Contrôle actif acoustique du bruit large bande dans un habitacle automobile

Paul Loiseau

▶ **To cite this version:**

Paul Loiseau. Contrôle actif acoustique du bruit large bande dans un habitacle automobile. Automatique. Ecole des Mines de Nantes, 2016. Français. NNT : 2016EMNA0275 . tel-01407245

HAL Id: tel-01407245
https://theses.hal.science/tel-01407245

Submitted on 1 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

MINES Nantes
Institut Mines-Télécom

Thèse de Doctorat

Paul LOISEAU

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'École nationale supérieure des mines de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Automatique, productique
Unité de recherche : Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes (IRCCyN)

Soutenue le 28 octobre 2016
Thèse n° : 2016EMNA275

Contrôle actif acoustique du bruit large bande dans un habitacle automobile

JURY

Rapporteurs :	**M. Pierre APKARIAN**, Directeur de recherche, ONERA **M^me^ Valérie POMMIER-BUDINGER**, Professeur associé, ISAE-SUPAERO
Examinateurs :	**M. Michel MALABRE**, Directeur de recherche CNRS, École Centrale de Nantes **M. Bruno GAZENGEL**, Professeur, Université du Maine **M. Mohamed YAGOUBI**, Maître assistant, Mines Nantes (co-encadrant)
Invité :	**M. Jean-Marc DUFFAL**, Ingénieur, Renault S.A.
Directeur de thèse :	**M. Philippe CHEVREL**, Professeur, Mines Nantes

Remerciements

Ce travail de thèse est le fruit d'une collaboration entre l'IRCCyN et Renault. Sa réussite doit pour beaucoup à l'engagement des divers encadrants de cette thèse. Je pense tout d'abord côté Renault à Hervé Illy et Guillaume Baudet qui sont à l'origine de ce projet de recherche. Je pense ensuite à Jean-Marc Duffal qui m'a suivi et encadré durant ces trois années chez Renault. Je le remercie pour son écoute, ses précieux conseils et pour les nombreuses discussions et échanges que nous avons pu avoir au fil de ce travail. Je pense également à Denis Ricot qui est arrivé à mi-parcours dans l'encadrement du sujet et enfin à Jean-Pascal Reille qui a toujours manifesté un réel intérêt pour le sujet et pour son avancement.

Les encadrants académiques ont également joué un rôle de premier plan dans la réussite de ce travail. Je pense bien entendu à Philippe Chevrel, je le remercie pour son engagement constant du début jusqu'à la fin de cette thèse, pour son enthousiasme, sa disponibilité, sa bienveillance et enfin son expertise qu'il aime à communiquer et qui a fortement guidé ces travaux. Je remercie également Mohamed Yagoubi pour ses conseils, ses remarques et ses questionnements avisés, ainsi que pour ses encouragements tout au long de ce travail. À noter qu'ils ont tous les deux été mes enseignants sur les bancs de l'école, je leur dois donc beaucoup.

J'exprime également ma gratitude à l'égard des rapporteurs Pierre Apkarian et Valérie Pommier-Budinger, qui ont accepté de relire ce manuscrit et d'y apporter de précieux commentaires. Je remercie également Bruno Gazengel et Michel Malabre pour leur participation active et intéressée au jury.

Je remercie aussi Fabien Claveau, Vincent Lebastard et Mathieu Porez pour leur aide précieuse dans le développement du démonstrateur IRCCyN Box.

Viennent ensuite les membres des différentes équipes que j'ai cotoyées durant ces trois années côté laboratoire et côté Renault, ainsi que les doctorants qui sont maintenant docteurs ou qui le deviendront. Je les remercie tous pour les agréables moments qu'ils m'ont permis de vivre durant ma thèse.

Enfin, je temine ces remerciements en remerciant ma famille et en tout premier lieu mes parents, mon épouse et mon fils.

Résumé

L'atténuation des bruits gênants dans une automobile est classiquement réalisée par ajustement des caractéristiques mécaniques du véhicule : masse, raideur et amortissement. C'est une approche dite passive. Malheureusement, elle induit un ajout de masse important pour traiter les basses fréquences. Le contrôle actif de bruit (atténuation d'un bruit par superposition d'un contrebruit) est actuellement envisagé comme une solution possible à ce problème. L'objectif de cette thèse est d'évaluer les performances atteignables par cette solution.

Un système acoustique étant par essence fortement résonant, sa modélisation sur une large plage de fréquence conduit à des modèles d'ordre élevé, pour l'obtention desquels une méthode d'identification appropriée doit être utilisée. C'est la méthode des sous espaces par approche fréquentielle dans le domaine continu qui a été retenue.

La traduction du cahier des charges conduit à un problème de régulation multivariable $\mathcal{H}_\infty$ multi-objectif et multi-modèle avec contrainte de stabilité forte. Par ailleurs, actionneurs et capteurs ne sont pas colocalisés et on ne mesure pas la perturbation à rejeter. La volonté d'évaluer au plus près les performances atteignables justifie la résolution du problème par optimisation non lisse. Cette approche évite tout pessimisme, mais nécessite de par son caractère local une bonne initialisation et une structuration du régulateur parcimonieuse.

La méthodologie proposée a été validée en simulation et expérimentalement. Elle permet une évaluation et une comparaison précises des performances atteignables en fonction des contraintes sur les mesures et les moyens d'action disponibles.

Abstract

Classical methods used for noise reduction in cars are based on adjusting the mechanical properties : mass, stiffness and damping. They are qualified as passive and induce significative addition of weight for reducing low frequency noises. Active noise control is seen as a possible solution to achieve low frequency noise attenuation and weight reduction.

The goal of this work is to evaluate achievable performances with such solution.

Acoustic enclosures are known to be resonant systems of high order. Obtaining a model of it, therefore requires a suitable identification method. The approach chosen is based on subspace methods. It processes data in the frequency domain for obtaining a continuous time model.

The control problem derived from the specifications is a MIMO $\mathcal{H}_\infty$, multi-objective and multi-model problem with a strong stability constraint. Futhermore, actuators and sensors are not-colocated, and no measure of the disturbance is available. In order to precisely evaluate the achievable performances, this problem is solved using nonsmooth optimization.

Such approach ensures the absence of pessimism, but requires an appropriate initialization and a parsimonious controller structure, because it does not ensure convergence toward the global optimum.

The proposed methodology was validated in simulation and experimentally. It allows a precise evaluation and comparison of achievable performances according to the constraints on available measures and means of action.

Table des matières

Introduction **14**

I Acoustique et vibration automobile **21**

1 Phénomènes physiques **25**
1.1 Rappels d'acoustique . . . 25
1.1.1 Notions de base . . . 25
1.1.2 Mécanisme de génération de bruit . . . 26
1.1.3 Acoustique dans les cavités . . . 26
1.1.4 Perception humaine du bruit . . . 27
1.2 Les principales sources de bruit sur une automobile . . . 27
1.2.1 Moteur . . . 28
1.2.2 Roulement . . . 28
1.2.3 Aéroacoustique . . . 28

2 Contrôle passif **31**
2.1 Outils de réduction passive de bruit . . . 31
2.1.1 Réduction du bruit à la source . . . 31
2.1.2 Réduction de la transmission par voie solidienne . . . 32
2.1.3 Réduction de la transmission par voie aérienne . . . 32
2.2 Processus industriel . . . 33
2.3 Possibilités et limites du contrôle passif . . . 34

3 Cahier des charges du contrôle actif **35**
3.1 Description du problème . . . 36
3.2 Performance . . . 37
3.2.1 Densité spectrale de puissance . . . 37
3.2.2 Normes l_2 et de puissance . . . 40
3.2.3 Valeurs singulières . . . 41
3.2.4 Normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ . . . 41
3.3 Robustesse . . . 44
3.3.1 Robustesse aux dynamiques négligées . . . 44
3.3.2 Robustesse aux incertitudes . . . 45
3.4 Dynamiques du régulateur . . . 45
3.4.1 Stabilité forte . . . 45

3.4.2 Théorème de Shannon . . . 46
3.5 Performance et stabilité robuste . . . 46
3.5.1 Approche multi-modèle . . . 46
3.5.2 Réécriture des indicateurs . . . 47

II Modélisation **49**

4 Confidentiel **53**

5 Confidentiel **55**

6 Identification **57**
6.1 Théorie des sous-espaces . . . 58
6.1.1 Position du problème et notations . . . 58
6.1.2 Algorithme d'identification par la méthode des sous-espaces . . . 60
6.1.3 Mise en œuvre numérique . . . 62
6.2 Démonstrateur IRCCyN Box . . . 63
6.2.1 Multi-modèle . . . 63
6.2.2 Résultats . . . 64
6.2.3 Discussion sur les chemins primaire et secondaire . . . 65
6.3 Démonstrateur Véhicule . . . 66
6.3.1 Identifications monovariable . . . 66
6.3.2 Réduction du modèle véhicule multivariable . . . 67
6.3.3 Multi-modèle . . . 69
6.3.4 Discussion sur les chemins primaire et secondaire . . . 69
6.4 Les zéros à non minimum de phase . . . 69
6.4.1 Limitations dans le cas monovariable . . . 70
6.4.2 Limitations dans le cas multivariable . . . 73
6.4.3 Limitations lors d'une régulation en boucle ouverte . . . 73

III Stratégie de commande **75**

7 État de l'art **79**
7.1 FxLMS . . . 79
7.1.1 Algorithme LMS . . . 80
7.1.2 Du LMS au FxLMS . . . 81
7.2 Commande par modèle interne . . . 84
7.2.1 Au sens de Wonham . . . 84
7.2.2 Au sens de Morari . . . 84
7.3 Commande passive . . . 85
7.4 Commande optimale et optimisation convexe . . . 86
7.4.1 LQG . . . 86
7.4.2 Commandes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ . . . 87
7.4.3 LMI et commande multi-objectif . . . 88
7.5 Robustesse . . . 89

8 Évaluation des performances robustes atteignables **91**
8.1 Description du problème . . . 92
8.2 Stratégie de commande . . . 93
8.2.1 Critère . . . 94
8.2.2 Robustesse aux dynamiques négligées . . . 94
8.2.3 Robustesse aux incertitudes . . . 94
8.2.4 Contraintes sur les pôles du régulateur . . . 95
8.2.5 Multi-modèle . . . 96
8.3 Méthode de résolution . . . 96
8.4 Structuration du régulateur . . . 97
8.4.1 Structure retour d'état observateur . . . 97
8.4.2 Comparaison avec la forme modale . . . 98
8.5 Initialisation . . . 99
8.6 Résultats . . . 100
8.6.1 Indicateurs retenus . . . 101
8.6.2 Influence du nombre de capteurs et d'actionneurs . . . 104
8.6.3 Comparaison feedback avec et sans feedforward . . . 106
8.6.4 Comparaison critère $\mathcal{H}_2$ et critère $\mathcal{H}_\infty$ . . . 108

9 Résolution du problème industriel **111**
9.1 Description du problème . . . 112
9.2 Stratégie de commande . . . 113
9.2.1 Critère . . . 114
9.2.2 Robustesse non structurée . . . 114
9.2.3 Robustesse aux incertitudes . . . 114
9.2.4 Contraintes sur les pôles du régulateur . . . 114
9.2.5 Multi-modèle . . . 115
9.3 Structuration du régulateur . . . 115
9.4 Initialisation du régulateur . . . 116
9.5 Résultats . . . 116
9.5.1 Précisions sur les indicateurs utilisés . . . 117
9.5.2 Atténuation en basse fréquence . . . 117
9.5.3 Largeur de la plage et niveau d'atténuation . . . 120
9.5.4 Validations expérimentales sur l'IRCCyN Box . . . 124
9.5.5 Confidentiel . . . 125

Conclusions et perspectives **126**

Annexes **138**

A Densité spectrale de puissance **141**
A.1 Définitions . . . 141
A.2 Propriétés d'un signal aléatoire stationnaire et ergodique . . . 141
A.3 Densité spectrale de puissance . . . 142
A.4 Cas multivariable . . . 142

B Valeurs Singulières **143**
B.1 Définition . . . 143
B.2 Valeur singulière d'une matrice 2×2 . . . 144
B.3 Interprétation pour les systèmes multivariables . . . 144

C Normes de signaux et de systèmes **145**
C.1 Signaux . . . 145
C.1.1 Norme l_2 . . . 145
C.1.2 Norme l_∞ . . . 145
C.1.3 Norme de puissance . . . 145
C.2 Systèmes . . . 146
C.2.1 Norme $\mathcal{H}_2$ . . . 146
C.2.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$ . . . 146
C.2.3 Normes induites . . . 146

D Marge de module **147**

Notations

Acronymes

DSP	Densité Spectrale de Puissance
LFT	Linear Fractional Transformation (transformation linéaire fractionnaire)
LMI	Linear Matrix Inequality (inégalités matricielles linéaires)
LMS	Least Mean Square
FxLMS	Filtered x Least Mean Square
LQG	Linear Quadratic Gaussian (linéaire quadratique gaussien)
MIMO	Multi Input Multi Output (multi-entrées multi-sorties)
SISO	Single Input Single Output (mono-entrée mono-sortie)
RIF	Filtre à réponse impulsionnelle finie
RII	Filtre à réponse impulsionnelle infinie

Notations

$\mathbb{R}$	Corps des réels
$\mathbb{C}$	Corps des complexes
f_e	fréquence d'échantillonnage
λ	longueur d'onde
$\lambda(\cdot)$	Valeurs propres d'une matrice
$\sigma(\cdot)$	Valeurs singulières d'une matrice
$\bar{\sigma}(\cdot)$	Valeur singulière maximale
$(\cdot)^T$	Transposée d'une matrice
$(\cdot)^H$	Matrice hermitienne (transposée conjuguée)
$Re(\cdot)$, $Im(\cdot)$	Partie réelle et partie imaginaire
$T_{u\to y}$	Transfert ayant pour entrée u et pour sortie y

Introduction

Introduction

Le principe du contrôle actif acoustique a été décrit dès 1930 dans le brevet français d'Henri Coanda [1]. Il consiste pour atténuer un bruit gênant à émettre un contre-bruit de même amplitude mais déphasé d'une demi-longueur d'onde. La résultante du bruit et du contre-bruit est alors nulle. On retrouve ce même principe appliqué à un dispositif de contrôle actif en boucle ouverte dans un conduit dans le brevet de Paul Lueg [2] (États-Unis, 1936). D'autres applications suivent dans les années 1950 notamment avec les travaux de Olson et May [3] sur un système d'appui tête actif avec une régulation en boucle fermée et ceux de Conover [4] sur les transformateurs électriques. Ces diverses travaux ont permis de démontrer le potentiel du contrôle actif acoustique. Les performances obtenues restaient toutefois limitées par les capacités des régulations analogiques.

Il faut donc attendre le développement des calculateurs numériques pour voir se multiplier les applications de contrôle actif de bruit. Les problèmes traités sont de complexités assez diverses. Mentionnons tout d'abord les applications de contrôle actif dans les conduits [5], [6], [7], telles que représentées en figure 1. Dans ce type de système, où le conduit est ouvert à l'une des extrémités, les ondes acoustiques (provenant par exemple d'un système de ventilation) se propagent le long du conduit. On peut donc mesurer le bruit à rejeter en amont de l'actionneur (haut-parleur) et mettre en œuvre une action de précompensation. L'enjeu est bien entendu d'atténuer le bruit en sortie du conduit, on peut y positionner un second microphone pour mesurer le signal d'erreur et ainsi pouvoir mettre en place une rétroaction.

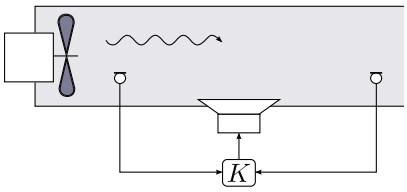

FIGURE 1 – Contrôle actif dans les conduits

Une autre application du contrôle actif très répandue est le casque acoustique actif. Celui-ci peut avoir deux utilités : soit protéger un usager contre un environnement acoustique bruyant, soit améliorer le confort acoustique d'un casque audio en masquant le bruit extérieur. Une illustration de ce type de dispositif est donnée en figure 2. Cette fois-ci la cavité acoustique considérée est fermée et de petite taille et on cherche à atténuer les bruits provenant de l'extérieur. On peut mesurer ce bruit en positionnant un microphone vers l'extérieur de la cavité et utiliser un second microphone pour mesurer l'erreur. Le

principal atout de ces systèmes est la colocalisation des actionneurs (haut-parleur) et des capteurs (microphone). Il en résulte que les fonctions de transfert considérées sont relativement simples et qu'on peut atteindre un bon niveau de performance et ce sur une assez large plage de fréquence.

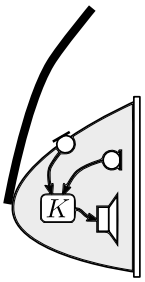

FIGURE 2 – Casque acoustique actif

Les sièges à appui-tête actif utilisent également la colocalisation des actionneurs et des capteurs. La cavité acoustique est généralement beaucoup plus grande que pour les systèmes de casques actifs. On parvient toutefois à une bonne atténuation sur une plage relativement large. Bien que le système mette en jeu deux couples haut-parleur microphone (gauche et droite), on les considère généralement comme deux systèmes monovariables découplés [8]. Ce type de systèmes est représenté en figure 3.

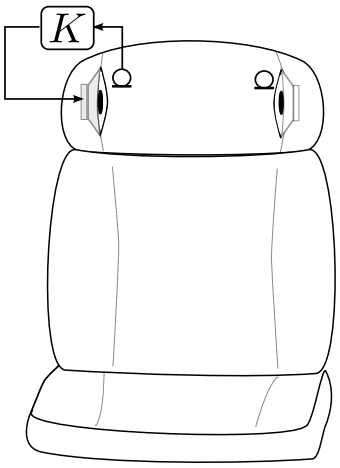

FIGURE 3 – Appui-tête acoustique actif

Un niveau de difficulté supplémentaire a été franchi avec les applications automobiles [9], [10], [11] et aéronautiques [12] de contrôle de bruit moteur. Les systèmes considérés sont alors des cavités de beaucoup plus grandes dimensions, avec plusieurs actionneurs et plusieurs capteurs qui ne sont pas nécessairement colocalisés. Le bruit considéré possède toutefois quelques caractéristiques intéressantes. Il s'agit comme nous le verrons un peu plus loin d'un bruit harmonique pour lequel on peut disposer d'une information de fréquence au travers de la mesure du régime moteur.

Dans ce travail, l'objectif est d'évaluer la faisabilité et les performances atteignables pour un problème un peu plus ardu, à savoir le contrôle du bruit large bande et basse fréquence dans une automobile. On ne cherche plus à atténuer quelques raies basse fréquence comme pour le contrôle des harmoniques moteur, mais on souhaite réduire le bruit

sur toute une plage de fréquence sans nécessairement disposer d'une mesure de la source de bruit. Ce problème a déjà été abordé dans certains travaux notamment [13] et [11], mais sa résolution dans le respect des contraintes industrielles reste un problème ouvert auquel le présent travail essaye de donner des éléments de réponse.

Le contenu de ce mémoire est organisé en trois parties. La **Partie I** peut être considérée comme une présentation de la problématique. Le **Chapitre 1** décrit l'environnement acoustique dans un véhicule automobile. Après un rappel de certaines notions de base de l'acoustique utiles à la compréhension du mémoire, les principales sources de bruit sur un véhicule sont détaillées et hiérarchisées en regard des conditions de fonctionnement. Le **Chapitre 2** revient sur les outils classiquement utilisés pour contrôler les niveaux acoustiques dans un véhicule et explique les possibilités offertes par les solutions de contrôle actif de bruit en complément des traitements passifs pour atténuer les bruits basse fréquence. Enfin le **Chapitre 3** décrit le cahier des charges que doit respecter une solution de contrôle actif pour satisfaire aux différentes contraintes industrielles. Sont notamment introduits les indicateurs les plus appropriés à rendre compte des performances et de la robustesse d'un dispositif de contrôle actif, ainsi que les différentes contraintes que doit respecter un tel dispositif. Le cahier des charge proposé est générique et permet de couvrir une large variété de problèmes de contrôle actif.

La **Partie II** traite de la modélisation du système acoustique à contrôler. Elle est organisée en trois chapitres. Le **Chapitre 4** [...][1]. Le **Chapitre 5** [...]. La méthode d'identification retenue, choisie avec soin, est présentée au **Chapitre 6**. Il s'agit de la méthode des sous-espaces utilisée ici directement à partir des données fréquentielles pour une identification dans le domaine continu. Les modèles obtenus sur chaque démonstrateur sont présentés. Ils contiennent notamment des zéros à non minimum de phase qui sont connus pour limiter de manière intrinsèque les performances en régulation. Une discussion sur ce point fait l'objet de la fin de chapitre.

La **Partie III** a pour objectif de répondre à la problématique de contrôle actif dans une cavité. Le **Chapitre 7** présente tout d'abord un état de l'art des stratégies de contrôle les plus utilisées et revient notamment sur la stratégie de type FxLMS très répandue dans la littérature du contrôle actif. Le principe de cette approche est détaillé ainsi que ses limites vis-à-vis du problème considéré. Ce tour d'horizon revient également sur la manière dont sont traitées les questions de robustesse dans la littérature du contrôle actif acoustique. Le **Chapitre 8** répond de manière générique au problème de contrôle actif dans une cavité en tentant d'illustrer les différentes configurations envisageables et les apports ou les limitations de chacune. La stratégie proposée est générique et a été pensée en vue de permettre une comparaison équitable entre des architectures plus ou moins contraintes en termes de mesures et de moyens d'action disponibles. Elle permet par exemple de quantifier précisément l'apport de moyens d'action supplémentaires ou d'une mesure de la perturbation. Ces résultats quantifiés permettent d'abonder des réflexions jusqu'à présent qualitatives. Enfin, le **Chapitre 9** traite précisément du problème industriel. La méthodologie proposée permet d'évaluer clairement les performances atteignables dans le cadre des contraintes industrielles.

Le dernier chapitre présente le bilan, et les perspectives de ce travail.

[1] Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une collaboration industrielle. Ainsi certains chapitres et parties de ce mémoire ont volontairement été maintenus confidentiels. Le lecteur intéressé peut contacter Philippe Chevrel philippe.chevrel@mines-nantes.fr ou Jean-Marc Duffal jean-marc.duffal@renault.com.

Liste des communications

Séminaires et Groupes de travail

P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi et J.-M. Duffal, "Système actif d'atténuation de bruit dans un habitacle", *Présentation au Groupe de Travail Automatique et Automobile (GTAA)*, Nantes, 2015.

P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi et J.-M. Duffal, "Broadband Active Noise Control Design through Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$ Synthesis", *Présentation poster aux JDOC - École doctorale STIM*, Angers, 2015.

P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi et J.-M. Duffal, "Broadband Active Noise Control Design through Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$ Synthesis", *Présentation en 120 secondes aux JDOC - École doctorale STIM*, Angers, 2015. (1er prix)

P. Loiseau, P. Chevrel et Jérôme Lohéac, "Contrôle acoustique actif du bruit dans un volume prédéfini d'une cavité", *Séminaire du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM)*, Le Mans, 2015.

P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi and J.-M. Duffal, "$\mathcal{H}_\infty$ Multi-objective and Multi-model MIMO control design for Broadband noise attenuation in an enclosure", in *Présentation au Groupe de Travail Méthodes et Outils pour la Synthèse et l'Analyse en Robustesse GTMOSAR*, Nantes, 2016.

Conférences internationales

P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi and J.-M. Duffal, "Broadband Active Noise Control Design through Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$ Synthesis", *IFAC Symposium on RObust CONtrol Design (ROCOND)*, Bratislava, Slovak Republic, 2015, pp.395-400.

P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi and J.-M. Duffal, "$\mathcal{H}_\infty$ Multi-objective and Multi-model MIMO control design for Broadband noise attenuation in an enclosure", in *European Control Conference*, Aalborg, Denmark, 2016, pp 643-648.

Première partie

Acoustique et vibration automobile

Préambule

L'acoustique automobile s'intéresse à la fois au bruit intérieur et au bruit extérieur. Le bruit intérieur est un désagrément et une cause de fatigue pour les occupants. Il s'agit d'une prestation véhicule qui suscite environ 20% des récriminations clients. Elle joue donc un rôle central sur le niveau de satisfaction client et est à ce titre un réel enjeu industriel. Le bruit extérieur est lui une nuisance à l'environnement et fait l'objet d'une réglementation législative qui dépend du pays de commercialisation. Dans le présent travail, la cible est la réduction du bruit intérieur. Dans cette première partie du mémoire nous présentons les problématiques de l'acoustique et de la vibration automobiles. Le premier chapitre décrit tout d'abord les principales sources qui contribuent au bruit intérieur, le second chapitre présente ensuite succinctement les différents moyens classiquement mis en œuvre pour traiter les différentes sources de bruit et améliorer le confort acoustique. Enfin le dernier chapitre revient sur les enjeux du recours aux solutions de contrôle actif de bruit dans le contexte automobile et sur le cahier des charges associé à ce type de solutions.

Chapitre 1

Phénomènes physiques

Contenu

1.1 Rappels d'acoustique 25
1.1.1 Notions de base 25
1.1.2 Mécanisme de génération de bruit 26
1.1.3 Acoustique dans les cavités 26
1.1.4 Perception humaine du bruit 27
1.2 Les principales sources de bruit sur une automobile 27
1.2.1 Moteur 28
1.2.2 Roulement 28
1.2.3 Aéroacoustique 28

Le but de ce chapitre est de familiariser le lecteur avec l'acoustique automobile. Nous rappelons tout d'abord quelques éléments de base de l'acoustique utiles à la compréhension de la suite du manuscrit, puis nous détaillons les principales sources de bruit rencontrées sur un véhicule et discutons de leur importance relative en fonction des conditions de fonctionnement. Les informations données dans ce chapitre proviennent essentiellement des références [14] et [15].

1.1 Rappels d'acoustique

1.1.1 Notions de base

Le *son* est une variation de pression, qui se propage au sein d'un fluide (ici l'air) sous forme d'ondes.

La grandeur de base de l'acoustique est la *pression acoustique*. Exprimée en Pascals (Pa), elle désigne les petites variations de pression autour de la pression atmosphérique engendrées par les ondes acoustiques. La pression acoustique la plus faible que l'oreille

humaine puisse entendre est de l'ordre de 2.10^{-5} Pa. Le seuil de la douleur (pression acoustique la plus élevée que l'oreille peut supporter) atteint lui 20 Pa. Cette large plage justifie en partie l'utilisation d'échelles logarithmiques. La seconde raison est que ces échelles correspondent à l'impression subjective du niveau sonore.

L'approche fréquentielle est particulièrement appropriée à l'étude des phénomènes ondulatoires et par la même des phénomènes acoustiques. Ainsi un outil de base de l'acoustique est la densité spectrale de puissance aussi appelée spectre. Cet outil de traitement du signal permet de visualiser la répartition fréquentielle de l'énergie contenue dans un signal. Dans le cas de l'acoustique la plage fréquentielle considérée est la plage audible (par l'oreille humaine) allant de 20 Hz à 20 kHz. Par ailleurs, on distingue en général trois types de sons en fonction de leur contenu fréquentiel. Les sons purs (contenant une seule fréquence) et les sons musicaux (sons complexes (contenant plusieurs fréquences) périodiques) sont généralement agréables à l'oreille. À l'inverse, les bruits (sons complexes non périodiques) sont des sons gênants, dont on cherche en général à atténuer l'effet.

1.1.2 Mécanisme de génération de bruit

Le mécanisme de génération de bruit est toujours le même. Une excitation est produite par la source de bruit, il y a ensuite une phase de transmission durant laquelle le bruit ou les vibrations engendrés par la source se propagent respectivement dans l'air (propagation aérienne) ou dans les solides (propagation solidienne). L'excitation de départ peut alors être amplifiée ou atténuée. La dernière phase du processus est l'émission du bruit vers le récepteur. Entre la source et le récepteur, l'excitation peut être amenée à traverser successivement plusieurs milieux solides ou fluides. Aux interfaces entre ces milieux plusieurs phénomènes peuvent intervenir :

- Transmission ;
- Réflexion ;
- Absorption.

Ces phénomènes complexifient l'identification des sources de bruit.

1.1.3 Acoustique dans les cavités

Une caractéristique importante de l'étude qui va suivre est qu'elle traite de l'acoustique dans les cavités (habitacle automobile). Les parois de la cavité sont autant d'interfaces sur lesquelles les ondes acoustiques peuvent soit être transmises, réfléchies ou absorbées. La réflexion des ondes par les parois entraine à certaines fréquences la formation d'ondes dites stationnaires. Considérons la somme de deux ondes de même fréquence et de même amplitude mais se propageant en sens inverse l'une de l'autre. L'onde résultante ne se propage pas, mais est composée d'une suite de ventres et de nœuds de pression acoustique. Sur un nœud la pression est nulle a tout instant ; elle est au contraire maximale sur un ventre. Un tel phénomène s'obtient dans une cavité lorsqu'une excitation acoustique entretenue est générée dans la cavité avec pour longueur d'onde[1] λ égale à une des dimensions de la cavité ou un de ses multiples. Le phénomène de résonance produit par la superposition de l'onde et de sa réflexion est appelé mode acoustique. Une cavité donnée possède une

infinité de modes chacun caractérisé par sa fréquence propre f_n et sa déformée Ψ_n (dont l'expression nous informe sur la position des ventres et des nœuds de pression acoustique).

1.1.4 Perception humaine du bruit

L'étude de la perception du son par l'oreille humaine est un domaine d'étude à part entière appelé psychoacoustique. L'acoustique automobile est bien entendu concernée par ce domaine d'étude. Les problématiques de psychoacoustique inhérentes au contrôle actif n'ont toutefois pas été abordées dans ce travail.

1.2 Les principales sources de bruit sur une automobile

Après ces brefs rappels sur l'acoustique, nous donnons ci-dessous quelques éléments sur les principaux bruits rencontrés sur une automobile. La liste est longue et nous ne pouvons pas ici la traiter de manière exhaustive. Nous nous limitons à décrire les trois principaux bruits intervenant en roulage (voir figure 1.1) :

- Le bruit moteur
- Le bruit aéroacoustique
- Et le bruit de roulement

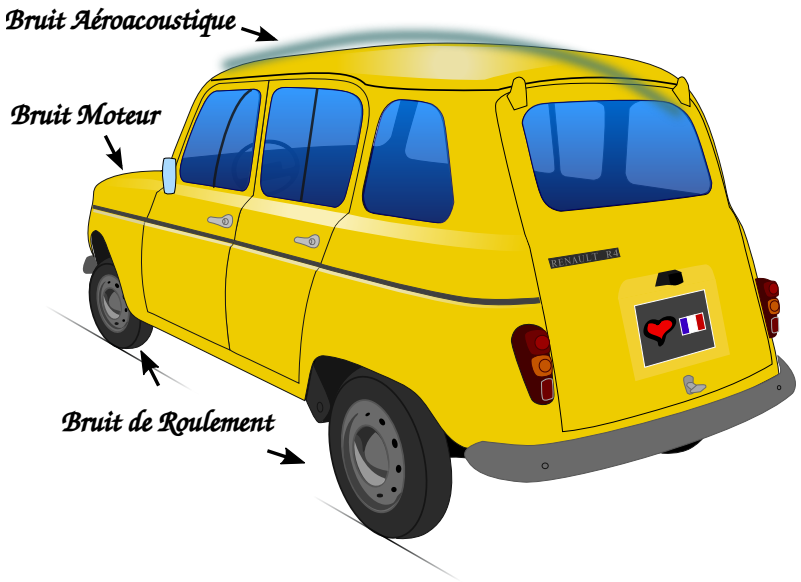

FIGURE 1.1 – Principaux bruits en roulage

[1]Pour rappel la longueur d'onde λ est reliée à la fréquence f par la relation suivante, dans laquelle c désigne la célérité du son :

$$\lambda = c/f$$

Notons que nous détaillons le cas des véhicules thermiques. Les moteurs électriques étant bien moins bruyants que les moteurs thermiques, la hiérarchie des bruits est fortement modifiée sur un véhicule électrique.

1.2.1 Moteur

La première source de bruit que nous avons mentionnée est le bruit moteur. Le moteur (thermique) est en effet la principale source d'excitation vibratoire du véhicule. L'étude vibro-acoustique du moteur est un problème complexe et s'applique en général au Groupe Moto Propulseur (GMP) complet (moteur + boite de vitesse). Nous n'en donnons ici qu'une description très simplifiée.

Les principaux phénomènes à l'origine du bruit moteur sont les efforts de combustion et d'inertie. En effet, la force et le couple transmis par le moteur ne sont pas constants. Les combustions successives dans chaque cylindre causent une variation autour de la valeur moyenne de la force et du couple moteur. Ces irrégularités sont sources de vibrations aux fréquences correspondant au cycle moteur et à ses harmoniques. À ces mêmes fréquences, interviennent également des irrégularités sur les forces d'inertie des masses en mouvement, qui sont également source de vibrations. En effet, les mouvements de pistons dans les divers cylindres ne se compensent jamais exactement et ce quel que soit le nombre de cylindres considéré. L'augmentation du nombre de cylindres favorise toutefois la compensation.

Le bruit moteur est donc un bruit harmonique intervenant principalement en basse fréquence. L'importance relative des différentes harmoniques dépend du nombre de cylindres utilisés et de leur disposition (en ligne, en V, en W...). Pour un moteur à quatre cylindres c'est la deuxième harmonique qui est prépondérante. À l'échelle du véhicule cette source de bruit est prépondérante à basse vitesse (50km.h^{-1}). Son influence diminue ensuite au profit du bruit de roulement et enfin du bruit aéroacoustique.

1.2.2 Roulement

Après le bruit moteur arrive le bruit de roulement, il intervient assez peu à basse vitesse où il est couvert par le bruit moteur. Il est en revanche prépondérant à 90km.h^{-1}. Au-delà, il reste une source de bruit importante, mais est « concurrencé » par le bruit aéroacoustique.

L'origine du bruit de roulement sont les irrégularités de contact entre les roues et le sol dues aux aspérités de la chaussée et à celles de la surface du pneumatique. La transmission de ce bruit vers l'habitacle se fait à la fois par voie solidienne et aérienne. Dans le cas de la voie solidienne, les excitations provoquées par le contact pneu/chaussée sont tout d'abord transmises par le pneumatique et la jante au moyeu de roue, puis au train et enfin à la caisse et aux panneaux et génèrent finalement le bruit dans l'habitacle. Suivant le revêtement de la route les fréquences du bruit de roulement peuvent varier entre 20 et 500 Hz. Les composantes très basse fréquence obtenues par exemple sur route pavée sont appelées bruit de tambourinement. Contrairement au bruit moteur qui est un bruit harmonique, le bruit de roulement est un bruit large bande.

1.2.3 Aéroacoustique

Le bruit aéroacoustique est généralement considéré comme intervenant à haute fréquence et à vitesse élevée. Il a pour origine les turbulences créées par le flux d'air autour du

véhicule qui génèrent des fluctuations de pression sur les parois (notamment les vitrages) et les lignes d'étanchéité du véhicule (lécheurs de vitres, joints de portes, ...).

Chapitre 2

Contrôle passif

Contenu

2.1 Outils de réduction passive de bruit 31

2.1.1 Réduction du bruit à la source 31

2.1.2 Réduction de la transmission par voie solidienne 32

2.1.3 Réduction de la transmission par voie aérienne 32

2.2 Processus industriel 33

2.3 Possibilités et limites du contrôle passif 34

Après avoir présenté brièvement les principaux bruits intervenant sur une automobile, nous présentons dans ce chapitre les moyens de réduction passive de bruits et la manière dont ils sont intégrés au processus de conception d'un nouveau véhicule. La dernière partie de ce chapitre revient sur les enjeux du recours aux solutions actives de réduction de bruit.

2.1 Outils de réduction passive de bruit

Les deux voies permettant de réduire le bruit dans l'habitacle consiste soit à réduire les sources de bruit, ou à réduire la propagation du bruit entre la source et le récepteur.

2.1.1 Réduction du bruit à la source

La réduction de la source de bruit est bien entendue plus efficace et moins couteuse, c'est la solution à rechercher en priorité. Le premier travail consiste donc à identifier les sources et à les hiérarchiser. La hiérarchisation des sources est cruciale car obtenir une réduction même importante sur une source de faible niveau a généralement un impact négligeable sur le niveau de bruit global.

Réduire l'impact d'une source passe en général par la réduction des forces excitatrices. Cette réduction doit porter à la fois sur l'amplitude de ces forces mais également sur

le caractère « impulsif » de certaines d'entre elles. En effet, plus l'évolution des forces est soudaine, plus le spectre des excitations est riche en hautes fréquences et est donc susceptible d'exciter les modes de vibration élevés des structures, qui correspondent à des zones de fréquences bien perçues par l'oreille humaine.

2.1.2 Réduction de la transmission par voie solidienne

En complément de la réduction des sources de bruit, on peut réduire la transmission du bruit par voie solidienne. Divers moyens sont utilisés pour cela :

- Isolation vibratoire ;
- Utilisation de batteurs ;
- Amortissement ;
- ...

2.1.2.1 Isolation vibratoire

L'isolation vibratoire de la source par rapport à l'habitacle est obtenu en intercalant entre la source et le reste de la structure des matériaux anti-vibratiles (combinés ressort-amortisseur, plots anti-vibratiles, ...). Ces matériaux permettent de filtrer les vibrations par un choix judicieux de leur raideur. L'exemple le plus connu est sans doute celui des tampons moteur.

2.1.2.2 Batteurs

Les batteurs sont des systèmes masse-ressort à un degré de liberté qui attachés à une structure permettent de décaler ses modes propres quand ils interviennent à des fréquences considérées comme gênantes.

2.1.2.3 Amortissement

Un autre moyen pour réduire la transmission des vibrations consiste à utiliser des matériaux amortissants. Ces matériaux permettent de dissiper l'énergie mécanique en chaleur. Dans la grande majorité des cas les matériaux amortissants sont appliqués sur un matériau support que l'on cherche à amortir.

2.1.3 Réduction de la transmission par voie aérienne

Pour la voie aérienne trois principaux moyens peuvent être employés :

- Étanchéité totale ;
- Isolation acoustique ;
- Absorption.

2.1.3.1 Étanchéité totale

Le premier étage du traitement aérien consiste à assurer l'étanchéité totale de l'habitacle. Chaque trou est une voie de passage pour le bruit. Dès lors, chaque trou doit être obturé ou mastiqué. Ceci est assuré par l'utilisation d'inserts gonflants, de bagues de câblage, de joints de vitrage, d'obturateurs, etc.

2.1.3.2 Isolation acoustique

Le principe de l'isolation acoustique vise à ce que les différentes parois vibrent et rayonnent le moins possible. Pour cela on réalise des pièces isolantes dont la masse est répartie le long de la paroi sur une couche de mousse. Le système masse-ressort ainsi obtenu permet de filtrer les excitations acoustiques. C'est ce qui est fait par exemple au niveau du tablier ou du plancher sous tapis.

2.1.3.3 Absorption

L'absorption acoustique consiste à dissiper l'énergie acoustique en chaleur au sein de matériaux poreux. Dans ces matériaux, la dissipation d'énergie s'effectue par pertes visqueuses dans les interstices des pores des mousses à cellules ouvertes (mousse polyuréthanne, ...) ou par la mise en vibration des fibres minérales ou végétales (laine de verre ou de roche, feutre, ...).

2.2 Processus industriel

L'enjeu de cette partie est de décrire brièvement la manière dont l'acoustique intervient dans le processus de conception d'un nouveau véhicule. Ce dernier débute par la rédaction du cahier des charges produit. Il est construit sur la base d'études de marché, d'analyses de la concurrence en vue de prédire au mieux les attentes du marché. Dans ce premier cahier des charges les objectifs acoustiques sont le plus souvent exprimés en référence à des véhicules existants.

Les objectifs acoustiques du cahier des charges produit doivent ensuite être traduits de manière quantifiée en niveaux acoustiques ou vibratoires et modulés en fonction de la motorisation et du niveau d'équipement. C'est l'objet du cahier des charges prestations fonctionnelles.

Les niveaux acoustiques et vibratoires du cahier des charges prestations fonctionnelles sont par la suite traduits et déployés sous forme de spécifications techniques qui permettront peu à peu de définir les plans du véhicule.

À l'issue de l'avant projet où les premiers concepts ont pu être validés par la mesure (sur des véhicules aux caractéristiques proches du futur véhicule (définition des mulets)) et par le calcul, le projet véhicule entre en phase de développement. Durant cette phase on fige peu à peu les divers choix techniques sur la base de prototypes de plus en plus proches du futur véhicule. C'est de nouveau sur la base d'essais et de calculs que les spécifications techniques sont validées. Bien entendu, la tendance recherchée par les constructeurs est de diminuer au maximum les essais qui sont couteux et de les remplacer par des validations par calcul.

Une fois la conception terminée, le véhicule passe en phase d'industrialisation et le travail sur l'acoustique n'est pas encore totalement terminé. En effet, les niveaux acoustiques

observés sur des véhicules au dessin identique connaissent une forte variabilité expérimentale. L'acoustique est la caractéristique véhicule la plus dispersée. Les efforts doivent donc être maintenus durant la phase de fabrication pour assurer que la dispersion soit la plus faible possible entre les véhicules et ainsi maintenir la prestation acoustique a son meilleur niveau.

Durant toutes ces phases l'acoustique est à l'interface avec les autres prestations véhicules et l'atteinte d'objectifs souvent contradictoires nécessite de nombreux arbitrages. Les progrès constants sur les prestations acoustiques ne doivent donc rien au hasard et nécessitent la mise en œuvre d'une expérience et d'un savoir-faire de haut niveau.

2.3 Possibilités et limites du contrôle passif

Nous venons d'indiquer que la conception d'un véhicule met en jeu de nombreux objectifs souvent contradictoires. Une contrainte de plus en forte pèse notamment sur l'allégement des véhicules en vue de réduire leur consommation. Or les traitements acoustiques passifs que nous venons de présenter induisent un ajout de masse important pour traiter les bruits basse fréquence. C'est ce qui pousse actuellement les acousticiens automobiles à chercher des solutions alternatives pour le traitement des basses fréquences. Les solutions de contrôle actif de bruit sont dans ce cadre une alternative prometteuse. De telles solutions permettront en complément des solutions à base de traitements passifs d'accroître un peu plus le confort acoustique des véhicules et ce en réponse aux exigences toujours accrues des clients.

Chapitre 3

Cahier des charges du contrôle actif

Contenu

3.1 Description du problème 36
3.2 Performance 37
3.2.1 Densité spectrale de puissance 37
3.2.2 Normes l_2 et de puissance 40
3.2.3 Valeurs singulières 41
3.2.4 Normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ 41
3.3 Robustesse 44
3.3.1 Robustesse aux dynamiques négligées 44
3.3.2 Robustesse aux incertitudes 45
3.4 Dynamiques du régulateur 45
3.4.1 Stabilité forte 45
3.4.2 Théorème de Shannon 46
3.5 Performance et stabilité robuste 46
3.5.1 Approche multi-modèle 46
3.5.2 Réécriture des indicateurs 47

Les procédés passifs d'atténuation de bruit présentés au chapitre précédent sont efficaces en haute fréquence, mais requièrent un ajout de masse important pour traiter les basses fréquences. L'enjeu du recours aux solutions actives est donc de pouvoir concilier allégement des véhicules et atténuation des bruits basse fréquence.

Fort de ce constat, ce chapitre spécifie le cahier des charges que doit satisfaire le dispositif de contrôle actif. Sont tout d'abord décrits le problème à résoudre et les indicateurs permettant d'évaluer les performances du dispositif, puis les garanties de robustesse (et indicateurs associés) nécessaires et les spécifications sur les dynamiques du régulateur, et enfin les garanties de performance et de stabilité robustes requises.

3.1 Description du problème

Parmi les bruits permanents présents au sein d'une automobile les principales sources basse fréquence sont le bruit moteur et le bruit de roulement. Ainsi que nous l'avons mentionné en introduction, le contrôle actif du bruit moteur est aujourd'hui relativement bien maitrisé, plusieurs solutions ont déjà été proposées et pour certaines industrialisées avec succès (voir notamment [9], [10], [11]). Elles exploitent la mesure du régime moteur pour atténuer une ou plusieurs harmoniques du bruit moteur. L'atténuation du bruit de roulement reste en revanche un problème ouvert. Ce dernier est en effet plus ardu pour deux raisons :

- Le bruit de roulement a un spectre large bande ;
- Il est difficile et souvent couteux de disposer d'une mesure efficace du bruit de roulement.

Le présent travail, en visant le bruit basse fréquence large bande, s'attaque de front à ce problème et a pour objectif d'évaluer au plus près les performances atteignables par des solutions respectant les contraintes industrielles de coût et d'intégration.

En amont de l'application au problème industriel qui sera présentée au chapitre 9, le problème de contrôle actif est envisagé dans ce mémoire comme un problème générique de contrôle actif dans une cavité tel que représenté en figure 3.1.

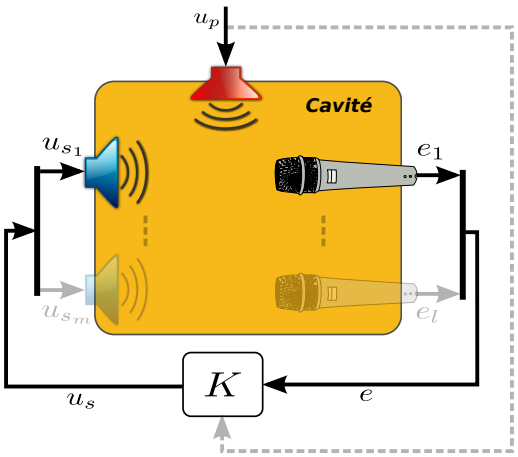

FIGURE 3.1 – Contrôle actif dans une cavité

Dans ce problème un bruit gênant est généré dans une cavité par une source de bruit quelconque figurée par le haut-parleur rouge. Ce dernier doit ici être considéré comme un haut-parleur au sens large (il s'agit par exemple des parois de la cavité, qui en vibrant peuvent faire office de haut-parleur). Le reste du schéma représenté figure 3.1 est le dispositif de contrôle actif. Il est suivant les cas composé de l microphone(s) et m haut-parleur(s) (au sens commun du terme cette fois-ci) et d'un régulateur noté K. Le rôle du régulateur est de calculer la commande u_s à appliquer aux haut-parleurs pour qu'ils émettent le contrebruit permettant d'annuler le bruit gênant. Il dispose pour cela *a minima* des mesures microphoniques e, et éventuellement d'une mesure de la perturbation u_p (indiquée par le trait en pointillés).

La transcription sous forme de schéma bloc est donnée en figure 3.2.

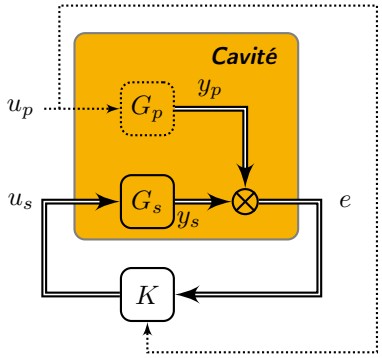

FIGURE 3.2 – Contrôle actif dans une cavité

On y retrouve la perturbation u_p en amont du bloc G_p qui représente le transfert entre le haut-parleur perturbateur (rouge) et les différents microphones. Dans la terminologie du contrôle actif ce transfert perturbateur est appelé *chemin primaire*. Le bloc G_s représente lui le transfert entre les haut-parleurs de contrôle (bleus) et les microphones, il est usuellement appelé *chemin secondaire*. Les signaux mesurés e sont la somme du bruit émis par le haut-parleur perturbateur y_p et du contrebruit émis par les haut-parleurs de contrôle y_s. Comme précédemment, ce signal e (et éventuellement u_p) est appliqué en entrée du régulateur K pour le calcul de la commande u_s.

Plusieurs configurations peuvent être rencontrées lors de la synthèse du régulateur, suivant que l'on considère ou non disposer de tout ou partie des éléments représentés en pointillés. Le cas le plus favorable est celui où l'on dispose de tout, c'est-à-dire à la fois d'un modèle du chemin primaire et d'une mesure de la perturbation. On peut alors adopter une stratégie à deux degrés de liberté avec rétroaction et précompensation. Si on ne dispose pas de la mesure de la perturbation, on peut toutefois espérer disposer d'un modèle du chemin primaire. On perd alors la possibilité d'action en boucle ouverte, mais on dispose pour la synthèse en boucle fermée d'informations permettant de prédire au moins partiellement la perturbation. Enfin le cas le plus défavorable est celui où on ne dispose ni du chemin primaire, ni de la mesure de la perturbation.

Quel que soit la configuration considérée, on souhaite être en mesure de quantifier précisément les performances atteignables de manière robuste. Pour cela on propose ci-après les indicateurs qui nous semblent être les plus appropriés pour évaluer dans chaque cas la performance et la robustesse.

3.2 Performance

Plusieurs indicateurs peuvent être considérés pour évaluer les performances d'un dispositif de contrôle actif. Nous les définissons ci-dessous. Certains sont classiques, d'autres plus originaux (au moins dans ce contexte) et visent à combler un manque, à être plus précis ou plus général notamment dans le cas multivariable.

3.2.1 Densité spectrale de puissance

Un moyen classiquement utilisé pour évaluer les performances d'un dispositif de contrôle actif consiste à comparer les spectres des signaux mesurés par les microphones avec et

sans contrôle (voir notamment [13], [8], [16], [12], [17]...). Sur le schéma 3.2 il s'agit de comparer les spectres S_{ee} et $S_{y_p y_p}$ des signaux e et y_p, qui sont reliés par la relation suivante :

$$\begin{aligned} e &= (I - G_s K)^{-1} y_p \\ e &= S\, y_p \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où S désigne la fonction de sensibilité.

À l'aide des rappels sur les spectres donnés en Annexe A, on peut écrire la relation liant les spectres des signaux en question :

$$S_{ee}(j\omega) = S(-j\omega)\, S_{y_p y_p}(j\omega)\, S^T(j\omega) \tag{3.2}$$

3.2.1.1 Cas monovariable

Dans le cas monovariable (3.2) devient :

$$S_{ee}(j\omega) = |S(j\omega)|^2 S_{y_p y_p}(j\omega)$$

En faisant le rapport des spectres on obtient l'indicateur monovariable suivant (noté $\texttt{RDSP}(j\omega)$) :

$$\texttt{RDSP}(j\omega) = \frac{S_{ee}(j\omega)}{S_{y_p y_p}(j\omega)} = |S(j\omega)|^2 \tag{3.3}$$

Le rapport des densités spectrales de puissance est ainsi directement conditionné, dans le cas d'une rétroaction, par la fonction de sensibilité.

3.2.1.2 Cas Multivariable

La transposition de l'indicateur (3.3) au cas multivariable consiste en règle générale à considérer l'indicateur monovariable sur chacune des voies :

$$\texttt{RDSP}_\texttt{i}(j\omega) = \frac{S_{e_i e_i}(j\omega)}{S_{y_{p_i} y_{p_i}}(j\omega)} \tag{3.4}$$

On détaille ci-dessous, pour le cas où l'on utilise deux microphones, les expressions liant les spectres $S_{e_i e_i}(j\omega)$ et $S_{y_{p_i} y_{p_i}}(j\omega)$:

$$\begin{cases} e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \\ y_p = \begin{bmatrix} y_{p_1} \\ y_{p_2} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3.5}$$

L'équation (3.2) devient :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_{e_1 e_1}(j\omega) & S_{e_1 e_2}(j\omega) \\ S_{e_2 e_1}(j\omega) & S_{e_2 e_2}(j\omega) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} S_{11}(-j\omega) & S_{12}(-j\omega) \\ S_{21}(-j\omega) & S_{22}(-j\omega) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} S_{y_{p_1} y_{p_1}}(j\omega) & S_{y_{p_1} y_{p_2}}(j\omega) \\ S_{y_{p_2} y_{p_1}}(j\omega) & S_{y_{p_2} y_{p_2}}(j\omega) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} S_{11}(j\omega) & S_{21}(j\omega) \\ S_{12}(j\omega) & S_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Détaillons le membre de droite de l'équation (3.6) :

$$\begin{bmatrix} S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega) + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega) & S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega) + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega) \\ S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega) + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega) & S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega) + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S_{11}(j\omega) & S_{21}(j\omega) \\ S_{12}(j\omega) & S_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

En développant encore, on obtient l'expression de chacun des termes de la matrice de spectre S_{ee} :

$$\begin{aligned} S_{e_1e_1}(j\omega) &= \left[S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega) + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)\right] S_{11}(j\omega) \\ &\quad + \left[S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega) + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega)\right] S_{12}(j\omega) \\ &= S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega)S_{11}(j\omega) \\ &\quad + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)S_{11}(j\omega) \\ &\quad + S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega)S_{12}(j\omega) \\ &\quad + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega)S_{12}(j\omega) \\ &= |S_{11}(j\omega)|^2 S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega) \\ &\quad + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)S_{11}(j\omega) \\ &\quad + S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega)S_{12}(j\omega) \\ &\quad + |S_{12}(j\omega)|^2 S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} S_{e_1e_2}(j\omega) &= \left[S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega) + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)\right] S_{21}(j\omega) \\ &\quad + \left[S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega) + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega)\right] S_{22}(j\omega) \\ &= S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega)S_{21}(j\omega) \\ &\quad + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)S_{21}(j\omega) \\ &\quad + S_{11}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega)S_{22}(j\omega) \\ &\quad + S_{12}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega)S_{22}(j\omega) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} S_{e_2e_1}(j\omega) &= \left[S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega) + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)\right] S_{11}(j\omega) \\ &\quad + \left[S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega) + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega)\right] S_{12}(j\omega) \\ &= S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega)S_{11}(j\omega) \\ &\quad + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)S_{11}(j\omega) \\ &\quad + S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega)S_{12}(j\omega) \\ &\quad + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega)S_{12}(j\omega) \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} S_{e_2e_2}(j\omega) &= \left[S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega) + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)\right] S_{21}(j\omega) \\ &\quad + \left[S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega) + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega)\right] S_{22}(j\omega) \\ &= S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega)S_{21}(j\omega) \\ &\quad + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)S_{21}(j\omega) \\ &\quad + S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega)S_{22}(j\omega) \\ &\quad + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega)S_{22}(j\omega) \\ &= |S_{21}(j\omega)|^2 S_{y_{p_1}y_{p_1}}(j\omega) \\ &\quad + S_{22}(-j\omega)S_{y_{p_2}y_{p_1}}(j\omega)S_{21}(j\omega) \\ &\quad + S_{21}(-j\omega)S_{y_{p_1}y_{p_2}}(j\omega)S_{22}(j\omega) \\ &\quad + |S_{22}(j\omega)|^2 S_{y_{p_2}y_{p_2}}(j\omega) \end{aligned} \tag{3.11}$$

L'indicateur classiquement utilisé généralisé au cas multivariable compare pour chaque voie les spectres des signaux y_{p_i} et e_i. On a donc un indicateur par voie, qui rend compte de ce qui se passe localement au niveau de chaque microphone. Sa portée reste locale et ne permet pas d'évaluer précisément l'efficience globale du contrôle multivariable. On peut illustrer cela par l'exemple ; remarquons que dans les expressions ci-dessus $S_{e_ie_i}$ ne dépend pas seulement de $S_{y_{p_i}y_{p_i}}$, mais aussi des spectres des autres voies de perturbation y_{p_j}, ainsi que des interspectres entre les signaux y_{p_i} et y_{p_j}. Dès lors, si à une certaine fréquence ω le spectre $S_{y_{p_i}y_{p_i}}$ est faible et que $S_{e_ie_i}$ est lui grand du fait de la contribution de y_{p_j}, l'indicateur sera grand et indiquera que l'atténuation est mauvaise au niveau du microphone M_i (ceci alors même que les différents transferts concernés seraient correctement contraints). Toutefois on ne pourra pas conclure sur la performance globale du contrôle multivariable, il faudrait pour cela que l'indicateur prenne en compte l'atténuation au niveau des autres microphones. Si on constate dans le même temps que l'atténuation au niveau du microphone M_j est bonne, que doit-on conclure sur la performance globale du contrôle ? et comment la comparer avec un régulateur qui donnerait un résultat un peu moins bon en M_j mais meilleur en M_i ? Il faut pour cela compléter cet indicateur par un indicateur global.

3.2.2 Normes l_2 et de puissance

La définition de la norme l_2 sur les signaux est rappelée en annexe C. Appliquée au signal e elle permet d'évaluer la performance globale du contrôle.

$$\|e\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \|e(t)\|_2 dt} \tag{3.12}$$

L'énergie du signal e est définie comme le carré de sa norme l_2.

Notons que c'est cette norme l_2 qui intéresse les stratégies adaptatives du type FxLMS, même si elles considèrent en pratique la puissance instantanée $e(t)^2$ du signal d'erreur. Ces stratégies très répandues dans la littérature du contrôle actif seront présentées au chapitre 7. Rappelons toutefois d'ores et déjà le critère J (tiré de [18]) qu'elles cherchent à minimiser à chaque pas de calcul dans le cas multivariable :

$$J = E\left(\sum_{i=1}^{L} e_i^2(n)\right) \tag{3.13}$$

Dans cette expression E désigne l'espérance mathématique.

On définit également la notion de puissance d'un signal au travers de la norme de puissance (notée $\|\cdot\|_{pow}$). Sa définition rappelée en annexe C est ici appliquée au signal e :

$$\|e\|_{pow} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e(t)^2 dt} \tag{3.14}$$

La puissance du signal e est égale au carré de sa norme de puissance.

Sur la base de la puissance instantanée $e(t)^2$ du signal e on peut également construire une estimation de l'énergie potentielle acoustique totale d'une cavité E_p. Cette dernière est donnée par la relation suivante :

$$E_p = \frac{1}{4\rho_0 c_0^2} \int_V |p|^2 dV \tag{3.15}$$

Où p désigne la pression acoustique, ρ_0 la masse volumique de l'air, c_0 la célérité des ondes acoustiques dans l'air et V le volume de la cavité. Comme discuté dans [19], une estimation possible de E_p consiste à ne considérer la pression acoustique qu'en un nombre fini de points L :

$$E_p \approx \frac{V}{4\rho_0 c_0^2 L} \sum_{i=1}^{L} |p_i|^2 \tag{3.16}$$

On obtient l'égalité lorsque le nombre de points de mesure tend vers l'infini. Toutefois, pour assurer que l'estimation soit de qualité, la position et le nombre de capteurs doivent être choisis de manière à observer un maximum de modes acoustiques. Dans le cas d'une cavité perpendiculaire, un choix pertinent consiste à positionner les points de mesure dans les coins de la cavité. Cette idée a notamment été reprise et appliquée au cas du contrôle actif large bande par rétroaction dans [11]. D'après nos notations, le vecteur des pressions mesurées n'est autre que le signal e et l'estimation de l'énergie potentielle acoustique s'écrit donc :

$$E_p \approx \frac{V}{4\rho_0 c_0^2 L} \sum_{i=1}^{L} |e_i|^2 \tag{3.17}$$

Contrairement aux normes l_2 et *pow* qui intègrent la puissance instantanée des mesures microphoniques sur le temps, l'énergie potentielle acoustique est définie au travers d'une intégrale volumique.

On le voit, les notions de puissance et d'énergie des signaux sont centrales dans les problématiques de contrôle actif. La norme l_2 et la norme de puissance du signal e sont donc des indicateurs importants de la performance d'un dispositif de contrôle actif acoustique. Il sera bien entendu utile de pondérer ces indicateurs en fonction de la plage de fréquence cible du contrôle. Par ailleurs, comme pour les spectres, on peut souhaiter comparer la norme l_2 ou la puissance du signal d'erreur à celles de la perturbation y_p (ou u_p suivant les cas). De telles comparaisons mettent en jeu une norme induite sur les systèmes, nous y reviendrons dans la suite.

3.2.3 Valeurs singulières

Outre les indicateurs sur les signaux on peut également évaluer la performance du contrôle au travers d'indicateurs portant sur les transferts. L'objectif du contrôle actif d'atténuer le signal e en regard de la perturbation y_p (ou u_p suivant qu'on dispose ou non du modèle du chemin primaire G_p) implique d'atténuer le transfert liant ces deux signaux $T_{y_p \to e}$ (ou $T_{u_p \to e}$). On pourra donc considérer comme indicateur la valeur singulière (gain multivariable dont la définition est rappelée en annexe B) maximale de ce transfert :

$$\bar{\sigma}\left(T_{y_p \to e}(j\omega)\right) \tag{3.18}$$

Notons que dans le cas monovariable, le lien entre le module de $T_{y_p \to e}$ et l'indicateur de densité spectrale de puissance ($\texttt{RDSP}(j\omega)$) est direct (voir l'équation (3.3)). Ce n'est plus le cas en multivariable.

3.2.4 Normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$

Comme pour les signaux, l'ensemble des matrices de transfert constitue lui aussi un espace vectoriel normé. Les normes sur les systèmes peuvent d'ailleurs s'interpréter comme des

normes induites par celles utilisées dans l'espace des signaux. Nous considérons ici les normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ (leurs définitions sont rappelées en annexe C). La norme $\mathcal{H}_2$ s'interprète comme la norme l_2 du signal de sortie e en réponse à un bruit blanc en entrée. Ainsi, si on dispose d'un modèle stochastique de la perturbation y_p (ou u_p), on peut au travers de la norme $\mathcal{H}_2$: $\|T_{u_p\to e}\|_2$ (ou $\|T_{u_p\to e}\|_2$) évaluer l'atténuation obtenue d'une manière assez « réaliste ». Si on ne dispose pas de ce modèle, on se place alors dans le « pire cas » de perturbation en utilisant la norme $\mathcal{H}_\infty$: $\|T_{u_p\to e}\|_\infty$ (ou $\|T_{u_p\to e}\|_\infty$). Comme indiqué en équation (C.10), cette norme s'interprète en effet comme le rapport des normes l_2 du signal d'entrée et du signal sortie dans le pire cas d'entrée. Le paragraphe ci-dessous discute du moyen d'utiliser au mieux la norme $\mathcal{H}_\infty$ pour une évaluation réaliste et normalisée des performances du système de contrôle actif.

3.2.4.1 Normalisation de l'indicateur $\mathcal{H}_\infty$

L'indicateur présenté ci-dessus évalue la norme d'un transfert en boucle fermée (notons le pour l'explication T_F). Comme pour l'indicateur $\texttt{RDSP}(j\omega)$ on peut chercher à comparer boucle ouverte et boucle fermée. Pour cela une première voie consiste à comparer la norme obtenue en boucle fermée avec la norme du même transfert en boucle ouverte (notons le T_O) :

$$\frac{\|T_F\|_\infty}{\|T_O\|_\infty} \tag{3.19}$$

Une difficulté avec un tel indicateur intervient si T_O contient une résonance très marquée. Si T_F contient cette même résonance un peu atténuée, mais qui émerge toujours nettement, alors l'indicateur étant basé sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ ($\max_\omega$) indiquera une bonne atténuation, mais ne rendra pas du tout compte de ce qui se passe dans le reste de la plage où une amplification importante (mais non détectée) est à craindre.

Une manière d'éviter ce problème consiste à considérer la norme du rapport des transferts plutôt que le rapport des normes des transferts. Ceci est moins simple qu'il y paraît puisqu'il faut être en mesure d'inverser T_O, qui est potentiellement à non minimum de phase et pas nécessairement carré dans le cas multivariable. On considérera donc sa pseudo-inverse stable qu'on notera $T_{O^+_{stab}}$. L'indicateur normalisé s'écrit alors :

$$\|T_{O^+_{stab}} T_F\|_\infty \tag{3.20}$$

Dans le cas où on ne connait pas le chemin primaire, on considère le transfert $T_{y_p\to e}$. En boucle ouverte ce transfert vaut l'identité. L'indicateur (3.20) est alors égal à $\|T_{y_p\to e}\|_\infty$.

Dans le cas où l'indicateur porte sur le transfert $T_{u_p\to e}$, le transfert correspondant en boucle ouverte est $T_{u_p\to y_p}$ c'est-à-dire le chemin primaire. Supposons que ce dernier soit à non minimum de phase et ait plus de sorties que d'entrées. L'indicateur normalisé s'écrit alors :

$$\left\| \left(T^T_{u_p\to y_p} T_{u_p\to y_p} \right)^{-1}_{stab} T^T_{u_p\to y_p} T_{u_p\to e} \right\|_\infty \tag{3.21}$$

3.2.4.2 Réflexion sur le transfert de l'indicateur $\mathcal{H}_\infty$

Le second point de discussion au sujet de l'indicateur de performance basé sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ concerne le choix du transfert sur lequel porte l'indicateur dans le cas multivariable. Le choix de considérer $\|T_{y_p\to e}\|_\infty$ (resp. $\|T_{u_p\to e}\|_\infty$) peut en effet être discuté en regard des informations dont on dispose sur les signaux d'entrée y_p (resp. u_p). Pour la suite de cette

explication on considère le transfert $T_{y_p \to e}$, une réflexion similaire peut être menée sur le transfert $T_{u_p \to e}$.

Trois cas sont à considérer. Soit les entrées y_{p_j} sont indépendantes et l'on doit alors se prémunir contre le pire cas d'entrée et considérer le transfert multivariable. Soit les entrées ne sont pas indépendantes, et si on connait le transfert liant ces entrées il convient de le prendre en compte dans l'indicateur. Le dernier cas est celui où les entrées ne sont pas indépendantes et où on ne connait pas le lien qui les relie. C'est le cas si on ne connait pas le chemin primaire. Dans ce dernier cas, on peut considérer alternativement les quatre indicateurs suivants :

1. $\|T_{y_p \to e}\|_\infty$
2. $\max_i \|T_{y_p \to e_i}\|_\infty$
3. $\max_j \|T_{y_{p_j} \to e}\|_\infty$
4. $\max_{i,j} \|T_{y_{p_j} \to e_i}\|_\infty$

Les deux premiers indicateurs permettent de se prémunir contre le pire cas d'entrées de perturbation. Ils sont donc vraisemblablement pessimistes puisqu'on sait que les signaux de perturbation y_{p_j} ne sont pas indépendants. En effet, le bruit perçu sur un microphone dans la cavité n'est pas indépendant du bruit perçu par les autres microphones.

De leur côté les deux derniers indicateurs font l'hypothèse isolément qu'on peut avoir une perturbation ponctuelle n'agissant que sur l'une des entrées tandis que l'autre est nulle. De même, dans le problème considéré ici, cette hypothèse est peu réaliste.

Considérons le dernier indicateur : si sa valeur est faible cela signifie que chacun des transferts $T_{y_{p_j} \to e_i}$ est faible. L'inégalité triangulaire montre que c'est une condition suffisante pour que chacun des signaux e_i (et donc e) ait une norme l_2 faible quelque soit la combinaison des signaux de perturbation y_{p_j} :

$$\|e_i\|_2 = \|T_{y_{p_1} \to e_i} \times y_{p_1} + \cdots + T_{y_{p_m} \to e_i} \times y_{p_m}\|_2 \leq \|T_{y_{p_1} \to e_i} \times y_{p_1}\|_2 + \cdots + \|T_{y_{p_m} \to e_i} \times y_{p_m}\|_2 \tag{3.22}$$

En revanche ce n'est pas une condition nécessaire, l'indicateur peut en effet être grand et donc $\|T_{y_{p_1} \to e_i} \times y_{p_1}\|_2 + \cdots + \|T_{y_{p_m} \to e_i} \times y_{p_m}\|_2$ grand, alors que tous les $\|e_i\|_2 = \|T_{y_{p_1} \to e_i} \times y_{p_1} + \cdots + T_{y_{p_m} \to e_i} \times y_{p_m}\|_2$ sont faibles. C'est par exemple le cas si les conditions suivantes sont réunies :

- $T_{y_{p_1} \to e_1}$ est grand ;
- $u_2 = -T_{y_{p_1} \to e_1} T^{-1}_{y_{p_2} \to e_1} u_1$;
- Et les autres transferts $T_{y_{p_j} \to e_i}$ sont faibles.

Ainsi cet indicateur évalue lui aussi les performances du dispositif avec un certain pessimisme. Ce dernier est toutefois moindre qu'avec les autres indicateurs ; d'après les propriétés de la norme $\mathcal{H}_\infty$, on a en effet :

$$\|T_{y_p \to e}\|_\infty \geq \max_i \|T_{y_p \to e_i}\|_\infty \ , \ \max_j \|T_{y_{p_j} \to e}\|_\infty \geq \max_{i,j} \|T_{y_{p_j} \to e_i}\|_\infty \tag{3.23}$$

Dans le cas où l'on sait que les signaux y_{p_j} ne sont pas indépendants, on retiendra donc pour indicateur $\max_{i,j} \|T_{y_{p_j} \to e_i}\|_\infty$.

Remarque 3.1. *On peut éviter le pessimisme si on connait la corrélation entre les différentes perturbations y_{p_j} et qu'on peut l'exprimer en fonction d'une seule entrée. Supposons par exemple qu'on ait :*

- $y_{p_2} = F_2 y_{p_1}$
- $\dots$
- $y_{p_m} = F_m y_{p_1}$

On utilisera alors l'indicateur suivant :

$$\max_i \|T_{y_{p_1}\to e_i} + T_{y_{p_2}\to e_i} \times F_2 + \cdots + T_{y_{pm}\to e_i} \times F_m\|_\infty \tag{3.24}$$

Ce dernier rend compte sans pessimisme de l'atténuation obtenue ou non sur les différents signaux d'erreur e_i :

$$\begin{array}{rcl} \|e_i\|_2 & = & \|T_{y_{p_1}\to e_i} y_{p_1} + T_{y_{p_2}\to e_i} y_{p_2} + \cdots + T_{y_{pm}\to e_i} y_{pm}\|_2 \\ & = & \| \left(T_{y_{p_1}\to e_i} + T_{y_{p_2}\to e_i} F_2 + \cdots + T_{y_{pm}\to e_i} F_m\right) y_{p_1}\|_2 \end{array} \tag{3.25}$$

Et donc sur $\|e\|_2$.

Remarque 3.2. *La norme $\mathcal{H}_2$ possède elle la propriété remarquable suivante :*

$$\|T_{y_p\to e}\|_2 = \sum_{i,j} \|T_{y_{p_j}\to e_i}\|_2 \tag{3.26}$$

Contrairement au cas où l'on utilise la norme $\mathcal{H}_\infty$, aucun pessimisme n'est introduit lors du passage en multivariable si l'on fait usage de la norme $\mathcal{H}_2$. On utilise donc pour indicateur la norme $\mathcal{H}_2$ du transfert multivariable $\|T_{y_p\to e}\|_2$.

Remarque 3.3. *De nouveau il sera bon de pondérer l'indicateur par un filtre passe-bande sur la plage d'atténuation considérée (et ce qu'on utilise la norme $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$).*

3.3 Robustesse

Outre la performance, il convient également d'évaluer la robustesse du dispositif de contrôle actif. Il faut pour cela traiter la robustesse aux dynamiques négligées et vis à vis d'incertitudes de modélisation de manière générale et se doter d'indicateurs appropriés dans chaque cas.

3.3.1 Robustesse aux dynamiques négligées

Considérons tout d'abord la robustesse aux dynamiques négligées. Le contrôle actif pratiqué ici vise à atténuer des bruits relativement basse fréquence, toutefois la bande passante du système ne se limite pas à la plage cible du contrôle. Les systèmes acoustiques sont en effet connus pour être fortement résonants. Si les traitements passifs réalisés au sein d'une automobile atténuent certaines dynamiques haute fréquence, il reste néanmoins des modes acoustiques en nombre et très faiblement amortis bien au-delà de la plage d'atténuation visée par le contrôle. Ces modes ne peuvent être totalement restitués par des modèles de

synthèse de taille raisonnable. Le régulateur doit donc restreindre suffisamment sa bande passante pour ne pas exciter les dynamiques du système, négligées dans le modèle de synthèse.

On peut évaluer la robustesse en analysant le signal de commande, afin de déterminer s'il est ou non actif aux fréquences pour lesquelles le modèle n'est pas représentatif. On peut ainsi considérer :

- Le spectre du signal de commande : $S_{u_s u_s}$
- La norme l_2 du signal de commande : $\|u_s\|_2$
- La norme H_∞ de la sensibilité de la commande : $\|KS\|_\infty = \|T_{y_p \to u_s}\|_\infty$ (ou du transfert $\|T_{u_p \to u_s}\|_\infty$ si on connait G_p)

Les deux derniers critères doivent être pondérés par un filtre passe-haut, pour bien rendre compte de l'objectif visé. Dans la suite nous retiendrons le dernier indicateur.

3.3.2 Robustesse aux incertitudes

Outre la robustesse aux dynamiques haute fréquence, le contrôle doit aussi être robuste aux incertitudes de modélisation dans la plage de fréquences dans laquelle il est actif. Un véhicule automobile est en effet conçu pour fonctionner dans des conditions très diverses. Température, charge du véhicule, position des sièges, nombre de passagers, revêtement de la chaussée (etc.) sont autant de paramètres qui évoluent constamment sur un véhicule et qui influent sur le champ acoustique de l'habitacle. Ce sont donc autant de sources potentielles d'incertitudes pour le contrôle actif, qui doit offrir les garanties nécessaires de robustesse vis-à-vis de ces incertitudes.

La marge de module dont la définition est rappelée en annexe D permet pour partie d'évaluer cette robustesse (d'autres moyens sont exposés en section 3.5.1).

Dans le cadre du contrôle actif dans une cavité, la marge de module peut également être vue comme une garantie de robustesse spatiale. En effet le déplacement autour d'un point de contrôle provoque une variation de gain et de phase vis-à-vis de la fonction de transfert considérée. Or La marge de module traduit des garanties de robustesse en regard de variation de gain et de phase. C'est en ce sens qu'elle offre certaines garanties de robustesse spatiale.

3.4 Dynamiques du régulateur

En plus des garanties de robustesse qui viennent d'être présentées, la résolution d'un problème de contrôle actif dans une cavité nécessite la prise en compte de contraintes supplémentaires sur les dynamiques du régulateur.

3.4.1 Stabilité forte

La première de ces contraintes est la stabilité forte. Assurer la stabilité du régulateur est utile pour deux raisons. Tout d'abord ceci permet d'éviter les potentielles difficultés liées à l'implémentation de dynamiques instables. Par ailleurs les objectifs du contrôle visent l'atténuation sur une large bande de fréquence. En cas de commande par rétroaction,

on sait que la présence de pôles instables dans le transfert de boucle vient amplifier le phénomène d'effet *waterbed* (ce dernier est expliqué en détail par la suite). Il est donc préférable d'imposer la stabilité des dynamiques du régulateur.

3.4.2 Théorème de Shannon

Le théorème de Shannon intervient à deux niveaux. Premièrement, lors de l'implémentation sur cible, c'est un régulateur discret qui est implémenté. On sait de par le théorème de Shannon que le signal de commande n'agira que dans la plage $[0\,;\ f_e/2]$ (phénomène de repliement de spectre). Cette contrainte rejoint celle évoquée sur la robustesse aux dynamiques négligées.

Le second point concerne le régulateur lui-même. En vue de son implémentation, il ne doit contenir aucun pôle dont le module est supérieur à $f_e/2$. Dans le cas contraire les dynamiques intervenant au-delà ne seraient pas correctement représentées lors de la discrétisation du régulateur.

3.5 Performance et stabilité robuste

Les divers indicateurs que nous venons de présenter permettent de juger de la performance et de la stabilité dite nominale, c'est-à-dire sans modélisation des incertitudes. On distingue ces notions de performance et de stabilité robuste dont voici les définitions tirées de [20] :

Définition 3.1. Stabilité robuste : *La boucle fermée est stable pour tous les systèmes perturbés, depuis le modèle nominal jusqu'au pire cas d'incertitude de modèle.*

Définition 3.2. Performance robuste : *La boucle fermée satisfait les spécifications de performance pour tous les systèmes perturbés, depuis le modèle nominal jusqu'au pire cas d'incertitude de modèle.*

Il va de soi que la performance et la stabilité robustes impliquent la performance et la stabilité nominales, mais pas l'inverse.

Dans le cadre du problème considéré dans ce mémoire, la stabilité et la performance nominales s'avèrent insuffisantes compte tenu des incertitudes de modélisation. Des garanties supplémentaires de robustesse sont nécessaires.

3.5.1 Approche multi-modèle

La prise en compte des incertitudes lors de la synthèse du régulateur peut se faire de trois manières différentes, on peut considérer :

- Des incertitudes structurées ;
- Des incertitudes non structurées ;
- ou une Énumération de modèles.

Les deux premières approches sont expliquées plus en détails au chapitre 7 en section 7.5. Elles n'ont pas été retenues ici car leur mise en œuvre peut induire un certain conservatisme qui n'est pas cohérent avec l'objectif d'évaluer précisément les performances atteignables.

La voie privilégiée ici pour la prise en compte des incertitudes procède donc par énumération de modèles. Cette méthode permet au travers de l'utilisation de plusieurs modèles de prendre en compte non seulement des conditions nominales, mais aussi des conditions plus ou moins extrèmes de fonctionnement (variation de température, configurations de l'habitacle, ...).

Notons à titre de perspective (car cela n'a pas été exploité dans la suite de ce mémoire) que le multi-modèle pourrait être utilisé pour offrir des garanties de performance robuste spatiale autour d'un point de contrôle (en complément de la garantie donnée par la marge de module). L'idée consisterait, pour faire de l'atténuation dans une certaine zone autour d'un point de mesure, à considérer pour la synthèse multi-modèle une série de modèles obtenus en plusieurs points autour du point de contrôle.

3.5.2 Réécriture des indicateurs

La prise en compte des N modèles de l'approche multi-modèle dans la construction des indicateurs calculés à partir d'une norme se fait en prenant la valeur la plus défavorable obtenue sur les différents modèles. Soit $\mathcal{I}$ l'un de ces indicateurs présentés précédemment. Dans le cadre de l'approche multi-modèle il devient $\max_{1,\dots,N} \mathcal{I}$.

Pour les indicateurs fréquentiels (spectres et valeurs singulières) la prise en compte des différents modèles n'est pas aussi évidente. Pour les spectres dans la suite on se limitera aux spectres obtenus avec le modèle nominal. Concernant les valeurs singulières, on s'intéresse dans le cas mono-modèle à la plus grande valeur singulière du transfert $T_{y_p \to e}$ (ou $T_{u_p \to e}$). Dans le cas multi-modèle il faut choisir le modèle sur lequel on calcule la plus grande valeur singulière de $T_{y_p \to e}$. Dans la suite on choisira le modèle pour lequel l'indicateur de performance basé sur la norme H_∞ (ou H_2) est le moins bon. C'est-à-dire le modèle solution de $\max_{1,\dots,N} \|T_{y_p \to e}\|_\infty$.

Deuxième partie

Modélisation

Préambule

La partie précédente présentait la problématique de la thèse. Nous traitons dans cette deuxième partie de la modélisation des deux démonstrateurs support de la thèse :

- L'IRCCyN Box ;
- Le démonstrateur véhicule.

Le chapitre 4 [...]. Enfin le dernier chapitre détaille la méthode d'identification utilisée dans ce travail et les caractéristiques des modèles obtenus.

Les modèles obtenus serviront ensuite de support à l'élaboration des stratégies de commande mises en œuvre en partie III.

Chapitre 4

Confidentiel

Chapitre 5

Confidentiel

Chapitre 6

Identification

Contenu

6.1 Théorie des sous-espaces 58
6.1.1 Position du problème et notations 58
6.1.2 Algorithme d'identification par la méthode des sous-espaces . . 60
6.1.3 Mise en œuvre numérique 62
6.2 Démonstrateur IRCCyN Box 63
6.2.1 Multi-modèle 63
6.2.2 Résultats 64
6.2.3 Discussion sur les chemins primaire et secondaire 65
6.3 Démonstrateur Véhicule 66
6.3.1 Identifications monovariable 66
6.3.2 Réduction du modèle véhicule multivariable 67
6.3.3 Multi-modèle 69
6.3.4 Discussion sur les chemins primaire et secondaire 69
6.4 Les zéros à non minimum de phase 69
6.4.1 Limitations dans le cas monovariable 70
6.4.2 Limitations dans le cas multivariable 73
6.4.3 Limitations lors d'une régulation en boucle ouverte 73

L'objectif de ce chapitre est de modéliser les différents transferts des deux démonstrateurs support de la thèse présentés au chapitre 4. La méthode d'identification retenue s'appuie sur la théorie des sous-espaces, qui est présentée en préambule de ce chapitre, puis mise en œuvre sur les deux systèmes considérés. Le chapitre se termine par un descriptif des limitations engendrées par la présence de zéros à non minimum de phase et leur impact sur le problème considéré dans ce manuscrit.

6.1 Théorie des sous-espaces

L'identification par la méthode des sous-espaces permet d'identifier des modèles continus ou discrets à partir de données temporelles ou fréquentielles. Le principal avantage de cette approche est qu'elle ne fait pas appel à des méthodes d'optimisation paramétrique. On élude ainsi tous les problèmes de paramétrisation du modèle notamment dans le cas multivariable, on s'affranchit également des problèmes de convergence liés aux algorithmes itératifs dont elle ne fait pas usage. D'autre part les modèles obtenus le sont directement dans l'espace d'état. L'approche fréquentielle est particulièrement bien adaptée pour les systèmes avec une forte densité modale et des modes faiblement amortis [21]. C'est l'ensemble de ces éléments ainsi que plusieurs tentatives fructueuses sur des systèmes acoustiques [22], [23], qui nous ont fait opter pour la méthode d'identification des sous-espaces avec une approche fréquentielle dans le domaine continu. Les stratégies de commande présentées dans la suite seront en effet formulées dans le domaine continu.

Ainsi dans cette partie consacrée à la théorie de l'identification par la méthode des sous-espaces, nous nous limiterons au cas d'une approche fréquentielle dans le domaine continu. Le lecteur intéressé par les approches temporelles pourra se référer à [24], [25] et [26]. Les explications données ici sont elles tirées de [27] et [21].

6.1.1 Position du problème et notations

Le problème à traiter est le suivant, considérons un système continu avec m entrées, l sorties et n états :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{6.1}$$

Les matrices système ont pour dimensions :

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$
- $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$
- $D \in \mathbb{R}^{l\times m}$

Considérons que l'état initial du système est nul $x(0) = 0$, et appliquons la transformée de Laplace sur (6.1), on obtient :

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) \ = CX(s) + DU(s) \end{cases} \tag{6.2}$$

La réponse fréquentielle du système est la suivante :

$$H(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B + D \tag{6.3}$$

Considérons maintenant que $U(s) \equiv I_m$ (I_m désigne la matrice identité de dimension $m\times m$). Ceci conduit à la matrice de transfert qui n'est autre que la transformée de Laplace de la matrice de réponse impulsionnelle (matrice des réponses obtenues en appliquant tour à tour sur chaque entrée une impulsion de dirac). On peut dans ce cas réécrire (6.2) de la manière suivante :

$$\begin{cases} sX_H(s) = AX_H(s) + BI_m \\ H(s) \ = CX_H(s) + DI_m \end{cases} \tag{6.4}$$

La matrice $X_H(s)$ est ici de dimension $n \times m$, sa $k$ième colonne correspond à l'état du système si on applique une impulsion de dirac sur la $k$ième entrée.

Problème. *Le problème d'identification fréquentielle dans le domaine continu consiste donc, à partir de la réponse fréquentielle du système $H(j\omega_k)$ mesurée en N pulsations ω_k $(k = 1, \cdots, N)$, à trouver les matrices système A, B, C et D.*

Pour résoudre ce problème, introduisons les quelques matrices suivantes. Considérons tout d'abord la matrice d'observabilité étendue $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{(l\times i)\times n} \tag{6.5}$$

On parle de matrice d'observabilité étendue car l'indice i est supérieur à l'ordre du système n : $i > n$.

On introduit ensuite la matrice triangulaire inférieure de Toeplitz Γ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{(l\times i)\times(m\times i)} \tag{6.6}$$

Cette matrice contient les paramètres dits de Markov : D, CB, CAB, jusqu'à $CA^{i-2}B$.

Trois matrices supplémentaires sont également introduites :

$$\mathsf{H}^c = \begin{bmatrix} H(j\omega_1) & H(j\omega_2) & \cdots & H(j\omega_N) \\ (j\omega_1)H(j\omega_1) & (j\omega_2)H(j\omega_2) & \cdots & (j\omega_N)H(j\omega_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (j\omega_1)^{i-1}H(j\omega_1) & (j\omega_2)^{i-1}H(j\omega_2) & \cdots & (j\omega_N)^{i-1}H(j\omega_N) \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

$$\mathsf{I}^c = \begin{bmatrix} I_m & I_m & \cdots & I_m \\ (j\omega_1)I_m & (j\omega_2)I_m & \cdots & (j\omega_N)I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (j\omega_1)^{i-1}I_m & (j\omega_2)^{i-1}I_m & \cdots & (j\omega_N)^{i-1}I_m \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$\mathsf{X}^c = \begin{bmatrix} X_H(j\omega_1) & X_H(j\omega_2) & \cdots & X_H(j\omega_N) \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Ces trois matrices sont complexes comme l'indique l'exposant c, on a en effet :

- $\mathsf{H}^c \in \mathbb{C}^{(l\times i)\times(m\times N)}$;
- $\mathsf{I}^c \in \mathbb{C}^{(m\times i)\times(m\times N)}$;
- $\mathsf{X}^c \in \mathbb{C}^{n\times(m\times N)}$.

Dans la suite nous utiliserons également ces matrices réécrites de la manière suivante :

$$\mathsf{H} = \left[\begin{array}{cc} Re(\mathsf{H}^c) & Im(\mathsf{H}^c) \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{li \times 2mN} \tag{6.10}$$

$$\mathsf{I} = \left[\begin{array}{cc} Re(\mathsf{I}^c) & Im(\mathsf{I}^c) \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{mi \times 2mN} \tag{6.11}$$

$$\mathsf{X} = \left[\begin{array}{cc} Re(\mathsf{X}^c) & Im(\mathsf{X}^c) \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times 2mN} \tag{6.12}$$

Dans ces expressions $Re(\cdot)$ et $Im(\cdot)$ désignent respectivement la partie réelle et imaginaire de $\cdot$.

Enfin, dans la suite nous utiliserons l'opérateur Π_P qui projette l'espace ligne d'une matrice sur l'espace ligne de la matrice P :

$$\Pi_P = P^T(PP^T)^{-1}P \tag{6.13}$$

Ainsi la projection Q/P de l'espace ligne de la matrice Q sur l'espace ligne de la matrice P s'écrit de la manière suivante :

$$Q/P = Q\Pi_P = QP^T(PP^T)^{-1}P \tag{6.14}$$

L'orthogonal de l'espace ligne de P est noté $P^\perp$ et la projection sur cet ensemble est notée $\Pi_{P^\perp}$. Une expression possible pour cette projection s'écrit comme suit :

$$\Pi_{P^\perp} = (I - \Pi_P) \tag{6.15}$$

6.1.2 Algorithme d'identification par la méthode des sous-espaces

La relation entrée-sortie sur laquelle repose l'algorithme des sous-espaces que nous allons présenter est la suivante :

$$\mathsf{H}^c = \mathcal{O}\mathsf{X}^c + \Gamma\mathsf{I}^c \tag{6.16}$$

Elle s'obtient à partir des équations (6.4) évaluées récursivement en $s = j\omega_1, \cdots, j\omega_N$.

Les matrices $\mathcal{O}$ et Γ étant réelles, on peut également écrire :

$$\mathsf{H} = \mathcal{O}\mathsf{X} + \Gamma\mathsf{I} \tag{6.17}$$

Dans cette équation seules les matrices H et I sont connues.

Sur la base de cette équation l'algorithme des sous-espaces procède en quatre principales étapes :

- Supprimer l'influence du terme $\Gamma\mathsf{I}$;
- Estimer l'ordre du système et l'espace colonne de la matrice $\mathcal{O}\mathsf{X}$;
- En déduire les matrices A et C
- Utiliser A et C pour calculer B et D

Nous détaillons ci-dessous ces différentes étapes puis nous résumons brièvement l'algorithme des sous-espaces.

6.1.2.1 Suppression de l'influence du terme $\Gamma\mathsf{I}$

Pour faire disparaitre le terme $\Gamma\mathsf{I}$ dans l'équation (6.17), on la projette sur $\mathsf{I}^{\perp}$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathsf{H}/\mathsf{I}^{\perp} &= \mathcal{O}\mathsf{X}/\mathsf{I}^{\perp} + \Gamma\mathsf{I}/\mathsf{I}^{\perp} \\ &= \mathcal{O}\mathsf{X}/\mathsf{I}^{\perp}\end{aligned} \tag{6.18}$$

6.1.2.2 Détermination de l'ordre et de l'espace colonne de $\mathcal{O}\mathsf{X}$

Sur la base de l'expression (6.18), on peut désormais déterminer l'ordre du système. En effet, on a $rg(\mathcal{O}) = rg(\mathsf{X}/\mathsf{I}^{\perp}) = n$. Dès lors, d'après (6.18) :

$$rg(\mathsf{H}/\mathsf{I}^{\perp}) = n \tag{6.19}$$

Par ailleurs cette même expression nous permet d'écrire :

$$espace\ colonne(\mathsf{H}/\mathsf{I}^{\perp}) = espace\ colonne(\mathcal{O}) \tag{6.20}$$

La détermination de $\mathsf{H}/\mathsf{I}^{\perp}$ est donc la clé de cette seconde étape de résolution. Une voie numériquement stable et efficace pour cela consiste à calculer une décomposition QR de la matrice $\begin{bmatrix}\mathsf{I}^T & \mathsf{H}^T\end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \mathsf{I}^T & \mathsf{H}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

D'après cette factorisation, on a :

$$\mathsf{H}/\mathsf{I}^{\perp} = R_{22}^T Q_2^T \tag{6.22}$$

L'ordre s'obtient ensuite en appliquant une décomposition en valeurs singulières sur le résultat précédent :

$$\mathsf{H}/\mathsf{I}^{\perp} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

L'ordre est donné par le nombre de valeurs singulières de S_1 non nulles.

Sur la base de cette décomposition on peut également déterminer une estimation de la matrice d'observabilité étendue. On choisit $\hat{\mathcal{O}}$ de la manière suivante :

$$\hat{\mathcal{O}} = U_1 S_1^{1/2} \tag{6.24}$$

6.1.2.3 Détermination de A et C

À partir de $\hat{\mathcal{O}}$, on peut aisément obtenir la matrice C. D'après la définition (6.5) de la matrice d'observabilité, on a en effet :

$$C = \hat{\mathcal{O}}_{l\ premieres\ lignes} \tag{6.25}$$

Pour la détermination de A on introduit les matrices $\underline{\hat{\mathcal{O}}}$ et $\overline{\hat{\mathcal{O}}}$. Il s'agit de la matrice $\hat{\mathcal{O}}$ privée de ses l dernières (respectivement premières) lignes. On a dès lors la relation évidente :

$$\underline{\hat{\mathcal{O}}} A = \overline{\hat{\mathcal{O}}} \tag{6.26}$$

D'où l'on obtient :

$$A = \underline{\hat{\mathcal{O}}}^{+} \overline{\hat{\mathcal{O}}} \tag{6.27}$$

L'exposant $(\cdot)^+$ désigne la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

6.1.2.4 Détermination de B et D

Sur la base de la connaissance de A et C on peut désormais déterminer B et D. Ces deux matrices sont les solutions de l'équation linéaire suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_R \\ \mathcal{L}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_R \\ \mathcal{M}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

Où $\mathcal{L} \in \mathbb{C}^{lN \times m}$ et $\mathcal{M} \in \mathbb{C}^{lN \times (n+l)}$ sont définies comme suit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + j\mathcal{L}_I = \begin{bmatrix} H(j\omega_1) \\ \cdots \\ H(j\omega_N) \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_R + j\mathcal{M}_I = \begin{bmatrix} C(j\omega_1 I_n - A)^{-1} & I_l \\ \cdots & \cdots \\ C(j\omega_N I_n - A)^{-1} & I_l \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

6.1.2.5 Récapitulatif de l'algorithme

Algorithme. Identification fréquentielle :

- *Construire les matrices* I *et* H *à partir des pulsations* ω_k *et des données fréquentielles* $H(j\omega_k)$ *;*
- *Calculer* $\mathsf{H}/\mathsf{I}^\perp$ *(factorisation QR) ;*
- *Calculer la décomposition en valeurs singulières de* $\mathsf{H}/\mathsf{I}^\perp$ *;*
- *Déterminer l'ordre ;*
- *Calculer* $\hat{\mathcal{O}}$ *;*
- *Déterminer* A *et* C *;*
- *En déduire* B *et* D*.*

6.1.3 Mise en œuvre numérique

L'algorithme que nous venons de présenter s'implémente correctement pour des ordres n (et i) faibles. Quand les ordres considérés sont plus grands les matrices H et I font intervenir des grandes puissances de $j\omega_k$ ce qui les rend très mal conditionnées. Dès lors on ne peut implémenter numériquement tel quel l'algorithme précédent sans rencontrer d'importants problèmes numériques.

Il existe des solutions à ce problème (que nous ne détaillons pas ici) ; l'une d'elle présentée dans [27] consiste à déterminer une base où les matrices H et I sont bien conditionnées au travers d'une récursion dérivée des polynômes de Forsythe. Une autre voie présentée dans [21] consiste à implémenter la version discrète de cet algorithme et à utiliser ensuite la transformée bilinéaire pour revenir dans le domaine continu.

6.2 Démonstrateur IRCCyN Box

L'identification de la matrices de transferts acoustiques entre les différents hauts-parleurs et les différents microphones du démonstrateur IRCCyN Box consiste à rechercher un modèle multivariable de dimension 2×3. Comme l'indique la section précédente, ce modèle a été obtenu dans le domaine continu par identification fréquentielle grâce à la méthode des sous-espaces.

Nous avons déjà partiellement justifié ce choix ci-dessus, mais précisons ici un peu les raisons qui l'ont motivé. La méthode des sous-espaces tout d'abord permet d'identifier des systèmes d'ordre relativement élevés et fortement résonnant [22]. Le modèle est obtenu directement dans l'espace d'état. Bien qu'elle permette de travailler sans paramétrisation, nous imposons ici une forme modale pour le modèle, ceci afin d'avoir une interprétation directe des paramètres sous forme de fréquences propres et d'amortissement et de se rapprocher ainsi de la physique. Elle a également été choisie en vue d'obtenir ultérieurement des régulateurs parcimonieux en calculs et lisibles. Le choix de l'approche fréquentielle se justifie lui par des spécifications fréquentielles, plage de fréquence, écart avec la réponse en fréquence du système... Enfin le choix de travailler dans le domaine continu permettra par la suite lors de la phase de conception de la loi de commande de s'affranchir des réflexions liées à la discrétisation et de se concentrer sur les performances atteignables.

6.2.1 Multi-modèle

La méthode des sous-espaces permet de traiter indifféremment le cas monovariable ou multivariable. Les différents transferts de l'IRCCyN Box partagent un certains nombre de dynamiques. Il s'agit en effet des transferts d'une même cavité. Dès lors, on retrouve les mêmes modes acoustiques sur chacun de ces transferts. Ils sont toutefois plus ou moins visibles en fonction de la position des actionneurs et des capteurs. Ainsi, l'identification multivariable est tout indiquée ici afin de tirer au mieux parti des dynamiques partagées entre les différents transferts.

En vue de procéder à l'identification multivariable, plusieurs jeux de données expérimentales ont été mesurés. Si les conditions expérimentales sont comparables, les mesures acoustiques sont alors correctement reproductibles. En revanche, si les conditions de température sont significativement différentes, la comparaison des données expérimentales montre certains écarts sur le gain et la phase. On donne à titre d'illustration en figure 6.1 la superposition de trois Réponses en Fréquences Mesurées (RFM) pour le transfert entre le haut-parleur HP_2 et le microphone M_1.

Ce sont ces écarts qui nous ont conduit à considérer plusieurs modèles pour représenter le système et à utiliser une approche multi-modèle comme préconisé dans le cahier des charges du chapitre 3. Dans la suite trois modèles seront utilisés pour représenter l'IRCCyN Box. Au cours de ce chapitre nous ne détaillerons l'identification que d'un seul de ces modèles, qui sera considéré comme le modèle nominal. Il s'agit sur la figure 6.1 du modèle correspondant à la mesure RFM3.

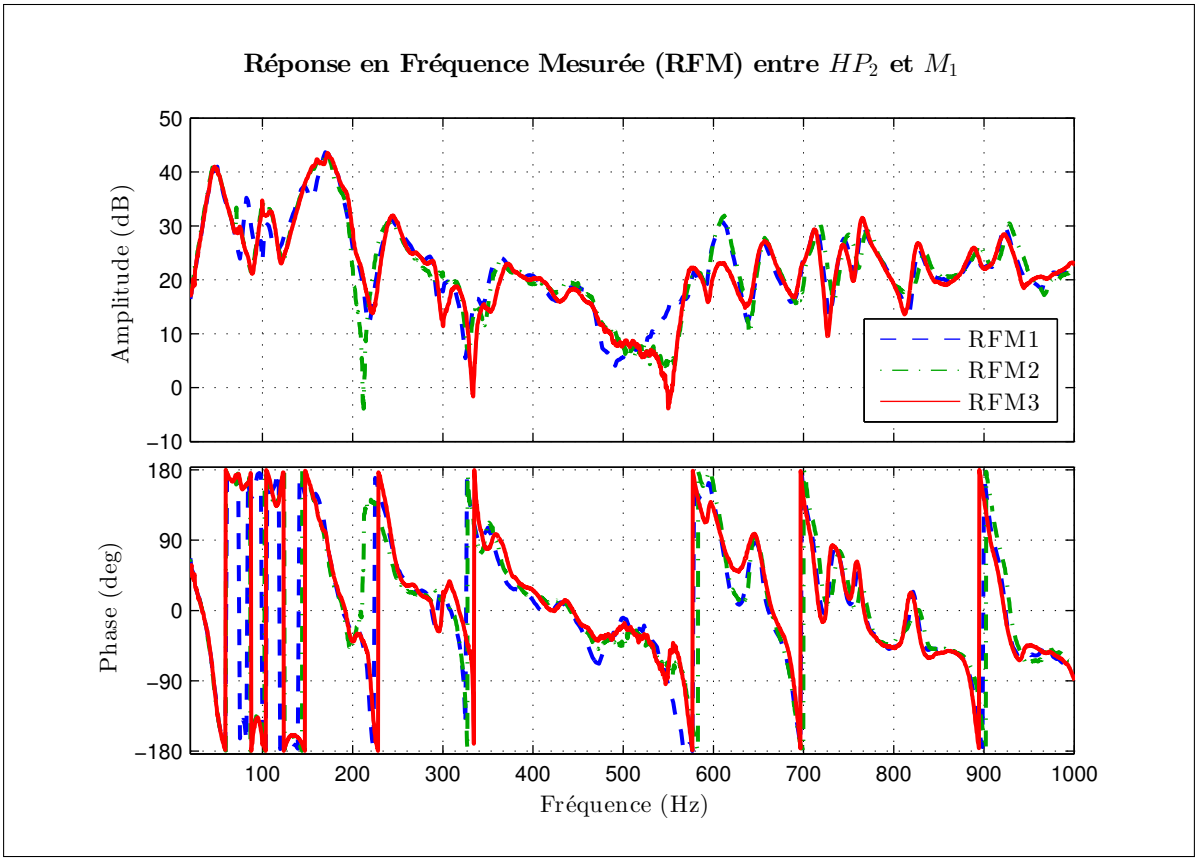

FIGURE 6.1 – Réponses en fréquence mesurées entre le haut-parleur HP_2 et le microphone M_1

6.2.2 Résultats

Les dynamiques du système acoustique ont été identifiées sur la plage [20-1000] Hz. Le choix de cette plage de fréquence a une influence directe sur l'ordre du modèle (plus la plage d'identification est large plus le modèle doit avoir un ordre élevé). Dans le cas présent un ordre $n = 80$ a été utilisé. Cette plage d'identification a également une influence sur la bande passante du régulateur qui sera calculé sur la base de ce modèle. En effet le régulateur ne devra pas agir en dehors de la plage de validité du modèle.

L'indicateur utilisé pour évaluer la qualité de l'identification est défini de la manière suivante :

$$fit = 100\left(1 - \frac{\|H(j\omega) - \hat{H}(j\omega)\|_2}{\|H(j\omega) - \overline{H}(j\omega)\|_2}\right) \tag{6.31}$$

Nous donnons dans le tableau 6.1, la valeur de cet indicateur pour chacun des six transferts monovariables du modèle multivariable.

fit	HP_1	HP_2	HP_3
M_1	86.2326	84.1038	91.1196
M_2	84.6231	88.8484	91.1542

Tableau 6.1 – Indicateur de la qualité de l'identification

À titre d'illustration nous comparons en figure 6.2, la réponse en fréquence déduite des données mesurées expérimentalement et la réponse en fréquence du modèle identifié pour le seul transfert entre le haut-parleur HP_2 et le microphone M_1 (transfert pour lequel le fit est le moins bon).

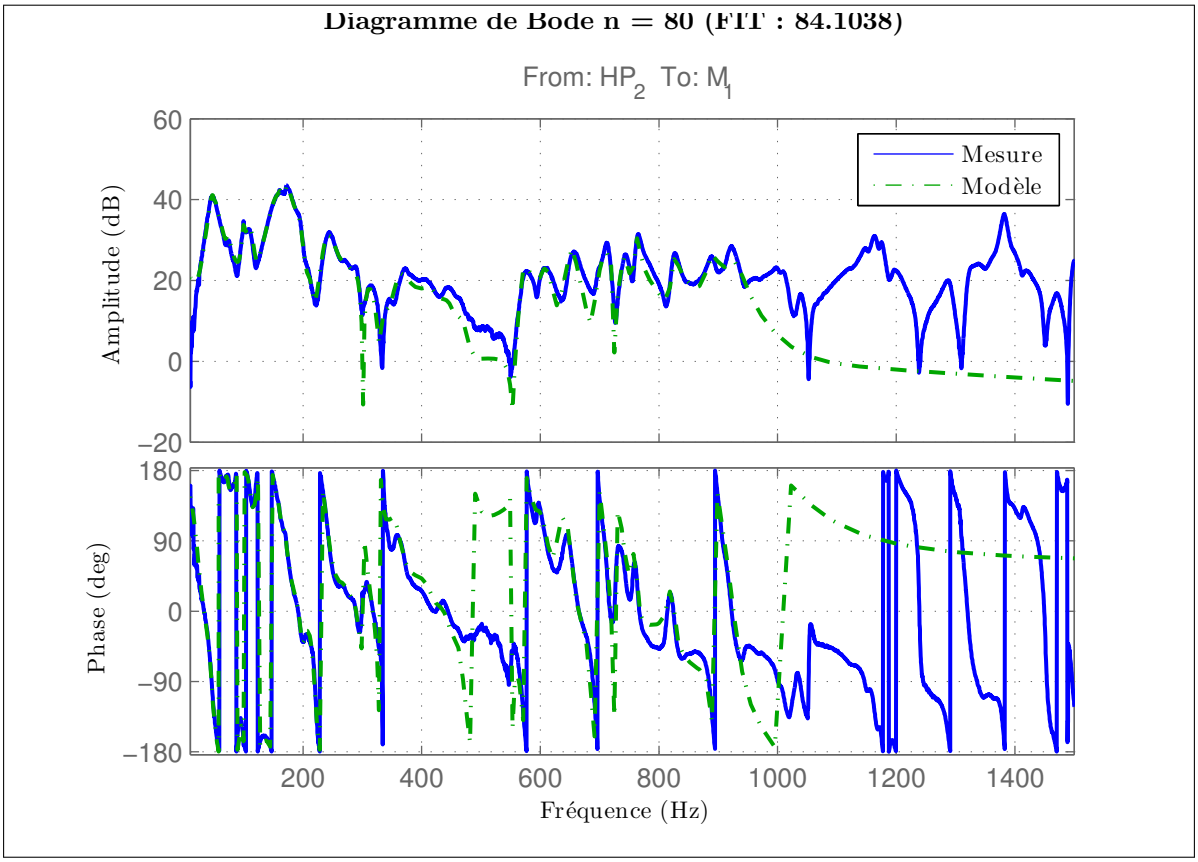

FIGURE 6.2 – Comparaison de la réponse en fréquence mesurée avec le modèle identifié

Le modèle multivariable ainsi obtenu ne contient aucun zéro multivariable. En revanche, les différents transferts monovariable contiennent chacun des zéros à non minimum de phase. Par exemple les zéros à non minimum de phase de la plage [20-500] Hz du transfert entre les haut-parleurs HP_1 et HP_2 et le microphone M_1 sont donnés dans le tableau 6.2.

Nous évoquerons à la fin de ce chapitre les influences de ces zéros sur les performances atteignables.

6.2.3 Discussion sur les chemins primaire et secondaire

L'identification présentée ci-dessus permet d'obtenir un modèle multivariable global du démonstrateur IRCCyN Box, indépendamment du rôle joué par les différents actionneurs. Par la suite, lors des tests de contrôle sur l'IRCCyN Box l'un des haut-parleurs devra être utilisé pour émettre la perturbation. Les transferts entre ce haut-parleur perturbateur et le ou les différent(s) microphone(s) de contrôle constituera donc « le chemin primaire », dont on aura la pleine maitrise. Ainsi, sur l'IRCCyN Box on pourra traiter les différents cas d'étude résumés sur les schémas 3.1 et 3.2.

	Fréquence (Hz)	**Zéros**
$HP_1 \rightarrow M_1$	234.24	1.7723+1471.8i
	234.24	1.7723-1471.8i
	26.499	51.895+158.2i
	26.499	51.895-158.2i
$HP_2 \rightarrow M_1$	481.95	82.972+3027.1i
	481.95	82.972-3027.1i
	328.04	16.438+2061.1i
	328.04	16.438-2061.1i
	220.57	29.76+1385.6i
	220.57	29.76-1385.6i
	24.244	58.945+140.46i
	24.244	58.945-140.46i

Tableau 6.2 – zéros à non minimum de phase des transferts entre HP_1 et HP_2 et M_1 sur la plage [20-500]Hz

6.3 Démonstrateur Véhicule

Sur le démonstrateur véhicule nous avons déjà évoqué plus haut quelques constats concernant les réponses en fréquences mesurées sur le prototypes entre les différents haut-parleurs et microphones. Nous les rappelons rapidement ici.

Les transferts mettant en jeu les haut-parleurs avant ont un fort gain et une forte densité modale en basse fréquence.

À l'inverse, les transferts liés aux haut-parleurs arrières ont un faible gain en dessous de 80 Hz avec une coupure importante à 80 Hz.

Sur le reste des fréquences, les transferts haut-parleurs avant vers microphones avant et haut-parleurs arrières vers microphones arrières ont un fort gain. Tandis que les transferts croisés avant/arrière ont un gain plus faible.

Ces différences de gain et de densité modale entre les différents transferts rendent l'identification multivariable telle que pratiquée sur l'IRCCyN Box peu fructueuse.

Bien qu'en principe moins efficace, une approche par identification de chacun des transferts monovariable puis par réduction de l'ordre du modèle multivariable issu de ces identifications se révèle plus appropriée ici.

6.3.1 Identifications monovariable

Les identifications monovariable ont été réalisées par la méthode des sous-espaces de la même manière que pour le démonstrateur IRCCyN Box. Il s'agit donc de l'identification fréquentielle de modèles monovariables continus sous forme modale.

Les ordres des différents modèles monovariables sont donnés dans le tableau 6.3. Les valeurs de l'indicateur de qualité obtenues pour ces identifications sont données dans le tableau 6.4.

n	$\mathbf{HP_1}$	$\mathbf{HP_2}$	$\mathbf{HP_3}$	$\mathbf{HP_4}$
$\mathbf{M_1}$	70	35	30	70
$\mathbf{M_2}$	80	70	40	70
$\mathbf{M_3}$	60	60	70	30

Tableau 6.3 – Ordre des modèles monovariables

fit	$\mathbf{HP_1}$	$\mathbf{HP_2}$	$\mathbf{HP_3}$	$\mathbf{HP_4}$
$\mathbf{M_1}$	88.431	77.921	85.309	80.177
$\mathbf{M_2}$	83.364	85.723	80.023	84.042
$\mathbf{M_3}$	86.084	78.334	91.03	88.85

Tableau 6.4 – Indicateur de qualité de l'identification des modèles monovariables

La concaténation (brute) des modèles monovariables conduit à un modèle multivariable d'ordre 685. Il est bien entendu nécessaire de réduire l'ordre de ce modèle dont on sait que les différents transferts partagent certaines dynamiques.

6.3.2 Réduction du modèle véhicule multivariable

6.3.2.1 Troncature équilibrée

La réduction a été réalisée par la méthode dite de troncature équilibrée (voir notamment[20]). Cette méthode consiste à réécrire le modèle du système sous forme d'une réalisation équilibrée. Le gramien d'observabilité W_o et de commandabilité W_c d'une telle réalisation sont égaux et diagonaux :

$$W_o = W_c = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\right) \tag{6.32}$$

Avec :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$$

Les σ_i sont appelées valeurs singulières de Hankel. Une valeur singulière de Hankel faible signifie que l'état correspondant de la réalisation équilibrée est faiblement commandable et faiblement observable.

La troncature équilibrée consiste à supprimer les états dont la valeur singulière de Hankel est en deçà d'un certain seuil.

Notons que la réduction par troncature équilibrée nécessite le passage à une réalisation équilibrée, elle fait donc perdre la structure modale imposée durant l'identification.

6.3.2.2 Résultat

Le seuil de réduction retenu pour la suppression des états faiblement commandables et faiblement observables est 5×10^{-2}. Il conduit à un modèle multivariable d'ordre 158. La comparaison de ce modèle avec les réponses en fréquences mesurées est donnée dans le tableau 6.5.

fit	$\mathbf{HP_1}$	$\mathbf{HP_2}$	$\mathbf{HP_3}$	$\mathbf{HP_4}$
$\mathbf{M_1}$	88.3293	76.9562	84.1409	80.7295
$\mathbf{M_2}$	83.8304	85.7894	79.1181	83.7762
$\mathbf{M_3}$	81.1993	74.3320	91.0322	88.5743

Tableau 6.5 – Indicateur de qualité de l'identification du modèle multivariable réduit

On voit (par comparaison avec le tableau 6.4) que globalement la qualité de l'identification n'est que peu impactée par la réduction.

On donne en figure 6.3, la comparaison entre la réponse fréquentielle mesurée, le modèle monovariable et le modèle multivariable réduit et ce dans le cas où l'identification multivariable est la moins bonne à savoir le transfert entre le haut-parleur HP_2 et le microphone M_3.

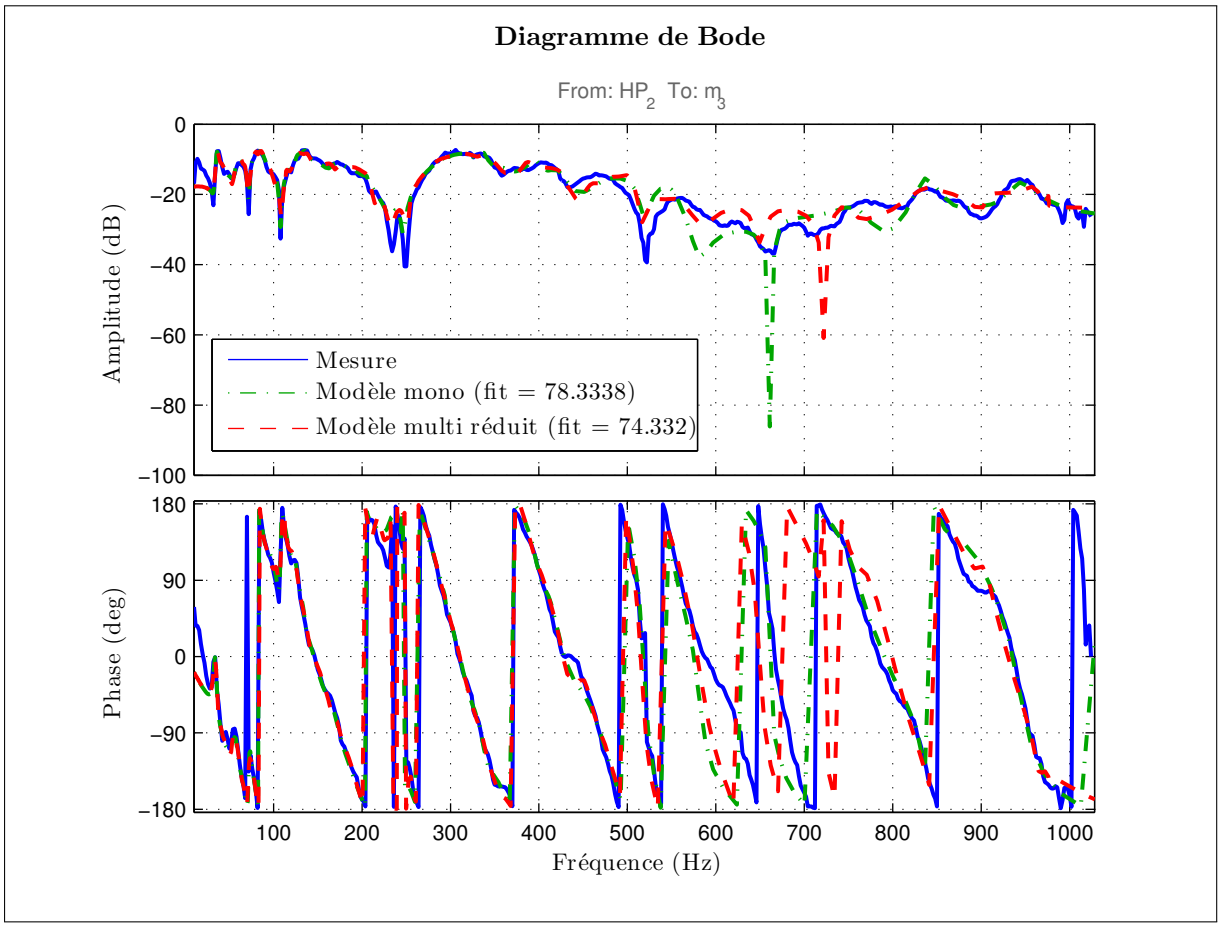

FIGURE 6.3 – Comparaison des modèles monovariable et multivariable et de la réponse en fréquence mesurée (transfert HP_2 M_3)

Comme pour le démonstrateur IRCCyN Box, le modèle multivariable ne contient pas de zéro multivariable, en revanche les différents transferts monovariable contiennent chacun des zéros à non minimum de phase.

6.3.3 Multi-modèle

Contrairement au cas de l'IRCCyN Box, on ne dispose pas sur le démonstrateur véhicule des données nécessaires (RFM obtenues dans différentes conditions d'environnement) à la mise en œuvre l'approche multi-modèle.

6.3.4 Discussion sur les chemins primaire et secondaire

Le modèle que nous venons de présenter est un modèle du chemin secondaire uniquement. En effet, sur véhicule nous ne maitrisons bien entendu pas la perturbation. Bien qu'on ne puisse mesurer la perturbation, on pourrait toutefois utiliser un modèle de perturbation.

Supposons en effet qu'on dispose d'une mesure $y_p(t)$ de la perturbation faite sur véhicule. On peut en calculer le spectre $S_{y_p y_p}(j\omega)$. Ce spectre vérifie la propriété suivante :

$$S_{y_p y_p}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \tag{6.33}$$

Où H est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre vérifiant :

$$y_h(t) = \int h(t-\tau)b(\tau)d\tau \tag{6.34}$$

Avec $b(\tau)$ un bruit blanc centré et $y_h(t)$ un signal de même spectre que $y_p(t)$:

$$S_{y_h y_h}(j\omega) = S_{y_p y_p}(j\omega) \tag{6.35}$$

Trouver le filtre $H(s)$ est un problème dit de factorisation spectrale qui admet une solution dans le cas d'un spectre rationnel si la condition de la Paley-Wienner est respectée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log_{10} S_{y_h y_h}(j\omega)}{1+\omega^2} d\omega > -\infty \tag{6.36}$$

Les méthodes de factorisation spectrale (telle que celles présentées dans [28] ou [29]) n'ont pas été mises en œuvre dans ce travail. En effet l'obtention de spectres de perturbation qui soient représentatifs n'est pas un problème aisé du fait des nombreux paramètres pouvant rentrer en ligne de compte (revêtement de la chaussée, charge du véhicule, température, vitesse du véhicule...). Il faudrait de plus envisager une factorisation spectrale dans le cas multivariable [30]. De telles méthodes pourraient toutefois s'avérer être des outils précieux de modélisation de la perturbation.

Dans la suite de ce manuscrit, nous considérerons pour l'application industrielle ne disposer que du modèle du chemin secondaire, sans modèle du chemin primaire ni modélisation de la perturbation.

6.4 Les zéros à non minimum de phase

Les zéros à non minimum de phase sont connus pour introduire un certain nombre de limitations sur les performances intrinsèquement atteignables par régulation. Les livres [20] et [31] donnent une vue d'ensemble sur ces limitations dans le cas monovariable et multivariable. Nous nous appuyons sur ces références pour décrire ici brièvement les principales limitations fréquentielles que nous pouvons observer au travers du présent problème de contrôle actif acoustique. Nous évoquons ces limitations essentiellement dans le cas monovariable et nous contentons de quelques commentaires sur le cas multivariable.

6.4.1 Limitations dans le cas monovariable

6.4.1.1 Stabilité interne

Soit un système monovariable $G(s)$ ayant un zero z dans le demi-plan droit :

$$G(z) = 0 \tag{6.37}$$

Pour garantir la stabilité interne de la régulation, il ne faut pas d'annulation de z par un pôle instable dans le régulateur K. Ceci implique qu'on retrouve le zéro à non minimum de phase dans le transfert de boucle $L(s)$:

$$L(z) = 0 \tag{6.38}$$

Dès lors d'après la définition de la fonction de sensibilité $S(s)$, on a :

$$S(z) = 1 \tag{6.39}$$

Ainsi, pour garantir la stabilité interne, la valeur de $S(z)$ est contrainte à 1. On doit donc bien s'attendre à devoir faire des compromis sur les performances atteignables au niveau des zéros à non minimum de phase.

6.4.1.2 Limitation de la bande passante de l'asservissement

On illustre brièvement ci-dessous les incidences de l'équation (6.39) sur la bande passante de l'asservissement.

Supposons qu'à travers le contrôle on souhaite, en présence d'un zéro à non minimum de phase z, imposer un certain gabarit $1/|w_p|$ sur la fonction sensibilité :

$$|S(j\omega)| < 1/|w_p(j\omega)| \quad \forall\omega \quad \Leftrightarrow \quad \|w_p S\|_\infty < 1 \tag{6.40}$$

Comme mentionné ci-dessus, pour garantir la stabilité interne il faut que $S(z) = 1$.

De plus d'après la définition de la norme $\mathcal{H}_\infty$, on a :

$$\|w_p S\|_\infty \geq |w_p(z)S(z)| \tag{6.41}$$

Ainsi pour satisfaire (6.40), la pondération w_p doit garantir :

$$|w_p(z)| < 1 \tag{6.42}$$

Pour agir en basse fréquence, w_p est classiquement choisi comme un filtre passe-bas, d'après ce qui précède sa fréquence de coupure doit être inférieure à $|z|$ de manière à satisfaire (6.42). À l'inverse si l'on souhaite agir en haute fréquence, w_p est souvent choisi comme un filtre passe-haut, sa fréquence de coupure doit en ce cas être supérieure à $|z|$. Dans cette optique, on peut agir soit en dessous, soit en dessus de la pulsation $|z|$, mais pas dans une certaine zone autour de $|z|$.

6.4.1.3 Intégrale de Bode

Lors d'une régulation en boucle fermée une autre limitation intervient, elle est donnée par l'intégrale de Bode. Son expression est rappelée dans le théorème 6.1.

Théorème 6.1. *Soit le transfert de boucle $L(s)$ de degré relatif supérieur ou égal à 2. Supposons que ce transfert de boucle contienne N_p pôles p_i dans le demi-plan droit. Pour garantir la stabilité de la boucle fermée, la fonction de sensibilité doit vérifier :*

$$\int_0^{+\infty} \log|S(j\omega)|d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} Re(p_i) \tag{6.43}$$

Où $Re(p_i)$ désigne la partie réelle de p_i.

Dans notre cas le système considéré est stable l'équation (6.43) devient donc :

$$\int_0^{+\infty} \log|S(j\omega)|d\omega = 0 \tag{6.44}$$

Par ailleurs, notons que dans le problème considéré ici le dégré relatif du transfert de boucle est bien supérieur ou égal à deux. En effet, les régulateurs calculés dans la suite sont tous strictement propres et le système est lui même strictement propre soit physiquement, soit en raison de son instrumentation (bande passante des capteurs limitée ou filtre anti-repliement). Donc l'intégrale de Bode s'applique.

Son expression nous indique que si on atténue la fonction de sensibilité sur une certaine plage de fréquence, nécessairement pour respecter la nullité de l'intégrale de Bode pour les systèmes stables, on amplifiera d'autant la fonction de sensibilité sur une autre plage de fréquence. On appelle aussi ce phénomène l'effet de vase communiquant ou « l'effet waterbed ».

Dans le cas des systèmes à non minimum de phase, la fonction de sensibilité doit satisfaire une relation intégrale supplémentaire démontrée dans [32] et présentée dans [20] comme la seconde formule explicitant l'effet waterbed. Nous donnons cette expression dans le théorème 6.2.

Théorème 6.2. *Supposons que $L(s)$ ait un unique zéro z dans le demi-plan droit, ou une paire de zéros complexes conjugués $z = x \pm jy$, et N_p pôles instables p_i ($\bar{p}_i$ désignant le complexe conjugué de p_i). La stabilité de la boucle fermée induit la contrainte suivante sur la fonction de sensibilité :*

$$\int_0^{+\infty} \log|S(j\omega)|\, w(z,\omega)d\omega = \pi \log \prod_{i=1}^{N_p} \left|\frac{p_i + z}{\bar{p}_i - z}\right| \tag{6.45}$$

où si z est réel :

$$w(z,\omega) = \frac{2z}{z^2+\omega^2} = \frac{2}{z}\frac{1}{1+(\omega/z)^2} \tag{6.46}$$

et s'il s'agit de complexes conjugués ($z = x \pm jy$) :

$$w(z,\omega) = \frac{x}{x^2+(y-\omega)^2} + \frac{x}{x^2+(y+\omega)^2} \tag{6.47}$$

Dans le cas où le système considéré est stable l'expression (6.45) devient :

$$\int_0^{+\infty} \log|S(j\omega)|\, w(z,\omega)d\omega = 0 \tag{6.48}$$

Cette contrainte intégrale supplémentaire fait intervenir une pondération $w(z,\omega)$. D'après [20], cette pondération coupe la contribution de $\log|S|$ aux fréquences $\omega > z$. Ainsi pour un système stable et une sensibilité raisonnablement proche de 1 en haute fréquence on a :

$$\int_0^{z} \log|S(j\omega)|\, w(z,\omega)d\omega \approx 0 \tag{6.49}$$

Ainsi cette intégrale revient à réaliser le compromis atténuation/amplification de S sur une plage de fréquence réduite. Dès lors on est amené à considérer des « pics » sur S de plus grande amplitude qu'en l'absence de zéros à non minimum de phase.

Dans notre cas on peut calculer la pondération pour les zéros à non minimum de phase que nous avons listés dans le tableau 6.2. On présente en figure 6.4 le résultats obtenus pour deux de ces zéros :

- $29.76 + 1385.6i$
- $1.7723 + 1471.8i$

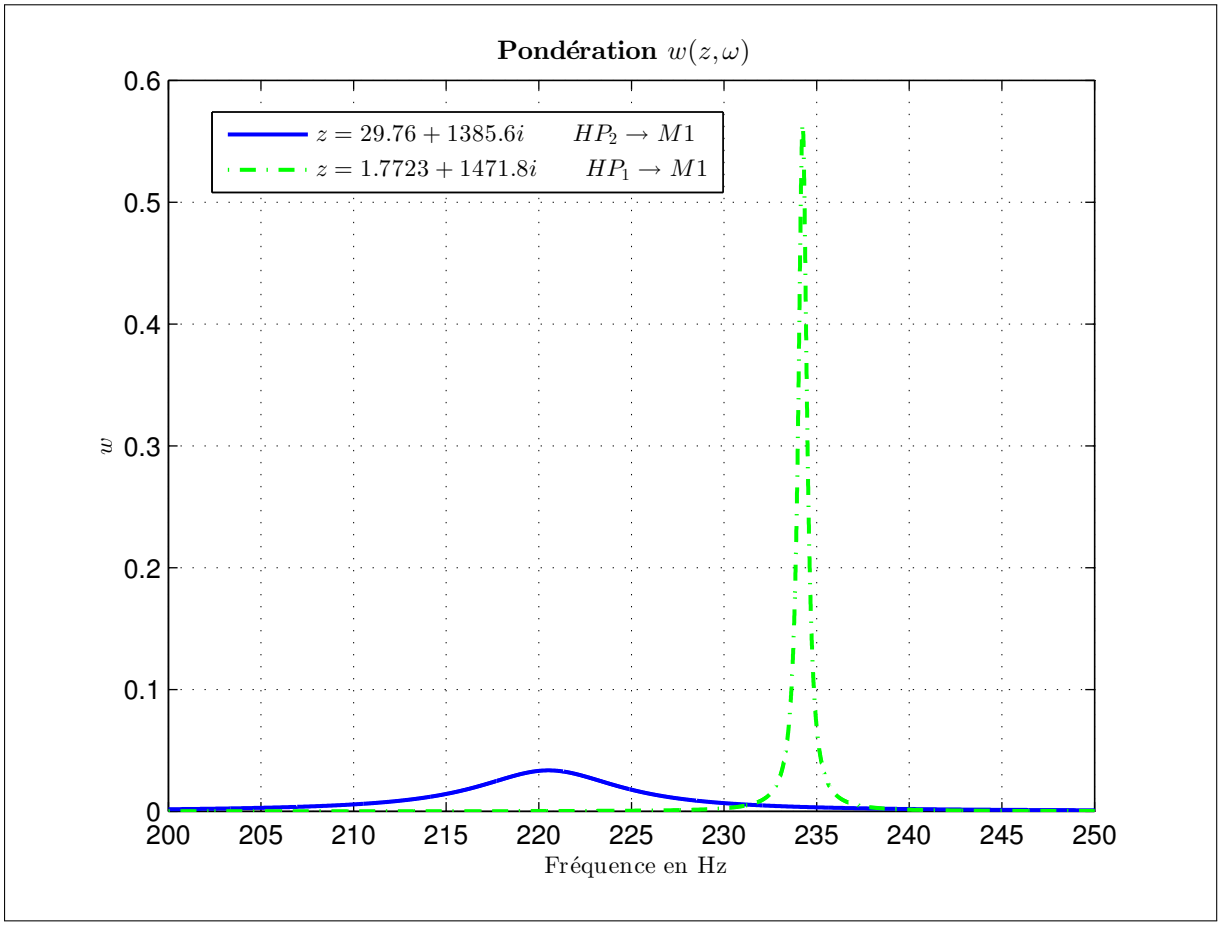

FIGURE 6.4 – Pondération obtenue pour deux zéros à non minimum de phase du modèle nominal de l'IRCCyN Box

On voit sur ce graphique que la pondération devient plus importante dans une certaine plage de fréquence autour de celle du zéro considéré. Ceci nous indique qu'une limitation supplémentaire intervient au niveau des zéros à non minimum de phase. Cette limitation est plus ou moins marquée et intervient sur une plage plus ou moins large en fonction de la position du zéro dans le plan complexe. Par exemple, le zéro correspondant à la courbe verte introduit une forte limitation, mais sur une plage de fréquence assez étroite. On pourra vraisemblablement agir à des fréquences relativement proches de ce zéro. Pour l'autre zéro, la limitation introduite est un peu moins ciblée, rendant l'action difficile sur une plage un peu plus large incluant l'intervalle [210, 230] Hz. Nous verrons au chapitre 8 que ce résultat se vérifie en pratique.

On montre également dans [31] que la sévérité du compromis dépend du retard de phase introduit par le zéro à non minimum de phase aux fréquences où l'on souhaite réduire la fonction de sensibilité. On y voit notamment qu'imposer que la fonction de sensibilité soit faible sur une plage de fréquence où le zéro à non minimum de phase introduit un important retard de phase, conduit nécessairement à un pic important sur la fonction de sensibilité en haute fréquence. À l'inverse si le zéro ne contribue qu'à un faible retard de phase sur la plage d'atténuation désirée, il n'impose pas de réelle limitation.

6.4.2 Limitations dans le cas multivariable

Les différentes limitations introduites dans le cas monovariable se généralisent pour les zéros à non minimum de phase des systèmes multivariables. Toutefois elles sont en général moins contraignantes car ne s'appliquent que suivant certaines directions (combinaisons d'entrées et de sorties).

Notons que les systèmes multivariables que nous considérons ici, ne contiennent pas de zéro à non minimum de phase multivariable. Il reste toutefois la contrainte intégrale de Bode dont la généralisation au cas multivariable peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_0^\infty \log|\det S(j\omega)|d\omega = \sum_j \int_0^\infty \log \sigma_j S(j\omega)d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} Re(p_i) \tag{6.50}$$

Dans notre cas le système considéré est stable donc l'intégrale est nulle.

De nouveau cette relation intégrale illustre qualitativement le compromis autour de la réduction de la sensibilité. Il est toutefois difficile d'en dériver des indicateurs permettant de quantifier ce compromis.

6.4.3 Limitations lors d'une régulation en boucle ouverte

Nous terminons cet état des lieux des limitations liées aux zéros à non minimum de phase en évoquant brièvement le cas d'une régulation monovariable en boucle ouverte telle que présentée en figure 6.5. Sur ce schéma G_p et G_s désignent respectivement le chemin primaire et secondaire, tandis que K désigne le régulateur.

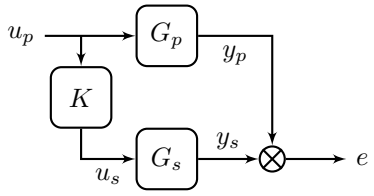

FIGURE 6.5 – Régulation en boucle ouverte

L'objectif de la régulation est de garantir $e = 0$. Pour cela le régulateur optimal est le suivant :

$$K(s) = -G_s^{-1}(s)G_p(s) \tag{6.51}$$

Il contient l'inverse du chemin secondaire G_s. Malheureusement, si G_s contient des zéros à non minimum de phase, son inverse est instable et rend donc la régulation instable. La présence de zéros à non minimum de phase oblige à se contenter d'un régulateur sous optimal calculé sur la base d'une approximation stable de l'inverse de G_s.

Le seul cas pour lequel les zéros à non minimum de phase de G_s n'ont pas d'influence est le cas où G_p contient exactement les mêmes zéros dans le demi-plan droit. Le produit $G_s^{-1}(s)G_p(s)$ est alors entrée bornée - sortie bornée stable et conduit à un régulateur stable et optimal.

Ainsi, de manière générale, une régulation en boucle ouverte couplée à une régulation en boucle fermée ne peut pas dégrader les performances obtenues avec la régulation en boucle fermée seule. Toutefois l'apport de la régulation en boucle ouverte peut-être limité par la présence de zéros à non minimum de phase.

À ce stade du manuscrit nous disposons donc des modèles des deux démonstrateurs support à la thèse. Nous avons également décrit les différentes limitations intrinsèques pouvant être rencontrées.

Troisième partie

Stratégie de commande

Préambule

L'objectif de cette partie du manuscrit est de répondre au cahier des charges du chapitre 3, de manière générale tout d'abord en abordant différentes configurations pouvant être rencontrées dans un problème de contrôle actif acoustique dans une cavité, puis de manière plus ciblée en considérant le problème industriel. On traite respectivement ces objectifs dans les chapitres 8 et 9. En amont de cela on positionne au chapitre 7 la solution proposée en regard de l'état de l'art.

Chapitre 7

État de l'art

Contenu

7.1 FxLMS 79
7.1.1 Algorithme LMS 80
7.1.2 Du LMS au FxLMS 81
7.2 Commande par modèle interne 84
7.2.1 Au sens de Wonham 84
7.2.2 Au sens de Morari 84
7.3 Commande passive 85
7.4 Commande optimale et optimisation convexe 86
7.4.1 LQG 86
7.4.2 Commandes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ 87
7.4.3 LMI et commande multi-objectif 88
7.5 Robustesse 89

Dans ce chapitre nous présentons un rapide état de l'art des stratégies de commande les plus utilisées dans le domaine du contrôle actif acoustique. Nous évoquons tout d'abord les stratégies inspirées de l'algorithme LMS utilisé en traitement du signal. La littérature à leur sujet est particulièrement abondante et mérite qu'on s'y arrête quelques instants. Nous présentons ensuite les autres approches rencontrées dans la littérature, notamment la commande par modèle interne, la commande passive, les commandes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ et certains travaux à base de LMI. Enfin, nous traitons en dernière partie de ce mémoire de la prise en compte des incertitudes.

7.1 FxLMS

Nous venons de le mentionner une abondante littérature existe sur la stratégie FxLMS et ses variantes. Cette stratégie s'inspire de l'algorithme LMS (de l'anglais Least Mean

Square) initialement utilisé en traitement du signal dans des problèmes de filtrage ou d'estimation [33]. Nous présentons donc tout d'abord l'algorithme LMS, puis les modifications qui lui sont apportées pour aboutir à l'algorithme FxLMS. Les explications données ici se limitent au cas monovariable, elles sont tirées de [19] et [34].

7.1.1 Algorithme LMS

Nous donnons en figure 7.1 un exemple de problème d'estimation monovariable. Sur ce schéma le signal de référence $x(n)$ contient du signal et du bruit. On souhaite au travers du filtre H obtenir un signal $y(n)$ qui soit le plus proche possible du signal désiré $d(n)$. Le signal d'erreur $e(n)$ est défini par la relation suivante :

$$e(n) = d(n) - y(n) \tag{7.1}$$

Tous les signaux considérés sont supposés stationnaires et ergodiques.

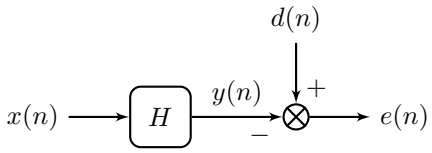

FIGURE 7.1 – Problème d'estimation

Remarque 7.1. *Les notations utilisées sur ce schéma ne doivent pas être confondues avec celles du reste du manuscrit. Le lien avec les notations du manuscrit est fait un peu plus bas.*

Dans l'algorithme LMS, H est un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF). Il possède I coefficients qu'on note h_i. On définit par ailleurs le vecteur $\mathbf{h}$ suivant :

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{I-1} \end{bmatrix}^T \tag{7.2}$$

On peut dès lors réécrire $e(n)$ de la manière suivante :

$$e(n) = d(n) - \mathbf{h}^T\mathbf{x}(n) = d(n) - \mathbf{x}^T(n)\,\mathbf{h} \tag{7.3}$$

Avec :

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-I+1) \end{bmatrix}^T \tag{7.4}$$

L'objectif de l'algorithme est de trouver le vecteur $\mathbf{h}$ permettant de minimiser l'erreur quadratique moyenne :

$$J = E\left[e^2(n)\right] \tag{7.5}$$

Où $E[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique.
D'après (7.3) le critère peut se réécrire de la manière suivante :

$$J = E\left[\mathbf{h}^T\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\,\mathbf{h} - 2\,\mathbf{h}^T\mathbf{x}(\mathbf{n})d(n) + d^2(n)\right] \tag{7.6}$$

Ce problème d'optimisation est résolu en ligne, l'adaptation des coefficients du filtre H est mise en œuvre au travers de la méthode de la plus grande pente :

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \mu \frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}}(n) \tag{7.7}$$

Le gradient du critère intervenant dans cette expression s'obtient en dérivant l'équation (7.6). Il s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}}(n) = 2E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\,\mathbf{h} - \mathbf{x}(\mathbf{n})d(n)\right] \tag{7.8}$$

En factorisant par $\mathbf{x}(n)$ et en utilisant l'équation (7.3), on obtient finalement :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}}(n) = -2E\left[\mathbf{x}(n)e(n)\right] \tag{7.9}$$

Cette expression du gradient nécessite le calcul en ligne de l'espérance du produit de $\mathbf{x}(n)$ et $e(n)$. Afin d'éviter ce calcul l'algorithme LMS fait une importante simplification et ne considère pas l'espérance de ce produit mais sa valeur instantanée. Ceci revient à considérer comme critère :

$$J = e^2(n) \tag{7.10}$$

L'adaptation des coefficients du filtre est donc finalement réalisée de la manière suivante :

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \alpha \mathbf{x}(n)e(n) \tag{7.11}$$

Avec $\alpha = 2\mu$ un coefficient de convergence. La mise en œuvre de l'algorithme LMS est schématisée en figure 7.2.

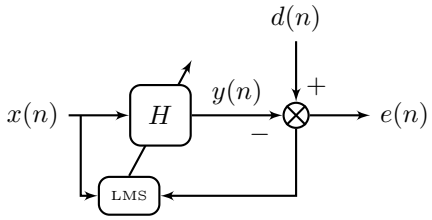

FIGURE 7.2 – Implémentation de l'algorithme LMS

7.1.2 Du LMS au FxLMS

Le passage de l'algorithme LMS, répondant à un problème de traitement du signal, à l'algorithme FxLMS, permettant de traiter un problème de contrôle actif est fait conceptuellement en considérant un problème de régulation en boucle ouverte telle que représentée en figure 7.3.

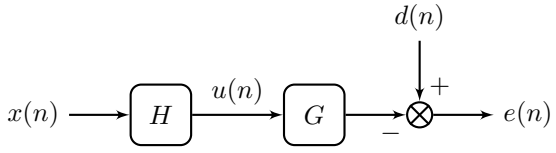

FIGURE 7.3 – Problème de régulation en boucle ouverte

En considérant que G le système à contrôler et H le filtre (RIF) de régulation sont linéaires et invariants dans le temps, on peut dans le cas scalaire les permuter comme cela est fait en figure 7.4.

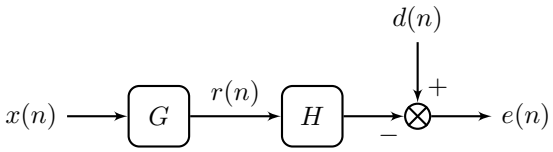

FIGURE 7.4 – Problème de régulation en boucle ouverte « permuté »

Le signal d'erreur s'exprime alors de la manière suivante :

$$e(n) = d(n) + \mathbf{h}^T \mathbf{r}(n) \tag{7.12}$$

À partir de cette équation on souhaite maintenant appliquer l'algorithme LMS. Pour que la permutation présentée en figure 7.4 reste valide en pratique, il faut auparavant faire l'hypothèse que les coefficients du filtre H varient lentement en regard des dynamiques du système G. Ensuite comme pour l'algorithme LMS on prend pour critère :

$$J = e^2(n) \tag{7.13}$$

On applique l'algorithme de la plus grande pente pour adapter les coefficients de H de manière à minimiser J :

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \mu \frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}}(n) \tag{7.14}$$

Le gradient du critère s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}}(n) = 2e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{h}} = 2e(n)\mathbf{r}(n) \tag{7.15}$$

La mise à jour des coefficients de H s'écrit donc de la manière suivante :

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \alpha \mathbf{r}(n)e(n) \tag{7.16}$$

Dans cette expression c'est $\mathbf{r}(n)$ (la référence $\mathbf{x}(n)$ filtrée par G) qui intervient à la place de $\mathbf{x}(n)$. D'où le nom de Filtered x Least Mean Square (FxLMS). La mise en œuvre de cet algorithme nécessite la connaissance de la référence filtrée. En pratique on ne dispose que d'une estimation de $r(n)$ (notée $\hat{r}(n)$) obtenue à partir d'un modèle du système qu'on note $\hat{G}$. Pour l'implémentation la formule utilisée pour la mise à jour des coefficients de H est la suivante :

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \alpha \hat{\mathbf{r}}(n)e(n) \tag{7.17}$$

La mise en œuvre de cet algorithme est représentée en figure 7.5.

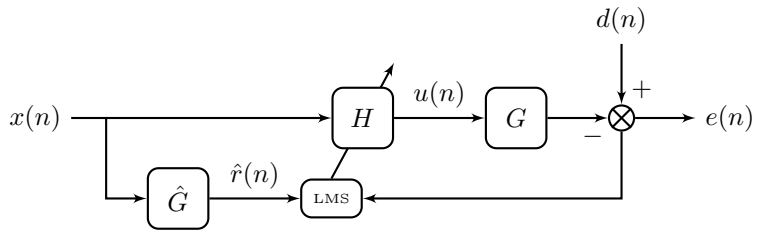

FIGURE 7.5 – Implémentation de l'algorithme FxLMS

On donne en figure 7.6 la correspondance avec les notations utilisées dans ce mémoire.

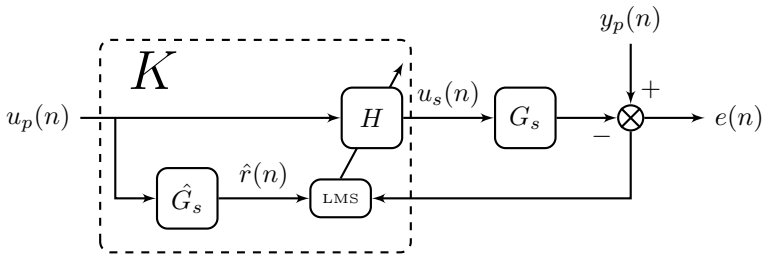

FIGURE 7.6 – Algorithme FxLMS avec les notations du mémoire

Mis sous cette forme il apparait clairement que le régulateur FxLMS met en œuvre une régulation a deux degrés de liberté. La boucle fermée intervient dans le dispositif d'adaptation des coefficients de H. Ainsi, contrairement à ce qu'on lit parfois, on ne peut pas considérer cette stratégie comme une action de type purement « boucle ouverte », si ce n'est dans le cas où l'adaptation des coefficients aurait convergé de manière définitive. On observe un tel comportement si le signal de référence est un son pur, le régulateur peut alors être décrit par un système linéaire invariant dans le temps [18]. Notons que dans ce cas, on perd alors la notion d'adaptation qui est le principal argument en faveur des algorithmes tels que le FxLMS.

On peut mettre l'algorithme FxLMS sous forme de régulation en boucle fermée seule, il faut pour cela faute de mesurer le signal de référence le reconstruire. On pourrait à cette fin concevoir un observateur, toutefois l'approche généralement suivie dans la littérature est la commande par modèle interne [35], [36], [37], [38].

Notons par ailleurs que cette stratégie de commande présentée ici dans le cas monovariable se généralise au cas multivariable [39]. Il existe également de nombreuses variantes que nous ne présentons pas ici. Ce type de stratégie est très utilisé dans la littérature du contrôle actif citons par exemple quelques applications au contrôle actif acoustique automobile [9], [11], [16], [13]. La dernière de ces références utilise le FxLMS pour atténuer le bruit de roulement. Elle utilise pour signal de référence les accélérations mesurées au niveau des portes-fusées et des têtes d'amortisseur. Les atténuations obtenues sont intéressantes, toutefois cette solution n'a pas été reprise par les industriels automobiles car les accéléromètres utilisés sont couteux et leur positionnement sensible. C'est en ce sens que nous disions au chapitre 3 qu'il est difficile et souvent couteux de disposer d'une mesure efficace de la perturbation. Et c'est pour cette raison qu'au chapitre 9 nous considérerons

pour résoudre le problème industriel des solutions de type rétroaction, procédant à partir de mesures intérieures à l'habitacle.

Un problème ouvert concernant les stratégies adaptatives du type FxLMS concerne les garanties de robustesse. Ces stratégies ne permettent pas de donner les garanties de performance robuste demandées au chapitre 3. Ainsi ce type de stratégie n'a pas été retenu dans le présent travail.

7.2 Commande par modèle interne

Nous avons évoqué l'utilisation de la commande par modèle interne pour mettre en œuvre la stratégie FxLMS sur un problème de rétroaction. Bien entendu la commande par modèle interne peut s'utiliser dans un cadre plus large que celui des stratégies de type FxLMS. Il existe en réalité deux types de commande par modèle interne :

- Au sens de Wonham [40] ;
- Au sens de Morari [41].

C'est la commande par modèle interne au sens de Morari qui était utilisée dans les applications de FxLMS que nous avons mentionnées. Nous rappelons ci-dessous le principe de chacune de ces approches.

7.2.1 Au sens de Wonham

Les travaux de Francis et Whonam [40] donnent les conditions permettant de résoudre le problème de régulation de sortie avec stabilité interne en présence de perturbations. Il y est démontré que pour assurer la stabilité interne, le régulateur doit contenir le modèle de toutes les consignes qu'il doit suivre et de toutes les perturbations qu'il doit rejeter.

On retrouve cette approche appliquée au contrôle actif acoustique dans [42]. Dans ce papier la perturbation considérée contient un ou plusieurs sons purs. Chacune de ces perturbations est explicitement intégrée au régulateur au travers d'un modèle du second ordre dont la fréquence propre est celle du son pur considéré. L'auteur indique que la stratégie proposée ne s'applique aisément qu'aux perturbations de bande étroite.

7.2.2 Au sens de Morari

Le principe de la commande par modèle interne au sens de Morari (appliqué au problème de contrôle actif dans une cavité) est représenté en figure 7.7. Il consiste à intégrer au régulateur un modèle du chemin secondaire. Ce dernier permet à partir du signal de commande de construire une estimation de la sortie du chemin secondaire $\hat{y}_s$. En la soustrayant à la mesure de l'erreur e, on obtient une estimation de la perturbation $\hat{y}_p$. Ainsi la seule partie du régulateur qui est optimisée est le bloc Q (souvent noté ainsi en référence au paramètre de Youla). Il a pour mission, à partir de l'estimation de la perturbation $\hat{y}_p$, de calculer la commande qui, appliquée au chemin primaire, permettra d'atténuer le signal d'erreur e.

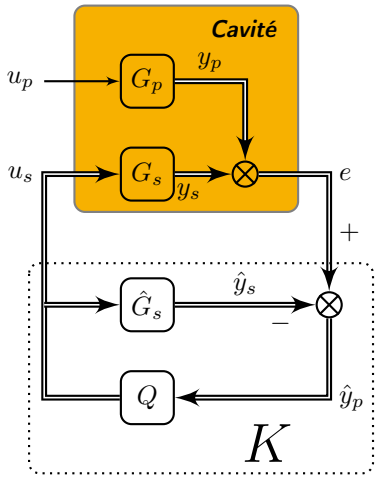

FIGURE 7.7 – Principe de la commande par modèle interne au sens de Morari

Cette structure est intéressante car elle permet d'intégrer au régulateur la connaissance dont on dispose sur le système. Elle permet également de réduire le nombre de paramètres de décision (puisque la recopie du modèle dans le régulateur n'est pas optimisée) et de reconstruire la perturbation. On peut également la voir comme un type particulier d'observateur. Une étape importante dans la commande par modèle interne est l'inversion du système. La présence de zéros à non minimum de phase (classique pour un système acoustique aux capteurs et aux actionneurs non colocalisés) vient contrarier cette inversion ; par ailleurs cette méthode s'applique de manière privilégiée sur des systèmes carrés. Plusieurs applications de contrôle actif acoustique utilisent la commande par modèle interne au sens de Morari, voir notamment [11] et [43]. Dans ce travail nous n'utilisons pas la commande par modèle interne, mais la notion plus générale d'observateur d'état du process et de la perturbation, qui permet d'intégrer au régulateur la connaissance dont on dispose sur le système et la perturbation.

7.3 Commande passive

Dans cette section sur la commande passive, nous ne donnons pas une description détaillée de cette approche, mais seulement les principales propriétés permettant de comprendre son intérêt et l'application qui en est faite dans les applications de contrôle actif. Le lecteur intéressé trouvera de plus amples explications sur la commande passive dans les références [44], [45]. Notons par ailleurs que les qualificatifs système passif, dissipatif, positif réel ou hyperstable sont synonymes. Nous retiendrons ici le terme passif.

Le principal atout des systèmes passifs a trait à la stabilité. En effet, le bouclage d'un système passif avec un système strictement passif est stable (la distinction entre système passif et strictement passif peut-être trouvée dans [44]). Ainsi dans le cadre de la commande, boucler un système passif par un régulateur strictement passif (ou un système strictement passif par un régulateur passif) garantit la stabilité du système bouclé. Une telle propriété est particulièrement intéressante, malheureusement les systèmes acoustiques ne sont généralement pas intrinsèquement passifs. L'utilisation de la commande passive nécessite dès lors une étape préliminaire pour rendre le système passif par la commande. Dans le cas des systèmes à non minimum de phase (ce qui est souvent le cas

des systèmes acoustiques), il faut de plus commencer par rendre le système à minimum de phase en utilisant une action en boucle ouverte. Ceci présuppose de disposer d'une mesure de la perturbation. Une mise en œuvre de ces différentes étapes est présentée sur un problème de contrôle actif dans les publications [46], [47].

7.4 Commande optimale et optimisation convexe

Par commande optimale procédant par optimisation convexe, on désigne ici les approches de synthèses Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG), $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$, nous évoquerons les formulations associées, en terme d'optimisation convexe, en terme de LMI (de l'anglais Linear Matrix Inequalities).

7.4.1 LQG

Nous rappelons tout d'abord brièvement en quoi consiste l'approche LQG ([20], [48]). Cette stratégie fait l'hypothèse que le modèle du système est linéaire et connu et que les bruits de mesure v et de process w sont de nature stochastique avec des propriétés statistiques connues au travers de leur matrice de covariance respective V et W :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + Du + v \end{aligned} \tag{7.18}$$

Grâce au principe de séparation, le problème LQG peut être scindé en deux sous-problèmes pouvant être résolus séparément :

- la synthèse du retour d'état LQ ;
- la construction d'un filtre de Kalman.

Retour d'état LQ Soit donc le système $\dot{x} = Ax + Bu$, le problème LQ consiste à trouver la commande stabilisante par retour d'état $u = -K_c x$ permettant de minimiser le critère :

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt \tag{7.19}$$

La solution à ce problème est bien connue :

$$K_c = R^{-1} B X \tag{7.20}$$

Où X est l'unique solution semi-définie positive de l'équation algébrique de Riccati :

$$A^T X + X A - X B R^{-1} B^T X + Q = 0 \tag{7.21}$$

Observateur de Kalman Dans la synthèse LQG on considère ne pas mesurer l'état du système, on le reconstruit donc au travers d'un observateur mis sous forme d'un filtre de Kalman, dont l'équation d'évolution est la suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x}) \tag{7.22}$$

Le gain d'observation optimal est celui qui minimise $E\left\{[x-\hat{x}]^T[x-\hat{x}]\right\}$; il est donné par :

$$K_f = YC^TV^{-1} \tag{7.23}$$

Où Y est l'unique solution semi-définie positive de l'équation algébrique de Riccati :

$$YA^T + AY - YC^TV^{-1}CY + W = 0 \tag{7.24}$$

Cette solution est aussi celle du problème de commande $\mathcal{H}_2$ ad hoc (voir ci-dessous). On la retrouve entre-autres dans les publications suivantes : [49], [50] [51].

7.4.2 Commandes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$

La résolution des problèmes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ a été proposée dans [52]. Elle s'appuie sur la mise du problème de commande sous forme standard et met en jeu dans chaque cas deux équations de Riccati.

7.4.2.1 Forme standard

Les problèmes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ sont formulés sous la forme dite « standard » représentée en figure 7.8. Cette écriture du problème de commande permet de représenter synthétiquement le système à contrôler et le cahier des charges associé. Considérons le bloc P, on l'appelle modèle augmenté. Ses entrées et sorties sont définies de la manière suivante :

- u est le signal de commande ;
- y représente les sorties mesurées ;
- w désigne les signaux exogènes tels que les perturbations et les consignes ;
- z regroupe les sorties à réguler.

Le bloc K désigne le régulateur. C'est le transfert entre la sortie z et l'entrée w qui rend compte du cahier des charges. Il s'exprime au travers de la Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT) inférieure notée $\mathcal{F}_l(P,K)$. Les commandes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ visent à trouver le régulateur stabilisant K permettant de minimiser la norme $\mathcal{H}_2$, respectivement $\mathcal{H}_\infty$, de $\mathcal{F}_l(P,K)$.

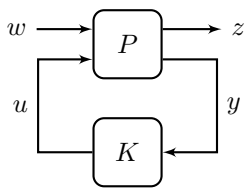

FIGURE 7.8 – Forme standard

7.4.2.2 Commande $\mathcal{H}_2$

Ainsi que nous l'avons mentionné on peut aisément écrire le problème LQG sous forme d'un problème $\mathcal{H}_2$. Le lecteur intéressé peut se référer à [20]. Ainsi le problème $\mathcal{H}_2$ peut à la fois être interprété comme un problème de commande optimale LQG ou comme une méthode de synthèse fréquentielle pondérée. L'approche la plus utilisée dans le domaine du contrôle actif acoustique reste l'approche LQG (voir ci-dessus). On peut toutefois citer l'application de la commande $\mathcal{H}_2$ faite dans [53].

7.4.2.3 Commande $\mathcal{H}_\infty$

La commande $\mathcal{H}_\infty$ est reconnue pour sa capacité à prendre en compte des exigences de robustesse. L'objectif visé au travers de la formulation standard est de minimiser la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert $T_{w\to z}$. Pour y parvenir une voie consiste à résoudre le problème $\mathcal{H}_\infty$ sous-optimal, à savoir qu'on optimise les paramètres de K de manière à satisfaire :

$$\|\mathcal{F}_l(P,K)\|_\infty = \|T_{w\to z}\|_\infty < \gamma \tag{7.25}$$

γ étant un réel positif. On réduit ensuite la valeur de γ de manière à approcher la valeur optimale. Notons toutefois que si la propriété suivante est établie :

$$\|T_{w\to z}\|_\infty < \gamma \qquad \Rightarrow \qquad \|T_{w_j\to z_i}\|_\infty < \gamma \qquad \forall i,j \tag{7.26}$$

La réciproque est fausse. Un certain pessimisme est potentiellement introduit par cette condition seulement suffisante. Pessimisme qui est d'autant plus grand que les dimensions de $\mathcal{F}_l(P,K)$ sont grandes. La synthèse $\mathcal{H}_\infty$ peut par ailleurs être abordée de diverses manières : problème de sensibilité mixte (formulation basée système), formulation basée sur les signaux (norme induite) ou encore approche par loop-shaping (voir [20] et [48]).

La stratégie de commande $\mathcal{H}_\infty$ a été appliquée dans différentes situations au problème de contrôle actif acoustique. On la retrouve notamment dans les publications suivantes : [54], [55], [56], [57], [58].

7.4.3 LMI et commande multi-objectif

Une autre manière de formaliser un problème de commande sous la forme d'un problème d'optimisation convexe consiste à l'écrire sous forme d'inégalités matricielles linéaires (acronyme anglais LMI). Cette approche permet de poser et de résoudre, dans un formalisme unifié, nombre de problèmes de commande. Nous ne détaillons pas dans ce mémoire la théorie sur les LMI mais renvoyons pour cela aux livres [20] et [59].

Nous retrouvons cette approche appliquée au contrôle actif acoustique dans la publication [23]. Elle y est utilisée pour résoudre un problème $\mathcal{H}_\infty$ multi-objectif. Un autre papier, [8], appliqué à un dispositif d'appui-tête actif met en également en œuvre une approche multi-objectif $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. La résolution est faite par programmation quadratique séquentielle. Dans ces deux papiers la formulation multi-objectif est appliquée à un cas monovariable.

Dans le présent travail c'est également une approche multi-objectif qui est visée. La méthode de résolution que nous avons retenue est basée sur les outils de l'optimisation non lisse présentés dans [60]. Nous revenons sur les raisons de ce choix dans le chapitre 8.

7.5 Robustesse

Un dernier point qui mérite d'être abordé dans cet état de l'art concerne la prise en compte des incertitudes. Plusieurs voies sont envisageables. La première consiste à considérer une incertitude paramétrique (structurée). Il faut pour cela que le modèle de synthèse contienne un ou plusieurs paramètres incertains (e.g. α dans le cas monoparamétrique), dont on puisse borner la valeur dans un certain intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$. On écrit alors le paramètre de la manière suivante :

$$\alpha = \bar{\alpha}\,(1 + r_\alpha \Delta) \tag{7.27}$$

Dans cette expression :

- $\bar{\alpha}$ est la valeur moyenne du paramètre ;
- $r_\alpha = (\alpha_{max} - \alpha_{min}) \,/\, (\alpha_{max} + \alpha_{min})$ est l'incertitude relative sur le paramètre ;
- et Δ est un scalaire variable satisfaisant $|\Delta| \leq 1$.

Ainsi paramétré, on décrit une infinité de modèles. Les paramètres incertains considérés peuvent être des grandeurs physiques. On pourrait par exemple imaginer un modèle acoustique paramétré par la température, dont on connait la plage de valeurs admissibles. Un autre exemple pour un modèle donné sous forme modale consisterait à tenir compte d'incertitudes sur les pulsations propres et les amortissements des modes.

Une seconde approche met en jeu des incertitudes plus globales non structurées. Dans cette approche les incertitudes sont formalisées au travers d'un gabarit dans le domaine fréquentiel. Différentes formes peuvent être considérées :

- Incertitude additive ;
- Incertitude additive inverse ;
- Incertitude multiplicative ;
- Incertitude multiplicative inverse.

Dans le cas multivariable on distingue également incertitude multiplicative en entrée ou en sortie. Nous présentons ici seulement l'incertitude multiplicative (c'est la plus utilisée) dans le cas monovariable. Nous renvoyons vers [20] pour les autres cas.

Soit donc un modèle nominal G_0 et le modèle perturbé $\tilde{G}$, le modèle d'incertitude multiplicative s'écrit de la manière suivante :

$$\tilde{G}(s) = G_0(s)\,(1 + w(s)\Delta(s)) \tag{7.28}$$

Dans cette expression Δ représente n'importe quel transfert satisfaisant $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. w peut être vu comme une pondération permettant de normaliser l'incertitude. Le schéma bloc correspondant est donné en figure 7.9.

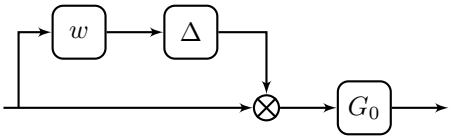

FIGURE 7.9 – Incertitude multiplicative

En développant cette équation on note que considérer un tel modèle revient à chaque pulsation ω à borner les incertitudes dans un disque du plan complexe.

$$\tilde{G}(s) = G_0(s) + G_0(s)w(s)\Delta(s) \tag{7.29}$$

Δ est une fonction de transfert stable d'amplitude inférieure à 1 à toutes les fréquences. Si on considère l'ensemble des Δ possibles, $\Delta(j\omega)$ forme à chaque fréquence dans le plan complexe un disque de rayon 1 centré à l'origine. $G_0(j\omega)+G_0(j\omega)w(j\omega)\Delta(j\omega)$ forme donc un disque de rayon $|G_0(j\omega)w(j\omega)|$ centré sur $G_0(j\omega)$ (voir en figure 7.10).

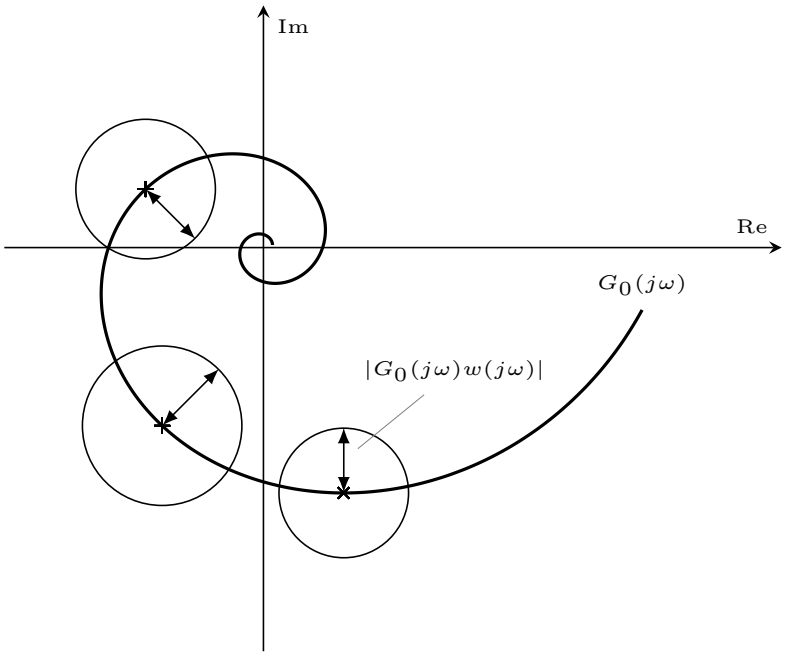

FIGURE 7.10 – Disques d'incertitudes dans le plan complexe

Lors de la construction du modèle d'incertitude on recherche donc la pondération w qui à chaque fréquence conduit à un rayon $|G_0(j\omega)w(j\omega)|$ permettant d'englober l'ensemble des incertitudes. Pour réduire le conservatisme les différents disques générés par w doivent entourer au plus près les incertitudes.

Dans la littérature du contrôle actif sont essentiellement utilisées les incertitudes non structurées multiplicative [8], [51] ou additive [54], [47].

Une dernière voie, privilégiée dans ce mémoire, consiste à considérer un jeu fini de modèles de synthèses (approche multi-modèle) et à assurer la stabilité et la performance pour chacun de ces modèles. Remarquons qu'on pourrait aussi construire à partir de ce jeu de modèles, un modèle d'incertitude non structurée et appliquer la méthodologie indiquée précédemment. Ce choix n'a pas été fait ici pour éviter tout pessimisme.

Chapitre 8

Évaluation des performances robustes atteignables

Contenu

8.1 Description du problème 92
8.2 Stratégie de commande 93
8.2.1 Critère 94
8.2.2 Robustesse aux dynamiques négligées 94
8.2.3 Robustesse aux incertitudes 94
8.2.4 Contraintes sur les pôles du régulateur 95
8.2.5 Multi-modèle 96
8.3 Méthode de résolution 96
8.4 Structuration du régulateur 97
8.4.1 Structure retour d'état observateur 97
8.4.2 Comparaison avec la forme modale 98
8.5 Initialisation 99
8.6 Résultats 100
8.6.1 Indicateurs retenus 101
8.6.2 Influence du nombre de capteurs et d'actionneurs 104
8.6.3 Comparaison feedback avec et sans feedforward 106
8.6.4 Comparaison critère $\mathcal{H}_2$ et critère $\mathcal{H}_\infty$ 108

En amont de l'application au problème industriel, on présente ici les travaux réalisés sur le démonstrateur IRCCyN Box en vue de se familiariser avec la problématique du contrôle actif dans une cavité et d'évaluer les performances robustes atteignables dans différentes configurations. Les différentes configurations mentionnées au chapitre 3 vont

être étudiées et comparées. Précisément, on propose dans ce chapitre d'étudier autour d'une formulation unifiée les trois points suivants :

1. évaluation des performances robustes atteignables en fonction du nombre d'actionneurs et de capteurs ;

2. apport d'une mesure de la perturbation et donc d'une stratégie à deux degrés de liberté, en comparaison d'une stratégie à un degré de liberté, *i.e.* par rétroaction pure ;

3. comparaison des résultats obtenus avec un critère $\mathcal{H}_\infty$ et avec un critère $\mathcal{H}_2$.

L'importante contribution de ce chapitre est de proposer un cadre d'étude formalisé permettant une comparaison équitable entre diverses architectures. Le méthodologie proposée est un outil précieux permettant de comparer précisément et quantitativement les performances maximales atteignables en fonction d'hypothèses d'architecture plus ou moins fortes.

Le contenu du chapitre est organisé de la manière suivante, on décrit tout d'abord le problème traité, on présente ensuite la stratégie de commande mise en œuvre, ainsi que la structuration et l'initialisation choisie pour le régulateur. On détaille ensuite les résultats obtenus sur l'IRCCyN Box.

8.1 Description du problème

Comme nous venons de le mentionner, le système considéré dans ce chapitre est l'IRCCyN Box. La manière dont elle est utilisée est illustrée en figure 8.1. Le haut-parleur HP_3 représenté en rouge génère la perturbation, le bruit à rejeter, tandis que les haut-parleurs HP_1 et/ou HP_2 sont utilisés pour émettre le contre-bruit. Par ailleurs, on dispose des deux microphones M_1 et M_2 pour mesurer le bruit dans la cavité. Le point rouge indique que l'objectif du contrôle est d'atténuer le bruit au niveau du seul microphone M_1.

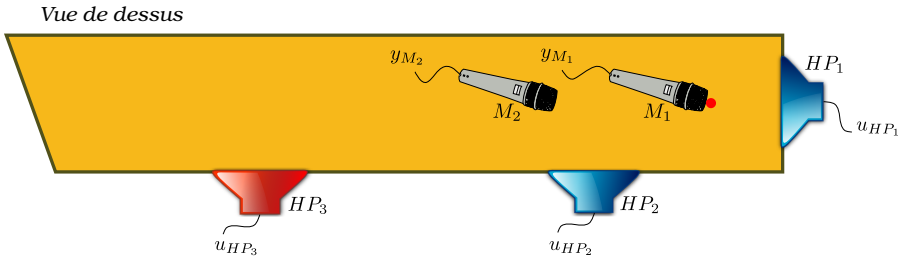

FIGURE 8.1 – Démonstrateur IRCCyN Box

D'autre part dans ce chapitre, on considère disposer du modèle du chemin primaire G_p. Le modèle de synthèse considéré, représenté en figure 8.2, inclut donc G_p et G_s.

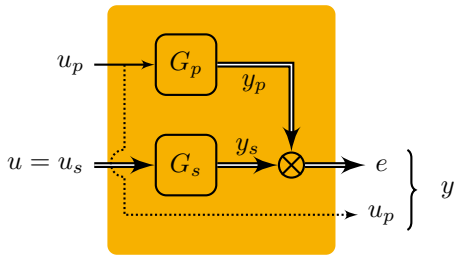

FIGURE 8.2 – Schéma bloc du démonstrateur IRCCyN Box

Les doubles flèches matérialisent les signaux possiblement vectoriels. Les notations sont les mêmes que celles utilisées au chapitre 3. Le signal e réellement mesuré par les microphones est la somme du bruit à rejeter y_p et du contre-bruit y_s. Le signal u_p est le signal u_{HP_3} de commande du haut-parleur perturbateur. Il peut suivant les cas être disponible en sortie du système et servir à la mise en œuvre d'une action de précompensation. C'est pour cette raison que la flèche amenant u_p en sortie du système apparait en pointillés. Les autres signaux dépendent du cas considéré. On indique leur définition dans le tableau 8.1, où HP_u désigne les haut-parleurs de commande (par opposition au haut-parleur perturbateur) et M les microphones de mesure. Ce tableau regroupe toutes les configurations qui seront étudiées dans la suite de ce chapitre.

	$\mathbf{u_p}$ non mesuré				**$\mathbf{u_p}$ mesuré**
	SISO1	**SISO2**	**MISO**	**MIMO**	**MIMO+**
$\mathbf{HP_u}$	HP_1	HP_2	HP_1, HP_2	HP_1, HP_2	HP_1, HP_2
$\mathbf{u = u_s}$	u_{HP_1}	u_{HP_2}	$u_{HP_1},\ u_{HP_2}$	$u_{HP_1},\ u_{HP_2}$	$u_{HP_1},\ u_{HP_2}$
M	M_1	M_1	M_1	M_1, M_2	M_1, M_2
$\mathbf{y_s}$	y_{s_1}	y_{s_1}	y_{s_1}	$y_{s_1},\ y_{s_2}$	$y_{s_1},\ y_{s_2}$
$\mathbf{y_p}$	y_{p_1}	y_{p_1}	y_{p_1}	$y_{p_1},\ y_{p_2}$	$y_{p_1},\ y_{p_2}$
e	y_{M_1}	y_{M_1}	y_{M_1}	$y_{M_1},\ y_{M_2}$	$y_{M_1},\ y_{M_2}$
y	y_{M_1}	y_{M_1}	y_{M_1}	$y_{M_1},\ y_{M_2}$	$y_{M_1},\ y_{M_2},\ u_{HP_3}$

Tableau 8.1 – Tableau des configurations

L'ordre de G est noté n et celui du régulateur n_K.

Remarque 8.1. *On considère au plus ici deux microphones et deux haut-parleurs ($l \leq 2$ et $m \leq 2$), toutefois la stratégie de commande proposée dans la suite est générique et permet a priori de considérer diverses configurations multivariables.*

Quel que soit le cas considéré, l'objectif du contrôle actif pratiqué dans ce chapitre est d'atténuer le signal e_1.

8.2 Stratégie de commande

La stratégie de commande présentée dans ce chapitre a été formulée en vue de traiter génériquement et équitablement les comparaisons indiquées en introduction du chapitre. Le

schéma bloc support de la formulation du problème de commande est donné en figure 8.3. Ce n'est autre que le schéma 8.2 sur lequel on ajoute le régulateur K.

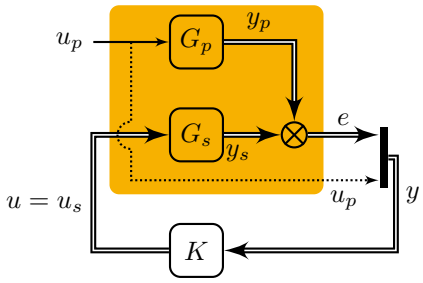

FIGURE 8.3 – Problème de commande sous forme de schéma bloc

8.2.1 Critère

L'objectif visé est l'atténuation du bruit perçu au niveau du microphone M_1. Nous sommes dans la configuration où l'on dispose du modèle du chemin primaire. Comme indiqué au chapitre 3 le transfert $T_{u_p \to e_1}$ est alors le plus approprié pour rendre compte de l'atténuation en e_1. Par ailleurs, on considère ne pas disposer de modèle de la perturbation u_p. On utilisera donc la norme $\mathcal{H}_\infty$ pour contraindre, dans le critère J, le transfert $T_{u_p \to e_1}$ pondéré par un filtre passe-bande W_1 :

$$J = \min_K \|W_1 T_{u_p \to e_1}\|_\infty \tag{8.1}$$

Ce critère sera inchangé dans les différents cas considérés. La bande passante $[f_{min}\,,\, f_{max}]$ du filtre W_1 permet de régler la plage d'atténuation.

8.2.2 Robustesse aux dynamiques négligées

L'indicateur proposé dans le chapitre 3 pour évaluer la robustesse aux dynamiques (haute fréquence) négligées dans le cas où on connait G_p est la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert $T_{u_p \to u_s}$. Afin de considérer des contraintes similaires en monovariable et en multivariable, on contraindra ici la norme $\mathcal{H}_\infty$ de chacun des transferts $T_{u_p \to u_{s_i}}$ pondéré par le filtre passe-haut W_2 :

$$\|W_2 T_{u_p \to u_{s_i}}\|_\infty < 1$$

La fréquence de coupure de W_2 est choisie de manière à fortement pénaliser les fréquences au-delà de la plage de validité du modèle de synthèse.

8.2.3 Robustesse aux incertitudes

La robustesse est obtenue en imposant une marge de module garantie. Toutefois on ne considère pas la marge de module globale, mais les marges de module locales (en sortie) $M_{m_{ij}}$ telles que définies en annexe D équation (D.3), ceci toujours afin de considérer des

contraintes permettant la comparaison entre les différents cas considérés. La contrainte de robustesse considérée est donc la suivante :

$$\|W_3 T_{y_{p_j} \to e_i}\|_\infty < 1$$

La pondération W_3 étant un simple gain, elle peut se réécrire de la manière suivante :

$$W_3 < \|T_{y_{p_j} \to e_i}\|_\infty^{-1} = \|S_{ij}\|_\infty^{-1}$$

8.2.4 Contraintes sur les pôles du régulateur

Les dernières contraintes du cahier des charges (Cf. chapitre 3) encore non prises en compte sont :

- la contrainte de stabilité forte ;
- et la contrainte de Shannon.

L'une comme l'autre peuvent se traduire par des conditions sur le positionnement des pôles du régulateur dans le plan complexe.

Le régulateur est stable si ses pôles sont à partie réelle négative :

$$Re\left(p_{i_K}\right) < -\epsilon \tag{8.2}$$

Afin de garantir le respect du théorème de Shannon lors de la discrétisation du régulateur, on impose que le module de ses pôles soit inférieur à la demi-fréquence d'échantillonnage :

$$|p_{i_K}| < \frac{2\pi f_e}{N_f} \tag{8.3}$$

Graphiquement dans le plan complexe, la satisfaction simultanée des deux contraintes nécessite que les pôles du régulateur appartiennent à l'intersection (notée $\mathcal{REG}$ sur la figure 8.4) :

- Du demi-plan gauche ;
- Et du cercle centré à l'origine et de rayon $\frac{2\pi f_e}{N_f}$.

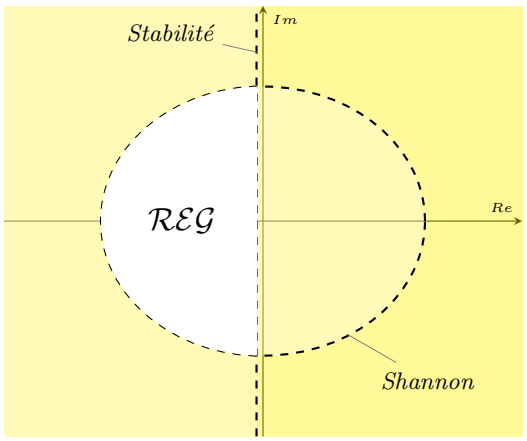

FIGURE 8.4 – Région des pôles du régulateur

8.2.5 Multi-modèle

Comme spécifié au chapitre 3, le problème de commande est considéré sous l'angle multi-modèle. Le problème d'optimisation considéré est donc le suivant :

$$\min_{K} \max_{k\in\{1,\dots,N\}} \|W_1 T^{(k)}_{u_p\to e_1}\|_\infty \quad \text{Sous contraintes} \quad \begin{cases} \max_{k\in\{1,\dots,N\}} \|W_2 T^{(k)}_{u_p\to u_{s_i}}\|_\infty < 1 \\ \max_{k\in\{1,\dots,N\}} \|W_3 T^{(k)}_{\tilde{y}_{p_j}\to e_i}\|_\infty < 1 \\ Re\left(p_{i_K}\right) < -\epsilon \\ |p_{i_K}| < \frac{2\pi f_e}{N_f} \end{cases} \tag{8.4}$$

Dans ces expressions $T^{(k)}_{u_p\to e_1}$ désigne le transfert $T_{u_p\to e_1}$ obtenu en boucle fermée avec le $k$ième modèle. Le modèle augmenté correspondant est donné en figure 8.5. Une entrée exogène notée $\tilde{y}_{p_j}$ a été ajoutée, elle n'a pas de réalité physique, mais permet de considérer la fonction de sensibilité comme un transfert entre l'une des entrées exogènes et l'une des sorties. Les flèches pointillées colorées permettent elles de spécifier sur quel transfert s'applique chacune des pondérations.

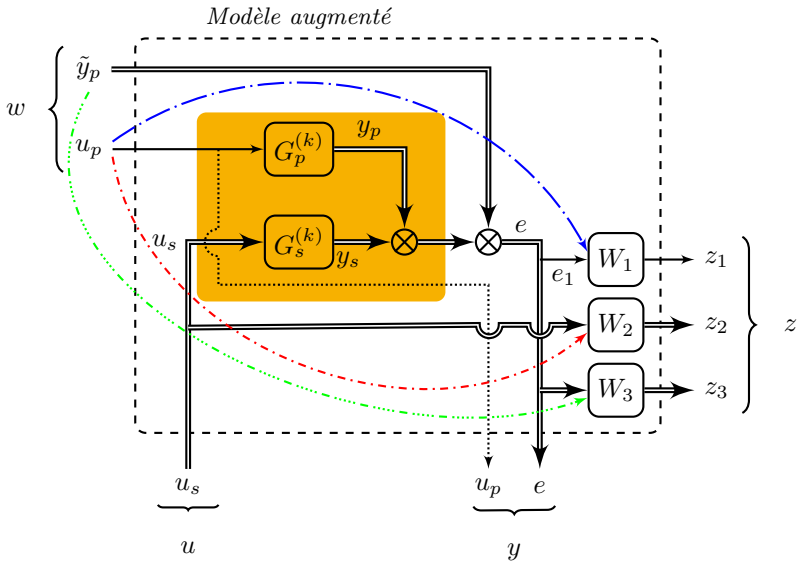

FIGURE 8.5 – Modèle augmenté

8.3 Méthode de résolution

Le problème de commande que nous venons de décrire possède plusieurs caractéristiques. Tout d'abord c'est un problème multi-objectif ($\mathcal{H}_2$ sous contrainte $\mathcal{H}_\infty$, ou $\mathcal{H}_\infty$ sous contrainte $\mathcal{H}_\infty$). Ensuite, on impose certaines contraintes sur les dynamiques du régulateur, notamment la contrainte de stabilité forte. Par ailleurs, nous l'avons vu au chapitre 6, ce problème met en jeu des modèles d'ordre élevé. Ainsi, même dans l'hypothèse où l'on pourrait se ramener par un certain nombre de relaxations (qui ne sont pas souhaitables en regard de l'objectif d'évaluer au plus près les performances atteignables) à un

problème convexe sous forme LMI, les ordres considérés ne permettraient pas de résoudre ce problème avec les outils de l'optimisation convexe. La structuration du régulateur (en vue de réduire la taille de l'espace de décision) est vraisemblablement un passage obligé pour trouver une solution efficace à ce problème de commande. De part ces différentes caractéristiques (multi-objectif, stabilité forte, régulateur structuré), le problème considéré n'est donc pas convexe et sa fonction objectif est de plus non lisse.

La voie privilégiée pour la résolution de ce problème est donc l'optimisation non lisse. En commande, cette approche a été initiée par les travaux de Pierre Apkarian et Dominikus Noll [60], [61], [62] avec le solveur `systune` d'une part et ceux de Michael Overton, Didier Henrion, Denis Arzelier et leurs co-auteurs avec le solveur `HIFOO` [63], [64]. Bien qu'il s'agisse dans les deux cas d'optimisation dans l'espace compensateur, les solutions proposées diffèrent significativement au niveau algorithmique.

Le solveur `HIFOO` procède en deux phases. Il débute avec un algorithme de quasi-Newton, puis termine par une technique d'échantillonnage de gradient (proposée dans [65] et [66]). Dans la seconde étape, le caractère non lisse est géré en échantillonnant aléatoirement le gradient au voisinage des points pour éviter de rester bloquer par un point où la fonction objectif est non lisse. De part ce caractère aléatoire, `HIFOO` a seulement un certificat de convergence probabiliste. Il peut donc pour un même point initial conduire à des solutions différentes. Par ailleurs, les informations sur le sous-gradient ne sont jamais exploitées.

Le solveur `systune` met en œuvre un algorithme purement déterministe (présenté dans [67] et [68]) procédant en une seule étape. Le sous-gradient de Clarke est calculé à chaque itération pour construire un modèle tangent du problème. Le modèle tangent est mis à jour par des méthodes de faisceaux. Contrairement à `HIFOO`, `systune` offre donc une garantie de convergence déterministe et conduit dès lors toujours à la même solution pour un point initial donné.

Une comparaison plus détaillée de `HIFOO` et `systune` est donnée dans [69]. Le présent travail utilise le solveur `systune` (version Matlab R2014a).

Notons que les algorithmes d'optimisation que nous venons de présenter n'offrent que des garanties de convergence locale. Ce caractère local doit être abordé avec précaution et nécessite une structuration et une initialisation intelligente du régulateur.

8.4 Structuration du régulateur

8.4.1 Structure retour d'état observateur

Nous avons choisi de structurer le régulateur sous forme retour d'état observateur. Cette structure permet de fixer une partie des coefficients du régulateur qui ne sont autres que ceux du modèle identifié *ad hoc*. L'observateur d'état reconstruit l'état du système, en minimisant (au travers de son gain d'observation K_f) l'écart entre la sortie mesurée e et la sortie reconstruite $\hat{e}$. Cet état estimé, noté $\hat{x}_s$, est ensuite multiplié par le gain de retour d'état K_c afin d'obtenir la commande (à appliquer aux actionneurs).

L'écriture de la représentation d'état du régulateur sous forme retour d'état observateur s'appuie sur celle du modèle G présenté en figure 8.3 :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_s u_s + B_p u_p \\ e = Cx + D_s u_s + D_p u_p \end{cases} \tag{8.5}$$

Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_s u_s + \boldsymbol{B_p u_p} + K_f(e - \hat{e}) \\ u_s = -K_c\hat{x} \end{cases} \tag{8.6}$$

Si on remplace $\hat{e}$ par son expression :

$$\hat{e} = C\hat{x} + D_s u_s + \boldsymbol{D_p u_p} \tag{8.7}$$

On obtient la représentation d'état suivante (où la matrice A provenant de G est sous forme modale (Cf. chapitre 6)) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - K_f C)\,\hat{x} + (B_s - K_f D_s)\,u_s + \boldsymbol{(B_p - K_f D_p)\,u_p} + K_f e \\ u_s = -K_c\hat{x} \end{cases} \tag{8.8}$$

Remarque 8.2. *Dans les expressions précédentes les termes en gras ne sont à considérer que pour les formulations à deux degrés de liberté incluant une action en boucle ouverte basée sur une mesure de la source de perturbation u_p.*

Le régulateur est donc du même ordre que le modèle identifié ($n_K = n$) et est paramétré par les matrices de gain K_c et K_f. Ces matrices sont respectivement de dimensions $m \times n$ et $n \times l$. Le nombre total de variables de décision est donc $n \times (m+l)$. À titre de comparaison, l'absence de structure conduirait à un problème d'optimisation avec $n^2 + n \times (m+l) + m \times l$ variables de décision.

8.4.2 Comparaison avec la forme modale

Dans notre papier [70], qui initiait notre travail en traitant du problème de contrôle actif dans une cavité dans le cas monovariable où l'on ne dispose pas de mesure de la perturbation, le régulateur était structuré sous forme modale. Notons son ordre n_m et exprimons sa représentation d'état de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_K = A_K x_K + B_K y \\ u = C_K x_K \end{cases} \tag{8.9}$$

Les matrices de cette représentation d'état sont définies comme suit :

$$A_K = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{n_2}^2 & -2\xi_2\omega_{n_2} \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{n_{2k}}^2 & -2\xi_{2k}\omega_{n_{2k}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$B_K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_K = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_{2k} & C_{2k+1} \end{bmatrix}$$

Les paramètres de C_k étant exprimés de la manière suivante :

$$C_1 = 1 \quad \begin{cases} C_2 = 2\xi_2\omega_{n_2}^2 C_2'' \\ C_3 = 2\xi_2\omega_{n_2} C_3'' \end{cases} \quad \begin{cases} C_{2k} = 2\xi_{2k}\omega_{n_{2k}}^2 C_{2k}'' \\ C_{2k+1} = 2\xi_{2k}\omega_{n_{2k}} C_{2k+1}'' \end{cases} \tag{8.10}$$

La matrice A_K est donc bloc diagonale et paramétrée par des pulsations propres et des amortissements. La matrice B_K est fixée et ne contient aucune variable de décision. Enfin la matrice C_K est paramétrée par des coefficients normalisés C_k'' qui ont la même dimension physique et des valeurs comparables.

Cette structure a plusieurs avantages, tout d'abord elle permet de limiter le nombre de paramètres optimisés et de considérer un régulateur d'ordre réduit. De plus, le sens physique qui est donné aux coefficients permet de borner les valeurs des paramètres et de réduire ainsi l'espace de décision. En effet, les coefficients d'amortissement ξ sont bornés par définition à l'intervalle [0, 1] et les pulsations propres peuvent être choisies en correspondance avec la plage d'atténuation considérée de manière à concentrer le travail du régulateur dans la plage cible du contrôle. Ces choix se sont avérés payants sur le problème monovariable considéré dans [70].

Le passage au problème multivariable (avec m signaux de commande et l sorties mesurées) mettrait en jeu pour la forme modale $n_m \times (m + l + 1)$ variables de décision. Ce nombre est comparable à celui de la forme retour d'état observateur à ceci près que n_m peut être choisi inférieur à l'ordre du modèle de synthèse et ainsi permettre de considérer un ensemble de décision plus restreint. Cette structuration n'a toutefois pas été retenue pour traiter le cas multivariable. C'est que la forme retour d'état-observateur permet encore davantage de tirer parti des connaissances *a priori* dont on dispose sur le système (modèle du chemin secondaire voire primaire). Par ailleurs, la réduction d'ordre n'est pas un enjeu central de notre étude. On cherche d'abord à évaluer la limite des performances atteignables.

8.5 Initialisation

Avant de pouvoir lancer l'optimisation, il faut au préalable traiter le problème de l'initialisation. Comme la structuration du régulateur, le choix de ce point d'initialisation mérite une certaine attention du fait des garanties de convergence seulement locales offertes par le processus d'optimisation.

La procédure proposée ici consiste à partir de la solution d'une régulation $\mathcal{H}_2$/Linéaire Quadratique Gaussienne ($\mathcal{H}_2$/LQG), facile à obtenir et de structure identique. La formulation proposée est présentée en figure 8.6. Dans cette formulation, l'erreur e est pondérée par un filtre passe-bande W_{LQ} de manière à concentrer l'atténuation dans la plage de fréquence cible $[f_{min},\ f_{max}]$. W_{LQ} joue ici le même rôle que la pondération W_1 dans la formulation non lisse. Le paramètre ρ permet lui de régler le compromis entre performance et énergie de commande. $V_{\tilde{y}_p}$ et V_{u_p} sont les matrices de covariance des bruits $\tilde{y}_p$ et u_p.

Cette initialisation fournit un point initial stable. Le problème $\mathcal{H}_2$/LQG est réglé pour que *a minima* la solution obtenue satisfasse les contraintes du problème d'optimisation non convexe visé *in fine*. Pour cela les performances doivent rester contenues. Le retour d'état est donc réglé de manière à favoriser la réduction de l'énergie de commande au détriment des performances (ρ est choisi grand).

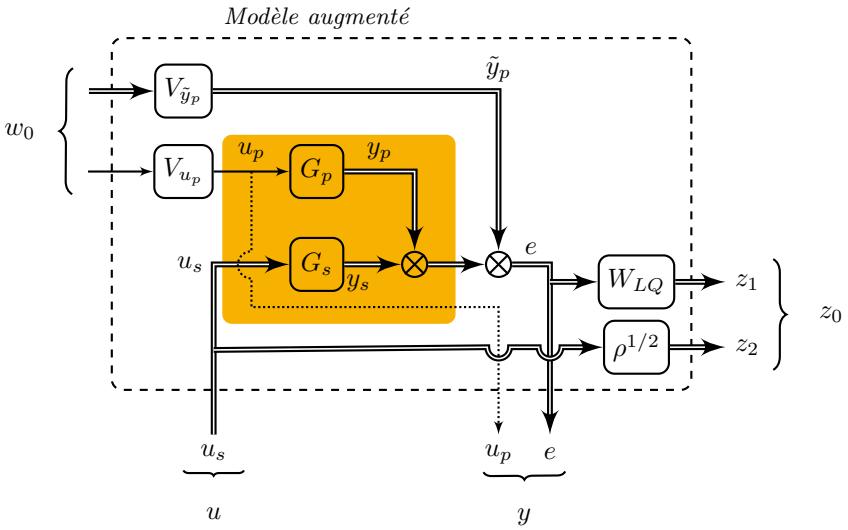

FIGURE 8.6 – Régulation $\mathcal{H}_2$/LQG

Notons de plus que la synthèse $\mathcal{H}_2$/LQG présentée ici est réalisée à partir du seul modèle « nominal ». C'est le réglage « mou » qui permet de trouver un régulateur initial satisfaisant les contraintes pour tous les modèles utilisés dans la synthèse non lisse.

Une autre voie pour l'initialisation eut été la synthèse d'un régulateur $\mathcal{H}_\infty$ standard. La réécriture du problème de commande décrit en figure 8.3 sous forme standard n'est toutefois pas directe. Elle met en jeu d'importants couplages plus difficiles à appréhender. Une étape supplémentaire serait également nécessaire pour réécrire le régulateur sous forme retour d'état observateur.

8.6 Résultats

La stratégie de commande qui vient d'être détaillée a été appliquée aux trois comparaisons mentionnées en introduction de ce chapitre, à savoir :

1. évaluation des performances robustes atteignables en fonction du nombre d'actionneurs et de capteurs ;

2. apport d'une mesure de la perturbation et donc d'une stratégie à deux degrés de liberté, en comparaison d'une stratégie à un degré de liberté, *i.e.* par rétroaction pure ;

3. comparaison des résultats obtenus avec un critère $\mathcal{H}_\infty$ et avec un critère $\mathcal{H}_2$.

Les résultats de ces trois comparaisons sont présentées dans l'ordre.

L'influence du nombre d'actionneurs et de capteurs est évaluée en comparant les résultats obtenus pour les configurations SISO1, SISO2, MISO et MIMO du tableau 8.1 et ce pour deux plages d'atténuation différentes : [190, 220] Hz et [190, 300] Hz.

La comparaison des stratégies à un et deux degrés de liberté est menée sur les configurations MIMO et MIMO+ de ce même tableau en considérant successivement les plages d'atténuation [190, 300] Hz et [100, 400] Hz.

Enfin, la comparaison $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ est réalisée sur le cas MIMO avec pour plage d'atténuation [190, 300] Hz.

En préambule de ces comparaisons, on illustre autour d'un cas de référence, somme toute classique, les indicateurs retenus parmi ceux identifiés au chapitre 3.

8.6.1 Indicateurs retenus

Le cas considéré pour présenter les indicateurs est la configuration SISO1 du tableau 8.1 avec pour plage d'atténuation [190 - 220] Hz (bande passante de la pondération W_1).

8.6.1.1 Indicateurs de robustesse

Considérons tout d'abord les indicateurs de robustesse. Ils sont, comme nous l'avons expliqué, implémentés sous forme de contraintes dures. Ces dernières doivent nécessairement être satisfaites pour que le résultat soit jugé acceptable. Ainsi dans tous les résultats présentés ci-dessous les transferts $T_{u_p \to u_{s_i}}$ respectent le gabarit W_2^{-1}, une marge de module locale en sortie de 0.5 est garantie et ce pour les trois modèles de synthèse (approche multi-modèle) utilisés. Par ailleurs, le régulateur est stable et en accord avec le théorème de Shannon. Dans la suite nous ne reviendrons pas sur ces points.

8.6.1.2 Le critère

Concernant les indicateurs de performance, on retiendra lors des comparaisons la valeur du critère. Dans le cas exemple, elle est de :

$$J = \max_{1,\dots,N} \|W_1 T_{u_p \to e_1}\|_\infty = 50.3$$

8.6.1.3 $\bar{\sigma}(T_{u_p \to e_1})$

On étudiera également le diagramme de Bode du transfert $T_{u_p \to e_1}$. Il est donné pour le cas considéré en figure 8.7. Sur cette figure on superpose les résultats obtenus avec chacun des trois modèles utilisés lors de la synthèse multi-modèle. Par la suite, pour rendre lisible les comparaisons, on considérera sur les graphiques seulement les données du modèle « nominal » présenté au chapitre 6.

8.6.1.4 Norme l_2

La norme l_2 du signal d'erreur e_1 est utile pour la dernière comparaison du chapitre portant sur la norme du critère $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. Pour comparer le résultat $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ on peut toujours utiliser l'indicateur fréquentiel $\bar{\sigma}(T_{u_p \to e_1})$, mais on ne peut plus comparer les critères. On est donc privé de d'indicateur scalaire. Il est alors possible de considérer la norme l_2 de e_1 pondérée par le filtre W_1 :

$$\|W_1 e_1\|_2$$

Pour le calcul de e_1 la simulation est faite sur le modèle nominal avec u_p défini comme un bruit blanc filtrée sur la plage [20-500] Hz. Dans le cas exemple, la valeur obtenue en boucle fermée est :

$$\|W_1 e_1\|_2 = 7.1 \times 10^{-2}$$

Les autres indicateurs de performance mentionnés au chapitre 3 ne sont pas utilisés dans ce chapitre.

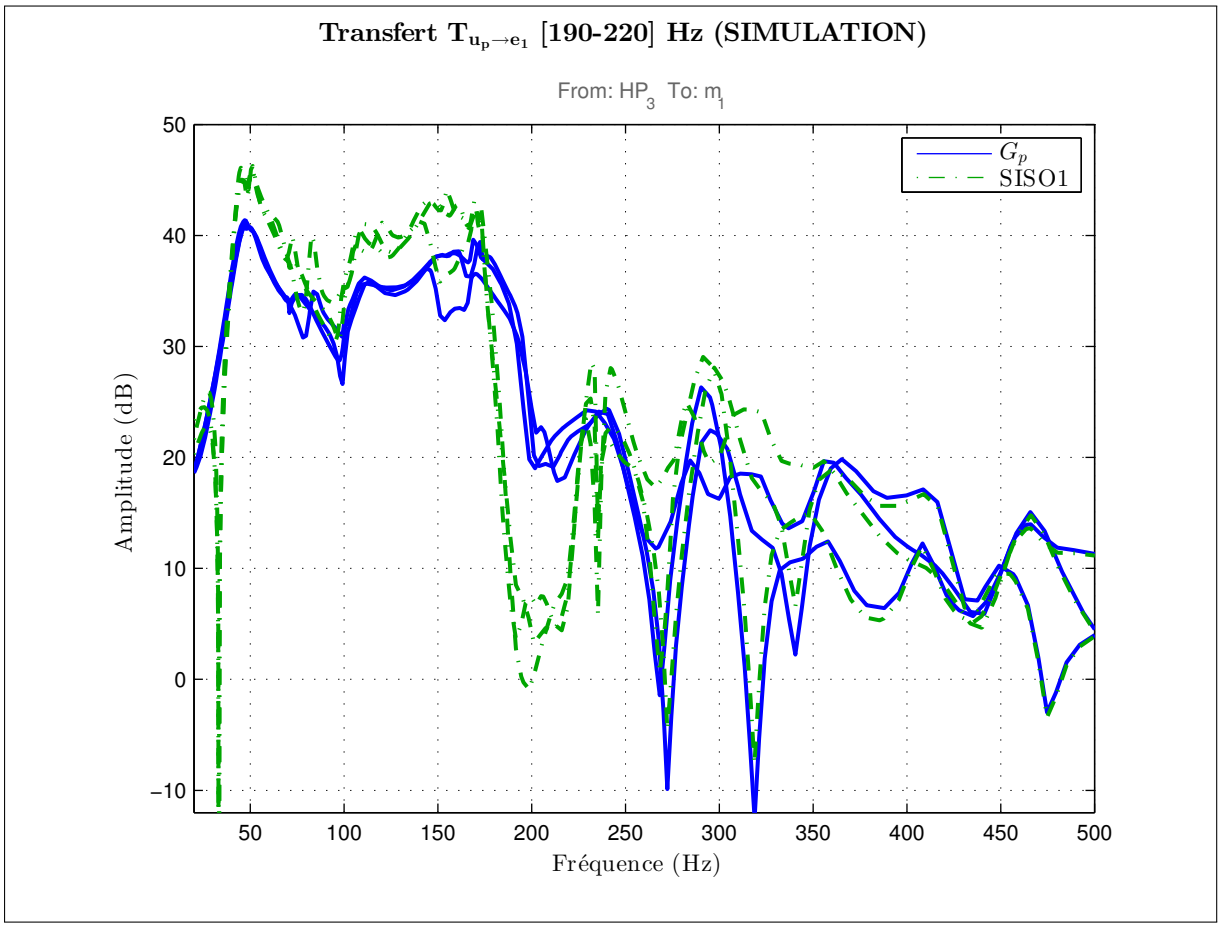

FIGURE 8.7 – Atténuation obtenue sur la plage [190-220] Hz (Simulation)

8.6.1.5 Comparaison simulation/expérimentation

Les quelques résultats qui viennent d'être présentés pour illustrer les indicateurs utilisés, ainsi que les résultats qui sont donnés dans la suite de ce chapitre ont été obtenus en simulation. Chacune de ces simulations a été validée expérimentalement. Et cette validation montre à chaque fois que simulation et expérimentation sont cohérentes. Ainsi dans la suite de ce chapitre on se limite à présenter les résultats de simulation. On donne toutefois dans ce préambule de la partie résultats deux graphiques qui illustrent sur deux cas différents cette bonne cohérence entre simulation et expérimentation. Il s'agit en figure 8.8 de la comparaison entre simulation et expérimentation pour le cas considéré jusqu'ici. Sur ce graphique, le transfert expérimental $T_{u_p \to e_1}$ a été obtenu en faisant le rapport de l'interspectre $S_{u_p e_1}$ et du spectre $S_{u_p u_p}$. D'autre part le scénario expérimental consiste à contrer le bruit blanc filtré sur [20-500] Hz appliqué en entrée du haut-parleur perturbateur. La figure 8.9 présente le même type de résultat, mais pour un cas sur lequel nous reviendrons plusieurs fois dans la suite. Il s'agit du cas MIMO où l'on considère la plage d'atténuation [190, 300] Hz.

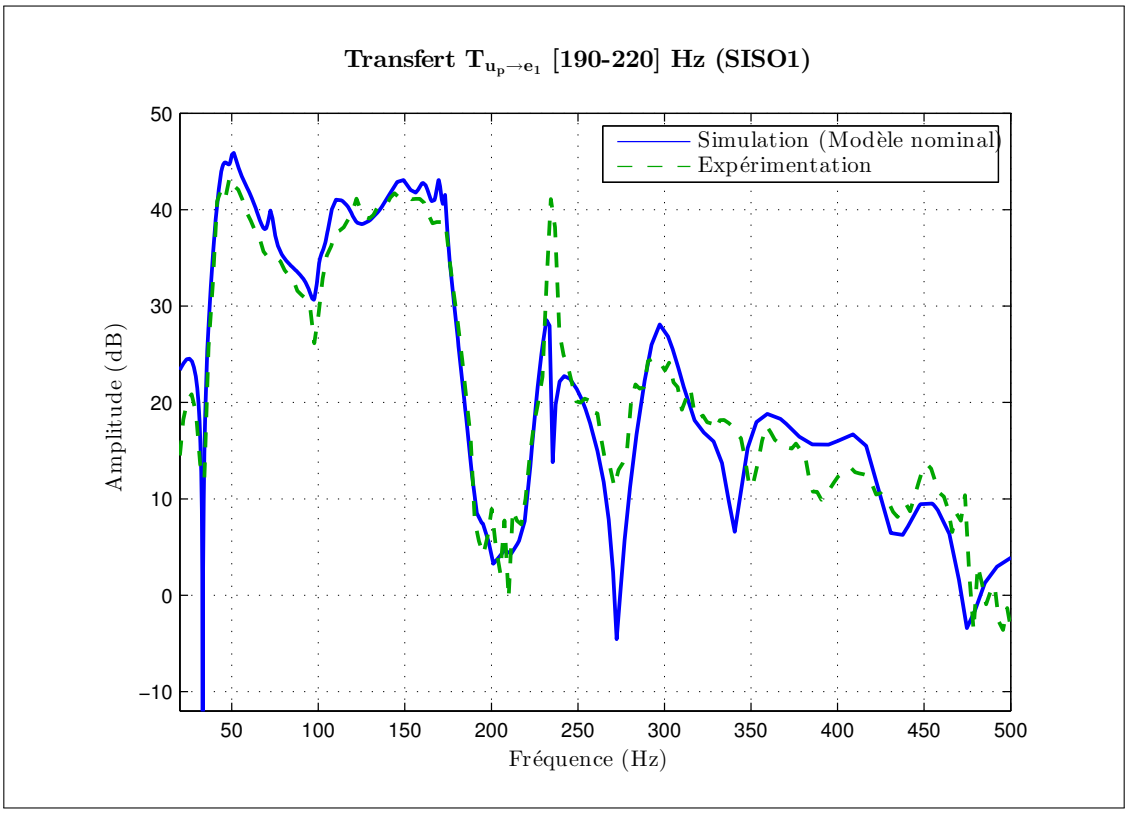

FIGURE 8.8 – Comparaison Simulation/Expérimentation dans le cas SISO1

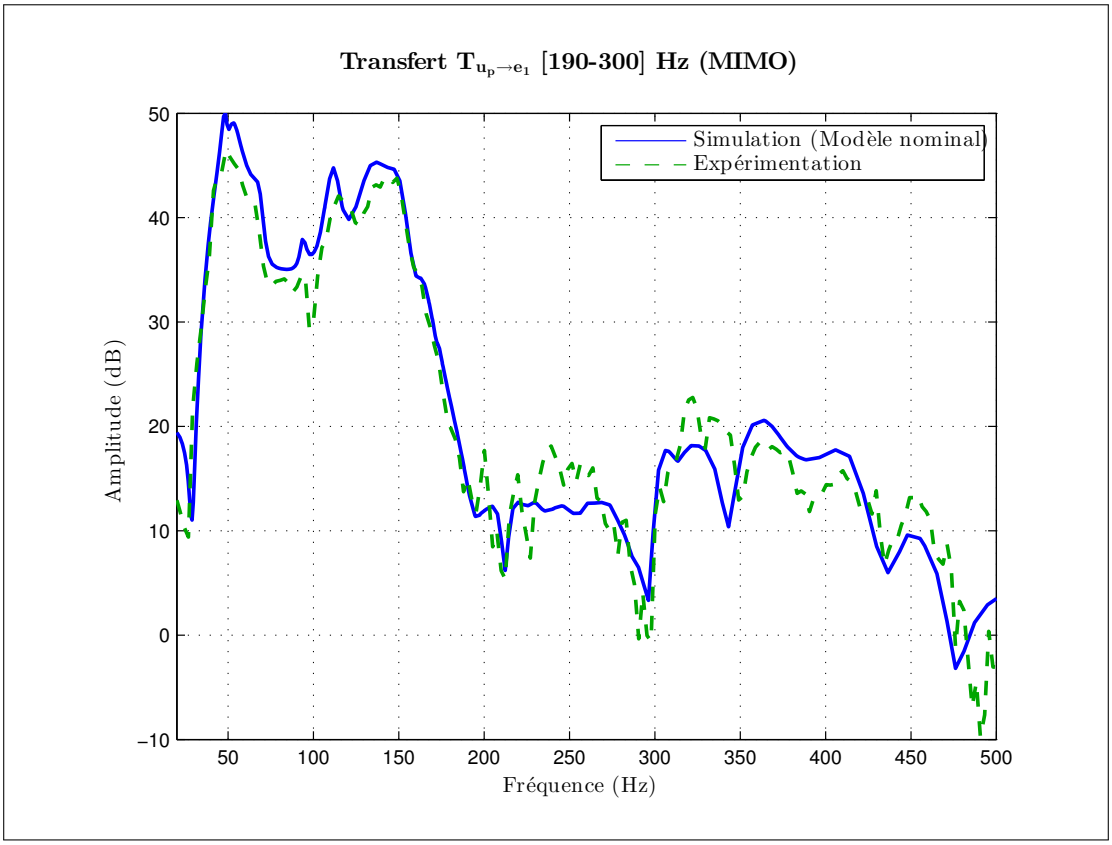

FIGURE 8.9 – Comparaison Simulation/Expérimentation dans le cas MIMO

Ces deux comparaisons montrent que les résultats de simulation sont cohérents avec les résultats expérimentaux.

8.6.2 Influence du nombre de capteurs et d'actionneurs

Ainsi que nous l'avons mentionné un peu plus haut, l'évaluation de l'influence du nombre de capteurs et d'actionneurs sur les performances atteignables est réalisée en comparant les résultats obtenus dans les quatre premières configurations du tableau 8.1 :

- SISO1 ;
- SISO2 ;
- MISO ;
- MIMO.

Dans ces configurations la perturbation n'est pas mesurée, il n'y a donc pas d'action de précompensation mise en œuvre (stratégie à un degré de liberté seulement). L'influence de cette dernière sur les performances atteignables est en effet évaluée à part dans la partie qui suit. Deux plages d'atténuation différentes ont été considérées, l'une étroite l'autre plus large :

- $[f_{min}\ ,\ f_{max}] = [190,\ 220]$ Hz
- $[f_{min}\ ,\ f_{max}] = [190,\ 300]$ Hz

Les différentes valeurs de critère obtenues pour chacun des cas considérés sont récapitulées dans le tableau 8.2.

Tableau 8.2 – Valeur du critère H_∞

	SISO1	**SISO2**	**MISO**	**MIMO**
[190-220] Hz	50.3	235.4	27.9	21.9
[190-300] Hz	322.6	271.8	148.7	91.8

On voit dans ce tableau que sur les deux plages d'atténuation la valeur du critère est meilleure (plus faible) dans le cas MIMO que dans le cas MISO. Elle est également meilleure dans le cas MISO que dans les cas SISO. L'ajout de capteurs et d'actionneurs a comme nous l'espérions, une conséquence significativement positive sur la valeur du critère et donc sur les performances atteintes. Le contrôle MIMO permet ici de diviser par deux voire trois la valeur du critère obtenue dans le meilleur cas SISO. On retrouve bien entendu ce résultat sur les diagrammes de Bode du transfert $T_{u_p \to e_1}$ présentés en figures 8.10 et 8.11 respectivement pour la plage d'atténuation $[190 - 220]\,Hz$ et $[190 - 300]\,Hz$.

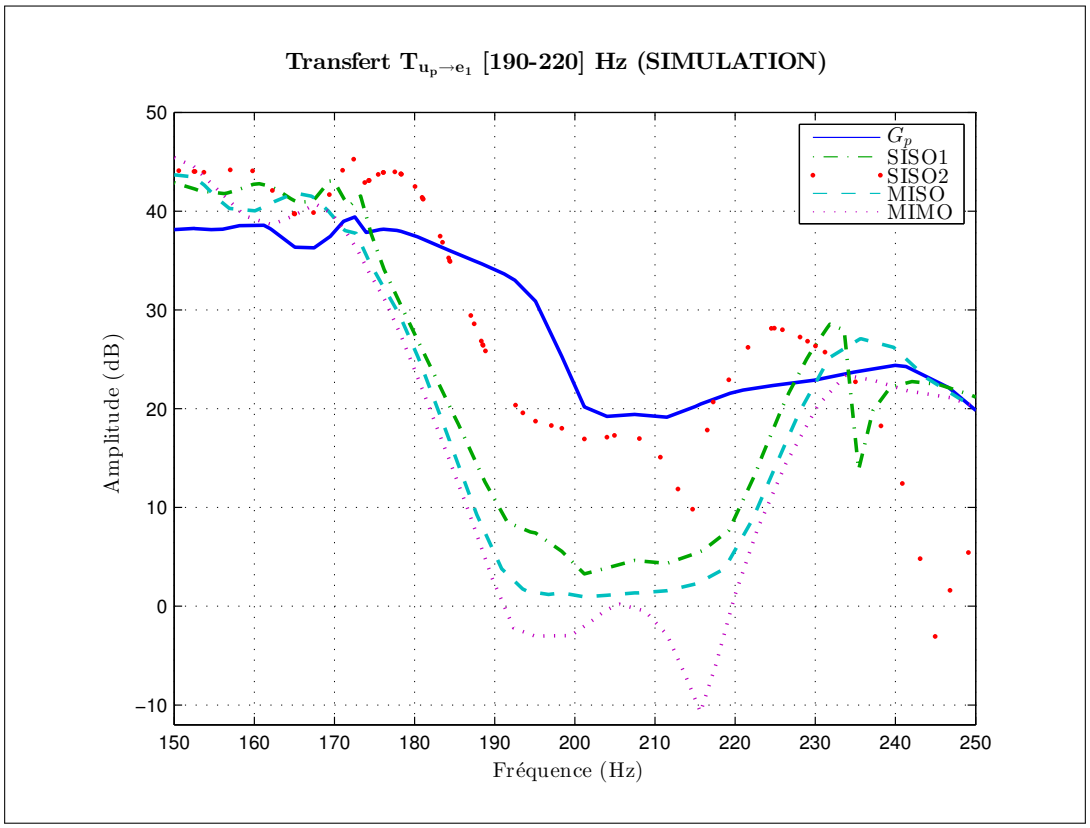

FIGURE 8.10 – Atténuation obtenue sur la plage [190-200] Hz (Simulation)

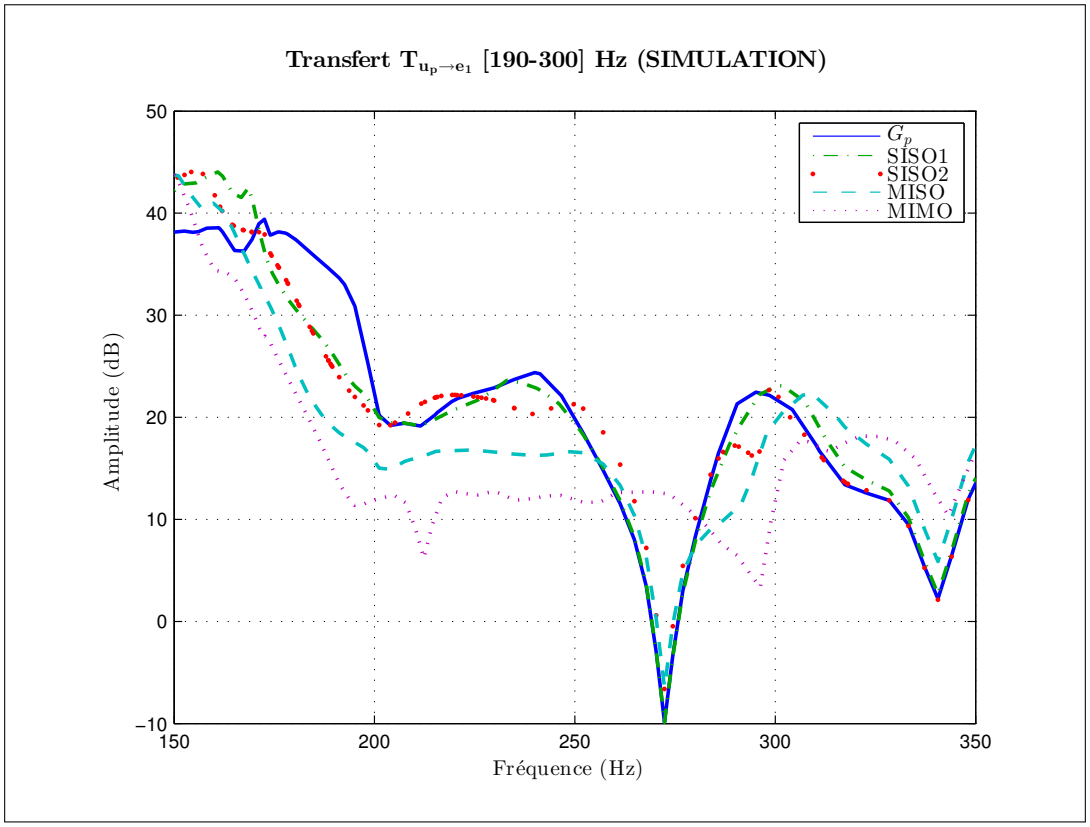

FIGURE 8.11 – Atténuation obtenue sur la plage [190-300] Hz (Simulation)

On notera également un autre constat, qui illustre la discussion du chapitre 6 en regard des limitations imposées par les zéros à non minimum de phase. On voit en effet sur la figure 8.11 que la commande SISO1 est totalement inefficace aux environs de 235 Hz, même constat pour la commande SISO2 aux environs de 220 Hz. Or ces fréquences correspondent précisément à celles de zéros à non minimum de phase des transferts monovariable du chemin secondaire donnés dans le tableau 6.2. Les commandes multivariables ne sont quant à elles pas limitées par ces zéros à non minimum de phase monovariable.

Un autre point toujours en lien avec les zéros à non minimum de phase. On voit dans le tableau 8.2 et sur la figure 8.10 que sur la plage d'atténuation [190, 220] Hz le cas SISO1 donne un bien meilleur résultat que SISO2. Ceci peut-être expliqué par le zéro instable du transfert entre le haut-parleur HP_2 et le microphone M_1 que nous venons de mentionner et qui intervient à 220 Hz. Nous avions vu que l'impact de ce zéro à non minimum de phase (voir la figure 6.4) intervenait de 210 à 230 Hz. Ce résultat se vérifie donc ici en pratique puisqu'on peine à obtenir de l'atténuation à proximité de 220 Hz. Le zéro à non minimum de phase du transfert entre le haut-parleur HP_1 et le microphone M_1 intervenant à 235 Hz ne pose lui pas de difficulté pour obtenir de l'atténuation en dessous de 220 Hz. Son impact est négligeable en dehors de la plage 230-238 Hz.

Ces résultats ont fait l'objet d'une publication en conférence [71].

8.6.3 Comparaison feedback avec et sans feedforward

L'apport d'une mesure de la perturbation est évalué en comparant les performances obtenues dans le cas MIMO et MIMO+ du tableau 8.1. Entre ces deux configurations seule varie la prise en compte ou non d'une mesure de la perturbation u_p. Deux plages d'atténuation sont de nouveau considérées, la plage la plus large de la comparaison précédente et une autre plage encore plus large :

- $[f_{min}\ ,\ f_{max}] = [190,\ 300]$ Hz
- $[f_{min}\ ,\ f_{max}] = [100,\ 400]$ Hz

Les valeurs de critères obtenues dans ces différentes configurations sont présentées dans la tableau 8.3.

Tableau 8.3 – Valeur du critère H_∞

	MIMO	**MIMO+**
[190-300] Hz	91.8	39.5
[100-400] Hz	766.8	159.6

L'amélioration des performances apportée par la mesure de la perturbation sur la plage [190, 300] Hz est très nette puisque le critère est quasiment divisé par trois. La figure 8.12 confirme ce résultat, une atténuation supplémentaire de 10 dB est obtenue sur le transfert $T_{u_p \to e_1}$.

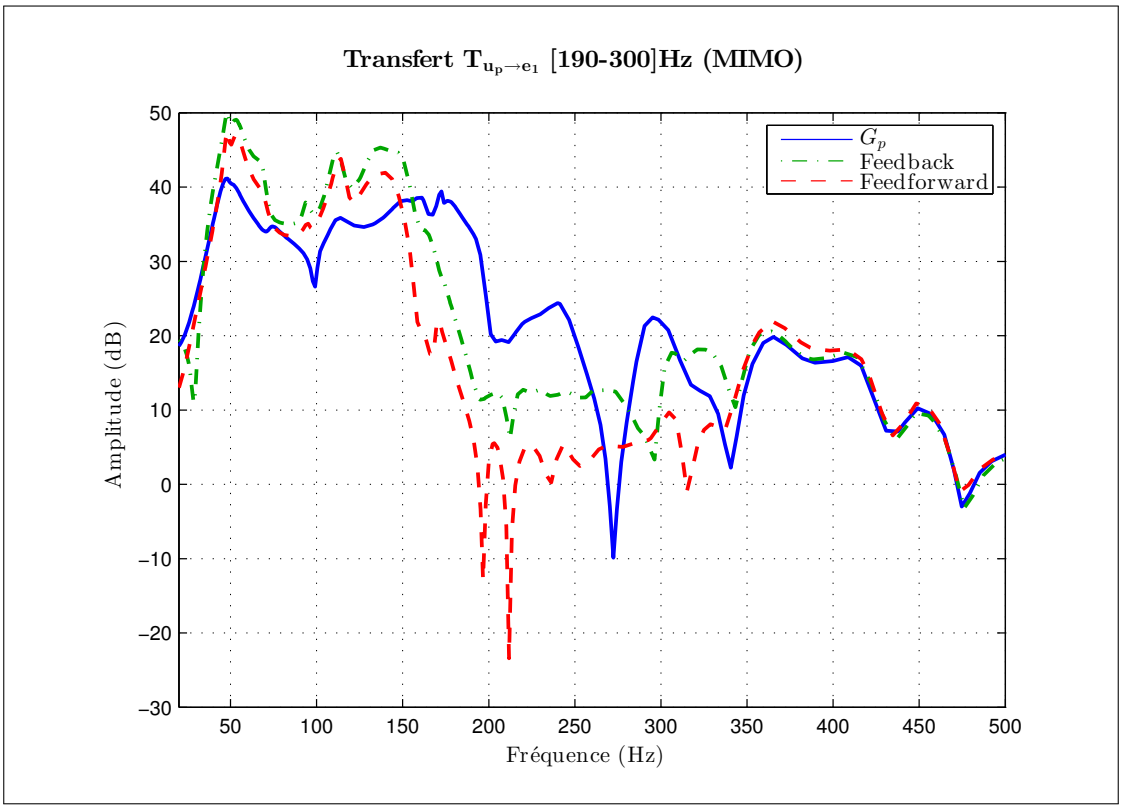

FIGURE 8.12 – Comparaison du feedforward et du feedback (Simulation)

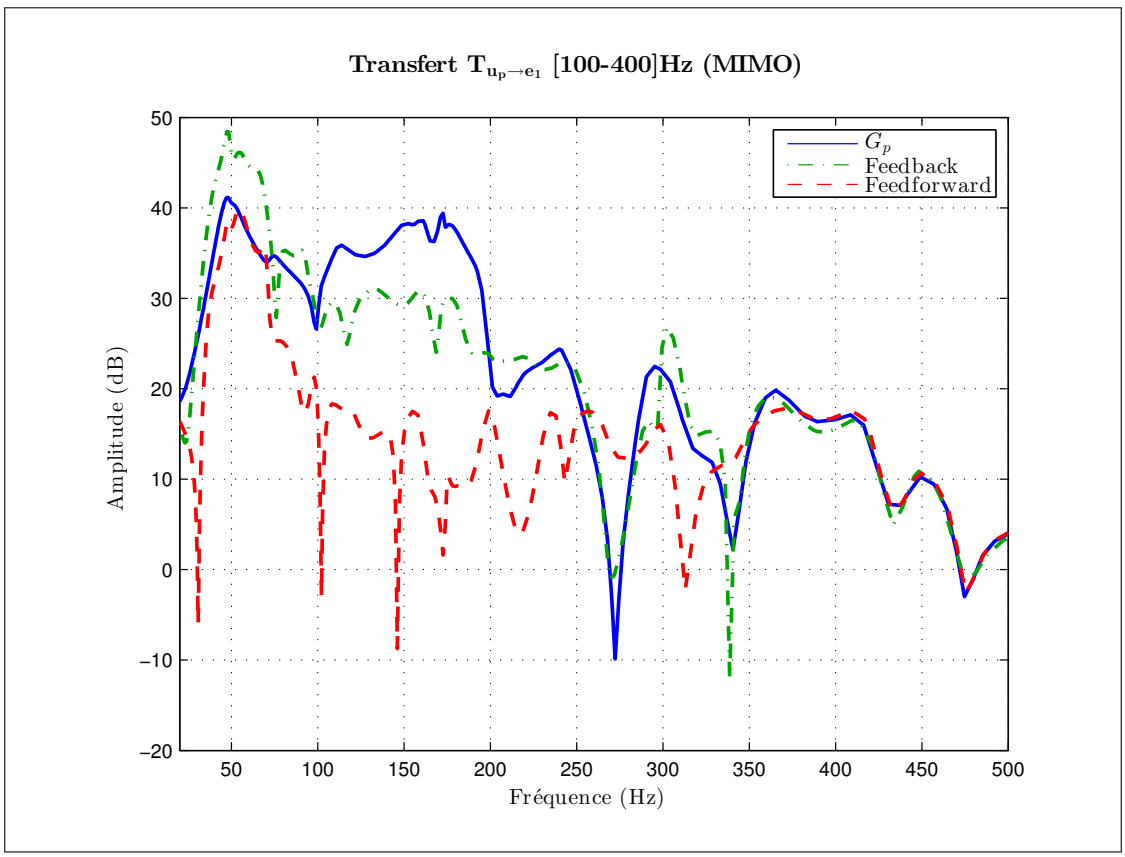

FIGURE 8.13 – Comparaison du feedforward et du feedback (Simulation)

Les résultats obtenus sur la seconde plage d'atténuation [100, 400] Hz permettent de montrer qu'en élargissant de nouveau la plage d'atténuation, la rétroaction seule commence à être limitée (critère de 766.8), alors que la stratégie à deux degrés de liberté atteint toujours un bon niveau de performance (avec un critère de 159.6). On donne les transferts $T_{u_p \to e_1}$ obtenus dans ce cas en figure 8.13. On remarquera sur ces figures que l'amplification en dehors de la plage d'atténuation est moins marquée voire inexistante pour le cas avec feedforward.

8.6.4 Comparaison critère $\mathcal{H}_2$ et critère $\mathcal{H}_\infty$

Pour comparer les performances obtenues avec un critère $\mathcal{H}_2$ et un critère $\mathcal{H}_\infty$, on ne peut plus regarder les valeurs des critères qui n'ont pas la même signification. On peut toutefois comparer le transfert sur lequel s'applique le critère : $T_{u_p \to e_1}$. Il est présenté en figure 8.14.

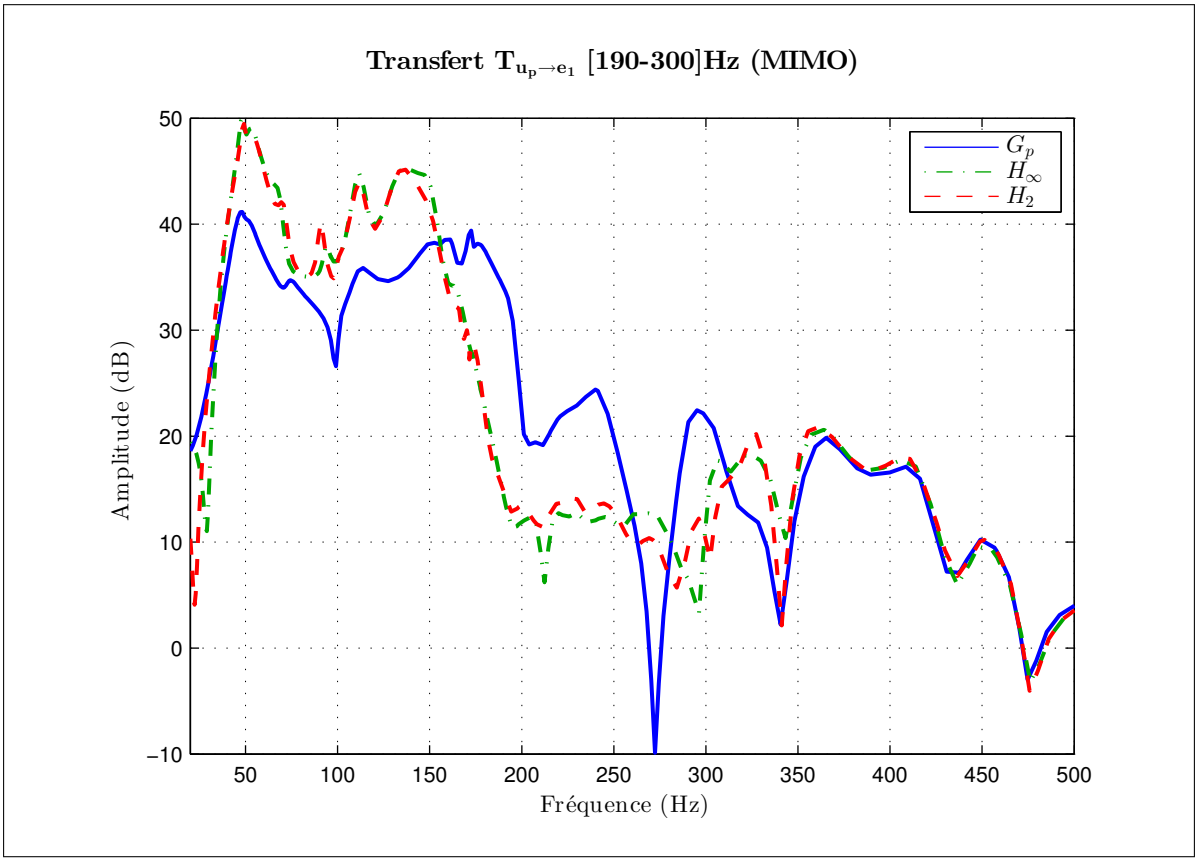

FIGURE 8.14 – Comparaison du H_2 et du H_∞ (Simulation)

On peut également calculer la norme l_2 de e_1 pondérée par le filtre W_1. On obtient :

- $\mathcal{H}_2$: $\|W_1 e_1\|_2 = 23.96 \times 10^{-2}$
- $\mathcal{H}_\infty$: $\|W_1 e_1\|_2 = 24.00 \times 10^{-2}$

La comparaison des normes l_2 donne très légèrement l'avantage à la formulation avec un critère $\mathcal{H}_2$. Cette norme est en effet la plus pertinente dans le cas où le signal de perturbation est un bruit blanc (dans le scénario de simulation pour le calcul de la norme l_2,

u_p est un bruit blanc filtré entre 20 et 500 Hz) (voir pour rappel les propriétés de la norme $\mathcal{H}_2$ en annexe C). Notons toutefois que pour l'application industrielle qui sera présentée au chapitre suivant, nous ne connaissons pas *a priori* les caractéristiques stochastiques de la perturbation. La norme $\mathcal{H}_\infty$ doit donc être préférée à la norme $\mathcal{H}_2$ pour la définition du critère sur le problème industriel.

Conclusions

Les résultats de ce chapitre montrent qu'on parvient bien à mettre en œuvre le cahier des charges. Les comparaisons sont conformes aux attentes et ont permis de quantifier précisément les performances atteignables dans différentes configurations de contrôle actif dans une cavité. Ces résultats quantifiés, les indicateurs introduits comme support de la comparaison et la formalisation proposée pour le problème d'optimisation, sont autant d'outils qui peuvent guider les concepteurs de ce type de dispositif.

Chapitre 9

Résolution du problème industriel

Contenu

9.1 Description du problème 112

9.2 Stratégie de commande 113

9.2.1 Critère 114

9.2.2 Robustesse non structurée 114

9.2.3 Robustesse aux incertitudes 114

9.2.4 Contraintes sur les pôles du régulateur 114

9.2.5 Multi-modèle 115

9.3 Structuration du régulateur 115

9.4 Initialisation du régulateur 116

9.5 Résultats 116

9.5.1 Précisions sur les indicateurs utilisés 117

9.5.2 Atténuation en basse fréquence 117

9.5.3 Largeur de la plage et niveau d'atténuation 120

9.5.4 Validations expérimentales sur l'IRCCyN Box 124

9.5.5 Confidentiel 125

Après avoir comparé au chapitre précédent différentes configurations d'un problème générique de contrôle actif acoustique dans une cavité, on se place ici dans le cadre du problème industriel. On rappelle tout d'abord les caractéristiques de ce problème. La méthodologie de commande proposée est ensuite exposée en détails, puis mise en œuvre sur les deux démonstrateurs présentés au chapitre 4.

9.1 Description du problème

L'enjeu industriel réside dans l'atténuation du bruit basse fréquence et large bande (provenant essentiellement du bruit de roulement) dans l'habitacle d'un véhicule automobile.

Comme nous l'avons indiqué au chapitre 3, puis au chapitre 7, il n'est pas aisé de disposer d'une mesure de la perturbation compatible avec les contraintes industrielles. Les solutions utilisant pour cela plusieurs accéléromètres positionnés sur les voies de passage des vibrations provenant du contact roue/chaussée [13], ne sont pas viables industriellement essentiellement pour des raisons de coût et d'intégration. On renonce donc ici à disposer d'une mesure de la perturbation. Par ailleurs, comme nous l'avons justifié en section 6.3.4 on renonce également à disposer d'un modèle de la perturbation. Ainsi pour l'application industrielle considérée on se restreint au cas le plus défavorable, où on agit seulement par rétroaction, sans mesure ni modèle de la perturbation. Le système à contrôler est donc celui présenté au chapitre 4 en figure ? ? et identifié au chapitre 6. Il est composé du seul chemin secondaire. Nous le voyons, le problème industriel est plus ardu que le problème présenté au chapitre précédent puisque nous ne disposons plus de la connaissance du chemin primaire. Ce dernier était nécessaire au chapitre précédent pour que la formulation du problème de commande permette une comparaison équitable des différentes architectures alors considérées.

Notons également que les actionneurs et les capteurs utilisés sont ceux disponibles de série sur véhicule. Leur position est considérée dans ce travail comme non négociable.

Le problème industriel vise bien sûr une application sur véhicule. En amont de cela, le problème industriel a initialement été considéré sur l'IRCCyN Box. Ce démonstrateur permet en effet de se placer dans des conditions de fonctionnement similaires à celles du cas véhicule. On présente en figure 9.1 la manière dont est utilisée l'IRCCyN Box pour cela. Comme précédemment le haut-parleur HP_3 représenté en rouge génère la perturbation, tandis que les haut-parleurs HP_1 et HP_2 sont utilisés pour émettre le contre-bruit permettant d'atténuer le bruit au niveau des deux microphones M_1 et M_2. On considère pour la synthèse ne pas mesurer le bruit perturbateur, ni disposer d'un modèle des transferts entre le haut-parleur HP_3 et les microphones de contrôle (chemin primaire). Dans ces conditions, la principale différence avec l'application industrielle réelle réside dans le nombre d'actionneurs et de capteurs (2 haut-parleurs et 2 microphones sur l'IRCCyN Box, contre 4 haut-parleurs et 3 microphones sur véhicule).

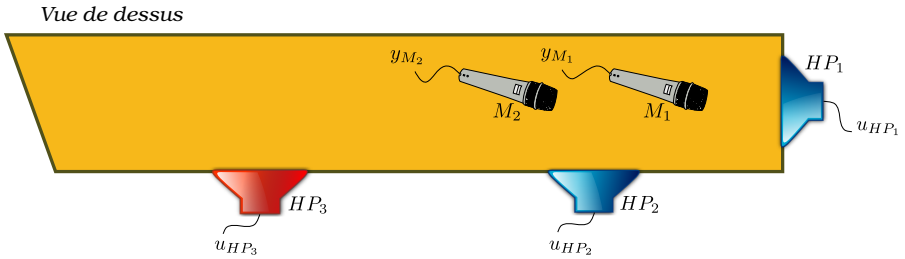

FIGURE 9.1 – Utilisation de l'IRCCyN Box avec des hypothèses en adéquation avec le problème industriel

La résolution du problème industriel telle que réalisée dans ce chapitre doit donner des éléments de réponse sur :

- Les possibilités d'atténuation en basse fréquence (en dessous de 100 Hz) ;

- Le niveau d'atténuation atteignable en fonction de la largeur de la plage d'atténuation visée ;

La stratégie de commande sera mise en œuvre en simulation et expérimentalement sur l'IRCCyN Box. Les résultats ainsi obtenus seront chacun confrontés aux résultats de simulation obtenus sur le cas véhicule.

9.2 Stratégie de commande

Le problème de commande à considérer se présente donc comme un problème de rejet de perturbation de sortie par rétroaction. Seuls interviennent le chemin secondaire G_s, la perturbation y_p. G_p n'est pas connu et ne fait donc pas partie du modèle augmenté présenté en figure 9.2 (Cf. contour en pointillé). La définition des différents signaux du schéma 9.2 est donnée dans le tableau 9.1 (il permet de faire le lien avec les schémas ? ? (véhicule) et 9.1 (IRCCyN Box)).

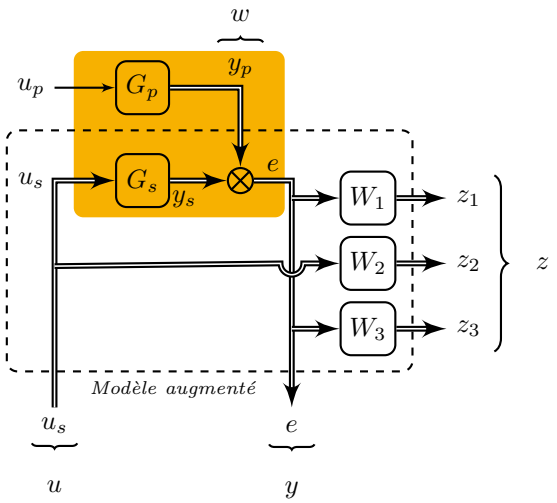

FIGURE 9.2 – Modèle augmenté pour la résolution du problème industriel

	Véhicule	**IRCCyN Box**
$\mathbf{HP_u}$	HP_1, HP_2, HP_3, HP_4	HP_1, HP_2
$\mathbf{u = u_s}$	u_{HP_1}, u_{HP_2}, u_{HP_3}, u_{HP_4}	u_{HP_1}, u_{HP_2}
$\mathbf{M}$	M_1, M_2, M_3	M_1, M_2
$\mathbf{y_s}$	y_{s_1}, y_{s_2}, y_{s_3}	y_{s_1}, y_{s_2}
$\mathbf{y_p}$	y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_3}	y_{p_1}, y_{p_2}
$\mathbf{y = e}$	y_{M_1}, y_{M_2}, y_{M_3}	y_{M_1}, y_{M_2}

Tableau 9.1 – Définition des signaux pour le problème industriel

Le problème d'optimisation adapté aux contraintes industrielles du problème de contrôle actif visé, qui est considéré est le suivant :

$$\min_{K} \max_{i,j} \|W_1 T_{y_{p_j} \to e_i}\|_\infty \quad \text{Sous contraintes} \quad \begin{cases} \|W_2 T_{y_p \to u_s}\|_\infty < 1 \\ \|W_3 T_{y_p \to e}\|_\infty < 1 \\ Re\left(p_{i_K}\right) < -\epsilon \\ |p_{i_K}| < \frac{2\pi f_e}{N_f} \end{cases} \tag{9.1}$$

Il s'appuie sur les différents indicateurs de performance et de robustesse définis au chapitre 3. Il possède également de nombreux points communs avec la formulation du chapitre précédent, nous détaillons ci-dessous les différences.

9.2.1 Critère

Nous sommes dans le cas où l'on ne dispose pas de modèle de la perturbation, la norme retenue pour la définition du critère est donc la norme $\mathcal{H}_\infty$. Le transfert pénalisé est la fonction de sensibilité en sortie $S = T_{y_p \to e}$. Comme préconisé au chapitre 3 ce n'est pas la sensibilité multivariable qui est pénalisée mais le max des transferts monovariables. La pondération W_1 est un filtre passe-bande jouant le même rôle que dans la formulation précédente, sa bande passante $[f_{min}\ ,\ f_{max}]$ règle la plage d'atténuation désirée.

$$J = \min_{K} \max_{i,j} \|W_1 T_{y_{p_j} \to e_i}\|_\infty \tag{9.2}$$

9.2.2 Robustesse non structurée

La robustesse aux dynamiques négligées est évaluée au travers de la norme $\mathcal{H}_\infty$ de la sensibilité de la commande ($KS = T_{y_p \to u_s}$) pondérée par un filtre passe-haut W_2, qui pénalise les hautes fréquences non modélisées.

$$\|W_2 T_{y_p \to u_s}\|_\infty < 1 \tag{9.3}$$

9.2.3 Robustesse aux incertitudes

La robustesse aux incertitudes est obtenue au travers de la seconde contrainte qui impose une valeur minimale de marge de module multivariable :

$$W_3 < \|T_{y_p \to e}\|_\infty^{-1} = \|S\|_\infty^{-1} \tag{9.4}$$

W_3 est un simple gain.

9.2.4 Contraintes sur les pôles du régulateur

Les contraintes sur les dynamiques du régulateur restent inchangées.

9.2.5 Multi-modèle

La réécriture du problème sous forme multi-modèle est la suivante :

$$\min_{K} \max_{k\in\{1,\dots,N\}} \max_{i,j} \|W_1 T^{(k)}_{y_{p_j}\to e_i}\|_\infty \quad \text{Sous contraintes} \quad \begin{cases} \max_{k\in\{1,\dots,N\}} \|W_2 T^{(k)}_{y_p\to u_s}\|_\infty < 1 \\ \max_{k\in\{1,\dots,N\}} \|W_3 T^{(k)}_{y_p\to e}\|_\infty < 1 \\ Re\left(p_{i_K}\right) < -\epsilon \\ |p_{i_K}| < \frac{2\pi f_e}{N_f} \end{cases} \tag{9.5}$$

Dans les résultats présentés dans la suite de ce chapitre, cette précaution supplémentaire est prise seulement sur le démonstrateur IRCCyN Box. Non pas qu'elle ne soit pas nécessaire dans le cas véhicule, mais nous ne disposons pas des données permettant l'obtention de plusieurs modèles. D'autre part les ordres des modèles véhicule sont grands, et si l'approche multi-modèle permet d'améliorer notablement la robustesse de l'asservissement, elle vient également accroître la taille du problème d'optimisation. Ainsi, il est possible que le recours à une synthèse multi-modèle sur le cas véhicule complique encore un peu plus la résolution numérique du problème de commande. Ce point n'a pu être traité durant la thèse mais devra être approfondi en vue d'une mise en œuvre expérimentale sur véhicule.

La résolution du problème d'optimisation que nous venons d'écrire est faite au travers d'une approche multi-objectif. Les motivations sont les mêmes qu'au chapitre précédent. Le caractère local de l'optimisation requiert un choix pertinent quant à la structuration et l'initialisation du régulateur.

9.3 Structuration du régulateur

Le régulateur est de nouveau mis sous forme retour d'état observateur. Sa représentation d'état est construite à partir de celle du modèle du chemin secondaire G_s :

$$\begin{cases} \dot{x}_s = A_s x_s + B_s u_s \\ y_s = C_s x_s + D_s u_s \end{cases} \tag{9.6}$$

Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_s = A_s \hat{x}_s + B_s u_s + K_f(e - \hat{y}_s) \\ u_s = -K_c \hat{x}_s \end{cases} \tag{9.7}$$

Si on remplace $\hat{y}_s$ par son expression :

$$\hat{y}_s = C_s \hat{x}_s + D_s u_s \tag{9.8}$$

On obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_s = \left(A_s - K_f C_s\right) \hat{x}_s + \left(B_s - K_f D_s\right) u_s + K_f e \\ u_s = -K_c \hat{x}_s \end{cases} \tag{9.9}$$

9.4 Initialisation du régulateur

L'initialisation est réalisée au travers d'une synthèse $\mathcal{H}_2$/LQG (présentée en figure 9.3) similaire à celle du chapitre précédent. De nouveau, le paramètre ρ est réglé « mollement », de manière à satisfaire les contraintes du problème non lisse qui ne sont pas explicites dans le problème $\mathcal{H}_2$/LQG. Cela permet également d'assurer que le régulateur initial synthétisé sur le modèle nominal stabilise aussi les autres modèles lors des synthèses multi-modèles.

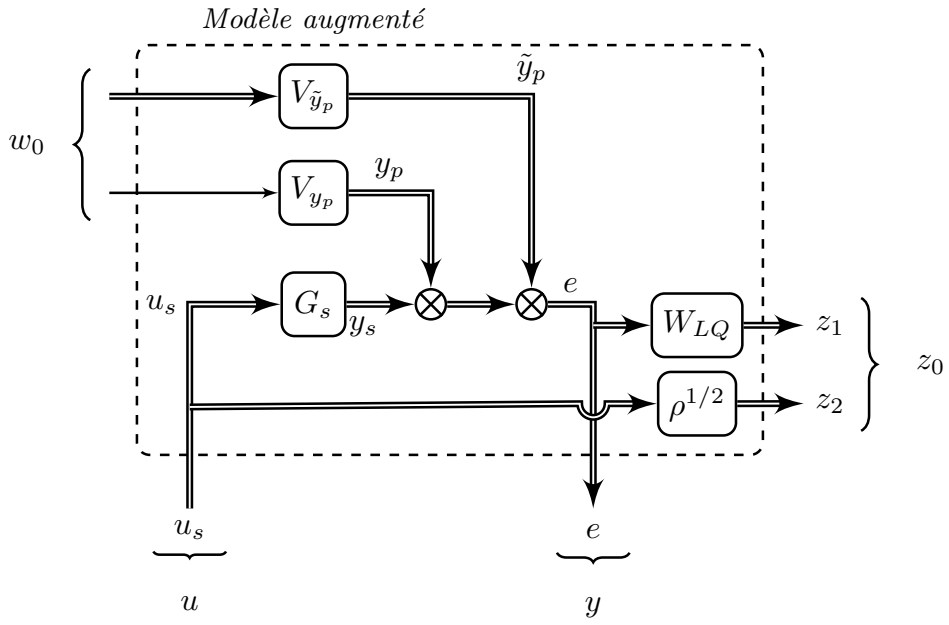

FIGURE 9.3 – Régulation $\mathcal{H}_2$/LQG

9.5 Résultats

Dans cette partie sont évaluées les différents points mentionnés dans la description du problème, à savoir :

- Les possibilités d'atténuation en basse fréquence ;
- Le niveau d'atténuation atteignable en fonction de la largeur de la plage d'atténuation visée ;
- La validation expérimentale des résultats de simulation ;

Les deux premiers points sont traités en simulation sur les deux démonstrateurs (IRCCyN Box et Véhicule), tandis que le dernier l'est expérimentalement sur l'IRCCyN Box seulement.

9.5.1 Précisions sur les indicateurs utilisés

9.5.1.1 Critère

La valeur de la fonction de coût à optimiser est normalisée (voir section 3.2.4.1) de telle sorte qu'on obtient de l'atténuation dans la plage désirée que si ce critère est inférieur à 1.

9.5.1.2 $\bar{\sigma}(T_{y_{p_j} \to e_i}(j\omega))$

On analyse également la valeur singulière du transfert de la sensibilité qui maximise le critère d'optimisation. Dans le cas de l'IRCCyN Box une approche multi-modèle est mise en œuvre, on précise alors (en légende des graphiques) le modèle auquel appartient le transfert considéré. Le numéro du modèle correspond à la numérotation des réponses en fréquence de la figure 6.1 donnée au chapitre 6.

9.5.1.3 $\texttt{RDSP}_\texttt{i}(j\omega)$

On présente enfin si nécessaire l'atténuation perçue au niveau des différents microphones de mesure en comparant les spectres obtenus avec et sans contrôle.

Sur l'IRCCyN Box on obtient les spectres en appliquant un bruit blanc filtré entre [20-500]Hz sur l'entrée du chemin primaire u_p.

Sur véhicule seules des simulations ont été réalisées. Lors de ces simulations, le bruit de perturbation y_p est choisi comme un bruit blanc filtré entre [20-500]Hz. y_p est un signal vectoriel dont les composantes ne sont pas indépendantes ; on ne peut donc pas appliquer des bruits indépendants sur chaque entrée. Dans les simulations qui suivent c'est le même bruit blanc filtré qui est appliqué sur chacune des entrées y_{p_j} (notons que cette configuration n'est pas pleinement réaliste).

9.5.2 Atténuation en basse fréquence

Examinons tout d'abord les possibilités d'action en basse fréquence sur l'IRCCyN Box puis sur le véhicule.

9.5.2.1 IRCCyN Box

Nous avons déjà commenté le fait que les haut-parleurs qui équipent l'IRCCyN Box n'ont pas d'enceinte arrière. Ainsi, bien qu'il s'agisse de haut-parleurs de petite taille ils permettent d'agir relativement bas en fréquence. Nous avions déjà conjecturé ce résultat en analysant au chapitre 4 les réponses en fréquence mesurées sur le démonstrateur. On confirme ici cette conjecture par les résultats obtenus en contrôlant le bruit dans la plage [50-80] Hz. La valeur du critère obtenue est 0.47 ; il est associé au transfert $T_{y_{p_1} \to e_1}$ (du modèle 3) dont l'amplitude est donnée en figure 9.4.

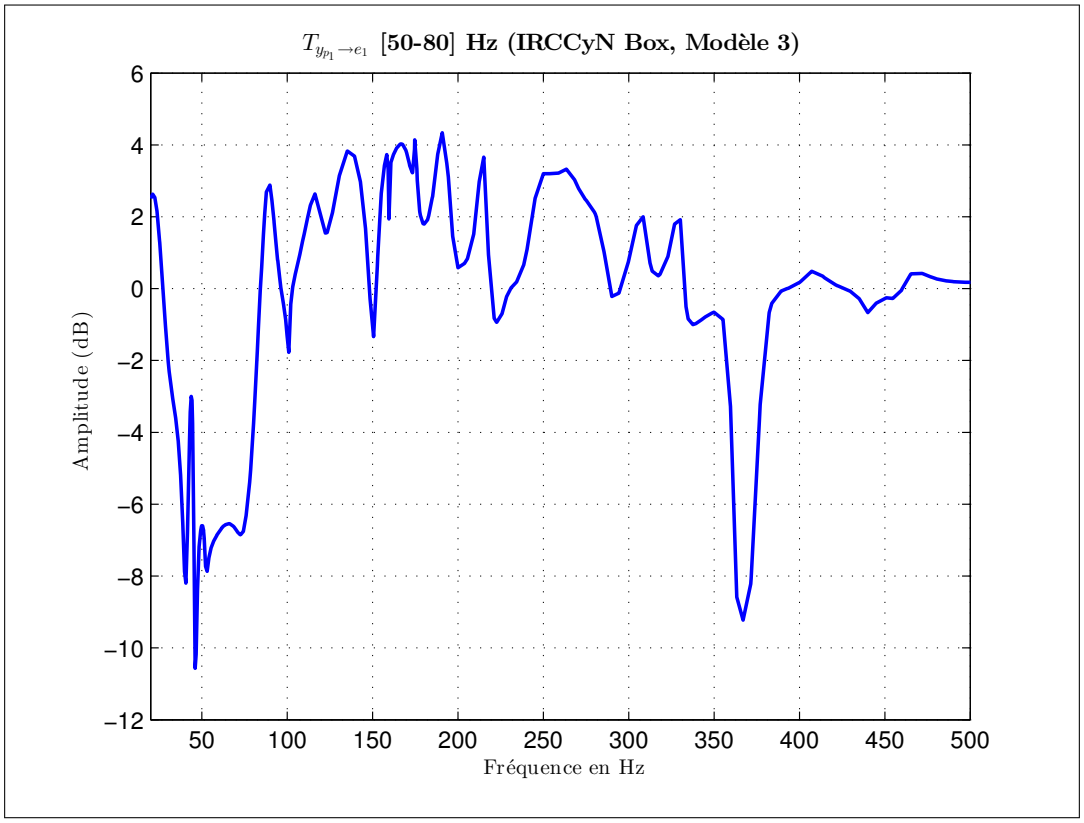

FIGURE 9.4 – Transfert $T_{y_{p_1} \to e_1}$ (modèle 3) (plage d'atténuation [50-80] Hz) (Simulation)

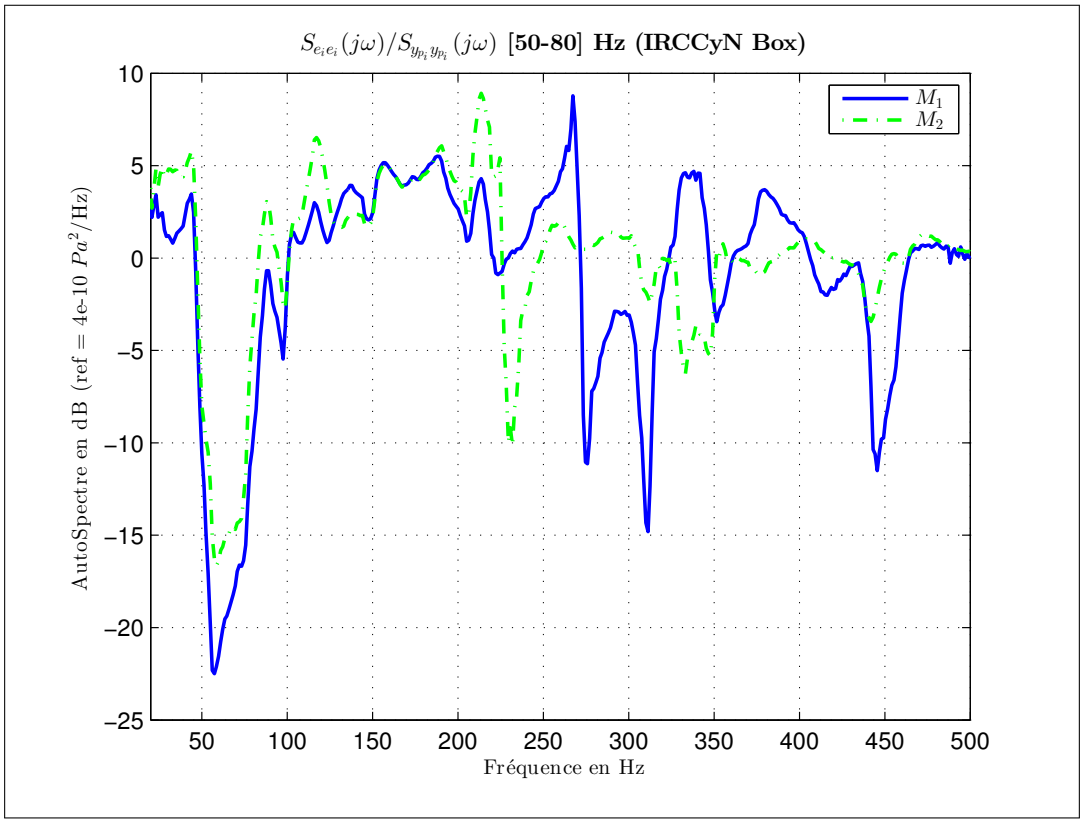

FIGURE 9.5 – Atténuation perçue au niveau des microphones M_1 et M_2 (Simulation)

L'atténuation perçue localement au niveau des microphones entre fonctionnement en boucle ouverte et fonctionnement en boucle fermée est fidèle à ce résultat, comme le montre la figure 9.5. L'atténuation dans la plage d'atténuation atteint 15 à 20 dB. On constate également comme attendu de l'amplification en dehors de la plage d'atténuation, qui illustre le phénomène d'effet waterbed qu'on retrouve systématiquement lors de régulation par rétroaction.

9.5.2.2 Véhicule

On présente ci-dessous les résultats obtenus sur véhicule en considérant la même plage d'atténuation. Le critère final est de 0.70 ; il est associé au transfert $T_{y_{p_3} \to e_3}$. Si on compare ce résultat à ceux obtenus un peu plus haut en fréquence (voir ci-dessous la deuxième ligne du tableau 9.2), les difficultés présagées en basse fréquence au regard des réponses en fréquence mesurées sur le système ne semblent pas ou peu se vérifier.

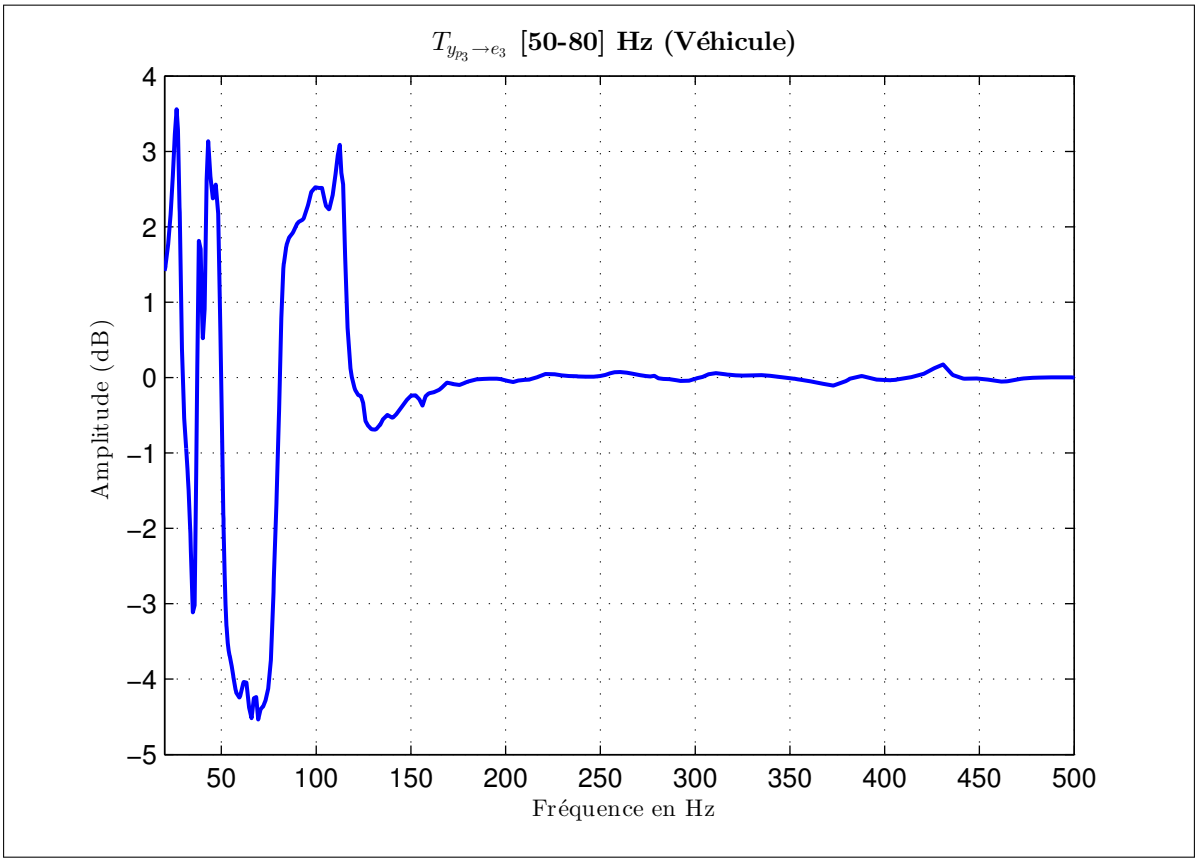

FIGURE 9.6 – Transfert $T_{y_{p_3} \to e_3}$ (plage d'atténuation [50-80] Hz) (Simulation)

De même l'atténuation perçue localement au niveau des microphones est fidèle à ce résultat (voir la figure 9.7). L'atténuation constatée atteint environ 8 dB.

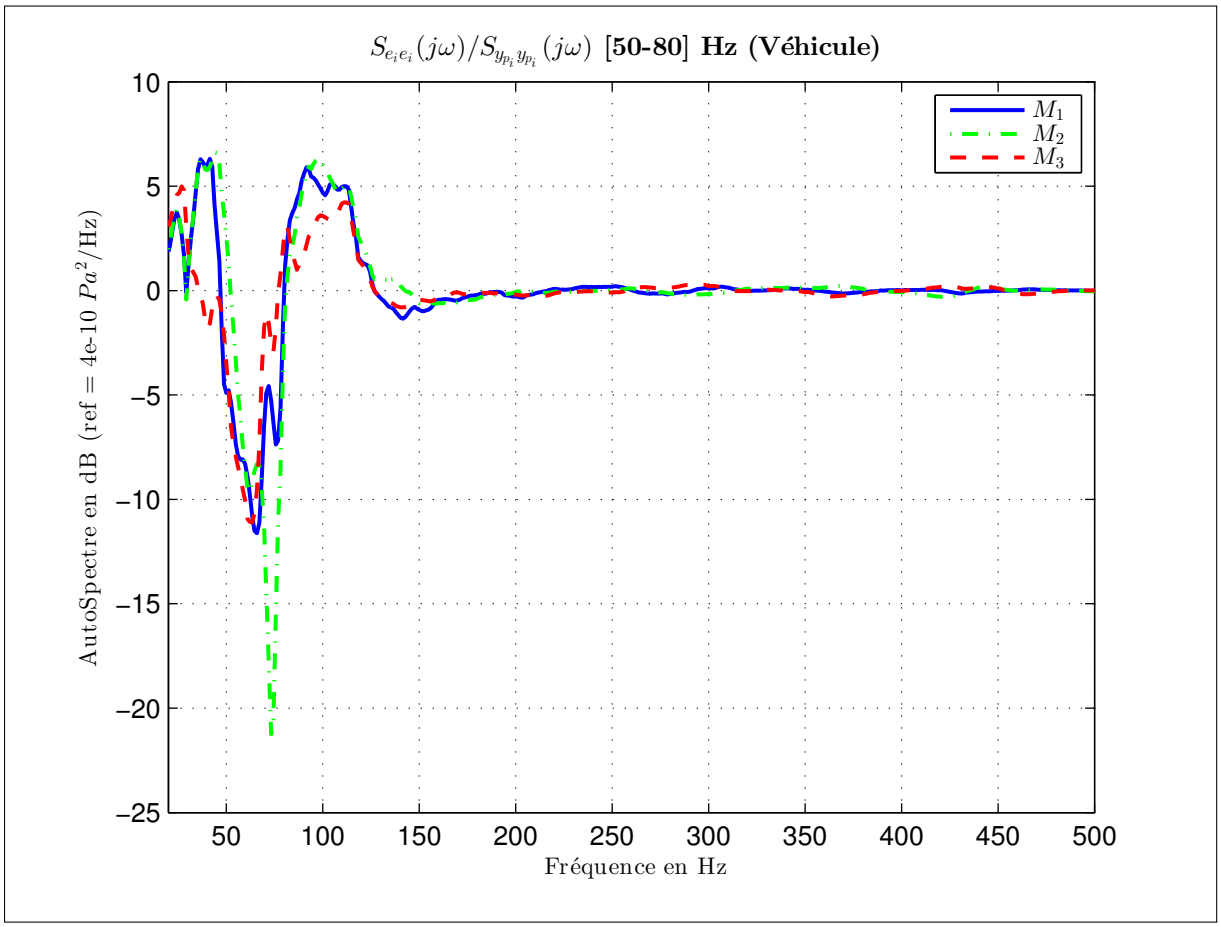

FIGURE 9.7 – Atténuation perçue au niveau des microphones M_1, M_2 et M_3 (Simulation)

9.5.3 Largeur de la plage et niveau d'atténuation

Un autre point qu'on souhaite évaluer est le niveau d'atténuation atteignable en fonction de la largeur de la plage d'atténuation considérée. Bien entendu, plus on élargit la plage d'atténuation plus le niveau d'atténuation obtenu est faible. L'enjeu visé ici est de quantifier ce phénomène et d'évaluer si on peut ou non obtenir un niveau d'atténuation intéressant sur une large bande de fréquence. Pour donner des éléments de réponse quatre plages ont été testées sur l'IRCCyN Box et sur le cas véhicule :

- 190-220 Hz
- 270-300 Hz
- 190-300 Hz
- 100-400 Hz

Les valeurs de critère obtenues sur chaque plage d'atténuation sont données dans le tableau 9.2

	190-220 Hz	270-300 Hz	190-300 Hz	100-400 Hz
IRCCyN Box	0.5150	0.1851	0.6711	0.9303
Véhicule	0.5660	0.7085	0.9967	1

Tableau 9.2 – Tableau des critères

Comme précédemment on s'intéresse également aux diagrammes de Bode des transferts qui maximisent chacun des critères. Ils sont donnés en figure 9.8 (IRCCyN Box) et 9.9 (véhicule).

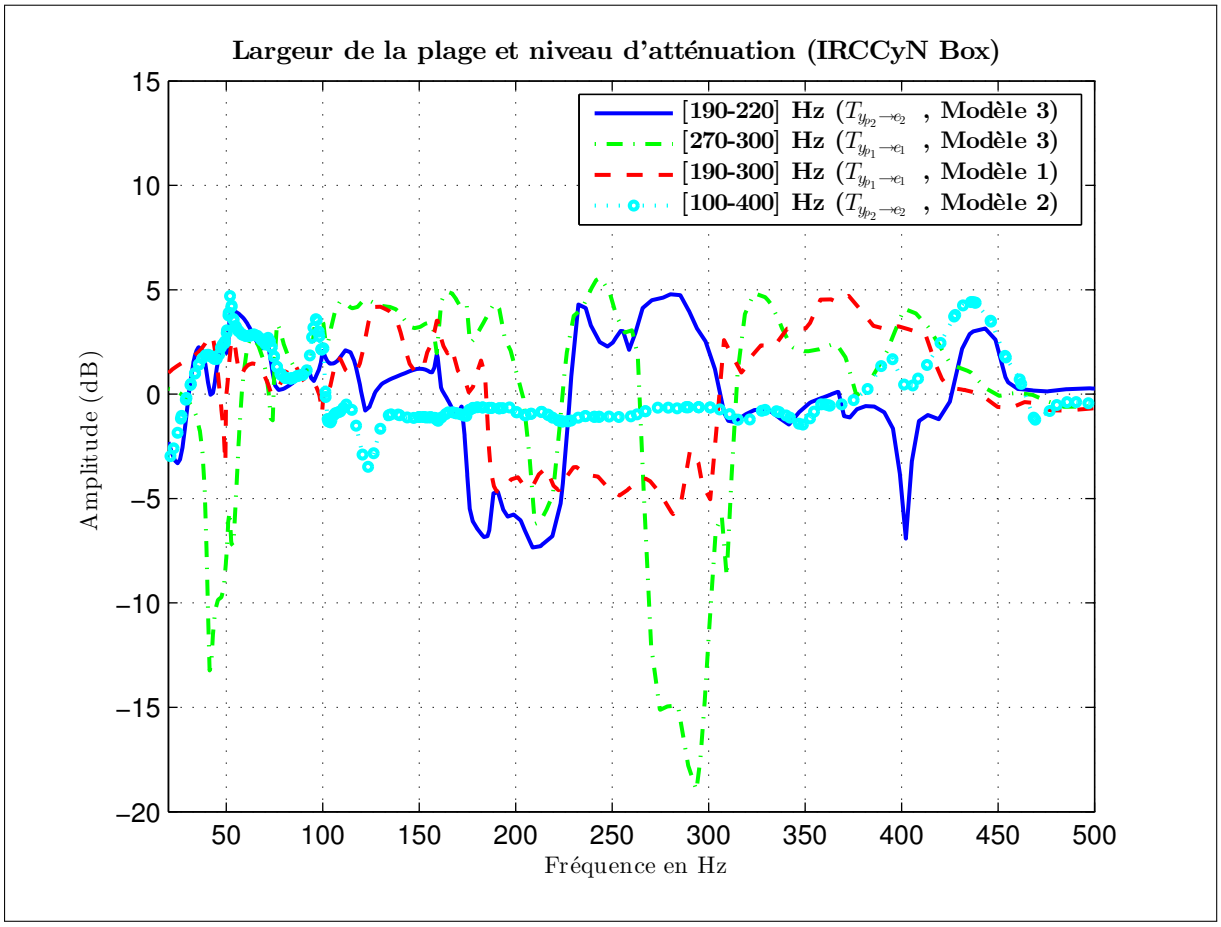

FIGURE 9.8 – Transferts associés aux critères du tableau 9.2 (IRCCyN Box) (Simulation)

Notons tout d'abord que le résultat obtenu sur la plage 190-220 Hz pour le cas véhicule ne respecte pas tout à fait les contraintes. Les valeurs obtenues dans ce cas sont les suivantes :

- $\|W_2 T_{y_p \to u_s}\|_\infty = 1.20$
- $\|W_3 T_{y_p \to e}\|_\infty = 1.19$

C'est pour cette raison que la valeur du critère est indiquée en rouge dans le tableau 9.2.

On voit sinon qu'un niveau d'atténuation intéressant est obtenu sur l'IRCCyN Box jusqu'à la plage 190-300 Hz. Sur 100-400 Hz l'atténuation devient faible.

Sur le cas véhicule, les ordres considérés sont beaucoup plus grands et mettent vraisemblablement en difficulté l'optimisation. C'est ainsi que comme nous l'avons indiqué le

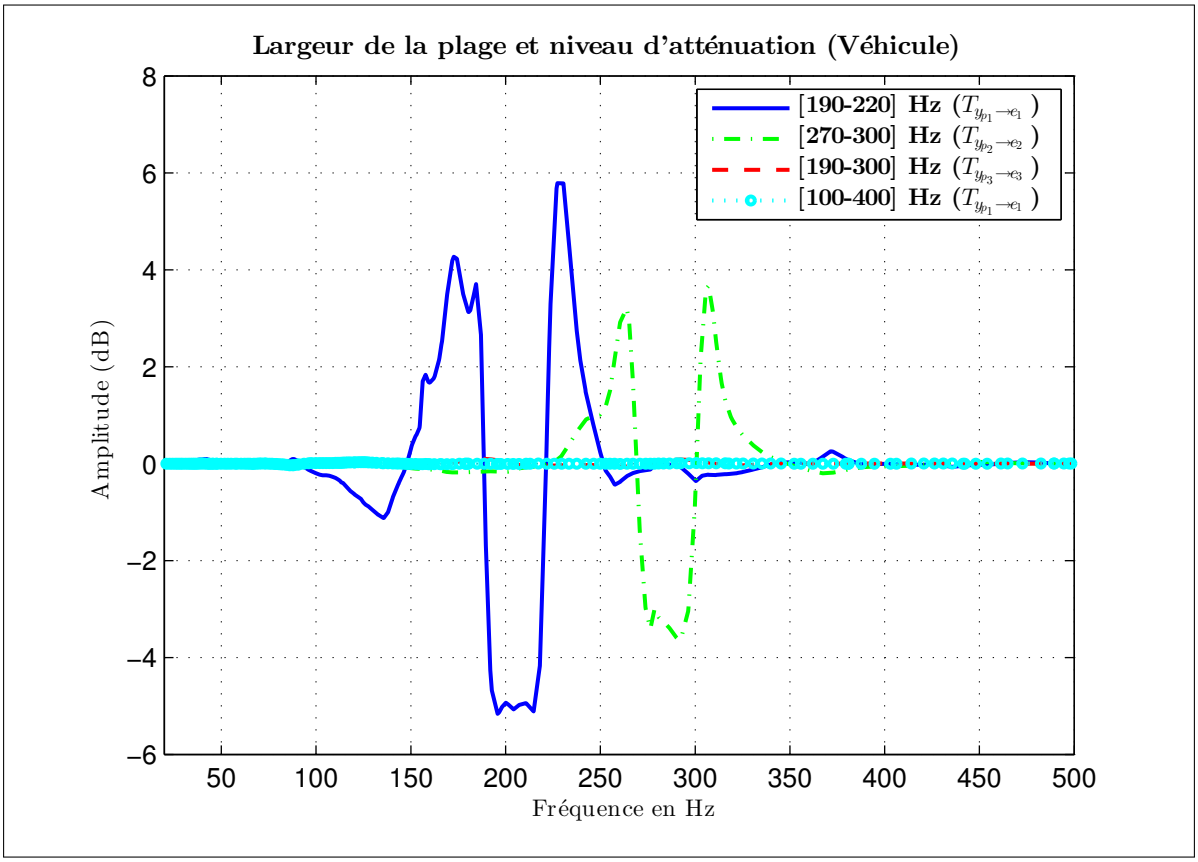

FIGURE 9.9 – Transferts associés aux critères du tableau 9.2 (Véhicule) (Simulation)

résultat obtenu sur 190-220 Hz ne rentre pas dans les contraintes sans qu'on ait de réelle explication physique. L'atténuation obtenue sur les plages de fréquence « étroites » est un peu plus faible que sur l'IRCCyN Box mais reste intéressante. Par suite, on peut se demander si l'absence d'atténuation obtenue sur 190-300 Hz est une limitation réelle des performances ou s'il s'agit d'un problème numérique rencontré lors de l'optimisation. Plus d'investigations seraient nécessaires sur ce point, elles n'ont pu être menées dans le temps imparti pour la thèse.

Enfin, considérons l'indicateur $\texttt{RDSP}_\texttt{i}(j\omega)$ (défini en section 3.2.1.2) qui compare les spectres microphoniques avec et sans contrôle. La figure 9.10 représente cet indicateur dans le cas de l'IRCCyN Box avec la plage d'atténuation 100-400 Hz. Ce graphique illustre les limites de l'indicateur à rendre compte de l'atténuation globale. En effet si tous les transferts de la fonction de sensibilité multivariable sont correctement atténués, l'indicateur indique qu'à certaines fréquences de la plage d'atténuation le niveau de bruit sur les microphones M_1 ou M_2 est amplifié. Ce constat bien qu'ennuyeux ne remet pas en cause l'efficience globale du contrôle. Il met en lumière le fait qu'en multivariable, les bruits e_1 et e_2 proviennent chacun à la fois de l'entrée y_{p_1} et y_{p_2}. Ainsi, si le spectre de y_{p_2} est grand à une certaine fréquence, il peut contribuer à ce que e_1 soit également grand à cette même fréquence. Si à la fréquence considéré y_{p_1} est lui faible, alors l'indicateur $\texttt{RDSP}_\texttt{i}$ sera grand. C'est ce phénomène qu'on observe sur la courbe du microphone M_1 aux environs de 265 Hz. C'est le même phénomène qui se produit au niveau du microphone M_2 aux environs de 230 Hz (voir la figure 9.11 pour les spectres en boucle ouverte).

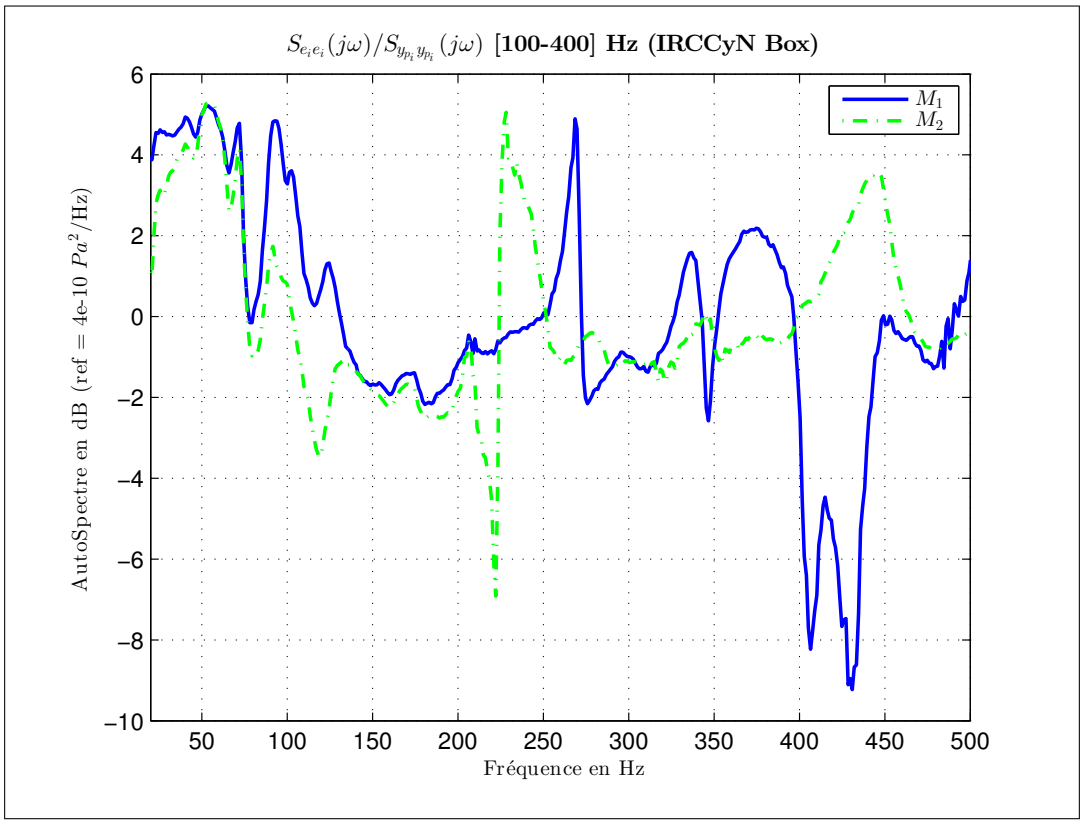

FIGURE 9.10 – Atténuation perçue au niveau des microphones M_1 et M_2 (Simulation)

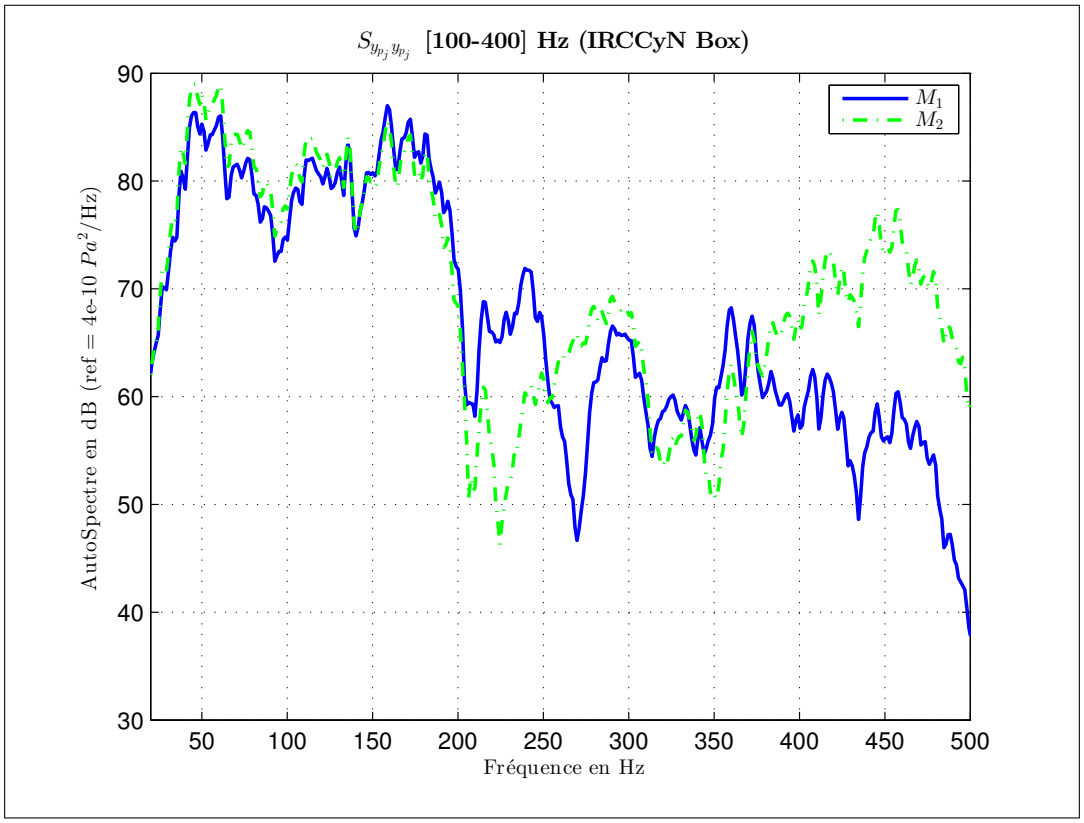

FIGURE 9.11 – Spectres microphoniques obtenus en boucle ouverte (Simulation)

9.5.4 Validations expérimentales sur l'IRCCyN Box

Les différents résultats de simulation que nous venons de présenter ont également été validés expérimentalement sur l'IRCCyN Box. On donne à titre d'exemple en figures 9.12 et 9.13 la comparaison entre simulation et expérimentation pour les plages d'atténuation 190-220 Hz et 190-300 Hz. Les comparaisons sur les autres plages d'atténuation donnent des résultats similaires. Elles montrent toutes une bonne cohérence entre simulation et expérimentation.

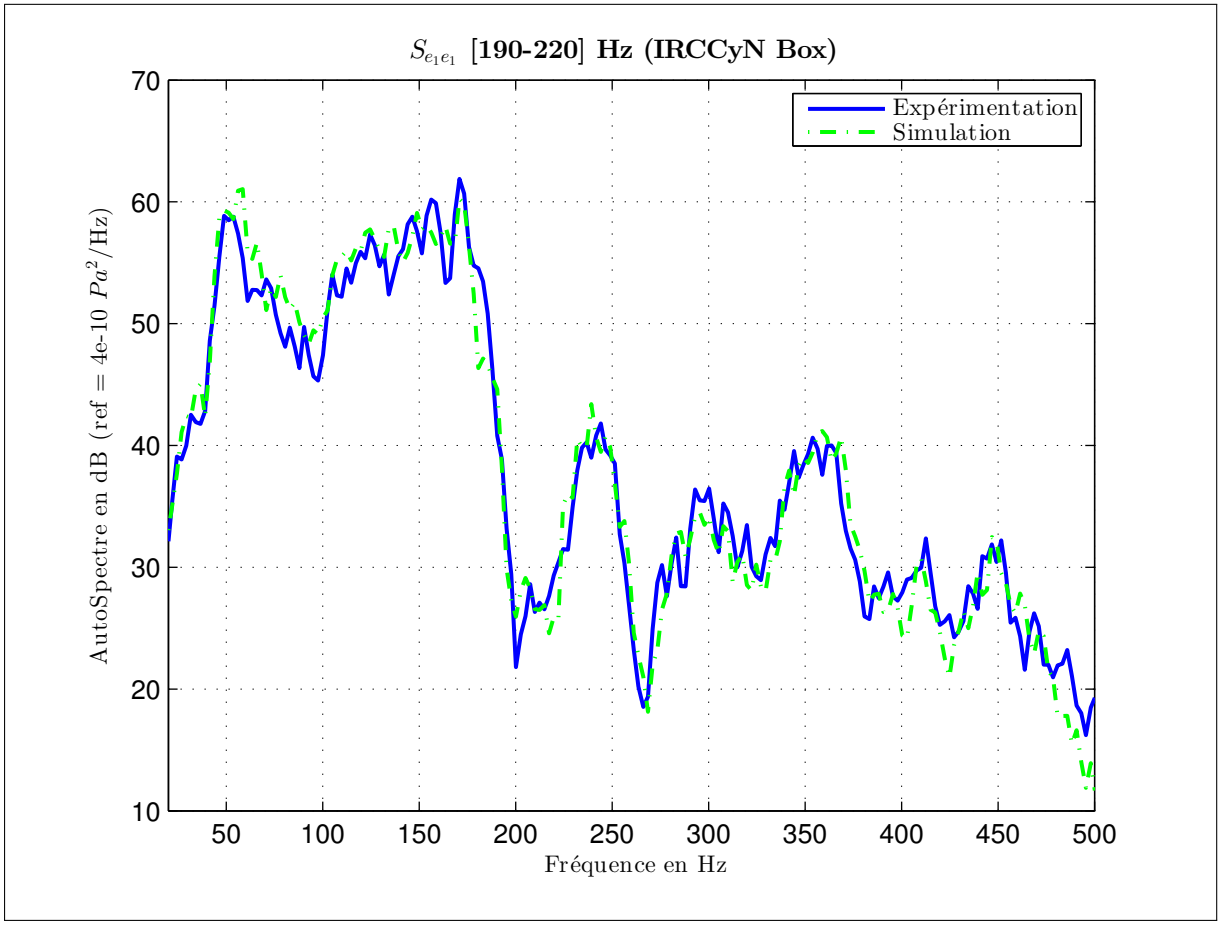

FIGURE 9.12 – Spectres microphoniques obtenus en boucle ouverte (Simulation et Expérimentation)

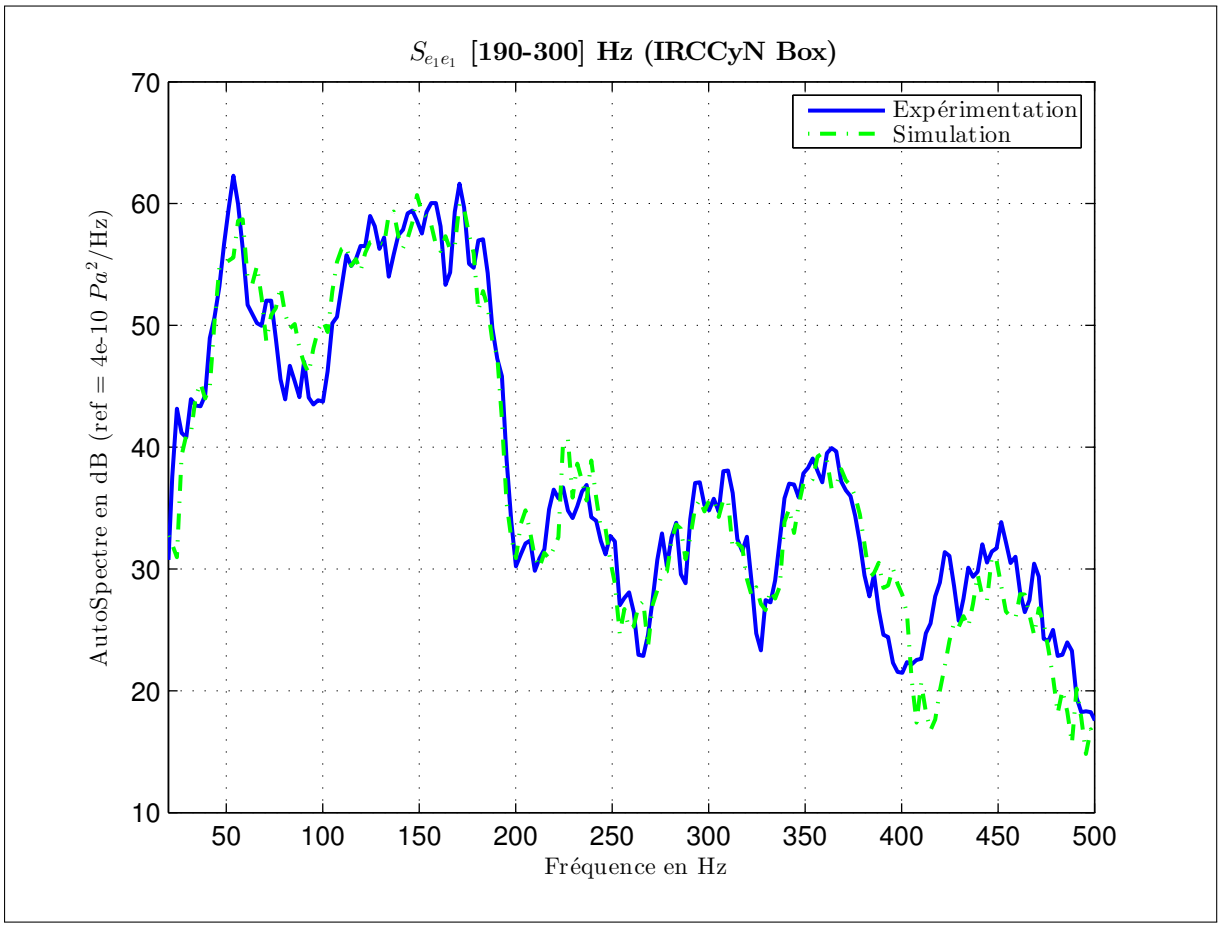

FIGURE 9.13 – Spectres microphoniques obtenus en boucle ouverte (Simulation et Expérimentation)

9.5.5 Confidentiel

Conclusions et perspectives

Conclusion et perspectives

Bilan et apports

Après une introduction à l'acoustique automobile et aux procédés passifs de contrôle de bruit, la première partie a passé en revue différents indicateurs de performance et de robustesse existants ou nouveaux (dans le cas multivariable notamment) utilisés ou utilisables dans le contexte du contrôle actif de bruit. Un cahier des charges formalisé et générique pour les problèmes de contrôle actif dans les cavités a finalement été proposé.

La partie II a permis de présenter les deux démonstrateurs expérimentaux supports de la thèse et les enjeux de la modélisation acoustique. Ce point est indiqué dans la littérature comme un point difficile surtout dans le cas multivariable, où des dynamiques sont partagées entre les différents transferts, et où les ordres considérés sont importants, notamment pour l'atténuation large bande. La méthode des sous-espaces s'est avérée la mieux appropriée.

La partie III contient le cœur de la contribution avec la formulation et la résolution d'un problème de commande répondant au cahier des charges de manière robuste. Dans le chapitre 8 tout d'abord, une formulation générique et cohérente a été proposée en vue de pouvoir comparer les performances atteignables dans différentes configurations de commande. Nous avons ainsi :

- fait varier les nombres d'actionneurs et de capteurs ;
- choisi d'utiliser ou non une mesure de la perturbation ;
- examiné l'intérêt quant au choix du critère : $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$.

Le chapitre 9 a apporté quant à lui un certain nombre de réponses au problème industriel posé. Dans ces deux chapitres (8 et 9) le problème est résolu par un processus d'optimisation non lisse ; une initialisation et une structuration parcimonieuse du régulateur ont été proposées. L'approche est validée en expérimentation sur le démonstrateur IRCCyN Box et est appliquée en simulation sur des modèles identifiés à partir de données expérimentales du démonstrateur véhicule. Sur le cas véhicule, le processus d'optimisation peine parfois à converger sans doute en raison de l'ordre élevé du modèle identifié.

Les contributions de ce travail ont donc été tout d'abord méthodologiques par la formalisation d'un cahier des charges générique pour les problèmes de contrôle actif dans une cavité. Ce cahier des charges est basé sur des indicateurs permettant l'évaluation claire et précise des performances atteignables. Il permet de couvrir une large variété des problèmes de contrôle actif existants.

Une autre contribution de ce travail réside dans la formalisation d'un problème de commande permettant la comparaison équitable de différentes architectures de contrôle actif. Les résultats obtenus permettent de quantifier et de clarifier les apports de chaque architecture et de les comparer lisiblement.

Un apport supplémentaire de cette thèse est la formalisation d'un problème de commande et l'évaluation précise des performances atteignables dans le cadre des hypothèses du problème industriel posé.

Enfin la dernière contribution de ce travail réside dans la sélection d'outils permettant la résolution efficace des différents problèmes d'optimisation posés en vue d'évaluer précisément les performances atteignables.

Le démonstrateur IRCCyN Box a été un support important aux divers résultats présentés dans ce mémoire. Ayant été développé durant la thèse, il constitue lui aussi une des contributions de cette thèse.

À l'issue de ce travail, nous avons montré que l'on peut faire de l'atténuation acoustique large bande et robuste. Dans le cas d'une commande par rétroaction pure cette atténuation se paye par le phénomène d'effet waterbed. Nous l'avons vu au chapitre 8, le passage de la commande monovariable à la commande multivariable permet de relâcher certaines contraintes liées aux zéros à non minimum de phase et la commande à deux degrés de liberté avec une action de précompensation permet de s'affranchir du phénomène d'effet waterbed et d'atteindre des niveaux de performance significativement meilleurs qu'avec seulement la rétroaction. Ces résultats ne sont pas surprenants, mais ils sont ici traités de manière systématique, et quantifiés. Ces informations et les divers résultats de la thèse sont autant d'éléments qui permettront à Renault de mieux juger des potentialités du contrôle actif acoustique pour l'atténuation du bruit basse fréquence large bande.

Les travaux de cette thèse ont donné lieu à :

- deux publications en conférence [70] et [71] ;
- trois présentations en séminaires ou groupe de travail scientifiques ;

Des publications sont également en préparation, il s'agit de deux papiers de revue et d'une publication en conférence. La liste détaillée est donnée en introduction du mémoire.

Perspectives

Les perspectives liées à ce travail sont de deux natures :

- algorithmiques
- fondamentales

D'un point de vue algorithmique tout d'abord, un premier point concerne l'initialisation. Actuellement, elle ne tient pas compte de toutes les contraintes du problème d'optimisation, on règle seulement « mollement » l'initialisation de manière à rentrer dans le domaine des contraintes. Les performances du régulateur initial sont en général faibles et c'est l'optimisation non lisse qui est seule chargée d'abaisser le critère. Une autre voie consisterait à rechercher un régulateur initial plus performant solution d'un problème d'optimisation relaxé mais convexe et guider ainsi davantage l'optimisation non lisse.

L'ordre du régulateur est également un point possible d'approfondissement. Excepté dans nos premiers travaux sur le cas monovariable [70], où nous procédions à une paramétrisation modale originale, le régulateur est à ce jour choisi du même ordre que le modèle de synthèse afin de pouvoir évaluer au plus près les performances atteignables.

Enfin une comparaison de la méthodologie présentée dans ce mémoire et des stratégies du type FxLMS très répandues dans la littérature serait un élément intéressant d'évaluation de la présente solution. Notons toutefois que si l'on peut comparer les niveaux de performance atteints, les garanties de robustesse offertes par la présente solution sont elles difficilement quantifiables pour les stratégies de type FxLMS. Ceci constitue un point fort de la méthodologie de commande proposée ici. Un papier au sujet de cette comparaison est en préparation. Les premiers résultats donnent clairement l'avantage à l'approche poursuivie dans ce mémoire.

D'autres points d'intérêt sont d'ordre plus fondamental. Ils concernent par exemple la recherche de la position optimale pour les actionneurs et les capteurs dans l'habitacle. Dans ce travail la position des actionneurs et des capteurs et le choix de l'instrumentation étaient considérés comme non négociables. Il peut toutefois s'avérer opportun d'évaluer quantitativement si une position différente peut aider l'atteinte de meilleures performances. Une thèse est actuellement en cours à l'IRCCyN qui s'intéresse à l'analyse spatiale du champ acoustique et l'analyse de conditions d'observabilité et de commandabilité.

Ainsi que nous l'avons montré une mesure de la perturbation permet d'améliorer significativement les performances. La recherche d'une mesure qui quoique compatible avec les contraintes industrielles serait de nature à produire une bonne estimation de la perturbation constituerait également une voie d'amélioration.

Bibliographie

[1] H. Coanda, "Procédé de protection contre les bruits," Brevet FR-722 274, 1930. 17

[2] P. Lueg, "Process of silencing sound oscillations," Patent US-2 043 416, 1936. 17

[3] H. F. Olson and E. G. May, "Electronic Sound Absorber," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 25, pp. 1130–1136, 1953. 17

[4] W. B. Conover, "Fighting Noise with Noise," *Noise Control*, vol. 2, pp. 78–82, 1956. 17

[5] A. J. Hull, C. J. Radcliffe, and S. C. Southward, "Global active noise control of a one-dimensional acoustic duct using a feedback controller," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 115, no. 3, pp. 488–494, 1993. 17

[6] O. Kaiser, R. Pfiffner, M. V. Kothare, F. J. Kraus, C. Rhodes, and M. Morari, "Modeling and Robust Control of Active Noise Control Systems," in *Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996, pp. 283–291. 17

[7] J. C. Carmona and V. M. Alvarado, "Active Noise Control of a Duct Using Robust Control Theory," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, no. 6, pp. 930–938, 2000. 17

[8] B. Rafaely and S. J. Elliott, "$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Active Control of Sound in a Headrest : Design and Implementation," *IEEE Transactions on control systems technology*, vol. 7, no. 1, pp. 79–84, 1999. 18, 38, 88, 90

[9] R. Schirmacher, R. Hunkel, and M. Burghardt, "Active Noise Control for the 4.0 TFSI with cylinder on Demand Technology in Audi's S-Series," *SAE International*, 2012. 18, 36, 83

[10] B. Vau, "Method and device for narrow-band noise suppression in a vehicle passenger compartment," Patent WO2 010 136 661, 2009. 18, 36

[11] J. Cheer, "Active control of the acoustic environment in an automobile cabin," Ph.D. dissertation, University of Southampton, Southampton, 2012. 18, 19, 36, 41, 83, 85

[12] M. Keller, "Contrôle actif du bruit basses fréquences à l'intérieur d'un hélicoptère," Ph.D. dissertation, Université de Provence Aix-Marseille I, Marseille, 2008. 18, 38

[13] T. Sutton, S. J. Elliott, M. McDonald, and T. Saunders, "Active control of road noise inside vehicles," *Noise Control Engineering Journal*, vol. 42, no. 4, pp. 137–147, 1994. 19, 38, 83, 112

[14] J. C. Kraemer, *Le métier de l'acoustique automobile.* Document interne Renault, 1995. 25

[15] L. L. Beranek and I. L. Ver, *Noise and vibration control engineering, Principles and applications.* New York : John Wiley and Sons, Inc., 1992. 25

[16] H. Sano, T. Inoue, A. Takahashi, K. Terai, and Y. Nakamura, "Active Control System for Low-Frequency Road Noise Combined With an Audio System," *IEEE Transactions on speech and audio processing*, vol. 9, no. 7, pp. 755–763, 2001. 38, 83

[17] S. Berthilsson, A. Barkefors, and M. Sternad, "MIMO Design of Active Noise Controllers for Car Interiors : Extending the Silenced Region at Higher Frequencies," in *American Control Conference*, Fairmont Queen Elizabeth, Montréal, Canada, 2012, pp. 6140–6147. 38

[18] S. J. Elliott, I. M. Stothers, and P. A. Nelson, "A Multiple Error LMS Algorithm and Its Application to the Active Control of Sound and Vibration," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-35, no. 10, pp. 1423–1434, 1987. 40, 83

[19] P. A. Nelson and S. J. Elliott, *Active Control of Sound.* London : Academic Press, 1992. 41, 80

[20] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*, 2nd ed. England : John Wiley & Sons, Ltd, 2005. 46, 67, 69, 71, 72, 86, 88, 89, 143, 145

[21] T. McKelvey, "Subspace Methods for Frequency Domain Data," in *American Control Conference*, Boston, Massachusetts, 2004, pp. 673–678. 58, 62

[22] T. McKelvey, A. Fleming, and S. R. Moheimani, "Subspace-based system identification for an acoustic enclosure," in *Conference on Control Applications*, Anchorage, Alaska, USA, 2000, pp. 255–260. 58, 63

[23] A. M. Sampath, R. K. Prasanth, and R. K. Mehra, "Robust Interior Noise Control using System Identification and Linear Matrix Inequality (LMI) Based Control," in *IEEE International Conference on Control Applications*, Triest, Italy, 1998, pp. 679–683. 58, 88

[24] P. V. Overschee and B. D. Moor, "N4SID : Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic-Stochastic Systems," *Automatica, Special Issue on Statistical Signal Processing and Control*, vol. 30, no. 1, pp. 75–93, 1994. 58

[25] ——, *Subspace identification for linear systems : Theory, Implementation, Applications.* Boston : Kluwer Academic Publishers, 1996. 58

[26] M. Viberg, "Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems," *Automatica*, vol. 31, no. 12, pp. 1835–1851, 1995. 58

[27] P. V. Overschee and B. D. Moor, "Continuous-time frequency domain subspace system identification," *Signal Processing*, vol. 52, no. 2, pp. 179–194, 1996. 58, 62

[28] V. Kucera, "Factorization of Rational Spectral Matrices : A Survey of Methods," in *IEEE Int. Conf. Control*, Edinburgh, U.K., 1991, pp. 1074–1078. 69

[29] A. H. Sayed and T. Kailath, "A survey of spectral factorization methods," *Numer. Linear Algebra Appl.*, vol. 8, no. 7, pp. 467–496, 2001. 69

[30] G. Janashia, E. Lagvilava, and L. Ephremidze, "A New Method of Matrix Spectral Factorization," *IEEE Transactions on information theory*, vol. 57, no. 4, pp. 2318–2326, 2011. 69

[31] J. S. Freudenberg and D. P. Looze, "Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems," in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, M. Thoma and A. Wyner, Eds. Berlin : Springer-Verlag, 1988, vol. 104, p. 281. 69, 73

[32] ——, "Right half plane poles and zeros and design tradeoffs on feedback systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-30, no. 6, pp. 555–565, 1985. 71

[33] B. Widrow, J. R. Glover, J. M. McCool, J. Kaunitz, C. S. Williams, R. H. Hearn, J. R. Zeidler, E. Dong, and R. C. Goodlin, "Adaptive Noise Cancelling : Principles and Applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 63, no. 12, pp. 1692–1716, 1975. 80

[34] S. J. Elliott, "Signal Processing for Active Control," in *Signal Processing and its Applications*, R. Green and T. Nguyen, Eds. London : Academic Press, 2001, p. 511. 80

[35] S. Adachi and H. Sano, "Two-degree-of-freedom active noise control based on internal model control," in *European Control Conference*, Brussels, Belgium, 1997, pp. 1634–1639. 83

[36] T.G.Tsuei, A. Srinivasa, and S. M. Kuo, "An Adaptive Feedback Active Noise Control System," in *IEEE Conference on Control Applications*, Anchorage, Alaska, USA, 2000, pp. 249–254. 83

[37] A. Wisler and I. M. Panahi, "Implementation of a Real-Time Feedback Active Noise Control System to Cancel Noise within a 3-Dimensional Enclosure," in *Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, Triest, Italy, 2013, pp. 651–654. 83

[38] N. Miyazaki and Y. Kajikawa, "Adaptive feedback ANC system using virtual microphones," in *IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vancouver, BC, Canada, 2013, pp. 383–387. 83

[39] S. J. Elliott and P. A. Nelson, "Algorithm for multichannel LMS adaptive filtering," *Electronics letters*, vol. 21, no. 21, pp. 979–981, 1985. 83

[40] B. Francis and W. Wonham, "The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators," *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 2, no. 2, pp. 170–195, 1975. 84

[41] M. Morari and E. Zafiriou, *Robust Process Control*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 1989. 84

[42] J.-S. Hu, "Active Noise Cancellation in Ducts Using Internal Model-Based Control Algorithms," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 4, no. 2, pp. 163–170, 1996. 84

[43] S. J. Elliott and T. J. Sutton, "Performance of Feedforward and Feedback Systems for Active Control," *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 4, no. 3, pp. 214–223, 1996. 85

[44] W. K. Gawronski, "Dynamics and Control of Structures, A Modal Approach," in *Mechanical Engineering Series*, F. F. Ling, Ed. New York : Springer-Verlag, 1998, p. 231. 85

[45] M. Green and D. J. Limebeer, *Linear robust control*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall Inc., 1995. 85

[46] A. G. Kelkar and H. Pota, "Robust Broadband Control on Acoustic Duct," in *Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000, pp. 4485–4490. 86

[47] B. Fang, A. Kelkar, S. Joshi, and H.R.Pota, "Modelling, system identification, and control of acoustic-structure dynamics in 3-D enclosures," *Control Engineering Practise*, vol. 12, no. 8, pp. 989–1004, 2004. 86, 90

[48] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. London : Prentice-Hall, Inc., 1996. 86, 88, 145

[49] F. Liu, B. Fang, and A. G. Kelkar, "LQG-Based Robust Control of Acoustic-Structure Interaction in 3-D Enclosure," in *American Control Conference*, Denver, Colorado, USA, 2003, pp. 803–808. 87

[50] J. Hong, J. C. Akers, R. Venugopal, M.-N. Lee, A. G. Sparks, P. D. Washabaugh, and D. S. Bernstein, "Modeling, Identification, and Feedback Control of Noise in an Acoustic Duct," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 4, no. 3, pp. 283–291, 1996. 87

[51] I. R. Petersen, "Multivariable control of noise in an acoustic duct," in *European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001, pp. 414–419. 87, 90

[52] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Control Problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989. 87

[53] S. A. Lane and R. L. Clark, "Active Control of a Reverberant Enclosure using an Approximate Constant Volume Velocity Source," in *American Control Conference*, Philadelphia, Pennsylvania, 1998, pp. 2606–2610. 88

[54] X. H. Yang, J. van Niekerk, K. S. Parwani, A. Packard, and B. Tongue, "Attenuation of Structurally Generated Interior Noise Through Active Control," in *American Control Conference*, San Francisco, CA, 1993, pp. 1–7. 88, 90

[55] Y. Kobayashi and H. Fujioka, "Active noise control of one-dimensional duct via sampled-data $\mathcal{H}_\infty$ control," in *IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, 2003, pp. 3900–3904. 88

[56] R. O'Brien, Jr, J. Watkins, G. Piper, and D. Baumann, "$\mathcal{H}_\infty$ Active Noise Control Of Fan Noise In An Acoustic Duct," in *American Control Conference*, Chicago, Illinois, USA, 2000, pp. 3028–3032. 88

[57] R. O'Brien and P. Pratt, "Active noise control using robust feedback techniques," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Chicago, Illinois, USA, 2001, pp. 3209–3212. 88

[58] T. Yucelen and F. Pourboghrat, "Kalman Filter Based Modeling and Constrained $\mathcal{H}_\infty$ Optimal Control for Active Noise Cancellation," in *IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, 2007, pp. 5401–5406. 88

[59] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 88

[60] P. Apkarian and D. Noll, "Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$ Synthesis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 1, pp. 71–86, 2006. 88, 97

[61] ——, "Nonsmooth optimization for multidisk $\mathcal{H}_\infty$ synthesis," *European Journal of Control*, vol. 12, no. 3, pp. 229–244, 2006. 97

[62] P. Apkarian, D. Noll, and A. Rondepierre, "Mixed H_2/H_∞ Control via Nonsmooth Optimization," *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 47, no. 3, pp. 1516–1546, 2008. 97

[63] S. Gumussoy, D. Henrion, M. Millstone, and M. L.Overton, "Multiobjective Robust Control with HIFOO 2.0," in *IFAC Symposium on RObust CONtrol Design (ROCOND)*, Haifa, Israel, 2009. 97

[64] D. Arzelier, G. Deaconu, S. Gumussoy, and D. Henrion, "$\mathcal{H}_2$ for HIFOO," in *International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications*, Bilkent University, Ankara, Turkey, 2011. 97

[65] J. V. Burke, A. S. Lewis, and M. L. Overton, "A robust gradient sampling algorithm for nonsmooth nonconvex optimization," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 15, pp. 751–779, 2005. 97

[66] J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, and M. L. Overton, "Stabilization via nonsmooth, nonconvex optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 11, pp. 1760–1769, 2006. 97

[67] P. Apkarian and D. Noll, "Nonsmooth Optimization for Multiband Frequency-Domain Control Design," *Automatica*, vol. 43, no. 4, pp. 724–731, 2007. 97

[68] P. Apkarian, M. N. Dao, and D. Noll, "Parametric Robust Structured Control Design," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 7, pp. 1857–1869, 2015. 97

[69] M. S. Sadabadi and D. Peaucelle, "From static output feedback to structured robust static output feedback : A survey," *Annual Reviews in Control*, pp. 1–16, 2016. 97

[70] P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi, and J.-M. Duffal, "Broadband Active Noise Control Design through Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$ Synthesis," in *IFAC Symposium on RObust CONtrol Design (ROCOND)*, Bratislava, Slovak Republic, 2015, pp. 395–400. 98, 99, 130, 131

[71] ——, "$\mathcal{H}_\infty$ Multi-objective and Multi-model MIMO control design for Broadband noise attenuation in an enclosure," in *European Control Conference*, Aalborg, Denmark, 2016, pp. 643–648. 106, 130

[72] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis, "Modélisation et Identification des Processus," in *Méthodes et pratiques de l'ingénieur*, P. Borne, Ed. Paris : Éditions Technip, 1992, vol. 1, p. 369. 141

[73] Y. Thomas, *Signaux et systèmes linéaires*. Paris : Masson, 1992. 141

Annexes

Annexe A

Densité spectrale de puissance

Ces rappels sont tirés de [72] et de [73].

A.1 Définitions

Définition A.1. *Un processus aléatoire est* ***stationnaire*** *si ses caractéristiques statistiques sont indépendantes de l'origine des temps.*

Définition A.2. *Un processus est* ***ergodique*** *si on peut remplacer les moyennes d'ensemble par des moyennes temporelles. Dit autrement il y a autant d'informations dans une réalisation suffisamment longue que dans un grand nombre de réalisations de durée moindre.*

A.2 Propriétés d'un signal aléatoire stationnaire et ergodique

Si on considère un processus aléatoire et ergodique $X(t)$. Il est entièrement caractérisé par sa moyenne m et sa fonction d'autocorrélation $\varphi(\tau)$:

$$m = E\left(X(t)\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt \tag{A.1}$$

Où x est une réalisation particulière du processus $X(t)$.
Si on note $\mathring{X}(t) = X(t) - m$ et $\mathring{x}(t) = x(t) - m$:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E\left(\mathring{X}(t)\mathring{X}(t-\tau)\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathring{x}(t)\mathring{x}(t-\tau)dt \tag{A.2}$$

Avec pour propriétés :

$$\begin{cases} \varphi_{xx}(0) = v \quad \text{(variance)} \\ \varphi_{xx}(-\tau) = \varphi_{xx}(\tau) \end{cases} \tag{A.3}$$

La fonction d'autocorrélation nous renseigne sur le degré de prédictibilité du signal.

A.3 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance $S_{xx}(j\omega)$ est la transformée de Fourier (ou transformée de Laplace bilatère) de sa fonction d'autocorrélation (on note cette transformée de Fourier $\phi_{xx}(j\omega)$) :

$$S_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \phi_{xx}(j\omega) \tag{A.4}$$

Soit un système linéaire $G(j\omega)$ d'entrée u et de sortie y, le spectre du signal de sortie s'obtient de la manière suivante :

$$S_{yy}(j\omega) = G(-j\omega) S_{uu}(j\omega) G(j\omega) \tag{A.5}$$

L'interspectre s'écrit lui de la manière suivante :

$$S_{yu}(j\omega) = G(-j\omega) S_{uu}(j\omega) \tag{A.6}$$

On a de plus la propriété :

$$S_{yu}(j\omega) = S_{uy}(-j\omega) \tag{A.7}$$

D'autre part si on considère un signal $z(t)$ corrélé avec u, on a la propriété suivante :

$$S_{yz}(j\omega) = G(-j\omega) S_{uz}(j\omega) \tag{A.8}$$

A.4 Cas multivariable

La fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$\varphi_{xx}(\tau) = E\left(\mathring{x}(t)\, \mathring{x}^T(t-\tau)\right) \tag{A.9}$$

Chaque élément de la matrice s'écrit de la manière suivante :

$$\varphi_{x_i x_j}(\tau) = E\left(\mathring{x}_i(t)\, \mathring{x}_j(t-\tau)\right) \tag{A.10}$$

La matrice spectrale d'autocorrélation s'obtient en appliquant la transformée de Fourier terme à terme :

$$S_{xx}(j\omega) = \mathcal{TF}(\varphi_{xx}(\tau)) \tag{A.11}$$

Le spectre de sortie d'un système multivariable s'obtient lui de la manière suivante :

$$S_{yy}(j\omega) = G(-j\omega) S_{uu}(j\omega) G^T(j\omega) \tag{A.12}$$

Les interspectres s'obtiennent eux de la manière suivante :

$$S_{yu}(j\omega) = G(-j\omega) S_{uu}(j\omega) \tag{A.13}$$

$$S_{uy}(j\omega) = S_{uu}(j\omega) G^T(j\omega) \tag{A.14}$$

Annexe B

Valeurs Singulières

La décomposition en valeurs singulières est un outil classique de l'algèbre linéaire. Nous rappelons brièvement ici sa définition puis nous donnons son expression analytique dans le cas d'une matrice 2×2, enfin nous décrivons brièvement son interprétation pour les systèmes multivariables. Ces rappels sont tirés de [20].

B.1 Définition

Soit une matrice complexe A de dimension $l \times m$, elle peut se factoriser de la manière suivante :

$$A = U\Sigma V^H \tag{B.1}$$

Dans cette expression les matrices U de dimension $l \times l$ et V de dimension $l \times m$ sont unitaires. Σ contient une matrice diagonale Σ_1 de valeurs singulières réelles σ_i rangées par ordre décroissant. Deux cas sont à considérer :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad l \geq m \tag{B.2}$$

ou

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad l \leq m \tag{B.3}$$

Avec

$$\Sigma_1 = diag\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k\}; \qquad k = \min(l, m) \tag{B.4}$$

et

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_k = \underline{\sigma} \tag{B.5}$$

Les valeurs singulières de la matrice A sont également les racines carrées des $k = \min(l, m)$ plus grandes valeurs propres de AA^H et de A^H :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(AA^H)} = \sqrt{\lambda_i(A^H A)} \tag{B.6}$$

B.2 Valeur singulière d'une matrice 2×2

Soit une matrice A de dimensions 2×2. On introduit les deux grandeurs suivantes :

$$b = tr(A^H A) = \sum_{ij} |a_{ij}| \qquad c = det(A^H A)$$

On sait que la somme des valeurs propres d'une matrice est égale à sa trace et son produit à son déterminant, on a donc :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = b \qquad \lambda_1 \lambda_2 = c$$

Si on utilise ces relations lors de la résolution de $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i \left(A^H A\right)}$, on obtient :

$$\bar{\sigma}(A) = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \qquad \underline{\sigma}(A) = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}}$$

B.3 Interprétation pour les systèmes multivariables

Soit un système multivariable $G(s)$ ayant m entrées et l sorties. Soit la pulsation ω, on peut appliquer la décomposition en valeurs singulières à la matrice complexe $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = U_\omega \Sigma_\omega V_\omega^H \tag{B.7}$$

Dans cette expression U_ω et V_ω peuvent être interprétées comme des matrices de rotation. Leurs vecteurs colonne sont unitaires et orthogonaux et représentent respectivement les directions de sortie et d'entrée du système G.

Σ_ω est elle la matrice de gain de G.

Annexe C

Normes de signaux et de systèmes

Les rappels sur les normes sont tirées de [20] et [48].

C.1 Signaux

C.1.1 Norme l_2

Par définition la norme l_2 d'un signal x appartenant à l'ensemble l_2 des signaux de carré sommable s'écrit :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \|x(t)\|_2 dt} \tag{C.1}$$

Cette norme fait tout d'abord une synthèse sur les différentes voies au travers de la norme 2 vectorielle appliquée au vecteur $x(t)$:

$$\|x(t)\|_2 = x(t)^T x(t) = \sum_i |x_i(t)|^2 \tag{C.2}$$

Puis un résumé sur le temps au travers de l'intégrale temporelle.

Élevée au carré, elle s'interprète comme l'énergie du signal x.

C.1.2 Norme l_∞

La norme l_∞ d'un signal x appartenant à l_∞ l'ensemble des signaux bornés est définie comme suit :

$$\|x\|_\infty = \sup_t \left(\sup_i |x_i(t)| \right) \tag{C.3}$$

C.1.3 Norme de puissance

La norme de puissance (notée ici $\|\cdot\|_{pow}$) est définie de la manière suivante :

$$\|x\|_{pow} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|x(t)\|_2 dt} \tag{C.4}$$

Élevée au carré, elle s'interprète comme la puissance moyenne du signal x.

Notons toutefois que si on l'appelle ici norme, elle n'en est pas une en réalité car elle ne respecte pas la propriété :

$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = 0, \qquad \forall t \tag{C.5}$$

C.2 Systèmes

Pour la définition des normes sur les systèmes on introduit le système G d'entrée u et de y tel que :

$$y = Gu \tag{C.6}$$

La réponse impulsionnelle du système G est notée g.

C.2.1 Norme $\mathcal{H}_2$

La norme $\mathcal{H}_2$ est définie de la manière suivante :

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Trace\left(G^*(j\omega)G(j\omega)\right) d\omega} \tag{C.7}$$

Cette norme peut s'interpréter comme l'énergie de la réponse impulsionnelle, on a en effet la propriété :

$$\|G(s)\|_2 = \|g(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} Trace\left(g^*(t)g(t)\right) dt} \tag{C.8}$$

Elle correspond également à l'énergie en sortie du système quand on injecte en entrée un bruit blanc gaussien de moyenne nulle.

C.2.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$

La définition de la norme $\mathcal{H}_\infty$ est la suivante :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega)) \tag{C.9}$$

C'est le gain maximal de la réponse fréquentielle.

Cette norme vérifie également la propriété :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{u(t)} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \tag{C.10}$$

Cette norme peut ainsi être considéré comme une norme induite par la norme des signaux de l_2.

C.2.3 Normes induites

Nous avons déjà partiellement mentionné les liens entre les normes sur les signaux et celles sur les systèmes. Le tableau C.1 récapitule ces liens.

$\|u\|$	$\|y\|$	$\|G\|$
énergie	énergie	$\mathcal{H}_\infty$
puissance	puissance	$\mathcal{H}_\infty$
bruit blanc	puissance	$\mathcal{H}_2$

Tableau C.1 – Normes induites

Annexe D

Marge de module

Nous rappelons dans cette annexe la définition de la marge de module. De manière qualitative tout d'abord, la marge de module est une marge de robustesse, elle caractérise donc une certaine distance à l'instabilité. Plus cette marge est grande, plus la distance à l'instabilité est grande et donc plus l'asservissement considéré est robuste.

Pour préciser les choses rappelons que la question de la stabilité intéresse en premier lieu l'action en boucle fermée (voir figure D.1).

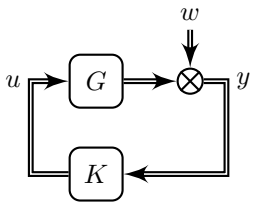

FIGURE D.1 – Rejet de perturbation par rétroaction

Sur ce schéma, considérons le transfert qui relie w la perturbation et la sortie y. Il est appelé fonction de sensibilité (en sortie) et est souvent noté S :

$$S = T_{w \to y} = (I + L)^{-1}$$

Où L désigne le transfert de la boucle ouverte (appelé transfert de boucle) : $L = -GK$.

Cette fonction de sensibilité nous indique dans quelle mesure la sortie y est affectée par la perturbation w. Plus l'amplitude de S est grande plus y est sensible à w et moins l'asservissement est donc robuste. À l'inverse plus l'amplitude de S est faible plus la régulation est robuste.

La marge de module M_m, nous sert à quantifier la robustesse aux incertitudes. Elle est définie comme la norme H_∞ de l'inverse de la fonction de sensibilité :

$$M_m = \|S\|_\infty^{-1} \tag{D.1}$$

On illustre généralement cette marge de robustesse dans le cas monovariable sur le diagramme de Nyquist. Ce diagramme représente dans le plan complexe le transfert de boucle L mentionné ci-dessus. Pour rappel, dans ce diagramme le point (-1,0) est appelé point critique car si le lieu de Nyquist franchit ce point, la boucle fermée devient instable.

Comme représenté en figure D.2, la marge de module représente la distance entre le lieu de Nyquist L et le point critique, qu'on peut qualifier de distance à l'instabilité.

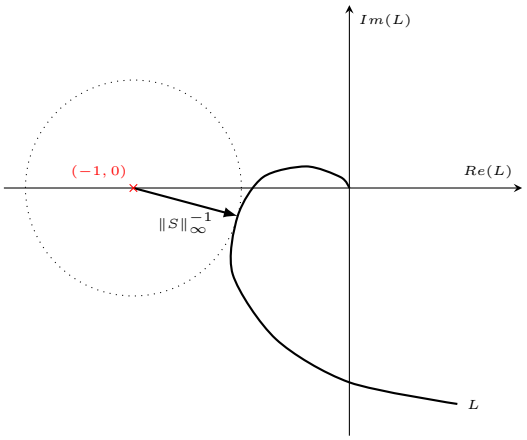

FIGURE D.2 – Lecture de la Marge de module sur le digramme de Nyquist

Indicateur important de la robustesse, la marge de module peut être utilisée à la fois en monovariable et en multivariable. Dans ce dernier cas, la marge de module telle que définie dans (D.1) offre des garanties de robustesse « globales ». Cependant, on peut également s'intéresser à la robustesse de manière plus locale. Considérons à cet effet les composantes des signaux y et w, qu'on note y_i et w_j. Si on souhaite quantifier la manière dont la composante w_j affecte la sortie y_i, il faut considérer le transfert monovariable $T_{w_j \to y_i}$, qu'on appelle fonction de sensibilité locale en sortie S_{ij} :

$$S_{ij} = T_{w_j \to y_i} \tag{D.2}$$

La marge de module locale correspondante s'écrit :

$$M_{m_{ij}} = \|S_{ij}\|_\infty^{-1} \tag{D.3}$$

Il n'y a bien sûr pas équivalence entre robustesse locale et globale. Garantir la robustesse locale, même sur tous les transferts S_{ij}, ne suffit pas à garantir la robustesse globale, car les différentes marges de module locales ne tiennent pas compte des effets qu'il peut y avoir simultanément sur les différents transferts S_{ij}.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

MINES Nantes
Institut Mines-Télécom

Thèse de Doctorat

Paul LOISEAU

Contrôle actif acoustique du bruit large bande dans un habitacle automobile

Active control of broadband noise in a car cabin

Résumé

L'atténuation des bruits gênants dans une automobile est classiquement réalisée par ajustement des caractéristiques mécaniques du véhicule : masse, raideur et amortissement. C'est une approche dite passive. Malheureusement, elle induit un ajout de masse important pour traiter les basses fréquences. Le contrôle actif de bruit (atténuation d'un bruit par superposition d'un contrebruit) est actuellement envisagé comme une solution possible à ce problème. L'objectif de cette thèse est d'évaluer les performances atteignables par cette solution.
Un système acoustique étant par essence fortement résonant, sa modélisation sur une large plage de fréquence conduit à des modèles d'ordre élevé, pour l'obtention desquels une méthode d'identification appropriée doit être utilisée. C'est la méthode des sous espaces par approche fréquentielle dans le domaine continu qui a été retenue.
La traduction du cahier des charges conduit à un problème de régulation multivariable $\mathcal{H}_\infty$ multi-objectif et multi-modèle avec contrainte de stabilité forte. Par ailleurs, actionneurs et capteurs ne sont pas colocalisés et on ne mesure pas la perturbation à rejeter. La volonté d'évaluer au plus près les performances atteignables justifie la résolution du problème par optimisation non lisse. Cette approche évite tout pessimisme, mais nécessite de par son caractère local une bonne initialisation et une structuration du régulateur parcimonieuse.
La méthodologie proposée a été validée en simulation et expérimentalement. Elle permet une évaluation et une comparaison précises des performances atteignables en fonction des contraintes sur les mesures et les moyens d'action disponibles.

Mots clés

Contrôle actif acoustique, Atténuation large bande, Automobile, Commande multi-objectif, Commande robuste.

Abstract

Classical methods used for noise reduction in cars are based on adjusting the mechanical properties: mass, stiffness and damping. They are qualified as passive and induce significative addition of weight for reducing low frequency noises. Active noise control is seen as a possible solution to achieve low frequency noise attenuation and weight reduction.
The goal of this work is to evaluate achievable performances with such solution.
Acoustic enclosures are known to be resonant systems of high order. Obtaining a model of it, therefore requires a suitable identification method. The approach chosen is based on subspace methods. It processes data in the frequency domain for obtaining a continuous time model.
The control problem derived from the specifications is a MIMO $\mathcal{H}_\infty$, multi-objective and multi-model problem with a strong stability constraint. Futhermore, actuators and sensors are not-colocated, and no measure of the disturbance is available. In order to precisely evaluate the achievable performances, this problem is solved using nonsmooth optimization.
Such approach ensures the absence of pessimism, but requires an appropriate initialization and a parsimonious controller structure, because it does not ensure convergence toward the global optimum.
The proposed methodology was validated in simulation and experimentally. It allows a precise evaluation and comparison of achievable performances according to the constraints on available measures and means of action.

Key Words

Active noise control, Broadband noise attenuation, Automotive control, Multi-objective control, Robust control.