HAL
open science

Dissipation des marées thermiques atmosphériques dans les super-Terres

Pierre Auclair-Desrotour

To cite this version:

Pierre Auclair-Desrotour. Dissipation des marées thermiques atmosphériques dans les super-Terres. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2016. Français. NNT : 2016PSLEO015 . tel-01503011v2

HAL Id: tel-01503011

https://theses.hal.science/tel-01503011v2

Submitted on 5 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à l'Observatoire de Paris
et au Service d'Astrophysique CEA/DRF/IRFU

Dissipation des marées thermiques atmosphériques dans les super-Terres

Ecole doctorale n°127

ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

Spécialité ASTROPHYSIQUE

Soutenue par PIERRE
AUCLAIR-DESROTOUR
le 16 septembre 2016

Dirigée par **Jacques LASKAR** et
Stéphane MATHIS

COMPOSITION DU JURY :

M. HENG Kevin
Université de Berne, Rapporteur

M. LINDZEN Richard
MIT, Rapporteur

M. DROSSART Pierre
Observatoire de Paris, Président du jury

M. CHABRIER Gilles
ENS Lyon, Examinateur

M. CORREIA Alexandre
Université d'Aveiro, Examinateur

M. FORGET François
Université Paris 6, Examinateur

M. LASKAR Jacques
Observatoire de Paris, Directeur de thèse

M. MATHIS Stéphane
CEA, Co-directeur de thèse

« Que l'homme, étant revenu à soi, considère ce qu'il est au prix de ce qui est ; qu'il se regarde comme égaré dans ce canton détourné de la nature ; et que, de ce petit cachot où il se trouve logé, j'entends l'univers, il apprenne à estimer la terre, les royaumes, les villes et soi-même son juste prix. Qu'est-ce qu'un homme dans l'infini ? »

Blaise Pascal

Résumé

Cette thèse traite de la modélisation des marées fluides des planètes telluriques du système solaire et des systèmes exoplanétaires.

En premier lieu, nous examinons la réponse de marée des couches atmosphériques, soumises au potentiel de marée gravifique et au forçage thermique de l'étoile hôte du système. Nous proposons un nouveau modèle global prenant en compte les processus dissipatifs avec un refroidissement newtonien, modèle à partir duquel nous traitons la dynamique des ondes de marées engendrées par ces forçages, et quantifions leur dissipation, le nombre de Love et le couple de marée exercé sur la couche atmosphérique en fonction de la fréquence de forçage. Ceci nous permet d'étudier l'ensemble des configurations possibles depuis les planètes au voisinage de la synchronisation telles que Vénus jusqu'aux rotateurs rapides tels que la Terre.

En second lieu, nous développons une approche similaire pour les océans de planètes de type terrestre, où la friction visqueuse effective de la topographie est prise en compte, à partir de laquelle nous quantifions la réponse de marée d'un océan global potentiellement profond et sa dépendance à la fréquence d'excitation. Dans ce cadre, et ce grâce à des modèles locaux, nous caractérisons de manière détaillée les propriétés des spectres en fréquence de la dissipation engendrée par les ondes de marées au sein des couches fluides planétaires (et stellaires) en fonction des paramètres structurels et dynamiques de ces dernières (rotation, stratification, viscosité et diffusivité thermique).

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à Messieurs Jacques Laskar et Stéphane Mathis, qui ont accepté de superviser mes travaux de thèse. Ces trois années passées à leur côté ont été pour moi une formation au métier de chercheur exceptionnellement riche, tant du point de vue intellectuel que du point de vue humain. Je les remercie pour la grande confiance qu'ils m'ont accordée en me faisant partager leur enthousiasme et leur immense connaissance dans les domaines de la mécanique céleste et de la mécanique des fluides astrophysiques. Je les remercie enfin pour les exemples scientifiques, intellectuels et humains qu'ils représentent pour moi.

Je veux témoigner ma gratitude à Monsieur Gilles Chabrier, Monsieur Alexandre Correia, Monsieur Pierre Drossart, Monsieur François Forget, Monsieur Kevin Heng et Monsieur Richard Lindzen qui ont accepté de participer au jury de cette thèse ainsi que pour leur soutien tout au long de ce travail. Je remercie en particulier Monsieur Richard Lindzen pour l'aide qu'il m'a apportée en guidant mes premiers pas dans le domaine complexe de la modélisation analytique des marées atmosphériques.

Je souhaite ensuite adresser ma reconnaissance à Monsieur Umin Lee pour les discussions très constructives que nous avons eues au sujet des fonctions de Hough et la pertinence de ses conseils pour les déterminer par la voie numérique.

Je remercie de tout coeur les membres du groupe Astronomie et Systèmes Dynamique de l'Observatoire de Paris et de l'équipe Laboratoire Dynamique des Etoiles et leur Environnement du Commissariat à L'Energie Atomique pour la convivialité avec laquelle ils m'ont accueilli. Ce fut pour moi une joie de partager leur quotidien et leur engouement pour des sujets très divers, tant scientifiques que sociologiques ou cinématographiques. Je souhaite plus particulièrement exprimer ma profonde gratitude à Madame Agnès Patu, qui, avec beaucoup de gentillesse, m'a prodigué ses conseils et son aide dans le traitement des formalités administratives, et à Monsieur Michaël Gastineau pour lequel ce qui se trame dans les méandres les plus obscurs et reculés de la machine ne semble avoir aucun secret et je lui tire mon chapeau pour sa capacité à résoudre au pied levé tout type de problèmes informatiques, jusqu'aux plus alambiqués ; je le remercie pour son aide bienveillante dans l'apprentissage du manipulateur algébrique TRIP.

Je remercie aussi les enseignants de l'Ecole Doctorale et d'Astrophysique d'Ile-de-France qui ont suivi mon parcours depuis le Master, en m'apportant leur aide et leur conseils, et notamment Madame Marie-Christine Angonin, Monsieur Christophe Sauty et Monsieur Jacques Le Bourlot pour m'avoir donné la chance d'intégrer le Master d'Astronomie et d'Astrophysique de l'Observatoire de Paris, ainsi que Monsieur Christophe Le Poncin-Lafitte, qui a grandement participé à mon initiation à l'astrophysique théorique en acceptant d'encadrer mon projet de méthodologie puis de stage de fin d'étude en collaboration avec Monsieur Stéphane Mathis, durant l'année de Master. Je n'oublie pas ici de remercier aussi le corps enseignant de l'Ecole des Ponts ParisTech, notamment celui du département Génie Mécanique et Matériaux, pour l'excellence de la formation qu'il délivre dans le domaine de la mécanique analytique des solides et des fluides. Je tiens en particulier à remercier Monsieur Alain Ehrlacher et Monsieur Alain Maruani, qui ont suivi mon parcours avec beaucoup d'attention et dont les enseignements ont constitué une base solide pour aborder le domaine de l'astrophysique.

J'adresse toute ma gratitude à l'ensemble des laboratoires et des instituts qui m'ont accueilli durant toute la durée de ce travail dans le cadre de collaborations ou de séminaires : l'Institut de Mécanique Céleste et de Calculs des Ephémérides de l'Observatoire de Paris, le laboratoire Astrophysique et Interactions Multi-échelles du Commissariat à l'Energie Atomique, l'Observatoire de Genève, le Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux et le Département de Mathématiques Appliquées et de Physique Théorique de l'Université de Cambridge.

Que l'Observatoire de Paris et l'Ecole Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île-de-France soient assurés de ma reconnaissance pour m'avoir permis d'enseigner durant ces trois années de thèse. Ils m'ont donné l'opportunité de consacrer du temps à la formation et au suivi d'étudiants, à côté de mes activités de recherches, et d'enrichir ainsi encore cette expérience. Je voudrais remercier plus particulièrement Madame Caroline Barban et Monsieur Cédric Leyrat pour la grande confiance qu'ils m'ont témoignée en m'accordant la responsabilité de l'encadrement de plusieurs étudiants des diplômes d'université en ligne *Fenêtre sur l'Univers* et *Astronomie et Mécanique Céleste*.

Je remercie le département du SyRTE de l'Observatoire de Paris, l'Institut Oskar von Miller (Obernach) de l'Université de Munich et le département de recherche et développement Mécanique des Milieux Continus de DCNS (Lorient), dans lesquels j'ai eu le plaisir d'effectuer des stages au cours de ma scolarité et qui m'ont fait découvrir des champs d'application très différents de la mécanique des fluides. Que Monsieur Pierre Teyssandier, Monsieur Sébastien Lambert, Monsieur Frédéric Dauce, Monsieur Damien Violeau, Madame Valerie Neisch, Monsieur Nikos Efthymiou et chacune des personnes rencontrées lors de ces expériences y voient l'expression de ma profonde gratitude.

La recherche, bien qu'elle constitue l'essentiel d'un travail de thèse, ne peut être fructueuse si on la prive de l'énergie positive que nous apportent au quotidien nos proches. Aussi j'exprime mon profond attachement à tous ceux qui, de ma famille ou de mes proches, m'ont donné cette énergie. Ne pouvant malheureusement être exhaustif, je tiens à citer mes parents, mes deux soeurs, Anaïs et Pauline, et mes amis Christine Dal Bianco, Sandra Debu, Fabien Dalinet et Pierre Wolinski dont la présence et le soutien n'ont jamais faibli et sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé iv

Remerciements v

Sommaire vii

Liste des Figures x

Liste des Tableaux xv

1 Introduction 1
1.1 Des planètes aux exoplanètes . . . 1
1.2 Quelques repères historiques . . . 5
1.3 Problématiques astrophysiques . . . 10
1.4 Plan de la thèse . . . 11

2 Dissipation de marées 16
2.1 Introduction . . . 16
2.2 Physique de la marée . . . 17
2.2.1 Mécanisme . . . 17
2.2.2 Potentiel générateur de marée gravifique . . . 19
2.2.3 Forçage de marée thermique . . . 21
2.3 Quantification de la déformation et de la dissipation . . . 23
2.3.1 Nombres de Love adiabatiques . . . 23
2.3.2 Facteur de qualité Q . . . 25
2.3.3 Nombres de Love complexes . . . 26
2.3.4 Implications sur l'évolution des systèmes planétaires . . . 26
2.4 Modèles classiques . . . 28
2.4.1 Modèle à retard géométrique constant . . . 28
2.4.2 Modèle à retard temporel constant . . . 29
2.4.3 Modèles d'oscillateurs visco-élastiques . . . 29
2.5 Conclusion . . . 31

3 Marées atmosphériques terrestres 32
3.1 Introduction . . . 32
3.2 Description du système physique et paramétrisation . . . 33
3.3 Structure de l'atmosphère à l'équilibre . . . 34
3.4 Les grandes familles d'ondes de marée . . . 37
3.5 Structure des ondes de marée . . . 39
3.5.1 Equations primitives et approximations . . . 39
3.5.2 Equation de Laplace et fonctions de Hough . . . 41
3.5.3 Structure verticale des ondes . . . 46
3.6 Réponse de l'atmosphère à un profil de forçage constant . . . 48
3.6.1 Conditions aux limites . . . 48
3.6.2 Résolution de l'équation des ondes . . . 49
3.6.3 La marée solaire semi-diurne dans le cas de la Terre . . . 51
3.7 Limites du modèle dans l'étude de Vénus et des exoplanètes . . . 53

3.8 Conclusion . . . 57

4 Marées atmosphériques des planètes telluriques **58**
4.1 Introduction . . . 59
4.2 Bilan des principaux processus dissipatifs . . . 59
4.2.1 Transferts radiatifs . . . 59
4.2.2 Diffusion thermique moléculaire et turbulente . . . 61
4.2.3 Friction visqueuse moléculaire et turbulente . . . 63
4.2.4 Traînée ionosphérique . . . 64
4.3 Structure des ondes dans le cas d'une atmosphère épaisse . . . 64
4.3.1 Equations primitives . . . 65
4.3.2 Equation de la structure verticale . . . 65
4.3.3 Profils verticaux des modes de marée . . . 67
4.3.4 Potentiel de marée atmosphérique . . . 69
4.3.5 Nombres de Love . . . 71
4.3.6 Couple de marée . . . 72
4.4 Structure des ondes dans le cas d'une atmosphère mince isotherme stablement stratifiée . . . 74
4.4.1 Profils verticaux des quantités perturbées . . . 74
4.4.2 Potentiel de marée gravifique, nombres de Love et couple de marée . . . 78
4.4.3 Forçages thermiques . . . 79
4.4.3.1 Absorption du flux incident . . . 80
4.4.3.2 Absorption du flux réfléchi par le sol . . . 83
4.4.3.3 Absorption du flux émis par le sol . . . 84
4.4.3.4 Diffusion thermique dans la couche limite atmosphérique . . . 86
4.4.3.5 Le cas bi-chromatique . . . 89
4.4.4 Réponse de l'atmosphère isotherme stablement stratifiée à un profil de chauffage constant . . . 91
4.5 Cas d'une atmosphère mince convective en rotation lente . . . 94
4.5.1 Equilibre . . . 94
4.5.2 Structure de la perturbation de marée . . . 95
4.5.3 Nombre de Love et couple de marée . . . 96
4.5.4 Comparaison au modèle empirique de Correia & Laskar (2001) . . . 98
4.6 Application à la marée solaire semi-diurne . . . 98
4.6.1 La Terre . . . 99
4.6.2 Vénus . . . 102
4.6.3 Evolution du couple de marée avec la fréquence d'excitation . . . 108
4.7 Conclusion . . . 110

5 Equilibres de spin **161**
5.1 Introduction . . . 161
5.2 Etat de l'art . . . 161
5.3 Nouvelle approche . . . 164
5.3.1 Couples de marées . . . 165
5.3.1.1 Couple de marée solide . . . 165
5.3.1.2 Couple de marée atmosphérique . . . 166
5.3.2 Position et stabilité des équilibres de spin . . . 167
5.3.3 Application au cas de Vénus . . . 168
5.4 Conclusion . . . 170

6 Marées océaniques **178**
6.1 Introduction . . . 178
6.2 Etat de l'art . . . 179
6.3 Structure des ondes dans le cas d'une couche océanique épaisse . . . 182
6.3.1 Equations primitives et approximations . . . 182
6.3.2 Equation de marée de Laplace et fonctions de Hough complexes . . . 184

6.3.3 Profils verticaux des modes . . . 185
6.3.4 Potentiel de marée océanique . . . 188
6.3.4.1 Potentiel à l'extérieur de la planète . . . 188
6.3.4.2 Potentiel à l'intérieur de la planète . . . 189
6.3.5 Nombres de Love . . . 190
6.3.6 Couple de marée . . . 190
6.4 Conditions aux limites . . . 191
6.5 Cas de l'océan profond homogène isotherme . . . 191
6.5.1 Structure des ondes de marées . . . 191
6.5.2 Réponse à un forçage échelon . . . 193
6.5.3 Application à la marée océanique semi-diurne lunaire . . . 196
6.6 Conclusion . . . 197

7 Dissipation des ondes de marée dans les fluides 199
7.1 Introduction . . . 199
7.2 Etat de l'art . . . 200
7.3 Dynamique des ondes de marées fluides forcées dans une boîte cartésienne . . . 202
7.3.1 Modélisation . . . 202
7.3.2 Equations primitives . . . 203
7.3.3 Bilan d'énergie . . . 204
7.3.4 Champ de vitesse et dissipation de marée . . . 205
7.3.5 Réponse spectrale . . . 209
7.4 Propriétés du spectre en fréquence de la dissipation . . . 211
7.4.1 Positions des résonances . . . 211
7.4.2 Largeur des résonances . . . 213
7.4.3 Amplitude des résonances . . . 214
7.4.4 Fond non-résonant . . . 215
7.4.5 Contraste et nombre de pics . . . 217
7.4.6 Lois d'échelles . . . 218
7.5 Un cas limite : la super-adiabaticité ($N^2 < 0$) . . . 218
7.6 Conséquences sur l'évolution d'un satellite autour d'un corps fluide . . . 219
7.7 Conséquences sur la dissipation interne des couches convectives stellaires et planétaires . . . 222
7.8 Conclusion . . . 224

8 Conclusions et perspectives 263

Bibliographie 268

TABLE DES FIGURES

1.1 Principales interactions entres les corps composant un système planétaire et leurs conséquences sur l'évolution de ce dernier. Figures extraites de Wisdom (1985) (Fig. 7), Strugarek et al. (2015) (Fig. 2), Remus et al. (2012b) (Fig. 3). 2
1.2 Structure et composition des planètes du système solaire divisées en deux grandes familles. *Gauche* - planètes telluriques (Mercure, Vénus, Terre, Mars). *Droite* - Géantes gazeuses (Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune). D'après les archives Internet de l'IMCCE [1]. 3
1.3 Les quatre états finaux possibles du spin de Vénus. F_0^- et F_π^- correspondent aux états rétrogrades, F_0^+ et F_π^+ aux états progrades. Crédits Correia & Laskar (2001). 3
1.4 Exoplanètes répertoriées en 2016 placées en fonction de la puissance du flux stellaire (axe horizontal) et de la température de surface de leur étoile hôte (axe vertical). Seules les planètes de masse inférieure à 10 masses terrestres ou de rayon inférieur à 2.5 rayons terrestres ont une étiquette. La taille du cercle correspond au rayon de la planète. Les objet demeurant non-confirmés sont indiqués par le symbole *. La zone habitable correspond à la bande verte (cf. Kopparapu et al., 2014). Crédits *The Planetary Habitability Laboratory (PHL) @ UPR Arecibo* [2]. 4
1.5 Vénus, la Terre et Mars (gauche) et une exoplanète terrestre située dans la zone habitable en vue d'artiste (droite). Adapté d'images de *Sciencephotolibrary* [3]. 5
1.6 Variations barométriques relevées à Batavia (6° S) et à Postdam (52° N) durant le mois de Novembre 1919. Représentation vectorielle des variations de pression semi-diurnes moyennées sur une année pour différentes stations météorologiques d'Amérique du Nord. 6
1.7 Mesures des variations de température et de pression au niveau du sol sur l'année et moyennées sur une journée. 7
1.8 Amplitudes (Pa) des harmoniques semi-diurnes des variations barométriques de marées au niveau de la mer moyennées sur le mois de Janvier. Les régions grisées correspondent à des zones d'altitudes supérieures à 1 km au dessus du niveau de la mer. Résultats obtenus à l'aide d'un modèle numérique global. Crédits Covey et al. (2009). 9

2.1 Elongation d'un corps soumis au potentiel de marée gravifique d'un compagnon et déformation de l'atmosphère d'une planète soumise à l'irradiation de son étoile hôte. 17
2.2 Déformation anélastique d'un corps solide et de l'atmosphère d'une planète en rotation soumis à des forçages de marée. 18
2.3 Couple de marée exercé sur une étoile telle que le Soleil en fonction de la fréquence de marée. 19
2.4 Référentiel inertiel de référence ($\mathscr{R}_\mathrm{R}$), référentiel orbital ($\mathscr{R}_\mathrm{O}$), référentiel équatorial en rotation ($\mathscr{R}_\mathrm{E;T}$), et les angles d'orientation d'Euler associés. 20
2.5 Définition de l'angle zénithal. 21
2.6 Amplitude des coefficients de la décomposition du potentiel de marée quadripolaire ($l = m = 2$) pour $I_\mathrm{B} = 0$, $\varepsilon_\mathrm{A} = 0$ et les excentricités $e = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. 22
2.7 Systèmes de Kelvin-Voigt et de Maxwell. 31

3.1 Coordonnées sphériques associées au référentiel équatorial en co-rotation avec la planète et paramètres physiques du système. 33
3.2 Profils verticaux de masse molaire (gauche, en $\mathrm{kg.kmol^{-1}}$), pression (milieu, en $\mathrm{N.m^{-2}}$) et de hauteur de pression (droite, en km) dans l'atmosphère terrestre. L'ordonnée correspond à l'altitude (km), les abscisses aux différentes quantités. D'après l'*US Standard Atmosphere* (NOAA et al., 1976). 35
3.3 Mesures de la température en fonction de l'altitude réalisées par les quatre sondes *Pioneer Venus* en dessous d'une altitude de 65 km. Moyenne en temps et suivant la direction horizontale de la fréquence de Brunt-Väisälä en fonction de l'altitude en l'absence de vent de cisaillement. 36
3.4 Spectre qualitatif des familles d'ondes se propageant dans les couches fluides planétaires (et stellaires) : ondes inertielles, ondes de gravité, ondes d'Alfvén et ondes acoustiques. 38

3.5 Valeurs propres ($\Lambda_n^{m,\nu}$) des modes de gravité et de Rossby de plus bas degrés ($-6 \leq n \leq 5$) et coefficients de projection du polynôme associés de Legendre sur les fonctions de Hough correspondantes en fonction du paramètre de spin (ν) pour $m = 2$. 44
3.6 Fonctions de Hough $\Theta_n^{2,\nu}$ correspondant aux modes de gravité ($n \in \mathbb{N}$) tracées en fonction de la colatitude (θ) pour $0 \leq n \leq 5$ et différentes valeurs du paramètre de spin, $\nu = \{0, 0.8, 1.2, 4\}$. 45
3.7 Fonctions de Hough $\Theta_n^{2,\nu}$ correspondant aux modes de Rossby ($n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$) tracées en fonction de la colatitude (θ) pour $-6 \leq n \leq -1$ et différentes valeurs du paramètre de spin $\nu = \{1.2, 4\}$. 46
3.8 Fonctions de Hough $\Theta_n^{m,\nu}$, $\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}(\Theta_n^{m,\nu})$ et $\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}(\Theta_n^{m,\nu})$ des modes de gravité et de Rossby tracées en fonction de la colatitude (θ) pour $m = 2$, $\nu = 1.003$ et $n \in [\![-6, 5]\!]$. 52
3.9 Amplitude et partie réelle des oscillations solaires semi-diurnes de la pression et de la masse volumique associées au premier mode de gravité ($n = 0$) dans le cas de la Terre ($\Omega = 366.25\, n_{\mathrm{orb}}$) pour un forçage de la forme $J(\mathbf{r}, t) = J_0 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ et $U(\mathbf{r}, t) = U_0 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ avec J_0 et U_0 constants et $\sigma = 2(\Omega - n_{\mathrm{orb}})$. Comparaison des oscillations de pressions avec les observations. 54
3.10 Amplitude et partie réelle des oscillations solaires semi-diurnes de la pression en mbar et de la masse volumique en $\mathrm{kg.m^{-3}}$ associées au premier mode de gravité ($n = 0$) dans le cas d'une Terre à rotation lente ($\Omega = 11\, n_{\mathrm{orb}}$) pour un forçage de la forme $J(\mathbf{r}, t) = J_0 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ et $U(\mathbf{r}, t) = U_0 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ avec J_0 et U_0 constants et $\sigma = 2(\Omega - n_{\mathrm{orb}})$. 55
3.11 Profils verticaux des variations de pression et de densité dans la région proche du sol, tracées d'après les expressions (3.52), (3.65a) et (3.65b) pour les fréquences de marée $\omega/n_{\mathrm{orb}} = \{2.00, 365.25\}$. 57

4.1 Profils verticaux de conductivité thermique, viscosité cinématique et valeurs des paramètres physique de l'atmosphère terrestre au niveau de la mer. 61
4.2 Spectre en fréquence des régimes de marées atmosphériques. Les différents régimes sont donnés en fonction de la fréquence de marée (σ). 69
4.3 Arborescence des changements de bases $\{P_k^m\}_{k \geq |m|} \to \{\Theta_n^{m,\nu}\}_{n \in \mathbb{Z}} \to \{P_k^m\}_{k \geq |m|}$. Les forçages et la réponse sont exprimés dans la base usuelle des polynômes associés de Legendre ; la dynamique des ondes de marées est calculée dans la base naturelle du système, les fonctions de Hough. 70
4.4 Parties imaginaire et réelle du nombre d'onde vertical (Eq. 4.64b) en fonction de $f(\sigma/\sigma_0)$ (axe horizontal) et de $f(\sigma_{c;n}^2/\sigma_0^2)$ (axe vertical) où f est la fonction définie par $f(X) = \mathrm{sign}(X)\log(1 + |X|)$, σ la fréquence de marée, σ_0 la fréquence de refroidissement radiatif et $\sigma_{\mathrm{c;n}}$ la fréquence critique définie par (4.65). 76
4.5 Ecart relatif entre les nombres verticaux avec et sans dissipation donné par (4.66) en fonction des rapports σ/σ_0 et h_{c}/h_n. 77
4.6 Tracé des rayons des flux incident et émis par le sol. Spectre de corps noirs pour différents types d'étoiles et de planètes. 80
4.7 Profils verticaux des flux radiatifs (I, haut), puissances absorbées par unité de volume ($\mathscr{J}$, milieu) et puissances absorbées par unité de masse (J, bas) pour différentes valeurs du coefficient d'absorption τ_λ (Eq. 4.87) dans le cas d'une atmosphère mince isotherme et homogène en composition. 82
4.8 Flux et puissances absorbées par une atmosphère homogène en composition dans le plan équatorial de la planète. 85
4.9 Diagramme de Nyquist de la fonction de transfert de la couche limite $\mathfrak{B}_{\mathrm{gr}}^\sigma$, donnée par (4.115), dans la gamme de fréquences $-10^3 \leq \sigma/\sigma_{\mathrm{bl}} \leq 10^3$ (σ étant la fréquence de marée et σ_{bl} la fréquence de coupure définie par Eq. 4.115). 88
4.10 Transferts thermiques dans le cas bi-chromatique où l'étoile émet dans le domaine du visible (bleu) et la planète dans celui de l'infrarouge (rouge), ce à quoi s'ajoutent les échanges par diffusion thermique dans la couche limite (violet). *Gauche* - Transferts thermiques entre l'atmosphère, l'espace et le sol. *Droite* - Transferts thermiques à l'interface sol-atmosphère. 90
4.11 Couple de marée (ordonnées) en fonction de la fréquence de marée normée par σ_0 (abscisses) dans le cas limite de l'atmosphère convective en rotation lente, présenté en Section 4.5 (trait continu rouge), et comparaison aux résultats de Leconte et al. (2015) (simulations brutes trait pointillé gris ; ajustement sur le modèle de Maxwell en trait noir continu) et au modèle empirique de Correia & Laskar (2001) (vert pointillé). 96

4.12 Distribution des variations de pression généré par la marée thermique au niveau du sol en fonction de la longitude (axe horizontal) et de la latitude (axe vertical) pour différentes fréquences de marée. 97
4.13 Représentation schématisée de la redistribution de masse engendrée par la composante quadripolaire de la marée solaire semi-diurne obtenue dans le cas de l'atmosphère convective en rotation lente (Eq. 4.151) pour $\sigma_0 = 0$ (haut) et $\sigma_0 > 0$ (bas) et différentes fréquences de marée (axe horizontal). 99
4.14 Marée solaire semi-diurne terrestre. Distribution en latitude (axe horizontal) et en altitude (axe vertical, échelle logarithmique) de la perturbation engendrée par les forçages de marée semi-diurnes académiques quadripolaires de la forme donnée par (4.136) avec les paramètres de la Table 4.1. Gauche - Amplitude des grandeurs en échelle logarithmique, du noir (faible amplitude) au blanc (forte amplitude). *Droite* - Sinus des déphasages correspondants, du noir ($\sin[\arg(f)] = -1$) au blanc ($\sin[\arg(f)] = 1$). De haut en bas : pression (mbar), densité ($\mathrm{kg.m^{-3}}$), température (K), vitesse méridionale ($\mathrm{m.s^{-1}}$), vitesse azimutale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) et vitesse radiale ($\mathrm{m.s^{-1}}$). 101
4.15 Marée solaire semi-diurne terrestre. Distribution en latitude (axe horizontal) et en latitude (axe vertical) de la perturbation engendrée par les forçages de marée semi-diurnes académiques quadripolaires de la forme donnée par (4.136) avec les paramètres de la Table 4.1. Gauche - Parties réelles des grandeurs, du noir (minimum) au blanc (maximum). *Droite* - Parties imaginaires, du noir (minimum) au blanc (maximum). De haut en bas : pression (mbar), densité ($\mathrm{kg.m^{-3}}$), température (K), vitesse latitudinale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) et vitesse azimutale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) ; la vitesse radiale, nulle au niveau de la surface, n'est pas représentée. 102
4.16 Marée solaire semi-diurne vénusienne. Distribution en latitude (axe horizontal) et en altitude (axe vertical, échelle logarithmique) de la perturbation engendrée par les forçages de marée semi-diurnes académiques quadripolaires de la forme donnée par (4.136) avec les paramètres de la Table 4.1. Gauche - Amplitude des grandeurs en échelle logarithmique, du noir (faible amplitude) au blanc (forte amplitude). *Droite* - Sinus des déphasages correspondants, du noir ($\sin[\arg(f)] = -1$) au blanc ($\sin[\arg(f)] = 1$). De haut en bas : pression (mbar), densité ($\mathrm{kg.m^{-3}}$), température (K), vitesse latitudinale ($\mathrm{m.s^{-1}}$), vitesse azimutale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) et vitesse radiale ($\mathrm{m.s^{-1}}$). 103
4.17 Marée solaire semi-diurne vénusienne. Distribution en latitude (axe horizontal) et en latitude (axe vertical) de la perturbation engendrée par les forçages de marée semi-diurnes académiques quadripolaires de la forme donnée par (4.136) avec les paramètres de Table 4.1. Gauche - Parties réelles des grandeurs, du noir (minimum) au blanc (maximum). *Droite* - Parties imaginaires, du noir (minimum) au blanc (maximum). De haut en bas : pression (mbar), densité ($\mathrm{kg.m^{-3}}$), température (K), vitesse méridionale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) et vitesse azimutale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) ; la vitesse radiale, nulle au niveau de la surface, n'est pas représentée. 104
4.18 Oscillations de pression (haut), masse volumique (milieu), température (bas) associées à la marée solaire semi-diurne et de leurs composantes oscillantes et non-oscillantes au niveau de l'équateur terrestre en fonction de la fréquence de marée normée, $\chi = (\Omega - n_{\mathrm{orb}})/n_{\mathrm{orb}}$ (axe horizontal). Le forçage quadripolaire académique utilisé est défini par (4.136) avec les paramètres de Table 4.1. 105
4.19 Oscillations de pression (haut), masse volumique (milieu), température (bas) associées à la marée solaire semi-diurne et de leurs composantes horizontales et verticales au niveau de l'équateur de Vénus en fonction de la fréquence de marée normée, $\chi = (\Omega - n_{\mathrm{orb}})/n_{\mathrm{orb}}$ (axe horizontal). 106
4.20 Couple de marée exercé sur l'atmosphère résultant de la marée thermique solaire semi-diurne et ses composantes horizontales et verticales en fonction de la fréquence de marée normée $\chi = (\Omega - n_{\mathrm{orb}})/n_{\mathrm{orb}}$, dans le cas de la Terre et Vénus et pour une atmosphère isotherme. . . . 107
4.21 Paramètres caractérisant les modes de la marée thermique solaire semi-diurne de la Terre en fonction de la fréquence de marée normée $\chi = (\Omega - n_{\mathrm{orb}})/n_{\mathrm{orb}}$. 108
4.22 Domaines asymptotiques des paramètres dans lesquels la modélisation analytique est possible (régions vertes) et ceux dans lesquels elle est nécessaire (régions rouges). 111

5.1 Distribution en longitude et latitude des variations totales de pression à la surface de Vénus générées par un chauffage localisé au niveau du sol. 163

5.2 Positions d'équilibre du taux de rotation propre de la planète (ω) en fonction du produit aM_* (a étant le demi-grand axe et M_* la masse l'étoile) pour trois valeurs différentes de l'excentricité ($e = 0.0,\ 0.1,\ 0.2$). 164
5.3 Partie imaginaire du nombre de Love de degré 2 en fonction de la fréquence d'excitation pour les rhéologies d'Andrade et de Maxwell. 165
5.4 Couple de marée exercé sur une planète de type Vénus et ses composantes atmosphérique et solide en fonction de la fréquence d'excitation réduite ω/n_{orb} et du rayon orbital a, et diagrammes des positions d'équilibres associés. 169

6.1 Amplitude de la marée océanique en fonction de la fréquence de forçage en l'absence de friction et pour un forçage quadripolaire unitaire correspondant à l'harmonique sphérique Y_2^{-2}.180
6.2 Dissipation générée par la marée semi-diurne lunaire dans l'océan calculée d'après les données TOPEX/Poséidon et résidus correspondant à deux modèles de friction différents. 181
6.3 Magnitude et phase des profondeurs équivalentes normées en fonction du logarithme la fréquence de friction normée ν/Ω ($\sigma_{\mathrm{f}}/\Omega$ suivant les notations utilisées dans le chapitre) pour différents modes de nombre d'onde zonal $s = 2$ ($m = 2$) et différentes fréquences de marée normées σ/Ω. 186
6.4 Distributions du potentiel de marée océanique total et de ses composantes associées au déplacement de la surface et aux variations internes de densité tracées dans le plan équatorial de la planète pour une perturbation quadripolaire quelconque. 189
6.5 Composante quadripolaire semi-diurne lunaire du couple de marée exercé sur l'océan terrestre en fonction de la fréquence d'excitation normée par le moyen mouvement de la Lune ω/n, du coefficient de friction de Rayleigh et de la profondeur de l'océan. 194
6.6 Couple de marée exercé sur l'océan terrestre et ses composantes $\mathcal{T}_\xi$ et $\mathcal{T}_\rho$ en fonction de la fréquence du perturbateur dans le référentiel terrestre divisée par son moyen mouvement ω/n_{orb} pour un forçage quadripolaire de la forme $U = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ et un coefficient de Rayleigh constant. 197

7.1 *Gauche* - Logarithme du taux de dissipation de marée par friction visqueuse/turbulente (axe vertical) en fonction de la fréquence de marée $\hat{\omega}$ (axe horizontal). L'objet considéré est une géante gazeuse en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω, composée d'un coeur solide de rayon $R_{\mathrm{c}} = 0.2R$ et d'une région convective de rayon externe $R_{\mathrm{b}} = 0.9R$, où R est le rayon de la planète. Le nombre d'Ekman de la région fluide, défini par $E_{\mathrm{k}} = \nu/\left(2\Omega R^2\right)$ avec la viscosité cinématique ν, vaut $E_{\mathrm{k}} = 10^{-7}$. Le spectre d'ondes inertielles correspond à l'intervalle $\hat{\omega}/\Omega \in [-2, 2]$. La ligne pointillée indique le taux de dissipation dans Jupiter correspondant à un facteur de qualité effectif $Q^{\mathrm{visc}} = 10^5$. Crédits Ogilvie & Lin (2004). *Droite* - Section latitudinale de l'énergie cinétique d'un mode inertiel excité par la marée dans la région convective d'une étoile de type solaire en rotation différentielle. Crédits Guenel et al. (2016). 201
7.2 Boîte fluide cartésienne du modèle local, repères de référence et systèmes de coordonnées. . 203
7.3 Logarithme de l'énergie dissipée par unité de masse (ζ) et de ses composantes associées à la friction et à la diffusion thermique (Eqs. 7.29a et 7.29b) en fonction de la fréquence de marée (ω, définie par Eq. 7.14) pour différentes valeurs des paramètres de contrôle (A, E et K), $\theta = 0$ (pôle) et le forçage donné par (7.31) avec $F = 1$. *Haut* - Reproduction des résultats d'Ogilvie & Lin (2004). Les quatre panneaux représentent les spectre en fréquence de l'énergie dissipée pour quatre valeurs différentes du nombre d'Ekman : $E = 10^{-2}$; $E = 10^{-3}$; $E = 10^{-4}$ et $E = 10^{-5}$; et $K = 0$. *Bas* - Spectres en fréquence de l'énergie dissipée (trait continu rouge) et des contributions de la friction visqueuse (trait vert pointillé) et de la diffusion thermique (trait bleu pointillé) pour différents jeu des paramètres de contrôle (A, E, K). En haut à gauche : $A = 10^{-2}$; $E = 10^{-2}$; $K = 10^{-4}$. En haut à droite : $A = 10^{2}$; $E = 10^{-2}$; $K = 10^{-4}$. En bas à gauche : $A = 10^{-2}$; $E = 10^{-4}$; $K = 10^{-2}$. En bas à droite : $A = 10^{2}$; $E = 10^{-4}$; $K = 10^{-2}$. 210

7.4 Fréquences propres des modes excités (Eq. 7.36) en fonction du nombre d'onde global $k = (m, n)$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ (axe vertical) pour différents jeu des paramètres de contrôle θ, A, E et K. *En haut à gauche* - ondes inertielles très amorties par la friction visqueuse en l'absence de diffusion thermique (cf. Ogilvie & Lin, 2004) : $\theta = 0$, $A = 0$, $E = 10^{-2}$, $K = 0$. *En haut à droite* - ondes inertielles peu amorties par la friction visqueuse en l'absence de diffusion thermique : $\theta = \pi/6$, $A = 0$, $E = 10^{-4}$, $K = 0$. *En bas à gauche* - ondes gravito-inertielles peu amorties par la friction visqueuse en l'absence de diffusion thermique : $\theta = \pi/6$, $A = 25$, $E = 10^{-4}$, $K = 0$. *En bas à droite* - ondes inertielles peu amorties par la diffusion thermique en l'absence de friction visqueuse : $\theta = \pi/6$, $A = 25$, $E = 0$, $K = 10^{-4}$. 213

7.5 Domaines asymptotiques représentés en fonction de A (axe horizontal) et P_{r} (axe vertical) en échelles logarithmiques. *Gauche* - Régimes des modes excités : (a) ondes inertielles amorties par la friction visqueuse/turbulente (bleu) ; (b) ondes de gravité amorties par la friction visqueuse/turbulente (rouge) ; (c) ondes inertielles amorties par la diffusion thermique (violet) ; (d) ondes de gravité amorties par la diffusion thermique (orange). La ligne verticale de transition entre (a) et (b) d'une part et (c) et (d) d'autre part a pour équation $A = A^{1,1}(0)$; la courbe séparant les zones (a) et (c) d'une part et (b) et (d) d'autre part a pour équation $P_{\mathrm{r}} = P_{\mathrm{r}}^{1,1}(0, A)$ avec $A^{1,1}$ et $P_{\mathrm{r}}^{1,1}$ définis par (7.42). *Droite* - Régimes la dissipation de marée : (a) $\zeta^{\mathrm{therm}} \ll \zeta^{\mathrm{visc}}$, la dissipation est dominée par la contribution de la friction ; (b) $\zeta^{\mathrm{therm}} \gg \zeta^{\mathrm{visc}}$, la dissipation est dominée par la contribution de la diffusion thermique. . . . 214

7.6 Largeur à mi-hauteur $l^{1,1}$ et hauteur $H^{1,1}$ de la résonance principale de la composante ζ^{visc} en fonction des logarithmes du nombre d'Ekman (E) et de la diffusivité thermique (K) pour différentes valeurs de A allant des ondes inertielles ($A = 10^{-4}$) aux ondes de gravité ($A = 10^{3}$). *En haut à gauche* - $l^{1,1} = f(E)$. *En haut à droite* - $l^{1,1} = f(K)$. *En bas à gauche* - $H^{1,1} = f(E)$. *En bas à droite* - $H^{1,1} = f(K)$. 216

7.7 Superposition des régimes des ondes et de la dissipation (cf. 7.5). Chaque région du domaine de paramètres est associée à un comportement asymptotique particulier du spectre de l'énergie dissipée. 218

7.8 Spectres en fréquence de l'énergie dissipée par la friction (ζ^{visc}) dans le cas où les ondes sont purement inertielles avec les paramètres $E = 10^{-4}$, $K = 0$ et différentes valeurs de $A < 0$. *En haut à gauche* - $A = -0.1$. *En haut à droite* - $A = -2$. *En bas à gauche* - $A = -10$. *En bas à droite* - $A = -100$. 220

7.9 *Gauche* - Evolution temporelle de la distance planète-satellite (a) pour deux facteurs de qualité (Q) différents, le facteur de qualité constant du modèle de Kaula (Kaula, 1964) (courbe bleue pointillée) et le facteur de qualité résonant en fréquence dérivé du modèle local cartésien (courbe verte). Les valeurs numériques du calcul (cf. Table 7.2) sont celles utilisées par Efroimsky & Lainey (2007) pour le cas du système Mars-Phobos. *Droite* - Spectre en fréquence de la dissipation interne massique du corps central (en $\mathrm{W.kg^{-1}}$) donnant le facteur de qualité résonant (graphe de gauche, courbe verte). Ce spectre est obtenu à partir de (7.55) pour $|m| \leq 5$ et $|n| \leq 5$. La fréquence d'excitation normée par la fréquence inertielle (axe horizontal) est définie par (7.14). 221

7.10 *Gauche* - Logarithme du ratio $\nu_{\mathrm{T;RC}}/\nu_{\mathrm{T;NR}}$ (et $E_{\mathrm{RC}}/E_{\mathrm{NR}}$) en fonction du logarithme du nombre de Rossby convectif ($R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}$). Les lignes bleu continue et verte pointillée correspondent respectivement au régimes de rotation rapide et lente. La ligne verticale grise indique le nombre de Rossby de transition entre les deux régimes asymptotiques, $R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c;t}} \approx 0.25$. La ligne rouge correspond au cas non rotatif ($\Omega = 0$) de Zahn (1966a). *Droite* - Logarithme des ratios $H_{\mathrm{bg;RC}}/H_{\mathrm{bg;NR}}$, $l_{\mathrm{RC}}/l_{\mathrm{NR}}$ (ligne bleue continue), $N_{\mathrm{p;RC}}/N_{\mathrm{p;NR}}$ (ligne violette pointillée), $H_{\mathrm{RC}}/H_{\mathrm{NR}}$ (ligne verte pointillée) et $\Xi_{\mathrm{RC}}/\Xi_{\mathrm{NR}}$ (ligne rouge pointillée) en fonction du logarithme de $R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}$ quand on prend en compte (ou non) l'action de la rotation sur la friction turbulente. 224

8.1 Perspectives de développement et d'application de la modélisation des effets de marées atmosphériques dans le contexte des missions spatiales aujourd'hui en cours de préparation. 264

8.2 Réponse de marée d'une planète tellurique composée de trois couches (une partie solide, un océan et une atmophère), avec les mécanismes physiques, les couplages et les différentes interactions qui entrent en jeu. Les forces de rappel et les mécanismes dissipatifs sont représentés respectivement par des ressorts et des amortisseurs. 266

LISTE DES TABLEAUX

4.1 Valeurs des paramètres physiques du modèle utilisées dans les simulations. La plupart d'entre elles sont fournies par les NASA fact sheets [4] et les bases de données de l'IMCCE. La fréquence de radiation est arbitrairement fixée à $\sigma_0 = 7.54 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$ (fréquence de refroidissement radiatif effective obtenue par Leconte et al., 2015, dans le cas de Vénus) pour les deux planètes. Les potentiels excitateurs et les forçages thermiques de marée quadripolaires sont calculés d'après (2.13) avec les valeurs utilisées par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) et Shen & Zhang (1990) pour la puissance thermique injectée. 100

5.1 Valeurs numériques des paramètres utilisées dans l'application du modèle aux cas de planètes de type Vénus. Les dix premières valeurs sont données par les NASA fact sheets et Mohr et al. (2012). Le paramètre $\kappa = 7/5$ correspond aux gaz parfaits, ω_0 est la fréquence radiative prescrite pour Vénus par Leconte et al. (2015), α est calculé d'après (5.16) pour la distribution en cosinus donnée par (3.60), le couple de marée est supposé entièrement transmis à la partie solide ($\beta = 1$), la valeur retenue pour ε correspond à la puissance absorbée au point subsolaire $F = 100$ W utilisée par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) pour modéliser le chauffage effectif par le sol de l'atmosphère de Vénus. La valeur affectée à G correspond au module de compressibilité des silicates (Remus et al., 2012b) et ω_{M} est ajustée de sorte que la rotation de Vénus corresponde à un état d'équilibre. 168

7.1 Lois d'échelle caractérisant la variation des propriétés du spectre en fréquence de l'énergie dissipée (fréquences propres $\omega^{m,n}$, largeur $l^{m,n}$, amplitude $H^{m,n}$ des résonances, niveau du fond non-résonant H_{bg}, nombre de pics N_{p} et paramètre de contraste Ξ) en fonction des paramètres de contrôle du système (A, E, P_{r}). Le nombre $A^{1,1}$ correspond à la transition entre les régimes des ondes de marées inertielles et ceux des ondes de gravité. 219

7.2 Valeurs numériques des paramètres utilisés dans la simulation de l'évolution du système planète-satellite de la Section 7.6. Ces valeurs sont celles du système Mars-Phobos dans les travaux d'Efroimsky & Lainey (2007) qui sont ici notre référence. 221

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Sommaire

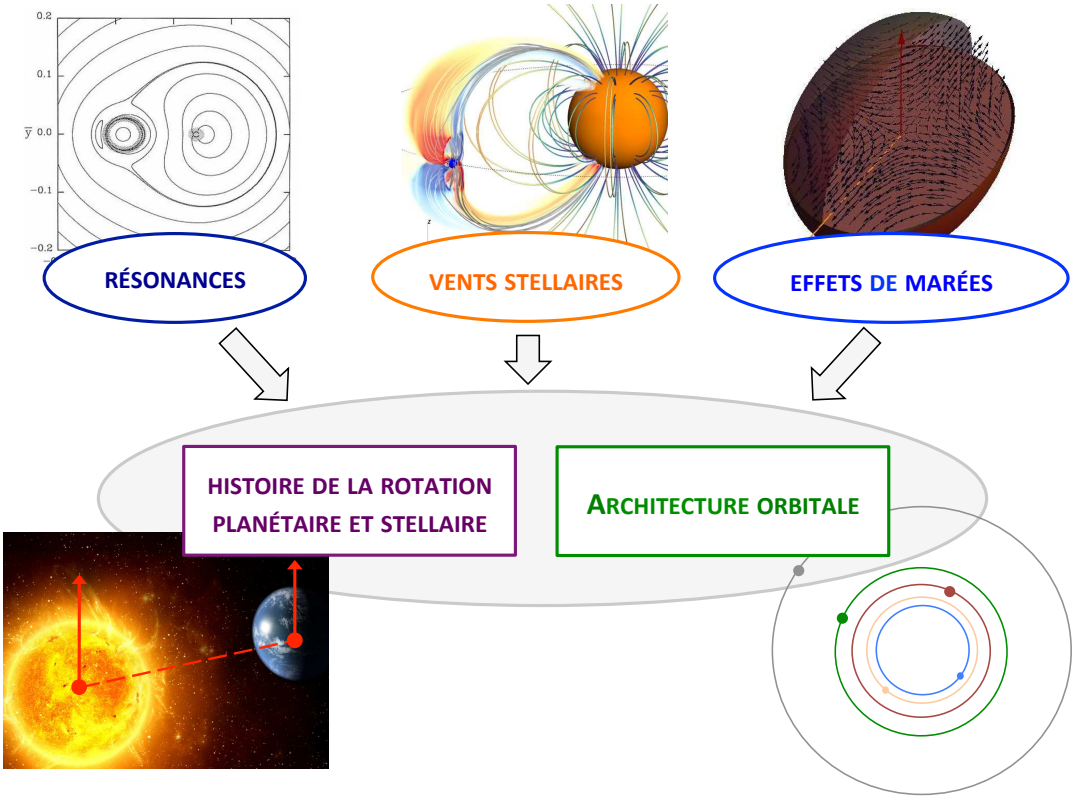
1.1 Des planètes aux exoplanètes 1
1.2 Quelques repères historiques 5
1.3 Problématiques astrophysiques 10
1.4 Plan de la thèse 11

1.1 Des planètes aux exoplanètes

Contrairement à la vision qui en a longtemps perduré, la dynamique d'un système planétaire n'est pas figée. Elle évolue sur des échelles de temps séculaires très supérieures aux périodes de révolution et de rotation des astres, même si cette évolution demeure presque imperceptible à l'échelle d'une vie humaine. On sait ainsi que le système solaire n'a pas toujours été dans son passé tel que nous le voyons aujourd'hui, et que son aspect aura encore changé d'ici quelques centaines de millions ou quelques milliards d'années (Laskar, 1994). De même, notre satellite, la Lune, s'est éloigné de la Terre depuis sa formation, et la durée du jour terrestre a augmenté progressivement (Mignard, 1979, 1980, 1981; Néron de Surgy & Laskar, 1997). Ces observations nous interrogent sur la façon dont ces objets familiers, qui constituent notre environnement astrophysique direct, s'inscrivent dans le temps. Quelle est leur histoire ? Quel sera leur devenir ? De telles questions dépassent le simple cadre de l'astrophysique. Elles s'étendent notamment aux champs de la géophysique et de la climatologie, les conditions de surface de la Terre et son climat étant relatives à l'irradiation de la planète par le Soleil. Mentionnons, comme exemples parmi d'autres, la température d'équilibre de la surface, qui varie avec la distance étoile-planète, et les saisons, dont l'existence est une conséquence directe de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique.

Pour déterminer l'évolution d'un système planétaire sur de grandes échelles de temps, il est essentiel de comprendre les mécanismes qui en sont à l'origine. Ces mécanismes, aussi variés soient-ils, reposent tous sur des interactions entre corps composant le système. Parmi les plus importantes (voir Fig. 1.1), on peut citer en premier lieu les perturbations gravitationnelles décrites par les équations planétaires de Lagrange, qui sont dues aux effets moyens des potentiels gravifiques des corps sur l'architecture orbitale du système (e.g. Wisdom, 1985). Un tel effet est important en cas de résonance, c'est-à-dire lorsqu'une certaine configuration se répète dans le temps. Un deuxième mécanisme est l'effet des vents stellaires émis par l'étoile hôte d'un système planétaire et ses interactions avec le champ magnétique des planètes (e.g. Strugarek et al., 2014, 2015; Vidotto et al., 2015). Enfin, le mécanisme auquel nous allons nous intéresser dans ce travail, appelé *effet de marée*, résulte de la déformation des corps sous l'effet du forçage de leurs compagnons. Ce forçage est de nature gravifique pour les solides et les liquides. Il peut aussi être d'origine thermique pour les couches atmosphériques, qui absorbent le rayonnement de l'étoile. Nous en venons ainsi au coeur du sujet de cette thèse, les marées thermiques atmosphériques.

En première approximation, les planètes du système solaire peuvent être divisées en deux grandes familles : les planètes géantes et les planètes telluriques. La première famille regroupe des objets de grandes



© P. Auclair-Desrotour/IMCCE-CEA

FIGURE 1.1: Principales interactions entres les corps composant un système planétaire et leurs conséquences sur l'évolution de ce dernier. Figures extraites de Wisdom (1985) (Fig. 7), Strugarek et al. (2015) (Fig. 2), Remus et al. (2012b) (Fig. 3).

tailles composés globalement d'une importante enveloppe fluide d'hydrogène et d'un potentiel coeur de silicates et de glaces (Fig. 1.2). Elle se décompose en deux sous-catégories : les géantes gazeuses et les géantes glacées, ces dernières ayant des masses intermédiaires entre les géantes gazeuses et les planètes telluriques. Les planètes de la deuxième famille présentent quant à elles une structure plus complexe, constituée d'une superposition de couches solides (coeur métallique, manteau et croute de silicate) et fluides (e.g. coeur externe métallique, océan pour la Terre). Puisqu'elles se situent plus près du Soleil que les géantes gazeuses, les planètes telluriques reçoivent aussi plus de flux lumineux. Parmi elles, la Terre, Vénus et Mars possèdent une atmosphère et sont donc affectées à la fois par la perturbation gravifique des autres corps et le forçage thermique du Soleil.

Ce phénomène pourrait paraître sans importance si l'on s'en tenait au cas de la Terre, où les marées atmosphériques ne représentent qu'une toute petite contribution à la déformation globale de la planète, inférieure de plusieurs ordres de grandeur à celles de l'océan et de la partie solide. Mais il en est autrement pour la planète Vénus qui est bloquée dans un état de rotation rétrograde, tournant sur elle-même avec une période de 243 jours (voir Fig. 1.3). Cette configuration s'explique par la forte compétition entre marées solides et marées thermiques atmosphériques dont Vénus est le siège (Gold & Soter, 1969; Dobrovolskis & Ingersoll, 1980; Correia & Laskar, 2001). Les premières tendent à ramener la planète à son état de synchronisation spin-orbite, position dans laquelle le corps présente toujours la même face au Soleil, les secondes à l'en écarter. Nous reviendrons sur ce point en Section 1.3, lorsque nous établirons les problématiques de la thèse.

1. Archives de l'IMCCE ; http://www.imcce.fr/hosted_sites/vt2004/CDs/CD-souvenir-vt2004-v2/fiches/fiche_n08_C1.html

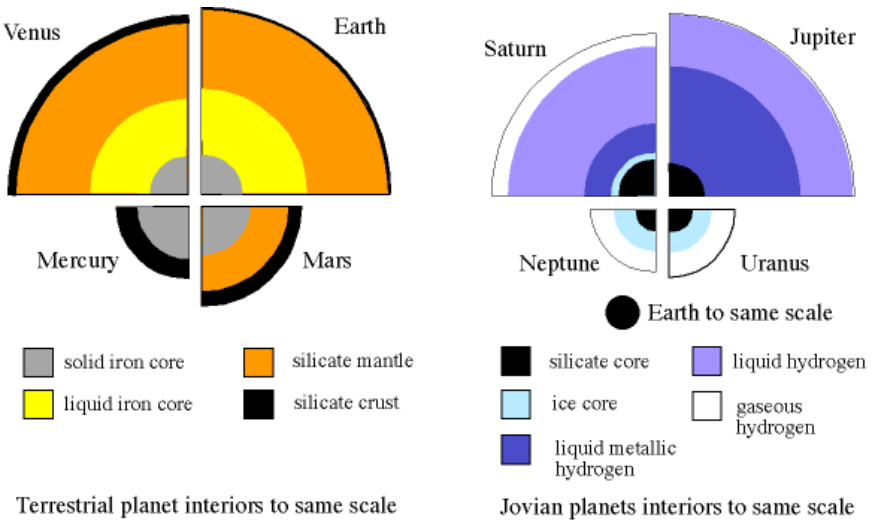


FIGURE 1.2: Structure et composition des planètes du système solaire divisées en deux grandes familles. *Gauche* - planètes telluriques (Mercure, Vénus, Terre, Mars). *Droite* - Géantes gazeuses (Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune). D'après les archives Internet de l'IMCCE [1].

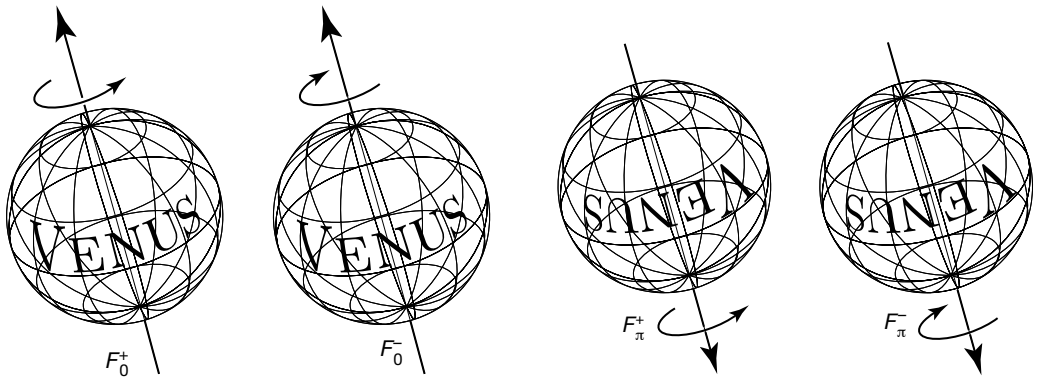


FIGURE 1.3: Les quatre états finaux possibles du spin de Vénus. F_0^- et F_π^- correspondent aux états rétrogrades, F_0^+ et F_π^+ aux états prograde. Crédits Correia & Laskar (2001).

Le récent développement des moyens de détection, notamment les instruments de photométrie à haute résolution et de spectrométrie CoRoT (Baglin et al., 2006), *Kepler* (Borucki et al., 2010) et HARPs (Mayor et al., 2011) et, dans un avenir proche, CHEOPS (Fortier et al., 2014), TESS (Ricker et al., 2015), PLATO (Rauer et al., 2014) et SPIRou (Artigau et al., 2014), a permis de mettre au jour plus de trois milles exoplanètes et un nombre comparable de systèmes planétaires [2]. Ces objets ont été principalement détectés par la méthode des vitesses radiales, qui indique leur période orbitale et le produit de leur masse par le sinus de l'inclinaison du système par rapport à la ligne de visée de l'observateur, et la méthode des transits, qui donne leur rayon. On se trouve ainsi en mesure de les comparer à ceux du système solaire, dont la structure interne et la composition sont mieux connus. Par ailleurs, avec l'observation d'étoiles moins massives que le Soleil, de types spectraux M (température de surface comprise entre 2400 et 3700 K ; cf. la classification spectrale de Harvard, e.g. Chalonge, 1954) et K (température comprise entre 3700 et 5200 K), il devient possible d'identifier des planètes telluriques de taille ou de masse comparable à celle de la Terre, les *super-Terres*, voire plus petites (Fig 1.4) ; on parle alors de *planètes terrestres* ou *subterrestres*.

Ceci nous impose d'élargir le champ d'étude des marées au delà du cas limite du système solaire pour considérer l'existence de nombreuses autres Terres et Vénus en interaction avec leurs systèmes hôtes (Fig. 1.5). Il nous faut introduire ici la notion d'*habitabilité* d'une planète, qui établit une comparaison entre

2. Site Internet de la NASA : http://https://exoplanets.nasa.gov
3. Site Internet du PHL ; http://phl.upr.edu/projects/habitable-exoplanets-catalog

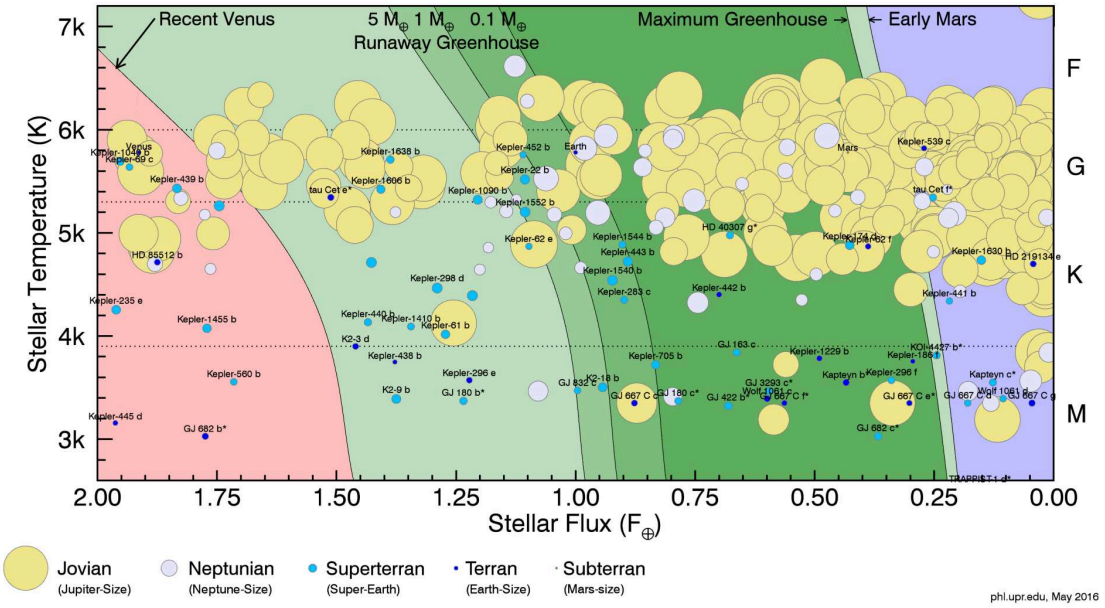


FIGURE 1.4: Exoplanètes répertoriées en 2016 placées en fonction de la puissance du flux stellaire (axe horizontal) et de la température de surface de leur étoile hôte (axe vertical). Seules les planètes de masse inférieure à 10 masses terrestres ou de rayon inférieur à 2.5 rayons terrestres ont une étiquette. La taille du cercle correspond au rayon de la planète. Les objet demeurant non-confirmés sont indiqués par le symbole *. La zone habitable correspond à la bande verte (cf. Kopparapu et al., 2014). Crédits *The Planetary Habitability Laboratory (PHL) @ UPR Arecibo* [3].

ses conditions de surface, en particulier la température, et celles de la Terre. Les objets considérés comme habitables constituent des cibles privilégiées pour les études d'exobiologie. Ils se situent dans une région appelée *zone habitable* (e.g. Kopparapu et al., 2014), correspondant approximativement à l'intervalle de distance à l'étoile où la température de surface est susceptible de permettre l'existence d'eau à l'état liquide. Pour ce qui concerne les étoiles de faibles masses, les marées solides et atmosphériques sont susceptibles d'être du même ordre de grandeur au sein de la zone habitable. Plus près de l'étoile, les marées solides prédominent et les planètes tendent vers la configuration de synchronisation spin-orbite ; plus loin, les objets ne sont plus affectées par la perturbation de marée de l'astre central.

Ainsi, comprendre la façon dont les planètes terrestres semblables à la Terre ou à Vénus participent à l'évolution de leur système hôte requiert de connaître les mécanismes impliqués dans les marées thermiques atmosphériques et d'être capable d'en quantifier les effets. Dans ce contexte, l'absence d'observations directes du phénomène pour les systèmes extrasolaires font de la modélisation *ab initio* un enjeu capital répondant à trois grands objectifs astrophysiques :

1. **améliorer les modèles de dynamique orbitale utilisés pour déterminer l'évolution des systèmes planétaires** en leur apportant des prescriptions réalistes pour les marées atmosphériques. La plupart des modèles aujourd'hui se basent sur des modélisations simplifiées des marées (cf. Chapitre 2) qui ne tiennent souvent pas compte de la physique interne des corps et se révèlent insatisfaisantes dans de nombreux cas ;
2. **explorer le domaine des paramètres physiques** de manière à discerner leur importance dans le mécanisme des marées atmosphériques ;
3. **mieux contraindre la structure interne et la composition des objets observés.** L'établissement d'un lien physique entre la dynamique orbitale d'un système, la dynamique rotationnelle des planètes et leur structure interne permet de sonder cette dernière à partir des informations recueillies sur les deux

premières. L'architecture d'un système planétaire est une conséquence directe des mécanismes d'évolution, dont la modélisation des marées constitue une clé de lecture essentielle.

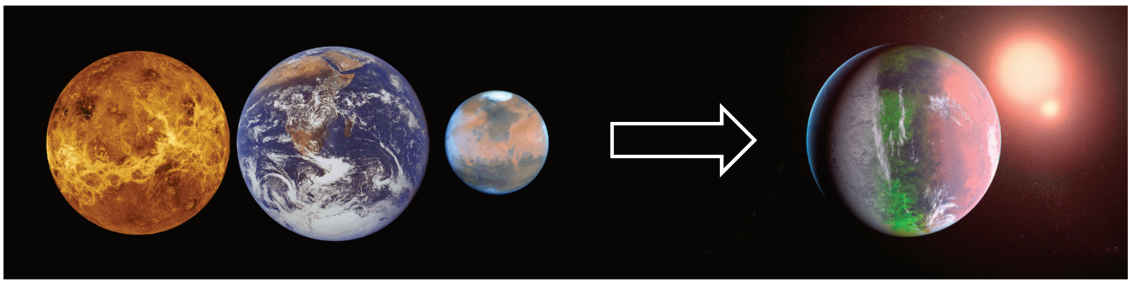


FIGURE 1.5: Vénus, la Terre et Mars (gauche) et une exoplanète terrestre située dans la zone habitable en vue d'artiste (droite). Adapté d'images de *Sciencephotolibrary*[4].

Dans cette thèse, nous adoptons une approche analytique parce que ce type d'approche se prête bien à l'examen détaillé de la physique des marées atmosphériques. Soulignons néanmoins que la modélisation analytique ne peut être réalisée que dans un cadre simplifié, cadre dont la simulation numérique permet de s'affranchir, en particulier avec l'utilisation de codes de circulation générale atmosphérique (GCM pour Global General Circulation en anglais). Les deux approches sont ainsi complémentaires et doivent être menées en synergie pour répondre aux questions présentées ci-dessus. Les marées atmosphériques ont été étudiées principalement dans un contexte géophysique avec, par exemple, les travaux du livre *Atmospheric tides : Thermal and Gravitational* (Chapman & Lindzen, 1970, que l'on notera désormais CL70). Ce sont donc ces travaux qui vont nous servir de point de départ.

1.2 Quelques repères historiques

Afin d'introduire la théorie des marées thermiques atmosphériques, nous rappelons ici les étapes-clés de son histoire, depuis ses origines jusqu'à sa maturité, atteinte à la fin du siècle dernier avec, entre autres, le modèle analytique de CL70.

Les marées sont assimilées aux variations diurnes et semi-diurnes du niveau de la mer sous l'effet de la Lune et du Soleil puisque ce sont les seuls effets auxquels nos sens nous donnent accès. Notre connaissance du phénomène se trouve étroitement conditionnée par la perception sensorielle que nous en avons. Aussi a-t-il fallu attendre l'invention du baromètre par Torricelli en 1643 pour découvrir que les astres perturbent l'atmosphère comme ils perturbent les océans, en particulier les étoiles pour ce qui concerne la marée thermique. Cet instrument de mesure apportait la preuve de l'existence des fluctuations météorologiques quotidiennes de la pression atmosphérique au sol. L'étude systématique qui en découla permit d'isoler dans ces fluctuations un signal régulier, apparaissant plus nettement aux latitudes tropicales qu'aux latitudes tempérées (cf. Fig. 1.6). Ainsi, même avec l'instrument de mesure adéquat, les variations barométriques générées par l'effet perturbateur de la Lune et du Soleil restent difficilement discernables à ces latitudes moyennes tant leur amplitude est faible devant les fluctuations météorologiques (de l'ordre de 0.4 mbar à une latitude de 48° Nord ainsi que le montre la courbe de la Figure 1.7). Pour extraire du signal la marée atmosphérique, il est donc nécessaire de réaliser des mesures précises sur un grand nombre de jours, ce qui est longtemps demeuré un obstacle majeur aux investigations expérimentales.

Le XVIIIème siècle assista à la naissance de la théorie universelle de la gravitation de Newton et de la science des systèmes dynamiques. Cette révolution scientifique inspira de nombreux savants, parmi eux d'Alembert et Bernoulli, qui appliquèrent avec succès les lois de Newton à de nombreux problèmes dont la

4. Site Internet de *Sciencephotolibrary* ; http://www.sciencephoto.com/channel/image/space

théorie des marées. Le fort engouement que suscitèrent leurs réussites favorisa une approche de ce phénomène essentiellement axée sur la dynamique. Comme la gravitation était à l'origine des marées océaniques, il paraissait naturel qu'elle engendrât aussi les marées atmosphériques. C'est dans ce contexte qu'apparurent les premières études connues visant à les comprendre. Ces études datent de la fin du XVIIIème siècle et nous viennent de Laplace. Elles furent publiées de 1798 à 1829 dans le *Traité de Mécanique Céleste* (Laplace, 1798, voir en particulier les Tomes 2 et 5). Ces travaux constituent les fondements de la théorie classique des marées atmosphériques, qui se développa au cours des deux siècles qui suivirent et dont l'histoire est rapportée dans le détail par Wilkes (1949), Siebert (1961), CL70 et Lindzen (1990) sur lesquels nous nous appuyons pour retracer ses principales étapes.

Relativement à la réponse de marée d'une graine tellurique ou d'une couche planétaire fluide, les marées atmosphériques présentent une spécificité d'importance. En effet, si l'atmosphère, à l'instar des couches solides et liquides, est sensible aux effets du potentiel de marée gravifique, elle l'est pareillement aux perturbations thermiques. Ce point, dont Laplace avait eu l'intuition en observant la faiblesse de l'effet lunaire sur l'atmosphère devant l'effet solaire, pourtant du même ordre de grandeur dans le cas de l'océan, fut mis en évidence à la fin du XIXème siècle par Lord Kelvin. Celui-ci attira notamment l'attention sur l'importance de la composante semi-diurne des variations de marées barométriques (Kelvin, 1882), question qui allait motiver de nombreuses études et faire évoluer la vision des marées atmosphériques héritée de Laplace.

En effet, depuis les premiers travaux entrepris pour modéliser la marée, l'atmosphère était traitée de façon analogue à l'océan. Laplace lui-même, en étudiant le cas de l'atmosphère isotherme et peu profonde (déplacement vertical négligé devant le déplacement horizontal), avait montré une correspondance entre la profondeur d'un océan et la hauteur de pression de l'atmosphère. L'océan se comporte comme un guide d'ondes et sa réponse est hautement résonante, ainsi que nous le verrons dans le Chapitre 6. Dans la continuité de l'approche de Laplace et comme le suggérait Kelvin en 1882, on chercha donc l'explication de l'amplitude anormalement élevée de la composante solaire semi-diurne dans la possible mise en résonance du milieu, qui se comporterait à la manière d'un océan ayant pour épaisseur la hauteur de pression. L'idée sous-jacente à cette hypothèse est que les forces de rappel des ondes de marées dans l'atmosphère, l'accélération de Coriolis et la poussée d'Archimède, agissent comme le ressort d'un oscillateur forcé : si la fréquence de forçage correspond aux fréquences caractéristiques de l'oscillateur, la réponse est amplifiée

5. Facteur de conversion donné par le Bureau International des Poids et des Mesures ; http://www.bipm.org/fr/publications/si-brochure/table8.html

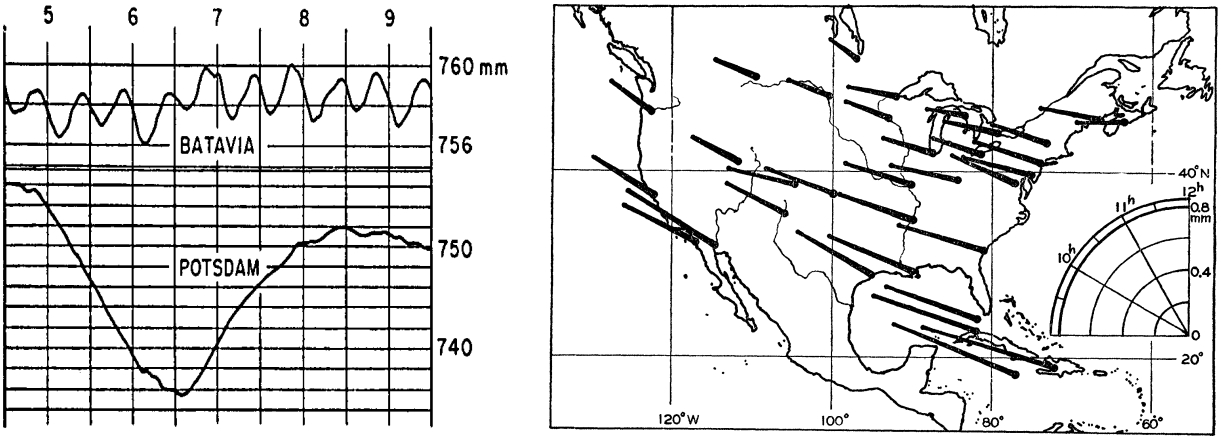


FIGURE 1.6: *Gauche :* Variations barométriques relevées à Batavia (6° S) et à Postdam (52° N) durant le mois de Novembre 1919, donnés en millimètres de Mercure (1 mmHg $\approx$ 1.333 mbar[5]). Crédits Bartels (1928). *Droite :* Représentation vectorielle des variations de pression semi-diurnes moyennées sur une année pour différentes stations météorologiques d'Amérique du Nord. L'amplitude de l'oscillation est donnée en millimètres de Mercure et le déphasage en heures (voir schéma à droite de la carte). Crédits Bartels (1932).

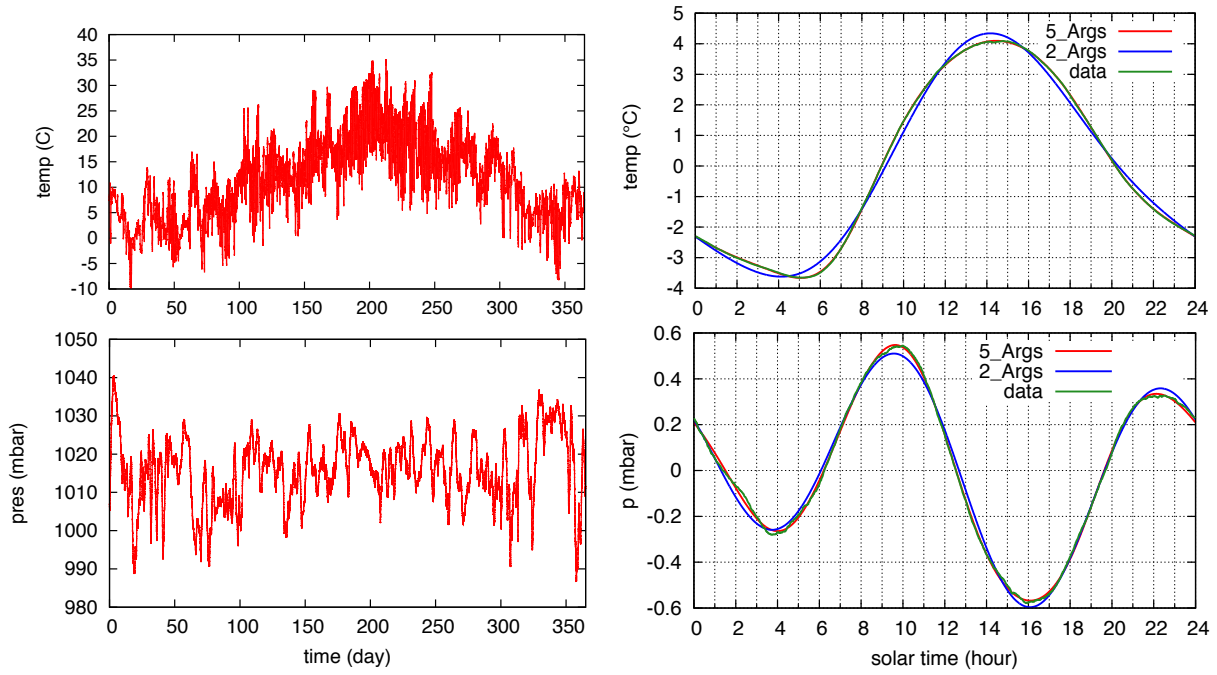


FIGURE 1.7: *Gauche :* Variations de température en degrés (haut) et pression en mbar (bas) tracées en fonction du temps en jours sur une période d'une année. Les données, fournies par Jacques Laskar, ont été enregistrées chaque minute durant toute l'année 2013 avec une station météorologique Vantage Pro 2 positionnée au point de latitude 48.363° N et de longitude 2.700° E. *Droite :* Variations journalières de température en degrés (haut) et pression en mbar (bas) moyennées sur une année tracées en fonction du temps solaire (en heures), le point sub-solaire correspondant à 12h. Les données sont moyennées sur un nombre exact de 365 jours. Les valeurs moyennes de la température (10.8973° C) et de la pression (1015.83 mbar) ont été soustraites afin de ne garder que la partie variable. Dans les deux figures, le signal brut (vert) a été décomposé sur une période de 24h en une série de Fourier limitée à 2 harmoniques (bleu) ou 5 harmoniques (rouge). La température est dominée par la composante diurne avec un maximum situé aux alentours de 14h26mn. Les plus importantes harmoniques des oscillations barométriques sont le terme semi-diurne et le terme diurne, par ordre d'amplitudes décroissantes. Deux maximums de pression peuvent être observés, à 9h38mn et 22h07mn.

(voir Section 2.4.3). Les études ayant exploré cette voie forment ce que l'on appelle la *théorie de la résonance* (Wilkes, 1949).

Peu après que Kelvin eut formulé son hypothèse sur l'amplification de la composante semi-diurne, le météorologue autrichien Margules montra en reprenant les travaux de Laplace sur l'atmosphère isotherme qu'une telle résonance apparaissait effectivement pour une valeur donnée de la *profondeur équivalente* (notion définie par Eq. 3.40 au Chapitre 3) associée à l'oscillation semi-diurne (Margules, 1890). Ces résultats semblaient déjà conforter la théorie de la résonance. Néanmoins, les premières avancées majeures dans cette lignée sont à mettre au compte de Lamb dont les efforts se concentrèrent sur l'explication de l'amplification de la marée semi-diurne (Lamb, 1911, 1916). Lamb généralisa les travaux de Laplace en étudiant le cas d'atmosphères non isothermes. Il démontra ainsi qu'il existait non pas une mais potentiellement une infinité de profondeurs équivalentes donnant lieu à un comportement résonant. Toutefois, ce résultat fut quelque peu éclipsé par une autre suggestion de Lamb, qui imagina que la composante semi-diurne pouvait être l'effet d'un forçage gravifique très fortement amplifié par une résonance, suggestion qui influença fortement la communauté scientifique durant une décennie.

L'hypothèse de la résonance continua de faire son chemin dans les esprits. Au cours des années 1920, elle reçut notamment l'appui de Chapman. Celui-ci mit en avant la forte régularité de la distribution géographique des oscillations barométriques solaires semi-diurnes par rapport aux oscillations de températures correspondantes, très dépendantes du lieu d'observation, un constat allant selon lui dans le sens d'une amplification résonante de la perturbation (Chapman, 1924). Il estima ainsi cette amplification à un facteur

100 sous réserve que la période du forçage semi-diurne correspondît à une période d'oscillation libre de l'atmosphère, condition en faveur de laquelle il ne put apporter aucune preuve.

C'est Taylor qui, le premier, exprima un doute quant à la validité de la théorie de la résonance. En s'appuyant sur les travaux de Lamb dont il adopta les hypothèses de travail (voir par exemple Taylor, 1929), Taylor montra qu'il était possible d'estimer la valeur de la profondeur équivalente associée à la marée solaire semi-diurne à partir de la vitesse des ondes générées par l'éruption du Krakatoa en 1883 (Taylor, 1932). La valeur qu'il obtint ainsi s'avéra sensiblement supérieure à la prédiction théorique permettant la résonance. Cependant, en revenant peu après sur ce problème, il redécouvrit la possible co-existence de nombreuses profondeurs équivalentes qu'avait déjà remarquée Lamb avant lui (Taylor, 1936). Ces résultats trouvèrent un écho très favorable chez Pekeris (1937), qui s'attacha à identifier méthodiquement les distributions verticales de température s'accordant avec la profondeur équivalente associée à la résonance. La notoriété qu'acquirent les travaux de Pekeris résulte de la prédiction qu'il fit de la structure verticale de l'atmosphère, alors très peu connue, à partir de la théorie des marées atmosphériques. Cette prédiction se révéla en effet en très bon accord avec les observations de l'époque. Un point d'orgue fut atteint quand, en analysant à nouveau les données sur l'éruption du Krakatoa, Pekeris trouva une valeur de la profondeur équivalente plus proche de la valeur théorique que celle de Taylor. La théorie de la résonance connut alors son âge d'or ; plus rien ne semblait pouvoir la remettre en question. C'est ainsi qu'à la fin des années 1940, Wilkes concluait, confiant, sa monographie sur les marées atmosphériques (Wilkes, 1949) par :

« The resonance theory may now be taken as well established. »

Pourtant, quelques décennies plus tard, Lindzen devait écrire à propos de cette même théorie (Lindzen, 1990)

« In fact, as we shall soon see, the resonance theory proved to be profoundly wrong. »

La situation avait alors bien évolué. Ce revirement fut très rapide. Il s'amorça dès la fin de la Seconde Guerre Mondiale avec le développement de technologies modernes, et plus spécifiquement les fusées-sondes, permettant de caractériser la structure verticale de l'atmosphère sur toute son épaisseur. En effet, on ne trouva pas, dans les profils de températures observés, les conditions nécessaires à l'amplification par résonance décrites par la théorie. Le constat que formule CL70 à ce sujet est sans appel :

« The rocket results definitely exclude the possibility of notable magnification of [the barometric solar semidiurnal component] by resonance ; they give the deathblow to Kelvin's hypothesis. »

Ainsi, on se trouve a priori dans l'incapacité d'expliquer l'importance de l'oscillation semi-diurne. Si ce n'est pas d'un mécanisme d'amplification résonant, d'où provient alors cette amplitude de 0.4 mbar des oscillations barométriques que l'on observe à nos latitudes tempérées (cf. Fig. 1.7) ? Comme nous allons le voir, la clé va cette fois-ci venir de la description du forçage et non de la dynamique du système.

Le forçage thermique constitue l'élément essentiel de la modélisation des marées atmosphériques. C'est toutefois une lacune dans la description de ce forçage qui est à l'origine de l'écart entre les estimations théoriques et les observations au sol. Jusqu'à ce que les fusées-sondes sonnent le glas de l'hypothèse de la résonance, il était admis dans la littérature que les marées atmosphériques étaient engendrées par deux termes sources différents : le potentiel de marée gravifique, bien connu depuis les travaux de Newton, et un chauffage diffusif par le sol. Cette description laissait de côté les mécanismes de transferts radiatifs, pourtant étudiés depuis le milieu du XVIIIème (Bouguer, 1729; Klett et al., 1760), ce dont on peut s'étonner à l'instar de Lindzen (1990) :

« The absorptive properties of the atmosphere were actually sufficiently well known in the 1930s. It is curious that no one looked into their possible role in generating tide. Undoubtedly, the fact that the

atmospheric sciences are actually a small field, and tides a small subset of a small field, played an important part. In addition specialization undeniably encourages a kind of tunnel vision. »

Si le chauffage diffusif est la cause principale des oscillations de température dans l'atmosphère au niveau du sol, il s'avère trop faible et trop localisé pour générer les oscillations de pression mesurées. En revanche, dès lors que l'on prend en compte l'absorption du rayonnement solaire par l'atmosphère (principalement due à l'ozone et à la vapeur d'eau), qui représente environ 10 % du rayonnement total (Lindzen, 1990), on retrouve l'amplitude des oscillations barométriques mesurées au sol.

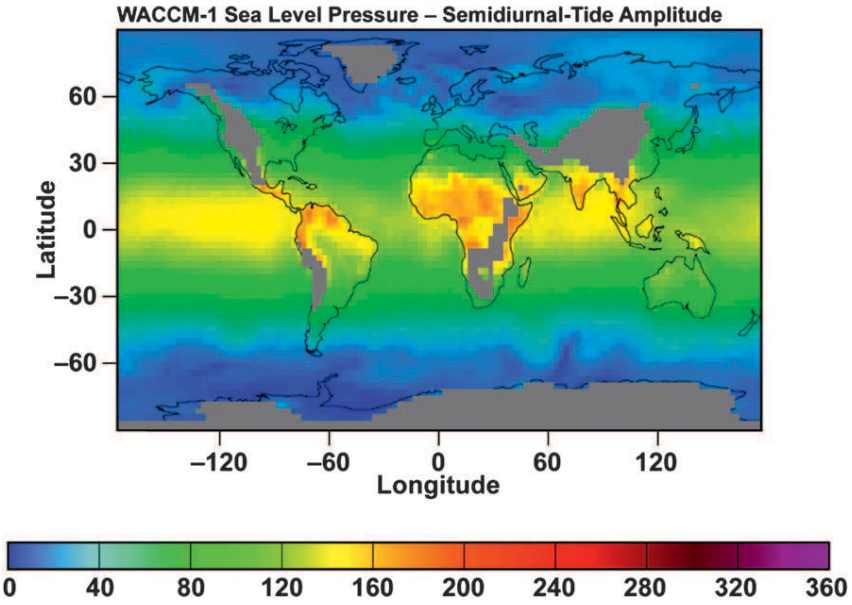


FIGURE 1.8: Amplitudes (Pa) des harmoniques semi-diurnes des variations barométriques de marées au niveau de la mer moyennées sur le mois de Janvier. Les régions grisées correspondent à des zones d'altitudes supérieures à 1 km au dessus du niveau de la mer. Résultats obtenus à l'aide d'un modèle numérique global. Crédits Covey et al. (2009).

La raison de la marée thermique semi-diurne est ainsi identifiée. Cependant, ce n'est pas le cas de l'oscillation de marée thermique diurne dont l'amplitude au niveau de la surface est prédite inférieure à celle de l'oscillation semi-diurne. C'est cette question qui motiva la plupart des études menées dans la période d'après-guerre (Haurwitz, 1965; Kato, 1966; Lindzen, 1966, 1967a,b, 1968a). En observant les oscillations diurnes de pression à différentes altitudes, on se rendit compte qu'elle étaient presque toujours du même ordre de grandeur que les oscillations semi-diurnes si ce n'est d'un ordre de grandeur supérieur. La différence observée au sol apparaît donc comme un effet local pour lequel plusieurs raisons ont été identifiées à ce jour. Ces raisons sont détaillées dans la littérature (par exemple Lindzen, 1967b, CL70) et sortent du cadre de cette section. La principale d'entre elle réside dans le type de modes excité par la composante diurne du forçage. Les modes propagatifs se trouvent en effet piégés dans une bande équatoriale comprise approximativement entre -30° et $+30^\circ$ par un effet de l'accélération de Coriolis (nous aurons l'occasion de revenir sur cet effet au Chapitre 3). En conséquence, à l'extérieur de cette bande équatoriale, l'oscillation résultant de l'énergie déposée par la marée en altitude ne peut plus se propager vers le sol et le signal relevé à ce niveau s'en trouve amoindri.

Les études géophysiques des marées atmosphériques ont évolué progressivement vers une approche opérationnelle, guidée par l'objectif d'intégrer l'ensemble des mécanismes qui entrent en jeu dans la modélisation à l'aide des méthodes numériques modernes (e.g. Covey et al., 2009, voir Fig. 1.8). La théorie analytique de CL70 répond quant à elle de manière satisfaisante à la question initialement posée par Kelvin. Elle est par ailleurs en bon accord avec les observations, ce qui en fait une base idéale pour l'élaboration

de modèles théoriques de marées atmosphériques pour d'autres planètes. Nous pouvons désormais poser les problématiques astrophysiques motivant l'approche adopté pour nos travaux.

1.3 Problématiques astrophysiques

Historiquement, les marées ont donc surtout été étudiées dans un contexte géophysique, avec des applications ponctuelles aux planètes du système solaire et aux exoplanètes (e.g. Ioannou & Lindzen, 1993a,b, 1994; Gu & Ogilvie, 2009; Arras & Socrates, 2010, pour les géantes gazeuses). Comme nous l'avons montré dans la section précédente, Laplace et ses successeurs se sont penchés sur les marées atmosphériques terrestres, pour lesquelles ils disposaient d'observations. De fait, les problématiques dominantes durant la construction de la théorie classique des marées atmosphériques ont concerné essentiellement l'explication des oscillations de marées diurnes et semi-diurnes en pression et en température. Citons quelques-unes d'entres elles, déjà vues plus haut, dans l'ordre chronologique :

- Quel est l'effet de la perturbation gravifique de marée sur l'atmosphère ?
- Pourquoi l'oscillation barométrique de marée semi-diurne domine-t-elle l'oscillation diurne alors que l'oscillation de la température est principalement diurne ?
- Est-il possible d'inférer la structure verticale de l'atmosphère, et notamment sa stratification en température, à l'aide des observations des variations de marée réalisées au niveau du sol ?
- Quel rôle les transferts radiatifs jouent-ils dans le forçage thermique ?
- Pourquoi les oscillations barométriques diurnes sont-elles de plus faible amplitude au niveau du sol que dans le reste de l'atmosphère ?

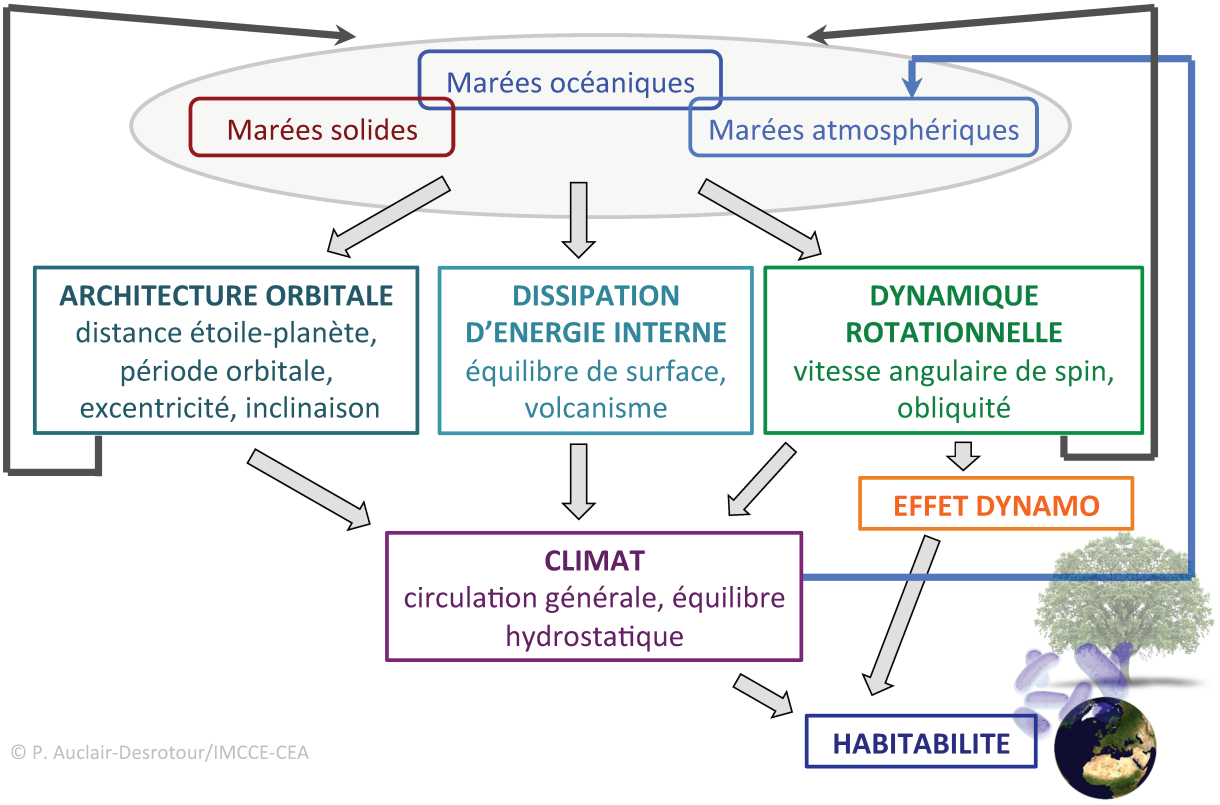


FIGURE 1.9: Conséquences des marées sur l'évolution des systèmes planétaires.

Toutes ces questions ont pour axe directeur la caractérisation de la réponse de marée et des ondes associées dans le cas de la Terre, où cette perturbation est faible par rapport à l'amplitude des fluctuations météorologiques et n'a que peu d'effet sur la dynamique rotationnelle de la planète.

L'astrophysique apporte de nouveaux axes d'étude. En effet, depuis les travaux de Kelvin et de Darwin traitant de l'élongation d'un corps solide sphérique sous l'effet de la gravitation (Kelvin, 1863; Darwin, 1880), on sait que les marées peuvent avoir de fortes implications sur l'évolution des systèmes planétaires. Les marées atmosphériques ne font pas exception à la règle. Par le couple qu'elles induisent sur l'atmosphère, elles modifient la rotation d'une planète sur le long terme. Cet effet, associé au couple causé par la marée solide, détermine notamment les états d'équilibres de la vitesse angulaire de rotation planétaire. Il explique le sens de rotation rétrograde de la planète Vénus (Gold & Soter, 1969; Dobrovolskis & Ingersoll, 1980; Correia & Laskar, 2001; Correia et al., 2003; Correia & Laskar, 2003) et prédisent celui de certaines exoplanètes (Laskar & Correia, 2004; Correia et al., 2008; Arras & Socrates, 2010) comme nous l'avons déjà mentionné plus haut. Une deuxième conséquence importante des marée atmosphériques est la dissipation interne qu'elles génèrent, par friction visqueuse, rayonnement et diffusion thermique, point sur lequel nous reviendrons de manière plus exhaustive au Chapitre 4. Cette dissipation, comme la dissipation élasto-visqueuse des corps solides, perturbe aussi la dynamique orbitale des systèmes planétaires. Elle affecte potentiellement l'évolution du demi-grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison (cf. Chapitre 2), contribuant ainsi à la migration des planètes et à la circularisation de leurs orbites. Enfin, les ondes de marée thermique vont modifier, par leurs interactions avec les flots moyens, la circulation générale des atmosphères planétaires, et par conséquent le climat des planètes. Ces différents effets présentent tous un lien fort avec la notion d' « habitabilité » des planètes, en particulier dans le champ d'étude des super-Terres.

Nous pouvons donc maintenant dégager du contexte que nous venons de passer en revue les grandes questions qui motivent l'approche astrophysique :

- Comment les marées atmosphériques dépendent-elles de la structure et des propriétés de l'atmosphère ?
- Comment leurs effets varient-ils avec la fréquence de forçage imposée par le corps perturbateur ?
- Quelles sont les caractéristiques du couple de marée induit par la réponse de l'atmosphère à une perturbation gravifique et thermique ?
- Quelles sont les caractéristiques de la dissipation interne d'énergie ?
- Comment les ondes de marées viennent-elles contribuer à l'état d'équilibre global (dynamique et thermique) ?

C'est avec ces questions à l'esprit que nous abordons le travail de thèse. Au Chapitre 2, nous introduisons les notions de la dissipation de marée dans le cas général. Au Chapitre 3, nous présentons les forces et les faiblesses de la théorie analytique classique des marées atmosphériques terrestres. Nous adaptons cette approche au cas des exoplanètes telluriques au Chapitre 4 et nous l'appliquons au calcul des états d'équilibre de spin de planètes semblables à Vénus au Chapitre 5. Afin de mettre en perspectives les marées atmosphériques avec les marées océaniques, nous développons au Chapitre 6 un nouveau modèle de marées océaniques pour le traitement du cas des exoplanètes. Cette étude s'achève avec la caractérisation de la dissipation de marée dans les régions fluides planétaires (et stellaires) au Chapitre 7 et nous donnons nos conclusions au Chapitre 8. Le plan détaillé de la thèse est donné dans la section suivante.

1.4 Plan de la thèse

- **Chapitre 2 - Dissipation de marées**

  Ce chapitre est une introduction à la théorie générale des marées en astrophysique dans laquelle

nous présentons les notions essentielles et les références sur lesquelles reposent les modèles développés dans la thèse. En premier lieu, nous définissons le mécanisme de la marée et ses causes, l'interaction gravifique entre les corps composant un système planétaire et l'absorption du rayonnement stellaire dans le cas des atmosphères des planètes. Nous rappelons notamment le formalisme de Kaula (Kaula, 1962; Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009) pour le potentiel de marée gravifique et l'adaptons au forçage thermique dans le cas des orbites circulaires. En second lieu sont définis le facteur de qualité de marée Q (Goldreich & Soter, 1966) et les nombres de Love (Love, 1911) qui quantifient la dissipation de marée, ainsi que le couple de marée. Enfin, nous introduisons quelques uns des modèles fréquemment utilisés jusqu'à aujourd'hui pour la simulation de l'évolution des systèmes planétaires : le *modèle à retard angulaire constant* (e.g. Kaula, 1964; MacDonald, 1964), le *modèle à retard temporel constant* (Darwin, 1879; Mignard, 1979, 1980; Hut, 1981) et les modèles d'oscillateurs visco-élastiques dits de *Kelvin-Voigt* et de *Maxwell* (Greenberg, 2009).

- **Chapitre 3 - Marées atmosphériques terrestres**

  Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation des marées atmosphériques terrestres en nous appuyant largement sur CL70 (Chapman & Lindzen, 1970). Nous introduisons dans un premier temps le système physique étudié. Dans un second temps, nous examinons le détail ses aspects physiques. Ceci nous amène à définir les hypothèses du modèle et à introduire les grandes familles d'ondes de marée identifiées pour finalement caractériser leur structure. Nous concluons ce premier chapitre sur les marées atmosphériques par l'étude de la réponse de l'atmosphère terrestre à une perturbation de marée solaire semi-diurne. Ce cas simplifié, pour lequel nous résolvons analytiquement les équations décrivant la structure des ondes de marées, nous permet de mettre en exergue la force de la modélisation des marées atmosphériques dans le cas de la Terre, qui apporte une compréhension détaillée de la physique du phénomène, et tout particulièrement la dynamique, en prédisant l'amplitude et le déphasage de la perturbation par rapport à la direction du perturbateur. Il nous révèle aussi les limites de cette approche, qui s'avère insuffisante pour traiter le cas de planètes soumises au forçage thermique de très basse fréquence typique du voisinage de la synchronisation spin-orbite à l'image de Vénus et des super-Terres dans la zone habitable des étoiles de faibles masses.

- **Chapitre 4 - Marées atmosphériques des planètes telluriques**

  L'objet de ce chapitre est la modélisation des marées atmosphériques pour les planètes et exoplanètes telluriques. Au chapitre précédent, les définitions préliminaires auront été posées. Nous aurons vu que la modélisation élaborée pour la Terre rend fidèlement compte de la dynamique de la marée thermique dans le cas des rotateurs rapides mais devient insuffisante quand la fréquence de marée tend vers la synchronisation. Nous nous proposons donc d'étendre le modèle de CL70 à toute planète de faible masse. Nous introduisons d'abord les processus dissipatifs à l'oeuvre dans les atmosphères. Nous montrons que ces processus, qui ont pour effet d'amortir les ondes de basses fréquences, prédominent au voisinage de la synchronisation et régularisent la perturbation de marée. Nous établissons ensuite les équations gouvernant la dynamique des ondes sans faire l'hypothèse de couche mince, en incorporant directement dans les équations primitives les pertes de chaleur par rayonnement thermique. Ceci nous permet de déterminer les structures horizontale et verticale des ondes de marées dissipatives, dont nous déduisons le potentiel réponse de la marée atmosphérique, les nombres de Love et le couple de marée exercée sur l'atmosphère dans le cas général. Enfin, nous traitons deux cas simples pour lesquels nous donnons la structure de la perturbation et les expressions des grandeurs quantifiant la marée atmosphérique : le cas de

l'atmosphère isotherme stablement stratifiée et celui de l'atmosphère convective. Nous complétons cette étude par des prescriptions pour les profils de forçage thermique. Pour clore ce chapitre, nous quantifions le couple de la marée semi-diurne dans le cas de la Terre et de Vénus.

- **Chapitre 5 - Equilibres de spin**

  Ce chapitre est dédié à l'une des principales applications astrophysiques des modèles de marées atmosphériques : l'étude de l'impact des marées sur l'évolution de la rotation propre de planètes semblables à Vénus et la caractérisation de leur rotation d'équilibre. Nous faisons d'abord l'état de l'art des travaux existant en partant des travaux de Gold & Soter (1969). Nous revisitons ensuite les études les plus récentes (Correia & Laskar, 2001, 2003; Correia et al., 2003, 2008) en utilisant le couple maxwellien dérivé du modèle de marée atmosphérique (Chapitre 4). Dans cette approche, où la réponse du solide est modélisée par la rhéologie de Maxwell (cf. Section 2.4.3), nous établissons des prédictions analytiques pour les différentes positions d'équilibre possibles du spin, ainsi que les critères caractérisant leur stabilité, en soulignant le rôle-clé joué par les mécanismes dissipatifs à l'intérieur des couches solide et atmosphérique. Nous identifions par cette méthode les rotations d'équilibres non-synchronisées dont l'existence avait été déjà démontrée auparavant par Correia & Laskar (2001). Les résultats obtenus sont finalement appliqués au cas de Vénus à titre d'illustration.

- **Chapitre 6 - Marées océaniques**

  L'objet de ce chapitre est la modélisation des marées océaniques dans le cadre posé par les problématiques astrophysiques. L'objectif est de quantifier la redistribution de masse, la dissipation d'énergie interne et le couple de marée exercé sur la planète en fonction d'un nombre réduit de paramètres physiques du système. On cherche notamment à comprendre l'impact que peut avoir la présence d'un océan sur l'évolution d'un système planétaire ou planète-satellite. Bien que décrites par des équations très similaires, les marées océaniques présentent plusieurs spécificités qui les distinguent fortement des marées atmosphériques. Elles sont d'abord engendrées uniquement par le potentiel gravifique de marée excitateur du corps perturbateur. Ensuite, leur dépendance à la fréquence est fortement résonante du fait que l'océan, contrairement par l'atmosphère, présente une épaisseur bien définie et se comporte comme un guide d'onde. Ceci, via la dissipation interne de marée et le couple résultant de la redistribution de masse, a d'importantes implications sur l'évolution orbitale et rotationnelle d'un système binaire planète-satellite ou étoile-planète. Le système Terre-Lune en est un cas représentatif. A l'heure actuelle, c'est la dissipation interne des océans qui conduit l'évolution de ce système devant celle de la partie solide. Mais l'hypothèse selon laquelle cette situation n'aurait pas évoluée significativement depuis la formation des deux corps aboutit à une contradiction sur l'âge de la Lune, estimée environ deux milliards d'années plus jeune que le montrent les observations (e.g. Bills & Ray, 1999). De même, il existe un lien étroit entre l'histoire de la rotation de spin de la Terre depuis la formation des deux corps et l'interaction entre l'océan et le satellite (Néron de Surgy & Laskar, 1997). Comprendre comment la marée océanique dépend de la fréquence d'excitation constitue donc un enjeu crucial de la modélisation d'un tel système. Après un bref rappel de l'état de l'art, nous développons une nouvelle approche *ab initio* des marées océaniques dans laquelle sont pris en compte les déplacements du fluide dans la direction radiale et sa stratification. Nous montrons ainsi comment l'introduction de la friction visqueuse/turbulente vient changer la structure de la perturbation. A partir de ces résultats sont calculés le potentiel de marée océanique, les nombres de Love correspondants, ainsi que le couple

de marée. Le modèle est finalement appliqué au cas simplifié de l'océan mince homogène, isotherme et stablement stratifié.

- **Chapitre 7 - Dissipation des ondes de marée dans les fluides**

  Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux caractéristiques de la dissipation due à la propagation d'ondes de marées dans les couches fluides planétaires et stellaires. Comme nous l'aurons vu au Chapitre 6, le spectre en fréquences de la réponse des couches fluides présente de nombreuses résonances dans le cas où celles-ci se comportent comme des guides d'onde. La dissipation qui en résulte varie ainsi fortement avec la fréquence d'excitation. Elle dépend également des propriétés physiques du milieu (stratification, viscosité, conduction thermique, etc.) et de la rotation du corps. Pour quantifier l'impact des effets de marée fluides sur l'évolution des systèmes planétaires, il est important de comprendre les mécanismes qui entrent en jeu et de cerner précisément la façon dont les paramètres physiques et dynamiques du système influent sur la réponse du corps à la perturbation. Les GCM s'avèrent peu appropriés au traitement de ces questions car ils ne permettent ni d'explorer efficacement le domaine des paramètres ni d'étudier le cas des couches épaisses étant donné qu'ils reposent la plupart du temps sur des approximations de couche mince. De même, à cause des difficultés techniques induites par la géométrie sphérique, les modèles analytiques globaux tels que ceux présentés aux chapitres 3, 4 et 6 ne peuvent inclure certains ingrédients physiques essentiels de la marée que sous une forme dégradée ; en particulier les processus dissipatifs, modélisés par des frictions de Rayleigh et des refroidissements newtoniens. Ces limitations n'affectent pas les approches analytiques locales, qui réduisent la dynamique des ondes de marée à sa description la plus élémentaire et permettent, de fait, de traiter complètement le problème dans un cadre simplifié. Nous présentons ici dans le détail une approche de ce type. Les équations de la marée fluide sont dérivées à partir d'un modèle local cartésien linéaire généralisant celui proposé par Ogilvie & Lin (2004) en annexe des travaux principaux de l'article. Ce modèle décrit la réponse d'une section locale de couche fluide planétaire ou stellaire à un forçage volumique périodique. Il prend en compte la rotation de la section avec le corps, sa position à l'intérieur de la couche fluide, sa stratification dans la direction radiale ainsi que les processus de friction visqueuse/turbulente et de diffusion thermique responsables de la dissipation interne d'énergie. Ainsi, après un rappel de l'état de l'art, nous développons les quantités perturbées en série de Fourier pour établir les expressions des puissances dissipées par chacun des deux processus en fonction des paramètres de contrôle du modèle et de la fréquence de marée. Ensuite, à partir de ces expressions, nous identifions les différents régimes asymptotiques de la réponse. Nous montrons ainsi que ces régimes sont définis par les nombres d'Ekman et de Prandtl du système, qui dépendent de la viscosité et de la rotation du milieu pour le premier et de la diffusivité thermique et la viscosité pour le second. Ces deux paramètres déterminent notamment la dépendance de la dissipation à la fréquence de marée. Nous établissons pour chacun des régimes identifiés les loi d'échelles régissant les propriétés du spectre en fréquence de la puissance dissipée (position, hauteur, largeur des pics de résonances, niveau du fond non-résonant). Enfin, nous présentons deux applications des résultats du modèle. La première illustre les conséquences orbitales des marées fluides : en considérant un système planète-satellite idéalisé, nous montrons que les résonances de la dissipation interne de marée peuvent modifier significativement la vitesse d'évolution des systèmes. La seconde établit la dépendance de la dissipation par friction turbulente à la vitesse angulaire de rotation du corps dans les régions convectives planétaires et stellaires. Nous utilisons les lois d'échelles théoriques dérivées par Stevenson (1979) et validée par les simulations numériques à haute résolution de Barker et al. (2014) pour dériver une prescription pour la viscosité turbulente appliquée aux écoulements de marée par les flots convectifs influencés par la rotation. Nous montrons alors comment les propriétés des spectres de l'énergie dissipée peuvent varier sur plusieurs ordres de grandeur.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont détaillés dans Auclair Desrotour et al. (2015) pour les sections 7.3 et 7.4, Auclair-Desrotour et al. (2014) pour la Section 7.6 et dans Mathis et al. (2016) pour la Section 7.7.

- **Chapitre 8 - Conclusions et perspectives**

  Nous présentons dans ce chapitre les conclusions de ce travail et ses perspectives à court terme.

CHAPITRE 2

DISSIPATION DE MARÉES

Sommaire

2.1 Introduction **16**
2.2 Physique de la marée **17**
2.2.1 Mécanisme 17
2.2.2 Potentiel générateur de marée gravifique 19
2.2.3 Forçage de marée thermique 21
2.3 Quantification de la déformation et de la dissipation **23**
2.3.1 Nombres de Love adiabatiques 23
2.3.2 Facteur de qualité Q 25
2.3.3 Nombres de Love complexes 26
2.3.4 Implications sur l'évolution des systèmes planétaires 26
2.4 Modèles classiques **28**
2.4.1 Modèle à retard géométrique constant 28
2.4.2 Modèle à retard temporel constant 29
2.4.3 Modèles d'oscillateurs visco-élastiques 29
2.5 Conclusion **31**

2.1 Introduction

Ce chapitre est une introduction à la théorie générale des marées en astrophysique dans laquelle nous présentons les notions essentielles et les références sur lesquelles reposent les modèles développés dans la thèse. En premier lieu, nous présentons le mécanisme de la marée et ses causes, l'interaction gravifique entre les corps composant un système planétaire et l'absorption du rayonnement stellaire dans le cas des atmosphères des planètes. Nous rappelons notamment le formalisme de Kaula (Kaula, 1962; Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009) pour le potentiel de marée gravifique et l'adaptons au forçage thermique dans le cas des orbites circulaires. En second lieu sont définis le facteur de qualité de marée Q (Goldreich & Soter, 1966) et les nombres de Love (Love, 1911) qui quantifient la dissipation de marée, ainsi que le couple de marée. Enfin, nous introduisons quelques uns des principaux modèles couramment utilisés pour la simulation de l'évolution des systèmes planétaires : le *modèle à retard angulaire constant* (e.g. Kaula, 1964; MacDonald, 1964), le *modèle à retard temporel constant* (Darwin, 1879; Mignard, 1979, 1980; Hut, 1981) et les modèles d'oscillateurs visco-élastiques dits de *Kelvin-Voigt* et de *Maxwell* (Greenberg, 2009; Correia et al., 2014).

2.2 Physique de la marée

2.2.1 Mécanisme

Loin d'être des solides infiniment rigides idéalisés, les corps célestes sont constitués de couches rocheuses, glacées, liquides et gazeuses déformables. Les objets d'un système planétaire interagissent mutuellement suivant la loi de la gravitation. Chaque corps engendre donc une variation de la distribution de masse dans les autres (cf. Fig. 2.1, haut). De la même manière, le rayonnement de l'étoile hôte du système apporte de l'énergie aux enveloppes gazeuses externes des planètes qui, elles aussi, subissent une déformation (Fig. 2.1, bas). Ainsi, on désigne par *effets de marées* toute perturbation de la dynamique interne d'un astre par un autre. L'élongation qui en résulte est dite *élastique* ou *adiabatique* lorsqu'elle ne s'accompagne pas de dissipation interne d'énergie (e.g. Zahn, 1966a; Efroimsky, 2012; Mathis & Remus, 2013). Le corps, s'il est solide, prend alors la forme d'un ellipsoïde aligné dans la direction du perturbateur. Dans le cas contraire, l'ajustement est dit *inélastique* ou *dissipatif* (e.g. Remus et al., 2012b) et l'énergie fournie par la perturbation est convertie en chaleur par des mécanismes de friction dont l'amplitude doit être quantifiée. Ceci se traduit par un déphasage de la réponse du corps par rapport à l'excitation. L'ellipsoïde n'est plus aligné dans la direction du perturbateur mais présente un retard angulaire δ par rapport à cette dernière (voir Fig. 2.2).

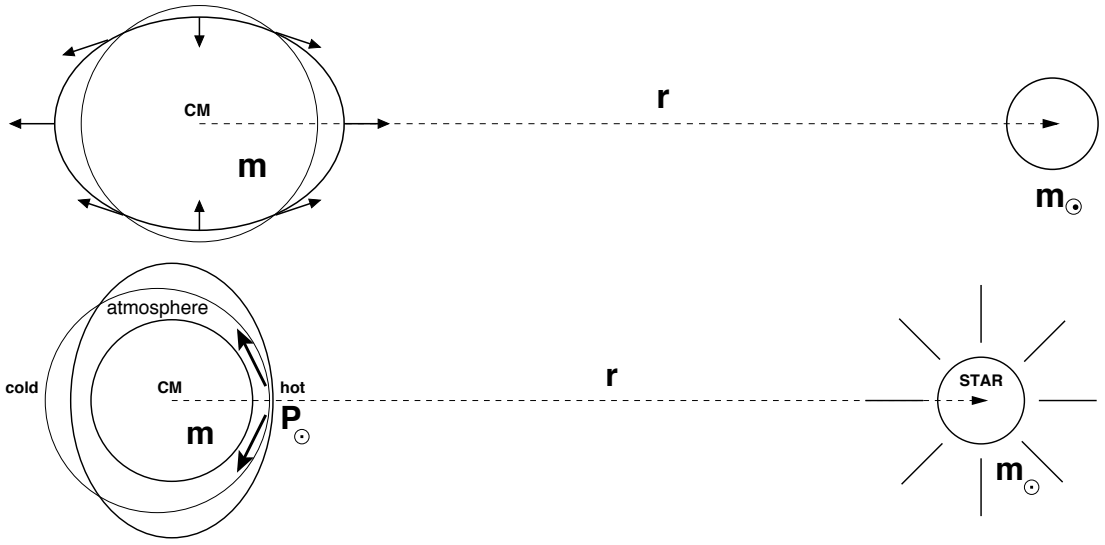


FIGURE 2.1: *Haut* - Elongation d'un corps (gauche) sous l'effet du potentiel gravifique de marée exercé par un compagnon perturbateur. *Bas* - Déformation de l'atmosphère d'une planète (gauche) sous l'effet de l'irradiation de son étoile hôte (droite). Crédits Correia & Laskar (2003).

En ce qui concerne les corps solides, les premiers travaux théoriques remontent à Kelvin (1863) qui fit l'étude de la déformation par effet de marée d'une Terre élastique incompressible (i.e. dont le volume reste inchangé). Plus tard, Love généralisa cette approche en caractérisant la réponse d'un corps par des paramètres sans dimension (Love, 1911). Ces paramètres, appelés *nombres de Love*, sont intrinsèques à l'objet. Ils ont été introduits pour quantifier la déformation adiabatique de marée. Plus tard, la prise en compte de la dissipation a entraîné l'introduction des nombres de Love complexes (Henning et al., 2009; Remus et al., 2012a). Nous reviendrons dans le détail sur la définition des nombres de Love en Section 2.3.1. Complémentaire des nombres de Love, le facteur de qualité Q défini par Goldreich & Soter (1966) caractérise l'efficacité de la réponse du corps, assimilé à un oscillateur forcé, à la la perturbation. Il est inversement proportionnel à la dissipation et correspond au rapport entre le maximum d'énergie emmagasinée et l'énergie dissipée sur un cycle (cf. Eq. 2.23). Les nombres de Love et le facteur de qualité Q sont utilisés dans la modélisation des systèmes planétaires pour prendre en compte les effets de marées.

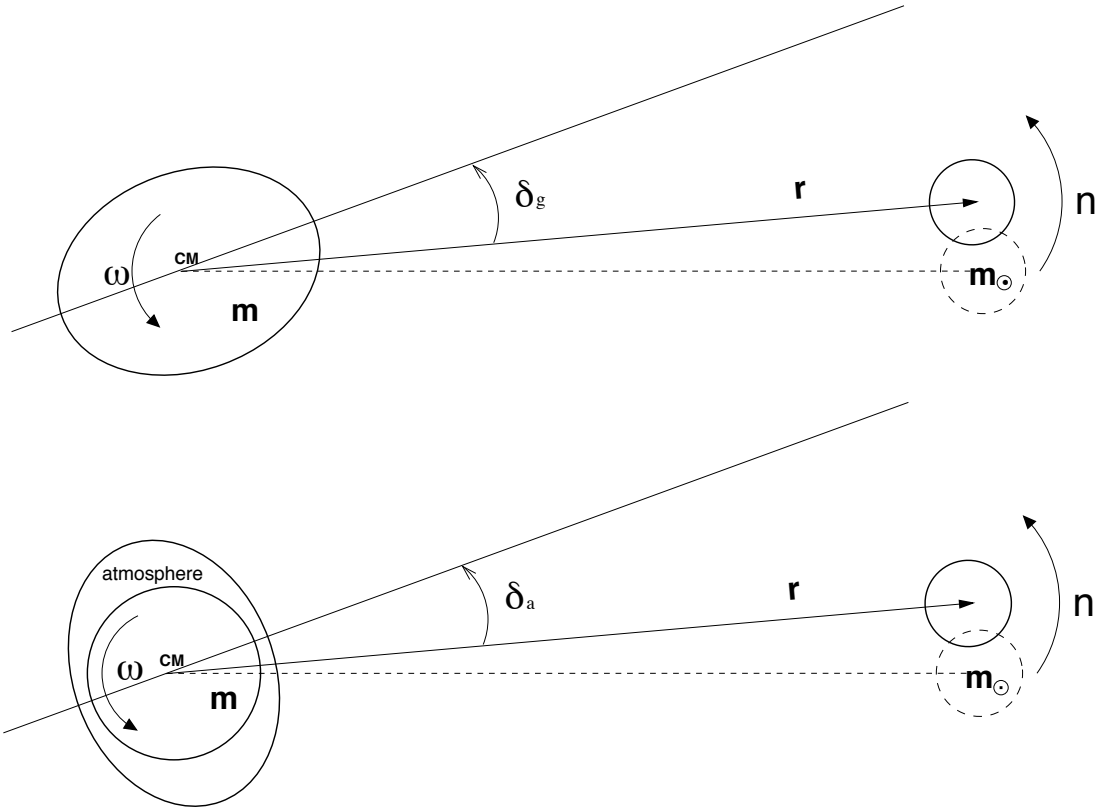


FIGURE 2.2: *Haut* - Déformation anélastique d'un corps solide en rotation sous l'effet du potentiel gravifique de marée d'un compagnon perturbateur. Les masses respectives du corps et du perturbateur sont notées m et $m_\odot$. Le taux de rotation du corps est noté ω, le moyen mouvement du perturbateur n, la distance corps-perturbateur r et le retard angulaire de la réponse δ_g. *Bas* - Déformation anélastique de l'atmosphère d'une planète (gauche) sous l'effet de l'irradiation de son étoile hôte (droite), avec les mêmes notations. L'angle de déphasage de la réponse est noté δ_a. Crédits Correia & Laskar (2003).

Ces paramètres dépendent non seulement de la structure interne des corps et des paramètres de friction associés (e.g. viscosité, diffusivité thermique, etc.), mais aussi de la fréquence d'excitation de la perturbation. On remarque notamment une nette différence qualitative entre la réponse fréquentielle des couches solides et celle des couches fluides. Le comportement visco-élastique des solides induit une dissipation interne fortement dépendante de la rhéologie avec une faible dépendance à la fréquence de marée (MacDonald, 1964; Efroimsky & Lainey, 2007; Henning et al., 2009; Remus et al., 2012b; Efroimsky, 2012; Correia et al., 2014). Ce n'est pas le cas des couches fluides, dont la réponse se traduit par la propagation d'ondes fluides ayant pour forces de rappel l'accélération de Coriolis et la stratification (voir Chapitre 3), et varie fortement avec la fréquence de marée et les paramètres du système (voir Chapitre 7). Les océans sont représentatifs de ce comportement hautement résonant. L'intensité des effets de marées s'accroît de plusieurs ordres de grandeurs pour certaines profondeurs (Tyler, 2011, 2014; Matsuyama, 2014) et certaines fréquences d'excitation (Longuet-Higgins, 1966; Webb, 1980; Tyler, 2011). On retrouve ces caractéristiques dans une gamme d'objets astrophysiques étendue. Les étoiles par exemple présentent un comportement similaire à celui des couches océaniques (e.g. Savonije & Witte, 2002; Ogilvie & Lin, 2004, 2007; Ogilvie, 2009) comme le montre la Figure 2.3 où le couple de marée exercé sur un Soleil est tracé en fonction de la fréquence d'excitation. On notera la grande proximité entre ce spectre et celui obtenu pour le couple de marée océanique terrestre au Chapitre 6 (Fig. 6.6).

La réponse décrite ci-dessus se répercute directement sur la déformation des corps. Dans le cas des solides, la perturbation génère une élongation de grande échelle se déplaçant avec le perturbateur, qui pour la composante quadripolaire est un bourrelet sphéroïdal. La réponse des fluides peut quant à elle se dissocier

en plusieurs modes de fréquences différentes. La composante de la réponse analogue à l'élongation du solide est appelée *marée d'équilibre* (Zahn, 1966a; Remus et al., 2012a; Ogilvie, 2014). Il s'agit des conséquences de l'ajustement hydrostatique de grande échelle. La densité et la pression internes varient sous l'effet du forçage et du potentiel gravifique résultant de la redistribution de masse de manière à satisfaire l'équilibre hydrostatique. Cette composante de la réponse correspond à la limite $\sigma \to 0$ dans le régime des basses fréquences. L'équilibre hydrostatique constitue généralement une bonne approximation lorsque la fréquence de marée est petite devant la fréquence caractéristique des ondes de gravité (N, définie par Eq. 3.13). A la marée d'équilibre s'ajoute une autre composante, appelée *marée dynamique*. La marée dynamique a été mise en évidence par Zahn (1970) à partir de l'étude des oscillations d'une étoile stablement stratifiée. Zahn (1970) montra que les modes de gravité se décomposaient en une infinité de composantes possédant chacune sa propre dépendance en fréquence. Ces ondes internes, qui n'existent pas dans le cas des solides, constituent une importante composante de la réponse de marée des objets fluides, tels que les étoiles par exemple (e.g. Zahn, 1975).

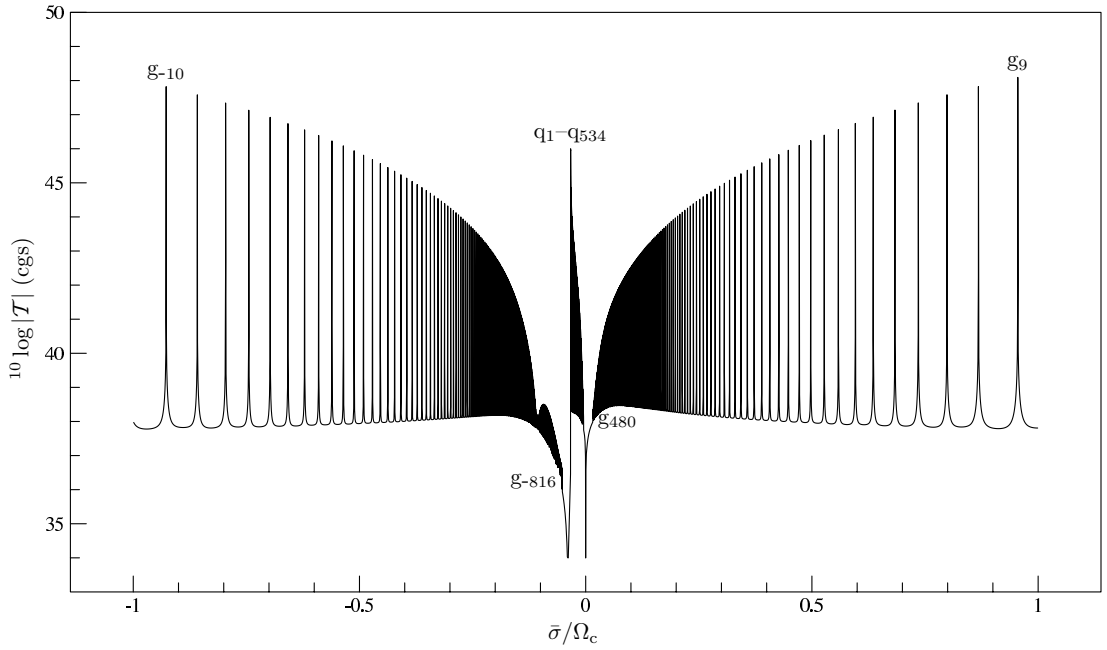


FIGURE 2.3: Couple de marée exercé sur une étoile telle que le Soleil en fonction de la fréquence de marée $\bar{\sigma}$. L'étoile est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\Omega_s = 0.1\Omega_c$ (où Ω_c représente la taux de rotation critique au dessus duquel les effets de la distorsion détruisent l'étoile) et soumise à un forçage de marée quadripolaire ($l = m = 2$). Crédits Savonije & Witte (2002).

2.2.2 Potentiel générateur de marée gravifique

D'un point de vue historique, le forçage gravifique a été le premier à avoir été considéré dans la théorie des marées. Kaula (1962) en a donné le développement systématique en harmoniques sphériques sous sa forme la plus générale en fonction des paramètres orbitaux du système planète-perturbateur. Nous introduisons ici cette expression du potentiel de marée en vue de son utilisation dans la suite.

Le système considéré est un système binaire isolé composé d'une planète sphérique (A), de masse M_A et de rayon R, et d'un corps perturbateur ponctuel (B), de masse M_B. Les deux objets sont éloignés d'une distance d. En reprenant les notations de Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009), on définit trois référentiels, tous centrés sur le centre de masse de la planète et représentés en Figure 2.4 :

- $\mathscr{R}_R : \{O_A, \mathbf{X}_R, \mathbf{Y}_R, \mathbf{Z}_R\}$, référentiel indépendant du temps, où $\mathbf{Z}_R$ désigne la direction du moment angulaire total du système ;

- $\mathscr{R}_{\mathrm{O}} : \{O_{\mathrm{A}}, \mathbf{X}_{\mathrm{O}}, \mathbf{Y}_{\mathrm{O}}, \mathbf{Z}_{\mathrm{O}}\}$, le référentiel orbital relié à $\mathscr{R}_{\mathrm{R}}$ par les angles d'Euler :
  — I_{B}, l'inclinaison du référentiel orbital par rapport à $(O_{\mathrm{A}}, \mathbf{X}_{\mathrm{R}}, \mathbf{Y}_{\mathrm{R}})$;
  — ω_{B}, l'argument du péricentre ;
  — Ω^*_{B}, la longitude du noeud ascendant ;
- $\mathscr{R}_{\mathrm{E;T}} : \{O_{\mathrm{A}}, \mathbf{X}_{\mathrm{E}}, \mathbf{Y}_{\mathrm{E}}, \mathbf{Z}_{\mathrm{E}}\}$, le référentiel équatorial, en rotation à la vitesse angulaire Ω_{A}, et relié à $\mathscr{R}_{\mathrm{R}}$ par les trois angles d'Euler :
  — ε_{A}, l'obliquité, i.e. l'inclinaison du repère équatorial par rapport à $(O_{\mathrm{A}}, \mathbf{X}_{\mathrm{R}}, \mathbf{Y}_{\mathrm{R}})$;
  — Θ_{A}, l'angle sidéral moyen ;
  — ϕ_{A}, l'angle de précession.

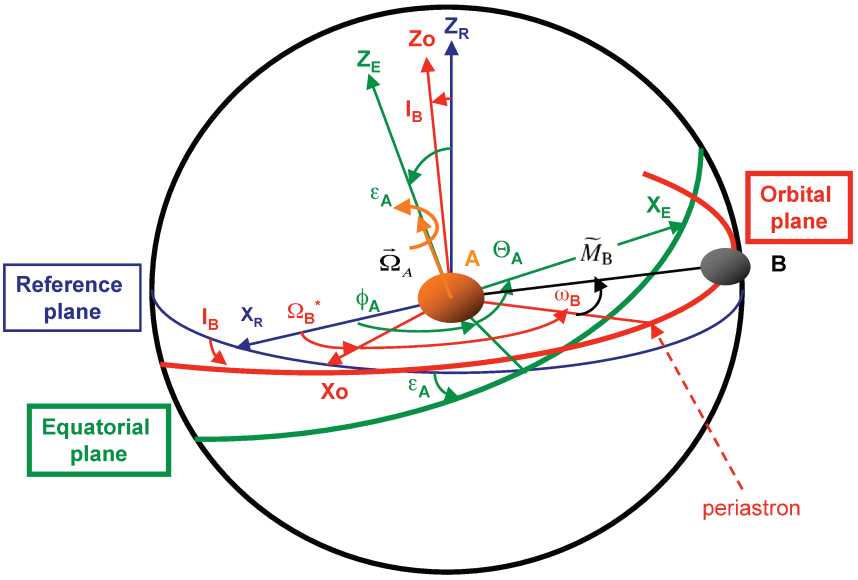


FIGURE 2.4: Référentiel inertiel de référence ($\mathscr{R}_{\mathrm{R}}$), référentiel orbital ($\mathscr{R}_{\mathrm{O}}$), référentiel équatorial en rotation ($\mathscr{R}_{\mathrm{E;T}}$), et les angles d'orientation d'Euler associés. Crédits Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009).

On pose enfin les quantités associés aux éléments képleriens du perturbateur : le demi-grand axe de l'orbite a, l'excentricité e_{B} et l'anomalie moyenne $\tilde{M}_{\mathrm{B}} = n_{\mathrm{B}} t$ où n_{B} désigne le moyen mouvement et t le temps. Dans le cas général, n_{B} est tel que $a^3 n_{\mathrm{B}}^2 = \mu$ où μ est une constante ($\mu = \mathscr{G}(M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}})$ dans le cas d'un système binaire). Le vecteur position du point courant $\mathbf{r}$ est défini par les coordonnées sphériques usuelles, le rayon r, la colatitude θ et la longitude φ. On note P_l^m les polynômes associés de Legendre des harmoniques sphériques tels que $l \in \mathbb{N}$ et $m \in [\![-l, l]\!]$ et qui sont ici normés [1] par la norme N_2 définie pour une fonction f quelconque continue sur l'intervalle $[-1, 1]$ par

$$N_2(f) = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx}. \tag{2.1}$$

Le potentiel gravifique engendré par le perturbateur, supposé ponctuel, se développe en série de Taylor au voisinage du corps perturbé,

$$U = \frac{\mathscr{G} M_{\mathrm{B}}}{d} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^l P_l(\cos\psi_*), \tag{2.2}$$

1. Dans la théorie de Kaula (Kaula, 1961, 1962), les polynômes associés de Legendre ne sont pas normés. Ils découlent de l'équation différentielle généralisée de Legendre et sont donnés par la formule $P_l^m(x) = \left[(-1)^m / (2^l l!)\right] \left[1 - x^2\right]^{m/2} \left(d^{l+m}/dx^{l+m}\right) \left[x^2 - 1\right]^l$ (Abramowitz & Stegun, 1972).

où les P_l sont les polynômes de Legendre non normés et ψ_* l'angle zénithal du perturbateur, i.e. l'angle entre la normale, définie par $\mathbf{r}$, et la direction du perturbateur (voir Fig. 2.5). L'angle ψ_* et la distance d varient tous deux en fonction du temps, des coordonnées spatiales et des paramètres orbitaux du système. Le formalisme introduit par Kaula (1961) sépare explicitement les dépendances en temps et en espace en isolant les composantes associées à chacun des paramètres orbitaux et en faisant apparaître les différentes fréquences d'excitation, $\sigma_{l,m,p,q} = m\Omega_\mathrm{A} - (l-2p+q)\, n_\mathrm{B}$ où $(j,p,q) \in [\![-l,l]\!] \times [\![0,l]\!] \times \mathbb{Z}$. Dans ce formalisme, le potentiel de marée s'écrit (Kaula, 1962; Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009)

$$\boxed{U = \frac{\mathscr{G} M_\mathrm{B}}{a} \sum_{l\geq 0} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{j,p,q} W_{l,m,j,p,q}\left(\varepsilon_\mathrm{A}, I_\mathrm{B}, e_\mathrm{B}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l^m\left(\cos\theta\right) e^{i[\sigma_{l,m,p,q}t + m\varphi]},} \tag{2.3}$$

avec

$$W_{l,m,j,p,q}\left(\varepsilon_\mathrm{A}, I_\mathrm{B}, e_\mathrm{B}\right) = \sqrt{\frac{(l-|j|)!}{(l+|j|)!}} \left[d_{j,m}^l\left(\varepsilon_\mathrm{A}\right) F_{l,j,p}\left(I_\mathrm{B}\right) G_{l,p,q}\left(e_\mathrm{B}\right)\right] e^{-im\varphi_{l,m,j,p,q}}. \tag{2.4}$$

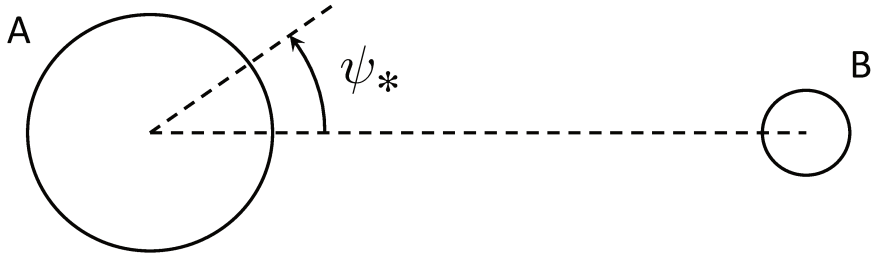


FIGURE 2.5: Définition de l'angle zénithal.

Le déphasage de l'harmonique associée au 5-uplet (l,m,j,p,q) s'exprime $m\varphi_{l,m,j,p,q} = (l-2p)\,\omega_\mathrm{B} + j\left(\Omega_\mathrm{B}^* - \phi_\mathrm{A}\right) + (l-m)\,\pi/2$. Les fonctions d'obliquité $d_{j,m}^l\left(\varepsilon\right)$, d'inclinaison $F_{l,j,p}\left(I\right)$ et d'excentricité $G_{l,p,q}\left(e\right)$ sont données explicitement par Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009) et Remus et al. (2012b). Le nombres de termes devant être pris en compte dans (2.3) est relatif aux valeurs des paramètres orbitaux ; il augmente notamment avec l'excentricité (Fig. 2.6).

2.2.3 Forçage de marée thermique

En reprenant les notations introduites pour le potentiel de marée, on établit maintenant le développement analytique multipolaire du forçage thermique à l'origine des marées thermiques atmosphériques. On suppose que la structure de l'atmosphère de la planète à l'équilibre est à symétrie sphérique. Ainsi, l'absorption du flux stellaire à l'intérieur de la couche par unité de masse, noté J, peut-être décrite par la fonction

$$J\left(r,\psi_*\right) = \frac{1}{d^2} h\left(r,\psi_*\right), \tag{2.5}$$

où h désigne la distribution spatiale de la puissance absorbée dans la couche. La décomposition de J en polynômes de Legendre normés par la norme N_2 (Eq. 2.1) [2] donne alors

$$J = \frac{1}{d^2} \sum_{l\geq 0} \mathcal{J}_l\left(r\right) P_l\left(\cos\psi_*\right), \tag{2.6}$$

2. Les P_l sont liés aux polynômes de Legendre usuels $\tilde{P}_l^m$ par la relation $P_l = \sqrt{(2l+1)/2}\,\tilde{P}_l$ (cf. Abramowitz & Stegun, 1972).

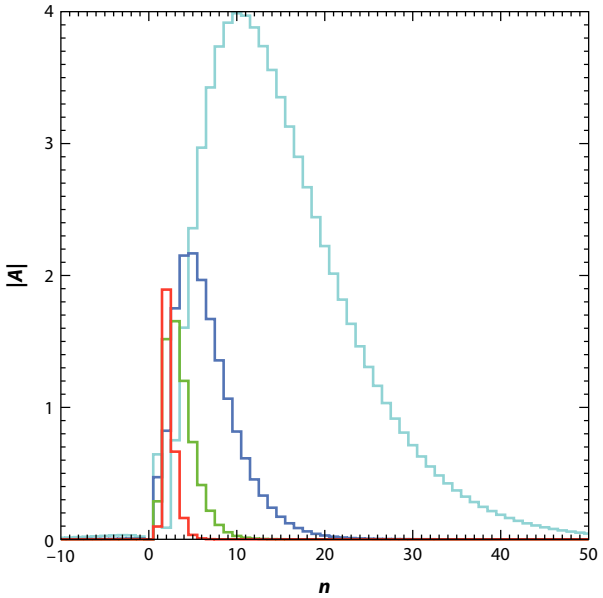


FIGURE 2.6: Amplitude des coefficients de la décomposition du potentiel de marée quadripolaire ($l = m = 2$) pour $I_{\rm B} = 0$, $\varepsilon_{\rm A} = 0$ et les excentricités $e = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ (courbes rouge, verte, bleue et cyan). Crédits Ogilvie (2014).

avec $\mathcal{J}_l(r) = \int_0^\pi h(r, \psi_*) P_l(\cos\psi_*) \sin\psi_* d\psi_*$. En appliquant le théorème d'addition [3] à (2.6), on obtient

$$P_l(\cos\psi_*) = \frac{4\pi}{\sqrt{2(2l+1)}} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y^*_{l,m}(\theta_{\rm AB}, \varphi_{\rm AB}) \tag{2.7}$$

les angles $\theta_{\rm AB}$ et $\varphi_{\rm AB}$ désignant la position du perturbateur dans le référentiel équatorial associé à la planète, et les $Y_{l,m}$ et $Y^*_{l,m}$ les harmoniques sphériques et leurs conjugués, définies par

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \tag{2.8}$$

Il vient ainsi le développement en harmoniques sphériques

$$J = \sum_{l\geq 0} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{\sqrt{2(2l+1)}} \frac{\mathcal{J}_l(r)}{d^2(\theta_{\rm AB}, \varphi_{\rm AB})} Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y^*_{l,m}(\theta_{\rm AB}, \varphi_{\rm AB}). \tag{2.9}$$

A ce stade, il n'est pas possible d'aller plus loin avec la méthode ayant permis d'obtenir l'expansion multipolaire du potentiel gravifique (Eq. 2.3) car ce dernier et le forçage thermique ne présentent pas la même dépendance à la distance étoile-planète [4]. En conséquence, afin de poursuivre jusqu'au bout le développement analytique de J, on fait l'hypothèse simplificatrice que l'orbite de la planète est circulaire, d'où $d(\theta_{\rm AB}, \varphi_{\rm AB}) = a$. Les harmoniques sphériques relatives à la position du perturbateur se formulent alors

3. Le *théorème d'addition des harmoniques sphériques* énonce l'égalité $\tilde{P}_l(\cos\psi_*) = [4\pi/(2l+1)] \sum_{m=-l}^{l} \tilde{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) \tilde{Y}^*_{l,m}(\theta_{\rm AB}, \varphi_{\rm AB})$ où $\cos\psi_* = \cos\theta\cos\theta_{\rm AB} + \sin\theta\sin\theta_{\rm AB}\cos(\varphi - \varphi_{\rm AB})$ et $\tilde{Y}_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{(2l+1)(l-m)!/[4\pi(l+m)!]} \tilde{P}_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$. Les $\tilde{P}_l$ et $\tilde{P}_l^m$ sont respectivement les polynômes de Legendre et les polynômes associés de Legendre ; les fonctions $\tilde{Y}_{l,m}$ sont les harmoniques sphériques généralisées (e.g. Greiner, 1999).

4. La méthode de Kaula (1962) utilise l'identité $Y_{l,m}(\theta_{\rm AB}, \varphi_{\rm AB}) / d^{l+1} = a^{-(l+1)} \sum_{j,p,q} \kappa_{l,j} d^l_{j,m}(\varepsilon_{\rm A}) F_{l,j,p}(I_{\rm B}) G_{l,p,q}(e_{\rm B}) \times \exp[i(\sigma_{l,m,p,q} - m\varphi_{l,m,j,p,q})]$ (voir par exemple Eq. 79 dans Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009). Etant donné que les coefficients issus de la décomposition du forçage thermique en polynômes de Legendre ne présentent pas la dépendance en $d^{-(l+1)}$ de leurs homologues gravifiques, cette identité ne peut pas être reprise pour déterminer analytiquement le développement multipolaire de J.

$$Y_{l,m}\left(\theta_{\mathrm{AB}},\varphi_{\mathrm{AB}}\right)=\sum_{j,p,q}\kappa_{l,j}d_{j,m}^{l}\left(\varepsilon_{\mathrm{A}}\right)F_{l,j,p}\left(I_{\mathrm{B}}\right)G_{l,p,q}\left(0\right)e^{i\left[-\sigma_{l,m,p,q}t+m\varphi_{l,m,j,p,q}\right]},\tag{2.10}$$

avec $(j,p,q)\in[\![-l,l]\!]\times[\![0,l]\!]\times\mathbb{Z}$ et les coefficients

$$\kappa_{l,j}=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|j|)!}{(l+|j|)!}}.\tag{2.11}$$

Il en découle un développement multipolaire de la puissance thermique absorbée par unité de masse similaire à celui du potentiel gravifique,

$$\boxed{J=\sum_{l\geq 0}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{j,p,q}W_{l,m,j,p,q}\left(\varepsilon_{\mathrm{A}},I_{\mathrm{B}},0\right)\frac{\mathcal{J}_{l}\left(r\right)}{a^{2}}P_{l}^{m}\left(\cos\theta\right)e^{i\left[\sigma_{l,m,p,q}t+m\varphi\right]},}\tag{2.12}$$

dans laquelle on retrouve les facteurs $W_{l,m,j,p,q}$ définis par (2.4). Les expressions générales (2.3) et (2.12) se simplifient notablement lorsque l'obliquité de la planète est supposée nulle. Dans le cas de la marée semi-diurne, elles se réduisent en première approximation à leurs termes quadripolaires de nombre d'onde longitudinal $m=2$ et de fréquence de marée $\sigma=2\left(\Omega_{\mathrm{A}}-n_{\mathrm{B}}\right)$, que nous utiliserons dans les Chapitres 3, 4 et 6,

$$\boxed{U_{2,2,2,0,0}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\mathscr{G}M_{S}}{a^{3}}r^{2}P_{2}^{2}\left(\cos\theta\right)e^{i(\sigma t+2\varphi)}\quad\text{et}\quad J_{2,2,2,0,0}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\mathcal{J}_{2}\left(r\right)}{a^{2}}P_{2}^{2}\left(\cos\theta\right)e^{i(\sigma t+2\varphi)}.}\tag{2.13}$$

2.3 Quantification de la déformation et de la dissipation

2.3.1 Nombres de Love adiabatiques

Les nombres de Love sont des coefficients de proportionnalités faisant le lien entre le potentiel excitateur de marée et la déformation du corps qu'il engendre au niveau de sa surface, en $r=R$. Notons $\boldsymbol{\xi}$ le déplacement d'un élément de matière et $\mathcal{U}$ le potentiel de redistribution de masse résultant du forçage gravifique par le potentiel de marée U. Décomposés en harmoniques sphériques $(Y_{l,m})$, les potentiels s'expriment

$$U\left(\mathbf{r}\right)=\sum_{l,m}U_{l,m}\left(r\right)Y_{l,m}\left(\theta,\varphi\right),\quad\text{et}\quad\mathcal{U}\left(\mathbf{r}\right)=\sum_{l,m}\mathcal{U}_{l,m}\left(r\right)Y_{l,m}\left(\theta,\varphi\right),\tag{2.14}$$

où $U_{l,m}$ et $\mathcal{U}_{l,m}$ désignent les profils radiaux associés à chaque $Y_{l,m}$. Le déplacement peut être écrit comme la somme d'une composante radiale $\xi_{r;l,m}$ et d'une composante horizontale $\xi_{\perp,l,m}$,

$$\boldsymbol{\xi}\left(\mathbf{r}\right)=\sum_{l,m}\xi_{r;l,m}\left(r\right)Y_{l,m}\frac{\mathbf{r}}{r}+r\xi_{\perp;l,m}\left(r\right)\boldsymbol{\nabla}Y_{l,m}.\tag{2.15}$$

Notons g la gravité à la surface ($r=R$). En supposant le déplacement de la surface et la redistribution de masse proportionnelles au potentiel de marée, Love (1911) définit les constantes réelles positives $h_{r;l}$, $h_{\perp;l}$ et k_{l}, communément appelées nombres de Love, par les relations

$$\xi_{r;l,m}(R) = h_{r;l}\frac{U_{l,m}(R)}{g}, \quad \xi_{\perp;l,m}(R) = h_{\perp;l}\frac{U_{l,m}(R)}{g}, \quad \mathcal{U}_{l,m}(R) = k_l U_{l,m}(R). \tag{2.16}$$

Le cas idéalisé d'une planète sphérique homogène, incompressible et purement élastique de densité ρ est traité par Love (1927). Ces travaux utilisent la loi de Hooke, qui exprime le tenseur des contraintes à l'intérieur du corps, noté $\mathbf{\Sigma}$, en fonction du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ suivant la relation

$$\mathbf{\Sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) I, \tag{2.17}$$

où μ et λ sont les *coefficients de Lamé* du matériaux composant la planète, tr désigne la trace d'une matrice et I la matrice identité. Les nombres de Love de la planète s'écrivent

$$h_{r;l} = \frac{2l+1}{2(l-1)(1+\mu_l)}, \quad h_{\perp;l} = \frac{3}{2l(l-1)(1+\mu_l)}, \quad k_l = \frac{3}{2(l-1)(2+\mu_l)}, \tag{2.18}$$

avec μ_l la rigidité effective associée au mode d'ordre l et définie par

$$\mu_l = \mu\frac{2l^2+4l+3}{l\rho g R}. \tag{2.19}$$

Les nombres de Love tels qu'ils ont été introduits originellement traduisent la déformation volumique d'un corps solide sous l'effet d'un potentiel de marée gravitationnel. Ce formalisme peut aisément être généralisé à d'autres types de forçage. Ainsi, les nombres de Love de pression $\bar{h}_{r;l}$, $\bar{h}_{\perp;l}$ et $\bar{k}_l$ décrivant le déplacement d'une surface sous l'effet d'une distribution de pression de la forme

$$p = \sum_{l,m} p_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi), \tag{2.20}$$

sont définis par les relations (e.g. Farrell, 1972)

$$\xi_{r;l,m}(R) = \bar{h}_{r;l}\frac{p_{l,m}}{g\rho}, \quad \xi_{\perp;l,m}(R) = \bar{h}_{\perp;l}\frac{p_{l,m}}{g\rho}, \quad \mathcal{U}_{l,m}(R) = \bar{k}_l\frac{p_{l,m}}{\rho}, \tag{2.21}$$

Une redistribution de masse dans l'atmosphère ou l'océan d'une planète soumet cette dernière à la fois à un forçage gravifique interne et à un forçage de surface. Les nombres de Love de charge qui en résultent, notés $\tilde{h}_{r;l}$, $\tilde{h}_{\perp;l}$ et k_l, sont donc une combinaison linéaire des nombres de Love de volume et de pression,

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_{r;l} \\ \tilde{h}_{\perp;l} \\ \tilde{k}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{r;l} \\ h_{\perp;l} \\ k_l \end{bmatrix} + \frac{2l+1}{3}\begin{bmatrix} \bar{h}_{r;l} \\ \bar{h}_{\perp;l} \\ \bar{k}_l \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Dans la modélisation des effets de marées, on utilise préférentiellement les nombres de Love associés à la variation de potentiel à la surface (k_l), en particulier le nombre de Love de degré 2 k_2 traduisant la déformation quadripolaire du corps. Ce paramètre varie entre 0.05 et 0.9 (cas de la Terre) pour les planètes et les satellites telluriques du système Solaire (MacDonald, 1964) et les planètes géantes (Kramm et al., 2012; Ogilvie, 2014). Il est intrinsèque au corps perturbé tant que le forçage reste uniquement gravifique. Dès lors qu'un forçage thermique entre en jeu, le nombre de Love tel qu'il est défini en (2.16) se met à dépendre des propriétés du perturbateur (intensité et spectre en longueur d'onde du flux lumineux reçu).

Ce cas est typique des marées thermiques atmosphériques, pour lesquelles l'effet du potentiel générateur de marée est négligeable devant celui du forçage thermique. On remarque aussi que l'extension de la définition des nombres de Love aux couches atmosphériques n'est pas aussi évidente qu'elle peut le paraître au premier abord. En effet, une atmosphère, contrairement à un corps solide, ne présente pas à proprement parler de surface externe. Elle peut ainsi être décrite par une distribution spatiale de densité dont les limites ne sont pas toujours bien déterminées. Par exemple, dans le cas idéalisé de l'atmosphère mince isotherme, le profil de densité décroît exponentiellement avec l'altitude (cf. Chapitre 3). Dès lors, il est nécessaire d'introduire une altitude caractéristique arbitraire représentant l'équivalent de la surface solide à $r = R$ dans la définition des nombres de Love (Eq. 2.16). On aurait intuitivement tendance à associer cette surface à la zone où l'atmosphère devient opaque dans le visible. Cette définition convient bien aux enveloppes de géantes gazeuses et à Vénus, dont les épaisseurs optiques sont importantes. En revanche, elle ne s'applique pas à la Terre. Ainsi, nous fixerons plutôt l'altitude de la surface externe de sorte à ce que la fraction de masse de l'atmosphère exclue soit négligeable devant la fraction inclue (pour une atmosphère mince isotherme, l'intervalle d'altitudes entre le sol et trois hauteurs de pression [5] contient 95 % de la couche en masse).

Une fois la déformation quantifiée, il faut s'intéresser aux mécanismes à l'origine de l'évolution séculaire des systèmes et à la dissipation associée.

2.3.2 Facteur de qualité Q

Afin de quantifier la dissipation interne appliquée aux marées, Goldreich (1963) a introduit le facteur de qualité Q (voir aussi MacDonald, 1964; Goldreich & Soter, 1966). Ce paramètre mesure le rapport entre le maximum d'énergie stockée dans la réponse de marée du corps perturbé E_0 et l'énergie interne dissipée E sur un cycle (une période orbitale du perturbateur, notée $t_{\rm cycle}$, dans le référentiel en co-rotation avec le corps), soit par définition (Goldreich & Soter, 1966) :

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi E_0} \oint_{t_{\rm cycle}} \left(-\frac{dE}{dt} \right) dt. \tag{2.23}$$

Le facteur Q est l'analogue du facteur de qualité d'un oscillateur harmonique en régime forcé. Il est donc inversement proportionnel à la puissance dissipée. En l'absence de dissipation, $Q \to +\infty$, le corps perturbé se comporte comme un oscillateur non-amorti. Ceci correspond pour les solides à une déformation purement élastique et pour les fluides à une dynamique de fluide parfait. Quand la dissipation l'emporte sur la dynamique, on se retrouve dans le régime asymptotique opposé, $Q \to 0$.

Le facteur de qualité d'une couche planétaire dépend de sa physique interne et varie avec la fréquence d'excitation. La réponse en fréquence des solides est régulière et suit généralement, lorsque la fréquence de marée est suffisamment grande, une loi de puissance du type $Q \propto \sigma^{\alpha}$ où α est un paramètre rhéologique, comme l'a démontré expérimentalement Andrade (1910). La dissipation de marée dans les fluides est résonante (cf. Fig. 2.3) étant donné qu'elle résulte directement de la dynamique des ondes internes (Ogilvie & Lin, 2004; Auclair Desrotour et al., 2015) [6]. En conséquence, le facteur de qualité des couches fluides dépend fortement de la fréquence d'excitation.

Dans l'approche de MacDonald (1964) et Goldreich & Soter (1966), la planète déformée par les effets de marée s'apparente à un ellipsoïde en déphasage angulaire par rapport à la direction du perturbateur (voir Fig. 2.2). Le facteur Q s'exprime alors comme une fonction de l'angle de retard angulaire δ,

5. La hauteur de pression est définie au Chapitre 3 par (3.10).

6. La puissance dissipée dans un volume de fluide $\mathscr{V}$ par friction visqueuse $D^{\rm visc}$ a pour expression $D^{\rm visc} = \int_{\mathscr{V}} \rho \left(\nu \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 \right) d\mathscr{V}$ où $\mathbf{u}$ désigne le champ de vitesse des ondes de marée, ρ la densité du fluide et ν sa viscosité. La dissipation par diffusion thermique dépend quant à elle des fluctuations de flottabilité b et s'écrit $D^{\rm therm} = \int_{\mathscr{V}} \rho \left(\kappa N^{-2} b \nabla^2 b \right) d\mathscr{V}$ si $N^2 \neq 0$ (si $N^2 = 0$, $D^{\rm therm} = 0$) où N est la fréquence de Brunt-Väisälä définie par (3.13).

$$Q^{-1} = \tan(2\delta)\,. \tag{2.24}$$

Le facteur Q^{-1} est un déphasage angulaire se réduisant à $Q^{-1} \approx 2\delta$ dans le cas quasi-adiabatique (aussi appelé *weak friction ; e.g.* Alexander, 1973; Hut, 1981). Il comprend implicitement la dépendance en m de la redistribution de masse, absente des nombres de Love[7]. On identifie aussi dans le facteur de qualité le retard temporel de la réponse $\tau = Q^{-1}|\sigma|^{-1}$. Comme on le voit, le formalisme de la dissipation de marée tel qu'il a été initialement posé dans l'approche linéaire élastique distingue clairement les nombres de Love k_l, qui correspondent à l'amplitude de la réponse adiabatique, et le facteur de qualité associé au déphasage de la réponse réelle, le produit $k_l Q^{-1}$ quantifiant l'impact de la dissipation sur le système planétaire. En réalité, les deux paramètres ne sont généralement pas dissociables l'un de l'autre étant donné que les corps ne se réduisent pas à de simples oscillateurs harmoniques. La mesure des variations séculaires des paramètres orbitaux d'un système (par exemple l'éloignement de la Lune dans le cas du système Terre-Lune) ne donne accès qu'au produit $k_l Q^{-1}$ qui représente une estimation globale de la redistribution de masse et de l'énergie interne dissipée par la marée. Cette quantité correspond comme on va le voir dans la suite à la partie imaginaire du nombre de Love complexe de la composante de nombres d'onde l et m.

2.3.3 Nombres de Love complexes

Afin de généraliser le formalisme des nombres de Love élastiques (Eq. 2.16) à tout type de corps, on introduit les nombres de Loves complexes, dont la partie imaginaire représente la composante inélastique de la déformation et donc la dissipation. Les nombres de Love complexes constituent ainsi les fonctions de transfert globales de l'objet perturbé pour les différentes composantes de la marée dans l'approche linéaire. Leur partie imaginaire évalue directement la dissipation interne d'énergie ainsi que le couple de marée exercé sur le corps. En effet, comme le montre Ogilvie (2013) (voir aussi Henning et al., 2009), la puissance dissipée D et le couple $\mathcal{T}$ résultant d'une composante d'amplitude $\mathcal{A}$ et de fréquence σ de l'excitation, donnée par $\Re\left\{\mathcal{A}\,(r/R)^l\,Y_l^m(\theta,\varphi)\,e^{-i\sigma t}\right\}$, s'écrivent $D = \sigma\mathfrak{T}$ et $\mathcal{T} = m\mathfrak{T}$, avec

$$\mathfrak{T} = \frac{(2l+1)\,R\,|\mathcal{A}|^2}{8\pi\mathscr{G}}\,\Im\left\{k_l^m(\sigma)\right\}. \tag{2.25}$$

Les nombres de Love complexes, les nombres de Love réels et le facteur de qualité vérifient la relation (e.g. Ogilvie, 2014)

$$\Im\left\{k_l^m(\sigma)\right\} = -\mathrm{sign}(\sigma)\,\frac{k_l(\sigma)}{Q_l^m(\sigma)}. \tag{2.26}$$

où $Q_l^m(\sigma)$ est le facteur de qualité associé au mode (l,m).

2.3.4 Implications sur l'évolution des systèmes planétaires

Les taux de variation temporels des paramètres orbitaux du système dynamique perturbé par les effets de marée s'expriment en fonction des facteurs $k_l^{\mathrm{A}} Q^{-1}$ (Eq. 2.26) associés aux différentes fréquences de la perturbation. Ces équations ont été établies dans le cas le plus général pour les forçages de marées gravifiques (Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009) à partir du développement multipolaire du potentiel de marée

7. Une autre paramétrisation commode consiste à utiliser au lieu de k_l le nombre de Love caractérisant la réponse hydrostatique du corps homogène $k_l^{\mathrm{hom}} = 3/[2(l-1)]$ (avec $l \geq 2$) (e.g. Kopal, 1978; Ogilvie, 2014). Le nouveau facteur de qualité $\hat{Q}$ est tel que $k_l Q^{-1} = k_l^{\mathrm{hom}} \hat{Q}^{-1}$.

fourni par Kaula (1961). Remus et al. (2012b) les donne dans le cas d'une perturbation quadripolaire ($l = 2$) où le perturbateur est considéré comme ponctuel. D'après Remus et al. (2012b), les taux de variations du moment cinétique $L_\mathrm{A} = \mathcal{I}_\mathcal{A}\Omega_\mathrm{A}$, où $\mathcal{I}_\mathrm{A}$ désigne le moment d'inertie du corps suivant son axe de rotation propre, de l'obliquité (ε_A), du demi-grand axe (a), de l'excentricité (e_B) et de l'inclinaison (I_B) s'écrivent respectivement (voir aussi Correia, 2001)

$$\frac{dL_\mathrm{A}}{dt} = -\frac{8\pi}{5}\frac{\mathscr{G}M_\mathrm{B}^2R^2}{a^6}\sum_{m,j,p,q}\left\{\frac{k_2^\mathrm{A}\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}{Q\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}\left[\mathscr{H}_{2,m,j,p,q}\left(e_\mathrm{B},I_\mathrm{B},\varepsilon_\mathrm{A}\right)\right]^2\right\}, \tag{2.27}$$

$$L_\mathrm{A}\frac{d\left(\cos\varepsilon_\mathrm{A}\right)}{dt} = \frac{4\pi}{5}\frac{\mathscr{G}M_\mathrm{B}^2R^2}{a^6}\sum_{m,j,p,q}\left\{\left(j+2\cos\varepsilon_\mathrm{A}\right)\frac{k_2^\mathrm{A}\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}{Q\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}\left[\mathscr{H}_{2,m,j,p,q}\left(e_\mathrm{B},I_\mathrm{B},\varepsilon_\mathrm{A}\right)\right]^2\right\}, \tag{2.28}$$

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = -\frac{2}{n_\mathrm{B}}\frac{4\pi}{5}\frac{\mathscr{G}M_\mathrm{B}^2R^5}{a^8}\sum_{m,j,p,q}\left\{\left(2-2p+q\right)\frac{k_2^\mathrm{A}\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}{Q\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}\left[\mathscr{H}_{2,m,j,p,q}\left(e_\mathrm{B},I_\mathrm{B},\varepsilon_\mathrm{A}\right)\right]^2\right\}, \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{e_\mathrm{B}}\frac{de_\mathrm{B}}{dt} = & -\frac{1}{n_\mathrm{B}}\frac{1-e_\mathrm{B}^2}{e_\mathrm{B}^2}\frac{4\pi}{5}\frac{\mathscr{G}M_\mathrm{B}^2R^5}{a^8}\\ & \times\sum_{m,j,p,q}\left\{\left[\left(2-2p\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-e_\mathrm{B}^2}}\right)+q\right]\frac{k_2^\mathrm{A}\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}{Q\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}\left[\mathscr{H}_{2,m,j,p,q}\left(e_\mathrm{B},I_\mathrm{B},\varepsilon_\mathrm{A}\right)\right]^2\right\},\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\cos I_\mathrm{B}\right)}{dt} = & \frac{1}{n_\mathrm{B}}\frac{1}{\sqrt{1-e_\mathrm{B}^2}}\frac{4\pi}{5}\frac{\mathscr{G}M_\mathrm{B}^2R^5}{a^8}\\ & \times\sum_{m,j,p,q}\left\{\left[j+\left(2q-2\right)\cos I_\mathrm{B}\right]\frac{k_2^\mathrm{A}\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}{Q\left(\sigma_{2,m,p,q}\right)}\left[\mathscr{H}_{2,m,j,p,q}\left(e_\mathrm{B},I_\mathrm{B},\varepsilon_\mathrm{A}\right)\right]^2\right\},\end{aligned} \tag{2.31}$$

avec la fonction des paramètres orbitaux

$$\mathscr{H}_{2,m,j,p,q}\left(e_\mathrm{B},I_\mathrm{B},\varepsilon_\mathrm{A}\right)\sqrt{\frac{5}{4\pi}\frac{\left(2-|j|\right)!}{\left(2+|j|\right)!}}d_{j,m}^2\left(\varepsilon_\mathrm{A}\right)F_{2,j,p}\left(I_\mathrm{A}\right)G_{2,p,q}\left(e_\mathrm{B}\right). \tag{2.32}$$

La variation en temps de l'inclinaison (Eq. 2.31) est négligeable. De plus, l'expression de $\sigma_{l,m,p,q}$ donnée plus haut se met sous la forme $\sigma_{l,m,s} = m\Omega_\mathrm{A} - s\,n_\mathrm{B}$ avec $s = l-2p+q$. Posons $\kappa_{l,m,s} = \Im\left\{k_{l,m}\left(\sigma_{l,m,s}\right)\right\}$. A faible excentricité et en supposant que le moment d'inertie du corps perturbé ne varie pas, les équations (2.27) à (2.30) se réduisent simplement à celles données par (Ogilvie, 2014)

$$\frac{1}{\Omega_\mathrm{A}}\frac{d\Omega_\mathrm{A}}{dt} = \frac{3}{2}\kappa_{2,2,2}\frac{L_o}{L_\mathrm{A}}\frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}}\left(\frac{R}{a}\right)^5 n_\mathrm{B}, \tag{2.33}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_\mathrm{A}}\frac{d\varepsilon_\mathrm{A}}{dt} = \frac{3}{4}\left[\kappa_{2,2,2}\left(1-\frac{L_o}{L_\mathrm{A}}\right)+\left(\kappa_{2,1,0}-\kappa_{2,1,2}\right)\left(1+\frac{L_o}{L_\mathrm{A}}\right)\right]\frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}}\left(\frac{R}{a}\right)^5 n_\mathrm{B}, \tag{2.34}$$

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = -3\kappa_{2,2,2}\frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}}\left(\frac{R}{a}\right)^5 n_\mathrm{B}, \tag{2.35}$$

$$\frac{1}{e_{\mathrm{B}}}\frac{de_{\mathrm{B}}}{dt} = \frac{3}{16}\left(4\kappa_{2,2,2} - 6\kappa_{2,0,1} + \kappa_{2,2,1} - 49\kappa_{2,2,3}\right)\frac{M_{\mathrm{B}}}{M_{\mathrm{A}}}\left(\frac{R}{a}\right)^5 n_{\mathrm{B}}, \tag{2.36}$$

où le rapport entre les moments cinétiques du corps A (L_{A}) et de l'orbite L_o s'exprime

$$\frac{L_o}{L_{\mathrm{A}}} = \frac{\mathscr{G} M_{\mathrm{A}} M_{\mathrm{B}} \left(1 - e_{\mathrm{B}}^2\right)^{1/2}}{\mathcal{I}_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}} n_{\mathrm{B}} a}. \tag{2.37}$$

Une rapide analyse des signes dans les seconds membres de ces équations nous renseigne sur le sens d'évolution du système sous l'effet des marées gravifiques (avec $\mathrm{sign}\left(\Im\left\{k_{l,m}\right\}\right) = -\mathrm{sign}\left(\sigma\right)$, donné par la relation 2.26). La perturbation tend à synchroniser la rotation du corps avec le perturbateur (Eq. 2.33 avec $\sigma = 2\left(\Omega_{\mathrm{A}} - n_{\mathrm{B}}\right)$). Elle rapproche ($\sigma < 0$) ou éloigne ($\sigma > 0$) les deux objets (Eq. 2.35). Les évolutions de l'obliquité et de l'excentricité sont plus complexes à étudier car elles dépendent des importances relatives de plusieurs composantes de la réponse (Eqs 2.34 et 2.36).

Les équations de la dynamique (2.27) à (2.31) ont été établies pour les marées gravifiques à partir de la théorie de Kaula. Comme les développements du potentiel de marée gravifique et de la puissance thermique absorbée diffèrent, elles ne s'appliquent pas aux marées thermiques atmosphériques dans le cas général. L'extension du formalisme de Kaula à des forçages thermiques quelconques soulève des difficultés techniques que nous ne chercherons pas à traiter dans le cadre de cette étude (elle a néanmoins été réalisée dans un cadre simplifié par Correia et al., 2003). Nous restreindrons donc le problème aux orbites circulaires pour lesquelles les développements de U et J sont données par (2.3) et (2.12).

2.4 Modèles classiques

Les effets de marées dans les solides et les fluides constituent un phénomène complexe à la fois dépendant de la structure interne des corps et de leur rhéologie. Les moyens de calcul restent encore aujourd'hui très insuffisants pour permettre de simuler simultanément la réponse tridimensionnelle des corps sur des échelles de temps dynamiques et l'évolution de leur rotation et de leur orbite sur des échelles de temps séculaires. On a donc souvent recours à des modélisations analytiques simplifiées.

2.4.1 Modèle à retard géométrique constant

La modélisation la plus élémentaire est celle proposée par Kaula (1964). Cette approche dite *à retard géométrique constant* revient à ajouter un déphasage angulaire invariant en temps à chacune des composantes fréquentielles de la réponse. L'hypothèse qui sous-tend ce modèle est que la réponse du corps perturbé à une composante du forçage est une déformation indépendante du reste de la perturbation et caractérisée par un retard angulaire qui lui est propre. Il en résulte un facteur de qualité constant dont les valeurs sont comprises entre 10 et 150 pour les planètes telluriques et les satellites de planètes géantes du système solaire (Goldreich & Soter, 1966). Dans cette approche, la dissipation n'affecte pas l'amplitude de la réponse, seulement son déphasage. Certains travaux (e.g. les études de référence de MacDonald, 1964; Goldreich & Soter, 1966) simplifient le modèle en considérant que le retard angulaire est le même pour toutes les composantes de la marée. L'élongation prend alors la forme d'un bourrelet unique. La prescription de Kaula (1964) a rencontré un grand succès, notamment parce qu'elle permet d'intégrer analytiquement l'évolution temporelle des paramètres orbitaux (Eqs. 2.27 à 2.31). Par exemple, avec les notations introduites plus haut, l'évolution du demi-grand axe d'un système planète-satellite est décrite par l'équation (Kaula, 1964, p. 677, Eq. 41)

$$\frac{da}{dt} = 3\,\mathrm{sign}\left(\Omega_\mathrm{A} - n_\mathrm{B}\right) \frac{R^5 \mathscr{G} M_\mathrm{B}}{\sqrt{\mathscr{G}\left(M_\mathrm{A} + M_\mathrm{B}\right)}} \frac{k_2^\mathrm{A}}{Q} a^{-11/2}. \tag{2.38}$$

Supposons que le mouvement du satellite s'effectue à l'intérieur de l'orbite synchrone ($\Omega_\mathrm{A} = n_\mathrm{B}$), ce qui correspond à une chute du corps vers la planète. Il vient (e.g. Efroimsky & Lainey, 2007; Auclair-Desrotour et al., 2014)

$$a\left(t\right) = \left(a_0^{13/2} - \frac{39}{2} \frac{R^5 \mathscr{G} M_\mathrm{B}}{\sqrt{\mathscr{G}\left(M_\mathrm{A} + M_\mathrm{B}\right)}} \frac{k_2^\mathrm{A}}{Q} t\right)^{\frac{2}{13}}, \tag{2.39}$$

le paramètre $a_0 = a\left(t = 0\right)$ désignant la valeur initiale du demi-grand axe. Le modèle à retard géométrique constant présente cependant un défaut majeur : il est discontinu aux points de changement de signe des fréquences de forçages. Pour illustration, considérons le taux de variation de la vitesse angulaire de rotation propre dans ce modèle. D'après (2.33),

$$\frac{d\Omega_\mathrm{A}}{dt} = -\mathrm{sign}\left(\Omega_\mathrm{A} - n_\mathrm{B}\right) \frac{3}{2} \frac{\mathscr{G} M_\mathrm{B}^2 R^5}{\mathcal{I}_\mathrm{A}} \frac{k_2^\mathrm{A}}{Q} a^{-6}. \tag{2.40}$$

Sur le plan pratique, le fait que l'accélération du spin passe d'une valeur à son opposée à la synchronisation spin-orbite est source d'instabilités dans l'intégration numérique de l'évolution du système. En outre, la dissipation de marée étant nulle lorsque $\sigma = 0$, le facteur k_2^A/Q doit logiquement tendre vers zéro dans un voisinage suffisamment proche de la synchronisation. Le comportement décrit par le modèle à retard géométrique constant n'est donc pas physiquement réaliste dans cette zone.

2.4.2 Modèle à retard temporel constant

Le modèle *à retard temporel constant* (Jeffreys, 1961; Singer, 1968; Mignard, 1979, 1980; Hut, 1981) est une approche alternative qui corrige le défaut du modèle à retard angulaire constant à la synchronisation en considérant que le déphasage du bourrelet de marée est proportionnel à la fréquence d'excitation. L'angle de retard géométrique δ introduit en (2.24) s'écrit comme le produit de la fréquence de marée et d'un temps de relaxation constant Δt (Efroimsky & Lainey, 2007; Efroimsky & Makarov, 2013),

$$\delta = \frac{1}{2} \Delta t\, \sigma. \tag{2.41}$$

Le paramètre Δt est relatif à la structure interne du corps et à ses propriétés dissipatives. Il caractérise sa réponse linéaire dans l'approximation visco-élastique. Dans le système solaire, ce paramètre est généralement assez petit pour satisfaire la condition $\delta \ll 1$ (Correia et al., 2003). Il vaut par exemple pour la Terre $\Delta t \approx 638$ s (Mignard, 1979; Néron de Surgy & Laskar, 1997), ce qui pour une fréquence d'excitation $\sigma \approx 7.29 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$ donne $\sigma \Delta t \approx 0.05$. S'il régularise la réponse du corps perturbé au voisinage du point où la fréquence de marée s'annule, le modèle à retard temporel constant diverge dans les hautes fréquences et ne correspond donc plus à un comportement physique réaliste.

2.4.3 Modèles d'oscillateurs visco-élastiques

L'oscillateur amorti est le modèle physique générique le plus simple qui soit à la fois régulier dans les basses fréquences et non-divergent dans les hautes fréquences. Il est pour cette raison largement utilisé

dans la littérature pour prendre en compte les effets de marées des corps dont la structure et la physique interne sont peu connus (Correia et al., 2014). Dans cette approche, le corps est assimilé à un système composé de deux éléments, un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient d'amortissement linéaire η. Son inertie est représentée par une masse m pouvant se déplacer suivant l'axe horizontal et dont la position est repérée par la coordonnée x. Ainsi, pour un déplacement quelconque x, le ressort et l'amortisseur exercent respectivement les forces de rappel $F_{\mathrm{R}} = -Kx$ et $F_{\mathrm{A}} = -\eta\, dx/dt$. Les deux éléments peuvent être placés en parallèle ou en série (Fig. 2.7). Ces montages correspondent pour le premier au *système de Kelvin-Voigt* et pour le second au *système de Maxwell* (e.g. Greenberg, 2009; Correia et al., 2014), dans lesquels la dynamique de la masse en l'absence de forçage est décrite par les équations différentielles respectives

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \eta\frac{dx}{dt} + Kx = 0 \quad \text{et} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Km}{\eta}\frac{dx}{dt} + Kx = 0. \tag{2.42}$$

Lorsque l'on ajoute un forçage périodique en temps, d'amplitude D et de fréquence σ (avec $\sigma \geq 0$), ces deux équations du second ordre se mettent sous la forme classique

$$\frac{d^2x}{dt^2} + V\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = D\cos(\sigma t) \tag{2.43}$$

où V désigne le taux d'amortissement et ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur. La solution ondulatoire de l'équation, d'amplitude A et de déphasage angulaire ε, a pour expression

$$x(t) = A\cos(\sigma t - \varepsilon) \quad \text{avec} \quad A = D\left[\left(\omega_0^2 - \sigma^2\right)^2 + V^2\sigma^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \tan\varepsilon = \frac{V\sigma}{\omega_0^2 - \sigma^2}. \tag{2.44}$$

On identifie ici le temps de relaxation caractéristique du système $\tau_{\mathrm{M}} = V/\left(\omega_0^2 - \sigma^2\right)$, aussi appelé *temps de Maxwell*. L'analogie entre le comportement des corps soumis aux effets de marée et l'oscillateur forcé est aux fondements de l'introduction du facteur de qualité Q. Les modèles de Voigt-Kelvin et de Maxwell permettent de déterminer une expression analytique simple de ce facteur. En effet, le maximum d'énergie emmagasinée par le ressort (E_0) et l'énergie perdue durant un cycle (dE/dt) intervenant dans (2.23) sont données respectivement par

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega_0^2 A^2 \quad \text{et} \quad \oint_{t_{\mathrm{cycle}}} \left(-\frac{dE}{dt}\right) dt = \pi\frac{D^2 V\sigma}{\left(\omega_0^2 - \sigma^2\right)^2} \tag{2.45}$$

Le facteur Q^{-1} s'exprime ainsi

$$Q^{-1} = \frac{V\sigma}{\omega_0^2\left(\omega_0^2 - \sigma^2\right)^2}\left[\left(\omega_0^2 - \sigma^2\right)^2 + V^2\sigma^2\right], \tag{2.46}$$

et l'on retrouve la relation avec le déphasage $Q^{-1} = \tan\varepsilon$ donnée par (2.24) en se plaçant dans le cas quasi-adiabatique non-résonant, où $\sigma \ll \omega_0$ et $V\sigma \ll \omega_0^2 - \sigma^2$. Dans le régime des basses fréquences ($\sigma \ll \omega_0$), le modèle de l'oscillateur visco-élastique est équivalent au modèle à retard temporel constant. Il est toutefois important de noter que le temps caractéristique de l'oscillateur $\tau_0 = 1/\omega_0$ diffère du temps de relaxation Δt de l'autre approche. Les deux temps sont liés par la relation $\Delta t = V\tau_0^2$. Nous utiliserons le modèle de Maxwell au Chapitre 5 pour exprimer le couple de marée exercé sur la partie solide d'une planète.

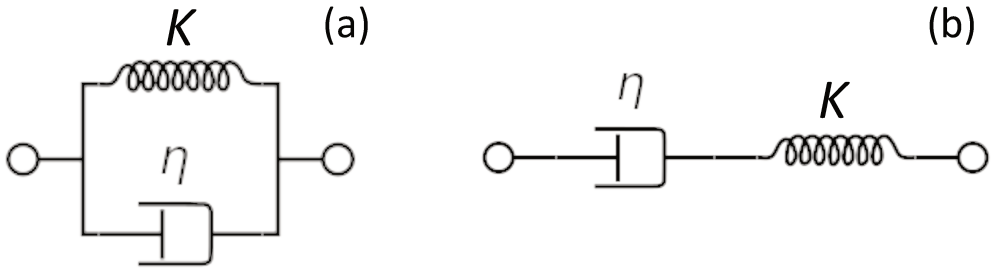


FIGURE 2.7: Systèmes de Kelvin-Voigt (a) et de Maxwell (b). Le ressort est caractérisé par sa raideur K et l'amortisseur par le coefficient d'amortissement linéaire η.

2.5 Conclusion

L'introduction des effets de marée et de leur dissipation dans l'étude des systèmes planétaires fait intervenir des quantités très générales caractérisant la réponse des corps à la perturbation. Les nombres de Love adiabatiques définis à l'origine pour les corps solides correspondent à l'amplitude des élongations dues aux différentes composantes de la perturbation et le facteur de qualité traduit l'intensité de la dissipation interne. Ces deux grandeurs sont intrinsèquement prises en compte simultanément dans les nombres de Love complexes, qui représentent l'impédance de marée du corps, que ce dernier soit solide ou fluide. Les taux de variations séculaires des paramètres orbitaux et des spins des corps s'écrivent comme des combinaisons linéaires des parties imaginaires des nombres de Love associés aux différentes composantes de la réponse. Cependant, la complexité de l'absorption du rayonnement stellaire par l'atmosphère d'une planète, qui entre autres ne présente pas la même dépendance à la distance étoile-planète que le potentiel générateur de marée, constitue un obstacle majeur au développement du forçage thermique sous une forme similaire à l'expansion multipolaire usuelle du forçage gravifique (Kaula, 1961). Le traitement analytique requiert donc de se placer pour les marées thermiques dans le cas simplifié où la planète effectue une orbite circulaire autour de son étoile hôte, ce que nous ferons systématiquement dans la suite. A la différence de son homologue gravifique, le nombre de Love incluant la marée thermique dépend des caractéristiques de l'ensemble du système étoile-planète. Il est de plus relatif à la dynamique de l'atmosphère. L'approche *ab initio* présente ici un intérêt capital dans la mesure où elle permet de mieux comprendre ces caractéristiques et de disposer de prescriptions physiques allant au delà des modélisations simplifiées utilisées en première approximation (e.g. les modèles de Kaula, à retard temporel constant, de Maxwell).

CHAPITRE 3

MARÉES ATMOSPHÉRIQUES TERRESTRES

Sommaire

3.1 Introduction 32
3.2 Description du système physique et paramétrisation 33
3.3 Structure de l'atmosphère à l'équilibre 34
3.4 Les grandes familles d'ondes de marée 37
3.5 Structure des ondes de marée 39
3.5.1 Equations primitives et approximations 39
3.5.2 Equation de Laplace et fonctions de Hough 41
3.5.3 Structure verticale des ondes 46
3.6 Réponse de l'atmosphère à un profil de forçage constant 48
3.6.1 Conditions aux limites 48
3.6.2 Résolution de l'équation des ondes 49
3.6.3 La marée solaire semi-diurne dans le cas de la Terre 51
3.7 Limites du modèle dans l'étude de Vénus et des exoplanètes 53
3.8 Conclusion 57

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation des marées atmosphériques terrestres en nous appuyant largement sur CL70 (Chapman & Lindzen, 1970). Nous introduisons dans un premier temps la paramétrisation du système. Dans un second temps, nous examinons le détail ses aspects physiques. Ceci nous amène à définir les hypothèses du modèle et à introduire les grandes familles d'ondes de marée identifiées pour finalement caractériser leur structure. Nous concluons ce premier chapitre sur les marées atmosphériques par l'étude de la réponse de l'atmosphère terrestre à une perturbation de marée solaire semi-diurne. Ce cas simplifié, pour lequel nous résolvons analytiquement les équations décrivant la structure des ondes de marées, nous permet de mettre en exergue la force de la modélisation des marées atmosphériques dans le cas de la Terre, qui apporte une compréhension détaillée de la physique du phénomène, et tout particulièrement la dynamique, en prédisant l'amplitude et le déphasage de la perturbation par rapport à la direction du perturbateur. Il nous révèle aussi les limites de cette approche, qui s'avère insuffisante pour traiter le cas de planètes soumises au forçage thermique de très basse fréquence typique du voisinage de la synchronisation spin-orbite à l'image de Vénus et des super-Terres dans la zone habitable des étoiles de faibles masses.

3.2 Description du système physique et paramétrisation

On s'intéresse à une planète tellurique semblable à la Terre et faisant partie d'un système planétaire quelconque. Cette planète est supposée sphérique, de rayon R, et recouverte d'une mince couche atmosphérique d'épaisseur caractéristique $H_{\mathrm{atm}} \ll R$ (cf. Fig. 3.1). Par rapport à un référentiel indépendant du temps (noté t) associé au système planétaire, $\mathscr{R}_{\mathrm{ref}}$, elle orbite autour de l'étoile hôte à la vitesse $\mathbf{V}_{\mathrm{orb}}$ et tourne sur elle-même à la vitesse angulaire Ω, le vecteur de spin correspondant étant désigné par $\mathbf{\Omega}$. Ceci nous amène à introduire le repère en co-rotation avec la planète, $\mathscr{R}_{\mathrm{E;T}} : \{\mathbf{O}, \mathbf{X}_{\mathrm{E}}, \mathbf{Y}_{\mathrm{E}}, \mathbf{Z}_{\mathrm{E}}\}$, où O est le centre du corps, $\mathbf{X}_{\mathrm{E}}$ et $\mathbf{Y}_{\mathrm{E}}$ définissent le plan équatorial et $\mathbf{Z}_{\mathrm{E}} = \mathbf{\Omega}/\,|\mathbf{\Omega}|$. Dans ce repère, la position d'un point M est définie par les coordonnées sphériques usuelles (r, θ, φ), $r = |\mathbf{OM}|$ désignant le rayon, θ la colatitude et φ la longitude. La base des vecteurs unités correspondante est notée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ et le vecteur position s'écrit $\mathbf{r} = r\ \mathbf{e}_r$. On introduit enfin l'altitude z, telle que $r = R + z$.

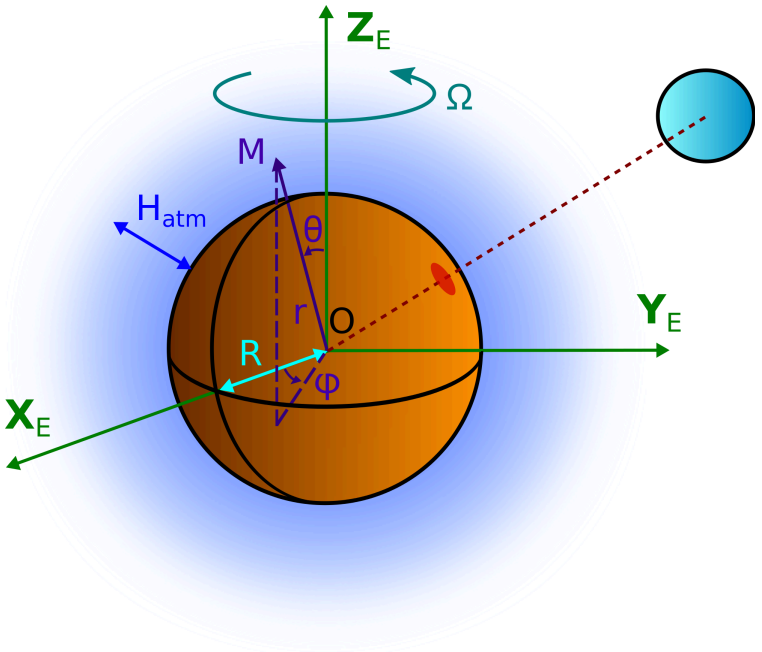


FIGURE 3.1: Coordonnées sphériques associées au référentiel équatorial en co-rotation avec la planète et paramètres physiques du système.

L'atmosphère est caractérisée par les champs de pression p, de masse volumique ρ, de température T et de vitesse $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. Chacune de ces variables, qui dépendent du temps et des coordonnées spatiales, peut être décomposée en deux termes : le premier, décrivant l'état d'équilibre, est identifié par l'indice $_0$; le second, associé à une perturbation quelconque, est identifiée par le préfixe δ (sauf pour la vitesse, notée simplement $\mathbf{V}$). On a ainsi :

$$p = p_0 + \delta p, \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad T = T_0 + \delta T, \quad \boldsymbol{\mathcal{V}} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}, \tag{3.1}$$

Enfin, à la vitesse du flot perturbé, $\mathbf{V}$, on associe le déplacement lagrangien $\boldsymbol{\xi}$, tel que $\mathbf{V} = \partial_t \boldsymbol{\xi} + (\mathbf{V}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V}_0$ où $\boldsymbol{\nabla}$ désigne le gradient.

3.3 Structure de l'atmosphère à l'équilibre

La structure de l'atmosphère, jusqu'à présent quelconque, doit maintenant être définie. Afin de simplifier le traitement analytique des ondes de marées, nous faisons les hypothèses suivantes :

- *Séparation des échelles de temps de la dynamique de l'atmosphère et de la marée*. Les distributions des quantités à l'équilibre p_0, ρ_0, T_0 et de la circulation générale $\mathbf{V}_0$ varient sur des échelles de temps beaucoup plus grandes que la période de forçage de marées. On considère ainsi qu'elles ne dépendent pas du temps. Cette approximation demeure appropriée tant que le temps d'ajustement dynamique et thermique de grande échelle excède la période de la perturbation. Elle peut cesser de l'être au voisinage de la synchronisation spin-orbite, où $\sigma \to 0$. Le deuxième cas limite de l'approximation est la convection. Dans une zone convective, la circulation générale s'organise en cellules dont les temps de retournement convectif peuvent être proches de la période de la perturbation. Les ondes de marée s'évanouissent alors en venant alimenter l'écoulement moyen.
- *Rotation solide*. L'atmosphère est supposée tourner avec la planète de façon uniforme, i.e. $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$. On ignore la rotation différentielle et les vents zonaux. Comme la réponse de l'atmosphère se réduit essentiellement à celle des couches proches du sol, typiquement la troposphère, l'hypothèse de rotation solide est valable en première approximation si ces couches sont entraînées à la même vitesse que la partie solide via un couplage visqueux (voir par exemple McCue et al., 1992). C'est le cas pour Vénus, dont la super-rotation atmosphérique n'affecte que les couches les plus élevées de l'atmosphère. Néanmoins, circulation générale a des répercussions sur la marée qui, en retour, contribue à l'alimenter (e.g. Lindzen & Hong, 1974; Fels & Lindzen, 1974; Lindzen, 1981). Elle devra donc à terme être introduite dans les modèles analytiques de marées atmosphériques.
- *Equilibre hydrostatique*. Les quantités scalaires p_0, ρ_0, T_0 s'ajustent sous l'effet de la gravité de manière à ce que la pression au sol soit égale au poids de la colonne d'air. Cette hypothèse cesserait d'être valide en cas de variation importante au cours du temps d'un courant ascendant ou descendant (composante verticale de $\mathbf{V}_0$).
- *Symétrie sphérique*. Les écarts de températures et de gravité entre les pôles et l'équateur de la planète sont négligés. On considère l'atmosphère stratifiée dans la direction radiale uniquement.
- *Fluctuations météorologiques ignorées*. Par rapport aux distributions d'équilibres et à la circulation générale, les fluctuations météorologiques constituent un bruit local de moyenne nulle sur les échelles de temps dynamiques (voir les relevés de pressions moyennés sur une année en Fig. 1.7), ce qui permet de les ignorer.
- *Approche perturbative*. La réponse du corps à un forçage de marée est considérée comme une petite perturbation dont les oscillations sont linéarisables au voisinage de l'équilibre. Les effets non-linéaires sont ignorés. Ainsi, on ne prend pas en compte les interactions entre ondes de marées.

Dans cette approche, les variations de pression δp, $\delta\rho$ et δT de la marée satisfont les inégalités

$$|\delta p(\mathbf{r},t)| \ll p_0(\mathbf{r}), \quad |\delta\rho(\mathbf{r},t)| \ll \rho_0(\mathbf{r}), \quad |\delta T(\mathbf{r},t)| \ll T_0(\mathbf{r}). \tag{3.2}$$

Déterminons la structure atmosphérique résultant des hypothèses énoncés ci-dessus. L'accélération de la pesanteur s'écrit $\mathbf{g} = -g(r)\,\mathbf{e}_r$ avec

$$g(r) = \frac{GM_\mathrm{P}}{r^2}, \tag{3.3}$$

où G désigne la constante universelle de gravité et M_P la masse la planète. Notons Δg la différence de pesanteur entre le sol et la limite supérieure de l'atmosphère. On obtient alors la différence relative

$$\frac{\Delta g}{g} \approx 2\frac{H_{\mathrm{atm}}}{R}. \tag{3.4}$$

Dans le cadre de l'approximation d'atmosphère fine, il est donc possible de négliger la variation de $\mathbf{g}$ avec l'altitude. Pour la Terre, cette variation est de l'ordre de 3 % (en prenant $H_{\mathrm{atm}} = 100$ km). En plus de l'accélération de la pesanteur, il est nécessaire de considérer l'accélération centrifuge $\mathbf{a}_{\mathrm{c}}$ résultant du mouvement de rotation propre de la planète, qui s'exprime

$$\mathbf{a}_{\mathrm{c}}\left(r,\theta\right) = r\sin\theta\Omega^2\left(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta\right). \tag{3.5}$$

Pour que la symétrie sphérique du champ de pesanteur dans le référentiel en rotation soit conservée, on doit avoir $|\mathbf{a}_{\mathrm{c}}| \ll |\mathbf{g}|$, ce qui se traduit par la condition

$$\Omega \ll \Omega_{\mathrm{c}}. \tag{3.6}$$

où $\Omega_{\mathrm{c}} = \sqrt{g/R}$ désigne la vitesse de rotation critique képlerienne, au delà de laquelle la gravité devient insuffisante pour que la planète conserve une couche atmosphérique. Pour une planète de type terrestre, cela suppose une vitesse angulaire très inférieure à 20 tours par jour. La Terre apparaît comme un rotateur assez rapide suivant cette condition.

On considère enfin l'atmosphère comme un gaz parfait homogène en composition, de masse molaire $\mathcal{M}$ et de constante spécifique $\mathcal{R}_{\mathrm{s}} = \mathcal{R}_{\mathrm{GP}}/\mathcal{M}$ où $\mathcal{R}_{\mathrm{GP}}$ est la constante des gaz parfaits. On a ainsi

$$p = \mathcal{R}_{\mathrm{s}}\rho T. \tag{3.7}$$

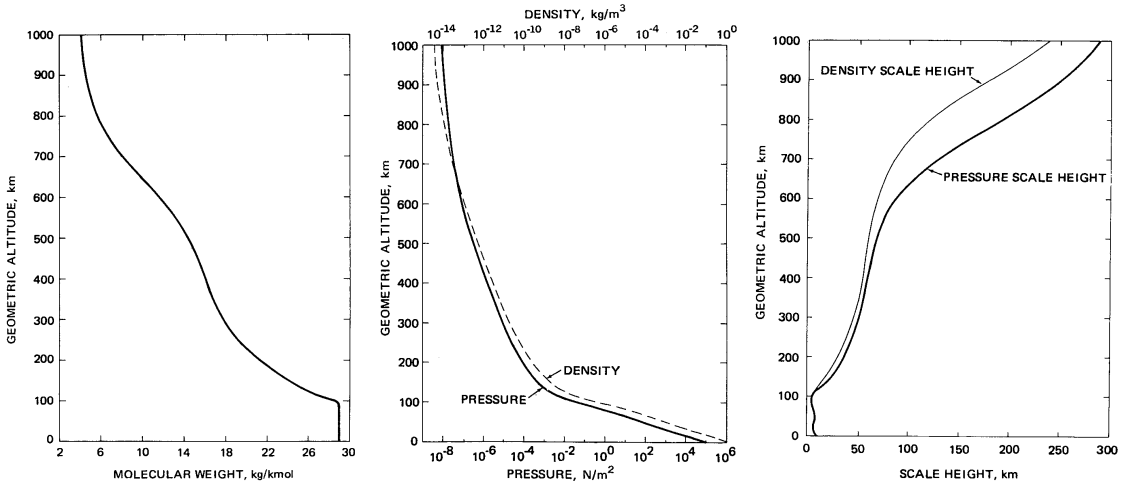


FIGURE 3.2: Profils verticaux de masse molaire (gauche, en $\mathrm{kg.kmol^{-1}}$), pression (milieu, en $\mathrm{N.m^{-2}}$) et de hauteur de pression (droite, en km) dans l'atmosphère terrestre. L'ordonnée correspond à l'altitude (km), les abscisses aux différentes quantités. D'après l'*US Standard Atmosphere* (NOAA et al., 1976).

Cette approximation est valable pour la Terre jusqu'à une altitude de 95 km (voir Fig. 3.2, panneau de gauche). Transposée à une exoplanète, cette altitude est amplement suffisante dans le cadre des problématiques astrophysiques énoncées plus haut, étant donné que les observables macroscopiques tels que le nombre de Love ou le couple de marée sont principalement déterminés par la réponse à la perturbation des

couches proches du sol. L'atmosphère vérifie l'équation de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles, d'où l'on déduit l'équilibre hydrostatique

$$\frac{dp_0}{dz} = -g\rho_0. \tag{3.8}$$

En exprimant ρ_0 à l'aide de l'équation des gaz parfaits, on obtient ainsi

$$\frac{d\ln(p_0)}{dz} = -\frac{g}{\mathcal{R}_\mathrm{s}T_0}, \tag{3.9}$$

ce qui permet d'identifier la *hauteur de pression* caractérisant la structure verticale de l'atmosphère,

$$H(z) = \frac{\mathcal{R}_\mathrm{s}T_0}{g}. \tag{3.10}$$

En introduisant l'altitude réduite

$$x = \int_0^z \frac{dz}{H} \tag{3.11}$$

on peut écrire les distributions de pression, masse volumique et température à l'équilibre

$$p_0(x) = p_0(0)\,e^{-x}, \quad \rho_0(x) = \frac{p_0}{gH}, \quad \text{et } T_0(x) = \frac{gH}{\mathcal{R}_\mathrm{s}}. \tag{3.12}$$

La hauteur de pression apparaît ainsi comme l'épaisseur caractéristique de l'atmosphère. Dans le cas de l'atmosphère isotherme, où H est constante, 95 % de la masse de la couche gazeuse est comprise entre le sol et l'altitude $x = 3$. On en déduit ainsi une estimation de l'altitude du bord supérieur de la coquille fluide, $H_\mathrm{atm} \approx 3H$. Une autre propriété remarquable du cas isotherme est qu'il permet de faire une analogie entre l'atmosphère et l'océan ainsi que l'avait remarqué Laplace, la hauteur H correspondant à la profondeur d'une couche homogène ayant la masse de l'atmosphère et de masse volumique $\rho_0(0)$.

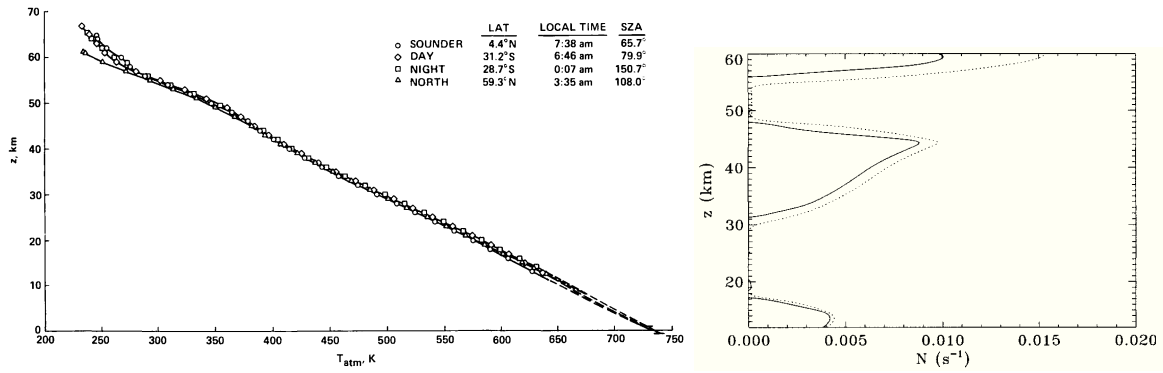


FIGURE 3.3: *Gauche* - Mesures de la température (axe horizontal, en K) en fonction de l'altitude (axe vertical, en km) réalisées par les quatre sondes *Pioneer Venus* en dessous d'une altitude de 65 km. L'abréviation SZA désigne l'angle solaire zénithal. Crédits Seiff et al. (1980). *Droite* - Moyenne en temps et suivant la direction horizontale de la fréquence de Brunt-Väisälä en fonction de l'altitude en l'absence de vent de cisaillement (trait continu), et profil de la fréquence de Brunt-Väisälä à l'équilibre hydrostatique (trait pointillé) pour Vénus. Résultats obtenus à l'aide d'un GCM. Crédits Baker et al. (2000).

La stratification radiale en entropie du fluide sous l'effet de la gravité est caractérisée par la fréquence de Brunt-Väisälä, N (e.g. Gerkema & Zimmerman, 2008), définie par

$$N^2 = g\left[\frac{1}{\Gamma_1 p_0}\frac{dp_0}{dz} - \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\right], \tag{3.13}$$

où $\Gamma_1 = (\partial \ln p/\partial\rho)_S$ désigne l'exposant adiabatique à entropie constante (S étant l'entropie macroscopique spécifique). Avec les variables x et H, l'expression précédente se réécrit

$$N^2 = \frac{g}{H}\left[\kappa + \frac{1}{H}\frac{dH}{dx}\right] \tag{3.14}$$

avec $\kappa = (\Gamma_1 - 1)/\Gamma_1$ (pour les gaz parfaits, $\Gamma_1 = 1.4$ et $\kappa = 0.286$). La fréquence de Brünt-Väisälä caractérise la poussée d'Archimède, qui ramène une particule à l'équilibre si $N^2 > 0$. Elle détermine la stabilité de la stratification vis à vis de l'instabilité convective.

- $N^2 > 0$ correspond à une stratification stable ;
- $N^2 \leq 0$ à une stratification instable, ce qui est la propriété des régions sujettes à l'instabilité convective. Dans le cas limite où $N^2 = 0$, le gradient de température correspond au *gradient adiabatique*, $dT_0/dz = -\kappa g/\mathcal{R}_s$.

Les atmosphères de la Terre et de Vénus appartiennent à la première catégorie si l'on fait l'approximation isotherme. On a $N \approx 10^{-2}$ s^{-1} (application de l'équation 3.14 avec $g = 10$ m.s^{-1} et $H = 10$ km). Mais en réalité, la stabilité de la stratification peut varier avec l'altitude sur plusieurs ordres de grandeur. Dans le cas de la Terre, ces variations sont assez petites pour que l'on puisse ne pas en tenir compte (voir le profil vertical de H en Fig. 3.2). En revanche, l'atmosphère de Vénus présente un fort gradient négatif de température dans les couches proches du sol, passant de $T_0 \approx 740$ K au niveau de la surface à $T_0 \approx 250$ K à 60 km d'altitude, soit une température trois fois inférieure (cf. Fig. 3.3, panneau de gauche). Ceci, comme le montre (3.14), induit une stratification beaucoup moins stable que dans le cas isotherme. Il se forme ainsi des régions sujettes à l'instabilité convective, où $N^2 \approx 0$ (Fig. 3.3, panneau de droite).

3.4 Les grandes familles d'ondes de marée

Nous supposerons ici que les effets de marées sont la réponse d'un corps à un forçage périodique en temps, de fréquence σ. A l'intérieur des couches fluides, telles que l'atmosphère, la réponse se traduit par des ondes de marée de différentes natures, que nous identifions dans cette section.

En premier lieu, la rotation propre de la planète sur elle-même permet la propagation d'ondes dites *inertielles* (Ogilvie & Lin, 2004; Ogilvie, 2009, 2013), ayant pour fréquence caractéristique la fréquence inertielle 2Ω (en bleue, dans la Figure 3.4). Ces ondes ont pour force de rappel les termes de Coriolis résultant de l'entraînement du référentiel en rotation qui apparaissent dans le membre de gauche de l'équation de Navier-Stokes (cf. Eq. 3.21).

En deuxième lieu, la stratification radiale de l'atmosphère, si elle est stable ($N^2 > 0$), induit l'existence potentielle d'*ondes de gravité* (cf. Fig. 3.4, vert) (Zahn, 1975; Goldreich & Nicholson, 1989). Celles-ci se propagent à l'intérieur des couches radiatives des étoiles (Zahn, 1975; Goldreich & Nicholson, 1989), des enveloppes de géantes gazeuses (Arras & Socrates, 2010) et des atmosphères de planètes telluriques (CL70 Lindzen, 1970a,b; Lindzen & Blake, 1971; Lindzen, 1971; Fels & Lindzen, 1974; Lindzen, 1981, 1988). Elles ont pour force de rappel la poussée d'Archimède et pour fréquence caractéristique la fréquence de Brunt-Väisälä (voir Gerkema & Zimmerman, 2008). Si $N^2 \leq 0$, le milieu est sujet à l'instabilité convective : la stratification ne tend pas à ramener une particule de fluide à sa position d'équilibre, et ne produit donc pas la force de rappel nécessaire à la propagation de l'onde.

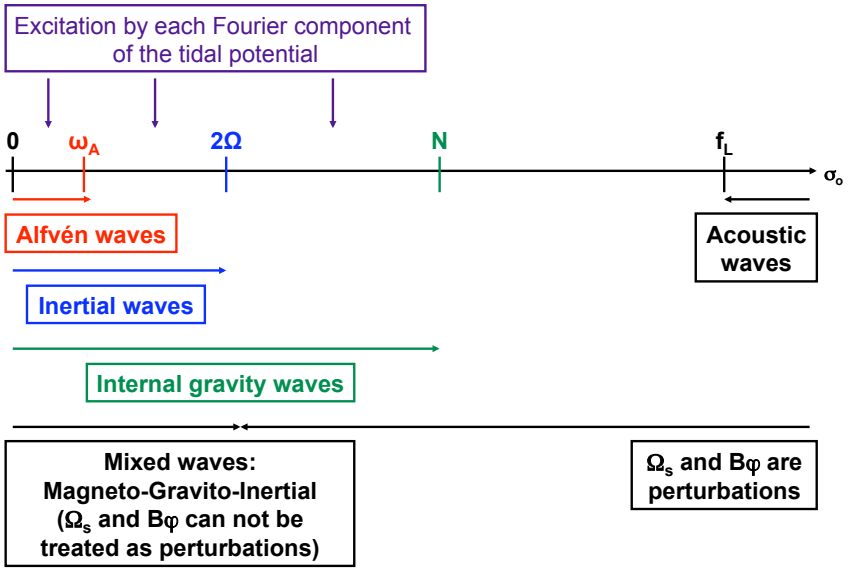


FIGURE 3.4: Spectre qualitatif des familles d'ondes se propageant dans les couches fluides planétaires (et stellaires) : ondes inertielles (bleu), ondes de gravité (vert), ondes d'Alfvén (rouge), ondes acoustiques (noir). Figure extraite de Mathis & Remus (2013).

Dans la même gamme de fréquence que les ondes inertielles et de gravité, la perturbation de marée est susceptible d'engendrer des *ondes d'Alfvén* dans le cas où le fluide est magnétisé (cf. Fig. 3.4, rouge). Cette famille d'ondes a pour fréquence caractéristique la fréquence d'Alfvén $\omega_{\rm A}$. Dans l'approche géophysique, qui a pour objet d'étude l'atmosphère terrestre, elle est ignorée du fait de la faiblesse du champ magnétique généré par la Terre. En revanche, les ondes Alfvén jouent un rôle important dans la dynamique interne des étoiles et des géantes gazeuses et leur physique est largement développée au sein des travaux traitant de ces corps (e.g. Mathis & de Brye, 2011; Barker & Lithwick, 2014). Dans une perspective de généralisation de l'approche géophysique aux super-Terres, il sera nécessaire à terme d'introduire l'effet d'un champ magnétique sur la dynamique des ondes afin de se trouver en mesure de traiter le cas d'atmosphères planétaires suffisamment magnétisées pour que cet effet soit significatif.

En dernier lieu, on doit mentionner la famille des *ondes acoustiques*, qui résultent de la compressibilité du fluide (cf. Fig. 3.4, noir). Les ondes acoustiques ont pour vitesse caractéristique

$$c_s = \sqrt{\Gamma_1 g H}, \tag{3.15}$$

et sont caractérisées par la fréquence de coupure de Lamb $\sigma_{\rm s}$ (voir Eq. 3.54), souvent supérieure de plusieurs ordres de grandeurs aux autres fréquences. Elles sont pour cette raison la plupart du temps négligées dans dans le cas des étoiles de séquence principale et des planètes géantes, le forçage de la marée étant assimilé à une perturbation de relativement basse fréquence.

On néglige ici le magnétisme pour se concentrer sur l'aspect hydrodynamique. De fait, les ondes générées par la perturbation de marée dans ce modèle constituent un mélange des trois autres familles auquel on peut donner le nom d'*ondes gravito-inertielles-acoustiques*. Ces ondes sont néanmoins principalement gravito-inertielles étant donné l'écart entre la fréquence acoustique et les autres fréquences caractéristiques.

3.5 Structure des ondes de marée

Nous abordons ici la modélisation analytique des ondes de marées suivant l'approche géophysique.

3.5.1 Equations primitives et approximations

Tout d'abord, posons les équations régissant la dynamique du système. Dans le référentiel en co-rotation avec la planète ($\mathscr{R}_{\mathrm{E;T}}$), l'atmosphère est soumise au potentiel gravitationnel total $\mathscr{U} = U_{\mathrm{g}} + U + \mathcal{U}$, où U_{g} est tel que $\boldsymbol{\nabla} U_{\mathrm{g}} = \mathbf{g}$ et désigne le potentiel auto-gravitant de la planète à l'équilibre, U le potentiel excitateur de marée à la source de la composante gravitationnelle de la marée (aussi appelée *marée gravifique*), et $\mathcal{U}$ le potentiel réponse de marée résultant de la variation de distribution de masse dans la couche sous l'effet du forçage. Le mouvement des particules de fluide est ainsi décrit par l'équation de Navier-Stokes (e.g. Gerkema & Zimmerman, 2008),

$$\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p - \boldsymbol{\nabla} (\mathscr{U}), \tag{3.16}$$

où l'on a négligé les effets de la friction visqueuse turbulente et l'accélération centrifuge $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})$. L'équation de la dynamique est complétée par l'équation de conservation de la masse,

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \tag{3.17}$$

La relation entre la distribution de masse et le potentiel gravifique est donnée au niveau local par l'équation de Poisson,

$$\Delta (\mathscr{U}) = 4\pi \mathscr{G} \rho, \tag{3.18}$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien. L'atmosphère reçoit de l'étoile la puissance thermique par unité de masse $\mathscr{J} = J_0 + J$, dont les composantes J_0 et J représentent respectivement la puissance moyenne absorbée, qui détermine l'équilibre, et le chauffage de marée à l'origine de la composante thermique de la marée (*marée thermique*). Le transport de la chaleur, dans lequel on néglige la diffusion thermique, se formule (Lindzen & McKenzie, 1967, CL70)

$$\frac{C_p}{\Gamma_1} (\partial_t T + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} T) = \frac{gH}{\rho} (\partial_t \rho + \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho) + \mathscr{J}, \tag{3.19}$$

où l'on a introduit la capacité thermique massique du gaz,

$$C_p = \frac{\mathcal{R}_{\mathrm{s}}}{\kappa}. \tag{3.20}$$

La loi des gaz parfaits, donnée par (3.7), clôt ce système d'équations.

La marée atmosphérique est considérée comme une petite perturbation au voisinage de l'équilibre hydrostatique (e.g. Section 3.3), ce qui permet de linéariser toutes les équations pour ne garder que les termes du premier ordre en $\mathbf{V}$, δp, $\delta \rho$ et δT. On élimine ainsi les termes non-linéaires du deuxième ordre, tel que $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{V}$ dans l'équation de Navier-Stokes. On adopte de plus l'*approximation de Cowling* (Cowling,

1941), qui consiste à ignorer les fluctuations du potentiel de gravitation propre du corps ($\mathcal{U}$) induites par la fluctuation de densité de la marée ($\delta\rho$). L'équation de Navier-Stokes linéarisée se réécrit

$$\partial_t \mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_0}\mathbf{\nabla}\delta p - \frac{g}{\rho_0}\delta\rho\,\mathbf{e}_r - \mathbf{\nabla}U, \tag{3.21}$$

où U représente le potentiel excitateur de marée, à la source de la composante gravitationnelle de la marée, ou encore *marée gravifique*. En projetant cette équation sur les vecteurs $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ et $\mathbf{e}_r$ respectivement, on obtient (CL70)

$$\partial_t V_\theta - 2\Omega V_\varphi \cos\theta = -\frac{1}{R}\partial_\theta\left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), \tag{3.22}$$

$$\partial_t V_\varphi + 2\Omega\cos\theta V_\theta + 2\Omega\sin\theta V_r = -\frac{1}{R\sin\theta}\partial_\varphi\left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), \tag{3.23}$$

$$\partial_t V_r - 2\Omega\sin\theta V_\varphi = -\frac{1}{H\rho_0}\partial_x\delta p - g\frac{\delta\rho}{\rho_0} - \frac{1}{H}\partial_x U. \tag{3.24}$$

Le déplacement d'une particule dans une direction est commensurable à l'échelle de longueur caractéristique du système dans cette direction. En conséquence, la littérature traitant de la dynamique de l'atmosphère terrestre fait usuellement l'hypothèse de *couche peu profonde* (*shallow-water approximation*), qui consiste à négliger l'accélération verticale dans le membre de gauche de (3.24) devant les autres termes. Plus la stratification du milieu est stable (i.e. $\sigma \ll N$) et plus cette hypothèse est justifiée.

Par ailleurs, les équations (3.22), (3.23) et (3.24) sont couplées par les termes de Coriolis (caractérisés par le facteur 2Ω), ce qui rend leur intégration difficile. Afin de dépasser cet obstacle et de rendre plus aisé le développement analytique des équations des ondes de marées, les travaux théoriques ayant pour objet la dynamique des couches fluides planétaires et stellaires se placent le plus souvent dans le cadre de l'*approximation traditionnelle* (e.g. Eckart, 1960; Mathis et al., 2008). Cette hypothèse revient à ignorer les termes $2\Omega\sin\theta V_r$ et $2\Omega\sin\theta V_\varphi$ dans les équations (3.23) et (3.24) respectivement ; on néglige ainsi la projection horizontale du vecteur rotation. Elle convient bien aux perturbations vérifiant les trois conditions suivantes :

1. la *flottabilité*, donnée par $-g\delta\rho/\rho_0\,\mathbf{e}_r$, est forte comparée au terme de Coriolis ($2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{V}$) suivant la direction verticale ;
2. le champ de vitesse de marée est essentiellement horizontal, $V_r \ll \{V_\theta, V_\varphi\}$ (voir la discussion de Mathis, 2009) ;
3. la fréquence de marée satisfait l'inégalité $2\Omega < \sigma \ll N$,

qui correspondent à des couches fluides très stablement stratifiées (Friedlander, 1987). L'écart entre les résultats obtenus sous l'approximation traditionnelle et ceux dérivés du cadre dit *non-traditionnel* (conservation de l'ensemble des termes de Coriolis dans l'équation de Navier-Stokes) s'accroît donc quand σ tend vers 0, ce qui est typiquement le cas de la synchronisation spin-orbite avec le perturbateur. Ces limitations, discutées dans de nombreux travaux, font toujours l'objet de recherches. Citons à titre d'exemples Gerkema & Shrira (2005) qui modélisent la structure des ondes gravito-inertielles dans un modèle cartésien en relaxant l'approximation traditionnelle, Mathis (2009) qui évalue l'erreur induite par cette hypothèse en fonction de la fréquence des ondes et enfin Tort & Dubos (2014) dont l'approche numérique permet d'étudier la dynamique des couches fluides planétaires en conservant tous les termes de Coriolis. D'autres travaux, comme

Prat et al. (2016), montrent que le domaine des paramètres où s'applique l'approximation traditionnelle n'est pas clairement défini. En effet, s'il est établi que l'approximation traditionnelle est moins pertinente dans le régime sub-inertiel ($|\sigma| < 2\Omega$) que dans le régime super-inertiel ($|\sigma| \geq 2\Omega$), il demeure dans ce régime des configurations où l'écart entre cadres traditionnel et non-traditionnel peut être significatif. Prat et al. (2016) démontrent néanmoins par ailleurs la possibilité de s'affranchir de l'approximation traditionnelle à l'aide d'un changement de variable dans le régime sub-inertiel (régime de la marée semi-diurne terrestre), ce qui ouvre d'intéressantes perspectives pour de futurs travaux.

L'équation de conservation de la masse (3.17) linéarisée devient

$$\partial_t \delta\rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_0 \mathbf{V}) = 0, \tag{3.25}$$

et l'équation du transport de la chaleur

$$\frac{C_p}{\Gamma_1}\left(\partial_t \delta T + \frac{1}{H}\frac{dT_0}{dx}V_r\right) = \frac{gH}{\rho_0}\left(\partial_t \delta\rho + \frac{1}{H}\frac{d\rho_0}{dx}V_r\right) + J. \tag{3.26}$$

La dynamique des ondes de marée est ainsi décrite par le système d'équations

$$\boxed{\begin{aligned}
\partial_t V_\theta - 2\Omega V_\varphi \cos\theta &= -\frac{1}{R}\partial_\theta\left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), && (3.27a)\\
\partial_t V_\varphi + 2\Omega \cos\theta V_\theta &= -\frac{1}{R\sin\theta}\partial_\varphi\left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), && (3.27b)\\
0 &= -\frac{1}{H\rho_0}\partial_x \delta p - g\frac{\delta\rho}{\rho_0} - \frac{1}{H}\partial_x U, && (3.27c)\\
\partial_t \delta\rho + \frac{1}{H}\partial_x\left(\rho_0 V_r\right) &= -\frac{\rho_0}{R\sin\theta}\left[\partial_\theta\left(\sin\theta V_\theta\right) + \partial_\varphi V_\varphi\right], && (3.27d)\\
\frac{C_p}{\Gamma_1}\left(\partial_t \delta T + \frac{1}{H}\frac{dT_0}{dx}V_r\right) &= \frac{gH}{\rho_0}\left(\partial_t \delta\rho + \frac{1}{H}\frac{d\rho_0}{dx}V_r\right) + J, && (3.27e)\\
\frac{\delta p}{p_0} &= \frac{\delta T}{T_0} + \frac{\delta\rho}{\rho_0}. && (3.27f)
\end{aligned}}$$

Par ailleurs, afin de conserver le formalisme de CL70, on utilisera comme variable de calcul la variation de pression lagrangienne réduite

$$G = -\frac{1}{\Gamma_1 p_0}\left(\partial_t \delta p + \frac{1}{H}\frac{dp_0}{dx}V_r\right). \tag{3.28}$$

3.5.2 Equation de Laplace et fonctions de Hough

La réponse de marée d'un corps est la réponse linéaire aux forçages gravifiques et thermiques du compagnon, que l'on suppose ici périodique de fréquence σ. Elle est aussi périodique en longitude, ce qui nous permet d'écrire toute quantité perturbée comme une série de Fourier de t et de φ (cf. Section 2.2.2) :

$$\begin{aligned}
\xi_r &= \sum_{\sigma,m} \xi_r^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)}, & \xi_\theta &= \sum_{\sigma,m} \xi_\theta^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)}, & \xi_\varphi &= \sum_{\sigma,m} \xi_\varphi^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)},\\
V_r &= \sum_{\sigma,m} V_r^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)}, & V_\theta &= \sum_{\sigma,m} V_\theta^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)}, & V_\varphi &= \sum_{\sigma,m} V_\varphi^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)},\\
\delta p &= \sum_{\sigma,m} \delta p^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)}, & \delta\rho &= \sum_{\sigma,m} \delta\rho^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)}, & \delta T &= \sum_{\sigma,m} \delta T^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)},\\
G &= \sum_{\sigma,m} G^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)}, & J &= \sum_{\sigma,m} J^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)}, & U &= \sum_{\sigma,m} U^{\sigma,m}(x,\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

où m est un entier relatif assimilable au nombre d'onde zonal horizontal de l'onde que nous appellerons *degré longitudinal* (ou *degré azimutal*) et $f^{\sigma,m}$ la fonction en latitude et altitude associée, pour une quantité donnée f. Afin d'alléger les équations en notations, nous omettrons désormais les exposants $^{\sigma,m}$: $f^{\sigma,m}$ sera noté simplement f.

Intéressons-nous d'abord à la dynamique horizontale des ondes, décrite seulement par les équations (3.27a) et (3.27b) du système. Deux fréquences entrent en jeu : la fréquence inertielle (2Ω) et la fréquence de marée (σ) [1]. On définit le paramètre de spin (Lee & Saio, 1997)

$$\nu = \frac{2\Omega}{\sigma}, \tag{3.30}$$

qui compare ces deux fréquences et nous permet d'identifier les régimes dynamiques des ondes de marée. Ainsi,

- $|\nu| \leq 1$ correspond aux *ondes super-inertielles*, pour lesquelles la fréquence d'excitation est supérieure à la fréquence inertielle,
- $|\nu| > 1$ aux *ondes sub-inertielles*, pour lesquelles la fréquence de marée est inférieure à la fréquence inertielle.

Ces deux régimes induisent différents comportements de la structure horizontale de la perturbation comme nous le verrons plus loin. Ainsi, les champs de vitesse et de déplacement méridionaux (suivant θ) et zonaux (suivant φ) s'écrivent

$$\begin{aligned}
V_\theta &= \frac{i}{\sigma R}\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}\left(\frac{\delta p}{\rho_0}+U\right), & V_\varphi &= -\frac{1}{\sigma R}\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}\left(\frac{\delta p}{\rho_0}+U\right),\\
\xi_\theta &= \frac{1}{\sigma^2 R}\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}\left(\frac{\delta p}{\rho_0}+U\right), & \xi_\varphi &= \frac{i}{\sigma^2 R}\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}\left(\frac{\delta p}{\rho_0}+U\right),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

où $\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}$ et $\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}$ désignent les opérateurs horizontaux

$$\mathcal{L}_\theta^{m,\nu} \equiv \frac{1}{(1-\nu^2\cos^2\theta)}\left[\partial_\theta + m\nu\cot\theta\right] \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\varphi^{m,\nu} \equiv \frac{1}{(1-\nu^2\cos^2\theta)}\left[\nu\cos\theta\partial_\theta + \frac{m}{\sin\theta}\right]. \tag{3.32}$$

Nous pouvons maintenant considérer les variables restantes (V_r, ξ_r, δp, $\delta\rho$, δT et G). A l'aide de manipulations sur les équations (3.27c) à (3.27f) (cf. CL70) et en négligeant les termes en $\partial^2 U/\partial x^2$, on réduit la dynamique de la marée atmosphérique à l'équation

$$\boxed{H\partial_{zz}G + \left(\frac{dH}{dz}-1\right)\partial_z G = \frac{g}{R^2\sigma^2}\mathcal{L}^{m,\nu}\left[\left(\frac{dH}{dz}+\kappa\right)G - \frac{\kappa J}{\Gamma_1 g H}\right],} \tag{3.33}$$

1. Dans le cas usuel, $\sigma = 2(\Omega - n_{\rm orb})$, où $n_{\rm orb}$ désigne le moyen mouvement du perturbateur.

dans le membre de droite de laquelle apparaît l'opérateur horizontal

$$\mathcal{L}^{m,\nu} \equiv \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\frac{\sin\theta}{1-\nu^2\cos^2\theta}\partial_\theta\right) - \frac{1}{1-\nu^2\cos^2\theta}\left(m\nu\frac{1+\nu^2\cos^2\theta}{1-\nu^2\cos^2\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right). \tag{3.34}$$

Cette séparation des variables est permise par l'approximation traditionnelle, qui filtre les dérivées partielles mixtes en $\partial_{\theta z}$ ou $\partial_{z\theta}$ (l'effet de ces dérivées est étudié par Gerkema & Shrira, 2005). On peut alors chercher des solutions de (3.33) sous la forme de produits de fonctions aux variables séparées. Les coefficients de Fourier de (3.29) s'écrivent ainsi

$$\begin{aligned}
&\xi_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_{r;n}(x)\,\Theta_n^{m,\nu}(\theta), \quad \xi_\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_{\theta;n}(x)\,\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}\left[\Theta_n^{m,\nu}(\theta)\right], \quad \xi_\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_{\varphi;n}(x)\,\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}\left[\Theta_n^{m,\nu}(\theta)\right],\\
&V_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{r;n}(x)\,\Theta_n^{m,\nu}(\theta), \quad V_\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{\theta;n}(x)\,\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}\left[\Theta_n^{m,\nu}(\theta)\right], \quad V_\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{\varphi;n}(x)\,\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}\left[\Theta_n^{m,\nu}(\theta)\right],\\
&\delta p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta p_n(x)\,\Theta_n^{m,\nu}(\theta), \quad \delta\rho = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\rho_n(x)\,\Theta_n^{m,\nu}(\theta), \quad \delta T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta T_n(x)\,\Theta_n^{m,\nu}(\theta),\\
&G = \sum_{n\in\mathbb{Z}} G_n(x)\,\Theta_n^{m,\nu}(\theta), \quad J = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)\,\Theta_n^{m,\nu}(\theta), \quad U = \sum_{n\in\mathbb{Z}} U_n(x)\,\Theta_n^{m,\nu}(\theta).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Les fonctions $\Theta_n^{m,\nu}$, appelées *fonctions de Hough* dans la littérature (Siebert, 1961) en référence aux premiers calculs des solutions de (3.36) par Hough (1898), sont les vecteurs propres de l'*équation des marées de Laplace* [2],

$$\boxed{\mathcal{L}^{m,\nu}\Theta_n^{m,\nu} = -\Lambda_n^{m,\nu}\Theta_n^{m,\nu},} \tag{3.36}$$

où les $\Lambda_n^{m,\nu}$ désignent les valeurs propres réelles qui leur sont associées. Les $\Lambda_n^{m,\nu}$ sont tracées en fonction de ν en Fig. 3.5 (a). Comme on peut le constater, leur hiérarchie est conservée quelque soit ν ; pour tous n et j tels que $n < j$, on a $\Lambda_n \leq \Lambda_j$. Cette propriété est propre au cas réel ($\nu \in \mathbb{R}$). Dès lors que $\nu \in \mathbb{C}$, il existe des points critiques où la hiérarchie entre deux modes s'inverse (Volland, 1974a). Nous reviendrons sur ce point au Chapitre 6, où sont abordés les marées océaniques. Dans le cas présent, nous nous cantonnons au cas réel dont les solutions ont fait l'objet d'études approfondies, tant du point de vue analytique (e.g. Hough, 1898; Longuet-Higgins, 1968; Townsend, 2003) que numérique (e.g. CL70, Press et al., 1986; Lee & Saio, 1997; Wang et al., 2016). Les propriétés des fonctions de Hough et les méthodes de calcul utilisées pour les obtenir sont discutées en détail en appendice d'Auclair-Desrotour et al. (2016a). Pour cette étude, nous adoptons la méthode spectrale consistant à déterminer les coefficients de projection des fonctions de Hough sur la base des polynômes associés de Legendre (e.g. CL70).

L'ensemble $\{\Theta_n^{m,\nu}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base de l'espace des fonctions définies sur l'intervalle $[0,\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (Flattery, 1967; Holl, 1970). Pour tout n, $\Theta_n^{m,\nu}$ vérifie aux pôles une condition de régularité dérivée de la théorie de Sturm-Liouville qui l'annule en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Deux fonctions, $\Theta_n^{m,\nu}$ et $\Theta_j^{m,\nu}$ (avec $n \neq j$), sont orthogonales par le produit scalaire

$$\langle \Theta_n^{m,\nu}, \Theta_j^{m,\nu} \rangle = \int_0^\pi \Theta_n^{m,\nu}(\theta)\,\Theta_j^{m,\nu}(\theta)\sin\theta d\theta, \tag{3.37}$$

la norme $\|\Theta_n^{m,\nu}\|_2$ d'une fonction $\Theta_n^{m,\nu}$ étant définie par

2. L'équation décrivant la structure horizontale des ondes de marée porte le nom de Laplace, qui fut le premier à l'établir dans le *Traité de Mécanique Céleste* (Laplace, 1798).

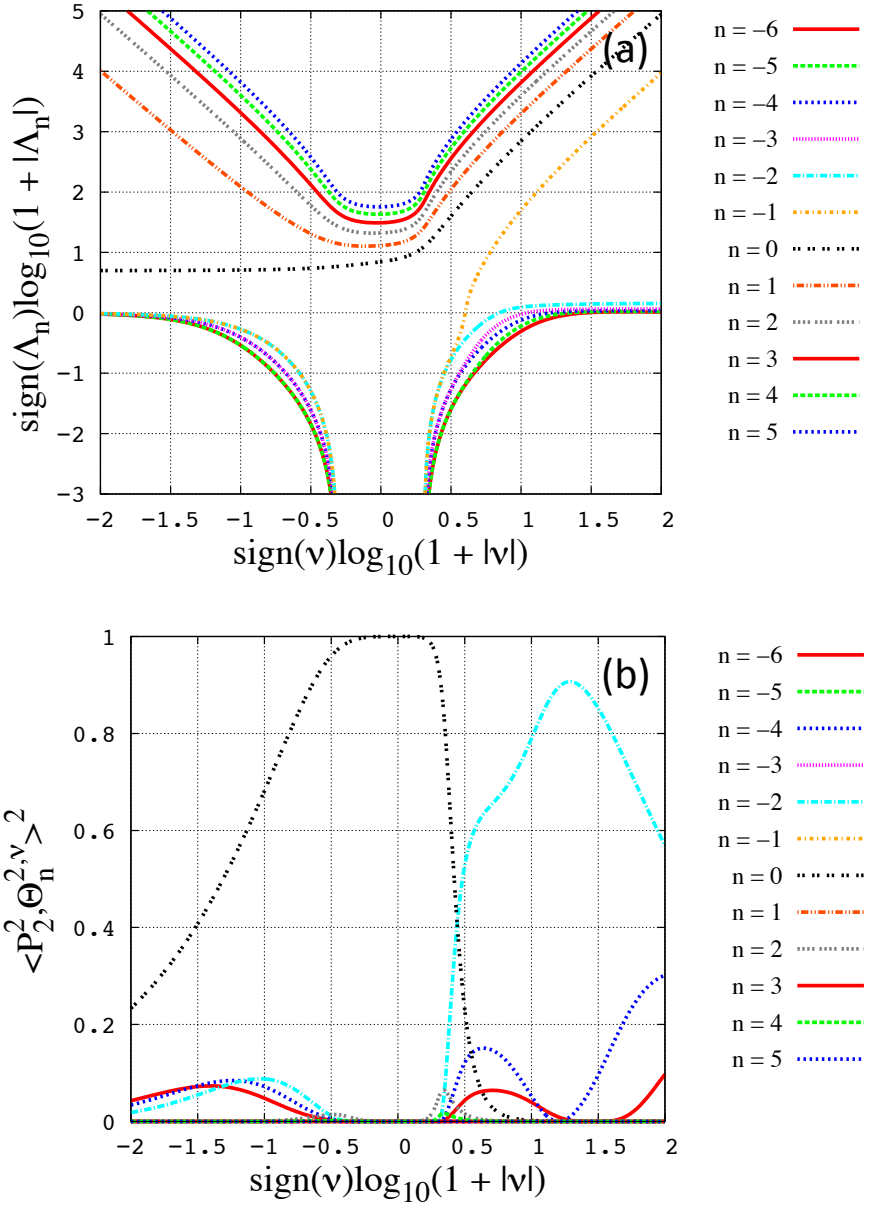


FIGURE 3.5: (a) - Valeurs propres ($\Lambda_n^{m,\nu}$) des modes de gravité et de Rossby de plus bas degrés ($-6 \leq n \leq 5$) en fonction du paramètre de spin (ν) pour $m = 2$. L'axe horizontal correspond à la fonction de ν donnée par $\text{sign}\,(\nu)\log\,(1+|\nu|)$, l'axe vertical à la fonction $\text{sign}\,(\Lambda_n^{m,\nu})\log\,(1+|\Lambda_n^{m,\nu}|)$. (b) - Carré des coefficients de projection du polynôme associé de Legendre normé P_2^2 sur les fonctions de Hough, $c_{2,n,2} = \langle \Theta_n^{2,\nu}, P_2^2 \rangle^2$, en fonction de ν.

$$\|\Theta_n^{m,\nu}\|_2 = \sqrt{\langle \Theta_n^{m,\nu}, \Theta_n^{m,\nu} \rangle}. \tag{3.38}$$

Ici, nous normalisons les fonctions de Hough $\Theta_n^{m,\nu}$. Ainsi, pour tout n et j, $\langle \Theta_n^{m,\nu}, \Theta_j^{m,\nu} \rangle = \delta_{n,j}$ où δ est le symbole de Kronecker. L'indice n donne une indication sur le nombre d'oscillations de la fonction $\Theta_n^{m,\nu}$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ ainsi que sur sa parité par rapport au point équatorial ($\theta = \pi/2$), qui est celle de n. Cet indice correspond donc à un degré méridional.

Les fonctions de Hough se divisent en deux types de modes correspondant aux régimes identifiés plus haut :

- les *modes de gravité* (Fig. 3.6), associés aux degrés méridionaux positifs ($n \geq 0$) ; aussi appelés *modes de première classe* ou *modes ordinaires* (Volland, 1974a). Ces modes existent pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.

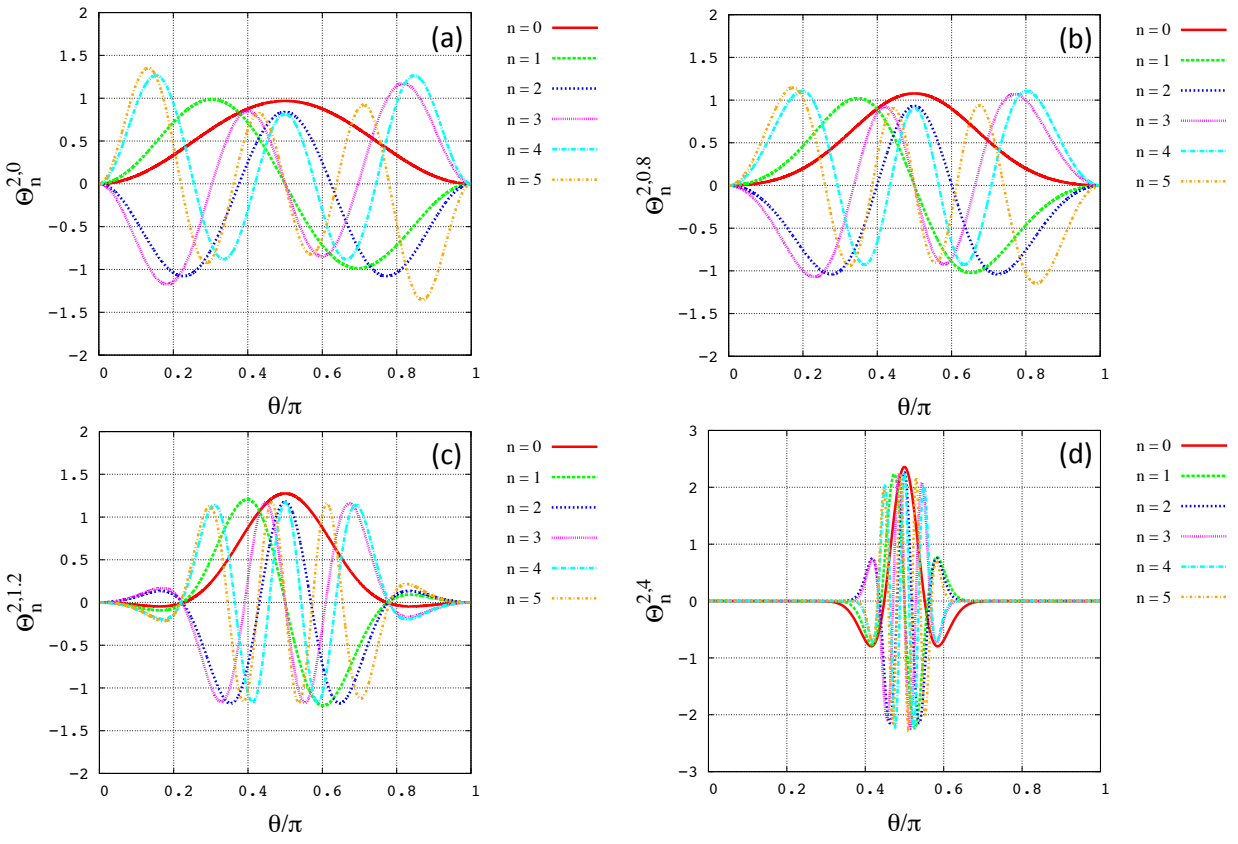


FIGURE 3.6: Fonctions de Hough $\Theta_n^{2,\nu}$ correspondant aux modes de gravité ($n \in \mathbb{N}$) tracées en fonction de la colatitude (θ) pour $0 \leq n \leq 5$ et différentes valeurs du paramètre de spin (ν) : $\nu = 0$ (a), $\nu = 0.8$ (b), $\nu = 1.2$ (c) et $\nu = 4$ (d). (a) et (b) correspondent au régime super-inertiel ($|\nu| \leq 1$), les deux autres au régime sub-inertiel ($|\nu| > 1$).

Dans le cas non-rotationnel ($\nu = 0$), il correspondent aux fonctions associées de Legendre P_l^m. La relation entre les degrés l de ces derniers et les degrés méridionaux des fonctions de Hough est donnée par $l = |m| + n$. Les modes de gravité forment ainsi une extension des polynômes associés de Legendre à des paramètres de spin non nuls. Par ailleurs, ils sont caractérisés par des valeurs propres positives et croissantes avec $|\nu|$. Enfin, ils se développent principalement dans le régime super-inertiel ($\nu \leq 1$). Dans le régime sub-inertiel, les oscillations suivant θ sont confinées dans une bande équatoriale dont l'extension, $\theta_g = \pi/2 - \arccos\left(|\nu|^{-1}\right)$, tend vers 0 quand $|\nu| \to \infty$ (Fig. 3.6, c, d). Les ondes de marées solaires semi-diurnes correspondent essentiellement à des modes de gravité dans le cas de la Terre et de Vénus (cf. Fig. 3.8).

- les *modes de Rossby* (Fig. 3.7), associés aux degrés méridionaux strictement négatifs ($n < 0$) ; aussi appelés *modes de seconde classe*, *modes extraordinaires* ou *modes rotationnels* (Volland, 1974a). Apparaissant uniquement dans le régime sub-inertiel ($|\nu| > 1$), ces modes sont induits par la rotation du fluide. Ainsi, ils prédominent quand $|\nu| \gg 1$ et sont confinés au niveaux des pôles dans le cas asymptotique où $|\nu| \to 1$ (voir Fig. 3.7, a) comme le sont les modes de gravité à l'équateur quand $\nu \to \infty$. En conséquence, ces modes ne peuvent se développer que dans le voisinage proche de la synchronisation, où σ devient inférieur à Ω en valeur absolue. Ils existent dans le cas de la marée semi-diurne solaire pour la Terre, mais restent fortement confinés au niveau des pôles, ce qui les rend peu représentatifs de la perturbation (voir Fig. 3.8). Ceci n'est pas vrai dans le cas des marées diurnes, pour lesquelles $\nu \approx 2$, et dont la modélisation nécessite en conséquence de prendre en compte les modes de Rossby (Lindzen, 1966).

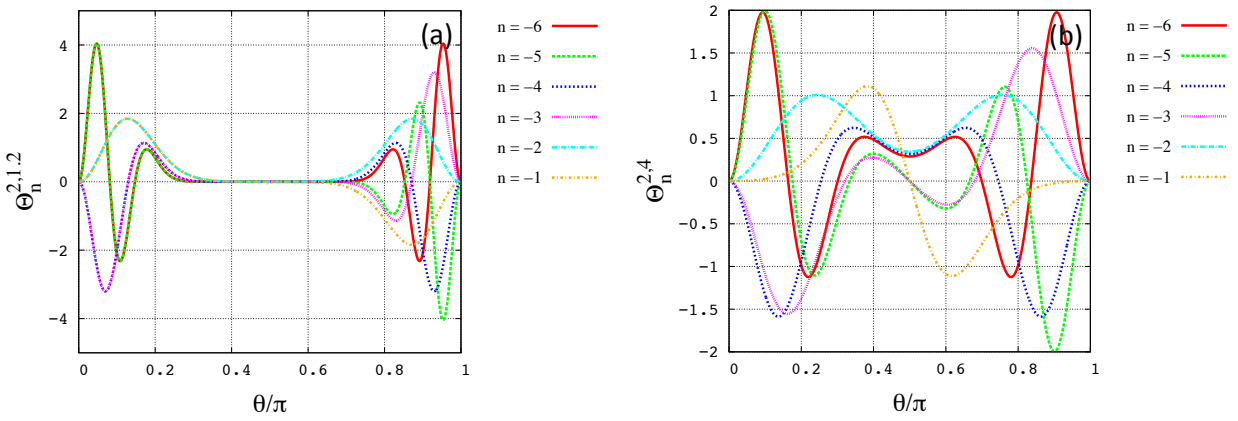


FIGURE 3.7: Fonctions de Hough $\Theta_n^{2,\nu}$ correspondant aux modes de Rossby ($n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$) tracées en fonction de la colatitude (θ) pour $-6 \leq n \leq -1$ et différentes valeurs du paramètre de spin (ν) : $\nu = 1.2$ (a) et $\nu = 4$ (b).

Enfin, les modes se distinguent par leur sens de propagation. En remarquant à partir de (3.34) que les solutions de l'équation de Laplace vérifient les relations

$$\Theta_n^{-m,-\nu} = \Theta_n^{m,\nu} \quad \text{et} \quad \Lambda_n^{-m,-\nu} = \Lambda_n^{m,\nu}, \tag{3.39}$$

on identifie les familles de modes associées au signe de $m\nu$ (Lee & Saio, 1997) :

- les *modes progrades*, caractérisés par $m\nu < 0$, qui se propagent dans le sens de $\mathbf{e}_\varphi$;
- les *modes rétrogrades*, caractérisés par $m\nu > 0$, qui se propagent dans le sens de $-\mathbf{e}_\varphi$.

Les marées solaires semi-diurnes de la Terre et Vénus appartiennent à la deuxième famille ($m = 2$ et $\nu > 0$). Il est important de noter ici qu'il n'y a pas de relation de symétrie entre les ondes progrades et les ondes rétrogrades (voir Fig. 3.5). Quelque soient m et ν, $\Theta_n^{m,-\nu} \neq \Theta_n^{m,\nu}$ (Fig. 3.5, b) et $\Lambda_n^{m,-\nu} \neq \Lambda_n^{m,\nu}$ (Fig. 3.5, a) dans le cas général. En particulier, les premiers modes de gravité ($n = 0$) et de Rossby ($n = -1$) diffèrent fortement entre le regime prograde et le régime rétrograde. Ceci résulte de l'effet de Coriolis et implique que la structure des ondes associées à la marée dynamique change de façon discontinue au passage de la synchronisation ($\sigma = 0$).

3.5.3 Structure verticale des ondes

Aux fonctions de Hough, qui caractérisent la structure horizontale de réponse de l'atmosphère, sont associés les profils verticaux $\boldsymbol{\xi}_n$, $\mathbf{V}_n$, δp_n, $\delta\rho_n$, δT_n et G_n. Ces profils dépendent des propriétés physiques de l'atmosphère et sont couplés à la structure horizontale de la perturbation via les valeurs propres de l'équation de Laplace (notés simplement Λ_n). Introduisons ici le paramètre faisant le lien entre les structures verticale et horizontale des ondes de marées, la *profondeur équivalente* (Taylor, 1936, CL70)

$$h_n = \frac{R^2\sigma^2}{g\Lambda_n}, \tag{3.40}$$

qui est une échelle de hauteur propre à la composante de degré n de la perturbation. A l'aide du changement de variable $G_n(x) = e^{x/2} y_n(x)$, on exprime l'équation de la structure verticale

$$\boxed{\frac{d^2 y_n}{dx^2} + \hat{k}_n^2(x)\, y_n = \frac{\kappa J_n}{\Gamma_1 g h_n} e^{-x/2},} \tag{3.41}$$

où le nombre d'onde vertical, $\hat{k}_n$, est donné par

$$\hat{k}_n^2(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{h_n}\left(\kappa H + \frac{dH}{dx}\right) - 1\right]. \tag{3.42}$$

L'équation des ondes, (3.41), est une équation de Schrödinger caractéristique des systèmes de type oscillateur harmonique forcé. Comme $\hat{k}_n^2$ est réel, on distingue deux types de modes :

1. les *modes propagatifs* ($\hat{k}_n^2 \geq 0$) désignent les ondes pouvant se propager verticalement. Le sens de propagation des oscillations est défini par la vitesse de phase $v_{\varphi;n} = -\sigma/\Re\left\{\hat{k}_n\right\}$: les oscillations ascendantes correspondent à $v_{\varphi;n} > 0$, les oscillations descendantes à $v_{\varphi;n} < 0$ (voir Fig. 4.4, b). La direction du flux énergie dans la direction verticale est donnée par la vitesse de groupe, qui est l'opposée de la vitesse de phase (Alvan et al., 2014) ;
2. les *modes evanescents* ($\hat{k}_n^2 < 0$) désignent les ondes amorties par le milieu.

On caractérise les modes par la longueur normée

$$L_n(x) = \frac{2\pi}{|k_n(x)|}, \tag{3.43}$$

qui est la longueur d'onde des ondes gravito-inertielles-acoustiques dans le cas propagatif et l'épaisseur de peau dans le cas évanescent.

Enfin, les relations de polarisation reliant les profils verticaux des quantités perturbées à la solution de (3.41) se déduisent des équations (3.27c) à (3.27f). On a pour le champ de vitesse,

$$V_{r;n} = -\frac{i\sigma}{g}U_n + \Gamma_1 h_n e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{dy_n}{dx} + \left(\frac{H}{h_n} - \frac{1}{2}\right)y_n\right] - \frac{i\sigma h_n}{gH}\frac{dU_n}{dx} \tag{3.44a}$$

$$V_{\theta;n} = \frac{\Gamma_1 h_n p_0(0)}{RH\sigma^2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dy_n}{dx} - \frac{1}{2}y_n\right) \tag{3.44b}$$

$$V_{\varphi;n} = i\frac{\Gamma_1 h_n p_0(0)}{RH\sigma^2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dy_n}{dx} - \frac{1}{2}y_n\right), \tag{3.44c}$$

pour le déplacement,

$$\xi_{r;n} = -\frac{1}{g}U_n - i\frac{\Gamma_1 h_n}{\sigma}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{dy_n}{dx} + \left(\frac{H}{h_n} - \frac{1}{2}\right)y_n\right] - \frac{h_n}{gH}\frac{dU_n}{dx} \tag{3.45a}$$

$$\xi_{\theta;n} = -i\frac{\Gamma_1 h_n p_0(0)}{RH\sigma^3}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dy_n}{dx} - \frac{1}{2}y_n\right) \tag{3.45b}$$

$$\xi_{\varphi;n} = \frac{\Gamma_1 h_n p_0(0)}{RH\sigma^3}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dy_n}{dx} - \frac{1}{2}y_n\right), \tag{3.45c}$$

et pour les quantités scalaires,

$$\delta p_n = \frac{p_0(0)}{H}\left[\underbrace{-\frac{U_n}{g}e^{-x}}_{\mathrm{H}} + \underbrace{\frac{\Gamma_1 h_n}{i\sigma}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dy_n}{dx} - \frac{1}{2}y_n\right)}_{\mathrm{V}}\right], \tag{3.46a}$$

$$\begin{aligned}\delta\rho_n =& \frac{p_0(0)}{(gH)^2}\left\{-\frac{\kappa J_n}{i\sigma}e^{-x} - U_n e^{-x}\left(1 + \frac{1}{H}\frac{dH}{dx}\right)\right. \\ &\left. + \frac{\Gamma_1 g h_n}{i\sigma}e^{-\frac{x}{2}}\left[\left(1 + \frac{1}{H}\frac{dH}{dx}\right)\left(\frac{dy_n}{dx} - \frac{1}{2}y_n\right) + \frac{H}{h_n}\left(\kappa + \frac{1}{H}\frac{dH}{dx}\right)y_n\right]\right\},\end{aligned} \tag{3.46b}$$

$$\delta T_n = \frac{1}{R}\left\{\frac{U_n}{H}\frac{dH}{dx} + \frac{\kappa J_n}{i\sigma} - \frac{\Gamma_1 g h_n}{i\sigma}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{\kappa H}{h_n} + \frac{1}{H}\frac{dH}{dx}\left(\frac{d}{dx} + \frac{H}{h_n} - \frac{1}{2}\right)\right]y_n\right\}. \tag{3.46c}$$

Ces relations décrivent la distribution de la perturbation de marée dans l'ensemble du domaine volumique en fonction des caractéristiques de l'atmosphère. Elles sont donc essentielles tant d'un point de vue météorologique que d'un point de vue astrophysique. En particulier, les variations de densité traduisent la redistribution de masse globale servant à déterminer les nombres de Love et le couple de marée exercé sur l'atmosphère (cf. Chapitre 2). Comme celle de la pression, chaque expression se compose d'une partie s'exprimant en fonction du déplacement vertical Ψ_n et dépendant du nombre d'onde, que l'on appellera *composante verticale* (V), et d'une partie relative au forçage direct, nommée *composante horizontale* (H) par opposition à la première. Ainsi, toute quantité perturbée f s'écrit sous la forme $f_n = f_{n;\mathrm{H}} + f_{n;\mathrm{V}}$.

Excepté dans les cas simples où les profils des caractéristiques de l'atmosphère et du forçage permettent de calculer une solution analytique à l'équation des ondes (Eq. 3.41), cette dernière doit être résolue numériquement. On utilise pour cela le schéma numérique introduit par Bruce et al. (1953), qui permet de résoudre les équations différentielles du second ordre à coefficients non-constants de façon très efficace. Cette méthode est détaillée dans CL70 et Auclair-Desrotour et al. (2016a) (Annexe B).

3.6 Réponse de l'atmosphère à un profil de forçage constant

Nous résolvons dans cette section l'équation de la structure verticale dans le cas simplifié où les profils de forçage sont indépendants de l'altitude afin d'illustrer l'intérêt et les limites de l'approche géophysique.

3.6.1 Conditions aux limites

Le premier point sur lequel il est nécessaire que nous nous attardions concerne les conditions aux limites à imposer aux bords du domaine. Nous avons besoin de deux conditions pour déterminer la solution. La première d'entre elles vient naturellement : comme la planète est assimilée à une boule rigide, il faut imposer au sol une condition d'impénétrabilité pour la vitesse, soit

$$V_r|_{x=0} = 0. \tag{3.47}$$

La deuxième condition paraît, quant à elle, moins évidente et fait l'objet d'une discussion approfondie chez de nombreux auteurs (e.g. Wilkes, 1949; Green, 1965, CL70). La condition communément utilisée dans

le cas des étoiles et des enveloppes externes de géantes gazeuses est la condition de surface libre (e.g. Unno et al., 1989; Arras & Socrates, 2010), qui se formule

$$\frac{\delta p}{\rho} = g\xi_r, \tag{3.48}$$

et requiert que la pression d'une particule située à la « surface » de l'atmosphère ne varie pas au cours de son mouvement. Cette condition suppose de définir une surface à laquelle une particule est idéalement libre de se déplacer sans contraintes, ce qui convient bien aux couches fluides présentant une limite bien définie (océans, atmosphères épaisses de géantes gazeuses, enveloppes externes d'étoiles) mais paraît beaucoup moins bien adaptée au cas des atmosphères minces, dont le profil de densité ne présente pas de cassure nette dans le cas général [3]. L'atmosphère se comporte alors comme un guide d'onde et présente un comportement fortement résonant en fréquence comparable à celui de l'océan (voir Chapitre 6) ou des couches fluides stellaires et planétaires (e.g. Arras & Socrates, 2010; Ogilvie, 2013). L'atmosphère isotherme traitée dans la suite, où $\rho_0(x) \propto e^{-x}$, ne présente pas de surface externe bien définie. Il ne paraît donc pas réaliste qu'elle se conduise comme un guide d'onde, ce qui nous amène à rejeter la condition de surface libre.

Un autre choix possible est d'imposer que la densité d'énergie cinétique, $\frac{1}{2}\rho_0(z)\mathbf{V}.\mathbf{V}$, reste bornée à $x \to \infty$, ce qui revient à imposer à y_n une condition de non-divergence à la limite supérieure du domaine. Le cas évanescent ne pose pas de problème, le terme divergent de la solution étant éliminé par cette condition au profit du terme convergent. En revanche, quand $\hat{k}_n^2 > 0$, le milieu se comporte comme un oscillateur harmonique non amorti. En conséquence, aucune composante de la solution générale de l'équation ne diverge dans ce cas et la condition ci-dessus ne permet pas d'éliminer une solution et de déterminer le profil de la perturbation. Une façon de contourner ce problème est de s'intéresser à l'énergie transportée par les ondes de marées ainsi que le proposent Wilkes (1949) et CL70. En considérant qu'il n'y a pas de source d'énergie à l'infini, on élimine les termes de la solution associés à une propagation d'énergie vers le sol pour ne garder que ceux transportant l'énergie vers l'espace. Cette hypothèse, généralement appelée *condition de radiation*, convient bien aux cas où les sources d'énergie générant l'onde de marée se situent dans les basses couches de l'atmosphère. En revanche, elle devient caduque dès lors que l'onde est réfléchie en haute altitude, l'énergie se propageant alors dans les deux sens (voir CL70 pour la discussion de ce phénomène). Comme le montre CL70, si on se donne une altitude limite de l'atmosphère x_{atm} telle que la puissance thermique absorbée et la fraction de masse de l'atmosphère comprise dans l'intervalle $[x, +\infty[$ sont négligeables, alors les deux choix précédents reviennent à appliquer au niveau de x_{atm} la condition [4]

$$\frac{dy_n}{dx} - i\hat{k}_n y_n = 0, \tag{3.49}$$

avec comme convention $\Re\left\{\hat{k}_n\right\} > 0$ si $\hat{k}_n$ est réel et $\Im\left\{\hat{k}_n\right\} > 0$ si $\hat{k}_n$ est imaginaire.

3.6.2 Résolution de l'équation des ondes

Afin de simplifier les expressions, on considère le cas de l'atmosphère isotherme, pour lequel H (et donc N) est constante. L'atmosphère est perturbée par le potentiel gravifique et une puissance thermique

3. Cette caractéristique peut néanmoins être obtenue par ajustement de la structure verticale de l'atmosphère.

4. La condition (3.49) découle directement de la forme particulière des solutions de l'équation de l'oscillateur. A partir d'une certaine altitude x_{atm}, le forçage est négligeable par rapport au forçage s'exerçant dans les altitudes inférieures. La solution pour $x > x_{\mathrm{atm}}$ se met donc sous la forme $y_n = Ae^{i\hat{k}_n x} + Be^{-i\hat{k}_n x}$ où A et B sont des constantes complexes. Si $\hat{k}_n \in \mathbb{R}$, on supprime le terme correspondant à une propagation des oscillations vers le bas, tel que $v_{\varphi;n} < 0$ (condition de radiation). Si $\hat{k}_n \in \mathbb{C}$, on supprime le terme divergent. La condition devient alors équivalente à une condition de surface libre à l'infini (annulation de la variation lagrangienne de la pression).

dont les profils en altitude sont eux aussi constants. Enfin, on se place dans le cas propagatif ($h_n < 4\kappa H$), pour lequel on applique la condition de radiation. La solution générale de (3.41) s'exprime ainsi

$$y_n(x) = \frac{J_n}{c_s^2}\left[\frac{1+\frac{H}{h_n}\left(i\sigma\frac{U_n}{J_n}-1\right)}{i\hat{k}_n+\frac{H}{h_n}-\frac{1}{2}}e^{i\hat{k}_n x}+e^{-\frac{x}{2}}\right], \tag{3.50}$$

avec

$$\hat{k}_n = \sqrt{\frac{\kappa H}{h_n}-\frac{1}{4}}. \tag{3.51}$$

En substituant (3.50) dans (3.44a), on en déduit le profil vertical de pression du mode,

$$\delta p_n(x) = \frac{p_0}{H}\left\{\underbrace{-\frac{U_n}{g}}_{(\mathrm{E})}+\underbrace{\frac{\Gamma_1 h_n J_n}{i\sigma c_s^2}\left[\frac{\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)\left[1+\frac{H}{h_n}\left(i\sigma\frac{U_n}{J_n}-1\right)\right]}{i\hat{k}_n+\frac{H}{h_n}-\frac{1}{2}}e^{\left(i\hat{k}_n+\frac{1}{2}\right)x}-1\right]}_{(\mathrm{D})}\right\}. \tag{3.52}$$

Dans cette expression, nous avons séparée les composantes correspondant à la *marée d'équilibre* (E) et à la *marée dynamique* (D) (Zahn, 1966a, 1975). La première, de grande échelle, ne dépend pas de la structure horizontale de la perturbation. Suivant la définition donnée par Zahn (1975), il s'agit de la composante que l'on obtiendrait en supposant que l'étoile est à l'équilibre hydrostatique (hypothèse de l'ajustement hydrostatique). La seconde est quant à elle déterminée par la valeur propre Λ_n associée au mode et ses oscillations suivant x ont pour échelle de longueur caractéristique L_n (cf. 3.43). Elle correspond à la composante non-hydrostatique de la perturbation. Toute quantité perturbée f_n peut ainsi s'écrire sous la forme $f_n = f_{n;\mathrm{E}} + f_{n;\mathrm{D}}$. Comme on le voit, les termes dépendant de Λ_n sont aussi ceux qui varient avec la fréquence d'excitation. Cette séparation est donc équivalente ici à celle donnée par la définition usuelle des marées d'équilibre et dynamique pour laquelle la marée d'équilibre correspond à la solution obtenue pour $\sigma \to 0$ (e.g. Goldreich & Nicholson, 1989; Arras & Socrates, 2010). Notons toutefois que les définitions « marée d'équilibre » et « composante horizontale » d'une part et « marée dynamique » et « composante verticale » d'autre part ne sont pas équivalentes.

Dans (3.52), on voit apparaître des critères permettant de comparer marée gravifique et marée thermique en intensité. La composante de marée dynamique est ainsi dominée par le forçage thermique si

$$\left|\frac{\sigma U_n}{J_n}\right| \ll 1. \tag{3.53}$$

Afin de comparer les termes de marée d'équilibre (E) et dynamique (D) dans ce cas, on introduit la *fréquence de Lamb* et le paramètre acoustique du mode

$$\sigma_{s;n} = \Lambda_n^{\frac{1}{2}}\frac{c_s}{R} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{s;n} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{s;n}}\right)^2. \tag{3.54}$$

Physiquement, le rapport c_s/R est l'ordre de grandeur de la fréquence minimale des ondes de compression pouvant se propager dans la coquille atmosphérique (de taille caractéristique R). La fréquence $\sigma_{s;n}$ est donc la fréquence acoustique critique marquant la transition entre le domaine des ondes gravito-inertielles

($|\varepsilon_{s;n}| \ll 1$) et celui des ondes gravito-inertielles-acoustiques ($|\varepsilon_{s;n}| \sim 1$). Le terme E de la marée d'équilibre peut être négligé devant D si

$$\left|\frac{\sigma U_n}{J_n}\right| \ll \Gamma_1 \left|\varepsilon_{s;n}\right| . \tag{3.55}$$

3.6.3 La marée solaire semi-diurne dans le cas de la Terre

A la différence des autres couches fluides de la planète, l'atmosphère terrestre est soumise essentiellement à l'effet perturbateur du Soleil dont le forçage thermique domine. La mesure des oscillations barométriques au niveau du sol (voir Fig. 1.7) permet de constater la prédominance des ondes diurnes et semi-diurnes. Nous nous proposons ici de confronter la théorie aux observations en nous intéressant à la composante de plus forte amplitude, la marée solaire semi-diurne, qui a pour degré longitudinal $m = 2$ et pour fréquence de forçage $\sigma = 2\left(\Omega - n_{\mathrm{orb}}\right)$. Afin d'offrir un aperçu visuel des résultats analytiques, les oscillations de pression et masse volumique associées au mode de gravité de degré $n = 0$ sont tracées pour deux vitesse angulaires de rotation propre différentes en Figures 3.9 (vitesse de rotation actuelle) et 3.10 (vitesse de rotation faible).

La durée du jour terrestre varie peu au cours de l'année du fait de la faible excentricité de la planète, dont l'effet peut être ignoré en première approximation. En outre, l'obliquité ne contribue pas au forçage semi-diurne (e.g. Dobrovolskis & Ingersoll, 1980). On suppose donc que la Terre orbite circulairement autour du Soleil et qu'elle est d'obliquité nulle. Sous ces hypothèses, la structure horizontale de la perturbation est bien représentée par le premier mode de gravité (e.g. Siebert, 1961, CL70), de degré $n = 0$ et de valeur propre associée $\Lambda_0 = 11.1596$ ($m = 2$ et $\nu = 1.0030$), tracé en Figure 3.8 (courbe rouge). Le fait de négliger le forçage gravifique devant le forçage thermique simplifie l'expression de la pression ci-dessus qui, au niveau du sol, devient

$$\delta p_n\left(0\right) = i\frac{\Gamma_1 p_0\left(0\right)}{\sigma c_s^2} J_n \frac{i\hat{k}_n + \frac{1}{2}}{i\hat{k}_n + \frac{H}{h_n} - \frac{1}{2}} . \tag{3.56}$$

Posons $H/h_0 = 1 + \varepsilon$. On déduit de (3.56) l'amplitude de l'oscillation à l'ordre zéro,

$$\left|\delta p_0\left(0\right)\right| = \frac{\Gamma_1 p_0\left(0\right)}{\sigma c_s^2} J_0 \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa + \varepsilon}} \tag{3.57}$$

son déphasage,

$$\arg\left[\delta p_0\left(0\right)\right] = \frac{\pi}{2} + \Delta\varphi_0, \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi_0\left(\varepsilon\right) = \arctan\left[\frac{\varepsilon \hat{k}_0\left(\varepsilon\right)}{\kappa + \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\varepsilon}\right] , \tag{3.58}$$

et l'angle de la position d'un maximum de pression par rapport au point sub-solaire, noté γ,

$$\gamma \equiv -\frac{\pi}{4} - \frac{\Delta\varphi_0}{2}\left[\pi\right] . \tag{3.59}$$

Le mode semi-diurne solaire présente dans le cas de la Terre la particularité d'être caractérisé par un nombre d'onde assez petit, $\hat{k}_0 \approx 0.245$, et une profondeur équivalente $h_0 = 7.84$ km proche de la hauteur de pression de l'atmosphère, $H = 8.5$ km. En conséquence, le paramètre $\varepsilon = 8.41 \times 10^{-2}$ vérifie $\varepsilon \ll 1$ et l'on a

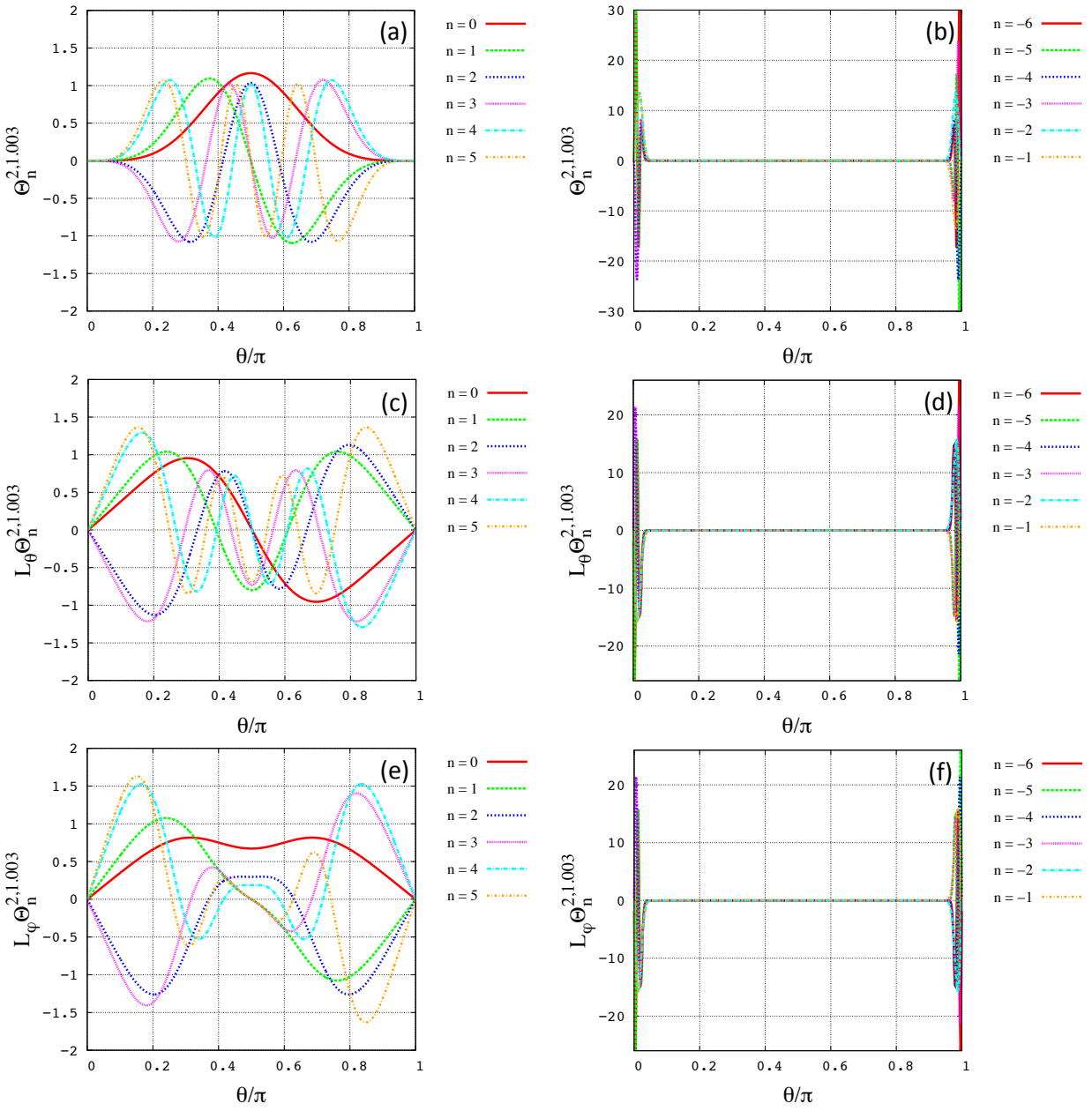


FIGURE 3.8: Fonctions de Hough $\Theta_n^{m,\nu}$, $\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}\left(\Theta_n^{m,\nu}\right)$ et $\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}\left(\Theta_n^{m,\nu}\right)$ (de haut en bas) tracées en fonction de la colatitude (θ) pour $m = 2$, $\nu = 1.003$ et $n \in [\![-6, 5]\!]$. *Gauche :* Modes de gravité ($n \in [\![0, 5]\!]$). *Droite :* Modes de Rossby ($n \in [\![-6, -1]\!]$).

$\Delta\varphi_0 = 5.85 \times 10^{-2} \ll 1$, ce qui induit pour les pics de pression les angles $\gamma_1 \approx -\pi/4$ (soit 9h00 du matin, 3 heures solaires avant midi) et $\gamma_2 \approx 3\pi/4$ (soit 21h00, 9 heures solaires après midi) visibles en Figure 3.9 (panneaux de droite). Les pics de pression observés à la Figure 1.7 apparaissant à 9h38 et 22h07, nous constatons donc que le modèle analytique *ab initio* de CL70 prédit bien le déphasage des oscillations barométriques au premier ordre.

Comme nous allons le voir, ce modèle permet aussi de quantifier l'amplitude des oscillations de pression. La difficulté que l'on rencontre pour ce résultat réside principalement dans l'estimation de J_0 qui dépend des propriétés d'absorption locales de l'atmosphère. Dans l'optique d'un calcul d'ordre de grandeur, une manière de procéder est de considérer comme Dobrovolskis & Ingersoll (1980) que le chauffage thermique est proportionnel au flux lumineux reçu par la surface efficace de sol locale. Avec cette hypothèse, le chauffage total J_{tot} s'exprime en fonction de l'angle solaire zénithal ψ_* :

$$\begin{cases} J_{\text{tot}}(\psi_*) = J_{\text{e}} \cos \psi_* & \text{pour } \psi_* \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (côté jour)}, \\ J_{\text{tot}}(\psi_*) = 0 & \text{pour } \psi_* \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ (côté nuit)}, \end{cases} \tag{3.60}$$

où J_{e} est la puissance thermique massique moyenne absorbée par la colonne d'air au niveau de l'équateur. Introduisons le flux bolométrique I_* et l'albédo de la planète A. La puissance J_e s'exprime alors

$$J_{\text{e}} = \frac{I_*(1-A)}{H\rho_0(0)}. \tag{3.61}$$

En prenant $I_* = 1361\ \text{W.m}^{-2}$, $A = 0.306$ et $\rho_0(0) = 1.217\ \text{kg.m}^{-3}$ (NASA fact sheets[5]), on obtient l'estimation $J_{\text{e}} = 91.3\ \text{mW.kg}^{-1}$. Comme la fonction de Hough du premier mode de gravité (Θ_0) s'apparente en première approximation au polynôme associé de Legendre normé P_2^2, on déduit J_0 du développement de J_{tot} en harmoniques sphériques (Section 2.2.3)[6]. Il s'ensuit

$$J_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha J_{\text{e}}, \tag{3.62}$$

où $\alpha \approx 0.19$ est le facteur de forme défini par

$$\alpha = \frac{1}{J_{\text{e}}} \int_0^{\pi} J_{\text{tot}}(\psi_*) P_2(\cos\psi_*) \sin\psi_* d\psi_*, \tag{3.63}$$

expression dans laquelle P_2 représente le polynôme de Legendre de degré 2 normé. Nous avons donc $J_0 \approx 10.6\ \text{mW.kg}^{-1}$. Avec par ailleurs $p_0(0) = 1014\ \text{mbar}$ et $c_s = 341\ \text{m.s}^{-1}$(NASA fact sheets), nous obtenons finalement $|\delta p_0(0)| \approx 0.78\ \text{mbar}$ à l'équateur. Ainsi, en prenant en compte le fait que les oscillations barométriques sont environ deux fois plus faibles à la latitude 48.363° N qu'au niveau de l'équateur en raison de la diminution de l'ensoleillement avec la latitude, on retrouve bien l'amplitude donnée par les mesures (Fig. 1.7).

3.7 Limites du modèle dans l'étude de Vénus et des exoplanètes

Nous avons montré à la section précédente que l'approche géophysique est suffisante pour comprendre la physique des marées atmosphériques et quantifier leurs effets dans le cas de la Terre. Nous allons examiner dans la suite les limites qui apparaissent lorsque l'on cherche à l'appliquer à des planètes présentant des caractéristiques dynamiques et des propriétés physiques différentes. En particulier, nous nous intéressons au cas de planètes soumises à un forçage de très basse fréquence. Ce type de forçage est typique des corps proches de la synchronisation spin-orbite. On trouve une telle configuration dans le système solaire avec la planète Vénus dont la fréquence de rotation propre rétrograde est comparable à la fréquence orbitale. Mais ce cas, loin d'être unique, semble correspondre à celui de nombreuses exoplanètes orbitant dans une zone proche de leur étoile hôte et donc soumises à d'importants effets de marée. Il est en conséquence crucial qu'un modèle de marées atmosphériques planétaires puisse s'appliquer à tout σ.

Reprenons dans ce contexte l'expression (3.46b) décrivant la structure verticale des variations de masse volumique dues à la marée thermique. Cette quantité traduit la redistribution de masse engendrée

5. Lien : http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html
6. Cette méthode est aussi détaillée dans l'Annexe D de ADLM2016.

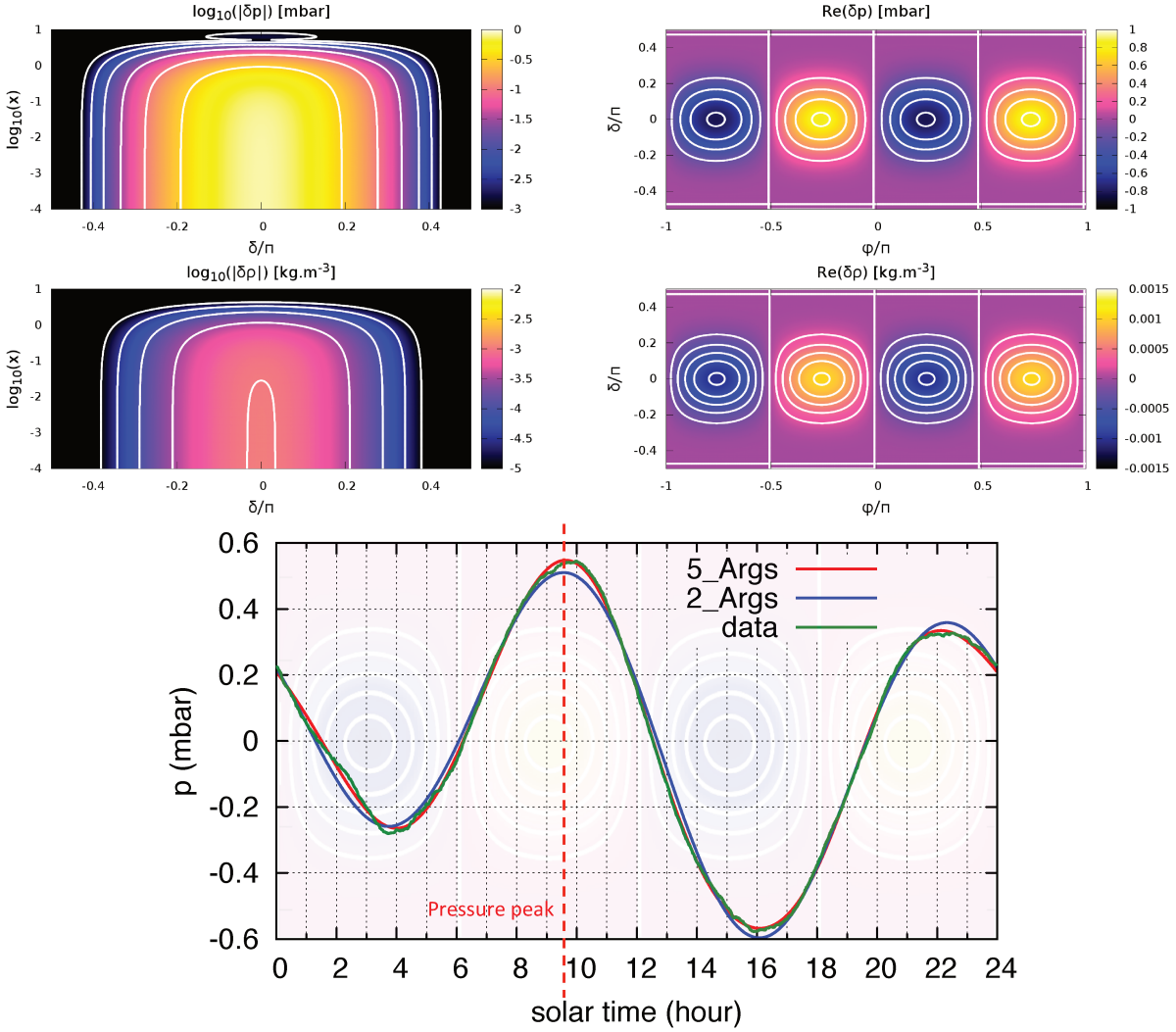


FIGURE 3.9: Oscillations solaires semi-diurnes de la pression (haut) et de la masse volumique (bas) associées au premier mode de gravité ($n = 0$) dans le cas de la Terre ($\Omega = 366.25\ n_{\mathrm{orb}}$) pour un forçage de la forme $J(\mathbf{r}, t) = J_0 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ et $U(\mathbf{r}, t) = U_0 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ avec J_0 et U_0 constants et $\sigma = 2(\Omega - n_{\mathrm{orb}})$. *Gauche* - amplitude des grandeurs en échelle logarithmique en fonction de la latitude δ (axe horizontal) et du logarithme de l'altitude normée x (axe vertical). Pour une grandeur f donnée, la couleur c est définie par $c = \log(|\delta f|)$. *Droite* - partie réelle des grandeurs au niveau du sol en fonction de la longitude φ (axe horizontal) et de la latitude (axe vertical). La couleur c est définie par $c = \Re\{\delta f\}$. *Bas* - Superposition des oscillations de pressions calculées (panneau en haut à droite) aux oscillations mesurées (Fig. 1.7, panneau en bas à droite). La variation de pression (axe vertical, en mbar) est donnée en fonction du temps solaire (axe horizontal, en heures), le point subsolaire correspondant à $t = 12$ h. Le trait rouge pointillé indique le pic de pression semi-diurne mesuré à 9h38m.

par la marée, qui détermine le couple de marée exercé sur l'atmosphère ainsi que le nombre de Love de degré 2 (k_2, défini au Chapitre 2). Le profil vertical $\delta\rho_n$ dans une couche isotherme s'exprime

$$\delta\rho_n(x) = \frac{p_0}{(gH)^2}\left\{-\frac{\kappa J_n}{i\sigma} + \frac{\Gamma_1 g h_n}{i\sigma} e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{dy_n}{dx} + \left(\frac{kH}{h_n} - \frac{1}{2}\right) y_n\right]\right\}, \tag{3.64}$$

d'où l'on déduit, en substituant y_n par la solution (3.50), les composantes de la variation de densité associées à la marée d'équilibre et à la marée dynamique,

$$\delta\rho_{n;\mathrm{E}}(x) = -\frac{p_0}{(gH)^2} U_n, \tag{3.65a}$$

$$\delta\rho_{n;\mathrm{D}}(x) = \frac{p_0 h_n}{i\sigma g^2 H^3} J_n \left[\frac{\left(i\hat{k}_n + \frac{\kappa H}{h_n} - \frac{1}{2}\right)\left[1 + \frac{H}{h_n}\left(i\sigma \frac{U_n}{J_n} - 1\right)\right]}{i\hat{k}_n + \frac{H}{h_n} - \frac{1}{2}} e^{\left(i\hat{k}_n + \frac{1}{2}\right)x} - 1 \right]. \tag{3.65b}$$

Examinons maintenant comment ces profils évoluent lorsque $\sigma \to 0$. Comme la valeur propre Λ_n varie peu tant que ν reste aux alentours de 1 (cf. Fig. 3.5), ce qui est généralement le cas[7], nous la supposons constante. La profondeur équivalente vérifie alors la loi d'échelle $h_n \propto \sigma^2$ et le nombre d'onde vertical diverge, $\hat{k}_n \propto 1/|\sigma|$. La composante de la marée d'équilibre ne dépendant pas de la fréquence de marée, elle reste la même quel que soit le régime. En revanche, la composante de la marée dynamique, comme celle de la pression, devient fortement oscillante au voisinage de la synchronisation spin-orbite et diverge suivant la loi d'échelle $|\delta\rho_{n;\mathrm{D}}| \propto 1/\sigma$, la variation de densité étant singulière en $\sigma = 0$ (voir Figs. 3.10 et 3.11). Ce comportement correspond à la propagation d'ondes de gravité non-amorties et restaurées par la stratification de l'atmosphère isotherme.

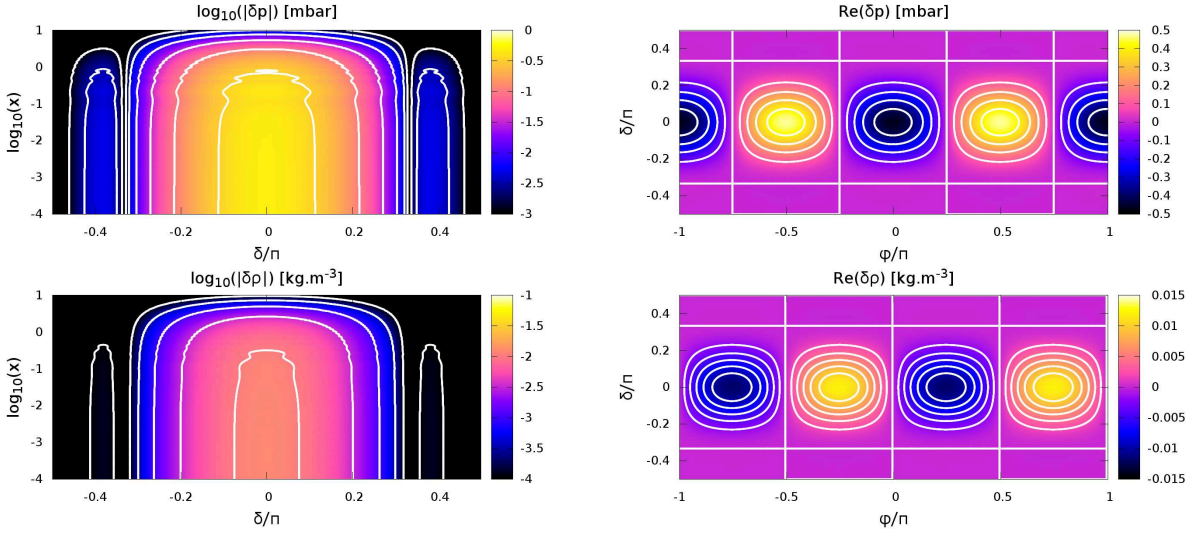


FIGURE 3.10: Oscillations solaires semi-diurnes de la pression en mbar (haut) et de la masse volumique en $\mathrm{kg.m^{-3}}$ (bas) associées au premier mode de gravité ($n = 0$) dans le cas d'une Terre à rotation lente ($\Omega = 11\, n_{\mathrm{orb}}$) pour un forçage de la forme $J(\mathbf{r}, t) = J_0 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ et $U(\mathbf{r}, t) = U_0 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ avec J_0 et U_0 constants et $\sigma = 2(\Omega - n_{\mathrm{orb}})$. *Gauche :* amplitude des grandeurs en échelle logarithmique en fonction de la latitude δ (axe horizontal) et du logarithme de l'altitude normée x (axe vertical). Pour une grandeur f donnée, la couleur c est définie par $c = \log(|\delta f|)$. *Droite :* partie réelle des grandeurs au niveau du sol en fonction de la longitude φ (axe horizontal) et de la latitude (axe vertical). La couleur c est définie par $c = \Re\{\delta f\}$.

Arrivé à ce point, une discussion sur le forçage s'impose. A la section précédente, nous avons fait le choix de considérer pour U_n et J_n des profils invariant avec l'altitude. D'autres études utilisant le modèle analytique de CL70, notamment parmi celles quantifiant le couple atmosphérique solaire semi-diurne dans le cas de la planète Vénus (e.g. Dobrovolskis & Ingersoll, 1980; Correia & Laskar, 2001; Correia et al., 2003), déterminent le profil de pertubation en supposant les sources d'énergie thermique concentrées au niveau du

7. On peut estimer ν dans le cas de la marée semi-diurne en considérant la Terre ($\nu_{\mathrm{Terre}} = 1.0030$) pour le régime des rotateurs rapides et Vénus ($\nu_{\mathrm{Vénus}} = 0.4804$) pour celui des planètes proches de la synchronisation.

sol et en négligeant la contribution du champ de vitesse (rouge) devant le terme source du chauffage (vert) dans l'équation de la chaleur donnée par Siebert (1961) et CL70,

$$\delta p\left(\sigma\right)=i\frac{\Gamma_1 p_0}{\sigma}\left(\nabla\cdot\mathbf{V}-\frac{\kappa}{gH}J\right). \tag{3.66}$$

Ces travaux expriment donc la réponse de l'atmosphère à une impulsion localisée (réponse impulsionnelle) de la forme

$$J\left(x\right)=\frac{g}{p_0}I_*\delta\left(x-0^+\right) \tag{3.67}$$

où δ est la distribution de Dirac et I_* le flux solaire. Ils aboutissent ainsi au profil de pression (Dobrovolskis & Ingersoll, 1980)

$$\delta p\left(x\right)=i\frac{\kappa F}{H\sigma}, \tag{3.68}$$

le paramètre F étant le forçage thermique, puis, moyennant l'approximation de l'*ajustement hydrostatique*, au couple de marée singulier à la synchronisation, i.e. $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}\propto 1/\sigma$. On s'aperçoit que le profil de pression obtenu correspond à la marée d'équilibre, puisque qu'il ne contient pas de dépendance en Λ_n. Il diffère donc sensiblement du profil obtenu pour la marée d'équilibre en (3.52) qui lui, ne diverge pas quand $\sigma\to 0$. Notons par ailleurs que la composante de la marée dynamique dans (3.52) ne diverge pas, elle non plus, même si elle devient fortement oscillante au voisinage de la synchronisation. Le profil vertical du forçage détermine donc fortement le comportement de la solution aux basses fréquences de marée.

Pourtant, à l'hypothèse sur le champ de vitesse près (cf. Eq. 3.66), il apparaît que les deux choix de profils présentés dans cette section ne sont en fait que les deux extrêmes d'un profil plus général, de la forme

$$\begin{cases} J\left(x\right)=J_0 & \text{si } x\in\left[0,h_J\right], \\ J\left(x\right)=0 & \text{si } x>h_J, \end{cases} \tag{3.69}$$

où h_J est la hauteur sur laquelle la puissance thermique J_0 est déposée. Le cas de l'échelon correspond à $h_J\gg H$, typique d'une atmosphère homogène en composition et de faible épaisseur optique, le cas impulsionnel à $h_J\ll H$, ce qui revient à considérer uniquement un chauffage de couche limite par diffusion thermique au niveau du sol[8]. La divergence en $1/\sigma$ tient donc à deux points essentiels :

1. l'épaisseur de la région où l'atmosphère reçoit de la puissance thermique ;
2. l'efficacité du couplage entre la pression et le champ de vitesse ;

qui seront approfondis au chapitre suivant. Nous verrons notamment que la stratification de l'atmosphère a une importance cruciale pour le second point : l'instabilité convective à laquelle sont sujettes les couches à gradient de température fortement décroissant, telle que la troposphère de Vénus, empêche la propagation des ondes de gravité observées en Fig. 3.11.

Dans les deux cas étudiés ici, on constate que le modèle présente de plus en plus de dissonances avec l'intuition physique lorsque $\sigma\to 0$, notamment par

- la divergence en $1/\sigma$ de certaines des grandeurs perturbées ; l'amplitude de ces grandeurs est infinie à la synchronisation alors qu'il n'y a pas de perturbation dans ce cas ;

8. Sur le plan pratique, le forçage-échelon est plus aisé à mettre en oeuvre que le forçage-Dirac dans la résolution de l'équation de l'équation verticale par la méthode des différences finies. Nous utilisons donc préférentiellement la solution analytique au forçage-échelon pour valider le code servant à traiter des profils de structure d'équilibre et de forçages quelconques.

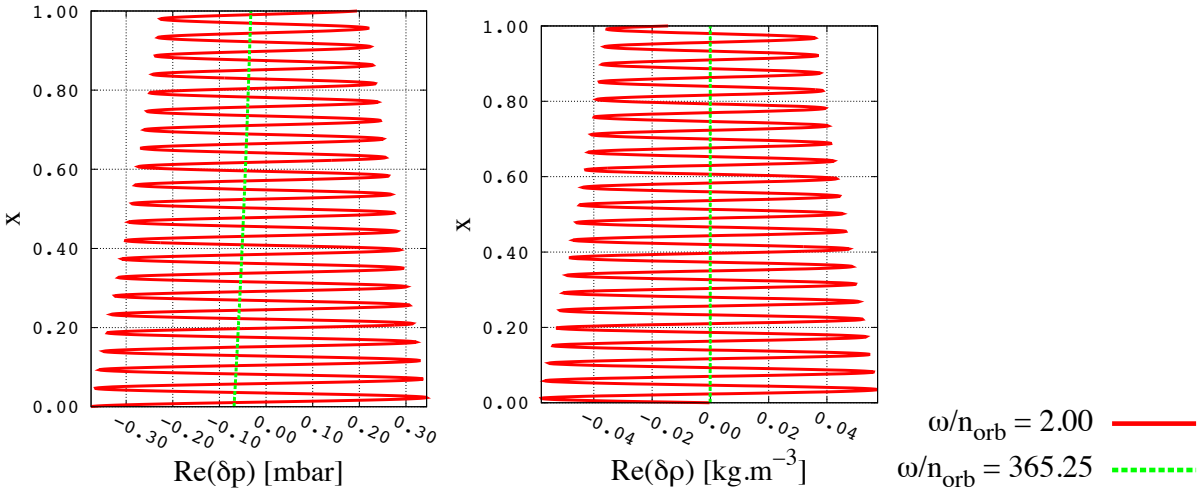


FIGURE 3.11: Profils verticaux des variations de pression (gauche) et de densité (droite) dans la région proche du sol ($x \in [0, 1]$), tracés d'après les expressions (3.52), (3.65a) et (3.65b), pour deux fréquences de marée différentes : une fréquence basse ($\omega/n_{\rm orb} = 2.00$, trait rouge continu) et la fréquence des marées thermiques terrestres ($\omega/n_{\rm orb} = 365.25$, trait vert pointillé). L'axe vertical correspond à l'altitude réduite. Les valeurs des paramètres utilisées sont données en Table 4.1.

- le caractère fortement oscillant des ondes de gravité associées à la marée dynamique, dont la longueur d'onde tend vers zéro.

Afin d'étendre le modèle analytique de CL70 à l'étude de l'ensemble des cas astrophysiques possibles, nous devons remédier à ces limites.

3.8 Conclusion

L'étude des marées atmosphériques du point de vue de la théorie classique nous a permis d'introduire les définitions de notions que nous retrouverons par la suite. Le modèle de CL70 fait en effet ressortir des caractéristiques de la dynamique essentielles telles que le lien unissant la structure verticale des ondes de marée à leur structure horizontale, les échelles caractéristiques associées (hauteur de pression, profondeur équivalente), les différentes composantes impliquées (marée d'équilibre, dynamique) ainsi que le rôle joué par les forces de rappel dans le développement de la perturbation (Coriolis et force d'Archimède). Il offre ainsi une synthèse analytique des marées atmosphériques très précieuse pour appréhender leur généralisation à tout type de planètes telluriques. Dans le cas de la Terre, cette approche fournit des résultats quantitatifs en très bon accord avec les observations. En particulier, elle explique les caractéristiques du signal solaire semi-diurne, qui peuvent sembler contre-intuitives au regard du comportement des autres couches planétaires ; par exemple, le fait que la réponse de l'atmosphère soit pour cette composante en avance de phase d'environ 3 heures solaires, à la différence de la réponse visco-élastique des couches solides, toujours en retard par rapport à la perturbation. De nombreux travaux ont montré sa pertinence dans l'étude des autres composantes de la marée atmosphérique (oscillations solaires diurnes, lunaires, luni-solaires). Elle est aujourd'hui bien établie et fait l'objet de raffinements essentiellement dans le traitement de la structure et des propriétés d'absorption de l'atmosphère. Les limites de la théorie apparaissent dès lors que l'on considère des forçages de très basses fréquences, bien inférieures aux moyens mouvements de la Lune et du Soleil dans le référentiel de la Terre. On observe dans ces cas la divergence de certaines quantités perturbées, singulières à $\sigma = 0$, et une augmentation non-réaliste du nombre d'onde vertical, qui tend vers l'infini. Ces constats soulignent la nécessité d'enrichir la physique du modèle pour en faire un outil applicable pour l'ensemble des forçages possibles depuis les planètes quasi-synchronisés jusqu'aux rotateurs rapides.

CHAPITRE 4

MARÉES ATMOSPHÉRIQUES DES PLANÈTES TELLURIQUES

Sommaire

4.1 Introduction **59**
4.2 Bilan des principaux processus dissipatifs **59**
4.2.1 Transferts radiatifs 59
4.2.2 Diffusion thermique moléculaire et turbulente 61
4.2.3 Friction visqueuse moléculaire et turbulente 63
4.2.4 Traînée ionosphérique 64
4.3 Structure des ondes dans le cas d'une atmosphère épaisse **64**
4.3.1 Equations primitives 65
4.3.2 Equation de la structure verticale 65
4.3.3 Profils verticaux des modes de marée 67
4.3.4 Potentiel de marée atmosphérique 69
4.3.5 Nombres de Love 71
4.3.6 Couple de marée 72
4.4 Structure des ondes dans le cas d'une atmosphère mince isotherme stablement stratifiée **74**
4.4.1 Profils verticaux des quantités perturbées 74
4.4.2 Potentiel de marée gravifique, nombres de Love et couple de marée 78
4.4.3 Forçages thermiques 79
4.4.3.1 Absorption du flux incident 80
4.4.3.2 Absorption du flux réfléchi par le sol 83
4.4.3.3 Absorption du flux émis par le sol 84
4.4.3.4 Diffusion thermique dans la couche limite atmosphérique 86
4.4.3.5 Le cas bi-chromatique 89
4.4.4 Réponse de l'atmosphère isotherme stablement stratifiée à un profil de chauffage constant 91
4.5 Cas d'une atmosphère mince convective en rotation lente **94**
4.5.1 Equilibre 94
4.5.2 Structure de la perturbation de marée 95
4.5.3 Nombre de Love et couple de marée 96
4.5.4 Comparaison au modèle empirique de Correia & Laskar (2001) 98
4.6 Application à la marée solaire semi-diurne **98**
4.6.1 La Terre 99
4.6.2 Vénus 102
4.6.3 Evolution du couple de marée avec la fréquence d'excitation 108
4.7 Conclusion **110**

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la modélisation des marées atmosphériques pour les planètes et exoplanètes telluriques. Au chapitre précédent, les définitions préliminaires ont été posées. Nous avons vu que la modélisation élaborée pour la Terre rend fidèlement compte de la dynamique de la marée thermique dans le cas des rotateurs rapides mais devient insuffisante quand la fréquence de marée tend vers la synchronisation. Nous nous proposons donc d'étendre le modèle de CL70 à toute planète de faible masse. Nous introduisons d'abord les processus dissipatifs à l'oeuvre dans les atmosphères. Nous montrons que ces processus, qui ont pour effet d'amortir les ondes de basses fréquences, prédominent au voisinage de la synchronisation et régularisent la perturbation de marée. Nous établissons ensuite les équations gouvernant la dynamique des ondes sans faire l'hypothèse de couche mince, en incorporant directement dans les équations primitives les pertes de chaleur par rayonnement thermique. Ceci nous permet de déterminer les structures horizontale et verticale des ondes de marées dissipatives, dont nous déduisons le potentiel réponse de la marée atmosphérique, les nombres de Love et le couple de marée exercée sur l'atmosphère dans le cas général. Enfin, nous traitons deux cas simples pour lesquels nous donnons la structure de la perturbation et les expressions des grandeurs quantifiant la marée atmosphérique : le cas de l'atmosphère isotherme stablement stratifiée et celui de l'atmosphère convective. Nous complétons cette étude par des prescriptions pour les profils de forçage thermique. Pour clore ce chapitre, nous quantifions le couple de la marée semi-diurne dans le cas de la Terre et de Vénus.

4.2 Bilan des principaux processus dissipatifs

Dans l'atmosphère, plusieurs processus dissipatifs sont susceptibles de contribuer à amortir les ondes de marées.

4.2.1 Transferts radiatifs

Dans le modèle terrestre (Chapitre 3), l'énergie injectée dans le système par la marée est intégralement convertie en mouvement et en oscillations de température. En réalité, comme l'émission thermique d'un gaz dépend de la température, ces oscillations génèrent aussi des pertes thermiques. Une couche d'atmosphère d'épaisseur δr libère donc de la chaleur qui est évacuée vers l'espace ou bien vient se redéposer sur le sol ou sur les autres couches. Ce processus peut être ignoré dans le cas des marées diurnes et semi-diurnes terrestres pour lesquels ses effets sur la redistribution des masses sont inférieurs de deux ordres de grandeurs aux effets dynamiques [1]. Néanmoins, certaines études ont mis en avant assez tôt l'importance qu'il pouvait avoir pour d'autres types d'atmosphères. L'une des pionnière en la matière est Lindzen & McKenzie (1967) (voir aussi Dickinson & Geller, 1968), qui évoque le cas de l'atmosphère martienne pour laquelle ce refroidissement radiatif est significatif, et suggère d'introduire les pertes radiatives J_{rad} dans l'équation de la chaleur, (3.27e), sous la forme

$$J_{\mathrm{rad}}\left(r, \delta T\right) = C_p \sigma_0\left(r\right) \delta T. \tag{4.1}$$

Cette loi, traduisant des pertes de chaleur proportionnelles aux variations de température, porte dans la littérature le nom de *refroidissement newtonien* (*Newtonian cooling* en anglais). Elle est paramétrée par la fréquence caractéristique σ_0 que nous appellerons fréquence radiative et qui correspond à l'inverse du temps

1. Notons qu'au niveau de la stratopause ($z \sim 50$ km), le refroidissement radiatif peut être suffisamment rapide pour avoir sur la marée thermique un impact observable (Lindzen & McKenzie, 1967).

de refroidissement radiatif. Comme nous le verrons en Section 4.3.3, l'importance du refroidissement radiatif est directement commensurable au rapport de fréquences σ_0/σ. Quand la fréquence de marée (σ) devient comparable ou inférieure à cette fréquence, les effets du refroidissement radiatif affectent sensiblement les ondes de marées. Sinon, ils sont négligeables, comme dans le cas de la Terre ($\sigma_0 \sim 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$ d'après Idso & Jackson, 1969, contre $\sigma \sim 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$). Nous prendrons donc en compte dans le modèle étendu les effets du rayonnement sous la forme donnée par (4.1).

Lindzen & McKenzie (1967) donnent l'équation de la structure verticale modifiée par les pertes radiatives dans le cas où H et σ_0 sont constantes. L'équation (3.41) se réécrit

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} + \hat{k}_n^2\left(x\right) y_n = \frac{\kappa J_n}{\Gamma_1 g h_n} \frac{\sigma}{\sigma - i\sigma_0} e^{-x/2}, \tag{4.2}$$

avec

$$\hat{k}_n^2 = \frac{\kappa H}{h_n} \frac{\sigma}{\sigma - i\sigma_0} - \frac{1}{4}. \tag{4.3}$$

On voit dans l'expression du nombre d'onde l'effet des pertes radiatives, qui amortissent les oscillations. Lorsque $|\sigma| \ll \sigma_0$, on a $\hat{k}_n^2 \propto i\sigma^{-1}$. En conséquence, le taux d'amortissement du mode de degré n, $\Im\left\{\hat{k}_n\right\}$, diverge à $\sigma \to 0$ et vient écraser l'onde de marée. De plus, le second membre de l'équation, qui traduit le forçage des oscillations devient proportionnel à σ dans ce régime, ce qui a pour effet d'atténuer l'amplitude du mode. Le comportement fortement oscillant de la perturbation observé au Chapitre 3 dans la gamme des basses fréquences se transforme donc en comportement fortement amorti et atténué sous l'effet du refroidissement radiatif.

Dans cette approche, la fréquence radiative peut être exprimée en fonction des paramètres physiques de l'atmosphère. Pour cela, assimilons une couche d'épaisseur δr à un corps noir de concentration molaire $C_0\left(r\right) = \rho_0/\mathcal{M}$ et d'émissivité molaire ϵ_0. La loi de Stefan-Boltzmann donne le rayonnement suivant la direction verticale

$$\delta I = \sigma_{\mathrm{SB}} C_0 \epsilon_0 T^4 \delta r. \tag{4.4}$$

où σ_{SB} représente la constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma_{\mathrm{SB}} = 5.670373 \times 10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$, e.g. Mohr et al., 2012). En linéarisant cette expression au voisinage de l'équilibre radiatif, on obtient la puissance thermique rayonnée par unité de masse, J_{rad} sous la forme

$$J_{\mathrm{rad}}\left(r, \delta T\right) = \frac{8\epsilon_0 \sigma_{\mathrm{SB}} T_0^3}{\mathcal{M}} \delta T, \tag{4.5}$$

expression dans laquelle on identifie la fréquence radiative :

$$\sigma_0\left(r\right) = \frac{8\kappa\epsilon_0\sigma_{\mathrm{SB}}}{\mathcal{R}_{\mathrm{GP}}} T_0^3. \tag{4.6}$$

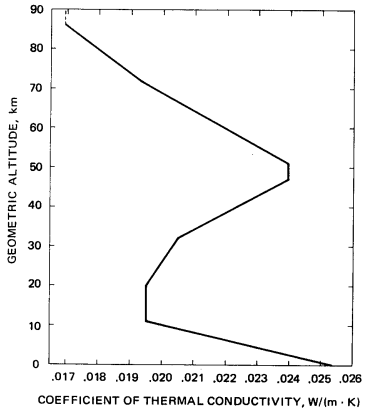
Notons toutefois que le refroidissement newtonien n'inclut pas les échanges radiatifs s'effectuant entre les différentes couches de l'atmosphère (réabsorption partielle du rayonnement émis par une couche par les autres), qui sont complexes et non-linéaires. De la même manière, la réémission par le sol d'une partie du flux émis par l'atmosphère est ignorée. Cette loi décrit donc le comportement d'une atmosphère de relativement faible épaisseur optique à l'intérieur de laquelle le rayonnement émis par ses différentes couches

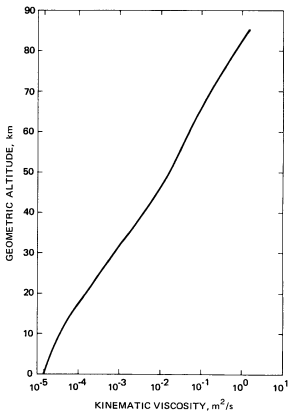
se propage vers le sol ou l'espace sans être réabsorbé, ce qui permet d'ignorer les effets non-linéaires. Le cas asymptotique opposé, où l'atmosphère est d'une épaisseur optique telle que le rayonnement d'une couche est entièrement réabsorbé par les couches voisines est généralement traité à l'aide d'une loi en gradient de température, comme dans Gu & Ogilvie (2009). Ce cas est typique des enveloppes de géantes gazeuses, dont la profondeur est très supérieure à l'épaisseur optique.

4.2.2 Diffusion thermique moléculaire et turbulente

La diffusion thermique est le processus dissipatif prédominant dans l'atmosphère terrestre (e.g. Wilkes, 1949). Elle se divise en deux contributions :

- la *diffusion moléculaire*, qui résulte de la conductivité thermique du milieu au repos. Pour l'air à 20°, la diffusivité thermique moléculaire vaut $K_{\text{diff;M}} = 2.0 \times 10^{-5}\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}$ au niveau du sol (Holman, 2002). La diffusion thermique moléculaire est beaucoup plus forte dans la haute atmosphère, où $K_{\text{diff;M}} \sim 10^3\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}$ (Wilkes, 1949). Dans une atmosphère mince, homogène en composition, dont la capacité thermique et la conductivité ne varient pas avec l'altitude, la diffusivité suit la loi d'échelle $K_{\text{diff}} \propto 1/\rho_0$, ce qui lui donne le profil en exponentielle $K_{\text{diff;M}}(x) = K_{\text{diff;M}}(0)\, e^x$ (e.g. Lindzen, 1968b, CL70).
- la *diffusion turbulente*, qui est la conséquence du mélange turbulent dû à la convection et au déferlement des ondes de marées (Lindzen, 1981). La diffusivité turbulente varie en fonction de l'altitude. Elle est supérieure de plusieurs ordres de grandeurs à la diffusivité thermique moléculaire au niveau du sol ($K_{\text{diff;T}} \sim 0.1 - 10\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}$ d'après Wilkes, 1949) et dépend fortement des propriétés conductives et topographiques de ce dernier (Bernard, 1962, CL70).





Symbol	Sea-level value
$C_{s,0}$	3.40294×10^2 m/s
g_0	9.80665 m/s²
$H_{P,0}$	8.4345×10^3 m
$k_{t,0}$	2.5326×10^{-3} J/(s·m·K) or W/(m·K)
L_0	6.6328×10^{-8} m
$V_{m,0}$	2.3643×10^1 m³/kmol
M_0	2.89644×10^1 kg/kmol
N_0	2.5470×10^{25} m⁻³
P_0	1.01325×10^5 N/m²
T_0	2.8815×10^2 K
V_0	4.5894×10^2 m/s
η_0	1.4607×10^{-5} m²/s
μ_0	1.7894×10^{-5} kg/(m·s)
ν_0	6.9193×10^9 s⁻¹
ρ_0	1.2250 kg/m³

FIGURE 4.1: *Gauche* - Profil vertical de conductivité thermique ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$). *Milieu* - Profil vertical de viscosité cinématique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$). L'axe des ordonnées correspond à l'altitude (km), celui des abscisses aux différentes quantités. *Droite* -Valeurs des paramètres au niveau de la mer (droite). D'après l'*US Standard Atmosphere* (NOAA et al., 1976).

La prise en compte de la diffusion thermique introduit dans l'équation du transport de la chaleur un terme en laplacien, de la forme

$$J_{\text{diff}}(r, \delta T) = C_p K_{\text{diff}} \Delta \delta T. \tag{4.7}$$

Ainsi, (3.27e) devient

$$\frac{C_p}{\Gamma_1}\left(\partial_t \delta T + \frac{1}{H}\frac{dT_0}{dx}V_r\right) = \frac{gH}{\rho_0}\left(\partial_t \delta\rho + \frac{1}{H}\frac{d\rho_0}{dx}V_r\right) + J + C_p K_{\text{diff}} \Delta \delta T. \tag{4.8}$$

Le laplacien de ce nouveau terme complique le traitement analytique du problème dans le cas sphérique. Pour palier à cet obstacle, nous allons nous restreindre au cas où la diffusion thermique peut être considérée comme une perturbation ne jouant un rôle important qu'au voisinage de $\sigma = 0$. Dans ce domaine, ainsi que nous avons pu le constater précédemment, le nombre d'onde vertical diverge, devenant très supérieur au nombre d'onde horizontal. Cela implique que la longueur d'onde, ou plus généralement l'échelle de longueur des oscillations, diminue drastiquement lorsque $\sigma \to 0$.

Ainsi, dans la gamme de fréquences où la longueur L_n définie en (3.43) s'avère petite devant les échelles de longueur caractéristiques de la structure verticale (typiquement $L_n \ll H$), il est possible de se placer dans le cadre de l'approximation WKB (Wentzel, 1926; Kramers, 1926; Brillouin, 1926). Cette méthode, initialement mise en oeuvre en physique quantique, est très utilisée pour tout problème ondulatoire où la longueur d'onde caractéristique des ondes est petite devant les échelles caractéristiques de variation des quantités d'équilibre. Elle consiste à développer l'équation de la structure verticale au premier ordre en K_{diff} pour identifier la contribution de la perturbation au nombre d'onde. En faisant l'hypothèse que le profil vertical d'une grandeur perturbée f s'écrit sous la forme $f_n(x) = f_n^{(0)} e^{i\hat{k}_n x}$ et en négligeant la composante horizontale de l'opérateur laplacien, proportionnelle au carré du nombre d'onde horizontal, on approxime (4.7) par

$$J_{\text{diff}} \approx \frac{C_p K_{\text{diff}}}{H^2} \hat{k}_n^2 \delta T_n. \tag{4.9}$$

Etant donné que J_{diff} est comme J_{rad} (cf. Eq. 4.1) proportionnel à la variation de température, on déduit directement à partir de (4.3) la relation de dispersion des modes des marée en remplaçant σ_0 par $\left(\sigma_0 + K_{\text{diff}} \hat{k}_n^2 / H^2\right)$ dans cette équation :

$$\hat{k}_n^2 = \frac{\kappa H}{h_n} \frac{\sigma}{\sigma - i\left(\sigma_0 + \frac{K_{\text{diff}}}{H^2} \hat{k}_n^2\right)} - \frac{1}{4}. \tag{4.10}$$

D'après ce résultat, le terme de diffusion thermique n'est assimilable à une perturbation qu'à la condition

$$\left|\hat{k}_n^2\right| \ll \frac{H^2}{K_{\text{diff}}} \sqrt{\sigma^2 + \sigma_0^2}, \tag{4.11}$$

donc en dehors d'un intervalle de fréquence proche de la synchronisation ($\sigma = 0$). Sous cette hypothèse, on peut écrire le nombre d'onde vertical

$$\hat{k}_n = \hat{k}_n^{(0)} + \hat{k}_n^{\text{diff}} \tag{4.12}$$

où $\hat{k}_n^{(0)}$ représente le nombre d'onde de la réponse non-perturbée et $\hat{k}_n^{\text{diff}}$ la composante perturbative associée à la diffusion thermique, telle que $\left|\hat{k}_n^{\text{diff}}\right| \ll \left|\hat{k}_n^{(0)}\right|$. La substitution de (4.12) dans la relation de dispersion permet d'identifier la contribution de la diffusion,

$$\hat{k}_n^{\text{diff}} \approx i \frac{K_{\text{diff}}}{2H^2(\sigma - i\sigma_0)} \left(\hat{k}_n^{(0)}\right)^3, \tag{4.13}$$

la composante d'ordre 0 étant donnée par

$$\left(\hat{k}_n^{(0)}\right)^2 \sim \frac{\kappa H}{h_n} \frac{\sigma}{\sigma - i\sigma_0}. \tag{4.14}$$

Le nombre d'onde vertical se met ainsi sous la forme

$$\hat{k}_n = \hat{k}_n^{(0)} \left(1 + \eta_{\text{diff}}\right), \quad \text{avec} \quad \eta_{\text{diff}} = i \frac{K_{\text{diff}} \left(\hat{k}_n^{(0)}\right)^2}{2H^2 \left(\sigma - i\sigma_0\right)} \tag{4.15}$$

L'approximation est valable pour $|\eta_{\text{diff}}| \ll 1$, ce qui permet de définir la fréquence critique en dessous de laquelle la diffusion thermique cesse d'être une perturbation, notée $\sigma_{\text{diff;n}}$. En l'absence de rayonnement thermique,

$$\eta_{\text{diff}} \sim i \frac{K_{\text{diff}} N^2 \left|\Lambda_n\right|}{2R^2 \sigma^3}, \quad \text{d'où} \quad \sigma_{\text{diff;n}} = \left(\frac{K_{\text{diff}} N^2 \left|\Lambda_n\right|}{2R^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{4.16}$$

avec $N^2 = \kappa g/H$. La perturbation d'ordre 1 du nombre d'onde, $\hat{k}_n^{\text{diff}}$, est un imaginaire pur dans ce cas, ce qui se traduit par un amortissement des oscillations. En effectuant un prolongement asymptotique de ce comportement dans la gamme de fréquences $-\sigma_{\text{diff;n}} < \sigma < \sigma_{\text{diff;n}}$, on retrouve l'effet bien connu de la diffusion (Mathis, 2009; Alvan et al., 2014), qui vient écraser rapidement les ondes gravito-inertielles quand $\sigma \to 0$ (la composante associée à la diffusion diverge suivant la loi d'échelle $\hat{k}_n^{\text{diff}} \propto \sigma^{-4}$)[2]. Si les pertes radiatives sont prises en compte, alors η_{diff} et $\sigma_{\text{diff;n}}$ deviennent

$$\eta_{\text{diff}} \sim -i \frac{K_{\text{diff}} N^2 \Lambda_n}{2R^2 \sigma_0^2 \sigma} \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{diff;n}} = \frac{K_{\text{diff}} N^2 \left|\Lambda_n\right|}{2R^2 \sigma_0^2}. \tag{4.17}$$

L'effet de la diffusion thermique conjuguée à un refroidissement newtonien apparaît plus complexe que celui de la diffusion seule. Dans la gamme de fréquence $\sigma_{\text{diff;n}} < |\sigma| < \sigma_0$, la divergence de la composante du nombre d'onde associée à la diffusion est plus lente : on a $\hat{k}_n^{\text{diff}} \propto \sigma^{-3/2}$.

4.2.3 Friction visqueuse moléculaire et turbulente

L'atmosphère n'est pas un fluide parfait. Elle dissipe donc de l'énergie par friction visqueuse. Ce mécanisme, comme la diffusion thermique, comporte deux composantes de natures différentes :

- la *friction moléculaire*, due à la cohésion entre les molécules du fluide. Elle est paramétrée par la viscosité cinématique moléculaire ν_{M} (à ne pas confondre avec le paramètre de spin ν). Pour l'air au niveau sol, $\nu_{\text{M}} \approx 10^{-5}\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}$. Comme la diffusivité thermique moléculaire, la viscosité cinématique moléculaire d'une atmosphère mince isotherme et homogène en composition vérifie la loi d'échelle $\nu_{\text{M}} \propto 1/\rho_0$. Elle suit en conséquence le même profil en exponentielle que $K_{\text{diff;M}}$, i.e. $\nu_{\text{M}}(x) = \nu_{\text{M}}(0)\, e^x$ (Lindzen, 1968b, CL70).
- la *friction turbulente*, résultant du caractère turbulent d'un écoulement et paramétré par la viscosité cinématique turbulente ν_{T}. Cette viscosité est très variable et domine généralement la viscosité moléculaire (e.g. Barry & Chorley, 2009).

L'ajout de la viscosité dans l'équation de Navier-Stokes introduit un terme en $\Delta\mathbf{V}$. Il augmente l'ordre du système différentiel à résoudre et induit un couplage en vitesse entre les trois composantes de l'équation

2. Pour comprendre l'effet de la diffusion thermique au voisinage de $\sigma = 0$, on est amené à extrapoler un résultat établi pour le nombre d'onde dans le cas où la diffusion est une perturbation à une gamme de fréquences où cette approximation n'est plus valide ($|\sigma| < \sigma_{\text{diff;n}}$). En effet, en toute rigueur, le résultat n'est valable que lorsque la diffusion est une perturbation. Néanmoins, l'extension de son domaine de validité se justifie de manière empirique par le fait que le comportement prédit par son extrapolation dans zone proche de $\sigma = 0$ correspond bien à l'effet de la diffusion sur les ondes : lorsqu'une onde est fortement oscillante, le laplacien tend à l'amortir. Il correspond aussi à ce que l'on observe dans les simulations numériques (e.g. Alvan et al., 2014).

qui empêche de séparer les dépendances en latitude et altitude dans le cas avec rotation. Ce point peut toutefois être traité à l'aide de la méthode WKB comme la diffusion thermique.

Le cas de la friction visqueuse moléculaire, pour laquelle on a la loi d'échelle $\nu_{\mathrm{M}} \propto 1/\rho_0$, a fait l'objet de nombreux travaux. Certaines approches, telles que Yanowitch (1967a) et Yanowitch (1967b) simplifient le problème en s'intéressant à la dynamique des ondes de gravité internes dans un plan immobile ($\Omega = 0$), ce qui a pour effet d'éliminer les termes de Coriolis. Ces approches, généralisées par Lindzen (1968b) aux cas des marées atmosphériques diurnes et semi-diurnes, traitent la friction visqueuse comme une perturbation linéaire comparable au refroidissement newtonien décrit à la sous-section (4.2.1). Dans ce modèle, appelé *friction de Rayleigh*, le profil radial de la force visqueuse est exprimé sous la forme

$$\nu_{\mathrm{M}} \Delta V \sim \varepsilon e^{x} V, \tag{4.18}$$

où ε est ici un paramètre petit devant 1. Pour la Terre, ces études sont en bon accord avec les observations (CL70). Comme le montrent Volland (1974a) et Volland (1974b), il est possible d'introduire la friction de Rayleigh directement dans le formalisme de la théorie classique en projetant la réponse de l'atmosphère sur les fonctions de Hough complexes (définies au Chapitre 6) plutôt que sur les fonctions de Hough réelles. Le modèle présenté dans ce chapitre ne prend pas en compte la viscosité, dont l'introduction est reportée à des travaux ultérieurs. L'effet de la friction de Rayleight sur les ondes de marée est néanmoins étudié au Chapitre 6 dans la modélisation des marées océaniques.

4.2.4 Traînée ionosphérique

Un autre processus pouvant être modélisé par une friction de Rayleigh en première approche est la *traînée ionosphérique* résultant de l'interaction entre particules ionisées et particules neutres dans la haute atmosphère (altitudes supérieures à 100 km pour la Terre, cf. CL70) lorsque cette dernière est magnétisée. Les particules ionisées sont soufflées par la marée à travers les lignes du champ magnétique de la planète, ce qui génère des champs électriques. Comme la conductivité électrique du milieu est importante, des courants électriques se créent qui, en retour, perturbent le champ magnétique. Les particules ionisées en déplacement entraînent ainsi par friction les particules neutres des couches inférieures au niveau de l'interface. La traînée ionosphérique a été introduite dans la théorie des marées atmosphériques à partir des observations réalisées dans le cas de la Terre (e.g. Lindzen & McKenzie, 1967; Volland, 1974a), ses effets dans la haute atmosphère terrestre ayant des répercussions sur le champ magnétique mesuré au niveau du sol (CL70). Cependant, étant donné la faible densité des couches qui en sont le siège, ce mécanisme contribue peu à la redistribution de masse de la marée par rapport aux autres mécanismes dissipatifs. Il sera donc ignoré dans ce travail.

4.3 Structure des ondes dans le cas d'une atmosphère épaisse

On s'intéresse dans cette section à la structure des ondes de marées dans une atmosphère d'épaisseur comparable au rayon de la planète ($H_{\mathrm{atm}} \sim R$). Ce type de cas peut se rencontrer chez les super-Terres massives ayant accrété un volume important de gaz. Comme au Chapitre 3, l'atmosphère est supposée homogène en composition, stratifiée et en rotation solide avec le corps.

4.3.1 Equations primitives

En gardant les notations et les hypothèses introduites au chapitre précédent (notamment les approximations de Cowling et traditionnelle), on exprime les équations de la dynamique sans faire l'approximation $r \approx R$ et en supposant tous les paramètres dépendant de r. Dans le membre de gauche de l'équation de Navier-Stokes radiale (4.19c), on ajoute le terme d'advection en $\partial_t V_r$, et dans l'équation du transport de la chaleur (4.19d) les pertes radiatives modélisées par le refroidissement newtonien $J_{\mathrm{rad}} = C_p \sigma_0 \delta T$. Le nouveau système d'équations primitives s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned}
\partial_t V_\theta - 2\Omega V_\varphi \cos\theta &= -\frac{1}{r}\partial_\theta \left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), && (4.19a)\\
\partial_t V_\varphi + 2\Omega \cos\theta V_\theta &= -\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi \left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), && (4.19b)\\
\rho_0 \partial_t V_r &= -\partial_r \delta p - g\delta\rho - \rho_0 \partial_r U, && (4.19c)\\
\partial_t \delta\rho + \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \rho_0 V_r\right) &= -\frac{\rho_0}{r\sin\theta}\left[\partial_\theta \left(\sin\theta V_\theta\right) + \partial_\varphi V_\varphi\right], && (4.19d)\\
\frac{C_p}{\Gamma_1}\left(\partial_t \delta T + \frac{dT_0}{dr} V_r\right) &= \frac{gH}{\rho_0}\left(\partial_t \delta\rho + \frac{d\rho_0}{dr} V_r\right) + C_p \sigma_0 \delta T + J, && (4.19e)\\
\frac{\delta p}{p_0} &= \frac{\delta T}{T_0} + \frac{\delta\rho}{\rho_0}. && (4.19f)
\end{aligned}}$$

4.3.2 Equation de la structure verticale

La procédure permettant d'établir les profils verticaux des ondes gravito-inertielles est identique à celle suivie dans le cas de la coquille mince. Dans un premier temps, le développement des grandeurs perturbées en séries de Fourier suivant les coordonnées temporelle et azimutale permet de retrouver l'opérateur $\mathcal{L}$ donné par (3.34) ainsi que les opérateurs $\mathcal{L}_\theta$ et $\mathcal{L}_\varphi$ décrivant la structure horizontale des vitesses et déplacements respectivement latitudinaux et azimutaux (cf. Eq. 3.32). On procède ensuite à la séparation des variables en projetant les coefficients de Fourier sur la base des fonctions de Hough, faisant ainsi apparaître l'équation de Laplace, (3.36). A la différence du cas de la couche mince, les modes de la couche épaisse ne sont pas caractérisés par les profondeurs équivalentes constantes données par (3.40) mais par des profils de profondeurs équivalentes s'exprimant

$$h_n(r) = \frac{r^2 \sigma^2}{g\Lambda_n}. \tag{4.20}$$

Afin d'adopter les conventions de la dynamique des fluides astrophysiques, on exprime les profils verticaux des quantités perturbées en fonction du déplacement vertical et de la pression plutôt que de la variation de pression particulaire G (cf. Eq. 3.28),

$$G = -\frac{1}{\Gamma_1 p_0}\left(\partial_t \delta p + \frac{1}{H}\frac{dp_0}{dx} V_r\right). \tag{4.21}$$

Ceci ne modifie pas l'équation des ondes qui, après quelques manipulations des équations (4.19c) à (4.19f), s'écrit sous la forme du système

$$\frac{dY}{dr} = \begin{bmatrix} A_1(r) & B_1(r) \\ A_2(r) & B_2(r) \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} C_1(r) \\ C_2(r) \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad Y = \begin{bmatrix} r^2 \xi_{r;n} \\ \rho_0^{-1} \delta p_n \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

et les coefficients

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{d\ln\rho_0}{dr} - \frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{N^2}{g}, & B_1 &= \frac{\Lambda_n}{\sigma^2} - \frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{r^2}{c_s^2}, & C_1 &= \frac{\kappa r^2\rho_0}{p_0\left(i\sigma+\sigma_0\right)}J_n + \frac{\Lambda_n}{\sigma^2}U_n \\ A_2 &= \frac{\sigma^2}{r^2}\left(1 - \frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{N^2}{\sigma^2}\right), & B_2 &= -\frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{g}{c_s^2} - \frac{d\ln\rho_0}{dr}, & C_2 &= \frac{\kappa g\rho_0}{p_0\left(i\sigma+\sigma_0\right)}J_n - \frac{dU_n}{dr}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

où la vitesse du son, c_s, s'exprime

$$c_s = \sqrt{\frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0}}. \tag{4.24}$$

Puis, on transforme (4.22) en une équation différentielle inhomogène du deuxième ordre,

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(r^2\xi_{r;n}\right) + A\left(r\right)\frac{d}{dr}\left(r^2\xi_{r;n}\right) + B\left(r\right)r^2\xi_{r;n} = C\left(r\right), \tag{4.25}$$

avec

$$A = -A_1 - B_2 - \frac{1}{B_1}\frac{dB_1}{dr}, \tag{4.26a}$$

$$B = A_1\left(B_2 + \frac{1}{B_1}\frac{dB_1}{dr}\right) - \frac{dA_1}{dr} - B_1A_2, \tag{4.26b}$$

$$C = \frac{dC_1}{dr} + B_1C_2 - C_1\left(\frac{1}{B_1}\frac{dB_1}{dr} + B_2\right). \tag{4.26c}$$

Les deux premiers coefficients, A et B, traduisent l'effet de la structure de l'atmosphère sur les ondes tandis que le coefficient C représente le forçage gravito-thermique appliqué à la couche.

La dernière étape consiste à éliminer dans (4.25) le terme en $d\left(r^2\xi_{r;n}\right)/dr$. Pour cela, on introduit la fonction sans dimension Φ_n et le volume associé au déplacement vertical, Ψ_n, définis respectivement par

$$\Phi_n\left(r\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_R^r A\left(u\right)du\right) \quad \text{et} \quad r^2\xi_{r;n} = \Phi_n\Psi_n. \tag{4.27}$$

Quand on ignore le rayonnement thermique (σ_0) et que l'on fait l'*hypothèse d'anélasticité*, qui consiste à négliger les termes associés à la propagation des ondes acoustiques (plus précisément le terme en $B_1^{-1}dB_1/dr$ qui donnera K_{curv} ; cf. Eq. 4.34), on obtient la fonction de passage usuelle $\Phi_n = \rho_0^{-1/2}$ (Press, 1981; Zahn et al., 1997; Mathis et al., 2008). Ce changement de variable permet d'écrire (4.25) comme une équation de type Schrödinger,

$$\boxed{\frac{d^2\Psi_n}{dr^2} + \left[B - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dr} + \frac{A^2}{2}\right)\right]\Psi_n = C\Phi_n^{-1},} \tag{4.28}$$

où l'on identifie le nombre d'onde vertical caractéristique des ondes gravito-inertielles se propageant dans l'atmosphère en l'absence de forçage (réponse libre), $\hat{k}_n$, donné par

$$\hat{k}_n^2(r) = B - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dr} + \frac{A^2}{2}\right). \tag{4.29}$$

Ce nombre d'onde est l'équivalent non-normé de celui introduit au Chapitre 3 pour les couches minces sans processus dissipatifs. L'échelle de longueur des variations du mode de degré n s'exprime ainsi

$$L_n(r) = \frac{2\pi}{\left|\hat{k}_n\right|}. \tag{4.30}$$

et correspond à l'équivalent de (3.43) pour la couche épaisse dissipative. La forme de l'équation des ondes (4.28) est courante dans la littérature traitant de la dynamique des ondes internes gravito-inertielles dans les couches fluides des étoiles et des planètes géantes (Zahn, 1975; Press, 1981; Zahn et al., 1997; Mathis et al., 2008; Mathis & de Brye, 2011). Introduisons le nombre d'onde horizontal, $\hat{k}_{\perp;n}$, défini par (e.g. Arras & Socrates, 2010)

$$\hat{k}_{\perp;n}^2(r) = \frac{\Lambda_n}{r^2}. \tag{4.31}$$

L'analyse des coefficients A et B montre qu'en l'absence de mécanismes dissipatifs, le nombre d'onde vertical suit dans les basses fréquences la loi d'échelle

$$\hat{k}_n^2 \sim \hat{k}_\perp^2 \frac{N^2}{\sigma^2}, \tag{4.32}$$

analogue à celle obtenue pour la couche mince (Wilkes, 1949, CL70). Quand on ajoute les mécanismes dissipatifs, cette loi devient

$$\hat{k}_n^2 \sim \hat{k}_\perp^2 \frac{N^2}{\sigma^2}\frac{\sigma}{\sigma - i\sigma_0}, \tag{4.33}$$

et l'on retrouve le résultat de Lindzen & McKenzie (1967), donné par (4.3).

4.3.3 Profils verticaux des modes de marée

Maintenant que nous avons établi l'équation de la structure verticale, il ne nous reste plus qu'à exprimer les différentes quantités perturbées en fonction de Ψ_n et des forçages, U_n et J_n. Introduisons avant cela les paramètres

$$\sigma_{s;n}(r) = \Lambda_n^{\frac{1}{2}}\frac{c_s}{r}, \quad \varepsilon_{s;n}(r) = \frac{i\sigma + \Gamma_1\sigma_0}{i\sigma + \sigma_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{s;n}}\right)^2 \quad \text{et} \quad K_{\text{curv}}(r) = \frac{h_n\varepsilon_{s;n}^{-1}}{1-\varepsilon_{s;n}}\frac{d\varepsilon_{s;n}}{dr}. \tag{4.34}$$

On reconnaît dans $\sigma_{s;n}$ et $\varepsilon_{s;n}$ la généralisation aux couches épaisses de la fréquence de Lamb et du paramètre marquant la transition du régime des moyennes fréquences à celui des hautes fréquences, introduits au Chapitre 3. Le paramètre de sphéricité K_{curv} traduit quant à lui la variation des caractéristiques de la structure de l'atmosphère suivant la direction radiale. Pour une couche fine isotherme, il est négligeable. Avec

ces paramètres, les relations de polarisation de l'atmosphère épaisse dissipative s'écrivent, pour le champ de vitesse,

$$V_{r;n} = \frac{i\sigma}{r^2}\Phi_n\Psi_n, \tag{4.35a}$$

$$V_{\theta;n} = \frac{i}{\sigma r\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr}+\mathcal{A}_n\left(r\right)\Psi_n\right]-\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}J_n-\varepsilon_{s;n}U_n\right\}, \tag{4.35b}$$

$$V_{\varphi;n} = -\frac{1}{\sigma r\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr}+\mathcal{A}_n\left(r\right)\Psi_n\right]-\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}}J_n-\varepsilon_{s;n}U_n\right\}, \tag{4.35c}$$

pour le déplacement,

$$\xi_{r;n} = \frac{1}{r^2}\Phi_n\Psi_n, \tag{4.36a}$$

$$\xi_{\theta;n} = \frac{1}{\sigma^2 r\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr}+\mathcal{A}_n\left(r\right)\Psi_n\right]-\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}J_n-\varepsilon_{s;n}U_n\right\}, \tag{4.36b}$$

$$\xi_{\varphi;n} = \frac{i}{\sigma^2 r\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr}+\mathcal{A}_n\left(r\right)\Psi_n\right]-\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}J_n-\varepsilon_{s;n}U_n\right\}, \tag{4.36c}$$

et pour les quantités scalaires,

$$\delta p_n = \frac{\rho_0}{1-\varepsilon_{s;n}}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr}+\mathcal{A}_n\left(r\right)\Psi_n\right]-\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}}J_n-U_n\right\}, \tag{4.37a}$$

$$\delta\rho_n = \frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\rho_0}{c_s^2\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr}+\mathcal{B}_n\left(r\right)\Psi_n\right]-\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}J_n-U_n\right\}, \tag{4.37b}$$

$$\delta T_n = \frac{i\sigma T_0\left(\Gamma_1-1\right)}{c_s^2\left(i\sigma+\sigma_0\right)\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr}+\mathcal{C}_n\left(r\right)\Psi_n\right]+\left(1-\frac{\Gamma_1\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}\right)\frac{J_n}{i\sigma}-U_n\right\}, \tag{4.37c}$$

où les coefficients $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{C}_n$ sont donnés par

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{2}\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\left[\frac{N^2}{g}-\frac{g}{c_s^2}\left(1-i\frac{\Gamma_1\sigma_0}{\sigma}\right)\left(1+K_{\mathrm{curv}}\right)\right], \tag{4.38a}$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{1}{2}\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\left[\frac{N^2}{g}\left(\frac{2}{\varepsilon_{s;n}}-1\right)-\frac{g}{c_s^2}\left(1-i\frac{\Gamma_1\sigma_0}{\sigma}\right)\left(1+K_{\mathrm{curv}}\right)\right], \tag{4.38b}$$

$$\mathcal{C}_n = \frac{N^2}{g\left(\Gamma_1-1\right)}\left[\frac{\left(\Gamma_1+1\right)i\sigma+2\Gamma_1\sigma_0}{2\left(i\sigma+\sigma_0\right)}-\frac{\sigma_{s;n}^2}{\sigma^2}\right]-\frac{g}{2c_s^2}\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\left(1-i\frac{\Gamma_1\sigma_0}{\sigma}\right)\left(1+K_{\mathrm{curv}}\right). \tag{4.38c}$$

En comparant ces expressions avec celles du chapitre précédent, (3.44a) à (3.46c), on constate que les processus dissipatifs viennent presque systématiquement supprimer les facteurs $1/\sigma$, discontinus en $\sigma = 0$, pour les remplacer par des facteurs $1/\left(\sigma - i\sigma_0\right)$ qui, eux, sont réguliers. Ceci, conjugué à l'amortissement des oscillations dans la direction verticale, régularise la réponse de l'atmosphère à la perturbation de marée dans

les basses fréquences et permet en conséquence d'étendre le modèle terrestre aux planètes présentant des configurations orbitales et rotationnelles très différentes de celles de la Terre, en particulier celles proches de la synchronisation.

On identifie ainsi trois régimes fréquentiels différents pour les marées atmosphériques (voir Fig. 4.2) qui, ordonnés des basses aux hautes fréquences, sont :

- le *régime radiatif* ($|\sigma| < \sigma_0$), où les refroidissement radiatif domine, la période du forçage étant supérieure au temps de refroidissement radiatif effectif de l'atmosphère. Dans ce régime, les ondes gravito-inertielle de marée sont amorties par les mécanismes dissipatifs ;
- le *régime dynamique* ($\sigma_0 < |\sigma| < |\sigma_{\mathrm{s;n}}|$), où la période du forçage est assez petite pour que les effets dissipatifs soient faibles et néanmoins supérieure au temps caractéristique en dessous duquel apparaissent les ondes acoustiques. La réponse du fluide est quasi-adiabatique ;
- le régime *acoustique-mixte* ($|\sigma| > |\sigma_{\mathrm{s;n}}|$), où la période de forçage de marée est assez petite pour générer à la fois les ondes gravito-inertielles du régime dynamique et des ondes acoustiques.

Le modèle devra par la suite être enrichi avec les processus dissipatifs énumérés en Section 4.2 autres que le refroidissement radiatif. Ceci introduira de nouveaux régimes et temps caractéristiques :

- un *régime diffusif* défini par $|\sigma| < |\sigma_{\mathrm{diff;n}}|$ si l'on traite la diffusion thermique (moléculaire/turbulente) comme un refroidissement newtonien (cf. Section 4.2.2).
- un *régime frictionnel* dans le cas où la friction visqueuse moléculaire/turbulente est prise en compte. Si l'on modélise ce processus par une friction de Rayleigh de fréquence caractéristique σ_{f} (cf. Section 4.2.3), alors le régime frictionnel correspond à $|\sigma| < \sigma_{\mathrm{f}}$.

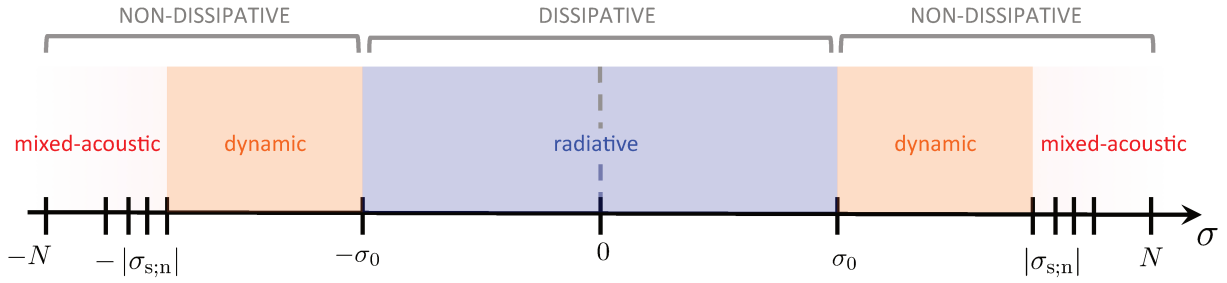


FIGURE 4.2: Spectre en fréquence des régimes de marées atmosphériques. Les différents régimes sont donnés en fonction de la fréquence de marée (σ).

Pour terminer ce paragraphe sur les profils verticaux des quantités perturbées, notons que le caractère linéaire du modèle permet de rassembler les relations de polarisation et l'équation de la structure verticale en un opérateur, $\Upsilon_n^{\sigma,m}$, qui est l'équivalent de l'opérateur de Laplace ($\mathcal{L}^{m,\nu}$) pour la structure verticale des ondes de marées. En définissant les vecteurs de forçage et de réponse $X_n^{\sigma,m} = (U_n, J_n)$ et $Y_n^{\sigma,m} = (\Psi_n, \mathbf{V}_n, \boldsymbol{\xi}_n, \delta p_n, \delta q_n, \delta T_n)$ respectivement, on exprime l'équation décrivant la structure verticale des ondes

$$\boxed{Y_n^{\sigma,m} = \Upsilon_n^{\sigma,m} X_n^{\sigma,m}.} \tag{4.39}$$

La composante de $\Upsilon_n^{\sigma,m}$ décrivant le profil d'une quantité perturbée f est désignée par $\Upsilon_{f;n}^{\sigma,m}$ (par exemple, pour la densité, $\delta\rho_n = \Upsilon_{\rho;n} X_n$).

4.3.4 Potentiel de marée atmosphérique

La redistribution des masses dans l'atmosphère sous l'effet de la marée engendre un potentiel gravifique dont l'effet perturbateur sur la dynamique des ondes n'est pas pris en compte dans le modèle (approximation de Cowling). Ce potentiel a néanmoins des implications majeures sur la dynamique rotationnelle du

corps. Il est à l'origine du couple de marée (Zahn, 1966a) et constitue une observable macroscopique de la perturbation à travers les nombres de Love, lorsque l'on peut mesurer ces derniers (e.g. Kramm et al., 2012). Nous allons donc ici établir son expression analytique dans le cas général de l'atmosphère épaisse. Cette expression sera ensuite utilisée pour exprimer les nombres de Love et le couple de marée exercé sur l'atmosphère.

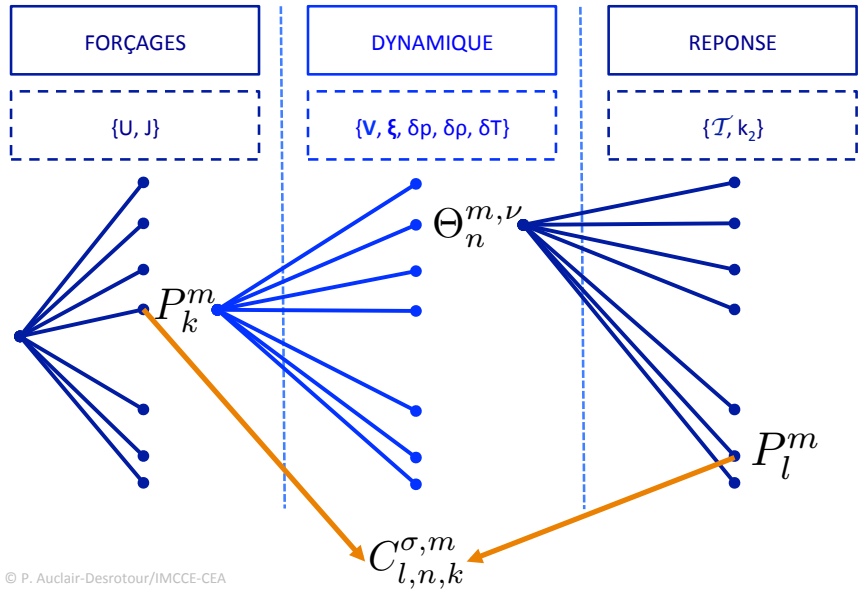


FIGURE 4.3: Arborescence des changements de bases $\{P_k^m\}_{k\geq|m|} \to \{\Theta_n^{m,\nu}\}_{n\in\mathbb{Z}} \to \{P_k^m\}_{k\geq|m|}$. Les forçages et la réponse sont exprimés dans la base usuelle des polynômes associés de Legendre (P_l^m) ; la dynamique des ondes de marées est calculée dans la base des fonctions de Hough ($\Theta_n^{m,\nu}$, où $\nu = 2\Omega/\sigma$ est le paramètre de spin défini par Eq. 3.30).

On déduit le potentiel associé à la marée atmosphérique $\mathcal{U}$ de la loi de Poisson,

$$\Delta\mathcal{U} = -4\pi\mathscr{G}\delta\rho, \tag{4.40}$$

où $\mathscr{G}$ désigne la constante de gravitation universelle. Comme $\delta\rho$, le potentiel se développe en série de Fourier suivant les coordonnées azimutale et temporelle et les coefficients qui en résultent peuvent eux-mêmes être exprimés sous forme de produits de fonctions aux variables séparées. Concernant ce dernier point, nous choisissons pour la formulation des résultats d'utiliser la base usuelle des polynômes associés de Legendre (base horizontale des solutions de l'équation de Poisson en coordonnées sphériques) plutôt que la base des fonctions de Hough, qui n'apparaît comme un choix naturel que dans l'étude des couches fluides traitées avec l'approximation traditionnelle. Ainsi, $\mathcal{U}$ et $\delta\rho$ s'écrivent

$$\mathcal{U} = \sum_{\sigma,m}\sum_{l\geq|m|} \mathcal{U}_l^{\sigma,m}(r)\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)} \quad \text{et} \quad \delta\rho = \sum_{\sigma,m}\sum_{l\geq|m|} \delta\rho_l^{\sigma,m}(r)\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+m\varphi)}, \tag{4.41}$$

où les P_l^m représentent les polynôme associés de Legendre normés (cf. Eq. 3.38). En substituant (4.41) dans (4.40), on obtient l'équation définissant la structure verticale des profils $\mathcal{U}_l^{\sigma,m}$,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mathcal{U}_l^{\sigma,m}}{dr}\right) - l\,(l+1)\,\mathcal{U}_l^{\sigma,m} = -4\pi\mathscr{G}r^2\delta\rho_l^{\sigma,m}. \tag{4.42}$$

Le potentiel de marée devant être borné en $r = 0$ et nul à $r \to \infty$, il vient

$$\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(r) = \frac{4\pi\mathscr{G}}{2l+1}\left[r^l\mathcal{F}(r,\delta\rho_l^{\sigma,m}) + r^{-(l+1)}\mathcal{H}(r,\delta\rho_l^{\sigma,m})\right], \tag{4.43}$$

avec, pour une fonction f quelconque,

$$\mathcal{F}(r,f) = \int_r^{+\infty} u^{-l+1} f(u)\,du \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(r,f) = \int_R^r u^{l+2} f(u)\,du. \tag{4.44}$$

La dernière étape du calcul est le passage de la base des fonctions de Hough aux polynômes associés de Legendre. Introduisons les coefficients de changement de base $C_{l,n,k}^{\sigma,m}$ traduisant la projection du forçage sur l'ensemble $\{\Theta_n^{m,\nu}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (avec $\nu = 2\Omega/\sigma$, cf. Eq. 3.30) et la projection inverse de la solution sur l'ensemble $\{P_l^m\}_{l\geq|m|}$ (voir Fig. 4.3),

$$C_{l,n,k}^{\sigma,m} = \langle P_l^m, \Theta_n^{m,\nu}\rangle\langle\Theta_n^{m,\nu}, P_k^m\rangle, \tag{4.45}$$

pour $l \geq |m|$ et $k \geq |m|$. Alors, le profil de masse volumique perturbée associé à P_l^m peut s'écrire

$$\delta\rho_l^{\sigma,m}(r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq|m|} C_{l,n,k}^{\sigma,m}\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}(r), \tag{4.46}$$

où $\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m} = \Upsilon_{\rho;n}^{\sigma,m}(U_k^{\sigma,m}, J_k^{\sigma,m})$ représente la réponse du mode de Hough de degré n aux profils de forçage gravifique $U_k^{\sigma,m}$ et thermique $J_k^{\sigma,m}$ associés au polynôme P_k^m. Les expressions explicite des $\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}$ en fonction de la fréquence de marée et des paramètres du système sont données par (4.37b). Le potentiel de marée associé à P_l^m s'exprime ainsi

$$\boxed{\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(r) = \frac{4\pi\mathscr{G}}{2l+1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq|m|} C_{l,n,k}^{\sigma,m}\left[r^l\mathcal{F}\left(r,\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}\right) + r^{-(l+1)}\mathcal{H}\left(r,\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}\right)\right].} \tag{4.47}$$

On voit ici comment les effets de Coriolis couplent les harmoniques sphériques entre elles. Un forçage dont la variation avec la latitude est représenté par un unique polynôme P_k^m engendre dans le cas général une réponse répartie sur l'ensemble des éléments de la famille $\{P_l^m\}_{l\geq|m|}$. En pratique, hormis dans un régime fortement sub-inertiel, les fonctions de Hough restent assez proches des polynômes associés de Legendre (voir Fig. 3.5, panneau du bas). Dans le régime super-inertiel, la différence entre les deux familles est faible, seuls les coefficients $C_{l,l-|m|,l}^{\sigma,m}$ sont significatifs.

4.3.5 Nombres de Love

Les nombres de Love atmosphériques, désignés par la notation $k_l^{\sigma,m}$, quantifient la réponse de l'atmosphère au forçage gravito-thermique du Soleil et des autres corps. Ils se déduisent directement du potentiel de marée, donné par (4.47), pris à la limite externe de la couche $R_{\text{atm}} = R + H_{\text{atm}}$ et comparé au potentiel gravifique excitateur correspondant. Par définition (cf. Chapitre 2),

$$k_l^{\sigma,m} = \left.\frac{\mathcal{U}_l^{\sigma,m}}{U_l^{\sigma,m}}\right|_{r=R_{\text{atm}}}. \tag{4.48}$$

Au delà du rayon $R_{\rm atm}$, la masse volumique de l'atmosphère est faible, de même que ses variations. Le terme en $\mathcal{F}\left(R_{\rm atm}, \delta\rho_l^{\sigma,m}\right)$ est donc négligeable par rapport au second dans (4.43). Ainsi, dans le cas général les nombres de Love de l'atmosphère épaisse se formulent

$$\boxed{k_l^{\sigma,m} = \frac{4\pi\mathscr{G}}{(2l+1)\,R_{\rm atm}^{l+1}U_l^{\sigma,m}\left(R_{\rm atm}\right)} \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq|m|} C_{l,n,k}^{\sigma,m}\int_R^{R_{\rm atm}} r^{l+2}\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}\left(r\right)dr.} \tag{4.49}$$

Cette expression se simplifie dans le régime super-inertiel ($|\nu| \geq 1$ avec $\nu = 2\Omega/\sigma$, cf. Eq. 3.30), où l'écart entre les fonctions de Hough et les polynômes associés de Legendre est faible (cf. Fig. 3.5, panneau du bas). Dans ce régime, $C_{l,l-|m|,l}^{\sigma,m} \approx 1$ et les autres coefficients sont quasi-nuls. Il s'ensuit

$$k_l^{\sigma,m} \approx \frac{4\pi\mathscr{G}}{(2l+1)\,R_{\rm atm}^{l+1}U_l^{\sigma,m}\left(R_{\rm atm}\right)}\int_R^{R_{\rm atm}} r^{l+2}\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}\left(r\right)dr. \tag{4.50}$$

A titre d'exemple, traitons le cas de la marée semi-diurne affectant une planète en orbite circulaire autour d'une étoile de masse M_*, le rayon orbital et le moyen mouvement étant notés a et $n_{\rm orb}$ respectivement, et d'obliquité nulle. Cette configuration particulière permet de réduire la composante étudiée à un unique terme de forçage quadripolaire (Kaula, 1962; Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009), de degré azimutal $m = 2$, de degré latitudinal $l = 2$ et de fréquence de marée $\sigma = 2\left(\Omega - n_{\rm orb}\right)$, dont les profils de potentiel de marée et de puissance thermique s'expriment

$$U_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\mathscr{G}M_*}{a^3}r^2 \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\mathcal{J}_2\left(r\right)}{a^2}, \tag{4.51}$$

où $\mathcal{J}_2$ représente le coefficient de projection sur le polynôme de Legendre normé $P_2\left(\cos\psi_*\right)$ (avec ψ_* l'angle stellaire zénithal ; voir Fig. 2.5) de la puissance thermique reçue par l'atmosphère dont on a extrait la dépendance à la distance à l'étoile. Pour ce cas, (4.50) devient

$$k_2^{\sigma,2} \approx \frac{1}{5}\frac{4\pi\mathscr{G}}{R_{\rm atm}^5}\int_R^{\rm R_{atm}} r^4\Upsilon_{\rho;2}^{\sigma,2}\left[r^2, \frac{a\mathcal{J}_2\left(r\right)}{\mathscr{G}M_*}\right]dr. \tag{4.52}$$

Il apparaît ainsi que le nombre de Love, usuellement intrinsèque à la planète, se met à dépendre aussi des propriétés du système étoile-planète dès lors qu'un forçage thermique existe en plus des interactions gravitationnelles classiques.

4.3.6 Couple de marée

Pour conclure cette section, nous allons établir l'expression du couple de marée qui s'exerce sur l'atmosphère. D'après Zahn (1966a), le couple $\mathcal{T}^{\sigma,m}$ induit suivant l'axe de rotation de la planète par la composante de fréquence de marée σ et de degré azimutal m se formule

$$\mathcal{T}^{\sigma,m} = \Re\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}}\partial_\varphi U^{\sigma,m}\left(\delta\rho^{\sigma,m}\right)^* d\mathscr{V}\right\}, \tag{4.53}$$

où $\mathscr{V}$ est le domaine volumique occupé par la coquille atmosphérique. En développant le potentiel de marée et la perturbation de densité sur la base des polynômes de Legendre, on obtient

$$U^{\sigma,m} = \sum_{l \leq |m|} U_l^{\sigma,m}(r) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad \text{et} \quad \delta\rho^{\sigma,m} = \sum_{l \leq |m|} \delta\rho_l^{\sigma,m}(r) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \tag{4.54}$$

puis en utilisant leur relation d'orthogonalité, il vient

$$\mathcal{T}^{\sigma,m} = \pi m \sum_{l \geq |m|} \int_R^{R_{\text{atm}}} r^2 U_l^{\sigma,m} \left(\delta\rho_l^{\sigma,m}\right)^* dr, \tag{4.55}$$

soit, en appliquant les changements de base successifs,

$$\boxed{\mathcal{T}^{\sigma,m} = \pi m \sum_{l \geq |m|} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \geq |m|} C_{l,n,k}^{\sigma,m} \int_R^{R_{\text{atm}}} r^2 U_l^{\sigma,m} \left(\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}\right)^* dr.} \tag{4.56}$$

Comme pour le potentiel et les nombres de Love, $\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}$ désigne la réponse du mode de Hough de degré n au forçage associé au polynôme de Legendre P_k^m. Introduisons le déphasage entre cette réponse et le potentiel de marée excitateur de degré l, $\Delta\varphi_{l,n,k}^{\sigma,m}(r) = \arg\left(\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}\right) - \arg\left(U_l^{\sigma,m}\right)$. L'expression précédente se réécrit

$$\mathcal{T}^{\sigma,m} = \pi m \sum_{l \geq |m|} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \geq |m|} C_{l,n,k}^{\sigma,m} \int_R^{R_{\text{atm}}} r^2 \left|U_l^{\sigma,m}\right| \left|\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}\right| \sin\left(\Delta\varphi_{l,n,k}^{\sigma,m}\right) dr, \tag{4.57}$$

Une variation de distribution de masse de type « bourrelet de marée » correspond à un déphasage uniforme de la réponse (tous les $\Delta\varphi_{l,n,k}^{\sigma,m}$ sont égaux et ne varient pas avec l'altitude). Dans ce cas, le couple est maximal en valeur absolue pour le déphasage $\Delta\varphi_{l,n,k}^{\sigma,m} = \pm\pi/2$.

Comme nous l'avons fait pour le nombre de Love, examinons maintenant le cas du système binaire à orbite circulaire, pour lequel le forçage semi-diurne est représenté par le terme quadripolaire de degrés $m = 2$ et $l = 2$ (voir Section 2.2.3). On élimine dans cet exemple la plupart des termes résultant des couplages induits par l'accélération de Coriolis pour ne garder que ceux d'indices $l = k = 2$. Il vient

$$\mathcal{T}^{\sigma,2} = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{2,n,2}^{\sigma,2} \int_R^{R_{\text{atm}}} r^2 U_2^{\sigma,m} \Im\left\{\delta\rho_{n,2}^{\sigma,m}\right\} dr. \tag{4.58}$$

Dans le régime super-inertiel et en l'absence de phénomène résonant amplifiant un mode donné, le mode de gravité de degré $n = 0$ domine étant donné qu'il correspond aux plus grandes échelles de variation spatiales, d'où

$$\mathcal{T}^{\sigma,2} \approx 2\pi \int_R^{R_{\text{atm}}} r^2 U_2^{\sigma,m} \Im\left\{\delta\rho_{0,2}^{\sigma,m}\right\} dr. \tag{4.59}$$

Le couple de marée associé à la perturbation semi-diurne est donc, comme la partie imaginaire du nombre de Love du second ordre ($k_2^{\sigma,2}$), proportionnel à $\Im\left\{\delta\rho_{0,2}^{\sigma,m}\right\}$ à l'ordre zéro (résultat démontré par Ogilvie, 2014). Plus l'amplitude de la variation de densité est grande et son déphasage proche de $\pi/2$ (un retard angulaire $\gamma = \pi/4$) et plus la marée affecte la dynamique rotationnelle de la planète.

4.4 Structure des ondes dans le cas d'une atmosphère mince isotherme stablement stratifiée

Dans de nombreux cas, et en particulier pour les planètes de faible masse, il est possible de faire l'approximation de couche mince, $H_{\mathrm{atm}} \ll R$, qui correspond à l'approche de CL70 et Lindzen & McKenzie (1967). Dans cette section, nous simplifions les résultats obtenus pour l'atmosphère épaisse dissipative afin de les adapter à cette famille de planètes.

4.4.1 Profils verticaux des quantités perturbées

La structure atmosphérique la plus élémentaire est celle de l'atmosphère isotherme à l'équilibre hydrostatique pour laquelle température (T_0), hauteur de pression (H) et stratification (N^2) sont invariants en altitude. C'est donc le modèle que nous adoptons pour cette première approche. L'atmosphère mince isotherme est stablement stratifiée : d'après (3.14), $N^2 = \kappa g/H > 0$. Ainsi, elle permet l'existence d'ondes de gravité excitées par la marée. Nous considérons par ailleurs les effets dissipatifs uniformes dans l'ensemble de la couche, ce qui ce traduit par une fréquence radiative (σ_0) constante. Le coefficient B_1 donné par (4.23) ne dépend alors plus de l'altitude. Ceci permet d'éliminer les termes en $B_1^{-1}\left(dB_1/dr\right)$ dans (4.26a), (4.26b) et (4.26c) et d'écrire les coefficients de l'équation des ondes

$$A\left(x\right) = -\frac{1}{H}, \tag{4.60a}$$

$$B\left(x\right) = \frac{\Lambda_n}{R^2}\left[\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{N^2}{\sigma^2} + \varepsilon_{s;n} - 1\right], \tag{4.60b}$$

$$C\left(x\right) = \frac{\Lambda_n}{H\sigma^2}\left\{\frac{\kappa}{i\sigma+\sigma_0}\left[\frac{h_n}{H}\frac{dJ_n}{dx} + \left(1-\frac{h_n}{H}\right)J_n - i\sigma U_n\right] + \varepsilon_{s;n}\frac{dU_n}{dx}\right\}. \tag{4.60c}$$

où l'expression de A, particulièrement réduite, induit la fonction de passage $\Phi_n\left(x\right) = e^{x/2}$ que l'on a déjà rencontré dans les équations du Chapitre 3 (e.g. Eq. 3.41). L'équation de la structure verticale (4.28) devient

$$\boxed{\frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + \hat{k}_n^2\Psi_n = \frac{\Lambda_n}{H\sigma^2}\left\{\frac{\kappa}{i\sigma+\sigma_0}\left[\frac{h_n}{H}\frac{dJ_n}{dx} + \left(1-\frac{h_n}{H}\right)J_n - i\sigma U_n\right] + \varepsilon_{s;n}\frac{dU_n}{dx}\right\}e^{-\frac{x}{2}},} \tag{4.61}$$

avec le nombre d'onde normé donné par

$$\boxed{\hat{k}_n^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{4\kappa H}{h_n} - 1 + \varsigma_n\left(\varepsilon_{s;n}-1\right)\right],} \tag{4.62}$$

où $\varsigma_n = 4H^2\Lambda_n/R^2$. Le terme $\varsigma_n\left(\varepsilon_{s;n}-1\right)$ apparaissant dans k_n^2 et absent dans (4.3) est dû à la prise en compte de l'accélération radiale ($a_r = \rho_0\partial_t V_r$) dans l'équation de Navier-Stokes. Il permet de quantifier les termes négligés dans l'approximation de couche peu profonde, où ce terme est ignoré. Ces termes sont d'ordre 2 en H/R, ce qui justifie la réduction du nombre d'onde vertical à

$$\hat{k}_n^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{4\kappa H}{h_n} - 1\right]. \tag{4.63}$$

Nous avons déjà entrevu en sous-section 4.2.1 l'effet du refroidissement radiatif sur les ondes de marées. Dans l'optique d'analyser le comportement des solutions calculées par la suite, il convient d'examiner ce point en détail ici. Tout d'abord, introduisons la profondeur caractéristique $h_c = 4\kappa H$ à laquelle se compare h_n dans le nombre d'onde et fixons $\Im\left\{\hat{k}_n\right\} > 0$. Le calcul des parties réelle et imaginaire de $\hat{k}_n$ donne

$$\Re\left\{\hat{k}_n\right\} = \frac{\operatorname{sign}(\sigma)}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}\frac{h_c}{h_n} - 1 + \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}\frac{h_c}{h_n} - 1\right)^2 + \frac{\sigma_0^2\sigma^2}{\left(\sigma^2+\sigma_0^2\right)^2}\frac{h_c^2}{h_n^2}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.64a}$$

$$\Im\left\{\hat{k}_n\right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sigma_0\left|\sigma\right|}{\sigma^2+\sigma_0^2}\left[\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}\frac{h_c}{h_n} - 1 + \sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}\frac{h_c}{h_n} - 1\right)^2 + \frac{\sigma_0^2\sigma^2}{\left(\sigma^2+\sigma_0^2\right)^2}\frac{h_c^2}{h_n^2}}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.64b}$$

Le signe de $\operatorname{sign}(\sigma)\,\Re\left\{\hat{k}_n\right\}$ indique le sens de propagation des oscillations et de l'énergie dans la direction verticale :

- $\operatorname{sign}(\sigma)\,\Re\left\{\hat{k}_n\right\} < 0$ correspond à des oscillations ascendantes et une propagation d'énergie vers le bas,
- $\operatorname{sign}(\sigma)\,\Re\left\{\hat{k}_n\right\} > 0$ à des oscillations descendantes et une propagation d'énergie vers le haut.

La partie imaginaire indique quant à elle l'intensité de l'amortissement. En supposant que Λ_n varie peu en fonction de σ, on identifie une fréquence critique propre au mode de degré n, notée $\sigma_{c;n}$ et définie par

$$\sigma_{c;n}^2 = \frac{4\kappa H g}{R^2}\Lambda_n, \tag{4.65}$$

qui, avec σ, détermine les régime des oscillations. La figure 4.4 montre comment les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde vertical varient en fonction de ces deux fréquences. Dans ces graphes, σ (axe horizontal) indique le sens de propagation de la perturbation, prograde ($m\nu < 0$) ou rétrograde ($m\nu > 0$), et $\sigma_{c;n}^2$ (axe vertical) le type de mode, de Rossby ($\sigma_{c;n}^2 < 0$) ou de gravité ($\sigma_{c;n}^2 > 0$). La Terre et la Lune ont été placées suivant le premier mode de gravité ($n = 0$) de la marée solaire semi-diurne ($m = 2$), qui domine cette composante dans les deux cas.

L'intensité de l'amortissement augmente quand on se rapproche de la synchronisation, où $\Im\left\{\hat{k}_n\right\} \to +\infty$: le régime dissipatif correspond aux régions de couleurs claires, dans lesquelles on trouve Vénus (Fig. 4.4, panneau gauche). La Terre, au contraire, se situe dans une région sombre où les mécanismes dynamiques sont prédominants et les effets du refroidissement radiatif négligeables. Les deux planètes, de structures atmosphériques comparables (mêmes fréquences $\sigma_{\mathrm{c;n}} \approx 1.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$), se distinguent essentiellement par la fréquence d'excitation, la Terre appartenant à la famille des rotateurs rapides, Vénus à celle des rotateurs quasi-synchrones. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les ondes de marées semi-diurnes sont peu oscillantes dans le cas de la Terre où la partie réelle du nombre d'onde est proche de zéro. On retrouve ce résultat sur la carte de régimes de $\operatorname{sign}(\sigma)\,\Re\left\{\hat{k}_n\right\}$ (Fig. 4.4, panneau droit), qui indique les domaines des ondes fortement oscillantes suivant la direction verticale (sens ascendant pour les couleurs claires, descendant pour les couleurs sombres) et ceux des ondes peu, voir pas du tout, oscillantes (régions roses). Notons que les modes de gravité induisent systématiquement une propagation des oscillations vers le haut, à la différence des modes de Rossby, dans le cas de la marée semi-diurne. Dans l'approximation de l'atmosphère isotherme, Vénus apparaît donc dans une zone où les ondes sont à la fois fortement oscillantes et fortement amorties. La partie oscillante des grandeurs perturbées se trouve localisée dans une mince couche au niveau du sol.

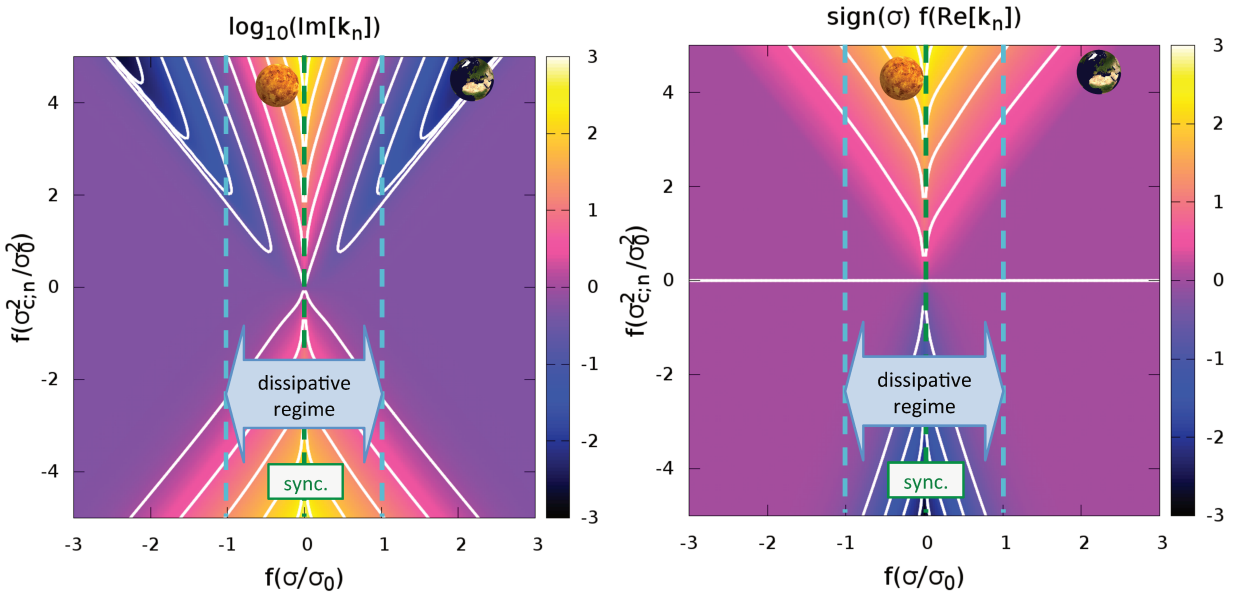


FIGURE 4.4: *Gauche* - Partie imaginaire du nombre d'onde vertical (Eq. 4.64b) en fonction de $f(\sigma/\sigma_0)$ (axe horizontal) et de $f\left(\sigma_{c;n}^2/\sigma_0^2\right)$ (axe vertical) où f est la fonction définie par $f(X) = \mathrm{sign}(X)\log(1+|X|)$, σ la fréquence de marée, σ_0 la fréquence de refroidissement radiatif et $\sigma_{\mathrm{c;n}}$ la fréquence critique définie par (4.65). Les niveaux de couleurs correspondent à $\log\left(\Im\left\{\hat{k}_n\right\}\right)$, du noir (amortissement faible) au blanc (amortissement fort). *Droite* - Partie réelle normée (Eq. 4.64a) du nombre d'onde vertical $\mathrm{sign}(\sigma)\,\Re\left\{\hat{k}_n\right\}$ en fonction de $f(\sigma/\sigma_0)$ et de $f\left(\sigma_{c;n}^2/\sigma_0^2\right)$. Les niveaux de couleurs correspondent à $\mathrm{sign}(\sigma)\,\Re\left\{\hat{k}_n\right\}$, du noir (forte oscillation ascendante, $v_{\varphi;n} > 0$; transport d'énergie vers le bas) au blanc (forte oscillation descendante, $v_{\varphi;n} < 0$; transport d'énergie vers le haut). La position de la Terre et de Vénus sur la carte correspond au mode de degrés $n = 0$ de la marée solaire semi-diurne ($\Lambda_{0;\oplus} = 11.1596$ et $\Lambda_{0;♀} = 7.1485$). Les fréquences de marées des planètes sont données par $\sigma_\oplus/\sigma_0 = 194$ et $\sigma_♀/\sigma_0 = 0.43$ pour $\sigma_0 = 7.5\times10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$ (Leconte et al., 2015).

Pour achever cette étude des régimes des ondes, comparons le nombre d'onde vertical sans dissipation du Chapitre 3 ($\hat{k}_{\mathrm{CL;n}}$ donné par Eq. 3.42) à celui modifié par la dissipation ($\hat{k}_n$ donné par Eq. 4.63). La différence relative entre les deux nombres d'ondes, définie par

$$\eta = 2\left|\frac{\hat{k}_n - \hat{k}_{\mathrm{CL;n}}}{\hat{k}_n + \hat{k}_{\mathrm{CL;n}}}\right|, \tag{4.66}$$

est tracée en fonction de la fréquence de marée (σ) et de la profondeur équivalente (h_n) en Figure 4.5. Sur cette carte, les régions de couleurs froides correspondent aux régimes dans lesquels les effets dissipatifs sont négligeables, les régions de couleurs chaudes aux régimes pour lesquels ils doivent être pris en compte. Comme en Figure 4.4, la Terre et Vénus sont placées d'après les caractéristiques du mode de gravité de degrés $m = 2$ et $n = 0$. La marée semi-diurne terrestre, pour laquelle $0 < \hat{k}_n < 1$, apparaît proche de la limite entre ondes propagatives et ondes evanescentes identifiée en sous-section 3.6.2, i.e. $h_n = h_c$ (ligne rouge pointillée).

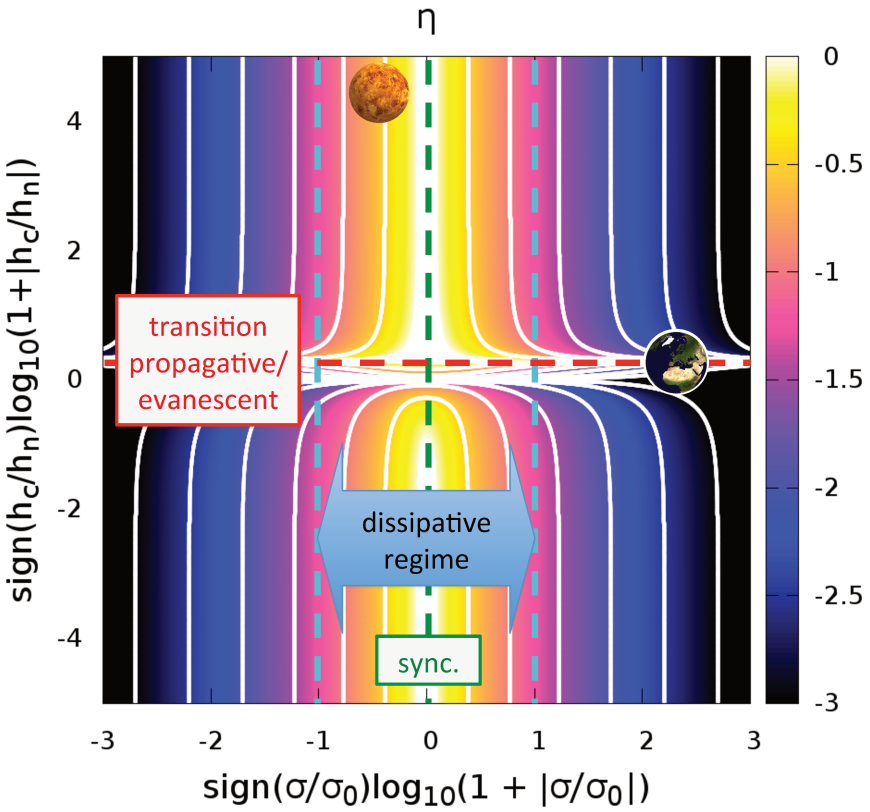


FIGURE 4.5: Ecart relatif entre les nombres verticaux avec et sans dissipation donné par (4.66) en fonction de $f(\sigma/\sigma_0)$ (axe horizontal) et $f(h_c/h_n)$ (axe vertical) où f est la fonction définie par $f(X) = \mathrm{sign}(X)\log(1+|X|)$. Les niveaux de couleurs correspondent à η en échelle logarithmique, et vont du noir (effets dissipatifs négligeables) au blanc (effets dissipatifs prédominants). La position de la Terre et de Vénus sur la carte correspond au mode de degrés $n = 0$ de la marée solaire semi-diurne ($\Lambda_0 = 11.1596$ et $\Lambda_0 = 7.1485$). Les fréquences de marées des planètes sont données par $\sigma/\sigma_0 = 194$ et $\sigma/\sigma_0 = 0.43$ pour $\sigma_0 = 7.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$ (Leconte et al., 2015).

Nous en venons enfin aux relations de polarisation. Sous l'hypothèse de couche mince isotherme, les équations (4.35a) à (4.37c) deviennent, pour la vitesse,

$$V_{r;n} = \frac{i\sigma}{R^2} e^{\frac{x}{2}} \Psi_n, \tag{4.67a}$$

$$V_{\theta;n} = \frac{i}{\sigma R(1-\varepsilon_{s;n})} \left\{ \frac{\sigma^2}{H\Lambda_n} e^{\frac{x}{2}} \left[\frac{d\Psi_n}{dx} + \mathcal{A}_n \Psi_n \right] - \mathcal{D}_n J_n - \varepsilon_{s;n} U_n \right\}, \tag{4.67b}$$

$$V_{\varphi;n} = -\frac{1}{\sigma R(1-\varepsilon_{s;n})} \left\{ \frac{\sigma^2}{H\Lambda_n} e^{\frac{x}{2}} \left[\frac{d\Psi_n}{dx} + \mathcal{A}_n \Psi_n \right] - \mathcal{D}_n J_n - \varepsilon_{s;n} U_n \right\}, \tag{4.67c}$$

pour le déplacement,

$$\xi_{r;n} = \frac{1}{R^2} e^{\frac{x}{2}} \Psi_n, \tag{4.68a}$$

$$\xi_{\theta;n} = \frac{1}{\sigma^2 R(1-\varepsilon_{s;n})} \left\{ \frac{\sigma^2}{H\Lambda_n} e^{\frac{x}{2}} \left[\frac{d\Psi_n}{dx} + \mathcal{A}_n \Psi_n \right] - \mathcal{D}_n J_n - \varepsilon_{s;n} U_n \right\}, \tag{4.68b}$$

$$\xi_{\varphi;n} = \frac{i}{\sigma^2 R(1-\varepsilon_{s;n})} \left\{ \frac{\sigma^2}{H\Lambda_n} e^{\frac{x}{2}} \left[\frac{d\Psi_n}{dx} + \mathcal{A}_n \Psi_n \right] - \mathcal{D}_n J_n - \varepsilon_{s;n} U_n \right\}, \tag{4.68c}$$

et pour les quantités scalaires,

$$\boxed{\begin{aligned}
\delta p_n =& \frac{\rho_0}{1-\varepsilon_{s;n}} \left\{ \frac{\sigma^2}{H\Lambda_n} e^{\frac{x}{2}} \left[\frac{d\Psi_n}{dx} + \mathcal{A}_n \Psi_n \right] - \mathcal{D}_n J_n - U_n \right\}, && (4.69a)\\
\delta \rho_n =& \frac{i\sigma + \Gamma_1 \sigma_0}{i\sigma + \sigma_0} \frac{\rho_0}{c_s^2 (1-\varepsilon_{s;n})} \left\{ \frac{\sigma^2}{H\Lambda_n} e^{\frac{x}{2}} \left[\frac{d\Psi_n}{dx} + \mathcal{B}_n \Psi_n \right] - \mathcal{D}_n J_n - U_n \right\}, && (4.69b)\\
\delta T_n =& \frac{i\sigma T_0 (\Gamma_1 - 1)}{c_s^2 (i\sigma + \sigma_0)(1-\varepsilon_{s;n})} \left\{ \frac{\sigma^2}{H\Lambda_n} e^{\frac{x}{2}} \left[\frac{d\Psi_n}{dx} + \mathcal{C}_n \Psi_n \right] + \mathcal{E}_n \frac{J_n}{i\sigma} - U_n \right\}, && (4.69c)
\end{aligned}}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n =& \frac{i\sigma}{i\sigma + \sigma_0} \left(\kappa - \frac{1}{2} + i \frac{\sigma_0}{2\sigma} \right), && (4.70a)\\
\mathcal{B}_n =& \frac{i\sigma}{i\sigma + \sigma_0} \left(\frac{\kappa}{\varepsilon_{s;n}} - \frac{1}{2} + i \frac{\sigma_0}{2\sigma} \right), && (4.70b)\\
\mathcal{C}_n =& \frac{1}{2} - \frac{\sigma_{s;n}^2}{\Gamma_1 \sigma^2}, && (4.70c)
\end{aligned}$$

où l'on remarque que $\mathcal{A}_n$ ne dépend plus de n. Nous avons introduit les nouveaux coefficients

$$\mathcal{D}_n = \frac{\Gamma_1 - 1}{i\sigma + \sigma_0} \frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_n = 1 - \frac{\Gamma_1 \sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}. \tag{4.71}$$

pour rendre les expressions plus concises.

4.4.2 Potentiel de marée gravifique, nombres de Love et couple de marée

En reprenant le profil du potentiel gravifique donné par (4.43) avec $r \sim R$, on obtient dans le voisinage de la couche atmosphérique

$$\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(x) = \frac{4\pi \mathscr{G} RH}{2l+1} \left[\mathcal{F}(x, \delta\rho_l^{\sigma,m}) + \mathcal{H}(x, \delta\rho_l^{\sigma,m}) \right], \tag{4.72}$$

où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ sont

$$\mathcal{F}(x,f) = \int_x^{+\infty} f(u)\, du \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(x,f) = \int_0^x f(u)\, du. \tag{4.73}$$

Le nombre de Love de degrés l et m s'exprime ainsi

$$\boxed{k_l^{\sigma,m} = \frac{4\pi \mathscr{G} RH}{(2l+1)\, U_l^{\sigma,m}(x_{\text{atm}})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\geq|m|} C_{l,n,k}^{\sigma,m} \int_0^{x_{\text{atm}}} \delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}(x)\, dx} \tag{4.74}$$

où $\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}$ est donnée par (4.69b) et les $C_{l,n,k}^{\sigma,m}$ sont les coefficients de changement de base définis par (4.45). En réduisant le forçage à sa composante quadripolaire et en se plaçant dans le régime super-inertiel ($\nu \leq 1$), on obtient le nombre d'onde du second ordre

$$k_2^{\sigma,2} \approx \frac{4\pi\mathscr{G}RH}{5U_l^{\sigma,2}\left(x_{\mathrm{atm}}\right)} \int_0^{x_{\mathrm{atm}}} \delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}\left(x\right) dx. \tag{4.75}$$

Enfin, (4.56) se simplifie pour se formuler sous l'hypothèse de couche mince

$$\boxed{\mathcal{T}^{\sigma,m} = \pi m R^2 H \sum_{l\geq|m|} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\geq|m|} C_{l,n,k}^{\sigma,m} \int_0^{x_{\mathrm{atm}}} U_l^{\sigma,m} \left(\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}\right)^* dx,} \tag{4.76}$$

expression dont on déduit directement le couple résultant d'un forçage quadripolaire dans le cas général,

$$\mathcal{T}^{\sigma,2} = 2\pi R^2 H \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_{2,n,2}^{\sigma,2} \int_0^{x_{\mathrm{atm}}} U_2^{\sigma,2} \Im\left\{\delta\rho_{n,2}^{\sigma,2}\right\} dx, \tag{4.77}$$

et dans le régime super-inertiel,

$$\mathcal{T}^{\sigma,2} \approx 2\pi R^2 H \int_0^{x_{\mathrm{atm}}} U_2^{\sigma,2} \Im\left\{\delta\rho_{0,2}^{\sigma,2}\right\} dx. \tag{4.78}$$

4.4.3 Forçages thermiques

Les profils suivant x des quantités perturbées dépendent de ceux du potentiel excitateur de marée, U, et du forçage thermique J quand l'astre perturbateur est une étoile. Le profil du potentiel de marée est bien connu (Kaula, 1962; Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009). En revanche, J, qui est déterminé par les propriétés absorptives et conductives de l'atmosphère, est plus complexe et comprend plusieurs sources de natures différentes dont les principales sont les suivantes :

- absorption du flux incident émis par l'étoile,
- absorption du flux rayonné par le sol,
- forçage par diffusion thermique turbulente dans la couche limite au niveau du sol.

Ces forçages ont été étudiés pour les marées atmosphériques terrestres, notamment par CL70 et Siebert (1961) qui montrent comment ils déterminent des caractéristiques de la perturbation telles que l'amplitude des oscillations de pression et température mesurées au sol[3]. Dans le cas de la Terre, deux gaz à effet de serre contribuent fortement au forçage par absorption : la vapeur d'eau et l'ozone (CL70). Mais ces propriétés varient avec la composition de l'atmosphère. En conséquence, afin de développer une approche générale des marées atmosphériques, il est important de donner des prescriptions physiques pour chacun des forçages énumérés. Dans la suite, nous modélisons ces forçages en faisant l'hypothèse que les propriétés du sol et de l'atmosphère sont à symétrie sphérique, ce qui nous amène à négliger les caractéristiques locales telles que la topographie. Etant donnée la géométrie cylindrique des flux, nous utilisons au lieu des angles θ et φ, l'angle solaire zénithal ψ_* introduit en (3.60). Le point sub-solaire est ainsi repéré par $\psi_* = 0$ et le point anti-solaire par $\psi_* = \pi$.

3. Ainsi que nous l'avons vu en Section 1.2, l'importance du rôle joué par l'absorption a été révélée au milieu du XXème siècle avec la fin de la théorie de la résonance.

4.4.3.1 Absorption du flux incident

La première source de chauffage est le rayonnement incident provenant directement de l'étoile hôte. Si l'on suppose cette dernière située à l'infini ($R \ll a$) et que l'on ignore les phénomènes de diffraction dus aux variations de densité du milieu, le flux incident se propage à l'intérieur de l'atmosphère de manière rectiligne. Ainsi, un rayon est absorbé en fonction des propriétés d'absorption locales qu'il rencontre sur son trajet. On remarque que la limite jour-nuit qui en résulte n'est pas aussi distinctement définie que dans le cas où l'on considère le chauffage proportionnel au flux reçu par un élément de surface du sol, comme en (3.60) (voir Fig. 4.8). En supposant que l'étoile émet un rayonnement de corps noir, on exprime son flux I_* comme l'intégrale de la radiance spectrale $I_{*;\lambda}$, donnée par la loi de Planck (Planck, 1901) :

$$I_* = \int_\lambda I_{*;\lambda} d\lambda \quad \text{avec} \quad I_{*;\lambda} = \frac{R_*^2}{d^2} \frac{2hc^2\pi\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k_\mathrm{B} T_* \lambda}\right) - 1}, \tag{4.79}$$

où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide, h la constante de Planck, k_B la constante de Boltzmann, d la distance étoile-planète, R_* le rayon de l'étoile et T_* sa température de surface. Une partie du flux est réfléchie par l'atmosphère. En introduisant l'albédo de l'atmosphère pour la longeur d'onde λ, notée $A_{\mathrm{atm};\lambda}$, et en négligeant l'absorption du flux réfléchi, on peut écrire le flux incident effectif $I_{0;\lambda}$,

$$I_{0;\lambda} = (1 - A_{\mathrm{atm};\lambda})\, I_{*;\lambda}. \tag{4.80}$$

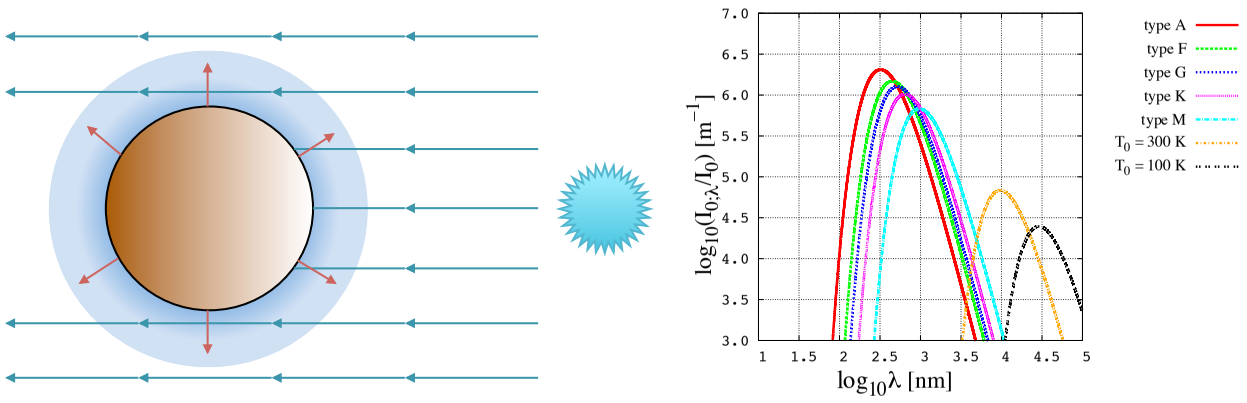


FIGURE 4.6: *Gauche* - Propagation du flux incident dans la direction étoile-planète (rayons bleus) et du flux émis par le sol dans la direction radiale (rayons rouges). *Droite* - Spectre en longueur d'onde de la luminance de corps noir pour différentes températures de surface caractéristiques des types d'étoiles de faibles masses et de masses intermédiaires (M, K, G, F, A) et des planètes ($T_0 = 300$ K et $T_0 = 100$ K). Pour chaque température le logarithme de la luminance normée (axe vertical) est tracé en fonction de la longueur d'onde en échelle logarithmique (axe horizontal).

Il s'agit donc maintenant de décrire l'absorption de $I_{0;\lambda}$ par l'atmosphère. Pour cela, on utilise comme CL70 la loi de Beer-Lambert (Beer, 1852) qui donne la variation de flux en fonction de la concentration molaire C_G et du coefficient d'extinction molaire $\epsilon_{\mathrm{G};\lambda}$ (supposé constant dans une atmosphère homogène en composition[4]), du gaz qu'il traverse. Le profil de la densité de flux incident suivant une ligne définie par la coordonnée spatiale linéaire s (telle que le flux se propage dans le sens des s décroissants) vérifie l'équation

$$\frac{dI_\lambda^\mathrm{inc}}{ds} + \epsilon_{\mathrm{G};\lambda}(s)\, C_\mathrm{G}(s)\, I_\lambda^\mathrm{inc} = 0. \tag{4.81}$$

4. Le coefficient d'extinction molaire peut dépendre notamment de la température.

Généralisée à plusieurs gaz identifiés par les indices j, de concentrations molaires C_j et de coefficients d'extinction molaire $\epsilon_{j;\lambda}$, cette équation devient

$$\frac{dI_\lambda^{\text{inc}}}{ds} + \left[\sum_j \epsilon_{j;\lambda} C_j\right] I_\lambda^{\text{inc}} = 0. \tag{4.82}$$

En intégrant (4.82) sur le demi espace $s < s' < +\infty$, on obtient la densité de flux incident et le flux incident total, respectivement

$$I_\lambda^{\text{inc}}(s) = I_{0;\lambda}\exp\left(-\sum_j \int_s \epsilon_{j;\lambda} C_j ds'\right) \quad \text{et} \quad I^{\text{inc}}(s) = \int_\lambda I_\lambda^{\text{inc}} d\lambda, \tag{4.83}$$

d'où l'on déduit, par dérivation de (4.83), la puissance thermique aborbée par unité de volume,

$$\mathscr{J}^{\text{inc}}(s) = \sum_j C_j \int_\lambda \epsilon_{j;\lambda} I_{0;\lambda}\exp\left(-\sum_j \int_s \epsilon_{j;\lambda} C_j ds'\right) d\lambda, \tag{4.84}$$

et la puissante thermique absorbée par unité de masse,

$$\boxed{J^{\text{inc}}(s) = \sum_j \frac{C_j}{\rho_0} \int_\lambda \epsilon_{j;\lambda} I_{0;\lambda}\exp\left(-\sum_j \int_s \epsilon_{j;\lambda} C_j ds'\right) d\lambda.} \tag{4.85}$$

Supposons l'atmosphère homogène en composition, mince et isotherme. Sous ces hypothèses, les $\epsilon_{j;\lambda}$ sont constants et $C_j = f_j \rho_0/\mathcal{M}$, le paramètre f_j désignant la fraction molaire du gaz j. Au point sub-solaire, s correspond à l'altitude. La puissance absorbée par unité de masse s'écrit donc

$$J^{\text{inc}}(x) = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_j f_j \int_\lambda \epsilon_{j;\lambda} I_{0;\lambda}\exp\left[-\tau_\lambda e^{-x}\right] d\lambda. \tag{4.86}$$

où τ_λ représente le coefficient d'amortissement du flux monochromatique de longueur d'onde λ, qui est la somme des contributions $\tau_{j;\lambda}$ des gaz. Introduisons par ailleurs les longueurs associées $L_{j;\lambda}$, normées par la hauteur de pression, qui correspondent aux épaisseurs optiques d'une couche de fluide homogène pour les gaz j et la longueur d'onde λ. Ces trois paramètres s'expriment

$$\tau_\lambda = \sum_j \tau_{j;\lambda}, \quad \tau_{j;\lambda} = \frac{H\rho_0(0)}{\mathcal{M}} f_j \epsilon_{j;\lambda} \quad \text{et} \quad L_{j;\lambda} = \frac{1}{\tau_{j;\lambda}}. \tag{4.87}$$

Les profils en altitude de I^{inc}, $\mathscr{J}^{\text{inc}}$ et J^{inc} sont tracés pour différentes valeurs de τ_λ en Figure 4.7 (gauche). Dans la dynamique des ondes de marées décrite par notre modèle, les échanges radiatifs et diffusifs entre couches sont négligés. Ceci correspond à une atmosphère optiquement fine, i.e. $\tau_\lambda \ll 1$. Dans les cas où τ_λ ne satisfait pas cette condition, il est nécessaire d'introduire le couplage thermique diffusif/radiatif mentionné directement dans l'équation de la chaleur, ce qui complexifie le traitement analytique de la perturbation. Quand l'épaisseur optique est suffisamment grande, on peut néanmoins considérer que toute l'énergie thermique du flux incident est déposée au niveau du bord extérieur de l'atmosphère et adopter la loi en gradient de température de Gu & Ogilvie (2009).

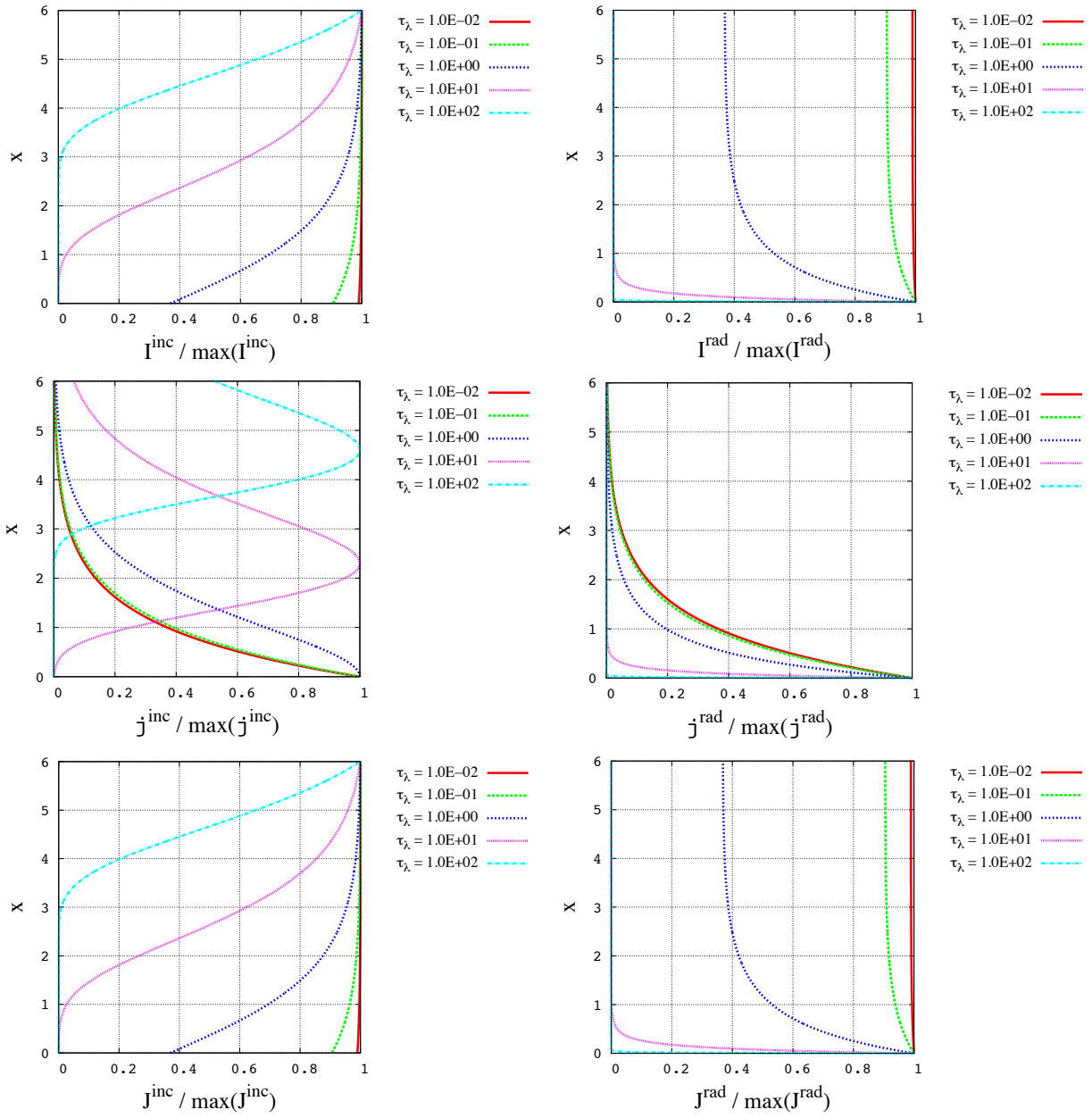


FIGURE 4.7: Profils verticaux des flux radiatifs (I, haut), puissances absorbées par unité de volume ($\mathscr{J}$, milieu) et puissances absorbées par unité de masse (J, bas) pour différentes valeurs du coefficient d'absorption τ_λ (Eq. 4.87) dans le cas d'une atmosphère mince isotherme et homogène en composition. L'altitude réduite $x = z/H$ correspond à l'axe des ordonnées. *Gauche* - Flux incident à l'équateur (cf. Eqs. 4.83, 4.84, 4.85). *Droite* - Flux radiatif émis par le sol (cf. Eqs. 4.100 et 4.106).

Le forçage des ondes de marée défini en (3.29) est finalement obtenu par développement de (4.85) en série de Fourier en temps et en longitude,

$$J^{\mathrm{inc}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma,m} J^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}(\theta, x)\, e^{i(\sigma t + m\varphi)}, \tag{4.88}$$

où le calcul des fonctions $J^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}$ requiert un traitement numérique dans le cas général.

4.4.3.2 Absorption du flux réfléchi par le sol

Comme l'atmosphère est supposée optiquement fine, une importante proportion du flux incident atteint la surface de la planète. Cette proportion, notée $\tilde{\alpha}_\lambda$ et telle que $I^{\mathrm{inc}}(R,\psi_*) = \tilde{\alpha}_\lambda(\psi_*) I_{0;\lambda}$ s'exprime simplement au point sub-solaire $\alpha_\lambda = e^{-\tau_\lambda}$. Une partie du flux incident est réfléchie, l'autre partie étant absorbée par le sol. Considérons d'abord le flux réfléchi, I^{ref}, dont la propagation est supposée se faire dans la direction radiale. Comme I_λ^{inc}, ce flux vérifie l'équation

$$\frac{dI_\lambda^{\mathrm{ref}}}{dz} + \left[\sum_j \epsilon_{j;\lambda} C_j\right] I_\lambda^{\mathrm{ref}} = 0, \tag{4.89}$$

et a ainsi pour expression

$$I_\lambda^{\mathrm{ref}}(x,\psi_*) = I_\lambda^{\mathrm{ref}}(0,\psi_*) \exp\left(-\sum_j \int_0^z \epsilon_{j;\lambda} C_j dz'\right) \tag{4.90}$$

avec $I_\lambda^{\mathrm{ref}}(0,\psi_*) = A_{\mathrm{gr};\lambda} I_\lambda^{\mathrm{inc}}(0,\psi_*)\cos\psi_*$, où $A_{\mathrm{gr};\lambda}$ est l'albédo du sol pour la fréquence λ. En intégrant sur l'ensemble du spectre, on obtient le flux réfléchi total

$$I^{\mathrm{ref}}(z,\psi_*) = \cos\psi_* \int_\lambda A_{\mathrm{gr};\lambda} I_\lambda^{\mathrm{inc}}(0,\psi_*) \exp\left(-\sum_j \int_0^z \epsilon_{j;\lambda} C_j dz'\right) d\lambda, \tag{4.91}$$

dont on déduit les puissances thermiques absorbées par unité de volume

$$\mathscr{J}^{\mathrm{ref}}(z,\psi_*) = \sum_j C_j \int_\lambda \epsilon_{j;\lambda} A_{\mathrm{gr};\lambda} I_\lambda^{\mathrm{inc}}(0,\psi_*) \exp\left(-\sum_j \int_0^z \epsilon_{j;\lambda} C_j dz'\right) d\lambda, \tag{4.92}$$

et par unité de masse,

$$\boxed{J^{\mathrm{ref}}(z,\psi_*) = \sum_j \frac{C_j}{\rho_0} \int_\lambda \epsilon_{j;\lambda} A_{\mathrm{gr};\lambda} I_\lambda^{\mathrm{inc}}(0,\psi_*) \exp\left(-\sum_j \int_0^z \epsilon_{j;\lambda} C_j dz'\right) d\lambda.} \tag{4.93}$$

Dans le cas d'une atmosphère homogène en composition et isotherme, (4.91) et (4.93) se simplifient :

$$I^{\mathrm{ref}}(x,\psi_*) = \cos\psi_* \int_\lambda A_{\mathrm{gr};\lambda} \alpha_\lambda I_\lambda^{\mathrm{inc}}(0,\psi_*) \exp\left(\tau_\lambda e^{-x}\right) d\lambda, \tag{4.94a}$$

$$J^{\mathrm{ref}}(x,\psi_*) = \frac{1}{\mathcal{M}} \cos\psi_* \sum_j f_j \int_\lambda \epsilon_{j;\lambda} A_{\mathrm{gr};\lambda} \alpha_\lambda I_\lambda^{\mathrm{inc}}(0,\psi_*) \exp\left(\tau_\lambda e^{-x}\right) d\lambda. \tag{4.94b}$$

Comme le flux incident, la dernière étape du calcul consiste à développer (4.93) en série de Fourier suivant les coordonnées temporelle et azimutale :

$$J^{\mathrm{ref}}(\mathbf{r},t) = \sum_{\sigma,m} J^{\mathrm{ref};\sigma,\mathrm{m}}(\theta,x)\, e^{i(\sigma t + m\varphi)}. \tag{4.95}$$

4.4.3.3 Absorption du flux émis par le sol

Le sol ré-émet partiellement la fraction de flux qu'il absorbe. En nous référant à l'approche de Bernard (1962), nous supposons qu'il se comporte comme un corps noir de température T_{gr} et d'émissivité ϵ_{gr}. Le flux émis, noté $I_{\mathrm{gr;BB}}$ (BB pour « black body »), s'écrit

$$I_{\mathrm{gr;BB}} = \epsilon_{\mathrm{gr}} \sigma_{\mathrm{SB}} T_{\mathrm{gr}}^4. \tag{4.96}$$

Comme l'atmosphère émet elle aussi un rayonnement vers le sol, le flux effectif réellement fourni par le sol est inférieur à $I_{\mathrm{gr;BB}}$. En modélisant le contre-rayonnement de l'atmosphère par la formule semi-empirique $I_{\mathrm{atm}} = \epsilon_{\mathrm{atm}} \sigma_{\mathrm{SB}} T_{\mathrm{gr}}^4$, Bernard (1962) montre que l'émissivité effective du sol devient $\epsilon = \epsilon_{\mathrm{gr}} (1 - \epsilon_{\mathrm{atm}})$ et le rayonnement correspondant,

$$I_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{rad}} = \epsilon \sigma_{\mathrm{SB}} T_{\mathrm{gr}}^4. \tag{4.97}$$

Pour la Terre, $\epsilon \approx 1$. Soulignons toutefois que ce paramètre peut varier localement en fonction de la nature du matériau composant la surface. Par exemple il ne prend pas les mêmes valeurs pour les surfaces continentales que pour les surfaces océaniques. Avec ϵ constant, la radiance spectrale associée s'écrit

$$I_{\mathrm{gr};\lambda}^{\mathrm{rad}} (T_{\mathrm{gr}}) = \epsilon \frac{2hc^2 \pi \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k_{\mathrm{B}} \lambda T_{\mathrm{gr}}}\right) - 1}, \tag{4.98}$$

où les paramètres sont ceux déjà introduits pour (4.79). Le flux radiatif $I_{\lambda}^{\mathrm{rad}}$ est absorbé de la même manière que le flux rayonné. Il est ainsi décrit par l'équation

$$\frac{dI_{\lambda}^{\mathrm{rad}}}{dz} + \left[\sum_j \epsilon_{j;\lambda} C_j\right] I_{\lambda}^{\mathrm{rad}} = 0, \tag{4.99}$$

avec la condition limite $I_{\lambda}^{\mathrm{rad}} = I_{\mathrm{gr};\lambda}^{\mathrm{rad}}$ à $x = 0$. On en déduit les flux radiatifs monochromatique et total

$$I_{\lambda}^{\mathrm{rad}} (z, T_{\mathrm{gr}}) = I_{\mathrm{gr};\lambda}^{\mathrm{rad}} (T_{\mathrm{gr}}) \exp\left(-\sum_j \int_0^z \epsilon_{j;\lambda} C_j dz'\right) \quad \text{et} \quad I^{\mathrm{rad}} (z, T_{\mathrm{gr}}) = \int_{\lambda} I_{\lambda}^{\mathrm{rad}} d\lambda. \tag{4.100}$$

La température de la surface (T_{gr}) dépend directement de la puissance qu'elle reçoit ($I_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{inc}}$). Linéarisées au voisinage de l'équilibre, ces deux quantités s'écrivent $T_{\mathrm{gr}} = T_{\mathrm{gr};0} + \delta T_{\mathrm{gr}}$ et $I_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{inc}} = I_{\mathrm{gr};0}^{\mathrm{inc}} + \delta I_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{inc}}$, où $T_{\mathrm{gr};0}$ et $I_{\mathrm{gr};0}^{\mathrm{inc}}$ représentent respectivement la température d'équilibre du sol et le flux incident moyenné sur la surface, et δT_{gr} et $\delta I_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{inc}}$ les perturbations. Développons ces dernières en séries de Fourrier de t et φ :

$$\delta T_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{inc}} (\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma,m} \delta T_{\mathrm{gr}}^{\sigma,m} (\theta) e^{i(\sigma t + m\varphi)} \quad \text{et} \quad \delta I_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{inc}} (\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma,m} \delta I_{\mathrm{gr}}^{\sigma,m} (\theta) e^{i(\sigma t + m\varphi)}. \tag{4.101}$$

Les fonctions $\delta T_{\mathrm{gr}}^{\sigma,m}$ et $I_{\mathrm{gr}}^{\sigma,m}$ vérifient la relation

$$\delta T_{\mathrm{gr}}^{\sigma,m} = \mathfrak{B}_{\mathrm{gr}}^{\sigma} I_{\mathrm{gr}}^{\sigma,m}, \tag{4.102}$$

où $\mathfrak{B}_{\mathrm{gr}}^{\sigma}$, explicitée plus loin, est une fonction de transfert traduisant l'effet des propriétés conductives de l'interface sol-atmosphère sur la réponse de la surface. En développant (4.98) au premier ordre en δT_{gr}, on obtient l'expression

$$I_{\mathrm{gr};\lambda}^{\mathrm{rad}}\left(T_{\mathrm{gr}}\right) = I_{\mathrm{gr};\lambda}^{\mathrm{rad}}\left(T_{\mathrm{gr};0}\right) + \left.\frac{\partial I_{\mathrm{gr};\lambda}^{\mathrm{rad}}}{\partial T_{\mathrm{gr}}}\right|_{T_{\mathrm{gr};0}} \delta T_{\mathrm{gr}} \tag{4.103}$$

avec

$$\left.\frac{\partial I_{\mathrm{gr};\lambda}^{\mathrm{rad}}}{\partial T_{\mathrm{gr}}}\right|_{T_{\mathrm{gr};0}} = \epsilon \frac{2\pi h^2 c^3 \lambda^{-6}}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{gr};0}^2} \frac{\exp\left(\frac{hc}{k_{\mathrm{B}}\lambda T_{\mathrm{gr};0}}\right)}{\left[\exp\left(\frac{hc}{k_{\mathrm{B}}\lambda T_{\mathrm{gr};0}}\right) - 1\right]^2}. \tag{4.104}$$

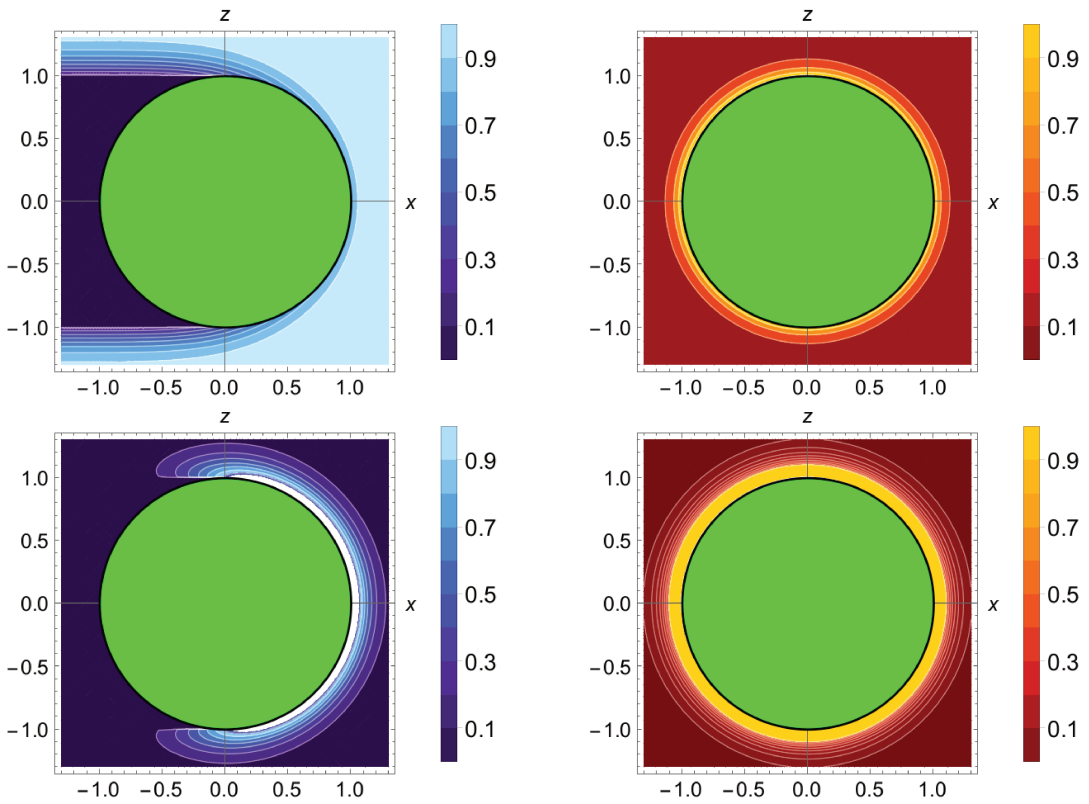


FIGURE 4.8: *Gauche* - Puissance absorbée par unité de masse (J^{inc}, haut, Eq. 4.85) et par unité de volume ($\mathscr{J}^{\mathrm{inc}}$, bas, Eq. 4.84) d'un flux incident monochromatique normées par leurs maximums et tracés en fonction des coordonnées spatiales normées par le rayon de la planète, X (l'étoile est à $X \to +\infty$) et Y (le vecteur de spin est suivant l'axe vertical). Dans ce système de coordonnées, la planète est représentée par un disque vert de rayon unité. Le flux se propage dans une atmosphère homogène en composition ($C_{\mathrm{G}} = C_0$ dans Eq. 4.81), de profondeur caractéristique $H/R = 0.1$ et de coefficient d'absorption $\tau_\lambda = 0.2$. *Droite* - Puissance absorbée par unité de masse (J^{rad}, haut, Eq. 4.106) et par unité de volume ($\mathscr{J}^{\mathrm{rad}}$, bas) normés par leur maximums et tracés en fonction de X et Y pour $\tau_\lambda = 0.5$.

On substitue finalement (4.103) dans (4.100) pour déterminer les profils de la puissance rayonnée sous l'effet des oscillations thermiques du sol,

$$\delta I^{\mathrm{rad};\sigma,\mathrm{m}}(\theta,z) = \mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}}\delta I^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}_{\mathrm{gr}} \int_{\lambda} \left.\frac{\partial I^{\mathrm{rad}}_{\mathrm{gr};\lambda}}{\partial T_{\mathrm{gr}}}\right|_{T_{\mathrm{gr};0}} \exp\left(-\sum_j \int_0^z \epsilon_{j;\lambda} C_j dz'\right) d\lambda, \tag{4.105}$$

et la puissance absorbée par unité de masse correspondante,

$$\boxed{J^{\mathrm{rad};\sigma,\mathrm{m}}(\theta,z) = \mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}}\delta I^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}_{\mathrm{gr}} \sum_j \frac{C_j}{\rho_0} \int_{\lambda} \epsilon_{j;\lambda} \left.\frac{\partial I^{\mathrm{rad}}_{\mathrm{gr};\lambda}}{\partial T_{\mathrm{gr}}}\right|_{T_{\mathrm{gr};0}} \exp\left(-\sum_j \int_0^z \epsilon_{j;\lambda} C_j dz'\right) d\lambda.} \tag{4.106}$$

De manière analogue à (4.94a) et (4.94b), ces expressions se simplifient dans le cas de la couche mince isotherme et homogène en composition

$$\delta I^{\mathrm{rad};\sigma,\mathrm{m}}(\theta,z) = \mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}}\delta I^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}_{\mathrm{gr}} \int_{\lambda} \left.\frac{\partial I^{\mathrm{rad}}_{\mathrm{gr};\lambda}}{\partial T_{\mathrm{gr}}}\right|_{T_{\mathrm{gr};0}} \alpha_{\lambda} \exp\left(\tau_{\lambda} e^{-x}\right) d\lambda, \tag{4.107a}$$

$$J^{\mathrm{rad};\sigma,\mathrm{m}}(\theta,z) = \frac{1}{\mathcal{M}}\mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}}\delta I^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}_{\mathrm{gr}} \sum_j f_j \int_{\lambda} \epsilon_{j;\lambda} \left.\frac{\partial I^{\mathrm{rad}}_{\mathrm{gr};\lambda}}{\partial T_{\mathrm{gr}}}\right|_{T_{\mathrm{gr};0}} \alpha_{\lambda} \exp\left(\tau_{\lambda} e^{-x}\right) d\lambda. \tag{4.107b}$$

Les graphes de ces expressions pour différentes valeurs de τ_λ (Fig. 4.7, panneaux de droite) montrent comment l'épaisseur optique de l'atmosphère modifie le profil de chauffage.

4.4.3.4 Diffusion thermique dans la couche limite atmosphérique

Dans une région située au voisinage du sol ($x \ll 1$) appelée *couche limite planétaire* (Stull, 1988), les transferts thermiques sont dominés par la diffusion turbulente. C'est ce processus qui régit les oscillations de températures relevées au niveau du sol (cf. Fig. 1.7, panneau en haut à droite), et qui a longtemps constitué l'unique forçage thermique de marée pris en compte (cf. la théorie de la résonance, Sect. 1.2). Aussi, nous devons introduire à l'interface les flux de chaleur se propageant par conduction dans le sol et dans l'atmosphère au voisinage de $x = 0$,

$$Q_{\mathrm{gr}}(t) = \frac{k_{\mathrm{gr}}}{H}\left(\partial_x T\right)_{x=0^-} \quad \text{et} \quad Q_{\mathrm{atm}}(t) = -\frac{k_{\mathrm{atm}}}{H}\left(\partial_x T\right)_{x=0^+}, \tag{4.108}$$

où les paramètres k_{gr} et k_{atm} représentent respectivement les conductivités thermiques du sol et de de l'atmosphère dans la couche limite. En notant C_{gr} et C_{atm} les capacités thermiques massiques des deux milieux, on exprime les diffusivités thermiques correspondantes

$$K_{\mathrm{gr}} = \frac{k_{\mathrm{gr}}}{\rho_0\left(0^-\right) C_{\mathrm{gr}}} \quad \text{et} \quad K_{\mathrm{atm}} = \frac{k_{\mathrm{atm}}}{\rho_0\left(0^+\right) C_{\mathrm{atm}}}, \tag{4.109}$$

le paramètre K_{atm} désignant ici la diffusivité thermique turbulente de l'atmosphère dans la direction verticale. Les variations de la température au voisinage de la surface sont décrites par l'équation du transport de la chaleur qui, sous l'hypothèse que la diffusion prédomine, se réduit à

$$\begin{cases} \partial_t T = \dfrac{K_{\mathrm{gr}}}{H^2}\partial_{xx}T & \text{pour } x \leq 0, \\ \partial_t T = \dfrac{K_{\mathrm{atm}}}{H^2}\partial_{xx}T & \text{pour } x > 0. \end{cases} \tag{4.110}$$

Il ne nous reste maintenant plus qu'à déterminer la fonction de transfert $\mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}}$ introduite en (4.102) faisant le lien entre la puissance thermique reçue par la surface et sa température. Ceci peut être réalisé à l'aide d'un bilan des transferts thermiques s'effectuant au niveau de l'interface sol-atmosphère. En soustrayant à la puissance du forçage le flux perdu par rayonnement, donné par (4.97), et ceux échangés par conduction dans le sol et dans la couche limite, donnés par (4.108), il vient

$$I^{\mathrm{inc}}_{\mathrm{gr}} - \epsilon\sigma_{\mathrm{SB}}T^4_{\mathrm{gr}} - Q_{\mathrm{gr}} - Q_{\mathrm{atm}} = 0, \tag{4.111}$$

d'où l'on déduit la température du sol à l'équilibre, $T_{\mathrm{gr};0}$, et par linéarisation au voisinage de l'équilibre, les oscillations de températures dans la couche limite,

$$\begin{cases} \delta T^{\sigma,m}(\theta, x) = \mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}} e^{[1+\mathrm{sign}(\sigma)i]x/\mathfrak{d}^{\sigma}_{\mathrm{gr}}}\delta I^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}_{\mathrm{gr}} & \text{pour } x \leq 0, \\ \delta T^{\sigma,m}(\theta, x) = \mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}} e^{-[1+\mathrm{sign}(\sigma)i]x/\mathfrak{d}^{\sigma}_{\mathrm{atm}}}\delta I^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}_{\mathrm{gr}} & \text{pour } x > 0. \end{cases} \tag{4.112}$$

Les longueurs $\mathfrak{d}^{\delta}_{\mathrm{gr}}$ et $\mathfrak{d}^{\sigma}_{\mathrm{atm}}$ sont les épaisseurs de peau du transport de chaleur par diffusion thermique dans le sol et dans l'atmosphère. Leurs expressions respectives,

$$\mathfrak{d}^{\sigma}_{\mathrm{gr}} = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{2K_{\mathrm{gr}}}{|\sigma|}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}^{\sigma}_{\mathrm{atm}} = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{2K_{\mathrm{atm}}}{|\sigma|}}, \tag{4.113}$$

montrent que l'épaisseur de la couche limite diffusive diminue quand la fréquence augmente. La couche limite diffusive devant rester fine devant la couche atmosphérique, $\mathfrak{d}^{\sigma}_{\mathrm{atm}}$ doit satisfaire la condition $\mathfrak{d}^{\sigma}_{\mathrm{atm}} \ll 1$. Dans le cas contraire, la diffusion thermique ne se limite plus à un effet de bord et il est nécessaire de la prendre en compte dans les équations gouvernant la dynamique des ondes de marée. Notons $\varsigma_{\mathrm{gr}} = 4\sigma_{\mathrm{SB}}T^3_{\mathrm{gr};0}$ l'impédance radiative de la surface, assimilée à un corps noir et forcée par une variation de température. La fonction de transfert $\mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}}$ se déduit directement du bilan de puissance donné par (4.111) linéarisé au voisinage de l'équilibre,

$$\delta I^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}_{\mathrm{gr}} - \epsilon\varsigma_{\mathrm{gr}}\delta T^{\sigma,m}_{\mathrm{gr}} - \frac{k_{\mathrm{gr}}}{H}\left(\partial_x \delta T^{\sigma,m}\right)_{x=0^-} + \frac{k_{\mathrm{atm}}}{H}\left(\partial_x \delta T^{\sigma,m}\right)_{x=0^+} = 0, \tag{4.114}$$

dans lequel on substitue $\delta T^{\sigma,m}$ par (4.112). Il vient finalement

$$\mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}} = \frac{1}{\epsilon\varsigma_{\mathrm{gr}}}\frac{1}{1 + [1 + \mathrm{sign}(\sigma)\, i]\sqrt{\frac{|\sigma|}{\sigma_{\mathrm{bl}}}}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{\mathrm{bl}} = 2\left(\frac{\epsilon\varsigma_{\mathrm{gr}}}{\beta_{\mathrm{atm}} + \beta_{\mathrm{gr}}}\right)^2, \tag{4.115}$$

où β_{gr} et β_{atm}, qui représentent les capacités thermiques conductives du sol et de l'atmosphère au voisinage de la surface, sont données par

$$\beta_{\mathrm{gr}} = \rho_0\left(0^-\right)C_{\mathrm{gr}}\sqrt{K_{\mathrm{gr}}} \quad \text{et} \quad \beta_{\mathrm{atm}} = \rho_0\left(0^+\right)C_{\mathrm{atm}}\sqrt{K_{\mathrm{atm}}}. \tag{4.116}$$

Afin d'illustrer le comportement de $\mathfrak{B}_{\rm gr}^{\sigma}$ en fonction de la fréquence de marée, on trace le lieu de (4.115) dans le plan complexe défini par ses parties réelle et imaginaire (diagramme de Nyquist, Fig. 4.9). La fréquence $\sigma_{\rm bl}$ caractérise la réponse de la couche limite au forçage thermique du flux incident. Comme on le voit, il s'agit d'une fréquence de transition entre deux régimes aymptotiques :

- un *régime conductif* ($|\sigma| \ll \sigma_{\rm bl}$) où les échanges par diffusion thermique au niveau de la surface sont suffisamment rapides pour que l'oscillation de température soit en phase avec le flux incident (Fig. 4.9, zone où $\Re\left\{\mathfrak{B}_{\rm gr}^{\sigma}\right\} \to \max\left(\Re\left\{\mathfrak{B}_{\rm gr}^{\sigma}\right\}\right)$),
- un *régime non-conductif* ($|\sigma| \gg \sigma_{\rm bl}$) où le temps des échanges conductifs est très supérieur à celui du forçage, ce qui entraîne un retard de la réponse par rapport à la perturbation (zone où $\Re\left\{\mathfrak{B}_{\rm gr}^{\sigma}\right\} \to 0$).

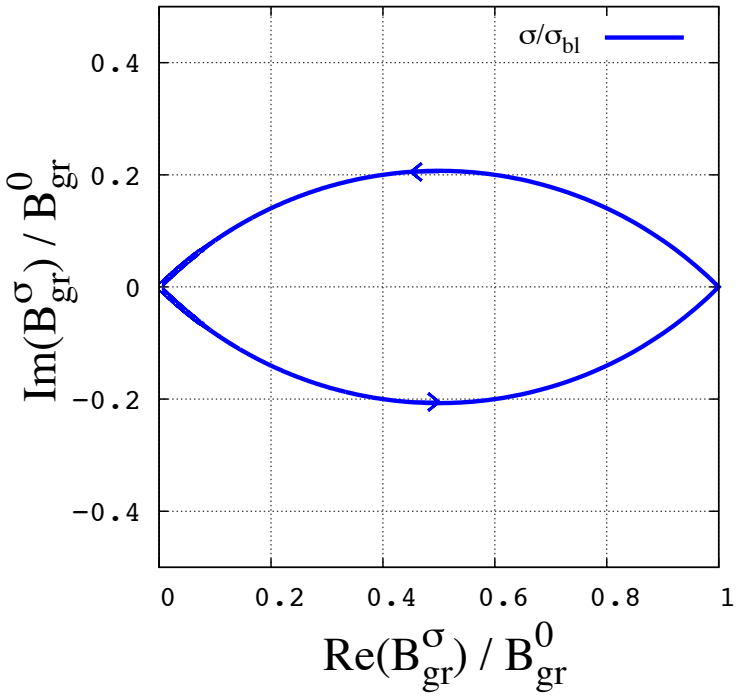


FIGURE 4.9: Diagramme de Nyquist de la fonction de transfert de la couche limite $\mathfrak{B}_{\rm gr}^{\sigma}$ dans la gamme de fréquences $-10^3 \leq \sigma/\sigma_{\rm bl} \leq 10^3$ (σ étant la fréquence de marée et $\sigma_{\rm bl}$ la fréquence de coupure définie par Eq. 4.115). La fonction de transfert, donnée par (4.115), est normé par sa valeur en $\sigma = 0$ et tracée en fonction de la fréquence de marée dans le plan complexe. L'axe horizontal correspond à $\Re\left\{\mathfrak{B}_{\rm gr}^{\sigma}\right\}/\mathfrak{B}_{\rm gr}^{0}$ et l'axe vertical à $\Im\left\{\mathfrak{B}_{\rm gr}^{\sigma}\right\}/\mathfrak{B}_{\rm gr}^{0}$. La flèche indique le sens des σ croissants. Le gain de la fonction de transfert à un point P donné de la courbe est défini par la distance de ce point à l'origine O de coordonnées $(0,0)$. La phase de $\mathfrak{B}_{\rm gr}^{\sigma}$ correspond quant à elle à l'angle que fait le vecteur **OP** avec l'axe horizontal.

Les propriétés conductives de l'interface étant propres aux matériaux qui le composent, $\sigma_{\rm bl}$ est un paramètre local. Sur Terre, la diffusion turbulente dans l'atmosphère est un processus de transport de la chaleur plus efficace que la conduction de l'océan ou de la croûte (Bernard, 1962), d'où $\beta_{\rm atm} \gg \beta_{\rm gr}$. Toutefois, $K_{\rm atm}$ peut varier sur plusieurs ordres de grandeur, atteignant des maximums dans les régions océaniques (typiquement, $\beta_{\rm atm} \sim 10^4$ J.m^{-2}.K^{-1}.s$^{-1/2}$ dans ces régions). Bernard (1962) propose ainsi de prendre pour la diffusivité turbulente $K_{\rm atm} \sim 10$ m^{2}s^{-1}, la valeur déjà prescrite par Wilkes (1949), pour une fréquence de conduction $\sigma_{\rm bl} \sim 10^{-6}$ s^{-1}. A l'heure de la simulation numérique haute résolution, une estimation de ce paramètre pour différentes planètes peut être extraite des résultats des GCM et des modèles de turbulence (e.g. Leconte et al., 2013, où la diffusivité turbulente est estimée numériquement dans un GCM).

A partir de (4.115), on obtient directement le gain et la phase de $\mathfrak{B}_{\rm gr}^{\sigma}$,

$$\left|\mathfrak{B}_{\mathrm{gr}}^{\sigma}\right| = \frac{1}{\epsilon\varsigma_{\mathrm{gr}}\sqrt{1+2\sqrt{\frac{|\sigma|}{\sigma_{\mathrm{bl}}}}+2\frac{|\sigma|}{\sigma_{\mathrm{bl}}}}} \quad \text{et} \quad \arg\left(\mathfrak{B}_{\mathrm{gr}}^{\sigma}\right) = -\mathrm{sign}\left(\sigma\right)\arctan\left[\frac{1}{1+\sqrt{\frac{|\sigma|}{\sigma_{\mathrm{bl}}}}}\right], \tag{4.117}$$

où les caractéristiques des régimes conductifs et non-conductifs apparaissent clairement. Dans le premier ($|\sigma| \ll \sigma_{\mathrm{bl}}$), l'amplitude des oscillations est maximale, de même que leur déphasage qui vaut $\Delta\varphi = \pm\pi/4$ (cf. Fig. 4.9), soit 3 heures dans le cas de la marée solaire diurne. Le modèle, appliqué au mesures de la Fig. 1.7 (panneau en haut à droite) où la composante diurne de la température est déphasée d'environ 3 heures (le pic arrive à 15h00 et non à 12h00), indique que le régime des oscillations de température est conductif à l'endroit où les relevés ont été effectués, ce qui implique que $\sigma_{\mathrm{bl}} \gg 1.0 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$. Dans le régime non-conductif, les oscillations sont fortement atténuées et $\Delta\varphi \to 0$. Du point de vue des échanges thermiques, l'interface sol-atmophère se comporte ainsi comme un filtre passe-bas de fréquence de coupure σ_{bl}.

Les profils des variations de température ayant été calculés, nous pouvons en déduire le terme de chauffage par diffusion thermique correspondant, noté J^{diff} et développé comme J_{inc}, J^{ref} et J_{rad} en série de Fourier suivant t et φ,

$$J^{\mathrm{diff}}\left(\mathbf{r},t\right) = \sum_{\sigma,m} J^{\mathrm{diff};\sigma,\mathrm{m}}\left(\theta,x\right) e^{i(\sigma t+m\varphi)}. \tag{4.118}$$

En écrivant l'équation de la chaleur sous la forme (e.g. Wilkes, 1949; Siebert, 1961, CL70)

$$J_{\mathrm{diff}} = C_{\mathrm{atm}}\partial_t \delta T, \tag{4.119}$$

et en substituant δT par son expression obtenue en (4.112) dans cette équation, nous obtenons

$$\boxed{J^{\mathrm{diff};\sigma,\mathrm{m}}\left(\theta,x\right) = i\sigma C_{\mathrm{atm}}\mathfrak{B}_{\mathrm{gr}}^{\sigma} e^{-[1+\mathrm{sign}(\sigma)i]\tau_{\mathrm{bl}}^{\sigma}x}\delta I_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}\left(\theta,x\right),} \tag{4.120}$$

où le paramètre $\tau_{\mathrm{bl}}^{\sigma} = 1/\mathfrak{d}_{\mathrm{atm}}^{\sigma}$, analogue au coefficient d'absorption τ_{λ}, représente le taux d'amortissement du chauffage de couche limite par diffusion thermique.

4.4.3.5 Le cas bi-chromatique

L'utilisation des expressions établies pour les termes de forçage thermique dans le cas général requiert de connaître précisément la structure et la composition de l'atmosphère, ce qui est rarement le cas en ce qui concerne les exoplanètes. Il convient donc de donner pour ces forçages des expressions simplifiées définies par un nombre restreint de paramètres, décrivant la physique du chauffage de marée à l'ordre zéro, et en conséquence mieux adaptés à l'exploration du domaine des paramètres. Une telle démarche présente aussi un intérêt pédagogique dans la mesure où elle permet de d'isoler les différentes composantes de chaque source. Ainsi, considérons que l'atmosphère est une couche mince isotherme et homogène en composition, dont les paramètres d'absorption et de réflexion, comme ceux du sol, sont bi-chromatiques. Alors qu'ils dépendaient de la longueur d'onde dans le cas général, $A_{\mathrm{gr};\lambda}$, $A_{\mathrm{atm};\lambda}$, $\epsilon_{\mathrm{G};\lambda}$, α_{λ} et τ_{λ} se réduisent maintenant à des constantes pour le rayonnement de l'étoile dans le visible ($A_{\mathrm{gr};\mathrm{V}}$, $A_{\mathrm{atm};\mathrm{V}}$, $\epsilon_{\mathrm{G};\mathrm{V}}$, α_{V} et τ_{V}) et celui de la planète dans l'infrarouge ($A_{\mathrm{gr};\mathrm{IR}}$, $A_{\mathrm{atm};\mathrm{IR}}$, $\epsilon_{\mathrm{G};\mathrm{IR}}$, α_{IR} et τ_{IR}). Les échanges de chaleurs correspondants sont représentés en Figure 4.10.

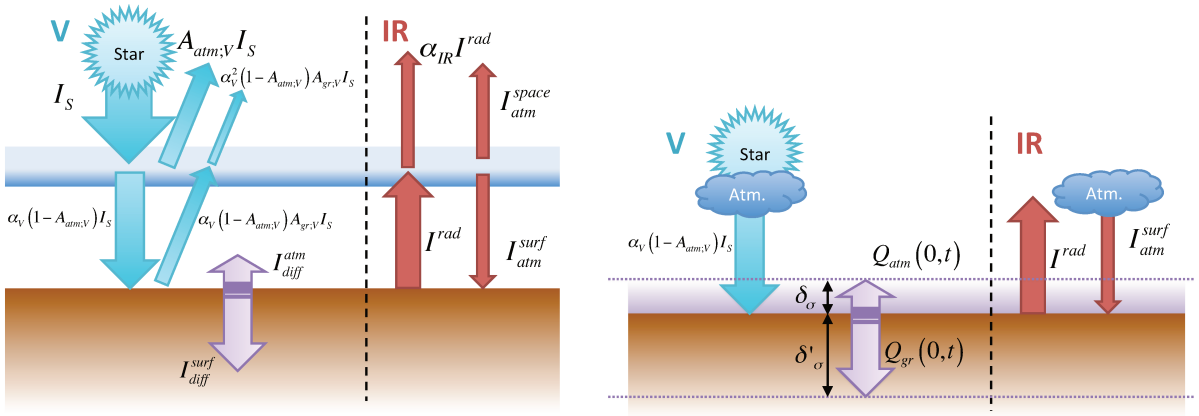


FIGURE 4.10: Transferts thermiques dans le cas bi-chromatique où l'étoile émet dans le domaine du visible (bleu) et la planète dans celui de l'infrarouge (rouge), ce à quoi s'ajoutent les échanges par diffusion thermique dans la couche limite (violet). *Gauche* - Transferts thermiques entre l'atmosphère, l'espace et le sol. *Droite* - Transferts thermiques à l'interface sol-atmosphère.

Dans cette configuration, la puissance surfacique résultant du rayonnement de corps noir de l'étoile s'écrit, au niveau de la planète,

$$I_* = \frac{R_*^2}{d^2}\sigma_{\mathrm{SB}}T_*^4, \tag{4.121}$$

avec les notations de (4.79). Le flux effectif, dont la radiance est donné par (4.80), devient

$$I_0 = (A - A_{\mathrm{atm;V}})\, I_*; \tag{4.122}$$

les flux incident et puissance absorbée par unité de masse,

$$I^{\mathrm{inc}}(x,\psi_*) = I_0 \exp\left(-\epsilon_{\mathrm{G;V}}\int_l C_0 dl'\right), \tag{4.123a}$$

$$J^{\mathrm{inc}}(x,\psi_*) = I_0 \frac{\epsilon_{\mathrm{G;V}}}{\mathcal{M}} \exp\left(-\epsilon_{\mathrm{G;V}}\int_l C_0 dl'\right), \tag{4.123b}$$

De la même manière, le flux réfléchi et la puissance absorbée par unité de masse donnés par (4.94a) et (4.94b) se transforment en

$$I^{\mathrm{ref}}(x,\psi_*) = A_{\mathrm{gr,V}}\ \alpha_{\mathrm{V}} I^{\mathrm{inc}}(0,\psi_*)\cos\psi_*\ \exp\left(\tau_{\mathrm{V}} e^{-x}\right), \tag{4.124a}$$

$$J^{\mathrm{ref}}(x,\psi_*) = A_{\mathrm{gr,V}}\ \alpha_{\mathrm{V}} \frac{\epsilon_{\mathrm{G;V}}}{\mathcal{M}} I^{\mathrm{inc}}(0,\psi_*)\cos\psi_*\ \exp\left(\tau_{\mathrm{V}} e^{-x}\right), \tag{4.124b}$$

et le forçage radiatif du sol, en

$$\delta I^{\mathrm{rad};\sigma,\mathrm{m}}(\theta,x) = \epsilon\varsigma_{\mathrm{gr}}\mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}}\alpha_{\mathrm{IR}}\exp\left(\tau_{\mathrm{IR}}e^{-x}\right)\delta I^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}_{\mathrm{gr}}(\theta,x), \tag{4.125a}$$

$$J^{\mathrm{rad};\sigma,\mathrm{m}}(\theta,x) = \epsilon\varsigma_{\mathrm{gr}}\frac{\epsilon_{\mathrm{IR}}}{\mathcal{M}}\mathfrak{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}}\alpha_{\mathrm{IR}}\exp\left(\tau_{\mathrm{IR}}e^{-x}\right)\delta I^{\mathrm{inc};\sigma,\mathrm{m}}_{\mathrm{gr}}(\theta,x). \tag{4.125b}$$

4.4.4 Réponse de l'atmosphère isotherme stablement stratifiée à un profil de chauffage constant

Afin de comparer les résultats du modèle à ceux obtenus dans l'approximation terrestre (Sect. 3.6), nous revenons dans cette section au cas idéalisé de l'atmosphère isotherme stablement stratifiée, à laquelle nous appliquons un profil vertical de forçage constant. Ceci nous permet d'exprimer explicitement les quantités perturbées, le couple de marée et les nombres de Love en fonction des paramètres caractérisant la structure de l'atmosphère et ses propriétés dissipatives.

Pour résoudre l'équation des ondes, nous adoptons les même conditions limites qu'au Chapitre 3. Au niveau du sol, le déplacement vertical est nul (Eq. 3.47) :

$$\Psi|_{x=0} = 0. \tag{4.126}$$

A la limite supérieure de l'atmosphère, x_{atm}, la condition (3.49) devient

$$\frac{d\Psi_n}{dx} - i\hat{k}_n\Psi_n = 0, \tag{4.127}$$

avec la convention $\Im\left\{\hat{k}_n\right\} > 0$ si $\Im\left\{\hat{k}_n\right\} \neq 0$ et $\Re\left\{\hat{k}_n\right\} > 0$ sinon. Avec ces conditions appliquées aux bornes du domaine, (4.61) a pour solution

$$\boxed{\Psi_n(x) = \frac{H^2C}{\hat{k}_n^2 + \frac{1}{4}}\left[e^{-\frac{x}{2}} - e^{i\hat{k}_n x}\right],} \tag{4.128}$$

où C et $\hat{k}_n$ sont définis respectivement par (4.60c) et (4.62). Introduisons la fonction de l'altitude $\mathfrak{F}_{\mathcal{P}}$, paramétrée par $\mathcal{P}$ (où $\mathcal{P}$ peut désigner $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ ou $\mathcal{C}_n$; cf. Eqs. 4.70a à 4.70c), telle que

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{P}}(x) = \left(\mathcal{P} - \frac{1}{2}\right)e^{-x} - \left(\mathcal{P} + i\hat{k}_n\right)e^{\left(i\hat{k}_n - \frac{1}{2}\right)x}. \tag{4.129}$$

La substitution de (4.128) dans les relations de polarisation (4.67a) à (4.69c) permet d'obtenir les profils en altitude des quantités perturbées. Il vient ainsi, pour la vitesse,

$$V_{r;n} = i\frac{\Lambda_n H}{R^2\sigma}\mathcal{F}_n\left[1 - e^{\left(i\hat{k}_n + \frac{1}{2}\right)x}\right], \tag{4.130a}$$

$$V_{\theta;n} = \frac{i}{\sigma R\left(1 - \varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\mathcal{F}_n e^x\mathfrak{F}_{\mathcal{A}_n}(x) - \mathcal{D}_n J_n - \varepsilon_{\mathrm{s;n}}U_n\right\}, \tag{4.130b}$$

$$V_{\varphi;n} = -\frac{1}{\sigma R\left(1 - \varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\mathcal{F}_n e^x\mathfrak{F}_{\mathcal{A}_n}(x) - \mathcal{D}_n J_n - \varepsilon_{\mathrm{s;n}}U_n\right\}, \tag{4.130c}$$

pour le déplacement,

$$\boxed{\begin{aligned}
\xi_{r;n} =& \frac{\Lambda_n H}{R^2\sigma^2}\mathcal{F}_n\left[1-e^{\left(i\hat{k}_n+\frac{1}{2}\right)x}\right], && (4.131a)\\
\xi_{\theta;n} =& \frac{1}{\sigma^2 R\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\mathcal{F}_n e^x \mathfrak{F}_{\mathcal{A}_n}(x)-\mathcal{D}_n J_n-\varepsilon_{\mathrm{s;n}}U_n\right\}, && (4.131b)\\
\xi_{\varphi;n} =& \frac{i}{\sigma^2 R\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\mathcal{F}_n e^x \mathfrak{F}_{\mathcal{A}_n}(x)-\mathcal{D}_n J_n-\varepsilon_{\mathrm{s;n}}U_n\right\}, && (4.131c)
\end{aligned}}$$

et pour les quantités scalaires,

$$\boxed{\begin{aligned}
\delta p_n =& \frac{\rho_0(0)}{1-\varepsilon_{\mathrm{s;n}}}\left\{\mathcal{F}_n\mathfrak{F}_{\mathcal{A}_n}(x)-\left(\mathcal{D}_n J_n+U_n\right)e^{-x}\right\}, && (4.132a)\\
\delta\rho_n =& \frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\rho_0(0)}{c_s^2\left(1-\varepsilon_{\mathrm{s;n}}\right)}\left\{\mathcal{F}_n\mathfrak{F}_{\mathcal{B}_n}(x)-\left(\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}J_n+U_n\right)e^{-x}\right\}, && (4.132b)\\
\delta T_n =& \frac{i\sigma\left(\Gamma_1-1\right)T_0}{c_s^2\left(i\sigma+\sigma_0\right)\left(1-\varepsilon_{\mathrm{s;n}}\right)}\left\{\mathcal{F}_n e^x\mathfrak{F}_{\mathcal{C}_n}(x)+\frac{1}{i\sigma}\mathcal{E}_n J_n-U_n\right\}, && (4.132c)
\end{aligned}}$$

avec $\mathcal{E}_n$ défini par (4.71) et

$$\mathcal{F}_n = \kappa\frac{\left(1-\frac{h_n}{H}\right)J_n-i\sigma U_n}{\left(i\sigma+\sigma_0\right)\left(\hat{k}_n^2+\frac{1}{4}\right)}. \tag{4.133}$$

Intéressons-nous plus particulièrement à la redistribution de masse pour des ondes de basses fréquences telles que $|\varepsilon_{s;n}| \ll 1$. Au vu de (4.132b), il paraît judicieux de séparer, comme en (3.46a), dans l'expression de la masse volumique la partie dépendant du champ de vitesse dans la direction verticale (V), et la partie relative au forçage directe (H), comme nous l'avons fait au Chapitre 3. On écrit ainsi $\delta\rho_n = \delta\rho_{n;\mathrm{V}} + \delta\rho_{n;\mathrm{H}}$, avec

$$\delta\rho_{n;\mathrm{V}} = \frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\rho_0(0)}{c_s^2}\mathcal{F}_n\mathfrak{F}_{\mathcal{B}_n}(x), \tag{4.134a}$$

$$\delta\rho_{n;\mathrm{H}} = -\frac{\rho_0(0)}{c_s^2}\left[\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}J_n+\frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}U_n\right]e^{-x}. \tag{4.134b}$$

On développe ainsi les nombres de Love et le couple de marée de la marée semi-diurne

$$k_2^{\sigma,2} = k_{2;\mathrm{V;therm}}^{\sigma,2} + k_{2;\mathrm{V;grav}}^{\sigma,2} + k_{2;\mathrm{H;therm}}^{\sigma,2} + k_{2;\mathrm{H;grav}}^{\sigma,2}, \tag{4.135a}$$

$$\mathcal{T}^{\sigma,2} = \mathcal{T}_{\mathrm{V;therm}}^{\sigma,2} + \mathcal{T}_{\mathrm{V;grav}}^{\sigma,2} + \mathcal{T}_{\mathrm{H;therm}}^{\sigma,2} + \mathcal{T}_{\mathrm{H;grav}}^{\sigma,2}, \tag{4.135b}$$

où les indices $_{\mathrm{therm}}$ et $_{\mathrm{grav}}$ désignent les contributions respectives des forçages thermiques et gravifiques. Assimilons le forçage de marée semi-diurne à sa composante quadripolaire, avec des distributions de puissance thermique et de potentiel de la forme

$$J\left(x,\theta,\varphi\right)=J_2P_2^2\cos\left(\theta\right)e^{2i\varphi}\quad\text{et}\quad U\left(x,\theta,\varphi\right)=U_2P_2^2\cos\left(\theta\right)e^{2i\varphi}. \tag{4.136}$$

et introduisons les paramètres constants $\mathcal{W}$ et $\mathcal{H}$,

$$\mathcal{W}=\frac{4\pi\mathscr{G}HR\rho_0\left(0\right)}{5c_s^2}\quad\text{et}\quad\mathcal{H}=\frac{2\pi R^2H\rho_0\left(0\right)}{c_s^2}. \tag{4.137}$$

Alors, sous l'hypothèse où $|\varepsilon_{s;n}|\ll 1$ (ondes acoustiques négligées), les composantes identifiées en (4.135a) et (4.135b) s'écrivent, pour les nombres de Love,

$$k_{2;\mathrm{H;therm}}^{\sigma,2}=-\mathcal{W}\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}\frac{J_2}{U_2}, \tag{4.138a}$$

$$k_{2;\mathrm{H;grav}}^{\sigma,2}=-\mathcal{W}\frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}, \tag{4.138b}$$

$$k_{2;\mathrm{V;therm}}^{\sigma,2}=-\mathcal{W}\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_{2,n,2}^{\sigma,2}\frac{\kappa\left(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0\right)\left(\mathcal{B}_n+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{h_n}{H}\right)}{\left(i\sigma+\sigma_0\right)^2\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)^2}\frac{J_2}{U_2}, \tag{4.138c}$$

$$k_{2;\mathrm{V;grav}}^{\sigma,2}=\mathcal{W}\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_{2,n,2}^{\sigma,2}i\sigma\frac{\kappa\left(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0\right)\left(\mathcal{B}_n+\frac{1}{2}\right)}{\left(i\sigma+\sigma_0\right)^2\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)^2}. \tag{4.138d}$$

et pour le couple,

$$\mathcal{T}_{\mathrm{H;therm}}^{\sigma,2}=-\mathcal{H}U_2\Im\left\{\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}J_2\right\}, \tag{4.139a}$$

$$\mathcal{T}_{\mathrm{H;grav}}^{\sigma,2}=-\mathcal{H}U_2\Im\left\{\frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}U_2\right\}, \tag{4.139b}$$

$$\mathcal{T}_{\mathrm{V;therm}}^{\sigma,2}=-\mathcal{H}U_2\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_{2,n,2}^{\sigma,2}\left(1-\frac{h_n}{H}\right)\Im\left\{\frac{\kappa\left(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0\right)\left(\mathcal{B}_n+\frac{1}{2}\right)}{\left(i\sigma+\sigma_0\right)^2\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)^2}J_2\right\}, \tag{4.139c}$$

$$\mathcal{T}_{\mathrm{V;grav}}^{\sigma,2}=\mathcal{H}U_2\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_{2,n,2}^{\sigma,2}\Im\left\{i\sigma\frac{\kappa\left(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0\right)\left(\mathcal{B}_n+\frac{1}{2}\right)}{\left(i\sigma+\sigma_0\right)^2\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)^2}U_2\right\}. \tag{4.139d}$$

Considérons la marée thermique pure ($U_2\approx 0$). Quand on fait tendre σ vers zéro, $\left|\hat{k}_n\right|\to+\infty$, $|\mathcal{B}_n|\to+\infty$ et $\mathcal{B}_n/\hat{k}_n^2\propto\left(i\sigma+\sigma_0\right)/\left(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0\right)$. Ainsi $k_{2;\mathrm{V;therm}}^{\sigma,2}\approx-k_{2;\mathrm{H;therm}}^{\sigma,2}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{V;therm}}^{\sigma,2}\approx-\mathcal{T}_{\mathrm{H;therm}}^{\sigma,2}$. Il en résulte des nombres de Love et un couple de marée très petits au voisinage de la synchronisation. Cela ne correspond pas à la situation de Vénus où un couple atmosphérique important est nécessaire pour contrebalancer l'effet du couple de marée gravifique exercé sur la partie solide (Dobrovolskis & Ingersoll, 1980; Correia & Laskar, 2001; Correia et al., 2003). Le cas d'un couple atmosphérique fort va correspondre à celui d'une atmosphère convective en rotation lente étudié ci-après en Section 4.5 où le couple se réduit à $\mathcal{T}_{\mathrm{H;therm}}^{\sigma,2}$. Le comportement isolé ici dans le cas de l'atmosphère isotherme stablement stratifiée avait déjà été identifié par Arras & Socrates (2010) à travers l'étude des marées fluides thermiques pour les Jupiter chauds. D'après ces auteurs, il s'explique par l'effet de la stratification stable de l'atmosphère isotherme sur

le déplacement des particules de fluides : lorsque le fluide est stablement stratifié, la poussée d'Archimède entraîne un déplacement vertical des particules de fluides qui vient compenser les variations locales de densité dues au forçage thermique[5]. Dans le cas de l'atmosphère isotherme, la stratification est très stable ($N^2 \gg \sigma^2$) et ce mécanisme est efficace. En revanche, il n'opère plus dans le cas convectif ($N^2 \approx 0$), comme nous allons le voir dans la section suivante.

4.5 Cas d'une atmosphère mince convective en rotation lente

On examine ici un second cas (le premier étant celui de l'atmosphère isotherme) : celui où la force de rappel de stratification n'est pas en action du fait de la convection et où l'accéleration de Coriolis peut être négligée du fait d'une rotation lente. Cette configuration est typique des planètes en rotation lente possédant une atmosphère convective dans les couches proches du sol, telles que Vénus (voir Fig. 3.3 et Section 4.6.2). Elle permet de simplifier grandement les équations de la dynamiques. L'accélération de Coriolis, qui détermine la structure horizontale de la réponse, se compare à la fréquence de marée. Elle est négligeable dès lors que $|\nu| < 1$ (on rappelle que $\nu = 2\Omega/\sigma$, cf. 3.30), c'est-à-dire dans le régimes des ondes super-inertielles. De même, lorsque $N^2 < \sigma^2$, les ondes ne sont plus propagatives mais deviennent evanescentes. En particulier, dans le cas d'une région convective où $N^2 = 0$, la force de rappel d'Archimède dans la direction verticale est nulle. Ceci est important car le terme $N^2 V_r$ dans l'équation de la chaleur s'annule alors, et ne restaure plus par un déplacement de fluide les variations locales de densité générées par le chauffage. En considérant le cas $N^2 = 0$ et $\Omega = 0$, nous déterminons l'équilibre de l'atmosphère, la structure de la perturbation de marée et la redistribution de masse associée.

4.5.1 Equilibre

D'après (3.14), l'annulation de la fréquence de Brunt-Väisälä correspond au gradient adiabatique de la hauteur de pression

$$\frac{dH}{dz} = -\kappa, \tag{4.140}$$

d'où l'on déduit les variations de H, T_0 et x avec l'altitude z,

$$H(z) = H(0) - \kappa z, \quad T_0 = T(0) - \frac{\kappa g}{\mathcal{R}_s} z, \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{H(0)}{H(0) - \kappa z}\right). \tag{4.141}$$

Ainsi, le cas $N^2 = 0$ nous donne un gradient négatif de température semblable à celui observé par la sonde Pioneer pour la basse atmosphère de Vénus (Seiff et al., 1980, voir Fig. 3.3). Les distributions de hauteur de pression, température, pression et masse volumique de l'atmosphère convective en fonction de l'altitude réduite (x) ont pour expressions

$$H(x) = H(0)\, e^{-\kappa x}, \quad T_0(x) = \frac{gH(0)}{\mathcal{R}_s} e^{-\kappa x}, \quad p_0(x) = p_0(0)\, e^{-x} \quad \text{et} \quad \rho_0(x) = \frac{p_0(0)}{gH(0)} e^{(\kappa-1)x}. \tag{4.142}$$

5. Extrait de la discussion d'Arras & Socrates (2010) sur la réponse de marée au voisinage de la synchronisation : « Clearly, the equilibrium tide density perturbation in [$\delta\rho$], and thus the equilibrium tide quadrupole moment, has no contribution from time-dependant surface heating. (...) The [source] term in [the heat transport equation] represents a density decrease due to heating, which is precisely compensated for by the $N^2\xi_r/g$ term that results from moving across surfaces of constant pressure. In other words, denser fluid is brought up from below, exactly canceling the local decrease due to heating ».

4.5.2 Structure de la perturbation de marée

On simplifie le problème en examinant le cas des marées thermiques pures. Les effets du potentiel de marée gravifique sont négligés (pour la réponse à cette composante dans les régions convectives, voir Zahn, 1966a; Remus et al., 2012a; Ogilvie, 2013). Dans les basses fréquences, lorsque $\sigma \to 0$, la perturbation de marée tend vers sa composante hydrostatique, la marée d'équilibre (Zahn, 1966a; Terquem et al., 1998). En conséquence, on suppose que la réponse s'ajuste de façon hydrostatique, ce qui permet de réduire l'équation de Navier-Stokes suivant la direction radiale à la simple relation

$$\delta\rho = -\frac{1}{g}\partial_z \delta p, \tag{4.143}$$

où l'on a ignoré les termes de vitesse radiale, proportionnels à σ. Ainsi en développant les quantités perturbées et en substituant (4.143) dans l'équation de la chaleur, on obtient pour les oscillations de pression l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{d\delta p}{dx} + \tau_{\mathrm{p}}\delta p = \frac{\kappa\rho_0 J}{i\sigma + \Gamma_1\sigma_0}, \quad \text{avec} \quad \tau_{\mathrm{p}}(\sigma) = \frac{1}{\Gamma_1}\frac{i\sigma + \Gamma_1\sigma_0}{i\sigma + \sigma_0}. \tag{4.144}$$

Le chauffage à l'origine des marées atmosphériques sur Vénus est dû au sol (Dobrovolskis & Ingersoll, 1980). Il est absorbé dans une petite région au voisinage de la surface. On adopte donc un profil de puissance thermique absorbée de la forme

$$J(x) = J_0\tau_{\mathrm{J}} e^{-\tau_{\mathrm{J}} x}. \tag{4.145}$$

où τ_{J} désigne le taux d'amortissement du chauffage avec l'altitude, la longueur $1/\tau_{\mathrm{J}}$ correspondant donc à l'épaisseur caractéristique de la zone de chauffage. L'application de la condition de surface libre $\delta p(x_{\mathrm{h}}) = 0$ à la borne supérieure de la couche x_{h} donne

$$\delta p(x) = \frac{\kappa\rho_0(0) J_0}{\left[\tau_{\mathrm{J}}^{-1}(\tau_{\mathrm{p}} - 1 + \kappa) - 1\right](i\sigma + \sigma_0)}\left[e^{-(\tau_{\mathrm{J}}+1-\kappa)x} - e^{(-\tau_{\mathrm{J}}+\tau_{\mathrm{p}}-1+\kappa)x_{\mathrm{h}}}e^{-\tau_{\mathrm{p}}x}\right]. \tag{4.146}$$

Considérons maintenant que le taux d'amortissement de la zone de chauffage satisfait la condition $\tau_{\mathrm{J}} \gg |\tau_{\mathrm{p}} - 1 + \kappa|$ (épaisseur de la zone petite par rapport à l'échelle caractéristique du système). Il vient

$$\boxed{\delta p(x) \approx -\frac{\kappa\rho_0(0) J_0}{i\sigma + \sigma_0}e^{-\tau_{\mathrm{J}} x}.} \tag{4.147}$$

En utilisant les composantes horizontales de l'équation de la dynamique (Eqs. 4.19a et 4.19b), on déduit de (4.147) les profils des vitesses horizontales

$$V_\theta(x) = -i\frac{\kappa J_0}{R\sigma}\frac{1}{i\sigma + \sigma_0}e^{-\tau_{\mathrm{J}} x}, \tag{4.148a}$$

$$V_\varphi(x) = m\frac{\kappa J_0}{R\sigma}\frac{1}{i\sigma + \sigma_0}e^{-\tau_{\mathrm{J}} x}, \tag{4.148b}$$

et du déplacement

$$\boxed{\begin{aligned}\xi_\theta(x) &= -\frac{\kappa J_0}{R\sigma^2}\frac{1}{i\sigma+\sigma_0}e^{-\tau_{\mathrm{J}}x}, && (4.149a)\\ \xi_\varphi(x) &= -im\frac{\kappa J_0}{R\sigma^2}\frac{1}{i\sigma+\sigma_0}e^{-\tau_{\mathrm{J}}x}. && (4.149b)\end{aligned}}$$

En utilisant les équations du transport de la chaleur et des gaz parfaits (Eqs. 4.19e et 4.19f), on obtient ceux de la densité et de la température

$$\boxed{\begin{aligned}\delta\rho(x) &= -\frac{\kappa\rho_0(0)\tau_{\mathrm{J}}J_0}{gH(0)(i\sigma+\sigma_0)}e^{-\tau_{\mathrm{J}}x}, && (4.150a)\\ \delta T(x) &= -\frac{\kappa J_0\tau_{\mathrm{J}}}{\mathcal{R}_{\mathrm{s}}}\frac{1}{i\sigma+\sigma_0}e^{-\tau_{\mathrm{J}}x}, && (4.150b)\end{aligned}}$$

4.5.3 Nombre de Love et couple de marée

La redistribution de masse formant le bourrelet de marée est ici directement proportionnelle à la fluctuation de pression au niveau du sol étant donnée l'approximation hydrostatique. D'après (4.74) et (4.78), les nombres de Love et le couple de marée associés à la réponse à l'excitation thermique quadripolaire de la forme $J(x,\theta) = J_2\tau_{\mathrm{J}}e^{-\tau_{\mathrm{J}}x}P_2^2(\cos\theta)$ et $U(x) = U_2P_2^2(\cos\theta)$ ont pour expressions

$$\boxed{k_2^{\sigma,2s} = -\frac{4\pi\mathscr{G}RH\kappa\rho_0(0)}{5(i\sigma+\sigma_0)}\frac{J_2}{U_2}, \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = 2\pi R^2\frac{\kappa\rho_0(0)}{g}J_2U_2\frac{\sigma}{\sigma^2+\sigma_0^2}.} \qquad (4.151)$$

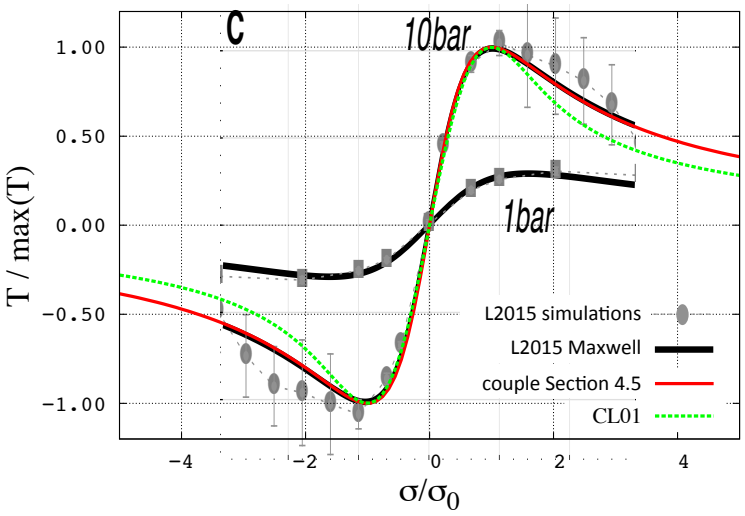


FIGURE 4.11: Couple de marée (ordonnées) en fonction de la fréquence de marée normée par σ_0 (abscisses) dans le cas limite de l'atmosphère convective en rotation lente, présenté en Section 4.5 (trait continu rouge), et comparaison aux résultats de Leconte et al. (2015) (simulations brutes trait pointillé gris ; ajustement sur le modèle de Maxwell en trait noir continu) et au modèle empirique de Correia & Laskar (2001) (vert pointillé).

Le couple obtenu (Fig. 4.11) est similaire à celui donné par un modèle de Maxwell (Chapitre 2), avec le temps de Maxwell radiatif $\mathscr{T}_0 = \sigma_0^{-1}$ en bon accord avec les résultats des simulations numériques réalisées par Leconte et al. (2015) à l'aide d'un GCM (voir Fig. 4.11, points gris et courbe noire et Fig. 4.12 pour les oscillations de pression associées). Il apparaît comme la généralisation aux atmosphères dissipatives du

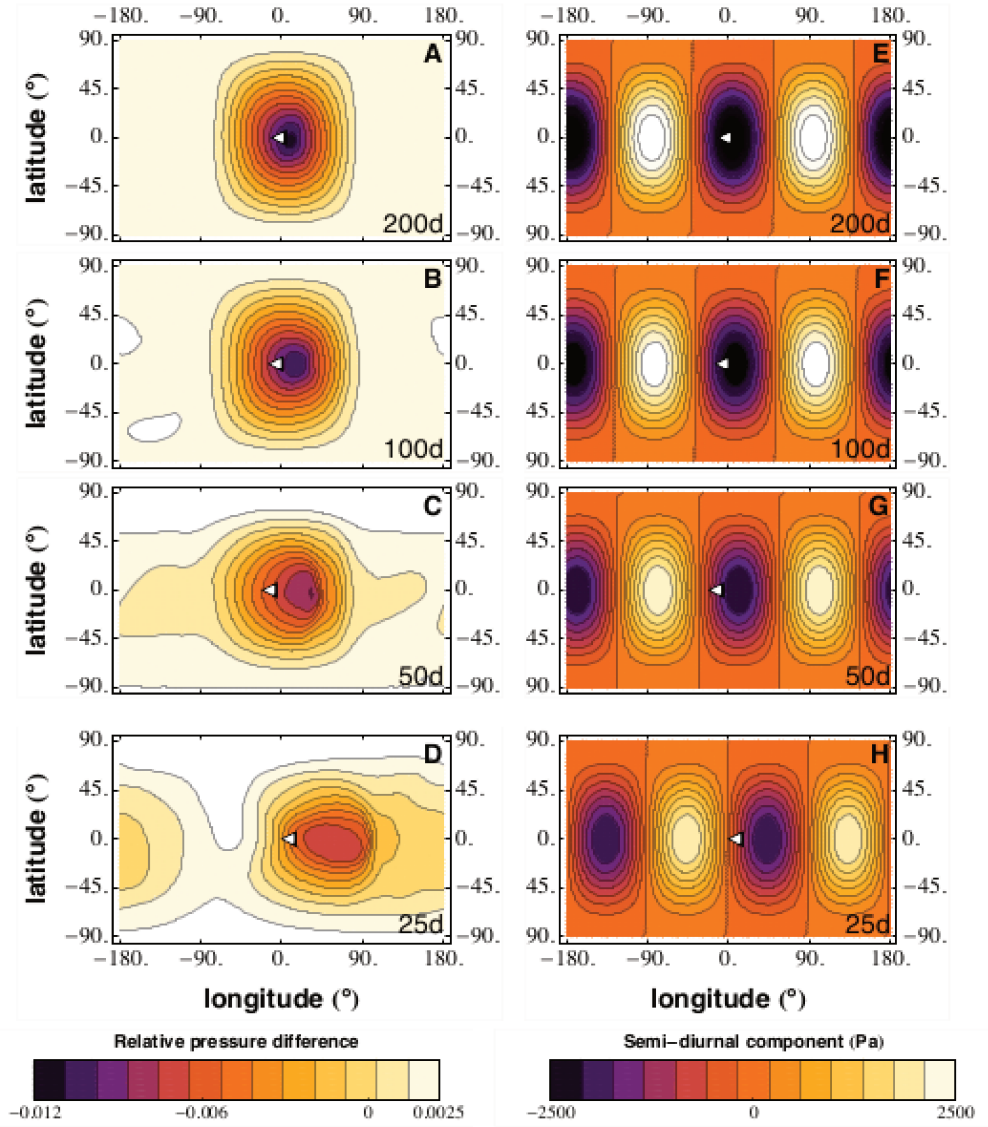


FIGURE 4.12: Distribution des variations de pression généré par la marée thermique au niveau du sol en fonction de la longitude (axe horizontal) et de la latitude (axe vertical) pour différentes fréquences de marée. La position du point substellaire est indiqué par une petite flèche blanche. De haut en bas, la durée du jour solaire diminue, passant de 200 (planète quasi-synchronisée) à 25 jour ; la période orbitale est de 100 jours. Les résultats sont obtenus à l'aide d'un GCM où la pression d'équilibre à la surface de la planète est fixée à 10 bar. *Gauche* - Distribution totale de la variation de pression. *Droite* - Distribution de la composante semi-diurne seule. Crédits Leconte et al. (2015).

couple atmosphérique de Dobrovolskis & Ingersoll (1980), établi en l'absence de processus dissipatifs (cf. la variation de pression au sol correspondante, Eq. 3.66). La redistribution des masses qui en résulte, exprimée sous la forme $\delta\rho = |\delta\rho|\, e^{i\Delta\varphi}$, a au niveau du sol pour amplitude et phase,

$$|\delta\rho| = \frac{\kappa\rho_0\,(0)}{gH\sqrt{\sigma^2+\sigma_0^2}}J \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = \pi - \arctan\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right), \quad \text{d'où} \quad \sin\left(\Delta\varphi\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\sigma_0^2}}. \tag{4.152}$$

D'un point de vue géométrique, ceci se traduit par deux comportements asymptotiques différents pour le bourrelet de marée semi-diurne (voir Fig. 4.13) :

- un comportement associé au *régime radiatif* ($|\sigma| \ll \sigma_0$), régulier à la synchronisation spin-orbite ($\sigma = 0$), où $\gamma \to \pi/2$ et $|\delta\rho| \approx |\delta\rho\,(\sigma = 0)|$;
- un comportement associé au *régime dynamique* ($|\sigma| \gg \sigma_0$) où le bourrelet de marée est déphasé d'un angle $\gamma = \pm\pi/4$ et où son amplitude suit la loi d'échelle $|\delta\rho| \propto 1/|\sigma|$.

On peut observer la transition entre ces deux régimes asymptotiques dans les distributions des oscillations de pression issues du GCM (voir Fig. 4.12, panneaux de droite), l'angle de déphasage passant de $\gamma = -90°$ dans les basses fréquences à $\gamma = -45°$ pour les rotateurs rapides.

4.5.4 Comparaison au modèle empirique de Correia & Laskar (2001)

Nous avons vu que le couple obtenu dans le cas de l'atmosphère convective en rotation lente correspondait à celui donné par le GCM. Il nous faut aussi le comparer avec la modélisation de la marée thermique proposée et utilisée par Correia & Laskar (2001) pour étudier la dynamique rotationnelle de Vénus, qui permet de capter par une formule empirique les deux comportements physiques importants : le régime dynamique et le régime régulier au voisinage de la synchronisation où le couple doit s'annuler.. Au Chapitre 3, nous avons pu constater que la prise en compte du régime non-dissipatif seul avait pour défaut d'induire pour la marée semi-diurne un déphasage d'un angle $\gamma = \pm\pi/4$ changeant de signe à la synchronisation de façon discontinue (Fig. 4.13, haut). Afin de palier à ce problème de régularité, source d'instabilités dans la simulation de l'évolution du spin, Correia & Laskar (2001) ont effectué de faire à la synchronisation un raccordement empirique de la forme

$$\mathcal{T}(\sigma) = \frac{a}{\sigma}\left[1 - e^{-b\sigma^2}\right], \tag{4.153}$$

où a et b sont des paramètres réels positifs. Au voisinage de $\sigma = 0$, (4.153) traduit un comportement linéaire en σ. Loin de la synchronisation, elle correspond à la loi d'échelle donnée par Dobrovolskis & Ingersoll (1980), $\mathcal{T} \propto 1/\sigma$. Les positions des maximums, qui dans notre modèle correspondent à l'égalité $\sigma = \pm\sigma_0$, sont donnés par

$$\sigma_0 \sim \sqrt{\frac{2}{3b}}. \tag{4.154}$$

L'ajustement des paramètres a et b permet de constater (cf. Fig. 4.11, trait vert pointillé) un bon accord entre le modèle empirique de Correia & Laskar (2001) et le couple prédit par l'approche physique *ab initio* pour le cas de l'atmosphère convective en rotation lente, donné par (4.151).

4.6 Application à la marée solaire semi-diurne

La marée solaire semi-diurne représente le principal contributeur au couple de marée qui s'exerce sur l'atmosphère d'une planète et entraîne l'évolution du spin. En restreignant cette composante à son mode principal, de degrés $m = 2$ et $l = 2$ et de fréquence $\sigma = 2\,(\Omega - n_{\rm orb})$, nous appliquons le modèle à la Terre puis à Vénus en considérant les atmosphères des deux planètes isothermes et stablement stratifiées. Les forçages sont supposés de la forme donnée par (4.136).

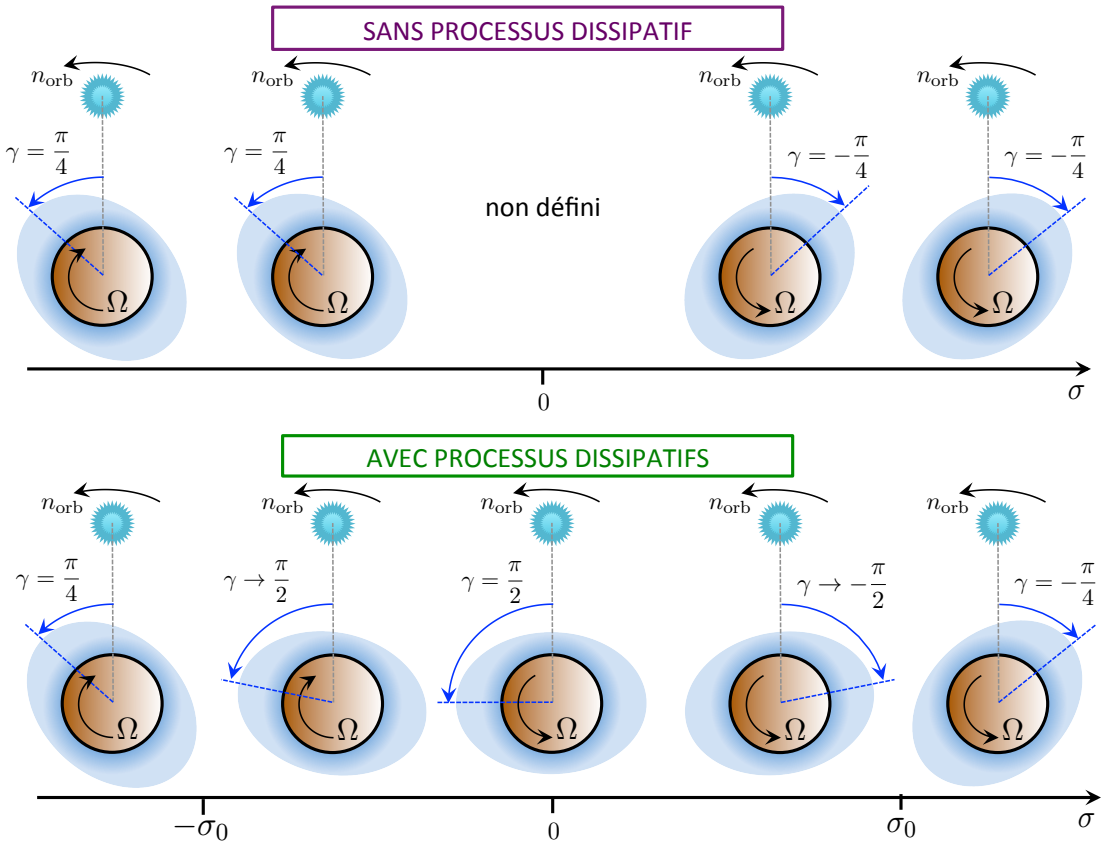


FIGURE 4.13: Représentation schématisée de la redistribution de masse engendrée par la composante quadripolaire de la marée solaire semi-diurne obtenue dans le cas de l'atmosphère convective en rotation lente (Eq. 4.151) pour $\sigma_0 = 0$ (haut) et $\sigma_0 > 0$ (bas) et différentes fréquences de marée (axe horizontal). La planète, vue de dessus, tourne sur elle même à la vitesse angulaire Ω et orbite autour de l'étoile à la fréquence orbitale $n_{\rm orb}$. Le bourrelet de marée atmosphérique est représenté dans le plan équatorial de la planète. Son angle de déphasage γ est précisé pour chaque cas.

Enfin, au vue de l'approximation que représente déjà le fait de considérer σ_0 constante sur toute l'épaisseur de l'atmosphère [6], nous adoptons pour la fréquence de refroidissement radiatif la valeur effective obtenue numériquement par Leconte et al. (2015) pour la planète Vénus, $\sigma_0 = 7.54 \times 10^{-7}$ s^{-1}.

4.6.1 La Terre

Sur Terre, la marée solaire semi-diurne est un phénomène ayant suscité de nombreux travaux analytiques depuis les premiers modèles de Laplace. Il est notamment traité de manière exhaustive par Wilkes (1949), Siebert (1961) et CL70. Nous adoptons ici pour la puissance absorbée l'ordre de grandeur calculé au Chapitre 3, $J_2 = 1.0 \times 10^{-2}$ W.kg^{-1}. La Terre est un rotateur rapide au sens où sa fréquence orbitale apparaît clairement négligeable devant sa vitesse angulaire de rotation propre (cf. Table 4.1). En conséquence, la fréquence de marée semi-diurne est très proche de la fréquence inertielle ($\sigma \approx 2\Omega$) et place la planète dans le régime non-dissipatif, où $|\sigma| \gg \sigma_0$ (Figs. 4.2 et 4.5). Le régime des ondes de marées étant faiblement sub-inertiel ($\nu \gtrsim 1$), ce sont les modes de gravité qui déterminent la structure de la perturbation, tandis que les modes de Rossby restent piégés au niveau des pôles (Fig. 3.8). On trace en Fig. 4.14 la distribution des grandeurs perturbées en latitude et en altitude et en Fig. 4.15 leur distribution en longitude et en altitude au niveau du sol.

6. La fréquence radiative peut varier avec la structure radiale de l'atmosphère car elle dépend notamment du pouvoir émissif des gaz qui la composent. Dans l'atmosphère de Vénus, elle varie sur plusieurs ordres de grandeurs entre le sol et une altitude de 80 km : $\sigma_0 \sim 10^{-9} - 10^{-5}$ s^{-1} (Pollack & Young, 1975). CL70 prescrit pour σ_0 une loi en exponentielle, i.e. $\sigma_0 \propto e^x$.

7. http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/venusfact.html

PARAMÈTRES	NOTATIONS	TERRE	VÉNUS
Rayon de la planète	R [km]	6371.0	6051.8
Gravité à la surface	g [m.s^{-2}]	9.81	8.87
Hauteur de pression	H [km]	8.5	15.9
Masse molaire	$\mathcal{M}$ [g.mol^{-1}]	28.965	43.45
Exposant adiabatique	Γ_1	1.4	1.4
Fréquence de radiation	σ_0 [10^{-7} s^{-1}]	7.54	7.54
Pression à la surface	$p_0\,(0)$ [10^5 Pa]	1.0	93
Vitesse angulaire de rotation propre	Ω [10^{-7} s^{-1}]	729.21	-2.9927
Moyen mouvement	$n_{\rm orb}$ [10^{-7} s^{-1}]	1.9910	3.2364
Potentiel de marée excitateur	U_2 [m^2.s^{-2}]	0.985	2.349
Puissance absorbée par unité de masse	J_2 [W.kg^{-1}]	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-3}

TABLE 4.1: Valeurs des paramètres physiques du modèle utilisées dans les simulations. La plupart d'entre elles sont fournies par les NASA fact sheets[7] et les bases de données de l'IMCCE. La fréquence de radiation est arbitrairement fixée à $\sigma_0 = 7.54 \times 10^{-7}$ s^{-1} (fréquence de refroidissement radiatif effective obtenue par Leconte et al., 2015, dans le cas de Vénus) pour les deux planètes. Les potentiels excitateurs et les forçages thermiques de marée quadripolaires sont calculés d'après (2.13) avec les valeurs utilisées par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) et Shen & Zhang (1990) pour la puissance thermique injectée.

Ces figures illustrent le cas non-dissipatif étudié au Chapitre 3 où les pertes radiatives sont ignorées (Eqs. 3.52, 3.65a, 3.65b). Les fluctuations de pression et de densité se propagent jusqu'à des altitudes comparables à la hauteur de pression (Fig. 4.14, panneaux en haut à gauche) et sont globalement en phase sur toute l'épaisseur de l'atmosphère (Fig. 4.14, panneaux de droite). Ceci s'explique par la prédominance du mode de degré $n = 0$, dont la longueur d'onde est comparable à la hauteur de pression. Le déphasage correspond à celui relevé au niveau de la surface, $\gamma = -45°$ (Fig. 4.15, gauche) en bon accord avec les mesures (cf. Fig. 1.7). Les vents de marées sont dominés par leurs composantes horizontales, V_θ et V_φ. On note qu'ils ne sont pas nuls au niveau du sol, ce qui s'explique par le fait que nous ne prenions pas en compte les mécanismes de friction visqueuse et le couplage dynamique avec la surface qui en résulte. Si la friction était introduite, on observerait un effet de bord dépendant de la topographie de la surface et des propriétés thermiques correspondant à la couche limite planétaire (Stull, 1988).

Un autre point devant être commenté ici est l'applicabilité des hypothèses simplificatrices adoptés pour la structure de l'atmosphère et le forçage thermique. Plusieurs études, dont CL70, attirent notre attention sur le rôle joué par la stratification en température, considérations qui, ainsi que nous l'avons vu en Section 1.2, furent au coeur du développement de la théorie de la résonance (Weekes & Wilkes, 1947; Wilkes, 1949; Lindzen, 1990). Le fait que la hauteur de pression puisse varier avec l'altitude entraîne en effet l'existence potentielle de zones où les oscillations sont piégées, et d'autres à au sein desquelles elles peuvent se développer (Lindzen, 1990). L'amplification résonante engendrée par des structures verticales particulières (e.g. couche sur laquelle les ondes se réfléchissent dans la haute atmosphère) ne peut pas être appréhendée avec l'approximation de l'atmosphère isotherme. En particulier, nous avons pu constater en comparant les résultats de la Section 4.5 aux équations (4.139a) à (4.139d) que la réponse de marée d'atmosphère convective en rotation lente n'était pas la même que celle d'une atmosphère stablement stratifiée.

Le profil du forçage joue lui aussi un rôle crucial. En effet, s'il est tout à fait pertinent de supposer invariant en altitude le potentiel excitateur de marée, qui varie peu sur l'épaisseur d'une couche mince, la même hypothèse concernant le forçage thermique doit être discutée. L'énergie thermique $E_J = \rho_0 J \delta z$ injectée dans une couche d'épaisseur δz étant proportionnelle à la masse volumique locale, l'altitude à laquelle cette couche se situe importe beaucoup. Dans l'approximation isotherme, plus de la moitié de la masse de l'atmosphère est comprise dans une bande d'altitudes inférieures à la hauteur de pression, soit 8.5 km pour la Terre. C'est donc le profil de puissance absorbée dans cette bande qui va déterminer l'amplitude de la marée atmosphérique, et a fortiori son impact sur la dissipation d'énergie interne et la dynamique rotationnelle de

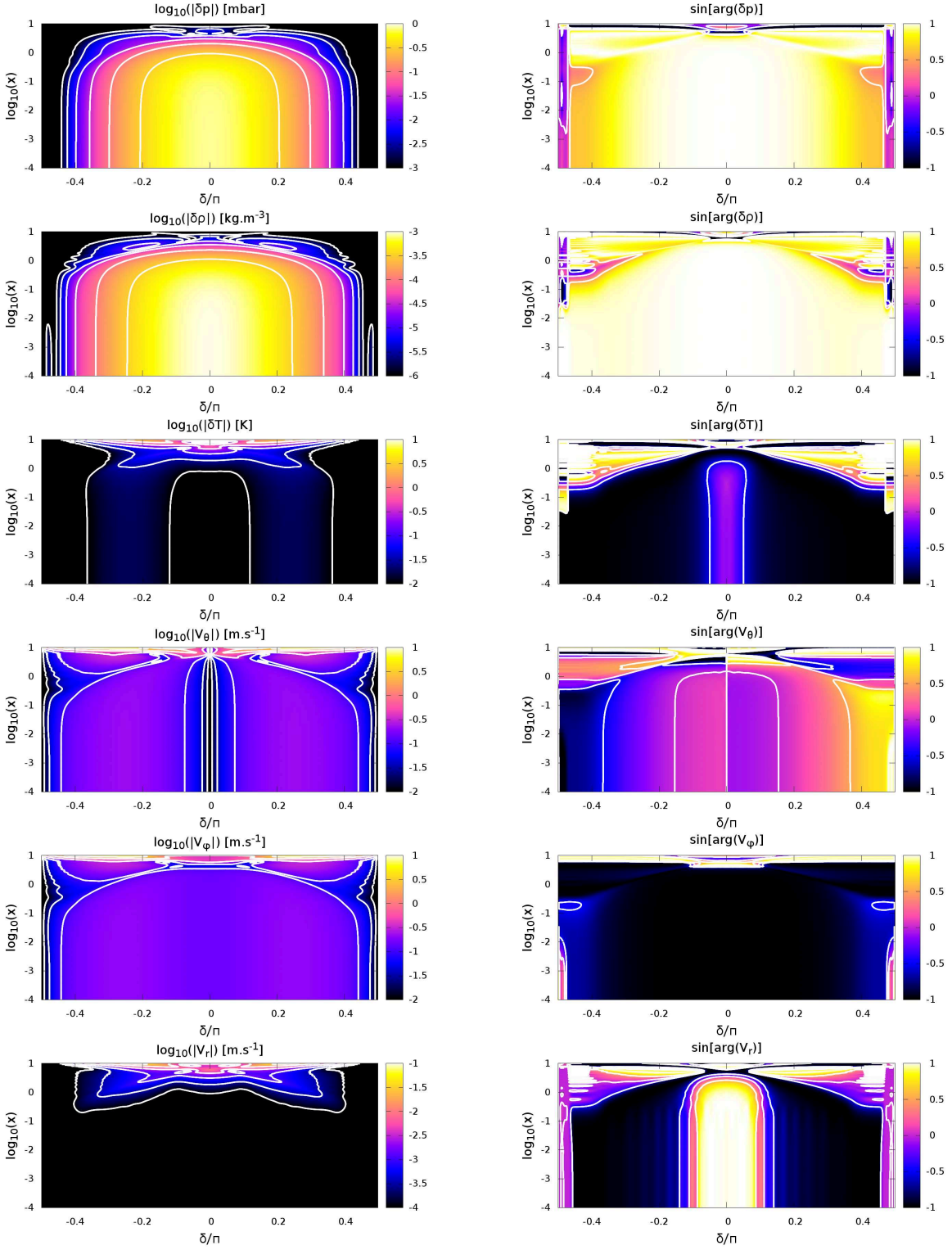


FIGURE 4.14: Marée solaire semi-diurne terrestre. Distribution en latitude (axe horizontal) et en altitude (axe vertical, échelle logarithmique) de la perturbation engendrée par les forçages de marée semi-diurnes académiques quadripolaires de la forme donnée par (4.136) avec les paramètres de la Table 4.1. Gauche - Amplitude des grandeurs en échelle logarithmique, du noir (faible amplitude) au blanc (forte amplitude). *Droite* - Sinus des déphasages correspondants, du noir ($\sin[\arg(f)] = -1$) au blanc ($\sin[\arg(f)] = 1$). De haut en bas : pression (mbar), densité ($\mathrm{kg.m^{-3}}$), température (K), vitesse méridionale ($\mathrm{m.s^{-1}}$), vitesse azimutale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) et vitesse radiale ($\mathrm{m.s^{-1}}$).

la planète. Vu sous cet angle, l'amplitude du forçage-échelon utilisé dans le modèle s'apparente à la valeur moyenne de la puissance absorbée par unité de masse dans les couches les plus denses, proches du sol.

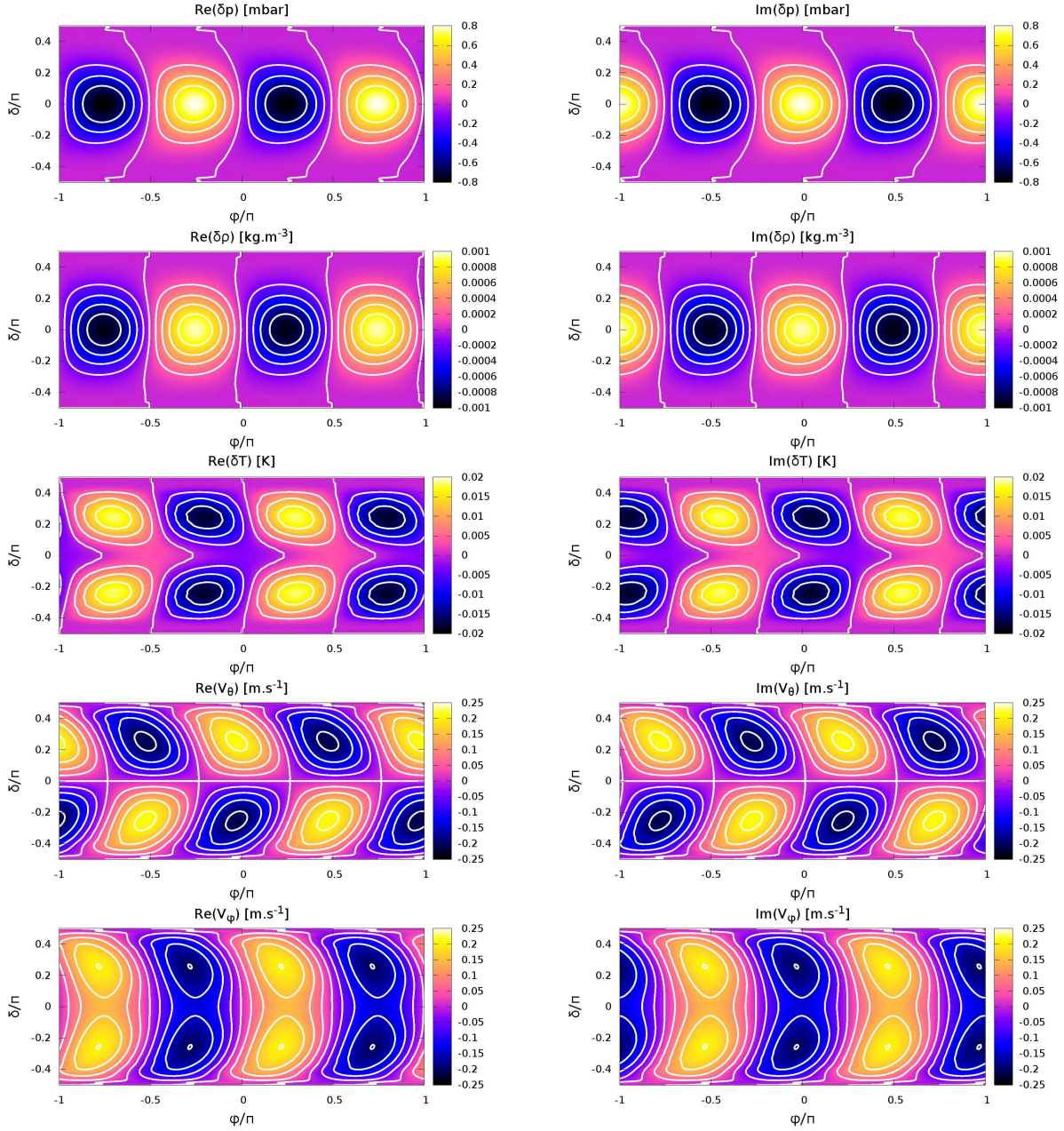


FIGURE 4.15: Marée solaire semi-diurne terrestre. Distribution en latitude (axe horizontal) et en latitude (axe vertical) de la perturbation engendrée par les forçages de marée semi-diurnes académiques quadripolaires de la forme donnée par (4.136) avec les paramètres de la Table 4.1. Gauche - Parties réelles des grandeurs, du noir (minimum) au blanc (maximum). *Droite* - Parties imaginaires, du noir (minimum) au blanc (maximum). De haut en bas : pression (mbar), densité ($\mathrm{kg.m^{-3}}$), température (K), vitesse latitudinale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) et vitesse azimutale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) ; la vitesse radiale, nulle au niveau de la surface, n'est pas représentée.

4.6.2 Vénus

De par son diamètre et l'épaisseur de son atmosphère, Vénus appartient à la catégorie des planètes de type terrestre. Pourtant, elle présente deux différences majeures avec la Terre. La première est d'ordre dynamique. Vénus tourne sur elle-même dans le sens rétrograde à une vitesse plus de deux cents fois inférieure à celle de la Terre (cf. Table 4.1), ce qui tend à rendre négligeables les effets inertiels. Comme la fréquence de marée semi-diurne est comparable à la fréquence de radiation ($\sigma_0 \approx 7.54 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$, cf. Pollack & Young, 1975; Leconte et al., 2015), les processus dissipatifs jouent un rôle de premier plan ici.

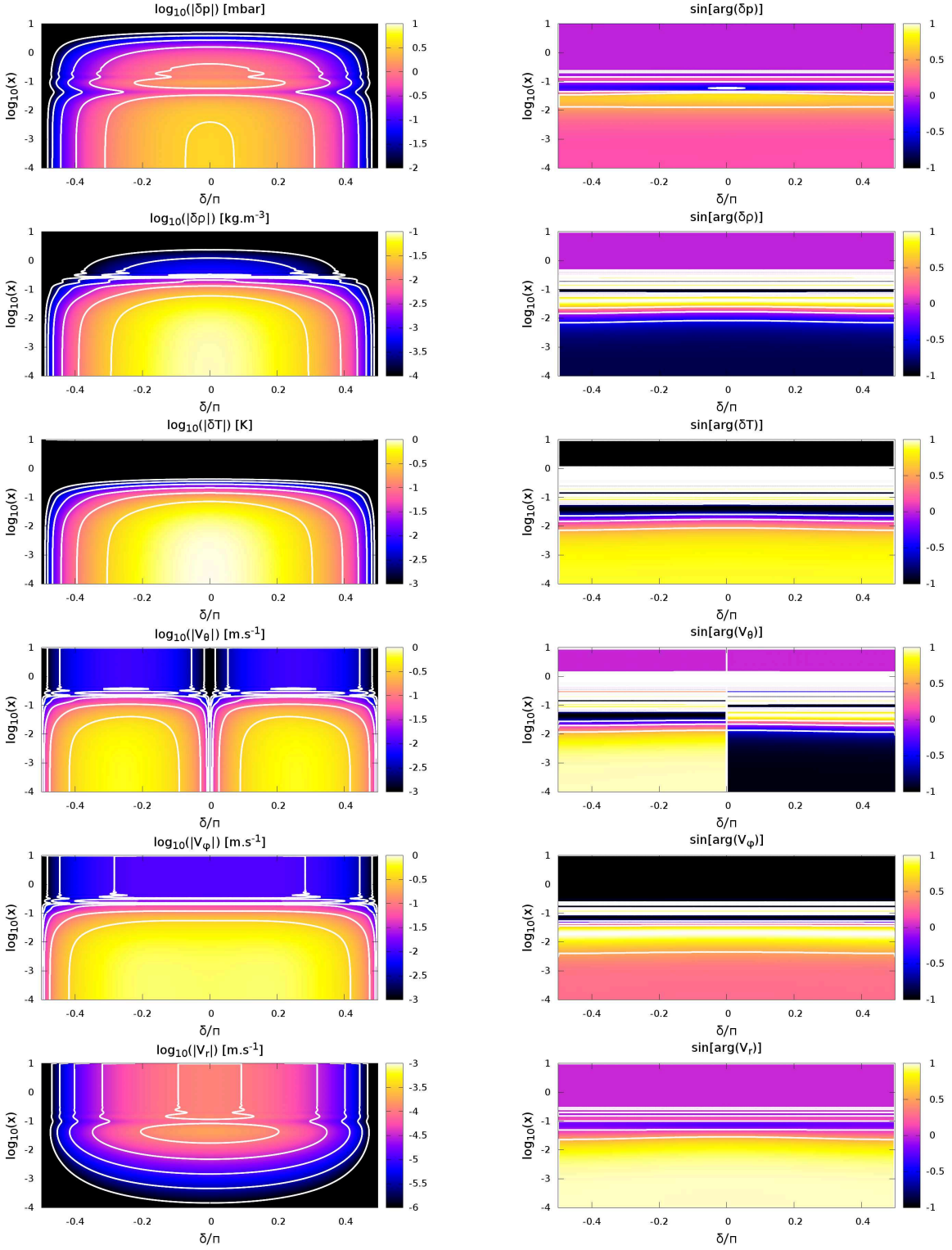


FIGURE 4.16: Marée solaire semi-diurne vénusienne. Distribution en latitude (axe horizontal) et en altitude (axe vertical, échelle logarithmique) de la perturbation engendrée par les forçages de marée semi-diurnes académiques quadripolaires de la forme donnée par (4.136) avec les paramètres de la Table 4.1. Gauche - Amplitude des grandeurs en échelle logarithmique, du noir (faible amplitude) au blanc (forte amplitude). *Droite* - Sinus des déphasages correspondants, du noir ($\sin[\arg(f)] = -1$) au blanc ($\sin[\arg(f)] = 1$). De haut en bas : pression (mbar), densité ($\mathrm{kg.m^{-3}}$), température (K), vitesse latitudinale ($\mathrm{m.s^{-1}}$), vitesse azimutale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) et vitesse radiale ($\mathrm{m.s^{-1}}$).

La deuxième différence essentielle concerne les propriétés de l'atmosphère. Principalement composée de dioxyde de carbone, l'épaisseur optique de l'atmosphère vénusienne est très supérieure à celle de

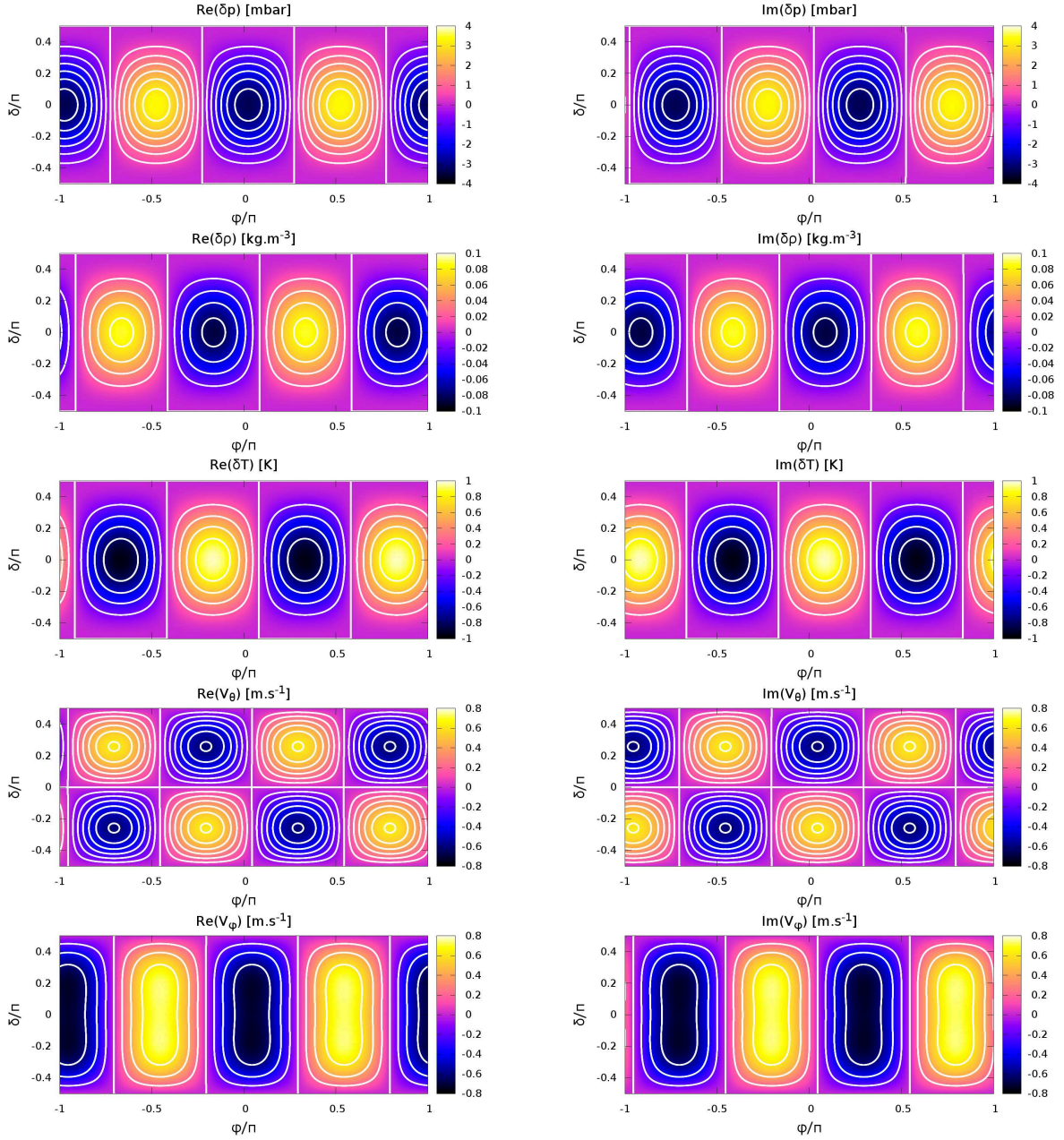


FIGURE 4.17: Marée solaire semi-diurne vénusienne. Distribution en latitude (axe horizontal) et en latitude (axe vertical) de la perturbation engendrée par les forçages de marée semi-diurnes académiques quadripolaires de la forme donnée par (4.136) avec les paramètres de Table 4.1. Gauche - Parties réelles des grandeurs, du noir (minimum) au blanc (maximum). *Droite* - Parties imaginaires, du noir (minimum) au blanc (maximum). De haut en bas : pression (mbar), densité ($\mathrm{kg.m^{-3}}$), température (K), vitesse méridionale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) et vitesse azimutale ($\mathrm{m.s^{-1}}$) ; la vitesse radiale, nulle au niveau de la surface, n'est pas représentée.

l'atmosphère terrestre dans le domaine du visible. Aussi, la majeure partie de l'énergie fournie par le rayonnement solaire incident est déposée à des altitudes supérieures à 60 km (e.g. Tomasko et al., 1985; Crisp, 1986). Seule une petite fraction de cette énergie (environ 3 %, e.g. Pollack & Young, 1975; Dobrovolskis & Ingersoll, 1980) parvient au niveau de la surface et réchauffe les couches situées à son voisinage. De plus, comme l'enveloppe gazeuse est environ cent fois plus massive que sur Terre (en notant $\mathscr{M}$ cette masse, on a $\mathscr{M}_{♀} \sim 4.8 \times 10^{20}$ kg contre $\mathscr{M}_{\oplus} \sim 5.1 \times 10^{18}$ kg), la puissance thermique absorbée par unité de masse à flux de puissance équivalent se trouve réduite d'autant. Nous adoptons donc pour le profil de forçage la valeur donnée par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) et Shen & Zhang (1990), $J_2 = 10^{-3}$ W.kg^{-1}.

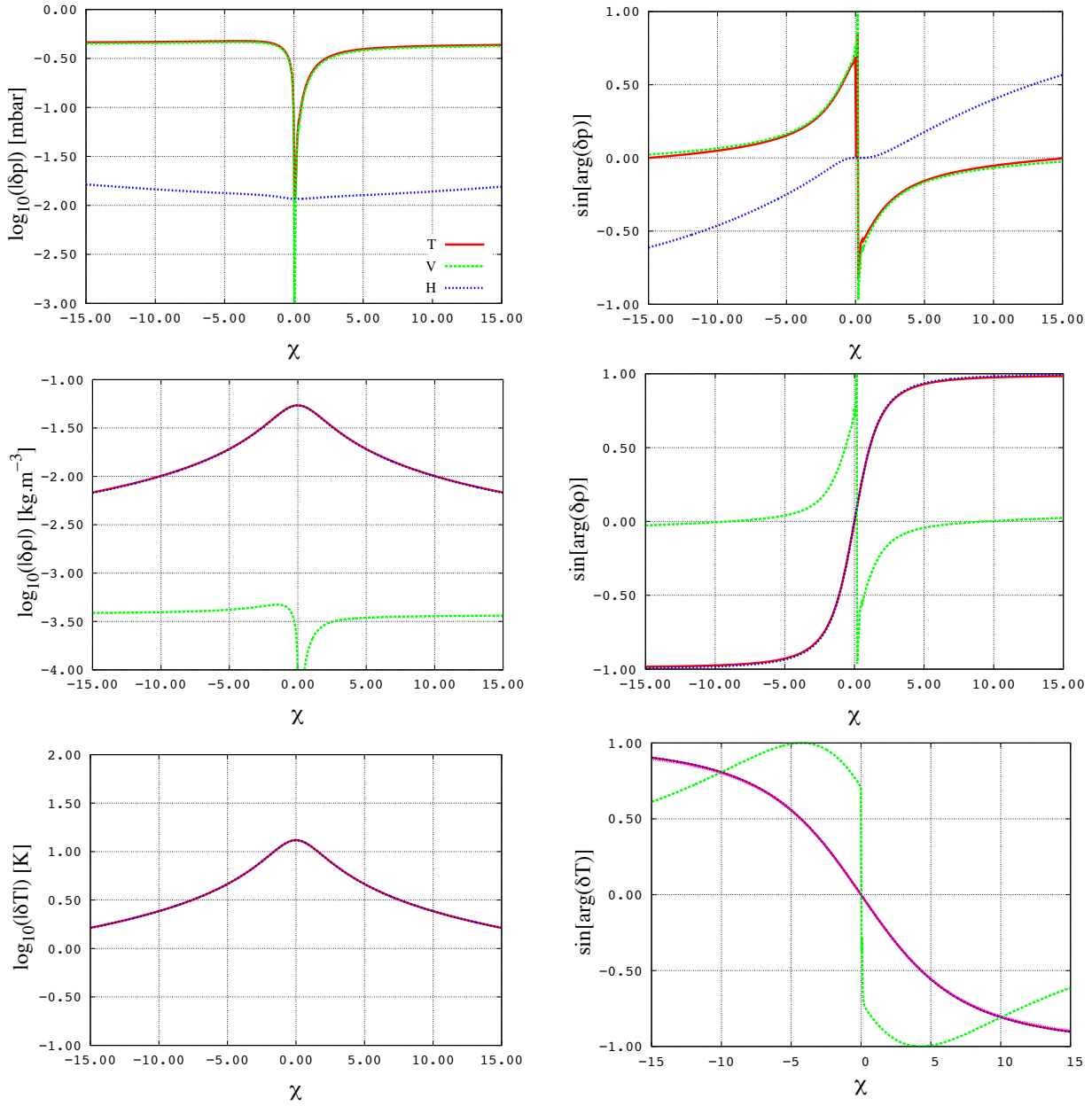


FIGURE 4.18: Oscillations de pression (haut), masse volumique (milieu), température (bas) associées à la marée solaire semi-diurne et de leurs composantes horizontales et verticales au niveau de l'équateur terrestre en fonction de la fréquence de marée normée, $\chi = (\Omega - n_{\mathrm{orb}})/n_{\mathrm{orb}}$ (axe horizontal). *Gauche* - Logarithme de l'amplitude des oscillations de pression (mbar), masse volumique ($\mathrm{kg.m^{-3}}$) et température (K) en fonction de χ. *Droite* - Sinus de leur argument en fonction de χ. Le forçage quadripolaire académique utilisé est défini par (4.136) avec les paramètres de la Table 4.1. Les notations T, H, V désignent respectivement la réponse totale et ses composantes horizontale et verticale.

Un autre point qu'il nous faut rappeler au sujet de Vénus est l'importance de la structure de l'atmosphère. Celle de Vénus présente dans la bande d'altitude comprise entre 0 et 60 km un gradient de température allant de 750 K (sol) à 250 K (voir Fig. 3.3). La stratification est donc beaucoup plus faible que dans le cas isotherme, ce qui a pour effet d'atténuer fortement la composante associés aux déplacements verticaux de fluide, comme nous l'avons vu en Section 4.5. Aussi, le fait d'adopter pour Vénus l'approximation isotherme comme nous le faisons ici nous permet d'appréhender l'effet de la structure atmosphérique sur la réponse de marée. Ceci revient à traiter le cas d'une planète semblable à Vénus du point de vue de la configuration, mais stablement stratifiée.

La deuxième grande caractéristique de l'atmosphère vénusienne est sa stratification en vitesse. Les

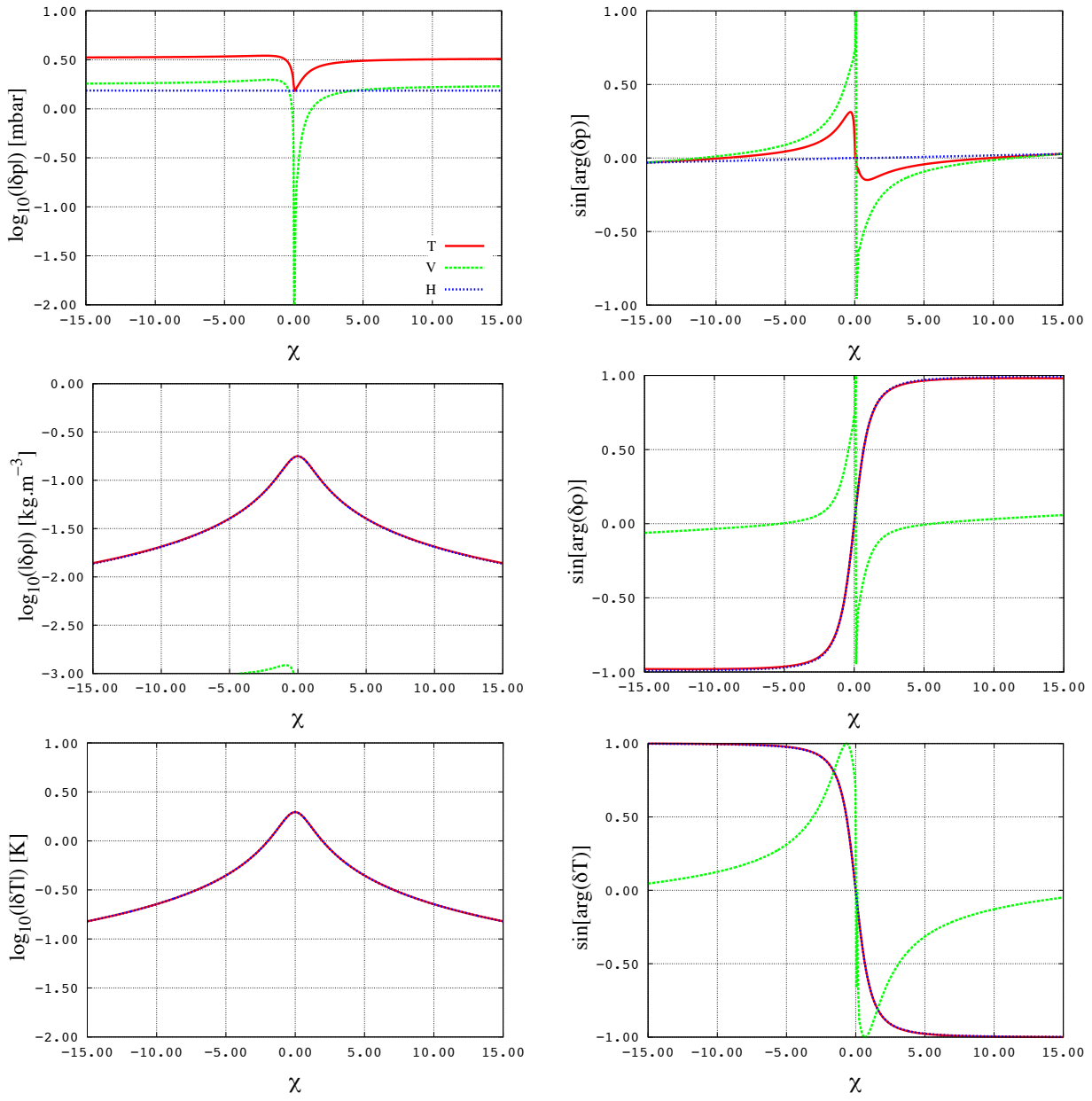


FIGURE 4.19: Oscillations de pression (haut), masse volumique (milieu), température (bas) associées à la marée solaire semi-diurne et de leurs composantes oscillantes et non-oscillantes au niveau de l'équateur de Vénus en fonction de la fréquence de marée normée, $\chi = (\Omega - n_{\rm orb})/n_{\rm orb}$ (axe horizontal). *Gauche* - Logarithme de l'amplitude des oscillations de pression (mbar), masse volumique ($\rm kg.m^{-3}$) et température (K) en fonction de χ. *Droite* - Sinus de leur argument en fonction de χ. Le forçage quadripolaire académique utilisé est défini par (4.136) avec les paramètres de Table 4.1. Les notations T, H et V désignent respectivement la réponse totale et ses composantes horizontales et verticales.

couches supérieures font le tour de la planète en quatre jours (phénomène de *super-rotation*, e.g. Matsuda, 1980). L'hypothèse de rotation solide n'est donc applicable que dans une zone restreinte au voisinage de la surface, où l'atmosphère est dynamiquement couplée avec le sol par les mécanismes de friction (au niveau de la surface, la vitesse des vents $V_{\rm s}$ tombe à $V_{\rm s} = 0.3 - 1.0\ {\rm m.s^{-1}}$, cf. Nasa fact sheet). D'après Marov et al. (1973), la vitesse dans la direction longitudinale ne devient importante qu'au delà de 20 km d'altitude, soit dans les couches atmosphériques peu denses, dont la contribution à la redistribution de masse de la marée est moindre que celle des couches situées au voisinage de la surface. Néanmoins, l'interaction de la marée avec les vent zonaux devra être pris en compte par la suite. Nous reviendrons sur ce point au Chapitre 8.

Nous traçons comme pour la Terre, les distributions en latitude et altitude d'une part (Fig. 4.16) et

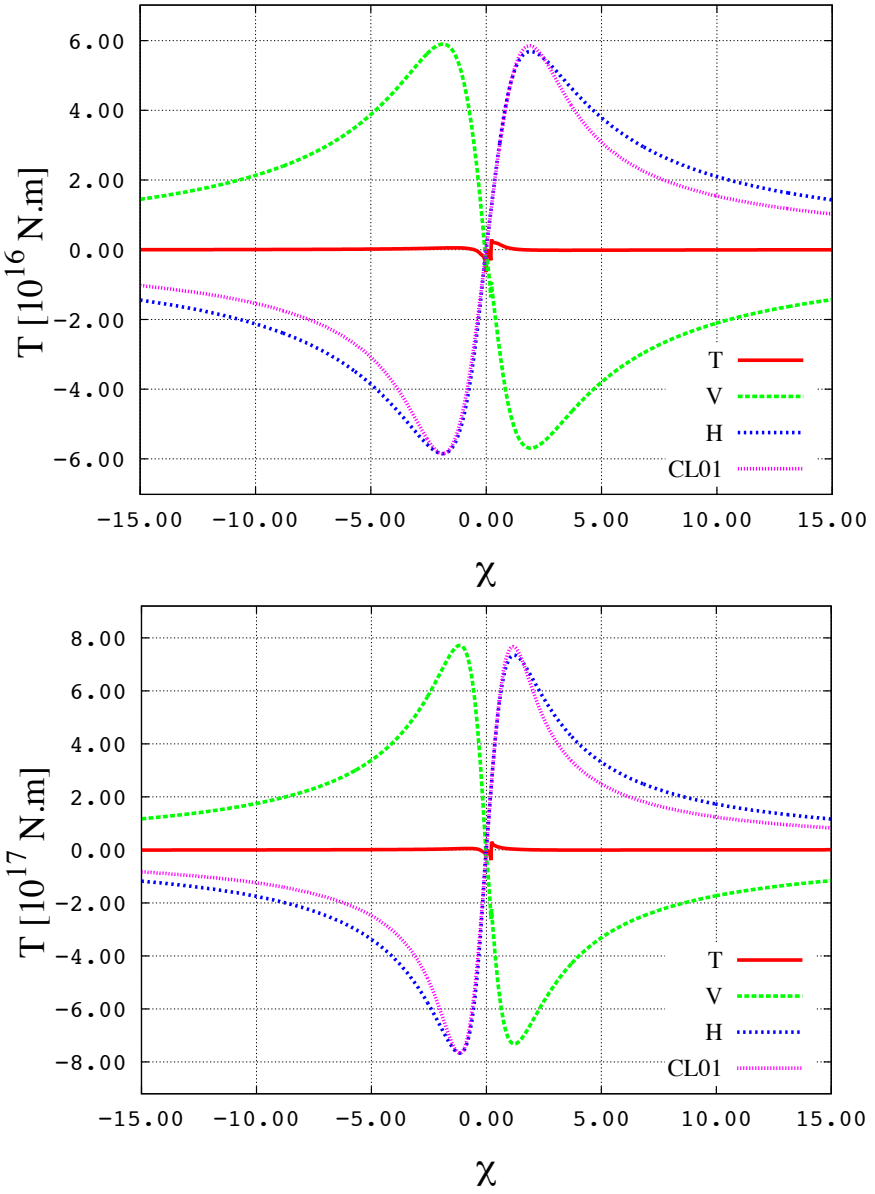


FIGURE 4.20: Couple de marée exercé sur l'atmosphère résultant de la marée thermique solaire semi-diurne et ses composantes horizontale et verticale en fonction de la fréquence de marée normée $\chi = (\Omega - n_{\rm orb})/n_{\rm orb}$. *Haut* - Cas de la Terre. *Bas* - Cas de Vénus. Le forçage quadripolaire académique utilisé est défini par (4.136) avec les paramètres de la Table 4.1. Les notations T, H, V désignent respectivement la réponse totale et ses composantes horizontale (qui est aussi le couple obtenu dans le cas convectif, cf. Fig. 4.11) et verticale. La courbe nommée CL01 correspond au modèle empirique proposé par Correia & Laskar (2001) dont les paramètres sont ajustés pour que les maximums du couple correspondent à ceux de la partie horizontale (cf. Eq. 4.153).

en longitude et latitude d'autre part (Fig. 4.17), des variations de pression, densité, température et vitesse associées à la composante semi-diurne de degrés $m = 2$ et $l = 2$. Avec $\nu = 0.48$, cette composante se situe dans le régime des ondes super-inertielles. Les modes de Rossby sont donc inexistants dans ce cas et l'aspect des fonctions de Hough demeure proche de celui des polynômes associés de Legendre. C'est pourquoi la réponse de l'atmosphère apparaît largement dominée par la contribution du mode de gravité principal (voir en particulier Fig. 4.17) dans la simulation présenté ici, où le profil de forçage suivant la latitude est défini par P_2^2. La direction du bourrelet de marée matérialisé par les oscillations de masse volumique au niveau du sol, est presque perpendiculaire à la direction du Soleil. On se retrouve ainsi dans la configuration dissipative où $|\sigma| \lesssim \sigma_0$ dans la Figure 4.13. Les sections en latitude et altitude des quantités perturbées (Fig. 4.16) montrent comment le rayonnement thermique, à l'origine de la partie imaginaire du nombre d'onde vertical,

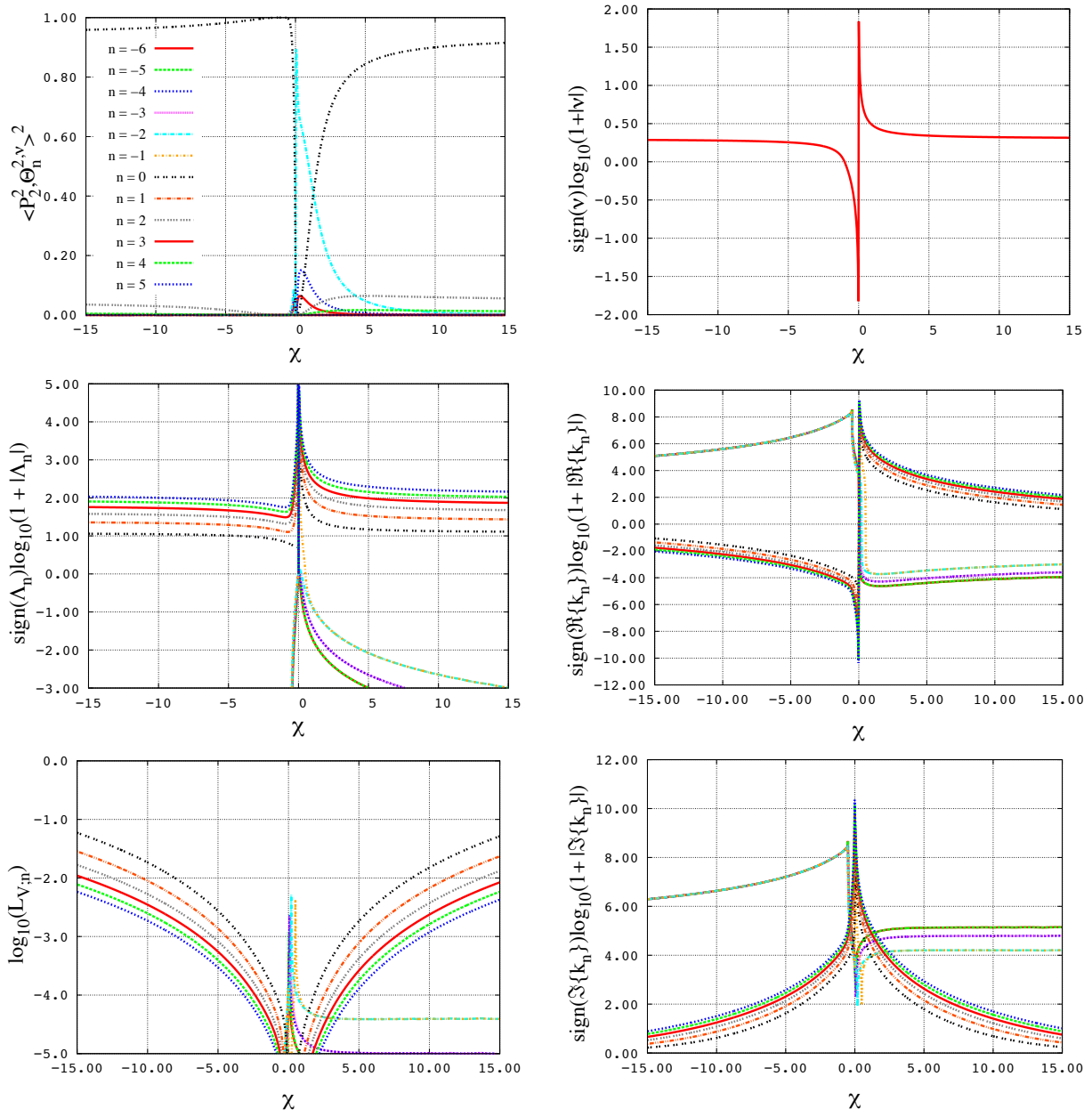


FIGURE 4.21: Paramètres caractérisant les modes de la marée thermique solaire semi-diurne de la Terre en fonction de la fréquence de marée normée $\chi = (\Omega - n_{\mathrm{orb}})/n_{\mathrm{orb}}$. Le forçage quadripolaire académique utilisé est défini par (4.136) et les paramètres physiques sont donnés en Table 4.1. *Gauche, de haut en bas* - Carrés des coefficients de projection (Eq. 3.37) du polynôme associé de Legendre sur les fonctions de Hough de degrés n, valeur propre du mode Λ_n, logarithme de l'échelle de longueur des variations suivant la direction verticale $L_{\mathrm{V;n}}$ (Eq. 3.43). Droite, de haut en bas - Paramètre de spin (ν, Eq. 3.30), partie réelle du nombre d'onde (Eq. 4.64a), partie imaginaire du nombre d'onde (Eq. 4.64b).

vient écraser les ondes de marées dans une région proche de la surface et d'épaisseur caractéristique L_0. Les amplitudes des différentes quantités sont toutes proportionnelles au forçage dans le cas où l'une des composantes, gravifique ou thermique, est prédominante.

4.6.3 Evolution du couple de marée avec la fréquence d'excitation

Intéressons-nous maintenant à l'évolution de la réponse des atmosphères de la Terre et Vénus avec la fréquence de marée dans l'approximation de l'atmosphère isotherme stablement stratifiée. En ce qui concerne

la marée solaire semi-diurne, σ est fonction à la fois de la vitesse angulaire de rotation propre et du moyen mouvement. Il est important de noter que le paramètre de spin, $\nu = \Omega/\left(\Omega - n_{\mathrm{orb}}\right)$, qui détermine la structure des ondes de marées ne dépend pas de ces deux fréquences de la même manière. Pour une fréquence de marée donnée, ν peut donc a priori prendre des valeurs très différentes. Dans cette étude, nous choisissons de faire varier σ en modifiant la durée du jour terrestre à moyen mouvement fixé, comme Leconte et al. (2015). Nous obtenons ainsi les variations de pression, densité et température au niveau du sol pour la Terre (Fig. 4.18) et Vénus (Fig. 4.19), ainsi que le couple de marée qui en résulte, en fonction de la fréquence de marée réduite $\chi = \left(\Omega - n_{\mathrm{orb}}\right)/n_{\mathrm{orb}}$. La réponse totale (rouge) est décomposée en fonction de ses composantes verticale (vert) et horizontale (bleu).

Le comportement de « bourrelet de marée de grande échelle » (cf. Fig. 4.13) se retrouve dans l'évolution de la densité, très régulière et symétrique. En revanche, dans chacun des cas, la partie verticale (V) de la perturbation présente une dissymétrie au passage de la synchronisation. Cette dissymétrie est un effet inertiel (Coriolis) provenant directement des propriétés de fonctions de Hough évoquées en Section 3.5.2, en particulier le fait que $\Lambda_0^{2,-\nu} \neq \Lambda_0^{2,\nu}$ quand $\nu \to +\infty$ (voir Fig. 3.5). Au passage de la synchronisation, la partie verticale est discontinue pour cette même raison.

De surcroît, le mode de gravité principal, prédominant dans la gamme des hautes fréquences d'excitation, devient négligeable dans la zone où $\nu \to -\infty$ au profit des modes de Rossby, notamment celui de degré $n = -2$ (Fig. 3.5). On remarque que le nombre d'onde vertical diverge au voisinage de $\sigma = 0$ suivant la loi établie en (4.63), $\hat{k}_n \propto |\sigma|^{-1/2}$ (Fig. 4.21), ce qui entraîne une diminution drastique de la longueur d'onde des oscillations et de l'épaisseur de peau correspondantes. Les ondes, fortement oscillantes et fortement amorties ($\left|\Re\left\{\hat{k}_n\right\}\right| \gg 1$ et $\Im\left\{\hat{k}_n\right\} \gg 1$, cf. Fig. 4.21), sont localisées dans les couches proches de la surface. Elles ne se propagent plus suivant toute l'épaisseur de l'atmosphère comme en l'absence de processus dissipatifs.

Le couple de marée total, tracé en Figure 4.20 (rouge), est très petit par rapport à ses composantes horizontale et verticale. Comme nous avons pu le voir en Section 4.4.4 en analysant les contributions thermiques du couple, (4.139a) et (4.139c), ceci s'explique par l'action de la stratification sur la réponse de marée : la poussée d'Archimède entraîne un déplacement vertical des particules de fluide venant compenser les variations de densité locales causées par le forçage thermique de la marée (voir Arras & Socrates, 2010). En conséquence, dans l'atmosphère isotherme stratifiée en rotation lente, le bourrelet de marée quadripolaire n'existe pas. De fait, le cas isotherme ne décrit pas la marée atmosphérique de Vénus puisque le blocage de la planète dans une configuration de rotation non-synchrone implique un fort couple de marée atmosphérique (Dobrovolskis & Ingersoll, 1980; Correia & Laskar, 2001; Correia et al., 2003). En revanche, la partie horizontale du couple obtenue dans cette approximation, qui ne dépend pas des déplacements verticaux, correspond à celui du cas convectif, où la structure atmosphérique est plus proche de celle donnée par les observations (Fig. 3.3 Seiff et al., 1980) et présente la dépendance en fréquence maxwellienne des résultats des GCM (Leconte et al., 2015). Ceci permet comme on le voit d'établir un lien entre le spin d'une planète et la structure de son atmosphère.

Le paramètre-clé pour quantifier ce comportement est le rapport entre les carrés des fréquences de Brunt-Väisälä des cas faiblement stratifié/convectif (N^2) et isotherme (N_{iso}^2). Ce paramètre définit deux régimes :

- le *régime faiblement stratifié*, où $N^2 \ll N_{\mathrm{iso}}^2$. La faible stratification permet l'existence d'un bourrelet de marée ;
- le *régime stablement stratifié*, où $N^2 \sim N_{\mathrm{iso}}^2$. La stratification stable rétablit instantanément l'équilibre par déplacement des particules de fluide dans la direction verticale.

Le temps caractéristique d'évolution $\mathscr{T}_{\mathrm{spin}}$ d'une planète de moment d'inertie $\mathcal{I}$ et de vitesse angulaire Ω sous l'effet de la marée atmosphérique est donné par

$$\mathscr{T}_{\rm spin} = \left| \frac{\mathcal{I}\Omega}{\mathcal{T}} \right| . \tag{4.155}$$

Pour Vénus, $\mathcal{I} = 5.88 \times 10^{37}$ kg.m^2 et $\Omega = -2.99 \times 10^{-7}$ s^{-1} (Nasa fact sheet). Le temps caractéristique d'évolution étant inversement proportionnel au couple de marée, $\mathscr{T}_{\rm spin} \sim 5$ Myr pour $\mathcal{T} \sim 10^{17}$ N.m (cas convectif) et $\mathscr{T}_{\rm spin} \sim 500$ Myr pour $\mathcal{T} \sim 10^{15}$ N.m (cas isotherme).

4.7 Conclusion

L'introduction des processus dissipatifs dans la dynamique des ondes de marée régularise la réponse de l'atmosphère à la perturbation dans la gamme des basses fréquences, au voisinage de la synchronisation spin-orbite du corps perturbateur. On retrouve par l'approche analytique la dépendance en fréquence des grandeurs perturbées et du couple donné par les simulations numériques (Leconte et al., 2015) : un régime asymptotique purement dynamique où l'atmosphère s'apparente à un fluide parfait et où couple de marée et nombres de Love suivent une loi en $1/\sigma$, et un régime dissipatif où l'effet du refroidissement newtonien prédomine, induisant une variation linéaire en σ au voisinage de la synchronisation.

Toutefois, un tel comportement est relatif à une structure atmosphérique particulière : il correspond au cas de l'atmosphère convective en rotation lente, pour lequel les forces de rappel des ondes de marées (stratification, Coriolis, compressibilité) sont négligeables. Dans l'approximation isotherme, où l'atmosphère est stablement, stratifiée, une composante relative au déplacement vertical du fluide vient compenser les variations de densité locales, induisant ainsi un couple de marée beaucoup plus faible. Cette composante est implicitement ignorée dans de nombreux travaux traitant de la rotation de Vénus qui, en négligeant la poussée d'Archimède, éliminent d'emblée le terme associé au déplacement vertical dans l'équation de la chaleur (e.g. Dobrovolskis & Ingersoll, 1980; Correia & Laskar, 2001). Les résultats obtenus pour l'atmosphère convective en rotation lente dans notre modèle constituent donc l'extension naturelle de ces précédents travaux aux fluides dissipatifs. La variabilité du couple de marée atmosphérique avec la structure de l'atmosphère, en particulier sa stratification, a des conséquences directe sur les équilibres de spin : quand le couple est suffisamment fort dans le cas convectif pour équilibrer le couple de marée solide, il définit des positions d'équilibres non-synchronisés (Fig. 4.22) ; au contraire, s'il est trop faible du fait d'une forte stratification, la rotation tend vers la synchronisation. Ce point sera étudié au Chapitre suivant.

A la différence du GCM, la modélisation analytique ne permet pas de prendre en compte des processus dissipatifs tels que la friction visqueuse et la diffusion thermique autrement que sous une forme simplifiée (e.g. refroidissement newtonien, friction de Rayleigh), à cause des difficultés techniques qu'introduisent les opérateurs laplaciens associés à ces processus. Néanmoins, le bon accord constaté entre résultats analytiques et numériques (Leconte et al., 2015), suggère que les processus dissipatifs peuvent être effectivement décrits à l'aide d'un refroidissement newtonien. La simulation numérique s'avère nécessaire pour examiner le cas des atmosphère convectives en rotation rapide ou les effets de l'accélération de Coriolis liés à la composante latitudinale du vecteur rotation et étudier les effets non-linéaires ignorés dans l'approche analytique. Le traitement de ces questions devra être réalisé dans de futurs travaux à l'aide d'un GCM.

D'un point de vue physique, notre étude présente plusieurs axes de développement. Le principal d'entre eux est l'introduction, dans la dynamique, du couplage des ondes avec les vents zonaux. Ceci permettra d'abandonner l'approximation de rotation solide, une hypothèse relativement forte au vu des profils de vent longitudinaux de planètes comme Vénus, dont le gradient est important dans les couches proches de la surface (Marov et al., 1973). La prise en compte de la circulation générale a notamment pour conséquence de modifier la structure horizontale des ondes en intervenant sur le paramètre de spin. Dans un second temps,

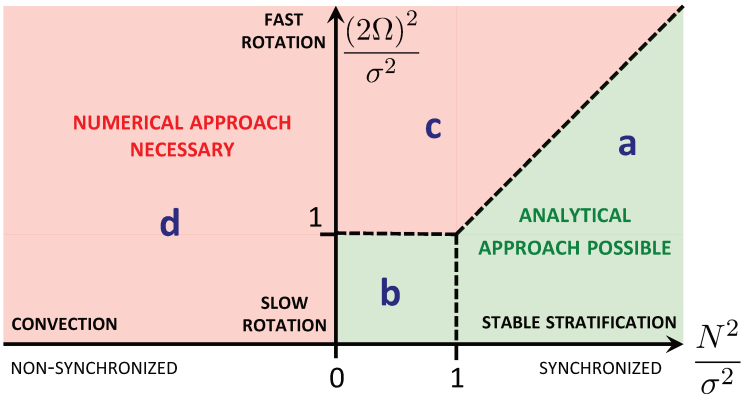


FIGURE 4.22: Domaines asymptotiques des paramètres dans lesquels la modélisation analytique est possible (régions vertes, **a** et **b**) et ceux dans lesquels l'approche numérique (éléments finis, méthodes spectrales, etc.) est nécessaire (régions rouges, **c** et **d**). Sur l'axe horizontal sont indiqués les états d'équilibre de spin associés à ces régimes : synchronisé pour le cas stratifié où le couple est petit, non-synchronisé dans le cas convectif. Régions vertes : cas où l'atmosphère est stablement stratifiée et vérifie la hiérarchie des fréquences $N^2/(2\Omega)^2 \gg 1$ pour laquelle l'approximation traditionnelle s'applique (**a**) ; cas où l'atmosphère est à la fois faiblement stratifiée (ou convective) et en rotation lente, traité en Section 4.5 (**b**). Régions rouges : cas où l'atmosphère est stablement stratifiée mais ne vérifie pas la hiérarchie des fréquences $N^2/(2\Omega)^2 \gg 1$ (**c**) ; cas fortement convectif où l'on sort du cadre d'un modèle de type ondes (**d**).

en s'appuyant sur les travaux récents de Prat et al. (2016), il conviendra d'adapter le modèle au cadre non-traditionnel (cf. Section 3.5.1) pour lequel ces auteurs ont démontré l'existence de solutions analytiques (dans le régime sub-inertiel et à condition que soit respectée la hiérarchie des fréquences $|\sigma| < 2\Omega \ll N$). Il sera ainsi possible d'étudier la marée atmosphérique au voisinage de la synchronisation sans le biais relatif au fait d'ignorer une partie de l'accélération de Coriolis.

Article associé

Le travail présenté dans ce chapitre est détaillé dans Auclair-Desrotour et al. (2016a), soumis à Astronomy & Astrophysics. Cet article introduit les équations de la marée atmosphérique gravifique et thermique dans le cas général pour l'atmosphère épaisse en modélisant la dissipation (refroidissement radiatif, diffusion thermique) par un refroidissement newtonien (Section 2). Les équations sont ensuite résolues pour l'atmosphère isotherme stablement stratifiée (Section 3) et l'atmosphère convective (Section 4). Une modélisation *ab initio* des distributions de chauffage est proposée dans le cas des couches de faible épaisseur optique (Section 5). Enfin, l'évolution des marées solaires semi-diurnes de la Terre et de Vénus avec le taux de rotation est examinée dans le cadre des modèles étudiés précédemment (Section 6). On en déduit le comportement global des marées thermiques dans les atmosphères de planètes telluriques.

A la suite de l'article, on trouvera les annexes suivantes :

Annexe A - Fonctions de Hough
Annexe B - Schéma numérique utilisé pour intégrer les équations différentielles spatiales
Annexe C - Décomposition du forçage thermique en éléments képleriens
Annexe D - Puissance rayonnée en fonction des paramètres physiques du système
Annexe E - Solution analytique pour des profils verticaux et une condition de bord supérieur constants
Annexe F - Matériel supplémentaire sur la dépendance de la réponse de marée à la fréquence de marée
Annexe G - Conséquences d'une résolution spatiale insuffisante sur le calcul numérique de la structure verticale

Astronomy & Astrophysics manuscript no. ADLM2016
December 7, 2016
©ESO 2016

Atmospheric tides in Earth-like planets

P. Auclair-Desrotour[1,2], J. Laskar[1], and S. Mathis[2,3]

[1] IMCCE, Observatoire de Paris, CNRS UMR 8028, PSL, 77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
e-mail: pierre.auclair-desrotour@obspm.fr, jacques.laskar@obspm.fr
[2] Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/DSM - CNRS - Université Paris Diderot, IRFU/SAp Centre de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France
[3] LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 place Jules Janssen, F-92195 Meudon, France
e-mail: stephane.mathis@cea.fr

Received ... / accepted ...

ABSTRACT

Context. Atmospheric tides can strongly affect the rotational dynamics of planets. In the family of Earth-like planets, which includes Venus, this physical mechanism coupled with solid tides makes the angular velocity evolve over long timescales and determines the equilibrium configurations of their spin.
Aims. Unlike the solid core, the atmosphere of a planet is subject to both tidal gravitational potential and insolation flux coming from the star. The complex response of the gas is intrinsically linked to its physical properties. This dependence has to be characterized and quantified for application to the wide variety of extrasolar planetary systems.
Methods. We develop a theoretical global model where radiative losses, which are predominant in slowly rotating atmospheres, are taken into account. We analytically compute the perturbation of pressure, density, temperature, and velocity field caused by a thermogravitational tidal perturbation. From these quantities, we deduce the expressions of atmospheric Love numbers and tidal torque exerted on the fluid shell by the star. The equations are written for the general case of a thick envelope and the simplified one of a thin isothermal atmosphere.
Results. The dynamics of atmospheric tides depends on the frequency regime of the tidal perturbation: the thermal regime near synchronization and the dynamical regime characterizing fast-rotating planets. Gravitational and thermal perturbations imply different responses of the fluid, i.e. gravitational tides and thermal tides, which are clearly identified. The dependence of the torque on the tidal frequency is quantified using the analytic expressions of the model for Earth-like and Venus-like exoplanets and is in good agreement with the results given by global climate models (GCM) simulations. Introducing dissipative processes such as radiation regularizes the tidal response of the atmosphere, otherwise it is singular at synchronization.
Conclusions. We demonstrate the important role played by the physical and dynamical properties of a super-Earth atmosphere (e.g. Coriolis, stratification, basic pressure, density, temperature, radiative emission) in its response to a tidal perturbation. . We point out the key parameters defining tidal regimes (e.g. inertia, Brunt-Väisälä, radiative frequencies, tidal frequency) and characterize the behaviour of the fluid shell in the dissipative regime, which cannot be studied without considering the radiative losses.

Key words. hydrodynamics – waves – planet-star interactions – planets and satellites: dynamical evolution and stability

1. Introduction

Since the pioneering work of Kelvin (1863) on the gravitationally forced elongation of a solid spherical shell, tides have been recognized as a phenomenon of major importance in celestial mechanics. They are actually one of the key mechanisms involved in the evolution of planetary systems over long timescales. Because they affect both stars and planets, tides introduce a complex dynamical coupling between all the bodies that compose a system. This coupling results from the mutual interactions of bodies and is tightly bound to their internal physics. Solid tides have long been the subject of studies (see the reference works by Love 1911; Goldreich & Soter 1966). The corresponding tidal dissipation, which is caused by viscous friction, can have a strong impact on the orbital elements of a planet (e.g. Mignard 1979, 1980; Hut 1980, 1981; Neron de Surgy & Laskar 1997; Henning et al. 2009; Remus et al. 2012). This evolution depends smoothly on the tidal frequency (e.g. Efroimsky & Lainey 2007; Greenberg 2009). Fluid tides cause internal dissipation as well as solid tides, and the energy dissipated is even more dependent on the tidal frequency than the solid tides are because of a highly resonant behaviour (Ogilvie & Lin 2004; Ogilvie 2014; Auclair Desrotour et al. 2015). As a consequence, in both cases the phase shifted elongation of the shell induces a tidal torque which modifies the rotational dynamics of the body. This torque drives the evolution of the spin of planets and determines its possible states of equilibrium (Gold & Soter 1969; Dobrovolskis & Ingersoll 1980; Correia & Laskar 2001; Correia et al. 2003; Correia & Laskar 2003; Arras & Socrates 2010; Correia et al. 2014).

The increased focus on exoplanets over the past two decades and the rapidly increasing number of discovered planetary systems (Mayor & Queloz 1995; Perryman 2011) have brought to light a huge diversity of existing orbital structures that can be very different from our own solar system (Fabrycky et al. 2012). Therefore, tidal effects now need to be studied in a general context to characterize these new systems, understand their orbital and rotational dynamics, and constrain the physics of exoplanets with the information provided by observational

measurements.

In this work, we focus on Earth-like exoplanets, which are interesting for their complex internal structure and possible habitability. Indeed, a planet such as the Earth or Venus is composed of several solid and fluid layers with different physical properties, which implies that the tidal response of a layer cannot be simply correlated to its size. For instance, the Earth's oceans, in spite of their very small depth compared to the Earth's radius, are responsible for most of the tidal dissipation of the planet (Webb 1980; Egbert & Ray 2000; Ray et al. 2001). The atmospheric envelope of a terrestrial exoplanet sometimes represents a non-negligible fraction of its mass (about 20 % in the case of small Neptune-like bodies). It is also a layer of great complexity because it is submitted to both tidal gravitational potentials due to other bodies and thermal forcing of the host star. Therefore, it is necessary to develop theoretical models of atmospheric tides with the smallest possible number of parameters. These models will be useful tools to explore the domain of parameters, and to quantify the tidal torque exerted on the spin axis of a planet and quantities used in the orbital evolution of planetary systems. One of these quantities is the second-order Love number (k_2) introduced by Love (1911), which measures the quadrupolar hydrostatic elongation. The adiabatic Love number k_2 has been estimated in the solar system (e.g. Konopliv & Yoder 1996; Lainey et al. 2007; Williams et al. 2014).

According to Wilkes (1949), the first theoretical global models of atmospheric tides were developed at the end of the eighteenth century by Laplace, who published them in *Mécanique céleste* (Laplace 1798). Laplace was interested in the case of a homogeneous atmosphere characterized by a constant pressure scale height and affected by tidal gravitational perturbations. He thus founded the classical theory of atmospheric tides. At the end of the nineteenth century, Lord Kelvin pointed out the unexpected importance of the Earth's semidiurnal pressure oscillations in spite of the predominating diurnal perturbation (Kelvin 1882; Hagan et al. 2003; Covey et al. 2009, see also the measures of the daily variation of temperature and pressure, Fig. 13). This question motivated many further studies (e.g. Lamb 1911, 1932; Taylor 1929, 1936; Pekeris 1937) which contributed to enriching the classical theory of tides. In the 1960s, theoretical models were generalized in order to study other modes, such as diurnal oscillations (see Haurwitz 1965; Kato 1966; Lindzen 1966, 1967a,b, 1968), but still remained focused on the case of the Earth. They revealed the impact of thermal tides due to solar insolation by showing that these tides drive the Earth's diurnal and semi-diurnal waves. Indeed, in the Earth atmosphere, the contribution of the tidal gravitational potential, which causes the elongation of solid layers, is negligible compared to the effect of the thermal forcing. A very detailed review of the general theory of thermal tides and of its history is given by Chapman & Lindzen (1970), hereafter CL70 (see also Wilkes 1949; Siebert 1961).

Leaning on this early work, here we generalize the existing theory to Earth-like planets and exoplanets. We introduce the mechanisms of radiative losses and thermal diffusion, which are usually not taken into account in geophysical models of atmospheric tides owing to their negligible effects on the Earth's tidal response (radiation was, however, introduced with a Newtonian cooling by Lindzen & McKenzie 1967; Dickinson & Geller 1968, which inspired the present work). These mechanisms cannot be ignored because they play a crucial role in the case of planets like Venus, which are very close to spin-orbit synchronization. Models based on perfect fluid hydrodynamics, such as the one detailed by CL70, fail to describe the atmospheric tidal response of such planets because they are singular at synchronization. In these models, the amplitude of perturbed quantities like pressure, density, and temperature diverges at this point. The case of Venus was studied by Correia & Laskar (2001), who proposed an empirical bi-parameter model for the tidaltorque describing two possible regimes: the regime of an atmosphere where dissipative processes can be ignored, far from synchronization, and its supposed regime at the vicinity of synchronization, where the perturbation is expected to annihilate itself. This behaviour was recently retrieved with GCM simulations by Leconte et al. (2015), who took into account dissipative mechanisms, thus showing that these mechanisms drive the response of planetary atmospheres in the neighbourhood of synchronization.

Our objective in this work is thus to propose a new theoretical global model controlled by a small number of physical parameters which could be used to characterize the response of any exoplanet atmosphere to a general tidal perturbation. We aim to answer the following questions:

- How does the amplitude of pressure, density, temperature, and velocity oscillations depend on the parameters of the system (i.e. rotation, stratification, radiative losses)?
- What are the possible regimes for atmospheric tides?
- How do Love numbers and tidal torques vary with tidal frequency?

First, in Sect. 2, we derive the general theory for thick atmospheres, which are characterized by a depth comparable to the radius of the planet. In this framework, we expand the perturbed quantities in Fourier series in time and longitude, and in series of Hough functions (Hough 1898) in latitude. This allows us to compute the equations giving the vertical structure of the atmospheric response to the tidal perturbation. Then, from the hydrodynamics we derive the analytic expressions of the variations of pressure, density, temperature, velocity field, and displacement for any mode. At the end of the section, the density oscillations obtained are used to compute the atmospheric tidal gravitational potential, the Love numbers, and the tidal torque exerted on the spin axis of the planet. In Section 3, we apply the equations from Section 2 to the case of a thin isothermal stably stratified atmosphere. In this simplified case, the terms associated with the curvature of the planet disappear and most of the parameters depending on the altitude, such as the pressure scale height of the atmosphere, become constant. In Section 4, we treat the case of slowly rotating convective atmospheres, such as near the ground in Venus (Marov et al. 1973; Seiff et al. 1980). In the next section, we derive the terms of thermal forcing from the Beer-Lambert law (Bouguer 1729; Klett et al. 1760; Beer 1852) and the theory of temperature oscillations at the planetary surface. In Section 6, the model is applied to the Earth and Venus. The corresponding torque and atmospheric Love numbers are computed from analytical equations. We end the study with a discussion and by giving our conclusions and prospects. To facilitate the reading, several technical issues have been deferred to the Appendix where an index of notations is also provided.

2. Dynamics of a thick atmosphere forced thermally and gravitationally

The reference book CL70 has set the basis of analytical approaches for atmospheric tides. This pioneering work focuses on fast rotating telluric planets covered by a thin atmosphere, such as the Earth.

The goal of the present section is to generalise this work. We establish the equations that govern the dynamics of tides in a thick fluid shell in the whole range of tidal frequencies, from synchronization to fast rotation. We consider a spherical telluric planet of radius R covered by a stratified atmospheric layer of typical thickness $H_{\rm atm}$. The atmosphere rotates uniformly with the rocky part at the angular velocity Ω (the spin vector of the planet being denoted $\mathbf{\Omega}$). Therefore, the dynamics are written in the natural equatorial reference frame rotating with the planet, $\mathscr{R}_{\rm E;T} : \{O, \mathbf{X}_{\rm E}, \mathbf{Y}_{\rm E}, \mathbf{Z}_{\rm E}\}$, where O is the centre of the planet, $\mathbf{X}_{\rm E}$ and $\mathbf{Y}_{\rm E}$ define the equatorial plane and $\mathbf{Z}_{\rm E} = \mathbf{\Omega}/|\mathbf{\Omega}|$. We use the spherical basis $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ and coordinates (r, θ, φ), where r is the radial coordinate, θ the colatitude, and φ the longitude. As usual, t stands for the time.

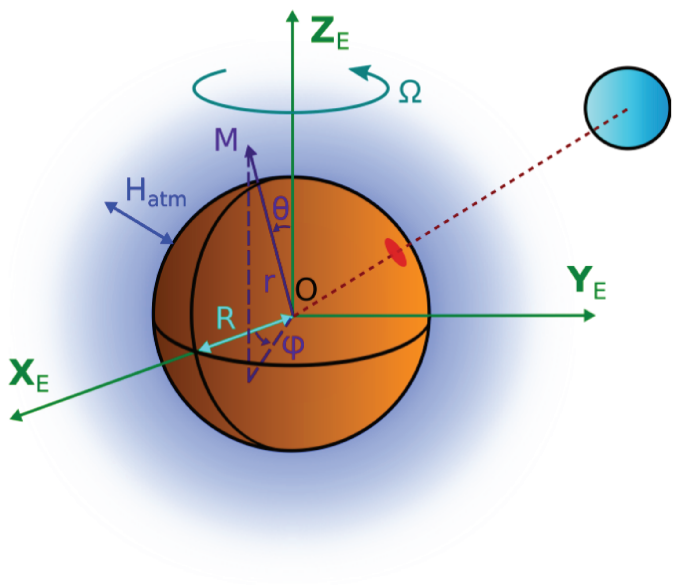


Fig. 1. Spherical coordinate system associated with the equatorial reference frame of the planet, and the geometrical parameters of the system.

The atmosphere is assumed to be a perfect gas homogeneous in composition, of molar mass M, and stratified radially. Its pressure, density, and temperature are denoted p, ρ, and T respectively. For the sake of simplicity, all dissipative mechanisms (e.g. viscous friction and heat diffusion) are ignored except for the radiative losses of the gas, which play an important role in the vicinity of synchronization. Tides are considered to be a small perturbation around a global static equilibrium state. The basic pressure p_0, density ρ_0, and temperature T_0, are supposed to vary only with the radial coordinate. The tidal response is characterized by a combination of inertial waves, of typical frequency 2Ω, due to Coriolis acceleration, and gravity waves which are restored by the stable stratification. The typical frequency of these waves, the Brunt-Väisälä frequency (e.g. Lighthill 1978; Gerkema & Zimmerman 2008), is given by

$$N^2 = g\left[\frac{1}{\Gamma_1 p_0}\frac{dp_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}\right], \tag{1}$$

where $\Gamma_1 = (\partial \ln p_0/\partial \ln \rho_0)_S$ is the adiabatic exponent (the index S being the specific macroscopic entropy) and g the gravity. We assume that the fluid follows the perfect gas law,

$$p = \mathscr{R}_s \rho T, \tag{2}$$

where $\mathscr{R}_s = \mathscr{R}_{\rm GP}/M$ is the specific gas constant of the atmosphere, $\mathscr{R}_{\rm GP} = 8.3144621$ J.mol^{-1}.K^{-1} (Mohr et al. 2012) being the molar gas constant. In the following, the notations $\Re$, $\Im$, and $*$ are used to designate the real part, imaginary part, and conjugate of a complex number. The subscript symbols $\oplus$ and $\varnothing$ stand for the Earth and Venus, respectively, which are taken as examples to illustrate the theory. All functions and fields displayed in the figures are computed with the algebraic manipulator TRIP (Gastineau & Laskar 2014) and plotted with gnuplot.

2.1. Forced dynamics equations

The atmosphere is affected by the tidal gravitational potential U and the heat power per mass unit J. In this approach, the equations of dynamics are linearized around the equilibrium state. The small variations in this state induced by the tidal perturbation are the velocity field $\mathbf{V} = V_\theta \mathbf{e}_\theta + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_r \mathbf{e}_r$; the corresponding displacement field $\boldsymbol{\xi} = \xi_\theta \mathbf{e}_\theta + \xi_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \xi_r \mathbf{e}_r$ defined as

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}; \tag{3}$$

and the pressure (δp), density ($\delta\rho$), and temperature (δT) fluctuations where

$$p = p_0 + \delta p, \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad T = T_0 + \delta T. \tag{4}$$

This represents six unknown quantities to compute (V_r, V_θ, V_φ, δp, $\delta\rho$, δT), and we therefore solve a six-equation system. We first introduce the Navier-Stokes equation. We assume the Cowling approximation in which the self-gravitational potential fluctuations induced by tides are neglected (Cowling 1941). It is well adapted to waves characterized by a high vertical wavenumber as are found in the vicinity of synchronization, as detailed farther. In the equatorial reference frame $\mathscr{R}_{\rm E;T}$, the linearized Navier-Stokes equation is thus written

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + 2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_0}\mathbf{\nabla} p - \frac{g}{\rho_0}\delta\rho\, \mathbf{e}_r - \mathbf{\nabla} U, \tag{5}$$

which, projected on $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, and $\mathbf{e}_\varphi$, gives

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} - 2\Omega\cos\theta V_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + 2\Omega\cos\theta V_\theta + 2\Omega\sin\theta V_r = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} - 2\Omega \sin\theta V_\varphi = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial r} - g\frac{\delta\rho}{\rho_0} - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (8)$$

Eqs. (6), (7), and (8) are coupled by the Coriolis terms (characterized by the factor 2Ω) on the left-hand side. To simplify the equations, we assume the traditional approximation, i.e. to neglect the terms $2\Omega\sin\theta V_r$ and $2\Omega\sin\theta V_\varphi$ in Eqs. (7) and (8), respectively. This hypothesis, commonly used in literature dealing with planetary atmospheres and star hydrodynamics (e.g. Eckart 1960; Mathis et al. 2008), can be applied to stratified fluids where the tidal flow satisfies two conditions: (i) the buoyancy (given by $g\delta\rho/\rho_0\mathbf{e}_r$ in Eq. 5) is strong compared to the Coriolis term ($2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{V}$) and (ii) the tidal frequency (introduced below) is greater than the inertia frequency (2Ω) and smaller than the Brunt-Väisälä frequency. These conditions are satisfied by the Earth's atmosphere and fast rotating planets. The quantitative precision that can be expected with the traditional approximation may be lower in the vicinity of synchronization where the tidal frequency tends to zero; moreover, we note that it leads to issues with momentum and energy conservation in the case of deep atmospheres (for a discussion on the limitations of the traditional approximation, see Gerkema & Shrira 2005; White et al. 2005; Mathis 2009).

Hence, we obtain:

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} - 2\Omega\cos\theta V_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + 2\Omega\cos\theta V_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U\right), \quad (10)$$

$$\rho_0\frac{\partial V_r}{\partial t} = -\frac{\partial\delta p}{\partial r} - g\delta\rho - \rho_0\frac{\partial U}{\partial r}. \quad (11)$$

In strongly stratified fluids, the left-hand side of Eq. (11) is usually ignored because it is very small compared to the terms in δp and $\delta\rho$ in typical wave regimes. The radial acceleration will only play a role in regimes where the tidal frequency is close to or exceeds the Brunt-Väisälä frequency, which corresponds to fast rotators.

The second equation of our system is the conservation of mass,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{\nabla}.(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad (12)$$

which, in spherical coordinates, writes

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho_0 V_r\right) + \frac{\rho_0}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V_\theta\right) + \frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right] = 0 \quad (13)$$

The thermal forcing (J) appears on the right-hand side of the linearized heat transport equation (see CL70, Gerkema & Zimmerman 2008) given by

$$\frac{1}{\Gamma_1 p_0}\frac{\partial\delta p}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\delta\rho}{\delta t} + \frac{N^2}{g}V_r = \kappa\frac{\rho_0}{p_0}\left[J - J_{\rm rad}\right], \quad (14)$$

where $\kappa = \left(\Gamma_1 - 1\right)/\Gamma_1$ and $J_{\rm rad}$ is the power per mass unit radiated by the atmosphere, supposed to behave as a grey body. We consider that $J_{\rm rad} \propto \delta T$. This hypothesis is known as "Newtonian cooling" and was used by Lindzen & McKenzie (1967) to introduce radiation analytically in the classical theory of atmospheric tides (see also Dickinson & Geller 1968). Physically, it corresponds to the case of an optically thin atmosphere in which the flux emitted by a layer propagates upwards or downwards without being absorbed by the other layers. In optically thick atmospheres, such as on Venus (Lacis 1975), this physical condition is not verified. Indeed, because of a stronger absorption, the power emitted by a layer is almost totally transmitted to the neighbourhood. Therefore, this significant thermal coupling within the atmospheric shell should ideally be taken into account in a rigorous way, which would lead to great mathematical difficulties (e.g. complex radiative transfers, Laplacian operators) in our analytical approach. However, recent numerical simulations of thermal tides in optically thick atmospheres by Leconte et al. (2015) show behaviour of the flow that is in good agreement with a model that uses radiative cooling. Therefore, in this work we assume Newtonian cooling as a first model of the action of radiation on atmospheric tides. Newtonian cooling brings a new characteristic frequency, denoted σ_0, which we call radiative frequency and which depends on the thermal capacity of the atmosphere. The radiative power per unit mass is thus written

$$J_{\rm rad} = \frac{p_0\sigma_0}{\kappa\rho_0 T_0}\delta T. \quad (15)$$

Like the basic fields p_0, ρ_0, and T_0, the radiative frequency varies with r and defines the transition between the dynamical regime, where the radiative losses can be ignored, and the radiative regime, where they predominate in the heat transport equation. Assuming that the radiative emission of the gas is proportional to the local molar concentration $C_0 = \rho_0/M$, it is possible to express $J_{\rm rad}$ and σ_0 as functions of the physical parameters of the fluid (Appendix D),

$$J_{\rm rad} = \frac{8\epsilon_a}{M}\mathscr{S}T_0^3\delta T \quad (16)$$

and

$$\sigma_0\left(r\right) = \frac{8\kappa\epsilon_a\mathscr{S}}{\mathscr{R}_{\rm GP}}T_0^3, \quad (17)$$

the parameter $\epsilon_{\rm a}$ being an effective molar emissivity coefficient of the gas and $\mathscr{S} = 5.670373 \times 10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4} the Stefan-Boltzmann constant (Mohr et al. 2012). The substitution of Eq. (15) in Eq. (14) yields

$$\frac{1}{\Gamma_1 P_0}\frac{\partial\delta p}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\delta\rho}{\delta t} + \frac{N^2}{g}V_r = \kappa\frac{\rho_0}{p_0}J - \sigma_0\frac{\delta T}{T_0}. \quad (18)$$

Finally, the system is closed by the perfect gas law

$$\frac{\delta p}{p_0} = \frac{\delta T}{T_0} + \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \quad (19)$$

Substituting Eq. (19) in Eq. (18), we eliminate the unknown δT, and obtain

$$\frac{1}{\Gamma_1 p_0}\left(\frac{\partial\delta p}{\partial t} + \Gamma_1\sigma_0\delta p\right) + \frac{N^2}{g}\frac{\partial\xi_r}{\partial t} = \frac{\kappa\rho_0}{p_0}J + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \sigma_0\delta\rho\right).$$

(20)

Because of the rotating motion of the perturber in the equatorial frame ($\mathscr{R}_{\mathrm{E;T}}$), a tidal perturbation is supposed to be periodic in time (t) and longitude (φ). So, any perturbed quantity f of our model can be expanded in Fourier series of t and φ

$$f = \sum_{m,\sigma} f^{m,\sigma}\left(\theta, r\right) e^{i(\sigma t + m\varphi)}, \tag{21}$$

the parameter σ being the tidal frequency of a Fourier component and m its longitudinal degree[1]. We also introduce the spin parameter

$$\nu\left(\sigma\right) = \frac{2\Omega}{\sigma}, \tag{22}$$

which defines the possible regimes of tidal gravito-inertial waves:

- $|\nu| \leqslant 1$ corresponds to super-inertial waves, for which the tidal frequency is greater than the inertia frequency;
- $|\nu| > 1$ corresponds to sub-inertial waves, for which the tidal frequency is lower than the inertia frequency.

The parameters m and ν determine the horizontal operators

$$\mathcal{L}_{\theta}^{m,\nu} = \frac{1}{\left(1-\nu^2\cos^2\theta\right)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + m\nu\cot\theta\right], \tag{23}$$

$$\mathcal{L}_{\varphi}^{m,\nu} = \frac{1}{\left(1-\nu^2\cos^2\theta\right)}\left[\nu\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m}{\sin\theta}\right]. \tag{24}$$

Here the operator $\mathcal{L}_{\theta}^{m,\nu}$ is associated with $V_{\theta}^{m,\sigma}$ and $\xi_{\theta}^{m,\sigma}$, while $\mathcal{L}_{\varphi}^{m,\nu}$ is associated with $V_{\varphi}^{m,\sigma}$ and $\xi_{\varphi}^{m,\sigma}$ (Lee & Saio 1997; Mathis et al. 2008). Hence, the traditional approximation allows us to write the horizontal component of the velocity field only as a function of the variations in the pressure and tidal gravitational potential

$$V_{\theta}^{m,\sigma} = \frac{i}{\sigma r}\mathcal{L}_{\theta}^{m,\nu}\left(y^{m,\sigma} + U^{m,\sigma}\right), \tag{25}$$

$$V_{\varphi}^{m,\sigma} = -\frac{1}{\sigma r}\mathcal{L}_{\varphi}^{m,\nu}\left(y^{m,\sigma} + U^{m,\sigma}\right). \tag{26}$$

where $y^{m,\sigma} = \delta p^{m,\sigma}/\rho_0$. Since $\mathbf{V}^{m,\sigma} = \partial_t \boldsymbol{\xi}^{m,\sigma}$, we also get the corresponding horizontal component $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{H}}^{m,\sigma} = \xi_{\theta}^{m,\sigma}\mathbf{e}_{\theta} + \xi_{\varphi}^{m,\sigma}\mathbf{e}_{\varphi}$ of the displacement vector from Eq. (25) and (26)

$$\xi_{\theta}^{m,\sigma} = \frac{1}{\sigma^2 r}\mathcal{L}_{\theta}^{m,\nu}\left(y^{m,\sigma} + U^{m,\sigma}\right), \tag{27}$$

$$\xi_{\varphi}^{m,\sigma} = \frac{i}{\sigma^2 r}\mathcal{L}_{\varphi}^{m,\nu}\left(y^{m,\sigma} + U^{m,\sigma}\right). \tag{28}$$

[1] In a binary star-planet system where the planet orbits circularly in the equatorial plane defined by $\mathbf{X}_{\mathrm{E}}$ and $\mathbf{Y}_{\mathrm{E}}$ at the orbital frequency n_{orb}, the semidiurnal tide corresponds to $m = 2$, $\sigma = 2\left(\Omega - n_{\mathrm{orb}}\right)$, and $\nu = \Omega/\left(\Omega - n_{\mathrm{orb}}\right)$.

The substitution of Eqs. (25) and (26) in Eq. (13) yields

$$\delta\rho^{m,\sigma} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho_0\xi_r^{m,\sigma}\right) - \frac{\rho_0}{\sigma^2 r^2}\mathcal{L}^{m,\nu}\left(y^{m,\sigma} + U^{m,\sigma}\right), \tag{29}$$

where $\mathcal{L}^{m,\nu}$ is the Laplace operator, parametrized by ν and m and is expressed by

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{m,\nu} \quad = \quad & \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\nu^2\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\ & -\frac{1}{1-\nu^2\cos^2\theta}\left(m\nu\frac{1+\nu^2\cos^2\theta}{1-\nu^2\cos^2\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\end{aligned} \tag{30}$$

with $\nu = 2\Omega/\sigma$ (Eq. 22). When $\nu = 0$ (i.e. $\Omega = 0$), $\mathcal{L}^{m,\nu}$ is reduced to the horizontal Laplacian. Since the horizontal velocity field is not coupled with the other variables, only three unknowns remain. So, the new system is written

$$\sigma^2\rho_0\xi_r^{m,\sigma} = \frac{\partial\delta p^{m,\sigma}}{\partial r} + g\delta\rho^{m,\sigma} + \rho_0\frac{\partial U^{m,\sigma}}{\partial r}, \tag{31}$$

$$\delta\rho^{m,\sigma} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho_0\xi_r^{m,\sigma}\right) - \frac{\rho_0}{\sigma^2 r^2}\mathcal{L}^{m,\nu}\left(y^{m,\sigma} + U^{m,\sigma}\right), \tag{32}$$

$$\left(i\sigma + \Gamma_1\sigma_0\right)\frac{\delta p^{m,\sigma}}{\Gamma_1 p_0} + i\sigma\frac{N^2}{g}\xi_r^{m,\sigma} = \frac{\kappa\rho_0}{p_0}J^{m,\sigma} + \left(i\sigma + \sigma_0\right)\frac{\delta\rho^{m,\sigma}}{\rho_0}, \tag{33}$$

Under the traditional approximation, solutions of Eqs. (31), (32), and (33) can be obtained under the form of series of functions of separated coordinates,

$$\begin{aligned}
J^{m,\sigma} &= \sum J_n^{m,\sigma}\left(r\right)\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right), \\
U^{m,\sigma} &= \sum_n U_n^{m,\sigma}\left(r\right)\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right), \\
\xi_r^{m,\sigma} &= \sum_n \xi_{r;n}^{m,\sigma}\left(r\right)\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right), \\
\xi_{\theta}^{m,\sigma} &= \sum_n \xi_{\theta;n}^{m,\sigma}\left(r\right)\mathcal{L}_{\theta}^{m,\nu}\left[\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right)\right], \\
\xi_{\varphi}^{m,\sigma} &= \sum_n \xi_{\varphi;n}^{m,\sigma}\left(r\right)\mathcal{L}_{\varphi}^{m,\nu}\left[\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right)\right], \\
V_r^{m,\sigma} &= \sum_n V_{r;n}^{m,\sigma}\left(r\right)\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right), \\
V_{\theta}^{m,\sigma} &= \sum_n V_{\theta;n}^{m,\sigma}\left(r\right)\mathcal{L}_{\theta}^{m,\nu}\left[\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right)\right], \\
V_{\varphi}^{m,\sigma} &= \sum_n V_{\varphi;n}^{m,\sigma}\left(r\right)\mathcal{L}_{\varphi}^{m,\nu}\left[\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right)\right], \\
\delta p^{m,\sigma} &= \sum_n \delta p_n^{m,\sigma}\left(r\right)\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right), \\
\delta\rho^{m,\sigma} &= \sum_n \delta\rho_n^{m,\sigma}\left(r\right)\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right), \\
\delta T^{m,\sigma} &= \sum_n \delta T_n^{m,\sigma}\left(r\right)\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right) \\
y^{m,\sigma} &= \sum_n y_n^{m,\sigma}\left(r\right)\Theta_n^{m,\nu}\left(\theta\right),
\end{aligned} \tag{34}$$

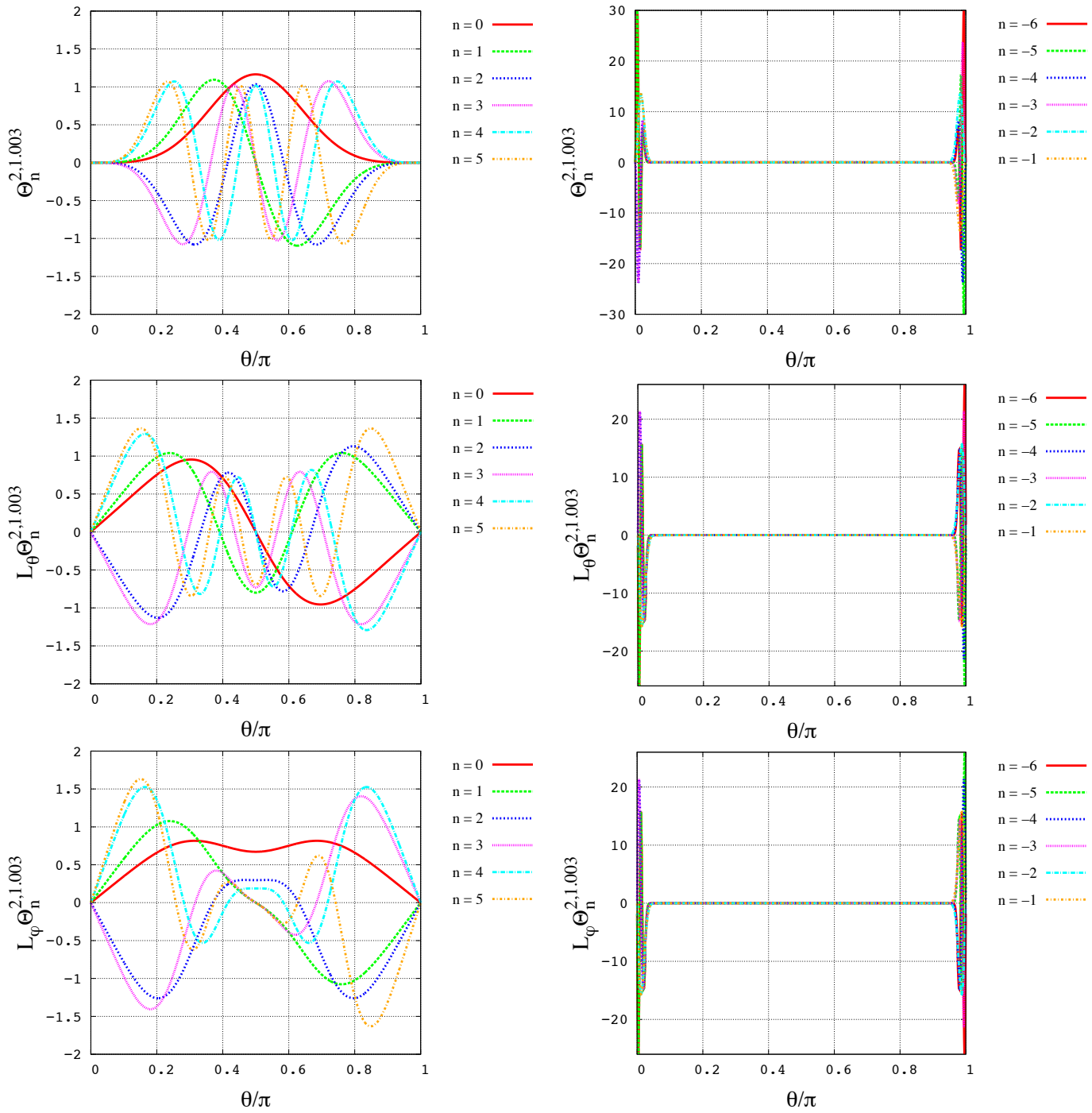


Fig. 2. Normalized Hough functions $\Theta_n^{m,\nu}$, $\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}\Theta_n^{m,\nu}$, and $\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}\Theta_n^{m,\nu}$ corresponding to the Earth's semidiurnal tide ($m = 2$ and $\nu = 1.0030$). We note that $\nu = 2\Omega/\sigma$. **Left:** First gravity modes ; $0 \leqslant n \leqslant 5$. **Right:** First Rossby modes: $-6 \leqslant n \leqslant -1$. In this case, $|\nu|$ is very close to 1 and the Rossby modes are tapped at the poles. The Earth's semidiurnal tide is mainly described by gravity modes. For more details about the behaviour of Hough functions, see Fig. A.2 in Appendix A.

where the functions $\Theta_n^{m,\nu}$ are the eigenvectors of the Laplace operator, the corresponding eigenvalues being denoted $\Lambda_n^{m,\nu}$ (with $\nu = 2\Omega/\sigma$). Laplace's tidal equation, expressed as

$$\mathcal{L}^{m,\nu}\left(\Theta_n^{m,\nu}\right) = -\Lambda_n^{m,\nu}\Theta_n^{m,\nu}, \tag{35}$$

describes the horizontal structure of the perturbation. The solutions of Eq. (35), $\{\Theta_n^{m,\nu}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ are called Hough functions (Hough 1898)[2]. They form a complete set of continuous functions on the interval $\theta \in [0,\pi]$, parametrized by m and ν. They also verify the same boundary conditions as the associated Legendre polynomials (denoted P_l^m), which are solutions of Eq. (35) for $\nu = 0$ with $\Lambda_n^{m,\nu}(\nu = 0) = l(l+1)$. In Figs. 2 and 3, the functions $\Theta_n^{m,\nu}$, $\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}\Theta_n^{m,\nu}$, and $\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}\Theta_n^{m,\nu}$ are plotted for the Earth and Venus in the case of the solar semidiurnal tide defined

[2] The properties of Hough functions and the method used to compute them in this work are detailed in Appendix A.

by $m = 2$, $\sigma = 2\left(\Omega - n_{\rm orb}\right)$, and $\nu = \Omega/\left(\Omega - n_{\rm orb}\right)$, where $n_{\rm orb}$ stands for the mean motion of the planet. In the case of the Earth, the set is mainly composed of gravity modes. Since the spin parameter is slightly greater than 1, Rossby modes exist but are trapped at the poles. In the case of Venus, Hough functions are composed of gravity modes only because $|\nu| < 1$. These functions are very similar to the associated Legendre polynomials P_l^2, with $l \geqslant 2$.

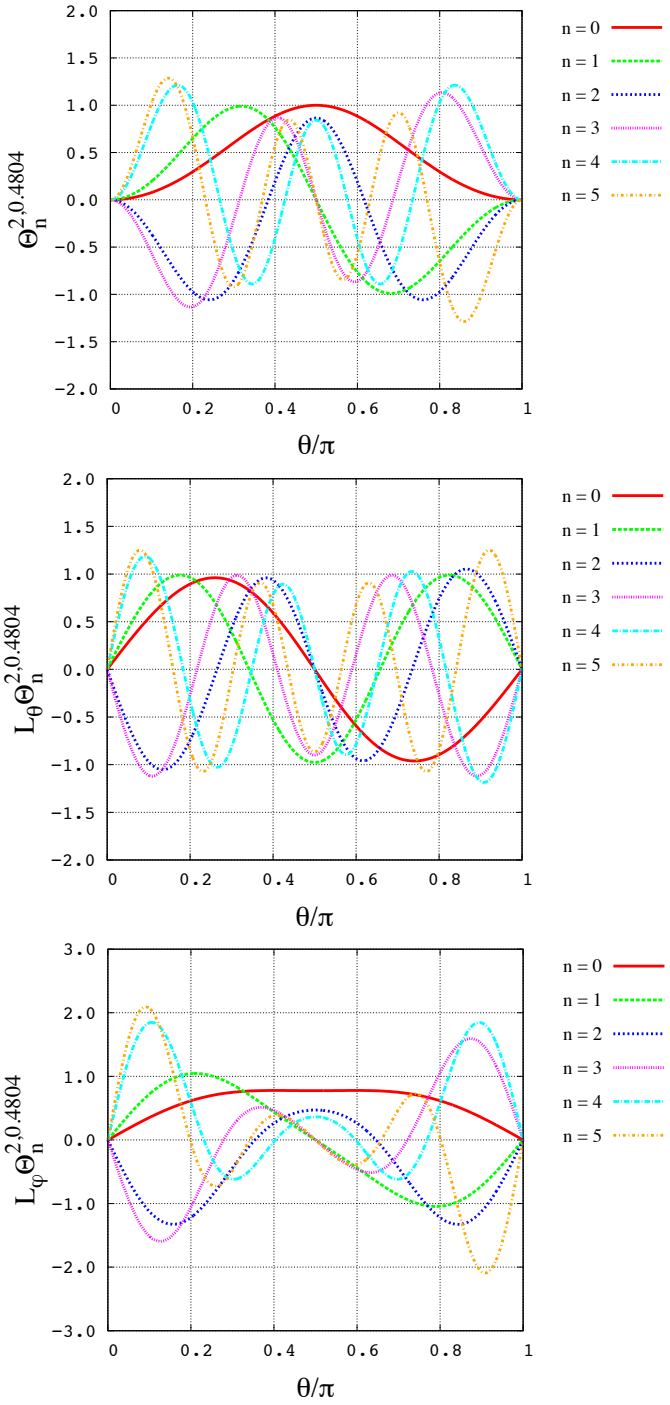


Fig. 3. First gravity modes ($0 \leqslant n \leqslant 5$) of normalized Hough functions $\Theta_n^{m,\nu}$, $\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}\Theta_n^{m,\nu}$, and $\mathcal{L}_\varphi^{m,\nu}\Theta_n^{m,\nu}$ corresponding to the semidiurnal tide of Venus-like exoplanets ($m = 2$ and $\nu = 0.4804$). We note that $\nu = 2\Omega/\sigma$. For more details about the behaviour of Hough functions, see Figs. A.2 in Appendix A.

The system composed of Eqs. (31) to (33) can then be reduced to the pair of first-order differential equations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dr}\left(r^2\xi_{r;n}^{m,\sigma}\right) = A_1 r^2 \xi_{r;n}^{m,\sigma} + B_1 y_n^{m,\sigma} + C_1, \\ \dfrac{dy_n^{m,\sigma}}{dr} = A_2 r^2 \xi_{r;n}^{m,\sigma} + B_2 y_n^{m,\sigma} + C_2, \end{array}\right. \tag{36}$$

with the coefficients

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr} - \frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{N^2}{g}, \\ B_1 &= \frac{\Lambda_n^{m,\nu}}{\sigma^2} - \frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{r^2}{c_s^2}, \\ C_1 &= \frac{\kappa r^2\rho_0}{p_0\left(i\sigma+\sigma_0\right)}J_n^{m,\sigma} + \frac{\Lambda_n^{m,\nu}}{\sigma^2}U_n^{m,\sigma}, \end{aligned} \tag{37}$$

and

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{r^2}\left(\sigma^2 - \frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}N^2\right), \\ B_2 &= -\frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{g}{c_s^2} - \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}, \\ C_2 &= \frac{\kappa g\rho_0}{p_0\left(i\sigma+\sigma_0\right)}J_n^{m,\sigma} - \frac{dU_n^{m,\sigma}}{dr}, \end{aligned} \tag{38}$$

where we introduce the sound velocity

$$c_s = \sqrt{\frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0}}. \tag{39}$$

The system of Eq. (36) can itself be reduced to a single equation in $r^2\xi_{r;n}^{m,\sigma}$ alone

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(r^2\xi_{r;n}^{m,\sigma}\right) + A\frac{d}{dr}\left(r^2\xi_{r;n}^{m,\sigma}\right) + Br^2\xi_{r;n}^{m,\sigma} = C, \tag{40}$$

with the set of coefficients

$$\left\{\begin{array}{l} A = -A_1 - B_2 - \dfrac{1}{B_1}\dfrac{dB_1}{dr}, \\ B = A_1\left(B_2 + \dfrac{1}{B_1}\dfrac{dB_1}{dr}\right) - \dfrac{dA_1}{dr} - B_1A_2, \\ C = \dfrac{dC_1}{dr} + B_1C_2 - C_1\left(\dfrac{1}{B_1}\dfrac{dB_1}{dr} + B_2\right). \end{array}\right. \tag{41}$$

Eq. (40) gives us the vertical structure of tidal waves generated in the fluid shell by both gravitational and thermal forcings. We have:

$$A = \frac{2}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr} + \frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{N^2}{g} + \frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{g\rho_0}{\Gamma_1 P_0} - \frac{1}{B_1}\frac{dB_1}{dr}. \tag{42}$$

The last term, $(dB_1/dr)/B_1$, is associated with curvature and can be ignored in the context of the "shallow atmosphere" approximation, as discussed in the next section. It is expressed as (see Eq. 50)

$$\frac{1}{B_1}\frac{dB_1}{dr} = -\frac{1}{1-\varepsilon_{s;n}}\frac{d\varepsilon_{s;n}}{dr}. \tag{43}$$

We now transform Eq. (40) in a Schrödinger-like equation by introducing the radial function

$$\mathcal{F}(r) = \int_R^r A(u)\,du, \tag{44}$$

and the variable change

$$r^2\xi_{r;n}^{m,\sigma} = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}(r)}\Psi_n^{m,\sigma}, \tag{45}$$

where the volume $\Psi_n^{m,\sigma}$ is the wave function of tidal waves associated with the mode of degree n. We note that fixing $\sigma_0 = 0$ allows us to retrieve the usual variable change, $r^2\xi_{r;n}^{m,\sigma} = \rho_0^{-1/2}\Psi_n^{m,\sigma}$ (Press 1981; Zahn et al. 1997; Mathis et al. 2008). With the general variable change, Eq. (40) becomes

$$\frac{d^2\Psi_n^{m,\sigma}}{dr^2} + \left[B - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dr} + \frac{A^2}{2}\right)\right]\Psi_n^{m,\sigma} = Ce^{\frac{1}{2}\mathcal{F}(r)}, \tag{46}$$

which gives us the vertical profile of the perturbation[3]. The form of this equation is very common in the literature because it describes the radial propagation of waves in a spherical shell. The typical wavenumber of these waves, denoted $\hat{k}_n$, is given by

$$\hat{k}_n^2 = B - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dr} + \frac{A^2}{2}\right). \tag{47}$$

We introduce the corresponding normalized length scale of variations of the mode of degree n,

$$L_{\mathrm{V;n}} = \frac{2\pi}{H_{\mathrm{atm}}\left|\hat{k}_n\right|}. \tag{48}$$

This parameter is the typical height over which spatial variations of the mode can be observed.

2.2. Polarization relations

The perturbed quantities are readily deduced from Ψ. Before going further, let us introduce the Lamb frequency (the cut-off frequency of acoustic waves) associated with the mode (ν, m, n),

$$\sigma_{s;n}(r) = \left(\Lambda_n^{m,\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{c_s}{r}, \tag{49}$$

and the ratio

$$\varepsilon_{s,n}(r) = \frac{i\sigma + \Gamma_1\sigma_0}{i\sigma + \sigma_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{s;n}}\right)^2. \tag{50}$$

[3] To solve the vertical structure equation numerically in any case, we use the method described in Appendix B.

The parameter $|\varepsilon_{s,n}|$ measures the relevance of the anelastic approximation, which consists in neglecting all the terms that correspond to an acoustic perturbation in Eq. (36). When $|\varepsilon_{s,n}| \ll 1$ (i.e. $|\sigma| \ll |\sigma_{s;n}|$), this hypothesis can be assumed. However, particular caution should be used when ignoring some terms. For instance, since the first gravity mode of the Earth's semidiurnal tide is characterized by $|\sigma| \approx |\sigma_{s;0}| \approx 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$, the anelastic approximation cannot be done. In order to be able to study cases of the same kind, the polarization relations that follow will be given in their most general form. Hence, by substituting the series of Eq. (34) in Eqs. (25), (26), (27), (28), (31), (32), and (33), we obtain the radial profiles $\xi_{r;n}^{m,\sigma}$, $\xi_{\theta;n}^{m,\sigma}$, $\xi_{\varphi;n}^{m,\sigma}$, $V_{r;n}^{m,\sigma}$, $V_{\theta;n}^{m,\sigma}$, $V_{\varphi;n}^{m,\sigma}$, $\delta p_n^{m,\sigma}$, $\delta\rho_n^{m,\sigma}$, $\delta T_n^{m,\sigma}$, and $y_n^{m,\sigma}$ as functions of $\Psi_n^{m,\sigma}$ and its first derivative. We obtain for the Lagrangian displacement

$$\xi_{r;n}^{m,\sigma}(r) = \frac{1}{r^2}e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}}\Psi_n^{m,\sigma}, \tag{51}$$

$$\xi_{\theta;n}^{m,\sigma}(r) = \frac{1}{\sigma^2 r(1-\varepsilon_{s;n})}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n^{m,\nu}}e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dr} + \mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \frac{\Gamma_1 - 1}{i\sigma + \sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{s;n}U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{52}$$

$$\xi_{\varphi;n}^{m,\sigma}(r) = \frac{i}{\sigma^2 r(1-\varepsilon_{s;n})}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n^{m,\nu}}e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dr} + \mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \frac{\Gamma_1 - 1}{i\sigma + \sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{s;n}U_n^{m,\sigma}\right\}; \tag{53}$$

for the velocity

$$V_{r;n}^{m,\sigma}(r) = \frac{i\sigma}{r^2}e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}}\Psi_n^{m,\sigma}, \tag{54}$$

$$V_{\theta;n}^{m,\sigma}(r) = \frac{i}{\sigma r(1-\varepsilon_{s;n})}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n^{m,\nu}}e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dr} + \mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \frac{\Gamma_1 - 1}{i\sigma + \sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{s;n}U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{55}$$

$$V_{\varphi;n}^{m,\sigma}(r) = -\frac{1}{\sigma r(1-\varepsilon_{s;n})}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n}e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dr} + \mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \frac{\Gamma_1 - 1}{i\sigma + \sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{s;n}U_n^{m,\sigma}\right\}; \tag{56}$$

and for scalar quantities

$$\delta p_n^{m,\sigma}(r) = \frac{\rho_0}{1-\varepsilon_{s;n}}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n^{m,\nu}}e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dr} + \mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \frac{\Gamma_1 - 1}{i\sigma + \sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}J_n^{m,\sigma} - U_n^{m,\sigma}\right\},$$

$$\delta\rho_n^{m,\sigma}(r) = \frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\rho_0}{c_s^2(1-\varepsilon_{s;n})}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n^{m,\nu}}e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dr} + \mathcal{B}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}J_n^{m,\sigma} - U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{58}$$

$$\delta T_n^{m,\sigma}(r) = \frac{i\sigma T_0(\Gamma_1-1)}{c_s^2(i\sigma+\sigma_0)(1-\varepsilon_{s;n})}\left\{\frac{\sigma^2}{\Lambda_n^{m,\nu}}e^{-\frac{1}{2}\mathcal{F}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dr} + \mathcal{C}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] + \frac{1}{i\sigma}\left(1-\frac{\Gamma_1\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}\right)J_n^{m,\sigma} - U_n^{m,\sigma}\right\}. \tag{59}$$

The coefficients in these expressions are given by

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n(r) &= \frac{1}{2}\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\left[\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c_s^2}\left(1-i\frac{\Gamma_1\sigma_0}{\sigma}\right)(1+K_{\rm curv})\right],\\
\mathcal{B}_n(r) &= \frac{1}{2}\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\left[\frac{N^2}{g}\left(\frac{2}{\varepsilon_{s;n}}-1\right) - \frac{g}{c_s^2}\left(1-i\frac{\Gamma_1\sigma_0}{\sigma}\right)(1+K_{\rm curv})\right],\\
\mathcal{C}_n(r) &= \frac{N^2}{g(\Gamma_1-1)}\left[\frac{(\Gamma_1+1)i\sigma+2\Gamma_1\sigma_0}{2(i\sigma+\sigma_0)} - \frac{\sigma_{s;n}^2}{\sigma^2}\right] - \frac{g}{2c_s^2}\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\left(1-i\frac{\Gamma_1\sigma_0}{\sigma}\right)(1+K_{\rm curv}),
\end{aligned} \tag{60}$$

where we have introduced the curvature term

$$K_{\rm curv} = \frac{\sigma^2 c_s^2}{g\Lambda_n(1-\varepsilon_{s;n})}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{c_s^2}\right), \tag{61}$$

which will be ignored in the thin atmosphere approximation. These relations and Eq. (46) define a linear operator, denoted Υ^σ, which determines the vertical structure of the atmospheric tidal response. Let be $Y_n^{m,\sigma} = (\Psi_n^{m,\sigma}, \boldsymbol{\xi}_n^{m,\sigma}, \mathbf{V}_n^{m,\sigma}, \delta p_n^{m,\sigma}, \delta\rho_n^{m,\sigma}, \delta T_n^{m,\sigma}, y_n^{m,\sigma})$ the output vector of the model and $X_n^{m,\sigma} = (U_n^{m,\sigma}, J_n^{m,\sigma})$ the input vector. Eqs. (51) to (59) can be reduced to

$$Y_n^{m,\sigma} = \Upsilon_n^{m,\sigma} X_n^{m,\sigma}. \tag{62}$$

For any quantity f, the component of $\Upsilon_n^{m,\sigma}$ describing the vertical profile of f is denoted $\Upsilon_{f;n}^{m,\sigma}$ ($\Upsilon_{p;n}^{m,\sigma}$ for the pressure, $\Upsilon_{\rho;n}^{m,\sigma}$ for the density, etc.).

Polarization relations can be naturally divided into two distinct contributions. The first contribution, which is called the "horizontal part" in this work, is a linear combination of the forcings $U_n^{m,\sigma}$ and $J_n^{m,\sigma}$. It corresponds to the component of the response that does not depend on the tidal vertical displacement. The length scale of this horizontal component is the typical thickness of the atmosphere ($H_{\rm atm}$). The other part, expressed as a function of $\Psi_n^{m,\sigma}$ and called "vertical part", thus results from the tidal fluid motion along the vertical direction. In the following, we use the subscripts $_{\rm H}$ and $_{\rm V}$ to designate the horizontal and vertical components.

As can be noted, polarization relations point out the necessity of taking into account dissipative processes to study tidal regimes close to synchronization. Indeed, without dissipation ($\sigma_0 = 0$), synchronization ($\sigma = 0$) is characterized by a singularity. The terms associated with the horizontal component, which are directly proportional to $U_n^{m,\sigma}$ and $J_n^{m,\sigma}$, tend to infinity at $\sigma \to 0$. Terms in $\Psi_n^{m,\sigma}$ and $\mathrm{d}\Psi_n^{m,\sigma}/\mathrm{d}r$ behave similarly, as demonstrated in the next section. These terms are highly oscillating along the vertical direction over the whole depth of the atmosphere in this frequency range because $\left|\hat{k}_n\right| \to +\infty$ when $\sigma \to 0$. Hence, radiation regularizes the behaviour around $\sigma = 0$ and damps the vertical oscillations of waves associated with the vertical component. Diffusion acts in the same way by flattening the oscillations of smallest length scales ($L_{\rm V;n}$) (Press 1981; Zahn et al. 1997; Mathis et al. 2008). We return to this point when we solve analytically the case of the isothermal atmosphere with constant profiles for the forcings (Sect. 3).

The whole spectrum of possible tidal regimes is represented in Fig. 4. The radiative regime (blue) characterizes a flow where thermal losses due to the linear Newtonian cooling (see the heat transport equation, Eq. 18) predominate. In the dynamic regime (orange), dissipation can be neglected because the system is governed by the Coriolis acceleration. Finally, the mixed-acoustic regime (red) corresponds to high tidal frequencies comparable to the Lamb frequency, given by Eq. (49). This regime marks the limit of the traditional approximation.

2.3. Tidal potential, Love numbers, and tidal torque

The new mass distribution resulting from tidal waves generates a tidal gravitational potential $\mathcal{U}$, which is a linear perturbation of the spherical gravitational potential of the planet. This atmospheric potential presents disymmetries with respect to the direction of the perturber. The tidal torque thus induced will affect the rotationnal dynamics of the planet over secular timescales and determine the possible equilibrium states of the spin, as demonstrated by Correia & Laskar (2001). This torque is deduced from the Poisson's equation expressed in the co-rotating frame

$$\Delta\mathcal{U} = -4\pi\mathcal{G}\delta\rho, \tag{63}$$

the notation $\mathcal{G}$ designating the gravitational constant. Like $\delta\rho$, the potential is expanded in series of functions of separated variables

$$\mathcal{U} = \sum_{m,\sigma,l}\mathcal{U}_l^{m,\sigma}(r)P_l^m(\cos\theta)e^{i(\sigma t+m\varphi)}, \tag{64}$$

where the P_l^m (with $l \in \mathbb{N}$ such as $l \geqslant |m|$) are the normalized associated Legendre polynomials. Decomposing $\delta\rho^{m,\sigma}$ on this basis, we get the equation describing the vertical structure of $\mathcal{U}_l^{m,\sigma}$,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mathcal{U}_l^{m,\sigma}}{dr}\right) - l(l+1)\mathcal{U}_l^{m,\sigma} = -4\pi\mathcal{G}r^2\delta\rho_l^{m,\sigma}. \tag{65}$$

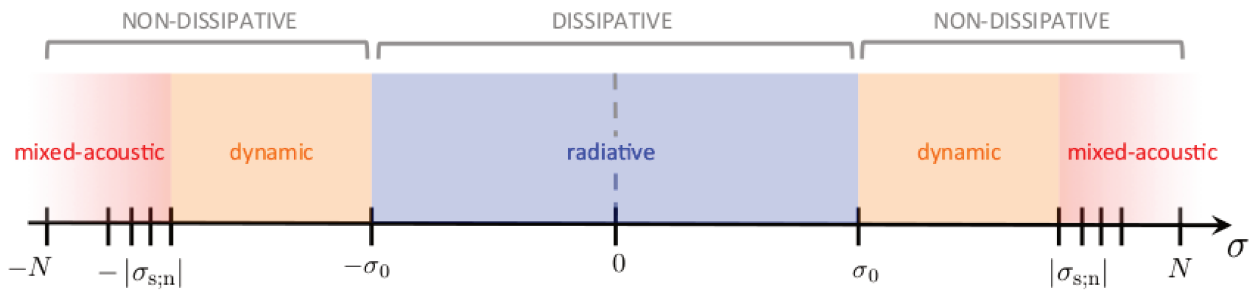


Fig. 4. Frequency spectrum of the atmospheric tidal response. The identified regimes are given as functions of the tidal frequency (σ).

For the upper boundary condition, the tidal potential is required to remain bounded at $r \to \infty$. At $r = 0$, we impose the same condition. Therefore, the solution of Eq. (65) is

$$\tilde{\mathcal{U}}_l^{m,\sigma}(r) = \frac{4\pi\mathcal{G}}{2l+1}\left[r^l\mathcal{F}_l^{m,\sigma}(r) + r^{-(l+1)}\mathcal{H}_l^{m,\sigma}(r)\right], \tag{66}$$

where $\mathcal{F}_l^{m,\sigma}$ and $\mathcal{H}_l^{m,\sigma}$ are the functions

$$\begin{cases} \mathcal{F}_l^{m,\sigma}(r) = \displaystyle\int_r^{+\infty} u^{-l+1}\delta\rho_l^{m,\sigma}(u)\,du, \\ \mathcal{H}_l^{m,\sigma}(r) = \displaystyle\int_R^{r} u^{l+2}\delta\rho_l^{m,\sigma}(u)\,du. \end{cases} \tag{67}$$

Love numbers are defined as the ratio between the gravitational potential due to the tidal response of the atmosphere and the forcing potential at the upper boundary of the layer. Let us denote $R_{\rm atm} = R + H_{\rm atm}$ this upper boundary. Then, at the upper boundary, the atmospheric tidal potential given by Eq. (66) is simply expressed:

$$\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(R_{\rm atm}) = \frac{4\pi\mathcal{G}}{(2l+1)R_{\rm atm}^{l+1}}\int_R^{R_{\rm atm}} r^{l+2}\delta\rho_l^{m,\sigma}(r)\,{\rm d}r. \tag{68}$$

Considering Eq. (72) and using the linearity property of $\Upsilon_n^{m,\sigma}$, the density component $\delta\rho_l^{m,\sigma}$ can be expanded

$$\delta\rho_l^{m,\sigma} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geqslant|m|} c_{l,n,k}^{m,\sigma}\delta\rho_{n,k}^{m,\sigma} \tag{69}$$

with $\delta\rho_{n,k}^{m,\sigma} = \Upsilon_{\rho;n}^{m,\sigma}\left(U_k^{m,\sigma}, J_k^{m,\sigma}\right)$ and the change-of-basis coefficients,

$$c_{l,n,k}^{m,\sigma} = \langle P_l^m, \Theta_n^{m,\sigma}\rangle\langle P_k^m, \Theta_n^{m,\sigma}\rangle, \tag{70}$$

which allows us to write the atmospheric tidal potential

$$\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(R_{\rm atm}) = \frac{4\pi\mathcal{G}}{(2l+1)R_{\rm atm}^{l+1}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geqslant|m|} c_{l,n,k}^{m,\sigma}\int_R^{R_{\rm atm}} r^{l+2}\delta\rho_{n,k}^{m,\sigma}(r)\,dr. \tag{71}$$

Let us treat the case of a simplified planet-star system, where the planet P circularly orbits around its host star, of mass M_S. The semi-major axis, obliquity, and mean motion of the planet are denoted a, ε, and $n_{\rm orb}$. In this case, the modes (σ, m) of the gravitational and thermal forcings applied on the atmosphere can be written (Appendix C)

$$\begin{cases} U^{m,\sigma} = \displaystyle\sum_{l\geqslant|m|} U_l^{m,\sigma}(r)\,P_l^m(\cos\theta)\,e^{i(\sigma t+m\varphi)}, \\ J^{m,\sigma} = \displaystyle\sum_{l\geqslant|m|} J_l^{m,\sigma}(r)\,P_l^m(\cos\theta)\,e^{i(\sigma t+m\varphi)}. \end{cases} \tag{72}$$

Hence the complex Love numbers can be written generically

$$k_l^{m,\sigma} = \left.\frac{\mathcal{U}_l^{\sigma,m}}{U_l^{m,\sigma}}\right|_{r=R_{\rm atm}}. \tag{73}$$

In celestial dynamics, the second-order Love number ($l = 2$) is commonly used to quantify the tidal response of a body. Therefore, we illustrate the expression given by Eq. (73) by computing this coefficient for $m = 2$. For the sake of simplicity, we set the obliquity $\varepsilon = 0$ (the spin of the planet is supposed to be aligned with its orbital angular momentum). The tidal frequency is $\sigma_{\rm SD} = 2(\Omega - n_{\rm orb})$ and the series of Eq. (C.14) are reduced to the terms characterized by $(l, m, j, p, q) = (2, 2, 2, 0, 0)$[4]

$$U_{2,2,2,0,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\mathcal{G}M_S}{a^3}r^2 \quad \text{and} \quad J_{2,2,2,0,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\mathcal{J}_2(r)}{a^2}. \tag{74}$$

The tidal potential becomes

$$\left.\mathcal{U}_2^{2,\sigma_{\rm SD}}\right|_{R_{\rm atm}} = \frac{4\pi\mathcal{G}}{5R_{\rm atm}^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geqslant 2} c_{2,n,k}^{2,\sigma_{\rm SD}}\int_R^{R_{\rm atm}} r^4\delta\rho_{n,k}^{2,\sigma_{\rm SD}}(r)\,dr. \tag{75}$$

If the star can be considered a point-mass perturber ($R \ll a$), then $\mathcal{U}_2^{2,\sigma_{\rm SD}}$ rapidly decays with k. So, the terms of orders $k > 2$ are only generated by the thermal forcing. We also assume that the horizontal pattern of J is well represented by the function P_2^2, which allows us to ignore other terms. Finally, we consider the case $|\nu| \sim 1$ ($|n_{\rm orb}| \ll |\Omega|$, see Eq. 22), where $c_{2,0,2}^{2,\sigma_{\rm SD}} \approx 1$ and $0 < c_{2,n,2}^{2,\sigma_{\rm SD}} \ll 1$ for $n > 0$ ($\Theta_0^{2,\sigma_{\rm SD}} \approx P_2^2$). In this simplified framework, the second-order Love number can be approximated in magnitude order by

$$k_2^{2,\sigma_{\rm SD}} \sim \frac{4\pi}{5}\frac{a^3}{M_S R_{\rm atm}^5}\int_R^{R_{\rm atm}} r^4\Upsilon_{\rho;2}^{2,\sigma_{\rm SD}}\left[\frac{\mathcal{G}M_S}{a^3}r^2, \frac{\mathcal{J}_2(r)}{a^2}\right]dr. \tag{76}$$

[4] The parameters j, p, and q are the usual indexes of the Kaula's expansion of the tidal gravitational potential; see Appendix C.

To conclude this section, we compute the tidal torque exerted on the atmosphere with respect to the spin axis. The monochromatic torque associated with the frequency σ writes (Zahn 1966)

$$\mathcal{T}^{m,\sigma} = \Re\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}} \frac{\partial U^{m,\sigma}}{\partial \varphi}\left(\delta\rho^{m,\sigma}\right)^* \mathrm{d}\mathscr{V}\right\}, \tag{77}$$

where the notation $\mathscr{V}$ designates the volume of the atmospheric shell. Denoting $\Delta\varphi_l^{m,\sigma} = \arg\left(\delta\rho_l^{m,\sigma}\right) - \arg\left(U_l^{m,\sigma}\right)$ the phase lag between the forcing and the response, we obtain

$$\mathcal{T}^{m,\sigma} = \pi m \sum_{l\geqslant|m|}\int_R^{R_{\rm atm}} r^2\left|U_l^{m,\sigma}\right|\left|\delta\rho_l^{m,\sigma}\right|\sin\left(\Delta\varphi_l^{m,\sigma}\right)dr, \tag{78}$$

and the total tidal torque,

$$\mathcal{T} = \sum_{(m,s)\in\mathbb{Z}^2}\mathcal{T}^{\sigma_{m,s},m}. \tag{79}$$

As previously done for the Love numbers, $\mathcal{T}^{m,\sigma}$ is expanded using Hough modes

$$\mathcal{T}^{m,\sigma} = \pi m \sum_{l,n,k} c_{l,n,k}^{m,\sigma}\int_R^{R_{\rm atm}} r^2\left|U_l^{m,\sigma}\right|\left|\delta\rho_{n,k}^{m,\sigma}\right|\sin\left(\Delta\varphi_{l,n,k}^{m,\sigma}\right)dr, \tag{80}$$

with $l \geqslant |m|$, $n \in \mathbb{Z}$, and $k \geqslant |m|$. Indeed, we note here that $\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}$ is the component of density variations represented by P_l^m caused by the component of the excitation represented by P_k^m and projected on Θ_n. Hence, the parameter $\Delta\varphi_{l,n,k}^{m,\sigma} = \arg\left(\delta\rho_{n,k}^{m,\sigma}\right) - \arg\left(U_l^{m,\sigma}\right)$ is the phase difference between the component of degree (n,k) of the response and the component of degree l of the excitation. When the tidal gravitational potential is quadrupolar ($R \ll a$), the terms of orders higher than $l = 2$ can be neglected. Denoting $U_2^{m,\sigma}$ and $J_2^{m,\sigma}$ the quantities $U_l^{m,\sigma}$ and $J_l^{m,\sigma}$ for $l = 2$ (which should not be confused with the projections $U_n^{m,\sigma}$ and $J_n^{m,\sigma}$ of the forcings on the set of Hough functions), it follows

$$\mathcal{T}^{m,\sigma} = \pi m \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{m,\sigma}\int_R^{R_{\rm atm}} r^2\left|U_2^{m,\sigma}\right|\left|\delta\rho_{n,2}^{m,\sigma}\right|\sin\left(\Delta\varphi_{2,n,2}^{m,\sigma}\right)\mathrm{dr}. \tag{81}$$

If the forcing $U_2^{\sigma,m}$ is a positive real function, then the previous expression becomes

$$\mathcal{T}^{m,\sigma} = \pi m \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{m,\sigma}\int_R^{R_{\rm atm}} r^2 U_2^{m,\sigma}\Im\left\{\delta\rho_{n,2}^{m,\sigma}\right\}\mathrm{dr}. \tag{82}$$

Substituting the polarization relation of density in Eq. (82), we obtain the torque as a sum of two contributions

$$\mathcal{T}^{m,\sigma} = \mathcal{T}_{\rm H}^{m,\sigma} + \mathcal{T}_{\rm V}^{m,\sigma}, \tag{83}$$

where

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\rm H}^{m,\sigma} = & -\pi m \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{m,\sigma}\Im\left\{\int_R^{R_{\rm atm}}\mathcal{H}_n\frac{\Lambda_n^{m,\nu}}{\sigma^2}\left(U_2^{\sigma,m}\right)^2 dr\right.\\ & \left.+\int_R^{R_{\rm atm}}\mathcal{H}_n\frac{\Lambda_n^{m,\nu}}{\sigma^2}\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}U_2^{m,\sigma}J_2^{m,\sigma}\right\},\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\rm V}^{m,\sigma} = & \pi m \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{m,\sigma}\Im\left\{\int_R^{R_{\rm atm}}\mathcal{H}_n e^{-\frac{\mathcal{F}}{2}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dr}+\mathcal{B}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right]\right.\\ & \left.\times U_2^{m,\sigma}dr\right\}\end{aligned} \tag{85}$$

with $\Psi_n^{m,\sigma} = \Psi_n^{m,\sigma}\left(U_2^{m,\sigma}, J_2^{m,\sigma}\right)$ and

$$\mathcal{H}_n = \frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\rho_0 r^2\sigma^2}{c_s^2\Lambda_n^{m,\nu}\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}. \tag{86}$$

Assuming $|\varepsilon_{s;n}| \ll 1$ and noticing that $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{m,\sigma} = 1$, we establish that $\mathcal{T}_{\rm H}^{m,\sigma}$ does not depend on the eigenvalues of Laplace's tidal equation and can be written

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\rm H}^{m,\sigma} = & -\pi m\Im\left\{\int_R^{R_{\rm atm}}\frac{\rho_0 r^2}{c_s^2}\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}U_2^{m,\sigma}J_2^{m,\sigma}dr\right\}\\ & -\pi m\Im\left\{\int_R^{R_{\rm atm}}\frac{\rho_0 r^2}{c_s^2}\frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\left(U_2^{m,\sigma}\right)^2 dr\right\}.\end{aligned} \tag{87}$$

The torque induced by this component is expanded in series of Hough functions and characterized by the solutions $\Psi_n^{m,\sigma}$ of the vertical structure equation. The typical scales of the vertical component are given by the vertical wavenumbers (see Eq. 47) and can be very small compared to the scale of the horizontal ones. For example, in the vicinity of synchronization, $\hat{k}_n \propto 1/\sigma$ if the radiative damping is ignored (CL70), which means that the characteristic scales of variations rapidly decay when $\sigma \to 0$. Finally, we note that the series of modes in Eq. (81) can often be reduced to one dominating term. For instance, in the case of the Earth's semidiurnal tide, $\Theta_0^{\sigma,2} \sim P_2^2$ and the expression above (Eq. 81) can be simplified

$$\mathcal{T}^{m,\sigma} \sim 2\pi\int_R^{R_{\rm atm}} r^2\left|U_2^{\sigma,2}\right|\left|\delta\rho_{0,2}^{\sigma,2}\right|\sin\left(\Delta\varphi_{2,0,2}^{\sigma,2}\right)dr. \tag{88}$$

3. Tides in a thin stably stratified isothermal atmosphere

We establish in this section the analytical equations that describe the tidal perturbation in the case where $H_{\rm atm} \ll R$. This theoretical approach has been exhaustively formalized for the Earth in "atmospheric tides" (CL70) and corresponds to the case of thin atmospheres. The formalism developed in the previous section allows us to go beyond this pioneer work, and more particularly to study regimes near synchronization thanks to the inclusion of radiative losses.

3.1. Equilibrium state

For a thin atmosphere ($r \approx R$), the equilibrium structure can be determined analytically. We introduce the altitude z, such that $r = R + z$, which is here a more appropriate coordinate than r.

The fluid is supposed to be at hydrostatic equilibrium, which leads to

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g. \tag{89}$$

The local acceleration in $\mathscr{R}_{\mathrm{E;T}}$, denoted $\mathbf{a}_{\mathscr{R}_{\mathrm{E;T}}}$, is not equal to $\mathbf{g}$ because of the rotating motion. The total acceleration can be written

$$\mathbf{a}_{\mathscr{R}_{\mathrm{E;T}}} = -g\left(z\right)\mathbf{e}_r + \mathbf{a}_c, \tag{90}$$

where $\mathbf{a}_c$ is the centrifugal acceleration:

$$\mathbf{a}_c = r\sin\theta\,\Omega^2\left(\sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta\right). \tag{91}$$

Here, Coriolis acceleration does not intervene because the global circulation of the atmosphere is ignored. The centrifugal acceleration (Eq. 90) can be neglected with respect to the gravity if the rotation rate of the planet satisfies the condition $\Omega \ll \Omega_{\mathrm{c}}$, where $\Omega_{\mathrm{c}} = \sqrt{g/R}$ is the critical Keplerian angular velocity. In the case of an Earth-like planet, with $g \sim 10$ m.s^{-2} and $R \sim 6.0\times10^3$ km, $\Omega_{\mathrm{c}} \sim 20$ rotations per day. From Eq. (2) and (89), a typical depth can be identified,

$$H = \frac{p_0}{g\rho_0} = \frac{\mathscr{R}_s T_0}{g}, \tag{92}$$

which is the local characteristic pressure height scale. The parameter H represents the vertical scale of variations of basic fields. It is of the same order of magnitude as H_{atm} and allows us to introduce the reduced altitude

$$x = \int_0^z \frac{dz}{H\left(z\right)}, \tag{93}$$

which is used in the following. Assuming that p_0, ρ_0, and T_0 only depends on x, we deduce their expressions from Eqs. (2) and (89)

$$p_0\left(x\right) = p_0\left(0\right)e^{-x}, \quad \rho_0\left(x\right) = \frac{p_0\left(x\right)}{gH\left(x\right)}, \quad T_0\left(x\right) = \frac{gH\left(x\right)}{\mathscr{R}_s}. \tag{94}$$

In the fluid shell, the gravitational acceleration does not vary very much

$$\left|\frac{g\left(x\right)-g\left(0\right)}{g\left(0\right)}\right| \sim 2\frac{H}{R}x, \tag{95}$$

which means that g can be considered as a constant. Assuming that H also does not vary with the altitude, we obtain a constant profile of the temperature and exponentially decaying profiles of the pressure and density:

$$p_0\left(x\right) = p_0\left(0\right)e^{-x}, \quad \rho_0\left(x\right) = \frac{p_0\left(0\right)}{gH}e^{-x}, \quad T_0 = \frac{gH}{\mathscr{R}_s}. \tag{96}$$

In this case, which corresponds to an isothermal atmosphere, 95 % of the mass of the gas is contained within the interval $x \in [0,3]$. Therefore, we can write $H_{\mathrm{atm}} \approx 3H$. For the Earth, $H \sim 8$ km (CL70) and $H_{\mathrm{atm}} \sim 24$ km.

3.2. Wave equation and polarization relations

The constant H hypothesis is very useful in order to simplify the expressions of Sect. 2. Indeed, with this approximation, the typical frequencies of the system no longer vary with the radial coordinate. The Brunt-Väisälä frequency simply writes

$$N = \sqrt{\frac{\kappa g}{H}}, \tag{97}$$

and the acoustic frequency associated with the mode (ν, m, n),

$$\sigma_{s;n} = \left(\Lambda_n^{m,\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{c_s}{R}, \tag{98}$$

with $c_s = \Gamma_1 gH$. Moreover, the horizontal structure of tidal waves does not change because Laplace's tidal equation is not modified. So, the vertical structure equation and the radial polarization relations only are affected by the constant H hypothesis. The coefficients defined by Eq. (41) become

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{H}, \\ B &= \frac{\Lambda_n^{m,\nu}}{R^2}\left[\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{N^2}{\sigma^2} + \varepsilon_{s;n} - 1\right], \\ C &= \frac{\Lambda_n^{m,\nu}}{H\sigma^2}\left\{\frac{\kappa}{i\sigma+\sigma_0}\left[\frac{h_n}{H}\frac{dJ_n^{m,\sigma}}{dx} + \mathcal{K}_n J_n^{m,\sigma} - i\sigma U_n^{m,\sigma}\right]\right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{s;n}\frac{dU_n^{m,\sigma}}{dx}\right\}, \end{aligned} \tag{99}$$

where

$$\mathcal{K}_n = 1 - \frac{h_n}{H}. \tag{100}$$

The parameter h_n, which writes

$$h_n = \frac{R^2\sigma^2}{g\Lambda_n^{m,\nu}}, \tag{101}$$

is usually called the "equivalent depth" in the literature (e.g. Taylor 1936; Chapman & Lindzen 1970) and represents a typical length scale associated with the mode of degree n. We note that the curvature term in Eq. (42) vanishes in the shallow atmosphere approximation because the coefficient B_1 (Eq. 37) is a constant in this case. This allows us to simplify the vertical structure equation (Eq. 46). Unlike the vertical wavenumber in the thick shell (Eq. 47), the vertical wavenumber $\hat{k}_n$ does not vary with x in this case. It is expressed

$$\hat{k}_n^2 = \frac{1}{4}\left[\varsigma_n\left(\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{N^2}{\sigma^2} + \varepsilon_{s;n} - 1\right) - 1\right], \tag{102}$$

with the scale ratio $\varsigma_n = 4H^2\Lambda_n^{m,\nu}/R^2$. It can also be written

$$\hat{k}_n^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{4\kappa H}{h_n} - 1 + \varsigma_n\left(\varepsilon_{s;n} - 1\right)\right]. \tag{103}$$

The term $\varsigma_n\left(\varepsilon_{s;n}-1\right)$ comes from the radial acceleration in the Navier-Stokes equation (Eq. 11) and is negligible for usual values of $\Lambda_n^{m,\nu}$ ($\left|\varepsilon_{s;n}\right| \ll 1$ and $\varsigma_n \propto H^2/R^2 \ll 1$). Therefore, by considering the case where $\sigma_0 \ll |\sigma|$, we recover the wavenumber obtained by CL70 for the Earth's semidiurnal tide. In the general case, the expression of Eq. (103) can be approximated by

$$\hat{k}_n^2 \approx \frac{1}{4}\left[\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{4\kappa H}{h_n}-1\right], \tag{104}$$

which gives for the real and imaginary parts, introducing the characteristic depth $h_c = 4\kappa H$ and fixing $\Re\left\{\hat{k}_n\right\} > 0$,

$$\left\{\begin{array}{l} \Re\left\{\hat{k}_n\right\} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}\dfrac{h_c}{h_n}-1+\sqrt{\Delta}\right]^{1/2}, \\ \Im\left\{\hat{k}_n\right\} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{\sigma_0\sigma}{\sigma^2+\sigma_0^2}\dfrac{h_c}{h_n}\left[\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}\dfrac{h_c}{h_n}-1+\sqrt{\Delta}\right]^{-1/2}, \end{array}\right. \tag{105}$$

with

$$\Delta = \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}\frac{h_c}{h_n}-1\right)^2 + \frac{\sigma_0^2\sigma^2}{\left(\sigma^2+\sigma_0^2\right)^2}\frac{h_c^2}{h_n^2}. \tag{106}$$

The behaviour of the vertical wavenumber defines the possible regimes of the perturbation. These regimes are represented by the map in Fig. 5, which shows the real and imaginary part of the vertical wavenumber as colour functions of the tidal frequency and critical frequency, $\sigma_{\mathrm{c;n}}$, given by $\sigma_{\mathrm{c;n}}^2 = 4\kappa H g \Lambda_n^{m,\nu}/r^2$ (the frequency $\sigma_{\mathrm{c;n}}$ is proportional to the Lamb frequency defined by Eq. 98). Propagative modes are characterized by $\left|\Im\left\{\hat{k}_n\right\}\right| \ll 1$ (right panel, dark regions), evanescent modes by $\left|\Im\left\{\hat{k}_n\right\}\right| \gg 1$ (yellow regions). The transition between the radiative regime and the dynamic regime corresponds to $|\sigma| \approx \sigma_0$.

In the case of the thin isothermal atmosphere, the equation giving the vertical profiles (Eq. 46) writes

$$\frac{d^2\Psi_n^{m,\sigma}}{dx^2} + \hat{k}_n^2\Psi_n^{m,\sigma} = H^2 e^{-x/2} C\left(x\right). \tag{107}$$

where C is given by Eq. (99). Moreover, if the condition

$$\left|\frac{U_n^{m,\sigma}}{J_n^{m,\sigma}}\right| \ll \left|\frac{H-h_n}{\sigma H}\right| \tag{108}$$

is satisfied, the forcing in the right-hand member is dominated by thermal tides and the contribution of the gravitational tidal potential can be ignored in Eq. (107), which is rewritten

$$\frac{d^2\Psi_n^{m,\sigma}}{dx^2} + \frac{1}{4}\left[\frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\frac{h_c}{h_n}-1\right]\Psi_n^{m,\sigma} = \frac{\kappa H\Lambda_n^{m,\nu}e^{-\frac{x}{2}}}{i\sigma+\sigma_0}\left[\frac{h_n}{H}\frac{dJ_n^{m,\sigma}}{dx} + \mathcal{K}_n J_n^{m,\sigma}\right]. \tag{109}$$

The polarization relations of the thin atmospheric shell are deduced from Eq. (51) to (59)

$$\xi_{r;n}^{m,\sigma} = \frac{1}{R^2}e^{\frac{x}{2}}\Psi_n^{m,\sigma}, \tag{110}$$

$$\xi_{\theta;n}^{m,\sigma} = \frac{1}{\sigma^2 R\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{H\Lambda_n^{m,\nu}}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx}+\mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{s;n}U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{111}$$

$$\xi_{\varphi;n} = \frac{i}{\sigma^2 R\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{H\Lambda_n^{m,\nu}}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx}+\mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{s;n}U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{112}$$

$$V_{r;n}^{m,\sigma} = \frac{i\sigma}{R^2}e^{\frac{x}{2}}\Psi_n^{m,\sigma}, \tag{113}$$

$$V_{\theta;n}^{m,\sigma} = \frac{i}{\sigma R\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{H\Lambda_n^{m,\nu}}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx}+\mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{s;n}U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{114}$$

$$V_{\varphi;n}^{m,\sigma} = -\frac{1}{\sigma R\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{H\Lambda_n^{m,\nu}}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx}+\mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{s;n}U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{115}$$

$$\delta p_n^{m,\sigma} = \frac{\rho_0}{1-\varepsilon_{s;n}}\left\{\frac{\sigma^2}{H\Lambda_n^{m,\nu}}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx}+\mathcal{A}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} - U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{116}$$

$$\delta\rho_n^{m,\sigma} = \frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\rho_0}{c_s^2\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{H\Lambda_n^{m,\nu}}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx} + \mathcal{B}_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] - \frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}J_n^{m,\sigma} - U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{117}$$

$$\delta T_n^{m,\sigma} = \frac{i\sigma T_0\left(\Gamma_1-1\right)}{c_s^2\left(i\sigma+\sigma_0\right)\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma^2}{H\Lambda_n^{m,\nu}}e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx} + C_n\Psi_n^{m,\sigma}\right] + \frac{1}{i\sigma}\left(1-\frac{\Gamma_1\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}\right)J_n^{m,\sigma} - U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{118}$$

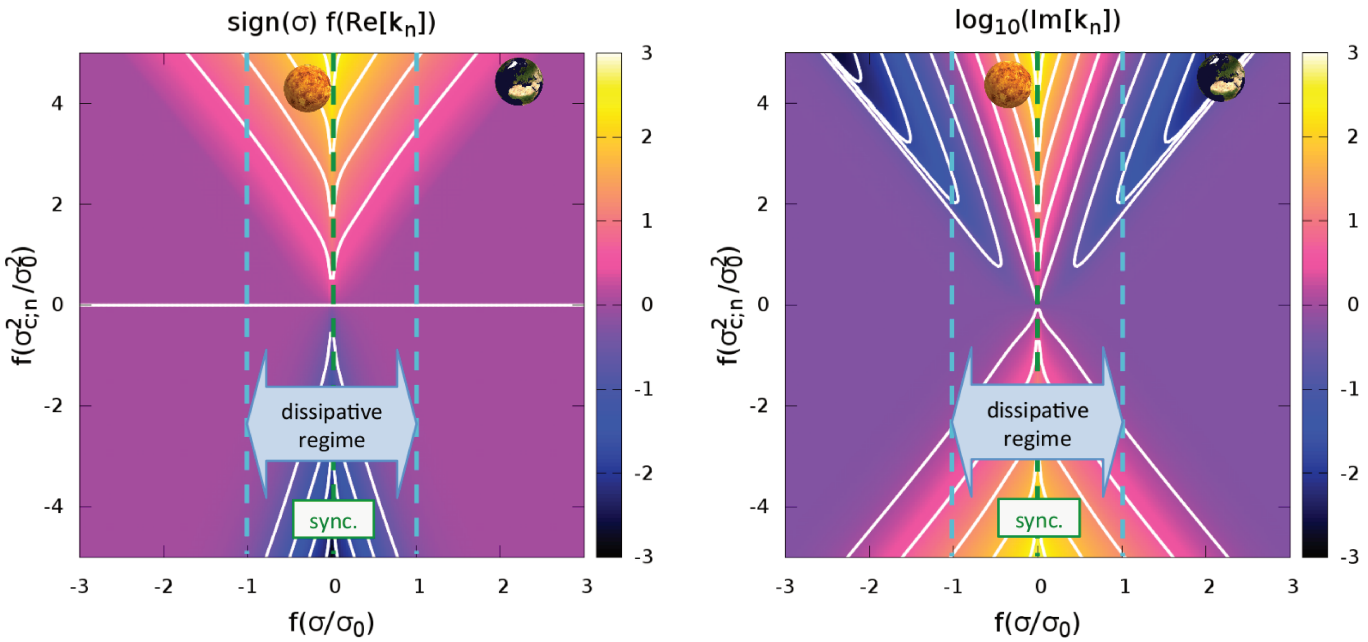


Fig. 5. Real and imaginary part of the vertical wavenumber as functions of the tidal (σ) and critical ($\sigma_{c;n}$) frequencies. *Left:* $\mathrm{sign}\left(\sigma\right) f\left(\Re\left\{\hat{k}_n\right\}\right)$, with $\hat{k}_n$ defined in Eq. 104, as a function of $f\left(\sigma/\sigma_0\right)$ (horizontal axis) and $f\left(\sigma_{c;n}^2/\sigma_0^2\right)$ (vertical axis), where f is the function defined by $f\left(X\right) = \mathrm{sign}\left(X\right)\log\left(1+\left|X\right|\right)$. The colour of the map, denoted c, is defined by $\mathrm{sign}\left(\sigma\right) f\left(\Re\left\{\hat{k}_n\right\}\right)$. Hence, the purple region stands for slowly oscillating waves. The luminous (dark) regions correspond to strongly oscillating waves propagating downwards (upwards). *Right:* $\log\left(\Im\left\{\hat{k}_n\right\}\right)$ as a function of the same parameters. The luminous (dark) regions correspond to strongly (weakly) evanescent waves. The positions of the planets (Earth ⊕, Venus ♀) on the map are determined by the gravity mode of degree 0 in the case of the semidiurnal tide ($\Lambda_{\oplus;0} = 11.1596$, $\Lambda_{♀;0} = 7.1485$). The tidal frequencies of the planets are given by $\sigma_{\oplus}/\sigma_0 \approx 194$ and $\sigma_{♀}/\sigma_0 = 0.43$, with $\sigma_0 = 7.5\times10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$.

with

$$\mathcal{D}_n = \frac{\Gamma_1 - 1}{i\sigma + \sigma_0}\frac{\sigma^2}{\sigma_{s;n}^2}, \tag{119}$$

and where $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$, and C_n are the constant coefficients of Eq. (60)[5],

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\left(\kappa - \frac{1}{2} + i\frac{\sigma_0}{2\sigma}\right), \\ \mathcal{B}_n &= \frac{i\sigma}{i\sigma+\sigma_0}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon_{s;n}} - \frac{1}{2} + i\frac{\sigma_0}{2\sigma}\right), \\ C_n &= \frac{1}{2} - \frac{\sigma_{s;n}^2}{\Gamma_1\sigma^2}. \end{aligned}\right. \tag{120}$$

3.3. Boundary conditions

Solving Eq. (107) requires that we choose two boundary conditions. Following CL70, we fix $\xi_r = 0$ at the ground. This corresponds to a smooth rigid wall and is equivalent to $\xi_{r;n}^{m,\sigma} = 0$ at $x = 0$. In the case of Earth-like exoplanets where the telluric surface is well defined, this condition is relevant. Thus, given the form of Eq. (107), $\Psi_n^{m,\sigma}$ can be written

$$\Psi_n^{m,\sigma} = \mathscr{A}\left(x\right)e^{i\hat{k}_n x} + \mathscr{B}\left(x\right)e^{-i\hat{k}_n x}, \tag{121}$$

[5] These coefficients are the same as those given by Eq. (60) to an H factor.

where $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ are the complex functions

$$\left\{\begin{aligned} \mathscr{A}\left(x\right) &= K - i\frac{H^2}{2\hat{k}_n}\int_0^x e^{-\left(i\hat{k}_n+1/2\right)u}C\left(u\right)du, \\ \mathscr{B}\left(x\right) &= -K + i\frac{H^2}{2\hat{k}_n}\int_0^x e^{\left(i\hat{k}_n-1/2\right)u}C\left(u\right)du. \end{aligned}\right. \tag{122}$$

The parameter $K \in \mathbb{C}$ is an integration constant which is fixed by the upper boundary condition.

The upper border should be treated very carefully, as has been discussed by Green (1965). The fluid envelopes of stars and giant gaseous planets, which are considered as bounded fluid shells, are usually treated with a stress-free condition applied at the upper limit $x = x_{\mathrm{atm}}$ (e.g. Unno et al. 1989), i.e.

$$\delta p_n^{m,\sigma} + \frac{1}{H}\frac{dp_0}{dx}\xi_{r;n}^{m,\sigma} = 0. \tag{123}$$

Hence,

$$\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx} + \mathcal{P}\Psi_n^{m,\sigma} = \mathcal{Q}, \tag{124}$$

with the complex coefficients

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{A}_n - \left(1-\varepsilon_{s;n}\right)\frac{\sigma_{s;n}^2}{\Gamma_1\sigma^2}, \\ \mathcal{Q} &= e^{-\frac{x_{\mathrm{atm}}}{2}}\left[\frac{\kappa R^2}{g\left(i\sigma+\sigma_0\right)}J_n^{m,\sigma} + \frac{H\Lambda_n^{m,\nu}}{\sigma^2}U_n^{m,\sigma}\right]_{x=x_{\mathrm{atm}}}. \end{aligned}\right.$$

(125)

The atmosphere then behaves as a wave-guide of typical thickness $x_{\rm atm}$ (Appendix E). In this case, atmospheric tides are analogous to ocean tides (see Webb 1980), the amplitude of the perturbation being highly frequency-resonant. However, this condition appears to be inappropriate for the thin isothermal atmosphere because the fluid is not homogeneous and there is no discontinuous interface in this case. Setting the stress-free condition would give birth to unrealistic resonances depending on $x_{\rm atm}$ (see Fig. E.1 in Appendix F). Therefore, we have to choose a condition consistent with the exponentially decaying density and pressure. Following Shen & Zhang (1990), we consider that there is no material escape when $x \rightarrow +\infty$, i.e. $V_r|_{x\rightarrow\infty} = 0$. This means that the amplitude of oscillations decrease with the altitude and, consequently, that we have to eliminate the diverging term in Eq. (121).[6]

Let us assume $\Im\left\{\hat{k}_n\right\} > 0$. As shown by CL70 (Eq. 88), the above condition requires that

$$\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx} - i\hat{k}_n\Psi_n^{m,\sigma} = 0 \tag{126}$$

at the upper boundary ($x = x_{\rm atm}$). To make this condition relevant, $x_{\rm atm}$ must be chosen so that $x_{\rm atm}/x_{\rm crit} \gg 1$, where $x_{\rm crit}$ is the typical damping depth computed from the case where C is a constant, and given by

$$x_{\rm crit} = \frac{1}{\Im\left\{\hat{k}_n\right\} + 1/2}; \tag{127}$$

we usually fix $x_{\rm atm} = 10$ in computations. The integration constant of Eq. (122) is then obtained as

$$K = i\frac{H^2}{2\hat{k}_n}\int_0^{x_{\rm atm}} e^{\left(i\hat{k}_n - 1/2\right)u} C\left(u\right) du. \tag{128}$$

3.4. Analytical expressions of the semidiurnal tidal torque, lag angle, and amplitude of the pressure bulge

If $U_n^{m,\sigma}$ and $J_n^{m,\sigma}$ are assumed to be constant (with $U_n, J_n^{m,\sigma} \in \mathbb{C}$), C does not vary with x and the expression of Eq. (121) can be simplified significantly. Indeed, in this case it can be written

$$\Psi_n^{m,\sigma}\left(x\right) = \frac{H^2 C}{\hat{k}_n^2 + \frac{1}{4}}\left[e^{-\frac{x}{2}} - e^{i\hat{k}_n x}\right]. \tag{129}$$

We note that we use the convention $\Im\left\{\hat{k}_n\right\} > 0$, which implies $\Psi_n^{m,\sigma} \rightarrow 0$ at infinity. Substituting this simplified solution in polarization relations (Eqs. 110 to 118), we compute three-dimensional variations of the velocity field, displacement, pressure, density, and temperature caused by the semidiurnal tide as explicit functions of the physical parameters of the atmosphere and tidal frequency. Let us introduce the function $\mathscr{F}_{\mathcal{P}}$ of the altitude, parametrized by $\mathcal{P}$ (which can be $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$, or $\mathcal{C}_n$), and defined by

$$\mathscr{F}_{\mathcal{P}}\left(x\right) = \left(\mathcal{P} - \frac{1}{2}\right)e^{-x} - \left(\mathcal{P} + i\hat{k}_n\right)e^{\left(i\hat{k}_n - \frac{1}{2}\right)x}. \tag{130}$$

Then, polarization relations write

$$\xi_{r;n}^{m,\sigma} = \frac{\Lambda_n^{m,\nu}H}{R^2\sigma^2}\mathcal{E}_n\left[1 - e^{\left(i\hat{k}_n + \frac{1}{2}\right)x}\right], \tag{131}$$

$$\xi_{\theta;n}^{m,\sigma} = \frac{1}{\sigma^2 R\left(1 - \varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\mathcal{E}_n e^x \mathscr{F}_{\mathcal{A}_n}\left(x\right) - \mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{\rm s;n} U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{132}$$

$$\xi_{\varphi;n}^{m,\sigma} = \frac{i}{\sigma^2 R\left(1 - \varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\mathcal{E}_n e^x \mathscr{F}_{\mathcal{A}_n}\left(x\right) - \mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{\rm s;n} U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{133}$$

$$V_{r;n}^{m,\sigma} = i\frac{\Lambda_n^{m,\nu}H}{R^2\sigma}\mathcal{E}_n\left[1 - e^{\left(i\hat{k}_n + \frac{1}{2}\right)x}\right], \tag{134}$$

$$V_{\theta;n}^{m,\sigma} = \frac{i}{\sigma R\left(1 - \varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\mathcal{E}_n e^x \mathscr{F}_{\mathcal{A}_n}\left(x\right) - \mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{\rm s;n} U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{135}$$

$$V_{\varphi;n}^{m,\sigma} = -\frac{1}{\sigma R\left(1 - \varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\mathcal{E}_n e^x \mathscr{F}_{\mathcal{A}_n}\left(x\right) - \mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} - \varepsilon_{\rm s;n} U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{136}$$

$$\delta p_n^{m,\sigma} = \frac{\rho_0\left(0\right)}{1 - \varepsilon_{\rm s;n}}\left\{\mathcal{E}_n \mathscr{F}_{\mathcal{A}_n}\left(x\right) - \left(\mathcal{D}_n J_n^{m,\sigma} + U_n^{m,\sigma}\right)e^{-x}\right\}, \tag{137}$$

$$\begin{aligned}\delta\rho_n^{m,\sigma} = & \frac{i\sigma + \Gamma_1\sigma_0}{i\sigma + \sigma_0}\frac{\rho_0\left(0\right)}{c_s^2\left(1 - \varepsilon_{\rm s;n}\right)}\left\{\mathcal{E}_n \mathscr{F}_{\mathcal{B}_n}\left(x\right)\right. \\ & \left. - \left(\frac{\Gamma_1 - 1}{i\sigma + \Gamma_1\sigma_0}J_n^{m,\sigma} + U_n^{m,\sigma}\right)e^{-x}\right\},\end{aligned} \tag{138}$$

$$\begin{aligned}\delta T_n^{m,\sigma} = & \frac{i\sigma\left(\Gamma_1 - 1\right)T_0}{c_s^2\left(i\sigma + \sigma_0\right)\left(1 - \varepsilon_{\rm s;n}\right)}\left\{\mathcal{E}_n e^x \mathscr{F}_{\mathcal{C}_n}\left(x\right)\right. \\ & \left. + \frac{1}{i\sigma}\left(1 - \frac{\Gamma_1\sigma^2}{\sigma_{\rm s;n}^2}\right)J_n^{m,\sigma} - U_n^{m,\sigma}\right\},\end{aligned} \tag{139}$$

with

$$\mathcal{E}_n = \frac{\kappa\left(\mathcal{K}_n J_n^{m,\sigma} - i\sigma U_n^{m,\sigma}\right)}{\left(i\sigma + \sigma_0\right)\left(\hat{k}_n^2 + \frac{1}{4}\right)}. \tag{140}$$

From the analytical solution and the polarization relation of density given by Eq. (138), we then compute the second-order

[6] In the case of the semidiurnal tide treated by CL70 (no dissipative processes), this condition cannot be applied because $\hat{k}_n \in \mathbb{R}$. To address this particular situation, CL70 proposes applying a radiation condition at the upper boundary, i.e. considering that the energy is only propagating upwards and eliminating the terms of the solution corresponding to an energy propagating downwards. However, in the present work, when $\sigma_0 > 0$, $\Im\left\{\hat{k}_n\right\} \neq 0$, so we do not have to consider this case.

Love number and the tidal torque. Integrating $\delta\rho$ over the whole thickness of the atmosphere, we obtain

$$\int_0^{x_{\rm atm}} \delta\rho_n^{m,\sigma}(x)\,dx = -\frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}\frac{\rho_0(0)}{c_s^2(1-\varepsilon_{s;n})}\left\{\frac{(\Gamma_1-1)J_n^{m,\sigma}}{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0} + \frac{\kappa\left(\mathcal{B}_n+\frac{1}{2}\right)\left[\mathcal{K}_n J_n^{m,\sigma} - i\sigma U_n^{m,\sigma}\right]}{(i\sigma+\sigma_0)\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)^2} + U_n^{m,\sigma}\right\}, \tag{141}$$

where the expressions of $\mathcal{B}_n$ and $\mathcal{K}_n$ are given by Eqs. (120) and (100), respectively. The semidiurnal tide is supposed to be represented by spatial forcings of the form $J(x,\theta,\varphi) = J_2 P_2^2(\cos\theta)\,e^{2i\varphi}$ and $U(x,\theta,\varphi) = U_2 P_2^2(\cos\theta)\,e^{2i\varphi}$ with the tidal frequency $\sigma = 2(\Omega - n_{\rm orb})$. The second-order Love number, deduced Eq. (75), is thus expressed

$$k_2^{\sigma,2} = \frac{4\pi}{5}\frac{\mathcal{G}HR_{\rm atm}}{U_2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{\sigma,2}\int_0^{x_{\rm atm}} \delta\rho_{n,2}^{\sigma,2}(x)\,dx. \tag{142}$$

Assuming $|\varepsilon_{s;n}| \ll 1$, we identify the different contributions. It follows

$$k_2^{\sigma,2} = k_{2;\rm V;therm}^{\sigma,2} + k_{2;\rm V;grav}^{\sigma,2} + k_{2;\rm H;therm}^{\sigma,2} + k_{2;\rm H;grav}^{\sigma,2}, \tag{143}$$

where the subscripts $_{\rm therm}$ and $_{\rm grav}$ indicate the origin of a contribution (thermally or gravitationally forced) and $_{\rm H}$ and $_{\rm V}$ its horizontal and vertical components. The terms of this expansion are expressed as functions of the parameters of the atmosphere and tidal frequency

$$k_{2;\rm V;therm}^{\sigma,2} = -\mathcal{W}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{\sigma,2}\frac{\kappa(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0)\left(\mathcal{B}_n+\frac{1}{2}\right)\mathcal{K}_n}{(i\sigma+\sigma_0)^2\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)^2}\frac{J_2}{U_2}, \tag{144}$$

$$k_{2;\rm V;grav}^{\sigma,2} = \mathcal{W}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{\sigma,2} i\sigma\frac{\kappa(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0)\left(\mathcal{B}_n+\frac{1}{2}\right)}{(i\sigma+\sigma_0)^2\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)^2}, \tag{145}$$

$$k_{2;\rm H;therm}^{\sigma,2} = -\mathcal{W}\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}\frac{J_2}{U_2}, \tag{146}$$

$$k_{2;\rm H;grav}^{\sigma,2} = -\mathcal{W}\frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}, \tag{147}$$

the parameter $\mathcal{D}_n$ being a dimensionless constant given by

$$\mathcal{W} = \frac{4\pi}{5}\frac{\mathcal{G}HR_{\rm atm}\rho_0(0)}{c_S^2}. \tag{148}$$

Contrary to gravitational Love numbers ($k_{2;\rm V;grav}^{\sigma,2}$ and $k_{2;\rm H;grav}^{\sigma,2}$) which are intrinsic to the planet, thermal Love numbers ($k_{2;\rm V;therm}^{\sigma,2}$ and $k_{2;\rm H;therm}^{\sigma,2}$) are proportional to the forcings ratio J_2/U_2 and thus depend on the properties of the whole star-planet system, particularly the semi-major axis and the stellar luminosity (e.g. Correia et al. 2008).

In the same way as we obtained Love numbers, the torque exerted on the atmosphere may be computed by substituting Eq. (141) in Eq. (80). This torque writes

$$\mathcal{T}^{\sigma,2} = 2\pi R^2 H U_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{\sigma,2}\,\Im\left\{\int_0^{x_{\rm atm}} \delta\rho_{n,2}^{\sigma,2}(x)\,dx\right\}. \tag{149}$$

Finally, assuming $|\varepsilon_{s;n}| \ll 1$ and introducing the factor

$$\mathcal{H} = \frac{2\pi R^2 H\rho_0(0)}{c_s^2} \tag{150}$$

allows us to write $\mathcal{T}^{\sigma,2}$ under the form

$$\mathcal{T}^{\sigma,2} = \mathcal{T}_{\rm V;therm}^{\sigma,2} + \mathcal{T}_{\rm V;grav}^{\sigma,2} + \mathcal{T}_{\rm H;therm}^{\sigma,2} + \mathcal{T}_{\rm H;grav}^{\sigma,2}, \tag{151}$$

with

$$\mathcal{T}_{\rm V;therm}^{\sigma,2} = -\mathcal{H}U_2\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{\sigma,2}\mathcal{K}_n\,\Im\left\{\frac{\kappa(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0)\left(\mathcal{B}_n+\frac{1}{2}\right)}{(i\sigma+\sigma_0)^2\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)^2}J_2\right\}, \tag{152}$$

$$\mathcal{T}_{\rm V;grav}^{\sigma,2} = \mathcal{H}U_2\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{2,n,2}^{\sigma,2}\,\Im\left\{i\sigma\frac{\kappa(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0)\left(\mathcal{B}_n+\frac{1}{2}\right)}{(i\sigma+\sigma_0)^2\left(i\hat{k}_n-\frac{1}{2}\right)^2}U_2\right\}, \tag{153}$$

$$\mathcal{T}_{\rm H;therm}^{\sigma,2} = -\mathcal{H}U_2\,\Im\left\{\frac{\Gamma_1-1}{i\sigma+\sigma_0}J_2\right\}, \tag{154}$$

$$\mathcal{T}_{\rm H;grav}^{\sigma,2} = -\mathcal{H}U_2\,\Im\left\{\frac{i\sigma+\Gamma_1\sigma_0}{i\sigma+\sigma_0}U_2\right\}. \tag{155}$$

Let us consider the case of the pure thermal tide ($U_2 \approx 0$) at the vicinity of synchronization. If $\sigma \to 0$, then $\left|\hat{k}_n\right| \to +\infty$, $|\mathcal{B}_n| \to +\infty$, and $\mathcal{B}_n/\hat{k}_n^2 \propto (i\sigma+\sigma_0)/(i\sigma+\Gamma_1\sigma_0)$. As a consequence, $k_{2;\rm V;therm}^{\sigma,2} \approx -k_{2;\rm H;therm}^{\sigma,2}$ and $\mathcal{T}_{\rm V;therm}^{\sigma,2} \approx -\mathcal{T}_{\rm H;therm}^{\sigma,2}$. The tidal torque exerted on the stably stratified isothermal atmosphere is thus very small compared to the horizontal thermal component,

$$\mathcal{T}_{\rm H}^{\sigma,2} = 2\pi\kappa\frac{R^2\rho_0(0)}{g}U_2 J_2\frac{\sigma}{\sigma^2+\sigma_0^2}, \tag{156}$$

where we have assumed that the thermal forcing is in phase with the perturber ($J_2 \in \mathbb{R}$). This behaviour had been identified before, for instance by Arras & Socrates (2010) who studied thermal tides in hot Jupiters. According to Arras & Socrates (2010), at the vicinity of synchronization, the vertical displacement of fluid due to the restoring effect of the Archimedean force ($N^2 V_r$ term in the heat transport equation, Eq. 14) exactly compensates the local density variations generated by the thermal forcing, which annihilates the quadrupolar tidal torque. We discuss this effect in Section 6 when considering the isothermal and stably stratified atmospheres of the Earth and a Venus-like planet

(see Fig. 14). For a stably stratified structure, the tidal torque exerted on the atmosphere is weak and cannot balance the solid torque, which leads the planet's spin to the synchronization configuration. We note here that the importance of stable stratification has been pointed out for the case of Jupiter-like planets by Ioannou & Lindzen (1993b) (see also Ioannou & Lindzen 1993a, 1994), who showed that the atmospheric tidal response was very sensitive to variations in the Brunt-Väisälä frequency (N).

3.5. Comparison with CL70

The vertical wavenumber is a key parameter of the tidal perturbation. Hence, to highlight the interest of taking into account dissipative mechanisms such as radiation, we consider the relative difference between the $\hat{k}_n$ given by Eq. (103) and the value established via the classical theory of tides without dissipation (e.g. Wilkes 1949, CL70), denoted $\hat{k}_{\mathrm{CL;n}}$ in reference to CL70 and given by

$$\hat{k}^2_{\mathrm{CL;n}} = \frac{1}{4}\left[\frac{h_c}{h_n} - 1\right]. \tag{157}$$

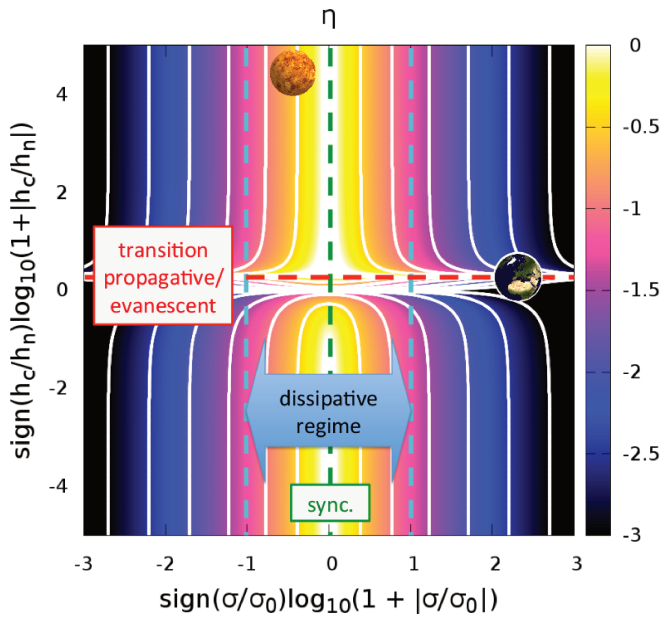


Fig. 6. Relative difference between the complex wavenumber obtained in this work (Eq. 103) on the one hand, and the real one given by CL70 for Earth atmospheric tides ($\hat{k}_{\mathrm{CL;n}}$) on the other hand. The difference η, given by Eq. (158), is plotted in logarithmic scale as a function of the normalized tidal frequency σ/σ_0 and of the ratio h_c/h_n. The colour of the map, denoted c, is defined by the expression $c = \log(\eta)$. The horizontal and vertical axis represent $f(\sigma/\sigma_0)$ and $f(h_c/h_n)$, where f is the function defined by $f(X) = \mathrm{sign}(X)\log(1+|X|)$ with $X \in \mathbb{R}$. The positions of the planets are determined by the gravity mode of degree 0 in the case of the semidiurnal tide. Dark (luminous) regions correspond to the dynamic (dissipative) regime. The vertical wavenumbers of Venus are strongly affected by dissipative processes, while those of the Earth are not.

This difference, written

$$\eta = 2\left|\frac{\hat{k}_n - \hat{k}_{\mathrm{CL;n}}}{\hat{k}_n + \hat{k}_{\mathrm{CL;n}}}\right|, \tag{158}$$

is plotted in Fig. 6 as a function of the reduced tidal frequency σ/σ_0, and of the height ratio h_c/h_n. The supplementary term of Newtonian cooling in the heat transport equation induces an additional regime with respect to CL70. At low frequencies, around the radiation frequency, the vertical profiles are damped, while they are highly oscillating in the case where $\sigma_0 = 0$. This thermal regime corresponds to the middle white-yellow region of the map. The two wavenumbers become similar for $|\sigma| \gg \sigma_0$. This is the regime of fast rotating planets studied by CL70. Beyond the threshold corresponding to $|\sigma| \sim N$, the traditional approximation assumed in Section 2 is no longer valid and the coupling between the three components of the Navier-Stokes equation is considered. Finally, the area located at $h_c/h_n \approx 1$ represents the discontinuous transition between propagative and evanescent waves in CL70, this transition being regular in our model.

4. Tides in a slowly rotating convective atmosphere

In this section, we treat the asymptotic case of a slowly rotating convective atmosphere for which the equations of tidal hydrodynamics can be simplified drastically. This situation typically corresponds to Venus-like planets. Indeed, the rotation period of Venus, 243 days, is of the same order of magnitude as its orbital period. It follows that $|\nu| < 1$ for the semidiurnal tide of Venus. As a consequence, the Coriolis acceleration can be neglected as the first step. The atmospheric layer located below 60 km is characterized by a strongly negative temperature gradient (Seiff et al. 1980). In this layer, the temperature decreases from 750 K to 250 K, which make it subject to convective instability (Baker et al. 2000). Therefore, the Brunt-Väisälä frequency of Venus is far lower than the value given by the isothermal approximation. As this frequency represents the "stiffness" of the Archimedean force which restores gravity waves, these waves cannot propagate in the unstable region above the surface.

4.1. Equilibrium distributions of pressure, density, and temperature

We assume $\Omega = 0$ and $N = 0$. According to Eq. (1), the Brunt-Väisälä frequency can be expressed as

$$N^2 = \frac{g}{H}\left(\kappa + \frac{dH}{dz}\right). \tag{159}$$

Therefore, the case $N^2 = 0$ corresponds to the adiabatic temperature gradient, given by

$$H(z) = H(0) - \kappa z \quad \text{or} \quad T_0(z) = T_0(0) - \frac{\kappa g}{\mathscr{R}_s} z. \tag{160}$$

For this structure, the reduced altitude is expressed by

$$x = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{H(0)}{H(0) - \kappa z}\right), \tag{161}$$

and we thus obtain the distributions of the basic pressure height, temperature, pressure, and density, respectively

$$\begin{aligned} &H(x) = H(0)\,e^{-\kappa x}, \quad T_0(x) = \frac{gH(0)}{\mathscr{R}_s} e^{-\kappa x}, \\ &p_0(x) = p_0(0)\,e^{-x}, \quad \rho_0(x) = \rho_0(0)\,e^{(\kappa-1)x}, \\ &\text{with } H(0) = p_0(0)/[g\rho_0(0)]. \end{aligned} \tag{162}$$

4.2. Tidal response

For the sake of simplicity, we neglect the contribution of the gravitational forcing in the Navier-Stokes equation and examine the case of pure thermal tides. When $\sigma \to 0$, the tidal response tends to its hydrostatic component, the equilibrium tide (Zahn 1966). We thus assume the hydrostatic approximation. This allows us to reduce the radial projection of the Navier-Stokes equation (Eq. 8) to

$$\delta\rho = -\frac{1}{gH}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{163}$$

Now, by expanding the perturbed quantities in Fourier series and substituting Eq. (163) in the heat transport equation (Eq. 20), we get the simplified vertical structure equation of pressure

$$\frac{d\delta p}{dx} + \tau_{\rm p}\delta p = \frac{\kappa\rho_0 J}{i\sigma + \Gamma_1\sigma_0}, \quad \text{where} \quad \tau_{\rm p}(\sigma) = \frac{1}{\Gamma_1}\frac{i\sigma + \Gamma_1\sigma_0}{i\sigma + \sigma_0}, \tag{164}$$

represents the complex damping rate of the perturbation. Following Dobrovolskis & Ingersoll (1980) and Shen & Zhang (1990), we consider that thermal tides are generated by an increase in heat at the ground and apply the profile of thermal forcing

$$J(x) = J_0\tau_{\rm J}e^{-\tau_{\rm J}x}, \tag{165}$$

where $1/\tau_{\rm J} \ll 1$ is the thickness of the heated region (see Eq. 213 for a physical expression of this parameter) and J_0 the mean absorbed power per unit mass. At the upper boundary $x_{\rm atm} \gg 1$, we apply the stress-free condition $\delta p = 0$ and get the pressure profile

$$\delta p(x) = -\frac{\kappa\rho_0(0)J_0}{i\sigma + \sigma_0}e^{-\tau_{\rm J}x}, \tag{166}$$

from which we deduce the vertical profiles of the Lagrangian horizontal displacements

$$\xi_\theta(x) = -\frac{\kappa J_0}{R\sigma^2(i\sigma + \sigma_0)}e^{-\tau_{\rm J}x}, \tag{167}$$

$$\xi_\varphi(x) = -im\frac{\kappa J_0}{R\sigma^2(i\sigma + \sigma_0)}e^{-\tau_{\rm J}x}, \tag{168}$$

of the horizontal velocities

$$V_\theta(x) = -i\frac{\kappa J_0}{R\sigma(i\sigma + \sigma_0)}e^{-\tau_{\rm J}x}, \tag{169}$$

$$V_\varphi(x) = m\frac{\kappa J_0}{R\sigma(i\sigma + \sigma_0)}e^{-\tau_{\rm J}x}, \tag{170}$$

and of the density and temperature

$$\delta\rho(x) = -\frac{\kappa\rho_0(0)\tau_{\rm J}J_0}{gH(0)(i\sigma + \sigma_0)}e^{-\tau_{\rm J}x}, \tag{171}$$

$$\delta T(x) = -\frac{\kappa\tau_{\rm J}J_0}{\mathscr{R}_{\rm s}(i\sigma + \sigma_0)}e^{-\tau_{\rm J}x}. \tag{172}$$

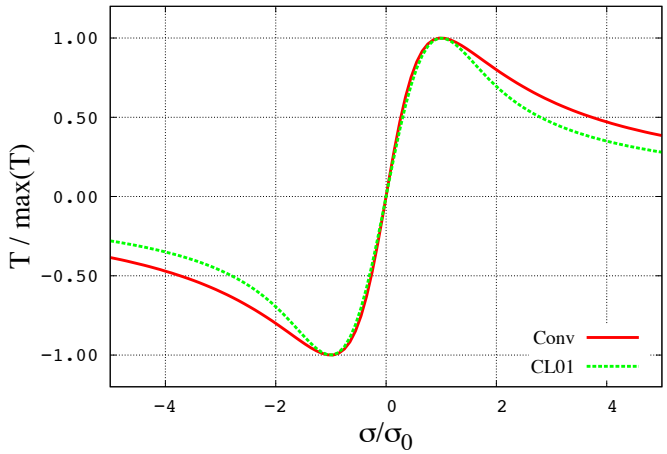


Fig. 7. Tidal torques exerted on the atmosphere in the case of the slowly rotating convective atmosphere (red line with the label "Conv", Eq. 174) and in the model by Correia & Laskar (2001) (green dashed line with the label "CL01", Eq. 175) as functions of the tidal frequency. Both functions are normalized by their respective maximum value, reached at $\sigma = \sigma_0$; the tidal frequency is normalized by the Newtonian cooling frequency (σ_0). The tidal forcing is quadrupolar, with U and J given by Section 4.3. The parameters a and b of Eq. (175) are adjusted so that the peaks of the two functions are superposed.

4.3. Second-order Love number and tidal torque

The previous results enable us to compute the tidal Love numbers and torque associated with the atmospheric tidal response. Owing to the hydrostatic approximation, these quantities are directly proportional to $\delta p(x = 0)$. We consider that the semidiurnal thermal tide can be reduced to its quadrupolar component, given by $U(x,\theta,\varphi) = U_2P_2^2(\cos\theta)e^{i2\varphi}$ and $J(x,\theta,\varphi) = J_2\tau_{\rm J}e^{-\tau_{\rm J}x}P_2^2(\cos\theta)e^{i2\varphi}$. Hence, using the expressions Eq. (76) for the second-order Love number and Eq. (82) for the tidal torque, we obtain

$$k_{2;\rm conv}^{\sigma,2} = -\frac{4\pi}{5}\frac{\mathscr{G}RH\kappa\rho_0(0)}{i\sigma + \sigma_0}\frac{J_2}{U_2} \tag{173}$$

and

$$\mathcal{T}_{\rm conv}^{\sigma,2} = 2\pi R^2\frac{\kappa\rho_0(0)}{g}U_2J_2\frac{\sigma}{\sigma^2 + \sigma_0^2}. \tag{174}$$

4.4. Comparison with previous models

The tidal torque plotted in Fig. 7 is identical to the horizontal component of the torque exerted on the stably stratified isothermal atmosphere given by Eq. (156) because convection eliminates the component resulting from the fluid vertical displacement. In agreement with the early result of Ingersoll & Dobrovolskis (1978) (Eq. 4), it is of the same form as the result given by the Maxwell model (Correia et al. 2014), where we identify the Maxwell time $\mathscr{T}_0 = \sigma_0^{-1}$. It also corresponds to the torque computed by Leconte et al. (2015) for Venus-like planets with numerical simulations using GCM, which suggests that the slow rotation and convective instability approximations are appropriate for planets of this kind. This torque is stronger than that computed in the case of the stably stratified atmosphere. Consequently, it can lead to non-synchronized rotation states of equilibrium by counterbalancing the solid tidal torque. Finally, it

must be compared to the model introduced by Correia & Laskar (2001) in early theoretical studies of the tidal torque exerted on Venus atmosphere. In this model, the tidal torque is given by

$$\mathcal{T}(\sigma) = \frac{a}{\sigma}\left[1 - e^{-b\sigma^2}\right], \tag{175}$$

where a and b are two empirical positive real parameters. As can be observed in Fig 7 where (174) and (175) are plotted as functions of the tidal frequency, $\mathcal{T}(\sigma)$ looks like $\mathcal{T}^{\sigma,2}(\sigma)$ from Eq. (174) with amplitude maxima located at

$$\sigma_0 \sim \pm\sqrt{\frac{2}{3b}}. \tag{176}$$

This strengthens the statement of Correia & Laskar (2001), who expected that "further studies of atmospheres of extra solar synchronous planets [...] may provide an accurate solution for the case $\sigma \approx 0$". In Fig. 14, the expression of Eq. (175) is plotted for the Earth and Venus in addition to the analytical results of the model presented here with parameters a and b adjusted numerically.

5. Physical description of heat source terms

On the left-hand side of Eq. (46) and in polarization relations, the perturbation is driven by $U_n^{m,\sigma}$ and $J_n^{m,\sigma}$. The tidal gravitational potential has been expanded in spherical harmonics for many years and there is no need to come back to it[7]. Nevertheless, it is necessary to establish physical expressions of the heat power per unit mass to compute a solution. The different contributions must be clearly identified. We detail them in the case of the optically thin atmosphere. The most obvious heat source, but not necessarily the one with the largest amplitude, is the absorption of the light flux coming from the star. The non-absorbed part of this flux reaches the ground and causes temperature oscillations at $x = 0$. This implies two contributions from the ground: a radiative emission in infrared and diffusive heating due to turbulence within the surface boundary layer.

5.1. Insolation

The heating fluxes coming from the ground are all oriented radially and proportional to the local insolation flux at $x = 0$. Therefore, they can be easily written as a product of separable functions: $\mathcal{F}(\theta)\,\mathcal{G}(x)$. This is not the case of the insolation flux, which goes through the spherical shell along the star-planet direction (see Fig. 10). Particularly, the atmosphere is partly enlightened by stellar rays on the dark side. We note I_S, the bolometric flux transmitted to the atmosphere. If we assume that the star radiates like a black body, this flux is given by the integral of the spectral radiance $I_{\mathrm{S};\lambda}$ over a wide range of wavelengths

$$I_\mathrm{S} = \int_\lambda I_{\mathrm{S};\lambda}(\lambda)\, d\lambda, \tag{177}$$

where $I_{\mathrm{S};\lambda}$ is given by Plancks's law (Planck 1901):

$$I_{\mathrm{S};\lambda}(\lambda) = \frac{R_\mathrm{S}^2}{d^2}\frac{2hc^2\pi\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{S}\lambda}} - 1}, \tag{178}$$

[7] For instance, see the Kaula expansion of the gravitational tidal potential (Kaula 1964) detailed in Appendix C and Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009).

the parameter c being the speed of light in vacuum, h the Planck constant, k_B the Boltzmann constant, d the star-planet distance, R_S the radius of the star, and T_S its surface temperature. The flux is partly reflected by the atmosphere with the albedo $A_{\mathrm{atm};\lambda}$ for the wavelength λ, which gives the effective heating flux

$$I_{0;\lambda}(\lambda) = (1 - A_{\mathrm{atm};\lambda})\, I_{\mathrm{S};\lambda}. \tag{179}$$

To describe the absorption of I_0 by the atmosphere, we use the Beer-Lambert law (Bouguer 1729; Klett et al. 1760; Beer 1852). Light rays propagate along a straight line defined by the linear spatial coordinate l. So, the absorption of the incident spectral density I_λ^inc by a gas G of molar concentration C_G, illustrated by Fig. 8, can be written

$$\frac{dI_\lambda^\mathrm{inc}}{I_\lambda^\mathrm{inc}} = -\varepsilon_{\mathrm{G};\lambda} C_\mathrm{G}(l)\, dl, \tag{180}$$

the parameter $\varepsilon_{\mathrm{G};\lambda}$ being the molar extinction density coefficient of the gas, which is supposed to depend on the light wavelength (λ) alone. This dependence should be taken into account because $\varepsilon_{\mathrm{G};\lambda}$ can vary over several orders of magnitude, typically, $\varepsilon_{\mathrm{G};\lambda} \propto \lambda^{-4}$ in the regime of Rayleigh diffusion (molecules are small compared to the wavelength). From Eq. (180), we get

$$I_\lambda^\mathrm{inc} = I_{0;\lambda} e^{-\varepsilon_{\mathrm{G};\lambda}\int_l C_\mathrm{G} dl}, \tag{181}$$

and the incident flux

$$I^\mathrm{inc} = \int_\lambda I_\lambda^\mathrm{inc} d\lambda. \tag{182}$$

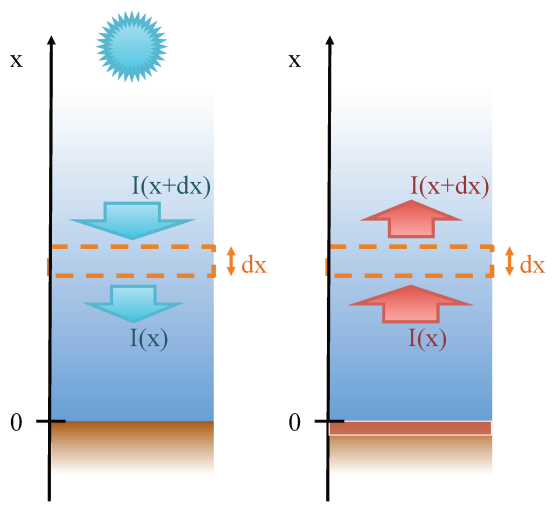


Fig. 8. Left: Absorption of the flux emitted by the star along the star-planet direction. **Right:** Absorption of the flux emitted by the ground.

Then, performing the derivation of Eq. (181), the heat power per unit volume is obtained,

$$\mathscr{J}^\mathrm{inc} = C_\mathrm{G}\int_\lambda \varepsilon_{\mathrm{G};\lambda} I_{0;\lambda} e^{-\varepsilon_{\mathrm{G};\lambda}\int_l C_\mathrm{G}\mathrm{d}l} d\lambda, \tag{183}$$

and the heat power per unit mass comes straightforwardly

$$J^{\text{inc}} = \frac{C_{\text{G}}}{\rho_0} \int_\lambda \varepsilon_{\text{G};\lambda} I_{0;\lambda} e^{-\varepsilon_{\text{G};\lambda} \int_l C_{\text{G}} dl} d\lambda. \tag{184}$$

We retrieve the formulation of the thermal forcing proposed by CL70. Considering that the gas is homogeneous in composition leads us to $C_{\text{G}} = C_0 = \rho_0/M$. Therefore, the incident power flux and heat power per unit mass become

$$\begin{cases} I^{\text{inc}} = \int_\lambda I_{0;\lambda} e^{-\varepsilon_\lambda \int_l C_0 dl} d\lambda, \\ J^{\text{inc}} = \frac{1}{M} \int_\lambda \varepsilon_\lambda I_{0;\lambda} e^{-\varepsilon_\lambda \int_l C_0 dl} d\lambda. \end{cases} \tag{185}$$

Near the planet-star axis, they are simply expressed as

$$\begin{cases} I^{\text{inc}} = \int_\lambda I_{0;\lambda} e^{-\tau_\lambda e^{-x}} d\lambda, \\ J^{\text{inc}} = \frac{1}{M} \int_\lambda \varepsilon_\lambda I_{0;\lambda} e^{-\tau_\lambda e^{-x}} d\lambda, \end{cases} \tag{186}$$

where τ_λ is the dimensionless optical depth for the radiance of wavelength λ,

$$\tau_\lambda = \frac{\rho_0 (0) H}{M} \varepsilon_\lambda. \tag{187}$$

The parameter $1/\tau_\lambda$ corresponds to an absorption depth of the flux in a homogeneous fluid normalized by the pressure height scale (H). If $\tau_\lambda \ll 1$, the heating power of a wavelength λ is almost totally transmitted to the ground. On the contrary, if $\tau_\lambda \gg 1$, the flux does not reach the surface because it is entirely absorbed by the atmosphere (see Fig. 9). In this case, the atmosphere is not optically thin, and it cannot be assumed that its radiative losses are proportional to δT as was done in Sect. 2, and thermal diffusion has to be considered. Therefore, the case treated by the present work corresponds to $\tau_\lambda \ll 1$.

The proportion of flux density transmitted to the ground α_λ is deduced from Eq. (186) taken at $x = 0$,

$$\alpha_\lambda = e^{-\tau_\lambda}. \tag{188}$$

Like the atmosphere, the ground has an albedo denoted $A_{\text{gr};\lambda}$, which implies that the upcoming flux is partly reflected. Therefore, we can write the absorption equation

$$\frac{dI_\lambda^{\text{ref}}}{dx} + \tau_\lambda e^{-x} I_\lambda^{\text{ref}} = 0, \tag{189}$$

and compute the reflected surface power

$$I_\lambda^{\text{ref}} = A_{\text{gr};\lambda} \alpha_\lambda I_\lambda^{\text{inc}} (R, \psi) \cos\psi e^{\tau_\lambda e^{-x}}, \tag{190}$$

the coordinate ψ being the angle between the star-planet direction and the position vector of the current point. The heat power per unit mass and wavelength provided by the reflected flux is derived from the previous equation

$$J_\lambda^{\text{ref}} = A_{\text{gr};\lambda} \alpha_\lambda \frac{\varepsilon_\lambda}{M} I_\lambda^{\text{inc}} (R, \psi) \cos\psi e^{\tau_\lambda e^{-x}}. \tag{191}$$

So, the contribution of the reflected flux is finally obtained

$$\begin{cases} I^{\text{ref}} = \int_\lambda A_{\text{gr};\lambda} \alpha_\lambda I_\lambda^{\text{inc}} (R, \psi) \cos\psi e^{\tau_\lambda e^{-x}} \mathrm{d}\lambda \\ J^{\text{ref}} = \int_\lambda A_{\text{gr};\lambda} \alpha_\lambda \frac{\varepsilon_\lambda}{M} I_\lambda^{\text{inc}} (R, \psi) \cos\psi e^{\tau_\lambda e^{-x}} \mathrm{d}\lambda. \end{cases} \tag{192}$$

5.2. Radiative heating from the ground

The part of the incident flux which is not reflected causes surface temperature oscillations. This effect was studied in meteorological works throughout the twentieth century. We will follow here the theoretical approach proposed by Bernard (1962) for its simplicity and the physical landmarks that it brings. The ground is considered to be a black body of temperature T_{gr}, emitting the power flux $I_{\text{gr;BB}}$ given by the Stefan-Boltzmann law,

$$I_{\text{gr;BB}} = \epsilon_{\text{gr}} \mathscr{S} T_{\text{gr}}^4, \tag{193}$$

the parameter ϵ_{gr} being the emissivity of the ground and $\mathscr{S} = 5.670373 \times 10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4} the Stefan-Boltzmann constant (Mohr et al. 2012). Moreover, the atmosphere emits a counter radiation to the surface, which implies that the effective flux is less than $I_{\text{gr;BB}}$. According to Bernard (1962), this counter-radiation can be assumed to be proportional to $I_{\text{gr;BB}}$, and expressed by the semi-empirical formula

$$I_{\text{atm}} = \epsilon_{\text{atm}} \mathscr{S} T_{\text{gr}}^4, \tag{194}$$

which allows us to take it into account without studying the whole coupled system ground-atmosphere. The factor ϵ_{atm} corresponds to an effective emissivity. So, introducing the spectral radiance of the atmosphere $I_{\text{atm};\lambda}$, the albedo of the ground in the infrared $A_{\text{gr;IR}}$ can be defined by the relationship

$$A_{\text{gr;IR}} I_{\text{atm}} = \int_\lambda A_{\text{gr};\lambda} I_{\text{atm};\lambda} d\lambda, \tag{195}$$

and the effective flux emitted by the telluric surface can be written

$$I_{\text{gr}} = I_{\text{gr;BB}} - A_{\text{gr}}^{IR} I_{\text{atm}}. \tag{196}$$

Given that $A_{\text{gr}}^{IR} \approx 1 - \epsilon_{\text{gr}}$, Eq. (196) becomes

$$I_{\text{gr}}^{\text{rad}} = \epsilon \mathscr{S} T_{\text{gr}}^4, \tag{197}$$

where $\epsilon = \epsilon_{\text{gr}} (1 - \epsilon_{\text{atm}}) \leqslant 1$ is the effective emissivity of the ground. The terrestrial atmosphere being rather thin and transparent, $\epsilon \approx 1$ for the Earth. This expression will be used further to establish the heating by turbulent diffusion. We also introduce here the corresponding spectral radiance of the ground,

$$I_{\text{gr};\lambda}^{\text{rad}} = \epsilon \frac{2hc^2 \pi \lambda^{-5}}{e^{hc/(k_{\text{B}} \lambda T_{\text{gr}})} - 1}. \tag{198}$$

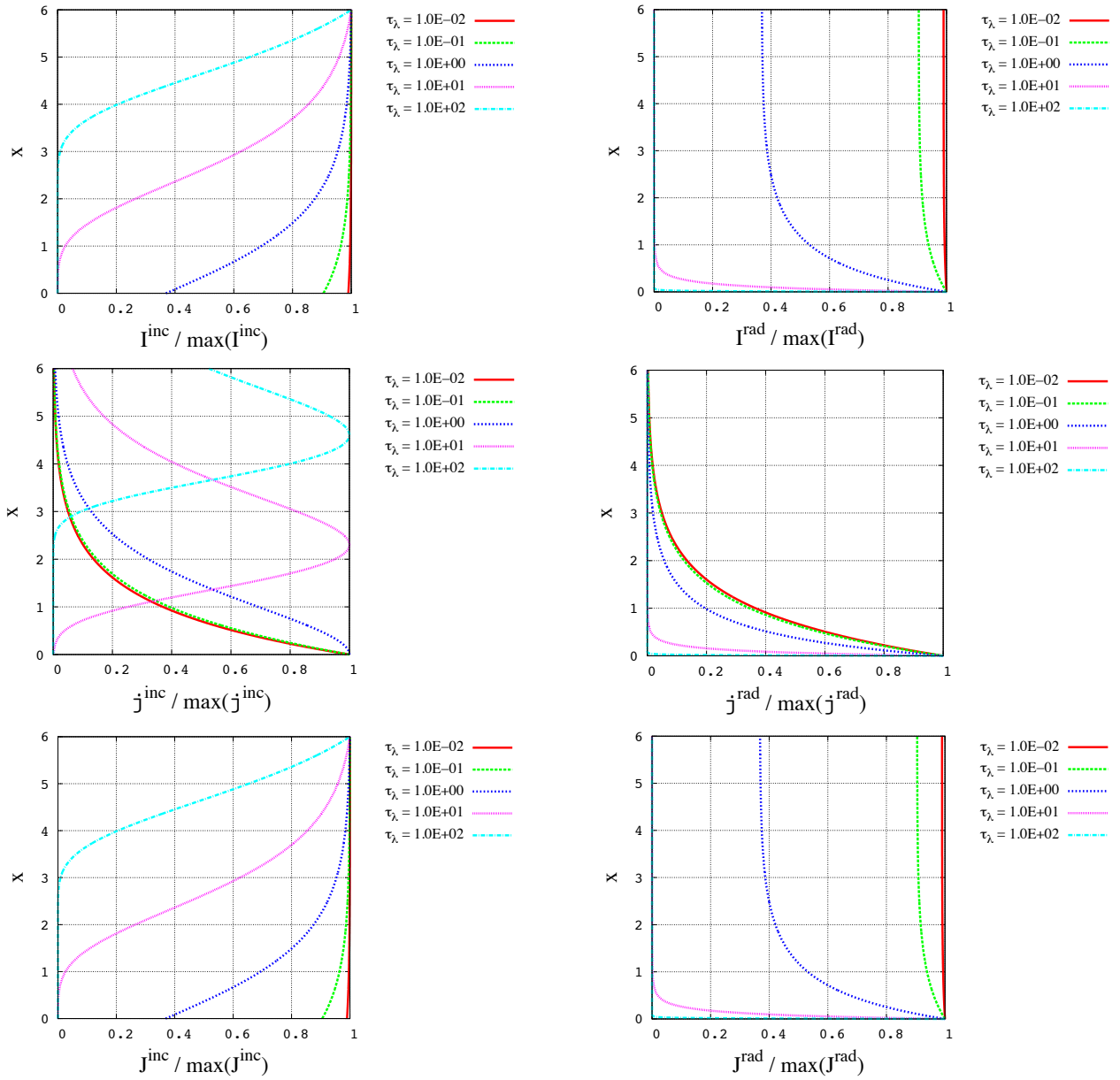


Fig. 9. Vertical profiles of radiative fluxes (I), power per unit volume ($\mathscr{J}$), and power per unit mass (J) for various values of the dimensionless optical depth τ_λ (Eq. 187). As usual, the reduced altitude, $x = z/H$, is on the vertical axis. **Left:** Incident flux, defined by Eq. (186), at $\psi = 0$. If $\tau_\lambda \ll 1$ the ground receives almost 100 % of the total power. On the contrary, if $\tau_\lambda \gg 1$, all the power is absorbed by the atmosphere. **Right:** Radiative flux emitted by the ground, defined by Eq. (206). For small τ_λ, the flux goes through the atmosphere without being absorbed. For high values of the parameter, it is absorbed by the lowest layers.

The radiative flux emitted by the ground, denoted $I^{\rm rad}$, is the solution of the absorption equation (similar to the one used to compute $I^{\rm inc}$),

$$\frac{dI_\lambda^{\rm rad}}{dx} + \tau_\lambda e^{-x} I_\lambda^{\rm rad} = 0, \tag{199}$$

with the boundary condition $I_\lambda^{\rm rad} = I_{{\rm gr};\lambda}^{\rm rad}$ at $x = 0$. Therefore,

$$I_\lambda^{\rm rad} = \alpha_\lambda e^{\tau_\lambda e^{-x}} I_{{\rm gr};\lambda}^{\rm rad}, \tag{200}$$

and finally,

$$I^{\rm rad} = \int_\lambda I_{{\rm gr};\lambda}^{\rm rad} \alpha_\lambda e^{\tau_\lambda e^{-x}} d\lambda. \tag{201}$$

The temperature of the ground $T_{\rm gr}$ depends on the power reaching the surface,

$$I_{\rm gr}^{\rm inc} = I^{\rm inc}(R, \psi) \cos\psi. \tag{202}$$

Both quantities are linearized near the equilibrium, $I_{\rm gr}^{\rm inc} = I_{{\rm gr};0}^{\rm inc} + \delta I_{\rm gr}^{\rm inc}$ and $T_{\rm gr} = T_{{\rm gr};0} + \delta T_{\rm gr}$, and the perturbation is expanded in series

$$\begin{aligned} \delta I_{\rm gr}^{\rm inc} &= \sum_{\sigma,m} \delta I_{\rm gr}^{{\rm inc};m,\sigma} e^{i(\sigma t + m\varphi)}, \\ \delta T_{\rm gr} &= \sum_{\sigma,m} \delta T_{\rm gr}^{m,\sigma} e^{i(\sigma t + m\varphi)}. \end{aligned} \tag{203}$$

The spatial functions $\delta I_{\rm gr}^{{\rm inc};m,\sigma}$ and $\delta T_{\rm gr}^{m,\sigma}$ are related by a transfer function of the tidal frequency, denoted $\mathscr{B}_{\rm gr}$, that is given explicitly in the next subsection

$$\delta T_{\rm gr}^{m,\sigma} = \mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma} \delta I_{\rm gr}^{{\rm inc};m,\sigma}. \tag{204}$$

So, the perturbation of the spectral radiance emitted by the ground can be written

$$\delta I_{\lambda}^{{\rm rad};m,\sigma} = \alpha_{\lambda} e^{\tau_{\lambda} {\rm e}^{-{\rm x}}} \left. \frac{\partial I_{{\rm gr};\lambda}^{\rm rad}}{\partial T_{\rm gr}} \right|_{T_{\rm gr}=T_{{\rm gr};0}} \mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma} \delta I_{\rm gr}^{{\rm inc};m,\sigma}, \tag{205}$$

and the flux and heat power per mass unit

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta I^{{\rm rad};m,\sigma} = \mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma} \delta I_{\rm gr}^{{\rm inc};m,\sigma} \displaystyle\int_{\lambda} \alpha_{\lambda} e^{\tau_{\lambda} {\rm e}^{-{\rm x}}} \left. \frac{\partial I_{{\rm gr};\lambda}^{\rm rad}}{\partial T_{\rm gr}} \right|_{T_{\rm gr}=T_{{\rm gr};0}} d\lambda, \\ \delta J^{{\rm rad};m,\sigma} = \dfrac{\varepsilon_{\lambda}}{M} \mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma} \delta I_{\rm gr}^{{\rm inc};m,\sigma} \displaystyle\int_{\lambda} \alpha_{\lambda} e^{\tau_{\lambda} {\rm e}^{-{\rm x}}} \left. \frac{\partial I_{{\rm gr};\lambda}^{\rm rad}}{\partial T_{\rm gr}} \right|_{T_{\rm gr}=T_{{\rm gr};0}} d\lambda. \end{array} \right. \tag{206}$$

The partial derivative of $I_{{\rm gr};\lambda}^{\rm rad}$ is explicitly given by

$$\left. \frac{\partial I_{{\rm gr};\lambda}^{\rm rad}}{\partial T_{\rm gr}} \right|_{T_{\rm gr}=T_{{\rm gr};0}} = \epsilon \frac{2\pi h^2 c^3 \lambda^{-6}}{k_{\rm B} T_{{\rm gr};0}^2} \frac{e^{hc/\left(k_{\rm B}\lambda T_{{\rm gr};0}\right)}}{\left[e^{hc/\left(k_{\rm B}\lambda T_{{\rm gr};0}\right)} - 1\right]^2}. \tag{207}$$

Here, we note that the response of the ground to the tidal forcing induces a dependence on the tidal frequency through the oscillations of $T_{\rm gr}$ and the transfer function $\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}$. Thus, the spatial functions describing the contribution of the ground are parametrized by σ contrary to those associated with the incident flux.

5.3. Boundary layer turbulent heat diffusion

Near the ground, heat transfers are dominated by turbulent mechanisms and diffusion. This is known as the planetary boundary layer and it is illustrated in Fig. 12. Thus, for $x \ll 1$, thermal diffusion cannot be ignored as it is in Sect. 2 and drives the oscillations of temperature. However, we note that it is only valid at the vicinity of the surface, where friction with the ground is important. After CL70 and Siebert (1961), we neglect as a first step the heat transport through the troposphere due to advection to provide a first analytical treatment of the problem. At the interface, the diffusive fluxes in the ground and in the atmosphere write

$$Q_{\rm gr}(t) = \frac{k_{\rm gr}}{H} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0^-} \quad \text{and} \quad Q_{\rm atm}(t) = -\frac{k_{\rm atm}}{H} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0^+}, \tag{208}$$

the parameters $k_{\rm gr}$ and $k_{\rm atm}$ representing the thermal conductivities of the ground and of the lowest layer of the atmosphere. In addition, denoting the associated thermal capacities $c_{\rm gr}$ and $c_{\rm atm}$, we introduce the thermal diffusivities

$$K_{\rm gr} = \frac{k_{\rm gr}}{\rho_0(0^-)\, c_{\rm gr}} \quad \text{and} \quad K_{\rm atm} = \frac{k_{\rm atm}}{\rho_0(0^+)\, c_{\rm atm}}, \tag{209}$$

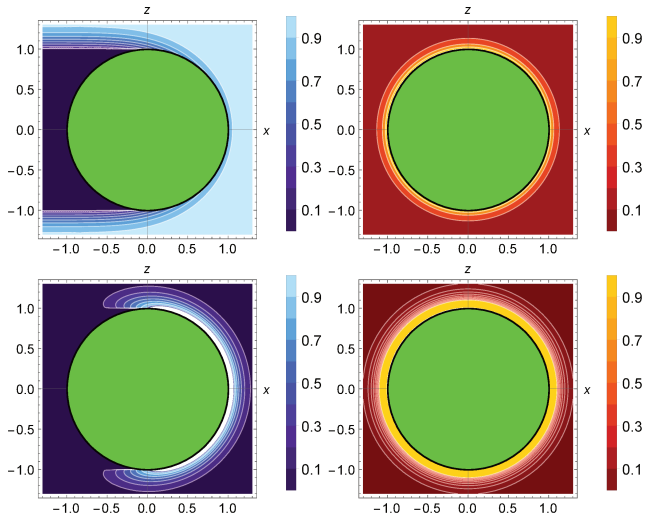


Fig. 10. *Left, from top to bottom:* Power per unit mass ($J^{\rm inc}$, Eq. 184) and power per unit volume ($\mathscr{J}^{\rm inc}$, Eq. 183) of a monochromatic incident flux normalized by their maxima and plotted as functions of the normalized spatial coordinates X (the direction of the star is along the horizontal axis) and Z (the spin axis is along the vertical axis). The planet is represented by a green disk of unit radius. The flux, of wavelength λ, propagates in an atmosphere assumed to be homogeneous in composition ($C_G = C_0$) and characterized by the ratio $H/R = 0.1$. The optical depth is given by $\tau_{\lambda} = 0.2$. *Right, from top to bottom:* Power per mass unit ($J^{\rm rad}$, Eq. 206) and power per volume unit ($\mathscr{J}^{\rm rad}$) of a monochromatic flux radiated by the ground, normalized by their maxima, and plotted as functions of X and Z, with $\tau_{\lambda} = 0.5$.

the parameter $K_{\rm atm}$ being the vertical turbulent thermal diffusivity. Therefore, temperature variations near the surface are described by the equations of heat transport (e.g. CL70),

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{K_{\rm gr}}{H^2} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{for} & x < 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{K_{\rm atm}}{H^2} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{for} & x > 0, \end{array} \right. \tag{210}$$

where only the diffusive terms are taken into account. The power balance of the surface is deduced from Eqs. (208) and (197),

$$I_{\rm gr}^{\rm inc} - \epsilon \mathscr{S} T_{\rm gr}^4 - Q_{\rm gr} - Q_{\rm atm} = 0, \tag{211}$$

and provides the temperature $T_{{\rm gr};0}$ of the ground at equilibrium. Linearized with variables of the form given by Eq. (21), Eq. (210) can be written

$$\left\{ \begin{array}{lll} \delta T^{m,\sigma} = \mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma} e^{[1+{\rm sign}(\sigma)i]x/\delta_{\rm gr}^{\sigma}} \delta I_{\rm gr}^{{\rm inc;m},\sigma} & \text{for} & x < 0, \\ \delta T^{m,\sigma} = \mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma} e^{-[1+{\rm sign}(\sigma)i]x/\delta_{\rm atm}^{\sigma}} \delta I_{\rm gr}^{{\rm inc;m},\sigma} & \text{for} & x > 0, \end{array} \right. \tag{212}$$

where $\delta_{\rm gr}^{\sigma}$ and $\delta_{\rm atm}^{\sigma}$ are the tidal frequency-dependent skin thicknesses of diffusive heat transport in the solid and fluid parts, respectively. Their expressions are given by

$$\delta_{\rm gr}^{\sigma} = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2K_{\rm gr}}{|\sigma|}} \quad \text{and} \quad \delta_{\rm atm}^{\sigma} = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2K_{\rm atm}}{|\sigma|}}. \tag{213}$$

It should be noted that $\delta_{\rm gr}^{\sigma}$ and $\delta_{\rm atm}^{\sigma}$ both decay when the tidal frequency increases. Since $\delta_{\rm atm}^{\sigma}$ corresponds to the typical depth of the boundary layer, it has to satisfy $\delta_{\rm atm}^{\sigma} \ll 1$, otherwise the diffusive effects cannot be ignored in the dynamical core of the model (Sect. 2). Let us denote $\varsigma_{\rm gr} = 4\mathscr{S}T_{\rm gr;0}^{3}$ the radiative impedance of the ground considered as a perfect black body and submitted to a perturbation in temperature. The transfer function $\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}$ introduced in Eq. (204) can be deduced from the linearized power balance,

$$\delta I_{\rm gr}^{\rm inc;m,\sigma} - \epsilon\varsigma_{\rm gr}\delta T_{\rm gr}^{m,\sigma} - \frac{k_{\rm gr}}{H}\left.\frac{\partial\delta T^{m,\sigma}}{\partial x}\right|_{0-} + \frac{k_{\rm atm}}{H}\left.\frac{\partial\delta T^{m,\sigma}}{\partial x}\right|_{0+} = 0, \tag{214}$$

in which the expressions of Eq. (212) are substituted. We finally get (see Fig. 11)

$$\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma} = \frac{1}{\epsilon\varsigma_{\rm gr}}\frac{1}{1+\left[1+{\rm sign}\left(\sigma\right)i\right]\sqrt{\frac{|\sigma|}{\sigma_{\rm bl}}}}, \tag{215}$$

an expression that can be decomposed in its modulus and argument

$$\begin{cases} \left|\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}\right| = \dfrac{1}{\epsilon\varsigma_{\rm gr}\sqrt{1+2\sqrt{\frac{|\sigma|}{\sigma_{\rm bl}}}+2\frac{|\sigma|}{\sigma_{\rm bl}}}}, \\ \arg\left(\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}\right) = -{\rm sign}\left(\sigma\right)\arctan\left[\dfrac{1}{1+\sqrt{\frac{\sigma_{\rm bl}}{|\sigma|}}}\right]. \end{cases} \tag{216}$$

The frequency $\sigma_{\rm bl}$, which parametrizes $\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}$, is a characteristic frequency reflecting the thermal properties of the diffusive boundary layer, and is expressed

$$\sigma_{\rm bl} = 2\left(\frac{\epsilon\varsigma_{\rm gr}}{\beta_{\rm atm}+\beta_{\rm gr}}\right)^{2}, \tag{217}$$

where the parameters $\beta_{\rm gr}$ and $\beta_{\rm atm}$ are the thermal conductive capacities of the ground and of the atmosphere near the telluric surface

$$\beta_{\rm gr} = \rho_0\left(0^-\right)c_{\rm gr}\sqrt{K_{\rm gr}} \quad \text{and} \quad \beta_{\rm atm} = \rho_0\left(0^+\right)c_{\rm atm}\sqrt{K_{\rm atm}}. \tag{218}$$

According to Bernard (1962), turbulent diffusion plays a more important role than thermal conduction in the ground, which means $\beta_{\rm atm} \gg \beta_{\rm gr}$. However, the turbulent diffusivity $K_{\rm atm}$ may vary over a wide range of orders of magnitude, taking extremal values above oceans (typically $\beta_{\rm atm} \sim 10^4$ J.m^{-2}.K^{-1}.s$^{-1/2}$). For these reasons, Bernard (1962) prescribes for the Earth the effective mean value $K_{\rm atm} \sim 10$ m^2.s^{-1}, which had been prescribed before by Wilkes (1949) and which leads to $\sigma_{\rm bl} \sim 10^{-6}$ s^{-1}.

As shown by Eq. (216), the frequency ratio $|\sigma|/\sigma_{\rm bl}$ determines the angular delay of the ground temperature variations. If $|\sigma| \ll \sigma_{\rm bl}$, the response is in phase with the excitation. It corresponds to low conductive capacities. On the contrary,

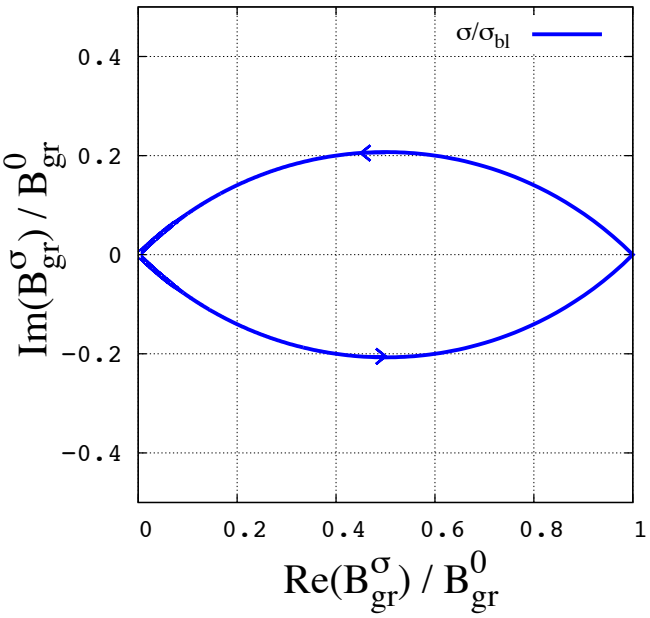


Fig. 11. Nyquist diagram of the boundary layer transfer function $\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}$ in the frequency range $-10^3 \leqslant \sigma/\sigma_{\rm bl} \leqslant 10^3$ (σ being the tidal frequency and $\sigma_{\rm bl}$ the frequency characterizing the boundary layer introduced in Eq. 217). The parametrized complex transfer function $\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}$ (Eq. 215) reduced by its value at $\sigma = 0$ is plotted as a function of the tidal frequency (σ) in the complex plane, where the horizontal axis corresponds to the real part of the function, $\Re\left\{\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}\right\}/\mathscr{B}_{\rm gr}^{0}$, and the vertical axis to the imaginary part $\Im\left\{\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}\right\}/\mathscr{B}_{\rm gr}^{0}$. The arrow indicates the direction of increasing σ. The gain of the transfert function is given by the distance of a point P of the curve to the origin O of coordinates $(0,0)$, and its phase by the angle of the vector **OP** to the horizontal axis. This plot shows that the response of the ground is always delayed with respect to the thermal forcing except at synchronization, where $\arg\left(\mathscr{B}_{\rm gr}\right) = 0$ and the gain is maximum. It also highlights the two identified regimes of the ground response: the lag tends to 0 (response in phase with the perturbation) and the gain increases at $\sigma \to 0$, while the lag tends to $\pm\pi/4$ and the gain to 0 at $\sigma \to \pm\infty$, the critical transition frequency being $\sigma_{\rm bl}$.

if $|\sigma| \gg \sigma_{\rm bl}$, then the delay tends to its asymptotical limit, $\pi/4$. By using the frequency $\sigma_{\rm bl} \sim 10^{-6}$ s^{-1} derived from the prescriptions of Wilkes (1949) and Bernard (1962), we note that the Earth's solar diurnal tide belongs to the second category. This explains the position of the diurnal peak observed in surface temperature oscillations, three hours late with respect to the subsolar (midday) point. The gain of $\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}$ is damped by the conductive capacities of the material at the interface. Therefore, a very diffusive interface tends to attenuate the temperature oscillations of the ground, as expected.

We now consider the profile of temperature variations in the boundary layer obtained in Eq. (212)

$$\delta T_{\rm bl}\left(x\right) = \mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}e^{-\left[1+{\rm sign}(\sigma)i\right]\tau_{\rm atm}^{\sigma}x}\delta I_{\rm gr}^{\rm inc;m,\sigma}, \tag{219}$$

where $\tau_{\rm atm}^{\sigma} = 1/\delta_{\rm atm}^{\sigma}$ is the vertical damping ratio of the diffusive perturbation. Chapman & Lindzen (1970)shows that a heat power due to diffusion $J^{\rm diff}$ can be deduced from the previous expression. Indeed, by writing the heat transport equation as

$$c_{\rm atm}\frac{\partial\delta T}{\partial t} = \delta J^{\rm diff} \tag{220}$$

and linearizing it, we compute the expression of the tidal diffusive forcing term as

$$\delta J^{\mathrm{diff};m,\sigma}(x) = i\sigma c_{\mathrm{atm}} \mathscr{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}} e^{-[1+\mathrm{sign}(\sigma)i]\tau^{\sigma}_{\mathrm{atm}} x} \delta I^{\mathrm{inc};m,\sigma}_{\mathrm{gr}}. \tag{221}$$

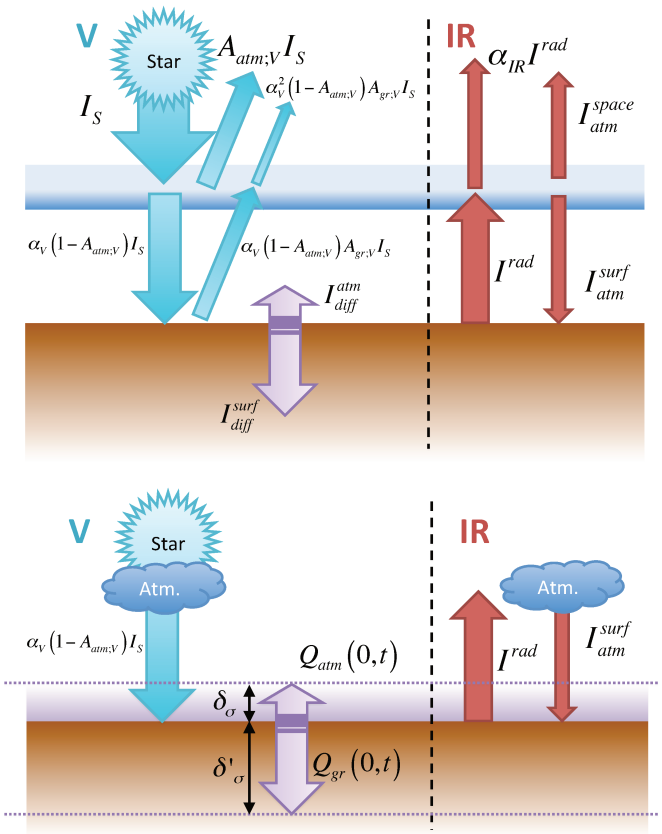


Fig. 12. Bichromatic case. *Top:* Heat transfers between the atmosphere, space and the ground. *Bottom:* Power balance of the interface ground-atmosphere.

5.4. Simplified bichromatic case

The expressions of the thermal forcings obtained in the previous section may appear of some complexity because of the dependence of albedos and optical depths on the wavelength. They can be simplified notably if each source is assumed to be monochromatic. In this case, the star emits in the frequency range of visible light, and the planet in the range of infrared. Consequently, the wavelength-dependent $A_{\mathrm{gr};\lambda}$, $A_{\mathrm{atm};\lambda}$, ε_λ, ϵ_λ, α_λ, and τ_λ are reduced to the constant coefficients $A_{\mathrm{gr;V}}$, $A_{\mathrm{atm;V}}$, ε_{V}, ϵ_{V}, α_{V}, and τ_{V} in the range of visible light and $A_{\mathrm{gr;IR}}$, $A_{\mathrm{atm;IR}}$, $\varepsilon_{\mathrm{IR}}$, ϵ_{IR}, α_{IR}, and τ_{IR} in the infrared. Hence, the bolometric flux is given by

$$I_{\mathrm{S}} = \frac{R_{\mathrm{S}}^2}{d^2} \mathscr{S} T_{\mathrm{S}}^4, \tag{222}$$

where T_{S} is the temperature of the star. This flux is partly reflected back to space by the atmosphere so that the effective flux I_0 getting through the layer can be written

$$I_0 = (1 - A_{\mathrm{atm;V}}) I_{\mathrm{S}}. \tag{223}$$

The power of the incident flux I^{inc} decays along the path of a light beam, absorbed by the gas. The power absorbed per unit mass is denoted J^{inc} and the expressions of Eq. (185) become

$$\begin{cases} I^{\mathrm{inc}} = I_0 e^{-\varepsilon_{\mathrm{V}} \int_l C_0 dl}, \\ J^{\mathrm{inc}} = \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{V}}}{M} I_0 e^{-\varepsilon_{\mathrm{V}} \int_l C_0 dl}. \end{cases} \tag{224}$$

From I^{inc}, we deduce the flux reflected by the ground I^{ref} and the power absorbed per mass unit J^{ref}, given by

$$\begin{cases} I^{\mathrm{ref}} = A_{\mathrm{gr;V}} \alpha_{\mathrm{V}} I^{\mathrm{inc}}(0,\psi) \cos\psi e^{\tau_{\mathrm{V}} e^{-x}}, \\ J^{\mathrm{ref}} = A_{\mathrm{gr;V}} \alpha_{\mathrm{V}} \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{V}}}{M} I^{\mathrm{inc}}(0,\psi) \cos\psi e^{\tau_{\mathrm{V}} e^{-x}}. \end{cases} \tag{225}$$

Finally, the expressions of Eq. (206) are simply replaced by

$$\begin{cases} \delta I^{\mathrm{rad};m,\sigma} = \epsilon \varsigma_{\mathrm{gr}} \mathscr{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}} \delta I^{\mathrm{inc};m,\sigma}_{\mathrm{gr}} \alpha_{\mathrm{IR}} e^{\tau_{\mathrm{IR}} e^{-x}}, \\ \delta J^{\mathrm{rad};m,\sigma} = \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{IR}}}{M} \epsilon \varsigma_{\mathrm{gr}} \mathscr{B}^{\sigma}_{\mathrm{gr}} \delta I^{\mathrm{inc};m,\sigma}_{\mathrm{gr}} \alpha_{\mathrm{IR}} e^{\tau_{\mathrm{IR}} e^{-x}}. \end{cases} \tag{226}$$

The expressions of the powers per unit mass of the incident and radiated flux (J^{inc} and J^{rad}), and the corresponding powers per volume unit ($\mathscr{J}^{\mathrm{inc}}$ and $\mathscr{J}^{\mathrm{rad}}$), are plotted in Fig. 10. The heating due to the turbulent boundary layer remains unchanged (see Eq. 221).

6. Application to the Earth and Venus

To illustrate the regimes identified and the dependence of the atmospheric response on the forcing frequency, we apply the model to the cases of the semidiurnal thermal tides on Earth and Venus assuming first for both planets isothermal stably stratified atmospheres, as described by the equations in Sect. 3. We note here that the atmosphere of Venus is not stably stratified but convective in regions close to the surface (Seiff et al. 1980; Baker et al. 2000) where the tidal mass redistribution is the most important (Dobrovolskis & Ingersoll 1980; Shen & Zhang 1990). Nevertheless, examining the case of a stably stratified isothermal atmosphere for a Venus-like planet will allow us to better understand in an academic framework the role of stratification and radiative losses in the tidal response. To make a clear difference between Venus and the studied stably stratified Venus-like planet, we call the latter "VenusX". For the sake of simplicity, we assume that planets orbit circularly in their equatorial plane. Hence, the tidal frequency[8] is given by $\sigma = 2(\Omega - n_{\mathrm{orb}})$. One of the most crucial parameters of the model is the Newtonian cooling frequency (σ_0). This parameter varies over several orders of magnitude with the altitude (Pollack & Young 1975). However, our purpose here is not to compute a quantitative tidal perturbation, but to illustrate qualitatively the non-dissipative (Earth) and dissipative (Venus) regimes. Therefore, following Lindzen & McKenzie (1967), we consider the interesting case where the radial profile σ_0 is assumed to be constant. For both planets, we arbitrarily set $\sigma_0 = 7.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}$, which is the effective value of σ_0 computed by Leconte et al. (2015) with a GCM for Venus.

[8] This frequency corresponds to the term defined by $(l, m, j, p, q) = (2, 2, 2, 0, 0)$ in the multipole expansion of the forcings detailed in Appendix C.

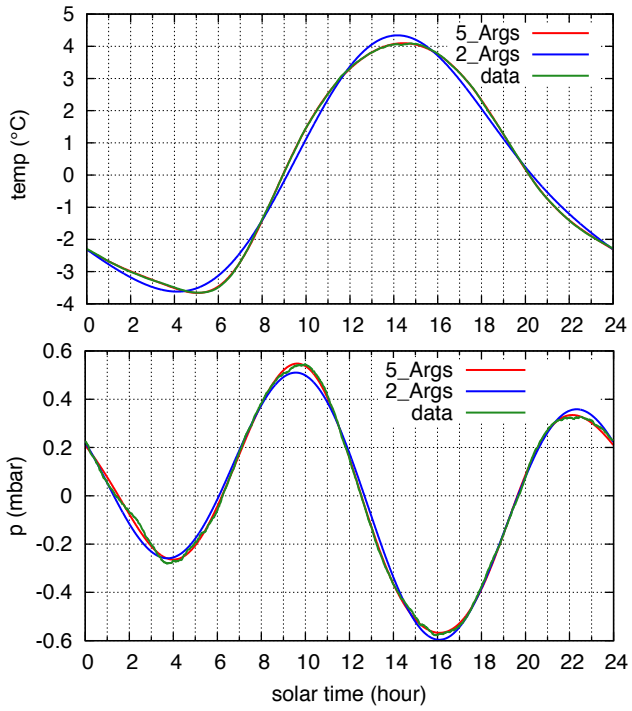


Fig. 13. Average daily variation in temperature in degrees (top) and pressure in mbar (bottom) over one year, plotted over solar time (in hours), the subsolar point corresponding to 12h. The data was recorded every minute over the full year 2013 with a Vantage Pro 2 weather station at latitude 48.363°N. The time is converted to solar time and the data averaged over an exact count of 365 days. The average values of temperature (10.8973° C) and pressure (1015.83 mbar) have been removed to display only the variable part. In both figures, the raw data (in green) has been decomposed in a Fourier series over the 24 h period, limited to two harmonics (blue), or five harmonics (red). Temperature is dominated by the diurnal component, with a maximum value around 14h26mn. The largest harmonics of the pressure variations is the semidiurnal term, followed by the diurnal term. Two pressure maxima can be observed, at 9h38mn and 22h07mn.

This value is such that $\sigma \sim \sigma_0$ for Venus and $\sigma \gg \sigma_0$ for the Earth. In the case of an optically thin atmosphere, the Newtonian cooling frequency can be estimated using Eq. 17. Moreover, we impose academic quadrupolar perturbations of the form

$$U(x,\theta,\varphi,t) = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)},$$
$$J(x,\theta,\varphi,t) = J_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}, \tag{227}$$

where U_2 and J_2 are fixed constant radial profiles. The tidal potential U_2 is computed from the Kaula multipole expansion detailed in Appendix D, and explicitly given by the expression of Eq. (74). A zero-order approximation of the thermal power J_2 can be quantified by writing the total surface power absorbed by the atmosphere as a function of θ and φ, which is then expanded in Fourier series of longitude and associated Legendre polynomials. Given that atmospheric tides are considered in this model as linear perturbations around the equilibrium state, the amplitudes of the perturbed quantities are proportional to the forcing.

[9] Link: http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/venusfact.html

Parameters	Earth	Venus
R [km]	6371.0	6051.8
g [m.s^{-2}]	9.81	8.87
H [km]	8.5	15.9
M [g.mol^{-1}]	28.965	43.45
Γ_1	1.4	1.4
σ_0 [10^{-7} s^{-1}]	7.5	7.5
$P_0(0)$ [10^5 Pa]	1.0	93
Ω [10^{-7} s^{-1}]	729.21	-2.9927
$n_{\rm orb}$ [10^{-7} s^{-1}]	1.9910	3.2364
U_2 [m^2.s^{-2}]	0.985	2.349
J_2 [W.kg^{-1}]	10^{-2}	10^{-4}

Table 1. Values of physical parameters used in simulations. Most of them are given by NASA fact sheets[9] and IMCCE databases. For both planets, the radiation frequency is arbitrarily fixed at $\sigma_0 = 7.5 \times 10^{-7}$ s^{-1}, which is the effective Newtonian cooling frequency obtained by Leconte et al. (2015) for Venus. This order of magnitude can be computed using Eq. (17). The quadrupolar tidal potentials are computed from the expression of the gravitational potential given by Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009); see Appendix C.

The horizontal structure equation is solved using the spectral method described in Appendix B. The vertical structure equation is integrated numerically on the domain $x \in [0, x_{\rm atm}]$ using a regular mesh with element of size δx. As pointed out by CL70, the number of points in the mesh, denoted N, must be sufficiently large to obtain vertical profiles of the perturbation with a good accuracy (see Appendix G). To fix N correctly in the case of the Earth, CL70 suggests using a criterion that we adapt for other configurations, i.e.

$$N > 100 \frac{x_{\rm atm} \left|\hat{k}_n\right|}{2\pi}, \tag{228}$$

considering that the scale of the vertical variations is defined by the module of the complex wavenumber given in Eq. (107). For each planet, we give here the spatial distribution of perturbed quantities and the evolution of the tidal torque with the tidal frequency. The numerical values used in these simulations are summarized in Table 1.

6.1. The Earth

The Earth's semidiurnal thermal tide corresponds to one of the cases detailed in CL70. Here, the radiation frequency is clearly negligible compared to the tidal frequency $\sigma \approx 2\Omega$. Therefore, the tidal response of the Earth's atmosphere is driven by dynamical effects only and the radiative losses added in the heat transport equation can be ignored. This case is typical of a pure dynamic behaviour (see Figs. 5 and 6). Given that ν is slightly larger than 1, the horizontal structure of the perturbations is essentially described by gravity modes (Fig. 2). Rossby modes are trapped at the poles. Figures 15 and 16 show maps of the perturbed quantities in latitude (denoted δ), longitude (φ), and altitude (x), the subsolar point being indicated by the coordinates $(\delta,\varphi) = (0,0)$. In these figures, we can observe that the pressure and density variations present very similar spatial distributions. Particularly, they are in phase with each other and the phase lag is approximately the same in the whole layer, which causes the tidal bulge to materialize. The lag angle $\gamma = \pi/4$ of the bulge with respect to the subsolar point is given by Eq. (137) taken at $x = 0$ for the gravity mode of lowest degree ($n = 0$) and is

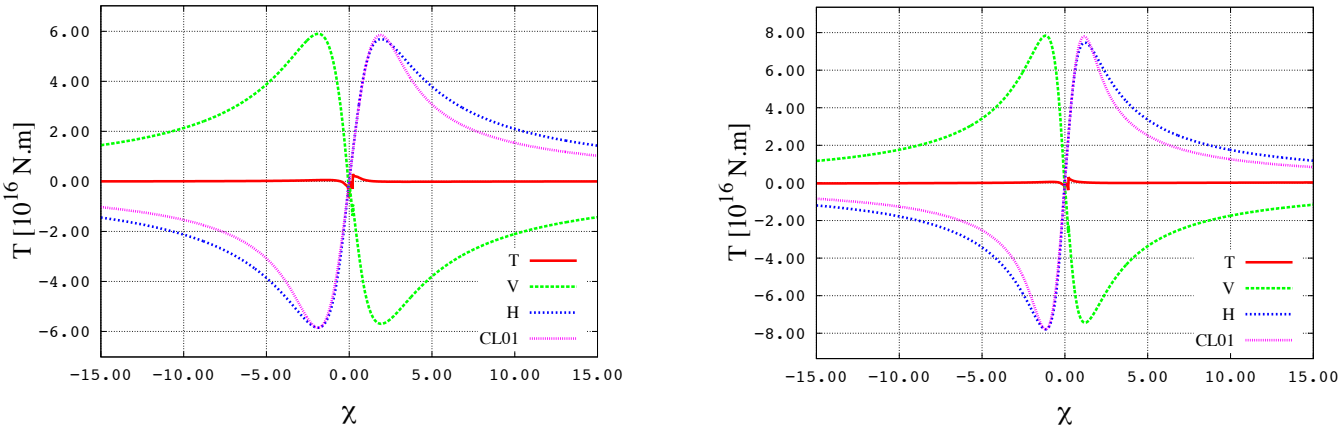


Fig. 14. Tidal torque applied to the atmosphere of Earth (left panel) and Venus (right panel) by the thermal semidiurnal tide and its components as functions of the reduced frequency $\chi = (\Omega - n_{\rm orb})/n_{\rm orb}$ (horizontal axis). The forcings consist of academic quadrupolar perturbations expressed as $U(x,\theta,\varphi,t) = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ and $J(x,\theta,\varphi,t) = J_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ with $U_2 = 0.985$ m^2.s^{-2} and $J_2 = 1.0 \times 10^{-2}$ m^2.s^{-3} for the Earth and $U_2 = 2.349$ m^2.s^{-2} and $J_2 = 1.0 \times 10^{-4}$ m^2.s^{-3} for Venus. Labels T, H, and V refer to the total response and its horizontal and vertical components, respectively (we note that $\mathcal{T}_{\rm H} \sim \mathcal{T}_{\rm conv}$). The label CL01 refers to the model by Correia & Laskar (2001), given by Eq. (175).

not very sensitive to temperature structure (Lindzen 1968). For the Earth, these semidiurnal pressure peaks are measured around 9h38mn and 22h07mn (see Fig. 13).

The patterns of the velocities $V_\theta^{\sigma,2}$ and $V_\varphi^{\sigma,2}$ are also explained well by the first horizontal Hough functions, $\mathcal{L}_\theta^{2,\nu}\Theta_0^{2,\nu}$ and $\mathcal{L}_\varphi^{2,\nu}\Theta_0^{2,\nu}$ (see Fig. 2, middle and bottom left). In contrast, the behaviour of the temperature involves other modes.

We then compute the evolution of the tidal torque with the tidal frequency by changing the value of the spin frequency (Ω) in simulations. Hence, the reduced tidal frequency $\chi = (\Omega - n_{\rm orb})/n_{\rm orb}$ varies within the interval $[-15, 15]$. The torque is computed using the analytical formulae of Eqs. (141) and (149). We also compute the horizontal and vertical components isolated in Sect. 3. The results are plotted in Fig. 14.

At first, we note that the horizontal and vertical components of the torque are of the same order of magnitude and in opposition to one another, as shown by Eq. (141) taken at the limit $\sigma \to 0$. This behaviour was identified previously in Sect. 3.4. It results from the fact that vertical displacement of fluid induced by the stable stratification compensates the local density variations in this frequency regime and strongly flattens the total tidal torque. As demonstrated in Sect. 4, this is not the case in general and it depends on the strength of the stratification. In the case of a slowly rotating convective atmosphere ($N^2 \approx 0$) forced by a heating located at the ground, only the horizontal component remains. This leads to a much stronger tidal torque, similar to those obtained by Leconte et al. (2015) with a GCM (given by Eq. 174) and Correia & Laskar (2001) (see Eq. 175).

In Fig. 17, we plot the surface variations of pressure, density, temperature, and their components as functions of the tidal frequency. For each quantity, the horizontal component varies smoothly while the vertical one is discontinuous at the synchronization. This discontinuity is a consequence of the dissymmetry between prograde and retrograde Hough modes due to the Coriolis acceleration (Fig. A.1), particularly as regards the gravity mode of the lowest degree, which is the most important one.

Assuming that the tidal torque is entirely transmitted to the telluric core of the planet, it is possible to estimate the timescale of the spin evolution induced by the atmospheric semidiurnal tide. Introducing the moment of inertia of the planet, $\mathcal{I}$, we write

$$\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{I}\Omega}. \tag{229}$$

Thus, the timescale of the spin evolution is given by

$$\mathcal{T} = \left|\frac{\mathcal{I}\Omega}{\mathcal{T}}\right|. \tag{230}$$

For the Earth's semidiurnal tide, $\chi \approx 365$ and the horizontal component of the corresponding torque is $\mathcal{T} \approx 10^{15}$ N.m. With $\mathcal{I} = 8.02 \times 10^{37}$ kg.m^2 (NASA fact sheets[10]), $\mathcal{T}_\oplus \sim 180$ Gyr. Therefore, the spin frequency of the Earth is not affected by atmospheric tides.

6.2. Venus

Geometrically speaking, Venus can be seen as an Earth-like planet, with scales of the same magnitude order for the telluric core and the thickness of the atmosphere. However, there are some important differences compared to the case of the Earth. The Venusian atmosphere does not have the same properties as the Earth's atmosphere. First, the fluid layer is a hundred times more massive (denoting $\mathcal{M}$ the mass of the atmosphere, $\mathcal{M}_{♀} \sim 4.8 \times 10^{20}$ kg and $\mathcal{M}_\oplus \sim 5.1 \times 10^{18}$ kg). Thus, the surface pressure is around 93 bar. Second, it is optically thicker. The major part of the heating flux is thus deposited at high altitudes. The absorbed flux near the planet surface at the subsolar point $F_{\rm abs}$ is estimated at $F_{\rm abs} \sim 100 - 200$ W.m^{-2} (Avduevsky et al. 1970; Lacis 1975; Dobrovolskis & Ingersoll 1980), which implies $J_2 \sim 10^{-4}$ W.kg^{-1}. Finally, layers below 60 km are characterized by a strongly negative temperature gradient (Seiff et al. 1980) and are, therefore, weakly stratified or convective. As discussed in Sects. 3 and 4, these properties have a strong impact on the nature of the tidal response. Particularly, the tidal torque may

[10] Link: http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html

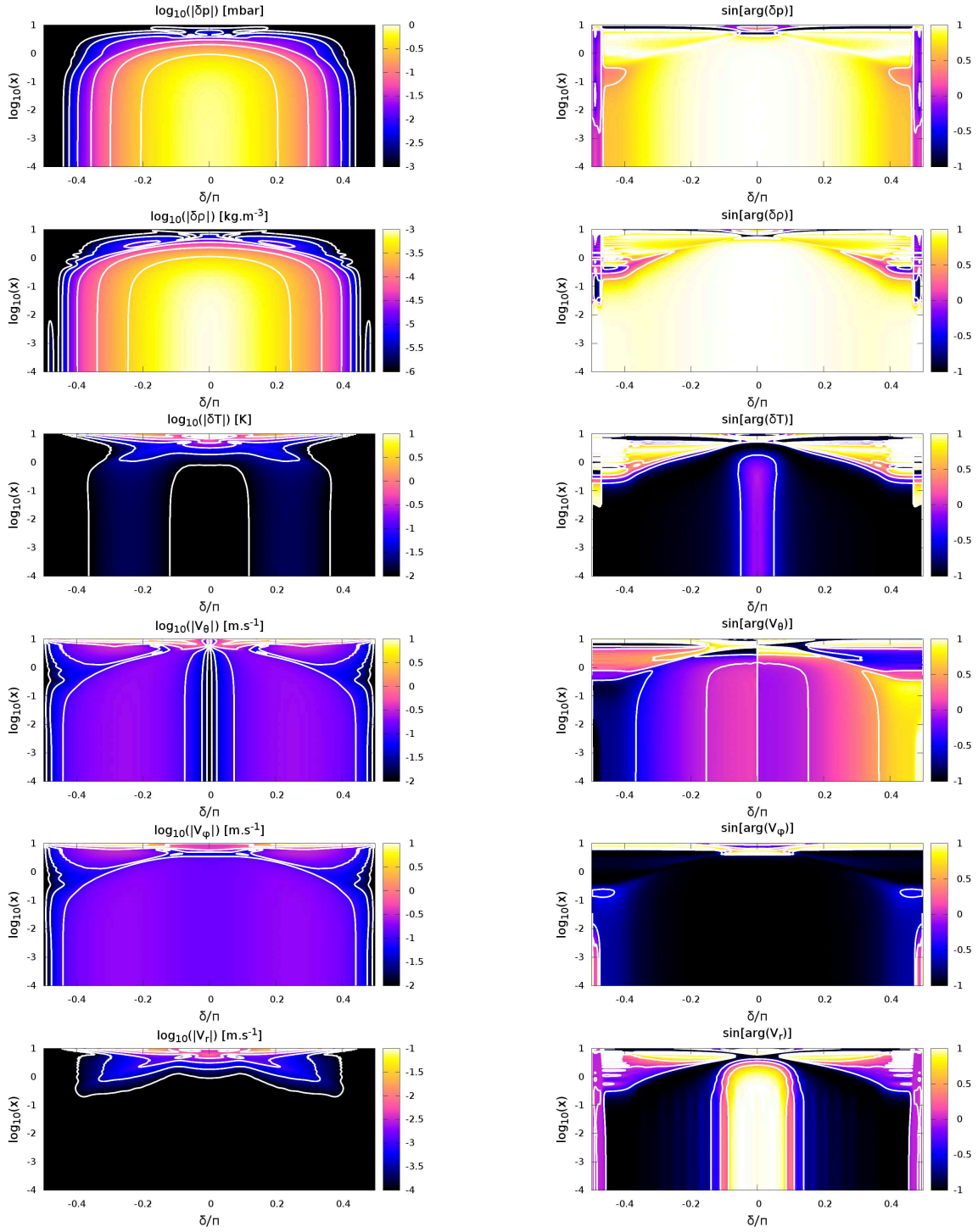


Fig. 15. Total tidal response of the Earth's atmosphere to the solar semidiurnal perturbation caused by the quadrupolar academic forcings $U(x,\theta,\varphi,t) = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ and $J(x,\theta,\varphi,t) = J_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ with $U_2 = 0.985$ m^2.s^{-2} and $J_2 = 1.0\times10^{-2}$ m^2.s^{-3}. *Left, from top to bottom:* Amplitudes of δp, $\delta\rho$, δT, V_θ, V_φ, and V_r in logarithmic scales as functions of the reduced latitude δ/π (horizontal axis) and altitude $x = z/H$ in logarithmic scale (vertical axis). The colour function c is given by $c = \log(|\delta f|)$ for any quantity δf. *Right, from top to bottom:* Sine of the arguments of the same quantities as functions of the reduced latitude and altitude. In these plots, $c = \sin[\arg(\delta f)]$.

be much stronger in the convective case than in the stably stratified one. In the present section, we study a Venus-like planet with a stably stratified isothermal atmosphere (VenusX) in order to understand the effects of stratification and radiative losses in a general context.

The other important difference between the Earth and Venus is in their rotational dynamics. While the spin frequency of the Earth is far higher than its mean motion and the radiation frequency of its atmosphere, these three frequencies are of the same order of magnitude for Venus. Therefore, the Venusian semidiurnal thermal tide is characterized by a tidal frequency $|\sigma| \sim \sigma_0$, which is typical of the thermal regime. The term describing radiative losses in the heat transport equation (Eq. 18) plays an important role in this regime by damping the profiles

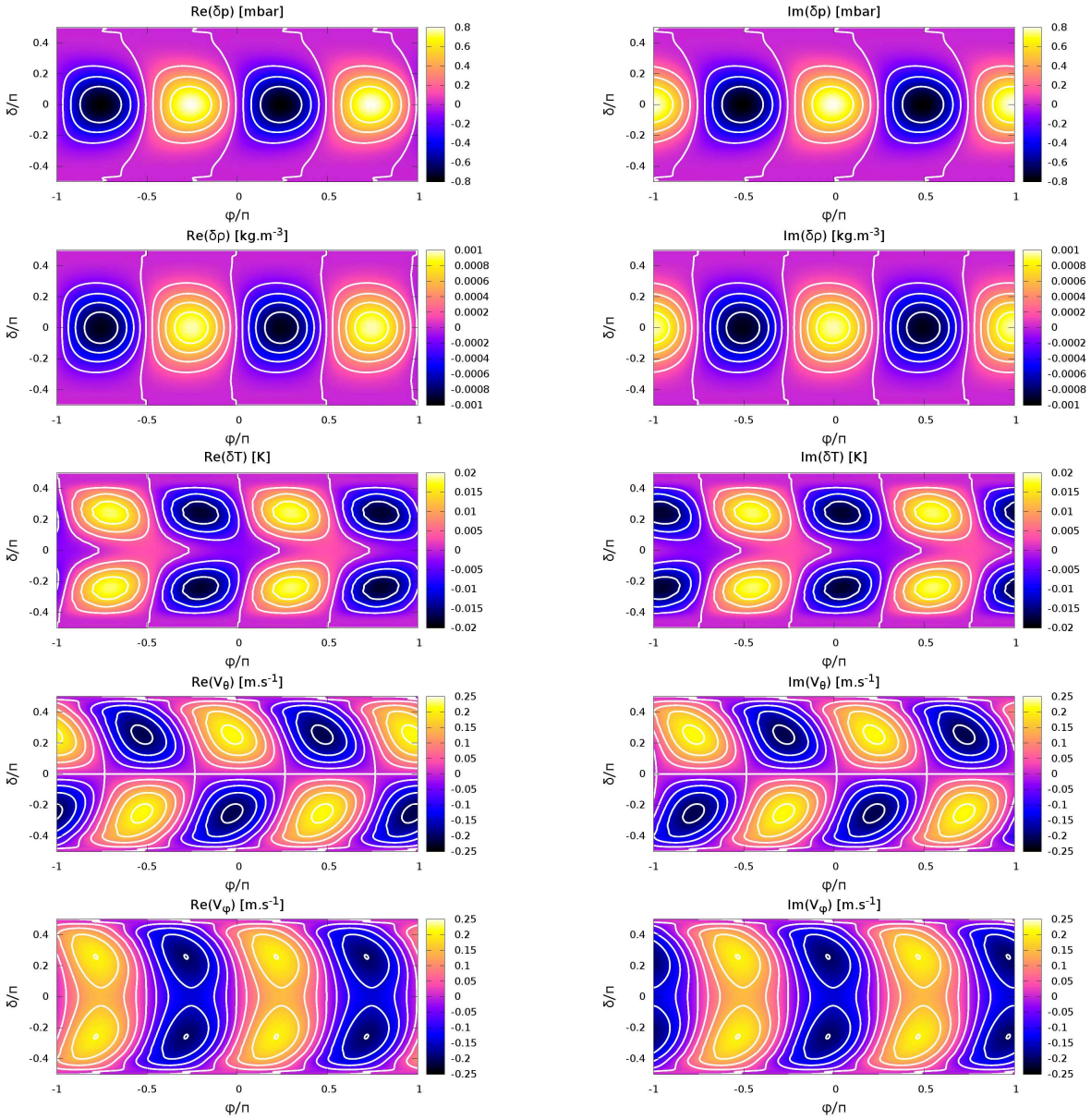


Fig. 16. Total tidal response of the Earth's atmosphere to the solar semidiurnal perturbation caused by the quadrupolar academic forcings $U(x,\theta,\varphi,t) = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ and $J(x,\theta,\varphi,t) = J_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ with $U_2 = 0.985$ m^2.s^{-2} and $J_2 = 1.0\times10^{-2}$ m^2.s^{-3}. *Left, from top to bottom:* Real parts of δp, $\delta\rho$, δT, V_θ, and V_φ taken at the ground as functions of the reduced longitude φ/π (horizontal axis) and latitude δ/π (vertical axis). The colour function c is given by $c = \Re\{\delta f\}$ for any quantity δf. *Right, from top to bottom:* Imaginary parts of the same quantities as functions of the reduced longitude and latitude. In these plots, $c = \Im\{\delta f\}$.

in altitude of the tidal response; see Fig. 5. This figure shows that the imaginary part of $\hat{k}_n$, which is responsible for the damping, is always comparable to the real part in this frequency range.

Contrary to the case of the Earth, the semidiurnal thermal tide of VenusX belongs to the family of super-inertial waves, with $\nu \approx 0.48$, which means that the horizontal component of the tidal response is composed of gravity modes only. We note that the surface variations of perturbed quantities plotted in Figure 19 are very well represented by the first mode. The patterns of the Hough functions $\Theta_0^{2,\nu}$, $\mathcal{L}_\theta^{2,\nu}\Theta_0^{2,\nu}$, and $\mathcal{L}_\varphi^{2,\nu}\Theta_0^{2,\nu}$ (see Fig. 3, red curves) clearly appear on the maps. Moreover, the lags of δp and $\delta\rho$ are different from that observed in the Earth's semidiurnal tide. In particular, it is interesting to note that the pressure and density peaks are not superposed in this case. The effect of the damping caused by radiative losses can be observed in vertical cross-sections in Fig. 18, where the variations of pressure and density are located close to the ground. Given that the real and imaginary part of the vertical wavenumber are both very high, vertical component is both strongly oscillating and strongly damped.

As was previously done for the Earth, we draw the variations of the tidal torque (Fig. 14) and perturbed quantities at the ground (Fig. 20) around the synchronization for $\chi \in [-15, 15]$. The behaviour of the torque and its components is the same as previously observed for the Earth. The maxima of horizontal and vertical components are located at $\chi = \pm\chi_{♀}$ with $\chi_{♀} < \chi_{\oplus}$ owing to the difference of mean motions between the two planets. Since the tidal torque is proportional to the surface density of the atmosphere, it is a hundred times stronger in the

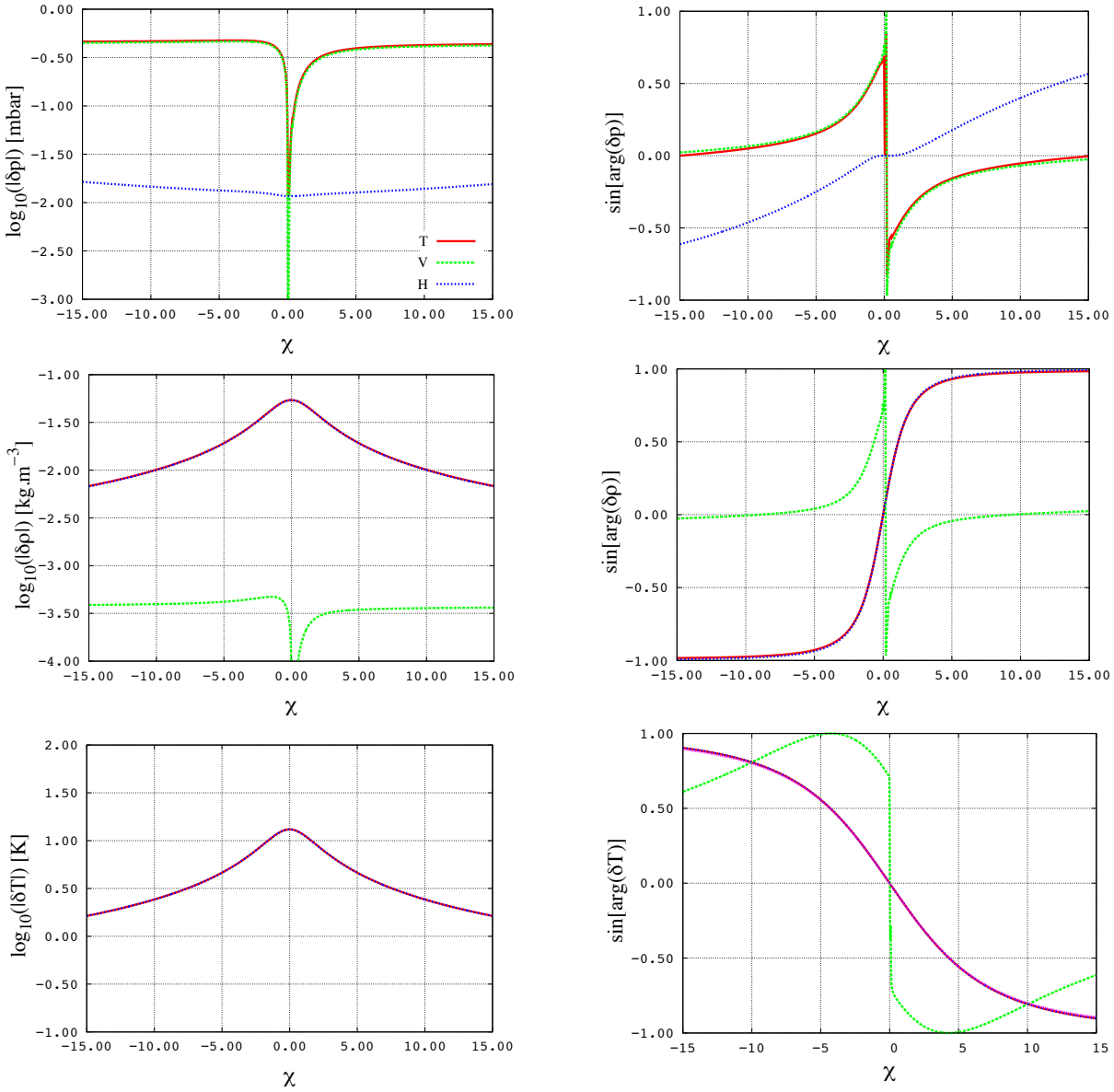


Fig. 17. Tidal surface oscillations of pressure, density, temperature, and their components at the equator of the Earth as functions of the reduced tidal frequency $\chi = (\Omega - n_{\rm orb})/n_{\rm orb}$ (horizontal axis). The perturbation is defined by the academic quadrupolar forcings $U(x,\theta,\varphi,t) = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ and $J(x,\theta,\varphi,t) = J_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ with $U_2 = 0.985$ m^2.s^{-2} and $J_2 = 1.0\times10^{-2}$ m^2.s^{-3}. Labels T, H, and V refer to the total response and its horizontal and vertical components, respectively.

case of Venus than in the case of the Earth for a given thermal forcing. This is also verified by the surface variations of the perturbed quantities, which – except for their amplitudes – are comparable to those of the Earth.

To conclude this section, we compute the timescale of the spin evolution. The Venusian semidiurnal tide is characterized by the frequency $\chi \approx -1.92$. With the moment of inertia $\mathcal{I} = 5.88\times10^{37}$ kg.m^2 (NASA fact sheets) and the horizontal component of the torque given by Fig. 14, i.e. $\mathcal{T} \sim -5\times10^{16}$ N.m, we obtain $\mathcal{T}_{\mathrm{Q}} \sim 10$ Myr. The thermal forcing corresponds approximately to the mean level of the heating profile used by Dobrovolskis & Ingersoll (1980) ($J_2 \sim 10^{-4}$ W.kg^{-1}) so the obtained torque is of the same order of magnitude as the value given by this early work, $\mathcal{T} \sim -1.8\times10^{16}$ N.m. We note here that the amplitude of the response is directly proportional to the amplitude of the excitation if one of its two components, J or U, can be neglected (Sect. 2).

6.3. Discussion of physical assumptions

We have developed a new analytic model for atmospheric tides by generalizing the classical tidal theory detailed in CL70 to dissipative atmospheres.

This work leans on several assumptions which contribute to make computations simpler. The most important of them are listed here.

- *The traditional approximation*. This hypothesis, commonly used in the literature of geophysics, is very useful because it allows us to separate the horizontal and vertical dependences in the Navier-Stokes equation. Hence, the horizontal and vertical structure can be computed separately. This

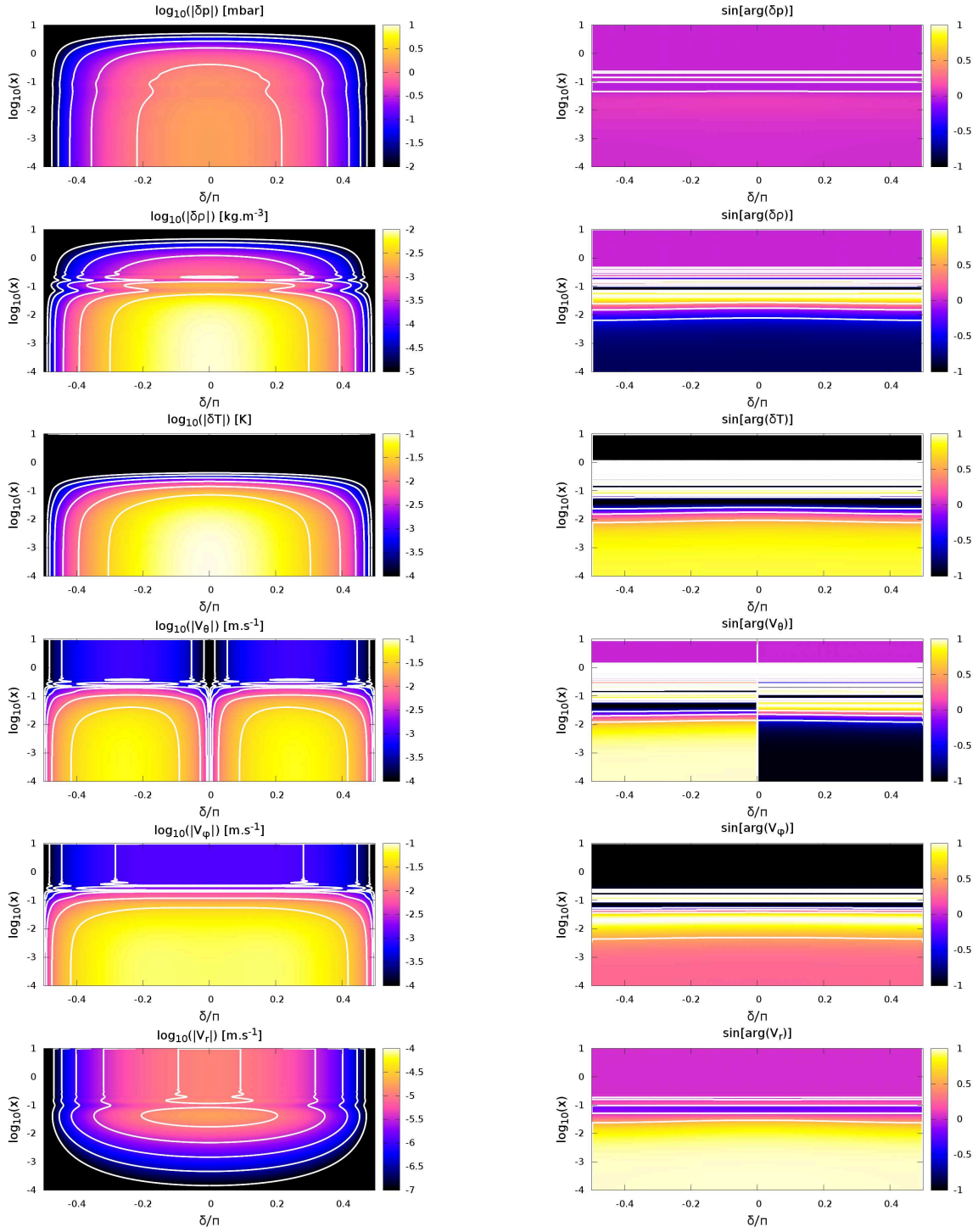


Fig. 18. Total tidal response of the atmosphere of Venus to the solar semidiurnal perturbation caused by the quadrupolar academic forcings $U(x,\theta,\varphi,t) = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ and $J(x,\theta,\varphi,t) = J_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ with $U_2 = 2.349$ m^2.s^{-2} and $J_2 = 1.0\times10^{-4}$ m^2.s^{-3}. *Left, from top to bottom:* Amplitudes of δp, $\delta\rho$, δT, V_θ, V_φ, and V_r in logarithmic scales as functions of the reduced latitude δ/π (horizontal axis) and altitude $x = z/H$ in logarithmic scale (vertical axis). The colour function c is given by $c = \log(|\delta f|)$ for any quantity δf. *Right, from top to bottom:* Sine of the arguments of the same quantities as functions of the reduced latitude and altitude. In these plots, $c = \sin[\arg(\delta f)]$.

approximation is relevant in strongly stably stratified fluids where $2\Omega < |\sigma| \ll N$, but is less appropriate if $|\sigma| \sim 2\Omega$, as discussed in Mathis (2009). Its validity domain, not well defined, remains essentially limited to the regime of super-inertial waves (Prat et al. 2016). It is represented in Fig. 21, which shows the cases that can be treated analytically (regions a and b). Concerning the importance of the neglected Coriolis terms, we refer the reader to Gerkema & Shrira (2005), who explored the physics of gravito-inertial waves without the traditional approximation (see also Tort & Dubos 2014). The traditional approximation appears to be a relatively strong hypothesis because it does not take into consideration the case of rotating convective atmospheres ($N^2 \approx 0$, e.g. Ogilvie & Lin 2004). Convection

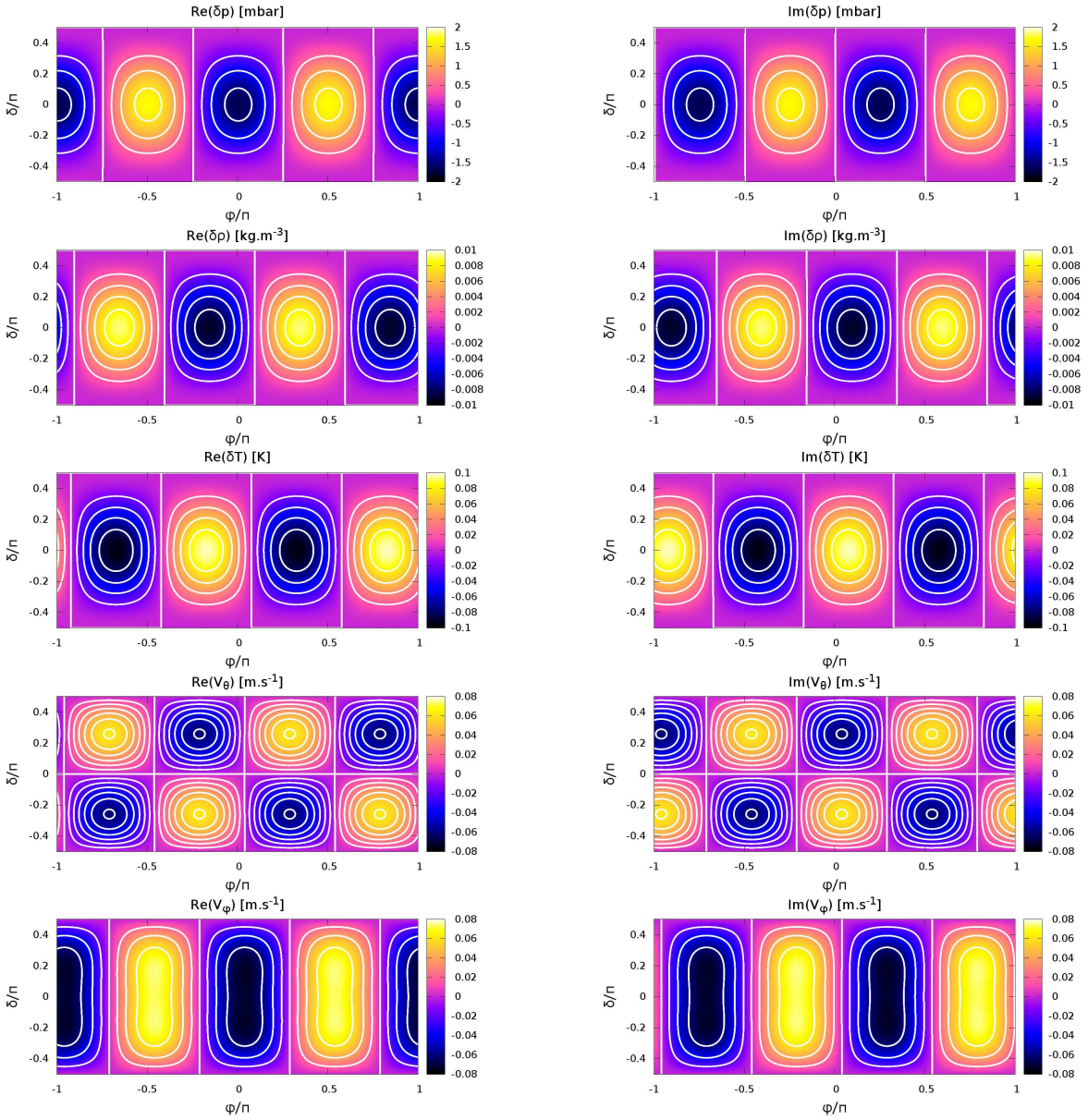


Fig. 19. Total tidal response of the atmosphere of Venus to the solar semidiurnal perturbation caused by the quadrupolar academic forcings $U(x,\theta,\varphi,t) = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ and $J(x,\theta,\varphi,t) = J_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ with $U_2 = 2.349$ m^2.s^{-2} and $J_2 = 1.0\times10^{-4}$ m^2.s^{-3}. *Left, from top to bottom:* Real parts of δp, $\delta\rho$, δT, V_θ, and V_φ taken at the ground as functions of the reduced longitude φ/π (horizontal axis) and latitude δ/π (vertical axis). The colour function c is given by $c = \Re\{\delta f\}$ for any quantity δf. *Right, from top to bottom:* Imaginary parts of the same quantities as functions of the reduced longitude and latitude. In these plots, $c = \Im\{\delta f\}$.

is an important feature of the Earth's nearly adiabatic layer (altitudes below 2 km) as well as the Venus' atmosphere (Linkin et al. 1986). It has strong implications on the propagations of waves: gravity waves cannot exist in convective layers, which may significantly modify the tidal response, particularly if the convective turnover time is close to the period of the tidal forcing. In the general case, the effect of convection on the structure of waves can be studied either numerically with GCM (Fig. 21, d) or analytically with simplified models (e.g. based on a Cartesian geometry). The only exception for a global analytical study of a convective atmosphere is the case treated in Section 4 where stable stratification and rotation are too weak to be neglected (Fig. 21, b).

- *The linearization around the equilibrium*. In Sects. 2 and 3, the equations have been linearized around the equilibrium. This method is only relevant in cases where the tidal response of the atmosphere can be considered as a small perturbation with respect to the equilibrium state. This condition is verified for the Earth and Venus.

- *The solid rotation approximation*. We assumed that the atmosphere rotates with the solid core uniformly. Thus, the atmospheric circulation (both meridional and zonal) is ignored. This approximation is justified by the fact that the most important pressure and density variations are concentrated in the densest layers, near the ground. Given that these layers are bound to the solid core by viscous friction, they rotate at the same spin frequency. However, tidal waves might interact with the mean flow in cases

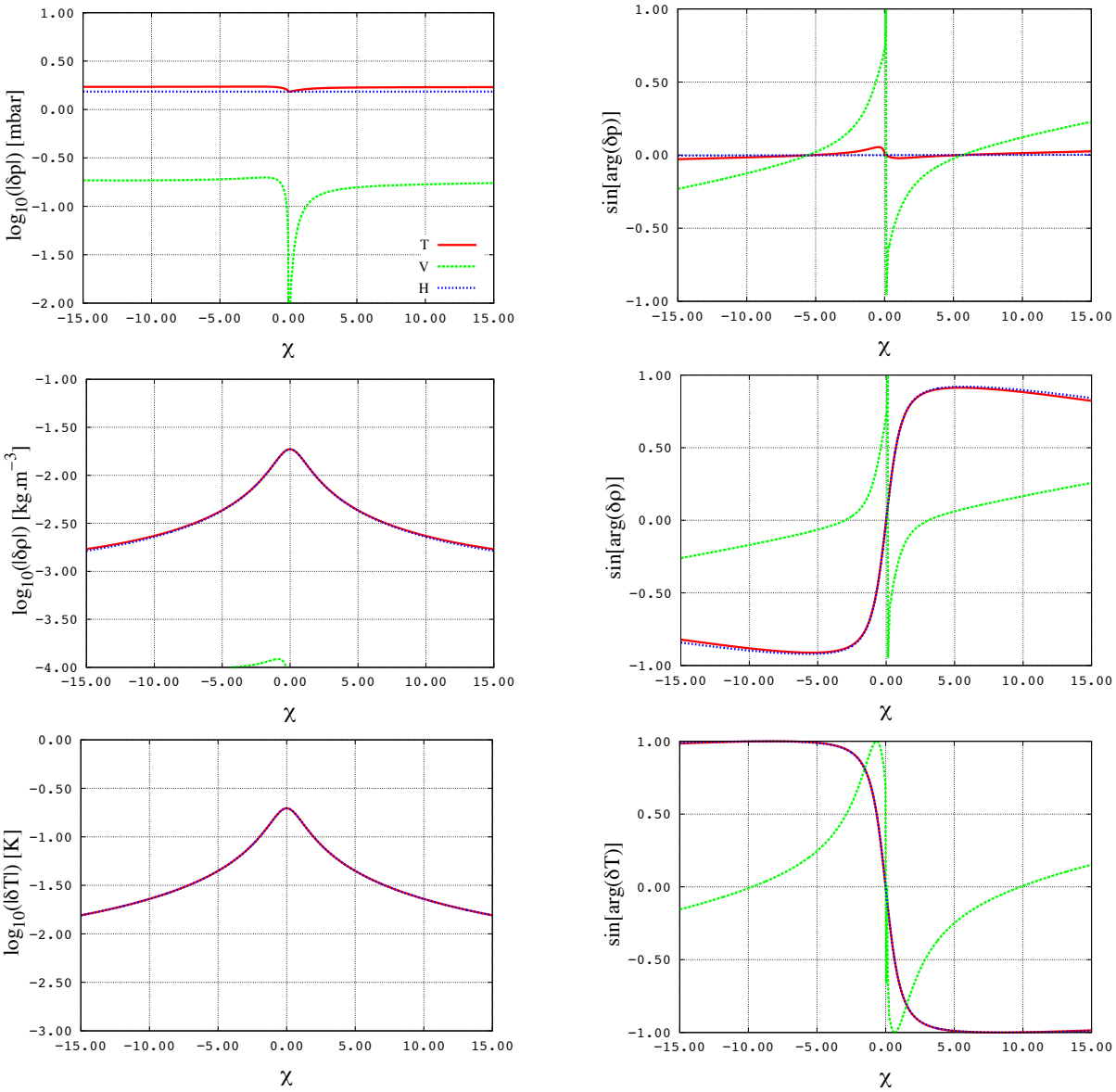


Fig. 20. Tidal surface oscillations of pressure, density, temperature, and their components at the equator of Venus as functions of the reduced tidal frequency $\chi = (\Omega - n_{\rm orb})/n_{\rm orb}$ (horizontal axis). The perturbation is defined by the academic quadrupolar forcing $U(x,\theta,\varphi,t) = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ and $J(x,\theta,\varphi,t) = J_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t+2\varphi)}$ with $U_2 = 2.349$ m^2.s^{-2} and $J_2 = 1.0 \times 10^{-4}$ m^2.s^{-3}. Labels T, H, and V refer to the total response and its horizontal and vertical components, respectively.

where $\sigma \approx 0$ (Goldreich & Nicholson 1989) and it will be interesting to take into account the global atmospheric circulation in further works, as is done in GCM simulations.

- *The use of simplified atmospheric vertical structures*. In order to lighten calculations, we considered the cases of uniform background temperature (isothermal stably stratified atmosphere) and temperature gradient (convective atmosphere), and supposed that some parameters, such as σ_0, do not vary with altitude. These simplified structures are a first step towards more sophisticated ones. Owing to the importance of the stratification in the tidal response, it will be necessary to treat the cases of observed structures in future works, for instance those of the atmospheres of Earth, Venus, and Mars.

- *The optically thin layer hypothesis*. Radiative processes are introduced in the dynamics of atmospheric tides through Newtonian cooling. The linear dependence of the corresponding radiative term on the temperature perturbation can be interpreted as an optically thin layer approximation. Indeed, this term corresponds to the thermal behaviour of an atmosphere that would emit grey body radiation towards space and the planet surface. Actually, the flux emitted is partly absorbed by the atmosphere itself, which induces a complex thermal coupling between the different layers of the atmosphere. This is true particularly for optically thick atmospheres. In these cases, the Newtonian cooling should be seen as a convenient approximation of thermal radiation for an analytical approach where the dissipative processes cannot be treated without approximations. This approach seems to be well validated by numerical simulations using GCM (Leconte et al. 2015).

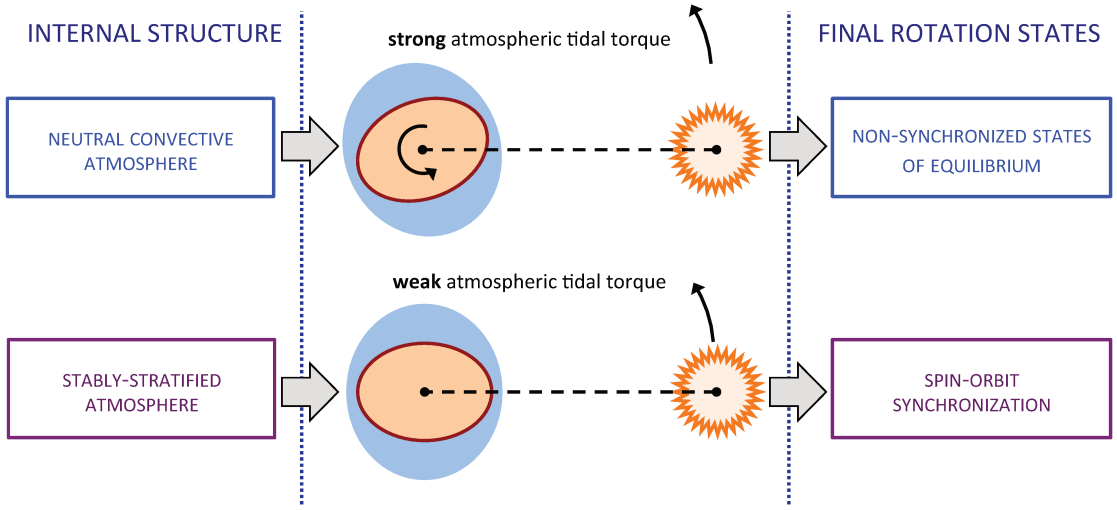


Fig. 22. Predictive aspects related to the dependence of the atmospheric tidal torque on stratification. The neutral convective case implies a strong torque, which can lead to non-synchronized states of equilibrium. The stably stratified case implies a weak torque, which lets the planet evolve towards spin-orbit synchronization.

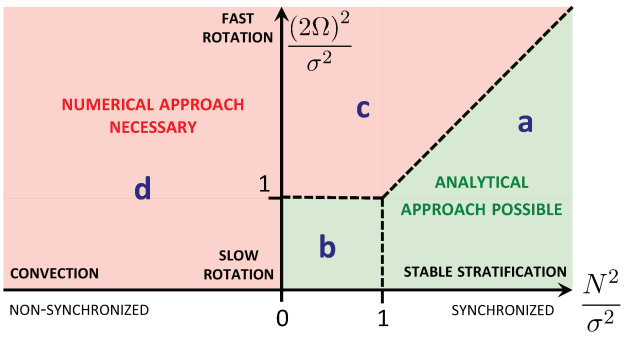


Fig. 21. Asymptotic domains of parameters where the analytical approach presented in this work can be applied (green) and where the numerical approach is necessary (red) as functions of the frequency ratios N^2/σ^2 (horizontal axis) and $(2\Omega)^2/\sigma^2$ (vertical axis). Green regions: stably stratified atmospheres satisfying the hierarchy of frequencies $(2\Omega)^2 \ll N^2$ necessary to apply the traditional approximation (**a**); weakly stratified or convective atmospheres of slowly rotating planets (**b**). Red regions: stably stratified atmospheres where the hierarchy of frequencies $(2\Omega)^2 \ll N^2$ is not satisfied (**c**); super-adiabatic rotating convective atmospheres (**d**).

7. Conclusions

We have set the bases of a new theoretical framework to study the atmospheric tides of Earth-like exoplanets analytically. This work is complementary to numerical simulations. The main objective is to explain the qualitative behaviour of an atmosphere submitted to both thermal and gravitational tidal perturbations and to explore the domain of key physical parameters. The parameters highlighted by the model are

- the characteristic frequencies of the system (e.g. inertia, Brunt-Väisälä, radiative, boundary layer, tidal frequencies);
- the involved characteristic length scales (e.g. planetary radius, pressure height scale of the atmosphere, length scales of the vertical variations of tidal waves);
- the physical parameters of the planet (e.g. the molar mass of the atmosphere, the adiabatic exponent, the surface gravity, the surface pressure).

Using the equations of hydrodynamics, we have adapted the theoretical approach detailed in CL70 to thick dissipative atmospheric shells. We computed the analytic expressions of the horizontal and vertical structure equations, of the perturbed quantities (pressure, density, temperature, velocity, displacement), and of Love numbers and tidal torques exerted on the atmosphere. These expressions have been used to identify the possible regimes of atmospheric tides: a non-dissipative Earth-like dynamical regime characterizing fast rotating bodies, and a dissipative Venus-like thermal regime for planets near synchronization. The behaviours involved in the two cases are very different. The dynamical regime corresponds to the case studied by CL70. In this regime, tidal waves are either oscillating or evanescent depending of the equivalent depth (h_n) associated with the mode. In the radiative regime, they are oscillating and evanescent, and the perturbation can be strongly damped.

The tidal response of the atmosphere will also be affected by the nature of the tidal excitation. A predominating thermal forcing generates thermal tides. On the contrary, if the thermal energy brought to the fluid layer is negligible compared to the effect of the tidal gravitational potential, the perturbation belongs to the family of gravitational tides. This case has not been studied in this work, but the vertical structure equation and polarization relations of the model clearly attest to behaviour that is qualitatively different from that observed for thermal tides. Finally, the tidal response of the atmospheric shell is obviously affected by lower and upper boundary conditions. We showed for instance that a stress-free condition and a no-material-escape condition would not give the same vertical profiles of the perturbation. Similarly, the ground may affect temperature oscillations by introducing a delayed thermal forcing locally.

Finally, the results obtained for the tidal torque are in agreement with the GCM simulations by Leconte et al. (2015). This torque appears to be strongly dependent both on the tidal fre-

quency and on the atmospheric structure (Fig. 22). In the case of a stably stratified atmosphere, the tidal bulge vanishes at the vicinity of synchronization. As a consequence, the tidal torque exerted on the atmosphere is very weak and cannot balance the solid tidal torque, which should lead the planet to synchronization. On the contrary, if the stable stratification is sufficiently weak (weakly stratified or convective atmosphere), the atmospheric tidal torque can be strong. In this case we recover the Maxwellian behaviour obtained numerically by Leconte et al. (2015) and described by the early model of Correia & Laskar (2001). This would lead planets to non-synchronized states. These results highlight the predictive interest of the modelling of atmospheric tides by showing that it is possible to constrain the atmospheric structure of terrestrial planets from their rotation states of equilibrium.

Acknowledgements. We thank the anonymous referee for comments that helped to improve the paper. We thank Richard Lindzen for the very interesting discussions we had about the analytic modelling of the Earth's atmospheric tides. We are also very grateful to Umin Lee for his help in understanding how to compute Hough functions efficiently. Finally, we thank Jeremy Leconte, who shared with us his helpful approach to the physical modelling of super-Earth atmospheres from the point of view of numerical simulations. P. Auclair-Desrotour and S. Mathis acknowledge funding by the European Research Council through ERC grant SPIRE 647383. This work was also supported by the Programme National de Planétologie (CNRS/INSU) and CoRoT/Kepler and PLATO CNES grant at CEA-Saclay.

References

Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1972, Handbook of Mathematical Functions
Arras, P. & Socrates, A. 2010, ApJ, 714, 1
Auclair Desrotour, P., Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2015, A&A, 581, A118
Avduevsky, V. S., Marov, M. Y., Noykina, A. I., Polezhaev, V. I., & Zavelevich, F. S. 1970, Journal of Atmospheric Sciences, 27, 569
Baker, R. D., Schubert, G., & Jones, P. W. 2000, Journal of Atmospheric Sciences, 57, 184
Beer. 1852, Annalen der Physik, 162, 78
Bernard, E. A. 1962, Archives for Meteorology Geophysics and Bioclimatology Series A Meteorology and Atmopsheric Physics, 12, 502
Bouguer, P. 1729, Essai d'Optique sur la gradation de la Lumiere
Bruce, G. H., Peaceman, D., Rachford Jr, H., Rice, J., et al. 1953, Journal of Petroleum Technology, 5, 79
Chapman, S. & Lindzen, R. 1970, Atmospheric tides. Thermal and gravitational
Correia, A. C. M., Boué, G., Laskar, J., & Rodríguez, A. 2014, A&A, 571, A50
Correia, A. C. M. & Laskar, J. 2001, Nature, 411, 767
Correia, A. C. M. & Laskar, J. 2003, Journal of Geophysical Research (Planets), 108, 5123
Correia, A. C. M., Laskar, J., & de Surgy, O. N. 2003, Icarus, 163, 1
Correia, A. C. M., Levrard, B., & Laskar, J. 2008, A&A, 488, L63
Covey, C., Dai, A., Marsh, D. R., & Lindzen, R. S. 2009, AGU Fall Meeting Abstracts
Cowling, T. G. 1941, MNRAS, 101, 367
Dickinson, R. E. & Geller, M. A. 1968, Journal of Atmospheric Sciences, 25, 932
Dobrovolskis, A. R. & Ingersoll, A. P. 1980, Icarus, 41, 1
Eckart, C. 1960, Physics of Fluids, 3, 421
Efroimsky, M. & Lainey, V. 2007, Journal of Geophysical Research (Planets), 112, 12003
Egbert, G. D. & Ray, R. D. 2000, Nature, 405, 775
Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Steffen, J. H., et al. 2012, ApJ, 750, 114
Gastineau, M. & Laskar, J. 2014, TRIP 1.3.8, TRIP Reference manual, IMCCE, Paris Observatory, http://www.imcce.fr/trip/
Gerkema, T. & Shrira, V. I. 2005, Journal of Fluid Mechanics, 529, 195
Gerkema, T. & Zimmerman, J. 2008, Lecture Notes, Royal NIOZ, Texel
Gold, T. & Soter, S. 1969, Icarus, 11, 356
Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1989, ApJ, 342, 1075
Goldreich, P. & Soter, S. 1966, Icarus, 5, 375
Green, J. 1965in , The Royal Society, 564–574
Greenberg, R. 2009, ApJ, 698, L42
Hagan, M., Forbes, J., & Richmond, A. 2003, Encyclopedia of Atmospheric Sciences, 1, 159
Haurwitz, B. 1965, Archives for Meteorology Geophysics and Bioclimatology Series A Meteorology and Atmopsheric Physics, 14, 361
Henning, W. G., O'Connell, R. J., & Sasselov, D. D. 2009, ApJ, 707, 1000
Hough, S. S. 1898, Royal Society of London Philosophical Transactions Series A, 191, 139
Hut, P. 1980, A&A, 92, 167
Hut, P. 1981, A&A, 99, 126
Ingersoll, A. P. & Dobrovolskis, A. R. 1978, Nature, 275, 37
Ioannou, P. J. & Lindzen, R. S. 1993a, ApJ, 406, 252
Ioannou, P. J. & Lindzen, R. S. 1993b, ApJ, 406, 266
Ioannou, P. J. & Lindzen, R. S. 1994, ApJ, 424, 1005
Kato, S. 1966, J. Geophys. Res., 71, 3201
Kaula, W. M. 1962, AJ, 67, 300
Kaula, W. M. 1964, Reviews of Geophysics and Space Physics, 2, 661
Kelvin, L. 1863, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Treatise on Natural Philosophy, 2, 837
Kelvin, L. 1882, Proc. Roy. Soc. Edinb., 11, 396
Klett, Witwe, E., Detleffsen, Peter, C., et al. 1760, IH Lambert... Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae (sumptibus viduae Eberhardi Klett)
Konopliv, A. S. & Yoder, C. F. 1996, Geophys. Res. Lett., 23, 1857
Lacis, A. A. 1975, Journal of Atmospheric Sciences, 32, 1107
Lainey, V., Dehant, V., & Pätzold, M. 2007, A&A, 465, 1075
Lamb, H. 1911, Royal Society of London Proceedings Series A, 84, 551
Lamb, H. 1932, Hydrodynamics
Laplace, P. S. 1798, Traité de mécanique céleste (Duprat J. B. M.)
Leconte, J., Wu, H., Menou, K., & Murray, N. 2015, Science, 347, 632
Lee, U. & Saio, H. 1997, ApJ, 491, 839
Lighthill, J. 1978, Waves in fluids
Lindzen, R. S. 1966, Monthly Weather Review, 94, 295
Lindzen, R. S. 1967a, Nature, 215, 1260
Lindzen, R. S. 1967b, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 93, 18
Lindzen, R. S. 1968, Royal Society of London Proceedings Series A, 303, 299
Lindzen, R. S. & McKenzie, D. J. 1967, Pure and Applied Geophysics, 66, 90
Linkin, V. M., Kerzhanovich, V. V., Lipatov, A. N., et al. 1986, Science, 231, 1417
Longuet-Higgins, M. S. 1968, Royal Society of London Philosophical Transactions Series A, 262, 511
Love, A. E. H. 1911, Some Problems of Geodynamics (Cambridge University Press)
Marov, M. Y., Avduevskij, V. S., Kerzhanovich, V. V., et al. 1973, Journal of Atmospheric Sciences, 30, 1210
Mathis, S. 2009, A&A, 506, 811
Mathis, S. & Le Poncin-Lafitte, C. 2009, A&A, 497, 889
Mathis, S., Talon, S., Pantillon, F.-P., & Zahn, J.-P. 2008, Sol. Phys., 251, 101
Mayor, M. & Queloz, D. 1995, Nature, 378, 355
Mignard, F. 1979, Moon and Planets, 20, 301
Mignard, F. 1980, Moon and Planets, 23, 185
Mohr, P. J., Taylor, B. N., & Newell, D. B. 2012, Journal of Physical and Chemical Reference Data, 41, 043109
Neron de Surgy, O. & Laskar, J. 1997, A&A, 318, 975
Ogilvie, G. I. 2014, ARA&A, 52, 171
Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2004, ApJ, 610, 477
Pekeris, C. L. 1937, Royal Society of London Proceedings Series A, 158, 650
Perryman, M. 2011, The Exoplanet Handbook (Cambridge University Press)
Planck, M. 1901, Annalen der Physik, 309, 553
Pollack, J. B. & Young, R. 1975, Journal of Atmospheric Sciences, 32, 1025
Prat, V., Lignières, F., & Ballot, J. 2016, Astronomy & Astrophysics, 587, A110
Press, W. H. 1981, ApJ, 245, 286
Press, W. H., Flannery, B. P., & Teukolsky, S. A. 1986, Numerical recipes. The art of scientific computing
Ray, R. D., Eanes, R. J., & Lemoine, F. G. 2001, Geophysical Journal International, 144, 471
Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P., & Lainey, V. 2012, A&A, 541, A165
Rossby, C.-G. et al. 1939, Journal of Marine Research, 2, 38
Seiff, A., Kirk, D. B., Young, R. E., et al. 1980, Journal of Geophysical Research: Space Physics, 85, 7903
Shen, M. & Zhang, C. Z. 1990, Icarus, 85, 129
Siebert, M. 1961, Advances in Geophysics, 7, 105
Taylor, G. I. 1929, Royal Society of London Proceedings Series A, 126, 169
Taylor, G. I. 1936, Royal Society of London Proceedings Series A, 156, 318
Tort, M. & Dubos, T. 2014, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 140, 2388
Townsend, R. H. D. 2003, MNRAS, 340, 1020
Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, Nonradial oscillations of stars
Webb, D. J. 1980, Geophysical Journal, 61, 573
White, A. A., Hoskins, B. J., Roulstone, I., & Staniforth, A. 2005, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 131, 2081
Wilkes, M. V. 1949, Oscillations of the Earth's Atmosphere (University Press Cambridge)
Williams, J. G., Konopliv, A. S., Boggs, D. H., et al. 2014, Journal of Geophysical Research (Planets), 119, 1546
Zahn, J. P. 1966, Annales d'Astrophysique, 29, 313
Zahn, J.-P., Talon, S., & Matias, J. 1997, A&A, 322, 320

Appendix A: Hough functions

Hough functions, named for Hough's initial work (Hough 1898), are the solutions of Eq. (35) integrated as an eigenvalue problem of $\Lambda_n^{m,\nu}$ with appropriate boundary conditions (Longuet-Higgins 1968; Chapman & Lindzen 1970; Lee & Saio 1997). It is possible to compute these functions in several ways. Here, we present two possible approaches: the finite differences method proposed in the *Numerical recipes* (Press et al. 1986) and detailed in Lee & Saio (1997), and a spectral method developed from the works of Hough (1898), Longuet-Higgins (1968), and Chapman & Lindzen (1970).

Appendix A.1: Finite differences method

The operator $\mathcal{L}^{m,\nu}$ of Eq. (30) writes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{m,\nu} \equiv \quad & \frac{d}{d\mu}\left[\frac{1-\mu^2}{1-\mu^2\nu^2}\frac{d}{d\mu}\right] \\ & -\frac{1}{1-\mu^2\nu^2}\left(\frac{m^2}{1-\mu^2}+m\nu\frac{1+\mu^2\nu^2}{1-\mu^2\nu^2}\right),\end{aligned} \tag{A.1}$$

where $\mu = \cos\theta$. The new Laplacian tidal equation is not modified when μ is replaced by $-\mu$. Therefore, the domain over which this equation is integrated can be reduced to $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Like the associated Legendre polynomials, the solutions are either even or odd with respect to the equatorial plane $\mu = 0$. The even solutions satisfy $\Theta_n^{m,\nu}(-\mu) = \Theta_n^{m,\nu}(\mu)$, the odd solutions $\Theta_n^{m,\nu}(-\mu) = -\Theta_n^{m,\nu}(\mu)$. For the sake of simplicity, the parity of the subscript used in the notations corresponds to the parity of the associated function. The solutions belonging to one of these two families are all defined by the boundary condition applied at $\mu = 0$: $d\Theta_n^{m,\nu}/d\mu = 0$ for even solutions and $\Theta_n^{m,\nu} = 0$ for odd solutions. The operator $\mathcal{L}^{m,\nu}$ has two regular singular points, a permanent one at $\mu = 1$ and another one at $\mu = 1/|\nu|$ in the sub-inertial regime, characterized by $|\nu| > 1$ and, therefore, depending on the spin parameter. Both are sources of numerical difficulties. To tackle the problem of the singular point at $\mu = 1$, we introduce the variable $y(\mu)$ defined by Press et al. (1986) and Lee & Saio (1997):

$$\Theta_n^{m,\nu}(\mu) = \left(1-\mu^2\right)^{|m|/2} y(\mu). \tag{A.2}$$

Laplace's tidal equation becomes

$$\frac{d^2y}{d\mu} + \mathcal{P}\frac{dy}{d\mu} + \mathcal{Q}y = 0, \tag{A.3}$$

where

$$\left\{\begin{aligned}\mathcal{P} = \quad & 2\mu\left(\frac{\nu^2}{1-\mu^2\nu^2}-\frac{1+|m|}{1-\mu^2}\right), \\ \mathcal{Q} = \quad & \frac{1}{1-\mu^2}\left[\Lambda_n^{m,\nu}\left(1-\mu^2\nu^2\right)-|m|-m^2\right. \\ & \left.-\frac{2|m|\mu^2\nu^2+m\nu\left(1+\mu^2\nu^2\right)}{1-\mu^2\nu^2}\right].\end{aligned}\right. \tag{A.4}$$

The boundary condition applied at $\mu = 0$ depends on the parity of the sought solution, i.e. $dy/d\mu = 0$ at the equator for even modes and $y = 0$ for odd modes. We also apply at $\mu = 0$ the normalization condition $y = 1$ for even modes and $dy/d\mu = 1$ for odd modes. Since $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ are not defined at $\mu = 1$, the boundary condition at the poles is applied at $\mu = 1-\epsilon$, where $0 < \epsilon \ll 1$. This condition is derived from the Sturm-Liouville theory, which requires that $\Theta_n^{m,\nu}$ should be regular at $\mu = 1$, and is given explicitly by $\left(1-\mu^2\right)\mathcal{P}dy/d\mu + \left(1-\mu^2\right)\mathcal{Q}y = 0$ (see Lee & Saio 1997).

In order to solve Eq. (A.3) numerically, the domain is discretized. Hence, the equation is reduced to a linear system of dimension $N_S = 2N$, where N is the number of elements of the mesh. In the regime of sub-inertial waves, the singular point at $\mu = 1/|\nu|$ corresponds to a turning point, in the vicinity of which the resolution of the mesh must be sufficiently high. Lee & Saio (1997) showed that a regular solution could be locally expanded in series of the form $y = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j$, where $x = \mu - 1/|\nu|$, and satisfying the condition

$$a_1 + \frac{|\nu|\left(|m|+m\nu\right)}{1-\nu^2}a_0 = 0. \tag{A.5}$$

This allows us to compute the solution properly in the sub-inertial regime. To construct the set of Hough functions, we use as predictors the asymptotic results given by Longuet-Higgins (1968) and Townsend (2003). Two types of modes can be identified.

The modes of the first type, called gravity modes, are defined for $\nu \in \mathbb{R}$ and are characterized by positive eigenvalues (Fig. A.1, top panel). In the non-rotating case, where $\nu = 0$, they correspond to the associated Legendre polynomials (Fig. A.1, bottom panel). The gravity modes of Hough functions are ordered with positive n, by analogy with this particular case, for which the degrees l of Legendre polynomials are given by $l = |m| + n$. In the asymptotic cases where $|\nu| \to +\infty$, analytic solutions using Hermite polynomials can be computed (Townsend 2003). In the sub-inertial regime, the oscillations of gravity modes are trapped in an equatorial belt in the interval given by $0 \leqslant \mu \leqslant 1/|\nu|$ (see Fig. A.2). This explains why these modes are not well represented by associated Legendre polynomials for high values of $|\nu|$.

The modes of the second type have various denominations in literature (see Longuet-Higgins 1968). We call them Rossby waves in reference to the early studies by Rossby et al. (1939). These modes are defined for $|\nu| > 1$ only. Most of them are characterized by negative $\Lambda_n^{m,\nu}$ and are identified in this work by subscripts $n < 0$, e.g. $\Lambda_{-1} \geqslant \Lambda_{-2} \geqslant \Lambda_{-3} \geqslant \ldots$, the parity of n corresponding to the parity of the associated function. Longuet-Higgins (1968) established the analytic expressions of the functions in the vicinity of the boundaries $\nu = \pm 1$ using Laguerre polynomials. In contrast with gravity modes, the oscillations of Rossby modes are concentrated around the poles in a region defined by $0 \leqslant \mu \leqslant 1/|\nu|$. As pointed out by Lindzen (1966), Rossby modes have to be taken into account in the regime of sub-inertial waves, otherwise the set of eingenfunctions is not complete.

In Fig. (A.1), we can observe that the eigenvalues ($\Lambda_n^{m,\nu}$) strongly depend on the spin parameter. This dependence will affect the propagation of tidal waves along the vertical direction through their vertical wavenumbers. In addition, the Coriolis acceleration induces a dissymmetry between prograde ($\nu < 0$) and

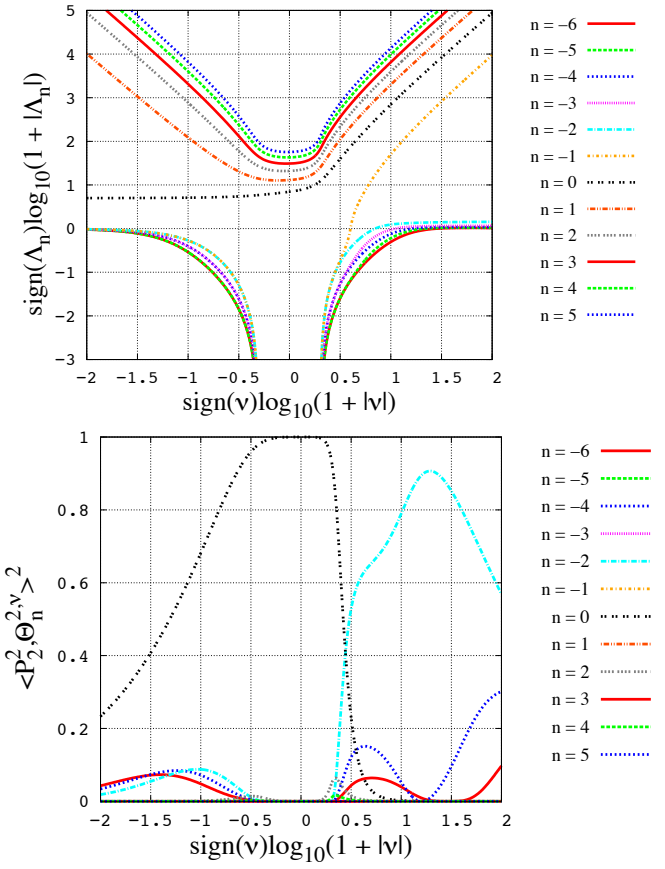


Fig. A.1. *Top:* Eigenvalues ($\Lambda_n^{m,\nu}$) of the gravity and Rossby modes of lowest degrees ($-6 \leqslant n \leqslant 5$) as functions of the spin parameter (ν). The horizontal axis represents the function of ν given by $\mathrm{sign}\,(\nu)\log(1+|\nu|)$, and the vertical axis the function of $\Lambda_n^{m,\nu}$ given by $\mathrm{sign}\,(\Lambda_n^{m,\nu})\log(1+|\Lambda_n^{m,\nu}|)$. *Bottom:* Projection coefficients $c_{2,n,2} = \langle P_2^2, \Theta_n^{2,\nu}\rangle^2$ of the normalized Legendre polynomial P_2^2 on normalized Hough functions associated with these modes as functions of the spin parameter (see Eq. 70).

retrograde ($\nu > 0$) modes. Particularly, the gravity mode of lowest degree present two different asymptotic behaviours in the sub-inertial regime. The projection of the associated Legendre polynomial P_2^2, which is representative of the semidiurnal tidal forcing, is also directly related to ν. We retrieve for $\langle P_2^2, \Theta_n^{2,\nu}\rangle$ the dissymmetry observed for the eigenvalues and note that the variations of the decomposition with ν are not simple to describe. In the present study, this decomposition is computed numerically with the spectral method presented below.

Appendix A.2: Spectral method

The early studies by Longuet-Higgins (1968) and CL70 provide a detailed theoretical approach of Hough functions and present the very powerful general method introduced by Hough (1898) to compute the eigenvalues and eigenvectors of $\mathcal{L}^{m,\nu}$. In this method, which is not detailed here, Hough functions are expanded in series of normalized associated Legendre polynomials (Abramowitz & Stegun 1972). In the previous subsection, Eq. (A.1) highlights the symmetry between the two parameters defining these functions, m and ν. Hence, for $m > 0$ and $\nu \in \mathbb{R}$,

$$\Theta_n^{-m,\nu} = \Theta_n^{m,-\nu} \quad \text{and} \quad \Lambda_n^{-m,\nu} = \Lambda_n^{m,-\nu}. \tag{A.6}$$

Therefore, Hough functions and eigenvalues for $m < 0$ are readily deduced from those obtained for $m > 0$. This allows us to write

$$\Theta_n^{s,\nu}(\theta) = \sum_{k=s}^{\infty} C_{n,k}^{s,\nu} P_k^s(\cos\theta), \tag{A.7}$$

where $s = |m|$. A first possible way to compute the coefficients $C_{n,k}^{s,\nu}$ and eigenvalues $\Lambda_n^{s,\nu}$, described by CL70, consists in finding the roots of a high-degree polynomial (typically, the degree N of this polynomial corresponds to the number of coefficients of the series given by Eq. A.7). With the current computing resources, $N = 500$ can be reached easily. However, this method rapidly becomes tricky to apply beyond $N \sim 500$ because of very large polynomial coefficients. Since the size of the $\Lambda_n^{s,\nu}$ range depends on N, this can limit the number of gravity modes or Rossby modes found. For instance, in the case of the Earth's semidiurnal tide, where ν is very close to 1, the first Rossby modes are characterized by strongly negative eigenvalues. Therefore, only a few functions of this type can be computed. To address this issue, the previous problem may be written as an explicit eigenvalue problem. Hence, following Hough (1898) and CL70, we expand the non-normalized Hough functions $\tilde{\Theta}_n^{s,\nu}$ in non-normalized associated Legendre Polynomials, denoted $\tilde{P}_k^s$:

$$\tilde{\Theta}_n^{s,\nu} = \sum_{k=s}^{\infty} A_{n,k}^{s,\nu} \tilde{P}_k^s(\mu). \tag{A.8}$$

To lighten the expressions, the $A_{n,k}^{s,\nu}$ are simply denoted A_k^s in the following analytic development. Let us introduce $X = 1/\left(\nu^2\Lambda\right)$ and the coefficients

$$\begin{aligned}
K_k &= \frac{k-s}{(2k-1)\left[k(k-1)-s\nu\right]}, & L_k &= \frac{k-s-1}{2k-3},\\
M_k &= \frac{(k-1)^2(k+s)}{k^2(2k+1)}, & N_k &= \frac{k(k+1)-s\nu}{\nu^2k^2(k+1)^2},\\
S_k &= \frac{k+s+1}{(2k+3)\left[(k+1)(k+2)-s\nu\right]}, & U_k &= \frac{k+s+2}{2k+5},\\
T_k &= \frac{(k+2)^2(k-s+1)}{(k+1)^2(2k+1)}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Hough (1898) demonstrated the following equation, which corresponds to Eq. (60) in CL70

$$XA_k^s = R_kA_k^s + Q_kA_{k-2}^s + P_kA_{k+2}^s \tag{A.10}$$

with

$$\begin{aligned}
P_k &= -S_kU_k,\\
Q_k &= -K_kL_k,\\
R_k &= N_k - K_kM_k - S_kT_k.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

The system of equations then reduces to the two eigenvalue problems

$$X \begin{bmatrix} A_s^s \\ A_{s+2}^s \\ A_{s+4}^s \\ \vdots \\ A_{s+2p}^s \\ \vdots \end{bmatrix} = \Pi_{\text{even}} \begin{bmatrix} A_s^s \\ A_{s+2}^s \\ A_{s+4}^s \\ \vdots \\ A_{s+2p}^s \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{A.12}$$

and

$$X \begin{bmatrix} A_{s+1}^s \\ A_{s+3}^s \\ A_{s+5}^s \\ \vdots \\ A_{s+2p+1}^s \\ \vdots \end{bmatrix} = \Pi_{\text{odd}} \begin{bmatrix} A_{s+1}^s \\ A_{s+3}^s \\ A_{s+5}^s \\ \vdots \\ A_{s+2p+1}^s \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{A.13}$$

with the matrices

$$\Pi_{\text{even}} = \begin{bmatrix} R_s & P_s & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ Q_{s+2} & R_{s+2} & P_{s+2} & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & Q_{s+4} & R_{s+4} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & P_{s+2p-2} & \cdots \\ 0 & & & Q_{s+2p} & R_{s+2p} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & & \end{bmatrix}, \tag{A.14}$$

$$\Pi_{\text{odd}} = \begin{bmatrix} R_{s+1} & P_{s+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ Q_{s+3} & R_{s+3} & P_{s+3} & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & Q_{s+5} & R_{s+5} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & P_{s+2p-1} & \cdots \\ 0 & & & Q_{s+2p+1} & R_{s+2p+1} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & & \end{bmatrix}. \tag{A.15}$$

They are solved numerically by linear algebra algorithms with great efficiency. For example, the case $N = 1000$ is computed on a laptop instantaneously. To make the comparison with Lee & Saio (1997) easier (see the previous subsection), we set $\Theta_n^{s,\nu} > 0$ at the equatorial point ($\theta = \pi/2$) for even solutions and $d\Theta_n^{s,\nu}/d\theta < 0$ for odd solutions. Hence, the coefficients of Eq. (A.7) are explicitly given by

$$C_{n,k}^{s,\nu} = \mathcal{S}_n^{s,\nu} \frac{\sqrt{\frac{2(k+s)!}{(2k+1)(k-s)!}} A_{n,k}^{s,\nu}}{\sqrt{\sum_{j=s}^{+\infty} \frac{2(j+s)!}{(2j+1)(j-s)!} \left(A_{n,j}^{s,\nu}\right)^2}}, \tag{A.16}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^{s,\nu} &= \text{sign}\left\{\tilde{\Theta}_n^{s,\nu}\left(\theta = \tfrac{\pi}{2}\right)\right\} \qquad \text{for even values of } n, \\ \mathcal{S}_n^{s,\nu} &= -\text{sign}\left\{\left.\frac{d\tilde{\Theta}_n^{s,\nu}}{d\theta}\right|_{\theta=\pi/2}\right\} \qquad \text{for odd values of } n. \end{aligned} \tag{A.17}$$

The solutions and projection matrices given by the spectral method are plotted in Figs. 2, 3, A.2, A.3. In the super-inertial regime ($|\nu| \leqslant 1$), the Hough functions basis is composed of gravity modes alone. Therefore, the projection matrix is a band-matrix. In this regime Hough functions are very similar to the associated Legendre polynomials. In the case $\nu = 0$ (top left), the bases are exactly the same and the projection matrix is diagonal.

The sub-inertial regime is characterized by modes of both types, the transition being identified by Hough functions of the lowest degrees: Rossby modes on the left of the map (lowest eigenvalues) and gravity modes on the right (highest eigenvalues). The maps reveal the side effect inherent to the spectral method. Hough functions of the highest degrees are obviously not well represented by the family of associated Legendre Polynomials; more polynomials are necessary. This is explained by the asymptotic behaviour of Hough functions. At $|\nu| \to 1^+$, Rossby modes are trapped around the poles and are thus well represented by highly oscillating associated Legendre polynomials (Fig. A.3). At $|\nu| \to +\infty$, gravity modes behave similarly and are trapped around the equatorial belt (Figs. 2, A.2).

Since the spectral method has been proved to be very efficient at computing a large number of eigenvalues and eigenfunctions at once, it is used for all calculations in this work. We note that some particular cases cannot be treated using Eq. (A.10). These cases have been discussed by CL70 and will not be developed in this work.

Appendix B: Numerical scheme used to integrate spatial differential equations

We detail here the numerical scheme used to integrate Laplace's tidal equation (with the finite differences method) and the vertical structure equation. This method, introduced by Bruce et al. (1953) and described by Chapman & Lindzen (1970) for a particular case, is very convenient when solving second-order differential equations with non-constant coefficients. Those equations are written

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R, \tag{B.1}$$

where P, Q, and R are given functions of x. The domain $\left[x_{\text{inf}}, x_{\text{sup}}\right]$ on which Eq. (B.1) is integrated is divided into N intervals, i.e. $N+1$ points, identified by the index n. Hence, for a regular mesh with elements of size δx, the first- and second-order derivative of a solution f are expressed

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2\delta x} \quad \text{and} \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n}{\delta x^2} \tag{B.2}$$

with $n \in [\![1, N-1]\!]$. Substituting Eq. (B.2) in Eq. (B.1), we obtain the numerical relations

$$A_n f_{n+1} + B_n f_n + C_n f_{n-1} = D_n, \tag{B.3}$$

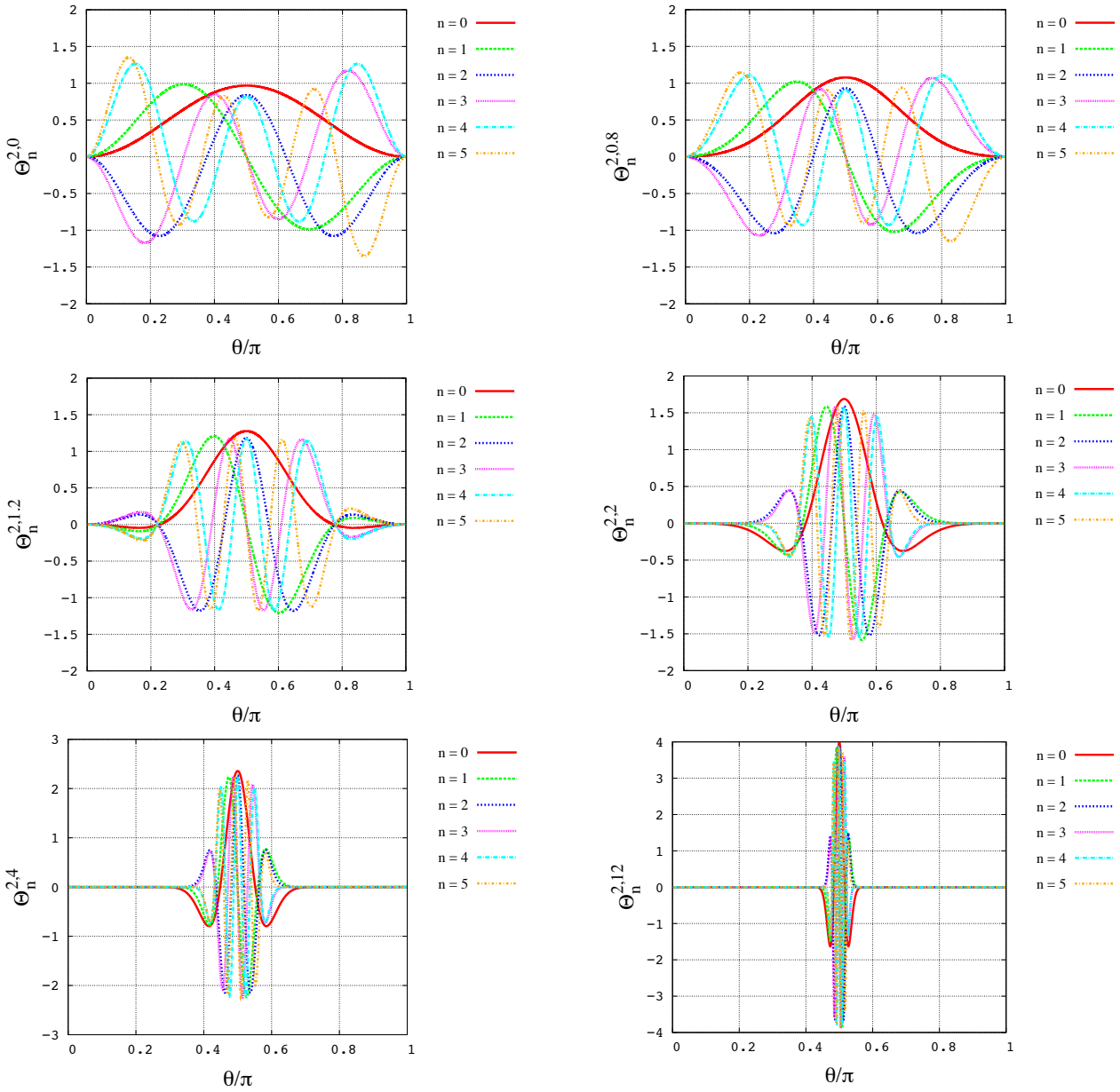


Fig. A.2. Normalized Hough functions $\Theta_n^{2,\nu}$ computed as functions of the colatitude (θ) for $0 \leqslant n \leqslant 5$ (gravity modes) and various values of $\nu = (2\Omega)/\sigma$. *Top-left:* $\nu = 0$; *top-right:* $\nu = 0.8$; *middle-left:* $\nu = 1.2$; *middle-right:* $\nu = 2$; *bottom-left:* $\nu = 4$; *bottom-right:* $\nu = 12$. The case $\nu = 0$ corresponds to the normalized associated Legendre polynomials $P_l^2(\cos\theta)$. The two plots at the top represent the regime of super-inertial waves ($|\nu| \leqslant 1$) where Hough functions look like Legendre polynomials. In the regime of sub-inertial waves ($|\nu| > 1$), functions become more and more evanescent when $|\nu|$ increases, and oscillations are trapped around the equator in the interval $[\theta_\nu, \pi - \theta_\nu]$, where $\theta_\nu = \arccos\left(|\nu|^{-1}\right)$.

with the coefficients

$$A_n = 1 + \frac{\delta x P_n}{2}, \quad B_n = \delta x^2 Q_n - 2,$$
$$C_n = 1 - \frac{\delta x P_n}{2}, \quad D_n = \delta x^2 R_n, \tag{B.4}$$

the P_n, Q_n, and R_n coefficients being the components of the numerical vectors corresponding to P, Q, and R. Then, we introduce the coefficients α_n and β_n, such that

$$f_n = \alpha_n f_{n+1} + \beta_n. \tag{B.5}$$

These coefficients are defined straightforwardly by the recursive relations

$$\begin{cases} \alpha_n = -\dfrac{A_n}{B_n + \alpha_{n-1} C_n} \\ \beta_n = \dfrac{D_n - \beta_{n-1} C_n}{B_n + \alpha_{n-1} C_n} \end{cases}. \tag{B.6}$$

The first terms (α_0 and β_0) are deduced from the boundary condition at $x = x_{\rm inf}$, which can be written

$$a_0 \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{\rm inf}} + b_0 f(x_{\rm inf}) = c_0. \tag{B.7}$$

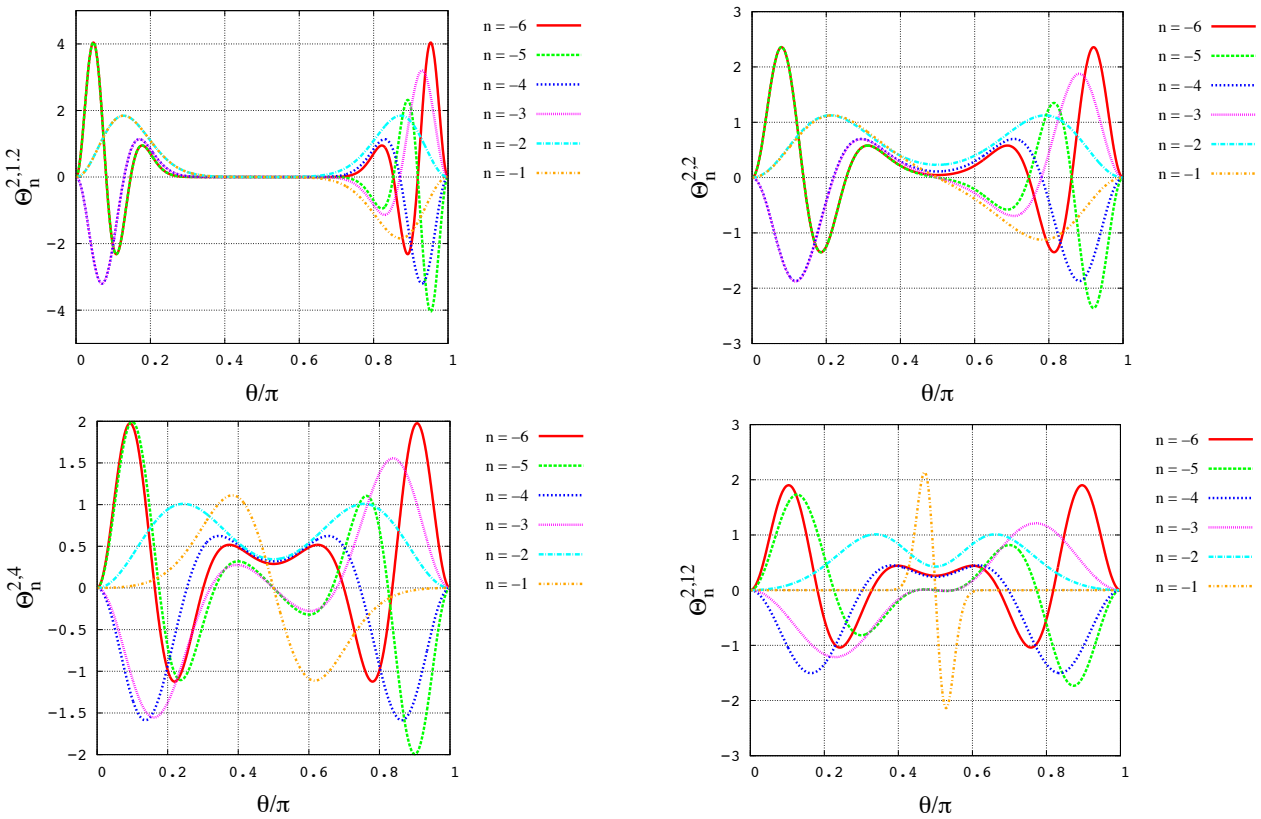


Fig. A.3. Normalized Hough functions $\Theta_n^{2,\nu}$ computed as functions of the colatitude (θ) for $-6 \leqslant n \leqslant -1$ (Rossby modes) and various values of $\nu = (2\Omega)/\sigma$. *Top-left:* $\nu = 0$; *top-right:* $\nu = 0.8$; *middle-left:* $\nu = 1.2$; *middle-right:* $\nu = 2$; *bottom-left:* $\nu = 4$; *bottom-right:* $\nu = 12$. In the regime of sub-inertial waves ($|\nu| > 1$), Rossby modes are trapped around the poles when $|\nu| \to 1$.

where a_0, b_0, and c_0 are real or complex coefficients. Thus, we obtain

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\dfrac{a_0}{b_0 \delta x - a_0} \\ \beta_0 = \dfrac{c_0 \delta x}{b_0 \delta x - a_0} \end{cases} \tag{B.8}$$

and, step by step, all the following terms. At $x = x_{\rm sup}$, we apply the condition

$$a_N \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{\rm sup}} + b_N f\left(x_{\rm sup}\right) = c_N \tag{B.9}$$

with $(a_N, b_N, c_N) \in \mathbb{C}^3$, which gives

$$f_N = \frac{c_N \delta x + \beta_{N-1} a_N}{b_N \delta x + a_N \left(1 - \alpha_{N-1}\right)}. \tag{B.10}$$

The solution is finally obtained by computing the f_n backwards using Eq. (B.5).

Appendix C: Decomposition of the thermal forcing in Keplerian elements

We establish here the general multipole expansion in spherical harmonics of the thermal power given in Eq. (72) using the notations of Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009). We consider a planet (A) orbiting circularly around its star (B). Three reference frames, all centred on the centre of mass of the planet and represented in Fig. C.1, must be defined:

- $\mathscr{R}_{\rm R}$: $\{O_{\rm A}, \mathbf{X}_{\rm R}, \mathbf{Y}_{\rm R}, \mathbf{Z}_{\rm R}\}$, time independent inertial frame, with $\mathbf{Z}_{\rm R}$ the direction of the total angular momentum of the system;
- $\mathscr{R}_{\rm O}$: $\{O_{\rm A}, \mathbf{X}_{\rm O}, \mathbf{Y}_{\rm O}, \mathbf{Z}_{\rm O}\}$, the orbital frame linked to $\mathscr{R}_{\rm R}$ by the Euler angles:
  - $I_{\rm B}$, the inclination of the orbital frame with respect to $(O_{\rm A}, \mathbf{X}_{\rm R}, \mathbf{Y}_{\rm R})$;
  - $\omega_{\rm B}$, the argument of the pericentre;
  - $\Omega_{\rm B}^*$, the longitude of the ascending node;
- $\mathscr{R}_{\rm E;T}$: $\{O_{\rm A}, \mathbf{X}_{\rm E}, \mathbf{Y}_{\rm E}, \mathbf{Z}_{\rm E}\}$, the spin equatorial frame rotating with the angular velocity $\Omega_{\rm A}$, and linked to $\mathscr{R}_{\rm R}$ by three Euler angles:
  - $\varepsilon_{\rm A}$, the obliquity, i.e. the inclination of the equatorial plane with respect to $(O_{\rm A}, \mathbf{X}_{\rm R}, \mathbf{Y}_{\rm R})$;
  - $\Theta_{\rm A}$, the mean sidereal angle such that $\Omega_{\rm A} = {\rm d}\Theta_{\rm A}/{\rm d}t$, which is the angle between the minimal axis of inertia and the straight line due to the intersection of the planes $(O_{\rm A}, \mathbf{X}_{\rm E}, \mathbf{Y}_{\rm E})$ and $(O_{\rm A}, \mathbf{X}_{\rm R}, \mathbf{Y}_{\rm R})$;
  - $\phi_{\rm A}$, the general precession angle.

Finally, we denote a the semi-major axis and $\tilde{M}_{\rm B}$ the mean anomaly with $\tilde{M}_{\rm B} \approx n_{\rm B} t$, $n_{\rm B}$ being the mean motion. Neglecting the action of the centrifugal acceleration, the hydrostatic structure of the atmosphere presents a spherical symmetry, p_0, ρ_0, T_0 being functions only of the radial coordinate. Hence, any heat forcing caused by the star can be written

$$J\left(r, \psi\right) = \frac{1}{a^2} h\left(r, \psi\right), \tag{C.1}$$

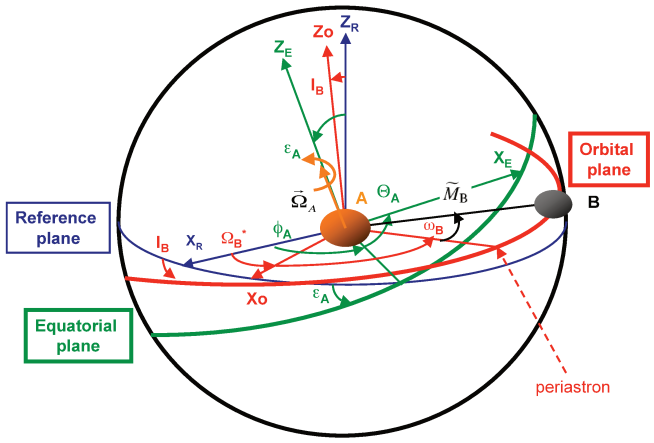


Fig. C.1. Inertial reference, orbital and equatorial rotating frames, and the associated Euler's angles of orientation. Figure taken from Mathis & Le Poncin-Lafitte (2009).

where h is a function of r and ψ, the angle between the points $M(r,\theta,\varphi)$ and $B(a,\theta_{\rm AB},\varphi_{\rm AB})$. We decompose J in normalized Legendre polynomials

$$J = \frac{1}{a^2}\sum_{l\geqslant 0}\mathcal{J}_l(r)\,P_l(\cos\psi) \tag{C.2}$$

with $\mathcal{J}_l(r) = \langle h, P_l\rangle$. Using the addition theorem

$$P_l(\cos\psi) = \frac{4\pi}{\sqrt{2(2l+1)}}\sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta,\varphi)\,Y^*_{l,m}(\theta_{AB},\varphi_{AB}), \tag{C.3}$$

with

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}, \tag{C.4}$$

we obtain

$$J = \sum_{l\geqslant 0}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{\sqrt{2(2l+1)}}\frac{\mathcal{J}_l(r)}{a^2}Y_{l,m}(\theta,\varphi)\,Y^*_{l,m}(\theta_{AB},\varphi_{AB}). \tag{C.5}$$

Kaula's transform is finally introduced to express $Y^*_{l,m}(\theta_{AB},\varphi_{AB})$ as a function of Keplerian elements (Kaula 1962; Mathis & Le Poncin-Lafitte 2009). Since the motion of the planet is circular ($e=0$), we get

$$Y_{l,m}(\theta_{AB},\varphi_{AB}) = \sum_{j,p,q}\kappa_{l,j}d^l_{j,m}(\varepsilon_{\rm A})\,F_{l,j,p}(I_{\rm B})\,G_{l,p,q}(0)\,e^{i\Psi_{l,m,j,p,q}(t)}, \tag{C.6}$$

with $(j,p,q)\in[\![-l,l]\!]\times[\![0,l]\!]\times\mathbb{Z}$, where the $\kappa_{l,j}$ coefficients are given by

$$\kappa_{l,j} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|j|)!}{(l+|j|)!}}. \tag{C.7}$$

The functions denoted $d^l_{j,m}$, $F_{l,j,p}$, and $G_{l,p,q}$ are called the obliquity, inclination, and eccentricity functions (for more details, see Mathis & Le Poncin-Lafitte 2009). The angle $\Psi_{l,m,j,p,q}$ can be written

$$\Psi_{l,m,j,p,q}(t) = -\sigma_{l,m,p,q}t + \psi_{l,m,j,p,q}, \tag{C.8}$$

the parameter $\sigma_{l,m,p,q} = m\Omega_{\rm A} - (l-2p+q)\,n_{\rm B}$ being the tidal frequency of the mode (l,m,p,q) and $\psi_{l,m,j,p,q} = (l-2p)\,\omega_{\rm B} + j\left(\Omega^*_{\rm B}-\phi_{\rm A}\right) + (l-m)\,\pi/2$ the phase lag. Substituting Eq. (C.6) in Eq. (C.5), we finally get

$$J = J_0 + \sum_{l\geqslant 1}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{j,p,q}W_{l,m,j,p,q}\frac{\mathcal{J}_l(r)}{a^2}P_l^m(\cos\theta)\,e^{i[\sigma_{l,m,p,q}t+m\varphi]}, \tag{C.9}$$

where

$$W_{l,m,j,p,q}(\varepsilon,I,e) = \sqrt{\frac{(l-|j|)!}{(l+|j|)!}} \times\left[d^l_{j,m}(\varepsilon)\,F_{l,j,p}(I)\,G_{l,p,q}(e)\right]e^{-im\varphi_{l,m,j,p,q}}, \tag{C.10}$$

with $\varphi_{l,m,j,p,q} = \psi_{l,m,j,p,q}/m$.

With the same notations, the gravitational potential is written

$$U = U_0 + \sum_{l\geqslant 1}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{j,p,q}W_{l,m,j,p,q}\frac{\mathcal{G}M_{\rm B}}{a^{l+1}}r^lP_l^m(\cos\theta)\,e^{i[\sigma_{l,m,p,q}t+m\varphi]}. \tag{C.11}$$

The tidal frequency, written $\sigma = m\Omega - sn_{\rm orb}$, is defined by the doublet $(m,s)\in\mathbb{Z}^2$.

The perturbing tidal potential and thermal power finally write

$$\begin{cases} U = \displaystyle\sum_{(s,m)\in\mathbb{Z}^2}U^{\sigma_{s,m},m}(r,\theta)\,e^{i(\sigma_{s,m}t+s\varphi)}, \\ J = \displaystyle\sum_{(s,m)\in\mathbb{Z}^2}J^{\sigma_{s,m},m}(r,\theta)\,e^{i(\sigma_{s,m}t+s\varphi)}, \end{cases} \tag{C.12}$$

where the spatial functions $U^{m,\sigma}$ and $J^{m,\sigma}$ are expressed

$$\begin{cases} U^{m,\sigma}(r,\theta) = \displaystyle\sum_{l\geqslant|m|}U_l^{m,\sigma}(r)\,P_l^m(\cos\theta), \\ J^{m,\sigma}(r,\theta) = \displaystyle\sum_{l\geqslant|m|}J_l^{m,\sigma}(r)\,P_l^m(\cos\theta), \end{cases} \tag{C.13}$$

with

$$\begin{cases} U_l^{m,\sigma}(r) = \displaystyle\sum_{j=-l}^{l}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q\in\mathbb{Z}}U_{l,m,j,p,q}(r)\,\delta_{l-2p+q,m}, \\ J_l^{m,\sigma}(r) = \displaystyle\sum_{j=-l}^{l}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q\in\mathbb{Z}}J_{l,m,j,p,q}(r)\,\delta_{l-2p+q,m}, \end{cases} \tag{C.14}$$

the notation δ standing for the Kronecker symbol.

Appendix D: Radiated power as a function of physical parameters

The power per unit mass emitted by an optically thin atmosphere ($J_{\rm rad}$) can be expressed as an analytic function of physical parameters in our simplified framework. Indeed, assuming that the flux radiated by a layer of thickness dx, denoted δI, propagates along the vertical direction without being absorbed by the other layers, we write

$$\delta I = \frac{1}{2}\phi_{\rm rad}\rho_0 dr, \tag{D.1}$$

where $\phi_{\rm rad}$ is the total power emitted per unit mass. Then, the atmosphere is treated as a grey body of molar emissivity per unit mass ϵ_a, which – using the molar concentration C_0 introduced in Sect. 2 – gives

$$\delta I = \epsilon_a C_0 \mathscr{S} T^4 {\rm dr}. \tag{D.2}$$

Combining Eqs. (D.1) and (D.2) allows us to get

$$\phi_{\rm rad} = \frac{2\epsilon_a}{M}\mathscr{S}T^4. \tag{D.3}$$

Finally, we derive the perturbed radiative loss $J_{\rm rad}$ associated with the tidal perturbation as a function of δT by linearizing the previous expression around the equilibrium state,

$$J_{\rm rad} = \frac{8\epsilon_a}{M}\mathscr{S}T_0^3\delta T, \tag{D.4}$$

which gives the radiation frequency introduced in Eq. (17):

$$\sigma_0\left(r\right) = \frac{8\kappa\epsilon_a\mathscr{S}}{\mathscr{R}_{\rm GP}}T_0^3. \tag{D.5}$$

Appendix E: Analytic solution for constant profiles and upper boundary condition

We show here that the solution of the equation describing the vertical structure strongly depends on the choice of the upper boundary condition. As discussed in Sect. 3,

$$\Psi_n^{m,\sigma}\left(0\right) = 0 \tag{E.1}$$

at the ground level $x = 0$.

Instead of the energy-bounded condition prescribed in the model, at the upper limit ($x_{\rm atm}$) we set the commonly used stress-free condition,

$$\delta p_n + \frac{1}{H}\frac{dp_0}{dx}\xi_{r;n} = 0. \tag{E.2}$$

We obtain, at $x = x_{\rm atm}$,

$$\frac{d\Psi_n^{m,\sigma}}{dx} + \mathcal{P}\Psi_n^{m,\sigma} = \mathcal{Q}, \tag{E.3}$$

with the complex coefficients

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{A}_n - \left(1-\varepsilon_{s;n}\right)\dfrac{\sigma_{s;n}^2}{\Gamma_1\sigma^2}, \\ \mathcal{Q} = e^{-\frac{x_{\rm atm}}{2}}\left[\dfrac{\kappa R^2}{g\left(i\sigma+\sigma_0\right)}J_n^{m,\sigma} + \dfrac{H\Lambda_n^{m,\nu}}{\sigma^2}U_n^{m,\sigma}\right]_{x=x_{\rm atm}}. \end{cases} \tag{E.4}$$

The parameter $x_{\rm atm}$ must be fixed so that $\rho_0\left(x_{\rm atm}\right) \ll \rho_0\left(0\right)$, which corresponds to $x_{\rm atm} \gg 1$. A simple analytic solution can be computed assuming that $J_n^{m,\sigma}$ and $U_n^{m,\sigma}$ are constant profiles. The second member of the vertical equation, C, given by Eq. (99), becomes

$$C = \frac{\kappa\Lambda_n^{m,\nu}}{H\sigma^2\left(i\sigma+\sigma_0\right)}\left\{\mathcal{K}_n J_n^{m,\sigma} - i\sigma U_n^{m,\sigma}\right\}; \tag{E.5}$$

the solution is written

$$\Psi_n^{m,\sigma} = \frac{H^2 C}{\hat{k}_n a_n b_n}\left\{\left(\mathcal{Z}-\frac{1}{2}\right)\sin\left(\hat{k}_n x\right) + \hat{k}_n\left[\cos\left(\hat{k}_n x\right) - e^{-\frac{x}{2}}\right]\right\}, \tag{E.6}$$

with $a_n = i\hat{k}_n + 1/2$ and $b_n = i\hat{k}_n - 1/2$, and the complex integration constant

$$\mathcal{Z} = \frac{\dfrac{\hat{k}_n a_n b_n}{H^2 C}\mathcal{Q} + \left(\hat{k}_n^2 + \dfrac{1}{2}\mathcal{P}\right)\sin\left(\hat{k}_n x_{\rm atm}\right)}{\mathcal{P}\sin\left(\hat{k}_n x_{\rm atm}\right) + \hat{k}_n\cos\left(\hat{k}_n x_{\rm atm}\right)} + \frac{\hat{k}_n\left(\frac{1}{2}-\mathcal{P}\right)\left[\cos\left(\hat{k}_n x_{\rm atm}\right) - e^{-\frac{x_{\rm atm}}{2}}\right]}{\mathcal{P}\sin\left(\hat{k}_n x_{\rm atm}\right) + \hat{k}_n\cos\left(\hat{k}_n x_{\rm atm}\right)}. \tag{E.7}$$

Now, the condition of Eq. (E.8) characterizing thermal tides, i.e.

$$\left|\frac{U_n^{m,\sigma}}{J_n^{m,\sigma}}\right| \ll \left|\frac{H-h_n}{\sigma H}\right|, \tag{E.8}$$

is assumed. The second-order Love number reduced to the main contribution of the thermal semidiurnal tide, given by Eq. (76), can be expressed

$$k_2^{2,\sigma_{\rm SD}} \sim \frac{8\pi}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{a^3 H}{M_S R}\int_0^{x_{\rm atm}}\delta\rho_{0,2}^{2,\sigma_{\rm SD}}\left(x\right)dx \tag{E.9}$$

for a thin isothermal atmosphere. As a zero-order approximation, we consider that the forcings are the constant profiles $U_2 = U_{2,2,2,0,0}$ and $J_2 = J_{2,2,2,0,0}$ used in Sect. 2 (with $J_2 \in \mathbb{R}$). Therefore, introducing the complex impedance $\Xi_{\rm atm}$, defined by

$$\int_0^{x_{\rm atm}}\delta\rho_{0,2}^{2,\sigma_{\rm SD}}\left(x\right){\rm dx} = \Xi_{\rm atm}J_2, \tag{E.10}$$

and substituting the analytic solution (Eq. E.6) in Eq. (117), we get

$$k_2^{2,\sigma_{\rm SD}} \sim \frac{8\pi}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{a^3 H}{M_S R}\Xi_{\rm atm}J_2 \tag{E.11}$$

where $\Xi_{\rm atm}$ is explicitly given by

$$\Xi_{\rm atm} = \int_0^{x_{\rm atm}} \frac{\kappa \mathcal{K}_n \left(i\sigma + \Gamma_1 \sigma_0\right)}{\lambda_0 a_0 b_0 c_s^2 \left(i\sigma + \sigma_0\right)^2 \left(1 - \varepsilon_{s;n}\right)} \left\{ \mathcal{M} e^{b_0 x} + \mathcal{N} e^{-a_0 x} + \lambda_0 \left[\frac{1}{2} - \mathcal{B}_n - \frac{\Gamma_1 a_0 b_0 \left(i\sigma + \sigma_0\right)}{\mathcal{K}_n \left(i\sigma + \Gamma_1 \sigma_0\right)} \right] e^{-x} \right\}, \tag{E.12}$$

with

$$\begin{cases} \mathcal{M} = \dfrac{\lambda_0}{2} \left(\mathcal{Z} - \dfrac{1}{2} + \mathcal{B}_n \right) - \dfrac{i}{2} \left[\left(\mathcal{Z} - \dfrac{1}{2} \right) \mathcal{B}_n - \lambda_0^2 \right], \\ \mathcal{N} = \dfrac{\lambda_0}{2} \left(\mathcal{Z} - \dfrac{1}{2} + \mathcal{B}_n \right) + \dfrac{i}{2} \left[\left(\mathcal{Z} - \dfrac{1}{2} \right) \mathcal{B}_n - \lambda_0^2 \right]. \end{cases} \tag{E.13}$$

Similarly, the torque of Eq. (88) associated with the $\Theta_0^{2,\nu}$-contribution of the semidiurnal tide can be written

$$\mathcal{T}^{2,\sigma_{\rm SD}} \sim 2\pi R^2 H \Im \left\{ \Xi_{\rm atm} \right\} U_2 J_2. \tag{E.14}$$

To illustrate the difference induced by the choice of the upper boundary condition, we compute the variation of the tidal torque generated by the Earth's semidiurnal tide with the reduced tidal frequency ($\chi = \left(\Omega - n_{\rm orb}\right)/n_{\rm orb}$) for two conditions: the energy-bounded condition used in this work and the stress-free condition studied here. To simplify calculations, we focus on the gravity mode of lowest degree ($n = 0$). Results are plotted in Fig. E.1. In the first case, we obtain the smooth evolution observed in Fig. 14 (with slight differences in the vicinity of the synchronization because of the absence of Rossby modes), but the stress-free condition obviously leads to a highly resonant behaviour. This can be explained by the form of the solution given by Eq. (E.6), where the integration constant $\mathcal{Z}$ depends on $\hat{k}_n$ and $x_{\rm atm}$. By fixing $x_{\rm atm}$, we implicitly define values of $\hat{k}_n$ for which $\mathcal{Z}$ reaches a maximum. On the contrary, the integration constant obtained by applying the energy-bounded condition, given by Eq. (128), does not depend on the upper limit far beyond the critical altitude given by Eq. (127).

Appendix F: Supplementary materials regarding the dependence of the tidal response on the tidal frequency

As a complement to the tidal torques (Figs. 14) and perturbed pressure, density, and temperature (Figs. 17) resulting from the Earth's solar semidiurnal tide, we plot several quantities as a function of the tidal frequency that can be helpful for the diagnostic of results (Fig. F.1). These quantities are the coefficients $c_{2,n,2} = \langle P_2^2, \Theta_n^{2,\nu} \rangle^2$ introduced in Eq. (81) which weight the contribution of Hough modes to the tidal torque; the eigenvalues of Laplace's tidal equation ($\Lambda_n^{m,\nu}$); the length scale of vertical variations associated to Hough modes ($L_{\rm V;n}$); the spin parameter (ν); and the real and imaginary parts of the complex vertical wavenumber ($\hat{k}_n$ denoted k_n in plots), which determines the nature (propagative or evanescent) of tidal waves.

These plots highlight the difference between prograde ($\nu < 0$) and retrograde ($\nu > 0$) modes. Indeed, it can be noted that the projection of the associated Legendre polynomial P_2^2 on Hough functions is not the same before and after the synchronization: the weight of the gravity mode of degree 0, which is the most representative one, varies and Rossby modes are predominating in a very short interval of positive tidal frequencies. This dissymmetry is retrieved in the variations of the horizontal eigenvalues, where Rossby modes only appear for $\sigma > 0$.

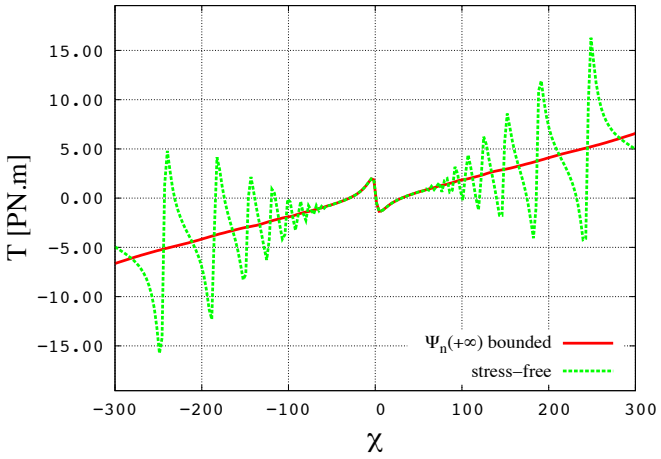


Fig. E.1. Tidal torques exerted on the atmosphere (in peta-Newton metres (PN.m)) induced by the first gravity mode of the Earth's semidiurnal tide ($n = 0$) as a function of the reduced tidal frequency (χ) obtained with two different conditions at the upper boundary: the energy-bounded condition chosen for the model (red line) and a stress-free condition (green dashed line). The equation for the structure in the vertical (resp. horizontal) direction has been integrated with 10000 mesh points (resp. 400 associated Legendre polynomials).

As predicted by its analytic expression (Eq. 102), the real and imaginary part of the vertical wavenumber diverge at the synchronization. Therefore, Hough modes become both highly oscillating and strongly damped in this region. Their spatial variation scale along the vertical direction decays, which corresponds to what is observed in the variations of $L_{\rm V;n}$. Actually, below a given typical length scale, these modes are damped by dissipative processes such as thermal diffusion. Finally, the graph of ν shows that this parameter strongly varies around the synchronization. The transition at $\sigma = 0$ is discontinuous, ν switching from $-\infty$ to $+\infty$.

Appendix G: Consequences of an insufficient spatial resolution on the numerical computation of the vertical structure

As pointed out by CL70 and detailed in Sect. 5, solving numerically the vertical structure equation (Eq. 107) with the numerical scheme of Appendix B requires using a sufficiently high spatial resolution. This condition is mathematically expressed by the criterion given by Eq. (228) for a regular mesh and depends on the vertical wavenumbers that characterize Hough modes. To compute the response of a mode, it is necessary to use a spatial step δx lower than the corresponding variations length scale ($L_{\rm V;n}$, defined by Eq. 48), otherwise the signal does not appear. We illustrate this point in here by considering the simplified forced wave equation

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k_{\rm V}^2 \Psi = e^{-x/2}, \tag{G.1}$$

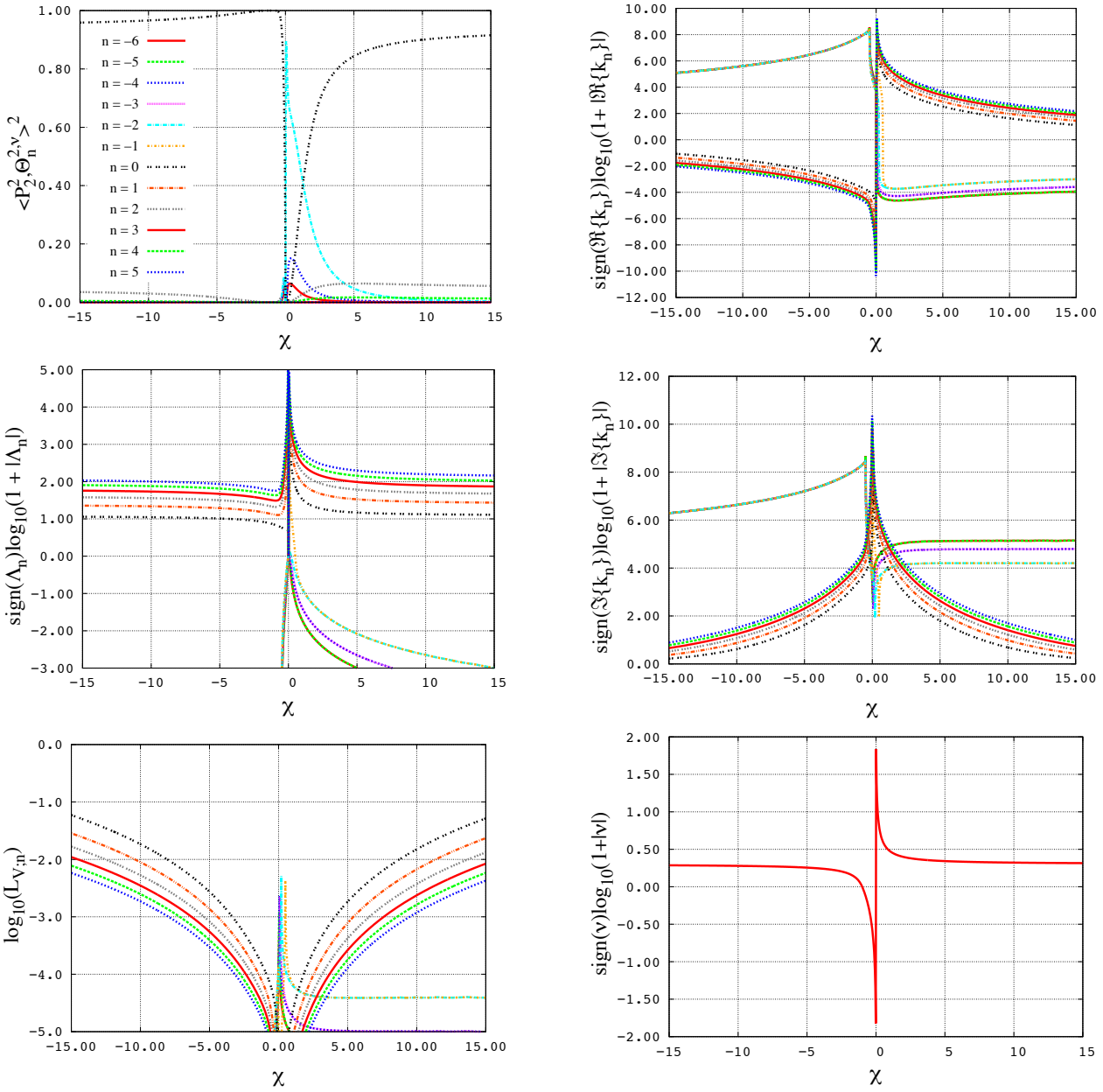


Fig. F.1. Tidal response of the Earth's atmosphere to a quadrupolar forcing ($U \propto P_2^2(\cos\theta)\, e^{2i\varphi}$ and $J \propto P_2^2(\cos\theta)\, e^{2i\varphi}$) as a function of the reduced tidal frequency $\chi = (\Omega - n_{\rm orb})/n_{\rm orb}$ (horizontal axis). For each quantity q_n associated with the Hough mode of degree n, except the coefficients $c_{2,n,2}^{\sigma,2}$ (top left) and the scales of variations $L_{\rm V;n}$, the function $f(\chi) = {\rm sign}(q_n)\log(1+|q_n|)$ is plotted (vertical axis) for $n \in [\![-6,5]\!]$. *Left, from top to bottom:* (a) coefficients $c_{2,n,2}^{\sigma,2} = \langle P_2^2, \Theta_n^{\sigma,2}\rangle^2$ (Eq. 70); (b) eigenvalues of Laplace's tidal equation ($\Lambda_n^{m,\nu}$ defined by Eq. 35); (c) normalized variation scales of the vertical structure of the vertical component, $L_{\rm V;n} = 2\pi/\left(x_{\rm atm}\left|\hat{k}_n\right|\right)$ (Eq. 48), plotted in logarithmic scale. *Right, from top to bottom:* (d) real part of the vertical wavelengths ($\hat{k}_n$, Eq. 103); (e) imaginary part of the vertical wavelengths; (f) spin parameter $\nu = 2\Omega/\sigma$ (Eq. 23).

where $k_{\rm V} \in \mathbb{C}$ is such that $\Im\{k_{\rm V}\} > 0$, with the previously chosen boundary conditions,

$$\Psi(0) = 0 \quad \text{and} \quad \left.\frac{d\Psi}{dx}\right|_{x_{\rm sup}} - ik_{\rm V}\Psi\left(x_{\rm sup}\right) = 0. \tag{G.2}$$

We arbitrarily set $k_{\rm V} = 100\,(1+i)$ in order to satisfy the condition $L_{\rm V} \ll 1$ (keeping in mind that $x_{\rm sup} = 10$). This corresponds to a strongly damped tidal mode similar to those predicted by the model in a frequency range close to synchronization. The critical number of points necessary to compute the response with our scheme is then $N_{\rm crit} \sim 400$. We solve Eq. (G.1) for various resolutions. The corresponding results are plotted in Fig. G.1 where they are also compared to the analytical solution given by Eq. (129). The flattening observed for $N < N_{\rm crit}$ gives an idea of the kind of numerical difficulties that need to be addressed to compute tidal low-frequency waves with a GCM. Particularly, this shows that if we compute the tidal torque numerically by using the scheme of Appendix B with an insufficient resolution, we will only be able to get the large-scale contribution associated with the horizontal component (see Figs. 14).

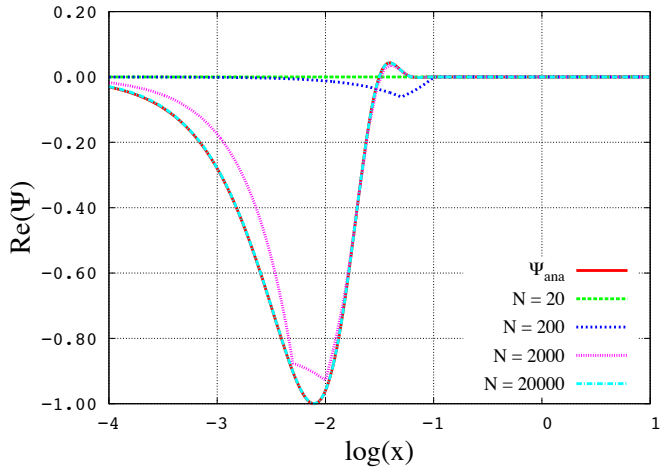


Fig. G.1. Real part of the solution of Eq. (G.1) as a function of x in logarithmic scale computed numerically for various mesh resolutions. The number of points of the spatial discretization is set at $N = 20$ (green dashed line), $N = 200$ (blue dashed line), $N = 2000$ (pink dashed line), and $N = 20000$ (cyan dashed line). These numerical solutions are compared to the analytical solution given by Eq. (129) (red line).

Appendix H: Nomenclature

Table H.1. List of the symbols used throughout this work and their designations in order of introduction.

Symbol	Designation
i	imaginary number
$\Re$	real part
$\Im$	imaginary part
$*$	conjugate
$\oplus$	associated with the Earth
$\varnothing$	associated with Venus
$\mathscr{R}_{\rm ET}$	planetary equatorial rotating frame
$\mathbf{X}_E, \mathbf{Y}_E, \mathbf{Z}_E$	vectorial basis associated with $\mathscr{R}_{\rm ET}$
r	radial coordinate
θ	colatitude
φ	east longitude
δ	latitude / fluctuations
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$	spherical vectorial basis
t	time
g	gravity
$\mathbf{\Omega}$	planet spin vector
Ω	angular velocity
R	planet radius
$_{\rm atm}$	associated with the atmosphere
$_{\rm gr}$	associated with the ground
$R_{\rm atm}$	external radius of the atmosphere
$H_{\rm atm}$	typical thickness of the atmosphere
M	molar mass of the atmosphere
p	pressure
ρ	density
T	temperature
p_0	background pressure distribution
ρ_0	background density distribution
T_0	background temperature distribution
C_0	background molar concentration distribution
Γ_1	adiabatic exponent
N	Brunt-Väisälä frequency
$\mathscr{R}_{\rm GP}$	perfect gas constant
$\mathscr{R}_s$	specific gas constant of the atmosphere
U	gravitational tidal potential
J	tidal heating power per unit mass
V	tidal velocity field
V_r, V_θ, V_φ	components of V in spherical coordinates
$\boldsymbol{\xi}$	displacement vector
$\xi_r, \xi_\theta, \xi_\varphi$	components of ξ in spherical coordinates
δp	tidal pressure perturbation
$\delta\rho$	tidal density perturbation
δT	tidal temperature perturbation
c_s	sound velocity
κ	atmospheric parameter
$\phi_{\rm rad}$	radiated power per unit mass
σ_0	radiation frequency
$\mathscr{S}$	Stefan-Boltzmann constant
ϵ_a	effective molar attenuation coefficient
f	any perturbed quantity
σ	tidal frequency
ν	spin parameter
m	longitudinal degree
y	pressure perturbation divided by ρ_0
$\boldsymbol{\xi}_H$	horizontal displacement
$\mathcal{L}_\theta^{m,\nu}$	operator associated with θ-components

Table H.1. continued.

Symbol	Designation
$\mathcal{L}_{\varphi}^{m,\nu}$	operator associated with φ-components
$\mathcal{L}^{m,\nu}$	Laplace's tidal operator
n	meridional degree
$\Theta_n^{m,\nu}$	Hough functions
$\Lambda_n^{m,\nu}$	eigenvalues of Laplace's tidal equation
$J_n^{m,\sigma}$	components of J
$U_n^{m,\sigma}$	components of U
$\xi_{r;n}^{m,\sigma}$	components of ξ_r
$\xi_{\theta;n}^{m,\sigma}$	components of ξ_θ
$\xi_{\varphi;n}^{m,\sigma}$	components of ξ_φ
$V_{r;n}^{m,\sigma}$	components of V_r
$V_{\theta;n}^{m,\sigma}$	components of V_θ
$V_{\varphi;n}^{m,\sigma}$	components of V_φ
$\delta p_n^{m,\sigma}$	components of δp
$\delta\rho_n^{m,\sigma}$	components of $\delta\rho$
$\delta T_n^{m,\sigma}$	components of δT
$y_n^{m,\sigma}$	components of y
A_1, A_2, A_3	coefficients of the equation $r^2\xi_{r;n}$
B_1, B_2, B_3	coefficients of the equation y_n
A, B, C	coefficients of the vertical structure equation
$\mathcal{F}$	function of the variable change
$\hat{k}_n$	vertical wavenumber
$L_{\mathrm{V;n}}$	scale of variation
$\varepsilon_{s;n}$	acoustic coefficient
$\sigma_{s;n}$	acoustic frequency
$\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_n$	coefficients of polarization relations
K_{curv}	curvature term in polarization relations
$\Upsilon_n^{m,\sigma}$	linear operator associated with the vertical structure
$\Upsilon_{f;n}^{m,\sigma}$	components of the operator associated with f
X_n	vector of the forcings
Y_n	vector of the response
$\sigma_{\mathrm{diff;n}}$	diffusive frequency
$\mathcal{G}$	gravitational constant
l	degrees of Legendre polynomials
$\tilde{P}_l^m$	associated Legendre functions
P_l^m	normalized associated Legendre functions
$\mathcal{U}$	potential induced by the tidal response
$\tilde{\mathcal{U}}_l^{m,\sigma}$	components of $\mathcal{U}$ projected on the $\tilde{P}_l^m$
$\mathcal{U}_l^{m,\sigma}$	components of $\mathcal{U}$ projected on the P_l^m
$\mathcal{F}_l^{m,\sigma}$	first component of $\mathcal{U}_l^{m,\sigma}$
$\mathcal{H}_l^{m,\sigma}$	second component of $\mathcal{U}_l^{m,\sigma}$
$k_l^{m,\sigma}$	Love numbers for the gravitational potential
$\mathcal{W}_l^m$	coefficients of Kaula's expansion
$\delta\rho_l^{m,\sigma}$	density expansion coefficient for the perturbation projected on the P_l^m
$\delta\rho_{n,k}^{m,\sigma}$	components of $\delta\rho_l^{m,\sigma}$
$c_{l,n,k}^{m,\sigma}$	weighting coefficients of modes in the expansion of the tidal torque
M_S	mass of the star
a	semi-major axis
ε	obliquity
n_{orb}	mean motion
σ_{SD}	semidiurnal tidal frequency
$U_{2,2,2,0,0}$	semidiurnal gravitational tidal potential
$J_{2,2,2,0,0}$	semidiurnal thermal forcing
$\mathcal{J}_2$	expansion function of the thermal forcing

Table H.1. continued.

Symbol	Designation
	projected on P_2
$\mathscr{V}$	volumetric domain of the atmosphere
$\mathcal{T}$	tidal torque
$\mathcal{T}^{m,\sigma}$	frequency components of the tidal torque
$\Delta\varphi$	phase lag of the tidal response
$_{\mathrm{H}}$	associated with the horizontal component
$_{\mathrm{V}}$	associated with the vertical component
$_{\mathrm{grav}}$	caused by the gravitational forcing
$_{\mathrm{therm}}$	caused by the thermal forcing
$\mathcal{T}_{\mathrm{H}}$	torque due to the horizontal component
$\mathcal{T}_{\mathrm{V}}$	torque due to the vertical component
$\mathcal{H}$	factor in the expressions of the torque
z	altitude
x	altitude normalized by the pressure height scale
x_{atm}	normalized upper boundary
$\mathbf{a}_{\mathscr{R}_{\mathrm{E;T}}}$	local acceleration in the reference frame
$\mathbf{a}_c$	centrifugal acceleration
h_n	equivalent depth
h_c	characteristic depth of the vertical wavenumber
ς_n	scale ratio in the vertical wavenumber
Δ	discriminant in $\Re\left\{\hat{k}_n\right\}$ and $\Im\left\{\hat{k}_n\right\}$
$\mathscr{A}, \mathscr{B}$	functions generating the analytic solution
$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$	coefficients of the upper boundary equation
x_{crit}	typical damping depth
$\mathcal{D}_n, \mathcal{E}_n$	parameters
$\mathscr{F}_{\mathcal{P}}$	parametrized function of the analytic solution
$\mathcal{T}_{\mathrm{orb}}$	orbital period
γ	lag angle
$\mathcal{W}$	dimensionless constant
a, b	empirical parameters in the model of Correia et al. (2003)
$\hat{k}_{\mathrm{CL;n}}$	vertical wavenumber in CL70
η	relative difference between $\hat{k}_n$ and $k_{\mathrm{CL;n}}$
λ	wavelength of light
$I_{\mathrm{S};\lambda}$	spectral radiance of the star
I_{S}	black-body stellar flux
R_{S}	star radius
T_{S}	surface temperature of the star
d	star-planet distance
c	speed of light in vacuum
h	Planck constant
k_{B}	Boltzmann constant
$A_{\mathrm{atm};\lambda}$	albedo of the atmosphere for the wavelength λ
$I_{0;\lambda}$	effective incident flux
l	linear spatial coordinate
$_{\mathrm{inc}}$	caused by the incident flux
$_{\mathrm{ref}}$	caused by the reflected flux
$_{\mathrm{rad}}$	caused by the flux emitted by the surface
C_{G}	molar concentration of an absorbing gas
$\varepsilon_{\mathrm{G};\lambda}$	molar extinction density coefficient
I_λ	heat power flux
$\mathscr{J}$	heat power per unit volume
τ_λ	optical depth
α_λ	global absorption coefficient
$A_{\mathrm{gr};\lambda}$	albedo of the ground for the wavelength λ
T_{gr}	surface temperature
ψ	angle to the star-planet direction
$I_{\mathrm{gr;BB}}$	black-body emission of the ground
ϵ_{gr}	emissivity of the ground

Table H.1. continued.

Symbol	Designation
$\epsilon_{\rm atm}$	emissivity of the atmosphere
ϵ	effective emissivity of the ground
$T_{\rm gr;0}$	surface equilibrium temperature
$\delta T_{\rm gr}$	surface temperature fluctuations
$\mathscr{B}_{\rm gr}^{\sigma}$	transfer function of the ground
$Q_{\rm atm}$	diffusive power flux in the atmosphere
$Q_{\rm gr}$	diffusive power flux in the ground
$k_{\rm atm}$	thermal conductivity of the atmosphere
$k_{\rm gr}$	thermal conductivity of the ground
$K_{\rm atm}$	vertical turbulent thermal diffusivity
$K_{\rm gr}$	thermal diffusivity of the ground
$c_{\rm atm}$	thermal capacity of the atmosphere
$c_{\rm gr}$	thermal capacity of the ground
$\delta_{\rm atm}^{\sigma}$	skin thickness in the atmosphere
$\delta_{\rm gr}^{\sigma}$	skin thickness in the ground
$\varsigma_{\rm gr}$	radiative impedance of the ground
$\beta_{\rm atm}$	thermal conductive capacity of the atmosphere
$\beta_{\rm gr}$	thermal conductive capacity of the ground
$\sigma_{\rm bl}$	typical frequency of the atmospheric boundary layer
$\tau_{\rm atm}^{\sigma}$	vertical damping coefficient in the boundary layer
$\delta T_{\rm bl}$	temperature fluctuations in the boundary layer
$_{\rm V}, ^{\rm V}$	associated with visible light
$_{\rm IR}, ^{\rm IR}$	associated with the infrared
N	number of points of the spatial discretization
$\mathscr{T}$	timescale of the spin evolution
$\mathscr{M}$	mass of the atmosphere
χ	tidal frequency divided by the mean motion

CHAPITRE 5

EQUILIBRES DE SPIN

Sommaire

5.1 Introduction **161**
5.2 Etat de l'art **161**
5.3 Nouvelle approche **164**
5.3.1 Couples de marées 165
5.3.1.1 Couple de marée solide 165
5.3.1.2 Couple de marée atmosphérique 166
5.3.2 Position et stabilité des équilibres de spin 167
5.3.3 Application au cas de Vénus 168
5.4 Conclusion **170**

5.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'une des principales applications astrophysiques des modèles de marées atmosphériques : l'étude de l'impact des marées sur l'évolution de la rotation propre de planètes semblables à Vénus et à la Terre et la caractérisation de leur rotation d'équilibre. Nous faisons d'abord l'état de l'art des travaux existant en partant des travaux de référence de Gold & Soter (1969). Nous revisitons ensuite les études les plus récentes (Correia & Laskar, 2001, 2003; Correia et al., 2003, 2008) en utilisant le couple maxwellien dérivé du modèle (Chapitre 4). Dans cette approche, où la réponse du solide est modélisée par la rheologie de Maxwell (cf. Section 2.4.3), nous établissons des prescriptions analytiques pour les différentes positions d'équilibre possibles du spin, ainsi que les critères caractérisant leur stabilité, en soulignant le rôle joué par les mécanismes dissipatifs à l'intérieur des couches solide et atmosphérique. Nous identifions par cette méthode les rotations d'équilibres non-synchronisées dont l'existence avait été déjà démontrée auparavant par Correia & Laskar (2001). Les résultats obtenus sont finalement appliqués au cas de Vénus à titre d'illustration. La travail présenté ici est détaillé dans l'article Auclair-Desrotour et al. (2016b) reproduit en fin de chapitre.

5.2 Etat de l'art

La découverte du mouvement de rotation de Vénus en 1962 (e.g. Smith, 1963) a mis en lumière les conséquences que peuvent avoir les marées atmosphériques sur la dynamique rotationnelle des planètes. Vénus tourne en effet sur elle-même très lentement, avec une période de 243 jours proche de sa période orbitale. Mais surtout, elle tourne dans le sens rétrograde. Or les marées solides ne permettent pas d'expliquer cet état actuel puisqu'elles conduisent les corps vers la synchronisation spin orbite. Il fallait donc que Vénus soit née et demeurée jusqu'à aujourd'hui en rotation rétrograde, ou bien qu'un mécanisme supplémentaire

soit venu l'y placer. Gold & Soter (1969) furent les premiers à apporter une explication satisfaisante en invoquant un équilibre entre le couple de marée solide et le couple de marée atmosphérique. A l'aide de la description simplifiée du mécanisme des marées thermiques détaillée plus loin, qui se base sur les résultats de l'approche géophysique (e.g. Butler & Small, 1963; Green, 1965; Lindzen, 1968a), ils montrèrent que le couple de marée total exercé sur Vénus peut s'annuler à des positions non-synchronisées. Dans l'approche de Gold & Soter (1969), la variation de pression δp générée par la marée thermique à la base d'une couche d'épaisseur Δz s'exprime en fonction de la variation de température δT via la relation

$$\delta p = -\rho g \Delta z \frac{\delta T}{T}, \tag{5.1}$$

où ρ et T sont les distributions de densité et de température à l'équilibre dans la couche et g la gravité. Les oscillations de température, obtenues à partir du développement en série de Fourier de la puissance absorbée, donnent ainsi lieu à une variation de pression de la forme

$$\delta p = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta)\, p_n \cos\left(n\left(\lambda - \epsilon_n\right)\right). \tag{5.2}$$

En faisant l'hypothèse de l'ajustement hydrostatique ($\delta m \propto \delta p$ pour une variation de masse δm), les auteurs établissent l'expression du couple total dont ils déduisent la composante semi-diurne [1],

$$\boxed{\mathcal{T}_{\mathrm{A}} = -\frac{15}{32}\pi^2 \frac{M_\odot R^6}{M a^3} p_2 \sin\left(2\epsilon_2\right),} \tag{5.3}$$

où $M_\odot$ désigne la masse du Soleil, et M, R et a respectivement la masse, le rayon et le demi-grand axe de Vénus. Puisque la marée thermique précède le perturbateur, $\sin(2\epsilon_2) < 0$ dans ce couple (d'où $\mathcal{T}_{\mathrm{A}} > 0$). Ainsi, la comparaison avec un couple exercé sur la partie solide de la forme (e.g. Goldreich & Peale, 1968)

$$\mathcal{T}_{\mathrm{S}} = -\frac{3}{2}\frac{k}{Q}\frac{G M_\odot^2 R^5}{a^6}, \tag{5.4}$$

où k représente le nombre de Love du second ordre et Q le facteur de qualité de marée (cf. Eq. 2.40), donne $\mathcal{T}_{\mathrm{A}} + \mathcal{T}_{\mathrm{S}} \approx 0$ si les deux couples sont du même ordre de grandeur, ce qui conforte l'hypothèse selon laquelle la vitesse de rotation actuelle de Vénus correspond à une position d'équilibre déterminée par la compétition entre les effets de marées atmosphériques et solides.

L'étude de Gold & Soter (1969) a été plus tard reprise par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) sous un angle plus quantitatif. La perturbation de pression utilisée dans ces travaux n'est plus empirique mais provient directement du modèle *ab initio* de CL70. Dobrovolskis & Ingersoll (1980) traitent le problème de façon analytique en considérant un forçage thermique de type « chauffage par le sol », localisé à l'altitude $x = 0^+$, et en ignorant la contribution du champ de vitesse de marée dans l'équation de la chaleur (cf. 3.66, terme en $\nabla \cdot \mathbf{V}$). Le profil de forçage en altitude est modélisé par une distribution de Dirac (δ),

$$J(x) = \frac{g}{p_0} F \delta\left(x - 0^+\right), \tag{5.5}$$

où F est le flux total absorbé, et le profil en latitude par la distribution en « cosinus » prescrite par Lacis (1975) (cf. Eq. 3.60). Il vient ainsi

1. La composante quadripolaire ($l = 2$) est la composante de plus grande échelle contribuant au couple de marée. La composante d'ordre $l = 1$ ne contribue pas et les composantes d'ordres supérieurs à $l = 2$, qui suivent une loi d'échelle proportionnelle à $R^{-(l+1)}$ (e.g. Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009), sont négligeables.

$$\delta p = i \frac{\kappa}{\sigma H} \delta F, \tag{5.6}$$

d'où Dobrovolskis & Ingersoll (1980) déduisent l'expression du couple de marée atmosphérique suivante :

$$\boxed{\mathcal{T}_{\mathrm{A}} = \frac{3}{8} \pi \frac{M_{\odot}}{M_{♀}} \frac{a^6}{R^3} \frac{\kappa F_0}{\sigma H}.} \tag{5.7}$$

Avec la puissance injectée $F_0 = 100\ \mathrm{W.m^{-2}}$ choisie pour l'application numérique dans l'étude, le couple de marée atmosphérique vaut $\mathcal{T}_{\mathrm{A}} \approx 1.8 \times 10^{16}$ N.m. L'application d'une variation de pression de la forme donnée par (5.6) aux autres fréquences permet d'obtenir la distribution de la variation totale de pression au niveau du sol (Fig. 5.1) où ressort principalement la composante diurne. Il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux issus des simulations les plus récentes (Leconte et al., 2015), exposés en Figure 4.12, et du modèle d'atmosphère convective de la Section 4.5, qui décrivent le même comportement de la réponse avec la fréquence de marée. On voit que la distribution de pression de Dobrovolskis & Ingersoll (1980) (Fig. 5.1) correspond à une planète de rotation relativement rapide (cas où la période de rotation propre est de 25 jours, panneau en bas à gauche dans Fig. 4.12) alors que Vénus appartient clairement à la catégorie opposée (rotateurs lents), pour lesquels le minimum de pression se situe au niveau du point sub-solaire. Cette différence illustre l'impact fort qu'ont les mécanismes dissipatifs sur l'ensemble de la marée thermique, au delà de la composante semi-diurne.

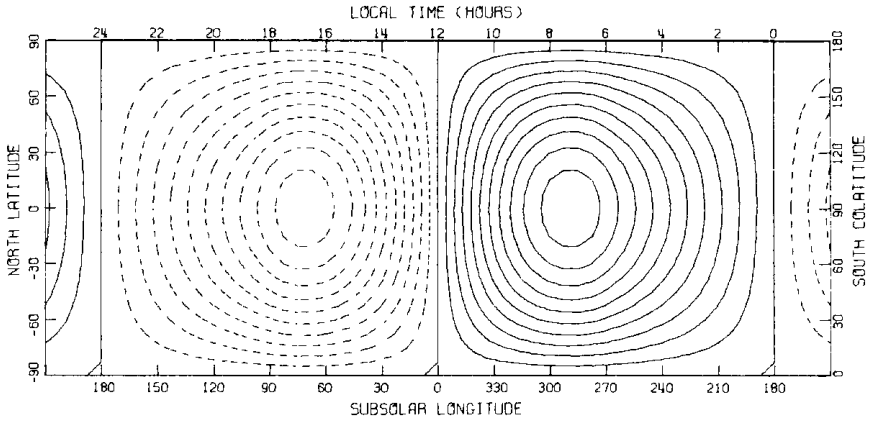


FIGURE 5.1: Distribution en longitude (axe horizontal, en degrés en bas et en heures solaire, en haut) et latitude (axe vertical, en degrés) des variations totales de pression à la surface de Vénus générées par un chauffage localisé au niveau du sol (profil-Dirac). L'équateur correspond à la latitude nulle et le point sub-solaire est l'intersection de ce parallèle avec le méridien de temps solaire 12h00. Crédits Dobrovolskis & Ingersoll (1980).

Le modèle proposé par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) présente un inconvénient majeur pour la simulation de la dynamique rotationnelle d'une planète telle que Vénus : le couple qu'il prédit (Eq. 5.7) est à la fois singulier et discontinu au passage de la synchronisation. Ceci a pour conséquence de générer des instabilités numériques importantes dans la gamme de fréquences d'étude. A cela s'ajoute le constat que le couple devrait plutôt décroître que diverger quand $\sigma \to 0$. Pour palier à ces problèmes, Correia & Laskar (2001) proposèrent une prescription plus réaliste en raccordant les variations de pression données par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) au voisinage de la synchronisation de sorte à ce que que le couple s'annule en $\sigma = 0$ et que sa dépendance en fréquence soit régulière. La fonction d'interpolation qu'ils introduisirent s'écrit (voir Correia et al., 2003)

$$|\delta p(\sigma)| = \frac{5}{16} \frac{\Gamma_1}{|\sigma|} \frac{g F_s}{C_p T_s} \left(1 - e^{-10^3 (2\sigma/n_{\mathrm{orb}})^2}\right), \tag{5.8}$$

où T_s est la température du sol et F_s la puissance absorbée au point sub-solaire. Le couple de marée solide choisi pour l'étude est aussi une fonction d'interpolation entre le modèle de Kaula ($\mathcal{T}_\mathrm{S} \propto k_2/Q$) et le modèle visqueux à retard augulaire constant ($\mathcal{T}_\mathrm{S} \propto k_2\sigma\Delta t$; voir Mignard, 1979) :

$$\mathcal{T}_\mathrm{S} \propto \mathrm{sign}\,(\sigma)\,\frac{k_2}{Q}\left[1-\left(1-\frac{Q}{Q_{\mathrm{n_{orb}}}}\right)^{\frac{|\sigma|}{n_\mathrm{orb}}}\right], \tag{5.9}$$

où Q et $Q_{\mathrm{n_{orb}}}$ désignent respectivement les facteurs de qualité de la planète dans le régimes de rotation rapide et proches de la synchronisation ($\sigma = n_\mathrm{orb}$). Ces comportements des parties solide et atmosphérique induisent l'existence de quatre états de rotation finaux stables non-synchronisés (Correia & Laskar, 2001; Correia et al., 2003; Correia & Laskar, 2003) : deux états rétrogrades (l'un pour une une obliquité nulle et l'autre pour une obliquité de 180° traduisant le fait que Vénus s'est retournée durant son évolution), et deux états progrades. Lorsque cette approche est adaptée aux planètes présentant des excentricités non nulles (e.g. Laskar & Correia, 2004; Correia et al., 2008; Correia & Laskar, 2010), des états d'équilibres supplémentaires apparaissent (voir Fig. 5.2).

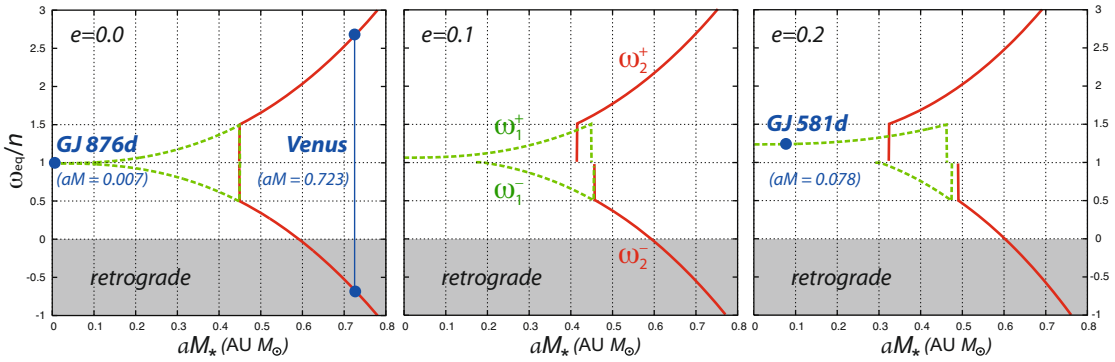


FIGURE 5.2: Positions d'équilibre du taux de rotation propre de la planète (ω) en fonction du produit aM_* (a étant le demi-grand axe et M_* la masse l'étoile) pour trois valeurs différentes de l'excentricité ($e = 0.0,\ 0.1,\ 0.2$). Chaque courbe correspond à un état final donné (lignes pointillées pour $\omega_1^\pm$ et lignes solides pour $\omega_2^\pm$). Pour $e = 0$ (cas de Vénus), on compte deux états d'équilibres finaux symétriques par rapport à n (moyen mouvement). Quand on augmente l'excentricité, on compte au moins trois rotations d'équilibre finales différentes, qui dépendent de la valeur de ω_s/n (avec $\omega_s = |\omega - n|$). Crédits Correia et al. (2008).

L'étude présentée ici s'inscrit dans la continuité de ces travaux. Nous appliquons pour le couple de marée atmosphérique la nouvelle prescription *ab initio* dérivée du cas de l'atmosphère convective en rotation lente (Section 4.5).

5.3 Nouvelle approche

On s'intéresse au cas simplifié du système binaire présenté précédemment. La planète, de masse M_P et de rayon R, effectue une orbite circulaire de demi-grand axe a autour de son étoile hôte de masse M_* et de luminosité[2] L_*. Elle tourne sur elle-même à la vitesse angulaire de rotation propre Ω et son plan équatorial est confondu avec le plan de l'écliptique. La couche atmosphérique qui la recouvre, de masse M_A et de hauteur de pression $H \ll R$ est supposée convective ($N^2 = 0$) et homogène en composition, comme dans le modèle détaillé en Section 4.5. Dans le référentiel de la planète, l'étoile a un moyen mouvement $\omega = \Omega - n_\mathrm{orb}$, et engendre une perturbation de marée semi-diurne de fréquence $\sigma = 2\omega$.

2. La luminosité d'une étoile de rayon R_* et de température de surface T_* rayonnant comme un corps noir est donnée par $L_* = 4\pi R_*^2\sigma_\mathrm{SB}T_*^4$ où σ_SB désigne la constante de Stefan-Boltzman.

5.3.1 Couples de marées

5.3.1.1 Couple de marée solide

Il existe une grande variété de rhéologies possibles pour la partie solide qui, en outre, reste peu connue, que ce soit dans le cas de Vénus (e.g. Mocquet et al., 2011; Aitta, 2012) ou celui d'une super-Terre quelconque. Plusieurs choix sont donc envisageables. Par exemple, pour déterminer numériquement la position des équilibres de couple, Leconte et al. (2015) utilisent le modèle d'Andrade (Andrade, 1910; Efroimsky, 2012) pour lequel la dissipation s'écrit (Leconte et al., 2015)

$$\frac{k_2(\sigma)}{Q(\sigma)} = \frac{3}{2} A_2 \frac{\sigma\left[\tau_{\mathrm{M}}^{-1} + \sigma^{1-\alpha}\tau_{\mathrm{M}}^{-\alpha}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\Gamma(1+\alpha)\right]}{\left[(1+A_2)\sigma + \sigma^{1-\alpha}\tau_{\mathrm{M}}^{-\alpha}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\Gamma(1+\alpha)\right]^2 + \left[\tau_{\mathrm{M}}^{-1} + \sigma^{1-\alpha}\tau_{\mathrm{M}}^{-\alpha}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\Gamma(1+\alpha)\right]^2}, \quad (5.10)$$

où A_2 est une constante dépendant de la masse du rayon et de la rigidité de la planète, τ_{M} est le temps de Maxwell, α est un réel positif compris entre 0.15 et 0.3, et Γ la fonction gamma. Cette description empirique a été établie à partir de l'étude en laboratoire du comportement des métaux et des silicates soumis à des forçages cycliques. En plus de la visco-élasticité des matériaux, elle prend en compte leur déformation plastique (i.e. la déformation irréversible résultant d'un réarrangement de la position relative des éléments constituant le matériau). Le couple de marée qui en découle augmente rapidement avec la fréquence pour atteindre un pic dans la gamme des basses fréquences, puis diminue suivant la loi $\mathcal{T} \propto \sigma^{-\alpha}$ (voir Fig. 5.3, panneau de gauche). Pour les objets du système solaire, le modèle d'Andrade s'ajuste mieux aux observations que le modèle de Maxwell, qui sous-estime la dissipation dans la gamme des fréquences supérieures à la fréquence de relaxation visco-élastique du matériau (voir Leconte et al., 2015, pour une comparaison détaillée des deux modèles).

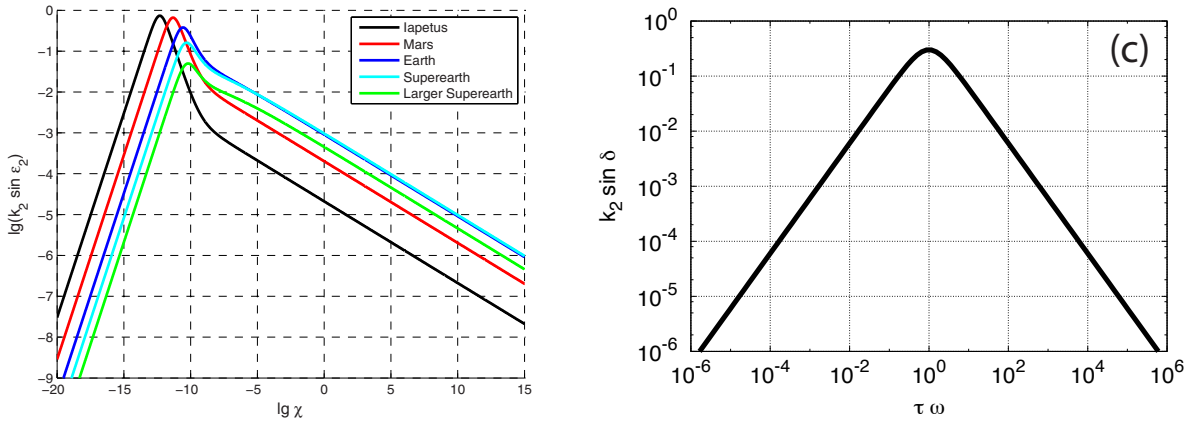


FIGURE 5.3: Partie imaginaire du nombre de Love de degré 2 (axe vertical, échelle logarithmique) en fonction de la fréquence d'excitation, $\chi = \omega$ (axe horizontal, échelle logarithmique), pour deux modèles de dissipation de marées solides usuels. *Gauche* - Modèle d'Andrade. Dissipation de marée pour différents types de corps solides. Crédits Efroimsky (2012). *Droite* - Modèle de Maxwell. Profil-type de la dissipation. Le paramètre τ représente le temps de relaxation de Maxwell. Crédits Correia et al. (2014).

Nous préférons cependant dans cette étude utiliser le modèle de Maxwell (cf. Section 2.4.3) parce que l'expression du couple de marée solide qu'il induit, beaucoup plus simple que (5.10), est similaire à celle du couple de marée atmosphérique obtenue avec le modèle d'atmosphère convective, ce qui permet de comparer directement les effets des deux mécanismes dissipatifs intervenant dans la réponse de marée de la planète : la viscoélasticité de la partie solide et le mécanisme de rayonnement/diffusion thermique de la couche atmosphérique. Dans notre approche, où $H \ll R$, les effets de charge de l'atmosphère sur le sol

(cf. Section 2.3.1) ne sont pas pris en compte. Le couple de marée solide exercé par l'étoile sur la planète s'exprime donc (e.g. Remus et al., 2012b)

$$\mathcal{T}_{\mathrm{S}} = \frac{3}{4}\frac{\mathscr{G} M_*^2 R^5}{a^6}\Im\left\{k_2\right\}, \quad \text{avec } \Im\left\{k_2\right\} = -\frac{3}{2}\frac{K\sigma_{\mathrm{M}}\sigma}{\sigma_{\mathrm{M}}^2 + (1+K)^2\sigma^2}, \tag{5.11}$$

la partie imaginaire du nombre de Love quadripolaire, K un paramètre rhéologique sans dimension et σ_{M} la fréquence de relaxation du matériau. Ces paramètres peuvent eux-même s'écrire en fonction des paramètres physiques de la partie solide :

$$K = \frac{38}{3}\pi\frac{R^4 G}{\mathscr{G} M_{\mathrm{P}}^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathrm{M}} = \frac{G}{\eta}, \tag{5.12}$$

où G désigne le module de compressibilité du matériau (en Pa) et η sa viscosité (en Pa.s). Afin d'exprimer le couple en fonction de la fréquence synodique du perturbateur (ω) plutôt qu'en fonction de la fréquence de marée, on introduit la fréquence de Maxwell $\omega_{\mathrm{M}} = \sigma_{\mathrm{M}}/\left[2\left(1+K\right)\right]$ (inverse du temps de Maxwell). Il vient finalement

$$\boxed{\mathcal{T}_{\mathrm{S}} = -\frac{9}{8}\frac{\mathscr{G} M_*^2 R^5 K\omega_{\mathrm{M}}}{(1+K)\,a^6}\frac{\omega}{\omega^2+\omega_{\mathrm{M}}^2}.} \tag{5.13}$$

5.3.1.2 Couple de marée atmosphérique

Pour le couple de marée atmosphérique, on reprend l'expression donnée par (4.151),

$$\mathcal{T} = 2\pi R^2\frac{\kappa\rho_0\left(0\right)}{g}J_2 U_2\frac{\sigma}{\sigma^2+\sigma_0^2}. \tag{5.14}$$

Les profils verticaux du forçage quadripolaire, U_2 et J_2, sont définis respectivement par

$$U_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{R^2\mathscr{G} M_*}{a^3} \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\alpha\varepsilon R^2 L_*}{M_{\mathrm{A}} a^2}. \tag{5.15}$$

Le paramètre ε représente ici la fraction effective de puissance thermique absorbée. Il s'agit du rapport entre la puissance contribuant à chauffer la planète et celle initialement apportée par l'étoile. Le facteur de forme α traduit l'efficacité avec laquelle la distribution spatiale de l'absorption sur la planète contribue à la composante quadripolaire du forçage thermique. Notons $\mathfrak{D}$ la densité de distribution de la puissance absorbée en fonction de l'angle stellaire zénithal (ψ_*) et $P_2\left(X\right) = \sqrt{5/8}\left(3X^2-1\right)$ le polynôme de Legendre du deuxième ordre normé. Le paramètre α s'exprime

$$\alpha = \int_0^{\pi}\mathfrak{D}\left(\psi_*\right)P_2\left(\cos\psi_*\right)\sin\psi_* d\psi_*, \tag{5.16}$$

et vaut $\alpha = 1/8\sqrt{5/2} \approx 0.19$ pour la distribution en cosinus utilisée par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) (cf. Eq. 3.60). Seule une fraction du couple de marée, notée β, est transmise par friction visqueuse à la planète et contribue à faire évoluer sa rotation de spin (e.g. McCue et al., 1992). Si $\beta < 1$, une rotation différentielle demeure. Le paramètre β peut donc s'interpréter comme l'efficacité du couplage dynamique entre les deux couches. Dans le cas asymptotique où l'atmosphère est un fluide parfait (viscosité nulle), sa

dynamique est complètement décorrélée de celle de la partie solide et $\beta = 0$. Au contraire, si la viscosité du fluide est importante, $\beta \approx 1$. Ainsi, en posant $\omega_0 = \sigma_0/2$, on obtient le couple de marée atmosphérique semi-diurne effectif

$$\boxed{\mathcal{T}_{\mathrm{A}} = \frac{3}{32}\frac{\kappa\beta R^4 \mathcal{G} M_* \alpha\varepsilon L_*}{\mathcal{R}_s T_0\, a^5}\frac{\omega}{\omega^2+\omega_0^2}.} \tag{5.17}$$

5.3.2 Position et stabilité des équilibres de spin

Le couple de marée total $\mathcal{T}_{\mathrm{S+A}} = \mathcal{T}_{\mathrm{S}} + \mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ détermine la variation du taux de rotation de la planète. Une accélération de la rotation correspond à $\mathcal{T}_{\mathrm{S+A}} > 0$, une décélération à $\mathcal{T}_{\mathrm{S+A}} < 0$, et un état d'équilibre à $\mathcal{T}_{\mathrm{S+A}} = 0$. En accord avec les précédents travaux (e.g. Correia et al., 2008, courbe rouge dans Fig. 5.2, panneau gauche, où $e = 0$), on identifie trois positions d'équilibre possibles :

$$\begin{array}{lcll} \Omega_0\,(a) & = & n_{\mathrm{orb}} & \text{(synchronisation)}, \\ \Omega_-\,(a) & = & n_{\mathrm{orb}} - \omega_s & \text{(rotation rétrograde)}, \\ \Omega_+\,(a) & = & n_{\mathrm{orb}} + \omega_s & \text{(rotation prograde)}. \end{array} \tag{5.18}$$

La valeur absolue du moyen mouvement de l'étoile dans le référentiel de la planète à l'équilibre, ω_s, s'exprime

$$\boxed{\omega_s\,(a) = \omega_{\mathrm{M}}\left[\frac{a - A\frac{\omega_0^2}{\omega_{\mathrm{M}}}}{A\omega_{\mathrm{M}} - a}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{avec} \quad A = 12\frac{\mathcal{R}_s T_0 M_* R K}{\alpha\varepsilon L_* \kappa\beta\,(1+K)}.} \tag{5.19}$$

Alors que la synchronisation reste une position d'équilibre quelque soit la distance étoile-planète, les rotations rétrograde et prograde n'existent que dans la bande définie par $a_{\mathrm{inf}} < a < a_{\mathrm{sup}}$. Les bornes du domaine s'écrivent

$$a_{\mathrm{inf}} = A\omega_0\lambda_{\mathrm{diss}}^{-1} \quad \text{et} \quad a_{\mathrm{sup}} = A\omega_0\lambda_{\mathrm{diss}}, \tag{5.20}$$

où $\lambda_{\mathrm{diss}} = \max\left(\omega_0/\omega_{\mathrm{M}}, \omega_{\mathrm{M}}/\omega_0\right)$ mesure l'écart entre les temps de relaxation des mécanismes dissipatifs dans la couche solide et la couche fluide ($\lambda_{\mathrm{diss}} = 1$ si ces deux temps sont égaux, $\lambda_{\mathrm{diss}} \gg 1$ s'ils sont très différents). On remarque que la largeur de la bande s'accroît lorsque l'on augmente la différence entre ω_{M} et ω_0. Elle est en revanche nulle si $\omega_0 = \omega_{\mathrm{M}}$, cas limite pour lequel le couple de marée s'annule quelque soit le taux de rotation de la planète à une certaine distance $a = A\omega_0$. Ce comportement particulier résulte du fait que couple solide et couple atmosphérique présentent dans notre modèle la même dépendance à la fréquence d'excitation (de type Maxwell dans les deux cas).

La variation des positions d'équilibre $\Omega_\pm$ avec le demi-grand axe est déterminé par la hiérarchie des fréquences ω_0 et ω_{M} :

- si $\omega_{\mathrm{M}} < \omega_0$, $\frac{d\omega_s}{da} < 0$ et les rotations d'équilibre se rapprochent de la synchronisation quand a augmente,
- si $\omega_{\mathrm{M}} > \omega_0$, elles s'en écartent.

La stabilité des positions d'équilibres dépend de la dérivée du couple en fréquence : une position est stable si $\partial\mathcal{T}_{\mathrm{S+A}} < 0$, instable sinon. En introduisant la distance-seuil $a_{\mathrm{eq}} = A\omega_0^2/\omega_{\mathrm{M}}$, on obtient respectivement pour la synchronisation et les rotations d'équilibres pro- et rétrograde

$$\partial_\omega \mathcal{T}_{\mathrm{S+A}}|_{\Omega_0} \propto \mathrm{sign}\,(a - a_{\mathrm{eq}}) \quad \text{et} \quad \partial_\omega \mathcal{T}_{\mathrm{S+A}}|_{\Omega_\pm} \propto n_{\mathrm{orb}}^4 \omega_{\mathrm{M}} \frac{\omega_s^2\left(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{M}}^2\right)}{\left(\omega_s^2 + \omega_{\mathrm{M}}^2\right)^2\left(\omega_s^2 + \omega_0^2\right)}. \tag{5.21}$$

Ainsi, la hiérarchie des fréquences associées aux mécanismes dissipatifs détermine aussi la stabilité des équilibres :

- si $\omega_{\mathrm{M}} < \omega_0$, alors Ω_0 est stable et les $\Omega_\pm$ sont instables ;
- si $\omega_{\mathrm{M}} > \omega_0$, c'est le contraire : Ω_0 est instable et les $\Omega_\pm$ sont stables.

Lorsque $a < a_{\mathrm{inf}}$, la marée solide prédomine et conduit la planète vers la synchronisation. En revanche, au delà de a_{sup}, il n'y a plus d'équilibres puisque le couple solide devient inférieur en ordre de grandeur au couple atmosphérique. Notons que ce cas demeure purement académique dans la mesure où les effets des marées thermiques sur la rotation d'une planète deviennent négligeable à partir d'un éloignement de l'étoile bien inférieur à a_{sup}.

PARAMÈTRES	NOTATIONS	VALEURS
Constante de gravitation	$\mathscr{G}$ $10^{-11}\mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}$	6.67384
Constante des gaz parfaits	$\mathcal{R}_{\mathrm{GP}}$ $\left[\mathrm{J.mol}^{-1}.\mathrm{K}^{-1}\right]$	8.314
Luminosité du Soleil	L_* $\left[10^{26}\mathrm{W}\right]$	3.846
	$\mathscr{G}M_*$ $\left[10^8\mathrm{km}^3.\mathrm{s}^{-2}\right]$	1.32712
Rayon de Vénus	R [km]	6051.8
Masse de Vénus	M_{P} $\left[10^{24}\mathrm{kg}\right]$	4.8676
Fraction massique atmosphérique	f_{A}	10^{-4}
Masse molaire de l'atmosphère	$\mathcal{M}$ $\left[\mathrm{g.mol}^{-1}\right]$	43.45
Paramètre atmosphérique	κ	0.286
Température d'équilibre de la surface	T_0 [K]	737
Fréquence radiative de l'atmosphère	ω_0 $\left[10^{-7}\mathrm{s}^{-1}\right]$	3.77
Facteur de forme	α	0.19
Coefficient de couplage dynamique	β	1.0
Fraction de puissance absorbée	ε	0.04
Module de compressibilité de la partie solide	G [Pa]	10^{11}
Fréquence de relaxation du matériau	ω_{M} $\left[10^{-7}\mathrm{s}^{-1}\right]$	1075

TABLE 5.1: Valeurs numériques des paramètres utilisées dans l'application du modèle aux cas de planètes de type Vénus. Les dix premières valeurs sont données par les NASA fact sheets et Mohr et al. (2012). Le paramètre $\kappa = 7/5$ correspond aux gaz parfaits, ω_0 est la fréquence radiative prescrite pour Vénus par Leconte et al. (2015), α est calculé d'après (5.16) pour la distribution en cosinus donnée par (3.60), le couple de marée est supposé entièrement transmis à la partie solide ($\beta = 1$), la valeur retenue pour ε correspond à la puissance absorbée au point subsolaire $F = 100$ W utilisée par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) pour modéliser le chauffage effectif par le sol de l'atmosphère de Vénus. La valeur affectée à G correspond au module de compressibilité des silicates (Remus et al., 2012b) et ω_{M} est ajustée de sorte que la rotation de Vénus corresponde à un état d'équilibre.

5.3.3 Application au cas de Vénus

Parce qu'elle a servi d'objet de référence à la plupart des travaux sur la rotation d'équilibre (e.g. Gold & Soter, 1969; Dobrovolskis & Ingersoll, 1980; Correia & Laskar, 2001), nous appliquons maintenant notre modèle à Vénus avec les valeurs données en Table 5.1 (Fig. 5.4). Notons que le couplage dynamique de l'atmosphère avec la partie solide, loin d'être évident, requerrait à lui seul une étude approfondie que nous laissons à de futurs travaux. En première approximation, nous supposons que le couple atmosphérique est totalement transmis à la partie solide ($\beta = 1$). En outre, nous supposons en première approximation que la température d'équilibre et la fréquence de refroidissement newtonien ne varient pas avec la distance à l'étoile. Enfin, étant donné le peu de connaissances actuel concernant la structure interne de Vénus et sa viscosité, nous choisissons de lui attribuer le module de compressibilité des silicates (e.g. Remus et al., 2012b) et d'ajuster la fréquence de relaxation en faisant l'hypothèse que le taux de rotation actuel de Vénus

correspond à la position d'équilibre rétrograde stable ($\omega_{\mathrm{M}} > \omega_0$) identifiée en (5.18). On observe ainsi en Fig. 5.4 le comportement prédit par les résultats analytiques : les états d'équilibres non-synchronisés existent dans une bande $a \in]a_{\mathrm{inf}}, a_{\mathrm{sup}}[$, ils s'écartent de la synchronisation quand la distance étoile-planète augmente et sont stables, au contraire de la position synchronisée.

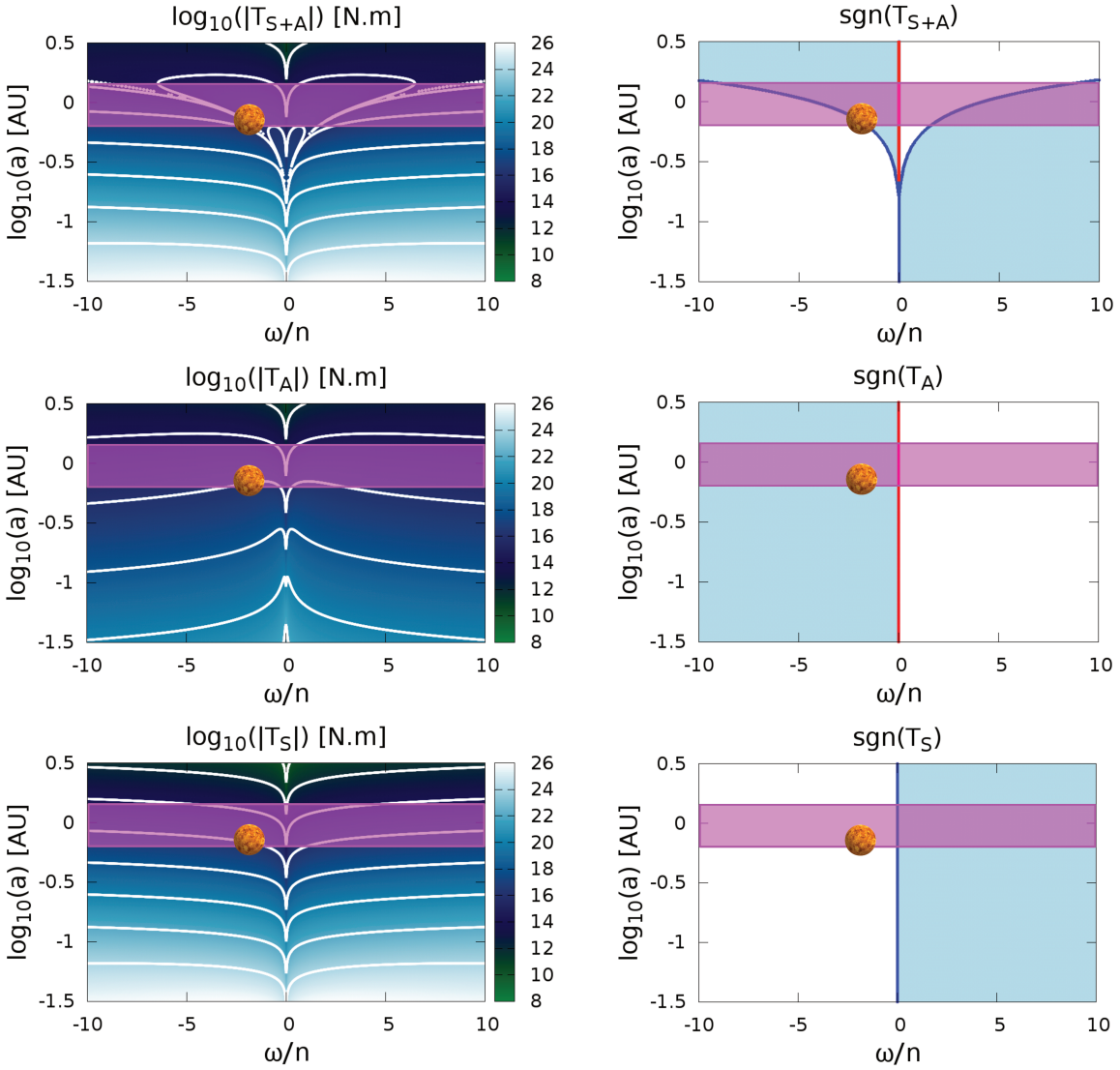


FIGURE 5.4: *Gauche* - Couple de marée exercé sur une planète de type Vénus (haut) et ses composantes atmosphérique (milieu) et solide (bas) en fonction de la fréquence d'excitation réduite ω/n_{orb} (axe horizontal) et du rayon orbital a en échelle logarithmique (axe vertical). Pour chaque panneau, les niveaux de couleurs correspondent au logarithme du couple $\mathcal{T}$ représenté avec des lignes de niveau situées à $\log(\mathcal{T}) = 8, 10, 12, \ldots, 26$. *Droite* - Signe du couple de marée total (haut) et de ses composantes atmosphérique (milieu) et solide (bas) en fonction des mêmes paramètres : les couples positifs (négatifs) correspondent aux régions blanches (bleu clair). Les équilibres stables (instables) sont matérialisés par des lignes bleues (rouges). Les coefficients permettant d'obtenir ces diagrammes et donnés par (5.19) ont pour valeurs $A = 4.420 \times 10^{16}$ m.s et $B = 425.2$. La bande rose transparente correspond à la zone habitable pour un corps noir de température de surface $T_{\mathrm{eq}} = 288\ \mathrm{K} \pm 20\%$ orbitant autour d'une étoile hôte de type solaire ayant la masse et l'âge du Soleil.

Il nous faut toutefois noter ici que la valeur obtenue par cette méthode pour la fréquence de relaxation du matériau (cf. Table 5.1) est très supérieure à l'estimation calculée en assimilant Vénus à une boule homogène de silicates, $\omega_{\mathrm{M}} \sim 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-1}$. Ceci est dû au modèle de Maxwell qui, ainsi que nous l'avons mentionné en Section 5.3.1.1, sous-estime le couple de marée solide dans la gamme des fréquences supérieures à ω_{M}. Cette sous-estimation est importante au vu des temps de Maxwell des solides, de l'ordre de plusieurs siècles (voir Fig. 5.3), ce qui explique l'écart entre les valeurs estimées par ajustement des paramètres d'une part et à partir des caractéristiques physiques des silicates d'autre part. Le modèle d'Andrade donne un couple de

marée solide qui décroît plus lentement avec la fréquence de forçage. Il s'ajuste donc mieux aux contraintes observationnelles que le modèle de Maxwell. Avec le modèle d'Andrade, l'égalisation des couples de marée solide et atmosphérique induit jusqu'à cinq positions d'équilibres différentes (Leconte et al., 2015). Ceci ne diminue pas l'intérêt de la démarche de ce chapitre, qui pourrait être appliquée à d'autres rhéologies, mais doit attirer notre attention sur l'importance que revêt le choix de la modélisation concernant les prescriptions analytiques que l'on peut en retirer. Dans ce contexte, le fait que les modèles *ab initio* permettent de garder un contrôle sur la physique représente un argument fort pour justifier le choix de modélisation.

Pour terminer cette section, nous devons revenir sur l'hypothèse simplificatrice principale de l'étude : la température d'équilibre de la surface et la fréquence radiative ont été supposées constantes pour établir les positions d'équilibres et tracer les diagrammes de la Figure 5.4 alors que ces deux paramètres dépendent en réalité de la distance à l'étoile. L'équilibre de corps noir donne $T_0 \propto a^{-1/2}$ et, d'après (4.6), $\omega_0 \propto a^{-3/2}$. Comme la stabilité des positions d'équilibre est déterminé par le rapport $\omega_0/\omega_{\mathrm{M}}$, le fait que la fréquence radiative varie avec la distance à l'étoile peut modifier qualitativement l'aspect des diagrammes de stabilité. Par exemple, une inversion de hiérarchie entre ω_0 et ω_{M} change les positions stables (instables) en positions instables (stables). Les limites de la région des marées atmosphériques, où apparaissent les équilibres non-synchronisés, est elle aussi modifiée, comme le montre la Figure 5.5 où nous avons tracé le diagramme de stabilité d'une planète semblable à Vénus en utilisant les fonctions du demi-grand axe

$$T_0\left(a\right) = T_{0;♀}\left(\frac{a}{a_♀}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \omega_0\left(a\right) = \omega_{0;♀}\left(\frac{a}{a_♀}\right)^{-\frac{3}{2}}, \tag{5.22}$$

les paramètres $T_{0;♀}$, $\omega_{0;♀}$ et $a_♀$ étant respectivement la température et la fréquence radiative du Tableau 5.1 et le demi-grand axe de Vénus dans sa configuration actuelle ($a_♀ = 1.0821 \times 10^8$ km, Nasa fact sheet).

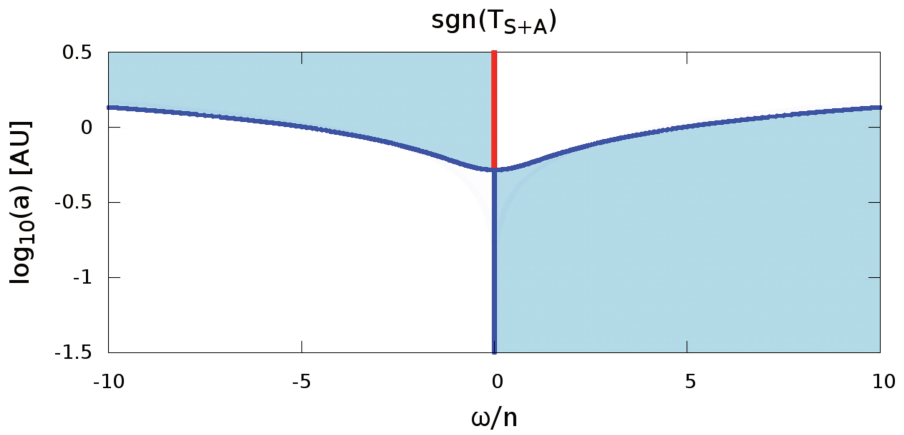


FIGURE 5.5: Signe du couple de marée exercé sur une planète de type Vénus en fonction de la fréquence d'excitation réduite ω/n_{orb} (axe horizontal) et du rayon orbital a en échelle logarithmique (axe vertical) dans le cas où l'on prend en compte les variations de T_0 et σ_0 avec le demi-grand axe. Le résultat à T_0 et σ_0 constants (Fig. 5.4, panneau en haut à droite) est superposé en transparence.

5.4 Conclusion

Le couple de marée atmosphérique déduit de la modélisation présentée au Chapitre 4 apporte un complément au socle physique sur lequel reposent les travaux examinant l'impact des marées sur la rotation des planètes semblables à Vénus, où la marée atmosphérique joue un rôle important. En particulier, il constitue une justification physique a posteriori du choix qui avait été fait par Correia & Laskar (2001) d'introduire une fonction d'interpolation pour raccorder le couple donné par Dobrovolskis & Ingersoll (1980) à

un comportement linéaire au voisinage de la synchronisation. Ce modèle *ab initio* permet non seulement de retrouver les états d'équilibre non-synchronisés déjà identifiés par ces précédents travaux, mais aussi de les caractériser, en mettant par exemple en lumière la façon dont leur position et leur stabilité dépendent des différents paramètres physiques et notamment ceux associés aux mécanismes dissipatifs. L'étude développée dans ce chapitre peut être généralisée à des rhéologies autres que celle de Maxwell, plus réalistes ou mieux adaptées à un type de corps donné. D'un point de vue plus orienté vers l'application, elle peut servir d'outil de premier diagnostic pour les observations et la simulation de systèmes planétaires, en permettant par exemple de contraindre la structure interne des planètes à partir de leur rotation de spin ou, au contraire, de prédire l'état de rotation final d'un corps pour une physique donnée. Ceci viendra dans un second temps alimenter l'étude de l'évolution du climat, dont le taux de rotation de la planète est un facteur-clé (Leconte et al., 2013; Heng & Workman, 2014), en améliorant la compréhension des liens qui relient cette évolution à la physique interne du corps. Enfin, on peut envisager de généraliser cette approche analytique en introduisant le couple induit par les marées océaniques et les couplages entre les différentes couches.

Article associé

L'article Auclair-Desrotour et al. (2016b) ci-après établit analytiquement les états d'équilibres de spin d'une planète soumise à la fois aux marées thermiques atmosphériques et aux marées solides. Dans un premier temps sont introduites les expressions physiques des couples de marées, celui de la partie solide étant issu du modèle rhéologique de Maxwell (Section 2). Puis, les configurations d'équilibres et leur stabilité sont données en fonctions de paramètres physiques du système (Section 3). Enfin, les résultats obtenus sont appliqués au cas de Vénus (Section 4).

Astronomy & Astrophysics manuscript no. ADLM2016b
December 12, 2016
©ESO 2016

The rotation of planets hosting atmospheric tides: from Venus to habitable super-earths

P. Auclair-Desrotour[1,2], J. Laskar[1], S. Mathis[2,3], and A. C. M. Correia[1,4]

[1] IMCCE, Observatoire de Paris, CNRS UMR 8028, PSL, 77 Avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
[2] Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/DRF - CNRS - Université Paris Diderot, IRFU/SAp Centre de Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
[3] LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 place Jules Janssen, F-92195 Meudon, France
[4] CIDMA, Departamento de Física, Universidade de Aveiro, Campus de Santiago, P-3810-193 Aveiro, Portugal
e-mail: pierre.auclair-desrotour@obspm.fr; jacques.laskar@obspm.fr; stephane.mathis@cea.fr; correia@ua.pt

Received ... / accepted ...

ABSTRACT

The competition between the torques induced by solid and thermal tides drives the rotational dynamics of Venus-like planets and super-Earths orbiting in the habitable zone of low-mass stars. The resulting torque determines the possible equilibrium states of the planet's spin. Here we have computed an analytic expression for the total tidal torque exerted on a Venus-like planet. This expression is used to characterize the equilibrium rotation of the body. Close to the star, the solid tide dominates. Far from it, the thermal tide drives the rotational dynamics of the planet. The transition regime corresponds to the habitable zone, where prograde and retrograde equilibrium states appear. We demonstrate the strong impact of the atmospheric properties and of the rheology of the solid part on the rotational dynamics of Venus-like planets, highlighting the key role played by dissipative mechanisms in the stability of equilibrium configurations.

Key words. celestial mechanics – planet-star interactions – planets and satellites: dynamical evolution and stability – Planets and satellites: atmospheres

1. Introduction

Twenty years after the discovery of the first exoplanet around a Solar-type star (Mayor & Queloz 1995), the population of detected low-mass extra-solar planets has grown rapidly. Their number is now considerable and will keep increasing. This generates a strong need for theoretical modelling and predictions. Because the mass of such planets is not large enough to allow them to accrete a voluminous gaseous envelope, they are mainly composed of a telluric core. In many cases (e.g. 55 Cnc e, see Demory et al. 2016), this core is covered by a thin atmospheric layer as is observed on the Earth, Venus and Mars. The rotation of these bodies strongly affects their surface temperature equilibrium and atmospheric global circulation (Forget & Leconte 2014). Therefore, it is a key quantity to understand their climate, particularly in the so-called habitable zone (Kasting et al. 1993) where some of them have been found (Kopparapu et al. 2014).

The rotational dynamics of super-Venus and Venus-like planets is driven by the tidal torques exerted both on the rocky and atmospheric layers (see Correia et al. 2008). The solid torque, which is induced by the gravitational tidal forcing of the host star, tends to despin the planet to pull it back to synchronization. The atmospheric torque is the sum of two contributions. The first one, caused by the gravitational tidal potential of the star, acts on the spin in a similar way to the solid tide. The second one, called the "thermal tide", results from the perturbation due to the heating of the atmosphere by the stellar bolometric flux. The torque induced by this component is in opposition to those gravitationally generated. Therefore, it pushes the angular velocity of the planet away from synchronization. Although the mass of the atmosphere often represents a negligible fraction of the mass of the planet (denoting $f_{\rm A}$ this fraction, we have $f_{\rm A} \sim 10^{-4}$ for Venus), thermal tides can be of the same order of magnitude and even stronger than solid tides (Dobrovolskis & Ingersoll 1980).

This competition naturally gives rise to prograde and retrograde rotation equilibria in the semi-major axis range defined by the habitable zone, in which Venus-like planets are submitted to gravitational and thermal tides of comparable intensities (Gold & Soter 1969; Dobrovolskis & Ingersoll 1980; Correia & Laskar 2001). Early studies of this effect were based on analytical models developed for the Earth (e.g. Chapman & Lindzen 1970) that show a singularity at synchronisation, while Correia & Laskar (2001) avoid this weak point by a smooth interpolation annulling the torque at synchronization. Only recently, the atmospheric tidal perturbation has been computed numerically with global circulation models (GCM) (Leconte et al. 2015), and analytically by Auclair-Desrotour et al. (2016) (hereafter referred to as P1), who generalized the reference work of Chapman & Lindzen (1970) by including the dissipative processes (radiation, thermal diffusion) that regularize the behaviour of the atmospheric tidal torque at the synchronization.

Here, we revisit the equilibrium rotation of super-Earth planets based on the atmospheric tides model presented in P1. For the solid torque, we use the simplest physical prescription, a Maxwell model (Remus et al. 2012; Correia et al. 2014), because the rheology of these planets is unknown.

2. Tidal torques

2.1. Physical set-up

For simplicity, we considered a planet in a circular orbit of radius a and mean motion n around a star of mass M_* and luminosity L_* exerting on the planet thermal and gravitational tidal forcing (Fig 1). The planet, of mass M_P and spin Ω, has zero obliquity so that the tidal frequency is $\sigma = 2\omega$, where $\omega = \Omega - n$. It is composed of a telluric core of radius R covered by a thin atmospheric layer of mass $M_\mathrm{A} = f_\mathrm{A} M_\mathrm{P}$ and pressure height scale H such that $H \ll R$. This fluid layer is assumed to be homogeneous in composition, of specific gas constant $\mathcal{R}_\mathrm{A} = \mathcal{R}_\mathrm{GP}/m$ ($\mathcal{R}_\mathrm{GP}$ and m being the perfect gas constant and the mean molar mass respectively), in hydrostatic equilibrium and subject to convective instability, that is, $N \approx 0$, with N designating the Brunt-Väisälä frequency, as observed on the surface of Venus (Seiff et al. 1980). Hence, the pressure height scale is

$$H = \frac{\mathcal{R}_\mathrm{A} T_0}{g}, \tag{1}$$

where T_0 is the equilibrium surface temperature of the atmosphere and g the surface gravity which are related to the equilibrium radial distributions of density ρ_0 and pressure p_0 as $p_0 = \rho_0 g H$. We introduce the first adiabatic exponent of the gas $\Gamma_1 = (\partial \ln p_0 / \partial \ln \rho_0)_\mathrm{S}$ (the subscript S being the specific macroscopic entropy) and the parameter $\kappa = 1 - 1/\Gamma_1$. The radiative losses of the atmosphere, treated as a Newtonian cooling, lead us to define a radiative frequency σ_0, given by

$$J_\mathrm{rad} = C_p \sigma_0 \delta T, \tag{2}$$

where $C_p = \mathcal{R}_\mathrm{A}/\kappa$ is the thermal capacity of the atmosphere per unit mass and J_rad is the radiated power per unit mass caused by the temperature variation δT around the equilibrium state. We note here that the Newtonian cooling describes the radiative losses of optically thin atmospheres, where the radiative transfers between layers can be ignored. We applied this modelling to optically thick atmosphere, such as Venus', because the numerical simulations by Leconte et al. (2015) show that it can also describe well tidal dissipation in these cases, with an effective Newtonian cooling frequency. For more details about this physical set-up, we refer the reader to P1.

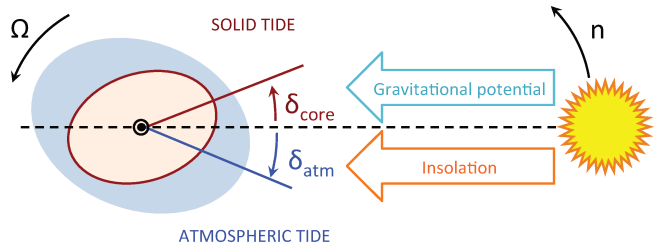


Fig. 1. Tidal elongation of a Venus-like rotating planet, composed of a solid core (brown) and a gaseous atmosphere (blue), and submitted to gravitational and thermal forcings.

2.2. Atmospheric tidal torque

For null obliquity and eccentricity, the tidal gravitational potential is reduced to the quadrupolar term of the multipole expansion (Kaula 1964), $U = U_2(r) P_2^2(\cos\theta) e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$, where t is the time, φ the longitude, θ the colatitude, r the radial coordinate, P_2^2 the normalized associated Legendre polynomial of order $(l, m) = (2, 2)$ and U_2 its radial function. Since $H \ll R$, U_2 is assumed to be constant. The thick atmosphere of a Venus-like planet absorbs most of the stellar flux in its upper regions, which are, as a consequence, strongly thermally forced; only 3 % of the flux reaches the surface (Pollack & Young 1975). However the tidal effects resulting from the heating by the ground determine the tidal mass redistribution since the atmosphere is far denser near the surface than in upper regions (Dobrovolskis & Ingersoll 1980; Shen & Zhang 1990). These layers can also be considered in solid rotation with the solid part as a first approximation because the velocity of horizontal winds is less than 5 m.s^{-1} below an altitude of 10 km (Marov et al. 1973). So, introducing the mean power per unit mass J_2, we choose for the thermal forcing the heating at the ground distribution $J = J_2 \tau_\mathrm{J} e^{-\tau_\mathrm{J} x} P_2^2(\cos\theta) e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$, where $\tau_\mathrm{J} \gg 1$ represents the damping rate of the heating with altitude and depends on the vertical thermal diffusion of the atmosphere at the surface (e.g. Chapman & Lindzen 1970). This allows us to establish for the atmospheric tidal torque the expression (see P1, Eq. 174)

$$\hat{\mathcal{T}}_\mathrm{A} = 2\pi\kappa \frac{R^2 \rho_0(0)}{g} U_2 J_2 \frac{\sigma}{\sigma^2 + \sigma_0^2}, \tag{3}$$

where $\rho_0(0)$ is the density at the ground. This function of σ is of the same form as that given by Ingersoll & Dobrovolskis (1978) (Eq. 4). The quadrupolar tidal gravitational potential and heat power are given by (P1, Eq. 74)

$$U_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{R^2 \mathcal{G} M_*}{a^3} \quad \text{and} \quad J_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha \varepsilon R^2 L_*}{M_\mathrm{A} a^2}, \tag{4}$$

where $\mathcal{G}$ designates the gravitational constant, ε the effective fraction of power absorbed by the atmosphere and α a shape factor depending on the spatial distribution of tidal heat sources. Denoting $\mathcal{F}(\Psi)$ the distribution of tidal heat sources as a function of the stellar zenith angle Ψ, the parameter α is defined as $\alpha = \int_0^\pi \mathcal{F}(\Psi) P_2(\cos\Psi) \sin\Psi d\Psi$, where $P_2(X) = \sqrt{5/8}(3X^2 - 1)$ is the normalized Legendre polynomial of order $n = 2$. If we assume a heat source of the form $\mathcal{F}(\Psi) = \cos\Psi$ if $\Psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, and $\mathcal{F}(\Psi) = 0$ else, we get the shape factor $\alpha = 1/8\sqrt{5/2} \approx 0.19$. The tidal torque exerted on the atmosphere $\hat{\mathcal{T}}_\mathrm{A}$ is partly transmitted to the telluric core. The efficiency of this dynamical (viscous) coupling between the two layers is weighted by a parameter β ($0 \leqslant \beta \leqslant 1$). Hence, with $\omega_0 = \sigma_0/2$, the transmitted torque $\mathcal{T}_\mathrm{A} = \beta \hat{\mathcal{T}}_\mathrm{A}$ (Eq. 3) becomes

$$\mathcal{T}_\mathrm{A} = \frac{3}{32} \frac{\kappa \beta R^4 \mathcal{G} M_* \alpha \varepsilon L_*}{\mathcal{R}_\mathrm{A} T_0 a^5} \frac{\omega}{\omega^2 + \omega_0^2}. \tag{5}$$

2.3. Solid tidal torque

For simplicity and because of the large variety of possible rheologies, we have assumed that the telluric core behaves like a damped oscillator. In this framework, called the Maxwell model, the tidal torque exerted on an homogeneous body can be expressed (e.g. Remus et al. 2012)

$$\mathcal{T}_S = \frac{3}{4} \frac{\mathcal{G} M_*^2 R^5}{a^6} \Im\{k_2\}, \text{ with } \Im\{k_2\} = -\frac{3K}{2} \frac{\sigma_\mathrm{M} \sigma}{\sigma_\mathrm{M}^2 + (1+K)^2 \sigma^2}, \tag{6}$$

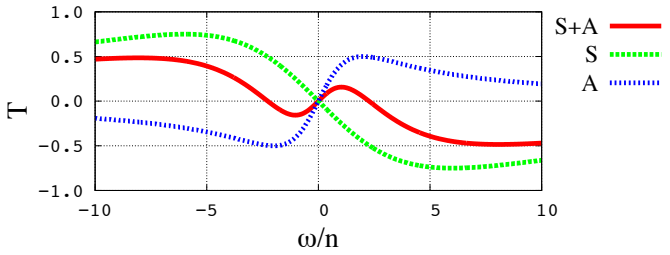


Fig. 2. Normalized total tidal torque exerted on a Venus-like planet (in red) and its solid (in green) and atmospheric (in blue) components as functions of the forcing frequency ω/n with $\omega_0/n = 2$ and $\omega_M/n = 6$.

the imaginary part of the second order Love number (k_2), K a non-dimensional rheological parameter, σ_M the relaxation frequency of the material composing the body, with

$$K = \frac{38\pi}{3}\frac{R^4 G}{\mathcal{G} M_P^2} \quad \text{and} \quad \sigma_M = \frac{G}{\eta}, \tag{7}$$

where G and η are the effective shear modulus and viscosity of the telluric core. Finally, introducing the frequency $\omega_M = \sigma_M/(2+2K)$, we obtain

$$\mathcal{T}_S = -\frac{9}{8}\frac{\mathcal{G} M_*^2 R^5 K \omega_M}{(1+K)\, a^6}\frac{\omega}{\omega^2+\omega_M^2}. \tag{8}$$

3. Rotational equilibrium states

3.1. Theory

The total torque exerted on the planet is the sum of the two previous contributions: $\mathcal{T}_{S+A} = \mathcal{T}_S + \mathcal{T}_A$. When the atmospheric and solid torques are of the same order of magnitude, several equilibria can exist, corresponding to $\mathcal{T}_{S+A} = 0$ (Fig. 2). The synchronization is given by $\Omega_0 = n$ and non-synchronized retrograde and prograde states of equilibrium, denoted Ω_- and Ω_+ respectively, are expressed as functions of a (Eqs. 5,8)

$$\Omega_-(a) = n - \omega_{eq}(a) \quad \text{and} \quad \Omega_+(a) = n + \omega_{eq}(a), \tag{9}$$

where the difference to synchronization, ω_{eq}, is given by

$$\omega_{eq}(a) = \omega_M\sqrt{\frac{a - A\omega_0^2/\omega_M}{A\omega_M - a}} \quad \text{with} \quad A = 12\frac{\mathcal{R}_A T_0 M_* R K}{\alpha\varepsilon L_* \kappa\beta(1+K)}. \tag{10}$$

As a first approximation, we consider that parameters A, ω_0 and ω_M do not vary with the star-planet distance. In this framework, the equilibrium of synchronization is defined for all orbital radii, while those associated with Eq. (10) only exist in a zone delimited by $a_{inf} < a < a_{sup}$, the boundaries being

$$a_{inf} = A\omega_0\lambda^{-1} \quad \text{and} \quad a_{sup} = A\omega_0\lambda\ , \tag{11}$$

with the ratio $\lambda = \max(\omega_0/\omega_M, \omega_M/\omega_0)$. In the particular case where $\omega_0 = \omega_M$, the distance $a_{eq} = A\omega_0$ corresponds to an orbit for which the atmospheric and solid tidal torques counterbalance each other whatever the angular velocity (Ω) of the planet. Studying the derivative of ω_{eq} (Eq. 10), we note that when the star-planet distance increases, the the pseudo-synchronized states of equilibrium get closer to the synchronization ($\omega_M < \omega_0$) or move away from it ($\omega_M > \omega_0$), depending on the hierarchy of frequencies associated with dissipative processes. To determine the stability of the identified equilibria, we introduce the first order variation $\delta\omega$ such that $\omega = \omega_{eq} + \delta\omega$ and study the sign of $\mathcal{T}_{S+A}$ in the vicinity of an equilibrium position for a given a. We first treat the synchronization, for which

$$\mathcal{T}_{S+A} \propto \text{sign}\left(a - a_{eq}\right)\delta\omega \quad \text{with} \quad a_{eq} = A\frac{\omega_0^2}{\omega_M}. \tag{12}$$

We note that $a_{eq} = a_{inf}$ if $\omega_0 < \omega_M$ and $a_{eq} = a_{sup}$ otherwise. In the vicinity of non-synchronized equilibria, we have

$$\mathcal{T}_{S+A} \propto n^4\omega_M\frac{\omega_{eq}^2\left(\omega_0^2 - \omega_M^2\right)}{\left(\omega_{eq}^2+\omega_M^2\right)^2\left(\omega_{eq}^2+\omega_0^2\right)}\delta\omega. \tag{13}$$

Therefore, within the interval $a \in \left]a_{inf}, a_{sup}\right[$, the stability of states of equilibrium also depends on the hierarchy of frequencies. If $\omega_M < \omega_0$ ($\omega_M > \omega_0$), he synchronized state of equilibrium is stable (unstable) and the pseudo-synchronized ones are unstable (stable). For $a < a_{inf}$ the gravitational tide predominates and the equilibrium at $\Omega = n$ is stable. It becomes unstable for $a > a_{sup}$, because the torque is driven by the thermal tide.

3.2. Comparison with previous works

In many early studies dealing with the spin rotation of Venus, the effect of the gravitational component on the atmosphere is disregarded so that the atmospheric tide corresponds to a pure thermal tide (e.g. Dobrovolskis & Ingersoll 1980; Correia & Laskar 2001; Correia et al. 2003, 2008; Cunha et al. 2015). Moreover, the torque induced by the tidal elongation of the solid core is generally assumed to be linear in these works. This amounts to considering that $|\omega| \ll \omega_M$ and $\omega_0 \ll \omega_M$. Hence, the relation Eq. (10) giving the positions of non-synchronized equilibria can be simplified:

$$\omega_{eq} = \sqrt{\frac{\omega_M}{A}a - \omega_0^2}. \tag{14}$$

Following Correia et al. (2008), we take $\omega_0 = 0$. We then obtain $\omega_{eq} \propto \sqrt{a}$ while Correia et al. (2008) found $\omega_{eq} \propto a$. This difference can be explained by the linear approximation of the sine of the phase lag done in this previous work. Given that the condition $\omega_0 < \omega_M$ is satisfied, the non-synchronized states of equilibrium are stable in this case.

By using a global circulation model (GCM), Leconte et al. (2015) obtained numerically for the atmospheric tidal torque an expression similar to the one given by Eq. (3). They computed with this expression the possible states of equilibrium of Venus-like planets by applying to the telluric core the Andrade and constant-Q models and showed that for both models, up to five equilibrium positions could appear. This is not the case when the Maxwell model is used, as shown by the present work. Hence, although these studies agree well on the existence of several non-synchronized states of equilibrium, they also remind us that the theoretical number and positions of these equilibria depend on the models used to compute tidal torques and more specifically on the rheology chosen for the solid part.

4. The case of Venus-like planets

We now illustrate the previous results for Venus-like planets (Table 1). The frequency ω_M is adjusted so that the present angular velocity of Venus corresponds to the retrograde state of equilibrium identified in the case where the condition $\omega_M > \omega_0$ is satisfied (Ω_- in Eq. 9). In Fig. 3, we plot the resulting tidal torque and

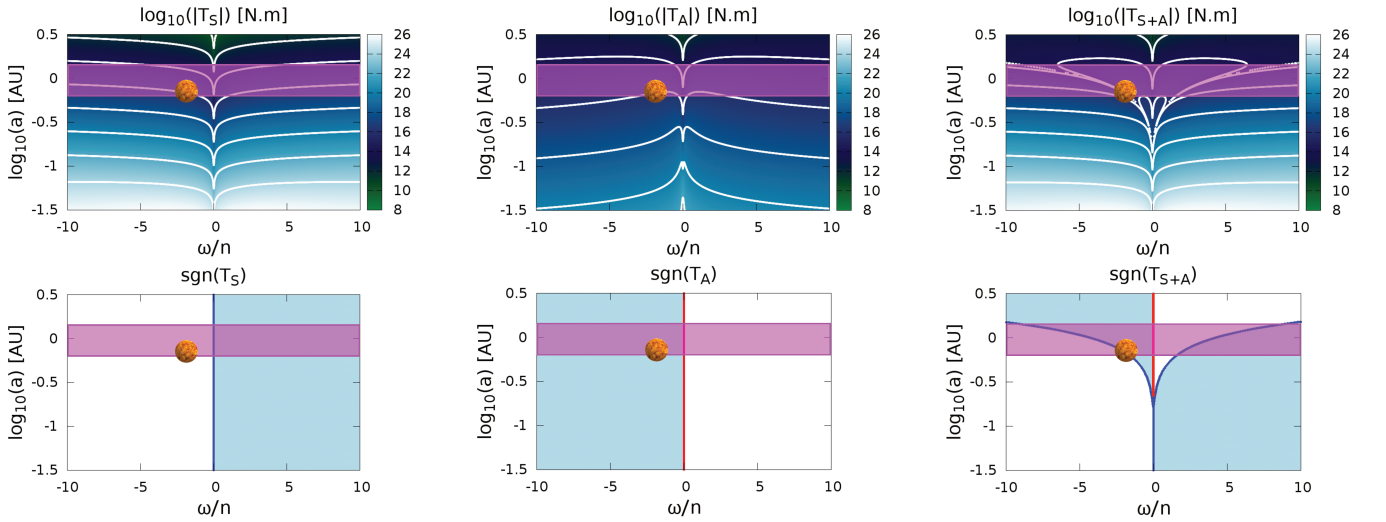


Fig. 3. *Top:* Solid (left panel), atmospheric (middle panel) and total tidal torque (right panel) exerted on a Venus-like planet as functions of the reduced forcing frequency ω/n (horizontal axis) and orbital radius a in logarithmic scale (vertical axis). The colour level corresponds to the torque in logarithmic scale with isolines at $\log_{10}(\mathcal{T}) = 8, 10, 12, \ldots, 26$. *Bottom:* Sign of the solid (left panel), atmospheric (middle panel) and total (right panel) tidal torque as functions of the same parameters: white (blue) areas are associated with positive (negative) torques. Stable (unstable) states of equilibrium are designated by blue (red) lines (with $A = 1.88 \times 10^{19}$ m.s). The pink band corresponds to the habitable zone for the black body equilibrium temperature $T_{\rm eq} = 288\text{K} \pm 20\%$ for a $1M_\odot$ Solar-type star at the age of the Sun.

Parameters	Values	Units
$\mathcal{G}$	6.67384×10^{-11}	$\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$
$\mathcal{R}_{\rm GP}$	8.314	$\text{J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$
L_*	3.846×10^{26}	W
$\mathcal{G}M_*$	1.32712×10^8	$\text{km}^3.\text{s}^{-2}$
R	6051.8	km
$M_{\rm P}$	4.8676×10^{24}	kg
$f_{\rm A}$	10^{-4}	–
$\mathcal{M}_{\rm A}$	43.45	g.mol^{-1}
T_0	737	K
κ	0.286	–
ω_0	3.77×10^{-7}	s^{-1}
α	0.19	–
β	1.0	–
ε	0.04	–
G	10^{11}	Pa
$\omega_{\rm M}$	1.075×10^{-4}	s^{-1}

Table 1. Numerical values used in the case of Venus-like planets. Parameters from $\mathcal{G}$ to T_0 are given by Nasa fact sheets[1] and Mohr et al. (2012), the value of κ corresponds to a perfect gas, ω_0 is the radiative frequency prescribed by Leconte et al. (2015) for Venus, α is computed for a tidal heat power per unit mass proportional to $\cos\Psi$ on the day side and equal to zero on the night side, the atmospheric tidal torque is assumed to be entirely transmitted to the telluric core ($\beta = 1$), ε is consistant with the estimation of Dobrovolskis & Ingersoll (1980) for the effective heating of Venus' atmosphere by the ground, and we take for G the shear modulus of silicates (Remus et al. 2012).

its components, as well as their signs, as functions of the tidal frequency and orbital radius. These maps show that the torque varies over a very large range, particularly the solid component ($\mathcal{T}_{\rm S} \propto a^{-6}$ while $\mathcal{T}_{\rm A} \propto a^{-5}$). The combination of the solid and atmospheric responses generates the non-synchronized states of equilibrium observed on the bottom left panel, which are located in the interval $]a_{\rm inf}, a_{\rm sup}[$ (see Eq. 11) and move away from the synchronization when a increases (see Eq. 10), as predicted analytically.

For illustration, in Fig. 4, we show the outcome of a different value of $\omega_{\rm M}$, with $\omega_0 > \omega_{\rm M}$, contrary to Fig. 3 where $\omega_{\rm M} > \omega_0$. We observe the behaviour predicted analytically in Sect. 3. In Fig. 3, the non-synchronized equilibria are stable and move away from the synchronization when a increases, but they are unstable in Fig. 4.

We note that the value of the solid Maxwell frequency obtained for stable non-synchronized states of equilibrium, $\omega_{\rm M} = 1.075 \times 10^{-4}\ \text{s}^{-1}$, is far higher than those of typical solid bodies ($\omega_{\rm M} \sim 10^{-10}\ \text{s}^{-1}$, see Efroimsky 2012). The Maxwell model, because of its decreasing rate as a function of ω (i.e. $\propto \omega^{-1}$), underestimates tidal torque for tidal frequencies that are greater than $\omega_{\rm M}$, which leads to overestimate the Maxwell frequency when equalizing atmospheric and solid torques. Using the Andrade model for the solid part could give more realistic values of $\omega_{\rm M}$, as proved numerically by Leconte et al. (2015), because the decreasing rate of the torque is lower in the Andrade model than in the Maxwell model (i.e. $\propto \omega^{-\alpha}$ with $\alpha = 0.2 - 0.3$).

Finally, we must discuss the assumption we made when we supposed that the parameters of the system did not depend on the star-planet distance. The surface temperature of the planet and the radiative frequency actually vary with a. If we consider that T_0 is determined by the balance between the heating of the star and the black body radiation of the planet, then $T_0 \propto a^{-1/2}$. As $\sigma_0 \propto T_0^3$, we have $\sigma_0 \propto a^{-3/2}$. These new dependences modify neither the expressions of $\omega_{\rm eq}$ (Eq. 10), nor the stability conditions of the states of equilibrium (Eqs. 12 and 13). However, they have repercussions on the boundaries of the region where non-synchronized states exist. This changes are illustrated by Fig. 4 (bottom panel), which shows the stability diagram of Fig. 3 (bottom left panel) computed with the functions $T_0(a) = T_{0;♀}(a/a_♀)^{-1/2}$ and $\sigma_0(a) = \sigma_{0;♀}(a/a_♀)^{-3/2}$ ($a_♀$, $T_{0;♀}$ and $\sigma_{0;♀}$ being the semi-major axis of Venus and the constant temperature and radiative frequency of Table 1 respectively).

[1] http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/

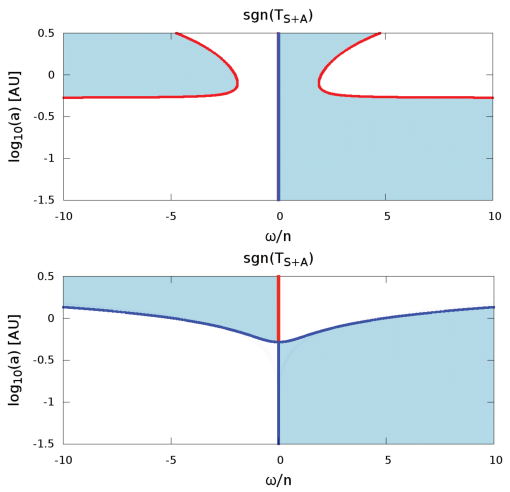


Fig. 4. Sign of the total tidal torque as a function of the tidal frequency ω/n (horizontal axis) and orbital radius (a) (vertical axis) for two different cases. *Top:* with $\omega_0 = 3.77 \times 10^{-7}$ s^{-1} and $\omega_{\rm M} = 3.7 \times 10^{-8}$ s^{-1} ($\omega_0 > \omega_{\rm M}$). *Bottom:* with T_0 and ω_0 depending on the star-planet distance and $\omega_{\rm M} > \omega_0$. White (blue) areas correspond to positive (negative) torque. Blue (red) lines designate stable (unstable) states of equilibrium.

5. Discussion

A physical model for solid and atmospheric tides allows us to determine analytically the possible rotation equilibria of Venus-like planets and their stability. Two regimes exist depending on the hierarchy of the characteristic frequencies associated with dissipative processes (viscous friction in the solid layer and thermal radiation in the atmosphere). These dissipative mechanisms have an impact on the stability of non-synchronized equilibria, which can appear in the habitable zone since they are caused by solid and atmospheric tidal torques of comparable intensities. This study can be used to constrain the equilibrium rotation of observed super-Earths and therefore to infer the possible climates of such planets. Also here the Maxwell rheology was used. This work can be directly applied to alternative rheologies such as the Andrade model (Efroimsky 2012). The modelling used here is based on an approach where the atmosphere is assumed to rotate uniformly with the solid part of the planet (Auclair-Desrotour et al. 2016). As general circulation is likely to play an important role in the atmospheric tidal response, we envisage examining the effect of differential rotation and corresponding zonal winds of the tidal torque in future studies.

Acknowledgements. P. Auclair-Desrotour and S. Mathis acknowledge funding by the European Research Council through ERC grant SPIRE 647383. This work was also supported by the "exoplanètes" action from Paris Observatory and by the CoRoT/*Kepler* and PLATO CNES grant at CEA-Saclay. A. C. M. Correia acknowledges support from CIDMA strategic project UID/MAT/04106/2013.

References

Auclair-Desrotour, P., Laskar, J., & Mathis, S. 2016, ArXiv e-prints
Chapman, S. & Lindzen, R. 1970, Atmospheric tides: Thermal and gravitational. Reidel.
Correia, A. C. M., Boué, G., Laskar, J., & Rodríguez, A. 2014, A&A, 571, A50
Correia, A. C. M. & Laskar, J. 2001, Nature, 411, 767
Correia, A. C. M., Laskar, J., & de Surgy, O. N. 2003, Icarus, 163, 1
Correia, A. C. M., Levrard, B., & Laskar, J. 2008, A&A, 488, L63
Cunha, D., Correia, A. C., & Laskar, J. 2015, International Journal of Astrobiology, 14, 233
Demory, B.-O., Gillon, M., Madhusudhan, N., & Queloz, D. 2016, MNRAS, 455, 2018
Dobrovolskis, A. R. & Ingersoll, A. P. 1980, Icarus, 41, 1
Efroimsky, M. 2012, ApJ, 746, 150
Forget, F. & Leconte, J. 2014, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 372, 20130084
Gold, T. & Soter, S. 1969, Icarus, 11, 356
Ingersoll, A. P. & Dobrovolskis, A. R. 1978, Nature, 275, 37
Kasting, J. F., Whitmire, D. P., & Reynolds, R. T. 1993, Icarus, 101, 108
Kaula, W. M. 1964, Reviews of Geophysics and Space Physics, 2, 661
Kopparapu, R. K., Ramirez, R. M., SchottelKotte, J., et al. 2014, ApJ, 787, L29
Leconte, J., Wu, H., Menou, K., & Murray, N. 2015, Science, 347, 632
Marov, M. Y., Avduevskij, V. S., Kerzhanovich, V. V., et al. 1973, Journal of Atmospheric Sciences, 30, 1210
Mayor, M. & Queloz, D. 1995, Nature, 378, 355
Mohr, P. J., Taylor, B. N., & Newell, D. B. 2012, Journal of Physical and Chemical Reference Data, 41, 043109
Pollack, J. B. & Young, R. 1975, Journal of Atmospheric Sciences, 32, 1025
Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P., & Lainey, V. 2012, A&A, 541, A165
Seiff, A., Kirk, D. B., Young, R. E., et al. 1980, J. Geophys. Res., 85, 7903
Shen, M. & Zhang, C. Z. 1990, Icarus, 85, 129

CHAPITRE 6

MARÉES OCÉANIQUES

Sommaire

6.1 Introduction **178**
6.2 Etat de l'art **179**
6.3 Structure des ondes dans le cas d'une couche océanique épaisse **182**
6.3.1 Equations primitives et approximations 182
6.3.2 Equation de marée de Laplace et fonctions de Hough complexes 184
6.3.3 Profils verticaux des modes 185
6.3.4 Potentiel de marée océanique 188
6.3.4.1 Potentiel à l'extérieur de la planète 188
6.3.4.2 Potentiel à l'intérieur de la planète 189
6.3.5 Nombres de Love 190
6.3.6 Couple de marée 190
6.4 Conditions aux limites **191**
6.5 Cas de l'océan profond homogène isotherme **191**
6.5.1 Structure des ondes de marées 191
6.5.2 Réponse à un forçage échelon 193
6.5.3 Application à la marée océanique semi-diurne lunaire 196
6.6 Conclusion **197**

6.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la modélisation des marées océaniques dans le cadre posé par les problématiques astrophysiques. L'objectif est de quantifier la variation de distribution de masse, la dissipation d'énergie interne et le couple de marée exercé sur la planète en fonction d'un nombre réduit de paramètres physiques du système. On cherche notamment à comprendre l'impact que peut avoir la présence d'un océan sur l'évolution d'un système planétaire ou planète-satellite. Bien que décrites par des équations très similaires, les marées océaniques présentent plusieurs spécificités qui les distinguent fortement des marées atmosphériques. Elles sont d'abord engendrées uniquement par le potentiel gravifique de marée excitateur du corps perturbateur étant donné la faible compressibilité du liquide. Ensuite, leur dépendance à vitesse de rotation planétaire peut être fortement résonante du fait que l'océan, contrairement par l'atmosphère, présente une épaisseur bien définie et se comporte comme un guide d'onde. Ceci, via la dissipation interne de marée et le couple résultant de la redistribution de masse, a d'importantes implications sur l'évolution orbitale et rotationnelle d'un système binaire planète-satellite ou étoile-planète. Le système Terre-Lune en est un cas représentatif. A l'heure actuelle, c'est la dissipation interne des océans qui conduit l'évolution de ce système devant celle de la partie solide. Mais l'hypothèse selon laquelle cette situation n'aurait pas évoluée significativement depuis la formation des deux corps aboutit à une contradiction sur l'âge de la Lune, estimée environ deux milliards d'années plus jeune que ne le montrent les observations (e.g. Bills & Ray, 1999). De

même, il existe un lien étroit entre l'histoire de la rotation de spin de la Terre depuis la formation des deux corps et l'interaction entre l'océan et le satellite (Néron de Surgy & Laskar, 1997). Comprendre comment la marée océanique dépend de la fréquence d'excitation constitue donc un enjeu crucial de la modélisation d'un tel système. Après un bref rappel de l'état de l'art, nous développons une nouvelle approche *ab initio* des marées océaniques dans laquelle sont pris en compte les déplacements du fluide dans la direction radiale et sa stratification. Nous montrons ainsi comment l'introduction de la friction visqueuse/turbulente vient changer la structure de la perturbation. A partir de ces résultats sont calculés le potentiel de marée océanique, les nombres de Love correspondants, ainsi que le couple de marée. Le modèle est finalement appliqué au cas simplifié de l'océan mince homogène et isotherme.

6.2 Etat de l'art

Les fondations de la théorie des marées océaniques sont contemporaines de celles de la théorie des marées atmosphériques. Après que Newton eut énoncé les principes de la gravitation dans les *Principia* (Newton, 1687), Laplace posa les bases de l'approche analytique en développant les premiers modèles d'ondes de marées dans les fluides (voir le *Traité de Mécanique Céleste*, Laplace, 1798). Les dites *Equations de Marées de Laplace* (Cartwright, 1977) décrivent la dynamique d'une mince couche océanique sphérique de profondeur uniforme, entraînée par le mouvement de rotation propre de la planète et soumise au potentiel gravifique d'un astre perturbateur. Elles omettent de fait l'accélération du fluide dans la direction radiale. Cette approximation est l'*ajustement hydrostatique* que nous avons déjà rencontré précédemment et qui suppose que l'équilibre hydrostatique se rétablit instantanément dans la colonne d'eau, de sorte que les déplacements internes suivant la verticale peuvent être ignorés. Bien qu'elle soit appropriée à l'océan terrestre (Miles, 1974), elle l'est moins dans le cas de couches plus épaisses et plus compressibles, où les déplacements suivant la verticale doivent être pris en comptes (e.g. Zahn, 1966a, 1975; Ogilvie & Lin, 2004, 2007; Gerkema & Zimmerman, 2008). La deuxième hypothèse forte du modèle de Laplace est l'*approximation traditionnelle*, déjà discutée au Chapitre 3, qui permet d'effectuer la séparation des variables spatiales dans l'équation décrivant la structure des ondes. Les domaines de validité de ce choix restent encore aujourd'hui un sujet d'étude partiellement élucidé (Gerkema & Shrira, 2005; Prat et al., 2016). Bien qu'elles constituent le modèle de marées océaniques le plus simple, les Equations de Marées de Laplace n'ont été complètement résolues que dans la deuxième moitié du XXème siècle, par Longuet-Higgins (1968).

En parallèle du développement des modèles analytiques, Darwin introduisit une approche empirique fondée sur le caractère harmonique des marées solaire et lunaire et ne nécessitant aucune connaissance de la physique des ondes (e.g. Darwin, 1886). Il formula ainsi des règles simples permettant de prédire les marées et leurs amplitudes à partir de l'ajustement de paramètres sur les observations. Ce formalisme, dont découlent les nombres de Love, a depuis été largement utilisé pour produire des tables de marée et sert de référence dans l'étude observationnelle des objets astrophysiques (par exemple, les estimations du nombre de Love adiabatique par Konopliv & Yoder, 1996; Lainey et al., 2007; Williams et al., 2014). Toutefois, il ne permet pas d'expliquer les conséquences des marées sur l'évolution des systèmes planètes-satellite, et plus particulièrement celle du système Terre-Lune. C'est donc cette question qui est restée jusqu'à aujourd'hui la motivation essentielle de la modélisation physique *ab initio*. Dans le cas du système Terre-Lune, l'extrapolation dans le passé du taux de dissipation de marée actuellement mesuré, dont la contribution principale est celle de l'océan, conduit à une collision des deux corps à 1.5 milliards d'années, soit un temps environ deux fois inférieur à l'âge de la Lune estimé (Bills & Ray, 1999). La puissance dissipée au sein la Terre dans son ensemble est de l'ordre de $\mathscr{P}_{\text{diss}}^{\text{mes}} \approx 3.7$ TW (Egbert & Ray, 2001), tandis que les prédictions des modèles se situent plus aux alentours de $\mathscr{P}_{\text{diss}}^{\text{th}} \approx 1.7$ TW (Cartwright, 1977; Lambeck, 1977). Le constat de cet écart entre mesures et prédictions a orienté les modèles vers une approche plus numérique avec, entre autres, un raffinement de la description du mécanisme de friction et la mesure des variations altimétriques

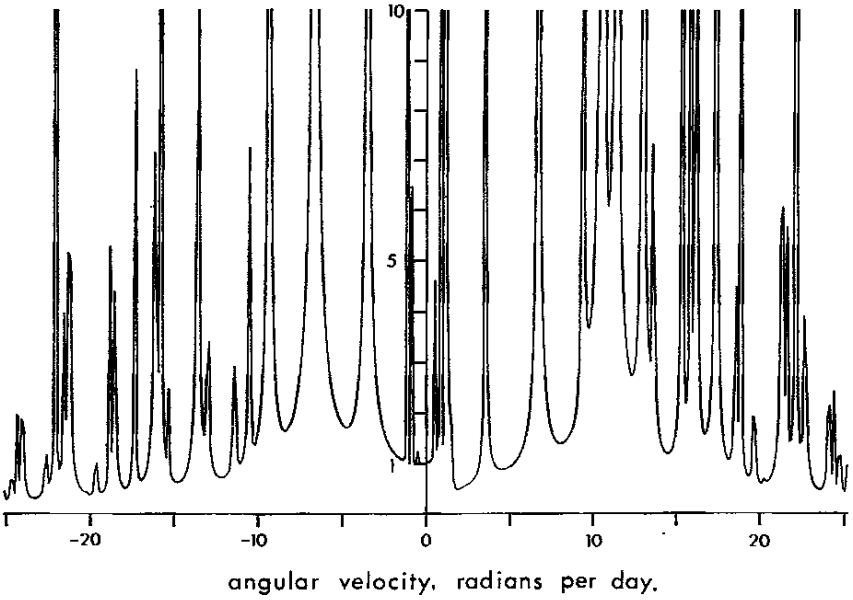


FIGURE 6.1: Amplitude de la marée océanique (axe vertical) en fonction de la fréquence de forçage (axe horizontal) en l'absence de friction et pour un forçage quadripolaire unitaire correspondant à l'harmonique sphérique Y_2^{-2}. Le modèle utilisé est un modèle analytique global d'océan hémisphérique (sphère mi-continent mi-océan) avec approximation de couche mince (seule la composante tangentielle du déplacement est prise en compte). Crédits Webb (1980).

et barométriques à une échelle globale. Représentatifs de cette approche, Egbert & Ray (2001) estiment la dissipation totale de la marée lunaire à $\mathscr{P}_{\rm diss}^{\rm th} = 2.536 \pm 0.016$ TW en ajustant les paramètres d'un GCM à l'aide des données fournies par l'altimètre du satellite TOPEX/Poseidon et pour différentes modélisations de la friction.

Pour une planète ou une exoplanète tellurique quelconque, la modélisation des marées océaniques à l'aide de GCM paraît moins appropriée que dans le dans le cas de la Terre. En effet, elle se prête mal à l'exploration du domaine des paramètres et à la compréhension des mécanismes physiques essentiels. Ainsi, l'approche analytique *ab initio* reste encore aujourd'hui fortement complémentaire des simulations numériques. Les travaux les plus exhaustifs prennent en comptent les interactions océan-continent en étudiant la dynamique des ondes dans un océan hémisphérique (Longuet-Higgins, 1966; Longuet-Higgins & Pond, 1970; Webb, 1980) et mettent en exergue le caractère fortement résonant des ondes gravito-inertielles océaniques (voir Fig. 6.1). Le rôle crucial que joue dans la propagation des ondes et la dissipation interne d'énergie la friction du fluide avec la topographie du plancher océanique a été largement étudiée durant les deux dernières décennies. Par exemple, dans un contexte géophysique, Egbert & Ray (2001) comparent deux modélisation différentes de la traînée de friction $\mathcal{F}$, la friction de Rayleigh et une modélisation quadratique en vitesse, respectivement

$$\mathcal{F}_1 = \frac{V_{\rm R}}{H}\mathbf{V} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = \frac{C_{\rm D}}{H}\mathcal{V}\mathbf{V}, \tag{6.1}$$

où H désigne la profondeur de l'océan, $\mathbf{V}$ le champ de vitesse tangentiel de la marée océanique, $\mathcal{V}$ la vitesse totale (incluant toutes les composantes de la marée océanique), $V_{\rm R}$ un coefficient de traînée linéaire et $C_{\rm D}$ le coefficient de traînée sans dimension du modèle quadratique en vitesse (pour l'eau, $C_{\rm D} \approx 0.002 - 0.01$ d'après Chen et al., 2014). Ils montrent ainsi que dans le cas de la Terre, la première modélisation (avec $V_{\rm R} = 0.03\ {\rm m.s}^{-1}$) tend à surestimer la traînée tandis que la seconde tend à les sous-estimer (Fig. 6.2). Les deux modélisations sont néanmoins équivalentes dans l'approximation quasi-adiabatique (Ogilvie, 2005,

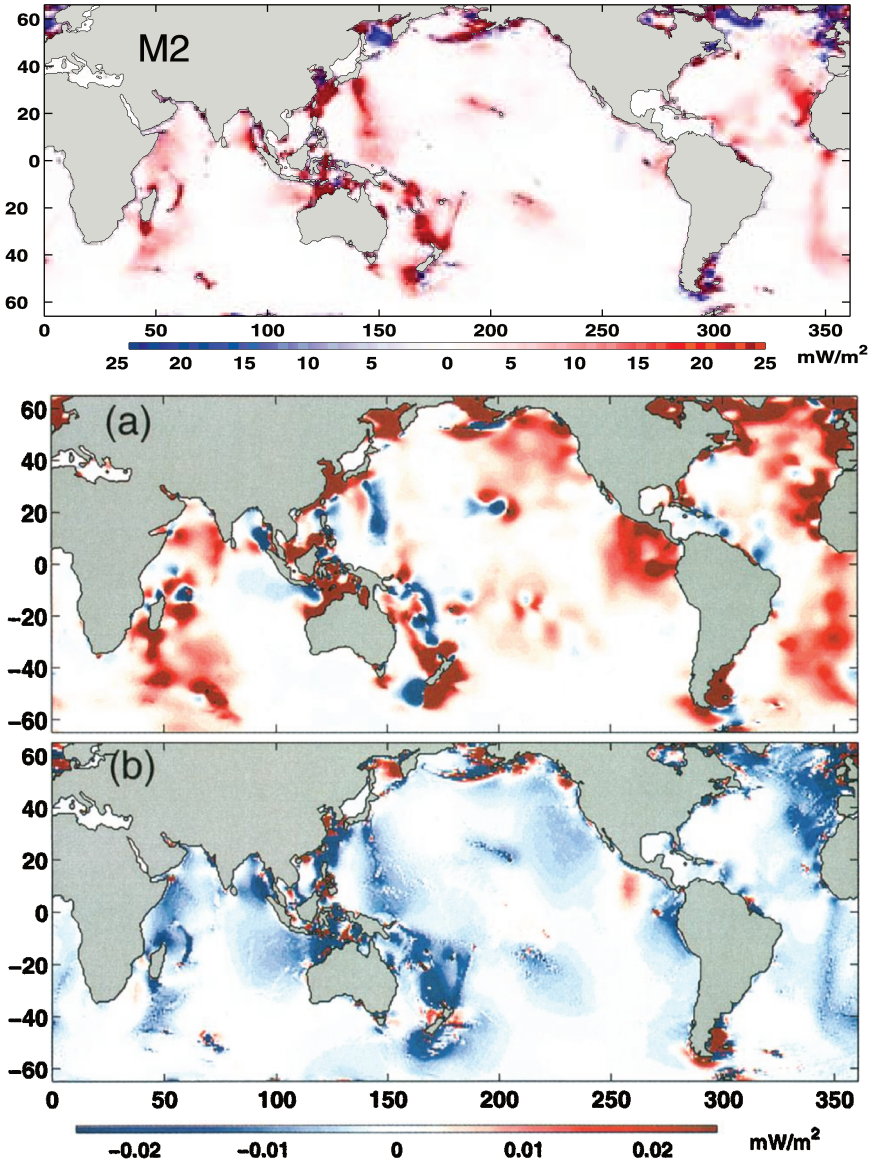


FIGURE 6.2: *Haut* - Dissipation de marée par unité de surface due à la marée semi-diurne lunaire barotrope calculée à partir des données altimétriques du satellite TOPEX/Poséidon. Les niveaux de couleurs mesurent l'intensité de la dissipation en $\mathrm{mW.m^{-2}}$. Les régions foncées correspondent aux plus forte dissipations. Ces résultats sont toutefois moins fiables que les valeurs intermédiaires, en particulier dans les régions bleues, où les erreurs conduisent à des valeurs négatives. Crédits Egbert & Ray (2003). *Bas* - Travail des résidus dynamiques dans l'ajustement des paramètres du modèle utilisé par Egbert & Ray (2001) aux données TOPEX/Poseidon. *(a)* Ajustement avec une traînée modélisée par une friction de Rayleigh ($\mathcal{F}_1$, définie par Eq. 6.1) de paramètre $V_\mathrm{R} = 0.03\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Les couleurs correspondent au signe et à l'intensité des résidus : bleu pour les résidus négatifs et rouge pour les positifs. La coloration rouge dominante correspond à une traînée surestimée. *(b)* Ajustement avec une traînée modélisée par la loi quadratique en vitesse ($\mathcal{F}_2$, définie par Eq. 6.1). La coloration bleue dominante correspond à une traînée sous-estimée. Crédits Egbert & Ray (2001).

2009) et permettent, dans le cas de la Terre, de constater la variabilité de la puissance dissipée avec la topographie (Fig. 6.2, haut).

Ce type d'études a aussi été réalisé afin d'établir des pronostiques sur la structure interne des satellites de glaces orbitant autour des géantes gazeuses (Jupiter et Saturne) du système solaire (Tyler, 2011, 2014; Chen et al., 2014; Matsuyama, 2014). Le chauffage interne généré par la marée est en effet susceptible de fournir une source de chaleur suffisante à l'existence d'un océan liquide intérieur et de modifier ainsi significativement les conditions d'habitabilité sous la surface glacée du corps. Pour répondre à cette question

dans le cas d'Encelade, Tyler (2011) estime l'intensité de la dissipation de marée au sein de la couche liquide en fonction de son épaisseur et du facteur de qualité de la réponse (cf. Chapitre 2, Eq. 2.23),

$$Q = 2\pi \frac{E_{\mathrm{tide}}}{E_{\mathrm{diss}}}, \tag{6.2}$$

où E_{tide} représente l'énergie maximale stockée dans la marée et E_{diss} l'énergie dissipée sur un cycle complet. Il met ainsi en évidence l'existence de résonances pour certaines valeurs particulières de l'épaisseur de la couche. En reprenant cette approche, Matsuyama (2014) montre que la déformation du plancher océanique par effet de marée peut modifier significativement l'intensité de la dissipation interne d'énergie.

Tous ces travaux traitent le cas des couches océaniques fines en supposant le fluide incompressible et l'écoulement bidimensionnel. Par ailleurs, ceux qui concernent l'océan terrestre (e.g. Egbert & Ray, 2001, 2003) privilégient une approche opérationnelle prenant en compte de façon précise la distribution des continents et s'appuyant largement sur des mesures *in situ*. Cette approche n'est pas adaptée à l'étude des exoplanètes telluriques, pour lesquelles ces caractéristiques ne sont pas connues. L'objectif de ce chapitre est donc de généraliser la modélisation analytique aux océans potentiellement profonds de ces objets en introduisant l'accélération radiale usuellement ignorée et de déterminer analytiquement le couple de marée exercé sur la planète. Notre démarche vise à permettre une exploration étendue du domaine de paramètres, décentrée du cas de la Terre, et orientée vers la modélisation de systèmes planétaires très divers. Nous adoptons pour la dissipation la friction de Rayleigh avec les prescriptions de Egbert & Ray (2001) et Chen et al. (2014), et pour les équations de la dynamique le formalisme développé par Volland (1974a), détaillé plus loin et faisant intervenir les solutions de l'équation de Laplace complexe.

6.3 Structure des ondes dans le cas d'une couche océanique épaisse

Nous établissons dans cette section les équations gouvernant la dynamique des marées océaniques avec friction visqueuse des couches épaisses.

6.3.1 Equations primitives et approximations

Le système considéré est une couche océanique de profondeur uniforme H stratifiée dans la direction radiale et en rotation solide avec la planète à la vitesse angulaire Ω. On désigne par $R_c = R - H$ le rayon de la partie solide, R étant le rayon de la planète. Les repères, systèmes de coordonnées et notations utilisés sont identiques à ceux définis pour l'études des marées atmosphériques. Les équations de la dynamiques sont les équations primitives des couches océaniques planétaires et stellaires données par Gerkema & Zimmerman (2008). Dans la lignée des travaux formant l'état de l'art, nous y introduisons la dissipation sous la forme d'une friction de Rayleigh, $\sigma_{\mathrm{f}}\mathbf{V}$, où σ_{f}, généralement appelé *coefficient de Rayleigh*, est une fréquence caractéristique ($\sigma_{\mathrm{f}} > 0$). En outre, l'océan est caractérisé par une variable supplémentaire, la *salinité*, qui de façon plus générale représente la contribution de la composition chimique à l'état local du fluide (densité, stratification, etc.) ; elle est notée S. Elle se décompose comme les autres quantités en une distribution d'équilibre $S_0(r)$ et une variation au premier ordre au voisinage de cet équilibre, δS. L'équation de Navier-Stokes dans le référentiel en rotation avec la planète s'écrit donc

$$\partial_t \mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p - \frac{g}{\rho_0}\delta\rho\,\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\nabla} U - \sigma_{\mathrm{f}}\mathbf{V}. \tag{6.3}$$

Elle est complétée par la conservation de la masse,

$$\partial_t \delta\rho + \frac{d\rho_0}{dr} V_r + \rho_0 \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{V} = 0, \tag{6.4}$$

qui n'est pas modifiée par rapport au cas atmosphérique. L'équation du transport de la chaleur est remplacée par celle de la flottabilité qui relit la variation de densité d'une particule de fluide se déplaçant à sa variation de pression,

$$\partial_t \delta\rho + \frac{d\rho_0}{dr} V_r = \frac{1}{c_s^2} \partial_t \delta p + \frac{1}{c_s^2} \frac{dp_0}{dr} V_r. \tag{6.5}$$

La vitesse du son s'exprime $c_s(r) = \Gamma(\rho_0, p_0, S_0)$, où Γ est une fonction d'état quelconque. Enfin, le déplacement du fluide induit des variations locales de composition chimique par advection [1]. Cet effet se traduit par la conservation de la salinité dans une particule en déplacement, qui s'exprime

$$\partial_t \delta S + \frac{dS_0}{dr} V_r = 0. \tag{6.6}$$

On fait ensuite apparaître dans (6.5) la fréquence de Brunt-Väisälä, définie par (3.13), et s'exprimant dans le cas océanique en fonction de la température et de la salinité (Gerkema & Zimmerman, 2008)

$$N^2 = g \left[\beta_T \left(\frac{dT_0}{dr} + \frac{\beta_T g T_0}{c_p} \right) - \beta_S \frac{dS_0}{dr} \right], \tag{6.7}$$

où β_T désigne le coefficient de compressibilité du fluide sous l'effet d'une variation de température isobare et à salinité constante et β_S le coefficient de compressibilité sous l'effet d'une variation de salinité isotherme et isobare,

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,S} \quad \text{et} \quad \beta_S = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p,T}. \tag{6.8}$$

Dans le cas général, toutes les quantités de (6.7) s'expriment en fonction de r. Le traitement analytique du problème dans la géométrie sphérique nécessite, comme dans le cas de l'atmosphère, d'adopter l'approximation traditionnelle, qui consiste à négliger la contribution de la composante latitudinale du vecteur de rotation ($\boldsymbol{\Omega}$) (voir la discussion détaillée en Section 3.5.1). On obtient finalement pour la coquille océanique épaisse le système d'équations primitives

$$\partial_t V_\theta - 2\Omega V_\varphi \cos\theta = -\frac{1}{r} \partial_\theta \left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U \right) - \sigma_{\mathrm{f}} V_\varphi, \tag{6.9a}$$

$$\partial_t V_\varphi + 2\Omega \cos\theta V_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi \left(\frac{\delta p}{\rho_0} + U \right) - \sigma_{\mathrm{f}} V_\theta, \tag{6.9b}$$

$$\partial_t V_r = -\frac{1}{\rho_0} \partial_r \delta p - \frac{g}{\rho_0} \delta\rho - \partial_r U - \sigma_{\mathrm{f}} V_r, \tag{6.9c}$$

$$\partial_t \delta\rho + \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \rho_0 V_r \right) = -\frac{\rho_0}{r \sin\theta} \left[\partial_\theta \left(\sin\theta V_\theta \right) + \partial_\varphi V_\varphi \right], \tag{6.9d}$$

$$\partial_t \delta\rho = \frac{1}{c_s^2} \partial_t \delta p + \frac{\rho_0 N^2}{g} V_r. \tag{6.9e}$$

1. Il peut aussi y avoir diffusion des éléments chimiques, mais ce mécanisme est ignoré pour simplifier le problème.

6.3.2 Equation de marée de Laplace et fonctions de Hough complexes

On cherche la solution sous la forme de séries de Fourier en temps et longitude. Une grandeur perturbée f quelconque s'écrit ainsi

$$f = \sum_{\sigma,m} f^{\sigma,m}(r,\theta)\, e^{i(\sigma t + m\varphi)}. \tag{6.10}$$

où les coefficients de Fourier $f^{\sigma,m}$ représentent les distributions des variations suivant les directions verticale et latitudinale. La friction visqueuse a pour effet d'introduire des parties imaginaires dans l'équation de marées de Laplace et ses solutions. Définissons la fréquence de marée complexe[2] $\tilde{\sigma}$ et le paramètre de spin complexe associé $\tilde{\nu}$,

$$\tilde{\sigma} = \sigma - i\sigma_{\mathrm{f}} \quad \text{et} \quad \tilde{\nu} = \frac{2\Omega}{\tilde{\sigma}}, \tag{6.11}$$

ainsi que les opérateurs horizontaux

$$\mathcal{L}_\theta^{m,\tilde{\nu}} = \frac{1}{1-\tilde{\nu}^2\cos^2\theta}\left[\partial_\theta + m\tilde{\nu}\cot\theta\right] \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\varphi^{m,\tilde{\nu}} = \frac{1}{1-\tilde{\nu}^2\cos^2\theta}\left[\tilde{\nu}\cos\theta\,\partial_\theta + \frac{m}{\sin\theta}\right]. \tag{6.12}$$

Les composantes latitudinale et zonale du champ de vitesse s'écrivent alors

$$V_\theta = \frac{i}{\tilde{\sigma} r}\mathcal{L}_\theta\,(y+U) \quad \text{et} \quad V_\varphi = -\frac{1}{\tilde{\sigma} r}\mathcal{L}_\varphi\,(y+U), \tag{6.13}$$

avec $y = \delta p/\rho_0$, et l'opérateur de Laplace complexe

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\frac{\sin\theta}{1-\tilde{\nu}^2\cos^2\theta}\partial_\theta\right) - \frac{1}{1-\tilde{\nu}^2\cos^2\theta}\left(m\tilde{\nu}\frac{1+\tilde{\nu}^2\cos^2\theta}{1-\tilde{\nu}^2\cos^2\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right). \tag{6.14}$$

Du point de vue de la structure horizontale, la seule différence avec le cas non dissipatif est la nature du paramètre de spin. Sans friction, $\tilde{\nu}$ est réel et l'on retrouve la structure latitudinale des ondes de marées atmosphériques (Chapitres 3 et 4). Si $\sigma_{\mathrm{f}} > 0$, le paramètre de spin est complexe, ce qui entraîne, comme nous allons le voir, un changement qualitatif de la nature des ondes de marées. Il semble toutefois que ce cas ait été peu étudié jusqu'à présent, au contraire du cas réel. Dans le domaine des marées atmosphériques, citons les travaux de Volland et Mayr (Volland & Mayr, 1972a,b,c; Volland, 1974a,b) qui ont réalisé une étude approfondie du comportement des valeurs propres de l'équation de Laplace en fonction de σ_{f} et montrent comment la friction visqueuse et la traînée ionosphérique, toutes deux modélisées par une friction de Rayleigh, peuvent modifier les ondes de marées. Volland (1974a) calcule numériquement les valeurs propres des plus petits nombres d'onde latitudinaux pour $\tilde{\nu} \in \mathbb{C}$. Il montre ainsi que ces valeurs propres sont complexes et distinctes sauf pour certains points du domaine de paramètres (ces points apparaissent pour $\sigma_{\mathrm{f}} \sim \Omega$, voir Fig. 6.3), ce qui laisse supposer que les fonctions de Hough complexes forment une base comme les fonctions de Hough réelles bien que cette propriété ne semble pas encore avoir été démontrée formellement à ce jour. On peut donc sous cette hypothèse développer les coefficients de Fourier

2. Le signe $-$ devant $i\sigma_{\mathrm{f}}$ est celui que l'on trouve devant le terme de friction de Rayleigh dans (6.9a). Les termes en V_θ et V_φ, regroupés dans le membre de gauche, se factorisent en $(i\sigma + \sigma_{\mathrm{f}})\,V_\theta$ et $(i\sigma + \sigma_{\mathrm{f}})\,V_\varphi$, d'où la définition de $\tilde{\sigma}$ donnée en (6.11).

$$f^{\tilde{\sigma},m}(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(r)\,\Theta_n^{\tilde{\sigma},m}(\theta)\,, \tag{6.15}$$

et cette décomposition est unique. En revanche, comme les Θ_n ne sont pas orthogonales *a priori*, nous ne définirons pas explicitement les coefficients de projection d'une fonction quelconque sur cette base. Les coefficients de projection des fonctions de Hough sur la base des polynômes associés de Legendre sont de toute manière donnés par la méthode spectrale semi-analytique présentée en Annexe A d'Auclair-Desrotour et al. (2016a) (voir aussi Wang et al., 2016), qui s'applique aussi au cas complexe. On norme les vecteurs propres de l'équation de Laplace suivant la norme L^2 hermitienne,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta}, \tag{6.16}$$

où f est une fonction carrée-intégrable à valeur dans $\mathbb{C}$ quelconque. Les fonctions de Hough complexes introduites dans ce chapitre se réduisent ainsi aux fonctions de Hough réelles définies au Chapitre 3 et 4 si l'on élimine les processus dissipatifs.

Dans le régime quasi-adiabatique ($\sigma_\mathrm{f} \ll |\sigma|$), les fonctions de Hough et leurs valeurs propres associées restent proches des solutions du cas réel (voir Figs. 3.5, 3.6 et 3.7). En particulier, la hiérarchie des profondeurs équivalentes avec le nombre d'onde méridional est conservée (voir Fig. 6.3). La dynamique des ondes reste dominée par la rotation et le forçage de marée. Cela reste le cas pour les modes de gravité lorsque σ_f devient comparable, voire supérieur, à σ. En revanche, pour les modes de Rossby, on voit apparaître dans le régime transitoire ($|\sigma| \sim \sigma_\mathrm{f}$) des points critiques indiquant des changements de hiérarchie. De plus, au delà de $\sigma_\mathrm{f} \approx 0.5\,\Omega$, les modes de Rossby viennent rejoindre les modes de gravité pour ne former qu'une unique famille à la limite $\sigma_\mathrm{f} \to +\infty$. Volland (1974a) appelle ce nouveau type d'ondes les modes (n, m, f), où $f = \sigma/\Omega$. Nous avons vu que les modes de Rossby étaient associés au mouvement de rotation de la planète. Ainsi, la disparition de ces modes pour $\sigma_\mathrm{f} \gg \Omega$ s'interprète comme l'atténuation des effets de Coriolis par le mécanisme de friction. Les seuls modes subsistant dans le régime de forte dissipation sont les modes de gravité. Les valeurs propres de ces derniers sont alors fortement négatives, ce qui induit des ondes fortement évanescentes suivant la direction verticale, et les fonctions de Hough convergent vers les polynômes associés de Legendre, c'est-à-dire précisément vers la base des fonctions propres horizontales du cas non-rotationnel. La dissipation a donc pour conséquence de rendre négligeables les effets inertiels et de réduire les ondes gravito-inertielles du cas général à des ondes de gravité fortement amorties.

6.3.3 Profils verticaux des modes

La structure latitudinale des ondes de marée étant maintenant définie, considérons leur structure verticale. Celle-ci est obtenue par substitution de (6.15) dans les équations (6.9a) à (6.9e). Il vient

$$\frac{dY}{dr} = \begin{bmatrix} A_1(r) & B_1(r) \\ A_2(r) & B_2(r) \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} C_1(r) \\ C_2(r) \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad Y = \begin{bmatrix} r^2\xi_{r;n} \\ \rho_0^{-1}\delta p_n \end{bmatrix}, \tag{6.17}$$

et les coefficients fonctions du rayon

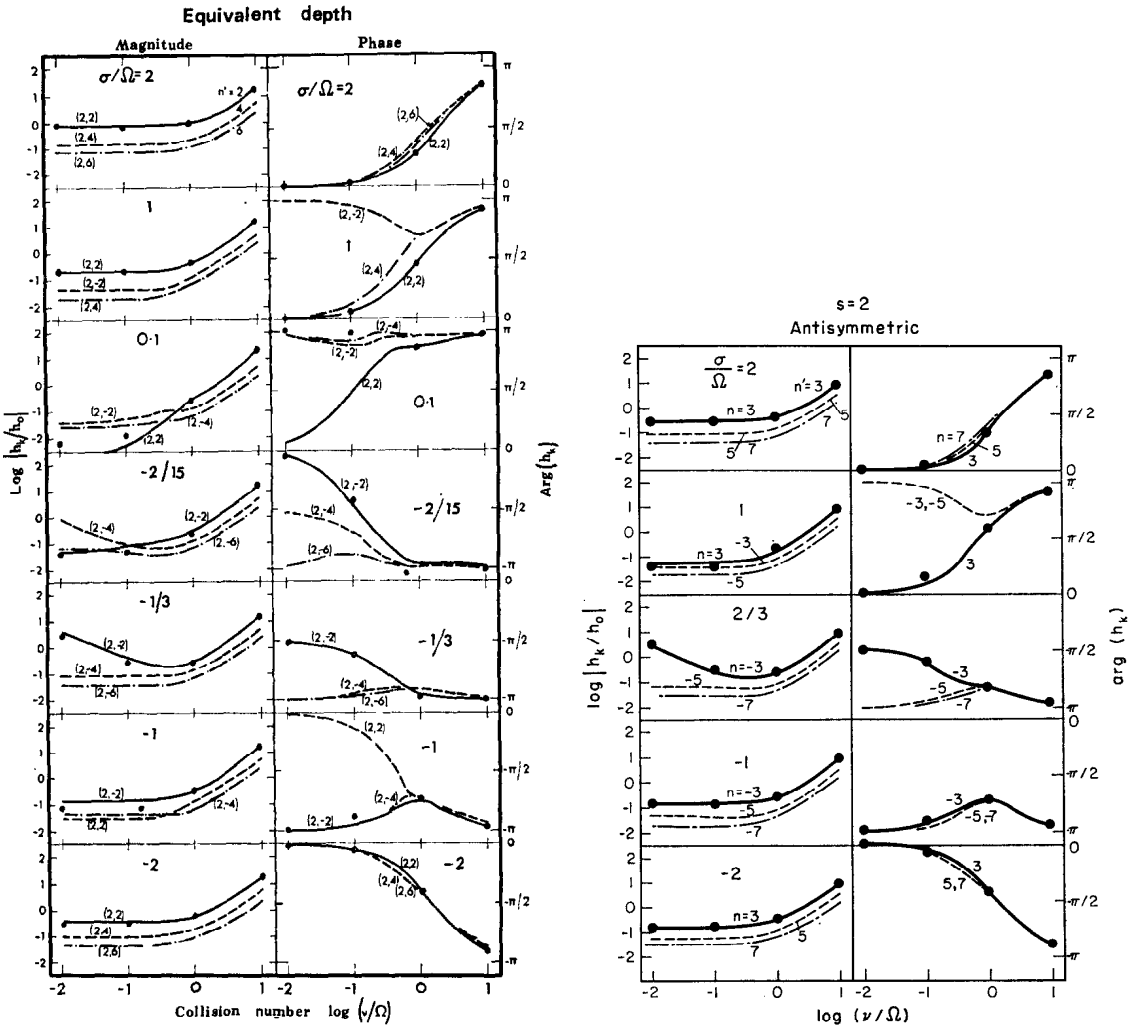


FIGURE 6.3: Magnitude (échelle logarithmique) et phase des profondeurs équivalentes normées en fonction du logarithme la fréquence de friction normée ν/Ω ($\sigma_{\mathrm{f}}/\Omega$ suivant les notations utilisées dans le chapitre) pour différents modes de nombre d'onde zonal $s = 2$ ($m = 2$) et différentes fréquences de marée normées σ/Ω. *Gauche* - Modes symétriques dominants, de nombres d'onde latitudinaux $n' = 2, 4, 6$ ($n = 0, 2, 4$) pour $\sigma/\Omega = -2, -1, -1/3, -2/15, 0.1, 1, 2$ (de bas en haut). *Droite* - Modes antisymétriques dominants, de nombres d'onde latitudinaux $n' = 3, 5, 7$ ($n = 1, 3, 5$) pour $\sigma/\Omega = -2, -1, 2/3, 1, 2$ (de bas en haut). Crédits Volland (1974a) et Volland (1974b).

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{1}{\rho_0 c_s^2}\frac{dp_0}{dr}, \qquad B_1 = \frac{\tilde{\Lambda}_n}{\sigma\tilde{\sigma}} - \frac{r^2}{c_s^2}, \qquad C_1 = \frac{\tilde{\Lambda}_n}{\sigma\tilde{\sigma}} U_n, \\
A_2 &= \frac{1}{r^2}\left(\sigma\tilde{\sigma} - N^2\right), \quad B_2 = -\frac{g}{c_s^2} - \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}, \quad C_2 = -\frac{dU_n}{dr}.
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

Ce système se met sous la forme de l'équation du second degré

$$
\frac{d^2}{dr^2}\left(r^2\xi_{r;n}\right) + A\left(r\right)\frac{d}{dr}\left(r^2\xi_{r;n}\right) + B\left(r\right)\left(r^2\xi_{r;n}\right) = C\left(r\right), \tag{6.19}
$$

où les facteurs A, B et C sont donnés dans le cas général par (4.26a), (4.26b) et (4.26c). Introduisons les paramètres

$$\varepsilon_{s;n} = \frac{r^2\sigma\tilde{\sigma}}{\tilde{\Lambda}_n c_s^2} \quad \text{et} \quad K_{\text{curv}} = \frac{\sigma\tilde{\sigma}c_s^2}{g\tilde{\Lambda}_n\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{c_s^2}\right). \tag{6.20}$$

On suppose l'océan à l'équilibre hydrostatique à l'ordre zéro ($dp_0/dr = -g\rho_0$). Les facteurs A, B et C se simplifient ainsi en

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr} + \frac{g}{c_s^2}K_{\text{curv}}, \\
B &= \frac{1}{c_s^2}\left[N^2 - \frac{g^2}{c_s^2}K_{\text{curv}}\right] - \frac{d}{dr}\left(\frac{g}{c_s^2}\right) + \frac{\tilde{\Lambda}_n}{r^2}\left(\frac{N^2}{\sigma\tilde{\sigma}} - 1\right)\left(1-\varepsilon_{s;n}\right), \\
C &= \frac{r^2}{c_s^2}\frac{dU_n}{dr} - \frac{\tilde{\Lambda}_n}{g\sigma\tilde{\sigma}}\left[N^2 - \frac{g^2}{c_s^2}K_{\text{curv}}\right]U_n.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Enfin, en posant le changement de variable $r^2\xi_{r;n} = \Phi_n\Psi_n$ avec la fonction radiale

$$\Phi_n\left(r\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{R_c}^{r} A\left(u\right)du\right), \tag{6.22}$$

on retrouve une équation d'onde verticale de type Schrödinger, similaire à (4.28) :

$$\boxed{\frac{d^2\Psi_n}{dr^2} + \left[B - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dr} + \frac{A^2}{2}\right)\right]\Psi_n = C\Phi_n^{-1}.} \tag{6.23}$$

Les relations de polarisation s'écrivent de manière analogue au cas atmosphérique. On obtient les profils du champ de vitesse,

$$\boxed{\begin{aligned}
V_{r;n} &= \frac{i\sigma}{r^2}\Phi_n\Psi_n, && (6.24a)\\
V_{\theta;n} &= \frac{i}{\tilde{\sigma}r\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{\tilde{\Lambda}_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr} + \mathcal{A}\Psi_n\right] - \varepsilon_{s;n}U_n\right\}, && (6.24b)\\
V_{\varphi;n} &= -\frac{1}{\tilde{\sigma}r\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{\tilde{\Lambda}_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr} + \mathcal{A}\Psi_n\right] - \varepsilon_{s;n}U_n\right\}, && (6.24c)
\end{aligned}}$$

du déplacement,

$$\boxed{\begin{aligned}
\xi_{r;n} &= \frac{1}{r^2}\Phi_n\Psi_n, && (6.25a)\\
\xi_{\theta;n} &= \frac{1}{\sigma\tilde{\sigma}r\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{\tilde{\Lambda}_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr} + \mathcal{A}\Psi_n\right] - \varepsilon_{s;n}U_n\right\}, && (6.25b)\\
\xi_{\varphi;n} &= \frac{i}{\sigma\tilde{\sigma}r\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)}\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{\tilde{\Lambda}_n}\Phi_n\left[\frac{d\Psi_n}{dr} + \mathcal{A}\Psi_n\right] - \varepsilon_{s;n}U_n\right\}, && (6.25c)
\end{aligned}}$$

et des quantités scalaires perturbées,

$$\boxed{\begin{aligned}
\delta p_n =& \frac{\rho_0}{1-\varepsilon_{s;n}} \left\{ \frac{\sigma\tilde{\sigma}}{\tilde{\Lambda}_n} \Phi_n \left[\frac{d\Psi_n}{dr} + \mathcal{A}\Psi_n \right] - U_n \right\}, && (6.26a)\\
\delta \rho_n =& \frac{\rho_0}{c_s^2\left(1-\varepsilon_{s;n}\right)} \left\{ \frac{\sigma\tilde{\sigma}}{\tilde{\Lambda}_n} \Phi_n \left[\frac{d\Psi_n}{dr} + \mathcal{B}_n\Psi_n \right] - U_n \right\}, && (6.26b)\\
\delta S_n =& -\frac{1}{r^2}\frac{dS_0}{dr}\Phi_n\Psi_n, && (6.26c)
\end{aligned}}$$

avec les coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}_n$ donnés par

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left[\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c_s^2}\left(1+K_{\text{curv}}\right)\right], \tag{6.27}$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{1}{2}\left[\frac{N^2}{g}\left(\frac{2}{\varepsilon_{s;n}}-1\right) - \frac{g}{c_s^2}\left(1+K_{\text{curv}}\right)\right]. \tag{6.28}$$

Dans le contexte astrophysique, les grandeurs les plus importantes sont les profils de densité et de déplacement vertical, (6.25a) et (6.26b), qui traduisent la variation de distribution de masse et déterminent à la fois les nombres de Love et le couple de marée océaniques.

6.3.4 Potentiel de marée océanique

Comme dans le cas de l'atmosphère, la déformation de la couche océanique génère un potentiel de marée $\mathcal{U}$ dont nous établissons ici l'expression.

6.3.4.1 Potentiel à l'extérieur de la planète

Pour tout point de coordonnées (r,θ,φ) situé à l'extérieur de la sphère de rayon R, le potentiel gravifique généré par la réponse de marée océanique se développe en harmoniques sphériques,

$$\mathcal{U} = \sum_{\sigma,l,m} \mathcal{U}_l^{\sigma,m}\left(r\right) P_l^m\left(\cos\theta\right) e^{i(\sigma t + m\varphi)}, \tag{6.29}$$

où les P_l^m sont les polynômes associés de Legendre normés, et où

$$\mathcal{U}_l^{\sigma,m}\left(r\right) = \frac{4\pi\mathscr{G}}{2l+1}\left[\underbrace{R^{l+2}\rho_0\left(R\right)\xi_{r;l}^{\sigma,m}\left(R\right)}_{(\xi)} + \underbrace{\int_{R_c}^{R} u^{l+2}\delta\rho_l^{\sigma,m}\left(u\right)du}_{(\rho)}\right] r^{-(l+1)}. \tag{6.30}$$

Dans l'expression précédente nous avons isolé les composantes associées au déplacement de la surface (ξ) et aux variations internes de densité (ρ). Nous identifierons désormais les deux composantes avec les indices $_\xi$ et $_\rho$. La première correspond au cas du fluide incompressible, pour lequel $\partial_t\rho = 0$. La seconde représente la contribution des ondes internes (ondes gravito-inertielles-acoustiques). Un forçage porté par le polynôme associé de Legendre P_k^m génère une réponse qui se décompose en fonctions de Hough Θ_n. On note $f_{n,k}^{\sigma,m}$ le profil vertical de la composante associée à la fonction de Hough Θ_n, pour une quantité f donnée. En d'autres

termes, $f_{n,k}^{\sigma,m}$ est le profil vertical que l'on obtient en injectant dans les relations de polarisation (6.24a) à (6.26c) les composantes $U_k^{\sigma,m}$ et $J_k^{\sigma,m}$ du forçage (voir Fig. 4.3). Dans le cas général, la composante de degré l du potentiel à la surface de la planète se déduit de (6.30),

$$\boxed{\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(R) = \frac{4\pi\mathscr{G}}{2l+1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq|m|} C_{l,n,k}^{\sigma,m}\left[R^{l+2}\rho_0(R)\,\xi_{r;n,k}^{\sigma,m}(R) + \int_{R_c}^{R} u^{l+2}\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}(u)\,du\right]R^{-(l+1)},} \tag{6.31}$$

avec les coefficients de projection-reprojection $C_{l,n,k}^{\sigma,m}$ déjà introduits dans les chapitres sur les marées atmosphériques (voir Fig. 4.3) [3]. La distribution du potentiel et de ses deux composantes est représentée en Figure 6.4 pour un forçage académique quadripolaire (non-unitaire).

6.3.4.2 Potentiel à l'intérieur de la planète

L'élongation de la couche océanique se fait aussi ressentir à l'intérieur de la planète (sphère de rayon R), soumise au potentiel de marée

$$\boxed{\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(r) = \frac{4\pi\mathscr{G}}{2l+1}\left[r^l\left(R^{1-l}\rho_0(R)\,\xi_{r;l}^{\sigma,m}(R) + \int_r^R u^{1-l}\delta\rho_l^{\sigma,m}(u)\,du\right) + r^{-(l+1)}\int_{R_c}^{r} u^{l+2}\delta\rho_l^{\sigma,m}(u)\,du\right].} \tag{6.32}$$

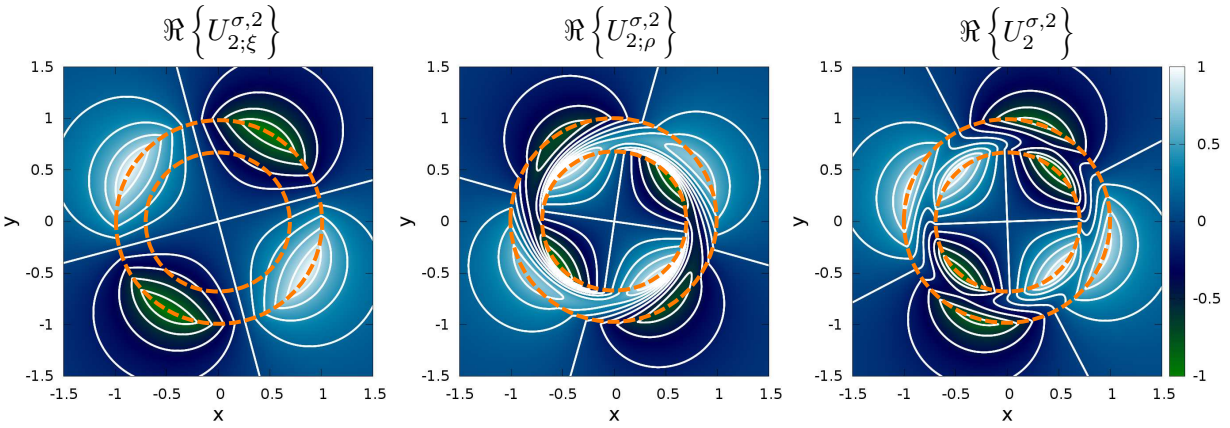


FIGURE 6.4: Distributions du potentiel de marée océanique total (droite) et de ses composantes associées au déplacement de la surface (gauche) et aux variations internes de densité (milieu) tracées dans le plan équatorial de la planète (plan défini par les directions x et y, normal à l'axe de rotation de la planète) pour une perturbation quadripolaire quelconque. La planète, de centre $(x, y) = (0, 0)$ et de rayon unité ($R = 1$), présente une couche océanique de profondeur $H = 0.3$. La surface de l'océan et le plancher océaniques sont représentés par les cercles pointillés oranges. Pour illustration, le nombre d'onde vertical est arbitrairement fixé à $\hat{k}_n = 1 + i$, l'amplitude du déplacement vertical à $|\xi_r(1)| = 5.0 \times 10^{-4}$H et son déphasage à $\Delta\xi_r = \pi/3$. Le profil des oscillations de densité dans l'océan est supposé de la forme $\delta\rho = \delta\rho_0\, e^{2i\pi\hat{k}_n r}$ avec la variation de densité normée $\delta\rho_0 = 0.1$. Le potentiel et chacune de ses composantes sont normés par leurs maximums respectifs.

3. Les coefficients $C_{l,n,k}^{\sigma,m}$ ne s'expriment plus en revanche comme des produits scalaires étant donné que la base des fonctions n'est pas nécessairement orthogonale.

6.3.5 Nombres de Love

Les nombres de Love comparent les composantes du potentiel de marée océanique à celles du potentiel de marée générateur qui leurs sont associées au niveau de la surface de l'océan,

$$k_l^{\sigma,m} = \frac{\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(R)}{U_l^{\sigma,m}(R)}. \tag{6.33}$$

Pour une orbite circulaire et sans obliquité, le nombre de Love du second ordre se réduit à

$$\boxed{k_2^2 = \frac{8\pi}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{a^3}{M_* R^5}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq 2} c_{2,n,k}^{\sigma,2}\left[R^4\rho_0(R)\,\xi_{r;n,k}^{\sigma,2}(R) + \int_{R_c}^{R} u^4\delta\rho_{n,k}^{\sigma,2}(u)\,du\right].} \tag{6.34}$$

6.3.6 Couple de marée

Les calculs précédents permettent de déterminer le couple exercé sur la coquille océanique suivant l'axe de rotation propre de la planète. Comme pour le potentiel de marée, il faut ajouter à l'expression du couple formulée par Zahn (1966a) la contribution de la déformation de la surface, ce qui finalement donne

$$\mathcal{T}^{\sigma,m} = \Re\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_0}\frac{\partial U^{\sigma,m}}{\partial\varphi}\left(\delta\rho^{\sigma,m}\right)^* d\mathscr{V} + \frac{1}{2}\rho_0(R)\int_{\delta\mathscr{V}^{\sigma,m}}\frac{\partial U^{\sigma,m}}{\partial\varphi}\left(d\mathscr{V}\right)^*\right\}, \tag{6.35}$$

où $\mathscr{V}_0$ représente le volume de la coquille océanique à l'équilibre, et $\delta\mathscr{V}^{\sigma,m}$ sa variation de volume sous l'effet de la perturbation de marée associée à σ et m. En exprimant le couple de marée $\mathcal{T}^{\sigma,m} = \mathcal{T}_\rho^{\sigma,m} + \mathcal{T}_\xi^{\sigma,m}$, où $\mathcal{T}_\rho^{\sigma,m}$ et $\mathcal{T}_\xi^{\sigma,m}$ sont respectivement les contributions de la variation interne de densité et du déplacement de la surface, on déduit de (6.32) les couples induits par la déformation de la coquille océanique,

$$\boxed{\mathcal{T}_\xi^{\sigma,m} = \Re\left\{im\pi R^2\sum_{l\geq|m|}U_l^{\sigma,m}(R)\left[\xi_{r;l}^{\sigma,m}(R)\right]^*\right\},} \tag{6.36}$$

et par les variations internes de densité

$$\boxed{\mathcal{T}_\rho^{\sigma,m} = \Re\left\{im\pi\sum_{l\geq|m|}\int_{R_c}^{R} r^2 U_l^{\sigma,m}(r)\left(\delta\rho_{r;l}^{\sigma,m}\right)^* dr\right\}.} \tag{6.37}$$

Faisons apparaître dans ces expressions l'amplitude et le déphase du bourrelet de marée. Les équations (6.36) et (6.37) se réécrivent

$$\mathcal{T}_\rho^{\sigma,m} = \pi m\sum_{l\geq|m|}\int_{R_c}^{R} r^2\left|U_l^{\sigma,m}\right|\left|\delta\rho_l^{\sigma,m}\right|\sin\left(\Delta\varphi_{\rho;l}^{\sigma,m}\right)dr, \tag{6.38}$$

et

$$\mathcal{T}_\xi^{\sigma,m} = \pi m\sum_{l\geq|m|}\left|U_l^{\sigma,m}(R)\right|\left|\xi_{r;l}^{\sigma,m}(R)\right|\sin\left(\Delta\varphi_{\xi;l}^{\sigma,m}\right), \tag{6.39}$$

avec $\Delta\varphi_{\rho;l}^{\sigma,m} = \arg\left(\delta\rho_l^{\sigma,m}\right) - \arg\left(U_l^{\sigma,m}\right)$ et $\Delta\varphi_{\xi;l}^{\sigma,m} = \arg\left[\delta\xi_{r;l}^{\sigma,m}\left(R\right)\right] - \arg\left[U_l^{\sigma,m}\left(R\right)\right]$.

6.4 Conditions aux limites

Déterminer une unique solution à l'équation de structure verticale des ondes, (6.23) requiert d'imposer deux conditions limites aux bornes inférieure et supérieure de la couche fluide. Au niveau du plancher océanique ($r = R_\mathrm{c}$), la condition de paroi rigide déjà choisie pour l'atmosphère s'applique [4], d'où

$$\xi_r = 0. \tag{6.40}$$

Au niveau de la surface ($r = R$), comme la différence de densité entre l'océan et l'atmosphère est bien marquée, les particules sont peu gênées dans leur déplacement. On applique donc au bord supérieur du domaine la condition de surface libre usuelle (e.g. Unno et al., 1989),

$$\frac{Dp}{Dt} = 0. \tag{6.41}$$

6.5 Cas de l'océan profond homogène isotherme

Dans la section précédente, nous avons établi les équations des marées océaniques dans le cas général, où l'épaisseur de la couche océanique est comparable au rayon. De nombreux objets connus ne nécessitent pas de prendre en compte la variation du rayon de courbure de la coquille. Par exemple, la profondeur moyenne de l'océan sur Terre s'élève à 4 km environ (Eakins & Sharman, 2010), soit 0.06 % du rayon de la planète. On trouve des rapports d'aspect similaires pour les océans des satellites de glace (e.g. Matsuyama, 2014). Dans le cas de planètes semblables à la Terre, l'hypothèse de couche mince ($H \ll R$) s'étend aux océans profonds, épais de plusieurs centaines de kilomètres mais fins relativement au rayon de la planète. Cette simplification présente donc un intérêt substantiel allant au delà du cas de la Terre.

On considère un océan de profondeur $H \ll R$, pour lequel on pose $r = R_\mathrm{c} + Hx$. On suppose par ailleurs ρ_0, T_0, S_0 constants dans toute la couche. La vitesse du son, c_s, est donc elle aussi constante. Seule la gravité varie avec r, mais l'écart relatif entre les bords interne et externe pour cette grandeur reste majoré par $2H/R$ d'après (3.4). De fait, N est quasi-constante et l'on peut déterminer une solution analytique simple à l'équation de la structure verticale (6.23) permettant une exploration du domaine des paramètres pour l'océan.

6.5.1 Structure des ondes de marées

Sous l'hypothèse de couche mince, les coefficients A, B et C de l'équation des ondes, donnés par (6.21) se réduisent à

4. Notons que l'on considère ici les marées fluides et solides complètement découplées. Certains modèles prennent en compte le déplacement du plancher océanique sous l'effet de la surcharge associée au marées fluides et la redistribution de masse qu'il induit (e.g. Matsuyama, 2014).

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = \dfrac{N^2}{c_s^2} + \dfrac{\tilde{\Lambda}_n}{R^2}\left(\dfrac{N^2}{\sigma\tilde{\sigma}} - 1\right), \\ C = -\dfrac{N^2\tilde{\Lambda}_n}{g\sigma\tilde{\sigma}} U_n. \end{cases} \tag{6.42}$$

On en déduit $\Phi_n = 1$ (l'équation est de type Schrödinger) et $r^2\xi_{r;n} = \Psi_n$. L'équation (6.23) devient donc

$$\boxed{\frac{d^2\Psi_n}{dx^2} + \hat{k}_n^2\Psi_n = -\frac{N^2H^2\tilde{\Lambda}_n}{g\sigma\tilde{\sigma}} U_n,} \tag{6.43}$$

où le nombre d'onde vertical sans dimension est donné par

$$\hat{k}_n^2 = \frac{N^2H^2}{c_s^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_n H^2}{R^2}\left(\frac{N^2}{\sigma\tilde{\sigma}} - 1\right). \tag{6.44}$$

On voit ici que le premier terme compare la fréquence de Brunt-Väisälä N à la fréquence acoustique $\sigma_s = c_s/H$. Sous l'approximation quasi-incompressible, où $\sigma_s \gg N$, ce terme peut donc être négligé et l'on obtient

$$\boxed{\hat{k}_n^2 = \frac{H^2\tilde{\Lambda}_n}{R^2}\left(\frac{N^2}{\sigma\tilde{\sigma}} - 1\right).} \tag{6.45}$$

En l'absence de dissipation, on retrouve le nombre d'onde classique, qui vérifie la loi d'échelle $\hat{k}_n \propto 1/\sigma$. Le fait d'augmenter la friction entraîne une dégénérescence de cette loi en $\hat{k}_n \propto 1/\sqrt{|\sigma|}$ comme pour le refroidissement newtonien dans le cas de l'atmosphère (cf. Eq. 4.33). Rappelons par ailleurs que les nombres d'ondes horizontaux, définis par $\hat{k}_\perp^2 = \tilde{\Lambda}_n/R^2$, sont négatifs et divergent quand $\sigma_\mathrm{f} \to +\infty$ (Volland, 1974a), ce qui rend les ondes fortement évanescentes dans ce régime asymptotique caractéristique de la synchronisation spin-orbite. La friction visqueuse/turbulente, ignorée dans les modèles globaux des chapitres 3 et 4, modifierait les ondes de marées atmosphériques de manière similaire. Ce comportement affecte les parties oscillantes de chacune des quantités perturbées, dont les expressions en fonction de Ψ se dérivent des équations (6.24a) à (6.26c). On obtient pour le champ de vitesse

$$\boxed{\begin{aligned} V_{r;n} &= \frac{i\sigma}{R^2}\Psi_n, && \text{(6.46a)} \\ V_{\theta;n} &= \frac{i}{\tilde{\sigma}R}\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{H\tilde{\Lambda}_n}\left[\frac{d\Psi_n}{dx} + \mathcal{A}\Psi_n\right] - \varepsilon_{s;n}U_n\right\}, && \text{(6.46b)} \\ V_{\varphi;n} &= -\frac{1}{\tilde{\sigma}R}\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{H\tilde{\Lambda}_n}\left[\frac{d\Psi_n}{dx} + \mathcal{A}\Psi_n\right] - \varepsilon_{s;n}U_n\right\}, && \text{(6.46c)} \end{aligned}}$$

pour le déplacement

$$\boxed{\begin{aligned}
\xi_{r;n} =& \frac{1}{R^2}\Psi_n, && (6.47a)\\
\xi_{\theta;n} =& \frac{1}{\sigma\tilde{\sigma}R}\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{H\tilde{\Lambda}_n}\left[\frac{d\Psi_n}{dx}+\mathcal{A}\Psi_n\right]-\varepsilon_{s;n}U_n\right\}, && (6.47b)\\
\xi_{\varphi;n} =& \frac{i}{\sigma\tilde{\sigma}R}\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{H\tilde{\Lambda}_n}\left[\frac{d\Psi_n}{dx}+\mathcal{A}\Psi_n\right]-\varepsilon_{s;n}U_n\right\}, && (6.47c)
\end{aligned}}$$

et pour les quantités scalaires perturbées

$$\boxed{\begin{aligned}
\delta p_n =& \rho_0\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{H\tilde{\Lambda}_n}\left[\frac{d\Psi_n}{dx}+\mathcal{A}\Psi_n\right]-U_n\right\}, && (6.48a)\\
\delta\rho_n =& \frac{\rho_0}{c_s^2}\left\{\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{H\tilde{\Lambda}_n}\left[\frac{d\Psi_n}{dx}+\mathcal{B}_n\Psi_n\right]-U_n\right\}, && (6.48b)\\
\delta S_n =& -\frac{1}{HR^2}\frac{dS_0}{dx}\Psi_n, && (6.48c)
\end{aligned}}$$

avec les coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}_n$ donnés par

$$\mathcal{A} = \frac{H}{2}\left[\frac{N^2}{g}-\frac{g}{c_s^2}\right], \tag{6.49}$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{H}{2}\left[\frac{N^2}{g}\left(\frac{2}{\varepsilon_{s;n}}-1\right)-\frac{g}{c_s^2}\right]. \tag{6.50}$$

6.5.2 Réponse à un forçage échelon

Résolvons maintenant l'équation des ondes afin d'obtenir les expressions décrivant la réponse de la couche océanique. On introduit deux coefficients sans dimension, $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{D}_n$, ainsi que la solution particulière de (6.43), notée Ψ_n^0 et constante. Ces paramètres s'expriment

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{A}-\frac{Hg\tilde{\Lambda}_n}{R^2\sigma\tilde{\sigma}}, \quad \mathcal{D}_n = \frac{HN^2}{2g}+\frac{gH}{2c_s^2}-\frac{gH\tilde{\Lambda}_n}{N^2R^2} \quad \text{et} \quad \Psi_n^0 = -\frac{N^2H^2\tilde{\Lambda}_n}{g\sigma\tilde{\sigma}\hat{k}_n^2}U_n, \tag{6.51}$$

et la solution générale pour le mode de nombre d'onde latitudinal n,

$$\boxed{\Psi_n = \Psi_n^0\left[1-\frac{\mathcal{D}_n\sin\left(\hat{k}_n x\right)+\hat{k}_n\cos\left(\hat{k}_n(1-x)\right)+\mathcal{C}_n\sin\left(\hat{k}_n(1-x)\right)}{\hat{k}_n\cos\left(\hat{k}_n\right)+\mathcal{C}_n\sin\left(\hat{k}_n\right)}\right].} \tag{6.52}$$

On reconnaît ici le caractère résonant en fréquence de la marée océanique. Pour certaines valeurs de $\hat{k}_n(\sigma)$, le dénominateur de (6.52) se minimise voire s'annule, ce qui engendre des pics comme observés dans les simulations (e.g. Webb, 1980; Matsuyama, 2014). Le tracé des variations du déplacement à la surface en fonction des parties réelle et imaginaire du nombre d'onde vertical (Fig. 6.5) montre que les résonances sont localisées sur l'axe des valeurs propres réelles, et disparaissent rapidement quand on quitte le régime purement dynamique ($\left|\Im\left\{\hat{k}_n\right\}\right| > 0$). En outre, leur amplitude diminue avec le nombre d'onde. Les modes les plus résonants sont ainsi ceux de plus grandes longueurs d'onde. Il est possible d'obtenir les lois d'échelle

correspondant à ce comportement à partir d'un modèle local (Ogilvie & Lin, 2004; Auclair Desrotour et al., 2015) comme nous le montrerons au Chapitre 7.

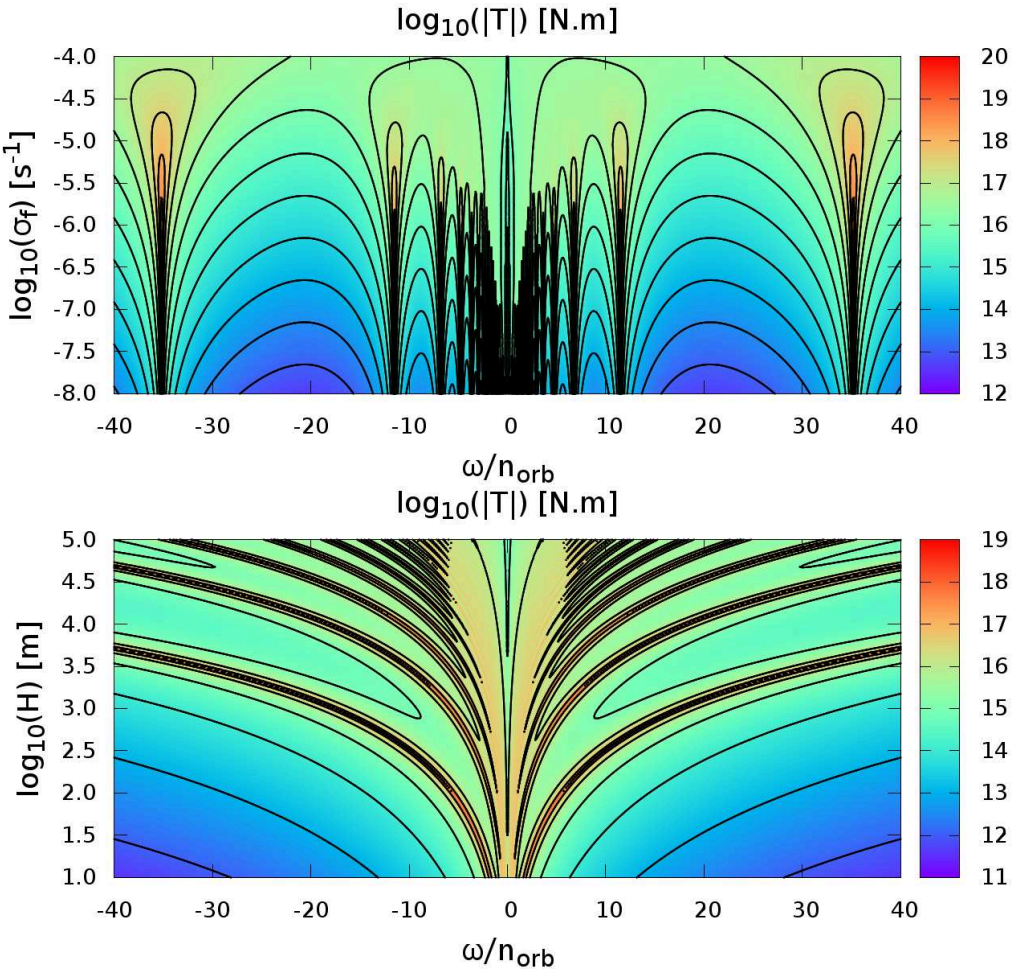


FIGURE 6.5: Composante quadripolaire semi-diurne lunaire du couple de marée exercé sur l'océan terrestre en fonction de la fréquence d'excitation normée par le moyen mouvement de la Lune ω/n (axe horizontal) et de deux paramètres de contrôle du modèle (axe vertical). La Terre est assimilée à une planète-océan et la réponse est réduite à sa composante associée au mode de gravité de plus bas degré, dont la valeur propre est supposé invariante. Les niveaux de couleurs correspondent au logarithme du couple. *Haut* - Variation avec le coefficient de Rayleigh pour un océan de profondeur uniforme $H = 4$ km. *Bas* - Variation avec la profondeur de l'océan pour un coefficient de friction $\sigma_{\mathrm{f}} = 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$. Paramètres : $\tilde{\Lambda}_0 = 11.1596$, $N = 3 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}$, $R = 6371.0$ km, $c_s = 1.5$ km.s^{-1}, $g = 9.81$ m.s^{-2}, $\rho_0 = 1.03 \times 10^3$ kg.m^{-3}, $M_{\mathrm{L}} = 7.342 \times 10^{22}$ kg, $a = 3.844 \times 10^8$ m, $n_{\mathrm{orb}} = 2.66 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$.

En substituant (6.52) dans les relations de polarisation, on obtient la distribution de la perturbation dans l'ensemble de la coquille océanique, notamment le déplacement et les variations de densité. On en déduit le potentiel réponse de marée, les nombres de Love et le couple de marée exercé sur l'océan par rapport à l'axe de spin de la planète. D'après la section précédente, la composante du potentiel de marée océanique de degrés l et m prise à la surface ($x = 1$) s'écrit, dans l'approximation de couche mince,

$$\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(1) = \frac{4\pi\mathscr{G}R}{2l+1}\left[\rho_0(1)\,\xi_{r;l}^{\sigma,m}(1) + H\int_0^1 \delta\rho_l^{\sigma,m}(x)\,dx\right], \tag{6.53}$$

ce qui avec la décomposition en fonctions de Hough et polynômes associés de Legendre, donne

$$\mathcal{U}_l^{\sigma,m}(1) = \frac{4\pi\mathscr{G}R}{2l+1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq|m|} C_{l,n,k}^{\sigma,m}\left[\rho_0\xi_{r;n,k}^{\sigma,m}(1) + H\int_0^1 \delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}(x)\,dx\right]. \tag{6.54}$$

Exprimons de façon explicite les deux contributions. Il vient, pour la première,

$$\rho_0 \xi_{r;n,k}^{\sigma,m}(1) = \frac{\rho_0}{R^2} \Psi_{n,k}^0 \frac{\hat{k}_n \cos\left(\hat{k}_n\right) + (\mathcal{C}_n - \mathcal{D}_n) \sin\left(\hat{k}_n\right) - \hat{k}_n}{\hat{k}_n \cos\left(\hat{k}_n\right) + \mathcal{C}_n \sin\left(\hat{k}_n\right)} \tag{6.55}$$

et pour la seconde,

$$\int_0^1 \delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}(x)\, dx = \frac{\rho_0}{c_s^2 (1 - \varepsilon_{s;n})} \left[\frac{\sigma\tilde{\sigma}}{H\tilde{\Lambda}_n} \Psi_{n,k}^0 \frac{\mathscr{A}_n \cos\left(\hat{k}_n\right) + \mathscr{B}_n \sin\left(\hat{k}_n\right) + \mathscr{C}_n}{\hat{k}_n \cos\left(\hat{k}_n\right) + \mathcal{C}_n \sin\left(\hat{k}_n\right)} - U_{n,k}^{\sigma,m} \right], \tag{6.56}$$

avec les coefficients sans dimension

$$\mathscr{A}_n = \hat{k}_n \left[1 + \mathcal{B}_n \left(1 + \frac{\mathcal{D}_n}{\hat{k}_n^2} \right) \right], \quad \mathscr{B}_n = \mathcal{C}_n (1 + \mathcal{B}_n) - \mathcal{D}_n, \quad \mathscr{C}_n = -\hat{k}_n \left(1 + \frac{\mathcal{C}_n}{\hat{k}_n^2} \right). \tag{6.57}$$

Ainsi, le nombre de Love du second-ordre s'écrit

$$\boxed{k_2^2 = \frac{8\pi}{5} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{a^3}{M_* R} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\geq 2} C_{2,n,k}^{\sigma,2} \left[\rho_0 \xi_{r;n,k}^{\sigma,2}(1) + H \int_0^1 \delta\rho_{n,k}^{\sigma,2}(x)\, dx \right].} \tag{6.58}$$

Dans l'étude des marées atmosphériques, nous avons vu que la perturbation était la plupart du temps représentée principalement par le mode de gravité de plus bas degré ($n = 0$). Aussi, sous l'hypothèse où la seule composante du potentiel d'excitateur est celle de degrés $(l, m) = (2, 2)$,

$$k_2^2 \sim \frac{8\pi}{5} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\rho_0 a^3}{M_* R} \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_{2,n,2}^{\sigma,2} \xi_{r;n,2}^{\sigma,2}(1). \tag{6.59}$$

Exprimons pour clore cette section les composantes du couple de marée en couche mince,

$$\mathcal{T}_\rho^{\sigma,m} = m\pi R^2 H \sum_{l\geq|m|} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\geq|m|} \Re\left\{ i C_{k,n,l}^{\sigma,m} U_l^{\sigma,m} \int_0^1 \left[\delta\rho_{n,k}^{\sigma,m}(x)\right]^* dx \right\}, \tag{6.60}$$

et

$$\mathcal{T}_\xi^{\sigma,m} = m\pi R^2 \rho_0 \sum_{l\geq|m|} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\geq|m|} \Re\left\{ i C_{k,n,l}^{\sigma,m} U_l^{\sigma,m} \left[\xi_{r;n,k}^{\sigma,m}(1)\right]^* \right\}. \tag{6.61}$$

Quand la distance planète-perturbateur est grande devant les dimensions des deux objets, le potentiel excitateur de marée s'apparente à sa composante quadripolaire, de degrés $(l, m) = (2, 2)$ (Mathis & Le Poncin-Lafitte, 2009). Les deux expressions précédentes deviennent alors

$$\boxed{\mathcal{T}_\rho^{\sigma,m} = -\pi\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\mathscr{G}M_* H R^4}{a^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_{2,n,2}^{\sigma,m}\Im\left\{\int_0^1 \delta\rho_{n,2}^{\sigma,2}(x)\,dx\right\},} \tag{6.62}$$

et

$$\boxed{\mathcal{T}_\xi^{\sigma,m} = -\pi\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\mathscr{G}M_* R^4}{a^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_{2,n,2}^{\sigma,2}\Im\left\{\xi_{r;n,2}^{\sigma,2}(1)\right\}.} \tag{6.63}$$

Avec $\delta\rho \propto a^{-3}$ et $\xi_r \propto a^{-3}$, a désignant le demi-grand axe planète-perturbateur, on trouve $\mathcal{T} \propto a^{-6}$, un résultat bien connu pour la marée gravifique.

6.5.3 Application à la marée océanique semi-diurne lunaire

Le cas de la Terre est très représentatif des planètes pour lesquelles la marée océanique joue un rôle majeur, ce qui la désigne d'office pour servir de banc d'essai à notre modèle. L'océan terrestre subit à parts égales les perturbations de marées solaire et lunaire et la dissipation qui en résulte varie fortement avec la fréquence d'excitation. Le modèle analytique permet de sonder efficacement le domaine des paramètres pour comprendre comment cette dissipation dépend de la structure interne et de la fréquence de marée. Dans cette section, nous appliquons les résultats obtenus au cas de la marée lunaire semi-diurne. La Lune est supposée effectuer une orbite circulaire dans le plan équatorial de la Terre à la fréquence orbitale $n_{\rm orb}$. On reprend ainsi le potentiel défini par (4.51). La Terre est assimilée à une planète-océan : la couche océanique de profondeur uniforme $H = 4$ km recouvre l'intégralité de sa surface. Le potentiel excitateur de marée quadripolaire est de la forme $U = U_2 P_2^2(\cos\theta)\,e^{i(\sigma t+2\varphi)}$. Par ailleurs, on se place dans l'approche quasi-adiabatique ($\sigma_{\rm f} \ll |\sigma|$), où les solutions de l'équations de Laplace complexes sont semblables aux solutions réelles. Enfin, on suppose la fréquence de marée dominée par le taux de rotation propre de la planète, ce qui se traduit par l'invariance des valeurs propres des modes de marée. Ces deux dernières hypothèses sont valides en dehors du voisinage de la synchronisation, dont la gamme de fréquences est relative à $n_{\rm orb}$ et $\sigma_{\rm f}$.

En Figure 6.6, on trace l'évolution du couple et de ses composantes, $\mathcal{T}_\xi$ et $\mathcal{T}_\rho$, en fonction de la fréquence, pour deux coefficients de Rayleigh différents (Fig. 6.6) : une friction importante ($\sigma_{\rm f} = 1.0\times10^{-5}\ {\rm s}^{-1}$) et une friction faible ($\sigma_{\rm f} = 1.0\times10^{-7}\ {\rm s}^{-1}$). La Figure 6.5 représente quant à elle le couple en fonction de la fréquence et de deux paramètres de contrôles, $\sigma_{\rm f}$ et H. On observe ainsi les résonances mise en évidence par les précédentes études (e.g. Webb, 1980). Notons que leur comportement est en accord avec les lois d'échelles fournies par les modèles analytiques cartésiens de dissipation visqueuse des ondes gravito-inertielles de marée (e.g. Ogilvie & Lin, 2004; Auclair Desrotour et al., 2015). Tout d'abord, la position des pics est indépendante de la dissipation. Elle découle directement de la relation de dispersion des ondes (7.21). A deux ordres de grandeurs d'écart pour $\sigma_{\rm f}$ on retrouve les maximums du couple aux mêmes fréquences. Ces fréquences sont des fonctions implicites de la structure de l'océan (paramètres R, H, N, g) et du mode ($\tilde{\Lambda}_n$) ; elles correspondent aux motifs foncés des cartes colorés (Fig. 6.5). Ensuite, l'aspect du spectre varie très fortement avec le taux de dissipation. Une forte dissipation tend à atténuer l'écart entre le fond non-résonant $\mathcal{T}_{\rm NR}$ et la hauteur des résonances $\mathcal{T}_{\rm R}$, une faible dissipation à l'accentuer. Ces grandeurs vérifient les lois d'échelle $\mathcal{T}_{\rm NR} \propto \sigma_{\rm f}$ et $\mathcal{T}_{\rm R} \propto \sigma_{\rm f}^{-1}$ (en bon accord avec les résultats du Chapitre 7 ; Auclair Desrotour et al., 2015; Wei, 2016). Ainsi, la variablité en fréquence du couple, $\Xi = \mathcal{T}_{\rm R}/\mathcal{T}_{\rm NR}$, suit la loi d'échelle $\Xi \propto \sigma_{\rm f}^{-2}$. Il en est de même pour le nombre de Love. Lorsque $\sigma \to 0$, au voisinage de la synchronisation, on sort du cadre quasi-adiabatique. La structure horizontale se déforme alors pour converger vers la solution du cas non-rotationnel et $\tilde{\Lambda}_n \to -\infty$, ce qui a pour effet d'atténuer beaucoup plus le couple que ne le montrent les figures dans cette gamme de fréquences.

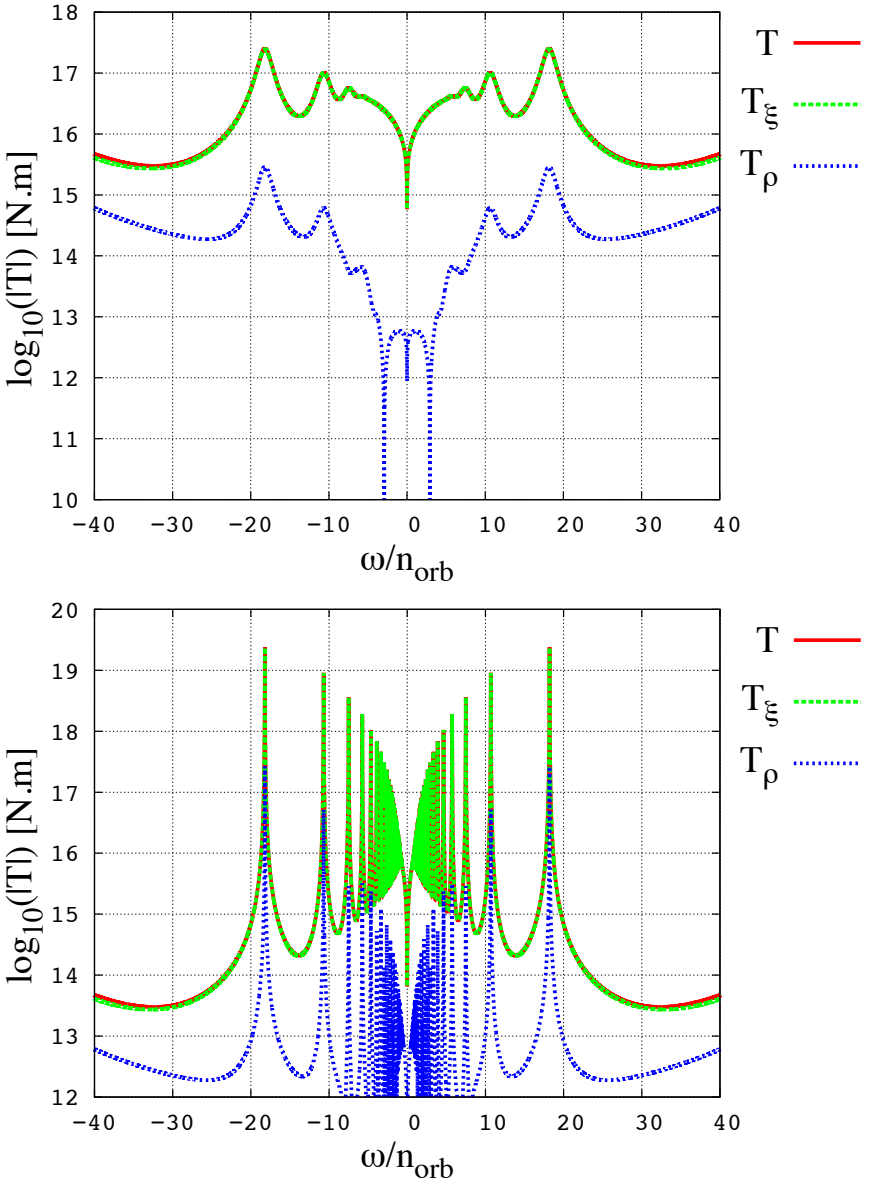


FIGURE 6.6: Couple de marée exercé sur l'océan terrestre (rouge) et ses composantes $\mathcal{T}_\xi$ (vert) et $\mathcal{T}_\rho$ (bleu) en fonction de la fréquence du perturbateur dans le référentiel terrestre divisée par son moyen mouvement $\omega/n_{\rm orb}$ pour un forçage quadripolaire de la forme $U = U_2 P_2^2(\cos\theta)\, e^{i(\sigma t + 2\varphi)}$ et un coefficient de Rayleigh constant. *Haut* - $\sigma_{\rm f} = 1.0 \times 10^{-5}$ s^{-1}. *Bas* - $\sigma_{\rm f} = 1.0 \times 10^{-7}$ s^{-1}. On suppose la réponse de l'océan réductible au mode de gravité de plus bas degrés, et la valeur propre $\tilde{\Lambda}_0$ correspondante est prise constante. Paramètres : $\tilde{\Lambda}_0 = 11.1596$, $N = 3 \times 10^{-3}$ s^{-1}, $R = 6371.0$ km, $H = 4.0$ km, $c_s = 1.5$ km.s^{-1}, $g = 9.81$ m.s^{-2}, $\rho_0 = 1.03 \times 10^3$ kg.m^{-3}, $M_{\rm L} = 7.342 \times 10^{22}$ kg, $a = 3.844 \times 10^8$ m, $n_{\rm orb} = 2.66 \times 10^{-6}$ s^{-1}.

6.6 Conclusion

Le modèle global élaboré dans ce chapitre généralise aux coquilles océaniques épaisses les modèles existants, jusqu'à présent majoritairement restreints aux couches minces et à un traitement seulement bi-dimensionnel des marées (Tyler, 2011, 2014; Matsuyama, 2014; Chen et al., 2014). Il jette de premières bases pour revisiter les études théoriques antérieures en incluant les déplacements verticaux internes, ce qui permet d'abandonner l'hypothèse de l'ajustement hydrostatique, potentiellement inapproprié dans des cas éloignés de la Terre, et de traiter de façon plus complète la propagation des ondes de gravité internes. Appliqué aux couches minces, il prédit les caractéristiques connues de la marée, telle que son comportement fortement résonant en fréquence (Webb, 1980), et fournit des prescriptions explicites pour la quantifier en

fonction des paramètres physiques (stratification, masse volumique, salinité, friction), géométriques (profondeur, rayon du coeur solide) et dynamique (taux de rotation propre) de l'océan. La friction avec le plancher océanique apparaît comme le mécanisme essentiel du modèle en terme de conséquences astrophysiques. Sans dissipation, les marées océaniques n'ont aucun impact sensible sur la dynamique orbitale et rotationnelle du système planète-perturbateur. Etant donné l'impossibilité de traiter les laplaciens dans l'approche analytique en géométrie sphérique, la modélisation des processus dissipatifs se limite à la friction de Rayleigh, qui en représente une description dégradée, linéaire en vitesse, et néanmoins bien approprié au régime quasi-adiabatique (Ogilvie, 2005, 2009) [5]. Le modèle fournit des clés de compréhension utiles concernant la façon dont la friction modifie la structure des ondes de marée et la dissipation interne qui en résulte. En particulier, dans le régime dissipatif ($|\sigma| \ll \sigma_{\mathrm{f}}$), l'amortissement des ondes par la friction s'avère plus fort encore que celui causé par refroidissement radiatif dans le cas de l'atmosphère étudié au Chapitre 4. Les deux mécanismes interviennent de la même façon dans le nombre d'onde vertical, mais la friction vient en supplément changer la structure latitudinale de la perturbation ce qui amplifie le caractère evanescent des ondes. Comme dans le cas de l'atmosphère, la simulation numérique à l'aide de GCM et la modélisation analytique demeurent complémentaires, la première permettant de prendre en compte la physique du système dans son ensemble et la seconde de poser des diagnostics et d'explorer efficacement le domaine de paramètres. La simulation numérique peut notamment apporter les prescriptions réalistes nécessaires à la spécification des coefficients de friction utilisés dans les modèles analytiques. Ces travaux ouvrent la voie à plusieurs perspectives de développement. Dans le domaine mécanique céleste, il est envisageable de revisiter les études traitant de l'évolution du système Terre-Lune sur le long terme en étudiant la façon dont les résonances viennent accélérer ou ralentir cette évolution. Sur le plan de la dynamique interne des couches fluides, le modèle de marées océaniques peut servir de banc d'essai à la compréhension des effets de la friction sur la structure des ondes de marée en vue de l'introduction de ce mécanisme dissipatif dans le modèle de marées atmosphériques présenté au Chapitre 4. L'ambition à plus long terme de ces travaux et de ceux du Chapitre 4 est de progresser vers la mise en place d'un modèle tri-couche donnant la réponse complète d'une exo-Terre soumise à des effets de marées solides, océaniques et atmosphériques couplés en fonction de ses caractéristiques physiques et de sa structure interne.

5. Ogilvie (2005) et Ogilvie (2009) comparent la friction de Rayleigh au terme de friction visqueuse réel, proportionnel au laplacien de la vitesse. Ils montrent que la friction de Rayleigh constitue une description satisfaisante de la dissipation dans le régime limite quasi-adiabatique.

CHAPITRE 7

DISSIPATION DES ONDES DE MARÉE DANS LES FLUIDES

Sommaire

7.1 Introduction **199**
7.2 Etat de l'art **200**
7.3 Dynamique des ondes de marées fluides forcées dans une boîte cartésienne **202**
7.3.1 Modélisation 202
7.3.2 Equations primitives 203
7.3.3 Bilan d'énergie 204
7.3.4 Champ de vitesse et dissipation de marée 205
7.3.5 Réponse spectrale 209
7.4 Propriétés du spectre en fréquence de la dissipation **211**
7.4.1 Positions des résonances 211
7.4.2 Largeur des résonances 213
7.4.3 Amplitude des résonances 214
7.4.4 Fond non-résonant 215
7.4.5 Contraste et nombre de pics 217
7.4.6 Lois d'échelles 218
7.5 Un cas limite : la super-adiabaticité ($N^2 < 0$) **218**
7.6 Conséquences sur l'évolution d'un satellite autour d'un corps fluide **219**
7.7 Conséquences sur la dissipation interne des couches convectives stellaires et planétaires **222**
7.8 Conclusion **224**

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux caractéristiques de la dissipation due à la propagations d'ondes de marées gravifiques dans les couches fluides planétaires et stellaires. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent (Fig. 6.6), le spectre en fréquences de la réponse des couches fluides présente de nombreuses résonances. La dissipation qui en résulte varie ainsi fortement avec la fréquence d'excitation. Elle dépend également fortement des propriétés physiques du milieu et de la rotation du corps. Cette variabilité se retrouve dans les observations. Les contraintes observationnelles pour la dissipation de marée dans les étoiles (e.g. Ogilvie, 2014, et références associées) et les planètes géantes (e.g. Lainey et al., 2009, 2012, 2015; Ogilvie, 2014) montrent en effet des variations sur plusieurs ordres de grandeur pour des objets de même type. Pour quantifier l'impact des effets de marée fluides gravifiques sur l'évolution des systèmes planétaires, il est important de comprendre les mécanismes qui entrent en jeu et de cerner précisément la façon dont les paramètres physiques et dynamiques du système influent sur la réponse du corps à la perturbation. Les GCM s'avèrent peu appropriés au traitement de ces questions générales pour deux raisons. D'une part, ils ne permettent pas d'explorer efficacement le domaine des paramètres. D'autre part, ils reposent souvent sur des approximations de couche mince bien adaptées aux atmosphères de planètes telluriques mais hors de propos

pour les planètes géantes et les étoiles. De même, à cause des difficultés techniques induites par la géométrie sphérique, les modèles analytiques globaux tels que ceux présentés aux chapitres 3, 4 et 6 ne peuvent inclure certains ingrédients physiques essentiels de la marée que sous une forme approximative ; en particulier les processus dissipatifs, modélisés par des frictions de Rayleigh et des refroidissements newtoniens. Pour traiter de manière complète le problème, il est souvent utile de se ramener au cas d'une géométrie cartésienne simplifiée permettant de prendre en compte l'ensemble des processus physiques tels que l'accélération de Coriolis et toutes ses composantes ou encore les diffusions visqueuses et thermiques (voir par exemple Gerkema & Shrira, 2005, pour l'exploration du cadre non-traditionnel). Nous présentons ici dans le détail une approche de ce type. Les équations de la marée fluide sont dérivées à partir d'un modèle local cartésien linéaire généralisant celui proposé par Ogilvie & Lin (2004) en annexe des travaux principaux de leur article. Comme le modèle d'Ogilvie & Lin (2004), ce modèle décrit la réponse d'une section locale de couche fluide planétaire ou stellaire à un forçage volumique périodique en considérant les effets de la rotation de la section avec le corps ainsi que le processus de friction visqueuse (qui peut être turbulente). Son originalité est de prendre en compte la position en latitude de la section à l'intérieur de la couche fluide, sa stratification dans la direction radiale et le mécanisme de diffusion thermique.

Après un rappel de l'état de l'art, nous développons les quantités perturbées en série de Fourier pour établir les expressions des puissances dissipées par chacun de ces deux processus en fonction des paramètres de contrôle du modèle et de la fréquence de marée. Ensuite, à partir de ces expressions, nous identifions les différents régimes asymptotiques de la réponse. Nous montrons ainsi que ces régimes sont définis par les nombres d'Ekman et de Prandtl du système (cf. Eq. 7.17). Ces deux paramètres déterminent notamment la dépendance de la dissipation à la fréquence de marée. Nous établissons pour chacun des régimes identifiés les lois d'échelles régissant les propriétés du spectre en fréquence de la puissance dissipée (position, hauteur, largeur des pics de résonances, nombre de pics, niveau du fond non-résonant). Enfin, nous présentons deux applications des résultats du modèle. La première illustre les conséquences des marées fluides résonantes pour l'évolution orbitale : en considérant un système planète-satellite idéalisé, nous montrons que les résonances de la dissipation de marée peuvent modifier significativement la vitesse d'évolution des systèmes planétaires. La seconde établit la dépendance de la dissipation par friction turbulente convective à la vitesse angulaire de rotation du corps : en utilisant pour la viscosité turbulente des prescriptions issus de lois d'échelles théoriques pour les vitesses et les échelles spatiales caractéristiques de la convection en rotation (Stevenson, 1979) confirmées par des simulations numériques à haute résolution récentes (Barker et al., 2014), nous montrons comment la rotation peut changer sensiblement les propriétés du spectre de l'énergie dissipée dans les régions convectives stellaires et planétaires. Les résultats présentés dans ce chapitre sont détaillés dans Auclair Desrotour et al. (2015) pour les sections 7.3 et 7.4, Auclair-Desrotour et al. (2014) pour la Section 7.6 et dans Mathis et al. (2016) pour la Section 7.7.

7.2 Etat de l'art

Quantifier l'énergie dissipée par les marées dans les corps célestes constitue l'un des objectifs principaux de la modélisation de ce phénomène en astrophysique. Pour les couches planétaires rocheuses et glacées, de nombreux travaux proposent des prescriptions théoriques décrivant la façon dont la dissipation varie avec la rhéologie interne des objets, les propriétés des matériaux qui les constituent et la fréquence de marée (e.g. Efroimsky & Lainey, 2007; Henning et al., 2009; Tobie et al., 2005; Efroimsky, 2012; Remus et al., 2012b; Correia et al., 2014). Ces variations sont régulières i.e. non-résonantes, comme nous l'avons vu au Chapitre 2, quoique fortement dépendantes de la fréquence et de la rhéologie. Dans le cas des objets fluides, les premiers jalons théoriques ont été posés par Zahn avec l'étude de la marée d'équilibre pour les zones convectives stellaires et la marée dynamique pour les régions radiatives (Zahn, 1966a,b,c, 1970, 1975, 1977, 1989; Zahn & Bouchet, 1989). Ces travaux ont par la suite été revisités (Remus et al., 2012b) et

adaptés à l'étude de la marée dynamique dans les régions convectives planétaires et stellaires : les géantes gazeuses (Ogilvie & Lin, 2004), Jupiter (Wu, 2005), les étoiles de type solaire (Ogilvie & Lin, 2007) [1], l'instabilité elliptique liée à l'interactions d'ondes inertielles ou gravito-inertielles pour différents types d'objet (Cebron et al., 2012; Cébron et al., 2013). La dissipation de marée dans les corps fluides a plusieurs origines différentes. On distingue ainsi :

- les dissipations par *friction visqueuse* et *friction turbulente*, qui résultent des frottements dus respectivement aux interactions moléculaires et aux interactions des particules de fluide avec l'écoulement turbulent. Le plus souvent, la friction turbulente domine de plusieurs ordres de grandeur la friction visqueuse moléculaire, en particulier au sein des zones convectives stellaires et planétaires. Par analogie avec la friction visqueuse, caractérisée par la viscosité cinématique ν, il est courant de modéliser la friction turbulente à l'aide d'une viscosité turbulente effective (e.g. Zahn, 1966a). Cette approximation, connue sous le nom d'*hypothèse de Boussinesq* (Boussinesq, 1877), suppose que les particules interagissent avec l'écoulement turbulent de la même manière que les molécules interagissent entre elles. Elle implique notamment que la turbulence soit isotrope, ce qui constitue une approximation relativement forte concernant les régions convectives en rotation (l'effet de Coriolis « anisotropise » l'écoulement, cf. Mathis et al., 2016) ;
- la dissipation par *diffusion thermique*, engendrée par la conduction du milieu. La diffusion thermique sera par exemple le processus dominant dans les régions radiatives stellaires qui sont stables vis à vis de la convection ;
- la dissipation par *diffusion ohmique* dont les fluides magnétisés sont le siège, et causée par les effets d'induction entre particules de fluide. Comme on se concentre ici sur le cas hydrodynamique, ce processus n'est pas pris en compte.

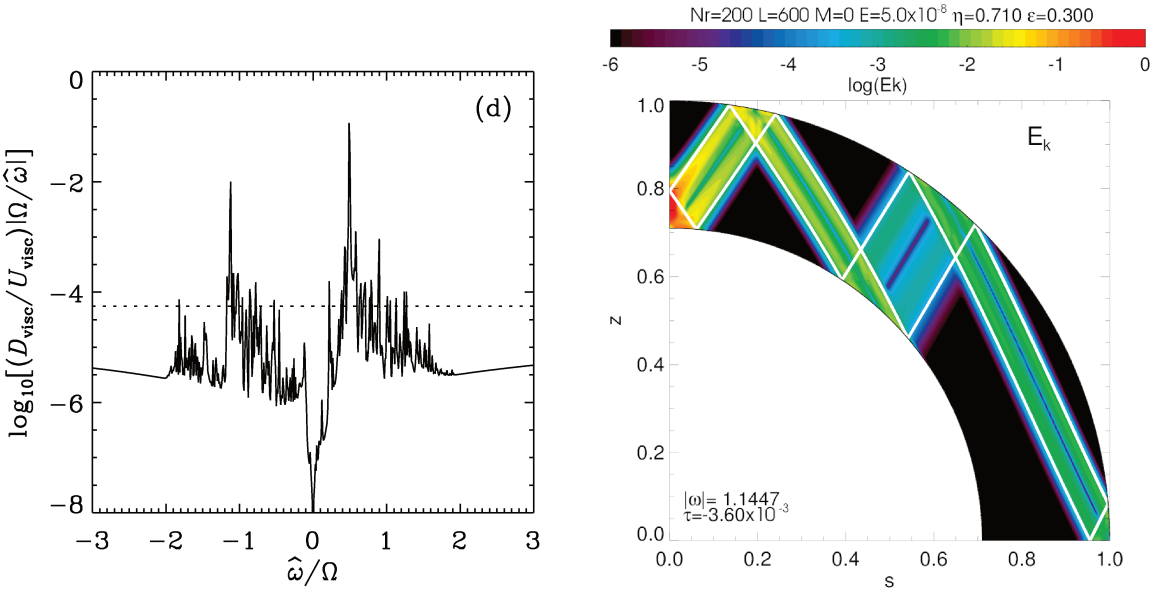


FIGURE 7.1: *Gauche* - Logarithme du taux de dissipation de marée par friction visqueuse/turbulente (axe vertical) en fonction de la fréquence de marée $\hat{\omega}$ (axe horizontal). L'objet considéré est une géante gazeuse en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω, composée d'un coeur solide de rayon $R_c = 0.2R$ et d'une région convective de rayon externe $R_b = 0.9R$, où R est le rayon de la planète. Le nombre d'Ekman de la région fluide, défini par $E_k = \nu/\left(2\Omega R^2\right)$ avec la viscosité cinématique ν, vaut $E_k = 10^{-7}$. Le spectre d'ondes inertielles correspond à l'intervalle $\hat{\omega}/\Omega \in [-2, 2]$. La ligne pointillée indique le taux de dissipation dans Jupiter correspondant à un facteur de qualité effectif $Q^{visc} = 10^5$. Crédits Ogilvie & Lin (2004). *Droite* - Section latitudinale de l'énergie cinétique d'un mode inertiel excité par la marée dans la région convective d'une étoile de type solaire en rotation différentielle. Crédits Guenel et al. (2016).

Contrairement à la dissipation dans les corps solides, la réponse de marée des couches fluides comporte deux composantes de natures bien distinctes : la marée d'équilibre, qui est définie comme l'ajustement

1. Ogilvie & Lin (2004) et Ogilvie & Lin (2007) s'intéressent aussi aux régions stablement stratifiées mais en ajoutant l'effet de Coriolis que Zahn ne prenait pas en compte.

hydrostatique de grande échelle (voir Zahn, 1966a, 1970, et le Chapitre 2), et la marée dynamique résultant de l'excitation d'ondes internes (inertielles ou gravito-inertielles). La marée d'équilibre est analogue à la déformation visco-élastique des solides. Ses variations avec les paramètres de la structure interne et la fréquence de marée sont régulières. La marée dynamique en revanche se caractérise par un comportement fortement résonant en fréquence, dû à la réflection des modes excités sur les bornes du domaines (effet « guide d'ondes »). Elle joue un rôle majeur car c'est elle qui peut engendrer les plus grandes variations du facteur qualité de marée Q (cf. Eq. 2.23). On le voit par exemple en Figure 7.1, où sont tracées les variations de la dissipation de marée d'une zone convective en fonction de la fréquence d'excitation (gauche) et les atracteurs des ondes de marées inertielles à l'origine de cette dissipation (droite). Un cas intéressant est celui du système Terre-Lune étudié au chapitre précédent, où la dissipation est principalement due à l'océan à l'heure d'aujourd'hui (voir état de l'art au Chapitre 6). Dans cet exemple, la marée océanique barotrope est convertie en ondes internes via son interaction avec la topographie du plancher océanique et les continents (Pedlosky, 1982).

De nombreuses études ont montré qu'il était possible de décrire de façon satisfaisante le comportement complexe de la marée dynamique à l'aide de modèles locaux simplifiés (Ogilvie, 2005; Jouve & Ogilvie, 2014; Barker & Lithwick, 2013, 2014), dont les résultats qualitatifs permettent d'interpréter ceux des modèles globaux (e.g. Ogilvie & Lin, 2004, 2007). Notre approche s'inspire de ces travaux et s'inscrit dans leur continuité.

7.3 Dynamique des ondes de marées fluides forcées dans une boîte cartésienne

Dans cette section, nous introduisons les équations gouvernant la dynamique des ondes de marée forcées dans une section locale située au sein d'un corps fluide en rotation et établissons les expressions analytiques des composantes de la puissance dissipée dans ce volume.

7.3.1 Modélisation

Nous reprenons comme base le modèle décrit dans l'annexe d'Ogilvie & Lin (2004), auquel nous ferons désormais référence quand nous citerons ces travaux. L'objet de notre étude est un corps céleste quelconque présentant une région fluide soumise à des effets de marée gravifiques. Il peut s'agir tout aussi bien d'une étoile que d'une géante gazeuse ou d'une partie fluide de planète tellurique. Le corps, de rayon R, est en rotation sur lui-même à la vitesse angulaire de spin Ω, le vecteur de spin étant noté $\mathbf{\Omega}$. On introduit le repère global $\mathcal{R}_{\mathrm{O}} : \{\mathrm{O}, \mathbf{X}_{\mathrm{E}}, \mathbf{Y}_{\mathrm{E}}, \mathbf{Z}_{\mathrm{E}},\}$, attaché au corps et centré sur son centre de gravité O, tel que $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{Z}_{\mathrm{E}}$, les vecteurs $\mathbf{X}_{\mathrm{E}}$ et $\mathbf{Y}_{\mathrm{E}}$ définissant le plan équatorial de l'objet (Fig. 7.2). Dans ce repère, la position d'un point M situé dans la région fluide est décrite par les coordonnées sphériques usuelles (r, θ, φ) (cf. Chapitre 3), auxquelles est associée la base vectorielle $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$. Isolons maintenant dans le voisinage du point M une petite section cartésienne de côté $L \ll R$ et de volume $\mathscr{V}$. Ceci nous amène à introduire le repère cartésien local $\mathcal{R} : \{M, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, centré sur M, dans lequel $\mathbf{e}_z$ indique la direction radiale, et $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ respectivement les directions horizontales Ouest-Est et Sud-Nord, de sorte que les deux bases vectorielles vérifient les relations $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r$. Le vecteur $\mathbf{x} = (x, y, z)$ désigne ainsi les coordonnées spatiales locales. Le fluide est newtonien, de pression p, de masse volumique ρ, de viscosité cinématique ν et de diffusivité thermique κ uniformes. On considère par ailleurs, en s'inspirant des travaux de Gerkema & Shrira (2005), qu'il est potentiellement stablement stratifié dans la direction verticale. La fréquence de Brunt-Väisälä, noté N (voir Eq. 3.13), est supposée constante comme les autres paramètres. Le modèle présenté en annexe

d'Ogilvie & Lin (2004), qui décrit la dissipation par friction visqueuse des ondes inertielles, correspond ainsi au cas limite $N = 0$, $\kappa = 0$ et $\theta = 0$ de notre étude.

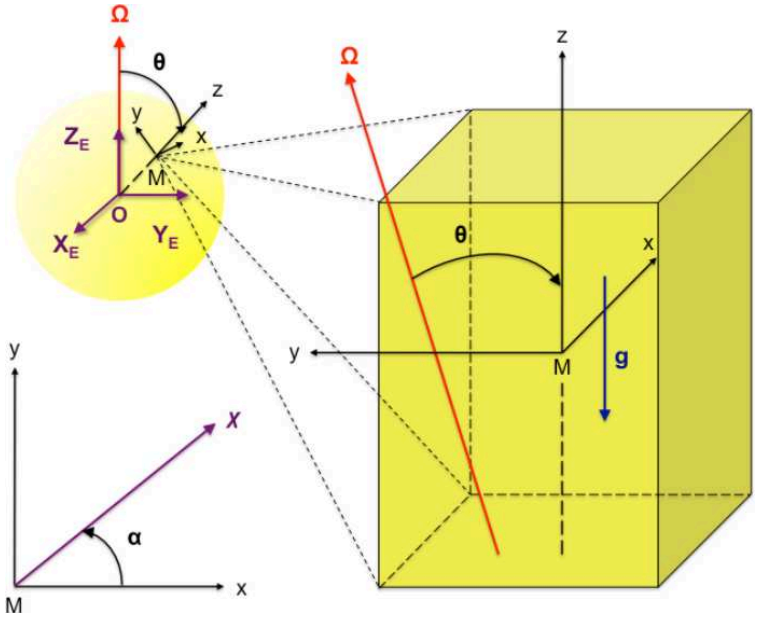


FIGURE 7.2: Boîte fluide cartésienne du modèle local, repères de référence et systèmes de coordonnées.

7.3.2 Equations primitives

On suppose que le fluide, au repos à l'équilibre, est soumis à un forçage de marée de fréquence χ modélisé par la force par unité de masse $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Ce forçage génère à l'intérieur de la boîte un champ de vitesse $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ dont l'énergie est dissipée par friction visqueuse et thermique. Comme Ogilvie & Lin (2004) et Gerkema & Shrira (2005), on détermine la réponse du fluide au forçage en écrivant les équations linéarisées de la dynamique au voisinage de l'état d'équilibre hydrostatique. Des mécanismes tels que les interactions non-linéaires entre ondes de marée ne sont pas pris en compte. Les interactions avec les écoulements turbulents, notamment la convection, sont quant à elles traitées comme une viscosité effective (Zahn, 1966a; Goldreich & Keeley, 1977; Zahn, 1989; Ogilvie & Lesur, 2012).

On fait les hypothèses suivantes :

- L'*approximation du plan f* (f-plane approximation), communément utilisée en dynamique des fluides géophysiques qui consiste à supposer le paramètre de Coriolis $f = 2\Omega\cos\theta$ constant. Cette hypothèse convient à l'étude des ondes de petites longueurs d'onde, ce qui est le cas ici, les longueurs d'ondes étant majorées par $L \ll R$. Le traitement des ondes de grandes longueurs d'onde requiert en revanche d'utiliser un modèle global comme dans les chapitres 3, 4 et 6. On note aussi que l'approximation du plan f s'appauvrit au voisinage de l'équateur où les variations de f deviennent du même ordre de grandeur que son amplitude ($\partial_y f \sim f$). Ces effets sont en partie corrigés par l'*approximation du plan* β (e.g. Gerkema & Shrira, 2005), qui améliore l'approximation du plan f en prenant en compte les variations de f au premier ordre en θ.
- L'*approximation de Boussinesq*. Les ondes acoustiques sont filtrées, ce qui permet de supposer l'écoulement incompressible, i.e. $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0$. Cette approximation, appelée *approximation anélastique*, se réduit à l'approximation de Boussinesq (Boussinesq, 1897), $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = 0$, dans le cas où la densité d'équilibre est uniforme. Les variations de densité ne sont prises en compte qu'à travers celles de la *flottabilité* (définition ci-dessous). L'approximation de Boussinesq peut être appliquée aux ondes dont les fréquences de marée sont petites en comparaison à la *fréquence de Lamb* (Lamb, 1917), qui marque la borne inférieure du domaine des ondes acoustiques.

- L'*approximation de Cowling* (Cowling, 1941), déjà vue dans les chapitres précédents. L'effet rétroactif de la redistribution de masse sur la dynamique n'est pas pris en compte. En d'autres termes, on ignore le potentiel gravifique induit par les fluctuations de densité des ondes.

Dans l'approche linéaire, la pression et la densité s'écrivent comme la somme d'une distribution d'équilibre uniforme et d'une petite fluctuation,

$$p = p_0 + \delta p\,(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho\,(\mathbf{x}, t)\,. \tag{7.1}$$

Une variation locale de densité dans un fluide stratifié par la gravité se traduit par une variation de la flottabilité $\mathbf{B} = B\,\mathbf{e}_z$, définie par

$$B = -g\frac{\delta\rho}{\rho_0}. \tag{7.2}$$

Avec ces notations, l'équation de la dynamique linéarisée s'écrit dans le cadre non-traditionnel

$$\partial_t \mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\delta p + \mathbf{B} + \nu\nabla^2\mathbf{V} + \mathbf{F}, \tag{7.3}$$

où $\nabla^2 = \partial_{x,x} + \partial_{y,y} + \partial_{z,z}$. L'approximation de Boussinesq réduit l'équation de conservation de la masse à

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{7.4}$$

Enfin, l'équation de conservation de l'énergie vient fermer le système en reliant la flottabilité au déplacement vertical (Gerkema & Shrira, 2005),

$$\partial_t B + N^2 V_z = \kappa\nabla^2 B. \tag{7.5}$$

En coordonnées cartésiennes, le système d'équations formé par (7.3), (7.4) et (7.5) s'écrit

$$\partial_t V_x - 2\Omega\cos\theta V_y + 2\Omega\sin\theta V_z = -\frac{1}{\rho_0}\partial_x\delta p + \nu\nabla^2 V_x + F_x, \tag{7.6a}$$

$$\partial_t V_y + 2\Omega\cos\theta V_x = -\frac{1}{\rho_0}\partial_y\delta p + \nu\nabla^2 V_y + F_y, \tag{7.6b}$$

$$\partial_t V_z - 2\Omega\sin\theta V_x = -\frac{1}{\rho_0}\partial_z\delta p + B + \nu\nabla^2 V_z + F_z \tag{7.6c}$$

$$\partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z = 0, \tag{7.6d}$$

$$\partial_t B + N^2 V_z = \kappa\nabla^2 B. \tag{7.6e}$$

7.3.3 Bilan d'énergie

Les équations primitives étant posées, établissons maintenant le bilan d'énergie du système. En faisant le produit scalaire de l'équation des moments (Eq. 7.3) par $\mathbf{V}$ et en multipliant l'équation de la chaleur (Eq. 7.5) par un facteur B/N^2, nous obtenons l'équation de l'énergie pour la boîte,

$$\partial_t \left(E_c + E_p\right) = D^{\mathrm{acc}} + D^{\mathrm{visc}} + D^{\mathrm{therm}} + D^{\mathrm{forcing}}, \tag{7.7}$$

où nous avons introduit l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\mathscr{V}} \rho_0 \, \mathbf{V}^2 d\mathscr{V}, \tag{7.8}$$

l'énergie potentielle associée à la stratification

$$\begin{cases} E_p = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\mathscr{V}} \rho_0 \frac{B^2}{N^2} d\mathscr{V} & \text{si } N^2 \neq 0, \\ E_p = 0 & \text{si } N^2 = 0, \end{cases} \tag{7.9}$$

la divergence du flux acoustique $\delta\rho\mathbf{V}$,

$$D^{\mathrm{acc}} = -\int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\delta p \mathbf{V}\right) d\mathscr{V}, \tag{7.10}$$

la puissance dissipée par friction visqueuse

$$D^{\mathrm{visc}} = \int_{\mathscr{V}} \rho_0 \left(\nu \mathbf{V} \cdot \nabla^2 \mathbf{V}\right) d\mathscr{V}, \tag{7.11}$$

la puissance dissipée par diffusion thermique

$$\begin{cases} D^{\mathrm{therm}} = \displaystyle\int_{\mathscr{V}} \rho_0 \left(\frac{\kappa}{N^2} B \nabla^2 B\right) d\mathscr{V} & \text{si } N^2 \neq 0, \\ D^{\mathrm{therm}} = 0 & \text{si } N^2 = 0, \end{cases} \tag{7.12}$$

et la puissance apportée par le forçage volumique de marée

$$D^{\mathrm{forcing}} = \int_{\mathscr{V}} \rho_0 \left(\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}\right) d\mathscr{V}. \tag{7.13}$$

7.3.4 Champ de vitesse et dissipation de marée

La taille de la boîte (L) et la fréquence d'inertie du corps en rotation (2Ω) définissent une longueur et un temps caractéristiques du système. On introduit donc les coordonnées de temps et d'espace et la fréquence de marée sans dimension, T, $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$ et ω, ainsi que la flottabilité et la force par unité de masse normées, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{f}$,

$$T = 2\Omega\, t, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad \omega = \frac{\chi}{2\Omega}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{2\Omega}, \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{2\Omega}. \tag{7.14}$$

La réponse du fluide varie en fonction des trois coordonnées spatiales. Afin de réduire la complexité technique du problème, on le restreint comme Ogilvie & Lin (2004) au cas bidimensionnel, qui est qualitativement équivalent au cas tridimensionnel. Dans cette approximation, les toutes les quantités varient dans le plan (X, Z), et s'écrivent

$$
\begin{aligned}
&f_x = \Re\left\{f_x^\omega\left(X,Z\right)e^{-i\omega T}\right\}, \quad f_y = \Re\left\{f_y^\omega\left(X,Z\right)e^{-i\omega T}\right\}, \quad f_z = \Re\left\{f_z^\omega\left(X,Z\right)e^{-i\omega T}\right\},\\
&V_x = \Re\left\{V_x^\omega\left(X,Z\right)e^{-i\omega T}\right\}, \quad V_y = \Re\left\{V_y^\omega\left(X,Z\right)e^{-i\omega T}\right\}, \quad V_z = \Re\left\{V_z^\omega\left(X,Z\right)e^{-i\omega T}\right\},\\
&\delta p = \Re\left\{\delta p^\omega\left(X,Z\right)e^{-i\omega T}\right\}, \quad b = \Re\left\{b^\omega\left(X,Z\right)e^{-i\omega T}\right\}.
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

Comme on s'intéresse à l'excitation des modes normaux du système, on applique aux bornes du domaine des conditions de périodicité. Ainsi, les fonctions spatiales peuvent être développées en séries de Fourier,

$$
\begin{aligned}
&f_x^\omega = \sum_{m,n} f_x^{m,n} e^{i2\pi(mX+nZ)}, \quad f_y^\omega = \sum_{m,n} f_y^{m,n} e^{i2\pi(mX+nZ)}, \quad f_z^\omega = \sum_{m,n} f_z^{m,n} e^{i2\pi(mX+nZ)},\\
&V_x^\omega = \sum_{m,n} V_x^{m,n} e^{i2\pi(mX+nZ)}, \quad V_y^\omega = \sum_{m,n} V_y^{m,n} e^{i2\pi(mX+nZ)}, \quad V_z^\omega = \sum_{m,n} V_z^{m,n} e^{i2\pi(mX+nZ)},\\
&\delta p^\omega = \sum_{m,n} \delta p^{m,n} e^{i2\pi(mX+nZ)}, \quad b^\omega = \sum_{m,n} b^{m,n} e^{i2\pi(mX+nZ)},
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

où les nombres d'ondes horizontaux m et verticaux n sont tels que $(m,n) \in \mathbb{Z}^{*2}$. Introduisons maintenant les paramètres de contrôle du système,

$$
A = \left(\frac{N}{2\Omega}\right)^2, \quad E = \frac{2\pi^2\nu}{\Omega L^2}, \quad K = \frac{2\pi^2\kappa}{\Omega L^2}, \quad \text{et} \quad P_\mathrm{r} = \frac{E}{K}. \tag{7.17}
$$

Le paramètre A compare le rapport des amplitudes des deux forces de rappel. Il est équivalent au rapport de leurs fréquences caractéristiques, la fréquence de Brunt-Väisälä (N) pour la poussée d'Archimède et la fréquence d'inertie (2Ω) pour l'accélération de Coriolis. Il détermine ainsi la nature des modes excités :

- $A = 0$ pour les modes inertiels ; la seule force de rappel est l'accélération de Coriolis ;
- $A = +\infty$ pour les modes de gravité ; la seule force de rappel est la poussée d'Archimède ;
- $A \ll 1$ pour les pseudo modes inertiels ; les effets inertiels prédominent ;
- $A \gg 1$ pour les pseudo modes de gravité ; les effets de la stratification stable prédominent.

Les paramètres E et K mesurent les intensités des deux processus dissipatifs, respectivement la friction visqueuse/turbulente et la diffusion thermique, par rapport à celle des effets inertiels. Le ratio E est appelé *nombre d'Ekman* tandis que K correspond à un nombre de Péclet rotationnel. Enfin, le nombre de Prandtl, noté P_r, compare entre elles les intensités des deux processus :

- $P_\mathrm{r} = 0$ en l'absence de friction ; l'énergie est dissipée uniquement par diffusion thermique ;
- $P_\mathrm{r} = +\infty$ en l'absence de diffusion thermique ;
- $P_\mathrm{r} \ll 1$ lorsque la friction visqueuse domine la diffusion thermique dans l'amortissement de la réponse du fluide à la perturbation ;
- $P_\mathrm{r} \gg 1$ lorsque c'est la diffusion thermique qui prédomine.

On introduit pour finir les fréquences complexes $\tilde{\omega}$ et $\breve{\omega}$, définies par

$$
\tilde{\omega} = \omega + iE\left(m^2+n^2\right) \quad \text{et} \quad \breve{\omega} = \omega + iK\left(m^2+n^2\right), \tag{7.18}
$$

dont les parties imaginaires sont associées aux mécanismes dissipatifs. Les coefficients de Fourier de (7.16) satisfont le système dérivé des équations (7.6a) à (7.6e),

$$-i\tilde{\omega}V_x^{m,n} - \cos\theta V_y^{m,n} + \sin\theta V_z^{m,n} = -\,im\Lambda\delta p^{m,n} + f_x^{m,n}, \tag{7.19a}$$
$$-i\tilde{\omega}V_y^{m,n} + \cos\theta V_x^{m,n} = +\,f_y^{m,n}, \tag{7.19b}$$
$$-i\tilde{\omega}V_z^{m,n} - \sin\theta V_x^{m,n} = -\,in\Lambda\delta p^{m,n} + b^{m,n} + f_z^{m,n}, \tag{7.19c}$$
$$mV_x^{m,n} + nV_z^{m,n} = 0, \tag{7.19d}$$
$$-i\tilde{\omega}b^{m,n} + AV_z^{m,n} = 0, \tag{7.19e}$$

où $\Lambda = \pi/(\Omega\rho L)$ est un facteur constant. Fixer $\mathbf{f} = 0$ permet d'obtenir à partir de ce système la relation de dispersion des modes gravito-inertiels amortis par la la friction et la diffusion thermique,

$$\tilde{\omega} = \frac{n^2\cos^2\theta}{m^2+n^2} + \frac{m^2 A}{m^2+n^2}\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}}. \tag{7.20}$$

En se plaçant l'approximation quasi-adiabatique, où $\max(E,K) \ll \min\left(\sqrt{|A|},\cos\theta\right)$, on identifie dans le second membre de (7.20) le nombre d'onde $\hat{\mathbf{k}} = \left(\hat{k}_\perp, 0, \hat{k}_\mathrm{V}\right)$ avec $\hat{k}_\perp = m/L$ et $\hat{k}_\mathrm{V} = n/L$. La relation de dispersion s'écrit

$$\chi^2 \approx \left(\frac{2\mathbf{\Omega}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{\left|\hat{\mathbf{k}}\right|}\right)^2 + \left(N\frac{\hat{k}_\perp}{\left|\hat{\mathbf{k}}\right|}\right)^2, \tag{7.21}$$

où l'on reconnaît les contributions respectives des ondes inertielles et de gravité. Les fréquences approximatives des limites du domaines des ondes gravito-inertielles, notées χ_inf et χ_sup, sont obtenues en considérant successivement les cas $|m| \to +\infty$ et $|n| \to +\infty$,

$$\chi_\mathrm{inf} \approx \min(2\Omega, N) \quad \text{et} \quad \chi_\mathrm{sup} \approx \max(2\Omega, N), \tag{7.22}$$

Gerkema & Shrira (2005) donnent les expressions exactes de ces fréquences (voir aussi Mathis et al., 2014),

$$\chi_\mathrm{inf} = \sqrt{\frac{\lambda - \left[\lambda^2 - (2fN)^2\right]^{1/2}}{2}} \quad \text{et} \quad \chi_\mathrm{sup} = \sqrt{\frac{\lambda + \left[\lambda^2 - (2fN)^2\right]^{1/2}}{2}} \tag{7.23}$$

où $\lambda = N^2 + f^2 + f_s^2$, avec les paramètres de Coriolis $f = 2\Omega\cos\theta$ et $f_s = 2\Omega\sin\theta\sin\alpha$. L'angle α correspond ici à l'angle entre la direction de propagation des ondes gravito-inertielles et l'axe des x dans le plan horizontal (M, x, y) (cf. Fig. 7.2). Quelques manipulations sur les équations (7.19a) à (7.19e) permettent

d'obtenir les coefficients de Fourier des quantités perturbées (Eq. 7.16). Il vient, pour le champ de vitesse **V**,

$$V_x^{m,n} = n\frac{i\tilde{\omega}\left(nf_x^{m,n} - mf_z^{m,n}\right) - n\cos\theta f_y^{m,n}}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\breve{\omega}}}, \tag{7.24a}$$

$$V_y^{m,n} = \frac{n\cos\theta\left(nf_x^{m,n} - mf_z^{m,n}\right) + i\left[\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega} - \dfrac{Am^2}{\breve{\omega}}\right]f_y^{m,n}}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\breve{\omega}}}, \tag{7.24b}$$

$$V_x^{m,n} = -m\frac{i\tilde{\omega}\left(nf_x^{m,n} - mf_z^{m,n}\right) - n\cos\theta f_y^{m,n}}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\breve{\omega}}}, \tag{7.24c}$$

et pour les variations de pression δp et de flottabilité **b**,

$$\delta p^{m,n} = \frac{1}{\Lambda}\left\{\frac{\left(\tilde{\omega}f_x^{m,n} + i\cos\theta f_y^{m,n}\right)\left[n\sin\theta + im\left(\dfrac{A}{\breve{\omega}} - \tilde{\omega}\right)\right]}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\breve{\omega}}}\right. \tag{7.25a}$$

$$\left. - \frac{f_z^{m,n}\left[m\sin\theta\tilde{\omega} + in\left(\tilde{\omega}^2 - \cos^2\theta\right)\right]}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\breve{\omega}}}\right\}, \tag{7.25b}$$

$$b^{m,n} = \frac{iAm}{\omega}\frac{i\tilde{\omega}\left(nf_x^{m,n} - mf_z^{m,n}\right) - n\cos\theta f_y^{m,n}}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\breve{\omega}}}. \tag{7.25c}$$

Les coefficients de Fourier des quantités perturbées se présentent comme des fractions ayant toutes le même dénominateur. Celui-ci correspond à la partie inertielle du système (i.e. accélération et réponse aux forces de rappel). Le numérateur correspond quant à lui aux forçages. Dans le système de coordonnées réduites, les puissances dissipées par unité de masse dues à la friction visqueuse $\mathcal{D}^{\text{visc}} = D^{\text{visc}}/\left(\rho L^3\right)$ et à la diffusion thermique $\mathcal{D}^{\text{therm}} = D^{\text{therm}}/\left(\rho L^3\right)$ sont définies par

$$\mathcal{D}^{\text{visc}} = \frac{1}{L^2}\int_0^1\int_0^1 \langle -\mathbf{V}\cdot\nu\nabla^2_{X,Z}\mathbf{V}\rangle\, dX\, dZ \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^{\text{therm}} = \frac{1}{L^2}KA^{-2}\int_0^1\int_0^1 \langle -b\nabla^2_{X,Z}b\rangle\, dX\, dZ, \tag{7.26}$$

où $\nabla^2_{X,Z} \equiv \left(1/L^2\right)\nabla^2$ et $\langle\ldots\rangle$ désigne la moyenne temporelle sur un cycle. Elles s'expriment en fonction des coefficients de Fourier de la vitesse et de la flottabilité,

$$\mathcal{D}^{\text{visc}}(\omega) = \frac{2\pi^2\nu}{L^2}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}}\left(m^2+n^2\right)\left(\left|V_x^{m,n}\right|^2 + \left|V_y^{m,n}\right|^2 + \left|V_z^{m,n}\right|^2\right), \tag{7.27a}$$

$$\mathcal{D}^{\text{therm}}(\omega) = \frac{2\pi^2\kappa}{L^2A^2}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}}\left(m^2+n^2\right)\left|b^{m,n}\right|^2. \tag{7.27b}$$

La dissipation totale à l'intérieur de la boîte, $\mathcal{D}$, est la somme de ces deux composantes,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\text{visc}} + \mathcal{D}^{\text{therm}}. \tag{7.28}$$

On introduit finalement l'énergie dissipée durant une période de rotation de la planète $\zeta = \frac{2\pi}{\Omega}\mathcal{D}$ et ses composantes ζ^{visc} et ζ^{therm}, définies par

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta^{\mathrm{visc}}(\omega) &= 2\pi E \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}} \left(m^2+n^2\right)\left(\left|V_x^{m,n}\right|^2 + \left|V_y^{m,n}\right|^2 + \left|V_z^{m,n}\right|^2\right), && (7.29a)\\ \zeta^{\mathrm{therm}}(\omega) &= 2\pi K A^{-2} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}} \left(m^2+n^2\right)\left|b^{m,n}\right|^2, && (7.29b)\end{aligned}}$$

qui, contrairement à la puissance dissipée, dépendent seulement des paramètres de contrôle A, E et K et de la fréquence de marée. Les termes de ζ^{visc} et ζ^{therm} associés au doublet (m,n) sont notés respectivement $\zeta_{\mathrm{V}}^{m,n}$ et $\zeta_{\mathrm{T}}^{m,n}$ et s'écrivent

$$\zeta_{\mathrm{V}}^{m,n}(\omega) = 2\pi E\left(m^2+n^2\right)\left(\left|V_x^{m,n}\right|^2 + \left|V_y^{m,n}\right|^2 + \left|V_z^{m,n}\right|^2\right), \tag{7.30a}$$

$$\zeta_{\mathrm{T}}^{m,n}(\omega) = 2\pi K A^{-2}\left(m^2+n^2\right)\left|b^{m,n}\right|^2. \tag{7.30b}$$

7.3.5 Réponse spectrale

On s'intéresse à la dépendance de la dissipation à la fréquence de marée, que permettent d'étudier les expressions analytiques de l'énergie dissipée (7.29a) et (7.29b). De manière à ce que le cas $N = 0$ et $K = 0$ corresponde à celui traité par Ogilvie & Lin (2004), on impose le forçage de marée académique

$$f_x^{m,n} = -i\frac{F}{4\left|m\right|n^2}, \quad f_y^{m,n} = 0 \quad \text{et} \quad f_z^{m,n} = 0. \tag{7.31}$$

La forme choisie pour ces coefficients n'affecte pas les propriétés du spectre en fréquence de l'énergie dissipée qui dépendent essentiellement de la partie inertielle du système, telles que la position et la largeur des pics de résonances. Elle détermine en revanche leur amplitude de même que le niveau du fond non-résonant, le niveau moyen atteint par la dissipation interne dans les creux situés entre les résonances. Comme l'approche est linéaire, ces amplitudes sont toutes deux proportionnelles à l'intensité de la force d'excitation. Le contraste entre les pics les plus hauts et le niveau non-résonant ne dépend donc pas de $\mathbf{f}$ en première approximation. Pour satisfaire des objectifs plus quantitatifs, il serait nécessaire de raffiner le traitement du forçage, en considérant une force $\mathbf{f}$ quelconque ou dérivée de prescriptions plus réalistes.

Avec le forçage choisi pour cette étude, on obtient les spectres de dissipation en fréquence représentés en Figure 7.3. Les quatre premiers correspondent au cas des ondes inertielles amorties par la friction visqueuse pour différents nombres d'Ekman. On reproduit exactement ici les résultats d'Ogilvie & Lin (2004), qui montrent que la variabilité de la dissipation avec la fréquence de marée dépend fortement de la viscosité. Plus le nombre d'Ekman est petit et plus le contraste entre les pics de résonance et le fond non-résonant est important. Les quatre graphes suivants donnent un aperçu des nouveaux régimes résultant de l'introduction de la diffusion thermique dans le modèle. L'énergie dissipée est maintenant la somme de deux composantes, ζ^{visc} et ζ^{therm}, présentant chacune sa dépendance propre aux paramètres du système. Suivant la valeur du nombre de Prandtl, l'énergie peut être dominée par la friction visqueuse comme dans le modèle de Ogilvie & Lin (2004) ou par la diffusion thermique (graphe en bas à gauche dans Fig. 7.3). On observe que le cas $\left\{A = 10^2, P_{\mathrm{r}} = 10^{-2}\right\}$ (en bas à droite) correspond à un régime de transition où $\zeta^{\mathrm{visc}} \sim \zeta^{\mathrm{therm}}$. De manière générale, le tracé de l'énergie dissipée nous donne un aperçu qualitatif du rôle joué par les paramètres-clés du système. Dans la suite, nous allons caractériser les propriétés du spectre d'une façon plus quantitative en

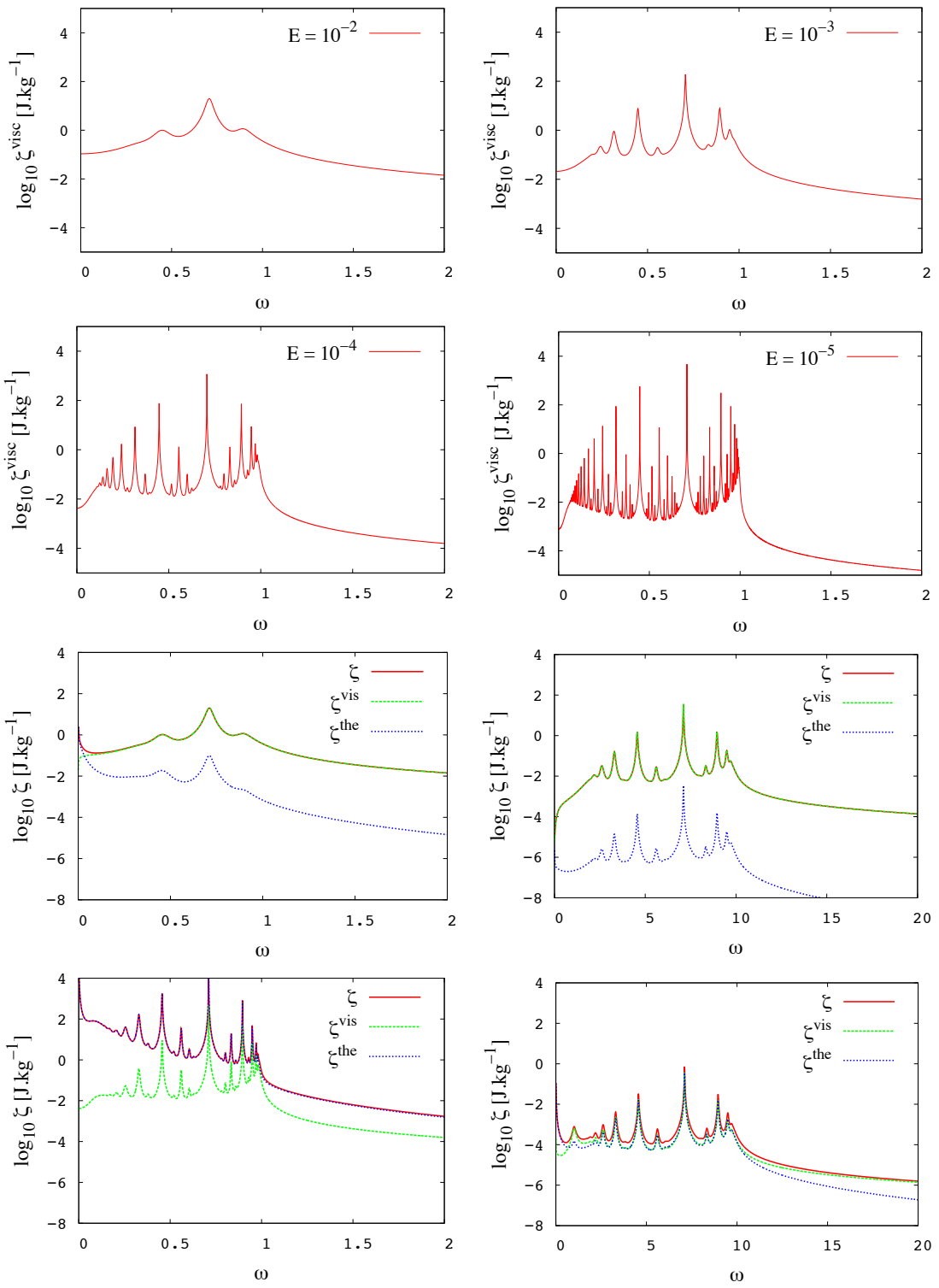


FIGURE 7.3: Logarithme de l'énergie dissipée par unité de masse (ζ) et de ses composantes associées à la friction et à la diffusion thermique (Eqs. 7.29a et 7.29b) en fonction de la fréquence de marée (ω, définie par Eq. 7.14) pour différentes valeurs des paramètres de contrôle (A, E et K), $\theta = 0$ (pôle) et le forçage donné par (7.31) avec $F = 1$. *Haut* - Reproduction des résultats d'Ogilvie & Lin (2004). Les quatre panneaux représentent les spectre en fréquence de l'énergie dissipée pour quatre valeurs différentes du nombre d'Ekman : $E = 10^{-2}$; $E = 10^{-3}$; $E = 10^{-4}$ et $E = 10^{-5}$; et $K = 0$. *Bas* - Spectres en fréquence de l'énergie dissipée (trait continu rouge) et des contributions de la friction visqueuse (trait vert pointillé) et de la diffusion thermique (trait bleu pointillé) pour différents jeu des paramètres de contrôle (A, E, K). En haut à gauche : $A = 10^{-2}$; $E = 10^{-2}$; $K = 10^{-4}$. En haut à droite : $A = 10^{2}$; $E = 10^{-2}$; $K = 10^{-4}$. En bas à gauche : $A = 10^{-2}$; $E = 10^{-4}$; $K = 10^{-2}$. En bas à droite : $A = 10^{2}$; $E = 10^{-4}$; $K = 10^{-2}$.

nous appuyant sur les expressions analytiques des quantités perturbées données par les équations (7.24a) à (7.25c).

7.4 Propriétés du spectre en fréquence de la dissipation

Les spectres en fréquence de la dissipation (Fig. 7.3) présentent des caractéristiques globales bien identifiables : dans un intervalle de fréquences borné par $\omega_{\mathrm{inf}} = \chi_{\mathrm{inf}}/(2\Omega)$ et $\omega_{\mathrm{sup}} = \chi_{\mathrm{sup}}/(2\Omega)$ (Eq. 7.22), ils sont constitués d'un ensemble de résonances de différentes hauteurs et largeurs, dominant un fond non-résonant relativement uniforme sur l'ensemble de l'intervalle. En deçà de ω_{inf} et au delà de ω_{sup}, la dissipation devient régulière et décroît rapidement de plusieurs ordres de grandeur. Dans cette section, nous déterminerons en premier lieu les fréquences propres des modes résonants $\omega^{m,n}$ et les largeurs de pics de résonances $l^{m,n}$ qui ne dépendent que de la partie inertielle du système. En second lieu, nous exprimerons les amplitude des résonances $H^{m,n}$ et du fond non-résonant H_{bg}, pour en venir finalement au nombre de pics du spectre N et au paramètre de contraste $\Xi^{m,n}$, qui désigne le rapport entre l'amplitude des pics et celle du fond non-résonant.

7.4.1 Positions des résonances

La structure des spectres en fréquence de la dissipation, très organisée, suggère que chacun des pics observés est l'expression des quatre termes associés à la même fréquence propre $\omega^{m,n}$ dans les sommes (7.29a) et (7.29b). La fréquence propre est déterminée en première approximation par la partie inertielle du système, qui correspond au dénominateur des coefficients de Fourier des quantités perturbées,

$$d^{m,n} = \left| \left(m^2 + n^2\right) \tilde{\omega}^2 - n^2 \cos^2\theta - Am^2 \frac{\tilde{\omega}}{\breve{\omega}} \right|^2 . \tag{7.32}$$

En conséquence, les termes associés à une fréquence propre $\omega^{m,n}$ sont ceux possédant le même dénominateur, soit les coefficients de nombres d'ondes (m,n), $(m,-n)$, $(-m,n)$ et $(-m,-n)$ avec $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$. En considérant qu'au voisinage d'un pic les amplitudes de ces quatre coefficients sont du même ordre de grandeur, on exprime en première approximation les composantes de l'énergie dissipée

$$\zeta^{\mathrm{visc}} \approx 8\pi E \left(m^2 + n^2\right) \left(|V_x^{m,n}|^2 + \left|V_y^{m,n}\right|^2 + |V_z^{m,n}|^2 \right), \tag{7.33a}$$

$$\zeta^{\mathrm{therm}} \approx 8\pi A^{-2} E P_{\mathrm{r}}^{-1} \left(m^2 + n^2\right) |b^{m,n}|^2 . \tag{7.33b}$$

Le dénominateur (Eq. 7.32) se met sous la forme d'un polynôme de degrés 6,

$$P(\omega) = \omega^6 + \left(\beta^2 - 2\alpha\right)\omega^4 + \left(\alpha^2 - 2\beta\gamma\right)\omega^2 + \gamma^2, \tag{7.34}$$

avec les paramètres

$$\alpha = E\left(E+2K\right)\left(m^2+n^2\right)^2 + \frac{n^2\cos^2\theta + m^2 A}{m^2+n^2}, \tag{7.35a}$$

$$\beta = \left(K+2E\right)\left(m^2+n^2\right), \tag{7.35b}$$

$$\gamma = KE^2\left(m^2+n^2\right)^3 + n^2\cos^2\theta K + m^2 AE. \tag{7.35c}$$

Les fréquences propres correspondent ainsi aux fréquences minimisant $P(\omega)$. On en déduit

$$\boxed{\omega^{m,n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\alpha - \beta^2 + \sqrt{\beta^4 + \alpha^2 - 4\alpha\beta^2 + 6\beta\gamma}\right]^{\frac{1}{2}}.} \tag{7.36}$$

avec, comme condition d'existence, $2\alpha > \beta^2$ et $\alpha^2 < 2\beta\gamma$. Dans l'approximation quasi-adiabatique, E et K sont des infiniment petits du premier ordre par rapport à A et $\cos^2\theta$, et les coefficients α, β et γ se réduisent donc simplement à

$$\alpha = \frac{n^2\cos^2\theta + m^2 A}{m^2+n^2}, \tag{7.37a}$$

$$\beta = \left(K+2E\right)\left(m^2+n^2\right), \tag{7.37b}$$

$$\gamma = n^2\cos^2\theta K + m^2 AE. \tag{7.37c}$$

Les fréquences propres se mettent sous la forme

$$\omega^{m,n} = \sqrt{\alpha}\left(1+\varepsilon\right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{\beta}{2\alpha}\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \beta\right). \tag{7.38}$$

Le paramètre ε est ici un infiniment petit d'ordre 2 représentant le décalage induit par les mécanismes dissipatifs par rapport au cas adiabatique, où les fréquences propres $\omega^{m,n} = \sqrt{\alpha}$ se déduisent directement des fréquences caractéristiques du système, 2Ω et N, via la relation de dispersion donnée par (7.21),

$$\boxed{\omega^{m,n} = \sqrt{\frac{n^2\cos^2\theta + Am^2}{m^2+n^2}}.} \tag{7.39}$$

Les positions des pics sont tracés en Figure 7.4 en fonction du nombre d'onde global $k = \max(m,n)$ avec $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$. On retrouve dans ces graphes la structure fractale formée par l'ensemble des résonances du spectre, observée dans les spectres de dissipation d'Ogilvie & Lin (2004) et en Figure 7.3. Cette structure correspond au cas quasi-adiabatique, dans lequel les fréquences propres des pics ne dépendent pas des processus dissipatifs et découlent directement de (7.39). Lorsque l'on sort du régime quasi-adiabatique, les résonances commencent à se décaler dans le spectre en fonction de E et K (Fig. 7.4, panneau en haut à gauche).

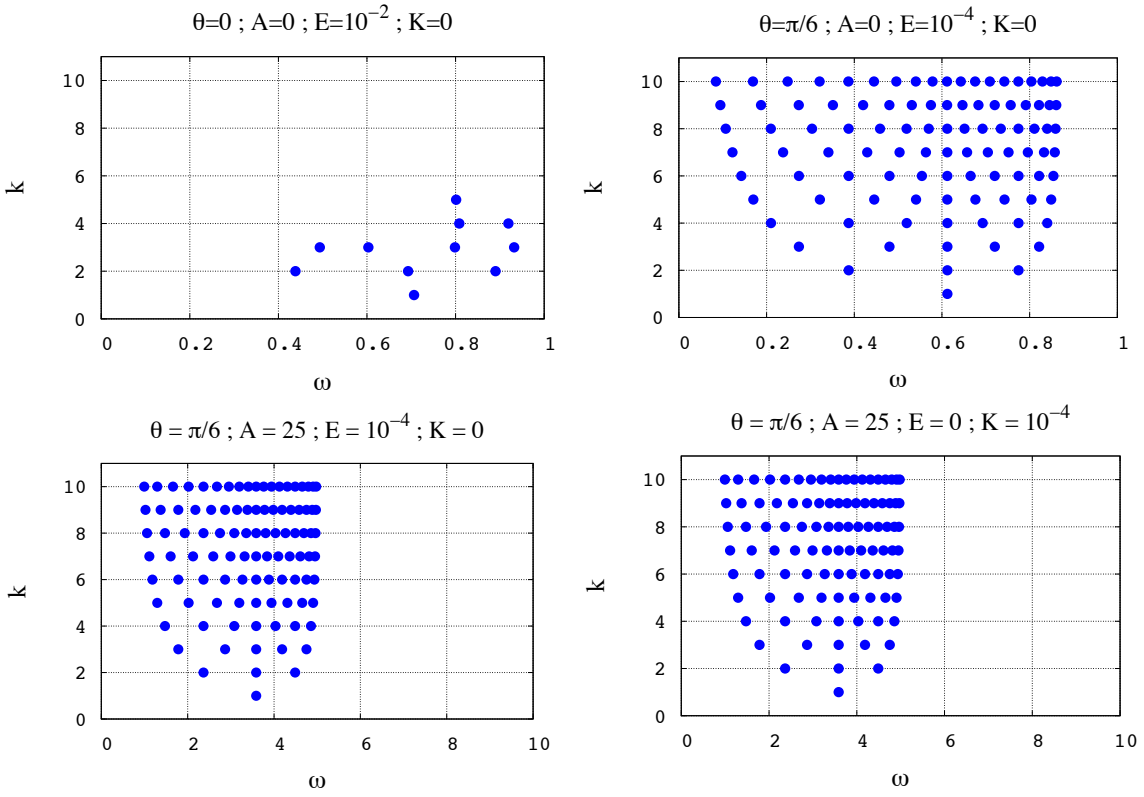


FIGURE 7.4: Fréquences propres des modes excités (Eq. 7.36) en fonction du nombre d'onde global $k = (m, n)$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ (axe vertical) pour différents jeu des paramètres de contrôle θ, A, E et K. *En haut à gauche* - ondes inertielles très amorties par la friction visqueuse en l'absence de diffusion thermique (cf. Ogilvie & Lin, 2004) : $\theta = 0$, $A = 0$, $E = 10^{-2}$, $K = 0$. *En haut à droite* - ondes inertielles peu amorties par la friction visqueuse en l'absence de diffusion thermique : $\theta = \pi/6$, $A = 0$, $E = 10^{-4}$, $K = 0$. *En bas à gauche* - ondes gravito-inertielles peu amorties par la friction visqueuse en l'absence de diffusion thermique : $\theta = \pi/6$, $A = 25$, $E = 10^{-4}$, $K = 0$. *En bas à droite* - ondes inertielles peu amorties par la diffusion thermique en l'absence de friction visqueuse : $\theta = \pi/6$, $A = 25$, $E = 0$, $K = 10^{-4}$.

7.4.2 Largeur des résonances

Si l'on considère que la variation de la dissipation au voisinage d'une fréquence propre $\omega^{m,n}$ est déterminée essentiellement par la partie inertielle du système, la largeur à mi-hauteur de la résonance associée, notée $l^{m,n}$, est solution de l'équation

$$P\left(\omega^{m,n} + \frac{l^{m,n}}{2}\right) = 2P\left(\omega^{m,n}\right). \tag{7.40}$$

Sous l'hypothèse de quasi-adiabaticité, il vient

$$\boxed{l^{m,n} = \left(m^2 + n^2\right) \frac{E\left(A + A^{m,n}\right)\left(P_\mathrm{r} + P_\mathrm{r}^{m,n}\right)}{P_\mathrm{r}\left(A + \frac{1}{2}A^{m,n}\right)}.} \tag{7.41}$$

où l'on a introduit les nombres

$$A^{m,n}(\theta) = \frac{2n^2}{m^2}\cos^2\theta \quad \text{et} \quad P_\mathrm{r}^{m,n}(\theta, A) = \frac{A}{A + A^{m,n}(\theta)}. \tag{7.42}$$

Ces deux paramètres correspondent aux frontières séparant les différents régimes asymptotiques des modes, dont les domaines de paramètres sont représentés par le panneau de gauche de la Figure 7.5 :

a. $A \ll A^{m,n}$; $P_\mathrm{r} \gg A^{m,n}$ - ondes inertielles amorties par la friction visqueuse/turbulente ;
b. $A \gg A^{m,n}$; $P_\mathrm{r} \gg A^{m,n}$ - ondes de gravité amorties par la friction visqueuse/turbulente ;
c. $A \ll A^{m,n}$; $P_\mathrm{r} \ll A^{m,n}$ - ondes inertielles amorties par la diffusion thermique ;
d. $A \gg A^{m,n}$; $P_\mathrm{r} \ll A^{m,n}$ - ondes de gravité amorties par la diffusion thermique.

La sensibilité de la largeur d'une résonance aux paramètres de contrôle est déterminée par le régime du mode (Fig. 7.6). On s'aperçoit notamment que l'augmentation de la largeur des pics avec la viscosité observée en Figure 7.3 (panneaux du haut) pour les ondes inertielles, suit la loi d'échelle $l^{m,n} \propto E$. Les lois d'échelles des autres régimes sont rassemblées en Table 7.1.

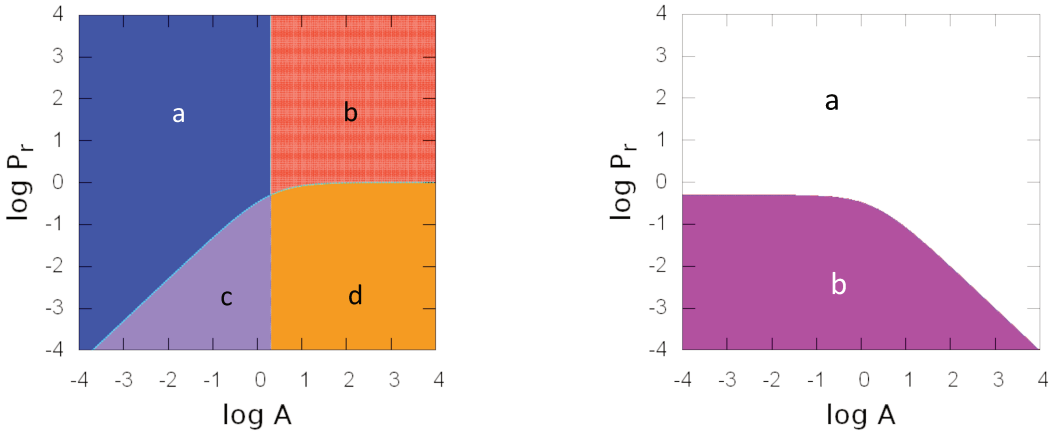


FIGURE 7.5: Domaines asymptotiques représentés en fonction de A (axe horizontal) et P_r (axe vertical) en échelles logarithmiques. *Gauche* - Régimes des modes excités : (a) ondes inertielles amorties par la friction visqueuse/turbulente (bleu) ; (b) ondes de gravité amorties par la friction visqueuse/turbulente (rouge) ; (c) ondes inertielles amorties par la diffusion thermique (violet) ; (d) ondes de gravité amorties par la diffusion thermique (orange). La ligne verticale de transition entre (a) et (b) d'une part et (c) et (d) d'autre part a pour équation $A = A^{1,1}(0)$; la courbe séparant les zones (a) et (c) d'une part et (b) et (d) d'autre part a pour équation $P_\mathrm{r} = P_\mathrm{r}^{1,1}(0, A)$ avec $A^{1,1}$ et $P_\mathrm{r}^{1,1}$ définis par (7.42). *Droite* - Régimes la dissipation de marée : (a) $\zeta^{\mathrm{therm}} \ll \zeta^{\mathrm{visc}}$, la dissipation est dominée par la contribution de la friction ; (b) $\zeta^{\mathrm{therm}} \gg \zeta^{\mathrm{visc}}$, la dissipation est dominée par la contribution de la diffusion thermique.

7.4.3 Amplitude des résonances

L'amplitude d'une résonance associée au doublet (m, n) correspond à la valeur atteinte par la dissipation en $\omega^{m,n}$. Contrairement à la largeur, elle dépend du forçage de marée. Cependant, le traitement du cas général où $\mathbf{f}$ est quelconque induit des difficultés techniques importantes pour un gain relativement limité dans le cadre de cette approche locale, déjà très idéalisée. D'un point de vue qualitatif, on peut isoler les relations suivantes entre les spectres de dissipation et les caractéristiques du forçage :

- l'amplitude des pics varie proportionnellement à celle de la force excitatrice ($|\mathbf{f}|$),
- la décroissance en m et n des coefficients de Fourier de $\mathbf{f}$ détermine la hiérarchie des résonances dans un spectre (cf. Fig. 7.3). Si cette décroissance est lente, le spectre est constitué de nombreux pics présentant des amplitudes comparables. Si elle est rapide au contraire, quelques pics seulement dominent le fond non-résonant.

Ainsi, afin de simplifier les calculs et de rester cohérent avec les travaux d'Ogilvie & Lin (2004), on reprend le forçage académique défini par (7.31). Dans l'approximation quasi-adiabatique, où

$$P\left(\omega^{m,n}\right) \approx \left[m^2 AK + \left(2n^2 \cos^2\theta + m^2 A\right) E\right]^2, \tag{7.43}$$

on en déduit les amplitudes $H_{\mathrm{V}}^{m,n} = \zeta^{\mathrm{visc}}\left(\omega^{m,n}\right)$ et $H_{\mathrm{T}}^{m,n} = \zeta^{\mathrm{therm}}\left(\omega^{m,n}\right)$ des composantes de l'énergie dissipée associées à la friction visqueuse/turbulente et à la diffusion thermique,

$$\boxed{\begin{aligned} H_{\mathrm{V}}^{m,n} &= \frac{8\pi F^2\left(P_{\mathrm{r}}^{m,n}\right)^2}{m^2n^2\left(m^2+n^2\right)^2}\frac{P_{\mathrm{r}}^2\left(A+\frac{1}{2}A^{m,n}\right)}{E\left(A+A^{m,n}\right)\left(P_{\mathrm{r}}+P_{\mathrm{r}}^{m,n}\right)^2}, && (7.44a)\\ H_{\mathrm{T}}^{m,n} &= \frac{8\pi F^2}{m^2\left(m^2+n^2\right)^2}\frac{P_{\mathrm{r}}\left(A+\frac{1}{2}A^{m,n}\right)}{E\left(A+A^{m,n}\right)^2\left(P_{\mathrm{r}}+P_{\mathrm{r}}^{m,n}\right)^2}. && (7.44b)\end{aligned}}$$

Comme on le voit, A et P_{r} se comparent respectivement aux nombres critiques $A^{m,n}$ et $P_{\mathrm{r}}^{m,n}$ donnés par (7.42). L'amplitude d'un pic présente donc les mêmes régimes asymptotiques que la largeur à mi-hauteur (Fig. 7.5, panneau de gauche). Si l'on se restreint au cas des ondes inertielles amorties par la friction visqueuse, traité par Ogilvie & Lin (2004), alors $P_{\mathrm{r}} = +\infty$ et l'on obtient la loi d'échelle $H^{m,n} \propto E^{-1}$ qui explique le fait que l'amplitude des pics observés en Fig. 7.3 augmente quand le nombre d'Ekman décroît. La Figure 7.6 donne un aperçu des variations de $H_{\mathrm{T}}^{m,n}$ avec E et K, tracées à partir de (7.44a). Etant donné que ζ^{visc} et ζ_{therm} ont en commun les fréquences propres $\omega^{m,n}$, leurs pics de résonances se superposent. En revanche, les deux composantes se comportent différemment l'une de l'autre quand les paramètres de contrôle varient (Fig. 7.3, panneaux du bas). L'amplitude de l'énergie dissipée totale, $H^{m,n} = H_{\mathrm{V}}^{m,n} + H_{\mathrm{T}}^{m,n}$, correspond donc approximativement à celle de la composante dominante. Introduisons le ratio

$$\varsigma^{m,n} = \frac{H_{\mathrm{V}}^{m,n}}{H_{\mathrm{T}}^{m,n}}. \tag{7.45}$$

La zone de transition entre les deux régimes de dissipation est caractérisée par $\varsigma^{m,n} \sim 1$, ou bien encore $P_{\mathrm{r}} \sim P_{\mathrm{r};\star}^{m,n}$ avec

$$P_{\mathrm{r};\star}^{m,n}\left(\theta, A\right) = \frac{1}{A + A^{m,n}\left(\theta\right)}. \tag{7.46}$$

Les régimes sont représentées sur la carte du domaine des paramètres en Figure 7.5 (panneau de droite) :

a. $P_{\mathrm{r}}^{m,n} \gg P_{\mathrm{r};\star}^{m,n}$ - la dissipation est due à la friction visqueuse ;
b. $P_{\mathrm{r}}^{m,n} \ll P_{\mathrm{r};\star}^{m,n}$ - la dissipation est due à la diffusion thermique.

Au niveau de la transition, les deux contributions sont du même ordre de grandeur, comme on peut l'observer en Figure 7.3 sur le dernier graphe, en bas à droite.

7.4.4 Fond non-résonant

Le fond non-résonant, noté H_{bg}, est le niveau de dissipation moyen dans l'intervalle de fréquences des modes excités. Si l'on suppose que les coefficients de Fourier de la force perturbatrice décroissent rapidement avec m et n, cette dissipation de base dépend seulement des premiers termes du développement, de nombres d'onde $|m| = 1$ et $|n| = 1$, qui représentent les modes de plus grande échelle et dont les longueurs d'ondes sont comparables à la taille de la section cartésienne (L). Dans un modèle global, tel que $L \sim R$, il s'agirait de la dissipation de la marée d'équilibre, que l'on obtient en isolant l'ajustement hydrostatique de grande échelle de la réponse (e.g. Zahn, 1966a, 1989; Remus et al., 2012a; Ogilvie, 2013). Estimer le fond non-résonant dans notre modèle revient à déterminer l'énergie dissipée par les termes formant le pic principal dans un creux à mi-distance entre ce pic et un pic secondaire, de nombres d'ondes plus élevés. Ainsi, on calcule les niveaux de chacune des deux composantes, $H_{\mathrm{bg;V}} \approx 4\zeta_{\mathrm{V}}^{1,1}\left(\omega_{\mathrm{bg}}\right)$ et $H_{\mathrm{bg;T}} \approx 4\zeta_{\mathrm{T}}^{1,1}\left(\omega_{\mathrm{bg}}\right)$, en posant $\omega_{\mathrm{bg}} = \left(\omega^{1,1} + \omega^{2,1}\right)/2$. Cette fréquence peut s'écrire sous la forme

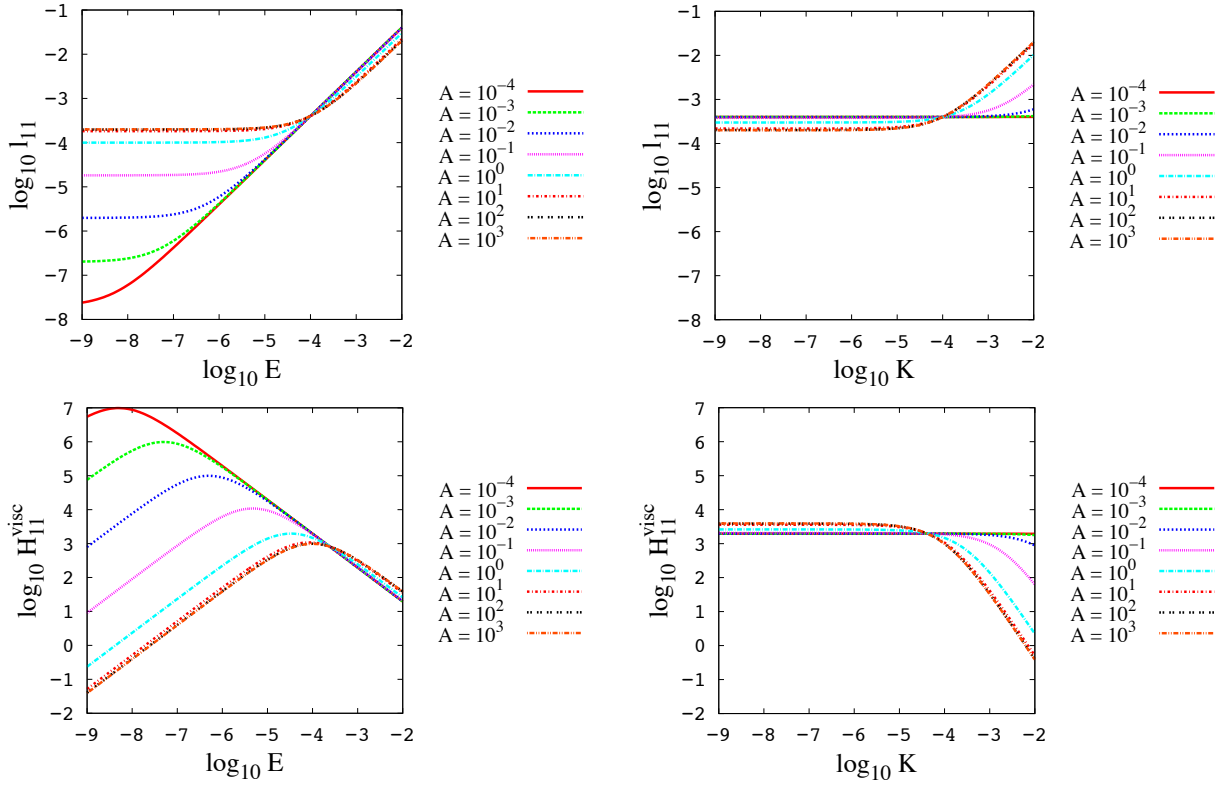


FIGURE 7.6: Largeur à mi-hauteur $l^{1,1}$ et hauteur $H^{1,1}$ de la résonance principale de la composante ζ^{visc} en fonction des logarithmes du nombre d'Ekman (E) et de la diffusivité thermique (K) pour différentes valeurs de A allant des ondes inertielles ($A = 10^{-4}$) aux ondes de gravité ($A = 10^{3}$). *En haut à gauche* - $l^{1,1} = f(E)$. *En haut à droite* - $l^{1,1} = f(K)$. *En bas à gauche* - $H^{1,1} = f(E)$. *En bas à droite* - $H^{1,1} = f(K)$.

$$\omega_{\text{bg}} = \omega^{1,1}(1+\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\omega^{2,1}-\omega^{1,1}}{\omega^{1,1}}. \tag{7.47}$$

On obtient de cette manière

$$H_{\text{bg;V}} = 4\pi F^2 E \varepsilon^2 \frac{\left(A+\cos^2\theta\right)\left[\mathscr{C}^{\text{visc}}_{\text{grav}}(\varepsilon)\,A + \mathscr{C}^{\text{visc}}_{\text{in}}(\varepsilon)\cos^2\theta\right]}{\left(A+\cos^2\theta\right)^3\varepsilon^2 + \xi(\theta,A,E,K)}, \tag{7.48a}$$

$$H_{\text{bg;T}} = 4\pi F^2 E P_{\text{r}}^{-1} \varepsilon^2 \frac{\left(A+\cos^2\theta\right)\mathscr{C}^{\text{therm}}(\varepsilon)}{\left(A+\cos^2\theta\right)^3\varepsilon^2 + \xi(\theta,A,E,K)}, \tag{7.48b}$$

où les facteurs $\mathscr{C}^{\text{visc}}_{\text{in}}$, $\mathscr{C}^{\text{visc}}_{\text{grav}}$ et $\mathscr{C}^{\text{therm}}$ sont des fonctions de ε qui s'expriment

$$\mathscr{C}^{\text{visc}}_{\text{in}}(\varepsilon) = \frac{\left(2+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}, \quad \mathscr{C}^{\text{visc}}_{\text{grav}}(\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^4}{\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \mathscr{C}^{\text{therm}}(\varepsilon) = \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^2. \tag{7.49}$$

Le terme ξ au dénominateur (7.48a) et (7.48b), s'écrit

$$\xi(\theta,A,E,K) = 2\alpha^2\beta^2(1+4\varepsilon) - 4\alpha\beta\gamma(1+2\varepsilon) + 2\gamma^2, \tag{7.50}$$

et peut être négligé devant $\left(A+\cos^2\theta\right)^3\varepsilon^2$ quand les conditions (i) de l'approximation quasi-adiabatique et (ii) $\max\left(A\cos^{-2}\theta, A^{-1}\cos^2\theta\right) \gg 1$ sont satisfaites. Les expressions (7.48a) et (7.48b) se réduisent alors à

$$H_{\mathrm{bg;V}} = 4\pi F^2 E \frac{C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{visc}} A + C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{visc}} \cos^2\theta}{\left(A+\cos^2\theta\right)^2}, \tag{7.51a}$$

$$H_{\mathrm{bg;T}}^{m,n} = 4\pi F^2 E P_{\mathrm{r}}^{-1} \frac{C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{therm}} A + C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{therm}} \cos^2\theta}{\left(A+\cos^2\theta\right)^3}, \tag{7.51b}$$

avec les coefficients numériques asymptotiques $C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{visc}} = 32.87$, $C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{visc}} = 93.74$, $C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{therm}} = 19.73$ et $C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{therm}} = 73.10$. Les zones de prédominance des contributions de la friction visqueuse/turbulente et de la diffusion thermique correspondent à celles déjà identifiés pour les amplitudes des résonances (cf. Eq. 7.46).

7.4.5 Contraste et nombre de pics

Dans l'intervalle de fréquences des ondes gravito-inertielles, la plage de variation de l'énergie dissipée est minorée par le niveau du fond non-résonant et majorée par l'amplitude des pics de résonance les plus importants. On quantifie donc la sensibilité de la dissipation à la fréquence d'excitation à l'aide du rapport de contraste

$$\Xi^{m,n} = \frac{H^{m,n}}{H_{\mathrm{bg}}}, \tag{7.52}$$

et l'on note $\Xi_{\mathrm{V}}^{m,n}$ et $\Xi_{\mathrm{T}}^{m,n}$ ses équivalents pour les deux composantes de l'énergie dissipée. Le paramètre de sensibilité global du spectre $\Xi = \Xi^{1,1}$, qui dépend de $\Xi_{\mathrm{V}} = \Xi_{\mathrm{V}}^{1,1}$ et $\Xi_{\mathrm{T}} = \Xi_{\mathrm{T}}^{1,1}$, est tel que $\Xi \sim \Xi_{\mathrm{V}}$ ($\Xi \sim \Xi_{\mathrm{T}}$) dans la région de paramètres où la friction visqueuse (diffusion thermique) domine. Les paramètres Ξ_{V} et Ξ_{T} ont pour expressions

$$\Xi_{\mathrm{V}} = \frac{1}{2}\frac{\left(2\cos^2\theta + A\right)\left(A+\cos^2\theta\right)^3}{\left[AK + \left(2\cos^2\theta + A\right)E\right]^2\left(C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{visc}}\cos^2\theta + C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{visc}} A\right)}, \tag{7.53a}$$

$$\Xi_{\mathrm{T}} = \frac{1}{4}\frac{P_{\mathrm{r}}^2\left(A+\frac{1}{2}A^{1,1}\right)^3}{E^2\left(A+A^{1,1}\right)\left(P_{\mathrm{r}}+P_{\mathrm{r}}^{1,1}\right)^2\left(C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{therm}} A + C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{therm}}\right)}. \tag{7.53b}$$

Un pic de résonance apparaît dans le spectre seulement si $\Xi^{m,n} > 1$.

Enfin, en remarquant les égalités approximatives $C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{visc}} \sim C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{therm}}$ et $C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{visc}} \sim C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{therm}}$, et en effectuant la substitution $m = n$ dans (7.44a) et (7.44b), on obtient l'ordre de grandeur N_{p} du nombre de résonances

$$N_{\mathrm{p}} \sim \left\{\frac{1}{2}\frac{\left(2\cos^2\theta + A\right)\left(A+\cos^2\theta\right)^3}{\left[AK + \left(2\cos^2\theta + A\right)E\right]^2\left(C_{\mathrm{in}}^{\infty}\cos^2\theta + C_{\mathrm{grav}}^{\infty} A\right)}\right\}^{\frac{1}{4}}, \tag{7.54}$$

avec $C_{\mathrm{in}}^{\infty} \sim C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{visc}}$ et $C_{\mathrm{grav}}^{\infty} \sim C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{visc}}$. Le nombre de résonances est directement lié au contraste du spectre par une relation du type $N_{\mathrm{p}} \sim \Xi^{\delta}$, où l'exposant δ est un paramètre dépendant de la décroissance en m et n des coefficients de Fourier de la force d'excitation (Eq. 7.31) et valant $\delta = 1/4$ dans le cas présent. De (7.54), on déduit la loi d'échelle $N_{\mathrm{p}} \propto E^{-1/2}$ dans le régime des ondes inertielles amorties par la friction. Cela

correspond à un nombre de pics multiplié par trois à chaque décade de E dans le sens décroissant, comme on peut l'observer sur spectres représentés en Fig. 7.3 (quatre premiers panneaux).

7.4.6 Lois d'échelles

Nous terminons cette section en donnant les lois d'échelles des propriétés traitées auparavant pour tous les régimes asymptotiques identifiés (Fig. 7.5). Ces lois sont déduites des expressions

- (7.39) pour les positions des pics de résonance,
- (7.41) pour leurs largeurs,
- (7.44a) et (7.44b) pour leurs amplitudes,
- (7.51a) et (7.51b) pour le niveau du fond non-résonant,
- (7.53a) et (7.53b) pour le paramètre de contraste,
- (7.54) pour le nombre de pics.

Elles sont rassemblées en Table 7.1 pour les régions (a) à (f) de la Figure 7.7, où sont superposées les cartes de régimes des ondes (Fig. 7.5, gauche) et de la dissipation (Fig. 7.5, droite).

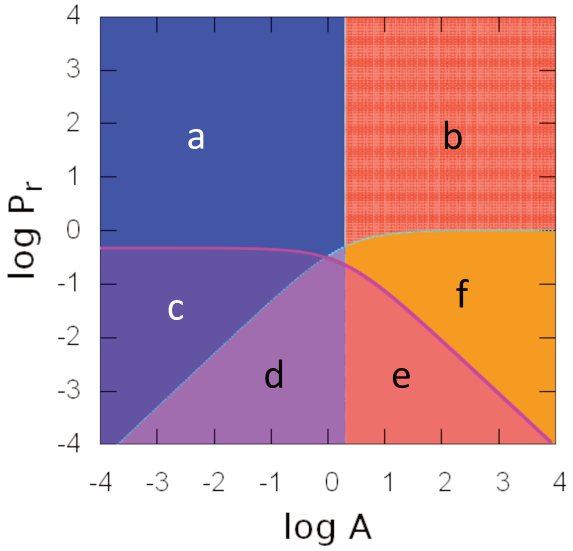


FIGURE 7.7: Superposition des régimes des ondes et de la dissipation (cf. 7.5). Chaque région du domaine de paramètres est associée à un comportement asymptotique particulier du spectre de l'énergie dissipée.

7.5 Un cas limite : la super-adiabaticité ($N^2 < 0$)

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressés seulement aux couches stablement stratifiées, caractérisées par $N^2 > 0$, et convectives isentropiques, où $N^2 = 0$. Toutefois, les résultats du modèle s'appliquent aussi au cas $N^2 < 0$, dit *super-adiabatique*, où le gradient thermique vertical est supérieur en valeur absolue au gradient thermique adiabatique (cf. discussion après Eq. 3.14). Nous donnons ici un aperçu de ce cas limite en traçant les spectres en fréquence de l'énergie dissipée par la friction visqueuse/turbulente en l'absence de diffusion thermique pour différentes valeurs négatives de A (Fig. 7.8). Deux nouveaux régimes apparaissent :

- $|A| \ll 1$, régime faiblement super-adiabatique dans lequel l'effet inertiel dû à la rotation du corps (Coriolis) domine la super-adiabaticité ;
- $|A| \gg 1$, régime fortement super-adiabatique dans lequel c'est l'instabilité convective du fluide qui l'emporte sur la rotation en venant diminuer l'importance des modes inertiels (Fig. 7.8, panneau

	$A \ll A_{11}$			$A \gg A_{11}$	
a	$l^{m,n} \propto E$	$\omega^{m,n} \propto \dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \cos\theta$	**b**	$l^{m,n} \propto E$	$\omega^{m,n} \propto \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \sqrt{A}$
	$H^{m,n} \propto E^{-1}$	$N_\mathrm{p} \propto E^{-1/2}$		$H^{m,n} \propto E^{-1}$	$N_\mathrm{p} \propto A^{1/4} E^{-1/2}$
	$H_\mathrm{bg} \propto E$	$\Xi \propto E^{-2}$		$H_\mathrm{bg} \propto A^{-1} E$	$\Xi \propto A E^{-2}$
c	$l^{m,n} \propto E$	$\omega^{m,n} \propto \dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \cos\theta$	**f**	$l^{m,n} \propto E P_\mathrm{r}^{-1}$	$\omega^{m,n} \propto \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \sqrt{A}$
	$H^{m,n} \propto E^{-1} P_\mathrm{r}^{-1}$	$N_\mathrm{p} \propto E^{-1/2}$		$H^{m,n} \propto E^{-1} P_\mathrm{r}^{2}$	$N_\mathrm{p} \propto A^{1/4} E^{-1/2} P_\mathrm{r}^{1/2}$
	$H_\mathrm{bg} \propto E P_\mathrm{r}^{-1}$	$\Xi \propto E^{-2}$		$H_\mathrm{bg} \propto A^{-1} E$	$\Xi \propto A E^{-2} P_\mathrm{r}^{2}$
d	$l^{m,n} \propto A E P_\mathrm{r}^{-1}$	$\omega^{m,n} \propto \dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \cos\theta$	**e**	$l^{m,n} \propto E P_\mathrm{r}^{-1}$	$\omega^{m,n} \propto \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \sqrt{A}$
	$H^{m,n} \propto A^{-2} E^{-1} P_\mathrm{r}$	$N_\mathrm{p} \propto A^{-1/2} E^{-1/2} P_\mathrm{r}^{1/2}$		$H^{m,n} \propto A^{-1} E^{-1} P_\mathrm{r}$	$N_\mathrm{p} \propto A^{1/4} E^{-1/2} P_\mathrm{r}^{1/2}$
	$H_\mathrm{bg} \propto E P_\mathrm{r}^{-1}$	$\Xi \propto A^{-2} E^{-2} P_r^{2}$		$H_\mathrm{bg} \propto A^{-2} E P_\mathrm{r}^{-1}$	$\Xi \propto A E^{-2} P_\mathrm{r}^{2}$

TABLE 7.1: Lois d'échelle caractérisant la variation des propriétés du spectre en fréquence de l'énergie dissipée (fréquences propres $\omega^{m,n}$, largeur $l^{m,n}$, amplitude $H^{m,n}$ des résonances, niveau du fond non-résonant H_bg, nombre de pics N_p et paramètre de contraste Ξ) en fonction des paramètres de contrôle du système (A, E, P_r). Le nombre $A^{1,1}$ correspond à la transition entre les régimes des ondes de marées inertielles et ceux des ondes de gravité.

en bas à droite).

Ce travail est détaillé dans un article d'*Astronomy & Astrophysics* (Auclair Desrotour et al., 2015), reproduit à la suite du chapitre.

7.6 Conséquences sur l'évolution d'un satellite autour d'un corps fluide

Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, la forte sensibilité de la dissipation de marée à la fréquence de forçage dans les couches fluides a des répercussions sur l'évolution séculaire des systèmes planétaires. Nous nous proposons ici de donner une illustration de ces effets à l'aide d'un système binaire planète-satellite idéalisé auquel on applique un facteur de qualité proportionnel à la dissipation interne dérivée du modèle local cartésien. Le système en question est adapté du cas Mars-Phobos traité par Efroimsky & Lainey (2007), auquel nous souhaitons comparer nos résultats. Dans cette étude, pour laquelle nous reprenons les notations du Chapitre 2, le corps central est une planète de la masse de Mars présentant une couche fluide convective ($N^2 = 0$) de diffusivité thermique nulle. Il est perturbé par un satellite de la masse de Phobos qui orbite circulairement dans son plan équatorial à la fréquence orbitale ω. La distance planète-satellite a est définie par la troisième loi de Képler $a \propto |\omega|^{2/3}$. D'après Ogilvie & Lin (2004) et (7.29a), en l'absence de diffusion thermique, la puissance dissipée à l'intérieur de la boîte cartésienne au niveau d'un pôle ($\theta = 0$) s'écrit

$$D(\omega) = D_0 \sum_{m,n} \left(m^2+n^2\right) \frac{\left(m^2+n^2\right)\left|\tilde{\omega}^2\right| + n^2}{\left|\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\right|^2} \left|n f_x^{m,n} - m f_z^{m,n}\right|^2 , \tag{7.55}$$

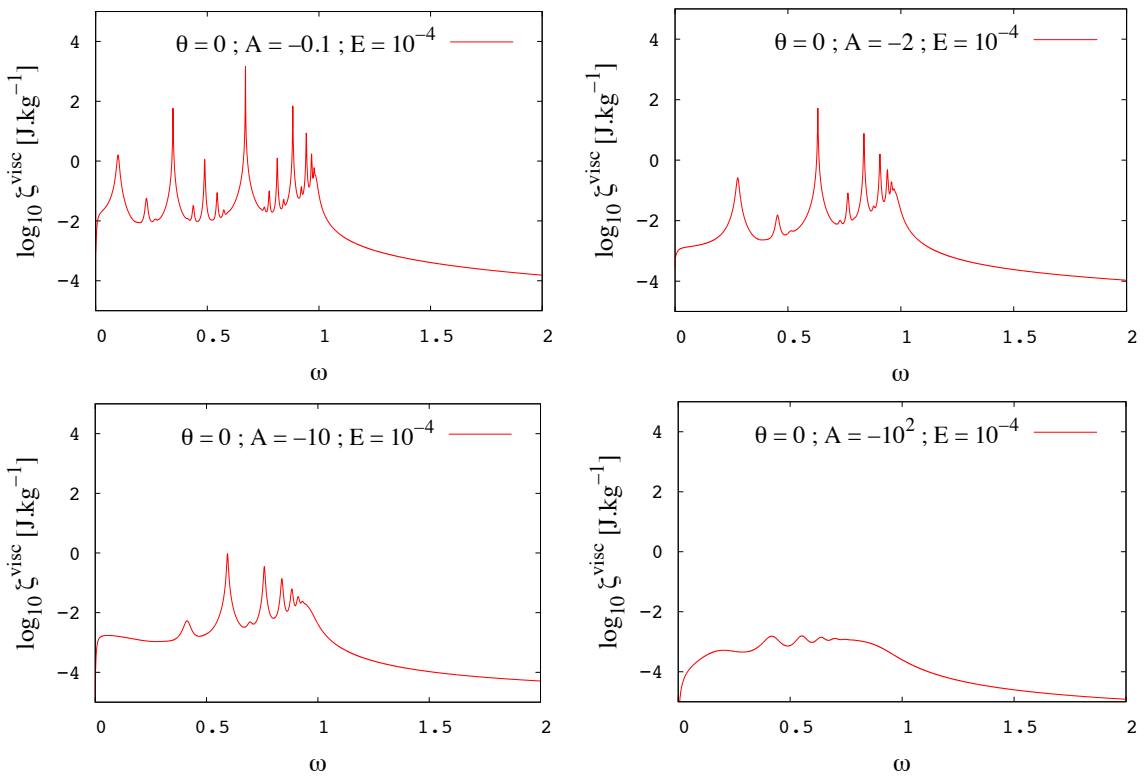


FIGURE 7.8: Spectres en fréquence de l'énergie dissipée par la friction (ζ^{visc}) dans le cas où les ondes sont purement inertielles avec les paramètres $E = 10^{-4}$, $K = 0$ et différentes valeurs de $A < 0$. *En haut à gauche* - $A = -0.1$. *En haut à droite* - $A = -2$. *En bas à gauche* - $A = -10$. *En bas à droite* - $A = -100$.

où D_0 est un facteur constant homogène à une puissance. Afin d'observer l'impact des pics de dissipation sur l'évolution du système, on intègre l'équation du taux de variation de a (Eq. 2.38),

$$\frac{da}{dt} = 3\,\text{sign}\left(\Omega_{\text{A}} - n_{\text{B}}\right) \frac{R^5 \mathscr{G} M_{\text{B}}}{\sqrt{\mathscr{G}\left(M_{\text{A}} + M_{\text{B}}\right)}} \frac{k_2^{\text{A}}}{Q} a^{-11/2}, \tag{7.56}$$

en supposant constants les autres paramètres dynamiques et pour deux facteurs de qualités de marée différents (Fig. 7.9) :

- le facteur de qualité constant du modèle de Kaula (Kaula, 1964; Efroimsky & Lainey, 2007),
- le facteur de qualité résonant en fréquence $Q^{-1} \propto D(\omega)$ dérivé du modèle local de la boîte fluide cartésienne (cf. Fig. 7.9, droite).

On utilise pour la simulation les paramètres donnés en Table 7.2. L'intégration en temps est réalisée numériquement à l'aide d'un code développé par Christophe Le Poncin-Lafitte (Observatoire de Paris-SYRTE) et basé sur le code ODEX (Hairer et al., 2000).

Cette approche qualitative permet de constater que les résonances engendrées par les ondes de marée dans les fluides viennent casser la régularité de l'évolution du système en provoquant des variations brusques des paramètres orbitaux. Dans le cas où Q est constant, le satellite se rapproche progressivement du corps central en accélérant et chute au bout de 36 millions d'années. Dans le deuxième cas, le satellite parcourt le spectre de dissipation de la gauche vers la droite, rencontrant ainsi les pics de résonances les uns après les autres. Il en sort au bout de 20 millions d'années, quand $\omega = 1$ et que les ondes inertielles cessent d'être excitées. Sa chute est alors fortement ralentie par rapport à la première phase. La vitesse d'évolution moyenne du système dans l'intervalle des ondes est déterminé par le niveau du fond non-résonant tandis qu'une résonance induit une variation rapide de a sur une courte durée dont l'amplitude dépend de la largeur

PARAMÈTRES	NOTATIONS	VALEURS
Constante de gravitation	$\mathscr{G}$ $\left[\mathrm{m}^3.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{s}^{-2}\right]$	6.67384×10^{-11}
Masse de la planète	M_A [kg]	6.4185×10^{23}
Rayon de la planète	R [km]	3.3962×10^{3}
Taux de rotation de la planète	Ω_A $\left[\mathrm{rad.s}^{-1}\right]$	7.08822×10^{-5}
Nombre de Love de la planète	k_2^A	0.152
Facteur de qualité constant (Kaula)	Q_Kaula	79.91
Masse du satellite	M_B [kg]	1.0189×10^{16}
Distance planète-satellite initiale	a_0 [km]	9.3771×10^{3}

TABLE 7.2: Valeurs numériques des paramètres utilisés dans la simulation de l'évolution du système planète-satellite de la Section 7.6. Ces valeurs sont celles du système Mars-Phobos dans les travaux d'Efroimsky & Lainey (2007) qui sont ici notre référence.

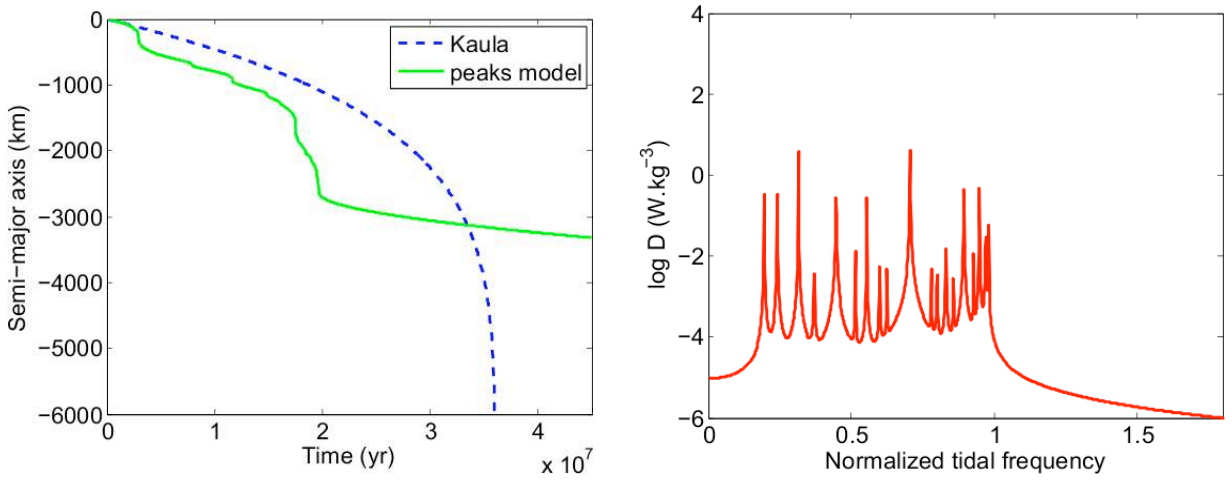


FIGURE 7.9: *Gauche* - Evolution temporelle de la distance planète-satellite (a) pour deux facteurs de qualité (Q) différents, le facteur de qualité constant du modèle de Kaula (Kaula, 1964) (courbe bleue pointillée) et le facteur de qualité résonant en fréquence dérivé du modèle local cartésien (courbe verte). Les valeurs numériques du calcul (cf. Table 7.2) sont celles utilisées par Efroimsky & Lainey (2007) pour le cas du système Mars-Phobos. *Droite* - Spectre en fréquence de la dissipation interne massique du corps central (en $\mathrm{W.kg}^{-1}$) donnant le facteur de qualité résonant (graphe de gauche, courbe verte). Ce spectre est obtenu à partir de (7.55) pour $|m| \leq 5$ et $|n| \leq 5$. La fréquence d'excitation normée par la fréquence inertielle (axe horizontal) est définie par (7.14).

et de la hauteur du pic. D'après (7.55), le facteur de qualité d'un pic Q_p peut être défini par l'expression paramétrée

$$Q_\mathrm{p}^{-1}(\omega) = \frac{H_\mathrm{p}}{\left[4\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{\omega-\omega_\mathrm{p}}{l_\mathrm{p}}\right)^2+1\right]^2}, \tag{7.57}$$

où ω_p, l_p et H_p désignent respectivement la fréquence propre de la résonance, la largeur à mi-hauteur d'un pic et son amplitude. Le facteur de qualité régulier résultant du fond non-résonant est noté Q_0. Sachant que les effets d'une résonance s'expriment seulement dans l'intervalle centré sur ω_p où $Q_\mathrm{p}^{-1} \geq Q_0^{-1}$, on obtient pour l'amplitude de la variation Δa la loi d'échelle

$$\boxed{\frac{\Delta a}{a} \propto \frac{l_\mathrm{p}}{1+\omega_\mathrm{p}}\left(\sqrt{\Xi_\mathrm{p}}-1\right)^{\frac{1}{2}},} \tag{7.58}$$

où l'on a introduit le paramètre de contraste du pic $\Xi_\mathrm{p} = H_\mathrm{p}/Q_0^{-1}(\omega_\mathrm{p})$. Raccordons ce résultat aux lois d'échelles de la Table 7.1 : pour le cas traité ici, $l_\mathrm{p} \propto E$ et $\Xi_\mathrm{p} \propto E^{-2}$, d'où $\Delta a \propto E^{1/2}$. Ceci donne un premier aperçu des conséquences astrophysiques des résonances prédites par le modèle global de marée océanique du Chapitre 6. Par exemple, l'orbite faiblement excentrique d'une planète de type Jupiter en orbite autour d'une étoile en rotation rapide s'agrandit et se dé-circularise à cause de la dissipation de la marée dynamique, devenant ainsi très excentrique (e.g. Witte & Savonije, 2002). Le travail présenté dans cette section a fait l'objet d'une lettre à l'éditeur pour *Astronomy & Astrophysics*, reproduite à la suite du chapitre (Auclair-Desrotour et al., 2014).

7.7 Conséquences sur la dissipation interne des couches convectives stellaires et planétaires

Voyons à présent une deuxième application des résultats du modèle local. La dissipation de marée résultant de la friction turbulente au sein des régions convectives des étoiles et des planètes est l'un des principaux moteur de l'évolution des systèmes planétaires. Elle dépend de plus d'une étroite interaction entre marée, rotation et turbulence convective. La friction agit à la fois sur le fond non-résonant qui forme la marée d'équilibre et sur les ondes inertielles de la marée dynamique. Dans l'état de l'art actuel, basé sur les travaux pionniers de Zahn (1966a), ce mécanisme est modélisé par un terme de friction isotrope, de la forme $\nu_\mathrm{T}\Delta\mathbf{V}$, où la viscosité cinématique turbulente ν_T est un paramètre le plus souvent pris constant et fixé à l'aide de prescriptions issues de la théorie des longueurs de mélange (Böhm-Vitense, 1958; Zahn, 1989). Cette approche ne tient pas compte du fait que ν_T est susceptible de varier, parfois sur plusieurs ordres de grandeurs, avec la rotation du corps et son magnétisme, qui ont un impact sur la turbulence convective (e.g. Brun, 2014). En particulier, elle ignore les effets de la rotation du corps, pourtant pris en compte dans la plupart des modèles actuels à travers les termes de Coriolis. Il est donc nécessaire de dériver des prescriptions cohérentes pour ν_T, faisant évoluer la friction avec la vitesse de rotation. Dans cette section, nous proposons une nouvelle prescription pour la friction de marée dans les régions convectives turbulentes des étoiles et des planètes en rotation, établie à partir des résultats théoriques de Stevenson (1979) validés récemment par les simulations numériques à haute résolution de Barker et al. (2014) de flots convectifs turbulents en rotation. Nous l'utilisons ensuite avec les lois d'échelle du modèle cartésien (Table 7.1) afin de quantifier la dépendance de la dissipation de marée à la rotation en prenant en compte simultanément son action sur les ondes de marée et la friction convective turbulente qui leur est appliquée.

Zahn (1966a), qui traite des marées dans les systèmes binaires d'étoiles, est la première étude des effets de la friction due à la convection turbulente sur les ondes de marées. Ces travaux introduisent la friction turbulente en faisant l'*hypothèse de Boussinesq* (Boussinesq, 1877), i.e. que cette friction se formule de la même façon que la friction visqueuse (analogie avec la théorie cinétique). Le mécanisme, supposé isotrope, est alors caractérisé par une viscosité cinématique turbulente (ν_T). Zahn (1966a) définit ce paramètre à partir des vitesse et longueur de mélange caractéristiques de l'écoulement convectif, notés respectivement V_c et L_c, qui quant à elles peuvent être décrites à l'aide de la théorie des longueurs de mélange. On a ainsi, dans le cas où le corps ne tourne pas,

$$V_\mathrm{c}(\Omega = 0) \approx \left(\frac{L_\mathrm{b}}{\bar{\rho}_\mathrm{CZ} R^2}\right)^{1/3} \quad \text{et} \quad L_\mathrm{c}(\Omega = 0) \approx \alpha H_\mathrm{p}, \tag{7.59}$$

où L_b désigne la luminosité du corps, R son rayon, $\bar{\rho}_\mathrm{CZ}$ la densité moyenne de la région convective étudiée, α le paramètre libre de longueur de mélange, H_p la hauteur de pression et Ω la vitesse angulaire de rotation (Brun, 2014). La viscosité turbulente en l'absence de rotation (indice NR) se formule alors (Zahn, 1966a)

$$\nu_{\mathrm{T;NR}} = \frac{1}{3} V_{\mathrm{c}}\left(\Omega = 0\right) L_{\mathrm{c}}\left(\Omega = 0\right) f\left(\frac{P_{\mathrm{tide}}}{P_{\mathrm{c}}}\right). \tag{7.60}$$

Dans cette expression, f est une fonction décrivant la perte d'efficacité de la friction turbulente dans les régions convectives en fonction du rapport entre la période de marée P_{tide} et le temps de retournement convectif caractéristique $P_{\mathrm{c}} = L_{\mathrm{c}}/V_{\mathrm{c}}$ dans le cas où $P_{\mathrm{tide}} \ll P_{\mathrm{c}}$. La forme de la fonction f demeure sujet à débat : Zahn (1966a) propose la fonction d'atténuation linéaire $f \propto P_{\mathrm{tide}}/P_{\mathrm{c}}$ que semblent conforter les simulations numériques de Penev et al. (2007), Goldreich & Keeley (1977) la fonction quadratique $f \propto \left(P_{\mathrm{tide}}/P_{\mathrm{c}}\right)^2$ en bon accord avec les simulations d'Ogilvie & Lesur (2012).

Pour généraliser la prescription (7.60) aux corps en rotation, on introduit les nombres de Rossby (Stevenson, 1979) et d'Ekman (cf. Eq. 7.17) convectifs

$$R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}} = \frac{P_{\Omega}}{P_{\mathrm{c}}\left(\Omega = 0\right)} \quad \text{et} \quad E = \frac{2\pi^2 \nu_{\mathrm{T}}}{\Omega L^2}, \tag{7.61}$$

où $P_{\Omega} = \left(2\Omega\left|\cos\theta\right|\right)^{-1}$ représente le temps dynamique de rotation du corps à la latitude θ. Ainsi, les cas $R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}} \ll 1$ et $R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}} \gg 1$ correspondent respectivement aux régimes asymptotiques de rotation rapide et de rotation lente. Stevenson (1979) établit pour la vitesse et la longueur de mélange les lois d'échelles suivantes dans les deux régimes :

- *régime de rotation lente* ($R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}} \gg 1$),

$$\frac{V_{\mathrm{c}}\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right)}{V_{\mathrm{c}}\left(\Omega = 0\right)} = 1 - \frac{1}{242\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{L_{\mathrm{c}}\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right)}{L_{\mathrm{c}}\left(\Omega = 0\right)} = \left(1 + \frac{1}{82\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right)^2}\right)^{-1}; \tag{7.62}$$

- *régime de rotation rapide* ($R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}} \ll 1$),

$$\frac{V_{\mathrm{c}}\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right)}{V_{\mathrm{c}}\left(\Omega = 0\right)} = 1.5\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right)^{1/5} \quad \text{et} \quad \frac{L_{\mathrm{c}}\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right)}{L_{\mathrm{c}}\left(\Omega = 0\right)} = 2\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right)^{3/5}. \tag{7.63}$$

Ces lois d'échelles ont été confirmées par les simulations numériques à haute résolution cartésiennes de Barker et al. (2014) de convection dans le régime de rotation rapide pour $\theta = 0$. Ceci nous permet de proposer, dans le cas où la rotation vient modifier la turbulence, la prescription

$$\nu_{\mathrm{T;RC}} = \frac{1}{3} V_{\mathrm{c}}\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right) L_{\mathrm{c}}\left(R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}\right) f\left(\frac{P_{\mathrm{tide}}}{P_{\mathrm{c}}}\right), \tag{7.64}$$

avec les fonctions de $R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}$ données par (7.62) ou (7.63) suivant le régime de rotation du corps. Les variations du rapport $\nu_{\mathrm{T;RC}}/\nu_{\mathrm{T;NR}}$ avec le nombre de Rossby convectif ($R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}$) sont tracées pour les deux régimes en Figure 7.10. Ces variations sont similaires à celles du rapport des nombres d'Ekman associés $E_{\mathrm{RC}}/E_{\mathrm{NR}}$ où

$$E_{\mathrm{NR}} = \frac{2\pi^2 \nu_{\mathrm{T;NR}}}{\Omega L^2} \quad \text{et} \quad E_{\mathrm{RC}} = \frac{2\pi^2 \nu_{\mathrm{T;RC}}}{\Omega L^2}. \tag{7.65}$$

On constate que le régime de rotation lente diffère très peu du cas non-rotatif ($\Omega = 0$) étudié par Zahn (1966a) tandis que la viscosité turbulente décroît rapidement de plusieurs ordres de grandeurs par rapport à $\nu_{\mathrm{T;NR}}$ dans le régime de rotation rapide. Ce comportement peut être interprété comme l'effet de la rotation rapide sur l'intabilité convective et la turbulence (e.g. Brown et al., 2008; Julien et al., 2012; Barker et al., 2014), l'accélération de Coriolis tendant d'une part à stabiliser l'écoulement (Chandrasekhar, 1953), d'autre part à inhiber l'efficacité de la cascade d'énergie turbulente (Sen et al., 2012; King et al., 2013; Barker et al., 2014). Il affecte la dissipation, dont les propriétés dépendent sensiblement du nombre d'Ekman

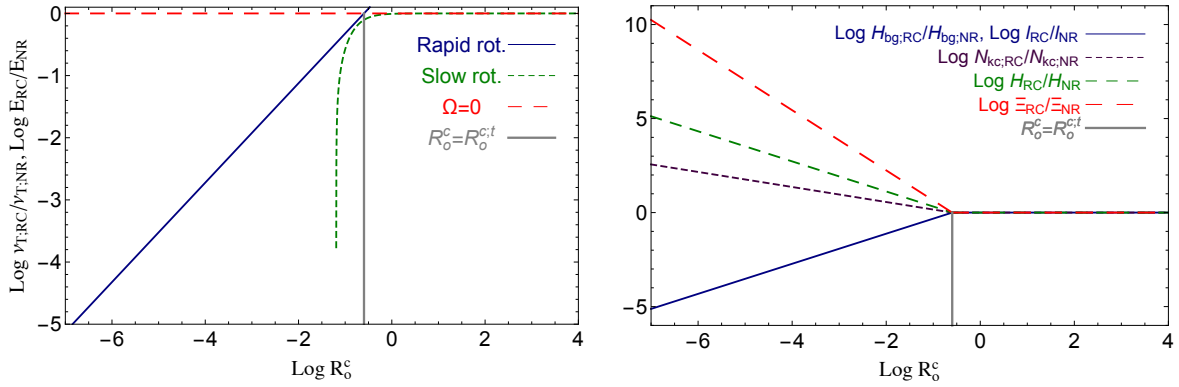


FIGURE 7.10: *Gauche* - Logarithme du ratio $\nu_{\mathrm{T;RC}}/\nu_{\mathrm{T;NR}}$ (et $E_{\mathrm{RC}}/E_{\mathrm{NR}}$) en fonction du logarithme du nombre de Rossby convectif ($R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}$). Les lignes bleu continue et verte pointillée correspondent respectivement au régimes de rotation rapide et lente. La ligne verticale grise indique le nombre de Rossby de transition entre les deux régimes asymptotiques, $R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c;t}} \approx 0.25$. La ligne rouge correspond au cas non rotatif ($\Omega = 0$) de Zahn (1966a). *Droite* - Logarithme des ratios $H_{\mathrm{bg;RC}}/H_{\mathrm{bg;NR}}$, $l_{\mathrm{RC}}/l_{\mathrm{NR}}$ (ligne bleue continue), $N_{\mathrm{p;RC}}/N_{\mathrm{p;NR}}$ (ligne violette pointillée), $H_{\mathrm{RC}}/H_{\mathrm{NR}}$ (ligne verte pointillée) et $\Xi_{\mathrm{RC}}/\Xi_{\mathrm{NR}}$ (ligne rouge pointillée) en fonction du logarithme de $R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}}$ quand on prend en compte (ou non) l'action de la rotation sur la friction turbulente.

(voir Table 7.1, région **a**). On peut donc maintenant, en utilisant les lois d'échelles dérivées du modèle local cartésien, estimer l'impact qu'a la rotation sur l'aspect du spectre de l'énergie dissipée relativement au cas où l'action de la rotation sur la convection est ignorée. Pour chacune des caractéristiques identifiées (niveau du fond non-résonant, hauteur et largeur des pics de résonances, nombre de pics, paramètre de sensibilité à la fréquence), on utilise les indices $_{\mathrm{RC}}$ et $_{\mathrm{NR}}$ pour indiquer respectivement les cas avec et sans modification de la turbulence convective par la rotation. Les ratios correspondants sont tracés en fonction du nombre de Rossby convectif pour les régimes de rotation lente et rapide (Fig. 7.10, panneau de droite). Les nouvelles tendances obtenues montrent que dans le régime de rotation rapide ($R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}} \ll 1$), la sensibilité de la dissipation à la fréquence, l'amplitude des résonances et leur nombre s'accroissent de plusieurs ordres de grandeurs en même temps que les largeurs des pics et le niveau du fond non-résonant diminuent. Cela signifie que la marée d'équilibre perd en efficacité dans ce régime. Au contraire, la marée dynamique, constituée par les résonances, devient plus importante. Les différentes caractéristiques évoluent avec la rotation suivant les lois d'échelles :

$$\boxed{\frac{H_{\mathrm{bg;RC}}}{H_{\mathrm{bg;NR}}} \propto \Omega^{-9/5}, \quad \frac{l_{\mathrm{RC}}}{l_{\mathrm{NR}}} \propto \Omega^{-9/5}, \quad \frac{H_{\mathrm{RC}}}{H_{\mathrm{NR}}} \propto \Omega^{9/5}, \quad \frac{N_{\mathrm{p;RC}}}{N_{\mathrm{p;NR}}} \propto \Omega^{9/10}, \quad \frac{\Xi_{\mathrm{RC}}}{\Xi_{\mathrm{NR}}} \propto \Omega^{18/5}.} \tag{7.66}$$

Ces résultats sont particulièrement importants pour les étoiles de faibles masses (de type M à F) durant leur phase de pré-séquence principale et le début de leur séquence principale, les planètes géantes gazeuses et glacées, et le coeur de la Terre qui sont tous des corps célestes en rotation rapide où l'accélération de Coriolis a un impact important sur les flots convectifs. Le détail des applications astrophysiques est donné dans l'article Mathis et al. (2016) publié dans *Astronomy & Astrophysics* et reproduit à la fin de ce chapitre.

7.8 Conclusion

Complémentaire des modèles globaux développés aux chapitres 3, 4 et 5, l'approche locale linéaire permet d'étudier la dynamique complexe des ondes de marées dans un cadre simplifié et d'identifier ainsi les caractéristiques essentielles de leur dissipation interne, et ce pour un domaine de paramètres étendu. Notre

modèle généralise le modèle cartésien d'Ogilvie & Lin (2004) en s'appuyant sur les résultats obtenus par Gerkema & Shrira (2005) et Mathis et al. (2014). Il décrit le comportement des ondes forcées par la marée gravifique en fonction de la structure interne de la couche fluide (stratification, taille caractéristique), de la rotation du corps, et des paramètres physiques associés à la friction visqueuse/turbulente et à la diffusion thermique. Les propriétés du spectre de l'énergie dissipée associés à la marée d'équilibre (niveau du fond non-résonant) et à la marée dynamique (fréquences propres, largeur et amplitude des résonances) obéissent à des lois d'échelles paramétrées par le nombre d'Ekman, le nombre de Prandtl et le rapport des fréquences caractéristiques de ondes inertielles et de gravité. Des travaux sont venus récemment conforter celles obtenues pour les ondes inertielles (Fig. 7.7, région **a**) à partir de simulations numériques haute résolution prenant en compte les termes non-linéaires négligés ici (Wei, 2016). Ces travaux montrent notamment que l'approche linéaire tend de manière générale à surestimer l'amplitude des pics de résonance, que vient saturer en réalité la non-linéarité des processus dissipatifs. Dans notre approche, nous avons ignoré la dissipation ohmique qui s'ajoute aux deux autres composantes de la dissipation interne dans les couches fluides magnétisés. Il est néanmoins possible de prendre en compte les effets de l'induction dans le modèle sans modifier la méthode de traitement des équations. L'ajout d'un champ magnétique introduit les ondes d'Alfvén, restaurées par la force de Lorentz. Ceci apporte un axe supplémentaire à la carte des régimes (Fig. 7.7), qui devient tridimensionnelle. Ces effets du champ magnétique seront explorés dans un futur proche.

Articles associés

Les travaux présentés dans ce chapitre font l'objet de trois articles reproduits ci-après, qui traitent de la dynamique des ondes de marées dans les couches fluides et de leur répercussions sur les propriétés internes des couches et la dynamique orbitale des planètes :

- Auclair Desrotour et al. (2015) introduit le modèle local cartésien (Section 2), quantifie la variation des caractéristiques du spectre de l'énergie dissipée (nombre de résonances, positions, largeurs et amplitudes des résonances, fond non-résonant) avec les paramètres-clés du système (fréquences d'inertie et de Brunt-Väisälä, nombres d'Ekman et de Prandtl) et de la fréquence de marée (Section 3). Les résultats sont ensuite discutés (Section 4).
- Auclair-Desrotour et al. (2014) examine l'évolution de la distance entre les corps d'un système planète-satellite de type Mars-Phobos. En premier lieu, les équations décrivant la variation séculaire du demi-grand axe du système par effet de marée sont introduites (Section 2). En second lieu, on présente le modèle utilisé pour calculer la dissipation d'énergie due aux marées solides (Section 3), que l'on compare à celui développé pour les marées fluides (Section 4) en réalisant l'intégration en temps du système.
- Mathis et al. (2016) rappelle la prescription issue de la théorie des longueur de mélange pour la viscosité turbulente des couches fluides stellaires et planétaires dans le cas où le corps ne tourne pas (Section 2) pour ensuite établir une nouvelle prescription prenant en compte la dépendance du paramètre à la vitesse de rotation du corps (Section 3). Ce résultat est utilisé avec les lois d'échelles dérivées du modèle local cartésien pour déterminer les lois d'échelles décrivant la dépendance des caractéristiques du spectre de l'énergie dissipée à la vitesse de rotation (Section 4). Les conséquences de cette dépendance sur l'évolution des systèmes planétaires sont enfin discutées dans le cas des étoiles de type solaire et de faible masse et des planètes (Section 5).

A&A 581, A118 (2015)
DOI: 10.1051/0004-6361/201526246
© ESO 2015

Astronomy & Astrophysics

Scaling laws to understand tidal dissipation in fluid planetary regions and stars I. Rotation, stratification and thermal diffusivity*

P. Auclair Desrotour[1,2], S. Mathis[2,3], and C. Le Poncin-Lafitte[4]

[1] IMCCE, Observatoire de Paris, CNRS UMR 8028, 77 avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
e-mail: pierre.auclair-desrotour@obspm.fr
[2] Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/DSM – CNRS – Université Paris-Diderot, IRFU/SAp Centre de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France
[3] LESIA, Observatoire de Paris, CNRS UMR 8109, UPMC, Université Paris-Diderot, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France
e-mail: stephane.mathis@cea.fr
[4] SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS UMR 8630, UPMC, LNE, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France
e-mail: christophe.leponcin@obspm.fr

Received 2 April 2015 / Accepted 16 June 2015

ABSTRACT

Context. Tidal dissipation in planets and stars is one of the key physical mechanisms driving the evolution of star-planet and planet-moon systems. Several signatures of its action are observed in planetary systems thanks to their orbital architecture and the rotational state of their components.

Aims. Tidal dissipation inside the fluid layers of celestial bodies is intrinsically linked to the dynamics and physical properties of those bodies. This complex dependence must be characterized.

Methods. We compute the tidal kinetic energy dissipated by viscous friction and thermal diffusion in a rotating local fluid Cartesian section of a star, planet, or moon submitted to a periodic tidal forcing. The properties of tidal gravito-inertial waves excited by the perturbation are derived analytically as explicit functions of the tidal frequency and local fluid parameters (i.e. the rotation, the buoyancy frequency characterizing the entropy stratification, viscous and thermal diffusivities) for periodic normal modes.

Results. The sensitivity of the resulting dissipation frequency-spectra, which could be highly resonant, to a control parameter of the system is either important or negligible depending on the position in the regime diagram relevant for planetary and stellar interiors. For corresponding asymptotic behaviours of tidal gravito-inertial waves dissipated by viscous friction and thermal diffusion, scaling laws for the frequencies, number, width, height, and contrast with the non-resonant background of resonances are derived to quantify these variations.

Conclusions. We characterize the strong impact of the internal physics and dynamics of fluid planetary layers and stars on the dissipation of tidal kinetic energy in their bulk. We point out the key control parameters that really play a role in tidal dissipation and demonstrate how it is now necessary to develop ab initio modelling for tidal dissipation in celestial bodies.

Key words. hydrodynamics – waves – turbulence – planet-star interactions – planets and satellites: dynamical evolution and stability

1. Introduction and context

Tides have a strong impact on the evolution of star-planet and planet-moon systems over secular timescales. Indeed, because of the dissipation of the kinetic energy of flows and displacements they induce in celestial bodies, they drive their rotational and orbital evolutions. The cases of stars and giant planets have been treated by Ogilvie (2014) and references therein, and the case of telluric planets by Correia & Laskar (2003) and Correia et al. (2008). In the case of the Earth-Moon system, their causes and effects are now strongly constrained and disentangled thanks to satellite altimeter high-precision observations of ocean tides (Egbert & Ray 2000, 2001; Ray et al. 2001). In the solar system, the actions of tides are detected and estimated from high-precision geodesic and/or astrometric observations. The reader may see the studies by Konopliv & Yoder (1996) for Venus, Williams et al. (2014) for the Moon, Lainey et al. (2007), Jacobson (2010) and Konopliv et al. (2011) for Mars, Lainey et al. (2009, 2012) for Jupiter and Saturn, and the attempt by Emelyanov & Nikonchuk (2013) for Uranus. Finally, a new extremely important astronomical laboratory to explore and constrain the physics of tides is constituted by the numerous exoplanetary systems discovered over the last 20 years (Mayor & Queloz 1995; Perryman 2011). Indeed, they are composed of a large diversity of planets (from hot Jupiters to super-Earths) and host stars, while their orbital architecture and configuration of planetary and stellar spins strongly differ from that observed in our solar system (e.g. Albrecht et al. 2012; Fabrycky et al. 2012; Valsecchi & Rasio 2014). In this context, the understanding of the tidal formation and evolution of planetary systems is one of the most important problems of modern dynamical astronomy (e.g. Laskar et al. 2012; Bolmont et al. 2012; Ferraz-Mello 2013), while the needed understanding and quantitative prediction of tidal dissipation in celestial bodies is still

* Appendices are available in electronic form at http://www.aanda.org

a challenge (e.g. Mathis & Remus 2013; Ogilvie 2014, for complete reviews).

We owe the first theoretical work about a tidally deformed body to Lord Kelvin (Kelvin 1863). Then, a physical formalism was elaborated by Love, who introduced the so-called Love numbers (Love 1911). The second-order Love number (k_2) measures the inverse of the ratio between the tidal potential and the resulting linear perturbation of the gravitational potential at the surface of a body hosting a companion. It quantifies its quadripolar hydrostatic elongation along the line of centres. The introduction and estimation of tidal dissipation then became more and more important with the introduction of the tidal quality factor Q for the solar system (e.g. MacDonald 1964; Kaula 1964; Goldreich & Soter 1966). This general parameter is a simple and useful quantity that allows us to simplify the numerical simulations of planetary systems over secular timescales. In particular, the constant Q model, the so-called Kaula's model (Kaula 1964), allows us to take internal dissipation with one parameter only into account. The factor Q is applied to rocky, or icy, and fluid bodies and correspond to a simplified Maxwell's model, which assimilates a celestial body hosting a companion to a forced damped oscillator. It evaluates the ratio between the maximum energy stored in the tidal distortion during an orbital period and the energy dissipated by the friction. Therefore, the global response to a tidal perturbation depends on a mean elasticity, which models the restoring force acting on tidal displacements, and a friction, $1/Q$ representing the damping coefficient of the system (i.e. the imaginary part of the second-order Love number; for a detailed study, see Greenberg 2009). From this approach, other models have been developed to take into account the possible dependence of Q on the main tidal frequency χ, i.e. the constant time lag model (Darwin 1879; Alexander 1973; Singer 1968; Hut 1981; Leconte et al. 2010).

As the tidal quality factor is inversely proportional to the internal dissipation in a body, it is determined by the physical properties of this body. Thus, the internal structure of stars, planets, and satellites is determinant for the study of tidal effects. In this context, recent works have derived the tidal quality factor as a function of χ and rheological parameters. Examples for rocky/icy planetary layers can be found in Efroimsky & Lainey (2007) and Henning et al. (2009; see also Tobie et al. 2005; Efroimsky 2012; Remus et al. 2012b; Correia et al. 2014). Efroimsky & Lainey (2007) illustrate the important role played by the internal properties of the perturbed host body in the orbital evolution of its system. They focus on the equilibrium tide in the case of a circular orbit, which designates the component of the strain rotating with the perturber at the frequency $\chi = 2(n - \Omega)$ in the frame attached to the central body, n being the mean motion of the perturber in a non-rotating frame and Ω the spin frequency of the primary. The other components corresponding to eigenmodes of oscillation excited by tides constitute the dynamical tide. It is particularly important for fluid planetary regions and stars in which the dynamical tide can dominate the equilibrium tide. It leads to a resonant tidal dissipation that varies over several orders of magnitude as a function of their physical properties, evolutionary states, and χ (see Ogilvie 2014, and references therein). Applied to an orbital system, a tidal quality factor following this resonant behaviour makes the orbital parameters evolve erratically along secular timescales (Auclair-Desrotour et al. 2014). An interesting example is given by the case of the Earth-Moon system. Indeed, most of tidal dissipation on the Earth is due to tidal waves in oceans (Egbert & Ray 2000) where the barotropic tide is converted non-resonantly into internal waves because of non-trivial bottom topography (Pedlosky 1982). The corresponding frequency-spectrum of the dissipation is then a highly complex function of χ, while its dependence on the rotation of the planet allows us to match tidal evolution results with geological data. This important result would not be possible with constant Q or constant time lag models (Webb 1980, 1982). During the past five decades, numerous theoretical studies have been carried out to characterize and quantify the tidal energy dissipated in fluid celestial bodies (see e.g. Zahn 1966a,b,c, 1975, 1977, 1989; Ogilvie & Lin 2004, 2007; Wu 2005; Remus et al. 2012a; Cebron et al. 2012; Cébron et al. 2013). Most of these studies focussed on stars and envelopes of giant gaseous planets (see Ogilvie 2014). They concentrated on global models for tidal waves and dissipative mechanisms in fluid regions excited by a tidal perturber, which result from complex actions and couplings of rotation, stratification, viscosity, and thermal diffusion. The kinetic energy of tidal waves is thus dissipated by viscous friction and thermal diffusion. Magnetism also intervenes in stars and some planets, introducing Ohmic diffusion in addition to the two previous dissipative mechanisms.

Therefore, tidal perturbations take the form of waves in fluid regions: acoustic waves driven by compressibility, inertial waves driven by the Coriolis acceleration, gravity waves driven by the Archimedian force, and Alfvén waves driven by magnetic forces. Given their high frequencies, acoustic waves are only weakly excited by low-frequency tidal forcing, and, therefore, are ignored. Tides, however, excite gravito-inertial waves. These mixed waves combine the second and third families enumerated above. Inertial waves are caused by rotation. The Coriolis acceleration acts as a restoring force and their frequencies are smaller than the inertial one 2Ω. Gravity waves propagate in stably-stratified fluid regions, with frequencies bounded by N (the Brunt-Väisälä frequency), which depends on the gradients of the specific entropy. Their restoring force is buoyancy. Alfvén waves result from the presence of a magnetic field and propagate in stars and planets, gravito-inertial waves thus becoming magneto-gravito-inertial waves. From now on, magnetism is neglected in the present work and these waves are thus not studied.

Given the complex dynamical resonant tidal response of fluid planetary layers and stars described above and its important astrophysical consequences, it should be understood and characterized systematically. To reach this goal, two approaches can be adopted. First, global realistic models constitute an efficient tool to explore the physics of dissipation and to quantify it (e.g. Ogilvie & Lin 2004, 2007). Simultaneously, local simplified models allow us to understand in detail complex physical mechanisms in action and to explore the large domain of possible parameters in astrophysics (e.g. Ogilvie 2005; Jouve & Ogilvie 2014; Barker & Lithwick 2013, 2014). In this framework, Ogilvie & Lin (2004) proposed a reduced model based on a Cartesian fluid box in an appendix devoted to quantifying global tidal dissipation in spherical shells for planetary interiors. The objective of this simplified model was to understand the behaviour of tidal dissipation caused by the (turbulent) viscous friction acting on inertial waves in planetary and stellar convective regions. Similarly, Gerkema & Shrira (2005a) explored the complex physics of gravito-inertial waves (see also Mathis et al. 2014b). Following these previous studies, this work develops a new local Cartesian model that generalizes that by Ogilvie & Lin (2004) by taking into account the relative inclination between gravity and rotation, which is a possible stable entropy stratification or a super-adiabaticity established by convection

and viscous and thermal diffusions. By studying this set-up, we answer to the following questions:

- How does the dissipation due to the viscous friction and heat thermal diffusion depend on the fluid parameters (i.e. rotation, stratification, viscosity, and thermal diffusivity)?
- How do the properties of the corresponding dissipation frequency spectrum vary as a function of the tidal frequency?
- What are the asymptotical behaviours relevant for planetary and stellar interiors?

In Sect. 2, the local Cartesian model is presented. Dynamical equations are derived and solved analytically. This allows us to get the energy dissipated per unit mass in the box over a rotation period. Physical quantities are written as a series of resonant normal modes corresponding to the harmonics of the tidal forcing, allowing us to study the spectral response of the box. In Sect. 3, it is studied, on the one hand, to identify the four asymptotic regimes of tidal waves. On the other hand, we characterize the corresponding resonant dissipation frequency spectrum, i.e. the positions, width, heights, number of peaks, level of the non-resonant background, and sharpness ratio (defined as the ratio between the height of the main peak and the level of the non-resonant background). Each of these properties is expressed as a function of the fluid parameters and forcing frequency. These scaling laws give a global overview of the properties of the dissipation. In Sect. 4, we examine the particular case of super-adiabaticity in convective regions for which the square buoyancy (Brunt-Väisälä) frequency is negative. In Sect. 5, we discuss our results. Finally, in Sect. 6, we give our conclusions and highlight new questions for further studies.

2. Forced waves in stars and fluid planetary layers

2.1. The local model to be studied

Ogilvie & Lin (2004) proposed a local Cartesian model describing the behaviour of a fluid box submitted to tidal perturbations for convective regions where inertial waves propagate. This approach is of great interest because it yields an analytical expression for the viscous dissipation of the tidal kinetic energy, which is expressed as a function of the fluid properties and particularly of the Ekman number, $N_{\rm Ek} = \nu/\left(2\Omega L^2\right)$, Ω being the angular velocity of the body, ν the local kinematic viscosity of the fluid, and L a characteristic length of the convective layer. Therefore, this approach allows us to understand how dissipation depends on these physical parameters. Here, in addition to inertial waves driven by the Coriolis acceleration, we take the possibility of a stable stratification, which introduces buoyancy as an additional restoring force, into account. This allows us to generalize the previous model to study the more general case of gravito-inertial waves (e.g. Gerkema & Shrira 2005a). Moreover, we also take thermal diffusion of heat, in addition to viscous friction to dissipate tidal kinetic energy, into account.

We consider a local fluid Cartesian section belonging to a planet or a star tidally perturbed at a frequency χ: a box of length L, such that $L \ll R$, where R is the radius of the body. The fluid is Newtonian, of density ρ, kinematic viscosity ν, and thermal diffusivity κ. The box vertical direction (and gravity $\boldsymbol{g}$) is inclined relatively to the spin vector of the body $\boldsymbol{\Omega}$ with an angle θ. The angular velocity of the fluid (Ω) and the local gravity g are assumed to be uniform and constant. The centre of the body and of the box are denoted O and M, respectively. We use two reference frames (Fig. 1). The global

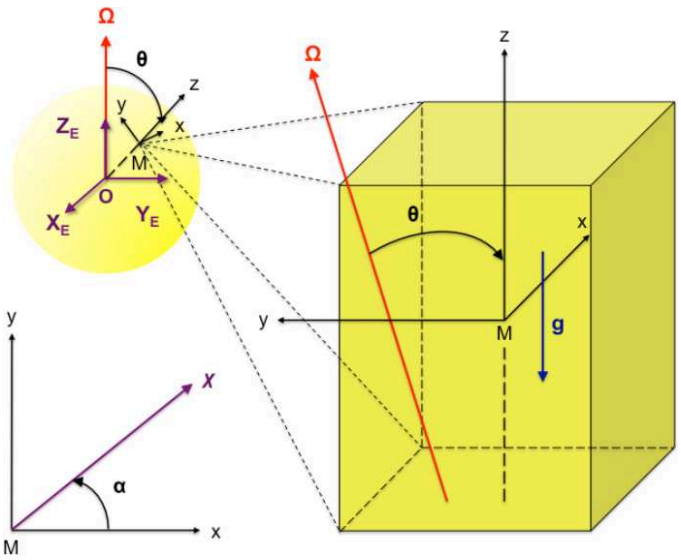


Fig. 1. The fluid box, its reference frame, and its position in the planet relative to the spin axis.

frame $\mathcal{R}_O$: $\{O, \boldsymbol{X}_{\rm E}, \boldsymbol{Y}_{\rm E}, \boldsymbol{Z}_{\rm E}\}$ rotates with the body and its natural spherical associated unit-vector basis is denoted $\left(\boldsymbol{e}_{\rm r}, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\right)$. In this frame, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{Z}_{\rm E}$ and the coordinates of M are (r, θ, φ) in spherical geometry. Then, we introduce the frame fixed to the fluid section, $\mathcal{R}$: $\left\{M, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\right\}$ whose unit-vectors are $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_{\rm r}$, $\boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_\varphi$ and $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. Stratification implies a new frequency, specific to gravito-inertial waves, and the Brunt-Väisälä frequency is denoted N and defined by

$$N^2 = -g\left[\frac{{\rm d}\log\rho}{{\rm d}z} - \frac{1}{\gamma}\frac{{\rm d}\log P}{{\rm d}z}\right], \tag{1}$$

where $\gamma = (\partial \ln P/\partial \ln \rho)_S$ is the adiabatic exponent (S being the specific macroscopic entropy), and P and ρ are the radial distributions of pressure and density of the background, respectively. These equilibrium quantities are supposed to vary smoothly with the radial coordinate z compared to the perturbation. For this reason, the Brunt-Väisälä frequency is taken as a constant parameter. Assuming the hydrostatic equilibrium, it becomes

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\left[\frac{{\rm d}\rho}{{\rm d}z} + \frac{g\rho^2}{\gamma P}\right]. \tag{2}$$

The regions studied are stably stratified ($N^2 > 0$) or convective ($N^2 \approx 0$ or $N^2 < 0$).

2.2. Dynamical equations

Submitted to a tidal forcing force per unit mass $\boldsymbol{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right)$, where $\boldsymbol{x} \equiv (x, y, z)$ are the local coordinates of space, the fluid moves in the box periodically and dissipates energy through viscous friction and thermal diffusion. To obtain the equations that govern the dynamics of tidal gravito-inertial waves, we write the linearized equations of motion[1] of the stratified fluid on

[1] In this work, we do not take the non-linear interactions between tidal waves into account, while those with turbulent flows, such as convection, are treated as an effective viscosity (Goldreich & Keeley 1977; Zahn 1989; Ogilvie & Lesur 2012).

the non-traditional f-plane assuming the Boussinesq[2] and the Cowling approximations (Gerkema & Shrira 2005a; Cowling 1941). First, we introduce the wave velocity field $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$, where u, v, and w are its components in the local azimuthal, latitudinal, and vertical directions. Next, we define the fluid buoyancy

$$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z = -g\frac{\rho'(\boldsymbol{x}, t)}{\rho}\boldsymbol{e}_z\,, \tag{3}$$

where ρ' and ρ are the density fluctuation and the reference background density, and t is the time. The three linearized components of the momentum equation are given by

$$\begin{cases} \partial_t w - 2\Omega\sin\theta\, u = -\dfrac{1}{\rho}\partial_z p' + B + \nu\nabla^2 w + F_z \\ \partial_t v + 2\Omega\cos\theta\, u = -\dfrac{1}{\rho}\partial_y p' + \nu\nabla^2 v + F_y \\ \partial_t u - 2\Omega\cos\theta\, v + 2\Omega\sin\theta\, w = -\dfrac{1}{\rho}\partial_x p' + \nu\nabla^2 u + F_x, \end{cases} \tag{4}$$

where p' is the pressure fluctuation and $\nabla^2 \equiv \partial_{x,x} + \partial_{y,y} + \partial_{z,z}$. Next, we write the continuity equation in the Boussinesq approximation

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \partial_z w + \partial_y v + \partial_x u = 0. \tag{5}$$

Finally, we get the following equation for energy conservation:

$$\partial_t B + N^2 w = \kappa\nabla^2 B. \tag{6}$$

By taking the scalar product of the momentum equation (Eq. (4)) with $\boldsymbol{u}$ and multiplying the heat equation (Eq. (6)) by B/N^2, we obtain the energy equation for the box

$$\partial_t\left(E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}\right) = -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(p'\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V + D^\mathrm{visc} + D^\mathrm{therm} + E^\mathrm{forcing}, \tag{7}$$

where we have introduced

– the kinetic energy

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\int_V \rho\,\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}V, \tag{8}$$

– the potential energy associated with stratification

$$\begin{cases} E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \rho\,\frac{B^2}{N^2}\mathrm{d}V \quad \text{if} \quad N^2 \neq 0 \\ E_\mathrm{p} = 0 \quad \text{if} \quad N^2 = 0, \end{cases} \tag{9}$$

– the energy dissipated by viscous friction

$$D^\mathrm{visc} = \int_V \rho\left(\nu\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}\right)\mathrm{d}V, \tag{10}$$

– the energy dissipated by thermal diffusion

$$\begin{cases} D^\mathrm{therm} = \displaystyle\int_V \rho\left(\frac{\kappa}{N^2}B\,\nabla^2 B\right)\mathrm{d}V \quad \text{if} \quad N^2 \neq 0 \\ D^\mathrm{therm} = 0 \quad \text{if} \quad N^2 = 0, \end{cases} \tag{11}$$

– the energy injected by the forcing

$$E^\mathrm{forcing} = \int_V \rho\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F})\,\mathrm{d}V, \tag{12}$$

where V is the volume of the box. The first term on the right-hand side of Eq. (7) is the divergence of the acoustic flux.

We introduce dimensionless time and space coordinates and tidal frequency, normalized buoyancy, and force per unit mass

$$\begin{aligned} &T = 2\Omega t, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \; Z = \frac{z}{L}, \; \omega = \frac{\chi}{2\Omega}, \\ &\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{B}}{2\Omega}, \; \boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{F}}{2\Omega}. \end{aligned} \tag{13}$$

The linearized Navier-Stockes equation becomes

$$\partial_T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{e}_z\wedge\boldsymbol{u} + \frac{1}{2\Omega L\rho}\boldsymbol{\nabla}p' - N_\mathrm{Ek}\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}, \tag{14}$$

where we recognize the Ekman number

$$N_\mathrm{Ek} = \frac{\nu}{2\Omega L^2}, \tag{15}$$

which compares the strength of the viscous force to the Coriolis acceleration.

The equation of heat is written as

$$\partial_T b + Aw = N_\mathrm{diff}\nabla^2 b, \tag{16}$$

where the right-hand side corresponds to thermal diffusion. We introduce the following two new control parameters:

$$A = \left(\frac{N}{2\Omega}\right)^2 \quad \text{and} \quad N_\mathrm{diff} = \frac{\kappa}{2\Omega L^2}. \tag{17}$$

A is the square ratio of the characteristic frequencies of the system (2Ω and N). This parameter is bound to the nature of tidal waves (e.g. Gerkema & Shrira 2005a,b; see also Berthomieu et al. 1978; Provost et al. 1981):

– $A \leq 0$ (i.e. $N^2 \leq 0$) corresponds to inertial waves;
– $0 < A < 1$, corresponds to quasi-inertial waves; and
– $A \geq 1$, corresponds to gravito-inertial waves.

The parameter N_diff compares the strength of the Coriolis and thermal diffusion terms by analogy with the Ekman number defined above (Eq. (15)). Finally, we introduce the Prandtl number of the fluid P_r, which characterizes the relative strength of viscous friction and thermal diffusion:

$$P_\mathrm{r} = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{N_\mathrm{Ek}}{N_\mathrm{diff}}. \tag{18}$$

Waves are damped by viscous diffusion if $P_\mathrm{r} \geq 1$; otherwise, thermal diffusion dominates.

From now on, we assume that the unknown quantities only vary with x and z ($x \in [0, L]$, $z \in [0, L]$). This assumption has no impact on qualitative results, and allows us to compare our calculations to those made by Ogilvie & Lin (2004) directly.

[2] Most of the itme, tidal frequencies are small compared to the Lamb's frequency. This allows us to filter out acoustic waves and to adopt the anelastic approximation in which $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0$. In the case where the background density ρ is uniform and constant, it reduces to the Boussinesq approximation in which $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0$.

2.3. Velocity field and dissipation

We now solve our linearized first-order system (Eqs. (14), (5) and (16)) to get the velocity field and the energy dissipated by viscous friction and thermal diffusion. Since the tidal perturbation is periodic in time, we expand the quantities in Fourier series:

$$\begin{aligned} u_x &= \Re\left[u(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \quad u_y = \Re\left[v(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \\ u_z &= \Re\left[w(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \quad p = \Re\left[\psi(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \\ f_x &= \Re\left[f(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \quad f_y = \Re\left[g(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \\ f_z &= \Re\left[h(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \quad b = \Re\left[b(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

The spatial functions are themselves expanded in periodic spatial Fourier series in X and Z as in Ogilvie & Lin (2004):

$$\begin{aligned} u &= \sum u_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \quad v = \sum v_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \\ w &= \sum w_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \quad \psi = \sum \psi_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \\ f &= \sum f_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \quad g = \sum g_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \\ h &= \sum h_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \quad b = \sum b_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}. \end{aligned} \tag{20}$$

For the sake of simplicity, the horizontal and vertical wave numbers $(m,n) \in \mathbb{Z}^{*2}$ are not written under summations. By choosing periodic boundary conditions, we consider the volumetric excitation of normal modes (Wu 2005; Braviner & Ogilvie 2015). The case of periodic wave attractors can be treated by introducing reflexions on boundaries of the box (e.g. Jouve & Ogilvie 2014). The previous system becomes

$$\begin{cases} -\mathrm{i}\omega u_{mn} - \cos\theta v_{mn} + \sin\theta w_{mn} = -\mathrm{i}m\Lambda\psi_{mn} - E\left(m^2+n^2\right)u_{mn} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + f_{mn} \\ -\mathrm{i}\omega v_{mn} + \cos\theta u_{mn} = -E\left(m^2+n^2\right)v_{mn} + g_{mn} \\ -i\omega w_{mn} - \sin\theta u_{mn} = -\mathrm{i}n\Lambda\psi_{mn} - E\left(m^2+n^2\right)w_{mn} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b_{mn} + h_{mn} \\ m u_{mn} + n w_{mn} = 0 \\ -i\omega b_{mn} + A w_{mn} = K\left(m^2+n^2\right)b_{mn}, \end{cases} \tag{21}$$

which is parametrized by the frequency ratio A, the colatitude θ and the numbers:

$$E = \frac{2\pi^2\nu}{\Omega L^2}, \quad K = \frac{2\pi^2\kappa}{\Omega L^2} \quad \text{and} \quad \Lambda = \frac{\pi}{\Omega\rho L}. \tag{22}$$

The parameters E and K are both dimensionless diffusivities: E is proportional to the Ekman number N_{Ek} (Eq. (15)) of the fluid and K to its analogue N_{diff} (Eq. (17)) for thermal diffusion. Similarly, we get for the Prandtl number (Eq. (18))

$$P_{\mathrm{r}} = \frac{E}{K}. \tag{23}$$

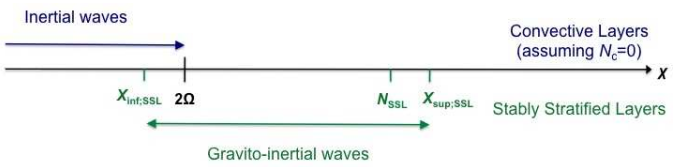


Fig. 2. Gravito-inertial waves frequency range in convective and in stably stratified layers ($N_{\mathrm{c}} = 0$ and $N_{\mathrm{SLL}} > 0$ are the corresponding buoyancy frequencies). The expressions of the boundaries $\chi_{\mathrm{inf;SSL}}$ and $\chi_{\mathrm{sup;SSL}}$ are explicitly given in Eq. (28).

Finally, Λ weights the pressure variations. This last parameter does not intervene in the expressions of the velocity field and of the perturbation of buoyancy (Eqs. (29) and (31)). Therefore, both viscous dissipation and thermal diffusion do not depend on it. The equations yield two complex dimensionless frequencies because of viscous and heat diffusion, which are functions of E and K:

$$\tilde{\omega} = \omega + \mathrm{i}E\left(m^2+n^2\right) \quad \text{and} \quad \hat{\omega} = \omega + \mathrm{i}K\left(m^2+n^2\right). \tag{24}$$

Initially, assuming that $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, we get the dispersion relation of the viscously and thermally damped gravito-inertial modes as follows:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{n^2\cos^2\theta}{m^2+n^2} + \frac{m^2 A}{m^2+n^2}\frac{\tilde{\omega}}{\hat{\omega}}. \tag{25}$$

For slightly damped modes ($E \ll 1$ and $K \ll 1$), we identify in the second member, the wave number $\boldsymbol{k} = (k_H, 0, k_V)$, with $k_H = m/L$ and $k_V = n/L$ (see Gerkema & Shrira 2005a). Indeed, neglecting E and K, this equation simplifies to

$$\chi^2 \approx \frac{m^2N^2 + n^2\left(2\Omega\cos\theta\right)^2}{m^2+n^2}, \tag{26}$$

which can be written

$$\chi^2 = \left(\frac{2\boldsymbol{\Omega}.\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)^2 + \left(N\frac{k_H}{|\boldsymbol{k}|}\right)^2, \tag{27}$$

where we recognize the dispersion relation of gravito-inertial waves with the respective contributions of inertial and gravity waves.

By letting m and n tend to infinity successively, we identify the approximative boundaries of the frequency range, χ_{inf} and χ_{sup}. When $2\Omega < N$ (i.e. $A > 1$), $\chi_{\mathrm{inf}} \approx 2\Omega$ and $\chi_{\mathrm{sup}} \approx N$ (see Fig. 2). The exact expressions of χ_{inf} and χ_{sup} are given by Gerkema & Shrira (2005a), as follows:

$$\begin{cases} \chi_{\mathrm{inf}} = \sqrt{\dfrac{\lambda - \left[\lambda^2 - (2\sigma N)^2\right]^{1/2}}{2}}, \\ \chi_{\mathrm{sup}} = \sqrt{\dfrac{\lambda + \left[\lambda^2 - (2\sigma N)^2\right]^{1/2}}{2}}, \end{cases} \tag{28}$$

where $\lambda = N^2 + \sigma^2 + \sigma_s^2$. Here, $\sigma = 2\Omega\sin\theta$ and $\sigma_s = 2\Omega\cos\theta\sin\alpha$, $\alpha = 0$ corresponding to the propagation direction of gravito-inertial waves in the horizontal plane along the x axis

(see the bottom-left panel of Fig. 1). Finally, we obtain the coefficients of the velocity field $\boldsymbol{u}$,

$$\begin{cases} u_{mn} = n\dfrac{i\tilde{\omega}\left(nf_{mn} - mh_{mn}\right) - n\cos\theta g_{mn}}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\hat{\omega}}}, \\ v_{mn} = \dfrac{n\cos\theta\left(nf_{mn} - mh_{mn}\right) + \mathrm{i}\left[\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega} - \dfrac{Am^2}{\hat{\omega}}\right]g_{mn}}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\hat{\omega}}}, \\ w_{mn} = -m\dfrac{\mathrm{i}\tilde{\omega}\left(nf_{mn} - mh_{mn}\right) - n\cos\theta g_{mn}}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\hat{\omega}}}, \end{cases} \tag{29}$$

of the pressure p,

$$\psi_{mn} = \frac{1}{\Lambda}\left[\frac{\left(\tilde{\omega}f_{mn} + i\cos\theta g_{mn}\right)\left[n\sin\theta + \mathrm{i}m\left(\dfrac{A}{\hat{\omega}} - \tilde{\omega}\right)\right]}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\hat{\omega}}} - \frac{h_{mn}\left[m\sin\theta\tilde{\omega} + \mathrm{i}n\left(\tilde{\omega}^2 - \cos^2\theta\right)\right]}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\hat{\omega}}}\right], \tag{30}$$

and of the buoyancy b,

$$b_{mn} = \frac{\mathrm{i}Am}{\omega}\frac{i\tilde{\omega}\left(nf_{mn} - mh_{mn}\right) - n\cos\theta g_{mn}}{\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\dfrac{\tilde{\omega}}{\hat{\omega}}}. \tag{31}$$

Note that all the coefficients in Eqs. (29)–(31) have the same denominator. This corresponds to the left-hand side of the forced momentum equation (Eq. (14)). The tidal excitation only affects their numerators.

As pointed out before, the viscous dissipation of gravito-inertial waves over a tidal period (D^{visc}) is deduced from the velocity field (Eq. (10)). It is provided by the quadrature of the local mean dissipation in the whole box. Using our dimensionless coordinates, we define the viscous dissipation per unit mass:

$$\mathcal{D}^{\mathrm{visc}} = \frac{D^{\mathrm{visc}}}{\rho L^3} = \frac{1}{L^2}\int_0^1\int_0^1 \left\langle -\boldsymbol{u}\cdot\nu\nabla^2_{X,Z}\boldsymbol{u}\right\rangle \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Z, \tag{32}$$

where $\nabla^2_{X,Z} \equiv (1/L^2)\nabla^2$ and $\langle\cdot\cdot\rangle$ is the average in time. Using Fourier series expansions given in Eq. (20), this expression becomes

$$\mathcal{D}^{\mathrm{visc}} = \frac{2\pi^2\nu}{L^2}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}}\left(m^2+n^2\right)\left(\left|u^2_{mn}\right| + \left|v^2_{mn}\right| + \left|w^2_{mn}\right|\right), \tag{33}$$

as demonstrated by Ogilvie & Lin (2004). Similarly, the power dissipated by heat diffusion over a tidal period can be derived from the buoyancy perturbation (Eq. (11)). Using our dimensionless coordinates, we define the heat diffusion per unit mass

$$\mathcal{D}^{\mathrm{therm}} = \frac{D^{\mathrm{therm}}}{\rho L^3} = \frac{1}{L^2}KA^{-2}\int_0^1\int_0^1 \left\langle -b\nabla^2_{X,Z}b\right\rangle \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Z. \tag{34}$$

Once again using Eq. (20), it becomes

$$\mathcal{D}^{\mathrm{therm}} = \frac{2\pi^2\kappa}{L^2A^2}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}}\left(m^2+n^2\right)|b_{mn}|^2. \tag{35}$$

The total dissipated power is the sum of both contributions, i.e.

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathrm{visc}} + \mathcal{D}^{\mathrm{therm}}. \tag{36}$$

Finally, we introduce the energy dissipated over a rotation period of the planet, denoted ζ,

$$\zeta = \frac{2\pi}{\Omega}\mathcal{D}, \tag{37}$$

and its viscous and thermal contributions,

$$\zeta^{\mathrm{visc}} = 2\pi E\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}}\left(m^2+n^2\right)\left(\left|u^2_{mn}\right| + \left|v^2_{mn}\right| + \left|w^2_{mn}\right|\right), \tag{38}$$

$$\zeta^{\mathrm{therm}} = 2\pi KA^{-2}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}}\left(m^2+n^2\right)|b_{mn}|^2, \tag{39}$$

which we study instead of the power ($\mathcal{D}$). The energy (ζ of Eq. (37)) only depends on the control parameters A, E, and K (see Eq. (22)).

2.4. Spectral response

We have computed analytical formulae of the energies dissipated by viscous friction and thermal diffusion. Considering the dispersion relation Eq. (25) and the resonances involved, we know that ζ significantly varies with the tidal frequency ω. As shown by Eq. (38), its behaviour is determined by the position θ of the box and the dimensionless numbers A, E, and K. To be able to make our results comparable with the model in the appendix of Ogilvie & Lin (2004), we choose the same academic forcing, i.e.

$$f_{mn} = -\frac{i}{4\,|m|\,n^2},\quad g_{mn} = 0 \text{ and } h_{mn} = 0. \tag{40}$$

We verified that the forms of the $\{f_{mn}, g_{mn}, h_{mn}\}$ coefficients do not affect properties of the spectra that are governed by the left-hand side of the forced momentum equation (Eq. (14)), i.e. the position and width of the resonances in the frequency-dissipation spectra. However, the spectral dependence on m and n modulate their number, their height, and the amplitude of the non-resonant background. Nevertheless, the contrast between the latter and the height of the main resonance, which is called the sharpness ratio and evaluates the relative amplitude between dynamical and equilibrium tides, are less affected. Moreover, we verified that the different main asymptotic behaviours of the system remain unchanged. In future works, it would be important to implement a more realistic treatment of the forcing term, as done by Barker & Lithwick (2013), for example, for local numerical simulations of the tidal elliptic instability.

In Figs. 3 and 4, we plot the frequency spectra of ζ^{visc} for various sets of parameters. The abscissa measures the dimensionless frequency $\omega = \chi/2\Omega$, and the vertical axis the local viscous dissipation per unit mass (in logarithmic scale). Figure 3 corresponds to pure inertial waves ($A = 0$) in a box located at the pole ($\theta = 0$). The plots illustrate most of the results of this section. First, the cut-off frequency for inertial modes, $\omega_{\mathrm{c}} = 1$ (see the dispersion relation in Eq. (25)), clearly appears. Beyond $\omega = 1$, the dissipation decreases by several orders of magnitude and corresponds to the non-resonant background. Second,

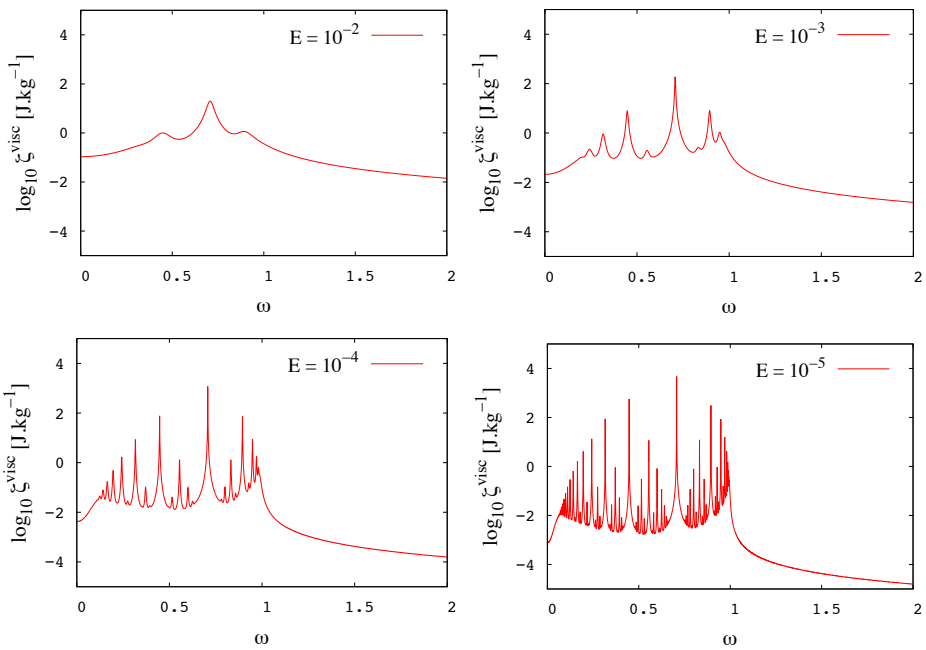


Fig. 3. Frequency spectra of the energy per mass unit locally dissipated by viscous friction $\zeta^{\rm visc}$ for inertial waves ($A = 0$) at the position $\theta = 0$ for $K = 0$ and different Ekman numbers. In abscissa, the normalized frequency $\omega = \chi/2\Omega$. *Top left*: $E = 10^{-2}$. *Top right*: $E = 10^{-3}$. *Bottom left*: $E = 10^{-4}$. *Bottom right*: $E = 10^{-5}$. The results obtained by Ogilvie & Lin (2004) are recovered. Note that the non-vanishing viscous dissipation at $\omega = 0$ is the one of the geostrophic equilibrium.

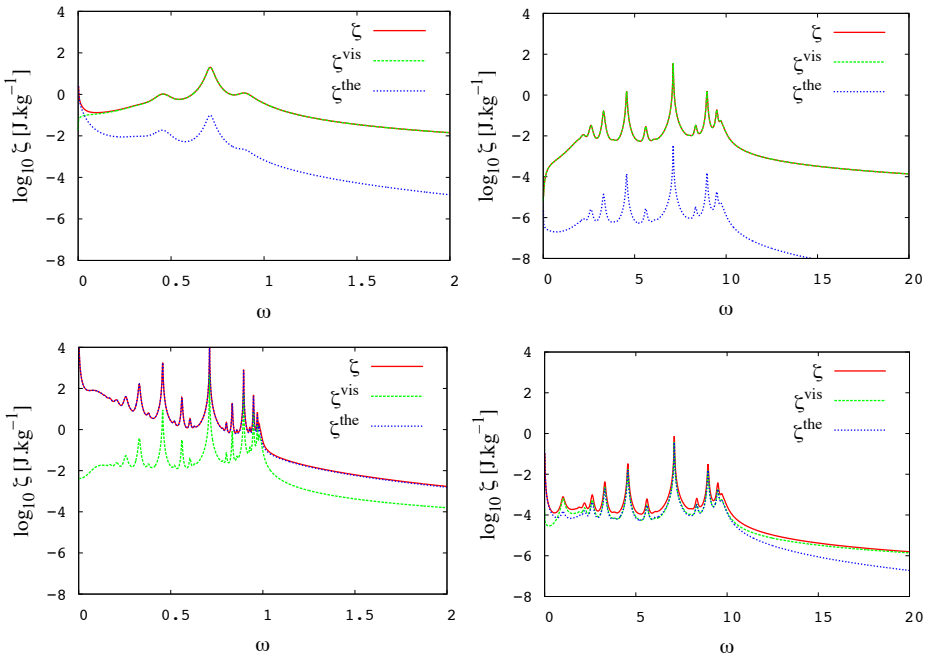


Fig. 4. Frequency spectrum of the energy per mass unit dissipated in different regimes (ζ) (continuous red line), and of its viscous and thermal contributions $\zeta^{\rm visc}$ (dashed green line) and $\zeta^{\rm therm}$ (dashed blue line). The latitude is fixed at $\theta = 0$. In abscissa, the normalized frequency $\omega = \chi/2\Omega$. *Top left*: $A = 1.0 \times 10^{-2}$; $E = 1.0 \times 10^{-2}$; $K = 1.0 \times 10^{-4}$. *Top right:* $A = 1.0 \times 10^{2}$; $E = 1.0 \times 10^{-2}$; $K = 1.0 \times 10^{-4}$. *Bottom left:* $A = 1.0 \times 10^{-2}$; $E = 1.0\times10^{-4}$; $K = 1.0\times10^{-2}$. *Bottom right*: $A = 1.0\times10^{2}$; $E = 1.0\times10^{-4}$; $K = 1.0\times10^{-2}$.

we can observe the sharp dependence of the dissipation to the tidal frequency χ. The quantity ζ also varies with the Ekman number E. The spectrum is regular for high values of E, which correspond to waves damped by a strong viscous diffusion. In contrast, the number of resonances increases when E decreases.

Figure 4 gives an overview of the dependence of ζ, $\zeta^{\rm visc}$, and $\zeta^{\rm therm}$ on the control parameters. Each plot corresponds to a particular regime of tidal dissipation. The number of peaks is obviously correlated to the Ekman number and we retrieve the spectra of Fig. 3 in the top-left and top-right plots where dissipation by viscous friction predominates. The ratio of the contributions, $\zeta^{\rm visc}/\zeta^{\rm therm}$, depends on the Prandtl number, the dissipation being mainly due to viscous friction for high values of $P_{\rm r}$ and to heat diffusion for low values. The cases of the bottom-left and bottom-right plots show that the critical Prandtl number, where both contributions are comparable, varies with A.

After this first qualitative approach, it is necessary to develop a quantitative physical description of the spectra taking both dissipation mechanisms into account. In a previous work, we pointed out the importance of the role played by resonances in the evolution of planetary systems. Indeed, the variations of the distance between a star or a fluid planet and its planet or satellite are directly linked to the height and width of the peaks (see Auclair-Desrotour et al. 2014). It is now possible to understand how these properties depend on the physical fluid parameters.

3. Properties of the resonances

Numerical results show that the fluid behaves like a bandpass filter with clearly identified cut-off frequencies, $\omega_{\rm inf}$ and $\omega_{\rm sup}$; commented above (see Eq. (28)). A typical dissipation spectrum is a batch of resonances presenting a large range of positions,

widths, and heights, and an apparent non-resonant background. Thanks to our analytical formulae of the viscous and thermal dissipations (Eqs. (33) and (35)), these properties can be established explicitly as functions of the colatitude θ, the ratio of squared frequencies A, the Ekman number E, and its analogue for thermal diffusion K (and the corresponding Prandtl number $P_{\rm r}$). Thus, we treat first the eigenfrequencies ω_{mn} and the widths l_{mn} that do not depend on the forcing, and in a second step, the heights H_{mn} and the non-resonant background $H_{\rm bg}$. Finally, we look at the number of resonances $N_{\rm kc}$ and the sharpness ratio Ξ, which is the ratio between the height of the main peak and the mean non-resonant background inside the frequency range $\left[\omega_{\rm inf}, \omega_{\rm sup}\right]$.

3.1. Position and population of resonances

The spectra of Fig. 3 reveal a well-organized structure. Each peak is surrounded by two others of the nearest higher orders. The fractal pattern, accentuated by the particular forcing chosen, is apparent in the bottom-right plot ($E = 10^{-5}$). In this subsection, we retrieve this singular structure analytically, by studying the expression of ζ (Eq. (38)). The energy dissipated is written as an infinite sum of terms ζ_{mn} associated with the degrees m and n. As $\zeta_{mn}(\omega) \sim \zeta_{-mn}(\omega) \sim \zeta_{m-n}(\omega) \sim \zeta_{-m-n}(\omega)$, m and n being natural integers, four terms of this series dominate all the others near a resonance. Hence, we assume the following:

$$\zeta^{\rm visc} \approx 4\zeta^{\rm visc}_{mn} = 8\pi E\left(m^2+n^2\right)\left(\left|u^2_{mn}\right| + \left|v^2_{mn}\right| + \left|w^2_{mn}\right|\right), \tag{41}$$

$$\zeta^{\rm therm} \approx 4\zeta^{\rm therm}_{mn} = 8\pi A^{-2} E P_{\rm r}^{-1}\left(m^2+n^2\right)\left|b_{mn}\right|^2. \tag{42}$$

$\zeta^{\rm visc}$ and $\zeta^{\rm therm}$ have the same denominator,

$$d_{mn} = \left|\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta - Am^2\frac{\tilde{\omega}}{\hat{\omega}}\right|^2. \tag{43}$$

Considering that the numerators vary smoothly compared to d_{mn}, we deduce the eigenfrequencies ω_{mn} (with $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$) from the dispersion relation (Eq. (25)). The eigenfrequencies correspond to the minima of the denominator d_{mn}. Then, we factorize the expression given in Eq. (43) by $1/\hat{\omega}$, which varies smoothly like the numerator. It yields the following polynomial P:

$$P(\omega) = \omega^6 + \left(\beta^2 - 2\alpha\right)\omega^4 + \left(\alpha^2 - 2\beta\gamma\right)\omega^2 + \gamma^2, \tag{44}$$

where α, β and γ are positive real coefficients

$$\begin{cases} \alpha = E(E+2K)\left(m^2+n^2\right)^2 + \dfrac{n^2\cos^2\theta + m^2A}{m^2+n^2} \\ \beta = (K+2E)\left(m^2+n^2\right) \\ \gamma = KE^2\left(m^2+n^2\right)^3 + n^2\cos^2\theta K + m^2AE. \end{cases} \tag{45}$$

$P(\omega)$ have the same minima as d_{mn}. Hence, by differentiating $P(\omega)$, we get:

$$P'(\omega) = \omega Q(\omega), \tag{46}$$

Q being an even fourth degree polynomial. Thus, solutions satisfy the equation

$$Q(\omega) = 0, \tag{47}$$

and exist only if the coefficients α, β, and γ satisfy the condition

$$\alpha^2 + 6\beta\gamma + \beta^4 - 4\alpha\beta^2 \geq 0. \tag{48}$$

Given the form of the polynomials P and Q, which involve only even terms, eigenfrequencies are symmetrical with respect to the vertical axis ($\omega = 0$). Therefore, the domain studied can be restricted to the positive interval $[0; +\infty[$. There is a single physical solution if $2\alpha > \beta^2$ or $\alpha^2 < 2\beta\gamma$,

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\alpha - \beta^2 + \sqrt{\beta^4 + \alpha^2 - 4\alpha\beta^2 + 6\beta\gamma}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{49}$$

which corresponds to a minimum of P, so a maximum of ζ. We have pointed out that $\zeta^{\rm visc}_{mn}$ and $\zeta^{\rm therm}_{mn}$ have the same denominator. Therefore, they also have the same eigenfrequencies. First, we consider the bi-parameter case of Ogilvie & Lin (2004): $A = 0$, $K = 0$ (the solution only depends on the position θ and the Ekman number E). The eigenfrequency ω_{mn} becomes

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{n^2\cos^2\theta}{m^2+n^2} - E^2\left(m^2+n^2\right)^2}. \tag{50}$$

Beyond a critical rank, there is no minimum any more. Only the first harmonics are resonant because they verify the condition

$$\frac{n^2}{\left(m^2+n^2\right)^3} > \left(\frac{E}{\cos\theta}\right)^2. \tag{51}$$

Thus, there is obviously a maximum number of resonances that decreases with E and θ in the bi-parameter case. However, we see that this maximum does not correspond to the effective number of resonances. This number is actually strongly constrained by the level of the non-resonant background, which is the cause of the variations observed in Figs. 3 and 4. By plotting the analytical eigenfrequencies $\omega_{\rm mn}$ (Fig. 5), we retrieve the global structure of spectra. Each blue point corresponds to a mode (m,n). The characteristic rank of the harmonic $k = \max\{|m|, |n|\}$ is introduced to reduce the doublet (m,n) to only one index. It represents an approximative degree of the resonance. The cut-off frequency of inertial waves $\omega_c = \cos\theta$ distinctly appears in Fig. 5 given that $E \ll 1$. It can also be deduced from the simplified expression of ω_{mn}, i.e.

$$\omega_{mn} \approx \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\cos\theta. \tag{52}$$

The plots representing the eigenfrequencies (Fig. 5) expose the symmetries of the dispersion relation in the quasi-adiabatic approximation, which we develop from now on.

The quasi-adiabatic approximation means that the diffusivities E and K are first-order infinitesimals with respect to $\cos\theta$ and $\sqrt{A}$. This assumption corresponds to low viscous and thermal diffusivities (ν and κ) relevant in stellar and planetary interiors. Thus, for the main resonances ($k < 10$), the coefficients α, β and γ become

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{n^2\cos^2\theta + m^2A}{m^2+n^2} \\ \beta = (K+2E)\left(m^2+n^2\right) \\ \gamma = n^2\cos^2\theta K + m^2AE, \end{cases} \tag{53}$$

and the frequency of the resonance (m,n),

$$\omega_{mn} = \sqrt{\alpha}\,(1+\varepsilon), \tag{54}$$

where ε is a second order bias:

$$\varepsilon = \frac{\beta}{2\alpha}\left(\frac{\gamma}{\alpha} - \beta\right). \tag{55}$$

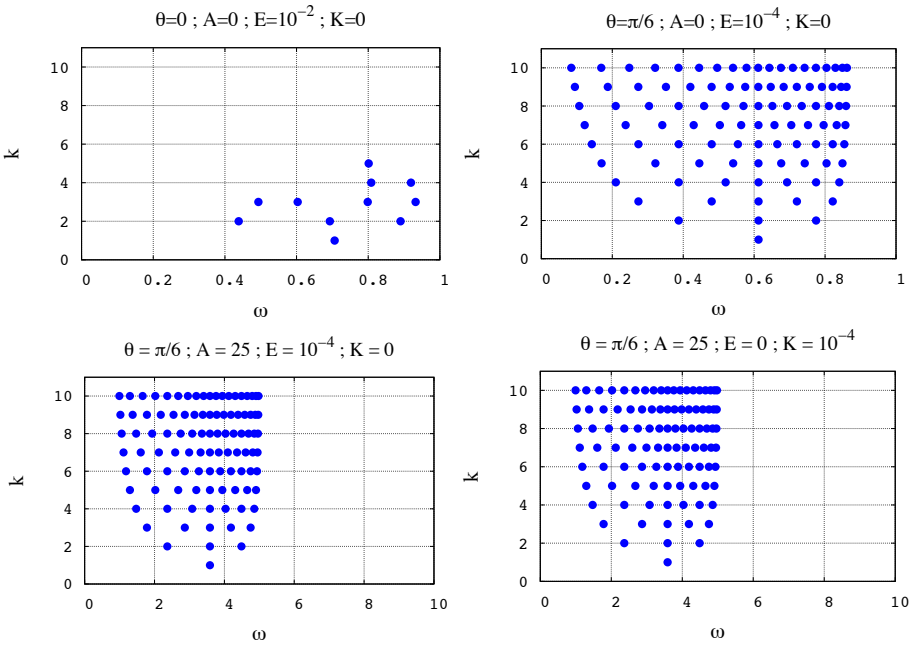


Fig. 5. Structures of the frequency spectra of dissipation for inertial waves and gravito-inertial waves, with various sets of parameters. The positions of resonances (in abscissa, the normalized frequency $\omega = \chi/2\Omega$) are indicated by blue points as functions of the characteristic rank k of the harmonics (ordinates). *Top left*: $(\theta, A, E, K) = (0, 0, 10^{-2}, 0)$. *Top right:* $(\theta, A, E, K) = (\pi/6, 0, 10^{-4}, 0)$. *Bottom left*: $(\theta, A, E, K) = (\pi/6, 25, 10^{-4}, 0)$. *Bottom right*: $(\theta, A, E, K) = (\pi/6, 25, 0, 10^{-4})$.

Therefore, when E and K are small and can be neglected, resonances are located at the eigenfrequencies

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{n^2\cos^2\theta + Am^2}{m^2+n^2}}, \tag{56}$$

which correspond to the dispersion relation of gravito-inertial waves in the adiabatic case given in Eq. (26). They give us the boundaries of the frequency range in the local model,

$$\omega_{\rm inf} \approx \frac{N}{2\Omega} \quad \text{and} \quad \omega_{\rm sup} \approx \cos\theta \quad \text{if} \quad N < 2\Omega \tag{57}$$

or the contrary if $N > 2\Omega$. Note that the exact expressions of $\omega_{\rm inf}$ and $\omega_{\rm sup}$ (Eq. 28) are actually a bit more complex than the previous expressions. In Figs. 4 and 5, the interval $\left[\omega_{\rm inf}, \omega_{\rm sup}\right]$ delimits peaks and blue points zones. As the impact of E and K is of second order, the structure of the batch of resonances only depends on A and the colatitude θ under the quasi-adiabatic approximation. This is the reason why the plots of Fig. 5, where $\{E, K\} \ll \left\{\sqrt{A}, \cos\theta\right\}$ have the same appearance. By taking $A = 0$, we recover the expression that corresponds to pure inertial waves (see Eq. (50)).

Moreover, Eq. (56) points out an hyper-resonant case related to quasi-inertial waves ($A < 1$) and characterized by the equality

$$A = \cos^2\theta. \tag{58}$$

When it is verified, all the peaks are superposed at the eigenfrequency

$$\omega_p = \omega_{\rm c} = \cos\theta, \tag{59}$$

and form a huge single peak. So, if $N < 2\Omega$ (quasi-inertial waves), there is a critical colatitude $\theta_0 = \arccos(N/(2\Omega))$ at which the dissipation spectrum of tidal gravito-inertial waves reduces to a single resonance. The frequency range decreases when the latitude comes closer to θ_0. As there is no such critical colatitude for $A > 1$, usual gravito-inertial waves are not affected by this effect. Their frequency range $\left[\omega_{\rm inf}, \omega_{\rm sup}\right]$ is only larger at the equator than at the pole.

Table 1. Numerical comparison between the number of peaks N_{kc} and the number of modes $k_{\rm c}^2$, $k_{\rm c}$ being the rank of the highest harmonics, for the main resonances ($1 \le k \le 10$).

$k_{\rm c}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_{\rm c}^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
N_{kc}	1	3	7	11	19	23	35	43	55	65

The number of resonances constituting a spectrum can be estimated from the expressions of the eigenfrequencies ω_{mn} (Eq. (56)). Indeed, because of the definition of k, there are $2k-1$ points per line in Fig. 5, but as a result of the symmetries of ω_{mn} some of these points have the same positions. Indeed, note that $\omega_{m'n'} = \omega_{mn}$ if $m' = pm$ and $n' = pn$ with $p \in \mathbb{Z}^*$. This explains why resonances are not as numerous as modes. We denote $k_{\rm c}$ the maximal rank of the harmonics dominating the background and N_{kc} the number of effective resonant peaks. The layer of harmonics k brings p_k new peaks, i.e.

$$p_k = 2k - 1 - \sum_{\substack{i \mid (k/k_i \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\\ k_i \text{ prime number})}} p_i\,. \tag{60}$$

So, the effective number of resonances can be computed using the following recurrence series:

$$N_{k_{\rm c}} = \sum_{k=1}^{k_{\rm c}} p_k. \tag{61}$$

The values of N_{kc} and $k_{\rm c}^2$ for the first orders are given in Table 1 and plotted in Fig. 6. We notice a slight difference between the two curves, the effective number of peaks growing slower than the number of modes. As a first approximation, we can consider that $N_{kc} \propto k_c^2$. This assumption is used to compute the scaling laws of $N_{\rm kc}$.

3.2. Width of resonances

The width of a resonance is a characteristic of great interest. Indeed, in a previous work (Auclair-Desrotour et al. 2014), we

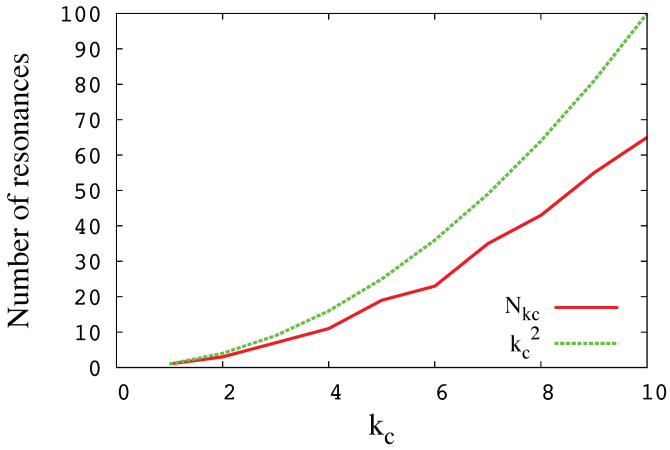


Fig. 6. Real number of resonances N_{kc} (continuous red line) and its first order approximation k_c^2 (dashed green line) as a function of the rank of the highest harmonics k_c for the main resonances ($1 \leq k \leq 10$).

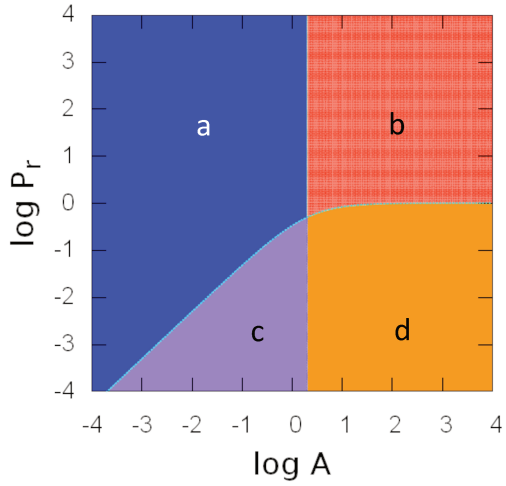


Fig. 7. Asymptotic domains. The areas on the left **a)** and **c)** correspond to inertial waves, those on the right **b)** and **d)** to gravito-inertial waves. Resonances are damped by viscosity in areas **a)** and **b)**, and by thermal diffusivity in areas **c)** and **d)**. The corresponding domains of parameters are **a)** $A \ll A_{mn}$ and $P_r \gg P_{r;mn}$; **b)** $A \gg A_{mn}$ and $P_r \gg P_{r;mn}$; **c)** $A \ll A_{mn}$ and $P_r \ll P_{r;mn}$; and **d)** $A \gg A_{mn}$ and $P_r \ll P_{r;mn}$.

studied a coplanar, two-body system of semi-major axis a and showed that a was submitted to rapid changes due to resonances (see also Witte & Savonije 1999, 2001, 2002). In this work, the system is constituted by a fluid rotating planet and a point-like satellite. The variation Δa of the semi-major axis a is related to the width at mid-height l_p and sharpness ratio $\Xi_p = H_p/H_{\rm bg}$ of the pth resonance encountered. Indeed, $\Delta a/a \propto l_p \Xi_p^{1/4}$, i.e. the amplitude Δa varies linearly as a function of the width of the peak that causes it, this width being the signature of the dissipation. In this section, we compute an analytical formula of the width at mid-height l_{mn} as a function of the control parameters of the system. Similar to the eigenfrequencies, l_{mn} are fully determined by the left-hand side of Eq. (14). We suppose that ξ_{mn}, the numerator of ζ_{mn} in Eqs. (41) or (42), varies smoothly compared to its denominator d_{mn} (see Eq. (43)). Then, the width at mid-height is computed from the relation

$$\zeta_{mn}\left(\omega_{mn} + \frac{l_{mn}}{2}\right) = \frac{1}{2}\zeta_{mn}\left(\omega_{mn}\right), \tag{62}$$

which can also be expressed as

$$\frac{\xi_{mn}}{P\left(\omega_{mn} + \frac{l_{mn}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\xi_{mn}}{P\left(\omega_{mn}\right)}. \tag{63}$$

Therefore, we solve the following equation:

$$P\left(\omega_{mn} + \frac{l_{mn}}{2}\right) = 2P\left(\omega_{mn}\right). \tag{64}$$

Hence, the l_{mn} are the same for $\zeta^{\rm visc}$ and $\zeta^{\rm therm}$, like the eigenfrequencies. In the context of the quasi-adiabatic approximation, we obtain

$$l_{mn} = \left(m^2 + n^2\right)\frac{Am^2K + \left(2n^2\cos^2\theta + Am^2\right)E}{n^2\cos^2\theta + Am^2}. \tag{65}$$

Looking at the form of this expression, we introduce two critical numbers proper to the mode (m, n),

$$A_{mn}(\theta) = \frac{2n^2}{m^2}\cos^2\theta \quad \text{and} \quad P_{r;mn}(\theta, A) = \frac{A}{A + A_{mn}(\theta)}, \tag{66}$$

Table 2. Scaling laws of the width at mid-height l_{mn} of the resonance associated with the doublet (m, n).

Domain	$A \ll A_{mn}$	$A \gg A_{mn}$
$P_r \gg P_{r;mn}$	$2\left(m^2 + n^2\right)E$	$\left(m^2 + n^2\right)E$
$P_r \ll P_{r;mn}$	$\dfrac{m^2\left(m^2 + n^2\right)AEP_r^{-1}}{n^2\cos^2\theta}$	$\left(m^2 + n^2\right)EP_r^{-1}$

Notes. The parameter l_{mn} is written as a function of the control parameters A, E, and $K \equiv EP_r^{-1}$.

which determine asymptotical behaviours. The expression of l_{mn} thus becomes

$$l_{mn} = \left(m^2 + n^2\right)\frac{E\left(A + A_{mn}\right)\left(P_r + P_{r;mn}\right)}{P_r\left(A + \frac{1}{2}A_{mn}\right)}. \tag{67}$$

$A \ll A_{mn}$ characterizes inertial waves and $A \gg A_{mn}$ gravito-inertial waves. Similarly, if $P_r \ll P_{r;mn}$, the resonance is damped by thermal diffusion, and if $P_r \gg P_{r;mn}$, it is damped by viscous friction. We thus identify four possible regimes, summarized in Fig. 7:

1. $A \ll A_{mn}$ and $P_r \gg P_{r;mn}$: inertial waves damped by viscous diffusion;
2. $A \gg A_{mn}$ and $P_r \gg P_{r;mn}$: gravity waves damped by viscous diffusion;
3. $A \ll A_{mn}$ and $P_r \ll P_{r;mn}$: inertial waves damped by thermal diffusion; and
4. $A \gg A_{mn}$ and $P_r \ll P_{r;mn}$: gravity waves damped by thermal diffusion.

The scaling laws of Table 2 are directly deduced from Eq. (65). They illustrate the differences between the four identified regimes. First, we focus on inertial waves. If the viscous term

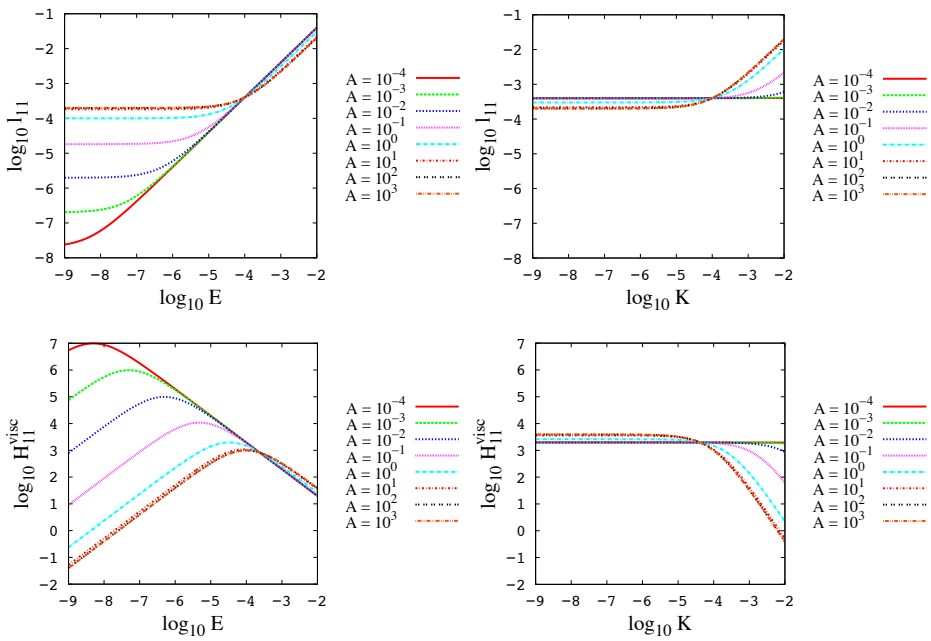


Fig. 8. Width at mid-height l_{11} and height $H_{11}^{\rm visc}$ of the main resonance of $\zeta^{\rm visc}$ as a function of the Ekman number E and its analogue for heat diffusion K for different values of A (in logarithmic scales). *Top left:* $l_{11} - E$. *Top right:* $l_{11} - K$. *Bottom left:* $H_{11}^{\rm visc} - E$. *Bottom right:* $H_{11}^{\rm visc} - K$.

overpowers the term of heat diffusion, then we have the case studied by Ogilvie & Lin (2004). The width at mid-height of resonances varies lineraly with the Ekman number. Peaks are larger for $E = 10^{-2}$ than for $E = 10^{-5}$ (see Fig. 3). Elsewhere, the width is proportional to K: for a given $A > 0$, the resonances would widen with K as they do with E in the previous case. Now, if we examine gravito-inertial waves, they behave similar to inertial waves, linearly widening with E and K in the corresponding regimes defined above. Finally, note that l_{mn} always depends on a single parameter except in the case of inertial waves damped by thermal diffusion, for which the square frequencies ratio (A) als has a linear impact.

Assuming that the resonances all have the same qualitative behaviour, we plot the width at mid-height l_{11} of the main one from Eq. (65). We thus find in the plots the regimes predicted analytically as illustrated in Fig. 8, in particular, in the transition zones. In relation to the nature of the damping, the transition zones are indicated with curved lines. The transition zones correspond to the critical Prandtl number $P_{{\rm r};11}$. The parameter l_{11} also varies with the nature of the waves. If $A \ll 1$, the Coriolis acceleration drives the dynamics and the perturbation generates quasi-inertial waves. If $A \gg 1$, it generates quasi-gravity waves. This is the reason why we can observe two asymptotical curves on the plots. If we come back to the case of inertial waves damped by viscous diffusion (Ogilvie & Lin 2004), l_{11} is proportional to E and does not varies with K. Thus, the peaks become thinner when E decreases, which explains the behaviours observed in Figs. 3 and 4. Appendix B includes colour maps of the relative difference between the prediction of the analytical expression (Eq. (65)) and the real theoretical result computed from the complete formula of $\zeta^{\rm visc}$ (Eq. (38)). They validate the expression of l_{11} in asymptotical regimes and highlight transition zones where it cannot be used.

Thanks to the scaling laws of l_{mn}, it becomes possible to constrain the variations of orbital parameters caused by a resonance of the internal dissipation. For instance, the amplitude Δa for the semi-major axis a of our two-body system (Auclair-Desrotour et al. 2014) verifies the law $\Delta a/a \propto l_p \Xi_p^{1/4} \propto E/\Xi_p^{1/4}$ in the regime of inertial waves damped by viscous friction.

3.3. Amplitude of resonances

The height of a resonant peak also has an influence on the secular evolution of orbital parameters. Thus, we establish an analytical formula of the height H_{mn} of the peaks. Of course, the height of resonances depends on the tidal forcing $\boldsymbol{f}$, which requires that we choose a form for it. Following Ogilvie & Lin (2004), we take perturbation coefficients of the form

$$f_{mn} = i\frac{F}{|m|\,n^2},\ \ g_{mn} = 0,\ \ h_{mn} = 0, \tag{68}$$

and assuming $\{E, K\} \ll \left\{\sqrt{A}, \cos\theta\right\}$, we note that

$$P\left(\omega_{mn}\right) \approx \left[Am^2K + \left(2n^2\cos^2\theta + Am^2\right)E\right]^2, \tag{69}$$

so that we can compute simple expressions for the heights of the peaks of $\zeta^{\rm visc}$ and $\zeta^{\rm therm}$.

3.3.1. Dissipation by viscous friction

First, we look at the resonances of $\zeta^{\rm visc}$. Naming $H_{mn}^{\rm visc}$ their heights, we obtain the relation

$$H_{mn}^{\rm visc} = \frac{8\pi F^2 E}{m^2n^2\left(m^2+n^2\right)^2}\frac{\left(2n^2\cos^2\theta + Am^2\right)\left(n^2\cos^2\theta + Am^2\right)}{\left[Am^2K + \left(2n^2\cos^2\theta + Am^2\right)E\right]^2}, \tag{70}$$

where we recognize the critical numbers A_{mn} and $P_{{\rm r};mn}$ introduced in the previous section, i.e.

$$H_{mn}^{\rm visc} = \frac{8\pi F^2 P_{{\rm r};mn}^2}{m^2n^2\left(m^2+n^2\right)^2}\frac{P_{\rm r}^2\left(A + \frac{1}{2}A_{mn}\right)}{E\left(A + A_{mn}\right)\left(P_{\rm r} + P_{{\rm r};mn}\right)^2}. \tag{71}$$

Thus, the height is characterized by the same asymptotic domains as the width. The borders between them depend on A_{mn} and $P_{{\rm r};mn}$ (Table 3), but the height has different scaling laws. For example, when dissipation is led by viscosity, $H_{mn}^{\rm visc}$ is inversely proportional to the Ekman number contrary to l_{mn}. Therefore,

Table 3. Asymptotic behaviours of the height $H_{mn}^{\rm visc}$ of the resonance of $\zeta^{\rm visc}$ associated with the doublet (m, n).

Domain	$A \ll A_{mn}$	$A \gg A_{mn}$
$P_{\rm r} \gg P_{{\rm r};mn}$	$\dfrac{4\pi F^2 E^{-1}}{m^2 n^2 (m^2+n^2)^2}$	$\dfrac{8\pi F^2 E^{-1}}{m^2 n^2 (m^2+n^2)^2}$
$P_{\rm r} \ll P_{{\rm r};mn}$	$\dfrac{16\pi F^2 n^2 \cos^4\theta A^{-2} E^{-1} P_{\rm r}^2}{m^6 (m^2+n^2)^2}$	$\dfrac{8\pi F^2 E^{-1} P_{\rm r}^2}{m^2 n^2 (m^2+n^2)^2}$

Table 4. Asymptotic behaviours of the height $H_{mn}^{\rm therm}$ of the resonance of $\zeta^{\rm therm}$ associated with the doublet (m, n).

Domain	$A \ll A_{mn}$	$A \gg A_{mn}$
$P_{\rm r} \gg P_{{\rm r};mn}$	$\dfrac{2\pi F^2 E^{-1} P_{\rm r}^{-1}}{n^4 (m^2+n^2)^2 \cos^2\theta}$	$\dfrac{8\pi F^2 A^{-1} E^{-1} P_{\rm r}^{-1}}{m^2 n^2 (m^2+n^2)^2}$
$P_{\rm r} \ll P_{{\rm r};mn}$	$\dfrac{8\pi F^2 \cos^2\theta A^{-2} E^{-1} P_{\rm r}}{m^4 (m^2+n^2)^2}$	$\dfrac{8\pi F^2 A^{-1} E^{-1} P_{\rm r}}{m^2 n^2 (m^2+n^2)^2}$

the heights of the resonances increase if the Ekman number E decreases, which corroborates the plots of Fig. 3. If dissipation is led by heat diffusion, then $H_{mn}^{\rm visc}$ depend on both E and K. Of course, the scaling laws of $H_{mn}^{\rm visc}$ are related to the spectral decomposition of the forcing. This partly determines the decay law of the heights with the wave number k: $H_{mn}^{\rm visc} \propto 1/k^8$. Here, $f_{mn} \propto 1/k^3$, but if f_{mn} did not depend on m and n, then the decay law would be $H_{mn}^{\rm visc} \propto 1/k^2$. Consequently, with the forcing chosen for this study, the height of the resonant peaks rapidly becomes comparable with the non-resonant background. Therefore, few terms $\zeta_{mn}^{\rm visc}$ of the lowest orders are sufficient to plot the spectrum and there is no need to take into account a large number of harmonics to describe the dissipation properly.

In the planet-satellite system studied by Auclair-Desrotour et al. (2014), we can thus write $\Delta a/a$ with these new scaling laws, i.e.

$$\frac{\Delta a}{a} \propto l_p \left(\frac{H_p}{H_{\rm bg}}\right)^{1/4} \propto E^{3/4} H_{\rm bg}^{-1/4}(A, E, K), \tag{72}$$

in the regime of inertial waves damped by viscous friction.

We plot the height of the main resonance $H_{11}^{\rm visc}$ (Fig. 8) as a function of A, E, and K, using the analytical scaling laws (Eq. (70) and Table 3). The maximum of $H_{11}^{\rm visc}$ (Fig. 8, bottom-left panel) results from the inversion of the dependence on E, for $P_{\rm r} \sim P_{{\rm r};11}$. Hence, it highlights the transition zone between viscous friction and thermal damping. As expected, the position of this maximum varies with A until $A \gg 1$, where $P_{{\rm r};11} \approx 1$ asymptotically. We recall that Eq. (70) is relevant for small values of E and K (see Fig. B.1 in Appendix B).

3.3.2. Dissipation by thermal diffusion

An expression of $H_{mn}^{\rm therm}$ of the same form as Eq. (70) can be deduced from Eq. (39),

$$H_{mn}^{\rm therm} = \frac{8\pi K F^2}{n^2 (m^2+n^2)^2} \frac{n^2\cos^2\theta + m^2 A}{\left[A m^2 K + (2n^2\cos^2\theta + A m^2) E\right]^2}, \tag{73}$$

which can also be written as a function of the transition parameters A_{mn} and $P_{{\rm r};mn}$,

$$H_{mn}^{\rm therm} = \frac{8\pi F^2}{m^2 (m^2+n^2)^2} \frac{P_{\rm r}\left(A + \frac{1}{2}A_{mn}\right)}{E (A + A_{mn})^2 (P_{\rm r} + P_{{\rm r};mn})^2}. \tag{74}$$

Thus, the asymptotic regimes of $H_{mn}^{\rm therm}$ correspond to the four zones identified for l_{mn} and $H_{mn}^{\rm visc}$ (see Fig. 7).

3.3.3. Total dissipation

As $\zeta^{\rm visc}$ and $\zeta^{\rm therm}$ have the same resonance eigenfrequencies, and their peaks are superposed. Therefore, when one of the dissipation mechanisms predominates at resonances, the observed peaks are all scaled by the law corresponding to this mechanism. To establish the scaling laws of the total energy, we have to delimit the domains of dissipation by viscous friction, where $H_{mn} \sim H_{mn}^{\rm visc}$, and of dissipation by heat diffusion, where $H_{mn} \sim H_{mn}^{\rm therm}$. Hence, we introduce the ratio ς_{mn},

$$\varsigma_{mn} = \frac{H_{mn}^{\rm visc}}{H_{mn}^{\rm therm}} = P_{\rm r}(A + A_{mn}). \tag{75}$$

The transition zone is characterized by $\varsigma_{mn} \sim 1$, or $P_{\rm r} \sim P_{{\rm r};mn}^{\rm diss}$, where

$$P_{{\rm r};mn}^{\rm diss}(\theta, A) = \frac{1}{A + A_{mn}(\theta)} \tag{76}$$

is the Prandtl number indicating this transition zone. If $P_{\rm r} \ll P_{{\rm r};mn}^{\rm diss}$, then $H_{mn} \sim H_{mn}^{\rm therm}$ (Fig. 9, left panel); otherwise, $H_{mn} \sim H_{mn}^{\rm visc}$. Taking into account the new zones appearing with this condition on $P_{\rm r}$ (Fig. 9, right panel), we obtain the scaling laws for H_{mn}, which are the heights of resonances of the total dissipation, given in Table 5. For the sake of simplicity, we introduce a new Prandtl number,

$$P_{{\rm r};mn}^{\rm reg}(A) = \max\left(P_{{\rm r};mn}^{\rm diss}(A), P_{{\rm r};mn}(A)\right), \tag{77}$$

which separates the regimes where $P_{\rm r}$ intervenes in scaling laws from others.

3.4. The non-resonant background

The height of the non-resonant background $H_{\rm bg}$ is the magnitude of the energy dissipated inside the frequency range $\left[\omega_{\rm inf}, \omega_{\rm sup}\right]$, in non-resonant areas. It only depends on the first term of the sum in the expression of ζ (Eq. 38). Indeed, each mode is related to a typical wavelength that increases when the wave numbers m and n decay. Thus, at the eigenfrequencies $\omega = \omega_{mn}$ ($(m, n) \in \mathbb{N}^2$), the perturbation presents a characteristic pattern of wavelengths $\lambda_h = L/m$ in the x direction and $\lambda_v = L/n$ in the z direction, but it is dominated by the lowest-order pattern $m = n = 1$ in the absence of resonance. If we had $L \sim R$, then our first mode would correspond to the large-scale hydrostatic adjustment of the flow in phase with the perturber, the equilibrium tide, or non-wave-like displacement introduced above (see e.g. Remus et al. 2012a; Ogilvie 2013).

In this framework, the height of the non-resonant background gives us information about the mean dissipation and the smooth component of the tidal quality factor (Q). Therefore, it plays an important role in the secular evolution of planetary systems. Indeed, it is also necessary to compute the sharpness ratio $\Xi \equiv H_{11}/H_{\rm bg}$ intervening in the expression of Δa. Thus, in this subsection, we estimate $H_{\rm bg}$ by computing the term of the main

Table 5. Asymptotic behaviours of the height H_{mn} of the resonance of ζ associated with the doublet (m, n).

Domain	$A \ll A_{mn}$		$A \gg A_{mn}$	
$P_\mathrm{r} \gg P_{\mathrm{r};mn}^{\mathrm{reg}}$	$\dfrac{4\pi F^2 E^{-1}}{m^2 n^2 \left(m^2+n^2\right)^2}$		$\dfrac{8\pi F^2 E^{-1}}{m^2 n^2 \left(m^2+n^2\right)^2}$	
$P_\mathrm{r} \ll P_{\mathrm{r};mn}^{\mathrm{reg}}$	$P_\mathrm{r} \gg P_{\mathrm{r};mn}$	$\dfrac{2\pi F^2 E^{-1} P_\mathrm{r}^{-1}}{n^4 \left(m^2+n^2\right)^2 \cos^2\theta}$	$P_\mathrm{r} \gg P_{\mathrm{r};mn}^{\mathrm{diss}}$	$\dfrac{8\pi F^2 E^{-1} P_\mathrm{r}^2}{m^2 n^2 \left(m^2+n^2\right)^2}$
	$P_\mathrm{r} \ll P_{\mathrm{r};mn}$	$\dfrac{8\pi F^2 \cos^2\theta A^{-2} E^{-1} P_\mathrm{r}}{m^4 \left(m^2+n^2\right)^2}$	$P_\mathrm{r} \ll P_{\mathrm{r};mn}^{\mathrm{diss}}$	$\dfrac{8\pi F^2 A^{-1} E^{-1} P_\mathrm{r}}{m^2 n^2 \left(m^2+n^2\right)^2}$

Notes. Scaling laws correspond to the areas of Fig. 9.

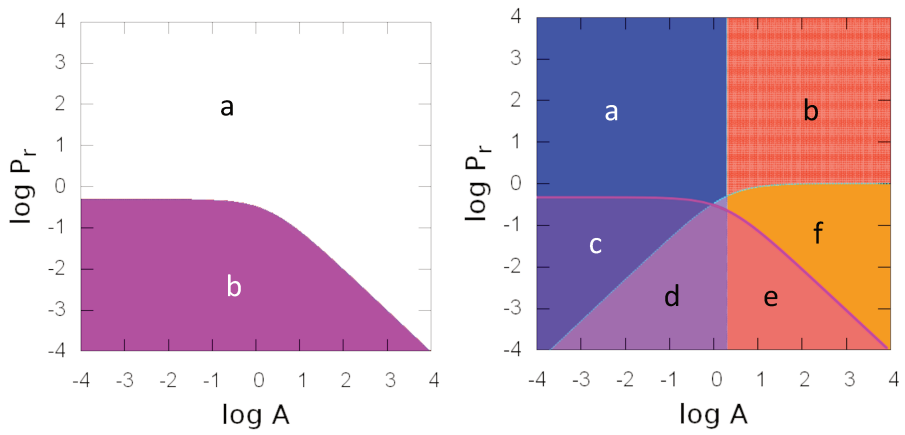


Fig. 9. *Left*: zones of predominances for dissipative mechanisms. In the pink area **b)**, $\zeta^{\mathrm{therm}} \gg \zeta^{\mathrm{visc}}$: the dissipation is mainly due to thermal diffusion. In the white area **a)**, it is led by viscous friction. The transition zone corresponds to $P_\mathrm{r} \approx P_{\mathrm{r};11}^{\mathrm{diss}}$, where $\zeta^{\mathrm{visc}} \sim \zeta^{\mathrm{therm}}$. *Right*: asymptotic domains with the predominance zones. Low Prandtl-number areas of Fig. 7 are divided in sub-areas corresponding to the locally predominating dissipation mechanism. In **a)**, **b)**, and **f)**, $\zeta^{\mathrm{therm}} \ll \zeta^{\mathrm{visc}}$ while in **c)**, **d)**, and **e)**, $\zeta^{\mathrm{therm}} \gg \zeta^{\mathrm{visc}}$.

resonance, ζ_{11}, at the frequency $\omega_{\mathrm{bg}} = (\omega_{11} + \omega_{21})/2$, that can be written

$$\omega_{\mathrm{bg}} = \omega_{11}\left(1 + \varepsilon_{12}\right), \tag{78}$$

with the relative distance between the two peaks,

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\frac{\omega_{21} - \omega_{11}}{\omega_{11}}. \tag{79}$$

Note that if $A = \cos^2\theta$ (critical hyper-resonant case), the characteristic level of the non-resonant background is not defined and $\varepsilon_{12} = 0$. Considering that the contributions of the main peaks are approximately the same, we write the characteristic height of the background, i.e.

$$H_{\mathrm{bg}} \approx 4\zeta_{11}\left(\omega_{\mathrm{bg}}\right). \tag{80}$$

3.4.1. Dissipation by viscous friction

We first focus on the contribution of viscous friction,

$$H_{\mathrm{bg}}^{\mathrm{visc}} \approx 4\zeta_{11}^{\mathrm{visc}}\left(\omega_{\mathrm{bg}}\right). \tag{81}$$

Assuming $\{E, K\} \ll \left\{\sqrt{A}, \cos\theta\right\}$, the previous expression becomes

$$H_{\mathrm{bg}}^{\mathrm{visc}} = 4\pi F^2 E \varepsilon_{12}^2 \frac{\left(A + \cos^2\theta\right)\left[C_{\mathrm{grav}}\left(\varepsilon_{12}\right) A + C_{\mathrm{in}}\left(\varepsilon_{12}\right)\cos^2\theta\right]}{\left(A + \cos^2\theta\right)^3 \varepsilon_{12}^2 + \xi\left(\theta, A, E, K\right)} \tag{82}$$

with

$$\xi\left(\theta, A, E, K\right) = 2\alpha^2\beta^2\left(1 + 4\varepsilon_{12}\right) - 4\alpha\beta\gamma\left(1 + 2\varepsilon_{12}\right) + 2\gamma^2. \tag{83}$$

The functions $C_{\mathrm{in}}\left(\varepsilon_{12}\right)$ and $C_{\mathrm{grav}}\left(\varepsilon_{12}\right)$ are expressed by

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{visc}}\left(\varepsilon_{12}\right) &= \frac{\left(2 + 2\varepsilon_{12} + \varepsilon_{12}^2\right)\left(1 + \varepsilon_{12}\right)^2}{\varepsilon_{12}^2}, \\ C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{visc}}\left(\varepsilon_{12}\right) &= \frac{\left(1 + \varepsilon_{12}\right)^4}{\varepsilon_{12}^2}. \end{aligned} \tag{84}$$

The coefficients β and γ linearly depend on E and K (Eq. (53)). On the contrary, neither the Ekman number nor the dimensionless thermal diffusivity have an influence on ω_{11} and ε_{12}. Therefore, the background linearly varies with the Ekman number if the condition

$$\left|\xi\left(\theta, A, E, K\right)\right| \ll \left(A + \cos^2\theta\right)^3 \varepsilon_{12}^2 \tag{85}$$

is satisfied. To unravel what this implies on the physical parameters, we need to study two asymptotic cases separately:

1. $A \ll \cos^2\theta$ (quasi-inertial waves),
2. $A \gg \cos^2\theta$ (gravito-inertial waves).

By deducing the main eigenfrequency $\omega_{11} = \sqrt{\left(A + \cos^2\theta\right)/2}$ from the dispersion relation (Eq. 25), we compute the relative distance between the two main resonances,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &\approx \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \varepsilon_{\mathrm{in}} \quad \text{if } A \ll \cos^2\theta, \\ \varepsilon_{12} &\approx \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \varepsilon_{\mathrm{grav}} \quad \text{if } A \gg \cos^2\theta. \end{aligned} \tag{86}$$

Table 6. Asymptotic behaviours of the non-resonant background level $H_{\rm bg}^{\rm visc}$ of the spectrum.

$A \ll A_{11}$	$A \gg A_{11}$
$\dfrac{4\pi C_{\rm in}^{\rm visc} F^2 E}{\cos^2\theta}$	$4\pi C_{\rm grav}^{\rm visc} F^2 A^{-1} E$

Notes. The case where $A \ll \cos^2\theta$ ($A \gg \cos^2\theta$) corresponds to quasi-(gravito-)inertial waves.

Thus, the relative distance between ω_{11} and $\omega_{\rm bg}$ belongs to the interval $\left[\varepsilon_{\rm in}, \varepsilon_{\rm grav}\right]$, $\varepsilon_{\rm in}$ and $\varepsilon_{\rm grav}$ being the boundaries corresponding to the asymptotic cases $A \ll \cos^2\theta$ (i.e. the quasi-inertial waves) and $A \gg \cos^2\theta$ (i.e. the gravito-inertial waves), respectively. Numerically, $\varepsilon_{\rm in} \approx -0.183$ and $\varepsilon_{\rm grav} \approx 0.132$ and the asymptotic values of the coefficients $C_{\rm in}^{\rm visc}$ and $C_{\rm grav}^{\rm visc}$ are

$$\begin{aligned} C_{\rm in}^{\rm visc} &= C_{\rm in}^{\rm visc}(\varepsilon_{\rm in}) &= 32.87 \\ C_{\rm grav}^{\rm visc} &= C_{\rm grav}^{\rm visc}\left(\varepsilon_{\rm grav}\right) &= 93.74. \end{aligned} \tag{87}$$

From Eq. (79), we note that the dependence of the non-resonant background on E is linear only if

$$\min\left\{\sqrt{A}, \cos\theta\right\} \gg \max\{E, K\}, \tag{88}$$

which corresponds to the quasi-adiabatic approximation met before and assumed in the whole study. We thus finally obtain the expression of $H_{\rm bg}^{\rm visc}$ for inertial waves and gravity waves (Table 6),

$$H_{\rm bg}^{\rm visc} = 4\pi F^2 E \frac{C_{\rm grav}^{\rm visc} A + C_{\rm in}^{\rm visc}\cos^2\theta}{\left(A + \cos^2\theta\right)^2}. \tag{89}$$

The background does not depend on the Prandtl number under the quasi-adiabatic approximation. Its level is only defined by the ratio $A/\cos^2\theta \sim A/A_{11}$. Hence, the level of the non-resonant background is completely independent of the thermal diffusivity K in both asymptotic regimes. Besides, $H_{\rm bg}^{\rm visc}$ increases with E whereas $H_{mn}^{\rm visc}$ decays.

Thanks to our result for $H_{\rm bg}^{\rm visc}$, we now have a complete scaling law for the magnitude of the variation of the semi-major axis caused by a resonance of the dissipation spectra in the regime of inertial waves damped by viscous friction in a convective planetary or stellar region (Auclair-Desrotour et al. 2014), i.e.

$$\frac{\Delta a}{a} \propto l_p \left(\frac{H_p}{H_{\rm bg}}\right)^{1/4} \propto E^{1/2}. \tag{90}$$

Here, it is interesting to introduce a sharpness ratio Ξ corresponding to the sensitivity of dissipation to the tidal frequency ω. The parameter Ξ is defined as the ratio between the height of the resonance and the background level,

$$\Xi = \frac{H_{11}}{H_{\rm bg}}. \tag{91}$$

Therefore, the sharpness ratio estimates the relative magnitude of the variations of the dissipation due to the main resonant peak and compares the strengths of the dynamical and equilibrium/non-wave-like tides. A high sharpness ratio characterizes a peaked spectrum, and a low sharpness ratio characterizes a smooth dependence of the dissipation on ω. As demonstrated in Auclair-Desrotour et al. (2014), this parameter is important for the dynamical evolution of planet-moon and star-planet systems. Indeed, the variation of orbital parameters is correlated to Ξ, with the evolution of these laters being smooth in absence of resonances and erratic if $\Xi \gg 1$ (Auclair-Desrotour et al. 2014).

Table 7. Asymptotic expressions of the sharpness ratio $\Xi^{\rm visc}$ characterizing the spectrum of dissipation by viscous friction.

Domain	$A \ll A_{11}$	$A \gg A_{11}$
$P_{\rm r} \gg P_{\rm r;11}$	$\dfrac{\cos^2\theta E^{-2}}{4C_{\rm in}^{\rm visc}}$	$\dfrac{AE^{-2}}{2C_{\rm grav}^{\rm visc}}$
$P_{\rm r} \ll P_{\rm r;11}$	$\dfrac{\cos^6\theta A^{-2}E^{-2}P_{\rm r}^2}{C_{\rm in}^{\rm visc}}$	$\dfrac{AE^{-2}P_{\rm r}^2}{2C_{\rm grav}^{\rm visc}}$

We can define Ξ for each of both contributions:

$$\Xi^{\rm visc} = \frac{H_{11}^{\rm visc}}{H_{\rm bg}^{\rm visc}} \quad \text{and} \quad \Xi^{\rm therm} = \frac{H_{11}^{\rm therm}}{H_{\rm bg}^{\rm therm}}. \tag{92}$$

The transition zones of $H_{11}^{\rm visc}$ and $H_{\rm bg}^{\rm visc}$ are the same. Assuming the quasi-adiabatic approximation (Eq. (88)), and considering the analytical expressions of $H_{11}^{\rm visc}$ (Eq. (70)) and $H_{\rm bg}^{\rm visc}$ (Eq. (82)), we write the sharpness ratio:

$$\Xi^{\rm visc} = \frac{1}{2}\frac{\left(2\cos^2 + A\right)\left[\left(A + \cos^2\theta\right)^3 \varepsilon_{12}^2 + \xi(\theta, A, E, K)\right]}{\varepsilon_{12}^2\left[AK + (2\cos^2 + A)E\right]^2\left[C_{\rm in}\cos^2\theta + C_{\rm grav}A\right]}. \tag{93}$$

This expression may be simplified in asymptotic domains (see Fig. 7), where

- $|\xi(\theta, A, E, K)| \ll \left(A + \cos^2\theta\right)^3 \varepsilon_{12}^2$ (see Eq. (85));
- $C_{\rm in}^{\rm visc}(\varepsilon_{12}) = C_{\rm in}^{\rm visc}(\varepsilon_{\rm in}) = C_{\rm in}^{\rm visc}$ (see Eq. (84));
- $C_{\rm grav}^{\rm visc}(\varepsilon_{12}) = C_{\rm grav}^{\rm visc}\left(\varepsilon_{\rm grav}\right) = C_{\rm grav}^{\rm visc}$.

Thus, the sharpness ratio becomes

$$\Xi^{\rm visc} = \frac{1}{2}\frac{\left(2\cos^2 + A\right)\left(A + \cos^2\theta\right)^3}{\left[AK + (2\cos^2 + A)E\right]^2\left[C_{\rm in}^{\rm visc}\cos^2\theta + C_{\rm grav}^{\rm visc}A\right]}. \tag{94}$$

Like the height of the resonances ($H_{mn}^{\rm visc}$), $\Xi^{\rm visc}$ obviously presents symmetrical behaviours for gravito-inertial waves (Table 7). It is inversely proportional to the square of the dominating dimensionless diffusivity, E (for $P_{\rm r} \gg P_{\rm r;11}$) or K (for $P_{\rm r} \ll P_{\rm r;11}$). Hence, the sensitivity of tidal dissipation to the frequency ω increases quadratically when the diffusivities decrease (Fig. 10, bottom-left and bottom-right panels). Likewise, Ξ increases with A quadratically when $A \gg A_{11}$. If $A \ll A_{11}$, then it is related to the colatitude θ. One notices that $\Xi_{\rm visc}$ does not depends on the forcing at all. Neither the amplitude F of the force, nor the form of the perturbation coefficients $f_{mn} \propto 1/|m|n^2$ intervene in the expressions of Eq. (93) and (94). Given the link existing between the sharpness ratio and the tidal quality factor Q modelling dissipation discussed above, we can deduce the qualitative evolution of orbital parameters (Eq. (90)). Indeed, if a planet is composed of a fluid with a large viscosity, the variation

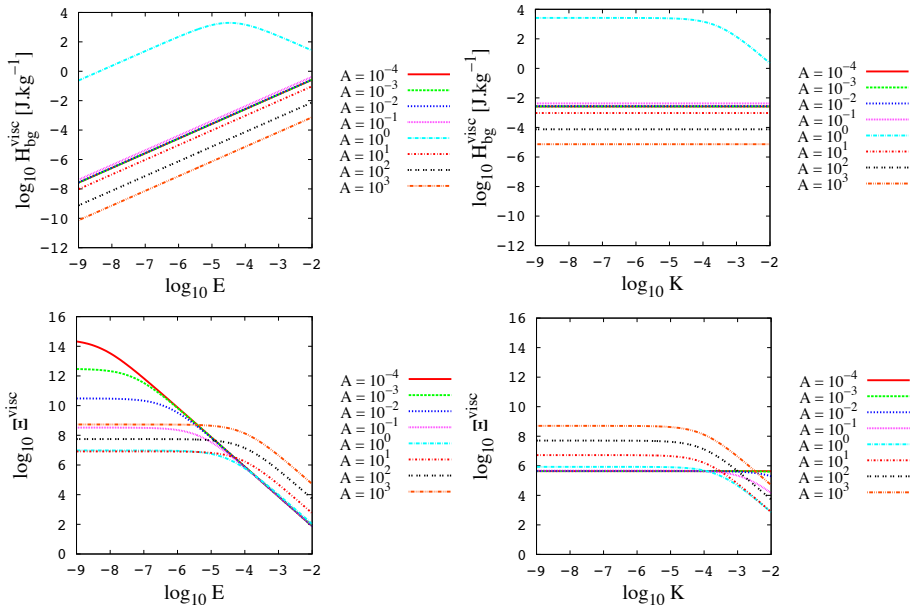


Fig. 10. Non-resonant background level $H_{\rm bg}^{\rm visc}$ and sharpness ratio $\Xi^{\rm visc}$ as a function of E (with $K = 10^{-4}$) and K (with $E = 10^{-4}$) for different values of A (in logarithmic scales). *Top left*: $H_{\rm bg}^{\rm visc} - E$. *Top right*: $H_{\rm bg}^{\rm visc} - K$. *Bottom left*: $\Xi^{\rm visc} - E$. *Bottom right*: $\Xi^{\rm visc} - K$.

of the semi-major axis of its companion is smooth. In the opposite case of a low viscosity planet, it becomes strongly erratic, with intermittent rapid changes of the orbit due to resonances (e.g Auclair-Desrotour et al. 2014).

3.4.2. Dissipation by thermal diffusion

Similar to $H_{\rm bg}^{\rm visc}$, the height of the non-resonant background of dissipation by heat diffusion is assumed to be approximately

$$H_{\rm bg}^{\rm therm} \approx 4\zeta_{11}^{\rm therm}\left(\omega_{\rm bg}\right). \tag{95}$$

Assuming the quasi-adiabatic approximation, we can write the following:

$$H_{\rm bg}^{\rm therm} = 4\pi F^2 E P_{\rm r}^{-1} \frac{\left(A+\cos^2\theta\right)(1+\varepsilon_{12})^2}{\left(A+\cos^2\theta\right)^3 \varepsilon_{12}^2 + \xi\left(\theta, A, E, K\right)}, \tag{96}$$

where ξ has been defined above (see Eq. (83)). We introduce the function $C^{\rm therm}$ of ε_{12},

$$C^{\rm therm}\left(\varepsilon_{12}\right) = \left(1+\frac{1}{\varepsilon_{12}}\right)^2, \tag{97}$$

which is a constant in asymptotical regimes,

$$\begin{aligned} C_{\rm in}^{\rm therm} &= C^{\rm therm}\left(\varepsilon_{\rm in}\right) &= 19.73 \\ C_{\rm grav}^{\rm therm} &= C^{\rm therm}\left(\varepsilon_{\rm grav}\right) &= 73.10. \end{aligned} \tag{98}$$

When $\left|\log\left(A/A_{11}\right)\right| \gg 1$, the height of the peaks can be simply expressed:

$$H_{\rm bg}^{\rm therm} \approx \frac{4\pi F^2 E P_{\rm r}^{-1}}{\left(A+\cos^2\theta\right)^2} C^{\rm therm}\left(\varepsilon_{12}\right), \tag{99}$$

or by the interpolating function, i.e.

$$H_{\rm bg}^{\rm therm} \approx \frac{4\pi F^2 E P_{\rm r}^{-1}}{\left(A+\cos^2\theta\right)^3}\left(C_{\rm grav}^{\rm therm} A + C_{\rm in}^{\rm therm}\cos^2\theta\right). \tag{100}$$

Considering the asymptotic regimes, we obtain the scaling laws given in Table 8.

Table 8. Asymptotic behaviours of the non-resonant background level $H_{\rm bg}^{\rm therm}$ of the dissipation by heat diffusion.

$A \ll A_{11}$	$A \gg A_{11}$
$\dfrac{4\pi C_{\rm in}^{\rm therm} F^2}{\cos^4\theta} E P_{\rm r}^{-1}$	$4\pi C_{\rm grav}^{\rm therm} F^2 A^{-2} E P_{\rm r}^{-1}$

Notes. The case where $A \ll A_{11}$ ($A \gg A_{11}$) corresponds to quasi-(gravito-)inertial waves.

The sharpness ratio of dissipation by heat diffusion can be written

$$\Xi^{\rm therm} = \frac{1}{4}\frac{P_{\rm r}^2\left[\left(A+\frac{1}{2}A_{11}\right)^3\varepsilon_{12} + \xi\left(\theta, A, E, K\right)\right]}{E^2\left(A+A_{11}\right)^2\left(P_{\rm r}+P_{\rm r;11}\right)^2\left(1+\varepsilon_{12}\right)^2}, \tag{101}$$

expression, which can be simplified to

$$\Xi^{\rm therm} = \frac{1}{4}\frac{P_{\rm r}^2\left(A+\frac{1}{2}A_{11}\right)^3}{E^2\left(A+A_{11}\right)^2\left(P_{\rm r}+P_{\rm r;11}\right)^2 C^{\rm therm}\left(\varepsilon_{12}\right)} \tag{102}$$

in asymptotic regions where $\left|\log\left(A/A_{11}\right)\right| \gg 1$, or to

$$\Xi^{\rm therm} = \frac{1}{4}\frac{P_{\rm r}^2\left(A+\frac{1}{2}A_{11}\right)^3}{E^2\left(A+A_{11}\right)\left(P_{\rm r}+P_{\rm r;11}\right)^2\left(C_{\rm grav}^{\rm therm} A + C_{\rm in}^{\rm therm} A_{11}\right)}, \tag{103}$$

if we use the asymptotic interpolation of the function $C^{\rm therm}$

$$C^{\rm therm}\left(\varepsilon_{12}\left(A\right)\right) \sim \frac{C_{\rm grav}^{\rm therm} A + C_{\rm in}^{\rm therm} A_{11}}{A+A_{11}}. \tag{104}$$

Using Eq. (103), we establish the asymptotic scaling laws given in Table 9. These laws are the same as those of Table 7, which means that the variations of the energy with the tidal frequency do not depend on the dissipation mechanism in our local model. Therefore, the number of peaks, which are deduced from the sharpness ratio, have the same scaling laws in both zones of Fig. 9 (left panel).

Table 9. Asymptotic expressions of the sharpness ratio $\Xi^{\rm therm}$ characterizing the spectrum of dissipation by heat diffusion.

Domain	$A \ll A_{11}$	$A \gg A_{11}$
$P_{\rm r} \gg P_{\rm r;11}$	$\dfrac{\cos^2\theta E^{-2}}{8C_{\rm in}^{\rm therm}}$	$\dfrac{AE^{-2}}{2C_{\rm grav}^{\rm therm}}$
$P_{\rm r} \ll P_{\rm r;11}$	$\dfrac{\cos^6\theta A^{-2}E^{-2}P_{\rm r}^2}{2C_{\rm in}^{\rm therm}}$	$\dfrac{AE^{-2}P_{\rm r}^2}{2C_{\rm grav}^{\rm therm}}$

Table 10. Asymptotic behaviours of the non-resonant background level $H_{\rm bg}$ of the total dissipation.

Domain	$A \ll A_{11}$	$A \gg A_{11}$
$P_{\rm r} \gg P_{\rm r;11}^{\rm diss}$	$\dfrac{4\pi C_{\rm in}^{\rm visc}F^2E}{\cos^2\theta}$	$4\pi C_{\rm grav}^{\rm visc}F^2A^{-1}E$
$P_{\rm r} \ll P_{\rm r;11}^{\rm diss}$	$\dfrac{4\pi C_{\rm in}^{\rm therm}F^2}{\cos^4\theta}EP_{\rm r}^{-1}$	$4\pi C_{\rm grav}^{\rm therm}F^2A^{-2}EP_{\rm r}^{-1}$

Notes. The case where $A \ll A_{11}$ ($A \gg A_{11}$) corresponds to quasi-(gravito-)inertial waves.

3.4.3. Total dissipation

The background level of ζ, denoted $H_{\rm bg}$, is the sum of $H_{\rm bg}^{\rm visc}$ and $H_{\rm bg}^{\rm therm}$. Given that $C_{\rm in}^{\rm therm} \sim C_{\rm in}^{\rm visc}$ and $C_{\rm grav}^{\rm therm} \sim C_{\rm grav}^{\rm visc}$, the ratio of the backgrounds is equivalent to the one of the heights,

$$\frac{H_{\rm bg}^{\rm visc}}{H_{\rm bg}^{\rm therm}} \sim \varsigma_{11}, \tag{105}$$

and we express scaling laws of $H_{\rm bg}$ in Table 10 for the regimes identified in Fig. 9 (left panel).

The asymptotic behaviours of the global sharpness ratio given in Table 11 are directly deduced from Tables 7 and 9. We notice that $\Xi^{\rm visc} \sim \Xi^{\rm therm}$ for all regimes. Hence, $\Xi \sim \Xi^{\rm visc}$ and Table 11 can be approximated by Table 7.

3.5. Number of resonant peaks

In spite of the theoretically large number of resonances allowed by the condition given in Eq. (48) (see also Fig. 5), the only effective resonant peaks are those that exceed the level of the non-resonant background $H_{\rm bg}$ (Figs. 3 and 4) given by Eq. (89) and (100) (see also the discussion in Rieutord & Valdettaro 2010). This tends to smooth out the variations of the quality factor Q and the resulting evolution of the orbital parameters of a star-planet/planet-satellite system. Indeed, the resonances of highest orders are absorbed in the mean dissipation level of the resonant frequency range. The harmonics thus have to match a criterion to appear in the dissipation spectrum. This criterion simply corresponds to the inequality

$$H_{mn} > H_{\rm bg}, \tag{106}$$

where H_{mn} is given by Eqs. (71) and (74). The approximate wave number k introduced before allows us to compute the typical order of the smallest peaks $k_{\rm c}$. As noted before, $\Xi \sim \Xi^{\rm visc} \sim \Xi^{\rm therm}$, which implies that $k_{\rm c} \sim k_{\rm c}^{\rm visc} \sim k_{\rm c}^{\rm therm}$. We replace the index m and n of the height H_{mn} by k and use Eq. (106) to obtain

$$k_{\rm c}^{\rm visc} \sim \left\{\frac{1}{2}\frac{\left(2\cos^2\theta + A\right)\left[\left(A+\cos^2\theta\right)^3\varepsilon_{12}^2 + \xi\left(\theta, A, E, K\right)\right]}{\varepsilon_{12}^2\left[AK + \left(2\cos^2 + A\right)E\right]^2\left[C_{\rm in}\cos^2\theta + C_{\rm grav}A\right]}\right\}^{\frac{1}{8}}. \tag{107}$$

This expression can be simplified in asymptotic cases. Assuming Eq. (88), it becomes

$$k_{\rm c}^{\rm visc} \sim \left\{\frac{1}{2}\frac{\left(2\cos^2\theta + A\right)\left(A+\cos^2\theta\right)^3}{\left[AK + \left(2\cos^2 + A\right)E\right]^2\left[C_{\rm in}^{\infty}\cos^2\theta + C_{\rm grav}^{\infty}A\right]}\right\}^{\frac{1}{8}}. \tag{108}$$

In Table 12, we give the scaling laws of $k_{\rm c}$ for the different asymptotic regimes. Taking resonances beyond this wave number into account does not change the global shape of the dissipation spectrum. In fact, in the situations corresponding to Figs. 3 and 4, there is no need to go beyond $k{\sim}10$ (Fig. A.1, top-left and top-right panels). This is amply sufficient to model the dissipation realistically. The exponent $1/8$ of $k_{\rm c}$ in Eqs. (107) and (108) is related to the spectral decomposition of the perturbing force.

The wave number $k_{\rm c}$ gives us the number of peaks $N_{k_{\rm c}}$ (Eq. (61)), which is of great interest. As described above, we can assume $N_{k_{\rm c}} \propto k_{\rm c}^2$ (Table 1 and Fig. 6). Thus, we immediately deduce the scaling laws of $N_{\rm kc}$ (Table 13) from those of the rank of the harmonics (Table 12) in the four asymptotic regimes (see Fig. 7). In the same way as $k_{\rm c}$, $N_{k_{\rm c}} \sim N_{k_{\rm c}}^{\rm visc} \sim N_{k_{\rm c}}^{\rm therm}$. $N_{k_{\rm c}}^{\rm visc}$ is given by the analytical expression

$$N_{k_{\rm c}}^{\rm visc} \sim \left\{\frac{1}{2}\frac{\left(2\cos^2\theta + A\right)\left[\left(A+\cos^2\theta\right)^3\varepsilon_{12}^2 + \xi\left(\theta, A, E, K\right)\right]}{\varepsilon_{12}^2\left[AK + \left(2\cos^2 + A\right)E\right]^2\left[C_{\rm in}\cos^2\theta + C_{\rm grav}A\right]}\right\}^{\frac{1}{4}}, \tag{109}$$

which is asymptotically equivalent to

$$N_{k_{\rm c}}^{\rm visc} \sim \left\{\frac{1}{2}\frac{\left(2\cos^2\theta + A\right)\left(A+\cos^2\theta\right)^3}{\left[AK + \left(2\cos^2 + A\right)E\right]^2\left[C_{\rm in}^{\infty}\cos^2\theta + C_{\rm grav}^{\infty}A\right]}\right\}^{\frac{1}{4}}. \tag{110}$$

Therefore, $N_{k_{\rm c}} \propto E^{-1/2}$ for inertial waves damped by viscous diffusion (see Fig. 11, left and right panels). In this regime, the number of peaks decays when the Ekman number increases as can be observed in Fig. 3. The critical degree $k_{\rm c}$, the number of resonances $N_{k_{\rm c}}$ and the sharpness ratio Ξ are related to the others by the scaling equality

$$N_{k_{\rm c}} \sim k_{\rm c}^2 \sim \Xi^{\frac{1}{4}}, \tag{111}$$

in which, as pointed out above, the exponent $1/4$ depends on the form of the coefficients of the perturbation. $k_{\rm c}$, $N_{k_{\rm c}}$, and Ξ all measure the smoothness of the dissipation spectrum. As the change rate of orbital parameters is proportional to the energy dissipated inside the bodies, the evolution of an orbital system is regular if they are small, and otherwise erratic.

Table 11. Scaling laws of the sharpness ratio of ζ, corresponding to the areas of Fig. 9.

Domain	$A \ll A_{11}$		$A \gg A_{11}$	
$P_\mathrm{r} \gg P_{\mathrm{r};11}^{\mathrm{reg}}$	$\dfrac{\cos^2\theta E^{-2}}{4C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{visc}}}$		$\dfrac{AE^{-2}}{2C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{visc}}}$	
$P_\mathrm{r} \ll P_{\mathrm{r};11}^{\mathrm{reg}}$	$P_\mathrm{r} \gg P_{\mathrm{r};11}$	$\dfrac{\cos^2\theta E^{-2}}{8C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{therm}}}$	$P_\mathrm{r} \gg P_{\mathrm{r};11}^{\mathrm{diss}}$	$\dfrac{AE^{-2}P_\mathrm{r}^2}{2C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{visc}}}$
	$P_\mathrm{r} \ll P_{\mathrm{r};11}$	$\dfrac{\cos^6\theta A^{-2}E^{-2}P_\mathrm{r}^2}{2C_{\mathrm{in}}^{\mathrm{therm}}}$	$P_\mathrm{r} \ll P_{\mathrm{r};11}^{\mathrm{diss}}$	$\dfrac{AE^{-2}P_\mathrm{r}^2}{2C_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{therm}}}$

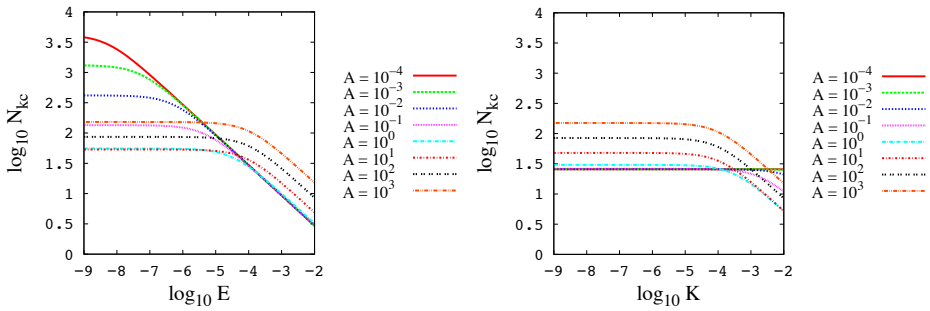


Fig. 11. Number of resonances N_{k_c} as a function of E (with $K = 10^{-4}$) and K (with $E = 10^{-4}$) for different values of A (in logarithmic scales). *Left*: $N_{k_\mathrm{c}} - E$. *Right*: $N_{k_\mathrm{c}} - K$.

Table 12. Asymptotic behaviours of the maximal order of noticeable resonances k_c.

Domain	$A \ll A_{11}$	$A \gg A_{11}$
$P_\mathrm{r} \gg P_{\mathrm{r};11}$	$k_\mathrm{c} \sim \left(\dfrac{\cos^2\theta}{4C_{\mathrm{in}}^{\infty}E^2}\right)^{\frac{1}{8}}$	$k_\mathrm{c} \sim \left(\dfrac{A}{2C_{\mathrm{grav}}^{\infty}E^2}\right)^{\frac{1}{8}}$
$P_\mathrm{r} \ll P_{\mathrm{r};11}$	$k_\mathrm{c} \sim \left(\dfrac{\cos^6\theta}{C_{\mathrm{in}}^{\infty}A^2E^2P_\mathrm{r}^{-2}}\right)^{\frac{1}{8}}$	$k_\mathrm{c} \sim \left(\dfrac{A}{2C_{\mathrm{grav}}^{\infty}E^2P_\mathrm{r}^{-2}}\right)^{\frac{1}{8}}$

Table 13. Asymptotic behaviours of the number of peaks $N_{k_\mathrm{c}}^{\mathrm{visc}}$.

Domain	$A \ll A_{11}$	$A \gg A_{11}$
$P_\mathrm{r} \gg P_{\mathrm{r};11}$	$N_{k_\mathrm{c}} \sim \left(\dfrac{\cos^2\theta}{4C_{\mathrm{in}}^{\infty}E^2}\right)^{\frac{1}{4}}$	$N_{k_\mathrm{c}} \sim \left(\dfrac{A}{2C_{\mathrm{grav}}^{\infty}E^2}\right)^{\frac{1}{4}}$
$P_\mathrm{r} \ll P_{\mathrm{r};11}$	$N_{k_\mathrm{c}} \sim \left(\dfrac{\cos^6\theta}{C_{\mathrm{in}}^{\infty}A^2E^2P_\mathrm{r}^{-2}}\right)^{\frac{1}{4}}$	$N_{k_\mathrm{c}} \sim \left(\dfrac{A}{2C_{\mathrm{grav}}^{\infty}E^2P_\mathrm{r}^{-2}}\right)^{\frac{1}{4}}$

Notes. The same scaling laws are obtained for N_{k_c}.

3.6. Super-adiabaticity ($N^2 < 0$)

The expression of ζ^{diss} (Eq. (38)) allows us to compute dissipation frequency spectra if $N^2 < 0$, which corresponds to super-adiabaticity established by convection. Figure 12 shows how the spectrum of the energy dissipated by viscous friction evolves when the magnitude of an imaginary Brunt-Väisälä frequency increases. The graphs plotted correspond to pure inertial waves. We do not study the particular scaling laws describing their properties, which are obviously not the same as those found for classical configurations. Nevertheless, we can observe that strong values of $|A|$ tend to flatten the spectrum. The height of the resonant peaks and the level of the background both decay. For example, the dissipation varies smoothly with the frequency when $|A| = 10^2$ contrary to the case of positive N^2. This situation will be studied in detail in a forthcoming work.

4. Discussion

Thanks to the analytical expression of the dissipated energy (Eq. (38)), we have been able to compute the hydrodynamical scaling laws that link the properties of the dissipation to the dynamics of the fluid. They are summarized in Table 14 and show that the related dependence of the dissipation onto the tidal frequency (ω) and the dimensionless characteristic numbers of the fluid (A, E and P_r) is tightly bound to the regime of tidal waves. In particular, they allow us to explain the tendencies observed in the spectra presented by Ogilvie & Lin (2004). For example, we found the number of resonances grows if the Ekman number decreases in the regime of inertial waves dissipated by viscous friction (see Fig. 3). Now, we derive laws for our local model, which demonstrate that it scales as $N_{k_\mathrm{c}} \propto E^{-1/2}$. Likewise, the height of the peaks has been analytically proven to be inversely proportional to E, contrary to the level of the non-resonant background for which we obtain $H_\mathrm{bg} \propto E$. This explains why variations of the tidal frequency ω strongly impact the dissipation when E tends to zero. Now, to understand how the regime of the waves determines the properties of the spectra, we have focussed, for instance, on the sharpness ratio Ξ. Table 14 shows that this number always increases when the dominant dimensionless diffusivity, E or K, decreases. The difference between inertial waves and gravito-inertial waves resides in the linear dependence on the stratification parameter A. A comparison like this can be done for any other property. In the light of the scaling laws, we identify the parameters that will have a real impact on the viscous dissipation and, therefore, through the quality factor Q, on the long-term evolution of planetary systems.

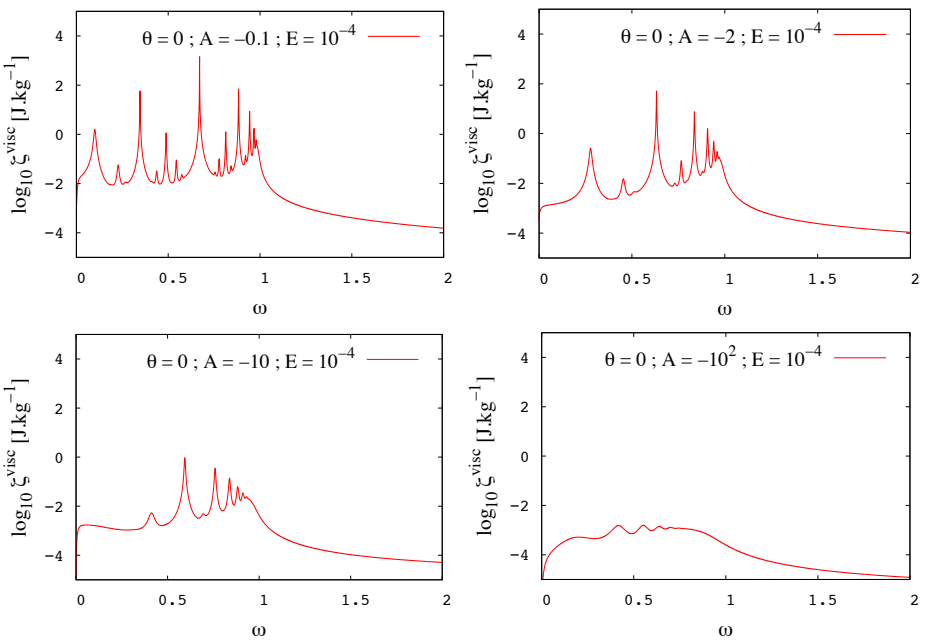


Fig. 12. Spectra of $\zeta^{\rm visc}$ in the case of pure inertial waves ($E = 10^{-4}$ and $K = 0$) for $A < 0$. *Top left*: $A = -0.1$. *Top right*: $A = -2$. *Bottom left*: $A = -10$. *Bottom right*: $A = -100$.

Table 14. Scaling laws for the properties of the energy dissipated in the different asymptotic regimes.

Domain	$A \ll A_{11}$			$A \gg A_{11}$		
$P_{\rm r} \gg P^{\rm reg}_{\rm r;11}$		$l_{mn} \propto E$	$\omega_{mn} \propto \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \cos\theta$		$l_{mn} \propto E$	$\omega_{mn} \propto \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \sqrt{A}$
		$H_{mn} \propto E^{-1}$	$N_{\rm kc} \propto E^{-1/2}$		$H_{mn} \propto E^{-1}$	$N_{\rm kc} \propto A^{1/4} E^{-1/2}$
		$H_{\rm bg} \propto E$	$\Xi \propto E^{-2}$		$H_{\rm bg} \propto A^{-1} E$	$\Xi \propto A E^{-2}$
$P_{\rm r} \ll P^{\rm reg}_{\rm r;11}$	$P_{\rm r} \gg P_{\rm r;11}$	$l_{mn} \propto E$	$\omega_{mn} \propto \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \cos\theta$	$P_{\rm r} \gg P^{\rm diss}_{\rm r;11}$	$l_{mn} \propto E P_{\rm r}^{-1}$	$\omega_{mn} \propto \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \sqrt{A}$
		$H_{mn} \propto E^{-1} P_{\rm r}^{-1}$	$N_{\rm kc} \propto E^{-1/2}$		$H_{mn} \propto E^{-1} P_{\rm r}^{2}$	$N_{\rm kc} \propto A^{1/4} E^{-1/2} P_{\rm r}^{1/2}$
		$H_{\rm bg} \propto E P_{\rm r}^{-1}$	$\Xi \propto E^{-2}$		$H_{\rm bg} \propto A^{-1} E$	$\Xi \propto A E^{-2} P_{\rm r}^{2}$
	$P_{\rm r} \ll P_{\rm r;11}$	$l_{mn} \propto A E P_{\rm r}^{-1}$	$\omega_{mn} \propto \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \cos\theta$	$P_{\rm r} \ll P^{\rm diss}_{\rm r;11}$	$l_{mn} \propto E P_{\rm r}^{-1}$	$\omega_{mn} \propto \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \sqrt{A}$
		$H_{mn} \propto A^{-2} E^{-1} P_{\rm r}$	$N_{\rm kc} \propto A^{-1/2} E^{-1/2} P_{\rm r}^{1/2}$		$H_{mn} \propto A^{-1} E^{-1} P_{\rm r}$	$N_{\rm kc} \propto A^{1/4} E^{-1/2} P_{\rm r}^{1/2}$
		$H_{\rm bg} \propto E P_{\rm r}^{-1}$	$\Xi \propto A^{-2} E^{-2} P_{\rm r}^{2}$		$H_{\rm bg} \propto A^{-2} E P_{\rm r}^{-1}$	$\Xi \propto A E^{-2} P_{\rm r}^{2}$

Notes. $P^{\rm diss}_{\rm r;11}$ indicates the transition zone between a dissipation led by viscous friction and a dissipation led by heat diffusion. The parameter A_{11} indicates the transition between tidal inertial and gravity waves.

5. Conclusion and perspectives

Through a local approach, we have studied the physics of tidal gravito-inertial waves in stars and in fluid planetary regions. Their viscous and thermal dissipation is one of the main contributors to the secular dynamics of spins and orbits. More precisely, it determines the so-called tidal quality factor $Q(\chi)$ intervening in dynamics (Goldreich & Soter 1966; Auclair-Desrotour et al. 2014). This factor decreases when the dissipated tidal kinetic energy increases. Indeed, for an ideal elastic body, it takes very high values and the architecture of the orbital system is weakly affected by tides. In constrast, if the body is the seat of a strong dissipation, the energy dissipated becomes important, and the values of Q are smaller and systems evolve because of tides. This strong link between the secular evolution of a planetary system and tidal dissipation in their components therefore motivates studies to understand the dependence of tidal dissipation on their internal structure and dynamics.

In the case of celestial bodies constituted of fluids, previous works highlighted complex behaviour (e.g. Zahn 1975; Webb 1980; Ogilvie & Lin 2004, 2007). Indeed, liquid and gas layers do not dissipate energy like solid icy and rocky layers. The corresponding quality factor Q strongly varies as a function of forcing frequencies, fluid parameters (i.e. rotation, stratification, and diffusivities), the geometry of the fluid container and boundary conditions, and that factor can vary over several orders of magnitude. This has important consequences for the evolution of spins and orbits (e.g. Witte & Savonije 1999, Auclair-Desrotour et al. 2014). In this study, the dissipation caused by viscous friction and thermal diffusion has been estimated in a local Cartesian

section of a rotating body to understand and quantify these dependences in the whole domain of parameters relevant in stars and planets; in this framework, the Cartesian fluid box complements global models (Ogilvie 2005; Jouve & Ogilvie 2014; Barker & Lithwick 2013, 2014). The equations of momentum, mass conservation, and heat transport are solved analytically with solutions expanded in periodic Fourier series. This approach yields the following conclusions:

- Tidal dissipation resulting from viscous friction and thermal diffusion is highly resonant. Gravito-inertial waves are excited by tides at identified frequencies belonging to the interval $\left[\chi_{\rm inf}, \chi_{\rm sup}\right]$, where $\chi_{\rm inf}$ and $\chi_{\rm sup}$ are in a first approximation the inertial (2Ω) and the Brunt-Väisälä (N) frequencies (for more precise boundaries, see Eq. 28 and Gerkema & Shrira 2005a). Thus, the fluid behaves like a bandpass filter. Inside the allowed frequency range, a batch of resonances can be excited by tides. Outside, the dissipation is weaker and varies smoothly with the forcing frequency that corresponds to the so-called equilibrium or non-wave-like tide (Remus et al. 2012a; Ogilvie 2013). In the resonant regime, a typical dissipation spectrum presents an organized structure of peaks, which have different sizes and properties. These depend, on the one hand, on the spectral form of the forcing, and in particular, on the amplitude of the harmonics, which explains the fractal pattern of the studied case. On the other hand, they are narrowly bound to the fluid parameters: rotation (Ω), stratification (N), thermal diffusivity (κ), and viscosity (ν).
- There are four asymptotic regimes for tidal waves, characterized by the frequency ratio A and the Prandtl number $P_{\rm r}$, and the positions of the transition borders are expressed as functions of the fluid parameters. The case when $A \ll 1$ corresponds to quasi-inertial waves. They are mainly driven by the Coriolis acceleration even when $N^2 > 0$. If $A \gg 1$, then quasi-gravity waves are excited, the Archimedean force being predominant on the Coriolis term. Besides, depending on the value of the Prandtl number $P_{\rm r}$, the dissipation is driven either by viscous friction ($P_{\rm r} \gg P_{\rm r;11}$) or by thermal diffusion ($P_{\rm r} \ll P_{\rm r;11}$).
- For each of these asymptotic behaviours, all the properties of the dissipation spectrum can be expressed as functions of the fluid parameters: the positions, widths at mid-height, heights and number of resonances, the level of the non-resonant background, and the sharpness ratio. These scaling laws, derived analytically from the model, can be used as zero-order approaches to constrain the resulting rotational and orbital dynamics. In this context, they constitute a tool to explore the physics of dissipation and offer a first basis to validate the results obtained from direct numerical simulations and global models. For instance, they can be used to compute scaling laws for the turbulent convective dissipation of tidal inertial waves in the convective envelope of stars and giant planets as a function of their rotation (Mathis et al. 2014a).

In a near future, the method applied in this work will be extended to other dissipative systems, for example, with differential rotation (Baruteau & Rieutord 2013) or stratified convection (Leconte & Chabrier 2012). Moreover, we will include magnetic field and take into account the corresponding Ohmic dissipation in addition to viscous and thermal diffusions (e.g. Barker & Lithwick 2014). Tidal waves will become magneto-gravito-inertial waves (Mathis & de Brye 2011). This will introduce new fluid parameters (the Alfvén frequency and the Elsasser and magnetic Prandtl numbers), new asymptotic behaviours, and the corresponding scaling laws. Finally, non-linear interactions between tidal waves will be studied and characterized (e.g. Galtier 2003; Sen et al. 2012; Sen 2013; Barker & Lithwick 2013).

Acknowledgements. The authors are grateful to the referee and the editor for their detailed review, which has allowed to improve the paper. This work was supported by the French Programme National de Planétologie (CNRS/INSU), the CNES-CoRoT grant at CEA-Saclay, the "Axe fédérateur Etoile" of Paris Observatory Scientific Council, and the International Space Institute (ISSI; team ENCELADE 2.0).

References

Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., et al. 2012, ApJ, 757, 18
Alexander, M. E. 1973, Ap&SS, 23, 459
Auclair-Desrotour, P., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2014, A&A, 561, L7
Barker, A. J., & Lithwick, Y. 2013, MNRAS, 435, 3614
Barker, A. J., & Lithwick, Y. 2014, MNRAS, 437, 305
Baruteau, C., & Rieutord, M. 2013, J. Fluid Mechanics, 719, 47
Berthomieu, G., Gonczi, G., Graff, P., Provost, J., & Rocca, A. 1978, A&A, 70, 597
Bolmont, E., Raymond, S. N., Leconte, J., & Matt, S. P. 2012, A&A, 544, A124
Braviner, H. J., & Ogilvie, G. I. 2015, MNRAS, 447, 1141
Cebron, D., Le Bars, M., Moutou, C., & Le Gal, P. 2012, A&A, 539, A78
Cébron, D., Bars, M. L., Gal, P. L., et al. 2013, Icarus, 226, 1642
Correia, A. C. M., & Laskar, J. 2003, J. Geophys. Res. (Planets), 108, 5123
Correia, A. C. M., Levrard, B., & Laskar, J. 2008, A&A, 488, L63
Correia, A. C. M., Boué, G., Laskar, J., & Rodríguez, A. 2014, A&A, 571, A50
Cowling, T. G. 1941, MNRAS, 101, 367
Darwin, G. H. 1879, Roy. Soc. London Proc. Ser. I, 30, 1
Efroimsky, M. 2012, ApJ, 746, 150
Efroimsky, M., & Lainey, V. 2007, J. Geophys. Res. (Planets), 112, 12003
Egbert, G. D., & Ray, R. D. 2000, Nature, 405, 775
Egbert, G. D., & Ray, R. D. 2001, J. Geophys. Res., 106, 22475
Emelyanov, N. V., & Nikonchuk, D. V. 2013, MNRAS, 436, 3668
Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Steffen, J. H., et al. 2012, ApJ, 750, 114
Ferraz-Mello, S. 2013, Celes. Mech. Dyn. Astron., 116, 109
Galtier, S. 2003, Phys. Rev. E, 68, 015301
Gerkema, T., & Shrira, V. I. 2005a, J. Fluid Mech., 529, 195
Gerkema, T., & Shrira, V. I. 2005b, J. Geophys. Res. (Oceans), 110, 1003
Goldreich, P., & Keeley, D. A. 1977, ApJ, 212, 243
Goldreich, P., & Soter, S. 1966, Icarus, 5, 375
Greenberg, R. 2009, ApJ, 698, L42
Hut, P. 1981, A&A, 99, 126
Jacobson, R. A. 2010, AJ, 139, 668
Jouve, L., & Ogilvie, G. I. 2014, J. Fluid Mech., 745, 223
Kaula, W. M. 1964, Rev. Geophys. Space Phys., 2, 661
Kelvin, L. 1863, Treatise on Natural Philosophy, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 2, 837
Konopliv, A. S., & Yoder, C. F. 1996, Geophys. Res. Lett., 23, 1857
Konopliv, A. S., Asmar, S. W., Folkner, W. M., et al. 2011, Icarus, 211, 401
Lainey, V., Dehant, V., & Pätzold, M. 2007, A&A, 465, 1075
Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, Nature, 459, 957
Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, ApJ, 752, 14
Laskar, J., Boué, G., & Correia, A. C. M. 2012, A&A, 538, A105
Leconte, J., & Chabrier, G. 2012, A&A, 540, A20
Leconte, J., Chabrier, G., Baraffe, I., & Levrard, B. 2010, A&A, 516, A64
Love, A. E. H. 1911, Some Problems of Geodynamics (Cambridge University Press)
MacDonald, G. J. F. 1964, Rev. Geophys. Space Phys., 2, 467
Mathis, S., & de Brye, N. 2011, A&A, 526, A65
Mathis, S., & Remus, F. 2013, in Lect. Notes Phys. eds. J.-P. Rozelot, & C. . Neiner, (Berlin: Springer Verlag) 857, 111
Mathis, S., Auclair-Desrotour, P., Guenel, M., & Le Poncin-Lafitte, C. 2014a, in SF2A-2014: Proc. Ann. meet. French Soc. Astron. Astrophys., eds. J. Ballet, F. Martins, F. Bournaud, R. Monier, & C. Reylé, 251
Mathis, S., Neiner, C., & Tran Minh, N. 2014b, A&A, 565, A47
Mayor, M., & Queloz, D. 1995, Nature, 378, 355
Ogilvie, G. I. 2005, J. Fluid Mech., 543, 19
Ogilvie, G. I. 2013, MNRAS, 429, 613
Ogilvie, G. I. 2014, ARA&A, 52, 171
Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, ApJ, 610, 477

Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2007, ApJ, 661, 1180
Ogilvie, G. I., & Lesur, G. 2012, MNRAS, 422, 1975
Pedlosky, J. 1982, Geophysical fluid dynamics (New-York: Springer Verlag)
Perryman, M. 2011, The Exoplanet Handbook (Cambridge University Press)
Provost, J., Berthomieu, G., & Rocca, A. 1981, A&A, 94, 126
Ray, R. D., Eanes, R. J., & Lemoine, F. G. 2001, Geophys. J. Int., 144, 471
Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2012a, A&A, 544, A132
Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P., & Lainey, V. 2012b, A&A, 541, A165
Rieutord, M., & Valdettaro, L. 2010, J. Fluid Mech., 643, 363
Sen, A. 2013, ArXiv e-prints [arXiv:1312.7497]
Sen, A., Mininni, P. D., Rosenberg, D., & Pouquet, A. 2012, Phys. Rev. E, 86, 036319
Singer, S. 1968, Geophys. J. Int., 15, 205
Tobie, G., Mocquet, A., & Sotin, C. 2005, Icarus, 177, 534
Valsecchi, F., & Rasio, F. A. 2014, ApJ, 786, 102
Webb, D. J. 1980, Geophys. J., 61, 573
Webb, D. J. 1982, Geophys. J., 70, 261
Williams, J. G., Konopliv, A. S., Boggs, D. H., et al. 2014, J. Geophys. Res. (Planets), 119, 1546
Witte, M. G., & Savonije, G. J. 1999, A&A, 350, 129
Witte, M. G., & Savonije, G. J. 2001, A&A, 366, 840
Witte, M. G., & Savonije, G. J. 2002, A&A, 386, 222
Wu, Y. 2005, ApJ, 635, 688
Zahn, J. P. 1966a, Annales d'Astrophysique, 29, 313
Zahn, J. P. 1966b, Annales d'Astrophysique, 29, 489
Zahn, J. P. 1966c, Annales d'Astrophysique, 29, 565
Zahn, J.-P. 1975, A&A, 41, 329
Zahn, J.-P. 1977, A&A, 57, 383
Zahn, J.-P. 1989, A&A, 220, 112

Pages 21 to 22 are available in the electronic edition of the journal at http://www.aanda.org

Appendix A: Harmonic highest degree k_c

The expression of the highest harmonic degree, given in Eq. (108), is plotted as a function of the Ekman number and of the thermal diffusivity for various regimes from $A \ll 1$ to $A \gg 1$. It corresponds to the upper bound of harmonic degree, which is sufficient to represent all the resonances of the spectrum.

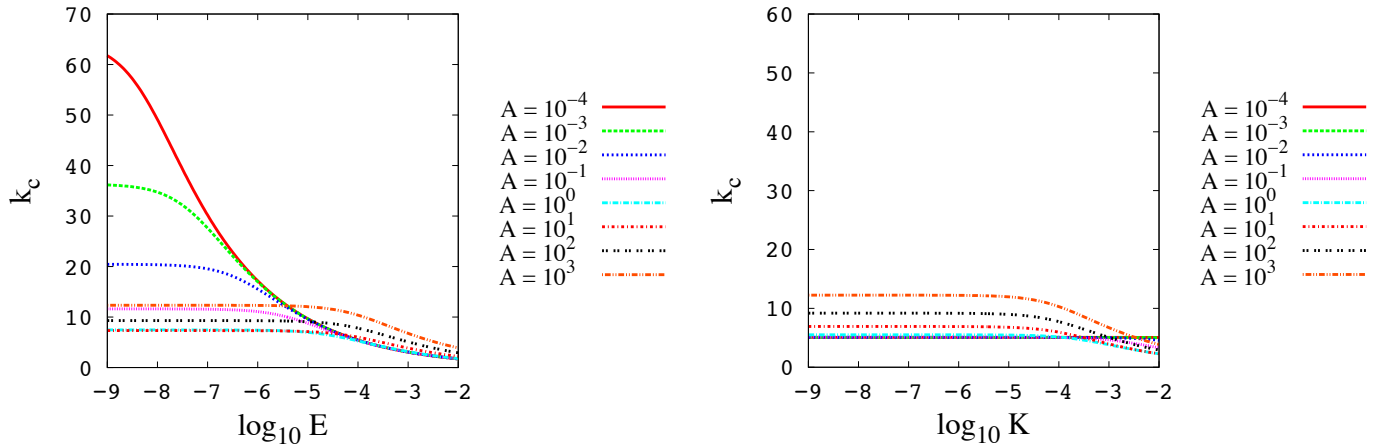


Fig. A.1. Rank of the highest harmonic degree k_c as a function of E (with $K = 10^{-4}$) and K (with $E = 10^{-4}$) for different values of A (in logarithmic scales). *Left*: $k_c - E$. *Right*: $k_c - K$.

Appendix B: Relative differences η_l and η_H

The results provided by analytical expressions of Eqs. (65) and (71) have been compared to those given by the complete formula of the energy dissipated by viscous friction (Eq. (38)). The colour maps of Fig. B.1 correspond to the computation of the width at mid-height l_{11} and height $H_{11}^{\rm visc}$ of the main resonance, which are summarized in Fig. 8. The relative differences η_l and η_H are calculated using the expressions

$$\eta_l = \frac{|l_{\rm ana} - l_{\rm th}|}{l_{\rm th}} \quad \text{and} \quad \eta_H = \frac{\left|H_{\rm ana}^{\rm visc} - H_{\rm th}^{\rm visc}\right|}{H_{\rm th}^{\rm visc}}, \tag{B.1}$$

$l_{\rm ana}$ and $H_{\rm ana}^{\rm visc}$ coming from Eqs. (65) and (71), and $l_{\rm th}$ and $H_{\rm th}^{\rm visc}$ being computed with Eq. (38). The plots highlight the asymptotic domains, in dark blue, where the analytical formulae constitute a relevant approximation for the width and height of a resonance, and the critical transition zones where they cannot be applied. The light blue horizontal line corresponds to $A \sim A_{11}$, the hyper-resonant case. The colour gradient in the regions near $E \sim 10^{-2}$ and $K \sim 10^{-2}$ indicates the values of A, E, and K for which the condition of the quasi-adiabatic approximation (Eq. (85)) is not satisfied. The same can be done with the energy dissipated by thermal diffusion.

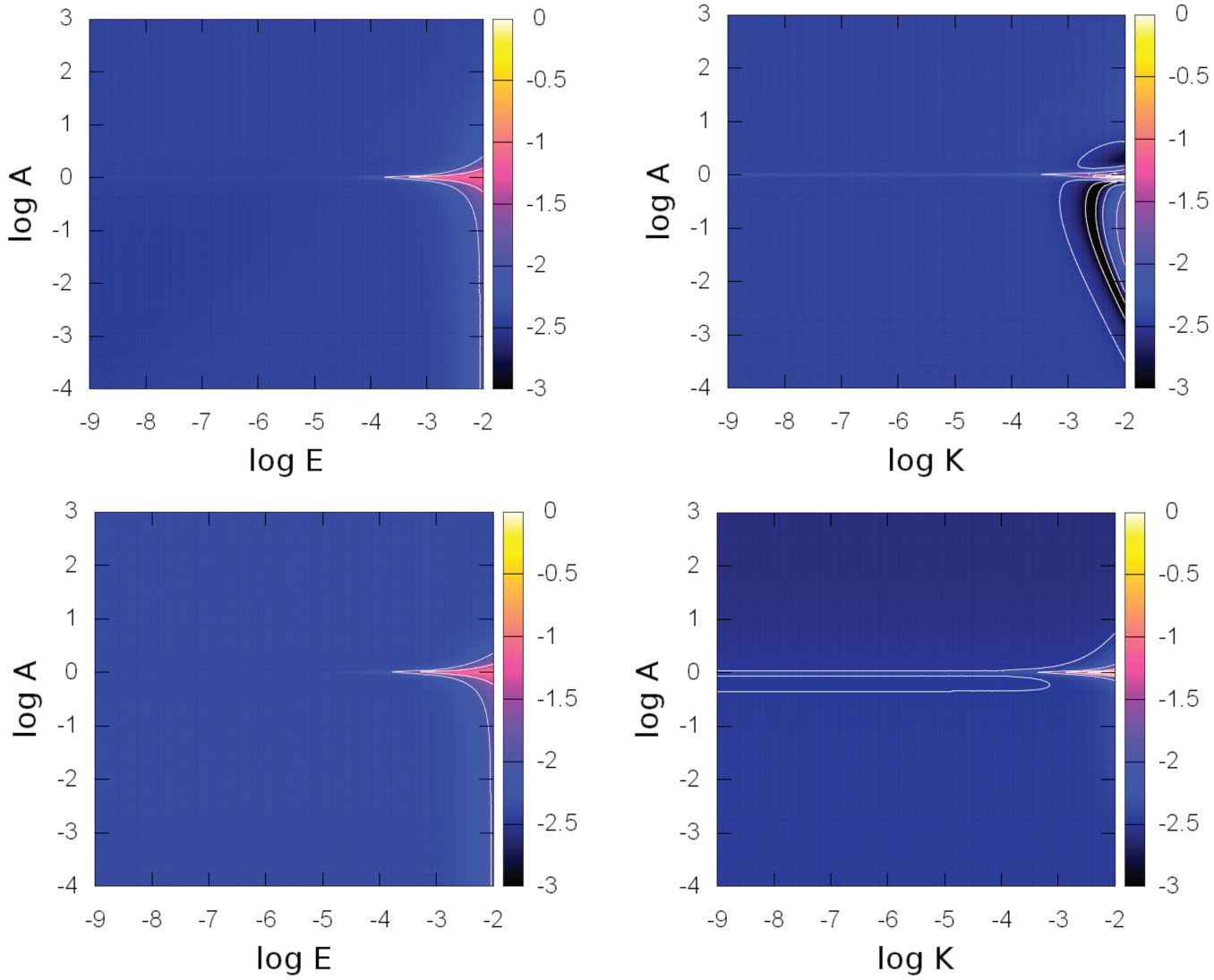


Fig. B.1. η_l and η_H as a function of A, E, and K in logarithm scales. White contours highlight critical zones where the quasi-adiabatic assumption ($\{E, K\} \ll \left\{\sqrt{A}, \cos\theta\right\}$) or the asymptotic condition ($A \neq A_{11}$) are not satisfied. *Top left*: $\eta_l - (E, A)$. *Top right*: $\eta_l - (K, A)$. *Bottom left*: $\eta_H - (E, A)$. *Bottom right*: $\eta_H - (K, A)$.

A&A 561, L7 (2014)
DOI: 10.1051/0004-6361/201322782
© ESO 2014

Astronomy & Astrophysics

Letter to the Editor

Impact of the frequency dependence of tidal Q on the evolution of planetary systems

P. Auclair-Desrotour[1,2,3], C. Le Poncin-Lafitte[1], and S. Mathis[2,4]

[1] SYRTE, Observatoire de Paris, UMR 8630 du CNRS, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
e-mail: [christophe.leponcin;pierre.auclair-desrotour]@obspm.fr
[2] Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/DSM – CNRS – Université Paris Diderot, IRFU/SAp Centre de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
e-mail: stephane.mathis@cea.fr
[3] IMCCE, Observatoire de Paris, UMR 8028 du CNRS, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
[4] LESIA, Observatoire de Paris, CNRS UMR 8109, UPMC, Univ. Paris-Diderot, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

Received 2 October 2013 / Accepted 19 November 2013

ABSTRACT

Context. Tidal dissipation in planets and in stars is one of the key physical mechanisms that drive the evolution of planetary systems.
Aims. Tidal dissipation properties are intrinsically linked to the internal structure and the rheology of the studied celestial bodies. The resulting dependence of the dissipation upon the tidal frequency is strongly different in the cases of solids and fluids.
Methods. We computed the tidal evolution of a two-body coplanar system, using the tidal-quality factor frequency-dependencies appropriate to rocks and to convective fluids.
Results. The ensuing orbital dynamics is smooth or strongly erratic, depending on the way the tidal dissipation depends upon frequency.
Conclusions. We demonstrate the strong impact of the internal structure and of the rheology of the central body on the orbital evolution of the tidal perturber. A smooth frequency-dependence of the tidal dissipation causes a smooth orbital evolution, while a peaked dissipation can produce erratic orbital behaviour.

Key words. celestial mechanics – hydrodynamics – planet-star interactions – planets and satellites: dynamical evolution and stability

1. Introduction and context

Tides are one of the key interactions that drive the evolution of planetary systems. Indeed, because of the friction in the host-star and in the planet interiors, a system evolves either to a stable state of minimum energy, where spins are aligned, orbits circularised, and the rotation of each body is synchronised with the orbital motion, or the perturber tends to spiral into the parent body (Hut 1980). Therefore, understanding and modelling the dissipative mechanisms that convert the kinetic energy of tidally excited velocities and displacements into heat is of great importance. These processes, driven by the complex response of a given body (either a star or a planet) to the gravific perturbation by a close companion, strongly depends on its internal structure and its rheology. Indeed, the tidal dissipation in solid (rocky/icy) planetary layers strongly differs from the dissipation in fluid regions in planets and in stars; the one in rocks and ices is often strong with a smooth dependence on the tidal frequency χ, the one in gas and liquids being generally weaker on average and strongly resonant. Therefore, these properties must be taken into account in the study of the dynamical evolution of planetary systems using celestial mechanics.

To reach this objective, the tidal quality factor Q has been introduced in the literature (Goldreich & Soter 1966). Its definition comes from the evaluation of the tidal torque (Kaula 1964) and the analogy with forced damped oscillators: it evaluates the ratio between the maximum energy stored in the tidal distortion during an orbital period and the energy dissipated by the friction. Indeed, a low value of Q corresponds to a strong dissipation, and vice versa. In this framework, Q can be computed from an ab initio resolution of the dissipative dynamical equations for the tidally excited velocities and displacements in fluid and in solid layers of celestial bodies, respectively (e.g. Henning et al. 2009; Efroimsky 2012; Remus et al. 2012b; Zahn 1977; Ogilvie & Lin 2004, 2007; Remus et al. 2012a). This leads to values of Q that varies smoothly as a function of χ in rocks and ices, while numerous and strong resonances are obtained in fluids. However, in celestial mechanics studies, Q is often assumed to be constant or to scale as χ^{-1} as a convenient first approach and is evaluated using the scenario for the formation and evolution of planetary systems.

In this work, we show how the dependence of Q on χ impacts this evolution and that it must be taken into account. In Sect. 2, we describe the set-up we studied and the corresponding dynamical equations, which correspond to those adopted by Efroimsky & Lainey (2007), who studied the impact of the rheology of solids on related tidal dissipation and evolution (Sect. 3). In Sect. 4, we study highly resonant tidal dissipation in fluid layers and discuss the strong differences with solids. Finally, we discuss astrophysical consequences for the evolution of planetary systems.

2. Set-up and dynamical equations

2.1. Model

To study the impact of rheology on tidal evolution and of the related variation of Q as a function of χ, we chose to follow

Efroimsky & Lainey (2007). We therefore studied a two-body coplanar system with a central extended body A with a mass M_A and a mean radius R_A, and a point-mass tidal perturber B of mass M_B. In a reference-fixed frame $\mathcal{R}_A : \{A, \boldsymbol{X}_A, \boldsymbol{Y}_A, \boldsymbol{Z}_A\}$, the central body rotates with a spin vector $\boldsymbol{\Omega}_A$ and the perturber orbits it. To study a simplified system where we can easily isolate the effect of rheology, this motion was assumed to be circular. Thus, the position of B is directly given by the semi-major axis a, which is the distance that separates B from A in this particular case, and the mean anomaly $\tilde{M}_B = n_B t$, where n_B is the mean motion and t is the time coordinate.

2.2. Dynamical equations

As recalled in the introduction, the tidal quality factor Q is defined as the ratio between the maximum energy stored in the tidal distortion during an orbital period and the energy dissipated by the friction. It is thus directly related to the rheology of the studied bodies, which generally leads to a dependence of Q as a function of the tidal frequency

$$\chi = \chi_{2200} = 2\,|n_B - \Omega_A| = |\omega_{2200}| = |\omega| \tag{1}$$

(e.g. Greenberg 2009; Efroimsky 2012), where $\omega = \omega_{2200}$ is the principal semi-diurnal Fourier tidal mode that corresponds to the frequency of the perturbation in the frame that rotates with the perturber. This friction induces a geometrical angle $\delta(\chi)$ between the directions of the tidal bulge and of the line of centres[1]

$$\delta(\chi) = \frac{1}{2}\chi\Delta t(\chi) = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left[Q^{-1}(\chi)\right], \tag{2}$$

where we have introduced the so-called time lag $\Delta t(\chi)$ (see e.g. Hut 1981).

This lag induces a net torque that modifies the evolution of the spin of body A (Mathis & Le Poncin-Lafitte 2009)

$$\frac{d\Omega_A}{dt} = \frac{3}{2}\frac{k_2(\chi)GM_B^2R_A^5}{I_A a^6}Q^{-1}(\chi)\,\mathrm{sgn}(\omega), \tag{3}$$

where I_A is the moment of inertia of body A, $k_2(\chi)$ is the Love number, and G is the gravitational constant. The semi-major axis of body B is also modified (Efroimsky & Lainey 2007)

$$\frac{da}{dt} = -\frac{3k_2(\chi)R_A^5 n_B M_B}{M_A a^4}Q^{-1}(\chi)\,\mathrm{sgn}(\omega). \tag{4}$$

These equations show that Q^{-1} has an explicitly linear impact on the evolution of the system; strong variations of Q^{-1} thus imply rapid changes for a and Ω_A. Then we took into account the dependence of Q to χ (e.g. Mathis & Le Poncin-Lafitte 2009; Efroimsky & Makarov 2013) to consider the impact of rheological models straightforwardly.

3. Solid tides

To solve our problem, we must close it with the choice of a law giving Q (or more generally, k_2/Q) as a function of χ. It is common to assume Q to be either constant (e.g. MacDonald 1964) or to scale as χ^{-1} in the case of a constant tidal time lag (e.g. Hut 1981). However, for solid rocky or icy bodies, Efroimsky & Lainey (2007) suggested to use a power scaling law[2]: $Q = \mathcal{E}^\alpha\chi^\alpha$, which has been experimentaly validated for metals and silicates in the laboratory as well as in seismic and geodetic experiments. Here, the empirical parameters α and $\mathcal{E}$ are bound to the rheology; α characterises the frequency dependence and takes values between 0.1 and 0.4; $\mathcal{E}$ is an integral relaxation parameter, which has the dimension of time and is determined by the internal-friction mechanism that dominates at the frequency χ. Usually, one or another mechanism or group of mechanisms remains dominant across vast bands of frequencies. Over these bands, $\mathcal{E}$ may be regarded as constant or almost constant. This law is particularly interesting since it introduces the frequency dependence with only one more parameter than the constant law and remains close to the realistic physics of solids at the same time.

To compute the evolution of a and Ω_A with time, we chose to use the numerical code developed by one of us and based on the code ODEX (Hairer et al. 2000). To validate it, we studied the case of the Mars-Phobos system simulated by Efroimsky & Lainey (2007), assuming exactly the same parameters that are summarised in Table 1. The Phobos initial semi-major axis, the initial dissipative time lag, and the constant tidal quality factor are denoted a_0, Δt_0 and Q.

Table 1. Numerical values used in the simulation of the Mars-Phobos system.

Parameters	Numerical values
G	6.67384×10^{-11} m^{3}kg^{-1}s^{-2}
M_A	$6,4185 \times 10^{23}$ kg
R_A	$3,3962 \times 10^3$ km
Ω_A	$7,08822 \times 10^{-5}$ rad s^{-1}
k_2	0,152
Q	79,91
M_B	$1,0189 \times 10^{16}$ kg
a_0	$9,3771 \times 10^3$ km
Δt_0	39,864 s

We note that in this case, the spin of A does not change over time compared to a because

$$\left|\frac{d\Omega_A}{\Omega_A}\cdot\frac{a}{da}\right| = \frac{GM_AM_B}{2\Omega_A n_B a I_A} \approx 10^{-7} \ll 1. \tag{5}$$

Our results perfectly reproduce those obtained by Efroimsky & Lainey (2007). Figure 1 shows the evolution of a with time for different values of $\alpha = -1$ (constant tidal time lag Δt_0; e.g. Singer 1968; Mignard 1979), 0 (constant Q; e.g. Kaula 1964), 0.2, 0.3, and 0.4. These plots highlight the impact of the rheology on the smooth induced evolution of orbital parameters such as the semi-major axis and on the related life-time of the system.

4. Tidal dissipation in fluid layers

4.1. Frequency dependence of Q

Revisiting the work by Efroimsky & Lainey (2007) provides a strong basis for exploring the impact of tidal dissipation in fluid bodies. In this section, we therefore chose to study the evolution of a perturber of the mass of Phobos that orbits a hypothetical completely fluid central body with the mass of Mars. Therefore, only the tidal quality factor $Q(\chi)$ will change.

In fluid bodies, tidal dissipation is caused by the turbulent viscous friction that acts on the equilibrium tide and on inertial waves, which are driven by the Coriolis acceleration, in convective regions (e.g. Zahn 1977; Ogilvie & Lin 2004, 2007; Remus et al. 2012a), and on thermal and viscous diffusions that act on

[1] The following identity can be applied only to the $m = 2$ case (e.g. Efroimsky & Makarov 2013).

[2] Here, we neglect the frequency dependence of the Love number. For realistic materials, the latter approximation is legitimate at a frequency much higher than the inverse Maxwell time.

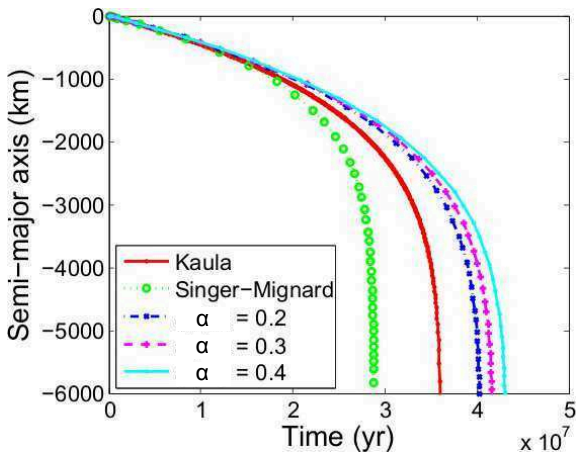


Fig. 1. Temporal evolution of the semi-major axis a for a class of tidal models with $k_2/Q \propto \chi^{-\alpha}$ and with different values of the parameter α. The abscissa represents time in years, the vertical axis measures the deviation of the semi-major axis from its initial value a_0. Our plots serve to compare realistic rheologies ($\alpha = 0.2, 0.3, 0.4$) with less physical ones – those with $\alpha = 0$ (Kaula 1964) and $\alpha = -1$ (Singer 1968; Mignard 1979).

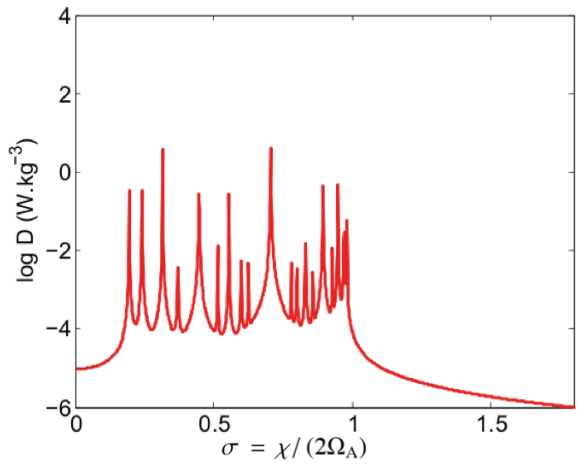


Fig. 2. Resonant tidal dissipation spectrum D resulting from inertial modes as a function of the normalised tidal frequency $\sigma = \chi/(2\Omega_A)$ assuming $N_{max} = 5$.

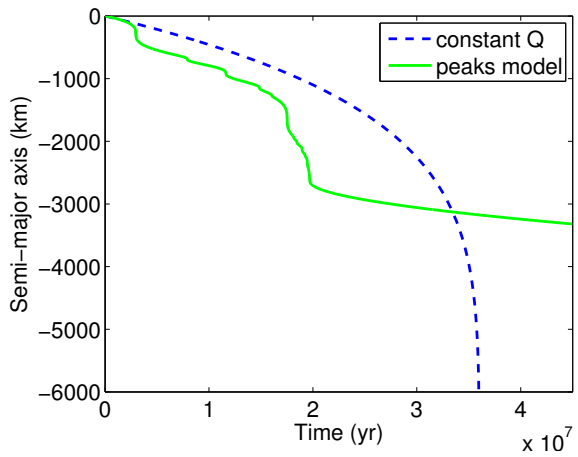


Fig. 3. Evolution of the semi-major axis a over time with a Q factor proportional to inertial wave dissipation in fluids (green curve), and with a constant Q factor (blue dashed curve). The abscissa represents time in years, the vertical axis measures the evolution of the semi-major axis from the initial value a_0.

gravito-inertial waves in stably stratified zones (e.g. Zahn 1977; Ogilvie & Lin 2004, 2007). The excitation of these oscillation eigenmodes by tides then leads to a highly resonant dissipation.

To illustrate our purpose, we consider from now that the central body is completely convective and rotates rapidly so that $0 \leq \sigma \leq 1$, where $\sigma = \chi/(2\Omega_A)$, which generates tidally excited inertial waves. There clearly is a strong difference between the tidal quality factor adopted before for solid bodies that scale as a smooth power-law of σ and the one related to inertial waves. Indeed, as demonstrated by Ogilvie & Lin (2004), using a local approach, their viscous dissipation is expressed as a sum of corresponding resonant terms[3]

$$D(\sigma) = D_0 \sum_{\{m,n\}\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{(m^2+n^2)\left|\tilde{\sigma}^2\right| + n^2}{\left|(m^2+n^2)\,\tilde{\sigma}^2 - n^2\right|^2} \left(m^2+n^2\right) \left|n f_{mn} - m h_{mn}\right|^2, \tag{6}$$

where $\tilde{\sigma} = \sigma + iE\left(m^2+n^2\right)$ and $E = \nu/\left(2\Omega_A L^2\right)$ is the Ekman number of the fluid, ν is the viscosity, and L a characteristic length; m and n are the vertical and horizontal wave-vectors of inertial waves, respectively; finally, f_{mn} and h_{mn} are the coefficients of the Fourier series of the excitation. The tidal dissipation is thus a complex set of resonant peaks depending on the viscosity and on the rotation of the fluid. Since $Q(\sigma) \propto [D(\sigma)]^{-1}$, we coupled it with the dynamical Eqs. (3), (4) of our model.

4.2. Numerical integration

To evaluate the effects of these resonances on dynamics, we computed the evolution of the semi-major axis of the orbit with the same parameters as for solid tides, but giving as input a synthetic $Q^{-1}(\sigma)$ factor written as $D(\sigma)$ given in Eq. (6). Our fluid is characterised by its Ekman number, $E = 10^{-5}$, which is a value often adopted in the literature for planetary convective layers, and which allows one to derive a peaked dissipation (see Fig. 2)[4]. The maximal rank of the sum (N_{max}) was chosen to be relatively low, with $N_{max} = 5$, to increase the computation speed. Following Ogilvie & Lin (2004), we describe the excitation with the coefficients

$$f_{mn} = \frac{1}{mn^2}, \quad g_{mn} = 0, \quad \text{and} \quad h_{mn} = 0. \tag{7}$$

The simulation clearly shows that, in contrast to solid tides, where the power scaling law implies a smooth evolution of a, a contrasted Q factor, that strongly depends on the tidal frequency, enables abrupt changes of a (see Fig. 3). As the perturber comes nearer to the central body, its mean motion increases. That is why dissipation varies strongly during the evolution of the system and, at each time it meets a resonance, there is a jump of a, which is bounded to the properties of the peak: the higher and wider the peak, the higher the amplitude of the jump. This is the resonance-locking identified by Witte & Savonije (1999) in the stellar case. However, we note that when $\sigma > 1$, at the end of the simulation, the evolution of a becomes smooth again. The reason for this behaviour is that we are beyond the range of frequencies where inertial waves are excited. Then, the tidal dissipation is that of the equilibrium tide that corresponds to the non-resonant background of D observed in Fig. 2. Finally, as demonstrated in

[3] Global models lead to the same behaviour.

[4] The Eckman number depends on the modelling of the turbulent viscosity (e.g. Ogilvie & Lesur 2012).

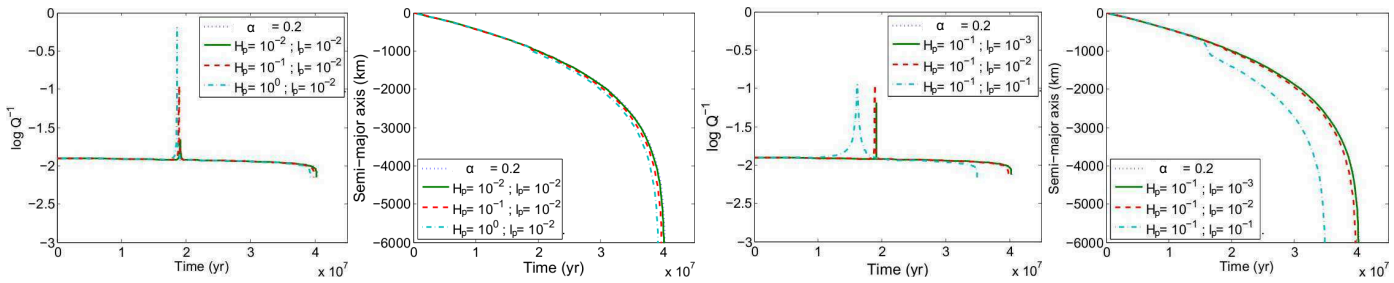


Fig. 4. Evolution of the tidal dissipation and of the semi-major axis with time for different values of l_p and H_p, the width at half-height and the height of the studied single resonant damping peak. The grey dotted line corresponding to $\alpha = 0.2$ is superposed to the continuous green one except at the position of the peak for Q^{-1}.

Fig. 3, the evolution of a system where the tidal dissipation is caused by resonant eigenmodes (here the inertial waves) cannot be described properly using models where Q or Δt are assumed to be constant ($\alpha = 0$ and $\alpha = -1$, respectively).

4.3. Scaling law

The resonant properties of the tidal dissipation in fluids (see Fig. 2) generate jumps of the value of the semi-major axis a during the evolution of the system (see Fig. 3). In this framework, the link between the orbital dynamics and the rheology of the fluid is the shape of resonances of the viscous dissipation D (see Eq. (6)). A resonance occurs when a term of the sum in Eq. (6) exceeds all the others. In this section, our goal is therefore to obtain a scaling law that relates a jump of a to the height, H_p, and to the width at half-height, l_p, of the corresponding single resonant damping peak (see Fig. 4) defined as

$$Q_p^{-1}(\sigma) = \frac{H_p}{\left[4\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{\sigma-\sigma_p}{l_p}\right)^2+1\right]^2}, \tag{8}$$

where σ_p is the resonant frequency. Then, the dissipation Q^{-1} was chosen to be the sum of a smooth background denoted Q_0^{-1} that corresponds to the one studied in Sect. 3, and of a resonant one Q_p^{-1} (Eq. (8)), which leads to the following equation for a using Eq. (4):

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\frac{3k_2R_A^5 n_B M_B}{M_A a^4}\left[Q_0^{-1}(\sigma)+Q_p^{-1}(\sigma)\right]\mathrm{sgn}(\omega). \tag{9}$$

Assuming that the peak influences the system when the condition $Q_p^{-1} \geq Q_0^{-1}$ is fullfilled, and that the resulting variation is rapid compared with the mean evolution, we can derive the amplitude of the jump,

$$\frac{\Delta a}{a} \approx \frac{2l_p}{3\sqrt{\sqrt{2}-1}\left(1+\sigma_p\right)}\left[\sqrt{\frac{H_p}{Q_0^{-1}\left(\sigma_p\right)}}-1\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

In Fig. 4, we plot the evolution of the semi-major axis for different values of H_p and l_p and the corresponding dissipation. These graphs illustrate the scaling law (Eq. (10)) by showing that the width of a peak has a greater impact on a than its height. Moreover, the values of $\Delta a/a$ obtained using direct numerical simulations perfectly match those predicted by Eq. (10). Finally, as σ_p, H_p, l_p are directly related to the value of the Eckman number $E = \nu/\left(2\Omega_A L^2\right)$ (cf. Ogilvie & Lin 2004), we see how the orbital dynamics is directly impacted by the fluid rheology and resonances.

5. Conclusions

We examined the impact of the frequency dependence of tidal dissipation in solids and fluids on the orbital evolution of a coplanar two-body system. We showed the strongly different evolutions induced by tides in rocks and by tides exerted on fluid layers where eigenmodes are resonantly excited. A smooth dependence of the tidal dissipation on the tidal frequency drives a smooth orbital evolution, while a peaked dissipation induces an erratic one. In each case, we pointed out the direct impact of the rheology properties on the dynamics of the system. Finally, we showed that it is important to take the dependence of the tidal dissipation on the tidal frequency into account and the important consequences it may have for the evolution of star-planet(s) and planet-moon(s) systems in the solar and exoplanetary systems. In this context, the impact of the frequency dependence of the tidal torque on resonances will be examined in a forthcoming work.

Acknowledgements. The authors are grateful to the referee, M. Efroimsky, for his detailed review, which has allowed us to improve the paper. This work was supported by the Programme National de Planétologie (CNRS/INSU), the GRAM specific action (CNRS/INSU-INP, CNES), the Paris Observatory, the Campus Spatial de l'Université Paris Diderot, and the Emergence-UPMC grant (contract number: EME0911). C.L.P.L. and S.M. dedicate this article to Dr. M. Le Poncin.

References

Efroimsky, M. 2012, ApJ, 746, 150
Efroimsky, M., & Lainey, V. 2007, J. Geophys. Res. Planets, 112, 12003
Efroimsky, M., & Makarov, V. V. 2013, ApJ, 764, 26
Goldreich, P., & Soter, S. 1966, Icarus, 5, 375
Greenberg, R. 2009, ApJ, 698, L42
Hairer, E., Nørsett, S., & Wanner, G. 2000, Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff problems, 2nd edn. (Berlin: Springer)
Henning, W. G., O'Connell, R. J., & Sasselov, D. D. 2009, ApJ, 707, 1000
Hut, P. 1980, A&A, 92, 167
Hut, P. 1981, A&A, 99, 126
Kaula, W. M. 1964, Rev. Geophys. Space Phys., 2, 661
MacDonald, G. J. F. 1964, Rev. Geophys. Space Phys., 2, 467
Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2009, A&A, 497, 889
Mignard, F. 1979, Moon and Planets, 20, 301
Ogilvie, G. I., & Lesur, G. 2012, MNRAS, 422, 1975
Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, ApJ, 610, 477
Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2007, ApJ, 661, 1180
Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2012a, A&A, 544, A132
Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P., & Lainey, V. 2012b, A&A, 541, A165
Singer, S. F. 1968, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 15, 205
Witte, M. G., & Savonije, G. J. 1999, A&A, 350, 129
Zahn, J.-P. 1977, A&A, 57, 383

A&A 592, A33 (2016)
DOI: 10.1051/0004-6361/201527545
© ESO 2016

Astronomy & Astrophysics

The impact of rotation on turbulent tidal friction in stellar and planetary convective regions

S. Mathis[1,2], P. Auclair-Desrotour[3,1], M. Guenel[1], F. Gallet[4], and C. Le Poncin-Lafitte[5]

[1] Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/DSM – CNRS – Université Paris Diderot, IRFU/SAp Centre de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
e-mail: stephane.mathis@cea.fr
[2] LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France
[3] IMCCE, Observatoire de Paris, UMR 8028 du CNRS, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
[4] Department of Astronomy, University of Geneva, Chemin des Maillettes 51, 1290 Versoix, Switzerland
[5] SYRTE, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC Univ. Paris 06, LNE, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

Received 12 October 2015 / Accepted 27 April 2016

ABSTRACT

Context. Turbulent friction in convective regions in stars and planets is one of the key physical mechanisms that drive the dissipation of the kinetic energy of tidal flows in their interiors and the evolution of their systems. This friction acts both on the equilibrium/non-wave-like tide and on tidal inertial waves in these layers.

Aims. It is thus necessary to obtain a robust prescription for this friction. In the current state-of-the-art, it is modelled by a turbulent eddy-viscosity coefficient, based on mixing-length theory, applied to tide velocities. However, none of the current prescriptions take into account the action of rotation that can strongly affect turbulent convection. Therefore, a new prescription that takes this into account must be derived.

Methods. We use theoretical scaling laws for convective velocities and characteristic lengthscales in rotating stars and planets that have been recently confirmed by 3D high-resolution non-linear Cartesian numerical simulations to derive the new prescription. A corresponding local model of tidal waves is used to understand the consequences for the linear tidal dissipation. Finally, new grids of rotating stellar models and published values of planetary convective Rossby numbers are used to discuss astrophysical consequences.

Results. The action of rotation on convection deeply modifies the turbulent friction applied on tides. In the regime of rapid rotation (with a convective Rossby number below 0.25), the eddy-viscosity may be decreased by several orders of magnitude. It may lead to a loss of efficiency of the viscous dissipation of the equilibrium tide and to a more efficient complex and resonant dissipation of tidal inertial waves in the bulk of convective regions.

Conclusions. To understand the complete evolution of planetary systems, tidal friction in rapid rotators such as young low-mass stars, giant and Earth-like planets must be evaluated. Therefore, we need a completely coupled treatment of the tidal evolution of star-planet systems and multiple stars, and of the rotational evolution of their components with a coherent treatment of the variations of tidal flows, and of their dissipation as a function of rotation.

Key words. turbulence – planet-star interactions – stars: rotation – planets and satellites: dynamical evolution and stability – hydrodynamics – waves

1. Introduction

Tidal friction is one of the mechanisms that drives the evolution of star-planet and planet-moon systems (e.g. Hut 1981; Laskar et al. 2012; Bolmont et al. 2012). It shapes their orbital architecture and the rotational dynamics of each of their components. Its properties strongly depend on their internal structure and dynamics (e.g. Goldreich & Soter 1966; Mathis & Remus 2013; Ogilvie 2014). Indeed, tidal dissipation that converts the kinetic energy of tidal flows into heat in stars and fluid planetary layers strongly differs from that in rocky/icy regions (Efroimsky & Lainey 2007; Auclair-Desrotour et al. 2014). The variation of tidal dissipation in fluids as a function of the forcing frequency is strongly resonant (Ogilvie & Lin 2004, 2007; Auclair Desrotour et al. 2015). These resonances are due to the excitation of low-frequency inertial waves in convective layers and of gravito-inertial waves in stably-stratified regions. Their properties are the functions of rotation, stratification, and viscous and thermal diffusivities (Zahn 1975; Ogilvie & Lin 2004, 2007; Auclair Desrotour et al. 2015). More and more observational constraints are becoming available in the Solar and extrasolar systems (see e.g. Lainey et al. 2009, 2012; Winn et al. 2010; Albrecht et al. 2012; Valsecchi & Rasio 2014b,a, and reviews in Ogilvie 2014; and Auclair-Desrotour et al. 2015).

In this context, tidal friction in the turbulent convective envelopes of low-mass stars (from M to F stellar types), giant planets, and the cores of telluric planets must be carefully evaluated. In the present state-of-the-art, the turbulent friction acting on tidal flows in these regions is modelled with an effective turbulent viscosity coefficient. This corresponds to the

assumptions that we have a scale-separation between tidal and turbulent convective flows, that turbulence is close to being isotropic and that the friction can be described through a viscous force (Zahn 1966). The properties of the turbulent viscosity thus describe the effective efficiency of the couplings between turbulence and tidal flows. Therefore, the turbulent viscosity depends on the frequency of the forcing and on the dynamical parameters that impact stellar and planetary convection (Zahn 1966, 1989; Goldreich & Keeley 1977; Goodman & Oh 1997; Penev et al. 2007; Ogilvie & Lesur 2012).

Rotation is one of the parameters that must be taken into account. Indeed, the Coriolis acceleration strongly affects the dynamics of turbulent convective flows (e.g. Brown et al. 2008; Julien et al. 2012; Barker et al. 2014). In this framework, the rotation of stars and planets can strongly vary along the evolution of planetary systems (e.g. Bouvier 2008; Gallet & Bouvier 2013, 2015; Amard et al. 2016, for low-mass stars). Therefore, it is absolutely necessary to get a robust prescription for the turbulent friction applied on tidal waves by rotating convection in stellar and planetary interiors as a function of their angular velocity. Properties of rotating turbulent flows such as their characteristic velocities and length scales must be known if we wish to model this friction using the mixing-length framework (Zahn 1966). In this context, the work by Stevenson (1979) is particularly interesting since he derived them in the asymptotic regimes of slow and rapid rotation. Moreover, these asymptotic scaling laws have now been confirmed by Barker et al. (2014) in the regime of rapid rotation using high-resolution non-linear 3D Cartesian simulations of turbulent convection.

In this work, we thus propose a new prescription for tidal friction in rotating turbulent convective stellar and planetary zones that takes rotation into account using the results obtained by Stevenson (1979) and Barker et al. (2014). First, in Sect. 2, we recall the state-of-the-art prescriptions that do not take rotation into account. In Sect. 3, we propose our new prescription for the turbulent friction applied by rotating convective flows. In Sect. 4, we discuss consequences for the viscous dissipation of tidal flows in rotating stellar and planetary convection zones and corresponding scaling laws (Auclair Desrotour et al. 2015). In Sect. 5, we examine consequences for tidal dissipation in convective regions in low-mass stars during the pre-main-sequence (PMS) and the main sequence (MS) and in planets. Finally, we conclude and present the perspectives of this work for the evolution of planetary systems.

2. Prescription for the friction applied by turbulent non-rotating convection

The first study of the friction applied by turbulent convection on tidal flows was achieved by Zahn (1966) in the case of binary stars (see also Zahn 1989). In his work, he examined the coupling between turbulence and the large-scale equilibrium/non-wave-like tide induced by the hydrostatic adjustment of the star due to the tidal perturber (e.g. Zahn 1966; Remus et al. 2012; Ogilvie 2013). His approach was based on three main assumptions. First, he assumed a scale-separation between tidal and turbulent convective flows. Second, he assumed that the friction applied by turbulence can be described using a viscous force involving an eddy-viscosity $\nu_{\rm T}$. This implies the third assumption of an isotropic turbulence. Finally, the characteristic velocity and length scale of turbulent convection, respectively $V_{\rm c}$ and $L_{\rm c}$, were described using the mixing-length theory. We have

$$V_{\rm c}\,(\Omega=0) \approx \left(\frac{L_{\rm b}}{\overline{\rho}_{\rm CZ} R^2}\right)^{1/3} \quad \text{and} \quad L_{\rm c}\,(\Omega=0) \approx \alpha H_{\rm p}, \tag{1}$$

where $L_{\rm b}$, R, $\overline{\rho}_{\rm CZ}$, α, $H_{\rm p}$ and Ω are the body luminosity and radius, the mean density in the studied convective region, the free mixing-length parameter, the pressure height-scale and the angular velocity, respectively (Brun 2014). In this framework, he derived the following prescription for the eddy-viscosity:

$$\nu_{\rm T;NR} = \frac{1}{3} V_{\rm c}\,(\Omega=0)\, L_{\rm c}\,(\Omega=0)\; f\left(\frac{P_{\rm tide}}{P_{\rm c}}\right). \tag{2}$$

In this expression, NR stands for non-rotating convection and f is a function that describes the loss of efficiency of tidal friction in convective regions in the case of rapid tide when $P_{\rm tide} \ll P_{\rm c}$, $P_{\rm tide}$ and $P_{\rm c} = L_{\rm c}/V_{\rm c}$ which are respectively the tidal period and the characteristic convective turn-over time. Two expressions have been proposed for f in the literature. Zahn (1966) proposed a linear attenuation with $f \propto (P_{\rm tide}/P_{\rm c})$ and Goldreich & Keeley (1977) proposed a quadratic one, that is $f \propto (P_{\rm tide}/P_{\rm c})^2$. These prescriptions have been examined both by theoretical work (Goodman & Oh 1997) and by local high-resolution 3D numerical simulations (Penev et al. 2007; Ogilvie & Lesur 2012). If numerical simulations computed by Penev et al. (2007) seem to confirm the linar attenuation proposed by Zahn (1966), those by Ogilvie & Lesur (2012) are in favour of the quadratic one, so the f prescription is still debated.

As mentioned above, (rapid) rotation strongly affects turbulent convective flows (e.g. Brown et al. 2008; Julien et al. 2012; Barker et al. 2014). First, the Coriolis acceleration stabilizes the flow leading to a shift of the threshold of the convective instability (Chandrasekhar 1953). Next, the efficiency of the heat transport and the turbulent energy cascade are inhibited (e.g. Sen et al. 2012; King et al. 2012, 2013; Barker et al. 2014). Finally, $V_{\rm c}$, $L_{\rm c}$, and as a consequence $\nu_{\rm T}$ vary with rotation. In the present state-of-the-art, we are thus in a situation where the action of the Coriolis acceleration is taken into account in the physical description of tidal flows (e.g. Ogilvie & Lin 2004, 2007; Remus et al. 2012; Auclair Desrotour et al. 2015) while it is ignored in the description of the turbulent friction. This should be improved since the angular velocity of celestial bodies can vary by several orders of magnitude along their evolution. Therefore, the turbulent convective friction must also be described as a function of the rotation rate (Ω).

3. Prescription for the friction applied by turbulent rotating convection

3.1. Modelling and assumptions

To study the modification of the turbulent friction applied on tidal flows in rotating stellar and planetary convective regions, we will use theoretical results first derived by Stevenson (1979) and confirmed in the rapid rotation regime by high-resolution numerical Cartesian simulations computed by Barker et al. (2014). We thus choose to consider a local Cartesian set-up with a box centered around a point M in a rotating convective zone (see Fig. 1) with an angular velocity Ω; (M, x, y, z) is the associated reference frame. The box has a characteristic length L and is assumed to have a homogeneous density ρ. Its vertical axis, which is aligned with the gravity $\boldsymbol{g}$, is inclined with an angle θ with respect to the rotation axis. The convective turbulent flow has characteristic velocity $V_{\rm c}$ and length scale $L_{\rm c}$ to which we associate

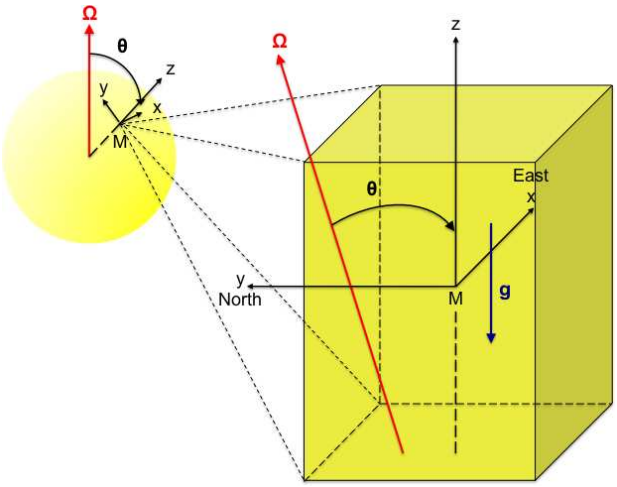


Fig. 1. Local Cartesian model. M is the origin of the set-up. The east, north and gravity ($\boldsymbol{g}$) directions are along the x, y and z axis, respectively. The angle θ is the inclination of the rotation axis with respect to gravity.

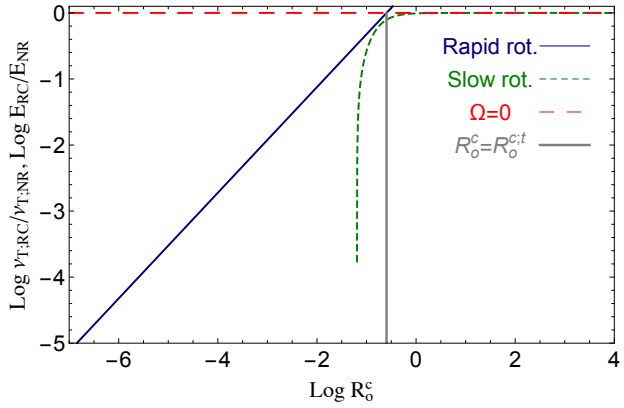


Fig. 2. Logarithm of the ratio $\nu_{\rm T;RC}/\nu_{\rm T;NR}$ (and $E_{\rm RC}/E_{\rm NR}$) as a function of $\log R_{\rm o}^{\rm c}$. The small-dashed green and solid blue lines correspond to the slow- and rapid-rotation asymptotic regimes, respectively. The vertical grey solid line corresponds to the transition Rossby number $R_{\rm o}^{\rm c;t} \approx 0.25$ between these two asymptotic regimes. The red long-dashed line corresponds to the non-rotating case.

the kinematic eddy-viscosity $\nu_{\rm T}$ (see Eqs. (2) and (5)) describing the turbulent friction.

Next, we introduce the control parameters of the system:

- the convective Rossby number defined as in Stevenson (1979)

$$R_{\rm o}^{\rm c} = \left(\frac{V_{\rm c}\,(\Omega=0)}{2\Omega L_{\rm c}\,(\Omega=0)\,|\cos\theta|}\right) = \frac{P_\Omega}{P_{\rm c}\,(\Omega=0)}, \tag{3}$$

  where we introduce the dynamical time $P_\Omega = \dfrac{1}{2\Omega|\cos\theta|}$ and we recall the definition of the characteristic convective turnover time $P_{\rm c} = L_{\rm c}/V_{\rm c}$; $R_{\rm o}^{\rm c} \ll 1$ and $R_{\rm o}^{\rm c} \gg 1$ correspond to rapid and slow rotation regimes, respectively;
- the Ekman number

$$E = \frac{2\pi^2\nu_{\rm T}}{\Omega L^2}, \tag{4}$$

  which compares the respective strength of the viscous force and of the Coriolis acceleration (see also Auclair Desrotour et al. 2015).

3.2. The new eddy-viscosity prescription

As in previous works, which do not take into account the action of rotation on convection (see Sect. 2), we assume that: i) we have a scale-separation between turbulent convective flows and tidal velocities and ii) the turbulent friction on this latter can be modelled through a viscous force involving an eddy-viscosity coefficient.

To derive this coefficient, we have to know the variation of $V_{\rm c}$ and $L_{\rm c}$ as a function of Ω and to verify that the mixing-length approach that is generally used in stellar and planetary models can be assumed in our context. Actually, in presence of (rapid) rotation, convective turbulence becomes highly anisotropic because of the action of the Coriolis acceleration (e.g. Julien et al. 2012; Sen et al. 2012; King et al. 2012, 2013) and one must verify that a simplified mixing-length approach can be assumed as a first step. In this framework, this is the great interest of the work by Barker et al. (2014). It demonstrated that scaling laws obtained for $V_{\rm c}$ and $L_{\rm c}$ as a function of $R_{\rm o}^{\rm c}$ by Stevenson (1979) using such a mixing-length formalism is robust and verified when computing high-resolution Cartesian numerical simulations of rapidly rotating turbulent convective flows in a set-up corresponding to the one studied here.

We can thus generalize the prescription proposed in Eq. (2) to the rotating case by

$$\nu_{\rm T;RC} = \frac{1}{3} V_{\rm c}\,(R_{\rm o}^{\rm c})\, L_{\rm c}\,(R_{\rm o}^{\rm c})\; f\left(\frac{P_{\rm tide}}{P_{\rm c}}\right), \tag{5}$$

where RC stands for rotating convection. To get $V_{\rm c}\,(R_{\rm o}^{\rm c})\,/V_{\rm c}\,(\Omega=0)$ and $L_{\rm c}\,(R_{\rm o}^{\rm c})\,/L_{\rm c}\,(\Omega=0)$, we use the scaling laws that have been derived by Stevenson (1979) and verified by Barker et al. (2014) in the rapidly rotating regime:

- in the slow rotation regime, we have

$$\frac{V_{\rm c}\,(R_{\rm o}^{\rm c})}{V_{\rm c}\,(\Omega=0)} = 1 - \frac{1}{242\,(R_{\rm o}^{\rm c})^2}, \tag{6}$$

  and

$$\frac{L_{\rm c}\,(R_{\rm o}^{\rm c})}{L_{\rm c}\,(\Omega=0)} = \left(1 + \frac{1}{82\,(R_{\rm o}^{\rm c})^2}\right)^{-1}; \tag{7}$$

- in the rapid rotation regime, we have

$$\frac{V_{\rm c}\,(R_{\rm o}^{\rm c})}{V_{\rm c}\,(\Omega=0)} = 1.5(R_{\rm o}^{\rm c})^{1/5} \quad \text{and} \quad \frac{L_{\rm c}\,(R_{\rm o}^{\rm c})}{L_{\rm c}\,(\Omega=0)} = 2(R_{\rm o}^{\rm c})^{3/5}. \tag{8}$$

In Fig. 2, we plot $\log\,(\nu_{\rm T;RC}/\nu_{\rm T;NR})$ and the corresponding ratio for the Ekman number (see Eq. (4)) as a function of $\log R_{\rm o}^{\rm c}$. We have defined a first Ekman number computed with the turbulent viscosity prescription where the modification of turbulent friction by rotation is ignored:

$$E_{\rm NR} = \frac{2\pi^2\nu_{\rm T;NR}}{\Omega L^2}, \tag{9}$$

and a second one where it is taken into account:

$$E_{\rm RC} = \frac{2\pi^2\nu_{\rm T;RC}}{\Omega L^2}. \tag{10}$$

In the regime of rapidly rotating convective flows ($R_{\rm o}^{\rm c} \ll 1$), the turbulent friction decreases by several orders of magnitude

with a scaling $\nu_{\mathrm{T;RC}}/\nu_{\mathrm{T;NR}} \propto (R_{\mathrm{o}}^{\mathrm{c}})^{4/5} \propto \Omega^{-4/5}$. It can be understood by returning to the action of (rapid) rotation on the convective instability and turbulence (see the discussion at the end of Sect. 2). Indeed, the Coriolis acceleration tends to stabilize the flow and thus the degree of turbulence decreases with increasing rotation as well as the corresponding turbulent friction and eddy-viscosity.

Consequences for the viscous dissipation of the kinetic energy of tidal flows in rotating stellar and planetary convective regions must now be examined.

4. Consequences for tidal dissipation

4.1. A local model to quantify tidal dissipation

The linear response of planetary and stellar rotating convection zones to tidal perturbations is constituted by the superposition of an equilibrium/non-wave-like tide displacement and of tidally excited inertial waves, the dynamical tide (e.g. Zahn 1966; Ogilvie & Lin 2004, 2007; Remus et al. 2012; Ogilvie 2013). The restoring force of inertial waves is the Coriolis acceleration. Because of their dispersion relation $\sigma = \pm 2\Omega\, k_z/|\boldsymbol{k}|$, where σ is their frequency and $\boldsymbol{k}$ their wave number, they propagate only if $\sigma \in [-2\Omega, 2\Omega]$.

To understand the impact of rapid rotation on the turbulent friction derived in the previous section on the equilibrium and dynamical tides, we now consider the linear response of the Cartesian set-up studied here (cf. Fig. 1) to a periodic tidal forcing. As a first step, we thus neglect the non-linear interactions between tidal inertial waves and those with turbulent convective flows (see, e.g. Galtier 2003; Sen et al. 2012; Favier et al. 2014; Clark di Leoni et al. 2014; Campagne et al. 2015). We follow the reduced and local analytical approach introduced by Ogilvie & Lin (2004) in the appendix of their paper and generalized by Auclair Desrotour et al. (2015) to understand tidal dissipation in convective regions with taking into account here the inclination angle θ. In this framework, the velocity field of the tide $\boldsymbol{u}$ excited by the tidal periodic volumetric forcing $\boldsymbol{F}$ per unit-mass is governed by the linearized momentum and continuity equations[1]:

$$\partial_t \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u} = -\nabla \Pi + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \tag{11}$$

where ν is the (effective turbulent) viscosity and $\Pi = P/\rho$ with P and ρ being the pressure and density respectively. We follow Ogilvie & Lin (2004) and Auclair Desrotour et al. (2015) by expanding $\boldsymbol{u}$, Π, and $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}/2\Omega$ as Fourier series in time and space

$$\begin{aligned} u_x &= \Re\left[u(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], & u_y &= \Re\left[v(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \\ u_z &= \Re\left[w(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], & \Pi &= \Re\left[\psi(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \\ f_x &= \Re\left[f(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], & f_y &= \Re\left[g(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \\ f_z &= \Re\left[h(X,Z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}\right], \end{aligned} \tag{12}$$

with

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m,n} u_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, & v &= \sum_{m,n} v_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \\ w &= \sum_{m,n} w_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, & \psi &= \sum_{m,n} \psi_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \\ f &= \sum_{m,n} f_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, & g &= \sum_{m,n} g_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}, \\ h &= \sum_{m,n} h_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(mX+nZ)}. \end{aligned} \tag{13}$$

We have introduced the normalized space coordinates[2] $X = x/L$ and $Z = z/L$, horizontal and vertical wave numbers m and n, time $T = 2\Omega\, t$, and tidal frequency $\omega = (s\overline{n} - M\Omega)/(2\Omega)$; $\overline{n}$ is the mean orbital motion, $s \in \boldsymbol{Z}$ and $M = mL/(r\sin\theta) = \{1, 2\}$ (r is the radial spherical coordinate of M). The boundary conditions are periodic in the two directions that corresponds to normal modes excited by tides (e.g. Wu 2005; Braviner & Ogilvie 2015). It would be also possible to tackle the case of singular modes leading to inertial wave attractors by imposing rigid boundary conditions to our tilted Cartesian box (Ogilvie 2005; Jouve & Ogilvie 2014).

From the momentum and the continuity equations, we get the following system:

$$\begin{cases} -\mathrm{i}\omega u_{mn} - \cos\theta v_{mn} + \sin\theta w_{mn} = -\mathrm{i}m\Lambda\psi_{mn} - E\left(m^2+n^2\right)u_{mn} + f_{mn} \\ -\mathrm{i}\omega v_{mn} + \cos\theta u_{mn} = -E\left(m^2+n^2\right)v_{mn} + g_{mn} \\ -\mathrm{i}\omega w_{mn} - \sin\theta u_{mn} = -\mathrm{i}n\Lambda\psi_{mn} - E\left(m^2+n^2\right)w_{mn} + h_{mn} \\ m u_{mn} + n w_{mn} = 0, \end{cases} \tag{14}$$

where $\Lambda = 1/(2\Omega L)$. Following Auclair Desrotour et al. (2015), we solve it analytically. This allows us to derive each Fourier coefficient of the velocity field

$$\begin{cases} u_{mn} = n\dfrac{\mathrm{i}\tilde{\omega}\,(n f_{mn} - m h_{mn}) - n\cos\theta g_{mn}}{(m^2+n^2)\,\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta} \\ v_{mn} = \dfrac{n\cos\theta\,(n f_{mn} - m h_{mn}) + \mathrm{i}\left[\left(m^2+n^2\right)\tilde{\omega}\right]g_{mn}}{(m^2+n^2)\,\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta} \\ w_{mn} = -m\dfrac{\mathrm{i}\tilde{\omega}\,(n f_{mn} - m h_{mn}) - n\cos\theta g_{mn}}{(m^2+n^2)\,\tilde{\omega}^2 - n^2\cos^2\theta}, \end{cases} \tag{15}$$

with $\tilde{\omega} = \omega + \mathrm{i}E\left(m^2+n^2\right)$, and to compute the viscous dissipation per unit mass of the kinetic energy of tidal flows

[1] In this work the action of thermal diffusivity is ignored.

[2] As in Ogilvie & Lin (2004) and Auclair Desrotour et al. (2015), we focus on solutions, which depend only on X and Z, since adding the third coordinate Y will not modify the qualitative behaviour of the system.

(Auclair Desrotour et al. 2015)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{L^2}\int_0^1\int_0^1 \left\langle -\boldsymbol{u}\cdot\nu\nabla^2_{X,Z}\boldsymbol{u}\right\rangle \mathrm{d}X\mathrm{d}Z$$
$$= \frac{2\pi^2\nu}{L^2}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}}\left(m^2+n^2\right)\left(\left|u^2_{mn}\right|+\left|v^2_{mn}\right|+\left|w^2_{mn}\right|\right), \quad (16)$$

where $\nabla^2_{X,Z} = 1/L^2\nabla^2$ and $\langle\cdots\rangle$ is the average in time, and the corresponding energy dissipated per rotation period

$$\zeta = \frac{2\pi}{\Omega}\mathcal{D} = 2\pi E\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{*2}}\left(m^2+n^2\right)\left(\left|u^2_{mn}\right|+\left|v^2_{mn}\right|+\left|w^2_{mn}\right|\right). \quad (17)$$

Because of the form of the forced velocity field (Eq. (15)), the tidal dissipation spectrum (ζ) is a complex resonant function of the normalized tidal frequency (ω). It corresponds to resonances of the inertial waves that propagate in planetary and stellar convection zones. An example of such resonant spectra is computed in Fig. 3 (top panel) for $E = 10^{-4}$ and $\theta = 0$. Here we use the academic forcing $f_{mn} = -\mathrm{i}/(4|m|n^2)$, $g_{mn} = 0$ and $h_{mn} = 0$ adopted by Ogilvie & Lin (2004) and Auclair Desrotour et al. (2015). As discussed in Auclair Desrotour et al. (2015), such an academic forcing already allows us to study properly the variation of ζ as a function of rotation, viscosity and frequency forcing. Following this latter work, we characterize ζ by the following physical quantities and scaling laws in the local model:

- the non-resonant background of the dissipation spectra $H_{\rm bg}$, which corresponds to the viscous dissipation of the equilibrium/non-wave-like tide, that scales as $H_{\rm bg} \propto E$;
- the number of resonant peaks $N_{\rm kc}$ that scales as $N_{\rm kc} \propto E^{-1/2}$;
- their width at half-height l_{mn} that scales as $l_{mn} \propto E$;
- their height H_{mn} that scales as $H_{mn} \propto E^{-1}$;
- the sharpness of the spectrum defined as $\Xi = H_{11}/H_{\rm bg}$, which evaluate the contrast between the dissipation of the dynamical and equilibrium tides, that scales as $\Xi \propto E^{-2}$.

From now on, $X_{\rm RC}$ is a quantity evaluated with $E_{\rm RC}$ (i.e. with $\nu_{\rm T;RC}$) while $X_{\rm NR}$ is computed using $E_{\rm NR}$ (i.e. with $\nu_{\rm T;NR}$).

4.2. The impact of rotation on the turbulent convective friction applied to tidal flows

We can thus deduce interesting conclusions from the results obtained with this simplified model for both the equilibrium and dynamical tides.

4.2.1. The equilibrium tide

In our local Cartesian set-up, the equilibrium tide is represented by the non-resonant background $H_{\rm bg}$. Using Eq. (10), we thus deduce that its efficiency scales as $\Omega^{-9/5}$ in the regime of rapid rotation. This loss of efficiency of the equilibrium tide in rapidly rotating convective regions is illustrated in Fig. 3 where we plot $\log\left(H_{\rm bg;RC}/H_{\rm bg;NR}\right)$ as a function of $\log R^{\rm c}_{\rm o}$.

4.2.2. The dynamical tide

We use scaling laws obtained for the resonances of tidal inertial waves. We deduce that as soon as studied convective regions are in the regime of rapid rotation, their number and height respectively increase as $N_{\rm kc} \propto \Omega^{9/10}$ and $H_{mn} \propto \Omega^{9/5}$ while their width decreases as $l_{mn} \propto \Omega^{-9/5}$. The sharpness of ζ is increased as $\Xi \propto \Omega^{18/5}$. These variations of the properties of the resonant tidal dissipation frequency spectra is illustrated in Fig. 3 where we plot $\log\left(N_{\rm RC}/N_{\rm NR}\right)$, $\log\left(l_{\rm RC}/l_{\rm NR}\right)$, and $\log\left(\Xi_{\rm RC}/\Xi_{\rm NR}\right)$ as a function of $\log R^{\rm c}_{\rm o}$.

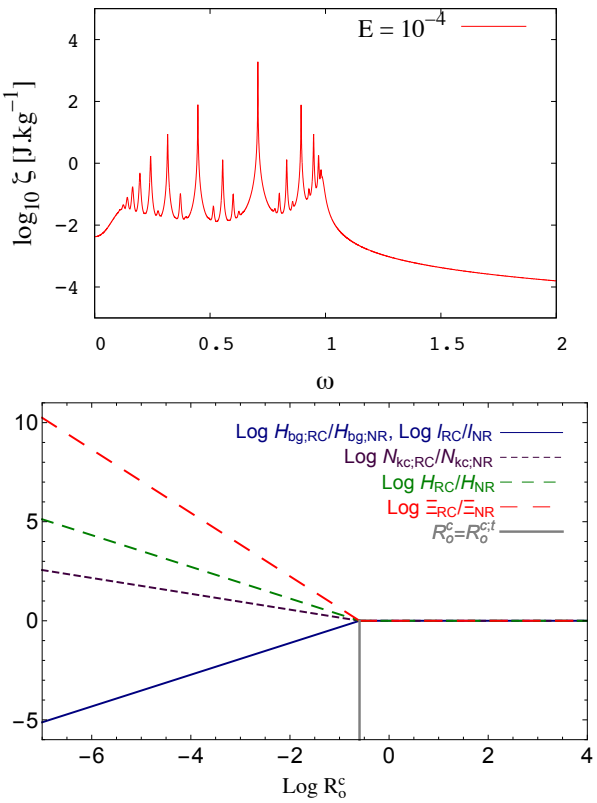


Fig. 3. *Top*: tidal dissipation frequency spectrum for the academic forcing chosen here (see also Ogilvie & Lin 2004; Auclair Desrotour et al. 2015) for $E = 10^{-4}$ and $\theta = 0$ (in logarithm scale for the dissipation). *Bottom*: variations of the logarithm of the ratios $H_{\rm bg;RC}/H_{\rm bg;NR}$, $l_{\rm RC}/l_{\rm NR}$ (solid blue line), $N_{\rm kc;RC}/N_{\rm kc;NR}$ (dashed purple line), $H_{\rm RC}/H_{\rm NR}$ (dashed green line) and $\Xi_{\rm RC}/\Xi_{\rm NR}$ (long-dashed red line) as a function of $\log R^{\rm c}_{\rm o}$ when taking into account (or not) the action of rotation on turbulent friction. The vertical grey solid line corresponds to the transition Rossby number $R^{\rm c;t}_{\rm o} \approx 0.25$.

As demonstrated by Auclair-Desrotour et al. (2014; see also Witte & Savonije 1999), this may have important consequences for the evolution of the spin of the host body and of the orbits of the companions, for example in the cases of star-planet and planet-moon systems. Indeed, the relative migration induced by a resonance scales as $\Delta a/a \equiv l_{mn}\, H_{mn}^{1/4} \propto \Omega^{-27/20}$.

5. Astrophysical discussion

It is now important to discuss our results in the context of stellar and planetary interiors hosting turbulent convection regions. We focus here on the convective envelopes of low-mass stars (from M- to F-types) and of gaseous/icy giant planets and of the cores of telluric bodies.

5.1. The case of low-mass and solar-type stars

As demonstrated by Zahn (1966), Ogilvie & Lin (2007) and Mathis (2015), external convective zones of low-mass stars are key contributors for the dissipation of tidal kinetic energy in

these objects[3]. This is illustrated by the observations of the state of the orbits and of stellar spins in planetary systems and binary stars (see the synthetic review in Ogilvie 2014, and references therein). An illustrative example is given by the need to understand the orbital properties of hot Jupiters and the inclination angle of their orbits relative to the spin axis of their host stars (e.g. Winn et al. 2010; Albrecht et al. 2012; Valsecchi & Rasio 2014b,a), which vary with their properties (i.e. their mass, age, rotation, etc.).

In this context, the rotation rates of low-mass stars strongly vary along their evolution (e.g. Barnes 2003; Gallet & Bouvier 2013, 2015; Amard et al. 2016; McQuillan et al. 2014; García et al. 2014). They are first locked in co-rotation with their initial circumstellar accretion disk because of complex MHD star-disk-wind interactions (e.g. Matt et al. 2010, 2012; Ferreira 2013). Next, because of their contraction, they spin up along the PMS until the zero-age main-sequence (ZAMS). Finally, they spin down during the MS because of the torque applied by magnetized stellar winds (e.g. Schatzman 1962; Kawaler 1988; Chaboyer et al. 1995; Réville et al. 2015; Matt et al. 2015). These variations of the angular velocity strongly affect the properties of convective flows because of the action of the Coriolis acceleration. Indeed, rapid rotation during the PMS modifies and constrains convective turbulent flow patterns, large-scale meridional circulations and differential rotation (Ballot et al. 2007; Brown et al. 2008). The key control parameters to unravel such a complex dynamic is the convective Rossby number R_o^c defined in Eq. (3). For example, it allows us to predict the latitudinal behaviour of the differential rotation established by convection (Matt et al. 2011; Gastine et al. 2014; Käpylä et al. 2014) while it controls the friction applied to tidal flows (see Eq. (5)) and the properties of the frequency spectrum of their dissipation (see Sect. 4.2).

It is thus interesting to compute the variations of R_o^c along the evolution of low-mass stars. This will allow us to evaluate the impact of the action of rotation on the turbulent convective friction and on the properties of the tidal dissipation along stellar evolution thanks to Eqs. (5)–(8) and to scaling laws given in Sect. 4.1. To reach this objective, we choose to compute new grids of stellar rotating models for stars with masses between 0.6 $M_\odot$ and 1.2 $M_\odot$ (i.e. from K- to F-types) with a solar metallicity. We follow the methodology first proposed by Landin et al. (2010). This allows us to study the variations of the rotation and R_o^c as a function of time and radius along the evolution of these stars from the beginning of the PMS to the end of the MS. We use the latest version of the STAREVOL stellar evolution code described in details (e.g. for the equation of state, nuclear reaction, opacities, etc.) in Amard et al. (2016; see also Siess et al. 2000; Palacios et al. 2003; Lagarde et al. 2012). The mixing-length parameter is chosen to be $\alpha = 1.6267$. Convective regions are modelled assuming uniform rotation while radiation zones rotate according to redistribution of angular momentum by shear-induced turbulence and meridional flows, which are treated using formalisms derived by Zahn (1992), Maeder & Zahn (1998), Mathis & Zahn (2004), Mathis et al. (2004). Angular momentum losses at the stellar surface due to pressure-driven magnetized stellar winds are taken into account using the prescription adopted by Matt et al. (2015, the two parameters of this model are given in Eqs. (6) and (7) of this paper, and we choose $\chi = 10$ and $p = 2$), which allows the authors to verify the Skumanich law (Skumanich 1972). Since our interest here is on the impact of rapid rotation, we choose to compute the evolution of initially rapidly rotating low-mass stars, which all have the same initial rotation period of 1.4 days and disc-locking time of 3×10^6 yr. In addition, we have also computed the evolution of initially slow and median rotators that allows us to compare and validate our results with those obtained by Landin et al. (2010).

In Fig. 4 (left-hand panel), we first represent the radial profiles of $\log R_o^c$ for different masses (i.e. 0.6, 0.8, 1.0, and 1.2 $M_\odot$) and ages: the beginning of the PMS, the mid PMS, the ZAMS, the middle of the MS, the end of the MS, and the solar age for the 1 $M_\odot$ solar-type star[4]. In these plots (and in Fig. 5), we also recall the value of the critical convective Rossby number $R_o^{c;t} \approx 0.25$. It corresponds to the transition between the rapidly ($R_o^c < R_o^{c;t}$) and slowly ($R_o^c > R_o^{c;t}$) rotating regimes. For all stellar masses and ages, a large radial variation of R_o^c over several orders of magnitude is obtained with a monotonic increase towards the surface. This result is coherent with previously published results in the case of the Sun (see Fig. 1 in Käpylä et al. 2005). Therefore, the impact of rotation on the turbulent friction applied on tidal flows may be stronger close to the basis of the convective envelope than in surface regions. This may have different impacts on equilibrium and dynamical tides. On one hand, the equilibrium tide varies at the zeroth-order as $r^2 Y_2^M(\theta, \varphi)$, where Y_2^M is the quadrupolar spherical harmonics (see e.g. Zahn 1966; Remus et al. 2012). On the other hand, the dynamical tide constituted by tidal inertial waves propagate in the whole convective region. In the case of fully convective low-mass stars (at the beginning of the PMS or in M-type stars), inertial waves propagate as regular modes (Wu 2005). In the case of convective shells, they propagate along waves' attractors (Ogilvie & Lin 2007). Therefore, for a given age, the turbulent friction applied on tidal inertial waves propagating deep inside convective zones would be more strongly affected by the action of the Coriolis acceleration on convective flows than the one applied on the equilibrium tide. However, for all stellar masses, we can see that the impact of rotation on the friction stays important everywhere during all the PMS and the beginning of the MS where stars are rotating rapidly. Indeed, during these evolution phases, the plotted radial profiles show that $R_o^c < R_o^{c;t}$ for all radii except just below the surface layers. This is confirmed in Fig. 5, where the convective Rossby number in the middle of the convective envelope (i.e. at $r = \Delta R_{CZ}/2 = (R_s - R_c)/2$, where R_s and R_c are the radius of the star and those of the basis of the convective envelope respectively) is plotted as a function of time. Indeed, Fig. 4 (left-hand panel) shows how $R_o^c(\Delta R_{CZ}/2)$ can provide a reasonable intermediate order of magnitude for R_o^c in tidal dissipation studies. At these evolutionary stages, we thus expect a strong action of the dynamical tide, constituted by inertial waves, with associated highly resonant tidal dissipation frequency-spectra. This result is very important since Zahn & Bouchet (1989) demonstrated that the most important phase of orbital circularization in late-type binaries occurs during the PMS where the convective envelopes of the components are thick. Moreover, it perfectly matches the results obtained by Mathis (2015) and Bolmont & Mathis (2016) where a strong action of tidal inertial waves all along the PMS has been identified. In Figs. 4 (right-hand panels) and 6, we represent the ratios between the values of the turbulent eddy-viscosity (and of the corresponding Ekman number) and those of the dissipation frequency spectrum properties (H_{bg}, l, H, N_{k_c} and Ξ) (respectively as a function of r for $\{0.6, 0.8, 1, 1.2\}$ $M_\odot$

[3] Zahn (1977) showed that tidal dissipation in intermediate-mass and massive stars is dominated by thermal diffusion acting on gravity waves in their radiative envelope.

[4] Note here that we consider a 1 $M_\odot$ solar-type star and not a helioseismic calibrated solar model.

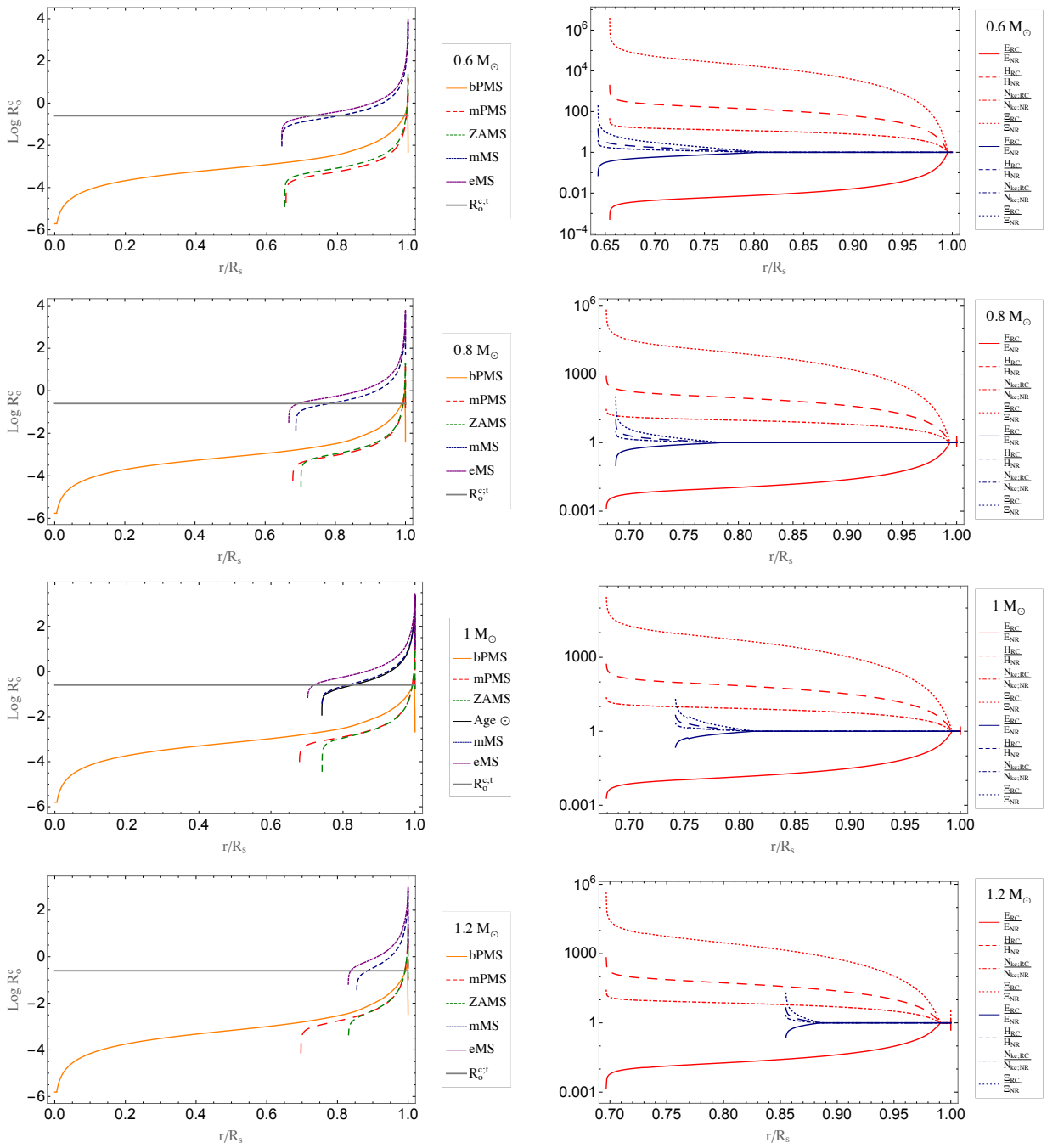


Fig. 4. *Left-hand panels*: radial profiles of $\log R_o^c$ for $\{0.6, 0.8, 1, 1.2\}$ $M_\odot$ stars at different ages: the beginning of the PMS (solid orange line; labelled bPMS), the mid PMS (dashed red line; labelled mPMS), the ZAMS (dashed green line), the middle of the MS (dashed blue line; labelled mMS), the end of the MS (dashed purple line; labelled eMS) and the solar age for the 1 $M_\odot$ solar-type star (solid black line; labelled Age ⊙); r/R_s is the normalized radius, where R_s is the radius of the star. The critical convective Rossby number $R_o^{c;t} \approx 0.25$ giving the transition between the rapidly and the slowly rotating regimes is represented by the solid thick grey line. *Right-hand panels*: radial profiles of E_{RC}/E_{NR} (and $\nu_{T;RC}/\nu_{T;NR}$, $H_{bg;RC}/H_{bg;NR}$ and l_{RC}/l_{NR}; solid line), $H_{bg;RC}/H_{bg;NR}$ (dashed line), N_{RC}/N_{NR} (dot-dashed line) and Ξ_{RC}/Ξ_{NR} (dotted line) for each stellar mass at the mid PMS (in red) and mid MS (in blue).

stars at the middle of the PMS and MS in Fig. 4 (right-hand panels) and as a function of time for $r = \Delta R_{CZ}/2$ for stellar masses from 0.6 to 1.2 $M_\odot$ in Fig. 6) when taking into account the modification of the turbulent friction by rotation or not. In each case, we see that differences by several orders of magnitude can be obtained for each quantity that must be taken into account. It demonstrates that the rapidly-rotating regime enhances the highly resonant dynamical tide while it decreases the efficiency of the equilibrium tide because the amplitudes of their viscous dissipation increases and decreases respectively with ν_T. Therefore, it strengthens the general conclusion that tidal evolution of star-planet systems and of binary stars must be treated taking into account the dynamical tide and not only the equilibrium tide (e.g. Auclair-Desrotour et al. 2014; Savonije & Witte 2002; Witte & Savonije 2002). As a consequence, the predictions obtained using simplified equilibrium tide models such as the constant tidal quality factor and the constant tidal lag models (e.g. Kaula 1964; Hut 1981) must be considered very carefully.

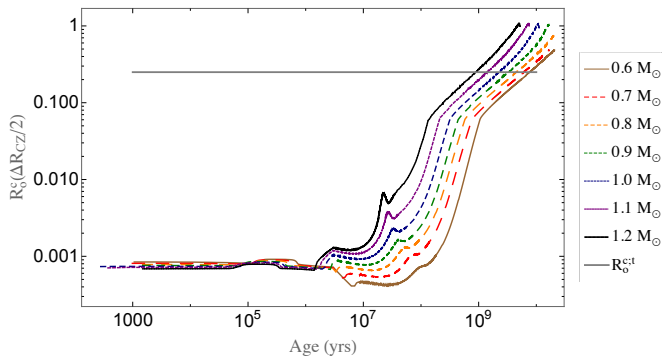


Fig. 5. Evolution of R_o^c, evaluated in the middle of the convective envelope (at $r = \Delta R_{CZ}/2$), as a function of stellar age (in logarithm scales) computed using the grid of rotating stellar models for 0.6 $M_\odot$ (dashed brown line), 0.7 $M_\odot$ (dashed red line), 0.8 $M_\odot$ (dashed orange line), 0.9 $M_\odot$ (dashed green line), 1 $M_\odot$ (dashed blue line), 1.1 $M_\odot$ (dashed purple line) and 1.2 $M_\odot$ (solid black line) stars. The critical convective Rossby number $R_o^{c;t} \approx 0.25$ giving the transition between the rapidly and the slowly rotating regimes is represented by the solid thick grey line.

As a conclusion, these results demonstrate how it is necessary to have an integrated and coupled treatment of the rotational evolution of stars, which directly impacts tidal dissipation in their interiors, and of the tidal evolution of the surrounding planetary or stellar systems (e.g. Penev et al. 2014; Bolmont & Mathis 2016). In addition, tidal torques may also modify the rotation of stars as a back reaction (e.g. Bolmont et al. 2012; Bolmont & Mathis 2016).

Finally, variations of E_{NR} and E_{RC} (with $L = R_s$; see Eqs. (9) and (10)) evaluated at $r = \Delta R_{CZ}/2$ as a function of stellar mass and age are given in Fig. 7 with f (in Eq. (5)) fixed to one, in left- and right-hand panels respectively. STAREVOL models allow us to coherently compute V_c, L_c and R_o^c (Eq. (5)) for each stellar mass, age and radius. In these plots, we identify the phase of co-rotation of the stars with the surrounding disk (up to 3×10^6 yr), the acceleration phase, and the stellar spin-down due to the breaking by the wind. This provides key inputs for future numerical simulations of tidal dissipation in spherical convective shells for which the Ekman number is one of the key physical control parameters (e.g. Ogilvie & Lin 2007; Baruteau & Rieutord 2013; Guenel et al. 2016). It allows us to improve step by step the evaluation of tidal friction in the convective envelope of low-mass stars all along their evolution by combining hydrodynamical studies and stellar modelling.

5.2. The case of planets

As in the case of young low-mass stars, convective flows are strongly constrained by the Coriolis acceleration in rapidly rotating planetary interiors. The most evident cases are those of the Earth liquid core and of the envelopes of gaseous (Jupiter and Saturn) and icy (Uranus and Neptune) giant planets (Glatzmaier 2013). In this context, the importance of rotation on tidal flows and their dissipation has been demonstrated both in the case of the Earth (e.g. Buffett 2010) and of giant planets (e.g. Ogilvie & Lin 2004; Wu 2005).

Therefore, as in the case of stars, it is interesting to collect values of the convective Rossby numbers for planetary interiors. We choose here to use the orders of magnitude given in Schubert & Soderlund (2011) for the Earth and in Soderlund et al. (2013) for giant planets. They are reported in the following table.

Table 1. Orders of magnitude for planetary Rossby numbers (given in Schubert & Soderlund 2011, for the Earth, and in Soderlund et al. 2013, for giant planets).

Parameter	Earth	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptune
R_o^c	10^{-7}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-5}

From our previous results, we conclude that the rapidly-rotating regime (see Fig. 2) applies in the cases of the Earth, Jupiter, Saturn, Uranus and Neptune. Therefore, the action of the Coriolis acceleration on the convective turbulent friction cannot be neglected. It will strengthen the importance of tidal inertial waves and of their resonant viscous dissipation with corresponding numerous and strong resonances (see, e.g. Fig. 3). Note that such a result is particularly important for our understanding of tidal dissipation in the deep convective envelope of giant planets in our Solar System (Ogilvie & Lin 2004; Guenel et al. 2014) for which we obtained new constrains through high precision astrometry (Lainey et al. 2009, 2012, 2015).

We can thus conclude that in most of the astrophysical situations relevant for the evolution of planetary systems, the action of rotation on the turbulent friction applied by convection on linear tidal waves must be taken into account. Moreover, it demonstrates that it is necessary to build a coupled modelling of the tidal evolution of planetary systems with the rotational evolution of their components, rotation being a key parameter for the amplitude and the frequency dependence of tidal dissipation in their interiors.

6. Conclusions and perspectives

Using results obtained by Barker et al. (2014) on the scaling of velocities and length scales in rotating turbulent convection zones, we proposed a new prescription for the eddy-viscosity coefficient, which allows us to describe tidal friction in such regions. In their work, Barker et al. (2014) confirmed scalings for convective velocities and length scales as a function of rotation in the rapidly rotating regime that were first derived by Stevenson (1979) using mixing-length theory. Using his results, we derive a new prescription for the turbulent friction, which takes into account the action of the Coriolis acceleration on the convective flows. This allows us to generalize previous studies where the action of rotation on linear tidal flows was accounted for while its impact on the turbulent friction applied on them by convection was ignored. We demonstrated that the eddy-viscosity may be decreased by several orders of magnitude in the rapidly rotating regime. It leads to a deep modification of the tidal dissipation frequency spectrum. On one hand, its background that corresponds to the so-called equilibrium/non-wave-like tide is decreased because it scales as $E \propto \nu_T$. On the other hand, resonances of tidal inertial waves (i.e. the dynamical tide) become more and more numerous, higher and sharper since their number, width at half-height, height, and sharpness respectively scales as $E^{-1/2}$, E, E^{-1}, and E^{-2} (Auclair Desrotour et al. 2015). In this framework, we demonstrated using new grids of rotating low-mass stars and values of convective Rossby numbers in planetary interiors (Schubert & Soderlund 2011; Soderlund et al. 2013), that this modification of the turbulent

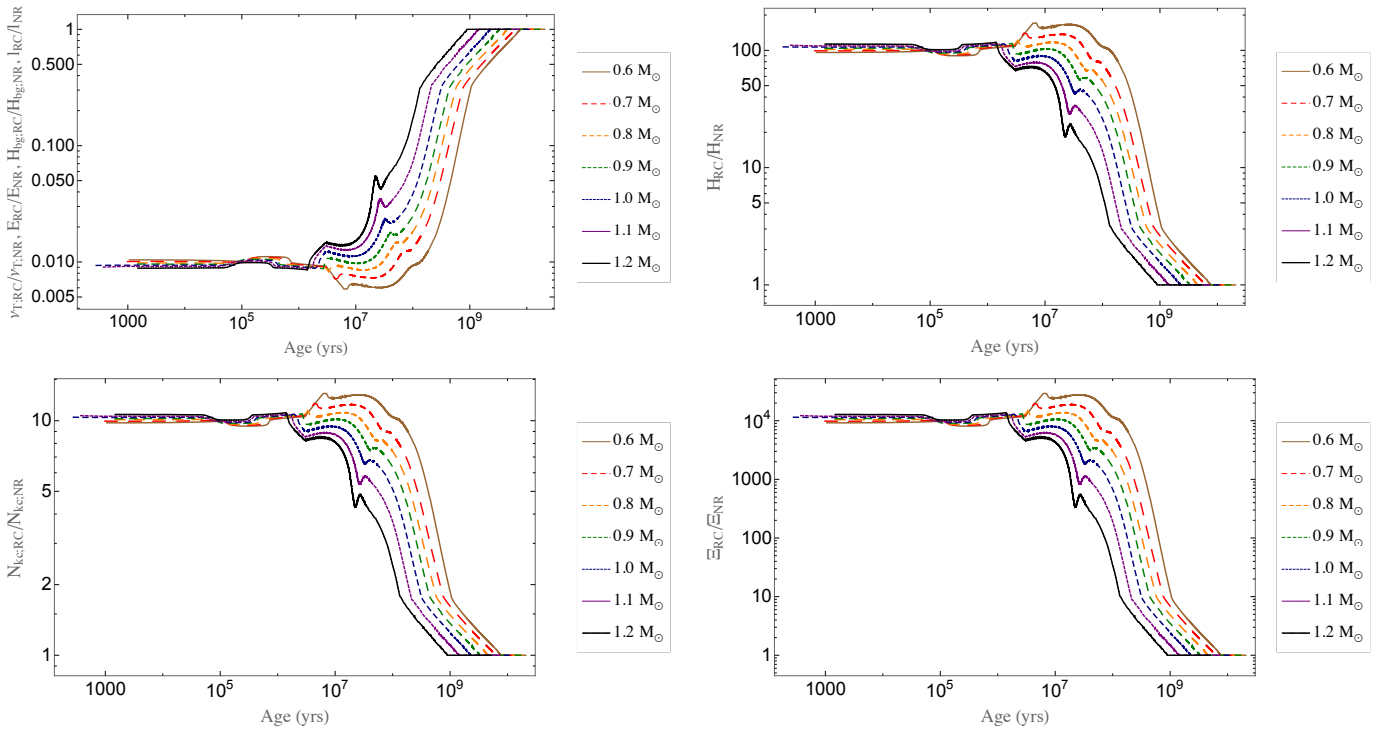


Fig. 6. *Top left*: evolution of $\nu_{T;RC}/\nu_{T;NR}$, E_{RC}/E_{NR}, $H_{bg;RC}/H_{bg;NR}$ and l_{RC}/l_{NR} at $r = \Delta R_{CZ}/2$ (not written on labels to lighten notations) as a function of stellar age (in logarithm scales) for stellar masses from 0.6 $M_\odot$ to 1.2 $M_\odot$ (colours have been in defined in the caption of Fig. 5). *Top right*: same for H_{RC}/H_{NR}. *Bottom left*: same for N_{RC}/N_{NR}. *Bottom right*: same for Ξ_{RC}/Ξ_{NR}.

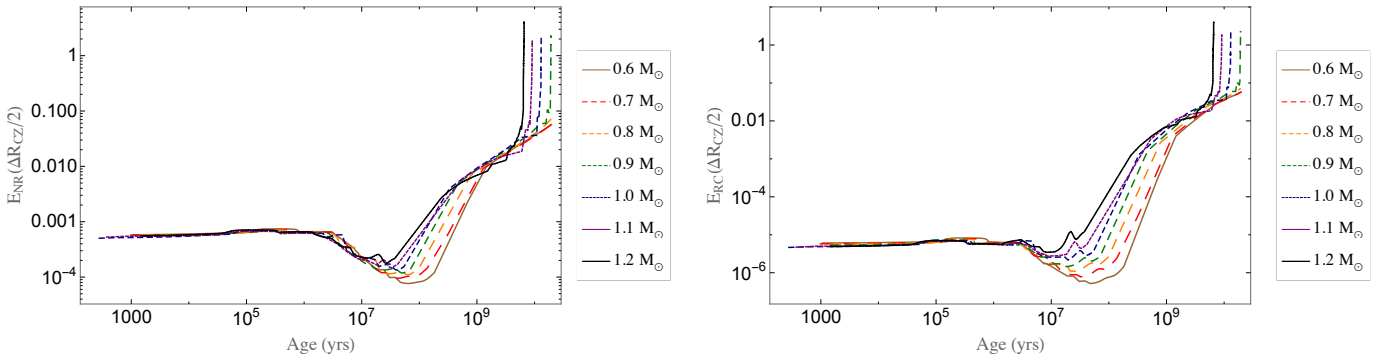


Fig. 7. Evolution of the Ekman numbers E_{NR} (*left panel*) and E_{RC} (*right panel*) at $r = \Delta R_{CZ}/2$ as a function of stellar age (in logarithm scales) for stellar masses from 0.6 $M_\odot$ to 1.2 $M_\odot$ (colours defined in the caption of Fig. 5).

friction is important for low-mass stars along their PMS and at the beginning of MS during which they are rapidly rotating and in rapidly rotating planets as the Earth and giant gaseous/icy planets. Because of the radial variation of the effects of rotation on the friction, they may be stronger for tidal inertial waves that propagate in the whole convective zone than for the equilibrium tide which has a higher amplitude in surface regions. As demonstrated by Auclair-Desrotour et al. (2014), such a behaviour must be taken into account in the study of the tidal evolution of star-planet and planet-moon systems. Indeed, the angular velocity of their components vary through time because of structural modifications and of applied (tidal and electromagnetic) torques. These torques are themselves complex functions of rotation (this work; Mathis 2015; Matt et al. 2012, 2015; Réville et al. 2015). It is thus necessary to have a completely coupled treatment of the tidal evolution of planetary systems and multiple stars and of the rotational evolution of their components with a coherent treatment of the variations of tidal flows and of their dissipation as a function of rotation.

In our work, the non-linear wave-wave interactions and those between tidal and convective flows have been ignored (e.g. Sen et al. 2012; Sen 2013; Barker & Lithwick 2013; Favier et al. 2014). Moreover, stratified convection, with intermediate stably stratified diffusive layers can take place in giant planets because of double-diffusive instabilities (Leconte & Chabrier 2012). Finally, stellar and planetary convective regions are differentially rotating and magnetized (Baruteau & Rieutord 2013; Guenel et al. 2016; Barker & Lithwick 2014). In the near future, these four aspects of the problem will be examined carefully to improve our knowledge of tidal friction in stars and planets.

Acknowledgements. The authors thank the referee for his positive and constructive report which allowed us to improve the article. The authors acknowledge funding by the European Research Council through ERC grant SPIRE 647383. This work was also supported by the Programme National de Planétologie

(CNRS/INSU), the GRAM specific action (CNRS/INSU-INP, CNES), the Axe Etoile of the Paris Observatory Scientific Council and the International Space Institute (ISSI team ENCELADE 2.0). We dedicate this article to our friend Pr. André Brahic who was continuously promoting research, culture and education and to his values "Courage, Liberté, Egalité, Fraternité".

References

Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., et al. 2012, ApJ, 757, 18
Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., Gallet, F., & Bouvier, J. 2016, A&A, 587, A105
Auclair-Desrotour, P., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2014, A&A, 561, L7
Auclair Desrotour, P., Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2015, A&A, 581, A118
Ballot, J., Brun, A. S., & Turck-Chièze, S. 2007, ApJ, 669, 1190
Barker, A. J., & Lithwick, Y. 2013, MNRAS, 435, 3614
Barker, A. J., & Lithwick, Y. 2014, MNRAS, 437, 305
Barker, A. J., Dempsey, A. M., & Lithwick, Y. 2014, ApJ, 791, 13
Barnes, S. A. 2003, ApJ, 586, 464
Baruteau, C., & Rieutord, M. 2013, J. Fluid Mechanics, 719, 47
Bolmont, E., & Mathis, S. 2016, Celest. Mech. Dyn. Astron., in press [arXiv:1603.06268]
Bolmont, E., Raymond, S. N., Leconte, J., & Matt, S. P. 2012, A&A, 544, A124
Bouvier, J. 2008, A&A, 489, L53
Braviner, H. J., & Ogilvie, G. I. 2015, MNRAS, 447, 1141
Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2008, ApJ, 689, 1354
Brun, A. S. 2014, in IAU Symp. 302, eds. P. Petit, M. Jardine, & H. C. Spruit, 114
Buffett, B. 2010, Nature, 468, 952
Campagne, A., Gallet, B., Moisy, F., & Cortet, P.-P. 2015, Phys. Rev. E, 91, 043016
Chaboyer, B., Demarque, P., & Pinsonneault, M. H. 1995, ApJ, 441, 865
Chandrasekhar, S. 1953, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A, 217, 306
Clark di Leoni, P., Cobelli, P. J., Mininni, P. D., Dmitruk, P., & Matthaeus, W. H. 2014, Phys. Fluids, 26, 035106
Efroimsky, M., & Lainey, V. 2007, J. Geophys. Res., 112, 12003
Favier, B., Barker, A. J., Baruteau, C., & Ogilvie, G. I. 2014, MNRAS, 439, 845
Ferreira, J. 2013, in EAS Pub. Ser. 62, eds. P. Hennebelle & C. Charbonnel, 169
Gallet, F., & Bouvier, J. 2013, A&A, 556, A36
Gallet, F., & Bouvier, J. 2015, A&A, 577, A98
Galtier, S. 2003, Phys. Rev. E, 68, 015301
García, R. A., Ceillier, T., Salabert, D., et al. 2014, A&A, 572, A34
Gastine, T., Yadav, R. K., Morin, J., Reiners, A., & Wicht, J. 2014, MNRAS, 438, L76
Glatzmaier, G. A. 2013, Introduction to Modelling Convection in Planets and Stars (Princeton University Press)
Goldreich, P., & Keeley, D. A. 1977, ApJ, 211, 934
Goldreich, P., & Soter, S. 1966, Icarus, 5, 375
Goodman, J., & Oh, S. P. 1997, ApJ, 486, 403
Guenel, M., Mathis, S., & Remus, F. 2014, A&A, 566, L9
Guenel, M., Baruteau, C., Mathis, S., & Rieutord, M. 2016, A&A, 589, A22
Hut, P. 1981, A&A, 99, 126
Jouve, L., & Ogilvie, G. I. 2014, J. Fluid Mech., 745, 223
Julien, K., Knobloch, E., Rubio, A. M., & Vasil, G. M. 2012, Phys. Rev. Lett., 109, 254503
Käpylä, P. J., Korpi, M. J., Stix, M., & Tuominen, I. 2005, A&A, 438, 403
Käpylä, P. J., Käpylä, M. J., & Brandenburg, A. 2014, A&A, 570, A43
Kaula, W. M. 1964, Rev. Geophys. Space Phys., 2, 661
Kawaler, S. D. 1988, ApJ, 333, 236
King, E. M., Stellmach, S., & Aurnou, J. M. 2012, J. Fluid Mech., 691, 568
King, E. M., Stellmach, S., & Buffett, B. 2013, J. Fluid Mech., 717, 449
Lagarde, N., Decressin, T., Charbonnel, C., et al. 2012, A&A, 543, A108
Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, Nature, 459, 957
Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, ApJ, 752, 14
Lainey, V., Jacobson, R. A., Tajeddine, R., et al. 2015, ArXiv e-prints [arXiv:1510.05870]
Landin, N. R., Mendes, L. T. S., & Vaz, L. P. R. 2010, A&A, 510, A46
Laskar, J., Boué, G., & Correia, A. C. M. 2012, A&A, 538, A105
Leconte, J., & Chabrier, G. 2012, A&A, 540, A20
Maeder, A., & Zahn, J.-P. 1998, A&A, 334, 1000
Mathis, S. 2015, A&A, 580, L3
Mathis, S., & Remus, F. 2013, in Lect. Not. Phys. 857 (Berlin: Springer Verlag), eds. J.-P. Rozelot, & C. Neiner, 111
Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2004, A&A, 425, 229
Mathis, S., Palacios, A., & Zahn, J.-P. 2004, A&A, 425, 243
Matt, S. P., Pinzón, G., de la Reza, R., & Greene, T. P. 2010, ApJ, 714, 989
Matt, S. P., Do Cao, O., Brown, B. P., & Brun, A. S. 2011, Astron. Nachr., 332, 897
Matt, S. P., Pinzón, G., Greene, T. P., & Pudritz, R. E. 2012, ApJ, 745, 101
Matt, S. P., Brun, A. S., Baraffe, I., Bouvier, J., & Chabrier, G. 2015, ApJ, 799, L23
McQuillan, A., Mazeh, T., & Aigrain, S. 2014, ApJS, 211, 24
Ogilvie, G. I. 2005, J. Fluid Mech., 543, 19
Ogilvie, G. I. 2013, MNRAS, 429, 613
Ogilvie, G. I. 2014, ARA&A, 52, 171
Ogilvie, G. I., & Lesur, G. 2012, MNRAS, 422, 1975
Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, ApJ, 610, 477
Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2007, ApJ, 661, 1180
Palacios, A., Talon, S., Charbonnel, C., & Forestini, M. 2003, A&A, 399, 603
Penev, K., Sasselov, D., Robinson, F., & Demarque, P. 2007, ApJ, 655, 1166
Penev, K., Zhang, M., & Jackson, B. 2014, PASP, 126, 553
Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2012, A&A, 544, A132
Réville, V., Brun, A. S., Matt, S. P., Strugarek, A., & Pinto, R. F. 2015, ApJ, 798, 116
Savonije, G. J., & Witte, M. G. 2002, A&A, 386, 211
Schatzman, E. 1962, Ann. Astrophys., 25, 18
Schubert, G., & Soderlund, K. M. 2011, Phys. Earth Planet. Interiors, 187, 92
Sen, A. 2013, ArXiv e-prints [arXiv:1312.7497]
Sen, A., Mininni, P. D., Rosenberg, D., & Pouquet, A. 2012, Phys. Rev. E, 86, 036319
Siess, L., Dufour, E., & Forestini, M. 2000, A&A, 358, 593
Skumanich, A. 1972, ApJ, 171, 565
Soderlund, K. M., Heimpel, M. H., King, E. M., & Aurnou, J. M. 2013, Icarus, 224, 97
Stevenson, D. J. 1979, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 12, 139
Valsecchi, F., & Rasio, F. A. 2014a, ApJ, 787, L9
Valsecchi, F., & Rasio, F. A. 2014b, ApJ, 786, 102
Winn, J. N., Fabrycky, D., Albrecht, S., & Johnson, J. A. 2010, ApJ, 718, L145
Witte, M. G., & Savonije, G. J. 1999, A&A, 350, 129
Witte, M. G., & Savonije, G. J. 2002, A&A, 386, 222
Wu, Y. 2005, ApJ, 635, 688
Zahn, J. P. 1966, Ann. Astrophys., 29, 489
Zahn, J.-P. 1975, A&A, 41, 329
Zahn, J.-P. 1977, A&A, 57, 383
Zahn, J.-P. 1989, A&A, 220, 112
Zahn, J.-P. 1992, A&A, 265, 115
Zahn, J.-P., & Bouchet, L. 1989, A&A, 223, 112

CHAPITRE 8

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous avons étudié les marées des couches atmosphériques et océaniques de planètes telluriques soumises aux perturbations gravifiques et thermiques de leur étoile hôte. Ce travail avait pour motivation première d'améliorer la compréhension de la marée thermique atmosphérique, un phénomène jouant un rôle crucial dans l'évolution des systèmes planétaires et pourtant encore mal connu. Sur un plan plus quantitatif, son objectif était de développer des outils théoriques à la fois robustes et complets permettant de calculer les grandeurs impliquées dans l'évolution des systèmes, telles que la redistribution de masse, la dissipation interne d'énergie, le couple de marée et les nombres de Love, en fonction des propriétés physiques et de la structure interne des couches (rotation, stratification, etc.). L'élaboration de ces outils répond à deux besoins essentiels. Le premier est de rendre plus cohérente la modélisation physique des systèmes planétaires en intégrant les couplages entre leur dynamique orbitale, l'évolution rotationnelle et la structure interne de chacune de leur composante. De nombreux modèles utilisés aujourd'hui pour reconstituer l'histoire des systèmes planétaires et prédire leur évolution, notamment en ce qui concerne le système solaire, se basent sur des modèles de marée simplifiés tels que les modèles à facteur de qualité constant ou à retard temporel constant, qui ne rendent pas compte de ces couplages et de la dépendance de la dissipation à la fréquence de marée qu'ils induisent, en particulier dans le cas des couches fluides planétaires. Le deuxième besoin est d'explorer le domaine des paramètres physiques (e.g. rotation, stratification, dissipation, etc.) et des configurations afin de comprendre leur rôle dans la réponse de marée. L'approche analytique est ici complémentaire du GCM, qui permet de simuler la circulation générale ainsi que les marées thermiques en prenant en compte leurs éventuels couplages et de proposer des lois d'échelles issues de l'étude de cas (Leconte et al., 2015). Elle isole le comportement de chaque processus en partant des modèles les plus idéalisés pour augmenter progressivement la complexité des couplages étape par étape tout en évaluant leur importance relative. Ceci permet en retour de diagnostiquer les simulations des GCM. Les prescriptions et lois d'échelles peuvent ensuite être utilisées dans les simulations séculaires d'évolution des systèmes planétaires. Dans ce contexte, l'approche analytique permet de traiter un plus grand nombre de configurations que l'approche numérique, ayant l'avantage d'être moins coûteuse en temps de calcul qu'une simulation par GCM. Les modèles physiques développés peuvent être confrontée aux observations dans le système solaire (e.g. Vénus) et dans les systèmes exoplanétaires, auxquelles il apportent une dimension prédictive. Ils permettent de sonder la structure des corps à partir des informations recueillies sur leur dynamique.

En adoptant comme références les travaux précurseurs effectués en géophysique des systèmes terrestres (e.g. Wilkes, 1949; Siebert, 1961, CL70) et en hydrodynamique stellaire et planétaire (e.g. Zahn, 1966a; Ogilvie & Lin, 2004), nous avons développé un nouveau modèle de marées atmosphériques permettant de traiter le cas des planètes proches de la synchronisation spin-orbite (Chapitres 3 et 4). Ce modèle sphérique global tri-dimensionnel introduit dans la dynamique des ondes de marées les processus dissipatifs sous la forme d'un refroidissement newtonien. Il exprime explicitement les grandeurs perturbées (champ de vitesses, pression, masse volumique, température, potentiel gravifique et nombres de Love complexes) en fonction des propriétés du système (rotation, stratification, pression, masse volumique, température, gravité de surface, mécanismes dissipatifs, etc.). Nous avons ainsi mis en évidence par cette approche le fait que le couple de marée thermique atmosphérique dépend significativement de la stratification de l'atmosphère dans les couches situées au voisinage de la surface et de la distribution de la puissance absorbée. Dans le

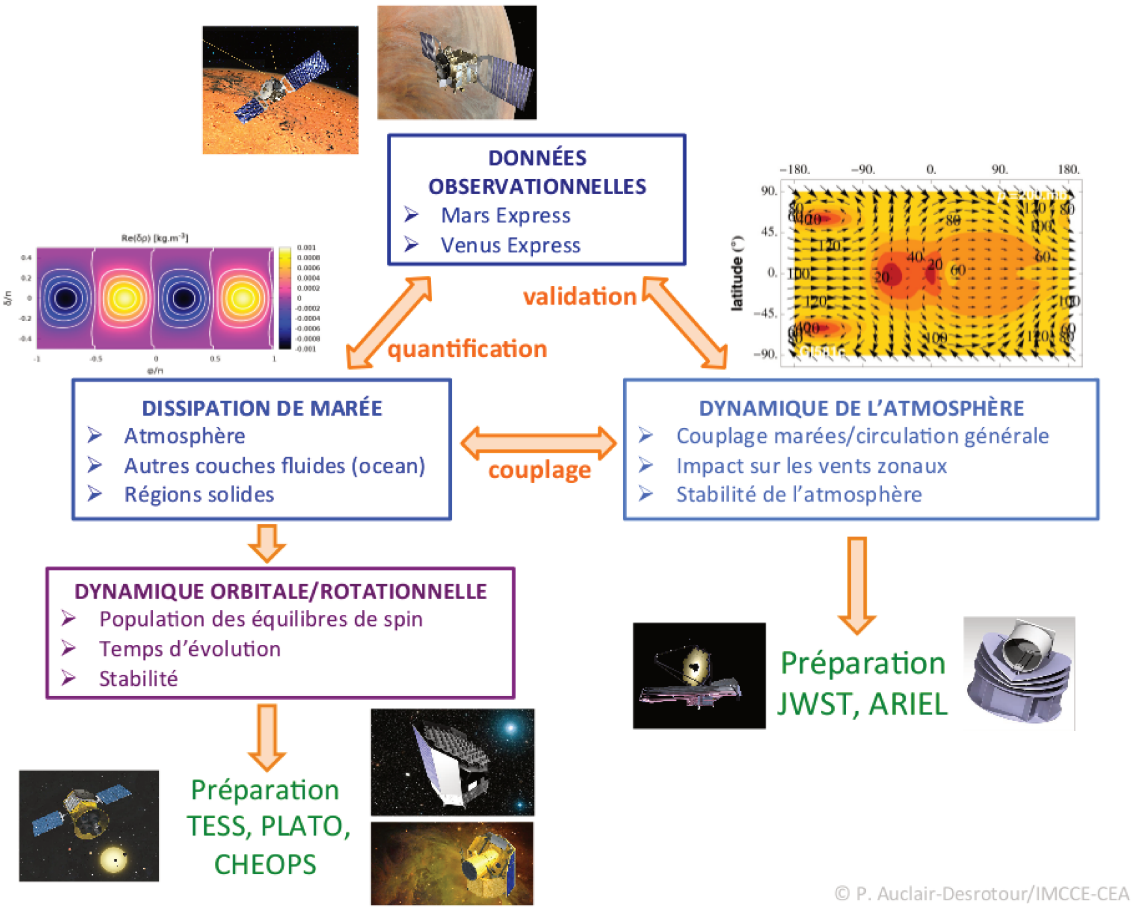


FIGURE 8.1: Perspectives de développement et d'application de la modélisation des effets de marées atmosphériques dans le contexte des missions spatiales aujourd'hui en cours de préparation.

cas isotherme, où l'atmosphère est fortement stratifiée et où l'on applique un forçage thermique uniforme (Section 4.4), le couple de marée est très faible en comparaison du couple obtenu dans le cas convectif (Section 4.5) où le forçage est appliqué au niveau de la surface. Cela s'explique en première approche par l'effet de la stratification qui couple les variations de densités au déplacement vertical dans l'équation de la chaleur : lorsque la stratification est suffisamment importante, les variations locales de densité engendrées par le forçage thermique sont compensées efficacement par le déplacement vertical du fluide, si elle est faible ce n'est pas le cas. La réponse de marée présente différents régimes dont les transitions sont définies par les rapports entre la fréquence de marée et les différentes fréquences caractéristiques du système : les fréquences de Lamb pour les ondes acoustiques, d'inertie pour les ondes inertielles, et de Brunt-Väisälä pour les ondes de gravité. La prise en compte du refroidissement radiatif permet dans le cas convectif correspondant à Vénus de retrouver les résultats donnés par les GCM (Leconte et al., 2015), ce qui suggère que les processus dissipatifs peuvent être modélisés en première approximation par un refroidissement effectif : cet effet régularise la réponse de marée de l'atmosphère dans la gamme des basses fréquences d'excitation en venant d'une part amortir les oscillations des ondes de gravité quand l'atmosphère est stratifiée et en éliminant d'autre part les singularités à la synchronisation spin-orbite caractéristiques des fluides parfaits (CL70). Néanmoins, d'autres mécanismes pourront être introduits par la suite dans le modèle pour le compléter. Le premier d'entre eux est la friction visqueuse et turbulente, dont le modèle de friction de Rayleigh représente une bonne approximation dans le cas quasi-adiabatique (Ogilvie, 2005, 2009). Cette description, comme le refroidissement newtonien, introduit un temps dissipatif qui vient se comparer à la période du forçage de marée. En plus de modifier la structure verticale des ondes, la friction a, de par sa place dans les équations

de la dynamique, des conséquences sur leur structure horizontale (e.g. Volland, 1974a) dont les effets astrophysiques devront être examinés. Un autre mécanisme important ignoré dans cette approche est l'interaction entre la réponse de marée et les vents zonaux. En se basant sur les modèles de circulation générale existants (Leconte et al., 2013; Heng & Workman, 2014; Heng et al., 2014), il est possible d'examiner la façon dont les vents moyens modifient la structure des ondes et comment, en retour, ces dernières viennent les alimenter en déposant du moment angulaire, de la quantité de mouvement et de la chaleur dans les couches turbulentes de l'atmosphère où la dissipation a lieu. Comme les répercussions de ces interactions sur le climat et les conditions de surface d'une planète sont potentiellement observables, elles devront être quantifiées. Enfin, notons que pour les besoins du traitement analytique du problème, la présente étude a été menée dans le cadre de l'approximation traditionnelle, qui consiste à négliger la contribution des composantes latitudinales de l'accélération de Coriolis, en ignorant les termes non-linéaires dans les équations et en prenant en compte les processus dissipatifs de façon approchée (refroidissement newtonien, friction de Rayleigh). Ces simplifications excluent de fait certaines configurations. L'approximation traditionnelle ne permet pas de traiter le cas d'une atmosphère convective en rotation rapide. La approximation linéaire, quant à elle, nous empêche d'étudier les interactions non-linéaires entre ondes de marée. L'approximation concernant les processus dissipatifs, enfin, convient bien au régime quasi-adiabatique mais ne rend pas compte des effets induits par les opérateurs laplaciens décrivant les processus dans le cas où ces derniers sont importants. Ces points pourront être traités aussi en utilisant la simulation numérique. Les cas d'atmosphères examinés dans ce travail présentent des structures atmosphériques simples (profil de température uniforme pour l'atmosphère isotherme, gradient de température dans le cas convectif). Le fait que le couple de marée varie sensiblement avec la structure de l'atmosphère montre la nécessité de prendre en compte cette caractéristique et d'effectuer les calculs pour des profils de températures réalistes (par exemples les profils de températures observés pour la Terre, Mars et Vénus).

L'effet le plus manifeste des marées thermiques atmosphériques au sein du système solaire est le piégeage de Vénus en rotation rétrograde, dans une configuration différente de la synchronisation spin-orbite. La prescription fournie par le modèle pour le couple de marée a donc servi à prédire analytiquement les états d'équilibre possibles pour la rotation de planètes semblables à Vénus (Chapitre 5) en fonction des paramètres physiques du système orbital (luminosité de l'étoile, température d'équilibre de la planète, gravité de surface, masse de l'atmosphère, etc.). Dans le cas où le comportement de la partie solide est modélisé par une rhéologie de Maxwell, la stabilité de ces positions pseudo-synchronisées ne dépend que des temps de Maxwell des deux couches, le temps de relaxation visco-élastique du matériau pour la partie solide et le temps de refroidissement radiatif pour l'atmosphère. Il nous faut souligner ici que la rhéologie de Maxwell, bien qu'elle soit aujourd'hui communément utilisée, sous-estime la dissipation interne et le couple de la partie solide dans le domaine des périodes de forçage inférieures au temps de Maxwell. Le second est généralement très grand (plusieurs siècles) devant le deuxième (Remus et al., 2012b). Ceci entre en contradiction avec la condition obtenue pour la stabilité des équilibres de pseudo-synchronisation, qui découle de cette sous-estimation du couple de marée solide. Cependant, la méthodologie mise en oeuvre ici est générale et demeure applicable à d'autres rhéologies, notamment le modèle d'Andrade, qui corrige le défaut du modèle de Maxwell (Leconte et al., 2015). Malgré les différentes perspectives de développement mentionnées ci-dessus, le modèle de marées thermiques atmosphériques élaboré durant la thèse est applicable en l'état à l'étude de cas réels, par exemple à Mars pour le système solaire et à des exoplanètes telluriques types dans le cadre de la préparation des projets ARIEL, JWST, CHEOPS, TESS et PLATO (Fig. 8.1).

Conscients de l'impact que peuvent avoir les marées océaniques sur la dynamique orbitale de systèmes tels que le système Terre-Lune, nous avons ensuite développé un nouveau modèle analytique global décrivant la réponse d'une couche océanique épaisse à une perturbation de marée gravifique (Chapitre 6). Dans ce type d'approche, les océans de planètes telluriques et de satellites sont généralement traités comme des couches bi-dimensionnelles de fluides incompressibles (e.g. Tyler, 2011, 2014; Matsuyama, 2014). Nous avons donc introduit dans nos travaux les effets dus à la sphéricité de la couche, à la stratification et à la compressibilité

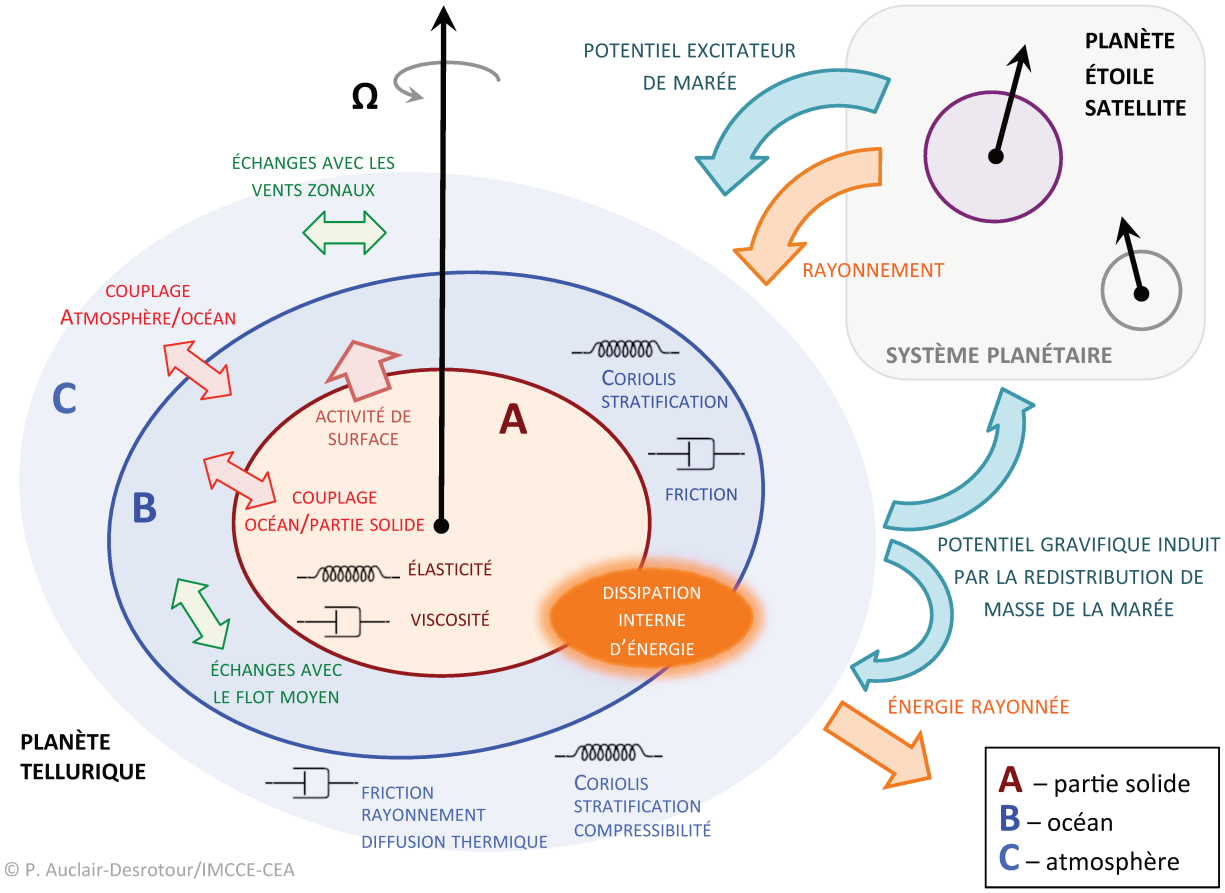


FIGURE 8.2: Réponse de marée d'une planète tellurique composée de trois couches (une partie solide, un océan et une atmophère), avec les mécanismes physiques, les couplages et les différentes interactions qui entrent en jeu. Les forces de rappel et les mécanismes dissipatifs sont représentés respectivement par des ressorts et des amortisseurs.

du fluide, ce qui permet de prendre en compte la contribution des ondes gravito-inertielles dans la réponse de marée de l'océan. Comme dans notre étude des marées atmosphériques, nous nous sommes attachés à établir de façon systématique les expressions donnant les distributions des quantités perturbées géophysiques en fonction des caractéristiques de la couche. A la différence de l'atmosphère, l'océan se caractérise par des bords (interne et externe) bien définis, ce qui en fait un guide d'ondes efficace pour les modes excités par la marée. Sa réponse de marée présente en conséquence une forte dépendance à la fréquence d'excitation avec de nombreuses résonances (Fig. 6.5 et 6.6). La position des résonances est déterminée par la structure interne de la couche (stratification, épaisseur). La friction est quant à elle prise en compte sous la forme d'une friction de Rayleigh effective qui évalue de la façon la plus simple possible la friction turbulente appliquée par la topographie. Elle a une influence directe sur la variabilité en fréquence de la dissipation d'énergie interne, dont l'intervalle des amplitudes couvre plusieurs ordres de grandeur.

Cette variabilité en fréquence apparaît comme un point crucial qu'il est nécessaire d'avoir sous contrôle pour améliorer notre compréhension de l'évolution des systèmes planétaires. Partant de ce constat, nous avons établi une relation explicite entre l'énergie dissipée et les paramètres d'une section de couche fluide en généralisant le modèle cartésien local d'Ogilvie & Lin (2004), qui décrit la dynamique des ondes inertielles dans les zones convectives planétaires et stellaires, aux ondes de marées gravito-inertielles se propageant dans les régions fluides potentiellement stablement stratifiées (Chapitre 7). Cette étude prend en compte deux processus dissipatifs essentiels : la diffusion thermique et la friction visqueuse/turbulente. Elle aboutit à la caractérisation complète du spectre de dissipation résonant engendré par le forçage des modes normaux pour l'ensemble des régimes identifiés en fonction de trois paramètres de contrôle du système : le ratio

des fréquences d'inertie et de Brunt-Väisälä, le nombre d'Ekman (rapport entre la friction visqueuse et les effets inertiels) et le nombre de Prandtl (rapport entre la friction visqueuse et la diffusion thermique). Les lois d'échelles obtenues fournissent un diagnostic aux résultats des modèles globaux. En particulier, elles répondent à la question mentionnée plus haut concernant les résonances des marées océaniques : la variabilité de la dissipation interne est inversement proportionnelle au carré du nombre d'Ekman. Ce résultat a été confirmé récemment à l'aide de la simulation numérique non-linéaire par Wei (2016). L'application du modèle à un système planète-satellite met en avant l'impact des résonances sur la dynamique orbitale, chaque pic de dissipation induisant une variation rapide de la distance séparant les deux corps sur un court laps de temps. Les lois d'échelles dérivées de ce travail trouvent aussi une utilité dans l'élaboration de prescriptions réalistes pour la viscosité turbulente dans les régions convectives stellaires et planétaires. Celle-ci, bien qu'elle soit considérée comme constante dans la plupart des modèles, s'avère en fait dépendre fortement de la vitesse angulaire de rotation du corps dans le régime de rotation rapide. Il en est de même pour la dissipation qu'elle génère sous l'effet des ondes de marées, dont la sensibilité à la fréquence d'excitation est accrue d'un facteur proportionnel à $\Omega^{18/5}$. Le modèle de la boîte cartésienne, malgré les simplifications qu'il implique, est approprié à l'analyse physique des marées fluides. Cependant, il pourra encore être généralisé aux fluides magnétisés afin d'inclure les ondes d'Alfvén ignorées dans ce travail.

Les modèles développés durant la thèse représentent les premiers éléments d'un projet à plus long terme dont l'ambition est d'élaborer une modélisation *ab initio* de la réponse de marée totale d'une planète tellurique. Un tel objet peut être assimilé en première approximation à une superposition de trois couches, une partie solide, un océan et une atmosphère (voir Fig. 8.2) présentant chacune leurs caractéristiques propres. La réponse totale de la planète résulte alors de la redistribution de masse dans ces trois couches. Cependant, elle ne se réduit pas à la somme des trois composantes prises indépendamment. Il est important de prendre en compte les couplages entre couches résultant des interactions de contact et de l'effet rétroactif du potentiel de marée de redistribution de masse. Les effets de charge de l'océan sur la partie solide sont par exemple susceptibles de modifier significativement la dissipation de marée (Matsuyama, 2014). Il nous faut enfin mentionner les échanges entre la marée et l'écoulement moyen dans les régions fluides, qui se font dans les deux sens et contribuent à l'évolution de la dynamique interne de ces couches et des conditions de surfaces. La construction de ce type de modélisation devra être menée en développant en synergie les approches analytiques et numériques. Elle s'insère dans une perspective plus vaste visant à faire émerger une vision multi-échelles d'un système planétaire qui unisse dynamiques interne, rotationnelle et orbitale des corps au sein d'un même ensemble physique cohérent.

BIBLIOGRAPHIE

Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1972, Handbook of Mathematical Functions

Aitta, A. 2012, Icarus, 218, 967

Alexander, M. E. 1973, Astrophysics and Space Science, 23, 459

Alvan, L., Brun, A. S., & Mathis, S. 2014, Astronomy & Astrophysics, 565, A42

Andrade, E. N. D. C. 1910, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 84, 1

Arras, P. & Socrates, A. 2010, ApJ, 714, 1

Artigau, É., Kouach, D., Donati, J.-F., et al. 2014, in Proceedings of the SPIE, Vol. 9147, Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy V, 914715

Auclair-Desrotour, P., Laskar, J., & Mathis, S. 2016a, soumis à Astronomy & Astrophysics

Auclair-Desrotour, P., Laskar, J., & Mathis, S. 2016b, soumis à Astronomy & Astrophysics

Auclair-Desrotour, P., Le Poncin-Lafitte, C., & Mathis, S. 2014, Astronomy & Astrophysics, 561, L7

Auclair Desrotour, P., Mathis, S., & Le Poncin-Lafitte, C. 2015, Astronomy & Astrophysics, 581, A118

Baglin, A., Auvergne, M., Boisnard, L., et al. 2006, in COSPAR Meeting, Vol. 36, 36th COSPAR Scientific Assembly

Baker, R. D., Schubert, G., & Jones, P. W. 2000, Journal of Atmospheric Sciences, 57, 184

Barker, A. J., Dempsey, A. M., & Lithwick, Y. 2014, The Astrophysical Journal, 791, 13

Barker, A. J. & Lithwick, Y. 2013, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 435, 3614

Barker, A. J. & Lithwick, Y. 2014, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 437, 305

Barry, R. G. & Chorley, R. J. 2009, Atmosphere, weather and climate (Routledge)

Bartels, J. 1928, Handbuch der Experimentalphysik, 25, 163

Bartels, J. 1932, The Scientific Monthly, 35, 110

Beer. 1852, Annalen der Physik, 162, 78

Bernard, E. A. 1962, Archives for Meteorology Geophysics and Bioclimatology Series A Meteorology and Atmopsheric Physics, 12, 502

Bills, B. G. & Ray, R. D. 1999, Geophysical Research Letters, 26, 3045

Böhm-Vitense, E. 1958, Zeitschrift für Astrophysik, 46, 108

Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, Science, 327, 977

Bouguer, P. 1729, Essai d'Optique sur la gradation de la Lumiere

Boussinesq, J. 1877, Essai sur la théorie des eaux courantes (Imprimerie nationale)

Boussinesq, J. 1897, Théorie de l'écoulmnent tourbillonnant and tumultuex des liquides dans les lits rectilignes à grande section, Vol. 1 (Gauthier-Villars)

Brillouin, L. 1926, CR Acad. Sci, 183, 24

Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2008, The Astrophysical Journal, 689, 1354

Bruce, G. H., Peaceman, D., Rachford Jr, H., Rice, J., et al. 1953, Journal of Petroleum Technology, 5, 79

Brun, A. S. 2014, in IAU Symposium, Vol. 302, Magnetic Fields throughout Stellar Evolution, ed. P. Petit, M. Jardine, & H. C. Spruit, 114–125

Butler, S. T. & Small, K. A. 1963, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 274, 91

Cartwright, D. E. 1977, Reports on Progress in Physics, 40, 665

Cébron, D., Bars, M. L., Gal, P. L., et al. 2013, Icarus, 226, 1642

Cebron, D., Le Bars, M., Moutou, C., & Le Gal, P. 2012, Astronomy & Astrophysics, 539, A78

Chalonge, D. 1954, L'Astronomie, 68, 89

Chandrasekhar, S. 1953, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 217, 306

Chapman, S. 1924, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 50, 165

Chapman, S. & Lindzen, R. 1970, Atmospheric tides. Thermal and gravitational. Reidel.

Chen, E. M. A., Nimmo, F., & Glatzmaier, G. A. 2014, Icarus, 229, 11

Correia, A. C. M. 2001, PhD thesis, Paris 7

Correia, A. C. M., Boué, G., Laskar, J., & Rodríguez, A. 2014, Astronomy & Astrophysics, 571, A50

Correia, A. C. M. & Laskar, J. 2001, Nature, 411, 767

Correia, A. C. M. & Laskar, J. 2003, Journal of Geophysical Research (Planets), 108, 5123

Correia, A. C. M. & Laskar, J. 2010, Tidal Evolution of Exoplanets, ed. S. Seager, 239–266

Correia, A. C. M., Laskar, J., & de Surgy, O. N. 2003, Icarus, 163, 1

Correia, A. C. M., Levrard, B., & Laskar, J. 2008, Astronomy & Astrophysics, 488, L63

Covey, C., Dai, A., Marsh, D. R., & Lindzen, R. S. 2009, AGU Fall Meeting Abstracts

Cowling, T. G. 1941, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 101, 367

Crisp, D. 1986, Icarus, 67, 484

Darwin, G. H. 1879, The Observatory, 3, 79

Darwin, G. H. 1880, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I, 171, 713

Darwin, G. H. 1886, Nature, 34, 287

Dickinson, R. E. & Geller, M. A. 1968, Journal of Atmospheric Sciences, 25, 932

Dobrovolskis, A. R. & Ingersoll, A. P. 1980, Icarus, 41, 1

Eakins, B. W. & Sharman, G. F. 2010, NOAA National Geophysical Data Center, Boulder, CO

Eckart, C. 1960, Physics of Fluids, 3, 421

Efroimsky, M. 2012, Astrophysical Journal, 746, 150

Efroimsky, M. & Lainey, V. 2007, Journal of Geophysical Research (Planets), 112, 12003

Efroimsky, M. & Makarov, V. V. 2013, The Astrophysical Journal, 764, 26

Egbert, G. D. & Ray, R. D. 2001, Journal of Geophysical Research, 106, 22

Egbert, G. D. & Ray, R. D. 2003, Geophysical Research Letters, 30, 1907

Farrell, W. E. 1972, Reviews of Geophysics and Space Physics, 10, 761

Fels, S. B. & Lindzen, R. S. 1974, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 6, 149

Flattery, T. W. 1967, Hough functions (University of Chicago. Department of the Geophysical Sciences)

Fortier, A., Beck, T., Benz, W., et al. 2014, in Proceedings of the SPIE, Vol. 9143, Space Telescopes and Instrumentation 2014 : Optical, Infrared, and Millimeter Wave, 91432J

Friedlander, S. 1987, Geophysical Journal, 89, 637

Gerkema, T. & Shrira, V. I. 2005, Journal of Fluid Mechanics, 529, 195

Gerkema, T. & Zimmerman, J. 2008, Lecture Notes, Royal NIOZ, Texel

Gold, T. & Soter, S. 1969, Icarus, 11, 356

Goldreich, P. 1963, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 126, 257

Goldreich, P. & Keeley, D. A. 1977, The Astrophysical Journal, 211, 934

Goldreich, P. & Nicholson, P. D. 1989, Astrophysical Journal, 342, 1079

Goldreich, P. & Peale, S. J. 1968, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 6, 287

Goldreich, P. & Soter, S. 1966, Icarus, 5, 375

Green, J. 1965in , The Royal Society, 564–574

Greenberg, R. 2009, ApJl, 698, L42

Greiner, W. 1999, Mécanique quantique. Une introduction (Springer Science & Business Media)

Gu, P.-G. & Ogilvie, G. I. 2009, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 395, 422

Guenel, M., Baruteau, C., Mathis, S., & Rieutord, M. 2016, Astronomy & Astrophysics, 589, A22

Hairer, E., Nørsett, S., & Wanner, G. 2000, Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff problems, 2nd edn. (Berlin : Springer)

Haurwitz, B. 1965, Archives for Meteorology Geophysics and Bioclimatology Series A Meteorology and Atmopsheric Physics, 14, 361

Heng, K., Mendonça, J. M., & Lee, J.-M. 2014, The Astrophysical Journal Supplement, 215, 4

Heng, K. & Workman, J. 2014, The Astrophysical Journal Supplement, 213, 27

Henning, W. G., O'Connell, R. J., & Sasselov, D. D. 2009, ApJ, 707, 1000

Holl, P. 1970, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II, 7, 10

Holman, J. P. 2002, Heat Transfer 9th ed.

Hough, S. S. 1898, Royal Society of London Philosophical Transactions Series A, 191, 139

Hut, P. 1981, Astronomy & Astrophysics, 99, 126

Idso, S. B. & Jackson, R. D. 1969, Journal of Geophysical Research, 74, 5397

Ioannou, P. J. & Lindzen, R. S. 1993a, Astrophysical Journal, 406, 252

Ioannou, P. J. & Lindzen, R. S. 1993b, Astrophysical Journal, 406, 266

Ioannou, P. J. & Lindzen, R. S. 1994, Astrophysical Journal, 424, 1005

Jeffreys, H. 1961, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 122, 339

Jouve, L. & Ogilvie, G. I. 2014, Journal of Fluid Mechanics, 745, 223

Julien, K., Knobloch, E., Rubio, A. M., & Vasil, G. M. 2012, Physical Review Letters, 109, 254503

Kato, S. 1966, J. Geophys. Res., 71, 3201

Kaula, W. M. 1961, Geophysical Journal, 5, 104

Kaula, W. M. 1962, Astronomical Journal, 67, 300

Kaula, W. M. 1964, Reviews of Geophysics and Space Physics, 2, 661

Kelvin, L. 1863, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Treatise on Natural Philosophy, 2, 837

Kelvin, L. 1882, Proc. Roy. Soc. Edinb., 11, 396

King, E. M., Stellmach, S., & Buffett, B. 2013, Journal of Fluid Mechanics, 717, 449

Klett, Witwe, E., Detleffsen, Peter, C., et al. 1760, IH Lambert... Photometria sive de mensura and gradibus luminis, colorum and umbrae (sumptibus viduae Eberhardi Klett)

Konopliv, A. S. & Yoder, C. F. 1996, Geophysical Research Letters, 23, 1857

Kopal, Z., ed. 1978, Astrophysics and Space Science Library, Vol. 68, Dynamics of close binary systems

Kopparapu, R. K., Ramirez, R. M., SchottelKotte, J., et al. 2014, Astrophysical Journall, 787, L29

Kramers, H. A. 1926, Zeitschrift fur Physik, 39, 828

Kramm, U., Nettelmann, N., Fortney, J. J., Neuhäuser, R., & Redmer, R. 2012, Astronomy & Astrophysics, 538, A146

Lacis, A. A. 1975, Journal of Atmospheric Sciences, 32, 1107

Lainey, V., Arlot, J.-E., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, Nature, 459, 957

Lainey, V., Dehant, V., & Pätzold, M. 2007, Astronomy & Astrophysics, 465, 1075

Lainey, V., Jacobson, R. A., Tajeddine, R., et al. 2015, ArXiv e-prints

Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, The Astrophysical Journal, 752, 14

Lamb, H. 1911, Royal Society of London Proceedings Series A, 84, 551

Lamb, H. 1916, Hydrodynamics (University Press)

Lamb, H. 1917, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 93, 114

Lambeck, K. 1977, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 287, 545

Laplace, P. S. 1798, Traité de mécanique céleste (Duprat J. B. M.)

Laskar, J. 1994, Astronomy & Astrophysics, 287, L9

Laskar, J. & Correia, A. C. M. 2004, in Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 321, Extrasolar Planets : Today and Tomorrow, ed. J. Beaulieu, A. Lecavelier Des Etangs, & C. Terquem, 401

Leconte, J., Forget, F., Charnay, B., et al. 2013, Astronomy & Astrophysics, 554, A69

Leconte, J., Wu, H., Menou, K., & Murray, N. 2015, Science, 347, 632

Lee, U. & Saio, H. 1997, ApJ, 491, 839

Lindzen, R. S. 1966, Monthly Weather Review, 94, 295

Lindzen, R. S. 1967a, Nature, 215, 1260

Lindzen, R. S. 1967b, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 93, 18

Lindzen, R. S. 1968a, Royal Society of London Proceedings Series A, 303, 299

Lindzen, R. S. 1968b, Canadian Journal of Physics, 46, 1835

Lindzen, R. S. 1970a, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 1, 303

Lindzen, R. S. 1970b, Journal of Atmospheric Sciences, 27, 536

Lindzen, R. S. 1971, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 2, 89

Lindzen, R. S. 1981, Journal of Geophysical Research, 86, 9707

Lindzen, R. S. 1988, Journal of Atmospheric Sciences, 45, 705

Lindzen, R. S. 1990, Dynamics in Atmospheric Physics (Cambridge University Press), 320

Lindzen, R. S. & Blake, D. 1971, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 2, 31

Lindzen, R. S. & Hong, S.-S. 1974, Journal of Atmospheric Sciences, 31, 1421

Lindzen, R. S. & McKenzie, D. J. 1967, Pure and Applied Geophysics, 66, 90

Longuet-Higgins, M. S. 1966, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 260, 317

Longuet-Higgins, M. S. 1968, Royal Society of London Philosophical Transactions Series A, 262, 511

Longuet-Higgins, M. S. & Pond, G. S. 1970, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 266, 193

Love, A. E. H. 1911, Some Problems of Geodynamics (Cambridge University Press)

Love, A. E. H. 1927, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (Cambridge : Cambridge University Press), reprinted in 1944 by Dover Publications, New York

MacDonald, G. J. F. 1964, Reviews of Geophysics and Space Physics, 2, 467

Margules, M. 1890, Über die Schwingungen periodisch erwärmter Luft (F. Tempsky)

Marov, M. Y., Avduevskij, V. S., Kerzhanovich, V. V., et al. 1973, Journal of Atmospheric Sciences, 30, 1210

Mathis, S. 2009, Astronomy & Astrophysics, 506, 811

Mathis, S., Auclair-Desrotour, P., Guenel, M., Gallet, F., & Le Poncin-Lafitte, C. 2016, ArXiv e-prints

Mathis, S. & de Brye, N. 2011, Astronomy & Astrophysics, 526, A65

Mathis, S. & Le Poncin-Lafitte, C. 2009, Astronomy & Astrophysics, 497, 889

Mathis, S., Neiner, C., & Tran Minh, N. 2014, Astronomy & Astrophysics, 565, A47

Mathis, S. & Remus, F. 2013, in Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, Vol. 857, Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, ed. J.-P. Rozelot & C. . Neiner, 111–147

Mathis, S., Talon, S., Pantillon, F.-P., & Zahn, J.-P. 2008, Solar Physics, 251, 101

Matsuda, Y. 1980, Meteorological Society of Japan Journal, 58, 443

Matsuyama, I. 2014, Icarus, 242, 11

Mayor, M., Marmier, M., Lovis, C., et al. 2011, ArXiv e-prints

McCue, J., Dormand, J. R., & Gadian, A. M. 1992, Earth Moon and Planets, 57, 1

Mignard, F. 1979, Moon and Planets, 20, 301

Mignard, F. 1980, Moon and Planets, 23, 185

Mignard, F. 1981, Moon and Planets, 24, 189

Miles, J. W. 1974, Journal of Fluid Mechanics, 66, 241

Mocquet, A., Rosenblatt, P., Dehant, V., & Verhoeven, O. 2011, Planetary and Space Science, 59, 1048

Mohr, P. J., Taylor, B. N., & Newell, D. B. 2012, Journal of Physical and Chemical Reference Data, 41, 043109

Newton, I. 1687, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Auctore Js. Newton

NOAA, NASA, & USAF. 1976, Atmosphere, US Standard, Tech. rep.

Néron de Surgy, O. & Laskar, J. 1997, Astronomy & Astrophysics, 318, 975

Ogilvie, G. I. 2005, Journal of Fluid Mechanics, 543, 19

Ogilvie, G. I. 2009, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 396, 794

Ogilvie, G. I. 2013, Monthly Notice of the Royal Astronomical Society, 429, 613

Ogilvie, G. I. 2014, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 52, 171

Ogilvie, G. I. & Lesur, G. 2012, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 422, 1975

Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2004, ApJ, 610, 477

Ogilvie, G. I. & Lin, D. N. C. 2007, Astrophysical Journal, 661, 1180

Pedlosky, J. 1982, Geophysical fluid dynamics

Pekeris, C. L. 1937, Royal Society of London Proceedings Series A, 158, 650

Penev, K., Sasselov, D., Robinson, F., & Demarque, P. 2007, The Astrophysical Journal, 655, 1166

Planck, M. 1901, Annalen der Physik, 309, 553

Pollack, J. B. & Young, R. 1975, Journal of Atmospheric Sciences, 32, 1025

Prat, V., Lignières, F., & Ballot, J. 2016, Astronomy & Astrophysics, 587, A110

Press, W. H. 1981, ApJ, 245, 286

Press, W. H., Flannery, B. P., & Teukolsky, S. A. 1986, Numerical recipes. The art of scientific computing

Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, Experimental Astronomy, 38, 249

Remus, F., Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2012a, Astronomy & Astrophysics, 544, A132

Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P., & Lainey, V. 2012b, Astronomy & Astrophysics, 541, A165

Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2015, Journal of Astronomical Telescopes, Instruments, and Systems, 1, 014003

Savonije, G. J. & Witte, M. G. 2002, Astronomy & Astrophysics, 386, 211

Seiff, A., Kirk, D. B., Young, R. E., et al. 1980, Journal of Geophysical Research : Space Physics, 85, 7903

Sen, A., Mininni, P. D., Rosenberg, D., & Pouquet, A. 2012, Physical Review E, 86, 036319

Shen, M. & Zhang, C. Z. 1990, Icarus, 85, 129

Siebert, M. 1961, Advances in Geophysics, 7, 105

Singer, S. 1968, Geophysical Journal International, 15, 205

Smith, W. B. 1963, Astronomical Journal, 68, 15

Stevenson, D. J. 1979, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 12, 139

Strugarek, A., Brun, A. S., Matt, S. P., & Réville, V. 2014, The Astrophysical Journal, 795, 86

Strugarek, A., Brun, A. S., Matt, S. P., & Réville, V. 2015, The Astrophysical Journal, 815, 111

Stull, R. B. 1988, An introduction to boundary layer meteorology

Taylor, G. I. 1929, Royal Society of London Proceedings Series A, 126, 169

Taylor, G. I. 1932, Mem. Roy. Meteorol. Soc., 4, 41

Taylor, G. I. 1936, Royal Society of London Proceedings Series A, 156, 318

Terquem, C., Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., & Lin, D. N. C. 1998, The Astrophysical Journal, 502, 788

Tobie, G., Mocquet, A., & Sotin, C. 2005, Icarus, 177, 534

Tomasko, M. G., Doose, L. R., & Smith, P. H. 1985, Advances in Space Research, 5, 71

Tort, M. & Dubos, T. 2014, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 140, 2388

Townsend, R. H. D. 2003, Monthly Notice of the Royal Astronomical Society, 340, 1020

Tyler, R. 2011, Icarus, 211, 770

Tyler, R. 2014, Icarus, 243, 358

Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, Nonradial oscillations of stars

Vidotto, A. A., Fares, R., Jardine, M., Moutou, C., & Donati, J.-F. 2015, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 449, 4117

Volland, H. 1974a, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 36, 445

Volland, H. 1974b, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 36, 1975

Volland, H. & Mayr, H. G. 1972a, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 34, 1745

Volland, H. & Mayr, H. G. 1972b, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 34, 1769

Volland, H. & Mayr, H. G. 1972c, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 34, 1797

Wang, H., Boyd, J. P., & Akmaev, R. A. 2016, Geoscientific Model Development, 9, 1477

Webb, D. J. 1980, Geophysical Journal, 61, 573

Weekes, K. & Wilkes, M. V. 1947, Royal Society of London Proceedings Series A, 192, 80

Wei, X. 2016, ArXiv e-prints

Wentzel, G. 1926, Zeitschrift fur Physik, 38, 518

Wilkes, M. V. 1949, Oscillations of the Earth's Atmosphere (University Press Cambridge)

Williams, J. G., Konopliv, A. S., Boggs, D. H., et al. 2014, Journal of Geophysical Research (Planets), 119, 1546

Wisdom, J. 1985, Icarus, 63, 272

Witte, M. G. & Savonije, G. J. 2002, Astronomy & Astrophysics, 386, 222

Wu, Y. 2005, Astrophysical Journal, 635, 688

Yanowitch, M. 1967a, Journal of Fluid Mechanics, 29, 209

Yanowitch, M. 1967b, Canadian Journal of Physics, 45, 2003

Zahn, J. P. 1966a, Annales d'Astrophysique, 29, 313

Zahn, J. P. 1966b, Annales d'Astrophysique, 29, 489

Zahn, J. P. 1966c, Annales d'Astrophysique, 29, 565

Zahn, J. P. 1970, Astronomy & Astrophysics, 4, 452

Zahn, J.-P. 1975, Astronomy & Astrophysics, 41, 329

Zahn, J.-P. 1977, Astronomy & Astrophysics, 57, 383

Zahn, J.-P. 1989, Astronomy & Astrophysics, 220, 112

Zahn, J.-P. & Bouchet, L. 1989, Astronomy & Astrophysics, 223, 112

Zahn, J.-P., Talon, S., & Matias, J. 1997, Astronomy & Astrophysics, 322, 320

Résumé

Cette thèse traite de la modélisation des marées fluides des planètes telluriques du système solaire et des systèmes exoplanétaires.

En premier lieu, nous examinons la réponse de marée des couches atmosphériques, soumises au potentiel de marée gravifique et au forçage thermique de l'étoile hôte du système. Nous proposons un nouveau modèle global prenant en compte les processus dissipatifs avec un refroidissement newtonien, modèle à partir duquel nous traitons la dynamique des ondes de marées engendrées par ces forçages, et quantifions leur dissipation, le nombre de Love et le couple de marée exercé sur la couche atmosphérique en fonction de la fréquence de forçage. Ceci nous permet d'étudier l'ensemble des configurations possibles depuis les planètes au voisinage de la synchronisation telles que Vénus jusqu'aux rotateurs rapides tels que la Terre.

En second lieu, nous développons une approche similaire pour les océans de planètes de type terrestre, où la friction visqueuse effective de la topographie est prise en compte, à partir de laquelle nous quantifions la réponse de marée d'un océan global potentiellement profond et sa dépendance à la fréquence d'excitation. Dans ce cadre, et ce grâce à des modèles locaux, nous caractérisons de manière détaillée les propriétés des spectres en fréquence de la dissipation engendrée par les ondes de marées au sein des couches fluides planétaires (et stellaires) en fonction des paramètres structurels et dynamiques de ces dernières (rotation, stratification, viscosité et diffusivité thermique).

Mots Clés

Marées, hydrodynamique, mécanique céleste, planètes telluriques : atmosphères et rotation, exoplanètes, interactions étoiles-planètes

Abstract

This thesis deals with the modeling of fluid tides in terrestrial planets of the Solar system and exoplanetary systems.

First, we examine the tidal response of atmospheric layers, submitted to the tidal gravitational potential and the thermal forcing of the host star of the system. We propose a new global model taking into account dissipative processes with a Newtonian cooling, model that we use to treat the dynamics of tidal waves generated by these forcings, and to quantify their dissipation, the Love number and the tidal torque exerted on the atmospheric layer as a function of the forcing frequency. This allows us to study possible configurations from planets close to synchronization such as Venus to rapid rotators such as the Earth.

Second, we develop a similar approach for the oceans of terrestrial planets where the action of topography is taken into account thanks to an effective viscous friction. From this modeling, we quantify the tidal response of a potentially deep global ocean and its dependence of the tidal frequency. In this framework, and by using local models, we characterize in detail the properties of the frequency spectra of dissipation generated by tidal waves within fluid planetary (and stellar) layers as functions of the structural and dynamical parameters of these latters (rotation, stratification, viscosity and thermal diffusivity).

Keywords

Tides, hydrodynamics, celestial mechanics, terrestrial planets: atmospheres and rotation, exoplanets, stars-planets interactions