

Sur les modèles Tweedie multivariés

Johann Cuenin

▶ **To cite this version:**

Johann Cuenin. Sur les modèles Tweedie multivariés. Statistiques [math.ST]. Université de Franche-Comté, 2016. Français. NNT : 2016BESA2026 . tel-01494103

HAL Id: tel-01494103
https://theses.hal.science/tel-01494103

Submitted on 22 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UBFC
UNIVERSITÉ
BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

LmB

Thèse de Doctorat

présentée par

Johann Cuenin

pour obtenir le grade de
Docteur en Mathématiques et Applications de l'Université Bourgogne Franche-Comté

Sur les Modèles Tweedie Multivariés

Thèse soutenue le 6 décembre 2016, devant le jury composé de :

Hervé Cardot	Examinateur
Jean-François Dupuy	Rapporteur
Anne Gégout-Petit	Examinatrice et Présidente du jury
Célestin C. Kokonendji	Directeur de thèse
Afif Masmoudi	Rapporteur
Bruno Saussereau	Directeur de thèse

ECOLE DOCTORALE
CARNOT - PASTEUR

cnrs

À tout le monde...

Remerciements

Je remercie tout d'abord mes directeurs de thèse, Célestin C. Kokonendji et Bruno Saussereau, pour leur encadrement. Leur disponibilité et leur patience m'ont permis de mener à bien ces travaux. C'est avec bienveillance et encouragements qu'ils m'ont appris le métier de chercheur et transmis leur passion.

Je remercie Hervé Cardot, Jean-françois Dupuy, Anne Gégout-Petit et Afif Masmoudi pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Je tiens à remercier tout particulièrement Jean-François Dupuy et Afif Masmoudi pour avoir rapporté mes travaux de thèse.

J'ai une pensée émue pour Bent Jørgensen, décédé en novembre 2015. Il m'a accueilli au Danemark pour mon stage de seconde année de master en 2013, et c'est sans doute grâce à lui que ce travail de thèse a été initié. C'est avec nostalgie que je me rappelle nos échanges, qui concernaient autant la statistique que l'art et la manière d'apprécier un bon Macvin. Je lui dédie ce manuscrit.

Je veux remercier toute l'équipe de probabilités et statistique, en particulier Yacouba et Clément. Merci également à Ulrich, Julien-Yves, Louis, Richard, Pascaline et Catherine ainsi qu'à tous les autres membres du LMB.

Merci à toute l'équipe des doctorants, post-docs et ATER pour l'ambiance et les bons moments passés ensemble. Merci à ceux qui ont partagé le bureau 328B avec moi de m'avoir supporté pendant ces années. Je remercie particulièrement Quentin, Firmin, Colin, Clément, Michou, Aude et Michaël pour avoir dépassé les limites acceptables de l'humour ; Cyril, Guillaume, Charlotte et Lulu pour les petites anecdotes ; Othman et Olivier pour les résolutions des énigmes du calendrier ; Marine pour avoir râlé sans-cesse avec moi sur tout et n'importe quoi. Également un grand merci à tous ceux, qui de près ou de loin, ont jeté un œil à l'orthographe et la grammaire de ce manuscrit.

Un grand merci à mes amis, Axel, Algo, Carotte, Thomas, Gillou, Clément, Jérémy, Alicia, Simon et tous les autres pour avoir su me changer les idées tout au

long de ces années. Merci également à Néné, Émilie, Maxime, Marie, Nathalie, François, Saïd et toute l'équipe des Jonquilles pour tous les moments fun passés dans les Vosges.

Je veux remercier ma famille, et tout particulièrement ma mère, Bernadette, pour son soutien durant toutes mes études et durant cette thèse. Je veux aussi remercier la famille de ma copine ainsi que Nicolas pour leur présence.

Pour finir, je veux remercier Caroline, mon amour, pour m'avoir soutenu, supporté, même lors des moments où ce n'était pas simple pour elle.

Liste des publications et communications

Publications

[1] Cuenin J., Faivre A. & Kokonendji C. C. (2016). On generalized variance of products of powered components and multiple stable Tweedie models. *Communications in Statistics - Theory and Methods* (DOI : 10.1080/03610926.2016.1146770).

[2] Cuenin J., Jørgensen B. & Kokonendji C. C. (2016). Simulations of full multivariate Tweedie with flexible dependence structure. *Computational Statistics*, **31**, pp 1477–1492.

Communications

1er juin 2016 On the characterization of natural exponential families by generalized variance function
48èmes Journées de Statistique, Université de Montpellier, Montpellier, France.

17 mars 2016 Multivariate Tweedie models and natural exponential families
University of Vienna, Department of Statistics and Operations Research, Vienne, Autriche.

1er septembre 2015 Modèles multiple stable Tweedie : construction, caractérisation et estimation
6èmes Rencontres des Jeunes Statisticiens, Parc Ornithologique, Le Teich, France.

22 mai 2015 Deux modèles Tweedie multivariés
XVIèmes Journées de l'école doctorale Carnot-Pasteur, Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Dijon, France.

29 avril 2015 On flexibility of multivariate Tweedie distributions
State University of New York, Department of Mathematics, New Paltz, USA.

5 juin 2014 Construction et simulation des lois stable-Tweedie multivariées
46$^{\text{èmes}}$ Journées de Statistique, ENSAI, Rennes, France.

10 février 2014 Construction et simulation des modèles Tweedie multivariés
Université de Bourgogne, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Dijon, France.

10 janvier 2014 Construction et simulation des modèles Tweedie multivariés
Université de Franche-Comté, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Besançon, France.

28 mai 2013 Simulation of multivariate Tweedie models
University of Southern Denmark, Department of Biostatistics, Odense, Danemark.

Table des matières

Introduction générale **3**

1 Familles exponentielles naturelles et modèles Tweedie **5**
1.1 Introduction 6
1.2 Familles exponentielles naturelles 6
1.2.1 Définition, fonction variance et fonction variance généralisée . 6
1.2.2 Familles exponentielles naturelles indéfiniment divisibles et mesure de Lévy modifiée 9
1.3 Modèles Tweedie univariés 14

2 Vecteurs aléatoires Tweedie **19**
2.1 Introduction 20
2.2 Vecteurs aléatoires Tweedie : le cas positivement corrélé 21
2.2.1 Le cas bivarié 21
2.2.2 Le cas multivarié 23
2.3 Représentation matricielle et simulations 27
2.3.1 Représentation matricielle 28
2.3.2 Résultats de simulations 29
2.4 Vecteurs aléatoires Tweedie : une idée du cas négativement corrélé . . 32
2.4.1 Définition et représentation matricielle 32
2.4.2 Résultats de simulations 33
2.5 Conclusions et perspectives 34

3 Modèles Tweedie stables multiples et fonctions variance généralisée produits de puissances des composantes du vecteur moyen **37**
3.1 Introduction 38
3.2 Modèles Tweedie stables multiples 39
3.2.1 Définition et exemples 39
3.2.2 fonctions variance généralisée et équation de Monge-Ampère . 41
3.3 Estimation de la variance généralisée 45
3.3.1 Deux approches d'estimation 45

3.3.2 Résultats de simulations 48
3.4 Lois multiples stables Tweedie et applications aux processus stochastiques 49
3.4.1 Définition et propriétés 49
3.4.2 Processus stochastiques de type gaussien-Tweedie 51
3.5 Conclusions et perspectives 51

4 Sur la caractérisation des familles exponentielles naturelles par la fonction variance généralisée 53
4.1 Introduction 54
4.2 Le cas des familles Tweedie stables multiples 56
4.2.1 Caractérisation par la mesure de Lévy modifiée 56
4.2.2 Caractérisation par la fonction variance généralisée 60
4.3 Le cas général : une histoire de conditions aux limites et le problème de Monge-Ampère à domaine non nécessairement borné 61
4.3.1 Retour sur le cas normal-Poisson 62
4.3.2 Retour sur le cas normal-gamma 64
4.3.3 Le cas général 65
4.4 Conclusions et perspectives 66

Conclusion générale 69

Bibliographie 75

Introduction générale

Dans cette thèse, nous proposons d'étendre, de deux manières différentes, les modèles Tweedie, historiquement introduits par Tweedie (1984). Outre l'étude théorique détaillée faite par Jørgensen (1997), on peut se rendre compte que ces modèles sont appliqués dans de nombreux domaines comme l'écologie, les sciences actuarielles, le contrôle qualité, ou encore la physique. Ceci motive le fait d'étendre en dimension supérieure ces modèles afin de proposer des outils permettant une modélisation plus fine des nombreux problèmes statistiques que peut rencontrer un praticien.

Avec certaines restrictions, nous donnons également des outils permettant de conduire à la résolution de certains problèmes de caractérisation des familles exponentielles naturelles (FENs) par la fonction variance généralisée, définie comme le déterminant de la fonction variance (i.e. l'écriture de la variance en fonction du paramètre de moyenne). Ces problèmes de caractérisation apparaissent depuis une dizaine d'années dans la littérature et l'on se rend compte qu'ils sont liés, lorsque la famille sous-jacente est indéfiniment divisible, à un problème d'unicité de solutions de certaines équations de Monge-Ampère.

Le présent manuscrit est organisé comme suit. Le Chapitre 1 va servir de revue de l'état de l'art concernant les FENs et les modèles Tweedie. Nous nous concentrerons en particulier sur les FENs indéfiniment divisibles et démontrerons l'existence de la mesure de Lévy modifiée. Nous donnerons également une revue des modèles Tweedie qui sont des cas particuliers des modèles de dispersion exponentielle. Nous donnerons également un théorème de convergence dans lequel les lois Tweedie apparaissent comme lois limites. Dans le Chapitre 2, nous donnons la construction des vecteurs aléatoires Tweedie. En nous basant sur une méthode de convolution, nous étendons la notion de modèles de dispersion exponentielle multivariés au cas particulier des lois Tweedie. Pour une bonne compréhension, nous présentons d'abord le cas bivarié avant de donner le théorème d'existence des vecteurs aléatoires Tweedie de n'importe quelle dimension. Nous remarquerons que ces vecteurs, de par leur construction, ont quelques propriétés en commun avec les vecteurs gaussiens. À travers cette construction, nous obtiendrons une matrice de variance-covariance dont chaque entrée permettra de contrôler la covariance entre les lois marginales. Ceci mènera à une représentation matricielle qui simplifiera l'implémentation d'une

méthode de simulation. Nous en observerons quelques résultats. Nous proposerons ensuite la construction de vecteurs aléatoires Tweedie dont la covariance entre les lois marginale est négative. Encore une fois, une représentation matricielle mènera à une méthode de simulation dont les résultats se montreront intéressants. Le Chapitre 3 sera consacré à une autre extension multivariée des lois Tweedie. Les distributions obtenues seront appelées *lois stables multiples* et nous montrerons qu'elles engendrent des FENs dont les fonctions variance généralisées sont produits de puissances des composantes du vecteur moyen. Nous donnerons également les mesures de Lévy modifiées associées à ces FENs. Cela nous permettra de donner un estimateur sans biais et uniformément de variance minimale de la variance généralisée. Cet estimateur sera comparé numériquement à une autre méthode d'estimation plus classique. Enfin, le Chapitre 4 sera consacré à des problèmes de caractérisation des FENs par la fonction variance généralisée. Nous verrons que c'est à travers la résolution de certaines équations de Monge-Ampère que nous pourrons établir cette caractérisation, d'abord par la mesure de Lévy modifiée, puis par la fonction variance généralisée. Nous commencerons donc par présenter une revue des outils de résolution de l'équation de Monge-Ampère avant de démontrer que les FENs de type stables multiples sont en effet caractérisées, à la fois par la mesure de Lévy modifiée et par la fonction variance généralisée, si l'on admet certaines restrictions sur l'ensemble des FENs considérées. Nous donnerons enfin une piste de résolution générale pour n'importe quelle FEN indéfiniment divisible.

1

Familles exponentielles naturelles et modèles Tweedie

Résumé

Nous introduisons le cadre des familles exponentielles naturelles, et considérons en particulier le cas où ces dernières sont engendrées par des mesures indéfiniment divisibles. Nous redonnons alors une preuve de l'existence de la mesure de Lévy modifiée. Enfin, nous exposons un exemple particulier que constituent les modèles Tweedie.

Sommaire

1.1 Introduction 6

1.2 Familles exponentielles naturelles 6

1.2.1 Définition, fonction variance et fonction variance généralisée 6

1.2.2 Familles exponentielles naturelles indéfiniment divisibles et mesure de Lévy modifiée 9

1.3 Modèles Tweedie univariés 14

1.1 Introduction

Les familles exponentielles naturelles (FENs) sont une part importante de la statistique théorique. Depuis plusieurs décennies, elles sont étudiées et classifiées. L'ouvrage de Barndorff-Nielsen (1978) en donne une introduction détaillée. De nombreux auteurs se sont alors penchés sur leur classification d'après la forme de leur fonction variance (i.e. l'écriture de leur variance en fonction du paramètre de moyenne). On peut par exemple citer Morris (1982), Letac et Mora (1990), Hassairi (1992), Hassairi (1993), ou encore Casalis (1996) qui a donné une description complète de toutes les FENs de $\mathbb{R}^d$ de fonction variance quadratique. Un cas très particulier de ces familles, lorsqu'elles génèrent un modèle de dispersion exponentielle, est celui des modèles Tweedie. Ces lois, introduites par Tweedie (1984) et étudiées ensuite par Jørgensen (1997), sont une généralisation des lois α-stables. Leur fonction variance est bien spécifique et est donnée par

$$V(m) = m^p, \tag{1.1}$$

avec $p \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Les lois Tweedie interviennent dans un nombre important de champs d'application. Elles sont en effet liées, de par la relation (1.1), à loi de puissance de Taylor (voir Taylor (1961) pour plus de détails). Cette dernière apparaît aussi bien en biologie qu'en physique et stipule que la variance empirique est donnée par une puissance de la moyenne. En particulier, les liens entre modèles Tweedie et loi de puissance de Taylor en science physique sont mis en lumière par Kendal et Jørgensen (2011) et une application en est donnée par Kendal (2014). Beaucoup d'autres applications leur ont été trouvées comme en actuariat (Smyth et Jørgensen (2002)), en écologie (Foster et Bravington (2013)) ou encore en contrôle qualité (Edgeman (1989)). Pour rendre accessibles ces lois aux praticiens, Dunn (2014) a proposé un package pour le logiciel `R` (voir `R` Development Core Team (2014)) permettant de simuler des observations des lois Tweedie. Il s'est basé sur les travaux de Dunn et Smyth (2008) qui ont proposé une méthode pour évaluer les densités des lois Tweedie, qui ne sont pas explicitables pour la plupart, par inversion de Fourier.

Nous organisons ce chapitre de la manière suivante. La Section 1.2 présente une revue du cadre des FENs et introduit les outils, dont la mesure de Lévy modifiée, qui seront utiles à la suite du développement. Quant à la Section 1.3, elle donne les détails des modèles Tweedie sur $\mathbb{R}$ et rappelle certains résultats de convergence.

1.2 Familles exponentielles naturelles

Nous présentons ici une revue du cadre des FENs et nous nous focalisons en particulier à celles générées par des mesures indéfiniment divisibles.

1.2.1 Définition, fonction variance et fonction variance généralisée

Pour introduire le cadre des FENs, nous suivons les notations utilisées dans (Kotz *et al.*, 2000, Chap. 54) et (Jørgensen, 1997, Chap. 2). Considérons $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$,

l'ensemble des mesures σ-finies définies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ et non concentrées sur un hyperplan. Pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Laplace, notée L_μ, par

$$L_\mu(\theta) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\theta^\top x)\mu(\mathrm{d}x), \tag{1.2}$$

et on note $\mathcal{D}(L_\mu) = \{\theta \in \mathbb{R}^d,\ L_\mu(\theta) < +\infty\}$ son domaine. Pour $\theta \in \Theta_\mu = \overset{\circ}{\mathcal{D}}(L_\mu)$, on définit la fonction cumulante de μ par

$$\kappa_\mu(\theta) = \ln L_\mu(\theta). \tag{1.3}$$

Définition 1.2.1. *On appelle famille exponentielle naturelle générée par $\mu \in \mathbb{R}^d$, l'ensemble*

$$\mathrm{F}(\mu) = \{P(\theta, \mu),\ \theta \in \Theta_\mu\}, \tag{1.4}$$

où

$$P(\theta, \mu)(\mathrm{d}x) = \exp[x^\top \theta - \kappa_\mu(\theta)]\mu(\mathrm{d}x). \tag{1.5}$$

Le paramètre θ est appelé *paramètre canonique* de la famille. Quant à x, on l'appelle *statistique canonique*. La fonction génératrice des moments de $P(\theta, \mu) \in \mathrm{F}(\mu)$ est donnée par

$$\begin{aligned} L_{P(\theta,\mu)}(s) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{s^\top x} P(\theta, \mu)(\mathrm{d}x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp[x^\top(\theta + s)]\mu(\mathrm{d}x) \exp[-\kappa_\mu(\theta)] \\ &= \exp[\kappa_\mu(\theta + s) - \kappa_\mu(\theta)], \end{aligned}$$

pour tout $s \in \Theta_\mu - \theta$. Ainsi, la fonction génératrice des cumulants de $P(\theta, \mu)$ s'écrit

$$\kappa_{P(\theta,\mu)}(s) = \kappa_\mu(\theta + s) - \kappa_\mu(\theta).$$

On peut alors remarquer que n'importe quel élément $P \in \mathrm{F}$ en est un générateur. En effet, considérons la FEN $\tilde{\mathrm{F}}$ générée par P. Alors, tout élément de $\tilde{\mathrm{F}}$ s'écrit, pour $s \in \Theta_\mu - \theta$,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s, P)(\mathrm{d}x) &= \exp[x^\top s - \kappa_P(s)]P(\mathrm{d}x) \\ &= \exp[x^\top s - \kappa_\mu(\theta + s) + \kappa_\mu(\theta)] \exp[x^\top \theta - \kappa_\mu(\theta)]\mu(\mathrm{d}x) \\ &= \exp[x^\top(s + \theta) - \kappa_\mu(\theta + s)]\mu(\mathrm{d}x), \end{aligned}$$

qui est bien un élément de $\mathrm{F}(\mu)$ avec $\theta' = \theta + s$.

Maintenant, si X est un vecteur aléatoire de loi $P(\theta, \mu)$, ses cumulants sont donnés par

$$\kappa_n = \nabla^n\ \kappa_{P(\theta,\mu)}(s)\Big|_{s=0} = \nabla^n \kappa_\mu(\theta).$$

En particulier, son espérance est donnée par

$$\mathbb{E}_\theta[X] = \nabla\kappa_\mu(\theta). \tag{1.6}$$

On peut alors facilement montrer que l'application $\tau_\mu : \theta \mapsto \tau_\mu(\theta) := \nabla\kappa_\mu(\theta)$, appelée *application des valeurs moyennes* (mean value mapping en anglais), est un

difféomorphisme de Θ_μ dans $\mathrm{M_F} = \nabla\kappa_\mu(\Theta_\mu)$, que l'on appellera le *domaine de la moyenne*. On notera par ψ_μ l'inverse de τ. Ainsi, la famille de lois $P(m, \mathrm{F})$ pour tout $m \in \mathrm{M_F}$, est une reparamétrisation de $\mathrm{F}(\mu)$. On peut alors remarquer que le domaine $\mathrm{M_F}$ ne dépend pas du générateur de F, mais seulement de la famille F.

La matrice de variance-covariance de X est quant à elle donnée par

$$\mathrm{Cov}_\theta(X) = \nabla^2 L_{P(\theta,\mu)}(0) = \nabla^2\kappa_\mu(\theta). \tag{1.7}$$

En considérant la paramétrisation par m, on peut la réécrire

$$\mathrm{Cov}_m(X) = \nabla^2\kappa_\mu(\psi_\mu(m)) = V_\mathrm{F}(m). \tag{1.8}$$

On l'appelle alors *fonction variance* de la FEN F. En prenant le déterminant de V_F, on obtient la fonction variance généralisée de la FEN F. Il est bien connu que la fonction variance donne une caractérisation de la FEN sous-jacente. Ce résultat a d'abord été démontré pour les FENs engendrées par des mesures sur les réels. C'est l'objet du Théorème 2.11 de Jørgensen (1997) qui en présente aussi une démonstration. Dans un cas plus général, le fait que la fonction variance permette de caractériser la FEN dont elle est issue est donné par la proposition suivante (voir par exemple Casalis (1996)).

Proposition 1.2.1. *Si* F_1 *et* F_2 *sont deux FENs dont les fonctions variance coïncident sur un sous-ensemble non vide de* $\mathrm{M_{F_1}} \cap \mathrm{M_{F_2}}$*, alors* $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_2$*.*

Pour illustrer la définition des FENs, considérons l'exemple suivant : soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\delta_k(\mathrm{d}x)\ \forall x \in \mathbb{N}.$$

Sa fonction cumulante est alors donnée par $\kappa_\mu(\theta) = \exp(\theta)$ pour tout $\theta \in \Theta_\mu = \mathbb{R}$. Ainsi, chaque $P(\theta, \mu) \in \mathrm{F}(\mu)$ s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$P(\theta, \mu)(\mathrm{d}x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\exp(\theta)} \frac{\exp(x\theta)}{x!}\delta_k(\mathrm{d}x).$$

On reconnaît alors la famille des lois de Poisson. En dérivant successivement la fonction cumulante on trouve $m = \exp(\theta)$ et $V_{F(\mu)}(m) = m$. De même, la mesure $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathrm{d}x$ va engendrer la famille des lois gamma. Maintenant, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{k!}\delta_k(\mathrm{d}x) \tag{1.9}$$

avec $k! = k_1!k_2!\ldots k_d!$, va générer la famille des lois de Poisson multivariées.

Bien que plusieurs résultats récents permettent de caractériser certaines FENs bien spécifiques par leurs fonctions variance généralisées (voir par exemple Kokonendji et Masmoudi (2013), Kokonendji et Masmoudi (2006), Nisa *et al.* (2015) ou Ghribi et Masmoudi (2010)), obtenir l'équivalent de la Proposition 1.2.1 se révèle impossible. En effet, considérons l'exemple suivant, proposé par Ghribi et Masmoudi (2010).

Exemple 1.2.1 (Ghribi et Masmoudi (2010)). *Soit* F_1 *une FEN sur* $\mathbb{R}^2$ *générée par une mesure composée d'une loi binomiale négative et d'une loi gamma comme définie dans Casalis (1996). Sa fonction variance est donnée, pour tout* $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_1} =]0, +\infty[^2$, *par*

$$V_{\mathrm{F}_1}(m) = \begin{pmatrix} m_1^2 + m_1 & m_1 m_2 \\ m_1 m_2 & m_2^2 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant F_2 *une FEN sur* $\mathbb{R}^2$ *générée par le produit indépendant d'une loi de Poisson et d'une loi gamma. Il est facile de voir que la fonction variance est donnée par* $V_{\mathrm{F}_2}(m) = \mathrm{diag}(m_1, m_2^2)$ *pour tout* $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_1} =]0, +\infty[^2$. *On a bien* $\det V_{\mathrm{F}_1}(m) = \det V_{\mathrm{F}_1}(m) = m_1 m_2^2$ *pour* $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_1} = \mathrm{M}_{\mathrm{F}_2}$, *mais* F_1 *et* F_2 *sont distinctes.*

Pour finir cette introduction sur la notion de FEN, considérons Λ_μ, l'ensemble de tout $\lambda > 0$ tel que L_μ^λ est la transformée de Laplace de la mesure $\mu_\lambda = \mu^{*\lambda}$. Cet ensemble est appelé *ensemble de Jørgensen* et la FEN $\mathrm{F}(\mu_\lambda)$ va générer ce qu'on appelle un modèle de dispersion exponentielle $\mathrm{ED}^*(\theta, \lambda)$, où λ sera appelé *paramètre de dispersion*. Ces modèles sont principalement utilisés pour modéliser l'erreur dans un modèle linéaire généralisé. Pour plus de détails, on pourra se référer à Jørgensen (1997) et à Jørgensen (2013) pour la version multivariée. Ensuite, si l'on considère la mesure image $\varphi_*\mu$ de μ par l'application $\varphi : x \mapsto Ax + b$ avec A une matrice carrée d'ordre d non singulière et $b \in \mathbb{R}^d$, la FEN engendrée par $\varphi_*\mu$, notée par $\varphi(\mathrm{F}(\mu))$, est appelée *affinité* de la FEN $\mathrm{F}(\mu)$. La FEN $\mathrm{F}(\varphi_*\mu_\lambda)$ est alors dite de même type que la FEN $\mathrm{F}(\mu)$. On pourra également dire que $\mathrm{F}(\varphi_*\mu_\lambda)$ et $\mathrm{F}(\mu)$ appartiennent au même G_0-orbite. La proposition suivante rend compte des propriétés sur les fonctions variance et de variance généralisée de deux FEN de même type (voir Boubacar Maïnassara et Kokonendji (2014)).

Proposition 1.2.2. *Soient* μ *et* μ' *deux mesures de* $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ *engendrant respectivement les FEN* F *et* F′. *Alors*

i. s'il existe $(d, c) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ *tel que* $\mu(\mathrm{d}x) = \exp[d^\top x + c]\mu(\mathrm{d}x)$ *alors* $\mathrm{F} = \mathrm{F}'$ *et* $\Theta_{\mu'} = \Theta_\mu$, $\kappa_{\mu'}(\theta) = \kappa_\mu(\theta + d) + c$; *pour* $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}} = \mathrm{M}_{\mathrm{F}'}$, $V_{\mathrm{F}'}(m) = V_{\mathrm{F}}(m)$ *et* $\det V_{\mathrm{F}'}(m) = \det V_{\mathrm{F}}(m)$;

ii. si $\mu'(\mathrm{d}x) = \varphi_*\mu(\mathrm{d}x)$ *est la mesure image de* μ *par* $\varphi : x \mapsto Ax + b$ *alors* $\Theta_{\mu'} = A^\top \Theta_\mu$ *et* $\kappa'_\mu(\theta) = \kappa_\mu(A^\top\theta) + b^\top$; *pour* $m' = Am + b \in \varphi(\mathrm{M}_{\mathrm{F}})$, $V_{\mathrm{F}'}(m') = AV_{\mathrm{F}}(\varphi^{-1}(m'))A^\top$ *et* $\det V_{\mathrm{F}'}(m') = (\det A)^2 \det V_{\mathrm{F}}(m)$;

iii. si $\mu'(\mathrm{d}x) = \mu_\lambda(\mathrm{d}x)$ *pour* $\lambda \in \Lambda_\mu$ *alors* $\Theta_{\mu'} = \Theta_\mu$ *et* $\kappa_{\mu'}(\theta) = \lambda\kappa_\mu(\theta)$; *pour* $m' = \lambda m$, $V_{\mathrm{F}'}(m') = \lambda V_{\mathrm{F}}(\lambda^{-1}m')$ *et* $\det V_{\mathrm{F}'}(m') = \lambda^d \det V_{\mathrm{F}}(m)$

La fonction variance généralisée d'une FEN est donc invariante quelque soit le générateur et pour n'importe quelle transformation affine $\varphi : x \mapsto Ax + b$ telle que $\det A = \pm 1$.

1.2.2 Familles exponentielles naturelles indéfiniment divisibles et mesure de Lévy modifiée

Nous allons maintenant parler des FENs générées par des mesures indéfiniment divisibles, tous les exemples et résultats développés dans les chapitres suivants ne

concernant que ces dernières. Rappelons d'abord la définition d'une mesure indéfiniment divisible.

Définition 1.2.2. *Une mesure μ est dite indéfiniment divisible si pour tout entier $n \neq 0$, il existe une mesure μ_n telle que*

$$\mu(\mathrm{d}x) = \mu_n^{*n}(\mathrm{d}x).$$

On pourra se référer à (Sato, 1999, Chap. 2) pour plus de précisions sur les mesures indéfiniment divisibles. Une FEN engendrée par une telle mesure sera elle aussi dite indéfiniment divisible.

La proposition suivante permet de faire le lien entre une FEN indéfiniment divisible et l'ensemble de Jørgensen de sa mesure génératrice.

Proposition 1.2.3. *Une FEN* $\mathrm{F}(\mu)$ *est indéfiniment divisible si, et seulement si son ensemble de Jørgensen Λ_μ est égal à $]0, +\infty[$.*

Une preuve pour les modèles de dispersion exponentielle sur $\mathbb{R}$ est donnée dans (Jørgensen, 1997, Chap. 3). Il est facile d'adapter cette preuve pour n'importe quelle FEN sur R^d.

En considérant les FENs indéfiniment divisibles, Hassairi (1999) a démontré l'existence de ma mesure de Lévt modifiée. Ce résultat central est l'objet du théorème suivant, dont nous redonnerons la démonstration.

Théorème 1.2.1 (Hassairi (1999))**.** *Pour une mesure indéfiniment divisible $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ générant une FEN* F*, il existe une mesure positive $\rho(\mu)$ sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$, appelée* mesure de Lévy modifiée*, telle que*

$$\det \nabla^2 \kappa_\mu(\theta) = L_{\rho(\mu)}(\theta), \text{ pour tout } \theta \in \Theta_\mu = \Theta_{\rho(\mu)}.$$

Avant de prouver ce théorème, nous avons besoin des résultats suivants, que nous donnons sans démonstration.

Lemme 1.2.1. *Soit A et B deux matrices carrées d'ordre d. Si A est diagnonale, alors*

$$\det(A + B) = \sum_{T \subset \{1,2,\ldots,d\}} \det A_{T^c} \det B_T,$$

où A_T est la matrice carrée d'ordre $\#(T)$ vérifiant $A_T = (a_{ij})_{(i,j)\in T^2}$ et avec $\det A_\emptyset = 1$.

Lemme 1.2.2. *Soit $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_d$ un espace vectoriel produit de d espaces de dimensions finies et $B : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur F. Si ν est une mesure positive sur les boréliens de F et $f = (f_1, f_2, \ldots, f_d)$ une application de F dans F telle que $\int_F f(x)\nu(\mathrm{d}x) < +\infty$, alors*

$$\begin{aligned} B\left(\int_F f(x)\nu(\mathrm{d}x)\right) &= B\left(\int_F f_1(x)\nu(\mathrm{d}x), \int_F f_2(x)\nu(\mathrm{d}x), \ldots, \int_F f_d(x)\nu(\mathrm{d}x)\right) \\ &= \int_{F^d} B\left[f_1^{(1)}\left(x^{(1)}\right), f_2^{(2)}\left(x^{(2)}\right), \ldots, f_d^{(d)}\left(x^{(d)}\right)\right] \nu\left(\mathrm{d}x^{(1)}\right) \\ &\quad \nu\left(\mathrm{d}x^{(2)}\right) \ldots \nu\left(\mathrm{d}x^{(d)}\right). \end{aligned}$$

Lemme 1.2.3. *Soit μ une mesure indéfiniment divisible générant une FEN* F. *Alors il existe une matrice symétrique définie positive Σ et une mesure positive ν telles que*

$$\nabla^2 \kappa_\mu(\theta) = \Sigma + \int_{\mathbb{R}^d} xx^\top \exp(x^\top \theta)\nu(\mathrm{d}x).$$

Ce dernier résultat est en fait la décomposition d'un processus indéfiniment divisible avec Σ la matrice de diffusion et ν la mesure de Lévy associée. Pour une preuve, ainsi que pour des précisions sur les processus indéfiniment divisibles et les processus de Lévy, on pourra se référer à Applebaum (2009).

Démonstration du Théorème 1.2.1. Commençons par considérer une mesure positive η sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On veut alors montrer l'égalité

$$\begin{aligned}\det \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} xy^\top \eta(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) &= \frac{1}{d!}\int_{\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\right)^d} \det\left[x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(d)}\right]\det\left[y^{(1)},y^{(2)},\ldots,y^{(d)}\right]\\ &\quad \eta\left(\mathrm{d}x^{(1)},\mathrm{d}y^{(1)}\right)\eta\left(\mathrm{d}x^{(2)},\mathrm{d}y^{(2)}\right)\ldots\eta\left(\mathrm{d}x^{(d)},\mathrm{d}y^{(d)}\right). \quad (1.10)\end{aligned}$$

Pour obtenir le membre de gauche de (1.10), il suffit d'appliquer le Lemme 1.2.2 avec $F_i = \mathbb{R}^d$ pour $i \in \{1,2,\ldots,d\}$, F étant l'espace des matrices carrées d'ordre d, et $B = \det$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\det \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} xy^\top \eta(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) &= \int_{\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\right)^d} \det\left[x^{(1)}y_1^{(1)},x^{(2)}y_2^{(2)},\ldots,x^{(d)}y_d^{(d)}\right]\\ &\quad \eta\left(\mathrm{d}x^{(1)},\mathrm{d}y^{(1)}\right)\eta\left(\mathrm{d}x^{(2)},\mathrm{d}y^{(2)}\right)\ldots\eta\left(\mathrm{d}x^{(d)},\mathrm{d}y^{(d)}\right).\end{aligned}$$

En effet, la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $x^{(i)}\left(y^{(i)}\right)^\top$ est donnée par $x^{(i)}y_i^{(i)}$. Le membre de gauche de (1.10) est donc égal à

$$\begin{aligned}&\int_{\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\right)^d} y_1^{(1)}y_2^{(2)}\ldots y_d^{(d)}\det\left[x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(d)}\right]\eta\left(\mathrm{d}x^{(1)},\mathrm{d}y^{(1)}\right)\\ &\eta\left(\mathrm{d}x^{(2)},\mathrm{d}y^{(2)}\right)\ldots\eta\left(\mathrm{d}x^{(d)},\mathrm{d}y^{(d)}\right). \quad (1.11)\end{aligned}$$

Examinons maintenant membre de droite de (1.10). Notons le S. On a donc successivement

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{d!}\int_{\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\right)^d}\det\left[\left\langle x^{(i)},y^{(j)}\right\rangle_{1\le i,j\le d}\right]\eta\left(\mathrm{d}x^{(1)},\mathrm{d}y^{(1)}\right)\\ &\quad \eta\left(\mathrm{d}x^{(2)},\mathrm{d}y^{(2)}\right)\ldots\eta\left(\mathrm{d}x^{(d)},\mathrm{d}y^{(d)}\right)\\ &= \frac{1}{d!}\int_{\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\right)^d}\det\left[\sum_{k=1}^d x_k^{(i)}y_k^{(j)}\right]\eta\left(\mathrm{d}x^{(1)},\mathrm{d}y^{(1)}\right)\\ &\quad \eta\left(\mathrm{d}x^{(2)},\mathrm{d}y^{(2)}\right)\ldots\eta\left(\mathrm{d}x^{(d)},\mathrm{d}y^{(d)}\right)\\ &= \frac{1}{d!}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_d=1}^d\int_{\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\right)^d}\prod_{j=1}^d y_{k_j}^{(j)}\det\left[x_k^{(1)},x_k^{(2)},\ldots,x_k^{(d)}\right]\eta\left(\mathrm{d}x^{(1)},\mathrm{d}y^{(1)}\right)\\ &\quad \eta\left(\mathrm{d}x^{(2)},\mathrm{d}y^{(2)}\right)\ldots\eta\left(\mathrm{d}x^{(d)},\mathrm{d}y^{(d)}\right).\end{aligned}$$

Mais comme $\det\left[x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(d)}\right]$est égal à $\det\left[x_\sigma^{(1)}, x_\sigma^{(2)}, \ldots, x_\sigma^{(d)}\right]$ si $(k_1, k_2, \ldots, k_d)$ est une permutation de σ, et est nul sinon, on peut écrire

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\int_{\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\right)^d}\prod_{j=1}^{d} y_{\sigma(j)}^{(j)}\det\left[x_\sigma^{(1)}, x_\sigma^{(2)}, \ldots, x_\sigma^{(d)}\right]\eta\left(\mathrm{d}x^{(1)}, \mathrm{d}y^{(1)}\right) \\ &\quad \eta\left(\mathrm{d}x^{(2)}, \mathrm{d}y^{(2)}\right)\ldots\eta\left(\mathrm{d}x^{(d)}, \mathrm{d}y^{(d)}\right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Considérons alors la permutation $\tau = \sigma^{-1}$. On a donc

$$\prod_{j=1}^{d} y_{\sigma(j)}^{(j)}\det\left[x_\sigma^{(1)}, x_\sigma^{(2)}, \ldots, x_\sigma^{(d)}\right] = \prod_{j=1}^{d} y_j^{\tau(j)}\det\left[x_1^{\tau(1)}, x_2^{\tau(2)}, \ldots, x_d^{\tau(d)}\right].$$

De plus, la mesure $\eta\left(\mathrm{d}x^{(1)}, \mathrm{d}y^{(1)}\right)\eta\left(\mathrm{d}x^{(2)}, \mathrm{d}y^{(2)}\right)\ldots\eta\left(\mathrm{d}x^{(d)}, \mathrm{d}y^{(d)}\right)$ est invariante par la permutation τ qui est définie sur $\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\right)^d$ par

$$\begin{aligned} &\tau\left[\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right), \left(x^{(2)}, y^{(2)}\right), \ldots, \left(x^{(d)}, y^{(d)}\right)\right] \\ = &\left[\left(x^{\tau(1)}, y^{\tau(1)}\right), \left(x^{\tau(2)}, y^{\tau(2)}\right), \ldots, \left(x^{\tau(d)}, y^{\tau(d)}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, la mesure

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{d} y_j^{\tau(j)}\det\left[x_1^{\tau(1)}, x_2^{\tau(2)}, \ldots, x_d^{\tau(d)}\right]\eta\left(\mathrm{d}x^{(1)}, \mathrm{d}y^{(1)}\right) \\ &\eta\left(\mathrm{d}x^{(2)}, \mathrm{d}y^{(2)}\right)\ldots\eta\left(\mathrm{d}x^{(d)}, \mathrm{d}y^{(d)}\right) \end{aligned}$$

ne dépend pas de τ. En utilisant (1.12), on remarque que S est égal à (1.11).

Maintenant, comme μ est une mesure indéfiniment divisible, elle satisfait, d'après le Lemme 1.2.3,

$$\det\nabla^2\kappa_\mu(\theta) = \det\left[\Sigma + \int_{\mathbb{R}^d} xx^\top\exp\left(x^\top\theta\right)\nu(\mathrm{d}x)\right]. \tag{1.13}$$

Mais comme Σ est symétrique et définie positive, il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^d$ dans laquelle elle admet une représentation diagonale, que nous notons A. Et donc

$$\det\nabla^2\kappa_\mu(\theta) = \det\left[A + \int_{\mathbb{R}^d} xx^\top\exp\left(x^\top\theta\right)\nu(\mathrm{d}x)\right]. \tag{1.14}$$

On applique ensuite le Lemme 1.2.1 à l'équation (1.14) avec $B = \int_{\mathbb{R}^d} xx^\top\exp(x^\top\theta)$ $\nu(\mathrm{d}x)$. Posons alors $T = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, d\}$ avec $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le d$ et considérons l'application $\tau_T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ telle que

$$\tau_T(x_1, x_2, \ldots, x_d) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{ik}).$$

Ainsi, pour x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\left(xy^\top\right)_T = \tau_T(x)[\tau_T(y)]^\top. \tag{1.15}$$

Posons alors

$$\eta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \exp\left(\theta^\top x\right)\nu(\mathrm{d}x)\delta_x(\mathrm{d}y).$$

On peut donc écrire

$$B = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} xy^\top \eta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

En utilisant la relation (1.15), il vient

$$B_T = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \tau_T(x)[\tau_T(y)]^\top \eta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Introduisons maintenant la mesure $\tilde{\eta}$ définie comme la mesure image de η par l'application de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ donnée par $(x, y) \mapsto (\tau_T(x), \tau_T(y))$ et alors

$$B_T = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} xy^\top \tilde{\eta}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

On applique ensuite l'égalité (1.10) à B_T et on obtient

$$\begin{aligned} \det B_T &= \frac{1}{k!} \int_{\left(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k\right)^k} \det\left[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}\right] \det\left[y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}\right] \\ &\quad \tilde{\eta}\left(\mathrm{d}x^{(1)}, \mathrm{d}y^{(1)}\right) \tilde{\eta}\left(\mathrm{d}x^{(2)}, \mathrm{d}y^{(2)}\right) \ldots \tilde{\eta}\left(\mathrm{d}x^{(k)}, \mathrm{d}y^{(k)}\right). \end{aligned}$$

De la même façon, on peut écrire

$$\begin{aligned} \det B_T &= \frac{1}{k!} \int_{\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\right)^k} \det\left[\tau_T\left(x^{(1)}\right), \tau_T\left(x^{(2)}\right), \ldots, \tau_T\left(x^{(k)}\right)\right] \det\left[\tau_T\left(y^{(1)}\right), \right. \\ &\quad \left. \tau_T\left(y^{(2)}\right), \ldots, \tau_T\left(y^{(k)}\right)\right] \eta\left(\mathrm{d}x^{(1)}, \mathrm{d}y^{(1)}\right) \eta\left(\mathrm{d}x^{(2)}, \mathrm{d}y^{(2)}\right) \\ &\quad \ldots \eta\left(\mathrm{d}x^{(k)}, \mathrm{d}y^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Mais comme $\eta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \exp\left(\theta^\top x\right) \nu(\mathrm{d}x)\delta_x(\mathrm{d}y)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \det B_T &= \frac{1}{k!} \int_{\left(\mathbb{R}^d\right)^k} \left(\det\left[\tau_T\left(x^{(1)}\right), \tau_T\left(x^{(2)}\right), \ldots, \tau_T\left(x^{(k)}\right)\right]\right)^2 \\ &\quad \exp\left[\theta^\top \sum_{j=1}^k x^{(j)}\right] \nu\left(\mathrm{d}x^{(1)}\right) \nu\left(\mathrm{d}x^{(2)}\right) \ldots \nu\left(\mathrm{d}x^{(k)}\right). \end{aligned}$$

Notons alors par $T(\nu)$ la mesure image de

$$\frac{1}{k!} \left(\det\left[\tau_T\left(x^{(1)}\right), \tau_T\left(x^{(2)}\right), \ldots, \tau_T\left(x^{(k)}\right)\right]\right)^2 \nu\left(\mathrm{d}x^{(1)}\right) \nu\left(\mathrm{d}x^{(2)}\right) \ldots \nu\left(\mathrm{d}x^{(k)}\right)$$

par l'application de $\left(\mathbb{R}^d\right)^k$ dans $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}\right) \mapsto \sum_{j=1}^k x^{(j)}.$$

On peut alors écrire

$$B_T = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\theta^\top x\right) T(\nu)(\mathrm{d}x)$$

et finalement

$$\det \nabla^2 \kappa_\mu(\theta) = \det A + \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\theta^\top x\right) \left(\sum_{\emptyset \neq T \subset \{1,2,\ldots,d\}} \det A_{T^c} T(v) \right) (\mathrm{d}x).$$

La mesure

$$\rho(\mu)(\mathrm{d}x) = (\det A)\delta_0(\mathrm{d}x) + \left(\sum_{\emptyset \neq T \subset \{1,2,\ldots,d\}} \det A_{T^c} T(v) \right) (\mathrm{d}x)$$

est donc telle que $\det \nabla^2 \kappa_\mu = L_{\rho(\mu)}$, ce qui termine la preuve. □

Remarquons que la mesure de Lévy modifiée définie par le Théorème 1.2.1 n'est en général pas un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. En effet, si l'on reprend l'exemple de la FEN des lois de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ générée par la mesure (1.9), on a

$$\det \kappa_\mu(\theta) = \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i \right)$$

ce qui implique que $\rho(\mu)(\mathrm{d}x) = \delta_1(\mathrm{d}x)$ qui est concentrée sur le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)^\top$ de $\mathbb{R}^d$. De plus, la condition d'infinie divisibilité n'est pas une condition nécessaire à l'existence de la mesure de Lévy modifiée. Un contre-exemple est présenté dans (Hassairi, 1999, p. 376). Remarquons ensuite que cette mesure de Lévy modifiée est intimement liée à la fonction variance généralisée. En effet, si l'on réécrit cette dernière en fonction du paramètre canonique θ, elle est égale à la transformée de Laplace de cette mesure. Il faut cependant faire attention à ne pas les confondre. On s'en rend bien compte en reprenant l'Exemple 1.2.1 : les deux familles considérées ont la même fonction variance généralisée, mais un calcul rapide permet de montrer qu'elles n'ont pas la même mesure de Lévy modifiée (plus de précisions seront données dans l'introduction du Chapitre 4). Ainsi, lorsque nous voudrons parler de caractérisation de la FEN $\mathrm{F}(\mu)$ par sa fonction variance généralisée, il faudra faire attention à se placer soit en $\theta \in \Theta_\mu$, soit en $m \in \mathrm{M_F}$. Enfin, l'équation que satisfait la mesure de Lévy modifiée lorsque la FEN sous-jacente est inconnue est appelée *équation de Monge-Ampère*. Cette équation a beaucoup été étudiée en théorie des équations aux dérivées partielles et les résultats la concernant serviront de base à la résolution de différents problèmes de caractérisation des FENs par la fonction variance généralisée ou par la mesure de Lévy modifiée. Pour une introduction complète de l'équation de Monge-Ampère et des outils utilisés pour sa résolution, on peut se référer à Gutiérrez (2001).

1.3 Modèles Tweedie univariés

Nous allons maintenant introduire la famille des lois Tweedie. Cette famille contient certaines lois bien connues telles que la loi normale, la loi gamma, la loi de Poisson ou encore la loi inverse gaussienne. Nous nous référerons aux notations introduites dans (Jørgensen, 1997, Chap. 4).

Pour commencer, posons $d = 1$. On rappelle que pour $\lambda > 0$, la FEN $\mathrm{F}(\mu_\lambda)$ génère la famille de lois $\mathrm{ED}^*(\theta, \lambda)$, appelée modèle de dispersion exponentielle et dont les éléments s'écrivent

$$\exp\left[\theta x - \lambda\kappa_\mu(\theta)\right]\mu_\lambda(\mathrm{d}x).$$

Cette famille de lois est dite *additive*. En effet, il est facile de voir que, pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de Λ_μ,

$$\mathrm{ED}^*\left(\theta, \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^n \mathrm{ED}^*(\theta, \lambda_i),$$

où $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ désigne l'égalité en loi. La famille correspondante $\mathrm{ED}(m, \sigma^2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} 1/\lambda\mathrm{ED}^*(\theta, \lambda)$ avec $m = \tau(\theta)$ et $\sigma^2 = 1/\lambda$ est appelée modèle de dispersion exponentielle *reproductif*. L'application $Y \mapsto Y/\sigma^2$, fournissant une dualité entre les modèles additifs et reproductifs, est appelée *transformation duale*. La fonction génératrice des cumulants d'un modèle de dispersion exponentielle additif est donnée par

$$K^*(s; \theta, \lambda) = \lambda\left[\kappa_\mu(\theta + s) - \kappa(\theta)\right]$$

pour $s \in \Theta_\mu - \theta$. Quant à la fonction génératrice des cumulants d'un modèle reproductif, elle est donnée par

$$K(s; \theta, \lambda) = \lambda\left[\kappa_\mu(\theta + s/\lambda) - \kappa(\theta)\right]$$

avec $s \in \lambda(\Theta_\mu - \theta)$. Notons que le passage d'un modèle additif au modèle reproductif correspondant (lorsque cela a un sens) se résume à une reparamétrisation. Enfin, la fonction variance de la famille exponentielle $\mathrm{F}(\mu)$ sera appelée *fonction variance unitaire* du modèle de dispersion exponentielle correspondant.

Nous nous intéressons maintenant aux modèles ayant pour fonction variance unitaire

$$m \mapsto m^p, \tag{1.16}$$

avec $p \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ qui sera lié à un paramètre α satisfaisant l'équation

$$(p-1)(1-\alpha) = 1.$$

Les deux paramètres pourront alors être utilisés indistinctement suivant les besoins. Les modèles de dispersion exponentielle qui satisfont (1.16) sont appelés modèle *Tweedie* et les FENs correspondantes sont générés par la mesure μ_p de fonction cumulante

$$\kappa_{\mu_p}(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)^\alpha & \text{pour} \quad p \neq 1, 2 \\ -\log(-\theta) & \text{pour} \quad p = 2 \\ \exp(\theta) & \text{pour} \quad p = 1, \end{cases}$$

et l'on note par $\mu_{p,\lambda}$ la mesure ayant pour fonction cumulante $\lambda\kappa_{\mu_p} = \kappa_{\mu_{p,\lambda}}$. Les fonctions génératrices des cumulants des modèles additifs et reproductifs de dispersion exponentielle correspondants sont alors respectivement données par

$$K_p^*(s; \theta, \lambda) = \begin{cases} \lambda\kappa_{\mu_p}\left[\left(1 + \frac{s}{\theta}\right)^\alpha - 1\right] & \text{pour} \quad p \neq 1, 2 \\ -\lambda\log\left(1 + \frac{s}{\theta}\right) & \text{pour} \quad p = 2 \\ \lambda\mathrm{e}^\theta(\mathrm{e}^s - 1) & \text{pour} \quad p = 1, \end{cases} \tag{1.17}$$

et

$$K_p(s;\theta,\lambda) = \begin{cases} \lambda\kappa_{\mu_p}\left[\left(1+\frac{s}{\theta\lambda}\right)^{\alpha}-1\right] & \text{pour} \quad p \neq 1,2 \\ -\lambda\log\left(1+\frac{s}{\theta\lambda}\right) & \text{pour} \quad p=2 \\ \lambda \mathrm{e}^{\theta}(\mathrm{e}^{s/\lambda}-1) & \text{pour} \quad p=1. \end{cases}$$

On note par $\mathcal{T}w_p^*(\theta,\lambda)$ une loi Tweedie additive et par $\mathcal{T}w_p(m,\sigma^2)$, une loi Tweedie reproductive. Ces deux types de lois satisfont la relation

$$\mathcal{T}w_p^*(\theta,\lambda) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}w_p\left(\lambda\tau_{\mu_p}(\theta), \lambda^{1-p}\right).$$

La propriété de reproductivité se traduit sur les lois Tweedie par

$$c\mathcal{T}w_p(m,\sigma^2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}w_p(cm, c^{2-p}\sigma^2), \text{ pour } c>0.$$

Le Tableau 1.1 donne un résumé des lois incluses dans les modèles Tweedie.

Lois	p	α	M_p	S_p
Stables extrêmes	$p<0$	$1<\alpha<2$	$]0,\infty[$	$\mathbb{R}$
Gaussienne	$p=0$	$\alpha=2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
[N'existe pas]	$0<p<1$	$2<\alpha<\infty$		
Poisson	$p=1$	$\alpha=-\infty$	$]0,\infty[$	$\mathbb{N}$
Poisson-composées	$1<p<2$	$\alpha<0$	$]0,\infty[$	$[0,\infty[$
Gamma décentrée	$p=3/2$	$\alpha=-1$	$]0,\infty[$	$[0,\infty[$
Gamma multivariée	$p=2$	$\alpha=0$	$]0,\infty[$	$]0,\infty[$
Stables positives	$p>2$	$0<\alpha<1$	$]0,\infty[$	$]0,\infty[$
Inverse gaussienne	$p=3$	$\alpha=1/2$	$]0,\infty[$	$]0,\infty[$
Stable extrême	$p=\infty$	$\alpha=1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

TABLE 1.1 – Lois Tweedie de support S_p et de domaine de moyenne M_p pour $p \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$

Intéressons-nous maintenant aux résultats de convergence des lois Tweedie. En particulier, Jørgensen *et al.* (1994) ont montré que tout modèle de dispersion exponentielle converge en loi vers un modèle Tweedie. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.3.1 (Jørgensen *et al.* (1994))**.** *Dans un modèle de dispersion exponentielle issu d'une FEN* $\mathrm{F}(\mu)$*, supposons que la fonction variance unitaire* V *est régulière à l'ordre* p *en zéro ou à l'infini, c'est-à-dire qu'elle vérifie*

$$V(m) \sim c_0 m^p,$$

quand m *tend vers* 0 *ou* $+\infty$ *avec* $c_0>0$*. Alors* $p \notin]0,1[$ *et pour tout* m *et* σ^2

$$c^{-1}\mathrm{ED}\left(cm, \sigma^2 c^{2-p}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{T}w_p(m, c_0\sigma^2)$$

lorsque $c \to 0^+$ *ou* $c \to +\infty$*, où la convergence est donnée pour les valeurs de* c *telles que* $cm \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}(\mu)}$ *et* $c^{p-2}/\sigma^2 \in \Lambda_\mu$*. De plus, le modèle est indéfiniment divisible si* $c^{2-p} \to +\infty$*.*

On peut alors distinguer trois types de convergence dans le Théorème 1.3.1. La première, définie lorsque le paramètre de dispersion $\sigma^2 c^{2-p}$ tend vers 0, est dite de type *central limite*, en référence au populaire théorème central limite. La deuxième est dite de type *indéfiniment divisible* et apparaît lorsque le paramètre de dispersion explose. Enfin, la troisième est un résultat de convergence de Tauber. On parle de ce type de convergence lorsque le paramètre de dispersion est constant. On pourra se référer à Feller (1971) pour une présentation de la théorie de Tauber. Notons que pour approfondir la notion de convergence pour les modèles Tweedie, on pourra se référer à (Johnson *et al.*, 1997, Chap. 4).

2

Vecteurs aléatoires Tweedie

Résumé

À l'aide d'une méthode de convolution qui s'appuie sur les propriétés d'additivité et d'échelle des lois Tweedie univariées, nous donnons une construction des vecteurs aléatoires Tweedie de marges positivement corrélées. Ces derniers sont paramétrés par un vecteur de position et une matrice de dispersion, et sont caractérisés par leurs fonctions génératrices des cumulants. Cela mène à une représentation matricielle des ces vecteurs aléatoires et facilite leur simulation. Grâce à cette représentation, nous pouvons également simuler un vecteur aléatoire Tweedie dont les marges sont négativement corrélées.

Sommaire

2.1 Introduction 20
2.2 Vecteurs aléatoires Tweedie : le cas positivement corrélé 21
2.2.1 Le cas bivarié 21
2.2.2 Le cas multivarié 23
2.3 Représentation matricielle et simulations 27
2.3.1 Représentation matricielle 28
2.3.2 Résultats de simulations 29
2.4 Vecteurs aléatoires Tweedie : une idée du cas négativement corrélé 32
2.4.1 Définition et représentation matricielle 32
2.4.2 Résultats de simulations 33
2.5 Conclusions et perspectives 34

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la notion de vecteurs aléatoires Tweedie. À l'instar du cas univarié qui généralise la loi normale, les vecteurs aléatoires Tweedie peuvent être vus comme une généralisation du vecteur gaussien et conservent quelques unes de ses propriétés. Ils sont également un cas particulier de modèles de dispersion exponentielle multivariés. Les résultats présentés dans ce chapitre ont donné lieu à la publication de l'article Cuenin *et al.* (2016b).

Nous avons vu précédemment que les modèles Tweedie univariés jouent un rôle très important dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers champs d'application. Cela a récemment mené Dunn (2014) à développer un package `R` (voir `R` Development Core Team (2014) pour plus d'informations sur le logiciel `R`) qui permet de simuler des observations des lois Tweedie de paramètre de puissance $p \geq 1$, mais aussi de donner des approximations de leurs fonctions de densité, de leurs quantiles et de leurs fonctions de répartition. Parallèlement, Furman et Landsman (2010) ont proposé une extension multivariée des lois Tweedie, mais directement construite pour répondre à une problématique en sciences actuarielles (notons que Furman et Landsman (2007) ont montré l'importance de la structure de dépendance en actuariat). Ils ont employé une méthode de réduction multivariée en considérant une transformation linéaire d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ dont les composantes sont indépendantes et suivent chacune une loi Tweedie univariée. Ils obtiennent alors une distribution de probabilité de dimension d avec d paramètres de position et d paramètres de dispersion, dont les distributions marginales sont dépendantes. Cependant, le contrôle de la corrélation n'est pas garanti et les lois obtenues se révèlent être sous-paramétrées. Nous voulons, dans ce qui suit, donner une construction permettant de paramétrer une loi Tweedie multivariée par un vecteur de position $m = (m_1, m_2, \ldots, m_d)$ et une matrice de dispersion $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ qui soit symétrique. Ainsi, en plus du fait que chaque loi marginale sera paramétrée par un paramètre de position et un de dispersion à l'instar des lois Tweedie univariées, la corrélation entre deux d'entre elles pourra aussi être contrôlée par un paramètre. Il est à noter que, toujours dans le cadre d'une application en assurances, Shi (2016) a proposé une régression multivariée basée sur un mélange de lois Tweedie dont la corrélation est gérée par une copule. Dans ce qui suit, nous allons utiliser une méthode de convolution pour proposer une construction des vecteurs aléatoires Tweedie. Cette méthode est détaillée dans Joe (1997) et peut se résumer, dans le cas bivarié, par la décomposition suivante. Considérons trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 mutuellement indépendantes et identiquement distribuées. Supposons également que leur loi soit stable par addition. Considérons le vecteur aléatoire X tel que

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X_3 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Le vecteur aléatoire X pourra alors être considéré comme ayant pour loi une extension bivariée de la loi de X_1, X_2 et X_3. En nous basant sur cette approche et sur le travail effectué par Jørgensen (2013) et Jørgensen et Martínez (2013), nous proposons, dans la Section 2.2, une construction des vecteurs aléatoires Tweedie que nous allons définir au moyen de leurs fonctions génératrices des cumulants. Pour bien ap-

préhender la méthode, une idée de la construction en deux dimensions sera présentée suivie par les résultats en dimension quelconque. Dans la Section 2.3, nous donnerons une représentation matricielle des vecteurs aléatoires Tweedie permettant leur simulation. Des résultats de simulation en deux dimensions seront alors présentés et discutés. Nous verrons enfin dans la Section 2.4 comment introduire une corrélation négative entre les éléments d'un vecteur aléatoires dont les marginales suivent des lois Tweedie multivariées.

2.2 Vecteurs aléatoires Tweedie : le cas positivement corrélé

Dans cette première section nous allons donner les détails nous permettant de construire des vecteurs aléatoires Tweedie dont les lois marginales sont positivement corrélées. Une première partie sera dédiée à l'exposé détaillé du cas bivarié, ce qui permettra de bien comprendre la méthode. Une seconde partie présentera la version multivariée ($d \geq 2$) de cette construction ainsi que certaines restrictions des valeurs que peuvent prendre les différentes corrélations.

2.2.1 Le cas bivarié

Si l'on observe de plus près la construction donnée par l'équation (2.1), on se rend compte que la paramétrisation de la loi du vecteur X n'est pas celle que l'on recherche. En effet, si l'on considère que $X_i \sim \mathcal{T}w^{*p}(m_i, \lambda_i)$ pour $i = 1, 2$ et 3, on s'aperçoit que le vecteur de moyenne n'est pas aussi flexible que celui que l'on cherche à obtenir. En particulier, dans le cas où X serait tel que ses composantes soient corrélées au maximum (c'est-à-dire que X_2 et X_3 seraient toutes deux nulles presque sûrement), les marginales seraient égales. Pour plus de flexibilité nous allons utiliser une variante de cette méthode de convolution en statuant que

$$X = \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X_3 \end{pmatrix},$$

où X_{12} et X_{21} partageront le même paramètre de dispersion λ_{12}, mais admettront un paramètre de position chacune, disons m_1 et m_2 respectivement.

À partir des fonctions génératrices des cumulants données par (1.17), considérons, pour tout $(s_1, s_2)^\top \in \mathbb{S}_p^2$, la fonction

$$K_p^*(s_1, s_2; \theta_1, \theta_2, \gamma) = \begin{cases} \gamma\left(\mathrm{e}^{s_1+s_2} - 1\right) & \text{pour} \quad p = 1 \\ -\gamma \log\left(1 + \frac{s_1}{\theta_1} + \frac{s_2}{\theta_2}\right) & \text{pour} \quad p = 2 \\ \gamma\left[\left(1 + \frac{s_1}{\theta_1} + \frac{s_2}{\theta_2}\right)^\alpha - 1\right] & \text{pour} \quad p \neq 1, 2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Définissons alors la fonction génératrice des cumulants d'un vecteur Tweedie de dimension 2 par la fonction

$$K_p^*(s; \theta, \gamma) = K_p^*(s_1, s_2; \theta_1, \theta_2, \gamma_{12}) + K_p^*(s_1, 0; \theta_1, \theta_1, \gamma_1) + K_p^*(0, s_2; \theta_2, \theta_2, \gamma_2), \tag{2.3}$$

où les paramètres γ_{12}, γ_1 et γ_2 sont du même signe que $(2-p)^{-1}$. En prenant s_1 ou s_2 égal à 0, on retrouve bien les fonctions génératrices des cumulants de deux lois Tweedie univariées chacune paramétrée par θ_i et $\gamma_{ii} = \gamma_{12} + \gamma_i$, pour $i = 1, 2$. Pour obtenir un vecteur aléatoire paramétré par $m = (m_1, m_2)^\top$ et $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$, on pose

$$\lambda_{ii} = \begin{cases} \gamma_{ii} & \text{pour} \quad p = 1, 2 \\ \frac{\gamma_{ii}}{\kappa_{\mu_p}(\theta_i)} & \text{pour} \quad p \neq 1, 2, \end{cases} \tag{2.4}$$

et

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \gamma_{ij} & \text{pour} \quad p = 1, 2 \\ \frac{\gamma_{ij}}{\kappa^{1/2}_{\mu_p}(\theta_i, \theta_j)} & \text{pour} \quad p \neq 1, 2, \end{cases} \tag{2.5}$$

avec

$$\kappa^{1/2}_{\mu_p}(\theta_i, \theta_j) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(\frac{\theta_i}{\alpha - 1} \right)^{\alpha/2} \left(\frac{\theta_j}{\alpha - 1} \right)^{\alpha/2}.$$

Pour $i = 1, 2$, la moyenne de la $i^{\text{ème}}$ loi marginale est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial s_i} K^*_p(s; \theta, \gamma) \bigg|_{s=0} = \begin{cases} \lambda_{ii} & \text{pour} \quad p = 1 \\ -\frac{\lambda_{ii}}{\theta_i} = \lambda_{ii} m_i & \text{pour} \quad p = 2 \\ \lambda_{ii} \kappa_{\mu_p}(\theta_i) \frac{\alpha}{\theta_i} = \lambda_{ii} m_i & \text{pour} \quad p \neq 1, 2, \end{cases}$$

et sa variance par

$$\frac{\partial^2}{\partial s_i^2} K^*_p(s; \theta, \gamma) \bigg|_{s=0} = \begin{cases} \lambda_{ii} & \text{pour} \quad p = 1 \\ \frac{\lambda_{ii}}{\theta_i^2} = \lambda_{ii} m_i^2 & \text{pour} \quad p = 2 \\ \lambda_{ii} \kappa_{\mu_p}(\theta_i) \frac{\alpha(\alpha-1)}{\theta_i^2} = \lambda_{ii} m_i^p & \text{pour} \quad p \neq 1, 2. \end{cases}$$

Quant à la covariance, elle est donnée par

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} K^*_p(s; \theta, \gamma) \bigg|_{s=0} = \begin{cases} \lambda_{12} & \text{pour} \quad p = 1 \\ \lambda_{12} m_1 m_2 & \text{pour} \quad p = 2 \\ \lambda_{12} (m_1 m_2)^{p/2} & \text{pour} \quad p \neq 1, 2. \end{cases} \tag{2.6}$$

La corrélation entre les deux composantes est alors donnée par

$$\rho_{12} = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{11} \lambda_{22}}}.$$

Au final, si X est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ distribué selon une loi Tweedie bivariée additive $\mathcal{T}w_2^{*p}(m, \Lambda)$ alors son espérance est donnée par

$$\mathbb{E}[X] = \text{diag}(\Lambda) m,$$

et sa matrice de variance-covariance par

$$\text{Var}(X) = \Lambda \odot V_p(m),$$

où $V_p(m) = \left\{ (m_i m_j)^{p/2} \right\}_{1 \leq i,j \leq 2}$ et $\odot$ désigne le produit de Hadamard. On peut d'ores et déjà remarquer qu'en prenant $\lambda_{12} = 0$, alors $K^*_p(\ \cdot\ ; \theta, \gamma)$ est la fonction génératrice des cumulants d'un vecteur aléatoire dont les deux composantes

sont des lois Tweedie indépendantes. Réciproquement, au vu de la covariance (2.6), en statuant qu'elle est nulle, cela va impliquer $\lambda_{12} = 0$ et donc l'indépendance des composantes. Nous sommes donc face au fait que l'absence de corrélation est équivalente à l'indépendance des deux lois marginales. L'autre cas limite est de considérer $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{12}$, ce qui donne un vecteur aléatoire dont les lois marginales sont complètement dépendantes ($\rho_{12} = 1$). On remarque également que l'espérance et la matrice de variance-covariance de X est une généralisation en deux dimensions de celles obtenues dans le cas univarié. Cette loi bivariée conserve également la propriété de stabilité par convolution. La démonstration sera donnée dans le cas général qui sera détaillé plus bas. Enfin, il est possible de définir une version reproductive d'une loi Tweedie bivariée, qui va conserver la propriété d'échelle, par la transformation

$$\mathcal{T}w_2^p(m, \Phi) = \mathrm{diag}(\Lambda)^{-1}\mathcal{T}w_2^{*p}(m, \Lambda).$$

L'espérance du cas reproductif sera alors donnée par

$$\mathbb{E}[X] = m,$$

et sa matrice de variance-covariance

$$\mathrm{Var}(X) = \Phi \odot V_p(m),$$

où $\Phi = \mathrm{diag}(\Lambda)^{-1}\Lambda\mathrm{diag}(\Lambda)^{-1}$.

2.2.2 Le cas multivarié

Dans cette partie, nous allons donner le résultat général de construction des lois Tweedie multivariées ($d \geq 2$) ainsi que les propriétés qui en découlent. Nous verrons également que des restrictions s'appliquent sur les différentes corrélations entre les lois marginales. Le théorème suivant donne la construction générale des lois Tweedie multivariées.

Théorème 2.2.1 (Cuenin *et al.* (2016b))**.** *Soient $d > 1$ et $p \in \mathbb{R}\backslash]0, 1[$. Considérons $m = (m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ tels que $\lambda_{ii}m_i \in M_p$, $\lambda_{ii} > 0$ et $\lambda_{ij} \geq 0$ pour tout $i, j = 1, 2, \ldots, d$. Notons par $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^\top$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i. chaque variable aléatoire X_i suit une loi $\mathcal{T}w^{*p}(m_i, \lambda_{ii})$ et $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \lambda_{ij}(m_i m_j)^{p/2}$ pour tout $i, j = 1, 2, \ldots, d$;

ii. il existe une loi additive sur $\mathbb{R}^d$ selon laquelle X est distribuée, notée par $\mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$ et ayant pour fonction génératrice des cumulants

$$K_p^*(s; \theta, \gamma) = \sum_{i<j} K_p^*(s_i, s_j; \theta_i, \theta_j, \gamma_{ij}) + \sum_{i=1}^{d} K_p^*(s_i, 0; \theta_i, \theta_i, \gamma_i),$$

avec $s = (s_1, s_2, \ldots, s_d)^\top \in \mathbb{S}_p^d$, $K_p^*(\,\cdot\,, \cdot\,; \theta_i, \theta_j, \gamma)$ étant donnée par (2.2) et $\gamma_{ii} = \sum_{j\neq i}^d \gamma_{ij} + \gamma_i$ et tel que λ_{ij} soit défini par (2.4) pour $i = j$ et par (2.5) pour $i \neq j$.

Démonstration. $i. \implies ii.$ Fixons i et j dans $\{1, 2, \ldots, d\}$ tels que $i < j$. Considérons les variables aléatoires $X_i \sim \mathcal{T}w^{*p}(m_i, \lambda_{ii})$ et $X_j \sim \mathcal{T}w^{*p}(m_j, \lambda_{jj})$ telles que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \lambda_{ij}(m_i m_j)^{p/2}$. Paramétrons les lois de X_i et X_j à l'aide des paramètres canoniques θ_i et θ_j, et γ_{ii} et γ_{jj}. De manière similaire au cas bivarié vu précédemment, il est possible de décomposer le vecteur aléatoire $(X_i, X_j)^\top$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} X_i \\ X_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{i,j} \\ U_{j,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ U_j \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

avec $U_{ij} \sim \mathcal{T}w^{*p}(\theta_i, \gamma_{ij})$, $U_{ji} \sim \mathcal{T}w^{*p}(\theta_j, \gamma_{ij})$, $U_i \sim \mathcal{T}w^{*p}(\theta_i, \gamma_i)$ et $U_j \sim \mathcal{T}w^{*p}(\theta_j, \gamma_j)$. Comme somme de vecteurs aléatoires indépendants, la fonction cumulante du vecteur aléatoire (2.7) sera alors donnée par (2.3). En réalisant cette démarche pour tout i et j tels que $i < j$, on obtient l'existence d'une loi ayant pour fonction cumulante $K_p^*(s; \theta, \gamma)$.

$ii. \implies i.$ Pour $i\{1, 2, \ldots, d\}$, la fonction génératrice des cumulants de la loi de X_i est égale à $K_p^*(s_0; \theta, \gamma)$ où s_0 est un vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ composante est la seule non nulle. Il est alors facile de voir que $K_p^*(s; \theta, \gamma) = \kappa_p^*(s_i; \theta_i, \gamma_{ii})$, avec $\gamma_{ii} = \sum_{j \neq i}^d \gamma_{ij} + \gamma_i$. Ce qui prouve que $X_i \sim \mathcal{T}w^{*p}(m_i, \lambda_{ii})$. De plus, la covariance entre X_i et X_j est donnée pour tout $i, j = 1, 2, \ldots, d$ par

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} K_p^*(s, \theta, \gamma)\right|_{s=0} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{pour} \quad p = 1 \\ -\frac{\lambda_{ij}}{\theta_i \theta_j} = \lambda_{ij} m_i m_j & \text{pour} \quad p = 2 \\ \lambda_{ij} \kappa_{\mu_p}^{1/2}(\theta_i, \theta_j) \frac{\alpha(\alpha-1)}{\theta_i \theta_j} = \lambda_{ij}(m_i m_j)^{p/2} & \text{pour} \quad p \neq 1, 2. \end{cases}$$

La preuve est ainsi complète. □

On peut donc remarquer que, comme dans le cas bivarié vu plus haut, si $X \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \mathrm{diag}(\Lambda) m,$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = \Lambda \odot V_p(m),$$

avec $V_p(m) = \{(m_i m_j)^{p/2}\}_{1 \leq i,j \leq d}$.

La corrélation entre les lois marginales est donnée par le corollaire suivant. Celui-ci donne également certaines restrictions lorsque cette corrélation n'est pas nulle.

Corollaire 2.2.1 (Cuenin *et al.* (2016b))**.** *Soit $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^\top \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$. La corrélation entre X_i et X_j notée par ρ_{ij} pour $i \neq j$ est donnée par*

$$\rho_{ij} = \frac{\lambda_{ij}(m_i m_j)^{p/2}}{\sqrt{\lambda_{ii} m_i^p \lambda_{jj} m_j^p}} = \frac{\lambda_{ij}}{\sqrt{\lambda_{ii}\lambda_{jj}}} = \frac{|\gamma_{ij}|}{\sqrt{\gamma_{ii}\gamma_{jj}}}.$$

De plus, $\rho_{ij} \in [0, \varepsilon_{p;ij}[\subset [0, 1]$ tel que $\varepsilon_{p;ij} = \min\{R_p(i, j), R_p(j, i)\}$ avec

$$R_p(i, j) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda_{ii}}{\lambda_{jj}}} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{ii}} \sum_{\ell \neq i,j} \lambda_{i\ell}\right) & \text{si } p = 1, 2 \\ \sqrt{\frac{\lambda_{ii} m_i^{\alpha/(\alpha-1)}}{\lambda_{jj} m_j^{\alpha/(\alpha-1)}}} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{ii} m_i^{\alpha/(\alpha-1)}} \sum_{\ell \neq i,j} \lambda_{i\ell} \frac{\alpha}{\alpha - 1} (m_i m_j)^{\alpha/2(\alpha-1)}\right) & \text{si } p \neq 1, 2. \end{cases}$$

De plus, en autorisant à prendre $\lambda_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, alors $\rho_{ij} = 0$ si et seulement si X_i et X_j sont indépendantes.

Il est a noté qu'une version bivariée de la loi de Poisson, dont la construction a été donnée par Holgate (1964), admet la même borne supérieure pour le paramètre de corrélation que celle donnée dans le Corollaire 2.2.1. De plus, le fait que l'indépendance soit équivalente à une corrélation nulle entre les lois marginales est une première propriété que partagent les vecteurs aléatoires Tweedie et les vecteurs gaussiens.

Démonstration du Corollaire 2.2.1. Il est facile de voir que

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j)}} = \frac{\lambda_{ij}(m_i m_j)^{p/2}}{\sqrt{\lambda_{ii} m_i^p \lambda_{jj} m_j^p}}.$$

Le résultat est alors obtenu en jouant entre les paramètres λ_{ij} et γ_{ij} pour $i, j = 1, 2, \ldots, d$.

En ce qui concerne les restrictions du paramètre de corrélation, considérons déjà que $p = 1, 2$. Pour $i = 1, 2, \ldots, d$, le paramètre γ_i doit être positif par définition de la fonction génératrice des cumulants donnée dans le Théorème 2.2.1. Comme ici $\gamma_{ij} = \lambda_{ij}$ pour $j = 1, 2, \ldots, d$, alors

$$\lambda_{ii} > \sum_{\ell \neq i} \rho_{i\ell} \sqrt{\lambda_{ii}\lambda_{\ell\ell}}.$$

En divisant par $\sqrt{\lambda_{ii}}$, on obtient

$$\sqrt{\lambda_{ii}} > \sum_{\ell \neq i,j} \rho_{i\ell} \sqrt{\lambda_{\ell\ell}} + \rho_{ij} \sqrt{\lambda_{jj}},$$

ce qui implique que

$$\rho_{ij} < \frac{1}{\sqrt{\lambda_{jj}}} \left(\sqrt{\lambda_{ii}} - \sum_{\ell \neq i,j} \frac{\lambda_{i\ell}}{\sqrt{\lambda_{ii}}} \right),$$

et donc

$$\rho_{ij} < \sqrt{\frac{\lambda_{ii}}{\lambda_{jj}}} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{ii}} \sum_{\ell \neq i,j} \lambda_{i\ell} \right).$$

En répétant cette routine pour λ_{jj}, on obtient le résultat. Fixons maintenant $p \neq 1, 2$. Dans ce cas, γ_{ij} peut être positif ou négatif (il a en fait le même signe que $(2-p)^{-1}$). Pour pouvoir assurer que $\gamma_{ii} - \sum_{\ell \neq i} \gamma_{i\ell}$ a le même signe que γ_{ij}, il faut que $|\gamma_{ii}|$ soit plus grand que $\left|\sum_{\ell \neq i} \gamma_{i\ell}\right|$ pour tout $i, j = 1, 2, \ldots, d$. Cela implique que $|\gamma_{ii}| > \left|\sum_{\ell \neq i} \rho_{i\ell} \sqrt{\gamma_{ii}\gamma_{\ell\ell}}\right|$. Comme $\rho_{i\ell}\sqrt{\gamma_{ii}\gamma_{\ell\ell}} > 0$ et en divisant par $\sqrt{|\gamma_{ii}|}$, il vient

$$\sqrt{|\gamma_{ii}|} > \sum_{\ell \neq i,j} \rho_{i\ell} \sqrt{|\gamma_{\ell\ell}|} + \rho_{ij} \sqrt{|\gamma_{jj}|},$$

et donc

$$\rho_{ij} < \sqrt{\frac{\gamma_{ii}}{\gamma_{jj}}} \left(1 - \frac{1}{\gamma_{ii}} \sum_{\ell \neq i,j} \gamma_{i\ell} \right).$$

En faisant le lien entre γ_{ij} et λ_{ij} comme décrit par les équations (2.4) et (2.5), on obtient finalement

$$\rho_{ij} < \sqrt{\frac{\lambda_{ii} m_i^{\alpha/(\alpha-1)}}{\lambda_{jj} m_j^{\alpha/(\alpha-1}}} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{ii} m_i^{\alpha/(\alpha-1)}} \sum_{\ell \neq i,j} \lambda_{i\ell} \frac{\alpha}{\alpha - 1} (m_i m_j)^{\alpha/2(\alpha-1)} \right).$$

Pour terminer la preuve, remarquons que nous pouvons statuer que λ_{ij} est nul, ce qui sera équivalent à une corrélation $\rho_{ij} = 0$ et à une indépendance, au vu de la construction donnée par le Théorème 2.2.1. □

Les lois Tweedie multivariées $\mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$ satisfont une extension multivariée de la propriété d'additivité.

Propriété 2.2.1. *Soient $X_1 \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda_2)$ deux variables aléatoires indépendantes. Alors*

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda_1 + \Lambda_2)$$

Démonstration. Comme les vecteurs X_1 et X_2 sont indépendants, la fonction génératrice des cumulants de $X_1 + X_2$ est donnée par la somme des fonctions génératrices des cumulants de X_1 et X_2. Ainsi

$$\begin{aligned}
K_p^*(s; \theta, \gamma_1) + K_p^*(s; \theta, \gamma_2) &= \sum_{i<j} K_p^*(s_i, s_j; \theta_i, \theta_j, \gamma_{1ij}) + \sum_{i=1}^{d} K_p^*(s_i, 0; \theta_i, \theta_i, \gamma_{1i}) \\
&\quad + \sum_{i<j} K_p^*(s_i, s_j; \theta_i, \theta_j, \gamma_{2ij}) + \sum_{i=1}^{d} K_p^*(s_i, 0; \theta_i, \theta_i, \gamma_{2i}) \\
&= \sum_{i<j} K_p^*(s_i, s_j; \theta_i, \theta_j, \gamma_{1ij} + \gamma_{2ij}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d} K_p^*(s_i, 0; \theta_i, \theta_i, \gamma_{1i} + \gamma_{1i}) \\
&= K_p^*(s; \theta, \gamma_1 + \gamma_2),
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

À partir d'un vecteur aléatoire $X \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$, il est alors possible de définir une loi Tweedie multivariée respectant une extension de la propriété d'échelle en considérant le vecteur aléatoire $Y = \text{diag}(\Lambda)^{-1} X$. On notera alors $Y \sim \mathcal{T}w_d^{p}(m, \Phi)$ avec $\Phi = \text{diag}(\Lambda)^{-1} \Lambda \text{diag}(\Lambda)^{-1}$. L'espérance de Y sera alors donnée par

$$\mathbb{E}[Y] = \text{diag}(\Lambda)^{-1} \mathbb{E}[X] = m$$

et la matrice de variance-covariance par

$$\text{Var}(Y) = \text{diag}(\Lambda)^{-1} \text{Var}(X) \text{diag}(\Lambda)^{-1} = \Phi \odot V_p(m).$$

Propriété 2.2.2. *Soit $Y \sim \mathcal{T}w_d^{p}(m, \Phi)$ et C une matrice diagonale dont les éléments sont positifs. Alors*

$$CY \sim \mathcal{T}w_d^{p}\left(Cm, C^{1-p/2} \Phi C^{1-p/2}\right).$$

Démonstration. Comme $Y \sim \mathcal{T}w_d^p(m, \Phi)$, le vecteur aléatoire CY est également de loi Tweedie multivariée. Cela vient du fait que les lois Tweedie multivariées reproductives sont construites à partir des lois multivariées additives. Il reste à donner les paramètres de la loi de CY. Il est facile de voir que $\mathbb{E}[CY] = Cm$. Pour ce qui est de la matrice de variance-covariance :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(CY) &= C\Phi \odot V_p(m)C \\
&= C^{1-p/2}C^{p/2}\Phi \odot V_p(m)C^{1-p/2}C^{p/2} \\
&= \left(C^{1-p/2}\Phi C^{1-p/2}\right) \odot \left(C^{p/2}V_p(m)C^{p/2}\right) \\
&= \left(C^{1-p/2}\Phi C^{1-p/2}\right) \odot V_p(Cm),
\end{aligned}$$

où $\{V_p(Cm)\}_{1\leq i,j\leq 2} = (c_{ii}c_{jj}m_i m_j)^{p/2}$. Au final la loi de CY est bien $\mathcal{T}w_d^p\left(Cm, C^{1-p/2}\Phi C^{1-p/2}\right)$. □

Pour résumer, ce qui précède mène à l'obtention d'une nouvelle famille de lois multivariées, dans laquelle on retrouve une version multivariée des lois de Poisson, gamma, gaussienne, inverse gaussienne et α-stable. Le Tableau 2.1 donne un résumé de ces lois ainsi que leurs supports et ceux de leurs moyennes.

Lois	p	α	$\mathrm{M}_{p,d}$	$\mathrm{S}_{p,d}$
Stables extrêmes multivariées	$p < 0$	$1 < \alpha < 2$	$]0, \infty[^k$	$\mathbb{R}^d$
Gaussienne multivariée	$p = 0$	$\alpha = 2$	$\mathbb{R}^d$	$\mathbb{R}^d$
[N′existe pas]	$0 < p < 1$	$2 < \alpha < \infty$		
Poisson multivariée	$p = 1$	$\alpha = -\infty$	$]0, \infty[^d$	$\mathbb{N}^d$
Poisson-composées multivariées	$1 < p < 2$	$\alpha < 0$	$]0, \infty[^d$	$[0, \infty[^d$
Gamma décentrée multivariée	$p = 3/2$	$\alpha = -1$	$]0, \infty[^d$	$[0, \infty[^d$
Gamma multivariée	$p = 2$	$\alpha = 0$	$]0, \infty[^d$	$]0, \infty[^d$
Stables positives multivariées	$p > 2$	$0 < \alpha < 1$	$]0, \infty[^d$	$]0, \infty[^d$
Inverse gaussienne multivariée	$p = 3$	$\alpha = 1/2$	$]0, \infty[^d$	$]0, \infty[^d$
Stable extrême multivariée	$p = \infty$	$\alpha = 1$	$\mathbb{R}^d$	$\mathbb{R}^d$

TABLE 2.1 – Lois Tweedie multivariées sur $\mathbb{R}^d$ de support $\mathrm{S}_{p,d}$ et de domaine de moyenne $\mathrm{M}_{p,d}$ pour $p \in \mathbb{R}\backslash]0, 1[$

2.3 Représentation matricielle et simulations

Partant du fait de l'existence des lois Tweedie multivariées, il est maintenant intéressant de pouvoir les simuler, à l'instar de ce qui a été fait par Dunn (2014) pour le cas univarié. Nous allons, dans ce qui suit, donner une représentation matricielle d'un vecteur aléatoire $X \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$ qui sera la base d'un algorithme permettant de simuler des observations de X.

2.3.1 Représentation matricielle

La fonction génératrice des cumulants de X donnée dans le Théorème 2.2.1 permet de dire que X peut se décomposer de la manière suivante :

$$X = \sum_{i<j} X_{ij} + \sum_{i=1}^{d} X_{ii}, \tag{2.8}$$

où X_{ij} et X_{ii} sont des vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$ dont les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ composantes de X_{ij} suivent respectivement les lois $\mathcal{T}w^{*p}(m_i, \lambda_{ij})$ et $\mathcal{T}w^{*p}(m_j, \lambda_{ij})$, et la $i^{\text{ème}}$ composante de X_{ii} suit une loi $\mathcal{T}w^{*p}\left(m_i, \lambda_{ii} - \sum_{\ell \neq i} \lambda_{i\ell}\right)$, leurs autres composantes étant nulles. Cette représentation ne s'avère pas pratique pour pouvoir simuler des observations de X. En effet, il faudrait être en mesure de simuler $d(d+1)/2$ vecteurs. La dimension étant fixée par l'utilisateur, le nombre de vecteurs n'est pas connu à l'exécution. Nous proposons alors, à travers le théorème suivant, une représentation matricielle du vecteur X.

Théorème 2.3.1 (Cuenin *et al.* (2016b))**.** *Soient $p \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$ et $X \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$. Alors*

$$X = \operatorname{diag}(m)^{p-1} U_p \mathbb{1},$$

où $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$ et $U_p = (U_{p;ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ est une matrice aléatoire symétrique telle que

$$U_{p;ij} \sim \begin{cases} \mathcal{T}w^{*p}(1, \gamma_{ij}) & \text{pour} \quad p = 1, 2 \\ \mathcal{T}w^{*p}\left(1, \gamma_{ij}\{2-p\}\right) & \text{pour} \quad p \neq 1, 2, \end{cases}$$

pour $i \neq j$, et

$$U_{p;ii} \sim \begin{cases} \mathcal{T}w^{*p}\left(1, \gamma_{ii} - \sum_{\ell \neq i} \gamma_{i\ell}\right) & \text{pour} \quad p = 1, 2 \\ \mathcal{T}w^{*p}\left(1, \left[\gamma_{ii} - \sum_{\ell \neq i} \gamma_{i\ell}\right](2-p)\right) & \text{pour} \quad p \neq 1, 2. \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons premièrement que le vecteur aléatoire $U_p\mathbb{1}$ a pour $k^{\text{ème}}$ composante

$$U_{p;kk} + \sum_{\ell \neq k} U_{p;k\ell}.$$

Posons alors X_{ij} et X_{ii} de (2.8) tels que les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ composantes de X_{ij} soient respectivement égales à $m_i^{p-1} U_{p;ij}$ et $m_j^{p-1} U_{p;ji}$, et que la $i^{\text{ème}}$ composante de X_{ii} soit égale à $m^{p-1} U_{p;ii}$. Il reste à montrer que les lois des vecteurs X_{ij} et X_{ii} ainsi posés sont les bonnes. Considérons les cas suivants :

- si $p = 1$, le résultat est immédiat ;
- si $p = 2$, il faut remarquer que $\mathcal{T}w^{*2}(1, \lambda) = \mathcal{G}a(\lambda)$, une loi gamma de moyenne et de variance λ. Pour $m > 0$, $m\mathcal{G}a(\lambda) = \mathcal{G}a(m, \lambda)$, une loi gamma de moyenne λm et de variance λm^2, c'est-à-dire une loi Tweedie $\mathcal{T}w^{*2}(m, \lambda)$. Le résultat est, dès lors, immédiat ;

- concernant le cas $p \neq 1, 2$, on va montrer que pour $\lambda > 0$ et $m > 0$, on a

$$m^{p-1}\mathcal{T}w^{*p}(1, \gamma\{2-p\}) = \mathcal{T}w^{*p}(m, \lambda), \tag{2.9}$$

avec γ associé à λ comme dans l'équation (2.4). La fonction génératrice des cumulants de $\mathcal{T}w^{*p}(1, \gamma\{2-p\})$ est donnée, pour $s \in \mathbb{S}_p$ par

$$s \mapsto \gamma\left[\left(1 + \frac{s}{\alpha - 1}\right)^{\alpha} - 1\right].$$

Ainsi, la fonction génératrice des cumulants de $m^{p-1}\mathcal{T}w^{*p}(1, \gamma\{2-p\})$ est donnée par

$$s \mapsto \gamma\left[\left(1 + \frac{m^{p-1}s}{\alpha - 1}\right)^{\alpha} - 1\right] = \gamma\left[\left(1 + \frac{s}{\theta}\right)^{\alpha} - 1\right],$$

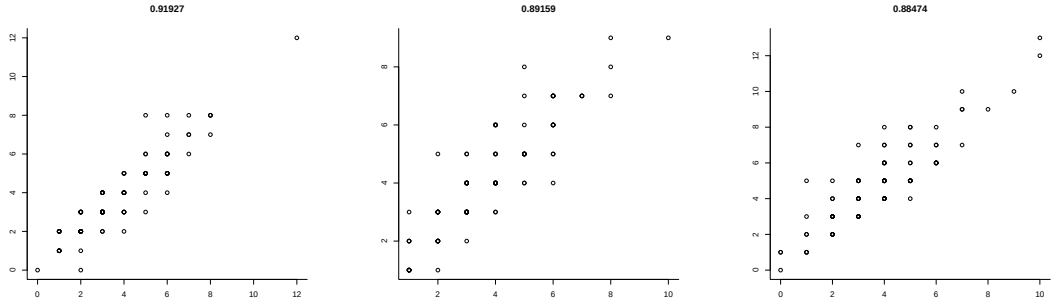
ce qui prouve l'égalité (2.9). On obtient donc le résultat voulu.

La preuve est ainsi complète. □

2.3.2 Résultats de simulations

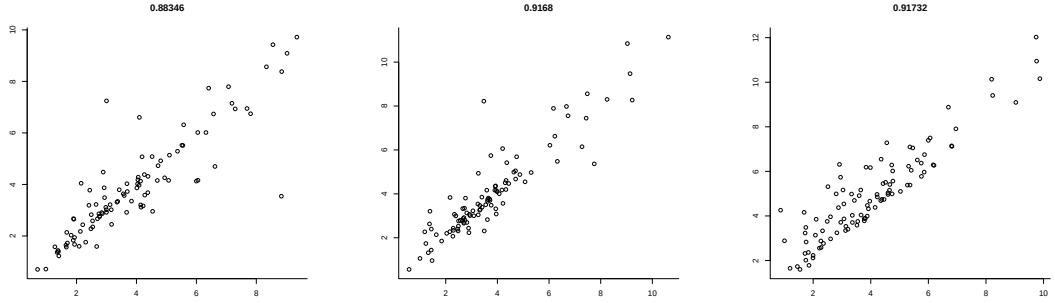
La représentation matricielle donnée dans le Théorème 2.3.1 permet de créer un algorithme afin de simuler des observations de $X \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$. en nous basant sur le package `R` (R Development Core Team (2014)) donné par Dunn (2014), il suffit de simuler les éléments de la matrice U_p à partir des valeurs de d, m, p et Λ fournies par l'utilisateur. Notons que, dans un souci de rapidité d'exécution, les lois inverses gaussiennes univariées seront simulées à l'aide du package « SuppDists » de Wheeler (2009).

Nous présentons ci-dessous les résultats de simulations de plusieurs lois Tweedie bivariées. Nous considérons 100 observations des lois suivantes : Poisson ($p = 1$), gamma décentrée ($p = 3/2$), gamma ($p = 2$), inverse gaussienne ($p = 3$) et 1/3-stable ($p = 5/2$). Nous fixons également $m = (1, 1)^\top$ et Λ tel que $\lambda_{11} = 4.0$, $\lambda_{22} \in \{4.0, 4.3, 4.9\}$ et λ_{12} tel que $\rho_{12} = 0.9$. Ce choix peut nous donner une idée lorsque la corrélation entre les lois marginales est importante et lorsque les dispersions entre les lois ne sont pas les mêmes. La Figure 2.1 rend compte des résultats pour la loi de Poisson bivariée, la corrélation empirique entre les variables étant notée en haut de chaque graphique. On peut remarquer qu'une forte corrélation positive entre les variables les force à se distribuer de part et d'autre d'une droite croissante. On remarque également que, lorsque la dispersion de la seconde variable est bien plus élevée que celle de la première, les observations ont tendance à passer d'un seul côté de cette droite. Ces remarques restent les mêmes dans le cas où l'on considère les autres lois (voir Figures 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5). Ce comportement est satisfaisant et est proche du comportement d'un vecteur gaussien dont les lois marginales sont fortement corrélées positivement.



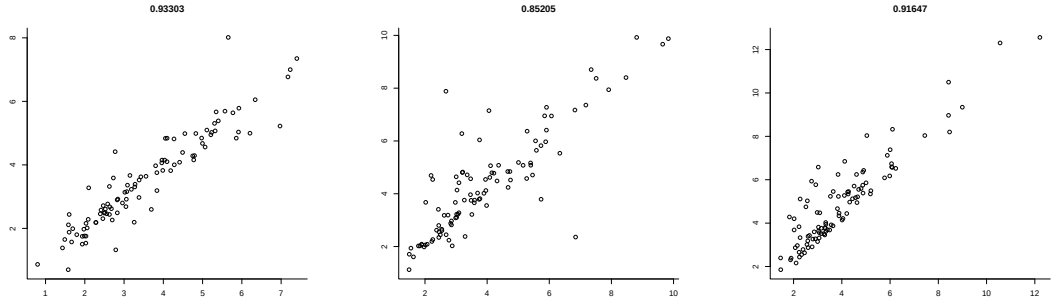
(a) λ_{22}=4.0 (b) λ_{22}=4.3 (c) λ_{22}=4.9

FIGURE 2.1 – 100 observations d'une loi de Poisson bivariée ($p = 1$) de lois marginales corrélées par $\rho_{12} = 0.9$



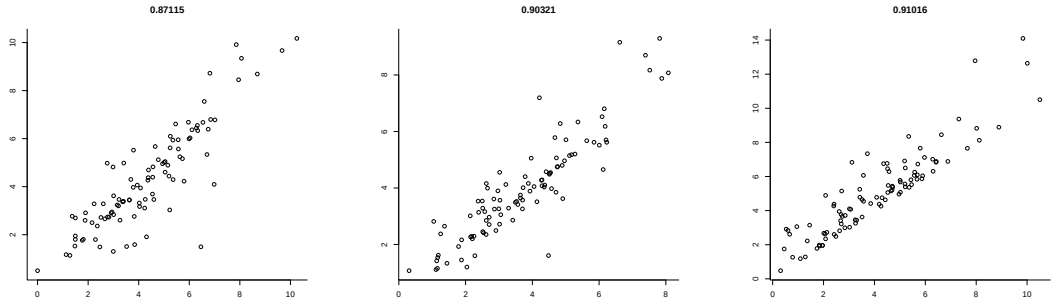
(a) λ_{22}=4.0 (b) λ_{22}=4.3 (c) λ_{22}=4.9

FIGURE 2.2 – 100 observations d'une loi gamma bivariée ($p = 2$) de lois marginales corrélées par $\rho_{12} = 0.9$



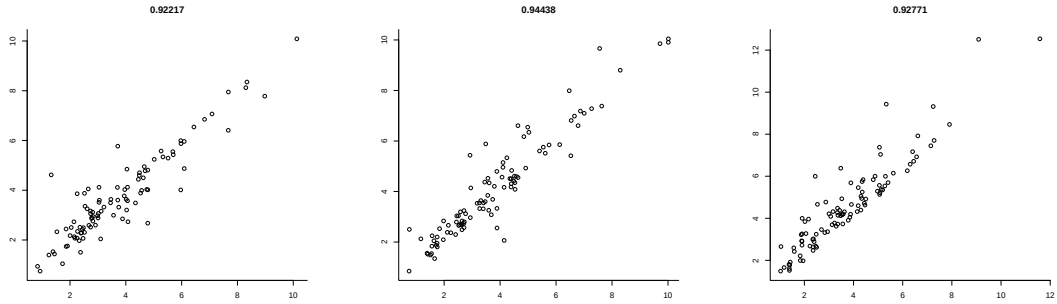
(a) λ_{22}=4.0 (b) λ_{22}=4.3 (c) λ_{22}=4.9

FIGURE 2.3 – 100 observations d'une loi inverse gaussienne bivariée ($p = 3$) de lois marginales corrélées par $\rho_{12} = 0.9$



(a) λ_{22}=4.0 (b) λ_{22}=4.3 (c) λ_{22}=4.9

FIGURE 2.4 – 100 observations d'une loi gamma décentrée bivariée ($p = 3/2$) de lois marginales corrélées par $\rho_{12} = 0.9$



(a) λ_{22}=4.0 (b) λ_{22}=4.3 (c) λ_{22}=4.9

FIGURE 2.5 – 100 observations d'une loi 1/3-stable bivariée ($p = 5/2$) de lois marginales corrélées par $\rho_{12} = 0.9$

2.4 Vecteurs aléatoires Tweedie : une idée du cas négativement corrélé

Nous nous posons à présent la question de pouvoir construire une famille de lois Tweedie multivariées dont les corrélations entre les lois marginales sont négatives. Une construction similaire à la Section 2.3 de ce chapitre se révèle impossible. En effet, pour introduire une corrélation négative l'idée serait de considérer la décomposition suivante

$$X = \begin{pmatrix} -X_{12} \\ X_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

Cette décomposition, qui ne pose aucun problème si l'on considère des variables de lois supportées par $\mathbb{R}$, est impossible dans le cas où les marginales sont de lois Tweedie, car la plupart de ces dernières sont à support positif.

2.4.1 Définition et représentation matricielle

Malgré l'impossibilité de donner une construction théorique d'un vecteur aléatoire Tweedie dont les lois marginales sont négativement corrélées, nous proposons une construction permettant de simuler des observations d'un vecteur aléatoire dont les composantes sont négativement corrélées et de lois Tweedie univariées. Pour se faire, nous allons suivre une méthode de simulation détaillée dans Devroye (1986) et qui permet de générer des observations de n'importe quelle loi, en appliquant l'inverse généralisé de sa fonction de répartition à des observations d'une loi uniforme sur $]0,1[$.

Théorème 2.4.1 (Cuenin *et al.* (2016b))**.** *Soit $p \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$. Il existe un vecteur aléatoire $X^{(-)}$ dont les lois marginales sont des lois Tweedie univariées négativement corrélées, $X^{(-)}$ étant défini par*

$$X^{(-)} = \mathrm{diag}(m)^{p-1} U_p^{(-)} \mathbb{1},$$

où $U_p^{(-)} = \left(U_{p;ij}^{(-)}\right)_{1\leq i,j\leq d}$ est une matrice aléatoire, non symétrique, telle que $U_{p;ii}^{(-)} = U_{p;ii}$ comme dans le Théorème 2.3.1 et

$$U_{p;ij}^{(-)} = \begin{cases} F_{p;ij}^{-1}(Z) & pour \quad i < j \\ F_{p;ij}^{-1}(1-Z) & pour \quad i > j; \end{cases} \tag{2.10}$$

la fonction $F_{p;ij}^{-1}$ est appelée l'inverse généralisé (i.e. $F_{p;ij}^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R},\ F_{p;ij}(x) \geq y,\ y \in (0,1)\}$) *de la fonction de répartition $F_{p;ij}$ d'une loi Tweedie univariée :*

$$\mathcal{T}w^{*p}(1,\gamma_{ij}) \text{ pour } p = 1,2 \text{ et } \mathcal{T}w^{*p}(1,\gamma_{ij}\{2-p\}) \text{ pour } p \neq 1,2.$$

Avant de donner la preuve de ce résultat, considérons le lemme suivant qui garantit la corrélation négative entre les variables aléatoires données par (2.10).

Lemme 2.4.1. *Soient $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et Z de loi $\mathcal{U}]0,1[$. Alors*

$$\mathrm{Cov}[f(Z), f(1-Z)] \leq 0.$$

Démonstration. Posons $m = \mathbb{E}[f(Z)] = \mathbb{E}[f(1-Z)]$ et considérons k tel que $f(k) = m$. Alors

$$\mathrm{Cov}[f(Z), f(1-Z)] = \int_0^k [f(\zeta)-m][f(1-\zeta)-m]\mathrm{d}\zeta + \int_k^1 [f(\zeta)-m][\varphi(1-\zeta)-m]\mathrm{d}\zeta.$$

Comme f est strictement croissante sur $]0,1[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\zeta) - m$ est négatif pour $\zeta \in [0,k]$ et positif pour $\zeta \in [k,1]$. De plus, $f(1-\zeta) - m$ est positif pour $\zeta \in [0,f]$ et négatif pour $\zeta \in [k,1]$. Ainsi, les intégrales sont négatives et le résultat est démontré. □

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le Théorème 2.4.1.

Démonstration du Théorème 2.4.1. Pour commencer, il est facile de remarque que le vecteur $X^{(-)}$ est bien défini. En effet, la matrice $U_p^{(-)}$ est bien posée car les variables aléatoires données par (2.10) sont bien définies : l'inverse généralisé de la fonction de répartition existe toujours. Pour plus de précisions, voir Devroye (1986). Ainsi, pour tout $i, j = 1, 2, \ldots, d$, on a successivement

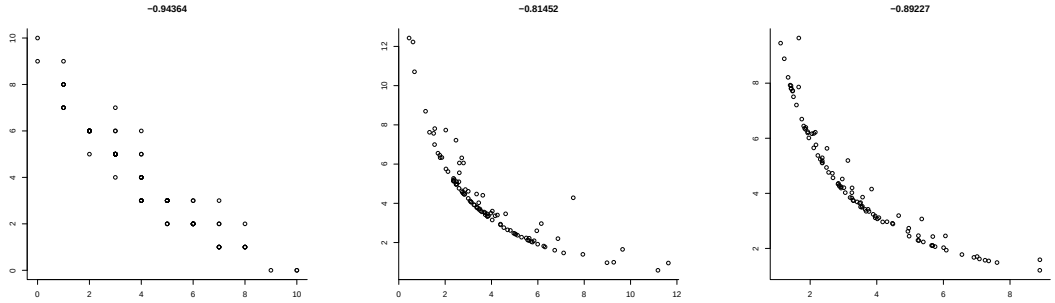
$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(X_i^{(-)}, X_j^{(-)}\right) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{\ell=1}^d U_{p;i\ell}^{(-)}, \sum_{k=1}^d U_{p;jk}^{(-)}\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^d \sum_{k=1}^d \mathrm{Cov}\left(U_{p;i\ell}^{(-)}, U_{p;jk}^{(-)}\right) \\
&= \sum_{\ell\neq i} \sum_{k\neq j} \mathrm{Cov}\left(U_{p;i\ell}^{(-)}, U_{p;jk}^{(-)}\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

En effet, $\mathrm{Cov}\left(U_{p;ii}^{(-)}, U_{p;ik}^{(-)}\right) = 0$ et $\mathrm{Cov}\left(U_{p;i\ell}^{(-)}, U_{p;jj}^{(-)}\right) = 0$ par indépendance. De plus, la négativité des autres covariances est donnée par le Lemme 2.4.1. La preuve est donc complète. □

Bien que l'on puisse obtenir des observations de lois Tweedie univariées négativement corrélées grâce au résultat donné dans le Théorème 2.4.1, il nous est pour le moment impossible de connaître la loi jointe du vecteur $X^{(-)}$. Nous définissons alors cette dernière comme étant une loi Tweedie multivariée dont les lois marginales sont négativement corrélées et nous notons $X^{(-)} \sim \mathcal{T}w_d^{*p\,(-)}(m, \Lambda)$.

2.4.2 Résultats de simulations

Dans ce qui suit, nous allons présenter les résultats de simulation d'observations de $X^{(-)} \sim \mathcal{T}w_d^{*p\,(-)}(m, \Lambda)$, avec $d = 2$ et $p = 1, 2$ et $5/2$. Comme dit plus haut, notre seule certitude sera d'avoir des observations de deux lois Tweedie univariées négativement corrélées. Au vu des résultats présentés, il faut noter que le contrôle de la corrélation entre ces deux lois n'est pas possible. Pour garantir des observations suffisamment négativement corrélées, nous allons considérer Λ telle que $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 4.0$ et $\lambda_{12} = 3.9$. Quant au paramètre m, nous le fixons encore égal à $(1,1)^\top$. Les corrélations empiriques sont également encore notées au-dessus des différents graphiques. La Figure 2.6 rend compte des résultats.



(a) Poisson bivariée ($p = 1$)

(b) Gamma bivariée ($p = 2$)

(c) 1/3-stable bivariée ($p = 5/2$)

FIGURE 2.6 – 100 observations de trois lois Tweedie bivariées ($p = 1, p = 2, p = 5/2$) de lois marginales négativement corrélées

On remarque premièrement que les corrélations ne sont pas linéaires dans ces trois cas. Les observations s'appuient en effet sur une courbe décroissante qui n'est pas une droite. Cette courbe semble être la même pour toutes les valeurs de p. En effet, une régression entre les logarithmes des observations des composantes est donnée par le Tableau 2.2. Ce comportement diffère de celui que peut avoir une loi normale dont

	ordonnée à l'origine	coefficient directeur
$p = 2$	2.42	-0.93
$p = 3$	2.47	-0.93
$p = 3/2$	2.64	-1.12
$p = 5/2$	2.53	-1.00

TABLE 2.2 – Résultats de la régression linéaire entre le logarithme des observations de X_1 par rapport au logarithme des observations de X_2

les corrélations entre composantes sont négatives (voir Figure 2.7). Ceci provient sûrement du fait que les supports sont positifs et donc qu'une décroissance linéaire entre les deux variables ne semble pas possible. Le fait que les supports soient aussi infinis joue également un rôle dans ce comportement. Ensuite, nous remarquons que, malgré le fait que les deux lois marginales aient une dispersion égale, il semble que l'une soit plus dispersée que l'autre. Ainsi, les observations sont, en quelque sorte, contraintes de rester au-dessus de la courbe décroissante. Encore une fois, cela diffère d'avec le cas gaussien. Nous n'avons, pour le moment, aucune explication quant à ce comportement.

2.5 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons construit un vecteur aléatoire Tweedie, noté $\mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$, dont les lois marginales sont des lois Tweedie univariées $\mathcal{T}w^{*p}(m_i, \lambda_{ii})$ et sont corrélées positivement, avec une certaine restriction donnée par le Corollaire 2.2.1. Comme nous l'avons vu, les propriétés de stabilité par addition et d'échelle, lorsque

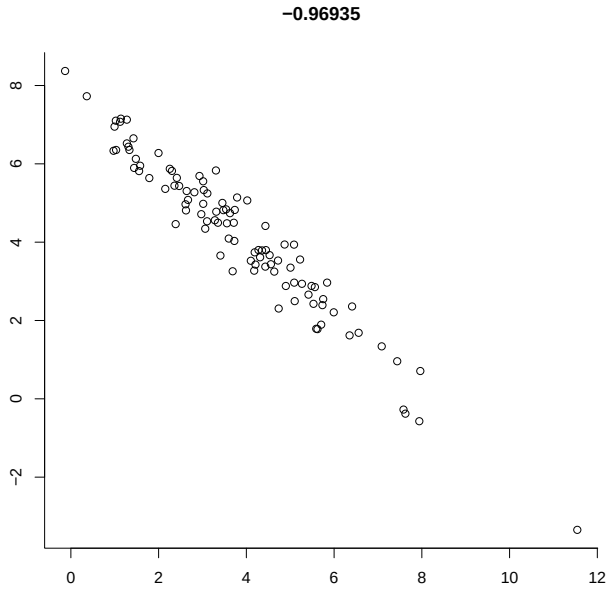


FIGURE 2.7 – 100 observations d'une loi gaussienne bivariée ($p = 0$) négativement corrélée

l'on considère la bonne transformation pour obtenir un modèle reproductif, sont vérifiées. Nous avons également la possibilité de simuler des observations de ces vecteurs aléatoires, et les résultats sont satisfaisants. De plus, nous avons mis en lumière le fait de pouvoir simuler des lois Tweedie négativement corrélées. Bien que nous ne puissions pas contrôler la corrélation entre les lois marginales et que la loi jointe reste inconnue, les comportements de ces lois lorsque la corrélation est proche de -1 s'avèrent être intéressants et assez loin de ceux de la loi normale multivariée. Ces résultats peuvent nous amener à nous poser plusieurs questions et à envisager plusieurs perspectives, dont voici une liste non exhaustive.

- Si $X \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$ tel que $X = (X_1, X_2)^\top$, où X_1 et X_2 sont chacun des vecteurs aléatoires Tweedie de dimensions d_1 et d_2, que peut-on dire de $\mathbb{E}[X_1|X_2]$?
- Peut-on trouver, à l'instar du vecteur gaussien, une opération entre les lois marginales suffisamment stable ?
- A-t-on, comme dans le cas univarié, une convergence de tout modèle de dispersion exponentielle multivarié vers un vecteur aléatoire Tweedie ?
- Quelle est la loi du vecteur aléatoire $X^{(-)}$ défini dans le Théorème 2.4.1 ?
- Pourquoi la dispersion ne semble-t-elle pas équilibrée entre les lois marginales du vecteur aléatoire $X^{(-)}$ lorsque la corrélation est proche de -1, alors que le paramètre de dispersion de chacune de ces lois est le même ?
- Enfin, d'un point de vue strictement numérique, quelles améliorations et optimisations pouvons-nous apporter pour présenter un package `R` permettant la simulation des vecteurs aléatoires Tweedie ?

3

Modèles Tweedie stables multiples et fonctions variance généralisée produits de puissances des composantes du vecteur moyen

Résumé

Nous introduisons une famille de modèles multivariés appelés modèles Tweedie stables multiples (TSM). Ces modèles TSM sont constitués d'une première composante Tweedie univariée dont le domaine est positif, les autres composantes étant également des lois Tweedie, indépendantes sachant la première, et dont le paramètre de dispersion est égal à une observation de celle-ci. Leur variance généralisée, qui est un produit de puissances des composantes du vecteur moyen, est estimée par une méthode plug-in classique ainsi que par une approche non biaisée et de variance uniformément minimale. Cette seconde approche est obtenue grâce aux mesures de Lévy modifiées des modèles TSM. Nous concluons en discutant de la construction de processus stochastiques émanant de ces modèles.

Sommaire

3.1 Introduction 38
3.2 Modèles Tweedie stables multiples 39
3.2.1 Définition et exemples 39
3.2.2 fonctions variance généralisée et équation de Monge-Ampère 41
3.3 Estimation de la variance généralisée 45
3.3.1 Deux approches d'estimation 45
3.3.2 Résultats de simulations 48
3.4 Lois multiples stables Tweedie et applications aux processus stochastiques 49
3.4.1 Définition et propriétés 49
3.4.2 Processus stochastiques de type gaussien-Tweedie 51
3.5 Conclusions et perspectives 51

3.1 Introduction

À l'instar du chapitre précédent, nous introduisons une extension multivariée des lois Tweedie. L'approche que nous présentons dans ce chapitre est cependant bien différente. Les modèles Tweedie stables multiples (TSM) sont en effet constitués d'une première composante Tweedie univariée ayant un support positif (nous considérerons donc $p \geq 1$) et les autres composantes, indépendantes sachant la première, sont des lois Tweedie univariées dons le paramètre de dispersion est donné par une observation de la première composante. Les résultats de ce chapitre sont tirés de l'article Cuenin *et al.* (2016a).

Tout comme la matrice de variance-covariance, la variance généralisée, définie en considérant le déterminant de cette dernière, est un moyen de donner une mesure de dispersion dans une analyse statistique multivariée. Les méthodes d'inférence sur ce paramètre ont été introduites par Wilks (1932) pour une population gaussienne multivariée. Elles ont depuis trouvé leur utilité dans d'autres nombreux domaines d'application. On peut par exemple citer Arvanitis et Afonja (1971) qui ont utilisé ces méthodes en théorie des sondages stratifiés multivariés ou Jafari (2012) qui a proposé de considérer le rapport des variances généralisées de deux populations gaussiennes indépendantes, puis corrélées. Une autre application est l'emploi de la variance généralisée en contrôle qualité pour la détection d'observations hors-contrôle. On peut se référer à Alfaro et Ortega (2012) pour un cas non gaussien.

Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque l'on se place dans une famille exponentielle naturelle, la variance généralisée peut s'exprimer en fonction du paramètre de moyenne. On l'appelle alors fonction variance généralisée. Dans Boubacar Maïnassara et Kokonendji (2014), les auteurs ont ainsi prouvé que les fonctions variance généralisée des modèles Tweedie stables normaux (TSN) sont de la forme $m \mapsto m_1^q$, où $m = (m_1, m_2, \ldots, m_d)^\top$ est le vecteur moyen de la famille exponentielle naturelle générée par un modèle TSN donné. Ils ont également donné deux méthodes d'estimation de la variance généralisée. Une caractérisation de ces modèles par des polynômes orthogonaux a également été donnée par Kokonendji *et al.* (2015). Enfin, de récents travaux de Louati *et al.* (2015) ont permis de donner les mesures de Lévy des lois normales α-stables, qui sont des cas particuliers des TSN lorsque $p > 2$. Notons que les modèles TSM sont une généralisation des modèles TSN. Ces derniers sont en effet constitués, comme les modèles TSM, d'une première composante Tweedie mais les composantes restantes sont gaussiennes, indépendantes sachant la première composante, dont la variance est donnée par une observation de celle-ci. La flexibilité de ces modèles TSN n'est plus à démontrer. Outre les aspects théoriques donnés par Boubacar Maïnassara et Kokonendji (2014), la loi du vecteur aléatoire privé de la première composante, de dimension $d - 1$ lorsque cette dernière est inverse gaussienne ($p = 3$), appelées normal inverse gaussienne, a beaucoup été étudiée pour modéliser des processus à volatilité stochastique. On peut par exemple citer Barndorff-Nielsen (1997) et Barndorff-Nielsen (1998). La loi normale inverse gaussienne est également utile dans la modélisation des processus à queue lourde (voir Ølgård *et al.* (2005), par exemple). Une approche similaire a été donnée par Madan et Seneta (1990) lorsque la première composante, toujours non observée, est de loi

gamma ($p = 2$).

Dans ce chapitre, nous allons introduire les modèles TSM et en donner plusieurs propriétés. Dans la Section 3.2, nous montrerons que leurs fonctions variance généralisée admettent une écriture de la forme

$$m \mapsto m_1^{q_1} m_2^{q_2} \dots m_d^{q_d}. \tag{3.1}$$

En généralisant ce qui a déjà été fait pour les modèles TSN, nous donnerons également la forme des mesures de Lévy modifiées de chaque modèle TSM. Cela nous conduira alors à donner deux approches d'estimation de la variance généralisée : l'une, classique, se basera sur une méthode plug-in et l'autre sur une approche non biaisée et uniformément de variance minimale. Ces deux méthodes seront explorées dans la Section 3.3 et une illustration numérique sera donnée. Nous allons également donner les détails, dans la Section 3.4, d'une approche qui permettra de ne considérer que les lois jointes des $d-1$ dernières composantes sachant la première. Il s'agira ici de donner une extension aux travaux de Barndorff-Nielsen (1997), Barndorff-Nielsen (1998) et Madan et Seneta (1990). Nous verrons que cela ouvre des possibilités dans la modélisation de processus financiers.

3.2 Modèles Tweedie stables multiples

Dans cette section, nous introduisons les modèles TSM, d'après ce qui a été suggéré par (Boubacar Maïnassara et Kokonendji, 2014, Sec. 5). Nous donnons ensuite leurs fonctions variance généralisée ainsi que leurs mesures de Lévy modifiées.

3.2.1 Définition et exemples

On se place dans la FEN $\mathrm{F}_{p,t} = \mathrm{F}(\nu_{p,t})$, avec $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)^\top$ tel que $p_1 \geq 1$ et $t > 0$, et où

$$\nu_{p,t}(\mathrm{d}x) = \mu_{p_1,t}(\mathrm{d}x_1) \prod_{j=2}^{d} \mu_{p_j,x_1}(\mathrm{d}x_j), \tag{3.2}$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^\top$ et $\mu_{p_1,t}$, μ_{p_j,x_1} définies comme dans le Chapitre 1, Section 1.3. La fonction génératrice des cumulants de $\nu_{p,t}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\kappa_{\nu_{p,t}}(\theta) &= \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\theta^\top x) \nu_{p,t}(\mathrm{d}x) \\
&= \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\theta^\top x) \mu_{p_1,t}(\mathrm{d}x_1) \prod_{j=2}^{d} \mu_{p_j,x_1}(\mathrm{d}x_j) \\
&= \ln \int_{\mathbb{R}} \exp(\theta_1 x_1) \prod_{j=2}^{d} \exp\left[x_1 \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right] \mu_{p_j,t}(\mathrm{d}x_1) \\
&= \ln L^t_{\mu_{p_1}} \left(\theta_1 + \sum_{j=2}^{d} \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right) \\
&= t\kappa_{\mu_{p_1}} \left(\theta_1 + \sum_{j=2}^{d} \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right),
\end{aligned}$$

avec $\theta \in \Theta_{\nu_{p,t}} = \left\{\theta \in \mathbb{R} \times \Theta_{\mu_{p_2}} \times \Theta_{\mu_{p_3}} \times \cdots \times \Theta_{\mu_{p_d}},\ [\theta_1 + \sum_{j=2}^{d} \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j)] \in \Theta_{\mu_{p_1}}\right\}$

Outre le fait que l'on a écarté les cas où $p_1 \leq 0$, car les lois correspondantes ne sont pas à support positif, il faut aussi prendre garde aux cas où des observations de zéros sont possibles pour la première composante ($1 \leq p \leq 2$), le paramètre de dispersion des lois Tweedie étant positif. Ainsi, si une observation d'un zéro intervient, le modèle TSM correspondant est dégénéré et $\nu_{p,t}(\mathrm{d}x) = \delta_0(\mathrm{d}x)$. Nous mettons aussi de côté les lois extrême-stables ($p < 0$) qui n'ont pas d'intérêt applicatif. Les FENs générées par ces lois ne sont également pas *steep*, ce qui peut poser problème pour l'établissement de la fonction variance à tous les points de leur domaine de moyenne. Enfin, remarquons que dans Cuenin *et al.* (2016a), la construction des modèles TSM implique de pouvoir permuter la première composante avec une autre.

L'expression (3.2) permet de choisir p et d'obtenir plusieurs exemples de modèles TSM. Considérons les deux exemples suivants :

- on peut poser $p = (p_1, p_1, \ldots, p_1)^\top$ tel que $p_1 \geq 1$. On obtient alors une nouvelle famille de lois Tweedie multivariées appelées lois Tweedie multiples, dans le sens où, comme dans le chapitre précédent, toutes les lois marginales sont des lois Tweedie dont le paramètre de puissance p_1 est le même pour chacune d'entre elles (voir Tableau 3.1) ;

- dans la continuité des modèles TSN de Boubacar Maïnassara et Kokonendji (2014), on peut également poser $p = (p_1, p_2, \ldots, p_2)^\top$ avec $p_1 \geq 1$ et $p_2 \in \{0\} \cup [1, +\infty[$. Cette classe de modèles est donnée dans le Tableau 3.2. On retrouve les modèles TSN dans le cas particulier où $p_2 = 0$. Un autre exemple peut être considéré : les modèles Tweedie stables Poisson (TSP) lorsque $p_2 = 1$ (voir Tableau 3.3).

Bien d'autres combinaisons peuvent être imaginées. Dès lors, les modèles TSM peuvent s'avérer être de forts et flexibles outils pour modéliser un grand nombre de problèmes statistiques.

Loi	p_1	Support
Poisson multiple	$p_1 = 1$	$\mathbb{N}^d$
Poisson-composé multiple	$1 < p_1 < 2$	$[0, +\infty[^d$
Gamma décentrée multiple	$p_1 = 3/2$	$[0, +\infty[^d$
Gamma multiple	$p_1 = 2$	$]0, +\infty[^d$
Positive stable multiple	$p_1 > 2$	$]0, +\infty[^d$
Inverse gaussienne multiple	$p_1 = 3$	$]0, +\infty[^d$

TABLE 3.1 – Quelques modèles TSM sur $\mathbb{R}^d$ avec $p = (p_1, \ldots, p_1)^\top$

Lois	p_2	Support
Tweedie stables normal (TSN)	$p_2 = 0$	$\mathrm{S}_{p_1} \times \mathbb{R}^{d-1}$
Tweedie stables Poisson	$p_2 = 1$	$\mathrm{S}_{p_1} \times \mathbb{N}^{d-1}$
Tweedie stables Poisson-composé	$1 < p_2 < 2$	$\mathrm{S}_{p_1} \times [0, +\infty[^{d-1}$
Tweedie stables gamma décentrée	$p_2 = 3/2$	$\mathrm{S}_{p_1} \times [0, +\infty[^{d-1}$
Tweedie stables gamma	$p_2 = 2$	$\mathrm{S}_{p_1} \times]0, +\infty[^{d-1}$
Tweedie stables positive	$p_2 > 2$	$\mathrm{S}_{p_1} \times]0, +\infty[^{d-1}$
Tweedie stables inverse gaussienne	$p_2 = 3$	$\mathrm{S}_{p_1} \times]0, +\infty[^{d-1}$

TABLE 3.2 – Quelques modèles TSM sur $\mathbb{R}^d$ avec $p = (p_1, p_2 \ldots, p_2)^\top$ tel que $p_1 \geq 1$ et où S_{p_1} est le support de la loi Tweedie de paramètre p_1

Loi	p_1	Support
Poisson multiple	$p_1 = 1$	$\mathbb{N}^d$
Poisson Poisson composé	$1 < p_1 < 2$	$[0, +\infty[\times \mathbb{N}^{d-1}$
Gamma décentrée Poisson	$p_1 = 3/2$	$[0, +\infty[\times \mathbb{N}^{d-1}$
Gamma Poisson	$p_1 = 2$	$]0, +\infty[\times \mathbb{N}^{d-1}$
Positive stable Poisson	$p_1 > 2$	$]0, +\infty[\times \mathbb{N}^{d-1}$
Inverse gaussienne Poisson	$p_1 = 3$	$]0, +\infty[\times \mathbb{N}^{d-1}$

TABLE 3.3 – Modèles Tweedie stables Possion sur $\mathbb{R}^d$ avec $p = (p_1, 1 \ldots, 1)^\top$

3.2.2 fonctions variance généralisée et équation de Monge-Ampère

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux fonctions variance et de variance généralisée des modèles TSM ainsi qu'à leurs mesures de Lévy modifiées.

Théorème 3.2.1 (Cuenin *et al.* (2016a)). *Soient $t > 0$, p tel que $p_1 \geq 1$ et $p_j \in \{0\} \cup [1, +\infty[$, pour tout $j > 1$, et considérons la FEN $\mathrm{F}_{p,t} = \mathrm{F}(\nu_{p,t})$ générée par une loi TSM. Alors sa fonction variance généralisée est donnée par*

$$\det V_{\mathrm{F}_{p,t}}(m) = t^{1-p_1} m_1^{d-1+p_1-\sum_{j=2}^d p_j} \prod_{j=2}^d m_j^{p_j},$$

pour tout $m = (m_1, m_2 \ldots, m_d)^\top \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_{p,t}} := \nabla \kappa_{\nu_{p,t}}(\Theta_{\nu_{p,t}})$.

On remarque qu'en considérant $q = (q_1, q_2, \ldots, q_d)^\top$ tel que $q_1 = d - 1 + p_1 - \sum_{j=2}^d p_j$ et $q_j = p_j$ pour $j > 1$, on obtient la forme décrite par l'équation (3.1). Dès lors, on peut se poser la question inverse : en considérant une fonction variance généralisée de la forme (3.1), a-t-on la bonne FEN sous-jacente ? Ce résultat s'avère exact pour les modèles TSM, lorsque l'on restreint la famille de NEFs à laquelle ils appartiennent et sera démontré dans le chapitre suivant.

Le Théorème 3.2.1 est une conséquence de l'écriture de la fonction variance de la FEN $\mathrm{F}_{p,t}$ qui est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.2.2 (Cuenin *et al.* (2016a)). *Soient $t > 0$, p tel que $p_1 \geq 1$ et $p_j \in \{0\} \cup [1, +\infty[$, pour tout $j > 1$, et considérons la FEN $\mathrm{F}_{p,t} = \mathrm{F}(\nu_{p,t})$ générée par une loi TSM. Alors sa fonction variance est donnée par*

$$V_{\mathrm{F}_{p,t}}(m) = t^{1-p_1} m_1^{p_1-2} m m^\top + \mathrm{diag}(0, m_2^{p_2} m_1^{1-p_2}, m_3^{p_3} m_1^{1-p_3} \ldots, m_d^{p_d} m_1^{1-p_d})$$

pour tout $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_{p,t}}$.

Avant de prouver les théorèmes précédents, considérons le résultat bien connu suivant.

Lemme 3.2.1. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ trois fonctions deux fois différentiables telles que $h = f \circ g$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\nabla h(x) = f'(g(x)) \nabla g(x) \text{ et } \nabla^2 h(x) = f''(g(x)) \nabla g(x) [\nabla g(x)]^\top + f'(g(x)) \nabla^2 g(x).$$

Démonstration du Théorème 3.2.2. Premièrement, fixons $g(\theta) = \theta_1 + \sum_{j=2}^d \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j)$. Alors

$$\nabla g(\theta) = \left(1, \kappa'_{\mu_{p_2}}(\theta_2), \kappa'_{\mu_{p_3}}(\theta_3), \ldots, \kappa'_{\mu_{p_d}}(\theta_d)\right)^\top$$

et

$$\nabla^2 g(\theta) = \mathrm{diag}\left(0, \kappa''_{\mu_{p_2}}(\theta_2), \kappa''_{\mu_{p_3}}(\theta_3), \ldots, \kappa''_{\mu_{p_d}}(\theta_d)\right).$$

On rappelle que $m = \nabla \kappa_{\nu_{p,t}}(\theta)$ qui est égal à $t\kappa'_{\mu_{p_1}}(g(\theta)) \nabla g(\theta)$ d'après le Lemme 3.2.1. Il s'ensuit que $m_j = \kappa'_{\mu_{p_j,}}(\theta_j) m_1$, pour tout $j \geq 2$, et donc $\theta_j = \psi_{\mu_{p_j}}(m_j/m_1)$. De plus, comme $m_1 = t\kappa'_{\mu_{p_1}}\left(\theta_1 + \sum_{j=2}^d \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right)$, alors

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \psi_{\mu_{p_1}}\left(\frac{m_1}{t}\right) - \sum_{j=2}^d \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \\ &= \psi_{\mu_{p_1}}\left(\frac{m_1}{t}\right) - \sum_{j=2}^d \kappa_{\mu_{p_j}}\left(\psi_{\mu_{p_j}}\left(\frac{m_j}{m_1}\right)\right), \end{aligned}$$

et donc $g(\theta) = \psi_{\mu_{p_1}}(m_1/t)$. Ainsi

$$\begin{aligned} m &= t\kappa'_{\mu_{p_1}}(g(\theta)) \nabla g(\theta) \\ &= m_1 \nabla g(\theta). \end{aligned}$$

Remarquons également que $t\kappa''_{\mu_{p_1}}(g(\theta)) = t^{1-p_1} m_1^{p_1}$, ainsi que $\kappa''_{\mu_{p_j}}(\theta_j) = (m_j/m_1)^{p_j}$ pour tout $j \geq 2$ et donc $\nabla^2 g(\theta) = \mathrm{diag}(0, m_1^{-p_2} m_2^{p_2}, m_1^{-p_3} m_3^{p_3}, \ldots, m_1^{-p_d} m_d^{p_d})$. Finalement :

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{F}_{p,t}}(m) &= \nabla^2 \kappa_{\nu_{p,t}}(\theta) \\ &= [t\kappa_{\mu_{p_1}}(g(\theta))]'' \\ &= t\kappa''_{\mu_{p_1}}(g(\theta)) \nabla g(\theta) [\nabla g(\theta)]^\top + t\kappa'_{\mu_{p_1}}(g(\theta)) \nabla^2 g(\theta) \\ &= t^{1-p_1} m_1^{p_1} (m_1^{-1} m)(m_1^{-1} m)^\top \\ &\quad + m_1 \mathrm{diag}(0, m_1^{-p_2} m_2^{p_2}, m_1^{-p_3} m_3^{p_3}, \ldots, m_1^{-p_d} m_d^{p_d}) \\ &= t^{1-p_1} m_1^{p_1-2} m m^\top + \mathrm{diag}(0, m_1^{1-p_2} m_2^{p_2}, m_1^{1-p_3} m_3^{p_3}, \ldots, m_1^{1-p_d} m_d^{p_d}), \end{aligned}$$

et la preuve est complète. □

On peut maintenant prouver le Théorème 3.2.1 en utilisant le résultat de calcul de déterminant suivant (voir Muir (1960) pour une démonstration).

Lemme 3.2.2. *Soient A une matrice carrée d'odre d à coefficients réels et a, b deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$. Considérons aussi $\gamma \neq 0$. Alors*

$$\det \begin{pmatrix} \gamma & b^\top \\ a & A \end{pmatrix} = \gamma \det(A - \gamma^{-1} a b^\top).$$

Démonstration du Théorème 3.2.1. Il s'agit d'une conséquence directe du Lemme 3.2.2. En effet, en posant $\gamma = t^{1-p_1} m_1^{p_1}$, $a = b = t^{1-p_1} m_1^{p_1-1} (m_2, m_3, \ldots, m_d)^\top$ et

$$\begin{aligned} A &= t^{1-p_1} m_1^{p_1-2} (m_2, m_3, \ldots, m_d)^\top (m_2, m_3, \ldots, m_d) \\ &\quad + \mathrm{diag}(m_1^{1-p_2} m_2^{p_2}, \ldots, m_1^{1-p_d} m_k^{p_d}) \\ &= \gamma^{-1} a a^\top + \mathrm{diag}(m_1^{1-p_2} m_2^{p_2}, m_1^{1-p_3} m_3^{p_3}, \ldots, m_1^{1-p_d} m_d^{p_d}), \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \det V_{\mathrm{F}_{p,t}}(m) &= \gamma \det \mathrm{diag}(m_1^{1-p_2} m_2^{p_2}, m_1^{1-p_3} m_3^{p_3}, \ldots, m_1^{1-p_d} m_d^{p_d}) \\ &= t^{1-p_1} m_1^{d-1+p_1-p_2-\cdots-p_k} m_2^{p_2} \cdots m_d^{p_d}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Nous allons maintenant introduire la mesure de Lévy modifiée d'un modèle TSM donné. Nous avons vu dans le Théorème 1.2.1 (voir Hassairi (1999)) que si une FEN est générée par une mesure indéfiniment divisible, alors il existe une mesure, notée ici $\rho(\nu_{p,t})$, satisfaisant

$$\ln \det \nabla^2 \kappa_{\nu_{p,t}}(\theta) = \kappa_{\rho(\nu_{p,t})}(\theta), \ \forall \theta \in \Theta_{\nu_{p,t}}.$$

Comme t est strictement positif, la FEN $\mathrm{F}_{\nu_{p,t}}$ est indéfiniment divisible et l'on peut utiliser ce dernier résultat pour calculer $\rho(\nu_{p,t})$.

Théorème 3.2.3 (Cuenin *et al.* (2016a))**.** *Pour $t > 0$ et $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)^\top$ tel que $p_1 \geq 1$ et $p_j \in \{0\} \cup [1, +\infty[$ pour tout $j \geq 2$, considérons la FEN $\mathrm{F}_{p,t} = \mathrm{F}(\nu_{p,t})$ générée par une loi TSM. Alors*

$$\rho(\nu_{p,t})(\mathrm{d}x) = \begin{cases} t^d \delta_d(\mathrm{d}x_1) \prod_{j=2}^d \lambda_{p_j,d}(\mathrm{d}x_j) & si \quad p_1 = 1 \\ t^d (p_1 - 1)^{-\eta_d(p_1)} \mu_{2,\eta_d(p_1)}(\mathrm{d}x_1) \prod_{j=2}^d \lambda_{p_j,x_1}(\mathrm{d}x_j) & si \quad p_1 > 1, \end{cases}$$

avec

$$\lambda_{p,\ell}(\mathrm{d}x) = \begin{cases} \mu_{p,\ell}(\mathrm{d}x) & si \quad p = 0 \\ \mu_{p,\ell} * \delta_1(\mathrm{d}x) & si \quad p = 1 \\ (p-1)^{-\eta_1(p)} \mu_{p,\ell} * \mu_{2,\eta_1(p)}(\mathrm{d}x) & si \quad p > 1, \end{cases}$$

et $\eta_\ell(p) = (\ell - 1 + p)/(p - 1)$.

Démonstration. Commençons par fixer $p_1 = 1$ et $p_j \in \{0\} \cup [1, +\infty[$ pour tout $j \geq 2$. Comme $m = \nabla \kappa_{\nu_{p,t}}(\theta)$, le Théorème 3.2.1 implique que

$$\begin{aligned} \det \nabla^2 \kappa_{\nu_{p,t}}(\theta) &= t^d \left\{ \exp\left[\theta_1 + \sum_{j=2}^{d} \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \right] \right\}^d \prod_{j=2}^{d} \left[\kappa'_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \right]^{p_j} \\ &= t^d \exp(d\theta_1) \prod_{j=2}^{d} \exp\left[d\kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \right] \left[\kappa'_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \right]^{p_j}. \end{aligned}$$

En passant au logarithme, on obtient

$$\kappa_{\rho(\nu_{p,t})}(\theta) = \ln t^d + d\theta_1 + \sum_{j=2}^{d} \kappa_{\mu_{p_j,d}}(\theta_j) + \sum_{j=2}^{d} \ln \left[\kappa'_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \right]^{p_j}. \tag{3.3}$$

Ainsi, pour tout $j \geq 2$, on peut remarque que

- $\ln \left[\kappa'_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \right]^{p_j} = 0$, pour $p_j = 0$;
- $\ln \left[\kappa'_{\mu_{p_j,1}}(\theta_j) \right]^{p_j} = \theta_j$, pour $p_j = 1$, qui est la fonction génératrice des cumulants d'une mesure de Dirac δ_1 ;
- quant à $p_j > 1$, il vient

$$\begin{aligned} \ln \left[\kappa'_{\mu_{p_j,1}}(\theta_j) \right]^{p_j} &= \ln \left[\{(1-p_j)\theta_j\}^{1/(1-p_j)} \right]^{p_j} \\ &= \ln \left[(p_j - 1)(-\theta_j) \right]^{-p_j/(p_j-1)} \\ &= -\frac{p_j}{p_j - 1} \ln(p_j - 1) - \frac{p_j}{p_j - 1} \ln(-\theta_j) \\ &= -\eta_1(p_j) \ln(p_j - 1) - \eta_1(p_j) \ln(-\theta_j), \end{aligned}$$

  qui est la fonction génératrice des cumulants de la mesure $(p_j - 1)^{-\eta_1(p_j)} \mu_{2,\eta_1(p_j)}(\mathrm{d}x_j)$.

En écrivant

$$\lambda_{p_j,d} = \begin{cases} \mu_{p_j,d}(x_j) & \text{si} \quad p_j = 0 \\ \mu_{p_j,d} * \delta_1(\mathrm{d}x_j) & \text{si} \quad p_j = 1 \\ (p_j - 1)^{-\eta_1(p_j)} \mu_{p_j,d} * \mu_{2,\eta_1(p_j)}(\mathrm{d}x_j) & \text{si} \quad p_j > 1, \end{cases}$$

la mesure de Lévy modifiée est finalement donnée, pour $p_1 = 1$, par

$$\rho(\nu_{p,t})(\mathrm{d}x) = t^d \delta_d(\mathrm{d}x_1) \prod_{j=2}^{d} \lambda_{p_j,d}(\mathrm{d}x_j).$$

Maintenant, considérons $p_1 > 1$. Le Théorème 3.2.1 implique donc

$$\begin{aligned}\det \nabla^2 \kappa_{\nu_{p,t}}(\theta) &= t^d \left[(1-p_1)\left(\theta_1 + \sum_{j=2}^d \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right)\right]^{(d-1+p_1)/(1-p_1)} \prod_{j=2}^d \left[\kappa'_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right]^{p_j} \\ &= t^d \left[(p_1-1)\left(-\theta_1 - \sum_{j=2}^d \kappa_{\mu_{p_j,1}}(\theta_j)\right)\right]^{-(d-1+p_1)/(p_1-1)} \\ &\quad \prod_{j=2}^d \left[\kappa'_{\mu_{p_j,1}}(\theta_j)\right]^{p_j}.\end{aligned}$$

En passant au logarithme, on obtient

$$\begin{aligned}\kappa_{\rho(\nu_{p,t})}(\theta) &= \ln t^d - \frac{d-1+p_1}{p_1-1}\ln(p_1-1) - \frac{d-1+p_1}{p_1-1}\ln\left(-\theta_1 - \sum_{j=2}^d \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right) \\ &\quad + \sum_{j=2}^d \ln\left[\kappa'_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\right]^{p_j}. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

On peut voir que $-(d-1+p_1)/(p_1-1)\ln\left(-\theta_1 - \sum_{j=2}^d \kappa_{\mu_{p_j,1}}(\theta_j)\right)$ est la fonction génératrice des cumulants d'une loi TSM particulière dont la première composante est de loi gamma et dont la mesure de densité est $\mu_{2,\eta_d(p_1)}(\mathrm{d}x_1)\prod_{j=2}^d \mu_{p_j,x_1}(\mathrm{d}x_j)$. De plus, la dernière partie de (3.4) se comporte comme la dernière partie de (3.3). Finalement, la mesure de Lévy modifiée s'écrit

$$\rho(\nu_{p,t})(\mathrm{d}x) = t^d(p_1-1)^{-\eta_d(p_1)}\mu_{2,\eta_d(p_1)}(\mathrm{d}x_1)\prod_{j=2}^d \lambda_{p_j,x_1}(\mathrm{d}x_j),$$

avec λ_{p_s,x_1} défini plus haut. La preuve est ainsi complète. □

3.3 Estimation de la variance généralisée

Nous nous intéressons à présent à l'estimation de la variance généralisée. Dans ce qui suit, nous considérons le n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top$, avec $X_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P(m, \mathrm{F}_{p,t})$, et $\overline{X}_n = 1/n\sum_{i=1}^n X_i = (\overline{X}_{n1}, \overline{X}_{n2}, \ldots, \overline{X}_{nd})^\top$ sa moyenne.

3.3.1 Deux approches d'estimation

Une première approche naturelle pour l'estimation de la variance généralisée est de considérer une estimation *plug-in*. Celle-ci est directement donnée par le Théorème 3.2.1 par :

$$T_{p,t} = \det V_{\mathrm{F}_{p,t}}(\overline{X}_n) = t^{1-p_1}(\overline{X}_{n1})^{d-1+p_1-\sum_{j=2}^d p_j}\prod_{j=2}^d (\overline{X}_{nj})^{p_j}. \qquad (3.5)$$

Il est évident que cet estimateur est consistant. Néanmoins, il n'est pas optimal. En effet, il est facile de se rendre compte qu'un biais existe.

Une approche plus efficiente est de considérer l'estimateur sans biais et uniformément de variance minimale (abrégé par son acronyme anglais UMVUE pour *Uniform Minimal Variance and Unbiased Estimator*). Cet estimateur a été développé ces dernières décennies dans le cadre des FENs dans plusieurs articles. On peut citer, par exemple, Pommeret (1998), Kokonendji et Pommeret (2001) et Kokonendji et Pommeret (2007). Le théorème suivant, qui est donné comme extension des travaux de Kokonendji et Seshadri (1996) est une base qui mène à l'UMVUE.

Théorème 3.3.1 (Kokonendji et Pommeret (2007))**.** *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathrm{F}(\mu)$ la FEN générée par μ. Alors pour tout entier $n > d$, il existe une mesure positive ν_n sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant les trois assertions suivantes :*

i. ν_n est la mesure image de

$$\frac{1}{(d+1)!}\left[\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{d+1}\end{pmatrix}\right]^2 \mu(\mathrm{d}x_1)\mu(\mathrm{d}x_2)\ldots\mu(\mathrm{d}x_{d+1})$$

par l'application $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \mapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_n$;

ii. sa transformée de Laplace est donnée par

$$L_{\nu_n}(\theta) = \det \nabla^2 \kappa_\mu(\theta)[L_\mu(\theta)]^n,$$

pour tout $\theta \in \Theta_\mu$;

iii. il existe une application $C_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que

$$C_n = \frac{\mathrm{d}\nu_n}{\mathrm{d}\mu^{*n}}.$$

L'estimateur UMVU est alors donné par

$$U_{p,t} = C_{n;p,t}(n\overline{X}_n), \tag{3.6}$$

où $C_{n;p,t}$ est définie comme dans le Théorème 3.3.1 avec $\mu = \nu_{p,t}$, $\nu_n = \rho(\nu_{p,t}) * \nu_{p,nt}$ et

$$C_{n;p,t} = \frac{\mathrm{d}\nu_{p,nt} * \rho(\nu_{p,t})}{\mathrm{d}\nu_{p,nt}}. \tag{3.7}$$

Le théorème suivant donne alors les valeurs de l'application $C_{n;p,t}$ suivant les valeurs de p.

Théorème 3.3.2. *Soient $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^k$. Considérons p tel que $p_1 \geq 1$ et $p_j \in \{0\} \cup [1, +\infty[$ pour tout $j \geq 2$. Alors (3.7) s'écrit*

$$C_{n;p,t}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1(x_1-1)\ldots(x_1-d+1)}{n^d}\displaystyle\prod_{j=2}^{d}\frac{\mu_{p_j,x_1-d} * \lambda_{p_j,d}(x_j)}{\mu_{p_j,x_1}(x_j)}, \ x_1 \geq d \\ si\ p_1 = 1 \\ t^d(p_1-1)^{-\eta_d(p_1)}\displaystyle\int_0^{x_1}\frac{\mu_{p_1,nt}(x_1-y_1)\mu_{2,\eta_d(p_1)}(y_1)}{\mu_{p_1,nt}(x_1)} \\ \times\displaystyle\prod_{j=2}^{d}\frac{\mu_{p_j,x_1-y_1} * \lambda_{p_j,y_1}(x_j)}{\mu_{p_j,x_1}(x_j)}\mathrm{d}y_1 \ si\ p_1 > 1, \end{cases}$$

avec, pour tout $p \in \{0\} \cup [1, +\infty[$, $y > 0$ *et* $\ell > 0$,

$$\frac{\mu_{p,y-\ell} * \lambda_{p,\ell}(x)}{\mu_{p,y}(x)} = \begin{cases} 1 & si \quad p = 0 \\ \frac{x}{y} & si \quad p = 1 \\ x^2 \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(y+2)} & si \quad p = 2 \\ (p-1)^{-\eta_1(p)} \frac{\mu_{p,y} * \mu_{2,\eta_1(p)}(x)}{\mu_{p,y}(x)} & si \quad p \in]1, +\infty[\backslash \{2\}. \end{cases}$$

Dans ce résultat, nous pouvons remarquer que $[\mu_{p_j,x_1-d} * \lambda_{p_j,d}(x_j)]/[\mu_{p_j,x_1}(x_j)]$ ne dépend pas de la valeur de d et que $[\mu_{p_j,x_1-y_1} * \lambda_{p_j,y_1}(x_j)]/[\mu_{p_j,x_1}(x_j)]$ ne dépend pas de la valeur de y_1. Cela implique que cet estimateur est facile à programmer en considérant un algorithme de calcul intégral efficace.

Démonstration du Théorème 3.3.1. Commençons par considérer $p_1 = 1$. D'après (3.7), on obtient

$$\begin{aligned} C_{n;p,t}(x) &= t^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu_{1,nt}(x_1 - y_1) \prod_{j=2}^d \mu_{p_j,x_1-y_1}(x_j - y_j) \lambda_{p_j,d}(y_j)}{\mu_{1,nt}(x_1) \prod_{j=2}^d \mu_{p_j,x_1}(x_j)} \mathrm{d}\delta_d(y_1) \mathrm{d}y_2 \ldots \mathrm{d}y_d \\ &= t^d \frac{\mu_{1,nt}(x_1 - d)}{\mu_{1,nt}(x_1)} \prod_{j=2}^d \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_{p_j,x_1-d}(x_j - y_j) \lambda_{p_j,d}(y_j)}{\mu_{p_j,x_1}(x_j)} \mathrm{d}y_j \\ &= t^d \frac{\mu_{1,nt}(x_1 - d)}{\mu_{1,nt}(x_1)} \prod_{j=2}^d \frac{\mu_{p_j,x_1-d} * \lambda_{p_j,d}(x_j)}{\mu_{p_j,d}(x_j)}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} t^d \frac{\mu_{1,nt}(x_1 - d)}{\mu_{1,nt}(x_1)} &= t^d \frac{(nt)^{x_1-d} \mathrm{e}^{-nt} x_1!}{(x_1 - d)!(nt)^{x_1} \mathrm{e}^{-nt}} \\ &= n^{-d} \frac{x_1(x_1 - 1) \ldots (x_1 - d + 1)(x_1 - d)!}{(x_1 - d)!} \\ &= \frac{x_1(x_1 - 1) \ldots (x_1 - d + 1)}{n^d}, \end{aligned}$$

ce qui est vrai pour $x_1 \geq d$. De plus, pour $p_1 > 1$, on a

$$\begin{aligned} C_{n;p,t}(x) &= t^d (p_1 - 1)^{-\eta_d(p_1)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mu_{p_1,nt(x_1-y_1)} \mu_{2,\eta_d(p_1)}(y_1)}{\mu_{p_1,nt}(x_1)} \\ &\quad \prod_{j=2}^d \frac{\mu_{p_j,x_1-y_1}(x_j - y_j) \lambda_{p_j,y_1}(y_j)}{\mu_{p_j,x_1}(x_j)} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \ldots \mathrm{d}y_d \\ &= t^d (p_1 - 1)^{-\eta_d(p_1)} \int_0^{x_1} \frac{\mu_{p_1,nt(x_1-y_1)} \mu_{2,\eta_d(p_1)}(y_1)}{\mu_{p_1,nt}(x_1)} \\ &\quad \prod_{j=2}^d \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_{p_j,x_1-y_1}(x_j - y_j) \lambda_{p_j,y_1}(y_j)}{\mu_{p_j,x_1}(x_j)} \mathrm{d}y_j \right) \mathrm{d}y_1 \\ &= t^d (p_1 - 1)^{-\eta_d(p_1)} \int_0^{x_1} \frac{\mu_{p_1,nt(x_1-y_1)} \mu_{2,\eta_d(p_1)}(y_1)}{\mu_{p_1,nt}(x_1)} \\ &\quad \prod_{j=2}^d \frac{\mu_{p_j,x_1-y_1} * \lambda_{p_j,y_1}(x_j)}{\mu_{p_j,x_1}(x_s)} \mathrm{d}y_1. \end{aligned}$$

Dans ces deux derniers cas, les estimateurs sont composés de la même partie, à paramétrisation près, avec un produit de convolution. On donne donc les détails lorsque $p_1 > 1$ et il est ensuite facile de traiter le cas où $p_1 = 1$. Ainsi, pour $p_s = 0$, on remarque que

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{p_j,x_1-y_1} * \lambda_{p_j,y_1}(x_j)}{\mu_{p_j,y_1}(x_j)} &= \frac{\mu_{p_j,x_1-y_1} * \mu_{p_j,y_1}(x_j)}{\mu_{p_j,y_1}(x_j)} \\ &= \frac{\mu_{p_j,x_1}}{\mu_{p_j,x_1}}(x_j) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ensuite, pour $p_j = 1$ on remarque que

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{p_j,x_1-y_1} * \lambda_{p_j,y_1}(x_j)}{\mu_{p_j,y_1}(x_j)} &= \frac{\mu_{1,x_1-y_1} * \mu_{1,y_1} * \delta_1(x_j)}{\mu_{1,x_1}(x_j)} \\ &= \frac{\mu_{1,x_1} * \delta_1(x_j)}{\mu_{1,x_1}(x_j)} \\ &= \frac{\mu_{1,x_1}(x_j - 1)}{\mu_{1,x_1}(x_j)} \\ &= \frac{x_j}{x_1}.\end{aligned}$$

Pour $p_j = 2$,

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{p_j,x_1-y_1} * \lambda_{p_j,y_1}(x_j)}{\mu_{p_j,y_1}(x_j)} &= \frac{\mu_{2,x_1-y_1} * \mu_{2,y_1} * \mu_{2,2}(x_j)}{\mu_{2,x_1}(x_j)} \\ &= \frac{\mu_{2,x_1+2}(x_j)}{\mu_{2,x_1}(x_j)} \\ &= x_j^2 \frac{\Gamma(x_1)}{\Gamma(x_1+2)}.\end{aligned}$$

Quant à $p_j > 1$, on n'obtient pas d'expression analytique. On peut néanmoins écrire

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{p_j,x_1-y_1} * \lambda_{p_j,y_1}(x_j)}{\mu_{p_j,y_1}(x_j)} &= (p_j - 1)^{-\eta_1(p_j)} \frac{\mu_{p_j,x_1-y_1} * \mu_{p_j,y_1} * \mu_{2,\eta_1(p_j)}(x_j)}{\mu_{p_j,x_1}(x_j)} \\ &= (p_j - 1)^{-\eta_1(p_j)} \frac{\mu_{p_j,x_1} * \mu_{2,\eta_1(p_j)}(x_j)}{\mu_{p_j,x_1}(x_j)},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

3.3.2 Résultats de simulations

Nous donnons ici une comparaison numérique des estimateurs $U_{p,t}$ et $T_{p,t}$. Pour cela, nous considérons 1000 réplications de deux n-échantillons de dimension $d = 2$ puis 4, de loi TSM telle que la première composante soit de loi gamma et les composantes restantes soient des lois de Poisson (voir Tableau 3.3) et avec

$n = d + 10, 25, 60, 100$ et 300. Les simulations ont été programmées sous `R` (`R` Development Core Team (2014)) et le Tableau 3.4 rend compte des résultats.

$m_1 = 0.5$	$d = 2$	$\det V_{\mathrm{F}_{p,t}} = 0.25$	$d = 4$	$\det V_{\mathrm{F}_{p,t}} = 0.0625$
n	$T_{p,1}$	$U_{p,1}$	$T_{p,1}$	$U_{p,1}$
$d + 10$	0.3878 (0.3793)	0.2493 (0.1489)	0.2175 (0.3701)	0.0659 (0.0318)
25	0.3156 (0.0791)	0.2519 (0.0477)	0.1236 (0.0474)	0.0603 (0.0104)
60	0.2653 (0.0261)	0.2407 (0.0214)	0.0835 (0.0082)	0.0607 (0.0041)
100	0.2666 (0.0169)	0.2513 (0.0148)	0.0757 (0.0039)	0.0623 (0.0025)
300	0.2526 (0.0046)	0.2477 (0.0045)	0.0659 (0.0009)	0.0616 (0.0008)

TABLE 3.4 – Quelques valeurs (et erreurs quadratiques moyennes) des estimateurs $T_{p,t}$ et $U_{p,t}$ pour $p = (2, 1)^\top$ et $(2, 1, 1, 1)^\top$ et $t = 1$

Nous remarquons que les simulations numériques montrent bien le fait que l'estimateur $U_{p,t}$ est meilleur que l'estimateur $T_{p,t}$. En effet, sur de petites tailles d'échantillons ($d+10$ et 25), on remarque l'absence de biais de $U_{p,t}$. Sur des tailles d'échantillons plus grandes, on s'aperçoit que les deux estimateurs sont convergents. Néanmoins, l'estimateur $U_{p,t}$ se distingue par une variance plus basse que celle de l'estimateur $T_{p,t}$, ce qui illustre son caractère de variance minimale.

3.4 Lois multiples stables Tweedie et applications aux processus stochastiques

Dans cette partie, nous allons nous inspirer des FENs TSM pour décrire complètement les loi multiples stables Tweedie. Ces lois peuvent être vues comme les lois jointes des $d - 1$ dernières composantes d'un vecteur TSM. Ainsi, la variable aléatoire régissant le paramètre de dispersion n'est plus observée. Nous exposerons le cas particulier où les dernières composantes sachant la première sont gaussiennes avant de donner le cas général. Nous montrerons qu'il est possible d'estimer les différents paramètres des différentes lois par une méthode des moments généralisée. Nous exposerons aussi le fait que ces lois peuvent se retrouver dans différents processus stochastiques, modélisant entre autres des séries financières. Ce travail s'inspire de cas particuliers qui ont été étudiés ces dernières années dans la littérature. On peut par exemple citer les travaux de Barndorff-Nielsen (1997), Barndorff-Nielsen (1998) et Madan et Seneta (1990) qui ont montré que les lois normal-inverse gaussiennes et les modèles à variance gamma (qui sont, en fait, des cas particuliers des lois multiples stables Tweedie, nous allons le voir plus bas) sont à queues lourdes ainsi qu'à variances aléatoires, des caractéristiques que l'on retrouve dans les séries financières.

3.4.1 Définition et propriétés

Pour commencer, considérons le vecteur aléatoire $Y = (V, X)^\top$ où V est une variable aléatoire de loi Tweedie de paramètre de puissance de la variance $p \geq 1$ et X un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^{d-1}$ dont on connaît la loi jointe sachant V. Notons que

si nous voulons garantir que la loi de X n'est pas dégénérée (i.e. que le support de V est strictement positif), nous pouvons nous restreindre à $p \geq 2$.

Nous examinons le cas où $X|V$ est un vecteur gaussien centré et de variance $V\Sigma$ où $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ est une matrice symétrique définie positive. La loi de V est alors une loi Tweedie additive d'espérance $\mathbb{E}[V] = 1$ et de variance $\mathrm{Var}(V) = \lambda^{1-p}$ avec $\lambda > 0$, c'est-à-dire $V \sim \mathcal{T}w^{*p}(\lambda^{-1}, \lambda)$ (voir Chapitre 1, Section 1.3). Ne pouvant pas donner de forme analytique à la densité de la loi de X, nous pouvons néanmoins calculer sa fonction génératrice des moments. Pour se faire, considérons la fonction génératrice des moments conditionnels de $X|V$ donnée par

$$s \in \mathbb{R}^d \mapsto L_{X|V}(s) := \exp\left(\frac{Vs^\top \Sigma s}{2}\right). \tag{3.8}$$

La fonction génératrice des cumulants de X est donnée par le calcul de l'espérance de $L_{X|V}$. On obtient

$$L_X(s) = \begin{cases} \left(1 - \frac{s^\top \Sigma s}{2\lambda}\right)^{-\lambda} & \text{si} \quad p = 2 \\ \exp\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\lambda^{1/(1-\alpha)}\left\{\left(1 + \frac{s^\top \Sigma s}{2(\alpha-1)\lambda^{1/(1-\alpha)}}\right)^{\alpha} - 1\right\}\right] & \text{si} \quad p > 2, \end{cases} \tag{3.9}$$

pour tout $s \in \mathbb{S}_p^d = \left\{s \in \mathbb{R}^d,\ s^\top \Sigma s < -2\psi_p(\lambda)\right\}$. On peut alors déduire les moments de X. En particulier, le second moment est donné par

$$\mathbb{E}XX^\top = \mathbb{E}\mathbb{E}\left[XX^\top|V\right] = \mathbb{E}V\Sigma = \Sigma. \tag{3.10}$$

Les moments d'ordres supérieurs sont, quant à eux, difficiles à obtenir. On peut néanmoins se rendre compte que $\mathbb{E}X_i^4 = 3\sigma_{ii}^4(1+\lambda^{1-p})$ pour $i = 2, \ldots, d$. Le kurtosis est alors égal à $3(1 + \lambda^{1-p})$ ce qui implique que les lois gaussiennes-Tweedie sont leptokurtiques. Notons que l'on retrouve exactement ce type de propriétés dans le modèle de variance gamma de Madan et Seneta (1990).

Ainsi, pour un n-échantillon $(X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)})^\top$ où $X^{(i)}$ est de loi gaussienne-Tweedie multivariée, l'estimateur de la matrice de variance-covariance est donné par

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X^{(k)}{X^{(k)}}^\top. \tag{3.11}$$

Pour l'estimation du paramètre λ, une méthode plug-in donne

$$\widehat{\lambda} = d^{-1}\left(\sum_{i=1}^{d}\left(3\widehat{\sigma}_{ii}^4\right)^{-1}\widehat{m}_4^{(i)} - k\right)^{1/(1-p)}, \tag{3.12}$$

où

$$\widehat{m}_4^{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k^{(i)}\right)^4.$$

Il s'agit d'estimateurs consistants, mais celui défini par (3.12) est non optimal et pourrait être amélioré en utilisant une autre technique d'estimation.

3.4.2 Processus stochastiques de type gaussien-Tweedie

Nous allons maintenant nous intéresser aux processus stochastiques de type gaussien-Tweedie (en dimension $d = 1$). Pour se faire, nous nous appuierons sur les lois gaussiennes-Tweedie introduites plus haut, sur les travaux de Barndorff-Nielsen (1997), Barndorff-Nielsen (1998) et Madan et Seneta (1990) ainsi que sur les détails donnés dans (Applebaum, 2009, Chap. 1) concernant les processus de Lévy. Avant tout, rappelons la notion de processus Tweedie donnée dans (Jørgensen, 1997, Chap. 4) : un processus Tweedie (additif) est une suite de variables aléatoires $(V_t)_{t\geq 0}$ telle que pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < +\infty$

- $V_0 = 0$;
- $\Delta V_i = V_{t_i} - V_{t_{i-1}} \sim \mathcal{T}w^{*p}(\xi, \lambda\Delta t_i)$ où $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ et $\xi = \lambda\tau_p(\theta)$.

La loi de V_t est alors donnée pour tout $t \geq 0$ par $\mathcal{T}w^{*p}(\xi, t\lambda)$. Si l'on considère de plus que les accroissements sont indépendants (i.e. $V_{t_2} - V_{t_1}, V_{t_3} - V_{t_2}, \ldots, V_{t_n} - V_{t_{n-1}}$ sont indépendants), c'est aussi un processus de Lévy. On peut alors définir les processus de type gaussien-Tweedie en considérant un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ dont le drift est nul et dont la variance est donnée par σ^2. Ainsi le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$X_t = B_{V_t}, \tag{3.13}$$

avec $(V_t)_{t\geq 0}$ un processus Tweedie, qui est aussi un processus de Lévy, est appelé *processus gaussien-Tweedie*. Il s'agit alors d'une extension des modèles TSN lorsque le paramètre t joue le rôle du temps. Le rôle du processus $(V_t)_{t\geq 0}$ est donc simplement un changement de temps d'un mouvement brownien. On l'appelle subordinateur, c'est-à-dire que c'est un processus de Lévy presque sûrement croissant. Les processus gaussien-Tweedie sont également des processus de Lévy. En effet, la proposition suivante, donnée dans Applebaum (2009) assure qu'un processus de Lévy dont le temps est changé par un subordinateur est encore un processus de Lévy.

Proposition 3.4.1 (Applebaum (2009))**.** *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy et $T = (T_t)_{t\geq 0}$ un subordinateur indépendant de X. Définissons le processus $Z = (Z_t)_{t\leq 0}$ tel que, pour tout $t \geq 0$,*

$$Z_t = X_{T_t}.$$

Alors, Z est un processus de Lévy.

3.5 Conclusions et perspectives

Nous avons introduit une famille de modèles TSM comme généralisation des modèles TSN. Nous avons pu obtenir leurs fonctions variance et fonction variance généralisée. Nous en avons déduit leurs mesures de Lévy modifiées et cela a mené à l'obtention d'un estimateur performant pour la variance généralisée, bien que des problèmes d'ordre numérique restent à résoudre. En nous intéressant à la théorie des processus stochastiques, nous avons pu introduire une idée de ce que serait un processus de type gaussien-Tweedie.

Il reste cependant plusieurs interrogations quant à ces modèles :

- une étude approfondie des processus de type gaussien-Tweedie doit être réalisée. De plus, une analyse en matière d'application à la finance ou à d'autres phénomènes doit être envisagée. La flexibilité des lois Tweedie n'étant plus à démontrer, une famille de processus telle que décrit plus haut pourra être appliquée à plusieurs problèmes de modélisation ;

- il en est de même pour les applications des modèles TSM. Le premier point à mettre en lumière est le fait que, dans une expérience réelle, la première composante ne peut être observée. À l'instar des processus qui en découlent, ces modèles pourront avoir des applications dans de nombreuses problématiques de modélisation statistique.

4

Sur la caractérisation des familles exponentielles naturelles par la fonction variance généralisée

Résumé

À travers l'exemple des familles TSN et TSM, nous étudions la caractérisation par la fonction variance généralisée et par la mesure de Lévy modifiée des familles exponentielles naturelles. Ces résultats de caractérisation sont fortement liés à des résultats d'unicité de solution d'un certain type d'équations de Monge-Ampère. En étudiant en détail ces équations, nous donnons également un premier résultat plus général concernant la caractérisation par la mesure de Lévy modifiée pour des FEN indéfiniment divisibles.

Sommaire

4.1 Introduction 54

4.2 Le cas des familles Tweedie stables multiples 56

4.2.1 Caractérisation par la mesure de Lévy modifiée 56

4.2.2 Caractérisation par la fonction variance généralisée 60

4.3 Le cas général : une histoire de conditions aux limites et le problème de Monge-Ampère à domaine non nécessairement borné 61

4.3.1 Retour sur le cas normal-Poisson 62

4.3.2 Retour sur le cas normal-gamma 64

4.3.3 Le cas général 65

4.4 Conclusions et perspectives 66

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à des problèmes de caractérisation par la fonction variance généralisée ainsi que par la mesure de Lévy modifiée. Comme nous l'avons vu précédemment, la fonction variance permet de caractériser la FEN sous-jacente. Obtenir le même résultat pour la fonction variance généralisée est loin d'être trivial et ce résultat n'est pas vrai en général. En effet, considérons les deux FENs suivantes sur $\mathbb{R}^2$ tirées de l'Exemple 1.1 donné par Ghribi et Masmoudi (2010) : F_1 générée par la mesure μ_1 composée d'une loi binomiale négative et d'une loi gamma comme définie dans Casalis (1996) et F_2 générée par μ_2 définie par le produit indépendant d'une loi de Poisson et d'une loi gamma. Les fonctions variance sont données par

$$m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_1} =]0, +\infty[^2 \mapsto V_{\mathrm{F}_1}(m) = \begin{pmatrix} m_1^2 + m_1 & m_1 m_2 \\ m_1 m_2 & m_2^2, \end{pmatrix}$$

et

$$m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_2} =]0, +\infty[^2 \mapsto V_{\mathrm{F}_2}(m) = \mathrm{diag}(m_1, m_2^2).$$

Bien que ces deux FEN soient distinctes, on a $\det V_{\mathrm{F}_1}(m) = \det V_{\mathrm{F}_2}(m)$ pour tout $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_1} = \mathrm{M}_{\mathrm{F}_2}$. Cela nous montre qu'il faut alors se restreindre à un ensemble de FENs plus petit pour pouvoir espérer un résultat de caractérisation par la fonction variance généralisée. Cependant, il faut noter que les mesures de Lévy modifiées de F_1 et F_1 sont bien différentes. En effet, comme ces deux familles sont indéfiniment divisibles, d'après le Théorème 1.2.1 on peut écrire

$$L_{\rho(\mu_1)}(\theta) = \det \nabla^2 \kappa_{\mu_1}(\theta) = \frac{-\exp(\theta_1)}{\theta_2 + \exp(\theta_1)} \text{ pour tout } \theta \text{ tel que } \theta_2 + \exp(\theta_1) < 0,$$

et

$$L_{\rho(\mu_2)}(\theta) = \det \nabla^2 \kappa_{\mu_2}(\theta) = \frac{\exp(\theta_1)}{\theta_2^2} \ \forall \theta \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[.$$

Il s'agit donc d'un exemple de familles dont les variances généralisées sont les mêmes si l'on paramètre par la moyenne et dont les mesures de Lévy modifiées sont différentes. En conséquence, il convient de faire la distinction entre les deux paramétrisations lorsque l'on veut caractériser la famille. Malgré ce contre exemple, plusieurs cas particuliers de caractérisation par la fonction variance généralisée (qui s'avère être un abus de langage dans le cas où la FEN est paramétrée par θ) ont été démontrés ces dernières années. On peut se référer à Kokonendji et Masmoudi (2006) qui ont démontré que la mesure de Lévy modifiée caractérise les familles de type Poisson-gaussien. Le même résultat a été démontré par Nisa *et al.* (2015) pour les familles de type normal-Poisson (un cas particulier des TSN). Ces deux résultats sont basés sur la théorie de la mesure. De plus, Kokonendji et Masmoudi (2013) et Ghribi et Masmoudi (2010) ont respectivement démontré que les familles gamma-gaussiennes (un autre cas particulier des modèles TSN) et multinomiales sont caractérisées par leurs fonctions variance généralisée respectives, données en fonction du paramètre de la moyenne. Une caractérisation complète des modèles TSN a été récemment donnée dans par Moypemna Sembona (2016). Outre les résultats concernant les fonctions

variance généralisée et les mesures de Lévy modifiées, on peut citer Koudou et Pommeret (2002) et Kokonendji *et al.* (2015) qui ont respectivement démontré que les FEN de type Poisson-gaussienne sont caractérisées par stabilité de convolution et que les FEN TSN le sont par leurs fonctions variance et leurs polynômes orthogonaux associés.

Dans la suite, nous proposons une nouvelle méthode de résolution de l'équation de Monge-Ampère lorsque l'on se restreint aux modèles TSM et qui généralise les résultats précédents concernant les modèles TSN. Comme vu précédemment, et d'après le Théorème 1.2.1, la fonction cumulante d'une FEN est solution d'une équation de Monge-Ampère de la forme

$$\det \nabla^2 u = f,$$

où l'inconnue u est au moins de classe $\mathcal{C}^2$ et f est une fonction donnée. Ces deux fonctions sont définies sur un ouvert convexe Ω. Ainsi, lorsqu'on se donne une mesure de Lévy modifiée $\rho(\mu)$, sous réserve que la FEN soit supposée indéfiniment divisible, caractériser cette famille revient à résoudre un problème d'unicité de solution dans un problème de Monge-Ampère avec $f = L_{\rho(\mu)}$.

La littérature concernant les équations aux dérivées partielles (EDPs) elliptiques du second ordre et non linéaires dont fait partie l'équation de Monge-Ampère est bien fournie. Par exemple, le livre de Gutiérrez (2001) pose les bases nécessaires à l'existence de solutions des problèmes classiques de Dirichlet (i.e. les solutions admettent une valeur fixée sur la frontière $\partial\Omega$). C'est Jörgens (1954) qui le premier a étudié ce type de problème en dimension 2 en considérant les cas où $f = 1$. Ces résultats ont été généralisés en dimensions supérieures par Calabi (1958) et ensuite par Pogorelov (1972). Plus récemment, et en considérant le cas général, Ishii et Lions (1990) ont développé une théorie très utile pour l'équation de Monge-Ampère, y compris pour des domaines non bornés, à travers la notion de solutions de viscosité. Ils ont en effet noté que cela ne demande pas beaucoup de travail supplémentaire d'adapter des conditions de Dirichlet au cas où le domaine est non borné dès lors que l'on impose certaines restrictions à l'infini. Dans Ishii (1984) ou Crandall et Lions (1987), le cas des équations d'Hamilton-Jacobi est traité sans pour autant que les résultats soient étendus aux cas difficiles de l'équation de Monge-Ampère. Dans plusieurs autres articles récents, les problèmes de bords singuliers pour l'équation de Monge-Ampère ont été approfondis par plusieurs auteurs. Plus précisément, dans Lazer et McKenna (1996), Salani (1998), Guan et Jian (2004) ou Cîrstea et Trombetti (2008), les problèmes liés à l'existence et l'unicité de solution pour l'équation de Monge-Ampère ont été étudiés pour un domaine convexe et suffisamment lisse lorsqu'on suppose connu le comportement asymptotique des solutions vers la frontière de ce dernier. Ces travaux vont nous permettre de développer deux approches l'une concernant les cas particuliers des modèles TSN et TSM et l'autre permettant de présenter un résultat préliminaire lié au cas général.

Ce chapitre est organisé comme suit. La Section 4.2 est dédiée aux démonstrations des cas particuliers TSM, aussi bien pour la mesure de Lévy modifiée que pour la fonction variance généralisée. La Section 4.3 est, elle, consacrée à l'établissement de résultats plus généraux en proposant une étude de l'équation de Monge-Ampère avec une certaine condition aux limites donnée.

4.2 Le cas des familles Tweedie stables multiples

Dans ce qui suit, on cherche à déterminer si la mesure de Lévy modifiée et la fonction variance généralisée caractérisent un modèle TSM, pour peu que l'on suppose que l'on se trouve dans la famille de tous les modèles TSM. On commencera par donner le résultat pour la mesure de Lévy modifiée puis on pourra en déduire celui pour la fonction variance généralisée. La méthode proposée, basée sur un lemme de Cîrstea et Trombetti (2008), se veut être différente et plus analytique que celle utilisée dans Kokonendji et Masmoudi (2006), Kokonendji et Masmoudi (2013), Moypemna Sembona (2016) ou Ghribi et Masmoudi (2010). En effet, il s'agit ici de proposer une résolution directe de l'équation de Monge-Ampère.

4.2.1 Caractérisation par la mesure de Lévy modifiée

On cherche à démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.2.1. *Soit ν_p une mesure indéfiniment divisible de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ générant une NEF TSM F_p avec $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)^\top$ fixé tel que $p_1 \geq 1$. Considérons une autre mesure indéfiniment divisible $\nu_{\tilde{p}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ générant une FEN TSM $\mathrm{F}_{\tilde{p}}$ avec $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, p_2, p_3, \ldots, p_d)^\top$ et telle que $\rho(\nu_p) = \rho(\nu_{\tilde{p}})$. Alors, $\mathrm{F}_p = \mathrm{F}_{\tilde{p}}$ à des affinités près.*

Avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin d'établir un lemme à partir de la Proposition 2.1 de Cîrstea et Trombetti (2008) que nous rappelons et dont nous donnons la démonstration par souci de précision.

Proposition 4.2.1 (Cîrstea et Trombetti (2008))**.** *Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 2$. Si l'on considère les fonctions $g : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ également de classe $\mathcal{C}^2$, alors $\forall x \in \Omega$,*

$$\begin{aligned} \det \nabla^2 h(g(x)) &= [h'(g(x))]^{d-1} h''(g(x)) < \mathrm{Co}\left\{\nabla^2 g(x)\right\} \nabla g(x), \nabla g(x) > \\ &\quad + [h'(g(x))]^d \det \nabla^2 g(x), \end{aligned}$$

où $\mathrm{Co}\{\cdot\}$ désigne la comatrice.

Démonstration. Fixons $x \in \Omega$. D'après le Lemme 3.2.1, on peut écrire

$$\nabla^2 h(g(x)) = h''(g(x)) \nabla g(x) \left[\nabla g(x)\right]^\top + h'(g(x)) \nabla^2 g(x).$$

Comme le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne, il est possible d'écrire le déterminent de $\nabla^2 h(g(x))$ comme une somme de 2^d déterminants, pour lesquels chaque matrice considérée admet pour $j^{\text{ème}}$ colonne, soit

$$h''(g(x)) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_d} \right)^\top, \tag{4.1}$$

soit

$$h'(g(x)) \left(\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_1 \partial x_j}, \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_2 \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_d \partial x_j} \right)^\top. \tag{4.2}$$

Notons alors par M_j les matrices dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est de la forme (4.1) et dont les autres colonnes sont de la forme (4.1). En développant le déterminant de M_j par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne, on obtient

$$\det M_j = [h'(g(x))]^{d-1} h''(g(x)) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} C_{ij}(x),$$

où C_{ij} désigne le cofacteur du coefficient (i,j) de $\nabla^2 g(x)$. Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{d} \det M_j = [h'(g(x))]^{d-1} h''(g(x)) < \mathrm{Co}\left\{\nabla^2 g(x)\right\} \nabla g(x), \nabla g(x) > . \tag{4.3}$$

Maintenant, si M_0 désigne la matrice dont toutes les colonnes s'écrivent comme (4.2), alors

$$\det M_0 = [h'(g(x)]^d \det \nabla^2 g(x). \tag{4.4}$$

Comme le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont données par (4.1) est nul, on peut écrire

$$\det \nabla^2 h(g(x)) = \det M_0 + \sum_{j=1}^{d} M_j.$$

On obtient le résultat d'après (4.3) et (4.4), ce qui termine la preuve. □

Lemme 4.2.1. *Soit $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)^\top$. Considérons $\nu_p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ une mesure indéfiniment divisible générant une FEN MST F_p. Alors, pour tout $\theta \in \Theta_{\nu_p}$,*

$$\det \nabla^2 \kappa_{\nu_p}(\theta) = \left[\kappa'_{\mu_{p_1}}(g(\theta))\right]^{d-1} \kappa''_{\mu_{p_1}}(g(\theta)) \prod_{j=2}^{d} \kappa''_{\mu_{p_j}}(\theta_j),$$

où κ_{ν_p} désigne la fonction cumulante de F_p, $\kappa_{\mu_{p_j}}$ celle d'une FEN générée par une loi Tweedie de paramètre $p \leq 1$ et $g(\theta) = \theta_1 + \sum_{j=2}^{d} \kappa_{\mu_{p_j}}(\theta_j)$.

Démonstration. Comme F_p est une NEF TSM, sa fonction cumulante s'écrit

$$\kappa_{\nu_p}(\theta) = \kappa_{\mu_{p_1}}(g(\theta)) \ \forall \theta \in \Theta_{\nu_p}.$$

Le gradient de g est alors donné par

$$\nabla g(\theta) = \left(1, \kappa'_{\mu_{p_2}}(\theta_2), \kappa'_{\mu_{p_3}}(\theta_3), \ldots, \kappa'_{\mu_{p_d}}(\theta_d)\right)^\top,$$

et sa matrice hessienne par

$$\nabla^2 g(\theta) = \mathrm{diag}\left(0, \kappa''_{\mu_{p_2}}(\theta_2), \kappa''_{\mu_{p_3}}(\theta_3), \ldots, \kappa''_{\mu_{p_d}}(\theta_d)\right)^\top.$$

Sa comatrice admet pour seul élément non nul, le coefficient de la première ligne et de la première colonne. Le calcul du déterminant de $\nabla^2 \kappa_{\nu_p}(\theta)$ se fait alors en appliquant la Proposition 4.2.1 en posant $h = \kappa_{\mu_{p_1}}$. Le lemme est ainsi démontré. □

Nous pouvons maintenant donner la preuve de notre résultat.

Démonstration du Théorème 4.2.1. Commençons par fixer $p_1 = 1$. D'après le Lemme 4.2.1 et le Théorème 1.2.1, et comme $\rho(\nu_{p_1}) = \rho(\nu_{\tilde{p}_1})$ on a, pour tout $\theta \in \Theta_{\nu_p} = \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\det \nabla^2 \kappa_{\nu_p}(\theta) &= \exp(dg(\theta)) \prod_{j=2}^{d} \kappa''_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \\
&= L_{\rho(\nu_p)}(\theta) \\
&= L_{\rho(\nu_{\tilde{p}})}(\theta) \\
&= \left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta))\right]^{d-1} \kappa''_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta)) \prod_{j=2}^{d} \kappa''_{\mu_{p_j}}(\theta_j).
\end{aligned}$$

Le problème de caractérisation se résume donc à vérifier si l'équation (4.5) suivante, qui se révèle être une simple équation différentielle ordinaire (EDO) du second ordre, admet une unique solution :

$$\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta))\right]^{d-1} \kappa''_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta)) = \exp(dg(\theta)). \tag{4.5}$$

Ainsi, en posant $x = g(\theta)$ on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(x)\right]^d}{d} = \exp(dx).$$

En intégrant sur $]-\infty, y]$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\frac{\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(y)\right]^d}{d} - \lim_{x \to -\infty} \frac{\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(x)\right]^d}{d} = \frac{\exp(dy)}{d}.$$

Comme $\kappa_{\mu_{\tilde{p}_1}}$ est la fonction génératrice des cumulants d'une loi Tweedie de paramètre $\tilde{p}_1$, alors

$$\kappa_{\mu_{\tilde{p}_1}}(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } \tilde{p}_1 = 1 \\ \left(\frac{x}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela implique que $\lim_{x \to -\infty} \kappa_{\mu_{\tilde{p}_1}} = 0$. On peut donc écrire, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\kappa_{\mu_{\tilde{p}_1}}(y) = \exp(y) + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Au final, la FEN $\mathrm{F}_{\tilde{p}}$ admet

$$\theta \mapsto \kappa_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta))$$

comme fonction génératrice des cumulants. Les FEN $\mathrm{F}_{\tilde{p}}$ et F_p sont, au final, bien du même type.

Considérons maintenant $p_1 = 2$. Comme $\rho(\nu_{p_1}) = \rho(\nu_{\tilde{p}_1})$ on peut écrire, d'après le Lemme 4.2.1 et le Théorème 1.2.1, pour tout $\theta \in \Theta_{\nu_p} = \{\theta \in \mathbb{R}^d,\ g(\theta) < 0\}$

$$\begin{aligned}
\det \nabla^2 \kappa_{\nu_p}(\theta) &= [-g(\theta)]^{-1-d} \prod_{j=2}^{d} \kappa''_{\mu_{p_j}}(\theta_j) \\
&= L_{\rho(\nu_p)}(\theta) \\
&= L_{\rho(\nu_{\tilde{p}})}(\theta) \\
&= \left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta))\right]^{d-1} \kappa''_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta)) \prod_{j=2}^{d} \kappa''_{\mu_{p_j}}(\theta_j).
\end{aligned}$$

Le problème de caractérisation est traduit ici par la résolution de l'EDO

$$\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta))\right]^{d-1}\kappa''_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta)) = [-g(\theta)]^{-1-d}.$$

Posons alors $x = g(\theta)$. Ainsi, pour tout $x < 0$, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(x)\right]^d}{d} = (-x)^{-1-d}.$$

Ensuite, en intégrant sur $]-\infty, y]$ pour tout $y < 0$, il vient

$$\frac{\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(y)\right]^d}{d} - \lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(x)\right]^d}{d} = \frac{(-y)^{-d}}{d}.$$

En remarquant encore que $\kappa_{\mu_{\tilde{p}_1}}$ est la fonction génératrice des cumulants d'une loi Tweedie de paramètre $\tilde{p}_1$, alors $\lim_{x\to-\infty}\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(x) = 0$. On en déduit, pour tout $y < 0$ que

$$\kappa_{\mu_{\tilde{p}_1}}(y) = -\ln(-y) + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$, ce qui achève la démonstration du théorème pour $p_1 = 2$.

Considérons maintenant les cas où p_1 est différent de 1 et 2. Comme $\rho(\nu_{p_1}) = \rho(\nu_{\tilde{p}_1})$ et d'après le Lemme 4.2.1 et le Théorème 1.2.1, on peut écrire, pour tout $\theta \in \Theta_{\nu_p}$,

$$\begin{aligned}
\det\nabla^2\kappa_{\nu_p}(\theta) &= \left[\frac{-g(\theta)}{1-\alpha}\right]^{(\alpha-2)+(\alpha-1)(d-1)}\prod_{j=2}^{d}\kappa''_{\mu_{p_j}}(\theta_j)\\
&= L_{\rho(\nu_p)}(\theta)\\
&= L_{\rho(\nu_{\tilde{p}})}(\theta)\\
&= \left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta))\right]^{d-1}\kappa''_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta))\prod_{j=2}^{d}\kappa''_{\mu_{p_j}}(\theta_j).
\end{aligned}$$

On cherche alors à résoudre

$$\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta))\right]^{d-1}\kappa''_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta)) = \left[\frac{-g(\theta)}{1-\alpha}\right]^{(\alpha-2)+(\alpha-1)(d-1)}$$

pour tout $\theta \in \Theta_{\nu_p} = \{\theta \in \mathbb{R}^d,\ g(\theta) < 0\}$. Il faut préciser ici, que malgré le fait que les domaines d'existence des transformées de Laplace changent suivant que $1 < p < 2$ ou que $p > 0$, les domaines des fonctions cumulantes sont, eux, égaux, car ouverts. Ainsi, en posant $x = g(\theta)$, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(x)\right]^d}{d} = \left(\frac{-x}{1-\alpha}\right)^{(\alpha-2)+(\alpha-1)(d-1)},$$

pour tout $x < 0$. Ensuite, en intégrant sur $]-\infty, y]$, pour tout $y < 0$, et en remarquant encore que $\lim_{x\to-\infty}\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(x) = 0$, il vient

$$\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(y)\right]^d = \frac{1}{d}\left(\frac{y}{\alpha-1}\right)^{(\alpha-1)d}.$$

Au final, on a bien

$$\kappa_{\mu_{\tilde{p}_1}}(y) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(\frac{y}{\alpha - 1} \right)^{\alpha}$$

La preuve est ainsi complète. □

Il est intéressant de remarquer que les outils intervenant dans la preuve pour montrer l'unicité de la solution de l'équation de Monge-Ampère sont relativement simples. L'équation de Monge-Ampère, qui se révèle compliquée à étudier en général, se transforme dans ce cas, et grâce au fait que nous nous restreignons aux familles TSM, en une EDO facile à résoudre. Il est important de noter que cette méthode nécessite cette dernière restriction et n'est pas transposable dans un cas plus général. Elle complète donc les méthodes apportées dans la littérature et qui sont destinées à des résolutions de cas particuliers.

4.2.2 Caractérisation par la fonction variance généralisée

Nous cherchons maintenant à apporter la preuve que la fonction variance généralisée caractérise, encore une fois à quelques affinités près, les FEN TSM. Ce résultat est donné pa le théorème suivant :

Théorème 4.2.2. *Soit ν_p une mesure indéfiniment divisible de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ générant une FEN TSM F_p avec $p = (p_1, p_2, \ldots, p_d)^\top$ fixé tel que $p_1 \geq 1$. Considérons une autre mesure indéfiniment divisible $\nu_{\tilde{p}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ générant une FEN TSM $\mathrm{F}_{\tilde{p}}$ avec $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, p_2, p_3, \ldots, p_d)^\top$ et telle que $\det V_{F_p} = \det V_{F_{\tilde{p}}}$. Alors, $\mathrm{F}_p = \mathrm{F}_{\tilde{p}}$ à quelques affinités près.*

Démonstration. Comme F_p est une FEN de type TSM, d'après le Théorème 3.2.1 sa fonction variance généralisée est donnée, pour tout $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_p}$, par

$$\det V_{\mathrm{F}_p}(m) = m_1^{d-1+p_1-\sum_{j=2}^d p_j} \prod_{j=2}^d m_j^{p_j}.$$

De même, comme $\mathrm{F}_{\tilde{p}}$ est aussi une FEN TSM, on peut écrire, pour tout $\tilde{m} \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_{\tilde{p}}}$,

$$\det V_{\mathrm{F}_{\tilde{p}}}(\tilde{m}) = \tilde{m}_1^{d-1+\tilde{p}_1-\sum_{j=2}^d \tilde{p}_j} \prod_{j=2}^d \tilde{m}_j^{\tilde{p}_j}.$$

Rappelons ensuite que chaque point $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_p}$ est donné, pour tout $\theta \in \Theta_{\nu_p}$, par $\tau_{\nu_p}(\theta)$ avec $\tau_{\nu_p} = \nabla \kappa_{\nu_p}$. De la même façon, $\tilde{m} \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_{\tilde{p}}}$ est donné par $\tau_{\nu_{\tilde{p}}}(\tilde{\theta})$ pour $\tilde{\theta} \in \Theta_{\nu_{\tilde{p}}}$. Il faut noter qu'il n'y a, *a priori*, aucune raison que $\Theta_{\nu_p} = \Theta_{\nu_{\tilde{p}}}$. En effet, malgré le fait que $\mathrm{M}_{\mathrm{F}_p} = \mathrm{M}_{\mathrm{F}_{\tilde{p}}}$, $\Theta_{\nu_p} = \psi_{\nu_p}(\mathrm{M}_{\mathrm{F}_p})$ avec $\psi_{\nu_p} = \tau_{\nu_p}^{-1}$ et $\Theta_{\nu_{\tilde{p}}} = \psi_{\nu_{\tilde{p}}}(\mathrm{M}_{\mathrm{F}_{\tilde{p}}})$ avec $\psi_{\nu_{\tilde{p}}} = \tau_{\nu_{\tilde{p}}}^{-1}$, les fonctions ψ_{ν_p} et $\psi_{\nu_{\tilde{p}}}$ n'étant, a aucun moment, supposées égales.

Maintenant, comme on suppose que F_p et $\mathrm{F}_{\tilde{p}}$ ont la même fonction variance généralisée, alors pour tout $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_p} = \mathrm{M}_{\mathrm{F}_{\tilde{p}}}$,

$$\det V_{\mathrm{F}_{\tilde{p}}}(m) = m_1^{d-1+p_1-\sum_{j=2}^d p_j} \prod_{j=2}^d m_j^{p_j}.$$

Mais pour tout $\theta \in \Theta_{\nu_p}$, $m_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}\kappa_{\nu_p}(\theta)$, pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Ainsi, comme ν_p est aussi indéfiniment divisible, on peut successivement écrire

$$\begin{aligned}
\det V_{\mathrm{F}_p}(m) &= \det \nabla^2 \kappa_{\nu_p}(\psi_{\nu_p}(m)) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1}\kappa_{\nu_p}(\theta)\right]^{d-\sum_{j=2}^{d} p_j} \prod_{j=2}^{d}\left[\frac{\partial}{\partial \theta_j}\kappa_{\nu_p}(\theta)\right]^{p_j} \\
&= L_{\rho(\nu_p)}(\theta).
\end{aligned}$$

De même, pour tout $\tilde{\theta} \in \Theta_{\nu_{\tilde{p}}}$,

$$\det V_{\mathrm{F}_{\tilde{p}}}(m) = \det \nabla^2 \kappa_{\nu_{\tilde{p}}}(\psi_{\nu_{\tilde{p}}}(m)) = \det \nabla^2 \kappa_{\nu_{\tilde{p}}}(\tilde{\theta}).$$

De plus, d'après le Lemme 4.2.1, on peut écrire

$$\det \nabla^2 \kappa_{\nu_{\tilde{p}}}(\tilde{\theta}) = \left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\tilde{\theta}))\right]^{d-1} \kappa''_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\tilde{\theta})) \prod_{j=2}^{d} \kappa''_{\mu_{p_j}}(\tilde{\theta}_j),$$

avec $g : \tilde{\theta} \mapsto \tilde{\theta}_1 + 1/2 \sum_{j=2}^{d} \kappa_{\mu_{p_j}}(\tilde{\theta}_j)$.

On peut alors remarquer que, quelles que soient les valeurs de p et $\tilde{p}$, $\Theta_0 = \{\theta \in \mathbb{R},\ g(\theta) < 0\}$ est inclus à la fois dans $\psi_{\nu_{\tilde{p}}}(\mathrm{M}_{\mathrm{F}_p}) = \Theta_{\nu_{\tilde{p}}}$ et dans $\psi_{\nu_p}(\mathrm{M}_{\mathrm{F}_p}) = \Theta_{\nu_p}$. Ainsi, pour tout $\theta \in \Theta_0$, on peut poser l'équation suivante

$$\left[\kappa'_{\mu_{\tilde{p}_1}}(g(\theta))\right]^{d-1} \kappa''_{\mu_{p_1}}(g(\theta)) \prod_{j=2}^{d} \kappa''_{\mu_{p_j}}(\theta_j) = L_{\rho(\nu_p)}(\theta).$$

Comme nous l'avons vu dans la preuve du Théorème 4.2.1, cette équation admet une unique solution sur Θ_0, quelle que soit la valeur de p supposée. Cette solution est à chaque fois donnée par $\theta \mapsto \kappa_{\nu_p}(\theta) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc de la fonction génératrice des cumulants d'une FEN F_0 dont le domaine du paramètre canonique est donné par Θ_0. Il faut maintenant vérifier si cette famille est de même type que $\mathrm{F}_{\tilde{p}}$. En dérivant deux fois la fonction cumulante, on trouve, pour $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{F}_0}$

$$V_{\mathrm{F}_0}(m) = V_{\mathrm{F}_p}(m).$$

Ainsi, $V_{\mathrm{F}_0}(m)$ et $V_{\mathrm{F}_p}(m)$ coïncident sur $\mathrm{M}_{\mathrm{F}_0} \cap \mathrm{M}_{\mathrm{F}_p}$. Au final, d'après la Proposition 1.2.1, les deux familles sont de même type, ce qui achève la preuve. □

4.3 Le cas général : une histoire de conditions aux limites et le problème de Monge-Ampère à domaine non nécessairement borné

Dans cette section, nous allons exposer des outils nécessaires à la résolution du problème d'unicité de l'équation de Monge-Ampère lié aux problèmes de caractérisation des FEN indéfiniment divisibles. Cette première étape vers un résultat général solide nécessitera de se restreindre à des familles dont les fonctions génératrices des

cumulants ont les mêmes comportements aux bords des domaines. Notons que nous nous concentrerons uniquement sur le problème de caractérisation par la mesure Lévy modifiée.

Les problèmes de Monge-Ampère présents dans la littérature propre aux EDPs sont quasiment exclusivement des problèmes de Dirichlet, c'est-à-dire que le comportement de la fonction inconnue sur la frontière du domaine est connu. En effet, soit cette dernière explose, soit elle y prend une valeur donnée. De plus, les domaines considérés sont le plus souvent bornés. La façon d'adapter les méthodes de résolution existantes au problème de caractérisation par la mesure de Lévy modifiée s'avère être astucieuse. En effet, les domaines des fonctions génératrices des cumulants des FEN ne sont pas toujours bornés. Ils sont même dans certains cas semi-bornés et les fonctions cumulantes ont des comportements différents suivant les familles. Pour palier à ces contraintes, on va considérer dans la suite toutes les FENs dont les fonctions cumulantes ont toutes le même comportement asymptotique. Nous pourrons alors étendre les résultats concernant les EDPs sur n'importe quel domaine. Pour bien comprendre la méthode, nous allons considérer plusieurs cas particuliers tirés des modèles TSM. Nous allons avant tout rappeler et démontrer le lemme suivant, dû à Caffarelli *et al.* (1985), qui traite du principe du maximum qui intervient souvent dans les questions d'unicité de solutions dans les problèmes de Dirichlet (voir aussi Lazer et McKenna (1996), Salani (1998), Guan et Jian (2004) ou Cîrstea et Trombetti (2008)).

Lemme 4.3.1 (Caffarelli *et al.* (1985))**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné dont la frontière $\partial\Omega$ est suffisamment lisse. Supposons que pour toute fonction v telle que pour chaque $x \in \Omega$, $\det \nabla^2 v(x) < f(x)$ où f est une fonction positive. Supposons également qu'il existe une fonction u telle que $\det \nabla^2 u(x) = f(x)$. Si $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ sur Ω*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) > v(x_0)$ et que $u - v$ atteint son maximum sur $\overline{\Omega}$ au point x_0. Alors, la matrice $\nabla^2 v - \nabla^2 u$ est semi-définie positive au point x_0. D'après la caractérisation variationnelle des valeurs propres d'une matrice symétrique, il vient que si $\lambda_v^{(1)} \geq \lambda_v^{(2)} \geq \cdots \geq \lambda_v^{(d)} \geq 0$ sont les valeurs propres de $\nabla^2 v(x_0)$ et $\lambda_u^{(1)} \geq \lambda_u^{(2)} \geq \cdots \geq \lambda_u^{(d)} \geq 0$ sont celles de $\nabla^2 u(x_0)$, alors $\lambda_v^{(i)} \geq \lambda_u^{(i)}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. On conclut ainsi que $f(x_0) = \det \nabla^2 v(x_0) = \lambda_v^{(1)} \lambda_v^{(2)} \ldots \lambda_v^{(d)} \geq \lambda_u^{(1)} \lambda_u^{(2)} \ldots \lambda_u^{(d)} = \det \nabla^2 u(x_0) = f(x_0)$, ce qui est contradictoire. Ceci termine la preuve. □

4.3.1 Retour sur le cas normal-Poisson

Dans cette partie, nous allons considérer un modèle normal-Poisson (i.e. un modèle TSN dont la première composante est de loi de Poisson). Ce premier exemple est intéressant car le domaine du problème de Monge-Ampère sous-jacent n'est pas borné. Il s'agit en effet de $\mathbb{R}^d$ tout entier. Mais d'après Boubacar Maïnassara et Kokonendji (2014), la mesure de Lévy modifiée d'un modèle normal-Poisson est donnée par

$$\rho(\nu_p)(\mathrm{d}x) = \delta_1(\mathrm{d}x_1)\mathcal{N}_{d-1}(0, I_{d-1})(\mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3 \ldots \mathrm{d}x_d), \tag{4.6}$$

avec ν_p la mesure générant une FEN de type normal-Poisson, où $p = (1, 0, 0, \ldots, 0)^\top$. La caractérisation de cette famille est alors donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.3.1. *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ une mesure indéfiniment divisible générant la FEN $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mu)$ telle que $\rho(\mu)$ soit comme dans* (4.6)*. Alors, dans la classe des FENs dont les fonctions cumulantes sont équivalentes à l'infini à celle de* F*, il n'existe que les familles de types normal-Poisson dont $\rho(\mu)$ soit la mesure de Lévy modifiée.*

Démonstration. Considérons la mesure $\rho(\mu)$ définie par (4.6). Sa transformée de Laplace est alors donnée par

$$\begin{aligned} L_{\rho(\mu)}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\theta^\top x)\rho(\mu)(\mathrm{d}x) \\ &= \exp[dg(\theta)], \end{aligned}$$

avec $g : \theta \mapsto \theta_1 + 1/2 \sum_{i_2}^d \theta_i^2$ pour $\theta \in \Theta_\mu = \Theta_{\rho(\mu)} = \mathbb{R}^d$. Fixons $(b, c) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et considérons la fonction $u_0 : \theta \mapsto \exp[g(\theta)] + b^\top\theta + c$. On peut se rendre compte assez facilement que u_0 est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\det \nabla^2 u(\theta) = \exp[dg(\theta)] \ \forall \theta \in \Theta_\mu.$$

Maintenant, considérons le problème de Monge-Ampère suivant

$$\begin{cases} \det \nabla^2 u(\theta) = \exp[dg(\theta)] \ \forall \theta \in \theta_\mu \\ \lim_{\|\theta\| \to +\infty} \frac{u(\theta)}{u_0(\theta)} = 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

On veut alors montrer que u_0 est l'unique solution du problème (4.7). Soit u une autre solution de ce problème. D'après les conditions limites, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe R_n tel que pour $\|\theta\| > R_n$

$$\underline{u}_n(\theta) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) u(\theta) \leq u_0(\theta) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) u(\theta) = \overline{u}_n(\theta). \tag{4.8}$$

Les fonctions $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$ sont alors respectivement des sous et sur-solutions du problème (4.7). En effet, $\det \nabla^2 \underline{u}_n(\theta) = (1 - 1/n)^d \exp[dg(\theta)] < \exp[kg(\theta)]$ et $\det \nabla^2 \underline{u}_n(\theta) = (1 + 1/n)^d \exp[dg(\theta)] > \exp[kg(\theta)]$. Notons également que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être choisie croissante. Ainsi, l'inégalité (4.8) est en particulier vraie pour tout $\theta \in \partial\Theta_{R_{n+1}}$, où $\Theta_{R_{n+1}} = B(0, R_{n+1})$ est la boule centrée en 0 et de rayon R_{n+1}. Comme $\Theta_{R_{n+1}}$ est convexe, on peut appliqué le principe du maximum de Caffarelli *et al.* (1985), et par le Lemme 4.3.1, l'inégalité (4.8) est également vraie pour tout $\theta \in \Theta_{R_{n+1}}$. En faisant tendre n vers l'infini, on a donc

$$u = u_0 \text{ sur } \Theta_\mu = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \Theta_{R_n}.$$

Au final, comme μ est supposée être une mesure indéfiniment divisible, u_0 est la fonction génératrice des cumulants d'une mesure générant une FEN de même type que F. Ainsi, par le Théorème 1.2.1, $\rho(\mu)$ caractérise, à affinité près, la FEN F. La preuve est ainsi complète. □

4.3.2 Retour sur le cas normal-gamma

Nous allons traiter ici un autre cas particulier, le cas normal-gamma, permettant de résoudre l'équation de Monge-Ampère sur un domaine semi-borné. Il s'agit également d'un cas particulier des modèles TSN.

Proposition 4.3.2. *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ une mesure indéfiniment divisible générant la FEN $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mu)$ telle que $\rho(\mu)$ soit donnée par*

$$\rho(\mu)(\mathrm{d}x) = \frac{x_1^d}{(2\pi x_1)^{(k-1)/2} k!} \exp\left(-x_1 - \frac{1}{2x_1}\sum_{j=2}^{d} x_j^2\right) \mathbb{1}_{x_1>0} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_d.$$

Alors, dans la classe des FENs dont les fonctions cumulantes sont équivalentes au bord de Θ_μ à celle de F, il n'existe que les familles de types normal-gamma dont $\rho(\mu)$ soit la mesure de Lévy modifiée.

Démonstration. La transformée de Laplace de $\rho(\mu)$ est donnée par $L_{\rho(\mu)}(\theta) = [-g(\theta)]^{-(d+1)}$ pour tout $\theta \in \Theta_\mu = \Theta_{\rho(\mu)} = \{\theta \in \mathbb{R}^d,\ g(\theta) < 0\}$ avec $g : \theta \mapsto \theta_1 + 1/2 \sum_{i=2}^d \theta_i^2$. Fixons $(b, c) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et considérons alors la fonction $\theta \mapsto u_0(\theta) = -\ln(-g(\theta)) + b^\top \theta + c$. On écrire

$$\nabla u_0(\theta) = \left(-\frac{1}{g(\theta)}, -\frac{\theta_2}{g(\theta)}, -\frac{\theta_3}{g(\theta)}, \ldots, -\frac{\theta_d}{g(\theta)}\right)^\top + b$$

et

$$\nabla^2 u_0(\theta) = \begin{pmatrix} \gamma(\theta) & a^\top(\theta) \\ a(\theta) & A(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\gamma(\theta) = [g(\theta)]^2$, $a(\theta) = \gamma(\theta)(\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_d)^\top$ et
$A(\theta) = \gamma^-1(\theta) a(\theta) a^\top(\theta) [g(\theta)]^{-1} I_{d-1}$. En utilisant la représentation de Shur des déterminants, on obtient

$$\begin{aligned} \det \nabla^2 u_0(\theta) &= \gamma(\theta) \det\left[A(\theta) - \gamma^{-1}(\theta) a(\theta) a^\top(\theta)\right] \\ &= [-g(\theta)]^{-(d+1)} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction u_0 qui est strictement convexe, satisfait pour chaque $\theta \in \Theta_\mu = \Theta_{\rho(\mu)}$

$$\det \nabla^2 u(\theta = [-g(\theta)]^{-(d+1)}.$$

Considérons maintenant le problème de Monge-Ampère

$$\begin{cases} \det \nabla^2 u(\theta) = [-g(\theta)]^{-(d+1)},\ \forall \theta \in \Theta_\mu \\ \lim_{d(\theta, \partial\Theta_\mu) \to 0} \frac{u(\theta)}{u_0(\theta)} = 1 \\ \lim_{\|\theta\| \to +\infty \text{ et } \theta \in \Theta_\mu} \frac{u(\theta)}{u_0(\theta)} = 1. \end{cases} \tag{4.9}$$

Encore une fois, nous voulons montrer que l'unique solution de (4.9) est donnée par la fonction u_0. Considérons alors une autre solution u. Les conditions aux limites et le comportement au bord du domaine donnés par le problème de Monge-Ampère donnent l'information suivante : pour tout $n \geq 1$, il existe M_n et δ_n tels que pour tout $\theta \in \Theta_\mu$ satisfaisant $d(\theta, \partial\Theta_\mu) < \delta_n$ et $\theta_1 < -M_n$, on peut poser l'inégalité

$$\underline{u}_n(\theta) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) u(\theta) \leq u_0(\theta) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) u(\theta) = \overline{u}_n(\theta). \tag{4.10}$$

Notons $\Theta_{M_n,\delta_n} = \{\theta \in \Theta_\mu,\ d(\theta, \partial\Theta_\mu) < \delta_n \text{ et } \theta_1 < -M_n\}$. Ainsi, les inégalités (4.10) sont vraies sur $\Theta_\mu \backslash \Theta_{M_n,\delta_n}$. Cependant, pour pouvoir appliquer le principe du maximum donné par le Lemme 4.3.1, il faut que l'on se place dans un domaine convexe. Notons alors Θ_n un domaine convexe tel que $\Theta_{M_n,\delta_n} \subset \Theta_n \subset \Theta_\mu$. La Figure 4.1 montre ces trois ensembles en dimension 2.

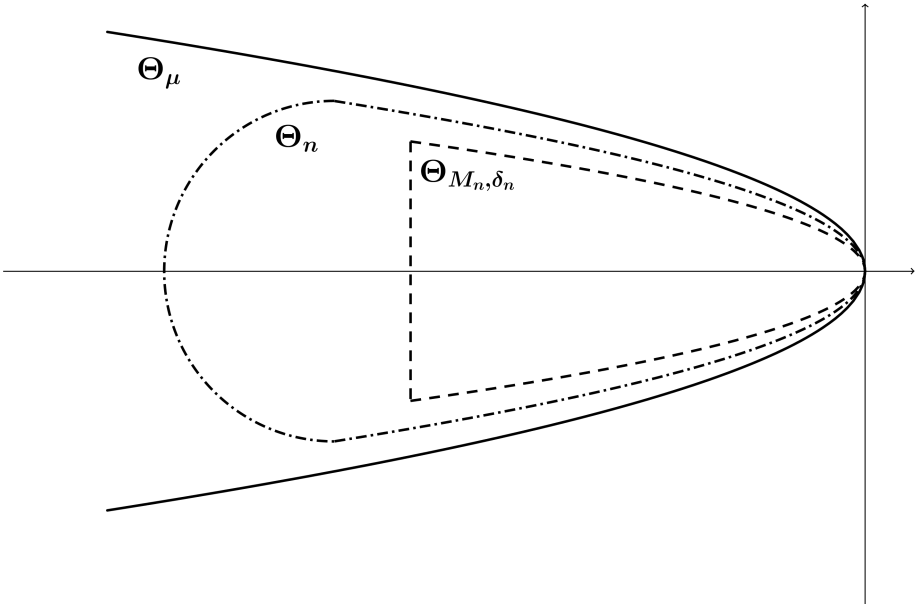


FIGURE 4.1 – Domaines Θ_μ (—), Θ_{M_n,δ_n} (- - -) et le domaine convexe Θ_n (-·-·-)

Il faut noter que nous pouvons choisir la suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$ comme étant décroissante vers 0 et $(M_n)_{n\geq 1}$ croissante vers $+\infty$. Les inégalités (4.10) sont donc encore vraies sur la frontière d'un domaine suffisamment lisse et convexe Θ_n inclus dans Θ_μ et contenant Θ_{M_n,δ_n}. Comme $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$ sont respectivement des sous et sur-solutions de (4.9), on peut appliquer le principe du maximum donné dans le Lemme 4.3.1 et donc les inégalités (4.10) sont encore valables sur Θ_n. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient alors $u = u_0$ sur $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Theta_{M_n,\delta_n} = \Theta_\mu$.

Il existe alors une unique solution u_0 au problème de Monge-Ampère donné par (4.9). D'après le Théorème 1.2.1, il s'agit de la fonction cumulante κ_μ de la FEN engendrée par μ, et cette famille est de type normal-gamma. □

4.3.3 Le cas général

Maintenant que nous avons une idée de la démonstration de deux cas particuliers dont les domaines sont respectivement non borné et semi-borné, nous pouvons énoncer le résultat général et en donner la démonstration.

Théorème 4.3.1. *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ une mesure indéfiniment divisible générant la FEN $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mu)$ de mesure de Lévy modifiée $\rho(\mu)$. Alors, F est l'unique FEN, à affinités près, dans la classe des FENs dont les fonctions cumulantes sont équivalentes à celle de F au bord du domaine, admettant $\rho(\mu)$ pour mesure de Lévy modifiée.*

Démonstration. Considérons $L_{\rho(\mu)}$, la transformée de Laplace de la mesure de Lévy modifiée $\rho(\mu)$ définie sur $\Theta_{\rho(\mu)} = \{\theta \in \mathbb{R}^d,\ L_{\rho(\mu)}(\theta) < +\infty\}$. Comme μ est supposée indéfiniment divisible, d'après le Théorème 1.2.1 on peut écrire

$$\det \nabla^2 \kappa_\mu(\theta) = L_{\rho(\mu)}(\theta)$$

pour tout $\theta \in \Theta_\mu = \Theta_{\rho(\mu)}$. Pour $(b, c) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ fixé, posons maintenant $u_0(\theta) = \kappa_\mu(\theta) + b^\top \theta + c$. Ainsi, u_0 satisfait le problème de Monge-Ampère donné par

$$\begin{cases} \det \nabla^2 u(\theta) = L_{\rho(\mu)},\ \forall \theta \in \Theta_\mu \\ \lim_{d(\theta, \partial\Theta_\mu) \to 0} \frac{u(\theta)}{u_0(\theta)} = 1 \\ \lim_{\|\theta\| \to +\infty \text{ et } \theta \in \Theta_\mu} \frac{u(\theta)}{u_0(\theta)} = 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Encore une fois, nous voulons prouver que l'unique solution du problème (4.11) est donnée par u_0. Considérons alors une autre solution u. Comme nous l'avons vu dans les preuves des propositions 4.3.1 et 4.3.2, les conditions au bord du domaine et la condition aux limites nous permettent de trouver une suite croissante $(\Theta_n)_{n \geq 1}$ de domaines convexes et bornés telle que pour chaque n, $\Theta_n \subset \Theta_\mu$ et $\Theta_\mu = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Theta_n$. Ces conditions nous permettent également d'affirmer que pour tout $\theta \in \Theta_\mu \backslash \Theta_n$, on peut écrire

$$\underline{u}_n(\theta) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) u(\theta) \leq u_0(\theta) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) u(\theta) = \overline{u}_n(\theta).$$

Ces inégalités restent donc vraies sur la frontière d'un domaine convexe et suffisamment lisse (on peut par exemple prendre Θ_{n+1}) inclus dans Θ_μ. Comme $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$ sont respectivement des sous et sur-solutions du problème (4.11), on peut appliquer le principe du maximum donné par le Lemme 4.3.1 et les inégalités sont encore vraies sur Θ_{n+1} tout entier. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $u = u_0$ sur Θ_μ. Ainsi, la FEN F est caractérisée par $\rho(\mu)$, ce qui achève la preuve. □

4.4 Conclusions et perspectives

Nous avons montré dans ce chapitre que les problèmes de caractérisation par la mesure de Lévy modifiée ou par la fonction variance généralisée sont liés à certains types de problèmes de Monge-Ampère. Ces derniers demandent, au cas par cas, une méthode de résolution spécifique. Dans le cas des modèles TSM, nous avons vu que la méthode proposée est relativement simple et se révèle être la résolution d'une équation différentielle ordinaire du second ordre. Cependant, pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut se restreindre à une famille de FENs suffisamment petite. La seconde méthode, donnée pour le cas général, demande elle aussi une restriction. Il s'agit de supposer le comportement des fonctions génératrices des cumulants au bord du domaine pour pouvoir étendre les méthodes proposées dans la littérature concernant l'équation de Monge-Ampère. Mais faire une telle supposition est, pour le moment, complètement arbitraire. À ce stade, il est donc possible de dire que la fonction variance généralisée ne caractérise pas n'importe quelle FEN indéfiniment divisible. La caractérisation par la mesure de Lévy modifiée de n'importe quelle FEN

indéfiniment divisible reste une question ouverte. Il faut également noté que si l'on arrive à répondre à cette question, cela n'impliquera pas le résultat pour la fonction variance généralisée. On peut émettre d'autres interrogations :

- Quelles restrictions doit-on appliquer à une famille de FENs pour pouvoir donner un résultat de caractérisation par la fonction variance généralisée ?
- Comment justifier les bonnes conditions aux limites et aux bords des domaines du problème de Monge-Ampère ? Et ensuite, comment adapter les outils analytiques ou algébriques de la littérature concernant ce type d'équations à ces conditions ?
- Quel est le lien entre la caractérisation par la mesure de Lévy modifiée des FENs et la caractérisation des processus de Lévy sous-jacents ?

Conclusion générale

Ce travail de thèse aura permis de construire deux extensions multivariées des modèles Tweedie. L'étude théorique de ces modèles, en particulier du second, nous aura interrogés sur des problèmes de caractérisation par la fonction variance généralisée. Une méthode a ainsi été trouvée concernant la caractérisation des FENs TSM, et un premier pas vers une méthode permettant de caractériser n'importe quelle FEN par la mesure de Lévy modifiée a été réalisé. On se rend compte à travers cette étude du rôle central de l'équation de Monge-Ampère et des nombreux outils la concernant, qu'il faut adapter. Concernant les résultats pratiques, ceux-ci ont mis en lumière un nouveau comportement lorsque les vecteurs Tweedie sont négativement corrélés et définis sur le premier cadran de $\mathbb{R}^d$. De plus, ces deux extensions pourront servir au praticien en étant des candidats pour modéliser de nombreux problèmes statistiques. Néanmoins, il reste plusieurs interrogations auxquelles il conviendra d'essayer d'apporter des réponses.

- Concernant les vecteurs aléatoires Tweedie.
  - Si $X \sim \mathcal{T}w_d^{*p}(m, \Lambda)$ tel que $X = (X_1, X_2)^\top$, où X_1 et X_2 sont chacun des vecteurs aléatoires Tweedie de dimensions d_1 et d_2, que peut-on dire de $\mathbb{E}[X_1|X_2]$?
  - Peut-on trouver, à l'instar du vecteur gaussien, une opération entre les lois marginales suffisamment stable ?
  - a-t-on, comme dans le cas univarié, une convergence de tout modèle de dispersion exponentielle multivarié vers un vecteur aléatoire Tweedie ?
  - Quelle est la loi du vecteur aléatoire $X^{(-)}$ défini dans le Théorème 2.4.1 ?
  - Pourquoi la dispersion ne semble-t-elle pas équilibrée entre les lois marginales du vecteur aléatoire X lorsque la corrélation est proche de -1, alors que le paramètre de dispersion de chacune de ces lois est le même ?
  - Enfin, d'un point de vue strictement numérique, quelles améliorations et optimisations pouvons-nous apporter pour présenter un package `R` permettant la simulation des vecteurs aléatoires Tweedie ?

- Concernant les modèles TSM.
  - Une étude approfondie des processus de type gaussien-Tweedie doit être réalisée. De plus, une analyse en termes d'application à la finance ou à d'autres phénomènes doit être envisagée. La flexibilité des lois Tweedie n'étant plus à démontrer, une famille de processus telle que décrite plus haut pourra être appliquée à plusieurs problèmes de modélisation ;
  - il en est de même pour les applications des modèles TSM. Le premier point à mettre en lumière est le fait que, dans une expérience réelle, la première composante ne peut être observée. À l'instar des processus qui en découlent, ces modèles pourront avoir des applications dans de nombreuses problématiques de modélisation statistique.
- Concernant les problèmes de caractérisation :
  - Quelles restrictions doit-on appliquer à une famille de FENs pour pouvoir donner un résultat de caractérisation par la fonction variance généralisée ?
  - Comment justifier les bonnes conditions aux limites et aux bords des domaines du problème de Monge-Ampère ? Et ensuite, comment adapter les outils analytiques ou algébriques de la littérature concernant ce type d'équations à ces conditions ?
  - Quel est le lien entre la caractérisation par la mesure de Lévy modifiée des FENs et la caractérisation des processus de Lévy sous-jacents ?

Bibliographie

Alfaro, J. et Ortega, J. (2012). Robust Hotelling's T2 control charts under non-normality: the case of t-Student distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82:1437–1447.

Applebaum, D. (2009). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, New York.

Arvanitis, L. G. et Afonja, B. (1971). Use of the generalized variance and the gradient projection method in multivariate stratified sampling. *Biometrics*, 27: 119–127.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1978). *Information and Exponential Families in Statistical Theory*. Wiley, New York.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1997). Normal inverse Gaussian distribution and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Journal of Statistics*, 24:1–13.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastics*, 2:41–68.

Boubacar Maïnassara, Y. et Kokonendji, C. C. (2014). On normal stable Tweedie models and power-generalized variance functions of only one component. *TEST*, 23:585–606.

Caffarelli, L., Nirenberg, L. et Spruck, J. (1985). The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian. *Acta Mathematica*, 155:261–301.

Calabi, E. (1958). Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens. *The Michigan Mathematical Journal*, 5:105–126.

Casalis, M. (1996). The $2d + 4$ simple quadratic natural exponential families on $\mathbb{R}^d$. *The Annals of Statistics*, 24:1828–1854.

Cîrstea, F. C. et Trombetti, C. (2008). On the Monge-Ampère equation with boundary blow-up : existence, uniqueness and asymptotics. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2:167–186.

Crandall, M. G. et Lions, P.-L. (1987). Remarks on the existence and uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Illinois Journal of Mathematics*, 31:665–688.

Cuenin, J., Faivre, A. et Kokonendji, C. C. (2016a). On generalized variance of product of powered components and multiple stable Tweedie models. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. In press.

Cuenin, J., Jørgensen, B. et Kokonendji, C. C. (2016b). Simulations of full multivariate Tweedie with flexible dependence structure. *Computational Statistics*, 31:1477–1492.

Devroye, L. (1986). *Non-uniform Random Variate Generation*. Springer, New York.

Dunn, P. K. (2014). `R` package 'tweedie'. Rapport technique. http://cran.r-project.org/web/packages/tweedie/tweedie.pdf.

Dunn, P. K. et Smyth, G. K. (2008). Evaluation of Tweedie exponential dispersion model densities by Fourier inversion. *Statistics and Computing*, 18:73–86.

Edgeman, R. L. (1989). Inverse Gaussian control charts. *Austin Journal of Statistics*, 31:78–84.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2nd ed.* Wiley, New York.

Foster, S. D. et Bravington, M. V. (2013). A Poisson-gamma model for analysis of ecological non-negative continuous data. *Environmental and Ecological Statistics*, 20:533–552.

Furman, E. et Landsman, Z. (2007). Economic capital allocations for non-negative portfolios of dependent risks. *Austin Bulletin*, 38:601–619.

Furman, E. et Landsman, Z. (2010). Multivariate Tweedie distributions and some related capital-at-risk analyses. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46:351–361.

Ghribi, A. et Masmoudi, A. (2010). Characterization of multinomial exponential families by generalized variance. *Statistics and Probability Letters*, 80:939–944.

Guan, B. et Jian, H.-Y. (2004). The Monge-Ampère equation with infinite boundary value. *Pacific Journal of Mathematics*, 216:77–94.

Gutiérrez, C. E. (2001). *The Monge-Ampère Equation*. Birkhäuser, Boston.

Hassairi, A. (1992). La classification des familles exponentielles naturelles sur $\mathbb{R}^n$ par l'action du groupe linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 315:207–210.

Hassairi, A. (1993). Les $(d+3)$ G-orbites de la classe de Morris-Mora de familles exponentielles de $\mathbb{R}^d$. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 317: 887–890.

Hassairi, A. (1999). Generalized variance and exponential families. *The Annals of Statistics*, 27:374–385.

Holgate, P. (1964). Estimation for the bivariate Poisson distribution. *Biometrika*, 51:241–287.

Ishii, H. (1984). Uniqueness of unbounded viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 33:721–748.

Ishii, H. et Lions, P.-L. (1990). Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations. *Journal of Differential Equations*, 83:26–78.

Jafari, A. A. (2012). Inferences on the ratio of two generalized variances: independent and correlated cases. *Statistical Methods and Applications*, 21:297–314.

Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London.

Johnson, N. L., Kotz, S. et Balakrishnan, N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions*. Wiley, New York.

Jörgens, K. (1954). Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. *Mathematische Annalen*, 127:130–134.

Jørgensen, B. (1997). *The Theory of Dispersion Models*. Chapman & Hall, London.

Jørgensen, B. (2013). Construction of multivariate dispersion models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 27:285–309.

Jørgensen, B. et Martínez, J. R. (2013). Multivariate exponential dispersion models. *In* Kollo, T., éditeur : *Multivariate Statistics: Theory and Applications*, pages 73–98, Singapore. Proceedings of the IX Tartu Conference on Multivariate Statistics & XX International Workshop on Matrices and Statistics, World Scientific Publishing.

Jørgensen, B., Martínez, J. R. et Tsao, M. (1994). Asymptotic behaviour of the variance function. *Scandinavian Journal of Statistics*, 21:223–243.

Kendal, W. S. (2014). Multifractality attributed to dual central limit-like convergence effects. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 401:22–23.

Kendal, W. S. et Jørgensen, B. (2011). Tweedie convergence : a mathematical basis for taylor's power law, $1/f$ noise and multifractality. *Physical Review E*, 84:066120.

Kokonendji, C. C. et Masmoudi, A. (2006). A characterization of Poisson-Gaussian families by generalized variance. *Bernoulli*, 12:371–379.

Kokonendji, C. C. et Masmoudi, A. (2013). On the Monge-Ampère equation for characterizing gamma-Gaussian model. *Statistics and Probability Letters*, 83: 1692–1698.

Kokonendji, C. C., Moypemna-Sembona, C. C. et Sioké Rainaldy, J. (2015). A characterization of multivariate normal stable Tweedie models and their associated polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 288:159–168.

Kokonendji, C. C. et Pommeret, D. (2001). Estimateurs de la variance généralisée pour des familles exponentielles non gaussiennes. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 332:351–356.

Kokonendji, C. C. et Pommeret, D. (2007). Comparing UMVU and ML estimators of the generalized variance for natural exponential families. *Statistics*, 41:547–558.

Kokonendji, C. C. et Seshadri, V. (1996). On the determinant of the second derivative of Laplace transform. *The Annals of Statistics*, 24:1813–1827.

Kotz, S., Balakrishnan, N. et Johnson, N. L. (2000). *Continuous Multivariate Distributions. Vol. 1: Models and Applications, 2nd ed.* Wiley, New York.

Koudou, A. E. et Pommeret, D. (2002). A characterization of Poisson-Gaussian families by convolution-stability. *Journal of Multivariate Analysis*, 81:120–127.

Lazer, A. C. et McKenna, P. J. (1996). On singular boundary value problems for the Monge-Ampère operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 197:341–362.

Letac, G. et Mora, M. (1990). Natural exponential families with cubic variance functions. *The Annals of Statistics*, 18:1–37.

Louati, M., Masmoudi, A. et Mselmi, F. (2015). Multivariate normal α-stable exponential families. *Mediterranean Journal of Mathematics*. In press.

Madan, D. B. et Seneta, E. (1990). The variance gamma (V.G.) model for share market returns. *The Jounrnal of Business*, 63:511–524.

Morris, C. N. (1982). Natural exponential families with quadratic variance functions. *The Annals of Statistics*, 10:65–80.

Moypemna Sembona, C. C. (2016). *Caractérisations des modèles multivariées de stables-Tweedie multiples*. Thèse de doctorat.

Muir, T. (1960). *A Treatise on the Theory of Determinants*. Dover, New York.

Nisa, K., Kokonendji, C. C. et Saefuddin, A. (2015). Characterizations of multivariate normal-Poisson model. *Journal of the Iranian Statistical Society*, 14:37–52.

Pogorelov, A. V. (1972). On the improper convex affine hyperspheres. *Geometriae Dedicata*, 1:33–46.

Pommeret, D. (1998). Estimateur de variance minimum et familles exponentielles naturelles. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 326:619–623.

Salani, P. (1998). Boundary blow-up problems for Hessian equations. *Manuscripta Mathematica*, 96:281–294.

Sato, K.-I. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. University Press, Cambridge.

Shi, P. (2016). Insurance ratemaking using a copula-based multivariate Tweedie model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016:198–215.

Smyth, G. K. et Jørgensen, B. (2002). Fitting Tweedie's compound Poisson model to insurance claims data : dispersion modelling. *Austin Bulletin*, 32:143–157.

Taylor, L. R. (1961). Aggregation, variance and the mean. *Nature*, 189:732–735.

R Development Core Team (2014). R: a language and environment for statistical computing. Rapport technique, R Foundation for Statistical Computing, Vienna.

Tweedie, M. C. K. (1984). An index which distinguishes between some important exponential families. *In* Gosh, J. K. et Roy, J., éditeurs : *Statistics: applications and new directions*, pages 579–604, Calcutta. Proceedings of the Indian Statistical Golden Jubilee International Conference.

Wheeler, B. (2009). R package 'suppdists'. Rapport technique. http://cran.r-project.org/web/packages/SuppDists/SuppDists.pdf.

Wilks, S. S. (1932). Certain generalizations in the analysis of variance. *Biometrika*, 24:471–494.

Ølgård, T. A., Hanssen, A., Hansen, R. E. et Godtliebsen, F. (2005). EM-estimation and modelling of heavy-tailed processes with the multivariate normal inverse Gaussian distribution. *Signal Processing*, 85:1655–1673.