



**HAL**  
open science

**Analyse mathématique et contrôle optimal pour les  
équations d'advection-diffusion : Application au  
problème de transfert de nutriments pour les plantes en  
agroécologie**

Loïc Louison

► **To cite this version:**

Loïc Louison. Analyse mathématique et contrôle optimal pour les équations d'advection-diffusion : Application au problème de transfert de nutriments pour les plantes en agroécologie. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Guyane, 2015. Français. NNT : 2015YANE0001 . tel-01405394

**HAL Id: tel-01405394**

**<https://theses.hal.science/tel-01405394>**

Submitted on 29 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## École Doctorale de l'UG

« Diversités, Santé et Développement en Amazonie »

### Thèse

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR  
DE L'UNIVERSITE DE GUYANE

par

**LOUISON Loïc**

---

**Analyse mathématique et contrôle optimal pour  
les équations d'advection-diffusion : Application  
au problème de transfert de nutriments pour les  
plantes en agroécologie.**

---

Spécialité : Mathématiques appliquées

Soutenue le 2 octobre 2015 devant le jury composé de :

---

<b>EL JAI Abdelhaq</b>	Professeur Université de Perpignan	Examineur
<b>MILNER Fabio</b>	Professeur Arizona State University	Rapporteur
<b>OMRANE Abdennebi</b>	Professeur Université de Guyane	Directeur de thèse
<b>OZIER-LAFONTAINE Harry</b>	DR INRA Antilles-Guyane	Examineur
<b>PRIMEROSE Antoine</b>	Directeur ESPE de Guyane	Examineur
<b>ZUAZUA Enrique</b>	Professeur Universidad de Madrid	Rapporteur

---

# Résumé

Les terres agricoles ont été durablement contaminées à la fois par les pesticides mis à la disposition des agriculteurs pour lutter contre les charançons et autres insectes nuisibles, et par les engrais azotés pour augmenter la productivité chez les plantes. Des recherches récentes concernent des cultures alternatives écologiques utilisant les plantes de service qui fournissent les nutriments aux plantes principales. Ce travail de thèse s'inscrit dans cette perspective, d'un point de vue modélisation. Pour répondre à ce problème, l'accent est mis sur la résolution de problèmes de contrôle du phénomène d'absorption de nutriments, par les racines dans la rhizosphère (partie proche de la racine), en considérant les deux cas de sols, un sol sain et un sol pollué. Ces phénomènes d'absorption sont modélisés par des systèmes d'advection-diffusion de type Nye-Tinker-Barber (NTB). La concentration de nutriments absorbée, solution du problème, est une fonction du temps et de l'espace. On étudie l'existence de solution du système NTB dans les deux cas où la fonction d'absorption de nutriments à la frontière (surface de la racine) appelée fonction de Michealis-Menten est linéaire et non linéaire, en utilisant l'analyse fonctionnelle. On étudie ensuite les problèmes de contrôle optimal en considérant les deux cas linéaire et non linéaire, d'une part dans un sol non pollué, et d'autre part, dans un sol pollué. Pour le premier cas, on utilise les techniques classiques de recherche d'un contrôle pour les systèmes distribués. Tandis que, pour le second cas, on fait appel aux notions de contrôle sans regret et de contrôle à moindres regrets de J.-L. Lions. Les contrôles obtenus pour chacun des différents problèmes sont caractérisés par un système d'optimalité.

## Mots clés :

Absorption des nutriments du sol, sols pollués, système Nye-Tinker-Barber, problème d'advection-diffusion linéaire et non linéaire, existence, unicité, point fixe, contrôle optimal, contrôle sans regret, contrôle à moindres regrets, système d'optimalité singulier.

Mathematical analysis and  
optimal control for  
advection-diffusion equations :  
Application to nutrient transfer  
for plants in agroecology.

---

# Abstract

Agriculture soils were highly contaminated for a long time by pesticides which were widely used by producers to fight against weevils. Soils were also contaminated by the use of fertilizers to increase the plant development. An ecological alternative using service plants is encouraged following recent research. The aim of this work is to give a mathematical and a modelling point of view as we study the mechanisms of nutrient transfer to plants using the mathematical analysis and optimal control theories. The two cases of polluted and non-polluted soils are considered. The nutrient transfer and uptake processes are modeled by an advection-diffusion system derived from the Nye-Tinker-Barber (NTB) model. The absorbed nutrient concentration represented by the Michaelis-Menten function at the root surface of the principal plant, depends on time and space. We study the existence of a solution for the linear and nonlinear NTB systems, then we characterize the optimal control which corresponds to the added nutrients from the service plant. For the pollution case, we use the concept of low-regret and no-regret control of J.-L. Lions.

## **Keywords :**

Absorption of nutrients, polluted soils, Nye-Tinker-Barber (NTB) system, advection-diffusion, existence, uniqueness, fixed point, optimal control, low-regret control, no-regret control, optimality system.

---

# Remerciement

Je remercie profondément mon directeur de thèse Monsieur A. Omrane de m'avoir proposé un sujet de thèse intéressant liant à la fois la modélisation, l'analyse mathématique, le contrôle optimal, et les applications de ces méthodes en agroécologie, tel que dans l'étude de l'absorption de nutriments par les plantes.

Qu'il soit aussi remercié pour sa disponibilité tout au long de cette thèse. Grâce à sa direction, j'ai découvert le goût du raisonnement, de la rigueur scientifique et de la précision des concepts, nécessaires à tout mathématicien désirant progresser. M. Omrane a par ailleurs œuvré pour que cette thèse se passe dans de bonnes conditions (contrat doctoral, poste ATER). Il m'a toujours encouragé à voyager afin de rencontrer des scientifiques, qu'ils soient mathématiciens et/ou modélisateurs. Ceci m'a permis d'exposer mes travaux en dehors de l'université (Bordeaux, Paris, Barbade, Cuba ..); je le remercie chaleureusement pour tout cela!

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs les Professeurs F. Milner et E. Zuazua d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter sur ce travail de thèse. Comme je remercie vivement Messieurs A. El Jai, H. Ozier-Lafontaine et A. Primerose, d'avoir consenti à faire partie du jury. Je les remercie profondément pour leur participation au jury et pour leurs conseils tant sur la partie modélisation que agroécologie. J'adresse aussi mes remerciements au Professeur R. Acar de l'université de Puerto Rico pour ses remarques et pour ses judicieux conseils concernant la partie délicate du problème non linéaire.

Enfin, Je tiens à remercier Madame F. Seyler, Directrice de notre laboratoire, UMR Espace-Dev, pour ses encouragements constants, ainsi que tous les membres de l'UMR et particulièrement les doctorants pour leur accueil chaleureux.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
1.1	La nutrition végétale . . . . .	15
1.2	Les mécanismes d'absorption des éléments nutritifs . . . . .	18
1.3	Le système de Nye-Tinker-Barber (NTB) . . . . .	20
1.3.1	Equation d'état . . . . .	20
1.3.2	Conditions aux limites . . . . .	21
1.4	Travaux antérieurs . . . . .	23
1.5	Plan de la thèse . . . . .	28
<b>I</b>	<b>Analyse des systèmes NTB linéaires</b>	<b>31</b>
<b>2</b>	<b>Système NTB linéaire à deux frontières</b>	<b>35</b>
2.1	Position du problème . . . . .	35
2.2	Existence d'une solution faible . . . . .	37
2.3	Positivité de la solution . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Système NTB linéaire à une frontière</b>	<b>43</b>
3.1	Position du problème . . . . .	43
3.2	Existence d'une solution faible . . . . .	44
3.3	Positivité de la solution . . . . .	46

<b>II</b>	<b>Contrôle optimal des systèmes linéaires</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Contrôle optimal en sol non pollué</b>	<b>53</b>
4.1	Problème de contrôle à deux frontières . . . . .	53
4.1.1	Existence d'une solution faible . . . . .	54
4.1.2	Existence d'un contrôle optimal . . . . .	55
4.1.3	Caractérisation du contrôle optimal . . . . .	56
4.1.4	Système d'optimalité . . . . .	57
4.2	Problème de contrôle à une frontière . . . . .	61
4.2.1	Existence d'une solution faible . . . . .	62
4.2.2	Existence d'un contrôle optimal . . . . .	63
4.2.3	Caractérisation du contrôle optimal . . . . .	63
4.2.4	Système d'optimalité . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Contrôle optimal en sol pollué</b>	<b>69</b>
5.1	Problème de contrôle à deux frontières . . . . .	73
5.1.1	Existence d'une solution faible . . . . .	74
5.1.2	Contrôle sans regret . . . . .	76
5.1.3	Contrôle à moindres regrets . . . . .	80
5.1.4	Existence et unicité du contrôle à moindres regrets . . . . .	81
5.1.5	Caractérisation du contrôle à moindres regrets . . . . .	82
5.1.6	Système d'optimalité singulier . . . . .	85
5.2	Problème de contrôle à une frontière . . . . .	89
5.2.1	Existence d'une solution faible . . . . .	91
5.2.2	Contrôle sans regret . . . . .	92
5.2.3	Contrôle à moindres regrets . . . . .	95
5.2.4	Existence et unicité du contrôle à moindres regrets . . . . .	95
5.2.5	Caractérisation du contrôle à moindres regrets . . . . .	96
5.2.6	Système d'optimalité singulier . . . . .	97

<b>6</b>	<b>Système NTB non linéaire à deux frontières</b>	<b>101</b>
6.1	Préliminaires . . . . .	101
6.2	Existence d'un point fixe . . . . .	102
6.3	Positivité de la solution . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Système NTB non linéaire à une frontière</b>	<b>113</b>
7.1	Préliminaires . . . . .	113
7.2	Existence d'un point fixe . . . . .	114
7.3	Positivité de la solution . . . . .	116
<b>III</b>	<b>Contrôle optimal pour les systèmes NTB non linéaires</b>	<b>117</b>
<b>8</b>	<b>Contrôle optimal en sol non pollué</b>	<b>121</b>
8.1	Problème de contrôle à deux frontières . . . . .	121
8.1.1	Existence d'un contrôle optimal . . . . .	122
8.1.2	Caractérisation du contrôle . . . . .	122
8.1.3	Système d'optimalité . . . . .	124
8.2	Problème de contrôle à une frontière . . . . .	129
8.2.1	Existence d'un contrôle optimal . . . . .	130
8.2.2	Caractérisation du contrôle . . . . .	130
8.2.3	Système d'optimalité . . . . .	131
<b>9</b>	<b>Contrôle optimal en sol pollué</b>	<b>135</b>
9.1	Problème de contrôle non linéaire à deux frontières . . . . .	135
9.1.1	Contrôle sans regret . . . . .	136
9.1.2	Contrôle à moindres regrets . . . . .	143
9.1.3	Contrôle à moindres regrets adapté . . . . .	144
9.1.4	Existence d'un contrôle à moindres regrets adapté . . . . .	144
9.1.5	Caractérisation du contrôle à moindres regrets adapté . . . . .	145
9.1.6	Système d'optimalité singulier . . . . .	147

9.2	Problème de contrôle non linéaire à une frontière . . . . .	155
9.2.1	Contrôle sans regret . . . . .	156
9.2.2	Contrôle à moindres regrets . . . . .	160
9.2.3	Contrôle à moindres regrets adapté . . . . .	160
9.2.4	Existence d'un contrôle à moindres regrets adapté . . . . .	161
9.2.5	Caractérisation du contrôle à moindres regrets adapté . . . . .	161
9.2.6	Système d'optimalité singulier . . . . .	162
<b>10</b>	<b>Analyse numérique</b>	<b>169</b>
10.1	Différences finies pour le système NTB à deux frontières . . . . .	169
10.2	Simulation numérique . . . . .	172
<b>11</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>177</b>
<b>IV</b>	<b>Annexe</b>	<b>179</b>
<b>A</b>		<b>181</b>
A.1	Majoration pour la méthode du point fixe . . . . .	181
A.2	Continuité des opérateurs . . . . .	182
A.3	Condition aux limites sur $\Sigma_1$ . . . . .	183

# Table des figures

2.1	Racine entourée de la rhizosphère. . . . .	36
3.1	Domaine d'étude du système NTB à une frontière. . . . .	44
5.1	Charançon du bananier - Dégâts du charançon. . . . .	70
10.1	Absorption des nutriments à la surface de la racine en fonction du temps. . . . .	173
10.2	L'apport de nutriments en temps. . . . .	174



# Liste des tableaux

- 1.1 Macro-nutriments et micro-nutriments . . . . . 16
- 1.2 Quantités approximatives apportés d'éléments nutritifs exprimée en  $kg.ha^{-1}$ . . . . . 19



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 La nutrition végétale

L'agriculture, aujourd'hui, doit faire face à de nouveaux enjeux : changement climatique, croissance de la population, pollution des sols et des eaux. Ces défis auxquels elle est confrontée imposent un changement de modèle pour atteindre de la viabilité et de la durabilité tout en protégeant la biodiversité.

En effet le système de cultures actuel, à forts rendements, lancé après guerre, très consommateur de pesticide reste le modèle dominant. Cependant, les pesticides utilisés sont à la fois persistants dans les sols et transférés dans les eaux de surface. La pérennité du secteur agricole passe par l'élaboration d'une agriculture alternative plus soucieuse de l'environnement et moins dépendante du pétrole ; mais intégrant les énergies renouvelables dans ces processus de productions.

Ainsi, il est essentiel de poursuivre les recherches sur la nutrition végétale en tenant compte de la pollution déjà présente dans le sol afin de trouver des modèles répondant aux problèmes agroécologiques actuels.

L'étude de la nutrition végétale a spécifié les besoins des plantes pour leur croissance et leur développement. Elles ont besoin de carbone ( $C$ ) issu du dioxyde de carbone ( $CO_2$ ) obtenu par photosynthèse, d'eau et de sels minéraux puisés dans le sol et absorbés sous forme d'ions par le système racinaire.

Ces éléments nutritifs sont produits dans le sol naturellement. Ils peuvent aussi être apportés par l'homme sous forme de fertilisants chimiques. L'absorption des nutriments est un processus complexe et sensible à de nombreux facteurs, liés à la nature de la plante et au milieu environnemental. Il s'effectue essentiellement au niveau des racines via les poils absorbants. Les sels minéraux essentiels aux plantes sont divisés en deux catégories représentés dans le tableau ci-dessous (Tableau 1.1).

Macro-nutriments	Micro-nutriments
<b>Azote</b>	<b>Fer</b>
<b>Potassium</b>	Manganèse
Soufre	Cuivre
<b>Phosphore</b>	Molybdène
Magnésium	Bore
Calcium	Chlore

Tableau 1.1 – Macro-nutriments et micro-nutriments

Parmi ces nutriments en voici quelques uns qui sont essentiels au développement des plantes et qui jouent un rôle dans la structure interne des végétaux, avec les quantités moyennes absorbées :

**Le potassium** Il peut représenter jusqu'à 3 à 4% du poids sec d'un végétal. Il joue un rôle dans la synthèse et le stockage des glucides ainsi que dans le développement de l'appareil racinaire et dans la rigidité des tiges.

**Le phosphore** Il ne représente qu'entre 0.2 à 1% du poids sec des plantes. Cependant, il s'agit d'un élément essentiel au métabolisme des cellules. Les plantes cultivées nécessitent des apports de phosphore sous forme d'engrais organiques.

**Le soufre** Il est généralement présent sous forme d'ions sulfates ( $SO_4^{2-}$ ) ou de sulfate de calcium ( $CaSO_4$ ) ou de potassium ( $K_2SO_4$ ). En milieu anaérobie<sup>1</sup> il est

---

1. Milieux dépourvu d'oxygène.

aussi présent sous la forme de sulfure d'hydrogène ( $H_2S$ ) et représente entre 0.1 et 1% de la matière sèche. Il joue un rôle dans la constitution de certains acides aminés. La carence en soufre se caractérise par des retards de développement de la plante.

**Le magnésium** La teneur moyenne du sol en magnésium ( $Mg^+$ ) est de 2 à 100 kilogrammes par hectare. Les cultures ont des besoins de l'ordre de 0 à 25 kilogrammes par hectare par an. Il entre dans la composition de la chlorophylle. Une carence de magnésium se manifeste par des chloroses<sup>2</sup> plus ou moins sévères.

**Le fer** Les besoins en fer ( $Fe^{2+}$ ) des cultures sont de l'ordre de 30 à 60 kilogrammes par hectare par an. Il est abondant dans la nature mais très souvent sous une forme « chélatée » c'est-à-dire piégé par d'autres ions comme le calcium ( $Ca^{2+}$ ). Il joue un rôle dans la biosynthèse de la chlorophylle et dans de nombreuses réactions d'oxydoréduction. Une abondance de calcium, entraîne une carence en fer, qui se caractérise par des chloroses, mais aussi par de forts ralentissements au niveau du développement de la plante.

**L'azote** Élément indispensable à l'alimentation des plantes, au même titre que les autres ions, il revêt, néanmoins, une importance particulière compte tenu de son implication dans la constitution des protéines et de l'acide nucléique<sup>3</sup>. Il provient majoritairement des résidus organiques.

Tous ces sels minéraux sont absorbés par différents mécanismes qui se produisent autour d'une région proche de la racine appelé la rhizosphère<sup>4</sup>.

---

2. Carence en chlorophylle des plantes se traduisant par une coloration jaune pâle des organes (feuilles, tige) qui devraient être verts.

3. Substance chimique portant, dans chaque cellule, les instructions héréditaires codées qui permettent le développement de l'organisme.

4. Zone du sol voisine des racines des plantes et où se concentrent les micro-organismes.

## 1.2 Les mécanismes d'absorption des éléments nutritifs

La progression des racines dans le sol est indépendante des sources d'éléments nutritifs s'y trouvant. En effet, durant leur absorption, les sels minéraux doivent être dans une position adjacente à la racine. Ce positionnement peut être réalisé par un ou plusieurs des trois mécanismes suivants :

**Interception par la racine** Les racines peuvent *cogner* les ions quand elles grandissent à travers le sol. Ce processus de prélèvement repose sur le contact direct. La quantité d'éléments nutritifs assimilables correspond à la quantité d'éléments dans le volume de sol en contact avec les racines. Celles-ci peuvent entrer en contact direct avec un maximum de 3% des éléments nutritifs immobiles assimilables. Les poils absorbants ainsi que les mycorhizes<sup>5</sup> augmentent le volume de sol dans lequel les végétaux prélèvent les sels minéraux ; accentuant ainsi le mécanisme d'interception racinaire. Par exemple pour la culture du blé, ce processus permet l'apport de  $60 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$  de calcium ( $\text{Ca}^{2+}$ ).

**Débit massique** La partie soluble des nutriments présente dans l'eau du sol. Il s'agit du principal mode de transport pour la culture du blé du calcium  $150 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ , du magnésium  $100 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$  et de l'azote sous forme de nitrates  $\text{NO}_3^-$   $65 \text{ kg} \cdot \text{ha}^{-1}$ .

**Diffusion** Les éléments nutritifs tels que le phosphore  $\text{P}^+$ , et le potassium  $\text{K}^+$  se déplaçant vers la racine par diffusion, ne sont, cependant, présents qu'en petites quantités dans le sol, car fortement absorbés par celui-ci. Leur concentration dans

---

5. Association symbiotique entre un champignon et les parties souterraines d'un végétal. Il existe deux types de mycorhizes :

- Les endomycorhizes où le champignon croît à l'intérieur des cellules de la plantes.
- Les ectomycorhizes où le champignon est à l'extérieur des cellules sous forme d'un réseau particulier.

l'eau du sol, à proximité immédiate des racines, diminue à cause de leur absorption à la surface des racines. Cela crée ainsi un gradient pour ces éléments à diffuser à travers les eaux interstitielles (les eaux du sol) d'une zone de forte concentration vers une zone de faible concentration. Par exemple pour la culture du blé, ce processus permet l'apport de  $38 \text{ kg.ha}^{-1}$  de phosphore ainsi que de  $156 \text{ kg.ha}^{-1}$  de potassium.

**Remarque 1.2.1** *Ces deux derniers phénomènes de débit massique et de diffusion sont responsables de la majorité des transferts de nutriments dans les plantes et nous concernent principalement.*

Le tableau ci-dessous (Tableau 1.2) montre la quantités approximatives d'éléments nutritifs apportés par chacun des mécanismes pour la culture du blé dans un sol sablo-limoneux (voir [3]) :

	Interception	Débit massique	Diffusion
Azote	2	150	38
Phosphore	1	2	37
Potassium	4	35	156
Calcium	60	150	0
Magnesium	15	100	0
Soufre	1	65	0

Tableau 1.2 – Quantités approximatives apportés d'éléments nutritifs exprimée en  $\text{kg.ha}^{-1}$ .

L'étude de ces différents processus d'absorption a conduit naturellement à la modélisation mathématique de l'absorption pour mieux connaître ces mécanismes. Les modèles sont élaborés suite aux travaux de Nye, Tinker et Barber.

### 1.3 Le système de Nye-Tinker-Barber (NTB)

Les modèles mathématiques sur la nutrition végétale ont émergé à partir des années 1960. En particulier, Nye et Spiers [27] ont exprimé la variation de la concentration des éléments nutritifs autour de la racine, au moyen d'une équation différentielle du second ordre sans la résoudre. Puis, Nye prolongea cette étude avec Mariott [26] en résolvant analytiquement et numériquement cette équation en utilisant un schéma numérique de Crank-Nicolson. Barber et Itoh [10], Nye et Tinker ([25], [36]) décrivent chimiquement les processus liés à l'absorption des nutriments par les racines. Ils en déterminent ensuite un modèle utilisant les équations aux dérivées partielles connu sous le nom de système de Nye-Tinker-Barber (NTB). C'est un modèle d'absorption-convection-diffusion avec une condition absorption non linéaire à la surface de la racine. A cause de cette non-linéarité Nye et Tinker [25] ainsi que Barber [3] l'ont résolu numériquement par un schéma aux différences finies. Le système NTB est constitué d'une équation d'état, d'une ou deux conditions aux limites, et d'une condition initiale.

#### 1.3.1 Equation d'état

La rhizosphère (partie du sol proche de la racine) est représentée par un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=1, 2$  ou  $3$ ) borné, de frontière  $\partial\Omega := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  (système NTB à deux frontières) ou  $\partial\Omega := \Gamma_1$  (système NTB à une seule frontière).

Dans le sol, les minéraux sont à la fois sous forme liquide et solide. Néanmoins ceux-ci peuvent passer d'une forme à l'autre à l'aide de phénomènes *d'adsorption*<sup>6</sup> et de *désorption*<sup>7</sup> (voir [36]). Dans un intervalle de temps  $[0, T]$ , ce passage est

---

6. Rétention à la surface d'un solide des molécules d'un gaz ou d'une substance en solution ou en suspension.

7. Élimination de molécules de gaz ou de liquide préalablement adsorbées par la surface d'un solide.

exprimé par la relation

$$c_s = bc_l,$$

où  $c_s = c_s(t, x)$  est la concentration de nutriments solides,  $c_l = c_l(t, x)$  est la concentration de nutriments liquides et le coefficient  $b$  représente le pouvoir tampon du sol (voir [29]). D'où, la variation en temps de la concentration des nutriments solides est proportionnelle à la variation de la concentration liquide :

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} = b \frac{\partial c_l}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Les éléments nutritifs liquides subissent dans le sol des phénomènes de diffusion et convection exprimés par l'égalité suivante :

$$\phi \frac{\partial c_l}{\partial t} = D \Delta c_l - \mathbf{q} \cdot \nabla c_l,$$

où le coefficient  $\phi$  est la teneur en humidité, le coefficient  $D$  est le coefficient de diffusion et le vecteur  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, x)$  est le flux de Darcy vérifiant ici la propriété  $\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ . La variation en temps totale de sels minéraux est donné par :

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} + \phi \frac{\partial c_l}{\partial t} = D \Delta c_l - \mathbf{q} \cdot \nabla c_l.$$

A l'aide de (1.1), on obtient alors l'équation suivante :

$$(b + \phi) \frac{\partial c_l}{\partial t} = D \Delta c_l - \mathbf{q} \cdot \nabla c_l.$$

En posant  $c = c_l$  et  $\alpha = b + \phi$ , on trouve alors l'équation d'état du système NTB :

$$\alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega.$$

### 1.3.2 Conditions aux limites

La première condition aux limites naturelle qui découle du système NTB est une condition de type Robin, donnée par l'équation

$$-(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = h(c) \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1.$$

Elle décrit l'absorption des éléments nutritifs à la surface du système racinaire. En effet, les études menées sur la cinétique de transport des ions, dans la membrane cellulaire d'une plante (voir [34]), montrent que l'absorption des sels minéraux est semblable à une catalyse enzymatique<sup>8</sup> suivant « *le formalisme de Michealis<sup>9</sup>-Menten<sup>10</sup>* » exprimé par la fonction :

$$h(c) = \frac{Ic}{K + c}.$$

Le coefficient  $I$  désigne l'afflux maximal de nutriments absorbés, la constante  $K$  est la constante de Michaelis-Menten ayant la même dimension que la concentration  $c = c(t, x)$ .

La seconde condition aux limites du système NTB est modélisée par l'équation

$$(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_2 := ]0, T[ \times \Gamma_2.$$

Elle signifie qu'il n'y a pas de flux de nutriments provenant de l'extérieur de la rhizosphère. Cette condition aux limites n'apparaît pas pour le système NTB avec une frontière. Enfin, la condition initiale du système NTB est  $c_0 = c(0, x)$  définie dans  $\Omega$ . Elle représente une quantité initiale de sels minéraux à l'intérieur de la rhizosphère.

---

8. Processus de catalyse (modification d'une réaction chimique sous l'effet d'une substance) dans lequel les enzymes (molécules protéiques) jouent un rôle de catalyseur.

9. Leonor Michaelis, né à Berlin, le 16 janvier 1875, décédé à New-York, le 8 octobre 1949, biochimiste et médecin allemand, fut renommé pour son travail avec Maud leonora Menten sur la cinétique enzymatique et l'équation de Michaelis-Menten proposé en 1913.(wikipedia)

10. Maud Leonora Menten, née le 20 mars 1879, décédée, le 26 juillet 1960, scientifique médicale canadienne, fit des contributions importantes dans le domaine de la cinétique enzymatique en biochimie ainsi qu'en histochimie. Elle est surtout connue pour l'équation de Michaelis-Menten.

## 1.4 Travaux antérieurs

Il existe d'autres travaux sur la modélisation mathématique de l'absorption des nutriments. Roose T. [29], [30], [31], en modélisant une racine sous forme d'un cylindre. Elle utilisa le modèle NTB exprimé en coordonnées polaires constitué d'une équation d'état de convection-diffusion :

$$(\phi + b) \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{a \mathbf{q}}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\phi D}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( \frac{\partial c}{\partial r} \right),$$

avec les conditions aux limites :

$$\phi D \frac{\partial c}{\partial r} + \mathbf{q} c = \frac{I c}{K + c} \quad \text{à} \quad r = a,$$

$$c \rightarrow c_0 \quad \text{lorsque} \quad r \rightarrow +\infty \quad t > 0,$$

et la condition initiale :

$$c = c_0 \quad \text{à} \quad t = 0 \quad \text{lorsque} \quad a < r < \infty,$$

où l'on retrouve le pouvoir tampon du sol  $b$ , le taux d'humidité du sol  $\phi$ , le coefficient de diffusion  $D$ , le flux maximale de nutriments à l'intérieure de la racine  $I$ , la constante de Michealis-Menten  $K$ , le flux de l'eau  $\mathbf{q}$ , le rayon de la racine  $a$ . En posant :

$$c = Kc^*, \quad r = ar^*, \quad t = \frac{(\phi + b)a^2 t^*}{\phi D},$$

on obtient le modèle adimensionné suivant :

$$\frac{\partial c}{\partial t} - Pe \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} + Pe c = \frac{\lambda c}{1 + c} \quad \text{à} \quad r = 1, \quad (1.3)$$

$$c \rightarrow c_\infty \quad \text{lorsque} \quad r \rightarrow +\infty \quad t > 0, \quad (1.4)$$

$$c = c_\infty \quad \text{à} \quad t = 0 \quad \text{lorsque} \quad 1 < r < \infty, \quad (1.5)$$

où  $Pe = \frac{a \mathbf{q}}{\phi D}$  est le nombre de Péclet,  $\lambda = \frac{I a}{\phi D K}$  le coefficient d'absorption,  $c_\infty = \frac{c_0}{K}$  la condition initiale.

En négligeant le terme de Péclet :  $Pe \ll \varepsilon$ , elle effectua l'étude et l'analyse de ce modèle en utilisant la méthode des développements asymptotiques. Puis, elle prolongea son analyse, tout d'abord, en tenant compte des poils absorbants. L'équation donnée par (1.2) est devenu alors :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla^2 c.$$

La condition aux limites donnée par (1.3) se transforme en

$$\mathbf{n} \cdot \nabla c = \frac{\lambda c}{1 + c} \quad \text{sur} \quad \partial H,$$

avec  $\partial H$  la surface de la racine comprenant les poils absorbants et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la surface de la racine. La condition aux limites donnée par (1.4) et la condition initiale donnée par (1.5) restent les mêmes que celles du modèle adimensionné précédent. En intégrant les mycorhizes, l'équation donnée par (1.2) devient alors

$$\frac{\partial c}{\partial t} - Pe \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c}{\partial r} \right) - F_{myc}^*,$$

où  $F_{myc}^*$  est l'absorption des nutriments par les mycorhizes vérifiant :

$$F_{myc}^* = \frac{a^2}{DK\phi} 2\pi a_m l_m(r) \frac{Ic}{1 + c},$$

avec  $a_m$  le rapport entre le rayon des mycorhizes et celui de la racine,  $l_m$  la longueur des mycorhizes par unité de volume de sol. Pour ce modèle les conditions aux limites données par (1.3) et (1.4) ainsi que la condition initiale (1.5) restent les mêmes que celles du modèle d'origine. Ensuite, Roose s'intéressa à l'absorption de l'eau par les racines des plantes (voir [29], chapitre 7 et chapitre 8). A la suite de cela, elle termina avec un modèle tenant compte à la fois du mouvement de l'eau et de l'absorption des nutriments dans le but de comprendre les effets de la pollution des eaux du sol due à l'utilisation des fertilisants chimiques.

Le mouvement de l'eau et son absorption a été obtenu par l'équation suivante :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} = \nabla \cdot [D_0 D(S) \nabla S - K_S k(s) \hat{\mathbf{k}}] - F_w(S, z, t),$$

où  $S$  est la saturation en eau du sol,  $D(s)$  et  $D_0$  caractérisent la diffusion de l'eau,  $k(s)$  la conduction de l'eau due à la gravité et  $F_w$  l'absorption de l'eau par les racines. En intégrant l'eau contenue dans le sol, le mouvement des sels minéraux et leur absorption, on obtient l'équation suivante (Cf. [29]) :

$$\frac{\partial}{\partial t}[b + \phi S] + \nabla[c \mathbf{q}] = \nabla.[D_f \phi^{d+1} S^{d+1} \nabla c] - F(c, S, t), \quad (1.6)$$

où  $D_f \phi^d S^d$  est le facteur d'impédance avec le paramètre  $d \in [1, 2]$ . L'absorption des nutriments est donnée par le terme  $F$ . Elle fit intervenir le flux de l'eau  $\mathbf{q}$  dans le sol vérifiant la loi de Darcy dans un milieu poreux non saturé :

$$\mathbf{q} = -D_0 D(S) \nabla S + K_s k(s).$$

L'équation donnée par (1.6) devint alors

$$\frac{\partial}{\partial t}[b + \phi S] = \nabla.\{D_f \phi^{d+1} S^{d+1} \nabla c + c[D_0 D(S) \nabla S - K_s k(s) \hat{\mathbf{k}}]\} - F(c, S, t)$$

avec  $\hat{\mathbf{k}}$  le vecteur unitaire pointant verticalement dans le sol. Elle détermina des conditions aux limites. Les conditions aux limites à la surface du sol données par les équations suivantes :

Le flux de l'eau due à la pluie :

$$-D_0 D(S) \frac{\partial S}{\partial z} + K_s k(s) = W_{dim} \quad \text{à } z = 0, \quad (1.7)$$

avec  $W_{dim}$  le volume volume de flux de l'eau par unité de surface en temps. La condition pour les nutriments à la surface du sol :

$$D_f \phi^{d+1} S^{d+1} \frac{\partial c}{\partial z} - c[D_0 D(S) \frac{\partial S}{\partial z} - K_s k(s)] = \rho_{dim} \quad \text{à } z = 0,$$

où  $\rho_{dim}$  la quantité de fertilisant. En remplaçant  $-D_0 D(S) \frac{\partial S}{\partial z} - K_s k(s)$  dans l'équation précédent par  $W_{dim}$ , elle a obtenu

$$D_f \phi^{d+1} S^{d+1} \frac{\partial c}{\partial z} - c W_{dim} = \rho_{dim} \quad \text{à } z = 0.$$

La condition aux limites dans le sol :

$$-D_0 D(S) \frac{\partial S}{\partial z} + K_s k(s) = 0 \quad \text{à } z = l_w,$$

et

$$-D_f \phi^{d+1} S^{d+1} \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad \text{à} \quad z = l_w,$$

avec  $l_w$  un profondeur de sol par rapport à la surface. En posant :  $c = Kc^*$ ,  $z = K_0 z^*$ ,  $t = [t]t^*$  avec  $[t] = \frac{bK_0^2}{D_0}$  où  $K_0$  est la longueur maximale de la racine, elle obtint le modèle adimensionné suivant :

$$(1 + \delta S) \frac{\partial c}{\partial t} - [D(S) \frac{\partial S}{\partial z} - \epsilon k(s)] \frac{\partial c}{\partial z} = R \frac{\partial}{\partial z} [S^{d+1} \frac{\partial c}{\partial z}] - F + F_w c$$

$$\text{où } \delta = \frac{\phi}{b}, \quad R = \frac{D_f \phi^{d+1}}{D_0}, \quad \epsilon = \frac{K_s K_0}{D_0}.$$

Les conditions aux limites sont :

$$D(S) \frac{\partial s}{\partial z} + \epsilon k(s) = w \quad \text{à} \quad z = 0,$$

$$W c - R S^{d+1} \frac{\partial c}{\partial z} = \rho \quad \text{à} \quad z = 0,$$

$$D(s) \frac{\partial S}{\partial z} + \epsilon k(s) = 0 \quad \text{à} \quad z = l_w,$$

$$R S^{d+1} \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad \text{à} \quad z = l_w,$$

$$\text{où } \rho = \rho_{dim} \frac{K_0}{D_0 K} \text{ et } W = W_{dim} \frac{K_0}{D_0}.$$

Récemment, Comte M. et al. [7], définirent un modèle mathématique de l'absorption du phosphore par les racines, gouverné par une équation de convection-diffusion avec une condition aux limites non linéaire de la façon suivante :

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=2, 3$ ), une partie du sol avec pour frontière  $\partial\Omega = \Gamma$ . La surface de la racine  $\Gamma_1$  et son complémentaire  $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ . Soit  $T > 0$  et  $I = [0, T]$ .

Le système de convection-diffusion est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t(\phi c + \varphi(c)) & = \operatorname{div}(A\nabla c - qc) - R \quad \text{dans } I \times \Omega, \\ -(A\nabla c - qc) \cdot \mathbf{n} & = \alpha h(c) \quad \text{sur } I \times \Gamma_1, \\ (A\nabla c - qc) \cdot \mathbf{n} & = 0 \quad \text{sur } I \times \Gamma_2, \\ c(0, x) & = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où

la concentration initiale  $c_0$  de phosphore (P), le coefficient de diffusion  $A$  de P, le taux d'humidité  $\phi$ , le flux de l'eau  $\mathbf{q}$ , l'isotherme d'absorption de Freundlich  $\varphi$  vérifiant :

$$\varphi(c) = kc^b, \quad c \in [0, +\infty[, \quad k > 0, \quad b \in ]0, 1[,$$

$h$  : la fonction de Michaelis-Menten :

$$h(c) = \frac{Ic}{K + c} \quad \text{pour } c \in [0, +\infty[, \quad I, K > 0,$$

$R$  : une source ou un puits de nutriments (fertilisant chimique),

$\alpha$  : un paramètre introduit afin d'obtenir la régularité de la conditions aux limites lorsque  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$  :  $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  tel que pour tout  $x \in \Gamma$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \geq \alpha(x) \geq 1 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \alpha(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right.$$

Ils montrèrent que ce modèle est bien posé et admet une solution unique dans les espaces de Hölder. Puis, ils formulèrent un problème d'optimisation :

Maximiser la quantité de phosphore absorbée représentée par la fonction de forme suivante :

$$J(c) = \int_0^T \int_{\Gamma_1} h(c),$$

sous la contrainte du volume  $|\Omega| = \text{constant}$ . Ceci, afin d'augmenter l'absorption du phosphore en améliorant la forme des racines.

Notre démarche n'est pas la même bien que les systèmes soient proches. En effet, nous évaluons dans cette thèse directement la concentration  $c(t, x)$  et non  $h(c)$ , dans tout le domaine  $Q$ . Nous considérons également le cas des sols pollués. Enfin, nous étudions les deux cas linéaire et non linéaire de  $h(c)$ .

## 1.5 Plan de la thèse

Le système NTB que nous étudions possède deux configurations possibles, une seule frontière ( $\Gamma_1$ ) et deux frontières ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ ), pour chacune d'entre elles on a deux écritures de la fonction d'absorption,  $h(c) = \frac{Ic}{K}$  (écriture linéaire) et  $h(c) = \frac{Ic}{K+c}$  (écriture non linéaire). Ces deux écritures dépendent du type d'élément nutritif absorbé par la plante (voir [13]).

Il y a donc 4 systèmes d'équations aux dérivées partielles à étudier. On appellera alors **les systèmes NTB linéaires**, les deux configurations du système NTB avec la fonction d'absorption linéaire et **les systèmes-NTB non linéaires**, les deux configurations du système NTB avec la fonction d'absorption non linéaire.

Ce travail de thèse est divisé en quatre parties :

### **Partie I : « Analyse mathématique des systèmes NTB linéaires »**

On montrera l'existence et la positivité de solutions "faibles" pour les systèmes NTB linéaires.

### **Partie II : « Contrôle optimal pour les systèmes NTB linéaires »**

On effectuera d'abord la recherche de contrôle optimal pour les systèmes NTB linéaires en sol non pollué en appliquant les techniques classiques de contrôle optimal telles que celles développées par J.-L. Lions [14]. Puis, on abordera, la recherche de contrôle optimal en sol pollué. On utilisera alors les techniques de contrôle pour les systèmes à données manquantes appliquées par J.-L. Lions [9], [17], [15], [16]

et utilisées dans les articles de O. Nakoulima, A. Omrane, J. Velin [21], [22], [23], ainsi que dans l'article de B. Jacob, A. Omrane [11], en faisant appel aux notions de *contrôle sans regret* et *contrôle à moindres regrets*.

**Partie III : « Analyse mathématique des systèmes NTB non linéaires »**

On montrera l'existence et la positivité des solutions pour les systèmes NTB non linéaires (correspondant au cas où  $h(c)$  est non linéaire).

**Partie IV : « Contrôle optimal pour les systèmes NTB non linéaires »**

On abordera, dans un premier temps, la recherche du contrôle optimal pour les systèmes NTB non linéaires en sol non pollué. Puis, dans un second temps, on traitera de la recherche de contrôle optimal pour les systèmes NTB non linéaires en sol pollué. On utilisera les notions de *contrôle sans regret adapté* et *contrôle à moindres regrets adaptés* développés dans [22], pour les différents cas. Ensuite, on donnera un exemple de simulation numérique.

Puis on terminera ce travail par une conclusion et des perspectives.



**Première partie**

**Analyse des systèmes NTB**  
**linéaires**



Avant de débiter toute recherche préalable de contrôle pour le système Nye-Tinker-Barber (NTB), on doit s'assurer de l'existence de solution quelles que soient les configurations considérées. On fera dans cette partie l'analyse mathématique des systèmes NTB linéaires :

Système NTB à deux frontières :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = h(c) \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ (D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = f \quad \text{sur } \Sigma_2 := ]0, T[ \times \Gamma_2, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Système NTB à une frontière :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = f \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = h(c) \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où la fonction d'absorption  $h(c) = \frac{Ic}{K}$ .



# Chapitre 2

## Systeme NTB lineaire à deux frontieres

### 2.1 Position du probleme

Dans ce chapitre, on aborde la question d'existence et de positivité d'une solution pour le systeme de NTB lineaire à deux frontieres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ (D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = f \quad \text{sur } \Sigma_2 := ]0, T[ \times \Gamma_2, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où la concentration d'elements nutritifs est representee par  $c = c(t, x)$  exprimee au temps  $t$  et à la position  $x$ . Le coefficient  $\alpha$  et le coefficient de diffusion  $D$  sont constants et positifs. Le vecteur  $q = q(t, x)$  represente le flux de l'eau et verifie la condition du flux de Darcy :

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \quad \text{dans } Q. \quad (2.2)$$

Cette condition caractérise les écoulements incompressibles (l'eau). La fonction linéaire  $\frac{Ic}{K}$  est l'expression linéaire de la fonction d'absorption de Michealis-Menten ; où  $I$  désigne le flux maximal de nutriments à l'intérieur de la racine et  $K$  est la constante de Michealis-Menten. La fonction  $f$  représente une source de nutriments. La figure ci-dessous schématise le domaine d'étude du système (2.1). Il est constitué d'une partie blanche, le système racinaire ayant pour surface  $\Gamma_1$  et entouré d'une partie grise, la rhizosphère  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (où  $d=1,2$  ou  $3$ ), dont la frontière est  $\Gamma_2$ . Les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  vérifient  $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \emptyset$ .

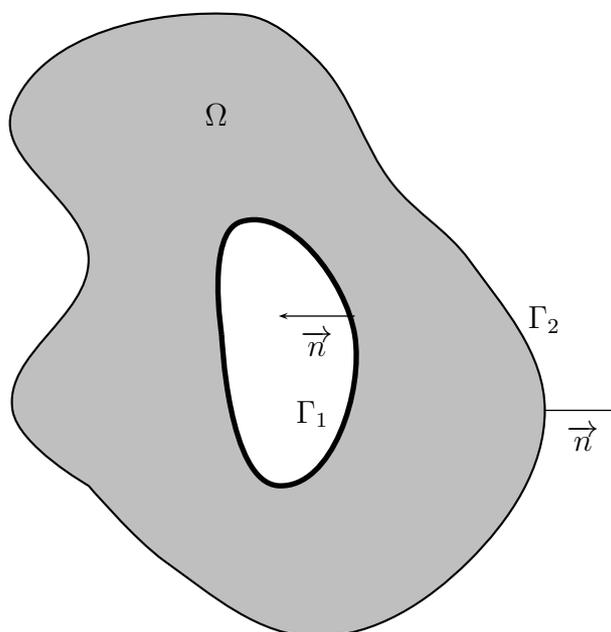


FIGURE 2.1 – Racine entourée de la rhizosphère.

**Remarque 2.1.1** *Dans ce chapitre, on considère la situation où aucun nutriment ne provient de la frontière  $\Gamma_2$  et que le sol n'est pas pollué. L'influence de la pollution du sol va être l'objet des chapitres suivants.*

## 2.2 Existence d'une solution faible

Dans cette section, on traite de l'existence d'une solution faible pour le système (2.1). Ce type de système admet des solutions dans des espaces faibles comme les espaces de Sobolev ou de Hölder (Allaire [1], Lions-Magenes [19]-[20]). Le système (2.1) sera écrit sous sa formulation faible.

On suppose que la concentration  $c(t, \cdot)$  est une fonction continue en temps. Elle est considérée comme un élément de  $H^1(\Omega)$  représentant  $x \mapsto c(t, x)$ , où  $t \in [0, T]$ .

**Remarque 2.2.1** *L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est muni de la norme suivante :*

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.3)$$

pour tout  $\varphi \in H^1(\Omega)$ .

**Lemme 2.2.1** *Le système (2.1) admet une formulation faible donnée par*

$$\begin{cases} \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + a(t; c, \psi) = L(t, \psi) & p.p \ t \in ]0, T[, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ c(0, x) = c_0(x), \end{cases} \quad (2.4)$$

où

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} c \psi \, d\sigma_1, \quad (2.5)$$

et

$$L(t; \psi) = \int_{\Gamma_2} \psi f \, d\sigma_2.$$

**Preuve** - On multiplie l'équation d'état du système (2.1) par  $\psi \in H^1(\Omega)$  et on intègre par parties. Puisque l'ensemble  $\Omega$  et la fonction  $\psi$  ne dépendent pas du temps, on peut écrire :

$$\alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + \underbrace{\int_{\Omega} \psi (\mathbf{q} \cdot \nabla c) \, dx}_{=A} - D \underbrace{\int_{\Omega} (\Delta c) \psi \, dx}_{=B} = 0.$$

Pour le terme  $A$  :

$$A = \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \nabla c) \psi \, dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{q}c) - c \operatorname{div}(\mathbf{q})) \psi \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}c) \psi \, dx,$$

à l'aide de la condition du flux de Darcy (2.2).

Puisque :

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}c)\psi = \operatorname{div}(\mathbf{q}c\psi) - \mathbf{q} \cdot (c\nabla\psi),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}c) \psi \, dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{q}c\psi) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (c\nabla\psi) \, dx \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{q}c\psi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (c\nabla\psi) \, dx, \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Gauss (dit aussi le théorème de divergence).

D'où l'on trouve :

$$A = \int_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\mathbf{q}c) \, dx = \int_{\Gamma} \mathbf{q}c\psi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (c\nabla\psi) \, dx.$$

Puis, en ajoutant  $A$  des deux cotés de l'égalité précédente, on obtient :

$$2A = 2 \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \nabla c) \psi \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot c \psi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (2.6)$$

Pour le terme  $B$  on a :

$$B = -D \int_{\Omega} (\Delta c) \psi \, dx = - \int_{\Gamma} (D \nabla c) \psi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx, \quad (2.7)$$

en utilisant la formule de Green.

En additionnant les termes  $A+B$ , on trouve :

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left( D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot c \right) \psi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{Ic}{K} \psi \, d\sigma_1 \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} f \psi \, d\sigma_2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

en utilisant les conditions aux limites du système (2.1). On obtient alors la forme bilinéaire  $a(t; c, \psi)$  souhaitée. ■

**Théorème 2.2.1** *On suppose que  $|q|$  est uniformément borné :  $q \in L^\infty(Q)$  et que  $f \in L^2(\Sigma_2)$ . Alors, il existe une unique solution  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  pour la formation faible (2.4).*

**Preuve** - Tout d'abord, on montre que la forme bilinéaire

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} c \psi d\sigma_1 \quad (2.9)$$

est continue sur  $H^1(\Omega)$ .

En effet, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$|a(t; c, \psi)| \leq (q_\infty + D) \|c\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \|c\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\psi\|_{L^2(\Gamma_1)} \quad (2.10)$$

où  $q_\infty = \|q\|_{L^\infty(Q)}$ .

On trouve à l'aide du théorème de trace qu'il existe  $\beta = \beta(\Omega) > 0$ ,  $\beta' = \beta'(\Omega) > 0$  tel que :  $\|\psi\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \beta' \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$ , et  $\|c\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \beta \|c\|_{H^1(\Omega)}$ , alors il existe une constante  $C$  telle que  $|a(t; c, \varphi)| \leq C \|c\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$  avec  $C = q_\infty + D + \beta\beta'$  ce qui implique que la forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $H^1(\Omega)$ .

On montre maintenant que la forme bilinéaire  $a$  est semi-coercive au sens de Lions [5]. On a en effet :

$$a(t; c, c) = D \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} |c|^2 d\sigma_1 \geq D \|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.11)$$

Comme :

$$D \|\nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2 = D \|c\|_{H^1(\Omega)}^2 - D \|c\|_{L^2(\Omega)}^2$$

On obtient alors :

$$a(t; c, c) \geq D \|c\|_{H^1(\Omega)}^2 - D \|c\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall c \in H^1(\Omega). \quad (2.12)$$

La forme linéaire  $L$  est continue sur  $H^1(\Omega)$ . En effet, il existe  $\beta' = \beta'(\Omega) > 0$ , tel que

$$|L(t, \psi)| = \left| \int_{\Gamma_2} f \psi d\sigma_2 \right| \leq \beta' \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Gamma_2)},$$

à l'aide du théorème de trace.

Les hypothèses du théorème de Lions pour les problèmes d'évolution (voir Al-laire [1], Brezis [5]) sont satisfaites. D'où il existe une unique solution faible  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  du système (2.1). ■

### 2.3 Positivité de la solution

Dans cette section, on vérifie que toute solution  $c = c(t, x)$  du système (2.1) est positive. En effet, les plantes absorbent des sels minéraux qui sont des quantités positives.

**Proposition 2.3.1** *Soit  $c$  une solution du système (2.1). Si  $c_0 \geq 0$  et  $f|_{\Sigma_2} \geq 0$  alors  $c \geq 0$  et on a  $c(T, \cdot) \geq 0$ , pour tout  $T > 0$ .*

**Preuve** - On décompose  $c = (t, \cdot)$  en  $c = c^+ - c^-$ , où usuellement :

$$\text{où } c^- = \begin{cases} -c & \text{si } c < 0 \\ 0 & \text{si } c \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } c^+ = \begin{cases} c & \text{si } c > 0 \\ 0 & \text{si } c \leq 0. \end{cases}$$

On montrera que  $c^- = 0$ .

On multiplie l'équation d'état du système (2.1) par  $c^-$  et on intègre par parties.

On obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q \left( \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla c) - D \Delta c \right) c^- \, dx dt \\ &= \alpha \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} c^- \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \nabla c) c^- \, dx dt - D \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta c) c^- \, dx dt \\ &= \underbrace{-\alpha \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial c^-}{\partial t} \right) c^- \, dx dt}_{=A} - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \nabla c^-) c^- \, dx dt}_{=B} + \underbrace{D \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta c^-) c^- \, dx dt}_{=C}, \end{aligned}$$

car

$$\left| \frac{\partial c^+}{\partial t} \right| c^- = (\nabla c^+) c^- = (\Delta c^+) c^- = 0.$$

On trouve pour le terme  $A$  :

$$A = -\alpha \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial c^-}{\partial t} \right) c^- dxdt = -\frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(T)|^2 - |c^-(0)|^2 dx \right). \quad (2.13)$$

Puis on obtient pour le terme  $B$  :

$$\begin{aligned} B &= - \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \nabla c^-) c^- dxdt = - \int_0^T \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \operatorname{div} (\mathbf{q} |c^-|^2) - |c^-|^2 \operatorname{div} \mathbf{q} \right) dxdt \\ &= - \int_0^T \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \operatorname{div} (\mathbf{q} |c^-|^2) \right) dxdt, \\ &= - \int_0^T \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot |c^-|^2 \cdot \mathbf{n} d\sigma dt, \end{aligned} \quad (2.14)$$

à l'aide de la condition du flux de Darcy (2.2) et du théorème de Gauss.

Ensuite, on trouve pour le terme  $C$  :

$$C = D \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta c^-) c^- dxdt = D \int_0^T \int_{\Gamma} (\nabla c^-) c^- \cdot \mathbf{n} d\sigma dt - D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dxdt, \quad (2.15)$$

en utilisant la formule de Green.

En additionnant les termes  $B$  et  $C$ , on obtient :

$$\begin{aligned} B + C &= - \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \nabla c^-) c^- dxdt + D \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta c^-) c^- dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma} \left( D \nabla c^- - \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot c^- \right) c^- \cdot \mathbf{n} d\sigma dt - D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dxdt \\ &= - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} |c^-|^2 d\sigma_1 dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} f c^- d\sigma_2 dt \\ &\quad - D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dxdt \\ &= - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} |c^-|^2 d\sigma_1 dt - D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dxdt, \end{aligned}$$

à l'aide de l'hypothèse  $f_{|\Sigma_2} \geq 0$  et des conditions aux limites du système (2.1).

Enfin, en ajoutant le terme A au calcul précédent on obtient :

$$A + C + B = -\frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(T)|^2 - |c^-(0)|^2 dx \right) - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} |c^-|^2 d\sigma_1 dt$$

$$-D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dx dt = 0. \quad (2.16)$$

D'où :

$$A + C + B = -\frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(T)|^2 - |c^-(0)|^2 dx \right)$$

$$= \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} |c^-|^2 d\sigma_1 dt + D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 dx dt \geq 0. \quad (2.17)$$

On trouve alors :

$$\frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(T)|^2 dx \right) \leq \frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(0)|^2 dx \right).$$

On conclut alors

$$\|c^-(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|c^-(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall T \geq 0.$$

■

# Chapitre 3

## Systeme NTB lineaire a une frontiere

### 3.1 Position du probleme

Dans ce chapitre, on traite de l'analyse du systeme NTB lineaire a une frontiere represente par le systeme suivant :

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = f & \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} & \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ c(0, x) = c_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Remarque 3.1.1** Comme au chapitre precedent, la concentration de nutriments est representee par  $c = c(t, x)$ , le coefficient  $\alpha$  et le coefficient de diffusion  $D$  sont constants et positifs et le vecteur  $q = q(x, t)$  verifie la condition du flux de Darcy (2.2).

**Remarque 3.1.2** Pour ce modele, la frontiere de la rhizosphere  $\Gamma_2$  n'est pas consideree. Cette modelisation du systeme NTB se retrouve aussi dans Roose [29]-[30]-[31], ou la position  $x$  est exprimee en coordonnees polaires.

La figure ci-dessous représente, le domaine d'étude du système (3.1). Celui-ci est constitué d'une partie blanche, le système racinaire ayant pour surface  $\Gamma_1$  entourée d'une partie grise, la rhizosphère  $\Omega$ , un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  (où  $d = 1, 2$  ou  $3$ ).

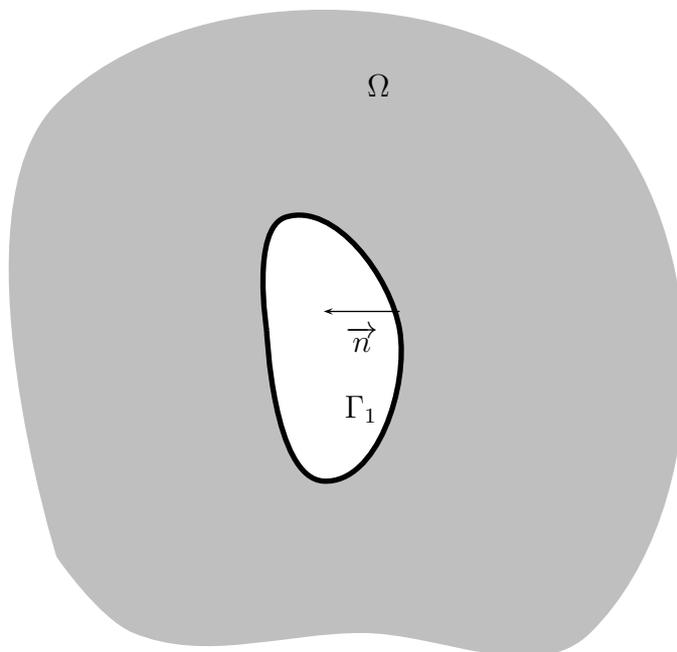


FIGURE 3.1 – Domaine d'étude du système NTB à une frontière.

## 3.2 Existence d'une solution faible

Dans cette section, on étudie l'existence d'une solution pour le système (3.1). On suppose, ici, que la concentration  $c(t, \cdot)$  est une fonction continue en temps. Comme au chapitre précédent, la fonction  $c(t, \cdot)$  est considérée comme un élément de  $H^1(\Omega)$  représentant  $x \mapsto c(t, x)$ , où  $t \in [0, T]$ .

**Lemme 3.2.1** *Le système NTB (3.1) a une formulation faible donnée par*

$$\begin{cases} \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + a(t; c, \psi) = L(t; \psi) & p.p \ t \in ]0, T[, \ \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ c(0, x) = c_0(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Gamma_1} \frac{Ic}{K} \psi d\sigma_1. \quad (3.3)$$

et

$$L(t; \psi) = \int_{\Omega} \psi f dx.$$

**Preuve** - On multiplie la première équation du système (3.1) par  $\psi \in H^1(\Omega)$  et on intègre par parties. Puisque l'ensemble  $\Omega$  et la fonction  $\psi$  ne dépendent pas du temps, on peut écrire :

$$\alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi dx + \int_{\Omega} \psi (\mathbf{q} \cdot \nabla c) dx - D \int_{\Omega} (\Delta c) \psi dx = \int_{\Omega} \psi f dx. \quad (3.4)$$

En procédant de façon analogue à la preuve du **lemme 2.2.1**, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi (\mathbf{q} \cdot \nabla c) dx - D \int_{\Omega} (\Delta c) \psi dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi dx \\ &+ \int_{\Gamma_1} \frac{Ic}{K} \psi d\sigma_1, \end{aligned}$$

en utilisant les condition aux limites du système (3.1).

On en déduit :

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Gamma_1} \frac{Ic}{K} \psi d\sigma_1$$

et

$$L(t; \psi) = \int_{\Omega} \psi f dx.$$

■

**Théorème 3.2.1** *On suppose que  $|q|$  est uniformément borné :  $q \in L^\infty(Q)$  et  $f \in L^2(Q)$ . Il existe alors une unique fonction  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ , solution du système NTB (3.1).*

**Preuve** - La forme bilinéaire  $a$  est identique à celle de la preuve du **théorème 2.2.1**. Elle est donc continue sur  $H^1(\Omega)$  et semi-coercive.

Afin de prouver le théorème, il suffit de montrer que la forme linéaire  $L$  est continue sur  $H^1(\Omega)$ . En effet, on a :

$$|L(t, \psi)| = \left| \int_{\Omega} f \psi \, dx \right| \leq \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

alors  $L$  est continue sur  $H^1(\Omega)$ . Les hypothèses du théorème de Lions sont satisfaites alors il existe une unique solution faible  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  pour le système (3.1). ■

### 3.3 Positivité de la solution

Dans cette section, comme au chapitre précédent, on vérifie que la solution  $c = c(t, x)$  du système (3.1) est positive.

**Proposition 3.3.1** *Soit  $c = c^+ - c^-$  une solution du système NTB (3.1). Si  $c_0 \geq 0$  et  $f \geq 0$  alors  $c \geq 0$  et on a  $c(T, \cdot) \geq 0$ , pour tout  $T > 0$ .*

**Preuve** - On décompose  $c = c(t, \cdot)$  en  $c = c^+ - c^-$ , puis on multiplie l'équation d'état du système (3.1) par  $c^-$  et on intègre par parties.

On obtient :

$$\int_Q \left( \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla c) - D \Delta c \right) c^- \, dx dt = \int_Q f c^- \, dx dt = 0$$

car  $(\frac{\partial c^+}{\partial t})c^- = (\nabla c^+)c^- = (\Delta c^+)c^- = 0$  et  $f \geq 0$ .

En appliquant un raisonnement analogue à celui de la preuve de la **proposition**

**2.3.1**, on trouve :

$$-\frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(T)|^2 - |c^-(0)|^2 \, dx \right) - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} |c^-|^2 \, d\sigma_1 \, dt - D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 \, dx dt = 0.$$

On en déduit alors

$$\|c^-(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|c^-(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall T \geq 0.$$

■

Deuxième partie

Contrôle optimal des systèmes  
linéaires



Dans cette partie, on attaquera le contrôle optimal pour les systèmes NTB linéaires. Tout d'abord, on étudiera les problèmes de contrôle pour les systèmes linéaires dans un sol non pollué :

- 1) Problème de contrôle système NTB linéaire à deux frontières dans un sol non pollué :

Trouver un (ou des) contrôle(s)  $v$  qui minimise(nt) la fonction coût  $J$  suivante :

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2$$

$$\text{tel que } \begin{cases} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = 0 & \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} & \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ (D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = -v & \text{sur } \Sigma_2 := ]0, T[ \times \Gamma_2, \\ c(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

- 2) Problème de contrôle système NTB linéaire à une frontière dans un sol non pollué :

Trouver un (ou des) contrôle(s)  $v$  qui minimise(nt) la fonction coût  $J$  suivante :

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(Q)}^2$$

$$\text{tel que } \begin{cases} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = v & \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} & \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ c(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Ensuite, introduisant la pollution du sol modélisée par une fonction  $g$ , on étudiera les problèmes de contrôle pour les systèmes linéaires dans un sol pollué :

- 3) Problème de contrôle système NTB linéaire à deux frontières en sol pollué :  
 Trouver un (ou des) contrôle(s)  $v$  qui minimise(nt) la fonction coût  $J$  suivante :

$$J(v) = \|c(v, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2$$

$$\text{tel que } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = g \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ (D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = -v \quad \text{sur } \Sigma_2 := ]0, T[ \times \Gamma_2, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

- 4) Problème de contrôle système NTB linéaire à une frontière en sol pollué :  
 Trouver un (ou des) contrôle(s)  $v$  qui minimise(nt) la fonction coût  $J$  suivante :

$$J(v) = \|c(v, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2$$

$$\text{tel que } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = v + g \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

A notre connaissance le contrôle optimal pour les systèmes NTB à une et deux frontières est introduit pour la première fois. On utilisera, dans ce travail de thèse, les techniques de recherche d'un contrôle optimal pour les systèmes gouvernés par les équations aux dérivées partielles paraboliques développées par J.-L. Lions, [14], [20], [19] pour les problèmes de contrôle dans un sol non pollué. Ces contrôles seront caractérisés par un système d'optimalité (SO). Ensuite, pour les problèmes de contrôle dans un sol pollué, on utilisera les notions de contrôle sans regret et à moindres regrets. Ces notions ont été utilisées par J.-L. Lions [17], [15], [16]. Puis,

on caractérisera ces contrôles par des systèmes d'optimalités singuliers (SOS) en procédant de manière analogue aux articles de Nakoulima O., Omrane A., Velin J., [21], [23].



# Chapitre 4

## Contrôle optimal en sol non pollué

Dans ce chapitre, on aborde la question du contrôle optimal pour les systèmes NTB linéaires (2.1) et (3.1) en sol non pollué.

### 4.1 Problème de contrôle à deux frontières

Dans cette section, on étudie, le contrôle optimal pour le système (2.1). Les nutriments proviennent d'un apport extérieur à partir de la frontière  $\Gamma_2$  de la rhizosphère, soit par l'action de l'homme ou soit par des phénomènes de mycorhize. Le système (2.1) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ (D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = -v \quad \text{sur } \Sigma_2 := ]0, T[ \times \Gamma_2, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où la fonction de contrôle positive  $v \in L^2(\Sigma_2)$  représente l'apport supplémentaire de nutriments à partir de la frontière  $\Gamma_2$ .

**Remarque 4.1.1** *Sans perte de généralité, on a choisi  $c(0, x) = c_0(x) = 0$ . Sinon, il suffit de considérer  $\bar{c}(t, x) = c(t, x) - c(0, x)$  avec la condition  $c(0, x)|_{(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} = 0$ . On obtient alors :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \bar{c} - D \Delta \bar{c} = \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla \bar{c} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \bar{c}) \cdot \mathbf{n} = -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ (D \nabla \bar{c} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \bar{c}) \cdot \mathbf{n} = (D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = -v \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \bar{c}(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

L'objectif, ici, est de montrer l'existence, l'unicité et la caractérisation du (ou des) contrôle(s)  $v$  minimisant la fonction coût frontière :

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N \|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2, \quad (4.2)$$

où  $c(v) := c(t, x; v)$  est la solution du système (4.1),  $\tilde{c} \in L^2(\Sigma_1)$  est une concentration de sels minéraux observée et  $N$  une constante positive.

**Remarque 4.1.2** *On suppose que l'application  $v \mapsto c(., ., v)$  définie de  $L^2(\Sigma_2)$  vers  $L^2(\Sigma_1)$  est linéaire et continue sur  $L^2(\Sigma_2)$ .*

### 4.1.1 Existence d'une solution faible

Dans cette section, on aborde l'existence d'une solution pour le système donnée par (4.1). On suppose que la concentration  $c(t, .)$  est une fonction continue en temps et considérée comme un élément de  $H^1(\Omega)$  représentant  $x \mapsto c(t, x)$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Lemme 4.1.1** *Le système (4.1) est équivalent à la formulation faible suivante :*

$$\begin{cases} \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + a(t; c, \psi) = L(t; \psi) & p.p \ t \in ]0, T[, \ \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ c(0, x) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

où

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} c \psi \, d\sigma_1, \quad (4.4)$$

et

$$L(t; \psi) = - \int_{\Gamma_2} \psi v \, d\sigma_2.$$

**Preuve** - On applique la même démonstration effectuée pour prouver le **lemme 2.2.1** avec  $f = -v$ . ■

**Théorème 4.1.1** *On suppose que  $|q|$  est uniformément borné (i.e  $q \in L^\infty(\Omega)$ ) et la fonction de contrôle  $v \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_2))$  alors le système (4.1) admet une unique solution  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ .*

**Preuve** - Le raisonnement est analogue à celui de la preuve du **théorème 2.2.1** en considérant  $f = -v$ . ■

#### 4.1.2 Existence d'un contrôle optimal

Dans cette section, on étudie l'existence d'une solution d'un contrôle minimisant la fonction de coût  $J$  donnée par (4.2).

**Proposition 4.1.1** *Il existe un unique contrôle  $u \in L^2(\Sigma_2)$  tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} J(v).$$

**Preuve** - Puisque  $J(v) \geq 0$  pour tout  $v \in L^2(\Sigma_2)$  alors il existe  $k = \inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} J(v)$ . Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite minimisante convergeant vers  $k$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a :

$$0 \leq J(v_n) \leq k + 1.$$

D'où

$$\|c(v_n) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v_n\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \leq k + 1,$$

pour tout  $n \geq n_0$ . On trouve alors

$$\|c(v_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \sqrt{k+1} \quad \text{et} \quad \|v_n\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq \sqrt{\frac{k+1}{N}},$$

pour tout  $n \geq n_0$ .

D'où la suite  $(v_n)$  est bornée dans  $L^2(\Sigma_2)$ , et donc on peut extraire de la suite  $(v_n)$  une sous-suite notée aussi  $(v_n)$  qui converge faiblement vers  $u \in L^2(\Sigma_2)$ . Puisque la fonction  $J$  est strictement convexe, le contrôle  $u$  est unique. Par ailleurs, comme  $c(v_n)$  est bornée dans  $L^2(\Sigma_2)$  et  $c$  est continue sur  $L^2(\Sigma_2)$  (voir la **remarque 4.1.2** à la section 4.1) alors  $c(v_n)$  converge faiblement vers  $c(u) \in L^2(\Sigma_1)$ . ■

### 4.1.3 Caractérisation du contrôle optimal

Dans cette section, on donne une caractérisation du contrôle  $u$  minimisant la fonction de coût  $J$  donnée par (4.2).

**Proposition 4.1.2** *Le contrôle optimal  $u$  du problème (4.2) satisfait*

$$\int_{\Sigma_1} (c(u) - \tilde{c}) c(w) d\sigma_1 dt + N \int_{\Sigma_2} u w d\sigma_2 dt \geq 0. \quad (4.5)$$

**Preuve** - Pour tout  $w \in L^2(\Sigma_2)$  et pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ , le contrôle optimal  $u$  minimisant la fonction de coût  $J$  satisfait à l'inégalité d'Euler-Lagrange :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{J(u + \lambda w) - J(u)}{\lambda} \right) \geq 0.$$

Tout d'abord, on calcule  $J(u + \lambda w) - J(u)$ . On trouve à l'aide la linéarité de  $c$  en  $v$  :

$$\begin{aligned}
J(u + \lambda w) - J(u) &= \|c(u + \lambda w) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 - \|c(u) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\
&\quad + N\|u + \lambda w\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - N\|u\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \\
&= 2\lambda\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \lambda^2\|c(w)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\
&\quad + 2N\lambda\langle u, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + N\lambda^2\|w\|_{L^2(\Sigma_2)}^2.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

En divisant par  $\lambda$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{J(u + \lambda w) - J(u)}{\lambda} &= \lambda\|c(w)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + 2\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + 2N\langle u, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \\
&\quad + \lambda\|w\|_{L^2(\Sigma_2)}^2
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , on obtient alors :

$$\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + N\langle u, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \geq 0.$$

■

#### 4.1.4 Système d'optimalité

Dans cette sous-section, on caractérise le contrôle  $u$  par un système d'optimalité.

Tout d'abord, on introduit les notations suivantes :

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \tag{4.7}$$

et

$$\mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}, \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}. \tag{4.8}$$

**Théorème 4.1.2** *Le contrôle optimal  $u$  solution du problème (4.1)-(4.2) est caractérisé par le triplet  $\{u, c(u), p(u)\}$  solution du système d'optimalité :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}c = 0 & \mathcal{A}^*p = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B}c \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} & \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} = c(u) - \tilde{c} + \frac{Ip}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B}c \cdot \mathbf{n} = -u & \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ c(0, x) = 0 & p(T, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

avec l'équation adjointe  $p + Nu = 0$  dans  $L^2(\Sigma_2)$ .

**Preuve** - On introduit  $p := p(t, x, v)$  solution du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}^*p = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} = c(u) - \tilde{c} + \frac{Ip}{K} & \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2, \\ p(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

On multiplie l'équation d'état  $\mathcal{A}^*p = 0$  du système (4.10) par  $c(w)$  solution du système (4.1). Puis, on calcule

$$\begin{aligned} \int_Q \mathcal{A}^*p c(w) dxdt &= \int_Q \left( -\alpha \frac{\partial p}{\partial t} - q \cdot \nabla p - D\Delta p \right) c(w) dxdt \\ &= \underbrace{\int_Q \left( -\alpha \frac{\partial p}{\partial t} \right) c(w) dxdt}_{=A} - \underbrace{\int_Q \left( q \cdot \nabla p + D\Delta p \right) c(w) dxdt}_{=B}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

En intégrant par parties le terme  $A$ , on trouve

$$\begin{aligned} A &= -\alpha \int_Q \left( \frac{\partial p}{\partial t} c(w) \right) dxdt \\ &= -\alpha \int_{\Omega} [p c(w)]_0^T dx + \alpha \int_Q \left( \frac{\partial c}{\partial t}(w) \right) p dxdt, \\ &= \alpha \int_Q \left( \frac{\partial c}{\partial t}(w) \right) p dxdt, \end{aligned}$$

puisque  $c(0) = p(T) = 0$ .

Ensuite, on calcule le terme  $B$  de la manière suivante :

Tout d'abord, on calcule  $-\int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla p) c(w) dxdt$ . On obtient alors

$$-\int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla p) c(w) dxdt = -\int_Q (\operatorname{div}(\mathbf{q}p)) c(w) dxdt$$

car le flux  $q$  vérifie la condition (2.2). Mais,

$$\begin{aligned} -\int_Q (\operatorname{div}(\mathbf{q}p)) c(w) dxdt &= \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w)) p dxdt - \int_Q \operatorname{div}(\mathbf{q}p c(w)) dxdt \\ &= \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w)) p dxdt - \int_{\Sigma} \mathbf{q}p c(w) d\sigma dt \end{aligned}$$

à l'aide du théorème de la divergence. D'où :

$$-\int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla p) c(w) dxdt = \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w)) p dxdt - \int_{\Sigma} \mathbf{q}p c(w) dxdt. \quad (4.12)$$

Ensuite, on calcule  $-\int_Q (D\Delta p) c(w) dxdt$ . On trouve alors

$$\begin{aligned} -\int_Q (D\Delta p) c(w) dxdt &= -\int_{\Sigma} (D\nabla p) c(w) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt + \int_{\Sigma} (D\nabla c(w)) p \cdot \mathbf{n} d\sigma dt \\ &\quad - \int_Q (D\Delta c(w)) p dxdt, \end{aligned} \quad (4.13)$$

en utilisant la formule de Green. On obtient alors

$$\begin{aligned}
B &= - \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla p - D\Delta p) c(w) dxdt \\
&= \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w) - D\Delta c(w)) p dxdt - \int_{\Sigma} \left( D\nabla p + \frac{1}{2} \mathbf{q} p \right) c(w) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt \\
&\quad + \int_{\Sigma} \left( D\nabla c(w) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(w) \right) p \cdot \mathbf{n} d\sigma dt \\
&= \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w) - D\Delta c(w)) p dxdt - \int_{\Sigma_1} \left( \tilde{c} - c(u) - \frac{Ip}{K} \right) c(w) d\sigma_1 dt \\
&\quad - \int_{\Sigma_1} \frac{I}{K} c(w) p d\sigma_1 dt - \int_{\Sigma_2} w p d\sigma_2 dt \\
&= \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w) - D\Delta c(w)) p dxdt - \int_{\Sigma_1} (\tilde{c} - c(u)) c(w) d\sigma_1 dt - \int_{\Sigma_2} w p d\sigma_2 dt.
\end{aligned}$$

En additionnant  $A + B$ , on trouve alors

$$\begin{aligned}
A + B &= \int_Q \mathcal{A}^* p c(w) dxdt \\
&= \int_Q \mathcal{A} c(w) p dxdt - \int_{\Sigma_1} (\tilde{c} - c(u)) c(w) d\sigma_1 dt - \int_{\Sigma_2} w p d\sigma_2 dt \\
&= \langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} - \langle w, p \rangle_{L^2(\Sigma_2)},
\end{aligned}$$

car  $\mathcal{A} c(w) = 0$  dans  $Q$ .

Puisque  $\mathcal{A}^* p = 0$ , on trouve alors  $\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle w, p \rangle_{L^2(\Sigma_2)}$ .

En remplaçant  $\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}$  par  $\langle w, p \rangle_{L^2(\Sigma_2)}$  dans l'inégalité (4.5), on obtient alors

$$\langle p + Nu, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \geq 0, \quad \forall w \in L^2(\Sigma_2).$$

Or pour  $w' \in L^2(\Sigma_2)$  tel que  $w' = -w$ , on a :

$$\langle p + Nu, w' \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \leq 0, \quad \forall w \in L^2(\Sigma_2).$$

On en déduit l'équation adjointe est  $p + Nu = 0$  dans  $L^2(\Sigma_2)$ . ■

## 4.2 Problème de contrôle à une frontière

Dans cette section, on aborde le problème de contrôle optimal pour le système NTB à une frontière dans un sol non pollué. Comme au chapitre précédent, les nutriments proviennent d'un ajout extérieur. Cependant, cet apport se fait à l'intérieur de la rhizosphère ( $\Omega$ ). Pour cela, on considère le système NTB suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = v \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.14)$$

où la concentration des nutriments absorbée est représentée par  $c = c(t, x)$ .

**Remarque 4.2.1** *Sans perdre de généralité, on a choisi  $c(0, x) = c_0(x) = 0$ . Sinon, il suffit de considérer  $\bar{c}(t, x) = c(t, x) - c_0(x)$  avec la condition :  $c(0, x)|_{(\Gamma_1)} = 0$ . En effet, on obtient :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \bar{c} - D\Delta \bar{c} = \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = v \quad \text{dans } Q, \\ -(D\nabla \bar{c} - \frac{1}{2}\mathbf{q}\bar{c}) \cdot \mathbf{n} = -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \bar{c}(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

L'objectif, ici est de montrer l'existence, l'unicité et la caractérisation du (ou des) contrôle(s)  $v$  minimisant la fonction de coût

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(Q)}^2, \quad (4.15)$$

où  $\tilde{c}$  est une observation donnée dans  $L^2(\Sigma_1)$  et  $N$  une constante positive.

La concentration  $c(v) = c(t, x, v)$  est une solution du système (4.14).

La fonction  $v \in L^2(Q)$  correspond à un ajout extérieur de nutriments par l'action de l'homme ou des plantes de services (endomycorhize).

**Remarque 4.2.2** *On suppose que l'application  $v \mapsto c(., ., v)$  définie de  $L^2(Q)$  vers  $L^2(\Sigma_1)$  est continue sur  $L^2(Q)$ .*

### 4.2.1 Existence d'une solution faible

Dans cette section, on aborde l'existence d'une solution pour le système donnée par (4.14). On suppose que la concentration  $c(t, .)$  est une fonction continue en temps et considérée comme un élément de  $H^1(\Omega)$  représentant  $x \mapsto c(t, x)$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Lemme 4.2.1** *Le système (4.14) est équivalent à la formulation faible suivante :*

$$\begin{cases} \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + a(t; c, \psi) = L(t; \psi) & p.p \, t \in ]0, T[, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ c(0, x) = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

où

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} c \psi \, d\sigma_1, \quad (4.17)$$

et

$$L(t; \psi) = \int_{\Omega} \psi v \, dx.$$

**Preuve -** En appliquant un raisonnement similaire à celui de la preuve du **lemme 3.2.1** avec  $f = v$ , on trouve alors la formulation faible souhaitée. ■

**Théorème 4.2.1** *En supposant que  $|q|$  est uniformément borné (i.e  $q \in L^\infty(\Omega)$ ) et que la fonction de contrôle  $v \in L^2(Q)$ , alors le système (4.14) admet alors une unique solution  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ .*

**Preuve -** En procédant de façon analogue à la preuve du **théorème 3.2.1** avec  $f = v$ , on vérifie les hypothèses du théorème de Lions. Il existe alors une unique solution faible  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  pour le système (4.14). ■

### 4.2.2 Existence d'un contrôle optimal

Dans cette section, on étudie l'existence d'un contrôle minimisant la fonction de coût  $J$  donnée par (4.15).

**Proposition 4.2.1** *Il existe un unique contrôle  $u \in L^2(Q)$  tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in L^2(Q)} J(v).$$

**Preuve** - Par une démonstration similaire à celle de la preuve de la **proposition 8.2.1**, on obtient les inégalités suivantes :

$$\|c(v_n)\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq \sqrt{k+1} \quad \text{et} \quad \|v_n\|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{\frac{k+1}{N}},$$

pour tout  $n \geq n_0$ , où  $k = \inf_{v \in L^2(Q)} J(v)$ .

On en conclut que la suite  $(v_n)$  est bornée dans  $L^2(Q)$ . Donc, on peut en extraire une sous-suite notée aussi  $(v_n)$  qui converge faiblement vers un élément  $u \in L^2(Q)$ . Puisque la fonction  $J$  est strictement convexe alors ce contrôle  $u$  est unique. Par ailleurs, comme la fonction  $v \mapsto c(.,.,v)$  est continue sur  $L^2(Q)$  (**remarque 4.1.2**) alors  $c(v_n)$  converge faiblement vers  $c(u) \in L^2(\Sigma_1)$ . ■

### 4.2.3 Caractérisation du contrôle optimal

Dans cette section, on donne une caractérisation du contrôle  $u$  minimisant la fonction de coût  $J$  donnée par (4.15).

**Proposition 4.2.2** *Le contrôle optimal  $u$  du problème (4.14) satisfait*

$$\int_{\Sigma_1} (c(u) - \tilde{c}) c(w) d\sigma_1 dt + N \int_Q u w dx dt \geq 0. \quad (4.18)$$

**Preuve** - Pour tout  $w \in L^2(Q)$  et pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ , le contrôle optimal  $u$  minimisant la fonction de coût  $J$  satisfait à l'inégalité d'Euler-Lagrange :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{J(u + \lambda w) - J(u)}{\lambda} \right) \geq 0.$$

Par la suite, on effectue les mêmes calculs que dans la preuve du **lemme 4.1.2**.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{J(u + \lambda w) - J(u)}{\lambda} &= \lambda \|c(w)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + 2\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + 2N\langle u, w \rangle_{L^2(Q)} \\ &\quad + \lambda \|w\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , on trouve alors :

$$\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + N\langle u, w \rangle_{L^2(Q)} \geq 0.$$

■

#### 4.2.4 Système d'optimalité

Dans cette sous-section, on caractérise le contrôle  $u$  par un système d'optimalité.

**Théorème 4.2.2** *Le contrôle optimal  $u$  solution du le problème (4.14)-(4.15) est caractérisé par le triplet  $\{u, c(u), p(u)\}$  solution du système d'optimalité.*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}c &= u, & \mathcal{A}^*p &= c(u) - \tilde{c} \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B}c \cdot \mathbf{n} &= \frac{Ic}{K}, & \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} &= \frac{Ip}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ c(0, x) &= 0, & p(T, x) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.19)$$

où l'équation adjointe  $p + Nu = 0$  dans  $L^2(Q)$ .

**Remarque 4.2.3** *Les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^*$  sont donnés par (4.7) et les opérateurs  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^*$  sont donnés par (4.8).*

**Preuve** - On introduit  $p := p(t, x, v)$  solution du problème adjoint :

$$\begin{cases} \mathcal{A}^*p &= c(u) - \tilde{c} & \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} &= \frac{Ip}{K} & \text{sur } \Sigma_1, \\ p(T, x) &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.20)$$

On multiplie l'équation  $\mathcal{A}^*p = c(u) - \tilde{c}$  du système (4.20) par  $c(w)$  solution du système (4.14). Puis on calcule

$$\begin{aligned} \int_Q \mathcal{A}^*p c(w) dxdt &= - \int_Q \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} p + q \cdot \nabla p + D\Delta p \right) c(w) dxdt \\ &= \underbrace{\int_Q \left( -\alpha \frac{\partial}{\partial t} p \right) c(w) dxdt}_{=A} - \underbrace{\int_Q \left( q \cdot \nabla p + D\Delta p \right) c(w) dxdt}_{=B}. \end{aligned}$$

En intégrant par parties le terme A, on trouve :

$$\begin{aligned} A &= -\alpha \int_Q \left( \frac{\partial p}{\partial t} c(w) \right) dxdt = -\alpha \int_{\Omega} [p c(w)]_0^T dx + \alpha \int_Q \left( \frac{\partial}{\partial t} c(w) \right) p dxdt \\ &= \alpha \int_Q \left( \frac{\partial}{\partial t} c(w) \right) p dxdt, \end{aligned}$$

car  $c(0) = p(T) = 0$ .

Puis, on calcule le terme B. Tout d'abord, on calcule  $-\int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla p) c(w) dxdt$  de la même façon que (4.12) en utilisant le théorème de la divergence et la condition de Darcy (2.2), on obtient :

$$-\int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla p) c(w) dxdt = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{q} p c(w) \cdot \mathbf{n} d\sigma_1 dt + \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w)) p dxdt.$$

Ensuite, on calcule  $-\int_Q (D\Delta p)c(w) dxdt$  de la même manière que (4.13), en utilisant la formule de Green, on trouve :

$$\begin{aligned} & -\int_Q (D\Delta p)c(w) dxdt = -\int_{\Sigma_1} (D\nabla p)c(w) \cdot \mathbf{n} d\sigma_1 dt + \int_{\Sigma_1} (D\nabla c(w))p \cdot \mathbf{n} d\sigma_1 dt \\ & -\int_Q (D\Delta c(w))p dxdt. \end{aligned}$$

En additionnant les termes précédents et à l'aide des conditions aux limites des systèmes données par (4.14) et (4.20), on obtient :

$$\begin{aligned} B &= -\int_Q (q \cdot \nabla p + D\Delta p)c(w) dxdt \\ &= -\int_{\Sigma_1} \left( D\nabla p + \frac{1}{2} \mathbf{q} p \right) c(w) \cdot \mathbf{n} d\sigma_1 dt + \int_{\Sigma_1} \left( D\nabla c(w) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(w) \right) p \cdot \mathbf{n} d\sigma_1 dt \\ &\quad + \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w) - D\Delta c(w))p dxdt \\ &= \int_{\Sigma_1} \frac{Ip}{K} c(w) d\sigma_1 dt - \int_{\Sigma_1} \frac{Ic(w)}{K} p d\sigma_1 dt + \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w) - D\Delta c(w))p dxdt \\ &= \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla c(w) - D\Delta c(w))p dxdt \end{aligned} \tag{4.21}$$

On trouve alors :

$$A + B = \int_Q \mathcal{A}^* p c(w) dxdt = \int_Q \mathcal{A} c(w) p dxdt = \int_Q w p dxdt.$$

Puisque

$$\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(Q)} = \int_Q c(u) - \tilde{c} c(w) dxdt = \int_Q \mathcal{A}^* p c(w) dxdt$$

alors on obtient  $\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(Q)} = \int_Q w p dxdt = \langle w, p \rangle_{L^2(Q)}$ . En remplaçant  $\langle c(u) - \tilde{c}, c(w) \rangle_{L^2(Q)}$  par  $\langle w, p \rangle_{L^2(Q)}$  dans l'inégalité (4.18), on trouve alors

$$\langle p + Nu, w \rangle_{L^2(Q)} \geq 0, \text{ pour tout } w \in L^2(Q).$$

Or pour  $w' \in L^2(Q)$  tel que  $w' = -w$ , on a :

$$\langle p + Nu, w' \rangle_{L^2(Q)} \leq 0.$$

On en déduit alors que l'équation adjointe est  $p + Nu = 0$  dans  $L^2(Q)$ . ■



# Chapitre 5

## Contrôle optimal en sol pollué

L'agriculture dans les régions d'Outre-mer, représente 2,8% de la valeur ajoutée, soit 200 millions d'euros en Martinique<sup>1</sup> et 2,8% de la richesse créée pour une valeur ajoutée de 184 millions d'euros en Guadeloupe<sup>2</sup>, est un secteur d'activité non négligeable. En 2013, la Martinique a exporté 155 015 tonnes de bananes et la Guadeloupe 69 715 tonnes. C'est la principale culture destinée à l'exportation.

Le bananier, est une herbe géante, des régions équatoriales, aux feuilles immenses, et dont le fruit est la banane. On dénombre une trentaine d'espèces. Sa culture demande une forte exigence en eau. Cependant, la plante n'est capable pas de fixer l'azote du sol sous forme de nitrates, ce qui nécessite l'emploi d'engrais azotés sous forme de produits phytosanitaires. Par ailleurs, elle est attaquée par plusieurs maladies et parasites. L'un des principaux insectes ravageurs est le charançon du bananier (*cosmopolites sordides*). La larve de l'insecte pénètre dans la souche de la plante pour se nourrir provoquant ainsi la destruction du système racinaire.

Afin de le combattre, les agriculteurs exploitant les bananes ont utilisé un pesticide nommé *le chlordécone*. C'est suite au passage des cyclones Allen en 1979 et David en 1980 que les planteurs des départements d'Outre-mer, démunis face à une forte présence parasitaire du charançon du bananier, reçurent l'autorisation d'utiliser le

---

1. Rapport 2013 de L'IEDOM Martinique.

2. Rapport 2013 de L'IEDOM Guadeloupe.



FIGURE 5.1 – Charançon du bananier - Dégâts du charançon.

chlordécone en 1981, sous forme de poudrage ayant une concentration maximale de substance de 5%.

Ce pesticide de première catégorie est aussi appelé « *curlone* ». Son principe actif est une molécule organochlorée de formule  $C_{10}Cl_{10}O$ , brevetée aux États-Unis en 1952. Environ, 55 formules furent mises sur le marché et distribuées sous le nom commercial de Kepone ou GC-1189. Aux États-Unis, entre 1952 et 1975, environ 1600 tonnes de Kepone furent produits pour répondre à la demande croissante des agriculteurs. Sa production fut interrompue en juillet 1975, car une grave pollution autour de l'usine de fabrication fut relevée, de même que des effets toxiques conséquents sur les ouvriers. Ce qui entraîna une interdiction de production et de commercialisation au mois d'août 1976.

Néanmoins, aux Antilles, en dépit de son retrait par le Ministère de l'Agriculture Française le 1<sup>er</sup> février 1990, sa commercialisation s'est poursuivie jusqu'en 1993. Or, de nombreux rapports de l'INRA (voir les références [33], [12]) ont mis en évidence l'existence d'une pollution persistante des sols utilisés pour la culture de la banane ainsi que les milieux aquatiques.

A l'heure actuelle, son utilisation est strictement interdite, mais ce pesticide a entraîné une pollution des terres agricoles conséquente et durable en Guadeloupe et en Martinique, empêchant la culture, sur les terrains infectés, de certaines ra-

cines : *choux de chine* (Martinique), *madère* et *patate douce* (Guadeloupe). Des chercheurs de l'INRA Guadeloupe, travaillent depuis les années 2000 sur de nouvelles techniques d'agricoles afin de diminuer l'utilisation de pesticides, ou autres engrais azotés dans la culture de la banane, notamment par l'utilisation de *plantes de service*.

Une plante de service est une espèce cultivée dans la même parcelle que la culture principale, et qui fournit à la plante principale qui nous intéresse la protection contre les maladies ou les ravageurs ainsi qu'un meilleur usage des ressources organiques ou minérales. Elle fournit aussi, des services écosystémiques tels que le contrôle des phytoparasites<sup>3</sup>, en libérant des substances biocides.

Dans le cadre de la culture de la banane, la plante de service permet le contrôle de la flore adventice<sup>4</sup> sans utilisation d'herbicide : en interception la lumière ou par production de substances chimiques inhibant la germination et la croissance des adventices. Mais aussi, grâce à son enracinement profond, elle favorise la structure du sol. Ainsi, les racines du bananier peuvent mieux se développer et capturer des nutriments inaccessibles. Par ailleurs, l'intégration de légumineuse<sup>5</sup> dans le système de culture permet la fixation et l'augmentation de l'azote disponible dans le sol.

La culture de la banane en sol pollué est un problème agroécologique. Afin de trouver un système de culture alternatif utilisant les plantes de service, les chercheurs utilisent de nombreuses méthodes et des modèles mathématiques. En effet,

---

3. Parasite d'origine végétale.

4. Espèce végétale étrangère à la flore indigène d'un territoire dans lequel elle est accidentellement introduite et peut s'installer durablement.

5. Famille de plantes dicotylédones, appelée, aussi fabacées, comprenant des arbres, arbustes ou herbes dont le fruit est une gousse (arachide, caroubier, fève, genêt, glycine, haricot, lentille, luzerne, mimosa, pois, réglisse, sainfoin, soja, trèfle) ainsi que les césalpiniées et les légumineuses tropicales.

la biologie est gouvernée par une démarche expérimentale : recueil, analyse, et traitement des données où les mathématiques y sont présentes. Une question demeure : quelle serait la ou les plante(s) de services adaptée(s) aux exigences d'une plante principale tel que le bananier dans un système de culture alternatif? Dans la perspective de répondre à ce type de questionnement, on applique ici la théorie du contrôle optimal pour les systèmes NTB .

Les problèmes de contrôles optimaux pour les systèmes NTB en sol pollué sont considérés comme des problèmes à données manquantes. On utilisera les notions de contrôle sans regret et contrôle à moindres regrets.

La notion de contrôle sans regret a été introduite par Savage en statistique (voir [32]). Par la suite, J.-L. Lions employa pour la recherche d'un contrôle pour les problèmes à données manquantes dans de nombreuses applications (voir [17], [15], [16], [18]). Les articles de Nakoulima O., Omrane A., Velin J. (voir [21], [22], [23]) démontrent que la notion de contrôle de Pareto (voir [6]) est identique au contrôle sans regret. Par ailleurs, ils donnent une caractérisation du contrôle à moindres regrets par un système d'optimalité singulier.

## 5.1 Problème de contrôle à deux frontières

Dans cette section, on étudie le contrôle optimal pour le système NTB linéaire (2.1) en sol pollué. Ici, Les nutriments proviennent d'un ajout extérieur à partir de la frontière  $\Gamma_2$  de la rhizosphère, soit par l'action de homme ou soit par les plantes de services.

Le système (2.1) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = g \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ (D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = -v \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où la fonction de contrôle positive  $v \in L^2(\Sigma_2)$  représente l'apport de nutriments à partir de la frontière  $\Gamma_2$ .

**Remarque 5.1.1** *Sans perdre de généralité, on a choisi  $c(0, x) = c_0(x) = 0$ .*

*Simon, il suffit de considérer  $\bar{c}(t, x) = c(t, x) - c_0(x)$  avec la condition :*

*$c(0, x)|_{(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} = 0$ . On obtient alors :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \bar{c} - D \Delta \bar{c} = \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = g \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla \bar{c} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \bar{c}) \cdot \mathbf{n} = -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ (D \nabla \bar{c} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \bar{c}) \cdot \mathbf{n} = (D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = -v \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \bar{c}(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

L'objectif, ici, est de trouver le ou les contrôle(s) minimisant(s) la fonction de coût

$$J(v, g) = \|c(v, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N \|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2, \quad (5.2)$$

où  $\tilde{c} \in L^2(\Sigma_1)$  est une concentration d'éléments nutritifs observée à la surface de la racine et  $N$  une constante positive.

**Remarque 5.1.2** *La concentration de sels minéraux  $c(v, g) := c(x, t, v, g)$ , linéaire en  $v$  et  $g$  vérifie :*

$$c(v, g) = c(v, 0) + c(0, g), \text{ pour tout } v \in L^2(\Sigma_2) \text{ et } g \in L^2(Q). \quad (5.3)$$

**Remarque 5.1.3** *On suppose que l'application  $v \mapsto c(., ., v, .)$  définie de  $L^2(\Sigma_2)$  vers  $L^2(\Sigma_1)$  est continue  $L^2(\Sigma_2)$ .*

### 5.1.1 Existence d'une solution faible

Dans cette section, on aborde l'existence d'une solution pour le système donnée par (5.1). On suppose que la concentration  $c(t, .)$  est une fonction continue en temps et considérée comme un élément de  $H^1(\Omega)$  représentant  $x \mapsto c(t, x)$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Lemme 5.1.1** *Le système (5.1) a une formulation faible suivante :*

$$\begin{cases} \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + a(t; c, \psi) = L(t; \psi) & p.p \ t \in ]0, T[, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ c(0, x) = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

où

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx - \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} c \psi \, d\sigma_1, \quad (5.5)$$

et

$$L(t; \psi) = \int_{\Omega} \psi g \, dx - \int_{\Gamma_2} \psi v \, d\sigma_2.$$

**Preuve** - On multiplie la première équation du système (5.1) par  $\psi \in H^1(\Omega)$  et on intègre par parties. Puisque l'ensemble  $\Omega$  et la fonction  $\psi$  ne dépendent pas du temps, on peut écrire :

$$\alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + \underbrace{\int_{\Omega} \psi (\mathbf{q} \cdot \nabla c) \, dx - D \int_{\Omega} (\Delta c) \psi \, dx}_{=A} = \int_{\Omega} \psi g \, dx. \quad (5.6)$$

Par la suite, on calcule le terme  $A$  de la même façon que dans la preuve du **lemme 2.2.1**. on obtient :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Gamma_1} \frac{Ic}{K} \psi d\sigma_1 \\ + \int_{\Gamma_2} v \psi d\sigma_2,$$

en utilisant les condition aux limites du système (5.1).

Comme :

$$\alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi dx + A = \int_{\Omega} \psi g dx,$$

alors on en déduit :

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi dx - \int_{\Gamma_1} \frac{Ic}{K} \psi d\sigma_1,$$

et

$$L(t; \psi) = \int_{\Omega} \psi g dx - \int_{\Gamma_2} \psi v d\sigma_2.$$

■

**Théorème 5.1.1** *On suppose que  $|q|$  est uniformément borné (i.e  $q \in L^\infty(\Omega)$ ), la fonction  $g \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ , la fonction de contrôle  $v \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_2))$  alors le système(5.1) admet une unique solution  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ .*

**Preuve** - En effectuant une démonstration semblable à la preuve du **théorème 2.2.1** avec  $f = -v$ , on trouve que la forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $H^1(\Omega)$  et semi-coercive. Afin de satisfaire les hypothèses du théorème de Lions, il suffit donc de montrer que la forme linéaire  $L$  est continue sur  $H^1(\Omega)$ . En effet, on a :

$$|L(t, \psi)| = \left| \int_{\Omega} \psi g dx - \int_{\Gamma_2} \psi v d\sigma_2 \right| = \left| \int_{\Omega} \psi g dx \right| + \left| \int_{\Gamma_2} \psi v d\sigma_2 \right|.$$

Cependant d'une part, il existe  $\beta = \beta(\Omega) > 0$ , tel que

$$\left| \int_{\Gamma_2} \psi v d\sigma_2 \right| \leq \beta_1 \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Gamma_2)},$$

à l'aide du théorème de trace et d'autre part, on a

$$\left| \int_{\Omega} \psi g dx \right| \leq \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

alors

$$|L(t, \psi)| \leq (\|g\|_{L^2(\Omega)} + \beta \|v\|_{L^2(\Gamma_2)}) \|\psi\|_{H^1(\Omega)},$$

est continue sur  $H^1(\Omega)$ . Les hypothèses du théorème de Lions pour les problèmes d'évolution sont satisfaites.

D'où il existe une unique solution faible  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  du système (4.1). ■

### 5.1.2 Contrôle sans regret

Dans cette section, on traite du contrôle sans regret pour le système (5.1). Ce système étant à informations incomplètes, afin de déterminer le ou les contrôle(s) minimisant(s) la fonction de coût  $J(v, g)$ , une idée serait de résoudre le problème MinMax défini ci-dessous :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} J(v, g) \right).$$

Cependant :

$$\sup_{g \in L^2(Q)} J(v, g) = +\infty.$$

D'où, on utilisera, les techniques de contrôle sans regret et de contrôle à moindres regrets définies par J.-L. Lions [17] et utilisées dans [21], [22].

**Définition 5.1.1** *Le contrôle sans regret pour le problème (5.2), s'il existe, est une fonction  $v \in L^2(\Sigma_2)$  solution du nouveau problème MinMax suivant :*

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) \right) \quad (5.7)$$

**Lemme 5.1.2** *Pour toute fonction  $v \in L^2(\Sigma_2)$  et toute fonction  $g \in L^2(Q)$ , on a :*

$$J(v, g) - J(0, g) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2\langle c(0, g), c(v, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}. \quad (5.8)$$

**Preuve** - Soit  $v \in L^2(\Sigma_2)$  et  $g \in L^2(Q)$ , on trouve alors :

$$\begin{aligned}
J(v, g) - J(0, g) &= \|c(v, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|c(0, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\
&= \|c(v, 0) + c(0, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|c(0, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\
&= \|c(v, 0)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 - 2\langle c(v, 0), \tilde{c} \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\
&\quad + 2\langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\
&= \|c(v, 0) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\
&\quad + 2\langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\
&= J(v, 0) - J(0, 0) + 2\langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}.
\end{aligned}$$

■

**Remarque 5.1.4** *A partir du Lemme (5.8), on en déduit :*

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}.$$

On estime alors  $\sup_{g \in L^2(Q)} \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}$ .

**Remarque 5.1.5** *On note l'opérateur  $\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + q \cdot \nabla - D\Delta$ .*

**Proposition 5.1.1** *Soit  $c(0, g)$  la concentration d'éléments nutritifs lorsque la variable de contrôle  $v = 0$  et  $c(v, 0)$  la concentration d'éléments nutritifs lorsque la pollution du sol  $g = 0$ , on a alors*

$$\langle c(0, g), c(v, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)}. \quad (5.9)$$

**Preuve** - En effet, on introduit  $\xi(v) = \xi(t, x, v)$  solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}^* \xi(v) & = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^* \xi(v) \cdot \mathbf{n} & = -c(v, 0) + \frac{I\xi(v)}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B}^* \xi(v) \cdot \mathbf{n} & = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \xi(T, x) & = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.10)$$

où

$$\mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

On multiplie l'équation  $\mathcal{A}^* \xi(v) = 0$  par  $c(0, g)$  solution du système (5.1).

Puis, on calcule l'intégrale

$$\begin{aligned} & \int_Q \mathcal{A}^* \xi(v) c(0, g) \, dxdt \\ &= \int_Q \left( -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \xi(v) - \mathbf{q} \cdot \nabla \xi(v) - D\Delta \xi(v) \right) c(0, g) \, dxdt \\ &= \underbrace{\int_Q \left( -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \xi(v) \right) c(0, g) \, dxdt}_{=A} - \underbrace{\int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \xi(v) + D\Delta \xi(v) \right) c(0, g) \, dxdt}_{=B} \end{aligned} \quad (5.11)$$

En appliquant les mêmes techniques de calcul que dans la preuve du **théorème 4.1.2**, on trouve d'une part :

$$\begin{aligned} A &= \int_Q \left( -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \xi(v) \right) c(0, g) \, dxdt \\ &= \int_\Omega -\alpha \left( [\xi(v) c(0, g)]_0^T + \int_0^T \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} c(0, g) \right) \xi(v) \, dt \right) dx \\ &= \int_Q \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} c(0, g) \right) \xi(v) \, dxdt. \end{aligned} \quad (5.12)$$

car  $c(0, x, g) = \xi(T, x, v) = 0$ , puis d'autre part :

$$\begin{aligned}
B &= - \int_{\Sigma} \left( D\nabla \xi(v) + \frac{1}{2} \mathbf{q} \xi(v) \right) c(0, g) - \left( D\nabla c(0, g) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(0, g) \right) \xi(v) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma dt \\
&\quad + \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla c(0, g) - D\Delta c(0, g) \right) \xi(v) \, dx dt \\
&= - \int_{\Sigma_1} \left( c(v, 0) - \frac{I}{K} \xi(v) \right) c(0, g) - \left( \frac{I}{K} c(0, g) \right) \xi(v) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma_1 dt \\
&\quad + \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla c(0, g) - D\Delta c(0, g) \right) \xi(v) \, dx dt \\
&= - \int_{\Sigma_1} c(v, 0) c(0, g) \, d\sigma_1 dt + \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla c(0, g) - D\Delta c(0, g) \right) \xi(v) \, dx dt,
\end{aligned}$$

en utilisant les conditions aux limites des systèmes (5.1) et (5.10).

Ensuite, en additionnant les termes A+B, on trouve alors

$$\begin{aligned}
A + B &= \int_Q \mathcal{A}^* \xi(v) c(0, g) \, dx dt \\
&= \int_Q \mathcal{A} c(0, g) \xi(v) \, dx dt - \int_{\Sigma_1} c(v, 0) c(0, g) \, d\sigma_1 dt \\
&= \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} - \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)},
\end{aligned}$$

car  $\mathcal{A} c(0, g) = \alpha \frac{\partial}{\partial t} c(0, g) \, dx dt + \mathbf{q} \cdot \nabla c(0, g) + D\Delta c(0, g) = 0$  dans  $Q$ . Puisque  $\mathcal{A}^* \xi(v) = 0$ , on trouve alors le résultat convenu. ■

**Remarque 5.1.6** Puisque  $\langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} = \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}$ , d'après la proposition précédente, alors

$$\begin{aligned}
J(v, g) - J(0, g) &= J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\
&= J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

On en déduit alors

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} \quad (5.14)$$

$$\text{avec } \sup_{g \in L^2(Q)} \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \langle \xi(v), g \rangle \neq 0 \\ 0 & \text{si } \xi(v) \perp g \quad \forall g \in L^2(Q). \end{cases}$$

L'estimation de  $\sup_{g \in L^2(Q)} \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)}$  ne permet pas de caractériser le contrôle sans regret du nouveau problème MinMax (5.7).

Par conséquent, on utilisera le concept de contrôle à moindres regrets pour la recherche d'un contrôle  $v$  appartenant à l'ensemble suivant :

$$\mathcal{M} = \{v \in L^2(\Sigma_2) \text{ tel que } \xi(v) \perp L^2(Q)\}.$$

### 5.1.3 Contrôle à moindres regrets

Dans cette section, on aborde le contrôle à moindres regrets pour le système (5.1). Ce contrôle est une solution du problème MinMax relaxé :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) - \gamma \|g\|_{L^2(Q)}^2 \right) \right), \quad (5.15)$$

où  $\gamma$  est un paramètre très petit strictement positif.

**Lemme 5.1.3** *Le problème MinMax relaxé (5.15) peut s'écrire :*

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \mathcal{J}^\gamma(v) \quad (5.16)$$

avec

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v, 0) - J(0, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v)\|_{L^2(Q)}^2. \quad (5.17)$$

**Preuve** - En effet, d'après (5.13) on a

$$J(v, g) - J(0, g) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2\langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) - \gamma \|g\|_{L^2(Q)}^2 \right) \\
&= \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} - \gamma \|g\|_{L^2(Q)}^2 \right) \\
&= J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \left( \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} - \frac{\gamma}{2} \|g\|_{L^2(Q)}^2 \right).
\end{aligned}$$

A l'aide de la conjugué de Fenchel-Legendre [2], on trouve :

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \left( \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} - \frac{\gamma}{2} \|g\|_{L^2(Q)}^2 \right) = \frac{1}{2\gamma} \|\xi(v)\|_{L^2(Q)}^2.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
& J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \left( \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} - \frac{\gamma}{2} \|g\|_{L^2(Q)}^2 \right) = J(v, 0) - J(0, 0) \\
& + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v)\|_{L^2(Q)}^2.
\end{aligned}$$

■

#### 5.1.4 Existence et unicité du contrôle à moindres regrets

Dans cette sous-section, à partir de la forme équivalente du problème MinMax relaxé (5.16)-(5.17), on montrera l'existence et l'unicité d'un contrôle à moindres regrets.

**Proposition 5.1.2** *Il existe une unique solution  $u_\gamma \in L^2(\Sigma_2)$  appelée le contrôle à moindres regrets pour le problème de contrôle optimal (5.16)-(5.17).*

**Preuve -** La fonction de coût  $\mathcal{J}^\gamma$  satisfait à  $\mathcal{J}^\gamma(v) \geq -J(0, 0)$ , pour tout  $v \in L^2(\Sigma_2)$ . Il existe alors une constante  $k_\gamma = \inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \mathcal{J}^\gamma(v)$ . Soit une suite

mimimisante  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $k_\gamma$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $-J(0, 0) \leq \mathcal{J}^\gamma(v_n) \leq k_\gamma + 1$ . Comme

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\gamma(v_n) &= J(v_n, 0) - J(0, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v_n)\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \|c(v_n, 0) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v_n\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v_n)\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\leq k_\gamma + 1, \end{aligned}$$

on obtient alors

$$\|v_n\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq \sqrt{\frac{k_\gamma + 1 + \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2}{N}}.$$

Il existe donc une sous-suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  incluse dans  $L^2(\Sigma_2)$  qui converge faiblement vers une fonction  $u_\gamma \in L^2(\Sigma_2)$ . Cette fonction est appelée le contrôle à moindres regrets. Il est unique car la fonction de coût  $\mathcal{J}^\gamma$  est strictement convexe. ■

**Remarque 5.1.7** La fonction  $c(v_n, 0)$  converge vers  $c(u_\gamma, 0)$  dans  $L^2(\Sigma_1)$ .

En effet, on a

$$\mathcal{J}^\gamma(v_n) = \|c(v_n, 0) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v_n\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v_n)\|_{L^2(Q)}^2 \leq d_\gamma^2,$$

on déduit alors

$$\|c(v_n, 0)\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq d'_\gamma,$$

avec  $d'_\gamma = \sqrt{\|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + d_\gamma^2}$ .

D'où, la fonction  $c(v_n, 0)$  est bornée dans  $L^2(\Sigma_1)$ . Par ailleurs, d'après la remarque 5.1.3, la fonction  $c(\cdot, \cdot, v, \cdot)$  est continue sur  $L^2(\Sigma_2)$  et donc  $c(v_n, 0)$  converge vers  $c(u_\gamma, 0)$  dans  $L^2(\Sigma_1)$ .

### 5.1.5 Caractérisation du contrôle à moindres regrets

Dans cette section, on donne une caractérisation du contrôle pour le système (5.1).

**Proposition 5.1.3** *Le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$  satisfait à l'inégalité*

$$\langle c_\gamma - \tilde{c}, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + N \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + \left\langle \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma, \xi(w) \right\rangle_{L^2(Q)} \geq 0 \quad (5.18)$$

où  $c_\gamma = c(u_\gamma, 0)$  et  $\xi_\gamma = \xi(u_\gamma)$ .

**Preuve** - Le contrôle  $u_\gamma$  vérifie la formule d'Euler-Lagrange :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)}{\lambda} \right) \geq 0,$$

pour toute fonction  $v \in L^2(\Sigma_2)$  et pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ . On a

$$\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma + \lambda w) = J(u_\gamma + \lambda w, 0) - J(0, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(u_\gamma + \lambda w)\|_{L^2(Q)}^2$$

et

$$\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma) = J(u_\gamma, 0) - J(0, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(u_\gamma)\|_{L^2(Q)}^2$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}^\gamma(u_\gamma) &= J(u_\gamma + \lambda w, 0) - J(u_\gamma, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(u_\gamma + \lambda w)\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad - \frac{1}{\gamma} \|\xi(u_\gamma)\|_{L^2(Q)}^2 \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} J(u_\gamma + \lambda w, 0) - J(u_\gamma, 0) &= \|c(u_\gamma + \lambda w, 0) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N \|u_\gamma + \lambda w\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \\ &\quad - \|c(u_\gamma, 0) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 - N \|u_\gamma\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \\ &= 2\lambda \langle c(u_\gamma, 0) - \tilde{c}, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \lambda^2 \|c(w, 0)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ &\quad + 2N\lambda \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + \lambda^2 N \|w\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{\gamma} \|\xi(u_\gamma + \lambda w)\|_{L^2(Q)}^2 - \frac{1}{\gamma} \|\xi(u_\gamma)\|_{L^2(Q)}^2 = \frac{\lambda^2}{\gamma} \|\xi(w)\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{2\lambda}{\gamma} \langle \xi(u_\gamma), \xi(w) \rangle_{L^2(Q)}.$$

On trouve :

$$\begin{aligned}
J(u_\gamma + \lambda w, 0) - J(u_\gamma, 0) &= 2\lambda \langle c(u_\gamma, 0) - \tilde{c}, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \lambda^2 \|c(w, 0)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\
&\quad + 2N\lambda \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + \lambda^2 N \|w\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 + \frac{\lambda^2}{\gamma} \|\xi(w)\|_{L^2(Q)}^2 \\
&\quad + \frac{2\lambda}{\gamma} \langle \xi(u_\gamma), \xi(w) \rangle_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

En divisant par  $\lambda \in ]0, 1[$  et en passant à la limite, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)}{\lambda} \right) &= 2 \langle c(u_\gamma, 0) - \tilde{c}, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + 2N \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \\
&\quad + \frac{2}{\gamma} \langle \xi(u_\gamma), \xi(w) \rangle_{L^2(Q)} \geq 0.
\end{aligned}$$

On trouve, donc l'inégalité (5.18) recherchée. ■

### 5.1.6 Système d'optimalité singulier

Dans cette sous-section, à l'aide de l'inégalité (5.18), on donnera une caractérisation du contrôle pour le système (5.1) par un système d'optimalité singulier. On notera  $c_\gamma = c(u_\gamma, 0)$ ,  $\xi_\gamma = \xi(u_\gamma, 0)$ ,  $\rho_\gamma = \rho(u_\gamma, 0)$ ,  $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$ .

**Théorème 5.1.2** *Le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$  solution du problème optimal (5.16)-(5.17). est caractérisé par l'unique quadruplet  $\{c_\gamma, \rho_\gamma, \xi_\gamma, p_\gamma\}$  solution du système d'optimalité singulier suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A} c_\gamma = 0, & \mathcal{A}^* \xi_\gamma = 0 & \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} c_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{I c_\gamma}{K}, & \mathcal{B}^* \xi_\gamma \cdot \mathbf{n} = -c_\gamma + \frac{I \xi_\gamma}{K} & \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B} c_\gamma \cdot \mathbf{n} = -u_\gamma, & \mathcal{B}^* \xi_\gamma \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2, \\ c_\gamma(0, x) = 0, & \xi_\gamma(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{A} \rho_\gamma = \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma, & \mathcal{A}^* p_\gamma = 0 & \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{I}{K} \rho_\gamma, & \mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} = c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{I p_\gamma}{K} & \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B} \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = 0, & \mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2, \\ \rho_\gamma(0, x) = 0, & p_\gamma(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.19)$$

où l'équation adjointe est  $p_\gamma + N u_\gamma = 0$  dans  $L^2(Q)$ .

**Remarque 5.1.8** *Les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^*$  sont donnés par (4.7) et les opérateurs  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^*$  sont donnés par (4.8).*

**Preuve** - On transforme le terme  $\langle \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma, \xi(w) \rangle_{L^2(Q)}$  de l'inégalité d'Euler-Lagrange donnée par (5.18).

On pose que  $\frac{1}{\gamma} \xi_\gamma = \mathcal{A} \rho_\gamma$  où  $\rho_\gamma = \rho(t, x, u_\gamma, 0)$  est la solution du problème direct :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \rho_\gamma = \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{I}{K} \rho_\gamma \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B} \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \rho_\gamma(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (5.20)$$

On multiplie l'équation  $\mathcal{A} \rho_\gamma = \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma$  du système (5.20) par  $\xi(w)$  solution du problème adjoint (5.10).

Puis, on calcule l'intégrale

$$\int_Q \mathcal{A} \rho_\gamma \xi(w) \, dxdt = \underbrace{\int_Q \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} \rho_\gamma \right) \xi(w) \, dxdt}_{=A} + \underbrace{\int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \rho_\gamma - D \Delta \rho_\gamma \right) \xi(w) \, dxdt}_{=B},$$

en employant les mêmes techniques de calcul que dans la preuve du **théorème 4.1.2**. On obtient alors pour le terme A :

$$A = - \int_Q \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} \xi(w) \right) \rho_\gamma \, dxdt,$$

car  $\rho_\gamma(0) = \xi(T, w) = 0$ .

Ensuite, pour le terme B, on trouve :

$$\begin{aligned} B &= - \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \xi(w) + D \Delta \xi(w) \right) \rho_\gamma \, dxdt \\ &\quad - \int_\Sigma \left( D \nabla \rho_\gamma - \frac{1}{2} \mathbf{q} \rho_\gamma \right) \xi(w) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma dt + \int_\Sigma \left( D \nabla \xi(w) + \frac{1}{2} \mathbf{q} \xi(w) \right) \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} \, d\sigma dt \\ &= - \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \xi(w) + D \Delta \xi(w) \right) \rho_\gamma \, dxdt + \int_{\Sigma_1} c(w, 0) \rho_\gamma \, d\sigma_1 dt, \end{aligned}$$

à l'aide des conditions aux limites des systèmes (5.20) et (5.10). En additionnant les termes A et B, on obtient :

$$\begin{aligned}
A + B &= \int_Q \mathcal{A} \rho_\gamma \xi(w) \, dxdt \\
&= \int_Q \mathcal{A}^* \xi(w) \rho_\gamma \, dxdt + \int_{\Sigma_1} c(w, 0) \rho_\gamma \, d\sigma_1 dt \\
&= \int_{\Sigma_1} c(w, 0) \rho_\gamma \, d\sigma_1 dt,
\end{aligned}$$

car  $\mathcal{A}^* \xi(w) = 0$  dans  $Q$ .

De plus, comme

$$\left\langle \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma, \xi(w) \right\rangle_{L^2(Q)} = \int_Q \mathcal{A} \rho_\gamma \xi(w) \, dxdt = \int_{\Sigma_1} c(w, 0) \rho_\gamma \, d\sigma_1 dt = \langle c(w, 0), \rho_\gamma \rangle_{L^2(\Sigma_1)}$$

alors l'inégalité donnée par (5.18) devient alors

$$\begin{aligned}
&\langle c_\gamma - \tilde{c}, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \left\langle \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma, \xi(w) \right\rangle_{L^2(\Sigma_2)} + N \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \\
&= \langle c_\gamma - \tilde{c}, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \langle c(w, 0), \rho_\gamma \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + N \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \\
&= \langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + N \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \geq 0.
\end{aligned}$$

On réitère le même procédé pour transformer  $\langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}$ .

On introduit  $p_\gamma = p(t, x, u_\gamma, 0)$  solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll}
\mathcal{A}^* p_\gamma & = & 0 \quad \text{dans } Q, \\
\mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} & = & c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{I p_\gamma}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\
\mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\
p_\gamma(T, x) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega.
\end{array} \right. \quad (5.21)$$

On multiplie  $\mathcal{A}^*p_\gamma$  par  $c(w, 0)$  solution du problème direct (5.1).

De la même manière que précédemment, on calcule l'intégrale  $\int_Q \mathcal{A}^*p_\gamma c(w, 0) dxdt$ .

En utilisant les conditions aux limites des systèmes (5.1) et (5.21), on trouve :

$$\begin{aligned} \int_Q \mathcal{A}^*p_\gamma c(w, 0) dxdt &= \int_{\Sigma_1} (c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma) c(w, 0) d\sigma_1 dt - \int_{\Sigma_2} w p_\gamma d\sigma_2 dt \\ &\quad + \int_Q \mathcal{A}c(w, 0) p_\gamma dxdt \\ &= \int_{\Sigma_1} (c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma) c(w, 0) d\sigma_1 dt - \int_{\Sigma_2} w p_\gamma d\sigma_2 dt \\ &= \langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} - \langle p_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \end{aligned}$$

car  $\mathcal{A}c(w, 0) = 0$  dans  $Q$ . De plus comme  $\mathcal{A}^*p = 0$  dans  $Q$ , on obtient

$$\langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle p_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)}$$

que l'on remplace dans l'inégalité (5.18). On obtient alors

$$\begin{aligned} &\langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \langle Nu_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \\ &= \langle p_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + \langle Nu_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \\ &= \langle p_\gamma + Nu_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \text{ pour tout } w \in L^2(\Sigma_2) \end{aligned}$$

Cependant, pour  $w' = -w \in L^2(\Sigma_2)$  on a  $\langle p_\gamma + Nu_\gamma, w' \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \leq 0$  et donc  $p_\gamma + Nu_\gamma = 0$  dans  $L^2(\Sigma_2)$ . ■

Le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$ , caractérisé par le système d'optimalité (5.19) converge vers le contrôle sans regret  $u$ .

**Proposition 5.1.4** *Soit  $\tilde{c} \in L^2(\Sigma_1)$ . Le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$  converge vers  $u \in L^2(\Sigma_2)$ , appelé le **contrôle sans regret**.*

**Preuve** - Le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$  vérifie

$$\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma) \leq \mathcal{J}^\gamma(0) \quad (5.22)$$

où

$$\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma) = J(u_\gamma, 0) - J(0, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi_\gamma\|_{L^2(Q)}^2,$$

et où

$$\mathcal{J}^\gamma(0) = J(0, 0) - J(0, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(0)\|_{L^2(Q)}^2 = 0,$$

car la fonction  $\xi$  est une forme linéaire. A partir de l'inégalité (5.22), on obtient :

$$J(u_\gamma, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi_\gamma\|_{L^2(Q)}^2 \leq J(0, 0)$$

où

$$J(u_\gamma, 0) = \|c_\gamma - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N \|u_\gamma\|_{L^2(\Sigma_2)}^2,$$

et où

$$J(0, 0) = \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2.$$

On en déduit que la suite  $(u_\gamma)$  est bornée dans  $L^2(\Sigma_2)$  car  $\|u_\gamma\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \|\cdot\|_{L^2(\Sigma_1)}$ . Il existe alors une sous-suite notée  $(u_\gamma)$  qui converge faiblement vers  $u \in L^2(\Sigma_2)$ .

■

**Remarque 5.1.9** On trouve  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi_\gamma \rightharpoonup \lambda$  dans  $L^2(Q)$  et  $c_\gamma \rightharpoonup c$  dans  $L^2(\Sigma_1)$ . En effet, on a  $\frac{1}{\gamma} \|\xi_\gamma\|_{L^2(Q)}^2 + \|c_\gamma - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N \|u_\gamma\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \leq \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2$ . On en déduit que la suite  $(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi_\gamma)$  est bornée dans  $L^2(Q)$ . D'où la sous-suite notée encore  $(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi_\gamma)$  converge vers  $\lambda$  dans  $L^2(Q)$ . On observe aussi que la suite  $(c_\gamma)$  est bornée dans  $L^2(\Sigma_1)$ . On trouve alors que la sous-suite, notée encore  $(c_\gamma)$  converge vers  $c$  dans  $L^2(\Sigma_1)$ .

## 5.2 Problème de contrôle à une frontière

Dans ce chapitre, on étudie le contrôle optimal pour le système NTB linéaire (3.1) en sol pollué :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = g + v \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.23)$$

où la fonction de contrôle positive  $v \in L^2(Q)$  est l'ajout de nutriments.

L'objectif est de trouver le ou les contrôle(s) minimisant(s) la fonction de coût

$$J(v, g) = \|c(v, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N \|v\|_{L^2(Q)}^2, \quad (5.24)$$

où  $\tilde{c} \in L^2(\Sigma_1)$  est une concentration d'éléments nutritifs observée à la surface de la racine et  $N$  une constante positive.

La concentration de sels minéraux  $c(v, g) := c(t, x, v, g)$  linéaire en  $v$  et  $g$  vérifie :

$$c(v, g) = c(v, 0) + c(0, g), \quad \text{pour tout } v \in L^2(Q) \text{ et } g \in L^2(Q), \quad (5.25)$$

où la fonction  $g$  représente la pollution du sol et la fonction  $v$  est un ajout d'éléments nutritifs par les plantes de services (ou l'action de l'homme).

**Remarque 5.2.1** *Sans perdre de généralité, on a choisi  $c(0, x) = c_0(x) = 0$ .*

*Si on, il suffit de considérer  $\bar{c}(t, x) = c(t, x) - c_0(x)$  avec la condition :*

*$c(0, x)|_{(\Gamma_1)} = 0$ . En effet, on obtient :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \bar{c} - D \Delta \bar{c} = \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = v + g \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla \bar{c} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \bar{c}) \cdot \mathbf{n} = -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \bar{c}(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

**Remarque 5.2.2** *On suppose que l'application  $v \mapsto c(., ., v, .)$  définie de  $L^2(\Sigma_2)$  vers  $L^2(\Sigma_1)$  est continue  $L^2(Q)$ .*

### 5.2.1 Existence d'une solution faible

Dans cette section, on aborde l'existence d'une solution pour le système donnée par (5.23). On suppose que la concentration  $c(t, \cdot)$  est une fonction continue en temps et considérée comme un élément de  $H^1(\Omega)$  représentant  $x \mapsto c(t, x)$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Lemme 5.2.1** *Le système (5.23) est équivalent à la formulation faible suivante :*

$$\begin{cases} \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + a(t; c, \psi) = L(t; \psi) & p.p \, t \in ]0, T[, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ c(0, x) = 0, \end{cases} \quad (5.26)$$

où

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_1} \frac{I}{K} c \psi \, d\sigma_1, \quad (5.27)$$

et

$$L(t; \psi) = \int_{\Omega} \psi (v + g) \, dx dt.$$

■

**Preuve -** On multiplie la première équation du système (5.23) par  $\psi \in H^1(\Omega)$  et on intègre par parties. Puisque l'ensemble  $\Omega$  et la fonction  $\psi$  ne dépendent pas du temps, on peut écrire :

$$\alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + \underbrace{\int_{\Omega} \psi (\mathbf{q} \cdot \nabla c) \, dx - D \int_{\Omega} (\Delta c) \psi \, dx}_{=A} = \int_{\Omega} \psi (v + g) \, dx.$$

Par un raisonnement analogue à celui effectué dans la preuve du **lemme 5.1.1**,

On obtient

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx - \int_{\Gamma_1} \frac{Ic}{K} \psi \, d\sigma_1$$

en utilisant les condition aux limites du système (4.14). Comme :

$$\alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + A = \int_{\Omega} \psi (v + g) \, dx,$$

on en déduit :

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Gamma_1} \frac{Ic}{K} \psi d\sigma_1,$$

et

$$L(t; \psi) = \int_{\Omega} \psi (v + g) dx. \quad \blacksquare$$

**Proposition 5.2.1** *En supposant que  $|q|$  est uniformément borné (i.e  $q \in L^\infty(\Omega)$ ) et que la fonction de contrôle  $v \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ , alors le système (5.23) admet une unique solution  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ .*

**Preuve -** En appliquant une démonstration analogue à la preuve du **théorème 2.2.1** avec  $f = v$ , on trouve que la forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $H^1(\Omega)$  et semi-coercive. Afin de satisfaire les hypothèses du théorème de Lions, il suffit donc de montrer que la forme linéaire  $L$  est continue sur  $H^1(\Omega)$ . En effet, on a :

$$|L(t, \psi)| = \left| \int_{\Omega} \psi (g + v) dx \right| \leq \|\psi\|_{H^1(\Omega)} (\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}).$$

Les hypothèses du théorème de Lions pour les problèmes d'évolution [1], [5] sont satisfaites. D'où il existe une unique solution faible  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  du système (5.23) .  $\blacksquare$

## 5.2.2 Contrôle sans regret

Dans cette section, on traite du contrôle sans regret pour le système (5.23). Afin de déterminer le ou les contrôle(s) minimisant(s) la fonction de coût  $J(v, g)$  donnée par (5.24), il serait intéressant de résoudre le problème MinMax défini ci-dessous :

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} J(v, g) \right). \quad (5.28)$$

Cependant, on a que :

$$\sup_{g \in L^2(Q)} J(v, g) = +\infty. \quad (5.29)$$

On utilisera, alors, les techniques de contrôle sans regrets et de contrôle à moindres regrets définies par J.-L. Lions [17] et utilisées dans [21]-[22].

**Définition 5.2.1** *Le contrôle sans regret pour le problème (5.28), s'il existe, est une fonction  $v \in L^2(Q)$  solution du nouveau problème MinMax suivant :*

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) \right) \quad (5.30)$$

**Lemme 5.2.2** *Pour toute fonction  $v \in L^2(\Sigma_2)$  et toute fonction  $g \in L^2(Q)$ , on a :*

$$J(v, g) - J(0, g) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \langle c(0, g), c(v, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}.$$

**Preuve** - Raisonnement analogue à la preuve du **lemme 5.1.2**. ■

**Remarque 5.2.3** *A partir du lemme 5.2.2, on en déduit :*

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}.$$

On estime alors  $\sup_{g \in L^2(Q)} \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}$ .

**Proposition 5.2.2** *Soit  $c(0, g)$  la concentration d'éléments nutritifs lorsque la variable de contrôle  $v = 0$  et  $c(v, 0)$  la concentration d'éléments nutritifs lorsque la pollution du sol  $g = 0$ , on a alors*

$$\langle c(0, g), c(v, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)}. \quad (5.31)$$

**Preuve** -On introduit  $\xi(v) = \xi(x, t, v)$  solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}^* \xi(v) = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^* \xi(v) \cdot \mathbf{n} = -c(v, 0) - \frac{I}{K} \xi(v) \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \xi(T, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.32)$$

avec

$$\mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

En effectuant les mêmes calculs que dans la preuve de la **proposition 5.1.1**, on calcule  $\int_Q \mathcal{A}^* \xi(v) c(0, g) dxdt$ . On obtient

$$\begin{aligned} \int_Q \mathcal{A}^* \xi(v) c(0, g) dxdt &= - \int_{\Sigma_1} c(v, 0) c(0, g) d\sigma_1 dt + \int_Q \mathcal{A} c(0, g) \xi(v) dxdt \\ &= \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} - \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}. \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{A}^* \xi(v) = 0$  dans  $Q$  dans le système (5.32) alors on obtient le résultat désiré. ■

**Remarque 5.2.4** *Comme d'après la proposition précédente on a  $\langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} = \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}$  alors*

$$\begin{aligned} J(v, g) - J(0, g) &= J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \langle c(v, 0), c(0, g) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\ &= J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

On en déduit alors

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} \tag{5.34}$$

$$\text{avec } \sup_{g \in L^2(Q)} \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \langle \xi(v), g \rangle \neq 0 \\ 0 & \text{si } \xi(v) \perp g \quad \forall g \in L^2(Q). \end{cases}$$

L'estimation  $\sup_{g \in L^2(Q)} \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)}$  ne permet pas de caractériser le contrôle sans regret du problème MinMax (5.30). Par conséquent, on passe au concept de contrôle à moindres regrets pour chercher un contrôle  $v$  appartenant à l'ensemble suivant :  $\{v \in L^2(Q) \text{ tel que } \xi(v) \perp L^2(Q)\}$ .

### 5.2.3 Contrôle à moindres regrets

Dans cette section, on aborde, le contrôle à moindres regrets pour le système (5.23).

Ce contrôle est une solution du problème MinMax relaxé :

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) - \gamma \|g\|_{L^2(Q)}^2 \right) \right), \quad (5.35)$$

où  $\gamma$  est un paramètre très petit et strictement positif.

Tout d'abord, on transforme l'expression (5.35) afin d'obtenir une formulation équivalente.

**Lemme 5.2.3** *Le problème MinMax relaxé (5.35) peut s'écrire :*

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \mathcal{J}^\gamma(v) \quad (5.36)$$

avec

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v, 0) - J(0, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v)\|_{L^2(Q)}^2. \quad (5.37)$$

**Preuve -** La preuve de ce lemme est similaire à celle du **lemme 5.1.3**. ■

### 5.2.4 Existence et unicité du contrôle à moindres regrets

Dans cette sous-section, à partir de la forme équivalente du problème MinMax relaxé (5.36)-(5.37), on montre l'existence et l'unicité d'un contrôle à moindres regrets.

**Proposition 5.2.3** *Il existe une unique solution  $u_\gamma \in L^2(Q)$  appelée le contrôle à moindres regrets pour le problème de contrôle optimal (5.36)-(5.37).*

**Preuve -** Par une démonstration analogue à celle de la preuve de la **proposition 5.1.2**, on trouve

$$-J(0, 0) \leq \mathcal{J}^\gamma(v_n) \leq k_\gamma + 1,$$

pour tout  $n \geq n_0$  avec  $k_\gamma = \inf_{v \in L^2(Q)} \mathcal{J}^\gamma(v)$ .

Puisque,

$$\mathcal{J}^\gamma(v_n) = \|c(v_n, 0) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v_n\|_{L^2(Q)}^2 - \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{1}{\gamma}\|\xi(v_n)\|_{L^2(Q)}^2,$$

on obtient alors

$$\|v_n\|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{\frac{k_\gamma + 1 + \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma)}^2}{N}}.$$

Il existe donc une sous-suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  incluse dans  $L^2(Q)$  qui converge faiblement vers une fonction  $u_\gamma \in L^2(Q)$ . Cette fonction est appelée le contrôle à moindres regrets. ce contrôle est unique car la fonction de coût  $\mathcal{J}^\gamma$  est strictement convexe.

■

**Remarque 5.2.5** *La fonction  $c(v_n, 0)$  converge vers  $c(u_\gamma, 0)$  dans  $L^2(\Sigma_1)$ . En effet, comme on a :*

$$\mathcal{J}^\gamma(v_n) = \|c(v_n, 0) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma)}^2 + N\|v_n\|_{L^2(Q)}^2 - \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{1}{\gamma}\|\xi(v_n)\|_{L^2(Q)}^2 \leq d_\gamma^2.$$

On déduit alors

$$\|c(v_n, 0)\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq d'_\gamma,$$

avec  $d'_\gamma = \sqrt{\|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + d_\gamma^2}$ .

D'où, la fonction  $c(v_n, 0)$  est bornée dans  $L^2(\Sigma)$ . Par conséquent, on obtient que  $c(v_n, 0)$  converge vers  $c(u_\gamma, 0)$  car la fonction  $v \mapsto c(.,., v, .)$  est continue d'après la remarque 5.2.2.

## 5.2.5 Caractérisation du contrôle à moindres regrets

Dans cette section, on donne une caractérisation du contrôle pour le système (5.23).

**Proposition 5.2.4** *Le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$  satisfait à l'inégalité*

$$\langle c_\gamma - \tilde{c}, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma)} + N\langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(Q)} + \langle \frac{1}{\gamma}\xi_\gamma, \xi(w) \rangle_{L^2(Q)} \geq 0 \quad (5.38)$$

où  $c_\gamma = c(u_\gamma, 0)$  et  $\xi_\gamma = \xi(u_\gamma, 0)$ .

**Preuve** - Le contrôle  $u_\gamma$  vérifie la formule d'Euler-Lagrange :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)}{\lambda} \right) \geq 0,$$

pour tout  $w \in L^2(Q)$ . En effectuant des calculs identiques à ceux effectués dans la preuve de la **proposition 5.1.3**, on obtient le résultat souhaité. ■

### 5.2.6 Système d'optimalité singulier

Dans cette sous-section, à partir de l'inégalité d'Euler-Lagrange (5.38), on caractérise le contrôle à moindres regrets par un système d'optimalité singulier. On notera  $c_\gamma = c(u_\gamma, 0)$ ,  $\xi_\gamma = \xi(u_\gamma, 0)$ ,  $\rho_\gamma = \rho(u_\gamma, 0)$ ,  $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$ .

**Théorème 5.2.1** *Le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$  solution du problème optimal (5.36)-(5.37) est caractérisé par l'unique quadruplet  $\{c_\gamma, \rho_\gamma, \xi_\gamma, p_\gamma\}$  solution du système d'optimalité suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A} c_\gamma = 0, & \mathcal{A}^* \xi_\gamma = 0 & \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} c_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{I}{K} c_\gamma, & \mathcal{B}^* \xi_\gamma \cdot \mathbf{n} = -c_\gamma + \frac{I}{K} \xi_\gamma & \text{sur } \Sigma_1, \\ c_\gamma(0, x) = 0, & \xi_\gamma(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{A} \rho_\gamma = \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma, & \mathcal{A}^* p_\gamma = 0 & \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{I}{K} \rho_\gamma, & \mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} = -(c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma) - \frac{I}{K} p_\gamma & \text{sur } \Sigma_1, \\ \rho_\gamma(0, x) = 0, & p_\gamma(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (5.39)$$

où l'équation adjointe est  $p_\gamma + Nu_\gamma = 0$  dans  $L^2(Q)$ ,

**Remarque 5.2.6** Les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^*$  sont donnés par (4.7) et les opérateurs  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^*$  sont donnés par (4.8).

**Preuve** - On transforme le terme  $\langle \frac{1}{\gamma}\xi_\gamma, \xi(w) \rangle_{L^2(Q)}$  de l'inégalité d'Euler-Lagrange (5.38), en posant  $\frac{1}{\gamma}\xi_\gamma = \mathcal{A}\rho_\gamma$  où  $\rho_\gamma = \rho(\cdot, \cdot, u_\gamma, 0)$  solution du problème direct :

$$\begin{cases} \mathcal{A}\rho_\gamma &= \frac{1}{\gamma}\xi_\gamma & \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B}\rho_\gamma \cdot \mathbf{n} &= \frac{I}{K}\rho_\gamma & \text{sur } \Sigma_1, \\ \rho_\gamma(0, x) &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.40)$$

Ensuite, on calcule l'intégrale  $\int_Q \mathcal{A}\rho_\gamma \xi(w) dxdt$ , en effectuant une démonstration similaire à la preuve du **théorème 5.1.2**. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_Q \mathcal{A}\rho_\gamma \xi(w) dxdt &= \int_Q \mathcal{A}^*\xi(w)\rho_\gamma dxdt + \int_{\Sigma_1} c(w, 0)\rho_\gamma d\sigma_1 dt \\ &= \int_{\Sigma_1} c(w, 0)\rho_\gamma d\sigma_1 dt \\ &= \langle c(w, 0), \rho_\gamma \rangle_{L^2(\Sigma_1)}, \end{aligned}$$

à l'aide des conditions aux limites des systèmes (5.32) et (5.40) et de l'égalité  $\mathcal{A}^*\xi(w) = 0$  dans  $Q$ . Comme

$$\langle \frac{1}{\gamma}\xi_\gamma, \xi(w) \rangle_{L^2(Q)} = \int_Q \mathcal{A}\rho_\gamma \xi(w) dxdt = \langle c(w, 0), \rho_\gamma \rangle_{L^2(\Sigma_1)},$$

on trouve alors que l'inégalité donné par (5.38) devient :

$$\begin{aligned}
& \langle c_\gamma - \tilde{c}, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \langle \frac{1}{\gamma} \xi_\gamma, \xi(w) \rangle_{L^2(Q)} + N \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(Q)} \\
&= \langle c_\gamma - \tilde{c}, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \langle c(w, 0), \rho_\gamma \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + N \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(Q)} \\
&= \langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + N \langle u_\gamma, w \rangle_{L^2(Q)} \geq 0.
\end{aligned}$$

On recommence le même procédé pour transformer  $\langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)}$ . On introduit  $p_\gamma = p(t, x, u_\gamma, 0)$  solution du problème adjoint suivant :

$$\begin{cases}
\mathcal{A}^* p_\gamma &= & 0 & \text{dans } Q, \\
\mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} &= & -(c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma) + \frac{I}{K} p_\gamma & \text{sur } \Sigma_1, \\
p_\gamma(T, x) &= & 0 & \text{dans } \Omega.
\end{cases} \quad (5.41)$$

Puis, comme précédemment, on calcule l'intégrale  $\int_Q \mathcal{A}^* p_\gamma c(w, 0) dx dt$ . On trouve

$$\begin{aligned}
\int_Q \mathcal{A}^* p_\gamma c(w, 0) dx dt &= - \int_{\Sigma_1} \left( D \nabla p_\gamma + \frac{1}{2} \mathbf{q} p_\gamma \right) c(w, 0) \cdot \mathbf{n} d\sigma_1 dt \\
&+ \int_{\Sigma_1} \left( D \nabla c(w, 0) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(w, 0) \right) p_\gamma \cdot \mathbf{n} d\sigma_1 dt \\
&+ \int_Q \mathcal{A} c(w, 0) p_\gamma dx dt \\
&= - \int_{\Sigma_1} (c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma) c(w, 0) d\sigma_1 dt \\
&+ \int_Q w p_\gamma dx dt,
\end{aligned}$$

à l'aide des conditions aux limites des systèmes (5.23) et (5.41) et de l'égalité  $\mathcal{A}c(w, 0) = 0$  dans  $Q$ . Comme  $\mathcal{A}^*p_\gamma = 0$  dans  $Q$  alors

$$\langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle p_\gamma, w \rangle_{L^2(Q)}.$$

A l'aide du résultat précédent, l'inégalité (5.38) devient alors

$$\begin{aligned} & \langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma, c(w, 0) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \langle Nu_\gamma, w \rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\ &= \langle p_\gamma, w \rangle_{L^2(Q)} + \langle Nu_\gamma, w \rangle_{L^2(Q)} \\ &= \langle p_\gamma + Nu_\gamma, w \rangle_{L^2(Q)} \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout  $w \in L^2(Q)$ . Or  $\langle p_\gamma + Nu_\gamma, w' \rangle_{L^2(Q)} \leq 0$ , pour  $w' = -w \in L^2(Q)$  alors  $p_\gamma + Nu_\gamma = 0$  dans  $L^2(Q)$ . ■

Le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$ , caractérisé par le système d'optimalité (5.39) converge vers le contrôle sans regret  $u$ .

**Proposition 5.2.5** *Soit  $\tilde{c} \in L^2(\Sigma_1)$ . Le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$  converge vers  $u \in L^2(Q)$ , appelé le **contrôle sans regret**.*

**Preuve** - On démontre cette proposition, en appliquant une démarche semblable à celle de la preuve de la **proposition 5.1.4**. ■

**Remarque 5.2.7** *On trouve  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi_\gamma \rightharpoonup \lambda$  dans  $L^2(Q)$  et  $c_\gamma \rightharpoonup c$  dans  $L^2(\Sigma)$ . En effet, on a*

$$\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma) = \frac{1}{\gamma} \|\xi_\gamma\|_{L^2(Q)}^2 + \|c_\gamma - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|u_\gamma\|_{L^2(Q)}^2 \leq \|\tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2.$$

On en déduit que la suite  $(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi_\gamma)$  est bornée dans  $L^2(Q)$ . Donc, la sous-suite notée encore  $(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi_\gamma)$  converge vers  $\lambda$  dans  $L^2(Q)$ . De plus, on observe que la suite  $(c_\gamma)$  est bornée dans  $L^2(\Sigma)$ . D'où, la sous-suite, notée encore  $(c_\gamma)$  converge vers  $c$  dans  $L^2(\Sigma_1)$ .

# Chapitre 6

## Systeme NTB non linéaire à deux frontières

### 6.1 Préliminaires

Dans ce chapitre, on analyse le système NTB non linéaire à deux frontières représenté par le système ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = h(c) \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ (D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (6.1)$$

où  $h(c) = \frac{Ic}{K+c}$  représente la fonction d'absorption non linéaire.

**Remarque 6.1.1** *L'écriture non linéaire de la fonction d'absorption  $h(c) = \frac{I\bar{c}}{K+\bar{c}}$  correspond à une faible affinité entre l'ion transporté à la surface de la racine et l'ion jouant le rôle de transporteur.*

## 6.2 Existence d'un point fixe

Dans cette section, on montre que le système (6.1) admet un point fixe, pour cela, on considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = h(\bar{c}) \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ (D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (6.2)$$

où  $h(\bar{c}) = \frac{I\bar{c}}{K + \bar{c}}$  non linéaire.

**Remarque 6.2.1** On suppose que  $\bar{c} \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega))$ .

En effectuant le changement de variable  $c' = c(t, x) - c(0, x)$  avec  $c(0, x)$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t}(0, x) + \mathbf{q} \cdot \nabla c(0, x) - D\Delta c(0, x) = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D\nabla c(0, x) - \frac{1}{2}\mathbf{q}c(0, x)) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ (D\nabla c(0, x) - \frac{1}{2}\mathbf{q}c(0, x)) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

le système (6.2) devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c'}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c' - D \Delta c' = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla c' - \frac{1}{2} \mathbf{q} c') \cdot \mathbf{n} = h(\bar{c}) \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ (D \nabla c' - \frac{1}{2} \mathbf{q} c') \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ c'(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

**Lemme 6.2.1** *Le système (6.3) à une formulation faible donnée par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c' \psi \, dx + a(t; c', \psi) = L(t; \psi) \quad p.p \, t \in ]0, T[, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ c'(0, x) = 0, \end{array} \right. \quad (6.4)$$

où

$$a(t; c, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c' - c' \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c' \cdot \nabla \psi \, dx, \quad (6.5)$$

et

$$L(t; \psi) = - \int_{\Gamma_1} h(\bar{c}) \psi \, d\sigma_1.$$

**Preuve** - Par une démonstration semblable à celle effectuée à la preuve du lemme 2.2.1, on obtient la formulation souhaitée. ■

**Remarque 6.2.2** *La formulation (6.4)-(6.5) est différente de celle obtenue les systèmes NTB linéaires, où  $L = 0$ .*

**Théorème 6.2.1** *On suppose que  $|q|$  est uniformément borné :  $q \in L^\infty(Q)$ . Si la fonction  $h(\bar{c}) \in L^2(\Gamma_1)$  alors il existe une unique fonction  $c' \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ , solution du système (6.3).*

**Preuve** - En effectuant un raisonnement analogue à celui de la preuve du théorème 2.2.1, on obtient le résultat convenu. ■

Puis, on montrera l'existence d'un point fixe pour le système (6.2). La remarque qui suit est un résultat important en vue de préparer l'énoncé du théorème pour le point fixe.

**Remarque 6.2.3** *On a  $L^2(]0, T[, H^1(\Omega)) \subset L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ . En effet, soit  $\psi \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega))$ , alors on a*

$$\|\psi\|_{L^2(]0, T[, H^1(\Omega))}^2 = \int_0^T \|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq R \quad (R \geq 0).$$

*On en déduit alors que  $\|\psi\|_{L^2(]0, T[, L^2(\Omega))}^2 \leq R$  et donc  $\psi \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ .*

Dans la suite, afin de monter la **proposition 6.2.1** on a besoin du lemme de Luc Tartar [35] :

**Lemme 6.2.2** *Soient  $E$ , et  $F$  deux espaces de Banach vérifiant que  $E \subset F$  et que l'injection de  $E$  vers  $F$  soit continue et compact. On suppose que pour tout  $p \in [1, \infty]$ , une suite  $(u_n)$  bornée dans  $L^p(]0, T[; E)$ , et il existe  $\theta > 0$  et une constante  $M$  tel que*

$$\left( \int_0^{T-h} \|u_n(t+h) - u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M|h|^\theta$$

*pour tout  $h \in ]0, T/2[$ , alors  $u_n$  appartient à un sous-ensemble compact de  $L^p(]0, T[; F)$ .*

**Preuve** - Pour la preuve de ce lemme se référer à [35], lemme 24.5, page 141. ■

**Proposition 6.2.1** *On suppose que pour toute suite  $c_n$  bornée dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$ , il existe  $\theta > 0$  et une constante  $M$  tel que*

$$\left( \int_0^{T-h} \|c_n(t+h) - c_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M|h|^\theta$$

*pour tout  $h \in ]0, T/2[$ , alors  $c_n$  appartient à un sous-ensemble compact  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ .*

*En particulier, il existe une sous-suite de  $c_n$  qui converge dans  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ .*

**Preuve** - En effet, d'après le théorème de Rellich, l'espace  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  de manière compact. En utilisant le **lemme 6.2.2**, on obtient le résultat souhaité. ■

Ensuite, on définit l'ensemble ci-dessous. Celui-ci sera utilisé pour démontrer l'existence d'un point fixe.

**Lemme 6.2.3** *On suppose que  $\bar{c} \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega))$ .*

*Soit l'ensemble  $C$  définie par :*

$$C = \{c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \text{ tel que } \|c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \leq M'\}, \quad (6.6)$$

où  $c$  est solution du système (6.3), et où

$$M' = \frac{\beta_1 \|I\|_\infty}{m} (\sqrt{T \text{mes}(\Gamma_1)} + T \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)}).$$

**Preuve** - Puisque  $c$  est solution du système (6.3) on a :

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx \\ & = - \int_{\Gamma_1} h(\bar{c}) \psi \cdot d\sigma_1 \quad \text{p.p } t \in ]0, T[, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

En prenant  $\varphi = c$ , on obtient :

$$\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |c|^2 \, dx + D \int_{\Omega} \nabla |c|^2 \, dx = - \int_{\Gamma_1} h(\bar{c}) c \, d\sigma_1 \quad \text{p.p } t \in ]0, T[.$$

Mais

$$- \int_{\Gamma_1} h(\bar{c}) c \, d\sigma_1 = - \int_{\Gamma_1} \frac{I \bar{c}}{K + \bar{c}} c \, d\sigma_1 \leq \int_{\Gamma_1} \frac{I \bar{c}}{K + \bar{c}} c \, d\sigma_1$$

et il existe  $\beta_1 > 0$  tel que

$$\int_{\Gamma_1} \frac{I \bar{c}}{K + \bar{c}} c \, d\sigma_1 \leq \|I\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|c\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \beta_1 \|I\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|c\|_{H^1(\Omega)}$$

à l'aide du théorème de trace.

On trouve :

$$\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |c|^2 \, dx + D \int_{\Omega} \nabla |c|^2 \, dx \leq \beta_1 \|I\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|c\|_{H^1(\Omega)}.$$

On obtient

$$D \int_{\Omega} \nabla |c|^2 dx \leq \beta_1 \|I\|_{\infty} \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|c\|_{H^1(\Omega)}, \quad (6.7)$$

et

$$\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |c|^2 dx \leq \beta_1 \|I\|_{\infty} \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|c\|_{H^1(\Omega)}. \quad (6.8)$$

En intégrant sur  $[0, t]$  avec  $t \in ]0, T[$  l'inégalité donnée par (6.7), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |c(t, x)|^2 dx &\leq \beta_1 \|I\|_{\infty} \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \int_0^t \|c\|_{H^1(\Omega)} ds \\ &\leq \beta_1 \|I\|_{\infty} \sqrt{T \text{mes}(\Gamma_1)} \|c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \end{aligned} \quad (6.9)$$

à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En additionnant 6.7 et 6.8 et en posant  $m = \min\{\frac{\alpha}{2}, D\}$  on obtient :

$$m \|c(t, x)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \beta_1 \|I\|_{\infty} \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|c\|_{H^1(\Omega)} + \beta_1 \|I\|_{\infty} \sqrt{T \text{mes}(\Gamma_1)} \|c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))}.$$

En intégrant sur  $]0, T[$  l'inégalité précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} m \|c(t, x)\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))}^2 &\leq \beta_1 \|I\|_{\infty} \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \int_0^T \|c(t, x)\|_{H^1(\Omega)} dt \\ &\quad + \beta_1 \|I\|_{\infty} \sqrt{T \text{mes}(\Gamma_1)} \int_0^T \|c(t, x)\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} dt \\ &\leq \beta_1 \|I\|_{\infty} (\sqrt{T \text{mes}(\Gamma_1)} + T \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)}) \|c(t, x)\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

D'où l'on obtient :

$$\|c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \leq M'$$

avec

$$M' = \frac{\beta_1 \|I\|_{\infty}}{m} (\sqrt{T \text{mes}(\Gamma_1)} + T \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)}).$$

■

**Lemme 6.2.4** *L'ensemble  $C$  définie ci-dessus est convexe.*

**Preuve -** En effet, en prenant  $c', c'' \in C$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , on trouve  $\|\lambda c' + (1 - \lambda)c''\|_{L^2(]0, T[; V)} \leq \lambda \|c'\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} + (1 - \lambda) \|c''\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \leq M$ . ■

**Lemme 6.2.5** *L'ensemble  $C$  est fermé.*

**Preuve -** En effet, on considère  $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$  une suite convergeant vers  $c' \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$ . Cette suite est bornée dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$ . Il existe alors une sous-suite  $(c'_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$  extraite de  $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement vers  $c' \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$  (unicité de la limite). Puisque la norme  $\|\cdot\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))}$  est faiblement s.c.i alors  $\|c'\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \leq \liminf_{n' \rightarrow +\infty} \|c'_{n'}\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))}$ . On en déduit que  $\|c'\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \leq M$  et donc  $c'' \in M$ . ■

Ensuite, on considère  $\mathcal{T}$  une application de  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$  vers  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ . On pose  $c' = \mathcal{T}(\bar{c})$  où  $c' \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  est solution du système (6.3).

**Remarque 6.2.4** *On a  $\bar{c} \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$ , et d'après la remarque 6.2.3, on a  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \subset L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ , alors  $\bar{c} \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$ . D'où  $\mathcal{T}(\bar{c})$  est bien définie.*

**Lemme 6.2.6** *On suppose que pour toute suite  $c_n$  bornée dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$ , il existe  $\theta > 0$  et une constante  $M$  tel que*

$$\left( \int_0^{T-h} \|c_n(t+h) - c_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M|h|^\theta$$

*pour tout  $h \in ]0, T/2[$ . L'ensemble  $C$  est relativement compact dans  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ , et on a  $\mathcal{T}(C) \subset C$ .*

**Preuve -** D'après la proposition 6.2.1, l'ensemble  $C$  est un sous-ensemble compact de  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ . Par ailleurs, on a  $\mathcal{T}(C) \subset C$ . En effet, en posant  $c = \mathcal{T}(\bar{c})$  solution de la formulation faible (6.4)- (6.5) alors  $c$  vérifie  $\|c\|_{L^2(]0, T[; V)} \leq R$  et donc  $c \in C$ . ■

**Lemme 6.2.7** *L'application  $\mathcal{T}$  définie de  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$  dans  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$  est continue sur  $C$ .*

**Preuve** - En effet, soit la suite  $(\bar{c}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ , la suite  $(\bar{c}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant bornée dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$ , Il existe alors un élément  $\bar{c} \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$  tel que la suite  $(\bar{c}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $\bar{c}$ . On pose  $c_n = T(\bar{c}_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $c = T(\bar{c})$ . Puisque  $T(C) \subset C$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $c_n \in C$  et  $c \in C$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n$  vérifie la formulation faible (6.4)-(6.5) :

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c_n \psi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c_n - c_n \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c_n \cdot \nabla \psi \, dx \\ & = - \int_{\Gamma_1} h(\bar{c}_n) \psi \, d\sigma_1 \quad p.p \, t \in ]0, T[, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

On montrera que  $c$  est solution de la formulation faible (6.4)-(6.5) :

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \psi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c - c \nabla \psi) \, dx + D \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \psi \, dx \\ & = - \int_{\Gamma_1} h(\bar{c}) \psi(x) \, d\sigma_1 \quad p.p \, t \in ]0, T[, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

En soustrayant les deux égalités ci-dessus, on trouve :

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (c_n - c) \psi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \left( \psi \nabla (c_n - c) - (c_n - c) \nabla \psi \right) \, dx \\ & + D \int_{\Omega} \nabla (c_n - c) \cdot \nabla \psi \, dx = - \int_{\Gamma_1} \left( h(\bar{c}_n) - h(\bar{c}) \right) \psi \, d\sigma_1. \end{aligned}$$

En remplaçant  $\psi$  par  $c_n - c$  dans l'égalité précédente, on obtient

$$\alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |c_n - c|^2 \, dx + D \int_{\Omega} \left| \nabla (c_n - c) \right|^2 \, dx = - \int_{\Gamma_1} \left( h(\bar{c}_n) - h(\bar{c}) \right) (c_n - c) \, d\sigma_1. \quad (6.10)$$

Mais,

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_1} \left( h(\bar{c}_n) - h(\bar{c}) \right) (c_n - c) \, d\sigma_1 & \leq \int_{\Gamma_1} \left( h(\bar{c}_n) - h(\bar{c}) \right) (c_n - c) \, d\sigma_1 \\ & \leq \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_{\infty}}{K^2} \beta_1 \beta_2 \|\bar{c}_n - \bar{c}\|_{H^1(\Omega)} \|c_n - c\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

à l'aide du théorème de trace où  $\beta_1, \beta_2 > 0$  (voir le lemme A.1.1 à l'annexe pour les détails du calcul).

On trouve :

$$D \int_{\Omega} |\nabla(c_n - c)|^2 dx \leq \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_{\infty}}{K^2} \beta_1 \beta_2 \|\bar{c}_n - \bar{c}\|_{H^1(\Omega)} \|c_n - c\|_{H^1(\Omega)}, \quad (6.11)$$

et

$$\frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |c_n - c|^2 dx \leq \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_{\infty}}{K^2} \beta_1 \beta_2 \|\bar{c}_n - \bar{c}\|_{H^1(\Omega)} \|c_n - c\|_{H^1(\Omega)}$$

En intégrant ce dernier sur  $[0, t]$ , avec  $t \in ]0, T[$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |c_n(t, x) - c(t, x)|^2 dx \\ & \leq \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_{\infty}}{K^2} \beta_1 \beta_2 \int_0^t \|\bar{c}_n(t, x) - \bar{c}(t, x)\|_{H^1(\Omega)} \|c_n(t, x) - c(t, x)\|_{H^1(\Omega)} ds \end{aligned} \quad (6.12)$$

Puisque

$$\int_0^t \|\bar{c}_n(t, x) - \bar{c}(t, x)\|_{H^1(\Omega)} \|c_n(t, x) - c(t, x)\|_{H^1(\Omega)} ds$$

$$\leq \|\bar{c}_n(t, x) - \bar{c}(t, x)\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \|c_n(t, x) - c(t, x)\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))},$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient alors

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |c_n(t, x) - c(t, x)|^2 dx \\ & \leq \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_{\infty}}{K^2} \beta_1 \beta_2 \|\bar{c}_n - \bar{c}\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \|c_n - c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

En additionnant (6.11) et (6.12), et en posant  $m = \min\{\frac{\alpha}{2}, D\}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & m \|c_n(t, x) - c(t, x)\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_{\infty}}{K^2} \beta_1 \beta_2 \|\bar{c}_n - \bar{c}\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \|c_n - c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \\ & \quad + \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_{\infty}}{K^2} \beta_1 \beta_2 \|\bar{c}_n - \bar{c}\|_{H^1(\Omega)} \|c_n - c\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En intégrant sur  $]0, T[$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
& m \|c_n - c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))}^2 \\
& \leq \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_\infty}{K^2} \beta_1 \beta_2 \int_0^T \|\bar{c}_n - \bar{c}\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \|c_n - c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} dt \\
& \quad + \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_\infty}{K^2} \beta_1 \beta_2 \int_0^T \|\bar{c}_n(t, x) - \bar{c}(t, x)\|_{H^1(\Omega)} \|c_n(t, x) - c(t, x)\|_{H^1(\Omega)} dt \\
& \leq \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_\infty}{K^2} \beta_1 \beta_2 (T + 1) \|\bar{c}_n - \bar{c}\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \|c_n - c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$m \|c_n - c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \leq \sqrt{mes(\Gamma_1)} \frac{\|I\|_\infty}{K^2} \beta_1 \beta_2 (T + 1) \|\bar{c}_n - \bar{c}\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))}.$$

En passant à la limite, on obtient que  $c_n \rightharpoonup c$  dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$  car  $\bar{c}_n \rightharpoonup \bar{c}$  dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$ . Il s'ensuit que l'application  $T$  est continue sur  $C$ .

L'existence du point fixe pour le système (6.3) repose sur le théorème de Schauder suivant :

**Théorème 6.2.2 (J. Schauder)** *Soient  $E$  un espace de Banach et  $C \subset E$  un convexe fermé non vide. Si  $\mathcal{T}$  est une application continue de  $C$  dans  $C$  telle que  $\mathcal{T}(C)$  soit relativement compact, alors l'application  $\mathcal{T}$  admet au moins un point fixe.*

**Théorème 6.2.3** *Le système NTB non linéaire (6.3) admet au moins un point fixe.*

**Preuve** - Les hypothèses du théorème de Schauder sont vérifiées car l'ensemble  $C$  définie par le lemme 6.2.3 est convexe fermé et relativement compact, d'après les **lemmes 6.2.4, 6.2.5** et le **lemme 6.2.6**. Par ailleurs, l'application  $\mathcal{T}$  est continue de  $C$  dans  $C$ , d'après le lemme 6.2.7, alors le problème (6.3) admet au moins un point fixe. ■

### 6.3 Positivité de la solution

Puisque d'après le théorème 6.2.3, section 6.2, le système (6.3) admet une solution  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ . On vérifie alors que cette solution  $c$  est positive.

**Proposition 6.3.1** *Soit  $c$  une solution du système (6.3). Si  $c_0 \geq 0$  et  $h(c) \geq 0$  alors  $c \geq 0$  et  $c(T, \cdot) \geq 0$ , pour tout  $T > 0$ .*

**Preuve** - On décompose  $c = (t, \cdot)$  en  $c = c^+ - c^-$ . On multiplie l'équation d'état du système (6.3) par  $c^-$ . On obtient :

$$\int_Q \left( \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla c) - D \Delta c \right) c^- dx dt = \underbrace{-\alpha \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial c^-}{\partial t} \right) c^- dx dt}_{=A}$$

$$- \underbrace{\int_0^T \int_\Omega (\mathbf{q} \cdot \nabla c^-) c^- dx dt}_{=B} + \underbrace{D \int_0^T \int_\Omega (\Delta c^-) c^- dx dt}_{=C},$$

car

$$\left| \frac{\partial c^+}{\partial t} \right| c^- = (\nabla c^+) c^- = (\Delta c^+) c^- = 0.$$

On trouve alors pour le terme  $A$  :

$$A = -\frac{\alpha}{2} \left( \int_\Omega |c^-(T)|^2 - |c^-(0)|^2 dx \right). \quad (6.13)$$

Puis on obtient pour le terme  $B$  :

$$B = - \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{q} \cdot \nabla c^-) c^- dx dt = - \int_0^T \frac{1}{2} \int_\Gamma \mathbf{q} \cdot |c^-|^2 \cdot \mathbf{n} d\sigma dt, \quad (6.14)$$

à l'aide de la condition du flux de Darcy ( $div \mathbf{q} = 0$  dans  $Q$ ) et du théorème de divergence (le calcul détaillé est donné par (2.14), dans la preuve de la proposition 2.3.1, chapitre 2, section 2.3, page 41).

Ensuite, on trouve pour le terme  $C$  :

$$C = D \int_0^T \int_\Omega (\Delta c^-) c^- dx dt = D \int_0^T \int_\Gamma (\nabla c^-) c^- \cdot \mathbf{n} d\sigma dt - D \int_0^T \int_\Omega |\nabla c^-|^2 dx dt, \quad (6.15)$$

en utilisant la formule de Green.

En additionnant les termes  $B$  et  $C$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
B + C &= - \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{q} \cdot \nabla c^-) c^- \, dx dt + D \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta c^-) c^- \, dx dt \\
&= \int_0^T \int_{\Gamma} \left( D \nabla c^- - \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot c^- \right) c^- \cdot \mathbf{n} \, d\sigma dt - D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 \, dx dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Gamma_1} h(c) |c^-|^2 \, d\sigma_1 dt - D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 \, dx dt \\
&= -D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 \, dx dt,
\end{aligned}$$

car  $h(c) \geq 0$ .

Enfin, en ajoutant le terme  $A$  au calcul précédent on obtient :

$$A + C + B = -\frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(T)|^2 - |c^-(0)|^2 \, dx \right) - D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 \, dx dt = 0.$$

D'où :

$$-\frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(T)|^2 - |c^-(0)|^2 \, dx \right) = D \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla c^-|^2 \, dx dt \geq 0$$

On trouve alors :

$$\frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(T)|^2 \, dx \right) \leq \frac{\alpha}{2} \left( \int_{\Omega} |c^-(0)|^2 \, dx \right).$$

On conclut alors

$$\|c^-(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|c^-(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall T \geq 0.$$

■

# Chapitre 7

## Systeme NTB non linéaire à une frontière

### 7.1 Préliminaires

Comme pour le système NTB non linéaire à deux frontières, on étudie, dans cette section le système NTB à une frontière avec la fonction d'absorption non linéaire. Le système NTB non linéaire à une frontière est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = h(c) \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (7.1)$$

avec  $h(c) = \frac{Ic}{K+c}$  la fonction d'absorption non linéaire.

## 7.2 Existence d'un point fixe

Dans cette section, on montre que le système (7.1) admet au moins un point fixe, pour cela, on considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = h(\bar{c}) \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (7.2)$$

avec  $\frac{I\bar{c}}{K + \bar{c}}$  non linéaire.

En effectuant le changement de variable  $c' = c(t, x) - c(0, x)$  avec  $c(0, x)$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t}(0, x) + \mathbf{q} \cdot \nabla c(0, x) - D \Delta c(0, x) = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla c(0, x) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(0, x)) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

le système (7.2) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c'}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c' - D \Delta c' = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla c' - \frac{1}{2} \mathbf{q} c') \cdot \mathbf{n} = h(\bar{c}) \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ c'(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (7.3)$$

**Lemme 7.2.1** *Le système-NTB (7.3) a une formulation faible équivalente donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c' \psi dx + a(t; c', \psi) = L(t; \psi) \quad p.p \ t \in ]0, T[, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \\ c'(0, x) = 0, \end{array} \right. \quad (7.4)$$

où

$$a(t; c', \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\psi \nabla c' - c' \nabla \psi) dx + D \int_{\Omega} \nabla c' \cdot \nabla \psi dx, \quad (7.5)$$

et où

$$L(t; \psi) = - \int_{\Gamma_1} h(\bar{c}) \psi d\sigma_1.$$

**Preuve** - Par raisonnement analogue à celui de la preuve du **lemme 3.2.1**, on obtient le résultat souhaité. ■

**Théorème 7.2.1** *On suppose que  $|q|$  est uniformément borné (i.e  $q \in L^\infty(Q)$ ) et que la fonction  $h(\bar{c}) \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_1))$ . Il existe alors une unique fonction  $c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ , solution du système (7.3).*

**Preuve** - Par raisonnement analogue à celui de la preuve du **théorème 3.2.1**, on obtient le résultat convenu. ■

Puis, on montrera l'existence d'un point fixe pour le système (7.3) comme fait précédemment pour le système (6.3).

**Lemme 7.2.2** *Soit l'ensemble  $C$  définie par :*

$$C = \{c \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \text{ tel que } \|c\|_{L^2(]0, T[; H^1(\Omega))} \leq M\}, \quad (7.6)$$

où  $c$  est solution du système (7.3), et où

$$M = \frac{\beta_1 \|I\|_\infty}{m} (\sqrt{T \text{mes}(\Gamma_1)} + T \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)}).$$

**Preuve** - Démonstration semblable à celle de la preuve du **lemme 6.2.3**. ■

Ensuite, on considère  $\mathcal{T}$  une application de  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$  vers  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ . On pose  $c' = \mathcal{T}(\bar{c})$  où  $c' \in L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  est solution du système (7.3).

**Lemme 7.2.3** *L'ensemble  $C$  est convexe fermé.*

**Preuve** - La preuve découle du **lemme 6.2.4** et du **lemme 6.2.5**. ■

**Lemme 7.2.4** *On suppose que pour toute suite  $c_n$  bornée dans  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega))$ , il existe  $\theta > 0$  et une constante  $M$  tel que*

$$\left( \int_0^{T-h} \|c_n(t+h) - c_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M|h|^\theta$$

*pour tout  $h \in ]0, T/2[$ . L'ensemble  $C$  définie par 7.6 est relativement compact dans  $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$  et  $\mathcal{T}(C) \subset C$ .*

**Preuve** - La preuve découle du **lemme 6.2.6**. ■

**Lemme 7.2.5** *L'application  $\mathcal{T}$  définie de  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$  dans  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$  est continue sur  $C$ .*

**Preuve** - Par une démonstration similaire à celle de la preuve du **lemme 6.2.7**, on obtient le résultat souhaité. ■

L'existence du point fixe pour le système (7.3) repose sur le **théorème 6.2.2**.

**Théorème 7.2.2** *Le système (7.3) admet un point fixe.*

**Preuve** - Les hypothèses du **théorème 6.2.2** vérifiées car l'ensemble  $C$  définie par le **lemme 7.2.2** est convexe fermé, d'après le **lemme 7.2.3**, et relativement compact, d'après le **lemme 7.2.4**. Par ailleurs, l'application  $\mathcal{T}$  définie de  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$  dans  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$  est continue de  $C$  dans  $C$ , d'après le **lemme 7.2.5**; alors le problème (7.3) admet au moins un point fixe. ■

### 7.3 Positivité de la solution

Dans cette section, on vérifie que la solution  $c$  du système (7.3) obtenue par la méthode du point fixe est positive.

**Proposition 7.3.1** *Soit  $c$  une solution du système (7.3). Si  $c_0 \geq 0$  et  $h(c) \geq 0$  alors  $c \geq 0$  et  $c(T, \cdot) \geq 0$ , pour tout  $T > 0$ .*

**Preuve** - Raisonnement analogue à celui de la preuve de la **proposition 6.3.1** où les calculs sont identiques. ■

## Troisième partie

# Contrôle optimal pour les systèmes NTB non linéaires



Dans cette partie, on traitera du contrôle optimal pour les systèmes NTB non linéaires. En linéarisant la fonction  $c = c(t, x)$  à l'aide de son développement à l'ordre 1, on abordera les problèmes de contrôle en sol non pollué :

- 1) Problème de contrôle système NTB non linéaire à deux frontières en sol non pollué :

Trouver un (ou des) contrôle(s)  $v$  qui minimise(nt) la fonction coût  $J$  suivante :

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \quad (7.7)$$

$$\text{tel que } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = 0 \quad \text{dans } Q, \\ (D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K+c} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = -v \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (7.8)$$

- 2) Problème de contrôle système NTB non linéaire à une frontière en sol non pollué :

Trouver un (ou des) contrôle(s)  $v$  qui minimise(nt) la fonction coût  $J$  suivante :

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \quad (7.9)$$

$$\text{tel que } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = v \quad \text{dans } Q, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K+c} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (7.10)$$

Puis, on traitera des problèmes de contrôle en sol pollué :

- 3) Problème de contrôle système NTB non linéaire à deux frontières en sol pollué :

Trouver un (ou des) contrôle(s)  $v$  qui minimise(nt) la fonction coût  $J$  suivante :

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \quad (7.11)$$

$$\text{tel que } \begin{cases} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = g & \text{dans } Q, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K+c} & \text{sur } \Sigma_1, \\ (D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = -v & \text{sur } \Sigma_2, \\ c(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (7.12)$$

4) Problème de contrôle système NTB non linéaire à une frontière en sol pollué :

Trouver un (ou des) contrôle(s)  $v$  qui minimise(nt) la fonction coût  $J$  suivante :

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \quad (7.13)$$

$$\text{tel que } \begin{cases} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = v + g & \text{dans } Q, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K+c} & \text{sur } \Sigma_1, \\ c(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (7.14)$$

Pour les problèmes de contrôle en sol non pollué à l'aide, on procèdera de la même manière que pour la recherche de contrôle pour les systèmes NTB linéaires. Pour les problèmes de contrôle en sol pollué, on utilisera, les techniques de recherche d'un contrôle optimal pour les systèmes distribués non linéaires pour les problèmes à données incomplètes (voir [22]). On caractérisera ces contrôles par des systèmes d'optimalités singuliers. Puis, on donnera un exemple de simulation numérique. Et enfin, on terminera par une conclusion et des perspectives.

# Chapitre 8

## Contrôle optimal en sol non pollué

### 8.1 Problème de contrôle à deux frontières

Dans ce chapitre, on étudie le contrôle optimal pour le système NTB linéaire non linéaire à deux frontières représenté par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D \Delta c = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -(D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K+c} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ (D \nabla c - \frac{1}{2} \mathbf{q} c) \cdot \mathbf{n} = -v \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (8.1)$$

où la fonction  $c = c(t, x, v)$  représente la concentration des nutriments absorbée à optimiser. La fonction de contrôle positive  $v \in L^2(\Sigma_2)$  est l'ajout de nutriments à partir de la frontière  $\Gamma_2$ . On considère la fonction  $v \rightarrow c(., ., v)$  différentiable sur  $L^2(\Sigma_2)$  :

$$c(w+h) = c(w) + \frac{\partial c}{\partial v}(w)(h) + \|h\|_{L^2(\Sigma_2)} \varepsilon(h), \quad \text{pour tout } w \in L^2(\Sigma_2), \quad (8.2)$$

où la fonction  $v \mapsto \frac{\partial c}{\partial v}(v)$  est définie de  $L^2(\Sigma_2)$  vers  $L^2(\Sigma_1)$ . Puisque la fonction  $c$  est différentiable alors elle est aussi Gateaux différentiable en tout point  $w \in L^2(\Sigma_2)$ . D'où la fonction  $h \rightarrow \frac{\partial c}{\partial v}(w)(h)$  est linéaire et continue.

**Remarque 8.1.1** *Pour tout  $w \in L^2\Sigma_2$ , on notera :*

$$\frac{\partial c}{\partial v}(w) := \frac{\partial c}{\partial v}(w)(h).$$

L'objectif est de montrer l'existence et de caractériser le (ou les) contrôle(s) minimisant la fonction coût suivante :

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2, \quad (8.3)$$

où  $\tilde{c}$  est une concentration d'éléments nutritifs observée appartenant à  $L^2(\Sigma_1)$  et  $N$  une constante positive.

### 8.1.1 Existence d'un contrôle optimal

Dans cette section, on étudie l'existence d'un contrôle minimisant la fonction de coût  $J$  donnée par (8.3).

**Proposition 8.1.1** *Soit  $L^2(\Sigma_2)$  l'ensemble des contrôles admissibles. Il existe un unique contrôle  $u \in L^2(\Sigma_2)$  tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} J(v).$$

**Preuve -** La démonstration de cette proposition est la même que celle faite pour la proposition 8.2.1. ■

### 8.1.2 Caractérisation du contrôle

Dans cette section, on donne une caractérisation du contrôle  $u$  minimisant la fonction de coût  $J$  donnée par (8.3).

**Lemme 8.1.1** *Pour tout  $w_1, w_2 \in L^2(\Sigma_2)$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ , on a :*

$$\begin{aligned} \frac{J(w_1 + \lambda w_2) - J(w_1)}{\lambda} &= \lambda \left\| \frac{c(w_1 + \lambda w_2) - c(w_2)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ &+ 2 \left\langle c(w_1) - \tilde{c}, \frac{c(w_1 + \lambda w_2) - c(w_2)}{\lambda} \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} + 2N \langle w_1, w_2 \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + \lambda \|w_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

**Preuve** - Soit  $w_1, w_2 \in L^2(\Sigma_2)$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ , on a :

$$\begin{aligned} J(w_1 + \lambda w_2) - J(w_1) &= \|c(w_1 + \lambda w_2) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 - \|c(w_1) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ &+ N \|w_1 + \lambda w_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - N \|w_1\|_{L^2(\Sigma_2)}^2. \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} &\|c(w_1 + \lambda w_2) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 - \|c(w_1) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ &= 2 \langle c(w_1) - \tilde{c}, c(w_1 + \lambda w_2) - c(w_2) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \|c(w_1 + \lambda w_2) - c(w_2)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \end{aligned}$$

et

$$N \|w_1 + \lambda w_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - N \|w_1\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 = 2N \lambda \langle w_1, w_2 \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + N \lambda^2 \|w_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2,$$

alors on trouve :

$$\begin{aligned} J(w_1 + \lambda w_2) - J(w_1) &= \|c(w_1 + \lambda w_2) - c(w_2)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ &+ 2 \langle c(w_1) - \tilde{c}, c(w_1 + \lambda w_2) - c(w_2) \rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\ &+ 2\lambda N \langle w_1, w_2 \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + \lambda^2 N \|w_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2. \end{aligned}$$

En divisant par  $\lambda$ , on obtient le résultat souhaité. ■

**Proposition 8.1.2** *Le contrôle optimal  $u$  du problème (8.3) satisfait*

$$\int_{\Sigma_1} (c(u) - \tilde{c}) \frac{\partial c}{\partial v}(u) d\sigma_1 dt + N \int_{\Sigma_2} u w d\sigma_2 dt \geq 0. \quad (8.5)$$

**Preuve -** Puisque  $u$  est le minimum de la fonction de coût  $J$  alors la formule d'Euler-Lagrange :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{J(u + \lambda w) - J(u)}{\lambda} \right) \geq 0$$

est satisfaite, pour tout  $w \in L^2(\Sigma_2)$  et pour tout  $\lambda$  tel que  $\lambda \in ]0, 1[$ .

D'après, le lemme précédent, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{J(u + \lambda w) - J(u)}{\lambda} \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \left\| \frac{c(u + \lambda w) - c(u)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ &+ 2 \left\langle c(u) - \tilde{c}, \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} + 2N \langle u, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + 2\lambda N \|w\|_{L^2(\Sigma_2)}^2. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{J(u + \lambda w) - J(u)}{\lambda} \right) &= \left\| \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + 2 \left\langle c(u) - \tilde{c}, \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\ &+ 2N \langle u, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \geq 0. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{\partial c}{\partial v}(u) \in L^2(\Sigma_1)$  alors  $\left\| \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2$  est bornée d'après (8.2).

On trouve donc :

$$\int_{\Sigma_1} (c(u) - \tilde{c}) \frac{\partial c}{\partial v}(u) d\sigma_1 dt + N \int_{\Sigma_2} uw d\sigma_2 dt \geq 0.$$

■

### 8.1.3 Système d'optimalité

Dans cette sous-section, on caractérise le contrôle  $u$  par un système d'optimalité.

Tout d'abord, on montre un résultat préliminaire donné la proposition suivante :

**Proposition 8.1.3** *La dérivée partielle  $\left(\frac{\partial c}{\partial v}(u)\right)$  est solution du problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial}{\partial v} c(u) \right) \frac{IK}{(K + c(u))^2} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) \cdot \mathbf{n} = -w \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) (0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (8.6)$$

où

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

**Preuve** - Soient  $u, w \in L^2(\Sigma_2)$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ . Comme les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont linéaires et continus (se référer au lemme A.2.1 à la section A.2.1 dans l'annexe), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) &= \mathcal{A} \left( \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(u + \lambda w) - c(u)}{\lambda} \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left( \mathcal{A}(c(u + \lambda w)) - \mathcal{A}(c(u)) \right) = 0 \end{aligned}$$

dans  $Q$ , puis :

$$\begin{aligned} -\mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) &= -\mathcal{B} \left( \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(u + \lambda w) - c(u)}{\lambda} \right) \\ &= -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left( \mathcal{B}(c(u + \lambda w)) - \mathcal{B}(c(u)) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left( \frac{Ic(u + \lambda w)}{K + c(u + \lambda w)} - \frac{Ic(u)}{K + c(u)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left( \frac{IK(c(u + \lambda w) - c(u))}{(K + c(u + \lambda w))(K + c(u))} \right) \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial v} c(u) \right) \frac{IK}{(K + c(u))^2},
\end{aligned}$$

sur  $\Sigma_1$ , et enfin :

$$\mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) = \mathcal{B} \left( \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(u + \lambda w) - c(u)}{\lambda} \right) = -w \quad \text{sur } \Sigma_2.$$

sur  $\Sigma_2$ . La condition initiale à  $t = 0$  devient

$$\left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(u + \lambda w) - c(u)}{\lambda} = 0.$$

■

**Théorème 8.1.1** *Le contrôle optimal  $u$  solution du problème (8.1)-(8.3) est caractérisé par le triplet  $\{u, c(u), p(u)\}$  solution du système d'optimalité :*

$$\left\{ \begin{array}{llll}
\mathcal{A}c & = & 0, & \mathcal{A}^*p & = & 0 & \text{dans } Q, \\
-\mathcal{B}c \cdot \mathbf{n} & = & \frac{Ic}{K+c}, & \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} & = & c(u) - \tilde{c} + \frac{pIK}{(K+c(u))^2} & \text{sur } \Sigma_1, \\
\mathcal{B}c \cdot \mathbf{n} & = & -u, & \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} & = & 0 & \text{sur } \Sigma_2, \\
c(0, x) & = & 0, & p(T, x) & = & 0 & \text{dans } \Omega,
\end{array} \right. \quad (8.7)$$

où l'équation adjointe est  $p + Nu = 0$  dans  $L^2(\Sigma_2)$ .

**Remarque 8.1.2** *Les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^*$  sont donnés par (4.7) et les opérateurs  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^*$  sont donnés par (4.8).*

**Preuve** - On effectue le même raisonnement que dans la preuve du **théorème 4.1.2**. On introduit  $p = p(t, x, v)$  solution du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{A}^* p & = & 0 \quad \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^* p \cdot \mathbf{n} & = & c(u) - \tilde{c} + \frac{pIK}{(K + c(u))^2} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B}^* p \cdot \mathbf{n} & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ p(T, x) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (8.8)$$

où

$$\mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

On multiplie l'équation  $\mathcal{A}^* p = 0$  du système (8.8) par  $\left(\frac{\partial c}{\partial v}(u)\right)$  solution du système (8.6) puis on intègre. On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_Q \mathcal{A}^* p \left(\frac{\partial c}{\partial v}(u)\right) dxdt \\ &= \underbrace{\int_Q \left(-\alpha \frac{\partial p}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial c}{\partial v}(u)\right) dxdt}_{=A} - \underbrace{\int_Q \left(\mathbf{q} \cdot \nabla p + D\Delta p\right) \left(\frac{\partial c}{\partial v}(u)\right) dxdt}_{=B}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

En intégrant par parties le terme A, on trouve

$$A = \alpha \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial c}{\partial v}(u)\right) p dxdt,$$

car  $p(T, x) = \left(\frac{\partial c}{\partial v}(u)\right)(0, x) = 0$ .

Puis, on intègre le terme  $B$ , en suivant toujours le raisonnement de la preuve du théorème 4.1.2, on obtient

$$\begin{aligned}
B &= - \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla p + D\Delta p \right) \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) dxdt \\
&= - \int_{\Sigma_1} \left( \tilde{c} - c(u) - \frac{IK}{(K + c(u))^2} p \right) \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) \cdot \mathbf{n} d\sigma_1 dt \\
&\quad - \int_{\Sigma_1} \frac{IK}{(K + c(u))^2} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) p dxdt - \int_{\Sigma_2} w p d\sigma_2 dt \\
&= - \int_{\Sigma_1} \left( \tilde{c} - c(u) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) d\sigma_1 dt - \int_{\Sigma_2} w p d\sigma_2 dt \\
&\quad + \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) - D\Delta \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) \right) p dxdt,
\end{aligned}$$

à l'aide des conditions aux limites des systèmes (8.8) et (8.6). En additionnant les termes A et B, on trouve :

$$\begin{aligned}
A + B &= \int_Q \mathcal{A}^* p \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) dxdt \\
&= - \int_{\Sigma_1} \left( \tilde{c} - c(u) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) d\sigma_1 dt - \int_{\Sigma_2} w p d\sigma_2 dt \\
&\quad + \int_Q \mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) p dxdt
\end{aligned}$$

Puisque,  $\mathcal{A}^* p = 0$  et  $\mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) = 0$  dans  $Q$ , alors

$$\int_{\Sigma_1} \left( c(u) - \tilde{c} \right) \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) d\sigma_1 dt = \int_{\Sigma_2} w p d\sigma_2 dt$$

En remplaçant  $\int_{\Sigma_1} \left( c(u) - \tilde{c} \right) \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) d\sigma_1 dt$  par  $\int_{\Sigma_2} w p d\sigma_2 dt$  dans l'inégalité (8.5), on trouve enfin :

$$\int_{\Sigma_2} (p + Nu) w d\sigma_2 dt = \langle p + Nu, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \geq 0, \quad \text{pour } w \in L^2(\Sigma_2).$$

Or pour  $w' = -w \in L^2(\Sigma_2)$  on a  $\langle p + Nu, w' \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \leq 0$  alors

$$p + Nu = 0 \text{ dans } L^2(\Sigma_2).$$

■

## 8.2 Problème de contrôle à une frontière

Dans ce chapitre, on étudie le contrôle optimal pour le système NTB non linéaire à une frontière représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - D\Delta c = v & \text{dans } Q, \\ -(D\nabla c - \frac{1}{2}\mathbf{q}c) \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K+c} & \text{sur } \Sigma_1, \\ c(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (8.10)$$

où  $c = c(t, x, v)$  représente la concentration des nutriments absorbée à optimiser et la fonction  $v \in L^2(Q)$ , un ajout de nutriments. Cependant, ici, on considère la fonction  $v \rightarrow c(v)$  différentiable dans  $L^2(Q)$  :

$$c(u + h) = c(u) + \frac{\partial}{\partial v}c(u)(h) + \|h\|_{L^2(\Sigma_1)}\varepsilon(h), \text{ pour tout } u \in L^2(Q), \quad (8.11)$$

où la fonction  $v \mapsto \frac{\partial}{\partial v}c(v)$  est définie de  $L^2(Q)$  vers  $L^2(\Sigma_1)$ . Puisque la fonction  $c$  est différentiable alors elle est aussi Gateaux différentiable en tout point  $u \in L^2(Q)$ . D'où la fonction  $h \rightarrow \frac{\partial}{\partial v}c(u)(h)$  est linéaire et continue.

**Remarque 8.2.1** Pour tout  $w \in L^2(Q)$ , on notera :

$$\frac{\partial c}{\partial v}(w) := \frac{\partial c}{\partial w}(u)(h).$$

L'objectif est de minimiser la fonction de coût :

$$J(v) = \|c(v) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(Q)}^2 \quad N > 0, \quad (8.12)$$

où  $\tilde{c}$  est une concentration de sels minéraux observée appartenant à  $L^2(\Sigma_1)$  et  $N$  une constante positive.

### 8.2.1 Existence d'un contrôle optimal

Dans cette section, on étudie l'existence d'un contrôle minimisant la fonction de coût  $J$  donnée par (8.12).

**Proposition 8.2.1** *Soit  $L^2(\Sigma_2)$  l'ensemble des contrôles admissibles. Il existe un unique contrôle  $u \in L^2(Q)$  tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in L^2(Q)} J(v).$$

**Preuve** - Raisonnement analogue à celui de la **proposition 8.2.1**. ■

### 8.2.2 Caractérisation du contrôle

Dans cette section, on donne une caractérisation du contrôle  $u$  minimisant la fonction de coût  $J$  donnée par (8.12).

**Lemme 8.2.1** *Pour tout  $w_1, w_2 \in L^2(Q)$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ , on a :*

$$\begin{aligned} \frac{J(w_1 + \lambda w_2) - J(w_1)}{\lambda} &= \lambda \left\| \frac{c(w_1 + \lambda w_2) - c(w_2)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\ &+ 2 \left\langle c(w_1) - \tilde{c}, \frac{c(w_1 + \lambda w_2) - c(w_2)}{\lambda} \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} + 2N \langle w_1, w_2 \rangle_{L^2(Q)} + \lambda \|w_2\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (8.13)$$

**Preuve** - Démonstration similaire à celle de la preuve du **lemme 8.1.1**. ■

**Proposition 8.2.2** *Le contrôle optimal  $u$  du problème de contrôle (8.10) satisfait*

$$\int_{\Sigma_1} (c(u) - \tilde{c}) \frac{\partial c}{\partial v}(u) d\sigma_1 dt + N \int_Q u w dx dt = 0. \quad (8.14)$$

**Preuve** - La preuve de cette proposition est similaire à celle de la **proposition 8.1.2**. ■

### 8.2.3 Système d'optimalité

**Proposition 8.2.3** *La dérivée partielle  $\left(\frac{\partial c}{\partial v}(u)\right)$  est solution du problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) = w \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) \frac{IK}{(K + c(u))^2} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \left( \frac{\partial}{\partial v} c(u)(w) \right) (0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (8.15)$$

où

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

**Preuve** - La preuve de cette proposition est identique à celle de la **proposition 8.1.3**, on trouve alors :

$$\mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) = 0,$$

dans  $Q$ .

La condition aux limites définie sur  $\Sigma_1$  devient :

$$-\mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) = \left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) \frac{IK}{(K + c(u))^2}$$

Et enfin, la condition initiale à  $t = 0$  devient :

$$\left( \frac{\partial c}{\partial v}(u) \right) (0, x) = 0.$$

D'où l'on trouve le système souhaité. ■

**Théorème 8.2.1** *Le contrôle optimal  $u$  solution du problème de contrôle (8.10)-*

(8.12) est caractérisé par le triplet  $\{u, c(u), p(u)\}$  solution du système d'optimalité :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}c = u, & \mathcal{A}^*p = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B}c \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K+c}, & \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} = \tilde{c} - c(u) + \frac{pIK}{(K+c(u))^2} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ c(0, x) = 0, & p(T, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (8.16)$$

avec l'équation adjointe  $p + Nu = 0$  dans  $L^2(Q)$ .

**Remarque 8.2.2** Les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^*$  sont donnés par (4.7) et les opérateurs  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^*$  sont donnés par (4.8).

**Preuve** - Ce théorème se démontre en utilisant la même démarche que dans la preuve du **le théorème 8.1.1**. On introduit  $p = p(t, x, v)$  solution du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}^*p = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^*p \cdot \mathbf{n} = \tilde{c} - c(u) + \frac{pIK}{(K+c(u))^2} & \text{sur } \Sigma_1, \\ p(T, x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (8.17)$$

On multiplie l'équation  $\mathcal{A}^*p = 0$  du système (8.17) par  $\left(\frac{\partial}{\partial v}c(u)\right)$  solution du système (8.15), puis on intègre. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_Q \mathcal{A}^*p \left(\frac{\partial}{\partial v}c(u)\right) dxdt &= \int_{\Sigma_1} (\tilde{c} - c(u)) \left(\frac{\partial}{\partial v}c(u)\right) d\sigma_1dt + \int_Q \mathcal{A} \left(\frac{\partial}{\partial v}c(u)\right) p dxdt \\ &= \int_{\Sigma_1} (\tilde{c} - c(u)) \left(\frac{\partial}{\partial v}c(u)\right) d\sigma_1dt + \int_Q w p dxdt. \end{aligned}$$

en utilisant les conditions aux limites des systèmes (8.10) et (8.17) et de l'équation d'état  $\mathcal{A} \left(\frac{\partial}{\partial v}c(u)\right) = w$  dans  $Q$ .

De plus, puisque  $\mathcal{A}^*p = 0$  dans  $Q$  alors

$$\int_{\Sigma_1} (c(u) - \tilde{c}) \left( \frac{\partial}{\partial \nu} c(u) \right) d\sigma_1 dt = \int_Q w p dx dt.$$

On en déduit alors

$$\left\langle c(u) - \tilde{c}, \frac{\partial}{\partial \nu} c(u)(w) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle w, p \rangle_{L^2(Q)}. \quad (8.18)$$

En remplaçant dans l'inégalité d'Euler-Lagrange (8.14), on trouve :

$$\langle p + Nu, w \rangle_{L^2(\Sigma_1)} \geq 0, \quad \forall w \in L^2(Q).$$

Or pour  $w' = -w \in L^2(Q)$  on a  $\langle p + Nu, w' \rangle_{L^2(Q)} \leq 0$  alors

$$p + Nu \text{ dans } L^2(Q). \quad (8.19)$$

■



# Chapitre 9

## Contrôle optimal en sol pollué

Dans ce chapitre, on étudie, le problème de contrôle optimal pour le système NTB non linéaire. Tout d'abord, on traitera du problème à deux frontières puis du problème à une frontière.

### 9.1 Problème de contrôle non linéaire à deux frontières

Dans cette section, on aborde, le problème de contrôle optimal pour le système NTB non linéaire à deux frontières en sol pollué, représenté par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}c = g \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -\mathcal{B}c \cdot \mathbf{n} = \frac{Ic}{K+c} \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ \mathcal{B}c \cdot \mathbf{n} = -v \quad \text{sur } \Sigma_2 := ]0, T[ \times \Gamma_2, \\ c(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.1)$$

et où :

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q},$$

où  $c := c(t, x, v, g)$  est la concentration de nutriments en sol pollué. La fonction  $v \in L^2(\Sigma_2)$  est un ajout de sels minéraux par l'action de l'homme ou d'une plante de service. La fonction  $g \in L^2(Q)$  est la pollution dans le sol.

L'objectif est trouver le ou les contrôle(s) minimisant la fonction de coût

$$J(v, g) = \|c(v, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2, \quad (9.2)$$

avec  $\tilde{c}$  et une observation donnée dans  $L^2(\Sigma_1)$ , avec  $N$  une constante positive.

On suppose que la fonction  $(v, g) \mapsto c(v, g)$  est non linéaire et différentiable sur l'ensemble  $L^2(\Sigma_2) \times L^2(Q)$  :

$$c(v+w, g+h) - c(v, g) = \frac{\partial c}{\partial v}(v, g)(w) + \frac{\partial c}{\partial g}(v, g)(h) + \|(w, h)\|_{L^2(\Sigma_1) \times L^2(Q)} \varepsilon(w, h), \quad (9.3)$$

pour tout  $(v, g) \in L^2(\Sigma_2) \times L^2(Q)$ , avec la fonction  $v \mapsto \frac{\partial c}{\partial v}(v, g)$  définie de  $L^2(\Sigma_2)$  vers  $L^2(\Sigma_1)$ .

**Remarque 9.1.1** Pour tout  $(v, g) \in L^2(\Sigma_2) \times L^2(Q)$ , on notera :

$$\frac{\partial c}{\partial v}(v, g) := \frac{\partial c}{\partial v}(v, g)(w), \quad \frac{\partial c}{\partial g}(v, g) := \frac{\partial c}{\partial g}(v, g)(h).$$

### 9.1.1 Contrôle sans regret

Dans cette section, on traite du contrôle sans regret.

**Définition 9.1.1** Le contrôle sans regret pour le problème (9.1), s'il existe, est une fonction  $v \in L^2(\Sigma_2)$  solution du nouveau problème MinMax suivant :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) \right) \quad (9.4)$$

**Lemme 9.1.1** Pour tout  $v \in L^2(\Sigma_2)$  et  $g \in L^2(Q)$ , on a l'égalité :

$$J(v, g) - J(0, g) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \left[ \left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} - \left\langle (c(0, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \right].$$

9.1. PROBLÈME DE CONTRÔLE NON LINÉAIRE À DEUX FRONTIÈRES 137

**Preuve** - La fonction  $(v, g) \mapsto c(v, g)$  étant différentiable sur  $L^2(\Sigma_2) \times L^2(Q)$ , on peut alors effectuer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction  $c(v, g)$  au point  $(v, 0)$  suivant la direction du vecteur  $(0, g)$  :

$$c(v, g) = c(v, 0) + \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) + \|(0, g)\|_{L^2(\Sigma_1) \times L^2(Q)} \varepsilon(0, g).$$

En remplaçant dans la fonction de coût  $J$  définie en (9.2), on obtient :

$$\begin{aligned} J(v, g) &= \|c(v, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_1} (c(v, 0) - \tilde{c} + \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0))^2 d\sigma_1 dt + N \int_0^T \int_{\Gamma_2} v^2 d\sigma_2 dt \\ &\approx \int_0^T \int_{\Gamma_1} (c(v, 0) - \tilde{c})^2 d\sigma_1 dt + N \int_0^T \int_{\Gamma_2} v^2 d\sigma_2 dt \\ &\quad + 2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} (c(v, 0) - \tilde{c}) \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) d\sigma_1 dt \\ &= J(v, 0) + 2 \left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}. \end{aligned}$$

En soustrayant  $J(0, g) = J(0, 0) + 2 \left\langle (c(0, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}$  à l'égalité précédente, on trouve

$$\begin{aligned} J(v, g) - J(0, g) &= J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\ &\quad - 2 \left\langle (c(0, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}. \end{aligned}$$

■

**Remarque 9.1.2** *A partir du résultat précédent, on trouve :*

$$\begin{aligned} & \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) \\ &= J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \left[ \left\langle \left( c(v, 0) - \tilde{c} \right), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \right. \\ & \quad \left. - \left\langle \left( c(0, 0) - \tilde{c} \right), \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \right]. \end{aligned}$$

*On estime alors*

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \left\langle \left( c(v, 0) - \tilde{c} \right), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} - \left\langle \left( c(0, 0) - \tilde{c} \right), \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}. \quad (9.5)$$

On donne tout d'abord un résultat préliminaire à travers la proposition ci-dessous :

**Proposition 9.1.1** *La dérivée partielle  $\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)$  est solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) = g & \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \frac{IK}{(K + c(v, 0))^2} & \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2, \\ \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(0, x) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (9.6)$$

**Preuve -** Puisque

$$\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(v, \lambda g) - c(v, 0)}{\lambda}, \quad \text{pour tout réel } \lambda > 0, \quad (9.7)$$

et les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont linéaires et continus (voir le lemme A.2.1 à la section A.2.1 dans l'annexe), on trouve alors

$$\mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) = \mathcal{A} \left( \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(v, \lambda g) - c(v, 0)}{\lambda} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(c(v, \lambda g)) - \mathcal{A}(c(v, 0))}{\lambda} = g$$

dans  $Q$ , les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} -\mathcal{B}\left(\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)\right) &= -\mathcal{B}\left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(v, \lambda g) - c(v, 0)}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-\mathcal{B}(c(v, \lambda g)) + \mathcal{B}(c(v, 0))}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h(c(v, \lambda g)) - h(c(v, 0))}{\lambda} = \left(\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)\right) \frac{IK}{(K + c(v, 0))^2}, \end{aligned}$$

sur  $\Sigma_1$ , et

$$\mathcal{B}\left(\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)\right) = \mathcal{B}\left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(v, \lambda g) - c(v, 0)}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathcal{B}(c(v, \lambda g)) - \mathcal{B}(c(v, 0))}{\lambda} = 0,$$

sur  $\Sigma_2$ , et enfin, la condition initiale devient

$$\left(\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(v, \lambda g) - c(v, 0)}{\lambda} = 0,$$

à  $t = 0$ .

D'où le résultat convenu. ■

Puis on calcul le terme  $\left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}$  donné par (9.5).

**Proposition 9.1.2** *On obtient*

$$\left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \left(\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)\right) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)}. \quad (9.8)$$

**Preuve** - On introduit, la fonction  $\xi(v) := \xi(x, t, v)$  différentiable sur  $L^2(\Sigma_2)$ , où la fonction

$$v \mapsto \frac{\partial \xi}{\partial v}(v) := \frac{\partial \xi}{\partial v}(v)(w) \quad (9.9)$$

est définie de  $L^2(\Sigma_2)$  vers  $L^2(Q)$ .

La fonction  $\xi(v)$  est solution du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}^* \xi(v) = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^* \xi(v) \cdot \mathbf{n} = -(c(v, 0) - \bar{c}) - \frac{IK\xi(v)}{(K + c(v, 0))^2} & \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B}^* \xi(v) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2, \\ \xi(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.10)$$

où

$$\mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - q \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

On multiplie l'équation  $\mathcal{A}^* \xi(v) = 0$  par  $\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)$  solution du problème direct (9.6), puis on intègre. On obtient alors

$$\begin{aligned} & \int_Q \mathcal{A}^* \xi(v) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt \\ &= \underbrace{\int_Q \left( -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial t}(v) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt}_{=A} - \underbrace{\int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \xi(v) + D\Delta \xi(v) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt}_{=B}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

En intégrant par parties le terme  $A$ , on trouve

$$A = -\alpha \int_Q \left( \frac{\partial \xi}{\partial t}(v) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt = \alpha \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \xi(v) dxdt,$$

car  $\xi(T) = \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(0, x) = 0$ .

Puis, on intègre le terme  $B$  de la façon suivante :

Tout d'abord, on calcule l'intégrale  $-\int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \xi(v) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned} & -\int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \xi(v) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt \\ &= -\int_{\Sigma} \mathbf{q} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \xi(v) \cdot \mathbf{n} \cdot d\sigma dt + \int_Q \mathbf{q} \cdot \nabla \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \xi(v) dxdt. \end{aligned}$$

à l'aide de la condition de Darcy (2.2) et du théorème de divergence.

Ensuite, à l'aide de la formule de Green, on trouve :

$$\begin{aligned}
 & - \int_Q \left( D\Delta\xi(v) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(g) \right) dxdt \\
 &= - \int_{\Sigma} \left( D\nabla\xi(v) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(g) \right) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt + \int_{\Sigma} \left( D\nabla \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(g) \right) \right) \xi(v) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt \\
 & - \int_Q \left( D\Delta \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(g) \right) \right) \xi(v) dxdt.
 \end{aligned}$$

En faisant la somme des résultats précédents, on obtient

$$\begin{aligned}
 B &= - \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \xi(v) + D\Delta\xi(v) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt \\
 &= - \int_{\Sigma} \left( D\nabla\xi(v) + \frac{1}{2}\mathbf{q}\xi(v) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(g) \right) \cdot \mathbf{n} dxdt \\
 & + \int_{\Sigma} \left( D\nabla \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) - \frac{1}{2}\mathbf{q} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(g) \right) \right) \xi(v) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt \\
 & + \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) - D\Delta \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(g) \right) \right) \xi(v) dxdt \\
 &= - \int_{\Sigma_1} \left( \tilde{c} - c(v, 0) + \frac{IK\xi(v)}{(K + c(v, 0))^2} \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) d\sigma_1 dt \\
 & + \int_{\Sigma_1} \frac{IK}{(K + c(v, 0))^2} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \xi(v) dxdt \\
 &= - \int_{\Sigma_1} \left( \tilde{c} - c(v, 0) \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) d\sigma_1 dt \\
 & + \int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) - D\Delta \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \right) \xi(v) dxdt
 \end{aligned}$$

En additionnant les termes A et B, on trouve :

$$\begin{aligned}
A + B &= \int_Q \mathcal{A}^* \xi(v) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt \\
&= \int_Q \mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \xi(v) dxdt - \int_{\Sigma_1} \left( c(v, 0) - \tilde{c} \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) d\sigma_1 dt \\
&= \int_Q g \xi(v) dxdt - \int_{\Sigma_1} \left( c(v, 0) - \tilde{c} \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) d\sigma_1 dt
\end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{A}^* \xi(v) = 0$  dans  $Q$ , on obtient :

$$\int_Q g \xi(v) dxdt = \int_{\Sigma_1} \left( c(v, 0) - \tilde{c} \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) d\sigma_1 dt.$$

■

**Remarque 9.1.3** *A l'aide du lemme 9.1.1 et de la proposition 9.35, on obtient :*

$$\left\langle c(0, 0) - \tilde{c}, \frac{\partial c(0, 0)}{\partial g} \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle \xi(0), g \rangle_{L^2(Q)},$$

où  $v = 0$ . On trouve alors

$$\begin{aligned}
&\sup_{g \in L^2(Q)} \left[ \left\langle \left( c(v, 0) - \tilde{c} \right), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} - \left\langle \left( c(0, 0) - \tilde{c} \right), \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \right] \\
&= \sup_{g \in L^2(Q)} \left[ \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} - \langle \xi(0), g \rangle_{L^2(Q)} \right] \\
&= \sup_{g \in L^2(Q)} \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)} \text{ avec } S(v) = \xi(v) - \xi(0).
\end{aligned}$$

**Remarque 9.1.4** *On en déduit que*

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)}$$

avec

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \langle S(v), g \rangle \neq 0 \\ 0 & \text{si } S(v) \perp g \quad \forall g \in L^2(Q). \end{cases}$$

## 9.1. PROBLÈME DE CONTRÔLE NON LINÉAIRE À DEUX FRONTIÈRES 143

La valeur de  $\sup_{g \in L^2(Q)} \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)}$  ne permet pas de caractériser le contrôle sans regret du problème MinMax :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) \right). \quad (9.12)$$

D'où, on utilise le concept du contrôle à moindres regrets pour chercher un contrôle dans l'ensemble :

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ v \in L^2(\Sigma_2); \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)} = 0, \forall g \in L^2(Q) \right\}. \quad (9.13)$$

### 9.1.2 Contrôle à moindres regrets

Dans cette section, on aborde le contrôle à moindres regrets. Celui-ci est solution du problème relaxé MinMax :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) - \gamma \|g\|_{L^2(Q)}^2 \right) \right), \quad (9.14)$$

avec un paramètre strictement positif  $\gamma > 0$ .

**Lemme 9.1.2** *Le problème MinMax relaxé (9.14) a pour forme*

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \mathcal{J}^\gamma(v) \quad (9.15)$$

où

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v, 0) - J(0, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v)\|_{L^2(Q)}^2. \quad (9.16)$$

*C'est un problème classique de contrôle optimal avec une fonction de coût quadratique.*

**Preuve** - En faisant le même raisonnement que dans la preuve du **lemme 5.1.3** avec

$$J(v, g) - J(0, g) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)},$$

on obtient le résultat souhaité. ■

**Remarque 9.1.5** *Par opposition au cas linéaire, la fonction  $\mathcal{J}^\gamma$  n'est pas convexe, alors contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$  n'est pas unique. De plus, on n'est pas que ce contrôle converge dans l'ensemble  $\mathcal{M}_2$  (9.13). Cependant, on adaptera la fonction coût  $\mathcal{J}^\gamma$  comme J.-L. Lions [14], en utilisant une méthode de pénalisation pour la recherche du contrôle à moindres regrets.*

### 9.1.3 Contrôle à moindres regrets adapté

Dans cette section, on traite du contrôle à moindres regrets adapté. Pour cela, on considère le problème suivant :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \mathcal{J}_a^\gamma(v), \quad (9.17)$$

avec

$$\mathcal{J}_a^\gamma(v) = J(v, 0) - J(0, 0) + \|v - \tilde{u}\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|S(v)\|_{L^2(Q)}^2 \quad (9.18)$$

avec  $\tilde{u} \in L^2(\Sigma_2)$  un contrôle sans regret.

### 9.1.4 Existence d'un contrôle à moindres regrets adapté

Dans cette sous-section, on montre l'existence d'un contrôle à moindres regrets adapté.

**Proposition 9.1.3** *Il existe au moins une solution  $u_\gamma$  appelée le contrôle adapté à moindres regrets pour le problème de contrôle optimal*

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \mathcal{J}_a^\gamma(v) \quad (9.19)$$

avec

$$\mathcal{J}_a^\gamma(v) = J(v, 0) - J(0, 0) + \|v - \tilde{u}\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|S(v)\|_{L^2(Q)}^2 \quad (9.20)$$

**Preuve** - La fonction de coût  $\mathcal{J}_a^\gamma(v)$  satisfait à  $\mathcal{J}_a^\gamma(v) \geq -J(0, 0)$ , pour tout  $v \in L^2(\Sigma_2)$ . Il existe alors une constante  $k_\gamma = \inf_{v \in L^2(\Sigma_2)} \mathcal{J}_a^\gamma(v)$ . On considère la suite minimisante  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $k_\gamma$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $-J(0, 0) \leq \mathcal{J}_a^\gamma(v_n) \leq k_\gamma + 1$ .

Puisque

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_a^\gamma(v_n) &= J(v_n, 0) - J(0, 0) + \|v_n - \tilde{u}\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|S(v_n)\|_{L^2(Q)}^2 \\
 &= \|c(v_n, 0) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v_n\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|c(0, 0) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \\
 &\quad + \|v_n - \tilde{u}\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|S(v_n)\|_{L^2(Q)}^2 \\
 &= \|c(v_n, 0) - c(0, 0)\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + 2 \langle c(v_n, 0) - c(0, 0), c(0, 0) - \tilde{c} \rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\
 &\quad + N\|v_n\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \leq k_\gamma + 1,
 \end{aligned}$$

on en déduit alors

$$\|v_n\|_{L^2(\Sigma_2)} \leq \sqrt{\frac{k_\gamma + 1}{N}}.$$

Il existe donc une sous-suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  incluse dans  $L^2(\Sigma_2)$  qui converge faiblement vers une fonction  $u_\gamma \in L^2(\Sigma_2)$ . ■

### 9.1.5 Caractérisation du contrôle à moindres regrets adapté

Dans cette sous-section, à l'aide de la formule d'Euler-Lagrange, on donnera une caractérisation du contrôle pour le système NTB non linéaire à deux frontières avec pollution.

**Proposition 9.1.4** *Le contrôle à moindres regrets adapté  $u_\gamma$  satisfait à l'inégalité :*

$$\begin{aligned}
 &\left\langle \frac{\partial}{\partial v} c(u_\gamma, 0), c(u_\gamma, 0) - \tilde{c} \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \langle Nu_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma} \left\langle \frac{\partial}{\partial v} \xi(u_\gamma), S(u_\gamma) \right\rangle_{L^2(Q)} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

**Preuve** - Le contrôle  $u_\gamma$  vérifie la formule d'Euler-Lagrange :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma)}{\lambda} \right) \geq 0$$

pour toute fonction  $v \in L^2(\Sigma_2)$  et pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ . On a

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma) \\
&= J(u_\gamma + \lambda w, 0) - J(u_\gamma, 0) + \|u_\gamma + \lambda w - \tilde{u}\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|u_\gamma - \tilde{u}\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\gamma} \left[ \|S(u_\gamma + \lambda w)\|_{L^2(Q)}^2 - \|S(u_\gamma)\|_{L^2(Q)}^2 \right] \\
&= \lambda^2 \left[ \left\| \frac{c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c(u_\gamma, 0)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{S(u_\gamma + \lambda w) - S(u_\gamma)}{\lambda} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right] \\
&\quad + \lambda^2(N+1)\|w\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 + 2 \langle c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c(u_\gamma, 0), c(u_\gamma, 0) - \tilde{c} \rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\
&\quad + 2 \langle Nu_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + \frac{2}{\gamma} \langle S(u_\gamma + \lambda w) - S(u_\gamma), S(u_\gamma) \rangle_{L^2(Q)}. \tag{9.22}
\end{aligned}$$

En divisant par  $\lambda$ , on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma)}{\lambda} \\
&= \lambda \left[ \left\| \frac{c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c(u_\gamma, 0)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{1}{\gamma} \left\| \frac{S(u_\gamma + \lambda w) - S(u_\gamma)}{\lambda} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right] \\
&\quad + \lambda(N+1)\|w\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 + 2 \left\langle \frac{c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c(u_\gamma, 0)}{\lambda}, c(u_\gamma, 0) - \tilde{c} \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \\
&\quad + 2 \langle Nu_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + \frac{2}{\gamma} \left\langle \frac{S(u_\gamma + \lambda w) - S(u_\gamma)}{\lambda}, S(u_\gamma) \right\rangle_{L^2(Q)} \tag{9.23}
\end{aligned}$$

Comme  $S(u_\gamma + \lambda w) - S(u_\gamma) = \xi(u_\gamma + \lambda w) - \xi(u_\gamma)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \lambda \left\| \frac{c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c(u_\gamma, 0)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \lambda \left\| \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w) - \xi(u_\gamma)}{\lambda} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right] \\ & \quad + 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial v} c(u_\gamma, 0), c(u_\gamma, 0) - \tilde{c} \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} + 2 \langle Nu_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \\ & \quad + \frac{2}{\gamma} \left\langle \frac{\partial}{\partial v} \xi(u_\gamma), S(u_\gamma) \right\rangle_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c(u_\gamma, 0)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Sigma_1)} = \left\| \frac{\partial}{\partial v} c(u_\gamma, 0)(w) \right\|_{L^2(\Sigma_1)}$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w) - \xi(u_\gamma)}{\lambda} \right\|_{L^2(Q)} = \left\| \frac{\partial}{\partial v} \xi(u_\gamma)(w) \right\|_{L^2(Q)}$$

sont bornées d'après (9.3) et (9.9), on obtient donc l'inégalité souhaité. ■

### 9.1.6 Système d'optimalité singulier

Dans cette sous-section, on donne le système d'optimalité singulier caractérisant le contrôle  $u_\gamma$ .

**Remarque 9.1.6** On note :  $c_\gamma = c(u_\gamma, 0)$ , et  $\xi_\gamma = \xi(u_\gamma, 0)$ .

Tout d'abord des résultats préliminaires donnés par les propositions suivantes :

**Proposition 9.1.5** La dérivée partielle  $\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}$  est solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{n} = \lambda_1 \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.24)$$

où

$$\mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q},$$

et où

$$\lambda_1 = -\frac{\partial c_\gamma}{\partial v} + \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right).$$

**Preuve** - A l'aide de la linéarité et la continuité des opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (voir le lemme A.2.1 dans l'annexe à la section A.2.1), on obtient pour l'équation d'état :

$$\mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) = \mathcal{A}^* \left( \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w, 0) - \xi(u_\gamma, 0)}{\lambda} \right) = 0 \quad \text{dans } Q,$$

pour les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ \mathcal{B}^* \left( \xi(u_\gamma + \lambda w, 0) \right) - \mathcal{B}^* \left( \xi(u_\gamma, 0) \right) \right] \\ &= -\frac{\partial c_\gamma}{\partial v} + \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \quad \text{sur } \Sigma_1, \end{aligned}$$

(pour les détails de ce calcul, voir à l'annexe le **lemme A.3.1** à la **section A.3**).

et

$$\mathcal{B}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2,$$

et enfin, la condition initiale :

$$\left(\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}\right)(0, x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w, 0) - \xi(u_\gamma, 0)}{\lambda} = 0 \quad \text{à } t = T,$$

D'où l'on trouve le système désiré. ■

**Proposition 9.1.6** *La dérivée partielle  $\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}$  solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{n} = -w \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.25)$$

où

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

**Preuve** - La démonstration est analogue à la proposition précédente en utilisant la linéarité et la continuité des opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (voir le lemme A.2.1 dans l'annexe à la section A.2.1). On trouve pour l'équation d'état

$$\mathcal{A} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) = 0 \quad \text{dans } Q,$$

les conditions aux limites :

$$-\mathcal{B} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) = \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \quad \text{sur } \Sigma_1,$$

et

$$\mathcal{B} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) = -w \quad \text{sur } \Sigma_2,$$

et enfin la condition initiale

$$\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right)(0, x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c(u_\gamma, 0)}{\lambda} = 0 \quad \text{à } t = 0.$$

D'où l'on trouve le système convenu. ■

**Remarque 9.1.7** On note :  $\rho_\gamma = \rho(u_\gamma, 0)$ ,  $\frac{1}{\gamma}S(u_\gamma) = \frac{1}{\gamma}S_\gamma$ , et  $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$ .

**Théorème 9.1.1** Le contrôle à moindres regrets adapté  $u_\gamma$  solution du problème optimal (9.17)-(9.18) est caractérisé par l'unique quadruplet  $\{c_\gamma, \rho_\gamma, \xi_\gamma, p_\gamma\}$  solution du système d'optimalité suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A} c_\gamma = 0, & \mathcal{A}^* \xi_\gamma = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} c_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{I c_\gamma}{K + c_\gamma}, & \mathcal{B}^* \xi_\gamma \cdot \mathbf{n} = \zeta_\gamma \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B} c_\gamma \cdot \mathbf{n} = -u_\gamma, & \mathcal{B}^* \xi_\gamma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ c_\gamma(0, x) = 0, & \xi_\gamma(T, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \\ \mathcal{A} \rho_\gamma = \frac{1}{\gamma} S_\gamma, & \mathcal{A}^* p_\gamma = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = -\frac{IK \rho_\gamma}{(K + c_\gamma)^2}, & \mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} = \mu_\gamma \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B} \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = 0, & \mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \rho_\gamma(0, x) = 0, & p_\gamma(T, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.26)$$

où l'équation adjointe est

$$p_\gamma + Nu_\gamma = \tilde{u} - u_\gamma \quad \text{dans } L^2(\Sigma_2),$$

et où  $\zeta_\gamma = -(c_\gamma - \tilde{c}) + \frac{IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^2}$ ,  $\mu_\gamma = c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \rho_\gamma$ .

**Remarque 9.1.8** Les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^*$  sont donnés par (4.7) et les opérateurs  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^*$  sont donnés par (4.8).

**Preuve** - On transforme le terme  $\left\langle \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}, \frac{1}{\gamma} S_\gamma \right\rangle_{L^2(Q)}$  de l'inégalité (9.21). Pour cela, on pose  $\mathcal{A}\rho_\gamma = \frac{1}{\gamma} S_\gamma$  avec  $\rho_\gamma := \rho(u_\gamma, 0)$  solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}\rho_\gamma = \frac{1}{\gamma} S_\gamma \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B}\rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \rho_\gamma \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B}\rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ \rho_\gamma(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.27)$$

où

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + q \cdot \nabla - D\Delta \quad \mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2} \mathbf{q}.$$

Puis on calcule l'intégrale

$$\int_Q \mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma \, dxdt$$

où  $\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}$  solution du problème adjoint (9.24). On obtient alors

$$\begin{aligned} & \int_Q \mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma \, dxdt \\ &= \underbrace{\int_Q \left( -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right) \rho_\gamma \, dxdt}_{=A} - \underbrace{\int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) + D\Delta \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right) \rho_\gamma \, dxdt}_{=B}. \end{aligned}$$

En intégrant par partie le terme A, on trouve :

$$A = \int_Q \left( -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right) \rho_\gamma \, dxdt = \alpha \int_Q \left( \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \, dxdt.$$

Puis, on intègre le terme B de la façon suivante :

Tout d'abord, on calcule l'intégrale  $-\int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right) \rho_\gamma \, dxdt$ . On obtient alors :

$$-\int_Q \left( \mathbf{q} \cdot \nabla \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right) \rho_\gamma \, dxdt = -\int_\Sigma \mathbf{q} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} \, d\sigma dt + \int_Q \mathbf{q} \cdot \nabla \rho_\gamma \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \, dxdt.$$

à l'aide du théorème de la divergence.

Ensuite, à l'aide de la formule de Green, on trouve :

$$\begin{aligned}
& - \int_Q \left( D\Delta \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right) \rho_\gamma \, dxdt \\
& = - \int_\Sigma \left( D\nabla \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right) \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} \, d\sigma dt + \int_\Sigma \left( D\nabla \rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma dt \\
& \quad - \int_Q \left( D\Delta \rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \, dxdt.
\end{aligned}$$

En faisant la somme des résultats précédents, on obtient

$$\begin{aligned}
B & = \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla \rho_\gamma - D\Delta \rho_\gamma) \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \, dxdt \\
& \quad - \int_\Sigma \left( D\nabla \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{q} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right) \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} \, dxdt \\
& \quad + \int_\Sigma \left( D\nabla \rho_\gamma - \frac{1}{2} \mathbf{q} \rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma dt \\
& = \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla \rho_\gamma - D\Delta \rho_\gamma) \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \, dxdt \\
& \quad \int_{\Sigma_1} - \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma + \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma \, d\sigma_1 dt \\
& \quad - \int_{\Sigma_1} \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma \, d\sigma_1 dt \\
& = \int_Q (\mathbf{q} \cdot \nabla \rho_\gamma - D\Delta \rho_\gamma) \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \, dxdt - \int_{\Sigma_1} \left( \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \, d\sigma_1 dt.
\end{aligned}$$

En additionnant les termes A et B, on trouve :

$$\begin{aligned}
 A + B &= \int_Q \mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma \, dxdt \\
 &= - \int_{\Sigma_1} \left( \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K+c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \, d\sigma_1 dt \\
 &\quad + \int_Q \mathcal{A} \rho_\gamma \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \, dxdt
 \end{aligned}$$

Puisque  $\mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) = 0$  dans  $Q$ , on obtient

$$\int_Q \mathcal{A} \rho_\gamma \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \, dxdt = \int_{\Sigma_1} \left( \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K+c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \, d\sigma_1 dt,$$

ce qui équivaut à

$$\left\langle \frac{1}{\gamma} S_\gamma, \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right\rangle_{L^2(Q)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v} c_\gamma, \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K+c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}.$$

En remplaçant ce résultat dans l'inégalité (9.21) celle-ci devient

$$\langle Nu_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} + \left\langle \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}, c(u_\gamma, 0) - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K+c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}$$

Par la suite, on introduit  $p_\gamma := p(u_\gamma, 0)$  solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A}^* p_\gamma = & 0 \quad \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} = & c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K+c_\gamma)^3} \rho_\gamma \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} = & 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \\ p_\gamma(T) = & 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.28)$$

avec

$$\mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

On calcule  $\int_Q \mathcal{A}\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) p_\gamma dxdt$  de la même façon que précédemment.

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_Q \mathcal{A}\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) p_\gamma dxdt &= - \int_\Sigma \left( D\nabla\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{q}\cdot\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) \right) p_\gamma \cdot \mathbf{n} d\sigma dt \\ &\quad - \int_\Sigma \left( -D\nabla p_\gamma - \frac{1}{2}\mathbf{q}\cdot p_\gamma \right) \left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt \\ &\quad + \int_Q \mathcal{A}^* p_\gamma \left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) dxdt \\ &= - \int_{\Sigma_1} \left( c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K+c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right) \left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) d\sigma_1 dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_2} w p_\gamma d\sigma_2 dt. \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{A}\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) = \mathcal{A}^* p_\gamma = 0$  dans  $Q$ , et l'aide des conditions aux limites des systèmes (9.25) et (9.28), on obtient :

$$\int_{\Sigma_1} \left( c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K+c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right) \left(\frac{\partial}{\partial v} c_\gamma\right) d\sigma_1 dt = \int_{\Sigma_2} w p_\gamma d\sigma_2 dt,$$

qui est équivalent à :

$$\langle w, p_\gamma \rangle_{L^2(\Sigma_2)} = \left\langle c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K+c_\gamma)^3} \rho_\gamma, \frac{\partial}{\partial v} c_\gamma \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}.$$

Enfin en remplaçant celui-ci dans l'inégalité (9.21), on obtient

$$\langle w, p_\gamma \rangle_{L^2(\Sigma_2)} = \langle Nu_\gamma + p_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \geq 0$$

pour tout  $w \in L^2(\Sigma_2)$ . Or pour  $w' = w$ , on trouve

$$\langle Nu_\gamma + p_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(\Sigma_2)} \leq 0.$$

On en conclut alors  $Nu_\gamma + p_\gamma + u_\gamma - \tilde{u} = 0$ , et donc  $Nu_\gamma + p_\gamma = \tilde{u} - u_\gamma$ . ■

## 9.2 Problème de contrôle non linéaire à une frontière

Dans cette section, on aborde, le problème de contrôle optimal pour le système NTB non linéaire à une frontière en sol pollué, représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}c &= g + v & \text{dans } Q := ]0, T[ \times \Omega, \\ -\mathcal{B}c.\mathbf{n} &= \frac{Ic}{K+c} & \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \Gamma_1, \\ c(0, x) &= 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (9.29)$$

où :

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q},$$

et avec  $c = c(x, t, v, g)$  représentant la concentration d'éléments nutritifs en sol pollué. La fonction  $v \in L^2(Q)$  représente un apport de nutriments et la fonction  $g \in L^2(Q)$  symbolise la pollution du sol.

L'objectif est trouver le ou les contrôle(s) minimisant la fonction de coût

$$J(v, g) = \|c(v, g) - \tilde{c}\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + N\|v\|_{L^2(Q)}^2, \quad (9.30)$$

où  $\tilde{c}$  est une observation donnée dans  $L^2(\Sigma_1)$  et  $N > 0$  une constante.

On suppose que la fonction  $(v, g) \mapsto c(v, g)$  est non linéaire et différentiable sur l'ensemble  $L^2(Q) \times L^2(Q)$  :

$$c(v+w, g+h) - c(v, g) = \frac{\partial}{\partial v}c(v, g)(w) + \frac{\partial}{\partial g}c(v, g)(h) + \|(w, h)\|_{L^2(\Sigma_1) \times L^2(Q)} \varepsilon(w, h), \quad (9.31)$$

pour tout  $(v, g) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$  où la fonction

$$v \mapsto \frac{\partial c}{\partial v}(v, g) \quad (9.32)$$

définie de  $L^2(Q)$  vers  $L^2(\Sigma_1)$ .

**Remarque 9.2.1** Pour tout  $(v, g) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$ , on notera :

$$\frac{\partial c}{\partial v}(v, g) = \frac{\partial c}{\partial v}(v, g)(w), \quad \frac{\partial c}{\partial g}(v, g) = \frac{\partial c}{\partial g}(v, g)(h).$$

**Remarque 9.2.2** On utilisera les techniques de contrôle sans regrets et à moindres regrets adapté employées précédemment pour le problème non linéaire à deux contrôles.

### 9.2.1 Contrôle sans regret

Dans cette section, on traite du contrôle sans regret.

**Définition 9.2.1** *Le contrôle sans regret pour le problème (9.29), s'il existe, est une fonction  $v \in L^2(Q)$  solution du nouveau problème MinMax suivant :*

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) \right) \quad (9.33)$$

**Lemme 9.2.1** *Pour tout  $v \in L^2(Q)$  et  $g \in L^2(Q)$ , on a l'égalité :*

$$\begin{aligned} J(v, g) - J(0, g) &= J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \left[ \left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial}{\partial g} c(v, 0) \right\rangle_{L^2(Q)} \right. \\ &\quad \left. - \left\langle (c(0, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial}{\partial g} c(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \right]. \end{aligned}$$

**Preuve** - La preuve est identique à celle faite pour le **lemme 9.1.1**. ■

**Remarque 9.2.3** *A partir du résultat précédent, on trouve alors :*

$$\begin{aligned} \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) &= J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \left[ \left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} - \left\langle (c(0, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \right]. \end{aligned}$$

*On estime alors*

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} - \left\langle (c(0, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}.$$

On calcule tout d'abord  $\left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}$ .

**Proposition 9.2.1** *La dérivée partielle  $\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)$  est solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) = g \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \frac{IK}{(K + c(v, 0))^2} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (9.34)$$

**Preuve** - A l'aide de la formule de la dérivée partielle de la fonction  $c$  au point  $(v, 0)$  donné par (9.7) et de la linéarité et de la continuité des opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (se référer au lemme A.2.1 dans l'annexe, à la section A.2.1), on trouve pour l'équation d'état :

$$\mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) = g \quad \text{dans } Q,$$

la condition aux limites :

$$\mathcal{B} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) = \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \frac{IK}{(K + c(v, 0))^2} \quad \text{sur } \Sigma_1,$$

et la condition initiale :

$$\left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{c(v, \lambda g) - c(v, 0)}{\lambda} = 0 \quad \text{à } t = 0.$$

D'où le résultat souhaité. ■

**Proposition 9.2.2** *On a*

$$\left\langle (c(v, 0) - \tilde{c}), \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)}. \quad (9.35)$$

**Preuve** - On introduit la fonction  $\xi(v) = \xi(x, t, v)$  différentiable sur  $L^2(Q)$  où

$$\frac{\partial}{\partial v} \xi(v) \in L^2(Q). \quad (9.36)$$

La fonction  $\xi(v)$  est solution du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}^* \xi(v) = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^* \xi(v) \cdot \mathbf{n} = -(c(v, 0) - \tilde{c}) - \frac{IK}{(K + c(v, 0))^2} \xi(v) \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \xi(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.37)$$

où

$$\mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

On multiplie l'équation  $\mathcal{A}^* \xi(v)$  par  $\frac{\partial c}{\partial g}(v, 0)$  solution du problème direct (9.34) et on calcule  $\int_Q \mathcal{A}^* \xi(v) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt$ , par un raisonnement analogue à celui effectué dans la preuve de la **proposition 9.1.2**. On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_Q \mathcal{A}^* \xi(v) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) dxdt \\ &= \int_Q \mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \xi(v) dxdt - \int_{\Sigma} \left( D\nabla \xi(v) + \frac{1}{2}\mathbf{q} \xi(v) \right) \left( \frac{\partial}{\partial g} c(v, 0)(g) \right) \cdot \mathbf{n} dxdt \\ & \quad + \int_{\Sigma} \left( D\nabla \left( \frac{\partial}{\partial g} c(v, 0)(g) \right) - \frac{1}{2}\mathbf{q} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial g} c(v, 0)(g) \right) \right) \xi(v) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt \\ &= \int_Q \mathcal{A} \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) \xi(v) dxdt - \int_{\Sigma_1} \left( c(v, 0) - \tilde{c} \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) d\sigma_1 dt \\ &= \int_Q g \xi(v) dxdt - \int_{\Sigma_1} \left( c(v, 0) - \tilde{c} \right) \left( \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right) d\sigma_1 dt, \end{aligned}$$

à l'aide des conditions aux limites des systèmes (9.34) et (9.37). Puisque  $\mathcal{A}^* \xi(v) = 0$  dans  $Q$ , on obtient alors le résultat souhaité. ■

**Remarque 9.2.4** *En effectuant, le développement limité d'ordre 1 de la fonction  $(v, g) \mapsto c(v, g)$  au point  $(0, 0)$  suivant la direction du vecteur  $(0, g)$  ainsi que les*

9.2. PROBLÈME DE CONTRÔLE NON LINÉAIRE À UNE FRONTIÈRE 159

mêmes calculs que dans la preuve précédente, on obtient

$$\left\langle c(0, 0) - \tilde{c}, \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} = \langle \xi(0), g \rangle_{L^2(Q)}. \quad (9.38)$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} & \sup_{g \in L^2(Q)} \left[ \left\langle \left( c(v, 0) - \tilde{c} \right), \frac{\partial c}{\partial g}(v, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} - \left\langle \left( c(0, 0) - \tilde{c} \right), \frac{\partial c}{\partial g}(0, 0) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} \right] \\ &= \sup_{g \in L^2(Q)} \left[ \langle \xi(v), g \rangle_{L^2(Q)} - \langle \xi(0), g \rangle_{L^2(Q)} \right] = \sup_{g \in L^2(Q)} \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } S(v) = \xi(v) - \xi(0).$$

**Remarque 9.2.5** A partir du résultat précédent, on en déduit :

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) = J(v, 0) - J(0, 0) + 2 \sup_{g \in L^2(Q)} \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)}$$

avec

$$\sup_{g \in L^2(Q)} \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \langle S(v), g \rangle \neq 0 \\ 0 & \text{si } S(v) \perp g \quad \forall g \in L^2(Q). \end{cases}$$

La valeur de  $\sup_{g \in L^2(Q)} \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)}$  ne permet pas de caractériser le contrôle sans regret du problème MinMax :

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) \right) \right). \quad (9.39)$$

D'où, on utilise le concept du contrôle à moindres regrets pour chercher un contrôle dans l'ensemble :  $\mathcal{M}_1 = \left\{ v \in L^2(Q); \langle S(v), g \rangle_{L^2(Q)} = 0, \forall g \in L^2(Q) \right\}$ .

### 9.2.2 Contrôle à moindres regrets

Dans cette section, on aborde le contrôle à moindres regrets.

Le contrôle à moindres regrets est la solution du problème relaxé MinMax :

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \left( \sup_{g \in L^2(Q)} \left( J(v, g) - J(0, g) - \gamma \|g\|_{L^2(Q)}^2 \right) \right), \quad (9.40)$$

avec un paramètre strictement positif  $\gamma > 0$ .

**Lemme 9.2.2** *Le problème MinMax relaxé (9.40) a pour forme*

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \mathcal{J}^\gamma(v) \quad (9.41)$$

où

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v, 0) - J(0, 0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v)\|_{L^2(Q)}^2. \quad (9.42)$$

**Preuve** - En procédant de la même manière que la preuve du **lemme 9.1.2**, on trouve l'expression souhaitée. ■

**Remarque 9.2.6** *La fonction  $\mathcal{J}^\gamma$  définie ci-dessus n'est pas convexe. De ce faite, le contrôle à moindres regrets  $u_\gamma$  n'est pas unique. De plus, il n'est pas dit que ce contrôle converge dans l'ensemble  $\mathcal{M}_1$ . On adaptera alors la fonction  $\mathcal{J}^\gamma$  comme J.-L. Lions [14], en utilisant une méthode de pénalisation pour la recherche du contrôle à moindres regrets lié au problème.*

### 9.2.3 Contrôle à moindres regrets adapté

Dans cette sous-section, on aborde le contrôle à moindres regrets adapté.

On considère le problème suivant :

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \mathcal{J}_a^\gamma(v), \quad (9.43)$$

avec

$$\mathcal{J}_a^\gamma(v) = J(v, 0) - J(0, 0) + \|v - \tilde{u}\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|S(v)\|_{L^2(Q)}^2 \quad (9.44)$$

avec  $\tilde{u} \in L^2(Q)$  un contrôle sans regret.

### 9.2.4 Existence d'un contrôle à moindres regrets adapté

Dans cette sous-section, on montre l'existence d'un contrôle à moindres regrets adapté.

**Proposition 9.2.3** *Il existe au moins une solution  $u_\gamma$  appelée le contrôle à moindres regrets adapté pour le problème de contrôle optimal*

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \mathcal{J}_a^\gamma(v) \quad (9.45)$$

avec

$$\mathcal{J}_a^\gamma(v) = J(v, 0) - J(0, 0) + \|v - \tilde{u}\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{\gamma} \|S(v)\|_{L^2(Q)}^2$$

**Preuve** - La démonstration de cette proposition est similaire à celle faite dans la preuve de la **proposition 9.1.3**. ■

### 9.2.5 Caractérisation du contrôle à moindres regrets adapté

Dans cette sous-section, à l'aide de la formule d'Euler-Lagrange, on donnera une caractérisation du contrôle pour le système NTB avec pollution.

**Proposition 9.2.4** *Le contrôle à moindres regrets adapté  $u_\gamma$  satisfait à l'inégalité :*

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial c}{\partial v}(u_\gamma, 0), c(u_\gamma, 0) - \tilde{c} \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} + \langle Nu_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(Q)} \\ & + \frac{1}{\gamma} \left\langle \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}, S(u_\gamma) \right\rangle_{L^2(Q)} \geq 0. \end{aligned} \quad (9.46)$$

**Preuve** - Le contrôle  $u_\gamma$  vérifie la formule d'Euler-Lagrange :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma)}{\lambda} \right) \geq 0,$$

pour toute fonction  $v \in L^2(Q)$  et pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ . Par un raisonnement analogue à celui de la preuve de la **proposition 9.1.4**, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma + \lambda w) - \mathcal{J}_a^\gamma(u_\gamma)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \lambda \left\| \frac{c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c(u_\gamma, 0)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \lambda \left\| \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w) - \xi(u_\gamma)}{\lambda} \right\|_{L^2(Q)}^2 \right] \\
&+ 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial v} c(u_\gamma, 0), c(u_\gamma, 0) - \tilde{c} \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)} + 2 \langle Nu_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(Q)} \\
&+ \frac{2}{\gamma} \left\langle \frac{\partial}{\partial v} \xi(u_\gamma), S(u_\gamma) \right\rangle_{L^2(Q)}.
\end{aligned} \tag{9.47}$$

Puisque

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c(u_\gamma, 0)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Sigma_1)} = \left\| \frac{\partial}{\partial v} c(u_\gamma, 0) \right\|_{L^2(\Sigma_1)},$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w) - \xi(u_\gamma)}{\lambda} \right\|_{L^2(Q)} = \left\| \frac{\partial \xi}{\partial v}(u_\gamma) \right\|_{L^2(Q)},$$

sont bornées d'après (9.32) et (9.36). On obtient alors l'inégalité souhaité. ■

### 9.2.6 Système d'optimalité singulier

Dans cette sous-section, on donne le système d'optimalité singulier caractérisant le contrôle  $u_\gamma$ .

**Remarque 9.2.7** On note :  $c_\gamma = c(u_\gamma, 0)$ , et  $\xi_\gamma = \xi(u_\gamma, 0)$ .

**Proposition 9.2.5** *La dérivée partielle  $\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}$  est solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{n} = \lambda_1 \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.48)$$

où

$$\lambda_1 = -\frac{\partial c_\gamma}{\partial v} + \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right)$$

**Preuve** - Puisque les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont linéaires et continus (voir lemme A.2.1 à l'annexe, section A.2.1), on trouve pour l'équation d'état :

$$\mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) = 0 \quad \text{dans } Q,$$

la conditions aux limites :

$$\mathcal{B}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) = -\frac{\partial c_\gamma}{\partial v} + \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \quad \text{sur } \Sigma_1,$$

et la condition initiale :

$$\left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right)(0, x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w) - \xi(u_\gamma)}{\lambda} = 0 \quad \text{à } t = 0.$$

D'où l'on trouve le système convenu. ■

**Proposition 9.2.6** *La dérivée partielle  $\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}$  est solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) = w \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{n} = \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(0, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.49)$$

où

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

**Preuve** - Par des calculs semblables à ceux effectués dans la preuve de la proposition précédente et à l'aide de la linéarité et de la continuité des opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (se référer au lemme A.2.1 dans l'annexe, section A.2.1), on obtient pour l'équation d'état :

$$\mathcal{A} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) = w \quad \text{dans } Q,$$

la conditions aux limites :

$$\mathcal{B} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) = \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \quad \text{sur } \Sigma_1,$$

et la condition initiale devient

$$\left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) (0, x) = 0 \quad \text{à } t = T.$$

D'où l'on trouve le système désiré. ■

**Remarque 9.2.8** On notera :  $\rho_\gamma = \rho(u_\gamma, 0)$ ,  $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$ , et  $\frac{1}{\gamma}S(u_\gamma) = \frac{1}{\gamma}S_\gamma$ .

**Théorème 9.2.1** Le contrôle à moindres regrets adapté  $u_\gamma$  solution du problème optimal (9.43)-(9.44). est caractérisé par l'unique quadruplet  $\{c_\gamma, \rho_\gamma, \xi_\gamma, p_\gamma\}$  solution du système d'optimalité suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A} c_\gamma = u_\gamma, & \mathcal{A}^* \xi_\gamma = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} c_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{I c_\gamma}{K + c_\gamma}, & \mathcal{B}^* \xi_\gamma \cdot \mathbf{n} = \zeta_\gamma \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ c_\gamma(0, x) = 0, & \xi_\gamma(T, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{A} \rho_\gamma = \frac{1}{\gamma} S_\gamma, & \mathcal{A}^* p_\gamma = 0 \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B} \rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{IK \rho_\gamma}{(K + c_\gamma)^2}, & \mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} = \mu_\gamma \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \rho_\gamma(0, x) = 0, & p_\gamma(T, x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.50)$$

où l'équation adjointe est  $p_\gamma + Nu_\gamma = \tilde{u} - u_\gamma$  dans  $L^2(Q)$ , et où

$$\zeta_\gamma = \tilde{c} - c_\gamma + \frac{IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^2}, \quad \mu_\gamma = \tilde{c} - c_\gamma - \rho_\gamma - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3}\rho_\gamma.$$

**Preuve** - On pose  $\mathcal{A}\rho_\gamma = \frac{1}{\gamma}S_\gamma$  avec  $\rho_\gamma$  solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}\rho_\gamma = \frac{1}{\gamma}S_\gamma \quad \text{dans } Q, \\ -\mathcal{B}\rho_\gamma \cdot \mathbf{n} = \frac{IK\rho_\gamma}{(K + c_\gamma)^2} \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \rho_\gamma(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (9.51)$$

où

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta \quad \mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

On transforme le terme  $\left\langle \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}, \frac{1}{\gamma}S_\gamma \right\rangle_{L^2(Q)}$  de l'inégalité (9.21), en posant :

$$\left\langle \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}, \frac{1}{\gamma}S_\gamma \right\rangle_{L^2(Q)} = \left\langle \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}, \mathcal{A}\rho_\gamma \right\rangle_{L^2(Q)} = \int_Q \mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma \, dxdt.$$

Puis on calcule l'intégrale

$$\int_Q \mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma \, dxdt$$

où  $\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}$  solution du problème adjoint (9.48).

En appliquant les mêmes techniques de calculs ainsi que la condition de Darcy (2.2), utilisées dans la preuve du **théorème 9.1.1**, on obtient :

$$\int_Q \mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \rho_\gamma \, dxdt = \int_Q \mathcal{A}\rho_\gamma \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \, dxdt - \int_{\Sigma_1} \left( \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3}\rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) \, d\sigma_1 dt,$$

en utilisant les conditions aux limites des systèmes (9.48) et (9.51).

Puisque  $\mathcal{A}^* \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) = 0$  dans  $Q$ , on trouve

$$\left\langle \frac{1}{\gamma}S_\gamma, \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right\rangle_{L^2(Q)} = \left\langle \mathcal{A}\rho_\gamma, \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v} \right) \right\rangle_{L^2(Q)} = \left\langle \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}, \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3}\rho_\gamma \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}.$$

En remplaçant ce résultat dans l'inégalité (9.21) celle-ci devient

$$\langle Nu_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(Q)} + \left\langle \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}, c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}$$

Puis, on introduit  $p_\gamma$  solution du système :

$$\begin{cases} \mathcal{A}^* p_\gamma = 0 & \text{dans } Q, \\ \mathcal{B}^* p_\gamma \cdot \mathbf{n} = \tilde{c} - c_\gamma - \rho_\gamma - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \rho_\gamma & \text{sur } \Sigma_1, \\ p_\gamma(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (9.52)$$

avec

$$\mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q} \cdot \nabla - D\Delta \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

On calcule  $\int_Q \mathcal{A}\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) p_\gamma dxdt$  où en réitérant les mêmes calculs que précédemment.

On trouve :

$$\begin{aligned} \int_Q \mathcal{A}\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) p_\gamma dxdt &= \int_{\Sigma_1} \left( c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) p_\gamma d\sigma_1 dt \\ &\quad + \int_Q \mathcal{A}^* p_\gamma \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) dxdt \end{aligned}$$

à l'aide des conditions aux limites des systèmes (9.49) et (9.52).

Comme  $\mathcal{A}^* p_\gamma = 0$  dans  $Q$ , on obtient :

$$\int_Q \mathcal{A}\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) p_\gamma dxdt = \int_{\Sigma_1} \left( c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) p_\gamma d\sigma_1 dt$$

Par ailleurs, puisque

$$\int_Q \mathcal{A}\left(\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}\right) p_\gamma dxdt = \int_Q w p_\gamma dxdt = \langle w, p_\gamma \rangle_{L^2(Q)}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma_1} \left( c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \rho_\gamma \right) \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v} \right) p_\gamma d\sigma_1 dt \\ &= \left\langle \left( c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \rho_\gamma, \frac{\partial}{\partial v} c_\gamma(w) \right) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}, \end{aligned}$$

## 9.2. PROBLÈME DE CONTRÔLE NON LINÉAIRE À UNE FRONTIÈRE 167

on trouve alors :

$$\langle w, p_\gamma \rangle_{L^2(Q)} = \left\langle \left( c_\gamma - \tilde{c} + \rho_\gamma + \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \rho_\gamma, \frac{\partial}{\partial v} c_\gamma(w) \right) \right\rangle_{L^2(\Sigma_1)}.$$

Enfin en remplaçant celui-ci dans l'inégalité (9.21) on obtient

$$\langle w, p_\gamma \rangle_{L^2(Q)} + \langle Nu_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(Q)} = \langle Nu_\gamma + p_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(Q)} \geq 0$$

pour tout  $w \in L^2(Q)$ .

Or pour  $w' = w$ , on trouve  $\langle Nu_\gamma + p_\gamma + u_\gamma - \tilde{u}, w \rangle_{L^2(Q)} \leq 0$ .

On en conclut alors :  $Nu_\gamma + p_\gamma + u_\gamma - \tilde{u} = 0$ , et donc  $Nu_\gamma + p_\gamma = \tilde{u} - u_\gamma$ . ■



# Chapitre 10

## Analyse numérique

Ce chapitre constitue une première approche concernant la simulation numérique du problème de contrôle optimal pour le système NTB linéaire à deux frontières en sol non pollué. On utilisera un schéma en différence finie afin de discrétiser ce problème.

### 10.1 Différences finies pour le système NTB à deux frontières

On considère le système NTB à deux frontières suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t}(t, x) + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} c(t, x) - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t, x) = 0 \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times ]x_0, x_{n+1}[, \\ -(D \frac{\partial c}{\partial x}(t, x) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(t, x)) \cdot \mathbf{n} = h(c(t, x)) \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \{x_{n+1}\}, \\ (D \frac{\partial c}{\partial x}(t, x) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(t, x)) \cdot \mathbf{n} = v(t) \quad \text{sur } \Sigma_2 := ]0, T[ \times \{x_0\}, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } ]x_0, x_{n+1}[, \end{array} \right. \quad (10.1)$$

où l'ensemble  $\Omega = ]x_0, x_{n+1}[$ , la surface de la racine  $\Gamma_1 = \{x_{n+1}\}$ , et la frontière de la rhizosphère  $\Gamma_2 = \{x_0\}$ . L'apport de nutriments est donné par la fonction  $v(t)$  avec  $t \in [0, T]$ .

**Remarque 10.1.1** *Le vecteur  $q = q(t, x)$  représente le flux de l'eau et vérifie la condition de Darcy donnée par (2.2). La fonction d'absorption linéaire est  $h(c(t, x)) = \frac{Ic}{K}(t, x)$ .*

Pour discrétiser le domaine  $[0, T] \times ]x_0, x_{n+1}[$ , on introduit un pas d'espace  $\Delta x = \frac{1}{N+1} > 0$  (avec  $N$  un entier positif) et un pas de temps  $\Delta t > 0$ , et on définit les noeuds d'un maillage réguliers

$$(t^n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \quad \text{pour } n \geq 0, j \in \{0, 1, \dots, N+1\},$$

et où  $x_0 < \dots < x_{N+1}$ .

On note  $c_j^n$  la valeur d'une solution discrète approchée au point  $(t^n, x_j)$ , et  $c(t, x)$  la solution exacte de (10.1). La condition initiale est discrétisée par

$$c_j^0 = c_0(x_j) = 0 \quad \text{pour } j \in \{0, 1, \dots, N+1\}.$$

En considérant les différences finies des termes :

$$\frac{\partial c}{\partial t}(t^n, x_j) \approx \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} \quad (\text{schéma d'Euler progressif}),$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(t^n, x_j) \approx \frac{c_j^n - c_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (\text{schéma d'Euler rétrograde}),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t^n, x_j) \approx \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (\text{schéma centré}),$$

la discrétisation de l'équation d'état du système (10.1) équivalent à

$$\frac{\partial c}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{\alpha} \left[ -\mathbf{q} \cdot \frac{\partial c}{\partial x}(t, x) + D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t, x) \right],$$

est :

$$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{\alpha} \left[ -\mathbf{q} \cdot \frac{c_j^n - c_{j-1}^n}{\Delta x} + D \frac{c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right].$$

D'où l'on obtient :

$$c_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{\alpha} \left[ \left( \frac{q}{\Delta x} + \frac{D}{\Delta x^2} \right) c_{j-1}^n + \left( \frac{\Delta t}{\alpha} - \frac{q}{\Delta x} - \frac{2D}{\Delta x^2} \right) c_j^n + \frac{D}{(\Delta x)^2} c_{j+1}^n \right].$$

On trouve alors le système suivant :

$$C^{n+1} = \frac{\Delta t}{\alpha} A C^n,$$

où  $A$  est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\Delta t} - \frac{q}{\Delta x} - \frac{2D}{\Delta x^2} & \frac{D}{\Delta x^2} & \dots & 0 \\ \frac{q}{\Delta x} + \frac{D}{\Delta x^2} & \frac{\alpha}{\Delta t} - \frac{q}{\Delta x} - \frac{2D}{\Delta x^2} & \ddots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{D\Delta t}{\alpha\Delta x^2} \\ 0 & \dots & \frac{q}{\Delta x} + \frac{D}{\Delta x^2} & \frac{\alpha}{\Delta t} - \frac{q}{\Delta x} - \frac{2D}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

et où

$$C^n = \begin{pmatrix} c_1^n \\ \vdots \\ c_N^n \end{pmatrix}.$$

Pour la discrétisation des conditions aux limites, on utilisera le schéma centré pour la dérivée partielle première :

$$\frac{\partial c}{\partial x}(t^n, x_j) \approx \frac{c_{j+1}^n - c_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (\text{schéma centré}).$$

La discrétisation de la condition aux limites sur  $\Sigma_1 = [0, T] \times \{x_{n+1}\}$  est :

$$-\left( D \frac{\partial c}{\partial x}(t, x) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(t, x) \right) \approx -\left( \frac{D}{2\Delta x} (c_{N+1}^n - c_{N-1}^n) - \frac{1}{2} q c_N^n \right) = h_N^n,$$

où  $h_N^n = h(c_N^n)$ .

D'où l'on trouve :

$$c_{N+1}^n = c_{N-1}^n + \frac{2\Delta x}{D} \left( \frac{1}{2} q c_N^n - h_N^n \right).$$

Et la discrétisation de la condition aux limites sur  $\Sigma_1 = [0, T] \times \{x_0\}$  est :

$$\left( D \frac{\partial c}{\partial x}(t, x) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(t, x) \right) \approx \left( \frac{D}{2\Delta x} (c_2^n - c_0^n) - \frac{1}{2} q c_1^n \right) = v^n,$$

où  $v(t^n) = v^n$ .

D'où l'on trouve :

$$c_0^n = c_2^n + \frac{2\Delta x}{D}(v^n - \frac{1}{2}qc_1^n).$$

## 10.2 Simulation numérique

Dans cette section, on traite de la simulation numérique du problème de contrôle optimal associé au système (10.1) donné par :

$$[P] = \left\{ \begin{array}{l} \min_{v \in L^2(\Sigma_2)} J(v) \\ \text{où} \\ J(v) = \int_0^T [c(t, x_{N+1}) - \tilde{c}(t, x_{N+1})]^2 dt + \frac{N}{\sqrt{|x_{N+1} - x_0|}} \int_0^T v(t^n, x_0)^2 dt \end{array} \right.$$

et où  $\Omega = ]0, 1[$ , avec  $x_0 = 0$  et  $x_{n+1} = 1$  et avec  $\Sigma_1 = ]0, T[ \times \{1\}$  et  $\Sigma_2 = ]0, T[ \times \{0\}$ .

La concentration  $c$  est solution du système (10.1)

**Remarque 10.2.1** *La concentration  $c(t, x_{n+1})$  est déterminé en résolvant le système suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial c}{\partial t}(t, x) + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} c(t, x) - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t, x) = 0 \quad \text{dans } Q := ]0, T[ \times ]0, 1[, \\ -(D \frac{\partial c}{\partial x}(t, x) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(t, x)) \cdot \mathbf{n} = h(c(t, x)) \quad \text{sur } \Sigma_1 := ]0, T[ \times \{1\}, \\ (D \frac{\partial c}{\partial x}(t, x) - \frac{1}{2} \mathbf{q} c(t, x)) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2 := ]0, T[ \times \{0\}, \\ c(0, x) = c_0(x) \quad \text{dans } ]0, 1[, \end{array} \right. \quad (10.2)$$

en utilisant la même discretisation par différence finies du système (10.1).

Le problème de contrôle [P] est résolu numériquement par la méthode de Quasi-Newton dont les algorithmes sont disponibles sur les logiciels tels que Matlab ou Absoft software (voir Picart [28]). On a utilisé la routine BCONF issue de la librairie de IMSL pour notre problème. Pour effectuer les simulations numériques, on a choisi les paramètres suivants :

$$q = 0.5, \quad D = 0.1, \quad \alpha = 1, \quad I = 0.001, \quad K = 1.$$

Par ailleurs, on a considéré  $\Omega = ]0, 5[ \times ]0, 1[$ ,  $\Delta x = 0.1$ , et  $\Delta t = 0.01$ .

La simulation numérique du problème [P] est faite avec la fonction  $\tilde{c}$  de la figure 10.1 ci-dessous.

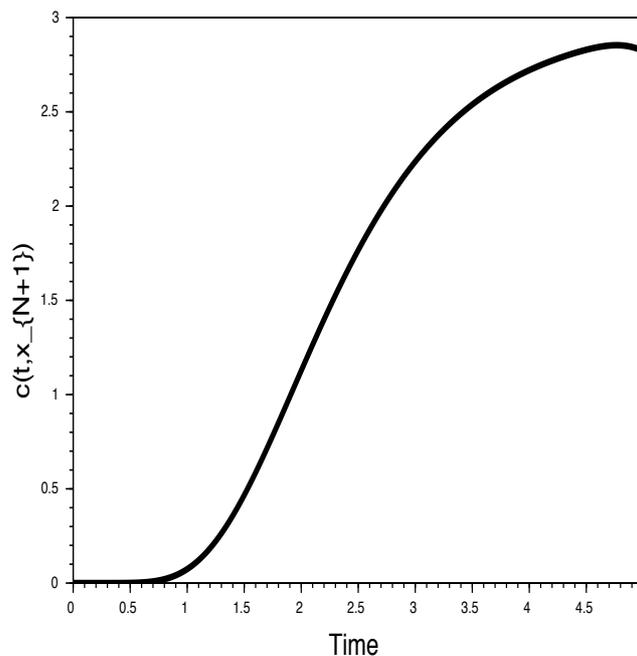


FIGURE 10.1 – Absorption des nutriments à la surface de la racine en fonction du temps.

L'absorption des nutriments est semblable une sigmoïde dont la valeur maximale est 2.8. La fonction  $\tilde{c}$  est obtenu en résolvant le système (10.1) avec la fonction de contrôle  $v$  représentée par la courbe de la figure 10.2 ainsi qu'en utilisant le contrôle exact. Le contrôle exact est un contrôle connu.

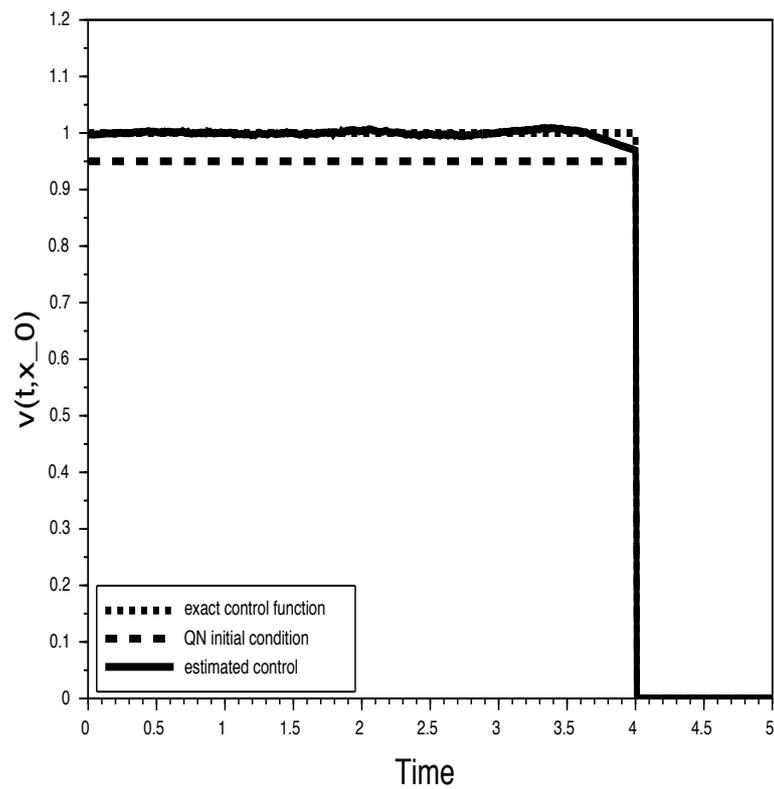


FIGURE 10.2 – L'apport de nutriments en temps.

La courbe en pointillée est le contrôle utilisé pour construire la fonction  $\tilde{c}$  en résolvant le système (10.1). La courbe en trait pointillé est le contrôle initial déterminé par l'algorithme de Quasi-Newton. La courbe pleine est la solution numérique de  $[P]$ .

L'objectif de cette simulation numérique est de trouver le contrôle optimal solution du problème  $[P]$  pour une concentration de nutriments absorbée  $\tilde{c}$ .

Pour cela, on initialise l'algorithme de Quasi-Newton avec la fonction en escalier en trait pointillé représentée dans la figure 10.2. Le contrôle optimal, solution de la fonction de coût  $J(v)$ , est obtenu lorsque la valeur de cette fonction est proche de 0. Ce contrôle est représenté par la courbe pleine de la figure 10.2.

L'erreur  $L^2$  de la différence entre la solution estimée et solution exacte (en trait pointillé), à la figure 10.2, est de  $1.59 \cdot 10^{-3}$ . Cela montre que l'algorithme de Quasi-Newton converge vers la solution exacte.



# Chapitre 11

## Conclusion et perspectives

La lutte contre la pollution du sol est un enjeu majeur pour la préservation de l'environnement. Parmi les régions ultramarines, la Guadeloupe et la Martinique sont particulièrement touchées. Les chercheurs de l'INRA-Antilles et du CIRAD travaillent sur l'usage des plantes de service en remplacement des pesticides et autres intrants chimiques afin d'élaborer une agriculture alternative. Ce travail de thèse s'inscrit dans cette dynamique, en apportant une contribution du point de vue de la modélisation.

L'analyse mathématique du phénomène de transfert et d'absorption de nutriments gouvernée par le système de Nye-Tinker-Barber (NTB), où l'inconnue du problème est la concentration de nutriments absorbés, a été détaillée dans les six cas : d'une ou deux frontières, linéaire ou non linéaire, avec ou sans pollution.

Il s'agit dans la plupart des cas d'un système d'advection-diffusion pour lequel on a établi l'existence d'une solution unique dans l'espace de fonctions  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Pour le problème non linéaire, c'est à dire le cas où la fonction d'absorption de Michaelis-Menten est non linéaire, le théorème du point fixe de Schauder a

pu être appliqué dans l'espace  $L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$  qui contient la solution (puisque  $L^2(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \subset L^2(]0, T[; L^2(\Omega))$ ), moyennant une hypothèse d'interpolation pour la variable du temps  $t$ , le théorème de compacité de Rellich ne s'appliquant en effet qu'entre les espaces fonctionnels sur  $\Omega$ ,  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ .

Le problème de recherche d'une concentration de nutriments optimale correspond à un problème de minimisation d'une fonction coût frontière quadratique (la frontière représentant l'ensemble des poils absorbants de la racine). Le problème de contrôle en sol non pollué admet une solution optimale caractérisée par un système d'optimalité (SO). Le problème en sol pollué admet quant à lui un contrôle optimal à moindres regrets caractérisé par un système d'optimalité singulier (SOS).

En perspectives, on envisage un prolongement de ce travail par des simulations numériques en deux et trois dimensions d'espace dans les deux cas de sol pollué et de sol non pollué, à partir des systèmes d'optimalités obtenus. Le but est de pouvoir confronter par la suite les résultats avec les données mesures disponibles des chercheurs de l'INRA-Antilles [4].

# Quatrième partie

## Annexe



# Annexe A

## A.1 Majoration pour la méthode du point fixe

Les systèmes NTB non linéaires à une et deux frontières ont comme fonction d'absorption la fonction  $h$  non linéaire définie par :

$$h(\bar{c}) = \frac{I\bar{c}}{K + \bar{c}}.$$

Le lemme ci-dessous est un résultat utilisé pour démontrer l'existence d'un point fixe pour les systèmes NTB non linéaires.

**Lemme A.1.1** *On suppose que  $|I|$  est uniformément borné (i.e  $I \in L^\infty(Q)$ ). Pour tout  $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in H^1(\Omega)$  on a alors*

$$\int_{\Gamma_1} (h(\bar{\varphi}) - h(\bar{\psi})) d\sigma_1 \leq \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|I\|_\infty \beta_1 \|\bar{\varphi} - \bar{\psi}\|_{H^1(\Omega)} \quad p.p \quad t \in ]0, T[,$$

avec  $\beta_1 > 0$ .

**Preuve** - Soit  $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (h(\bar{\varphi}) - h(\bar{\psi})) d\sigma_1 &= \int_{\Gamma_1} \left( \frac{I\bar{\varphi}}{K + \bar{\varphi}} - \frac{I\bar{\psi}}{K + \bar{\psi}} \right) d\sigma_1 \\ &= \int_{\Gamma_1} \left( \frac{IK}{(K + \bar{\varphi})(K + \bar{\psi})} \right) (\bar{\varphi} - \bar{\psi}) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Puisque :

$$\frac{IK}{(K + \bar{\varphi})(K + \bar{\psi})} \leq \frac{I}{(K + \bar{\varphi})(K + \bar{\psi})} \leq \frac{\|I\|_\infty}{K^2},$$

en utilisant le théorème de Cauchy-Schwarz, on obtient alors

$$\int_{\Gamma_1} \left( \frac{IK}{(K + \bar{\varphi})(K + \bar{\psi})} \right) (\bar{\varphi} - \bar{\psi}) d\sigma_1 \leq \frac{\|I\|_\infty}{K^2} \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|\bar{\varphi} - \bar{\psi}\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

A l'aide du théorème de trace, il existe  $\beta_1 > 0$ , tel que

$$\frac{\|I\|_\infty}{K^2} \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|\bar{\varphi} - \bar{\psi}\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \frac{\beta_1 \|I\|_\infty}{K^2} \sqrt{\text{mes}(\Gamma_1)} \|\bar{\varphi} - \bar{\psi}\|_{H^1(\Omega)}.$$

On obtient alors le résultat souhaité. ■

## A.2 Continuité des opérateurs

Pour les problèmes de contrôles non linéaires, on a besoin de la propriété ci-dessous. Soient les opérateurs suivants :

$$\mathcal{A} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + q \cdot \nabla - D\Delta, \quad \mathcal{A}^* = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} - q \cdot \nabla - D\Delta,$$

$$\mathcal{B} = D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}, \quad \mathcal{B}^* = -D\nabla - \frac{1}{2}\mathbf{q}.$$

**Lemme A.2.1** *Les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^*$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^*$  sont linéaires et continus en  $v \in L^2(\Sigma_2)$  et en  $g \in L^2(Q)$  pour le problème de contrôle optimal non linéaire à deux frontières.*

**Preuve** - Il est clair que les opérateurs sont linéaires. Il reste à montrer qu'ils sont continus. Soient la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $v$  et la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $g$ . Comme la fonction  $c(v, g) := c(t, x, v, g)$  solution unique du problème est différentiable en  $v$  et  $g$  alors elle est continue en  $v$  dans  $L^2(\Sigma_2)$  et  $g$  dans  $L^2(Q)$ . On a donc  $c(\cdot, g_n) \rightarrow c(\cdot, g)$  et  $c(v_n, \cdot) \rightarrow c(v, \cdot)$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ , on va montrer que

$$\langle \mathcal{A}c(v_n, \cdot), \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle \mathcal{A}c(v, \cdot), \varphi \rangle \quad \text{et} \quad \langle c(v_n, \cdot), \mathcal{A}^*\varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle c(v, \cdot), \mathcal{A}^*\varphi \rangle \quad (\text{A.1})$$

On a que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}c(v_n, \cdot), \varphi \rangle &= \left\langle \alpha \frac{\partial}{\partial t} c(v_n, \cdot) + q \cdot \nabla c(v_n, \cdot) - D\Delta c(v_n, \cdot) \right\rangle, \varphi \\ &= \langle c(v_n, \cdot), -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \varphi - q \cdot \nabla \varphi - D\Delta \varphi \rangle \\ &= \langle c(v_n, \cdot), \mathcal{A}^* \varphi \rangle \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\langle \mathcal{A}c(v_n, \cdot), \varphi \rangle = \langle c(v_n, \cdot), \mathcal{A}^* \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle c(v, \cdot), \mathcal{A}^* \varphi \rangle = \langle \mathcal{A}c(v, \cdot), \varphi \rangle.$$

On obtient le même résultat  $c(\cdot, g_n)$ . On en déduit que les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^*$  sont continus. Il en est de même pour les opérateurs  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}^*$ , si l'on considère des fonctions test  $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$ . ■

**Lemme A.2.2** *Les opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^*$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^*$  sont linéaires et continus en  $(v, g) \in L^2(Q) \times L^2(Q)$  pour le problème de contrôle optimal non linéaire à une frontière.*

■

### A.3 Condition aux limites sur $\Sigma_1$

Le lemme ci-dessous est un résultat concernant la condition aux limites sur  $\Sigma_1$  pour les problèmes de contrôles optimaux pour les systèmes non linéaires dans un sol pollué. Soit  $u_\gamma$  le contrôle à moindres regrets adapté pour le problème de contrôle optimal (9.19)-(9.20). On note  $\xi_\gamma = \xi_\gamma$  et  $c_\gamma = c_\gamma$ .

**Lemme A.3.1** *La condition aux limites sur la frontière  $\Sigma_1$  du système au chapitre 9 à la proposition 9.5.2, devient :*

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ \mathcal{B}^* \left( \xi(u_\gamma + \lambda w) \right) - \mathcal{B}^* \left( \xi_\gamma \right) \right] \\ &= -\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(w) + \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}(w) \right) - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(w) \right). \end{aligned}$$

**Preuve** - En effet , on a

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ \mathcal{B}^* \left( \xi(u_\gamma + \lambda w) \right) - \mathcal{B}^* \left( \xi_\gamma \right) \right] \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ - (c(u_\gamma + \lambda w, 0) - \tilde{c}) + \frac{IK \xi(u_\gamma + \lambda w)}{(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2} + (c_\gamma - \tilde{c}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{IK \xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^2} \right] \tag{A.2} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ - (c(u_\gamma + \lambda w, 0) - c_\gamma) + \frac{IK \xi(u_\gamma + \lambda w)}{(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2} - \frac{IK \xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^2} \right] \\
&= - \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(w) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{IK}{\lambda} \left[ \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w)}{(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2} - \frac{\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^2} \right]
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{IK}{\lambda} \left[ \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w)}{(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2} - \frac{\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^2} \right] \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{IK}{\lambda} \left[ \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w)(K + c_\gamma)^2 - \xi_\gamma(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2}{(K + c_\gamma)^2(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2} \right] \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2} \\
&\quad \times \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ \xi(u_\gamma + \lambda w)(K + c_\gamma)^2 - \xi_\gamma(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2 \right].
\end{aligned}$$

On obtient d'une part

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2} = \frac{IK}{(K + c_\gamma)^4}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ \xi(u_\gamma + \lambda w)(K + c_\gamma)^2 - \xi_\gamma(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2 \right] \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ \xi(u_\gamma + \lambda w)(K + c_\gamma)^2 - \xi_\gamma(K + c_\gamma)^2 + \xi_\gamma(K + c_\gamma)^2 \right. \\
&\quad \left. - \xi_\gamma(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2 \right] \\
&= (K + c_\gamma)^2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w) - \xi_\gamma}{\lambda} \right] + \xi_\gamma \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ (K + c_\gamma)^2 \right. \\
&\quad \left. - (K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2 \right].
\end{aligned}$$

Cependant

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w) - \xi_\gamma}{\lambda} \right] = \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}(w)$$

et

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[ (K + c_\gamma)^2 - (K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2 \right] \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{c_\gamma - c(u_\gamma + \lambda w, 0)}{\lambda} \right) \left[ 2K + c_\gamma + c(u_\gamma + \lambda w, 0) \right] \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{c_\gamma - c(u_\gamma + \lambda w, 0)}{\lambda} \right) \times \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ 2K + c_\gamma + c(u_\gamma + \lambda w, 0) \right] \\
&= -2 \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(w) \right) \left[ K + c_\gamma \right].
\end{aligned}$$

D'où l'on trouve

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{IK}{\lambda} \left[ \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w)}{(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2} - \frac{\xi(u_\gamma)}{(K + c_\gamma)^2} \right] \\
&= \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}(w) \right) - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(w) \right).
\end{aligned}$$

On obtient que (A.2) devient :

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(w) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{IK}{\lambda} \left[ \frac{\xi(u_\gamma + \lambda w)}{(K + c(u_\gamma + \lambda w, 0))^2} - \frac{\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^2} \right] \\ & = -\frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(w) + \frac{IK}{(K + c_\gamma)^2} \left( \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial v}(w) \right) - \frac{2IK\xi_\gamma}{(K + c_\gamma)^3} \left( \frac{\partial c_\gamma}{\partial v}(w) \right) \end{aligned}$$

■

**Remarque A.3.1** *Ce résultat est utilisé aussi pour le problème de contrôle non linéaire à une frontière au chapitre 9 à la proposition 9.10.2.*

# Bibliographie

- [1] **Allaire G. (2012)**, *Analyse numérique et optimisation*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique.
- [2] **Aze D. (1997)**, *Elements d'analyse convexe et variationnelle*, Ellipses.
- [3] **Barber S. A. (1995)**, *Soil nutrient bioavailability : a mechanistic approach*, 2<sup>nd</sup> Ed. John Wiley and Sons, New-York, NY.
- [4] **Blazy J.-M., (2011)**, *De l'innovation à l'adoption de nouvelles pratiques dans la filière banane*, Innovation Agronomiques, Vol.16, pp 39–51
- [5] **Brezis H. (1983)**, *Analyse fonctionnelle*, Masson.
- [6] **Censor Y. (1977)**, *Pareto Optimality in Multiobjective Problems*, Appl. Math. Optim., 149, pp 41–58.
- [7] **Comte M., Coron J.-M., Guerrero S., Tournier P.-H. (2013)**, *Analysis of model of phosphorus uptake by plants roots*, Journal of Evolution Equations, 13, pp 595–615.
- [8] **Dautray R., Lions J.-L. (2000)**, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 2 Functional and Variational Methods*, Springer. f
- [9] **Gabay G., Lions J.-L. (1994)**, *Décisions stratégiques à moindres regrets*, C. R., Acad. Sci. Paris Ser I Math., 319, pp. 1049–1056.
- [10] **Itoh S., Barber S. A. (1983)**, *A numerical solution of whole plant nutrient uptake for soil-root systems with root hairs*, Plant and Soil, 70, pp 403–413.

- [11] **Jacob B., Omrane A. (2010)**, *Optimal control for age-structured population dynamics of incomplete data*, J. Math. Anal. Appl., **370**, pp. 42–48.
- [12] **Kermarrec A., (1980)**, *Niveau actuel de la contamination des chaînes biologiques en Guadeloupe : pesticides et métaux lourds 1979-1980*, INRA, Guadeloupe.
- [13] **Laberche J.-C. (2010)**, *Biologie végétale 3e édition*, Dunod.
- [14] **Lions J.-L. (1968)**, *Optimal control for partial differential equations*, Dunod.
- [15] **Lions J.-L. (1986)**, *Contrôle de Pareto de systèmes distribués. Le cas stationnaire*, C. R., Acad. Sci. Paris Ser I Math., 302, pp. 223–227.
- [16] **Lions J.-L. (1986)**, *Contrôle de Pareto de systèmes distribués. Le cas d'évolution*, C. R., Acad. Sci. Paris Ser I Math., 302, pp. 413–417.
- [17] **Lions J.-L. (1992)**, *Contrôle à moindres regrets des systèmes distribués*, C. R., Acad. Sci. Paris Ser I Math., 315, pp. 1253–1257.
- [18] **Lions J.-L. (2003)**, *Oeuvres choisies de Jacques-Louis Lions, volume II, contrôle, homogénéisation*, SMAI, EDP Sciences.
- [19] **Lions J.-L., Magenes E. (1968)**, *Problèmes aux limites non homogènes Vol 1.*, Dunod.
- [20] **Lions J.-L., Magenes E. (1968)**, *Problèmes aux limites non homogènes Vol 2.*, Dunod.
- [21] **Nakoulima O., Omrane A., Velin J.(2000)**, *Perturbation à moindres regrets dans les systèmes distribués à données manquantes*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math, 330, pp. 801–806.
- [22] **Nakoulima O., Omrane A., Velin J. (2002)**, *No-regret control for nonlinear distributed systems with incomplete data*, J. Maths. Pures Appl., 81, pp. 1161–1189.
- [23] **Nakoulima O., Omrane A., Velin J. (2003)**, *On the pareto control and no-regret control for distributed systems with incomplete data*, SIAM J. Control Optim., 42, pp. 1167–1184.

- [24] **Nielsen N. E. (1972)**, *A transport concept of ions uptake from soil by plants*, Plant and Soil, 37, pp 561–576.
- [25] **Nye P. H. (1966)**, *The effect of the nutrient intensity and buffering power of a soil, and the absorbing power, size and root hairs of a root, on nutrient absorption by diffusion*, Plant and Soil, 25, pp 81–105.
- [26] **Nye P. H., Marriott F. H. C. (1969)**, *A theoretical study of the distribution of substances around roots resulting from simultaneous diffusion and mass flow*, Plant and Soil, 3, pp 459–472.
- [27] **Nye P. H., Spiers J. A. (1964)**, *Simultaneous diffusion and mass flow to plant roots*, 8th Int. Congr. Soil Si., (Bucharest), 11, pp 535–542.
- [28] **Picart D., Ainseba B.-E. (2011)**, *Parameter identification in multistage population dynamics model*, Nonlinear Analysis : Real world Applications, 12, pp 3315–3328.
- [29] **Roose T. (2000)**, *Mathematical Model of Plant Nutrient Uptake*, Linacre College, University of Oxford.
- [30] **Roose T., A. C. Fowler, P. R. Darrah (2001)**, *A mathematical model of plant nutrient uptake*, J. Math. Biol 42, pp 347–360.
- [31] **Roose T., Kirk G. J. (2009)**, *The solution of convection-diffusion equations for solute transport to plant roots*, Plant Soil, 316, pp 257–264.
- [32] **Savage L. J. (1972)**, *The foundations of Statistics*, 2<sup>nd</sup> Editions, Dover.
- [33] **Snegaroff J. (1977)**, *les résidus d'insecticides organochlorés dans les sols et les rivières de la région bananière de la Guadeloupe*, Phytologie-Phytopharmacie, 26, pp 251–268
- [34] **Stein W. D (1967)**, *The Movement of Molecules across Cell Membrances*, Acad. Press New York/London., page 369.
- [35] **Tartar L. (2006)**, *An Introduction to Navier-Stokes Equations and Oceanography*, Springer, Berlin
- [36] **Tinker P. B., Nye P. H. (2000)**, *Solute movement in the rhizosphere*, Oxford University.