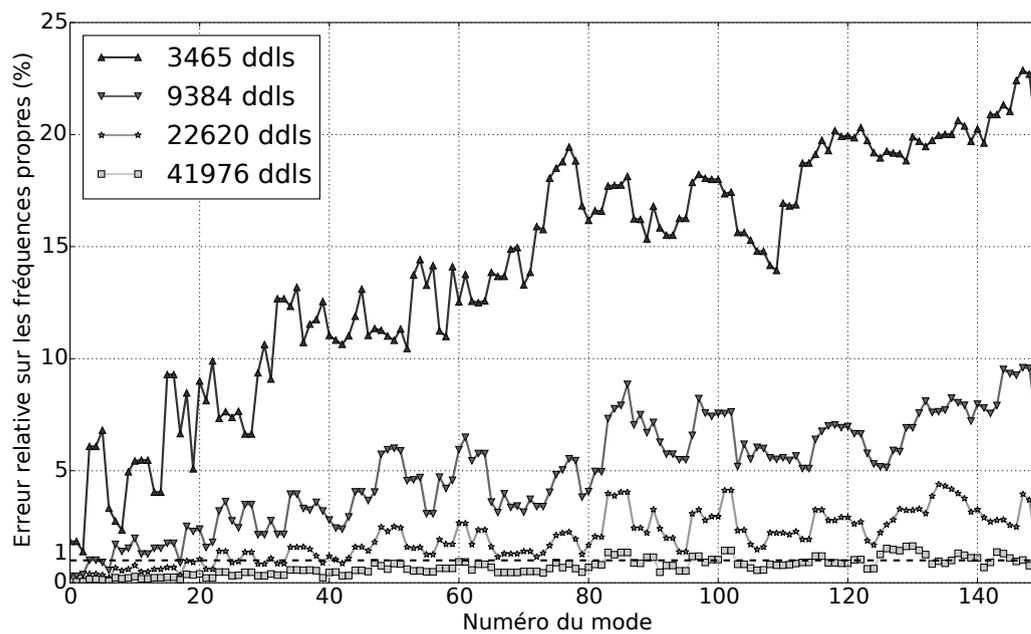
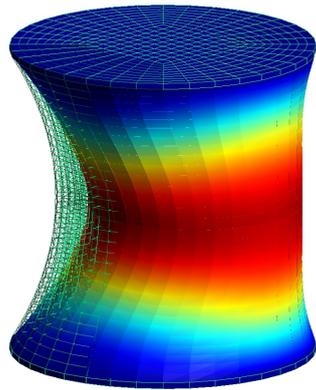
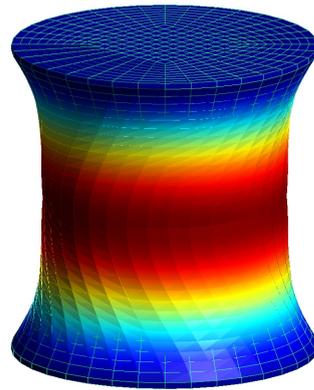


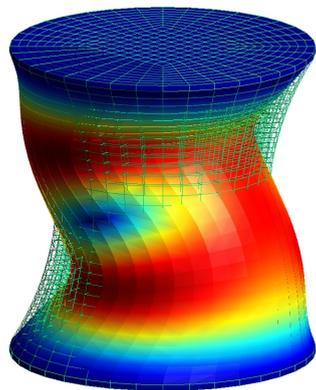
FIGURE 5 – Erreur relative sur les fréquences propres des maillages les moins discrétisés par rapport au maillage le plus fin



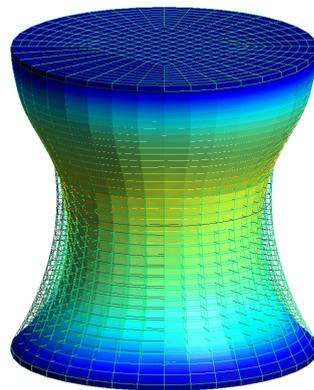
(a) mode 1 / 96 Hz



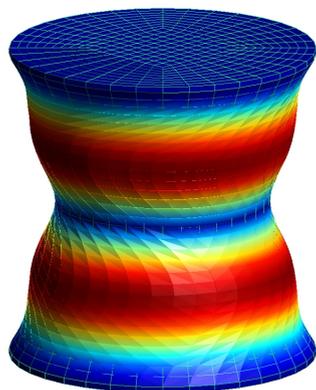
(b) mode 3 / 114 Hz



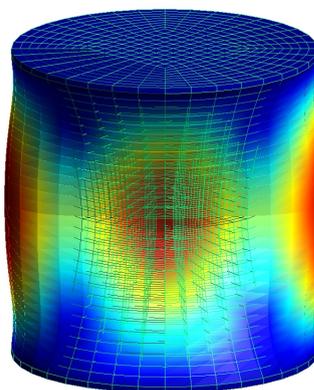
(c) mode 4 / 165 Hz



(d) mode 6 / 181 Hz

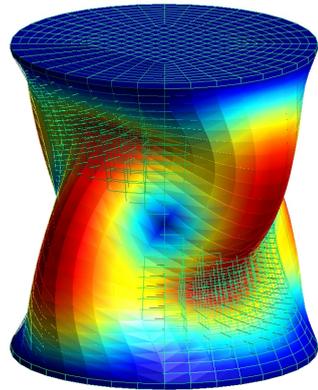


(e) mode 7 / 190 Hz

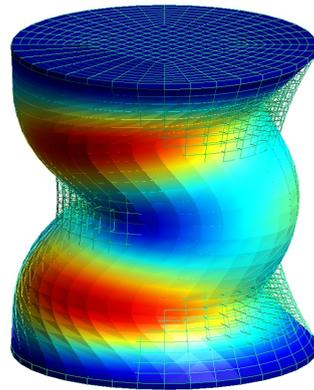


(f) mode 9 / 205 Hz

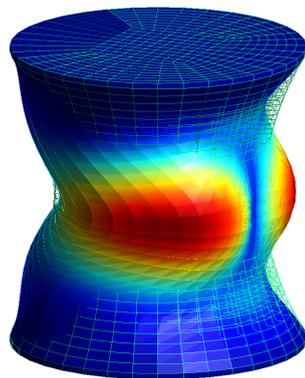
FIGURE 6 – Modes propres de la liaison à interfaces fixées, entre 90 HZ et 200 HZ



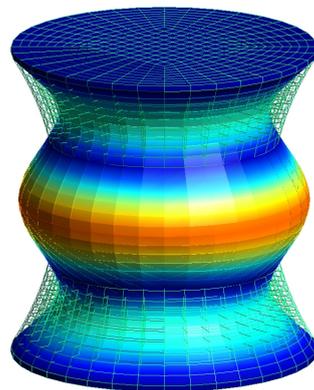
(a) mode 11 / 231 Hz



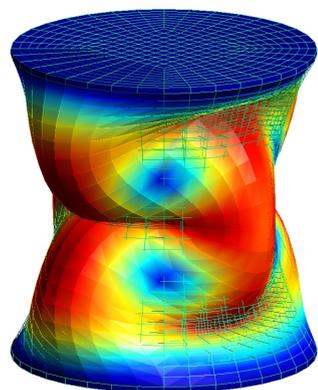
(b) mode 14 / 252 Hz



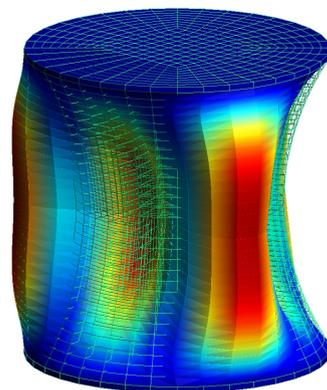
(c) mode 17 / 256 Hz



(d) mode 19 / 281 Hz



(e) mode 21 / 290 Hz



(f) mode 24 / 300 Hz

FIGURE 7 – Modes propres de la liaison à interfaces fixées, entre 200 HZ et 300 HZ

TABLE 1 – Paramètres matériau de l'aluminium et de l'élastomère

Aluminium		Élastomère	
Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
E	70 GPa	E	0,947 MPa
$\nu$	0,3	$\nu$	0,45
$\rho$	2700 kg·m <sup>-3</sup>	$\rho$	1000 kg·m <sup>-3</sup>

TABLE 2 – Paramètres viscoélastiques et hyperélastiques de l'élastomère

Hyperélasticité		Viscoélasticité	
Paramètres	Valeurs	Paramètres	Valeurs
$c_1$	0,1634 MPa	$G_0$	0,327 MPa
$c_2$	-1,198 kPa	$G_\infty$	0,126 GPa
$c_3$	37,81 Pa	$\alpha$	0,59
		$\tau$	0,52 $\mu$ s

## Plan du mémoire

Cette thèse s'articule autour de deux parties principales ayant pour thèmes la modélisation des liaisons élastomères en dynamique linéaire et la prise en compte des non-linéarités géométriques dans les liaisons élastomères.

Le premier chapitre présente quelques rappels sur la viscoélasticité et sur sa représentation par des modèles rhéologiques. Un bref récapitulatif de ces modèles est ensuite donné et les techniques d'identification des paramètres de ces modèles sont abordées.

Le second chapitre présente un état de l'art sur la modélisation des liaisons par des approches expérimentales ou numériques. Les modèles éléments finis 3D pour la viscoélasticité linéaire dans les domaines temporel et fréquentiel sont détaillés ainsi que leurs implémentations. Le code développé est ensuite utilisé pour obtenir un modèle numérique de liaisons élastomères.

Le troisième chapitre traite des techniques de sous-structuration employées pour obtenir des super-éléments de liaisons. Ces techniques sont d'abord détaillées dans le cas non amorti et mises en pratique sur le cas d'application où leur efficacité est démontrée. Dans un second temps, les spécificités d'une application de ces techniques au cas amorti sont abordées, et

leurs mises en œuvre sur le cas d'application valident les méthodes proposées dans cette thèse pour le cas amorti sans précharge.

La deuxième partie s'ouvre sur le chapitre quatre dont le thème est la modélisation du comportement dynamique des élastomères précontraints. Une loi de comportement hyper-visco-élastique est dérivée de travaux présents dans littérature, et modifiée pour obtenir un modèle facile à implémenter. Ce modèle est alors linéarisé autour d'un état préchargé non-linéairement et la loi de comportement hyperélastique pour le calcul de la précharge est détaillée.

Le chapitre cinq présente la mise en œuvre numérique de la loi de comportement précédente et du calcul de l'état préchargé. L'utilisation du code obtenu sur le cas d'application permet de mettre en évidence l'influence de la précharge sur le comportement dynamique de la structure. Les techniques de sous-structuration présentées dans le chapitre trois sont ensuite appliquées à la réduction des liaisons élastomères dans les cas précontraints amorti et non amorti, et leur efficacité est démontrée.

Finalement, un dernier chapitre donne les conclusions de ces travaux de thèse et aborde quelques perspectives pour la suite.



Première partie

Modélisation de liaisons élastomère  
en dynamique linéaire



# Chapitre 1

## Modélisation du comportement viscoélastique

**Résumé :** *Ce premier chapitre présente le comportement viscoélastique des matériaux élastomères. Une première section introduit les phénomènes les plus courants en viscoélasticité ainsi que leurs représentations mathématiques. Une deuxième section fait la liste de quelques modèles rhéologiques classiques permettant de représenter le comportement viscoélastique et de le modéliser. Enfin, une troisième section aborde les moyens expérimentaux d'identification des paramètres des modèles. Ce chapitre se conclut sur la présentation du modèle viscoélastique utilisé dans la suite de la thèse, ainsi que ses paramètres.*

### Sommaire

---

1.1	Introduction à la viscoélasticité . . . . .	30
1.2	Modèles rhéologiques classiques . . . . .	33
1.3	Identification des paramètres des modèles de comportement .	40
1.4	Conclusions et modèle retenu . . . . .	43

---

## 1.1 Introduction à la viscoélasticité

La caractérisation du comportement des matériaux viscoélastiques passe généralement par des études expérimentales. Les essais de base permettant de caractériser les élastomères consistent à décrire le comportement d'une éprouvette cylindrique sous sollicitation uni-axiale [69], et sont :

- L'expérience de fluage (Fig. 1.1), où une éprouvette sans chargement initial et en équilibre est soumise à un instant  $t_0$  à un échelon de contrainte d'amplitude  $\sigma_0$ . En définissant la fonction échelon de Heaviside :

$$H(t < 0) = 0 \quad \text{et} \quad H(t \geq 0) = 1, \quad (1.1)$$

la contrainte imposée peut s'écrire à l'aide de la fonction de Heaviside, retardée d'un instant  $t_0$ , et de l'amplitude de la contrainte :

$$\sigma(t) = H(t - t_0)\sigma_0 \quad (1.2)$$

La réponse en déformation de l'éprouvette est alors :

$$\epsilon(t) = J(t - t_0)H(t - t_0)\sigma_0 \quad (1.3)$$

où  $J$  est la fonction de fluage uni-axiale.

- L'essai de relaxation (Fig. 1.2), où une éprouvette sans chargement initial et en équilibre est soumise à un instant  $t_0$  à un échelon de déformation d'amplitude  $\epsilon_0$ . De façon similaire à l'essai de fluage, à l'aide de la fonction de Heaviside, la déformation appliquée peut s'écrire :

$$\epsilon(t) = H(t - t_0)\epsilon_0 \quad (1.4)$$

et la réponse en contrainte de l'éprouvette est alors :

$$\sigma(t) = R(t - t_0)H(t - t_0)\epsilon_0 \quad (1.5)$$

où  $R$  est la fonction de relaxation uni-axiale.

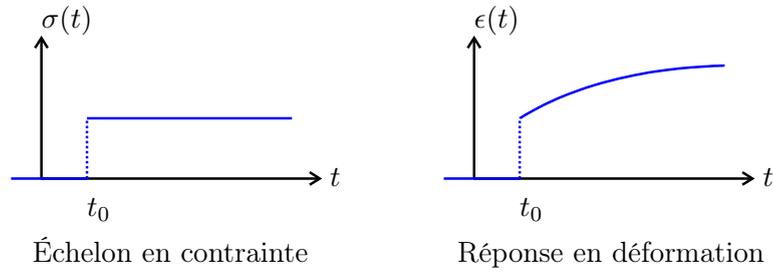


FIGURE 1.1 – Essai de fluage

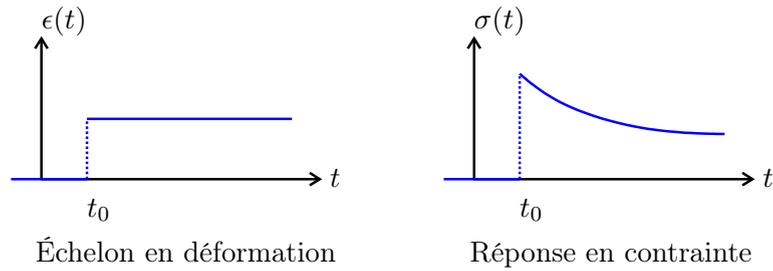


FIGURE 1.2 – Essai de relaxation

Ces deux essais peuvent être étendus au cas de chargements multiples à des instants différents  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ . Dans ce cas, le principe de superposition de Boltzmann impose que la superposition des sollicitations soit accompagnée d'une superposition similaire des réponses. Dans le cas d'un essai de relaxation, la superposition d'échelons de déformation  $(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  engendre la réponse en contrainte suivante :

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^n R(t - t_k)H(t - t_k)\epsilon_k \quad (1.6)$$

Les échelons de chargement en différents instants peuvent être remplacés par une infinité de chargements infinitésimaux ce qui représente un chargement continu dans le temps. La contrainte observée devient alors la somme continue suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_0^t R(t - s)H(t - s)d\epsilon(s) \\ &= \int_0^t R(t - s)\frac{\partial \epsilon}{\partial s}ds \end{aligned} \quad (1.7)$$

De la même manière, un chargement continu en contrainte engendre la réponse suivante en déformation :

$$\epsilon(t) = \int_0^t J(t - s)\frac{\partial \sigma}{\partial s}ds \quad (1.8)$$

La relaxation et le fluage sont deux phénomènes qui représentent la viscoélasticité dans le domaine temporel. Il est aussi possible de caractériser la viscoélasticité dans le domaine fréquentiel, à l'aide d'un chargement dynamique harmonique. Dans le cadre de la dynamique linéaire, lorsqu'une déformation sinusoïdale de pulsation  $\omega$  est imposée à une éprouvette viscoélastique, la contrainte observée en régime établi est elle aussi sinusoïdale, de même fréquence, avec un déphasage  $\delta$  :

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad \sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (1.9)$$

Cette réponse en contrainte peut s'écrire comme la somme d'un terme en phase avec la sollicitation et d'un autre en quadrature de phase, c'est à dire :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos(\delta) \sin(\omega t) + \sigma_0 \sin(\delta) \cos(\omega t) \quad (1.10)$$

La partie en phase avec la sollicitation correspond à la réponse d'un matériau purement élastique pour lequel l'énergie de déformation est restituée dans son intégralité une fois la sollicitation relâchée. En revanche, la partie en quadrature de phase correspond à la réponse d'un matériau purement visqueux qui dissipe l'énergie de déformation sous forme de chaleur. Le comportement à la fois élastique et visqueux des matériaux viscoélastiques est ici clairement visible. En réécrivant les expressions précédentes dans le domaine fréquentiel et en utilisant des notations complexes, le couplage des deux comportements est encore plus explicite et une relation de proportionnalité apparaît entre la contrainte et la déformation :

$$\sigma^*(\omega) = E^*(\omega) \epsilon^*(\omega) \quad (1.11)$$

où  $\sigma$  et  $\epsilon$  sont les parties réelles contraintes et déformations complexes  $\sigma^*$  et  $\epsilon^*$ , et où  $E^*$  est un module complexe pouvant s'exprimer sous forme cartésienne par :

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (1.12)$$

ou sous forme polaire par :

$$E^*(\omega) = |E^*(\omega)| \exp(i\delta(\omega)) \quad (1.13)$$

$|E^*(\omega)| = \sqrt{E'(\omega)^2 + E''(\omega)^2}$  est l'amplitude du module et  $\delta$  est la phase qui caractérise les capacités dissipatives du matériau. Ce déphasage est responsable de la forme elliptique du

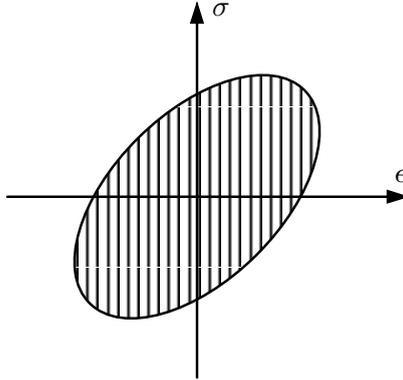


FIGURE 1.3 – Courbe contrainte-déformation lors d'un chargement cyclique sur matériau viscoélastique

diagramme contrainte-déformation lors de chargements harmoniques (figure (1.3)). L'aire décrite par l'ellipse correspond à l'énergie dissipée au cours d'un cycle de chargement. La partie réelle  $E'$  du module complexe est appelée module de stockage et correspond à la partie en phase dans l'équation (Eq. 1.10). Elle traduit la capacité du matériau à stocker et à restituer l'énergie de déformation. La partie imaginaire  $E''$  correspond quand à elle à la partie en quadrature de phase dans l'équation (Eq. 1.10) et est appelée module de perte. Elle est liée à la dissipation d'énergie. Le rapport entre le module de stockage et le module de perte permet de faire apparaître le facteur de perte  $\eta$  tel que :

$$\eta = \tan(\delta) = \frac{E''}{E'} \quad \text{et} \quad E^*(\omega) = E'(\omega) (1 + i\eta(\omega)) \quad (1.14)$$

## 1.2 Modèles rhéologiques classiques

Les matériaux viscoélastiques se comportent à la fois comme des solides purement élastiques et comme des fluides purement visqueux. Pour représenter ces comportements mécaniques de base, il existe deux modèles rhéologiques élémentaires :

- Le ressort (Fig. 1.4), qui représente l'élasticité pure et dont la raideur  $E$  relie proportionnellement la contrainte et la déformation uniaxiale par :  $\sigma = E\epsilon$ .
- L'amortisseur (Fig. 1.4), qui représente la viscosité pure et dont le coefficient de viscosité  $\eta$  relie proportionnellement la contrainte et le taux de déformation uniaxiale par :  $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$ .

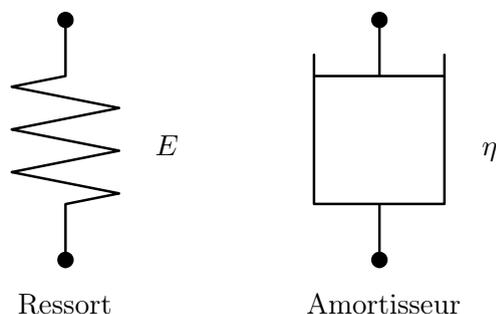


FIGURE 1.4 – Éléments rhéologiques de type ressort et amortisseur

Les plus simples des modèles viscoélastiques construits à partir de ces deux éléments sont considérés ci-après, à savoir : le modèle de Kelvin-Voigt, le modèle de Maxwell et le modèle de Zener. Seuls les fonctions de relaxation et les modules complexes de ces modèles sont présentés.

**Modèle de Kelvin-Voigt** Le modèle de Kelvin-Voigt est composé d'un ressort et d'un amortisseur assemblés en parallèle (Fig. 1.5). La contrainte et la déformation du ressort sont notées  $\sigma_1$  et  $\epsilon_1$  tandis que la contrainte et la déformation de l'amortisseur sont notées  $\sigma_2$  et  $\epsilon_2$ . Les lois de comportement de chacun de ces éléments donnent :

$$\sigma_1 = E\epsilon_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \eta\dot{\epsilon}_2 \quad (1.15)$$

Le modèle assemblé est représenté par une contrainte  $\sigma$  et une déformation  $\epsilon$ , dont les expressions dépendent du type d'assemblage de ses éléments. Quand deux éléments sont assemblés en parallèle, la contrainte de l'ensemble est égale à la somme des contraintes dans les éléments et la déformation est la même pour les deux éléments. Cela se traduit par :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad \text{et} \quad \epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 \quad (1.16)$$

La loi de comportement du modèle de Kelvin-Voigt est ensuite obtenue en combinant les expressions (Eq. 1.15) et (Eq. 1.16) :

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (1.17)$$

Le modèle de Kelvin-Voigt ne permet pas de représenter un comportement de relaxation car il conduit à une contrainte constante. Il est par contre adapté à la représentation du

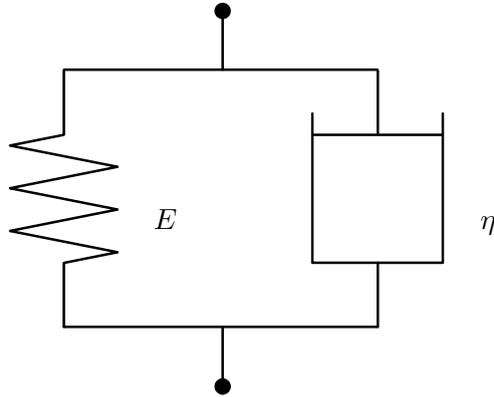


FIGURE 1.5 – Modèle de Kelvin-Voigt

comportement en fluage et sa fonction de fluage est obtenue en appliquant la condition  $\sigma(t) = \sigma_0$  à l'équation différentielle (Eq. 1.17). Le module complexe associé au modèle de Kelvin-Voigt est donné par :

$$E^*(\omega) = E + i\omega\eta \quad (1.18)$$

**Modèle de Maxwell** Le modèle de Maxwell est composé d'un ressort et d'un amortisseur assemblés en série (Fig. 1.6). Lorsque deux éléments sont assemblés en série, la déformation totale est égale à la somme des déformations dans les éléments et la contrainte est la même pour les deux éléments. Cela se traduit par :

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{et} \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (1.19)$$

La loi de comportement du modèle de Maxwell est alors obtenue en combinant les expressions (Eq. 1.15) et (Eq. 1.19) :

$$\frac{1}{\eta}\sigma + \frac{1}{E}\dot{\sigma} = \dot{\epsilon} \quad (1.20)$$

Le modèle de Maxwell ne permet pas de représenter un comportement de fluage car il conduit à un taux de déformation constant. Il permet en revanche la représentation du comportement en relaxation et son module est obtenu en appliquant la condition  $\dot{\epsilon}(t) = 0$  (relaxation :  $\epsilon(t) = \epsilon_0$ ). La solution de l'équation différentielle (Eq. 1.20), avec la condition initiale  $\sigma(t = 0) = \sigma_0$ , est alors  $\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-t/\tau)$ , où  $\tau = \eta/E$  est le temps de relaxation. La contrainte étant la même dans les deux éléments du modèle de Maxwell, la contrainte

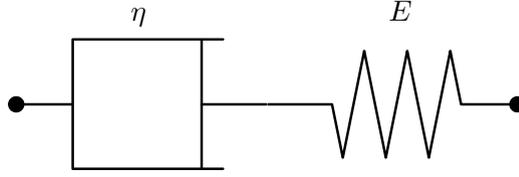


FIGURE 1.6 – Modèle de Maxwell

initiale  $\sigma_0$  est égale à  $E\epsilon_0$ . Le module de relaxation reliant la contrainte à la déformation est alors :

$$R(t) = E \exp(-t/\tau) \quad (1.21)$$

et le module complexe correspondant est donné par :

$$E^*(\omega) = E \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \quad (1.22)$$

**Modèle de Zener** Le modèle de Zener, aussi appelé Solide Linéaire Standard (SLS), est composé d'un ressort et d'un élément de Maxwell en parallèle (Fig. 1.7). La loi de comportement de ce modèle est donnée par :

$$(E_\infty - E_0)\sigma + \eta\dot{\sigma} = (E_\infty - E_0)E_0\epsilon + \eta E_\infty\dot{\epsilon} \quad (1.23)$$

Le modèle de Zener permet de représenter les deux comportements temporels que sont le fluage et la relaxation. En appliquant les conditions de relaxation  $\epsilon(t) = \epsilon_0$  et  $\dot{\epsilon}(t) = 0$ , avec la condition initiale  $\sigma_0 = E_\infty\epsilon_0$ , l'équation différentielle (Eq. 1.23) donne une expression de la contrainte faisant intervenir le module de relaxation :

$$R(t) = E_0 + (E_\infty - E_0)e^{-t/\tau} \quad (1.24)$$

Le module complexe associé à ce modèle est :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \quad (1.25)$$

Pour ce modèle,  $E_0$  est la limite du module complexe à fréquence nulle, aussi appelé module relaxé, et  $E_\infty$  est la limite du module complexe à fréquence infinie, ou module non-relaxé.

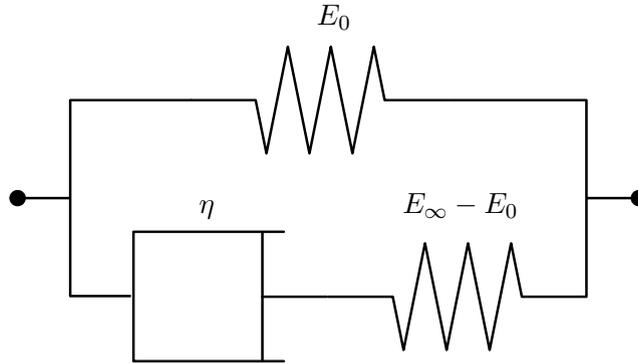


FIGURE 1.7 – Modèle de Zener

**Limites des modèles simples** Les modèles viscoélastiques présentés ci-dessus sont simples mais peu représentatifs d'un comportement viscoélastique observé expérimentalement. Le modèle de Kelvin-Voigt par exemple, ne permet pas de représenter le phénomène de relaxation de contrainte observé lors de l'application d'une déformation constante. Le modèle de Maxwell présente un taux de déformation constant lors d'un essai de fluage. Enfin, le modèle de Zener parvient à une assez bonne représentation des comportements en fluage et relaxation mais n'est pas représentatif des variations du module complexe lors d'essais dynamiques. Pour répondre à ces problématiques, des modèles plus complexes, toujours basés sur l'assemblage d'éléments simples, ont été élaborés. Parmi ces modèles combinant uniquement des ressorts et des amortisseurs, seul le modèle de Maxwell généralisé est présenté ci-dessous, bien que d'autres modèles existent dans la littérature tel que les modèles Golla-Hugues-McTavish [28] et Anelastic Displacement Fields [21].

**Modèle de Maxwell généralisé** Le modèle de Maxwell généralisé, ou modèle de Weichert, est une extension du modèle de Zener constitué d'un ressort en parallèle avec  $N$  éléments de Maxwell (Fig. 1.8). La contrainte totale est la somme de la contrainte du ressort  $\sigma_0$  et des contraintes  $\sigma_k$  de chacune des branches de Maxwell :

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{k=1}^N \sigma_k \quad (1.26)$$

Le module de relaxation de ce modèle est donné par :

$$E(t) = E_0 + \sum_{k=1}^N E_k e^{-t/\tau_k} \quad (1.27)$$

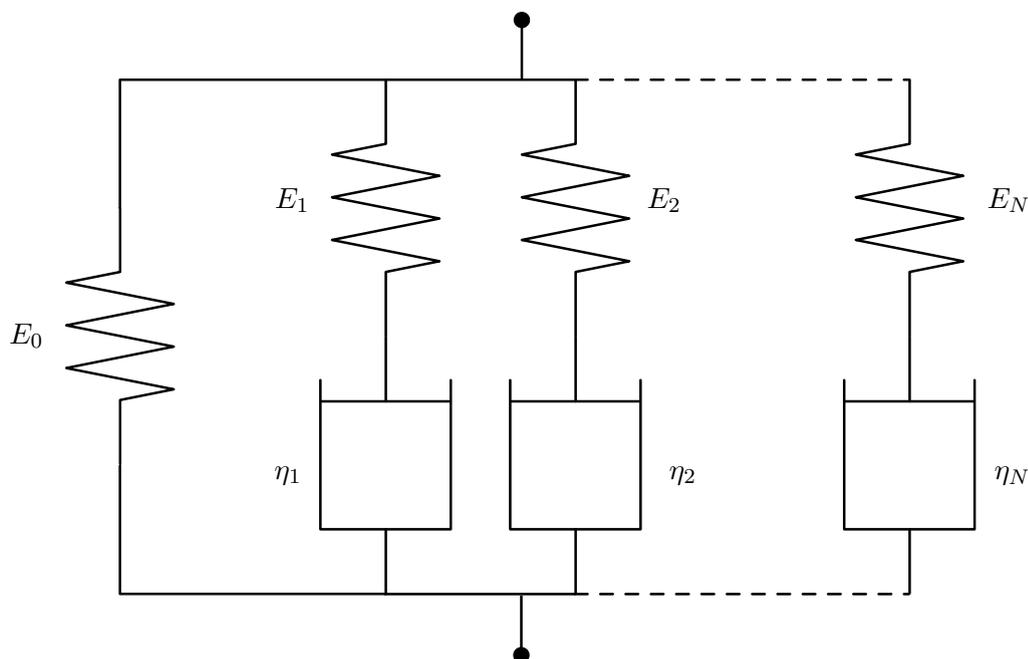


FIGURE 1.8 – Modèle de Maxwell généralisé

et son module complexe associé est :

$$E^*(\omega) = E_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{i\omega\tau_k}{1 + i\omega\tau_k} \right) \quad (1.28)$$

où  $\gamma_k = E_k/E_0$ . Pour l'élément de Maxwell généralisé, le module non relaxé est donné par  $E_\infty = E_0(1 + \sum_{k=1}^N \gamma_k)$  et chaque élément de Maxwell est associé à un temps de relaxation  $\tau_k$  qui lui est propre. Cette distribution de temps de relaxation permet de représenter des phénomènes de relaxation sur des temps plus importants qu'avec un modèle de Zener (modèle de Maxwell généralisé pour  $N = 1$ ).

**Présentation des modèles fractionnaires** La qualité d'un modèle composé de ressorts et d'amortisseurs, en série ou en parallèle, dépend du nombre d'éléments qui le compose. Ce nombre d'éléments est directement lié au nombre de paramètres à identifier et peut donc vite devenir un handicap. Une solution est de remplacer une partie des ressorts et des amortisseurs par un nouvel élément dissipatif : le spring-pot (Fig. 1.9). Cet élément est associé à la loi de comportement suivante :

$$\sigma = \tau^\alpha E D^\alpha(\epsilon) \quad (1.29)$$

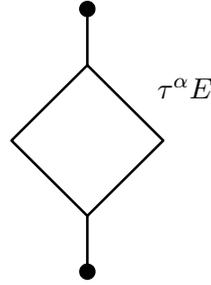


FIGURE 1.9 – Élément rhéologique de type Spring-Pot

où  $D^\alpha$  est un opérateur différentiel temporel d'ordre fractionnaire ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) dont l'expression est donnée dans [24]. La dénomination spring-pot vient des propriétés suivantes :

- Si  $\alpha = 0$ , le comportement est celui d'un ressort (spring), purement élastique :

$$\sigma = \tau^0 E D^0(\epsilon) = E\epsilon \quad (1.30)$$

- Si  $\alpha = 1$ , le comportement est celui d'un amortisseur (dash-pot), purement visqueux :

$$\sigma = \tau^1 E D^1(\epsilon) = \eta \dot{\epsilon} \quad (1.31)$$

L'utilisation du spring-pot pour représenter un comportement viscoélastique a été initialement proposé par Germant [26] et justifiée par la suite par les théories moléculaires. Havriliak et Negami [33] et Bagley et Torvik [5] ont finalement proposé les premiers modèles viscoélastiques à dérivée fractionnaire. Le modèle présenté ici est le modèle de Zener fractionnaire.

**Modèle de Zener fractionnaire** Le modèle de Zener fractionnaire est construit sur la base du modèle de Zener, en remplaçant l'amortisseur par un spring-pot (Fig. 1.10). La loi de comportement de ce modèle s'écrit :

$$\sigma + \tau^\alpha D^\alpha(\sigma) = E_0 \epsilon + \tau^\alpha E_\infty D^\alpha(\epsilon) \quad (1.32)$$

La présence d'une dérivée d'ordre fractionnaire dans la loi de comportement rend difficile l'obtention d'un module de relaxation dans le domaine temporel. Seul le module complexe de ce modèle est donné ici :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (1.33)$$

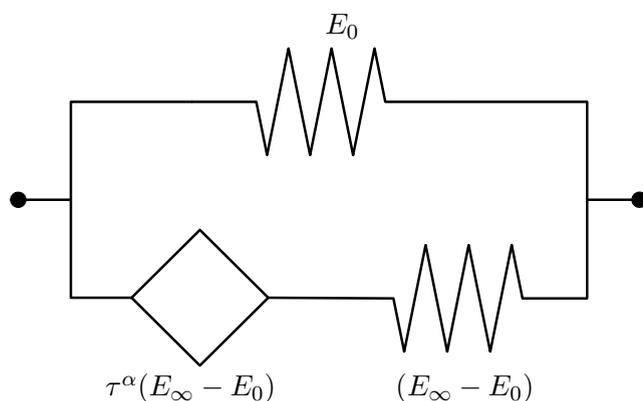


FIGURE 1.10 – Modèle de Zener fractionnaire

Il est tout de même à noter qu'une utilisation de ce modèle dans le domaine temporel est possible. Un algorithme de résolution en dynamique temporelle utilisant une représentation diffusive du modèle est d'ailleurs donné dans [18] par Deü et Matignon. Dans [19], les mêmes auteurs indiquent qu'à partir de la représentation diffusive du modèle fractionnaire, un modèle équivalent de Maxwell généralisé peut être obtenu. Cette équivalence permet, lors de l'identification des paramètres matériaux, de n'identifier que les quatre paramètres du modèle fractionnaire, et de déduire numériquement les paramètres du modèle de Maxwell généralisé pour toute utilisation dans le domaine temporel.

### 1.3 Identification des paramètres des modèles de comportement

Les modèles présentés dans la section précédente sont définis par leur module de relaxation dans le domaine temporel et par leur module complexe dans le domaine fréquentiel. Les techniques permettant l'identification des paramètres de ces modèles peuvent également être séparées entre domaine temporel et domaine fréquentiel.

En temporel, le fluage et la relaxation des contraintes présentés dans la section d'introduction sont deux méthodes permettant de déterminer l'évolution du module de relaxation pour des essais uni-axiaux sur polymère [69]. Lors de ces essais, il est difficile de générer une déformation ou une contrainte instantanée, l'acquisition des données commence alors généralement quelques secondes après l'application du chargement. Ce type d'essai est donc

### 1.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES DE COMPORTEMENT

---

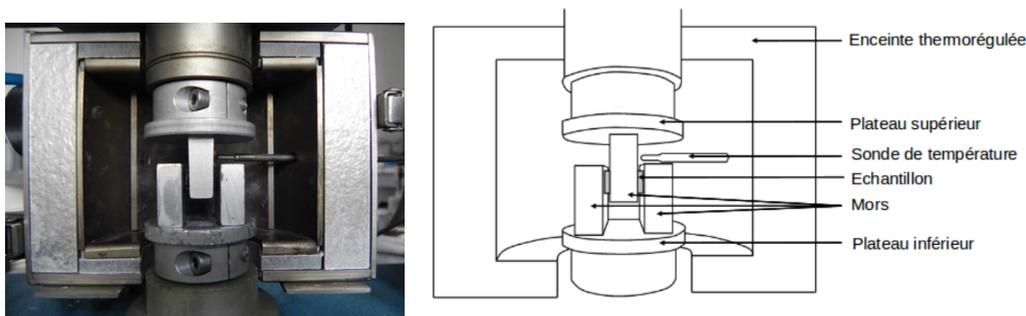


FIGURE 1.11 – Viscoanalyseur Metravib VA 3000 et schéma de montage pour un essai en double cisaillement

adapté à la caractérisation de phénomènes viscoélastiques suffisamment longs. En revanche, pour des phénomènes plus rapides, des tests dynamiques dans le domaine fréquentiel sont nécessaires.

Dans le domaine fréquentiel, les méthodes de mesure des propriétés viscoélastiques d'un matériau sont classées en trois catégories : les méthodes hors-résonance, les méthodes résonantes et les méthodes de propagation d'onde.

Les méthodes hors-résonance consistent à appliquer un chargement dynamique sinusoïdal au matériau et à mesurer sa réponse qui est constituée d'une partie en phase et d'une autre en quadrature de phase. Ces essais permettent de mesurer l'amplitude et la phase du module complexe sur une plage de fréquence limitée. Ils sont généralement réalisés sur des machines hydrauliques ou des viscoanalyseurs (Fig. 1.11), on parle alors d'essais DMA ("Dynamical Mechanical Analysis"). Les fréquences d'excitation sont choisies loin des premières fréquences propres de l'échantillon pour éviter tout effet d'inertie [53], d'où le terme "hors-résonance".

Les essais résonants consistent à solliciter une éprouvette du matériau à caractériser pour une fréquence de résonance afin de remonter l'information sur la raideur et l'amortissement à cette fréquence. Ces essais sont souvent réalisés sur des éprouvettes de type poutre [58] ou plaque [17] pour lesquelles des solutions analytiques existent. Plusieurs échantillons de géométries différentes ou plusieurs fréquences de résonances doivent être utilisés pour couvrir une gamme de fréquence. Ce type d'essai convient aux matériaux assez rigides et peu amortissants. En revanche, pour des matériaux comme les élastomères, il est plus courant d'utiliser la méthode Oberst [4, 23, 80] qui consiste à réaliser des essais sur des poutres

### 1.3. IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES DE COMPORTEMENT

---

amorties par une couche (libre ou contrainte) du matériau viscoélastique.

Enfin, un essai de propagation d'onde consiste à mesurer la vitesse et l'atténuation d'une onde unidirectionnelle lors de son passage dans un échantillon de matière. Une méthode courante de mesure de l'atténuation de l'onde consiste à comparer l'amplitude du signal après le passage dans deux échantillons de tailles différentes.

Les paramètres des modèles viscoélastiques utilisés dans cette thèse sont issus de mesures par méthodes hors-résonances réalisées par Rouleau [65], sur viscoanalyseur. La gamme de fréquence d'excitation utilisée est limitée entre 5 et 258 Hz pour éviter la résonance de l'échantillon. Pour pouvoir quand même caractériser le matériau à des fréquences plus élevées que la limite imposée, l'équivalence temps-température est utilisée en imposant à l'échantillon une température allant de  $-40$  à  $43^{\circ}\text{C}$ . Les mesures à basses températures permettent en effet de déduire les propriétés à hautes fréquences et à l'inverse, les mesures à hautes températures sont reliées aux propriétés à basses fréquences. Une méthode des moindres carrés est finalement utilisée pour trouver les paramètres des modèles.

Dans le cas d'un matériau homogène et isotrope, seules deux grandeurs élastiques (en plus de la densité) sont nécessaires pour caractériser le matériau, les autres étant déduites de ce couple à partir de relations de correspondance. Les grandeurs les plus souvent étudiées dans littérature pour caractériser un matériau viscoélastique sont le module de Young  $E$ , le module de cisaillement  $G$ , le module de compressibilité  $\kappa$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Bien que le coefficient de Poisson ou le module de compressibilité soient souvent considérés constants, cette hypothèse peut se révéler fautive pour certains matériaux. Il convient alors d'effectuer la mesure de deux grandeurs pour vérifier cette hypothèse. De nombreuses études, notamment celle de Guillot et Trivett [29] ou de Pritz [59], ont montré que les couples  $(G, \kappa)$  ou  $(E, \kappa)$  étaient optimaux. Les modules de cisaillement et de compressibilité sont les deux grandeurs retenues pour la caractérisation du comportement viscoélastique du matériau étudié.

## 1.4 Conclusions et modèle retenu

Dans sa thèse, Rouleau [65] identifie les propriétés viscoélastique d'un élastomère à l'aide d'essais DMA. Deux modèles sont alors identifiés : un modèles de Maxwell généralisé à 5 branches (11 paramètres) et un modèle de Zener fractionnaire (4 paramètres). Les courbes maîtresses (amplitude du module complexe et angle de perte) de ces essais sont données dans les figures (Fig. 1.12) et (Fig. 1.13), avec les modèles de Maxwell généralisé et de Zener fractionnaire identifiés.

La figure (Fig. 1.12) montre que le modèle de Maxwell généralisé, identifié avec 11 paramètres, ne permet pas de représenter correctement l'amortissement observé pendant les essais. Plutôt que de rajouter des branches au modèle de Maxwell généralisé, et donc d'augmenter le nombre de paramètres à identifier, le modèle de Zener fractionnaire est choisi. Il permet avec seulement quatre paramètres de bien représenter l'amortissement du matériau (Fig. 1.13).

Le modèle de Zener fractionnaire identifié par Rouleau [65] est donné pour le module de cisaillement par les paramètres suivants :

$$G_0 = 1,4 \text{ MPa}, \quad G_\infty = 0,54 \text{ GPa}, \quad \tau = 0,52 \mu\text{s}, \quad \alpha = 0,59 \quad (1.34)$$

Ces paramètres sont adaptés au cas d'un matériau viscoélastique identifié en non-linéaire géométrique par Treloar [77]. Dans la suite du mémoire, les paramètres suivants sont donc utilisés :

$$G_0 = 0.327 \text{ MPa}, \quad G_\infty = 0.126 \text{ GPa}, \quad \tau = 0,52 \mu\text{s}, \quad \alpha = 0,59 \quad (1.35)$$

et le module de compressibilité  $\kappa$  est considéré constant en fréquence.

#### 1.4. CONCLUSIONS ET MODÈLE RETENU

---

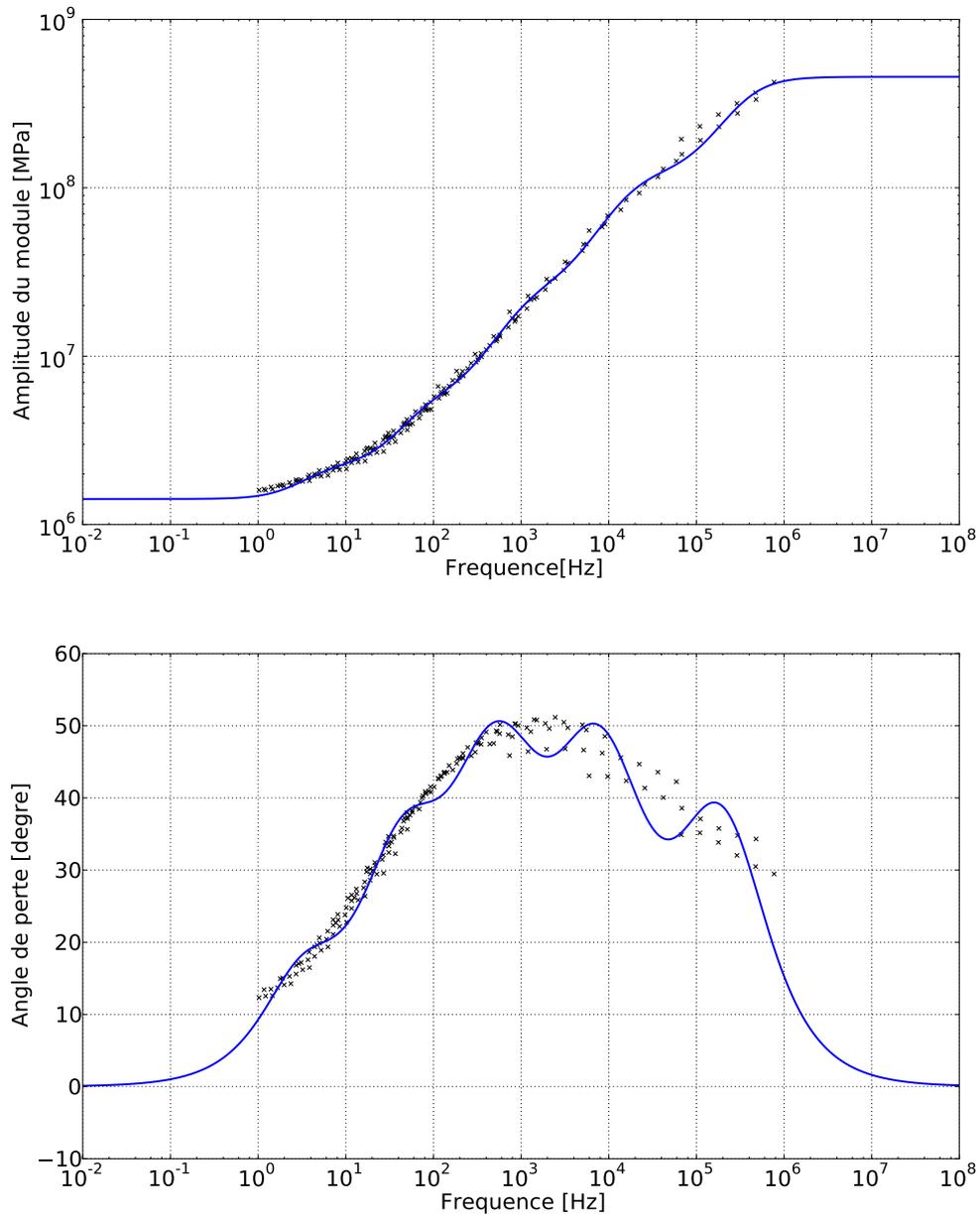


FIGURE 1.12 – Courbes maîtresses expérimentales (croix noires) et modèle de Maxwell généralisé identifié (ligne), Rouleau [65]

## 1.4. CONCLUSIONS ET MODÈLE RETENU

---

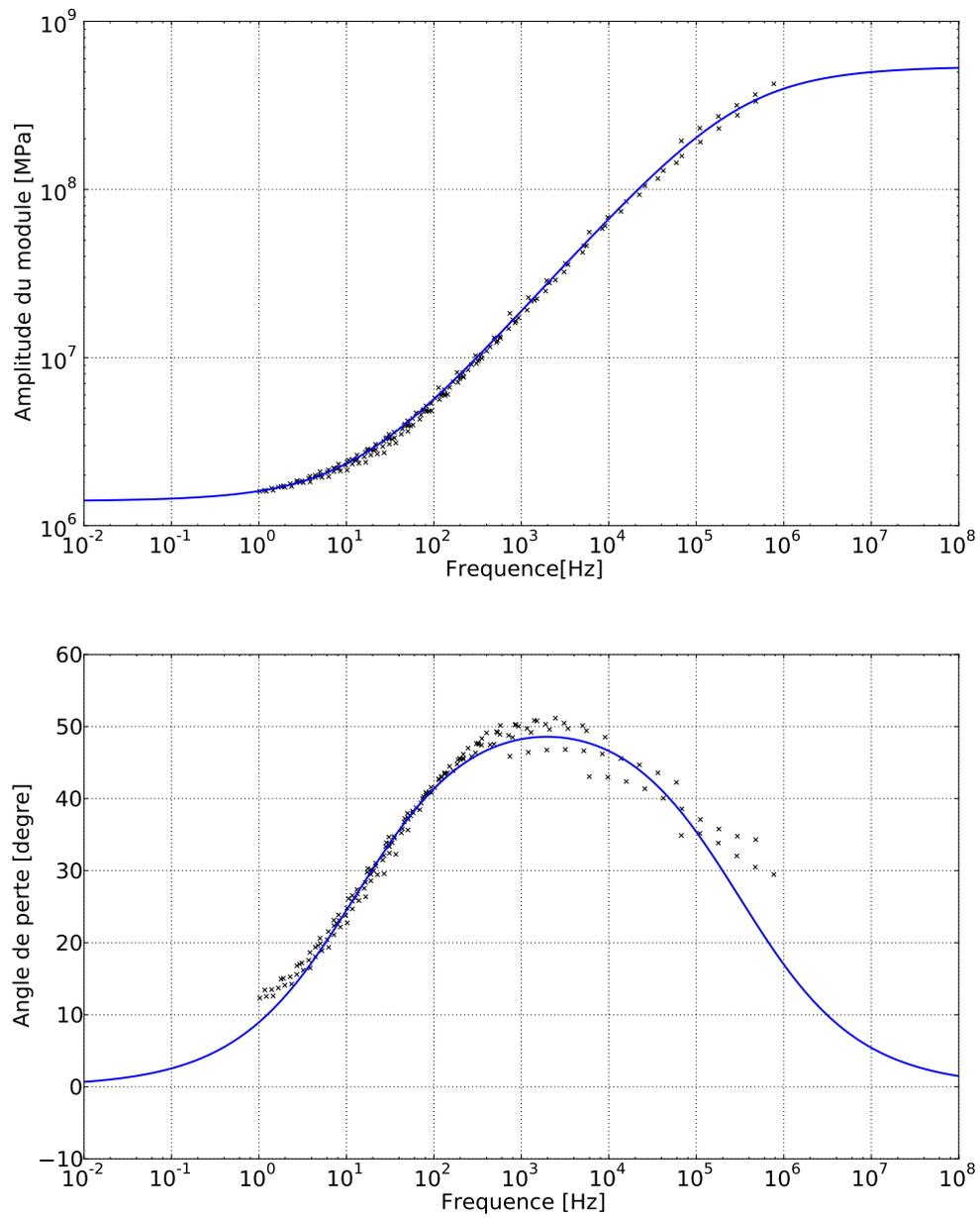


FIGURE 1.13 – Courbes maîtresses expérimentales (croix noires) et modèle de Zener fractionnaire identifié (ligne), Rouleau [65]

#### 1.4. CONCLUSIONS ET MODÈLE RETENU

---

## Chapitre 2

# État de l'art sur la modélisation des liaisons

**Résumé :** *Ce chapitre a pour objectif de présenter les deux façons les plus couramment employées dans la littérature pour modéliser les liaisons amortissantes en élastomère. Dans un premier temps, les approches expérimentales sont introduites, ainsi que quelques uns des modèles de liaisons qui en découlent. Ensuite, l'approche éléments finis est présentée, et les formulations des problèmes viscoélastiques linéaires dans les domaines temporel et fréquentiel sont détaillées. Enfin, le cas d'application utilisé dans cette thèse est calculé à l'aide de la méthode des éléments finis dans les cas amorti et non amorti, ce qui permet de conclure sur les limites des approches classiques.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>48</b>
<b>2.2</b>	<b>Bibliographie sur les approches expérimentales</b>	<b>48</b>
<b>2.3</b>	<b>Modèles éléments finis en viscoélasticité linéaire</b>	<b>53</b>
2.3.1	Domaine temporel	54
2.3.2	Domaine fréquentiel	61
<b>2.4</b>	<b>Application</b>	<b>64</b>

---

## 2.1 Introduction

La modélisation de liaisons amortissantes en élastomère est un sujet souvent abordé dans les domaines du transport (automobile, aéronautique ou spatial), où il est courant d'avoir recours à l'usage de ce type de solution dissipative pour limiter les vibrations transmises par un moteur, ou par l'environnement dynamique, aux systèmes embarqués les plus sensibles. Dans la littérature, deux approches sont classiquement utilisées pour modéliser les liaisons amortissantes :

- La première est une approche expérimentale qui consiste à modéliser la liaison par un modèle rhéologique macroscopique équivalent. Ces modèles peuvent aussi inclure des modèles tribologiques (contact et frottement). Les paramètres de ces modèles sont identifiés à partir d'essais réalisés directement sur la liaison.
- L'autre solution est une approche numérique qui utilise une représentation éléments finis de la liaison. La loi de comportement utilisée doit permettre de prendre en compte la nature dissipative du matériau, soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel.

## 2.2 Bibliographie sur les approches expérimentales

Lorsque des approches expérimentales sont utilisées, les liaisons sont souvent représentées par des modèles macroscopiques équivalents construits à partir des modèles rhéologiques définis dans la section 1.2. L'application directe des modèles rhéologiques classiques, introduits dans la section 1.2, comme modèles de liaison amortissante est présentée par Park dans [57]. Ces modèles relient alors les efforts et les déplacements au niveau macroscopique et l'on parle de modèle tribologiques.

L'identification des paramètres de ces modèles macroscopiques est réalisée de manière analogue à l'identification des modèles rhéologiques, en réalisant des essais sur la liaison à caractériser. Dans le cas d'une excitation harmonique uni-directionnelle  $U(t) = U\sin(\omega t)$ , l'effort résultant  $F(t)$  peut être représenté par :

$$F(t) = \sum_k F_k \sin(k\omega t + \delta_k) \quad (2.1)$$

où  $F_k$  et  $\delta_k$  sont les amplitudes et les retards des termes de la série. Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, l'amplitude des déplacements est considérée petite et la série peut alors être approximée par son terme d'ordre 1, soit :

$$\begin{aligned} F(t) &\approx F \sin(\omega t + \delta) \\ &= F \cos(\delta) \sin(\omega t) + F \sin(\delta) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'effort transmis se compose alors d'une partie en phase avec la sollicitation en déplacement, et d'une partie en quadrature de phase. En passant dans le domaine complexe, il est possible de définir la raideur complexe  $K^*$  de la liaison par :

$$K^*(\omega) = \frac{F^*(\omega)}{U^*(\omega)} = K' + iK'' \quad (2.3)$$

où la norme  $|K^*|$  du module complexe définit la raideur dynamique de la liaison. La raideur de stockage  $K' = |K^*| \cos(\delta)$ , en phase avec l'excitation, est une mesure de l'énergie stockée et restituée au cours du cycle de chargement et la raideur de perte  $K'' = |K^*| \sin(\delta)$ , en quadrature de phase, représente l'énergie dissipée sous forme de chaleur pendant l'essai. Ces deux grandeurs permettent de définir la tangente de perte spécifique à la liaison  $\tan(\delta) = K''/K'$ , ce qui donne alors :

$$K^*(\omega) = K' (1 + i \tan(\delta)) \quad (2.4)$$

Parmi les modèles tribologiques les plus connus se trouve le modèle STS (Standard Tribologic Solid) [12] qui est basé sur la théorie de la triboélasticité décrite par Turner [79] : le comportement hystérétique des élastomères peut être représenté par l'assemblage en série d'un nombre plus ou moins important de ressorts et de frotteurs (Fig. 2.1). Le comportement de cet assemblage triboélastique est indépendant du taux de variation de la force imposée et l'agencement en série des ressorts et frotteurs entraîne une décroissance de la raideur lorsque l'amplitude d'excitation augmente. Si les paramètres de raideur et de frottements de chaque ressort et de chaque frotteur sont identiques, l'élément triboélastique est alors défini par deux paramètres uniquement (une raideur  $E$  et un coefficient de frottement  $\mu$ ).

Le modèle STS est l'équivalent macroscopique du modèle SLS (Fig. 1.2), il est fait d'un res-

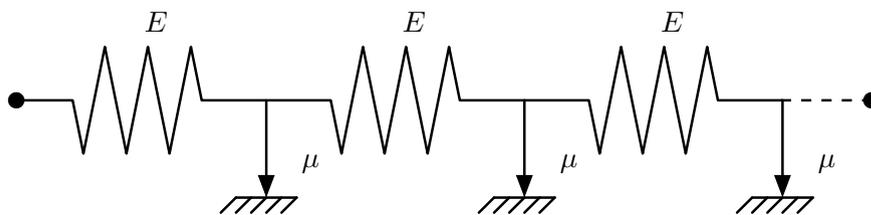


FIGURE 2.1 – Élément triboélastique à base de ressorts et de frotteur en série

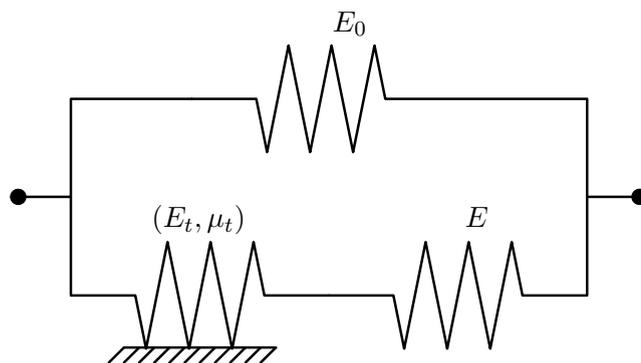


FIGURE 2.2 – Modèle Standard Triboelastic Solid

sort en parallèle d'une branche composée d'un ressort en série avec un assemblage triboélastique de Turner (Fig. 2.2). Bien que ce modèle soit capable de représenter le comportement hystérétique des liaisons en élastomère, il ne représente pas les comportements visqueux de relaxation et de rigidification en fréquence. Coveney, dans [12], prend en compte ces phénomènes par l'ajout d'un élément de type Maxwell en parallèle au modèle STS. Ce nouveau modèle TVS (Triboelastic Visco-Solid), est repris par Oberlé [54] et par Bourgeteau [9] qui y ajoutent deux éléments de Maxwell (Fig. 2.3) et obtiennent des résultats satisfaisants sans trop augmenter le nombre de paramètres à identifier.

De manière à augmenter la précision du modèle TVS, d'autres éléments de Maxwell peuvent être ajoutés au modèle STS mais cela augmente le nombre de paramètres à identifier. Ce type de modèle est par exemple utilisé par Jrad dans [40] qui combine un modèle de Maxwell généralisé avec un modèle de frotteur de Dahl. Ce modèle visco-tribologique est ensuite utilisé pour reproduire des mesures d'essais. Une autre solution est de remplacer les éléments de Maxwell en parallèle par un élément "spring-pot" et donc d'employer des dérivées fractionnaires. Différents modèles de ce genre sont proposés successivement par Sjöberg [74], Coja [11] et Garcia [25]. Une illustration de ces modèles à Dérivée Non

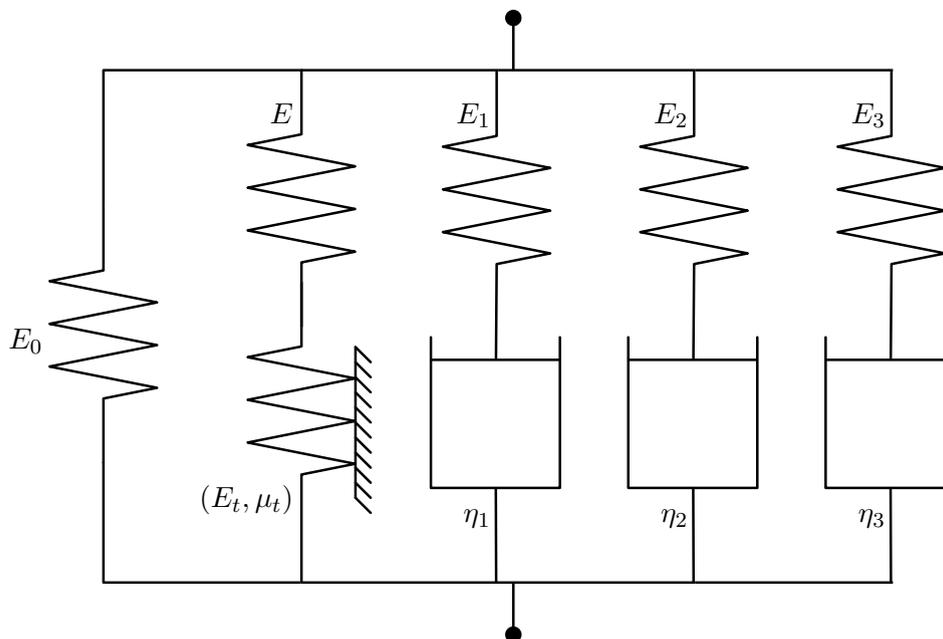


FIGURE 2.3 – Modèle Triboelastic Visco-Solid avec 3 branches de Maxwell

Entière (DNE) est donnée sur la figure (Fig. 2.4).

Toujours dans le but d'ajouter un comportement visqueux au modèle STS, Coveney [12] propose avec Johnson le modèle Rate-dependant Triboelastic solid (RT). Ce modèle est obtenu en remplaçant les frotteurs du modèle STS par un amortisseur non-linéaire (loi de comportement :  $\sigma = \eta \dot{\epsilon}^\beta$ ) qui permet d'assurer un comportement viscoélastique et hystérique et qui est représentatif d'un comportement à mi-chemin entre frotteur et amortisseur linéaire (Fig. 2.5). De par le couplage qu'il induit entre la viscoélasticité et le comportement hystérique, le modèle RT est l'un des modèles macroscopiques les plus proches du comportement observé des élastomères.

Finalement, il est à noter que d'autres modèles, fondés sur des outils en plein essor comme les réseaux de neurones, existent. Yoo, Baek et Sohn [83] proposent une application de ce genre de modèle à des isolateurs vibratoires pour la dynamique de véhicules tandis que Ok, Yoo et Sohn proposent la représentation d'articulations en caoutchouc par un modèle de Bouc-Wen modifié [56].

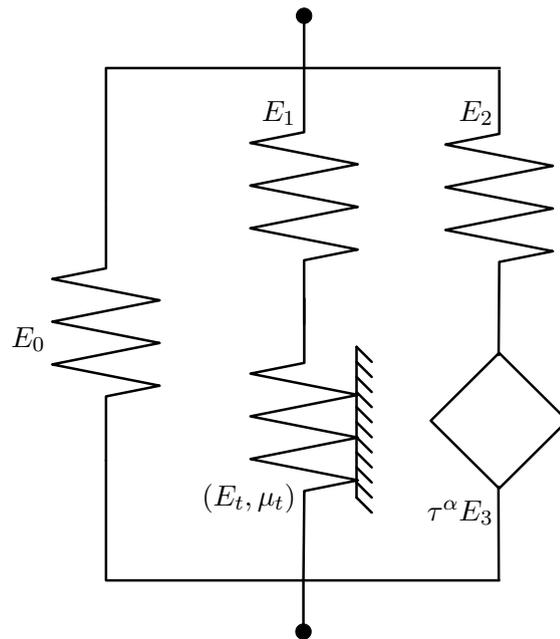


FIGURE 2.4 – Exemple de modèle à Dérivée Non Entière

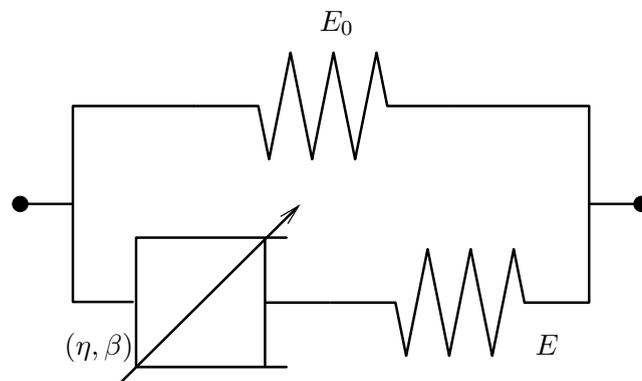


FIGURE 2.5 – Modèle Rate-dependant Triboelastic solid

**Résumé** Une façon de représenter une liaison en élastomère est d’employer un modèle rhéologique macroscopique équivalent basé sur une caractérisation expérimentale de la liaison. Dans l’ensemble, ces modèles sont une version macroscopique des modèles rhéologiques et ils présentent les mêmes spécificités :

- Certains d’entre eux (modèle STS notamment), à l’image des modèles rhéologiques de Kelvin-Voigt, Maxwell et Zener, sont trop simples pour représenter correctement un comportement viscoélastique.
- D’autres (modèle TVS), comme le modèle de Maxwell généralisé, assurent la prise en compte des phénomènes de relaxation et de rigidification en fréquence, au prix d’un nombre de paramètres prohibitif.
- Finalement, quelques modèles (DNE et RT), offre une représentation correcte du comportement des élastomères avec un nombre acceptable de paramètres, de manière similaire aux modèles rhéologiques fractionnaires.

Ces modèles sont en général identifiés à partir d’essais uni-axiaux et ne sont donc pas valables pour une caractérisation tridimensionnelle des liaisons, même si certains travaux en ce sens existent [13]. Ils sont de plus spécifiques à la géométrie de la liaison. Ces modèles ne sont donc pas prédictifs pour une autre direction de sollicitation ou pour tout changement de géométrie de la liaison ce qui est un handicap en phase de conception et de choix des liaisons.

### 2.3 Modèles éléments finis en viscoélasticité linéaire

Les lois de comportement uni-axiales, définies dans la section 1.2, pour les matériaux viscoélastiques, peuvent être étendues au cas tridimensionnel et implémentées dans un code éléments finis, permettant ainsi le calcul des liaisons. La formulation éléments finis des problèmes viscoélastiques 3D est présenté ici pour des applications dans les domaines temporel et fréquentiel.

### 2.3.1 Domaine temporel

Dans le domaine temporel, le modèle de Maxwell généralisé est couramment utilisé pour sa simplicité et sa capacité à représenter des phénomènes de relaxation sur des temps longs. En utilisant le module de relaxation du modèle de Maxwell généralisé de l'équation (Eq. 1.27) dans la loi de comportement uni-axiale (Eq. 1.7) obtenue par application du principe de superposition de Boltzmann, on obtient :

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-s) \frac{\partial \epsilon}{\partial s} ds, \quad (2.5)$$

Il est ainsi possible d'écrire la contrainte comme la somme d'une participation élastique et de plusieurs participations viscoélastiques :

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t). \quad (2.6)$$

Le terme purement élastique  $\sigma_0$  représente la contrainte de l'élément ressort du modèle de Maxwell généralisé :

$$\sigma_0(t) = E_0 \epsilon(t) \quad (2.7)$$

et les termes viscoélastiques  $\sigma_j$  sont les contraintes dans les éléments de Maxwell en parallèle du ressort :

$$\sigma_j(t) = \int_0^t E_j e^{-(t-s)/\tau_j} \frac{\partial \epsilon}{\partial s} ds. \quad (2.8)$$

En notant  $\gamma_j = E_j/E_0$ , il est possible d'exprimer les contraintes dans les éléments de Maxwell en fonction de la contrainte  $\sigma_0$  dans le ressort :

$$\sigma_j(t) = \int_0^t \gamma_j e^{-(t-s)/\tau_j} \frac{\partial \sigma_0}{\partial s} ds. \quad (2.9)$$

Cette intégrale peut être simplifiée si l'historique des contraintes est considérée connue entre l'instant  $t_0 = 0$  et l'instant  $t_n$ . Les contraintes dans les éléments de Maxwell sont

alors évaluées à un instant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  par :

$$\begin{aligned}
 \sigma_j(t_{n+1}) &= \int_0^{t_{n+1}} \gamma_j \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tau_j}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial s} ds \\
 &= \int_0^{t_n} \gamma_j \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tau_j}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial s} ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_j \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tau_j}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial s} ds \\
 &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \int_0^{t_n} \gamma_j \exp\left(-\frac{t_n-s}{\tau_j}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial s} ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_j \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tau_j}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial s} ds \\
 &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \sigma_j(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_j \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tau_j}\right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial s} ds. \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

De plus, pour un pas de temps infinitésimal la dérivée des contraintes est approximée par :

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial s} = \frac{\sigma_0(t_{n+1}) - \sigma_0(t_n)}{\Delta t} \tag{2.11}$$

ce qui, une fois introduit dans l'expression intégrale précédente donne :

$$\begin{aligned}
 \sigma_j(t_{n+1}) &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \sigma_j(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_j \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tau_j}\right) \frac{\sigma_0(t_{n+1}) - \sigma_0(t_n)}{\Delta t} ds \\
 &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \sigma_j(t_n) + \gamma_j \frac{\sigma_0(t_{n+1}) - \sigma_0(t_n)}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tau_j}\right) ds \\
 &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \sigma_j(t_n) + \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right)\right) (\sigma_0(t_{n+1}) - \sigma_0(t_n)). \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Au final, à un instant quelconque  $t_{n+1}$ , le tenseur des contraintes s'exprime comme la somme de la contrainte  $\sigma_0(t_{n+1})$  dans le ressort et des contraintes  $\sigma_j(t_{n+1})$  dans les éléments de Maxwell. Chacune des contraintes dans les éléments de Maxwell peut être vue comme la somme d'un terme instantané (à  $t_{n+1}$ ) et d'un terme d'histoire noté  $h_j$ , avec :

$$h_j(t_{n+1}) = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \sigma_j(t_n) - \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right)\right) \sigma_0(t_n) \tag{2.13}$$

et finalement :

$$\sigma(t_{n+1}) = \left[1 + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right)\right)\right] \sigma_0(t_{n+1}) + \sum_{j=1}^N h_j(t_{n+1}). \tag{2.14}$$

**Formulation dans le cas tridimensionnel** L'expression (Eq. 2.14) des contraintes pour le modèle de Maxwell généralisé peut être étendue au cas tridimensionnel en remplaçant la contrainte uni-axiale  $\sigma$  par le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et en remplaçant l'histoire uni-axiale  $h_j$  par le tenseur  $\mathbf{h}_j$  lui-même construit à partir des tenseurs  $\boldsymbol{\sigma}_0$  et  $\boldsymbol{\sigma}_j$ . Dans

le cas 3D, la loi de comportement viscoélastique est généralement exprimée à l'aide d'un tenseur d'ordre quatre  $\mathbb{C}_v$  tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}(t_{n+1}) = \mathbb{C}_v : \boldsymbol{\epsilon}(t_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}_v = \frac{d\boldsymbol{\sigma}(t_{n+1})}{d\boldsymbol{\epsilon}(t_{n+1})}. \quad (2.15)$$

Dans le cas d'un matériaux non-dissipatif, ce tenseur est le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}_0$ . En appliquant la loi de comportement tridimensionnelle du ressort  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}$ , l'équation (Eq. 2.14) devient :

$$\boldsymbol{\sigma}(t_{n+1}) = \left[ 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \right) \right] \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}(t_{n+1}) + \sum_{j=1}^N \mathbf{h}_j(t_{n+1}) \quad (2.16)$$

Alors, en utilisant le fait que les termes d'histoire  $\mathbf{h}_j$  sont indépendants de ce qui se passe à l'instant  $t_{n+1}$ , à savoir :

$$\frac{d\mathbf{h}_j(t_{n+1})}{d\boldsymbol{\epsilon}(t_{n+1})} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

et en reprenant les relations (Eq. 2.15), l'expression du tenseur d'ordre 4 pour la loi de comportement viscoélastique est donnée par :

$$\mathbb{C}_v = \left[ 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \right) \right] \mathbb{C}_0. \quad (2.18)$$

Pour rappel, le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}_0$  est donné en notation de Voigt, en fonction des coefficients de lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , par :

$$\mathbb{C}_0 = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

**Séparation en parties sphérique et déviatorique** Des résultats expérimentaux ont mis en évidence des comportements viscoélastiques différents lorsque le matériau est soumis à des déformations isochores (distorsions angulaires sans changement de volume) ou bien à des déformations volumiques (dilatations sans cisaillement) [35]. En linéaire, la partie isochore des contraintes est en fait la partie déviatorique du tenseur des contraintes alors

que la partie volumique est équivalente à la partie sphérique. Le tenseur des contraintes s'écrit alors sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} \quad (2.20)$$

où les parties déviatorique et sphérique sont données par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} = \text{sph}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{vol}}. \quad (2.22)$$

Dans ces expressions,  $\mathbf{I}$  représente le tenseur identité d'ordre 2 et les opérateurs trace  $\text{tr}(\bullet)$ , déviateur  $\text{dev}(\bullet)$  et sphérique  $\text{sph}(\bullet)$  sont définis par :

$$\text{tr}(\bullet) = (\bullet) : \mathbf{I} \quad , \quad \text{dev}(\bullet) = (\bullet) - \frac{1}{3} \text{tr}(\bullet) \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \text{sph}(\bullet) = \frac{1}{3} \text{tr}(\bullet) \mathbf{I} \quad (2.23)$$

La séparation en partie sphérique et déviatorique est appliquée au tenseur des contraintes du modèle de Maxwell généralisé défini dans l'équation (Eq. 2.14). Par la suite, l'hypothèse est faite que la dissipation est essentiellement causée par les déformations de distorsion [35] bien que des résultats expérimentaux montrent qu'une dissipation est aussi observée en dilatation [65]. Suivant cette hypothèse, les parties sphérique et déviatorique de la contrainte s'écrivent alors :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = \left[ 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \right) \right] \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_0) + \sum_{j=1}^N \text{dev}(\mathbf{h}_j) \quad (2.24)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} = \text{sph}(\boldsymbol{\sigma}_0) \quad (2.25)$$

Le terme d'histoire  $\mathbf{h}_j$  est construit à partir des tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_0$  et  $\boldsymbol{\sigma}_j$  aux instants précédents. Ses parties sphérique et déviatorique sont donc construites directement à partir des parties sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes. Ce découpage est ensuite appliqué au tenseur d'ordre quatre  $\mathbb{C}_v$  :

$$\mathbb{C}_v = \mathbb{C}_v^{\text{sph}} + \mathbb{C}_v^{\text{dev}}, \quad (2.26)$$

où  $\mathbb{C}_v^{\text{sph}}$  et  $\mathbb{C}_v^{\text{dev}}$  sont définis en reprenant l'expression (Eq. 2.15) par :

$$\mathbb{C}_v^{\text{sph}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}}(t_{n+1})}{d\boldsymbol{\epsilon}(t_{n+1})} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_v^{\text{dev}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}(t_{n+1})}{d\boldsymbol{\epsilon}(t_{n+1})}. \quad (2.27)$$

Les termes d'histoire  $\mathbf{h}_j$  étant indépendants de l'instant  $t_{n+1}$ , les dérivées des parties sphériques et déviatoriques sont donc nulles. Les tenseurs  $\mathbb{C}_v^{\text{sph}}$  et  $\mathbb{C}_v^{\text{dev}}$  ne dépendent que des dérivées des parties sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_0$ . En notant que :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{sph}}}{d\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{C}_0^{\text{sph}} \quad \text{et} \quad \frac{d\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{dev}}}{d\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{C}_0^{\text{dev}}, \quad (2.28)$$

où  $\mathbb{C}_0^{\text{sph}}$  et  $\mathbb{C}_0^{\text{dev}}$  sont les parties sphérique et déviatorique du tenseur d'élasticité classique, les parties sphérique et déviatorique du tenseur d'ordre quatre viscoélastique sont données par :

$$\mathbb{C}_v^{\text{dev}} = \left[ 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \right) \right] \mathbb{C}_0^{\text{dev}} \quad (2.29)$$

$$\mathbb{C}_v^{\text{sph}} = \mathbb{C}_0^{\text{sph}} \quad (2.30)$$

Les expressions de  $\mathbb{C}_0^{\text{sph}}$  et  $\mathbb{C}_0^{\text{dev}}$  peuvent être obtenues facilement dans le cas des matériaux isotropes où la loi de Hooke s'écrit en fonction des coefficients de lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , soit :

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I}. \quad (2.31)$$

Les parties sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes sont alors données par :

$$\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{sph}} = \kappa\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_0^{\text{dev}} = 2\mu \left( \boldsymbol{\epsilon} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} \right) \quad (2.32)$$

où  $\kappa$  est le module de compressibilité du matériau. La dérivée de la partie sphérique des contraintes élastiques est alors :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{sph}}}{d\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{C}_0^{\text{sph}} = \kappa(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (2.33)$$

soit en notation de Voigt :

$$\mathbb{C}_0^{\text{sph}} = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

De même, la dérivée de la partie déviatorique des contraintes élastiques est :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_0^{\text{dev}}}{d\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{C}_0^{\text{dev}} = 2\mu \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right), \quad (2.35)$$

où  $\mathbb{I}$  est le tenseur identité d'ordre quatre. Cette dérivée s'exprime en notation de Voigt par :

$$\mathbb{C}_0^{\text{dev}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\mu & -\frac{2}{3}\mu & -\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}\mu & \frac{4}{3}\mu & -\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}\mu & -\frac{2}{3}\mu & \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

La partie déviatorique du tenseur d'ordre quatre s'écrit finalement :

$$\mathbb{C}_v^{\text{dev}} = 2\mu \left[ 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \right) \right] \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right) \quad (2.37)$$

**Résolution par les éléments finis** La discrétisation éléments finis d'un problème de viscoélasticité se fait de manière classique en partant de l'équation d'équilibre locale, de la loi de comportement précédemment définie et d'un ensemble de conditions limites et initiales :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial_t \Omega \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_v : \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.40)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial_u \Omega \quad (2.41)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (2.42)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau,  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal extérieur à la surface  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{t}$  est l'effort imposé sur une partie  $\partial_t\Omega$  du bord du domaine et  $\mathbf{u}_0$  et  $\dot{\mathbf{u}}_0$  sont les vecteurs connus des déplacements et des vitesses du système à l'instant  $t = 0$ . L'équation d'équilibre locale est multipliée par une fonction test et intégrée sur le domaine  $\Omega$  pour obtenir une formulation faible du problème. Cette formulation intégrale est ensuite discrétisée sur un ensemble d'éléments constituant un maillage représentatif du système étudié. Finalement, une intégration numérique sur chacun des éléments conduit à l'assemblage des

matrices de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}_0^{\text{sph}}$  et  $\mathbf{K}_0^{\text{dev}}$  :

$$\mathbf{K}_0^{\text{sph}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_0^{\text{sph}} \mathbf{B} d\Omega, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{K}_0^{\text{dev}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_0^{\text{dev}} \mathbf{B} d\Omega, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega. \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{B}$  est l'opérateur gradient discrétisé de taille  $(6 \times 3n)$  et  $\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions de forme de taille  $(3 \times 3n)$ , avec  $n$  le nombre de nœuds du maillage. Les matrices de raideur viscoélastiques  $\mathbf{K}_v^{\text{sph}}$  et  $\mathbf{K}_v^{\text{dev}}$  sont alors obtenues par :

$$\mathbf{K}_v^{\text{dev}} = \left[ 1 + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \right) \right] \mathbf{K}_0^{\text{dev}} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{K}_v^{\text{sph}} = \mathbf{K}_0^{\text{sph}} \quad (2.47)$$

La matrice de raideur viscoélastique totale s'écrit simplement  $\mathbf{K}_v = \mathbf{K}_v^{\text{sph}} + \mathbf{K}_v^{\text{dev}}$  et le vecteur des forces internes est assemblé à partir des contraintes viscoélastiques  $\boldsymbol{\sigma}$  :

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}_v \mathbf{u} \quad (2.48)$$

La version discrétisée par éléments finis de l'équation de la dynamique est donnée dans le domaine temporel par :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}^{\text{int}} = \mathbf{f}^{\text{ext}}, \quad (2.49)$$

où  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  est le vecteur des efforts extérieurs appliqués au système. Pour résoudre ce système différentiel d'ordre deux en temps, une solution est d'utiliser un schéma de discrétisation temporelle. Le principe de ces schémas est de déterminer par un développement limité le déplacement et la vitesse à l'instant  $t_{n+1}$ , à partir de ces mêmes grandeurs à un instant  $t_n = t_{n+1} - \Delta t$ , par exemple à l'aide d'un schéma de Newmark :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left( (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right), \quad (2.50)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \left( (1 - \alpha) \ddot{\mathbf{u}}_n + \alpha \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right). \quad (2.51)$$

Pour des valeurs  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1/4$ , ce schéma est inconditionnellement stable, il s'agit du schéma d'accélération moyenne. Au cours d'un calcul, ce schéma permet d'effectuer une prédiction du déplacement et de la vitesse à l'instant  $t_{n+1}$  à partir des valeurs connues à

l'instant précédent. Pour assurer la convergence du résultat, il est nécessaire de réaliser une étape de correction. Cette étape nécessite le calcul du résidu  $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}}$  et de la matrice de raideur dynamique :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_v. \quad (2.52)$$

Une correction en accélération est alors calculée à l'instant  $t_{n+1}$  par :

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{r}_{n+1} \quad (2.53)$$

Le déplacement et la vitesse sont ensuite corrigés par :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}, \quad (2.54)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}. \quad (2.55)$$

Dans la suite de cette étude, l'hypothèse est faite que le comportement viscoélastique isochoire est prépondérant. La matrice de rigidité sphérique devient alors  $\mathbf{K}_v^{\text{sph}} = \mathbf{K}_0^{\text{sph}}$ .

### 2.3.2 Domaine fréquentiel

**Loi de comportement** Contrairement au domaine temporel où les contraintes sont calculées par une intégrale (Eq. 1.7), dans le domaine fréquentiel les contraintes sont exprimées directement par l'expression :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\omega) = E^*(\omega) \boldsymbol{\epsilon}^*(\omega) \quad (2.56)$$

où  $E^*$  est un module complexe défini dans la section d'introduction à la viscoélasticité. Dans cette étude, le modèle de Zener fractionnaire est utilisé dans le domaine fréquentiel en raison du faible nombre de paramètres nécessaires pour identifier le comportement. Le module complexe de ce modèle est donné par :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}. \quad (2.57)$$

Cette expression des contraintes peut être appliquée au cas tridimensionnel en remplaçant le module complexe par un tenseur d'élasticité complexe  $\mathbb{C}^*$  et en introduisant les tenseurs complexes des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^*$  et des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}^*$  :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\omega) = \mathbb{C}^*(\omega) : \boldsymbol{\epsilon}^*(\omega), \quad (2.58)$$

où  $\mathbb{C}^*$  est un tenseur d'ordre quatre équivalent au tenseur d'élasticité classique dans le cas non amorti. Pour obtenir une expression de ce tenseur d'ordre quatre, il est possible d'écrire le module complexe sous la forme :

$$E^*(\omega) = E_0 \frac{1 + \gamma_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (2.59)$$

où  $\gamma_\infty = E_\infty/E_0$ . Cette notation permet de réécrire la loi de comportement (Eq. 2.58) en fonction du tenseur d'élasticité classique  $\mathbb{C}_0$  déjà défini dans (Eq. 2.19) :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\omega) = \frac{1 + \gamma_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\epsilon}^*(\omega). \quad (2.60)$$

**Séparation en parties sphérique et déviatorique** Tout comme dans le domaine temporel, une séparation en partie sphérique et déviatorique des contraintes et du tenseur d'ordre quatre complexe peut être faite à l'aide des opérateurs définis dans (Eq. 2.23). À partir de la loi de comportement (Eq. 2.58) écrite sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\omega) = 2\mu^*(\omega)\boldsymbol{\epsilon}^*(\omega) + \lambda^*(\omega)\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^*(\omega))\mathbf{I}, \quad (2.61)$$

les parties sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes complexe sont alors données par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}}(\omega) = \kappa^*(\omega)\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^*(\omega))\mathbf{I}, \quad (2.62)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}(\omega) = 2\mu^*(\omega) \left( \boldsymbol{\epsilon}^*(\omega) - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^*(\omega))\mathbf{I} \right), \quad (2.63)$$

où  $\kappa^*$  et  $\mu^*$  sont les modules de compressibilité et de cisaillement complexes dépendant de la fréquence. Ces modules peuvent être définis en fonction des modules relaxés  $\kappa$  et  $\mu$  (obtenus lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ) :

$$\kappa^*(\omega) = \kappa \frac{1 + \gamma_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}, \quad (2.64)$$

$$\mu^*(\omega) = \mu \frac{1 + \gamma_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}. \quad (2.65)$$

Grâce à ces notations, les parties sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes complexe peuvent être exprimées en fonction des parties sphérique et déviatorique (Eq. 2.32) du tenseur des contraintes élastiques :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}(\omega) = \frac{1 + \gamma_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \boldsymbol{\sigma}_0^{\text{dev}} \quad (2.66)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}}(\omega) = \boldsymbol{\sigma}_0^{\text{sph}} \quad (2.67)$$

Les parties sphérique et déviatorique du tenseur d'ordre quatre complexe sont ensuite obtenues par :

$$\mathbb{C}_v^{\text{dev}}(\omega) = \frac{d\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}(\omega)}{d\boldsymbol{\epsilon}(\omega)} = \frac{1 + \gamma_\infty(i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \mathbb{C}_0^{\text{dev}} \quad (2.68)$$

$$\mathbb{C}_v^{\text{sph}} = \mathbb{C}_0^{\text{sph}} \quad (2.69)$$

où les notations de Voigt des tenseurs  $\mathbb{C}_0^{\text{sph}}$  et  $\mathbb{C}_0^{\text{dev}}$  sont déjà définies dans (Eq. 2.34) et (Eq. 2.36).

**Formulation éléments finis** La formulation éléments finis d'un problème de viscoélasticité dans le domaine fréquentiel se base sur l'équation d'équilibre fréquentielle, la loi de comportement en fréquence et les conditions aux limites :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}^*(\omega)) + \rho\omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \quad (2.70)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\omega) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial_t \Omega \quad (2.71)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\omega) = \mathbb{C}^*(\omega) : \boldsymbol{\epsilon}^*(\omega) \text{ dans } \Omega \quad (2.72)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial_u \Omega \quad (2.73)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau et  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal extérieur à la surface  $\partial\Omega$ . L'obtention de la forme faible du problème et sa discrétisation se font classiquement par une approche éléments finis. Le système matriciel résultant est finalement donné par :

$$(\mathbf{K}^{\text{sph}}(\omega) + \mathbf{K}^{\text{dev}}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.74)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse définie dans (Eq. 2.45). Les matrices de raideur complexes et dépendantes de la fréquence  $\mathbf{K}^{\text{sph}}(\omega)$  et  $\mathbf{K}^{\text{dev}}(\omega)$  sont intégrées et assemblées à partir des expressions (Eq. 2.69) et (Eq. 2.68), et sont définies par :

$$\mathbf{K}^{\text{dev}}(\omega) = \frac{1 + \gamma_\infty(i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \mathbf{K}_0^{\text{dev}} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{K}^{\text{sph}} = \mathbf{K}_0^{\text{sph}} \quad (2.76)$$

où  $\mathbf{K}_0^{\text{sph}}$  et  $\mathbf{K}_0^{\text{dev}}$  sont les matrices de raideur déjà définies dans (Eq. 2.43) et (Eq. 2.44).

La notation :

$$\mathbf{h}^*(\omega) = \frac{\tau^\alpha (i\omega)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (2.77)$$

est adoptée permettant ainsi d'écrire le système dynamique matriciel de manière équivalente à (Eq. 2.74) sous la forme :

$$(\mathbf{K}_0 + i\omega h^*(\omega)\mathbf{K}_\infty - \omega^2\mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (2.78)$$

où  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0^{\text{sph}} + \mathbf{K}_0^{\text{dev}}$  est une raideur relaxée égale à la matrice de rigidité élastique linéaire. Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , le module adimensionné  $h^*$  tend vers zéro et seule la raideur relaxée est prise en compte. En revanche, lorsque la fréquence est différente de zéro, la matrice de raideur non-relaxée  $\mathbf{K}_\infty = (\gamma_\infty - 1)\mathbf{K}_0^{\text{dev}}$  entre en jeu et le module adimensionné  $h^*$  permet alors de faire le lien avec le modèle fractionnaire utilisé.

## 2.4 Application

Les formulations éléments finis présentées dans la section précédente sont ici appliquées au calcul de la structure test, présentée sur la figure (Fig. 2), dans les cas non amorti et viscoélastique. Lorsque le modèle utilisé contient de nombreux degrés de liberté, les temps de calculs de la méthode des éléments finis peuvent être non négligeables. Cela représente un problème en phase de conception où un grand nombre de calculs peut être nécessaire. Pour illustrer cette problématique, la réponse dynamique de la structure du cas d'application (plus de 200000 ddls) est calculée, dans le domaine fréquentiel. Le chargement est imposé sous les liaisons, dans le plan horizontal et les déplacements sont mesurés au point de mesure (Point P sur la figure 2). À partir de ces résultats, les FRF sont obtenues et affichées sur la figure (Fig. 2.6) pour le cas non amorti et pour le cas amorti viscoélastique. Les temps de calcul de ces FRFs sur un seul processeur sont respectivement de 10h et 30h (CPU). Bien qu'elle permette d'obtenir le comportement dynamique de la structure, la méthode des éléments finis représente ici un coût en temps trop important pour être immédiatement utilisée en phase de conception ou d'optimisation. L'approche retenue dans cette thèse pour résoudre ce problème est d'utiliser des modèles réduits basés sur les modèles éléments finis présentés dans ce chapitre. Le chapitre suivant traite des techniques de réduction utilisées dans ce mémoire.

## 2.4. APPLICATION

---

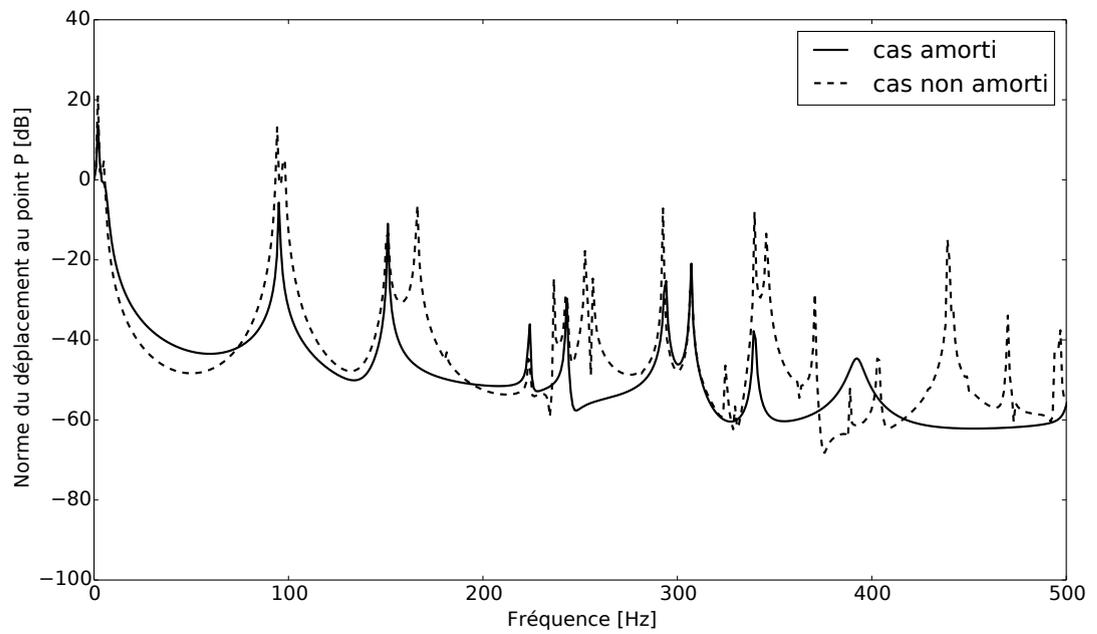


FIGURE 2.6 – FRF obtenue avec le modèle de référence dans les cas non amorti et amorti, entre 0 et 500 Hz

## 2.4. APPLICATION

---

## Chapitre 3

# Modèles réduits de liaisons élastomères

**Résumé :** *Ce chapitre présente une méthodologie de réduction des modèles de liaison amortissantes, sous la forme de super-éléments à peu de degrés de liberté, construits à l'aide de techniques de sous-structuration. La première section de ce chapitre traite de la rigidification des interfaces et de son influence sur le comportement dynamique de la structure, dans les cas non amorti et amorti viscoélastique. La seconde section présente les techniques de sous-structuration de Craig-Bampton et de Rubin ainsi que leur implémentation et résultats dans le cas non amorti linéaire. Enfin, la troisième et dernière section de ce chapitre aborde la possibilité d'étendre ces techniques dans le cas amorti viscoélastique, grâce à l'emploi d'une approche multi-modèles.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Rigidification des interfaces des liaisons . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>3.2</b>	<b>Réduction par sous-structuration dynamique dans le cas non-amorti . . . . .</b>	<b>69</b>
3.2.1	Introduction . . . . .	69
3.2.2	Méthode à interfaces fixes : méthode de Craig-Bampton . . . . .	73
3.2.3	Méthodes à interfaces libres : méthodes de MacNeal et de Rubin . . . . .	81
<b>3.3</b>	<b>Réduction par sous-structuration dans le cas amorti . . . . .</b>	<b>96</b>
3.3.1	Introduction . . . . .	96
3.3.2	Méthode à interfaces fixes . . . . .	98
3.3.3	Méthode à interfaces libres . . . . .	107
<b>3.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>114</b>

---

### 3.1 Rigidification des interfaces des liaisons

En raison de la différence de raideur entre l'élastomère et l'aluminium, les interfaces en aluminium des liaisons peuvent être considérées comme rigides comparées au cœur en élastomère. Ce comportement de solide rigide au niveau des faces des liaisons est exploité pour réduire le nombre de degré de liberté global en condensant tout le comportement des faces sur deux nœuds uniquement. Combinée avec une des méthodes de sous-structuration dynamiques présentées dans les sections suivantes, cette rigidification permet d'obtenir un modèle réduit à très peu de degrés de liberté. Pour représenter la rigidification, une contrainte cinématique est utilisée : la vitesse de n'importe quel point A d'une des interfaces peut être écrite en fonction de la vitesse du centre C de cette interface, de la distance entre le point A et le point C, et de la rotation de l'interface représentée par le vecteur  $\vec{\Omega}$ . Cette relation peut être étendue aux déplacements dans le cas de petits déplacements, ce qui donne :

$$\vec{u}_A = \vec{u}_C + \vec{AC} \wedge \vec{\Omega} \quad (3.1)$$

Cette même relation est donnée sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_C + (y_C - y_A)\Omega_z - (z_C - z_A)\Omega_y \\ v_C + (z_C - z_A)\Omega_x - (x_C - x_A)\Omega_z \\ w_C + (x_C - x_A)\Omega_y - (y_C - y_A)\Omega_x \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées d'un point dans l'espace 3D et  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les déplacements d'un point suivant les axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Les rotations autour de ces mêmes axes sont notées  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  et  $\Omega_z$ . Tous les déplacements d'une interface peuvent alors être écrits comme le produit d'une matrice de transformation  $\mathbf{T}$  au point A, et du vecteur des degrés de liberté du centre C :

$$\begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z_A - z_C) & (y_C - y_A) \\ 0 & 1 & 0 & (z_C - z_A) & 0 & (x_A - x_C) \\ 0 & 0 & 1 & (y_A - y_C) & (x_C - x_A) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_A} \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\quad (3.4)$$

Une illustration de cette étape de rigidification est donnée sur la figure (Fig. 3.1). En

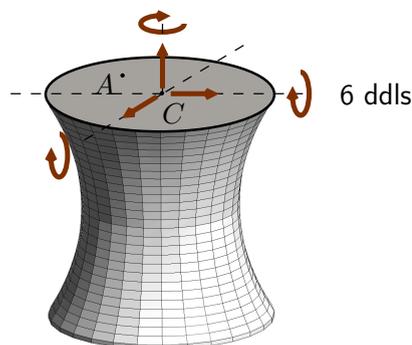


FIGURE 3.1 – Rigidification de l'interface supérieure d'une des liaisons

suivant cette approche, tous les ddls d'interface sont éliminés de la liste des ddls de la structure, tandis que 6 ddls sont ajoutés pour chaque interface : 3 en translation et 3 en rotation. Pour le cas d'étude présenté dans ce mémoire, la rigidification permet donc de réduire les interfaces à seulement 12 ddls. L'ensemble des ddls de la liaison est alors réduit aux ddls internes plus 12 ddls d'interface. Les méthodes de sous-structuration présentées à partir de la section suivante ont justement pour but de réduire l'ensemble des ddls des liaisons à leurs ddls d'interface. À titre indicatif, les figures (Fig. 3.2) et (Fig. 3.3) montrent l'influence de la rigidification des interfaces sur le comportement dynamique de la structure dans les cas non amorti et amorti viscoélastique. Bien que quelques écarts soient visibles, l'hypothèse de rigidité des interfaces semble un compromis acceptable en phase de conception ou d'optimisation et est adoptée pour la suite du mémoire. Les courbes en traits pleins de ces deux figures servent désormais de FRF de référence.

## 3.2 Réduction par sous-structuration dynamique dans le cas non-amorti

### 3.2.1 Introduction

Les techniques de synthèse modale les plus couramment appliquées dans la littérature peuvent être principalement classées en deux familles : les méthodes à interfaces fixes ou libres. Le choix des conditions limites aux interfaces dépend avant tout de l'environnement de la sous-structure à réduire. Ces techniques de synthèse modale utilisent une base de réduction  $\mathbf{R}$ , qui est un opérateur permettant de transformer un ensemble de degrés de

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

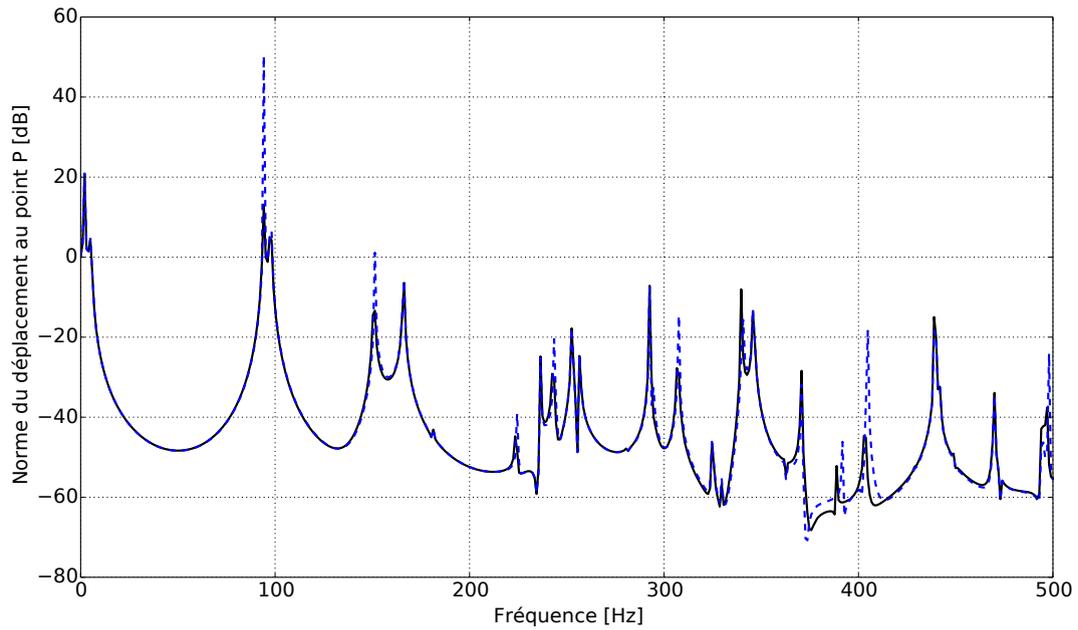


FIGURE 3.2 – Comparaison des FRFs avec (courbe noire, traits pleins) ou sans (courbe bleue, pointillés) rigidification, dans le cas non amorti

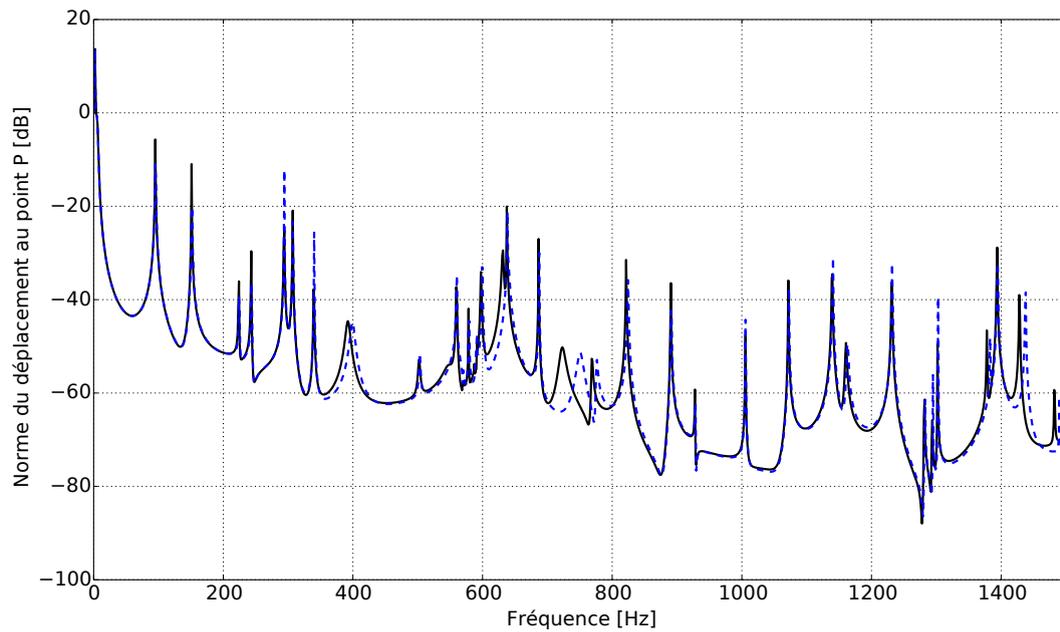


FIGURE 3.3 – Comparaison des FRFs avec (courbe noire, traits pleins) ou sans (courbe bleue, pointillés) rigidification, dans le cas amorti viscoélastique

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

liberté physiques  $\mathbf{u}$  en un ensemble réduit de degrés de liberté généralisés  $\mathbf{q}$  dont le nombre est très inférieur au nombre de degrés de liberté physiques :

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{q} \quad (3.5)$$

L'assemblage de sous-structures représentées par leurs ddls généralisés respectifs est difficile à réaliser et n'est en général pas utilisé. À la place, les ddls physiques d'interface entre les sous-structures sont conservés pour assurer une bonne connectivité. Les ddls généralisés et les forces appliquées au système prennent alors la forme suivante :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0}_I \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

où les ddls généralisés  $\mathbf{q}$  contiennent les ddls d'interfaces originaux  $\mathbf{u}_B$  et les ddls internes sous forme réduite  $\mathbf{q}_I$ . Les indices B et I correspondent respectivement aux ddls d'interface (Boundary) et internes (Internal). Les efforts appliqués aux sous-structures ne sont appliqués qu'aux interfaces et sont représentés par le terme  $\mathbf{f}_B$ .

Pour suivre cette séparation des ddls, le système dynamique à réduire est donc réarrangé de la façon suivante :

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.7)$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{M}_{BI} \\ \mathbf{M}_{IB} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & & \end{array} \quad (3.8)$$

Les composantes modales de la base de réduction sont réparties en modes statiques et modes dynamiques pour représenter la réponse de la sous-structure.

#### 3.2.1.1 Modes statiques

Les modes statiques relient les ddls internes aux ddls d'interface, ce qui permet par la suite de condenser la sous-structure sur ses interfaces. Pour assurer une bonne connectivité entre la sous-structure et son environnement, le nombre de modes statiques est égal au nombre de ddls d'interface. Par la suite, deux types de modes statiques sont présentés : les modes contraints et les modes d'attache résiduelle, respectivement pour les méthodes aux interfaces fixes et libres.

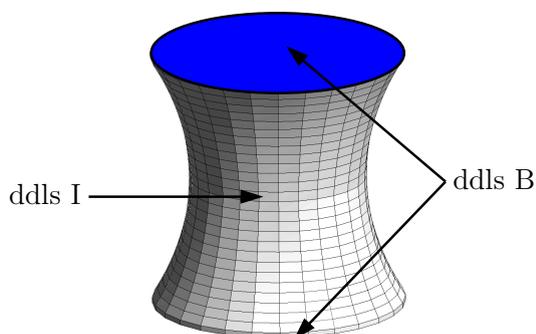


FIGURE 3.4 – Localisation des degrés de liberté d'interface (ddls B) et internes (ddl I)

#### 3.2.1.2 Modes Dynamiques

Les modes dynamiques représentent le comportement vibratoire de la sous-structure. Ils sont obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres issu de l'équation (Eq. 3.7), soit :

$$(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \phi_k = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

où le choix de la méthode de sous-structuration détermine les conditions limites libres ou encastrées aux interfaces. Pour un système à  $n$  degrés de libertés, l'ensemble  $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$  des modes propres forment une base complète de l'espace des fonctions de forme éléments finis. En tenant compte de l'orthogonalité des modes et en les normalisant par rapport à la masse, la projection des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sur cette base de modes donne :

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2) \quad (3.10)$$

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.11)$$

Pour réduire la dimension du problème, une troncature modale à l'ordre  $m \ll n$  est effectuée en supposant que les premiers  $m$  modes dominent la réponse dynamique pour la plage de fréquence d'intérêt. Cette opération, appelée méthode de Rayleigh-Ritz, revient à chercher une approximation du déplacement dans un sous-espace dont la dimension est réduite par rapport à la dimension de l'espace des fonctions de forme éléments finis. C'est à ce niveau qu'une réduction effective du nombre de ddls est obtenue dans les méthodes de sous-structuration.

### 3.2.1.3 Condensation aux interfaces

Les réponses statiques et dynamiques sont ensuite utilisées pour réduire la dimension du problème initial. Le système réduit ainsi obtenu est alors exploité de façon à faire apparaître une relation linéaire entre les déplacements d'interface et les déplacements internes ce qui permet de condenser l'ensemble de la réponse aux seules interfaces de la sous-structure. Cette étape permet d'obtenir un super-élément dont la taille est égale aux nombre de ddls d'interface, ce qui peut réduire grandement la dimension du problème dans de nombreux cas.

## 3.2.2 Méthode à interfaces fixes : méthode de Craig-Bampton

La sous-structuration avec interfaces fixes a été introduite par Craig et Bampton en 1968 [7].

### 3.2.2.1 Construction de la base statique

Dans cette première étape, les interfaces sont soumises à des conditions de Dirichlet d'encastrement et les effets dynamiques sont négligés. Le système matriciel (Eq. 3.8) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0}_I \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

où la deuxième ligne permet de condenser statiquement les ddls internes sur les ddls d'interface, en faisant apparaître les modes statiques  $\Psi_{IB}$ , par la relation suivante :

$$\mathbf{u}_I = -\mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{K}_{IB} \mathbf{u}_B = \Psi_{IB} \mathbf{u}_B \quad (3.13)$$

Dans la pratique, ces modes sont calculés un par un en appliquant un déplacement unitaire sur l'un des ddls d'interfaces alors que les autres sont fixés. Cette procédure est répétée sur l'ensemble des ddls d'interfaces et les déplacements statiques obtenus sont les modes statiques recherchés, appelés modes contraints dans le cas à interfaces fixes. Le système équivalent s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} \\ \Psi_{IB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{BB} \\ \mathbf{0}_{IB} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Le nombre de modes, et donc le nombre de colonnes de la matrice  $\Psi_{IB}$ , est égal au nombre de ddls d'interface. Chaque colonne  $j$  de cette matrice peut être vue comme la correction

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

statique [6] pour le cas où un déplacement unitaire est appliqué au ddl d'interface  $j$ . Finalement, le déplacement  $\mathbf{u}$  projeté sur la base des modes statiques est donné en fonction des déplacements aux interfaces par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} \\ \Psi_{IB} \end{bmatrix} \mathbf{u}_B \quad (3.15)$$

#### 3.2.2.2 Construction de la base dynamique

La réponse dynamique est ici solution de l'équation (Eq. 3.8), avec des conditions aux limites d'interfaces fixées. Les modes dynamiques correspondants, appelés modes de vibrations internes, sont obtenus par le calcul du problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{K}_{II} - \omega_k^2 \mathbf{M}_{II}) \phi_{Ik} = \mathbf{0}_I \quad (3.16)$$

En raison des conditions d'encastrement aux interfaces, les modes de corps rigides sont naturellement éliminés et les modes restants sont rangés dans les colonnes d'une matrice notée  $\Phi_{II}$ . Une troncature modale est utilisée pour réduire la taille du problème : seuls les  $m$  premiers modes sont retenus dans la matrice réduite  $\Phi_{Im}$ . Ces modes sont également normalisés par rapport à la masse de sorte que :

$$\Phi_{Im}^T \mathbf{K}_{II} \Phi_{Im} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_m^2) \quad (3.17)$$

$$\Phi_{Im}^T \mathbf{M}_{II} \Phi_{Im} = \mathbf{I}_{mm} \quad (3.18)$$

En écrivant les déplacements internes  $\mathbf{u}_I$  avec les coordonnées modales  $\mathbf{q}_m$  dans la base  $\Phi_{Im}$ , le déplacement  $\mathbf{u}$  est projeté sur la base des modes dynamiques par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{Bm} \\ \Phi_{Im} \end{bmatrix} \mathbf{q}_m \quad (3.19)$$

#### 3.2.2.3 Réduction du problème

La prise en compte des liaisons aux interfaces et de la dynamique interne de la sous-structure donne l'écriture des déplacements complets en fonction des déplacements aux interfaces  $\mathbf{u}_B$  et des déplacements internes généralisés  $\mathbf{q}_m$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} & \mathbf{0}_{Bm} \\ \Psi_{IB} & \Phi_{Im} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{R} \quad (3.21)$$

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

La matrice de réduction  $\mathbf{R}$  ainsi construite, de dimension  $n \times (n_B + m)$ , est composée des modes statiques et des modes de vibration interne. L'approximation due à la troncature des modes dynamiques entraîne l'apparition d'un terme d'erreur  $\epsilon$  :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{M}_{BI} \\ \mathbf{M}_{IB} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \right) \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0}_I \end{bmatrix} + \epsilon \quad (3.22)$$

Cette erreur  $\epsilon$  est orthogonale à l'espace de réduction représenté par la matrice  $\mathbf{R}$ , c'est à dire :  $\mathbf{R}^T \epsilon = 0$ . En multipliant le système précédent à gauche par la transposée de la matrice de réduction, on obtient donc :

$$\mathbf{R}^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{M}_{BI} \\ \mathbf{M}_{IB} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \right) \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Cette opération revient à projeter le système sur un sous espace de taille réduite. Le système réduit, de taille  $n_B + m \leq n$ , ainsi obtenu est donné par :

$$\left( \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB} & \mathbf{0}_{Bm} \\ \mathbf{0}_{mB} & \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{mm} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{BB} & \bar{\mathbf{M}}_{Bm} \\ \bar{\mathbf{M}}_{mB} & \mathbf{I}_{mm} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

où  $\bar{\mathbf{M}}_{Bm} = \bar{\mathbf{M}}_{mB}^T$ . Les termes des matrices de raideur et de masse projetées sont explicités ci-dessous :

$$\bar{\mathbf{K}}_{BB} = \mathbf{K}_{BB} + \mathbf{K}_{BI} \boldsymbol{\Psi}_{IB} \quad (3.25)$$

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_{mm} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_m^2) \quad (3.26)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{BB} = \mathbf{M}_{BB} + \mathbf{M}_{BI} \boldsymbol{\Psi}_{IB} + \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{M}_{IB} + \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{M}_{II} \boldsymbol{\Psi}_{IB} \quad (3.27)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mB} = \boldsymbol{\Phi}_{Im}^T (\mathbf{M}_{IB} + \mathbf{M}_{II} \boldsymbol{\Psi}_{IB}) \quad (3.28)$$

#### 3.2.2.4 Condensation sur les interfaces

Afin de réduire davantage la taille du problème, les inconnues liées aux modes de vibration interne sont condensées sur les nœuds d'interface. En effet, la deuxième ligne du système matriciel (Eq. 3.24) donne la relation suivante entre les coordonnées généralisées  $\mathbf{q}_m$  et les déplacements d'interface  $\mathbf{u}_B$  :

$$\mathbf{q}_m = \omega^2 (\bar{\boldsymbol{\Omega}}_{mm} - \omega^2 \mathbf{I}_{mm})^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{mB} \mathbf{u}_B. \quad (3.29)$$

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

La dépendance en fréquence dans cette expression implique que la condensation est à refaire à chaque pas de fréquence d'un calcul fréquentiel. Le temps de calcul de l'inversion de la matrice  $(\mathbf{\Omega}_{mm} - \omega^2 \mathbf{I}_{mm})$  est quasiment négligeable étant donné que dans le cas non-amorti cette matrice est diagonale. Cette condensation permet de réécrire le système dynamique sous la forme d'un super-élément tel que :

$$(\mathbf{K}_{\text{super}} - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{super}}(\omega)) \mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B. \quad (3.30)$$

Les matrices de masse et de raideur de ce super-élément sont pleines, de taille  $n_B \times n_B$  (ici  $12 \times 12$ ), et leurs expressions sont données par :

$$\mathbf{K}_{\text{super}} = \bar{\mathbf{K}}_{BB}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{M}_{\text{super}}(\omega) = \left( \bar{\mathbf{M}}_{BB} + \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mB}^T (\mathbf{\Omega}_{mm} - \omega^2 \mathbf{I}_{mm})^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{mB} \right). \quad (3.32)$$

Il est à noter que la raideur  $\mathbf{K}_{\text{super}}$  du super-élément est constante alors que sa masse  $\mathbf{M}_{\text{super}}$  dépend de la fréquence.

#### 3.2.2.5 Validation de la méthode

Un super-élément de liaison en élastomère est ici utilisé pour remplacer chacune des quatre liaisons de la structure du cas d'application. Les FRFs de la structure réduite sont calculées dans le cas d'un chargement harmonique sous les liaisons, dans le plan horizontal (plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  dans la figure (Fig. 2)). La plage de fréquences étudiée s'étend de 0 à 500 Hz. Les déplacements observés pour les FRFs sont ceux du point d'observation présenté dans la figure (Fig. 2).

Pour étudier l'efficacité de la méthode de Craig-Bampton, plusieurs super-éléments sont comparés. La base dynamique du premier comprend les 20 premiers modes propres à interfaces fixes d'une liaison. Les bases dynamiques des super-éléments suivants sont augmentées de 40 modes en 40 modes, jusqu'à obtenir une base de 140 modes. Certains des modes dynamiques utilisés dans ces super-éléments sont déjà présentés dans les figures (Fig. 6) et (Fig. 7). Les fréquences propres maximales des bases dynamiques de chacun des super-éléments sont donnés dans le tableau (Tab. 3.1). Les modes statiques utilisés dans ces super-éléments sont tous les mêmes, et six d'entre eux, correspondant à des mouvements

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

TABLE 3.1 – Fréquences propres maximales des bases dynamiques

Nombres de modes	Fréquences propres
20	290 Hz
60	416 Hz
100	502 Hz
140	566 Hz

de la face inférieure de la liaison, sont présentés sur la figure (Fig. 3.5).

Les FRFs obtenues avec ces super-éléments sont tracées sur la figure (Fig. 3.6) et comparées avec la FRF de référence (Fig. 3.2). Comme le montre la figure (Fig. 3.7), le super-élément à 20 modes dynamiques est capable de reproduire la FRF de référence jusqu'à 270 Hz, ensuite l'écart entre la réponse du modèle réduit et celle du modèle de référence dépasse 1 dB. La fréquence propre du 20e mode à interface fixe se situe à 290 Hz, le facteur entre ces deux fréquences est d'environ 1,1. L'analyse des résultats des super-éléments à 60 et 100 modes dynamiques fait apparaître la même tendance :

- Sur la figure (Fig. 3.7), le super-élément à 60 modes dynamiques reproduit la FRF de référence jusqu'à 370 Hz ce qui correspond environ à un facteur 1,1 entre cette fréquence et la fréquence propre du 60e mode à interfaces fixes, qui est de 416 Hz.
- De même, les résultats du super-élément à 100 modes dynamiques sont satisfaisants jusqu'à 460 Hz, ce qui correspond également à un facteur 1,1 avec la fréquence propre du 100e mode dynamique à 502 Hz.

Seul le super-élément à 140 modes dynamiques est capable de reproduire la réponse de référence sur l'ensemble de la plage de fréquence étudiée. La fréquence propre maximale des modes contenus dans ce super-élément est en effet de 566 Hz, soit plus de 1,1 fois la fréquence maximale de la plage étudiée, à savoir 550 Hz, ce qui explique les bons résultats obtenus.

Dans le cas présent, la méthode de Craig-Bampton est stable et ses résultats peuvent être prédits à l'avance, en fonction du nombre de mode utilisés, ce qui représente un avantage certain. En ce qui concerne les étapes de calculs, la condensation aux interfaces passe par l'inversion d'une matrice carrée dont la taille est égale au nombre de modes dynamiques. Comme les modes dynamiques de la méthode de Craig-Bampton diagonalisent totalement

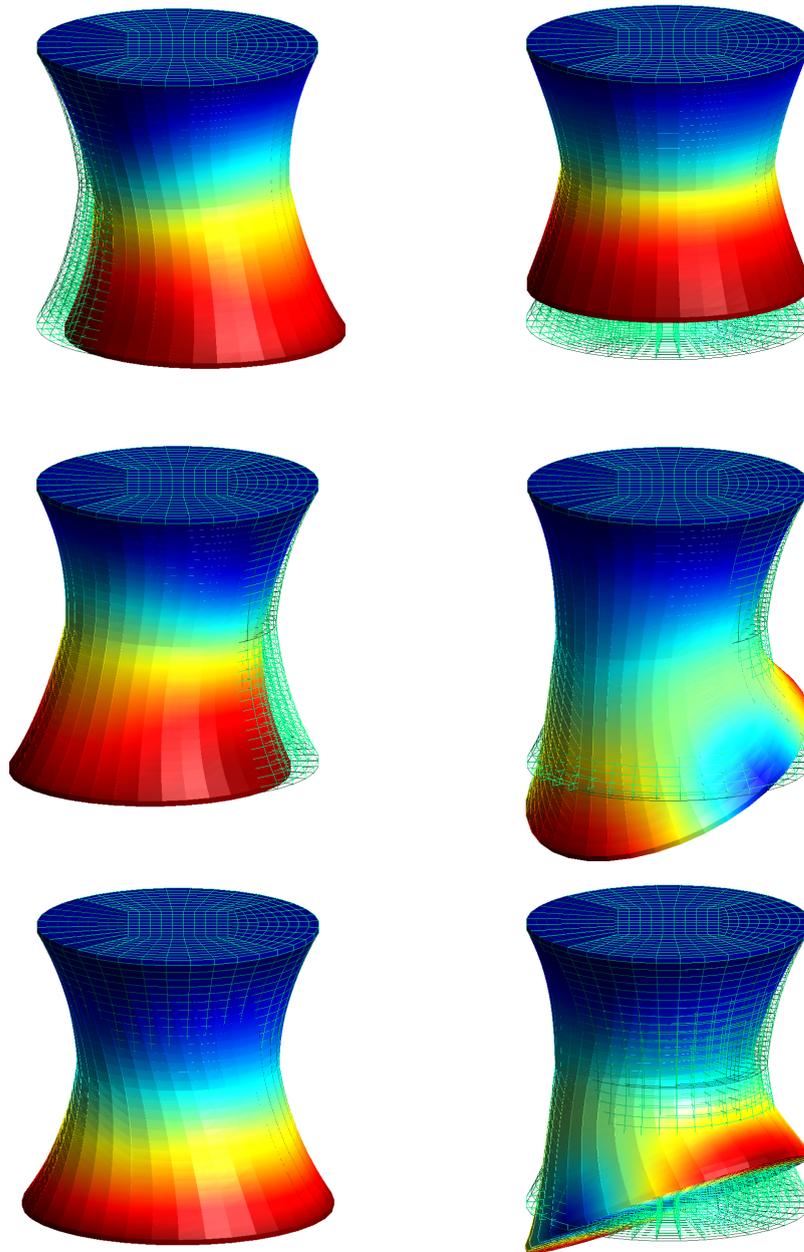


FIGURE 3.5 – Les six modes contraints de la face inférieure pour la méthode de Craig-Bampton

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

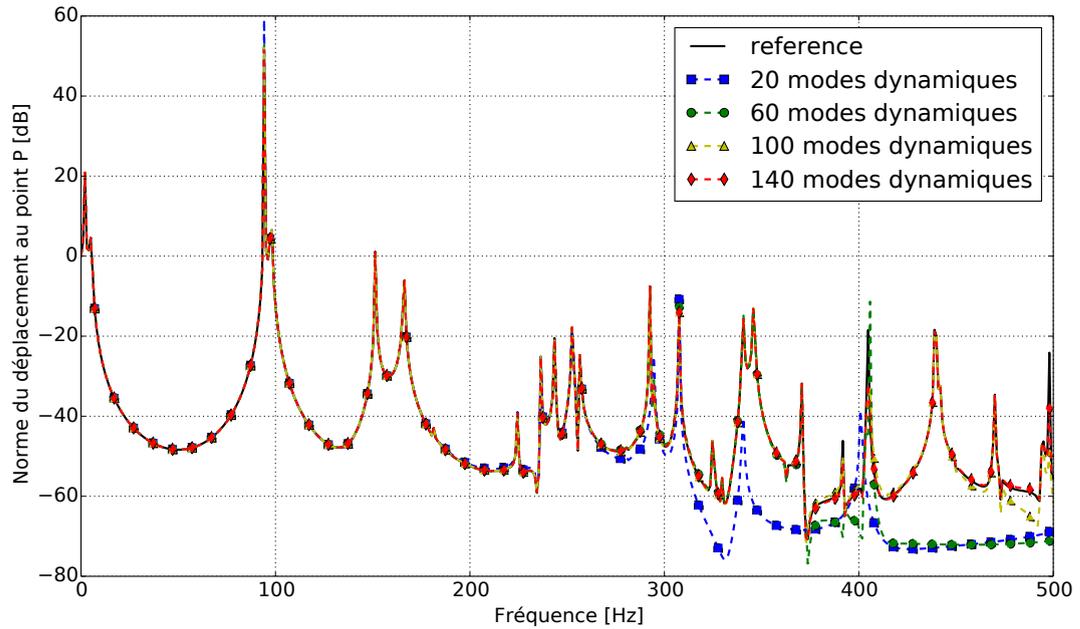


FIGURE 3.6 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Craig-Bampton

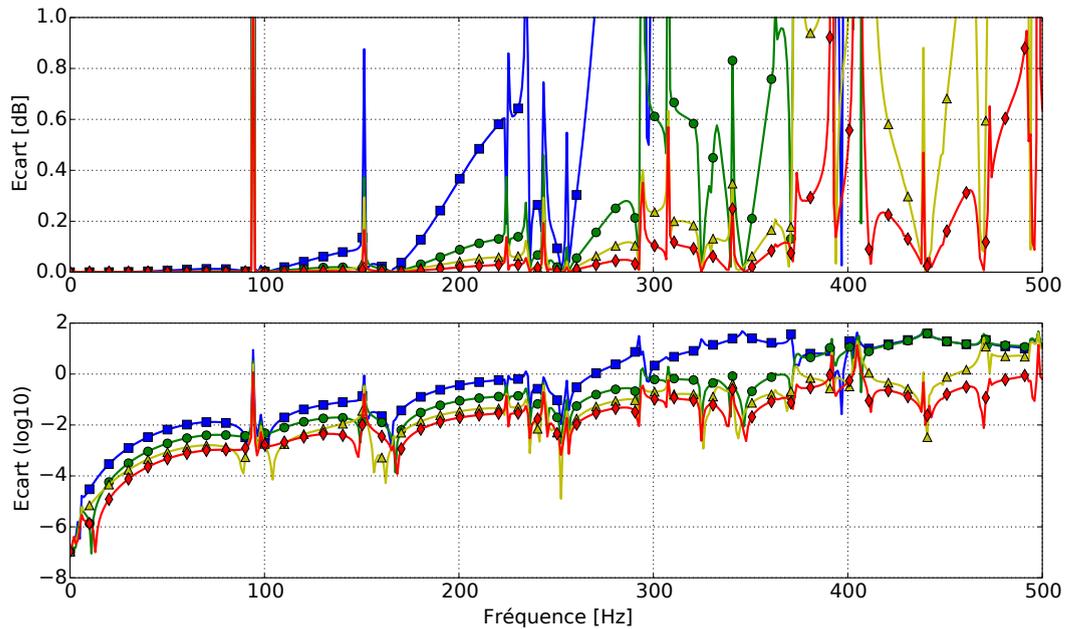


FIGURE 3.7 – Écart en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

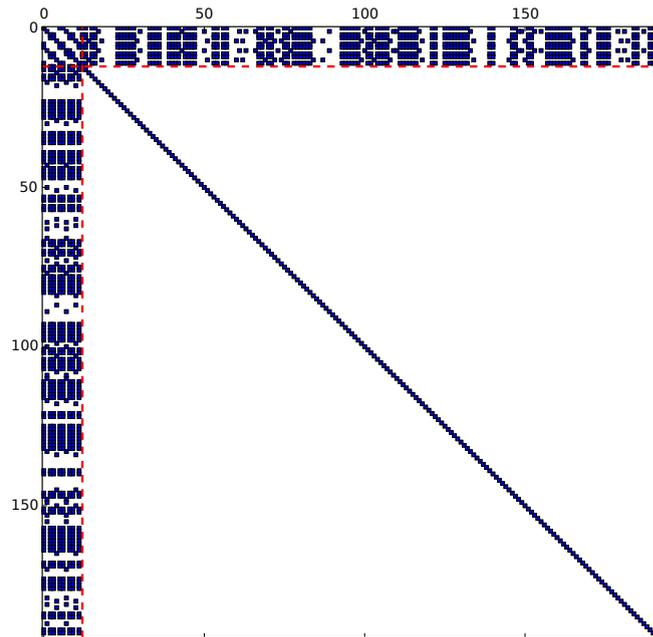


FIGURE 3.8 – Remplissage des matrices de raideur et de masse réduite par la méthode de Craig-Bampton

la matrice à inverser (Fig. 3.8), cette étape représente un coût de calcul négligeable. Les temps de calcul des modes statiques et dynamiques (avec 140 modes dynamiques) et le temps de calcul des FRFs sont donnés dans le tableau (Tab. 3.2), et comparés avec le calcul de référence. Le calcul des FRFs sur un seul processeur est fait en 6min avec le super-élément contre 9h 15min pour le modèle de référence, soit un facteur de gain de temps d'environ 100.

La méthode de Craig-Bampton montre ici son efficacité. Il est à noter que dans le cadre d'une campagne d'essais numérique où le modèle de liaison ne change pas, cette efficacité serait encore supérieure puisque le temps offline de la méthode de Craig-Bampton ne compte qu'une seule fois. À partir du moment où le super-élément est construit, il peut être stocké dans un abaque numérique et être réutilisé au besoin. Dans ce cas, seul compte le temps de calcul online qui est 100 fois plus petit que le temps de calcul du modèle de référence.

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

TABLE 3.2 – Comparaison des temps de calcul offline et online de la méthode de Craig-Bampton et du calcul de référence (en temps CPU)

	Craig-Bampton	Référence
Base dynamique	45min	-
Base statique	21min	-
Total offline	1h 6min	-
Calcul d'un pas de fréquence	0,72s	66,6s ( $\approx 100 \times C-B$ )
Calcul FRF	6min	9h 15min

#### 3.2.3 Méthodes à interfaces libres : méthodes de MacNeal et de Rubin

La sous-structuration avec interfaces libres est introduite pour la première fois par MacNeal en 1971 [48] qui choisit d'utiliser des modes de vibration libre plutôt que des modes de vibration à interfaces fixes pour représenter le comportement vibratoire du système à réduire. Puisque les interfaces sont libres de toute condition limite de Dirichlet, la réponse statique doit être calculée différemment par rapport à la méthode de Craig-Bampton. Cette différence entraîne l'apparition d'inconnues en effort aux interfaces alors que les interfaces fixes ne font intervenir que des inconnues en déplacement. Puisque les sous-structures sont en général connectées par leurs déplacements d'interface, une étape de calcul supplémentaire est utilisée pour transformer les inconnues d'effort aux interfaces en inconnues de déplacement. La méthode de MacNeal aboutie à une réduction non consistante de la matrice de masse [30] ce qui peut entraîner des problèmes de convergence. La méthode est reprise en 1975 par Rubin [67] qui propose une réduction consistante de la masse et de la raideur. Dans cette section, les bases statique et dynamique des méthodes de MacNeal et de Rubin sont présentées, puis la réduction et l'obtention du super-élément sont détaillées.

##### 3.2.3.1 Construction de la base dynamique

La base dynamique est obtenue à partir de l'équation (Eq. 3.8), avec des conditions aux limites d'interfaces libres, en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \phi_k = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

La condition d'interface libre conduit à l'apparition des six modes de corps rigides. Ces modes sont rangés dans les colonnes d'une matrice notée  $\Phi_r$  tandis que  $t$  modes de déformation libre sont retenus par une troncature sur l'ensemble des modes de déformation, et rangés dans la matrice  $\Phi_t$ . L'ensemble des modes libres est rangé dans la matrice  $\Phi_m = [\Phi_r, \Phi_t]$  et forme une base telle que :

$$\Phi_m^T \mathbf{K} \Phi_m = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 0, \omega_1^2, \dots, \omega_t^2) \quad \text{et} \quad \Phi_m^T \mathbf{M} \Phi_m = \mathbf{I}_{mm} \quad (3.34)$$

L'orthogonalité des modes propres donne également les relations suivantes entre les modes rigides et les modes de vibrations libres :

$$\Phi_r^T \mathbf{K} \Phi_t = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \Phi_r^T \mathbf{M} \Phi_t = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

La projection du déplacement  $\mathbf{u}$  sur cette base est alors donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{Br} \\ \Phi_{Ir} \end{bmatrix} \mathbf{q}_r + \begin{bmatrix} \Phi_{Bt} \\ \Phi_{It} \end{bmatrix} \mathbf{q}_t = \begin{bmatrix} \Phi_{Bm} \\ \Phi_{Im} \end{bmatrix} \mathbf{q}_m \quad (3.36)$$

où  $\mathbf{q}_r$  et  $\mathbf{q}_t$  sont les déplacements généralisés de corps rigides et de déformation. Il est important de noter que dans le cas à interfaces libres, les modes dynamiques agissent à la fois sur les ddls internes et d'interfaces, contrairement aux cas à interfaces fixes où la solution en dynamique s'écrit uniquement en fonction des ddls internes.

#### 3.2.3.2 Construction de la base statique

**Calcul des modes d'attache** Les modes statiques des méthodes à interfaces libres, ou modes d'attache, sont les déformées statiques causées par l'application d'efforts unitaires aux ddls d'interface. Un mode d'attache  $\psi$  est donc la solution en déplacement de l'équation :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_B \\ \psi_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0}_I \end{bmatrix} = \mathbf{f} \quad (3.37)$$

où  $\mathbf{f}_B$  est un vecteur colonne nul partout sauf à la ligne correspondant au ddl d'interface auquel est appliqué l'effort unitaire. L'ensemble des vecteurs forces  $\mathbf{f}$  nécessaires à la construction de tous les modes d'attache peuvent être regroupés dans les colonnes d'une matrice  $\mathbf{F}$ . Cette matrice est constituée de l'identité pour sa partie haute et de zéros dans sa partie basse. Cela donne l'ensemble des modes d'attache  $\Psi$  sous la forme :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BI} \\ \mathbf{K}_{IB} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} \\ \mathbf{0}_{IB} \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.38)$$

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

Ces modes servent à la construction des modes d'attache résiduelle utilisés comme modes statiques par la suite. Dans le cas général, la condition de déplacement libre aux interfaces entraîne un problème de singularité de la matrice de rigidité, ce qui empêche le calcul de son inverse. Une procédure utilisée dans la littérature pour contourner ce problème est présentée ci dessous :

- 1 - Tout d'abord, l'inverse généralisée de la matrice de raideur singulière doit être calculée. La méthode proposée est d'imposer des conditions limites fictives, aussi appelées contraintes isostatiques ou liens temporaires, sur certain ddls  $\mathbf{u}_C$ . Il est important de noter que pour obtenir la meilleure estimation possible de l'inverse de la matrice de raideur, les forces résultantes des contraintes isostatiques doivent être minimisées. Le système suivant est obtenu en fixant les ddls  $\mathbf{u}_C$ , et en laissant libre les ddls restants notés  $\mathbf{u}_R$  :

$$\tilde{\mathbf{K}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{RR}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{RR} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_c \quad (3.39)$$

où  $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$  est l'inverse généralisée de la matrice de rigidité,  $\mathbf{G}_c$  est la matrice de flexibilité contrainte du système et  $\mathbf{G}_{RR}$  la flexibilité associée au ddls restés libres. Les modes d'attaches deviennent alors :

$$\Psi = \mathbf{G}_c \mathbf{F} \quad (3.40)$$

À ce niveau la matrice des efforts  $\mathbf{F}$  doit être modifiée pour éviter d'entraîner un déplacement de type corps rigide du système à cause de la condition limite libre.

- 2 - La deuxième étape est de trouver un ensemble de forces auto-équilibrantes qui peuvent être interprétées comme des forces de réactions gardant le système en place lorsqu'il est soumis à un chargement unitaire à sa surface, malgré des conditions limites libres. L'application de ces forces auto-équilibrantes au système est appelée relâchement d'inertie. La force auto-équilibrante est donnée par la différence entre le vecteur  $\mathbf{f}$  et la force d'inertie  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_r$ , où  $\mathbf{u}_r$  est le déplacement induit par les mouvement de corps rigide de la structure. En effet, le principe de superposition modale permet

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

d'écrire :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_t = \Phi_r \mathbf{q}_r + \Phi_t \mathbf{q}_t \quad (3.41)$$

où les indices  $r$  et  $t$  différencient les modes de corps rigide et les modes de déformation calculés dans l'équation (Eq. 3.33). Toujours en utilisant le principe de superposition modale il est donc possible d'écrire :

$$\mathbf{f}_{\text{eq}} = \mathbf{f} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_r = \mathbf{f} - \mathbf{M}\Phi_r \ddot{\mathbf{q}}_r \quad (3.42)$$

où  $\Phi_r$  représente les modes de corps rigide. De manière à déterminer le terme de droite dans l'équation précédente, le principe de superposition modale est utilisé pour réécrire l'équation du mouvement :

$$\mathbf{M}\Phi_r \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{M}\Phi_t \ddot{\mathbf{q}}_t + \mathbf{K}\Phi_r \mathbf{q}_r + \mathbf{K}\Phi_t \mathbf{q}_t = \mathbf{f} \quad (3.43)$$

En multipliant l'équation (Eq. 3.43) par  $\Phi_r^T$ , l'orthogonalité des modes (Eq. 3.35) et le fait que les mouvements de corps rigide de la structure n'induisent aucune déformation et donc aucune force élastique interne (Eq. 3.34), on obtient :

$$\Phi_r^T \mathbf{M}\Phi_r \ddot{\mathbf{q}}_r = \Phi_r^T \mathbf{f} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\mathbf{q}}_r = (\Phi_r^T \mathbf{M}\Phi_r)^{-1} \Phi_r^T \mathbf{f} \quad (3.44)$$

En injectant cette expression dans l'équation (Eq. 3.42), la force d'auto-équilibrage apparaît comme étant :

$$\mathbf{f}_{\text{eq}} = \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Phi_r (\Phi_r^T \mathbf{M}\Phi_r)^{-1} \Phi_r^T)}_{\mathbf{P}} \mathbf{f} \quad (3.45)$$

où  $\mathbf{P}$  est une matrice de projection capable d'auto-équilibrer n'importe quel vecteur. Dans l'équation ci-dessus, la matrice  $\mathbf{P}$  transforme le vecteur force original de façon à ce que les modes de corps rigides ne soient pas excités par ce dernier. Finalement, la matrice des efforts  $\mathbf{F}$  devient  $\mathbf{F}_{\text{eq}} = \mathbf{P}\mathbf{F}$  et les modes d'attache deviennent :

$$\Psi = \mathbf{G}_c \mathbf{F}_{\text{eq}} \quad (3.46)$$

3 - Pour s'assurer que les modes d'attache ne contiennent aucune contribution de type corps rigide et décrivent uniquement une déformation statique, la dernière étape est

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

une orthogonalisation par rapport à la masse mise en mouvement par les modes de corps rigide. De part la définition de la matrice de projection  $\mathbf{P}$ , cette dernière étape est effectuée en multipliant les modes d'attache obtenus précédemment par la matrice  $\mathbf{P}^T$ , soit :

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_c \mathbf{P} \mathbf{F} = \mathbf{G}_f \mathbf{F} \quad (3.47)$$

où  $\mathbf{G}_f$  est la matrice de flexibilité élastique. Finalement, les modes d'attache peuvent être vus comme les colonnes de la matrice  $\mathbf{G}_f$  correspondant aux indices des ddls d'interface. La matrice  $\mathbf{F}$  contenant les vecteurs force  $\mathbf{f}$  est équivalente à une matrice booléenne permettant d'extraire les modes d'attaches à partir de la flexibilité élastique  $\mathbf{G}_f$ .

**Calcul des modes d'attache résiduelle** La matrice de flexibilité obtenue peut être décrite par la décomposition spectrale suivante :

$$\mathbf{G}_f = \sum_{j=1}^d \frac{\boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j^T}{\omega_j} \quad (3.48)$$

où  $d$  est le nombre de modes de déformation, sans troncature, et où  $\boldsymbol{\phi}_j$  est le  $j^{\text{ème}}$  mode de déformation. En prenant cette matrice de flexibilité sans autre opération, la contribution de l'ensemble des modes de déformation se retrouve dans les modes statiques alors que cette contribution est déjà prise en compte dans les modes dynamiques. Pour éviter toute redondance, une correction statique est appliquée en retranchant la contribution des modes de déformations retenus par la troncature à l'ordre  $t$  de la matrice de flexibilité. La matrice ainsi obtenue est appelée matrice de flexibilité résiduelle et est calculée par :

$$\mathbf{G}_r = \mathbf{G}_f - \sum_{j=1}^t \frac{\boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j^T}{\omega_j} \quad (3.49)$$

Les modes d'attache résiduelle sont finalement extraits de la matrice de flexibilité résiduelle par :

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{G}_r \mathbf{F} = \mathbf{G}_r \begin{bmatrix} \mathbf{I}_B \\ \mathbf{0}_I \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

et la projection des déplacements sur la base statique est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{BB} \\ \boldsymbol{\Psi}_{IB} \end{bmatrix} \mathbf{f}_B \quad (3.51)$$

### 3.2.3.3 Réduction du problème : méthode de MacNeal

En combinant les bases dynamique et statique précédemment calculées, l'ensemble des déplacements est finalement donné en fonction des efforts aux interfaces  $\mathbf{f}_B$  et des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}_m$  par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{BB} & \Phi_{Bm} \\ \Psi_{IB} & \Phi_{Im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

La première équation de ce système permet d'écrire les efforts aux interfaces en fonction des composantes modales, des coordonnées généralisées et surtout en fonction des déplacements d'interfaces :

$$\mathbf{f}_B = \Psi_{BB}^{-1} (\mathbf{u}_B - \Phi_{Bm} \mathbf{q}_m) \quad (3.53)$$

Cette expression est utilisée dans l'équation réduite sur la base des modes dynamique  $\Phi_m$ , qui fait apparaître les efforts d'interfaces  $\mathbf{f}_B$  :

$$\Phi_m^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi_m \mathbf{q}_m = \Phi_m^T \mathbf{f} = \Phi_{Bm}^T \mathbf{f}_B \quad (3.54)$$

Le système suivant est ainsi obtenu :

$$(\Phi_m^T \mathbf{K} \Phi_m + \Phi_{Bm}^T \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm} - \omega^2 \Phi_m^T \mathbf{M} \Phi_m) \mathbf{q}_m - \Phi_{Bm}^T \Psi_{BB}^{-1} \mathbf{u}_B = \mathbf{0}_m \quad (3.55)$$

La méthode MacNeal combine alors ce système et l'équation (Eq. 3.53) pour former le système suivant :

$$\left( \begin{bmatrix} \Psi_{BB}^{-1} & -\Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm} \\ -\Phi_{Bm}^T \Psi_{BB}^{-1} & \Phi_m^T \mathbf{K} \Phi_m + \Phi_{Bm}^T \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_m^T \mathbf{M} \Phi_m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

où encore, en reprenant la séparation des modes de corps rigides et de flexibilité tout en tenant compte des propriétés (Eq. 3.34) :

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{BB} & \mathbf{0}_{Br} & \mathbf{0}_{Bt} \\ \mathbf{0}_{rB} & \mathbf{I}_{rr} & \mathbf{0}_{rt} \\ \mathbf{0}_{tB} & \mathbf{0}_{tr} & \mathbf{I}_{tt} \end{bmatrix} + \dots \\ & \dots \begin{bmatrix} \Psi_{BB}^{-1} & -\Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Br} & -\Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bt} \\ -\Phi_{Br}^T \Psi_{BB}^{-1} & \Phi_{Br}^T \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Br} & \mathbf{0}_{rt} \\ -\Phi_{Bt}^T \Psi_{BB}^{-1} & \mathbf{0}_{tr} & \Omega_t + \Phi_{Bt}^T \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.57)$$

où la matrice  $\Omega_t$  est définie par  $\Omega_t = \Phi_t^T \mathbf{K} \Phi_t = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_t^2)$ . La méthode de MacNeal aboutie finalement à un système réduit dont la matrice de masse est donnée sous une forme

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

très pratique d'un point de vue numérique. Le principal problème de cette méthode est que la réduction de la matrice de masse est faite de façon artificielle [30]. Les matrices de masse et de raideur réduites obtenues correspondent aux matrices de masse et de raideur initiales projetées sur des bases de réduction différentes. Le système mathématique résultant est alors inconsistant.

#### 3.2.3.4 Réduction du problème : méthode de Rubin

En reprenant les travaux de MacNeal, Rubin propose en 1971 une méthode également basée sur des modes à interfaces libres dans laquelle une base de réduction est construite et utilisée pour réduire les matrices de masse et de raideur. À partir de l'équation (Eq. 3.52) et dans l'optique d'obtenir un super-élément connecté par ses déplacements d'interface, la première étape est de remplacer les inconnues d'effort aux interfaces  $\mathbf{f}_B$  par les inconnues en déplacement  $\mathbf{u}_B$ . Pour cela la relation (Eq. 3.53) est réutilisée et une matrice de passage  $\mathbf{T}$  est assemblée pour transformer l'ensemble d'inconnues  $\mathbf{q}_1 = [\mathbf{f}_B, \mathbf{q}_r, \mathbf{q}_m]^T$  en  $\mathbf{q}_2 = [\mathbf{u}_B, \mathbf{q}_r, \mathbf{q}_m]^T$ , soit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_{BB}^{-1} & -\Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

L'étape suivante consiste à relier les déplacements  $\mathbf{u}$  de la structure complète aux déplacements réduits  $\mathbf{q}_2$ . La solution est obtenue à partir de l'équation (Eq. 3.52) qui relie déjà les déplacements  $\mathbf{u}$  aux inconnues  $\mathbf{q}_1$ . L'utilisation de la matrice de passage  $\mathbf{T}$  permet alors de donner les déplacements  $\mathbf{u}$  en fonction des inconnues  $\mathbf{q}_2$  et d'une matrice de réduction  $\mathbf{R}$  :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Psi_{BB} & \Phi_{Bm} \\ \Psi_{IB} & \Phi_{Im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{BB}^{-1} & -\Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} & \Phi_{Im} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.59)$$

où la matrice de réduction  $\mathbf{R}$  est de dimension  $n \times (n_B + m)$ . La méthode de Rubin consiste ensuite à réduire le système dynamique de façon équivalente à (Eq. 3.23) pour la méthode de Craig-Bampton, en utilisant la nouvelle matrice de réduction. Le système réduit ainsi

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

obtenu est donné par :

$$\left( \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB} & \bar{\mathbf{K}}_{Bm} \\ \bar{\mathbf{K}}_{mB} & \bar{\mathbf{K}}_{mm} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{BB} & \bar{\mathbf{M}}_{Bm} \\ \bar{\mathbf{M}}_{mB} & \bar{\mathbf{M}}_{mm} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Les termes des matrices réduites sont :

$$\bar{\mathbf{K}}_{BB} = \mathbf{K}_{BB} + \mathbf{K}_{BI} \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} + \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{K}_{IB} + \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{K}_{II} \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \quad (3.61)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Bm} = (\mathbf{K}_{BI} + \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{K}_{II}) (\boldsymbol{\Phi}_{Im} - \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Bm}) \quad (3.62)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mm} = (\boldsymbol{\Phi}_{Im} - \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Bm})^T \mathbf{K}_{II} (\boldsymbol{\Phi}_{Im} - \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Bm}) \quad (3.63)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{BB} = \mathbf{M}_{BB} + \mathbf{M}_{BI} \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} + \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{M}_{IB} + \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{M}_{II} \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \quad (3.64)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{Bm} = (\mathbf{M}_{BI} + \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{M}_{II}) (\boldsymbol{\Phi}_{Im} - \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Bm}) \quad (3.65)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mm} = (\boldsymbol{\Phi}_{Im} - \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Bm})^T \mathbf{M}_{II} (\boldsymbol{\Phi}_{Im} - \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Bm}) \quad (3.66)$$

avec  $\bar{\mathbf{K}}_{Bm} = \bar{\mathbf{K}}_{mB}^T$  et  $\bar{\mathbf{M}}_{Bm} = \bar{\mathbf{M}}_{mB}^T$ . Contrairement à la méthode de MacNeal où la matrice de masse est totalement diagonalisée, les matrices de masse et de raideur réduites par la méthode de Rubin sont totalement remplies. En revanche, la même base modale est utilisée pour réduire la masse et la raideur, la méthode de Rubin est donc consistante. Il est à noter que les termes  $\bar{\mathbf{K}}_{mm}$  et  $\bar{\mathbf{M}}_{mm}$  ne sont cette fois pas diagonaux ce qui entraîne des temps de calculs supplémentaires au moment de construire le super-élément.

#### 3.2.3.5 Condensation sur les interfaces

De façon similaire à la méthode de Craig-Bampton, les inconnues de déplacements internes sont condensées sur les ddls d'interface. La deuxième ligne du système matriciel (Eq. 3.60) donne la relation suivante entre les coordonnées généralisées  $\mathbf{q}_m$  et les déplacements d'interface  $\mathbf{u}_B$  :

$$\mathbf{q}_m = - (\bar{\mathbf{K}}_{mm} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mm})^{-1} (\bar{\mathbf{K}}_{mB} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mB}) \mathbf{u}_B \quad (3.67)$$

Le temps d'exécution de l'étape de condensation est ici allongé par rapport à la méthode de Craig-Bampton car les matrices  $\bar{\mathbf{K}}_{mm}$  et  $\bar{\mathbf{M}}_{mm}$  ne sont pas diagonales. Toutefois, la dimension de ces matrices est conditionnée par l'ordre de troncature modale utilisé sur la base des modes de vibrations libres. Cet ordre étant supposé petit, la condensation est par

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

conséquent relativement rapide à mettre en œuvre. Le système condensé s'exprime sous la forme d'un super-élément tel que :

$$(\mathbf{K}_{\text{super}} - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{super}}(\omega)) \mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B \quad (3.68)$$

Ce super-élément est associé aux matrices de raideur et de masse suivantes :

$$\mathbf{K}_{\text{super}} = \bar{\mathbf{K}}_{BB} - \bar{\mathbf{K}}_{Bm} (\bar{\mathbf{K}}_{mm} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mm})^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{mB} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{super}} = & \bar{\mathbf{M}}_{BB} + \bar{\mathbf{M}}_{Bm} (\bar{\mathbf{K}}_{mm} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mm})^{-1} (\omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mB} - \bar{\mathbf{K}}_{mB}) + \\ & \bar{\mathbf{K}}_{Bm} (\bar{\mathbf{K}}_{mm} - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mm})^{-1} \bar{\mathbf{M}}_{mB} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Il est à noter qu'avec la méthode de Rubin les deux matrices du super-élément dépendent de la fréquence, contrairement à la méthode de Craig-Bampton où seule la matrice de masse dépend de la fréquence.

#### 3.2.3.6 Validation et comparaison avec la méthode de Craig-Bampton

Plusieurs super-éléments de type Rubin sont utilisés pour remplacer chacune des quatre liaisons du cas d'application. Les FRFs de ces structures réduites sont calculées dans le cas d'un chargement harmonique sous les liaisons, dans le plan horizontal. La plage de fréquence étudiée s'étend ici aussi de 0 à 500 Hz, et les déplacements observés pour les FRFs sont ceux du point d'observation présenté dans la figure (Fig. 2).

Pour étudier l'efficacité de la méthode de Rubin, les super-éléments sont comparés en fonction de leur taille de base dynamique. Les 6 modes de corps rigides sont tous compris dans les bases dynamiques des super-éléments. La base dynamique du premier comprend aussi les 20 premiers modes de déformation à interfaces libres d'une liaison. Les bases dynamiques des super-éléments suivants sont augmentées de 40 modes en 40 modes, jusqu'à obtenir une base de 146 modes. Quelques-uns de ces modes sont présentés dans les figures (Fig. 3.9) et (Fig. 3.10), ainsi que leurs fréquences propres. Les fréquences propres maximales des bases dynamiques de chacun des super-éléments sont données dans le tableau (Tab. 3.3). Les modes statiques utilisés dans ces super-éléments sont tous les mêmes, et les 6 d'entre eux correspondant aux mouvements de la face inférieure sont présentés dans la figure (Fig. 3.11).

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

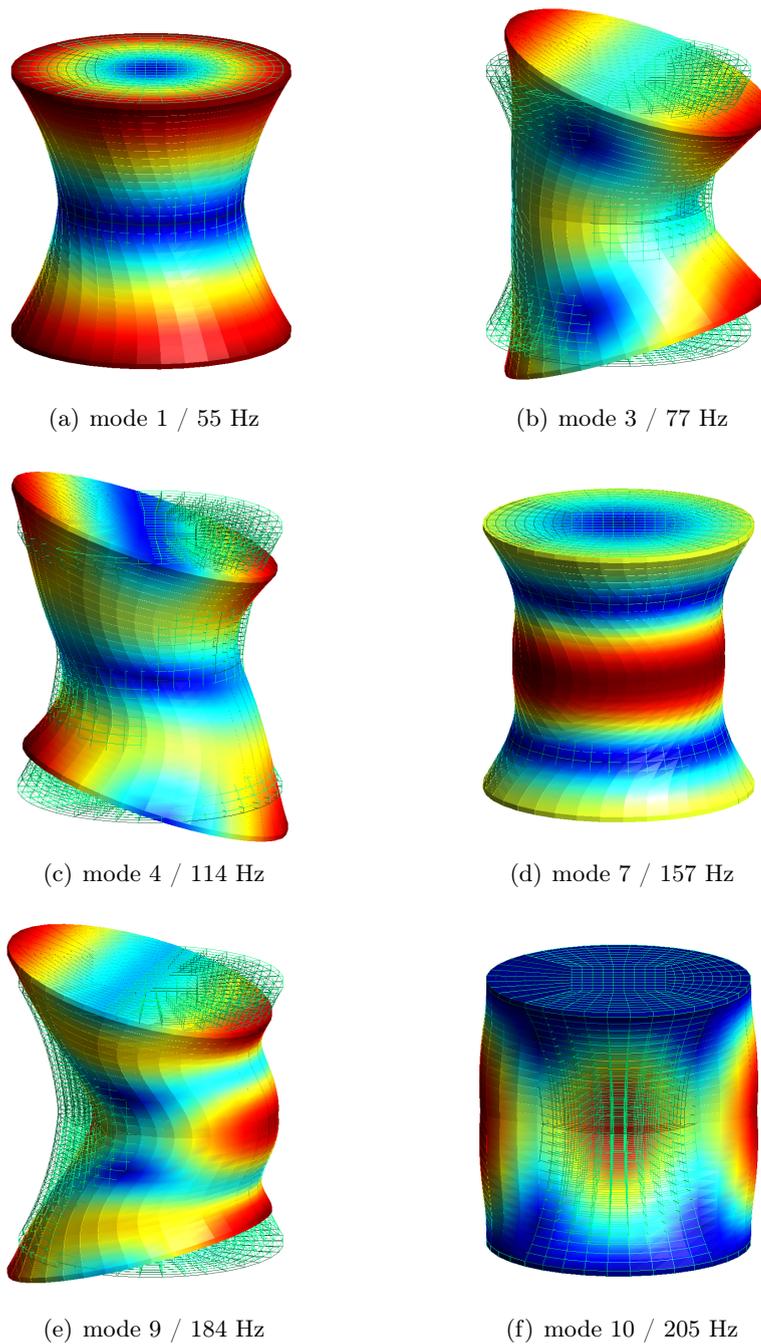
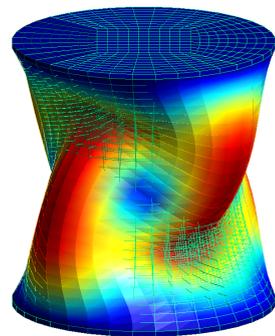


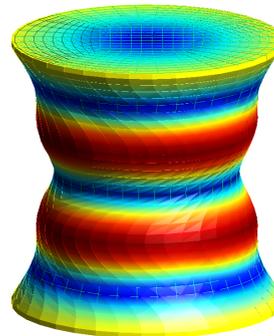
FIGURE 3.9 – Modes propres numéro 1, 3, 4, 7, 9 et 10 de liaison à interfaces libres

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

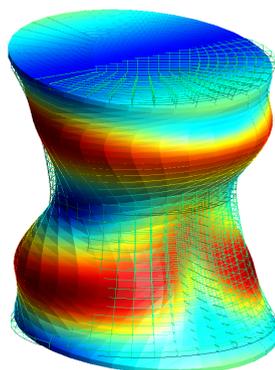
---



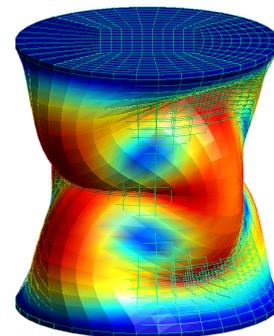
(a) mode 15 / 231 Hz



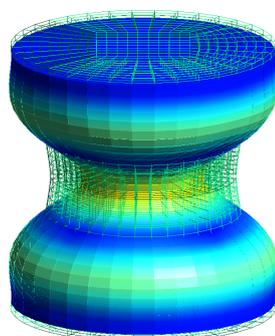
(b) mode 17 / 237 Hz



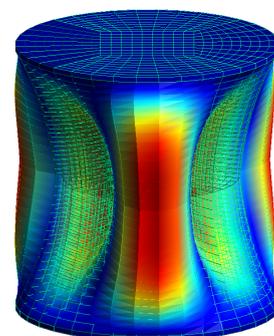
(c) mode 20 / 265 Hz



(d) mode 22 / 290 Hz



(e) mode 24 / 296 Hz



(f) mode 26 / 300 Hz

FIGURE 3.10 – Modes propres numéro 15, 17, 20, 22 et 26 de liaison à interfaces libres

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

TABLE 3.3 – Fréquences propres maximales des bases dynamiques

Numéro du mode	Fréquence propre
20	265 Hz
60	406 Hz
100	497 Hz
140	566 Hz

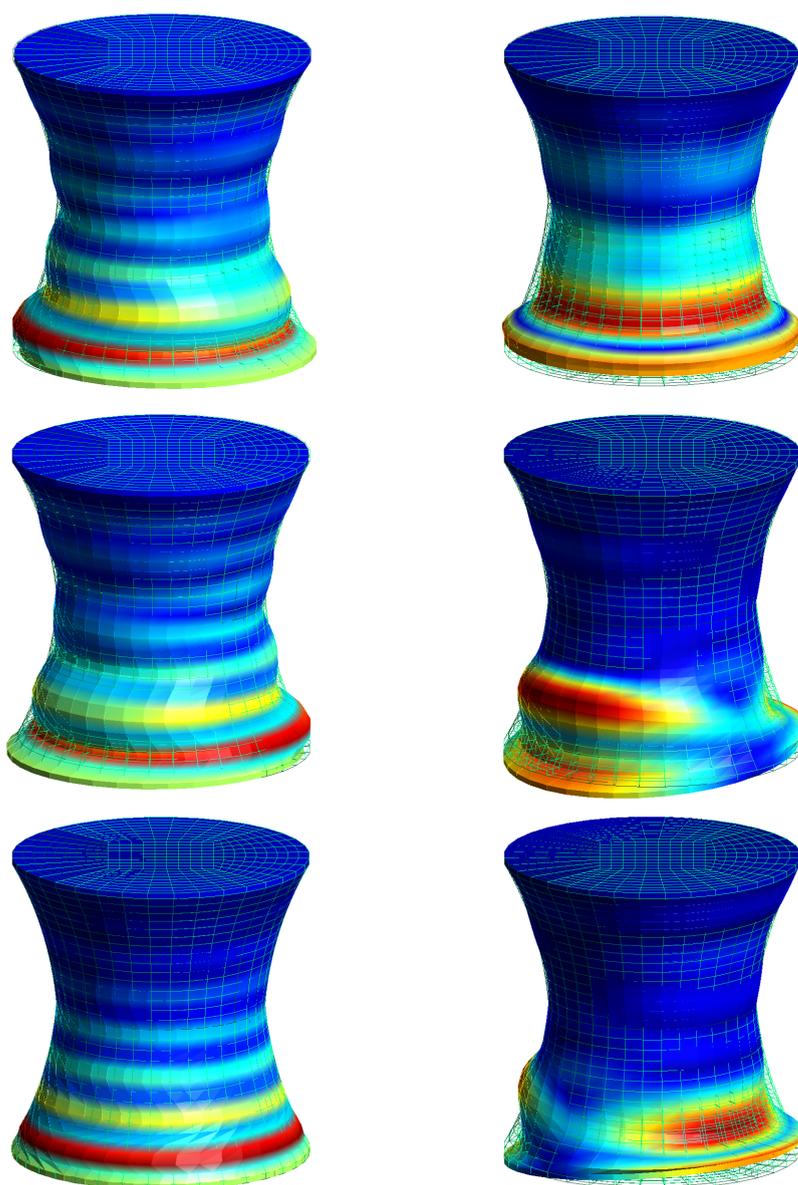


FIGURE 3.11 – Les six modes d'attache résiduelle de la face inférieure

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

---

Les FRFs obtenues avec ces super-éléments sont tracées sur la figure (Fig. 3.12) et comparées avec la FRF de référence (Fig. 3.2). La figure (Fig. 3.13) montre que le super-élément à 20 modes dynamiques est capable de reproduire la FRF de référence jusqu'à 60 Hz alors que la fréquence propre du 20e mode à interface fixe se situe à 265 Hz. Le facteur entre ces deux fréquences est d'environ 4,7, ce qui est nettement plus que pour la méthode de Craig-Bampton avec un nombre de modes dynamiques identique. Toujours sur la figure (Fig. 3.13), le super-élément à 60 modes dynamiques donne de bons résultats jusqu'à 220 Hz environ, ce qui représente un facteur de 1,8 avec la 60e fréquence propre qui est de 406 Hz.

Les super-éléments suivants, à 100 et 140 modes dynamiques, sont capables de reproduire correctement la FRF de référence jusqu'à 360 et 470 Hz, ce qui revient à des facteurs respectifs de 1,4 et 1,2. Le facteur d'écart semble converger vers une valeur limite proche de 1,2. Ces observations montrent que le facteur de fréquence de la méthode de Rubin est dépendant du nombre de modes de la base dynamique.

Contrairement à la méthode de Craig-Bampton dont les résultats sont prédictibles quelque soit la bande de fréquence étudiée, la méthode de Rubin semble plus appropriée à l'étude d'une large de bande de fréquence, de manière à tendre vers un facteur d'écart minimum, 1,2 dans le cas présent. Le manque de précision de la méthode de Rubin en basse fréquence peut être due à la présence des modes de corps rigides dans la base de réduction, alors que les liaisons en élastomère sont employées précisément pour leur capacité à se déformer. Une autre source d'erreur possible est l'utilisation de modes propres à interfaces libres : les déplacements possibles des interfaces sont mal adaptés au cas non amorti. À titre d'illustration, quelques modes à interfaces libres ou fixes sont présentés dans la figure (Fig. 3.14). Dans le cas de la méthode de Rubin, l'étape de condensation du système aux interfaces est allongée par rapport à la méthode de Craig-Bampton, car les matrices réduites sont pleines. Cependant, la taille de la matrice à inverser étant égale au nombre de modes dynamiques (de l'ordre de la centaine), la condensation est tout de même rapidement effectuée et le calcul des FRFs est fait avec un gain de temps important par rapport au calcul de référence. Le calcul des FRFs avec un super-élément de types Rubin sur un seul processeur est d'environ 9min, contre 6min pour la méthode de Craig-Bampton, et 9h 15min pour le

### 3.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE DANS LE CAS NON-AMORTI

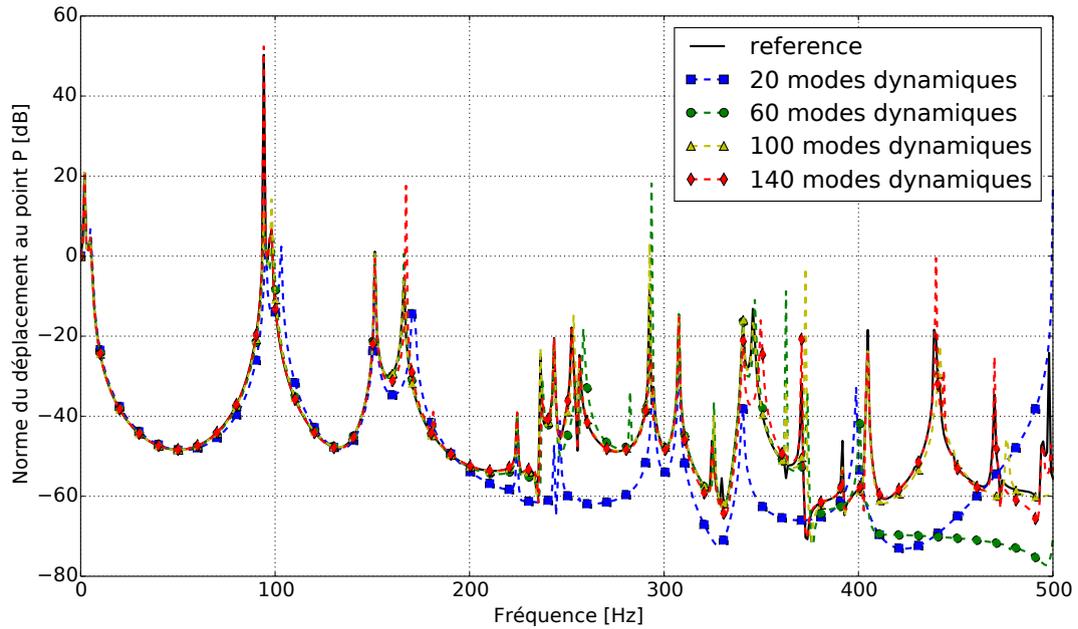


FIGURE 3.12 – FRFs obtenues dans le cas non amorti avec les super-éléments de type Rubin

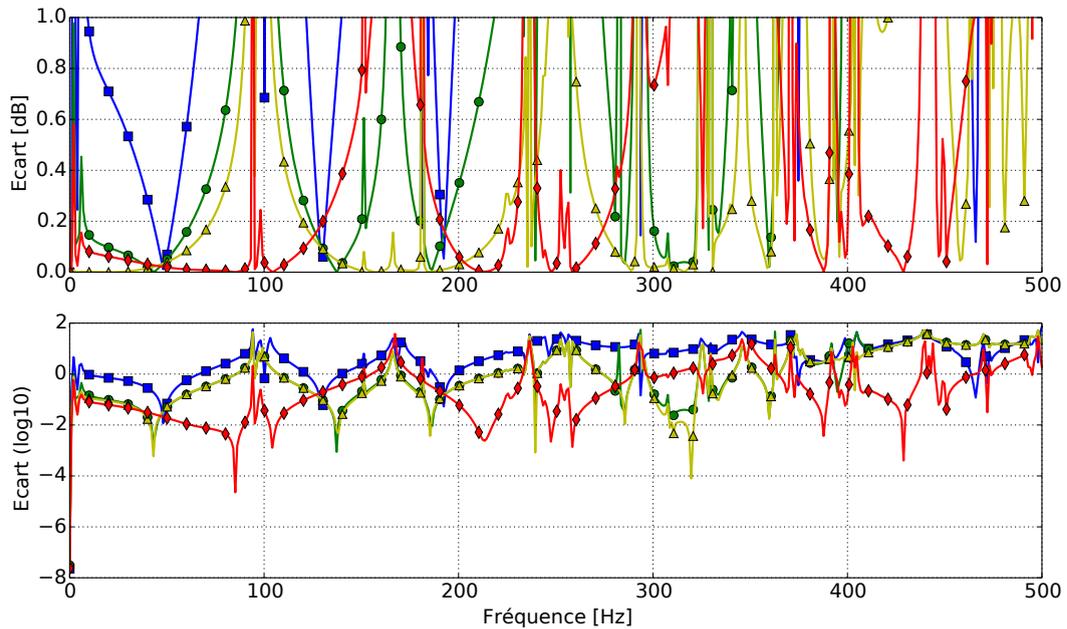


FIGURE 3.13 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence

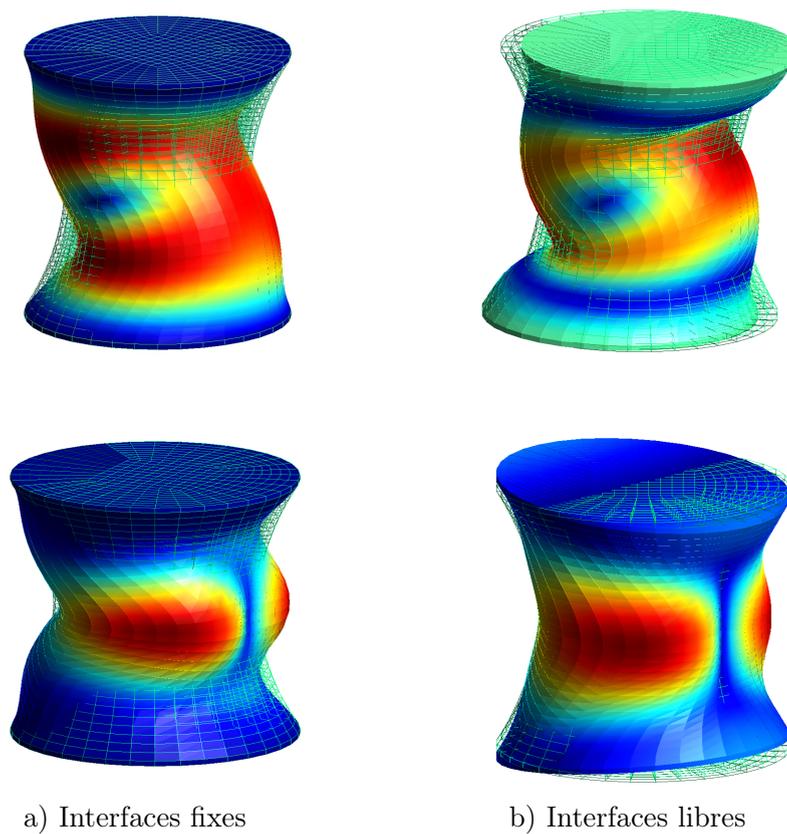


FIGURE 3.14 – Influence des conditions limites aux interfaces sur les modes dynamique des méthodes de Rubin et Craig-bampton

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

TABLE 3.4 – Comparaison des temps de calcul offline et online de la méthode de Rubin avec la méthode de Craig-Bampton et le calcul de référence (en temps CPU)

	Rubin	Craig-Bampton	Référence
Base dynamique	1h 40min	45min	-
Base statique	8h 56min	21min	-
Total offline	10h 36min (10 × C-B)	1h 6min	-
Calcul d'un pas de fréquence	1,08s (1,5 × C-B)	0,72s	66,6s (≈ 60 × Ru)
Calcul FRF	9min	6min	9h15min

calcul de référence, soit un facteur de gain de temps d'environ 60. Le tableau (Tab. 3.4) donne le temps de construction du super-élément de Rubin, à 186 modes dynamiques, et une comparaison des temps de calculs des FRFs de la méthode de Rubin par rapport à la méthode de Craig-Bampton et par rapport au calcul de référence. Pour une campagne d'essais numériques où le modèle de liaison ne change pas, l'assemblage du super-élément n'est fait qu'une seule fois et le temps de calcul à prendre en compte pour l'utilisateur est alors le temps de calcul online de la méthode (60 fois plus petit que le temps de calcul de référence). Il est tout de même à noter que le temps d'assemblage est ici largement supérieur au temps d'assemblage du super-élément de type Craig-Bampton.

## 3.3 Réduction par sous-structuration dans le cas amorti

### 3.3.1 Introduction

L'utilisation des techniques de sous-structuration est ici abordée dans le cas de structures présentant un comportement viscoélastique et donc de l'amortissement. Dans le domaine fréquentiel, l'équation du mouvement d'une structure viscoélastique est définie par l'équation (Eq. 2.78) :

$$(\mathbf{K}^0 + i\omega h^*(\omega)\mathbf{K}^\infty - \omega^2\mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.71)$$

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

---

où  $\mathbf{K}^0$ ,  $\mathbf{K}^\infty$  et le module adimensionné  $h^*$  sont définis dans la section 2.3.2. Tout comme dans le cas non-amorti, une séparation des ddls d'interface et internes est effectuée :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB}^0 & \mathbf{K}_{BI}^0 \\ \mathbf{K}_{IB}^0 & \mathbf{K}_{II}^0 \end{bmatrix} + i\omega h^*(\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB}^\infty & \mathbf{K}_{BI}^\infty \\ \mathbf{K}_{IB}^\infty & \mathbf{K}_{II}^\infty \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{M}_{BI} \\ \mathbf{M}_{IB} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

La réduction de ce système reprend les mêmes étapes que dans le cas non-amorti. La difficulté réside ici dans le calcul de la réponse dynamique : le problème aux valeurs propres à résoudre est désormais non-linéaire en fréquence et ne peut être résolu de façon classique. Pour contourner ce problème, une approche multi-modèles est utilisée ici, bien que d'autres techniques existent. Une revue de ces techniques est donnée par Rouleau dans [66]. L'approche multi-modèles est inspirée des modèles flous de Takagi et Sugeno [76] et est utilisée pour représenter la dynamique de systèmes non-linéaires en interpolant les réponses de systèmes linéarisés à partir du système non-linéaire en plusieurs points de mesure. Dans le cas présent, les points de mesure sont des valeurs de fréquence obtenues en échantillonnant la plage de fréquence étudiée et un pseudo-problème aux valeurs propres est résolu en chacun de ces points. Le pseudo-problème aux valeurs propres est obtenu en ne gardant que la partie réelle de la fonction complexe dans l'équation (Eq. 3.71). Au point de mesure  $\omega_d$  cela donne :

$$(\mathbf{K}^0 + \Re(i\omega_d h^*(\omega_d)) \mathbf{K}^\infty - \omega_k^2 \mathbf{M}) \phi_k(\omega_d) = \mathbf{0} \quad (3.73)$$

où  $\phi_k(\omega_d)$  est le  $k^{\text{ième}}$  pseudo-mode propre calculé pour le pseudo-problème aux valeurs propres évalué à  $\omega_d$ . L'approche multi-modèles est donc utilisée pour le calcul de la réponse dynamique alors que la réponse statique est évaluée de la même façon que dans le cas non amorti. L'extension de la méthode de Craig-Bampton au cas amorti par une approche multi-modèles peut-être trouvée par exemple dans les travaux de Balmès [6], de Rouleau [66] et de Lima et al [16].

Des extensions originales des méthodes de Craig-Bampton et de Rubin au cas amorti sont présentés dans la section suivante.

#### 3.3.2 Méthode à interfaces fixes

##### 3.3.2.1 Construction de la base statique

Les vecteurs de la base statique sont obtenus en posant  $\omega = 0$  dans l'équation (Eq. 3.72) et en imposant des déplacements unitaires à chaque ddl d'interface (section 3.2.2.1). Dans le cas amorti les modes statiques sont donc définis par la relation :

$$\Psi_{\text{IB}} = -(\mathbf{K}_{\text{II}}^0)^{-1} \mathbf{K}_{\text{IB}}^0 \quad (3.74)$$

où seule la matrice relaxée  $\mathbf{K}^0$  apparaît.

##### 3.3.2.2 Calcul de la réponse dynamique

Les modes de la base dynamique sont obtenus en appliquant des conditions limites de Dirichlet nulles aux interfaces dans l'équation (Eq. 3.71). Le système résultant est un problème aux valeurs propres complexes non-linéaire en fréquence. L'approche multi-modèle est utilisée pour remplacer ce problème non-linéaire en fréquence par le pseudo-problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{K}_{\text{II}}^0 + \Re(i\omega_{\text{d}} h^*(\omega_{\text{d}})) \mathbf{K}_{\text{II}}^\infty - \omega_{\text{d}}^2 \mathbf{M}_{\text{II}}) \phi_{\text{Ik}}(\omega_{\text{d}}) = \mathbf{0}_{\text{I}} \quad (3.75)$$

Les modes de corps rigides sont exclus de la base dynamique par la condition limite en déplacement nulle aux interfaces. Pour une base  $\Phi_{\text{II}}(\omega_{\text{d}})$ , les modes  $\phi_k(\omega_{\text{d}})$  sont indépendants entre eux. Ils peuvent cependant être fortement colinéaires lorsque des pseudo-modes de deux bases calculées pour des valeurs différentes de  $\omega_{\text{d}}$  sont considérés, ce qui peut justifier l'emploi d'une procédure d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt. Dans la littérature, deux bases de pseudo-modes propres évaluées aux valeurs minimum et maximum de la plage de fréquence, combinées avec une correction statique, suffisent à garantir une bonne approximation de la dynamique du système amorti tout en tenant compte de la dépendance en fréquence du comportement [6, 66]. Dans le cas présent, la correction statique est déjà apportée par les modes contraints (section 3.2.2.1) de la méthode de Craig-Bampton. En résolvant l'équation (Eq. 3.75) aux valeurs  $\omega_{\text{d}} = \omega_{\text{min}}$  et  $\omega_{\text{d}} = \omega_{\text{max}}$ , les bases  $\Phi_{\text{min}}$  et  $\Phi_{\text{max}}$

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

---

sont obtenues. Elles respectent toutes les deux les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\Phi_{\omega_d}^T (\mathbf{K}_{II}^0 + \Re(i\omega_d \mathbf{h}^*(\omega_d)) \mathbf{K}_{II}^\infty) \Phi_{\omega_d} = \text{diag}_d(\omega_1^2, \dots, \omega_I^2) \quad (3.76)$$

$$\Phi_{\omega_d}^T \mathbf{M}_{II} \Phi_{\omega_d} = \mathbf{I}_{II} \quad (3.77)$$

La base de réduction dynamique  $\Phi_{Im}$  est obtenue en combinant les bases  $\Phi_{\min}$  et  $\Phi_{\max}$  respectivement tronquées à  $p$  et  $q \ll n_I$  modes, avec  $m = p + q$ .

#### 3.3.2.3 Réduction du problème

La prise en compte des liaisons aux interfaces et de la dynamique interne de la sous-structure donne l'écriture des déplacements complets en fonction des déplacements aux interfaces  $\mathbf{u}_B$ , des déplacements internes généralisés  $\mathbf{q}_m$  via une matrice de réduction  $\mathbf{R}$  telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

La matrice de réduction  $\mathbf{R}$ , de dimension  $n \times (n_B + m)$ , est composée des modes statiques et des pseudo-modes de vibration interne à  $\omega_{\min}$  et  $\omega_{\max}$  :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} & \mathbf{0}_{Bm} \\ \Psi_{IB} & \Phi_{Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} & \mathbf{0}_{Bp} & \mathbf{0}_{Bq} \\ \Psi_{IB} & \Phi_{Ip} & \Phi_{Iq} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Dans la dernière expression de la matrice  $\mathbf{R}$ , les termes  $\mathbf{0}_{Bq}$  et  $\Phi_{Iq}$  correspondent à ce que l'approche multi-modèle ajoute à la méthode de Craig-Bampton classique. Le reste de la matrice est exactement la matrice de réduction du cas non amorti où  $m = p$  et  $q = 0$ . Le système réduit est finalement donné par :

$$\left( \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB}^0 & \mathbf{0}_{Bm} \\ \mathbf{0}_{mB} & \bar{\mathbf{K}}_{mm}^0 \end{bmatrix} + i\omega \mathbf{h}^*(\omega) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB}^\infty & \bar{\mathbf{K}}_{Bm}^\infty \\ \bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty & \bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{BB} & \bar{\mathbf{M}}_{Bm} \\ \bar{\mathbf{M}}_{mB} & \bar{\mathbf{M}}_{mm} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

où  $\bar{\mathbf{M}}_{mB} = \bar{\mathbf{M}}_{Bm}^T$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{mB}^0 = (\bar{\mathbf{K}}_{Bm}^0)^T$  et  $\bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty = (\bar{\mathbf{K}}_{Bm}^\infty)^T$ . Le détail des différents termes de ces matrices réduites est donné par :

$$\bar{\mathbf{K}}_{BB}^0 = \mathbf{K}_{BB}^0 + \mathbf{K}_{BI}^0 \Psi_{IB} \quad (3.81)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mm}^0 = \Phi_{Im}^T \mathbf{K}_{II}^0 \Phi_{Im} \quad (3.82)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{BB}^\infty = \mathbf{K}_{BB}^\infty + \mathbf{K}_{BI}^\infty \Psi_{IB} + \Psi_{IB}^T \mathbf{K}_{IB}^\infty + \Psi_{IB}^T \mathbf{K}_{II}^\infty \Psi_{IB} \quad (3.83)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty = \Phi_{Im}^T (\mathbf{K}_{IB}^\infty + \mathbf{K}_{II}^\infty \Psi_{IB}) \quad (3.84)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty = \Phi_{Im}^T \mathbf{K}_{II}^\infty \Phi_{Im} \quad (3.85)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{BB} = \mathbf{M}_{BB} + \mathbf{M}_{BI} \Psi_{IB} + \Psi_{IB}^T \mathbf{M}_{IB} + \Psi_{IB}^T \mathbf{M}_{II} \Psi_{IB} \quad (3.86)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mB} = \Phi_{Im}^T (\mathbf{M}_{IB} + \mathbf{M}_{II} \Psi_{IB}) \quad (3.87)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mm} = \Phi_{Im}^T \mathbf{M}_{II} \Phi_{Im} \quad (3.88)$$

Il est à noter qu'en raison de l'approche multi-modèles, les termes  $\bar{\mathbf{K}}_{mm}^0$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty$  et  $\bar{\mathbf{M}}_{mm}$  ne sont plus diagonaux. L'inversion de ces termes au moment de la condensation peut tout de même être réalisée à moindre coût en tenant compte de la nature creuse de ces matrices. Des blocs hors diagonaux apparaissent aussi dans les matrices de raideur réduites contrairement au cas non-amorti.

#### 3.3.2.4 Condensation sur les interfaces

La procédure de condensation est la même que dans le cas non-amorti : les inconnues de déplacement généralisées  $\mathbf{q}_m$  sont réécrites en fonction des déplacements aux interfaces grâce à la seconde ligne du système (Eq. 3.23) :

$$\mathbf{q}_m = \underbrace{\left( \bar{\mathbf{K}}_{mm}^0 + i\omega h^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mm} \right)^{-1} \left( \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mB} - \bar{\mathbf{K}}_{mB}^0 - i\omega h^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty \right)}_{\mathbf{A}_{mB}} \mathbf{u}_B \quad (3.89)$$

La matrice  $\bar{\mathbf{M}}_{mm}$  est ici tri-diagonale tandis que la matrice  $\bar{\mathbf{K}}_{mm}^0$  possède un bloc diagonal. Il est alors tentant d'utiliser une inversion par blocs pour accélérer la condensation,

cependant la matrice  $\bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty$  est pleine, ce qui rend inutile l'inversion par bloc. En injectant ensuite l'équation (Eq. 3.89) dans la première ligne de (Eq. 3.23), le système condensé aux interfaces faisant intervenir le super-élément est obtenu :

$$(\mathbf{K}_{\text{super}}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{super}}(\omega)) \mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B \quad (3.90)$$

Le super-élément est défini par ses matrices de raideur et de masse dont les expressions sont :

$$\mathbf{K}_{\text{super}}(\omega) = \bar{\mathbf{K}}_{BB}^0 + i\omega h^*(\omega) (\bar{\mathbf{K}}_{BB}^\infty + \bar{\mathbf{K}}_{Bm}^\infty \mathbf{A}_{mB}) \quad (3.91)$$

$$\mathbf{M}_{\text{super}}(\omega) = \bar{\mathbf{M}}_{BB} + \bar{\mathbf{M}}_{Bm} \mathbf{A}_{mB} \quad (3.92)$$

#### 3.3.2.5 Validation de la méthode

Des super-éléments de type Craig-Bampton construits avec une approche multi-modèle sont utilisés pour remplacer les quatre liaisons viscoélastiques de la structure. Les FRFs de ces structures réduites sont calculées dans le cas d'un chargement harmonique sous les liaisons, dans le plan horizontal. La plage de fréquence étudiée est ici comprise entre 0 et 1500 Hz, et les déplacements observés pour les FRFs sont ceux du point d'observation présenté dans la figure (Fig. 2).

Les super-éléments sont comparés en fonction de leur taille de base dynamique, dépendant du nombre de pseudo-modes propres calculés à fréquence nulle ou à fréquence maximale. Le nombre de pseudo-modes calculés à fréquence nulle varie ici de 140 à 220, avec un pas de 40 modes. Le nombre de pseudo-modes calculés à la fréquence maximale varie de 0 à 120, pour vérifier l'utilité de l'approche multi-modèle et tester sa convergence. Le nombre de pseudo-modes à fréquence maximale varie de 40 en 40. Les fréquences propres maximales contenues dans les bases dynamiques des super-éléments sont données dans le tableau (Tab. 3.5). Les FRFs obtenues avec ces super-éléments sont présentées dans les figures (Fig. 3.15, 3.17 et 3.19) pour les super-éléments construits avec 140, 180 et 220 pseudo-modes à fréquence nulle.

Sur les figures (Fig. 3.16) et (Fig. 3.18), les résultats du super-élément construit sans l'approche multi-modèles semble s'écarter de la solution de référence dès 340 Hz. Les autres super-éléments, construit avec l'approche multi-modèles, donnent de meilleurs résultats

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

---

TABLE 3.5 – Fréquences propres maximales des pseudo-modes de l’approche multi-modèles pour la méthode de Craig-Bampton

Numéro du mode	$\omega_{\min}$	$\omega_{\max}$
	Fréquence propre	Fréquence propre
40	-	1101 Hz
80	-	1419 Hz
120	-	1672 Hz
140	566 Hz	-
180	630 Hz	-
220	671 Hz	-

dans tous les cas de figure, justifiant l’emploi de cette méthode dans le cas amorti.

Dans le cas où la base de pseudo-modes calculés à fréquence nulle contient 140 modes, la figure (Fig. 3.16) montre que les super-éléments construits avec l’approche multi-modèles donnent quasiment les mêmes résultats, et que leur solution s’écarte de la référence aux alentours de 730 Hz, indépendamment du nombre de modes contenus dans la base des pseudo-modes à fréquence maximale. Ces résultats semblent indiquer que, dans ce cas d’application, 40 pseudo-modes à fréquence maximale sont suffisants pour obtenir des résultats convergés. Cette observation est confirmée par les figures (Fig. 3.18) et (Fig. 3.20), où les résultats des super-éléments construits avec l’approche multi-modèles sont à chaque fois les mêmes.

En revanche, en comparant les figures (Fig. 3.16) et (Fig. 3.18), une nette amélioration des résultats des super-éléments construits avec l’approche multi-modèles est observée : la fréquence limite à partir de laquelle les résultats se détériorent passe de 730 Hz (super-éléments avec 140 pseudo-modes à fréquence nulle) à 1300 Hz (super-éléments avec 180 pseudo-modes à fréquence nulle). Le nombre de pseudo-modes à fréquence nulle, nécessaire à la convergence des résultats, est ici plus de 4 fois plus important que le nombre de pseudo-modes à fréquence maximale.

Enfin, une comparaison des courbes (Fig. 3.18) et (Fig. 3.20) montre que 180 est ici le nombre optimal de pseudo-modes à fréquence nulle.

Dans le cas présent, le meilleur super-élément en terme de rapport nombre de modes / résultats est celui à 180 et 40 pseudo-modes à fréquence nulle et maximale. Les facteurs

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

---

TABLE 3.6 – Comparaison des temps de calcul offline et online de la méthode de Craig-Bampton et du calcul de référence, dans le cas amorti viscoélastique (en temps CPU)

	Craig-Bampton	Référence
Base dynamique	45min $\times$ 2	-
Base statique	21min	-
Total offline	1h 51min	-
Calcul d'un pas de fréquence	1,32s	1min 10s ( $\approx 50 \times$ C-B)
Calcul FRF	33min	27h

de fréquence de ces deux bases dynamiques sont de 0,4 et de 0,7. Le calcul des FRFs avec le super-élément de type Craig-Bampton à 180 et 120 pseudo-modes, à fréquence nulle et maximale, est ici d'environ 33min contre 27h pour le calcul de référence, sur un seul processeur. Le facteur de gain de temps est d'environ 50, ce qui représente une diminution par rapport au cas non amorti. Cet écart est causé par le temps supplémentaire pris par la condensation et par la taille de la matrice à inverser qui est augmentée en raison de l'approche multi-modèles. Le tableau (Tab. 3.6) donne les temps de construction du super-élément de Craig-Bampton, avec 180 pseudo-modes à fréquence nulle et 120 pseudo-modes à fréquence maximale, et une comparaison des temps de calcul des FRF entre la méthode de Craig-Bampton et le calcul de référence.

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

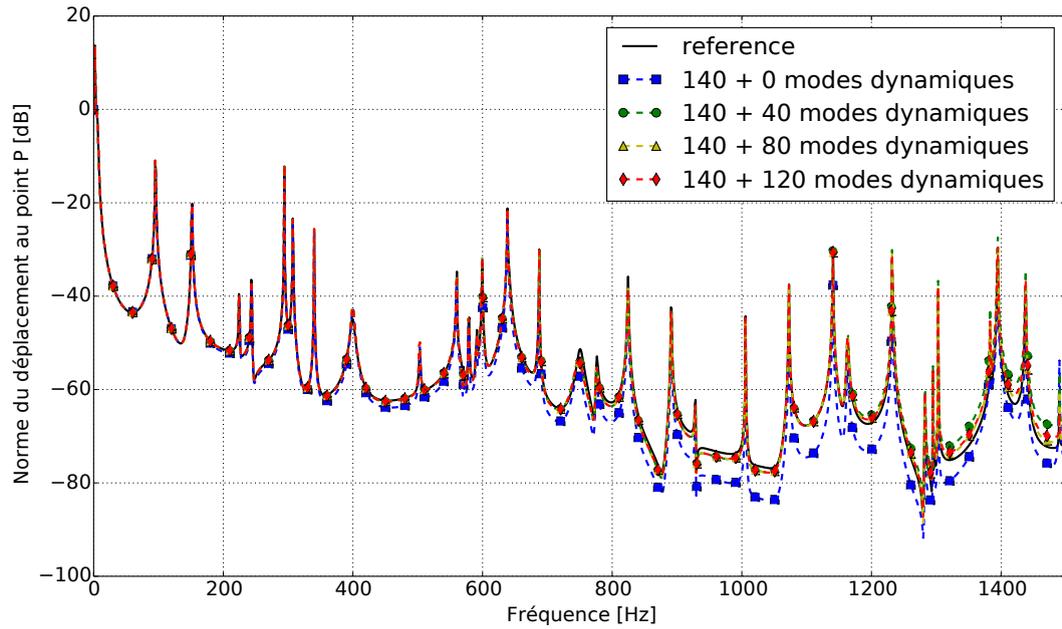


FIGURE 3.15 – FRFs calculées avec 140 pseudo-modes à fréquence nulle et à interfaces fixes, dans le cas amorti

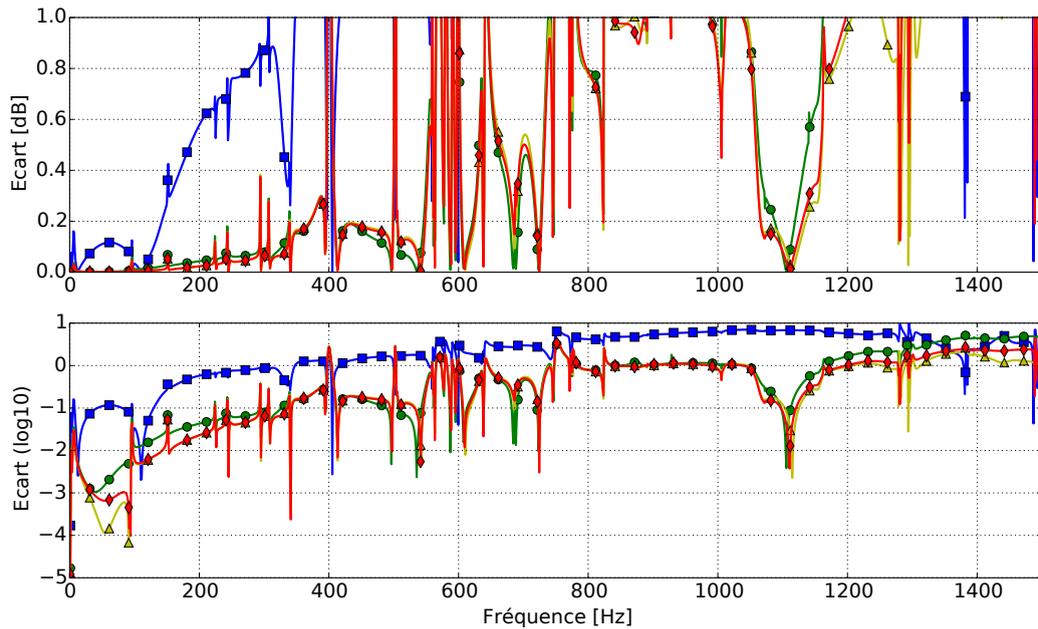


FIGURE 3.16 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

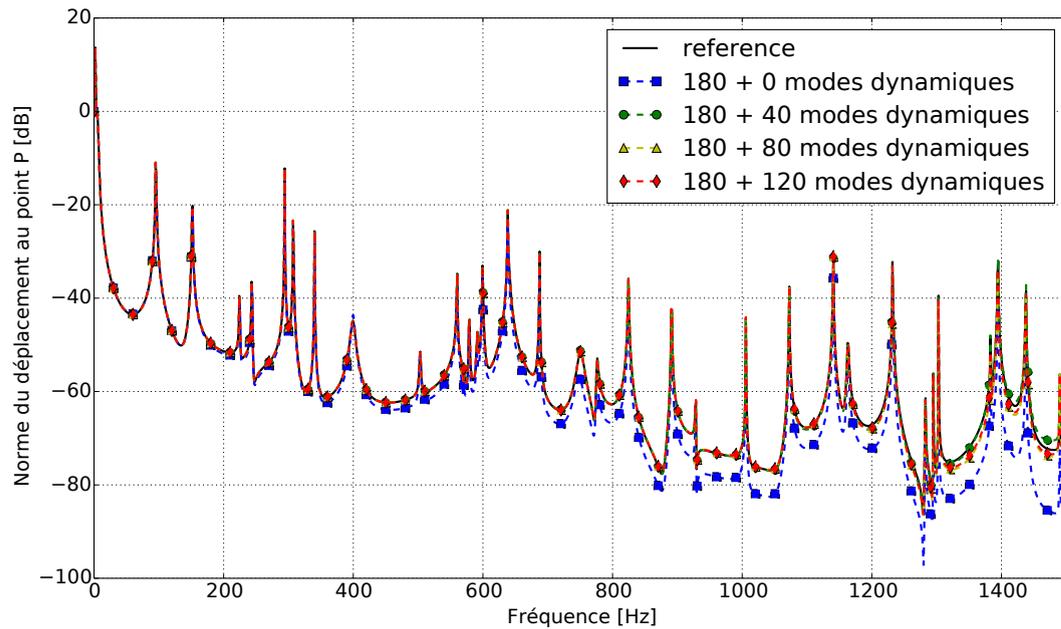


FIGURE 3.17 – FRFs calculées avec 180 pseudo-modes à fréquence nulle et à interfaces fixes, dans le cas amorti

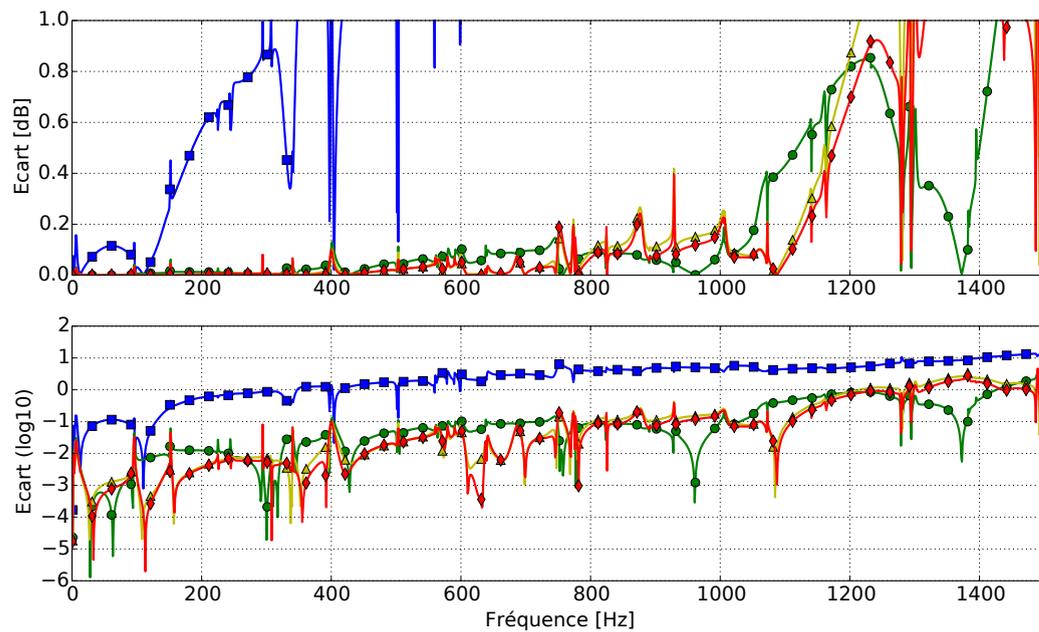


FIGURE 3.18 – Écart en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

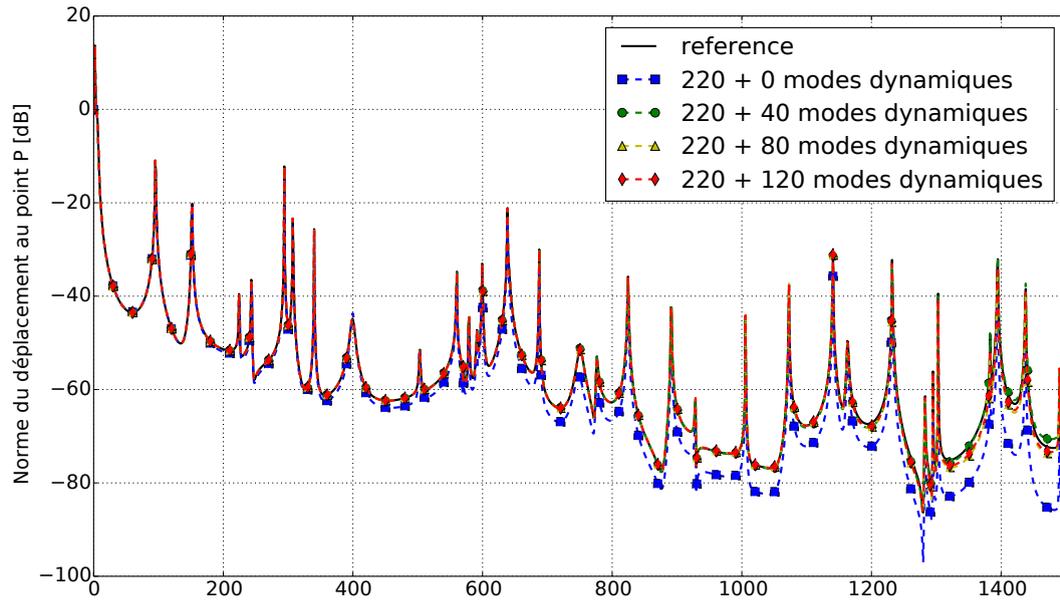


FIGURE 3.19 – FRFs calculées avec 220 pseudo-modes à fréquence nulle et à interfaces fixes, dans le cas amorti

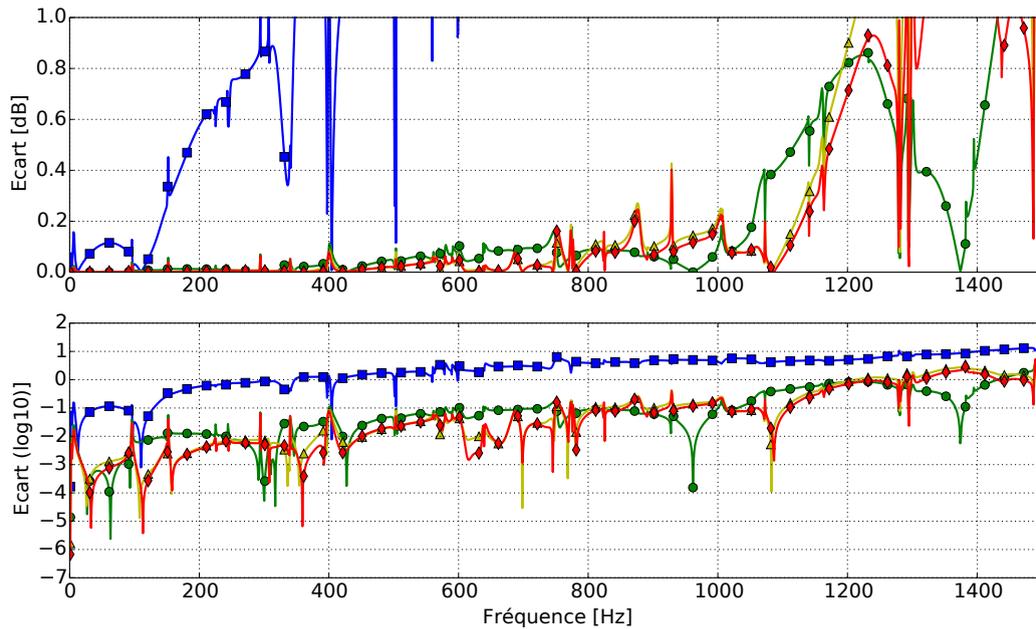


FIGURE 3.20 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence

### 3.3.3 Méthode à interfaces libres

#### 3.3.3.1 Construction de la base dynamique

La base dynamique dans le cas d'interfaces libres est simplement la base des modes propres de la structure libre. L'approche multi-modèle (section 3.3.2.2) est à nouveau utilisée pour prendre en compte la dépendance en fréquence de la raideur avec le pseudo-problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{K}^0 + \Re(i\omega_d \mathbf{h}^*(\omega_d)) \mathbf{K}^\infty - \omega_k^2 \mathbf{M}) \phi_k(\omega_d) = \mathbf{0} \quad (3.93)$$

La condition d'interfaces libres conduit à l'apparition des six modes de corps rigide. Ces modes traduisent un déplacement sans déformation et sont donc invariants lorsque la raideur change. Pour éviter toute redondance, seuls les modes de corps rigides calculés à  $\omega_d = \omega_{\min}$  sont retenus dans la base de réduction. Ces modes sont rangés dans les six colonnes d'une matrice notée  $\Phi_r$  telle que :

$$\Phi_r^T \mathbf{K}^0 \Phi_r = \mathbf{0}_{rr} \quad \text{et} \quad \Phi_r^T \mathbf{M} \Phi_r = \mathbf{I}_{rr} \quad (3.94)$$

Les modes de déformation, calculés respectivement pour  $\omega_d = \omega_{\min}$  et  $\omega_d = \omega_{\max}$  sont rangés dans les matrices  $\Phi_{\min}$  et  $\Phi_{\max}$ , qui respectent les conditions suivantes :

$$\Phi_{\omega_d}^T (\mathbf{K}^0 + \Re(i\omega_d \mathbf{h}^*(\omega_d)) \mathbf{K}^\infty) \Phi_{\omega_d} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \quad (3.95)$$

$$\Phi_{\omega_d}^T \mathbf{M} \Phi_{\omega_d} = \mathbf{I} \quad (3.96)$$

La base de réduction dynamique  $\Phi_m$  est finalement obtenue en combinant la base  $\Phi_r$  et les bases  $\Phi_{\min}$  et  $\Phi_{\max}$  respectivement tronquées à  $p$  et  $q$  modes, tel que  $m = p + q + 6$ .

#### 3.3.3.2 Construction de la base statique

Les modes d'attache résiduelle du cas amorti sont calculés de la même façon que dans le cas sans amortissement. Quelques différences apparaissent tout de même :

- La matrice de flexibilité  $\mathbf{G}_c$  (section 3.39) est ici construite à partir de  $\mathbf{K}^0$ .
- La matrice de projection  $\mathbf{P}$  (Eq. 3.45) d'auto-équilibrage est construite à partir des modes de corps rigide solutions du pseudo-problème aux valeurs propres (Eq. 3.93) avec  $\omega_d = 0$ , soit les modes de corps rigide qui respectent les conditions (Eq. 3.94).

- La dernière étape du calcul des modes d'attache résiduelle (Eq. 3.49) utilise les modes de déformation du pseudo-problème aux valeurs propres (Eq. 3.93) avec  $\omega_d = 0$ .

### 3.3.3.3 Réduction du problème

La procédure de la méthode Rubin (section 3.2.3.4) permettant de passer des efforts d'interface aux déplacements d'interface conduit à la construction de la matrice de réduction  $\mathbf{R}$  telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

où la matrice de réduction est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} & \mathbf{0}_{Bm} \\ \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} & \Phi_{Im} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} & \mathbf{0}_{Br} & \mathbf{0}_{Bp} & \mathbf{0}_{Bq} \\ \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} & \Phi_{Ir} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Br} & \Phi_{Ip} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bp} & \Phi_{Iq} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bq} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Il est à noter que les termes ayant pour dernier indice  $q$  correspondent à ce que l'approche multi-modèle a ajouté à la base de réduction. En enlevant cette dernière colonne, la matrice de réduction serait la même que dans le cas non-amorti. Le système réduit est alors donné par :

$$\left( \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB}^0 & \bar{\mathbf{K}}_{Bm}^0 \\ \bar{\mathbf{K}}_{mB}^0 & \bar{\mathbf{K}}_{mm}^0 \end{bmatrix} + i\omega h^*(\omega) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB}^\infty & \bar{\mathbf{K}}_{Bm}^\infty \\ \bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty & \bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{BB} & \bar{\mathbf{M}}_{Bm} \\ \bar{\mathbf{M}}_{mB} & \bar{\mathbf{M}}_{mm} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Le détail des différents termes de ces matrices réduites sont donnés par :

$$\bar{\mathbf{K}}_{BB}^0 = \mathbf{K}_{BB}^0 + \mathbf{K}_{BI}^0 \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} + \Psi_{BB}^{-T} \Psi_{IB}^T \mathbf{K}_{IB}^0 + \Psi_{BB}^{-T} \Psi_{IB}^T \mathbf{K}_{II}^0 \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \quad (3.100)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Bm}^0 = \left( \mathbf{K}_{BI}^0 + \Psi_{BB}^{-T} \Psi_{IB}^T \mathbf{K}_{II}^0 \right) (\Phi_{Im} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm}) \quad (3.101)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mm}^0 = (\Phi_{Im} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm})^T \mathbf{K}_{II}^0 (\Phi_{Im} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm}) \quad (3.102)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{BB}^\infty = \mathbf{K}_{BB}^\infty + \mathbf{K}_{BI}^\infty \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} + \Psi_{BB}^{-T} \Psi_{IB}^T \mathbf{K}_{IB}^\infty + \Psi_{BB}^{-T} \Psi_{IB}^T \mathbf{K}_{II}^\infty \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \quad (3.103)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{Bm}^\infty = \left( \mathbf{K}_{BI}^\infty + \Psi_{BB}^{-T} \Psi_{IB}^T \mathbf{K}_{II}^\infty \right) (\Phi_{Im} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm}) \quad (3.104)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty = (\Phi_{Im} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm})^T \mathbf{K}_{II}^\infty (\Phi_{Im} - \Psi_{IB} \Psi_{BB}^{-1} \Phi_{Bm}) \quad (3.105)$$

$$(3.106)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{BB} = \mathbf{M}_{BB} + \mathbf{M}_{BI} \boldsymbol{\Psi}_{Iar} \boldsymbol{\Psi}_{Bar}^{-1} + \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-T} \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{M}_{IB} + \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-T} \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{M}_{II} \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \quad (3.107)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{Bm} = \left( \mathbf{M}_{BI} + \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-T} \boldsymbol{\Psi}_{IB}^T \mathbf{M}_{II} \right) \left( \boldsymbol{\Phi}_{Im} - \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Bm} \right) \quad (3.108)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mm} = \left( \boldsymbol{\Phi}_{Im} - \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Bm} \right)^T \mathbf{M}_{II} \left( \boldsymbol{\Phi}_{Im} - \boldsymbol{\Psi}_{IB} \boldsymbol{\Psi}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_{Bm} \right) \quad (3.109)$$

où  $\bar{\mathbf{K}}_{mB}^0 = (\bar{\mathbf{K}}_{Bm}^0)^T$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty = (\bar{\mathbf{K}}_{Bm}^\infty)^T$  et  $\bar{\mathbf{M}}_{mB} = \bar{\mathbf{M}}_{Bm}^T$ . Les matrices réduites de la méthode de Rubin sont déjà pleines dans le cas non-amorti, par conséquent le remplissage des matrices dû à l'approche multi-modèles n'est ici pas un handicap.

**Condensation sur les interfaces** La procédure de condensation est la même que dans le cas non-amorti : les inconnues de déplacement généralisé  $\mathbf{q}_m$  sont réécrites en fonction des déplacements aux interfaces grâce à la seconde ligne du système (Eq. 3.99) :

$$\mathbf{q}_m = \underbrace{\left( \bar{\mathbf{K}}_{mm}^0 + i\omega h^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mm} \right)^{-1}}_{\mathbf{A}_{mB}} \left( \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mB} - \bar{\mathbf{K}}_{mB}^0 - i\omega h^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty \right) \mathbf{u}_B \quad (3.110)$$

Avec la méthode de Rubin, que le système présente ou non de l'amortissement, la matrice à inverser dans l'expression de  $\mathbf{A}_{mB}$  est pleine. Son inversion ne présente donc aucun temps de calcul supplémentaire pour le cas amorti. En injectant l'équation (Eq. 3.110) dans la première ligne de (Eq. 3.99), il est possible de faire apparaître un super-élément tel que :

$$\left( \mathbf{K}_{\text{super}}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{super}}(\omega) \right) \mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B \quad (3.111)$$

où le super-élément est défini par ses matrices de raideur et de masse qui dépendent de  $\omega$  :

$$\mathbf{K}_{\text{super}}(\omega) = \bar{\mathbf{K}}_{BB}^0 + i\omega h^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{BB}^\infty + \left( \bar{\mathbf{K}}_{Bm}^0 + i\omega h^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{Bm}^\infty \right) \mathbf{A}_{mB} \quad (3.112)$$

$$\mathbf{M}_{\text{super}}(\omega) = \bar{\mathbf{M}}_{BB} + \bar{\mathbf{M}}_{Bm} \mathbf{A}_{mB} \quad (3.113)$$

### 3.3.3.4 Validation et comparaison avec la méthode de Craig-Bampton

Des super-éléments de type Rubin construits avec une approche multi-modèle sont utilisés pour remplacer les quatre liaisons viscoélastiques de la structure. Les FRFs de ces structures réduites sont calculées dans le cas d'un chargement harmonique sous les liaisons, dans le plan horizontal. La plage de fréquence étudiée est ici comprise entre 0 et 1500 Hz, et les déplacements observés pour les FRFs sont ceux du point d'observation P présenté

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

TABLE 3.7 – Fréquences propres maximales des pseudo-modes de l’approche multi-modèles pour la méthode de Rubin, dans le cas amorti viscoélastique

Numéro du mode	$\omega_{\min}$	$\omega_{\max}$
	Fréquence propre	Fréquence propre
40	-	1084 Hz
80	-	1408 Hz
120	-	1672 Hz
146	566 Hz	-
186	619 Hz	-

dans la figure (Fig. 2).

Les super-éléments sont comparés en fonction de leur taille de base dynamique, à la fois dépendante du nombre de pseudo-modes propres calculés à fréquence nulle, et du nombre de pseudo-modes à la fréquence maximale. Le nombre de pseudo-modes calculés à fréquence nulle sont ici de 146 ou de 186. Le nombre de pseudo-modes calculés à la fréquence maximale varie de 0 à 120, permettant ainsi de vérifier l’utilité de l’approche multi-modèle et de tester sa convergence. Le nombre de pseudo-modes à fréquence maximale varie de 40 en 40. Les fréquences propres maximales contenues dans les bases dynamiques des super-éléments sont données dans le tableau (Tab. 3.7). Les FRFs obtenues avec ces super-éléments sont présentées dans les figures (Fig. 3.21) et (Fig. 3.23) pour les super-éléments construits avec 146 et 186 pseudo-modes à fréquence nulle.

Sur les figures (Fig. 3.22) et (Fig. 3.24), les résultats du super-élément construit sans l’approche multi-modèles semble s’écarter de la solution de référence dès 340 Hz, comme avec la méthode de Craig-Bampton. Les autres super-éléments, construits avec l’approche multi-modèles, donnent de meilleurs résultats dans tous les cas de figure, justifiant l’emploi de cette technique avec la méthode de Rubin dans le cas amorti.

Dans le cas où la base de pseudo-modes calculés à fréquence nulle contient 140 modes, la figure (Fig. 3.22) montre que les résultats des super-éléments de type Rubin, construits avec l’approche multi-modèles, s’améliorent lorsque le nombre de pseudo-modes à fréquence maximale augmente :

- Le super-élément à 40 pseudo-modes à fréquence maximale donne de bons résultats jusqu’à 1200 Hz, au lieu de 730 avec la méthode de Craig-bampton. Cela correspond

à un facteur de fréquence de 0,9 pour ce super-élément.

- Avec 80 pseudo-modes à fréquence maximale, le super-élément donne de bons résultats jusqu'à 1400 Hz, au lieu de 730 avec la méthode de Craig-Bampton. Le facteur de fréquence de ce super-élément est ici de 1.
- Finalement, le troisième super-élément, avec 120 pseudo-modes à fréquence maximale donne de bons résultats sur l'ensemble de la plage de fréquence.

Ces résultats semblent indiquer que la méthode de Rubin est mieux adaptée que la méthode de Craig-Bampton au cas amorti : les facteurs de fréquence de la méthode de Rubin sont les plus petits, et les résultats sont plus proches de la solution de référence.

La figure (Fig. 3.24) montre qu'une augmentation du nombre de pseudo-modes à fréquence nulle permet d'améliorer la qualité des résultats des super-éléments construits avec l'approche multi-modèles. En revanche la fréquence limite de validité de ces super-éléments reste inchangée. Les résultats des super-éléments à 146 pseudo-modes à fréquence nulle étant déjà très proches de la solution de référence, il est raisonnable de considérer le super-élément à 146 et 120 pseudo-modes à fréquence nulle et maximale comme étant optimal. Les facteurs de fréquence permettant la convergence des résultats dans ce cas sont alors de 0,4 pour la base des pseudo-modes à fréquence nulle et de 1,1 pour la base des pseudo-modes à fréquence maximale. Ce deuxième facteur est supérieur à celui de la méthode de Craig-Bampton, mais les résultats obtenus par la méthode de Rubin sont plus précis que ceux de la méthode de Craig-Bampton.

Le calcul des FRFs avec le super-élément de type Rubin à 180 et 120 pseudo-modes, sur un seul processeur, est d'environ 39min, contre 27h pour le calcul de référence, soit un facteur de gain de temps d'environ 45. Le tableau (Tab. 3.8) donne le temps de construction du super-élément de Rubin, ainsi qu'une comparaison des temps calcul des FRFs avec la méthode de Craig-Bampton et le calcul de référence. Dans le cas amorti, les temps de calcul de la méthode de Rubin sont allongés en raison de l'approche multi-modèles. Toutefois, puisque les matrices réduites sont déjà pleines dans le cas non amorti, le gain en temps de calcul observé n'est pas autant diminué que dans le cas non amorti par rapport à la méthode de Craig-Bampton. La méthode Rubin présente aussi une meilleure convergence des résultats dans le cas amorti par rapport à la méthode de Craig-Bampton, à taille de

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

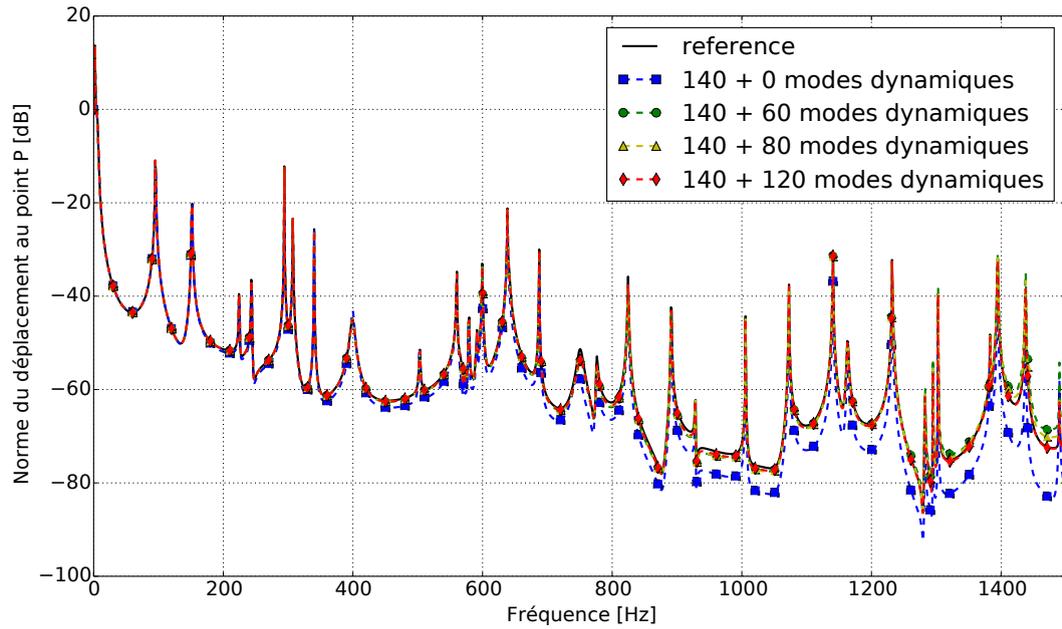


FIGURE 3.21 – FRFs calculées avec 140 pseudo-modes à fréquence nulle et à interfaces libres, dans le cas amorti

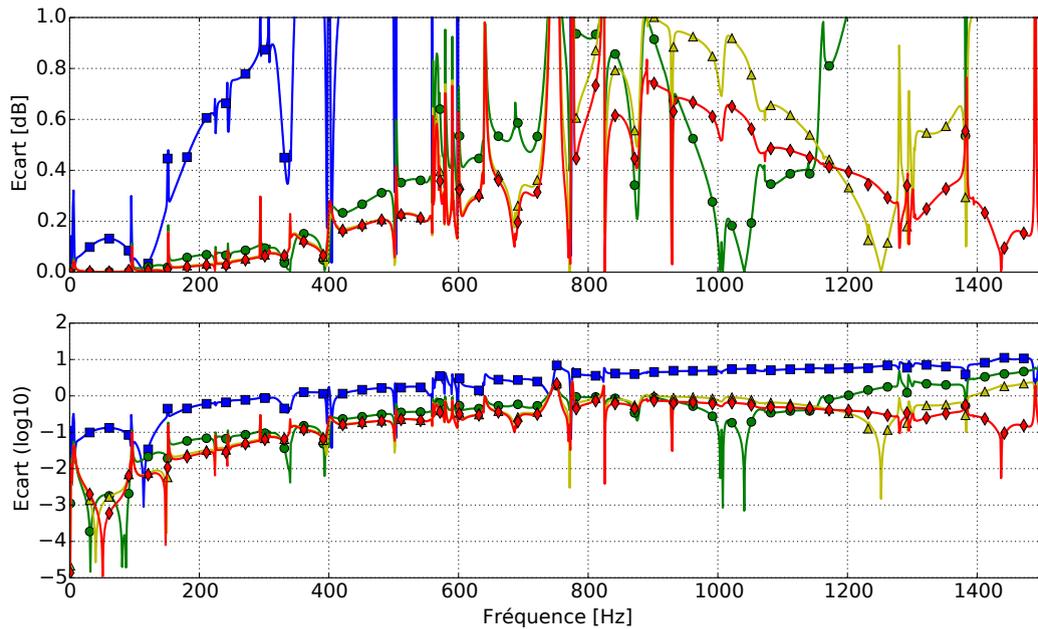


FIGURE 3.22 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence

### 3.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

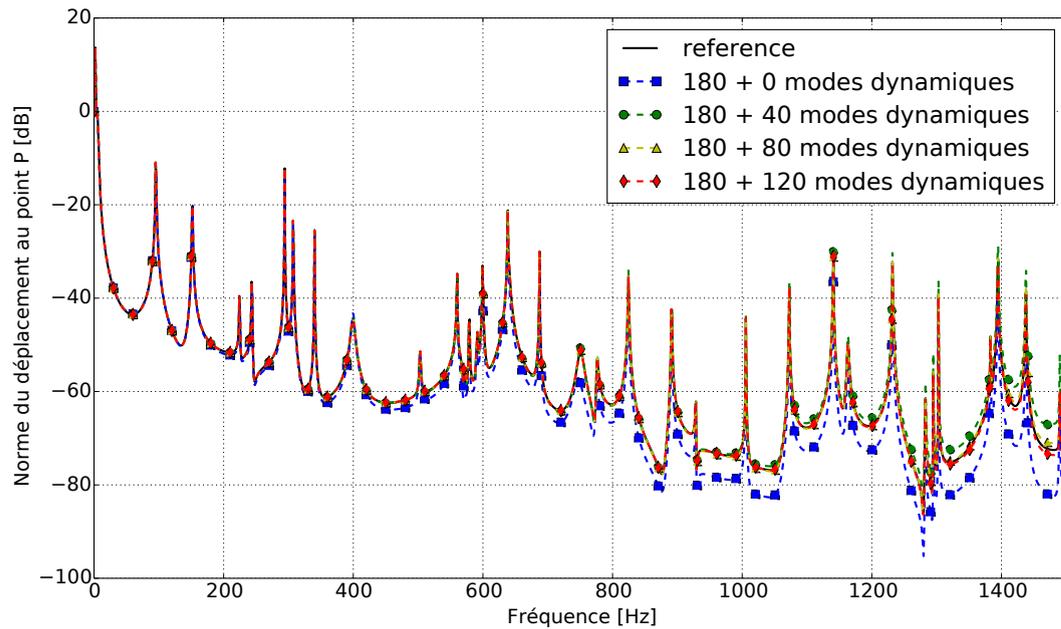


FIGURE 3.23 – FRFs calculées avec 180 pseudo-modes à fréquence nulle et à interfaces libres, dans le cas amorti

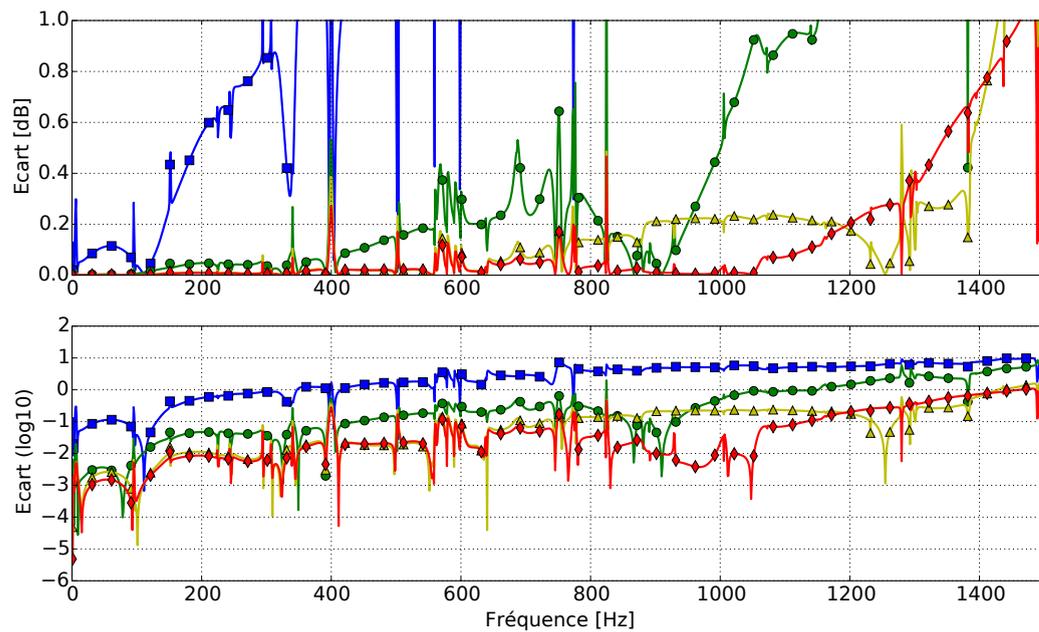


FIGURE 3.24 – Écart en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence

### 3.4. CONCLUSION

---

TABLE 3.8 – Comparaison des temps de calcul offline et online de la méthode de Rubin avec la méthode de Craig-Bampton et avec le calcul de référence, dans le cas amorti viscoélastique (en temps CPU)

	Rubin	Craig-Bampton	Référence
Base dynamique	2h 10min $\times$ 2	45min $\times$ 2	-
Base statique	8h 56min	21min	-
Total offline	11h 6min (6 $\times$ C-B)	1h 51min	-
Calcul d'un pas de fréquence	1,56s (1,2 $\times$ C-B)	1,32s	1min 10s ( $\approx$ 45 $\times$ Ru)
Calcul FRF	39min	33min	27h

base dynamique équivalente.

### 3.4 Conclusion

Les méthodes de sous-structuration de Craig-Bampton et de Rubin ont été appliquées avec succès à la réduction d'un modèle de liaison élastomère, dans le cas non amorti et dans le cas amorti viscoélastique où une approche multi-modèles est utilisée pour prendre en compte le comportement dissipatif des élastomères dans la base de réduction.

Les super-éléments obtenus permettent de réduire les temps de calcul des FRF d'un facteur allant de 50 à 100 suivant le cas étudié et la méthode de réduction utilisée. Dans l'ensemble, les temps de calcul des FRFs sont du même ordre de grandeur. En revanche le temps de construction des super-éléments est nettement plus important pour la méthode de Rubin, environ 10 fois plus que la méthode de Craig-Bampton, essentiellement à cause du calcul des modes statiques.

En terme de précision, la méthode de Craig-Bampton affiche les meilleurs résultats dans le cas non amorti alors que la méthode de Rubin semble plus adaptée au cas amorti viscoélastique. Cependant, dans les deux cas les méthodes présentent de bons résultats. Le choix d'une méthode de sous-structuration doit donc plutôt être fait par rapport à la difficulté d'implémentation de ces méthodes, et par rapport au temps de construction des super-éléments.

### 3.4. CONCLUSION

---

Dans cette étude, l'avantage va à la méthode de Craig-Bampton qui est à la fois la plus simple à mettre en œuvre, et la plus rapide, que ce soit pour construire le super-élément ou pour calculer les FRFs. Un autre atout de cette méthode est sa prédictibilité en terme de nombre de modes à retenir dans la base dynamique :

- Dans le cas non amorti, la méthode converge lorsque la base dynamique contient des modes dont les fréquences propres vont jusqu'à 1,1 fois la fréquence maximale d'étude.
- Dans le cas amorti, la méthode converge lorsque la base des pseudo-modes à fréquence nulle contient les modes dont les fréquences propres vont jusqu'à 0,4 fois la fréquence maximale étudiée, et lorsque la base des pseudo-modes à fréquence maximale contient les modes dont les fréquences propres vont jusqu'à 0,7 fois la fréquence maximale étudiée.

Bien que la méthode de Rubin présente moins d'avantages que la méthode de Craig-Bampton, il est à retenir que ses résultats sont meilleurs dans le cas amorti viscoélastique. Les observations suivantes sont faites concernant le choix de la taille de la base dynamique des modes à interfaces libres :

- Dans le cas non amorti, l'écart entre la fréquence propre maximale contenue dans la base dynamique et la fréquence maximale d'étude diminue jusqu'à atteindre une valeur limite de 1,2 à partir de 450 Hz. La méthode de Rubin semble donc être mieux adaptée aux études sur des plages de fréquence étendues où le facteur d'écart est le plus petit possible. En revanche, pour des études sur des plages de fréquence basses, le nombre de modes nécessaires à la convergence des résultats représente un handicap face à la méthode de Craig-Bampton.
- Dans le cas amorti, la méthode converge lorsque la base des pseudo-modes à fréquence nulle contient les modes dont les fréquences propres vont jusqu'à 0,4 fois la fréquence maximale étudiée. Le facteur de fréquence pour la base des pseudo-modes à fréquence maximale est dans ce cas de 1,1. Les résultats observés sont ici meilleurs que dans le cas d'interfaces fixes, ce qui représente l'unique avantage de la méthode de Rubin sur la méthode de Craig-Bampton.

### 3.4. CONCLUSION

---

Il est important de noter que les conclusions présentées ici sont issues d'expérimentations numériques sur un exemple particulier. Même si ces résultats nécessiteraient d'être confirmés sur d'autres exemples (notamment dans le cas viscoélastique), ils fournissent une tendance intéressante et permettent de confirmer l'intérêt des méthodes de Craig-Bampton et de Rubin dans le cas amorti, étendues de façon originale avec une approche multi-modèles.

## Deuxième partie

# Prise en compte des non-linéarités géométriques dans les liaisons élastomères



## Chapitre 4

# Modélisation de liaisons élastomère précontraintes

**Résumé :** *Ce quatrième chapitre aborde la modélisation du comportement dynamique des liaisons élastomères autour d'un état précontraint. Dans un premier temps, quelques exemples de la littérature mettant en évidence la dépendance à la précharge de la dissipation dans les élastomères sont listés. Dans un second temps, le comportement hyperélastique et la mise en œuvre numérique de la précharge statique non-linéaire sont présentés. Une troisième section décrit la prise en compte de la précharge dans le comportement dynamique en utilisant une loi de comportement hyper-visco-élastique linéarisée autour de l'état précontraint.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction et état de l'art</b>	<b>120</b>
<b>4.2</b>	<b>Précharge statique non-linéaire des liaisons</b>	<b>122</b>
4.2.1	Potentiel hyperélastique des matériaux isotropes	122
4.2.2	Expression du tenseur des contraintes	124
4.2.3	Expression du tenseur d'élasticité	124
4.2.4	Choix d'un modèle hyperélastique	125
4.2.5	Mise en œuvre numérique du problème non-linéaire statique	130
<b>4.3</b>	<b>Comportement amortissant des liaisons préchargées</b>	<b>138</b>
4.3.1	Loi de comportement hyper-visco-élastique	138
4.3.2	Séparation des comportements en dilatation et distorsion	140
4.3.3	Expression du tenseur des contraintes	141
4.3.4	Linéarisation du comportement autour d'un état précontraint	142
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>148</b>

---

## 4.1 Introduction et état de l'art

Les pièces anti-vibratoires en élastomères étudiées dans ce travail doivent amortir les vibrations transmises tout en étant capables de transmettre une charge statique. Des précharges importantes allant jusqu'à de grandes déformations de la liaison peuvent ainsi apparaître. Ce comportement non-linéaire au niveau des liaisons doit être pris en compte pour :

- vérifier la tenue des liaisons au chargement statique ;
- mettre à jour les caractéristiques du matériau (raideur et amortissement) autour de l'état précontraint.

Dans deux études récentes [2, 3], Azoug met en évidence la dépendance à la précontrainte du comportement dynamique d'un élastomère fortement chargé par des essais de type DMA en traction, sur une éprouvette préchargée suivant une direction orthogonale à la direction de sollicitation. Les résultats montrent que les valeurs des parties réelle et imaginaire du module complexe de ce matériau augmentent rapidement dès que la précharge dépasse 1% de déformation.

Jalocha, dans [37, 38, 39], reprend les travaux d'Azoug et identifie la fonction de relaxation du même élastomère sous la forme d'une somme de trois fonctions de relaxation, liées à des comportements microscopiques spécifiques. Suite à ces observations, il propose dans [37] un modèle permettant de prendre en compte la dépendance à la précontrainte dans la deuxième des ces fonctions de relaxation et identifie dans [37] et [39] les paramètres de ce modèle en effectuant des essais DMA sur une éprouvette préchargée puis relaxée.

De façon similaire, Lion [46] étudie le comportement dynamique d'un élastomère pour différentes conditions de température et de précharge et identifie une dépendance du comportement à ces deux paramètres. Suite à ces travaux, Lion, Retka et Rendek [47] proposent de modéliser la dépendance à la précharge par une loi de comportement hyper-visco-élastique linéarisée autour de l'état précontraint. La loi de comportement utilisée dans cette thèse est tirée des travaux de Haupt et Lion [31] et utilise les notions de dérivées objectives et certains tenseurs introduits par Haupt et Tsakmakis dans [32]. D'autres modèles de comportement hyper-visco-élastique existent dans la littérature, tels que ceux proposés par Holzapfel et Simo [34, 36, 73] et Reese et Govindjee [60]. Une présentation compréhensible

de ces modèles et leurs utilisation sur un exemple d'application sont présentés dans [43] par Kaliske et Rothert. Gacem, dans [22], propose également un modèle hyper-visco-élastique combinant un modèle de Gent-Thomas à des fonctions de relaxation de type Maxwell. Un autre exemple de modèle non-linéaire tenant compte de la viscoélasticité est proposé par Saad [68], qui reprend les travaux de Schetzen [70] et utilise des séries de Volterra pour inclure une dépendance en temps dans une loi de comportement hyperélastique. Saad linéarise ensuite ce modèle autour d'un état précontraint pour modéliser la dépendance à la précharge.

En raison de son fondement théorique, le modèle hyper-visco-élastique proposé par Haupt et Lion [31] est choisi pour la suite de la thèse. En linéarisant ce modèle, Lion [47] obtient un modèle de Maxwell généralisé dont le premier ressort est hyperélastique, les autres branches du modèle étant toujours constituées d'éléments de Maxwell. Ce modèle permet de décrire le comportement dynamique d'un élastomère préchargé mais ses paramètres viscoélastiques sont encore indépendants de la précharge.

Un modèle similaire est présenté par Morman et Nagtegaal dans [52], avec le détail de la mise en œuvre numérique nécessaire à une application éléments finis.

Pour ajouter la dépendance dynamique à la précharge, Wollscheid et Lion [81] reprennent la loi de comportement hyper-visco-élastique issue de [31] en ajoutant une dépendance à la précontrainte des variables internes. En procédant à une linéarisation, le modèle obtenu est bien dépendant de la précharge et peut être identifié par des essais DMA autour de plusieurs états précontraints.

Suivant une idée similaire, Lejeunes, Nguyen Van, Boukamel et Eyheramendy proposent dans [45] un modèle de Zener modifié dont les deux ressorts sont hyperélastiques. De cette façon, une dépendance à la précontrainte est ajoutée à la partie dissipative du modèle. Il est à noter que les deux ressorts du modèle sont représentés par des modèles hyperélastiques différents.

Dans la suite de ce chapitre, le comportement hyperélastique des liaisons et sa prise en compte dans le calcul de la précharge statique sont détaillés. L'influence de cette précharge sur le comportement dynamique des liaisons est ensuite abordée : à partir de la loi de comportement hyper-visco-élastique utilisée dans [31] et [47], et grâce à une étape de li-

néarisation, un modèle de comportement linéaire amorti autour d'un état précontraint est obtenu. Ce modèle est équivalent au modèle de Lion [47], avec une écriture plus pratique pour son utilisation dans un code élément finis. La loi de comportement finalement obtenue correspond à modèle rhéologique constitué de deux ressorts hyper-élastiques en parallèle. Un élément dissipatif de type amortisseur ou spring-pot est placé en série avec l'un des ressorts.

### 4.2 Précharge statique non-linéaire des liaisons

Dans un premier temps, quelques éléments sur le comportement hyperélastique sont rappelés et le choix du modèle de Yeoh [82] qui est utilisé dans la suite est détaillé. Cette section se termine sur la mise en œuvre numérique du calcul de la précharge statique non-linéaire.

#### 4.2.1 Potentiel hyperélastique des matériaux isotropes

Les matériaux hyperélastiques sont capables de subir de grandes déformations sans dissiper d'énergie. D'un point de vue thermodynamique, cette capacité se traduit par l'existence d'un potentiel hyperélastique  $\phi$ . En effet, la seconde loi de la thermodynamique, ou inégalité de Clausius-Duheim, qui exprime la non-conservation de l'entropie par la dissipation d'énergie interne  $D_{\text{int}}$ , relie la puissance mécanique  $P$  engendrée par la déformation et le potentiel d'énergie  $\phi$ . Dans le cas des matériaux hyperélastiques (sans dissipation) cette relation s'écrit sous la forme de l'égalité suivante :

$$D_{\text{int}} = P - \dot{\phi} = 0 \quad (4.1)$$

En considérant que le potentiel  $\phi$  ne dépend que des mesures de déformation, sa dérivée par rapport au temps peut s'exprimer en configuration de référence par :

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{E}$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange. En remplaçant la puissance mécanique de déformation  $P$  par son expression en fonction des tenseurs des contraintes et

des déformations  $P = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$ , l'équation (Eq. 4.1) devient :

$$D_{\text{int}} = \left( \mathbf{S} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{S}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff. La seconde loi de la thermodynamique permet donc de déduire directement la loi de comportement des matériaux hyperélastiques, en reliant les contraintes et les déformations à travers la dérivée d'un potentiel d'énergie, avec :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (4.4)$$

En notant que  $2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$ , où  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  est le tenseur de Cauchy-Green droit et où  $\mathbf{F}$  est le tenseur gradient de la transformation, la loi de comportement s'écrit :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.5)$$

Une séparation des parties isochore et volumique est ensuite appliquée au potentiel hyperélastique :

$$\phi(\mathbf{C}) = \phi_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}) + \phi_{\text{vol}}(J) \quad (4.6)$$

où le tenseur de Cauchy-Green droit modifié s'écrit  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}$  avec  $J$  le déterminant du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$ . En considérant les élastomères de cette étude comme des matériaux isotropes, les tenseurs liés aux mesures des déformations peuvent être représentés directement par leurs trois invariants principaux  $I_1, I_2$  et  $I_3$ . Pour respecter la séparation des parties isochore et volumique, les invariants  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  et  $\bar{I}_3$  du tenseur modifié de Cauchy-Green droit sont introduits :

$$\bar{I}_1 = \text{tr}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (4.7)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2}(\bar{I}_1^2 - \bar{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{C}}) \quad (4.8)$$

$$\bar{I}_3 = \det(\bar{\mathbf{C}}) = 1 \quad (4.9)$$

Le potentiel hyperélastique s'exprime alors comme la somme d'une partie isochore, fonction des invariants du tenseur de Cauchy-Green droit modifié, et d'une partie volumique, fonction du déterminant du gradient de la transformation :

$$\phi(\mathbf{C}) = \phi_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + \phi_{\text{vol}}(J) \quad (4.10)$$

### 4.2.2 Expression du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est obtenu grâce à la loi de comportement (Eq. 4.5). Étant donnée l'écriture du potentiel hyperélastique, les contraintes sont donc elles aussi séparées en une partie isochore et une partie volumique, définies par :

$$\mathbf{S}_{\text{vol}} = 2 \frac{\partial \phi_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \phi_{\text{vol}}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{S}_{\text{iso}} = 2 \frac{\partial \phi_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left( \frac{\partial \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_1} \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + \frac{\partial \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2} \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right) : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.12)$$

En introduisant les dérivées des invariants modifiés, du déterminant du gradient de la transformation et du tenseur de Cauchy-Green droit modifié :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{I}}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{I} \quad , \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{I}}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \bar{\mathbf{I}}_1 \mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}} \quad , \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbb{P}^T, \quad (4.13)$$

les parties volumique et isochore du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff s'écrivent alors :

$$\mathbf{S}_{\text{vol}} = J \frac{\partial \phi_{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{S}_{\text{iso}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbb{P} : \bar{\mathbf{S}} \quad (4.15)$$

où  $\mathbb{P}$  est l'opérateur déviatorique d'ordre 4 donné par :

$$\mathbb{P} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \quad (4.16)$$

et où  $\bar{\mathbf{S}}$  est le tenseur modifié de Piola-Kirchoff 2, défini par :

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = 2 \left( \left[ \frac{\partial \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_1} + \bar{\mathbf{I}}_1 \frac{\partial \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2} \right] \mathbf{I} - \frac{\partial \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2} \bar{\mathbf{C}} \right) \quad (4.17)$$

### 4.2.3 Expression du tenseur d'élasticité

Le tenseur d'élasticité en configuration de référence  $\mathbb{C}$  relie le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff au tenseur des déformations de Green-Lagrange, par la relation suivante :

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{ou} \quad C_{IJKL} = \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}} \quad (4.18)$$

En notant que  $2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$ , cette dérivée devient :

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{ou} \quad C_{IJKL} = 2 \frac{\partial S_{IJ}}{\partial C_{KL}} \quad (4.19)$$

**La partie volumique** du tenseur d'élasticité est donnée par la dérivée de la partie volumique du tenseur des contraintes (Eq. 4.14) :

$$\mathbb{C}^{\text{vol}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}^{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial \phi^{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} + J \frac{\partial^2 \phi^{\text{vol}}}{\partial J \partial \mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} + J \frac{\partial \phi^{\text{vol}}}{\partial J} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (4.20)$$

En reprenant les dérivées des invariants données dans l'équation (Eq. 4.13) et en introduisant la dérivée suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = -\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} = -\frac{1}{2} (\mathbf{C}_{IK}^{-1} \mathbf{C}_{JL}^{-1} + \mathbf{C}_{IL}^{-1} \mathbf{C}_{JK}^{-1}), \quad (4.21)$$

**la partie volumique** du tenseur d'élasticité finie devient :

$$\mathbb{C}^{\text{vol}} = \left( J \frac{\partial \phi^{\text{vol}}}{\partial J} + J^2 \frac{\partial^2 \phi^{\text{vol}}}{\partial J^2} \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2J \frac{\partial \phi^{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} \quad (4.22)$$

La partie isochore du tenseur d'élasticité finie est obtenue à l'aide de la démonstration présente dans [35] (pages 255-256), et est définie par :

$$\mathbb{C}^{\text{iso}} = \mathbb{P} : \bar{\mathbb{C}} : \mathbb{P}^{\text{T}} + \frac{2}{3} \left[ J^{-\frac{2}{3}} (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \tilde{\mathbb{P}} - \mathbf{S}^{\text{iso}} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}^{\text{iso}} \right] \quad (4.23)$$

où  $\tilde{\mathbb{P}}$  désigne un tenseur d'ordre 4 donné par :

$$\tilde{\mathbb{P}} = \left( \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (4.24)$$

et où  $\bar{\mathbb{C}}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{C}} &= 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \quad (4.25) \\ &= \left( \frac{\partial^2 \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_1 \partial \bar{\mathbf{I}}_1} + \bar{\mathbf{I}}_1 \frac{\partial^2 \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_1 \partial \bar{\mathbf{I}}_2} + \bar{\mathbf{I}}_1 \frac{\partial^2 \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2 \partial \bar{\mathbf{I}}_1} + \bar{\mathbf{I}}_1^2 \frac{\partial^2 \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2 \partial \bar{\mathbf{I}}_2} + \frac{\partial \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_1 \partial \bar{\mathbf{I}}_2} + \bar{\mathbf{I}}_1 \frac{\partial^2 \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2 \partial \bar{\mathbf{I}}_1} \right) \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{C}} - \left( \frac{\partial^2 \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_1 \partial \bar{\mathbf{I}}_2} + \bar{\mathbf{I}}_1 \frac{\partial^2 \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2 \partial \bar{\mathbf{I}}_1} \right) \bar{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{I} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2 \partial \bar{\mathbf{I}}_2} \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}} - \frac{\partial \phi_{\text{iso}}}{\partial \bar{\mathbf{I}}_2} \mathbb{I} \quad (4.26) \end{aligned}$$

#### 4.2.4 Choix d'un modèle hyperélastique

Il existe dans la littérature de nombreux modèles hyperélastiques, chacun avec une expression spécifique du potentiel hyperélastique. Globalement, ces modèles peuvent être classés en deux catégories :

- **Les modèles phénoménologiques**, basés sur une expression polynomiale du potentiel hyperélastique pour différents jeux d'invariants de déformation. Parmi ces modèles, le modèle d'Ogden [55], qui peut s'écrire en fonction des élongations principales est souvent utilisé pour modéliser le comportement de certains élastomères. Ce modèle est représenté par un polynôme dont l'ordre est laissé au choix de l'utilisateur. Des modèles plus simples, écrits en fonction des invariants de la déformation, comme les modèles de Mooney [51] et Néo-Hookéen, sont représentés par des polynômes de degré 1. Ces modèles sont en général valables jusqu'aux déformations de l'ordre de 100%. Des modèles plus élaborés existent, notamment le modèle de Yeoh [82], qui est représenté par un polynôme de degré 3 du premier invariant. Yeoh montre que cet ordre est suffisant pour représenter l'allure en "S" caractéristique des essais de tractions sur éprouvettes en élastomère. Enfin, le modèle le plus général, à partir duquel sont dérivés la quasi-totalité des modèles phénoménologiques, est le modèle de Mooney-Rivlin [51, 62, 63, 64], qui est une série polynomiale écrite en fonction des invariants, dont l'ordre est laissé aux choix de l'utilisateur.
- **Les modèles basés sur une approche statistique** des phénomènes microscopiques et sur une représentation en réseau des chaînes moléculaires pour caractériser les propriétés des élastomères. Les modèles les plus connus de cette catégorie sont issus des travaux d'Arruda et Boyce [1], et de Miehe [50], qui reprennent les travaux de Treloar [78] et aboutissent aux modèles à 3-chaînes, 4-chaînes, 8-chaînes ou sphère unitaire à 21 chaînes.

Steinmann, Hossain et Possart proposent dans [75] une étude de quatorze de ces modèles, où sont aussi présentés les essais permettant de les identifier, et comparent ces modèles aux résultats des essais de Treloar [77] (traction uni-axiale, bi-axiale et cisaillement). Marckmann et Verron présentent quand à eux une vingtaine de modèles dans [49] et les comparent également aux essais de Treloar, mais aussi aux essais de Kawabata [44], et concluent que le modèle de tube étendu, proposé par Kaliske et Heinrich [42], représente le meilleur compromis. D'autres études de modèles hyperélastiques sont proposés par Seibert et Schöche

[71] ou par Arruda et Boyce [10].

Parmi tous ces modèles, le plus simple à utiliser et à identifier est le modèle Néo-Hookéen, reconnu pour être satisfaisant lorsque le niveau de déformation ne dépasse pas quelques dizaines de pour-cent. Pour tester la qualité de ce modèle, les essais de Treloar [77] sont reproduit de façon analytique. Les résultats du modèle Néo-Hookéen sur l'essai de traction bi-axiale (Fig. 4.3) sont corrects jusqu'aux alentours de 200% de déformation, ce qui est intéressant pour un modèle aussi simple. En revanche, pour les essais de traction uni-axiale ou de cisaillement les résultats du modèle Néo-Hookéen ne sont bons que jusqu'aux environs de 30% de déformation. Les précharges utilisées dans la suite du mémoire varient de 15% à près de 50% de déformation globale de la liaison en élastomère. Localement, certains éléments du maillage peuvent aussi subir des déformations supérieures à ces niveaux. Un modèle plus élaboré que le modèle Néo-Hookéen doit donc être choisi.

Un compromis acceptable entre le nombre de paramètres à identifier et la précision du modèle peut être obtenu avec le modèle de Yeoh. Sur les trois figures (Fig. 4.2), (Fig. 4.3) et (Fig. 4.4), le modèle de Yeoh identifié évite le comportement asymptotique du modèle Néo-Hookéen, pour les plus hauts niveaux de déformation, tout en étant relativement proches des résultats expérimentaux quel que soit le chargement imposé.

Les parties isochore et volumique du potentiel hyperélastique de Yeoh sont définies par :

$$\phi_{\text{iso}} = c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_3(\bar{I}_1 - 3)^3 \quad (4.27)$$

$$\phi_{\text{vol}} = \frac{\kappa}{4}(J^2 - 1 - 2\ln(J)) \quad (4.28)$$

La partie volumique est tirée des travaux de Simo et Taylor [73], où  $\kappa = 3,15$  MPa est le module de compressibilité issu du cas d'application et les paramètres  $c_1, c_2$  et  $c_3$  de la partie isochore sont identifiés à partir des essais de Treloar [77] en traction uni-axiale. Les valeurs de ces paramètres sont :  $c_1 = 0,1634$  MPa,  $c_2 = -1,198$  MPa et  $c_3 = 37,81$  MPa.

## 4.2. PRÉCHARGE STATIQUE NON-LINÉAIRE DES LIAISONS

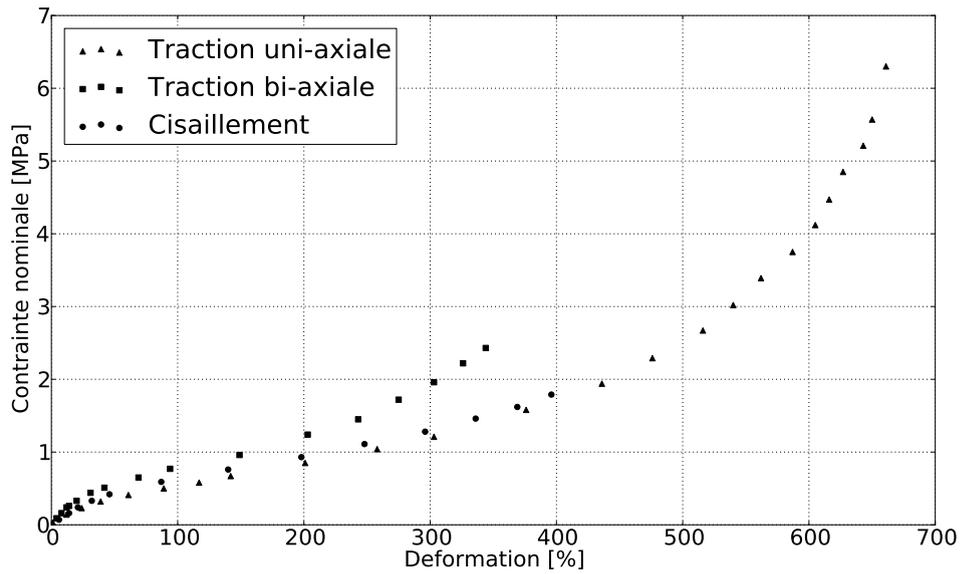


FIGURE 4.1 – Résultats expérimentaux des essais de traction uni-axiale, de traction bi-axiale et de cisaillement, de Treloar [77]

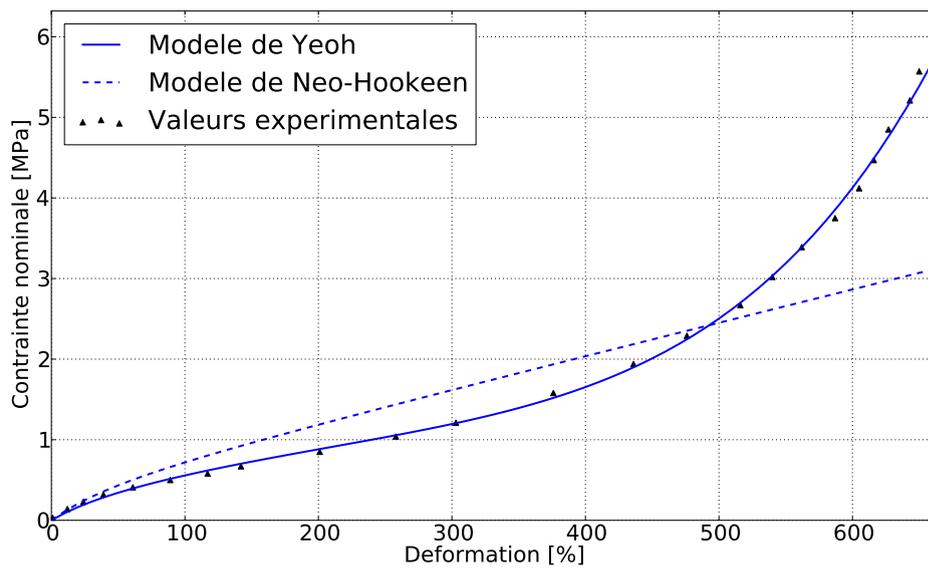


FIGURE 4.2 – Comparaison des modèles de Yeoh et du modèle Néo-Hookéen identifiés en traction uni-axiale, avec les données de l'essai de **traction uni-axiale** de Treloar [77]

## 4.2. PRÉCHARGE STATIQUE NON-LINÉAIRE DES LIAISONS

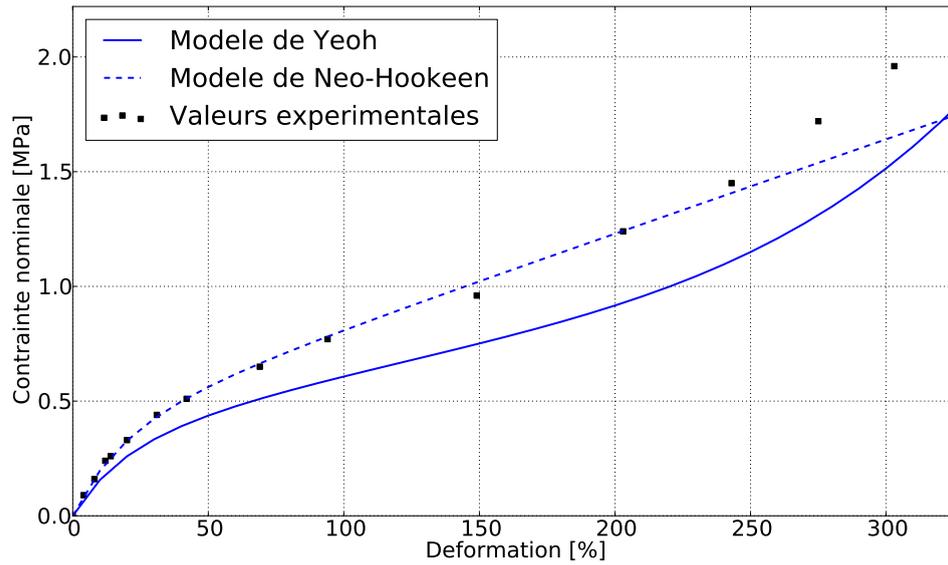


FIGURE 4.3 – Comparaison des modèles de Yeoh et du modèle Néo-Hookeen identifiés en traction uni-axiale, avec les données de l'essai de **traction bi-axiale** de Treloar [77]

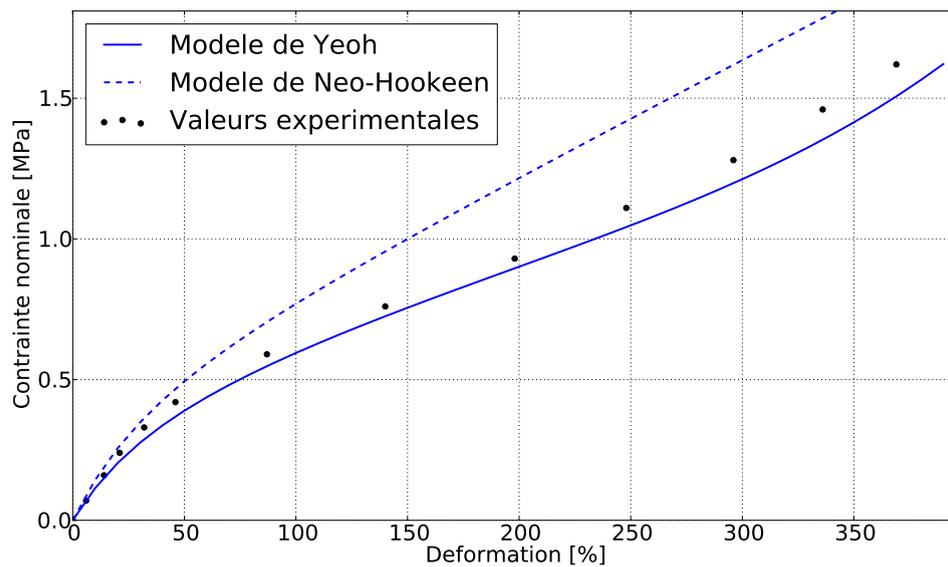


FIGURE 4.4 – Comparaison des modèles de Yeoh et du modèle Néo-Hookeen identifiés en traction uni-axiale, avec les données de l'essai de **cisaillement** de Treloar [77]

### 4.2.5 Mise en œuvre numérique du problème non-linéaire statique

Dans le cas d'une liaison en élastomère préchargée statiquement en grandes déformations, les équations d'équilibre local sont définies dans le domaine actuel  $\Omega$  et sur le bord  $\delta\Omega$  de ce domaine par :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (4.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial_t \Omega \quad (4.30)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy et où  $\mathbf{t}$  est l'effort surfacique imposé sur le bord du domaine  $\partial_t \Omega$ . Une formulation faible du problème est obtenue en multipliant l'équation (Eq. 4.29) par un champ de vitesse virtuelle  $\delta \dot{\mathbf{u}}$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$ . Pour passer dans le domaine de référence, la transformation de Piola est utilisée ce qui permet d'obtenir :

$$\underbrace{\int_{\partial_t \Omega_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} \, dS}_{\mathbf{P}_{\text{ext}}} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} \, dV}_{\mathbf{P}_{\text{int}}} = 0 \quad (4.31)$$

où  $\Omega_0$  est le domaine initial,  $\mathbf{t}_0 = (J/\sqrt{\mathbf{n}^T \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{n}}) \mathbf{t}$  est l'effort surfacique imposé sur le bord du domaine  $\partial_t \Omega_0$  et  $\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff. Cette expression peut être vue comme l'égalité des puissances des efforts extérieurs  $\mathbf{P}_{\text{ext}}$  et internes  $\mathbf{P}_{\text{int}}$ . En considérant un champ de déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}$  suffisamment régulier, il est possible de réécrire cette expression comme la différence entre les travaux virtuels  $\mathbf{W}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{W}_{\text{int}}$  des efforts extérieurs et des efforts internes :

$$\underbrace{\int_{\partial_t \Omega_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dS}_{\mathbf{W}_{\text{ext}}} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV}_{\mathbf{W}_{\text{int}}} = 0 \quad (4.32)$$

Une discrétisation par éléments finis permet ensuite d'écrire les champs de déplacements  $\mathbf{u}$  et  $\delta \mathbf{u}$  en fonction des déplacements aux nœuds  $\mathbf{q}$  et  $\delta \mathbf{q}$  :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{q} \quad (4.33)$$

La matrice des fonctions de forme  $\mathbf{N}$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cdots & N_\alpha & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & N_\alpha & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & N_\alpha & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

où  $N_\alpha$  est la fonction de forme du nœud  $\alpha$ . Suite à cette discrétisation, et en utilisant la notation de Voigt, les vecteurs des déformations de Green-Lagrange peuvent s'écrire :

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}_{\text{nl}}\mathbf{q} \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{E} = \mathbf{B}_{\text{nl}}\delta\mathbf{q} \quad (4.35)$$

où  $\mathbf{B}_{\text{nl}}$  est l'opérateur gradient discrétisé non-linéaire, défini dans [84] ou [8] par la matrice :

$$\mathbf{B}_{\text{nl}} = \begin{bmatrix} \cdots & F_{11}N_{\alpha,1} & F_{21}N_{\alpha,1} & F_{31}N_{\alpha,1} & \cdots \\ \cdots & F_{12}N_{\alpha,2} & F_{22}N_{\alpha,2} & F_{32}N_{\alpha,2} & \cdots \\ \cdots & F_{13}N_{\alpha,3} & F_{23}N_{\alpha,3} & F_{33}N_{\alpha,3} & \cdots \\ \cdots & F_{11}N_{\alpha,2} + F_{12}N_{\alpha,1} & F_{21}N_{\alpha,2} + F_{22}N_{\alpha,1} & F_{31}N_{\alpha,2} + F_{32}N_{\alpha,1} & \cdots \\ \cdots & F_{12}N_{\alpha,3} + F_{13}N_{\alpha,2} & F_{22}N_{\alpha,3} + F_{23}N_{\alpha,2} & F_{32}N_{\alpha,3} + F_{33}N_{\alpha,2} & \cdots \\ \cdots & F_{13}N_{\alpha,1} + F_{11}N_{\alpha,3} & F_{23}N_{\alpha,1} + F_{21}N_{\alpha,3} & F_{33}N_{\alpha,1} + F_{31}N_{\alpha,3} & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Dans cette expression,  $\alpha$  représente le numéro du nœud,  $N_{\alpha,i}$  est la dérivée de la fonction de forme au nœud  $\alpha$  par rapport à la direction  $i$ , et les  $F_{ij}$  sont les composantes du gradient de la transformation. Après discrétisation, la formulation variationnelle (Eq. 4.32) revient à écrire :

$$\underbrace{\int_{\partial t\Omega_0} \mathbf{N}^T \mathbf{T} \, dS}_{\mathbf{f}_{\text{ext}}} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{\text{nl}}^T \mathbf{S} \, dV}_{\mathbf{f}_{\text{int}}} = 0 \quad (4.37)$$

où  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  sont les vecteurs des efforts extérieurs et intérieurs. Pour résoudre ce problème non-linéaire, un algorithme de Newton-Raphson est utilisé. Avec cet algorithme itératif, le déplacement aux nœuds  $\mathbf{q}$  est approximé par des corrections  $\Delta\mathbf{q}$  apportées à une solution de départ arbitraire (déplacement initial nul dans le cas présent). Par soucis de convergence, l'ensemble de la précharge  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  est découpée en plusieurs pas de chargement successifs  $\Delta\mathbf{f}$ , chacun de ces pas de chargement nécessitant un certain nombre d'itérations. À l'itération  $i + 1$  du pas de chargement  $n + 1$ , la correction en déplacement est calculée à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1 du résidu  $\mathbf{r} = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}$  :

$$\mathbf{r}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{r}_{n+1}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^i \Delta\mathbf{q}_{n+1}^i \quad (4.38)$$

Les efforts extérieurs sont ici considérés indépendants du déplacement (forces non suivées), la dérivée du résidu est donc égale à la dérivée des efforts internes :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^i = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1}^i \quad (4.39)$$

En reprenant la formulation des efforts internes donnée dans l'équation (Eq. 4.37), la dérivée (Eq. 4.39) devient :

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}}}_{\mathbf{K}_{\text{tan}}} = \underbrace{\int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{nl}}^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{S} \, dV}_{\mathbf{K}_{\text{geo}}} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{\text{nl}}^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}} \, dV}_{\mathbf{K}_{\text{mat}}} \quad (4.40)$$

La dérivée des efforts internes par rapport aux déplacements peut être vue comme une matrice de raideur dite tangente  $\mathbf{K}_{\text{tan}}$ , composée d'une matrice de raideur géométrique  $\mathbf{K}_{\text{geo}}$  et d'une matrice de raideur matérielle  $\mathbf{K}_{\text{mat}}$ .

En prenant en compte l'expression (Eq. 4.18), la dérivée des contraintes est développée sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.41)$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur d'élasticité écrit en notation de Voigt. La dérivée  $\partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{q} = (\partial \mathbf{B}_{\text{nl}} / \partial \mathbf{q}) \mathbf{q} + \mathbf{B}_{\text{nl}}$  est ensuite approximée par  $\mathbf{B}_{\text{nl}}$  ce qui permet d'écrire la matrice de raideur matérielle de façon similaire au cas linéaire, en fonction du tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  et du gradient discrétisé  $\mathbf{B}_{\text{nl}}$  :

$$\mathbf{K}_{\text{mat}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_{\text{nl}}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{\text{nl}} \, dV \quad (4.42)$$

L'expression de la matrice de rigidité géométrique peut elle être obtenue en utilisant la formulation du gradient discrétisé  $\mathbf{B}_{\text{nl}}$  donnée dans [14] et [15]. De manière pratique, cette formulation donne le gradient discrétisé sous la forme  $\mathbf{B}_{\text{nl}} = \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{N}}$ , où  $\hat{\mathbf{F}}$  est une matrice contenant les termes du gradient de la transformation arrangés de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \cdots & F_{11} & 0 & 0 & F_{21} & 0 & 0 & F_{31} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & F_{12} & 0 & 0 & F_{22} & 0 & 0 & F_{32} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & F_{13} & 0 & 0 & F_{23} & 0 & 0 & F_{33} & \cdots \\ \cdots & F_{12} & F_{11} & 0 & F_{22} & F_{21} & 0 & F_{32} & F_{31} & 0 & \cdots \\ \cdots & F_{13} & 0 & F_{11} & F_{23} & 0 & F_{21} & F_{33} & 0 & F_{31} & \cdots \\ \cdots & 0 & F_{13} & F_{12} & 0 & F_{23} & F_{22} & 0 & F_{33} & F_{32} & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

et où  $\hat{\mathbf{N}}$  est une matrice contenant les dérivées des fonctions de forme par rapport aux 3 directions de l'espace :

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{\alpha,1} & 0 & 0 \\ N_{\alpha,2} & 0 & 0 \\ N_{\alpha,3} & 0 & 0 \\ 0 & N_{\alpha,1} & 0 \\ 0 & N_{\alpha,2} & 0 \\ 0 & N_{\alpha,3} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\alpha,1} \\ 0 & 0 & N_{\alpha,2} \\ 0 & 0 & N_{\alpha,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

En tenant compte du fait que la matrice  $\hat{\mathbf{N}}$  est indépendante des déplacements aux nœuds  $\mathbf{q}$ , l'expression de la raideur géométrique (Eq. 4.40) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{K}_{\text{geo}} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{nl}}^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{S} \, dV = \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{N}}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{S} \, dV \quad (4.45)$$

Il est ensuite possible de montrer que :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{N}} \quad (4.46)$$

où  $\hat{\mathbf{S}}$  est une matrice assemblée à partir des termes du vecteur des contraintes  $\mathbf{S}$  :

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

En effet, en considérant un vecteur  $\mathbf{A}$  assemblé par empilement des termes du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{A} = [F_{11} \ F_{12} \ F_{13} \ F_{21} \ F_{22} \ F_{23} \ F_{31} \ F_{32} \ F_{33}]^T \quad (4.48)$$

tel que  $\hat{\mathbf{F}}^T \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}} \mathbf{A}$ , le théorème d'identification pour les fonctions matricielles différentiables [20] permet d'écrire :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.49)$$

La dérivée  $\partial\mathbf{A}/\partial\mathbf{q}$  est une matrice Jacobienne dont le développement permet de retomber sur la matrice  $\hat{\mathbf{N}}$ . La forme finale de la matrice de raideur géométrique  $\mathbf{K}_{\text{geo}}$  est donc :

$$\mathbf{K}_{\text{geo}} = \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{N}} \, dV \quad (4.50)$$

Maintenant que les expressions des matrices de raideur géométrique et matérielle sont connues, la matrice de raideur tangente à l'itération  $i$  du pas de chargement  $n + 1$  peut être assemblée :

$$\mathbf{K}_{\text{tan}} = \mathbf{K}_{\text{geo}}(\mathbf{q}_{n+1}^i) + \mathbf{K}_{\text{mat}}(\mathbf{q}_{n+1}^i) \quad (4.51)$$

La correction en déplacement est ensuite calculée en considérant le résidu, à l'itération  $i + 1$  du pas de chargement  $n + 1$ , nul. En considérant l'équation (Eq. 4.38), cela donne :

$$\Delta\mathbf{q}_{n+1}^i = -\mathbf{K}_{\text{tan}}^{-1} \mathbf{r}_{n+1}^i \quad (4.52)$$

La correction  $\mathbf{q}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{q}_{n+1}^i + \Delta\mathbf{q}_{n+1}^i$  est alors effectuée, un nouveau résidu est calculé et l'algorithme itère jusqu'à convergence. Une fois la précharge appliquée, la matrice de raideur tangente doit être calculée une dernière fois avec la dernière valeur des déplacements ce qui permet d'obtenir la matrice de rigidité tangente  $\mathbf{K}_{\text{tan}}^P$  de la liaison préchargée.

Un récapitulatif de toutes les étapes de l'algorithme de Newton-Raphson permettant de calculer la matrice de rigidité préchargée est donné dans la figure (Fig. 4.5).

Cette formulation de la précharge non-linéaire statique est utilisée dans le code implémenté pendant la thèse et est comparée au code commercial LS-Dyna sur trois cas de précharge :

- la première est une précharge en traction-compression,
- la seconde est effectuée avec un chargement de flexion,
- la dernière est une précharge de torsion.

Dans ces trois cas, la réponse calculée de la liaison est non-linéaire, avec à chaque fois une déformation de plusieurs dizaines de pour-cent. Les allures des déformées obtenues sont données dans la figure (Fig. 4.6) ainsi que les courbes chargement/déplacements correspondantes. Pour la suite de la thèse, seul le cas de précharge en compression est considéré. Les trois cas de précharge étudiés, à 1000 N, 2000 N et 3000 N, sont présentés sur la figure (Fig. 4.8) ainsi que la structure complète soumise à la précharge (Fig. 4.7). Le calcul de ces précontraintes est fait en 10 minutes environ et ce temps de calcul est considéré comme un temps de calcul offline pour les calculs de référence.

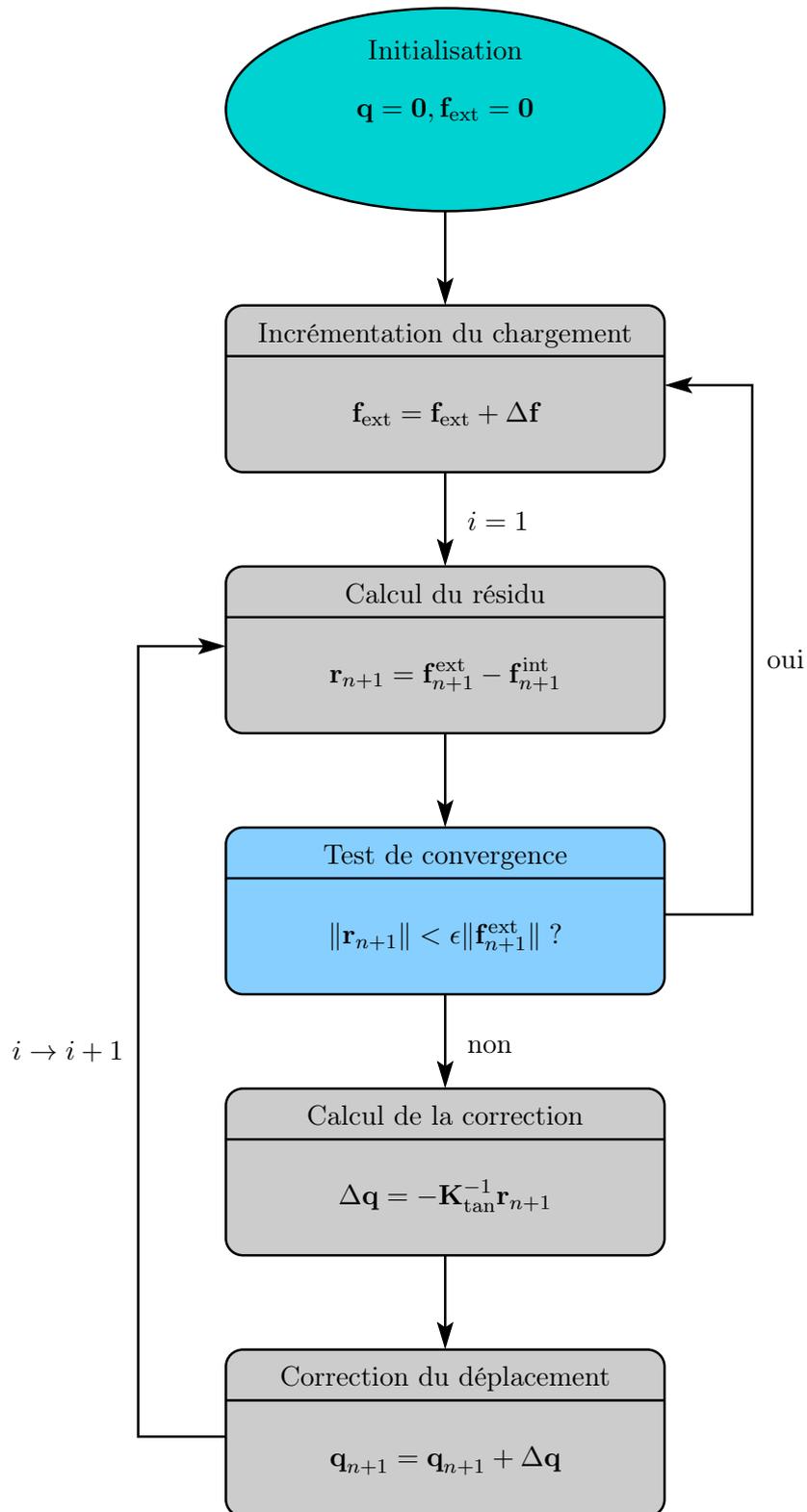


FIGURE 4.5 – Algorithme de Newton-Raphson utilisé pour le calcul de la matrice de rigidité préchargée

## 4.2. PRÉCHARGE STATIQUE NON-LINÉAIRE DES LIAISONS

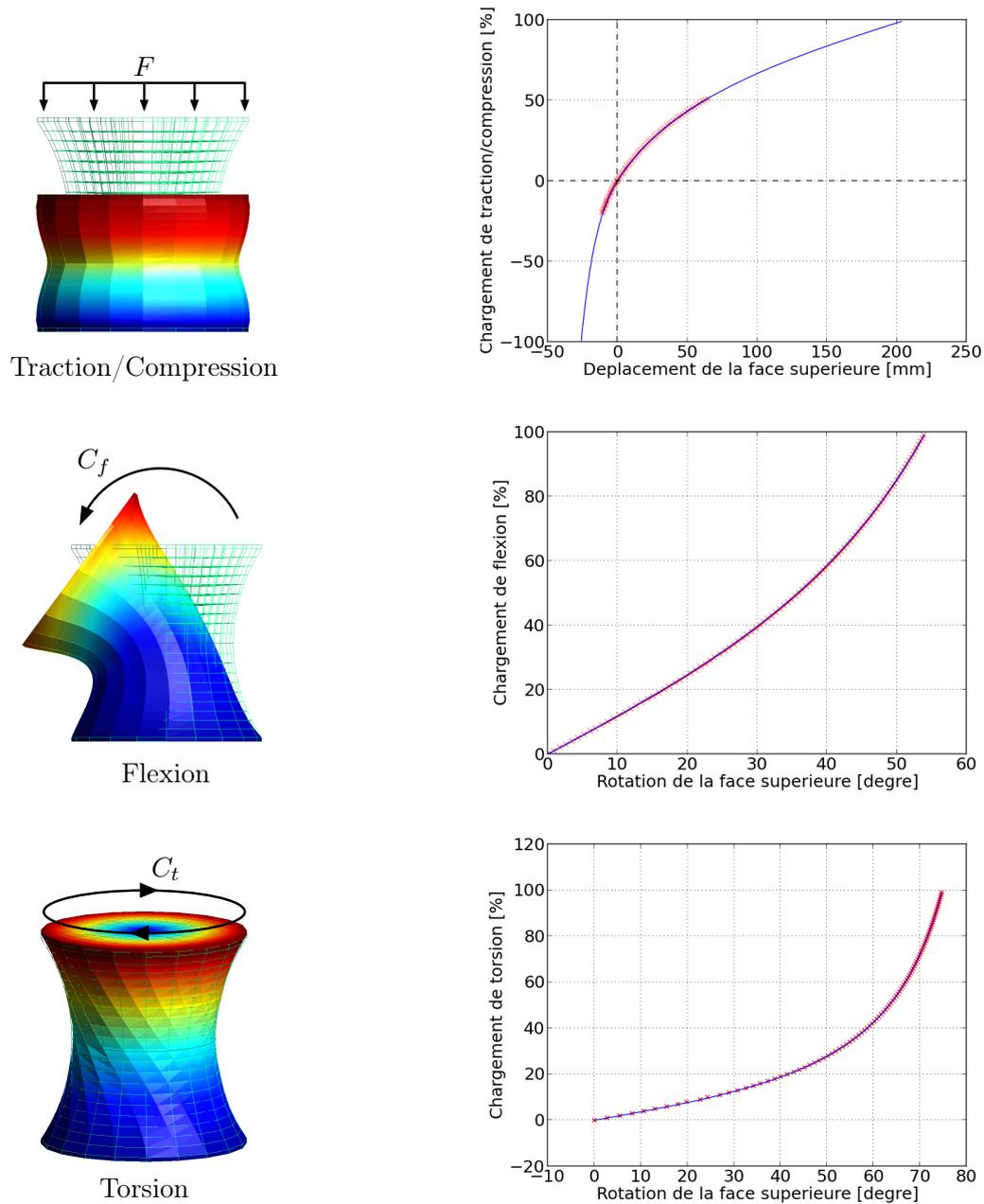


FIGURE 4.6 – Déplacement de la face haute de la liaison en fonction de l'effort imposé, chargement de traction-compression, de flexion et de torsion, code maison (lignes bleues) et LS-Dyna (croix rouges)

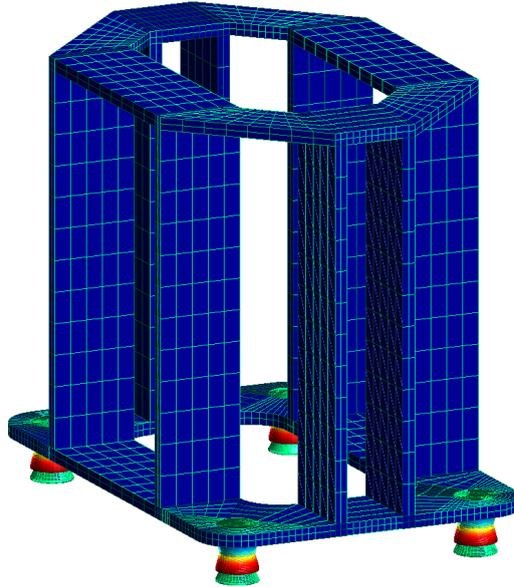


FIGURE 4.7 – Précharge de compression des liaisons sur l'ensemble de la structure d'application

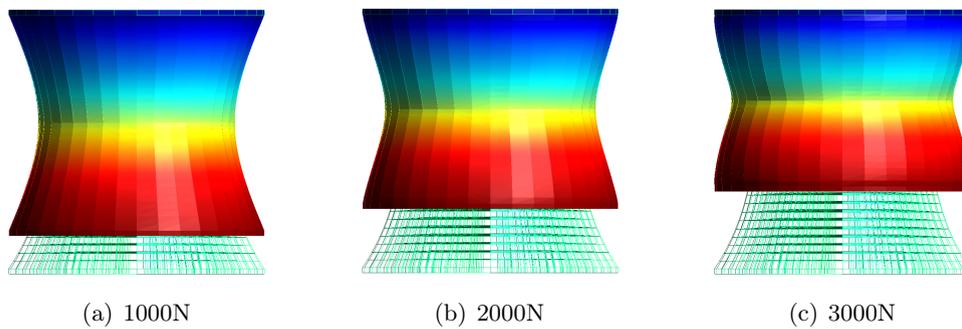


FIGURE 4.8 – Les trois états de précharge étudiés

### 4.3 Comportement amortissant des liaisons préchargées

Le modèle hyperélastique de Yeoh [82] a été choisi dans la section précédente pour représenter le comportement statique des liaisons lors de la précharge. Cette nouvelle section présente la prise en compte de cette précharge dans le comportement amortissant des liaisons par l'utilisation d'une loi de comportement hyper-visco-élastique linéarisée autour de l'état précontraint. La loi de comportement et les différentes étapes de linéarisation sont détaillées ci-dessous.

#### 4.3.1 Loi de comportement hyper-visco-élastique

En dynamique, les élastomères sont capables de subir de grandes déformations tout en dissipant de l'énergie. D'un point de vue thermodynamique, cela se traduit par l'existence d'un potentiel hyper-visco-élastique  $\psi$  tel que la seconde loi de la thermodynamique s'écrit :

$$D_{\text{int}} = W - \dot{\psi} \geq 0 \quad (4.53)$$

Le potentiel d'énergie  $\psi$  est une fonction scalaire des déformations et il est possible de l'exprimer en fonction de n'importe lequel des tenseurs de déformations. Son expression dépend à la fois du potentiel  $\phi$  du modèle hyperélastique (section 4.2.4) choisi pour représenter les grandes déformations et du potentiel  $\psi_{\text{vis}}$  du modèle viscoélastique choisi pour représenter la dissipation (section 1.2), soit :

$$\psi = \phi + \psi_{\text{vis}} \quad (4.54)$$

Une approche pour déterminer l'expression du potentiel hyper-visco-élastique est donnée dans les travaux de Haupt et Lion [31], où un modèle de Maxwell en transformations finies est étudié. La loi de comportement de ce modèle est donnée par la loi de comportement du modèle de Maxwell linéaire (Eq. 1.20), écrite en transformations finies, qui fait intervenir la dérivée objective du tenseur de Kirchoff  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$  de même que la dérivée objective du tenseur des déformations d'Euler-Almansi  $\overset{\Delta}{\mathbf{a}}$  :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{\tau} = E \overset{\Delta}{\mathbf{a}} \quad (4.55)$$

De façon à manipuler une expression plus simple, cette loi de comportement est écrite en configuration de référence en notant que  $\overset{\Delta}{\mathbf{a}} = \mathbf{d}$ , où  $\mathbf{d}$  est le tenseur taux de déformations, et en utilisant la transformée de Piola qui fait intervenir le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{F}^{-1} \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{F}^{-\text{T}} + \frac{1}{\tau} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-\text{T}} = E \mathbf{F}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{F}^{-\text{T}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{S}} + \frac{1}{\tau} \mathbf{S} = E \dot{\mathbf{P}} \quad (4.56)$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$e^{-(t-s)/\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{-(t-s)/\tau} \mathbf{S} \right) = -E \dot{\mathbf{P}} \quad (4.57)$$

La loi de comportement peut alors être intégrée pour obtenir la contrainte de Piola-Kirchoff 2 à l'instant  $t$  par :

$$\mathbf{S} = - \int_{-\infty}^t E e^{-(t-s)/\tau} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s} ds \quad (4.58)$$

Pour obtenir cette expression des contraintes à partir de l'équation de la dissipation interne, Haupt et Lion [31] proposent l'expression suivante du potentiel dissipatif  $\psi_{\text{vis}}$  pour le modèle de Maxwell en transformation finie :

$$\psi_{\text{vis}} = - \int_{-\infty}^t \frac{E}{2} e^{-(t-s)/\tau} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s} : \mathbf{C} ds \quad (4.59)$$

où  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\text{T}} \mathbf{F}$  est le tenseur de Cauchy-Green droit. Avec l'écriture  $2W = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}$ , la seconde loi de la thermodynamique donne la loi de comportement :

$$\left( \mathbf{S} - \int_{-\infty}^t E e^{-(t-s)/\tau} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s} ds \right) : \dot{\mathbf{C}} = 0 \quad (4.60)$$

De façon à représenter un comportement hyper-visco-élastique complet, Lion, Retka et Rendek proposent dans [47] un potentiel hyper-visco-élastique correspondant à un modèle de Maxwell généralisé non linéarisé où la réponse statique est représentée par un ressort hyperélastique (Fig. 4.9). Ce modèle est par exemple utilisé par Jrad dans [41] pour représenter le comportement d'une éprouvette en élastomère. Dans le cas le plus simple ce modèle est composé d'un ressort hyperélastique en parallèle d'un élément de Maxwell non-linéaire en raideur. Le potentiel hyper-visco-élastique est alors donné par :

$$\psi = \phi(\mathbf{C}) - \int_{-\infty}^t \frac{E}{2} e^{-(t-s)/\tau} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s} : \mathbf{C} ds \quad (4.61)$$

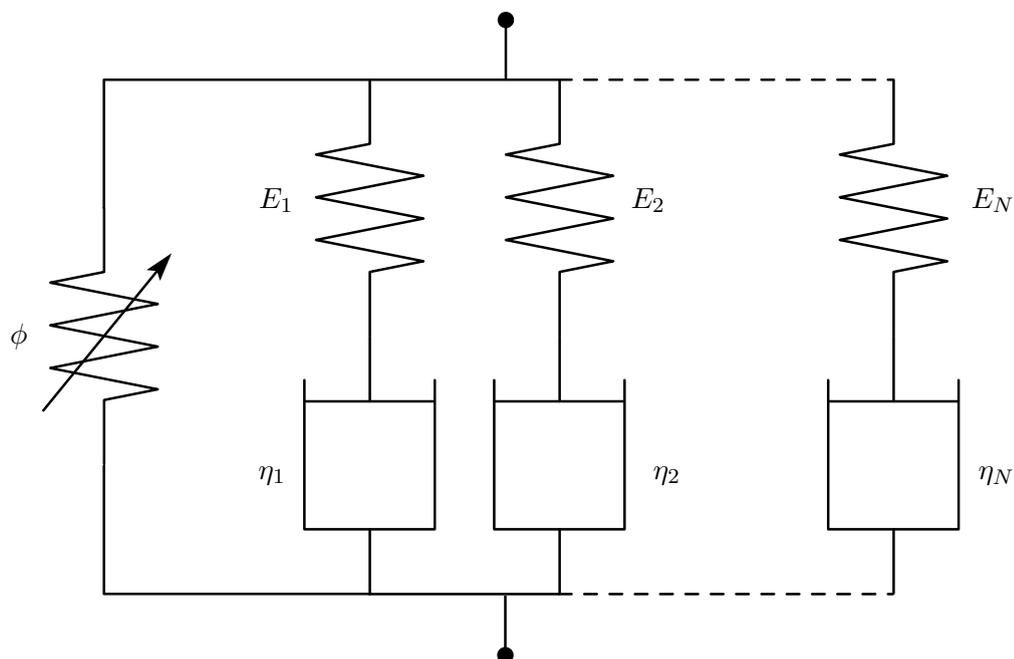


FIGURE 4.9 – Modèle de Maxwell généralisé à réponse statique hyperélastique

D'un point de vue plus général, le potentiel hyper-visco-élastique peut s'écrire en fonction d'un potentiel hyperélastique et d'un potentiel dissipatif qui dépend de la fonction de relaxation du modèle viscoélastique choisi pour représenter la dissipation, soit :

$$\psi = \phi(\mathbf{C}) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t R(t-s) \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s} : \mathbf{C} ds \quad (4.62)$$

Les fonctions de relaxation utilisées par la suite correspondent à une série de modèles de Maxwell en parallèle ou à un modèle de Maxwell Fractionnaire.

### 4.3.2 Séparation des comportements en dilatation et distorsion

Certains matériaux comme les élastomères ont des comportements différents lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations de type dilatation (changement de volume) ou de type distorsion (déformation à volume constant). De manière à respecter cette particularité, une séparation des tenseurs précédemment définis en une partie isochore et une partie volumique est effectuée. Le gradient des déformations est décomposé en une partie caractérisant les changements de volume et une autre représentant les déformations à volume constant :

$$\mathbf{F} = (J^{\frac{1}{3}}\mathbf{I}) \times J^{-\frac{1}{3}}\mathbf{F} = J^{\frac{1}{3}}\bar{\mathbf{F}} \quad (4.63)$$

où  $J^{\frac{1}{3}}\mathbf{I}$  est le tenseur gradient de dilatation et  $\bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}}\mathbf{F}$  est le tenseur gradient de distortion ou tenseur des déformations modifié. Pour tenir compte de ce découplage, l'expression du potentiel hyper-visco-élastique (Eq. 4.62) est alors changée en :

$$\psi = \phi(\mathbf{C}) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t R(t-s) \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial s} : \bar{\mathbf{C}} ds \quad (4.64)$$

où le tenseur de Piola modifié  $\bar{\mathbf{P}}$  est défini par :

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{C}}^{-1} - \mathbf{I}) \quad (4.65)$$

avec le tenseur de Cauchy-Green droit modifié  $\bar{\mathbf{C}}$  tel que :

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{C} \quad (4.66)$$

La séparation en partie isochore et volumique du potentiel hyperélastique  $\phi$  est détaillée dans la section 4.2 qui concerne la modélisation du comportement hyperélastique.

### 4.3.3 Expression du tenseur des contraintes

À partir de cette expression du potentiel hyper-visco-élastique, la loi de comportement (Eq. 4.60) donne le tenseur des contraintes en fonction des dérivées temporelles du potentiel hyperélastique et du tenseur de Cauchy-Green droit :

$$\frac{1}{2}\mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} = \dot{\phi}(\mathbf{C}) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t R(t-s) \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial s} : \dot{\bar{\mathbf{C}}} ds \quad (4.67)$$

Les dérivées temporelles du potentiel hyperélastique et du tenseur modifié de Cauchy-Green sont :

$$\dot{\phi}(\mathbf{C}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} \quad \text{et} \quad \dot{\bar{\mathbf{C}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} \quad (4.68)$$

La dérivée du tenseur modifié de Cauchy-Green droit par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit classique fait apparaître l'opérateur déviatorique d'ordre 4 en configuration de référence  $\mathbb{P}$  (Eq. 4.16) :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}}\mathbb{P}^T \quad (4.69)$$

soit en notation indicielle :

$$P_{IJKL} = \frac{1}{2} (\delta_{IK}\delta_{JL} + \delta_{IL}\delta_{JK}) - \frac{1}{3} C_{IJ}^{-1} C_{KL} \quad (4.70)$$

En factorisant tous les termes de l'équation (Eq. 4.67) par  $\dot{\mathbf{C}}$ , il apparaît la relation suivante :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - J^{-\frac{2}{3}} \mathbb{P} : \int_{-\infty}^t \mathbf{R}(t-s) \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial s} ds \quad (4.71)$$

Le tenseur des contraintes est finalement composé d'un terme élastique  $\mathbf{S}_{\text{eq}}$ , correspondant à la réponse du système à l'équilibre, et d'un terme viscoélastique  $\mathbf{S}_{\text{neq}}$ , avec :

$$\mathbf{S}^{\text{eq}} = 2 \frac{\partial \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}^{\text{neq}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbb{P} : \bar{\mathbf{Q}} \quad (4.72)$$

où le tenseur  $\bar{\mathbf{Q}}$  est défini par :

$$\bar{\mathbf{Q}} = - \int_{-\infty}^t \mathbf{R}(t-s) \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial s} ds \quad (4.73)$$

La contrainte à l'équilibre est ici équivalente à la contrainte de Piola Kirchoff 2 obtenue par un modèle hyperélastique (section 4.2).

#### 4.3.4 Linéarisation du comportement autour d'un état précontraint

De manière à obtenir une formulation de la loi de comportement dans le cas d'un matériau précontraint sollicité par une excitation de faible amplitude, la transformation suivante est considérée [47, 81] :

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{I} + \mathbf{h}(t)) \quad (4.74)$$

où  $\mathbf{F}_{\text{nl}}$  est le gradient de la transformation permettant de passer de la configuration de référence à la configuration précontrainte. Le tenseur d'ordre deux  $\mathbf{h}$ , de norme très inférieure à un, représente les sollicitations autour de l'état précontraint. En introduisant la déformation linéarisée  $\mathbf{E}_{\text{lin}}$  telle que :

$$\mathbf{E}_{\text{lin}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_{\text{lin}}^{\text{dev}} = \mathbf{E}_{\text{lin}} - \frac{1}{3} (\mathbf{E}_{\text{lin}} : \mathbf{I}) \mathbf{I} \quad (4.75)$$

les tenseurs de Cauchy-Green droit classique et modifié deviennent respectivement :

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\text{nl}} + 2\mathbf{F}_{\text{nl}}^T \mathbf{E}_{\text{lin}} \mathbf{F}_{\text{nl}} \quad (4.76)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}_{\text{nl}} + 2\bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^T \mathbf{E}_{\text{lin}}^{\text{dev}} \bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \quad (4.77)$$

De même, le tenseur de Piola et le tenseur de Piola modifié deviennent respectivement :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{nl}} - \mathbf{F}_{\text{nl}}^{-1} \mathbf{E}_{\text{lin}} \mathbf{F}_{\text{nl}}^{-\text{T}} \quad (4.78)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}_{\text{nl}} - \bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^{-1} \mathbf{E}_{\text{lin}}^{\text{dev}} \bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^{-\text{T}} \quad (4.79)$$

et les dérivées temporelles de ces quatre tenseurs sont :

$$\dot{\mathbf{C}} = 2\mathbf{F}_{\text{nl}}^{\text{T}} \dot{\mathbf{E}}_{\text{lin}} \mathbf{F}_{\text{nl}} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{F}_{\text{nl}}^{-1} \dot{\mathbf{E}}_{\text{lin}} \mathbf{F}_{\text{nl}}^{-\text{T}} \quad (4.80)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{C}}} = 2\bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^{\text{T}} \dot{\mathbf{E}}_{\text{lin}}^{\text{dev}} \bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \quad \dot{\bar{\mathbf{P}}} = -\bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^{-1} \dot{\mathbf{E}}_{\text{lin}}^{\text{dev}} \bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^{-\text{T}} \quad (4.81)$$

Suite à cette réécriture de la transformation, la dérivée (Eq. 4.72) du potentiel hyperélastique, donnant les contraintes à l'équilibre, peut être vue comme la dérivée suivante au sens de Gâteaux [61] :

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right|_{\mathbf{C}_{\text{nl}}} + 2 \left. \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}^2} \right|_{\mathbf{C}_{\text{nl}}} \mathbf{F}_{\text{nl}}^{\text{T}} \mathbf{E}_{\text{lin}} \mathbf{F}_{\text{nl}} \quad (4.82)$$

De cette manière, la contrainte à l'équilibre linéarisée apparaît comme la somme d'une contrainte due à la précharge et d'une contrainte due aux sollicitations autour de l'état précontraint :

$$\mathbf{S}^{\text{eq}} = \mathbf{S}_{\text{nl}}^{\text{eq}} + \mathbb{C}_{\text{nl}}^{\text{eq}} : \mathbf{F}_{\text{nl}}^{\text{T}} \mathbf{E}_{\text{lin}} \mathbf{F}_{\text{nl}} \quad (4.83)$$

avec

$$\mathbf{S}_{\text{nl}}^{\text{eq}} = 2 \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right|_{\mathbf{C}_{\text{nl}}} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_{\text{nl}}^{\text{eq}} = 4 \left. \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}^2} \right|_{\mathbf{C}_{\text{nl}}} \quad (4.84)$$

Pour la partie non-équilibrée de la contrainte, le tenseur  $\bar{\mathbf{Q}}$  (Eq. 4.73) linéarisé est donné en fonction de la dérivée temporelle (Eq. 4.81) du tenseur de Piola modifié :

$$\bar{\mathbf{Q}} = \int_{-\infty}^t \mathbf{R}(t-s) \bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{lin}}^{\text{dev}}(s)}{\partial s} \bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^{-\text{T}} ds \quad (4.85)$$

Le tenseur  $\bar{\mathbf{Q}}$  ne dépendant finalement que des petites déformations, certains termes de l'opérateur déviatorique  $\mathbb{P}$  sont négligés de manière à retirer tous les termes quadratiques du produit  $\mathbb{P} : \bar{\mathbf{Q}}$ . La contrainte non-équilibrée  $\mathbf{S}^{\text{neq}}$  linéarisée est donc donnée par :

$$\mathbf{S}^{\text{neq}} = \mathbb{J}_{\text{nl}}^{-\frac{2}{3}} \mathbb{P}_{\text{nl}} : \bar{\mathbf{Q}} \quad (4.86)$$

où  $\mathbb{P}_0$  est l'opérateur déviatorique correspondant à la précharge, avec  $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}(\mathbf{C}_0)$ . Finalement, le tenseur des contraintes totales linéarisées s'écrit donc :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{nl}}^{\text{eq}} + \mathbb{C}_{\text{nl}}^{\text{eq}} : \mathbf{F}_{\text{nl}}^{\text{T}} \mathbf{E}_{\text{lin}} \mathbf{F}_{\text{nl}} + 2\mathbb{J}_{\text{nl}}^{-\frac{2}{3}} \mathbb{P}_{\text{nl}} : \int_{-\infty}^t \mathbf{R}(t-s) \bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{lin}}^{\text{dev}}(s)}{\partial s} \bar{\mathbf{F}}_{\text{nl}}^{-\text{T}} ds \quad (4.87)$$

L'état précontraint est considéré comme la nouvelle configuration de référence autour de laquelle ont lieu les vibrations linéaires. Les contraintes à l'équilibre  $\mathbf{S}_{nl}^{eq}$  disparaissent pour assurer la nullité de la contrainte lorsque qu'aucune déformation n'est appliquée : l'état de contrainte causé par la précharge est oublié, seul compte désormais les contraintes engendrées après la précharge. En revanche, le changement de rigidité dû à la précharge doit être conservé, le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}_0^{eq}$  ne varie donc pas. Suite à ces modifications la contrainte linéarisée autour de l'état précontraint devient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0^{eq} : \boldsymbol{\epsilon} + \mathbb{P}_{lin} : \int_{-\infty}^t \mathbf{R}(t-s) \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{dev}(s)}{\partial s} ds \quad (4.88)$$

En rappelant que  $\boldsymbol{\epsilon}^{dev} = \mathbb{P}_{lin} : \boldsymbol{\epsilon}$  et que  $\mathbb{P}_{lin} : (\mathbb{P}_{lin} : \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbb{P}_{lin} : \boldsymbol{\epsilon}$ , la contrainte de la nouvelle configuration de référence peut être exprimée en fonction de la déformation  $\boldsymbol{\epsilon}$  par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_0^{eq} : \boldsymbol{\epsilon} + \mathbb{P}_{lin} : \int_{-\infty}^t \mathbf{R}(t-s) \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(s)}{\partial s} ds \quad (4.89)$$

Cette expression fait apparaître la contrainte viscoélastique définie, dans la section 1.1 sur le comportement viscoélastique linéaire, par l'équation (Eq. 1.7). Le produit de cette contrainte avec l'opérateur déviatorique  $\mathbb{P}_{lin}$  est donc la partie déviatorique de la contrainte viscoélastique, définie dans la section 1.1 comme le produit d'un tenseur d'ordre quatre  $\mathbb{C}_v^{dev}$  et de la déformation, soit :

$$\mathbb{P}_{lin} : \int_{-\infty}^t \mathbf{R}(t-s) \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(s)}{\partial s} ds = \mathbb{P}_{lin} : \boldsymbol{\sigma}_v = \boldsymbol{\sigma}_v^{dev} = \mathbb{C}_v^{dev} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.90)$$

Le modèle ainsi obtenu peut être vu comme un modèle de Zener modifié (Fig. 4.10) où le ressort linéaire est remplacé par un ressort hyperélastique de potentiel  $\phi$  et où la branche de maxwell est remplacée par un modèle rhéologique quelconque, pour l'instant représenté par la fonction de relaxation  $\mathbf{R}$  dans l'expression des contraintes. L'expression du tenseur  $\mathbb{C}_{vis}^{dev}$  dépend du modèle viscoélastique choisi pour représenter la dissipation et la contrainte s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbb{C}_{nl}^{eq} + \mathbb{C}_v^{dev}) : \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.91)$$

Dans le domaine temporel, pour obtenir un modèle complet similaire au modèle de Maxwell généralisé, la dissipation est représentée par un assemblage en parallèle de plusieurs éléments de Maxwell et la contrainte est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbb{C}_{nl}^{eq} + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j \tau_j}{\Delta t} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right) \right) \mathbb{C}_0^{dev} \right) : \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.92)$$

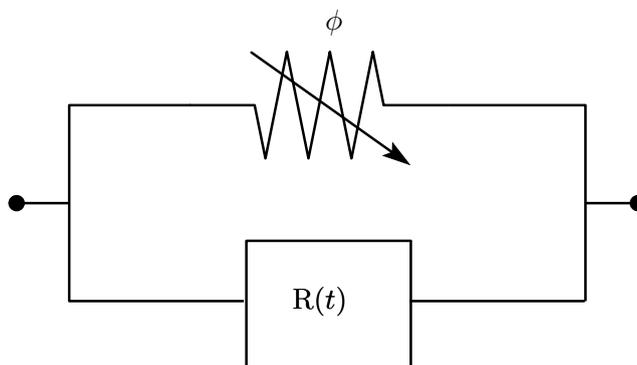


FIGURE 4.10 – Modèle hyper-visco-élastique général, linéarisé autour de l'état précontraint

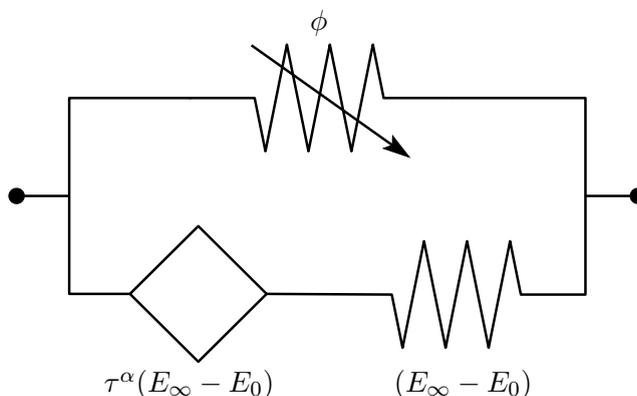


FIGURE 4.11 – Modèle de Zener fractionnaire à réponse statique hyperélastique

Ce modèle est le même que celui proposé par Lion, Retka et Rendek dans [47] et est équivalent à un modèle de Maxwell généralisé où le ressort linéaire est remplacé par un ressort hyperélastique de potentiel  $\phi$ . Le reste du modèle reste composé d'un assemblage en parallèle d'éléments de Maxwell linéaires (Fig. 4.9). Dans le domaine fréquentiel, pour obtenir un modèle complet similaire au modèle de Zener fractionnaire, la dissipation est représentée par un spring-pot en série avec un ressort linéaire et la contrainte est alors donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\omega) = (\mathbb{C}_{nl}^{eq} + i\omega h^*(\omega)(\gamma_\infty - 1)\mathbb{C}_0^{dev}) : \boldsymbol{\epsilon}^*(\omega) \quad (4.93)$$

où  $\gamma_\infty$  et  $h^*$  sont des grandeurs viscoélastiques déjà présentées dans la section 2.3.2. Ce modèle peut être vu comme un modèle de Zener fractionnaire où le ressort linéaire est remplacé par un ressort hyperélastique de potentiel  $\phi$  et où le reste du modèle reste composé d'un spring-pot en série avec un ressort linéaire (Fig. 4.11). Il est rappelé que pour ces

deux modèles, l'expression de  $\mathbb{C}_0^{\text{dev}}$  est donnée par l'équation (Eq. 2.36).

Grâce à ces développements, une loi de comportement pour un matériau hyper-visco-élastique précontraint est finalement obtenue. Il est toutefois à noter qu'avec cette loi de comportement, la précontrainte n'a pas encore d'influence sur la dissipation, ce qui ne correspond pas aux observations faites par Azoug [2, 3] et Jalocha [37, 38, 39], où par Lion et par Lion, Retka et Rendek dans [46, 47].

Différentes façons d'inclure cette dépendance dans le modèle sont proposées dans la littérature, notamment par Jalocha dans [37, 39] et par Wollscheid et Lion dans [81], qui proposent tous les deux d'utiliser une fonction de relaxation dépendant des déformations. Les paramètres du modèle viscoélastique ainsi obtenu doivent alors être identifiés pour différentes valeurs de précontraintes ce qui nécessite une machine d'essais permettant de procéder à la fois à la précharge et à l'étude dynamique, de type DMA par exemple.

Pour éviter ces difficultés, le modèle proposé ici consiste à remplacer dans les équations (Eq. 4.92) et (Eq. 4.93) le tenseur d'élasticité linéaire  $\mathbb{C}_0^{\text{dev}}$  par la partie déviatorique du tenseur d'hyperélasticité  $\mathbb{C}_{\text{nl}}^{\text{eq}}$ .

Cette représentation est similaire à une linéarisation des modèles hyper-visco-élastiques de Simo [72], Simo et Holzapfel [36], Holzapfel [34], Simo et Taylor [73] ou encore Reese et Govindjee [60], qui proposent un potentiel hyper-visco-élastique dérivé d'un modèle de Maxwell généralisé où les ressorts linéaires sont tous remplacés par des ressorts hyper-élastiques (Fig. 4.12). Une présentation simple et compréhensible de la mise en œuvre numérique de ces modèles est présentée dans [43] par Kaliske et Rothert. De la même manière, un modèle de Zener fractionnaire non linéaire est obtenu en remplaçant les deux ressorts du modèle par des ressorts hyperélastiques (Fig. 4.13). La loi de comportement dans le domaine fréquentiel est alors donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\omega) = \mathbb{C}_{\text{nl}}^*(\omega) : \boldsymbol{\epsilon}^*(\omega) \quad (4.94)$$

où  $\mathbb{C}_{\text{nl}}^*$  est le tenseur d'élasticité linéarisé dans le domaine fréquentiel, tel que :

$$\mathbb{C}_{\text{nl}}^*(\omega) = \mathbb{C}_{\text{nl}}^{\text{eq}} + i\omega h^*(\gamma_\infty - 1)\text{dev}(\mathbb{C}_{\text{nl}}^{\text{eq}}) \quad (4.95)$$

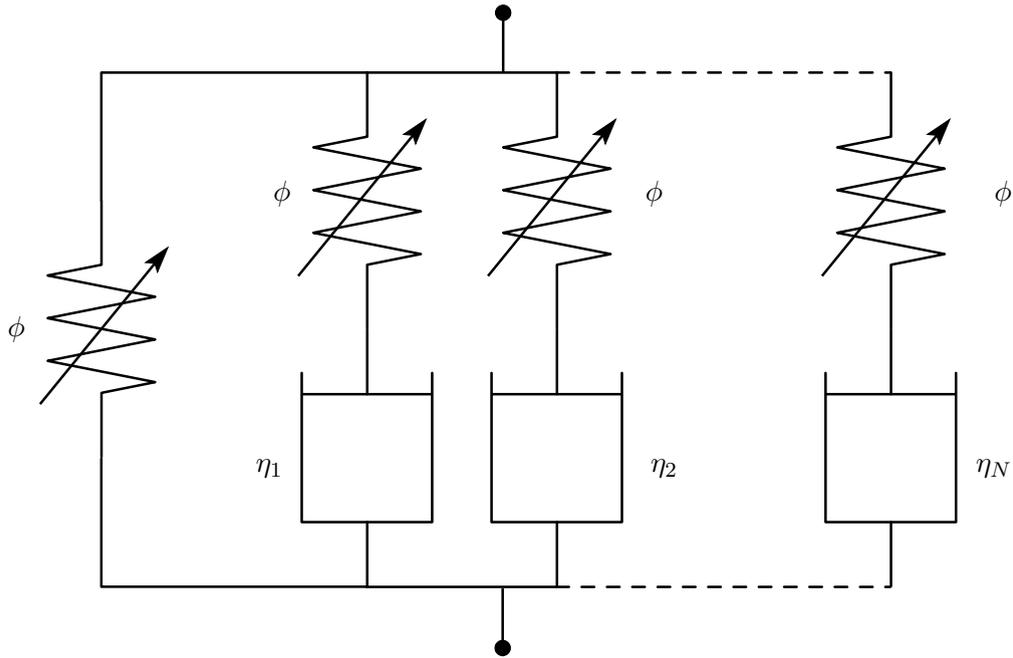


FIGURE 4.12 – Modèle de Maxwell généralisé utilisé dans cette thèse, avec réponse statique hyperélastique et réponse dynamique dépendant de la précharge

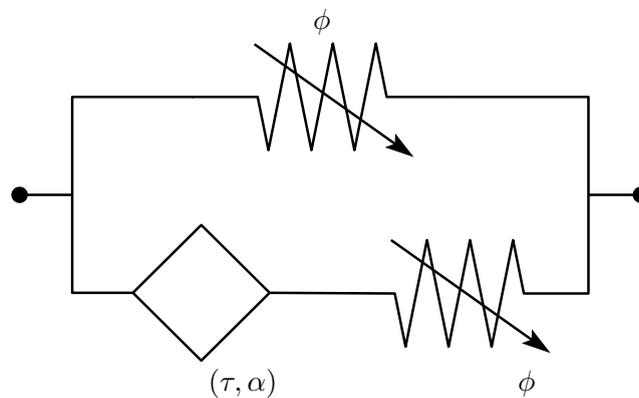


FIGURE 4.13 – Modèle de Zener fractionnaire proposé dans cette thèse, avec réponse statique hyperélastique et réponse dynamique dépendant de la précharge

## 4.4 Conclusion

Grâce à une étude bibliographique, ce chapitre met en évidence la dépendance à la précharge de la dissipation dans les élastomères. Les non-linéarités géométriques engendrées par la précharge sont liées au comportement hyperélastique des liaisons. Ces lois de comportement sont présentées en détail au début de la seconde partie du chapitre. Le calcul numérique de la précharge et l'implémentation de l'algorithme de résolution de Newton-Raphson sont détaillés à la fin de la seconde partie avec la validation du code implémenté sur un exemple de liaison soumis à différents chargements.

Dans la suite du chapitre, une loi de comportement hyper-visco-élastique, basée sur les travaux de Lion, Rektas et Rendeck [47], est présentée. L'objectif est de parvenir à un modèle viscoélastique valide en non-linéaire géométrique. Cette loi de comportement est ensuite linéarisée autour d'un état de précharge. Le modèle obtenu n'est pas directement appliqué dans la suite du travail en raison du manque de données expérimentales permettant d'identifier les paramètres viscoélastiques en non-linéaire. Cette identification représente néanmoins une perspective intéressante à ce travail de thèse.

## Chapitre 5

# Modèles réduits de liaisons élastomère précontraintes

**Résumé** *Ce chapitre se base sur les développements du chapitre quatre et sur les méthodologies de réduction du chapitre trois pour obtenir des modèles réduits de liaisons amortissantes tenant compte de l'influence de la précharge sur la dissipation et sur le comportement dynamique des liaisons. Une première section présente les équations de la dynamique dans les cas précontraints, avec ou sans amortissement, ainsi que des résultats de calcul montrant l'influence de la précharge sur le comportement dynamique des liaisons. La seconde section de ce chapitre présente les résultats des modèles réduits dans le cas non dissipatif, où seul la précharge est prise en compte. La troisième section présente les résultats des modèles réduits dans le cas amorti et précontraint.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Dynamique des liaisons préchargées</b>	<b>150</b>
5.1.1	Écriture des équations de la dynamique dans le cas préchargé	150
5.1.2	Influence de la précharge sur le comportement dynamique des liaisons	151
<b>5.2</b>	<b>Réduction par sous-structuration dans le cas non amorti</b>	<b>156</b>
5.2.1	Méthode aux interfaces fixes	156
5.2.2	Méthode aux interfaces libres	161
<b>5.3</b>	<b>Réduction par sous-structuration dans le cas amorti</b>	<b>166</b>
5.3.1	Méthode aux interfaces fixes	166
5.3.2	Méthode aux interfaces libres	171
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>176</b>

---

## 5.1 Dynamique des liaisons préchargées

Cette section présente les équations de la dynamique des liaisons préchargées, dans un premier temps pour le cas non amorti, dans un second temps pour le cas amorti. Ces équations sont accompagnées de résultats de calculs montrant l'influence de la précharge sur le comportement dynamique des liaisons.

### 5.1.1 Écriture des équations de la dynamique dans le cas préchargé

**Dans le cas non amorti** Dans le cadre des éléments finis, le déplacement  $\mathbf{q}$  est ici considéré comme étant la somme d'un déplacement statique dû à la précharge  $\mathbf{q}_s$  et d'un petit déplacement dynamique  $\mathbf{q}_d$ , tels que  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_d$ . De même, les efforts extérieurs  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  sont composés d'un vecteur de précharge  $\mathbf{f}_s$  et d'un vecteur  $\mathbf{f}_d$  représentant le chargement dynamique autour de la précharge, avec  $\mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_d$ . L'équation de la dynamique, discrétisée par éléments finis, est ici similaire à l'équation de la statique (Eq. 4.37) à laquelle s'ajoute un terme d'inertie, c'est à dire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (5.1)$$

Un développement de Taylor à l'ordre 1 permet alors d'écrire les efforts internes sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_d) = \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}_s) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_s} \mathbf{q}_d \quad (5.2)$$

où la dérivée des efforts internes par rapport aux déplacements est la matrice de raideur tangente définie dans la section 4.2.5. En tenant compte du fait que  $\ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{0}$ , et que  $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{q}_s) = \mathbf{f}_s$  (Eq. 4.37), l'équation (Eq. 5.1) devient alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_{\text{tan}}(\mathbf{q}_s)\mathbf{q}_d = \mathbf{f}_d \quad (5.3)$$

En considérant le chargement  $\mathbf{f}_d$  et le déplacement  $\mathbf{q}_d$  harmoniques, l'équation précédente peut être exprimée dans le domaine fréquentiel sous la forme finale :

$$(\mathbf{K}_{\text{tan}}(\mathbf{q}_s) - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_{\text{freq}} = \mathbf{f}_{\text{freq}} \quad (5.4)$$

où  $\mathbf{q}_{\text{freq}}$  et  $\mathbf{f}_{\text{freq}}$  sont les amplitudes des déplacements et des efforts extérieurs aux nœuds.

**Dans le cas amorti** Par identification avec l'équation (Eq. 5.4), l'équation de la dynamique du cas amorti précontraint peut s'écrire de façon similaire au cas amorti non précontraint (Eq. 2.78) sous la forme :

$$(\mathbf{K}_{\text{tan}}^0(\mathbf{q}_s) + i\omega h^*(\omega)\mathbf{K}_{\text{tan}}^\infty(\mathbf{q}_s) - \omega^2\mathbf{M}) \mathbf{q}_{\text{freq}} = \mathbf{f}_{\text{freq}} \quad (5.5)$$

où  $\mathbf{K}_{\text{tan}}^0 = \mathbf{K}_{\text{tan}}$  et où  $\mathbf{K}_{\text{tan}}^\infty = (\gamma_\infty - 1)\text{dev}(\mathbf{K}_{\text{tan}})$ . Le module adimensionné  $\gamma_\infty$  et la fonction complexe  $h^*$  assure le lien avec le modèle viscoélastique conformément aux développements de la section 2.3.2. Il est à noter que les paramètres du modèle viscoélastique sont ici identiques à ceux utilisés en linéaire en raison du manque de données expérimentales pour identifier des paramètres viscoélastiques en grande déformation. Bien que cela ne représente pas la réalité, le modèle dissipatif (Eq. 5.5) affiche tout de même une dépendance à la précharge et permet de valider la prise en compte de cette dernière par les méthodes de réduction de Craig-Bampton et Rubin.

### 5.1.2 Influence de la précharge sur le comportement dynamique des liaisons

Pour montrer l'influence des précharges sur le comportement dynamique de la structure, les FRFs obtenues avec les modèles précontraints (Eq. 5.4) et (Eq. 5.5) sont affichées dans la figure (Fig. 5.1) pour le cas non amorti, et dans la figure (Fig. 5.2) pour le cas amorti viscoélastique. Le cas de précharge étudié correspond à un chargement de compression de 3000 N et la courbe noire représente les FRFs de la structure sans la précontrainte. Dans le cas non amorti, la précharge a tendance à décaler les modes de liaisons vers les basses fréquences, ce qui traduit un comportement assouplissant. Les fréquences de résonance de la structure en aluminium restent en revanche inchangées puisque la précharge ne les concerne pas directement. Les fréquences de résonance de ces modes de structures sont indiquées sur les figures par des lignes verticales en pointillés.

Dans le cas amorti, le comportement viscoélastique entraîne une disparition des résonances de liaisons, ce qui explique qu'aucun décalage en fréquence ne soit visible entre les réponses avec ou sans précharge. En effet, les seuls modes encore représentés sont des modes de structure, dont la fréquence de résonance n'est pas affectée par la précharge.

La présence d'amortissement entraîne également une diminution de l'ensemble de la ré-

## 5.1. DYNAMIQUE DES LIAISONS PRÉCHARGÉES

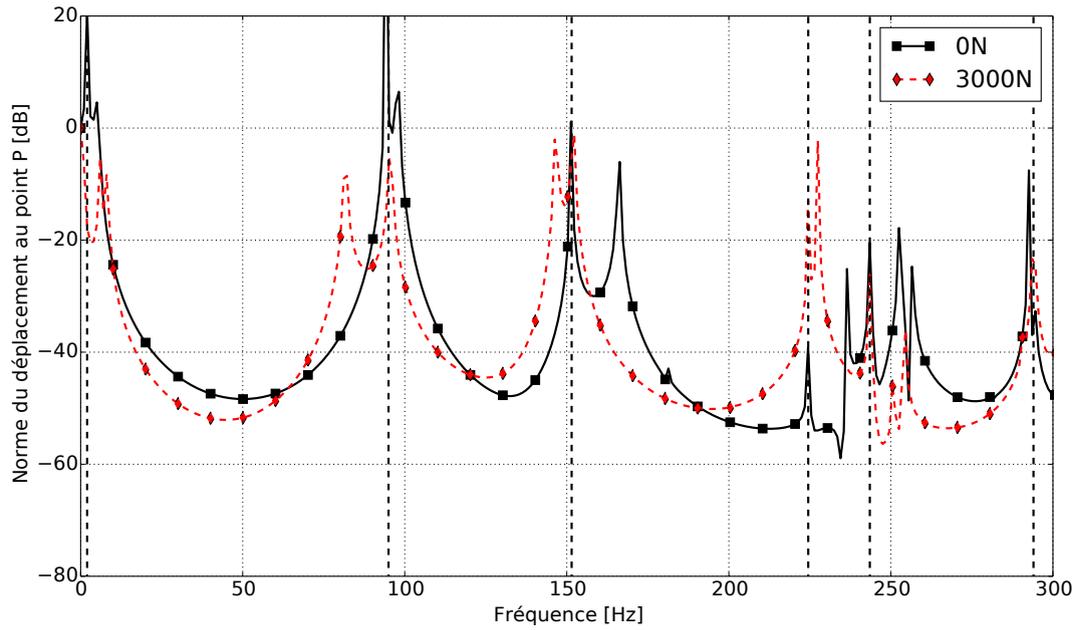


FIGURE 5.1 – Comparaison des FRFs obtenues avec le modèle non amorti de référence, et précontraint à 3000 N.

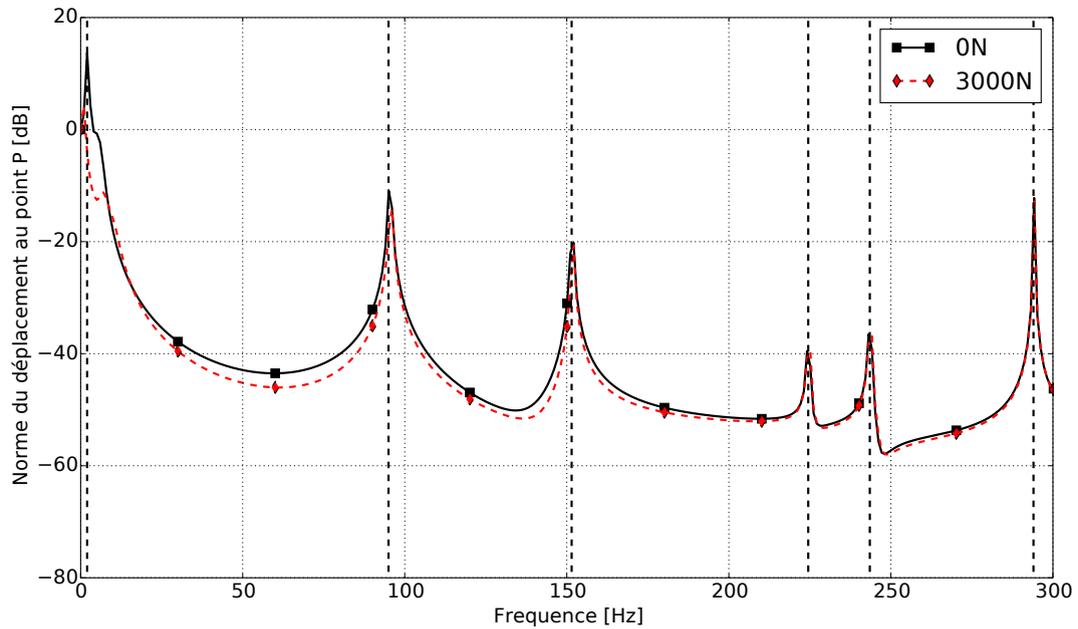


FIGURE 5.2 – Comparaison des FRFs obtenues avec le modèle amorti viscoélastique de référence et précontraint à 3000 N.

ponse. Il semble que dans le cas amorti la précharge n'ait pas une influence aussi importante sur l'amplitude de la réponse que dans le cas non amorti. Cette observation peut être due au fait que dans le modèle utilisé, les paramètres viscoélastiques relatifs au temps de relaxation du matériau sont indépendants de la précharge. Ce modèle, bien qu'insuffisant, est utilisé dans cette thèse car il ne nécessite pas d'être identifié à l'aide d'essais couplant à la fois une précharge à un essai dynamique de type DMA. Il permet tout de même de valider la méthode de réduction de modèle avec prise en compte de la précharge.

Le comportement modal des liaisons est également étudié dans cette section. La figure (Fig. 5.3) montre l'impact de la précontrainte sur certains des modes de liaisons à interfaces fixes. L'évolution des fréquences propres de ces modes avec la précharge correspond exactement au décalage en fréquence des résonances de liaisons. Il est en effet possible d'observer les décalages des modes (a | 96 Hz) vers (d | 81 Hz), (e | 165 Hz) vers (h | 146 Hz) et (i | 256 Hz) vers (l | 254 Hz) de la figure (Fig. 5.3), sur la figure (Fig. 5.1). Cette observation indique que d'un point de vue global, les liaisons se comportent comme si leurs interfaces étaient fixes. À l'inverse, la figure (Fig. 5.4) montre que les fréquences propres des modes de liaisons à interfaces libres augmentent avec la précharge, ce qui correspond plutôt à un comportement raidissant.

D'après les observations faite dans cette première section, les méthodes de sous-structuration à interfaces fixes sont mieux adaptées à la réduction des modèles de liaisons amortissantes préchargées que les méthodes à interfaces libres. Les fréquences propres des modes à interfaces fixes suivent en effet un décalage vers les basses fréquences qui correspond au comportement assouplissant observé sur la réponse de la structure (Fig. 5.1). La section suivante a pour objectif de vérifier cette hypothèse à travers l'analyse des réponses dynamiques de modèles réduits de liaison obtenus à l'aide des méthode de Craig-Bampton et de Rubin présentées dans le chapitre 3. Ces méthodes sont adaptées au cas préchargé en utilisant la matrice de raideur tangente au lieu de la matrice de raideur classique pour le calcul des modes de liaisons à interfaces fixes ou libres.

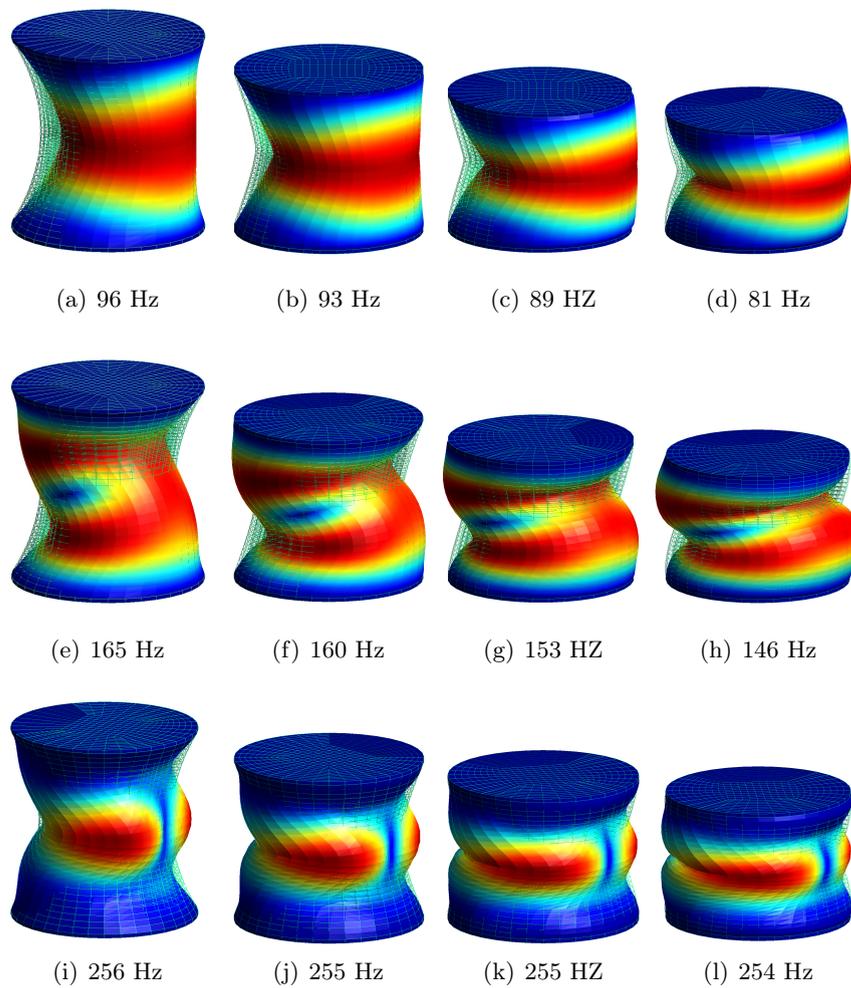


FIGURE 5.3 – Modes propres 1, 4 et 17 à interfaces fixes avec une précontrainte de 0, 1000, 2000 et 3000 N (de gauche à droite)

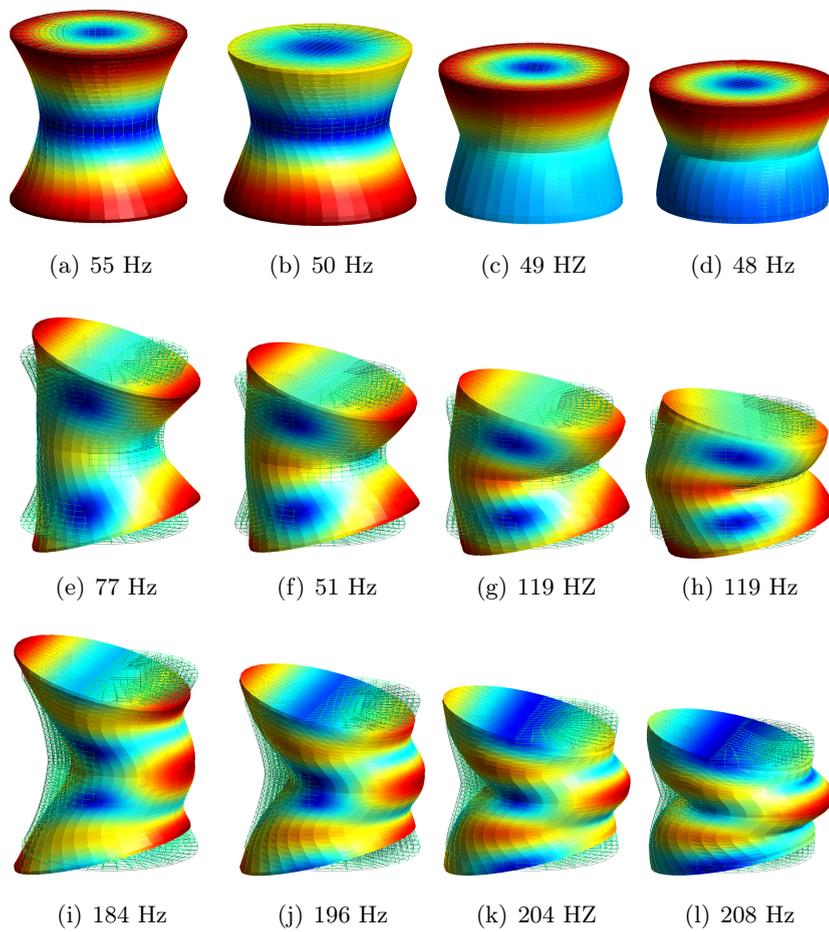


FIGURE 5.4 – Modes propres 1, 3 et 9 à interfaces libres avec une précontrainte de 0, 1000, 2000 et 3000 N (de gauche à droite)

## 5.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS NON AMORTI

TABLE 5.1 – Fréquences propres maximales des modes dynamiques pour la méthode de Craig-Bampton, avec des précharges de 1000, 2000 et 3000 N

	1000 N	2000 N	3000 N
Numéro du mode	Fréquence propre	Fréquence propre	Fréquence propre
20	284 Hz	277 Hz	266 Hz
60	415 Hz	405 Hz	400 Hz
100	509 Hz	499 Hz	497 Hz
140	568 Hz	567 Hz	564 Hz

### 5.2 Réduction par sous-structuration dans le cas non amorti

Les méthodes de Craig-Bampton et de Rubin sont ici utilisées pour réduire les modèles de liaison préchargée, sans amortissement viscoélastique. Les sections suivantes présentent une analyse des résultats de ces super-éléments pour trois cas de précharge en compression à 1000, 2000 et 3000 N.

#### 5.2.1 Méthode aux interfaces fixes

Quatre super-éléments de type Craig-Bampton sont testés pour chaque cas de précharge, allant de 20 à 140 modes dynamiques, avec un pas de 40 modes. Les fréquences propres maximales des modes dynamiques de chacun de ces super-éléments sont données dans le tableau (Tab. 5.1) en fonction du niveau de précharge.

Les FRFs obtenues sont comparées dans la figure (Fig. 5.5) aux résultats de référence, pour le cas précontraint à 1000 N. La figure (Fig. 5.6) montre que le super-élément à 20 modes dynamiques reproduit la courbe de référence jusqu'aux alentours de 260 Hz (écart inférieur à 1 dB) alors que la fréquence propre du 20e mode est de 284 Hz, ce qui représente un facteur de 1,1. De la même manière, les super-éléments à 60 et 100 modes dynamiques reproduisent la courbe de référence jusqu'aux alentours de 360 Hz et 450 Hz avec des fréquences propres maximales de 415 Hz et 509 Hz. Cela correspond à des facteurs respectifs proches de 1,1. La fréquence propre maximale des modes dynamiques du super-élément à 140 modes dépasse les 550 Hz (1,1 fois la fréquence maximale d'étude). Cette observation concorde avec le fait que ce super-élément reproduit la courbe de référence sur l'ensemble

## 5.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS NON AMORTI

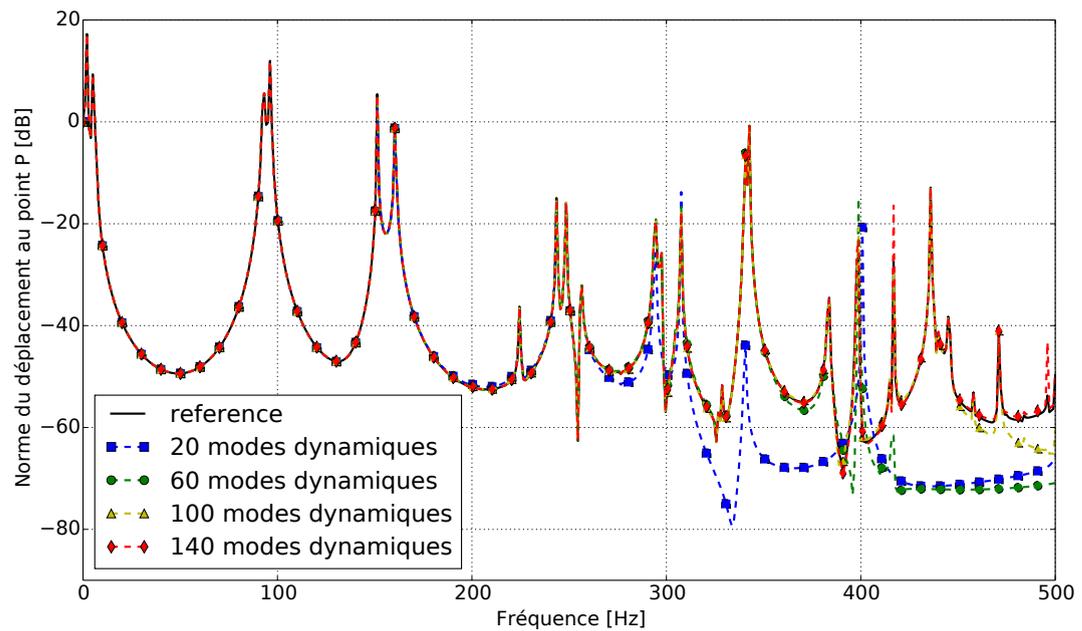


FIGURE 5.5 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Craig-Bampton, dans le cas non amorti préchargé à 1000 N

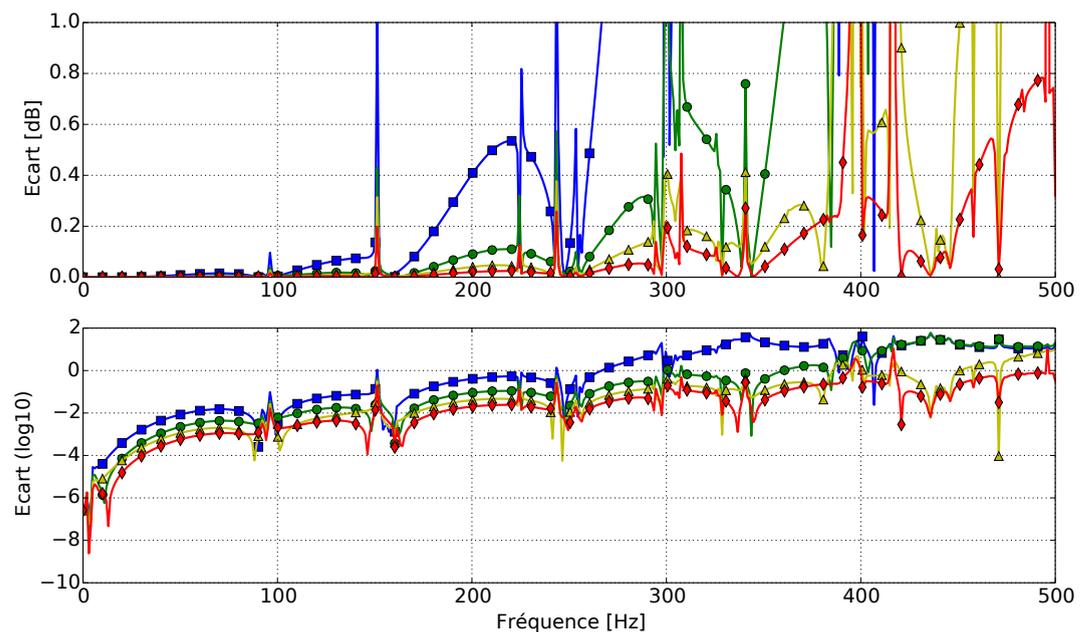


FIGURE 5.6 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le cas non amorti préchargé à 1000 N

## 5.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS NON AMORTI

---

de la plage de fréquence étudiée. Les résultats obtenus pour cette précharge de 1000 N suivent les mêmes tendances que dans le cas non précontraint, à savoir une convergence des résultats lorsque la plus grande des fréquences propres des modes dynamiques dépasse 1,1 fois la fréquence maximale d'étude.

Pour la précharge de 2000 N, les FRFs obtenues sont comparées dans la figure (Fig. 5.7) aux résultats de référence. Dans ce cas, la figure (Fig. 5.8) montre que les super-éléments à 20, 60 et 100 modes dynamiques reproduisent la courbe de référence jusqu'aux alentours de 260 Hz, 350 Hz et 450 Hz alors que les fréquences propres des 20e, 60e et 100e modes sont de 277 Hz, 405 Hz et 499 Hz. Les facteurs de fréquence de ces super-éléments sont donc encore une fois proche de 1,1. La fréquence propre du 140e mode dépasse à nouveau les 550 Hz ce qui s'accorde avec le fait que le super-élément à 140 modes reproduise les FRFs de référence sur l'ensemble de la plage de fréquence.

Finalement, les FRFs obtenues dans le cas précontraint à 3000 N sont comparées dans la figure (Fig. 5.9) aux résultats de référence. La figure (Fig. 5.10) montre que les super-éléments à 20, 60 et 100 modes dynamiques reproduisent la courbe de référence jusqu'aux alentours de 250 Hz, 350 Hz et 450 Hz alors que les fréquences propres des 20e, 60e et 100e modes sont de 266 Hz, 400 Hz et 497 Hz, ce qui correspond à des facteurs de fréquence proches de 1,1. Enfin, le super-élément à 140 modes représente correctement la courbe de référence sur l'ensemble de la plage de fréquence (500 Hz) tandis que la fréquence propre maximale de ces modes dynamiques dépasse 550 Hz.

Les résultats obtenus avec les super-éléments de type Craig-Bampton dans le cas précontraint non amorti sont donc en accord avec les résultats du cas non précontraint : tant que la fréquence maximale présente dans la base dynamique de ces super-éléments est supérieure à 1,1 fois la fréquence d'étude, les super-éléments convergent vers les résultats de référence. Les observations faites au début de ce chapitre sont confirmées : les modes à interfaces fixes sont bien adaptés à la réduction du modèle de liaison utilisé dans cette thèse.

Les temps de calcul sont similaires à ceux de la méthode de Craig-Bampton dans le cas non précontraint non amorti. La précontrainte est calculée de manière offline à la fois pour le modèle de référence et pour le modèle réduit, avec un temps de calcul identique pour les

## 5.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS NON AMORTI

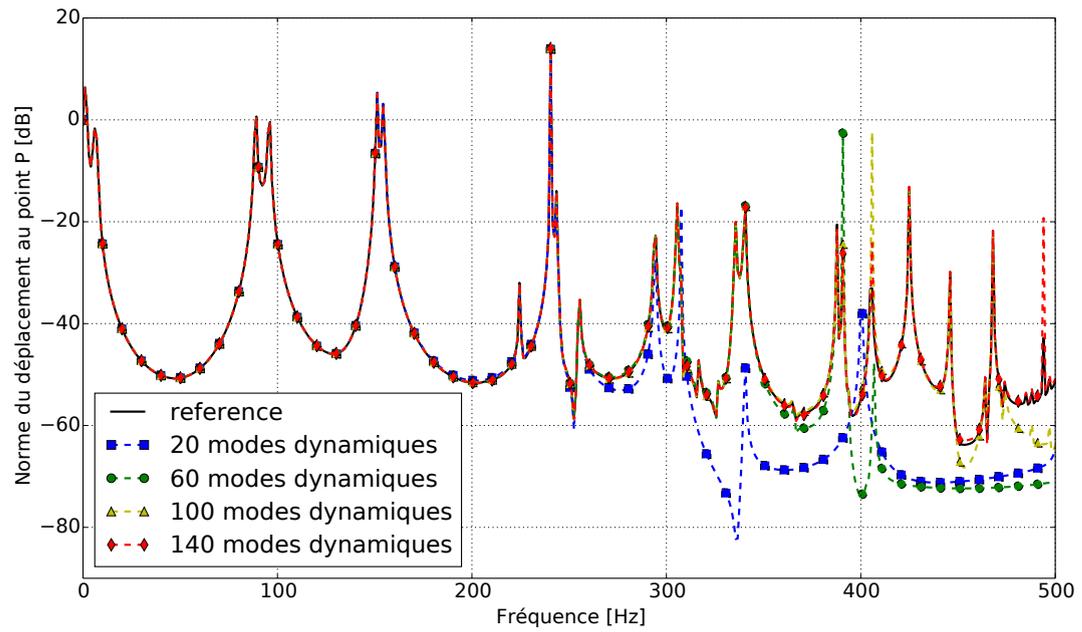


FIGURE 5.7 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Craig-Bampton, dans le cas non amorti préchargé à 2000 N

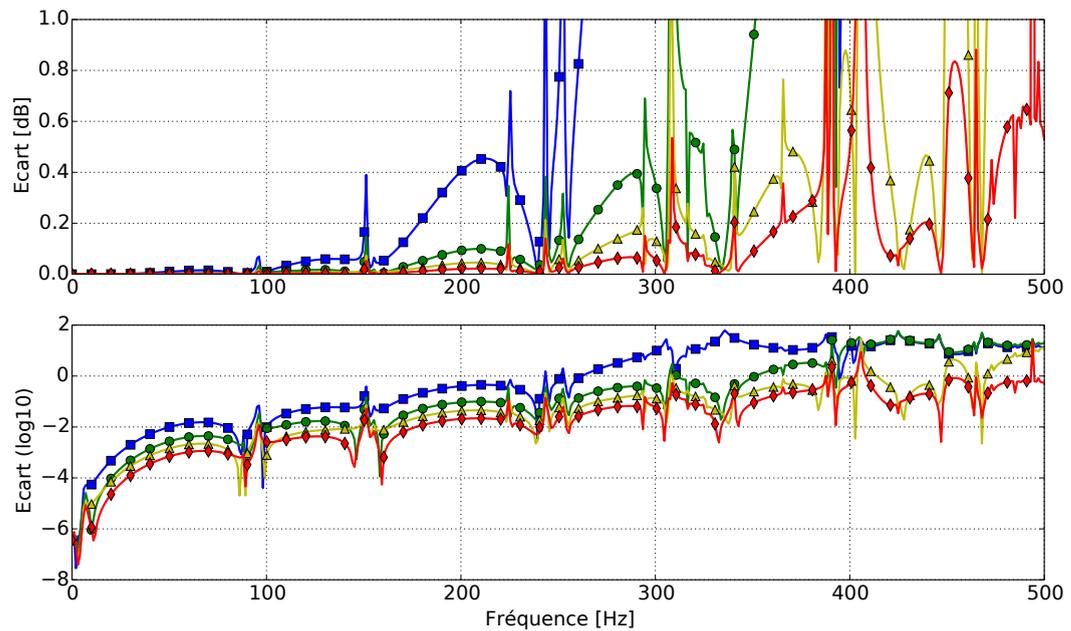


FIGURE 5.8 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le cas non amorti préchargé à 2000 N

## 5.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS NON AMORTI

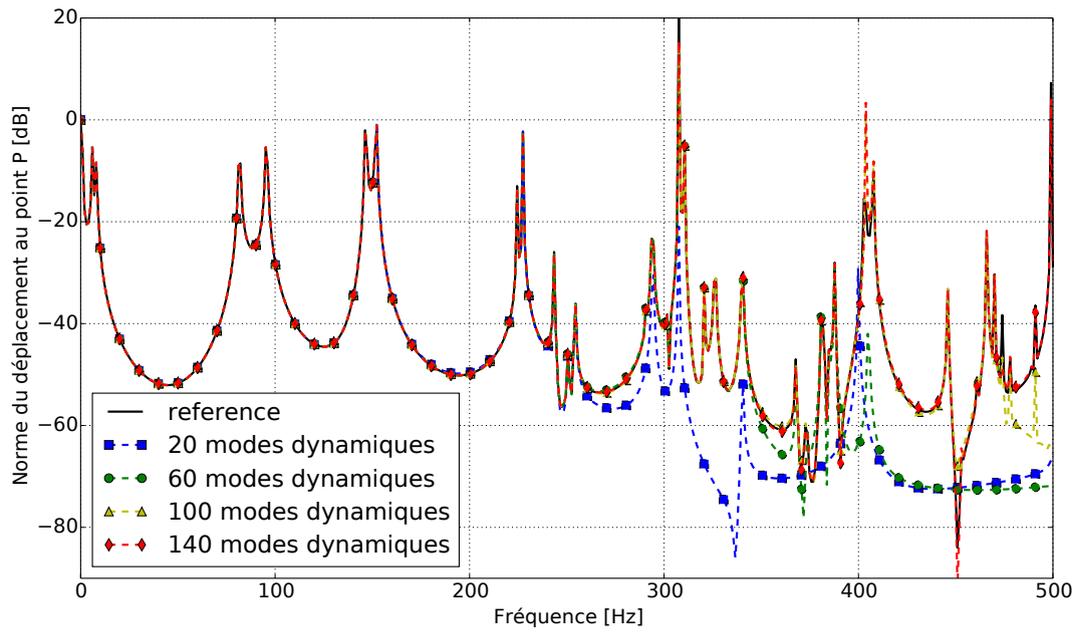


FIGURE 5.9 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Craig-Bampton, dans le cas non amorti préchargé à 3000 N

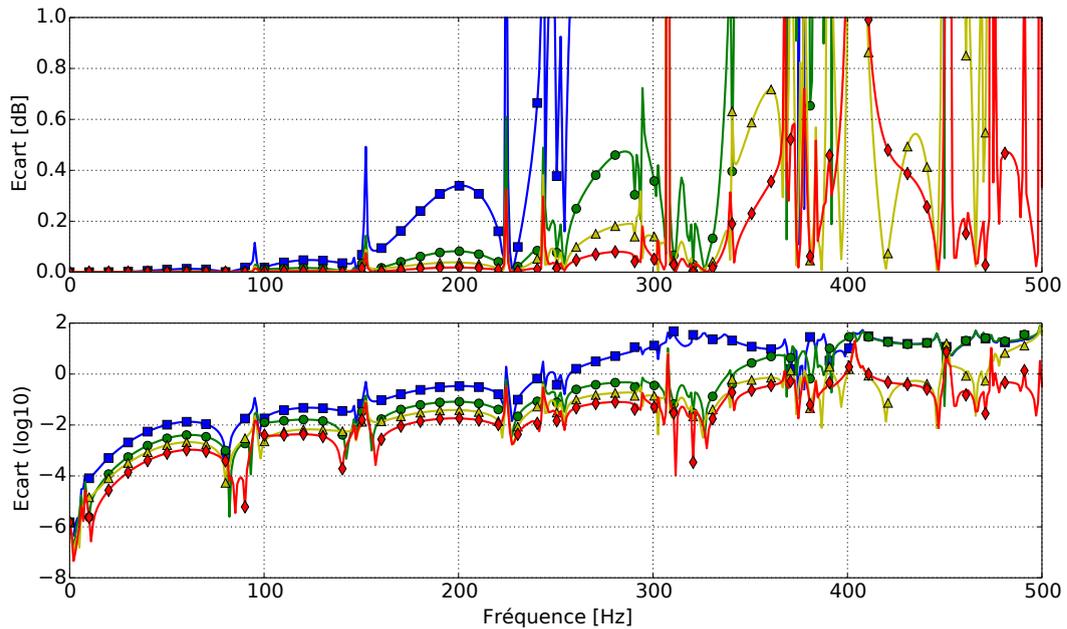


FIGURE 5.10 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le cas non amorti préchargé à 3000 N

TABLE 5.2 – Fréquences propres maximales des modes dynamiques pour la méthode de Rubin, avec une précontrainte de 1000, 2000 et 3000 N

	1000 N	2000 N	3000 N
Numéro du mode	Fréquence propre	Fréquence propre	Fréquence propre
26	267 Hz	265 Hz	257 Hz
66	401 Hz	399 Hz	392 Hz
106	499 Hz	489 Hz	497 Hz
146	560 Hz	559 Hz	562 Hz

deux. La méthode de Craig-Bampton permet encore une fois un calcul des FRFs 100 fois plus rapide que le calcul de référence et les temps de calcul observés sont similaires à ceux du cas non préchargé (Tab. 3.2).

### 5.2.2 Méthode aux interfaces libres

Quatre super-éléments de type Rubin sont testés pour chaque cas de précharge, allant de 26 à 146 modes dynamiques, avec un pas de 40 modes. Les fréquences propres maximales des modes dynamiques de chacun de ces super-éléments sont données dans le tableau (Tab. 5.2), pour tous les cas de précharge.

Les FRFs obtenues dans le cas précontraint à 1000 N sont comparées aux résultats de référence dans la figure (Fig. 5.11). Dans ce cas, la figure (Fig. 5.12) montre que le super-élément à 26 modes dynamiques reproduit la solution de référence jusqu'à 10 Hz (écart inférieur à 1 dB), ce qui correspond à un facteur de fréquence de 26. Cette augmentation du facteur de fréquence par rapport au cas non préchargé se retrouve avec les super-éléments suivants qui reproduisent la courbe de référence jusqu'à 220 Hz, 370 Hz et 460 Hz, alors que les 66e, 106e et 146e fréquences propres des modes dynamiques sont de 401 Hz, 499 Hz et 560 Hz. Les facteurs de fréquence de ces super-éléments sont donc respectivement 1,8, 1,35 et 1,2, alors que les facteurs de fréquence du cas non préchargé tendaient vers 1,2. Ces résultats semblent indiquer une légère augmentation des facteurs de fréquence avec la précharge.

Pour le cas précontraint à 2000 N, les FRFs obtenues sont comparées dans la figure (Fig. 5.13) aux résultats de référence. La figure (Fig. 5.14) montre que les super-éléments à 26,

## 5.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS NON AMORTI

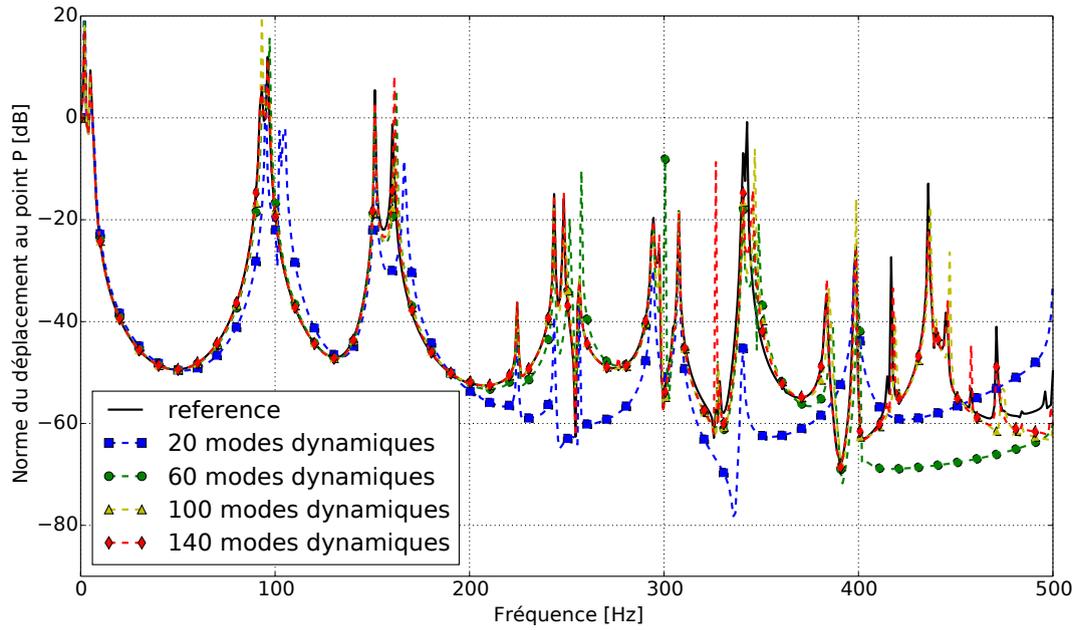


FIGURE 5.11 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Rubin, dans le cas non amorti préchargé à 1000 N

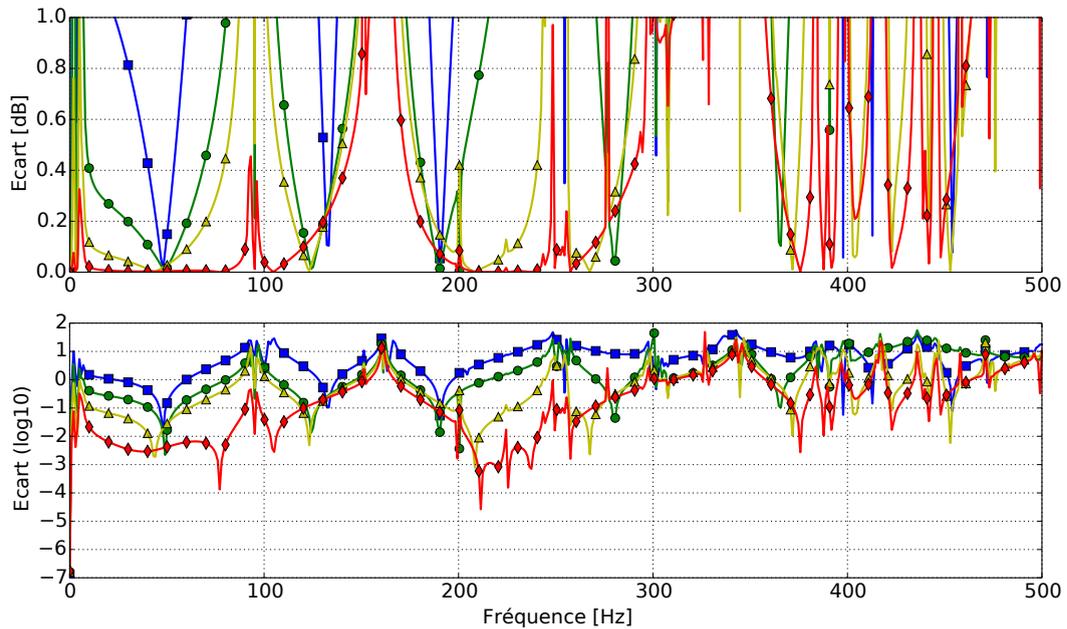


FIGURE 5.12 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le cas non amorti préchargé à 1000 N

## 5.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS NON AMORTI

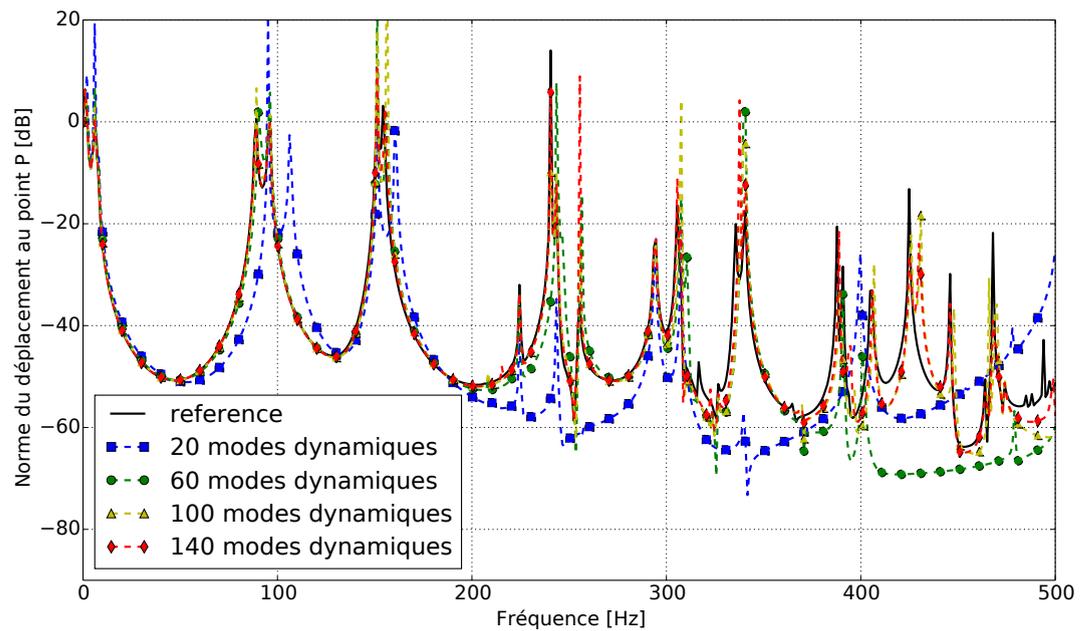


FIGURE 5.13 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Rubin, dans le cas non amorti préchargé à 2000 N

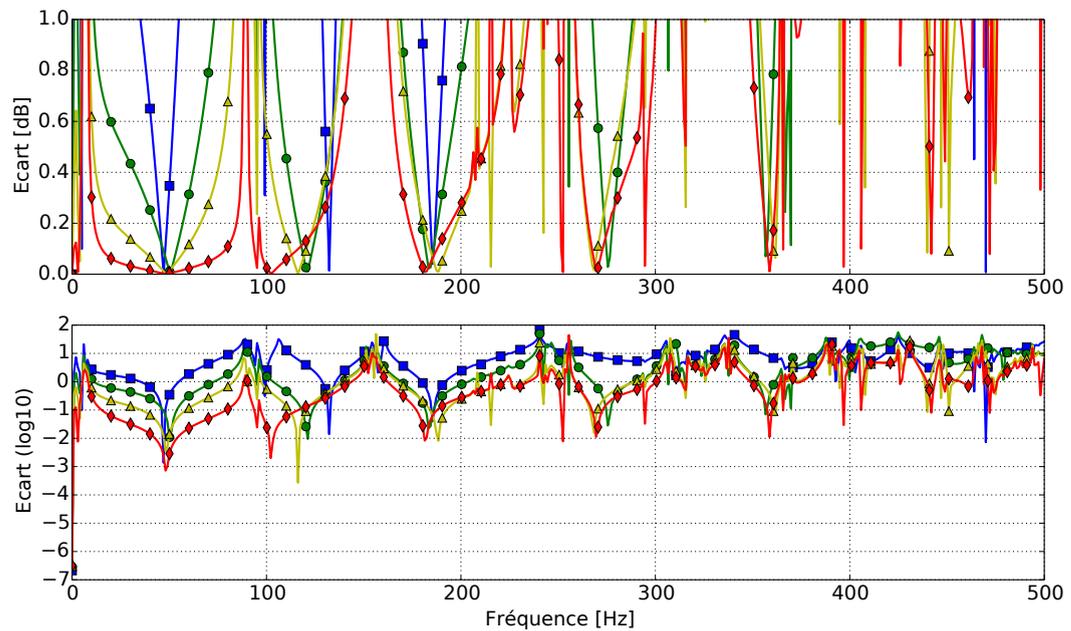


FIGURE 5.14 – Écart en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le cas non amorti préchargé à 2000 N

## 5.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS NON AMORTI

---

66 et 106 modes dynamiques, reproduisent la réponse de référence jusqu'à 10 Hz, 200 Hz et 300 Hz. Comparé aux fréquences propres du tableau (Tab. 5.2), cela correspond aux facteurs de fréquence suivants : 26, 2 et 1,6. Ces facteurs sont tous supérieurs aux facteurs de fréquence du cas préchargé à 1000 N ce qui souligne à nouveau l'influence de la précharge sur la méthode de Rubin. La figure (Fig. 5.14) montre également que le super-élément à 146 modes ne permet pas ici de donner des résultats convergés au-delà de 300 Hz, tout comme le super-élément à 106 modes. Ces résultats sont toutefois légèrement plus proches de la référence. L'augmentation de la précharge semble ici perturber les résultats du super-élément contenant le plus de modes dynamiques.

Finalement, les FRFs obtenues pour le cas précontraint à 3000 N sont comparées aux résultats de référence dans la figure (Fig. 5.15). Après observation de la figure (Fig. 5.16), les facteurs de fréquence et les fréquences limites de validité des super-éléments à 26 et 66 modes restent inchangés par rapport au cas de précharge précédent. En revanche, les super-éléments à 106 et 146 modes voient leurs fréquences de validité descendre de 300 à 290 Hz, avec un facteur de fréquence de 1,7 au lieu de 1,6 pour le super-élément à 106 modes.

Les résultats obtenus avec les super-éléments de type Rubin dans le cas précontraint non amorti sont en accord avec les résultats du cas non précontraint à savoir que le facteur de fréquence a tendance à décroître jusqu'à une valeur limite.

Toutefois, ces observations montrent que l'augmentation de la précharge entraîne ici une augmentation des facteurs de fréquence de la méthode de Rubin. De plus, à partir d'un certain niveau de précharge, la méthode de Rubin semble incapable de converger au delà d'une certaine limite, comme le prouve le super-élément à 146 modes dont les résultats se rapprochent de ceux du super-élément à 106 modes à partir de la précharge à 2000 N.

Globalement, les écarts affichés dans les figures (Fig. 5.12) à (Fig. 5.16) montrent une dégénérescence de la méthode quand la précontrainte augmente alors que la méthode de Craig-bampton reste stable.

Ces résultats sont en accord avec le fait que les fréquences propres des modes à interfaces libres augmentent avec la précharge alors que le modèle de référence affiche plutôt une diminution de ces fréquences. Les modes à interfaces libres sont mal adaptés à la réduction

## 5.2. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS NON AMORTI

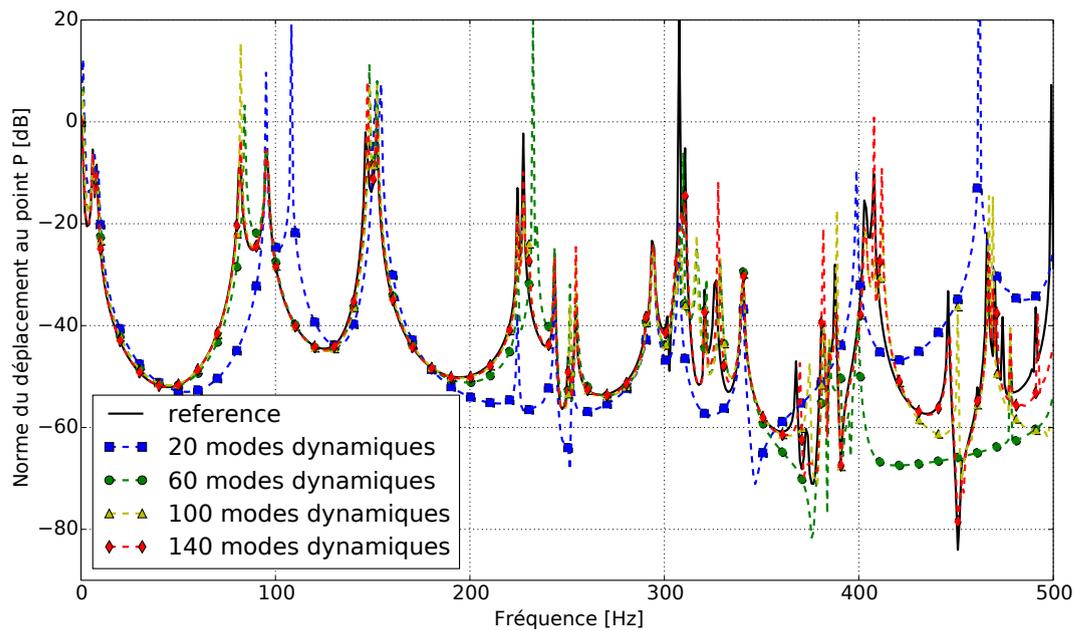


FIGURE 5.15 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Rubin, dans le cas non amorti préchargé à 3000 N

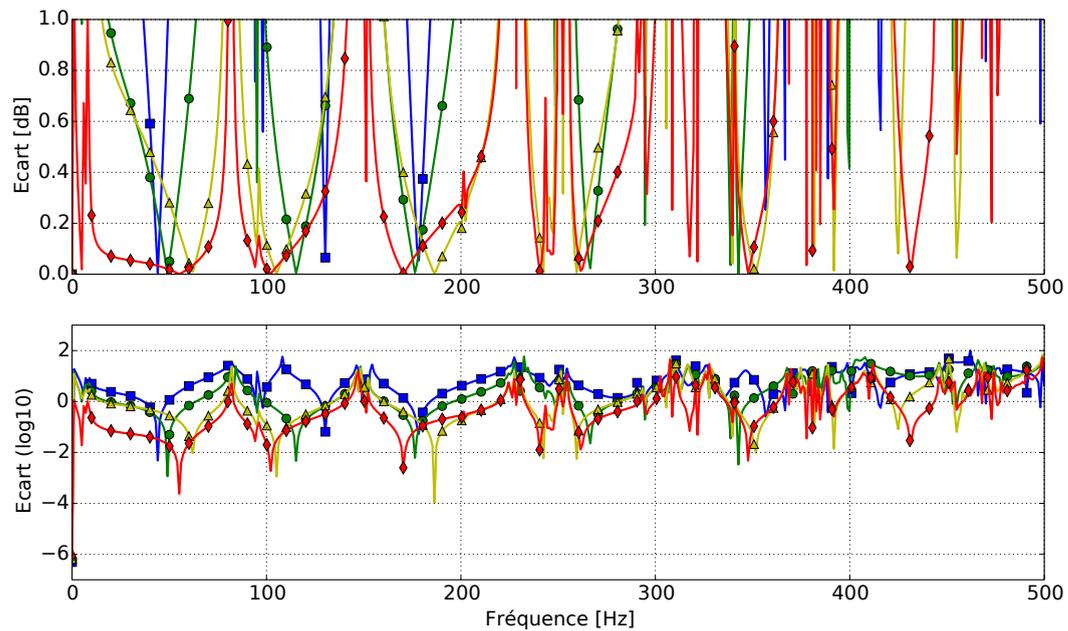


FIGURE 5.16 – Écart en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le cas non amorti préchargé à 3000 N

TABLE 5.3 – Fréquences propres maximales des pseudo-modes à interfaces fixes, pour des précharges de 1000, 2000 et 3000 N

		1000 N	2000 N	3000 N
Numéro du mode		Fréquence propre	Fréquence propre	Fréquence propre
$\omega_{\min}$	180	630 Hz	630 Hz	632 Hz
$\omega_{\max}$	40	1095 Hz	1082 Hz	1045 Hz
	80	1431 Hz	1416 Hz	1404 Hz
	120	1659 Hz	1616 Hz	1598 Hz

du modèle utilisé dans cette thèse.

La précharge est encore une fois calculée de manière offline. La réduction des temps de calcul des FRFs et les temps d'assemblage des super-éléments sont similaires au cas non précontraint, avec un facteur de gain de temps égal à 60. Les temps de calcul observés sont du même ordre que ceux du cas non préchargé (Tab. 3.4).

### 5.3 Réduction par sous-structuration dans le cas amorti

Les méthodes de Craig-Bampton et de Rubin sont ici utilisées pour obtenir des modèles de liaisons préchargées, avec amortissement viscoélastique. Les sections suivantes présentent une analyse des résultats de ces super-éléments pour les trois cas de précharge étudiés.

#### 5.3.1 Méthode aux interfaces fixes

Quatre super-éléments de types Craig-Bampton sont comparés, avec respectivement 0, 40, 80 et 120 pseudo-modes à fréquence maximale (1500 Hz), et 180 pseudo-modes à fréquence nulle. Les fréquences propres maximales des modes dynamiques de chacun de ces super-éléments sont données dans le tableau (Tab. 5.3), pour tous les cas de précharge.

Les FRFs obtenues avec les super-éléments de Craig-Bampton dans les 3 cas de précharge sont affichées sur les figures (Fig. 5.17, 5.19 et 5.21). Les figures (Fig. 5.18, 5.20 et 5.22) montrent que le super-élément construit sans l'approche multi-modèles ne parvient pas à représenter la réponse de référence au-delà de 250 Hz, 230 Hz et 190 Hz, suivant le cas de précharge. L'augmentation de la précharge diminue la fréquence de validité du

super-élément. Les super-éléments construits avec l'approche multi-modèles donnent tous de meilleurs résultats, démontrant l'utilité de cette méthode dans le cas préchargé.

Les figures (Fig. 5.18, 5.20 et 5.22) montrent également que les 3 super-éléments restants donnent globalement les mêmes résultats, ce qui signifie que 40 pseudo-modes à fréquence maximale sont suffisants pour obtenir les meilleurs résultats possibles avec la méthode de Craig-Bampton dans le cas préchargé, tout comme dans le cas non préchargé. En revanche, les résultats de ces super-éléments s'écartent plus de la réponse de référence lorsque la précharge augmente : l'écart dépasse 1 dB à partir de 1300 Hz environ dans le cas non préchargé, contre 1080 Hz, 800 Hz et 750 Hz dans les cas préchargés à 1000 N, 2000 N et 3000 N. La précharge a donc une influence sur les capacités des super-éléments de type Craig-Bampton.

Dans le cas présent, le meilleur super-élément en terme de rapport "nombre de modes" / "qualité des résultats" est celui à 180 pseudo-modes à fréquence nulle et 40 pseudo-modes à fréquence maximale. Les facteurs de fréquence de ses deux bases dynamiques sont proches de 0,4 et de 0,7. Ces facteurs restent en accord avec le cas non préchargé, ce qui semble indiquer que la méthode de Craig-bampton n'est pas perturbée par la précharge. Les temps de calcul de la méthode de Craig-bampton dans le cas amorti préchargé restent les mêmes que les temps de calcul du cas non préchargé (Tab. 3.6). Le facteur de gain de temps de calcul est de 50. L'étape de précharge doit être calculée à la fois pour la construction des super-éléments et pour le calcul des FRFs de référence : son temps de calcul n'entre donc pas en compte.

### 5.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

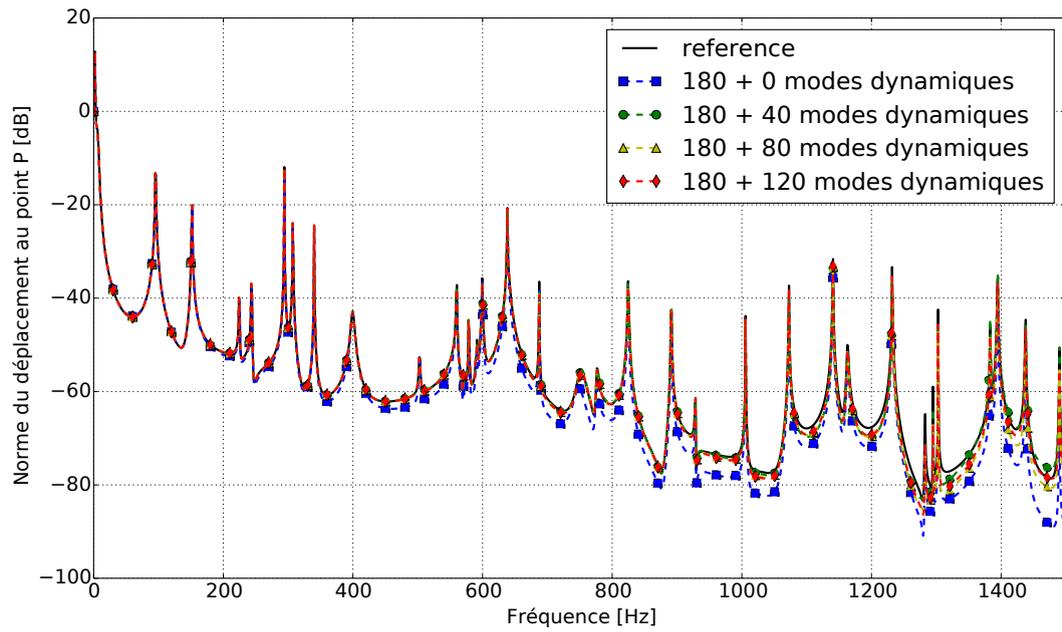


FIGURE 5.17 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Craig-Bampton, dans le cas amorti préchargé à 1000 N

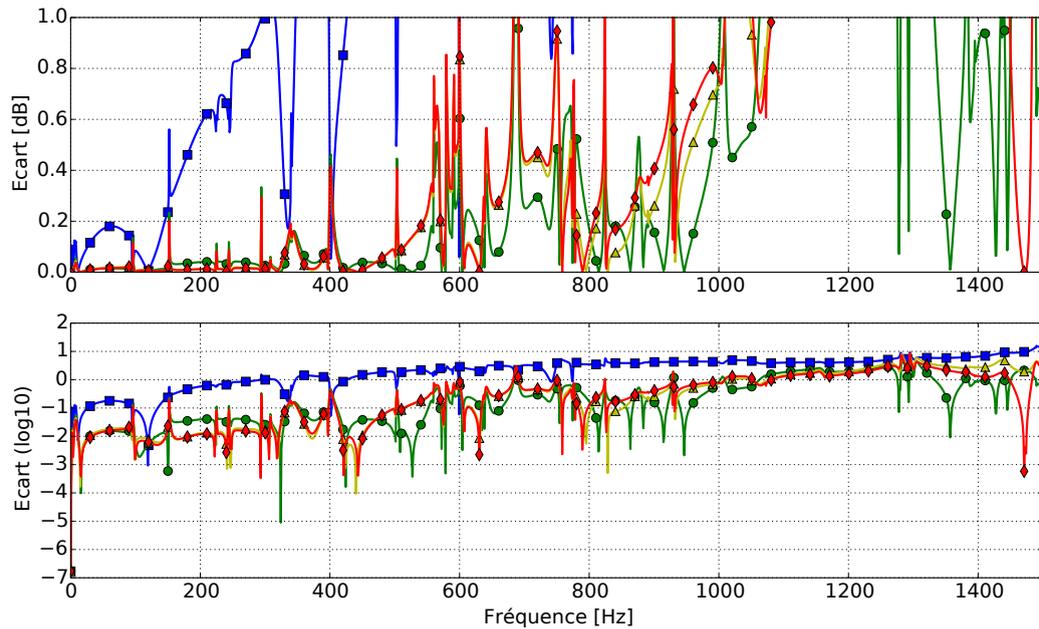


FIGURE 5.18 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le amorti préchargé à 1000 N

### 5.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

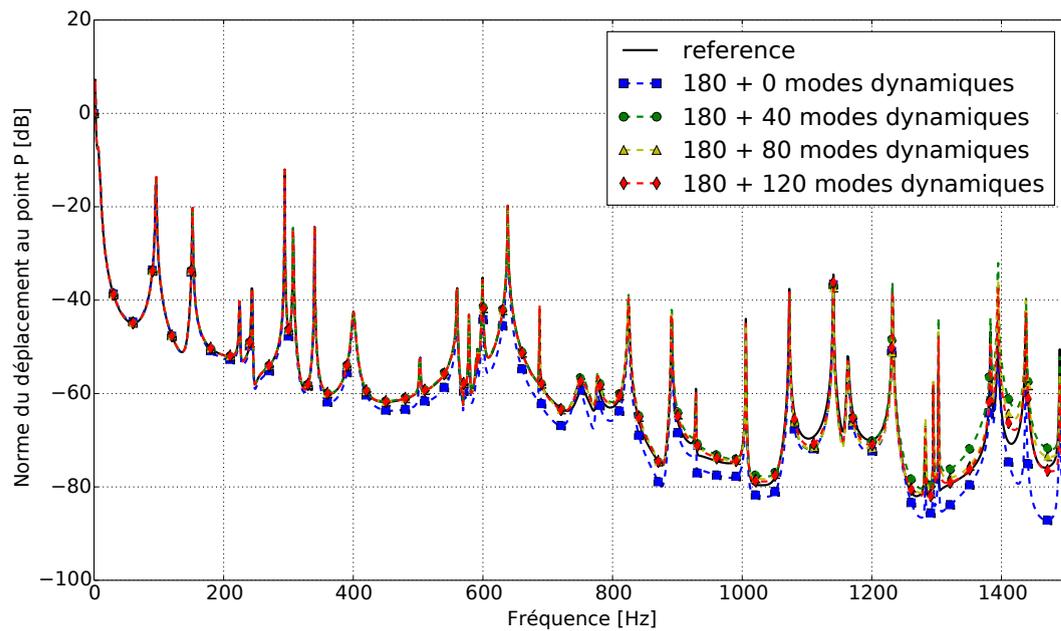


FIGURE 5.19 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Craig-Bampton, dans le cas amorti préchargé à 2000 N

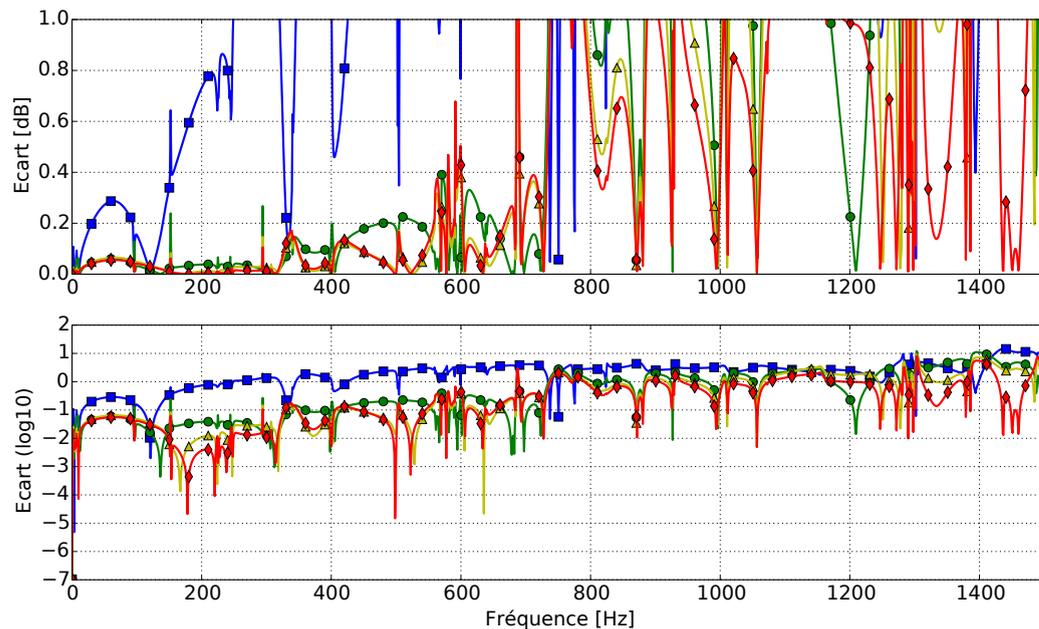


FIGURE 5.20 – Écart en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le amorti préchargé à 2000 N

### 5.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

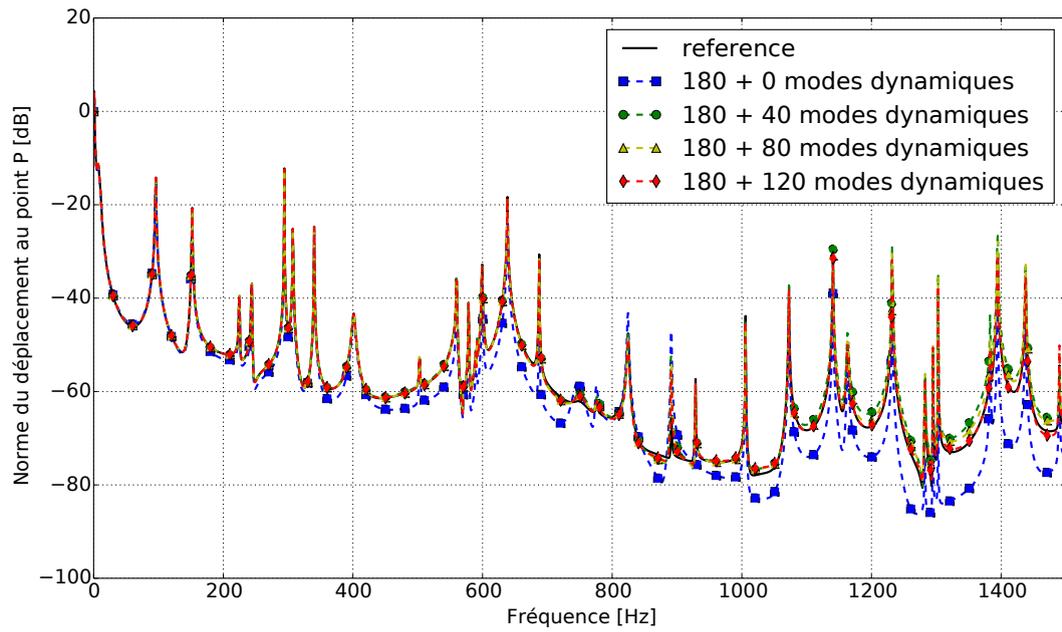


FIGURE 5.21 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Craig-Bampton, dans le cas amorti préchargé à 3000 N

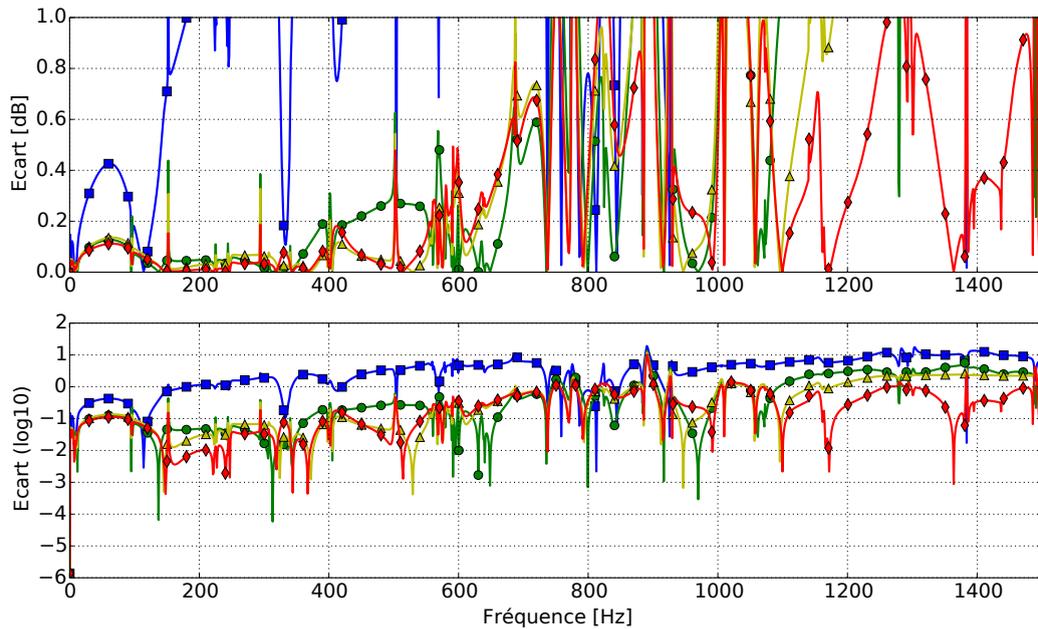


FIGURE 5.22 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le amorti préchargé à 3000 N

TABLE 5.4 – Fréquences propres maximales des pseudo-modes à interfaces libres, pour des précharges de 1000, 2000 et 3000 N

		1000 N	2000 N	3000 N
	Numéro du mode	Fréquence propre	Fréquence propre	Fréquence propre
$\omega_{\min}$	180	627 Hz	627 Hz	629 Hz
$\omega_{\max}$	40	1074 Hz	1082 Hz	1040 Hz
	80	1401 Hz	1397 Hz	1374 Hz
	120	1659 Hz	1616 Hz	1598 Hz

### 5.3.2 Méthode aux interfaces libres

Quatre super-éléments de type Rubin sont comparés, avec respectivement 0, 40, 80 et 120 pseudo-modes à fréquence maximale, et 186 pseudo-modes à fréquence nulle. Les fréquences propres maximales contenues dans les bases de ces super-éléments sont données dans le tableau (Tab. 5.4) en fonction de la précharge.

Les FRFs obtenues avec les super-éléments de Rubin dans les 3 cas de précharge sont affichées sur les figures (Fig. 5.23, 5.25 et 5.27). Les figures (Fig. 5.24, 5.26 et 5.28) montrent que le super-élément construit sans l'approche multi-modèles ne parvient pas à représenter la réponse de référence au-delà de 300 Hz, 240 Hz et 180 Hz, suivant le cas de précharge. L'augmentation de la précharge diminue la fréquence de validité du super-élément. Les super-éléments construits avec l'approche multi-modèles donnent tous de meilleurs résultats, démontrant l'utilité de cette approche avec la méthode de Rubin dans le cas préchargé amorti.

Pour le cas préchargé à 1000 N, la figure (Fig. 5.24) montre que l'augmentation du nombre de pseudo-modes à fréquence maximale améliore les résultats des super-éléments construits avec l'approche multi-modèles. Les facteurs de fréquence des super-éléments à 40 et 80 pseudo-modes à fréquence maximale sont tous les deux très proches de 1. Ce résultat est en accord avec le cas non préchargé, la méthode de Rubin ne semble pas perturbée par ce premier cas de précharge. Le super-élément à 120 modes affiche un écart inférieur à 1 dB avec la solution de référence, sur l'ensemble de la plage de fréquence, alors que le rapport entre la 120e fréquence propre des pseudo-modes à fréquence maximale et la fréquence maximale de la plage d'étude est de 1,1.

Pour les cas de précharge supérieures, les figures (Fig. 5.24) et (Fig. 5.24) montrent que les super-éléments construits avec l'approche multi-modèles donnent sensiblement les mêmes résultats, peu importe le nombre de pseudo-modes à fréquence maximale. Ces trois super-éléments gardent un écart inférieur à 1 dB avec le modèle de référence jusqu'à 1140 Hz. Ces observations indiquent qu'au delà d'un certain niveau de précharge la méthode de Rubin n'est plus capable de converger. Il est à noter que pour les trois cas de précharge, la méthode de Rubin affiche tout de même de meilleurs résultats que la méthode de Craig-Bampton. À taille de base dynamique égale, les super-éléments de type de Rubin donnent des résultats corrects jusqu'à 1140 Hz pour les deux cas de précharge les plus élevés alors que les mêmes super-éléments, construits par la méthode de Craig-Bampton, ne sont valables que jusqu'à 800 et 750 Hz.

Les résultats de la méthode de Rubin dans le cas précontraint amorti sont globalement en accords avec les observations faites dans les cas seulement amorti ou seulement précontraint :

- dans le cas non précontraint mais amorti, la méthode de Rubin affiche de meilleurs résultats que la méthode de Craig-Bampton, avec une base dynamique de taille identique,
- dans le cas seulement précontraint la méthode de Rubin présente des résultats de plus en plus éloignés du modèle de référence au fur et à mesure que la précharge augmente.

Dans le cas présent, lorsque la précharge est la plus faible, la méthode de Rubin tire avantage de l'amortissement et affiche de meilleurs résultats que la méthode de Craig-Bampton. Au fur et à mesure que la précharge augmente, l'écart entre les deux méthodes diminue et la méthode de Craig-Bampton finit par afficher de meilleurs résultats. Finalement, la méthode de Rubin se comporte différemment à chaque nouvelle précharge, ce qui rend la méthode peu prédictible au contraire de la méthode de Craig-Bampton.

### 5.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

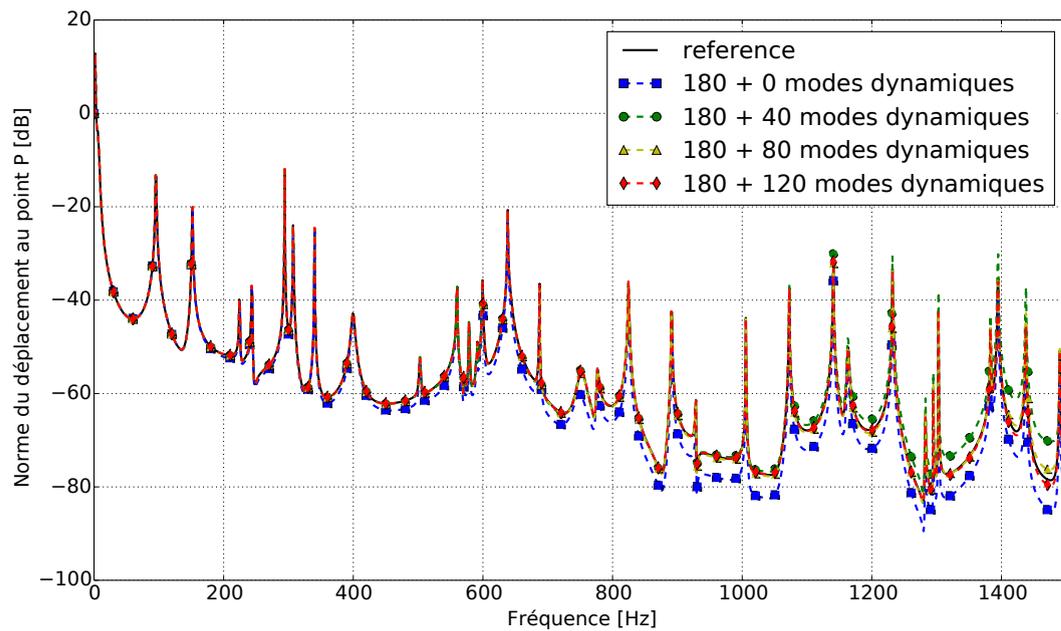


FIGURE 5.23 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Rubin, dans le cas amorti préchargé à 1000 N

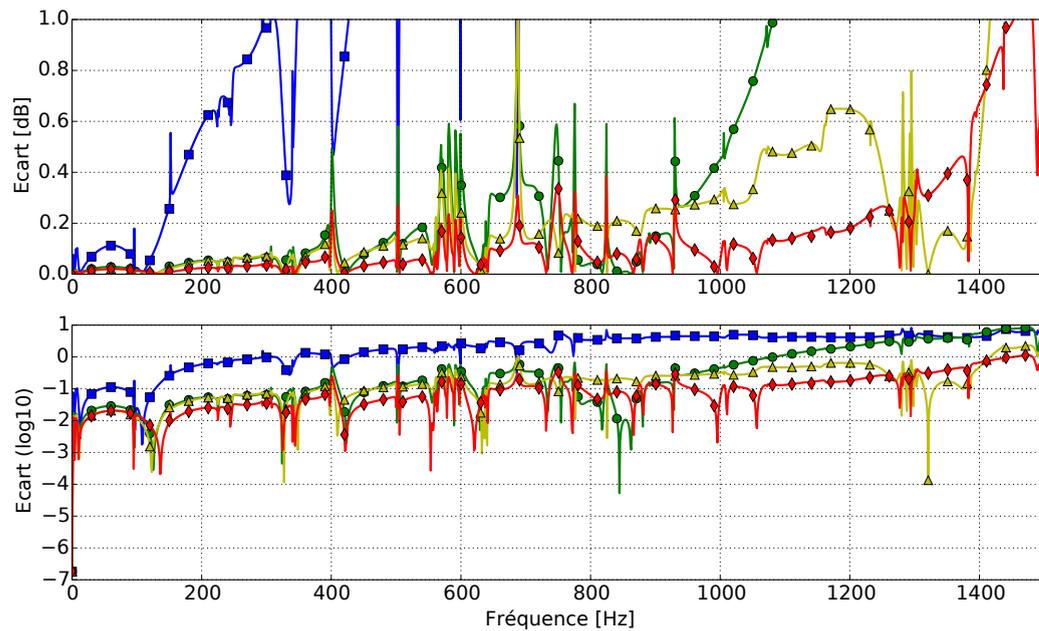


FIGURE 5.24 – Écart en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le amorti préchargé à 1000 N

### 5.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

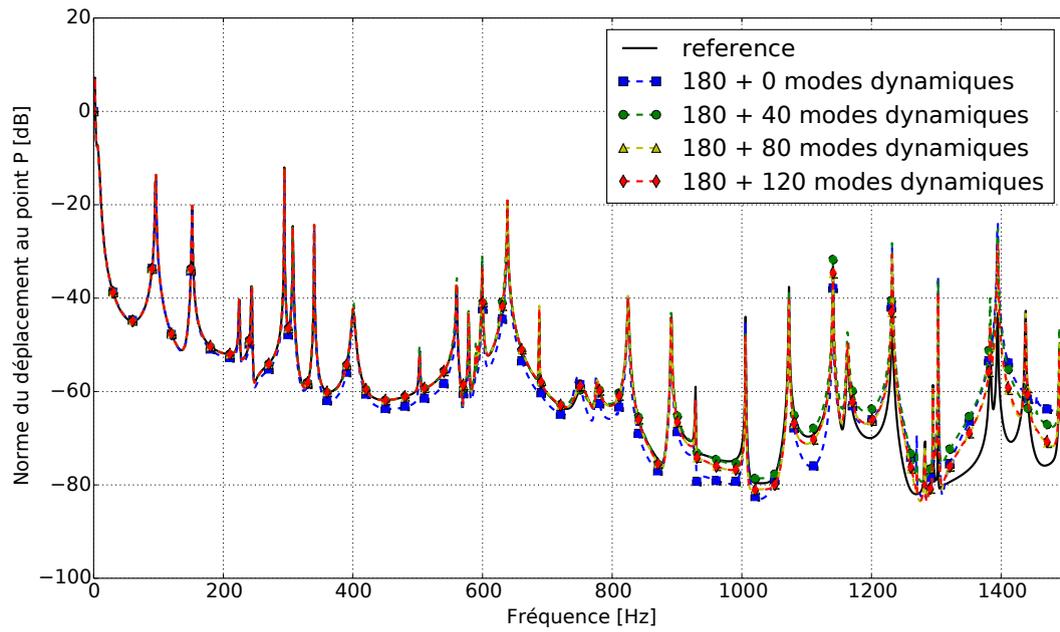


FIGURE 5.25 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Rubin, dans le cas amorti préchargé à 2000 N

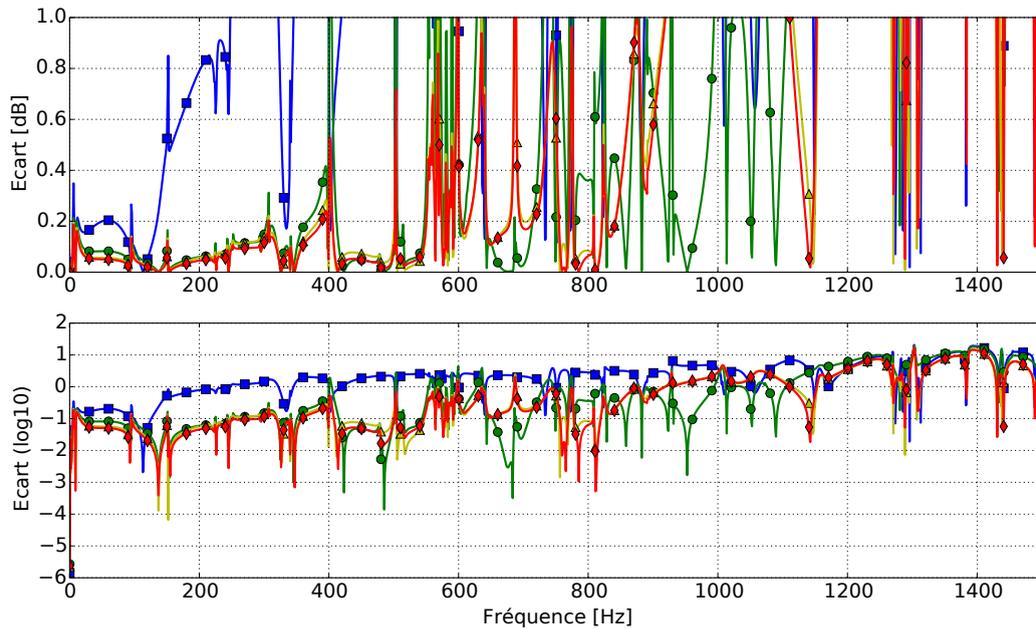


FIGURE 5.26 – Écarts en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le amorti préchargé à 2000 N

### 5.3. RÉDUCTION PAR SOUS-STRUCTURATION DANS LE CAS AMORTI

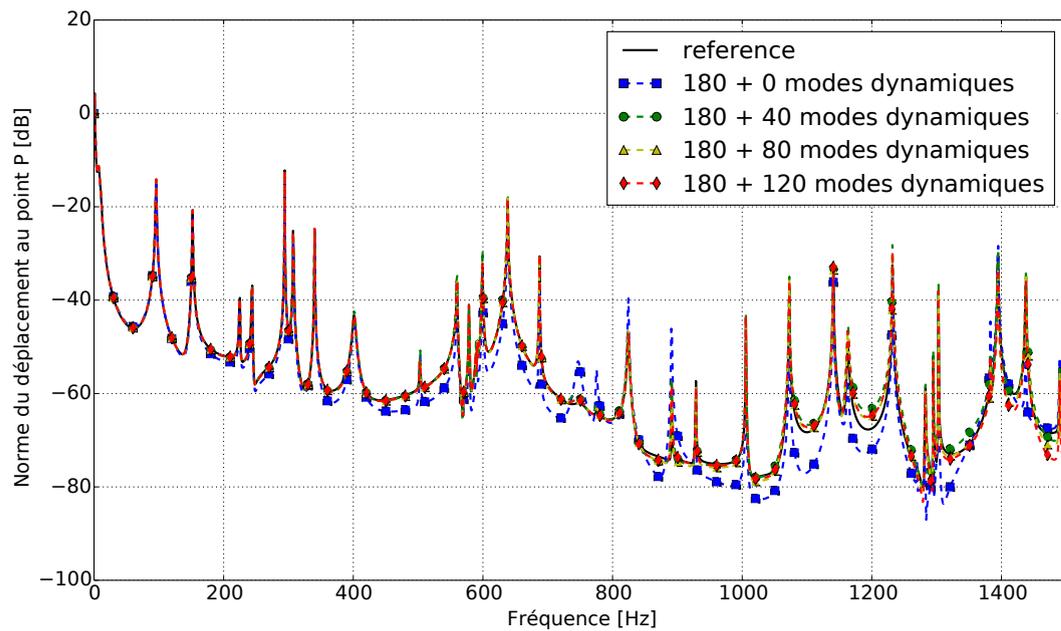


FIGURE 5.27 – FRFs obtenues avec les super-éléments de type Rubin, dans le cas amorti préchargé à 3000 N

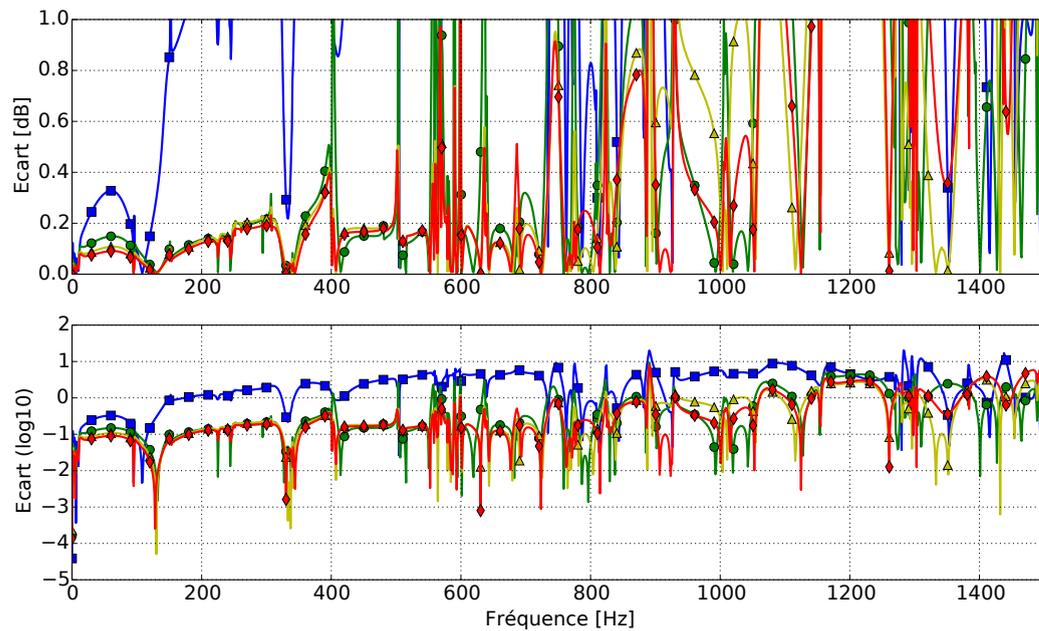


FIGURE 5.28 – Écart en dB des super-éléments étudiés avec le modèle de référence, dans le amorti préchargé à 3000 N

## 5.4 Conclusion

Les méthodes de sous-structuration de Craig-Bampton et de Rubin sont ici appliquées avec succès à la réduction d'un modèle de liaison élastomère, dans le cas non amorti et dans le cas amorti viscoélastique, avec prise en compte de non-linéarités géométriques causées par une précharge. Les super-éléments obtenus permettent de réduire les temps de calcul des FRFs d'un facteur allant de 50 à 100 suivant le cas étudié et la méthode de réduction utilisée. Comme dans le cas non préchargé, les temps de calcul des FRFs sont du même ordre de grandeur et le temps de construction des super-éléments de type Rubin est nettement plus important que pour la méthode de Craig-Bampton. Les précharges sont calculées de manière offline à la fois pour les modèles réduits et le modèle de référence, le temps de calcul correspondant n'est donc pas pris en compte dans la comparaison.

Les observations faites dans le cas non préchargé se retrouvent ici : la méthode de Craig-Bampton donne les meilleurs résultats dans le cas non amorti alors que la méthode de Rubin semble plus adaptée au cas amorti viscoélastique.

Cependant, la méthode de Rubin est plus perturbée par l'augmentation de la précharge que la méthode de Craig-Bampton, ce qui s'explique par les comportements différents des modes de liaisons à interfaces fixes ou libres, en fonction de la précharge. En effet, les figures (Fig. 5.3) et (Fig. 5.4) montrent que les fréquences propres de ces modes ont tendance à augmenter dans le cas des modes à interfaces libres, et à diminuer dans le cas de modes à interfaces fixes, alors que le modèle de référence affiche une diminution de ces fréquences (Fig. 5.1). Pour ce cas d'étude, les modes à interfaces fixes représentent donc mieux le comportement réel des liaisons que les modes à interfaces libres. La méthode de Craig-Bampton semble donc mieux adaptée que la méthode de Rubin lorsque la précharge augmente.

Finalement, bien que les conclusions présentées ici soient issues d'expérimentations numériques sur un exemple particulier, elles fournissent des tendances intéressantes et permettent de confirmer l'intérêt des méthodes de Craig-Bampton et de Rubin pour obtenir des modèles réduits de liaisons amortissantes en élastomère, préchargées non-linéairement.

# Conclusion



## CONCLUSION

---

L'objectif de cette thèse est de proposer une méthode efficace pour la prédiction du comportement dynamique de liaisons amortissantes en élastomères. Dans un premier temps, une étude dans le domaine linéaire est réalisée, avec pour but de trouver une solution de réduction permettant la prise en compte du comportement viscoélastique des liaisons. Les lois de comportement des modèles de Maxwell généralisé et de Zener fractionnaire sont implémentées dans un code éléments finis maison pour permettre une première approche du calcul des liaisons. Les paramètres des modèles utilisés dans ce mémoire sont issus des travaux de Rouleau [65]. Ensuite, les techniques de sous-structuration de Craig-Bampton et de Rubin sont mises en œuvre pour obtenir des super-éléments de liaisons. Une approche multi-modèles permet la prise en compte du comportement dissipatif viscoélastique des élastomères dans les super-éléments. De façon à réduire la taille des super-éléments, une rigidification des interfaces en aluminium est effectuée, permettant d'obtenir des modèles réduits de liaisons à seulement douze degrés de liberté. Ces super-éléments permettent d'atteindre un gain en temps de calcul de l'ordre d'un facteur 50 à 100.

Dans un second temps, le cas de liaisons précontraintes non-linéairement est étudié, en se basant sur le code et les résultats de la première partie. À partir d'une loi de comportement hyper-visco-élastique développée dans ce mémoire, une formulation du comportement des liaisons autour d'un état précontraint est obtenue. Cette formulation repose d'une part sur l'emploi d'une loi de comportement hyperélastique pour décrire la précontrainte et d'autre part, sur les lois de comportement viscoélastique définies dans la première partie pour représenter le comportement vibratoire linéarisé autour de la précontrainte. La loi de comportement hyperélastique implémentée dans le code maison est celle du modèle de Yeoh, dont les paramètres sont identifiés sur les essais de Treloar [77]. Un algorithme de type Newton-Raphson permet d'obtenir un modèle éléments finis des liaisons précontraintes. Pour finir, ce modèle est réduit en utilisant les mêmes techniques de sous-structuration que dans la première partie. Dans le cas précontraint, les gains de temps observés et les erreurs relatives des modèles réduits sont du même ordre de grandeur que dans le cas non précontraint.

## Principales contributions de cette thèse

La première contribution de cette thèse est l'implémentation d'un code éléments finis pour le calcul d'assemblage de structures à l'aide de liaisons élastomères. Ce code permet d'effectuer des calculs linéaires en temporel et en fréquentiel, avec une prise en compte de l'amortissement viscoélastique. Il permet également de calculer des problèmes non-linéaires en quasi-statique et dynamique temporelle sans viscoélasticité (validé par comparaison avec LS-Dyna).

Le code implémenté repose sur un schéma de discrétisation en temps de Newmark pour les calculs en temporel et sur un algorithme de Newton-Raphson pour la résolution des problèmes non-linéaires.

Finalement, bien que le code ne soit pas utilisé dans son intégralité dans ce mémoire, il représente l'une des contributions de cette thèse, et pourra être réutilisé par la suite ou servir de base à de futures activités de recherche.

La seconde contribution de cette thèse est la mise en place d'une méthodologie de réduction pour les modèles de liaisons amortissantes en élastomère. Les techniques de Craig-Bampton et de Rubin, couramment appliquées à la réduction de modèle dans le cas non amorti, sont étendues au cas amorti viscoélastique à l'aide d'une approche multi-modèle, et permettent d'obtenir des super-éléments de liaisons.

L'extension de la méthode de Craig-Bampton, déjà présente dans les travaux de Rouleau [66] ou de Balmès [6], est détaillée intégralement dans ce mémoire, avec et sans approche multi-modèles. Les résultats de l'application à la réduction de liaisons élastomères précontraintes montrent que la méthode est prédictive et que la taille optimale de la base de réduction peut être déterminée par la plus haute fréquence propre des modes présents dans la base.

De la même manière, une extension originale de la méthode Rubin par une approche multi-modèles est présentée dans cette thèse. Appliquée à la réduction de liaisons en élastomère précontraintes, cette méthode donne de bons résultats au prix d'un temps d'assemblage du super-élément plus important qu'avec la méthode de Craig-Bampton. Dans le cas non amorti, la méthode converge plus difficilement que la méthode de Craig-Bampton. En

revanche dans le cas amorti, seule la méthode de Rubin permet de reproduire les résultats de référence. Des indications sur la taille de la base de réduction à utiliser sont données dans le mémoire.

La troisième et dernière contribution de cette thèse est la mise au point d'une loi de comportement pour les matériaux élastomères précontraints. Cette loi se base sur les travaux de Lion, Retka et Rendek [47] et est ici développée différemment de façon à obtenir une expression finale plus pratique en terme d'implémentation. Un potentiel hyper-visco-élastique est d'abord défini, avant d'en dériver une expression des contraintes, linéarisées autour d'un état précontraint. Finalement, les techniques de sous-structuration faisant l'objet de la seconde contribution de cette thèse sont combinées à la loi de comportement pour obtenir des modèles réduits de liaisons préchargées. Ces modèles réduits prennent à nouveau la forme de super-éléments à 12 ddl et présentent des résultats similaires aux super-éléments de liaisons non-préchargées.

## Perspectives

Plusieurs pistes sont envisageables pour poursuivre ces travaux de thèse, notamment :

- L'identification des paramètres des modèles viscoélastique et hyperélastique sur un même élastomère, de manière à obtenir un modèle de comportement homogène.

Pour les paramètres viscoélastiques, des essais DMA conduits de façon similaire aux travaux de thèse de Rouleau [65] sont nécessaires. Les paramètres hyperélastiques peuvent être obtenus à partir d'essais de traction uni-axiale, bi-axiale ou de cisaillement suivant les procédures détaillées dans [75] ou [49]. Dans la mesure du possible, des essais DMA couplés à une précharge de l'éprouvette permettraient de mesurer l'influence de la précharge sur la dissipation et de valider la loi de comportement développée dans cette thèse.

- La validation du code implémenté à l'aide d'une campagne d'essais vibratoires sur différents modèles de liaisons.

Ces essais auront pour but de donner les FRFs de référence de chacun des modèles de liaisons et de vérifier la prédictibilité du code.

## CONCLUSION

---

- L'utilisation des super-éléments de liaisons développés dans cette thèse pour l'optimisation des liaisons.

Les super-éléments permettront de créer le plus rapidement possible les bases de données nécessaires aux algorithmes d'optimisation, basées sur une campagne d'essais numériques.

# Bibliographie

- [1] E. M. Arruda and M. C. Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(2) :389–412, 1993.
- [2] A. Azoug, A. Constantinescu, R. M. Pradeilles-Duval, M. F. Vallat, R. Nevière, and B. Haidar. Effect of the sol fraction and hydrostatic deformation on the viscoelastic behavior of prestrained highly filled elastomers. *Journal of Applied Polymer Science*, 127(3) :1772–1780, 2013.
- [3] A. Azoug, A. Thorin, R. Nevière, R.-M. Pradeilles-Duval, and A. Constantinescu. Influence of orthogonal prestrain on the viscoelastic behaviour of highly-filled elastomers. *Polymer Testing*, 32(2) :375–384, 2013.
- [4] D. Backström. *Vibration of sandwich beams*. PhD thesis, KTH Stockholm, 2006.
- [5] R. L. Bagley and P. J. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27(3) :201–210, 1983.
- [6] E. Balmes. Model reduction for systems with frequency dependent damping properties. *Office National d'Etudes et de Recherches Aéropatiales. Onera-Publications-TP*, 1997.
- [7] M. C. C. Bampton and R. R. Craig. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, July 1968.
- [8] R. D. Borst, M. A. Crisfield, J. J. C. Remmers, and C. V. Verhoosel. *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Wiley, 2nd edition edition.

- [9] B. Bourgeteau. *Modélisation numérique des liaisons élastiques en caoutchouc de la liaison au sol automobile destinée à la simulation multi-corps transitoire*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2009.
- [10] M. C. Boyce and E. M. Arruda. Constitutive models of rubber elasticity : A review. *Rubber Chemistry and Technology*, 73(3) :504–523, 2000.
- [11] M. Coja. *Effective vibro-acoustical modelling of rubber isolators*. PhD thesis, Royal Institute of Technology of Stockholm, 2005.
- [12] V. A. Coveney and D. E. Johnson. Rate-dependent modeling of a highly filled vulcanizate. *Rubber Chemistry and Technology*, 73(4) :565–577, 2000.
- [13] V. Coveney, S. Jamil, D. Johnson, and M. Keavey. Implementation in finite element analysis of a triboelastic law for dynamic behaviour of filled elastomers. In D. Boast and V. A. Coveney, editors, *Finite Element Analysis of Elastomers*. Professional Engineering, 1999.
- [14] M. A. Crisfield. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume Vol 1. Wiley.
- [15] M. A. Crisfield. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume Vol 2. Wiley.
- [16] A. de Lima, A. da Silva, D. Rade, and N. Bouhaddi. Component mode synthesis combining robust enriched ritz approach for viscoelastically damped structures. *Engineering Structures*, 32(5) :1479–1488, 2010.
- [17] J. De Visscher, H. Sol, W. P. De Wilde, and J. Vantomme. Identification of the damping properties of orthotropic composite materials using a mixed numerical experimental method. *Applied Composite Materials*, 4(1) :13–33.
- [18] J.-F. Deü and D. Matignon. A numerical scheme for time-domain fe analysis of viscoelastic structures with fractional derivative constitutive equations. In *4th internat. conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering - CompDyn'13*, Kos Island, Greece, 2013.

- [19] J.-F. Deü and D. Matignon. Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a newmark-diffusive scheme. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5) :1745–1753, 2010. Fractional Differentiation and Its Applications.
- [20] J. F. Durand. *Éléments de Calcul Matriciel et d'Analyse Factorielle de Données*. 2002.
- [21] M. Enelund and G. A. Lesieutre. Time domain modeling of damping using anelastic displacement fields and fractional calculus. *International Journal of Solids and Structures*, 36(29) :4447 – 4472, 1999.
- [22] H. Gacem, Y. Chevalier, J. Dion, M. Soula, and B. Rezgui. Nonlinear dynamic behaviour of a preloaded thin sandwich plate incorporating visco-hyperelastic layers. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4–5) :941 – 953, 2009.
- [23] C. A. Gallimore. Passive viscoelastic constrained layer damping application for a small aircraft landing gear system. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2008.
- [24] A. Galucio, J.-F. Deü, S. Mengué, and F. Dubois. An adaptation of the gear scheme for fractional derivatives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44–47) :6073 – 6085, 2006.
- [25] M. Garcia. *Engineering rubber bushing stiffness formulas including dynamic amplitude dependence*. PhD thesis, Royal institute of technology of Stockholm, 2006.
- [26] A. Germant. On fractional differentials. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 25(168) :540–549, 1938.
- [27] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [28] D. F. Golla and P. C. Hughes. Dynamics of viscoelastic structures - a time-domain, finite element formulation. *Journal of Applied Mechanics*, 52(4) :897–906, 1985.
- [29] F. M. Guillot and D. Trivett. Complete elastic characterization of viscoelastic materials by dynamic measurements of the complex bulk and Young's moduli as a

- function of temperature and hydrostatic pressure. *Journal of Sound and Vibration*, 330(14) :3334–3351, 2011.
- [30] M. Géradin and D. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley, 2015.
- [31] P. Haupt and A. Lion. On finite linear viscoelasticity of incompressible isotropic materials. *Acta Mechanica*, 159(1) :87–124.
- [32] P. Haupt and C. Tsakmakis. On the application of dual variables in continuum mechanics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 1(3) :165–196, 1989.
- [33] S. Havriliak and S. Negami. A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers. *Polymer*, 8 :161–210, 1967.
- [34] G. A. Holzapfel. On large strain viscoelasticity : continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22) :3903–3926, 1996.
- [35] G. A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics : A Continuum Approach for Engineering Science*. Wiley, 2000.
- [36] G. A. Holzapfel and J. C. Simo. A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20–22) :3019–3034, 1996.
- [37] D. Jalocha, A. Constantinescu, and R. Neviere. Prestrain-dependent viscosity of a highly filled elastomer : experiments and modeling. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 19(3) :243–262, 2015.
- [38] D. Jalocha, A. Constantinescu, and R. Neviere. Revisiting the identification of generalized maxwell models from experimental results. *International Journal of Solids and Structures*, 67–68 :169 – 181, 2015.
- [39] D. Jalocha, A. Constantinescu, and R. Nevière. Prestrained biaxial {DMA} investigation of viscoelastic nonlinearities in highly filled elastomers. *Polymer Testing*, 42 :37–44, 2015.

- [40] H. Jrad, J. L. Dion, F. Renaud, I. Tawfiq, and M. Haddar. Experimental characterization, modeling and parametric identification of the non linear dynamic behavior of viscoelastic components. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 42 :176 – 187, 2013.
- [41] H. Jrad, F. Renaud, J.-L. Dion, I. Tawfiq, and M. Haddar. Experimental characterization, modeling and parametric identification of the hysteretic friction behavior of viscoelastic joints. *International Journal of Applied Mechanics*, 5, 2013.
- [42] M. Kaliske and G. Heinrich. An extended tube-model for rubber elasticity : Statistical-mechanical theory and finite element implementation. *Rubber Chemistry and Technology*, 72(4) :602–632, 1999.
- [43] M. Kaliske and H. Rothert. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics*, 19(3) :228–239.
- [44] S. Kawabata, M. Matsuda, K. Tei, and H. Kawai. Experimental survey of the strain energy density function of isoprene rubber vulcanizate. *Macromolecules*, 14(1) :154–162, 1981.
- [45] S. Lejeunes, T. N. Van, A. Boukamel, and D. Eyheramendy. Linearized behavior of a dissipative rubber with large static preloads. *Computers & Structures*, 96–97 :46–53, 2012.
- [46] A. Lion. Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories : Experiments and theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(5) :895–930, 1998.
- [47] A. Lion, J. Retka, and M. Rendek. On the calculation of predeformation-dependent dynamic modulus tensors in finite nonlinear viscoelasticity. *Mechanics Research Communications*, 36(6) :653–658, 2009.
- [48] R. H. MacNeal. A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4) :581–601, 1971. Special Issue on Structural Dynamics.

- [49] G. Marckmann and E. Verron. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chemistry and Technology*, 79(5) :835–858, 2006.
- [50] C. Miehe, S. Göktepe, and F. Lulei. A micro-macro approach to rubber-like materials—part i : the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(11) :2617–2660, 2004.
- [51] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11(9) :582–592, 1940.
- [52] K. N. Morman and J. C. Nagtegaal. Finite element analysis of sinusoidal small-amplitude vibrations in deformed viscoelastic solids. Part I : Theoretical development. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(7) :1079–1103, 1983.
- [53] J. Ni. Préparation des échantillons pour les mesures DMA en cisaillement. Technical report, *Analyse thermique Usercom 34*, 2011.
- [54] A. Oberlé. Modélisation STS (standard triboelastic solid) pour les articulations élastiques de trains roulants et implémentation sous adams. In *SIA Congrès Dynamique véhicule et confort suspension*, 2003.
- [55] R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 326(1567) :565–584, 1972.
- [56] J. K. Ok, W. S. Yoo, and J. H. Sohn. New nonlinear bushing model for general excitations using bouc-wen hysteretic model. *International Journal of Automotive Technology*, 9(2) :183–190, 2008.
- [57] S. Park. Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44–45) :8065 – 8092, 2001.
- [58] T. Pritz. Dynamic Young’s modulus and loss factor of floor covering materials. *Applied Acoustics*, 49(2) :179–190, 1996.
- [59] T. Pritz. Measurement methods of complex Poisson’s ratio of viscoelastic materials. *Applied Acoustics*, 60(3) :279–292, 2000.

- [60] S. Reese and S. Govindjee. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 35(26–27) :3455–3482, 1998.
- [61] K. F. Riley, M. P. Hobson, and S. J. Bence. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press, 2006.
- [62] R. S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials IV : Further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241(835) :379–397, 1948.
- [63] R. S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials V : The problem of flexure. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 195(1043) :463–473, 1949.
- [64] R. S. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials VI : Further results in the theory of torsion, shear and flexure. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 242(845) :173–195, 1949.
- [65] L. Rouleau. *Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques*. PhD thesis, 2013. Le Cnam, Paris, 2013.
- [66] L. Rouleau, J.-F. Deü, and A. Legay. Review of reduction methods based on modal projection for highly damped structures. *Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM XI, the 5th European Conference on Computational Mechanics, ECCM V and the 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD VI*, Barcelona, Spain, July 20-25, 2014.
- [67] S. Rubin. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, 13(8) :995–1006, 1975.
- [68] P. Saad. *Non Linear Behavior of Rubber Bush, Modeling and Identification*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [69] J. Salençon. *Viscoélasticité pour le Calcul des structures*. Les presses des Ponts et Chaussées, 2009.

- [70] M. Schetzen. *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*. Wiley, Apr. 1980.
- [71] D. J. Seibert and N. Schöche. Direct comparison of some recent rubber elasticity models. *Rubber Chemistry and Technology*, 73(2) :366–384, 2000.
- [72] J. Simo. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model : Formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60(2) :153–173, 1987.
- [73] J. C. Simo and R. L. Taylor. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 85(3) :273–310, 1991.
- [74] M. Sjöberg. Rubber isolators - measurements and modelling using fractional derivatives and friction. *SAE Technical Paper*, 3518, 2000.
- [75] P. Steinmann, M. Hossain, and G. Possart. Hyperelastic models for rubber-like materials : consistent tangent operators and suitability for treloar’s data. *Archive of Applied Mechanics*, 82(9) :1183–1217, 2012.
- [76] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15(1) :116–132, Jan 1985.
- [77] L. R. G. Treloar. Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Transactions Faraday Society*, 40 :59–70, 1944.
- [78] L. R. G. Treloar. *The physics of rubber elasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [79] D. Turner. *Plastics and Rubber Processing and Applications*, 9, 1988.
- [80] J.-L. Wojtowicki, L. Jaouen, and R. Panneton. New approach for the measurement of damping properties of materials using the oberst beam. *Review of Scientific Instruments*, 75(8) :2569–2574, 2004.

- [81] D. Wollscheid and A. Lion. Predeformation and frequency dependent material behaviour of filler-reinforced rubber : Experiments, constitutive modelling and parameter identification. *International Journal of Solids and Structures*, 50(9) :1217–1225, 2013.
- [82] O. H. Yeoh. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 66(5) :754–771, 1993.
- [83] W. S. Yoo, W. K. Baek, and J. H. Sohn. A practical model for bushing components for vehicle dynamic analysis. *International Journal of Vehicle Design*, 36 :345–364, 2004.
- [84] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method*, volume 2 : Solids Mechanics. Butterworth-Heinemann, fifth edition, 2000.



**Résumé :**

Dans le cadre de l'amortissement passif de structure, les élastomères sont employés dans les industries du transport sous la forme de liaisons amortissantes. Ces matériaux ont un comportement dépendant de la fréquence, de la température et de l'amplitude d'excitation. Les modèles numériques associés peuvent être coûteux en temps de calcul, notamment en phase d'optimisation. Le but de cette thèse est de proposer un modèle réduit efficace de ces liaisons amortissantes, qui prenne en compte la dissipation viscoélastique et les précharges non-linéaires dans les liaisons. La première partie de ce mémoire se concentre sur la représentation de la dissipation par le modèle réduit. Une loi de comportement viscoélastique, basée sur un modèle rhéologique identifié expérimentalement, est utilisée avec la méthode des éléments finis pour obtenir un modèle numérique des liaisons amortissantes. Un premier modèle réduit prédictif, prenant en compte la dissipation en est dérivé en utilisant une extension originale des méthodes de sous-structuration. La deuxième partie traite de l'influence des précharges statiques non-linéaires sur le comportement dynamique et la dissipation dans les liaisons. Pour cela, une loi de comportement hyper-visco-élastique linéarisée autour d'un état précontraint statique non-linéaire est développée. Les méthodes de sous-structuration introduites dans la première partie sont alors enrichies afin de tenir compte de la dissipation et les non-linéarités géométriques dans les liaisons. Finalement, ces modèles réduits à 2 nœuds permettent des gains en temps de calcul d'un facteur 50 à 100 et sont facilement utilisables par l'ingénieur en phase de conception.

**Mots clés :**

Amortissement, Élastomères, Viscoélasticité, Sous-structuration, Modèles Réduits, Hyperélasticité, Non-linéarités géométriques.

**Abstract :**

In the context of passive damping, various mechanical systems from the space, aeronautic or auto-mobile industry use elastomer components (shock absorbers, silent blocks, flexible joints...). These materials have frequency, temperature and amplitude dependent characteristics. The associated numerical models may become computationally too expensive during an optimization process. The aim of this work is to propose an efficient reduced model of rubber devices that account for the viscoelastic damping and the non-linear pre-stress in the dampers. The first part of this thesis is about how to include the viscoelastic damping in the reduced model. It starts by using a viscoelastic constitutive relation, based on experimental identification, within the frame of the finite element method to obtain a numerical model of the rubber dampers. A first efficient reduced model is then derived from this FE model by using an original extension of sub-structuring methods in the case of viscoelastic damping. In the second part, the influence of non-linear static pre-stress over the dynamic behavior and the dissipation in the dampers is studied. An hyper-visco-elastic constitutive relation, linearized in the neighbourhood of a pre-stressed state, is developed. The sub-structuring methods presented in the first part are then upgraded to account for the damping and the geometrical non-linearities in the dampers. Finally, these 2-node reduced models give access to greatly reduced computation times (50 to 100 times faster) and are easy to use for the engineer.

**Keywords :**

Damping, Elastomer, Viscoelasticity, Substructuring, Reduced Order Model, Hyperelasticity, Geometrical non-linearities.