



HAL
open science

Composites périodiques fonctionnels pour l'absorption vibroacoustique large bande

Kevin Billon

► **To cite this version:**

Kevin Billon. Composites périodiques fonctionnels pour l'absorption vibroacoustique large bande. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université de Franche-Comté, 2016. Français. NNT : 2016BESA2018 . tel-01458153

HAL Id: tel-01458153

<https://theses.hal.science/tel-01458153>

Submitted on 6 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



SPIM

Thèse de Doctorat



UFC

école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Composites périodiques fonctionnels
pour l'absorption vibroacoustique
large bande

■ KEVIN BILLON

SPIM

Thèse de Doctorat

UFC

école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Thèse présentée par

Kévin BILLON

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR

DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

spécialité : Sciences pour l'Ingénieur

COMPOSITES PÉRIODIQUES FONCTIONNELS POUR L'ABSORPTION VIBROACOUSTIQUE LARGE BANDE

Soutenue le 22 novembre 2016 devant le jury composé de :

Président du jury	Abdelkrim KHELIF	CNRS, FEMTO-ST (Besançon), France
Rapporteurs	Anne-Christine HLADKY	CNRS, IEMN (Lille), France
	François GAUTIER	LAUM, Univ. du Maine (Le Mans), France
Examineurs	Hervé LISSEK	LTS2, EPFL (Lausanne), Suisse
	Simon CHESNÉ	LAMCOS, INSA (Lyon), France
Directeurs	Morvan OUISSE	FEMTO-ST, ENSMM (Besançon), France
	Émeline SADOULET-REBOUL	FEMTO-ST, UFC (Besançon), France
	Manuel COLLET	CNRS, LTDS (Lyon), France

REMERCIEMENTS

La thèse est la continuité universitaire du master recherche et d'après le dictionnaire c'est une « Proposition théorique, opinion, position sur quelque chose dont on s'attache à démontrer la véracité ». Ceci représente la définition sur le papier, en réalité on se retrouve dans un laboratoire de recherche. Pour atteindre l'objectif de « soutenir sa thèse », un certain nombre de personnes sont là pour nous aider dans cette expérience professionnelle de jeune chercheur. Je tiens à remercier un certain nombre de personnes, qui ont contribué à m'aider pendant ces trois années de thèse au département mécanique appliquée.

Je souhaite remercier mes directeurs de thèse, Morvan Ouisse, Emeline Sadoulet-Reboul et Manuel Collet. Pendant mon master, je n'ai eu qu'un seul cours de 2h avec Morvan. A ce moment-là, je n'imaginai pas qu'il allait être mon directeur de thèse et j'appréciais déjà son très bon niveau scientifique. Pendant ma thèse, il a été le référent de mes travaux et nous avons souvent pu discuter pendant les réunions ou les différents déplacements en conférences. Emeline, responsable de la seconde année du master Mécanique et ingénieries que j'ai suivi, a assuré le cours de vibroacoustique avec une grande pédagogie, m'a aidé à obtenir mon stage de fin d'étude à Vibratec et m'a proposé une thèse. Nous avons pu discuter pendant la thèse lors de réunions scientifiques mais pas que, Emeline sait toujours trouver les mots justes dans les moments de doute. Manuel, étant à Lyon, a tout de même été très présent au DMA. Nous avons pu discuter implémentation numérique avec de l'analyse complexe, $\in \mathbb{C}$ pour Manu, pas toujours simple pour moi, je le remercie pour les détails et éclaircissements apportés.

Je tiens également à remercier Fabrizio Scarpa pour son accueil à l'université de Bristol. Il a été pendant 6 mois, mon « encadrant » anglais, avec qui j'ai pu avoir de nombreuses interactions. Je garde un très bon souvenir de cet échange tant du point de vue scientifique qu'humain.

Je remercie Abdelkrim Khelif qui a présidé mon jury de thèse, Anne-Christine Hladky et François Gautier qui ont rapporté mes travaux de thèse ainsi que Hervé Lissek et Simon Chesné, les deux examinateurs. La discussion, lors de ma soutenance de thèse, a été très interactive et constructive et vous y avez participé avec vos questions et remarques.

Le soutien scientifique de Gaël Chevalier, Vincent Placet et Fabien Amiot ont permis de répondre à un certain nombre d'interrogations numériques et expérimentales pendant cette thèse.

Cette thèse n'aurait été possible sans les conseils expérimentaux de Jean-Louis Renaud et Xavier Gabrion. Je remercie le personnel technique Vincent Tissot et Betty Baudinot pour l'usinage des pièces constituant le métamatériau. Le service informatique avec Clément Diebold pour la rapidité des interventions sur mon ordinateur et le cluster de calcul. L'administration, avec Christine, Isabelle et Delphine, est toujours présente.

Je remercie mon stagiaire Maxime Meuterlos qui m'a beaucoup aidé sur la réalisation du métamatériau et la mise en place du dispositif expérimental. Il a été autonome, brillant et je ne me fais aucun souci pour la réussite de son cursus universitaire. Merci à Gérard Michel et Sébastien Thibaud pour la métrologie et la découpe laser.

Mes amis et collègues m'ont permis d'évoluer dans un cadre de travail très agréable. Merci à Pauline, Thomas, Paul, Kévin, Romain, Gaël, Rémi et beaucoup d'autres. Merci à mes collègues du bureau 37H, Léandro, Emile, Titou, Roméo, Si Feng et Nico pour les pauses café et les moments partagés au RU.

Je tiens également à remercier mes colocs, Lanza, Emile et tout récemment Ryan, mon petit frère pour les différentes activités en rapport avec la vie en colocation. Les amis comme Pauline, Thomas et Julien, m'ont permis d'explorer tout un tas d'endroits, les forêts alentours, différents sommets des Alpes en bicyclette tout terrain ou à pied. Les cuisses de Lanza et le tandem sont infatigables.

La thèse est une aventure mais à côté de ça, il y a la vie de famille, je remercie mes parents, ma sœur Candice et mon frère Ryan pour leur soutien de toujours. Enfin, je remercie tout particulièrement Cécile, pour son temps, sa patience et son appui au quotidien.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	11
1 Éléments contextuels et bibliographiques	13
1.1 Introduction : quelques exemples de matériaux architecturés	14
1.1.1 Métamatériaux / Cristaux phononiques	14
1.1.2 Matériaux auxétiques	15
1.1.3 Matériaux hiérarchiques	16
1.2 Propagation d’ondes élastiques	18
1.2.1 Définitions	18
1.2.2 Spécificités des structures périodiques	21
1.3 Méthodes d’analyse de la propagation d’ondes dans les structures pé- riodiques	22
1.3.1 Théorème de Floquet-Bloch	22
1.3.2 Méthodes de résolution	22
1.4 Application à l’étude de la propagation des ondes dans une chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts	24
1.5 Application à l’étude de la propagation d’ondes dans un guide d’ondes bidirectionnel infini	27
1.5.1 Présentation de la structure	27
1.5.2 Dispersion	28
1.6 Conclusions	30
2 Métamatériau auxétique obtenu par perforations hiérarchiques	33
2.1 Géométrie du réseau perforé, auxétique et hiérarchique	34
2.2 Propriétés mécaniques statiques dans le plan - Homogénéisation	36
2.3 Propriétés dynamiques	41
2.3.1 Analyse de dispersion	41
2.3.2 Structure finie	51
2.4 Confrontation expérimentale	54
2.4.1 Réalisation du métamatériau	54
2.4.1.1 Faisabilité	55
2.4.1.2 Détermination des propriétés mécaniques du polymé- thacrylate de méthyle (PMMA)	56
2.4.1.3 Usinage	57

TABLE DES MATIÈRES

2.4.2	Dispositif expérimental	58
2.4.3	Analyse vibratoire expérimentale - Essais en conditions de contraintes planes	61
2.4.4	Confrontation calculs-essais	61
2.4.4.1	Analyse des résultats	61
2.4.4.2	Analyse critique	61
2.5	Conclusions	65
3	Outils numériques pour la simulation de la propagation d'ondes dans les structures périodiques amorties	67
3.1	Introduction	68
3.1.1	Analyse de la propagation d'ondes soumise à une excitation harmonique dans un matériau périodique amorti	68
3.1.2	Calcul des relations de dispersion en régime libre	69
3.2	Méthode du "Shift cell operator"	72
3.2.1	Présentation	72
3.2.2	Implémentation numérique	74
3.2.3	Problème direct et adjoint	74
3.3	Apports méthodologiques	76
3.3.1	Vitesse de groupe	76
3.3.2	Critères de tri pour distinguer une onde propagative d'une onde évanescente	78
3.3.3	Validation de la méthode sur un cas conservatif	78
3.3.4	Suivi de branches	79
3.3.5	Convergence de maillage	81
3.3.6	Résultats en milieu amorti	86
3.4	Conclusions	90
4	Métamatériau avec interface polymère hautement dissipative	91
4.1	Présentation du métamatériau	92
4.1.1	Dimensionnement du polymère	92
4.1.2	Modèle viscoélastique	93
4.2	Propriétés dynamiques	95
4.2.1	Analyse de dispersion	95
4.2.2	Structure finie	100
4.3	Confrontation expérimentale	103
4.3.1	Réalisation du métamatériau	103
4.3.1.1	Éléments de base	103
4.3.1.2	Assemblage	103
4.3.2	Dispositif expérimental	104
4.3.3	Analyse vibratoire expérimentale - Essais en température . . .	106
4.3.4	Confrontation calculs-essais	106
4.4	Conclusions	114
	Conclusions générales et perspectives	117

A Résultats complémentaires pour le métamatériau avec interface polymère hautement dissipative	123
A.1 Déformées numériques et expérimentales	123
A.1.1 25°C	123
A.1.2 90°C	126
Bibliographie	137
Listes des figures	146
Listes des tables	147

INTRODUCTION

Ce travail de thèse, inscrit dans le cadre d'un projet "Jeunes Chercheuses et Jeunes Chercheurs" intitulé COVIA et financé par l'ANR, s'intéresse à des dispositifs composites périodiques pour l'absorption vibroacoustique large bande. Il a été réalisé au sein du thème D-Smart (Dynamique des Structures et Matériaux ARchitecturés pour la vibroacousTique) du Département Mécanique Appliquée de l'institut FEMTO-ST, dans le périmètre du Labex ACTION "Smart systems embedded into matter".

L'objectif de ce projet est de proposer un ensemble d'outils d'aide à la conception et à la réalisation de composites à inclusions périodiques pour l'absorption des ondes vibratoires et acoustiques. Les applications visées sont essentiellement les parois absorbantes, avec un objectif d'atténuation largement supérieur aux dispositifs classiques grâce à l'optimisation de la structuration envisagée. Les structures développées permettront de créer des bandes de fréquences interdites par des effets d'interférences ondulatoires. Les dispositifs vont donc coupler l'effet de bandes interdites aux effets de dissipation intrinsèques aux matériaux utilisés.

Le travail de thèse proposé a pour objectif de développer la méthodologie de conception des composites périodiques utilisant des inclusions fonctionnelles : les effets d'anisotropie ou de couplages multiphysiques (thermiques) seront plus particulièrement investigués. Ces fonctionnalisations permettront soit d'améliorer les performances du dispositif en terme d'absorption large bande, soit de leur conférer de nouvelles propriétés (adaptabilité, accordabilité, absorption ...). La conception de ces structures fait appel à des techniques avancées de modélisation par éléments finis, incluant des phénomènes multiphysiques, des effets dissipatifs et la prise en compte de relations de périodicités multidimensionnelles. Par conséquent, nous proposons la mise en œuvre d'outils spécifiques pour modéliser efficacement les structures envisagées dans une boucle d'optimisation.

Les performances dynamiques des matériaux structurés à l'échelle macroscopique sont de premier intérêt pour de nombreuses applications d'ingénierie. Les méthodes utilisées actuellement sont basées, la plupart du temps, sur les méthodes dérivant de l'étude de la propagation d'ondes dans les cristaux où il n'y a quasiment pas de dissipation. À l'échelle de la dynamique des structures, les effets liés à l'amortissement doivent être inclus dans les analyses afin de prendre en compte la réalité physique et les ondes évanescences complexes induites par les inhomogénéités et les conditions aux limites.

Les objectifs généraux de cette thèse ont alors été définis ainsi :

- faire un bilan sur les méthodes d'analyse de la propagation d'ondes utilisées

- actuellement ;
- appliquer ces méthodes à un métamatériau afin d’appréhender son comportement large bande ;
- inclure les effets liés à l’amortissement dans les analyses via le développement d’outils spécifiques ;
- simuler le comportement d’un métamatériau dissipatif et adaptatif.

Ce manuscrit est structuré en quatre chapitres. Le premier présente le positionnement vis-à-vis de l’état de l’art et le contexte de l’étude. Les notions de métamatériaux, cristaux phononiques, matériaux auxétiques et hiérarchiques sont développées. Une brève introduction à la propagation des ondes dans les milieux élastiques est donnée avec une partie sur les spécificités liées aux structures périodiques. Ensuite, les méthodes d’analyse de la propagation d’ondes dans ces milieux sont présentées en s’appuyant dans un premier temps sur un exemple académique constitué d’une chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts, puis dans un second temps sur un exemple de guide d’onde bidirectionnel.

Le deuxième chapitre est consacré à la description des phénomènes ondulatoires se produisant dans un métamatériau comprenant des perforations rectangulaires, hiérarchiques et auxétiques. Une étude paramétrique sur la géométrie de ces perforations rectangulaires est effectuée en utilisant une technique numérique d’homogénéisation par éléments finis afin de comprendre le comportement macroscopique du milieu structuré. Cette approche est valable pour des réponses statiques et basses fréquences de la structure d’intérêt. Ensuite, pour une plage de fréquences plus élevée, une analyse de dispersion du système est menée, permettant de décrire les caractéristiques de propagation d’ondes dans la structure hiérarchique. Une confrontation avec les résultats expérimentaux est menée. La méthode de Floquet-Bloch est utilisée comme référence, cependant l’introduction d’amortissement dans les cas 2D et 3D n’est pas facile.

Le troisième chapitre est dédié aux outils numériques permettant la détermination des relations de dispersion dans les structures périodiques amorties, la méthode intitulée "Shifted-Cell Operator" est décrite. Celle-ci est basée sur une reformulation du problème des équations aux dérivées partielles, la périodicité est incluse dans le comportement global de la structure. Cette stratégie permet de résoudre le problème quelles que soient les évolutions en fréquence des propriétés de la cellule. De nouveaux éléments d’analyse dédiés permettent la compréhension des propriétés physiques du système dans un contexte de structures potentiellement fortement dissipatives.

Le dernier chapitre traite d’un cas d’application sur une structure périodique amortie. La structure en question est un métamatériau composite adaptatif mêlant aluminium et polymère hautement dissipatif. On cherche à combiner l’effet amortissant de ce polymère avec l’effet de coupure lié à la périodicité. Le comportement est décrit avec une analyse de la dispersion dans la structure infinie et une étude de la propagation d’ondes dans la structure finie. Enfin, une confrontation avec les résultats expérimentaux est menée.

Le document se clôt avec l’exposé des conclusions et perspectives associées à ces travaux.

ÉLÉMENTS CONTEXTUELS ET BIBLIOGRAPHIQUES

Sommaire

1.1	Introduction : quelques exemples de matériaux architecturés	14
1.1.1	Métamatériaux / Cristaux phononiques	14
1.1.2	Matériaux auxétiques	15
1.1.3	Matériaux hiérarchiques	16
1.2	Propagation d'ondes élastiques	18
1.2.1	Définitions	18
1.2.2	Spécificités des structures périodiques	21
1.3	Méthodes d'analyse de la propagation d'ondes dans les structures périodiques	22
1.3.1	Théorème de Floquet-Bloch	22
1.3.2	Méthodes de résolution	22
1.4	Application à l'étude de la propagation des ondes dans une chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts . . .	24
1.5	Application à l'étude de la propagation d'ondes dans un guide d'ondes bidirectionnel infini	27
1.5.1	Présentation de la structure	27
1.5.2	Dispersion	28
1.6	Conclusions	30

PRÉAMBULE

Un métamatériau est un matériau architecturé permettant de contrôler la propagation d'ondes. Un métamatériau est dit périodique lorsque sa structuration spatiale consiste en la répétition d'un même motif . Cette architecture est commune dans le

domaine des métamatériaux, aussi est-il naturel de se référer aux techniques d'analyse des structures périodiques pour les étudier. Le sujet intéresse les chercheurs de diverses branches de la physique, notamment la vibroacoustique, depuis de nombreuses années, l'objectif étant de concevoir des structures possédant des propriétés que les structures conventionnelles ne possèdent pas. Les lecteurs intéressés par les origines, les travaux en cours et les perspectives sur le sujet pourront se référer à l'article de synthèse [Hussein 14] ainsi qu'à la discussion [Mace 14] qui couvrent les aspects les plus importants de ce sujet.

Dans ce chapitre, les notions de métamatériaux, cristaux phononiques, matériaux auxétiques et hiérarchiques sont développées. Les notions liées à la propagation des ondes dans les milieux élastiques sont introduites ainsi que les spécificités liées aux structures périodiques. Ensuite, les méthodes d'analyse de la propagation d'ondes dans ces milieux sont présentées avec un exemple d'une chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts suivi d'un exemple de guide d'onde bidirectionnel.

1.1 INTRODUCTION : QUELQUES EXEMPLES DE MATÉRIAUX ARCHITECTURÉS

1.1.1 MÉTAMATÉRIAUX / CRISTAUX PHONONIQUES

Un métamatériau est un matériau artificiel conçu pour contrôler et manipuler les ondes dans des gaz, des liquides ou des solides. Dans ce travail, on s'intéresse uniquement aux ondes élastiques. Un métamatériau possède des propriétés élastodynamiques particulières que l'on ne retrouve pas dans un matériau naturel. Le terme est apparu en 1999, cependant la physique régissant son fonctionnement a été élaborée dans les années 1960 par le physicien Viktor Veselago [Veselago 68]. Il a fallu attendre les années 2000 pour voir la première réalisation expérimentale [Pendry 00, Veselago 06]. Les métamatériaux mécaniques ont récemment été définis comme une nouvelle classe de matériaux possédant une topologie structurelle capable d'apporter de nouvelles fonctionnalités [Kadic 13a] en changeant leur rigidité, leur géométrie ou en intégrant des oscillateurs ou des matériaux intelligents. L'architecture multi échelle [Lee 12], des feuilles pliées en "zig-zag" [Eidini 15], des réseaux pentamode [Kadic 13b], des résonateurs distribués [Huang 09, Nouh 15], des matériaux magnétiques intelligents [Grima 13], des poutres avec connectivités accordables [Wang 15], des réseaux de cylindres silicones [Oudich 11], des lentilles plates (super lentilles) [Al-Lethawe 12] et des amortisseurs non-linéaires auxétiques (à coefficient de Poisson négatif) [Ma 13] sont quelques exemples de métamatériaux.

Un cristal phononique est un métamatériau possédant une structure périodique, composé d'éléments identiques se répétant spatialement à intervalles réguliers. La structuration périodique est utilisée pour modifier la propagation des ondes acoustiques dans le matériau, ce qui permet de doter celui-ci de propriétés élastiques différentes. Historiquement, les cristaux phononiques ont été introduits afin d'étendre au domaine des ondes élastiques des phénomènes mis en évidence lors de la propagation

des ondes électromagnétiques dans les cristaux photoniques. Lorsque la photonique et la phononique se croisent et qu'il y a modification de la propagation des ondes élastiques et optiques, on utilise le vocable de cristal phoXonique.

Dans certaines bandes de fréquences, les ondes ne peuvent se propager dans le cristal, il est alors commun d'appeler cela bande interdite (band gap en anglais). Ce phénomène peut se produire de deux manières différentes : l'interférence de Bragg [Bragg 15] ou la résonance locale. La première se produit lorsque la longueur d'onde coïncide avec la longueur caractéristique du réseau périodique. Le phénomène de résonance locale se produit quant à lui lorsque la fréquence de l'onde correspond à une fréquence de résonance du résonateur.

La structuration périodique de la matière peut empêcher les ondes de se propager, mais également peut conduire à d'autres propriétés comme le fait de confiner une onde ou le fait de la guider suivant une direction particulière ou encore de guider suivant un chemin de propagation choisi. Ces phénomènes se produisent à une longueur d'onde plus grande que celle du cristal.

Un exemple de cristal phononique peut être observé dans les jardins madrilènes, il s'agit d'une sculpture de Eusebio Sempere, [Martinezsala 95] et son équipe ont pu mettre en évidence des propriétés de filtrage sonore (figure 1.1).



FIGURE 1.1 – Sculpture de Eusebio dans un jardin madrilène : celle-ci se comporte comme un cristal phononique.

1.1.2 MATÉRIAUX AUXÉTIQUES

Les matériaux auxétiques [Evans 00, Bückmann 14] possèdent un coefficient de Poisson négatif [Lakes 87], caractéristique d'une grande variation de volume inhabituelle dans la direction transverse lorsque le matériau est soumis à une traction uniaxiale (figure 1.2). Les solides et les structures auxétiques ont été étudiés pour leurs propriétés acoustiques et leurs applications phononiques [Ruzzene 05, Spadoni 06, Sparavigna 07]. Une structure plane auxétique peut être obtenue en perforant la matière. La présence de perforations possédant des géométries particulières permet

d'obtenir un coefficient de Poisson négatif dans le plan, elles peuvent être elliptiques [Bertoldi 10] ou rhombiques [Grima 00, Grima 10].

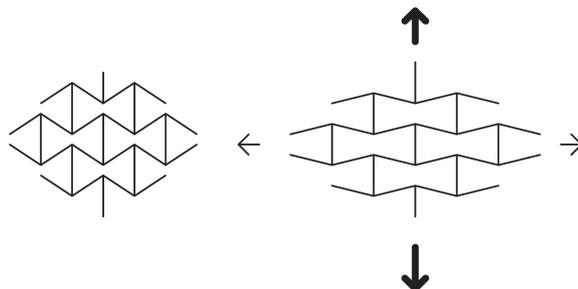


FIGURE 1.2 – Exemple de nid d’abeille auxétique.

1.1.3 MATÉRIAUX HIÉRARCHIQUES

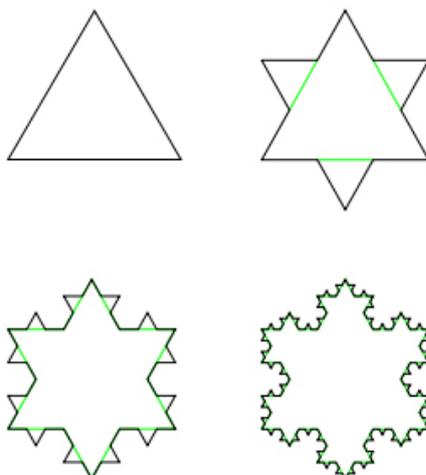


FIGURE 1.3 – Autosimilarité - Flocon de Koch.

Des configurations de réseaux hiérarchiques auxétiques, sur des structures planes ou cylindriques, peuvent être obtenues avec l’utilisation de motifs perforés auto similaires [Gatt 15] (figure 1.3). Une approche similaire a également été utilisée avec la réalisation de fentes orthogonales fractales [Cho 14], de motifs Kagome (figure 1.4) ou d’un réseau centrosymétrique [Shan 15, Mizzi 15]. L’introduction d’une hiérarchie dans les solides poreux est reconnue depuis longtemps comme un moyen d’améliorer les propriétés mécaniques en flambement et en rigidité des matériaux [Lakes 93, Taylor 11, Sun 13], et des travaux récents ont examiné l’utilisation de réseaux hiérarchiques de découpes tant pour contrôler le comportement statique que dynamique [Tang 15]. La propagation d’ondes dans les réseaux fractals est intéressante. Des

phénomènes de localisation ont par exemple été observés dans des inclusions périodiques fractales d'un réseau rempli de fluide [Norris 08]. On retrouve des triangles de Sierpinski (figure 1.5) ou des arrangements semi-fractals [Castiñeira-Ibáñez 14]. Ils permettent la création de larges bandes interdites basses fréquences [Lim 15]. [Tang 15] suggère que l'utilisation des perforations pourrait constituer une stratégie intéressante pour concevoir des matériaux avec des bandes interdites extrêmement adaptables en particulier à des fréquences basses. De plus, la réalisation de ces métamatériaux 2D est facilitée par les techniques de découpe ou d'usinage sur machine à commande numérique.

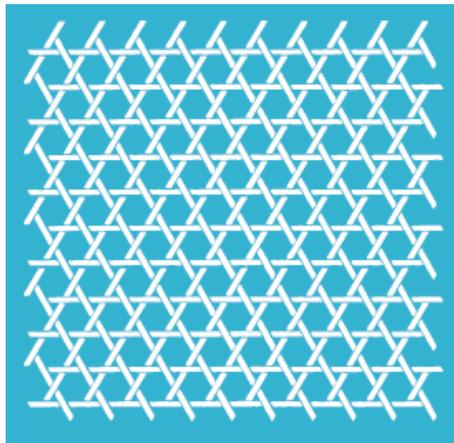


FIGURE 1.4 – Motifs Kagome.

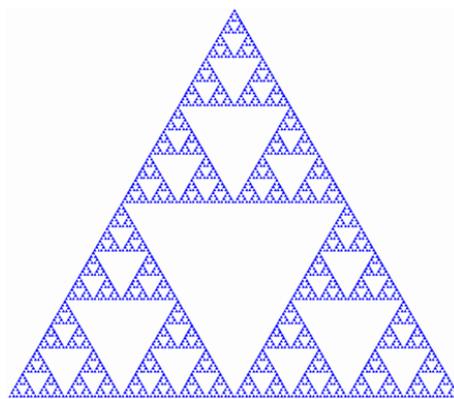


FIGURE 1.5 – Triangle de Sierpinski.

1.2 PROPAGATION D'ONDES ÉLASTIQUES

La structuration de matériaux à l'échelle macroscopique conduit à des performances dynamiques intéressantes, et connaît un regain d'intérêt pour le contrôle des vibrations, comme en témoigne l'augmentation du nombre d'articles à ce sujet que ce soit pour les dispositifs passifs [Scarpa 13a] ou actifs [Collet 14, Collet 11a, Huang 13, Tateo 14].

1.2.1 DÉFINITIONS

L'onde physique est le phénomène de propagation d'une perturbation locale du milieu sans mouvement de la matière, on parle de transport d'énergie sans transport de matière [Graff 75].

Les ondes élastiques peuvent se propager, soit selon un mode longitudinal (onde de traction-compression), si la vibration du milieu est parallèle au sens de propagation, soit selon un mode transversal (onde de cisaillement), si la vibration du milieu est perpendiculaire au sens de propagation. Dans un milieu fluide, seules les ondes longitudinales peuvent se propager. Elles se propagent alors en comprimant et en détendant des tranches de fluide, de proche en proche. Dans un solide, on peut trouver les deux types d'ondes (longitudinales et transversales). On parle d'ondes de volume quand des ondes planes se propagent dans un milieu de dimensions latérales grandes par rapport aux longueurs d'onde du faisceau d'ondes élastiques, et d'ondes de surface quand les ondes sont guidées à l'interface libre du milieu semi-infini.

Les tremblements de terre se propagent avec des ondes de volume sous la forme d'ondes longitudinales et d'ondes transversales (plus lentes). Lord Rayleigh a démontré en 1885 qu'ils se propagent aussi en ondes de surface et à une vitesse inférieure à celle des ondes de volume transversales. D'autres ondes de surface ont par la suite été identifiées par d'autres géophysiciens telles que les ondes de Love, les ondes de Lamb ou encore les ondes de Stoneley [Graff 75].

Les ondes de volumes sont souvent classées en deux catégories, les ondes de compression ou ondes P (primaire), et les ondes de cisaillement, ou ondes S (secondaire). Pour les ondes de surface, on retrouve les ondes de Love, résultant d'interférences entre les ondes S (équivalent d'une onde S dans le plan) et les ondes de Rayleigh, résultant d'une interférence entre les ondes S et P (figure 1.6).

La vitesse de phase C_ϕ d'une onde monochromatique, possédant une seule fréquence dans son spectre, est liée à sa longueur d'onde λ_ℓ et à sa fréquence f , elle est définie par la relation suivante :

$$C_\phi = \lambda_\ell \times f. \tag{1.1}$$

Dans un matériau homogène isotrope, dont les caractéristiques élastodynamiques sont la masse volumique ρ_c et les coefficients de Lamé λ et μ , les ondes longitudinales se déplacent à la vitesse

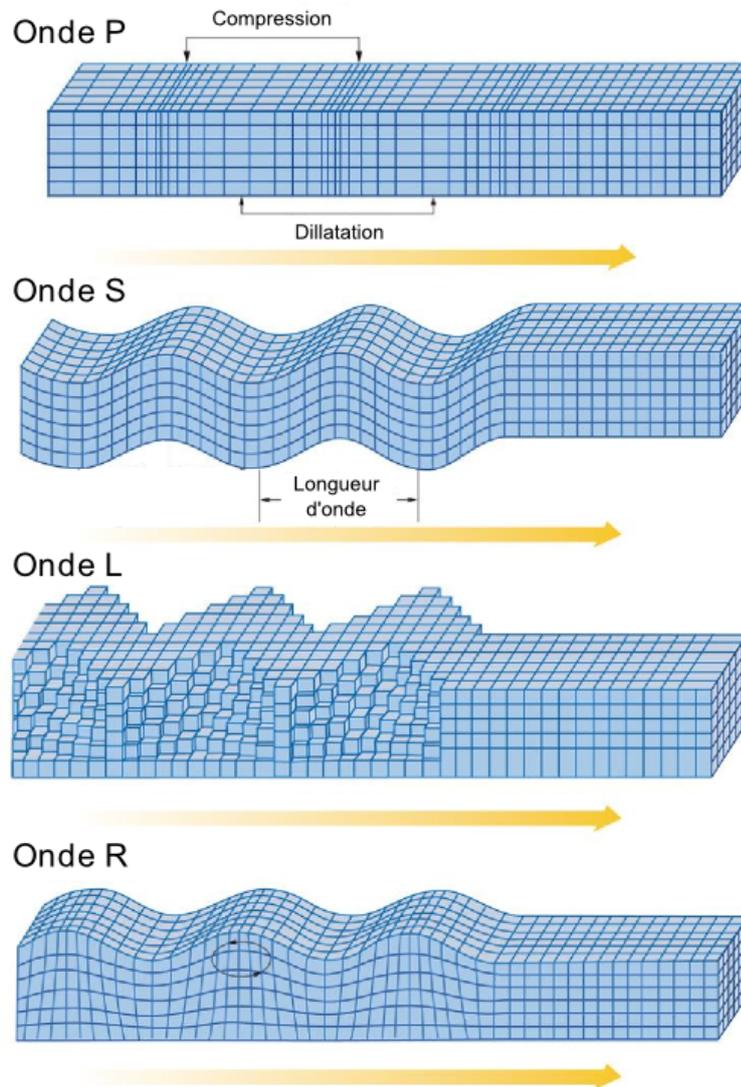


FIGURE 1.6 – Types d’ondes. Ondes de volume : onde de compression (onde P), onde de cisaillement (onde S). Ondes de surface : onde de Love (onde L) et onde de Rayleigh (onde R) [Bolt 76].

$$C_{\phi\ell} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_c}}, \quad (1.2)$$

et les ondes transversales à une vitesse plus faible

$$C_{\phi t} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_c}} < C_{\phi\ell}. \quad (1.3)$$

La dispersion est le phénomène affectant une onde se propageant dans un milieu dit "dispersif". Lorsque la vitesse de propagation des ondes est indépendante de la

fréquence, le milieu est dit "non dispersif". Dans un milieu dispersif, la vitesse de propagation des ondes dépend de la fréquence. On rencontre ce phénomène pour tous types d'ondes, comme les ondes électromagnétiques, la lumière par exemple (figure 1.7), les ondes acoustiques et les ondes mécaniques. On peut également définir la relation de dispersion qui est une relation entre la pulsation ω et le nombre d'onde k , le tracé de cette relation est appelé diagramme de dispersion.

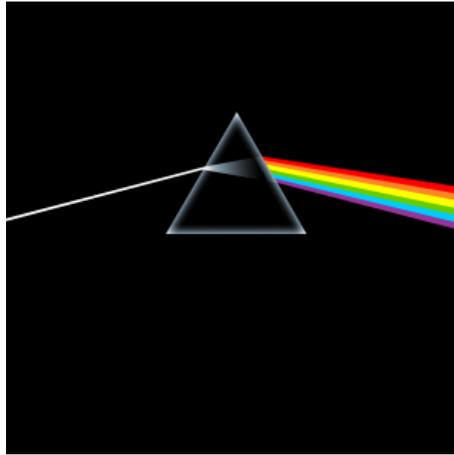


FIGURE 1.7 – Dispersion de la lumière par un prisme. Pink Floyd - Dark side of the moon 1973.

Nous pouvons associer à une onde qui se propage, deux vitesses d'onde : la vitesse de phase et la vitesse de groupe. La vitesse de phase C_ϕ est le rapport de la fréquence par le nombre d'onde ($k = \frac{2\pi}{\lambda_\ell}$) d'une onde monochromatique (une seule fréquence), elle correspond à la vitesse de déplacement des fronts d'ondes ayant la même phase :

$$C_\phi = \frac{\omega}{k}. \quad (1.4)$$

Pour une propagation d'onde non monochromatique, une représentation de l'onde en paquets d'ondes est plus appropriée et on définit alors la vitesse de groupe. Elle correspond à la vitesse de déplacement de l'enveloppe de l'onde ou de l'énergie :

$$C_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (1.5)$$

Ces deux vitesses sont égales dans le cas d'un milieu non dispersif, toutes les ondes du paquet d'ondes se propagent à la même vitesse. C'est le cas pour les ondes acoustiques dans l'air et les ondes de traction/compression. Ce n'est pas le cas pour les ondes de flexion, elles sont dispersives, les deux vitesses ne sont plus égales. Ces notions de vitesses sont définies en l'absence d'amortissement et nous y reviendrons, dans le chapitre 3, au cas dissipatif.

1.2.2 SPÉCIFICITÉS DES STRUCTURES PÉRIODIQUES

Les structures périodiques possèdent des propriétés spécifiques en termes de propagation d'ondes. À titre d'exemple, Newton a étudié la propagation du son dans l'air [Brillouin 53], il a conclu que le son se propage dans l'air comme une onde élastique dans un réseau périodique de masses-ressorts.

Une structure est définie par sa géométrie dans l'espace physique de coordonnées $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ et de la matrice $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]$ contenant les vecteurs du réseau \mathbf{r}_j , $j = 1, \dots, 3$ (figure 1.8a). À cet espace physique est associé un espace réciproque (figure 1.8b) avec la matrice $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 = \frac{2\pi}{r_1}, \mathbf{G}_2 = \frac{2\pi}{r_2}, \mathbf{G}_3 = \frac{2\pi}{r_3}]$ contenant les vecteurs de base \mathbf{g}_k , tel que

$$\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{g}_k = 2\pi \delta_{jk}, \quad (1.6)$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker. C'est l'espace des nombres d'ondes.

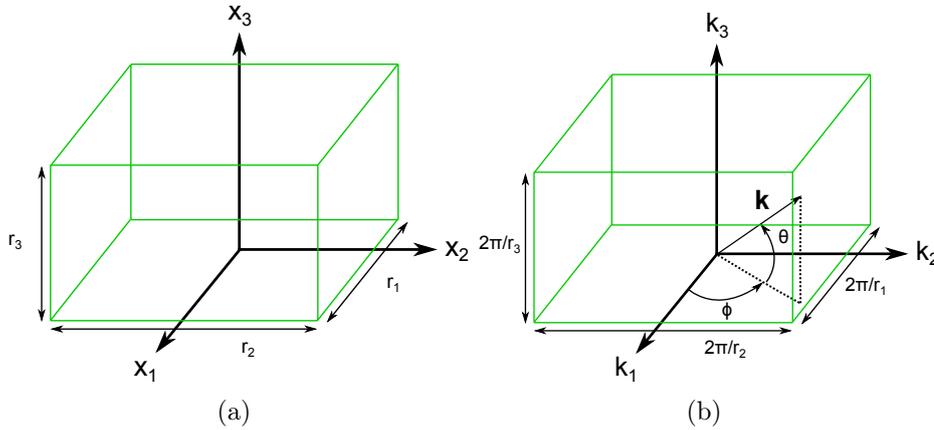


FIGURE 1.8 – a) Réseau physique. b) Réseau réciproque correspondant.

Le nombre d'onde est une fonction périodique de la fréquence, on peut choisir un intervalle contenant une seule période. Cette zone est appelée première zone de Brillouin (figure 1.9). La seconde zone correspond aux deux demi-périodes de part et d'autre de la première zone de Brillouin, et est construite de la même façon pour les zones d'ordre supérieur. Ces zones sont des régions du réseau réciproque. Si la cellule possède des symétries, la première zone de Brillouin peut se réduire à ce que l'on appelle la zone de Brillouin irréductible.

Il peut exister des bandes interdites et la prédiction de ces bandes interdites constitue souvent un objectif de conception. On peut faire cette analyse en se restreignant à la première zone de Brillouin. La représentation de la dispersion uniquement sur le contour de la première zone de Brillouin est suffisante pour l'observation des bandes interdites pour des systèmes réguliers [Joannopoulos 11]. Il convient de noter que cette convention est largement utilisée dans la littérature, mais aucune preuve formelle de sa validité n'est donnée, et donc les résultats obtenus doivent être examinés attentivement [Craster 12].

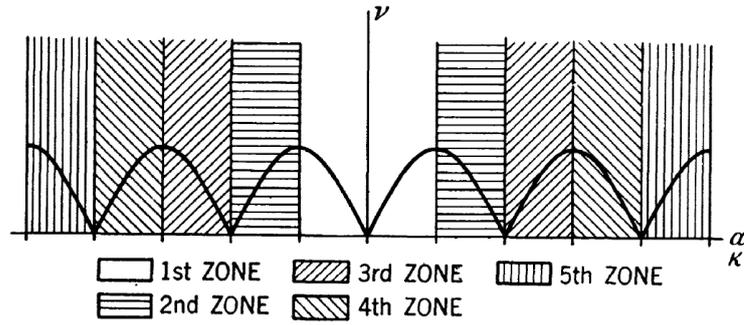


FIGURE 1.9 – Zones de Brillouin monodirectionnelles [Brillouin 53].

1.3 MÉTHODES D'ANALYSE DE LA PROPAGATION D'ONDES DANS LES STRUCTURES PÉRIODIQUES

Il existe un certain nombre de méthodes d'analyse de la propagation d'ondes dans les structures périodiques. Elles sont toutes basées sur le théorème de Floquet-Bloch. Les formulations de [Floquet 83] et [Bloch 29] permettent de respectivement traiter les systèmes unidirectionnel (1D) et bidimensionnel (2D) gouvernés par des équations différentielles à coefficients périodiques.

1.3.1 THÉORÈME DE FLOQUET-BLOCH

La méthode de Floquet est une méthodologie pour résoudre les équations de la forme

$$\frac{d\mathbf{w}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (1.7)$$

où $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ est la fonction inconnue, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice de fonctions périodiques continues de période \mathbf{r} , c'est à dire $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})$. Le théorème de Floquet impose que n'importe quelle solution peut s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions $\mathbf{v}(\mathbf{x})e^{k\mathbf{x}}$, où $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ est périodique de période \mathbf{r} et $k \in \mathbb{C}$ est un scalaire complexe. En supposant la réponse harmonique, la théorie fournit la manière de trouver $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ et k par la résolution d'un problème aux valeurs propres.

Le théorème de Bloch peut être considéré comme la généralisation multidimensionnelle du théorème de Floquet.

1.3.2 MÉTHODES DE RÉOLUTION

Le théorème ci-dessus peut être utilisé pour déterminer le diagramme de dispersion, généralement au travers de la résolution d'un problème aux valeurs propres qui sera détaillé dans le chapitre 3.

Comme citée précédemment, la relation de dispersion est le lien entre les pulsations ω et les nombres d'ondes k . On peut obtenir les pulsations en fonction des

nombres d'ondes ($\omega(k)$) et réciproquement, les nombres d'ondes en fonction des pulsations ($k(\omega)$).

Les méthodes de réceptance comme la méthode directe [Mead 70] et la méthode des matrices de transfert [Yong 89, Signorelli 88], ont été utilisées pour étudier la réponse libre et forcée dans les structures périodiques. Ensuite, des méthodes numériques ont été développées comme la méthode PWE (Plane Wave Expansion), la méthode FDTD (Finite Difference Time Domain), les méthodes éléments finis : la méthode SAFE (Semi-Analytical Finite Element) et la méthode WFE (Wave Finite Element).

La méthode PWE (Plane Wave Expansion) [Danner 02], méthode de décomposition en ondes planes, est une technique permettant de résoudre les équations de Maxwell en les transformant en un problème aux valeurs propres. Les solutions obtenues par la mise en œuvre de la méthode permettent de calculer les diagrammes de dispersion d'une structure périodique infinie. Les solutions de la méthode sont exactes cependant des modes parasites apparaissent si la base d'ondes n'est pas assez riche, la méthode peut rapidement conduire à des temps de calcul élevés. Les modes évanescents ne peuvent pas être calculés dans cette méthode $\omega(k)$.

La méthode EPWE (Extended Plane Waves Expansion) est une extension de la méthode PWE [Hsue 05, Laude 09]. Elle a été développée pour permettre de calculer facilement des nombres d'ondes complexes, tant dans les cas à deux dimensions isotropes que dans les cas 3D anisotropes. C'est une méthode $k(\omega)$.

Une alternative de la méthode PWE peut être la méthode FDTD (Finite Difference Time Domain) [Yee 66] qui est une méthode de calcul par différences finies dans le domaine temporel permettant de résoudre des équations différentielles dépendantes du temps. Son implémentation est simple, cependant pour garantir la stabilité, une discrétisation fine est nécessaire ce qui peut demander des ressources informatiques importantes.

Comme dans la mécanique en général, la méthode des éléments finis a été largement utilisée pour résoudre les problèmes liés à la propagation d'ondes dans structures périodiques, et qu'elle permet en particulier de traiter des géométries complexes [Orris 74]. Dans la méthode SAFE (Semi-Analytical Finite Element) et la méthode WFE (Wave Finite Element), un problème aux valeurs propres est établi en introduisant le champ de déplacement dans les équations de mouvement. Le problème aux valeurs propres est résolu pour une fréquence donnée et l'on obtient les nombres d'ondes. Le désavantage de la méthode SAFE est que les éléments finis utilisés ne sont pas standards [Gavrić 95]. Pour éviter le développement d'éléments finis spécifiques, la méthode WFE (Wave Finite Element) utilise des éléments standards. Mead [Mead 73, Mead 96] a formulé une méthode basée sur la résolution d'un problème aux valeurs propres avec la matrice de raideur et de masse du modèle éléments finis pour trouver les nombres d'ondes des modes propagatifs.

1.4 APPLICATION À L'ÉTUDE DE LA PROPAGATION DES ONDES DANS UNE CHAÎNE DIATOMIQUE 1D DE MASSES ET DE RESSORTS

Prenons un exemple simple de propagation d'ondes dans une chaîne diatomique 1D de masses et ressorts (figure 1.10a), toutes les cellules sont identiques, constituées d'une masse m_c et d'une raideur k_c .

L'application des méthodes $\omega(k)$ et $k(\omega)$ conduit au diagramme de dispersion présenté sur la figure 1.10b : les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1 , le tracé en bleu correspond au diagramme de dispersion de la méthode $\omega(k)$, le tracé en rouge correspond à celui de la méthode $k(\omega)$. On remarque que la méthode $\omega(k)$ ne permet pas d'obtenir d'informations sur les parties imaginaires des nombres d'ondes. La méthode $k(\omega)$ nous permet d'avoir les deux informations (partie réelle et partie imaginaire). Les résultats présentés sont obtenus par résolution des équations de mouvement, avec la méthode de la matrice de transfert pour lier la dynamique à gauche et à droite de chaque cellule élémentaire.

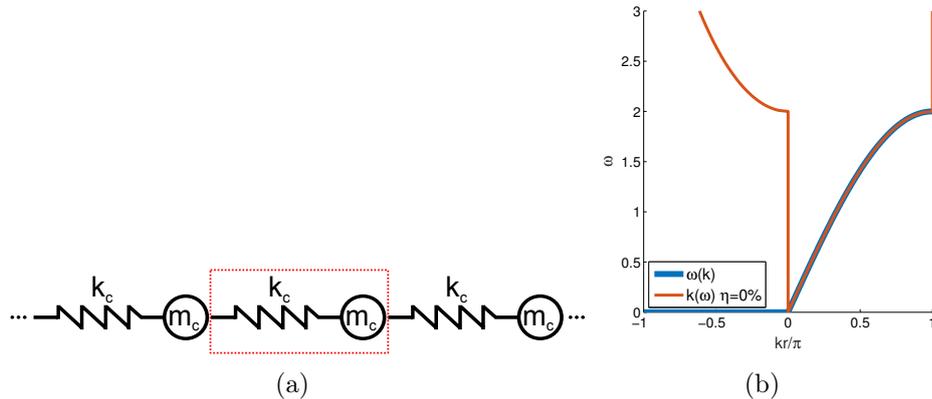


FIGURE 1.10 – a) Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts. Masses et raideurs identiques. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagramme de dispersion utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1 .

Considérons maintenant une chaîne 1D de masses et ressorts avec deux masses différentes (figure 1.11). La figure 1.12a présente le diagramme de dispersion de cette chaîne infinie : une bande interdite, centrée autour de la pulsation $1,2 \text{ rad/s}$, est observable. Les ondes ne peuvent pas se propager dans cette bande, la partie réelle des nombres d'ondes est nulle ou égale à π/r . On est en présence d'une onde évanescente. Afin de vérifier l'existence de la bande interdite identifiée sur une structure infinie dans le cas d'une structure finie, la fonction de réponse en fréquences d'un réseau de 10 cellules en conditions libres et soumis à un effort F longitudinal sur l'extrémité gauche a été calculée, l'observation s'effectue sur l'extrémité droite, elle est présentée

1.4 APPLICATION À L'ÉTUDE DE LA PROPAGATION DES ONDES DANS UNE
CHAÎNE DIATOMIQUE 1D DE MASSES ET DE RESSORTS

en figure 1.12b. Il apparaît effectivement que sur la même bande de fréquences que celle prédite par le diagramme de dispersion le niveau vibratoire est réduit.



FIGURE 1.11 – Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts. Masses et raideurs différentes.

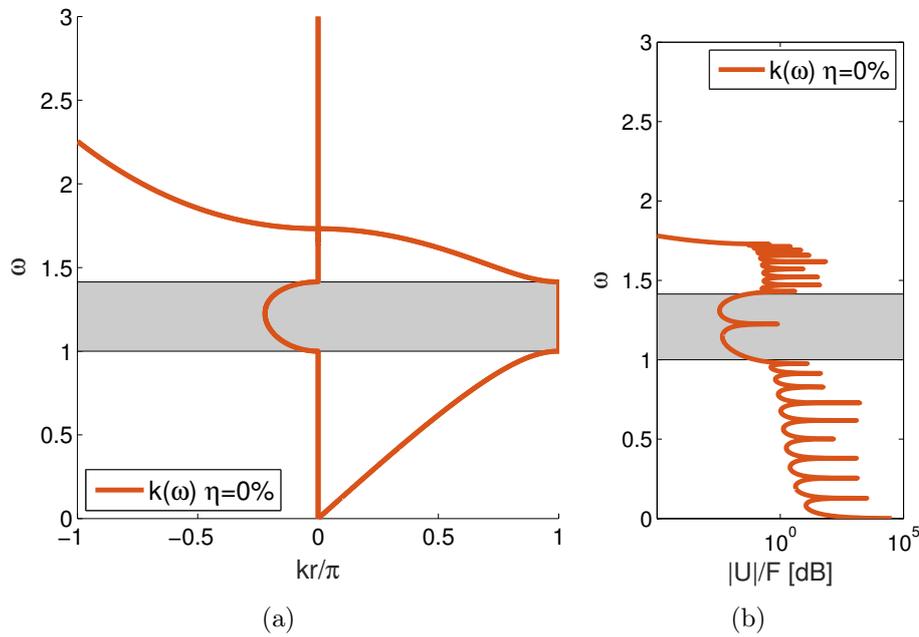


FIGURE 1.12 – a) Diagramme de dispersion d'une chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts sans amortissement. Les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1 . b) Fonction de réponse en fréquence d'une chaîne diatomique 1D de 10 masses et ressorts sans amortissement. Un rectangle gris met en évidence la bande interdite.

Considérons maintenant la même chaîne 1D de masses et ressorts que le premier exemple en présence de résonateurs internes (figure 1.13a). Nous retrouvons sur le diagramme de dispersion (figure 1.13b) la même allure que le diagramme de dispersion de la figure 1.10b, cependant la présence d'un résonateur interne a pour conséquence de séparer une branche en deux et d'ouvrir une bande interdite, appelée bande interdite résonante. Cette ouverture est centrée sur la fréquence propre du résonateur en question.

Les exemples simples sur les chaînes 1D de masses et ressorts permettent de comprendre les différents mécanismes permettant d'obtenir une bande interdite. Cependant, on est vite limité par la simplicité de la géométrie et le caractère mono-

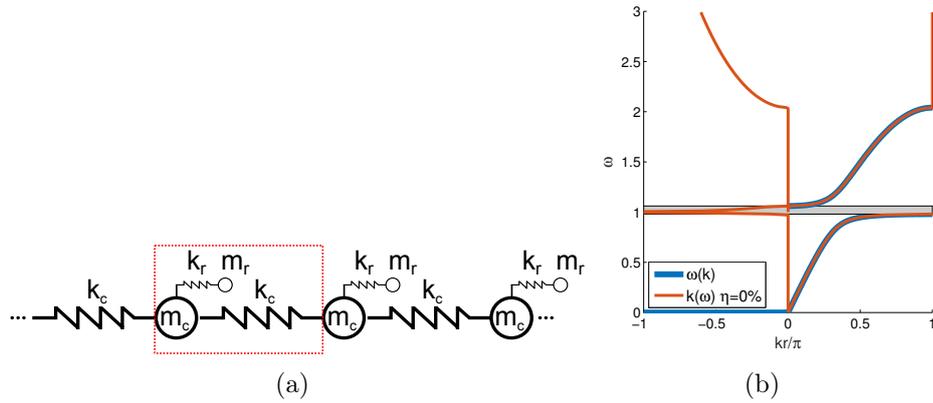


FIGURE 1.13 – a) Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts. Résonateurs internes. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagramme de dispersion utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties imaginaires des nombres d’ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1 .

directionnel. Dans la partie suivante, on présente une application sur une structure bidimensionnelle, à géométrie plus complexe.

1.5 APPLICATION À L'ÉTUDE DE LA PROPAGATION D'ONDES DANS UN GUIDE D'ONDES BIDIRECTIONNEL INFINI

1.5.1 PRÉSENTATION DE LA STRUCTURE

La structure considérée est un guide d'ondes bidirectionnel infini (figure 1.14), tirée de littérature [Wu 09]. Elle est constituée d'une plaque de 1 mm d'épaisseur et de plots cylindriques, de diamètres 7 mm et de hauteurs 10 mm, le tout en Aluminium 6063-T83 ($\nu = 0,33$, $E = 69 \text{ GPa}$ et $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$). La cellule élémentaire ainsi que son réseau réciproque associé sont présentés sur la figure 1.15.

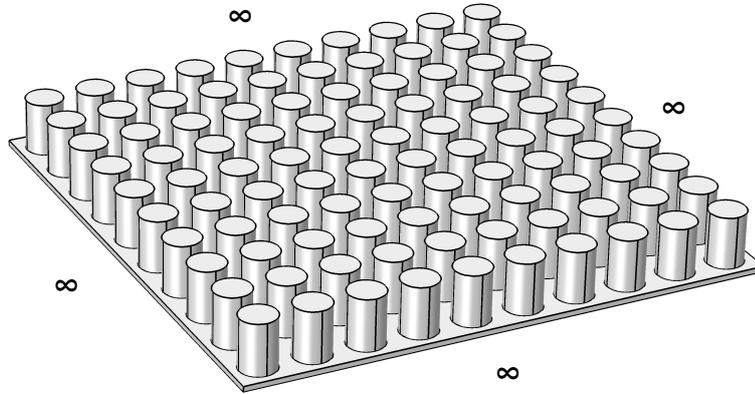


FIGURE 1.14 – Guide d'ondes bidirectionnel infini.

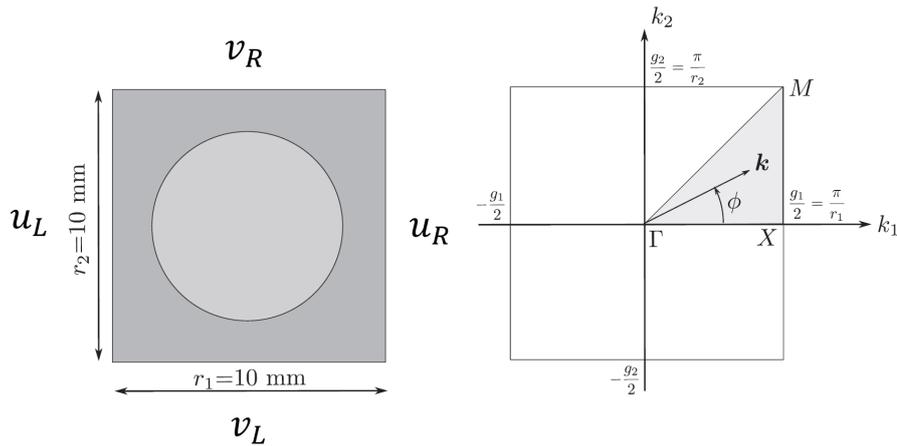


FIGURE 1.15 – Réseau réel et réseau réciproque associé (Zone de Brillouin irréductible en gris).

1.5.2 DISPERSION

La méthode de Floquet-Bloch est appliquée sur un modèle éléments finis de la structure pour la détermination du diagramme de dispersion de cette structure périodique. La loi de comportement du matériau est supposée linéaire, élastique et isotrope. Les conditions de périodicité sont définies sur les bords du domaine par $u_R = e^{-jk_x r} u_L$ et $v_R = e^{-jk_y r} v_L$ où u_R (resp v_R .) est le déplacement du bord de droite et u_L (resp. v_L) est le déplacement du bord de gauche dans la direction x (resp. y), k_x et k_y sont respectivement les nombres d'ondes dans les directions x et y .

L'équilibre dynamique du système est régi par le problème aux dérivées partielles

$$\rho(\mathbf{x})\omega^2 \mathbf{u} + \nabla \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.8)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ est le déplacement, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, \mathbf{C} est le tenseur d'élasticité, $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations, ρ est la masse volumique du matériau considéré et ω est la pulsation. Une étude paramétrique aux valeurs propres est menée utilisant le solveur Pardiso [Schenk 04], implémenté dans Comsol multiphysics 5.2, avec deux paramètres à savoir les nombres d'ondes $k_x \in [0 \pi/r]$ et $k_y \in [0 \pi/r]$.

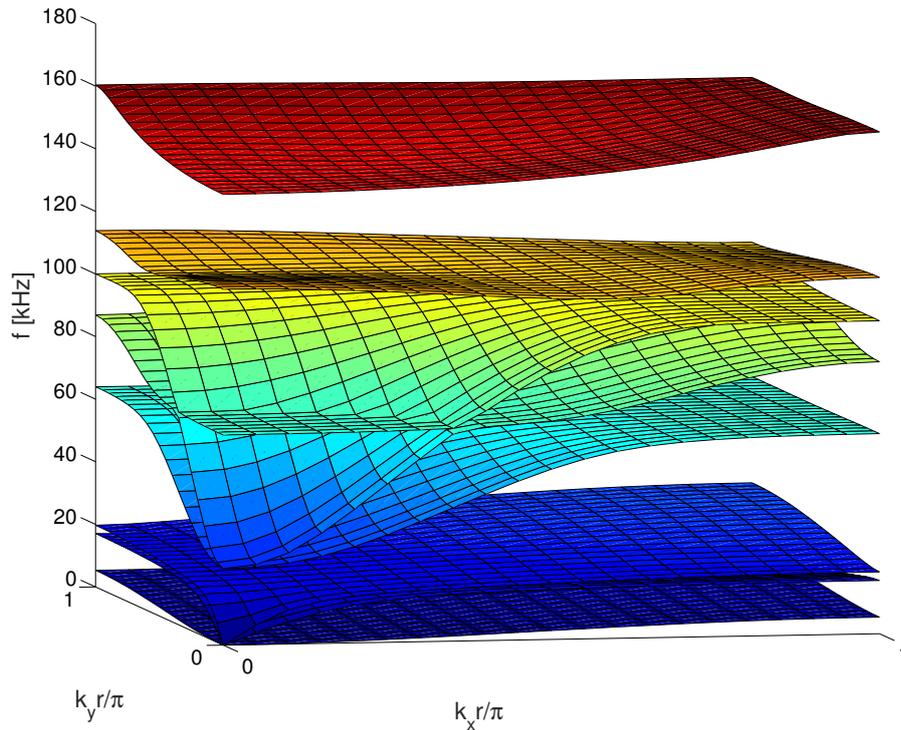


FIGURE 1.16 – Relation de dispersion sur la zone de Brillouin.

On cherche les bandes interdites dans un objectif de conception. Cette analyse est faite en se restreignant à la première zone de Brillouin. La figure 1.16 présente

un tracé 3D du diagramme de dispersion, il consiste en une représentation de la fréquence en fonction des nombres d'ondes dans les deux directions du plan x et y : ce mode de représentation qui permet de décrire intégralement la dynamique de la structure dans le domaine fréquentiel choisi, n'est pas standard dans la littérature. On se limite au contour de la première zone de Brillouin, certains points du contour (points de hautes symétries) sont définis par des lettres. Pour notre géométrie, il s'agit de Γ , X et M , Γ est le point au centre la zone de Brillouin, X est le centre d'une face et M est le coin d'une face. Ce chemin est utilisé pour la représentation 2D. Ce tracé appelé, comme décrit auparavant, diagramme de dispersion est plus commun (figure 1.17). Ce diagramme de bandes montre seulement une partie du système, au lieu de résoudre le problème aux valeurs propres dans la zone grisée (Zone de Brillouin irréductible) (figure 1.15), il faut le résoudre en suivant le chemin $\Gamma - X - M$ et en traçant l'évolution des fréquences propres on obtient seulement les informations sur le contour de la zone de Brillouin. Et pour des systèmes réguliers, dans l'objectif de trouver les bandes interdites, il est suffisant de ne regarder que les contours de la zone de Brillouin [Joannopoulos 11]. Nous ne caractérisons pas tout le comportement dynamique de la structure mais seulement le comportement dans des directions particulières de propagation (0° , 45° et de 0° à 45° pour un k_x fixé à π/r_1).

La structure possède des bandes interdites directionnelles et une bande interdite omnidirectionnelle entre 114 et 143 kHz indépendante de la direction de propagation de l'onde (figure 1.17).

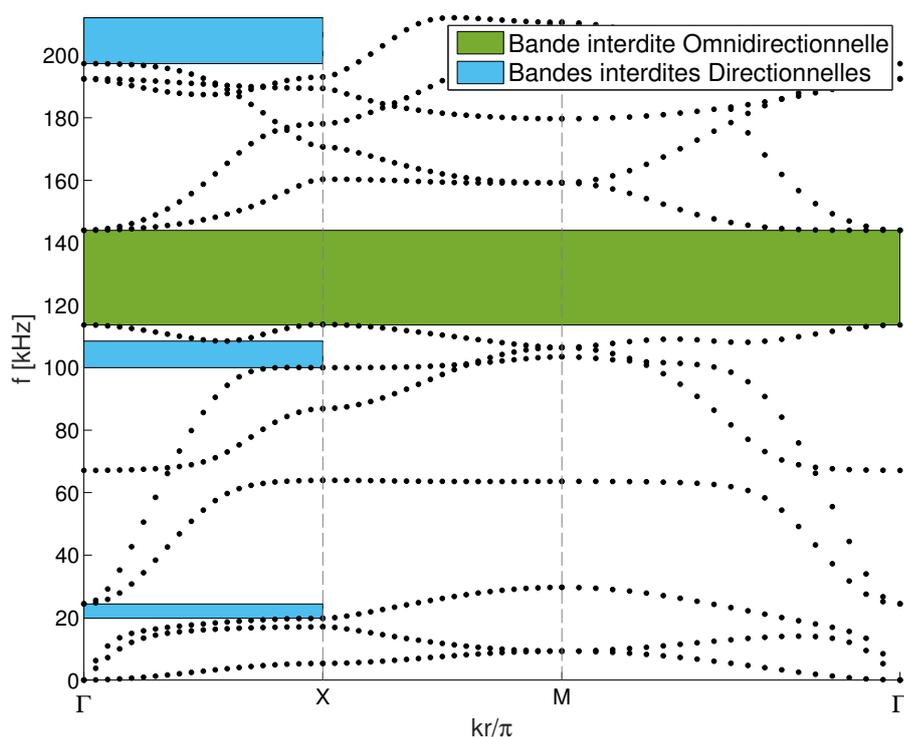


FIGURE 1.17 – Courbe de dispersion sur le contour de la zone de Brillouin. Bandes interdites complètes et partielles en vert et bleu respectivement.

1.6 CONCLUSIONS

Ce chapitre a permis de positionner le contexte de la thèse et d'introduire les principales notions et éléments bibliographiques concernant les métamatériaux, les cristaux phononiques, les matériaux auxétiques et les matériaux hiérarchiques. La propagation des ondes dans les milieux élastiques est traitée avec les spécificités liées aux structures périodiques. Des bandes interdites peuvent être trouvées en traçant les diagrammes de dispersion. Ce phénomène peut se produire de deux manières différentes : l'interférence de Bragg lorsque la longueur d'onde de l'onde incidente coïncide avec la longueur caractéristique du réseau périodique, ou la résonance locale lorsque la fréquence de l'onde correspond à la fréquence de résonance du résonateur. Les résonateurs locaux permettent d'avoir des bandes interdites plus basses fréquences que les bandes interdites de Bragg, résultant de l'interférence d'ondes. Les méthodes d'analyse de la propagation d'ondes dans ces milieux ont été présentées : leur application en guise d'illustration à deux structures consistant en une chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts, et un guide d'onde bidirectionnel a permis d'analyser les potentialités de ces approches et de mettre en évidence les principaux phénomènes en jeu.

Après ces applications sur ces structures issues de la littérature, le chapitre 2

présente une étude originale sur un métamatériau hiérarchique périodique, et une attention particulière est portée au lien entre hiérarchie et propriétés dynamiques de la structure.

MÉTAMATÉRIAU AUXÉTIQUE OBTENU PAR PERFORATIONS HIÉRARCHIQUES

Sommaire

2.1	Géométrie du réseau perforé, auxétique et hiérarchique	34
2.2	Propriétés mécaniques statiques dans le plan - Homogénéisation	36
2.3	Propriétés dynamiques	41
2.3.1	Analyse de dispersion	41
2.3.2	Structure finie	51
2.4	Confrontation expérimentale	54
2.4.1	Réalisation du métamatériau	54
2.4.2	Dispositif expérimental	58
2.4.3	Analyse vibratoire expérimentale - Essais en conditions de contraintes planes	61
2.4.4	Confrontation calculs-essais	61
2.5	Conclusions	65

PRÉAMBULE

Dans ce chapitre, un métamatériau auxétique obtenu par perforations hiérarchiques est étudié. La cellule unitaire de référence de ce chapitre est tirée de l'article [Slann 15], dans lequel elle est caractérisée en statique. On cherche à déterminer s'il y a un intérêt à utiliser ce type de métamatériau auxétique pour des applications vibratoires et à déterminer s'il y a un lien entre les propriétés dynamiques (notamment les bandes interdites) et le niveau de hiérarchie. La structure présente un effet auxétique dans le plan et toute l'étude va être réalisée dans le plan. Une étude paramétrique sur la géométrie de ces perforations rectangulaires est effectuée en utilisant une technique numérique d'homogénéisation par éléments finis afin de

comprendre le comportement macroscopique du milieu structuré. Cette approche est valable pour des réponses statiques et basses fréquences sur la structure d'intérêt. Ensuite, pour une plage de fréquences plus élevée, une analyse de dispersion du système est proposée, permettant de décrire les caractéristiques de propagation d'ondes dans la structure hiérarchique. Enfin, une confrontation avec les résultats expérimentaux est menée.

2.1 GÉOMÉTRIE DU RÉSEAU PERFORÉ, AUXÉTIQUE ET HIÉRARCHIQUE

La cellule unitaire du réseau perforé est représentée sur la figure 2.1, il s'agit du niveau de référence, le niveau 1 [Slann 15]. L'ensemble de la géométrie de la cellule unitaire est défini en utilisant seulement deux paramètres : le rapport $AR = a/b$ (dimension de la perforation centrale) et l'espacement entre deux perforations successives S . La cellule unitaire est carrée de dimension $r = a + b + 2S$ dépendante des paramètres précédents. La cellule unitaire possède une double symétrie dans le plan xy , l'une par rapport à l'axe horizontal et l'autre par rapport à l'axe vertical. Les différents niveaux hiérarchiques de la structure perforée (niveaux 2 et 3) sont réalisés en répétant la cellule unitaire de référence à une échelle inférieure, dans les quatre larges carrés comme le montre la figure 2.2.

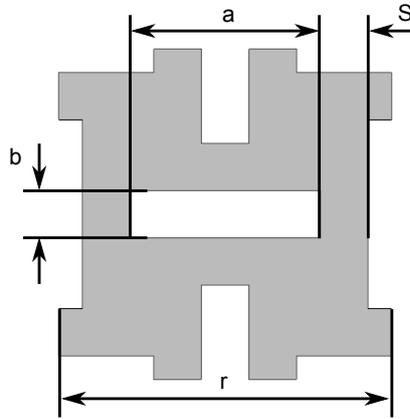


FIGURE 2.1 – Paramètres géométriques de la cellule élémentaire (niveau 1).

Le rapport $AR = 4$ est choisi arbitrairement dans un premier temps, tout le travail porte sur cette configuration. La variation de ce paramètre sera néanmoins discutée dans un second temps. Pour un rapport AR donné, égal à 4, la fraction volumique (ϕ) de la structure cellulaire (définie comme étant le rapport entre le volume des zones de vide et le volume total de la cellule unitaire) varie de façon significative

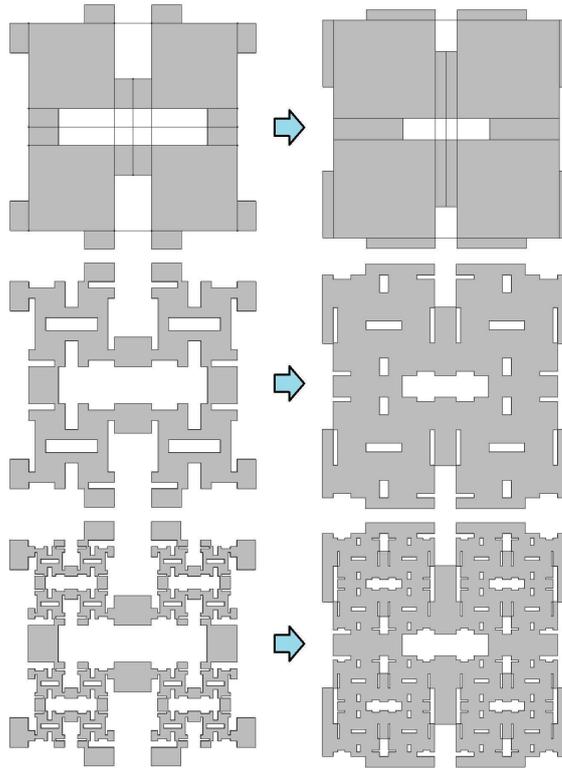


FIGURE 2.2 – Perforations rectangulaires, hiérarchiques, auxétiques aux niveaux 1, 2 et 3 avec $AR = 4$ variant de $S = 0,2$ à $S = 0,8$.

quand l'espace entre deux perforations successives S évolue (figure 2.3). Pour un paramètre S faible, la fraction volumique tend à augmenter avec le passage d'un niveau hiérarchique supérieur à l'autre, l'augmentation de 1,48 entre les niveaux 1 et 2 est plus significative que pour le passage du niveau 2 au niveau 3. Pour le niveau 1, par exemple, une diminution de 66,5 % de la fraction de volume entre $S = 0,2$ et $S = 0,8$ est observée. Il faut noter que dans ce travail, la fraction volumique est directement proportionnelle à la densité relative ρ/ρ_c , où ρ et ρ_c sont respectivement la densité de la structure cellulaire et la densité du matériau constituant la structure elle-même.

Dans la suite, on va montrer que les niveaux hiérarchiques supérieurs à 1 possèdent des propriétés mécaniques dans le plan différentes par rapport à la cellule unitaire de référence.

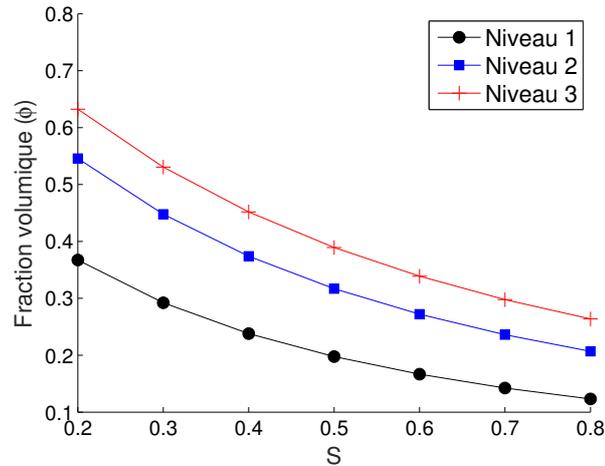


FIGURE 2.3 – Fraction volumique équivalente pour différentes valeurs de S aux niveaux 1, 2 et 3 avec un rapport AR donné de 4.

2.2 PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES STATIQUES DANS LE PLAN - HOMOGENÉISATION

Les propriétés mécaniques statiques dans le plan ont été déterminées en utilisant une approche par éléments finis appliquée à un quart de cellule unitaire. La procédure permettant l'estimation des modules d'Young dans le plan E_1 (figure 2.4a) et E_2 consiste à imposer des conditions d'appui sur les côtés internes du quart de cellule, un déplacement uniforme dans la direction du chargement (Δ_1 et Δ_2 respectivement dans la direction 1 pour E_1 et 2 pour E_2) et les nœuds appartenant aux éléments du côté non contraints sont couplés dans la direction transverse (déplacements de ces nœuds identiques dans la direction transverse) [Bezazi 05]. Les modules d'Young (E_1 et E_2) ont été calculés en moyennant les forces de réaction le long de la ligne soumise à la distribution uniforme, en calculant la contrainte résultante et en divisant par la déformation imposée correspondante. L'estimation des coefficients de Poisson dans le plan (ν_{12} et ν_{21}) a été réalisée en utilisant la déformation transversale issue du chargement uniaxial, puis par application de la définition classique du coefficient de Poisson à savoir $\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$, avec ε_i la déformation uniaxiale imposée le long de la direction i et ε_j la déformation résultante homogénéisée dans la direction j . Le module de cisaillement dans le plan (G_{12}) est quant à lui déterminé à partir d'un essai virtuel de cisaillement. Des conditions d'appui sont appliquées sur les côtés internes du quart de cellule et les côtés extérieurs sont soumis à une traction et une compression combinées [Salit 09] (figure 2.4b).

Des éléments finis quadratiques de type Serendip sont utilisés dans cette étude, ils possèdent deux degrés de liberté de translation et un modèle élastique linéaire de contraintes planes est utilisé. Pour les structures hiérarchiques, il faut utiliser une distribution de maillage régulière, elle permet d'avoir une convergence uniforme des

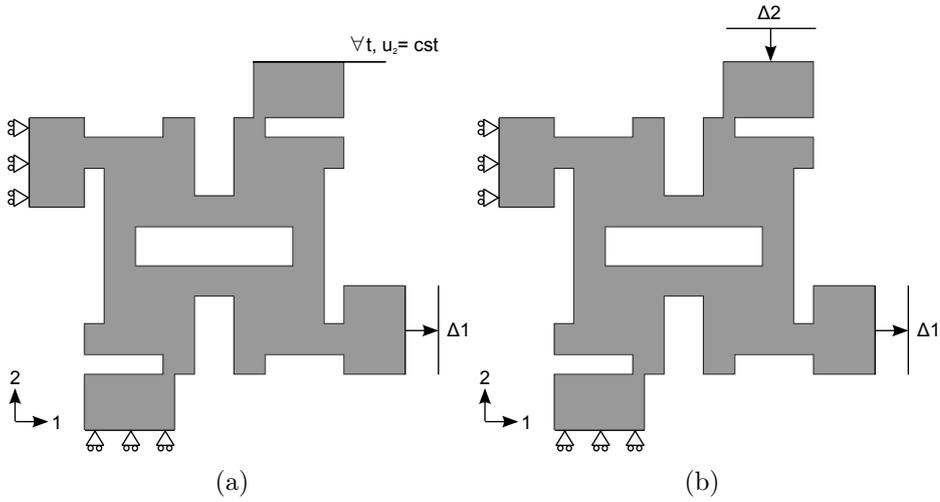


FIGURE 2.4 – a) Conditions aux limites pour l’essai virtuel de traction dans la direction 1, b) conditions aux limites pour l’essai virtuel de cisaillement biaxial appliqué à un quart de cellule au niveau 2.

forces et des déplacements à tous les niveaux. Pour cela, une étude préliminaire a été menée et des éléments de taille moyenne $S/4$ sont utilisés. Les résultats ont été initialement comparés avec des données expérimentales sur les perforations rectangulaires [Slann 15] où des différences de 1% et 2% sont observées sur le module d’Young et le coefficient de Poisson dans le plan. Tous les résultats ont été adimensionnés par le module d’Young E_c du matériau et par la densité relative ρ/ρ_c .

Les figures 2.5a, 2.5b, 2.5c et 2.5d présentent l’évolution des paramètres mécaniques normalisés en fonction de l’espacement entre 2 cellules S pour un rapport AR constant égal à 4. La structure perforée de niveau 1 est isotrope, l’introduction des niveaux hiérarchiques 2 et 3 rend la structure orthotrope ($E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}$). Le coefficient de Poisson du niveau 1 n’est pas toujours nul, pour des grandes valeurs de S , il tend à être nul voire légèrement positif (figure 2.5d). Aux niveaux hiérarchiques suivants (niveaux 2 et 3), la structure est auxétique pour toutes les combinaisons de paramètres envisagées. La hiérarchie augmente de manière significative le couplage entre les mouvements uniaxiaux et les rotations dans le plan et crée un coefficient de Poisson négatif dans le plan typique des structures chirales [Prall 97, Bacigalupo 14]. La raideur adimensionnée $(E_1/E_c)/(\rho/\rho_c)$ diminue de 99,2% pour $S = 0,2$ entre les niveaux 1 et 3, cette diminution est plus faible quand S tend vers 0,8 (figure 2.5a). Une tendance similaire peut également être observée dans le cas de la raideur adimensionnée $(E_2/E_c)/(\rho/\rho_c)$, bien qu’elle ne possède pas la même sensibilité à l’espacement entre 2 cellules S : pour des valeurs plus élevées de S , la rigidité entre les différents niveaux montre des différences, elle diminue dans tous les cas quand on augmente la hiérarchie (figure 2.5b).

Aux niveaux 2 et 3, des sauts dans les propriétés mécaniques sont observés en raison de la transition, la géométrie peut présenter des discontinuités de connectivités entre les parties des sous-unités de la cellule en raison de la stratégie particulière de

construction de la hiérarchie (figures 2.5).

Les figures 2.6a, 2.6b, 2.6c et 2.6d présentent l'évolution des paramètres mécaniques normalisés en fonction du ratio AR pour un espacement entre 2 cellules S constant égal à 0,2. Au niveau 1 et aux niveaux hiérarchiques suivants (niveaux 2 et 3), la structure est auxétique pour toutes les combinaisons de paramètres envisagées (figure 2.6d). La raideur adimensionnée $(E_1/E_c)/(\rho/\rho_c)$ diminue de 99,2% pour AR variant de 3 à 5,5 entre les niveaux 1 et 3, cette diminution est plus élevée quand AR tend vers 6 (figure 2.6a). Une tendance similaire peut également être observée dans le cas de la raideur adimensionnée $(E_2/E_c)/(\rho/\rho_c)$, bien qu'elle ne possède pas la même sensibilité à l'espacement entre 2 cellules S : pour des valeurs plus élevées de AR , le rapport de rigidité entre les niveaux 1 et 3 reste constant (figure 2.6b). La hiérarchie proposée permet de contrôler le coefficient de Poisson et l'orthotropie de la structure. Un haut niveau d'auxéticité peut être obtenu lorsque le niveau hiérarchique augmente.

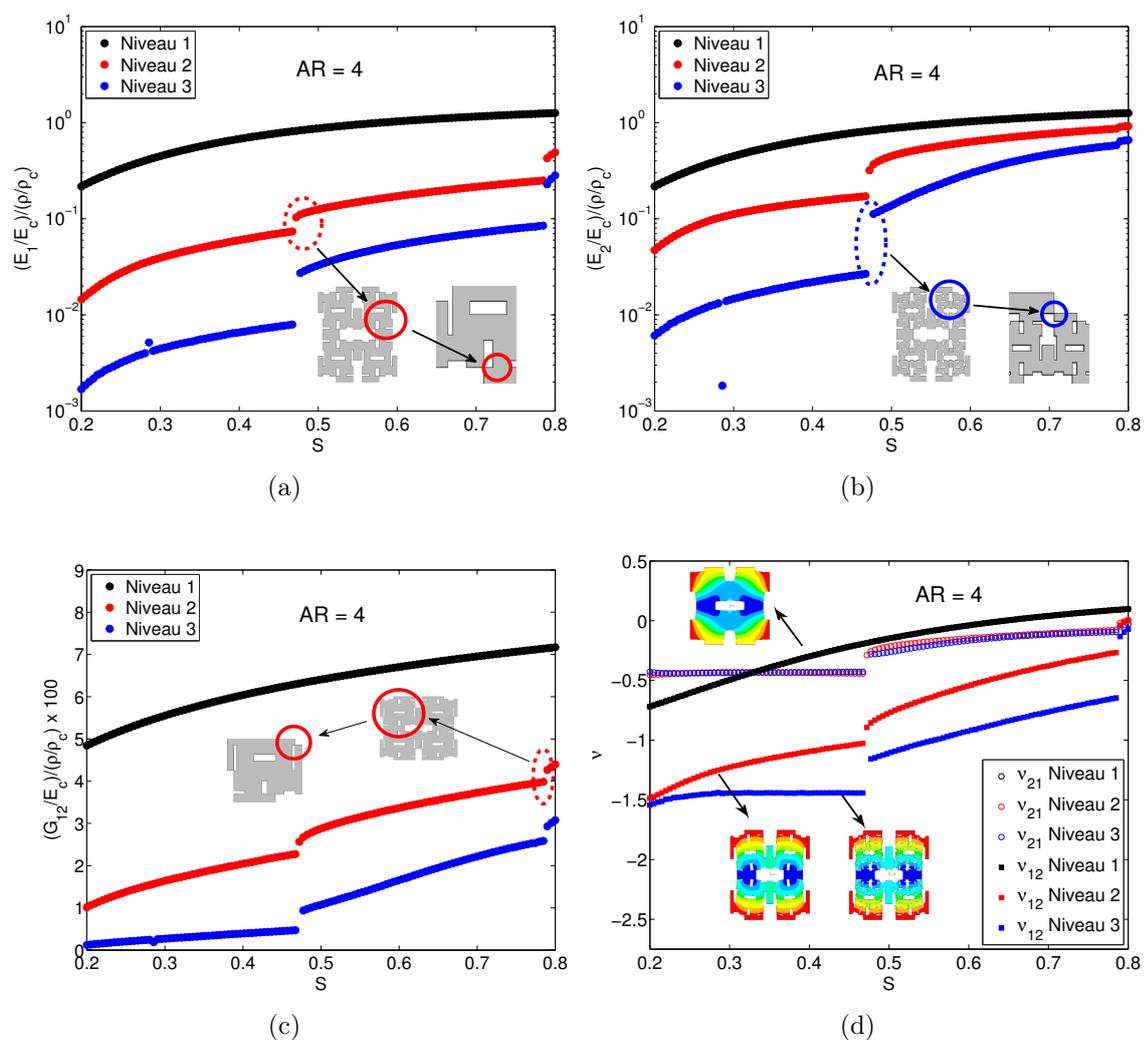


FIGURE 2.5 – a) Variation du module d'Young E_1 adimensionné, b) variation du module d'Young E_2 adimensionné, c) variation du module de cisaillement G_{12} adimensionné, d) variation des coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} par rapport à l'espacement entre 2 cellules S aux niveaux 1, 2 et 3 avec le paramètre AR égal à 4.

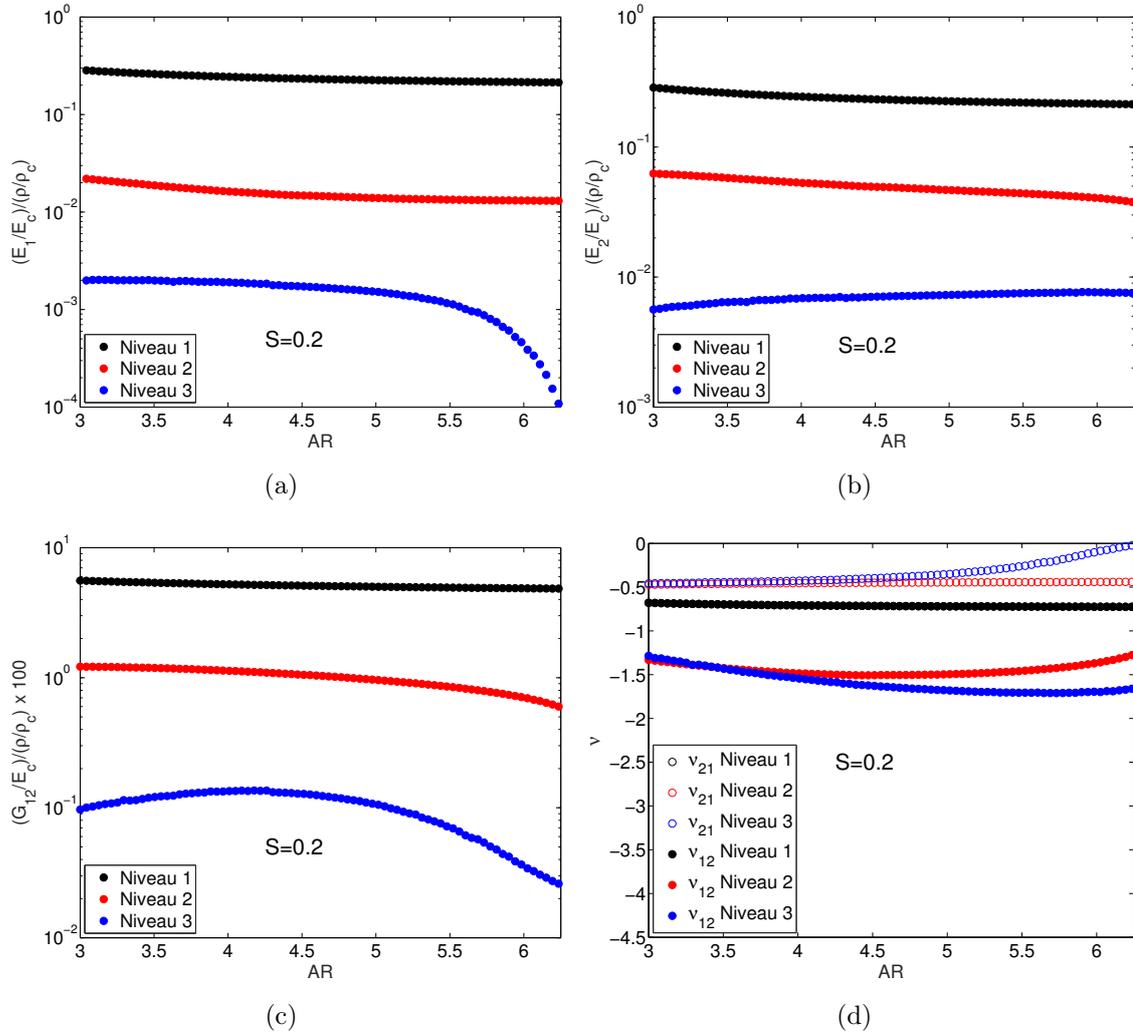


FIGURE 2.6 – a) Variation du module d'Young E_1 adimensionné, b) variation du module d'Young E_2 adimensionné, c) variation du module de cisaillement G_{12} adimensionné, d) variation des coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} par rapport au ratio AR aux niveaux 1, 2 et 3 avec le paramètre S égal à 0,2. Géométries de "transition" au niveau des sauts dans les propriétés mécaniques en gris, gradient de déplacement illustrant l'effet auxétique (déplacement nul en bleu, maximale en rouge).

2.3 PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES

2.3.1 ANALYSE DE DISPERSION

Dans un premier temps, on se propose d'utiliser les propriétés mécaniques homogénéisées déterminées précédemment pour déterminer les courbes de lenteur (inverse de la vitesse de groupe) à partir des équations de Christoffel dans des conditions de contraintes planes [Wolfe 05], qui dérivent de la solution des équations aux dérivées partielles du principe fondamental de la dynamique dans le cas d'un matériau orthotrope 2D [Nayfeh 95]. Le tenseur de rigidité homogénéisé \mathbf{C} de la structure est donné par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

En appliquant les équations de Christoffel, on obtient l'expression du tenseur d'ordre deux Λ [Nayfeh 95] :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \frac{C_{11} \cos^2 \theta + C_{66} \sin^2 \theta}{\rho}, \\ \Lambda_{12} &= \frac{(C_{12} + C_{66}) \cos \theta \sin \theta}{\rho}, \\ \Lambda_{22} &= \frac{C_{66} \cos^2 \theta + C_{22} \sin^2 \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

En annulant le déterminant de l'équation (2.2) on arrive à l'équation quadratique suivante :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\Lambda_{11} + \Lambda_{22} \pm \sqrt{(\Lambda_{11} - \Lambda_{22})^2 + 4\Lambda_{12}^2} \right). \quad (2.4)$$

La lenteur est ensuite calculée et normalisée :

$$s_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,2} \sqrt{\rho/C_{11}}}}. \quad (2.5)$$

Les valeurs des lenteurs de groupe normalisées du premier mode sont représentées sur les figures 2.7 et 2.8. Un faible espacement entre 2 cellules S a tendance à fournir une lenteur normalisée quasi circulaire au niveau 1, et des courbes à pentes quasi nulles pour les deux niveaux hiérarchiques suivants (niveaux 2 et 3) (figures 2.7a, 2.8a et 2.8b). Pour un grand espacement entre 2 cellules S (figure 2.7b), on observe des courbes à pentes quasi nulles pour les deux niveaux hiérarchiques mais également pour le niveau de référence (niveau 1), indépendant du ratio AR . Les

courbes à pentes quasi nulles ont tendance à appartenir à l'intervalle $l\pi/3 + m\pi$ ($l = 1, 2; m = 0, 1, \dots, n$), et sont liées au comportement orthotrope auxétique de la structure (figures 2.5a-2.6d). La lenteur normalisée quasi circulaire au niveau 1 observée sur les figure 2.7a, 2.8a et 2.8b appartient à des configurations de structures complètement auxétiques, tandis que, la lenteur normalisée au niveau 1 de la figure 2.7b appartient à une configuration où le coefficient de Poisson tend à être nul (figure 2.5d). La présence de courbes à pentes nulles, dans un intervalle de cosinus directeur de nombre d'onde, est considérée comme un indicateur d'une structure sujette à générer des solitons dans cette région. De plus, un comportement similaire a été observé dans des réseaux pyramidaux avec des pliages "Kirigami" [Scarpa 13b].

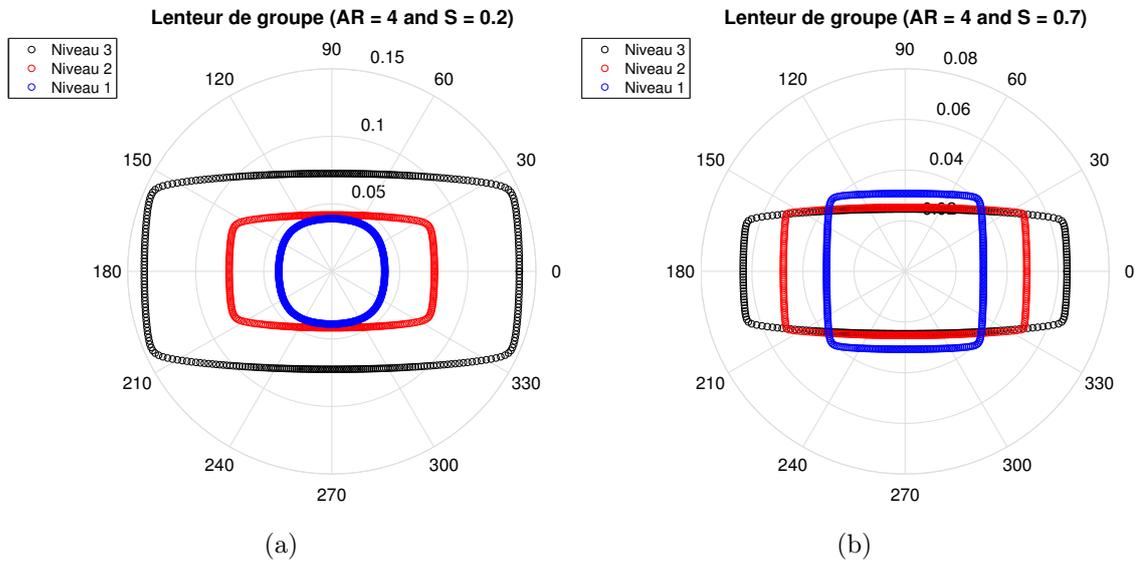


FIGURE 2.7 – Courbes de lenteur du premier mode normalisées pour les trois niveaux hiérarchiques avec le paramètre AR égal à 4 et a) $S = 0, 2$, b) $S = 0, 7$.

Les résultats, présentés jusqu'à présent, décrivent un milieu avec des propriétés mécaniques homogénéisées. Pour comprendre le comportement du métamatériau perforé sur une plage de fréquence étendue, il est nécessaire de s'affranchir de l'homogénéisation statique afin de prendre en compte la complexité de la propagation d'ondes dans cette géométrie particulière. L'analyse de la propagation d'ondes est donc effectuée en appliquant la méthode de Floquet-Bloch décrite dans le chapitre 1. Jusqu'à la fin du chapitre, un maillage éléments finis en contraintes planes est utilisé. Les modèles, pour les trois niveaux hiérarchiques, sont constitués d'éléments triangulaires (interpolation quadratique), avec un maillage variant en fonction du niveau hiérarchique. À titre d'exemple, pour une configuration avec $AR = 4$ et $S = 0, 2$, le modèle du niveau 1 possède 506 éléments qui augmente à 1770 et 7944 lors du passage aux niveaux 2 et 3 respectivement. Les conditions de périodicité sont définies sur les bords du domaine par $u_R = e^{-jk_x r} u_L$ et $v_R = e^{-jk_y r} v_L$ où u_R (resp v_R) est le déplacement du bord de droite et u_L (resp. v_L) est le déplacement du bord de gauche dans la direction x (resp. y), k_x et k_y sont respectivement les nombres d'ondes dans

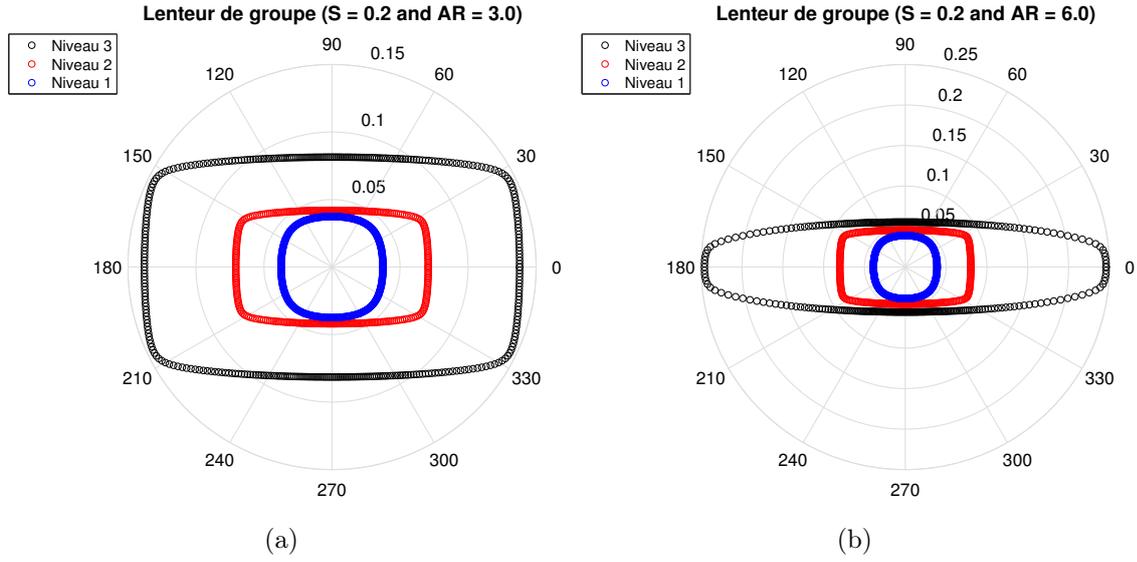


FIGURE 2.8 – Courbes de lenteur du premier mode normalisées pour les trois niveaux hiérarchiques avec le paramètre S égal à 0,2 et a) $AR = 3$, b) $AR = 6$.

les directions x et y . L'équilibre dynamique du système est régi par le problème aux dérivées partielles

$$\rho\omega^2\mathbf{u} + \nabla\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.7)$$

$$u_R = e^{-jk_x r} u_L, \quad (2.8)$$

$$v_R = e^{-jk_y r} v_L, \quad (2.9)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ est le déplacement, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, \mathbf{C} est le tenseur d'élasticité, $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations, ρ est la masse volumique du matériau considéré et ω est la pulsation. Une étude paramétrique aux valeurs propres est menée en utilisant le solveur Pardiso [Schenk 04], implémenté dans Comsol multiphysics 5.2, avec deux paramètres à savoir les nombres d'ondes $k_x \in [0 \pi/r]$ et $k_y \in [0 \pi/r]$. Le diagramme de dispersion est tracé sur le contour de la zone de Brillouin $\Gamma - X - M - Y - \Gamma$. Pour comparer les résultats de l'analyse aux valeurs propres à différents niveaux, la fraction volumique équivalente (ϕ) est calculée pour chaque couple de paramètres S et AR à chaque niveau. Ensuite, la première fréquence propre d'une plaque libre, dans les mêmes conditions (contraintes planes), de mêmes dimensions, possédant un coefficient de Poisson du matériau (ν_c), une masse volumique $\rho = \phi\rho_c$ et un module d'Young équivalent $E = E_c\phi^2$ [Gibson 99] est estimé. La fréquence utilisée pour la normalisation des résultats est appelée ω_p .

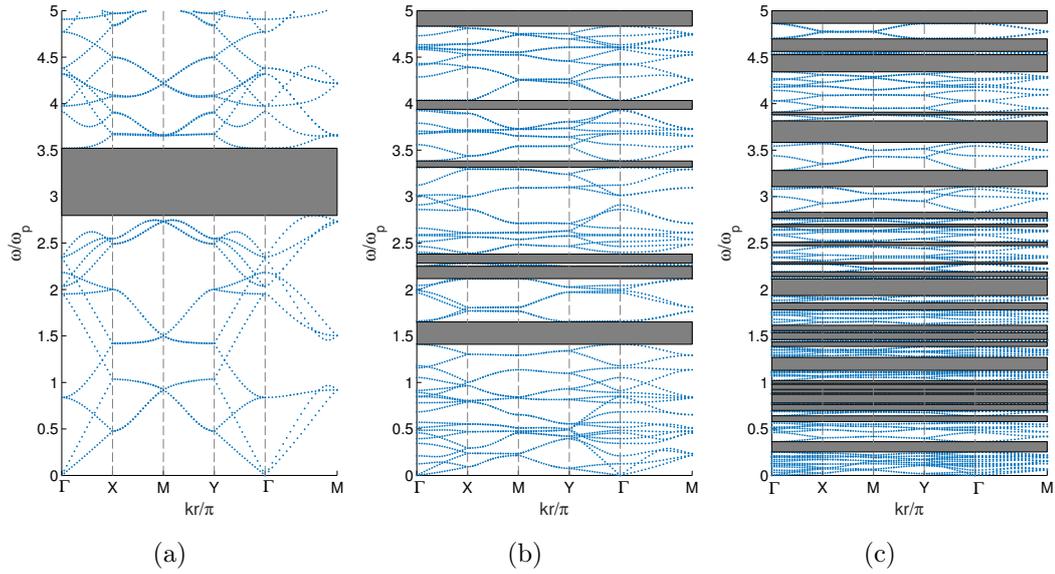


FIGURE 2.9 – Diagrammes de dispersion dans l’espace des nombres d’ondes du réseau avec $AR = 4$, $S = 0,3$ pour a) le niveau 1, b) le niveau 2, c) le niveau 3. Les rectangles grisés représentent les bandes interdites omnidirectionnelles.

Le diagramme de dispersion dans l’espace des nombres d’ondes du niveau 1 avec $AR = 4$ et $S = 0,3$ est présenté sur la figure 2.9a. On peut remarquer la présence d’un certain nombre de bandes interdites partielles, sur le contour de la zone de Brillouin dans la bande de fréquence normalisée. De plus, une bande interdite omnidirectionnelle importante existe autour de $\omega/\omega_p = 3$. Au niveau suivant, le nombre de bandes interdites omnidirectionnelles augmente, la bande interdite qui existait au niveau 1 semble, désormais, être centrée, aux alentours de $\omega/\omega_p \approx 2,2$, et une bande interdite plus basse fréquence est apparue (figure 2.9b). Au niveau 3, l’augmentation est significative, il y a une bande interdite à une fréquence normalisée inférieure à $\omega/\omega_p \approx 0,3$, et la présence d’une large bande interdite autour de $\omega/\omega_p = 3,8$ (figure 2.9c).

Il est intéressant d’observer la largeur totale de bandes interdites cumulées aux différents niveaux en tant que pourcentage de la bande de fréquence adimensionnée jusqu’à $\omega/\omega_p = 5$ pour le paramètre $AR = 4$ (figure 2.10). La largeur de bandes interdites cumulées diminue quand l’espacement entre 2 cellules S augmente, cette diminution est valable quel que soit le niveau hiérarchique considéré. Pour $S = 0,2$, le pourcentage passe de 14% à 16% au passage du niveau 1 au niveau 2, celui-ci passe à 42% pour le niveau 3. Pour le niveau 1, la largeur totale de bandes interdites cumulées diminue de manière significative quand S augmente et à compter de $S = 0,4$ aucune bande interdite n’est alors présente. Cette diminution est également présente pour les niveaux 2 et 3, bien qu’au niveau 3 pour $S = 0,8$, le pourcentage est quasiment du même ordre de grandeur qu’au niveau 1 pour $S = 0,4$.

Pour le paramètre $AR = 4$, la distribution des bandes interdites, quand le paramètre S évolue, varie de façon significative. Une seule bande interdite est présente

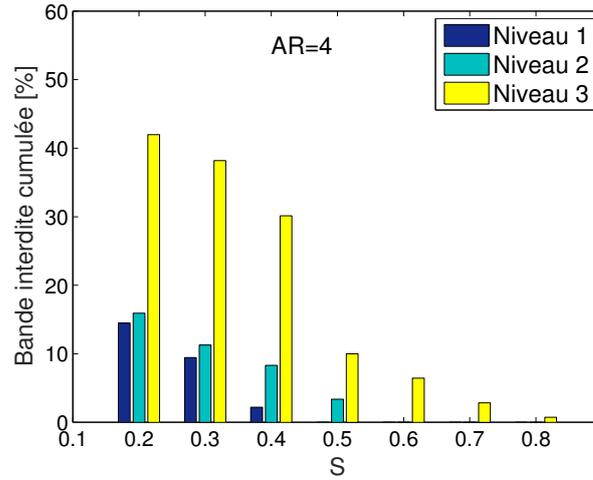


FIGURE 2.10 – Largeur totale de bandes interdites cumulées aux différents niveaux en tant que pourcentage de la bande de fréquence adimensionnée jusqu'à $\omega/\omega_p = 5$ pour le paramètre $AR = 4$.

pour $S = 0, 2$, $S = 0, 3$ et $S = 0, 4$, au niveau 1. Dans le dernier cas, la bande interdite est très étroite et centrée sur une valeur de ω/ω_p plus élevée (figure 2.11a). Au niveau 2, entre $S = 0, 2$, $S = 0, 5$, il y a un changement dans les fréquences centrales normalisées des bandes interdites, et le nombre de bandes interdites diminue quand S augmente (figure 2.11b). La chute brutale du nombre de bandes interdites s'explique par le fait qu'il y a un changement de la morphologie et de la connectivité entre les sous-unités (figure 2.5a). Une tendance similaire peut être observée au niveau 3 cependant la densité de bandes interdites augmente considérablement (figure 2.11c).

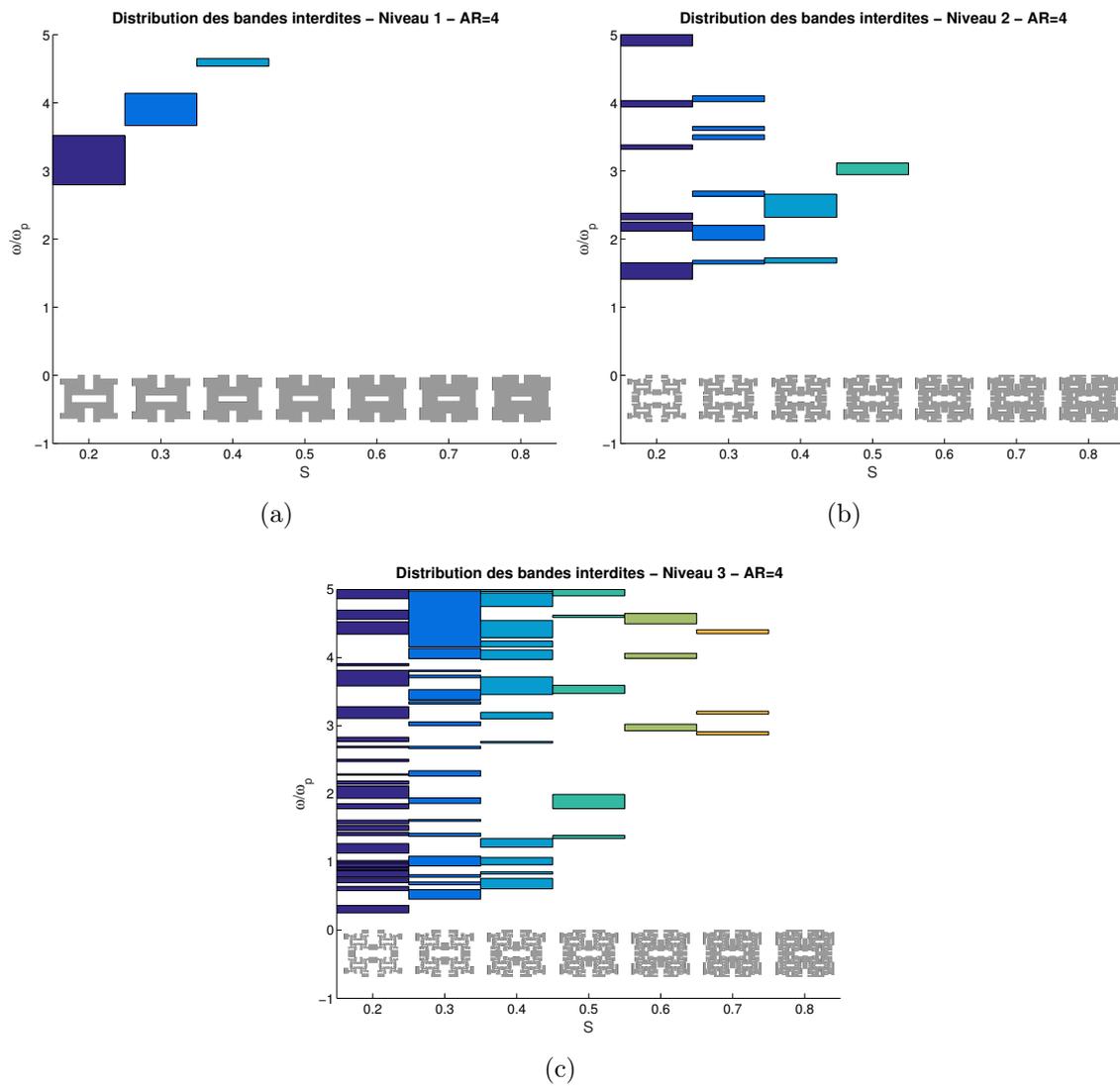


FIGURE 2.11 – Distribution des bandes interdites par rapport au paramètre S pour a) le niveau 1, b) le niveau 2, c) le niveau 3 avec le paramètre $AR = 4$.

L'étude de la propagation d'ondes peut être étendue pour toutes les combinaisons d'espacement entre deux perforations successives S et de rapport AR . Dans l'analyse menée, S varie de 0,2 à 0,8 et AR de 3 à 6. Il est intéressant d'observer le même indicateur que précédemment, la largeur totale de bandes interdites cumulées aux différents niveaux en tant que pourcentage de la bande de fréquence adimensionnée jusqu'à $\omega/\omega_p = 5$ (figure 2.12). Globalement quel que soit le rapport AR , la largeur de bandes interdites cumulées augmente quand l'espacement entre 2 cellules S diminue, cette diminution est valable quel que soit le niveau hiérarchique considéré. La variation du paramètre S est plus influente que le paramètre AR pour les intervalles choisis. Pour le niveau 1 (figure 2.12a), la configuration optimale, qui fournit la plus grande largeur totale de bandes interdites cumulées, est pour l'espacement entre deux perforations successives le plus petit $S = 0,2$ et le rapport AR le plus grand : 6. Pour S fixé à 0,2, on passe de 9% pour $AR = 3$ à 20% pour $AR = 6$. Pour le niveau 2 (figure 2.12b), pour S fixé à 0,2 le niveau varie faiblement entre 13% et 18%. Une chute est observée pour $S = 0,3$ et AR grand car la taille des connections entre les sous-unités entre $S = 0,2$ et $S = 0,3$ varie (figure 2.13). Pour le niveau 3 (figure 2.12c), pour S fixé à 0,2 le niveau varie de 10%, pour un maximum à $AR = 5,5$ de 51%.

Les résultats de l'homogénéisation statique peuvent être utilisés pour avoir une première estimation du comportement dynamique de la structure, avec une limite en fréquence [Gonella 08]. L'analyse de la propagation d'ondes, sur le modèle géométrique réel, permet de décrire finement la géométrie et les phénomènes mis en jeu. Une plaque avec les mêmes dimensions est modélisée avec les propriétés mécaniques homogénéisées de la section 2.2. Les résultats de ces simulations, pour les paramètres $AR = 4$ et $S = 0,2$ sont visibles sur les figures 2.14 et sont normalisés avec la fréquence propre ω_p . Au niveau 1 (figure 2.14a), on observe la confrontation entre les résultats avec l'approche homogénéisation et ceux obtenus par la méthode de Floquet-Bloch. La première courbe du diagramme de dispersion, utilisant l'approche homogénéisation, est en très bon accord avec le modèle réel. La seconde courbe du diagramme de dispersion, utilisant l'approche homogénéisation, est surestimée sur les chemins $\Gamma - X$, $X - M$ et $M - \Gamma$. Au centre, suivant le chemin $X - M$, elle a tendance à se rapprocher de la troisième branche de la dispersion sur le modèle réel. Une tendance similaire est observable au niveau 2 (figure 2.14b). Dans ce cas, les deux courbes du diagramme de dispersion, utilisant l'approche homogénéisation, sont surestimées. On remarque que la tendance pour les courbes du niveau 3 (figure 2.14c), utilisant l'approche homogénéisation, est assez bonne et les courbes ne surestiment pas tant que ça, les courbes avec la géométrie réelle suivant les chemins $\Gamma - X$ et $M - \Gamma$. Le comportement dynamique du métamatériau perforé ne permet pas d'être entièrement capturé par les relations de dispersion calculées à partir des équations de Christoffel avec des propriétés mécaniques homogénéisées. Même à basses fréquences, pour le niveau 1 (le plus simple dans sa géométrie), on observe des branches dispersives et des bandes interdites locales créées par la topologie que la méthode d'homogénéisation n'est pas capable de reproduire.

La topologie perforée hiérarchique crée un très grand nombre de bandes inter-

dités omnidirectionnelles, les fréquences centrées sont pilotées par le niveau hiérarchique et par les paramètres géométriques de la cellule. La largeur totale de bandes interdites cumulées en tant que pourcentage de la bande de fréquence adimensionnée est un critère de dimensionnement pour choisir les valeurs de nos paramètres géométriques S et AR pour obtenir la meilleure configuration avec le plus de bandes interdites. On va s'attacher dans la suite à déterminer si ces propriétés restent valables lors de l'utilisation de ce type de géométrie dans une structure finie.

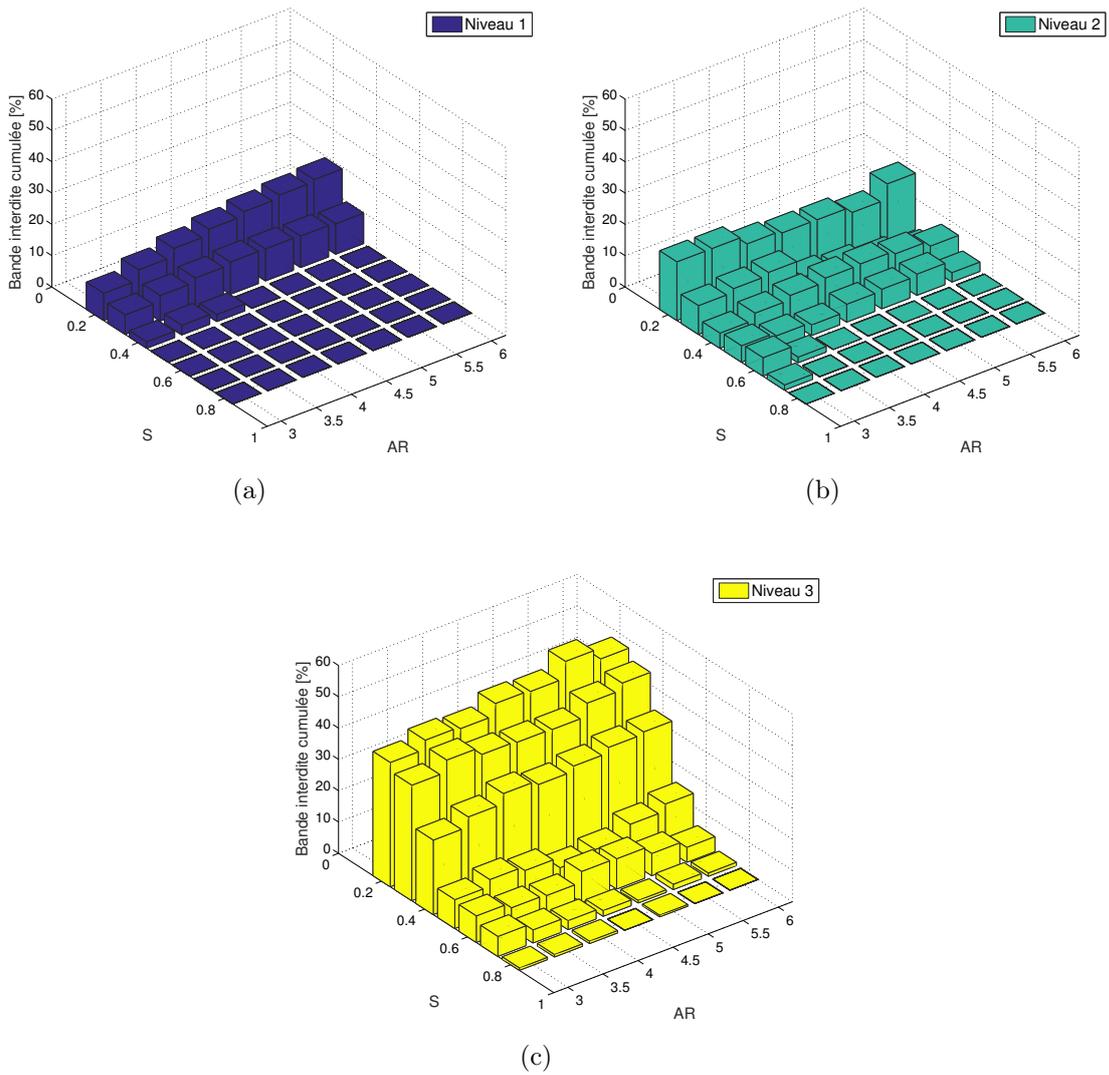


FIGURE 2.12 – Largeur totale de bandes interdites cumulées en tant que pourcentage de la bande de fréquence adimensionnée jusqu'à $\omega/\omega_p = 5$ pour le paramètre $AR \in [3, 6]$ et $S \in [0, 2, 0, 8]$ aux a) niveau 1, b) niveau 2 et c) niveau 3.

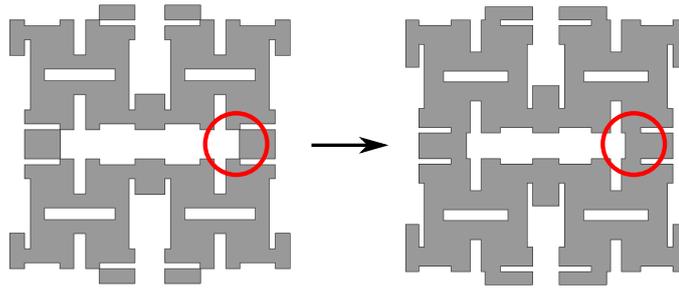


FIGURE 2.13 – Perforations rectangulaires, hiérarchiques, auxétiques au niveau 2 avec $AR = 6$ pour $S = 0, 2$ et $S = 0, 3$ respectivement à gauche et à droite.

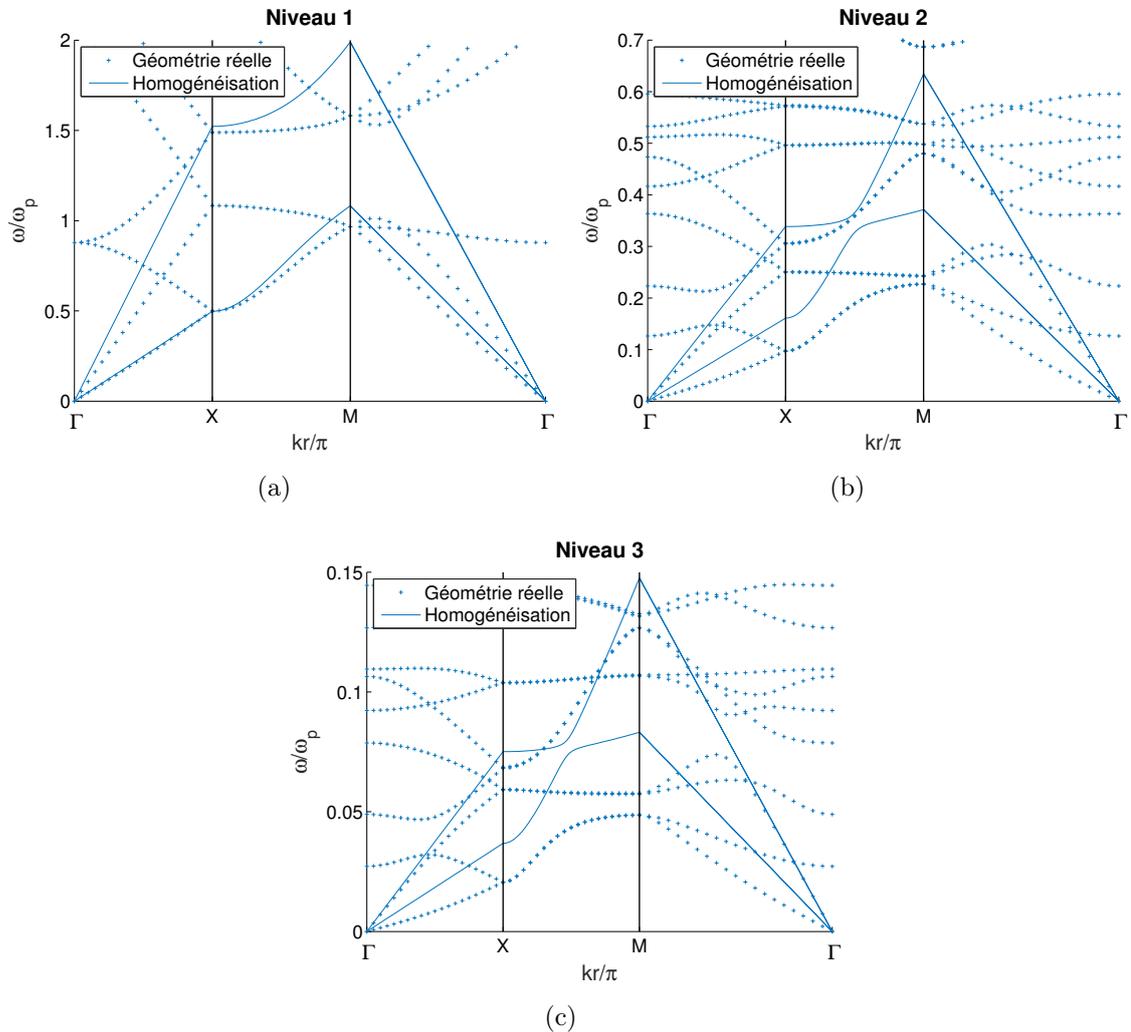


FIGURE 2.14 – Comparaison entre la dispersion d'une structure possédant des paramètres mécaniques homogénéisés et la dispersion de la cellule réelle pour a) le niveau 1, b) le niveau 2, c) le niveau 3 avec les paramètres $AR = 4$ et $S = 0, 2$.

2.3.2 STRUCTURE FINIE

Le but de cette partie est de valider sur une structure finie les phénomènes observés avec les méthodes d'analyse en structure infinie. Un modèle éléments finis de la structure finie est présenté, suivi d'essais expérimentaux. Par conséquent, les dimensions de la structure sont donc en grande partie guidées par les contraintes d'élaboration et de caractérisation. La structure finie, de 68 cm par 28 cm pour une épaisseur de 4 mm, intègre une interface composée d'un ensemble distribué de $4 \times 4 = 16$ cellules unitaires de 7 cm par 7 cm pour chaque niveau hiérarchique. Il n'y a qu'une seule plaque, mais par commodité, on va désigner par "plaque d'entrée" (in) la partie de la plaque nue sur laquelle la sollicitation est exercée, et "plaque de sortie" (out) la partie de la plaque située de l'autre côté du métamatériau. La plaque d'entrée et la plaque de sortie font 20 cm par 28 cm pour une épaisseur de 4 mm (figure 2.15).

Quatre données sont issues de la partie expérimentale et permettent d'avoir un modèle représentatif de la structure : le matériau (polyméthacrylate de méthyle - PMMA), les dimensions des cellules et de la structure, le point d'application de l'effort et l'amortissement du polyméthacrylate de méthyle (PMMA). Des détails sur ces différents points seront donnés dans la section 2.4.

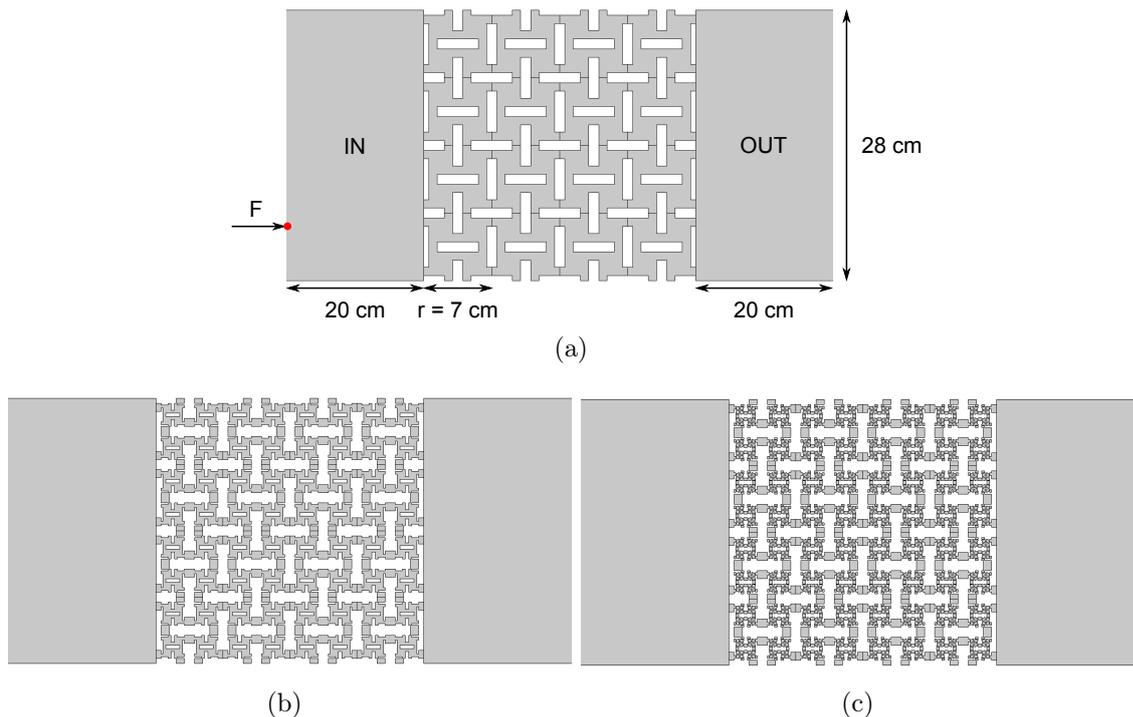


FIGURE 2.15 – Structure finie intégrant une interface composée de 16 cellules unitaires distribuées aux a) niveau 1, b) niveau 2, c) niveau 3. Le point d'excitation est repéré en rouge il est le même à tous les niveaux.

Le métamatériau est en polyméthacrylate de méthyle (PMMA) ($\nu = 0,375$, $E = 3,01 \text{ GPa}$ et $\rho = 1190,25 \text{ kg/m}^3$) avec un facteur de perte (η) égal à 4,2%.

Des éléments finis quadratiques de type Serendip sont utilisés dans cette étude, ils possèdent deux degrés de liberté de translation et un modèle élastique linéaire de contraintes planes est utilisé. L'excitation se fait via un effort harmonique unitaire à $5,5 \text{ cm}$ du bord inférieur gauche (figure 2.15a).

Les résultats des fonctions de réponse en fréquence de la structure au niveau 1, obtenus numériquement avec un code de calcul éléments finis, sont présentés sur la figure 2.16. Les amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ sont moyennées sur la plaque d'entrée et sur la plaque de sortie. La courbe bleue correspond à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque d'entrée, la courbe rouge à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ sur la plaque de sortie. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion, est représentée par le rectangle grisé. Une atténuation est bien observée dans la bande de fréquence prédite par le diagramme de dispersion.

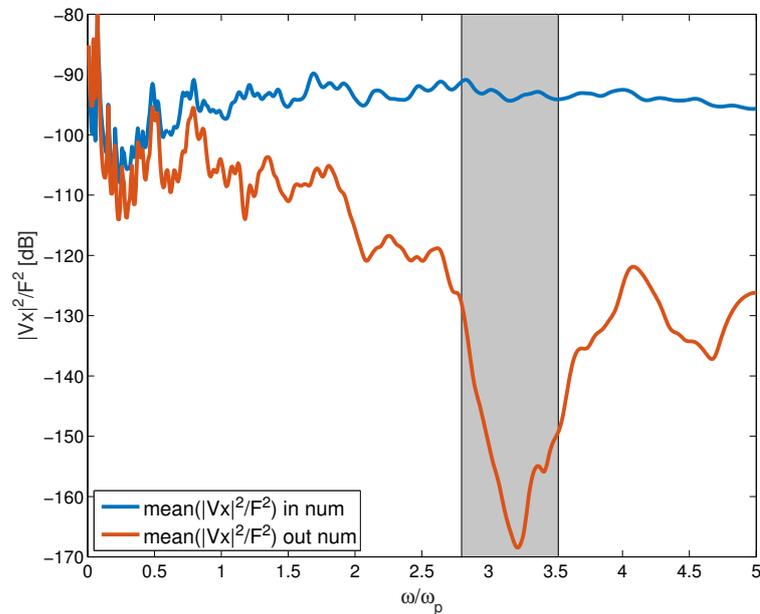


FIGURE 2.16 – Fonctions de réponse en fréquence numériques de la structure au niveau 1. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque d'entrée et de sortie, respectivement en bleu et rouge. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion est représentée par le rectangle grisé.

Les premières déformées numériques et une déformée dans la bande interdite sont observables sur la figure 2.17. L'effet auxétique est clairement observé sur la figure 2.17b, la plaque est en compression et une diminution des dimensions transversales est visible. Dans la bande interdite (figure 2.17c), les ondes sont bien confinées sur la plaque d'entrée du réseau.

Les résultats des fonctions de réponse en fréquence de la structure aux niveaux 2 et 3, obtenus numériquement avec un code de calcul éléments finis, sont présentés sur les figures 2.18 et 2.19. Les amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ sont moyennées

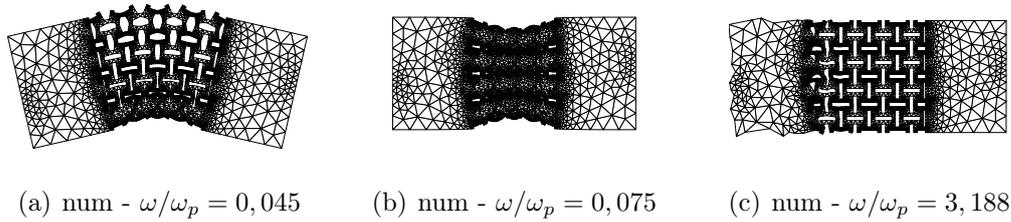


FIGURE 2.17 – Déformées numériques. a) Premier mode de flexion dans le plan, b) premier mode de traction/compression, l'effet auxétique est clairement observé. c) Déformée dans la bande interdite.

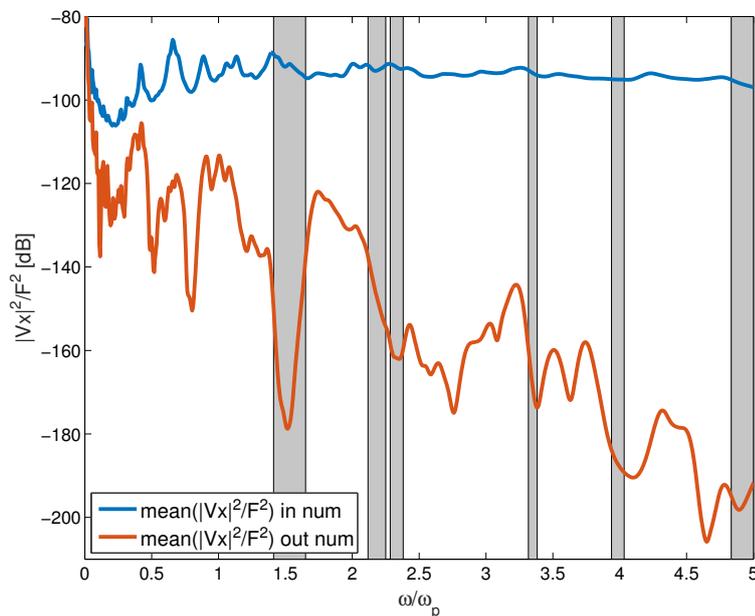


FIGURE 2.18 – Fonctions de réponse en fréquence numériques de la structure au niveau 2. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque d'entrée et de sortie, respectivement en bleu et rouge. Les bandes interdites, prédites par le diagramme de dispersion sont représentées par le rectangle grisé.

sur la plaque d'entrée et sur la plaque de sortie. La courbe bleue correspond à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque d'entrée, la courbe rouge à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ sur la plaque de sortie.

Au niveau 2 (figure 2.18), la première bande interdite prédite par le diagramme de dispersion correspond bien à une bande d'atténuation sur la fonction de réponse en fréquence de la plaque de sortie. À partir de la deuxième bande de fréquences interdites, l'atténuation entre l'entrée et la sortie est grande. Il est alors difficile de corréler zones d'atténuation et bandes interdites.

Au niveau 3 (figure 2.19), la richesse du nombre de bandes interdites saturent les

résultats, la première bande interdite prédite par le diagramme de dispersion correspond bien à une bande d'atténuation sur la fonction de réponse en fréquence de la plaque de sortie. Ensuite, chaque décroissance du transfert correspond effectivement bien à une bande interdite estimée en structure infinie.

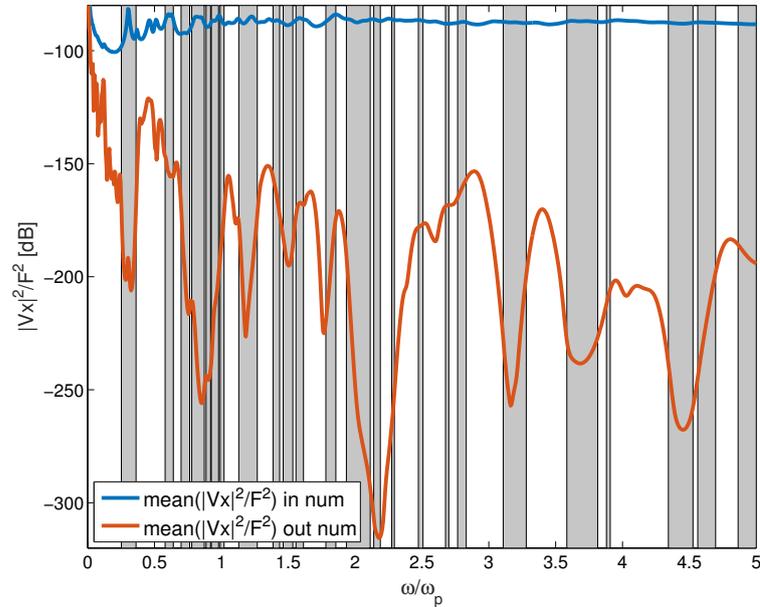


FIGURE 2.19 – Fonctions de réponse en fréquence numériques de la structure au niveau 3. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque d'entrée et de sortie, respectivement en bleu et rouge. Les bandes interdites, prédites par le diagramme de dispersion sont représentées par le rectangle grisé.

Dans la configuration étudiée, l'amortissement structural est relativement important, et limite sans doute l'efficacité de la stratégie en structure finie. Une plaque en aluminium, acier inoxydable ou un autre matériau avec un facteur de perte faible aurait été un bon candidat. Les résultats numériques sont dimensionnés pour s'accorder avec l'expérimental. Les moyens d'élaboration disponibles ne permettent pas d'utiliser un matériau métallique. Cependant, une des applications de ce dispositif, pour les vibrations dans le plan, est l'intégration du métamatériau dans le cœur d'un sandwich composite, donc plutôt de type polymère avec un amortissement réduit.

2.4 CONFRONTATION EXPÉRIMENTALE

2.4.1 RÉALISATION DU MÉTAMATÉRIAU

Le métamatériau est réalisé par découpe laser dans une plaque de polyméthacrylate de méthyle (PMMA) de 4 mm. La Trotec Speedy 300 (figure 2.20) est une machine d'usinage par découpage laser composée, pour cette version, d'un plateau

de découpe de $726 \times 432 \text{ mm}$ et d'un laser d'une puissance maximale de 120 W . Elle est capable de découper et de graver différents matériaux.



FIGURE 2.20 – Machine à découpe laser Trotec Speedy 300

Quelques échantillons ont été réalisés à partir de fichiers dxf, CAO 2D des contours du motif, d'un quart de cellule du niveau 3. Le niveau 3 a été choisi car c'est le niveau le plus critique, qui présente les plus petites connexions. On retient deux échantillons de longueur $2 \times 5 \text{ cm}$ représentatifs d'une cellule élémentaire de longueur $r = 4 \text{ cm}$ et $r = 10 \text{ cm}$ (figure 2.21). Deux constats s'offrent à nous, il est difficile de faire de très petites cellules et les côtes des cellules ne sont pas respectées. En effet, la CAO ne tient pas compte de la demi-épaisseur du laser d'où l'étude de faisabilité qui suit.

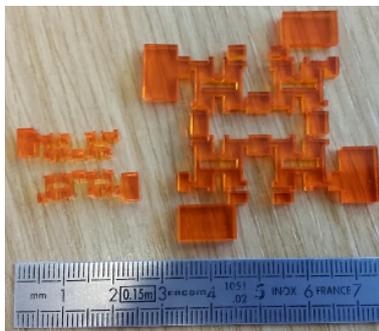


FIGURE 2.21 – Échantillons d'essai ($r = 4 \text{ cm}$ et $r = 10 \text{ cm}$), réalisés avec la machine à découpe laser, d'un quart de cellule du niveau 3.

2.4.1.1 FAISABILITÉ

Pour quantifier l'erreur entre les côtes de la CAO et les dimensions de la cellule découpée, une forme très simple est réalisée, un carré dans un carré (figure 2.22). La machine de métrologie Werth est utilisée, il s'agit d'une machine de mesure sans contact. Elle permet d'effectuer des mesures de dimensions sur des pièces usinées ou objets en analysant les écarts de contraste.

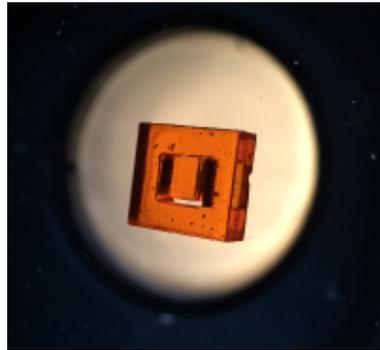


FIGURE 2.22 – Métrologie sans contact d’une pièce très simple, usinée par découpe laser.

 TABLE 2.1 – Fréquences réduites avec équivalence pour du polyméthacrylate de méthyle (PMMA), de dimensions $r = 7 \text{ cm}$, $S = 0,2$ et $AR = 4$. Les fréquences centrées de la première bande interdite sont indiquées.

	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
F. réduite max. ω/ω_{pmax}	5	5	5
F. équivalente max. $f_{PMMAMax}$	26314 Hz	32075 Hz	34528 Hz
F. centrée réduite bandgap n°1 ω/ω_{pBG}	3,16	1,53	0,31
F. centrée eq. bandgap n°1 f_{PMMABG}	16630 Hz	9815 Hz	2141 Hz

Un écart moyen de $300 \mu\text{m}$ est observé, cet écart est dû à la dégradation du polymère à la découpe et à la taille de la demi-épaisseur du spot laser. Une dépouille de $300 \mu\text{m}$ est ajoutée sur les différentes CAO. Si l’on souhaite réaliser un réseau de 4×4 cellules avec un plateau de découpe de $726 \times 432 \text{ mm}$, la longueur d’une cellule est donc fixée à $r = 7 \text{ cm}$.

Maintenant que nos dimensions sont fixées, on s’intéresse aux fréquences équivalentes à partir des fréquences réduites. Les fréquences réduites varient de 0 à 5, les trois fréquences ω_p (une pour chaque niveau), pour une plaque équivalente en PMMA avec la porosité induite dans ses propriétés mécaniques, permettent de se ramener à la bande de fréquence d’intérêt réelle. Le tableau 2.1 récapitule les fréquences équivalentes, les fréquences centrées de la première bande interdite sont indiquées.

2.4.1.2 DÉTERMINATION DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DU POLYMÉTHACRYLATE DE MÉTHYLE (PMMA)

Une série d’essais a été réalisée pour déterminer les propriétés mécaniques du polyméthacrylate de méthyle (PMMA) utilisé, à savoir le module d’Young apparent, la masse volumique et l’amortissement.

Pour déterminer le module d’Young apparent à température ambiante, cinq éprouvettes normalisées ont été réalisées, suivant la norme de traction [ten 03], pour s’assurer de la répétabilité de l’essai. Chaque éprouvette est placée entre deux mors pneumatiques de la machine, une cellule de force de 5 kN est utilisée et un extenso-

mètre à contact permet de connaître la déformation longitudinale (figure 2.23). Une vitesse de $20 \mu\text{m}/\text{s}$ est utilisée durant les essais. Un module d'Young apparent moyen de $E = 3,01 \pm 0,1 \text{ GPa}$ est obtenu à température ambiante.



FIGURE 2.23 – Éprouvette de traction normalisée de polyméthacrylate de méthyle (PMMA) dans les mors de la machine de traction. L'échantillon est équipé d'un extensomètre à contact.

L'amortissement est déterminé à partir du premier mode de flexion d'un échantillon de polyméthacrylate de méthyle (PMMA) rectangulaire sur un support d'essai reproduisant des conditions libres (figure 2.24a). L'excitation se fait via un système bobine aimant, un bruit blanc est généré. La mesure se fait à l'aide du vibromètre 1D au point d'excitation. L'aimant a été placé au centre de l'échantillon pour maximiser les déplacements du ventre du premier mode de flexion. L'analyse de la vitesse au point excitateur (figure 2.24b) permet de déduire un amortissement réduit ξ de 2,1% d'où un facteur de perte η égal à 4,2%. Ce modèle d'amortissement hystérétique a été utilisé dans les modèles éléments finis, mais une caractérisation large bande serait bienvenue pour déterminer la pertinence de ce modèle.

La masse volumique est déterminée par la pesée d'un échantillon de volume connu, elle est estimée à $\rho = 1190,25 \text{ kg}/\text{m}^3$.

2.4.1.3 USINAGE

La faisabilité nous impose une longueur de cellule de $r = 7 \text{ cm}$, ensuite pour maximiser les bandes interdites il faut que S soit petit, le paramètre AR est moins déterminant. Par conséquent on choisit $S = 0,2$ et $AR = 4$.

Les trois niveaux hiérarchiques sont découpés au laser à partir de fichiers dxf. Le temps de d'usinage varie de 8 minutes pour le niveau 1, 15 minutes pour le niveau 2 et 30 minutes pour le niveau 3. Le résultat de la découpe, au niveau 3, est observable sur la figure 2.25.

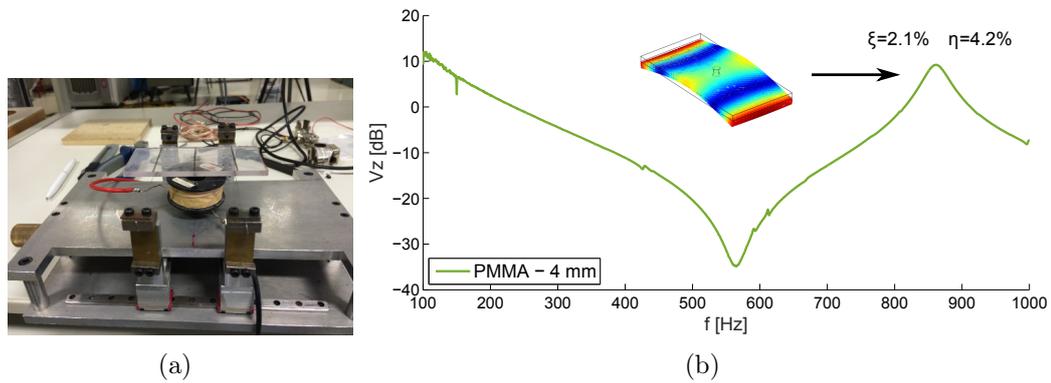


FIGURE 2.24 – a) Échantillon de polyméthacrylate de méthyle (PMMA) sur son support d'essai reproduisant des conditions libres. Excitation via un système bobine aimant. Mesure au point d'excitation via un vibromètre 1D. b) Vitesse au point d'excitation, déformée équivalente.

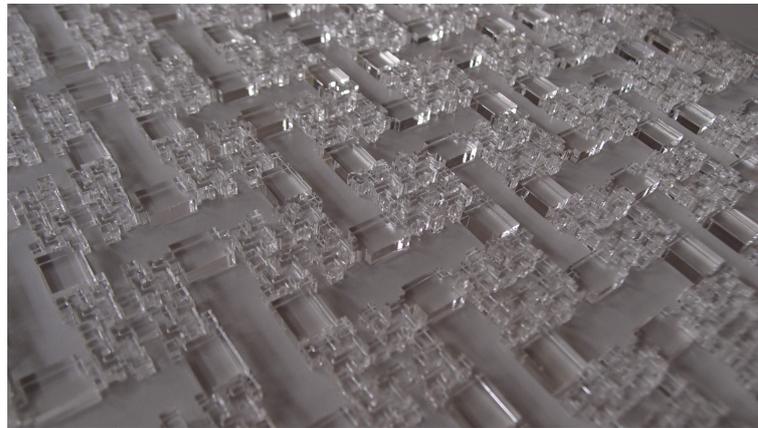


FIGURE 2.25 – Zoom sur le réseau au niveau hiérarchique 3 de la plaque découpée.

2.4.2 DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Pour monter aux fréquences désirées (tableau 2.1), une excitation avec des patches piézoélectriques est nécessaire. Pour reproduire des conditions de contraintes planes, il faut que l'excitation se fasse dans le plan et que les mouvements hors plan soit nuls ou limités. les mesures de vitesse se feront par l'intermédiaire d'un vibromètre 3D à balayage (figure 2.26).

De marque Polytec, il est composé de 3 sources d'émissions laser, cela permet de mesurer des vitesses dans les 3 dimensions de l'espace. Le vibromètre mesure le décalage en fréquence entre le signal source (émis par le vibromètre) et le signal réfléchi par la surface. Ce décalage est dû au déplacement de la surface. Ce décalage est mesuré grâce à un interféromètre de Mach-Zehnder.

La réalisation de cette expérimentation est un challenge, elle doit garantir :

- des conditions limites permettant d'être proches des conditions de contraintes



FIGURE 2.26 – Vibromètre 3D à balayage

planes,

- une excitation générant uniquement un mouvement dans le plan, et sur la plage de fréquences d'intérêt,
- une mesure uniquement du déplacement dans le plan.

Toutes les étapes ne sont pas triviales et nécessitent une attention et une rigueur particulière.

La figure 2.27 permet d'illustrer les éléments composant le premier dispositif expérimental :

- le métamatériau sur son support,
- un vibromètre 3D à balayage avec son système d'acquisition et d'excitation,
- un amplificateur piézoélectrique.

Le métamatériau est monté sur un support reproduisant des conditions de contraintes planes. La plaque est en appui sur de la mousse et l'excitation se fait via deux patches piézoélectriques reliés en parallèle. Avec un gain variable sur chaque patch, il est possible d'annuler le déplacement en z et par conséquent d'avoir uniquement des composantes excitatrices dans le plan. Les patches peuvent monter aux fréquences désirées. Tous les critères de réalisation, cités précédemment, semblent réunis. Cependant, l'amplitude des vitesses, résultant de l'excitation piézoélectrique, n'est pas suffisante. De plus, le coefficient de frottement entre la mousse et le polyméthacrylate de méthyle (PMMA) est trop important, la plaque n'est pas libre de bouger convenablement dans le plan. Une solution alternative est proposée par la suite.

La figure 2.28 permet d'illustrer les éléments composant le second dispositif expérimental :

- le métamatériau sur son support,
- un vibromètre 3D à balayage avec son système d'acquisition et d'excitation,
- un pot vibrant,
- une cellule de force,
- et un accéléromètre.

Le métamatériau est suspendu par des fils et l'excitation se fait via un pot vibrant.



FIGURE 2.27 – Premier dispositif expérimental avec comme éléments principaux le métamatériau et le vibromètre 3D à balayage pour la mesure, un zoom est effectué sur le système excitateur, deux patchs piézoélectriques en parallèle.

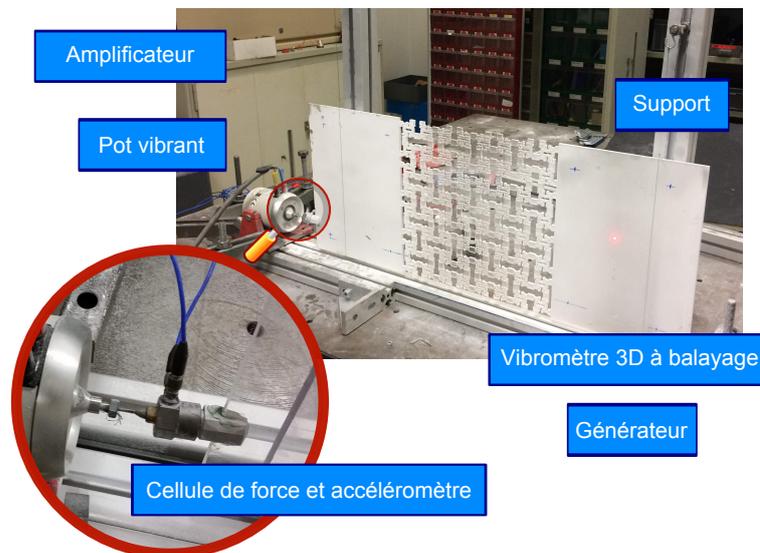


FIGURE 2.28 – Second dispositif expérimental avec comme éléments principaux le métamatériau et le vibromètre 3D à balayage pour la mesure, un zoom est effectué sur le système excitateur, un pot vibrant instrumenté avec une cellule de force et un accéléromètre.

On s'assure de l'alignement correct du pot vibrant et du métamatériau pour ne pas solliciter la plaque hors plan. L'amplitude des vitesses, résultante de l'excitation par pot vibrant, est suffisante. Tous les critères de réalisation, cités précédemment, sont

réunis à l'exception de la bande de fréquence d'intérêt. En effet, le pot vibrant permet de monter aux alentours de 15 kHz . Cependant, dans nos conditions expérimentales, les mesures supérieures à 5 kHz ne sont pas exploitables. Malgré tout, ce dispositif regroupe tous les critères jusqu'à la fréquence de 5 kHz et va nous permettre de mener à bien notre campagne d'essais.

2.4.3 ANALYSE VIBRATOIRE EXPÉRIMENTALE - ESSAIS EN CONDITIONS DE CONTRAINTES PLANES

Le dispositif expérimental ne permet pas de monter au dessus de 5 kHz , en se référant au tableau 2.1, le niveau 3 est le seul à proposer des bandes interdites dans cette bande de fréquences. On ne s'intéresse, par conséquent et malheureusement, qu'au niveau 3. Le générateur du vibromètre envoie un sinus balayé de tension efficace 6 V entre 150 Hz et 5 kHz , ce signal est conditionné par un amplificateur. La réponse vibratoire est mesurée à l'aide du vibromètre, par l'intermédiaire de son boîtier d'acquisition. Les fonctions de réponse en fréquence sont calculées par l'intermédiaire d'un estimateur H1.

2.4.4 CONFRONTATION CALCULS-ESSAIS

2.4.4.1 ANALYSE DES RÉSULTATS

Une superposition des résultats expérimentaux et numériques est proposée sur la figure 2.29. Les courbes sont à comparer deux à deux (jaune-bleue et violette-rouge). Les courbes jaune et bleue correspondent à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque d'entrée obtenue, respectivement, expérimentalement et numériquement. Les courbes violette et rouge correspondent à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque de sortie obtenue, respectivement, expérimentalement et numériquement. La première zone d'atténuation expérimentale aux alentours de 2500 Hz semble correspondre à la première bande interdite. À partir de 3500 Hz , la moyenne expérimentale des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque de sortie est bruitée malgré le moyennage. On remarque que l'on ne retrouve pas, expérimentalement, les modes numériques de la plaque d'entrée dans la bande interdite; ce qui peut être attribué à une mauvaise estimation de l'amortissement du dispositif.

2.4.4.2 ANALYSE CRITIQUE

Le modèle utilisé numériquement est un modèle 2D contraintes planes, expérimentalement, il est très difficile d'annuler totalement les déplacements hors plan. Un désalignement très faible du pot vibrant peut entraîner une excitation hors plan. Les niveaux vibratoires en sorties sont très faibles et ils peuvent donc être proches du bruit de mesure. La partie expérimentale est difficile et on propose ici des voies d'analyse qui permettent de mettre en avant des pistes de compréhension et d'améliorations à savoir la cohérence et la participation de la flexion dans les mouvements dans le plan avant de revenir sur le modèle.

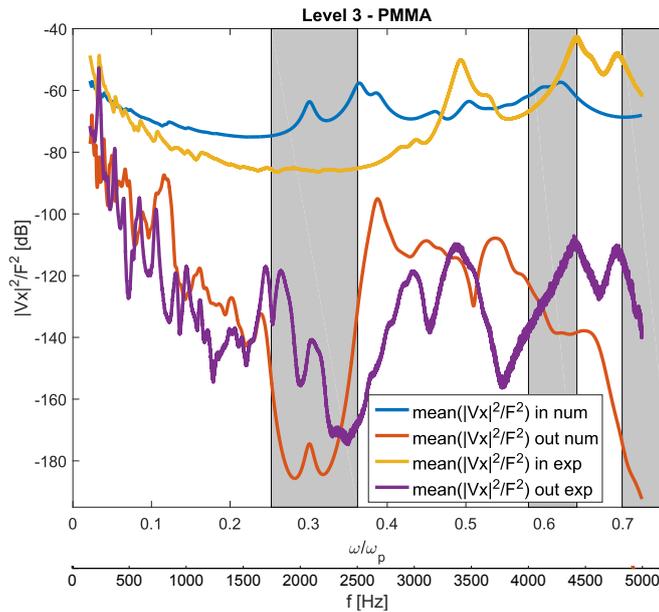


FIGURE 2.29 – Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque d'entrée et de sortie numériques respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque d'entrée et de sortie expérimentales respectivement en jaune et violet. Les bandes interdites, prédites par le diagramme de dispersion, au niveau hiérarchique 3, sont représentées par les rectangles grisés.

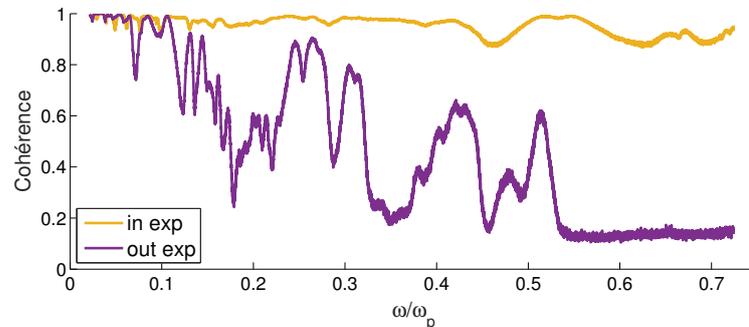


FIGURE 2.30 – Cohérence

a) Analyse de la cohérence. La cohérence est tracée pour la mesure des moyennes des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vx|^2$ de la plaque d'entrée et de la plaque de sortie (figure 2.30). La cohérence pour la plaque d'entrée est bonne car elle se situe toujours proche de 1, la mesure réalisée est cohérente et donc bien générée par l'excitation, les niveaux vibratoires dans le plan ont des amplitudes compatibles avec la dynamique de mesure du système expérimentale. La cohérence pour la plaque de sortie laisse perplexe, elle est proche de 1 en basses fréquences, puis chute, elle

remonte au niveau de la première bande interdite et ensuite elle se rapproche très rapidement de 0. Passée une certaine fréquence, la mesure vibratoire est liée à l'excitation et au bruit de mesure d'où la chute de la cohérence, les niveaux vibratoires dans le plan sont très faibles.

b) Analyse de l'effet lié à la flexion. La cellule de force mesure l'effort dans la direction x et le vibromètre mesure les vitesses suivant les axes du plan, la cohérence peut être affectée. Le vibromètre mesure le déplacement de la surface de la plaque. Or si l'excitation n'est pas parfaitement dans le plan, un mouvement de flexion est présent, qui génère un déplacement longitudinal pouvant se cumuler au déplacement que l'on cherche à mesurer. C'est pour cette raison que l'on s'intéresse à la quantification de la participation de la flexion dans la mesure des mouvements dans le plan.

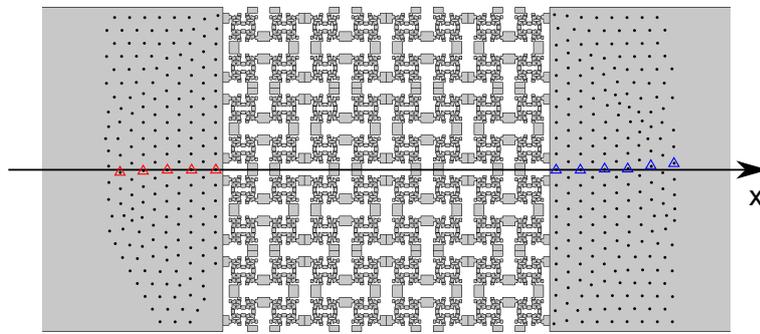


FIGURE 2.31 – Maillage expérimental et nœuds appartenant à une ligne de la plaque d'entrée Δ et à une ligne de la plaque de sortie Δ pour estimer la participation maximale de la flexion dans le déplacement X

Pour ce faire, le déplacement U_z est estimé sur deux lignes appartenant au maillage expérimental, orientées dans la direction x . L'une sur la plaque d'entrée et l'autre sur la plaque de sortie (figure 2.31). L'hypothèse de plaque mince est utilisée pour déterminer des ordres de grandeur. Connaissant le déplacement U_z fonction de x , on est capable de remonter à l'angle θ_y :

$$\theta_y = \frac{\partial U_z}{\partial x}, \quad (2.10)$$

avec cette grandeur on estime le déplacement total U_x dans le plan, lié au cumul de l'effet de flexion et longitudinal de la façon suivante :

$$U_x = U_{flexion} + U_{longi} = \frac{e}{2}\theta_y + U_{longi}, \quad (2.11)$$

avec e l'épaisseur de la plaque de polyméthacrylate de méthyle (PMMA).

Le déplacement U_z est mesuré sur les nœuds appartenant aux deux lignes pour cinq fréquences, un polynôme d'ordre 3 interpole le déplacement. La dérivation du polynôme, nous donne l'angle θ_y permettant d'estimer la participation de la flexion.

TABLE 2.2 – Participation maximale de la flexion dans le déplacement X suivant la ligne Δ sur la plaque d'entrée

Fréquence [Hz]	Déplacement X max in [nm]	Déplacement X max induit par la flexion in [nm]	Participation de la Flexion dans le Déplacement X in [%]
500	27,333	0,091	0,3
1500	4,047	0,157	3,9
2000	4,562	0,045	1,0
3500	0,515	0,029	5,7
5000	0,844	0,020	2,3

TABLE 2.3 – Participation maximale de la flexion dans le déplacement X suivant la ligne Δ sur la plaque de sortie

Fréquence [Hz]	Déplacement X max out [nm]	Déplacement X max induit par la flexion out [nm]	Participation de la Flexion dans le Déplacement X out [%]
500	0,828	0,162	19,6
1500	0,105	0,008	7,5
2000	0,052	0,012	23,8
3500	0,029	0,001	2,7
5000	0,021	0,002	7,8

On retrouve la participation maximale de la flexion dans les mouvements suivant la direction x dans les tableaux 2.2 et 2.3. Pour la ligne d'entrée, la participation est inférieure à 6%. Les amplitudes des déplacements dans le plan sont majoritaires par rapport aux mouvements induit par la flexion. Pour la ligne de sortie, la participation peut atteindre 24% à 2000 Hz. On peut donc en conclure que les déplacements mesurés dans le plan ne sont pas uniquement liés au mouvement que l'on cherche à caractériser, puisque les effets indésirables liés à la flexion viennent les perturber.

c) Retour sur le modèle. Aux vues de ces conclusions, les résultats sont à prendre avec précaution. Si l'on revient au modèle numérique, on propose de classer les paramètres en deux catégories : les données fiables et les données non fiables.

Concernant les données fiables :

- le module d'Young apparent à température ambiante est issu d'essais de traction sur cinq échantillons pour assurer la répétabilité des résultats,
- la masse volumique est correcte, mesures de masse et de volume précises.
- la position de l'excitation.

Concernant les données non fiables :

- la géométrie est correcte, les côtes ont été vérifiées avec de la métrologie, ce-

pendant, au niveau 3, les connexions sont très petites et par conséquent, le système est hypersensible à ces dernières,

- la répartition de l’excitation, en effet dans le modèle numérique l’excitation est ponctuelle, alors que dans l’expérimental l’excitation se fait par l’intermédiaire d’une fourche en aluminium. La modélisation de la partie intermédiaire ne change pas les résultats.
- La dépendance du module d’Young à la fréquence peut être une piste, pour le polyméthacrylate de méthyle (PMMA) à $20^{\circ}C$ la variation de module entre 1 et 10 Hz est $0.3 GPa$ donc d’autant plus grande entre 1 Hz et 5 kHz [Yee 82].
- L’amortissement est sans doute erroné, en effet la détermination de l’amortissement est faite sur un mode de flexion et il n’est pas du tout certain que dans le plan l’amortissement soit le même.

Des pistes d’amélioration sont donc possibles pour fiabiliser le modèle numérique représentatif de cette expérimentation.

2.5 CONCLUSIONS

Un métamatériau obtenu par perforations hiérarchiques permet de créer un comportement auxétique dans le plan. La hiérarchie proposée permet de contrôler le coefficient de Poisson et l’orthotropie de la structure avec une cellule de référence qui n’est pas toujours auxétique et isotrope. La topologie perforée hiérarchique crée un très grand nombre de bandes interdites omnidirectionnelles, les fréquences centrées sont pilotées par le niveau hiérarchique et par les paramètres géométriques de la cellule. Cette étude montre la possibilité de créer des bandes interdites par simple découpe dans des structures planes. Les trois structures, une pour chaque niveau hiérarchique, ont été usinées par découpe laser après une étude de faisabilité. L’amortissement est important, nous obtenons un lissage global des fonctions de réponse en fréquence et une atténuation très grande entre l’entrée et la sortie du réseau. La mise en place de la mesure a été un vrai challenge, elle n’était pas facile. Les résultats ont donné lieu à des analyses critiques ayant permis de mettre en évidence les points forts et les points faibles de cette expérimentation. Une difficulté se présente dans le choix adopté du système d’excitation car celui-ci conditionne la bande fréquentielle d’analyse. De plus, si l’excitation n’est pas parfaitement dans le plan, un mouvement de flexion est présent, celui-ci génère un déplacement longitudinal venant se cumuler au déplacement que l’on cherche à mesurer. Par ailleurs, il apparaît que dans un contexte de faibles vibrations des techniques de mesure doivent être développées. Deux perspectives s’offrent à nous, prévoir une alternative au système d’excitation utilisé et réaliser la plaque dans un matériau moins dissipatif. Enfin, lorsque les structures considérées présentent un amortissement comme dans le cas d’application, celui-ci doit être pris en compte avec précision dans l’analyse de la propagation. On propose donc d’étudier dans le chapitre suivant des outils numériques permettant la détermination des relations de dispersion dans les structures périodiques amorties.

OUTILS NUMÉRIQUES POUR LA SIMULATION DE LA PROPAGATION D'ONDES DANS LES STRUCTURES PÉRIODIQUES AMORTIES

Sommaire

3.1	Introduction	68
3.1.1	Analyse de la propagation d'ondes soumise à une excitation harmonique dans un matériau périodique amorti	68
3.1.2	Calcul des relations de dispersion en régime libre	69
3.2	Méthode du "Shift cell operator"	72
3.2.1	Présentation	72
3.2.2	Implémentation numérique	74
3.2.3	Problème direct et adjoint	74
3.3	Apports méthodologiques	76
3.3.1	Vitesse de groupe	76
3.3.2	Critères de tri pour distinguer une onde propagative d'une onde évanescente	78
3.3.3	Validation de la méthode sur un cas conservatif	78
3.3.4	Suivi de branches	79
3.3.5	Convergence de maillage	81
3.3.6	Résultats en milieu amorti	86
3.4	Conclusions	90

PRÉAMBULE

Les structures périodiques possèdent des propriétés spécifiques en termes de propagation d'ondes. Dans ce chapitre, des outils numériques permettant la détermination des relations de dispersion dans les structures périodiques sont présentés. Dans

un premier temps, la méthode de Floquet-Bloch présentée dans le chapitre 1 est utilisée comme référence. Cette technique consiste à résoudre le problème sur une cellule unitaire avec des conditions limites adaptées ; cependant l'introduction d'amortissement dans les cas 2D et 3D n'est pas facile et conduit à la résolution de problèmes aux valeurs propres généralisés. Dans un second temps, la méthode intitulée "Shift cell operator" est décrite. Celle-ci est basée sur une reformulation du problème des équations aux dérivées partielles, la périodicité est incluse dans le comportement global de la structure avec des conditions de continuité imposées sur les bords de la cellule. Cette stratégie permet de résoudre le problème quelle que soit l'évolution en fréquence des propriétés de la cellule. La bibliographie sera exposée ainsi que les méthodes utilisées actuellement, suivi de la présentation de la méthode "Shift cell operator" et de son application sur une structure périodique amortie.

3.1 INTRODUCTION

Les méthodes utilisées actuellement (présentées dans le chapitre 1) sont basées, la plupart du temps, sur les méthodes dérivant de l'étude de la propagation d'ondes dans les cristaux où il n'y a quasiment pas de dissipation. Dans le cadre de la dynamique des structures, les effets liés à l'amortissement doivent être inclus dans les analyses.

Il y a deux types d'études ; l'analyse de la propagation d'ondes soumise à une excitation harmonique (régime forcé) et l'analyse des relations de dispersion en régime libre. Les deux études vont être présentées dans les sous sections 3.1.1 et 3.1.2.

3.1.1 ANALYSE DE LA PROPAGATION D'ONDES SOUMISE À UNE EXCITATION HARMONIQUE DANS UN MATÉRIAU PÉRIODIQUE AMORTI

Dans la littérature, [Yong 89] s'intéresse à l'analyse de la propagation d'ondes dans des structures finies. Il utilise une méthode hybride combinant matrice de transfert éléments finis et approche propagation d'ondes. La formulation éléments finis est utilisée pour modéliser la cellule unitaire.

Les débuts de l'étude de la propagation d'ondes soumise à une excitation harmonique dans un matériau périodique amorti remontent aux travaux de Mead et de son équipe dans les années 70 [Mead 73]. Ils établissent une théorie générale dans le cas d'un système monodirectionnel avec couplage multiple entre éléments périodiques adjacents. L'amortissement est hystérétique (matrice de raideur complexe). Pour les ondes amorties forcées, le vecteur \mathbf{F} s'écrit de la façon suivante dans l'équation de mouvement :

$$[\mathbf{K} + i\mathbf{H} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_l \\ 0 \\ \mathbf{F}_r \end{pmatrix} + i\omega^2\eta[\mathbf{M}]\mathbf{q}, \quad (3.1)$$

où, \mathbf{K} est la matrice de raideur, \mathbf{M} est la matrice de masse, \mathbf{H} est la matrice d'amortissement hystérétique, \mathbf{q} le déplacement, \mathbf{F}_l et \mathbf{F}_r sont les efforts respectivement à gauche et à droite de la cellule élémentaire. Le second membre représentant les efforts en quadrature avec les efforts inertiels introduits.

[Langley 94] utilise un modèle similaire à Mead, il étudie la réponse forcée d'une structure périodique mono-dimensionnelle amortie. Les effets de l'amortissement sur les constantes de propagations de la structure périodique sont investigués en introduisant un facteur de perte. L'amortissement hystérétique peut être modélisé en multipliant le module élastique de la structure par le facteur $(1 + j\eta)$. Dans le cas d'un η faible le même effet peut être obtenu par l'ajout du facteur $(1 - j\eta)$ devant les termes inertiels.

[Merheb 08] améliore le modèle d'amortissement en prenant en compte des dépendances en fréquence plus complexes. Il utilise un modèle de Maxwell-Weichert pour modéliser le caractère viscoélastique du caoutchouc. Les paramètres du modèle sont identifiés par des essais DMA (Dynamic Mechanical Analysis). La méthode FDTD (Finite Difference Time Domain) est utilisée pour tracer les spectres de transmission.

[Zhao 09] utilise également un modèle viscoélastique, cependant il utilise la méthode PWE (Plane Wave Expansion) pour homogénéiser le modèle.

La méthode WFE (Wave Finite Element) est appliquée dans les travaux de [Manconi 10, Manconi 13] pour étudier l'atténuation et la dissipation des ondes dans des panneaux laminés viscoélastiques. Un code éléments finis commercial est utilisé pour modéliser un segment du panneau avec des éléments 3D. Un amortissement hystérétique est appliqué, ce qui amène une matrice de raideur complexe, les propriétés du matériau sont dépendantes de la fréquence et de la température ($\mathbf{K}(\omega, T)$).

3.1.2 CALCUL DES RELATIONS DE DISPERSION EN RÉGIME LIBRE

La méthode de Floquet-Bloch est la méthode la plus courante pour obtenir les relations de dispersion d'une structure périodique. Elle consiste à résoudre un problème aux valeurs propres où le vecteur d'ondes est une donnée imposée dans la première zone de Brillouin et où les fréquences propres sont les solutions. La méthode a été initialement développée pour les structures sans amortissement ou des systèmes avec des modèles d'amortissement simples comme des amortissements hystérétiques ou visqueux.

Dans une chaîne diatomique 1D de masses et ressorts avec amortissement visqueux [Hussein 10, Hussein 13a], une chute de la branche optique est observée quand l'amortissement augmente tandis que la branche acoustique est peu affectée, ce qui entraîne une réduction de la taille de la bande interdite. Pour un amortissement élevé, il se produit un phénomène de "branch-overtaking" [Hussein 09] où la branche optique se retrouve sous la branche acoustique. Les bornes des bandes interdites sont moins bien définies, l'amortissement réduit la largeur des bandes interdites et ajoute de l'atténuation spatiale (figure 3.2). L'ajout d'amortissement n'est pas possible dans la méthode $\omega(k)$ et nous n'avons pas d'informations sur les parties imaginaires des nombres d'ondes. La méthode $k(\omega)$ nous permet d'avoir les deux informations. Les résultats présentés sur les figures 3.1b, 3.2b et 3.3b sont obtenus par résolution des équations de mouvement, avec des conditions périodiques de Floquet-Bloch, formellement.

Considérons maintenant une chaîne 1D de masses et ressorts en présence de ré-

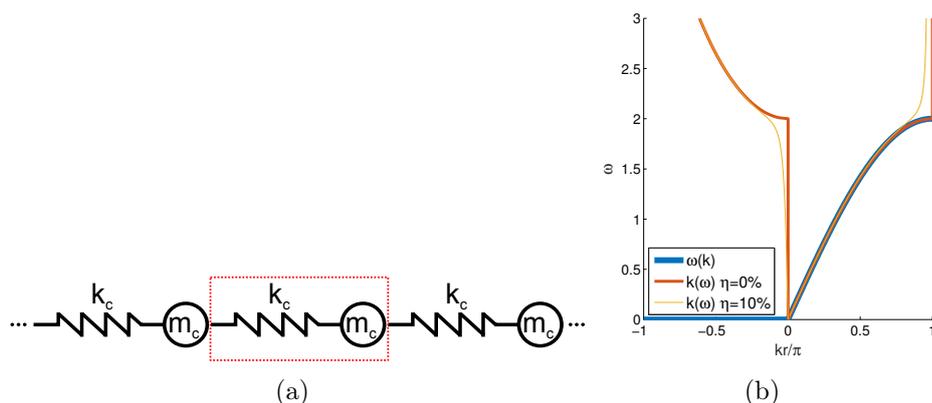


FIGURE 3.1 – Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts avec amortissement hystérétique. Masses et raideurs identiques. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagrammes de dispersion avec et sans amortissement utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1 .

sonateurs internes avec amortissement visqueux (figure 3.3a). La présence d'un résonateur interne a pour conséquence de séparer une branche en deux et d'ouvrir une bande interdite. Cette ouverture est centrée sur la fréquence propre du résonateur en question. Avec la présence d'amortissement dans le système, c'est à dire des résonateurs visqueux entre les masses de la chaîne, les deux branches fusionnent en une seule avec une forme caractéristique de "S" [Hussein 14] (figure 3.3b). Les résonateurs permettent de créer des bandes interdites à plus basse fréquence.

[Mukherjee 75] étudie une structure laminée avec amortissement hystérétique en utilisant la méthode des différences finies pour obtenir les diagrammes de dispersion avec plusieurs niveaux d'amortissement.

L'influence de l'amortissement sur les diagrammes de dispersion est étudiée dans l'article [Moiseyenko 11a]. Un modèle viscoélastique est utilisé dans la méthode EPWE (Extended Plane Waves Expansion) [Laude 09] avec une viscosité proportionnelle à la fréquence. Il est montré que l'amortissement a une influence forte sur les parties réelles et imaginaires des nombres d'ondes. Les branches lentes, à faible vitesse de groupe, sont plus affectées par l'amortissement que les branches à vitesse élevée.

[Claeys 13] étudie également le phénomène avec des résonateurs sur une plaque 2D. La notion de "metadamping" est introduite par [Hussein 13b], deux conditions doivent être réunies pour utiliser cette notion ; des résonateurs locaux et un matériau dissipatif. Un métamatériau acoustique et un cristal phononique sont comparés. Il est conclu que les résonances locales sont plus dissipatives que les bandes interdites de Bragg et ont l'avantage d'être plus basse fréquence.

L'ajout d'un amortissement complexe implique la résolution d'un problème aux valeurs propres polynomiales complexes comme le souligne [Mace 08]. De plus, le post-traitement des nombres d'ondes en présence d'amortissement nécessitent des

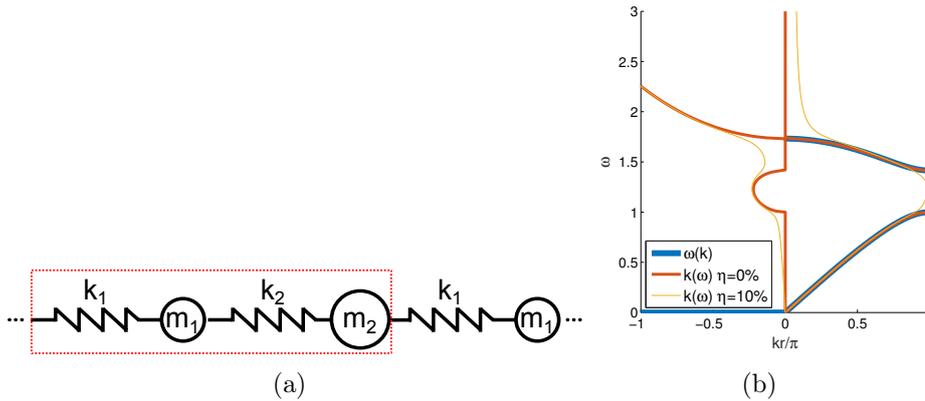


FIGURE 3.2 – Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts avec amortissement hystérétique. Masses et raideurs différentes. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagrammes de dispersion avec et sans amortissement utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties imaginaires des nombres d’ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1 .

outils spécifiques [Manconi 10].

Par conséquent, une formulation alternative est proposée par [Bensoussan 78, Wilcox 78, Collet 11b]; cette méthode est détaillée dans la section 3.2. Un problème quadratique présente deux avantages ; l’introduction de la dépendance en fréquences des propriétés du matériau est facilitée et nous avons accès à la propagation et à l’atténuation spatiale.

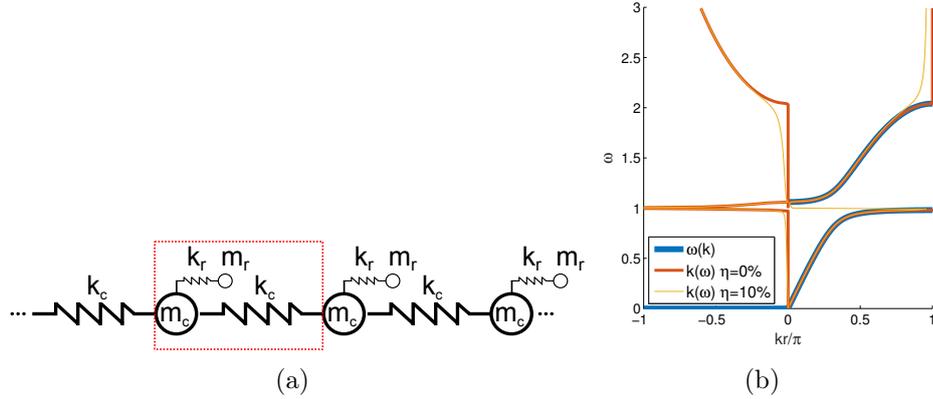


FIGURE 3.3 – a) Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts avec amortissement hysté-
rétique. Résonateurs internes. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagrammes
de dispersion avec et sans amortissement utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties
imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1 .

3.2 MÉTHODE DU "SHIFT CELL OPERATOR"

La méthode "Shift cell operator" va être présentée, avec des détails sur son im-
plémentation numérique et le lien entre les composantes des problèmes direct et
adjoint.

3.2.1 PRÉSENTATION

La technique du "Shift cell operator" [Collet 11b] consiste en une reformulation
du problème aux dérivées partielles dans lequel le déphasage des conditions aux
limites liés à la propagation d'ondes est intégré dans l'opérateur de dérivation. Par
conséquent, la périodicité est incluse dans le comportement global de la structure et
des conditions de continuité sur les bords de la cellule sont imposées.

L'équilibre dynamique du système est régi par le problème aux dérivées partielles

$$\rho(\mathbf{x})\omega^2\mathbf{w}(\mathbf{x}) + \nabla [\mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{sym}(\mathbf{w}(\mathbf{x}))] = 0, \quad (3.2)$$

où $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur déplacement, $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ est le tenseur d'élasticité, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \nabla_{sym}(\mathbf{w}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{w}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{w}(\mathbf{x})\nabla^T)$ est le tenseur des déformations, ρ est la masse volumique du matériau considéré et ω est la pulsation. En considérant la cellule élémentaire Ω_R et en appliquant le théorème de Floquet-Bloch, la relation de dispersion peut être obtenue en cherchant les valeurs propres du problème aux dérivées partielles avec

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (3.3)$$

Dans ce cas, en introduisant l'Equation (3.3) dans l'Equation (3.2), on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\rho(\mathbf{x})\omega^2\mathbf{w}_i + \nabla [\mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{sym}(\mathbf{w}_i)] + j\mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{sym}(\mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{k} + j\frac{\nabla}{2} [\mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{w}_i)] - \frac{1}{2}\mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_R, \quad (3.4)$$

avec

$$\mathbf{w}_i(\mathbf{x} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{w}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_R, \quad (3.5)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal de la face considérée et \mathbf{r} le vecteur des dimensions de la cellule élémentaire.

Ce problème aux valeurs propres quadratiques peut être résolu en fixant la direction de propagation et l'un des paramètres ω ou \mathbf{k} dans \mathbb{R} .

Pour des applications 3D,

$$\mathbf{k} = k \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

où θ et ϕ sont les angles du réseau réciproque (figure 3.4). On définit alors le vecteur directeur

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

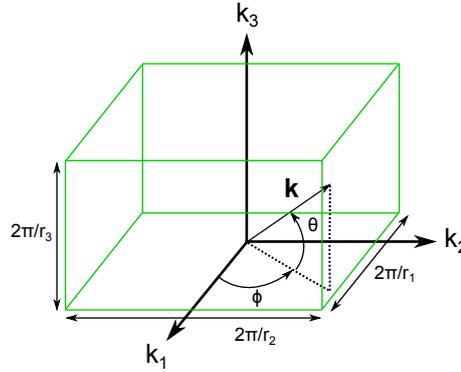


FIGURE 3.4 – Réseau réciproque correspondant

Si l'on trouve \mathbf{w}_i tel que $\forall \tilde{\mathbf{w}}_i \in [H_1(\Omega_R, \mathbb{C}^3) / \tilde{\mathbf{w}}_i(\mathbf{x} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - \tilde{\mathbf{w}}_i(\mathbf{x}) = 0]$, on cherche alors \mathbf{w}_i tel que :

$$\int_{\Omega_R} \rho(\mathbf{x})\omega^2 \tilde{\mathbf{w}}_i \cdot \mathbf{w}_i - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_i + jk \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_i \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_i - jk \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}_i + k^2 \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_i \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}_i d\Omega = 0, \quad (3.8)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \nabla_{sym}(\mathbf{w}_i)$ est le tenseur des déformations, $\boldsymbol{\kappa}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_i \cdot \boldsymbol{\Phi}^T + \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{w}_i^T)$ est le tenseur dyadique symétrique. \sim est utilisé pour représenter la fonction test associée à la variable.

3.2.2 IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE

La méthode des éléments finis est utilisée pour la discrétisation de la formulation faible (3.8). Nous obtenons un problème aux valeurs propres avec les matrices assemblées

$$[(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) + \lambda_i (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) - \lambda_i^2 \mathbf{H}] \boldsymbol{\phi}_i^r = 0, \quad (3.9)$$

où $\lambda_i = jk_i$ est la i -ème valeur propre, $\boldsymbol{\phi}_i^r$ est le vecteur propre à droite associé à λ_i , \mathbf{M} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices standards de masse et de raideur, \mathbf{L} est une matrice anti-symétrique et \mathbf{H} est une matrice définie semi-positive :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &\rightarrow \int_{\Omega_R} \rho(\mathbf{x}) \omega^2 \tilde{\mathbf{w}}_i \mathbf{w}_i \, d\Omega, \\ \mathbf{K} &\rightarrow \int_{\Omega_R} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_i \, d\Omega, \\ \mathbf{L} &\rightarrow \int_{\Omega_R} -\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_i \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_i \, d\Omega, \\ \mathbf{L}^T &\rightarrow \int_{\Omega_R} -\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}_i \, d\Omega, \\ \mathbf{H} &\rightarrow \int_{\Omega_R} \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_i \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}_i \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dans cette formulation, toutes les matrices sont potentiellement dépendantes de ω . Une étude paramétrique aux valeurs propres est menée en utilisant le solveur Pardiso [Schenk 04]. Les paramètres sont la pulsation ω et la direction de propagation de l'onde ϕ .

3.2.3 PROBLÈME DIRECT ET ADJOINT

Le problème n'étant pas symétrique, les vecteurs propres à gauche et à droite pour le même problème aux valeurs propres ne sont pas égaux. Dans la résolution du problème à droite, le i -ème mode ($i \in \mathbb{N}^*$) est défini par sa valeur propre $\lambda_i \geq 0$ et son vecteur propre $\boldsymbol{\phi}_i^r$.

Le problème aux valeurs propres à droite (Equation 3.9) peut être écrit dans l'espace d'état

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_d \\ (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) & \mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_i^r \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i^r \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d & 0 \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_i^r \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i^r \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

soit

$$\mathbf{A}_1(\omega) \boldsymbol{\psi}_i^r = \lambda_i \mathbf{A}_2(\omega) \boldsymbol{\psi}_i^r, \quad (3.12)$$

avec

$$\mathbf{A}_1(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_d \\ (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) & \mathbf{L} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{A}_2(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d & 0 \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{H} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

et

$$\boldsymbol{\psi}_i^r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_i^r \\ \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i^r \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

De la même façon, le problème aux valeurs propres à gauche peut être écrit

$$\boldsymbol{\psi}_i^{lT} \mathbf{A}_1(\omega) = \lambda_i \boldsymbol{\psi}_i^{lT} \mathbf{A}_2(\omega). \quad (3.16)$$

On cherche alors à déterminer s'il existe un lien entre les composantes de $\boldsymbol{\psi}_i^r$ et celles de $\boldsymbol{\psi}_i^l$. Pour cela, on note

$$\boldsymbol{\psi}_i^l = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

L'équation (3.16) permet d'identifier \mathbf{A} et \mathbf{B} , et après plusieurs étapes de calcul on obtient :

$$\mathbf{B}^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) + \lambda_i (\mathbf{A}^T \mathbf{I}_d + \mathbf{B}^T \mathbf{L}) - \lambda_i (\mathbf{A}^T \mathbf{I}_d + \mathbf{B}^T \mathbf{L}^T) - \lambda_i^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{H}) = 0. \quad (3.18)$$

Après simplification et mise en forme, l'équation devient

$$[(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) - \lambda_i (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) - \lambda_i^2 \mathbf{H}] \mathbf{B} = 0. \quad (3.19)$$

Finalement, nous sommes en mesure d'identifier \mathbf{B} et \mathbf{A} . La relation \mathbf{A} , dans notre cas, découle d'une relation précédente et nous importe peu

$$[(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) + \lambda_{-i} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) - \lambda_{-i}^2 \mathbf{H}] \boldsymbol{\phi}_{-i}^r = 0 \quad (3.20)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \boldsymbol{\phi}_{-i}^r = \boldsymbol{\phi}_i^l \\ \mathbf{A}^T = \lambda_i (\boldsymbol{\phi}_{-i}^{rT} \mathbf{H}) - \boldsymbol{\phi}_{-i}^{rT} \mathbf{L} = \lambda_i (\boldsymbol{\phi}_i^{lT} \mathbf{H}) - \boldsymbol{\phi}_i^{lT} \mathbf{L} \end{cases} \quad (3.21)$$

Pour récapituler, dans la résolution du problème à droite, le i -ème mode ($i \in \mathbb{N}^*$) est défini par sa valeur propre $\lambda_i \geq 0$ et son vecteur propre ϕ_i^r . Et pour chaque mode i , un mode $-i$ est associé avec $\lambda_{-i} \leq 0$ tel que $\lambda_{-i} = -\lambda_i$ et ϕ_{-i}^r tel que $\phi_{-i}^r = \phi_i^l$. Donc en résolvant le problème aux valeurs propres à droite, la solution du problème adjoint est également obtenue.

3.3 APPORTS MÉTHODOLOGIQUES

La méthode étant définie, on utilise le lien entre les composantes du problème direct et adjoint pour définir la vitesse de groupe. Cette vitesse servira, d'une part, de critère de tri pour distinguer une onde propagative d'une onde évanescente et, d'autre part, d'indicateur pour le suivi de branche.

3.3.1 VITESSE DE GROUPE

Nous avons développé dans la sous-section précédente le lien entre le vecteur propre à droite et son adjoint à gauche. Ce lien sera utilisé ici pour déterminer la vitesse de groupe.

Pour un système amorti avec des matériaux possédant des dépendances en fréquence, l'estimation de la vitesse de groupe n'est pas triviale. À titre d'exemple, on considère un cas homogène où la dépendance en fréquence est caractérisée par un module d'Young tel que $E = f(\omega)E_0$ et un coefficient de poisson constant. D'où une dépendance en fréquence des matrices du problème aux valeurs propres $\mathbf{K} = f(\omega)\mathbf{K}_0$, $\mathbf{H} = f(\omega)\mathbf{H}_0$ et $\mathbf{L} = f(\omega)\mathbf{L}_0$.

On peut alors dériver l'équation (3.12) et pré-multiplier par ψ_i^{lT} , on obtient ainsi

$$\psi_i^{lT} \frac{\partial \mathbf{A}_1(\omega)}{\partial \omega} \psi_i^r + \psi_i^{lT} \mathbf{A}_1(\omega) \frac{\partial \psi_i^r}{\partial \omega} = \psi_i^{lT} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \omega} \mathbf{A}_2(\omega) \psi_i^r + \psi_i^{lT} \lambda_i \frac{\partial \mathbf{A}_2(\omega)}{\partial \omega} \psi_i^r + \psi_i^{lT} \lambda_i \mathbf{A}_2(\omega) \frac{\partial \psi_i^r}{\partial \omega}. \quad (3.22)$$

D'après l'équation (3.16), on a

$$\psi_i^{lT} \mathbf{A}_1(\omega) \frac{\partial \psi_i^r}{\partial \omega} = \psi_i^{lT} \lambda_i \mathbf{A}_2(\omega) \frac{\partial \psi_i^r}{\partial \omega}, \quad (3.23)$$

d'où la simplification suivante :

$$\psi_i^{lT} \frac{\partial \mathbf{A}_1(\omega)}{\partial \omega} \psi_i^r + \cancel{\psi_i^{lT} \mathbf{A}_1(\omega) \frac{\partial \psi_i^r}{\partial \omega}} = \psi_i^{lT} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \omega} \mathbf{A}_2(\omega) \psi_i^r + \psi_i^{lT} \lambda_i \frac{\partial \mathbf{A}_2(\omega)}{\partial \omega} \psi_i^r + \cancel{\psi_i^{lT} \lambda_i \mathbf{A}_2(\omega) \frac{\partial \psi_i^r}{\partial \omega}}. \quad (3.24)$$

Après plusieurs étapes de calcul, en isolant l'expression $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \omega}$, on obtient la formulation suivante [Moiseyenko 11b] :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \omega} = \frac{\psi_i^{lT} \left[\frac{\partial \mathbf{A}_1(\omega)}{\partial \omega} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{A}_2(\omega)}{\partial \omega} \right] \psi_i^r}{\psi_i^{lT} \mathbf{A}_2(\omega) \psi_i^r}, \quad (3.25)$$

et donc une expression explicite de la vitesse de groupe :

$$C_g = \text{real} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right) = \text{real} \left(\frac{j \phi_i^{lT} [(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) - 2\lambda_i \mathbf{H}] \phi_i^r}{\phi_i^{lT} [2\omega \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \omega} - \lambda_i (\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \omega}) + \lambda_i^2 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \omega}] \phi_i^r} \right) \quad (3.26)$$

Nous verrons plus loin que cette quantité sera utilisée pour suivre une branche du diagramme de dispersion.

Ainsi, à chaque pas de fréquence, la vitesse de groupe doit être calculée. L'expression précédente nous impose de construire toutes les matrices à chaque itération puisqu'elles dépendent de la fréquence. D'où l'idée d'effectuer en amont de la résolution du problème aux valeurs propres, un assemblage permettant de déterminer les matrices non dépendantes de la fréquence \mathbf{K}_0 , \mathbf{H}_0 et \mathbf{L}_0 .

Les matrices non dépendantes de la fréquence peuvent être trouvées par l'astuce suivante. Nous prendrons en exemple la matrice de raideur \mathbf{K} , la procédure est identique pour les autres matrices du problème. Dans un premier temps, nous définissons notre module d'Young tel que $E_1 = f(\omega)E_0$ et nous construisons en utilisant la formulation faible la matrice de raideur \mathbf{K} . Nous stockons la matrice de raideur que nous appellerons \mathbf{K}_1 . Dans un second temps, on double le module d'Young tel que $E_2 = 2E_1$, nous résolvons et stockons \mathbf{K}_2 .

Nous obtenons la matrice de raideur non dépendante de la fréquence K_0 par la formule suivante $(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1)/E_1$, d'où $\mathbf{K} = f(\omega)\mathbf{K}_0$.

Nous pouvons obtenir une expression explicite de la vitesse de groupe à partir des matrices \mathbf{K}_0 , \mathbf{H}_0 et \mathbf{L}_0 , de la matrice de masse \mathbf{M} , de la fonction de dépendance en fréquence $f(\omega)$, de la valeur propre $\lambda_i \geq 0$ et des vecteurs propres ϕ_i^l et ϕ_i^r de l'itération i considérée :

$$C_g = \text{real} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right) = \text{real} \left(\frac{j \phi_i^{lT} [f(\omega)(-\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_0^T + 2\lambda_i \mathbf{H}_0)] \phi_i^r}{\phi_i^{lT} [\omega^2 \frac{\partial f}{\partial \omega} - 2\omega] \mathbf{M} \phi_i^r} \right). \quad (3.27)$$

Une simplification est alors possible dans le cas où il n'y a pas de dépendance du module d'Young à la fréquence et, dans ce cas, nous pouvons dire que la vitesse de groupe est égale à

$$C_g = \text{real} \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right) = \text{real} \left(\frac{j [\phi_i^{lT} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \phi_i^r - 2\lambda_i \phi_i^{lT} \mathbf{H} \phi_i^r]}{2\omega \phi_i^{lT} \mathbf{M} \phi_i^r} \right) \quad (3.28)$$

Cette expression est cohérente avec l'estimation de la vitesse de transport de l'énergie $v = I/E$ [Vladimir 10] où I est le flux d'énergie et E la densité d'énergie mécanique totale.

3.3.2 CRITÈRES DE TRI POUR DISTINGUER UNE ONDE PROPAGATIVE D'UNE ONDE ÉVANESCENTE

L'approche "Shift cell operator" autorise l'introduction des effets liés à l'amortissement. Dans un problème avec amortissement, tous les nombres d'ondes sont complexes, par conséquent la distinction entre les ondes propagatives et évanescentes est difficile. C'est la raison pour laquelle des critères de tri sont construits à partir des quantités suivantes :

- le ratio entre la partie réelle et la partie imaginaire de chaque nombre d'onde

$$C_1 = \text{real}(k)/\text{imag}(k); \quad (3.29)$$

- le ratio entre la partie réelle et la partie imaginaire de la vitesse de transport de l'énergie $v = I/E$ [Vladimir 10] où I est le flux d'énergie et E la densité d'énergie mécanique totale (approximée à partir de l'énergie cinétique par $E = 2E_c$)

$$C_2 = \text{real}(v)/\text{imag}(v); \quad (3.30)$$

- le ratio entre la partie réelle et la partie imaginaire de la vitesse de groupe [Moiseyenko 11b]

$$C_3 = \text{real}(C_g)/\text{imag}(C_g). \quad (3.31)$$

Seules les ondes correspondantes à $C_1 > \tau_1$; $C_2 > \tau_2$ et $C_3 > \tau_3$ sont considérées comme propagatives. En pratique, les seuils τ_1 , τ_2 et τ_3 sont choisis tels que $\tau_1 = \tau_2 = 1$; $\tau_3 = 2$. Il s'agit là d'un choix arbitraire.

La structure étudiée est la même que dans le chapitre 1, il s'agit du guide d'onde bidirectionnel infini présenté sur la figure 1.14). La figure 3.5 présente le diagramme de dispersion tracé le long de la direction $\Gamma - X$ (c'est à dire $\phi = 0^\circ$) avec les résultats bruts en noir et les résultats après application des critères de tri en rouge. La partie réelle des nombres d'ondes est représentée sur la droite de 0 à 1 et la partie imaginaire sur la gauche de 0 à -1. La simulation est sans amortissement, par conséquent, les branches propagatives possèdent des nombres d'ondes purement réels d'où les points bleus le long de l'axe des ordonnées ($\text{imag}(k) = 0$).

3.3.3 VALIDATION DE LA MÉTHODE SUR UN CAS CONSERVATIF

La méthode "Shift cell operator" définie, nous sommes en mesure de calculer la vitesse de groupe pour chaque fréquence, les critères de tri nous permettent de faire la distinction entre ondes propagatives et ondes évanescentes. Un premier calcul est effectué pour comparer les résultats avec ceux présentés dans le Chapitre 1 [Wu 09]. La méthode est utilisée pour obtenir le diagramme de dispersion le long de la direction $\Gamma - X$ (c'est-à-dire $\phi = 0^\circ$) dans le cas conservatif pour valider son implémentation. Les lignes pointillées rouges de la figure 3.6 correspondent aux résultats obtenus avec la méthode Floquet-Bloch, simulation directe du système non-amorti en fixant k le long de la direction $\Gamma - X$ et en récupérant un ensemble de valeurs propres ω . Les points bleus de la figure 3.6 correspondent aux résultats obtenus avec la méthode

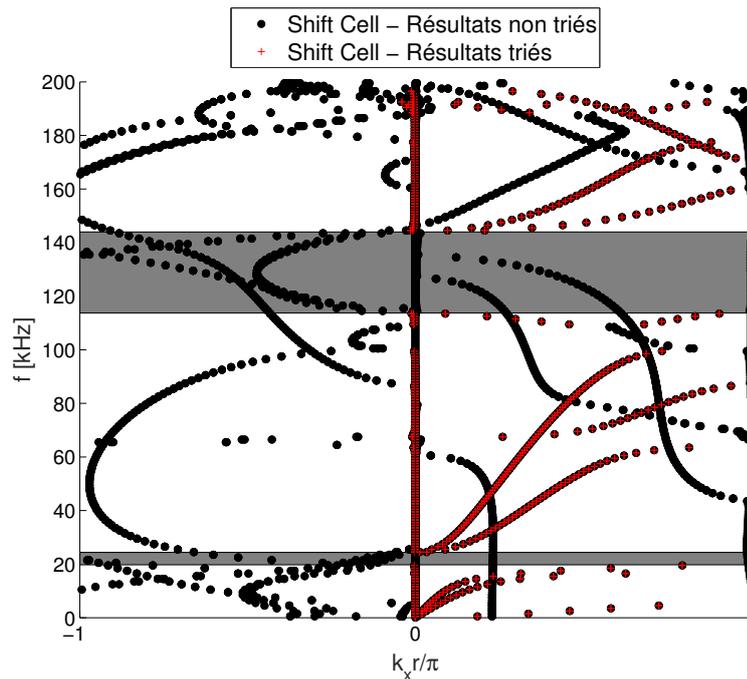


FIGURE 3.5 – Diagramme de dispersion obtenu avec la méthode "Shift cell operator" le long de la direction $\Gamma - X$, résultats bruts et résultats après application des critères de tri respectivement en noir et rouge

"Shift cell operator". La comparaison montre un très bon accord entre les résultats des 2 méthodes dans le cas conservatif.

Une autre direction de propagation est étudiée; le diagramme de dispersion le long de la direction $\Gamma - M$ (c'est à dire $\phi = 45^\circ$) dans le cas conservatif est présenté figure 3.7. Elle donne également un très bon accord entre les deux méthodes. On peut remarquer qu'aux alentours de 68 kHz sur les pointillés rouge, les branches ont l'air de se rapprocher sans se croiser, il y a bien un croisement d'où une méthode de tri de branche développée dans la section 3.3.4 suivante .

3.3.4 SUIVI DE BRANCHES

Dans la méthode "Shift cell operator", la pulsation ω et la direction de propagation de l'onde ϕ sont imposées. Les solutions du problème aux valeurs propres quadratique sont les vecteurs d'ondes $\lambda_i = jk_i$. Une remarque peut être faite dans le cas de branches lentes ou quasi plates (vitesse de groupe faible); la discrétisation du vecteur de fréquences doit être fine pour capter la branche lente. Le pas fréquentiel n'est pas suffisant dans certains cas (voir figure 3.6 au alentours de 68 kHz) d'où l'idée d'utiliser un pas fréquentiel adaptatif plutôt qu'une discrétisation constante. Le pas fréquentiel est fin pour les branches lentes et grossier pour les branches rapides (figure 3.11).

Nous possédons un ensemble de points, formant des branches, que l'on souhaite

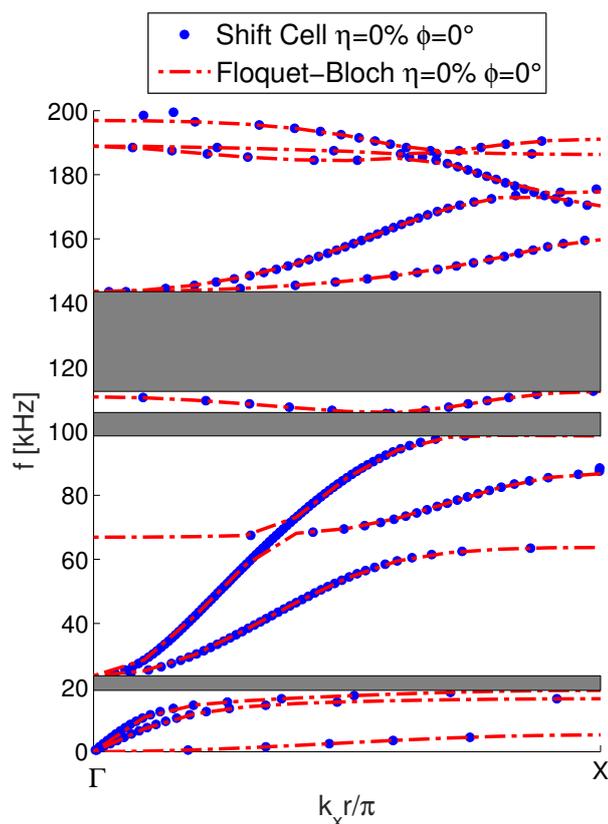


FIGURE 3.6 – Diagramme de dispersion comparant les deux approches, méthodes de Floquet-Bloch et "Shift cell operator" dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - X$

relier en fonction de la nature de chaque branche. Des solutions sont proposées dans la littérature, un tri avec un critère MAC ou les relations d'orthogonalités entre les vecteurs propres [Laude 13], ces méthodes nécessitent de stocker beaucoup de données à chaque itération. Nous proposons une alternative : la vitesse de groupe constitue un indicateur pertinent pour suivre les branches d'un point de calcul à un autre. Cet indicateur nous permet de nous assurer du tracé correct du diagramme de dispersion en particulier dans le cas de croisement de branches où des phénomènes de veering ou de bifurcation se produisent [Morand 92].

La technique proposée consiste à comparer la vitesse de groupe $\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_i}\right)$ et la vitesse de groupe post-processée $\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta k_i}\right)$. La méthode des différences finies est utilisée pour calculer la vitesse de groupe post-processée directement à partir du diagramme de dispersion. L'indicateur fonctionne de gauche à droite, l'identification des points de départ des branches est effectuée. Prenons en exemple un point de départ (figure 3.8), à ce point est associée une vitesse de groupe, la routine compare la vitesse de groupe initiale avec toutes les vitesses de groupe post-procussée par différence finie des points juste à droite. Une minimisation est faite pour identifier le point avec la

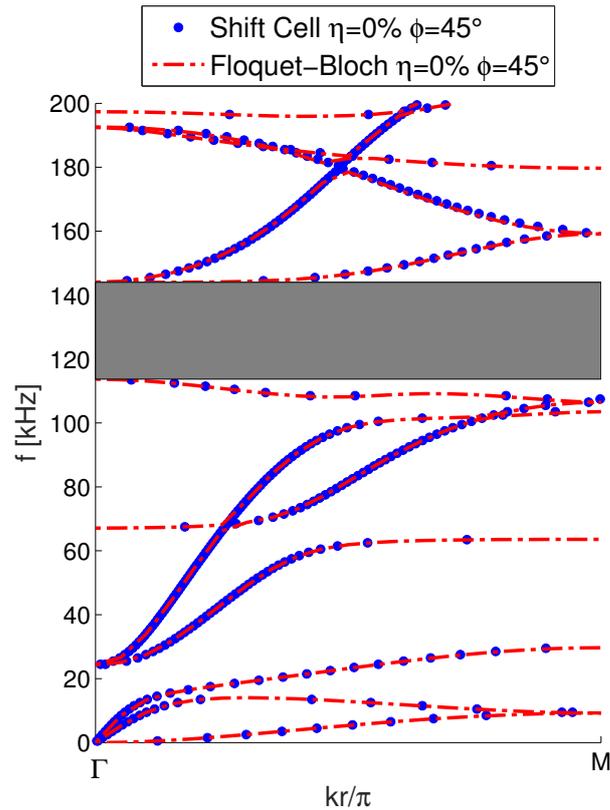


FIGURE 3.7 – Diagramme de dispersion comparant les deux approches, méthode de Floquet-Bloch et "Shift cell operator" dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - M$

vitesse de groupe de groupe post-traitée la plus proche de la vitesse de groupe. Ce point est défini comme point suivant et ainsi de suite de proche en proche la branche est identifiée.

Par exemple sur la figure 3.11, aux alentours de 70kHz , il y a croisement entre la branche bleu clair (n°6) et la branche verte (n°5). Les branches figurant sur ce tracé sont déterminées à partir de la figure 3.10, présentant l'évolution des vitesses de groupe avec un code couleur correspondant au diagramme de dispersion de la figure 3.11.

L'application du suivi de branche aux résultats du calcul permet d'aboutir au diagramme de dispersion présenté sur la figure 3.11, et sur lequel apparaît également les déformées des vecteurs propres.

3.3.5 CONVERGENCE DE MAILLAGE

La technique de suivi de branches peut être particulièrement utile pour l'analyse de la convergence de maillage. Dans notre cas, celle-ci est réalisée en comparant l'écart relatif entre les branches de deux maillages successifs (deux exemples de maillage de la cellule élémentaire sont présentés figure 3.12).

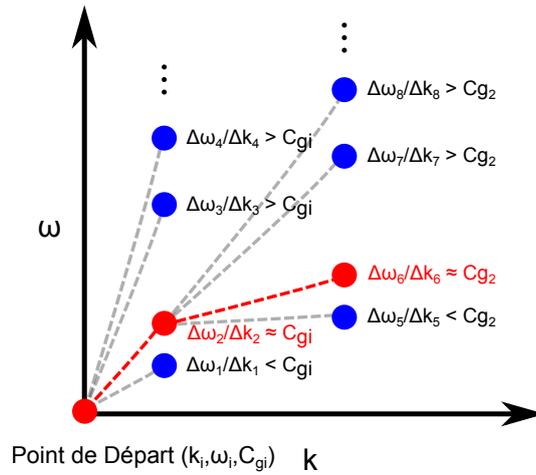


FIGURE 3.8 – Schéma du fonctionnement de la routine du suivi de branches

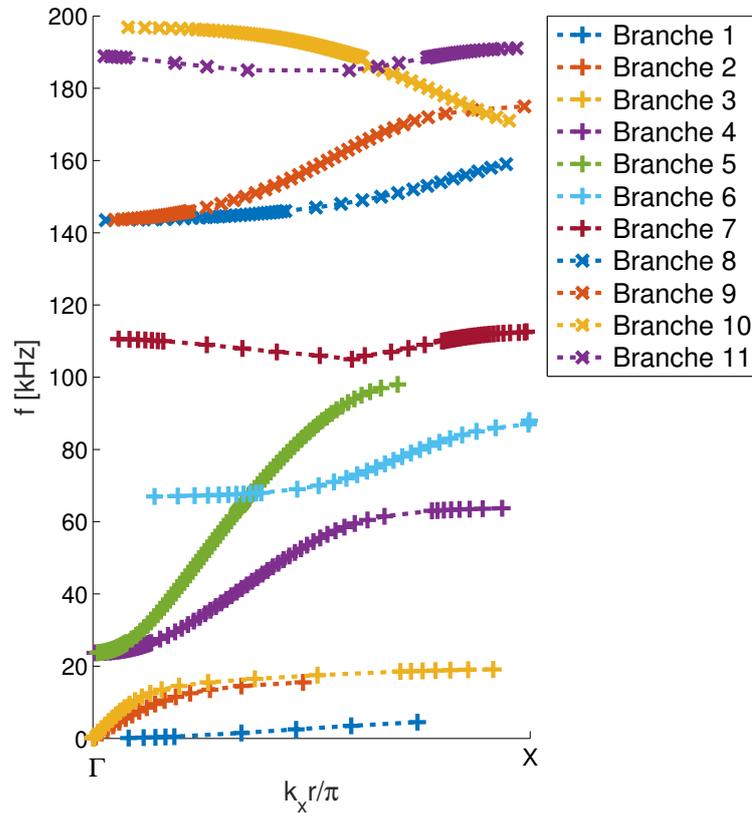


FIGURE 3.9 – Diagramme de dispersion utilisant la méthode "Shift cell operator" avec pas de fréquence adaptatif et tri de branches dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - X$

Pour ce faire, un exemple est donné figure 3.13, l'écart relatif entre 2 branches

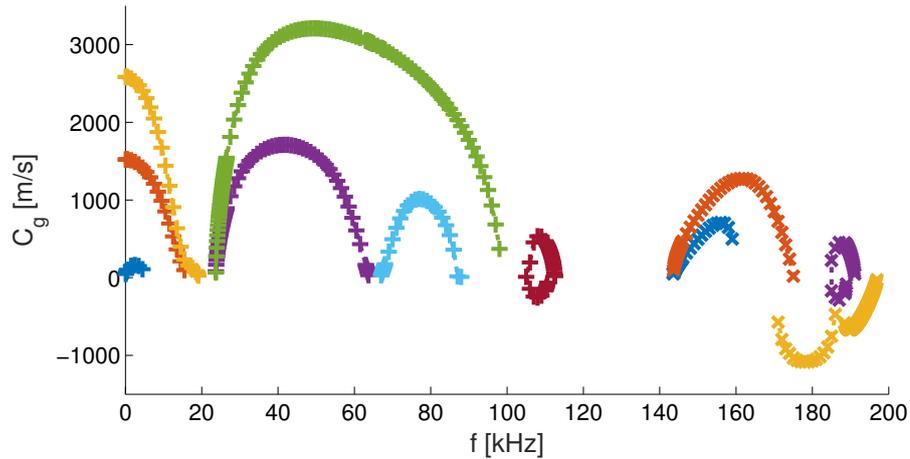


FIGURE 3.10 – Vitesse de groupe avec pas de fréquence adaptatif et tri de branches dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - X$

sera calculé de la façon suivante :

$$\frac{\Delta f_i}{f_i} = \frac{f_i - f_{33616}}{f_{33616}} \quad (3.32)$$

Le maillage le plus fin, possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques est pris comme référence. À titre d'exemple, pour déterminer l'écart associé au maillage à 889 éléments, une interpolation linéaire (figure 3.13) est appliquée entre chaque point d'une branche, ensuite les abscisses correspondantes aux abscisses de la même branche du maillage de référence sont déterminées et l'écart peut être calculé pour chaque point de la branche.

Le maillage peut être critique en hautes fréquences, on s'intéresse donc à la branche 11 (figure 3.11). D'après les explications précédentes, on peut tracer l'erreur $\Delta f_i/f_i$ des maillages possédant 889, 1796, 5443 et 11938 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques par rapport à celui qui en possède 33616 (figure 3.14a). On remarque que l'écart relatif à 11938 éléments est quasiment nul donc on suppose que le maillage est convergé.

Nous pouvons également tracer l'écart relatif moyen ($\frac{1}{n}\sum|\Delta f_i/f_i|$) de la branche 11 par rapport au maillage possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques en fonction du nombre d'éléments (figure 3.14b).

L'application à l'ensemble des branches permet d'obtenir le tableau 3.1 regroupe les écarts moyens entre le maillage possédant 11938 éléments et celui en possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques. Au vu des écarts, on estime que le maillage avec 11938 éléments convient pour cette géométrie et pour notre bande de fréquence d'intérêt.

Le diagramme de dispersion tracé sur le figure 3.11 a été obtenu avec ce maillage.

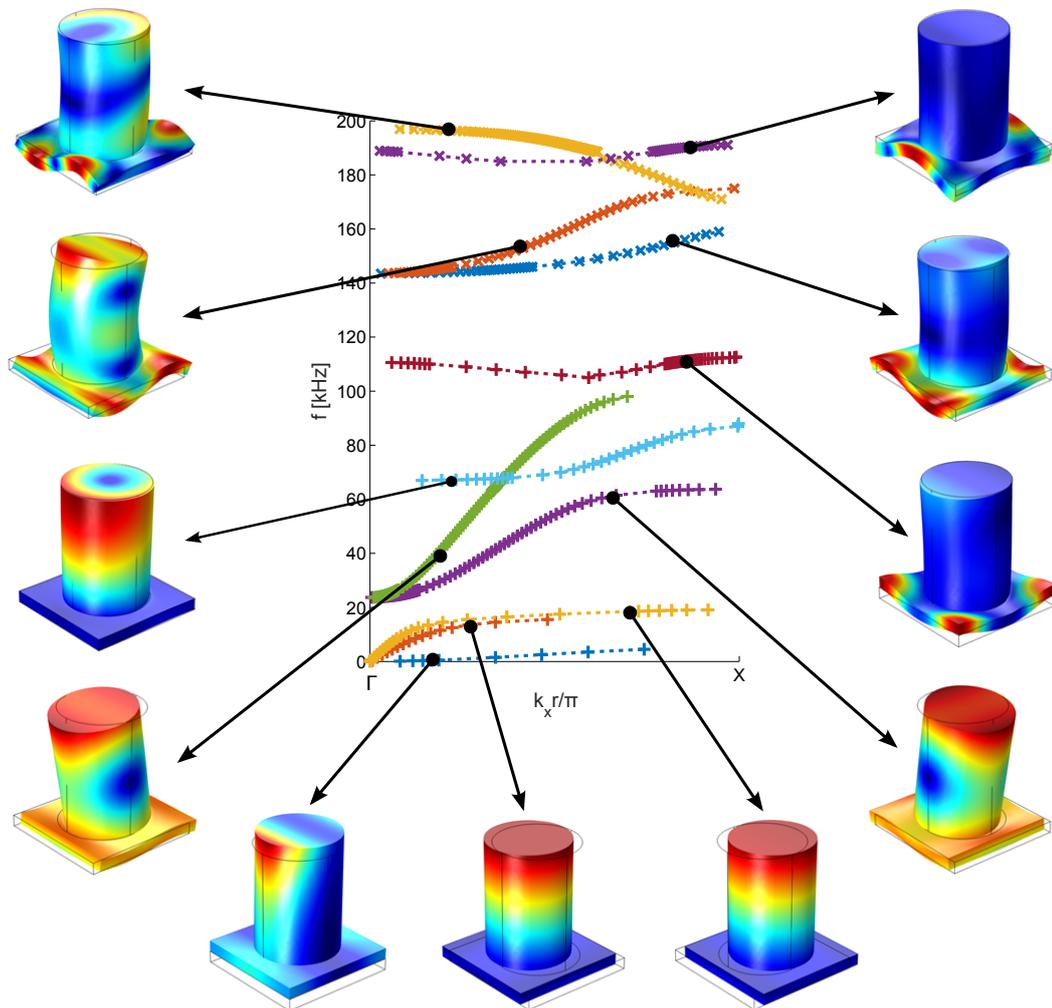


FIGURE 3.11 – Diagramme de dispersion dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - X$ avec les déformées associées à chaque branche.

TABLE 3.1 – Écart relatif moyen ($\Delta f / f$) entre le maillage possédant 11938 et celui possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques.

Branche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{1}{n} \sum \Delta f_i / f_i [\%]$	0,38	0,19	0,36	0,37	0,25	0,09	0,5	0,07	0,14	0,09	0,3

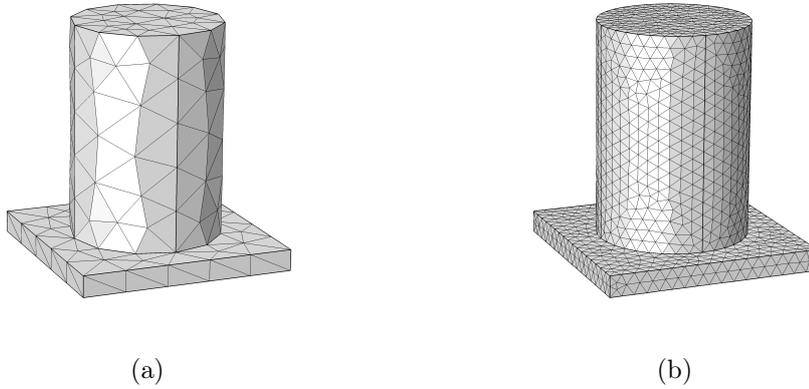


FIGURE 3.12 – Maillage de la cellule unitaire. a) 889 ; b) 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques.

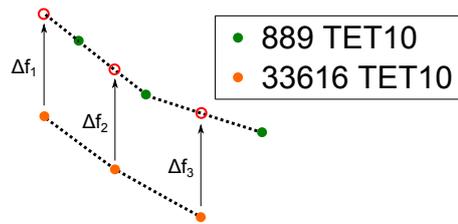


FIGURE 3.13 – Interpolation linéaire entre le maillage possédant 889 et celui possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques.

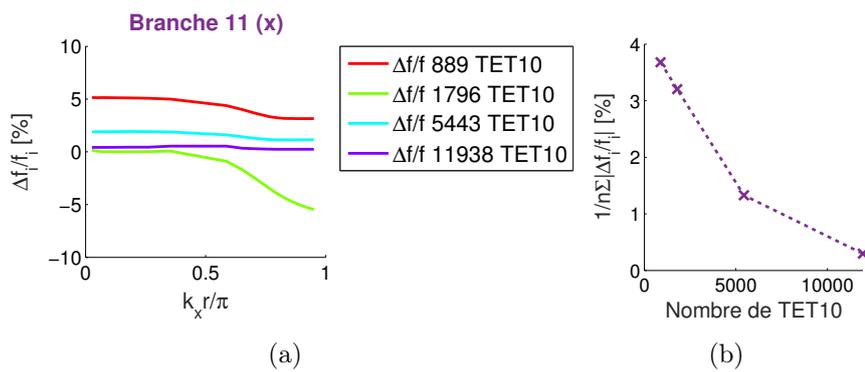


FIGURE 3.14 – a) Écart relatif ($\Delta f_i/f_i$) de la branche 11 entre les maillages possédant 889, 1796, 5443 et 11938 par rapport à celui possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques en fonction du nombre d'onde réduit ; b) écart relatif moyen ($\frac{1}{n} \Sigma |\Delta f_i/f_i|$) de la branche 11 par rapport au maillage possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques en fonction du nombre d'éléments.

3.3.6 RÉSULTATS EN MILIEU AMORTI

On s'intéresse à présent à l'introduction d'un amortissement hystérétique dans le système via un module d'Young complexe $E^* = E(1 + j\eta)$ où η est le facteur de perte. Le matériau considéré est un matériau virtuel dont les propriétés du matériau sont semblables à de l'aluminium. Nous étudierons l'influence de l'amortissement sur les courbes de dispersion.

On rappelle sur les figures 3.15 et 3.16 les résultats le long de la direction $\Gamma - X$ pour la structure sans amortissement ; ils constituent notre référence. Les résultats obtenus par l'application de la méthode de Floquet-Bloch sans amortissement sont tracés en pointillés rouges. Les parties réelles des nombres d'ondes sont tracées de 0 à 1 et les parties imaginaires de -1 à 0. Les parties imaginaires des branches présentes de 0 à 1 sont distinguées en bleu. Pour une configuration sans amortissement, tous les nombres d'ondes sont réels d'où une agglomération de points bleus sur l'axe des ordonnées correspondant aux parties imaginaires des ondes propagatives. Une comparaison entre les vitesses de transport de l'énergie et les vitesses de groupe est systématiquement associée aux résultats de dispersion.

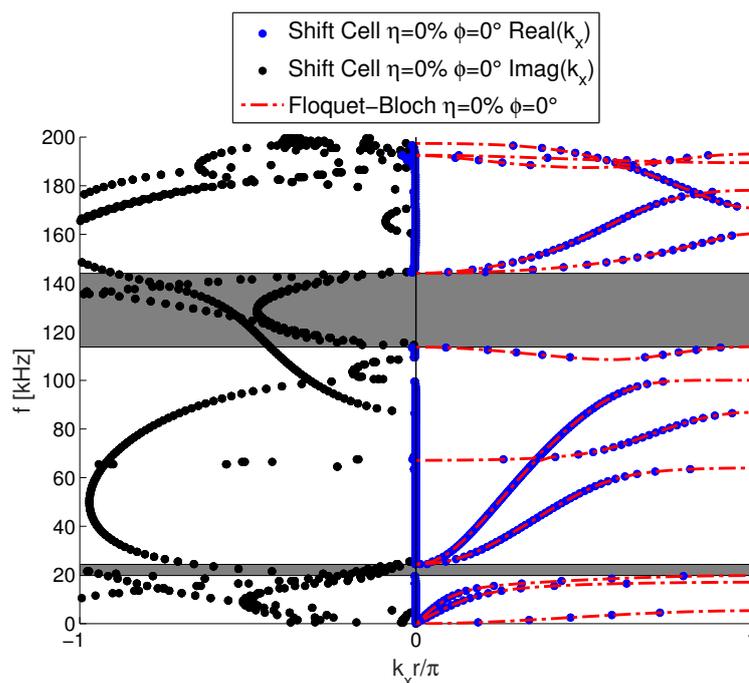


FIGURE 3.15 – Courbes de dispersion sans amortissement, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 ; les résultats avec la méthode de Floquet-Bloch sans amortissement sont donnés en référence en pointillés rouges.

Dans l'analyse menée, on fait varier l'amortissement de 1 à 10%. Dans le cas du pourcent d'amortissement (figures 3.17 et 3.18), le diagramme de dispersion et les vitesses se trouvent faiblement affectés.

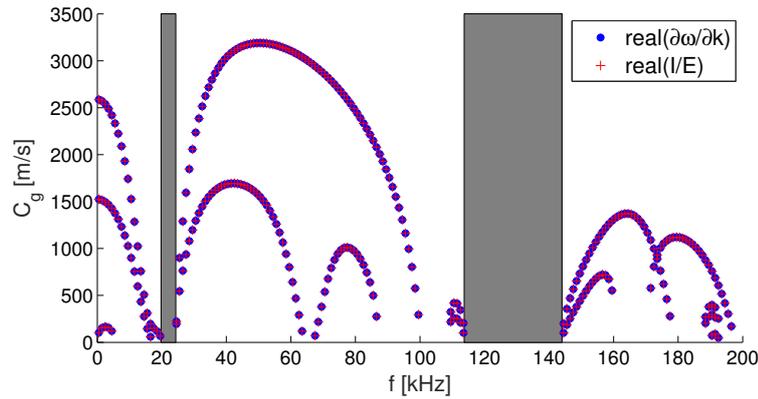


FIGURE 3.16 – Vitesse de groupe, associée au diagramme de dispersion (figure 3.15), calculée par méthode énergétique ou par formulation différentielle.

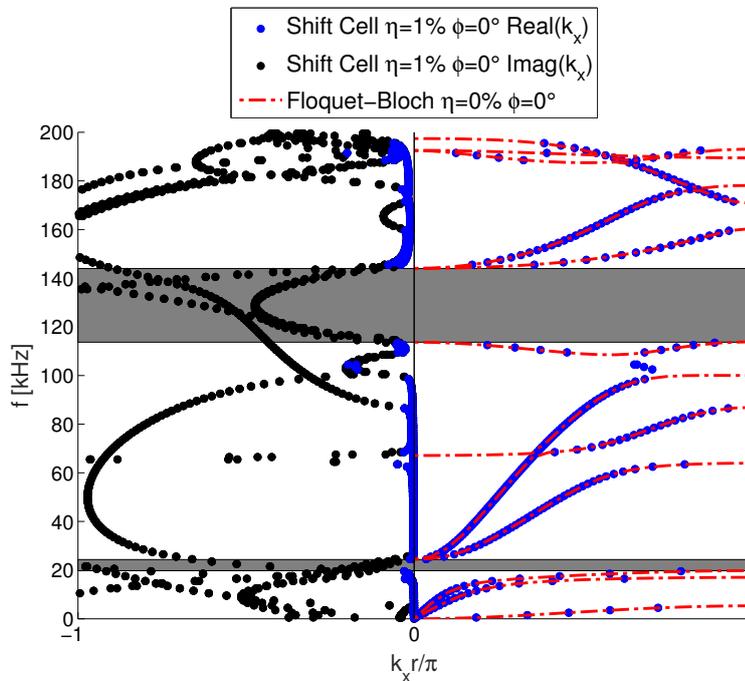


FIGURE 3.17 – Courbes de dispersion avec amortissement hystérétique de 1%, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 ; les résultats avec la méthode de Floquet-Bloch sans amortissement sont donnés en pointillés rouges.

La situation évolue avec l'augmentation de l'amortissement. Dans la configuration avec 5% d'amortissement (figure 3.19), le diagramme de dispersion se trouve affecté tant pour les parties réelles que les parties imaginaires des nombres d'ondes. Les vitesses (figure 3.20) présentent un phénomène intéressant ; les vitesses de groupe, avant et après la bande interdite de Bragg (centrée à environ 130 kHz), sont plus

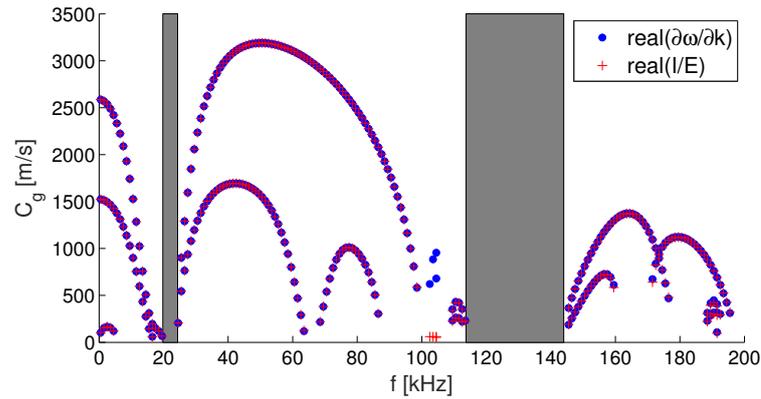


FIGURE 3.18 – Vitesse de groupe, associée au diagramme de dispersion (figure 3.17), calculée par méthode énergétique ou par formulation différentielle.

élevées que la vitesse de transport de l'énergie.

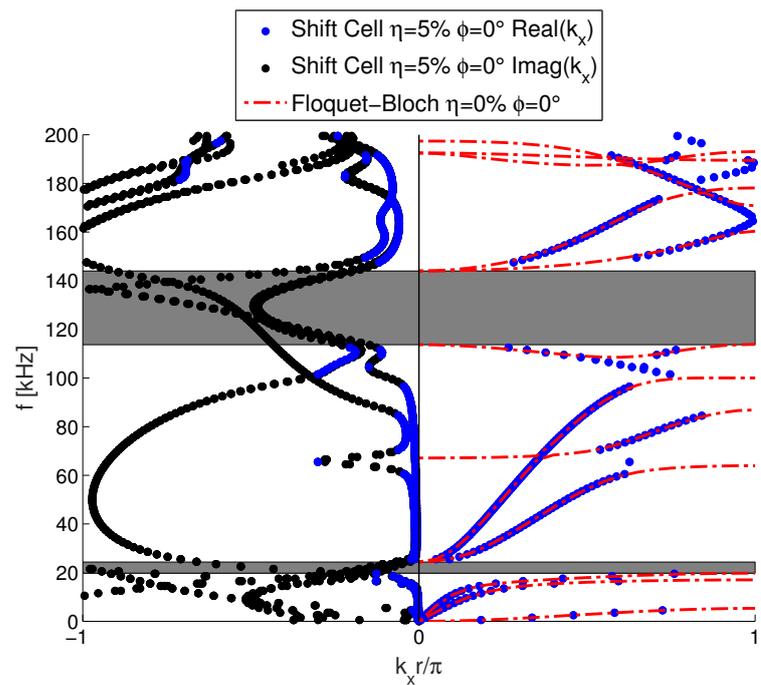


FIGURE 3.19 – Courbes de dispersion avec amortissement hystérétique de 5%, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 ; les résultats avec la méthode de Floquet-Bloch sans amortissement sont donnés en pointillés rouges.

Dans la configuration avec 10% d'amortissement (figures 3.21 et 3.22), nous observons les mêmes phénomènes dans des proportions plus significatives. On retrouve également le fait que les branches à vitesse faible sont très affectées par l'amortisse-

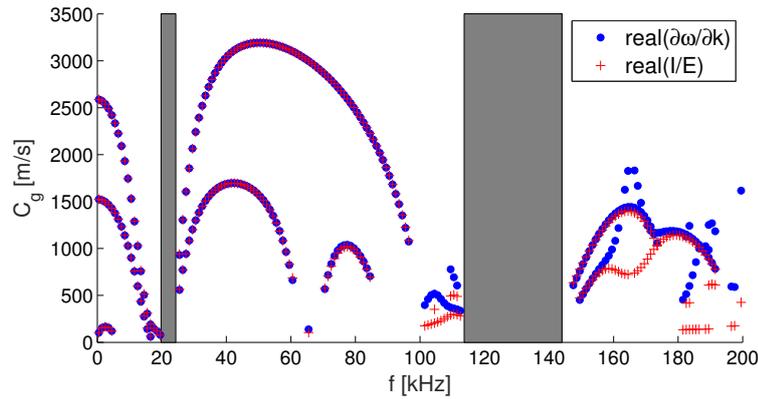


FIGURE 3.20 – Vitesse de groupe, associée au diagramme de dispersion (figure 3.19), calculée par méthode énergétique ou par formulation différentielle.

ment contrairement aux branches à vitesse élevée.

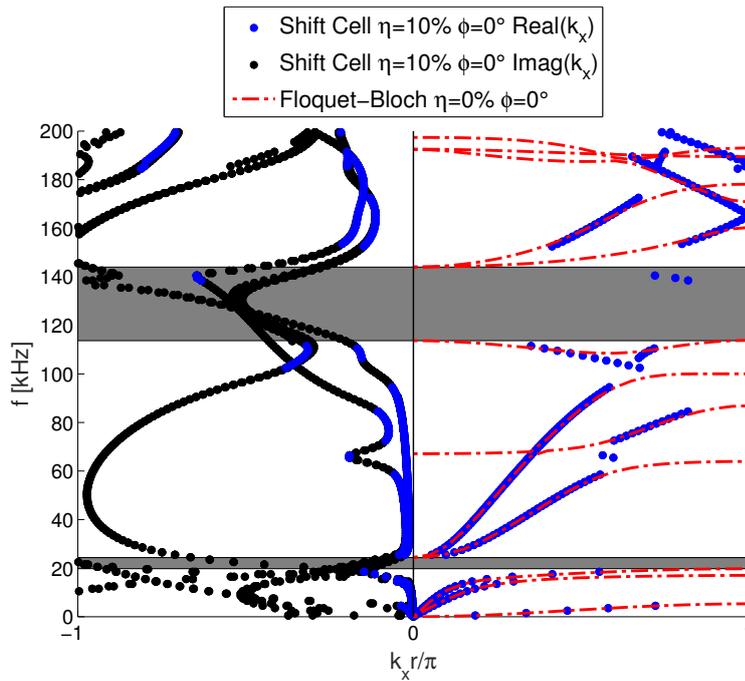


FIGURE 3.21 – Courbes de dispersion avec amortissement hystérétique de 10%, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 ; les résultats avec la méthode de Floquet-Bloch sans amortissement sont donnés en référence en pointillés rouges.

Ici la bande interdite n'a plus de réalité physique au sens où toutes les ondes propagent de l'énergie avec une atténuation très forte. La notion de bande interdite est une notion conservative (sans amortissement) et se lie à des phénomènes d'inter-

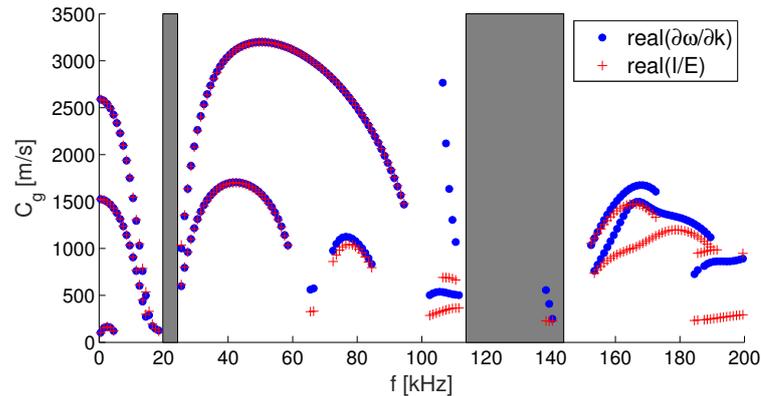


FIGURE 3.22 – Vitesse de groupe, associée au diagramme de dispersion (figure 3.21), calculée par méthode énergétique ou par formulation différentielle.

férences destructives ici on a introduit de l'absorption. Donc selon les critères utilisés des ondes peuvent apparaître dans la bande interdite.

3.4 CONCLUSIONS

Les structures périodiques sont intéressantes du point de vue des bandes interdites complètes ou partielles associées à la non propagation d'ondes dans le réseau. La détermination du diagramme de dispersion est une nécessité pour concevoir des structures avec des bandes de fréquences d'absorption spécifiques. La méthode de Floquet-Bloch est une technique commune mais l'implémentation en présence d'amortissement est difficile. La seconde approche, appelée "Shift cell operator", est basée sur la reformulation du problème aux équations aux dérivées partielles. Cette méthode est appliquée à une structure non amortie pour validation. Celle-ci permet la simulation avec de l'amortissement. Elle nous apporte également des informations sur la vitesse de groupe. Cette dernière peut être utilisée comme critère pour distinguer une onde propagative d'une onde évanescence. Cette vitesse est également utilisée pour réaliser du suivi de branche et de la convergence de maillage. Ces outils vont nous permettre de simuler des géométries et des matériaux possédant des dépendances à la fréquence plus complexes, comme c'est le cas pour la structure présentée dans le chapitre 4.

MÉTAMATÉRIAU AVEC INTERFACE POLYMÈRE HAUTEMENT DISSIPATIVE

Sommaire

4.1	Présentation du métamatériau	92
4.1.1	Dimensionnement du polymère	92
4.1.2	Modèle viscoélastique	93
4.2	Propriétés dynamiques	95
4.2.1	Analyse de dispersion	95
4.2.2	Structure finie	100
4.3	Confrontation expérimentale	103
4.3.1	Réalisation du métamatériau	103
4.3.2	Dispositif expérimental	104
4.3.3	Analyse vibratoire expérimentale - Essais en température	106
4.3.4	Confrontation calculs-essais	106
4.4	Conclusions	114

PRÉAMBULE

Dans ce chapitre, les outils numériques développés dans le chapitre 3 sont utilisés pour l'analyse de la dispersion dans une structure périodique amortie. La structure en question est un métamatériau composite adaptatif mêlant aluminium et polymère hautement dissipatif. Le comportement est décrit avec une analyse de la dispersion dans la structure infinie et une étude de la propagation d'ondes dans la structure finie. Une confrontation avec les résultats expérimentaux est ensuite menée.

4.1 PRÉSENTATION DU MÉTAMATÉRIAU

Le métamériau considéré est un guide d'ondes bidirectionnel mêlant aluminium et polymère hautement dissipatif. Les polymères, appelés communément "matières plastiques", constituent une classe de matériaux à part entière.

Lorsque la température augmente, un polymère peut traverser quatre domaines d'état structural délimités par trois températures :

- la température de transition vitreuse T_g , cette transition étant observée dans la phase amorphe du polymère, au passage de l'état vitreux (rigide) à l'état caoutchoutique (souple),
- la température de fusion T_f qui ne concerne que la phase cristalline du polymère si elle existe,
- la température de décomposition thermique T_d où le polymère perd son intégrité.

Certains polymères sont très utilisés pour les applications nécessitant la réduction du niveau vibratoire, on cherche à combiner l'effet amortissant de ces matériaux avec l'effet de coupure lié à la périodicité. La capacité du matériau à dissiper de l'énergie est maximale à la transition vitreuse. On peut aller plus loin et utiliser la transition comme système de pilotage du comportement mécanique, passer d'un système rigide et peu amorti à un système souple dissipatif. C'est dans cet esprit que nous proposons dans ce chapitre, de concevoir un métamériau adaptatif dont le comportement peut être piloté par la température. Le modèle sera construit à l'aide des méthodes introduites dans les chapitres précédents, puis nous présenterons des résultats expérimentaux afin de déterminer la pertinence des modèles utilisés.

4.1.1 DIMENSIONNEMENT DU POLYMÈRE

Le guide d'ondes bidirectionnel du chapitre 1 est pris comme référence dans cette étude (figure 4.1b). Le métamériau considéré dans ce chapitre est constitué d'une plaque de 1 mm d'épaisseur servant de support à des plots cylindriques distribués de façon périodique, de diamètre 7 mm et de hauteur 10 mm. La plaque porteuse est en aluminium 6063-T83 ($\nu = 0,33$, $E = 69 \text{ GPa}$ et $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$). Les cylindres, quant à eux, sont constitués d'une combinaison entre un polymère hautement dissipatif, le tBA/PEGDMA [Butaud 16] ($\nu_{poly} = 0,37$, E_{poly} , l'expression est définie dans la section 4.1.2 et $\rho_{poly} = 1004 \text{ kg/m}^3$) et d'une masselotte en aluminium 6063-T83 (figure 4.1). L'épaisseur du polymère a été choisie pour obtenir une bande interdite résonante plus basse que la bande interdite liée à l'interférence de Bragg tout en respectant une contrainte liée au moyen d'élaboration de ce polymère. En effet, en raison du procédé d'élaboration qui nécessite une photopolymérisation UV, l'épaisseur maximale que l'on peut réaliser est de 3 mm. En assimilant le plot à un système masse ressort 1D, la partie polymère est équivalente à un ressort, et la partie aluminium à une masse. La fréquence propre de cet oscillateur s'exprime de la façon suivante :

$$f_0 = \frac{\sqrt{\frac{K_{poly}}{M_{alu}}}}{2\pi} \quad (4.1)$$

avec $K_{poly} = \frac{E_{poly}S}{h_{poly}}$ et $M_{alu} = \rho_{alu}Sh_{alu}$ où S est la section cylindrique du plot, h_{poly} et h_{alu} les épaisseurs respectives de polymère et d'aluminium.

La raideur minimale, permettant d'obtenir la fréquence de résonance la plus basse, est obtenue avec une épaisseur de polymère maximale, soit 3 mm. La partie du plot en aluminium a donc une épaisseur de 7 mm (figure 4.1c). Cette fréquence est choisie aux alentours de 40 kHz. Elle est relativement haute, les dimensions de la cellule élémentaire et les contraintes liées à l'élaboration du polymère ne nous permettent pas de descendre plus bas en fréquence.

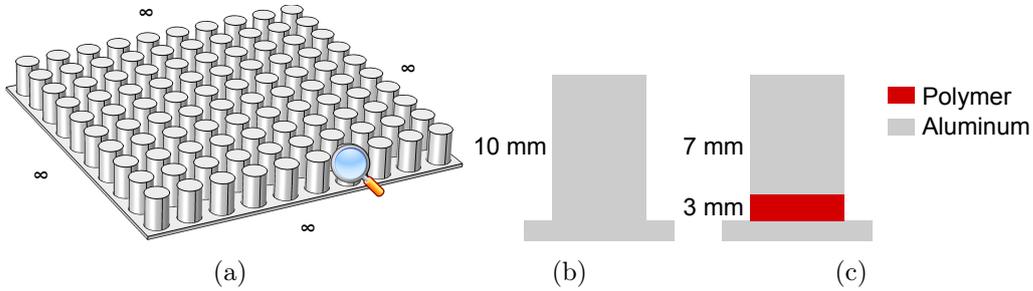


FIGURE 4.1 – a) Guide d'ondes bidirectionnel infini. b) Plot de référence du chapitre 1, cylindre en aluminium de 10 mm. c) Plot constitué d'une interface en polymère hautement dissipative de 3 mm surmontée d'un cylindre en aluminium de 7 mm.

4.1.2 MODÈLE VISCOÉLASTIQUE

Un modèle adapté est nécessaire pour décrire la dépendance en fréquence du polymère. En régime harmonique, le module d'Young du polymère est complexe, dépendant de la fréquence et de la température,

$$E_{poly}^*(\omega, T) = E' + jE'' = E' \times (1 + j \times \tan(\delta)), \quad (4.2)$$

où $\tan(\delta) = E''/E'$ est le facteur de perte, E' est la partie réelle du module complexe appelé module de stockage, E'' est la partie imaginaire du module complexe appelé module de perte.

Le module de stockage exprime la capacité du matériau à stocker et à restituer l'énergie mécanique. Le module de perte représente la composante visqueuse du matériau. Le facteur de perte traduit l'aptitude du matériau à dissiper de l'énergie mécanique.

Le comportement viscoélastique du tBA/PEGDMA est approximé par un modèle fractionnaire de Zener [Rouleau 12]. Il définit l'expression du module complexe dans le domaine fréquentiel par

TABLE 4.1 – Paramètres de Zener pour le tBA/PEGDMA.

E_{0poly} [MPa]	$E_{\infty poly}$ [Mpa]	α	τ_0
1	2200	0,78	0,91

$$E_{poly}^*(\omega, T) = \frac{E_{0poly} + E_{\infty poly} (j\omega\tau(T))^\alpha}{1 + (j\omega\tau(T))^\alpha}, \quad (4.3)$$

où E_{0poly} et $E_{\infty poly}$ sont respectivement le module d'élasticité caoutchoutique et la limite du module d'élasticité à haute fréquence, le module vitreux, τ est le temps de relaxation et α est l'ordre de dérivée fractionnaire.

L'expression du module complexe, utilisant le modèle fractionnaire de Zener, possède quatre paramètres. Les paramètres du modèle pour le tBA/PEGDMA ont été identifiés à partir des courbes maîtresses dans les travaux de P. Butaud [Butaud 15] (tableau 4.1).

Le facteur de translation a_T provient de la loi de Williams-Landel-Ferry (WLF) [Williams 55], la dépendance de a_T à la température est alors décrite par

$$\log_{10}(a_T(T)) = \frac{-C_1^0(T - T_0)}{-C_2^0 + (T - T_0)}, \quad (4.4)$$

avec C_1^0 et C_2^0 les constantes de la loi pour une température de référence T_0 . Les constantes de la loi sont $C_1^0 = 10,87$ et $C_2^0 = 32,57 K$ à la température de référence $T_0 = 40^\circ C$. Le temps de relaxation τ est lié au facteur de translation par la relation suivante :

$$\tau(T) = a_T(T) \times \tau_0. \quad (4.5)$$

Nous choisissons trois configurations d'amortissement, une configuration à faible amortissement, une intermédiaire et une dernière très dissipative. À $25^\circ C$, température ambiante, le polymère est rigide et son facteur de perte est quasi nul. À $90^\circ C$, le polymère n'a pas un facteur de perte descendant en dessous de 1,5 sur toute la bande de fréquence d'intérêt (de 0 à $100kHz$) et il possède un maximum à 2,5. À $60^\circ C$, c'est la configuration intermédiaire, il y a de l'amortissement en basses fréquences qui diminue jusqu'à s'annuler en hautes fréquences. Le module de stockage est tracé sur la figure 4.2a et le facteur de perte sur la figure 4.2b, les tracés en bleu sont associés à la température ambiante de $25^\circ C$, en rouge à celle de $60^\circ C$ et en jaune à la température, la plus élevée de $90^\circ C$.

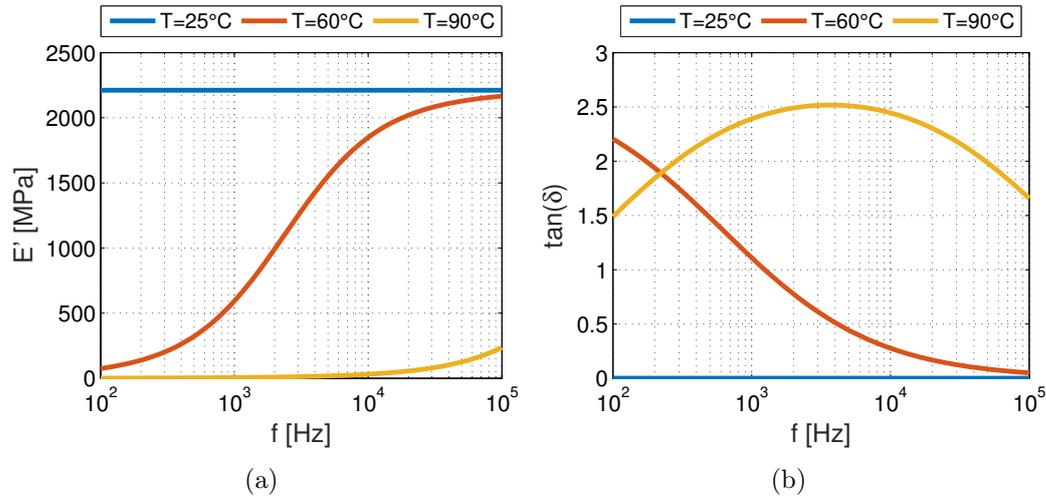


FIGURE 4.2 – a) Module de stockage. b) Facteur de perte du tBA/PEGDMA pour des températures de 25°C , 60°C et 90°C respectivement tracées en bleu, rouge et jaune.

4.2 PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES

4.2.1 ANALYSE DE DISPERSION

La méthode "Shift cell operator" est utilisée pour obtenir le diagramme de dispersion le long de la direction $\Gamma - X$ (c'est à dire $\phi = 0$). L'amortissement est inclus dans l'analyse via le module complexe du polymère décrit avec le modèle fractionnaire de Zener. Les résultats sont présentés sur la figure 4.3, il s'agit des diagrammes de dispersion tracés le long de la direction $\Gamma - X$. Sur la figure 4.3a, on observe le diagramme de dispersion du guide d'ondes bidirectionnel du chapitre 1 réalisé intégralement en aluminium. Sur la figure 4.3b, on observe le diagramme de dispersion du métamatériau à température ambiante 25°C , on retrouve bien une bande interdite aux alentours de 40 kHz , qui était visée lors du dimensionnement du plot constituant le résonateur. La figure 4.3c est une comparaison entre le diagramme de dispersion du métamatériau à la température de 90°C et le diagramme de dispersion d'une plaque simple en aluminium. L'épaisseur de la base du plot du métamatériau et l'épaisseur de la plaque simple sont égales. La relation de dispersion de la plaque simple est obtenue avec une formule analytique. On peut remarquer que les courbes sont quasiment superposées : la propagation d'ondes dans le métamatériau, à la température de 90°C , passée la transition vitreuse, s'effectue comme si la plaque était homogène. La bande interdite aux alentours de 40 kHz a disparu. On peut conclure que la température est un "interrupteur" du réseau périodique, elle pilote le comportement dynamique du métamatériau.

Les diagrammes de dispersion présentant les parties réelles et imaginaires des nombres d'ondes sont tracés à la température ambiante de 25°C sur la figure 4.4, à la température de 60°C sur la figure 4.5 et enfin à la température de 90°C sur la figure 4.6.

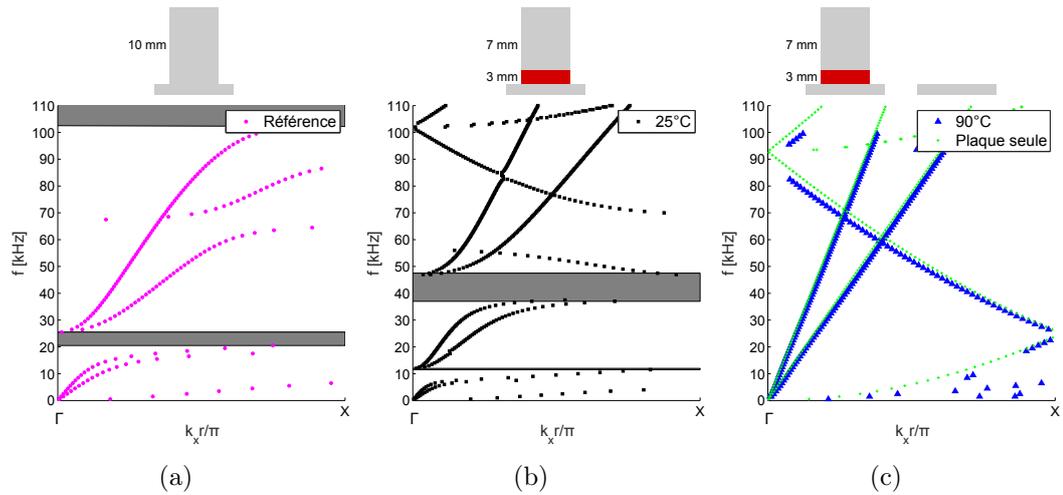


FIGURE 4.3 – Diagrammes de dispersion le long de la direction $\Gamma - X$ obtenus avec la méthode "Shift cell operator". a) Structure de référence du chapitre 1, tout en aluminium. b) Métamatériau à température ambiante de $25^{\circ}C$. c) Métamatériau à la température de $90^{\circ}C$ et plaque en aluminium.

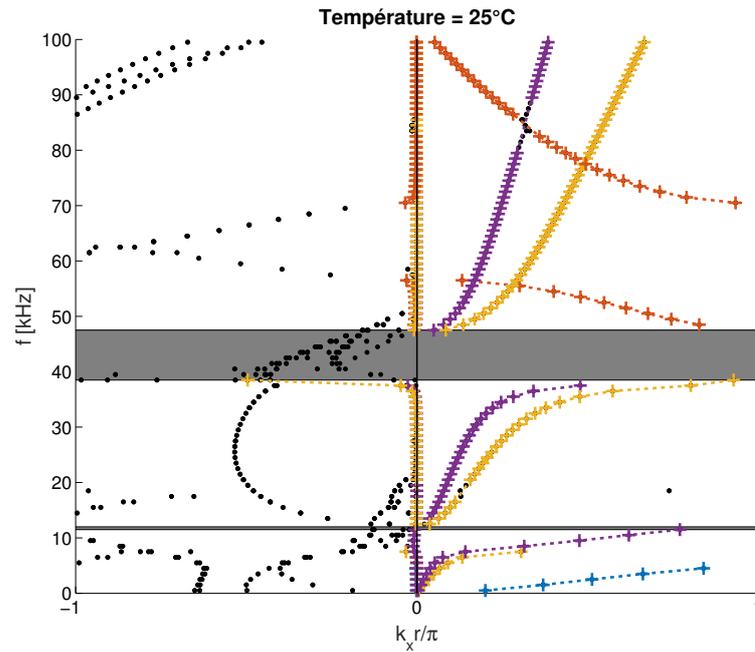


FIGURE 4.4 – Courbes de dispersion à la température de $25^{\circ}C$, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 . Les déformées longitudinale, transversale et de flexion à 40 kHz sont visibles sur la droite

Sur la figure 4.4, on retrouve le diagramme de dispersion avec la bande interdite aux alentours de 40 kHz . Les parties imaginaires des branches propagatives sont

quasiment nulles traduisant le faible amortissement à température ambiante.

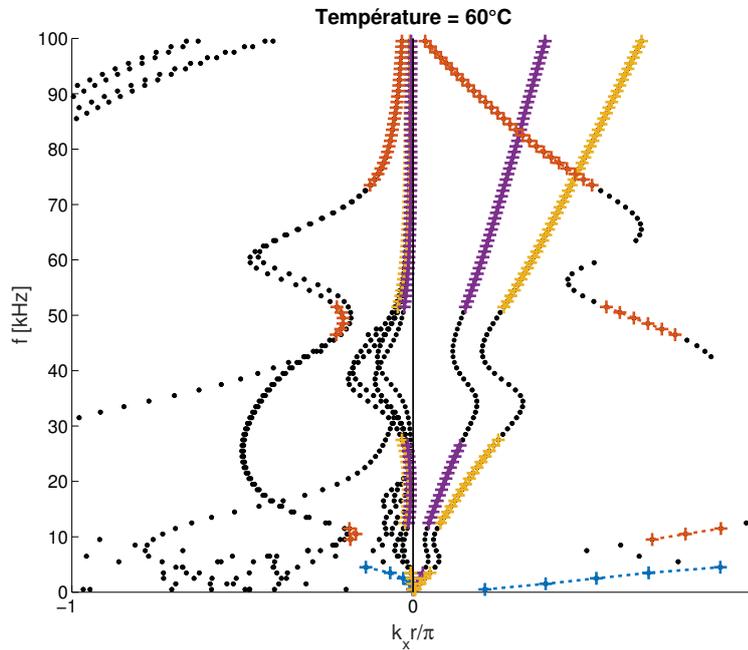


FIGURE 4.5 – Courbes de dispersion à la température de $60^{\circ}C$, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 .

Sur la figure 4.5, la bande interdite résonante aux alentours de 40 kHz est refermée, les branches se rejoignent, on retrouve la forme caractéristique de "S". Les parties imaginaires des branches propagatives sont non nulles traduisant la présence d'amortissement dans le système à cette température.

Sur la figure 4.6, il y a deux familles : l'une extrêmement amortie, l'autre très peu amortie : le matériau n'est sans doute pas sollicité de la même façon. Les ondes faiblement amorties correspondent à des ondes longitudinales et transversales, la branche dispersive plutôt à de la flexion. Les déformées à 40 kHz sont observables sur la figure 4.6, la première en haut correspond à la branche longitudinale ($\lambda_{\ell} = 12\text{ cm}$), celle du milieu à la branche transversale ($\lambda_t = 7,5\text{ cm}$) et enfin celle du bas à la branche de flexion ($\lambda_f = 1,5\text{ cm}$).

Les vitesses de groupe associées aux diagrammes de dispersion sont tracées à la température ambiante de $25^{\circ}C$ sur la figure 4.7a, à la température de $60^{\circ}C$ sur la figure 4.7b et enfin à la température de $90^{\circ}C$ sur la figure 4.7c.

Sur la figure 4.7a, on retrouve l'évolution des vitesses de groupe avec la bande interdite aux alentours de 40 kHz . Sur la figure 4.7b, la bande interdite est effacée. Sur la figure 4.7c, les vitesses de groupe pour les ondes longitudinales et transversales se stabilisent aux vitesses $C_{\phi_{\ell}}$ et C_{ϕ_t} correspondant à la propagation dans une plaque simple. À savoir, $C_{\phi_{\ell}} = 5390\text{ m/s}$ et $C_{\phi_t} = 3120\text{ m/s}$.

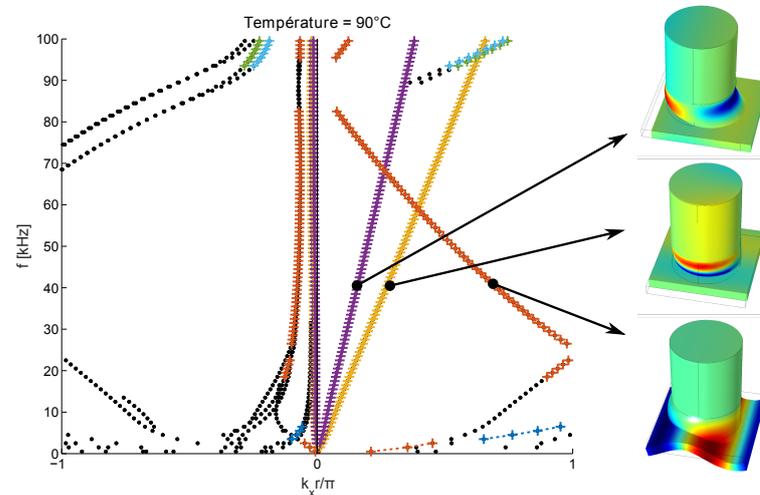


FIGURE 4.6 – Courbes de dispersion à la température de 90°C , parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 . Déformées à 40 kHz associées aux branches longitudinale, transversale et de flexion.

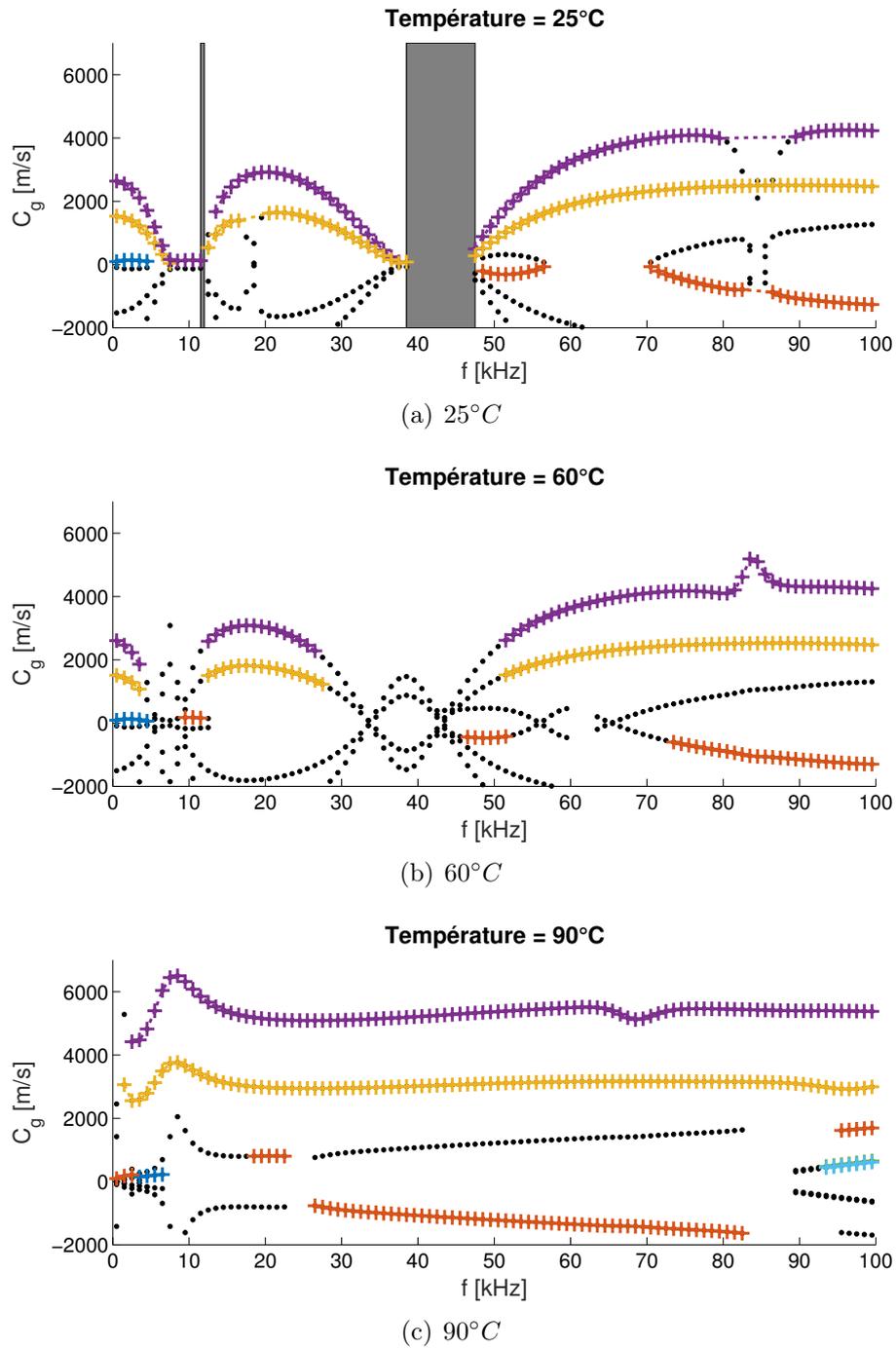


FIGURE 4.7 – Vitesses de groupe, associées aux diagrammes de dispersion de la a) figure 4.4 à 25°C, b) figure 4.5 à 60°C et c) figure 4.6 à 90°C.

4.2.2 STRUCTURE FINIE

Le but de cette partie est de valider sur une structure finie, les phénomènes observés avec les méthodes d'analyse en structure infinie. La structure finie, de 21 cm par 7 cm pour une épaisseur de 1 mm, intègre une interface composée d'un ensemble distribué de cellules unitaires de 7 cm par 7 cm, à savoir 7 cellules par 7. Il n'y a qu'une seule plaque (le support des plots), mais par commodité, on va désigner par "plaque d'entrée" la partie de la plaque nue sur laquelle la sollicitation est exercée, et "plaque de sortie" la partie de la plaque située de l'autre côté du métamatériau. La plaque d'entrée et la plaque de sortie font 7 cm par 7 pour une épaisseur de 1 mm (figure 4.8).

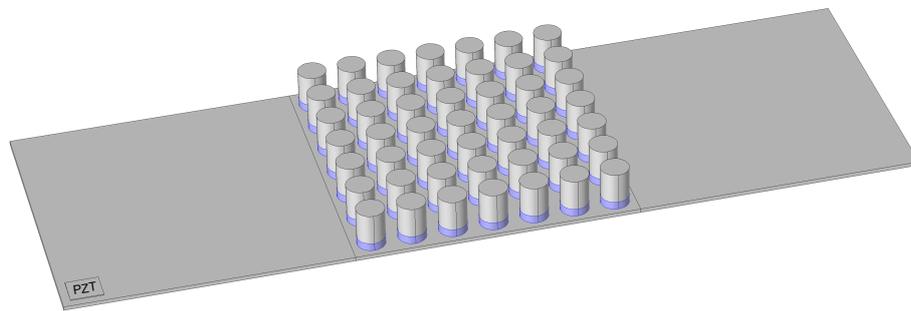


FIGURE 4.8 – Structure finie intégrant une interface composée d'un ensemble distribué de cellules unitaires. Positionnement d'un patch piézoélectrique en bas à gauche pour générer l'excitation.

Les trois températures sont étudiées, la plaque est en conditions libres. Afin de disposer d'un modèle représentatif de la structure qui sera utilisée pour les essais, l'excitation de la plaque s'effectue via un patch piézoélectrique alimenté avec une tension harmonique de module 100 V. Le choix de ce système d'excitation s'explique par le fait que les essais vont être réalisés en température donc il doit résister à la température et pouvoir couvrir la bande de fréquence d'intérêt de 0 à 50 kHz. Les résultats des fonctions de réponse en fréquence de la structure, obtenus numériquement avec un code de calcul éléments finis, sont présentés sur la figure 4.9. Les amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ sont moyennées sur la plaque d'entrée et sur la plaque de sortie. Elles sont ensuite divisées par la référence de tension électrique. La courbe bleue correspond à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d'entrée à la température de 25°C, la courbe rouge à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ sur la plaque de sortie à la même température. La courbe jaune correspond à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d'entrée à la température de 90°C, la courbe violette à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ sur la plaque de sortie à la même température. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion, est représentée par le rectangle grisé.

À la température de 25°C, une atténuation significative est observable, centrée sur la fréquence de 45 kHz. La largeur de l'atténuation est réduite par rapport à la

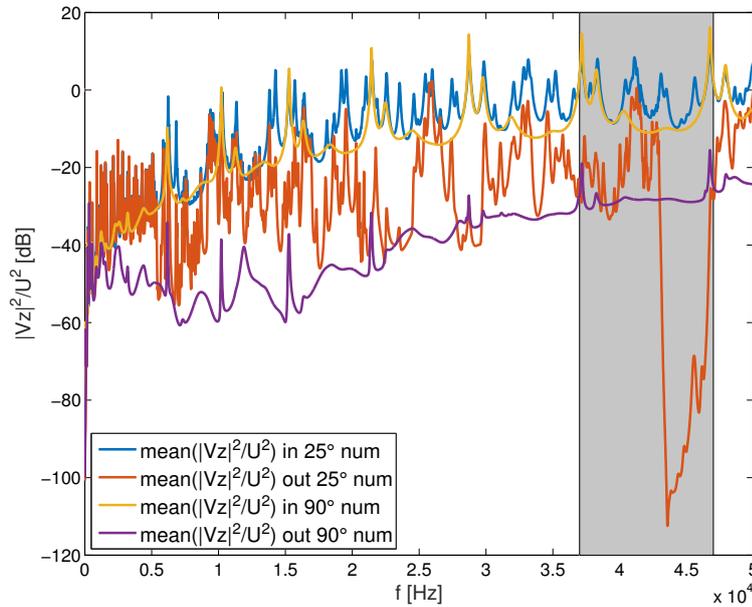


FIGURE 4.9 – Fonctions de réponse en fréquence numériques de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée et de sortie, à la température de $25^\circ C$, respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée et de sortie, à la température de $90^\circ C$, respectivement en jaune et violet. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion à la température de $25^\circ C$, est représentée par le rectangle grisé.

largeur de la bande interdite prédite par le diagramme de dispersion.

Les premières déformées numériques et une déformée dans la bande interdite à température ambiante sont présentées sur la figure 4.10. Dans la bande interdite les ondes sont bien confinées sur la plaque d’entrée du réseau. La figure 4.10c est la déformée à la fréquence de $41,1 \text{ kHz}$, fréquence appartenant à la bande interdite prédite par le diagramme de dispersion. Une atténuation est tout de même présente mais moins significative que celle centrée en 45 kHz . Les conditions aux limites ou le nombre de cellules du réseau peuvent expliquer le phénomène observé.

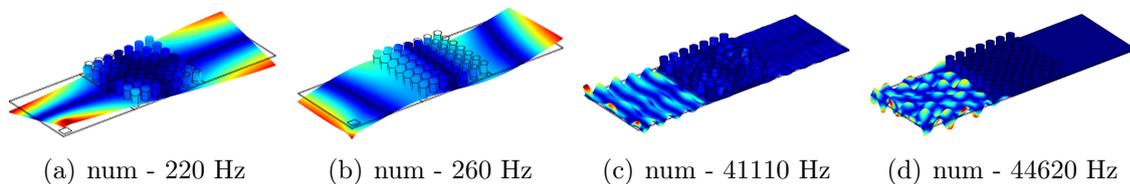


FIGURE 4.10 – Déformées numériques à température ambiante.

À la température de $90^\circ C$ la zone d’atténuation n’est plus visible au niveau de la bande interdite. Cependant certaines fréquences de résonance sont lissées, la fonction de réponse en fréquence est moins riche. Une atténuation, sous forme de lissage global,

sur la plaque de sortie, est observée.

Les premières déformées numériques à la température de 90°C sont données sur la figure 4.11. La diminution de la rigidité du polymère à la température de 90°C , entraîne une diminution des premières fréquences propres entre 5 et 13%.

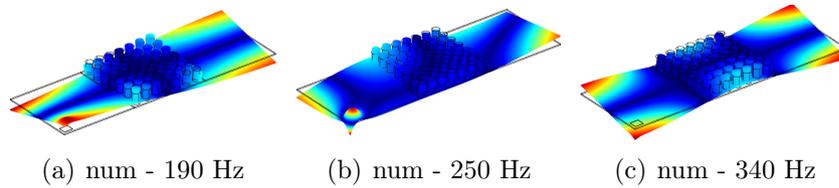


FIGURE 4.11 – Déformées numériques à la température de 90°C .

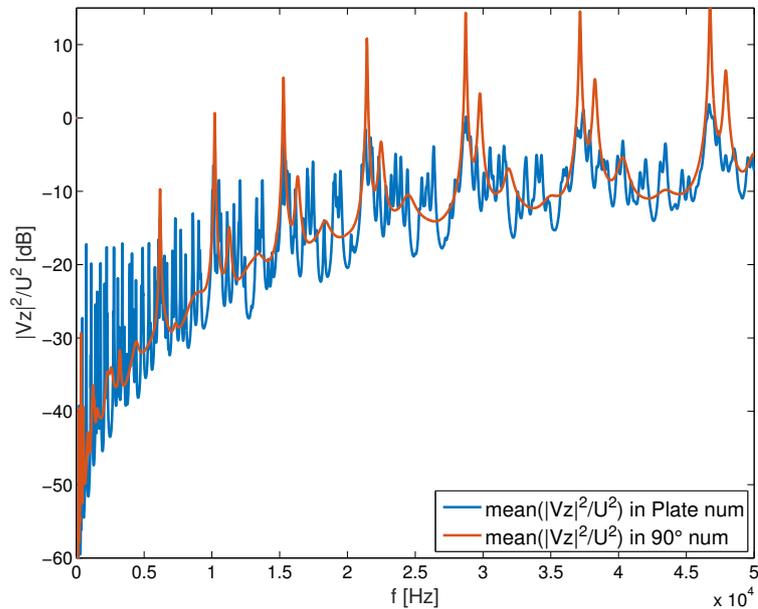


FIGURE 4.12 – Fonctions de réponse en fréquence numériques du métamatériau à la température de 90°C et celles de la simple plaque. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d'entrée de la simple plaque en bleu. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d'entrée du métamatériau, à la température de 90°C , en rouge.

Comparons les résultats à la température de 90°C aux résultats sur une simple plaque possédant les mêmes dimensions. La plaque est en conditions libres et l'excitation de la plaque s'effectue via un patch piézoélectrique alimenté avec une tension harmonique de module 100V. Nous nous retrouvons dans les mêmes conditions aux limites et avec la même excitation que le métamatériau précédent. Les résultats des fonctions de réponse en fréquence du métamatériau à la température de 90°C et ceux de la simple plaque, obtenus numériquement avec un code de calcul éléments finis,

sont présentés sur la figure 4.12. L'amortissement dans le système à la température de $90^{\circ}C$, lisse la réponse en fréquence, il y a beaucoup moins de modes visibles.

4.3 CONFRONTATION EXPÉRIMENTALE

Cette section est consacrée à la confrontation expérimentale des résultats obtenus numériquement. La réalisation du métamatériau, le dispositif expérimental et l'analyse vibratoire expérimentale sont expliqués.

4.3.1 RÉALISATION DU MÉTAMATÉRIAU

4.3.1.1 ÉLÉMENTS DE BASE

Le métamatériau est constitué de trois parties :

- la plaque en aluminium de 21 cm par 7 et d'épaisseur 1 mm ,
- les plots en polymère d'un diamètre de 7 mm de hauteur 3 mm ,
- les plots en aluminium d'un diamètre de 7 mm de hauteur 7 mm .

La plaque en aluminium est découpée à la scie à métaux, les plots sont réalisés à l'aide d'un tour dans un cylindre d'aluminium brut de 8 mm d'épaisseur. Une plaque de polymère tBA/PEGDMA est réalisée par P. Butaud. Elle est constituée de trois composants le tBA, le PEGDMA et un photopolymérisateur. Le mélange est coulé entre deux plaques de verre espacées de 3 mm . Après initiation de la polymérisation sous UV, la plaque est mise au four. Les plots en polymère sont découpés dans la plaque, à l'aide d'une machine à découpe laser à partir d'une CAO 2D de 49 cercles d'une épaisseur prenant en compte la demi-épaisseur du laser de découpe ($600\mu\text{m}/2$) et le retrait de polymère fondu.

4.3.1.2 ASSEMBLAGE

Deux étapes d'assemblages sont nécessaires :

- le collage des plots en polymère sur la plaque en aluminium,
- le collage des plots en aluminium sur chaque plot en polymère.

Les deux étapes nécessitent de veiller au positionnement du réseau de plots par rapport à la plaque et à la répartition équidistante des plots les uns par rapport aux autres. Pour ce faire, un guide est réalisé à l'aide d'une imprimante 3D. Il se compose de deux parties, la partie supérieure possédant une rainure d'une profondeur de 1 mm et de la largeur de la plaque permettant la mise en position de la plaque nue, et d'une partie inférieure avec 49 alésages d'une profondeur de 1 mm et de diamètre $7,1\text{ mm}$ permettant la mise en position des plots. Le tout est assemblé par quatre vis, rondelles, écrous (figure 4.13).

La colle utilisée est une colle bi-composants thixotrope $3M^{TM}DP490$. Elle polymérise à température ambiante. Il est préconisé un cycle de polymérisation de 7 jours à $23^{\circ}C$ avec une pression de 100kPa pendant les 24 premières heures.

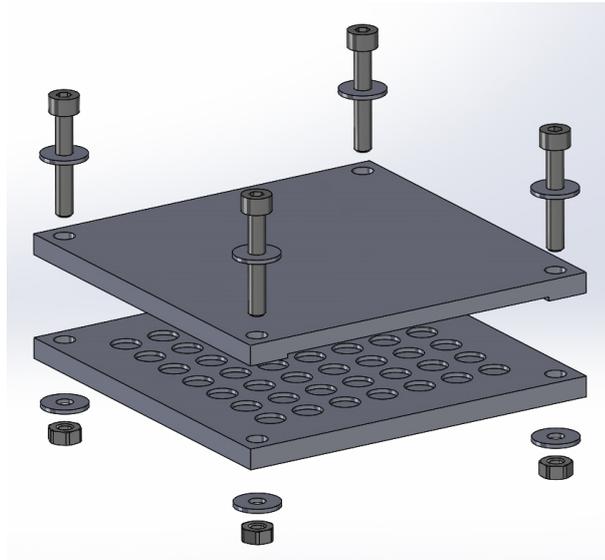


FIGURE 4.13 – CAO du support d'assemblage permettant la mise en place des parties composant le métamatériau.

Pour l'assemblage, deux étapes sont nécessaires : pour la première étape, les plots polymères sont mis en place dans la partie inférieure du guide (figure 4.14a) et la plaque aluminium est glissée dans la rainure de la partie supérieure. La colle est appliquée manuellement sur chaque plot polymère. La mise en position entre les deux parties du guide est assurée par les quatre vis. La procédure de collage peut alors être mise en oeuvre, conformément aux recommandations du fournisseur (figure 4.14d). La seconde étape s'organise de la même façon, les plots aluminium sont mis en place dans la partie inférieure du guide (figure 4.14b) et la plaque aluminium (avec les plots polymères - figure 4.14c) n'est pas retirée de la rainure de la partie supérieure. La colle est appliquée manuellement sur chaque plot polymère. La mise en position est toujours assurée par les vis et les plots aluminium s'alignent parfaitement par rapport aux plots polymères. La même procédure de collage est engagée.

Le métamatériau est enfin constitué (figure 4.15), la procédure de collage permet d'avoir une épaisseur de colle équivalente d'un plot à un autre, la différence est observable au niveau des bourrelets de colle dont l'épaisseur est variable, comme cela peut être observé sur la photo.

4.3.2 DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

La figure 4.16 permet d'illustrer les éléments composant le dispositif expérimental :

- le métamatériau sur son support,
- une enceinte thermique,
- un vibromètre 3D à balayage avec son système d'acquisition et d'excitation,
- un amplificateur piézoélectrique

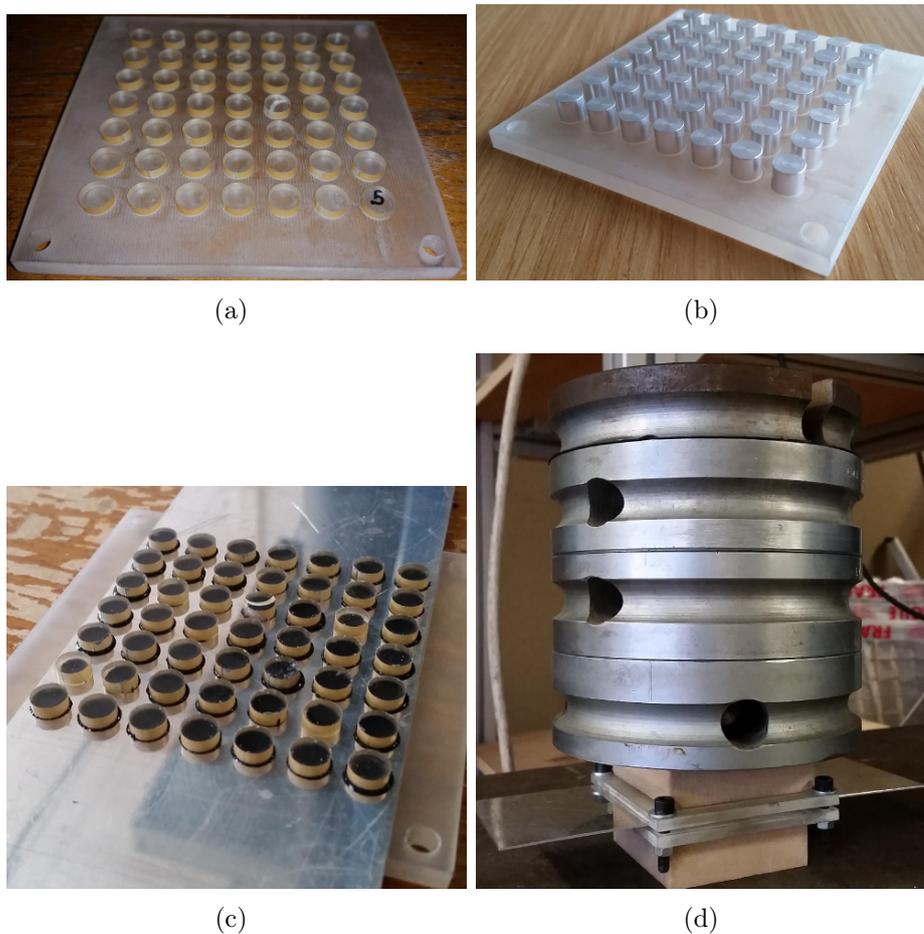


FIGURE 4.14 – a) Mise en place des plots polymères dans la partie inférieure du guide. b) Mise en place des plots aluminium dans la partie inférieure du guide. c) Plots polymères collés sur la plaque aluminium montée dans la partie supérieure du guide. d) Configuration de collage sous charge du métamatériau avec le guide assurant une mise en position correcte.



FIGURE 4.15 – Métamatériau réalisé après les différentes étapes de fabrication et assemblage

- et un thermocouple avec son conditionneur.



FIGURE 4.16 – Dispositif expérimental avec comme éléments principaux le métamatériau dans l'enceinte thermique et le vibromètre 3D à balayage pour la mesure.

Le métamatériau est monté sur un support reproduisant des conditions libres avec deux ressorts et du fil métallique. Celui-ci n'est pas susceptible de fluer lors des essais en température. La face avant du métamatériau sur son support est visible sur la figure 4.17b. Sur la face arrière, on peut observer quatre croix d'alignement pour la calibration du vibromètre 3D ainsi qu'une couche de révélateur blanc pour limiter la réflexion des lasers (figure 4.17a).

Le support avec la plaque est inséré dans une enceinte thermique, qui présente une paroi vitrée, indispensable pour la mesure des vitesses par les lasers. Un petit plot de référence est réalisé et le thermocouple est placé au coeur du polymère, au plus près du métamatériau afin de connaître la température effective du matériau. On suppose que la température est homogène et qu'il n'y a pas d'auto-échauffement.

4.3.3 ANALYSE VIBRATOIRE EXPÉRIMENTALE - ESSAIS EN TEMPÉRATURE

Le générateur du vibromètre envoie un bruit blanc de tension efficace 5V entre 500Hz et 50kHz, ce signal est amplifié 20 fois par l'amplificateur piézoélectrique. Les trois températures (25°C , 60°C et 90°C) du four sont sélectionnées à l'aide d'une consigne ajustée avec les informations délivrées par le thermocouple plus performant. La réponse vibratoire est mesurée à l'aide du vibromètre, par l'intermédiaire de son boîtier d'acquisition. Les fonctions de réponse en fréquence sont calculées par l'intermédiaire d'un estimateur $H1$.

4.3.4 CONFRONTATION CALCULS-ESSAIS

Une superposition des résultats expérimentaux et numériques, à la température de 25°C , est présentée sur la figure 4.18. Les courbes sont à comparer deux à deux (jaune-

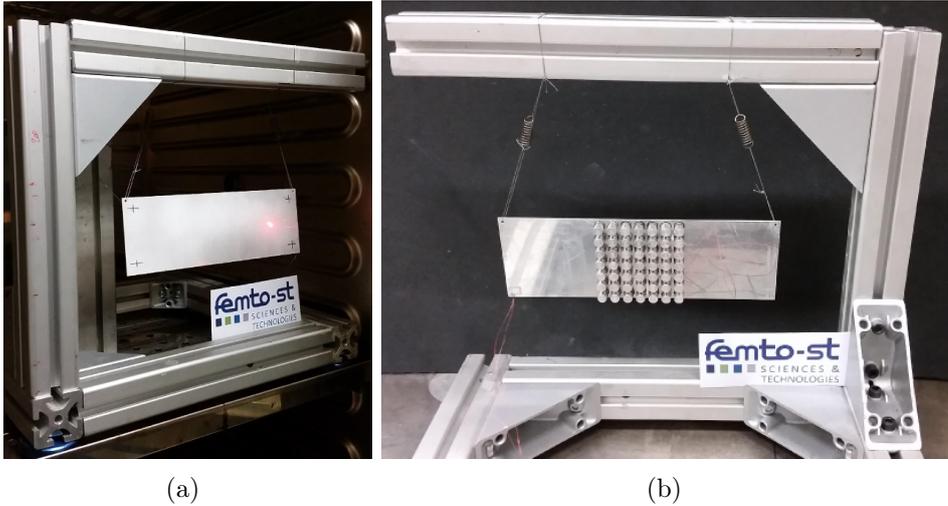


FIGURE 4.17 – Support reproduisant des conditions libres. a) Face arrière du métamatériau. b) Face avant du métamatériau.

bleue et violette-rouge). Les courbes jaune et bleue correspondent à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d'entrée obtenue, respectivement, expérimentalement et numériquement à la température de $25^\circ C$. Les courbes violette et rouge correspondent à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque de sortie obtenue, respectivement, expérimentalement et numériquement à la température de $25^\circ C$. Si l'on s'intéresse à la bande de fréquence de la partie avec la bande interdite, l'atténuation estimée par la simulation numérique est de l'ordre de 100dB ce qui correspond à un ratio entre les vitesses quadratiques d'entrées et de sorties de 100000. Les niveaux estimés par simulation dans la bande interdite sont largement inférieurs à ceux mesurés expérimentalement prenant en compte les perturbations environnementales. Les moyens de mesures à notre disposition ne nous permettent pas d'atteindre une telle dynamique de mesure. Une estimation du bruit de mesure est faite sur la même chaîne de mesure, excitation désactivée. La courbe verte correspond au bruit de mesure généré par les appareils et la ventilation dans la salle : ce bruit est trop important, il apparaît très difficile de mesurer quelque chose qui vibre très légèrement dans ces conditions. Et dans tous les cas, il est impossible de mesurer des niveaux vibratoires en dessous de cette limite. L'allure entre les courbes comparées deux à deux (jaune-bleue et violet-rouge) est semblable exceptée dans les zones où la mesure est proche du bruit ambiant.

La figure 4.18 étant relativement chargée, on propose d'analyser dans un premier temps les fonctions de transfert entrée/sortie présentées sur la figure 4.19. Le transfert est défini, dans le cas des données expérimentales et numériques, de la façon suivante :

$$H = 20 \times \log_{10} \left(\frac{\Sigma^{out}(|Vz|^2/U^2)}{\Sigma^{in}(|Vz|^2/U^2)} \right), \quad (4.6)$$

où $\Sigma^{out}(|Vz|^2/U^2)$ et $\Sigma^{in}(|Vz|^2/U^2)$ sont, respectivement, la moyenne des am-

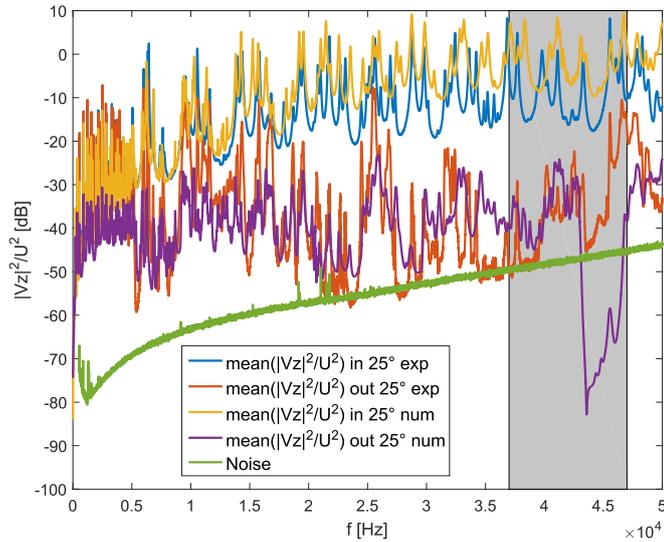


FIGURE 4.18 – Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée et de sortie expérimentales, à la température de 25°C , respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée et de sortie numériques, à la température de 25°C , respectivement en jaune et violet. Bruit de mesure en vert. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion à la température de 25°C , est représentée par le rectangle grisé.

plitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque de sortie et la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée.

Les zones, où les vitesses sont acquises dans le bruit de mesure, sont représentées avec les rectangles rouges sur la figure 4.19. On remarque que globalement les résultats sont similaires à l’exception des zones acquises dans le bruit de mesure. Notre modèle numérique est assez représentatif.

Une représentation de la fonction de transfert entrée/sortie est proposée en tiers d’octave étendus du domaine audible jusqu’à 50kHz (figure 4.20). Cette représentation permet de lisser les résultats. Globalement, les tendances sont correctes, le modèle permet d’estimer le transfert entrée/sortie dans la plupart des tiers d’octave, excepté autour de 40kHz, qui est malheureusement notre zone d’intérêt avec la bande interdite. Le bruit de mesure permet de justifier cet écart.

Parmi la centaine de modes présents sur la bande de fréquences d’intérêt, la figure 4.21 présente quelques déformées simulées et mesurées à la température de 25°C . Plus de déformées sont présentées en annexe A.1.1 (figures A.1 et A.2). Les paires de modes sont identifiées grâce à la corrélation des vecteurs propres, ce qui permet de les appairer et par la suite de calculer un écart en fréquence, une bonne cohérence des résultats est observée. L’atténuation prédite par la bande interdite est observable sur la figure 4.21g et la figure 4.21h. On peut constater que le maillage expérimental devient insuffisant en hautes fréquences.

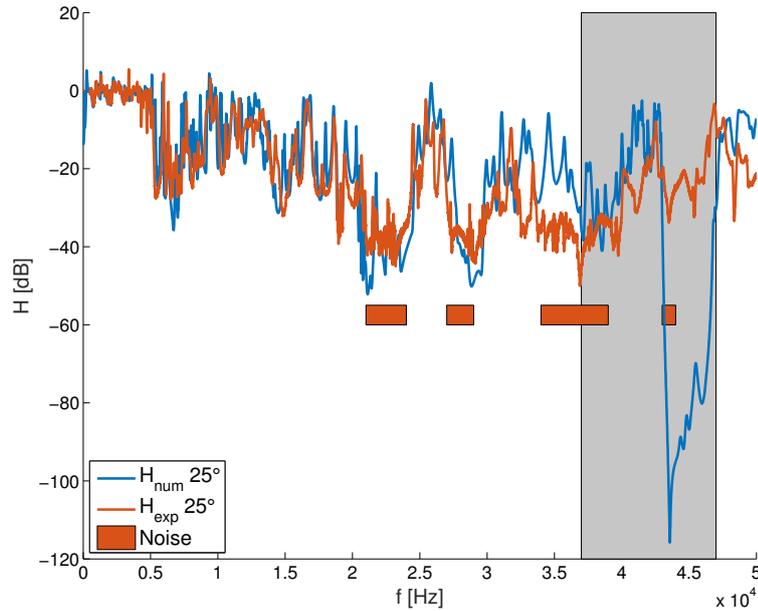


FIGURE 4.19 – Fonction de transfert entrée/sortie, à température ambiante, numérique et expérimentale, respectivement en bleu et rouge. Les zones, où les vitesses sont acquises dans le bruit de mesure, sont représentées avec les rectangles rouges. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion à la température de $25^{\circ}C$, est représentée par le rectangle grisé.

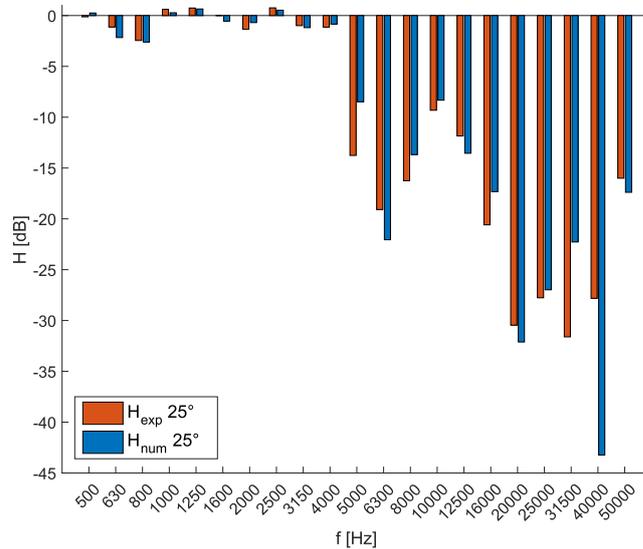
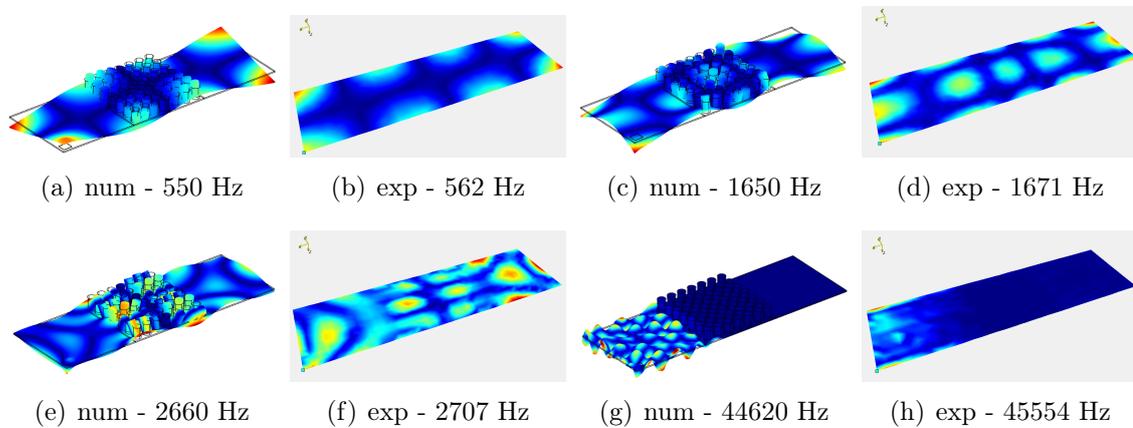


FIGURE 4.20 – Fonction de transfert entrée/sortie en tiers d'octave, à température ambiante, numérique et expérimentale, respectivement en bleu et rouge.

TABLE 4.2 – Parties des fréquences de résonance numériques et expérimentales avec une estimation de la valeur absolue de l'erreur relative à la température de $25^{\circ}C$.

f_{num} [Hz]	550	1650	2660	44620
f_{exp} [Hz]	562	1671	2707	45554
$ \Delta f / f_{num} $ [%]	2,18	1,27	1,77	2,09

À 50kHz, la longueur d'onde des ondes de flexion est de 1,4 cm. La distance entre deux points du maillage expérimental est de 0,5 cm. On a environ 3 points de maillage par longueur d'onde, ce qui n'est pas suffisant pour décrire correctement la déformée.


 FIGURE 4.21 – Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonance, numériques et expérimentales, à la température de $25^{\circ}C$.

L'erreur relative entre les fréquences de résonance numériques et expérimentales sélectionnées, à la température de $25^{\circ}C$, est estimée dans le tableau 4.2, toutes les erreurs relatives sont inférieures à 4%. Le modèle prédit donc de façon relativement fiable le comportement modal de la structure à $25^{\circ}C$. Des erreurs supplémentaires sont disponibles en annexe A.1.1 (tableau A.1).

Une superposition des résultats expérimentaux et numériques, à la température de $60^{\circ}C$, est présentée sur la figure 4.22. Les courbes sont à comparer deux à deux (jaune-bleue et violette-rouge). Les courbes jaune et bleue correspondent à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d'entrée obtenue, respectivement, expérimentalement et numériquement à la température de $60^{\circ}C$. Les courbes violette et rouge correspondent à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque de sortie obtenue, respectivement, expérimentalement et numériquement à la température de $60^{\circ}C$. La différence entre la température ambiante et la température de $60^{\circ}C$ est l'évolution du facteur de perte, à $25^{\circ}C$, il est quasiment nul sur toute la bande de fréquence d'intérêt, à $60^{\circ}C$, en basses fréquences il est supérieur à 2 et diminue jusqu'à s'annuler pour les fréquences les plus hautes de notre bande de fréquence d'intérêt (figure 4.2b).

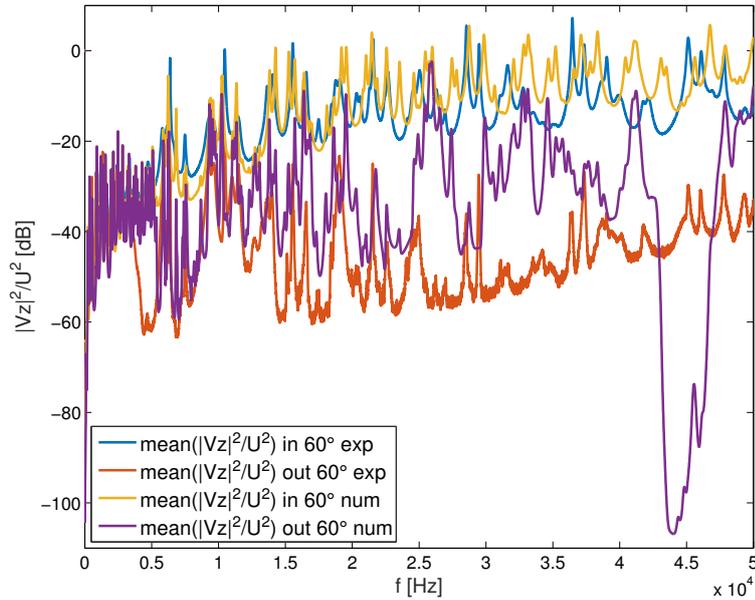


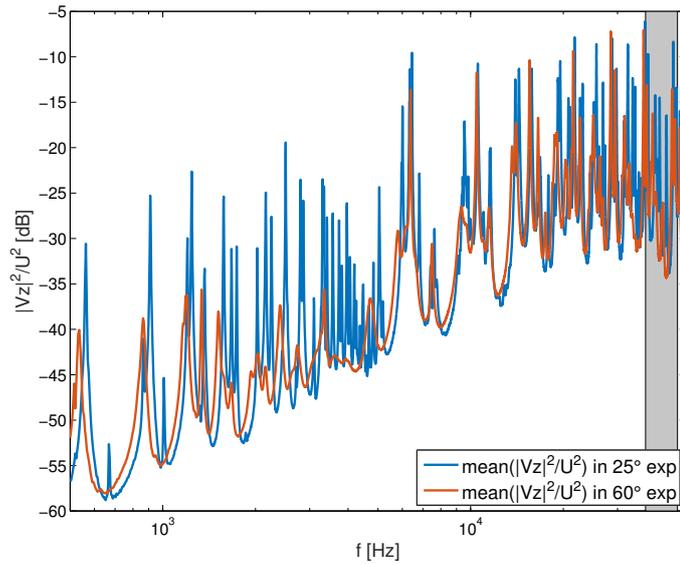
FIGURE 4.22 – Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée et de sortie expérimentales, à la température de $60^\circ C$, respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée et de sortie numériques, à la température de $60^\circ C$, respectivement en jaune et violet.

La figure 4.23 présente les résultats à température ambiante et à la température de $60^\circ C$ avec un rappel de l’évolution du facteur de perte. Lorsque la fréquence augmente, le facteur de perte η diminue et les amplitudes des résonances mesurées confirment cette évolution.

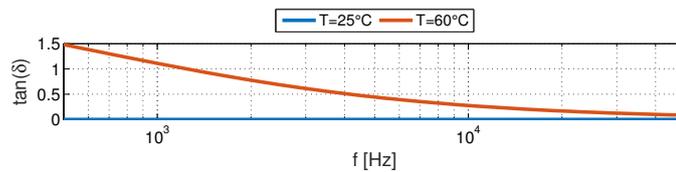
La configuration à la température de $60^\circ C$ est un pilotage intermédiaire entre la température ambiante (polymère rigide, facteur de perte élevé) et la température de $90^\circ C$ polymère (polymère souple, facteur de perte élevé).

Une superposition des résultats expérimentaux et numériques, à la température de $90^\circ C$, est présentée sur la figure 4.24. Les courbes sont à comparer deux à deux (jaune-bleue et violette-rouge). Les courbes jaune et bleue correspondent à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée obtenue, respectivement, expérimentalement et numériquement à la température de $90^\circ C$. Les courbes violette et rouge correspondent à la moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque de sortie obtenue, respectivement, expérimentalement et numériquement à la température de $90^\circ C$. On observe une très bonne cohérence entre les résultats numériques et expérimentaux.

Une confrontation de quelques déformées à la température de $90^\circ C$ est proposée sur la figure 4.25. Plus de déformées sont présentées en annexe A.1.2 (figures A.3). Les paires de modes sont identifiées grâce à la corrélation des vecteurs propres, ce qui permet de les appairer et par la suite de calculer un écart en fréquence, une bonne



(a)



(b)

FIGURE 4.23 – a) Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée expérimentales, à la température de $25^\circ C$ et $60^\circ C$, respectivement en bleu et rouge. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion à la température de $25^\circ C$, est représentée par le rectangle grisé. b) Facteur de perte du tBA/PEGDMA pour des températures de $25^\circ C$ et $60^\circ C$ respectivement tracées en bleu et rouge.

cohérence des résultats est observée.

L’erreur relative entre les fréquences de résonance numériques et expérimentales sélectionnées, à la température de $90^\circ C$, est estimée dans le tableau 4.3, toutes les erreurs relatives sont inférieures à 4%. Des erreurs supplémentaires sont disponibles en annexe A.1.2 (tableau A.2).

À la température de $90^\circ C$, un bon accord, entre les résultats expérimentaux et numériques, est observé. Le modèle numérique est représentatif à cette température, le modèle fractionnaire de Zener représente bien le comportement viscoélastique du tBA/PEGDMA. Cette température de pilotage permet de ne plus observer l’effet lié à la périodicité. Les plots aluminium sont totalement découplés de la plaque, le polymère joue quand même un rôle amortissant. Il y a un lissage des fonctions de réponse en fréquence à cette température.

Le métamatériau considéré est un guide d’ondes bidirectionnel mêlant aluminium et polymère hautement dissipatif, très utilisé pour les applications nécessitant la ré-

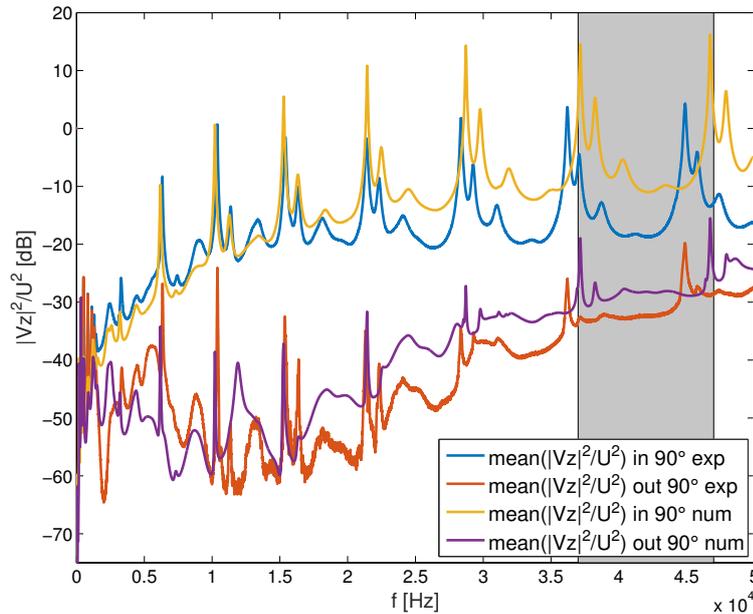


FIGURE 4.24 – Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée et de sortie expérimentales, à la température de $90^\circ C$, respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $|Vz|^2$ de la plaque d’entrée et de sortie numériques, à la température de $90^\circ C$, respectivement en jaune et violet.

TABLE 4.3 – Parties des fréquences de résonance numériques et expérimentales avec une estimation de la valeur absolue de l’erreur relative à la température de $90^\circ C$.

f_{num} [Hz]	520	2320	15280	46750
f_{exp} [Hz]	511	2355	15395	44883
$ \Delta f / f_{num} $ [%]	1,73	1,51	0,75	3,99

duction du niveau vibratoire. L’effet amortissant de ces matériaux est combiné avec l’effet de coupure lié à la périodicité. Trois configurations d’amortissement ont été choisies, une configuration à faible amortissement à température ambiante $25^\circ C$, une configuration intermédiaire à $60^\circ C$ et une dernière très dissipative à $90^\circ C$. La capacité du matériau à dissiper de l’énergie est maximale à la transition vitreuse. Cette transition est utilisée comme système de pilotage du comportement mécanique. À la température de $25^\circ C$, la fréquence de résonance des plots est dimensionnée pour être plus basse que la fréquence de l’interférence de Bragg, elle vaut $40 kHz$. Cette fréquence est relativement haute en fréquence, les dimensions de la cellule élémentaire et les contraintes liées à l’élaboration du polymère ne nous permettent pas de descendre plus bas en fréquence. En structure finie, toujours à température ambiante, une atténuation significative, obtenue numérique, est observable, centrée sur la fréquence de $45 kHz$. Numériquement, une telle dynamique est quantifiable. Cependant, avec le bruit de mesure évalué, les moyens de mesures à notre disposition ne nous per-

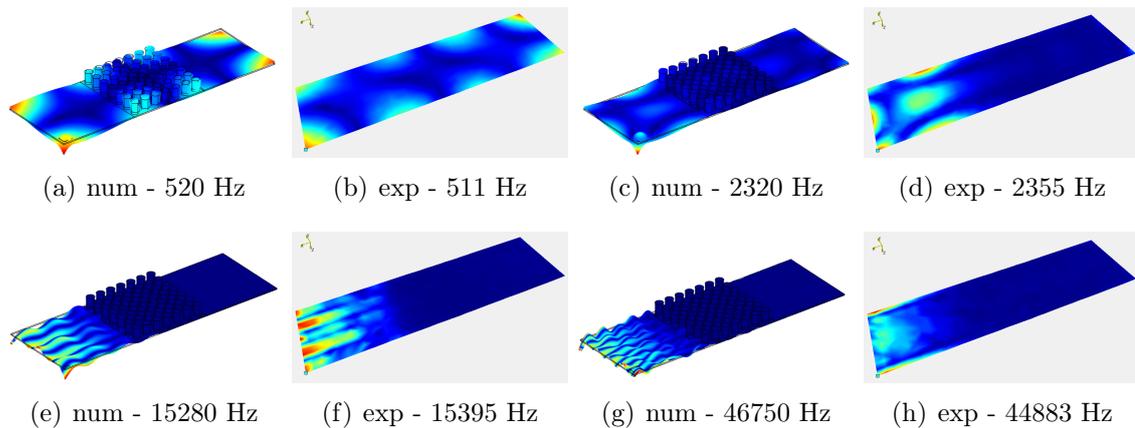


FIGURE 4.25 – Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonance, numériques et expérimentales, à la température de 90°C .

mettent pas d'atteindre une telle dynamique de mesure. Il est impossible de mesurer des niveaux vibratoires en dessous de cette limite. Le comportement viscoélastique du tBA/PEGDMA, approximé par un modèle fractionnaire de Zener, est représentatif tant que les mesures sont acquises hors bruit de mesure. Une mesure est efficace quand le rapport signal sur bruit est maximal. On retrouve cette configuration aux résonances. Dans notre cas, on est intéressé par les bandes interdites où le niveau vibratoire est très faible et vient donc se confondre avec le bruit de mesure. Un autre moyen de mesure et/ou traitement de signal peut être envisageable en perspectives pour être capable de correctement quantifier cette notion de bande interdite.

4.4 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, les outils numériques pour l'analyse de la dispersion dans les structures périodiques amorties sont utilisés, avec un accent sur la capacité de la méthode "Shift cell operator" à traiter le comportement dissipatif du système. Un métamatériau adaptatif mêlant aluminium avec une interface polymère hautement dissipative est conçu. Les propriétés mécaniques du polymère dépendent de la fréquence et de la température, elles changent radicalement à la transition vitreuse, passage de l'état vitreux (rigide) à l'état caoutchoutique (souple). Le comportement viscoélastique du tBA/PEGDMA est approximé par un modèle fractionnaire de Zener. Un modèle éléments finis 3D de la cellule élémentaire du métamatériau est conçu pour l'analyse de la dispersion avec la méthode "Shift cell operator". Afin de valider la conception et le caractère adaptatif du métamatériau, un modèle 3D complet intégrant une interface composée d'un ensemble distribué de cellules unitaires est présenté. Différentes températures de fonctionnement sont étudiées. Après cette étape, une comparaison entre les résultats de simulation de la structure accordable et les résultats expérimentaux est présentée. On obtient deux états en changeant la

température de l'interface polymère à température ambiante, la bande interdite prédite par le diagramme de dispersion est visible autour de la fréquence sélectionnée. Passée la température de transition vitreuse, le métamatériau a tendance à se comporter comme une plaque homogène. Une remarque peut être faite sur les mesures expérimentales. En effet, les moyens à disposition sont bien adaptés pour la mesure des résonances, l'amplitude est maximale, le rapport signal sur bruit est grand. Dans notre cas, les bandes interdites nous intéressent, nous devons mesurer des déplacements très petits, s'approchant du déplacement nul. Dans cette configuration, le rapport du signal sur bruit est faible, et on se retrouve rapidement dans des niveaux vibratoires proches ou confondus avec le bruit ambiant.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

L'objectif de cette thèse était de développer une méthodologie de conception des composites périodiques utilisant des inclusions fonctionnelles. Ces fonctionnalisations ont permis d'améliorer les performances du dispositif en terme d'absorption large bande, et de leur conférer de nouvelles propriétés (adaptabilité, accordabilité). Des outils spécifiques ont été mis en œuvre pour modéliser efficacement les structures considérées. Pour atteindre cet objectif, un bilan sur les méthodes d'analyse de la propagation d'ondes utilisées actuellement a été effectué avec un cas d'application sur métamatériau auxétique obtenu par perforations hiérarchiques. Ensuite, à l'échelle de la dynamique des structures, les effets liés à l'amortissement devaient être inclus dans les analyses, pour ce faire, des outils spécifiques ont été développés. Enfin, le comportement d'un métamatériau adaptatif avec interface polymère hautement dissipative a été simulé. Pour les deux métamatériaux, les simulations numériques et des essais expérimentaux ont été menés avec leurs lots d'apports et de difficultés.

La première contribution de cette thèse concerne la compréhension des phénomènes de propagation d'ondes dans un métamatériau auxétique obtenu par perforations hiérarchiques via trois étapes. La première exploite l'analyse de la dispersion avec la méthode Floquet Bloch. La deuxième utilise la simulation éléments finis de la réponse vibratoire de la structure complète intégrant une interface composée d'un ensemble distribué de cellules unitaires soumise à une excitation harmonique. La troisième permet la validation expérimentale sur le métamatériau réalisé par découpe laser. Le métamatériau obtenu par perforations hiérarchiques permet de créer un comportement auxétique dans le plan. La hiérarchie proposée permet de contrôler le coefficient de Poisson et l'orthotropie de la structure. La topologie perforée hiérarchique crée un très grand nombre de bandes interdites omnidirectionnelles, les fréquences centrées sont pilotées par le niveau hiérarchique et par les paramètres géométriques de la cellule. Cette étude montre la possibilité de créer des bandes interdites par simple découpe dans des structures planes. Ces résultats ont été présentés dans une conférence internationale [Billon 16a] et font l'objet d'une publication dans une revue internationale à comité de lecture [Billon 16b].

La deuxième contribution de cette thèse porte sur les outils numériques pour la simulation de propagation d'ondes dans les structures périodiques amorties. La méthode de Floquet-Bloch est une technique commune mais l'implémentation en présence d'amortissement est difficile. Une alternative est proposée, l'approche, ap-

pelée "Shift cell operator", est décrite. Elle est basée sur la reformulation du problème aux équations aux dérivées partielles. Elle nous apporte également des informations sur la vitesse de groupe. Cette dernière est utilisée comme critère, parmi d'autres, pour distinguer une onde propagative d'une onde évanescente. Cette vitesse est également utilisée pour réaliser du suivi de branche et de la convergence de maillage. Ces outils nous permettent de simuler des géométries possédant des dépendances à la fréquence complexes. Ces résultats ont été présentés dans une conférence internationale [Billon 15a].

La troisième contribution de cette thèse concerne la compréhension des phénomènes de propagation d'ondes dans un métamatériau adaptatif avec interface polymère hautement dissipative. Les propriétés mécaniques du polymère dépendent de la fréquence et de la température, elles changent radicalement à la transition vitreuse. Par conséquent, les outils numériques pour l'analyse de la dispersion dans les structures périodiques amorties sont utilisés, avec un accent sur la capacité de la méthode "Shift cell operator" à traiter le comportement dissipatif du système. Ensuite, la simulation éléments finis de la réponse vibratoire de la structure complète intégrant une interface composée d'un ensemble distribué de cellules unitaires soumise à une excitation harmonique a été menée. Enfin, la partie expérimentale sur le métamatériau conçu permet une validation du modèle numérique de comportement viscoélastique du polymère, le tBA/PEGDMA. On obtient deux états en changeant la température de l'interface polymère. Ces résultats ont été présentés dans une conférence internationale en tant que communication sans acte [Billon 15b] et ces travaux seront soumis dans une revue dans les prochaines semaines.

Des perspectives sont envisageables pour la suite de ces travaux de thèse. Tout d'abord, pour le métamatériau auxétique obtenu par perforations hiérarchiques, l'amortissement du polyméthacrylate de méthyle (PMMA) est important nous obtenons un lissage global des fonctions de réponse en fréquences et une atténuation très grande entre l'entrée et la sortie du réseau. La plaque réalisée dans un matériau moins dissipatif aurait été un bon candidat. Une difficulté s'est présentée dans le choix adopté du système d'excitation, à savoir le pot vibrant, car celui-ci conditionne la bande fréquentielle d'analyse. Par conséquent, une perspective à court terme est donc de développer un dispositif garantissant une excitation purement dans le plan.

Ensuite, des pistes d'amélioration sont possibles pour fiabiliser le modèle numérique représentatif de l'expérimentation du métamatériau auxétique obtenu par perforations hiérarchiques. Il serait intéressant de faire l'expérimentation sur une plaque en polyméthacrylate de méthyle (PMMA) nue sans réseau périodique, pour supprimer un certain nombre de variables non-fiables liées notamment à l'usage des perforations. Ceci permettrait de recalibrer le modèle numérique sur un cas simple.

Une perspective à long terme est l'intégration du métamatériau auxétique obtenu par perforations hiérarchiques dans un sandwich en tant que cœur entre deux peaux. Cela permettrait de rigidifier l'ensemble tout en profitant des propriétés dynamiques décrites dans ce mémoire.

Par la suite, pour le métamatériau adaptatif avec interface polymère hautement dissipative, il serait utile de descendre la fréquence de la bande interdite résonante pour avoir des applications d'isolation vibratoire dans le domaine audible.

Il apparaît également que dans un contexte de faibles vibrations des techniques de mesure spécifiques doivent être développées. En effet, les moyens à disposition sont bien adaptés pour mesurer des résonances, où l'amplitude est maximale, et donc le rapport signal sur bruit est grand. Dans notre cas, les bandes interdites nous intéressent, nous devons mesurer des déplacements très petits, s'approchant du déplacement nul. Dans cette configuration, le rapport du signal sur bruit est faible, et on se retrouve rapidement dans des niveaux vibratoires du même ordre de grandeur que le bruit ambiant.

Enfin, les perspectives à long terme des métamatériaux en général vont des télécommunications au génie civil. Les possibilités sont donc nombreuses et restent à explorer.

LISTE DES PUBLICATIONS

ACL : ARTICLE DANS DES REVUES INTERNATIONALES À COMITÉ DE LECTURE

[ACL01] K. Billon, I. Zampetakis, F. Scarpa, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, M. Collet, A. Perriman, A. Hetherington, *Mechanics and band gaps in hierarchical auxetic rectangular perforated metamaterials* (submitted for review : Composite Structures)

ACTI : CONFÉRENCE AVEC ACTES DANS DES CONGRÈS INTERNATIONAUX

[ACTI02] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, F. Scarpa, M. Collet, *Parametric study of wave propagation in hierarchical auxetic perforated metamaterials*, SPIE Smart Structures / NDE, Las Vegas, NV, United-States, March 2016

[ACTI01] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, M. Collet, *Numerical tools for efficient simulations of wave propagation in damped periodic structures*, Noise and Vibration - Emerging technologies (NOVEM 2015), Dubrovnik, Croatia, Avril 2015

ACTN : CONFÉRENCE AVEC ACTES DANS DES CONGRÈS NATIONAUX

[ACTN02] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, F. Scarpa, M. Collet, *Propriétés dynamiques d'un métamatériau auxétique obtenu par perforations hiérarchiques*, 13ième Congrès Français d'acoustique et 20ième Colloque Vibrations, Shocks ans Noise (CFA/VISHNO 2016), Le Mans, France, Avril 2016

[ACTN01] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, M. Collet, *Outils numériques pour la simulation de propagation d'ondes dans les structures périodiques amorties*, 22ème Congrès Français de Mécanique (CFM 2015), Lyon, France, Août 2015.

COM : COMMUNICATION SANS ACTE

[COM03] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, F. Scarpa, M. Collet, *Propagation d'ondes dans un métamatériau avec perforations hiérarchiques auxétiques*, Journées des Jeunes Chercheurs en Vibrations, Acoustique et Bruit (JJ-CAB 2015), Besançon, France, Novembre 2015

[COM02] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, M. Collet, A. Khelif, *A two-state phononic crystal using highly dissipative polymeric material interface*, 3rd International conference on phononic crystals/Metamaterials, phonon transport and phonon coupling (Phononics 2015), Paris, France, June 2015

[COM01] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, M. Collet, *Détermination de diagramme de dispersion pour les milieux composites périodiques avec prise en compte*

de la dissipation, **Journées des Jeunes Chercheurs en Vibrations, Acoustique et Bruit (JJCAB 2014)**, Lyon, France, Novembre 2014

A

RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES POUR LE MÉTAMATÉRIAU AVEC INTERFACE POLYMÈRE HAUTEMENT DISSIPATIVE

A.1 DÉFORMÉES NUMÉRIQUES ET EXPÉRIMENTALES

A.1.1 25°C

TABLE A.1 – Parties des fréquences de résonances numériques et expérimentales avec une estimation de la valeur absolue de l'erreur relative à la température de 25°C.

f_{num} [Hz]	550	900	1220	1320	1540	1650	1980	2140
f_{exp} [Hz]	562	910	1242	1367	1574	1671	2027	2160
$ \Delta f/f_{num} $ [%]	2,18	1,11	1,80	3,56	2,21	1,27	2,37	0,93
f_{num} [Hz]	2180	2480	2660	2730	3200	3230	44620	48600
f_{exp} [Hz]	2257	2507	2707	2812	3101	3304	45554	49562
$ \Delta f/f_{num} $ [%]	3,53	1,09	1,77	3,00	3,09	2,29	2,09	1,98

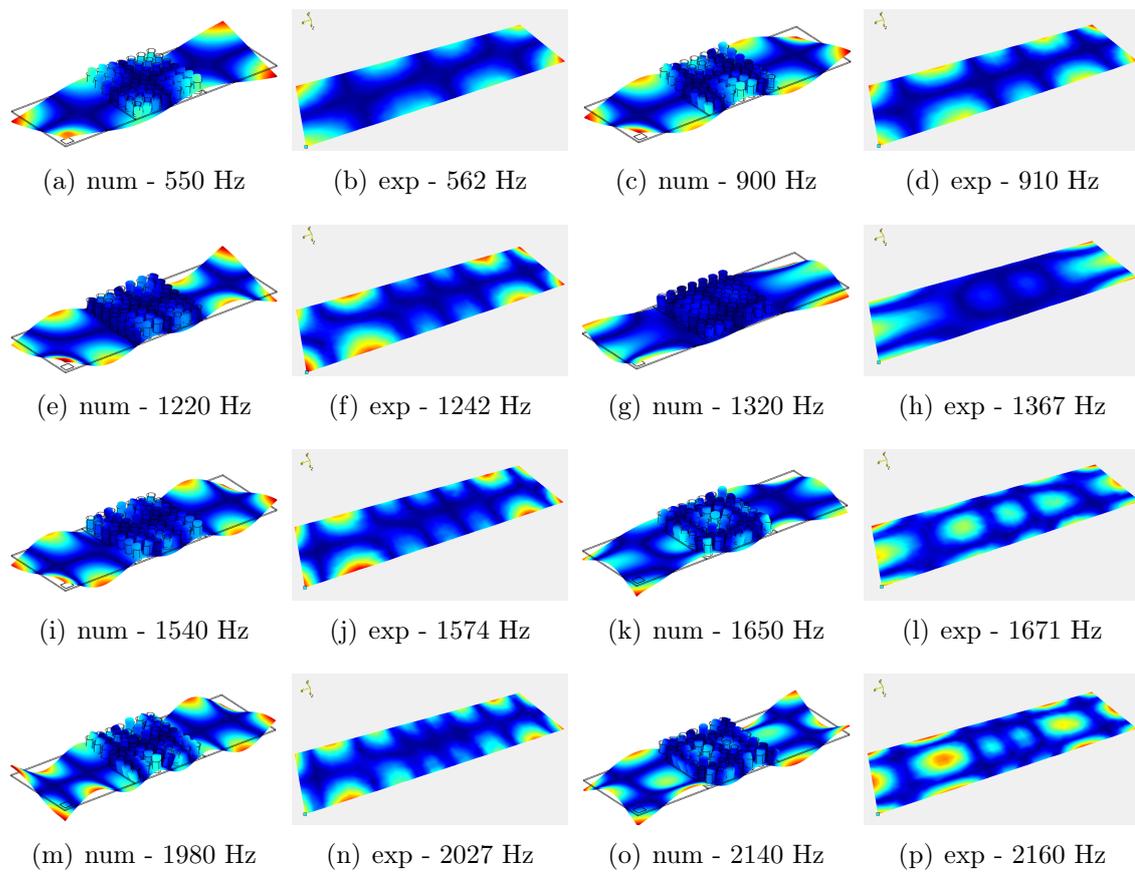


FIGURE A.1 – Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonances, numériques et expérimentales, à la température de $25^{\circ}C$.

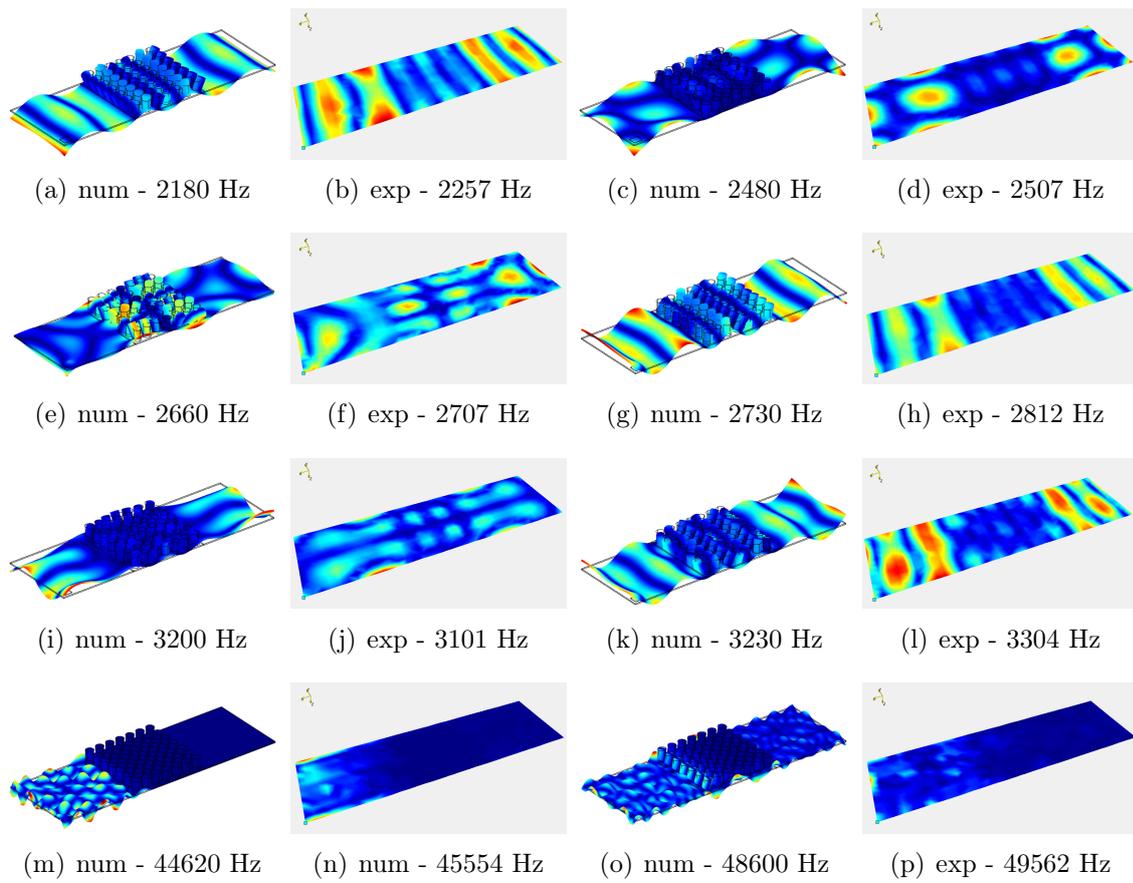


FIGURE A.2 – Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonances, numériques et expérimentales, à la température de $25^{\circ}C$.

A.1.2 90°C

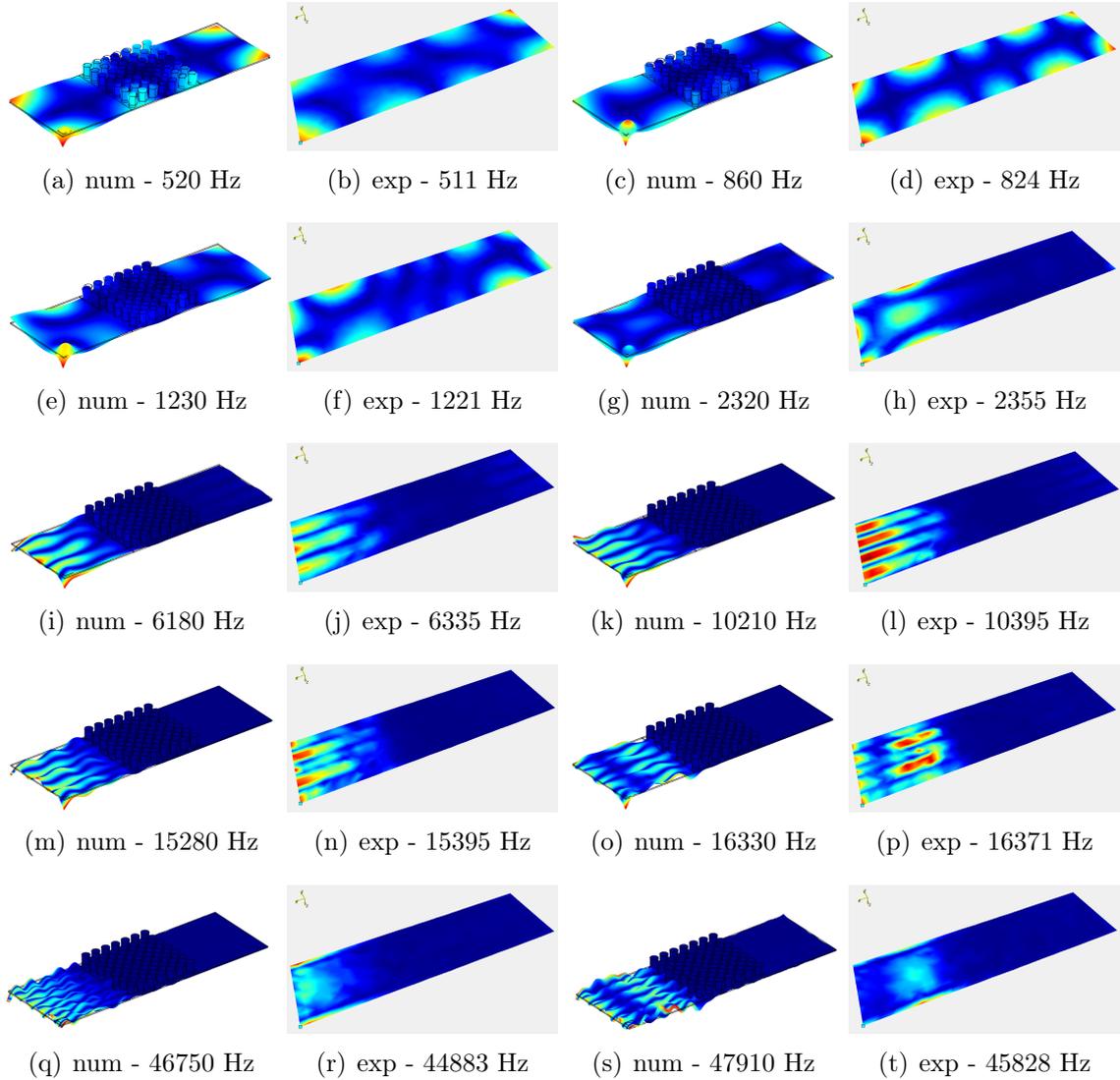


FIGURE A.3 – Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonances, numériques et expérimentales, à la température de 90°C .

TABLE A.2 – Parties des fréquences de résonances numériques et expérimentales avec une estimation de la valeur absolue de l'erreur relative à la température de 90°C .

f_{num} [Hz]	520	860	1230	2320	6180	10210	15280	16330	46750	47910
f_{exp} [Hz]	511	824	1221	2355	6335	10394	15394	16371	44883	45828
$ \Delta f/f_{num} $ [%]	1,73	4,19	0,73	1,51	2,51	1,81	0,75	0,25	3,99	4,35

BIBLIOGRAPHIE

- [Al-Lethawe 12] M. Al-Lethawe, M. Addouche, A. Khelif & S. Guenneau. *All-angle negative refraction for surface acoustic waves in pillar-based two-dimensional phononic structures*. *New Journal of Physics*, vol. 14, no. 12, page 123030, 2012. 14
- [Bacigalupo 14] A. Bacigalupo & L. Gambarotta. *Homogenization of periodic hexa-and tetrachiral cellular solids*. *Composite Structures*, vol. 116, pages 461–476, 2014. 37
- [Bensoussan 78] A. Bensoussan, J. Lion & G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structure*. North Holland, 1978. 71
- [Bertoldi 10] K. Bertoldi, P. Reis, S. Willshaw & T. Mullin. *Negative Poisson’s ratio behavior induced by an elastic instability*. *Advanced Materials*, vol. 22, no. 3, pages 361–366, 2010. 16
- [Bezazi 05] A. Bezazi, F. Scarpa & C. Remillat. *A novel centresymmetric honeycomb composite structure*. *Composite Structures*, vol. 71, no. 3, pages 356–364, 2005. 36
- [Billon 15a] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul & M. Collet. *Numerical tools for efficient simulations of wave propagation in damped periodic structures*. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 251, pages 889–896. Institute of Noise Control Engineering, 2015. 118
- [Billon 15b] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, M. Collet & A. Khelif. *A two-state phononic crystal using highly dissipative polymeric material interface*. 2015. 118
- [Billon 16a] K. Billon, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, F. Scarpa & M. Collet. *Parametric study of wave propagation in hierarchical auxetic perforated metamaterials*. In *SPIE Smart Structures and Materials+ Nondestructive Evaluation and Health Monitoring*, pages 979906–979906. International Society for Optics and Photonics, 2016. 117
- [Billon 16b] K. Billon, I. Zampetakis, F. Scarpa, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, M. Collet, A. Perriman & A. Hetherington. *Mecha-*

- nics and band gaps in hierarchical auxetic rectangular perforated metamaterials*. *Composite Structures*, 2016. 117
- [Bloch 29] F. Bloch. *Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern*. *Zeitschrift für physik*, vol. 52, no. 7-8, pages 555–600, 1929. 22
- [Bolt 76] B. Bolt & W. Freeman. *Nuclear explosions and earthquakes : The parted veil*. 1976. 19, 139
- [Bragg 15] W. Bragg. *Bakerian lecture : X-rays and crystal structure*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 215, pages 253–274, 1915. 15
- [Brillouin 53] L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures*. Dover Publication, 1953. 21, 22, 139
- [Bückmann 14] T. Bückmann, R. Schittny, M. Thiel, M. Kadic, G. Milton & M. Wegener. *On three-dimensional dilational elastic metamaterials*. *New Journal of Physics*, vol. 16, no. 3, page 033032, 2014. 15
- [Butaud 15] P. Butaud. *Contribution à l'utilisation des polymères à mémoire de forme pour les structures à amortissement contrôlé*. PhD thesis, 2015. 94
- [Butaud 16] P. Butaud, E. Foltête & M. Ouisse. *Sandwich structures with tunable damping properties : On the use of Shape Memory Polymer as viscoelastic core*. *Composite Structures*, vol. 153, pages 401–408, 2016. 92
- [Castiñeira-Ibáñez 14] S. Castiñeira-Ibáñez, C. Rubio, J. Redondo & J. Sánchez-Pérez. *Quantitative characterization of bandgap properties of sets of isolated acoustic scatterers arranged using fractal geometries*. *Applied Physics Express*, vol. 7, no. 4, page 042201, 2014. 17
- [Cho 14] Y. Cho, J. Shin, A. Costa, T. Kim, V. Kunin, J. Li, S. Lee, S. Yang, H. Han & I. Choi. *Engineering the shape and structure of materials by fractal cut*. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 111, no. 49, pages 17390–17395, 2014. 16
- [Claeys 13] C. Claeys, K. Vergote, P. Sas & W. Desmet. *On the potential of tuned resonators to obtain low-frequency vibrational stop bands in periodic panels*. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, no. 6, pages 1418–1436, 2013. 70
- [Collet 11a] M. Collet, M. Ouisse, M. Ichchou & R. Ohayon. *Semi-active optimization of 2D wave's dispersion into shunted piezocomposite systems for controlling acoustic interaction*. In *ASME*

- 2011 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems, pages 79–87. American Society of Mechanical Engineers, 2011. 18
- [Collet 11b] M. Collet, M. Ouisse, M. Ruzzene & M. Ichchou. *Floquet–Bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems*. International Journal of Solids and Structures, vol. 48, no. 20, pages 2837–2848, 2011. 71, 72
- [Collet 14] M. Collet, M. Ouisse & F. Tateo. *Adaptive metacomposites for vibroacoustic control applications*. Sensors Journal, IEEE, vol. 14, no. 7, pages 2145–2152, 2014. 18
- [Craster 12] R. Craster, T. Antonakakis, M. Makwana & S. Guenneau. *Dangers of using the edges of the Brillouin zone*. Physical Review B, vol. 86, no. 11, page 115130, 2012. 21
- [Danner 02] A. Danner. *An introduction to the plane wave expansion method for calculating photonic crystal band diagrams*. University of Illinois, 2002. 23
- [Eidini 15] M. Eidini & G. Paulino. *Unraveling metamaterial properties in zigzag-base folded sheets*. Science advances, vol. 1, no. 8, page e1500224, 2015. 14
- [Evans 00] K. E. Evans & A. Alderson. *Auxetic materials : functional materials and structures from lateral thinking!* Advanced materials, vol. 12, no. 9, pages 617–628, 2000. 15
- [Floquet 83] G. Floquet. *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*. In Annales scientifiques de l’École normale supérieure, volume 12, pages 47–88, 1883. 22
- [Gatt 15] R. Gatt, L. Mizzi, J. Azzopardi, K. Azzopardi, D. Attard, A. Casha, J. Briffa & J. Grima. *Hierarchical auxetic mechanical metamaterials*. Scientific reports, vol. 5, 2015. 16
- [Gavrić 95] L. Gavrić. *Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique*. Journal of Sound and Vibration, vol. 185, no. 3, pages 531–543, 1995. 23
- [Gibson 99] L. Gibson & M. Ashby. *Cellular solids : structure and properties*. Cambridge university press, 1999. 43
- [Gonella 08] S. Gonella & M. Ruzzene. *Homogenization and equivalent in-plane properties of two-dimensional periodic lattices*. International Journal of Solids and Structures, vol. 45, no. 10, pages 2897–2915, 2008. 47
- [Graff 75] K. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation, 1975. 18

- [Grima 00] J. Grima & K. Evans. *Auxetic behavior from rotating squares*. Journal of Materials Science Letters, vol. 19, no. 17, pages 1563–1565, 2000. 16
- [Grima 10] J. Grima & R. Gatt. *Perforated sheets exhibiting negative Poisson's ratios*. Advanced Engineering Materials, vol. 12, no. 6, pages 460–464, 2010. 16
- [Grima 13] J. Grima, R. Caruana-Gauci, M. Dudek, K. Wojciechowski & R. Gatt. *Smart metamaterials with tunable auxetic and other properties*. Smart Materials and Structures, vol. 22, no. 8, page 084016, 2013. 14
- [Hsue 05] Y. Hsue, A. Freeman & B. Gu. *Extended plane-wave expansion method in three-dimensional anisotropic photonic crystals*. Physical Review B, vol. 72, no. 19, page 195118, 2005. 23
- [Huang 09] H. Huang & C. Sun. *Wave attenuation mechanism in an acoustic metamaterial with negative effective mass density*. New Journal of Physics, vol. 11, no. 1, page 013003, 2009. 14
- [Huang 13] T. Huang, M. Ichchou, O. Bareille, M. Collet & M. Ouisse. *Multi-modal wave propagation in smart structures with shunted piezoelectric patches*. Computational Mechanics, vol. 52, no. 3, pages 721–739, 2013. 18
- [Hussein 09] M. Hussein. *Theory of damped Bloch waves in elastic media*. Physical Review B, vol. 80, no. 21, page 212301, 2009. 69
- [Hussein 10] M. Hussein & M. Frazier. *Band structure of phononic crystals with general damping*. Journal of Applied Physics, vol. 108, no. 9, page 093506, 2010. 69
- [Hussein 13a] M. Hussein & M. Frazier. *Damped phononic crystals and acoustic metamaterials*. In Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals, pages 201–215. Springer, 2013. 69
- [Hussein 13b] M. Hussein & M. Frazier. *Metadamping : An emergent phenomenon in dissipative metamaterials*. Journal of Sound and Vibration, vol. 332, no. 20, pages 4767–4774, 2013. 70
- [Hussein 14] M. Hussein, M. Leamy & M. Ruzzene. *Dynamics of Phononic Materials and Structures : Historical Origins, Recent Progress, and Future Outlook*. Applied Mechanics Reviews, vol. 66, no. 4, page 040802, 2014. 14, 70
- [Joannopoulos 11] J. Joannopoulos, S. Johnson, J. Winn & R. Meade. *Photonic crystals : molding the flow of light*. Princeton university press, 2011. 21, 29

-
- [Kadic 13a] M. Kadic, T. Bückmann, R. Schittny & M. Wegener. *Metamaterials beyond electromagnetism*. Reports on Progress in Physics, vol. 76, no. 12, page 126501, 2013. 14
- [Kadic 13b] M. Kadic, T. Bückmann, R. Schittny & M. Wegener. *On anisotropic versions of three-dimensional pentamode metamaterials*. New Journal of Physics, vol. 15, no. 2, page 023029, 2013. 14
- [Lakes 87] R. Lakes. *Foam structures with a negative Poisson's ratio*. Science, vol. 235, no. 4792, pages 1038–1040, 1987. 15
- [Lakes 93] R. Lakes. *Materials with structural hierarchy*. Nature, vol. 361, no. 6412, pages 511–515, 1993. 16
- [Langley 94] R. Langley. *On the forced response of one-dimensional periodic structures : vibration localization by damping*. Journal of Sound and Vibration, vol. 178, no. 3, pages 411–428, 1994. 69
- [Laude 09] V. Laude, Y. Achaoui, S. Benchabane & A. Khelif. *Evanescent Bloch waves and the complex band structure of phononic crystals*. Physical Review B, vol. 80, no. 9, page 092301, 2009. 23, 70
- [Laude 13] V. Laude, J. Escalante & A. Martínez. *Effect of loss on the dispersion relation of photonic and phononic crystals*. Physical Review B, vol. 88, no. 22, page 224302, 2013. 80
- [Lee 12] J. Lee, J. Singer & E. Thomas. *Micro-/Nanostructured Mechanical Metamaterials*. Advanced materials, vol. 24, no. 36, pages 4782–4810, 2012. 14
- [Lim 15] Q. Lim, P. Wang, S. Koh, E. Khoo & K. Bertoldi. *Wave propagation in fractal-inspired self-similar beam lattices*. Applied Physics Letters, vol. 107, no. 22, page 221911, 2015. 17
- [Ma 13] Y. Ma, F. Scarpa, D. Zhang, B. Zhu, L. Chen & J. Hong. *A nonlinear auxetic structural vibration damper with metal rubber particles*. Smart Materials and Structures, vol. 22, no. 8, page 084012, 2013. 14
- [Mace 08] B. Mace & E. Manconi. *Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis*. Journal of Sound and Vibration, vol. 318, no. 4, pages 884–902, 2008. 70
- [Mace 14] B. Mace. *Discussion of 'Dynamics of Phononic Materials and Structures : Historical Origins, Recent Progress, and Future Outlook '(M.I. Hussein, M.J. Leamy and M. Ruzzene, Applied Mechanics Reviews, 66(4) :040802, 2014)*. Applied Mechanics Reviews, vol. 66, no. 4, page 045502, 2014. 14

- [Manconi 10] E. Manconi & B. Mace. *Estimation of the loss factor of viscoelastic laminated panels from finite element analysis*. Journal of Sound and Vibration, vol. 329, no. 19, pages 3928–3939, 2010. 69, 71
- [Manconi 13] E. Manconi & S. Sorokin. *On the effect of damping on dispersion curves in plates*. International Journal of Solids and Structures, vol. 50, no. 11, pages 1966–1973, 2013. 69
- [Martinezsala 95] R. Martinezsala, J. Sancho, J. Sánchez, V. Gómez, J. Llinares & F. Meseguer. *Sound-attenuation by sculpture*. nature, vol. 378, no. 6554, pages 241–241, 1995. 15
- [Mead 70] D. Mead. *Free wave propagation in periodically supported, infinite beams*. Journal of Sound and Vibration, vol. 11, no. 2, pages 181–197, 1970. 23
- [Mead 73] D. Mead. *A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling*. Journal of Sound and Vibration, vol. 27, no. 2, pages 235–260, 1973. 23, 68
- [Mead 96] D. Mead. *Wave propagation in continuous periodic structures : research contributions from Southampton, 1964–1995*. Journal of sound and vibration, vol. 190, no. 3, pages 495–524, 1996. 23
- [Merheb 08] B. Merheb, P. Deymier, M. Jain, M. Aleshyna-Lesuffleur, S. Mohanty, A. Berker & R. Greger. *Elastic and viscoelastic effects in rubber/air acoustic band gap structures : A theoretical and experimental study*. Journal of Applied Physics, vol. 104, no. 6, page 064913, 2008. 69
- [Mizzi 15] L. Mizzi, K. Azzopardi, D. Attard, J. Grima & R. Gatt. *Auxetic metamaterials exhibiting giant negative Poisson’s ratios*. physica status solidi (RRL)-Rapid Research Letters, vol. 9, no. 7, pages 425–430, 2015. 16
- [Moiseyenko 11a] R. Moiseyenko & V. Laude. *Material loss influence on the complex band structure and group velocity in phononic crystals*. Physical Review B, vol. 83, no. 6, page 064301, 2011. 70
- [Moiseyenko 11b] R. Moiseyenko & V. Laude. *Material loss influence on the complex band structure and group velocity in phononic crystals*. Phys. Rev. B, vol. 83, no. 6, page 064301, 2011. 76, 78
- [Morand 92] H. J. Morand & R. Ohayon. *Interactions fluides-structures*. Issy-les-Moulineaux (Hauts-de-Seine) : Masson, 1992. 80

-
- [Mukherjee 75] S. Mukherjee & E. Lee. *Dispersion relations and mode shapes for waves in laminated viscoelastic composites by finite difference methods*. Computers & Structures, vol. 5, no. 5-6, pages 279–285, 1975. 70
- [Nayfeh 95] A. Nayfeh. *Wave propagation in layered anisotropic media : With application to composites*, volume 39. Elsevier, 1995. 41
- [Norris 08] R. Norris, J. Hamel & P. Nadeau. *Phononic band gap crystals with periodic fractal inclusions : Theoretical study using numerical analysis*. Journal of Applied Physics, vol. 103, no. 10, page 104908, 2008. 17
- [Nouh 15] M. Nouh, O. Aldraihem & A. Baz. *Wave propagation in metamaterial plates with periodic local resonances*. Journal of Sound and Vibration, vol. 341, pages 53–73, 2015. 14
- [Orris 74] R. Orris & M. Petyt. *A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures*. Journal of Sound and Vibration, vol. 33, no. 2, pages 223–236, 1974. 23
- [Oudich 11] M. Oudich, M. Senesi, M. Assouar, M. Ruzenne, J. Sun, B. Vincent, Z. Hou & T. Wu. *Experimental evidence of locally resonant sonic band gap in two-dimensional phononic stubbed plates*. Physical Review B, vol. 84, no. 16, page 165136, 2011. 14
- [Pendry 00] J. Pendry. *Negative refraction makes a perfect lens*. Physical review letters, vol. 85, no. 18, page 3966, 2000. 14
- [Prall 97] D. Prall & R. Lakes. *Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of -1* . International Journal of Mechanical Sciences, vol. 39, no. 3, pages 305–314, 1997. 37
- [Rouleau 12] L. Rouleau, J. Deü, A. Legay & J. Sigrüst. *Vibro-acoustic study of a viscoelastic sandwich ring immersed in water*. Journal of Sound and Vibration, vol. 331, no. 3, pages 522–539, 2012. 93
- [Ruzzene 05] M. Ruzzene & F. Scarpa. *Directional and band-gap behavior of periodic auxetic lattices*. physica status solidi (b), vol. 242, no. 3, pages 665–680, 2005. 15
- [Salit 09] V. Salit & T. Weller. *On the feasibility of introducing auxetic behavior into thin-walled structures*. Acta Materialia, vol. 57, no. 1, pages 125–135, 2009. 36
- [Scarpa 13a] F. Scarpa, M. Ouisse, M. Collet & K. Saito. *Kirigami auxetic pyramidal core : mechanical properties and wave propagation analysis in damped lattice*. Journal of Vibration and Acoustics, vol. 135, no. 4, page 041001, 2013. 18

- [Scarpa 13b] F. Scarpa, M. Ouisse, M. Collet & K. Saito. *Kirigami auxetic pyramidal core : mechanical properties and wave propagation analysis in damped lattice*. Journal of Vibration and Acoustics, vol. 135, no. 4, page 041001, 2013. 42
- [Schenk 04] O. Schenk & K. Gärtner. *Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with Pardiso*. Future Generation Computer Systems, vol. 20, no. 3, pages 475–487, 2004. 28, 43, 74
- [Shan 15] S. Shan, S. Kang, Z. Zhao, L. Fang & K. Bertoldi. *Design of planar isotropic negative Poisson's ratio structures*. Extreme Mechanics Letters, vol. 4, pages 96–102, 2015. 16
- [Signorelli 88] J. Signorelli & A. V. Flotow. *Wave propagation, power flow, and resonance in a truss beam*. Journal of Sound and Vibration, vol. 126, no. 1, pages 127–144, 1988. 23
- [Slann 15] A. Slann, W. White, F. Scarpa, K. Boba & I. Farrow. *Cellular plates with auxetic rectangular perforations*. physica status solidi (b), vol. 252, no. 7, pages 1533–1539, 2015. 33, 34, 37
- [Spadoni 06] A. Spadoni & M. Ruzzene. *Structural and acoustic behavior of chiral truss-core beams*. Journal of vibration and acoustics, vol. 128, no. 5, pages 616–626, 2006. 15
- [Sparavigna 07] A. Sparavigna. *Phonons in conventional and auxetic honeycomb lattices*. Physical Review B, vol. 76, no. 13, page 134302, 2007. 15
- [Sun 13] Y. Sun & N. Pugno. *In plane stiffness of multifunctional hierarchical honeycombs with negative Poisson's ratio substructures*. Composite Structures, vol. 106, pages 681–689, 2013. 16
- [Tang 15] Y. Tang, G. Lin, L. Han, S. Qiu, S. Yang & J. Yin. *Design of hierarchically cut hinges for highly stretchable and reconfigurable metamaterials with enhanced strength*. Advanced Materials, vol. 27, no. 44, pages 7181–7190, 2015. 16, 17
- [Tateo 14] F. Tateo, M. Collet, M. Ouisse, M. Ichchou, K. Cunefare & P. Abbe. *Experimental characterization of a bi-dimensional array of negative capacitance piezo-patches for vibroacoustic control*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, page 1045389X14536006, 2014. 18
- [Taylor 11] C. Taylor, C. Smith, W. Miller & K. Evans. *The effects of hierarchy on the in-plane elastic properties of honeycombs*. International Journal of Solids and Structures, vol. 48, no. 9, pages 1330–1339, 2011. 16
- [ten 03] *638 Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics*. ASTM, West Conshohocken, PA, 2003. 56

-
- [Veselago 68] V. Veselago. *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of epsilon and mu*. Soviet physics uspekhi, vol. 10, no. 4, page 509, 1968. 14
- [Veselago 06] V. Veselago & E. Narimanov. *The left hand of brightness : past, present and future of negative index materials*. Nature materials, vol. 5, no. 10, pages 759–762, 2006. 14
- [Vladimir 10] G. Vladimir & S. Marek. *Complex group velocity and energy transport in absorbing media*. Phys. Rev. E, vol. 81, no. 5, page 056602, 2010. 77, 78
- [Wang 15] P. Wang, F. Casadei, S. Kang & K. Bertoldi. *Locally resonant band gaps in periodic beam lattices by tuning connectivity*. Physical Review B, vol. 91, no. 2, page 020103, 2015. 14
- [Wilcox 78] C. Wilcox. *Theory of Bloch waves*. Journal d’analyse mathématique, vol. 33, no. 1, pages 146–167, 1978. 71
- [Williams 55] M. Williams, R. Landel & J. Ferry. *The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids*. Journal of the American Chemical society, vol. 77, no. 14, pages 3701–3707, 1955. 94
- [Wolfe 05] J. Wolfe. *Imaging phonons : acoustic wave propagation in solids*. Cambridge University Press, 2005. 41
- [Wu 09] T. Wu, T. Wu & J. Hsu. *Waveguiding and frequency selection of lamb waves in a plate with a periodic stubbed surface*. Physical Review B, vol. 79, no. 10, page 104306, 2009. 27, 78
- [Yee 66] K. Yee. *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media*. IEEE Trans. Antennas Propag, vol. 14, no. 3, pages 302–307, 1966. 23
- [Yee 82] A. Yee & M. Takemori. *Dynamic bulk and shear relaxation in glassy polymers. I. Experimental techniques and results on PMMA*. Journal of Polymer Science : Polymer Physics Edition, vol. 20, no. 2, pages 205–224, 1982. 65
- [Yong 89] Y. Yong & Y. Lin. *Propagation of decaying waves in periodic and piecewise periodic structures of finite length*. Journal of Sound and Vibration, vol. 129, no. 1, pages 99–118, 1989. 23, 68
- [Zhao 09] Y. Zhao & P. Wei. *The band gap of 1D viscoelastic phononic crystal*. Computational Materials Science, vol. 46, no. 3, pages 603–606, 2009. 69

LISTE DES FIGURES

1.1	Sculpture de Eusebio dans un jardin madrilène : celle-ci se comporte comme un cristal phononique.	15
1.2	Exemple de nid d'abeille auxétique.	16
1.3	Autosimilarité - Flocon de Koch.	16
1.4	Motifs Kagome.	17
1.5	Triangle de Sierpinski.	17
1.6	Types d'ondes. Ondes de volume : onde de compression (onde P), onde de cisaillement (onde S). Ondes de surface : onde de Love (onde L) et onde de Rayleigh (onde R) [Bolt 76].	19
1.7	Dispersion de la lumière par un prisme. Pink Floyd - Dark side of the moon 1973.	20
1.8	a) Réseau physique. b) Réseau réciproque correspondant.	21
1.9	Zones de Brillouin monodirectionnelles [Brillouin 53].	22
1.10	a) Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts. Masses et raideurs identiques. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagramme de dispersion utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1	24
1.11	Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts. Masses et raideurs différentes.	25
1.12	a) Diagramme de dispersion d'une chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts sans amortissement. Les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1 . b) Fonction de réponse en fréquence d'une chaîne diatomique 1D de 10 masses et ressorts sans amortissement. Un rectangle gris met en évidence la bande interdite.	25
1.13	a) Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts. Résonateurs internes. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagramme de dispersion utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1	26
1.14	Guide d'ondes bidirectionnel infini.	27
1.15	Réseau réel et réseau réciproque associé (Zone de Brillouin irréductible en gris).	27

1.16	Relation de dispersion sur la zone de Brillouin.	28
1.17	Courbe de dispersion sur le contour de la zone de Brillouin. Bandes interdites complètes et partielles en vert et bleu respectivement.	30
2.1	Paramètres géométriques de la cellule élémentaire (niveau 1).	34
2.2	Perforations rectangulaires, hiérarchiques, auxétiques aux niveaux 1, 2 et 3 avec $AR = 4$ variant de $S = 0, 2$ à $S = 0, 8$	35
2.3	Fraction volumique équivalente pour différentes valeurs de S aux niveaux 1, 2 et 3 avec un rapport AR donné de 4.	36
2.4	a) Conditions aux limites pour l'essai virtuel de traction dans la direction 1, b) conditions aux limites pour l'essai virtuel de cisaillement biaxial appliqué à un quart de cellule au niveau 2.	37
2.5	a) Variation du module d'Young E_1 adimensionné, b) variation du module d'Young E_2 adimensionné, c) variation du module de cisaillement G_{12} adimensionné, d) variation des coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} par rapport à l'espacement entre 2 cellules S aux niveaux 1, 2 et 3 avec le paramètre AR égal à 4.	39
2.6	a) Variation du module d'Young E_1 adimensionné, b) variation du module d'Young E_2 adimensionné, c) variation du module de cisaillement G_{12} adimensionné, d) variation des coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} par rapport au ratio AR aux niveaux 1, 2 et 3 avec le paramètre S égal à 0, 2. Géométries de "transition" au niveau des sauts dans les propriétés mécaniques en gris, gradient de déplacement illustrant l'effet auxétique (déplacement nul en bleu, maximale en rouge).	40
2.7	Courbes de lenteur du premier mode normalisées pour les trois niveaux hiérarchiques avec le paramètre AR égal à 4 et a) $S = 0, 2$, b) $S = 0, 7$	42
2.8	Courbes de lenteur du premier mode normalisées pour les trois niveaux hiérarchiques avec le paramètre S égal à 0, 2 et a) $AR = 3$, b) $AR = 6$	43
2.9	Diagrammes de dispersion dans l'espace des nombres d'ondes du réseau avec $AR = 4$, $S = 0, 3$ pour a) le niveau 1, b) le niveau 2, c) le niveau 3. Les rectangles grisés représentent les bandes interdites omnidirectionnelles.	44
2.10	Largeur totale de bandes interdites cumulées aux différents niveaux en tant que pourcentage de la bande de fréquence adimensionnée jusqu'à $\omega/\omega_p = 5$ pour le paramètre $AR = 4$	45
2.11	Distribution des bandes interdites par rapport au paramètre S pour a) le niveau 1, b) le niveau 2, c) le niveau 3 avec le paramètre $AR = 4$	46
2.12	Largeur totale de bandes interdites cumulées en tant que pourcentage de la bande de fréquence adimensionnée jusqu'à $\omega/\omega_p = 5$ pour le paramètre $AR \in [3, 6]$ et $S \in [0, 2, 0, 8]$ aux a) niveau 1, b) niveau 2 et c) niveau 3.	49
2.13	Perforations rectangulaires, hiérarchiques, auxétiques au niveau 2 avec $AR = 6$ pour $S = 0, 2$ et $S = 0, 3$ respectivement à gauche et à droite.	50

2.14	Comparaison entre la dispersion d'une structure possédant des paramètres mécaniques homogénéisés et la dispersion de la cellule réelle pour a) le niveau 1, b) le niveau 2, c) le niveau 3 avec les paramètres $AR = 4$ et $S = 0,2$	50
2.15	Structure finie intégrant une interface composée de 16 cellules unitaires distribuées aux a) niveau 1, b) niveau 2, c) niveau 3. Le point d'excitation est repéré en rouge il est le même à tous les niveaux.	51
2.16	Fonctions de réponse en fréquence numériques de la structure au niveau 1. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vx ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie, respectivement en bleu et rouge. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion est représentée par le rectangle grisé.	52
2.17	Déformées numériques. a) Premier mode de flexion dans le plan, b) premier mode de traction/compression, l'effet auxétique est clairement observé. c) Déformée dans la bande interdite.	53
2.18	Fonctions de réponse en fréquence numériques de la structure au niveau 2. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vx ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie, respectivement en bleu et rouge. Les bandes interdites, prédites par le diagramme de dispersion sont représentées par le rectangle grisé.	53
2.19	Fonctions de réponse en fréquence numériques de la structure au niveau 3. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vx ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie, respectivement en bleu et rouge. Les bandes interdites, prédites par le diagramme de dispersion sont représentées par le rectangle grisé.	54
2.20	Machine à découpe laser Trotec Speedy 300	55
2.21	Échantillons d'essai ($r = 4\text{ cm}$ et $r = 10\text{ cm}$), réalisés avec la machine à découpe laser, d'un quart de cellule du niveau 3.	55
2.22	Métrologie sans contact d'une pièce très simple, usinée par découpe laser.	56
2.23	Éprouvette de traction normalisée de polyméthacrylate de méthyle (PMMA) dans les mors de la machine de traction. L'échantillon est équipé d'un extensomètre à contact.	57
2.24	a) Échantillon de polyméthacrylate de méthyle (PMMA) sur son support d'essai reproduisant des conditions libres. Excitation via un système bobine aimant. Mesure au point d'excitation via un vibromètre 1D. b) Vitesse au point d'excitation, déformée équivalente.	58
2.25	Zoom sur le réseau au niveau hiérarchique 3 de la plaque découpée.	58
2.26	Vibromètre 3D à balayage	59
2.27	Premier dispositif expérimental avec comme éléments principaux le métamatériau et le vibromètre 3D à balayage pour la mesure, un zoom est effectué sur le système excitateur, deux patches piézoélectriques en parallèle.	60

2.28	Second dispositif expérimental avec comme éléments principaux le métamatériau et le vibromètre 3D à balayage pour la mesure, un zoom est effectué sur le système excitateur, un pot vibrant instrumenté avec une cellule de force et un accéléromètre.	60
2.29	Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vx ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie numériques respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vx ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie expérimentales respectivement en jaune et violet. Les bandes interdites, prédites par le diagramme de dispersion, au niveau hiérarchique 3, sont représentées par les rectangles grisés.	62
2.30	Cohérence	62
2.31	Maillage expérimental et nœuds appartenant à une ligne de la plaque d'entrée Δ et à une ligne de la plaque de sortie \triangle pour estimer la participation maximale de la flexion dans le déplacement X	63
3.1	Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts avec amortissement hystérétique. Masses et raideurs identiques. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagrammes de dispersion avec et sans amortissement utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1	70
3.2	Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts avec amortissement hystérétique. Masses et raideurs différentes. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagrammes de dispersion avec et sans amortissement utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1	71
3.3	a) Chaîne diatomique 1D de masses et de ressorts avec amortissement hystérétique. Résonateurs internes. La cellule élémentaire est encadrée en rouge. b) Diagrammes de dispersion avec et sans amortissement utilisant la méthode $\omega(k)$ ou $k(\omega)$. Les parties imaginaires des nombres d'ondes sont représentées de -1 à 0 et les parties réelles de 0 à 1	72
3.4	Réseau réciproque correspondant	73
3.5	Diagramme de dispersion obtenu avec la méthode "Shift cell operator" le long de la direction $\Gamma - X$, résultats bruts et résultats après application des critères de tri respectivement en noir et rouge	79
3.6	Diagramme de dispersion comparant les deux approches, méthodes de Floquet-Bloch et "Shift cell operator" dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - X$	80
3.7	Diagramme de dispersion comparant les deux approches, méthode de Floquet-Bloch et "Shift cell operator" dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - M$	81
3.8	Schéma du fonctionnement de la routine du suivi de branches	82

3.9	Diagramme de dispersion utilisant la méthode "Shift cell operator" avec pas de fréquence adaptatif et tri de branches dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - X$	82
3.10	Vitesse de groupe avec pas de fréquence adaptatif et tri de branches dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - X$	83
3.11	Diagramme de dispersion dans un cas conservatif le long de la direction $\Gamma - X$ avec les déformées associées à chaque branche.	84
3.12	Maillage de la cellule unitaire. a) 889 ; b) 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques.	85
3.13	Interpolation linéaire entre le maillage possédant 889 et celui possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques.	85
3.14	a) Écart relatif ($\Delta f_i/f_i$) de la branche 11 entre les maillages possédant 889, 1796, 5443 et 11938 par rapport à celui possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques en fonction du nombre d'onde réduit ; b) écart relatif moyen ($\frac{1}{n}\Sigma \Delta f_i/f_i $) de la branche 11 par rapport au maillage possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques en fonction du nombre d'éléments.	85
3.15	Courbes de dispersion sans amortissement, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 ; les résultats avec la méthode de Floquet-Bloch sans amortissement sont donnés en référence en pointillés rouges.	86
3.16	Vitesse de groupe, associée au diagramme de dispersion (figure 3.15), calculée par méthode énergétique ou par formulation différentielle. . .	87
3.17	Courbes de dispersion avec amortissement hystérétique de 1%, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 ; les résultats avec la méthode de Floquet-Bloch sans amortissement sont donnés en référence en pointillés rouges. . . .	87
3.18	Vitesse de groupe, associée au diagramme de dispersion (figure 3.17), calculée par méthode énergétique ou par formulation différentielle. . .	88
3.19	Courbes de dispersion avec amortissement hystérétique de 5%, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 ; les résultats avec la méthode de Floquet-Bloch sans amortissement sont donnés en référence en pointillés rouges. . . .	88
3.20	Vitesse de groupe, associée au diagramme de dispersion (figure 3.19), calculée par méthode énergétique ou par formulation différentielle. . .	89
3.21	Courbes de dispersion avec amortissement hystérétique de 10%, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1 ; les résultats avec la méthode de Floquet-Bloch sans amortissement sont donnés en référence en pointillés rouges. . . .	89
3.22	Vitesse de groupe, associée au diagramme de dispersion (figure 3.21), calculée par méthode énergétique ou par formulation différentielle. . .	90

4.1	a) Guide d'ondes bidirectionnel infini. b) Plot de référence du chapitre 1, cylindre en aluminium de 10 mm. c) Plot constitué d'une interface en polymère hautement dissipative de 3 mm surmontée d'un cylindre en aluminium de 7 mm.	93
4.2	a) Module de stockage. b) Facteur de perte du tBA/PEGDMA pour des températures de 25°C, 60°C et 90°C respectivement tracées en bleu, rouge et jaune.	95
4.3	Diagrammes de dispersion le long de la direction $\Gamma - X$ obtenus avec la méthode "Shift cell operator". a) Structure de référence du chapitre 1, tout en aluminium. b) Métamatériau à température ambiante de 25°C. c) Métamatériau à la température de 90°C et plaque en aluminium.	96
4.4	Courbes de dispersion à la température de 25°C, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1. Les déformées longitudinale, transversale et de flexion à 40 kHz sont visibles sur la droite	96
4.5	Courbes de dispersion à la température de 60°C, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1.	97
4.6	Courbes de dispersion à la température de 90°C, parties réelles et parties imaginaires des nombres d'ondes respectivement de -1 à 0 et de 0 à 1. Déformées à 40 kHz associées aux branches longitudinale, transversale et de flexion.	98
4.7	Vitesses de groupe, associées aux diagrammes de dispersion de la a) figure 4.4 à 25°C, b) figure 4.5 à 60°C et c) figure 4.6 à 90°C.	99
4.8	Structure finie intégrant une interface composée d'un ensemble distribué de cellules unitaires. Positionnement d'un patch piézoélectrique en bas à gauche pour générer l'excitation.	100
4.9	Fonctions de réponse en fréquence numériques de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie, à la température de 25°C, respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie, à la température de 90°C, respectivement en jaune et violet. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion à la température de 25°C, est représentée par le rectangle grisé.	101
4.10	Déformées numériques à température ambiante.	101
4.11	Déformées numériques à la température de 90°C.	102
4.12	Fonctions de réponse en fréquence numériques du métamatériau à la température de 90°C et celles de la simple plaque. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée de la simple plaque en bleu. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée du métamatériau, à la température de 90°C, en rouge.	102

4.13	CAO du support d'assemblage permettant la mise en place des parties composant le métamatériau.	104
4.14	a) Mise en place des plots polymères dans la partie inférieure du guide. b) Mise en place des plots aluminium dans la partie inférieure du guide. b) Plots polymères collés sur la plaque aluminium montée dans la partie supérieure du guide. d) Configuration de collage sous charge du métamatériau avec le guide assurant une mise en position correcte.	105
4.15	Metamatériau réalisé après les différentes étapes de fabrication et assemblage	105
4.16	Dispositif expérimental avec comme éléments principaux le métamatériau dans l'enceinte thermique et le vibromètre 3D à balayage pour la mesure.	106
4.17	Support reproduisant des conditions libres. a) Face arrière du métamatériau. b) Face avant du métamatériau.	107
4.18	Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie expérimentales, à la température de $25^\circ C$, respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie numériques, à la température de $25^\circ C$, respectivement en jaune et violet. Bruit de mesure en vert. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion à la température de $25^\circ C$, est représentée par le rectangle grisé.	108
4.19	Fonction de transfert entrée/sortie, à température ambiante, numérique et expérimentale, respectivement en bleu et rouge. Les zones, où les vitesses sont acquises dans le bruit de mesure, sont représentées avec les rectangles rouges. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion à la température de $25^\circ C$, est représentée par le rectangle grisé.	109
4.20	Fonction de transfert entrée/sortie en tiers d'octave, à température ambiante, numérique et expérimentale, respectivement en bleu et rouge.	109
4.21	Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonance, numériques et expérimentales, à la température de $25^\circ C$	110
4.22	Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie expérimentales, à la température de $60^\circ C$, respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie numériques, à la température de $60^\circ C$, respectivement en jaune et violet.	111

4.23	a) Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée expérimentales, à la température de $25^\circ C$ et $60^\circ C$, respectivement en bleu et rouge. La bande interdite, prédite par le diagramme de dispersion à la température de $25^\circ C$, est représentée par le rectangle grisé. b) Facteur de perte du tBA/PEGDMA pour des températures de $25^\circ C$ et $60^\circ C$ respectivement tracées en bleu et rouge.	112
4.24	Fonctions de réponse en fréquence de la structure. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie expérimentales, à la température de $90^\circ C$, respectivement en bleu et rouge. Moyenne des amplitudes des vitesses quadratiques $ Vz ^2$ de la plaque d'entrée et de sortie numériques, à la température de $90^\circ C$, respectivement en jaune et violet.	113
4.25	Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonance, numériques et expérimentales, à la température de $90^\circ C$	114
A.1	Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonances, numériques et expérimentales, à la température de $25^\circ C$	124
A.2	Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonances, numériques et expérimentales, à la température de $25^\circ C$	125
A.3	Alternance entre une partie des déformées aux fréquences de résonances, numériques et expérimentales, à la température de $90^\circ C$	126

LISTE DES TABLES

2.1	Fréquences réduites avec équivalence pour du polyméthacrylate de méthyle (PMMA), de dimensions $r = 7 \text{ cm}$, $S = 0,2$ et $AR = 4$. Les fréquences centrées de la première bande interdite sont indiquées.	56
2.2	Participation maximale de la flexion dans le déplacement X suivant la ligne Δ sur la plaque d'entrée	64
2.3	Participation maximale de la flexion dans le déplacement X suivant la ligne Δ sur la plaque de sortie	64
3.1	Écart relatif moyen ($\Delta f/f$) entre le maillage possédant 11938 et celui possédant 33616 éléments de Lagrange quadratiques tétraédriques.	84
4.1	Paramètres de Zener pour le tBA/PEGDMA.	94
4.2	Parties des fréquences de résonance numériques et expérimentales avec une estimation de la valeur absolue de l'erreur relative à la température de 25°C	110
4.3	Parties des fréquences de résonance numériques et expérimentales avec une estimation de la valeur absolue de l'erreur relative à la température de 90°C	113
A.1	Parties des fréquences de résonances numériques et expérimentales avec une estimation de la valeur absolue de l'erreur relative à la température de 25°C	123
A.2	Parties des fréquences de résonances numériques et expérimentales avec une estimation de la valeur absolue de l'erreur relative à la température de 90°C	127

Composites périodiques fonctionnels pour l'absorption vibroacoustique large bande

Résumé :

Ces travaux de thèse sont consacrés à l'analyse des phénomènes ondulatoires se produisant dans les structures périodiques : des phénomènes comme les réflexions de Bragg ou les résonances locales qui émergent dans de telles structures permettent de contrôler la propagation des ondes, et ces structures présentent donc des propriétés spécifiques. Dans le premier chapitre, des outils numériques permettant de déterminer les relations de dispersion dans les structures périodiques sont présentés, et notamment la méthode de Floquet-Bloch qui sert de référence dans l'analyse des milieux périodiques. Cette technique consiste à résoudre le problème sur une cellule unitaire avec des conditions limites adaptées, cependant l'introduction d'amortissement dans les cas 2D et 3D n'est pas facile. Elle est mise en oeuvre dans le deuxième chapitre pour étudier la propagation des ondes dans un métamatériau comprenant des perforations rectangulaires, hiérarchiques et auxétiques (coefficient de poisson négatif). L'influence des paramètres géométriques de la cellule sur la dispersion et les propriétés mécaniques de la structure est investiguée en utilisant une méthode d'homogénéisation. Une validation expérimentale est effectuée sur un réseau en polyméthacrylate de méthyle (PMMA) en utilisant un vibromètre 3D à balayage. Dans le troisième chapitre, une alternative à la méthode de Floquet-Bloch pour étudier la propagation d'ondes dans des milieux dissipatifs est décrite : la méthode intitulée "Shift cell operator". Elle est basée sur une reformulation du problème aux équations aux dérivées partielles, la périodicité étant incluse dans le comportement global de la structure et des conditions de continuité sur les bords de la cellule sont imposées. Cette stratégie permet de résoudre le problème quelle que soit l'évolution en fréquence des propriétés de la cellule. Des outils de post-traitement des diagrammes de dispersion avec amortissement sont proposés basés notamment sur une analyse de la vitesse de groupe. Dans le dernier chapitre, la démarche est appliquée sur une structure périodique amortie consistant en un guide d'ondes bidirectionnel infini mêlant aluminium et polymère hautement dissipatif. Les résultats obtenus sur une structure finie intégrant une interface composée d'un ensemble distribué de ces cellules unitaires confirment le caractère adaptatif du métamatériau ainsi conçu. Une confrontation de ces résultats à des résultats expérimentaux a permis de confirmer ce comportement.

Mots clés : Structures périodiques, Métamatériau, Dispersion, Dissipation, Auxétique, Homogénéisation, Floquet-Bloch, Shift cell operator, Vibroacoustique.

Periodic composites for vibroacoustic wideband absorption

Abstract :

The study of wave propagation in periodic structures is proposed in this work. Periodic structures exhibit very specific properties like Bragg scattering or local resonances. In the first chapter, some numerical tools for dispersion analysis of periodic structures are presented. The classical Floquet-Bloch approach is presented, as a reference. This technique uses proper boundary conditions on the unit cell, but dealing with damping is not easy for 2D or 3D cases. In the second chapter, this technique is used and a metamaterial with hierarchical, auxetic (negative Poisson ratio) rectangular perforations is presented. A geometric parametric investigation of these rectangular perforations using a numerical asymptotic homogenisation finite element approach is done. An experimental validation is performed with a network based on polymethyl methacrylate (PMMA) using a 3D scanning vibrometer. In the third chapter, the Shift cell operator technique is described as an alternative technique in order to describe wave propagation in damped periodic structures. It consists in a reformulation of the PDE problem by shifting in terms of wave number the space derivatives appearing in the mechanical behavior operator inside the cell, while imposing continuity boundary conditions on the borders of the domain. Damping effects can be introduced in the system. This strategy make it possible to solve the problem with an arbitrary frequency dependency of the physical properties of the cell. A focus is proposed on tools for the post-processing of dispersion diagrams in damped configurations based mainly in the group velocity. Finally, this approach is applied to an adaptive metamaterial based on the combination of metallic parts with highly dissipative polymeric interface. In order to validate the design and the adaptive character of the metamaterial, results issued from a full 3D model of a finite structure embedding an interface composed by a distributed set of the unit cells are presented. After this step, a comparison between the results obtained using the tunable structure simulation and the experimental results is presented.

Keywords : Periodic structures, Metamaterial, Dispersion, Dissipation, Auxetic, Homogenisation, Floquet-Bloch, Shift cell operator, Vibroacoustic.

The logo for SPIM (École doctorale SPIM) features a stylized 'S' followed by the letters 'PIM' in a bold, sans-serif font.

■ École doctorale SPIM 16 route de Gray F - 25030 Besançon cedex

■ tél. +33 [0]3 81 66 66 02 ■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr

The logo for Université de Franche-Comté (UFC) features a stylized 'U' and 'FC' with the text 'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ' below it.

UNIVERSITÉ
DE FRANCHE-COMTÉ